AĞIRLIKLI PROJEKTİF UZAYLARDAKİ PARAMETRİK KODLAR

PARAMETERIZED CODES OVER WEIGHTED PROJECTIVE SPACES

YAĞMUR ÇAKIROĞLU

Doç. Dr. Mesut Şahin

Tez Danışmanı

Hacettepe Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin

Matematik Anabilim Dalı için Öngördüğü

YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırlanmıştır

2019

Yağmur Çakıroğlu'nun hazırladığı **'Ağırlıklı Projektif Uzaylardaki Parametrik Kodlar'** adlı bu çalışma aşağıda belirtilen jüri tarafından **Matematik Anabilim Dalı**'nda **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Ali Sinan SERTÖZ
Başkan ....

Doç. Dr. Mesut ŞAHİN
Danışman ....

Prof. Dr. Evrim AKALAN
Üye ....

Doç. Dr. Zülfükar SAYGI
Üye ....

Doç. Dr. Oğuz YAYLA
Üye ....

Bu tez Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak ... / ... /...... tarihinde onaylanmıştır.

Prof. Dr. Menemşe GÜMÜŞDERELİOĞLU

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

Sevgili anneannem Nimet Ören'in anısına.

ETİK

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında,

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

27/06/2019

Yağmur ÇAKIROĞLU

Yağmur Ç.

YAYINLAMA VE FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI BEYANI

Enstitü tarafından onaylanan lisansüstü tezimin/raporumun tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı (kağıt) ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda verilen koşullarla kullanıma açma iznini Hacettepe üniversitesine verdiğimi bildiririm. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet haklarım bende kalacak, tezimin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanım hakları bana ait olacaktır.

Tezin kendi orijinal çalışmam olduğunu, başkalarının haklarını ihlal etmediğimi ve tezimin tek yetkili sahibi olduğumu beyan ve taahhüt ederim. Tezimde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanması zorunlu metinlerin yazılı izin alarak kullandığımı ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederim.

Yükseköğretim Kurulu tarafından yayınlanan **"Lisansüstü Tezlerin Elektronik Ortamda Toplanması, Düzenlenmesi ve Erişime Açılmasına İlişkin Yönerge"** kapsamında tezim aşağıda belirtilen koşullar haricince YÖK Ulusal Tez Merkezi / H. Ü. Kütüphaneleri Açık Erişim Sisteminde erişime açılır.

☐ Enstitü / Fakülte yönetim kurulu kararı ile tezimin erişime açılması mezuniyet tarihimden itibaren 2 yıl ertelenmiştir.

☐ Enstitü / Fakülte yönetim kurulu gerekçeli kararı ile tezimin erişime açılması mezuniyet tarihimden itibaren .... ay ertelenmiştir.

☐ Tezim ile ilgili gizlilik kararı verilmiştir.

27../06./2019

Yağmur ÇAKIROĞLU

ÖZET

AĞIRLIKLI PROJEKTİF UZAYLARDAKİ PARAMETRİK KODLAR

Yağmur ÇAKIROĞLU

Yüksek Lisans, Matematik Bölümü

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Mesut ŞAHİN

Haziran 2019, 116 sayfa

Bu tezde ağırlıklı bir projektif uzayın monomlarla parametrize edilen herhangi bir alt kümesi tarafından tanımlanan parametrik kodlar çalışılmıştır. Bu kodları hesaplarken kullandığımız cebirsel yöntem ve kavramlar detaylı bir şekilde ele alınmıştır. Bu tez çalışması beş ana bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde afin uzaylardaki çeşitlemler ve onlar üzerinde tanımlanan kodları çalışırken de kullanacağımız sıfırlayan idealleri anlatılmıştır. Ayrıca bu bölümde ağırlıklı projektif uzayı belirlerken kullanacağımız nümerik yarıgruplar ve özel bir yarıgrup olan Arf yarıgrupları anlatılmıştır.

İkinci bölümde ağırlıklı projektif uzayı ve alt çeşitlemlerini daha iyi anlayabilmek için önemli olan dereceli halkalar, idealler ve modüller konusu anlatılmıştır. Bu bölümde kodların parametrelerini hesaplarken dikkate alacağımız α-değişmezini veren Hilbert serileri de anlatılmış olup Hilbert serileri ile serbest çözülümler arasındaki ilişki de verilmiştir.

Üçüncü bölümde ağırlıklı projektif uzay tanımlanmış ve özellikleri verilmiştir. Ağırlıklı projektif uzayın bir örneği olan projektif uzay da bu bölümde verilmiştir.

Dördüncü bölümde ağırlıklı projektif simit ele alınmış olup bazı özellikleri verilmiştir. Ayrıca bu bölümde ağırlıklı projektif simitin sıfırlayan idealinin nasıl bulunduğuna dair literatürdeki bir teorem verilmiştir ve bu idealin Hilbert serisi hesaplanmıştır.

Beşinci bölümde bu tezin temel hedefi olan ağırlıklı projektif uzaylardaki kodlar ele alınmıştır. Ağırlıklı projektif uzaydaki parametrik kodların nasıl hesaplandığı anlatılarak bazı örnekler verilmiş ve gözlenen bir sonuç bu bölümde ispatlanmıştır.

Örnekler bölümünde farklı nümerik yarıgrupların belirlediği ağırlıklı projektif uzaylarda farklı alt kümeler tarafından parametrize edilen parametrik kodların temel parametreleri verilmiş ve kodların iyi kod olup olmadıkları anlaşılmaya çalışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Ağırlıklı projektif uzay, Parametrik kodlar, Hesaplama kodları, Nümerik yarıgruplar, Dereceli halkalar, idealler ve modüller, Hilbert fonksiyonları ve serileri, Serbest çözülümler

ABSTRACT

PARAMETERIZED CODES OVER WEIGHTED PROJECTIVE SPACES

Yağmur ÇAKIROĞLU

Master of Science, Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Mesut ŞAHİN

June 2019, 116 pages

In this thesis we study parametric codes defined by any subset of a weighted projective space which is parameterized by monomials. The methods and notions used to study these codes are presented in detail. This work consists of five main chapters. In the first chapter varieties and ideals in affine spaces are introduced and then their vanishing ideals that we will use in studying the codes on the varieties are explained. In this chapter numerical semigroups and Arf numerical semigroups which will be used in defining weighted projective spaces are explained.

In the second chapter, graded rings, ideals and modules are explained in order to understand better the weighted projective spaces and their subvarieties. In this chapter Hilbert series that gives the value of α-invariant that we consider when calculating parameters of codes are explained and the relation between Hilbert series and free resolutions is given.

In the third chapter, weighted projective space is defined and its properties are given. In this section projective space which is an example of weighted projective space is also given.

In the fourth chapter, weighted projective torus is defined and some of its properties are given. In this section we give a theorem in literature about how the vanishing ideal of a weighted projective torus is obtained and Hilbert series of this ideals is calculated.

In the fifth chapter, parameterized codes in a weighted projective space that is the main aim of this thesis are explained. In this section we present how the parametric codes in a weighted projective space are constructed and share some examples. We prove an observation hinted by these examples.

In the examples section the parameters of parametric codes which are parameterized by different subsets in weighted projective spaces determined by different numerical semigroups are given and whether the codes are good is tried to be understood.

Keywords: Weighted projective space, Parameterized codes, Evaluation codes, Numerical semigroups, Graded rings, ideals and modules, Hilbert functions and series, Free resolutions

TEŞEKKÜR

İlk ve önemli olarak bu tezin yazım aşamasında çok büyük katkı sağlayan, değerli görüş ve önerileri ile bana yol gösteren, tüm sabrı ve motivasyonu ile çalışmalarımda beni teşvik eden çok değerli hocam Doç. Dr. Mesut Şahin'e;

Değerli görüş ve önerileri için jüri üyeleri Prof. Dr. Ali Sinan Sertöz, Prof. Dr. Evrim Akalan, Doç. Dr. Zülfükar Saygı ve Doç. Dr. Oğuz Yayla hocalarıma;

Tüm bu süreçte desteğini esirgemeyen ve her zaman yanımda olan çok değerli hocam Doç. Dr. Aslı Pekcan'a;

Hayatımın her anında, her kararımda yanımda olan, bana inanan ve koşulsuz sevgileri ile şanslı olduğumu hissettiren anneme, babama ve ablama;

Bu süreçte yalnız olmadığımı hissettiren, sevincimi de üzüntümü de paylaşan, beni anlayan dostlarım Hazal Öznar, Nurgül Çakmak ve Özge Uçar'a;

Tüm içtenlikleriyle yanımda olan bölüm arkadaşlarım Sibel Kurt, Damla Acar ve Büşra Özden'e;

Hayatıma girdikleri andan itibaren daha iyi bir insan olmamı sağlayan, varlıklarıyla huzur veren kedilerim Mars ve Jaya'ya;

Son olarak yürütücülüğünü çok değerli hocam Doç. Dr. Oğuz Yayla'nın yaptığı ve Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) 3501 Programı tarafından desteklenen 116R026 numaralı proje kapsamında burs veren TÜBİTAK'a;

sonsuz teşekkürler...

İçindekiler

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\subset$	Kesin olarak kapsama
$\mathbb{A}^r$	r boyutlu Afin Uzay
$\mathbb{P}_{\mathbf{w}}$	Ağırlıklı Projektif Uzay
$\mathbf{w}$	Ağırlık
$\mathbb{P}^r$	Projektif Uzay
$V(S)$	Çeşitlem
$V_{\mathbb{P}}(S)$	Projektif Çeşitlem
$\mathbb{K}[Y]$	Y'nin Koordinat Halkası
$\mathbb{K}[\mathbb{N}A]$ veya $\mathbb{K}[\Gamma_{\mathbf{w}}]$	Yarıgrup Halkası
$t^{\mathbf{a}}$	$t_1^{a_1} \cdots t_s^{a_r}$ monomu
$\bigoplus$	Dik toplam
$\sqrt{I}$	I idealinin radikali
Çek(f)	f homomorfizmasının çekirdeği
Gör(f)	f homomorfizmasının görüntüsü
EşÇek(f)	f homomorfizmasının eş çekirdeği
Γ	Derece Monoidi
$\Gamma_{\mathbf{w}}$	Nümerik yarıgrup
$F(\Gamma_{\mathbf{w}})$	Nümerik yarıgrubun Frobenius Sayısı
$C(\Gamma_{\mathbf{w}})$	Nümerik yarıgrubun Kondüktörü
$HF(M,d)$	M'nin Hilbert Fonksiyonu
$HS(M,t)$	M'nin Hilbert Serisi
$C_{d,Y}$	Y kümesi üzerinde bir hesaplama kodu
$\mathcal{L}$	Kafes (Latis)
der(x)	x elemanının derecesi
$boy(I)$	I idealinin boyutu
$id_{s\times r}$	$s \times r$ boyutlu birim matris
$diag(a,b,c)_{s\times r}$	Köşegenleri a,b,c sayılarından oluşan köşegen matris
$uz_H(\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2)$	$\mathcal{C}_1$ ve $\mathcal{C}_2$ kodlarının Hamming uzaklığı

1 GİRİŞ

Simitli bir çeşitlem üzerindeki hesaplama kodları, rekor kıran örnekleriyle son yıllarda popülerleşen Cebirsel Geometri Kodları olarak öne çıkmaktadırlar. Bu kodlar, uygulamalardaki önemleri sebebiyle matematik, bilgisayar ve mühendislik bilimleri arasında bir köprü görevi görerek çok disiplinli bir çalışma alanı oluşturmuştur. Cebirsel Geometri Kodları ilk olarak V.D. Goppa'nın çalışmalarıyla ortaya çıkmış ve günümüzde aydınlatılamayan noktalarıyla heyecan verici bir araştırma konusu olma özelliğini koruyan bir alandır. Çünkü çok iyi temel parametrelere sahip kod örnekleri sergilense de henüz yapısal özellikleri yeterince anlaşılmamıştır. En temel simitli çeşitlem olan projektif uzay üzerindeki parametrik kodların yapısal özellikleri incelenmiş olup, bunları da kapsayan ağırlıklı projektif uzay üzerindeki parametrik kodların yapısal özellikleri henüz tamamen incelenmemiştir.

İki boyutlu simitli çeşitlemlerden elde edilen kodlar üzerine yapılan çalışmalar 2000 yılında başlamış ve ilk olarak Hansen bazı üçgen, dikdörtgen ve yamuklara karşılık gelen simitli yüzey kodlarının temel parametrelerini hesaplamıştır [1]. 2004 yılında ise Joyner, temel parametreleri (uzunluk, boyut, minimum uzaklık) $[49, 11, 28]$ olan bir simitli yüzey kodu örneği vermiştir ve bu kod o zamana kadar verilen en iyi kod örneğidir [2]. Bu çalışma ile birlikte konuya olan ilgi artmış ve 2007 yılında farklı yönleriyle simitli kodları inceleyen iki çalışma daha yayımlanmıştır [3, 4]. 2009 yılında ise Soprunov ve Soprunova temel parametrelerden biri olan minimum uzaklığın alt sınırını ilgili çokgenin Minkowski boyu adı verilen bir değişmezini kullanarak geliştirmişler ve bu değişmezi hesaplamaya yarayan bir algoritma vermişlerdir [5].

Son yıllarda, simitin Laurent monomları tarafından parametrize edilen altgruplarına karşılık gelen kodların parametrelerini bulmak için cebirsel yöntemler geliştirilmiştir. 2011 yılında Marquez, Simis ve Villarreal simitli çeşitlem projektif uzay iken bu kodları **parametrik kodlar** olarak tanıtmış ve parametrelerin 1 boyutlu kafes idealler kullanılarak hesaplanabileceğini göstermiştir [6]. Aynı yıl Sarmiento, Pinto ve Villarreal tarafından birim matrise karşılık gelen parametrik kodun temel parametreleri verilmiştir [7]. 2012 yılında Lopez, Sarmiento, Pinto ve Villarreal tarafından afin simitin ve projektif kapanışının simitli ideallerini bulan bir metot verilmiş ayrıca bu iki küme üzerindeki parametrik kodlar ve bu kodların temel parametreleri çalışılmıştır [8]. 2013 yılında ise Sarabia, Lara, Marquez ve Rosales, bir döngünün köşeleri tarafından parametrize edilen simitli kümelere karşılık gelen parametrik kodlar çalışılmıştır ve bu kodların temel parametreleri verilmiştir [9]. Ayrıca 2012 yılında Pinto ve Villarreal tarafından yayımlanan çalışmada A ve $[0 \quad A]$ matrislerine karşılık gelen projektif simitlerin sıfırlayan idealleri, bu idealler arasındaki ilişki (Hilbert fonksiyonu, dereceler, düzenlilik) ve bu ideallere karşılık gelen kodlar incelenmiştir [10]. 2014 yılında ise Lopez ve Villarreal, 1 boyutlu dereceli kafes ideallerin derecelerini veren bir metot bulmuşlar ve bu metot sayesinde parametrik bir kodun uzunluğunun sadece doğrusal cebir kullanılarak hesaplanabileceğini söylemişlerdir [11]. 2015 yılında Sarabia, Marquez ve Rosales tarafından yayımlanan makalede projektif uzaylardaki parametrik kodlar incelenmiş olup bu kodlarla ilgili parametreler incelenmiştir [12]. Yine aynı yıl Dias ve Neves, ağırlıklı projektif uzaylardaki parametrik kodları incelemiş ve bu kodların parametlerinin kafes idealler kullanılarak hesaplanabileceğini göstermişlerdir [13]. 2017 yılında ise Bernal, Pitones ve Villarreal tarafından yayımlanan makalede parametrik kodların minimum uzaklığını cebirsel yöntemler kullanarak hesaplamak için bir formül verilmiştir [14]. 2018 yılında Sarabia, Camps, Sarmiento ve Villarreal tarafından yayımlanan makalede projektif torus üzerindeki bazı hesaplama kodlarının ikinci genelleştirilmiş Hamming ağırlığını hesaplayan bir formül verilmiştir ve parametrik kodlar için genelleştirilmiş Hamming ağırlığı ile minimum uzaklık parametrelerinin bazı benzer davranışlar sergilediği gösterilmiştir [15]. 2018 yılında Şahin tarafından yayımlanan makalede ise parametrik kodlarla ilgili sonuçlar tüm simitli çeşitlemler için genellenmiştir [16]. Yine aynı yıl Baran ve Şahin tarafından yayıma hazırlanan bir çalışmada herhangi bir simitli çeşitlem üzerindeki parametrik kodların uzunluk ve boyutunu bulmaya yarayan algoritmalar verilmiştir [17].

Bu tez çalışmasında ise ağırlıklı bir projektif uzayın monomlarla parametrize edilen herhangi bir alt kümesi tarafından tanımlanan parametrik kodlar çalışılmıştır. Bu tez çalışmasının **temel amacı** bu kodları hesaplarken kullandığımız cebirsel yöntem ve kavramları anlamaktır. Bu doğrultuda kodları hesaplarken kullanacağımız cebirsel yöntem ve kavramlar tezin ilk dört bölümünde detaylı bir şekilde ele alınmıştır. Beşinci bölümde ise ilk olarak lineer kodlar anlatıldıktan sonra ağırlıklı projektif uzaydaki parametrik kodların nasıl hesaplandığı anlatılmış ve örnekler verilmiştir. Bu tezin son bölümünde ise tezin amaçlarından biri olan daha iyi parametrelere sahip kod örnekleri bulunmaya çalışılmıştır. Bu amaç doğrultusunda Arf olan ve olmayan yarıgrupların belirlediği ağırlıklı projektif uzaylardaki simitin tanımladığı parametrik kod örneklerinin temel parametreleri hesaplanmış ve tablo olarak sunulmuştur.

2 AFİN UZAY

2.1 Afin Çeşitlemler ve İdealleri

Tanım 2.1.1. *$\mathbb{K}$ bir cisim olmak üzere $\mathbb{K}^r$ kümesine (r-boyutlu)* ***afin uzay*** *denir. $\mathbb{A}^r(\mathbb{K})$ ile veya sadece $\mathbb{A}^r$ ile gösterilir. Afin uzayın elemanlarına* ***nokta*** *denir.*

$$\mathbb{A}^r = \mathbb{A}^r(\mathbb{K}) = \{(p_1, \ldots, p_r) : \text{ her } i = 1, \ldots, r \text{ için } p_i \in \mathbb{K}\}$$

Örnek 2.1.2. *$\mathbb{R}^r$ öklid uzayı r-boyutlu $\mathbb{A}^r(\mathbb{R})$ afin uzayını verirken $\mathbb{C}^r$ kompleks uzayı da r-boyutlu $\mathbb{A}^r(\mathbb{C})$ afin uzayını verir. $K = \mathbb{F}_q$ sonlu cismini düşünürsek $\mathbb{A}^r(\mathbb{F}_q)$, r-boyutlu afin uzayıdır.*

Tanım 2.1.3. *$\mathbb{K}$ bir cisim olmak üzere $T \subseteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]$ alt kümesini alalım. T kümesindeki polinomların ortak çözüm kümesi olan noktalar kümesine* ***afin çeşitlem*** *denir. Dolayısıyla,*

$$V(T) = \{P = (p_1, \ldots, p_r) \in \mathbb{A}^r : \text{ her } f \in T \text{ için } f(P) = 0\}$$

olur. $Y \subseteq \mathbb{A}^r$ olmak üzere eğer $Y = V(T)$ olacak şekilde bir $T \subseteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]$ varsa Y kümesine afin çeşitlem veya ***cebirsel küme*** *denir.*

Örnek 2.1.4. *En basit örneklerden biri olarak, doğrusal denklem sistemlerinin çözüm kümeleri afin çeşitlem örnekleri verir. Çünkü sistemdeki her bir denklem birinci dereceden bir polinom olduğundan her doğrusal denklem sisteminin ortak çözüm kümesi bir afin çeşitlem örneğidir.*

Örnek 2.1.5. *$\{(p_1, \ldots, p_r)\} = V(x_1 - p_1, \ldots, x_r - p_r)$ noktası bir afin çeşitlemdir.*

Örnek 2.1.6. *$\mathbb{A}^1$ 1-boyutlu afin uzayındaki afin çeşitlemler sonlu nokta kümeleridir. Çünkü tek değişkenli bir polinomun en fazla derecesi kadar kökü vardır.*

Örnek 2.1.7. *$\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$'deki daireler, elipsler, paraboller ve hiperboller birer afin çeşitlem verir. Örneğin, $V(x_1 - x_2{}^2)$ afin çeşitlemi $C = \{(p^2, p) : p \in \mathbb{R}\}$ parabolüne eşittir.*

Özellikler

1. $I = (T)$, T tarafından üretilen bir ideal olsun. O halde $V(I) = V(T)$ olur.

2. I ve J herhangi iki ideal olmak üzere eğer $I \subseteq J$ ise $V(I) \supseteq V(J)$ olur.

3. $V(\bigcup_\alpha I_\alpha) = V(\sum I_\alpha) = \bigcap V(I_\alpha)$ olur.

4. $V(I \cap J) = V(I.J) = V(I) \cup V(J)$.

Yukarıda verdiğimiz özelliklerin doğru olduğu kolayca görülebilir.

Tanım 2.1.8. *(Zariski Topolojisi) Cebirsel alt kümeleri kapalı alt kümeler olarak tanımlayarak $\mathbb{A}^r$ afin uzayı üzerinde bir topoloji tanımlayabiliriz. Bir başka deyişle $U \subseteq \mathbb{A}^r$ olmak üzere U kümesi açıktır gerek ve yeter koşul bazı $T \subseteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]$ kümeleri için $\mathbb{A}^r \setminus U = V(T)$ olur. Yani $Y = V(T)$ cebirsel kümesine $\mathbb{A}^r$ üzerinde* ***Zariski kapalı küme*** *denir ve yukarıdaki özellikler ile topoloji olma özellikleri göz önüne alındığında $\mathbb{A}^r$'deki Zariski kapalı kümeleri, $\mathbb{A}^r$ üzerindeki kapalı kümeler topolojisidir. Bu topolojiye* ***Zariski Topolojisi*** *adı verilir.*

Tanım 2.1.9. *$Y \subseteq \mathbb{A}^r$ altkümesi üzerinde sıfır değerini alan r değişkenli bütün polinomların kümesine* ***Y'in sıfırlayan ideali*** *denir. Yani,*

$$I(Y) = \{f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r] : \text{ her } P \in Y \text{ için } f(P) = 0\}$$

Uyarı. Yukarıda tanımladığımız $I(Y)$'in ideal olduğu kolayca görülür.

Özellikler

1. Y ve X, $\mathbb{A}^r$ afin uzayının herhangi iki altkümesi olmak üzere $Y \subseteq X$ iken $I(X) \subseteq I(Y)$ olur.

2. $I(\emptyset) = (1) = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]$ olur.

Örnek 2.1.10. *$\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$'deki $C = \{(t^2, t) : t \in \mathbb{R}\}$ parabolünün sıfırlayan ideali $I(C) = (x_1 - x_2^2)$ idealidir. Gerçekten, herhangi bir $f \in \mathbb{K}[x_1, x_2]$ polinomunu alırsak ve bu polinoma bölme algoritmasını uygularsak $f(x_1, x_2) = q(x_1, x_2)(x_1 - x_2^2) + r(x_2)$ olur. Eğer $f \in I(C)$ ise her $t \in \mathbb{R}$ için $f(t^2, t) = 0$ olacağından yukarıdaki denklemden her $t \in \mathbb{R}$ için $r(t) = 0$ olur. Tek değişkenli sıfırdan farklı bir polinomun en fazla derecesi kadar kökü olabileceğinden sonsuz köklü r polinomu sıfır polinomudur. Buradan $f \in (x_1 - x_2^2)$ olur dolayısıyla $I(C) \subseteq (x_1 - x_2^2)$ elde edilir. Tersi yön için $f \in (x_1 - x_2^2)$ olarak alalım. $f(x_1, x_2) = q(x_1, x_2)(x_1 - x_2^2)$ olarak yazabiliriz. Dolayısıyla her $t \in \mathbb{R}$*

için $f(t^2, t) = 0$ olur. $f \in I(C)$ olduğundan $(x_1 - x_2^2) \subseteq I(C)$ elde ederiz. Ve buradan $I(C) = (x_1 - x_2^2)$ eşitliğini elde ederiz.

Tanım 2.1.11. *R herhangi bir halka ve $I \subseteq R$ bir ideal olsun. Aşağıdaki şekilde tanımlanan ideale I'nın* ***radikali*** *denir.*

$$\sqrt{I} = \{f \in R : \text{ herhangi } i \in \mathbb{N} \text{ için } f^i \in I\}$$

Eğer $I = \sqrt{I}$ ise I ***radikal idealdir****.*

Teorem 2.1.12. *(Sıfır Yeri Teoremi) $\mathbb{K}$ cebirsel kapalı bir cisim ve $I \subseteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]$ bir ideal olsun. Bu durumda $I(V(I)) = \sqrt{I}$ eşitliği sağlanır.*

Teorem 2.1.13. *(Zayıf Sıfır Yeri Teoremi) $\mathbb{K}$ cebirsel kapalı bir cisim ve $I \subset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]$ herhangi bir özalt ideal olsun. Bu durumda $V(I) \neq \emptyset$ sağlanır.*

2.2 Afin Çeşitlemlerin Koordinat Halkaları

Tanım 2.2.1. *$Y \subseteq \mathbb{A}^r$ bir afin çeşitlem olsun. Y'nin sıfırlayan ideali $I(Y) \subseteq R = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]$ olmak üzere $R/I(Y)$ bölüm halkasına Y'nin* ***koordinat halkası*** *denir ve $\mathbb{K}[Y]$ ile gösterilir.*

Örnek 2.2.2. *$Y = \{p_1, \ldots, p_r\}$ olmak üzere Y'nin sıfırlayan ideali $I(Y) = \langle x_1 - p_1, \ldots, x_r - p_r \rangle$'dir. Ve $I(Y) = \langle x_1 - p_1, \ldots, x_r - p_r \rangle$ R'nin maksimal ideali olmak üzere Y'nin koordinat halkası aşağıdaki şekilde verilir.*

$$\mathbb{K}[Y] = R/I(Y) = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]/I(Y) \cong \mathbb{K}$$

Örnek 2.2.3. *$\mathbb{A}^2$'deki $C = \{(t^2, t) : t \in \mathbb{R}\}$ parabolünün sıfırlayan idealinin $I(C) = (x_1 - x_2^2)$ ideali olduğunu Örnek(2.1.10)'da gösterdiğimizden dolayı biliyoruz. C'nin koordinat halkası ise aşağıdaki şekildedir.*

$$\mathbb{K}[C] = \mathbb{K}[x_1, x_2]/I(C) \cong \mathbb{K}[t^2, t]$$

2.3 Nümerik ve Arf Yarıgruplar, Derece Monoidleri

Tanım 2.3.1. *Γ boştan farklı bir küme olmak üzere, Γ üzerinde bir toplama işlemi $+$ tanımlı olsun. Her $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \Gamma$ için $\gamma_1 + (\gamma_2 + \gamma_3) = (\gamma_1 + \gamma_2) + \gamma_3$ sağlanırsa*

*Γ'ya bir **yarıgrup**, eğer ek olarak her $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ için $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma_2 + \gamma_1$ de sağlanırsa **değişmeli yarıgrup** denir. Her $\gamma \in \Gamma$ için $\gamma + 0 = \gamma$ olacak şekilde bir 0 elemanı varsa Γ yarıgrubuna bir **monoid** denir. Her $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \Gamma$ için $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma_1 + \gamma_3$ ifadesinden $\gamma_2 = \gamma_3$ eşitliği elde edilebiliyorsa Γ'ya **sadeleşmeli yarıgrup** denir.*

Tanım 2.3.2. *$w_i \in \mathbb{N}$ ve ebob$\{w_1, \ldots, w_r\} = 1$ olmak üzere $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_r)$ olsun.*

$$\Gamma_{\mathbf{w}} = \langle w_1, \ldots, w_r \rangle = \{\sum_{i=1}^{r} a_i w_i : a_i \in \mathbb{N}\}$$

*şeklinde tanımlanan $\Gamma_{\mathbf{w}}$'ya **nümerik yarıgrup** denir. Eğer $\mathbf{w} = (1, 1, \ldots, 1)$ olarak alınırsa $\Gamma_{\mathbf{w}} = \mathbb{N}$ olur.*

Uyarı. $\mathbb{N} \backslash \Gamma_{\mathbf{w}}$ sonludur. Tersine $\mathbb{N} \backslash \Gamma$ sonlu olacak her Γ bir nümerik yarıgruptur, yani bir $\mathbf{w}$ için $\Gamma_{\mathbf{w}}$ şeklindedir.

Tanım 2.3.3. *$A = (a_{ij})$ girdileri doğal sayı olan bir $s \times r$ matris olsun. Bu matrisin i-yinci sütününu $\mathbf{a_i} = (a_{1i}, \ldots, a_{si})$ ile gösterelim. Bu durumda,*

$$\mathbb{N}A := \{c_1\mathbf{a}_1 + \cdots + c_r\mathbf{a}_r \ : \ c_1, \ldots, c_r \in \mathbb{N}\}$$

*yarıgrubuna A'ya iliştirilen **afin yarıgrup** denir.*

Tanım 2.3.4. *$\Gamma_{\mathbf{w}}$ bir nümerik yarıgrup olmak üzere $\Gamma_{\mathbf{w}}$'yı üreten en küçük üreteç kümesine $\Gamma_{\mathbf{w}}$ nümerik yarıgrubunun **minimal üreteç kümesi** denir.*

Uyarı. Her nümerik yarıgrup tek bir minimal üreteç kümesine sahiptir. Ayrıca $\mathbf{w}$, $\Gamma_{\mathbf{w}}$ için bir minimal üreteç kümesi olmayabilir. Örneğin, $\mathbf{w} = (1, 1, 2)$ iken $\Gamma_{\mathbf{w}} = \mathbb{N}$ olur.

Tanım 2.3.5. *$\Gamma_{\mathbf{w}}$ nümerik yarıgrup ve $w_1 < w_2 < \cdots < w_r$ koşulu ile birlikte $\{w_1, \ldots, w_r\}$ kümesi $\Gamma_{\mathbf{w}}$ nümerik yarıgrubunun minimal üreteç kümesi olmak üzere w_1 elemanı $\Gamma_{\mathbf{w}}$ nümerik yarıgrubunun **katlılığı** olarak adlandırılır.*

Örnek 2.3.6. *$\Gamma = \{0, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$ kümesi bir nümerik yarıgruptur ve $\mathbf{w} = (3, 4, 5)$ için $\Gamma = \Gamma_{\mathbf{w}}$ eşitliği sağlanır.*

Uyarı. $\Gamma_{\mathbf{w}} = \{0, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$ nümerik yarıgrubunu gösterimde kolaylık olması açısından $\Gamma_{\mathbf{w}} = \{0, 3, 4, 5, 6, \rightarrow\}$ olarak gösterebiliriz.

Tanım 2.3.7. $\Gamma_{\mathbf{w}}$ *bir nümerik yarıgrup ve* $G := \mathbb{N} \setminus \Gamma_{\mathbf{w}}$ *olmak üzere yarıgrubun* ***Frobenius Sayısı*** *G'nin maksimum elemanı olarak tanımlanır. Yani,* $F(\Gamma_{\mathbf{w}}) := maks(G)$ *eşitliği ile tanımlanan* $F(\Gamma_{\mathbf{w}})$*,* $\Gamma_{\mathbf{w}}$ *nümerik yarıgrubunun Frobenius sayısıdır.* $\Gamma_{\mathbf{w}}$ *nümerik yarıgrubunun* ***kondüktörü*** *ise Frobenius sayısının bir fazlası olarak yani* $C(\Gamma_{\mathbf{w}}) = F(\Gamma_{\mathbf{w}}) + 1$ *şeklinde tanımlanır.*

Uyarı. Eğer $\Gamma_{\mathbf{w}} = \mathbb{N}$ olarak alınırsa $C(\Gamma_{\mathbf{w}}) = 0$ olur. Dolayısıyla $\Gamma_{\mathbf{w}} \neq \mathbb{N}$ olarak aldığımızda $C(\Gamma_{\mathbf{w}}) \geq 2$ durumu sağlanır.

Tanım 2.3.8. $\Gamma_{\mathbf{w}}$ *nümerik yarıgrup olmak üzere bu nümerik yarıgrubun Frobenius sayısından küçük olan elemanlarına nümerik yarıgrubun* ***küçük elemanları*** *denir.*

Örnek 2.3.9. $\Gamma_{\mathbf{w}} = \{0, 3, 4, 5, 6, \rightarrow\}$ *nümerik yarıgrubunun Frobenius sayısını hesaplayalım. Yukarıdaki tanımdan* $G = \{1, 2\}$ *olur. Bu kümenin maksimum elemanı* 2 *olduğundan* $\Gamma_{\mathbf{w}}$ *nümerik yarıgrubunun Frobenius sayısı* $F(\Gamma_{\mathbf{w}}) = 2$ *olur. Ayrıca* $\Gamma_{\mathbf{w}} = \{0, 3, 4, 5, 6, \rightarrow\} = \langle 3, 4, 5 \rangle$ *nümerik yarıgrubunun katlılığı da* 3 *tam sayısına eşittir.*

Tanım 2.3.10. $\Gamma_{\mathbf{w}}$ *bir nümerik yarıgrup olmak üzere bu nümerik yarıgrubu aşağıdaki durumu sağlıyorsa* ***Arf nümerik yarıgrubu*** *olarak adlandırılır.*

$$x, y, z \in \Gamma_{\mathbf{w}} \text{ olmak üzere } x \geq y \geq z \Rightarrow x + y - z \in \Gamma_{\mathbf{w}} \quad (\text{Arf Koşulu})$$

Örnek 2.3.11. $\mathbb{N}$ *doğal sayılar kümesi Arf nümerik yarıgrubudur. Katlılığı* 2*'ye eşit olan her nümerik yarıgrup Arftır. Örneğin* $\langle 2, 3 \rangle$ *Arf nümerik yarıgrubudur. Arf olmayan nümerik yarıgrup örneği olarak ise* $\langle 4, 10, 25 \rangle$ *yarıgrubunu verebiliriz. Çünkü*

$$\Gamma_{\mathbf{w}} = \{0, 4, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 25, 26, 28, 29, 30, 32 \rightarrow\} = \langle 4, 10, 25 \rangle$$

olduğundan $25 + 10 - 4 = 31 \notin \Gamma_{\mathbf{w}}$ *olur ve Arf olma koşulu sağlanmadığı için bu yarıgrup Arf değildir.*

Lemma 2.3.12. *[18, Proposition 1.]* $\Gamma_{\mathbf{w}}$ *bir yarıgrup olmak üzere aşağıdaki koşullar birbirine denktir.*

1. $\Gamma_{\mathbf{w}}$*, Arf yarıgrubudur.*

2. *Her* $w_1, w_2 \in \Gamma_{\mathbf{w}}$ *için* $w_1 \geq w_2$ *olmak üzere* $2w_1 - w_2 \in \Gamma_{\mathbf{w}}$*'dir.*

Uyarı. Bir nümerik yarıgrubun sadece küçük elemanları için yukarıda verdiğimiz Arf koşulununun sağlanıp sağlanmadığına bakmak nümerik yarıgrubun Arf nümerik yarıgrubu olup olmadığını anlamak için yeterlidir.

Ayrıca her Arf nümerik yarıgrubunun minimal üreteç kümesinin eleman sayısı katlılığına eşittir. Bu duruma örnek olarak $\langle 3,4,5\rangle, \langle 3,5,7\rangle, \langle 3,7,8\rangle$ nümerik yarıgruplarını verebiliriz ve bu yarıgruplar Arf yarıgruplarıdır. Yukarıdaki Lemma(2.3.12) göz önüne alındığında $\langle 3,5,8\rangle$ nümerik yarıgrubunun Arf olmadığı görülür;
çünkü $10-3=7$ yarıgrupta değildir.

Arf yarıgrupları ile ilgili detaylı bilgi için [19] kitabına ve [20, 21] makalelerine bakılabilir.

Tanım 2.3.13. *Eğer Γ değişmeli ve sadeleşmeli bir monoid ise ona kısaca* ***derece monoidi*** *diyeceğiz.*

Örnek 2.3.14. *Her toplamsal abel grup bir derece monoidi olur. $\Gamma_{\mathbf{w}}$ nümerik yarıgrubu bir derece monoididir.*

Örnek 2.3.15. $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ *matrisini düşünelim. A'nın sütünlarını $\mathbb{N}^2$'nin elemanları gibi düşünürsek onlar tarafından üretilen $\mathbb{N}A$ yarıgrubu bir derece monoidi olur, çünkü $\mathbb{N}A = \mathbb{N}\{(4,0),(3,1),(1,3),(0,4)\} \subseteq \mathbb{Z}^2$ olduğundan sadeleşmelidir.*

2.4 Simitli İdealler ve Yarıgrup Halkaları

Tanım 2.4.1. *$A=(a_{ij})$ girdileri doğal sayı olan bir $s \times r$ matris olsun. Bu matrisin i-yinci sütününu $\mathbf{a_i}=(a_{1i},\dots,a_{si})$ ile gösterelim.*

$$\text{Yani,} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{sr} \end{bmatrix} \quad \text{olsun. Bu durumda, her } i=1,\dots,r \text{ için,}$$

$$\theta : \mathbb{K}[x_1,\dots,x_r] \to \mathbb{K}[t_1,\dots,t_s], \quad \theta(x_i) := t^{\mathbf{a_i}} = t_1^{a_{1i}} \cdots t_s^{a_{si}},$$

şeklinde tanımlanan homomorfizmin çekirdeği olan I_A asal idealine A'ya iliştirilen ***simitli ideal*** *denir.*

Örnek 2.4.2. $A = [2 \quad 1 \quad 1]$ *matrisini düşünelim. Ve*

$$\theta : \mathbb{K}[x_1, x_2, x_3] \to \mathbb{K}[t]$$
$$\theta(x_1) = t^2$$
$$\theta(x_2) = t$$
$$\theta(x_3) = t$$

homomorfizmini tanımlayalım. Bu θ homomorfizminin çekirdeğinin bazı elemanları $(x_1 - x_2^2) \in I_A, (x_1 - x_3^2) \in I_A, (x_2 - x_3) \in I_A, (x_2^5 - x_1^2 x_3) \in I_A$ şeklindedir. Bu elemanlardan minimal üreteç kümesi olanları göz önünde bulundurursak, $I_A = (x_1 - x_2^2, x_2 - x_3) = (x_1 - x_3^2, x_2 - x_3)$ simitli ideali elde edilir. Gerçekten, I_A idealinin bu şekilde elde edildiği Örnek(2.1.10)*'daki gibi ispatlanarak görülür.*

Şimdi ise simitli idealler için bir üreteç kümesi verelim.

Lemma 2.4.3. *[22] A bir matris olmak üzere I_A simitli idealinin bir sonsuz üreteç kümesini aşağıdaki şekilde verebiliriz.*

$$I_A = \langle x^{\mathbf{a}} - x^{\mathbf{b}} : \text{ } \textit{her } \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{N}^r \text{ } \textit{için } A\mathbf{a} = A\mathbf{b} \rangle$$

Kanıt. İspata başlamadan önce $J_A = \langle x^{\mathbf{a}} - x^{\mathbf{b}} : \text{ her } \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{N}^r \text{ için } A\mathbf{a} = A\mathbf{b} \rangle$ olarak gösterelim ve Çek$(\theta) = J_A$ olduğunu gösterelim. Burada simitli idealin tanımından θ homomorfizminin

$$\theta : \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r] \to \mathbb{K}[t_1, \ldots, t_s], \quad \theta(x_i) := t^{\mathbf{a_i}} = t_1^{a_{1i}} \cdots t_s^{a_{si}},$$

şeklinde olduğunu biliyoruz. Varsayalım ki $f = \sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{N}^r} c_{\mathbf{a}} x^{\mathbf{a}} \in$ Çek$(\theta) \setminus \{0\}$ olsun. Buradan θ homomorfizminin tanımını da göz önüne alırsak $\theta(f) = \sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{N}^r} c_{\mathbf{a}} t^{A\mathbf{a}} = 0$ olarak elde ederiz. Varsayımdan dolayı f sıfırdan farklı olduğundan bazı $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^r$ için $c_{\mathbf{a}} \neq 0$ olur. Aynı zamanda her $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^r$ için $t^{A\mathbf{a}} \neq 0$ olduğundan dolayı $\theta(f) = 0$ eşitliğinin sağlanması için her $c_{\mathbf{a}} \neq 0$ için $\theta(f)$'nin $c_{\mathbf{a}} t^{A\mathbf{a}}$ terimini sadeleştiren bir $c_{\mathbf{a}'} t^{A\mathbf{a}'}$ terimi olmalıdır.

Yani, $\mathbf{a}, \mathbf{a}' \in \mathbb{N}^r$ olmak üzere, $c_{\mathbf{a}} t^{A\mathbf{a}} + c_{\mathbf{a}'} t^{A\mathbf{a}'} = 0$ eşitliği sağlanmalıdır. Bu durumda $t^{A\mathbf{a}} = t^{A\mathbf{a}'}$ olur ve buradan $(c_{\mathbf{a}} + c_{\mathbf{a}'}) t^{A\mathbf{a}} = 0$ olduğundan $c_{\mathbf{a}} = -c_{\mathbf{a}'}$ elde edilir.

Buradan $c_{\mathbf{a}} x^{\mathbf{a}} + c_{\mathbf{a}'} x^{\mathbf{a}'} = c_{\mathbf{a}} x^{\mathbf{a}} - c_{\mathbf{a}} x^{\mathbf{a}'} = c_{\mathbf{a}}(x^{\mathbf{a}} - x^{\mathbf{a}'})$ olacağından bu şekilde devam edersek, f'nin bu tip binomların toplamı olduğunu görürüz. Dolayısıyla her $\mathbf{a}, \mathbf{a}' \in \mathbb{N}^r$ için $(x^{\mathbf{a}} - x^{\mathbf{a}'}) \in J_A$ olacağından $f \in J_A$ olduğu görülür.

Tersi için J_A'nın bir üreteci olan $f = x^{\mathbf{a}} - x^{\mathbf{b}}$ polinomunu alalım. $A\mathbf{a} = A\mathbf{b}$ olduğundan $t^{A\mathbf{a}} = t^{A\mathbf{b}}$ olur. Buradan $\theta(x^{\mathbf{a}}) = \theta(x^{\mathbf{b}})$ elde edilir. θ bir homomorfizm olduğundan $\theta(x^{\mathbf{a}}) - \theta(x^{\mathbf{b}}) = \theta(x^{\mathbf{a}} - x^{\mathbf{b}}) = 0$ olur. Dolayısıyla $f \in$ Çek(θ) olduğunu elde ederiz. $\square$

Uyarı. Lemma(2.4.3)'de I_A idealini üreten sonsuz binom $\mathbb{K}$'dan bağımsızdır.

Örnek 2.4.4. $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ *matrisini düşünelim. Ve*

$$\theta : \mathbb{K}[x_1, x_2, x_3, x_4] \to \mathbb{K}[t_1, t_2]$$
$$\theta(x_1) = t_1^4$$
$$\theta(x_2) = t_1^3 t_2^1$$
$$\theta(x_3) = t_1^1 t_2^3$$
$$\theta(x_4) = t_2^4$$

homomorfizmini tanımlayalım. I_A ideali bu homomorfizmanın çekirdeğinin elemanları tarafından üretileceğinden en kolay şekilde bulmak için `Macaulay2` *programını kullanarak elde edebiliriz.*

Bu örnekte simitli ideali bulmak için `Macaulay2` programında aşağıda verilen kodlardan yararlanabiliriz.

```
i1 : K=ZZ/11;

i2 : R = K[x_1,x_2,x_3,x_4]; S = K[t_1,t_2];

i3 : M=matrix{{t_1^4*t_2^0,t_1^3*t_2^1,t_1^1*t_2^3,t_1^0*t_2^4}};

i4 : H=map(S,R,M);

i5 : I_A=ker H
```

Yukarıda vermiş olduğumuz komutu `Macaulay2` programında çalıştırdığımızda I_A idealini aşağıdaki şekilde elde ederiz.

$$I_A = (x_2x_3 - x_1x_4, x_3^3 - x_2x_4^2, x_1x_3^2 - x_2^2x_4, x_2^3 - x_1^2x_3)$$

Yukarıda vermiş olduğumuz uyarıdan dolayı üreteçleri bulurken herhangi bir cisim alınabilir.

Uyarı. Simitli idealler ve uygulamaları hakkında daha fazla bilgi edinmek için Sturmfels'in [22] kitabına bakılabilir.

Tanım 2.4.5. *$\mathbb{N}A$, A'ya iliştirilen bir afin yarıgrubu olmak üzere $\mathbb{K}[t]$ polinom halkasının $t^{\mathbf{a}_1}, \ldots, t^{\mathbf{a}_r}$ tarafından üretilen bir alt cebirine* ***yarıgrup halkası*** *denir ve $\mathbb{K}[\mathbb{N}A]$ ile gösterilir.*

Teorem 2.4.6. *[23] $R = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]$ ve I_A A'ya iliştirilen simitli ideal olmak üzere $\mathbb{K}[\mathbb{N}A]$ yarıgrup halkası R/I_A koordinat halkasına izomorftur.*

Kanıt. İspatı için [23, Theorem 7.3, Theorem 7.4] teoremlerine bakılabilir. □

Örnek 2.4.7. *Örnek(2.4.4)'ü tekrar göz önünde bulunduralım. $I_A =$ Çek(θ) olduğundan*

$$\mathbb{K}[x_1, x_2, x_3, x_4]/I_A \cong Gör(\theta)$$

olur. Ve Teorem(2.4.6)'dan dolayı $Gör(\theta) = \mathbb{K}[t_1^4, t_1^3 t_2, t_1 t_2^3, t_2^4]$ halkası bir yarıgrup halkasıdır.

Benzer şekilde Örnek(2.2.3)'ü tekrar göz önünde bulunduralım. C'nin koordinat halkasını aşağıdaki şekilde elde etmiştik.

$$\mathbb{K}[C] = \mathbb{K}[x_1, x_2]/I(C) \cong \mathbb{K}[t^2, t]$$

Buradan $\mathbb{K}[t^2, t]$ halkası bir yarıgrup halkasıdır.

2.5 Afin Simitli Çeşitlemler ve Sıfırlayan İdealleri

Tanım 2.5.1. *(Afin Simitli Çeşitlem, Simitli Küme, Simit) I_A simitli idealinin tanımladığı afin çeşitleme A'ya iliştirilen* ***afin simitli çeşitlem*** *denir ve V_A ile gösterilir. Yani,*

$$V_A = \{P \in \mathbb{A}^r : \ \text{her } f \in I_A \text{ için } f(P) = 0\}$$

Şimdi simit ve simitli küme tanımlarını verelim. A'ya iliştirilen ***simitli küme,***

$$P_A = \{(t_1^{a_{11}} \cdots t_r^{a_{1r}}, \ldots, t_1^{a_{s1}} \cdots t_r^{a_{sr}}) : \ \text{her } i = 1, \ldots, r \text{ için } t_i \in \mathbb{K}\}$$

şeklinde tanımlanır. A'ya iliştirilen ***simit*** *ise,*

$$\mathbb{T}_A = \{(t_1^{a_{11}} \cdots t_r^{a_{1r}}, \ldots, t_1^{a_{s1}} \cdots t_r^{a_{sr}}) : \ \text{her } i = 1, \ldots, r \text{ için } t_i \in \mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}\}$$

şeklinde tanımlanır.

Uyarı. Yukarıda tanımladığımız üç küme arasında $\mathbb{T}_A \subset P_A \subseteq V_A$ ilişkisi vardır. Ve tanımlar kullanılarak bu ilişkinin doğruluğu kolayca ispatlanabilir [24].

Okuyucuya kolaylık sağlamak için ispatını vereceğimiz aşağıdaki lemmayı bir çok kez kullanacağız.

Lemma 2.5.2. *[25, Lemma 2.1](Kombinatorik Sıfır Yeri Teoremi) $\mathbb{K}$ herhangi bir cisim ve $f \in \mathbb{K}[y_1, \ldots, y_r]$, her i için $\mathrm{der}_{y_i} f \leq d_i$ koşulunu sağlayan bir polinom olsun. $\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2, \ldots, \mathbb{K}_r$, $\mathbb{K}$'nın boştan farklı alt kümeleri ve her i için $|\mathbb{K}_i| \geq d_i + 1$ olsun. Eğer her $k_1 \in \mathbb{K}_1, k_2 \in \mathbb{K}_2, \ldots, k_r \in \mathbb{K}_r$ için $f(k_1, \ldots, k_r) = 0$ ise $f = 0$ olur.*

Kanıt. $f(y_1, \ldots, y_r) \in \mathbb{K}[y_1, \ldots, y_r]$ polinomunu alalım. Ve r üzerinden tümevarım ile iddiayı ispatlayalım. $r = 1$ durumunda hipoteze göre $f \in \mathbb{K}[y_1]$ tek değişkenli polinomunun en az $d_1 + 1$ kökü vardır. f polinomu sıfırdan farklı olsaydı en fazla $d_1 = \mathrm{der}(f)$ kökü olurdu, bu yüzden $f = 0$ olur. Varsayalım ki $r - 1$ durumu için iddia doğru olsun. Şimdi ise r için de iddianın doğru olduğunu göstermek için $f(y_1, \ldots, y_r) \in \mathbb{K}[y_1, \ldots, y_r]$ alalım. Her i için $g_i(y_1, \ldots, y_{r-1}) \in \mathbb{K}[y_1, \ldots, y_{r-1}]$ olmak üzere

$$f(y_1, \ldots, y_r) = \sum_{i=0}^{r} g_i(y_1, \ldots, y_{r-1}) y_r^i$$

olarak yazabiliriz. Burada, sabit $k_1 \in \mathbb{K}_1, \ldots, k_{r-1} \in \mathbb{K}_{r-1}$ için d_r dereceli $Q(y_r) := f(k_1, \ldots, k_{r-1}, y_r) \in \mathbb{K}[y_r]$ tek değişkenli polinomu elde edilir. Hipotezden dolayı her $k_r \in \mathbb{K}_r$ için $Q(k_r) = f(k_1, \ldots, k_r) = 0$ olacağından Q'nun d_r'den fazla kökü olur. Bu yüzden Q sıfır polinomudur. Yani, Q'nun katsayıları olan $g_i(k_1, \ldots, k_{r-1})$ sayıları sıfır olur. Benzer şekilde her i ve $\forall(k_1, \ldots, k_{r-1}) \in \mathbb{K}_1 \times \cdots \times \mathbb{K}_{r-1}$ için $g_i(k_1, \ldots, k_{r-1}) = 0$ olduğu görülür. Tümevarım hipotezinden dolayı ise $g_i = 0$ olur. Böylece $f = 0$ sonucuna ulaşırız. □

Sonuç 2.5.3. *$\mathbb{K}$ sonsuz bir cisim olmak üzere aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

i. $I((\mathbb{K}^*)^r) = 0$

ii. $I(\mathbb{K}^r) = 0$

Kanıt. i. $f \in I((\mathbb{K}^*)^r)$ ve $d_i = \mathrm{der}_{y_i}(f)$ olsun. $|\mathbb{K}_i| = |\mathbb{K}^*| > d_i$ olduğundan dolayı Lemma 2.5.2'den $f = 0$'dır.

ii. Benzer şekilde yapılır.

□

Teorem 2.5.4. $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ *olmak üzere* $I((\mathbb{K}^*)^r) = \langle y_1^{q-1} - 1, \ldots, y_r^{q-1} - 1 \rangle$.

Kanıt. Öncelikle $y_1^{q-1} - 1 := G_1, \ldots, y_r^{q-1} - 1 := G_r$ olarak adlandıralım. Dolayısıyla $\langle G_1, \ldots, G_r \rangle \subseteq I((\mathbb{K}^*)^r)$ olduğu açıktır. Tersine, $H \in I((\mathbb{K}^*)^r)$ ve $H = \sum h_i G_i + g$ olsun. Varsayalım ki $g \neq 0$ olsun. Buradan $\mathrm{der}(g) = d_1 + \cdots + d_r$ olmak üzere $g = \sum c_{(d_1,\ldots,d_r)} y_1^{d_1} \ldots y_r^{d_r}$ ifadesinde en az bir $c_{(d_1,\ldots,d_r)} \neq 0$ olur.

$$H = \sum_{i=1}^{r} h_i G_i + g$$

olduğundan her $i = 1, \ldots, r$ için $d_i < q - 1$ olduğunu biliyoruz. $S_i = K^*$ olmak üzere her $i = 1, \ldots, r$ için $|\mathbb{K}_i| = q - 1 \geq d_i + 1$ olduğundan Lemma(2.5.2)'yi kullanırsak $\exists (k_1, \ldots, k_r) \in \mathbb{K}_1 \times \cdots \times \mathbb{K}_r = (\mathbb{K}^*)^r$ vardır öyle ki $g(s_1, \ldots, s_r) \neq 0$ olur. Fakat $g, (\mathbb{K}^*)^r$'nin her noktasında 0 değerini aldığından varsayım bizi çelişkiye götürür. Dolayısıyla $g = 0$'dır. Buradan da $H \in \langle G_1, \ldots, G_r \rangle$ olduğunu elde ederiz. □

Teorem 2.5.5. $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ *olmak üzere* $I(\mathbb{K}^r) = \langle y_1^q - y_1, \ldots, y_r^q - y_r \rangle$.

Kanıt. Öncelikle $y_1^q - y_1 := G_1, \ldots, y_r^q - y_r := G_r$ olarak adlandıralım. Dolayısıyla $\langle G_1, \ldots, G_r \rangle \subseteq I(\mathbb{K}^r)$ olduğu açıktır. Tersine,

$$H = \sum_{i=1}^{r} h_i G_i + g$$

olarak alalım ve $H \in I(\mathbb{K}^r)$ olsun. $g = \sum c_{(d_1,\ldots,d_r)} y_1^{d_1} \ldots y_r^{d_r}$ ise $d_i < q$ olur. $H \in I(\mathbb{K}^r)$ ve $G_i \in I(\mathbb{K}^r)$ olduğundan $g \in I(\mathbb{K}^r)$ olur. Dolayısıyla her $(k_1, \ldots, k_r) \in \mathbb{K}^r$ için $g(k_1, \ldots, k_r) = 0$ olur. Öte yandan $\mathbb{K}_i = \mathbb{K}$ için $|\mathbb{K}_i| = |\mathbb{K}| = q \geq d_i + 1$ sağlandığından $g \neq 0$ olsaydı $\mathbb{K}_1 \times \cdots \times \mathbb{K}_r = \mathbb{K}^r$ 'nin $g(k_1, \ldots, k_r) \neq 0$ olacak şekilde bir $(k_1, \ldots, k_r)$ elemanı olurdu. Böyle bir eleman olmadığından Lemma(2.5.2)'yi göz önünde bulundurduğumuzda $g = 0$ olarak elde ederiz. □

Teorem 2.5.6. $\mathbb{K}$ *sonsuz bir cisim olmak üzere* $I(\mathbb{T}_A) = I_A$ *olur.*

Kanıt. $I_A \subseteq I(V(I_A)) = I(V_A) \subseteq I(P_A) \subseteq I(\mathbb{T}_A)$ olduğundan $I_A \subseteq I(\mathbb{T}_A)$ kapsaması her zaman vardır. Tersine, $f \in I(\mathbb{T}_A)$ ise $f(t^{\mathbf{a}_1}, \ldots, t^{\mathbf{a}_r}) = 0$ olur. f polinomunu

$\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_r,y_1,\ldots,y_s]$ halkası içinde açarsak $g_i \in \mathbb{K}[x_1,\ldots,x_r,y_1,\ldots,y_s]$ olmak üzere $f(x_1,\ldots,x_r) = g_1(x_1 - y^{\mathbf{a_1}}) + \cdots + g_r(x_r - y^{\mathbf{a_r}}) + r(y_1,\ldots,y_s)$ şeklinde yazılır. Bu eşitlikte her i için $y_i = t_i$ olarak alırsak,

$$0 = f(t^{\mathbf{a_1}},\ldots,t^{\mathbf{a_r}}) = g_1(t^{\mathbf{a_1}} - t^{\mathbf{a_1}}) + \cdots + g_r(t^{\mathbf{a_r}} - t^{\mathbf{a_r}}) + r(t_1,\ldots,t_s)$$

elde edilir. Buradan her $t_1,\ldots,t_s \in (\mathbb{K}^*)^s$ için $r(t_1,\ldots,t_s) = 0$ olur. $\mathbb{K}$ sonsuz bir cisim olduğu için Sonuç(2.5.3)'i göz önünde bulundurursak $I((\mathbb{K}^*)^s) = \langle 0 \rangle$ olur ve dolayısıyla $r = 0$ olduğu elde edilir. Buradan $f = g_1(x_1 - y^{\mathbf{a_1}}) + \cdots + g_r(x_r - y^{\mathbf{a_r}})$ olarak elde edilir. Aynı zamanda

$$\theta : \mathbb{K}[x_1,\ldots,x_r] \to \mathbb{K}[t_1,\ldots,t_s], \quad \theta(x_i) := t^{\mathbf{a_i}}$$

dönüşümünü

$$\tilde{\theta} : \mathbb{K}[x_1,\ldots,x_r,y_1,\ldots,y_s] \to \mathbb{K}[t_1,\ldots,t_s], \quad \tilde{\theta}(x_i) := t^{\mathbf{a_i}}, \quad \tilde{\theta}(y_i) := t_i$$

olarak genişletirsek, $\tilde{\theta}(f) = 0$ olur, dolayısıyla $\theta(f) = 0$ olur. Buradan $f \in \text{Çek}(\theta) = I_A$ olduğu elde edilir. □

Uyarı. $\mathbb{T}_A \subset P_A \subseteq V_A$ olduğundan sıfırlayan ideallerin 1. özelliğini göz önünde bulundurursak $I(V_A) \subseteq I(P_A) \subseteq I(\mathbb{T}_A)$ olduğu görülür. Dolayısıyla yukarıdaki iddiada bu durumu göz önünde bulundurursak $I(V_A) = I(P_A) = I_A$ durumunun da sağlandığı kolayca görülür.

Teorem 2.5.7. *[26, Theorem 3.4] $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ iken $R = \mathbb{K}[x_1,\ldots,x_r,y_1,\ldots,y_s]$ ve $S = \mathbb{K}[x_1,\ldots,x_r]$ olmak üzere*

$$I(\mathbb{T}_A) = \langle x_1 - y^{a_1},\ldots,x_r - y^{a_r}, y_1^{q-1} - 1,\ldots,y_s^{q-1} - 1\rangle \cap S$$

olur.

Kanıt. [26] Öncelikle $J = \langle x_1 - y^{a_1},\ldots,x_r - y^{a_r}, y_1^{q-1} - 1,\ldots,y_s^{q-1} - 1\rangle$ olarak alalım ve $I(\mathbb{T}_A) = J \cap S$ olduğunu görelim. Varsayalım ki $f \in I(\mathbb{T}_A)$ olsun. Dolayısıyla her $t_1,\ldots,t_r \in \mathbb{K}^*$ için $f(t_1,\ldots,t_r) = 0$ olur. Aynı zamanda $c_i \in \mathbb{K}^*$ ve $\mathbf{u_i} \in \mathbb{N}^r$ olmak üzere $f = \sum_i c_i x^{\mathbf{u_i}}$ olarak yazabiliriz. Burada $1 \leq i \leq r$ için $\mathbf{u_i} = (u_{i1},\ldots,u_{ir})$'dir. Her

$1 \leq i \leq r$ ve $1 \leq j \leq r$ için

$$x_j^{\mathbf{u_{ij}}} = [(x_j - y^{\mathbf{a_j}} + y^{\mathbf{a_j}}]^{\mathbf{u_{ij}}}$$

şeklinde düşünürsek, bu eşitliği açtığımızda $g \in R = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s]$ olmak üzere $x^{\mathbf{u_i}} = \sum (x_j - y^{\mathbf{a_j}})g + (y^{\mathbf{a_j}})^{\mathbf{u_i}}$ eşitliğini elde ederiz. Dolayısıyla $g_i \in R$ olmak üzere

$$f = \sum c_i x^{\mathbf{u_i}} = \sum_{i=1}^{r} g_i(x_i - y^{\mathbf{a_i}}) + f(y^{a_1}, \ldots, y^{a_r})$$

olarak yazabiliriz. $f(y^{\mathbf{a_1}}, \ldots, y^{\mathbf{a_r}})$ polinomunu $\{y_i^{q-1} - 1\}_{i=1}^{s} \in \mathbb{K}[y_1, \ldots, y_s]$ polinomlarınana bölersek G'nin derecesi $q-1$'den küçük ve $h_i, G \in \mathbb{K}[y_1, \ldots, y_s]$ olmak üzere $f(y^{\mathbf{a_1}}, \ldots, y^{\mathbf{a_r}}) = \sum_{i=1}^{s} h_i(y_i^{q-1} - 1) + G(y_1, \ldots, y_s)$ şeklinde elde ederiz. Buradan

$$f = \sum_{i=1}^{r} g_i(x_i - y^{\mathbf{a_i}}) + \sum_{i=1}^{s} h_i(y_i^{q-1} - 1) + G(y_1, \ldots, y_s)$$

olur. Şimdi G'nin sıfır olduğunu göstermeliyiz. $t_1, \ldots, t_s \in \mathbb{K}^*$ olmak üzere her i için $x_i = t^{\mathbf{a_i}}$ olarak alırsak $g_i^{'} = g_i(t^{\mathbf{a_1}}, \ldots, t^{\mathbf{a_r}}, y_1, \ldots, y_s)$ olmak üzere

$$0 = f(t_1, \ldots, t_r) = \sum_{i=1}^{r} g_i^{'}(t^{\mathbf{a_i}} - y^{\mathbf{a_i}}) + \sum_{i=1}^{s} h_i(y_i^{q-1} - 1) + G(y_1, \ldots, y_s)$$

olur. Yukarıdaki eşitlikte her i için $y_i = t_i$ olarak alırsak $G(t_1, \ldots, t_s) = 0$ olur. G, $(\mathbb{K}^*)^s$'de sıfırlandığından Sonuç(2.5.3)'yi kullanırsak bu polinom sıfır polinomudur. Tersine, $f \in J \cap S$ alalım. $g_i, h_i \in R$ olmak üzere

$$f = \sum_{i=1}^{r} g_i(x_i - y^{\mathbf{a_i}}) + \sum_{i=1}^{s} h_i(y_i^{q-1} - 1)$$

olarak yazabiliriz. $P = (t^{\mathbf{a_1}}, \ldots, t^{\mathbf{a_r}}) \in \mathbb{T}_A$ noktasını alalım. Her i için $x_i = t^{\mathbf{a_i}}$ olarak alırsak $g_i^{'} = g_i(t^{\mathbf{a_1}}, \ldots, t^{\mathbf{a_r}}, y_1, \ldots, y_s)$ ve $h_i^{'} = h_i(t^{\mathbf{a_1}}, \ldots, t^{\mathbf{a_r}}, y_1, \ldots, y_s)$ olmak üzere $f(t^{\mathbf{a_1}}, \ldots, t^{\mathbf{a_r}}) = \sum_{i=1}^{r} g_i^{'}(t^{\mathbf{a_i}} - y^{\mathbf{a_i}}) + \sum_{i=1}^{s} h_i^{'}(y_i^{q-1} - 1)$ elde edilir. Her i için $y_i = t_i$ olarak alırsak $f(P) = 0$ olduğunu elde ederiz. Yani, $f \in I(\mathbb{T}_A)$ olduğu elde edilir. □

3 DERECELİ HALKALAR VE MODÜLLER

Bu bölümde ağırlıklı projektif uzay ile ilgili anlatacaklarımıza geçmeden önce bu iki bölüm arasındaki bağlantıyı görebilmek için dereceli halkalar ve modüllerle ile ilgili tanım ve özellikleri ele alacağız. Ayrıca serbest çözülüm, Hilbert fonksiyonları ve serileri konularını ele alıp bu iki konu arasındaki ilişkiyi anlatacağız.

3.1 Dereceli Halkalar

Tanım 3.1.1. *R, boş olmayan bir küme olmak üzere her $r_1, r_2 \in R$ için*

$$+ : (r_1, r_2) \to r_1 + r_2 \quad \textit{ve} \quad \cdot : (r_1, r_2) \to r_1.r_2$$

*biçiminde tanımlı, sırasıyla toplama ve çarpma işlemi denilen $+$ ve $\cdot$ ikili işlemleri verilsin. Aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa $(R, +, \cdot)$ sıralı üçlüsüne **halka** denir.*

1. *$(R, +)$ bir abelyan grup,*
2. *her $r_1, r_2, r_3 \in R$ için $(r_1 \cdot r_2) \cdot r_3 = r_1 \cdot (r_2 \cdot r_3)$,*
3. *her $r_1, r_2, r_3 \in R$ için $r_1 \cdot (r_2 + r_3) = r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3$,*
4. *her $r_1, r_2, r_3 \in R$ için $(r_1 + r_2) \cdot r_3 = r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_3$.*

*Ayrıca $(R, +, \cdot)$ halkasında her $r_1, r_2 \in R$ için $r_1 \cdot r_2 = r_2 \cdot r_1$ sağlanıyorsa bu halkaya **değişmeli halka** ve her $r \in R$ için $1_R \cdot r = r$ olacak şekilde en az bir $1_R \in R$ var ise bu halkaya **birimli halka** denir.*

Uyarı. Bu bölüm boyunca aksi belirtilmedikçe R halkasının birimli ve değişmeli olduğu kabul edilecektir.

Tanım 3.1.2. *R değişmeli bir halka ve Γ derece monoidi olmak üzere,*

1. *$R = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} R_\gamma$*
2. *Her $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ için $R_{\gamma_1} R_{\gamma_2} \subseteq R_{\gamma_1 + \gamma_2}$*

*koşulları sağlanıyorsa R'ye **Γ-dereceli halka** denir. R_γ'nın her elemanına derecesi γ olan homojen eleman denir.*

Örnek 3.1.3. *$R = \mathbb{K}[x]$ polinom halkasındaki herhangi bir polinomu, her $d \geq 0$ ve $c_0, c_1, \ldots, c_d \in \mathbb{K}$ için $c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_dx^d$ şeklinde yazabiliriz. Böylece*

$$\mathbb{K}[x] = R_0 + R_1 + R_2 + \cdots$$

olur. Burada $R_0, R_1, \ldots, R_d$ aşağıdaki şekilde tanımlıdır.

$$R_0 = \{c_0 : c_0 \in \mathbb{K}\}, R_1 = \{c_1x : c_1 \in \mathbb{K}\}, \ldots, R_d = \{c_dx^d : c_d \in \mathbb{K}\}$$

Şimdi $\gamma_1 \neq \gamma_2$ için $R_{\gamma_1} = \{c_{\gamma_1}x^{\gamma_1} : c_{\gamma_1} \in \mathbb{K}\}$ ve $R_{\gamma_2} = \{c_{\gamma_2}x^{\gamma_2} : c_{\gamma_2} \in \mathbb{K}\}$ kümelerini göz önüne alalım. Buradan $\gamma_1 \neq \gamma_2$ olduğundan dolayı $c_{\gamma_1}x^{\gamma_1} = c_{\gamma_2}x^{\gamma_2}$ eşitliği ancak $c_{\gamma_1} = c_{\gamma_2} = 0$ olduğu zaman gerçekleşir. Böylece $R_{\gamma_1} \cap R_{\gamma_2} = \{0\}$ olduğunu elde ederiz. Bu da bize $\mathbb{K}[x] = R_0 \oplus R_1 \oplus R_2 \oplus \cdots$ olduğunu verir. İkinci koşulun da sağlandığını göstermek için $c_{\gamma_1}x^{\gamma_1} \in R_{\gamma_1}$ ve $c_{\gamma_2}x^{\gamma_2} \in R_{\gamma_2}$ alalım. Buradan $c_{\gamma_1}c_{\gamma_2} \in \mathbb{K}$ olduğundan $(c_{\gamma_1}x^{\gamma_1})(c_{\gamma_2}x^{\gamma_2}) = (c_{\gamma_1}c_{\gamma_2})(x^{\gamma_1+\gamma_2}) \in R_{\gamma_1+\gamma_2}$ olduğu görülür. Ve böylece ikinci koşul yani $R_{\gamma_1}R_{\gamma_2} \subseteq R_{\gamma_1+\gamma_2}$ sağlanmış olur. Böylece $\mathbb{K}[x]$ polinom halkası $\mathbb{N}$-dereceli bir halkadır.

Örnek 3.1.4. *$R = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]$, ebob$(w_1, \ldots, w_r) = 1$ ve $\Gamma = \Gamma_{\mathbf{w}} = \langle w_1, \ldots, w_r \rangle \subseteq \mathbb{N}$ olsun. der$(x^{\mathbf{a}})$ = der$(x_1^{a_1} \ldots x_r^{a_r}) = \sum_{i=1}^{r} a_ider(x_i)$ olarak tanımlanırsa bir monomun derecesini der$(x_i) = w_i$ eşitliği belirler. Yani der$(x^{\mathbf{a}}) = \sum_{i=1}^{r} a_iw_i \in \Gamma_{\mathbf{w}}$ şeklindedir. $f \in R$ polinomunun bütün monomlarının derecesi aynı ise f'ye **$\mathbf{w}$-homojen polinom** denir. R_d derecesi d olan $\mathbf{w}$-homojen polinomların kümesi ise $R = \sum_{d\in\Gamma} R_d$ olduğu açıktır, çünkü her polinomu homojen kısımlarının toplamı şeklinde yazabiliriz. Ayrıca $d_1 \neq d_2$ olmak üzere $R_{d_1} \cap R_{d_2} = \{0\}$ olduğundan $R = \bigoplus_{d\in\Gamma} R_d$ olur. $R_{d_1}R_{d_2} \subseteq R_{d_1+d_2}$ olduğundan R bir dereceli halkadır.*

*R'yi dereceli halka yapan bir çok derece monoidi olduğundan hangi derecelendirmenin söz konusu olduğunu belirtmek için R'ye **$\Gamma_{\mathbf{w}}$-dereceli** ya da **$\mathbf{w}$-dereceli halka** denmektedir. $w_1 = \cdots = w_r = 1$ durumunda ise R'ye **standart dereceli halka** denir.*

Yukarıda tanımladığımız standart dereceli ve $\mathbf{w}$-dereceli halkalara örnek verelim.

Örnek 3.1.5. *$R = \mathbb{K}[x_1, x_2]$ polinom halkasını, der(x_1) = der$(x_2) = 1$ derecelendirmeleri ile birlikte düşünelim. R polinom halkası, standart dereceli bir halkadır. Buradan,*

$$R_0 = \{c_0 : c_0 \in \mathbb{K}\}$$

$$R_1 = \{c_1x_1 + c_2x_2 : c_1, c_2 \in \mathbb{K}\}$$

$$R_2 = \{c_1x_1^2 + c_2x_1x_2 + c_3x_2^2 : c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{K}\}$$

$$R_3 = \{c_1x_1^3 + c_2x_1^2x_2 + c_3x_2^2x_1 + c_4x_2^3 : c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{K}\}$$

$$\ldots$$

Ayrıca, $R = \mathbb{K}[x_1, x_2, x_3]$ *polinom halkasını,* $\mathbf{w} = (1, 2, 3)$ *olmak üzere* $der(x_1) = 1, der(x_2) = 2$ *ve* $der(x_3) = 3$ *derecelendirmeleri ile birlikte düşünelim. Buradan* R *polinom halkası,* $\mathbf{w}$*-dereceli bir halkadır. Dolayısıyla*

$$R_0 = \{c_0 : c_0 \in \mathbb{K}\}, \quad R_1 = \{c_1x_1 : c_1 \in \mathbb{K}\}$$

$$R_2 = \{c_2x_2 + c_3x_1^2 : c_2, c_3 \in \mathbb{K}\}$$

$$R_3 = \{c_4x_3 + c_5x_2x_1 + c_6x_1^3 : c_4, c_5, c_6 \in \mathbb{K}\}$$

$$\ldots$$

Uyarı. Yukarıda ele aldığımız örneklerde $R_0 = \mathbb{K}$ olarak elde edilmiştir. Fakat her zaman $R_0 = \mathbb{K}$ olmak zorunda değildir. Örneğin, $\Gamma = \mathbb{Z}$ derece monoidini düşünelim ve $R = \mathbb{K}[x_1, x_2]$ polinom halkasında $\mathrm{der}(x_1) = -1$ ve $\mathrm{der}(x_2) = 1$ olarak alalım. Burada,

$$R_d = \{c(x_1x_2)^\alpha x_2^d : c \in \mathbb{K}, \alpha \in \mathbb{N}\}$$

olur. Buradan

$$R_0 = \{c(x_1x_2)^\alpha : c \in \mathbb{K}, \alpha \in \mathbb{N}\}$$

olur ve $R_0 \neq \mathbb{K}$ olduğu açıkça görülür. Bu uyarı ile gözlemlediğimiz durumu aşağıda vereceğimiz Önerme(3.1.8) ile karakterize ederiz.

Tanım 3.1.6. $R = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} R_\gamma$ *standart dereceli bir halka ve* $f_1, \ldots, f_r$ *R'nin sırasıyla* $d_1, \ldots, d_r$ *derecelerine sahip olan homojen elemanları olsun. Buradan*

$$S_d = \{\sum_{\mathbf{a}\in\mathbb{N}^r} c_{\mathbf{a}} f_1^{a_1} \cdots f_r^{a_r} : c_{\mathbf{a}} \in R_0 \text{ ve } d_1a_1 + \cdots + d_ra_r = d\}$$

olmak üzere $S = R_0[f_1, \ldots, f_r]$ *R'nin* $f_1, \ldots, f_r$ *tarafından üretilen dereceli bir alt halkasıdır.*

Yukarıda tanımlanan dereceli alt halkalara en güzel örnekler polinomlar kullanılarak elde edilebilir.

Örnek 3.1.7. *$\mathbb{K}$ bir cisim olmak üzere $S = \mathbb{K}[x_1^2, x_1x_2, x_2^2]$ halkası $R = \mathbb{K}[x_1, x_2]$ halkasının dereceli bir alt halkasıdır. Gerçekten S'nin homojen alt grupları her d için aşağıdaki şekilde tanımlanır.*

$$S_d = \left\{ \sum_{2a_1+2a_2+2a_3=d} c_{(a_1,a_2,a_3)} x^{2a_1+2a_2+2a_3} : c_{(a_1,a_2,a_3)} \in \mathbb{K} \right\}$$

Buradan her $d \geq 0$ tam sayısı için aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$S_d = \begin{cases} R_d, & 2 \mid d \text{ için} \\ 0, & 2 \nmid d \text{ için} \end{cases}$$

Diğer bir deyişle $S = R_0 \oplus 0 \oplus R_2 \oplus 0 \oplus R_4 \oplus 0 \oplus \cdots$ şeklindedir. Benzer şekilde $S = \mathbb{K}[x^3, x^4, x^5]$ halkası $R = \mathbb{K}[x]$ halkasının dereceli bir alt halkasıdır. Gerçekten, S'nin homojen alt grupları her d için aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$S_d = \left\{ \sum_{3a_1+4a_2+5a_3=d} c_{(a_1,a_2,a_3)} x^{3a_1+4a_2+5a_3} : c_{(a_1,a_2,a_3)} \in \mathbb{K} \right\}$$

Diğer bir deyişle $S = R_0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus R_3 \oplus R_4 \oplus R_5 \oplus R_6 \oplus R_7 \oplus \cdots$ şeklindedir.

Önerme 3.1.8. *[23, Theorem 8.6] $\Gamma \subseteq \mathbb{Z}$ derece monoidi, $R = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]$ Γ-dereceli polinom halkası ve her i için $der(x_i) = w_i \in \Gamma$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler birbirlerine denktir.*

1. *Bir $\gamma \in \Gamma$ için $boy_{\mathbb{K}} R_\gamma < \infty$*
2. *Her $\gamma \in \Gamma$ için $boy_{\mathbb{K}} R_\gamma < \infty$*
3. *$R_0 = \mathbb{K}$*
4. *$\Gamma \cap -\Gamma = \{0\}$ ve her i için $w_i > 0$*
5. *$\mathcal{L} = Çek[w_1 \cdots w_n]$ olmak üzere $\mathcal{L} \cap \mathbb{N}^n = \{0\}$*

Kanıt. [23, Proof of Theorem 8.6] (1) $\iff$ (3) İddia: Bir $\gamma \in \Gamma$ için $boy_{\mathbb{K}} R_\gamma < \infty$ $\iff$ $R_0 = \mathbb{K}$.

$R_0 = \mathbb{K}$ olduğunda R_0, 1 boyutlu olacağından $\gamma = 0$ için $boy_{\mathbb{K}} R_\gamma < \infty$ durumu sağlanır. Tersini göstermek için bir $\gamma \in \Gamma$ için $boy_{\mathbb{K}} R_\gamma < \infty$ olmak üzere $R_0 \neq \mathbb{K}$ olduğunu kabul edelim. $R_0 R_\gamma \subseteq R_\gamma$ olduğunu biliyoruz. Bir $x^{\mathbf{b}} \in R_\gamma \setminus \{0\}$ elemanıyla çarpma,

$$\begin{aligned} \phi : R_0 &\hookrightarrow R_\gamma \\ a &\to ax^{\mathbf{b}} \end{aligned} \tag{1}$$

birebir dönüşümünü verir.

Yukarıdaki (1) dönüşümünün birebir olmasından dolayı R_0'ın da sonlu boyutlu olduğunu biliyoruz. Aynı zamanda $R_0 \neq \mathbb{K}$ kabulünden dolayı $x^{\mathbf{a}} \in R_0$ olmak üzere der$(x^{\mathbf{a}}) = 0$ ve $\mathbf{a} \neq 0$ olur. Buradan her d için $x^{d\mathbf{a}} \neq 0$ ve der$(x^{d\mathbf{a}}) = d(0) = 0$ olur. Ve $1, x^{\mathbf{a}}, x^{2\mathbf{a}}, \ldots$ lineer bağımsız olur. Yani R_0 sonsuz boyutlu olur. Bu da bize çelişki vereceğinden varsayımımız yanlıştır. Yani $R_0 = \mathbb{K}$ olmalıdır.

(3) $\iff$ (4) İddia: $\Gamma \cap -\Gamma = \{0\}$ ve her i için $w_i > 0 \iff R_0 = \mathbb{K}$.

Bu iddia için olmayana ergi yöntemini kullanalım. $f \in R_0 \setminus \mathbb{K}$ alalım ve $f \notin \mathbb{K}$ olduğundan $f = \sum c_{\mathbf{a}} x^{\mathbf{a}}$ olacak şekilde en az bir $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^r \setminus 0$ vardır ve $c_{\mathbf{a}} \neq 0$'dır. Burada $\mathbf{a} \neq 0$ olduğundan en az bir j vardır öyle ki $a_j > 0$ ve $i \neq j$ için $a_i \geq 0$ olur. Dolayısıyla der$(x^{\mathbf{a}}) = 0$ olduğundan her i için der$(x_i) = w_i \in \Gamma$ olduğunu da göz önünde bulundurursak,

$$0 = a_1 w_1 + \cdots + a_r w_r$$

olarak yazabiliriz. Buradan $j \in \{1, \ldots, n\}$ olmak üzere herhangi bir w_j için

$$0 - w_j = a_1 w_1 + \cdots + a_r w_r - w_j$$

olarak yazarsak

$$-w_j = a_1 w_1 + \cdots + (a_j - 1) w_j + \cdots + a_r w_r \tag{2}$$

olarak elde ederiz. İddianın hipotezinden dolayı $w_j \neq 0$ olduğundan (2) eşitliğini de göz önünde bulundurduğumuzda $\Gamma \cap -\Gamma \neq \{0\}$ olarak elde ederiz. Buradan $\Gamma \cap -\Gamma = \{0\} \Rightarrow R_0 = \mathbb{K}$ durumunu göstermiş oluruz.

Tersi yön için de olmayana ergi yöntemini kullanalım. Varsayalım ki $\Gamma \cap -\Gamma \neq \{0\}$ olsun. Dolayısıyla en az bir $\gamma \in \Gamma \cap -\Gamma$ vardır ve $\gamma \neq 0$'dır. Buradan $\gamma \in \Gamma$ ve $\gamma \in -\Gamma$ olduğundan $-\gamma \in \Gamma$ durumu da sağlanır. R dereceli bir halka olduğundan her γ için $R_\gamma R_{-\gamma} \subseteq R_0$ kapsamasının sağlandığını biliyoruz. Dolayısıyla $x^{\mathbf{a}} \in R_\gamma$ ve $x^{\mathbf{b}} \in R_{-\gamma}$

olacak şekilde $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{N}^r$ vardır ve $x^{\mathbf{a}} x^{\mathbf{b}} \in R_0$ olur. Yani $\mathrm{der}(x^{\mathbf{a}+\mathbf{b}}) = 0$ olacaktır. Aynı zamanda $\gamma \neq 0$ olduğundan $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{N}^r \setminus \{0\}$ ve dolayısıyla $\mathbf{a} + \mathbf{b} \neq 0$ olur. Böylece $x^{\mathbf{a}+\mathbf{b}} \notin \mathbb{K}$ olacağından $R_0 \neq \mathbb{K}$ durumunu elde ederiz. Yani $R_0 = \mathbb{K} \Rightarrow \Gamma \cap -\Gamma = \{0\}$ durumunu göstermiş oluruz.

(3) $\iff$ (5) İddia: $R_0 = \mathbb{K} \iff \mathcal{L} \cap \mathbb{N}^n = \{0\}$

$\mathcal{L} = \text{Çek}[w_1 \cdots w_r]$ yani $\mathcal{L} = \{(a_1, \ldots, a_r) \in \mathbb{Z}^r : a_1 w_1 + \cdots + a_r w_r = 0\}$ olarak alalım. Buradan $\mathcal{L} \cap \mathbb{N}^r = \{(a_1, \ldots, a_r) \in \mathbb{N}^r : a_1 w_1 + \cdots + a_r w_r = 0\}$ olur. Bir başka deyişle $\mathcal{L} \cap \mathbb{N}^r = \{\mathbf{a} \in \mathbb{N}^r : \mathrm{der}(x^{\mathbf{a}}) = 0\} = \{\mathbf{a} \in \mathbb{N}^r : x^{\mathbf{a}} \in R_0\}$ olarak elde edilir. $R_0 = \mathbb{K}$ kabülünden dolayı $x^{\mathbf{a}} = 1$ olduğundan $\mathbf{a} = 0$ olarak elde edilir. Yani $\mathcal{L} \cap \mathbb{N}^r = \{0\}$ olur.

Tersine, $\mathcal{L} \cap \mathbb{N}^r = \{0\}$ olmak üzere $R_0 \neq \mathbb{K}$ olsun. Dolayısıyla

$$\mathcal{L} \cap \mathbb{N}^r = \{\mathbf{a} \in \mathbb{N}^r : \mathrm{der}(x^{\mathbf{a}}) = 0\} = \{\mathbf{a} \in \mathbb{N}^r : x^{\mathbf{a}} \in R_0\} = \{0\}$$

olduğunu söyleyebiliriz. Aynı zamanda $R_0 \neq \mathbb{K}$ kabulünden dolayı $x^{\mathbf{a}} \in R_0$ olmak üzere $\mathrm{der}(x^{\mathbf{a}}) = 0$ iken $\mathbf{a} \neq 0$ olur. Fakat bu durum bize çelişki verir. Dolayısıyla kabulümüz yanlıştır. Yani $R_0 = \mathbb{K}$ olmalıdır.

(2) $\Rightarrow$ (1) Her $\gamma \in \Gamma$ için $boy_{\mathbb{K}} R_\gamma < \infty \Rightarrow$ Bir $\gamma \in \Gamma$ için $boy_{\mathbb{K}} R_\gamma < \infty$, olduğu açıktır.

(3) $\Rightarrow$ (2) İddia: $R_0 = \mathbb{K} \Rightarrow$ Her $\gamma \in \Gamma$ için $boy_{\mathbb{K}} R_\gamma < \infty$.

Varsayalım ki $R_0 = \mathbb{K}$ olsun. Amacımız her $\gamma \in \Gamma$ için R_γ'lerin R_0 üzerinden sonlu üretildiğini göstermek. Öncelikle $d \in \Gamma$ ve $x^{\mathbf{a}} \in R_d$ olarak alalım ve sabit bir $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^r$ için $\mathrm{der}(x^{\mathbf{a}}) = d$ olsun. $\mathcal{L}_{\mathbf{w}} = \text{Çek}[w_1 \cdots w_r] \subseteq \mathbb{Z}^r$ kafesinin bazını (burada kafes ifadesi ile kasıt sonlu üretilmiş bir sonlu üretilmiş serbest abel grubudur) $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_l}$ elemanları oluşturmak üzere, $(\mathbf{a}, 1)$ ve $(\mathbf{v_1}, 0), \ldots, (\mathbf{v_l}, 0)$ vektörlerinin ürettiği kafesi $\mathcal{L}_d \subseteq \mathbb{Z}^{r+1}$ olarak adlandıralım.

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{Z}^{r+1} &\hookrightarrow \mathbb{Z}\Gamma \\ (\mathbf{b}, n) &\to \mathrm{der}(\mathbf{b}) - nd \end{aligned} \tag{3}$$

dönüşümünü tanımlayalım. Dönüşümün çekirdeği $\mathcal{L}_d$ kafesidir. Gerçekten, $\mathrm{der}(\mathbf{b}) = nd$

$$
\begin{aligned}
&\iff w_1b_1+\cdots+w_rb_r=nd\\
&\iff w_1b_1+\cdots+w_rb_r=n\mathrm{der}(x^{\mathbf{a}})\\
&\iff w_1b_1+\cdots+w_rb_r=n(a_1w_1+\cdots+a_rw_r)\\
&\iff \mathrm{der}(\mathbf{b})=n\mathrm{der}(\mathbf{a})\\
&\iff \mathrm{der}(\mathbf{b}-n\mathbf{a})=0 \iff \mathbf{b}-n\mathbf{a}\in\mathcal{L}_{\mathbf{w}}
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir. Aynı zamanda $\mathcal{L}_{\mathbf{w}}$ kafesinin bazı $\mathbf{v_1},\ldots,\mathbf{v_l}$ elemanları olduğundan dolayı

$$\mathbf{b}-n\mathbf{a}=c_1\mathbf{v_1}+\cdots+c_l\mathbf{v_l}$$

olacak şekilde her $i\in\{1,\ldots,l\}$ için $c_i\in\mathbb{Z}$ vardır. Buradan

$$\mathbf{b}=n\mathbf{a}+c_1\mathbf{v_1}+\cdots+c_l\mathbf{v_l}$$

olarak yazabiliriz. Dolayısıyla yukarıdaki eşitlikten

$$(\mathbf{b},n)=n(\mathbf{a},1)+c_1(v_1,0)+\cdots+c_l(v_l,0)$$

olduğu görülür. Ve $(\mathbf{b},n)\in\mathcal{L}_d$ olur. Yani Çek(ϕ)=$\mathcal{L}_d$ elde edilir.
Şimdi ise $\mathcal{H}$ ile $\mathcal{L}_d\cap\mathbb{N}^{r+1}$ yarıgrubunun Hilbert Bazını tanımlayalım (Hilbert Bazı için Miller ve Sturmfels'in [23] kitabına bakılabilir). Ve

$$\mathcal{H}_n:=\{\mathbf{b}\in\mathbb{N}^r:(\mathbf{b},n)\in\mathcal{H}\},\quad \mathcal{H}_1:=\{\mathbf{b}\in\mathbb{N}^r:(\mathbf{b},1)\in\mathcal{H}\}$$

kümelerini tanımlayalım. Burada $\mathcal{H}_n$ kümesi derecesi nd olan vektörleri, $\mathcal{H}_1$ kümesi ise derecesi d olan vektörleri içerir. Aynı zamanda bu kümeler sonlu boyutludur.

İddia: $\mathcal{H}_1$ kümesinin elemanlarına karşılık monomlar R_d'yi, $R_0=\mathbb{K}$ üzerinden üretir.

Şimdi ise bu iddiayı ispatlayalım. $f\in R_d$ olmak üzere her $i\in\{0,\ldots,k\}$ için $c_i\in\mathbb{K}$ ve $x^{\mathbf{b_i}}\in R_d$ olacak şekilde $f=c_1x^{b_1}+\cdots+c_kx^{b_k}$ olsun. Dolayısıyla $(\mathbf{b_i},1)\in\mathcal{L}_d\cap\mathbb{N}^{r+1}$ olur. Yani $(\mathbf{b_i},1)$, $\mathcal{H}$'nin elemanları tarafından üretilir. $h_1,\ldots,h_s$ $\mathcal{H}$'nin sıfırdan farklı elemanları olsun. Her $i\in\{1,\ldots,s\}$ için $z_i\in\mathbb{N}$ olmak üzere

$$(\mathbf{b_i},1)=z_1h_1+\cdots+z_sh_s$$

şeklinde yazılır. Burada sıfırdan farklı iki tane z_i olamaz. Çünkü, $(\mathbf{a}, 1), (\mathbf{b}, 1) \in \mathcal{H}$ olmak üzere $(\mathbf{a}, 1) + (\mathbf{b}, 1) = (\mathbf{c}, 2)$ olacağından tek bir z_i sıfırdan farklıdır ve 1'e eşit olmalıdır. Dolayısıyla her i için $\mathbf{b_i} \in \mathcal{H}_1$ olmak zorundadır. $\square$

3.2 Dereceli İdealler

Lemma 3.2.1. *Γ derece monoidi ve $R = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} R_\gamma$ dereceli bir halka olsun. Her $\gamma \in \Gamma$ için $S_\gamma \subseteq R_\gamma$ ise $S = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} S_\gamma$ için $S_\gamma = S \cap R_\gamma$ sağlanır.*

Kanıt. Öncelikle her $\gamma \in \Gamma$ için $S_\gamma \subseteq R_\gamma$ ve $S_\gamma \subseteq S = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} S_\gamma$ olduğundan dolayı $S_\gamma \subseteq R_\gamma \cap S$ kapsaması sağlanır. Tersine, $f \in S \cap R_\gamma$ olarak alalım. $f \in S = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} S_\gamma$ olduğundan $f = \bigoplus_{\gamma_1\in\Gamma} f_{\gamma_1}$ olacaktır. Aynı zamanda $f \in R_\gamma$ olduğundan $f = f_\gamma$ olacak şekilde $f_\gamma \in R_\gamma$ vardır. Bu iki durumu birlikte göz önüne alırsak $f \in S_\gamma$ olarak elde ederiz. Dolayısıyla her $\gamma \in \Gamma$ için $R_\gamma \cap S \subseteq S_\gamma$ kapsaması sağlanır. $\square$

Uyarı. S altgrup ise $S \cap R_\gamma \subseteq S$ olduğundan $\bigoplus_{i\in\Gamma}(S \cap R_\gamma) \subseteq S$ olur. Buradan aşağıdaki tanımdaki kapsamada diğer yönün her zaman var olduğunu söyleyebiliriz ve dolayısıyla aşağıdaki tanımda kapsama yerine eşitlik de alınabilir.

Tanım 3.2.2. *$R = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} R_\gamma$ dereceli bir halka olmak üzere eğer her $\gamma \in \Gamma$ için $S \subseteq \bigoplus_{\gamma\in\Gamma}(S \cap R_\gamma)$ ise $S \subseteq R$ alt grubuna **dereceli alt grup** denir.*

Önerme 3.2.3. *S alt grubunun **dereceli** olması için gerek ve yeter koşul $f \in S$ ve $f = f_0 + \cdots + f_d$ olmak üzere her $\gamma \in \{0, \ldots, d\}$ için $f_\gamma \in S$ durumunun sağlanmasıdır.*

Kanıt. Varsayalım ki S dereceli bir alt grup ve $f = f_0 + \cdots + f_d$ olmak üzere $f \in S$ olsun. Dolayısıyla yukarıdaki tanım gereği $S = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma}(S \cap R_\gamma)$ olduğundan her γ için $f_\gamma \in S \cap R_\gamma \subseteq S$ olur.

Tersine, varsayalım ki $f = f_0 + \cdots + f_d$ ve $f \in S$ iken her $\gamma \in \Gamma$ için $f_\gamma \in S$ durumu sağlansın. Buradan herhangi bir $f \in S$ için $f_\gamma \in S_\gamma \subseteq R_\gamma$ durumunu da göz önünde bulundurursak $f_\gamma \in S \cap R_\gamma$ olur. Bu yüzden $f \in \bigoplus_{\gamma\in\Gamma}(S \cap R_\gamma)$ olur ve $S \subseteq \bigoplus_{\gamma\in\Gamma}(S \cap R_\gamma)$ kapsaması sağlanır. Diğer yön için, $S \cap R_\gamma \subseteq S$ durumu her zaman sağlandığından ve S alt grup olduğundan $\bigoplus_{\gamma\in\Gamma}(S \cap R_\gamma) \subseteq S$ kapsaması da sağlanır. Böylece $S = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma}(S \cap R_\gamma)$ olur. $\square$

Önerme 3.2.4. *$R = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} R_\gamma$ dereceli bir halka, $S \subseteq R$ altgrup olmak üzere $S = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} S_\gamma$ altgrubunun **ideal** olması için gerek ve yeter koşul her $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ için $R_{\gamma_1} S_{\gamma_2} \subseteq S_{\gamma_1+\gamma_2}$ kapsamasının sağlanmasıdır.*

Kanıt. Varsayalım ki $S = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} S_\gamma$ olmak üzere S ideal olsun. Ve $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ olmak üzere $r_{\gamma_1} f_{\gamma_2} \in R_{\gamma_1} S_{\gamma_2}$ olarak alalım. $S_{\gamma_2} \subseteq S$ olduğundan ve S'nin ideal olduğunu da göz önüne alırsak $r_{\gamma_1} f_{\gamma_2} \in S$ olur. Aynı zamanda
$S_{\gamma_2} \subseteq R_{\gamma_2}$ olduğundan $r_{\gamma_1} f_{\gamma_2} \in R_{\gamma_1+\gamma_2}$ olur. Dolayısıyla Lemma(3.2.1)'i de göz önünde bulundurursak $r_{\gamma_1} f_{\gamma_2} \in S \cap R_{\gamma_1+\gamma_2} = S_{\gamma_1+\gamma_2}$ olduğunu elde ederiz.

Tersine, her $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ için $R_{\gamma_1} S_{\gamma_2} \subseteq S_{\gamma_1+\gamma_2}$ durumu sağlansın. $f \in S$ ve $r \in R$ olarak alalım. Burada $f = f_0 + \cdots + f_d$ ve $r = r_0 + \cdots + r_e$ olarak yazılsın.

$$rf = r_0 f_0 + \cdots + r_0 f_d + \cdots + r_e f_0 + \cdots + r_e f_d$$

çarpımında sırasıyla $r_0 f_0 \in S_0, \ldots, r_0 f_d \in S_d, \ldots, r_e f_0 \in S_e, \ldots, r_e f_d \in S_{e+d}$ olduğundan $rf \in \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} S_\gamma = S$ olacaktır. Dolayısıyla S'nin bir ideal olduğu gösterilmiş olur. $\square$

Tanım 3.2.5. Γ *derece monoidi ve* $R = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} R_\gamma$ *dereceli bir halka olmak üzere,*

1. $I = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} I_\gamma$ *olmak üzere her* $\gamma \in \Gamma$ *için* $I_\gamma \subseteq R_\gamma$,
2. *Her* $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ *için* $R_{\gamma_1} I_{\gamma_2} \subseteq I_{\gamma_1+\gamma_2}$,

koşullarını sağlayan I*'ya* ***dereceli ideal*** *denir.*

Sonuç 3.2.6. $R = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} R_\gamma$ *dereceli bir halka olsun.* $I \subseteq R$ *alt kümesinin dereceli bir ideal olması için gerek ve yeter koşul* I*'nın ideal ve dereceli bir altgrup olmasıdır.*

Kanıt. Varsayalım ki I ideal ve dereceli bir altgrup olsun. Dolayısıyla
$I = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma}(I \cap R_\gamma)$ durumu sağlanır. Buradan $I_\gamma = I \cap R_\gamma$ için 1. koşul sağlanır. Aynı zamanda I'nın ideal olmasından dolayı her $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ için $R_{\gamma_1} I_{\gamma_2} \subseteq I_{\gamma_1+\gamma_2}$ durumu sağlanır, çünkü $R_{\gamma_1} I_{\gamma_2} \subseteq I \cap R_{\gamma_1+\gamma_2} = I_{\gamma_1+\gamma_2}$ olduğundan 2. koşul sağlanmış olur. Tersine, varsayalım ki I dereceli bir ideal olsun. Dolayısıyla 2. koşuldan her $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ için $R_{\gamma_1} I_{\gamma_2} \subseteq I_{\gamma_1+\gamma_2}$ durumu sağlanır. Ayrıca 1. koşuldan Lemma(3.2.1) sağlanır, yani $I_\gamma = I \cap R_\gamma$ olur. Buradan $I = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma}(I \cap R_\gamma)$ olduğundan I dereceli bir altgruptur. $\square$

Örnek 3.2.7. $R = \mathbb{K}[x_1, x_2]$ *halkasını standart derecelendirme ile birlikte düşünelim.* $I = \langle x_1^2, x_1 x_2, x_2^3 \rangle$*,* R *halkasının dereceli bir idealidir. Gerçekten,*

$$I_0 = I_1 = (0)$$

$$I_2 = \{c_1x_1^2 + c_2x_1x_2 : c_1, c_2 \in R\}$$

$$I_3 = \{c_1x_1^2x_2 + c_2x_1x_2^2 + c_3x_1^3 + c_4x_2^3 : c_1, c_2, c_3, c_4 \in R\}$$

$$I_4 = \{c_1x_1^3x_2 + c_2x_1^2x_2^2 + c_3x_1^4 + c_4x_1x_2^3 + c_5x_2^4 : c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in R\}$$

$$\cdots$$

I idealinin tipik bir elemanını

$$F = (f_0 + \cdots + f_d)x_1^2 + (g_0 + \cdots + g_e)x_1x_2 + (h_0 + \cdots + h_k)x_2^3$$

şeklinde yazabiliriz. Burada

$$F_2 = (f_0x_1^2 + g_0x_1x_2) \in R_2$$

$$F_3 = (f_1x_1^2 + g_1x_1x_2 + h_0x_2^3) \in R_3$$

$$\vdots$$

$$F_i = (f_{i-2}x_1^2 + g_{i-2}x_1x_2 + h_{i-3}x_2^3) \in R_i$$

ve $m = maks\{d+2, e+2, k+3\}$ olmak üzere F'yi $F = F_2 + \cdots + F_i + \cdots + F_m$ homojen bileşenlerine ayrılmış biçimde yazabiliriz. $F \in I$ ise $F = F_2 + \cdots + F_i + \cdots + F_m$ ifadesindeki her $F_i \in R_i$ olduğundan Önerme(3.2.3)'den I dereceli altgrup olur ve I ideal olduğu için Sonuç(3.2.6)'dan dolayı dereceli ideal olur.

Tanım 3.2.8. *$I \subseteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]$ ideali homojen polinomlar tarafından üretiliyorsa I idealine* ***homojen ideal*** *denir.*

Önerme 3.2.9. *$I, J \subseteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]$ ideal olmak üzere aşağıdaki koşullar sağlanır.*

1. *I idealinin homojen ideal olması için gerek ve yeter koşul I'nın dereceli ideal olmasıdır.*

2. *I, J idealleri homojen idealler olsun. $I + J, I \cap J, IJ, \sqrt{I}$ idealleri de homojen ideallerdir.*

Kanıt. 1. Varsayalım ki I homojen ideal olsun. Homojen idealin tanımından dolayı I idealini, her $1 \le i \le m$ için f_i'ler homojen olmak üzere, $I = (f_1, \ldots, f_m)$ şeklinde alabiliriz. Ve $f \in I$ alalım. Buradan her $1 \leq i \leq m$ için $g_i \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ olmak üzere $f = \sum_i g_i f_i$ olarak yazabiliriz. g_i polinomu homojen olmak zorunda olmadığından homojen bileşenlerinin toplamı olarak $g_i = \sum_{\gamma \in \mathbb{N}} (g_i)_\gamma$ şeklinde yazarsak f polinomun derecesi d olan bölümünü $d \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$f_d = \sum_{\mathrm{der}(f_i) + \gamma = d} (g_i)_\gamma f_i$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan $(g_i)_\gamma f_i \in I$ olduğundan $f_d \in I$ olur. Önerme(3.2.3)'den dolayı I dereceli altgrup ve Sonuç(3.2.6)'dan dolayı ise I dereceli ideal olur.

Tersine, I dereceli ideal ise Sonuç(3.2.6)'dan dolayı dereceli altgrup olur. $I \subseteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]$ sonlu üretildiğinden dolayı $I = (F_1, \ldots, F_m)$ olacak şekilde $1 \leq i \leq m$ olmak üzere F_i polinomları vardır. Önerme(3.2.3)'den dolayı, F_i polinomlarını $F_i = \sum_{\gamma \in \mathbb{N}} (F_i)_\gamma$ şeklinde homojen bileşenlerinin toplamı olarak yazarsak $(F_i)_\gamma \in I$ olacağından I idealini $(F_i)_\gamma$ polinomları da üretir. Dolayısıyla homojen ideal tanımından I ideali homojen idealdir.

2. I ve J idealleri homojen idealler olduğundan homojen elemanlar tarafından üretilir. Gerçekten $I = \langle f_1, \ldots, f_k \rangle$ ve $J = \langle g_1, \ldots, g_l \rangle$ olmak üzere

$$I + J = \langle f_1, \ldots, f_k, g_1, \ldots, g_l \rangle \text{ ve } IJ = \langle f_i g_j : 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq l \rangle$$

şeklinde tanımlı olduğundan $I + J$ ve IJ ideallerinin de homojen elemanlar tarafından üretildiği açıktır. $f \in I \cap J$ ve $f = f_0 + \cdots + f_d$ olarak alırsak f hem I hem de J idealinde olduğundan ve I, J idealleri homojen elemanlar tarafından üretildiğinden her i için $f_i \in I \cap J$ olur. Dolayısıyla $I \cap J$ homojen idealdir.

Son olarak, $\sqrt{I}$ idealinin homojen olduğunu gösterelim. $f \in \sqrt{I}$ için Önerme (3.2.3)'nin sağlandığını kontrol edelim. f polinomunu homojen bileşenlerinin toplamı şeklinde yani $f = f_0 + \cdots + f_i$ şeklinde yazalım ve i üzerinden tümevarım yapalım. $i = 0$ iken $f_0 = f \in \sqrt{I}$ olduğu açıktır. Şimdi $i \leq d - 1$ için iddiamızın doğru olduğunu kabul edelim. Yani $g \in \sqrt{I}$ olmak üzere $g = g_0 + \cdots + g_{d-1}$ iken $g_0, \ldots, g_{d-1} \in \sqrt{I}$ olsun. Buradan bazı $n \in \mathbb{N}$'ler için

$$f^n = (f_0 + \cdots + f_d)^n = f_d^n + (\text{derecesi daha düşük olan terimler}) \in I$$

olur. I homojen ideal olduğundan Önerme (3.2.3)'yi kullanırsak $f_d^n \in I$ olacağından $f_d \in \sqrt{I}$ olarak elde ederiz. Dolayısıyla $g = f - f_d = f_0 + \cdots + f_{d-1} \in \sqrt{I}$ olduğu görüldüğünden tümevarım hipotezini göz önünde bulundurursak 1. koşulun sağlandığını yani $f_0, \ldots, f_{d-1} \in \sqrt{I}$ olduğunu söyleriz. Dolayısıyla $\sqrt{I}$ homojen idealdir.

□

Sonuç 3.2.10. *$I \subseteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]$ ideal olsun. I homojendir gerek ve yeter koşul her $f = f_0 + \cdots + f_d \in I$ ve her $i = 0, \ldots, d$ için $f_i \in I$'dır.*

Kanıt. I'nın homojen ideal olması için gerek ve yeter koşul I'nın dereceli ideal olmasıdır. Buradan I dereceli bir altgruptur. Dolayısıyla her $f = f_0 + \cdots + f_d \in I$ ve her $i = 0, \ldots, d$ için $f_i \in I$'dır. □

Örnek 3.2.11. *$I = \langle x_1^2 \rangle$, $J = \langle x_1^2, x_2 \rangle$ idealleri $\mathbb{K}[x_1, x_2]$ standart dereceli halkasında homojen ideallerdir.*

Örnek 3.2.12. *$I = \langle x_1x_2 - x_3x_4, x_1^2 - x_2^2, x_1^4 - x_2^2x_4^2, 6x_4 + x_1 \rangle$ ideali $\mathbb{K}[x_1, x_2, x_3, x_4]$ standart dereceli polinom halkasında homojen idealdir. Ancak, $J = \langle x_1^3 + x_1 \rangle$ homojen ideal değildir; çünkü $x_1 \notin J$.*

3.3 Dereceli Modüller

Bu alt bölümde R-modülleri, dereceli R-modülleri ve bu modüllerin temel özelliklerini ele alacağız.

Tanım 3.3.1. *R bir halka olsun. M, $+$ ikili işlemi ile bir abelyan grup olmak üzere*

$$\cdot : R \times M \to M$$
$$(r, m) \to r \cdot m$$

*şeklinde tanımlanan bir dönüşüm var ve her $m, m_1, m_2 \in M$ ve $r, r_1, r_2 \in R$ için aşağıdaki özellikler sağlanır ise M'ye **sol R-modül** denir.*

1. $r \cdot (m_1 + m_2) = r \cdot m_1 + r \cdot m_2$

2. $(r_1 + r_2) \cdot m = r_1 \cdot m + r_2 \cdot m$

3. $(r_1 \cdot r_2) \cdot m = r_1 \cdot (r_2 \cdot m)$

4. $1 \cdot m = m$

Şimdi ise bazı sol R-modül örnekleri vereceğiz.

Örnek 3.3.2. *1.* *$\mathbb{R}$ üzerindeki her vektör uzayı bir $\mathbb{R}$-modüldür. Özellikle $\mathbb{R}^n$ bir $\mathbb{R}$-modüldür. Benzer şekilde R herhangi bir halka olmak üzere R^n'nin R-modül olduğunu söyleyebiliriz.*

2. *Her ideal bir modüldür.*

3. *M bir Abel grup olmak üzere her $m \in M$ için skaler çarpma işlemini*

$$nm = \begin{cases} m + \cdots + m \quad (n \text{ kez}) & \text{eğer } n \in \mathbb{N} \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } n = 0 \text{ ise} \\ (-m) + \cdots + (-m) \quad (\text{-}n \text{ kez}) & \text{eğer } -n \in \mathbb{N} \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. M, bu işlemle bir $\mathbb{Z}$-modül olur.

4. *R bir halka ve I, R halkasının bir ideali olmak üzere bölüm halkasına bir R-modül yapısı verilebilir. R/I bölüm halkasının toplamsal bir abelyan grup olduğunu biliyoruz. R halkasının elemanlarıyla R/I bölüm halkası üzerinde bir skaler çarpımı aşağıdaki şekilde tanımlayalım.*

$$\cdot : R \times (R/I) \to R/I$$
$$(r, a + I) \to ra + I$$

R/I üzerinden tanımladığımız standart toplama işlemi ile birlikte bu skaler çarpım R/I üzerinde bir R-modül yapısı verir.

Tanım 3.3.3. *(Dereceli Modül) $R = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} R_\gamma$ dereceli bir halka ve M, R-modül olsun. M'nin altgruplarının bir $\{M_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ ailesi için aşağıdaki durumlar sağlanıyorsa M modülüne R üzerinde **Γ-dereceli modül** denir.*

1. $M = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} M_\gamma$

2. *Her $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ için $R_{\gamma_1} M_{\gamma_2} \subseteq M_{\gamma_1 + \gamma_2}$*

Burada $R_{\gamma_1} M_{\gamma_2}$ ifadesi aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır.

$$R_{\gamma_1} M_{\gamma_2} = \{r_{\gamma_{1,1}} m_{\gamma_{2,1}} + \cdots + r_{\gamma_{1,k}} m_{\gamma_{2,k}} : r_{\gamma_{1,1}}, \ldots, r_{\gamma_{1,k}} \in R_{\gamma_1} \text{ ve } m_{\gamma_{2,1}}, \ldots, m_{\gamma_{2,k}} \in M_{\gamma_2}\}$$

Uyarı. Yukarıdaki tanımdan yola çıkarak her $\gamma \in \Gamma$ için M_γ'nın R_0-modül olduğunu söyleyebiliriz. Çünkü $R_0 M_\gamma \subseteq M_\gamma$ kapsaması her γ için sağlanır. Ayrıca yukarıdaki tanımdan herhangi bir Γ-dereceli $R = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} R_\gamma$ halkasının kendisi üzerinde bir Γ-dereceli modül olduğu kolayca görülür.

Tanım 3.3.4. *R, Γ-dereceli bir halka ve I, R'nin dereceli bir ideali ise R/I modülü de derecelidir.*

3.4 Hilbert Fonksiyonları ve Serileri

Tanım 3.4.1. *Önerme*(3.1.8)*'deki koşulları sağlayan $R = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]$ polinom halkalarına **pozitif dereceli halka** denir.*

Tanım 3.4.2. *$R = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} R_\gamma$ pozitif dereceli bir halka olmak üzere R halkasının **Hilbert fonksiyonu***

$$HF(R, \gamma) = boy_{\mathbb{K}}(R_\gamma)$$

şeklinde tanımlanır. Benzer şekilde $I = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} I_\gamma$, R halkasının dereceli bir ideali olmak üzere, I idealinin Hilbert fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlıdır.

$$HF(I, \gamma) = boy_{\mathbb{K}}(I_\gamma)$$

Tanım 3.4.3. *$R = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} R_\gamma$ pozitif dereceli bir halka olmak üzere R halkasının **Hilbert serisi** aşağıdaki şekilde tanımlıdır.*

$$HS(R, t) = \sum_{\gamma\in\Gamma} HF(R, \gamma) t^\gamma$$

Örnek 3.4.4. *$R = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]$ standart dereceli polinom halkasının Hilbert fonksiyonu aşağıdaki şekilde elde edilir.*

$$HF(R, d) = \binom{d + r - 1}{r - 1}$$

Örnek 3.4.5. *$R = \mathbb{K}[x]$ standart dereceli polinom halkasının Hilbert serisini hesaplayalım. Buradan*

$$R = \mathbb{K} \oplus \mathbb{K}x \oplus \mathbb{K}x^2 \oplus \ldots$$

olarak yazabiliriz. Böylece bir önceki örneği göz önünde bulundurursak her $d \in \Gamma$ *için* $HF(R,d) = \binom{d}{0} = 1$ *olarak elde ederiz. Dolayısıyla Hilbert serisini*

$$HS(R,t) = 1 + t + t^2 + \cdots = \frac{1}{1-t}$$

olarak elde ederiz.

Benzer şekilde $R = \mathbb{K}[x_1, x_2]$ *standart dereceli polinom halkasının Hilbert fonksiyonu* $HF(R,d) = \binom{d+1}{1} = d+1$ *olduğundan Hilbert serisini de*

$$HS(R,t) = \sum_{d=0}^{\infty}(d+1)t^d = \Big(\sum_{d=0}^{\infty} t^{d+1}\Big)' = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} t^n\Big)' = \Big(\frac{1}{1-t}\Big)' = \frac{1}{(1-t)^2}$$

olarak elde ederiz.

Buradan $R = \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_r]$ *standart dereceli polinom halkasının Hilbert serisi*

$$HS(R,t) = \frac{1}{(1-t)^r}$$

şeklinde bulunur.

Gerçekten, $(1-t)^{-(r-1)}$*'in türevi*

$$-(r-1)(1-t)^{-r}(-1) = \frac{r-1}{(1-t)^r} \tag{4}$$

olur. Hipotezden dolayı $\frac{1}{(1-t)^{r-1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+r-2}{r-2}t^n$ *olduğundan bu ifadenin türevi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\binom{n+r-2}{r-2}t^{n-1} = \sum_{d=0}^{\infty}(d+1)\binom{d+r-1}{r-2}t^d \tag{5}$$

olur. Aynı zamanda $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!k}$ *ve* $\binom{n}{k-1} = \frac{n!}{(n-k+1)(n-k)!(k-1)!}$ *olduğundan*

$$\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}$$

olur. Buradan

$$\binom{d+r-1}{r-1} = \binom{d+r-1}{r-2}\frac{d+r-1+1-(r-1)}{r-1} = \binom{d+r-1}{r-2}\frac{d+1}{r-1} \tag{6}$$

olarak elde edilir. (4) *ve* (5) *eşitliklerinden*

$$\frac{r-1}{(1-t)^r} = \sum_{d=0}^{\infty}(d+1)\binom{d+r-1}{r-2}t^d$$

olur. Bu eşitlikte (6) *eşitliğini göz önünde bulundurursak*

$$\frac{1}{(1-t)^r} = \sum_{d=0}^{\infty}\frac{d+1}{r-1}\binom{d+r-1}{r-2}t^d = \sum_{d=0}^{\infty}\binom{d+r-1}{r-1}t^d = \sum_{d=0}^{\infty} HF(R,d)t^d = HS(R,t)$$

şeklinde elde ederiz.

Teorem 3.4.6. *$R = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} R_\gamma$ poizitif dereceli bir halka ve $I = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} I_\gamma$ dereceli bir ideal olmak üzere R/I bölüm halkasının Hilbert fonksiyonu aşağıdaki şekilde verilir.*

$$HF(R/I,\gamma) = HF(R,\gamma) - HF(I,\gamma)$$

Yukarıdaki teorem ve Hilbert serisinin tanımı göz önünde bulundurulduğunda aşağıdaki sonuç kolaylıkla görülebilir.

Sonuç 3.4.7. *$R = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} R_\gamma$ pozitif dereceli bir halka ve $I = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} I_\gamma$ dereceli bir ideal olmak üzere R/I bölüm halkasının Hilbert serisi aşağıdaki şekilde verilir.*

$$HS(R/I,t) = HS(R,t) - HS(I,t)$$

Teorem 3.4.8. *[27, Serre] R dereceli bir $\mathbb{K}-$cebiri ve M sonlu üretilmiş dereceli bir R-modülü olsun. R'nin herhangi bir maksimal ideali $\mathbf{m}$'yi alalım.*

1. *Tek türlü belirli kuvazi-polinom $P(M)$ vardır öyle ki her $d \gg 0$ için $HF(M,d) = P(M,d)$ sağlanır.*

2. *$der(HS(M,t)) = maks\{d : HF(M,d) \neq P(M,d)\}$*

Uyarı. Varsayalım ki M sonlu üretilmiş dereceli R-modül olsun. M'nin Hilbert fonksiyonu,

$$HF(M,d) : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$
$$HF(M,d) = boy_{\mathbb{K}} M_d$$

fonksiyonu ile tanımlansın. Serre'in yukarıdaki teoreminden yola çıkarak söyleyebiliriz ki, bu fonksiyon **kuvazi-polinomdur**, bir başka deyişle, en az bir pozitif g tamsayısı (periyot) ve $P_0, \ldots, P_{g-1}$ polinomları vardır öyle ki $d \gg 0$ için $d \equiv i(modg)$ iken $HF(M,d) = P_i(d)$ durumu gerçekleşir.

Tanım 3.4.9. *M, Γ-dereceli bir R-modülü olmak üzere M'nin Hilbert serisi rasyonel fonksiyondur ve derecesine* ***M'nin α-değişmezi*** *denir.*

3.5 Serbest Çözülüm

Bu alt bölümde bir önceki bölümde tanım ve örneklerini vermiş olduğumuz R-modüllerinin homomorfizmalarının tanım ve özelliklerini verip daha sonra tam dizileri, kompleks ve zincir dönüşümleri ve serbest modülleri ele alarak serbest çözülüm konusunu anlatacağız.

Tanım 3.5.1. *M ve N sol R-modüller olmak üzere M'den N'ye tanımlı bir R-modül homomorfizması bir R-lineer dönüşümüdür. Dolayısıyla $\mu : M \to N$ lineer dönüşümü aşağıdaki özelliklerle aynı zamanda bir R-modül homomorfizmasıdır.*

$$\mu(m_1 + m_2) = \mu(m_1) + \mu(m_2), \quad \mu(m_1 \cdot m_2) = \mu(m_1) \cdot \mu(m_2)$$

Örnek 3.5.2.

1. *$\mathbb{R}$ vektör uzaylarının $\mathbb{R}$-lineer dönüşümleri bir $\mathbb{R}$-modül homomorfizmalarıdır.*

2. *Abel grup homomorfizmaları eğer abel grupları $\mathbb{Z}$-modül olarak düşünülürse $\mathbb{Z}$-modül homomorfizmalarıdır.*

3. *N herhangi bir sol R-modül ve $n_1, \ldots, n_r$, N'nin elemanları olmak üzere*

$$\phi : R^r \to N$$
$$\phi((a_1, \ldots, a_r)) = a_1 n_1 + \cdots + a_r n_r$$

şeklinde tanımlı ϕ dönüşümü bir R-modül homomorfizmasıdır.

Tanım 3.5.3. *M bir sol R-modül olsun. M'nin bir altmodülü olan N, skaler çarpma işlemi altında kapalı bir altgruptur. Ve bölüm modülü olan M/N, aşağıdaki şekilde tanımlanmış skalerle çarpma işlemi ile birlikte bir bölüm grubudur.*

$$R \times (M/N) \to M/N$$
$$(r, m + N) \to r(m + N) = rm + N$$

Tanım 3.5.4. *$\mu : M \to N$ bir modül homomorfizması olsun.*

*μ homomorfizmasının **çekirdeği** Çek(μ) $= \{m \in M : \mu(m) = 0\}$ şeklinde tanımlıdır ve bir altmodüldür.*

*μ homomorfizmasının **görüntüsü** Gör(μ) $= \{\mu(m) : m \in M\}$ şeklinde tanımlıdır. Benzer şekilde Gör(μ) de bir altmodüldür.*

*μ homomorfizmasının **eş çekirdeği** bir bölüm modülüdür ve EşÇek(μ) $= N/$Gör(μ) şeklinde tanımlıdır.*

Örnek 3.5.5.

$$\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$
$$z \to 2z$$

şeklinde tanımlı $\mathbb{Z}$-modül homomorfizmasını düşünelim. Bu homomorfizmanın çekirdeği, görüntüsü ve eş çekirdeği aşağıdaki şekildedir.

$$\text{Çek}(\phi) = 0, \text{Gör}(\phi) = 2\mathbb{Z} \text{ ve } \text{EşÇek}(\phi) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

Tanım 3.5.6. *(Tam Dizi) Her i için f_i'ler R-homomorfizmalar olmak üzere*

$$\cdots \to M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots$$

şeklindeki R-homomorfizmalarının dizisinde

$$\text{Gör}(f_{i-1}) = \text{Çek}(f_i)$$

*durumu sağlanıyorsa bu diziye M_i modülünde **tam** denir. Eğer her i için bu koşul sağlanıyorsa bu diziye **tam dizi** denir.*

Tanım 3.5.7. *(Kısa Tam Dizi) R halka ve M, N ve P, R-modül olsun. R-modül ve R-homomorfizmalarının aşağıdaki şekilde tanımlı tam dizisine **kısa tam dizi** denir.*

$$0 \to M \to N \to P \to 0$$

Bir başka deyişle,

$$0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0$$

şeklindeki dizinin kısa tam dizi olması için aşağıdaki koşullar sağlanmalıdır.

1. *f bir monomorfizmadır.*

2. *g bir epimorfizmadır.*

3. *Gör(f) = Çek(g)*

Örnek 3.5.8. *Aşağıda verilen dizi $\mathbb{Z}$-modüllerin bir kısa tam dizisidir.*

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$$

Öncelikle 2 *ile çarpım dönüşümünü f ve $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dönüşümünü g ile gösterelim. Gerçekten, g'nin çekirdeği $2\mathbb{Z}$ olduğundan g'nin çekirdeğinin f'nin görüntüsüne eşit olduğu kolayca görülür. Dolayısıyla bu dizi kısa tam dizidir.*

Tanım 3.5.9. *R-modül ve homomorfizmalarının aşağıdaki formda tanımlı ve her bir i için $\lambda_i\lambda_{i+1} = 0$ koşulunu sağlayan diagramına R-modüllerinin bir* ***zincir kompleksi*** *denir.*

$$\cdots \to M_{-2} \xrightarrow{\lambda_{-2}} M_{-1} \xrightarrow{\lambda_{-1}} M_0 \xrightarrow{\lambda_0} M_1 \xrightarrow{\lambda_1} M_2 \to \ldots$$

Uyarı. Benzer şekilde bir zincir kompleksinin tam olması için de her i için Gör(λ_i) = Çek(λ_{i+1}) durumunu sağlanması gereklidir.

Uyarı. Yukarıdaki tanımda vermiş olduğumuz $\lambda_i\lambda_{i+1} = 0$ ifadesi Gör$(\lambda_i) \subseteq$ Çek(λ_{i+1}) ifadesine denktir.

Tanım 3.5.10. *C bir zincir kompleksi olmak üzere bu kompleksin i'nci* ***homoloji grubu (ya da modülü)*** *$H_i(C)$ = Çek(λ_{i+1})/Gör(λ_i) şeklinde tanımlanır.*

Dolayısıyla bir zincir kompleksinin tam olması için Gör(λ_i) = Çek(λ_{i+1}) eşitliğinin sağlanması gerektiği durumunu göz önünde bulundurduğumuzda homoloji tanımından o zincir kompleksinin homolojisinin 0 olduğunu elde ederiz. Yani bir zincir kompleksinin tam olması için gerek ve yeter koşul her i için $H_i(C) = 0$'dır.

Örnek 3.5.11. *$R = \mathbb{K}[x]/(x^2)$ bölüm halkasını düşünelim. Aşağıdaki zincir kompleksi tamdır çünkü tüm homomorfizmaların çekirdekleri ve görüntüleri (x)'e eşit olduğundan birbirlerine eşittir. Ve dolayısıyla bu kompleksin homoloji grupları 0'dır.*

$$\cdots \to R \xrightarrow{\cdot x} R \xrightarrow{\cdot x} R \xrightarrow{\cdot x} R \to \ldots$$

Tanım 3.5.12. *R bir halka ve M bir R-modül olsun. M'nin aşağıda verilen özellikleri sağlayan $\{e_i : i \in I\}$ alt kümesini düşünelim.*

1. *$\{e_i : i \in I\}$ alt kümesi M modülünü üretir,*

2. *Her bir $m \in M$, her $i \in I$ için $r_i \in R$ olmak üzere $m = \sum_{i\in I} r_i e_i$ şeklinde tek türlü yazılır. Ve burada sadece sonlu sayıda r_i sıfırdan farklıdır.*

Buradan M modülüne $\{e_i : i \in I\}$ tabanı ile birlikte ***serbest modül*** *denir.*

Örnek 3.5.13. 1. *$\mathbb{R}$ üzerindeki herhangi bir vektör uzayı V bir serbest $\mathbb{R}$-modüldür.*

2. *R bir halka ve $M = R^n$ olmak üzere M,*

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0) \\ e_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0) \\ &\vdots \\ e_n &= (0, 0, 0, \ldots, 1) \end{aligned}$$

standart tabanıyla birlikte bir serbest modüldür.

3. *Bir $\mathbb{Z}$-modülü olan $\mathbb{Z}/2$ modülü serbest bir modül değildir. Çünkü bir tabana sahip değildir. Gerçekten bu modülün elemanları olan $\bar{1}$ ve $\bar{0}$ elemanlarını düşünürsek $\bar{1} \cdot \bar{0} = \bar{0}$ ve $\bar{1} \cdot 2 = \bar{0}$ olduğundan dolayı bu modülü üretebilecek lineer bağımsız bir küme bulmak imkansızdır.*

Örnek 3.5.14. *$R = \mathbb{K}[x, y]$ ve M, aşağıda verilen lineer denklemin tüm $(x_1, x_2, x_3) \in R^3$ çözümlerini içeren bir küme olsun.*

$$xX_1 + (y^2 - 3)X_2 + X_3$$

Buradan M'nin $b_1 = (0, 1, 3 - y^2)$ ve $b_2 = (1, 0, -x)$ tabanlarıyla birlikte bir serbest modül olduğunu söyleyebiliriz. Gerçekten, varsayalım ki (f_1, f_2, f_3), bu denklemin bir çözümü olsun. Buradan

$$xf_1 + (y^2 - 3)f_2 + f_3 = 0$$

olur. Düzenlersek $f_3 = (3 - y^2)f_2 - xf_1$ olacağından

$$(f_1, f_2, f_3) = (f_1, f_2, (3 - y^2)f_2 - xf_1) = f_1(1, 0, -x) + f_2(0, 1, (3 - y^2)) = f_1 b_2 + f_2 b_1$$

olur. Yani, $(f_1, f_2, f_3) = f_1 b_2 + f_2 b_1$ *eşitliğini elde ederiz. Ve böylece* $\{b_1, b_2\}$ *kümesinin* M *için bir üreteç kümesi olduğunu söyleyebiliriz. Son olarak* b_1 *ve* b_2*'nin lineer bağımsız olduğunu gösterirsek* $\{b_1, b_2\}$ *kümesinin* M *için bir taban olduğunu söyleyebiliriz. Buradan* $f, g \in R$ *olmak üzere* $fb_1 + gb_2 = 0$ *eşitliğinin sağlandığını kabul edelim. Buradan* $(g, f, (3 - y^2)f - xg) = (0, 0, 0)$ *olacağından* $f = g = 0$ *olmalıdır. Dolayısıyla* $\{b_1, b_2\}$ *kümesi* M *için bir tabandır. Böylece* M *bir serbest modüldür.*

Tanım 3.5.15. *M, $F = \{f_1, \ldots, f_r\}$ kümesi tarafından üretilen bir modül olmak üzere, F'nin* ***syzygy modülü*** *aşağıda verilen küme olarak tanımlanır.*

$$Syz(F) = \{(g_1, \ldots, g_r) \in R^r : f_1 g_1 + \cdots + f_r g_r = 0\}$$

Bu kümenin elemanları ***syzygy*** *olarak adlandırılır.*

Örnek 3.5.16. *$R = \mathbb{K}[x, y]$ polinom halkasını ve $I = (x^2, xy, y^2) \subseteq R$ idealini düşünelim. I'nın $f_1 = x^2, f_2 = xy$ ve $f_3 = y^2$ tarafından üretilen bir R-modül olduğunu kolayca söyleyebiliriz. Ve aynı zamanda*

$$y \cdot x^2 - x \cdot xy = 0, \quad y \cdot xy - x \cdot y^2 = 0$$

ilişkilerinden yola çıkarak A matrisini oluşturabiliriz.

$$A = \begin{pmatrix} y & 0 \\ -x & y \\ 0 & -x \end{pmatrix}$$

Buradan $IA = 0$ olduğu görülür. Aslında bu iki ilişki bize I'nın tüm syzygylerini verir.

$$f_1 x^2 + f_2 xy + f_3 y^2 = 0 \Rightarrow x(f_1 x + f_2 y) = -f_3 y$$

Buradan $y \mid f_1$ ve $x \mid f_3$ olarak elde edilir. Eğer $f_1 = yf$ ve $f_3 = -xg$ dersek,

$$f_2 xy = -x^2 yf + xy^2 g \Rightarrow f_2 = -xf + yg$$

olur. Dolayısıyla

$$(f_1, f_2, f_3) = (yf, -xf + yg, -xg) = f(y, -x, 0) + g(0, y, -x)$$

olur. Böylece I'nın syzygyleri R^3'ün A matrisi tarafından üretilen serbest alt modülünü verir.

Aynı zamanda aşağıda vereceğimiz kodları `Macaulay2` programında kullanarak bir idealin syzygylerini kolayca bulabiliriz.

```
i1 : R=QQ[x,y]
i2 : I=ideal(x^2,x*y,y^2)
i3 : M=gens I
i4 : syz M
```

Tanım 3.5.17. *$F = \{f_1, \ldots, f_r\}$, R^r'deki polinomların bir kümesi olmak üzere yukarıdaki tanım ile birlikte düşünüldüğünde*

$$Syz_0(F) := Syz(F) \text{ ve } i \geq 1 \text{ için } Syz_i(F) := Syz(Syz_{i-1}(F))$$

şeklinde tanımlanan $Syz_i(F)$ kümesini F'nin i'nci syzygy modülü olarak adlandıracağız.

Tanım 3.5.18. *M, F tarafından üretilen bir R-modül olmak üzere $Syz(F)$ modülünün üreteç kümesi M modülü için bir* ***sunumdur****. Ayrıca A, M modülü için bir sunum matrisi olmak üzere bu matrisin sütunları $Syz(F)$ modülünün üreteçlerinden oluşur. Sunum kavramına açıklık getirmek için aşağıdaki formda bir tam diziyi düşünelim.*

$$R^s \xrightarrow{g_1} R^r \xrightarrow{g_0} M \to 0$$

Bu tam dizide s ile $Syz(F)$ modülünün üreteç kümesinin eleman sayısını, g_0 dönüşümü ile M'nin üreteç matrisini ve g_1 dönüşümü ile ise M'nin sunum matrisi olarak tanımladığımız A tarafından verilen dönüşümü ifade edelim. Dolayısıyla bu tam dizi M'nin bir sunumudur.

Şimdi ise özel bir sunum olan serbest çözülümü tanımlayacağız.

Tanım 3.5.19. *(Serbest Çözülüm) M bir R-modül olsun. Aşağıda verilen kompleks eğer*

1. *Her bir i için F_i'ler serbest modüldür ve*

2. *Her $i > 0$ için $H_i(C) = 0$ ve $H_0(C) = M$ (Diğer bir deyişle bu kompleks tamdır)*

koşulları sağlıyorsa bu komplekse M'nin ***serbest çözülümü*** *denir.*

$$C : \cdots \to F_{i+1} \xrightarrow{\lambda_{i+1}} F_i \xrightarrow{\lambda_i} F_{i-1} \to \cdots \to F_1 \xrightarrow{\lambda_1} F_0 \to M \to 0$$

Burada eğer en az bir l tamsayısı var ve her $i > l$ için $F_i = 0$ iken $F_l \neq 0$ durumu sağlanıyor ise bu çözülüme sonludur denir. Ve l uzunluklu serbest çözülüm olarak adlandırılır.

Aşağıda vereceğimiz Hilbert'in teoremi ile serbest çözülümün en fazla ne kadar uzunlukta olabileceğini söyleyebiliriz. Bu teoreme geçmeden önce serbest çözülüme bir örnek vereceğiz. Bu örneği verirken `Macaulay2` adlı programı kullanacağız. Bir idealin bir serbest çözülümünü bulmak için örnekte kullanacağımız kodlar aşağıdaki şekildedir.

```
i1 : R=KK[x,y,z]
i2 : I=ideal(x^3,y^2,z)
i3 : rs=res I
i4 : rs.dd
```

Örnek 3.5.20. *$R = \mathbb{K}[x, y, z]$ polinom halkası olmak üzere $I = (x^3, y^2, z)$ idealinin serbest çözülümünü* `Macaulay2` *programı yardımıyla yukarıda verdiğimiz kodlar ile bulabiliriz. Buradan I idealinin serbest çözülümü aşağıdaki şekildedir.*

$$0 \xrightarrow{0} R^1 \xrightarrow{\begin{bmatrix} x^3 \\ -y^2 \\ z \end{bmatrix}} R^3 \xrightarrow{\begin{bmatrix} -y^2 & -x^3 & 0 \\ z & 0 & -x^3 \\ 0 & z & y^2 \end{bmatrix}} R^3 \xrightarrow{\begin{bmatrix} z & y^2 & x^3 \end{bmatrix}} R \to 0$$

Yukarıdaki örnekte I idealinin syzgyleri $Syz_1 = \begin{bmatrix} -y^2 & -x^3 & 0 \\ z & 0 & -x^3 \\ 0 & z & y^2 \end{bmatrix}$ matrisi ile verilmiştir. Diğer syzygy modülü ise $Syz_2 = \begin{bmatrix} x^3 \\ -y^2 \\ z \end{bmatrix}$ olarak verilmiştir. Burada Syz_1 matrisi 3 tane ve Syz_2 matrisi 1 tane üretece sahip olduğundan serbest çözülüm $0 \to R^1 \to R^3 \to R^3 \to R \to 0$ şeklindedir.

Teorem 3.5.21. *[28, Theorem 2.1](Hilbert Syzygy Teorem) $R = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]$ bir polinom halkası olmak üzere her sonlu üretilmiş R-modül, uzunluğu en fazla r olan bir sonlu serbest çözülüme sahiptir.*

3.6 Dereceli Serbest Çözülüm

Dereceli halkaları ve modülleri daha önce tanımladığımız için bu bölüme önce bir önerme vererek başlayacağız.

Önerme 3.6.1. *M bir dereceli R-modül ve a bir tam sayı olsun. $M(a)_d = M_{a+d}$ şeklinde tanımlı olmak üzere*

$$M(a) = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} M(a)_d$$

eşitliğini sağlayan $M(a)$, bir dereceli R-modüldür.

Kanıt. M dereceli bir modül olduğundan dolayı $M = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} M_\gamma$ olur ve aynı zamanda her bir $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ için $R_{\gamma_1} M_{\gamma_2} \subseteq M_{\gamma_1 + \gamma_2}$ durumu sağlanır. Ve $\Gamma = \mathbb{Z}$ olarak düşünürsek M_{a+d}'nin $\{M_\gamma : \gamma \in \mathbb{Z}\}$ kümesinin bir elemanı olduğunu söyleyebiliriz. Bu yüzden M_{a+d}, $M(a)$'nın toplamsal bir altgrubudur. Aynı zamanda M dereceli bir modül olduğundan dolayı $R_\gamma M_{a+d} \subseteq M_{\gamma+a+d}$ durumu elde edilir. Dolayısıyla $M(a)$ dereceli bir modüldür. □

Buradan aşağıdaki tanımı verebiliriz.

Tanım 3.6.2. *M dereceli bir modül olmak üzere her $a \in \mathbb{Z}$ için*

$$M(a)_d = M_{d+a}$$

olmak üzere $M(a) := \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} M(a)_d$ şeklinde tanımlanan dereceli modüle M'nin a ***derecesi kadar kaydırılması*** *denir.*

Teorem 3.6.3. *[28, Theorem 3.8](Dereceli Hilbert Syzygy Teorem) $R = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]$ dereceli bir polinom halkası olmak üzere her sonlu üretilmiş dereceli R-modül, uzunluğu en fazla r olan sonlu uzunluklu bir dereceli serbest çözülüme sahiptir.*

Örnek 3.6.4. *$R = \mathbb{K}[x_1, x_2, x_3]$ polinom halkasını $\mathbf{w} = (3, 4, 5)$ derecelendirmesi ile birlikte düşünelim. Aynı zamanda R $\mathbf{w}$-dereceli halkasının bir I idealini alalım.*

$I = (x_2^5 - x_3^4, x_1^{10} - x_3^6)$ olsun. I idealinin üreteçlerini sırasıyla f_1, f_2 olarak adlandıralım. Yani, $f_1 = x_2^5 - x_3^4$ ve $f_2 = x_1^{10} - x_3^6$ olsun. Dolayısıyla bu üreteçlerin derecelerini $der_R(f_1) = 20$ ve $der_R(f_2) = 30$ olarak elde ederiz. Öncelikle bu idealin serbest çözülümünü verelim. Daha sonra dereceli serbest çözülümünü vereceğiz.

$$0 \to R \xrightarrow{\begin{bmatrix} -f_2 \\ f_1 \end{bmatrix}} R^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix}} R \xrightarrow{g \to g+I} R/I \to 0$$

Şimdi ise I idealinin dereceli serbest çözülümünü vereceğiz. Yukarıdaki çözülümde $\begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix}$ çarpma dönüşümünü ϕ_1 olarak adlandırırsak, ϕ_1 dönüşümü aşağıdaki şekilde tanımlıdır.

$$\phi_1 : R^2 \to R$$
$$(a, b) \to (af_1 + bf_2)$$

Bu dönüşümün dereceyi koruması için derecesi 0 *olan elemanları derecesi sıfır olanlara götürmesi gerektiğinden, $der_R(af_1) = der(a) + 20 = 0$ ve $der_R(bf_2) = der(b) + 30 = 0$ olur. Böylece $der_R(a) = -20$ ve $der_R(b) = -30$ olarak elde ederiz. Yani, $a \in R(-20)_0$ ve $b \in R(-30)_0$ olmalıdır.*

Aynı zamanda $\begin{bmatrix} -f_2 \\ f_1 \end{bmatrix}$ matrisi ile çarpma dönüşümünü ϕ_2 olarak adlandırırsak, ϕ_2 dönüşümü aşağıdaki şekilde tanımlıdır.

$$\phi_2 : R \to R^2$$
$$c \to (-f_2c, f_1c)$$

Bu dönüşümün de dereceyi koruması gerektiğinden, $der_R(-f_2c) = der(c) + 30 = -20$ ve $der_R(f_1c) = der(c) + 20 = -30$ olur. Böylece $der_R(c) = -50$ ve dolayısıyla $c \in R(-50)_0$ olmalıdır. Dolayısıyla I idealinin ***dereceli serbest çözülümü*** *aşağıdaki şekilde verilir.*

$$0 \to R(-50) \xrightarrow{\begin{bmatrix} -f_2 \\ f_1 \end{bmatrix}} R(-20) \oplus (-30) \xrightarrow{\begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix}} R \to R/I \to 0$$

3.7 Hilbert Serileri ve Serbest Çözülüm İlişkisi

Bu bölümde Hilbert Serileri ve Serbet Çözülümler arasındaki ilişkiyi örneklerle birlikte ele alarak ilgili teoremleri vereceğiz.

Teorem 3.7.1. *[28, Chapter 6,Theorem 4.4] $R = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]$ ve M dereceli bir R-modül olmak üzere M modülünün herhangi bir dereceli serbest çözülümü aşağıdaki şekilde verilsin.*

$$0 \to F_k \to F_{k-1} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$$

M modülünün Hilbert fonksiyonu aşağıdaki şekilde verilir.

$$HF(M, d) = boy_{\mathbb{K}} M_d = \sum_{j=1}^{k} (-1)^j boy_{\mathbb{K}} (F_j)_d = \sum_{j=1}^{k} (-1)^j HF(F_j, d)$$

Kanıt. İspatı için [28, Proof of Theorem 4.4]'e bakılabilir. □

Uyarı. Yukarıdaki teoremin bir sonucu olarak M modülünün Hilbert serisi de aşağıdaki şekilde verilir.

$$HS(M, t) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^j HS(F_j, t)$$

Örnek 3.7.2. *Yukarıda ele aldığımız Örnek(3.6.4)'i tekrardan göz önünde bulunduralım. Öncelikle bu örnek için dereceli serbest çözülümü aşağıdaki şekilde elde ettiğimizi hatırlatalım.*

$$0 \to R(-50) \xrightarrow{\begin{bmatrix} -f_2 \\ f_1 \end{bmatrix}} R(-20) \oplus (-30) \xrightarrow{\begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix}} R \to R/I = M \to 0$$

Yukarıda vermiş olduğumuz Teorem(3.7.1)'in sonucundan dolayı

$$HS(M, t) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^j HS(F_j, t)$$

olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla

$$HS(M, t) = HS(R, t) - HS(R(-20), t) - HS(R(-30), t) + HS(R(-50), t)$$

olarak elde ederiz. Aynı zamanda $HS(R(-a),t) = t^a HS(R,t)$ olduğundan

$$HS(M,t) = HS(R,t) - t^{20}HS(R,t) - t^{30}HS(R,t) + t^{50}HS(R,t)$$

olur. Yukarıdaki eşitlikte $HS(R,t) = \frac{1}{(1-t^3)(1-t^4)(1-t^5)}$ olduğunu göz önünde bulundurursak R/I bölüm halkasının Hilbert serisini aşağıdaki şekilde elde ederiz.

$$HS(R/I,t) = \frac{1 - t^{20} - t^{30} + t^{50}}{(1-t^3)(1-t^4)(1-t^5)}$$

Önerme 3.7.3. *$R = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]$, $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_r)$ derecelendirmesi ile birlikte dereceli bir polinom halkası ve her $1 \leq i \leq k$ için $d_i \in \mathbb{Z}, c_i \in \mathbb{N}$ olmak üzere*

$$F_i = \bigoplus_{j=1}^{c_i} R(-d_{ij})$$

modülünün Hilbert serisi aşağıdaki şekilde verilir.

$$HS(F_i,t) = \frac{t^{d_{i1}} + \cdots + t^{d_{ic_i}}}{\prod_{i=1}^{r}(1 - t^{w_i})}$$

Sonuç 3.7.4. *Eğer Teorem(3.7.1) ile Önerme(3.7.3)'ü birlikte düşünürsek $HS(M,t) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i HS(F_i,t)$ ve $p(t) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i(t^{d_{i1}} + \cdots + t^{d_{ic_i}})$ olmak üzere aşağıdaki sonucu elde ederiz.*

$$HS(M,t) = \frac{p(t)}{\prod_{i=1}^{r}(1 - t^{w_i})}$$

Tanım 3.7.5. *$R = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]$ polinom halkası ve M sonlu üretilmiş pozitif dereceli bir R-modül olmak üzere M'nin dereceli serbest çözülümünü göz önünde bulunduralım. Her $1 \leq i \leq k$ için $d_i \in \mathbb{Z}$ ve $c_i \in \mathbb{N}$ olmak üzere*

$$F_i = \bigoplus_{j=1}^{c_i} R(-d_{ij})$$

*modülündeki c_i sayısına **M'nin i'inci Betti sayısı** denir. Ve her $1 \leq i \leq k$ için $c_i = \beta_i(M)$ ile gösterelim. Ayrıca $d_{ij} = d$ olan j'lerin sayısına ise **M'nin dereceli Betti sayısı** denir ve $\beta_{i,d}(M)$ ile gösterilir.*

Örnek 3.7.6. *Benzer şekilde aşağıdaki serbest çözülümü göz önüne alalım.*

$$0 \to R(-15) \to R(-5)^2 \oplus (-10) \to R \to R/I = M \to 0$$

Burada M'nin tüm Betti sayıları $\beta_0(M) = 1$, $\beta_1(M) = \beta_{1,5}(M) + \beta_{1,10}(M) = 2+1 = 3$ ve $\beta_2(M) = \beta_{2,15}(M) = 1$ şeklindedir. Burada $\beta_{1,5}, \beta_{1,10}$ ve $\beta_{2,15}$ sayıları dereceli Betti sayılarıdır.

Şimdi Betti Sayıları ve Hilbert Serileri arasındaki ilişkiyi gösteren bir önerme vereceğiz.

Önerme 3.7.7. *$R = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]$, $\Gamma_{\mathbf{w}}$-dereceli bir polinom halkası ve M dereceli bir R-modül olmak üzere M'nin Hilbert serisinin Betti sayıları ile birlikte aşağıdaki şekilde verilir.*

$$HS(M,t) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{r}(1-t^{w_i})} \sum_{i=0}^{k} \sum_{d \in \Gamma_{\mathbf{w}}} (-1)^i \beta_{i,d} t^d$$

Uyarı. R, $\mathbf{w}$-dereceli bir polinom halkası iken bu halkanın herhangi bir I ideali için R/I bölüm halkasının Hilbert serisini aşağıda vereceğimiz komutları `Macaulay2` [29] programında kullanarak kolayca hesaplayabiliriz. Aşağıdaki komutlarda özel olarak $\mathbb{F}_{11}$ sonlu cismi üzerindeki $\mathbf{w} = (3, 4, 5)$ dereceli polinom halkasının $I = (x_1, x_2x_3)$ ideali dikkate alınmıştır.

```
i1 : q=11;
i2 : F=ZZ/q;
i3 : W = {3,4,5}
i4 : R=ZZ[x_1..x_(#W), Degrees=>W]
o4 = R
o4 : PolynomialRing
i5 : I=ideal(x_1,x_2*x_3)
i6 : Q=R/I
o6 = Q
o6 : QuotientRing
i7 : hilbertSeries Q
```

4 AĞIRLIKLI PROJEKTİF UZAY

4.1 Temel Tanımlar, Özellikler ve Örnekler

Tanım 4.1.1. *Her i için $w_i \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_r)$ olsun. $\mathbb{K}^*$ grubunun $\mathbb{A}^r \setminus \{0\}$ kümesi üzerindeki etkisini her $\lambda \in \mathbb{K}^*$ için*

$$\lambda(x_1, \ldots, x_r) = (\lambda^{w_1} x_1, \ldots, \lambda^{w_r} x_r)$$

*şeklinde tanımlayalım. Burada $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_r)$'i **ağırlık** olarak adlandıracağız.*

$$\mathbb{P}(w_1, \ldots, w_r) = (\mathbb{A}^r \setminus \{0\})/K^*$$

*şeklinde tanımlanan denklik sınıflarının bir kümesine **ağırlıklı projektif uzay** denir. Yani ağırlıklı projektif uzayın noktaları yukarıda tanımladığımız denklik sınıflarıdır. Ağırlıklı projektif uzayı tez boyunca $\mathbb{P}_{\mathbf{w}}$ kısaltması ile göstereceğiz.*

Uyarı. Yukarıdaki tanımdan ağırlıklı projektif uzayın noktaları birer denklik sınıfı olduğundan $[x_1 : \cdots : x_r] \in \mathbb{P}_{\mathbf{w}}$ noktası aşağıdaki şekilde tanımlıdır.

$$[x_1 : \cdots : x_r] = \{(x_1^{'}, \ldots, x_r^{'}) : \lambda \in \mathbb{K}^* \text{ ve her } i = 1, \ldots, r \text{ için } x_i^{'} = \lambda^{w_i} x_i\}$$

Örnek 4.1.2. $\mathbb{P}_{\mathbf{w}} = \mathbb{P}(2,3,7)$ *ağırlıklı projektif uzayını göz önüne alalım. Burada tanımdan da anlaşılacağı gibi* $\mathbf{w} = (2,3,7)$ *ağırlıktır.* $\mathbb{P}(2,3,7)$ *uzayının herhangi bir noktası*

$$[x_1 : x_2 : x_3] = \lambda^{(2,3,7)}(x_1, x_2, x_3) = (\lambda^2 x_1, \lambda^3 x_2, \lambda^7 x_3)$$

şeklindedir.

Özel olarak $[1:2:3]$ *ve* $\lambda = 3$ *alırsak,* $[1:2:3] = (3^2, 3^3 2, 3^7 3) = (9, 54, 6561)$ *elde ederiz.*

Ağırlıklı projektif uzayın temel özelliklerini Lemma(4.1.3) ve Önerme(4.1.4) ile vereceğiz.

Lemma 4.1.3. *[30, Lemma 3A.3] c sayısı pozitif bir tam sayı olmak üzere ağırlıklı* *projektif uzaylarda aşağıdaki izomorfluk vardır.*

$$\mathbb{P}(w_1, \ldots, w_r) \cong \mathbb{P}(cw_1, \ldots, cw_r)$$

Önerme 4.1.4. *[30, Proposition 3C.5] Her $i = 1, \ldots, r$ için c_i'ler pozitif tam sayı ve $c_i = ekok(ebob(w_1, \ldots, w_{i-1}, w_{i+1}, \ldots, w_r))$ olmak üzere ağırlıklı projektif uzaylarda aşağıdaki izomorfluk vardır.*

$$\mathbb{P}(w_1, \ldots, w_r) \cong \mathbb{P}\left(\frac{w_1}{c_1}, \ldots, \frac{w_r}{c_r}\right)$$

Örnek 4.1.5. *Yukarıda verdiğimiz Lemma(4.1.3) ve Önerme(4.1.4)'e örnek olarak aşağıdaki ağırlıklı projektif uzayları düşünebiliriz.*

$$\mathbb{P}(4, 10, 25) \cong \mathbb{P}(4, 2, 5) \cong \mathbb{P}(2, 1, 5)$$

Uyarı. Tez boyunca $i = 1, \ldots, r$ olmak üzere $(a_i) \in \mathbb{N}^r$ vektörü için $\mathbf{a}$ kısaltmasını ve dolayısıyla $x_1^{a_1} \cdots x_r^{a_r}$ monomu için $x^{\mathbf{a}}$ kısaltmasını kullanacağız.

Tanım 4.1.6. *Her bir monomun ağırlığı $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_r)$ olmak üzere $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]$ halkasına* **w-*ağırlıklı polinom halkası*** *denir. Burada her bir monomun ağırlığını derecesi gibi düşünebiliriz. Yani ağırlıklı polinom halkasında her bir monom için*

$$der(\prod_{i=1}^{r} x_i^{a_i}) = \sum_{i=1}^{r} w_i a_i$$

durumu sağlanır.

Tanım 4.1.7. $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_r)$ *ağırlık olmak üzere $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]$* **w**-*ağırlıklı polinom halkası ve $f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]$ olsun. Eğer*

$$f = \sum_{i=1}^{s} c_i(\prod_{j=1}^{r} x_j^{d_j^{(i)}})$$

olacak şekilde $c_i \in \mathbb{K}$ ve $s \in \mathbb{N}$ varsa ve her $1 \leq i \leq r$ için $\sum_{j=1}^{r} w_j d_j{}^{(i)} = d$ durumu sağlanıyorsa, f polinomuna ***d dereceli* w*-ağırlıklı homojen polinom*** *denir.*

Uyarı. Eğer f polinomu d dereceli **w**-ağırlıklı homojen bir polinom ise yukarıdaki tanım göz önünde bulundurulduğunda herhangi bir $\lambda \in \mathbb{K}^*$ için

$$f(\lambda^{w_1}x_1, \ldots, \lambda^{w_r}x_r) = \lambda^d f(x_1, \ldots, x_r)$$

eşitliği sağlanır.

Uyarı. Eğer $\mathbf{w} = (1, \ldots, 1)$ olarak alırsak $\mathbb{P}(1, \ldots, 1) = \mathbb{P}^r$ olduğu açıkça görülür. Yani projektif uzay, ağırlıklı projektif uzayın örneği olarak düşünülebilir.

4.2 Projektif Uzay

Tanım 4.2.1. *$\mathbb{A}^{r+1}$ afin uzayı göz önüne alalım. $\mathbb{A}^{r+1}$ uzayındaki orjinden geçen tüm doğruların kümesine (r-boyutlu)* ***projektif uzay*** *denir. $\mathbb{P}^r(\mathbb{K})$ ile veya sadece $\mathbb{P}^r$ ile gösterilir.*

Aynı zamanda, her $\lambda \in \mathbb{K}^*$ için $(x_1, \ldots, x_{r+1}) \sim (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_{r+1})$ koşulu sağlanmak üzere projektif uzayı $\mathbb{P}^r = (\mathbb{A}^{r+1} \setminus \{0\})/\mathbb{K}^*$ şeklinde tanımlayabiliriz. Başka bir deyişle $\mathbb{A}^{r+1} \setminus \{0\}$ uzayı üzerindeki iki nokta eğer denkse bu iki nokta orjinden geçen aynı doğru üzerindedirler. Bir $(x_1, \ldots, x_{r+1})$ noktasının denklik sınıfı $[x_1 : \cdots : x_{r+1}]$ ile gösterilir. Yani, projektif uzay

$$\mathbb{P}^r(\mathbb{K}) = \{[x_1 : \cdots : x_{r+1}] : (x_1, \ldots, x_{r+1}) \in \mathbb{A}^{r+1} \setminus \{0\}\}$$

şeklinde denklik sınıflarının bir kümesi biçimindedir. Projektif uzayın elemanlarına da ***nokta*** *denir.*

Uyarı. $\mathbb{P}^r$ projektif uzayını $\mathbb{A}^r$ afin uzayının birbirleriyle kesişen (çakışan) $r+1$ kopyası olarak da düşünebiliriz. Gerçekten, $[x_1, \ldots, x_{r+1}]$ noktası afin koordinatlar cinsinden aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$[x_1, \ldots, x_{r+1}] = \left[\frac{x_1}{x_i} : \ldots : 1 : \ldots : \frac{x_{r+1}}{x_i}\right]$$

Örnek 4.2.2. *$\mathbb{P}^2$ projektif uzayını ve herhangi bir $[x_1 : x_2 : x_3]$ noktasını alalım.*

$$U_{x_1} = \{\left[1 : \frac{x_2}{x_1} : \frac{x_3}{x_1}\right] \in \mathbb{P}^2 : x_1 \neq 0\} \cong \{[1 : u : v] : u, v \in \mathbb{K}\} = \{(u, v) : u, v \in \mathbb{K}\} = \mathbb{A}^2$$

Benzer şekilde,

$$U_{x_2} = \{[x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{P}^2 : x_2 \neq 0\} = \{\left[\frac{x_1}{x_2} : 1 : \frac{x_3}{x_2}\right] \in \mathbb{P}^2 : x_2 \neq 0\}$$

$$U_{x_3} = \{[x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{P}^2 : x_3 \neq 0\} = \{\left[\frac{x_1}{x_3} : \frac{x_2}{x_3} : 1\right] \in \mathbb{P}^2 : x_3 \neq 0\}$$

yazabiliriz.

Örnek 4.2.3. *Aşağıdaki durumları yukarıda verdiğimiz uyarıya örnek olarak düşünebiliriz.*

1. $\mathbb{P}^0$ *projektif uzayı bir tek noktadır.*
2. $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}^0 \cup \mathbb{A}^1$ *projektif uzayı projektif doğru olarak ifade edilebilir.*
3. $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^1 \cup \mathbb{A}^2$ *projektif uzayı projektif düzlem olarak ifade edilebilir.*

Tanım 4.2.4. *Her* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_{r+1}) \in \mathbb{N}^{r+1}$ *için* $c_a \in \mathbb{K}$ *sıfırdan farklı bir katsayı ve* $x^{\mathbf{a}} = x_1^{a_1} \cdots x_{r+1}^{a_{r+1}}$ *olmak üzere* $f = \sum_{\mathbf{a}} c_{\mathbf{a}} x^{\mathbf{a}}$ *polinomunda* $\sum a_i = d \in \mathbb{N}$ *koşulu sağlanıyorsa bu* f *polinomuna derecesi* d *olan bir* ***homojen polinom*** *denir.*

Örnek 4.2.5. $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1^5 + x_1x_2x_4^3 - 4x_1x_3^2x_5^2 + 5x_5^5 - x_1^3x_3^2$ *polinomu derecesi 5 olan homojen bir polinomdur.*

Örnek 4.2.6. $x^{\mathbf{a}} - x^{\mathbf{b}} = x_1^{a_1} \cdots x_{r+1}^{a_{r+1}} - x_1^{b_1} \cdots x_{r+1}^{b_{r+1}}$ *binomununun homojen olması için gerek ve yeter koşul* $\sum_{i=1}^{r+1} a_i = \sum_{i=1}^{r+1} b_i$ *eşitliğinin sağlanmasıdır.*

Uyarı. Projektif uzayın noktaları birer denklik sınıfı olduğundan dolayı homojen bile olsa bir polinomun bir noktadaki değeri tek türlü belirlenemez. Örneğin $f(x_1, x_2) = x_1x_2 - x_2^2$ homojen polinomunu düşünürsek $f(\lambda u_1, \lambda u_2) = \lambda^2 u_1u_2 - \lambda^2 u_2^2 = \lambda^2(u_1u_2 - u_2^2)$ elde edilir. Ancak homojen polinomlarla çalışırsak en azından bu değerin 0 olup olmaması denklik sınıfının temsilcisinden bağımsızdır. Çünkü λ sıfır değildir.

Tanım 4.2.7. $S \subseteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{r+1}]$ *homojen polinomlar ailesi olmak üzere,*

$$V_{\mathbb{P}}(S) = \{P \in \mathbb{P}^r : \text{ her } f \in S \text{ için } f(P) = 0\}$$

kümesine homojen polinomlar tarafından belirlenen ***projektif çeşitlem*** *denir.*

5 AĞIRLIKLI PROJEKTİF SİMİTİN ALTGRUPLARI

5.1 Parametrik Altgruplar

Tanım 5.1.1. *Aşağıdaki şekilde tanımlanan $\mathbb{T}_{\mathbf{w}} \subset \mathbb{P}_{\mathbf{w}}$ kümesine **ağırlıklı projektif simit** denir.*

$$\mathbb{T}_{\mathbf{w}} = \mathbb{T}(w_1, \ldots, w_r) := \{[t_1 : \cdots : t_r] \in \mathbb{P}_{\mathbf{w}} : \text{ her } i = 1, \ldots, r \text{ için } t_i \neq 0\}$$

Ayrıca $\mathbb{T}_{\mathbf{w}}$ simitinin eleman sayısı aşağıdaki şekilde verilir.

$$|\mathbb{T}_{\mathbf{w}}| = \left|\frac{(\mathbb{F}_q^*)^r}{\mathbb{K}^*}\right| = \frac{|(\mathbb{F}_q^*)^r|}{|\mathbb{K}^*|} = (q-1)^{r-1}$$

Tanım 5.1.2. *$A = (a_{ij})$ girdileri tam sayı olan bir $s \times r$ matris olmak üzere*

$$\mathbb{T}_{\mathbf{w},A} = \{[t^{a_1} : \cdots : t^{a_r}] : t = (t_1, \ldots, t_s) \in (\mathbb{K}^*)^s\}$$

*şeklinde tanımlanan kümeye **A'ya iliştirilen ağırlıklı projektif simit** denir.*

Örnek 5.1.3.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

ve $\mathbf{w} = (3, 4, 5)$ olmak üzere, $\mathbb{P}(3, 4, 5)$ ağırlıklı projektif uzayında A matrisine iliştirilen ağırlıklı projektif simit

$$\mathbb{T}_{\mathbf{w},A} = \{[t_1 t_2^3 : t_1^2 t_2^4 : t_1^3 t_2^5] : t_1, t_2 \in \mathbb{K}^*\}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 5.1.4. *$\mathbb{F}_3$ sonlu cismi için $\mathbb{T}_{\mathbf{w},A} = \{[1 : 1 : 1]\}$ olduğundan ağırlıklı projektif simitin eleman sayısı $|\mathbb{T}_{\mathbf{w},A}| = 1$ olur. $\mathbb{F}_5$ sonlu cismi için ise $\mathbb{T}_{\mathbf{w},A} = \{[1 : 1 : 1], [2 : 4 : 3]\}$ olduğundan $|\mathbb{T}_{\mathbf{w},A}| = 2$ olur. Son olarak $\mathbb{F}_7$ sonlu cismi için $\mathbb{T}_{\mathbf{w},A} = \{[1 : 1 : 1], [2 : 4 : 1], [3 : 2 : 6]\}$ olduğundan $|\mathbb{T}_{\mathbf{w},A}| = 3$ olarak elde edilir.*

5.2 Sıfırlayan İdealler

Bu bölümde $\mathbb{T}_{\mathbf{w}}$ ve $\mathbb{T}_{\mathbf{w},A}$ simitli kümelerinin sıfırlayan ideallerini ele alacağız.

Tanım 5.2.1. $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{N}^r$ *olmak üzere* $x^{\mathbf{a}} - x^{\mathbf{b}}$ *biçimindeki binomlar tarafından üretilen herhangi bir* $I \subset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]$ *idealine* ***binom ideal*** *denir.*

Tanım 5.2.2. $\mathcal{L} \subset \mathbb{Z}^r$ *kafesinden kasıt bir* $n \in \mathbb{N}$ *için* $\mathbb{Z}^n$*'ye izomorf bir grup olmak üzere,*

$$I_{\mathcal{L}} := \langle x^{\mathbf{a}} - x^{\mathbf{b}} : \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{N}^r \text{ için } \mathbf{a} - \mathbf{b} \in \mathcal{L} \rangle \subset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]$$

şeklinde tanımlanan ideale ***kafes ideal(latis ideal)*** *denir.*

Uyarı. Her $1 \leq i \leq r$ için $\mathrm{der}(x_i) = w_i$ derecelendirilmesiyle birlikte $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]$ halkasını $\mathbb{P}_{\mathbf{w}}$ ağırlıklı projektif uzayının koordinat halkası olarak alalım. $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_r)$ ve $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{N}^r$ olmak üzere $x^{\mathbf{a}} - x^{\mathbf{b}}$ binomunun homojen olması için gerek ve yeter koşul $\langle \mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{w} \rangle = 0$ olmasıdır. Burada $\langle . \rangle$ standart iç çarpımdır. Gerçekten, her $1 \leq i \leq r$ için $\mathrm{der}(x_i) = w_i$ olduğundan, $\mathrm{der}(x^{\mathbf{a}}) = a_1\mathrm{der}(x_1) + a_2\mathrm{der}(x_2) + \cdots + a_r\mathrm{der}(x_r) = a_1 w_1 + a_2 w_2 + \cdots + a_r w_r = \mathbf{w}(\mathbf{a})$ olarak yazabiliriz. Benzer şekilde $\mathrm{der}(x^{\mathbf{b}}) = b_1 w_1 + b_2 w_2 + \cdots + b_r w_r = \mathbf{w}(\mathbf{b})$ olur. Bu yüzden eğer $x^{\mathbf{a}} - x^{\mathbf{b}}$ homojen ise $\mathrm{der}(x^{\mathbf{a}}) = \mathrm{der}(x^{\mathbf{b}})$ olacağından $\mathbf{w}(\mathbf{a}) = \mathbf{w}(\mathbf{b})$ olmalıdır. Buradan da $\mathbf{w}(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 0$ elde edilir. Bu da $\langle \mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{w} \rangle = 0$ koşulunun sağlandığını gösterir.

Tanım 5.2.3. $Y \subset \mathbb{P}_{\mathbf{w}}$ *olmak üzere* Y *kümesi üzerinde sıfırlanan tüm homojen polinomlar tarafından üretilen,* $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]$ *halkasının idealine* Y*'nin* ***sıfırlayan ideali*** *denir ve* $I(Y)$ *ile gösterilir. Özel olarak* $\mathbb{T}_{\mathbf{w}}$ *kümesinin sıfırlayan idealini ise* $I(\mathbb{T}_{\mathbf{w}})$ *ile göstereceğiz.*

Teorem 5.2.4. *[13]* $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ *sonlu cismi üzerinde* $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]$ *ve* $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_r, z]$ *polinom halkalarını göz önünde bulunduralım.*

$$I(\mathbb{T}_{\mathbf{w}}) = \langle \{x_i - z^{w_i} y_i\}_{i=1}^r, \{y_i^{q-1} - 1\}_{i=1}^r \rangle \cap \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]$$

ve $I(\mathbb{T}_{\mathbf{w}})$ *bir binom idealdir.*

Kanıt. [13, Proof of Lemma 2.6.] Öncelikle $J = \langle \{x_i - z^{w_i} y_i\}_{i=1}^r, \{y_i^{q-1} - 1\}_{i=1}^r \rangle \cap \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]$ olarak alalım. Amacımız $I(\mathbb{T}_{\mathbf{w}}) = J$ olduğunu göstermektir. $f \in I(\mathbb{T}_{\mathbf{w}})$ alalım.

$$f = \sum_{j=1}^{s} \alpha_j x^{v_j}$$

olmak üzere burada $\alpha_j \in \mathbb{K}$,$v_j \in \mathbb{N}^s$ ve f, derecesi d olan homojen bir polinom olsun. $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_r) \in \mathbb{N}^r$ olarak alalım. Buradan,

$$x^{\mathbf{a}} = x_1^{a_1} \ldots x_r^{a_r} = (x_1 - y_1 z^{w_1} + y_1 z^{w_1})^{a_1} \ldots (x_r - y_r z^{w_r} + y_r z^{w_r})^{a_r}$$

Düzenlediğimizde ise,

$$x^{\mathbf{a}} = \sum (x_i - y_i z^{w_i}) g_{\mathbf{a},i} + z^d y^{\mathbf{a}}$$

Burada her $i = 1, \ldots, r$ için $g_{\mathbf{a},i} \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_r, z]$ ve $d = \sum_{i=1}^r a_i w_i$ şeklindedir. f polinomu derecesi d olan bir polinom olduğundan bu toplam üzerinde $\mathbf{a}$ ile v_j'nin yerini değiştirebiliriz. Dolayısıyla,

$$f = \sum_{j=1}^{s} \alpha_j x^{v_j},$$

$$f = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} (x_i - y_i z^{w_i}) g_{v_j,i} \alpha_j + \sum_{j=1}^{s} \alpha_j y^{v_j} z^d$$

$$g_i := \sum_{i=1}^{r} g_{v_j,i} \alpha_j, \quad d = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} v_j w_i$$

olmak üzere,

$$f = \sum_{i=1}^{r} (x_i - y_i z^{w^i}) g_i + z^d \sum_{j=1}^{s} \alpha_j y^{v_j}.$$

$\sum_{j=1}^{s} \alpha_j y^{v_j}$ polinomunu $\{y_i^{q-1} - 1\}_{i=1}^r \in \mathbb{K}[y_1, \ldots, y_r]$ kümesine bölersek, g'nin derecesi $q-1$'den kesin küçük olmak üzere $\exists h_i, g \in \mathbb{K}[y_1, \ldots, y_r]$ vardır öyle ki,

$$f = \sum_{i=1}^{r} (x_i - y_i z^{w_i}) g_i + z^d \sum_{i=1}^{r} (y_i^{q-1} - 1) h_i + z^d g \tag{7}$$

Öncelikle g'nin sıfır olduğunu gösterelim. Bunun için $g(t_1, \ldots, t_r) = 0$ olduğunu göstermeliyiz. Çünkü her $(t_1, \ldots, t_r) \in (\mathbb{K}^*)^r$ için $g(t_1, \ldots, t_r) = 0$ olmak üzere Lemma(2.5.2)'yi göz önünde bulundurursak $g = 0$ olur. $(t_1, \ldots, t_r) \in (\mathbb{K}^*)^r$ noktası $\mathbb{T}_{\mathbf{w}}$'nin bir noktası olduğundan ve $f \in I(\mathbb{T}_{\mathbf{w}})$ olduğundan $f(t_1, \ldots, t_r) = 0$ olduğunu söyleyebiliriz. Aynı zamanda (7) eşitliğinde $x_i = y_i = t_i$ ve $z = 1$ olarak alırsak,

$$f = \sum_{i=1}^{r} (t_i - t_i) g_i + \sum_{i=1}^{r} (t_i^{q-1} - 1) h_i + g$$

$$0 = f(t_1, \dots, t_r) = \sum_{i=1}^{r} (t_i^{q-1} - 1)h_i + g(t_1, \dots, t_r)$$

Fermat'ın Küçük Teoreminden $t_i^{q-1} \equiv 1 (modq)$ olduğunu bildiğimiz için $g(t_1, \dots, t_r) = 0$ olarak elde ederiz. Dolayısıyla buradan $g = 0$ olur. Bu durumu f polinomunda göz önüne alırsak

$$f = \sum_{i=1}^{r} (x_i - y_i z^{w_i})g_i + z^d \sum_{i=1}^{r} (y_i^{q-1} - 1)h_i$$

olur. Yani, $f \in \langle \{x_i - z^{w_i} y_i\}_{i=1}^{r}, \{y_i^{q-1} - 1\}_{i=1}^{r} \rangle \cap \mathbb{K}[x_1, \dots, x_r]$ olduğunu göstermiş olduk. Tersine,

$J \subseteq I(\mathbb{T}_{\mathbf{w}})$ olduğunu görelim. Amacımız $x^{\mathbf{a}} - x^{\mathbf{b}}$'nin homojen bir binom olduğunu ve $I(\mathbb{T}_{\mathbf{w}})$'in içine düştüğünü göstermektir. $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{N}^r$ olmak üzere $x^{\mathbf{a}} - x^{\mathbf{b}} \in J$ alalım. Dolayısıyla, $g_i, h_i \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_r, z]$ olmak üzere

$$x^{\mathbf{a}} - x^{\mathbf{b}} = \sum_{i=1}^{r} (x_i - y_i z^{w_i})g_i + \sum_{i=1}^{r} (y_i^{q-1} - 1)h_i \tag{8}$$

$x^{\mathbf{a}} - x^{\mathbf{b}}$'nin homojen olduğunu göstermek için (8) eşitliğinde $y_i = 1$ ve $x_i = z^{w_i}$ olarak alırsak,

$$x^{\mathbf{a}} - x^{\mathbf{b}} = \sum_{i=1}^{r} (z^{w_i} - z^{w_i})g_i + \sum_{i=1}^{r} (1 - 1)h_i = 0 \implies x^{\mathbf{a}} - x^{\mathbf{b}} = 0$$

$$x^{\mathbf{a}} - x^{\mathbf{b}} = z^{a_1 w_1} \dots z^{a_r w_r} - z^{b_1 w_1} \dots z^{b_r w_r} = 0$$

$$\implies z^{a_1 w_1} \dots z^{a_r w_r} = z^{b_1 w_1} \dots z^{b_r w_r} \implies z^{\sum a_i w_i} = z^{\sum b_i w_i}$$

$$\implies \sum a_i w_i = \sum b_i w_i \implies \mathrm{der}(x^{\mathbf{a}}) = \mathrm{der}(x^{\mathbf{b}})$$

Buradan da $x^{\mathbf{a}} - x^{\mathbf{b}}$ homojen olduğunu elde etmiş oluruz. Aynı zamanda bu ideal binom idealdir. Çünkü Gröbner baz teorisinden bir binom ideal ve polinom halkasının kesişimi de binom idealdir. Dolasıyla J bir binom idealdir. Son olarak $x^{\mathbf{a}} - x^{\mathbf{b}}$'nin $I(\mathbb{T}_{\mathbf{w}})$ üzerinde olduğunu gösterirsek ispatı tamamlamış olacağız. Keyfi $(t_1, \dots, t_r) \in \mathbb{T}_{\mathbf{w}}$ noktası için $x^{\mathbf{a}} - x^{\mathbf{b}} = \sum_{i=1}^{r} (x_i - y_i z^{w_i})g_i + \sum_{i=1}^{r} (y_i^{q-1} - 1)h_i$ eşitliğinde $x_i = y_i = t_i$ ve $z = 1$ alırsak,

$$x^{\mathbf{a}} - x^{\mathbf{b}} = \sum_{i=1}^{r} (t_i - t_i)g_i + \sum_{i=1}^{r} (t_i^{q-1} - 1)h_i \tag{9}$$

Dolayısıyla $f := x^{\mathbf{a}} - x^{\mathbf{b}}$ ve $P = (t_1, \dots, t_r) \in \mathbb{T}_{\mathbf{w}}$ olarak alırsak (9) eşitliğinden

$f(P) = 0$ olur. Buradan da $f \in I(\mathbb{T}_{\mathbf{w}})$ olduğunu elde etmiş oluruz.Yani, $J \subseteq I(\mathbb{T}_{\mathbf{w}})$ olduğunu elde etmiş olduk. $\square$

Uyarı. Aşağıdaki Teorem(5.2.5), [6, Theorem 2.1]'de $\mathbf{w} = (1, \ldots, 1)$ durumu için verilmiştir.

Teorem 5.2.5. *[17, Theorem 2.3] $A = (a_{ij})$ girdileri tam sayı olan bir $s \times r$ matris, $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ sonlu bir cisim, $R = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s, z]$ ve $S = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]$ olmak üzere*

$$I(\mathbb{T}_{\mathbf{w},A}) = \langle \{x_i - y^{a_i} z^{w_i}\}_{i=1}^r \cup \{y_i^{q-1} - 1\}_{i=1}^s \rangle \cap S$$

Kanıt. [17, Proof Theorem 2.3] Öncelikle $J = \langle \{x_i - y^{a_i} z^{w_i}\} \cup \{y_i^{q-1} - 1\} \rangle$ olarak alalım ve $I(\mathbb{T}_{\mathbf{w},A}) = J \cap S$ olduğunu gösterelim. $f \in I(\mathbb{T}_{\mathbf{w},A})$ olmak üzere d dereceli homojen f polinomunu alalım. Buradan $d = \sum_{j=1}^r \mathbf{w}_j u_{ij}$ olmak üzere $f = \sum_{i=1}^k = c_i x^{u_i}$ şeklinde yazabiliriz. Aynı zamanda $1 \leq i \leq r$ ve $1 \leq j \leq s$ olmak üzere

$$x_j^{u_{ij}} = [(x_i - y^{a_i} z^{w_i}) + y^{a_i} z^{w_i}]^{u_{ij}}$$

şeklinde yazabiliriz. Düzenlersek, her i için $g_{i1}, \ldots, g_{ir} \in R$ olmak üzere

$$x^{u_i} = \sum_{j=1}^r (x_j - y^{a_j} z^{w_j}) g_{ij} + (y^{a_j} z^{w_j})^{u_i} = \sum_{j=1}^r (x_j - y^{a_j} z^{w_j}) g_{ij} + y^{a_j u_i} z^d$$

olarak elde ederiz. Buradan $g_j = \sum_{i=1}^k c_j g_{ij}$ ve $F = f(y^{a_1}, \ldots, y^{a_r})$ olmak üzere

$$f = \sum_{i=1}^k c_i x^{u_i} = \sum_{j=1}^r g_j (x_j - y^{a_j} z^{w_j}) + z^d \sum_{i=1}^k c_i (y^{a_j u_i}) = \sum_{j=1}^r g_j (x_j - y^{a_j} z^{w_j}) + z^d F$$

olarak elde ederiz. $\mathbb{K}[y_1, \ldots, y_s]$ halkasında $F = f(y^{a_1}, \ldots, y^{a_r})$ polinomunu $\{y_j^{q-1} - 1\}_{j=1}^s$ kümesine bölersek, $H_i, r \in \mathbb{K}[y_1, \ldots, y_s]$ ve r'nin derecesi $q-1$'den küçük olmak üzere

$$f = \sum_{i=1}^r g_i (x_i - y^{a_i} z^{w_i}) + z^d \sum_{i=1}^s (y_i^{q-1} - 1) H_i + z^d r \tag{10}$$

olarak elde ederiz. $f \in I(\mathbb{T}_{\mathbf{w},A})$ olduğundan $t_1, \ldots, t_s \in \mathbb{K}^*$ olmak üzere $f(t_1, \ldots, t_s) = 0$'dır. Yukarıdaki (10) eşitliğinde her i için $x_i = t^{a_i}$ olarak alırsak $g_i^{'} =$

$g_i(t^{a_1},\ldots,t^{a_r},y_1,\ldots,y_s,z)$ olmak üzere

$$0=f(t_1,\ldots,t_s)=\sum_{i=1}^{r} g_i{}'(t^{a_i}-y^{a_i}z^{w_i})+z^d\sum_{i=1}^{s}(y_i^{q-1}-1)H_i+z^d r \tag{11}$$

olarak elde edilir. (11) eşitliğinde her i için $t_i=y_i$ ve $z=1$ olarak alırsak

$$0=r(t_1,\ldots,t_s)$$

olur. Buradan ise r'nin derecesi $q-1$'den küçük olduğundan ve $(\mathbb{K}^*)^s$ üzerinde sıfırlandığından $r=0$ olarak elde ederiz. Dolayısıyla $f\in J\cap S$ olduğu görülür. Tersine, $f\in J\cap S$ olarak alırsak, $g_1,\ldots,g_r,h_1,\ldots,h_s\in R$ olmak üzere

$$f=\sum_{i=1}^{r} g_i(x_i-y^{a_i}z^{w_i})+\sum_{i=1}^{s} h_i(y_i^{q-1}-1)_{i=1}^{s} \tag{12}$$

şeklinde yazabiliriz. $P=[t^{a_1}:\cdots:t^{a_r}]\in\mathbb{T}_{\mathbf{w},A}$ noktasını alalım. (12) eşitliğinde $z=1$ ve $x_i=t^{a_i}$ olarak alırsak $g_i^{'}=g_i(t^{a_1},\ldots,t^{a_r},y_1,\ldots,y_s,z)$ ve $h_i^{'}=h_i(t^{a_1},\ldots,t^{a_r},y_1,\ldots,y_s,z)$ olmak üzere

$$f(t^{a_1},\ldots,t^{a_r})=\sum_{i=1}^{r} g_i{}'(t^{a_i}-y^{a_i})+\sum_{i=1}^{s} h_i{}'(y_i^{q-1}-1)_{i=1}^{s}$$

elde ederiz. Bu eşitlikte her i için $t_i=y_i$ olarak alırsak $f(P)=0$ olarak elde ederiz. Dolayısıyla f, $\mathbb{T}_{\mathbf{w},A}$ üzerinde sıfırlanır. Yani $f\in I(\mathbb{T}_{\mathbf{w},A})$ olduğu görülür. $\square$

Uyarı. $\mathbf{w}=[w_1\cdots w_r]$, $s\times r$'lik herhangi bir matris olsun. Tez boyunca $\mathcal{L}_{\mathbf{w}}$ notasyonu ile $\mathbf{w}$ matrisinin çekirdeğindeki tamsayı vektörlerinin kafesini göstereceğiz. Yani, $\mathcal{L}_{\mathbf{w}}=\textit{Çek}(\mathbf{w})\cap\mathbb{Z}^r$ olarak alacağız.

Teorem 5.2.6. *$\mathbb{Z}^r$'nin $\mathcal{L}=(q-1)\mathcal{L}_{\mathbf{w}}$ alt kafesi için $I(\mathbb{T}_{\mathbf{w}})=I_{\mathcal{L}}$ olur.*

Kanıt. Bu eşitliği göstermek için önce $I(\mathbb{T}_{\mathbf{w}})\subset I_{\mathcal{L}}$ içermesini göstereceğiz. $\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{N}^r$ olmak üzere $x^{\mathbf{a}}-x^{\mathbf{b}}\in\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_r]$, $\mathbb{T}_{\mathbf{w}}$ üzerinde sıfırlanan homojen binom olsun. $i\in\{1,\ldots,r\}$ sabit ve α, $\mathbb{K}^*$'ın bir üreteci olsun. $(1,\ldots,1,\alpha,1,\ldots,1)\in\mathbb{T}_{\mathbf{w}}$ noktasını alalım. Burada α, i-nci konumda olsun. $x^{\mathbf{a}}-x^{\mathbf{b}}$ binomunu bu noktada göz önüne alırsak,

$$\alpha^{a_i}-\alpha^{b_i}=0 \iff \alpha^{a_i}=\alpha^{b_i} \iff \frac{\alpha^{a_i}}{\alpha^{b_i}}=1 \iff \alpha^{a_i-b_i}=1 \iff a_i-b_i\equiv 0 \text{ (mod q-1)}$$

Herhangi bir $i \in \{1, \ldots, r\}$ için $\mathbf{a} - \mathbf{b} \in (q-1)\mathbb{N}^r$ olarak elde ederiz. Aynı zamanda $x^{\mathbf{a}} - x^{\mathbf{b}}$ homojen binom olduğundan dolayı $\langle \mathbf{a}-\mathbf{b}, \mathbf{w} \rangle = 0$ olduğunu biliyoruz. Böylece her iki durumdan dolayı kafesin de tanımı göz önüne alındığında $\mathbf{a} - \mathbf{b} \in \mathcal{L}$ olur. Buradan $I(\mathbb{T}_{\mathbf{w}}) = I_{\mathcal{L}}$ olduğunu kanıtlamış oluruz. □

Tanım 5.2.7. $\Gamma_{\mathbf{w}}$ *nümerik yarıgrubu* $w_1, \ldots, w_r$ *tarafından üretiliyorsa,* $\mathbb{K}[t]$ *polinom halkasının* $t^{w_1}, \ldots, t^{w_r}$ *tarafından üretilen bir alt cebirini* $\mathbb{K}[\Gamma_{\mathbf{w}}]$ *ile gösterelim.*

Lemma 5.2.8. *[13, Lemma 2.10]* $\mathcal{L}_{\mathbf{w}}$ *kafesini ve bu kafese karşılık gelen* $I_{\mathcal{L}_{\mathbf{w}}} \subset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]$ *kafes idealini göz önüne alalım.* $I_{\mathcal{L}_{\mathbf{w}}}$ *kafes ideali homojen idealdir ve* $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]/I_{\mathcal{L}_{\mathbf{w}}} \simeq \mathbb{K}[\Gamma_{\mathbf{w}}]$ *olur.*

Kanıt.

$$I_{\mathcal{L}_{\mathbf{w}}} := \langle x^{\mathbf{a}} - x^{\mathbf{b}} : \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{N}^r \text{ olmak üzere } \mathbf{a} - \mathbf{b} \in \mathcal{L}_{\mathbf{w}} \rangle$$

kafes idealinin tanımından $\mathbf{a}-\mathbf{b} \in \mathcal{L}_{\mathbf{w}}$ olduğundan $\langle \mathbf{a}-\mathbf{b}, \mathbf{w} \rangle = 0$ olduğunu elde ederiz. Buradan $\mathbf{w}(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = 0$ elde edileceğinden aynı zamanda $\mathbf{w}(\mathbf{a}) = \mathbf{w}(\mathbf{b})$ olarak yazabiliriz. Bu eşitliği açarsak $w_1a_1 + \cdots + w_ra_r = w_1b_1 + \cdots + w_rb_r$ olduğunu elde ederiz. Bu da bize $\mathrm{der}(x^{\mathbf{a}}) = \mathrm{der}(x^{\mathbf{b}})$ olduğunu verir ve idealin homojen olduğunu göstermiş oluruz. İzomorfluğun ispatı için Miller ve Sturmfels'in kitabındaki ilgili teoreme [23, Theorem 7.3] bakılabilir. □

Lemma 5.2.9. *[13, Lemma 2.11]* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{N}^r$ *olmak üzere,* $I_{\mathcal{L}_{\mathbf{w}}} = (x^{a_1} - x^{b_1}, \ldots, x^{a_r} - x^{b_r})$ *olsun. O halde* $I(\mathbb{T}_{\mathbf{w}}) = (x^{(q-1)a_1} - x^{(q-1)b_1}, \ldots, x^{(q-1)a_r} - x^{(q-1)b_r})$ *olur.*

Kanıt. [13] $J := (x^{(q-1)a_1} - x^{(q-1)b_1}, \ldots, x^{(q-1)a_r} - x^{(q-1)b_r})$ olarak tanımlayalım. $\mathcal{L}$ ve $\mathcal{L}_{\mathbf{w}}$ kafeslerinin tanımlarından dolayı her $i = 1, \ldots, r$ için $(q-1)a_i - (q-1)b_i \in \mathcal{L}$ olduğunu söyleyebiliriz. Aynı zamanda Teorem 5.2.6'den dolayı $I(\mathbb{T}_{\mathbf{w}}) = I_{\mathcal{L}}$ olduğundan $J \subset I(\mathbb{T}_{\mathbf{w}})$ içermesi kolaylıkla görülür. Tersi yön için $x^{\mathbf{a}} - x^{\mathbf{b}} \in I(\mathbb{T}_{\mathbf{w}})$ alalım. Aynı zamanda $\mathbf{c}^+, \mathbf{c}^- \in \mathbb{N}^r$ vardır öyle ki $\mathbf{c}^+ - \mathbf{c}^- \in \mathcal{L}_{\mathbf{w}}$ sağlanır. Ve buradan benzer şekilde Teorem 5.2.6 'den dolayı $\mathbf{a}-\mathbf{b} = (q-1)(\mathbf{c}^+ - \mathbf{c}^-)$ eşitliği sağlanır. $x^{\mathbf{c}^+} - x^{\mathbf{c}^-} \in I_{\mathcal{L}_{\mathbf{w}}}$ olduğundan $\exists h_i \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]$ vardır öyle ki $x^{\mathbf{c}^+} - x^{\mathbf{c}^-} = \sum_{j=1}^{r}(x^{a_j} - x^{b_j})h_j$ olur. Burada her $i = 1, \ldots, r$ için x_i yerine x_i^{q-1} yazarsak, $x^{(q-1)\mathbf{c}^+} - x^{(q-1)\mathbf{c}^-} = \sum_{j=1}^{r}(x^{(q-1)a_j} - x^{(q-1)b_j})h_j$ olacağından $\mathbf{a} - \mathbf{b} = (q-1)(c^+ - c^-)$ eşitliğini de göz önünde bulundurduğumuzda $x^{\mathbf{a}} - x^{\mathbf{b}} = \sum_{j=1}^{r}(x^{(q-1)a_j} - x^{(q-1)b_j})h_j$ sonucu elde ederiz. Dolayısıyla buradan $x^{\mathbf{a}} - x^{\mathbf{b}} \in J$ olduğu elde edilir. Böylece $I(\mathbb{T}_{\mathbf{w}}) \subset J$ olur. □

5.3 Ağırlıklı Projektif Simitin Hilbert Serisi

Bu bölümde $M = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]/I(\mathbb{T}_{\mathbf{w}})$ için Hilbert fonksiyonu ve Hilbert serisi bulunacaktır.

Teorem 5.3.1. *[13, Theorem 3.8]* $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]/I(\mathbb{T}_{\mathbf{w}})$*' in Hilbert serisini aşağıdaki formülle vereceğiz.*

$$HS(M,t) = \frac{(\frac{1}{1-t^{q-1}} - \sum_{a \in G} t^{a(q-1)}) \prod_{i=1}^{r}(1 - t^{w_i(q-1)})}{\prod_{i=1}^{r}(1 - t^{w_i})} \tag{13}$$

Kanıt. [13] $M^{'} = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]/I_{\mathcal{L}_{\mathbf{w}}}$ koordinat halkasını alalım. Lemma(5.2.8) dolayı $M^{'} \simeq \mathbb{K}[\Gamma_{\mathbf{w}}]$ olduğunu biliyoruz. Böylece,

$$HS(M^{'},t) = \sum_{a \in \Gamma_{\mathbf{w}}} t^a = \frac{1}{1-t} - \sum_{a \in G} t^a = \frac{(\frac{1}{1-t} - \sum_{a \in G} t^a) \prod_{i=1}^{r}(1 - t^{w_i})}{\prod_{i=1}^{r}(1 - t^{w_i})} \tag{14}$$

olarak yazabiliriz. Burada $\frac{1-t^{w_1}}{(1-t)}$ bir polinom olduğundan dolayı (14) eşitliğinin payı da bir polinomdur. Şimdi $i = 1, \ldots, r$ olmak üzere bazı $\mathbf{a_i}, \mathbf{b_i} \in \mathbb{N}^r$ için $I_{\mathcal{L}_{\mathbf{w}}} = (t^{a_1} - t^{b_1}, \ldots, t^{a_r} - t^{b_r})$ olarak alalım. Buradan Lemma(5.2.9)'den

$$I(\mathbb{T}_{\mathbf{w}}) = (t^{(q-1)a_1} - t^{(q-1)b_1}, \ldots, t^{(q-1)a_r} - t^{(q-1)b_r})$$

olarak yazabiliriz. Dolayısıyla (14) eşitliğinde bu durumu göz önüne aldığımızda (13) eşitliğini elde ederiz. $\square$

Tanım 5.3.2. *M sonlu üretilmiş dereceli bir R-modül olmak üzere* ***M'nin düzenlilik indeksi*** *en küçük $n \geq 0$ değeridir öyle ki $d \geq n$ iken aşağıdaki durum gerçekleşir.*

$$d \equiv i \quad (mod g) \quad \Rightarrow HF(M,d) = P_i(d)$$

Uyarı. Teorem(3.4.8)'in 2'nci şıkkından dolayı M'nin düzenlilik indeksinin der$(HS(M,t)) + 1$ olduğunu yani M'nin α-değişmezinin 1 fazlasına eşit olduğunu söyleyebiliriz.

Sonuç 5.3.3. *[13, Corollary 3.9]* $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]/I(\mathbb{T}_{\mathbf{w}})$ *'nin düzenlilik indeksi aşağıdaki formülle verilir.*

$$(q-2)(\sum_{i=1}^{r} w_i + F(\Gamma_{\mathbf{w}})) + F(\Gamma_{\mathbf{w}}) + 1$$

Kanıt. Hilbert serisinin tanımından, ilk olarak,

$$P_1 := \frac{1}{(1-t^{q-1})}\prod_{i=1}^{r}(1-t^{w_i(q-1)})$$

çarpımını düşünürsek, bu çarpımın derecesi, $\mathrm{der}(P_1) = ((\sum_{i=1}^{r} wi) - 1)(q-1)$ şeklindedir. Benzer şekilde,

$$P_2 := \sum_{a\in G} t^{a(q-1)}\prod_{i=1}^{r}(1-t^{w_i(q-1)})$$

çarpımını düşünürsek, bu çarpımın derecesi, $\mathrm{der}(P_2) = (F(\Gamma_{\mathbf{w}}) + \sum_{i=1}^{r} w_i)(q-1)$ şeklindedir. Dolayısıyla Hilbert serisinin derecesi $(F(\Gamma_{\mathbf{w}}) + \sum_{i=1}^{r} w_i)(q-1) - \sum_{i=1}^{r} w_i$ olur. Düzenlersek,

$$\mathrm{der}(HS(M,t)) = F(\Gamma_{\mathbf{w}})(q-1) + \sum_{i=1}^{r} w_i(q-2)$$

$$\mathrm{der}(HS(M,t)) = (q-2)(F(\Gamma_{\mathbf{w}}) + \sum_{i=1}^{r} w_i) + F(\Gamma_{\mathbf{w}})$$

Önceki uyarıda, $\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_r]/I(\mathbb{T}_{\mathbf{w}})$ halkasının düzenlilik indeksini $\mathrm{der}(HS(M,t))+1$ olarak vermiştik. Dolayısıyla buradan, $\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_r]/I(\mathbb{T}_{\mathbf{w}})$ halkasının düzenlilik indeksini $(q-2)(F(\Gamma_{\mathbf{w}}) + \sum_{i=1}^{r} w_i) + F(\Gamma_{\mathbf{w}}) + 1$ olarak elde ederiz. □

Şimdi Hilbert polinomunun

$$P(M,d) = (q-1)^{r-1} = |\mathbb{T}_{\mathbf{w}}|$$

olduğunu gösterelim. $\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_r]/I(\mathbb{T}_{\mathbf{w}})$' in Hilbert serisinin formülünü bir önceki teoremde vermiştik. Aynı zamanda bu formülden yola çıkarak her $d \gg 0$ için $HF(M,d) = (q-1)^{r-1}$ eşitliğinden bahsedebiliriz. Gerçekten, *ebob*$(w_1, q-1) = 1$ (burada bu koşulu sağlayan herhangi bir w_i alınabilir) sağlanırken, Hilbert serisi formülünü düzenlersek,

$$HS(M,t) = \left(\sum_{a\in\Gamma_{\mathbf{w}}} t^{a(q-1)}\right)(1+t^{w_1}+\cdots+t^{w_1(q-2)})\prod_{i=2}^{r}(1+t^{w_i}+\cdots+t^{w_i(q-2)})$$

eşitliğini elde ederiz. Öncelikle çarpımın ilk kısmını göz önüne alırsak, yani,

$$\left(\sum_{a\in\Gamma_{\mathbf{w}}} t^{a(q-1)}\right)(1+t^{w_1}+\cdots+t^{w_1(q-2)})$$

çarpımını dikkate alıp bu kısmı düzenlersek,

$$\sum_{a\in\Gamma_{\mathbf{w}}} t^{a(q-1)} + \sum_{a\in\Gamma_{\mathbf{w}}} t^{a(q-1)+w_1} + \sum_{a\in\Gamma_{\mathbf{w}}} t^{a(q-1)+2w_1} + \cdots + \sum_{a\in\Gamma_{\mathbf{w}}} t^{a(q-1)+w_1(q-2)}$$

eşitliğini elde ederiz. $ebob(w_1, q-1) = 1$ olduğundan t'nin kuvvetleri $0, w_1, 2w_1, \ldots,$ $w_1(q-2)$ tam sayı formundadır. Her $d \gg 0$ için $t^d = t^{a(q-1)+kw_1}$ olduğundan $d \equiv kw_1$ (mod $q-1$) olduğunu söyleyebiliriz. Dolayısıyla $\sum_{a\in\Gamma_{\mathbf{w}}} t^{a(q-1)}$ toplamından her $d \gg d_0$ için t^{d_0} gelecektir. Bunun sonucunda, $\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_r]/I(\mathbb{T}_{\mathbf{w}})$'nin Hilbert fonksiyonundaki polinomlar büyük d'ler için sabittir ve $(q-1)^{r-1}$'e eşittir. Gerçekten, aşağıdaki çarpımı tekrar göz önüne alırsak,

$$\left(\sum_{a\in\Gamma_{\mathbf{w}}} t^{a(q-1)}\right)(1 + t^{w_1} + \cdots + t^{w_1(q-2)})$$

$$\gamma_1 := (1 + t^{w_1(q-1)} + \cdots + t^{w_s(q-1)} + \cdots)(1 + t^{w_1} + \cdots + t^{w_1(q-2)})$$

$$\gamma_1 = (1 + \cdots + t^{d_0})(1 + t^{w_1} + \cdots + t^{w_1(q-2)})$$

$$\gamma_1 = (1 + \cdots + t^{d_0} + t^{d_0+w_1} + \cdots + t^{d_0+w_1(q-2)})$$

$$\gamma_1 = A + ((q-1)t^{d_0+w_1(q-2)})$$

$$\gamma_2 := \gamma_1(1 + t^{w_2} + \cdots + t^{w_2(q-2)})$$

$$\gamma_2 = B + ((q-1)t^{d_0+w_1(q-2)}) + ((q-1)t^{d_0+w_1(q-2)+w_2}) + \cdots + ((q-1)t^{d_0+w_1(q-2)+w_2(q-2)})$$

O halde her $d \gg d_0 + (q-2)w_1 + (q-2)w_2$ için

$$\gamma_2 = B + (q-1)^2 t^d$$

olduğunu elde ederiz. Bu şekilde devam edilirse,

$$\gamma_{r-1} = (q-1)^{r-1} t^d$$

olduğu görülür.

6 AĞIRLIKLI PROJEKTİF UZAY KODLARI

6.1 Lineer Kodlar

Tanım 6.1.1. *$\mathcal{A}$ sonlu bir küme olmak üzere bu küme* ***alfabe*** *olarak adlandırılsın. $\mathcal{A}$ kümesinin elemanlarının herhangi bir n-uzunluklu dizisine* ***n-uzunluklu bir kelime*** *denir. Bir başka deyişle $\mathcal{A}^n = \mathcal{A} \times \cdots \times \mathcal{A}$'nın bir elemanına n-uzunluklu bir kelime denir.*

Tanım 6.1.2. *$\mathcal{A}^n$ kümesinin bir alt kümesine* ***kod*** *denir. Kodu $\mathcal{C}$ harfi ile gösterelim. $\mathcal{C} = (c_1, \ldots, c_n)$ kodun elemanları olmak üzere bu elemanlar da* ***kod kelimesi*** *olarak adlandırılır.*

Şimdi ise $\mathcal{A}^n$ kümesi üzerindeki uzaklık kavramının tanımını vereceğiz.

Tanım 6.1.3. *(Hamming Uzaklığı) $\mathcal{C}_1 = (c_{11}, \ldots, c_{1n}), \mathcal{C}_2 = (c_{21}, \ldots, c_{2n}) \in \mathcal{A}^n$ olmak üzere bu iki kodun arasındaki uzaklık aşağıdaki şekilde tanımlıdır ve bu uzaklığa* ***Hamming uzaklığı*** *denir.*

$$uz_H(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) = |\{i : c_{1i} \neq c_{2i}\}|$$

Bir başka deyişle, $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \in \mathcal{A}^n$ için $\mathcal{C}_1$ ve $\mathcal{C}_2$'nin birbirlerinden farklı oldukları girdilerinin sayısına Hamming uzaklığı denir.

Şimdi bir kodun temel parametreleri olan uzunluk, boyut ve minimum uzaklık kavramlarının tanımlarını vereceğiz.

Tanım 6.1.4. *$\mathcal{C} \in \mathcal{A}^n$ bir kod olmak üzere temel parametreler sırasıyla aşağıdaki şekilde tanımlıdır.*

- *$\mathcal{C} = (c_1, \ldots, c_n)$ olmak üzere n sayısı* ***kodun uzunluğunu*** *verir.*
- *q, alfabenin eleman sayısı olmak üzere $k = \log_q(|\mathcal{C}|)$ şeklinde tanımlanan k değeri* ***kodun boyutunu*** *verir.*
- *$d_{min} = min\{uz_H(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) : \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \in \mathcal{C}, \mathcal{C}_1 \neq \mathcal{C}_2\}$ şeklinde tanımlanan d_{min} değeri* ***kodun minimum uzaklığını*** *verir.*

Dolayısıyla q elemanlı $\mathcal{A}$ alfabesi üzerindeki bir kod n, k ve d_{min} parametreleriyle birlikte düşünüldüğünde $[n, k, d_{min}]_q$-kod olarak gösterilir.

Örnek 6.1.5. *$\mathcal{C} = \{(0,0,1),(1,1,0)\} \subset \mathbb{F}_2^3$ olmak üzere bu kodun parametreleri $n = 3$,$k = \log_2(2) = 1$ ve $d_{min} = 3$ şeklinde verilir.*

Şimdi ise özel bir kod örneği olan $4-7$ Hamming Kodunu tanımlayarak bu kodun parametrelerini verelim.

Örnek 6.1.6.

$$c_1c_2c_3c_4 \to c_1c_2c_3c_4c_5c_6c_7$$

şeklinde verilsin. Burada $c_5 = c_1 + c_2 + c_3(mod2), c_6 = c_1 + c_2 + c_4(mod2), c_7 = c_2 + c_3 + c_4(mod2)$ şeklinde tanımlıdır. Dolayısıyla $4-7$ Hamming kodu

$$\mathcal{C} = \{(c_1, \ldots, c_7) \in \mathbb{F}_2^7 : c_5 = c_1 + c_2 + c_3, c_6 = c_1 + c_2 + c_4, c_7 = c_2 + c_3 + c_4\}$$

şeklinde verilir ve bu kodun parametreleri sırasıyla $n = 7$, $k = \log_2(2^4) = 4$ ve $d_{min} = 3$ şeklindedir.

Şimdi lineer kodları tanımlayacağız ve bu durumda $\mathcal{A} = \mathbb{F}_q$ olarak alacağız.

Tanım 6.1.7. *$\mathcal{C} \subset \mathbb{F}_q^n$ bir kod olmak üzere aşağıdaki koşullar sağlanırsa $\mathcal{C}$'ye* ***lineer kod*** *denir. Bir başka deyişle eğer $\mathcal{C}$, $\mathbb{F}_q^n$ üzerinde bir vektör uzayı ise $\mathcal{C}$ kodu bir lineer koddur.*

1. $0 \in \mathcal{C}$
2. *$\mathcal{C}$, $\mathbb{F}_q$ cismi üzerinde vektör toplamı altında kapalıdır.*
3. *$\mathcal{C}$, $\mathbb{F}_q$ cisminin elemanları ile skaler çarpma işlemi altında kapalıdır.*

Örnek 6.1.8. *$\mathcal{C} = \{(0,0,0),(1,1,1)\} = \langle\{(1,1,1)\}\rangle_{\mathbb{F}_2}$ kodu bir lineer koddur. Çünkü $\mathbb{F}_2$ sonlu cismi üzerinde bir vektör uzayıdır.*

Tanım 6.1.9. *$\mathcal{C}$ bir lineer kod olmak üzere, satırları $\mathcal{C}$ kodunun bir bazını oluşturan matrise* ***$\mathcal{C}$'nin üreteç matrisi*** *denir.*

Tanım 6.1.10. *$\mathcal{C}$ bir lineer kod ve $c \in \mathcal{C}$ bir kod kelimesi olmak üzere c* ***kod kelimesinin ağırlığı*** *aşağıdaki şekilde tanımlanır.*

$$w(c) = |\{c \text{ kod kelimesindeki sıfırdan farklı girdiler}\}|$$

$\mathcal{C}$ kodundaki sıfırdan farklı tüm kod kelimelerinin en küçük ağırlığına ise $\mathcal{C}$ ***kodunun minimum ağırlığı*** *denir.*

Uyarı. Eğer $\mathcal{C}$ kodu bir lineer kod ise kodun minimum uzaklığı ile minimum ağırlığı birbirine eşittir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} d_{min} &= min\{uz_H(c_1, c_2) : c_1, c_2 \in \mathcal{C}, c_1 \neq c_2\} \\ &= min\{uz_H(c_1 - c_2, 0) : c_1, c_2 \in \mathcal{C}, c_1 - c_2 \neq 0\} \\ &= min\{uz_H(c, 0) : c \in \mathcal{C}, c \neq 0\} = min\{w(c) : c \in \mathcal{C}, c \neq 0\} \end{aligned}$$

Şimdi bu tanımlardan yola çıkarak bilinen bazı kod örneklerini vereceğiz.

Örnek 6.1.11.

- *$\mathcal{C} = \mathbb{F}_q^n$ olsun. Bu kodun temel parametreleri sırasıyla n, $k = \log_q(q^n) = n$ ve $d_{min} = 1$ olarak verilir. Bu kod için üreteç matrisi $n \times n$'lik birim matristir.*
- *$\mathcal{C} = \{(c, c, \ldots, c) \in \mathbb{F}_q^n : c \in \mathbb{F}_q\}$ kodunun temel parametreleri sırasıyla n, $k = 1$ ve $d_{min} = n$ olarak verilir. Bu kod için üreteç matrisi ise $G = [1 \quad \cdots \quad 1]$ matrisidir.*

Tanım 6.1.12. *$\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_q^n$ bir lineer kod olmak üzere aşağıdaki şekilde tanımlanan koda $\mathcal{C}$ kodunun* ***dual kodu*** *denir. $\mathcal{C}^\perp$ ifadesi ile gösterilir.*

$$\mathcal{C}^\perp = \{c \in \mathbb{F}_q^n : \text{ her } c^{'} \in \mathcal{C} \text{ için } c \cdot c^{'} = 0\}$$

Özellikler

1. $(\mathcal{C}^\perp)^\perp = \mathcal{C}$
2. $boy(\mathcal{C}^\perp) = n - boy(\mathcal{C})$

Örnek 6.1.13. $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ *iki elemanlı cisim olmak üzere* $(1, 1, 1) \in \mathbb{F}_2^3$ *vektörü tara-*

fından üretilen kodu düşünelim. Yani

$$\mathcal{C} = \langle\{(1,1,1)\}\rangle_{\mathbb{F}_2} = \{(0,0,0),(1,1,1)\}$$

olur. Bu kodun dual kodu ise yukarıda verilen 2'nci özellik göz önünde bulundurulduğunda 2 boyutlu olduğu elde edilir. Gerçekten,

$$\mathcal{C}^{\perp} = \langle\{(1,0,1),(1,1,0)\}\rangle_{\mathbb{F}_2}$$

şeklinde elde edilir.

Tanım 6.1.14.

$$0 \to \mathbb{F}_q^k \xrightarrow{G} \mathbb{F}_q^n \xrightarrow{H} F_q^{n-k} \to 0$$

*Yukarıdaki dizi bir kısa tam dizi olmak üzere Gör(G) = Çek(H) durumunu sağlayan H matrisine $\mathcal{C}$ kodu için **denklik kontrol matrisi** denir. G matrisi ise $\mathcal{C}$ kodunun üreteç matrisidir.*

Örnek 6.1.15. *$\mathcal{C}$, lineer bir kod olmak üzere $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ matrisi $\mathcal{C}$ kodunun üreteç matrisi olsun. Yukarıdaki tanım göz önünde bulundurulduğunda denklik kontrol matrisi bu kod için $H = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ şeklinde elde edilir. Çünkü G matrisinin sıfır uzayı $(1,1,1)$ vektörü tarafından üretilir. Dolayısıyla $\mathcal{C}$ kodu için bir kısa tam dizi aşağıdaki şekilde verilir.*

$$0 \to \mathbb{F}_q^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}} \mathbb{F}_q^3 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}} \mathbb{F}_q^1 \to 0$$

Yukarıda tanımlarını vermiş olduğumuz uzunluk, boyut ve minimum uzaklık kavramları bir kodun üç temel parametresini oluşturmaktadır. Ve kodlama teorisinin üzerinde durduğu temel amaç bu üç parametreyi hesaplayan yeni ve hızlı yöntemler geliştirebilmek, büyük parametrelere sahip kodlar üretebilmektir. Şimdi bu üç temel parametre arasındaki ilişki için verilmiş genel bir sonuç olan **Singleton Sınırı**'nın tanımını vereceğiz.

Tanım 6.1.16. *$\mathcal{C}$, temel parametreleri sırasıyla n,k ve d_{min} olan bir kod olmak üzere*

$$d_{min} \leq n - k + 1$$

şeklinde tanımlanan ilişkiye ***Singleton Sınırı*** *denir.*

Tanım 6.1.17. *$\mathcal{C}$ bir lineer kod olmak üzere $\mathcal{C}$ kodunun temel parametreleri arasında*

$$k + d_{min} = n + 1$$

ilişkisi varsa bu koda ***maksimum uzaklığa ayrılabilir kod*** *denir. Kısaca* ***MDS kod*** *olarak adlandırılır.*

6.2 Hesaplama Kodları

$w_1, \ldots, w_r$ aralarında asal pozitif tam sayılar ve $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_r)$ olmak üzere $\Gamma_{\mathbf{w}}$-dereceli $S = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]$ halkasını ele alalım.
$S_d = \mathbb{K}\{x_1^{a_1} \ldots x_r^{a_r} : a_1w_1 + \cdots + a_rw_r = d\}$ vektör uzayı Önerme(3.1.8)'dan dolayı sonlu boyutludur. $X = \mathbb{P}_{\mathbf{w}}$ ağırlıklı projektif uzay ve $Y \subseteq X$ olmak üzere $I(Y) \subseteq S$ dereceli ideali S'nin Y'in bütün noktalarında sıfırlanan homojen polinomları tarafından üretilen ideal olsun.

Hesaplama kodlarının tanımını verebilmek için önce hesaplama dönüşümünü tanımlayacağız.

$Y = \{P_1, \ldots, P_n\}$ ve her i için $f_0 \notin I(P_i)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} ev_Y : S_d &\to \mathbb{K}^{|Y|} \\ f &\mapsto \left(\frac{f(P_1)}{f_0(P_1)}, \ldots, \frac{f(P_n)}{f_0(P_n)} \right) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan **hesaplama dönüşümü** $\mathbb{K}$ vektör uzayının bir lineer dönüşümüdür. Bu dönüşümün görüntüsü $\mathbb{K}^{|Y|}$ vektör uzayının bir lineer alt uzayıdır ve bu sebepten dolayı bir lineer kod verir. Dolayısıyla bu dönüşümün görüntüsü Y ağırlıklı projektif çeşitlemi üzerinde bir **hesaplama kodu** adını alır ve bu hesaplama kodu $C_{d,Y}$ ile gösterilir.

Uyarı. $X = \mathbb{P}_{\mathbf{w}}$ ağırlıklı projektif uzay, $Y \subseteq X$, $n = |Y|$ ve $P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{K}^r$, Y'nin noktalarının homojen koordinatları olmak üzere $d \geq 0$ ve her $f \in S_d$ için hesaplama dönüşümü aşağıdaki şekilde de tanımlanabilir.

$$
\begin{aligned}
ev_Y &: S_d \to \mathbb{K}^n \\
f &\mapsto (f(P_1), \dots, f(P_n))
\end{aligned}
$$

Bu dönüşümün görüntüsü de yukarıdaki kodlara denk kodlar tanımlar. Yukarıda tanımını vermiş olduğumuz ev_Y hesaplama dönüşümünde Y'nin elemanlarının birer temsilcisi kullanılmaktadır. Farklı temsilciler kullanıldığında elde edilen kodlar bu kodlara denktir. Gerçekten, $X = \mathbb{P}_{\mathbf{w}}$ ağırlıklı projektif uzay ve $\lambda_i \in \mathbb{F}_q^*$ olmak üzere her i için $P_i = (P_{i1}, \dots, P_{ir})$ ile $\lambda_i^{\mathbf{w}} P_i = (\lambda_i^{w_1} P_{i1}, \dots, \lambda_i^{w_r} P_{ir})$ iki farklı temsilci olmak üzere $f \in S_d$ için $f(\lambda_i^{\mathbf{w}} P_i) = \lambda_i^d f(P_i)$ olacağından $(c_1, \dots, c_n) = (f(P_1), \dots, f(P_n))$ ise

$$(c_1^{'}, \dots, c_n^{'}) = (\lambda_1^d f(P_1), \dots, \lambda_n^d f(P_n)) = (\lambda_1^d c_1, \dots, \lambda_n^d c_n)$$

olur. Buradan her iki kodun da minimum ağırlıklarının aynı olduğu görülür. Benzer şekilde her iki kodun da uzunluğu aynı olduğu için boyutları da aynı olacağından bu iki kod birbirlerine denktir.

Bu hesaplama kodunun iki temel parametresi olan boyutu ve uzunluğu $S/I(Y)$ bölüm halkasının Hilbert fonksiyonu yardımıyla bulunabilir. Gerçekten, Y ağırlıklı projektif çeşitleminin Hilbert fonksiyonunu aşağıdaki şekilde tanımlayabiliriz.

$$HF(Y, d) := boy_{\mathbb{F}_q}(S/I(Y))_d = boy_{\mathbb{F}_q} S_d/I(Y)_d = boy_{\mathbb{F}_q} S_d - boy_{\mathbb{F}_q} I(Y)_d$$

Aynı zamanda yukarıda tanımladığımız hesaplama dönüşümünün çekirdeği $I(Y)$ sıfırlayan idealinin d dereceli homojen kısmına eşit olduğundan, bir başka deyişle $I(Y)_d = S_d \cap I(Y)$ olduğundan dolayı

$$S_d/I(Y)_d \simeq C_{d,Y}$$

durumu gerçekleşir. Dolayısıyla hem yukarıda verilen izomorfizm hem de Y ağırlıklı projektif çeşitleminin Hilbert fonksiyonu göz önünde bulundurulursa $C_{d,Y}$ kodunun boyutu

$$boy_{\mathbb{F}_q} C_{d,Y} = HF(Y, d)$$

şeklinde verilir.

Y kümesinin Hilbert fonksiyonunun her $d \geq |Y| - 1$ için alacağı değerler göz önüne alındığında en büyük değeri $|Y|$'ye kadar alabileceğinden benzer şekilde kodun uzunluğu olan $|Y|$ sayısı da Hilbert fonksiyonu yardımıyla bulunabilir. Ayrıca üçüncü temel parametre olan minimum uzaklıkla diğer iki parametre arasındaki ilişki yukarıda tanımını verdiğimiz Singleton sınırı ile verilir.

Şimdi ise $X = \mathbb{P}(w_1, \ldots, w_r)$ ağırlıklı projektif uzay ve $Y = \{P_1, \ldots, P_n\} \subseteq X$ olmak üzere Y kümesi üzerinde bir hesaplama kodunu elde etmek için **üreteç matrisi** tanımlayalım. Bu matrisi GM notasyonu ile gösterelim.

$$GM = \begin{array}{c} \\ x^{a_1} \\ \vdots \\ x^{a_r} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P_1 & \cdots & P_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \end{array}$$

Yukarıda verdiğimiz GM matrisinin satırlarını sırasıyla her $i \in \{1, \ldots, r\}$ için $S_i(GM)$ olarak adlandırırsak $c_i \in \mathbb{F}_q^*$ ve $f \in S_d$ olmak üzere

$$(f(P_1), \ldots, f(P_n)) = c_1 S_1(GM) + \cdots + c_r S_r(GM)$$

şeklinde elde edilir.

Örnek 6.2.1. *(Reed-Solomon Kodları) $X = \mathbb{P}(1,1) = \mathbb{P}^1$ ve $Y \subseteq X$ herhangi bir alt küme olmak üzere bu kümenin elemanlarının hesaplama dönüşümü altındaki görüntüsüne **Reed-Solomon Kodları** denir. Bu kodlar MDS kodlardır.*
Gerçekten, $Y = \{P_1, \ldots, P_n\} \subseteq X$ olsun. $S = \mathbb{F}_q[x, y]$ için

$$S_d = \{S\text{'nin derecesi } d \text{ olan polinomları}\} \cup \{0\}$$

kümesini ele alalım.

$$\begin{aligned} ev_Y &: S_d \to \mathbb{F}_q^n \\ f &\mapsto ev_Y(f) = (f(P_1), \ldots, f(P_n)) \end{aligned}$$

hesaplama dönüşümünü göz önünde bulunduralım. Burada S_d'nin baz elemanları $\{x^d, x^{d-1}y, \ldots, xy^{d-1}, y^d\}$ olmak üzere bu küme $d+1$ elemana sahiptir. Dolayısıyla $d = k-1$ için $boy_{\mathbb{F}_q} S_d = k$ olur. Eğer $[0,1] \notin Y$ ise $Y \subseteq \{[x:y] \in \mathbb{P}^1 : x \neq 0\}$ olacağından *her* $i = 1, \ldots, n$ *için* $P_i = [1 : t_i]$ *şeklindedir. Bu durumda* $f(x, y) = c_0x^d + c_1x^{d-1}y + \cdots + c_{d-1}xy^{d-1} + c_dy^d$ *fonksiyonu ile* $g(y) = c_0 + c_1y + \cdots + c_{d-1}y^{d-1} + c_dy^d \in \mathbb{F}_q[y]$ *polinomu* Y *kümesi üzerinde aynı değeri alır. Tek değişkenli* g *polinomunun en fazla derecesi kadar kökü olacağından,* $|V_Y(f)| = |\{P \in Y : f(P) = 0\}| \leq d$ *olur. Bu yüzden* $d < n$ *iken,* g *polinomu* Y*'nin bütün noktalarında sıfır değeri alamaz. Dolayısıyla,* $d < n$ *iken* $Çek(ev_Y) = \{0\}$ *olur. Ve*

$$boyC_{d,Y} = boy_{\mathbb{F}_q}S_d - boyI_d(Y) = d + 1 = k$$

olur. $g(y) = (y - t_1) \cdots (y - t_d)$ *polinomunun homojenizasyonu olan* f*'nin kökleri* $\{[1 : t_1], \ldots, [1 : t_d]\} \subseteq Y$ *şeklindedir. Yani,* $|V_Y(f)| = |\{P \in Y : f(P) = 0\}| = d$ *olur. Bu yüzden,* $d_{min}(C_{d,Y}) = n - maks\{|V_Y(f)| : f \in S_d \backslash \{0\}\} = n - d$ *olarak elde edilir. Ve buradan*

$$d = k - 1 \Rightarrow d_{min}(C_{d,Y}) = n - k + 1$$

olur. Böylece Reed Solomon kodlarının minimum uzaklığının $n - k + 1$ *değerine eşit olduğunu göstermiş oluruz.*

Örnek 6.2.2. *(Reed-Muller Kodları)* $X = \mathbb{P}(1, 1, \ldots, 1) = \mathbb{P}^{r-1}$ *ve* $Y \subseteq \{[1 : t_1 : \ldots : t_{r-1}] : (t_1, \ldots, t_{r-1}) \in \mathbb{F}_q^{r-1}\} \cong \mathbb{A}^{r-1}$ *alt kümesinin hesaplama dönüşümü altındaki görüntüsüne* ***Reed-Muller Kodları*** *denir.*

$Y = X = \mathbb{P}^{r-1}$ *olarak yani projektif uzayın kendisine eşit olarak alındığında bu kümenin hesaplama dönüşümü altındaki görüntüsü ise* ***Projektif Reed-Muller Kodları*** *tanımlar. Benzer şekilde eğer* $X = \mathbb{P}(w_1, \ldots, w_r)$ *ağırlıklı projektif uzayı olarak alınırsa ve* $Y \subseteq X$ *herhangi bir alt küme olarak alınırsa* Y *kümesinin hesaplama dönüşümü altındaki görüntüsü de* ***Ağırlıklı Projektif Reed-Muller Kodları*** *tanımlar.*

6.3 Ağırlıklı Projektif Uzaylardaki Parametrik Kodlar

Bu bölümde ağırlıklı projektif uzaylardaki parametrik kodlara bazı örnekler verip gözlemlediğimiz bir sonucu ispatlayacağız.

İlk olarak $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$, q elemanlı sonlu cisim olmak üzere farklı q değerleri için $\mathbb{P}(1, 1, q - 1)$ uzayındaki $A = diag(1, 1, q - 1)_{3\times3}$ matrisi tarafından parametrize edilen $Y_A = \{[t_1, t_2, 1] : t_1, t_2 \in \mathbb{K}^*\}$ simitli kümesinin hesaplama dönüşümü altındaki görüntüsünün tanımladığı kodların parametrelerini vereceğiz.

$q = 5, \quad \Gamma_{\mathbf{w}} = \{1,1,4\} \quad A = diag(1,1,4)_{3\times 3}$			
d	Kodun Uzunluğu	Kodun Boyutu	Minimum Uzaklık
1	4	2	3
2	4	3	2
$q = 7, \quad \Gamma_{\mathbf{w}} = \{1,1,6\} \quad A = diag(1,1,6)_{3\times 3}$			
1	6	2	5
2	6	3	4
3	6	4	3
4	6	5	2
$q = 11, \quad \Gamma_{\mathbf{w}} = \{1,1,10\} \quad A = diag(1,1,10)_{3\times 3}$			
1	10	2	9
2	10	3	8
3	10	4	7
4	10	5	6
5	10	6	5
6	10	7	4
7	10	8	3
8	10	9	2

Yukarıda verdiğimiz tablolardan da görüldüğü gibi farklı q değerleri için $\mathbb{P}(1,1,q-1)$ uzayında A matrisine karşılık gelen kodların parametreleri ile Reed Solomon kodlarının parametreleri aynıdır. Ve bu durum tesadüf değildir. $\mathbb{P}(1,1,\ldots,1,q-1)$ uzayında A matrisine karşılık gelen kodların $\mathbb{P}(1,1,\ldots,1) = \mathbb{P}^r$ uzayındaki Reed Solomon Kodları ile aynı kodlar olduğunu aşağıdaki iddia ile ispatlayacağız.

Teorem 6.3.1. *$\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$, q elemanlı sonlu cisim olmak üzere $\mathbb{P}(1,1,\ldots,1,q-1)$ uzayındaki*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & q-1 \end{bmatrix} \in M_{r\times r}(\mathbb{Z})$$

matrisi tarafından parametrize edilen $Y_A = \{[t_1 : t_2 : \cdots : t_r : 1] : t_1,\ldots,t_r \in \mathbb{F}_q^*\}$ simitli kümesinin hesaplama dönüşümü altındaki görüntüsünün tanımladığı kodlar ile

$\mathbb{P}(1,1,\ldots,1) = \mathbb{P}^r$ *projektif uzayındaki* $Y = \{[t_1 : t_2 : \ldots : t_r] : t_1, \ldots, t_r \in \mathbb{F}_q^*\} \subseteq \mathbb{P}^r$ *kümesinin hesaplama dönüşümü altındaki görüntüsünün tanımladığı Reed-Muller tipi kodlar birbirine eşit kodlardır. Bir başka deyişle her* $d \geq 1$ *için*

$$ev_{\mathbb{T}_{\mathbb{P}^r}}(S_d) = ev_{Y_A}(S[y]_d)$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt. Öncelikle $S[y]_d$ kümesinin aşağıdaki gibi yazılacağına dikkat edelim:

$$S[y]_d := S_d \cup \{y^{\mathbf{b}} S_{d-(q-1)b} : 1 \leq b \leq \lfloor \frac{d}{q-1} \rfloor\}$$

$ev_Y(S_d) \subseteq ev_{Y_A}(S[y]_d)$ kapsaması açık olduğundan tersi yönü göstereceğiz. $S[y]_d = S_d \cup \{y^b S_{d-(q-1)b} : 1 \leq b \leq \lfloor \frac{d}{q-1} \rfloor\}$ şeklinde olduğundan $ev_{Y_A}(S[y]_d)$'nin bir elemanı ya $x^{\mathbf{a}} \in S_d$ için $ev_{Y_A}(x^{\mathbf{a}})$ şeklinde ya da $x^{\mathbf{c}} \in S_{d-(q-1)b}$ için $ev_{Y_A}(x^{\mathbf{c}} y^b)$ şeklindedir. $x^{\mathbf{a}} \in S_d$ iken $ev_{Y_A}(x^{\mathbf{a}}) = ev_Y(x^{\mathbf{a}}) \in ev_Y(S_d)$ durumu sağlanır. Amacımız, $x^{\mathbf{c}} y^b \in S[y]_d$ iken de $ev_{Y_A}(x^{\mathbf{c}} y^b) = ev_{Y_A}(x^{\mathbf{a}})$ olacak şekilde bir $x^{\mathbf{a}} \in S_d$'nin varlığını göstermektir, çünkü bu durumda $ev_{Y_A}(x^{\mathbf{c}} y^b) \in ev_Y(S_d)$ olur, yani $ev_{Y_A}(S[y]_d) \subseteq ev_Y(S_d)$ kapsaması sağlanır. Öncelikle $ev_{Y_A}(y) = (1, \ldots, 1) = ev_Y(x_1^{q-1})$ olduğuna dikkat edelim. Dolayısıyla, $ev_{Y_A}(y^b) = ev_Y(x_1^{b(q-1)})$ ve her $x^{\mathbf{c}} \in S_{d-b(q-1)}$ için $ev_{Y_A}(x^{\mathbf{c}} y^b) = ev_Y(x^{\mathbf{c}} x_1^{b(q-1)})$ olur. Buradan $x^{\mathbf{a}} = x^{\mathbf{c}} x_1^{b(q-1)} \in S_d$ için istenen durum gerçekleşmiştir. □

7 ÖRNEKLER

Bu bölümde ilk olarak $\Gamma_{\mathbf{w}}$ nümerik yarıgrubu Arf Yarıgrubu iken ve Arf Yarıgrubu değilken $Y = \mathbb{T}_{\mathbf{w}}$ simiti için sıfırlayan idealleri, α-değişmezini ve Hilbert fonksiyonunun $1 \leq d \leq \alpha$-değişmezi aralığında aldığı değerleri veren tabloları vereceğiz. Ve sonrasında Arf olan ve olmayan yarıgrupların tanımladığı ağırlıklı projektif uzaylardaki Y simitinin verdiği kodların temel parametrelerini veren tabloları vereceğiz.

$d \geq \alpha$-değişmezi değerleri için aşikar kodlar elde edildiğinden yani minimum uzaklıkları 1 olan kodlar elde edildiğinden kodların parametrelerini hesaplarkan $d \leq \alpha$-değişmezi değerine kadar vereceğiz. Ayrıca aşağıda vereceğimiz tablolarda bir kodun parametreleri (n, k, d_{min}) olmak üzere **kodun kapasitesi** $C = \frac{n-k}{n}$ değeridir. **Kodun hata düzeltme kapasitesi** ise $E = \frac{\lfloor \frac{d_{min}-1}{2} \rfloor}{n}$ değeridir. Eğer kodun hata düzeltme kapasitesi kodun kapasitesine yakınsa kod iyi koddur. Yani bu iki değerin farkı olan $C - E$ değeri en küçük olan kod iyi koddur.

Aşağıdaki tablolarda farklı yarıgrupların tanımladığı ağırlıklı projektif uzaylardaki $Y = \mathbb{T}_{\mathbf{w}}$ simitine karşılık gelen kodların temel parametrelerini vereceğiz. Ayrıca yarıgrupları Arf olup olmadıklarına göre ayırarak, bu yarıgrupların tanımladığı ağırlıklı projektif uzaylardaki simite karşılık gelen kodların kapasitelerini, hata düzeltme kapasitelerini ve bu iki değer arasındaki farkı vererek kodların iyi kod olup olmadıklarını karşılaştırmaya çalışağız.

Bu kodların parametrelerini hesaplarken `SageMath` [31] programını kullandık. Bir kodun temel parametrelerini hesaplarken öncelikle A matrisi tarafından parametrize edilen kümeyi ve o kümenin sıfırlayan idealini buluyoruz. Bu sıfırlayan idealin Hilbert serisini hesapladıktan sonra Hilbert serisinin derecesi olan α-değişmezini buluyoruz. Bu değer kodları hesaplarken önemli; çünkü $d \geq \alpha$-değişmezi değerinden sonra Hilbert fonksiyonu hep sabit bir değer alacağından bu değerden sonra gelen kodlar aşikar kodlar olacaktır. Yani kodları hesaplarken bu değerden sonraki gelen kodlara bakmaya gerek olmadığından hangi aralıktaki kodlara bakmamızın yeterli olduğunu bu değer sayesinde biliyoruz. Daha sonra A matrisi tarafından parametrize edilen kümenin elemanlarını S_d vektör uzayındaki polinomlarda hesaplayarak bu hesaplama dönüşümlerinin görüntülerini satır kabul eden üreteç matrisini buluyoruz. Üreteç matrisinin satırlarından da kodları elde ediyoruz.

$q = 5, \quad \Gamma_{\mathbf{w}} = \{3, 5, 7\}$ (Arf Yarıgrubu), $\quad A = id_{3\times 3}$
$Y = \mathbb{T}_{\mathbf{w}}$ için $I(Y) = (x_2^8 - x_1^4x_3^4, x_1^{12}x_2^4 - x_3^8, x_1^{16} - x_2^4x_3^4)$
α-değişmezi $= 61$
$1 \leq d \leq 61$ için Hilbert fonksiyonunun değerleri: {1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 2, 3, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 11, 12, 11, 12, 13, 12, 13, 13, 14, 14, 14, 15, 14, 15, 15, 15, 16, 15, 16, 16, 15, 16→}

$q = 5, \quad \Gamma_{\mathbf{w}} = \{3, 5, 8\}$ (Arf Yarıgrubu Değil), $\quad A = id_{3\times 3}$
$Y = \mathbb{T}_{\mathbf{w}}$ için $I(Y) = (x_1^4x_2^4 - x_3^4, x_1^{16}x_3^4 - x_2^{16}, x_2^{20} - x_1^{12}x_3^8, x_1^{20} - x_2^{12})$
α-değişmezi $= 76$
$1 \leq d \leq 76$ için Hilbert fonksiyonunun değerleri: {1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 2, 3, 2, 3, 3, 3, 4, 3, 4, 5, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 7, 8, 9, 8, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 11, 12, 13, 12, 13, 13, 13, 14, 13, 14, 14, 14, 15, 14, 15, 15, 14, 16, 15, 15, 16, 15, 16, 16, 15, 16→}

Aşağıda vereceğimiz tablolarda yarıgrupları seçerken Arf olup olmadıklarına göre ayırmamızın yanı sıra yarıgrupların katlılığının aynı olmasına ve Arf yarıgruplarının simetrik olmayan yarıgruplar olmaları sebebiyle Arf olmayan yarıgrupların da simetrik olmamasına dikkat ettik. Bu duruma dikkat etmemizdeki amaç Arf yarıgruplarının kodların üzerindeki etkisini gözlemlemek olduğundan yarıgrupların diğer özelliklerini aynı almaya çalıştık. Bu yüzden aşağıdaki örneklerde yarıgrupların katlılığını 3 olarak aldık ve simetrik olmayan yarıgrupları inceledik. Minimum uzaklığı veya boyutu 1 olarak elde edilen kodlar aşikar kodlar olduğundan dolayı aşağıdaki tablolarda ilk olarak kodlar aşikar kodlardır. İlk olarak verilen koddan önceki kodlar da aşikar kodlar olarak elde edildiğinden tablolarda belli bir d değerinden sonraki kodlar verilmiştir. Örneğin birinci tabloda $d \leq 7$ değerleri için elde edilen kodlar, aşikar kodlardır.

$q=5$, $\Gamma_{\mathbf{w}}=\{3,4,5\}$ (Arf Yarıgrubu), $A=id_{3\times3}$, α-değişmezi=44						
d	Kodun Uzunluğu	Kodun Boyutu	Minimum Uzaklık	Kodun Kapasitesi(C)	Hata Düzeltme Oranı(E)	C-E
7	16	1	16	15/16	7/16	1/2
8	16	2	12	7/8	5/16	9/16
9	16	2	12	7/8	5/16	9/16
10	16	2	12	7/8	5/16	9/16
11	16	2	12	7/8	5/16	9/16
12	16	3	12	13/16	5/16	1/2
13	16	3	12	13/16	5/16	1/2
14	16	3	12	13/16	5/16	1/2
15	16	4	10	3/4	1/4	1/2
16	16	4	8	3/4	3/16	9/16
17	16	4	9	3/4	1/4	1/2
18	16	5	8	11/16	3/16	1/2
19	16	5	8	11/16	3/16	1/2
20	16	6	8	5/8	3/16	7/16
21	16	6	8	5/8	3/16	7/16
22	16	6	8	5/8	3/16	7/16
23	16	7	6	9/16	1/8	7/16
24	16	8	4	1/2	1/16	7/16
25	16	8	6	1/2	1/8	3/8
26	16	8	6	1/2	1/8	3/8
27	16	9	4	7/16	1/16	3/8
28	16	10	4	3/8	1/16	5/16
29	16	10	4	3/8	1/16	5/16
30	16	11	4	5/16	1/16	1/4
31	16	11	4	5/16	1/16	1/4
32	16	11	3	5/16	1/16	1/4
33	16	13	3	3/16	1/16	1/8
34	16	13	2	3/16	0	3/16

$q = 5, \quad \Gamma_{\mathbf{w}} = \{3,4,5\}$ (Arf Yarıgrubu), $Q = id_{3\times 3}$, α-değişmezi=44						
d	Kodun Uzunluğu	Kodun Boyutu	Minimum Uzaklık	Kodun Kapasitesi(C)	Hata Düzeltme Oranı(E)	C-E
35	16	13	3	$3/16$	$1/16$	$1/8$
36	16	13	3	$3/16$	$1/16$	$1/8$
37	16	14	2	$1/8$	0	$1/8$
38	16	15	2	$1/16$	0	$1/16$
39	16	15	2	$1/16$	0	$1/16$
40	16	14	2	$1/8$	0	$1/8$
41	16	15	2	$1/16$	0	$1/16$
42	16	16	1	0	0	0
43	16	16	1	0	0	0
44	16	15	2	$1/16$	0	$1/16$

$q=5$, $\Gamma_{\mathbf{w}}=\{3,5,7\}$ (Arf Yarıgrubu), $A=id_{3\times 3}$, α-değişmezi=61						
d	Kodun Uzunluğu	Kodun Boyutu	Minimum Uzaklık	Kodun Kapasitesi(C)	Hata Düzeltme Oranı(E)	C-E
9	16	1	16	15/16	7/16	1/2
10	16	2	12	7/8	5/16	9/16
11	16	1	16	15/16	7/16	1/2
12	16	2	12	7/8	5/16	9/16
13	16	2	12	7/8	5/16	9/16
14	16	2	12	7/8	5/16	9/16
15	16	3	12	13/16	5/16	1/2
16	16	2	12	7/8	5/16	9/16
17	16	3	12	13/16	5/16	1/2
18	16	3	12	13/16	5/16	1/2
19	16	3	12	13/16	5/16	1/2
20	16	4	8	3/4	3/16	9/16
21	16	4	10	3/4	1/4	1/2
22	16	4	9	3/4	1/4	1/2
23	16	4	8	3/4	3/16	9/16
24	16	5	8	11/16	3/16	1/2
25	16	5	8	11/16	3/16	1/2
26	16	5	8	11/16	3/16	1/2
27	16	6	8	5/8	3/16	7/16
28	16	6	8	5/8	3/16	7/16
29	16	6	8	5/8	3/16	7/16
30	16	7	4	9/16	1/16	1/2
31	16	7	6	9/16	1/8	7/16
32	16	7	6	9/16	1/8	7/16
33	16	8	4	1/2	1/16	7/16
34	16	8	6	1/2	1/8	3/8
35	16	9	4	7/16	1/16	3/8
36	16	9	4	7/16	1/16	3/8

$q=5$, $\Gamma_{\mathbf{w}}=\{3,5,7\}$ (Arf Yarıgrubu), $A=id_{3\times 3}$, α-değişmezi=61						
d	Kodun Uzunluğu	Kodun Boyutu	Minimum Uzaklık	Kodun Kapasitesi(C)	Hata Düzeltme Oranı(E)	C-E
37	16	9	4	7/16	1/16	3/8
38	16	10	4	3/8	1/16	5/16
39	16	10	4	3/8	1/16	5/16
40	16	10	4	3/8	1/16	5/16
41	16	11	4	5/16	1/16	1/4
42	16	12	3	1/4	1/16	3/16
43	16	11	3	5/16	1/16	1/4
44	16	12	3	1/4	1/16	3/16
45	16	13	3	3/16	1/16	1/8
46	16	12	3	1/4	1/16	3/16
47	16	13	2	3/16	0	3/16
48	16	13	3	3/16	1/16	1/8
49	16	14	2	1/8	0	1/8
50	16	14	2	1/8	0	1/8
51	16	14	2	1/8	0	1/8
52	16	15	2	1/16	0	1/16
53	16	14	2	1/8	0	1/8
54	16	15	2	1/16	0	1/16
55	16	15	2	1/16	0	1/16
56	16	15	2	1/16	0	1/16
57	16	16	1	0	0	0
58	16	15	2	1/16	0	1/16
59	16	16	1	0	0	0
60	16	16	1	0	0	0
61	16	15	2	1/16	0	1/16

$q=5$, $\Gamma_{\mathbf{w}}=\{3,11,13\}$ (Arf Yarıgrubu), $A=id_{3\times3}$, α-değişmezi=121						
d	Kodun Uzunluğu	Kodun Boyutu	Minimum Uzaklık	Kodun Kapasitesi(C)	Hata Düzeltme Oranı(E)	C-E
21	16	1	16	15/16	7/16	1/2
22	16	2	12	7/8	5/16	9/16
23	16	1	16	15/16	7/16	1/2
24	16	2	12	7/8	5/16	9/16
25	16	2	12	7/8	5/16	9/16
26	16	2	12	7/8	5/16	9/16
27	16	2	12	7/8	5/16	9/16
28	16	2	12	7/8	5/16	9/16
29	16	2	12	7/8	5/16	9/16
30	16	2	12	7/8	5/16	9/16
31	16	2	12	7/8	5/16	9/16
32	16	2	12	7/8	5/16	9/16
33	16	3	12	13/16	5/16	1/2
34	16	2	12	7/8	5/16	9/16
35	16	3	12	13/16	5/16	1/2
36	16	3	12	13/16	5/16	1/2
37	16	3	12	13/16	5/16	1/2
38	16	3	12	13/16	5/16	1/2
39	16	4	10	3/4	1/4	1/2
40	16	3	12	13/16	5/16	1/2
41	16	3	12	13/16	5/16	1/2
42	16	4	10	3/4	1/4	1/2
43	16	3	12	13/16	5/16	1/2
44	16	4	8	3/4	3/16	9/16
45	16	4	10	3/4	1/4	1/2
46	16	4	9	3/4	1/4	1/2
47	16	4	8	3/4	3/16	9/16
48	16	5	8	11/16	3/16	1/2

$q=5$, $\Gamma_{\mathbf{w}}=\{3,11,13\}$ (Arf Yarıgrubu), $A=id_{3\times 3}$, α-değişmezi=121						
d	Kodun Uzunluğu	Kodun Boyutu	Minimum Uzaklık	Kodun Kapasitesi(C)	Hata Düzeltme Oranı(E)	C-E
49	16	4	9	3/4	1/4	1/2
50	16	5	8	11/16	3/16	1/2
51	16	5	8	11/16	3/16	1/2
52	16	5	8	11/16	3/16	1/2
53	16	5	8	11/16	3/16	1/2
54	16	5	8	11/16	3/16	1/2
55	16	6	8	5/8	3/16	7/16
56	16	5	8	11/16	3/16	1/2
57	16	6	8	5/8	3/16	7/16
58	16	6	8	5/8	3/16	7/16
59	16	6	8	5/8	3/16	7/16
60	16	6	8	5/8	3/16	7/16
61	16	7	6	9/16	1/8	7/16
62	16	6	8	5/8	3/16	7/16
63	16	7	6	9/16	1/8	7/16
64	16	7	6	9/16	1/8	7/16
65	16	7	6	9/16	1/8	7/16
66	16	8	4	1/2	1/16	7/16
67	16	7	6	9/16	1/8	7/16
68	16	8	6	1/2	1/8	3/8
69	16	8	4	1/2	1/16	7/16
70	16	8	6	1/2	1/8	3/8
71	16	8	6	1/2	1/8	3/8
72	16	9	4	7/16	1/16	3/8
73	16	8	6	1/2	1/8	3/8
74	16	9	6	7/16	1/8	5/16
75	16	9	4	7/16	1/16	3/8
76	16	9	6	7/16	1/8	5/16

$q=5$, $\Gamma_{\mathbf{w}}=\{3,11,13\}$ (Arf Yarıgrubu), $A=id_{3\times 3}$, α-değişmezi=121						
d	Kodun Uzunluğu	Kodun Boyutu	Minimum Uzaklık	Kodun Kapasitesi(C)	Hata Düzeltme Oranı(E)	C-E
77	16	10	4	3/8	1/16	5/16
78	16	10	4	3/8	1/16	5/16
79	16	10	4	3/8	1/16	5/16
80	16	10	4	3/8	1/16	5/16
81	16	11	4	5/16	1/16	1/4
82	16	10	4	3/8	1/16	5/16
83	16	11	4	5/16	1/16	1/4
84	16	11	4	5/16	1/16	1/4
85	16	11	3	5/16	1/16	1/4
86	16	11	4	5/16	1/16	1/4
87	16	12	3	1/4	1/16	3/16
88	16	11	3	5/16	1/16	1/4
89	16	12	3	1/4	1/16	3/16
90	16	13	3	3/16	1/16	1/8
91	16	12	3	1/4	1/16	3/16
92	16	13	2	3/16	0	3/16
93	16	13	3	3/16	1/16	1/8
94	16	13	3	3/16	1/16	1/8
95	16	13	2	3/16	0	3/16
96	16	13	3	3/16	1/16	1/8
97	16	13	3	3/16	1/16	1/8
98	16	14	2	1/8	0	1/8
99	16	13	3	3/16	1/16	1/8
100	16	14	2	1/8	0	1/8
101	16	14	2	1/8	0	1/8
102	16	14	2	1/8	0	1/8
103	16	15	2	1/16	0	1/16
104	16	14	2	1/8	0	1/8

$q=5$, $\Gamma_{\mathbf{w}}=\{3,11,13\}$ (Arf Yarıgrubu), $A=id_{3\times 3}$, α-değişmezi=121						
d	Kodun Uzunluğu	Kodun Boyutu	Minimum Uzaklık	Kodun Kapasitesi(C)	Hata Düzeltme Oranı(E)	C-E
105	16	15	2	1/16	0	1/16
106	16	15	2	1/16	0	1/16
107	16	14	2	1/8	0	1/8
108	16	15	2	1/16	0	1/16
109	16	15	2	1/16	0	1/16
110	16	14	2	1/8	0	1/8
111	16	16	1	0	0	0
112	16	15	2	1/16	0	1/16
113	16	15	2	1/16	0	1/16
114	16	16	1	0	0	0
115	16	15	2	1/16	0	1/16
116	16	16	1	0	0	0
117	16	16	1	0	0	0
118	16	15	2	1/16	0	1/16
119	16	16	1	0	0	0
120	16	16	1	0	0	0
121	16	15	2	1/16	0	1/16

$q=5,\quad \Gamma_{\mathbf{w}}=\{3,13,14\}$ (Arf Yarıgrubu), $A=id_{3\times 3}$, α-değişmezi=134						
d	Kodun Uzunluğu	Kodun Boyutu	Minimum Uzaklık	Kodun Kapasitesi(C)	Hata Düzeltme Oranı(E)	C-E
25	16	1	16	15/16	7/16	1/2
26	16	2	12	7/8	5/16	9/16
27	16	2	12	7/8	5/16	9/16
28	16	2	12	7/8	5/16	9/16
29	16	2	12	7/8	5/16	9/16
30	16	2	12	7/8	5/16	9/16
31	16	2	12	7/8	5/16	9/16
32	16	2	12	7/8	5/16	9/16
33	16	2	12	7/8	5/16	9/16
34	16	2	12	7/8	5/16	9/16
35	16	2	12	7/8	5/16	9/16
36	16	2	12	7/8	5/16	9/16
37	16	2	12	7/8	5/16	9/16
38	16	2	12	7/8	5/16	9/16
39	16	3	12	13/16	5/16	1/2
40	16	3	12	13/16	5/16	1/2
41	16	3	12	13/16	5/16	1/2
42	16	4	10	3/4	1/4	1/2
43	16	3	12	13/16	5/16	1/2
44	16	3	12	13/16	5/16	1/2
45	16	4	10	3/4	1/4	1/2
46	16	3	12	13/16	5/16	1/2
47	16	3	12	13/16	5/16	1/2
48	16	4	10	3/4	1/4	1/2
49	16	3	12	13/16	5/16	1/2
50	16	3	12	13/16	5/16	1/2
51	16	4	10	3/4	1/4	1/2
52	16	4	8	3/4	3/16	9/16

$q=5$, $\Gamma_{\mathbf{w}}=\{3,13,14\}$ (Arf Yarıgrubu), $A=id_{3\times 3}$, α-değişmezi=134						
d	Kodun Uzunluğu	Kodun Boyutu	Minimum Uzaklık	Kodun Kapasitesi(C)	Hata Düzeltme Oranı(E)	C-E
53	16	4	9	3/4	1/4	1/2
54	16	5	8	11/16	3/16	1/2
55	16	5	8	11/16	3/16	1/2
56	16	5	8	11/16	3/16	1/2
57	16	5	8	11/16	3/16	1/2
58	16	5	8	11/16	3/16	1/2
59	16	5	8	11/16	3/16	1/2
60	16	5	8	11/16	3/16	1/2
61	16	5	8	11/16	3/16	1/2
62	16	5	8	11/16	3/16	1/2
63	16	5	8	11/16	3/16	1/2
64	16	5	8	11/16	3/16	1/2
65	16	6	8	5/8	3/16	7/16
66	16	6	8	5/8	3/16	7/16
67	16	6	8	5/8	3/16	7/16
68	16	7	6	9/16	1/8	7/16
69	16	7	6	9/16	1/8	7/16
70	16	7	6	9/16	1/8	7/16
71	16	7	6	9/16	1/8	7/16
72	16	7	6	9/16	1/8	7/16
73	16	7	6	9/16	1/8	7/16
74	16	7	6	9/16	1/8	7/16
75	16	7	6	9/16	1/8	7/16
76	16	7	6	9/16	1/8	7/16
77	16	7	6	9/16	1/8	7/16
78	16	8	4	1/2	1/16	7/16
79	16	8	6	1/2	1/8	3/8
80	16	8	6	1/2	1/8	3/8

$q=5$, $\Gamma_{\mathbf{w}}=\{3,13,14\}$ (Arf Yarıgrubu), $A=id_{3\times3}$, α-değişmezi=134						
d	Kodun Uzunluğu	Kodun Boyutu	Minimum Uzaklık	Kodun Kapasitesi(C)	Hata Düzeltme Oranı(E)	C-E
81	16	9	4	7/16	1/16	3/8
82	16	9	6	7/16	1/8	5/16
83	16	9	6	7/16	1/8	5/16
84	16	10	4	3/8	1/16	5/16
85	16	9	6	7/16	1/8	5/16
86	16	9	6	7/16	1/8	5/16
87	16	10	4	3/8	1/16	5/16
88	16	9	6	7/16	1/8	5/16
89	16	9	6	7/16	1/8	5/16
90	16	10	4	3/8	1/16	5/16
91	16	10	4	3/8	1/16	5/16
92	16	10	4	3/8	1/16	5/16
93	16	11	4	5/16	1/16	1/4
94	16	11	4	5/16	1/16	1/4
95	16	11	3	5/16	1/16	1/4
96	16	12	3	1/4	1/16	3/16
97	16	12	3	1/4	1/16	3/16
98	16	12	3	1/4	1/16	3/16
99	16	12	3	1/4	1/16	3/16
100	16	12	3	1/4	1/16	3/16
101	16	12	3	1/4	1/16	3/16
102	16	12	3	1/4	1/16	3/16
103	16	12	3	1/4	1/16	3/16
104	16	12	3	1/4	1/16	3/16
105	16	13	3	3/16	1/16	1/8
106	16	13	2	3/16	0	3/16
107	16	13	3	3/16	1/16	1/8
108	16	13	3	3/16	1/16	1/8

$q=5,\quad \Gamma_{\mathbf{w}}=\{3,13,14\}$ (Arf Yarıgrubu), $A=id_{3\times 3}$, α-değişmezi=134						
d	Kodun Uzunluğu	Kodun Boyutu	Minimum Uzaklık	Kodun Kapasitesi(C)	Hata Düzeltme Oranı(E)	C-E
109	16	14	2	1/8	0	1/8
110	16	14	2	1/8	0	1/8
111	16	14	2	1/8	0	1/8
112	16	14	2	1/8	0	1/8
113	16	14	2	1/8	0	1/8
114	16	14	2	1/8	0	1/8
115	16	14	2	1/8	0	1/8
116	16	14	2	1/8	0	1/8
117	16	14	2	1/8	0	1/8
118	16	14	2	1/8	0	1/8
119	16	15	2	1/16	0	1/16
120	16	15	2	1/16	0	1/16
121	16	14	2	1/8	0	1/8
122	16	15	2	1/16	0	1/16
123	16	16	1	0	0	0
124	16	15	2	1/16	0	1/16
125	16	15	2	1/16	0	1/16
126	16	16	1	0	0	0
127	16	15	2	1/16	0	1/16
128	16	15	2	1/16	0	1/16
129	16	16	1	0	0	0
130	16	15	2	1/16	0	1/16
131	16	15	2	1/16	0	1/16
132	16	16	1	0	0	0
133	16	16	1	0	0	0
134	16	15	2	1/16	0	1/16

$q=5$, $\Gamma_{\mathbf{w}}=\{3,7,8\}$ (Arf Yarıgrubu), $A=id_{3\times 3}$, α-değişmezi=74						
d	Kodun Uzunluğu	Kodun Boyutu	Minimum Uzaklık	Kodun Kapasitesi(C)	Hata Düzeltme Oranı(E)	C-E
13	16	1	16	15/16	7/16	1/2
14	16	2	12	7/8	5/16	9/16
15	16	2	12	7/8	5/16	9/16
16	16	2	12	7/8	5/16	9/16
17	16	2	12	7/8	5/16	9/16
18	16	2	12	7/8	5/16	9/16
19	16	2	12	7/8	5/16	9/16
20	16	2	12	7/8	5/16	9/16
21	16	3	12	13/16	5/16	1/2
22	16	3	12	13/16	5/16	1/2
23	16	3	12	13/16	5/16	1/2
24	16	4	10	3/4	1/4	1/2
25	16	3	12	13/16	5/16	1/2
26	16	3	12	13/16	5/16	1/2
27	16	4	10	3/4	1/4	1/2
28	16	4	8	3/4	3/16	9/16
29	16	4	9	3/4	1/4	1/2
30	16	5	8	11/16	3/16	1/2
31	16	5	8	11/16	3/16	1/2
32	16	5	8	11/16	3/16	1/2
33	16	5	8	11/16	3/16	1/2
34	16	5	8	11/16	3/16	1/2
35	16	6	8	5/8	3/16	7/16
36	16	6	8	5/8	3/16	7/16
37	16	6	8	5/8	3/16	7/16
38	16	7	6	9/16	1/8	7/16
39	16	7	6	9/16	1/8	7/16
40	16	7	6	9/16	1/8	7/16

$q = 5$, $\Gamma_{\mathbf{w}} = \{3, 7, 8\}$ (Arf Yarıgrubu), $A = id_{3\times3}$, α-değişmezi=74						
d	Kodun Uzunluğu	Kodun Boyutu	Minimum Uzaklık	Kodun Kapasitesi(C)	Hata Düzeltme Oranı(E)	C-E
41	16	7	6	9/16	1/8	7/16
42	16	8	4	1/2	1/16	7/16
43	16	8	6	1/2	1/8	3/8
44	16	8	6	1/2	1/8	3/8
45	16	9	4	7/16	1/16	3/8
46	16	9	6	7/16	1/8	5/16
47	16	9	6	7/16	1/8	5/16
48	16	10	4	3/8	1/16	5/16
49	16	10	4	3/8	1/16	5/16
50	16	10	4	3/8	1/16	5/16
51	16	11	4	5/16	1/16	1/4
52	16	11	4	5/16	1/16	1/4
53	16	11	3	5/16	1/16	1/4
54	16	12	3	1/4	1/16	3/16
55	16	12	3	1/4	1/16	3/16
56	16	12	3	1/4	1/16	3/16
57	16	13	3	3/16	1/16	1/8
58	16	13	2	3/16	0	3/16
59	16	13	3	3/16	1/16	1/8
60	16	13	3	3/16	1/16	1/8
61	16	14	2	1/8	0	1/8
62	16	14	2	1/8	0	1/8
63	16	14	2	1/8	0	1/8
64	16	14	2	1/8	0	1/8
65	16	15	2	1/16	0	1/16
66	16	15	2	1/16	0	1/16
67	16	14	2	1/8	0	1/8
68	16	15	2	1/16	0	1/16

$q=5, \quad \Gamma_{\mathbf{w}}=\{3,7,8\}$ (Arf Yarıgrubu), $A=id_{3\times 3}$, α-değişmezi=74						
d	Kodun Uzunluğu	Kodun Boyutu	Minimum Uzaklık	Kodun Kapasitesi(C)	Hata Düzeltme Oranı(E)	C-E
69	16	16	1	0	0	0
70	16	15	2	$1/16$	0	$1/16$
71	16	15	2	$1/16$	0	$1/16$
72	16	16	1	0	0	0
73	16	16	1	0	0	0
74	16	15	2	$1/16$	0	$1/16$

$q=5$, $\Gamma_{\mathbf{w}}=\{3,10,17\}$ (Arf Yarıgrubu Değil), $A=id_{3\times 3}$, α-değişmezi=146						
d	Kodun Uzunluğu	Kodun Boyutu	Minimum Uzaklık	Kodun Kapasitesi(C)	Hata Düzeltme Oranı(E)	C-E
19	16	1	16	15/16	7/16	1/2
20	16	2	12	7/8	5/16	9/16
21	16	1	16	15/16	7/16	1/2
22	16	1	16	15/16	7/16	1/2
23	16	2	12	7/8	5/16	9/16
24	16	1	16	15/16	7/16	1/2
25	16	1	16	15/16	7/16	1/2
26	16	2	12	7/8	5/16	9/16
27	16	2	12	7/8	5/16	9/16
28	16	1	16	15/16	7/16	1/2
29	16	2	12	7/8	5/16	9/16
30	16	3	12	13/16	5/16	1/2
31	16	1	16	15/16	7/16	1/2
32	16	2	12	7/8	5/16	9/16
33	16	3	12	13/16	5/16	1/2
34	16	2	12	7/8	5/16	9/16
35	16	2	12	7/8	5/16	9/16
36	16	3	12	13/16	5/16	1/2
37	16	3	12	13/16	5/16	1/2
38	16	2	12	7/8	5/16	9/16
39	16	3	12	13/16	5/16	1/2
40	16	4	8	3/4	3/16	9/16
41	16	2	12	7/8	5/16	9/16
42	16	3	12	13/16	5/16	1/2
43	16	4	8	3/4	3/16	9/16
44	16	3	12	13/16	5/16	1/2
45	16	3	12	13/16	5/16	1/2
46	16	4	8	3/4	3/16	9/16

$q = 5$, $\Gamma_{\mathbf{w}} = \{3, 10, 17\}$ (Arf Yarıgrubu Değil), $A = id_{3\times3}$, α-değişmezi=146						
d	Kodun Uzunluğu	Kodun Boyutu	Minimum Uzaklık	Kodun Kapasitesi(C)	Hata Düzeltme Oranı(E)	C-E
47	16	4	9	3/4	1/4	1/2
48	16	3	12	13/16	5/16	1/2
49	16	4	8	3/4	3/16	9/16
50	16	5	8	11/16	3/16	1/2
51	16	4	10	3/4	1/4	1/2
52	16	4	8	3/4	3/16	9/16
53	16	5	8	11/16	3/16	1/2
54	16	5	8	11/16	3/16	1/2
55	16	4	8	3/4	3/16	9/16
56	16	5	8	11/16	3/16	1/2
57	16	6	8	5/8	3/16	7/16
58	16	4	8	3/4	3/16	9/16
59	16	5	8	11/16	3/16	1/2
60	16	7	4	9/16	1/16	1/2
61	16	5	8	11/16	3/16	1/2
62	16	5	8	11/16	3/16	1/2
63	16	7	4	9/16	1/16	1/2
64	16	6	8	5/8	3/16	7/16
65	16	5	8	11/16	3/16	1/2
66	16	7	4	9/16	1/16	1/2
67	16	7	6	9/16	1/8	7/16
68	16	6	8	5/8	3/16	7/16
69	16	7	4	9/16	1/16	1/2
70	16	8	4	1/2	1/16	7/16
71	16	7	6	9/16	1/8	7/16
72	16	7	4	9/16	1/16	1/2
73	16	8	4	1/2	1/16	7/16
74	16	8	6	1/2	1/8	3/8

$q=5$, $\Gamma_{\mathbf{w}}=\{3,10,17\}$ (Arf Yarıgrubu Değil), $A=id_{3\times3}$, α-değişmezi=146						
d	Kodun Uzunluğu	Kodun Boyutu	Minimum Uzaklık	Kodun Kapasitesi(C)	Hata Düzeltme Oranı(E)	C-E
75	16	7	4	9/16	1/16	1/2
76	16	8	4	1/2	1/16	7/16
77	16	9	4	7/16	1/16	3/8
78	16	8	4	1/2	1/16	7/16
79	16	8	4	1/2	1/16	7/16
80	16	9	4	7/16	1/16	3/8
81	16	9	4	7/16	1/16	3/8
82	16	8	4	1/2	1/16	7/16
83	16	9	4	7/16	1/16	3/8
84	16	10	4	3/8	1/16	5/16
85	16	9	4	7/16	1/16	3/8
86	16	9	4	7/16	1/16	3/8
87	16	11	3	5/16	1/16	1/4
88	16	10	4	3/8	1/16	5/16
89	16	9	4	7/16	1/16	3/8
90	16	11	3	5/16	1/16	1/4
91	16	11	4	5/16	1/16	1/4
92	16	9	4	7/16	1/16	3/8
93	16	11	3	5/16	1/16	1/4
94	16	12	3	1/4	1/16	3/16
95	16	10	4	3/8	1/16	5/16
96	16	11	3	5/16	1/16	1/4
97	16	12	3	1/4	1/16	3/16
98	16	11	3	5/16	1/16	1/4
99	16	11	3	5/16	1/16	1/4
100	16	12	3	1/4	1/16	3/16
101	16	12	3	1/4	1/16	3/16
102	16	12	3	1/4	1/16	3/16

$q=5$, $\Gamma_{\mathbf{w}}=\{3,10,17\}$ (Arf Yarıgrubu Değil), $A=id_{3\times 3}$, α-değişmezi=146						
d	Kodun Uzunluğu	Kodun Boyutu	Minimum Uzaklık	Kodun Kapasitesi(C)	Hata Düzeltme Oranı(E)	C-E
103	16	12	3	1/4	1/16	3/16
104	16	13	3	3/16	1/16	1/8
105	16	13	3	3/16	1/16	1/8
106	16	12	3	1/4	1/16	3/16
107	16	13	3	3/16	1/16	1/8
108	16	13	3	3/16	1/16	1/8
109	16	12	3	1/4	1/16	3/16
110	16	13	3	3/16	1/16	1/8
111	16	14	2	1/8	0	1/8
112	16	13	2	3/16	0	3/16
113	16	13	3	3/16	1/16	1/8
114	16	14	2	1/8	0	1/8
115	16	14	2	1/8	0	1/8
116	16	13	3	3/16	1/16	1/8
117	16	14	2	1/8	0	1/8
118	16	14	2	1/8	0	1/8
119	16	14	2	1/8	0	1/8
120	16	14	2	1/8	0	1/8
121	16	15	2	1/16	0	1/16
122	16	15	2	1/16	0	1/16
123	16	14	2	1/8	0	1/8
124	16	15	2	1/16	0	1/16
125	16	15	2	1/16	0	1/16
126	16	14	2	1/8	0	1/8
127	16	15	2	1/16	0	1/16
128	16	15	2	1/16	0	1/16
129	16	15	2	1/16	0	1/16
130	16	15	2	1/16	0	1/16

$q = 5, \quad \Gamma_{\mathbf{w}} = \{3, 10, 17\}$ (Arf Yarıgrubu Değil), $A = id_{3\times 3}$, α-değişmezi=146						
d	Kodun Uzunluğu	Kodun Boyutu	Minimum Uzaklık	Kodun Kapasitesi(C)	Hata Düzeltme Oranı(E)	C-E
131	16	15	2	1/16	0	1/16
132	16	16	1	0	0	0
133	16	15	2	1/16	0	1/16
134	16	15	2	1/16	0	1/16
135	16	16	1	0	0	0
136	16	15	2	1/16	0	1/16
137	16	15	2	1/16	0	1/16
138	16	16	1	0	0	0
139	16	16	1	0	0	0
140	16	15	2	1/16	0	1/16
141	16	16	1	0	0	0
142	16	16	1	0	0	0
143	16	15	2	1/16	0	1/16
144	16	16	1	0	0	0
145	16	16	1	0	0	0
146	16	15	2	1/16	0	1/16

$q = 5$, $\Gamma_{\mathbf{w}} = \{3, 7, 11\}$ (Arf Yarıgrubu Değil), $A = id_{3\times 3}$, α-değişmezi=95						
d	Kodun Uzunluğu	Kodun Boyutu	Minimum Uzaklık	Kodun Kapasitesi(C)	Hata Düzeltme Oranı(E)	C-E
13	16	1	16	15/16	7/16	1/2
14	16	2	12	7/8	5/16	9/16
15	16	1	16	15/16	7/16	1/2
16	16	1	16	15/16	7/16	1/2
17	16	2	12	7/8	5/16	9/16
18	16	2	12	7/8	5/16	9/16
19	16	1	16	15/16	7/16	1/2
20	16	2	12	7/8	5/16	9/16
21	16	3	12	13/16	5/16	1/2
22	16	2	12	7/8	5/16	9/16
23	16	2	12	7/8	5/16	9/16
24	16	3	12	13/16	5/16	1/2
25	16	3	12	13/16	5/16	1/2
26	16	2	12	7/8	5/16	9/16
27	16	3	12	13/16	5/16	1/2
28	16	4	8	3/4	3/16	9/16
29	16	3	12	13/16	5/16	1/2
30	16	3	12	13/16	5/16	1/2
31	16	4	8	3/4	3/16	9/16
32	16	4	9	3/4	1/4	1/2
33	16	4	10	3/4	1/4	1/2
34	16	4	8	3/4	3/16	9/16
35	16	5	8	11/16	3/16	1/2
36	16	5	8	11/16	3/16	1/2
37	16	4	8	3/4	3/16	9/16
38	16	5	8	11/16	3/16	1/2
39	16	6	8	5/8	3/16	7/16
40	16	5	8	11/16	3/16	1/2

$q=5,\quad \Gamma_{\mathbf{w}}=\{3,7,11\}$ (Arf Yarıgrubu Değil), $A=id_{3\times 3}$, α-değişmezi=95						
d	Kodun Uzunluğu	Kodun Boyutu	Minimum Uzaklık	Kodun Kapasitesi(C)	Hata Düzeltme Oranı(E)	C-E
41	16	5	8	11/16	3/16	1/2
42	16	7	4	9/16	1/16	1/2
43	16	6	8	5/8	3/16	7/16
44	16	6	8	5/8	3/16	7/16
45	16	7	4	9/16	1/16	1/2
46	16	7	6	9/16	1/8	7/16
47	16	7	6	9/16	1/8	7/16
48	16	7	4	9/16	1/16	1/2
49	16	8	4	1/2	1/16	7/16
50	16	8	6	1/2	1/8	3/8
51	16	8	4	1/2	1/16	7/16
52	16	8	4	1/2	1/16	7/16
53	16	9	4	7/16	1/16	3/8
54	16	9	4	7/16	1/16	3/8
55	16	9	4	7/16	1/16	3/8
56	16	9	4	7/16	1/16	3/8
57	16	10	4	3/8	1/16	5/16
58	16	10	4	3/8	1/16	5/16
59	16	9	4	7/16	1/16	3/8
60	16	11	3	5/16	1/16	1/4
61	16	11	4	5/16	1/16	1/4
62	16	10	4	3/8	1/16	5/16
63	16	11	3	5/16	1/16	1/4
64	16	12	3	1/4	1/16	3/16
65	16	11	3	5/16	1/16	1/4
66	16	12	3	1/4	1/16	3/16
67	16	12	3	1/4	1/16	3/16
68	16	12	3	1/4	1/16	3/16

$q=5$, $\Gamma_{\mathbf{w}}=\{3,7,11\}$ (Arf Yarıgrubu Değil), $A=id_{3\times3}$, α-değişmezi=95						
d	Kodun Uzunluğu	Kodun Boyutu	Minimum Uzaklık	Kodun Kapasitesi(C)	Hata Düzeltme Oranı(E)	C-E
69	16	13	3	3/16	1/16	1/8
70	16	12	3	1/4	1/16	3/16
71	16	13	3	3/16	1/16	1/8
72	16	13	3	3/16	1/16	1/8
73	16	13	2	3/16	0	3/16
74	16	13	3	3/16	1/16	1/8
75	16	14	2	1/8	0	1/8
76	16	14	2	1/8	0	1/8
77	16	14	2	1/8	0	1/8
78	16	14	2	1/8	0	1/8
79	16	14	2	1/8	0	1/8
80	16	15	2	1/16	0	1/16
81	16	14	2	1/8	0	1/8
82	16	15	2	1/16	0	1/16
83	16	15	2	1/16	0	1/16
84	16	15	2	1/16	0	1/16
85	16	15	2	1/16	0	1/16
86	16	15	2	1/16	0	1/16
87	16	16	1	0	0	0
88	16	15	2	1/16	0	1/16
89	16	15	2	1/16	0	1/16
90	16	16	1	0	0	0
91	16	16	1	0	0	0
92	16	15	2	1/16	0	1/16
93	16	16	1	0	0	0
94	16	16	1	0	0	0
95	16	15	2	1/16	0	1/16

$q = 5$, $\Gamma_{\mathbf{w}} = \{3, 8, 13\}$ (Arf Yarıgrubu Değil), $A = id_{3\times 3}$, α-değişmezi=112						
d	Kodun Uzunluğu	Kodun Boyutu	Minimum Uzaklık	Kodun Kapasitesi(C)	Hata Düzeltme Oranı(E)	C-E
15	16	1	16	$15/16$	$7/16$	$1/2$
16	16	2	12	$7/8$	$5/16$	$9/16$
17	16	1	16	$15/16$	$7/16$	$1/2$
18	16	1	16	$15/16$	$7/16$	$1/2$
19	16	2	12	$7/8$	$5/16$	$9/16$
20	16	1	16	$15/16$	$7/16$	$1/2$
21	16	2	12	$7/8$	$5/16$	$9/16$
22	16	2	12	$7/8$	$5/16$	$9/16$
23	16	1	16	$15/16$	$7/16$	$1/2$
24	16	3	12	$13/16$	$5/16$	$1/2$
25	16	2	12	$7/8$	$5/16$	$9/16$
26	16	2	12	$7/8$	$5/16$	$9/16$
27	16	3	12	$13/16$	$5/16$	$1/2$
28	16	2	12	$7/8$	$5/16$	$9/16$
29	16	3	12	$13/16$	$5/16$	$1/2$
30	16	3	12	$13/16$	$5/16$	$1/2$
31	16	2	12	$7/8$	$5/16$	$9/16$
32	16	4	8	$3/4$	$3/16$	$9/16$
33	16	3	12	$13/16$	$5/16$	$1/2$
34	16	3	12	$13/16$	$5/16$	$1/2$
35	16	4	8	$3/4$	$3/16$	$9/16$
36	16	3	12	$13/16$	$5/16$	$1/2$
37	16	4	9	$3/4$	$1/4$	$1/2$
38	16	4	8	$3/4$	$3/16$	$9/16$
39	16	4	10	$3/4$	$1/4$	$1/2$
40	16	5	8	$11/16$	$3/16$	$1/2$
41	16	4	8	$3/4$	$3/16$	$9/16$
42	16	5	8	$11/16$	$3/16$	$1/2$

$q = 5$, $\Gamma_{\mathbf{w}} = \{3, 8, 13\}$ (Arf Yarıgrubu Değil), $A = id_{3\times 3}$, α-değişmezi=112						
d	Kodun Uzunluğu	Kodun Boyutu	Minimum Uzaklık	Kodun Kapasitesi(C)	Hata Düzeltme Oranı(E)	C-E
43	16	5	8	11/16	3/16	1/2
44	16	4	8	3/4	3/16	9/16
45	16	6	8	5/8	3/16	7/16
46	16	5	8	11/16	3/16	1/2
47	16	5	8	11/16	3/16	1/2
48	16	7	4	9/16	1/16	1/2
49	16	5	8	11/16	3/16	1/2
50	16	6	8	5/8	3/16	7/16
51	16	7	4	9/16	1/16	1/2
52	16	6	8	5/8	3/16	7/16
53	16	7	6	9/16	1/8	7/16
54	16	7	4	9/16	1/16	1/2
55	16	7	6	9/16	1/8	7/16
56	16	8	4	1/2	1/16	7/16
57	16	7	4	9/16	1/16	1/2
58	16	8	6	1/2	1/8	3/8
59	16	8	4	1/2	1/16	7/16
60	16	8	4	1/2	1/16	7/16
61	16	9	4	7/16	1/16	3/8
62	16	8	4	1/2	1/16	7/16
63	16	9	4	7/16	1/16	3/8
64	16	9	4	7/16	1/16	3/8
65	16	9	4	7/16	1/16	3/8
66	16	10	4	3/8	1/16	5/16
67	16	9	4	7/16	1/16	3/8
68	16	10	4	3/8	1/16	5/16
69	16	11	3	5/16	1/16	1/4
70	16	9	4	7/16	1/16	3/8

$q = 5$, $\Gamma_{\mathbf{w}} = \{3, 8, 13\}$ (Arf Yarıgrubu Değil), $A = id_{3\times3}$, α-değişmezi=112						
d	Kodun Uzunluğu	Kodun Boyutu	Minimum Uzaklık	Kodun Kapasitesi(C)	Hata Düzeltme Oranı(E)	C-E
71	16	11	4	5/16	1/16	1/4
72	16	11	3	5/16	1/16	1/4
73	16	10	4	3/8	1/16	5/16
74	16	12	3	1/4	1/16	3/16
75	16	11	3	5/16	1/16	1/4
76	16	11	3	5/16	1/16	1/4
77	16	12	3	1/4	1/16	3/16
78	16	12	3	1/4	1/16	3/16
79	16	12	3	1/4	1/16	3/16
80	16	12	3	1/4	1/16	3/16
81	16	13	3	3/16	1/16	1/8
82	16	13	3	3/16	1/16	1/8
83	16	12	3	1/4	1/16	3/16
84	16	13	3	3/16	1/16	1/8
85	16	13	3	3/16	1/16	1/8
86	16	13	2	3/16	0	3/16
87	16	14	2	1/8	0	1/8
88	16	13	3	3/16	1/16	1/8
89	16	14	2	1/8	0	1/8
90	16	14	2	1/8	0	1/8
91	16	14	2	1/8	0	1/8
92	16	14	2	1/8	0	1/8
93	16	14	2	1/8	0	1/8
94	16	15	2	1/16	0	1/16
95	16	15	2	1/16	0	1/16
96	16	14	2	1/8	0	1/8
97	16	15	2	1/16	0	1/16
98	16	15	2	1/16	0	1/16

$q=5$, $\Gamma_{\mathbf{w}}=\{3,8,13\}$ (Arf Yarıgrubu Değil), $A=id_{3\times 3}$, α-değişmezi=112						
99	16	15	2	1/16	0	1/16
100	16	15	2	1/16	0	1/16
101	16	15	2	1/16	0	1/16
102	16	16	1	0	0	0
103	16	15	2	1/16	0	1/16
104	16	15	2	1/16	0	1/16
105	16	16	1	0	0	0
106	16	15	2	1/16	0	1/16
107	16	16	1	0	0	0
108	16	16	1	0	0	0
109	16	15	2	1/16	0	1/16
110	16	16	1	0	0	0
111	16	16	1	0	0	0
112	16	15	2	1/16	0	1/16

$q=5$, $\Gamma_{\mathbf{w}}=\{3,11,19\}$ (Arf Yarıgrubu Değil), $A=id_{3\times 3}$, α-değişmezi=163						
d	Kodun Uzunluğu	Kodun Boyutu	Minimum Uzaklık	Kodun Kapasitesi(C)	Hata Düzeltme Oranı(E)	C-E
21	16	1	16	15/16	7/16	1/2
22	16	2	12	7/8	5/16	9/16
23	16	1	16	15/16	7/16	1/2
24	16	1	16	15/16	7/16	1/2
25	16	2	12	7/8	5/16	9/16
26	16	1	16	15/16	7/16	1/2
27	16	1	16	15/16	7/16	1/2
28	16	2	12	7/8	5/16	9/16
29	16	1	16	15/16	7/16	1/2
30	16	2	12	7/8	5/16	9/16
31	16	2	12	7/8	5/16	9/16
32	16	1	16	15/16	7/16	1/2
33	16	3	12	13/16	5/16	1/2
34	16	2	12	7/8	5/16	9/16
35	16	1	16	15/16	7/16	1/2
36	16	3	12	13/16	5/16	1/2
37	16	2	12	7/8	5/16	9/16
38	16	2	12	7/8	5/16	9/16
39	16	3	12	13/16	5/16	1/2
40	16	2	12	7/8	5/16	9/16
41	16	3	12	13/16	5/16	1/2
42	16	3	12	13/16	5/16	1/2
43	16	2	12	7/8	5/16	9/16
44	16	4	8	3/4	3/16	9/16
45	16	3	12	13/16	5/16	1/2
46	16	2	12	7/8	5/16	9/16
47	16	4	8	3/4	3/16	9/16
48	16	3	12	13/16	5/16	1/2

$q = 5$, $\Gamma_{\mathbf{w}} = \{3, 11, 19\}$ (Arf Yarıgrubu Değil), $A = id_{3\times 3}$, α-değişmezi=163						
d	Kodun Uzunluğu	Kodun Boyutu	Minimum Uzaklık	Kodun Kapasitesi(C)	Hata Düzeltme Oranı(E)	C-E
49	16	3	12	13/16	5/16	1/2
50	16	4	8	3/4	3/16	9/16
51	16	3	12	13/16	5/16	1/2
52	16	4	9	3/4	1/4	1/2
53	16	4	8	3/4	3/16	9/16
54	16	3	12	13/16	5/16	1/2
55	16	5	8	11/16	3/16	1/2
56	16	4	8	3/4	3/16	9/16
57	16	4	10	3/4	1/4	1/2
58	16	5	8	11/16	3/16	1/2
59	16	4	8	3/4	3/16	9/16
60	16	5	8	11/16	3/16	1/2
61	16	5	8	11/16	3/16	1/2
62	16	4	8	3/4	3/16	9/16
63	16	6	8	5/8	3/16	7/16
64	16	5	8	11/16	3/16	1/2
65	16	4	8	3/4	3/16	9/16
66	16	7	4	9/16	1/16	1/2
67	16	5	8	11/16	3/16	1/2
68	16	5	8	11/16	3/16	1/2
69	16	7	4	9/16	1/16	1/2
70	16	5	8	11/16	3/16	1/2
71	16	6	8	5/8	3/16	7/16
72	16	7	4	9/16	1/16	1/2
73	16	5	8	11/16	3/16	1/2
74	16	7	6	9/16	1/8	7/16
75	16	7	4	9/16	1/16	1/2
76	16	6	8	5/8	3/16	7/16

$q=5$, $\Gamma_{\mathbf{w}}=\{3,11,19\}$ (Arf Yarıgrubu Değil), $A=id_{3\times 3}$, α-değişmezi=163						
d	Kodun Uzunluğu	Kodun Boyutu	Minimum Uzaklık	Kodun Kapasitesi(C)	Hata Düzeltme Oranı(E)	C-E
77	16	8	4	1/2	1/16	7/16
78	16	7	4	9/16	1/16	1/2
79	16	7	6	9/16	1/8	7/16
80	16	8	4	1/2	1/16	7/16
81	16	7	4	9/16	1/16	1/2
82	16	8	6	1/2	1/8	3/8
83	16	8	4	1/2	1/16	7/16
84	16	7	4	9/16	1/16	1/2
85	16	9	4	7/16	1/16	3/8
86	16	8	4	1/2	1/16	7/16
87	16	8	4	1/2	1/16	7/16
88	16	9	4	7/16	1/16	3/8
89	16	8	4	1/2	1/16	7/16
90	16	9	4	7/16	1/16	3/8
91	16	9	4	7/16	1/16	3/8
92	16	8	4	1/2	1/16	7/16
93	16	10	4	3/8	1/16	5/16
94	16	9	4	7/16	1/16	3/8
95	16	9	4	7/16	1/16	3/8
96	16	11	3	5/16	1/16	1/4
97	16	9	4	7/16	1/16	3/8
98	16	10	4	3/8	1/16	5/16
99	16	11	3	5/16	1/16	1/4
100	16	9	4	7/16	1/16	3/8
101	16	11	4	5/16	1/16	1/4
102	16	11	3	5/16	1/16	1/4
103	16	9	4	7/16	1/16	3/8
104	16	12	3	1/4	1/16	3/16

$q=5$, $\Gamma_{\mathbf{w}}=\{3,11,19\}$ (Arf Yarıgrubu Değil), $A=id_{3\times 3}$, α-değişmezi=163						
d	Kodun Uzunluğu	Kodun Boyutu	Minimum Uzaklık	Kodun Kapasitesi(C)	Hata Düzeltme Oranı(E)	C-E
105	16	11	3	5/16	1/16	1/4
106	16	10	4	3/8	1/16	5/16
107	16	12	3	1/4	1/16	3/16
108	16	11	3	5/16	1/16	1/4
109	16	11	3	5/16	1/16	1/4
110	16	12	3	1/4	1/16	3/16
111	16	11	3	5/16	1/16	1/4
112	16	12	3	1/4	1/16	3/16
113	16	12	3	1/4	1/16	3/16
114	16	12	3	1/4	1/16	3/16
115	16	13	3	3/16	1/16	1/8
116	16	12	3	1/4	1/16	3/16
117	16	13	3	3/16	1/16	1/8
118	16	13	3	3/16	1/16	1/8
119	16	12	3	1/4	1/16	3/16
120	16	13	3	3/16	1/16	1/8
121	16	13	3	3/16	1/16	1/8
122	16	12	3	1/4	1/16	3/16
123	16	14	2	1/8	0	1/8
124	16	13	3	3/16	1/16	1/8
125	16	13	2	3/16	0	3/16
126	16	14	2	1/8	0	1/8
127	16	13	3	3/16	1/16	1/8
128	16	14	2	1/8	0	1/8
129	16	14	2	1/8	0	1/8
130	16	13	3	3/16	1/16	1/8
131	16	14	2	1/8	0	1/8
132	16	14	2	1/8	0	1/8

$q = 5$, $\Gamma_{\mathbf{w}} = \{3, 11, 19\}$ (Arf Yarıgrubu Değil), $A = id_{3\times 3}$, α-değişmezi=163						
d	Kodun Uzunluğu	Kodun Boyutu	Minimum Uzaklık	Kodun Kapasitesi(C)	Hata Düzeltme Oranı(E)	C-E
133	16	14	2	1/8	0	1/8
134	16	15	2	1/16	0	1/16
135	16	14	2	1/8	0	1/8
136	16	15	2	1/16	0	1/16
137	16	15	2	1/16	0	1/16
138	16	14	2	1/8	0	1/8
139	16	15	2	1/16	0	1/16
140	16	15	2	1/16	0	1/16
141	16	14	2	1/8	0	1/8
142	16	15	2	1/16	0	1/16
143	16	15	2	1/16	0	1/16
144	16	15	2	1/16	0	1/16
145	16	15	2	1/16	0	1/16
146	16	15	2	1/16	0	1/16
147	16	16	1	0	0	0
148	16	15	2	1/16	0	1/16
149	16	15	2	1/16	0	1/16
150	16	16	1	0	0	0
151	16	15	2	1/16	0	1/16
152	16	15	2	1/16	0	1/16
153	16	16	1	0	0	0
154	16	15	2	1/16	0	1/16
155	16	16	1	0	0	0
156	16	16	1	0	0	0
157	16	15	2	1/16	0	1/16
158	16	16	1	0	0	0
159	16	16	1	0	0	0
160	16	15	2	1/16	0	1/16

$q = 5$, $\Gamma_{\mathbf{w}} = \{3, 11, 19\}$ (Arf Yarıgrubu Değil), $A = id_{3\times 3}$, α-değişmezi$=163$						
d	Kodun Uzunluğu	Kodun Boyutu	Minimum Uzaklık	Kodun Kapasitesi(C)	Hata Düzeltme Oranı(E)	C-E
161	16	16	1	0	0	0
162	16	16	1	0	0	0
163	16	15	2	1/16	0	1/16

$q=5$, $\Gamma_{\mathbf{w}}=\{3,13,23\}$ (Arf Yarıgrubu Değil), $A=id_{3\times 3}$, α-değişmezi=197						
d	Kodun Uzunluğu	Kodun Boyutu	Minimum Uzaklık	Kodun Kapasitesi(C)	Hata Düzeltme Oranı(E)	C-E
25	16	1	16	15/16	7/16	1/2
26	16	2	12	7/8	5/16	9/16
27	16	1	16	15/16	7/16	1/2
28	16	1	16	15/16	7/16	1/2
29	16	2	12	7/8	5/16	9/16
30	16	1	16	15/16	7/16	1/2
31	16	1	16	15/16	7/16	1/2
32	16	2	12	7/8	5/16	9/16
33	16	1	16	15/16	7/16	1/2
34	16	1	16	15/16	7/16	1/2
35	16	2	12	7/8	5/16	9/16
36	16	2	12	7/8	5/16	9/16
37	16	1	16	15/16	7/16	1/2
38	16	2	12	7/8	5/16	9/16
39	16	3	12	13/16	5/16	1/2
40	16	1	16	15/16	7/16	1/2
41	16	2	12	7/8	5/16	9/16
42	16	3	12	13/16	5/16	1/2
43	16	1	16	15/16	7/16	1/2
44	16	2	12	7/8	5/16	9/16
45	16	3	12	13/16	5/16	1/2
46	16	2	12	7/8	5/16	9/16
47	16	2	12	7/8	5/16	9/16
48	16	3	12	13/16	5/16	1/2
49	16	3	12	13/16	5/16	1/2
50	16	2	12	7/8	5/16	9/16
51	16	3	12	13/16	5/16	1/2
52	16	4	8	3/4	3/16	9/16

$q = 5$, $\Gamma_{\mathbf{w}} = \{3, 13, 23\}$ (Arf Yarıgrubu Değil), $A = id_{3\times3}$, α-değişmezi=197						
d	Kodun Uzunluğu	Kodun Boyutu	Minimum Uzaklık	Kodun Kapasitesi(C)	Hata Düzeltme Oranı(E)	C-E
53	16	2	12	$7/8$	$5/16$	$9/16$
54	16	3	12	$13/16$	$5/16$	$1/2$
55	16	4	8	$3/4$	$3/16$	$9/16$
56	16	2	12	$7/8$	$5/16$	$9/16$
57	16	3	12	$13/16$	$5/16$	$1/2$
58	16	4	8	$3/4$	$3/16$	$9/16$
59	16	3	12	$13/16$	$5/16$	$1/2$
60	16	3	12	$13/16$	$5/16$	$1/2$
61	16	4	8	$3/4$	$3/16$	$9/16$
62	16	4	9	$3/4$	$1/4$	$1/2$
63	16	3	12	$13/16$	$5/16$	$1/2$
64	16	4	8	$3/4$	$3/16$	$9/16$
65	16	5	8	$11/16$	$3/16$	$1/2$
66	16	3	12	$13/16$	$5/16$	$1/2$
67	16	4	8	$3/4$	$3/16$	$9/16$
68	16	5	8	$11/16$	$3/16$	$1/2$
69	16	4	10	$3/4$	$1/4$	$1/2$
70	16	4	8	$3/4$	$3/16$	$9/16$
71	16	5	8	$11/16$	$3/16$	$1/2$
72	16	5	8	$11/16$	$3/16$	$1/2$
73	16	4	8	$3/4$	$3/16$	$9/16$
74	16	5	8	$11/16$	$3/16$	$1/2$
75	16	6	8	$5/8$	$3/16$	$7/16$
76	16	4	8	$3/4$	$3/16$	$9/16$
77	16	5	8	$11/16$	$3/16$	$1/2$
78	16	7	4	$9/16$	$1/16$	$1/2$
79	16	4	8	$3/4$	$3/16$	$9/16$
80	16	5	8	$11/16$	$3/16$	$1/2$

$q=5$, $\Gamma_{\mathbf{w}}=\{3,13,23\}$ (Arf Yarıgrubu Değil), $A=id_{3\times 3}$, α-değişmezi=197						
d	Kodun Uzunluğu	Kodun Boyutu	Minimum Uzaklık	Kodun Kapasitesi(C)	Hata Düzeltme Oranı(E)	C-E
81	16	7	4	9/16	1/16	1/2
82	16	5	8	11/16	3/16	1/2
83	16	5	8	11/16	3/16	1/2
84	16	7	4	9/16	1/16	1/2
85	16	6	8	5/8	3/16	7/16
86	16	5	8	11/16	3/16	1/2
87	16	7	4	9/16	1/16	1/2
88	16	7	6	9/16	1/8	7/16
89	16	5	8	11/16	3/16	1/2
90	16	7	4	9/16	1/16	1/2
91	16	8	4	1/2	1/16	7/16
92	16	6	8	5/8	3/16	7/16
93	16	7	4	9/16	1/16	1/2
94	16	8	4	1/2	1/16	7/16
95	16	7	6	9/16	1/8	7/16
96	16	7	4	9/16	1/16	1/2
97	16	8	4	1/2	1/16	7/16
98	16	8	6	1/2	1/8	3/8
99	16	7	4	9/16	1/16	1/2
100	16	8	4	1/2	1/16	7/16
101	16	9	4	7/16	1/16	3/8
102	16	7	4	9/16	1/16	1/2
103	16	8	4	1/2	1/16	7/16
104	16	9	4	7/16	1/16	3/8
105	16	8	4	1/2	1/16	7/16
106	16	8	4	1/2	1/16	7/16
107	16	9	4	7/16	1/16	3/8
108	16	9	4	7/16	1/16	3/8

$q = 5$, $\Gamma_{\mathbf{w}} = \{3, 13, 23\}$ (Arf Yarıgrubu Değil), $A = id_{3\times3}$, α-değişmezi=197						
d	Kodun Uzunluğu	Kodun Boyutu	Minimum Uzaklık	Kodun Kapasitesi(C)	Hata Düzeltme Oranı(E)	C-E
109	16	8	4	1/2	1/16	7/16
110	16	9	4	7/16	1/16	3/8
111	16	10	4	3/8	1/16	5/16
112	16	8	4	1/2	1/16	7/16
113	16	9	4	7/16	1/16	3/8
114	16	11	3	5/16	1/16	1/4
115	16	9	4	7/16	1/16	3/8
116	16	9	4	7/16	1/16	3/8
117	16	11	3	5/16	1/16	1/4
118	16	10	4	3/8	1/16	5/16
119	16	9	4	7/16	1/16	3/8
120	16	11	3	5/16	1/16	1/4
121	16	11	4	5/16	1/16	1/4
122	16	9	4	7/16	1/16	3/8
123	16	11	3	5/16	1/16	1/4
124	16	12	3	1/4	1/16	3/16
125	16	9	4	7/16	1/16	3/8
126	16	11	3	5/16	1/16	1/4
127	16	12	3	1/4	1/16	3/16
128	16	10	4	3/8	1/16	5/16
129	16	11	3	5/16	1/16	1/4
130	16	12	3	1/4	1/16	3/16
131	16	11	3	5/16	1/16	1/4
132	16	11	3	5/16	1/16	1/4
133	16	12	3	1/4	1/16	3/16
134	16	12	3	1/4	1/16	3/16
135	16	11	3	5/16	1/16	1/4
136	16	12	3	1/4	1/16	3/16

$q = 5$, $\Gamma_{\mathbf{w}} = \{3, 13, 23\}$ (Arf Yarıgrubu Değil), $A = id_{3\times3}$, α-değişmezi=197						
d	Kodun Uzunluğu	Kodun Boyutu	Minimum Uzaklık	Kodun Kapasitesi(C)	Hata Düzeltme Oranı(E)	C-E
137	16	13	3	3/16	1/16	1/8
138	16	12	3	1/4	1/16	3/16
139	16	12	3	1/4	1/16	3/16
140	16	13	3	3/16	1/16	1/8
141	16	13	3	3/16	1/16	1/8
142	16	12	3	1/4	1/16	3/16
143	16	13	3	3/16	1/16	1/8
144	16	13	3	3/16	1/16	1/8
145	16	12	3	1/4	1/16	3/16
146	16	13	3	3/16	1/16	1/8
147	16	14	2	1/8	0	1/8
148	16	12	3	1/4	1/16	3/16
149	16	13	3	3/16	1/16	1/8
150	16	14	2	1/8	0	1/8
151	16	13	2	3/16	0	3/16
152	16	13	3	3/16	1/16	1/8
153	16	14	2	1/8	0	1/8
154	16	14	2	1/8	0	1/8
155	16	13	3	3/16	1/16	1/8
156	16	14	2	1/8	0	1/8
157	16	14	2	1/8	0	1/8
158	16	13	3	3/16	1/16	1/8
159	16	14	2	1/8	0	1/8
160	16	15	2	1/16	0	1/16
161	16	14	2	1/8	0	1/8
162	16	14	2	1/8	0	1/8
163	16	15	2	1/16	0	1/16
164	16	15	2	1/16	0	1/16

$q = 5$, $\Gamma_{\mathbf{w}} = \{3, 13, 23\}$ (Arf Yarıgrubu Değil), $A = id_{3\times3}$, α-değişmezi=197						
d	Kodun Uzunluğu	Kodun Boyutu	Minimum Uzaklık	Kodun Kapasitesi(C)	Hata Düzeltme Oranı(E)	C-E
165	16	14	2	1/8	0	1/8
166	16	15	2	1/16	0	1/16
167	16	15	2	1/16	0	1/16
168	16	14	2	1/8	0	1/8
169	16	15	2	1/16	0	1/16
170	16	15	2	1/16	0	1/16
171	16	14	2	1/8	0	1/8
172	16	15	2	1/16	0	1/16
173	16	15	2	1/16	0	1/16
174	16	15	2	1/16	0	1/16
175	16	15	2	1/16	0	1/16
176	16	15	2	1/16	0	1/16
177	16	16	1	0	0	0
178	16	15	2	1/16	0	1/16
179	16	15	2	1/16	0	1/16
180	16	16	1	0	0	0
181	16	15	2	1/16	0	1/16
182	16	15	2	1/16	0	1/16
183	16	16	1	0	0	0
184	16	15	2	1/16	0	1/16
185	16	15	2	1/16	0	1/16
186	16	16	1	0	0	0
187	16	16	1	0	0	0
188	16	15	2	1/16	0	1/16
189	16	16	1	0	0	0
190	16	16	1	0	0	0
191	16	15	2	1/16	0	1/16
192	16	16	1	0	0	0

$q = 5$, $\Gamma_{\mathbf{w}} = \{3, 13, 23\}$ (Arf Yarıgrubu Değil), $A = id_{3\times3}$, α-değişmezi=197						
d	Kodun Uzunluğu	Kodun Boyutu	Minimum Uzaklık	Kodun Kapasitesi(C)	Hata Düzeltme Oranı(E)	C-E
193	16	16	1	0	0	0
194	16	15	2	$1/16$	0	$1/16$
195	16	16	1	0	0	0
196	16	16	1	0	0	0
197	16	15	2	$1/16$	0	$1/16$

8 SONUÇ

Bu tez çalışmasında, bir ağırlıklı projektif uzaydaki parametrik kodlar çalışılmıştır ve bu kodları hesaplarken kullandığımız cebirsel yöntem ve kavramlar detaylı bir şekilde ele alınmıştır. İlk bölümde afin uzaylarla ilgili bilgiler detaylıca verilerek ağırlıklı projektif uzayı belirlerken kullanılan nümerik yarıgruplar da bu bölümde ele alınmıştır. İkinci bölümde bir ağırlıklı projektif uzayı daha iyi anlayabilmek için dereceli halkalar ve modüller konusu anlatılmış ve bir kodu hesaplarken kullandığımız Hilbert serileri, Hilbert fonksiyonları ve Serbest çözülüm konusu bu bölümde detaylıca ele alınmıştır. Bu bölümde Hilbert serisinin derecesi olan ve kodları hesaplarken dikkate aldığımız α-değişmezi kavramı tanımlanmıştır. Üçüncü bölümde ağırlıklı projektif uzayın temel tanım ve özellikleri ele alınmış ve ağırlıklı projektif uzayda ağırlığın $\mathbf{w} = (1, \ldots, 1)$ olduğu durum olan projektif uzay özel bir örnek olarak verilmiştir. Dördüncü bölümde ağırlıklı projektif simit anlatılarak örnekler verilmiştir ve ağırlıklı projektif simitin sıfırlayan ideali ve bu ideali bulmak için literatürdeki bir teorem verilmiştir. Ayrıca bu bölümde $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]/I(\mathbb{T}_\mathbf{w})$ koordinat halkasının Hilbert fonksiyonu ve Hilbert serisi bulunmuştur. Daha önce [13] makalesinde verilmiş olan ve bizim bu bölümde de verdiğimiz Sonuç(5.3.3) bizim için önemlidir. Çünkü düzenlilik indeksi ile Frobenius sayısı arasındaki ilişki bu sonuçta formüle edilerek verilmiştir. Beşinci bölümde ise tezin temel amaçlarından biri olan ağırlıklı projektif uzaydaki parametrik kodlar anlatılmıştır. İlk olarak lineer kodlar anlatılarak kod kavramı detaylı bir şekilde ele alınmış ve bir giriş oluşturulmuştur. Daha sonra hesaplama kodları ele alınarak ağırlıklı projektif uzaydaki parametrik kodları nasıl hesapladığımız anlatılmıştır. Ayrıca yaptığımız örneklerden gözlemlediğimiz bir sonuç bu bölümde ispatlanmıştır.

Bu doğrultuda bu tezde ağırlıklı projektif simit hakkında yapılan bir çalışma detaylıca ele alınmıştır ve buradaki sonuçları da kullanarak Arf olan ve olmayan yarıgrupların tanımladığı ağırlıklı projektif uzaydaki kod örneklerinin temel parametreleri `SageMath` [31] programında hesaplanarak örnekler bölümündeki tablolarda verilmiştir.

Örneklerde Arf olan ve olmayan yarıgrupların belirlediği uzaylardaki simite karşılık gelen kodların karşılaştırılabilmesi için yarıgrupların katlılıkları 3 olarak alınmıştır ve Arf olmayan yarıgruplar da Arf yarıgrupları gibi simetrik olmayan yarıgruplar olarak seçilmiştir. Beş tane Arf yarıgrubu ve beş tane Arf olmayan yarıgrup seçilmiş olup, aynı sonlu cisim üzerinde bu yarıgrupların belirlediği ağırlık projektif uzaylardaki simite karşılık gelen kod örnekleri listelenmiştir. Bu örneklere bakıldığında Arf olan ve olmayan yarıgrupların belirlediği uzaylardaki parametrik kodlar arasında önemli bir fark görülmemekle birlikte temel parametreleri $[16, 9, 6]$ olan kod örneğinin sadece Arf olan örneklerde görüldüğü gözlenmektedir. Ayrıca temel parametreleri $[16, 15, 2]$ olan MDS kod örnekleri her iki örnek grubunda da görülmektedir.

Dolayısıyla genel olarak bu iki örnek grubunda önemli bir fark olmasa da bir Arf yarıgrubunun belirlediği ağırlıklı projektif uzaydaki kod örneklerinde d değeri α-değişmezine yaklaştıkça MDS kodlar elde edildiği görülmektedir.

Kaynaklar

[1] Hansen, J. P. Toric varieties Hirzebruch surfaces and error-correcting codes. *Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput.* (**2002**).

[2] Joyner, D. Toric codes over finite fields. *Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput.* (**2004**).

[3] Ruano, D. On the parameters of r-dimensional toric codes. *Finite Fields Appl.* (**2007**).

[4] Little, J. & Schwarz, R. On toric codes and multivariate Vandermonde matrices. *Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput.* (**2007**).

[5] Soprunov, I. & Soprunova, J. Toric surface codes and Minkowski length of polygons. *SIAM J. Discrete Math.* (**2008/09**).

[6] Rentería-Márquez, C., Simis, A. & Villarreal, R. H. Algebraic methods for parameterized codes and invariants of vanishing ideals over finite fields. *Finite Fields Appl.* (**2011**).

[7] Sarmiento, E., Pinto, M. V. & Villarreal, R. H. On the vanishing ideal of an algebraic toric set and its parametrized linear codes. *J. Algebra Appl.* (**2012**).

[8] López, H. H., Sarmiento, E., Vaz Pinto, M. & Villarreal, R. H. Parameterized affine codes. *Studia Sci. Math. Hungar.* (**2012**).

[9] Sarabia, M. G., Nava Lara, J., Rentería Márquez, C. & Sarmiento Rosales, E. Parameterized codes over cycles. *An. Ştiinţ. Univ. "Ovidius" Constanţa Ser. Mat.* (**2013**).

[10] Vaz Pinto, M. & Villarreal, R. H. The degree and regularity of vanishing ideals of algebraic toric sets over finite fields. *Comm. Algebra* (**2013**).

[11] López, H. H. & Villarreal, R. H. Computing the degree of a lattice ideal of dimension one. *J. Symbolic Comput.* (**2014**).

[12] González Sarabia, M., Rentería Márquez, C. & Sarmiento Rosales, E. Projective parameterized linear codes. *An. Ştiinţ. Univ. "Ovidius" Constanţa Ser. Mat.* (**2015**).

[13] Dias, E. & Neves, J. Codes over a weighted torus. *Finite Fields Appl.* (**2015**).

[14] Martínez-Bernal, J., Pitones, Y. & Villarreal, R. H. Minimum distance functions of graded ideals and Reed-Muller-type codes. *J. Pure Appl. Algebra* (**2017**).

[15] González Sarabia, M., Camps, E., Sarmiento, E. & Villarreal, R. H. The second generalized Hamming weight of some evaluation codes arising from a projective torus. *Finite Fields Appl.* (**2018**).

[16] Şahin, M. Toric codes and lattice ideals. *Finite Fields Appl.* (**2018**).

[17] Baran, E. & Şahin, M. Vanishing ideals of parameterised toric codes (**2018**).

[18] Campillo, A., Farrán, J. I. & Munuera, C. On the parameters of algebraic-geometry codes related to Arf semigroups. *IEEE Trans. Inform. Theory* (**2000**).

[19] Barucci, V., Dobbs, D. E. & Fontana, M. Maximality properties in numerical semigroups and applications to one-dimensional analytically irreducible local domains. *Mem. Amer. Math. Soc.* (**1997**).

[20] Rosales, J. C., García-Sánchez, P. A., García-García, J. I. & Branco, M. B. Arf numerical semigroups. *J. Algebra* (**2004**).

[21] García-Sánchez, P. A., Heredia, B. A., Karakaş, H. I. & Rosales, J. C. Parametrizing Arf numerical semigroups. *J. Algebra Appl.* (**2017**).

[22] Sturmfels, B. *Gröbner bases and convex polytopes.* University Lecture Series (**1996**).

[23] Miller, E. & Sturmfels, B. *Combinatorial Commutative Algebra.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics (**2005**).

[24] Yakut, Y. *Simitli bir Çeşitlemin Genişlemeleri Üzerinde Hesaplama Kodları.* Master's thesis, Hacettepe University (**2017**).

[25] Alon, N. Combinatorial nullstellensatz. *Combin. Probab. Comput.* (**1999**).

[26] López, H. H., Sarmiento, E., Vaz Pinto, M. & Villarreal, R. H. Parameterized affine codes. *Studia Sci. Math. Hungar.* (**2012**).

[27] Bruns, W. & Herzog, J. *Cohen-Macaulay rings.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics (**1993**).

[28] Cox, D. A., Little, J. & O'Shea, D. *Using algebraic geometry.* Graduate Texts in Mathematics, Springer New York (**2005**).

[29] Grayson, D. R. & Stillman, M. E. Macaulay2, a software system for research in algebraic geometry. `http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2/`.

[30] Beltrametti, M. & Robbiano, L. Introduction to the theory of weighted projective spaces. *Exposition. Math.* (**1986**).

[31] Stein, W. *et al. Sage Mathematics Software (Version 8.4).* The Sage Development Team. `http://www.sagemath.org`.

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS/~~DOKTORA~~ TEZ ÇALIŞMASI ORJİNALLİK RAPORU

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI BAŞKANLIĞI'NA

Tarih: 27/06/2019

Tez Başlığı : AĞIRLIKLI PROJEKTİF UZAYLARDAKİ PARAMETRİK KODLAR

Yukarıda başlığı gösterilen tez çalışmamın a) Kapak sayfası, b) Giriş, c) Ana bölümler d) Sonuç kısımlarından oluşan toplam 114 sayfalık kısmına ilişkin, 26/06/2019 tarihinde tez danışmanım tarafından *Turnitin* adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 4 'tür.

Uygulanan filtrelemeler:
1- Kaynakça hariç
2- Alıntılar dâhil
3- 5 kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Çalışması Orjinallik Raporu Alınması ve Kullanılması Uygulama Esasları'nı inceledim ve bu Uygulama Esasları'nda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

Tarih ve İmza

27.06.2019

Adı Soyadı:	Yağmur ÇAKIROĞLU
Öğrenci No:	N17124989
Anabilim Dalı:	Matematik
Programı:	Tezli Yüksek Lisans Programı
Statüsü:	☑ Y.Lisans ☐ Doktora ☐ Bütünleşik Dr.

DANIŞMAN ONAYI

UYGUNDUR.

Doç. Dr. Mesut ŞAHİN

(Unvan, Ad Soyad, İmza)

ÖZGEÇMİŞ

Kimlik Bilgileri

Adı Soyadı : Yağmur Çakıroğlu

Doğum Yeri : ÇANAKKALE

Doğum Tarihi : 09/06/1994

Medeni Hali : Bekar

E-posta : h.yagmurcakiroglu@gmail.com

Eğitim

Lise : Buca Fatma Saygın Anadolu Lisesi (2008-2012)

Lisans : Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümü (2012-2016)

Yüksek Lisans : Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümü (2017-2019)

Yabancı Dil ve Düzeyi

İngilizce (İyi)

Almanca (Başlangıç)

İş Deneyimi

Deneyim Alanları

Tezden Üretilmiş Yayınlar

Tezden Üretilmiş Tebliğ ve/veya Poster Sunumu ile Katıldığı Toplantılar