BASİT RASTGELE ÖRNEKLEME YÖNTEMİNDE KİTLE VARYANS TAHMİN EDİCİLERİNİN KİTLE ORTALAMASININ GÜVEN ARALIKLARINDA KULLANILMASI

USİNG THE POPULATION VARIANCE ESTIMATORS FOR THE CONFIDENCE INTERVALS OF POPULATION MEAN IN SIMPLE RANDOM SAMPLING METHOD

EKİN GÖZDE ÖZKAN

PROF. DR. HÜLYA ÇINGI
Tez Danışmanı

Hacettepe Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim-Öğretim Sınav Yönetmeliğinin
İstatistik Anabilim Dalı İçin Öngördüğü
YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırlanmıştır.

2018

Ekin Gözde ÖZKAN' ın hazırladığı "**Basit Rastgele Örnekleme Yönteminde Kitle Varyans Tahmin Edicilerinin Kitle Ortalamasının Güven Aralıklarında Kullanılması**" adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **İSTATİSTİK ANABİLİM DALI**' nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Yaprak Arzu ÖZDEMİR
Başkan ....

Prof. Dr. Hülya ÇINGI
Danışman ....

Prof. Dr. Cem KADILAR
Üye ....

Prof. Dr. Mehtap AKÇİL OK
Üye ....

Doç. Dr. Semra TÜRKAN
Üye ....

Bu tez Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. Menemşe GÜMÜŞDERELİOĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

YAYINLAMA VE FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI BEYANI

Enstitü tarafından onaylanan lisansüstü tezimin/raporumun tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı (kağıt) ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda verilen koşullarla kullanıma açma iznini Hacettepe üniversitesine verdiğimi bildiririm. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet haklarım bende kalacak, tezimin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanım hakları bana ait olacaktır.

Tezin kendi orijinal çalışmam olduğunu, başkalarının haklarını ihlal etmediğimi ve tezimin tek yetkili sahibi olduğumu beyan ve taahhüt ederim. Tezimde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanması zorunlu metinlerin yazılı izin alarak kullandığımı ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederim.

- [x] **Tezimin/Raporumun tamamı dünya çapında erişime açılabilir ve bir kısmı veya tamamının fotokopisi alınabilir.**
  (Bu seçenekle teziniz arama motorlarında indekslenebilecek, daha sonra tezinizin erişim statüsünün değiştirilmesini talep etseniz ve kütüphane bu talebinizi yerine getirse bile, tezinin arama motorlarının önbelleklerinde kalmaya devam edebilecektir.)

- [ ] **Tezimin/Raporumun .... tarihine kadar erişime açılmasını ve fotokopi alınmasını (İç Kapak, Özet, İçindekiler ve Kaynakça hariç) istemiyorum.**
  (Bu sürenin sonunda uzatma için başvuruda bulunmadığım taktirde, tezimin/raporumun tamamı her yerden erişime açılabilir, kaynak gösterilmek şartıyla bir kısmı ve ya tamamının fotokopisi alınabilir)

- [ ] **Tezimin/Raporumun .... tarihine kadar erişime açılmasını istemiyorum, ancak kaynak gösterilmek şartıyla bir kısmı veya tamamının fotokopisinin alınmasını onaylıyorum.**

- [ ] **Serbest Seçenek/Yazarın Seçimi**

04./07./2018

(İmza)

Öğrencinin Adı Soyadı

ETİK

Hacettepe üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında,

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversitede veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

02/07/2018

EKİN GÖZDE ÖZKAN

ÖZET

BASİT RASTGELE ÖRNEKLEME YÖNTEMİNDE KİTLE VARYANS TAHMİN EDİCİLERİNİN KİTLE ORTALAMASININ GÜVEN ARALIKLARINDA KULLANILMASI

Ekin Gözde ÖZKAN
Yüksek Lisans, İstatistik Bölümü
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Hülya ÇINGI
Haziran 2018, 143 Sayfa

Bu tez çalışmasında Basit Rastgele Örnekleme yönteminde kitle varyans tahmin edicileri incelenmiş ve incelenen varyans tahmin edicilerin kitle ortalamasının güven aralıklarında kullanılması önerilmiştir. Çalışmada, birbirinden farklı varyans tahmin ediciler kullanılarak hesaplanan güven aralıkları tahminlerinin hangi değişkenlere bağlı olarak değişebileceği irdelenmiştir. Simülasyon çalışması ile en etkin tahmin edici Gupta ve Shabbir varyans tahmin edicisi, en dar güven aralığını veren tahmin edici ise Lone ve Tailor varyans tahmin edicisi olarak hesaplanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Basit Rastgele Örnekleme, Varyans Tahmin Edicisi, Ortalamanın Varyans Tahmin Edicisi, Güven Aralığı Tahmini, Hata Kareler Ortalaması (HKO).

ABSTRACT

USİNG THE POPULATION VARIANCE ESTIMATORS FOR THE CONFIDENCE INTERVALS OF POPULATION MEAN IN SIMPLE RANDOM SAMPLING METHOD

Ekin Gözde ÖZKAN

Master of Science, Department of Statistics

Supervisor: Prof. Dr. Hülya ÇINGI

June 2018, 143 Pages

In this study, some variance estimators in simple random sampling method have been investigated. These estimators have been proposed to use in the estimation of confidence intervals of the population mean in this study. Also, how the confidence interval estimators that were calculated by using different variance estimators could change depending on different variables. As a result, it is discussed which estimators provides the best confidence interval by a simulation study. Simulation study show that while the most efficient variance estimator Gupta and Shabbir, the variance estimator with the narrowest confidence interval of population mean is Lone Tailor variance estimator.

Keywords: Simple Random Sampling, Variance Estimator, Variance Estimator of Mean, Estimation of Confidence Interval, Mean Square Error (MSE).

TEŞEKKÜR

Değerli bilgisini, güleryüzünü ve samimiyetini çalışmalarım boyunca benden bir an olsun esirgemeyen, tecrübesi ve katkılarıyla beni yönlendiren, aynı zamanda da manevi desteğini her zaman hissettiğim tez danışmanım ve sevgili hocam Sayın Prof. Dr. Hülya ÇINGI'ya,

Tez çalışmam boyunca bana zaman ayırdığı, yol gösterdiği, yardımlarını ve desteklerini hiç esirmediği için değerli hocam Prof. Dr. Cem KADILAR'a,

Çalışmamın tamamlanması sürecinde bana olan desteklerinden dolayı, Daire Başkanım Meral ATILGAN'a, başta Hakan COŞKUN, Süleyman Uğur GÜR ve Dr. Nimet OKAN olmak üzere tüm çalışma arkadaşlarıma,

Her zaman olduğu gibi bu süreçte de yanımda olan, beni destekleyen ve tezimin bitmesini dört gözle bekleyen sevgili eşim Serkan ÖZKAN'a, çok değerli aileme saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÇİZELGELER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

N: Kitle büyüklüğü

n: Örneklem büyüklüğü

f: Örnekleme oranı

$\bar{Y}$: y değişkenin kitle ortalaması

$\bar{y}$: y değişkeninin örneklem ortalaması

C_y : y değişkeninin değişim katsayısı

$\beta_2(y)$: y değişkeninin basıklık katsayısı

$\bar{X}$: x değişkeninin birim başına düşen kitle ortalaması

$\bar{x}$: x değişkeninin birim başına düşen örneklem ortalaması

C_x : x değişkeninin değişim katsayısı

$\beta_2(x)$: x değişkeninin basıklık katsayısı

λ : Düzeltme terimi

f: Örnekleme oranı

S_x^2 : x değişkeninin kitle varyansı

S_y^2 : y değişkeninin kitle varyansı

s_y^2 : y değişkeninin klasik varyans tahmin edicisi

s_h^2 : Hirano varyans tahmin edicisi

s_{dti}^2 : Das ve Tripathi varyans tahmin edicisi, i=1,2,3.

s_i^2 : Isaki oransal varyans tahmin edicisi

s_{ireg}^2 : Isaki regresyon varyans tahmin edicisi

s_{psi}^2 : Prasad ve Singh varyans tahmin edicisi, i=1,2.

s_{gc}^2 : Garcia ve Cebrain varyans tahmin edicisi

s_{us}^2 : Upadhyaya ve Singh varyans tahmin edicisi

s_{csi}^2 : Chandra ve Singh varyans tahmin edicisi, i=1,2,3.

$s_{kçi}^2$: Kadılar ve Çıngı varyans tahmin edicisi, i=1,2,3,4.

$s_{kçreg}^2$: Kadılar ve Çıngı regresyon varyans tahmin edicisi

s_{gs}^2 : Gupta ve Shabbir varyans tahmin edicisi

s_{ssi}^2 : Singh ve Solanki varyans tahmin edicisi, i=1,2,3,…10.

s_{sk}^2 : Subramani ve Kumarapandiyan varyans tahmin edicisi

s_{yd}^2 : Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta varyans tahmin edicisi, i=0,1,2,3,4.

s_{lt}^2 : Lone ve Tailor varyans tahmin edicisi.

Kısaltmalar

BRÖ: Basit Rastgele Örnekleme

HKO: Hata Kareler Ortalaması

1. GİRİŞ

İstatistiğin amaçlarından biri kitleye ait parametreler hakkında bilgi edinmektir. Kitledeki birim sayısı az ise bu birimlerden kitleye ilişkin parametre değerlerini (ortalama, varyans vb.) hesaplayabilmek çok zor olmayacaktır. Ancak kitle parametrelerinin hesaplanmasının çok zor olduğu, yani kitlenin tamamına ulaşmanın imkânsız olduğu, zaman kısıtı, sınırlı bütçe gibi durumlarda kitleyi temsil edebilecek bir miktar birimin oluşturduğu alt grup olan örneklemden yararlanılır. Bu sayede kitlenin yapısına en uygun örnekleme yöntemiyle örneklemler seçilerek kitle hakkında tahminler yapılır.
Örneklem kuramında iki süreçten bahsedilir. İlki seçim sürecidir. Kitlenin yapısına en uygun örnekleme yönteminin seçiminin yapılabilmesi için öncelikle kitleyi oluşturan birimlerin bilinmesi gereklidir. 1920'li ve 1930'lu yıllarda en çok kullanılan ve bir olasılığa bağlı olmayan örnekleme yöntemi olasılıksız örnekleme yöntemidir. Bilimsel yöntemlerde bu örnekleme yöntemlerine pek başvurulmaz. 1940'lı yıllardan itibaren günümüze kadar gelişme göstermiş diğer örnekleme yöntemleri ise örnekleme yöntemlerinin belirli olasılıklarla çekildiği olasılıklı örnekleme yöntemleridir.

Bu çalışmada ilgilenilen örnekleme yöntemi olasılıklı örnekleme yöntemlerinden Basit Rastgele Örnekleme (BRÖ) yöntemidir. Bu yöntem N büyüklüğünde bir kitleden bağımsız olarak seçilebilecek birbirinden farklı n büyüklüğünde örneklemlerin kombinasyonlarına eşit seçilme şansı tanıyan örnekleme yöntemidir [1]. En temel örnekleme yöntemi olan BRÖ'de, örneklem birimi yerine konulmaksızın örneklem büyüklüğü elde edilinceye kadar çekim işlemi devam eder.

Örneklem seçiminde ikinci süreç ise tahmin sürecidir. Kitlenin özelliklerini tanımlayan sayısal ölçülere parametre denir. Sonlu kitleden çekilen örneklemden yararlanılarak kitle parametreleri tahmin edilmeye çalışılır. Bu tahminler için kullanılan matematiksel eşitlik ise tahmin edici adını almaktadır. İyi bir tahmin edicinin tutarlılık, yansızlık, etkinlik ve duyarlılık özelliklerini sağlaması istenir. Tahmin ile parametre arasındaki farkın düşünülebilen en küçük pozitif bir sayıdan küçük kalma olasılığı "bir" ise, o tahmine tutarlı denilir. Sonlu kitlelerde ise, tutarlılık örneklem büyüklüğün kitle büyüklüğüne eşit olduğu durumda, tahminin parametre değerine eşit olmasıdır. Yansız tahmin edici ise, tahmin edicinin beklenen değerinin parametre değerine eşit olma durumudur. Etkinlik ise HKO'nun küçük olması anlamına gelmektedir. Bir tahmin edicinin, HKO'su ne kadar küçükse o derece etkindir. HKO,

$$\mathrm{HKO}(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2 + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2$$

$$\mathrm{HKO}(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta)^2 = V(\hat{\theta}) + (\mathrm{Yan})^2 \tag{1.1}$$

olarak tanımlanır. Eş. (1.1)'den anlaşılacağı üzere, yansız tahmin ediciler için HKO varyans ile aynı anlama gelir. Yan değeri, tahmin edicinin beklenen değerinin parametreden farkı olmak üzere, kuramsal olarak bir tahmin edicinin yansızlığından söz edilirse, bir tahmin edicinin varyansı HKO'ya eşit olmaktadır. Bir tahmin edicinin varyansının tersi ise duyarlılıktır. Varyansı küçük olan tahmin ediciler yüksek duyarlılığa sahiptir denilir [2].

Kitle ortalamasından sonra en çok tahmin edilmek istenen parametre kitle varyansı olan S_y^2 'dir. Kitle varyansının tahmininde klasik yöntemin dışında yardımcı değişkene ilişkin bilgilerden faydalanılarak oransal tahminler de yapılabilmektedir. Özellikle yardımcı değişken bilgisini kullanmak tahmin edicinin etkinliğini artıran, daha küçük varyansa sahip tahminler vermeyi sağlayan bir unsur olarak karşımıza çıkmaktadır.

Parametrelerin tek bir değer olarak tahmin edilmesi nokta tahminidir. $\bar{Y}$ için $\bar{y}$, S^2 için s^2 istatistikleri nokta tahminleridir. Nokta tahmininin dışında kitle parametrelerinin güven aralık tahminleri de yapılabilir. Kitle parametresi için alt ve üst sınırlar belirlenerek kitle parametresinin o aralıklarda olması olasılığı güven aralığı olarak adlandırılır.

Bu çalışmanın amacı; BRÖ'de bazı varyans tahmin edicilerinden yola çıkarak *ortalamanın varyansını* tahmin etmek ve güven aralıklarında kullanmaktır.

İkinci bölümde, BRÖ yöntemi için genel bilgiler verilerek literatürde yer alan bazı varyans tahmin edicilerden bahsedilmiştir. Bu tahmin edicilerin etkinlik karşılaştırmalarına da yine bu bölümde yer verilmektedir.

Üçüncü bölümde varyans tahmin edicilerinden (s_y^2) yola çıkarak *ortalamanın varyans* tahmin edicilerine ilişkin genel bir çıkarım yapılmıştır. Bu çıkarımdan hareketle BRÖ için birb2irinden farklı ortalama için varyans tahmin edicileri hesaplanmıştır. Bu tahmin edicilerden yola çıkarak birbirinden farklı güven aralığı tahminleri ise dördüncü bölümde verilmiştir. Farklı güven aralığı tahminlerinin nelere bağlı olarak değiştiğinden de yine bu bölümde bahsedilmiştir.

Beşinci bölümde de BRÖ yönteminde önceki bölümlerde anlatılanlar ışığında simülasyon çalışması ile uygulama yapılmıştır. Son bölümde ise sonuç ve değerlendirmeye yer verilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde, BRÖ yönteminde, literatürdeki bazı varyans tahmin edicilerinden bahsedilecektir. İncelenecek olan bu tahmin ediciler, ileriki bölümlerde önerilecek olan *ortalamanın varyans* tahmin edicilerinde ve güven aralıklarında tekrar karşımıza çıkacaktır.

2.1.Basit Rastgele Örnekleme Yönteminde Birim Başına Düşen Kitle Varyans Tahmin Edicileri

Örnekleme teorisi literatüründe; kitle varyansının tahmini üzerine çalışmalar yapılmış ve birçok tahmin edici üretilmiştir. $\sigma_y^2 = \frac{\sum_{j=1}^{N}(y_j - \bar{Y})^2}{N}$ olmak üzere, y değişkenine ilişkin kitle varyansı $S_y^2 = \frac{N}{N-1}\sigma_y^2$ şeklinde yazılmaktadır [3]. Burada σ_y^2 'de N yerine N-1 bölünerek çok az büyük ancak yansız s_y^2 tahminine ulaşılabilmektedir [2].

2.1.1. Klasik Varyans Tahmin Edicisi

Örnekleme kuramında, seçim sürecinden sonra tahmin süreci gelir. Seçim sürecinde kullanılan yönteme göre parametreler tahmin edilir. Basit rastgele örneklemede S_y^2 parametre değeri tahmin edilebilir.

S_y^2 'nin klasik yansız tahmin edicisi aşağıdaki gibi gösterilmektedir:

$$s_y^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n}(y_j - \bar{y})^2}{n-1} \tag{2.1}$$

Burada $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} y_j$, y değişkeninin örneklem ortalaması ve n örneklem büyüklüğüdür. s_y^2 yansızdır ve $E(s_y^2) = S_y^2$ 'dir.

Kitle bilgisi için genel gösterimler aşağıdaki gibidir:

$$\mu_{rs} = \frac{\sum_{j=1}^{N}(y_j - \bar{Y})^r (x_j - \bar{X})^s}{N} . \tag{2.2}$$

Eş. (2.2)'de

- s =0 iken, $\mu_r = \dfrac{\sum_{j=1}^{N}\left(y_j - \bar{Y}\right)^r}{N}$.
- $\bar{X} = \bar{Y} = 0$ iken $\mu'_{rs} = \dfrac{\sum_{j=1}^{N}\left(y_j\right)^r (x_j)^s}{N}$.
- $\bar{Y} = 0$ ve s=0 iken, $\mu'_r = \dfrac{\sum_{j=1}^{N}\left(y_j\right)^r}{N}$.

olarak gösterilir.

- Örneklem için ise genel gösterim aşağıdaki gibidir:

$$m_{rs} = \frac{\sum_{j=1}^{n}(y_j - \bar{y})^r (x_j - \bar{x})^s}{n}. \tag{2.3}$$

Eş. (2.3)'de

- s=0 iken; $m_r = \dfrac{\sum_{j=1}^{n}\left(y_j - \bar{y}\right)^r}{n}$.
- $\bar{x} = \bar{y} = 0$ iken; $m'_{rs} = \dfrac{\sum_{j=1}^{n}\left(y_j\right)^r (x_j)^s}{n}$.
- $\bar{y} = 0$ ve s=0 iken, $m'_r = \dfrac{\sum_{j=1}^{n}\left(y_j\right)^r}{n}$.

olarak gösterilir.

Eş. (2.3)'de s=0 ve r=2 olduğunda, ortalamaya göre ikinci moment;

$$m_2 = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\left(y_j - \bar{y}\right)^2}{n} = \hat{\sigma}^2 \cong s_y^2 \tag{2.4}$$

şeklinde bulunur.

Bu eşitliklerden yola çıkılarak s=0 olduğunda varyans,

$$V(m_r) = \frac{\left(\mu_{2r} - \mu_r^2 + r^2\mu_2\mu_{r-1}^2 - 2r\mu_{r-1}\mu_{r+1}\right)}{n} \tag{2.5}$$

şeklinde yazılır. Eş. (2.4)'te bulunan örneklem varyansı, Eş. (2.5)'te yerine yazılırsa;

$$V(m_2) = V(s_y^2) = \frac{\left(\mu_4 - \mu_2^2 + 4\mu_2\mu_1^2 - 4\mu_1\mu_3\right)}{n} \tag{2.6}$$

elde edilir.

$\mu_1 = \frac{\sum_{j=1}^{N}\left(y_j - \bar{Y}\right)}{N} = 0$ olduğuna göre üçüncü ve dördüncü terimler sıfırdır. Eşitlik artık aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$V(s_y^2) = \frac{\left(\mu_4 - \mu_2^2\right)}{n}. \tag{2.7}$$

Düzenleme yapıldığında eşitlik şöyle gösterilebilir:

$$V(s_y^2) = \frac{\mu_2^2}{n}\left(\frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 1\right) \tag{2.8}$$

Burada $\frac{1}{n} = \lambda$ ve $\frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \beta_2(y)$ olduğundan, Eş. (2.8)'de eşitlikler yerine yazılırsa;

$$V(s_y^2) = \lambda S_y^4\left(\beta_2(y) - 1\right) \tag{2.9}$$

sonucu elde edilir [3].

Kovaryans için genel gösterim ise

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(m_{rs}, m_{uv}) = \frac{1}{n}\Big(&\mu_{(r+u)(s+v)} - \mu_{rs}\mu_{uv} + ru\mu_{20}\mu_{(r-1)s}\mu_{(u-1)v} + sv\mu_{02}\mu_{r(s-1)}\mu_{u(v-1)} \\ &+ rv\mu_{11}\mu_{(r-1)s}\mu_{u(v-1)}\Big)\end{aligned}. \tag{2.10}$$

şeklindedir. r=2,s=0, u=0 ve v=2 olduğunda formül aşağıdaki gibi yazılır:

$$\mathrm{cov}(m_{20}, m_{02}) = \frac{1}{n}\left(\mu_{22} - \mu_{20}\mu_{20} + 2\times 0\mu_{20}\mu_{10}\mu_{(0-1)2} + 0\times 2\mu_{02}\mu_{2(0-1)}\mu_{01} + 2\times 2\mu_{11}\mu_{10}\mu_{01}\right).$$

(2.11)

$\mu_{10} = \dfrac{\sum_{j=1}^{N}(y_j - \bar{Y})^1 (x_j - \bar{X})^0}{N} = 0$ ve $\mu_{01} = \dfrac{\sum_{j=1}^{N}(y_j - \bar{Y})^0 (x_j - \bar{X})^1}{N} = 0$ olduğuna göre formül sade biçimde,

$$\operatorname{cov}(m_{20}, m_{02}) = \frac{1}{n}\left(\mu_{22} - \mu_{20}\mu_{02}\right) = \frac{1}{n}\mu_{20}\mu_{02}\left(\frac{\mu_{22}}{\mu_{20}\mu_{02}} - 1\right),$$

$$= \frac{1}{n} S_y^2 S_x^2 \left(\theta - 1\right) \qquad (2.12)$$

olarak yazılır [3].

Varyans tahminlerinde en etkin tahmin ediciyi bulabilmek için tahmin edicilerin hata kareler ortalamalarına bakmak gerekir. HKO'su küçük olan tahmin edici, diğerine göre daha etkindir denir. Örnek olarak θ parametresinin $\hat{\theta}$ tahmin edicisi için HKO,

$$\text{HKO}(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta)^2 \qquad (2.13)$$

şeklinde gösterilir. $E(\hat{\theta})$ bir kez eklenip çıkarılarak,

$$\text{HKO}(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2 + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2$$

$$\text{HKO}(\hat{\theta}) = \text{Varyans}(\hat{\theta}) + (\text{Yan})^2 \qquad (2.14)$$

elde edilir. Eş. (2.14)'te görüldüğü üzere yansız tahmin ediciler için HKO varyansa eşit olmaktadır.

Bu tanım ışığında, klasik varyans tahmin edicisinin HKO'su

$$\text{HKO}(s_y^2) = V(s_y^2) = E(s_y^2 - S_y^2)^2,$$

$$= E(s_y^4 - 2s_y^2 S_y^2 - S_y^4),$$

$$= E(s_y^4) - 2S_y^2 E(s_y^2) + S_y^4$$

$$= E(s_y^4) - 2S_y^2 S_y^2 + S_y^4$$

$$= E(s_y^4) - S_y^4$$

olmaktadır. Eş. (2.14)'ten de HKO

$$\mathrm{HKO}(s_y^2) = V(s_y^2) = \lambda S_y^4 \left(\beta_2(y) - 1\right) \tag{2.15}$$

şeklinde yazılabilir [3].

2.1.2. Hirano Varyans Tahmin Edicisi

Kitle varyansının bir başka tahmin edicisi, Hirano tarafından 1973 yılında aşağıdaki şekilde önerilmiştir:

$$s_h^2 = A_{(h)} s_y^2 \tag{2.16}$$

s_y^2, Eş. (2.1)'de verilmiş olup, bu tahmin edicide $A_{(h)}$ sabit bir sayı olmak üzere HKO'sunu en küçük yapan değerdir. $A_{(h)}$ değerini bulmak için önce HKO bulunur, türev alınır ve sıfıra eşitlenir.

Bu tahmin edicinin HKO'su şöyledir:

$$\mathrm{HKO}(s_h^2) = E(s_h^2 - S_y^2)^2 \tag{2.17}$$

$$= E(A_{(h)} s_y^2 - S_y^2)^2 .$$

$A_{(h)} S_y^2$ terimi bir kez eklenip çıkartılırsa,

$$= E(A_{(h)}^2 (s_y^2 - S_y^2)^2 + 2(A_{(h)} - 1)(s_y^2 - S_y^2) A_{(h)} S_y^2 + (A_{(h)} - 1)^2 S_y^4)$$

$$= S_y^4 \left[A_{(h)}^2 (1 + \lambda(\beta_2(y) - 1)) - 2A_{(h)} + 1 \right]. \tag{2.18}$$

elde edilir. $A_{(h)}$ 'nın optimal değerini elde etmek için türev alınıp sıfıra eşitlenirse;

$$\frac{\partial \mathrm{HKO}(s_h^2)}{\partial A_{(h)}} = 0,$$

$$A_{(h)}^* = \frac{1}{1 + \lambda(\beta_2(y) - 1)} \tag{2.19}$$

elde edilir.

$A_{(h)}^*$ değeri Eş. (2.16)'da yerine yazılırsa, Hirano'nun varyans tahmin edicisi

$$s_h^2 = \frac{1}{1+\lambda(\beta_2(y)-1)} s_y^2 \tag{2.20}$$

şeklinde yazılabilir.

$A^*_{(h)}$ değeri Eş. (2.18)'de yerine yazıldığında, HKO'nun minimum değeri,

$$HKO_{min}\left(s_h^2\right) = S_y^4\left(\frac{\lambda(\beta_2(y)-1)}{1+\lambda(\beta_2(y)-1}\right) = V\left(s_y^2\right)A^*_{(h)} \tag{2.21}$$

olarak bulunmaktadır.

Hirano varyans tahmin edicisi ile klasik varyans tahmin edicisinin HKO'ları karşılaştırılırsa,

$$HKO_{min}\left(s_h^2\right) < HKO\left(s_y^2\right) = V\left(s_y^2\right)$$

$$\frac{\lambda S_y^4(\beta_2(y)-1)}{(1+\lambda(\beta_2(y)-1)} < \lambda S_y^4(\beta_2(y)-1)$$

$$\lambda\left(1-\beta_2(y)\right) < 1 \tag{2.22}$$

koşulu elde edilir. Bu koşul altında, Hirano varyans tahmin edicisinin klasik varyans tahmin edicisine göre daha küçük HKO'ya sahip olduğu ve daha etkin olduğu söylenebilir [3].

2.1.3. Das ve Tripathi Varyans Tahmin Edicileri

Örneklem literatüründe çoğu araştırmacı yardımcı değişkene ilişkin kitle ortalaması, varyans, çarpıklık katsayısı, basıklık katsayısı gibi bazı bilgileri kullanarak ilgilenilen değişkenin kitle ortalaması ve varyans gibi parametreler tahmin edilmektedir [4]. İlgilenilen değişken ile ilgili kitle parametreleri tahmininde yardımcı değişken bilgisi kullanmak tahmin güvenilirliğini arttıran bir unsurdur [5].

Oransal tahmin edicilerde, ilgilenilen y değişkeni ile yardımcı (x) değişken arasındaki ilişkiden yararlanılarak yardımcı değişkene ilişkin bazı bilgiler bilindiğinde ve kullanıldığında ilgilenilen değişkenin kitle varyansının tahmininde kullanılmaktadır [6]. Oransal tahmin edici, iki değişken arasındaki korelasyon katsayısı pozitif olduğu zaman yardımcı değişkene ilişkin bilgilerin kullanılarak ilgilenilen değişkene ilişkin kitle parametrelerin tahmininde en yaygın kullanılan tahmin edicilerdendir [7].

- Kitle varyansı için 1978 yılında Das ve Tripathi tarafından oransal tahmin ediciler önerilmiştir:

$$s_{dt1}^2 = s_y^2 \left(\frac{\bar{X}}{\bar{x}} \right)^{\alpha_{(dt)}} , \tag{2.23}$$

$$s_{dt2}^2 = \frac{\bar{X} s_y^2}{\bar{X} + \alpha_{(dt)} (\bar{x} - \bar{X})} . \tag{2.24}$$

Yanlı olan bu tahmin edicilerde, yardımcı değişkene ait $\bar{X}$ kitle ortalamasının bilinmesi gereklidir [8]. Hata kareler ortalamaları ise Taylor Serisi yönteminden yararlanılarak bulunur. Bu yöntem karmaşık ve doğrusal olmayan örnekleme planlarında tahmin edicilerin HKO'larının bulunması için tercih edilen yöntemlerden birisidir [3].

Bu yöntemin amacı doğrusal olmayan bir tahmin ediciyi; formuna, değişken sayısına, örnekleme yöntemine bağlı kalmaksızın doğrusal hale yaklaştırmaktadır. Ancak bu yöntemin uygulanmasında örneklem büyüklüğünün yeterince büyük olması (n>30) istenmekle birlikte, türeve ihtiyaç olduğundan tahmin edicilerin birinci ve ikinci türevlerinin alınabiliyor olması gerekmektedir [3].

$h(Y_1, Y_2, ...Y_k)$ doğrusal olmayan çok değişkenli bir fonksiyon ve $h(\hat{Y}_1, \hat{Y}_2, ...\hat{Y}_k)$ ise tahmin edici fonksiyon olmak üzere yöntem

$$h(\hat{Y}_1, \hat{Y}_2, ...\hat{Y}_k) = h(Y_1, Y_2, ...Y_k) + \sum_{j=1}^{k} d_j (\hat{Y}_j - Y_j) + R_k (Y_k, \alpha) \tag{2.25}$$

$$d_j = \left. \frac{\partial h(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)}{\partial \alpha_j} \right|_{Y_1, Y_2, ..., Y_k} \quad \text{ve}$$

$$R_k (Y_k, \alpha) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 h(Y_1, Y_2, ..., Y_k)}{\partial Y_j \partial Y_i} (\hat{Y}_j - Y_j)(\hat{Y}_i - Y_i) + O_k \tag{2.26}$$

şeklinde belirtilmektedir.

Örnekleme teorisinde; $R_k(Y_k, \alpha)$ değeri örneklem sayısı büyük olduğunda genellikle ihmal edilebilir. Sonuç itibariyle Taylor Serisi yöntemi,

$$h(\hat{Y}_1, \hat{Y}_2, ...\hat{Y}_k) \cong h(Y_1, Y_2, ...Y_k) + \sum_{j=1}^{k} d_j(\hat{Y}_j - Y_j) \tag{2.27}$$

olarak yazılabilir. HKO ise,

$$E\left[h(\hat{Y}_1, \hat{Y}_2, ...\hat{Y}_k) - h(Y_1, Y_2, ...Y_k)\right]^2 \cong E\left[\sum_{j=1}^{k} d_j(\hat{Y}_j - Y_j)\right]^2,$$

$$HKO\left[h(\hat{Y}_1, \hat{Y}_2, ...\hat{Y}_k)\right] \cong E\left[\sum_{j=1}^{k} d_j(\hat{Y}_j - Y_j)\right]^2 \tag{2.28}$$

olarak ifade edilebilir. Taylor Serisi matris formuyla gösterilirse,

$$HKO\left[h(\hat{Y}_1, \hat{Y}_2, ...\hat{Y}_k)\right] \cong d \sum d' \tag{2.29}$$

şeklinde yazılır. Bu gösterimde d; (1xk) boyutlu kısmi türev vektörü ve $\sum$; (kxk) boyutlu varyans-kovanyans matrisidir [3].

O halde Eş (2.23) ve Eş (2.24)'deki tahmin edicilerin HKO'ları aşağıdaki şekildedir:

$$HKO(s^2_{dti}) \cong d \sum d'. \qquad i=1,2$$

Burada d vektörü ile varyans-kovaryans matrisi,

$$d = \left[\left.\frac{\partial h(s_y^2, \bar{x})}{\partial s_y^2}\right|_{S_y^2, \bar{X}} \quad \left.\frac{\partial h(s_y^2, \bar{x})}{\partial \bar{x}}\right|_{S_y^2, \bar{X}} \right]$$

$$\sum = \begin{bmatrix} Var(s_y^2) & cov(\bar{x}, s_y^2) \\ cov(\bar{x}, s_y^2) & Var(\bar{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda S_y^4(\beta_2(y) - 1) & \lambda\mu_{21} \\ \lambda\mu_{21} & \lambda S_x^2 \end{bmatrix}$$

biçiminde olup HKO

$$HKO(s^2_{dti}) \cong \lambda\left[S_y^4\left(\beta_2(y) - 1\right) - 2\alpha_{(dt)}\frac{S_y^2\mu_{21}}{\bar{X}} + \alpha^2_{(dt)}\frac{S_y^4 S_x^2}{\bar{X}^2}\right]. \quad i=1,2. \tag{2.30}$$

şeklindedir. Burada $\alpha_{(dt)}$'nın optimal değeri türev alınarak bulunur ve HKO'da yerine yazılırsa,

$$\alpha^{*}_{(dt)} = \frac{\bar{X}\mu_{21}}{S_y^2 S_x^2}, \tag{2.31}$$

$$HKO_{min}(s^2_{dti}) \cong \lambda\left[S_y^4(\beta_2(y)-1) - \frac{\mu_{21}^2}{S_x^2}\right] \qquad i=1,2. \tag{2.32}$$

şeklinde elde edilir.

❖ Das and Tripathi, başka bir kitle varyans tahmin edicisi daha önermiştir [8]. Bu tahmin edici de yardımcı değişkene ilişkin kitle ve örneklem varyansı kullanılarak geliştirilmiştir:

$$s^2_{dt3} = \frac{s_y^2 S_x^2}{S_x^2 + \alpha_{(dt)}(s_x^2 - S_x^2)}. \tag{2.33}$$

HKO Taylor Serisi açılımından yararlanılarak,

$$HKO(s^2_{dt3}) = \lambda S_y^2\left[(\beta_2(y)-1) - 2\alpha_{(dt)}(\theta-1) + \alpha^2_{(dt)}(\beta_2(x)-1)\right] \tag{2.34}$$

biçiminde bulunmaktadır.

Burada $\alpha_{(dt)}$'nın optimal değeri türev alınarak bulunur ve Eş.(2.34)'deki HKO'nda yerine yazılırsa,

$$\alpha^{**}_{(dt)} = \frac{\theta-1}{\beta_2(x)-1}, \tag{2.35}$$

$$HKO_{min}(s^2_{dt3}) = \lambda S_y^4\left[(\beta_2(y)-1) - \frac{(\theta-1)^2}{\beta_2(x)-1}\right] \tag{2.36}$$

şeklinde elde edilir. Eş. (2.15)'de verilen klasik varyans tahmin edicisinin HKO ile karşılaştırılırsa,

$$HKO_{min}(s^2_{dt3}) < HKO(s_y^2)$$

$$\lambda S_y^4\left[(\beta_2(y)-1) - \frac{(\theta-1)^2}{\beta_2(x)-1}\right] < \lambda S_y^4(\beta_2(y)-1) \tag{2.37}$$

bulunur. $\beta_2(x) > 1$ koşulu altında Das ve Tripathi'nin s^2_{dt3} tahmin edicisinin, klasik varyans tahmin edicisine göre daha etkin olduğu söylenir.

2.1.4. Isaki Varyans Tahmin Edicisi

❖ 1983 yılında Isaki [9], kitle varyansı için

$$s_i^2 = \frac{s_y^2}{s_x^2} S_x^2, \qquad (2.38)$$

oransal tahmin ediciyi önermiştir. Bu tahmin edici yanlı bir tahmin edicidir. HKO ise

$$\mathrm{HKO}(s_i^2) = E\left(\frac{s_y^2}{s_x^2} S_x^2 - S_y^2\right)^2, \qquad (2.39)$$

biçimindedir. $V_R = \frac{S_y^2}{S_x^2}$ ve $\hat{\vartheta}_R = \frac{s_y^2}{s_x^2}$ olarak tanımlanırsa, $s_i^2 = \hat{\vartheta}_R S_x^2$ ile ifade edilir. HKO ise

$$\mathrm{HKO}\left(\hat{\vartheta}_R\right) = E\left(\hat{\vartheta}_R - \vartheta_R\right)^2,$$

$$= \frac{1}{S_x^4} E(s_y^2 - \vartheta_R s_x^2)^2,$$

şeklindedir. Burada $\vartheta_R S_x^2 = S_y^2$ eşitliğinden yararlanılarak $\vartheta_R S_x^2$ eklenir, S_y^2 çıkarılır ve beklenen değer alındığında,

$$\mathrm{HKO}(\hat{\vartheta}_R) \cong \frac{1}{S_x^4} E\left\{\left[\left(s_y^2 - S_y^2\right) - \vartheta_R\left(s_x^2 - S_x^2\right)\right]^2\right\}$$

$$\cong \frac{1}{S_x^4}\left[V(s_y^2) - 2V_R \mathrm{Cov}(s_y^2, s_x^2) + V_R^2 V(s_y^2)\right] \qquad (2.40)$$

bulunur.

Varyans değeri Eş. (2.9)'dan, kovaryans değeri ise Eş. (2.12)'den yerlerine yazılırsa,

$$\text{HKO}(s_i^2)=\frac{1}{S_x^4}\left[\lambda S_y^4\left(\beta_2\left(y\right)-1\right)-2\frac{S_y^2}{S_x^2}\lambda S_y^2 S_x^2\left(\theta-1\right)+\frac{S_y^4}{S_x^4}\lambda S_x^4\left(\beta_2\left(x\right)-1\right)\right]$$

$$=\lambda S_y^4\left[\beta_2\left(y\right)+\beta_2\left(x\right)-2\theta\right] \qquad (2.41)$$

elde edilir.

Eş. (2.41)'deki Isaki'nin oransal tahmin edicisinin HKO'sı ile Eş. (2.15)'deki klasik varyans tahmin edicinin HKO'su ile karşılaştırıldığında,

$$\text{HKO}(s_i^2)<\text{HKO}\left(s_y^2\right)=V\left(s_y^2\right)$$

$$\lambda S_y^4[\beta_2(y)+\beta_2(x)-2\theta]<\lambda S_y^4(\beta_2(y)-1)$$

$$\theta>\frac{\beta_2\left(x\right)+1}{2} \qquad (2.42)$$

koşulu altında Isaki tahmin edicisinin klasik tahmin ediciden daha etkin olduğu söylenir [3].

- Isaki tarafından, oransal tahmin edicinin yanında bir de yardımcı değişken kullanılarak regresyon tahmin edicisi önerilmiştir:

$$s_{ireg}^2=s_y^2+b(S_x^2-s_x^2)\,. \qquad (2.43)$$

Bu tahmin edicide, b sabit bir değer olmak üzere; $b=B=\dfrac{V_R(\theta-1)}{\beta_2(x)-1}$ değeri HKO'yu minimum yapan değerdir. Burada $V_R=\dfrac{S_y^2}{S_x^2}$ olmak üzere, Taylor Serisi yönteminden yararlanılarak HKO,

$$\text{HKO}(s_{ireg}^2)=\lambda S_y^4(\beta_2(y)-1)-2b\lambda S_y^2 S_x^2(\theta-1)+b^2\,\lambda S_x^4(\beta_2(x)-1) \qquad (2.44)$$

olarak bulunur. b değeri de yerine yazılırsa,

$$\text{HKO}(s_{ireg}^2)\cong\lambda S_y^4\left\{[\beta_2(y)-1]-\frac{(\theta-1)^2}{\beta_2(x)-1}\right\} \qquad (2.45)$$

elde edilir.

Tahmin edicilerin etkinliklerini karşılaştırmak için, Eş. (2.44)'deki Isaki'nin regresyon tahmin edicisinin HKO'su ile Eş. (2.41)'deki oransal tahmin edicinin HKO karşılaştırılırsa;

$$\lambda S_y^4\left\{[\beta_2(y)-1]-\frac{(\theta-1)^2}{\beta_2(x)-1}\right\}<\lambda S_y^4\left[\beta_2\left(y\right)+\beta_2\left(x\right)-2\theta\right],$$

$$\frac{-\beta_2(x)+1-(\theta-1)^2-\beta_2(x)^2+\beta_2(x)+2\theta\beta_2(x)-2\theta}{\beta_2(x)-1}<0,$$

$$\frac{\left[\theta-\beta_2(x)\right]^2}{\beta_2(x)-1}>0 \tag{2.46}$$

denklemi yazılır.

Bu denklemde, $\beta_2(x)>1$ koşulu sağlandığında Isaki'nin regresyon tahmin edicisinin, oransal tahmin ediciye göre daha etkin olduğu söylenebilir [15].

2.1.5. Prasad ve Singh Varyans Tahmin Edicileri

- ❖ Prasad ve Singh 1990 yılında, Hirano ve Isaki'nin oransal tahmin edicilerinden ilham alarak yeni bir oransal tahmin edici önermiştir:

$$s_{ps1}^2=\frac{s_h^2}{s_x^2}S_x^2 \tag{2.47}$$

s_h^2, Eş. (2.16)'da Hirano tarafından önerilen varyans tahmin edicisi olup, önerilen yeni tahmin edici,

$$s_{ps1}^2=\frac{A_{(h)}s_y^2}{s_x^2}S_x^2=\vartheta_R^{'}S_x^2 \tag{2.48}$$

şeklindedir. Tahmin edicinin HKO'su ise

$$HKO(s_{ps1}^2)=S_x^4 HKO\left(\vartheta_R^{'}\right),$$

$$HKO\left(\vartheta_R^{'}\right)\cong\frac{1}{S_x^4}\left[V(s_h^2)+\vartheta_R^2V(s_x^2)-2\vartheta_R Cov(s_h^2,s_x^2)\right] \tag{2.49}$$

şeklindedir. Burada;

$V(s_y^{2'}) = E(A_{(h)}s_y^2 - S_y^2)^2 = A_{(h)}\lambda S_y^4(\beta_2(y)-1)$,

$Cov(s_h^2, s_x^2) = A_{(h)}\lambda S_y^2 S_x^2(\theta-1)$,

$V(s_x^2) = \lambda S_x^4(\beta_2(x)-1)$

biçiminde olduğuna göre HKO,

$$HKO(\hat{\vartheta}_R') \cong \frac{\lambda S_y^4}{S_x^4}\left[A_{(h)}\left(\beta_2(y)-2\theta+1\right)+\beta_2(x)-1\right] \tag{2.50}$$

şeklinde yazılabilir. Eş. (2.19)'daki $A_{(h)}^*$ değeri yerine yazıldığında ise eşitlik,

$$HKO(\hat{\vartheta}_R') \cong \frac{\lambda S_y^4}{S_x^4}\left[\frac{\beta_2(y)-2\theta+1}{1+\lambda\left(\beta_2(y)-1\right)}+\beta_2(x)-1\right] \tag{2.51}$$

biçimindedir.

$HKO(s_{ps1}^2) = S_x^2 HKO(\hat{\vartheta}_R')$ olduğuna göre tahmin edicinin HKO'su,

$$HKO(s_{ps1}^2) = \lambda S_y^4\left[\frac{\beta_2(y)-2\theta+1}{1+\lambda(\beta_2(y)-1)}+\beta_2(x)-1\right] \tag{2.52}$$

gibi elde edilir.

Prasad ve Singh'nın Eş. (2.52)'deki HKO'su, Eş. (2.15)'de verilen klasik varyans tahmin edicisi ile Eş. (2.41)'de verilen Isaki'nin oransal tahmin edicisinin HKO'ları ile karşılaştırıldığında,

$$HKO(s_{ps1}^2) < HKO(s_y^2)$$

$$\lambda S_y^4\left[\frac{\beta_2(y)-2\theta+1}{1+\lambda(\beta_2(y)-1)}+\beta_2(x)-1\right] < \lambda S_y^4(\beta_2(y)-1)$$

$$\frac{\beta_2(x)+1}{2} < \theta \tag{2.53}$$

koşulu ile,

$$\mathrm{HKO}(s_{ps1}^2) < \mathrm{HKO}(s_i^2)$$

$$S_y^4\left[\frac{\beta_2(y)-2\theta+1}{1+\lambda(\beta_2(y)-1)}+\beta_2(x)-1\right]<\lambda S_y^4\left[\beta_2(y)+\beta_2(x)-2\theta\right]$$

$$\frac{\beta_2(y)+1}{2}>\theta \tag{2.54}$$

koşulu bulunur. Bu koşullar altında Prasad ve Singh'ın varyans tahmin edicisinin, klasik varyans tahmin edicisi ile Isaki'nin oransal tahmin edicisine oranla daha etkin olduğu söylenebilir [3].

❖ Prasad ve Singh tarafından 1990 yılında aşağıda verilen bir başka tahmin edici daha önerilmiştir:

$$s_{ps2}^2=\frac{A_{(ps)}s_y^2}{s_x^2}S_x^2 \tag{2.55}$$

Önerilen tahmin edici yanlı bir tahmin edici olup $A_{(ps)}$ ise sabit bir değerdir.

$\vartheta_R=\frac{S_y^2}{S_x^2}$, $\hat{\vartheta}'_R=\frac{A_{(ps)}s_y^2}{s_x^2}$ olarak ifade edildiğinde

$$s_{ps2}^2=\hat{\vartheta}'_R\,S_x^2$$

olarak yazılabilir. HKO ise,

$$\mathrm{HKO}(s_{ps2}^2)=S_x^4\,\mathrm{HKO}\left(\hat{\vartheta}'_R\right) \tag{2.56}$$

şeklinde yazılır. s_{ps2}^2 tahmin edicinin HKO'sunun bulunması için, $\hat{\vartheta}'_R$'nın HKO'su bulunmalıdır.

$$\mathrm{HKO}\left(\hat{\vartheta}'_R\right)=E\left(\hat{\vartheta}'_R-\vartheta_R\right)^2 \tag{2.57}$$

$$=E\left(\frac{A_{(ps)}s_y^2}{s_x^2}-\vartheta_R\right)^2$$

Burada $\frac{1}{s_x^4} \cong \frac{1}{S_x^4}$ olarak varsayılırsa;

$$HKO\left(\hat{\vartheta}'_R\right) = \frac{1}{S_x^4} E\left(A_{(ps)} s_y^2 - s_x^2 \vartheta_R\right)^2,$$

$$= \frac{1}{S_x^4} A_{(ps)}{}^2 E(s_y^4) - 2A_{(ps)} \vartheta_R E(s_y^2 s_x^2) + \vartheta_R^2 E(s_x^4)$$

elde edilir. Burada,

$$E(s_y^4) = V(s_y^2) + S_y^4,$$

$$E(s_x^4) = V(s_x^2) + S_x^4,$$

$$E(s_y^2, s_x^2) = \operatorname{cov}(s_y^2, s_x^2) + S_y^2 S_x^2 .$$

biçimindedir. Beklenen değerler yerlerine yazıldığında,

$$HKO(\hat{\vartheta}'_R) = \frac{1}{S_x^4}\Big(A_{(ps)}{}^2 V(s_y^2) - 2A_{(ps)} \vartheta_R \operatorname{cov}(s_y^2, s_x^2) + \vartheta_R^2 V(s_x^2) + A_{(ps)}{}^2 S_y^4$$

$$-2A_{(ps)} \vartheta_R S_y^2 S_x^2 + \vartheta_R^2 S_x^4\Big)$$

$$= \frac{S_y^4}{S_x^4}\left\{A_{(ps)}{}^2\left[1+\lambda\left(\beta_2(y)-1\right)\right] - 2A_{(ps)}\left[1+\lambda(\theta-1)\right] + \lambda\left[\left(\beta_2(x)-1\right)+1\right]\right\} \quad (2.58)$$

elde edilir. Eş. (2.56)'dan s_{ps2}^2 tahmin edicisinin HKO ise,

$$HKO(s_{ps2}^2) = S_y^4\left\{A_{(ps)}^2\left[1+\lambda(\beta_2(y)-1)\right] - 2A_{(ps)}\left[1+\lambda(\theta-1)\right] + \lambda\left[\beta_2(x)-1\right]+1\right\} \quad (2.59)$$

olarak hesaplanmaktadır. $A_{(ps)}$ değerini bulmak için türev alıp sıfıra eşitlenirse,

$$A_{(ps)} = \frac{1+\lambda(\theta-1)}{1+\lambda(\beta_2(y)-1)} \quad (2.60)$$

bulunur. Bu değer HKO'da yerine yazılırsa,

$$HKO_{\min}(s_{ps2}^2) \cong \lambda S_y^4\left\{\beta_2(x)-1+\frac{\beta_2(y)-1-(\theta-1)\lambda\left[(\theta-1)+2\right]}{1+\lambda[\beta_2(y)-1]}\right\} \quad (2.61)$$

elde edilir. Eş. (2.61)'da verilen Prasad ve Singh tahmin edicisi ile Isaki'nin Eş. (2.41)'deki HKO'ları birbirleriyle karşılaştırılırsa,

$$\text{HKO}\left(s_{ps2}^2\right) < \text{HKO}\left(s_i\right)$$

$$\lambda S_y^4\left\{\beta_2(x)-1+\frac{\beta_2(y)-1-(\theta-1)\lambda\left[(\theta-1)+2\right]}{1+\lambda[\beta_2(y)-1]}\right\} < \lambda S_y^4\left(\beta_y+\beta_x-2\theta\right)$$

$$\theta < \frac{\beta_y-1}{2} \tag{2.62}$$

koşulu altında Prasad ve Singh'ın s_{ps2}^2 tahmin edicisinin, Isaki'nin oransal tahmin edicisinden daha etkin olduğu sonucuna ulaşılmaktadır [3].

2.1.6. Garcia ve Cebrain Varyans Tahmin Edicisi

Literatürde yer alan bir diğer varyans tahmin edicisi olan Garcia ve Cebrain [11] 1996 yılında, Isaki'nin oransal tahmin edicisinden yola çıkarak aşağıdaki tahmin ediciyi önermiştir:

$$s_{gc}^2 = \frac{s_y^2}{(s_x^2)^{\alpha_{(gc)}}}(S_x^2)^{\alpha_{(gc)}}\,. \qquad \alpha_{(gc)} \geq 0 \tag{2.63}$$

Burada $\hat{\vartheta}_R^{\alpha_{(gc)}} = \dfrac{s_y^2}{(s_x^2)^{\alpha_{(gc)}}}$, $\vartheta_R^{\alpha_{(gc)}}$ 'nin tahmin edicisidir. $\alpha_{(gc)} = 1$ olduğunda bu tahmin edici Isaki'nin oransal tahmin edicisi olmaktadır.

$\hat{\vartheta}_R^{\alpha_{(gc)}}$ 'nın HKO,

$$\text{HKO}(\hat{\vartheta}_R^{\alpha_{(gc)}}) = \frac{1}{S_x^{4\alpha_{(gc)}}}\left[V\left(s_y^2\right)-2\vartheta_R^{\alpha_{(gc)}}\operatorname{cov}\left(s_y^2, s_x^{2\alpha_{(gc)}}\right)+\vartheta_R^{2\alpha_{(gc)}}V\left(s_x^{2\alpha_{(gc)}}\right)\right] \tag{2.64}$$

şeklinde yazılır.

Burada,

$\operatorname{cov}(s_y^2, s_x^{2\alpha_{(gc)}}) = \lambda\alpha_{(gc)}S_y^2S_x^{2\alpha_{(gc)}}(\theta-1)$ ve $V(s_x^{2\alpha_{(gc)}}) = \lambda\alpha^2S_x^{4\alpha_{(gc)}}(\beta_2(x)-1)$ olarak yazıldığında,

$$\mathrm{HKO}(\hat{\vartheta}_R^{\alpha(gc)}) \cong \lambda S_y^4\left[\left(\beta_2(y)-1\right)-2\alpha_{(gc)}\left(\theta-1\right)+\alpha_{(gc)}^2\left(\beta_2(x)-1\right)\right] \tag{2.65}$$

olur.

HKO'da α 'ya göre türev alınır sıfıra eşitlenirse optimal değer,

$$\alpha_{(gc)}^{*} = \frac{\left(\theta-1\right)}{\left(\beta_2(x)-1\right)} \tag{2.66}$$

olarak bulunur. HKO' da yerine yazılırsa

$$\mathrm{HKO}_{min}(s_{gc}^2) \cong \lambda S_y^4\left[\left(\beta_2(y)-1\right)-\frac{(\theta-1)^2}{(\beta_2(x)-1)}\right] \tag{2.67}$$

şeklinde elde edilir. Eş. (2.67)'deki Garcia ve Cebrain varyans tahmin edicisinin HKO ile Eş. (2.15)'deki klasik varyans tahmin edicisinin HKO'su ile karşılaştırıldığında,

$$\lambda S_y^4\left[\left(\beta_2(y)-1\right)-\frac{(\theta-1)^2}{(\beta_2(x)-1)}\right] < \lambda S_y^4\left(\beta_2(y)-1\right) \tag{2.68}$$

$$\frac{(\theta-1)^2}{\beta_2(x)-1} > 0$$

koşulu elde edilir. $\beta_2(x) > 1$ ise Garcia ve Cebrain tahmin edicisinin klasik varyans tahmin edicisinden daha etkin olduğu söylenir [3].

2.1.7. Upadhyaya ve Singh Varyans Tahmin Edicisi

Örneklem araştırmalarında, ortalama ve varyans gibi kitle parametrelerinin tahmininde yardımcı değişken bilgisini farklı formlarda kullanmak, literatürde üzerinde çalışılan bir konudur. 1999 yılında Upadhyaya ve Singh [8], yardımcı değişkenin basıklık katsayısını kullanarak yeni bir tahmin edici geliştirmiştir.

Önerilen oransal varyans tahmin edicisi;

$$s_{us}^2 = s_y^2\left(\frac{S_x^2+\beta_2(x)}{s_x^2+\beta_2(x)}\right) \tag{2.69}$$

şeklindedir. HKO Taylor Serisi'nden yararlanılarak şöyle bulunur:

$$\mathrm{HKO}(s_{us}^2) = \lambda S_y^4 \left[(\beta_2(y) - 1) - 2A_{(us)}(\theta - 1) + A_{(us)}^2 (\beta_2(x) - 1) \right]. \tag{2.70}$$

Burada $A_{(us)}$ değeri;

$$A_{(us)} = \frac{S_x^2}{S_x^2 + \beta_x^2} \tag{2.71}$$

şeklinde yazılır.

Eş. (2.70)'de verilen HKO ile Eş. (2.15)'de verilen klasik varyans tahmin edicisinin HKO'su ile Isaki'nin Eş. (2.41)'de verilen klasik oransal tahmin edicisinin HKO'su ile karşılaştırılırsa,

$$\mathrm{HKO}(s_{us}^2) < \mathrm{HKO}(s_y^2)$$

$$\lambda S_y^4 \left[(\beta_2(y) - 1) - 2A_{(us)}(\theta - 1) + A_{(us)}^2 (\beta_2(x) - 1) \right] < \lambda S_y^4 (\beta_2(y) - 1)$$

$A_{(us)}$ değeri Eş. (2.71)'den yerine yazıldığında,

$$\theta > (\beta_2(x) - 1) \frac{S_x^2}{S_x^2 + \beta_2(x)} + 1 \tag{2.72}$$

ile

$$\mathrm{HKO}(s_{us}^2) < \mathrm{HKO}(s_{is}^2)$$

$$\lambda S_y^4 \left[(\beta_2(y) - 1) - 2A_{(us)}(\theta - 1) + A_{(us)}^2 (\beta_2(x) - 1) \right] < \lambda S_y^4 (\beta_2(y) + \beta_2(x) - 2\theta)$$

$$\theta < \frac{\beta_2(x)(1 - A_{(us)})(1 + A_{(us)}) + (1 - A_{(us)})^2}{(1 - A_{(us)})}$$

$$\theta < \frac{\beta_2(x)(2S_x^2 + \beta_2(x) + 1)}{2(S_x^2 + \beta_2(x))} \tag{2.73}$$

koşulları elde edilir. Bu koşullar altında Upadhyaya ve Singh tahmin edicisinin, klasik varyans tahmin edicisi ile Isaki'nin klasik oransal tahmin edicisine göre daha etkin olduğu söylenebilir.

2.1.8. Chandra ve Singh Varyans Tahmin Edicisi

2005 yılında Chandra ve Singh [14], Upadhyaya ve Singh'ın Eş. (2.69)'da gösterilen tahmin edicisinden yola çıkarak ve ağırlıklandırma yaparak yeni bir tahmin edici geliştirmiştir. Bu tahmin edici de yardımcı değişkenin kitle varyansı ile basıklık katsayısından yararlanılarak oluşturulmuştur:

$$s_{cs1}^2 = s_y^2 \frac{\left(\beta_2(x)+S_x^2\right)}{\left[\alpha_{(cs)}\left(\beta_2(x)+s_x^2\right)+(1-\alpha_{(cs)})\left(\beta_2(x)+S_x^2\right)\right]} \quad . \tag{2.74}$$

Bu tahmin edicide $\alpha_{(cs)}$ sabit bir katsayı olmak üzere; tahmin edici, $\alpha_{(cs)}=0$ ise klasik varyans tahmin edicisi s_y^2, $\alpha_{(cs)}=1$ ise Upadhyaya ve Singh'ın Eş. (2.69)'de verilen tahmin edicisi s_{us}^2 olmaktadır.

Taylor Serisi'nden yararlanılarak tahmin edicinin HKO'su bulunursa,

$$HKO(s_{cs1}^2)=\lambda S_y^4\left[\beta_2(y)-1-2\alpha_{(cs)}K(\theta-1)+\alpha_{(cs)}^2K^2(\beta_2(x)-1)\right] \tag{2.75}$$

elde edilir. Burada K değeri,

$$K=\frac{S_x^2}{\beta_2(x)+S_x^2}$$

şeklinde olup, optimal $\alpha_{(cs)}$ değeri için türev alınır ve sıfıra eşitlenirse;

$$\alpha_{(cs)}^*=\frac{\theta-1}{K(\beta_2(x)-1)} \tag{2.76}$$

bulunur.

Optimal değer Eş (2.75)'de yerine yazılırsa $HKO_{min}(s_{cs1}^2)$ elde edilir. Minimum HKO,

$$HKO_{\min}(s^2_{cs1}) = \lambda S^4_y \left(\beta_2(y) - 1 - \frac{(\theta-1)^2}{\beta_2(x)-1} \right). \qquad (2.77)$$

şeklindedir. Bu tahmin edicinin yanında, Chandra ve Singh [14], iki tahmin edici daha geliştirmişlerdir:

$$s^2_{cs2} = s^2_y \left(\frac{\beta_2(x) + S^2_x}{\beta_2(x) + s^2_x} \right)^{\delta}. \qquad (2.78)$$

$$s^2_{cs3} = s^2_y \left(2 - \frac{\beta_2(x) + s^2_x}{\beta_2(x) + S^2_x} \right)^{\phi}. \qquad (2.79)$$

Bu tahmin edicilerin hata kareler ortalamaları da benzer şekilde bulunmakta olup δ, ϕ değerlerinin optimal değerleri Eş. (2.76)'daki değer ile, minimum HKO'ların ise Eş. (2.77)'de verilen HKO ile aynı olduğu görülmektedir [3].

Chandra ve Singh tahmin edicisinin HKO'su ile Eş. (2.15)'de verilen klasik varyans tahmin edici ve Isaki'nin Eş. (2.41)'de verilen HKO'lar ile karşılaştırıldığında,

$$HKO_{\min}(s^2_{cs1}) < HKO(s^2_y)$$

$$\lambda S^4_y \left(\beta_2(y) - 1 - \frac{(\theta-1)^2}{\beta_2(x)-1} \right) < \lambda S^4_y \left(\beta_2(y) - 1 \right)$$

$$\frac{(\theta-1)^2}{\beta_2(x)-1} > 0 \qquad (2.80)$$

ile

$$HKO_{\min}(s^2_{cs1}) < HKO(s^2_i)$$

$$\lambda S^4_y \left(\beta_2(y) - 1 - \frac{(\theta-1)^2}{\beta_2(x)-1} \right) < \lambda S^4_y \left[\beta_2(y) + \beta_2(x) - 2\theta \right]$$

$$\beta_2(x) < \frac{\theta^2}{2(\theta-1)} \qquad (2.81)$$

koşulları altında Chandra ve Singh tahmin edicisinin, klasik varyans ile Isaki'nin oransal tahmin edicisine göre daha etkin olduğu söylenir.

2.1.9. Kadılar ve Çıngı Varyans Tahmin Edicisi

2005 yılında Kadılar ve Çıngı [10] tarafından, Upadhyaya ve Singh'nın Eş. (2.69)'da verilen tahmin edicisinden yararlanılarak kitle varyansı için aşağıdaki oransal tahmin edicileri önerilmiştir:

$$s_{kc1}^2 = \frac{s_y^2}{s_x^2 - C_x}\left[S_x^2 - C_x\right] ,$$

$$s_{kc2}^2 = \frac{s_y^2}{s_x^2 - \beta_2(x)}\left[S_x^2 - \beta_2(x)\right],$$

$$s_{kc3}^2 = \frac{s_y^2}{s_x^2\beta_2(x) - C_x}\left[S_x^2\beta_2(x) - C_x\right] ,$$

$$s_{kc4}^2 = \frac{s_y^2}{s_x^2 C_x - \beta_2(x)}\left[S_x^2 C_x - \beta_2(x)\right] , \qquad (2.82)$$

bu tahmin edicilerde, yardımcı değişkene ait, $C_x = \frac{S_x}{\bar{X}}$ değişim katsayısı ile $\beta_2(x)$ basıklık katsayısı kullanılmaktadır. HKO Taylor Serisi'nden yararlanılarak aşağıdaki gibi bulunur:

$$HKO(s_{kci}^2) = \lambda S_y^4(\beta_2(y) - 1) - 2\frac{\lambda S_y^4 S_x^2(\theta - 1)}{S_x^2 - C_x} + \frac{\lambda S_y^4 S_x^4(\beta_2(x) - 1)}{(S_x^2 - C_x)^2} , \qquad i=1,2,3,4.$$

Burada,

$\frac{S_x^2}{S_x^2 - C_x} = A_{1(kc)}$ olmak üzere

$$HKO(s_{kci}^2) = \lambda S_y^4\left\{(\beta_2(y) - 1) - 2A_{1(kc)}(\theta - 1) + A_{1(kc)}^2(\beta_2(x) - 1)\right\} . \qquad (2.83)$$

Bunun yanında, diğer tahmin ediciler için de HKO aynı yolla bulunabilir.

$A_{2(kc)}=\dfrac{S_y^2}{S_x^2-\beta_2(x)}$, $A_{3(kc)}=\dfrac{S_x^2\beta_2(x)}{S_x^2\beta_2(x)-C_x}$, $A_{4(kc)}=\dfrac{S_x^2C_x}{S_x^2C_x-\beta_2(x)}$ olmak üzere HKO,

$$HKO(s_{kci}^2)=\lambda S_y^4\left\{(\beta_2(y)-1)-2A_{i(kc)}(\theta-1)+A_{i(kc)}^2(\beta_2(x)-1)\right\},\quad i=1,2,3,4. \tag{2.84}$$

yazılabilir. Önerilen bu tahmin edicilerin Eş. (2.84)'deki HKO ile Isaki'nin Eş. (2.41)'deki HKO'su karşılaştırılırsa,

$$\lambda S_y^4\left\{(\beta_2(y)-1)-2A_{i(kc)}(\theta-1)+A_{i(kc)}^2(\beta_2(x)-1)\right\}<\lambda S_y^4\left[\beta_2(y)+\beta_2(x)-2\theta\right]$$

$$A_{i(kc)}^2\beta_2(x)-A_{i(kc)}^2-2A_{i(kc)}\theta+2A_{i(kc)}-1-\beta_2(x)+2\theta<0$$

koşulu altında $A_{i(kc)}=1$ olduğunda HKO'lar arasında fark yoktur. Ancak $\beta_2(x)\neq 0$, $C_x\neq 0$ olduğundan $A_{i(kc)}\neq 1$ olacaktır. Bu sebeple, Kadılar ve Çıngı'nın oransal tahmin edicilerinin, Isaki'nin oransal tahmin edicisinden daha etkin olduğu söylenir.

❖ 2007 yılında Kadılar ve Cıngı [15] yeni bir regresyon tahmin edicisi önermiştir:

$$s_{kc5}^2=w_{1(kcr)}s_y^2+w_{2(kcr)}t_b\bar{X} \tag{2.85}$$

Bu tahmin edicide $w_{1(kcr)}$ ve $w_{2(kcr)}$; $w_{1(kcr)}+w_{2(kcr)}=1$ eşitliğini sağlayan ağırlıklar olmak üzere $\psi=\dfrac{1-f}{n}, f=\dfrac{n}{N}$'dir. $t_b=\dfrac{\bar{y}}{\bar{x}}\left[\dfrac{1+\psi C_{xy}}{1+\psi C_x^2}\right]$ ve $C_{xy}=\rho_{xy}C_xC_y$ olmak üzere sabit değerlerdir. HKO, Taylor Serisi'nden faydalanılarak aşağıdaki şekilde bulunmuştur.

$$HKO(s_{kc5}^2)\cong\lambda S_y^4\left[w_{1(kc)}^2(\beta_y^*)-2w_{1(kc)}w_{2(kc)}A+w_{2(kc)}^2B\right]. \tag{2.86}$$

Burada

$$\beta_2^*(y)=\beta_2(y)-1,\ R=\frac{\bar{Y}}{\bar{X}},\ A=\frac{R\tau\mu_{21}-\tau\mu_{30}}{S_y^4},\ \tau=\frac{1+\psi C_{xy}}{1+\psi C_x^2}\ \text{ve}\ B=\frac{R^2\tau^2}{V_RS_y^2}+\frac{\tau^2}{S_y^2}-\frac{2R\tau^2\rho_{xy}}{V_RS_yS_x}$$

olmak üzere minimum HKO'yu bulmak için, $w_{1(kcr)}$ ve $w_{2(kcr)}$'ye göre türev alınır ve sıfıra eşitlenirse $w_{1(kcr)}$ ve $w_{2(kcr)}$ değerleri

$$w_{1(kcr)}{}^*=\frac{A+B}{2A+B+\beta_2^*(y)}\ \text{ve}\ w_{2(kcr)}{}^*=\frac{A+\beta_2^*(y)}{2A+B+\beta_2^*(y)} \tag{2.87}$$

olarak bulunmaktadır. Minimum HKO ise,

$$HKO_{min}(s^2_{kc5})=\lambda S^4_y\left[w^{*2}_{1(kcr)}(\beta^*_y)-2w^*_{1(kcr)}w^*_{2(kcr)}A+w^{*2}_{2(kcr)}B\right] \quad (2.88)$$

şeklindedir. Eş. (2.88)'de verilen HKO ile Isaki'nin Eş. (2.41)'de verilen oransal tahmin edicisinin HKO'su ile karşılaştırılırsa,

$$\lambda S^4_y\left[w^{*2}_{1(kcr)}(\beta^*_y)-2w^*_{1(kcr)}w^*_{2(kcr)}A+w^{*2}_{2(kcr)}B\right]<\lambda S^4_y\left[\beta_2(y)+\beta_2(x)-2\theta\right]$$

$$(w^{*2}_{1(kcr)}-1)\beta_2(y)-w^{*2}_{1(kcr)}-\beta_2(x)+2\theta-2w^*_{1(kcr)}w^*_{2(kcr)}A+w^{*2}_{2(kcr)}B<0 \quad (2.89)$$

koşulu sağlandığında, Kadılar ve Çıngı'nın regresyon tahmin edicisi s^2_{kc5}'in daha etkin olduğu söylenebilir.

2.1.10. Gupta ve Shabbir Varyans Tahmin Edicisi

Gupta ve Shabbir [16], 2008 yılında yeni bir tahmin edici önermiştir. Eş. (2.90)'da verilen bu tahmin edicide $d_{1(gs)}, d_{2(gs)}$ ve $\alpha_{(gs)}$ sabit değerlerdir.

$$s^2_{gs}=\left[d_{1(gs)}s^2_y+d_{2(gs)}\left(S^2_x-s^2_x\right)\right]\left[2-\left(\frac{s^2_x}{S^2_x}\right)^{\alpha_{(gs)}}\right]. \quad (2.90)$$

Burada Fark Yöntemi'nden yararlanılarak $\delta_i\,(i=0,1)$ için; $\left(\frac{s^2_x}{S^2_x}\right)=\delta_1+1$ ve $\left(\frac{s^2_y}{S^2_y}\right)=\delta_0+1$

yazılabilir. Böylece tahmin edici,

$$s^2_{gs}=\left[d_{1(gs)}S^2_y(1+\delta_0)-d_{2(gs)}S^2_x\delta_1\right]\left[2-\left(1+\delta_1\right)^{\alpha_{(gs)}}\right] \quad (2.91)$$

şeklinde olmaktadır. HKO ise aşağıdaki şekildedir:

$$HKO(s^2_{gs})\cong E\left[(d_{1(gs)}-1)S^2_y+d_{1(gs)}S^2_y\left\{\delta_0-\alpha_{(gs)}\delta_1-\alpha_{(gs)}\delta_0\delta_1-\frac{\alpha_{(gs)}(\alpha_{(gs)}-1)}{2}\delta^2_1\right\}\right.$$
$$\left.-d_{2(gs)}S^2_x\left\{\delta_1-\alpha_{(gs)}\delta^2_1\right\}\right]^2$$

$$\cong \left[S_y^4 + d_{1(gs)} S_y^4 A_{1(gs)}^{(\alpha)} + d_{2(gs)}^2 S_x^4 A_{2(gs)} + 2d_{1(gs)} d_{2(gs)} S_y^2 S_x^4 A_{3(gs)}^{(\alpha)} - 2d_{1(gs)} S_y^4 A_{4(gs)}^{(\alpha)} \right.$$

$$\left. -2d_{2(gs)} S_y^2 S_x^2 A_{5(gs)}^{(\alpha)} \right] \tag{2.92}$$

Burada, $\gamma = \frac{1}{n} - \frac{1}{N}$ olmak üzere,

$$A_{1(gs)}^{(\alpha)} = 1 + \gamma\left\{ \left(\beta_2(y) - 1\right) + \alpha_{(gs)}\left(\beta_2(x) - 1\right) - 4\alpha_{(gs)}\left(\lambda_{22} - 1\right) \right\},$$

$$A_{2(gs)} = \gamma\left(\beta_2(x) - 1\right),$$

$$A_{3(gs)}^{(\alpha)} = \gamma\left\{ 2\alpha_{(gs)}\left(\beta_2(x) - 1\right) - \left(\lambda_{22} - 1\right) \right\},$$

$$A_{4(gs)}^{(\alpha)} = 1 - \alpha_{(gs)}\gamma\left\{ \left(\lambda_{22} - 1\right) + \frac{\left(\alpha_{(gs)} - 1\right)}{2}\left(\beta_2(x) - 1\right) \right\},$$

$$A_{5(gs)}^{(\alpha)} = \alpha_{(gs)}\gamma\left(\beta_2(x) - 1\right) \tag{2.93}$$

biçimindedir. $d_{1(gs)}$ ve $d_{2(gs)}$ değerleri de türev alınıp sıfıra eşitlenirse,

$$d_{1(gs)}^* = \frac{A_{2(gs)} A_{4(gs)}^{(\alpha)} - A_{3(gs)}^{(\alpha)} A_{5(gs)}^{(\alpha)}}{A_{1(gs)}^{(\alpha)} A_{2(gs)} - A_{3(gs)}^{2(\alpha)}} \text{ ve } d_{2(gs)}^* = \frac{S_y^2}{S_x^2}\left\{ \frac{A_{1(gs)}^{(\alpha)} A_{5(gs)}^{(\alpha)} - A_{3(gs)}^{(\alpha)} A_{4(gs)}^{(\alpha)}}{A_{1(gs)}^{(\alpha)} A_{2(gs)} - A_{3(gs)}^{2(\alpha)}} \right\} \tag{2.94}$$

eşitlikleri bulunur.

HKO'nun minimum değeri için ise $d_{1(gs)}^*$ ve $d_{2(gs)}^*$ yerlerine yazılırsa;

$$HKO_{min}(s_{sg}^2) = S_y^4\left(1 - \frac{A_{1(gs)}^{(\alpha)} A_{5(gs)}^{2(\alpha)} + A_{2(gs)} A_{4(gs)}^{2(\alpha)} - 2A_{3(gs)}^{(\alpha)} A_{4(gs)}^{(\alpha)} A_{5(gs)}^{(\alpha)}}{A_{1(gs)}^{(\alpha)} A_{2(gs)} - A_{3(gs)}^{2(\alpha)}} \right) \tag{2.95}$$

elde edilmiş olur.

$\alpha_{(gs)} = 0$ için s_{gs}^2 tahmin edicisi aşağıdaki gibi Eş. (2.43)'deki Isaki'nin regresyon tahmin edicisi gibi olmaktadır:

$$s_{gs}^2 = \left[d_{1(gs)} s_y^2 + d_{2(gs)}(S_x^2 - s_x^2) \right]. \tag{2.96}$$

$\alpha = 0$ için optimal HKO ise,

$$\text{HKO}_{\min}(s_{gs}^2) = S_y^4\left(1 - \frac{1}{1+\gamma(\beta_2(y)-1)(1-\rho^2_{(s_y^2 s_x^2)})}\right) = \frac{V(s_y^2)(1-\rho^2_{(s_y^2 s_x^2)})}{1+\gamma(\beta_2(y)-1)(1-\rho^2_{(s_y^2 s_x^2)})}. \quad (2.97)$$

Burada, $\rho_{(s_y^2,s_x^2)} = (\lambda_{22}-1)/(\sqrt{(\beta_2(y)-1)(\beta_2(x)-1)}$.

Eş. (2.97)'de verilen HKO ile Eş. (2.15)'deki klasik varyans tahmin edicisinin HKO karşılaştırılırsa,

$$\text{HKO}_{\min}(s_{gs}^2) < \text{HKO}(s_y^2)$$

$A_{(gs)} = \gamma(\beta_2(y)\text{-}1)(1\text{-}\rho^2_{(s_y^2 s_x^2)})$ olmak üzere

$$\frac{V(s_y^2)(A_{(gs)}+\rho^2_{(s_y^2 s_x^2)})}{1+A_{(gs)}} > 0 \quad (2.98)$$

bulunur. Burada, $\beta_2(y) > 1$ olduğunda $A_{(gs)} > 0$ olur ve $A_{(gs)} > 0$ olduğunda koşul her zaman sağlanır. Yani $\beta_2(y) > 1$ koşulu altında s_{gs}^2 tahmin edicisinin daha etkin olduğu anlaşılmaktadır.

$\alpha_{(gs)} = 1$ için $s_{sg}^{2(\alpha_{(gs)})}$ tahmin edicisi aşağıdaki şekilde yazılmaktadır:

$$s_{gs}^{2(1)} = \left[d_{1(gs)}s_y^2 + d_{2(gs)}\left(S_x^2 - s_x^2\right)\right]\left[2 - \frac{s_x^2}{S_x^2}\right] \quad (2.99)$$

$d_{1(gs)}$ ve $d_{2(gs)}$ değerleri ise,

$$d_{1(gs)}^* = \frac{A_{2(gs)}A_{4(gs)}^{(1)} - A_{3(gs)}^{(1)}A_{5(gs)}^{(1)}}{A_{1(gs)}^{(1)}A_{2(gs)} - A_{3(gs)}^{2(1)}}, \quad d_{2(gs)}^* = \frac{S_y^2}{S_x^2}\left\{\frac{A_{1(gs)}^{(1)}A_{5(gs)}^{(1)} - A_{3(gs)}^{(1)}A_{4(gs)}^{(1)}}{A_{1(gs)}^{(1)}A_{2(gs)} - A_{3(gs)}^{2(1)}}\right\} \quad (2.100)$$

biçiminde yazılır. Burada,

$$A_{1(gs)}^{(1)} = 1 + \gamma\left\{\left(\beta_2(y)-1\right) + \left(\beta_2(x)-1\right) - 4\left(\lambda_{22}-1\right)\right\},$$

$$A_{2(gs)} = \gamma\left(\beta_2(x)-1\right),$$

$$A_{3(gs)}^{(1)} = \gamma\left\{2\left(\beta_2(x)-1\right)-\left(\lambda_{22}-1\right)\right\},$$

$$A_{4(gs)}^{(1)} = 1-\gamma\left(\lambda_{22}-1\right),$$

$$A_{5(gs)}^{(1)} = \gamma\left(\beta_2(x)-1\right) \tag{2.101}$$

olmak üzere, minimum HKO ise,

$$HKO_{min}(s_{gs}^{2(1)}) \cong S_y^4\left(1-\frac{A_{1(gs)}^{(1)}A_{5(gs)}^{2(1)}+A_{2(gs)}A_{4(gs)}^{2(1)}-2A_{3(gs)}^{(1)}A_{4(gs)}^{(1)}A_{5(gs)}^{(1)}}{A_{1(gs)}^{(1)}A_{2(gs)}-A_{3(gs)}^{2(1)}}\right) \tag{2.102}$$

şeklindedir.

$\alpha_{(gs)} = -1$ için $s_{gs}^{2(\alpha_{(gs)})}$ tahmin edicisi aşağıdaki şekilde yazılmaktadır:

$$s_{gs}^{2(-1)} = \left[d_1 s_y^2 + d_2\left(S_x^2 - s_x^2\right)\right]\left[2-\frac{S_x^2}{s_x^2}\right]. \tag{2.103}$$

$d_{1(gs)}$ ve $d_{2(gs)}$ değerleri ise,

$$d_{1(gs)}^{*} = \frac{A_{2(gs)}A_{4(gs)}^{(-1)}-A_{3(gs)}^{(-1)}A_{5(gs)}^{(-1)}}{A_{1(gs)}^{(-1)}A_{2(gs)}-A_{3(gs)}^{2(-1)}} \;,\; d_{2(gs)}^{*} = \frac{S_y^2}{S_x^2}\left\{\frac{A_{1(gs)}^{(-1)}A_{5(gs)}^{(-1)}-A_{3(gs)}^{(-1)}A_{4(gs)}^{(-1)}}{A_{1(gs)}^{(-1)}A_{2(gs)}-A_{3(gs)}^{2(-1)}}\right\}$$

biçiminde yazılır. Burada,

$$A_{1(gs)}^{(-1)} = 1+\gamma\left\{\left(\beta_2(y)-1\right)+\left(\beta_2(x)-1\right)-4\left(\lambda_{22}-1\right)\right\},$$

$$A_{2(gs)} = \gamma\left(\beta_2(x)-1\right),$$

$$A_{3(gs)}^{(-1)} = -\gamma\left\{2\left(\beta_2(x)-1\right)+\left(\lambda_{22}-1\right)\right\},$$

$$A_{4(gs)}^{(-1)} = 1-\gamma\left\{(\lambda_{22}-1)-(\beta_2(x)-1)\right\},$$

$$A_{5(gs)}^{(-1)} = -\gamma\left(\beta_2(x)-1\right)$$

olmak üzere, minimum HKO ise şöyledir:

$$HKO_{min}(s_{gs}^{2(-1)}) = S_y^4\left(1\text{-}\frac{A_{1(gs)}^{(-1)}A_{5(gs)}^{2(-1)} + A_{2(gs)}A_{4(gs)}^{2(-1)} - 2A_{3(gs)}^{(-1)}A_{4(gs)}^{(-1)}A_{5(gs)}^{(-1)}}{A_{1(gs)}^{(-1)}A_{2(gs)} - A_{3(gs)}^{2(-1)}}\right) \tag{2.104}$$

2.1.11. Subramani ve Kumarapandiyan Varyans Tahmin Edicisi

2012 yılında Subramani ve Kumarapandiyan [19], kitle ortalamasının tahmini için, yardımcı değişkene ilişkin kullandığı medyan ve değişim katsayısını, kitle varyansının tahmini için de kullanmış ve aşağıdaki oransal tahmin ediciyi önermiştir:

$$s_{sk}^2 = s_y^2\left[\frac{C_x S_x^2 + M_d}{C_x s_x^2 + M_d}\right]. \tag{2.105}$$

s_{sk}^2 tahmin edicisi Kadılar ve Çıngı'nın Eş. (2.82)'de önermiş olduğu tahmin edicilere benzer bir yapıdadır ve tahmin edicinin HKO'su ise,

$$A_{sk} = \frac{S_x^2}{S_x^2 + M_d} \text{ olmak üzere}$$

$$HKO(s_{sk}^2) = \gamma S_y^4\left[\left(\beta_{2(y)} - 1\right) + A_{sk}^2\left(\beta_{2(x)} - 1\right) - 2A_{sk}\left(\lambda_{22} - 1\right)\right] \tag{2.106}$$

olarak bulunmaktadır.

Subramani ve Kumarapandiyan oransal tahmin edicisi; Isaki'nin Eş. (2.41)'deki oransal tahmin edicisi ile Kadılar ve Çıngı'nın oransal tahmin edicilerinin Eş. (2.84)'deki hata kareler ortalamaları ile karşılaştırıldığında, aşağıdaki koşullar altında s_{sk}^2 'nın daha etkin olduğu söylenebilir.

$$HKO(s_{sk}^2) < HKO(s_i^2)$$

$$\lambda > 1 + \frac{(A_{sk} + 1)(\beta_2(x) - 1)}{2}, \tag{2.107}$$

$$HKO(s_{sk}^2) < HKO(s_{kci}^2)$$

$$\lambda > 1 + \frac{(A_{sk} + A_i)(\beta_2(x) - 1)}{2}, \qquad i=1,2,3,4. \tag{2.108}$$

2.1.12. Singh ve Solanki Varyans Tahmin Edicileri

2013 yılında Singh ve Solanki [17] tarafından Gupta ve Shabbir'in [18] önerdiği oransal tahmin ediciden yola çıkarak aşağıdaki genelleştirilmiş tahmin edici önerilmiştir:

$$s_{ssi}^2 = \left[w_{1(ss)} s_y^2 - w_{2(ss)} \left(\frac{s_x^2 - S_x^2}{S_x^2} \right) \right] \left(\frac{a_{(ss)} S_x^2 + b_{(ss)}}{a_{(ss)} s_x^2 + b_{(ss)}} \right) \qquad i=1,2,\ldots 10 \qquad (2.109)$$

Bu tahmin edicide $w_{1(ss)}$ ve $w_{2(ss)}$ sabit değerler olup, $a_{(ss)}$ ve $b_{(ss)}$ ise yardımcı değişkene ilişkin $\bar{X}, C_x, \rho$ gibi bilinen kitle parametreleridir. HKO ise şöyledir:

$$HKO(s_{ssi}^2) = S_y^4 + w_{1(ss)}^2 A^* + w_2^2 B^* - 2w_{1(ss)} w_{2(ss)} C^* - 2w_{1(ss)} D^* - 2w_{2(ss)} E^* . \qquad (2.110)$$

Burada;

$$A^* = S_y^4 \left[1 + n^{-1} \left\{ \beta_2^*(y) + \eta^* (3\eta^* \beta_2^*(x) - 4\theta^*) \right\} \right] ,$$

$$B^* = n^{-1} \beta_2^*(x) ,$$

$$C^* = n^{-1} S_y^2 \left[\theta^* - 2\eta^* \beta_2^*(x) \right],$$

$$D^* = S_y^4 \left[1 + n^{-1} \eta^* \left\{ \eta^* \beta_2^*(y) - \theta^* \right\} \right],$$

$$E^* = n^{-1} S_y^2 \eta^* \beta_2^*(x)$$

olmak üzere

$$\eta^* = \left(\frac{a_{(ss)} S_x^2}{a_{(ss)} S_x^2 + b} \right), \ \beta_2^*(x) = \beta_2(x) - 1, \ \beta_2^*(y) = \beta_2(y) - 1 \text{ ve } \theta^* = \theta - 1. \qquad (2.111)$$

HKO'yu minimum yapan $w_{1(ss)}$ ve $w_{2(ss)}$ değerleri;

$$w_{1(ss)} = \left(\frac{B^* D^* + C^* E^*}{A^* B^* - C^{*2}} \right),$$

$$w_{2(ss)} = \left(\frac{A^* E^* + C^* D^*}{A^* B^* - C^{*2}} \right) \qquad (2.112)$$

şeklindedir. O halde minimum HKO genel haliyle şöyle yazılabilir:

$$HKO_{min}(s_{ssi}^2) = \left[S_y^4 - \frac{(B^* D^{*2} + 2C^* D^* E^* + A^* E^{*2}}{(A^* B^* - C^{*2})} \right]$$

$$= \frac{n^{-1} S_y^4 \beta_2^*(y)\left(1-\rho^{*2}\right)\left(1-n^{-1}\eta^{*2}\beta_2^*(x)\right)}{1+n^{-1}\left\{\beta_2^*(y)\left(1-\rho^{*2}\right)-\eta^{*2}\beta_2^*(x)\right\}} \tag{2.113}$$

Çizelge 2.1'de gösterilen $a_{(ss)}$ ve $b_{(ss)}$'nin farklı değerleri için oransal tahmin ediciler geliştirilmiştir [17].

Çizelge 2. 1. Singh ve Solanki Tahmin Edicileri

Tahmin Ediciler	$a_{(ss)}$	$b_{(ss)}$
$s_{ss1}^2 = \left[w_{1(ss)} s_y^2 - w_{2(ss)} \left(\frac{s_x^2 - S_x^2}{S_x^2} \right) \right] \left(\frac{S_x^2 + \beta_2(x)}{s_x^2 + \beta_2(x)} \right)$	1	$\beta_2(x)$
$s_{ss2}^2 = \left[w_{1(ss)} s_y^2 - w_{2(ss)} \left(\frac{s_x^2 - S_x^2}{S_x^2} \right) \right] \left(\frac{S_x^2 + C_x}{s_x^2 + C_x} \right)$	1	C_x
$s_{ss3}^2 = \left[w_{1(ss)} s_y^2 - w_{2(ss)} \left(\frac{s_x^2 - S_x^2}{S_x^2} \right) \right] \left(\frac{C_x S_x^2 + \beta_2(x)}{C_x s_x^2 + \beta_2(x)} \right)$	C_x	$\beta_2(x)$
$s_{ss4}^2 = \left[w_{1(ss)} s_y^2 - w_{2(ss)} \left(\frac{s_x^2 - S_x^2}{S_x^2} \right) \right] \left(\frac{\beta_2(x) S_x^2 + C_x}{\beta_2(x) s_x^2 + C_x} \right)$	$\beta_2(x)$	C_x
$s_{ss5}^2 = \left[w_{1(ss)} s_y^2 - w_{2(ss)} \left(\frac{s_x^2 - S_x^2}{S_x^2} \right) \right] \left(\frac{\bar{X} S_x^2 + \rho}{\bar{X} s_x^2 + \rho} \right)$	$\bar{X}$	ρ
$s_{ss6}^2 = \left[w_{1(ss)} s_y^2 - w_{2(ss)} \left(\frac{s_x^2 - S_x^2}{S_x^2} \right) \right] \left(\frac{\bar{X} S_x^2 + S_x^2}{\bar{X} s_x^2 + S_x^2} \right)$	$\bar{X}$	S_x^2
$s_{ss7}^2 = \left[w_{1(ss)} s_y^2 - w_{2(ss)} \left(\frac{s_x^2 - S_x^2}{S_x^2} \right) \right] \left(\frac{C_x S_x^2 + \rho}{C_x s_x^2 + \rho} \right)$	C_x^2	ρ
$s_{ss8}^2 = \left[w_{1(ss)} s_y^2 - w_{2(ss)} \left(\frac{s_x^2 - S_x^2}{S_x^2} \right) \right] \left(\frac{\bar{X} S_x^2 + \beta_2(x)}{\bar{X} s_x^2 + \beta_2(x)} \right)$	$\bar{X}$	$\beta_2(x)$
$s_{ss9}^2 = \left[w_{1(ss)} s_y^2 - w_{2(ss)} \left(\frac{s_x^2 - S_x^2}{S_x^2} \right) \right] \left(\frac{\beta_2(x) S_x^2 + \bar{X}}{\beta_2(x) s_x^2 + \bar{X}} \right)$	$\beta_2(x)$	$\bar{X}$
$s_{ss10}^2 = \left[w_{1(ss)} s_y^2 - w_{2(ss)} \left(\frac{s_x^2 - S_x^2}{S_x^2} \right) \right] \left(\frac{\beta_2(x) S_x^2 + \beta_2(x)*}{\beta_2(x) s_x^2 + \beta_2(x)*} \right)$	$\beta_2(x)$	$\beta_2(x)^*$

2.1.13. Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta Varyans Tahmin Edicileri

2015 yılında Yadav vd. [20], kitle varyansı için aşağıdaki genelleştirilmiş tahmin ediciyi önermiştir.

$$s^2_{ydi} = \left[w_{1(yd)}s^2_y + w_{2(yd)}(S^2_x - s^2_x)\right]\left[\lambda\left(\frac{\alpha_{(yd)}S^2_x + b_{(yd)}}{\alpha_{(yd)}s^2_x + b_{(yd)}}\right) + (1-\lambda_{(yd)})\exp\left(\frac{\alpha_{(yd)}(S^2_x - s^2_x)}{\alpha_{(yd)}(S^2_x + s^2_x) + 2b_{(yd)}}\right)\right]$$

i=0,1,2,3,4. (2.114)

Burada $w_{1(yd)}$ ve $w_{2(yd)}$ ağırlıklar olmak üzere, $\lambda_{(yd)} = 0$ veya 1 değerini alır. $\alpha_{(yd)}$ ve $b_{(yd)}$ ise yardımcı değişkene ilişkin parametrelerdir.

$\lambda_{(yd)} = 0$ olduğunda ve $\alpha_{(yd)}$ ile $b_{(yd)}$'nin farklı değerleri için tahmin ediciler Çizelge 2.2'de gösterilmiştir.

Çizelge 2. 2. Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta Tahmin Edicileri ($\lambda_{(yd)} = 0$)

Tahmin Ediciler	$\alpha_{(yd)}$	$b_{(yd)}$
$s^2_{ky0} = \left[w_{1(yd)}s^2_y + w_{2(yd)}(S^2_x - s^2_x)\right]\exp\left(\frac{S^2_x - s^2_x}{S^2_x + s^2_x}\right)$	1	0
$s^2_{ky1} = \left[w_{1(yd)}s^2_y + w_{2(yd)}(S^2_x - s^2_x)\right]\exp\left(\frac{S^2_x - s^2_x}{S^2_x + s^2_x + 2\lambda_{04}}\right)$	1	λ_{04}
$s^2_{ky2} = \left[w_{1(yd)}s^2_y + w_{2(yd)}(S^2_x - s^2_x)\right]\exp\left(\frac{S^2_x - s^2_x}{S^2_x + s^2_x + 2C_x}\right)$	1	C_x
$s^2_{ky3} = \left[w_{1(yd)}s^2_y + w_{2(yd)}(S^2_x - s^2_x)\right]\exp\left(\frac{\lambda_{04}(S^2_x - s^2_x)}{\lambda_{04}(S^2_x + s^2_x) + 2C_x}\right)$	λ_{04}	C_x
$s^2_{ky4} = \left[w_{1(yd)}s^2_y + w_{2(yd)}(S^2_x - s^2_x)\right]\exp\left(\frac{C_x(S^2_x - s^2_x)}{C_x(S^2_x + s^2_x) + 2\lambda_{04}}\right)$	C_x	λ_{40}

$\lambda_{(yd)} = 1$ olduğunda ise $\alpha_{(yd)}$ ve $b_{(yd)}$'nin farklı değerleri için tahmin ediciler Çizelge 2.3'te gösterilmiştir.

Çizelge 2. 3. Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta Tahmin Edicileri ($\lambda_{(yd)}=1$)

Tahmin Ediciler	$\alpha_{(yd)}$	$b_{(yd)}$
$s_{yd0}^{2*}=\left[w_{1(yd)}s_y^2+w_{2(yd)}(S_x^2-s_x^2)\right]\left(\dfrac{S_x^2}{s_x^2}\right)$	1	0
$s_{yd1}^{2*}=\left[w_{1(yd)}s_y^2+w_{2(yd)}(S_x^2-s_x^2)\right]\left(\dfrac{S_x^2+\lambda_{04}}{s_x^2+\lambda_{04}}\right)$	1	λ_{04}
$s_{yd2}^{2*}=\left[w_{1(yd)}s_y^2+w_{2(yd)}(S_x^2-s_x^2)\right]\left(\dfrac{S_x^2+C_x}{s_x^2+C_x}\right)$	1	C_x
$s_{yd3}^{2*}=\left[w_{1(yd)}s_y^2+w_{2(yd)}(S_x^2-s_x^2)\right]\left(\dfrac{\lambda_{04}S_x^2+C_x}{\lambda_{04}s_x^2+C_x}\right)$	λ_{04}	C_x
$s_{yd4}^{2*}=\left[w_{1(yd)}s_y^2+w_{2(yd)}(S_x^2-s_x^2)\right]\left(\dfrac{C_xS_x^2+\lambda_{04}}{C_xs_x^2+\lambda_{04}}\right)$	C_x	λ_{40}

Tahmin edicilerin HKO'sunu bulmak için; $\psi_0=\dfrac{s_y^2}{S_y^2}-1$ ve $\psi_1=\dfrac{s_x^2}{S_x^2}-1$yazılırsa, $E(\psi_i)=0$

i=0,1 elde edilir ve böylece tahmin edici aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$s_{ky}^2\cong\left[w_{1(yd)}s_y^2(1+\psi_0)-w_{2(yd)}S_x^2\psi_1\right]\left[\lambda_{(yd)}\left(1+g\psi_1\right)^{-1}+(1-\lambda_{(yd)})\exp\left\{-\frac{1}{2}g\psi_1\left(1+\frac{1}{2}g\psi_1\right)^{-1}\right\}\right] \tag{2.115}$$

$g=\dfrac{\alpha_{(yd)}S_x^2}{\alpha_{(yd)}S_x^2+b_{(yd)}}$ olmak üzere HKO ise,

$$\begin{aligned}\mathrm{HKO}(s_{yd}^2)\cong\Bigg[&S_y^4(w_{1(yd)}-1)^2+w_{1(yd)}^2\theta_{(yd)}\left\{\lambda_{40}^*+\frac{1}{4}g^2\lambda_{40}^*(4+7\lambda_{(yd)}+\lambda_{(yd)}^2)-2g\lambda_{22}^*(1+\lambda_{(yd)})\right\}\\&+w_{2(yd)}^2\frac{S_x^4}{S_y^4}\theta_{(yd)}\lambda_{04}^*-2w_{1(yd)}\theta_{(yd)}\left\{\frac{1}{8}g^2(3+5\lambda_{(yd)})\lambda_{04}^*-\frac{1}{2}g(1+\lambda_{(yd)})\lambda_{22}^*\right\}\\&-2w_{2(yd)}\frac{S_x^2}{S_y^2}\frac{1}{2}g\theta_{(yd)}(1+\lambda_{(yd)})\lambda_{04}^*-2w_{1(yd)}w_{2(yd)}\frac{S_x^2}{S_y^2}\theta_{(yd)}\left\{\lambda_{22}^*-g(1+\lambda_{(yd)})\lambda_{04}^*\right\}\Bigg]\end{aligned} \tag{2.116}$$

şeklinde bulunur. Burada; $\lambda_{40}^{*}=(\lambda_{40}-1)$, $\lambda_{04}^{*}=(\lambda_{04}-1)$, $\lambda_{22}^{*}=(\lambda_{22}-1)$, $\theta_{(yd)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{N}$, $\rho^{*}=\rho-1$ ile $w_{1(yd)}$ ve $w_{2(yd)}$ ağırlıklarının optimal değerleri,

$$w_{1(yd)}^{*}=\frac{1-\frac{1}{8}\theta_{(yd)}g^{2}(1+3\lambda_{(yd)}+4\lambda_{(yd)}^{2})\lambda_{04}^{*}}{1+\theta_{(yd)}\left\{\lambda_{04}^{*}(1-\rho^{*2})-g^{2}\frac{1}{4}\lambda_{(yd)}(1+3\lambda_{(yd)})\lambda_{04}^{*}\right\}},$$

$$w_{2(yd)}^{*}=\frac{S_y^2}{S_x^2}\left\{\frac{1}{2}g(1+\lambda_{(yd)})+w_{1(yd)}^{*}\left(\frac{\lambda_{22}^{*}}{\lambda_{04}^{*}}-g(1+\lambda_{(yd)})\right)\right\} \tag{2.117}$$

şeklinde olup minimum HKO,

$$HKO_{min}(s_{yd}^{2})\cong S_y^4\left[\left(1-\frac{1}{4}g^{2}\theta_{(yd)}(1+\lambda_{(yd)})^{2}\lambda_{04}^{*}\right)-\frac{\left\{1-\frac{1}{8}\theta_{(yd)}g^{2}(1+3\lambda_{(yd)}+4\lambda_{(yd)}^{2})\lambda_{04}^{*}\right\}^{2}}{1+\theta_{(yd)}\left\{\lambda_{04}^{*}(1-\rho^{*2})-g^{2}\frac{1}{4}\lambda_{(yd)}(1+3\lambda_{(yd)})\lambda_{04}^{*}\right\}}\right]$$

(2.118)

olarak bulunur.

2.1.14. Lone ve Tailor Varyans Tahmin Edicisi

Kitlenin varyansını tahmin etmek için bir başka tahmin edici, Searl [21]sabit katsayısını kullanan, Lone ve Tailor [22] tarafından 2017 yılında önerilmiştir:

$$s_{lt}^{2}=H.\hat{\bar{Y}}. \tag{2.119}$$

Burada H sabit katsayısı olmak üzere kitle ortalamasının tahmini;

$$\hat{\bar{Y}}=s_y^2\left[w_{1(lt)}\left(\frac{S_x^2-C_x}{s_y^2-C_x}\right)+\left(1-w_{1(lt)}\right)\left(\frac{\bar{x}-\rho}{\bar{X}-\rho}\right)\right] \tag{2.120}$$

şeklindedir. Bu eşitlikte $w_{1(lt)}$ değeri HKO'yu minimum yapan sabit bir değerdir. Tahmin edicinin HKO'sunu bulmak için önce $\hat{\hat{Y}}$ değerinin HKO'sunun bulunması gerekmektedir. Bunun için aşağıdaki işlemler takip edilebilir.

Genellikle doğrusal olmayan tahmin edicilerin HKO'larını hesaplamak için fark yöntemi kullanılır. Bu yöntemde tahmin edicideki değişken sayısı kadar fark terimi eklenebilir. Burada da $s_y^2 = S_y^2(1+e_0)$, $s_x^2 = S_x^2(1+e_1)$, $\bar{x} = \bar{X}(1+e_2)$ şeklinde yeni terimler tanımlanır ve $E(e_0) = E(e_1) = E(e_2) = 0$ yazılabilir.

Ayrıca $\lambda_{pq} = \dfrac{\mu_{pq}}{\mu_{20}^{p/2}\mu_{02}^{q/2}}$ ve $\mu_{pq} = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{Y})^p(x_i - \bar{X})^q$ olmak üzere

$$E(e_0^2) = \frac{1}{n}(\lambda_{40} - 1) = n^{-1}\lambda_{40}^*,$$

$$E(e_1^2) = \frac{1}{n}(\lambda_{04} - 1) = n^{-1}\lambda_{04}^*,$$

$$E(e_2^2) = \frac{1}{n}C_x^2,$$

$$E(e_0e_2) = \frac{1}{n}\lambda_{21}C_x,$$

$$E(e_0e_1) = \frac{1}{n}(\lambda_{22} - 1) = n^{-1}\lambda_{22}^*,$$

$$E(e_1e_2) = \frac{1}{n}C_x\lambda_{03},$$

değerleri ile $\hat{\hat{Y}}$ 'nin HKO'su aşağıdaki gibi bulunur.

$$HKO(\hat{\hat{Y}}) = S_y^4\left[A_{(lt)} + W_1^2B_{lt}^* - 2W_1C_{lt}^*\right]. \tag{2.121}$$

Burada;

$$A_{lt} = n^{-1}\lambda_{40}^* + n^{-1}S_{lt}^2C_x^2 + 2n^{-1}S_{lt}C_x\lambda_{21},$$

$$B_{lt}^* = n^{-1}M_{lt}^2\lambda_{04}^* + n^{-1}S_{lt}^2C_x^2 + 2n^{-1}S_{lt}M_{lt}C_x\lambda_{03},$$

$C^{*}_{lt} = n^{-1}M^{2}_{lt}\lambda^{*}_{22} + n^{-1}S_{lt}\lambda_{21}C_{x} + n^{-1}S_{lt}M_{lt}C_{x}\lambda_{03} + n^{-1}S^{2}_{lt}C^{2}_{x}$ ve

$$M_{lt} = \frac{S^{2}_{x}}{S^{2}_{x} - C_{x}} \;, S_{lt} = \frac{\bar{X}}{\bar{X} - \rho} \;,\; w_{1(lt)} = \frac{C^{*}}{B^{*}} = w^{*}_{1(lt)} \tag{2.122}$$

şeklinde olmakla birlikte, $w^{*}_{1(lt)}$ HKO'yu minimum yapan değerdir. $\hat{\bar{Y}}$ 'nin minimum HKO aşağıdaki şekilde yazılır:

$$HKO_{min}(\hat{\bar{Y}}) = S^{4}_{y}\left[A_{lt} - \frac{C^{*2}}{B^{*}}\right] = S^{4}_{y}\left[A_{lt} - \rho^{2}_{1}\right] . \tag{2.123}$$

Burada $\rho^{2}_{1} = \frac{C^{*2}_{lt}}{B^{*}_{lt}}$ 'dir.

s^{2}_{lt} tahmin edicisinin HKO'su ise aşağıdadır:

$$HKO(s^{2}_{lt}) = S^{4}_{y}\left[H^{2}(W^{2}_{1}B^{*}_{lt} + 2w_{1}P_{lt} + R_{lt}) - 2H(w_{1}F_{lt} + G_{lt}) + 1\right]. \tag{2.124}$$

Bu eşitlikte ;

$P_{lt} = M^{2}_{lt}n^{-1}\lambda^{*}_{04} - 2M_{lt}n^{-1}\lambda^{*}_{22} - 2S_{lt}n^{-1}C_{x}\lambda_{21} - M_{lt}S_{lt}n^{-1}C_{x}\lambda_{03} - S^{2}_{lt}n^{-1}C^{2}_{x}$,

$R_{lt} = 1 + n^{-1}\lambda^{*}_{04} + n^{-1}S^{2}_{lt}C^{2}_{x} + 4n^{-1}S_{lt}\lambda_{21}C_{x}$,

$F_{lt} = M^{2}_{lt}n^{-1}\lambda^{*}_{04} - M_{lt}n^{-1}\lambda^{*}_{22} - S_{lt}n^{-1}C_{x}\lambda_{21}$,

$$G_{lt} = 1 + S_{lt}n^{-1}C_{x}\lambda_{21} \tag{2.125}$$

değerleri bulunmaktadır. s^{2}_{lt} tahmin edicisinin HKO'sunu minimum yapan H değeri,

$$H = \frac{w_{1}F_{lt} + G_{lt}}{w^{2}_{1}B^{*}_{lt} + 2w_{1}P_{lt} + R_{lt}} = H^{*} \tag{2.126}$$

biçimindedir. Bulunan bu değer Eş. (2.119)'daki tahmin edicide yerine yazılırsa tahmin edici;

$$s_{lt}^{2*} = \frac{w_{1(lt)}F_{lt} + G_{lt}}{w_{1(lt)}^2 B_{lt}^* + 2w_{1(lt)}P_{lt} + R_{lt}}.\hat{\hat{Y}} \tag{2.127}$$

şeklinde elde edilir. Bu tahmin edici yalnızca λ_{04} , λ_{40}, λ_{22} ,λ_{21} ,λ_{03} ve C_x değerleri bilindiğinde kullanılabilir. Bu tahmin edicinin HKO'su ise şöyledir:

$$HKO(s_{lt}^2) = S_y^4\left[1 - \frac{(w_{1(lt)}F_{lt} + G_{lt})^2}{w_{1(lt)}^2 B_{lt}^* + 2w_{1(lt)}P_{lt} + R_{lt}}\right] = S_y^4\left[1 - \rho_2^2\right] \cdot \tag{2.128}$$

$w_{1(lt)}^*$ değerini $\hat{\hat{Y}}$ 'da yerine yazarsak;

$$\hat{\hat{Y}}^* = s_y^2\left[w_{1(lt)}^*\left(\frac{S_x^2\text{-}C_x}{s_y^2\text{-}C_x}\right) + \left(1\text{-}w_{1(lt)}^*\right)\left(\frac{\bar{x}\text{-}\rho}{\bar{X}\text{-}\rho}\right)\right] \tag{2.129}$$

elde edilir. $w_{1(lt)}^*$ ve $\hat{\hat{Y}}^*$ değerleri Eş. (2.127)'de yerine yazılırsa tahmin edici;

$$s_{lt}^{2**} = \left(\frac{w_{1(lt)}^* F_{lt} + G_{lt}}{W_{1(lt)}^{*2} B_{lt}^* + 2w_{1(lt)}^* P_{lt} + R_{lt}}\right)\hat{\hat{Y}}^* \tag{2.130}$$

şekilde yazılır. HKO'nun minimum eşitliği,

$$HKO_{min}(s_{lt}^{2**}) = S_y^4\left[1 - \frac{(W_{1(lt)}^* F_{lt} + G_{lt})^2}{W_{1(lt)}^{*2} B_{lt}^* + 2w_{1(lt)}^* P_{lt} + R_{lt}}\right].$$

$\rho_3 = \dfrac{(w_{1(lt)}^* F_{lt} + G_{lt})^2}{w_{1(lt)}^{*2} B^* + 2w_{1(lt)}^* P_{lt} + R_{lt}}$ denilirse,

$$HKO_{min}(s_{lt}^{2**}) = S_y^4\left[1 - \rho_3\right] \tag{2.131}$$

olarak hesaplanmaktadır. Bu tahmin edici, görüldüğü üzere yalnızca λ_{40} , λ_{04} ,λ_{22}, λ_{21}, C_x ve λ_{03} değerleri bilindiğinde kullanılabilir.

s_{lt}^{2**} tahmin edicisi klasik varyans tahmin edicisi ile karşılaştırıldığında;

$$HKO_{min}(s_{lt}^{2**}) < HKO(s_y^2) = V(s_y^2)$$

$$HKO(s_y^2) = \frac{1}{n}S_y^4\lambda_{40}^*$$

$$\rho_3 < \frac{n-\lambda_{40}^*}{n} \tag{2.132}$$

koşulu altında s_{lt}^{2**} tahmin edici daha etkin denebilir. Benzer şekilde Eş (2.84)'deki Kadılar ve Çıngı tahmin edicisi ile karşılaştırıldığında**,**

$$HKO_{min}(s_{lt}^{2**}) < HKO(s_{kci}^2)$$

$\lambda_{40}^* = \beta_2(y)-1,\ \lambda_{04}^* = \beta_2(x)-1,\ \lambda_{22}^* = \theta-1$ ve $K = \dfrac{\lambda_{22}^*}{\lambda_{40}^*}$ olmak üzere

$$\rho_3 > \frac{n-\left[\lambda_{40}^* + A_i\lambda_{04}^*\left(A_{i(kc)}-2K\right)\right]}{n} \tag{2.133}$$

koşulu altında s_{lt}^{2**} tahmin edicisinin daha etkin olduğu görülmektedir.

3. BASİT RASTGELE ÖRNEKLEME (BRÖ)'DE ÖNERİLEN ORTALAMANIN VARYANS TAHMİN EDİCİLERİ

İkinci bölümde, basit rastgele örnekleme yöntemindeki bazı varyans tahmin edicileri anlatılmıştır. Bu bölümde ise, varyans tahmin edicilerinden yararlanılarak basit rastgele örnekleme yöntemi için *ortalamanın varyans* tahminleri verilecektir.

3.1. Ortalamanın Varyans Tahmin Edicileri

3.1.1. Ortalamanın Klasik Varyans Tahmin Edicisi

Varyans, örneklem uzayında her bir örneklemden diğerine değişim olarak tanımlanmaktadır. N büyüklüğünde bir kitleden basit rastgele örnekleme yöntemi ile n büyüklüğünde örneklem çekildiğinde ortalama tahmin edicisinin varyansı,

$$V(\bar{y}) = E(\bar{y} - \bar{Y})^2$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitlikte aşağıdaki hesaplamalar yapılırsa,

$$n(\bar{y} - \bar{Y}) = (y_1 - \bar{Y}) + (y_2 - \bar{Y}) + ...(y_n - \bar{Y})$$

$$n^2(\bar{y} - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{Y})^2 + 2\sum_{i<}\sum_{j=2}^{n}(y_i - \bar{Y})(y_j - \bar{Y})$$

$$n^2E(\bar{y} - \bar{Y})^2 = E\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{Y})^2 + 2E\sum_{i<}\sum_{j=2}^{n}(y_i - \bar{Y})(y_j - \bar{Y}) \qquad (3.1)$$

elde edilir. Burada,

$$E\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{Y})^2 = \frac{n}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{Y})^2 \text{ ile}$$

$$E\sum_{i}\sum_{<j=2}^{n}(y_i - \bar{Y})(y_j - \bar{Y}) = \frac{n(n-1)}{N(N-1)}\sum_{i}\sum_{<j=2}^{N}(y_i - \bar{Y})(y_j - \bar{Y})$$

yazılır ve Eş (3.1)'de yerine konulursa,

$$n^2E(\bar{y}-\bar{Y})^2=\frac{n}{N}\left(\sum_{i=1}^{N}(y_i-\bar{Y})^2\right)+2\frac{n-1}{N-1}\sum_{i<}\sum_{j=2}^{N}(y_i-\bar{Y})(y_j-\bar{Y}) \tag{3.2}$$

eşitliği bulunur. $\sum_{i=1}^{N}(y_i-\bar{Y})^2$ terimi bir kez eklenip çıkartılırsa

$$n^2V(\bar{y})=\frac{n}{N}\left((1-\frac{n-1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(y_i-\bar{Y})^2+\frac{n-1}{N-1}\left(\sum_{i=1}^{N}(y_i-\bar{Y})\right)^2\right)$$

elde edilir. İkinci tarafta $\sum_{i=1}^{N}y_i=N\bar{Y}$ olduğundan

$V(\bar{y})=\frac{1}{nN}\frac{N-n}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(y_i-\bar{Y})^2$ ve S_y^2 tanımından

$$V(\bar{y})=\frac{N-n}{N}\frac{S_y^2}{n}=(1-f)\frac{S_y^2}{n} \tag{3.3}$$

şeklinde hesaplanır.

Görüldüğü üzere basit rastgele örneklemede sonsuz bir kitleden n büyüklüğünde basit rastgele örneklem çekilecek olunursa ortalamanın varyansında düzeltme terimi adı verilen 1-f ihmal edilebilir ve

$$V(\bar{y})\cong\frac{S_y^2}{n} \tag{3.4}$$

olarak yazılır [2].

3.1.2. Önerilen Ortalamanın Varyans Tahmin Edicileri

Kitle ortalamasının, y değişkeni için ortalamanın klasik varyans tahmini Eş. (3.4)'ten yararlanılarak aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$v(\bar{y})\cong\frac{s_y^2}{n}. \tag{3.5}$$

Formülden anlaşılacağı üzere kitle ortalamasının varyans tahmini s_y^2 ve n'e bağlı olarak değişmektedir.

Eş. (3.4)'te verilen ortalamanın varyans tahmininde s_y^2 yerine ikinci bölümde anlatılan birbirinden farklı varyans tahmin edicilerinden yararlanılarak ortalamanın varyans tahmini için genel bir çıkarım yapılabilir.

Örnek olarak, Hirano'nun kitle varyans tahmin edicisinden yola çıkılarak *ortalamanın varyans* tahmini bulunmak istenilsin. Eş. (2.16)'da verilen Hirano'nun kitle varyans tahmin edici,

$$s_h^2 = A_{(h)} s_y^2$$

şeklindedir. Burada $A_{(h)}$ sabit bir sayı s_y^2 ise y değişkeni için klasik varyans tahmin edicisidir. Eş. (3.3)'ten yararlanılarak y değişkeni için ortalamanın varyans formülü $\nu(\bar{y}) \cong \frac{s_y^2}{n}$ şeklinde yazılabilir. Bu formülde s_y^2 yerine, Hirano'nun varyans tahmin edicisi yazılırsa y değişkeni için, ortalamanın varyans tahmin edicisi;

$$\nu_h(\bar{y}) = \frac{s_h^2}{n}$$

$$= \frac{A_{(h)} s_y^2}{n} \tag{3.6}$$

biçiminde olmaktadır. Burada $A_{(h)}$ sabit değerinin Eş. (2.19)'da verilen $A_{(h)}^*$ değeri yerine yazıldığında formül,

$$\nu_h(\bar{y}) = \frac{1}{n}\left(\frac{s_y^2}{1+\lambda(\beta_2(y)-1)}\right) \tag{3.7}$$

olarak elde edilir. Artık *ortalamanın varyans* tahmin edicisi; s_y^2 klasik varyans tahmin edicisinden değil, Hirano'nun varyans tahmin edicisinden yararlanılarak oluşturulmuş durumdadır.

Burada dikkat edilmesi gereken durum y değişkeni için, ortalamanın klasik varyans tahmin edicisinin yalnızca s_y^2 ile n örneklem büyüklüğüne bağlı olduğudur. Eş. (3.5)'te verilen formülde s_y^2 yerine;

- ❖ Das and Tripathi (1978),
- ❖ Isaki (1983),
- ❖ Prasad ve Singh (1990),
- ❖ Garcia ve Cebrain (1996),
- ❖ Upadhyaya ve Singh (1999),
- ❖ Chandra ve Singh (2005),
- ❖ Kadılar ve Çıngı (2005)(2007),
- ❖ Shabbir ve Gupta (2008),
- ❖ Subramani ve Kumarapandiyan (2012),
- ❖ Singh ve Solanki (2013),
- ❖ Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta (2015),
- ❖ Lone ve Tailor (2017)

farklı varyans tahmin edicileri yazılırsa, her bir tahmin edici için *ortalamanın varyans* tahmin edicileri aynı yolla hesaplanabilmektedir. Her bir varyans tahmin edicisi n’ e bölünerek *ortalamanın varyans* tahmin edicileri elde edilmektedir.

Çizelge 3.1, Çizelge 3.2 ve Çizelge 3.3’de her bir varyans tahmin edicisinden yola çıkarak oluşturulan *ortalamanın varyans* tahmin edicileri verilmektedir.

Çizelge 3. 1. BRÖ'de Önerilen Ortalamanın Varyans Tahmin Edicileri

No	Yararlanılan Varyans Tahmin Edicileri	Önerilen *Ortalamanın Varyans* Tahmin Edicileri
1	Klasik Varyans (2.1)	$\nu(\bar{y})=\dfrac{s_y^2}{n}$
2	Hirano (2.16)	$\nu_h(\bar{y})=\left(\dfrac{1}{n}\right)A_{(h)}s_y{}^2,\ A^*_{(h)}=\dfrac{1}{1+\lambda(\beta_2(y)-1)}$

Çizelge 3. 2. BRÖ'de Önerilen Ortalamanın Varyans Tahmin Edicileri (Devam)

No	Yararlanılan Varyans Tahmin Edicileri	Önerilen *Ortalamanın Varyans* Tahmin Edicileri
3	Das ve Tripathi (2.23), (2.24), (2,33)	$\nu_{dt1}(\bar{y})=\frac{1}{n}s_y^2\left(\frac{\bar{X}}{\bar{x}}\right)^{\alpha_{(dt)}}$ $\nu_{dt2}(\bar{y})=\frac{\bar{X}s_y^2}{n\left(\bar{X}+\alpha_{(dt)}(\bar{x}-\bar{X})\right)}$, $\alpha^{*}_{(dt)}=\frac{\bar{X}\mu_{21}}{S_y^2S_x^2}$ $\nu_{dt3}(\bar{y})=\frac{s_y^2S_x^2}{n\left(S_x^2+\alpha_{(dt)}(s_x^2-S_x^2)\right)}$, $\alpha^{**}_{(dt)}=\frac{\theta-1}{\beta_2(x)-1}$
4	Isaki (2.38),(2.43)	$\nu_i(\bar{y})=\frac{1}{n}\left(\frac{s_y^2}{s_x^2}\right)S_x^2$, $\nu_{ireg}(\bar{y})=\frac{s_y^2+b(S_x^2-s_x^2)}{n}$.
5	Prasad ve Singh (2.47), (2.55)	$\nu_{ps1}(\bar{y})=\frac{A_{(h)}s_y^2}{ns_x^2}S_x^2$, $A^{*}_{(h)}=\frac{1}{1+\lambda(\beta_2(y)-1)}$ $\nu_{ps2}(\bar{y})=\frac{A_{(ps)}s_y^2}{s_x^2}S_x^2$, $A_{(ps)}=\frac{1+\lambda(\theta-1)}{1+\lambda(\beta_2(y)-1)}$
6	Garcia ve Cebrain (2.63)	$\nu_{gc}(\bar{y})=\frac{s_y^2}{n}\left(\frac{S_x^2}{s_x^2}\right)^{\alpha_{(gc)}}$, $\alpha^{*}_{(gc)}=\frac{\theta-1}{\beta_2(x)-1}$
7	Upadhyaya ve Singh (2.69)	$\nu_{us}(\bar{y})=\frac{s_y^2}{n}\left(\frac{S_x^2+\beta_2(x)}{s_x^2+\beta_2(x)}\right)$
8	Chandra ve Singh (2.74), (2.78), (2.79)	$\nu_{cs1}(\bar{y})=\frac{s_y^2}{n}\frac{\left(\beta_2(x)+S_x^2\right)}{\left[\alpha_{(cs)}\left(\beta_2(x)+s_x^2\right)+(1-\alpha_{(cs)})\left(\beta_2(x)+S_x^2\right)\right]}$ $\alpha^{*}_{(cs)}=\frac{\theta-1}{K(\beta_2(x)-1)}$, $K=\frac{S_x^2}{\beta_2(x)+S_x^2}$ $\nu_{cs2}(\bar{y})=\frac{s_y^2}{n}\left(\frac{\beta_2(x)+S_x^2}{\beta_2(x)+s_x^2}\right)^{\delta}$, $\nu_{cs3}(\bar{y})=\frac{s_y^2}{n}\left(2-\frac{\beta_2(x)+s_x^2}{\beta_2(x)+S_x^2}\right)^{\phi}$

Çizelge 3. 3. BRÖ'de Önerilen Ortalamanın Varyans Tahmin Edicileri (Devam)

No	Yararlanılan Varyans Tahmin Edicileri	Önerilen *Ortalamanın Varyans* Tahmin Edicileri
9	Kadılar ve Çıngı (2.82), (2.85)	$v_{kc1}(\bar{y})=\dfrac{s_y^2}{n(s_x^2-C_x)}\left[S_x^2-C_x\right]$, $v_{kc2}(\bar{y})=\dfrac{s_y^2}{n(s_x^2-\beta_2(x))}\left[S_x^2-\beta_2(x)\right]$, $v_{kc3}(\bar{y})=\dfrac{s_y^2}{n(s_x^2\beta_2(x)-C_x)}\left[S_x^2\beta_2(x)-C_x\right]$, $v_{kc4}(\bar{y})=\dfrac{s_y^2}{n(s_x^2C_x-\beta_2(x))}\left[S_x^2C_x-\beta_2(x)\right]$ $v_{kc5}(\bar{y})=\dfrac{1}{n}\left\{w_1s_y^2+w_2\dfrac{\bar{y}}{\bar{x}}\left[\dfrac{1+\psi C_{xy}}{1+\psi C_x^2}\right]\bar{X}\right\}$ $w_{1(kcr)}{}^*=\dfrac{A+B}{2A+B+\beta_2^*(y)}$, $w_{2(kcr)}{}^*=\dfrac{A+\beta_2^*(y)}{2A+B+\beta_2^*(y)}$
10	Gupta ve Shabbir (2.90)	$v_{gs}(\bar{y})=\dfrac{1}{n}\left[d_{1(gs)}s_y^2+d_{2(gs)}\left(S_x^2-s_x^2\right)\right]\left[2-\left(\dfrac{s_x^2}{S_x^2}\right)^{\alpha_{(gs)}}\right]$
11	Subramani ve Kumarapandiyan (2.105)	$v_{sk}(\bar{y})=\dfrac{s_y^2}{n}\left[\dfrac{C_xS_x^2+M_d}{C_xs_x^2+M_d}\right]$
12	Singh ve Solanki (2.109)	$v_{ss}(\bar{y})=\dfrac{1}{n}\left[w_{1(ss)}s_y^2-w_{2(ss)}\left(\dfrac{s_x^2-S_x^2}{S_x^2}\right)\right]\left(\dfrac{a_{(ss)}S_x^2+b_{(ss)}}{a_{(ss)}s_x^2+b_{(ss)}}\right)$
13	Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta (2.114)	$v_{yd}(\bar{y})=\dfrac{1}{n}\left[w_{1(yd)}s_y^2+w_{2(yd)}(S_x^2-s_x^2)\right]\times$ $\left[\lambda\left(\dfrac{\alpha_{(yd)}S_x^2+b_{(yd)}}{\alpha_{(yd)}s_x^2+b_{(yd)}}\right)+(1-\lambda_{(yd)})\exp\left(\dfrac{\alpha_{(yd)}(S_x^2-s_x^2)}{\alpha_{(yd)}(S_x^2+s_x^2)+2b_{(yd)}}\right)\right]$
14	Lone ve Tailor (2.119)	$v_{lt}^{**}(\bar{y})=\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{w_{1(lt)}^*F_{lt}+G_{lt}}{w_{1(lt)}^{*2}B_{lt}^*+2w_{1(lt)}^*P_{lt}+R_{lt}}\right)\hat{\bar{Y}}^*$

4. BASİT RASTGELE ÖRNEKLEME (BRÖ)' DE KİTLE ORTALAMASININ GÜVEN ARALIĞI TAHMİNLERİ

4.1. Kitle Ortalamasının Güven Aralığı Tahminleri

Örnekleme çalışmalarında tahmin yöntemleri nokta ve aralık tahmini olarak kullanılır. Nokta tahmini kitleye ilişkin varyans, ortalama gibi tek bir tahmin değerinin verilebildiği tahminlerdir. Kitleye ilişkin parametrelerin tahmin aralığının verildiği tahmin yöntemi ise aralık tahminleridir [23].

4.1.1. Kitle Ortalamasının Klasik Güven Aralığı Tahmini

Nokta tahmininde kitle parametresi, tek bir değerle tahmin edilmeye çalışılır. Araştırmacılar kitle parametrelerinin nokta tahmini yerine aralık tahmini yapma yolunu da seçebilirler.

Olasılıksal örnekleme yöntemlerinde, kitle parametrelerinin tahminlerinde tahminlerin varyansı, standart hataları bununla birlikte de güven aralıkları da tahmin edilebilir.

Güven aralığının hesaplanması örnekleme dağılımının özelliğine dayalı olmakla birlikte, merkezi limit teoremine göre örneklem büyük ise ($n \geq 30$) standartlaştırılmış z değişkeninin dağılımı $z = \frac{\bar{y} - \bar{Y}}{\sigma_{\bar{y}}}$, ortalaması 0, varyansı 1 olan normal dağılıma yaklaşacaktır Buna göre %95 güvenilirlikle $\bar{Y}$ için güven aralığı,

$$P(-1,96 < z < 1,96) = 0,95,$$

$$P(-1,96 < \frac{\bar{y} - \bar{Y}}{\sigma_{\bar{y}}} < 1,96) = 0,95,$$

$$P(-1,96\sigma_{\bar{y}} < \bar{y} - \bar{Y} < 1,96\sigma_{\bar{y}}) = 0,95,$$

$$P(\bar{y} - 1,96\sigma_{\bar{y}} < \bar{Y} < \bar{y} + 1,96\sigma_{\bar{y}}) = 0,95 \quad (4.1)$$

olarak elde edilir. Bu aralığın bilinmeyen kitle ortalamasını kapsayan aralıklardan biri olması olasılığı %95'tir. Diğer bir ifadeyle oluşturulabilecek tüm mümkün güven aralıkları içinde yaklaşık %95'inin bilinmeyen kitle ortalamasını kapsaması beklenir. Kitleden kaç farklı mümkün örneklem seçebiliyorsak; mümkün örneklemlerin sayısı kadar güven aralığı oluşturulabilir [24].

Ancak örneklem küçük ise $n < 30$ ise merkezi limit teoreminden yararlanılmaz. Bu durumda örnekleme dağılımı t dağılımı olur. $t = \frac{\bar{y} - \bar{Y}}{s_{\bar{y}}}$ formülü kullanılarak aralık tahmini yapılabilir. Burada $\bar{y}$ örneklem ortalaması, $\bar{Y}$ kitle ortalaması ve $s_{\bar{y}}$ ise ortalamanın standart hatasıdır. Burada z tablosundan farklı olarak n-1 serbestlik dereceli t tablosu kullanılır. Çünkü farklı serbestlik dereceleri için farklı t dağılımları mevcuttur. Ayrıca serbestlik derecesi arttıkça t dağılımı normal dağılıma yakınsamaktadır [25]. $s_{\bar{y}} = \sqrt{v(\bar{y})}$ olmak üzere kitle ortalamasının güven aralığı tahmini,

$$t = \frac{\bar{y} - \bar{Y}}{s_{\bar{y}}} = \frac{\bar{y} - \bar{Y}}{\sqrt{v(\bar{y})}}$$

$$\bar{y}\text{-}t\sqrt{v(\bar{y})} \leq \bar{Y} \leq \bar{y}\text{+}t\sqrt{v(\bar{y})} \tag{4.2}$$

şeklinde yazılabilir. Eş. (3.3)'te verilen $v(\bar{y})$ değeri yerine yazıldığında güven aralığının tahmini

$$\bar{y} - ts_y \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \bar{Y} \leq \bar{y} + ts_y \frac{1}{\sqrt{n}} \tag{4.3}$$

olarak bulunur.

Eş. (4.3)'deki formülden, güven aralığının örneklem büyüklüğü ile ters orantılı olup örnekleme büyüklüğü büyüdükçe güven aralığının da küçüldüğü görülmektedir [2]. Ayrıca güven aralığı tahminin formülü; örneklem ortalaması $\bar{y}$, tablo değeri t ve varyans tahmin edicisinden oluşmaktadır. O halde ikinci bölümde anlatılan birbirinden farklı varyans tahmin edicilerden yola çıkarak farklı güven aralık tahminleri oluşturulabilir.

4.1.2. Hirano Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralığında Kullanılması

Kitle ortalamasının güven aralığı tahmininde; klasik varyans tahmin edicisi yerine, Eş (3.7)'de formülü verilen kitle ortalamasının Hirano varyans tahmin edicisinden yararlanılarak oluşturulan *ortalamanın varyansı* kullanılırsa güven aralığı tahmininin gösterimi,

$$\bar{y} - t\sqrt{\nu_h(\bar{y})} \le \bar{Y} \le \bar{y} + t\sqrt{\nu_h(\bar{y})} \tag{4.4}$$

şeklinde olmaktadır. Çizelge 3.1'de, 2 numaralı formüldeki *ortalamanın varyans* tahmin edicisi yerine yazıldığında

$$\bar{y} - t\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)A_{(h)}s_y^{\,2}} \le \bar{Y} \le \bar{y} + t\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)A_{(h)}s_y^{\,2}} \;\; ,$$

$$\bar{y} - t\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{s_y^2}{1+\lambda(\beta_2(y)-1)}\right)} \le \bar{Y} \le \bar{y} + t\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{s_y^2}{1+\lambda(\beta_2(y)-1)}\right)} \tag{4.5}$$

elde edilir. $\lambda = \frac{1}{n}$ olduğu göz önünde bulundurulduğunda güven aralığının tahmini

$$\bar{y}\text{-}ts_y \frac{1}{\sqrt{n\left(1+\lambda(\beta_2(y)-1)\right)}} \le \bar{Y} \le \bar{y}\text{+}ts_y \frac{1}{\sqrt{n\left(1+\lambda(\beta_2(y)-1)\right)}} \; ,$$

$$\bar{y}\text{-}ts_y \frac{1}{\sqrt{n+\left(\beta_2(y)-1\right)}} \le \bar{Y} \le \bar{y}\text{+}ts_y \frac{1}{\sqrt{n+\left(\beta_2(y)-1\right)}} \tag{4.6}$$

olarak hesaplanmaktadır.

Eş. (4.3)'te gösterilen klasik varyans tahmin edicisinden yararlanılarak hesaplanan kitle ortalamasının güven aralığı tahmini, ilgilenilen değişkenin örneklem büyüklüğüne bağlı olarak değişmekteydi. Eş. (4.6)'da verilmiş olan güven aralığı tahmininde ise aralık tahmininin, örneklem büyüklüğü ile ilgilenilen değişkenin standart sapmasının yanı sıra ilgilenilen değişkenin kitle basıklık katsayısına da bağlı olduğu sonucuna varılmaktadır.

4.1.3. Das ve Tripathi Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralığında Kullanılması

Kitle ortalamasının güven aralığı tahmininde; Çizelge 3.2'de 3 numaralı formülde gösterilen ve Das ve Tripathi varyans tahmin edicisinden yararlanılarak oluşturulan *ortalamanın varyans* tahmin edicisi, $\nu_{dt1}(\bar{y})$ kullanılırsa güven aralığının tahmini

$$\bar{y}\text{-}t\sqrt{\nu_{dt1}(\bar{y})} \le \bar{Y} \le \bar{y}\text{+}t\sqrt{\nu_{dt1}(\bar{y})}, \tag{4.7}$$

$$\bar{y}\text{-}t\sqrt{\frac{s_y^2}{n}\left(\frac{\bar{X}}{\bar{x}}\right)^{\alpha_{(dt)}}} \le \bar{Y} \le \bar{y}\text{+}t\sqrt{\frac{s_y^2}{n}\left(\frac{\bar{X}}{\bar{x}}\right)^{\alpha_{(dt)}}},$$

$$\bar{y}\text{-}ts_y\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{\bar{X}}{\bar{x}}\right)^{\alpha_{(dt)}}} \le \bar{Y} \le \bar{y}\text{+}ts_y\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{\bar{X}}{\bar{x}}\right)^{\alpha_{(dt)}}} \tag{4.8}$$

olarak bulunur. Güven aralığı tahmininde; Das ve Tripathi'nin varyans tahmin edicisinden yararlanılarak hesaplanan *ortalamanın varyans* tahmin edicisi kullanıldığında, güven aralığının, örneklem büyüklüğü (n) ve ilgilenilen değişkenin (y) standart sapmasının yanı sıra; yardımcı değişkene (x) ilişkin kitle ve örneklem ortalaması ile $\alpha_{(dt)}$ sabit değerine bağlı olarak değiştiği anlaşılmaktadır.

Das ve Tripathi'nin, Çizelge 3.2'de 3 numaralı formülde gösterilen *ortalamanın varyans* $\nu_{dt2}(\bar{y})$ tahmin edicisi, güven aralığı tahmininde kullanılırsa güven aralığı tahmini,

$$\bar{y}\text{-}t\sqrt{\nu_{dt2}(\bar{y})} \le \bar{Y} \le \bar{y}\text{+}t\sqrt{\nu_{dt2}(\bar{y})}, \tag{4.9}$$

$$\bar{y}\text{-}t\sqrt{\frac{\bar{X}s_y^2}{n\left(\bar{X}+\alpha_{(dt)}(\bar{x}-\bar{X})\right)}} \le \bar{Y} \le \bar{y}\text{+}t\sqrt{\frac{\bar{X}s_y^2}{n\left(\bar{X}+\alpha_{(dt)}(\bar{x}-\bar{X})\right)}},$$

$$\bar{y}\text{-}t\frac{s_y}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\bar{X}}{\left(\bar{X}+\alpha_{(dt)}(\bar{x}-\bar{X})\right)}} \le \bar{Y} \le \bar{y}\text{+}t\frac{s_y}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\bar{X}}{n\left(\bar{X}+\alpha_{(dt)}(\bar{x}-\bar{X})\right)}} \tag{4.10}$$

şeklinde yazılır. O halde güven aralığı tahmininde, Das ve Tripathi'nin varyans tahmin edicisinden yararlanılarak hesaplanan *ortalamanın varyans* tahmin edicisi $\nu_{dt2}(\bar{y})$ kullanıldığında güven aralığının, örneklem büyüklüğünün (n), yanı sıra yardımcı değişkenin

(x) kitle ve örneklem ortalamalarına ve $\alpha_{(dt)}$ sabit değerine bağlı olarak değiştiği sonucuna varılmaktadır.

Das ve Tripathi'nin bir diğer Çizelge 3.2'de 3 numaralı formülde gösterilen *ortalamanın varyans* $v_{dt3}(\bar{y})$ tahmin edicisi, güven aralığı tahmininde kullanılırsa güven aralığı tahmini,

$$\bar{y} - t\sqrt{v_{dt3}(\bar{y})} \leq \bar{Y} \leq \bar{y} + t\sqrt{v_{dt3}(\bar{y})} \tag{4.11}$$

$$\bar{y} - t\frac{s_y}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{S_x^2}{\left(S_x^2 + \alpha_{(dt)}(s_x^2 - S_x^2)\right)}} \leq \bar{Y} \leq \bar{y} + t\frac{s_y}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{S_x^2}{\left(S_x^2 + \alpha_{(dt)}(s_x^2 - S_x^2)\right)}} \tag{4.12}$$

elde edilir.

Eş. (4.12)'den anlaşılacağı üzere güven aralığı tahmininde, Das ve Tripathi'nin varyans tahmin edicisinden yararlanılarak hesaplanan *ortalamanın varyans* tahmin edicisi $v_{dt3}(\bar{y})$ kullanıldığında güven aralığının, örneklem büyüklüğü (n) ile birlikte $\alpha_{(dt)}$ sabit değerine, yardımcı değişkenin (x) kitle ve örneklem varyanslarına bağlı olarak değiştiği sonucuna varılmaktadır.

4.1.4. Isaki Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralığında Kullanılması

Kitle ortalamasının güven aralığı tahmininde; bir başka varyans tahmin edicisi olan Isaki'nin oransal varyans tahmin edicisinden yararlanılarak oluşturulan ve Çizelge 3.2'de, 4. numarada formülü gösterilen *ortalamanın varyans* tahmin edicisi, $v_i(\bar{y})$ kullanılırsa, kitle ortalamasının güven aralığı tahmini

$$\bar{y} - t\sqrt{v_i(\bar{y})} \leq \bar{Y} \leq \bar{y} + t\sqrt{v_i(\bar{y})} \ , \tag{4.13}$$

$$\bar{y} - t\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)\frac{s_y^2}{s_x^2}S_x^2} \leq \bar{Y} \leq \bar{y} + t\sqrt{\frac{1}{n}\frac{s_y^2}{s_x^2}S_x^2} \ ,$$

$$\bar{y} - t\frac{s_y S_x}{s_x\sqrt{n}} \leq \bar{Y} \leq \bar{y} + t\frac{s_y S_x}{s_x\sqrt{n}} \tag{4.14}$$

olarak elde edilir.

Güven aralığı tahmininde; Isaki'nin kitle varyansının oransal tahmin edicisinden yararlanılarak hesaplanan *ortalamanın varyans* tahmin edicisi kullanıldığında güven aralığının, örneklem büyüklüğü (n) ve ilgilenilen değişkenin (y) örneklem standart sapmasının yanı sıra yardımcı değişkene ilişkin (x) kitle ve örneklem standart sapmasına bağlı olduğu söylenebilir. Ayrıca, Eş. (4.14)'deki formülde güven aralığının yardımcı değişkene (x) ilişkin örneklemin standart sapması ile ters orantılı olduğu, buna karşın kitlenin standart sapması ile doğru orantılı olduğu görülmektedir.

Isaki'nin oransal varyans tahmin edicisinin yanı sıra regresyon varyans tahmin edicisinden yararlanılarak oluşturulan *ortalamanın varyans* tahmin edicisi Çizelge 3.1'de 4 numaralı formülde gösterilmiştir. Kitle ortalamasının güven aralığı tahmininde, Isaki'nin regresyon tahmin edicisinden yararlanılarak oluşturulan *ortalamanın varyans* tahmin edicisi $\nu_{ireg}(\bar{y})$ kullanılırsa, güven aralığı tahmini şeklinde yazılabilir:

$$\bar{y}\text{-}t\sqrt{\nu_{ireg}(\bar{y})} \leq \bar{Y} \leq \bar{y}\text{+}t\sqrt{\nu_{ireg}(\bar{y})}\ , \tag{4.15}$$

$$\bar{y}\text{-}t\sqrt{\frac{s_y^2 + b(S_x^2 - s_x^2)}{n}} \leq \bar{Y} \leq \bar{y}\text{+}t\sqrt{\frac{s_y^2 + b(S_x^2 - s_x^2)}{n}}\ . \tag{4.16}$$

Güven aralığı tahmininde; Isaki'nin kitle varyansının regresyon tahmin edicisinden yararlanılarak hesaplanan *ortalamanın varyans* tahmin edicisi $\nu_{ireg}(\bar{y})$ kullanıldığında güven aralığının, örneklem büyüklüğü (n) ile birlikte, b değerine, yardımcı değişkene (x) ilişkin kitle ve örneklem varyanslarına bağlı olduğu söylenebilir.

4.1.5. Prasad ve Singh Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralığında Kullanılması

Güven aralığı tahmininde, Çizelge 3.1'de 5 numaralı formülde gösterilen, Prasad ve Singh'ın kitle varyansının oransal tahmin edicisinden faydalanılarak hesaplanan, *ortalamanın varyans* tahmin edicisi $\nu_{ps1}(\bar{y})$ kullanılırsa, güven aralığının tahmini

$$\bar{y}\text{-}t\sqrt{\nu_{ps1}(\bar{y})} \leq \bar{Y} \leq \bar{y}\text{+}t\sqrt{\nu_{ps1}(\bar{y})} \tag{4.17}$$

şeklinde gösterilebilir ve $\nu_{ps1}(\bar{y})$ değeri yerine yazıldığında,

$$\bar{y}\text{-}t\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{s_y^2}{s_x^2\left(1+\lambda(\beta_2(y)-1)\right)}S_x^2\right)} \le \bar{Y} \le \bar{y}\text{+}t\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{s_y^2}{s_x^2\left(1+\lambda(\beta_2(y)-1)\right)}S_x^2\right)} \tag{4.18}$$

elde edilir. $\lambda = \frac{1}{n}$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\bar{y} - t\frac{s_y}{s_x}S_x\sqrt{\frac{1}{\left(n+\beta_2(y)-1\right)}} \le \bar{Y} \le \bar{y} + t\frac{s_y}{s_x}S_x\sqrt{\frac{1}{\left(n+\beta_2(y)-1\right)}} \tag{4.19}$$

güven aralığı elde edilir. Güven aralığı tahmininde; Prasad ve Singh'ın kitle varyansının oransal tahmin edicisinden yararlanılarak hesaplanan *ortalamanın varyans* tahmin edicisi kullanıldığında, güven aralığının örneklem büyüklüğünün yanı sıra yardımcı değişkenin (x) kitle ve örneklem standart sapması ile ilgilenilen değişkenin (y) basıklık katsayısına bağlı olduğu anlaşılmaktadır.

Güven aralığı tahmininde, Çizelge 3.2'de 5 numaralı formülde gösterilen, bir diğer Prasad ve Singh'ın kitle varyansının oransal tahmin edicisinden yararlanılarak hesaplanan, *ortalamanın varyans* tahmin edicisi $\nu_{ps2}(\bar{y})$ kullanılırsa, güven aralığının tahmini

$$\bar{y}\text{-}t\sqrt{\nu_{ps2}(\bar{y})} \le \bar{Y} \le \bar{y}\text{+}t\sqrt{\nu_{ps2}(\bar{y})} \tag{4.20}$$

olarak gösterilir ve $\nu_{ps2}(\bar{y})$ yerine yazılırsa,

$$\bar{y} - t\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)\frac{A_{(ps)}s_y^2}{s_x^2}S_x^2} \le \bar{Y} \le \bar{y} + t\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)\frac{A_{(ps)}s_y^2}{s_x^2}S_x^2} \; ,$$

$$\bar{y} - t\frac{s_y}{s_x}S_x\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1+\lambda(\theta-1)}{1+\lambda(\beta_2(y)-1)}\right)} \le \bar{Y} \le \bar{y} + t\frac{s_y}{s_x}S_x\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1+\lambda(\theta-1)}{1+\lambda(\beta_2(y)-1)}\right)} \tag{4.21}$$

şeklinde yazılır. Eş. (4.21)'den de anlaşılacağı üzere, güven aralığı tahmininde Prasad ve Singh'ın kitle varyansının oransal tahmin edicisinden yararlanılarak hesaplanan *ortalamanın varyans* tahmin edicisi $\nu_{ps2}(\bar{y})$ kullanıldığında, güven aralığının örneklem büyüklüğünün yanı sıra yardımcı değişkenin (x) kitle ve örneklem standart sapması ile ilgilenilen değişkenin (y) basıklık katsayısına ve kitlenin θ değerine bağlı olduğu anlaşılmaktadır.

4.1.6. Garcia ve Cebrain Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralığında Kullanılması

Güven aralığı tahmininde, bir diğer varyans tahmin edicisi olan ve Çizelge 3.2'de 6 numaralı formülde gösterilen ve Garcia ve Cebrain kitle varyansının oransal tahmin edicisinden yararlanılarak hesaplanan, *ortalamanın varyans* tahmin edicisi $\nu_{gc1}(\bar{y})$ kullanılırsa, güven aralığının tahmini,

$$\bar{y}-t\sqrt{\nu_{gc1}(\bar{y})} \leq \bar{Y} \leq \bar{y}+t\sqrt{\nu_{gc1}(\bar{y})} \quad , \tag{4.22}$$

$$\bar{y}-t\sqrt{\frac{s_y^2}{n}\left(\frac{S_x^2}{s_x^2}\right)^{\alpha_{(gc)}}} \leq \bar{Y} \leq \bar{y}+t\sqrt{\frac{s_y^2}{n}\left(\frac{S_x^2}{s_x^2}\right)^{\alpha_{(gc)}}}$$

olarak elde edilir . Burada eğer $\alpha_{(gc)}$' nın optimal değeri Eş. (2.66)'dan yerine yazılırsa güven aralığının tahmini,

$$\bar{y}-ts_y\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{S_x^2}{s_x^2}\right)^{\frac{(\theta-1)}{(\beta_2(x)-1)}}} \leq \bar{Y} \leq \bar{y}+ts_y\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{S_x^2}{s_x^2}\right)^{\frac{(\theta-1)}{(\beta_2(x)-1)}}} \tag{4.23}$$

olarak yazılabilir. Güven aralığı tahmini için; Garcia ve Cebrain kitle varyans tahmin edicisinden yararlanılarak hesaplanan *ortalamanın varyans* tahmin edicisi kullanıldığında güven aralığının; örneklem büyüklüğü ve yardımcı değişkene (x) ilişkin kitle ve örneklemin varyansına bağlı olduğu anlaşılmaktadır. Aynı zamanda kitle parametrelerinden θ değeri ile yardımcı değişkenin basıklık katsayısı ile de ilişkili olduğu söylenebilmektedir. Farklı $\alpha_{(gc)}$ değerleri için farklı güven aralıkları tahminleri de oluşturulabilir.

4.1.7. Upadhyaya ve Singh Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralığında Kullanılması

Kitle ortalamasının güven aralığı tahmininde; Çizelge 3.2'de 7 numaralı formülde gösterilen, Upadhayaya ve Singh kitle varyansının oransal tahmin edicisinden yararlanılarak hesaplanan, *ortalamanın varyans* tahmin edicisi $\nu_{us}(\bar{y})$ kullanılırsa, güven aralığının tahmini

$$\bar{y}-t\sqrt{\nu_{us}(\bar{y})} \leq \bar{Y} \leq \bar{y}+t\sqrt{\nu_{us}(\bar{y})} \,. \tag{4.24}$$

şeklinde yazılır.

$\nu_{us}(\bar{y}) = \frac{s_y^2}{n}\left(\frac{S_x^2+\beta_2(x)}{s_x^2+\beta_2(x)}\right)$ değeri yerine yazılırsa aralık tahmini,

$$\bar{y} - t\sqrt{\frac{s_y^2}{n}\left(\frac{S_x^2+\beta_2(x)}{s_x^2+\beta_2(x)}\right)} \le \bar{Y} \le \bar{y} + t\sqrt{\frac{s_y^2}{n}\left(\frac{S_x^2+\beta_2(x)}{s_x^2+\beta_2(x)}\right)},$$

$$\bar{y} - ts_y\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{S_x^2+\beta_2(x)}{s_x^2+\beta_2(x)}\right)} \le \bar{Y} \le \bar{y} + ts_y\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{S_x^2+\beta_2(x)}{s_x^2+\beta_2(x)}\right)} \qquad (4.25)$$

biçiminde gösterilebilir. Eş. (4.25)'deki güven aralığı formülüne bakılarak, aralığın n örneklem büyüklüğünün yanı sıra, yardımcı değişkene (x) ait kitle ve örneklem varyansı ile kitle basıklık değerine bağlı olduğu sonucuna varılmaktadır.

4.1.8. Chandra ve Singh Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralığında Kullanılması

Kitle ortalamasının güven aralığı tahmininde; Çizelge 3.2'de 8 numaralı formülde gösterilen, Chandra ve Singh kitle varyansının oransal tahmin edicisinden yararlanılarak hesaplanan, *ortalamanın varyans* tahmin edicisi $\nu_{cs1}(\bar{y})$ kullanılırsa, güven aralığının tahmini,

$$\bar{y} - t\sqrt{\nu_{cs1}(\bar{y})} \le \bar{Y} \le \bar{y} + t\sqrt{\nu_{cs1}(\bar{y})} \qquad (4.26)$$

olarak gösterilebilir ve $\nu_{cs1}(\bar{y})$ değeri yerine yazılırsa,

$$\bar{y} - t\sqrt{\frac{s_y^2}{n}\frac{\left(\beta_2(x)+S_x^2\right)}{\left[\alpha_{(cs)}\left(\beta_2(x)+s_x^2\right)+(1-\alpha_{(cs)})\left(\beta_2(x)+S_x^2\right)\right]}} \le \bar{Y} \le$$
$$\bar{y} + t\sqrt{\frac{s_y^2}{n}\frac{\left(\beta_2(x)+S_x^2\right)}{\left[\alpha_{(cs)}\left(\beta_2(x)+s_x^2\right)+(1-\alpha_{(cs)})\left(\beta_2(x)+S_x^2\right)\right]}},$$

$$\bar{y}-ts_y\sqrt{\frac{\left(\beta_2(x)+S_x^2\right)}{n\left[\alpha_{(cs)}\left(\beta_2(x)+s_x^2\right)+(1-\alpha_{(cs)})\left(\beta_2(x)+S_x^2\right)\right]}}\le\bar{Y}\le$$

$$\bar{y}+ts_y\sqrt{\frac{\left(\beta_2(x)+S_x^2\right)}{n\left[\alpha_{(cs)}\left(\beta_2(x)+s_x^2\right)+(1-\alpha_{(cs)})\left(\beta_2(x)+S_x^2\right)\right]}} \tag{4.27}$$

elde edilir. $\alpha_{(cs)}=0$ olduğunda güven aralığı,

$$\bar{y}-ts_y\frac{1}{\sqrt{n}}\le\bar{Y}\le\bar{y}+ts_y\frac{1}{\sqrt{n}} \tag{4.28}$$

şeklinde yazılabilir. Burada güven aralığı Eş. (4. 3)'deki klasik güven aralığı tahmini ile aynı olmaktadır. Bu durumda güven aralığı örneklem büyüklüğüne bağlı olmaktadır.

$\alpha_{(cs)}=1$ olduğunda ise güven aralığı,

$$\bar{y}-ts_y\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{\beta_2(x)+S_x^2}{\beta_2(x)+s_x^2}\right)}\le\bar{Y}\le\bar{y}+ts_y\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{\beta_2(x)+S_x^2}{\beta_2(x)+s_x^2}\right)} \tag{4.29}$$

biçiminde olur. Burada güven aralığı tahmini ise Upadhyaya ve Singh'ın Eş. (4.25)'deki güven aralığı tahminine eşit olmakta ve örneklem büyüklüğünün yanı sıra, örneklemin yardımcı değişkenine (x) ilişkin varyansı ile kitlenin basıklık katsayısına bağlı olarak değişmektedir.

Bir diğer güven aralığı tahmini için, Çizelge 3.2'de 8 numaralı formülde gösterilen, kitle varyansının Chandra ve Singh oransal tahmin edicisinden yararlanılarak hesaplanan, *ortalamanın varyans* tahmin edicisi $\nu_{cs2}(\bar{y})$ kullanılırsa, güven aralığının tahmini,

$$\bar{y}-t\sqrt{\nu_{cs2}(\bar{y})}\le\bar{Y}\le\bar{y}+t\sqrt{\nu_{cs2}(\bar{y})}\,, \tag{4.30}$$

$$\bar{y}-t\sqrt{\frac{s_y^2}{n}\left(\frac{\beta_2(x)+S_x^2}{\beta_2(x)+s_x^2}\right)^{\delta}}\le\bar{Y}\le\bar{y}+t\sqrt{\frac{s_y^2}{n}\left(\frac{\beta_2(x)+S_x^2}{\beta_2(x)+s_x^2}\right)^{\delta}}\quad ,$$

$$\bar{y} - ts_y\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{\beta_2(x)+S_x^2}{\beta_2(x)+s_x^2}\right)^{\delta}} \leq \bar{Y} \leq \bar{y} + ts_y\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{\beta_2(x)+S_x^2}{\beta_2(x)+s_x^2}\right)^{\delta}} \quad (4.31)$$

şeklinde yazılabilir. Burada güven aralığı tahmini için; Chandra ve Singh'ın kitle varyans tahmin edicisinden yararlanılarak hesaplanan *ortalamanın varyans* tahmin edicisi $\nu_{cs2}(\bar{y})$ kullanıldığında güven aralığının; örneklem büyüklüğünün yanı sıra δ sabit değerine, yardımcı değişkene (x) ilişkin kitle ve örneklemin varyansına bağlı olduğu anlaşılmaktadır.

Chandra ve Singh'ın bir başka varyans tahmin edicisinden yararlanılarak oluşturulan ve Çizelge 3.2.'de 8 numaralı formülde de verilen *ortalamanın varyans* tahmin edicisi $\nu_{cs3}(\bar{y})$ güven aralığı tahmininde kullanılırsa güven aralığı tahmininin formülü,

$$\bar{y} - t\sqrt{\nu_{cs3}(\bar{y})} \leq \bar{Y} \leq \bar{y} + t\sqrt{\nu_{cs3}(\bar{y})} \ , \quad (4.32)$$

$$\bar{y} - t\sqrt{\frac{s_y^2}{n}\left(2-\frac{\beta_2(x)+s_x^2}{\beta_2(x)+S_x^2}\right)^{\phi}} \leq \bar{Y} \leq \bar{y} + t\sqrt{\frac{s_y^2}{n}\left(2-\frac{\beta_2(x)+s_x^2}{\beta_2(x)+S_x^2}\right)^{\phi}} \quad (4.33)$$

şeklinde gösterilir. Burada güven aralığı tahmini için; Chandra ve Singh'ın kitle varyans tahmin edicisinden yararlanılarak hesaplanan *ortalamanın varyans* tahmin edicisi $\nu_{cs3}(\bar{y})$ kullanıldığında güven aralığının; örneklem büyüklüğü ile birlikte ϕ sabit değerine ve yardımcı değişkene (x) ilişkin kitle ve örneklemin varyansına bağlı olduğu anlaşılmaktadır. Aynı zamanda yardımcı değişkenin basıklık katsayısı ile de ilişkili olduğu görülmektedir.

4.1.9. Kadılar ve Çıngı Varyans Tahmin Edicilerinin Güven Aralığında Kullanılması

Kitle ortalamasının güven aralığı tahmininde; Çizelge 3.3'de 9 numaralı formülde gösterilen, Kadılar ve Çıngı kitle varyansının oransal tahmin edicisinden yararlanılarak hesaplanan, *ortalamanın varyans* tahmin edicisi $\nu_{kc1}(\bar{y})$ kullanılırsa, güven aralığının tahmini,

$$\bar{y} - t\sqrt{\nu_{kc1}(\bar{y})} \leq \bar{Y} \leq \bar{y} + t\sqrt{\nu_{kc1}(\bar{y})} \quad (4.34)$$

şeklinde yazılır. $\nu_{kc1}(\bar{y})$ yerine yazılırsa;

$$\bar{y}-ts_y\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{S_x^2-C_x}{s_x^2-C_x}\right)}\leq\bar{Y}\leq\bar{y}+ts_y\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{S_x^2-C_x}{s_x^2-C_x}\right)} \tag{4.35}$$

elde edilmektedir. Güven aralığı tahmininde $\nu_{kc1}(\bar{y})$ tahmin edicisi kullanıldığında, güven aralığının örneklem büyüklüğünün, yardımcı değişkene (x) ilişkin kitle ve örneklem varyansları ile kitle parametrelerinden değişim katsayısına bağlı olduğu çıkarılmaktadır.

Güven aralığı tahmininde Çizelge 3.3'te 9 numaralı formülde gösterilen $\nu_{kc2}(\bar{y})$ tahmin edicisi kullanılırsa aralık,

$$\bar{y}-t\sqrt{\nu_{kc2}(\bar{y})}\leq\bar{Y}\leq\bar{y}+t\sqrt{\nu_{kc2}(\bar{y})} \tag{4.36}$$

şeklinde yazılabilir. $\nu_{kc2}(\bar{y})$ değeri yerine yazılırsa,

$$\bar{y}-ts_y\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{S_x^2-\beta_2(x)}{s_x^2-\beta_2(x)}\right)}\leq\bar{Y}\leq\bar{y}+ts_y\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{S_x^2-\beta_2(x)}{s_x^2-\beta_2(x)}\right)} \tag{4.37}$$

biçiminde olmaktadır. Burada, güven aralığının örneklem büyüklüğünün yanı sıra yardımcı değişkenin (x) örneklem ve kitle varyansları ile basıklık katsayısına bağlı olduğu sonucuna varılmaktadır.

Çizelge 3.3'te 9 numaralı formülde belirtilen $\nu_{kc3}(\bar{y})$ tahmin edicisi güven aralığı tahmininde kullanıldığında aralık,

$$\bar{y}-t\sqrt{\nu_{kc3}(\bar{y})}\leq\bar{Y}\leq\bar{y}+t\sqrt{\nu_{kc3}(\bar{y})} \tag{4.38}$$

biçiminde gösterilir ve $\nu_{kc3}(\bar{y})$ yerine konulursa kitle ortalamasının güven aralığının tahmini

$$\bar{y}-ts_y\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{S_x^2\beta_2(x)-C_x}{s_x^2\beta_2(x)-C_x}\right)}\leq\bar{Y}\leq\bar{y}+ts_y\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{S_x^2\beta_2(x)-C_x}{s_x^2\beta_2(x)-C_x}\right)} \tag{4.39}$$

şeklinde gösterilebilir.

Eş. (4.39)'daki güven aralığı formülünden, aralığın örneklem büyüklüğünün yanı sıra yardımcı değişkene ilişkin kitle ve örneklem varyansları ile kitleye ilişkin basıklık ve çarpıklık katsayılarına da bağlı olduğu sonucu çıkarılabilir.

Bir diğer güven aralığının tahmini için, Çizelge 3.3'te 9 numaralı formülde gösterilen $\nu_{kc4}(\bar{y})$ tahmin edicisi kullanılırsa güven aralığı,

$$\bar{y} - t\sqrt{\nu_{kc4}(\bar{y})} \le \bar{Y} \le \bar{y} + t\sqrt{\nu_{kc4}(\bar{y})} \tag{4.40}$$

biçiminde yazılır. $\nu_{kc4}(\bar{y})$ değeri ise yerine konulursa;

$$\bar{y} - ts_y\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{S_x^2 C_x - \beta_2(x)}{s_x^2 C_x - \beta_2(x)}\right)} \le \bar{Y} \le \bar{y} + ts_y\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{S_x^2 C_x - \beta_2(x)}{s_x^2 C_x - \beta_2(x)}\right)} \tag{4.41}$$

şeklinde gösterilir. $\nu_{kc4}(\bar{y})$ tahmin edicisi güven aralığı tahmininde kullanıldığında; güven aralığı tahmininin örneklem büyüklüğü ile birlikte yardımcı değişkene (x) ait kitle ve örneklem varyansları ile kitle parametrelerinden basıklık ve değişim katsayısına bağlı olduğu sonucuna varılır.

Bir başka güven aralığı tahmini için; Kadılar ve Çıngı'nın Çizelge 3.3'te 9 numaralı formülde gösterilen $\nu_{kc5}(\bar{y})$ tahmin edicisi kullanıldığında ise aralık şöyle yazılabilir:

$$\bar{y} - t\sqrt{\nu_{kc5}(\bar{y})} \le \bar{Y} \le \bar{y} + t\sqrt{\nu_{kc5}(\bar{y})}\,. \tag{4.42}$$

$\nu_{kc5}(\bar{y})$ değeri yerine yazılırsa, güven aralığı tahmini,

$$\bar{y} - t\sqrt{\frac{1}{n}\left\{w_{1(kcr)}s_y^2 + w_{2(kcr)}\frac{\bar{y}}{\bar{x}}\left[\frac{1+\psi C_{xy}}{1+\psi C_x^2}\right]\bar{X}\right\}} \le \bar{Y} \le \bar{y} + t\sqrt{\frac{1}{n}\left\{w_{1(kcr)}s_y^2 + w_{2(kcr)}\frac{\bar{y}}{\bar{x}}\left[\frac{1+\psi C_{xy}}{1+\psi C_x^2}\right]\bar{X}\right\}} \tag{4.43}$$

şeklinde belirtilir. Eş. (4.43)'den güven aralığı tahmininin örneklem büyüklüğü ile ilgilenilen değişken (y) ile yardımcı değişkenin(x) birlikte değişim katsayısına, yalnızca yardımcı değişkenin (x) değişim katsayısına, $w_{1(kcr)}$ ve $w_{2(kcr)}$ sabit katsayılarına bağlı olduğu söylenebilir. Ayrıca $\psi = \frac{1-f}{n}$ olmak üzere ψ sabit değeri ile de ilişkilidir.

4.1.10. Gupta ve Shabbir Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralığında Kullanılması

Güven aralığı tahmini için önerilen bir başka tahmin edicisi, Gupta ve Shabbir varyans tahmin edicisinden yararlanılarak oluşturulan ve Çizelge 3.3'deki 10 numaralı formülde gösterilen *ortalamanın varyans* tahmin edicisi kullanılırsa güven aralığı,

$$\bar{y} - t\sqrt{\nu_{gs}(\bar{y})} \leq \bar{Y} \leq \bar{y} + t\sqrt{\nu_{gs}(\bar{y})} \ . \tag{4.44}$$

$\nu_{sg}(\bar{y})$ değeri yerine yazılırsa güven aralığının tahmini;

$$\begin{gathered} \bar{y} - t\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)\left[d_{1(gs)}s_y^2 + d_{2(gs)}\left(S_x^2 - s_x^2\right)\right]\left[2 - \left(\frac{s_x^2}{S_x^2}\right)^{\alpha_{(gs)}}\right]} \leq \bar{Y} \leq \\ \bar{y} + t\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)\left[d_{1(gs)}s_y^2 + d_{2(gs)}\left(S_x^2 - s_x^2\right)\right]\left[2 - \left(\frac{s_x^2}{S_x^2}\right)^{\alpha_{(gs)}}\right]} \end{gathered} \tag{4.45}$$

biçiminde olmaktadır. Bu güven aralığında $d_{1(gs)}, d_{2(gs)}$ ve $\alpha_{(gs)}$ sabit değerler olmak üzere $\alpha_{(gs)} = 0$ iken güven aralığı;

$$\bar{y} - t\sqrt{\frac{1}{n}\left[d_{1(gs)}s_y^2 + d_{2(gs)}\left(S_x^2 - s_x^2\right)\right]} \leq \bar{Y} \leq \bar{y} + t\sqrt{\frac{1}{n}\left[d_{1(gs)}s_y^2 + d_{2(gs)}\left(S_x^2 - s_x^2\right)\right]} \tag{4.46}$$

Gupta ve Shabbir varyans tahmin edicisinden elde edilen *ortalamanın varyans* tahmin edicisi kullanılırsa; Eş (4.47)'den görüldüğü üzere güven aralığı örneklem büyüklüğünün yanında, yardımcı değişkenin (x) örneklem ve kitle varyanslarına, bağlı olarak değişmektedir. Ayrıca sabit değerlerin aldığı değerlere göre güven aralıkları da farklılaşmaktadır.

4.1.11. Subramani ve Kumarapandiyan Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralığında Kullanılması

Kitle ortalamasının güven aralığı tahmininde bir başka tahmin edici Subramani ve Kumarapandiyan varyans tahmin edicisinden yararlanılarak hesaplanan *ortalamanın varyans* tahmin edicisidir. Çizelge 3.3'de 11 numaralı formülde verilen *ortalamanın varyans* tahmin edicisi $\nu_{sk}(\bar{y})$, güven aralığının tahmininde kullanılırsa, güven aralığının tahmini,

$$\bar{y} - t\sqrt{\nu_{sk}(\bar{y})} \le \bar{Y} \le \bar{y} + t\sqrt{\nu_{sk}(\bar{y})}\ . \tag{4.47}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\nu_{sk}(\bar{y})$, güven aralığı tahmininde yerine yazılırsa yeni güven aralığının tahmini,

$$\bar{y} - ts_y\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)\left[\frac{C_x S_x^2 + M_d}{C_x s_x^2 + M_d}\right]} \le \bar{Y} \le \bar{y} + ts_y\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)\left[\frac{C_x S_x^2 + M_d}{C_x s_x^2 + M_d}\right]} \tag{4.48}$$

biçiminde olmaktadır.

O halde güven aralığının örneklem büyüklüğünün yanı sıra, yardımcı değişkene ilişkin kitle ve örneklem varyansına, kitle değişim katsayısına ve medyan değerine bağlı olduğu sonucuna varılmaktadır.

4.1.12. Singh ve Solanki Varyans Tahmin Edicilerinin Güven Aralığında Kullanılması

Kitle ortalamasının güven aralığı tahmininde bir diğer tahmin edici Singh ve Solanki varyans tahmin edicilerinden yararlanılarak hesaplanan *ortalamanın varyans* tahmin edicisidir. Çizelge 3.3'de 12 numaralı formülde verilen *ortalamanın varyans* tahmin edicisi $\nu_{ss}(\bar{y})$ güven aralığının tahmininde kullanılırsa, güven aralığının tahmini,

$$\bar{y} - t\sqrt{\nu_{ssi}(\bar{y})} \le \bar{Y} \le \bar{y} + t\sqrt{\nu_{ssi}(\bar{y})} \tag{4.49}$$

şeklinde yazılabilir. $\nu_{ssi}(\bar{y})$ yerine yazılırsa, güven aralığının tahmini,

$$\bar{y}-t\sqrt{\frac{1}{n}\left[w_{1(ss)}s_y^2-w_{2(ss)}\left(\frac{s_x^2-S_x^2}{S_x^2}\right)\right]\left(\frac{a_{(ss)}S_x^2+b_{(ss)}}{a_{(ss)}s_x^2+b_{(ss)}}\right)}\leq\bar{Y}\leq$$
$$\bar{y}+t\sqrt{\frac{1}{n}\left[w_{1(ss)}s_y^2-w_{2(ss)}\left(\frac{s_x^2-S_x^2}{S_x^2}\right)\right]\left(\frac{a_{(ss)}S_x^2+b_{(ss)}}{a_{(ss)}s_x^2+b_{(ss)}}\right)} \tag{4.50}$$

şeklini almaktadır. Eş. (4.50)'de gösterilen güven aralığı örneklem büyüklüğünün yanı sıra yardımcı değişkene ilişkin örneklem ve kitle varyanslarına, $a_{(ss)}$ ve $b_{(ss)}$ değerleri ile $w_{1(ss)}$ ve $w_{2(ss)}$ değerlerine bağlı olarak değişmektedir. Çizelge 2.1'de verilen farklı $a_{(ss)}$ ve $b_{(ss)}$ değerlerine göre güven aralıkları farklı değerler almaktadır. Örnek olarak, $a_{(ss)}=1$ ve $b_{(ss)}=\beta_2(x)$ iken güven aralığı tahmini hesaplanırsa;

$$\bar{y}-t\sqrt{\frac{1}{n}\left[w_{1(ss)}s_y^2-w_{2(ss)}\left(\frac{s_x^2-S_x^2}{S_x^2}\right)\right]\left(\frac{S_x^2+\beta_2(x)}{s_x^2+\beta_2(x)}\right)}\leq\bar{Y}\leq$$
$$\bar{y}+t\sqrt{\frac{1}{n}\left[w_{1(ss)}s_y^2-w_{2(ss)}\left(\frac{s_x^2-S_x^2}{S_x^2}\right)\right]\left(\frac{S_x^2+\beta_2(x)}{s_x^2+\beta_2(x)}\right)} \tag{4.51}$$

şeklinde yazılır. Burada güven aralığı tahminin örneklem büyüklüğünün yanında, $w_{1(ss)}$ ve $w_{2(ss)}$ sabit değerlerine, yardımcı değişkenin (x) basıklık katsayısına, kitle ve örneklem varyanslarına bağlı olarak da değiştiği anlaşılmaktadır.

4.1.13. Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralıklarında Kullanılması

Yadav vd. varyans tahmin edicilerinden yararlanılarak hesaplanan ve Çizelge 3.3'de 13 numaralı formülde verilen *ortalamanın varyans* tahmin edicileri kitle ortalamasının güven aralığı tahmininde kullanılırsa, güven aralığının tahmini,

$$\bar{y}-t\sqrt{\nu_{yd}(\bar{y})}\leq\bar{Y}\leq\bar{y}+t\sqrt{\nu_{yd}(\bar{y})} \tag{4.52}$$

şeklinde yazılabilir. $\nu_{kd}(\bar{y})$ yine aynı formülden yerine yazıldığında;

$$\bar{y}-t\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)\left[w_{1(yd)}s_y^2+w_{2(yd)}(S_x^2-s_x^2)\right]\times\left[\lambda\left(\frac{\alpha_{(yd)}S_x^2+b_{(yd)}}{\alpha_{(yd)}s_x^2+b}\right)+(1-\lambda)\exp\left(\frac{\alpha_{(yd)}(S_x^2-s_x^2)}{\alpha_{(yd)}(S_x^2+s_x^2)+2b_{(yd)}}\right)\right]}\leq\bar{Y}\leq$$
$$\bar{y}+t\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)\left[w_{1(yd)}s_y^2+w_{2(yd)}(S_x^2-s_x^2)\right]\times\left[\lambda\left(\frac{\alpha_{(yd)}S_x^2+b_{(yd)}}{\alpha_{(yd)}s_x^2+b_{(yd)}}\right)+(1-\lambda)\exp\left(\frac{\alpha_{(yd)}(S_x^2-s_x^2)}{\alpha_{(yd)}(S_x^2+s_x^2)+2b_{(yd)}}\right)\right]}$$

(4.53)

şeklindeki güven aralığı elde edilmektedir. Çizelge 2.2 ve Çizelge 2.3’de gösterildiği üzere, $\alpha_{(yd)}$ ve $b_{(yd)}$ yardımcı değişkene ait parametrelerdir. Farklı $\alpha_{(yd)}$ ve $b_{(yd)}$ değerleri için farklı güven aralıkları tahminleri yapılabilir. Örnek olarak; $\alpha_{(yd)}=1$ ve $b_{(yd)}=0$ ile $\lambda_{(yd)}=0$ olduğunda güven aralığı tahmini aşağıdaki biçimi almaktadır:

$$\bar{y}-t\sqrt{\frac{1}{n}\left[w_{1(yd)}s_y^2+w_{2(yd)}(S_x^2-s_x^2)\right]\times\exp\left(\frac{S_x^2-s_x^2}{S_x^2+s_x^2}\right)}\leq\bar{Y}\leq$$
$$\bar{y}+t\sqrt{\frac{1}{n}\left[w_{1(yd)}s_y^2+w_{2(yd)}(S_x^2-s_x^2)\right]\times\exp\left(\frac{S_x^2-s_x^2}{S_x^2+s_x^2}\right)} \qquad (4.54)$$

Burada $w_{1(yd)}$, $w_{2(yd)}$ sabit değerler olmak üzere Eş. (4.54)’de verilen güven aralığı tahmininin örneklem büyüklüğü ile birlikte yardımcı değişkene ilişkin kitle ve örneklem varyanslarına bağlı olduğu çıkarılabilir. Farklı $w_{1(yd)}$ ve $w_{2(yd)}$ sabit değerleri için güven aralığı da farklı değerleri alabilmektedir.

4.1.14. Lone ve Tailor Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralığında Kullanılması

Kitle ortalamasının bir başka güven aralığı tahmininde; Lone ve Tailor varyans tahmin edicilerinden yararlanılarak hesaplanan ve Çizelge 3.3’de 14 numaralı formülde de gösterilen *ortalamanın varyans* tahmin edicisi $v_{lt}^{**}(\bar{y})$ kullanıldığında; güven aralığı tahmini,

$$\bar{y}-t\sqrt{v_{lt}^{**}(\bar{y})}\leq\bar{Y}\leq\bar{y}+t\sqrt{v_{lt}^{**}(\bar{y})} \qquad (4.55)$$

biçiminde gösterilir. $v_{lt}^{**}(\bar{y})$ yine aynı formülden yerine yazılırsa güven aralığı,

$$\bar{y}-t\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{w_{1(lt)}^{*}F_{lt}+G_{lt}}{w_{1(lt)}^{*2}B_{lt}^{*}+2w_{1(lt)}^{*}P_{lt}+R_{lt}}\right)\hat{\hat{Y}}^{*}} \leq \bar{Y} \leq \bar{y}+t\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{w_{1(lt)}^{*}F_{lt}+G_{lt}}{w_{1(lt)}^{*2}B_{lt}^{*}+2w_{1(lt)}^{*}P_{lt}+R_{lt}}\right)\hat{\hat{Y}}^{*}} \quad (4.56)$$

şeklinde elde edilmektedir. Burada $w_{1(lt)}^{*}$ değeri Eş. (2.122)'den ve $\hat{\hat{Y}}^{*}$ değeri de Eş. (2.129)'dan yerine yazılırsa güven aralığı,

$$\bar{y}-t\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{\left(\frac{C_{lt}^{*}}{B_{lt}^{*}}\right)F_{lt}+G_{lt}}{\left(\frac{C_{lt}^{*}}{B_{lt}^{*}}\right)^{2}B_{lt}^{*}+2\left(\frac{C_{lt}^{*}}{B_{lt}^{*}}\right)P_{lt}+R_{lt}}\right)\hat{\hat{Y}}^{*}} \leq \bar{Y} \leq$$

$$\bar{y}+t\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{\left(\frac{C_{lt}^{*}}{B_{lt}^{*}}\right)F_{lt}+G_{lt}}{\left(\frac{C_{lt}^{*}}{B_{lt}^{*}}\right)^{2}B_{lt}^{*}+2\left(\frac{C_{lt}^{*}}{B_{lt}^{*}}\right)P_{lt}+R_{lt}}\right)\hat{\hat{Y}}^{*}} ,$$

$$\bar{y}-ts_{y}\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)\left\{\left(\frac{C_{lt}^{*}F_{lt}+G_{lt}B_{lt}^{*}}{C_{lt}^{*2}+2C_{lt}^{*}P_{lt}+R_{lt}B_{lt}^{*}}\right)\left[\frac{C_{lt}^{*}}{B_{lt}^{*}}\left(\frac{S_{x}^{2}-C_{x}}{s_{y}^{2}-C_{x}}\right)+\left(\frac{B_{lt}^{*}-C_{lt}^{*}}{B_{lt}^{*}}\right)\left(\frac{\bar{x}\text{-}\rho}{\bar{X}\text{-}\rho}\right)\right]\right\}} \leq \bar{Y} \leq$$

$$\bar{y}+ts_{y}\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)\left\{\left(\frac{C_{lt}^{*}F_{lt}+G_{lt}B_{lt}^{*}}{C_{lt}^{*2}+2C_{lt}^{*}P_{lt}+R_{lt}B_{lt}^{*}}\right)\left[\frac{C_{lt}^{*}}{B_{lt}^{*}}\left(\frac{S_{x}^{2}-C_{x}}{s_{y}^{2}-C_{x}}\right)+\left(\frac{B_{lt}^{*}-C_{lt}^{*}}{B_{lt}^{*}}\right)\left(\frac{\bar{x}\text{-}\rho}{\bar{X}\text{-}\rho}\right)\right]\right\}} \quad (4.57)$$

şeklinde bulunmaktadır. Burada Eş. (2.122) ve Eş. (2.125)'den

$$B_{lt}^{*}=n^{-1}M_{lt}^{2}\lambda_{04}^{*}+n^{-1}S_{lt}^{2}C_{x}^{2}+2n^{-1}S_{lt}M_{lt}C_{x}\lambda_{03},$$

$$C_{lt}^{*}=n^{-1}M_{lt}^{2}\lambda_{22}^{*}+n^{-1}S_{lt}\lambda_{21}C_{x}+n^{-1}S_{lt}M_{lt}C_{x}\lambda_{03}+n^{-1}S_{lt}^{2}C_{x}^{2},$$

$$F_{lt}=M_{lt}^{2}n^{-1}\lambda_{04}^{*}-M_{lt}n^{-1}\lambda_{22}^{*}-S_{lt}n^{-1}C_{x}\lambda_{21},$$

$$G_{lt}=1+S_{lt}n^{-1}C_{x}\lambda_{21},$$

$$P_{lt}=M_{lt}^{2}n^{-1}\lambda_{04}^{*}-2M_{lt}n^{-1}\lambda_{22}^{*}-2S_{lt}n^{-1}C_{x}\lambda_{21}-M_{lt}S_{lt}n^{-1}C_{x}\lambda_{03}-S_{lt}^{2}n^{-1}C_{x}^{2},$$

$$R_{lt}=1+n^{-1}\lambda_{04}^{*}+n^{-1}S_{lt}^{2}C_{x}^{2}+4n^{-1}S_{lt}\lambda_{21}C_{x},$$

$$M_{lt} = \frac{S_x^2}{S_x^2 - C_x} \quad , S_{lt} = \frac{\bar{X}}{\bar{X} - \rho}$$

değerleri yerine yazılırsa, Lone ve Tailor varyans tahmin edicisinden yararlanılarak hesaplanan *ortalama varyans* tahmin edicisi güven aralığı tahmininde kullanılırsa, güven aralığının örneklem büyüklüğünün yanında yardımcı değişkene (x) ilişkin kitle ile örneklem varyanslarına, değişim katsayısına, kitle ortalamasına, korelasyon katsayısına ve λ_{04}, λ_{21}, λ_{03}, λ_{22} değerlerine bağlı olarak değiştiği söylenebilir.

5. BASİT RASTGELE ÖRNEKLEME İÇİN SİMÜLASYON ÇALIŞMASI

Dördüncü bölümde, varyans tahmin edicilerinin kitle ortalamasının güven aralığı tahmininde kullanılması önerilmişti. Bu bölümde 2016 yılı, Kültür ve Turizm Bakanlığına bağlı "Adıyaman" ilindeki halk kütüphanelerinin kitap ve kullanıcı sayıları üzerinde simülasyon yapılmış; 5 farklı varyans tahmin edicisinden yararlanılarak güven aralıkları bulunmuştur. Simülasyon için, Adıyaman ilindeki 10 kütüphaneden n=8 olacak şekilde, $\binom{10}{8}$=45 adet örneklem çekilmiştir. İlgilenilen değişken (y) kullanıcı sayısı, yardımcı değişken (x) kitap sayısı olmak üzere; M_d yardımcı değişkenin medyanı, $\beta_2(y)=\frac{\mu_{40}}{\mu_{20}^2}$, $\beta_2(x)=\frac{\mu_{04}}{\mu_{02}^2}$, $C_x=\frac{S_x}{\bar{X}}$, $C_y=\frac{S_y}{\bar{Y}}$, $\lambda=\frac{1}{n}$, $\theta=\frac{\mu_{22}}{\mu_{20}\mu_{02}}$ şeklindedir. t tablo ise serbestlik derecesi 7 olacak şekilde 2,36 olarak alınmıştır. Aşağıdaki çizelgede kitle parametresine ilişkin değerler verilmektedir. Örneklem değerleri ise Ek'ler bölümünde verilmektedir.

Çizelge 5. 1. Adıyaman İli Halk Kütüphanelerinin Kitap (x) ve Kullanıcı (y) Sayılarına İlişkin Betimsel İstatistikler

Kitle Parametreleri	
$N=10$	$\lambda=0{,}125$
$\bar{X}=14656$	$M_d=9036{,}5$
$\bar{Y}=22306$	$\theta=4{,}398$
$S_x^2=145563101$	$\rho=0{,}87$
$S_y^2=1129990976$	$\mu_{21}=19056176150405{,}6$
$C_x=0{,}82$	$\mu_{30}=54874863054963{,}9$
$C_y=1{,}507$	$\lambda_{03}=1{,}5693$
$\beta_2(x)=4{,}181$	$\lambda_{21}=0{,}00001842471$
$\beta_2(y)=4{,}684$	

Halk kütüphanelerinin kullanıcı sayılarına ilişkin Klasik, Hirano, Das ve Tripathi varyans tahmin edicileri ile bu varyans tahmin edicilerin beklenen değerleri ve HKO'ları aşağıdaki Çizelge 5.2- Çizelge 5.7'de verilmektedir.

Çizelge 5. 2. Klasik, Hirano, Das ve Tripathi Varyans Tahmin Edicileri

Örneklem	**Klasik**	**Hirano**	**Das veTripathi**		
	s_y^2	s_h^2	s_{dt1}^2	s_{dt2}^2	s_{dt3}^2
1	1318796841,3	902976269,3	1080028666,0	1088157382,0	1095389835,9
2	354898137,1	242997697,4	516050770,4	534465347,2	2380026265,3
3	353105084,0	241769999,3	564607624,6	598562581,9	2441277342,3
4	1344973908,7	920899629,4	1233622161,6	1235443267,5	1001370646,9
5	1360076237,1	931240148,7	1157404730,9	1163177531,6	1063272138,4
6	1319888604,2	903723796,1	1446663513,0	1449279829,9	1154214522,2
7	1276835299,0	874245326,2	1618915376,5	1640178329,4	1116598594,7
8	1354444274,7	927383960,8	1265841809,1	1266996464,5	1049644910,8
9	1320822968,0	904363552,2	1045719865,6	1056342246,4	1158232641,8
10	1305717101,0	894020610,1	1018443347,8	1030087891,9	1181120304,9
11	353236489,4	241859972,2	510616424,7	528196108,7	2408149373,2
12	358883423,6	245726411,3	517633255,9	535214446,2	2463425093,8
13	160624852,0	109979357,7	331501140,8	391573224,1	-810242877,3
14	251124391,0	171944122,5	430428735,4	466518596,4	2663764007,0
15	346114057,0	236983263,9	481046519,3	493919323,2	2843825065,1
16	349372877,7	239214568,8	474635454,5	485476912,0	3495413719,0
17	338471527,0	231750446,4	460760279,4	471438725,1	3314628809,8
18	1359770501,4	931030812,3	1245085243,9	1246994550,9	1014054791,5

Çizelge 5. 3. Klasik, Hirano, Das ve Tripathi Varyans Tahmin Edicileri (Devam)

Örneklem	Klasik	Hirano	Das veTripathi		
	s_y^2	s_h^2	s_{dt1}^2	s_{dt2}^2	s_{dt3}^2
19	1308855079,4	896169174,5	1565437805,9	1576742504,1	1115045722,9
20	1366872615,1	935893608,4	1425977248,8	1426513226,1	990966188,9
21	1329356899,1	910206709,4	1183104268,9	1186240506,1	1025398674,5
22	1336238354,5	914918421,4	1168535295,7	1172606257,3	1058961644,8
23	1314347390,6	899929743,6	1151193556,6	1155113507,1	1038885183,4
24	1349001724,0	923657462,5	1242905059,2	1244556728,6	1000163909,8
25	1309087313,4	896328184,4	1437526419,6	1440236580,5	1143078644,5
26	1367121052,6	936063712,8	1317947245,4	1318304624,2	1024509230,6
27	1329671436,6	910422072,3	1101112428,5	1108534911,7	1080335295,6
28	1336551084,9	915132547,0	1088339908,4	1096986723,6	1119582529,7
29	1314665603,1	900147622,8	1072127841,5	1080526656,9	1098003523,2
30	1378750670,0	944026477,2	1326844732,1	1327239251,6	1034821957,2
31	1344680086,0	920698449,8	1111768505,2	1119385186,2	1094778344,8
32	1351467353,1	925345671,4	1098751396,6	1107610089,4	1134531783,9
33	1329862118,5	910552631,6	1082809786,4	1091418856,7	1113091987,0
34	1364042532,2	933955859,1	1165795705,3	1171313389,1	1061175264,8
35	1297179557,0	888174979,1	1377561872,4	1378615545,9	1170924514,1
36	1302479148,0	891803593,3	1356522677,0	1356992567,3	1207421546,5
37	1285386923,0	880100597,7	1341047694,7	1341553179,9	1188468869,1
38	1312081914,8	898378579,1	1448053251,8	1451091286,6	1141436521,7

Çizelge 5. 4. Klasik, Hirano, Das ve Tripathi Varyans Tahmin Edicileri (Devam)

Örneklem	Klasik	Hirano	Das veTripathi		
	s_y^2	s_h^2	s_{dt1}^2	s_{dt2}^2	s_{dt3}^2
39	1360071826,0	931237128,4	1248346215,7	1250159789,0	1081679484,7
40	1341984701,7	918852928,2	1233731707,9	1235458489,2	1064608930,8
41	1370329865,3	938260777,3	1327185549,1	1327460603,8	1022887809,5
42	1298677303,7	889200481,8	1029706760,6	1040040354,8	1135212265,2
43	1333754091,3	913217453,8	1109189573,4	1116345867,7	1077962484,0
44	1340609849,1	917911570,8	1096240622,8	1104611305,0	1116769557,0
45	1349310843,6	923869115,8	1155080178,2	1160438152,6	1047740077,3
$E(s_y^2)$	1129990976	773701455,5	1081374405	1090402642	1142037532
$HKO(s_y^2)$	1,65994E+17	2,04762E+17	1,1319E+17	1,07477E+17	2,81059E+16

Halk kütüphanelerinin kullanıcı sayılarına ilişkin Isaki, Prasad ve Singh, Garcia ve Cebrain varyans tahmin edicileri ile bu varyans tahmin edicilerin beklenen değerleri ve HKO'ları aşağıdaki Çizelge 5.5, Çizelge 5.6 ve Çizelge 5.7'de verilmektedir.

Çizelge 5. 5. Isaki, Prasad ve Singh, Garcia ve Cebrain Varyans Tahmin Edicileri

Örneklem	Isaki		Prasad ve Singh		Garcia ve Cebrain
	s_i^2	s_{ireg}^2	s_{ps1}^2	s_{ps2}^2	s_{gc}^2
1	1149263154,0	1140734858,5	786897058,6	1171567966,2	1138525890,4
2	922845879,6	354898137,1	631869825,1	940756402,4	985011257,3
3	925978081,7	353105084,0	634014434,6	943949394,1	988924574,1
4	1077546021,6	1344973908,7	737792551,6	1098458953,1	1061372857,4
5	1131606213,0	1360076237,1	774807403,6	1153568340,6	1117498450,1
6	1195747406,7	1319888604,2	818724687,9	1218954381,7	1187717247,2

Çizelge 5. 6. Isaki, Prasad ve Singh, Garcia ve Cebrain Varyans Tahmin Edicileri (Devam)

Örneklem	Isaki		Prasad ve Singh		Garcia ve Cebrain
	s_i^2	s_{ireg}^2	s_{ps1}^2	s_{ps2}^2	s_{gc}^2
7	1156769278,4	1276835299,0	792036479,5	1179219768,8	1149002630,5
8	1119348234,4	1354444274,7	766414402,2	1141072460,0	1104885016,8
9	1199077042,8	1320822968,0	821004479,9	1222348639,1	1191192966,3
10	1213154154,0	1305717101,0	830643036,0	1236698957,8	1207084273,9
11	922744723,7	353236489,4	631800564,0	940653283,3	985211284,7
12	939268966,1	358883423,6	643114663,6	957498227,0	1002983427,6
13	1204707931,2	160624852,0	824859932,4	1228088811,4	1382218901,3
14	728100039,1	251124391,0	498527928,2	742230949,4	782939440,4
15	948919349,7	346114057,0	649722252,5	967335904,5	1016504422,3
16	1001039289,7	349372877,7	685408620,1	1020467384,3	1075567291,9
17	965477093,7	338471527,0	661059290,5	984214999,9	1037041061,2
18	1090796713,8	1359770501,4	746865261,1	1111966813,7	1074518545,1
19	1162686765,7	1308855079,4	796088165,5	1185252102,3	1153332102,3
20	1072590800,6	1366872615,1	734399726,6	1093407561,6	1054996871,3
21	1094659337,5	1329356899,1	749509988,0	1115904402,9	1080249256,9
22	1123471626,8	1336238354,5	769237676,7	1145275878,9	1110257815,8
23	1102844136,6	1314347390,6	755114095,6	1124248052,0	1089723289,7
24	1077247493,5	1349001724,0	737588150,3	1098154631,1	1060842333,7
25	1184649343,2	1309087313,4	811125876,9	1207640927,8	1176604820,0
26	1100850442,1	1367121052,6	753749018,9	1122215664,0	1084702164,9

Çizelge 5. 7. Isaki, Prasad ve Singh, Garcia ve Cebrain Varyans Tahmin Edicileri (Devam)

Örneklem	**Isaki**		**Prasad ve Singh**		**Garcia ve Cebrain**
	s_i^2	s_{ireg}^2	s_{ps1}^2	s_{ps2}^2	s_{gc}^2
27	1139460911,6	1329671436,6	780185492,4	1161575482,6	1127523994,7
28	1172240397,7	1336551084,9	802629508,8	1194991150,4	1161797418,3
29	1150469538,9	1314665603,1	787723066,7	1172797764,5	1140046558,6
30	1111548659,0	1378750670,0	761074056,2	1133121511,1	1095333153,2
31	1154131088,7	1344680086,0	790230119,0	1176530377,4	1142162671,1
32	1187268045,3	1351467353,1	812918894,5	1210310453,5	1176822816,3
33	1165669953,0	1329862118,5	798130744,9	1188293187,0	1155237938,7
34	1130643364,4	1364042532,2	774148144,0	1152586805,0	1116261004,8
35	1203333849,4	1297179557,0	823919102,7	1226688061,5	1197185061,6
36	1232308449,3	1302479148,0	843757924,9	1256224998,2	1227661685,6
37	1213793967,2	1285386923,0	831081114,1	1237351188,4	1209057943,9
38	1184049188,7	1312081914,8	810714952,9	1207029125,6	1175784801,8
39	1146625480,7	1360071826,0	785091051,5	1168879101,0	1133349670,2
40	1129192855,3	1341984701,7	773154984,8	1151108144,6	1115971769,0
41	1100069204,4	1370329865,3	753214107,8	1121419264,1	1083706565,9
42	1176179103,1	1298677303,7	805326328,7	1199006297,9	1168256507,8
43	1138375632,5	1333754091,3	779442405,0	1160469140,4	1126141321,5
44	1170867266,3	1340609849,1	801689329,9	1193591369,4	1160103753,6
45	1116810492,7	1349310843,6	764676818,0	1138485466,0	1102494944,4
$E(s_y^2)$	1107431710	1126034043	758255193,7	1128924661	1113640173
$HKO(s_y^2)$	1,0683E+16	1,65204E+17	1,42957E+17	1,0574E+16	8,03611E+15

Halk kütüphanelerinin kullanıcı sayılarına ilişkin Upadhyaya ve Singh, Chandra ve Singh varyans tahmin edicileri ile bu varyans tahmin edicilerin beklenen değerleri ve HKO'ları aşağıdaki Çizelge 5.8, Çizelge 5.9 ve Çizelge 5.10'da verilmektedir.

Çizelge 5. 8. Upadhyaya ve Singh, Chandra ve Singh Varyans Tahmin Edicileri

Örneklem	**Upadhyaya ve Singh**	**Chandra ve Singh**		
	s^2_{us}	s^2_{cs1}	s^2_{cs2}	s^2_{cs3}
1	1149263158,3	1139272320,6	1138525890,1	1109982300,4
2	922845837,2	1035938625,5	985011237,9	581926984,1
3	925978038,6	1041214769,3	988924554,1	580130580,0
4	1077546027,8	1063125746,9	1061372856,6	985594061,0
5	1131606218,5	1118785596,6	1117498449,5	1064841568,4
6	1195747409,9	1188124219,8	1187717247,1	1173008975,6
7	1156769281,5	1149396162,7	1149002630,3	1134780564,4
8	1119348239,9	1106249381,1	1104885016,2	1048517319,5
9	1199077046,0	1191584474,3	1191192966,1	1177086152,3
10	1213154156,5	1207315604,6	1207084273,8	1199024824,4
11	922744681,0	1036773481,4	985211265,0	579823982,9
12	939268922,5	1055739486,6	1002983407,4	589352647,4
13	1204707706,3	2164495295,0	1382218711,1	302583813,5
14	728099999,4	836482851,7	782939420,3	421701733,1
15	948919302,2	1076861529,6	1016504399,5	574378215,3
16	1001039236,0	1146984468,1	1075567265,1	585260144,9
17	965477042,3	1105133206,4	1037041035,6	566472040,1

Çizelge 5. 9. Upadhyaya ve Singh, Chandra ve Singh Varyans Tahmin Edicileri (Devam)

Örneklem	**Upadhyaya ve Singh**	**Chandra ve Singh**		
	s_{us}^2	s_{cs1}^2	s_{cs2}^2	s_{cs3}^2
18	1090796720,0	1076273489,3	1074518544,4	998792835,0
19	1162686769,4	1153896046,2	1153332102,1	1132360348,6
20	1072590807,3	1057065735,1	1054996870,4	962800881,2
21	1094659343,0	1081632387,9	1080249256,3	1022804534,8
22	1123471631,9	1111399438,0	1110257815,3	1064262008,4
23	1102844141,7	1090869134,3	1089723289,2	1043421638,7
24	1077247499,7	1062644301,6	1060842332,9	982568840,1
25	1184649346,5	1177016909,0	1176604819,9	1161687652,5
26	1100850448,3	1086415721,9	1084702164,2	1011170063,7
27	1139460916,3	1128448862,2	1127523994,3	1091282115,1
28	1172240401,8	1162491264,3	1161797418,0	1135511558,2
29	1150469543,0	1140750259,1	1140046558,3	1113300448,2
30	1111548665,2	1097045101,8	1095333152,5	1021998853,2
31	1154131093,4	1143081126,0	1142162670,7	1106254209,9
32	1187268049,5	1177508582,6	1176822816,1	1150904968,5
33	1165669957,1	1155934078,9	1155237938,4	1128841987,2
34	1130643369,9	1117598093,3	1116261004,3	1061259812,5
35	1203333851,9	1197424244,8	1197185061,5	1188833053,6
36	1232308451,2	1227796052,1	1227661685,5	1223102080,3
37	1213793969,1	1209199549,7	1209057943,9	1204239222,7
38	1184049192,0	1176219500,2	1175784801,6	1159985224,1
39	1146625485,8	1134479859,4	1133349669,7	1087994791,6
40	1129192860,5	1117109178,5	1115971768,5	1070198347,2
41	1100069210,6	1085465275,5	1083706565,1	1007899221,3
42	1176179106,3	1168659197,2	1168256507,6	1153696705,1

Çizelge 5. 10. Upadhyaya ve Singh, Chandra ve Singh Varyans Tahmin Edicileri (Devam)

Örneklem	**Upadhyaya ve Singh**	**Chandra ve Singh**		
	s^2_{us}	s^2_{cs1}	s^2_{cs2}	s^2_{cs3}
43	1138375637,3	1127112370,3	1126141321,1	1087866318,2
44	1170867270,6	1160840588,7	1160103753,3	1132017945,9
45	1116810498,2	1103835355,2	1102494943,8	1047240188,5
$E(s^2_y)$	1107431701	1142037532	1113640164	982816928
$HKO(s^2_y)$	1,0683E+16	2,81059E+16	8,03611E+15	7,82324E+16

Halk kütüphanelerinin kullanıcı sayılarına ilişkin Kadılar ve Çıngı varyans tahmin edicileri ile bu varyans tahmin edicilerin beklenen değerleri ve HKO'ları aşağıdaki Çizelge 5.11, Çizelge 5.12 ve Çizelge 5.13'te verilmektedir.

Çizelge 5. 11. Kadılar ve Çıngı Varyans Tahmin Edicileri

Örneklem	Kadılar ve Çıngı				
	$s^2_{kç1}$	$s^2_{kç2}$	$s^2_{kç3}$	$s^2_{kç4}$	$s^2_{kçreg}$
1	1149263153,2	1149263149,8	1149263153,8	1149263148,9	659410632,2
2	922845887,9	922845922,0	922845881,6	922845931,3	177457934,9
3	925978090,2	925978124,9	925978083,7	925978134,3	176561977,8
4	1077546020,4	1077546015,5	1077546021,3	1077546014,1	672499784,8
5	1131606212,0	1131606207,6	1131606212,8	1131606206,4	680050245
6	1195747406,1	1195747403,5	1195747406,5	1195747402,8	659955455,8
7	1156769277,7	1156769275,2	1156769278,2	1156769274,5	638427465,7
8	1119348233,3	1119348228,8	1119348234,1	1119348227,5	677233143,9
9	1199077042,2	1199077039,7	1199077042,7	1199077039,0	660423452,8
10	1213154153,5	1213154151,6	1213154153,9	1213154151,0	652870527,1

Çizelge 5. 12. Kadılar ve Çıngı Varyans Tahmin Edicileri (Devam)

Örneklem	Kadılar ve Çıngı				
	$s^2_{kç1}$	$s^2_{kç2}$	$s^2_{kç3}$	$s^2_{kç4}$	$s^2_{kçreg}$
11	922744732,1	922744766,4	922744725,7	922744775,8	176627132,3
12	939268974,7	939269009,8	939268968,2	939269019,3	179450387
13	1204707975,3	1204708156,1	1204707941,8	1204708205,5	80319145,77
14	728100046,9	728100078,8	728100041,0	728100087,5	125569008,2
15	948919359,0	948919397,2	948919351,9	948919407,6	173065895,2
16	1001039300,2	1001039343,3	1001039292,2	1001039355,1	174695110,6
17	965477103,8	965477145,1	965477096,1	965477156,4	169244678,7
18	1090796712,6	1090796707,6	1090796713,5	1090796706,2	679897914,7
19	1162686765,0	1162686762,0	1162686765,5	1162686761,1	654439465,2
20	1072590799,3	1072590794,0	1072590800,3	1072590792,6	683447899,8
21	1094659336,4	1094659331,9	1094659337,2	1094659330,7	664691194,6
22	1123471625,8	1123471621,7	1123471626,6	1123471620,5	668131732
23	1102844135,6	1102844131,5	1102844136,4	1102844130,4	657186441,4
24	1077247492,3	1077247487,2	1077247493,2	1077247485,9	674513686,7
25	1184649342,6	1184649340,0	1184649343,1	1184649339,3	654554993,8
26	1100850440,9	1100850436,0	1100850441,8	1100850434,6	683571588,7
27	1139460910,7	1139460907,0	1139460911,4	1139460905,9	664847931
28	1172240396,8	1172240393,5	1172240397,5	1172240392,6	668287577,9
29	1150469538,1	1150469534,8	1150469538,7	1150469533,9	657345020

Çizelge 5. 13. Kadılar ve Çıngı Varyans Tahmin Edicileri (Devam)

Örneklem	Kadılar ve Çıngı				
	$s^2_{kç1}$	$s^2_{kç2}$	$s^2_{kç3}$	$s^2_{kç4}$	$s^2_{kçreg}$
30	1111548657,8	1111548652,8	1111548658,7	1111548651,5	689386227,8
31	1154131087,8	1154131084,0	1154131088,5	1154131083,0	672352099,5
32	1187268044,5	1187268041,2	1187268045,2	1187268040,3	675745557,6
33	1165669952,2	1165669948,8	1165669952,8	1165669947,9	664943123
34	1130643363,3	1130643358,8	1130643364,1	1130643357,6	682033385,2
35	1203333848,9	1203333846,9	1203333849,3	1203333846,4	648601050
36	1232308448,9	1232308447,4	1232308449,2	1232308447,0	651250651,3
37	1213793966,8	1213793965,2	1213793967,1	1213793964,8	642704749,5
38	1184049188,1	1184049185,4	1184049188,5	1184049184,7	656052283,7
39	1146625479,6	1146625475,5	1146625480,4	1146625474,4	680046742,1
40	1129192854,3	1129192850,2	1129192855,1	1129192849,1	671003375,2
41	1100069203,2	1100069198,2	1100069204,1	1100069196,8	685175984,2
42	1176179102,4	1176179099,9	1176179102,9	1176179099,2	649350800,6
43	1138375631,6	1138375627,7	1138375632,3	1138375626,7	666889251,3
44	1170867265,5	1170867262,1	1170867266,1	1170867261,1	670316952,7
45	1116810491,6	1116810487,2	1116810492,4	1116810485,9	674667541,2
$E(s^2_y)$	1107431712	1107431720	1107431711	1107431722	565006604,4
$HKO(s^2_y)$	1,0683E+16	1,0683E+16	1,0683E+16	1,0683E+16	3,60706E+17

Halk kütüphanelerinin kullanıcı sayılarına ilişkin Gupta ve Shabbir, Subramani ve Kumarapandiyan varyans tahmin edicileri ile bu varyans tahmin edicilerin beklenen değerleri ve HKO’ları aşağıdaki Çizelge 5.14, Çizelge 5.15 ve Çizelge 5.16’ da verilmektedir.

Çizelge 5. 14. Gupta ve Shabbir, Subramani ve Kumarapandiyan Varyans Tahmin Edicileri

Örneklem	Gupta ve Shabbir			Subramani ve Kumarapandiyan
	$s^2_{gs(0)}$	$s^2_{gs(1)}$	$s^2_{gs(-1)}$	s^2_{sk}
1	1139191345,5	1242372235,4	1327095332,1	1149274338,2
2	1091952872,9	605730177,3	300048576,8	922734094,6
3	1094086423,9	603607537,6	314431931,5	925864370,3
4	1027568361,9	1119343978,1	1583720152,2	1077562241,1
5	1098257989,2	1200566289,3	1488878260,3	1131620603,3
6	1176845038,5	1306102107,1	1227862355,2	1195755920,5
7	1134405183,7	1263612442,3	1192371492,4	1156777512,9
8	1082901504,9	1183601099,9	1502921236,0	1119362942,5
9	1180522236,8	1310304818,7	1223409451,3	1199085409,7
10	1196038870,8	1331114080,2	1153729261,2	1213160664,4
11	1092433656,3	603353216,0	308126195,3	922632116,7
12	1098875086,6	613661346,6	308546193,9	939153991,5
13	1203167067,2	287930558,1	5274675635,7	1204115425,3
14	1037400702,2	429582010,5	564179402,4	727995365,3
15	1107184284,3	596480199,6	393905413,3	948794257,0
16	1129366972,8	607466754,1	474400066,2	1000897961,7
17	1116727853,1	587141789,0	472720278,5	965341720,6

Çizelge 5. 15. Gupta ve Shabbir, Subramani ve Kumarapandiyan Varyans Tahmin Edicileri (Devam)

Örneklem	Gupta ve Shabbir			Subramani ve Kumarapandiyan
	$s^2_{gs(0)}$	$s^2_{gs(1)}$	$s^2_{gs(-1)}$	s^2_{sk}
18	1044090183,2	1133977415,2	1593312705,9	1090813048,0
19	1139565442,1	1264060764,0	1268742383,4	1162696595,2
20	1017607951,0	1098373931,7	1665133854,4	1072608282,2
21	1052882909,0	1155418152,1	1490937607,6	1094673967,8
22	1089830167,1	1197829831,5	1438851943,8	1123485169,0
23	1065347101,8	1174839851,4	1425298419,2	1102857571,3
24	1026617469,3	1116661775,6	1596928063,4	1077263921,6
25	1164715803,2	1293694406,0	1221758371,8	1184657868,0
26	1057015715,1	1147110683,1	1588866821,5	1100866673,4
27	1110418086,0	1224487066,5	1381147589,5	1139473251,1
28	1149464754,5	1269738064,0	1325210847,1	1172251307,1
29	1124798714,2	1245347749,4	1312580435,4	1150480416,4
30	1070283812,1	1159071669,4	1595808576,3	1111564966,7
31	1127427492,0	1240945050,6	1389812235,0	1154143469,6
32	1166430505,6	1286620204,8	1333486957,3	1187278965,3
33	1142036656,4	1262403370,8	1321145641,0	1165680848,0
34	1096708009,1	1197313098,7	1502968716,8	1130658009,9
35	1185581478,1	1320045904,4	1150666137,6	1203340439,7
36	1216178495,0	1355163472,7	1107412503,0	1232313475,1

Çizelge 5. 16. Gupta ve Shabbir, Subramani ve Kumarapandiyan Varyans Tahmin Edicileri (Devam)

Örneklem	Gupta ve Shabbir			Subramani ve Kumarapandiyan
	$s^2_{gs(0)}$	$s^2_{gs(1)}$	$s^2_{gs(-1)}$	s^2_{sk}
37	1196858537,1	1334555397,5	1098437118,2	1213799085,0
38	1163945914,6	1292244774,9	1231270399,4	1184057935,2
39	1117235895,1	1223913531,8	1452094319,6	1146639103,1
40	1096628457,2	1204334576,2	1441684313,7	1129206409,8
41	1055601706,5	1144105638,2	1600689376,8	1100085628,7
42	1155523101,9	1284685695,5	1211154628,6	1176187501,7
43	1108781144,4	1221410047,0	1395533945,1	1138388256,4
44	1147678035,9	1266577187,8	1339736233,8	1170878489,2
45	1080064064,1	1181850067,0	1494078253,5	1116825060,7
$E(s^2_y)$	1115027623	1093083334	1290794881	1107406770
$HKO(s^2_y)$	2,78945E+15	8,15224E+16	5,49696E+17	1,06899E+16

Halk kütüphanelerinin kullanıcı sayılarına ilişkin Singh ve Solanki varyans tahmin edicileri ile beklenen değerleri ve HKO'ları aşağıdaki Çizelge 5.17, Çizelge 5.18 ve Çizelge 5.19, Çizelge 5.20, Çizelge 5.21, Çizelge 5.22, Çizelge 5.23'de verilmektedir.

Çizelge 5. 17. Singh ve Solanki Varyans Tahmin Edicileri

Örneklem	Singh ve Solanki				
	s^2_{ss1}	s^2_{ss2}	s^2_{ss3}	s^2_{ss4}	s^2_{ss5}
1	1372564687,3	1372564695,5	1372564685,0	1372564697,0	1372564697,5
2	534310737,9	534310690,4	534310750,9	534310681,6	534310678,8

Çizelge 5. 18. Singh ve Solanki Varyans Tahmin Edicileri (Devam)

Örneklem	Singh ve Solanki				
	s^2_{ss1}	s^2_{ss2}	s^2_{ss3}	s^2_{ss4}	s^2_{ss5}
3	534654034,8	534653986,6	534654047,9	534653977,7	534653974,8
4	1392975666,0	1392975676,4	1392975663,1	1392975678,4	1392975679,0
5	1411954830,1	1411954839,7	1411954827,5	1411954841,4	1411954842,0
6	1377192098,9	1377192106,1	1377192096,9	1377192107,4	1377192107,8
7	1331962137,3	1331962144,3	1331962135,3	1331962145,6	1331962146,0
8	1405473841,6	1405473851,3	1405473839,0	1405473853,1	1405473853,7
9	1378363416,7	1378363423,8	1378363414,8	1378363425,2	1378363425,6
10	1364640412,6	1364640419,0	1364640410,8	1364640420,2	1364640420,6
11	533770184,0	533770136,1	533770197,1	533770127,3	533770124,5
12	540201299,9	540201251,9	540201313,0	540201243,0	540201240,2
13	824542028,6	824541831,6	824542082,5	824541795,0	824541783,5
14	455456077,9	455456021,0	455456093,5	455456010,4	455456007,1
15	539340284,6	539340232,8	539340298,8	539340223,2	539340220,2
16	555234687,9	555234632,4	555234703,1	555234622,1	555234618,8
17	542491882,9	542491827,6	542491897,9	542491817,4	542491814,2
18	1408624624,9	1408624635,4	1408624622,1	1408624637,4	1408624638,0
19	1363822351,8	1363822359,5	1363822349,7	1363822360,9	1363822361,3
20	1414321851,5	1414321862,6	1414321848,5	1414321864,6	1414321865,2
21	1378816694,2	1378816703,9	1378816691,5	1378816705,7	1378816706,3
22	1387793931,4	1387793940,6	1387793928,8	1387793942,3	1387793942,8

Çizelge 5. 19. Singh ve Solanki Varyans Tahmin Edicileri (Devam)

Örneklem	Singh ve Solanki				
	s^2_{ss1}	s^2_{ss2}	s^2_{ss3}	s^2_{ss4}	s^2_{ss5}
23	1364624609,5	1364624618,7	1364624607,0	1364624620,4	1364624620,9
24	1396943646,0	1396943656,5	1396943643,1	1396943658,5	1396943659,1
25	1365743047,1	1365743054,3	1365743045,2	1365743055,6	1365743056,0
26	1416653932,5	1416653942,9	1416653929,7	1416653944,9	1416653945,5
27	1382526806,2	1382526814,9	1382526803,8	1382526816,5	1382526817,0
28	1391783912,8	1391783920,9	1391783910,6	1391783922,4	1391783922,9
29	1368593247,5	1368593255,6	1368593245,3	1368593257,1	1368593257,6
30	1428969652,4	1428969662,8	1428969649,6	1428969664,8	1428969665,4
31	1398430652,9	1398430661,7	1398430650,6	1398430663,3	1398430663,8
32	1407600219,7	1407600227,8	1407600217,5	1407600229,3	1407600229,8
33	1384703061,0	1384703069,2	1384703058,8	1384703070,7	1384703071,1
34	1415806543,8	1415806553,4	1415806541,1	1415806555,2	1415806555,8
35	1355523990,1	1355523996,6	1355523988,4	1355523997,8	1355523998,2
36	1362955301,8	1362955307,7	1362955300,2	1362955308,8	1362955309,2
37	1344814224,0	1344814229,9	1344814222,3	1344814231,0	1344814231,3
38	1368634669,5	1368634676,7	1368634667,5	1368634678,1	1368634678,5
39	1413064579,5	1413064588,8	1413064577,0	1413064590,5	1413064591,0
40	1393897968,9	1393897978,2	1393897966,4	1393897979,9	1393897980,4
41	1419777377,1	1419777387,6	1419777374,2	1419777389,5	1419777390,2
42	1354880061,4	1354880068,5	1354880059,4	1354880069,8	1354880070,3

Çizelge 5. 20. Singh ve Solanki Varyans Tahmin Edicileri (Devam)

Örneklem	Singh ve Solanki				
	s^2_{ss1}	s^2_{ss2}	s^2_{ss3}	s^2_{ss4}	s^2_{ss5}
43	1386469323,9	1386469332,7	1386469321,5	1386469334,4	1386469334,9
44	1395676838,6	1395676846,9	1395676836,4	1395676848,4	1395676848,9
45	1400208093,3	1400208102,9	1400208090,6	1400208104,7	1400208105,3
$E(s^2_y)$	1221484212	1221484205	1221484213	1221484204	1221484203
$HKO(s^2_y)$	1,19315E+17	1,19315E+17	1,19315E+17	1,19315E+17	1,19315E+17

Çizelge 5. 21. Singh ve Solanki Diğer Varyans Tahmin Edicileri

Örneklem	Singh ve Solanki				
	s^2_{ss6}	s^2_{ss7}	s^2_{ss8}	s^2_{ss9}	s^2_{ss10}
1	1372540378,4	1372564694,0	1372564697,5	1372556113,6	1372564695,7
2	534451004,1	534310699,3	534310678,8	534360208,1	534310689,6
3	534796300,5	534653995,6	534653974,8	534704210,2	534653985,7
4	1392944792,6	1392975674,5	1392975679,0	1392964777,0	1392975676,6
5	1411926580,9	1411954837,9	1411954842,0	1411944866,7	1411954839,8
6	1377170877,2	1377192104,7	1377192107,8	1377184614,0	1377192106,2
7	1331941334,1	1331962143,0	1331962146,0	1331954800,0	1331962144,4
8	1405445144,9	1405473849,5	1405473853,7	1405463720,4	1405473851,5
9	1378342354,8	1378363422,5	1378363425,6	1378355988,2	1378363424,0
10	1364621408,1	1364640417,8	1364640420,6	1364633709,7	1364640419,2
11	533911538,9	533770145,1	533770124,5	533820038,2	533770135,3
12	540343043,7	540201260,9	540201240,2	540251291,2	540201251,0

Çizelge 5. 22. Singh ve Solanki Diğer Varyans Tahmin Edicileri (Devam)

Örneklem	Singh ve Solanki				
	s^2_{ss6}	s^2_{ss7}	s^2_{ss8}	s^2_{ss9}	s^2_{ss10}
13	825124159,1	824541868,6	824541783,5	824747339,4	824541828,1
14	455624201,8	455456031,7	455456007,1	455515373,3	455456020,0
15	539493326,3	539340242,5	539340220,2	539394260,6	539340231,9
16	555398797,6	555234642,8	555234618,8	555292567,5	555234631,4
17	542654950,0	542491838,0	542491814,2	542549394,7	542491826,7
18	1408593700,5	1408624633,4	1408624638,0	1408613718,0	1408624635,6
19	1363799654,5	1363822358,0	1363822361,3	1363814346,5	1363822359,6
20	1414289288,0	1414321860,5	1414321865,2	1414310366,5	1414321862,8
21	1378787973,1	1378816702,1	1378816706,3	1378806564,3	1378816704,1
22	1387766699,0	1387793938,8	1387793942,8	1387784326,6	1387793940,7
23	1364597437,2	1364624617,0	1364624620,9	1364615025,9	1364624618,9
24	1396912498,9	1396943654,6	1396943659,1	1396932660,5	1396943656,7
25	1365721839,9	1365743052,9	1365743056,0	1365735567,3	1365743054,4
26	1416623210,0	1416653941,0	1416653945,5	1416643096,8	1416653943,1
27	1382501090,1	1382526813,3	1382526817,0	1382517736,2	1382526815,1
28	1391759936,3	1391783919,4	1391783922,9	1391775456,3	1391783921,1
29	1368569306,9	1368593254,1	1368593257,6	1368584803,7	1368593255,7
30	1428938904,2	1428969660,9	1428969665,4	1428958807,6	1428969663,0
31	1398404912,3	1398430660,0	1398430663,8	1398421574,3	1398430661,8

Çizelge 5. 23. Singh ve Solanki Diğer Varyans Tahmin Edicileri (Devam)

Örneklem	Singh ve Solanki				
	s^2_{ss6}	s^2_{ss7}	s^2_{ss8}	s^2_{ss9}	s^2_{ss10}
32	1407576228,1	1407600226,3	1407600229,8	1407591757,9	1407600228,0
33	1384679101,8	1384703067,6	1384703071,1	1384694610,6	1384703069,3
34	1415777975,5	1415806551,6	1415806555,8	1415796467,8	1415806553,6
35	1355504937,5	1355523995,4	1355523998,2	1355517270,3	1355523996,7
36	1362937856,6	1362955306,6	1362955309,2	1362949148,8	1362955307,8
37	1344796780,5	1344814228,8	1344814231,3	1344808071,6	1344814230,0
38	1368613206,7	1368634675,4	1368634678,5	1368627099,6	1368634676,9
39	1413037322,2	1413064587,0	1413064591,0	1413054965,9	1413064588,9
40	1393870740,5	1393897976,4	1393897980,4	1393888365,5	1393897978,3
41	1419746403,0	1419777385,6	1419777390,2	1419766452,6	1419777387,8
42	1354859020,6	1354880067,2	1354880070,3	1354872640,3	1354880068,6
43	1386443259,7	1386469331,1	1386469334,9	1386460131,1	1386469332,9
44	1395652492,4	1395676845,3	1395676848,9	1395668251,8	1395676847,0
45	1400179559,7	1400208101,1	1400208105,3	1400198029,5	1400208103,1
$E(s_y^2)$	1221503812	1221484206	1221484203	1221491124	1221484205
$HKO(s_y^2)$	1,19264E+17	1,19315E+17	1,19315E+17	1,19297E+17	1,19315E+17

Halk kütüphanelerinin kullanıcı sayılarına ilişkin Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta varyans tahmin edicileri ile bu varyans tahmin edicilerin beklenen değerleri ve HKO'ları aşağıdaki Çizelge 5.24, Çizelge 5.25, Çizelge 5.26, Çizelge 5.27, Çizelge 5.28, Çizelge 5.29'da verilmektedir.

Çizelge 5. 24. Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta Varyans Tahmin Edicileri ($\lambda_{(yd)} = 0$)

Örneklem	Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta				
	s^2_{yd0}	s^2_{yd1}	s^2_{yd2}	s^2_{yd3}	s^2_{yd4}
1	1150714562,9	1150714562,1	1150714562,8	1150714562,9	1150714561,7
2	1172202504,0	1172202497,8	1172202502,8	1172202503,7	1172202495,6
3	1176596355,7	1176596349,4	1176596354,5	1176596355,4	1176596347,1
4	1069507535,7	1069507534,4	1069507535,5	1069507535,7	1069507533,9
5	1130644053,6	1130644052,5	1130644053,3	1130644053,5	1130644052,1
6	1200896095,0	1200896094,2	1200896094,8	1200896094,9	1200896094,0
7	1159680593,2	1159680592,4	1159680593,0	1159680593,1	1159680592,1
8	1116976591,4	1116976590,3	1116976591,2	1116976591,4	1116976589,9
9	1204430490,1	1204430489,4	1204430490,0	1204430490,1	1204430489,1
10	1219375977,4	1219375976,7	1219375977,3	1219375977,4	1219375976,4
11	1173505464,5	1173505458,2	1173505463,2	1173505464,2	1173505455,9
12	1183989218,6	1183989212,1	1183989217,3	1183989218,3	1183989209,8
13	1540054417,3	1540054388,1	1540054411,6	1540054416,0	1540054377,3
14	1094776335,0	1094776329,5	1094776333,9	1094776334,8	1094776327,5
15	1203182187,3	1203182180,0	1203182185,9	1203182186,9	1203182177,4
16	1245525441,5	1245525432,9	1245525439,8	1245525441,1	1245525429,7
17	1224054830,8	1224054822,7	1224054829,2	1224054830,5	1224054819,8
18	1084448541,7	1084448540,4	1084448541,4	1084448541,6	1084448539,9
19	1165497323,4	1165497322,6	1165497323,2	1165497323,4	1165497322,3
20	1063264419,8	1063264418,3	1063264419,5	1063264419,7	1063264417,8

Çizelge 5. 25. Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta Varyans Tahmin Edicileri($\lambda_{(yd)} = 0$) (Devam)

Örneklem	**Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta**				
	s^2_{yd0}	s^2_{yd1}	s^2_{yd2}	s^2_{yd3}	s^2_{yd4}
21	1089515111,4	1089515110,2	1089515111,2	1089515111,3	1089515109,8
22	1121884174,5	1121884173,5	1121884174,3	1121884174,5	1121884173,1
23	1099168185,7	1099168184,6	1099168185,5	1099168185,6	1099168184,2
24	1069065941,1	1069065939,7	1069065940,8	1069065941,0	1069065939,2
25	1189145642,3	1189145641,6	1189145642,2	1189145642,3	1189145641,3
26	1095830190,1	1095830188,9	1095830189,9	1095830190,1	1095830188,4
27	1139762265,7	1139762264,8	1139762265,6	1139762265,7	1139762264,5
28	1175547009,9	1175547009,1	1175547009,7	1175547009,8	1175547008,8
29	1152100131,9	1152100131,1	1152100131,8	1152100131,9	1152100130,7
30	1107854248,8	1107854247,6	1107854248,6	1107854248,8	1107854247,1
31	1155734477,1	1155734476,2	1155734476,9	1155734477,1	1155734475,9
32	1191701981,8	1191701981,0	1191701981,7	1191701981,8	1191701980,7
33	1168477069,5	1168477068,7	1168477069,3	1168477069,5	1168477068,3
34	1129526511,5	1129526510,4	1129526511,3	1129526511,4	1129526510,0
35	1209103942,5	1209103941,8	1209103942,4	1209103942,5	1209103941,5
36	1239375419,8	1239375419,1	1239375419,6	1239375419,8	1239375418,8
37	1220196233,9	1220196233,2	1220196233,8	1220196233,9	1220196232,9
38	1188473322,8	1188473322,0	1188473322,6	1188473322,7	1188473321,7
39	1147333928,9	1147333927,9	1147333928,7	1147333928,8	1147333927,6

Çizelge 5. 26. Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta Varyans Tahmin Edicileri($\lambda_{(yd)}=0$) (Devam)

Örneklem	Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta				
	s^2_{yd0}	s^2_{yd1}	s^2_{yd2}	s^2_{yd3}	s^2_{yd4}
40	1128181267,7	1128181266,6	1128181267,5	1128181267,6	1128181266,3
41	1094889236,8	1094889235,5	1094889236,6	1094889236,8	1094889235,1
42	1180198748,5	1180198747,7	1180198748,3	1180198748,4	1180198747,4
43	1138501690,5	1138501689,6	1138501690,3	1138501690,5	1138501689,2
44	1174029492,7	1174029491,8	1174029492,5	1174029492,6	1174029491,5
45	1114197890,8	1114197889,7	1114197890,6	1114197890,8	1114197889,3
$E(s^2_y)$	1162202601	1162202599	1162202601	1162202601	1162202598
$HKO(s^2_y)$	6,52059E+15	6,52059E+15	6,52059E+15	6,52059E+15	6,52059E+15

Çizelge 5. 27. Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta Varyans Tahmin Edicileri ($\lambda_{(yd)}=1$)

Örneklem	Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta				
	s^{2*}_{yd0}	s^{2*}_{yd1}	s^{2*}_{yd3}	s^{2*}_{yd3}	s^{2*}_{yd4}
1	1134111828,7	1134111828,8	1134111828,7	1134111828,7	1134111828,8
2	1049316143,5	1049316146,7	1049316144,1	1049316143,6	1049316147,9
3	1054232041,5	1054232044,6	1054232042,1	1054232041,6	1054232045,7
4	1056967578,3	1056967578,0	1056967578,3	1056967578,3	1056967577,9
5	1113317941,5	1113317941,5	1113317941,5	1113317941,5	1113317941,5
6	1183213862,5	1183213862,7	1183213862,5	1183213862,5	1183213862,7
7	1144396430,9	1144396431,0	1144396430,9	1144396430,9	1144396431,0
8	1100655013,6	1100655013,5	1100655013,5	1100655013,6	1100655013,5
9	1186682909,8	1186682910,0	1186682909,8	1186682909,8	1186682910,0

Çizelge 5. 28. Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta Varyans Tahmin Edicileri($\lambda_{(yd)} = 1$) (Devam)

Örneklem	Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta				
	s_{yd0}^{2*}	s_{yd1}^{2*}	s_{yd3}^{2*}	s_{yd3}^{2*}	s_{yd4}^{2*}
10	1202434687,8	1202434688,0	1202434687,9	1202434687,8	1202434688,1
11	1050187558,1	1050187561,4	1050187558,7	1050187558,3	1050187562,6
12	1067046423,5	1067046426,0	1067046424,0	1067046423,6	1067046426,9
13	1728783397,3	1728783283,7	1728783375,1	1728783392,0	1728783242,1
14	879701977,3	879701990,5	879701979,9	879701978,0	879701995,3
15	1086784533,4	1086784535,1	1086784533,7	1086784533,5	1086784535,7
16	1148751249,1	1148751247,6	1148751248,8	1148751249,1	1148751247,1
17	1112293753,1	1112293753,5	1112293753,2	1112293753,1	1112293753,7
18	1070247761,6	1070247761,4	1070247761,6	1070247761,6	1070247761,3
19	1148854005,3	1148854005,4	1148854005,4	1148854005,3	1148854005,5
20	1050692978,1	1050692977,7	1050692978,0	1050692978,0	1050692977,5
21	1075824676,4	1075824676,2	1075824676,4	1075824676,4	1075824676,2
22	1105929054,4	1105929054,4	1105929054,4	1105929054,4	1105929054,4
23	1085248142,0	1085248141,9	1085248142,0	1085248142,0	1085248141,8
24	1056457586,2	1056457585,8	1056457586,1	1056457586,2	1056457585,7
25	1172079479,8	1172079479,9	1172079479,8	1172079479,8	1172079480,0
26	1080507932,9	1080507932,7	1080507932,9	1080507932,9	1080507932,6
27	1123169633,7	1123169633,8	1123169633,7	1123169633,7	1123169633,8
28	1157452308,1	1157452308,2	1157452308,1	1157452308,1	1157452308,3

Çizelge 5. 29. Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta Varyans Tahmin Edicileri ($\lambda_{(yd)}=1$) (Devam)

Örneklem	**Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta**				
	s^{2*}_{yd0}	s^{2*}_{yd1}	s^{2*}_{yd2}	s^{2*}_{yd3}	s^{2*}_{yd4}
29	1135610829,9	1135610830,0	1135610830,0	1135610829,9	1135610830,1
30	1091241216,3	1091241216,2	1091241216,3	1091241216,3	1091241216,1
31	1137889403,2	1137889403,3	1137889403,2	1137889403,2	1137889403,3
32	1172535765,7	1172535765,9	1172535765,7	1172535765,7	1172535766,0
33	1150865605,0	1150865605,1	1150865605,0	1150865605,0	1150865605,2
34	1112104690,0	1112104690,0	1112104690,0	1112104690,0	1112104690,0
35	1192536007,5	1192536007,7	1192536007,5	1192536007,5	1192536007,7
36	1222895595,8	1222895596,0	1222895595,8	1222895595,8	1222895596,0
37	1204308313,9	1204308314,0	1204308313,9	1204308313,9	1204308314,1
38	1171276466,1	1171276466,2	1171276466,1	1171276466,1	1171276466,3
39	1129174839,2	1129174839,2	1129174839,2	1129174839,2	1129174839,3
40	1111680901,1	1111680901,1	1111680901,1	1111680901,1	1111680901,1
41	1079530036,7	1079530036,4	1079530036,6	1079530036,6	1079530036,4
42	1163703348,3	1163703348,4	1163703348,3	1163703348,3	1163703348,5
43	1121809087,1	1121809087,1	1121809087,1	1121809087,1	1121809087,1
44	1155785327,0	1155785327,1	1155785327,0	1155785327,0	1155785327,2
45	1098230441,1	1098230441,0	1098230441,1	1098230441,1	1098230441,0
$E(s_y^2)$	1130589306	1130589304	1130589305	1130589306	1130589303
$HKO(s_y^2)$	1,15588E+16	1,15588E+16	1,15588E+16	1,15588E+16	1,15588E+16

Halk kütüphanelerinin kullanıcı sayılarına ilişkin Lone ve Tailor varyans tahmin edicisi ile bu varyans tahmin edicinin beklenen değeri ve HKO'su aşağıdaki Çizelge 5.30'da verilmektedir.

Çizelge 5. 30. Lone ve Tailor Varyans Tahmin Edicisi

Örneklem	Lone ve Tailor	Örneklem	Lone ve Tailor	Örneklem	Lone ve Tailor
	s_{lt}^{2**}		s_{lt}^{2**}		s_{lt}^{2**}
1	141410426,1	**18**	64631534,9	**35**	142229211,3
2	64786532,1	**19**	138136200,1	**36**	126620927,1
3	63709509,8	**20**	121880154,6	**37**	127874586,8
4	137049836,2	**21**	131808988,1	**38**	126725917,1
5	142193593,7	**22**	137600490,1	**39**	125726212,8
6	126520880,0	**23**	139022322,8	**40**	138027463,3
7	117556562,1	**24**	137424217,1	**41**	136725872,9
8	136685455,6	**25**	137080234,8	**42**	135847472,3
9	143467029,5	**26**	125778984,6	**43**	141759903,8
10	143204794,0	**27**	135882196,8	**44**	141622430,0
11	64764313,3	**28**	141568590,2	**45**	143064739,8
12	65078909,8	**29**	143010941,0	$E(s_y^2)$	121704997,8
13	53291087,0	**30**	141348236,5	$HKO(s_y^2)$	1,01755E+18
14	58277282,8	**31**	136734227,6		
15	141410426,1	**32**	142730826,9		
16	64814712,9	**33**	144177646,8		
17	65234875,6	**34**	142532741,5		

Varyans tahmin ediciler ile beklenen değerleri ve HKO'ları, Çizelge 5.2 - Çizelge 5.30'da verilmiştir. Beklenen değer ve HKO'lar her bir varyans tahmin edicisi için

$$E(s_y^2)=\frac{\sum_{i=1}^{45}(s_y^2)}{45},\ HKO(s_y^2)=\frac{\sum_{i=1}^{45}(s_y^2-S_2^2)^2}{45}$$

(5.1)

formülünden hesaplanmıştır. HKO değerleri küçükten büyüğe sıralandığında bu kitle için en küçük HKO'ya sahip varyans tahmin edici Gupta ve Shabbir ($s_{gs(0)}^2$) varyans tahmin edicisi olarak bulunmuştur. Klasik varyans tahmin edicisinin HKO'su ile karşılaştırıldığında, Eş. (2.98)'den

$\rho_{(s_y^2,s_x^2)}=(4,398-1)/\sqrt{(3,684)(3,181)}$ ve $A_{gs}=0,025(4,684-1)(1-0,99)$ olmak üzere,

$$\frac{V(s_y^2)(A_{(gs)}+\rho_{(s_y^2 s_x^2)}^2)}{(1+A_{(gs)})}>0$$

$$\frac{(1,65994E+17)(0,000921+0,992617)}{(1+0,000921)}>0$$

$1,64769E+17>0$ koşulu sağlandığından Gupta ve Shabbir ($s_{gs(0)}^2$) varyans tahmin edicisinin daha klasik varyansa göre daha etkin olduğu söylenebilir. Diğer tahmin edicilerle benzer karşılaştırmalar yapılabilir.

5.1. Klasik Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralığı

Güven aralığının hesaplamasında klasik varyans tahmin edicisi kullanıldığında, Eş. (4.3)'deki formülden hesaplanan kitle ortalamasının güven aralığına ilişkin üst sınır değerinden alt sınır değerinin farkı olan güven aralığı uzunluğu aşağıdaki Çizelge 5.31'de verilmektedir.

Çizelge 5.31. Klasik Varyans Tahmin Edicisine (s_y^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y}+t\sqrt{v(\bar{y})}\right)-\left(\bar{y}-t\sqrt{v(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	Uzunluk	**Örneklem**	Uzunluk	**Örneklem**	Uzunluk	**Örneklem**	Uzunluk
1	60601,8600	**15**	31046,0694	**29**	60506,8654	**43**	60944,5517
2	31437,5624	**16**	31191,8833	**30**	61964,0610	**44**	61100,9845
3	31358,0458	**17**	30701,3926	**31**	61193,6688	**45**	61298,9464
4	61200,3540	**18**	61536,0779	**32**	61347,9118		
5	61542,9955	**19**	60373,0041	**33**	60855,5669		
6	60626,9394	**20**	61696,5708	**34**	61632,6670		
7	59629,9500	**21**	60844,0062	**35**	60103,1249		
8	61415,4411	**22**	61001,2833	**36**	60225,7746		
9	60648,3948	**23**	60499,5422	**37**	59829,3030		
10	60300,5885	**24**	61291,9244	**38**	60447,3797		
11	31363,8801	**25**	60378,3599	**39**	61542,8957		
12	31613,5818	**26**	61702,1774	**40**	61132,3073		
13	21149,659	**27**	60851,2039	**41**	61774,5466		
14	26444,8710	**28**	61008,4212	**42**	60137,8130		

5.2. Hirano Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralığı

Güven aralığının tahmininde Eş. (4.4)'de verilen, Hirano varyans tahmin edicisinden yararlanılarak hesaplanan kütüphane kullanıcı sayılarına ilişkin kitle ortalamasının güven aralığının uzunluğu Çizelge 5.32'de verilmektedir.

Çizelge 5.32. Hirano Varyans Tahmin Edicisine (s_h^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y}+t\sqrt{v_h(\bar{y})}\right)-\left(\bar{y}-t\sqrt{v_h(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	Uzunluk	**Örneklem**	Uzunluk	**Örneklem**	Uzunluk	**Örneklem**	Uzunluk
1	50145,8703	**15**	25689,511350	**29**	50067,265752	**43**	50429,435505
2	26013,4578	**16**	25810,167205	**30**	51273,042954	**44**	50558,877977
3	25947,6606	**17**	25404,303635	**31**	50635,570927	**45**	50722,684410
4	50641,1027	**18**	50918,902248	**32**	50763,201493		
5	50924,6263	**19**	49956,500251	**33**	50355,803723		
6	50166,6226	**20**	51051,704386	**34**	50998,826226		
7	49341,6495	**21**	50346,237638	**35**	49733,184915		
8	50819,0796	**22**	50476,378832	**36**	49834,673136		
9	50184,3762	**23**	50061,206039	**37**	49506,607080		
10	49896,5789	**24**	50716,873934	**38**	50018,043416		
11	25952,4883	**25**	49960,932017	**39**	50924,543740		
12	26159,1075	**26**	51056,343655	**40**	50584,796476		
13	17500,586	**27**	50352,193467	**41**	51116,226510		
14	21882,184	**28**	50482,285178	**42**	49761,888045		

5.3. Das ve Tripathi Varyans Tahmin Edicilerinin Güven Aralığı

Güven aralığının tahmininde 45 örneklem için de Eş. (4.7), Eş. (4.9) ve Eş. (4.11)'de verilen, Das ve Tripathi varyans tahmin edicilerinden yararlanılarak hesaplanan kütüphane kullanıcı sayılarına ilişkin kitle ortalamasının güven aralıklarının uzunlukları Çizelge 5.33 - Çizelge 5.35'te verilmektedir.

Çizelge 5. 33. Das ve Tripathi Varyans Tahmin Edicisine (s^2_{dt1}) Ait Güven Aralığı Uzunluğu

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y}+t\sqrt{v_{dt1}(\bar{y})}\right)-\left(\bar{y}-t\sqrt{v_{dt1}(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	Uzunluk	**Örneklem**	Uzunluk	**Örneklem**	Uzunluk	**Örneklem**	Uzunluk
1	54842,1719	**15**	36600,7970	**29**	54641,2080	**43**	55577,6135
2	37909,0778	**16**	36356,0835	**30**	60786,4887	**44**	55252,2477
3	39652,4818	**17**	35820,7373	**31**	55642,1866	**45**	56715,6705
4	58612,2085	**18**	58883,8975	**32**	55315,4850		
5	56772,7108	**19**	66025,9888	**33**	54912,7370		
6	63471,7933	**20**	63016,3585	**34**	56978,1351		
7	67144,2889	**21**	57399,5537	**35**	61937,3417		
8	59372,6895	**22**	57045,0444	**36**	61462,5442		
9	53964,0684	**23**	56620,1714	**37**	61110,9615		
10	53255,6197	**24**	58832,3211	**38**	63502,2731		
11	37708,9461	**25**	63271,0326	**39**	58960,9577		

Çizelge 5. 34. Das ve Tripathi Varyans Tahmin Edicisine (s^2_{dt2}) Ait Güven Aralığı Uzunluğu

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y}+t\sqrt{\nu_{dt2}(\bar{y})}\right)-\left(\bar{y}-t\sqrt{\nu_{dt2}(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	Uzunluk	**Örneklem**	Uzunluk	**Örneklem**	Uzunluk	**Örneklem**	Uzunluk
1	55048,1668	**15**	37087,2826	**29**	54854,8141	**43**	55756,6137
2	38579,5165	**16**	36768,9557	**30**	60795,5250	**44**	55462,7943
3	40827,4059	**17**	36233,4453	**31**	55832,4624	**45**	56847,0594
4	58655,4550	**18**	58929,0287	**32**	55538,0282		
5	56914,1176	**19**	66263,9609	**33**	55130,6015		
6	63529,1623	**20**	63028,2002	**34**	57112,8140		
7	67583,7895	**21**	57475,5823	**35**	61961,0246		
8	59399,7622	**22**	57144,3252	**36**	61473,1884		
9	54237,4583	**23**	56716,4887	**37**	61122,4778		
10	53559,2079	**24**	58871,3986	**38**	63568,8525		
11	38352,5817	**25**	63330,6468	**39**	59003,7709		
12	38606,5433	**26**	60590,5497	**40**	58655,8164		
13	33022,0095	**27**	55561,2096	**41**	60800,5944		
14	36043,8758	**28**	55271,0469	**42**	53817,3241		

Çizelge 5. 35. Das ve Tripathi Varyans Tahmin Edicisine (s^2_{dt3}) Ait Güven Aralığı Uzunluğu

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y}+t\sqrt{v_{dt3}(\bar{y})}\right)-\left(\bar{y}-t\sqrt{v_{dt3}(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	Uzunluk	**Örneklem**	Uzunluk	**Örneklem**	Uzunluk	**Örneklem**	Uzunluk
1	56326,2422	**15**	54761,7018	**29**	56362,7654	**43**	56024,8385
2	53711,0965	**16**	56516,5670	**30**	55272,5176	**44**	56856,9158
3	53847,7009	**17**	55475,8952	**31**	56420,3183	**45**	55443,3107
4	54411,3277	**18**	54746,7480	**32**	57263,6525		
5	55817,5074	**19**	56686,5920	**33**	56736,6303		
6	57521,1989	**20**	54256,0288	**34**	55787,8766		
7	56575,9528	**21**	54882,8741	**35**	57745,8833		
8	55503,9033	**22**	55632,9503	**36**	58473,6389		
9	57604,8995	**23**	55116,7158	**37**	58029,1212		
10	57983,8986	**24**	54399,0060	**38**	57232,2991		
11	53732,7348	**25**	57251,6959	**39**	56207,6464		
12	54221,9819	**26**	55004,0953	**40**	55775,6725		
13	77638,1768	**27**	56058,0448	**41**	54980,0300		
14	48264,2460	**28**	56897,3257	**42**	57048,0686		

5.4. Isaki Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralığı

45 örneklem için Eş. (4.13)'deki güven aralığı formülü ile hesaplanan kütüphane kullanıcı sayılarına ilişkin kitle ortalamasının güven aralığı tahmininin uzunluğu Çizelge 5.36'da çizelgede verilmektedir.

Çizelge 5. 36. Isaki Varyans Tahmin Edicisine (s_i^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y}+t\sqrt{\nu_i(\bar{y})}\right)-\left(\bar{y}-t\sqrt{\nu_i(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	Uzunluk	**Örneklem**	Uzunluk	**Örneklem**	Uzunluk	**Örneklem**	Uzunluk
1	56572,6792	**15**	51405,7449	**29**	56602,3637	**43**	56304,0714
2	50694,5875	**16**	52798,6194	**30**	55636,6849	**44**	57101,9366
3	50780,5451	**17**	51852,2961	**31**	56692,3651	**45**	55768,2155
4	54779,1033	**18**	55114,8863	**32**	57500,4700		
5	56136,4140	**19**	56902,1098	**33**	56975,0620		
6	57705,4363	**20**	54653,0041	**34**	56112,5266		
7	56757,1237	**21**	55212,3838	**35**	57888,2035		
8	55831,5409	**22**	55934,2810	**36**	58580,9915		
9	57785,7227	**23**	55418,4117	**37**	58139,2590		
10	58123,9339	**24**	54771,5147	**38**	57422,4710		
11	50691,8091	**25**	57437,0220	**39**	56507,7219		
12	51143,6821	**26**	55368,2970	**40**	56076,5215		
13	57921,2452	**27**	56330,9040	**41**	55348,6470		
14	45029,0239	**28**	57135,4099	**42**	57231,3163		

Çizelge 5. 37'de ise Eş. (4.15)' de gösterilen ve Isaki'nin regresyon varyans tahmin edicisi kullanılarak hesaplanan kütüphane kullanıcı sayılarına ilişkin kitle ortalamasının güven aralığının uzunluğu verilmektedir.

Çizelge 5. 37. Isaki Varyans Tahmin Edicisine (s^2_{ireg}) Ait Güven Aralığı Uzunluğu

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y}+t\sqrt{v_{ireg}(\bar{y})}\right)-\left(\bar{y}-t\sqrt{v_{ireg}(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	Uzunluk	**Örneklem**	Uzunluk	**Örneklem**	Uzunluk	**Örneklem**	Uzunluk
1	56362,3849	**15**	31046,0694	**29**	60506,8655	**43**	60944,5518
2	31437,5624	**16**	31191,8834	**30**	61964,0611	**44**	61100,9845
3	31358,0458	**17**	30701,3926	**31**	61193,6688	**45**	61298,9465
4	61200,3541	**18**	61536,0780	**32**	61347,9118		
5	61542,9956	**19**	60373,0041	**33**	60855,5669		
6	60626,9394	**20**	61696,5709	**34**	61632,6670		
7	59629,9500	**21**	60844,0062	**35**	60103,1250		
8	61415,4412	**22**	61001,2833	**36**	60225,7746		
9	60648,3949	**23**	60499,5423	**37**	59829,3030		
10	60300,5886	**24**	61291,9244	**38**	60447,3797		
11	31363,8801	**25**	60378,3599	**39**	61542,8958		
12	31613,5819	**26**	61702,1775	**40**	61132,3073		
13	21149,6593	**27**	60851,2039	**41**	61774,5466		
14	26444,8710	**28**	61008,4212	**42**	60137,8130		

5.5. Prasad ve Singh Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralığı

45 örneklem için Eş. (4.17) ve Eş. (4.20)'da verilen ve Prasad ve Singh varyans tahmin edicileri kullanılarak hesaplanan kütüphane kullanıcı sayılarına ilişkin kitle ortalamasının güven aralıklarının uzunlukları Çizelge 5.38 ve Çizelge 5.39'da verilmektedir.

Çizelge 5. 38. Prasad ve Singh Varyans Tahmin Edicisine (s^2_{ps1}) Ait Güven Aralığı Uzunluğu

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y}+t\sqrt{v_{ps1}(\bar{y})}\right)-\left(\bar{y}-t\sqrt{v_{ps1}(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**
1	46811,8674	**15**	42536,4141	**29**	46836,4302	**43**	46589,6041
2	41947,9569	**16**	43688,9680	**30**	46037,3656	**44**	47249,8090
3	42019,0837	**17**	42905,9193	**31**	46910,9032	**45**	46146,2025
4	45327,7475	**18**	45605,5959	**32**	47579,5811		
5	46450,8736	**19**	47084,4595	**33**	47144,8247		
6	47749,1834	**20**	45223,4050	**34**	46431,1076		
7	46964,4886	**21**	45686,2716	**35**	47900,4167		
8	46198,6020	**22**	46283,6157	**36**	48473,6740		
9	47815,6175	**23**	45856,7523	**37**	48108,1561		
10	48095,4751	**24**	45321,4682	**38**	47515,0397		
11	41945,6578	**25**	47527,0801	**39**	46758,1176		
12	42319,5666	**26**	45815,2842	**40**	46401,3147		
13	47927,7575	**27**	46611,8071	**41**	45799,0245		
14	37259,9057	**28**	47277,5069	**42**	47356,8660		

Çizelge 5.39. Prasad ve Singh Varyans Tahmin Edicisine (s_{ps2}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y}+t\sqrt{\nu_{ps2}(\bar{y})}\right)-\left(\bar{y}-t\sqrt{\nu_{ps2}(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**
1	57119,0202	**15**	51902,1871	**29**	57148,9914	**43**	56847,8184
2	51184,1619	**16**	53308,5131	**30**	56173,9867	**44**	57653,3888
3	51270,9496	**17**	52353,0508	**31**	57239,8619	**45**	56306,7876
4	55308,1232	**18**	55647,1489	**32**	58055,7710		
5	56678,5419	**19**	57451,6323	**33**	57525,2889		
6	58262,7167	**20**	55180,8062	**34**	56654,4238		
7	57305,2459	**21**	55745,5880	**35**	58447,2490		
8	56370,7246	**22**	56474,4568	**36**	59146,7275		
9	58343,7785	**23**	55953,6056	**37**	58700,7290		
10	58685,2559	**24**	55300,4613	**38**	57977,0188		
11	51181,3566	**25**	57991,7102	**39**	57053,4357		
12	51637,5935	**26**	55903,0069	**40**	56618,0710		
13	58480,6098	**27**	56874,9101	**41**	55883,1671		
14	45463,8840	**28**	57687,1854	**42**	57784,0180		

5.6. Garcia ve Cebrain Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralığı

Eş. (4.22)'de gösterilen ve Garcia ve Cebrain varyans tahmin edicisi kullanılarak hesaplanan güven aralığı tahmininin uzunluğu Çizelge 5.40'da verilmektedir.

Çizelge 5.40. Garcia ve Cebrain Varyans Tahmin Edicisine (s^2_{gc}) Ait Güven Aralığı Uzunluğu

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y}+t\sqrt{v_{gc}(\bar{y})}\right)-\left(\bar{y}-t\sqrt{v_{gc}(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**
1	56307,7872	**15**	53204,9012	**29**	56345,3783	**43**	56000,6996
2	52374,2241	**16**	54728,7840	**30**	55229,3741	**44**	56838,8682
3	52478,1588	**17**	53739,6683	**31**	56397,6472	**45**	55409,6374
4	54366,4523	**18**	54702,0954	**32**	57246,9753		
5	55785,3895	**19**	56672,7381	**33**	56719,5435		
6	57511,3466	**20**	54202,9085	**34**	55754,4944		
7	56566,2667	**21**	54847,7723	**35**	57740,1157		
8	55469,6655	**22**	55604,3700	**36**	58470,4392		
9	57595,4353	**23**	55087,7610	**37**	58025,7233		
10	57978,3432	**24**	54352,8631	**38**	57221,7224		
11	52379,5417	**25**	57241,6728	**39**	56179,6419		
12	52849,8652	**26**	54960,7004	**40**	55747,2706		
13	62041,9471	**27**	56035,0678	**41**	54935,4716		
14	46694,0013	**28**	56880,3433	**42**	57038,2391		

5.7. Upadhyaya ve Singh Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralığı

Eş. (4.24)'te verilen Upadhyaya ve Singh varyans tahmin edicisi kullanılarak hesaplanan kütüphane kullanıcı sayılarına ilişkin kitle ortalamasının güven aralığı tahmininin uzunluğu Çizelge 5.41'de verilmektedir.

Çizelge 5.41. Upadhyaya ve Singh Varyans Tahmin Edicisine (s^2_{gc}) Ait Güven Aralığı Uzunluğu

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y}+t\sqrt{\nu_{us}(\bar{y})}\right)-\left(\bar{y}-t\sqrt{\nu_{us}(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**
1	56572,6793	**15**	51405,7436	**29**	56602,3638	**43**	56304,0716
2	50694,5864	**16**	52798,6180	**30**	55636,6850	**44**	57101,9367
3	50780,5439	**17**	51852,2947	**31**	56692,3652	**45**	55768,2156
4	54779,1035	**18**	55114,8864	**32**	57500,4701		
5	56136,4142	**19**	56902,1099	**33**	56975,0621		
6	57705,4364	**20**	54653,0043	**34**	56112,5267		
7	56757,1237	**21**	55212,3839	**35**	57888,2036		
8	55831,5411	**22**	55934,2811	**36**	58580,9916		
9	57785,7228	**23**	55418,4118	**37**	58139,2591		
10	58123,9339	**24**	54771,5148	**38**	57422,4711		
11	50691,8079	**25**	57437,0220	**39**	56507,7221		
12	51143,6809	**26**	55368,2971	**40**	56076,5216		
13	57921,2398	**27**	56330,9041	**41**	55348,6471		
14	45029,0226	**28**	57135,4100	**42**	57231,3164		

5.8. Chandra ve Singh Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralığı

Eş. (4.26), Eş. (4.30), Eş. (4.32)'de verilen Chandra ve Singh varyans tahmin edicileri kullanılarak hesaplanan kütüphane kullanıcı sayılarına ilişkin kitle ortalamasının güven aralığı tahminlerinin uzunlukları Çizelge 5.42 - Çizelge 5.44'te verilmektedir.

Çizelge 5.42. Chandra ve Singh Varyans Tahmin Edicisine (s^2_{cs1}) Ait Güven Aralığı Uzunluğu

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y}+t\sqrt{v_{cs1}(\bar{y})}\right)-\left(\bar{y}-t\sqrt{v_{cs1}(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**
1	56326,2422	**15**	54761,7018	**29**	56362,7654	**43**	56024,8385
2	53711,0965	**16**	56516,5670	**30**	55272,5176	**44**	56856,9158
3	53847,7009	**17**	55475,8952	**31**	56420,3183	**45**	55443,3107
4	54411,3277	**18**	54746,7480	**32**	57263,6525		
5	55817,5074	**19**	56686,5920	**33**	56736,6303		
6	57521,1989	**20**	54256,0288	**34**	55787,8766		
7	56575,9528	**21**	54882,8741	**35**	57745,8833		
8	55503,9033	**22**	55632,9503	**36**	58473,6389		
9	57604,8995	**23**	55116,7158	**37**	58029,1212		
10	57983,8986	**24**	54399,0060	**38**	57232,2991		
11	53732,7348	**25**	57251,6959	**39**	56207,6464		
12	54221,9819	**26**	55004,0953	**40**	55775,6725		
13	77638,1768	**27**	56058,0448	**41**	54980,0300		
14	48264,2460	**28**	56897,3257	**42**	57048,0686		

Çizelge 5.43. Chandra ve Singh Varyans Tahmin Edicisine (s^2_{cs2}) Ait Güven Aralığı Uzunluğu

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y}+t\sqrt{v_{cs2}(\bar{y})}\right)-\left(\bar{y}-t\sqrt{v_{cs2}(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**
1	56307,7872	**15**	53204,9006	**29**	56345,3783	**43**	56000,6996
2	52374,2236	**16**	54728,7833	**30**	55229,3741	**44**	56838,8681
3	52478,1583	**17**	53739,6676	**31**	56397,6472	**45**	55409,6374
4	54366,4523	**18**	54702,0954	**32**	57246,9753		
5	55785,3895	**19**	56672,7380	**33**	56719,5435		
6	57511,3466	**20**	54202,9085	**34**	55754,4944		
7	56566,2667	**21**	54847,7723	**35**	57740,1157		
8	55469,6655	**22**	55604,3700	**36**	58470,4392		
9	57595,4353	**23**	55087,7610	**37**	58025,7233		
10	57978,3432	**24**	54352,8631	**38**	57221,7224		
11	52379,5411	**25**	57241,6728	**39**	56179,6419		
12	52849,8646	**26**	54960,7004	**40**	55747,2706		
13	62041,9428	**27**	56035,0678	**41**	54935,4716		
14	46694,0007	**28**	56880,3433	**42**	57038,2391		

Çizelge 5.44. Chandra ve Singh varyans tahmin edicisine (s_{cs3}^2) ait güven aralığı uzunluğu

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y}+t\sqrt{v_{cs3}(\bar{y})}\right)-\left(\bar{y}-t\sqrt{v_{cs3}(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**
1	55597,4704	**15**	39994,1052	**29**	55680,5091	**43**	55040,8042
2	40256,0587	**16**	40371,1834	**30**	53348,4996	**44**	56146,6257
3	40193,8756	**17**	39717,8969	**31**	55504,0244	**45**	54003,2821
4	52389,7160	**18**	52739,3429	**32**	56613,0741		
5	54455,2183	**19**	56155,1164	**33**	56067,8086		
6	57154,1372	**20**	51780,3814	**34**	54363,5570		
7	56215,0951	**21**	53369,5238	**35**	57538,3549		
8	54036,2011	**22**	54440,3971	**36**	58361,7569		
9	57253,3800	**23**	53904,7362	**37**	57909,9766		
10	57784,4644	**24**	52309,2507	**38**	56835,9644		
11	40183,2531	**25**	56877,6562	**39**	55044,0541		
12	40512,0877	**26**	53065,1147	**40**	54592,0173		
13	29028,1829	**27**	55127,1479	**41**	52979,2200		
14	34268,8632	**28**	56233,1983	**42**	56681,6953		

5.9. Kadılar ve Çıngı Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralığı

Eş. (4.34), Eş. (4.36), Eş. (4.38), Eş. (4.40) ve Eş.(4.42)'de verilen Kadılar ve Çıngı'nın oransal ve regresyon varyans tahmin edicilerinden yararlanılarak hesaplanan, kütüphane kullanıcı sayılarına ilişkin kitle ortalamasına ait güven aralıklarının uzunlukları Çizelge 5.45- Çizelge 5.49'da verilmektedir.

Çizelge 5.45. Kadılar ve Çıngı Varyans Tahmin Edicisine (s^2_{kc1}) Ait Güven Aralığı Uzunluğu

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y}+t\sqrt{v_{kc1}(\bar{y})}\right)-\left(\bar{y}-t\sqrt{v_{kc1}(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**
1	56572,6792	**15**	51405,7451	**29**	56602,3636	**43**	56304,0714
2	50694,5878	**16**	52798,6197	**30**	55636,6849	**44**	57101,9366
3	50780,5453	**17**	51852,2964	**31**	56692,3650	**45**	55768,2155
4	54779,1033	**18**	55114,8862	**32**	57500,4700		
5	56136,4140	**19**	56902,1098	**33**	56975,0619		
6	57705,4363	**20**	54653,0041	**34**	56112,5266		
7	56757,1236	**21**	55212,3838	**35**	57888,2035		
8	55831,5409	**22**	55934,2809	**36**	58580,9915		
9	57785,7227	**23**	55418,4116	**37**	58139,2590		
10	58123,9339	**24**	54771,5146	**38**	57422,4710		
11	50691,8093	**25**	57437,0219	**39**	56507,7219		
12	51143,6823	**26**	55368,2970	**40**	56076,5215		
13	57921,2463	**27**	56330,9040	**41**	55348,6469		
14	45029,0241	**28**	57135,4098	**42**	57231,3163		

Çizelge 5.46. Kadılar ve Çıngı Varyans Tahmin Edicisine (s^2_{kc2}) Ait Güven Aralığı Uzunluğu

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y}+t\sqrt{v_{kc2}(\bar{y})}\right)-\left(\bar{y}-t\sqrt{v_{kc2}(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**
1	56572,6791	**15**	51405,7462	**29**	56602,3636	**43**	56304,0713
2	50694,5887	**16**	52798,6208	**30**	55636,6847	**44**	57101,9365
3	50780,5463	**17**	51852,2975	**31**	56692,3649	**45**	55768,2154
4	54779,1032	**18**	55114,8861	**32**	57500,4699		
5	56136,4139	**19**	56902,1098	**33**	56975,0619		
6	57705,4362	**20**	54653,0040	**34**	56112,5265		
7	56757,1236	**21**	55212,3836	**35**	57888,2034		
8	55831,5408	**22**	55934,2808	**36**	58580,9915		
9	57785,7226	**23**	55418,4115	**37**	58139,2590		
10	58123,9338	**24**	54771,5145	**38**	57422,4710		
11	50691,8102	**25**	57437,0219	**39**	56507,7218		
12	51143,6833	**26**	55368,2968	**40**	56076,5214		
13	57921,2506	**27**	56330,9039	**41**	55348,6468		
14	45029,0251	**28**	57135,4098	**42**	57231,3162		

Çizelge 5.47. Kadılar ve Çıngı Varyans Tahmin Edicisine (s^2_{kc3}) Ait Güven Aralığı Uzunluğu

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y}+t\sqrt{v_{kc3}(\bar{y})}\right)-\left(\bar{y}-t\sqrt{v_{kc3}(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**
1	56572,6792	**15**	51405,7449	**29**	56602,3637	**43**	56304,0714
2	50694,5876	**16**	52798,6195	**30**	55636,6849	**44**	57101,9366
3	50780,5452	**17**	51852,2962	**31**	56692,3651	**45**	55768,2155
4	54779,1033	**18**	55114,8863	**32**	57500,4700		
5	56136,4140	**19**	56902,1098	**33**	56975,0620		
6	57705,4363	**20**	54653,0041	**34**	56112,5266		
7	56757,1237	**21**	55212,3838	**35**	57888,2035		
8	55831,5409	**22**	55934,2810	**36**	58580,9915		
9	57785,7227	**23**	55418,4117	**37**	58139,2590		
10	58123,9339	**24**	54771,5147	**38**	57422,4710		
11	50691,8091	**25**	57437,0220	**39**	56507,7219		
12	51143,6821	**26**	55368,2970	**40**	56076,5215		
13	57921,2455	**27**	56330,9040	**41**	55348,6470		
14	45029,0239	**28**	57135,4099	**42**	57231,3163		

Çizelge 5.48. Kadılar ve Çıngı Varyans Tahmin Edicisine (s^2_{kc4}) Ait Güven Aralığı Uzunluğu

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y}+t\sqrt{v_{kc4}(\bar{y})}\right)-\left(\bar{y}-t\sqrt{v_{kc4}(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**
1	56572,6791	**15**	51405,7464	**29**	56602,3635	**43**	56304,0713
2	50694,5890	**16**	52798,6212	**30**	55636,6847	**44**	57101,9365
3	50780,5466	**17**	51852,2978	**31**	56692,3649	**45**	55768,2153
4	54779,1031	**18**	55114,8861	**32**	57500,4699		
5	56136,4139	**19**	56902,1097	**33**	56975,0618		
6	57705,4362	**20**	54653,0039	**34**	56112,5264		
7	56757,1236	**21**	55212,3836	**35**	57888,2034		
8	55831,5408	**22**	55934,2808	**36**	58580,9915		
9	57785,7226	**23**	55418,4115	**37**	58139,2590		
10	58123,9338	**24**	54771,5145	**38**	57422,4709		
11	50691,8105	**25**	57437,0219	**39**	56507,7218		
12	51143,6835	**26**	55368,2968	**40**	56076,5213		
13	57921,2518	**27**	56330,9039	**41**	55348,6468		
14	45029,0253	**28**	57135,4097	**42**	57231,3162		

Çizelge 5.49. Kadılar ve Çıngı Varyans Tahmin Edicisine (s^2_{kc5}) Ait Güven Aralığı Uzunluğu

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y}+t\sqrt{v_{kc5}(\bar{y})}\right)-\left(\bar{y}-t\sqrt{v_{kc5}(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**
1	42852,3830	**15**	21953,4486	**29**	42785,2125	**43**	43094,7002
2	22230,2689	**16**	22056,5397	**30**	43815,5539	**44**	43205,3081
3	22174,0794	**17**	21709,7347	**31**	43270,8462	**45**	43345,2900
4	43275,5982	**18**	43512,9833	**32**	43379,9058		
5	43517,8575	**19**	42690,5496	**33**	43031,7744		
6	42870,0823	**20**	43626,4336	**34**	43581,2640		
7	42165,0662	**21**	43023,6219	**35**	42499,6965		
8	43427,6278	**22**	43134,8264	**36**	42586,4158		
9	42885,2799	**23**	42780,0515	**37**	42306,0774		
10	42639,3462	**24**	43340,3474	**38**	42743,1211		
11	22178,1703	**25**	42694,3175	**39**	43517,7454		
12	22354,7185	**26**	43630,3812	**40**	43227,4242		
13	14955,6931	**27**	43028,6941	**41**	43681,5531		
14	18699,8549	**28**	43139,8568	**42**	42524,2532		

5.10. Gupta ve Shabbir Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralığı

Gupta ve Shabbir varyans tahmin edicilerinin Eş. (4.45)'de verilen formülü ile $\alpha_{(gs)} = 0$, $\alpha_{(gs)} = 1$, $\alpha_{(gs)} = -1$ için hesaplanan kütüphane kullanıcı sayılarına ilişkin kitle ortalamasının güven aralıklarının uzunlukları Çizelge 5.50 - Çizelge 5.52'de verilmektedir.

Çizelge 5.50. Gupta ve Shabbir Varyans Tahmin Edicisine (s^2_{gs}) Ait Güven Aralığı Uzunluğu ($\alpha_{(gs)} = 0$)

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y} + t\sqrt{v_{gs}(\bar{y})}\right) - \left(\bar{y} - t\sqrt{v_{gs}(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**
1	56324,2404	**15**	55527,3518	**29**	55967,3071	**43**	55567,3801
2	55144,0873	**16**	56080,8447	**30**	54594,1971	**44**	56533,6519
3	55197,9336	**17**	55766,1521	**31**	56032,6698	**45**	54843,0707
4	53493,6667	**18**	53922,0024	**32**	56993,6459		
5	55303,0636	**19**	56333,4878	**33**	56394,5359		
6	57247,5158	**20**	53233,7733	**34**	55264,0250		
7	56205,7965	**21**	54148,5764	**35**	57459,6145		
8	54915,0627	**22**	55090,4624	**36**	58196,3390		
9	57336,8845	**23**	54468,1431	**37**	57732,2410		
10	57712,4687	**24**	53468,9099	**38**	56932,9130		
11	55156,2258	**25**	56951,7389	**39**	55778,8358		
12	55318,5985	**26**	54254,7451	**40**	55262,0207		
13	57884,1917	**27**	55608,3832	**41**	54218,4437		
14	53748,9858	**28**	56577,6409	**42**	56726,5435		

Çizelge 5.51. Gupta ve Shabbir Varyans Tahmin Edicisine (s^2_{gs}) Ait Güven Aralığı Uzunluğu ($\alpha_{(gs)} = 1$)

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y} + t\sqrt{v_{gs}(\bar{y})}\right) - \left(\bar{y} - t\sqrt{v_{gs}(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**
1	58819,7093	**15**	40756,3254	**29**	58890,1045	**43**	58321,3743
2	41071,1261	**16**	41129,9577	**30**	56813,5792	**44**	59389,9331
3	40999,1009	**17**	40436,0292	**31**	58785,9148	**45**	57369,1212
4	55831,4348	**18**	56195,1982	**32**	59857,9982		
5	57821,5963	**19**	59330,9061	**33**	59291,9970		
6	60309,4781	**20**	55305,9827	**34**	57743,2032		
7	59320,3838	**21**	56723,9673	**35**	60630,5520		
8	57411,6046	**22**	57755,6622	**36**	61431,7446		
9	60406,4306	**23**	57198,7239	**37**	60962,8565		
10	60884,2056	**24**	55764,5023	**38**	59988,6927		
11	40990,4627	**25**	60022,3307	**39**	58381,1134		
12	41339,1354	**26**	56519,6765	**40**	57912,2692		
13	28316,5856	**27**	58394,7907	**41**	56445,5966		
14	34587,5698	**28**	59463,9938	**42**	59812,9812		

Çizelge 5.52. Gupta ve Shabbir Varyans Tahmin Edicisine (s_{gs}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu ($\alpha_{(gs)} = -1$)

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y}+t\sqrt{\nu_{gs}(\bar{y})}\right)-\left(\bar{y}-t\sqrt{\nu_{gs}(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**
1	60792,2288	**15**	33120,2022	**29**	60458,8620	**43**	62340,0588
2	28906,3190	**16**	36347,0673	**30**	66663,3912	**44**	61081,0729
3	29591,0467	**17**	36282,6602	**31**	62212,1299	**45**	64503,5590
4	66410,4200	**18**	66611,2395	**32**	60938,4483		
5	64391,2120	**19**	59440,6745	**33**	60655,8025		
6	58475,2177	**20**	68095,9966	**34**	64695,1875		
7	57623,9198	**21**	64435,7281	**35**	56607,1997		
8	64694,1656	**22**	63300,1966	**36**	55533,0743		
9	58369,0898	**23**	63001,3574	**37**	55307,5735		
10	56682,4951	**24**	66686,7698	**38**	58556,3131		
11	29292,8290	**25**	58329,6898	**39**	63590,8190		
12	29312,7863	**26**	66518,2405	**40**	63362,4690		
13	121197,8412	**27**	62017,8991	**41**	66765,2588		
14	39637,4419	**28**	60749,0508	**42**	58076,0141		

5.11. Subramani ve Kumarapandiyan Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralığı

Subramani ve Kumarapandiyan varyans tahmin edicisi kullanılarak Eş. (4.48)'deki formül ile hesaplanan kütüphane kullanıcı sayılarına ilişkin kitle ortalamasının güven aralığının uzunluğu Çizelge 5.53'te verilmektedir.

Çizelge 5.53. Subramani ve Kumarapandiyan Varyans Tahmin Edicisine (s_{sk}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y}+t\sqrt{v_{sk}(\bar{y})}\right)-\left(\bar{y}-t\sqrt{v_{sk}(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**
1	56572,9545	**15**	51402,3564	**29**	56602,6312	**43**	56304,3836
2	50691,5171	**16**	52794,8922	**30**	55637,0930	**44**	57102,2103
3	50777,4271	**17**	51848,6608	**31**	56692,6691	**45**	55768,5792
4	54779,5156	**18**	55115,2989	**32**	57500,7345		
5	56136,7710	**19**	56902,3504	**33**	56975,3282		
6	57705,6417	**20**	54653,4495	**34**	56112,8900		
7	56757,3257	**21**	55212,7527	**35**	57888,3620		
8	55831,9077	**22**	55934,6181	**36**	58581,1110		
9	57785,9243	**23**	55418,7492	**37**	58139,3816		
10	58124,0898	**24**	54771,9323	**38**	57422,6831		
11	50688,7159	**25**	57437,2286	**39**	56508,0576		
12	51140,5518	**26**	55368,7052	**40**	56076,8581		
13	57906,9999	**27**	56331,2090	**41**	55349,0601		
14	45025,7870	**28**	57135,6757	**42**	57231,5206		

5.12. Singh ve Solanki Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralığı

Singh ve Solanki'nin Çizelge 2.1'de verilen $a_{(ss)}$ ve $b_{(ss)}$'nin farklı değerleri için Eş. (4.50)'de verilen formül ile hesaplanan, kütüphane kullanıcı sayılarına ilişkin kitle ortalamasının güven aralıklarının uzunlukları Çizelge 5.54 - Çizelge 5.63'te verilmektedir.

Çizelge 5.54. Singh ve Solanki Varyans Tahmin Edicisine (s^2_{ss1}) Ait Güven Aralığı Uzunluğu

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y}+t\sqrt{v_{ss1}(\bar{y})}\right)-\left(\bar{y}-t\sqrt{v_{ss1}(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**
1	61824,8990	**15**	38755,0619	**29**	61735,3908	**43**	62137,2656
2	38573,9361	**16**	39321,9730	**30**	63082,4436	**44**	62343,2503
3	38586,3260	**17**	38868,1283	**31**	62404,7248	**45**	62444,3712
4	62282,8920	**18**	62631,7640	**32**	62608,9857		
5	62705,7558	**19**	61627,6925	**33**	62097,6737		
6	61929,0284	**20**	62758,2942	**34**	62791,2260		
7	60903,5973	**21**	61965,5447	**35**	61439,9154		
8	62561,6780	**22**	62166,9409	**36**	61608,0995		
9	61955,3585	**23**	61645,8159	**37**	61196,7209		
10	61646,1728	**24**	62371,5373	**38**	61736,3250		
11	38554,4188	**25**	61671,0729	**39**	62730,3933		
12	38785,9843	**26**	62810,0141	**40**	62303,5076		
13	47918,5209	**27**	62048,8570	**41**	62879,2179		
14	35613,9591	**28**	62256,2434	**42**	61425,3205		

Çizelge 5.55. Singh ve Solanki Varyans Tahmin Edicisine (s^2_{ss2}) Ait Güven Aralığı Uzunluğu

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y}+t\sqrt{v_{ss2}(\bar{y})}\right)-\left(\bar{y}-t\sqrt{v_{ss2}(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**
1	61824,8992	**15**	38755,0601	**29**	61735,3910	**43**	62137,2658
2	38573,9343	**16**	39321,9710	**30**	63082,4438	**44**	62343,2505
3	38586,3243	**17**	38868,1263	**31**	62404,7250	**45**	62444,3714
4	62282,8922	**18**	62631,7642	**32**	62608,9859		
5	62705,7560	**19**	61627,6927	**33**	62097,6739		
6	61929,0285	**20**	62758,2945	**34**	62791,2262		
7	60903,5974	**21**	61965,5449	**35**	61439,9156		
8	62561,6782	**22**	62166,9411	**36**	61608,0996		
9	61955,3586	**23**	61645,8161	**37**	61196,7211		
10	61646,1729	**24**	62371,5375	**38**	61736,3252		
11	38554,4171	**25**	61671,0731	**39**	62730,3935		
12	38785,9826	**26**	62810,0143	**40**	62303,5078		
13	47918,5151	**27**	62048,8572	**41**	62879,2181		
14	35613,9569	**28**	62256,2436	**42**	61425,3206		

Çizelge 5.56. Singh ve Solanki Varyans Tahmin Edicisine (s^2_{ss3}) Ait Güven Aralığı Uzunluğu

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y}+t\sqrt{v_{ss3}(\bar{y})}\right)-\left(\bar{y}-t\sqrt{v_{ss3}(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**
1	61824,8990	**15**	38755,0624	**29**	61735,3907	**43**	62137,2655
2	38573,9365	**16**	39321,9735	**30**	63082,4435	**44**	62343,2503
3	38586,3265	**17**	38868,1288	**31**	62404,7248	**45**	62444,3712
4	62282,8919	**18**	62631,7639	**32**	62608,9857		
5	62705,7557	**19**	61627,6925	**33**	62097,6737		
6	61929,0283	**20**	62758,2941	**34**	62791,2259		
7	60903,5972	**21**	61965,5446	**35**	61439,9154		
8	62561,6779	**22**	62166,9408	**36**	61608,0995		
9	61955,3584	**23**	61645,8158	**37**	61196,7209		
10	61646,1728	**24**	62371,5372	**38**	61736,3250		
11	38554,4193	**25**	61671,0729	**39**	62730,3932		
12	38785,9848	**26**	62810,0140	**40**	62303,5076		
13	47918,5224	**27**	62048,8569	**41**	62879,2178		
14	35613,9597	**28**	62256,2433	**42**	61425,3204		

Çizelge 5.57. Singh ve Solanki Varyans Tahmin Edicisine (s^2_{ss4}) Ait Güven Aralığı Uzunluğu

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y}+t\sqrt{v_{ss4}(\bar{y})}\right)-\left(\bar{y}-t\sqrt{v_{ss4}(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**
1	61824,8993	**15**	38755,0597	**29**	61735,3910	**43**	62137,2658
2	38573,9340	**16**	39321,9706	**30**	63082,4439	**44**	62343,2505
3	38586,3240	**17**	38868,1259	**31**	62404,7251	**45**	62444,3715
4	62282,8923	**18**	62631,7642	**32**	62608,9859		
5	62705,7561	**19**	61627,6927	**33**	62097,6740		
6	61929,0286	**20**	62758,2945	**34**	62791,2263		
7	60903,5975	**21**	61965,5450	**35**	61439,9156		
8	62561,6783	**22**	62166,9411	**36**	61608,0997		
9	61955,3587	**23**	61645,8161	**37**	61196,7211		
10	61646,1730	**24**	62371,5376	**38**	61736,3252		
11	38554,4167	**25**	61671,0731	**39**	62730,3935		
12	38785,9823	**26**	62810,0144	**40**	62303,5079		
13	47918,5141	**27**	62048,8572	**41**	62879,2181		
14	35613,9565	**28**	62256,2436	**42**	61425,3207		

Çizelge 5.58. Singh ve Solanki Varyans Tahmin Edicisine (s^2_{ss5}) Ait Güven Aralığı Uzunluğu

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y}+t\sqrt{v_{ss5}(\bar{y})}\right)-\left(\bar{y}-t\sqrt{v_{ss5}(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**
1	61824,8993	**15**	38755,0596	**29**	61735,3910	**43**	62137,2658
2	38573,9339	**16**	39321,9705	**30**	63082,4439	**44**	62343,2505
3	38586,3239	**17**	38868,1258	**31**	62404,7251	**45**	62444,3715
4	62282,8923	**18**	62631,7642	**32**	62608,9859		
5	62705,7561	**19**	61627,6927	**33**	62097,6740		
6	61929,0286	**20**	62758,2945	**34**	62791,2263		
7	60903,5975	**21**	61965,5450	**35**	61439,9156		
8	62561,6783	**22**	62166,9412	**36**	61608,0997		
9	61955,3587	**23**	61645,8161	**37**	61196,7211		
10	61646,1730	**24**	62371,5376	**38**	61736,3252		
11	38554,4166	**25**	61671,0731	**39**	62730,3935		
12	38785,9822	**26**	62810,0144	**40**	62303,5079		
13	47918,5137	**27**	62048,8572	**41**	62879,2182		
14	35613,9564	**28**	62256,2436	**42**	61425,3207		

Çizelge 5.59. Singh ve Solanki Varyans Tahmin Edicisine (s^2_{ss6}) Ait Güven Aralığı Uzunluğu

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y}+t\sqrt{v_{ss6}(\bar{y})}\right)-\left(\bar{y}-t\sqrt{v_{ss6}(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**
1	61824,3516	**15**	38760,5600	**29**	61734,8508	**43**	62136,6815
2	38578,9989	**16**	39327,7837	**30**	63081,7649	**44**	62342,7066
3	38591,4594	**17**	38873,9695	**31**	62404,1505	**45**	62443,7350
4	62282,2018	**18**	62631,0764	**32**	62608,4521		
5	62705,1285	**19**	61627,1797	**33**	62097,1365		
6	61928,5512	**20**	62757,5717	**34**	62790,5925		
7	60903,1217	**21**	61964,8993	**35**	61439,4836		
8	62561,0393	**22**	62166,3309	**36**	61607,7052		
9	61954,8851	**23**	61645,2021	**37**	61196,3240		
10	61645,7435	**24**	62370,8420	**38**	61735,8410		
11	38559,5235	**25**	61670,5941	**39**	62729,7883		
12	38791,0725	**26**	62809,3330	**40**	62302,8991		
13	47935,4332	**27**	62048,2799	**41**	62878,5320		
14	35620,5317	**28**	62255,7071	**42**	61424,8435		

Çizelge 5.60. Singh ve Solanki Varyans Tahmin Edicisine (s^2_{ss7}) Ait Güven Aralığı Uzunluğu

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y}+t\sqrt{v_{ss7}(\bar{y})}\right)-\left(\bar{y}-t\sqrt{v_{ss7}(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**
1	61824,8992	**15**	38755,0604	**29**	61735,3909	**43**	62137,2657
2	38573,9347	**16**	39321,9714	**30**	63082,4438	**44**	62343,2505
3	38586,3246	**17**	38868,1267	**31**	62404,7250	**45**	62444,3714
4	62282,8922	**18**	62631,7641	**32**	62608,9859		
5	62705,7560	**19**	61627,6927	**33**	62097,6739		
6	61929,0285	**20**	62758,2944	**34**	62791,2262		
7	60903,5974	**21**	61965,5449	**35**	61439,9155		
8	62561,6782	**22**	62166,9411	**36**	61608,0996		
9	61955,3586	**23**	61645,8160	**37**	61196,7210		
10	61646,1729	**24**	62371,5375	**38**	61736,3252		
11	38554,4174	**25**	61671,0731	**39**	62730,3934		
12	38785,9829	**26**	62810,0143	**40**	62303,5078		
13	47918,5162	**27**	62048,8571	**41**	62879,2181		
14	35613,9573	**28**	62256,2435	**42**	61425,3206		

Çizelge 5.61. Singh ve Solanki Varyans Tahmin Edicisine (s^2_{ss8}) Ait Güven Aralığı Uzunluğu

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y}+t\sqrt{v_{ss8}(\bar{y})}\right)-\left(\bar{y}-t\sqrt{v_{ss8}(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**
1	61824,8993	**15**	38755,0596	**29**	61735,3910	**43**	62137,2658
2	38573,9339	**16**	39321,9705	**30**	63082,4439	**44**	62343,2505
3	38586,3239	**17**	38868,1258	**31**	62404,7251	**45**	62444,3715
4	62282,8923	**18**	62631,7642	**32**	62608,9859		
5	62705,7561	**19**	61627,6927	**33**	62097,6740		
6	61929,0286	**20**	62758,2945	**34**	62791,2263		
7	60903,5975	**21**	61965,5450	**35**	61439,9156		
8	62561,6783	**22**	62166,9412	**36**	61608,0997		
9	61955,3587	**23**	61645,8161	**37**	61196,7211		
10	61646,1730	**24**	62371,5376	**38**	61736,3252		
11	38554,4166	**25**	61671,0731	**39**	62730,3935		
12	38785,9822	**26**	62810,0144	**40**	62303,5079		
13	47918,5137	**27**	62048,8572	**41**	62879,2182		
14	35613,9564	**28**	62256,2436	**42**	61425,3207		

Çizelge 5.62. Singh ve Solanki Varyans Tahmin Edicisine (s^2_{ss9}) Ait Güven Aralığı Uzunluğu

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y}+t\sqrt{v_{ss9}(\bar{y})}\right)-\left(\bar{y}-t\sqrt{v_{ss9}(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**
1	61824,7059	**15**	38757,0011	**29**	61735,2003	**43**	62137,0596
2	38575,7217	**16**	39324,0225	**30**	63082,2042	**44**	62343,0585
3	38588,1366	**17**	38870,1885	**31**	62404,5223	**45**	62444,1468
4	62282,6486	**18**	62631,5215	**32**	62608,7975		
5	62705,5346	**19**	61627,5116	**33**	62097,4843		
6	61928,8601	**20**	62758,0394	**34**	62791,0026		
7	60903,4295	**21**	61965,3171	**35**	61439,7631		
8	62561,4527	**22**	62166,7258	**36**	61607,9604		
9	61955,1915	**23**	61645,5994	**37**	61196,5809		
10	61646,0214	**24**	62371,2921	**38**	61736,1543		
11	38556,2192	**25**	61670,9041	**39**	62730,1799		
12	38787,7789	**26**	62809,7739	**40**	62303,2930		
13	47924,4863	**27**	62048,6534	**41**	62878,9760		
14	35616,2773	**28**	62256,0543	**42**	61425,1522		

Çizelge 5.63. Singh ve Solanki Varyans Tahmin Edicisine (s^2_{ss10}) Ait Güven Uralığı uzunluğu

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y}+t\sqrt{\nu_{ss10}(\bar{y})}\right)-\left(\bar{y}-t\sqrt{\nu_{ss10}(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**
1	61824,8992	**15**	38755,0600	**29**	61735,3910	**43**	62137,2658
2	38573,9343	**16**	39321,9710	**30**	63082,4438	**44**	62343,2505
3	38586,3243	**17**	38868,1263	**31**	62404,7250	**45**	62444,3714
4	62282,8922	**18**	62631,7642	**32**	62608,9859		
5	62705,7560	**19**	61627,6927	**33**	62097,6739		
6	61929,0286	**20**	62758,2945	**34**	62791,2262		
7	60903,5974	**21**	61965,5449	**35**	61439,9156		
8	62561,6782	**22**	62166,9411	**36**	61608,0996		
9	61955,3586	**23**	61645,8161	**37**	61196,7211		
10	61646,1729	**24**	62371,5375	**38**	61736,3252		
11	38554,4170	**25**	61671,0731	**39**	62730,3935		
12	38785,9826	**26**	62810,0143	**40**	62303,5078		
13	47918,5150	**27**	62048,8572	**41**	62879,2181		
14	35613,9569	**28**	62256,2436	**42**	61425,3206		

5.13. Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralığı

Çizelge 2.2 ve Çizelge 2.3'deki farklı $\alpha_{(yd)}$ ve $b_{(yd)}$ değerleri için Eş. (4.53)'de verilen formül ile hesaplanan kitle ortalamasına ait güven aralıklarının uzunlukları Çizelge 5.64-Çizelge 5.73'de verilmektedir.

Çizelge 5.64. Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta Varyans Tahmin Edicisine (s^2_{yd0}) Ait Güven Aralığı Uzunluğu ($\lambda = 0$)

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y}+t\sqrt{\nu_{yd0}(\bar{y})}\right)-\left(\bar{y}-t\sqrt{\nu_{yd0}(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**
1	56608,3909	**15**	57884,5554	**29**	56642,4615	**43**	56307,1888
2	57134,4864	**16**	58894,3057	**30**	55544,1492	**44**	57178,9938
3	57241,4669	**17**	58384,4833	**31**	56731,7316	**45**	55702,9468
4	54574,3950	**18**	54954,2746	**32**	57607,7397		
5	56112,5437	**19**	56970,8429	**33**	57043,6232		
6	57829,5378	**20**	54414,8762	**34**	56084,8057		
7	56828,5009	**21**	55082,4989	**35**	58026,8271		
8	55772,3624	**22**	55894,7497	**36**	58748,7248		
9	57914,5753	**23**	55325,9755	**37**	58292,3878		
10	58272,7914	**24**	54563,1270	**38**	57529,6490		
11	57166,2314	**25**	57545,9189	**39**	56525,1760		
12	57421,0168	**26**	55241,9036	**40**	56051,3978		
13	65488,4993	**27**	56338,3525	**41**	55218,1813		
14	55215,3343	**28**	57215,9358	**42**	57329,0282		

Çizelge 5.65. Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta Varyans Tahmin Edicisine (s^2_{yd1}) Ait Güven Aralığı Uzunluğu ($\lambda = 0$)

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y}+t\sqrt{v_{yd1}(\bar{y})}\right)-\left(\bar{y}-t\sqrt{v_{yd1}(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**
1	56608,3908	**15**	57884,5552	**29**	56642,4615	**43**	56307,1888
2	57134,4862	**16**	58894,3055	**30**	55544,1492	**44**	57178,9938
3	57241,4667	**17**	58384,4831	**31**	56731,7316	**45**	55702,9468
4	54574,3949	**18**	54954,2746	**32**	57607,7397		
5	56112,5437	**19**	56970,8429	**33**	57043,6231		
6	57829,5378	**20**	54414,8762	**34**	56084,8057		
7	56828,5009	**21**	55082,4988	**35**	58026,8270		
8	55772,3624	**22**	55894,7497	**36**	58748,7248		
9	57914,5753	**23**	55325,9755	**37**	58292,3878		
10	58272,7914	**24**	54563,1270	**38**	57529,6489		
11	57166,2313	**25**	57545,9189	**39**	56525,1760		
12	57421,0167	**26**	55241,9036	**40**	56051,3978		
13	65488,4987	**27**	56338,3524	**41**	55218,1813		
14	55215,3341	**28**	57215,9358	**42**	57329,0282		

Çizelge 5.66. Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta Varyans Tahmin Edicisine (s^2_{yd2}) Ait Güven Aralığı Uzunluğu ($\lambda = 0$)

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y}+t\sqrt{\nu_{yd2}(\bar{y})}\right)-\left(\bar{y}-t\sqrt{\nu_{yd2}(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**
1	56608,3908	**15**	57884,5554	**29**	56642,4615	**43**	56307,1888
2	57134,4863	**16**	58894,3057	**30**	55544,1492	**44**	57178,9938
3	57241,4669	**17**	58384,4833	**31**	56731,7316	**45**	55702,9468
4	54574,3950	**18**	54954,2746	**32**	57607,7397		
5	56112,5437	**19**	56970,8429	**33**	57043,6232		
6	57829,5378	**20**	54414,8762	**34**	56084,8057		
7	56828,5009	**21**	55082,4989	**35**	58026,8271		
8	55772,3624	**22**	55894,7497	**36**	58748,7248		
9	57914,5753	**23**	55325,9755	**37**	58292,3878		
10	58272,7914	**24**	54563,1270	**38**	57529,6490		
11	57166,2314	**25**	57545,9189	**39**	56525,1760		
12	57421,0168	**26**	55241,9036	**40**	56051,3978		
13	65488,4992	**27**	56338,3525	**41**	55218,1813		
14	55215,3342	**28**	57215,9358	**42**	57329,0282		

Çizelge 5.67. Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta Varyans Tahmin Edicisine (s^2_{yd3}) Ait Güven Aralığı Uzunluğu ($\lambda = 0$)

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y}+t\sqrt{v_{yd3}(\bar{y})}\right)-\left(\bar{y}-t\sqrt{v_{yd3}(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**
1	56608,3909	**15**	57884,5554	**29**	56642,4615	**43**	56307,1888
2	57134,4864	**16**	58894,3057	**30**	55544,1492	**44**	57178,9938
3	57241,4669	**17**	58384,4833	**31**	56731,7316	**45**	55702,9468
4	54574,3950	**18**	54954,2746	**32**	57607,7397		
5	56112,5437	**19**	56970,8429	**33**	57043,6232		
6	57829,5378	**20**	54414,8762	**34**	56084,8057		
7	56828,5009	**21**	55082,4989	**35**	58026,8271		
8	55772,3624	**22**	55894,7497	**36**	58748,7248		
9	57914,5753	**23**	55325,9755	**37**	58292,3878		
10	58272,7914	**24**	54563,1270	**38**	57529,6490		
11	57166,2314	**25**	57545,9189	**39**	56525,1760		
12	57421,0168	**26**	55241,9036	**40**	56051,3978		
13	65488,4993	**27**	56338,3525	**41**	55218,1813		
14	55215,3343	**28**	57215,9358	**42**	57329,0282		

Çizelge 5.68. Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta Varyans Tahmin Edicisine (s^2_{yd4}) Ait Güven Aralığı Uzunluğu ($\lambda = 0$)

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y} + t\sqrt{v_{yd4}(\bar{y})}\right) - \left(\bar{y} - t\sqrt{v_{yd4}(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**
1	56608,3908	**15**	57884,5552	**29**	56642,4615	**43**	56307,1887
2	57134,4862	**16**	58894,3055	**30**	55544,1492	**44**	57178,9938
3	57241,4667	**17**	58384,4831	**31**	56731,7316	**45**	55702,9468
4	54574,3949	**18**	54954,2746	**32**	57607,7397		
5	56112,5437	**19**	56970,8429	**33**	57043,6231		
6	57829,5378	**20**	54414,8762	**34**	56084,8057		
7	56828,5009	**21**	55082,4988	**35**	58026,8270		
8	55772,3624	**22**	55894,7497	**36**	58748,7248		
9	57914,5752	**23**	55325,9754	**37**	58292,3877		
10	58272,7914	**24**	54563,1270	**38**	57529,6489		
11	57166,2312	**25**	57545,9189	**39**	56525,1760		
12	57421,0166	**26**	55241,9036	**40**	56051,3978		
13	65488,4985	**27**	56338,3524	**41**	55218,1813		
14	55215,3341	**28**	57215,9358	**42**	57329,0282		

Çizelge 5.69. Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta Varyans Tahmin Edicisine (s^{2*}_{yd0}) Ait Güven Aralığı Uzunluğu ($\lambda = 1$)

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y}+t\sqrt{v^{*}_{yd0}(\bar{y})}\right)-\left(\bar{y}-t\sqrt{v^{*}_{yd0}(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**
1	56198,5286	**15**	55013,4308	**29**	56235,6563	**43**	55892,8792
2	54056,7812	**16**	56560,0785	**30**	55126,1149	**44**	56732,9796
3	54183,2575	**17**	55655,3290	**31**	56292,0457	**45**	55302,3700
4	54253,5097	**18**	54593,2777	**32**	57142,6076		
5	55680,9465	**19**	56562,6081	**33**	56612,1059		
6	57402,2122	**20**	54092,2342	**34**	55650,5987		
7	56452,7695	**21**	54735,3319	**35**	57627,8949		
8	55363,3821	**22**	55495,8668	**36**	58356,8304		
9	57486,2990	**23**	54974,5307	**37**	57911,6378		
10	57866,5717	**24**	54240,4193	**38**	57111,9138		
11	54079,2226	**25**	57131,4881	**39**	56076,0742		
12	54511,5665	**26**	54854,3389	**40**	55639,9944		
13	69385,2722	**27**	55926,7628	**41**	54829,5107		
14	49495,3944	**28**	56773,8777	**42**	56926,9803		

Çizelge 5.70. Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta Varyans Tahmin Edicisine (s_{yd1}^{2*}) Ait Güven Aralığı Uzunluğu ($\lambda = 1$)

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y}+t\sqrt{v_{yd1}^{*}(\bar{y})}\right)-\left(\bar{y}-t\sqrt{v_{yd1}^{*}(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**
1	56198,5286	**15**	55013,4308	**29**	56235,6563	**43**	55892,8792
2	54056,7813	**16**	56560,0785	**30**	55126,1149	**44**	56732,9796
3	54183,2575	**17**	55655,3290	**31**	56292,0457	**45**	55302,3700
4	54253,5097	**18**	54593,2777	**32**	57142,6076		
5	55680,9465	**19**	56562,6081	**33**	56612,1059		
6	57402,2122	**20**	54092,2342	**34**	55650,5987		
7	56452,7695	**21**	54735,3319	**35**	57627,8949		
8	55363,3821	**22**	55495,8668	**36**	58356,8304		
9	57486,2990	**23**	54974,5307	**37**	57911,6378		
10	57866,5717	**24**	54240,4193	**38**	57111,9138		
11	54079,2226	**25**	57131,4881	**39**	56076,0742		
12	54511,5665	**26**	54854,3389	**40**	55639,9944		
13	69385,2700	**27**	55926,7628	**41**	54829,5107		
14	49495,3948	**28**	56773,8777	**42**	56926,9803		

Çizelge 5.71. Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta Varyans Tahmin Edicisine (s^{2*}_{yd2}) Ait Güven Aralığı Uzunluğu ($\lambda = 1$)

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y}+t\sqrt{v^{*}_{yd2}(\bar{y})}\right)-\left(\bar{y}-t\sqrt{v^{*}_{yd2}(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**
1	56198,5286	**15**	55013,4308	**29**	56235,6563	**43**	55892,8792
2	54056,7812	**16**	56560,0785	**30**	55126,1149	**44**	56732,9796
3	54183,2575	**17**	55655,3290	**31**	56292,0457	**45**	55302,3700
4	54253,5097	**18**	54593,2777	**32**	57142,6076		
5	55680,9465	**19**	56562,6081	**33**	56612,1059		
6	57402,2122	**20**	54092,2342	**34**	55650,5987		
7	56452,7695	**21**	54735,3319	**35**	57627,8949		
8	55363,3821	**22**	55495,8668	**36**	58356,8304		
9	57486,2990	**23**	54974,5307	**37**	57911,6378		
10	57866,5717	**24**	54240,4193	**38**	57111,9138		
11	54079,2226	**25**	57131,4881	**39**	56076,0742		
12	54511,5665	**26**	54854,3389	**40**	55639,9944		
13	69385,2718	**27**	55926,7628	**41**	54829,5107		
14	49495,3945	**28**	56773,8777	**42**	56926,9803		

Çizelge 5.72. Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta Varyans Tahmin Edicisine (s_{yd3}^{2*}) Ait Güven Aralığı Uzunluğu ($\lambda = 1$)

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y} + t\sqrt{v_{yd3}^{*}(\bar{y})}\right) - \left(\bar{y} - t\sqrt{v_{yd3}^{*}(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**
1	56198,5286	**15**	55013,4308	**29**	56235,6563	**43**	55892,8792
2	54056,7812	**16**	56560,0785	**30**	55126,1149	**44**	56732,9796
3	54183,2575	**17**	55655,3290	**31**	56292,0457	**45**	55302,3700
4	54253,5097	**18**	54593,2777	**32**	57142,6076		
5	55680,9465	**19**	56562,6081	**33**	56612,1059		
6	57402,2122	**20**	54092,2342	**34**	55650,5987		
7	56452,7695	**21**	54735,3319	**35**	57627,8949		
8	55363,3821	**22**	55495,8668	**36**	58356,8304		
9	57486,2990	**23**	54974,5307	**37**	57911,6378		
10	57866,5717	**24**	54240,4193	**38**	57111,9138		
11	54079,2226	**25**	57131,4881	**39**	56076,0742		
12	54511,5665	**26**	54854,3389	**40**	55639,9944		
13	69385,2721	**27**	55926,7628	**41**	54829,5107		
14	49495,3944	**28**	56773,8777	**42**	56926,9803		

Çizelge 5.73. Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta Varyans Tahmin Edicisine (s^{2*}_{yd4}) Ait Güven Aralığı Uzunluğu ($\lambda = 1$)

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y}+t\sqrt{v^{*}_{yd4}(\bar{y})}\right)-\left(\bar{y}-t\sqrt{v^{*}_{yd4}(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**
1	56198,5286	**15**	55013,4309	**29**	56235,6563	**43**	55892,8792
2	54056,7813	**16**	56560,0784	**30**	55126,1149	**44**	56732,9796
3	54183,2576	**17**	55655,3290	**31**	56292,0457	**45**	55302,3700
4	54253,5097	**18**	54593,2777	**32**	57142,6076		
5	55680,9465	**19**	56562,6081	**33**	56612,1059		
6	57402,2122	**20**	54092,2342	**34**	55650,5987		
7	56452,7695	**21**	54735,3319	**35**	57627,8949		
8	55363,3821	**22**	55495,8668	**36**	58356,8304		
9	57486,2990	**23**	54974,5307	**37**	57911,6378		
10	57866,5717	**24**	54240,4193	**38**	57111,9138		
11	54079,2227	**25**	57131,4881	**39**	56076,0742		
12	54511,5666	**26**	54854,3389	**40**	55639,9944		
13	69385,2691	**27**	55926,7628	**41**	54829,5107		
14	49495,3949	**28**	56773,8777	**42**	56926,9803		

5.14. Lone ve Tailor Varyans Tahmin Edicisi Güven Aralığı

Eş. (4.56)'da verilen Lone ve Tailor varyans tahmin edicisinden yararlanılarak hesaplanan, kütüphane kullanıcı sayılarına ilişkin kitle ortalamasına ait güven aralığının uzunluğu Çizelge 5.74'de verilmektedir.

Çizelge 5.74. Lone ve Tailor Varyans Tahmin Edicisine (s_{lt}^{2**}) Ait Güven Aralığı Uzunluğu

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y}+t\sqrt{v_{lt}^{**}(\bar{y})}\right)-\left(\bar{y}-t\sqrt{v_{lt}^{**}(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**	**Örneklem**	**Uzunluk**
1	19844,3885	**15**	13434,8804	**29**	19840,0244	**43**	19859,2584
2	13431,9595	**16**	13478,3560	**30**	19513,5204	**44**	19960,1274
3	13319,8440	**17**	13415,8823	**31**	19936,8204	**45**	19823,0045
4	19536,0278	**18**	19613,3039	**32**	20037,6124		
5	19899,2643	**19**	18423,1337	**33**	19922,9812		
6	18770,5979	**20**	19158,8536	**34**	19901,7564		
7	18093,4108	**21**	19575,2355	**35**	18778,0179		
8	19510,0399	**22**	19676,1115	**36**	18870,7485		
9	19988,1711	**23**	19562,6931	**37**	18785,8014		
10	19969,8951	**24**	19538,1943	**38**	18711,5568		
11	13429,6560	**25**	18715,4833	**39**	19605,5829		
12	13462,2341	**26**	19452,6281	**40**	19512,9242		
13	12182,1599	**27**	19855,4831	**41**	19450,1424		
14	12739,3319	**28**	19956,3741	**42**	19868,8948		

Adıyaman ili Kültür ve Turizm Bakanlığına bağlı halk kütüphanelerinin kullanıcı sayılarına ilişkin kitle ortalamasının güven aralığının tahmininde; Klasik, Hirano, Das ve Tripathi, Isaki, Prasad ve Singh, Garcia ve Singh, Upadhyaya ve Singh, Chandra ve Singh, Kadılar ve Çıngı, Shabbir ve Gupta, Subramani ve Kumarapandiyan, Singh ve Solanki, Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta ile Lone ve Tailor varyans tahmin edicileri kullanılmıştır.

Kitle ortalamasının güven aralığı tahmininde, güven aralıkları arasından en dar olan güven aralığı en iyi güven aralığıdır. Her bir hesaplanan güven aralığı tahminlerinin kullanıcı sayısının kitle ortalamasını içeren aralık olma olasılığı %95 olduğu için, aralık ne kadar dar olursa tahmin o kadar iyi olacaktır. Çalışmada, olası tüm 45 örneklem için 44 farklı varyans tahmin edicisinden yararlanarak toplam 1980 (45*44) güven aralığı incelenmiştir. Kütüphane kullanıcı sayılarının kitle ortalamasının güven aralığı tahminlerinden, en dar güven aralığını veren tahmin edici Lone ve Tailor varyans tahmin edicisi (Çizelge 5.74) olarak hesaplanmıştır.

Örneklemlerde en dar güven aralığını belirleyebilmek için; güven aralığının üst sınır değerinden alt sınır değerinin farkı alınmıştır. Her bir varyans tahmin edici için alınan bu fark değerleri her bir örneklem için Excel programı ile filtrelenerek küçükten büyüğe sıralanmıştır.

6. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Örnekleme teorisinde bugüne kadar literatürde çok çeşitli varyans tahmin edicileri önerilmiş ve önerilen tahmin ediciler de birbirileri ile etkinlikleri açısından karşılaştırılmışlardır. Bu çalışmada, literatürde yer alan bazı varyans tahmin edicilerin, *ortalamanın varyans* tahmin edicisinin kitle ortalamasının güven aralığı tahmininde kullanımı üzerine yoğunlaşılmıştır. Tahmin edicilerden yararlanılarak hesaplanan güven aralıkları tahminleri bir uygulama ile karşılaştırılmıştır.

İlk olarak, BRÖ yöntemi için literatürde yer alan yardımcı değişken bilgisini kullanarak önerilen çeşitli oransal ve regresyon tahmin edicileri ile bunların etkinlik karşılaştırmaları incelenmiştir.

Yapılan literatür incelemesi sonrasında, bu tahmin edicilerin *ortalamanın varyans* tahmininde kullanılması önerilmiş ve Eş. (3.6)'da Hirano varyans tahmin edicisi örneğinden yola çıkarak teorik olarak genel bir çıkarım yapılmıştır. Bu çıkarımdan hareketle, BRÖ'de birbirinden farklı *ortalamanın varyans* tahmin edicileri hesaplanmış ve Çizelge 3.1, Çizelge 3.2, Çizelge 3.3'te formülleri ile birlikte gösterilmiştir.

Farklı varyans tahmin edicilerin kitle ortalamasının güven aralığı tahmininde kullanımı önerilmiştir. Klasik varyans tahmin edicisi kullanılarak hesaplanan güven aralığı tahmininde güven aralığı ilgilenilen değişkenin standart sapması ile örneklem büyüklüğüne bağlı olarak değişmekteydi. Ancak diğer varyans tahmin edicileri güven aralığı tahmininde kullanıldığında, güven aralığının yalnızca ilgilenilen değişkenin standart sapmasına ve örneklem büyüklüğüne bağlı olmadığı, yardımcı değişkenin ya da ilgilenilen değişkenin kitle ve örneklem değerlerine de bağlı olarak değiştiği sonucuna ulaşılmıştır.

Uygulama kısmında ise, Kültür ve Turizm Bakanlığına bağlı ve 2016 yılına ilişkin Adıyaman ili halk kütüphanelerinin, kitap ve kullanıcı sayıları üzerinde bir simülasyon çalışması yapılmıştır. N=10 olmak üzere yerine koymadan ve n=8 olacak şekilde, BRÖ ile olası tüm 45 örneklem çekilmiş ve her örneklem için 44 adet farklı varyans tahmin edicileri hesaplanmıştır. Bu tahmin edicilerin beklenen değerleri ve HKO'ları da verilmiştir. Klasik tahmin edici yansız olduğundan $E(s_y^2) = S_y^2 = 1129990976$ olduğu görülmektedir. Diğer tahmin ediciler yanlıdır.

HKO'lar karşılaştırıldığında, tahmin edicilerden HKO'su en küçük olan ve en etkin tahmin edici Gupta ve Shabbir ($s^2_{gs(0)}$) olarak hesaplanmıştır. Her bir örneklem için 44 varyans tahmin ediciden yararlanılarak hesaplanan güven aralığı tahmin değerlerinin uzunlukları da hesaplanmıştır.

1980 güven aralığı tahmininde uzunluk değeri en küçük olan yani en dar güven aralığını Lone ve Tailor varyans tahmin edicisi (Çizelge 5.74) vermiştir.

Bu kitle için en küçük HKO'ya sahip varyans tahmin edici en dar güven aralığı sonucunu vermemiştir. Yani en etkin tahmin edici en dar güven aralığına sahip değildir. Zira burada HKO,

$$\mathrm{HKO}(s_y^2) = \frac{\sum_{i=1}^{45}\left(s_y^2 - S_2^2\right)^2}{45}$$

ile bulunmuştur. Formülünden de anlaşılacağı üzere HKO'nun küçük olması; varyans tahmin edicinin kitle varyansından farkının toplam kare değerinin küçük olmasına bağlıdır. Yani varyans tahmin edicisinin kitle varyansına yakın olması ile ilgilidir. Güven aralığının uzunluğunda ise, her bir örneklemde ortalamalar ve n değişmemekte, varyanslar değişmektedir. Yani güven aralığının uzunluğu varyans tahmin edicilerinin değerlerine bağlı olarak değişmektedir. Lone ve Tailor varyans tahmin edicisinden yararlanılarak oluşturulan güven aralığı uzunluğu,

$\nu_{lt}^{**}(\bar{y}) = \dfrac{s_{lt}^{2**}}{n}$ olmak üzere,

$$\left(\bar{y} + t\sqrt{\nu_{lt}^{**}(\bar{y})}\right) - \left(\bar{y} - t\sqrt{\nu_{lt}^{**}(\bar{y})}\right)$$

formülü ile hesaplanmıştır. Formülden de anlaşılacağı üzere güven aralığının darlığı, her bir örneklemde örneklem ortalaması ve n aynı olduğundan varyans tahmin edicisinin küçük olması ile ilgilidir.

Bu tez çalışmasında BRÖ yöntemi için yapılan ve literatürde yer alan çeşitli varyans tahmin edicilerinin kullanılarak hesaplanan güven aralığı tahminlerinin, tabakalı örnekleme yöntemi gibi diğer örnekleme yöntemleri içinde yapılabileceği düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

[1] Serper, M., Aytaç, Ö., *Örnekleme*, Filiz Kitabevi, Ankara, **1988.**

[2] Çıngı H., *Örnekleme Kuramı,* Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Basımevi, Ankara, **2009.**

[3] Cingi, H., Kadilar, C., *Advances in Sampling Theory-Ratio Method of Estimation*, Bentham Science Publisher*,* **2009.**

[4] Sidelel E. B., Orwa, G. O. and Otieno, R. O., Variance estimation in stratified random sampling in the presence of two auxiliary random variables, *International Journal of Science and Research*, 3(9), 2453–2459, **2014.**

[5] Satıcı E., Kadılar, C., Kayıp gözlem olduğunda kitle ortalamasının tahmini, *A.Ü. Bilim ve Teknoloji Dergisi,* 10(2), 549–556, **2009**.

[6] Özel G., Çıngı H., Oğuz, M., Separate ratio estimators for the population variance in stratified random sampling, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 43(22), 4766–4779, **2014.**

[7] Karakülah, Ü. H., *Basit Rastgele Örnekleme Yönteminde Oransal Tahmin Ediciler,* Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, **2006.**

[8] Ünyazıcı, Y., *Bazı Örnekleme Tasarımlarında Varyans Tahmin Yöntemleri,* Doktora Tezi, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 2008.

[9] Isaki, C., Variance estimation using auxiliary information, *Journal of the American Statistical Association,* 78(381)117-123, **1983.**

[10] Kadılar, C., Cıngı, H., Ratio estimators for the population variance in simple and stratified random sampling, *Applied Mathematics and Computations*, 173(2), 1047–1059, **2005.**

[11] Garcia, M. R., Cebrian, A. A., Repeated substitution method: The ratio estimator for the population variance, *Metrika*, 43(1), 101–105, **1996.**

[12] Misra, P., On Estimation of population variance using auxiliary information, *International Journal of Methematics and Statistics Invention(IJMSI)*, 3(8), 23–28, **2015.**

[13] Panda, K.B., Sahoo, Improved ratio-type exponential estimator for estimating population variance using auxiliary information, *International Journal of Statistics and Systems,* 11(2), 187–195, **2016.**

[14] Chandra, P., Singh, P. H., A family of estimators for population variance using the knowledge of kurtosis of auxiliary variable in sample surveys, *Statistics in Transition*, 7(1), 27–43, **2005.**

[15] Kadılar, C., Cingi, H., Improvement in variance estimation in simple random

sampling, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 36(11), 2075–2081, **2007.**

[16] Gupta, S., Shabbir, J., Variance estimation in simple random sampling using auxiliary information, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics,* 37(1), 57–67, **2008.**

[17] Singh, H. P., Solanki, R. S., A new procedure for variance estimation in simple random sampling using auxiliary information, *Statistical Papers*, 54(2), 479–497, **2013.**

[18] Shabbir, J.,Gupta, S., Some estimators of finite population variance of stratified sample mean, *Communication in Statistics - Theory and Methods*, 39(16), 3001–3008, **2010.**

[19] Subramani, J., Kumarapandiyan, G., Estimation of population mean using co-Efficient of variation and median of an auxiliary variable, *International Journal of Probability and Statistics,* 1(4), 111–118, **2012.**

[20] Yadav, S. K., Kadılar, C., Shabbir, J.,Gupta, S., Improved family of estimators of population variance in simple random sampling, *Journal of Statistical Theory and Practice,* 9(2), 219–226, **2015.**

[21] Searls, D. T., The utilization of a known coefficient of variation in the estimation procedure, *Journal of the American Statistical Association,* 59(308), 59(308), 1225–1226, **1964.**

[22] Lone H. A., Tailor, R., Estimation of population variance in successive sampling, *Journal of Statistics and Management Systems,* 20(1), **2017**.

[23] Yamane, T., *Temel Örnekleme Yöntemleri*, (çev:Esin, A., Bakır, M. A., Aydın, C., Gürbüzsel, E.), Literatür Yayıncılık, Birinci Basım, İstanbul, **2001.**

[24] Özdemir, Y. A., Şahin Tekin, S.T., Esin, A., *Çözümlü Örneklerle Örnekleme Yöntemlerine Giriş*, Seçkin Yayıncılık, **2015.**

[25] Çakıcı, M., Oğuzhan, A., Özdil, T., *İstatistik*, Ekin Yayınevi, Bursa, **2015.**

EKLER

EK1

Adıyaman İlinden Seçilebilecek Tüm Mümkün Örneklemlere İlişkin Betimsel İstatistikler

Örneklem	Kitap Sayısı (x)				Kullanıcı Sayısı (y)			
	$\bar{x}$	x_{min}	x_{max}	s_x^2	$\bar{y}$	y_{min}	y_{max}	s_y^2
1	16485,50	5359	43312	167035858,6	27116,13	2579	105133	1318796841
2	11756,00	5359	26727	55979090,9	14039,63	521	48669	354898137,1
3	11116,38	5359	26727	55507870,0	14128,5	521	48669	353105084
4	15421,25	5359	43312	181689291,1	26651,13	521	105133	1344973909
5	16117,13	5359	43312	174952127,6	26325,38	521	105133	1360076237
6	13885,38	5359	43312	160675304,0	20860,75	521	105133	1319888604
7	12743,88	5359	43312	160671716,4	16849,88	521	105133	1276835299
8	15251,75	5359	43312	176135631,9	22611,13	521	105133	1354444275
9	16817,13	5476	43312	160342563,6	27111,63	521	105133	1320822968
10	16965,63	6664	43312	156669479,7	27368,88	2579	105133	1305717101
11	11796,88	5359	26727	55723102,4	14122,25	521	48669	353236489,4
12	11812,25	5359	26727	55617917,6	13802,75	521	48669	358883423,6
13	9565,13	5359	17882	19408066,4	8657,625	521	39595	160624852
14	10670,75	5359	26727	50205250,8	9791,875	521	48669	251124391
15	12073,00	5359	26727	53093485,1	14418,88	521	48669	346114057
16	12236,13	5476	26727	50803000,4	14292,38	521	48669	349372877,7
17	12221,50	5359	26727	51030692,9	14676,13	2579	48669	338471527
18	15436,63	5359	26727	181456735,4	26331,63	521	105133	1359770501

Adıyaman İlinden Seçilebilecek Tüm Mümkün Örneklemlere İlişkin Betimsel İstatistikler (Devam)

Örneklem	Kitap Sayısı (x)				Kullanıcı Sayısı (y)			
	$\bar{x}$	x_{min}	x_{max}	s_x^2	$\bar{y}$	y_{min}	y_{max}	s_y^2
19	13189,50	5359	43312	163862709,7	21186,5	521	105133	1308855079
20	14295,13	5359	43312	185500580,7	22320,75	521	105133	1366872615
21	15697,38	5359	43312	176772175,4	26947,75	521	105133	1329356899
22	15860,50	5476	43312	173130316,6	26821,25	521	105133	1336238355
23	15845,88	5359	43312	173479166,7	27205	2579	105133	1314347391
24	15380,38	5359	43312	182283899,7	26568,5	521	105133	1349001724
25	13870,00	5359	43312	160853344,3	21180,25	521	105133	1309087313
26	14975,63	5359	43312	180771494,6	22314,5	521	105133	1367121053
27	16377,88	5359	43312	169861989,6	26941,5	521	105133	1329671437
28	16541,00	5476	43312	165966401,4	26815	521	105133	1336551085
29	16526,38	5359	43312	166337999,7	27198,75	2579	105133	1314665603
30	14991,00	5359	43312	180554599,4	21995	521	105133	1378750670
31	16393,25	5359	43312	169595815,4	26622	521	105133	1344680086
32	16556,38	5476	43312	165694494,6	26495,5	521	105133	1351467353
33	16541,75	5359	43312	166066606,8	26879,25	2579	105133	1329862119
34	16076,25	5359	43312	175611750,8	26242,75	521	105133	1364042532
35	14146,13	5359	43312	156915289,0	21476,88	521	105133	1297179557
36	14309,25	5476	43312	153851824,8	21350,38	521	105133	1302479148

Adıyaman İlinden Seçilebilecek Tüm Mümkün Örneklemlere İlişkin Betimsel İstatistikler (Devam)

Örneklem	Kitap Sayısı (x)				Kullanıcı Sayısı (y)			
	$\bar{x}$	x_{min}	x_{max}	s_x^2	$\bar{y}$	y_{min}	y_{max}	s_y^2
37	14294,63	5359	43312	154148818,8	21734,13	2579	105133	1285386923
38	13829,13	5359	43312	161303021,8	21097,63	521	105133	1312081915
39	15414,88	5476	43312	172659927,6	22484,63	521	105133	1360071826
40	15400,25	5359	43312	172993881,1	22868,38	2579	105133	1341984702
41	14934,75	5359	43312	181324469,1	22231,88	521	105133	1370329865
42	16802,50	5359	43312	160723392,3	27495,38	3591	105133	1298677304
43	16337,00	5359	43312	170545974,3	26858,88	521	105133	1333754091
44	16500,13	5476	43312	166665626,7	26732,38	521	105133	1340609849
45	16060,88	5359	43312	175866784,7	26562,25	521	105133	1349310844

ÖZGEÇMİŞ

Kimlik Bilgileri

Adı Soyadı :Ekin Gözde ÖZKAN

Doğum Yeri :Altındağ

Medeni Hali :Evli

E-posta :ekingozde86@hotmail.com

Adresi :Kültür ve Turizm Bakanlığı, Strateji Geliştirme Başkanlığı Ulus/ANKARA

Eğitim

Lise: :Mamak Anadolu Lisesi

Lisans :Hacettepe Üniversitesi, İstatistik Bölümü

Yüksek Lisans :

Yabancı Dil ve Düzeyi

İngilizce : 85 (YDS)

İş Deneyimi

Aralık 2011-… Kültür ve Turizm Bakanlığı, Strateji Geliştirme Başkanlığı

Deneyim Alanları

-

Tezden Üretilmiş Projeler ve Bütçesi

-

Tezden Üretilmiş Yayınlar

-

Tezden Üretilmiş Tebliğ ve/veya Poster Sunumu ile Katıldığı Toplantılar-

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS/DOKTORA TEZ ÇALIŞMASI ORJİNALLİK RAPORU

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
İSTATİSTİK ANABİLİM DALI BAŞKANLIĞI'NA

Tarih: 03/07/2018

Tez Başlığı / Konusu: BASİT RASTGELE ÖRNEKLEME YÖNTEMİNDE KİTLE VARYANS TAHMİN EDİCİLERİNİN KİTLE ORTALAMASININ GÜVEN ARALIKLARINDA KULLANILMASI

Yukarıda başlığı/konusu gösterilen tez çalışmamın a) Kapak sayfası, b) Giriş, c) Ana bölümler d) Sonuç kısımlarından oluşan toplam 143 sayfalık kısmına ilişkin, 03/07/2018 tarihinde tez danışmanım tarafından *Turnitin* adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı %5 'tir.

Uygulanan filtrelemeler:

1- Kaynakça hariç
2- Alıntılar hariç/~~dahil~~
3- 5 kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Çalışması Orjinallik Raporu Alınması ve Kullanılması Uygulama Esasları'nı inceledim ve bu Uygulama Esasları'nda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

Tarih ve İmza

03.07.2018

Adı Soyadı: EKİN GÖZDE ÖZKAN

Öğrenci No: N14121276

Anabilim Dalı: İstatistik

Programı: İstatistik Yüksek Lisans Programı

Statüsü: ☒ Y.Lisans ☐ Doktora ☐ Bütünleşik Dr.

DANIŞMAN ONAYI

UYGUNDUR.

Prof. Dr. Hülya ÇINGI

(Unvan, Ad Soyad, İmza)