

**ÖLÇÜM SİSTEMLERİ ANALİZİNDE VARYANS
BİLEŞENLERİNİN TAHMİNLERİ**

**ESTIMATION OF VARIANCE COMPONENTS IN GAGE
REPEATABILITY & REPRODUCIBILITY**

ZELİHA DİNDAŞ

PROF. DR. SERPİL AKTAŞ ALTUNAY

Tez Danışmanı

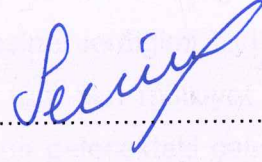
Hacettepe Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim - Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin
İstatistik Anabilim Dalı İçin Öngördüğü
YÜKSEK LİSANS TEZİ
olarak hazırlanmıştır.

2018

ZELİHA DİNDAŞ'ın hazırladığı "Ölçüm Sistemleri Analizinde Varyans Bileşenlerinin Tahminleri" adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından İSTATİSTİK ANABİLİM DALI'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Sevil BACANLI

Başkan



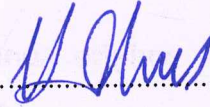
Prof. Dr. Serpil AKTAŞ ALTUNAY

Danışman



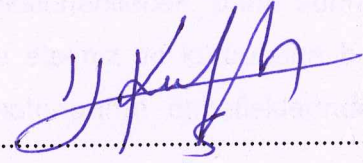
Doç. Dr. Hülya OLMUŞ

Üye



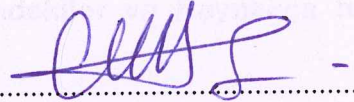
Doç. Dr. Yasemin KAYHAN ATILGAN

Üye



Yrd. Doç. Dr. Esra POLAT

Üye



Bu tez Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. Menemşe GÜMÜŞDERELİOĞLU

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

YAYINLAMA VE FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI BEYANI

Enstitü tarafından onaylanan lisansüstü tezimin/raporumun tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı (kağıt) ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda verilen koşullarla kullanıma açma iznini Hacettepe üniversitesine verdiğimi bildiririm. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet haklarım bende kalacak, tezimin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanım hakları bana ait olacaktır.

Tezin kendi orijinal çalışmam olduğunu, başkalarının haklarını ihlal etmediğimi ve tezimin tek yetkili sahibi olduğumu beyan ve taahhüt ederim. Tezimde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanması zorunlu metinlerin yazılı izin alarak kullandığımı ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederim.

- Tezimin/Raporumun tamamı dünya çapında erişime açılabilir ve bir kısmı veya tamamının fotokopisi alınabilir.

(Bu seçenekle teziniz arama motorlarında indekslenebilecek, daha sonra tezinizin erişim statüsünün değiştirilmesini talep etseniz ve kütüphane bu talebinizi yerine getirirse bile, tezinin arama motorlarının önbelleklerinde kalmaya devam edebilecektir.)

- Tezimin/Raporumun 2.02.2021 tarihine kadar erişime açılmasını ve fotokopi alınmasını (İç Kapak, Özet, İçindekiler ve Kaynakça hariç) istemiyorum.

(Bu sürenin sonunda uzatma için başvuruda bulunmadığım takdirde, tezimin/raporumun tamamı her yerden erişime açılabilir, kaynak gösterilmek şartıyla bir kısmı ve ya tamamının fotokopisi alınabilir)


- Tezimin/Raporumun tarihine kadar erişime açılmasını istemiyorum, ancak kaynak gösterilmek şartıyla bir kısmı veya tamamının fotokopisinin alınmasını onaylıyorum.

- Serbest Seçenek/Yazarın Seçimi

..13.. / 02 / 2018..

Öğrencinin Adı Soyadı

Zo İla DINDAS



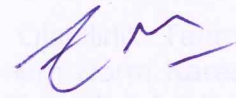
ETİK

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada,

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

13.02/2018



Zeliha DİNDAŞ

Anahtar Kelimeler: Varyans Çözümlemesi (VÇ), En Çok Olabilmek (EÇOB), Kesikli En Çok Olabilirlik (KEÇOB), Minimum Norm Kareler Yansız Tahmin (MNKY), Ölçüm Sistemleri Analizi, Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilebilirlik

ÖZET

ÖLÇÜM SİSTEMLERİ ANALİZİNDE VARYANS BİLEŞENLERİNİN TAHMİNLERİ

Zeliha DİNDAŞ

Yüksek Lisans, İstatistik Bölümü

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Serpil AKTAŞ ALTUNAY

Şubat 2018, 88 sayfa

Bu tez çalışmasında Varyans Çözümlemesi (VÇ), En Çok Olabilirlik Tahmini (EÇOB), Kısıtlı En Çok Olabilirlik Tahmini (KEÇOB) ve Minimum Norm Karesel Yansız Tahmin (MNKY) yöntemlerinden faydalanılarak, Ölçüm Sistemleri Analizine bu tahminlerin nasıl uyarlanabileceği üzerinde durulmuştur. Bu doğrultuda, ilk bölümde Ölçüm Sistemleri Analizinin genel bir tanımı yapılmıştır. İkinci bölümde, Ölçüm Sistemleri Analizinde varyans bileşenlerinin tahmin yöntemlerinden bahsedilmiş olup, tek yönlü varyans çözümlemesine yönelik teorik altyapı verilmiştir. Bu yöntemlerin avantajları ve dezavantajlarından söz edilmiştir. Üçüncü bölümde ise, Ölçüm Sistemleri Analizi ile ilgili çeşitli uygulamalar yapılmış olup, farklı yöntemler ile varyans bileşenleri tahmin edilerek yöntemler arasında karşılaştırma yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Varyans Çözümlemesi (VÇ), En Çok Olabilirlik (EÇOB), Kısıtlı En Çok Olabilirlik (KEÇOB), Minimum Norm Karesel Yansız Tahmin (MNKY), Ölçüm Sistemleri Analizi, Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilirlik

ABSTRACT

ESTIMATION OF VARIANCE COMPONENTS IN GAGE REPEATABILITY & REPRODUCIBILITY

Zeliha DİNDAŞ

Master of Science, Department of Statistics

Supervisor: Prof. Dr. Serpil AKTAŞ ALTUNAY

February 2018, 88 pages

In this thesis study, using the ANOVA, Maximum Likelihood Estimation (ML), Restricted Maximum Likelihood Estimation (REML) and Minimum Norm Quadratic Estimation (MINQUE) methods, how to apply these estimates to the Measurement Systems Analysis (MSA) is discussed. In this respect, a general definition of the MSA is made in the first section. In the second section, the estimation methods of variance components in the MSA are mentioned and the theoretical basis for one way variance analysis is given. Besides, the advantages and disadvantages of these methods are discussed. In the third section, various numerical examples related to the MSA are analyzed and the methods are compared by estimating the variance components by different methods.

Keywords: Analysis of Variance (ANOVA), Maximum Likelihood Estimation (ML), Restricted Maximum Likelihood Estimation (REML), Minimum Norm Quadratic Unbiased Estimation, Measuring System Analysis (MSA), Gage Repeatability & Reproducibility

TEŞEKKÜR

Tez alıőmam sırasında bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana yol gösterici ve destek olan değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Serpil AKTAŞ ALTUNAY'a sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Değerli arkadaşlarım Damla Özge BALCI, Iőıl DURMUŐ ve Neslihan ARSLAN'a,

Çalıőmalarım boyunca manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan değerli eőim Serdar DİNDAŞ'a,

Çocukluğumdan bugüne dek hayatımın her anında yanımda olan çok kıymetli babam Yusuf ŐENER'e, annem Fatma ŐENER'e ve kardeőlerime sonsuz teőekkürler ederim.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
ÇİZELGELER.....	vi
ŞEKİLLER	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR	ix
1. GİRİŞ.....	1
2. LİTERATÜR TARAMASI.....	3
3. KONTROL GRAFİKLERİ	7
3.1 Nicel Kontrol Grafikleri	7
3.1.1 Ortalama Grafikleri (X)	7
3.1.2 Genişlik Kontrol Grafikleri (R)	9
3.2 Nitel Kontrol Grafikleri	10
4. ÖLÇÜM SİSTEMLERİ ANALİZİ	11
5. ÖLÇÜM SİSTEMLERİ ANALİZİNDE VARYANS BİLEŞENLERİNİN TAHMİN YÖNTEMLERİ	19
5.1 Varyans Çözümlemesi (VÇ) Yöntemi.....	19
5.1.1 VÇ'de Doğrudan Türetme Yöntemi	20
5.1.2 VÇ Tahmin Edicileri	22
5.1.3 Varyans Bileşenlerinin Negatif Tahmini	22
5.1.4 Klasik Bir Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilebilirlik Çalışması.....	23
5.2 En Çok Olabilirlik Yöntemi (EÇOB)	25
5.2.1 Dengede Olan Veriler için Olabilirlik.....	27
5.2.2 EÇOB Eşitlikleri ve Çözümleri.....	28
5.2.3 EÇOB Tahmin Edicileri	28
5.3 Kısıtlı En Çok Olabilirlik Yöntemi (KEÇOB).....	32
5.3.1 Dengede Olan Veriler için Olabilirlik.....	33
5.3.2 KEÇOB Eşitlikleri ve Çözümleri	34
5.3.3 KEÇOB Tahmin Edicileri.....	35

5.3.4 Dengede Olmayan Veriler için	35
5.4 Minimum Norm Karesel Yansız Tahmin Yöntemi (MNKY)	35
5.4.1 Varyans Bileşenlerinin Tahmin İlkeleri	37
5.4.1.1 Yansızlık	37
5.4.1.2 β Parametresinin Dönüşümü Altında Değişmezlik	37
5.4.1.3 Değişmezlik ve Yansızlık ile Minimum Norm	38
5.4.1.4 Varyans Bileşenlerinin Hesaplanması.....	39
6. SAYISAL ÖRNEKLER	41
7. SONUÇ VE TARTIŞMA.....	67
KAYNAKLAR.....	70
EKLER	73
EK 1: Kontrol Grafikleri için Değerler	73
EK 2: R Kodları.....	74
ÖZGEÇMİŞ	75

ÇİZELGELER

	<u>Sayfa</u>
Çizelge 4.1 Ölçüm Sonuçları	16
Çizelge 5.1 Rassal Etkili Modelde, Dengede Olan Veriler için Tek Yönlü Varyans Çözümlemesi	20
Çizelge 6.1 Örnek I Yarı İletken Güç Modüllerinin Termal İç Direnci Ölçümü	41
Çizelge 6.2 Örnek I için İki Yönlü VÇ (Etkileşim terimi ile birlikte)	42
Çizelge 6.3 Örnek I için Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilbilirlik Varyans Bileşenleri	42
Çizelge 6.4 Örnek I için Ölçüm Sistemi Değerlendirmesi	43
Çizelge 6.5 Örnek I için VÇ, EÇOB, KEÇOB ve MNKY Yöntemleri ile Varyans Tahminleri	45
Çizelge 6.6 Örnek II Dişli Çapı Ölçüm Sonuçları (mm)	47
Çizelge 6.7 Örnek II için İki Yönlü VÇ (Etkileşim terimi ile birlikte)	47
Çizelge 6.8 Örnek II için İki Yönlü VÇ (Etkileşim terimi olmadan)	48
Çizelge 6.9 Örnek II için Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilbilirlik Varyans Bileşenleri	48
Çizelge 6.10 Örnek II için Ölçüm Sistemi Değerlendirmesi	49
Çizelge 6.11 Örnek II için VÇ, EÇOB, KEÇOB ve MNKY Yöntemleri ile Varyans Tahminleri	51
Çizelge 6.12 Örnek III Manganez Konsantrasyonu Ölçüm Sonuçları (%)	53
Çizelge 6.13 Örnek III için İki Yönlü VÇ	54
Çizelge 6.14 Örnek III için Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilbilirlik Varyans Bileşenleri	55
Çizelge 6.15 Örnek III için Ölçüm Sistemi Değerlendirmesi	56
Çizelge 6.16 Örnek III için VÇ, EÇOB, KEÇOB ve MNKY Yöntemleri ile Varyans Tahminleri	58
Çizelge 6.17 Örnek IV Paralel Plaka Parçalarının Uzunlukları Ölçüm Sonuçları	60
Çizelge 6.18 Örnek IV için İki Yönlü VÇ (Etkileşim terimi ile birlikte)	61
Çizelge 6.19 Örnek IV için İki Yönlü VÇ (Etkileşim terimi olmadan)	61
Çizelge 6.20 Örnek IV için Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilbilirlik Varyans Bileşenleri	62
Çizelge 6.21 Örnek IV için Ölçüm Sistemi Değerlendirmesi	62

ŞEKİLLER

	<u>Sayfa</u>
Şekil 3.1 X Kontrol Grafiği.....	9
Şekil 3.2 Genişlik Kontrol Grafiği	10
Şekil 4.1 Ölçü Aletinin Doğruluğu ve Hassasiyeti	14
Şekil 4.2 X ve R Grafikleri.....	16
Şekil 5.1 (λ, σ_e^2) Düzleminde $\lambda = \sigma_e^2 + n\sigma_a^2$ için Pozitif Dörtlük.....	30
Şekil 6.1 Örnek I için Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilebilirlik	44
Şekil 6.2 Örnek II için Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilebilirlik ...	50
Şekil 6.3 Örnek III için Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilebilirlik ..	57
Şekil 6.4 Örnek IV için Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilebilirlik ..	63

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

μ	Ortalama
σ^2	Varyans
R	Range (Genişlik)
KT	Kareler Toplamı
KO	Kareler Ortalaması

Kısaltmalar

VÇ	Varyans Çözümlemesi
EÇOB	En Çok Olabilirlik Tahmini
KEÇOB	Kısıtlı En Çok Olabilirlik Tahmini
MNKY	Minimum Karesel Yansız Tahmin

1. GİRİŞ

Kalite kontrolü, üretim sürecinde önemli bir rol oynamaktadır. Ürün ve hizmet kalitesini artırmayı ve müşterilerinin beklentilerini karşılamayı hedefleyen firmaların başarılı olabilmesi için gerekli araçlardan biridir. Etkin bir şekilde yapılan kalite kontrolü ile tasarruf ve yüksek düzeylerde verimlilik sağlanabilir. Uluslararası Standartlar Organizasyonu (ISO) tarafından yayınlanan ISO 9001 gibi bir standardı temel alan bir kalite kontrol sisteminden yararlanarak, üretim sürecine katkı sağlanabilir.

Jeh-Nan Pan [1] çalışmasında kaliteli ürünlerin, yeterli düzeyde doğru ölçümler yapan bir ölçüm sistemi ile elde edilebileceğini ifade etmiştir. Bu nedenle, ölçüm sisteminin performansının yeterli olup olmadığının belirlenmesi önemlidir. Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilirlik (Gage Repeatability & Reproducibility) analizi, Ford şirketi tarafından başlatılan ve daha sonra otomobil üreticileri tarafından yaygın olarak kabul edilen QS9000 için gerekliliklerin bir parçasıdır. QS9000'in gelişiminden önce, ABD'de üç büyük otomobil üreticisi kendi kalite sistemine sahiptiler. Daha sonra ISO'nun uluslararası standardına uyum sağlamak ve otomobil üreticileri için ölçüm sistemleri analizi geliştirilmiştir.

Ölçüm sistemleri analizi, kalite kontrol sistemlerinin bir parçasıdır. Genellikle, Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilirlik çalışmalarının, cihazların doğru ölçüm yapıp yapmadıklarının tespit edilmesi ve çeşitli firmaların üretim süreçlerini iyileştirmesi için sürecin başında yapılması tercih edilmektedir. Bu sebeple, ölçüm kalitesinin nasıl elde edileceği kalite kontrolünü uygulayacak kişiler için önem arz etmektedir.

MINITAB paket programı ölçüm sistemleri analizi varyans tahmininde iki metodu kullanmaktadır. Bunlar Varyans Çözümlemesi (VÇ) ve Genişlik (Range)'tir. Uygulamalarda görülmektedir ki VÇ tahmin yönteminde bazı varyans bileşenleri tahminlerinde negatif varyanslılık durumu ile karşılaşmaktadır. Bu sebeple VÇ tahmin yöntemine alternatif yöntemler geliştirilmiştir. Bu yöntemler Minimum En Çok Olabilirlik (EÇOB) tahmini, Kısıtlı En Çok Olabilirlik (KEÇOB) tahmini ve Minimum Norm Karesel Yansız (MNKY) tahmin yöntemidir.

Bu nedenle, Montgomery ve Runger [2] çalışmasında varyans bileşenlerini tahmin etmek için VÇ yöntemine ek olarak, Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilirlik deneyine uyarlanabilecek iki yararlı yaklaşım EÇOB ve MNKY tahmin yöntemlerinden söz etmiştir.

Tez çalışması, dört ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde kalite kontrolünde kullanılan kontrol grafikleri tanıtılmıştır. İkinci bölümde ölçüm sisteminin yeterli olup olmadığını belirlemek için uygulamalarda sıklıkla kullanılan Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilirlik çalışmaları anlatılmış, örnekler verilmiştir. Üçüncü bölümde ise Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilirlik analizinde yer alan parça, operatör, parça x operatör etkileşimi ve hata terimlerinden oluşan varyans bileşenlerinin VÇ, EÇOB, KEÇOB ve MNKY tahmin yöntemleri ile nasıl tahmin edilebileceği incelenmiştir. Dördüncü bölümde, birbirinden farklı özellikler sergileyen dört farklı Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilirlik uygulamaları araştırılmış, MINITAB paket programı kullanılarak çözümlene yapılmış, ekran çıktıları yorumlanmıştır. Daha sonra R programında EK 2'de verilen kodlar yazılarak dört farklı yöntemle varyans bileşenleri tahmin edilmiştir. Yöntemlerden elde edilen sonuçlar birbiri ile karşılaştırılmıştır. Son bölümde ise analizlerin sonuçları özetlenmiş ve yorumlanmıştır.

2. LİTERATÜR TARAMASI

Deming [3], varyans bilgisinin bir firmanın iyileştirme arayışında uygulayabileceği en güçlü araçlardan biri olduğunu belirtmiştir. Varyans, sürecin doğasında bulunduğu ve tahmin edilemediğinden, varyansı minimuma indirme stratejileri oldukça yaygındır [4], [5].

Automotive Industry Action Group (AIAG) [6]'nin 2002 yılında yayınladığı çalışmada herhangi bir üretim sürecinde meydana gelebilecek hataları azaltmak için kullanılan en önemli kalite tekniklerinden birisinin ölçüm sistemleri analizi olduğunu belirtmiştir. Ölçüm sistemleri analizi, bilinmeyen bir niceliği değerlendirerek bunu sayılar ile ifade etmektedir. Grubbs [7] çalışmasında, söz konusu analizin herhangi bir süreçte yer alan, birden fazla varyans kaynağının incelenmesi yoluyla ölçüm hatalarının miktarını belirlediğini ifade etmiştir. Bu varyans, ölçüm sisteminden, operatörlerden ve parçalardan kaynaklanmaktadır.

Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilirlik analizi, herhangi bir ölçüm sisteminin, belirli bir süreci ölçmek için uygun olup olmadığını belirleme yöntemidir. Her ölçümde bazı hatalar bulunmaktadır, fakat bu hata izin verilen değer aralığı (Tolerans bantı) ile karşılaştırıldığında oldukça fazla ise bu durum ölçü aletinin sıklıkla hatalı parçaları kabul edebileceği ve iyi parçaları reddedebileceğini göstermektedir [6]. Genel olarak, Ölçüm Sistemi hassasiyetini ve doğruluğunu Ölçüm Sistemi hatası ve operatör hatası olmak üzere iki kaynak etkilemektedir [8], [2], [9].

Montgomery [10], Montgomery ve Runger [9], [2] çalışmalarında varyans analizinin, Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilirlik çalışmalarından elde edilen verileri analiz etmek ve ölçüm sisteminin varyansını tahmin etmek için genişletilebileceğini göstermiştir.

Montgomery ve Runger [2] çalışmasında varyans bileşenlerini tahmin etmek için varyans analizi yöntemine ek olarak, Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilirlik deneyine uyarlanabilecek iki yararlı yaklaşımdan söz etmiştir. Bunlar EÇOB ve MNKY prosedürüdür.

VÇ tahmin yöntemi Fisher tarafından geliştirilmiştir. Bu alanda birçok çalışma yapılmıştır. Searle et al. [11] çalışması bunlardan biridir. Genel olarak VÇ, kareler

toplaminin beklenen değerlerine eşitlenmesi prosedürünü içeren varyans bileşenleri tahmin yöntemidir. Bu tahmin yöntemi, kayıp gözlemin bulunmadığı ve her bir birim için eşit örneklem büyüklüğünün bulunduğu yani dengede olan veriler için oldukça uygunken, eşit olmayan gözlem sayısının bulunduğu yani dengede olmayan veriler için uygun sonuçlar üretmemektedir. VÇ tahmin edicilerinin, negatif varyansa sahip olması, dağılım özelliklerinin bulunmaması ve VÇ’de farklı uygulamaları karşılaştırma yönteminin olmaması sebebiyle, bu yöntem alternatif olarak çeşitli varyans tahmin yöntemleri geliştirilmiştir.

VÇ yönteminin bu zayıf yönlerinden dolayı EÇOB yöntemi geliştirilmiştir. Crump [12], [13] dengede olan ve dengede olmayan veriler için tek yönlü varyans analizi konusunda çalışmalar yapmış ve dengede olmayan veriler için iteratif olarak özölmesi gereken eşitlikler türetmiştir. Herbach [14] çalışmasında dengede olan bazı veri modelleri için EÇOB tahmin edicileri türetmiş ve bu tahmin edicilerin negatif olmaması gerektiğini açıklamıştır. Çünkü EÇOB yöntemi parametre uzayında maksimizasyonu ve varyans bileşenlerinin negatif olmaması gerektiğini öngörmektedir. Bu yöntemde en önemli alışma Hartley and Rao [15] tarafından 1967 yılında ortaya konulmuştur. Bu çalışmada, çeşitli modeller için yöntemler geliştirilmiştir. Örneğın, dengede olan veya dengede olmayan verilerde, kovaryans içeren veya içermeyen tüm karışık ve rassal modeller.

W. A. Thompson 1962’de EÇOB tahminleri konusunda da çalışmıştır. Ayrıca, Olabilirliğin (Likelihood) modelde yer alan konum parametrelerinden yani diğer bir ifadeyle sabit etkilerden bağımsız olan kısmının maksimize edilmesi fikrini ortaya atan kişidir. Bu durum tek yönlü varyans özömlenmesinde, Olabilirlikte yer alan μ ’yü içermeyen kısmın maksimize edilmesi anlamına gelmektedir. Bu fikir başlangıcını Anderson ve Bancroft [16]’tan almıştır ve daha sonra W. A. Thompson tarafından genişletilmiş olup, Patterson ve R. Thompson tarafından [17] genelleştirilmiştir. EÇOB yöntemi, sabit etkilerle ilişkilendirilen serbestlik derecelerini hesaba katmazken, KEÇOB yöntemi hesaba katmaktadır.

Varyans bileşenlerinin minimum varyans karesel yansız tahmin edicilerini bulma girişimleri Townsend (1968), Harville (1969a) ve Townsend ve Searle (1971) ile başlamıştır. Daha sonra La Motte (1970)’nin minimum varyans tahmini çalışması ve Rao’nun [18], [19], [20] minimum norm karesel yansız eşitlik çalışmaları ile devam

etmiştir. Elde edilen tahmin ediciler genel anlamda, bir Öklit normunun minimize edilmesinden kaynaklanan, minimum genelleştirilmiş bir varyansa sahiptir. MNKY tahminleri, modelde yer alan rassal etkiler veya hata terimi için dağılım özellikleri gerektirmemektedir. Ayrıca iterasyon içermeyip, sadece doğrusal eşitliklerin çözümünü içermektedir.

Milliken ve Johnson [21] çalışmasında VÇ yönteminin, yansız tahminler ürettiğini, EÇOB ve KEÇOB tahmin edicilerinin tutarlı olduğunu ve EÇOB tahminlerinin geniş örneklem büyüklüğü özelliklerine sahip olduğunu belirtmiştir. Bu çalışmaya göre deney düzeni dengeli ve varyans bileşenlerinin çözümleri pozitif ise, VÇ ve KEÇOB tahmin edicileri aynı sonuçları vermektedir. Deney düzeninin dengede olmadığı durumda VÇ yöntemi ile elde edilen tahmin edicilerin hesaplanması kolaydır, ancak diğer üç yöntem iteratif algoritmalar gerektirmektedir. Varyans bileşenlerinin tahmininde genellikle KEÇOB yöntemi tercih edilmektedir.

Bhakhri ve Beloka [22] tarafından yapılan çalışmada, Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilebilirlik analizi ile ölçüm sisteminin yeterli olup olmadığı MINITAB paket programı yardımıyla tespit edilmiştir. Raman, Raghav ve Saurabh isimli 3 operatör tarafından, 14 adet motor yedek parçalarının 3 tekrarlı ölçümlerini içeren bir çalışma yürütülmüştür. Yapılan analiz sonucunda, ölçüm sisteminin yeterli düzeyde olmadığı belirlenmiş ve buna yönelik önerilerde bulunulmuştur.

Yurdigül [23] tarafından hazırlanan çalışmada, dengede olan veri kümelerinde varyans bileşenlerinin tahminini amaçlayan yöntemler gözden geçirilmiş ve bir simülasyon çalışması ile VÇ, EÇOB ve KEÇOB yöntemleri arasında karşılaştırmalar yapılmıştır. Simülasyon sonucunda üretilen farklı özelliklerdeki veri kümelerinin analizi sonucunda EÇOB tahminlerinin diğer metotlara göre daha isabetli sonuçlar verdiği gözlenmiştir.

Çankaya ve Ünalın [24] tarafından yapılan çalışmada Jersey sığırlarında süt verimine ait varyans bileşenleri farklı yöntemlerle tahmin edilmiştir. Çalışmada, Karaköy Tarım İşletmesindeki Jersey sığır sürüsünde 1984-2008 yılları arasında tutulmuş 3630 laktasyon süt verim kaydı kullanılarak varyans bileşenleri ve genetik parametreler VÇ, EÇOB, KEÇOB ve MNKY yöntemleriyle tahmin edilmiştir.

Kayaalp ve Bek [25] ve Karabayır [26], varyans bileşenleri yöntemlerinin kıyaslanmasında hata varyansını minimum tahmin eden yöntemi en iyi yöntem

olarak açıklamıştır. Ayrıca, Esenbuğa ve Dayıoğlu [27] tarafından yapılan çalışmada varyans bileşenlerinin toplam varyanstaki oranının, yöntemlerin kıyaslanmasında diğer önemli bir ölçüt olarak alınması gerektiği ve hatanın toplam varyanstaki oranının küçük olmasının tercih edildiği belirtilmiştir.

3. KONTROL GRAFİKLERİ

1926'da Walter A. Shewhart tarafından teorik altyapısı oluşturulan kontrol grafikleri, sürecin istatistiksel yöntemlerle ekonomik ve güvenilir biçimde kontrol altında tutulmasında en etkili araçlardır. Doğal olmayan nedenlerle ortaya çıkan değişiklikler, süreci olumsuz olarak etkilediğinden bu nedenlerin tanımlanmaları, araştırılmaları ve kontrol altında tutulmaları gerekir. Bir kontrol grafiği, süreçte meydana gelen değişikliklerin doğal ya da doğal olmayan nedenlerden oluştuğunu ayırt etmeye yarayan önemli bir araçtır [28].

Kontrol grafiği, "Belirli ve eşit zaman aralıklarında örneklemelerden elde edilen değerlerin zaman içindeki değişimlerinin gösterildiği grafiklerdir." Kontrol grafiği, sürecin durumunu gözetler, süreçte herhangi bir değişiklik yapıp yapılmayacağını tespit eder [29].

Kalite kontrol grafikleri kendi içinde uygulama alanı açısından verinin türüne göre nicel ve nitel kontrol grafikleri olmak üzere iki gruba ayrılır.

3.1 Nicel Kontrol Grafikleri

Niteliksel ölçümlere göre daha maliyetli olmasına rağmen daha etkin kontrol yöntemlerini mümkün kılması ve süreç performansı ile ilgili daha fazla bilgi sağlaması nedeniyle yaygın olarak kullanılmaktadır. Nicel kontrol grafikleri, merkezi eğilim ve dağılımın tahmin edilmesini ve yaklaşan sorunların önceden fark edilmesini sağladığından tercih edilir.

- Ortalama grafiği (\bar{X})
- Genişlik grafiği (R)
- Standart sapma grafiği (S)

ölçülebilen özellikler için kullanılan nicel kontrol grafikleridir.

3.1.1 Ortalama Grafikleri (\bar{X})

Herhangi bir üretim sürecinden her saat başında belirli bir sayıda parça seçildiği ve her bir örneklemin ortalamasının hesaplandığı varsayalım. Bu örneklem ortalamaları $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3$ ve benzeri gibidir. Bunlar birer alt grup olarak düşünülebilir. Örneklem ortalamalarının sayısını belirtmek için k kullanılır. Genel ortalama, Eşitlik 3.1'de verilen formül ile bulunur.

$$\bar{\bar{X}} = \frac{\text{Alt grupların ortalamalarının toplamı}}{\text{Alt grup sayısı}} \quad (3.1)$$

$$= \frac{\sum \bar{X}}{k}$$

Örneklem ortalamalarının dağılımının standart sapması $S_{\bar{X}}$, örnekteki birim sayısı n ile ifade edilir ve Eşitlik 3.2'de gösterilen formül ile bulunur.

$$S_{\bar{X}} = \frac{S}{\sqrt{n}} \quad (3.2)$$

\bar{X} grafiğinin Alt Kontrol Limiti (AKL) ve Üst Kontrol Limiti (ÜKL) olmak üzere iki limiti vardır. Ortalama için kontrol limitleri Eşitlik 3.3'te gösterilmiştir [30].

$$\text{AKL} = \bar{\bar{X}} - 3 \frac{S}{\sqrt{n}} \quad (3.3)$$

$$\text{ÜKL} = \bar{\bar{X}} + 3 \frac{S}{\sqrt{n}}$$

Burada S , kitlenin standart sapma tahminidir. Eşitliklerde 3 katsayısının kullanılması %99.74 güven aralığını temsil etmektedir. Chebyshev Eşitsizliği olarak bilinen bu limitlere genellikle 3-Sigma limitleri denilmektedir.

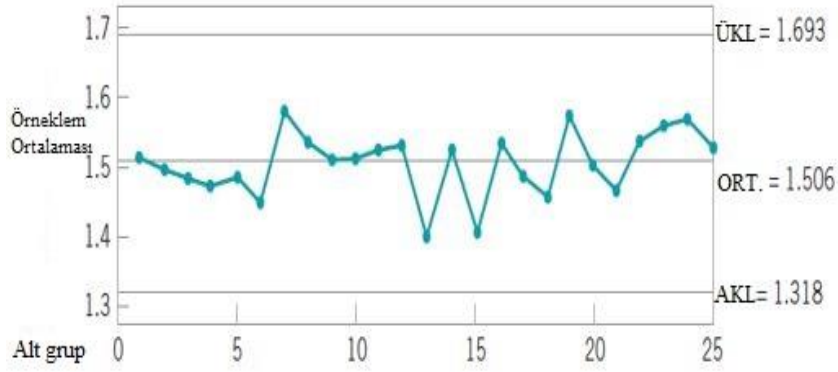
Uygulamada kullanılan kitle ortalaması ve standart sapması bilinmediği durumlarda \bar{X} kontrol grafiği parametreleri Eşitlik 3.4'te verilmiştir [28].

$$\text{AKL} = \bar{\bar{X}} - A_2 \bar{R} \quad (3.4)$$

$$\text{ÜKL} = \bar{\bar{X}} + A_2 \bar{R}$$

Burada yer alan A_2 sabiti, farklı örneklem büyüklükleri için EK 1'de verilmiştir.

Şekil 3.1'de bir \bar{X} Kontrol grafiği verilmiştir.



Şekil 3.1 \bar{X} Kontrol Grafiği¹

3.1.2 Genişlik Kontrol Grafikleri (R)

Genişlik, Eşitlik 3.5'te gösterildiği gibi, her bir örneklemden en büyük değer ile en küçük değer arasındaki farkı yani ilgili örnekleme meydana gelen varyansı ifade etmektedir.

$$\text{Genişlik (R)} = X_{\text{En Büyük Değer}} - X_{\text{En Küçük Değer}} \quad (3.5)$$

$R_1, R_2, R_3, \dots, R_k$ k örnekleme ait genişlik değerleri olsun. Ortalama genişlik değeri Eşitlik 3.6'da gösterilen formül ile bulunur.

$$\bar{R} = \frac{R_1 + R_2 + \dots + R_k}{k} \quad (3.6)$$

Süreç değişkenliği bir kontrol grafiğinde R örneklem genişlik değerlerini çizerek izlenebilir. R grafiğinin merkez çizgisi ve kontrol limitleri Eşitlik 3.7'deki gibi hesaplanır.

$$\text{AKL} = D_3 \bar{R} \quad (3.7)$$

$$\text{Merkez Çizgi} = \bar{R}$$

$$\text{ÜKL} = D_4 \bar{R}$$

Burada yer alan D_3 ve D_4 sabitleri, farklı örneklem büyüklükleri için EK 1'de verilmiştir. Genişliği ifade eden noktaların alt ve üst limitler içerisinde bulunması sürecin kontrol altında olduğunu göstermektedir. Eğer genişlik değeri belirlenen

¹ Montgomery [10]

limitleri aşarsa, süreci etkileyen bir durumun olduğu ve bunun düzeltilmesi gerektiği düşünülebilir. Şekil 3.2’de bir Genişlik kontrol grafiği verilmiştir.



Şekil 3.2 Genişlik Kontrol Grafiği²

3.2 Nitel Kontrol Grafikleri

Değişimleri sayısal olarak ölçülemeyen özellikler için kullanılan kontrol grafikleridir. Nitel kontrol grafiklerine örnek olarak aşağıdaki grafik türleri verilebilir:

- Kusurlu oranı grafiği (p)
- Örnek başına kusur sayısı grafiği (c)
- Kusurlu sayısı grafiği (np)
- Birim başına kusur sayısı grafiği (u) [31].

Bir kontrol grafiği esas olarak üç çizgi ihtiva eder. Bunlar merkez çizgi, üst kontrol limiti ve alt kontrol limitidir. Kalite özelliğinin ortalama değeri merkez çizgi (orta çizgi) ile temsil edilir. Orta çizgi aynı zamanda hedeflenen değer olarak ifade edilir. Kontrol limitleri ve orta çizgi zaman eksenine paralel doğrularla gösterilirler [32].

² Montgomery [10]

4. ÖLÇÜM SİSTEMLERİ ANALİZİ

Ölçüm sisteminin yeterliliğinin belirlenmesi birçok kalite ve süreç iyileştirme faaliyetinin önemli bir unsurudur. Genellikle ölçümü içeren herhangi bir faaliyette, gözlemlenen varyansın bir kısmı ölçülen birimlerde bulunmaktadır. Ölçüm sistemi en az bir ölçü aleti veya göstergedenden oluşmaktadır. Çoğunlukla ölçü aletini kullanan operatörler, farklı ölçüm koşulları veya farklı zaman noktaları gibi başka bileşenlere sahiptir. Kurulum veya kalibrasyon faaliyetleri gibi ölçüm sistemi performansını etkileyen diğer faktörler de bulunabilmektedir.

Birçok ölçüm sistemi yeterliliği çalışmalarının amacı:

- Toplam gözlemlenen varyansın ne kadarlık kısmının ölçüm sisteminden kaynaklandığının belirlenmesi,
- Ölçüm sisteminde bulunan varyans bileşenlerini ayırmak,
- Ölçüm sisteminin yeterli olup olmadığını değerlendirmek (Başka bir ifadeyle, hedeflenen uygulama için uygun olup olmadığını belirlemek).

Ölçümler, herhangi bir kalite sisteminin önemli bir parçasıdır. Ölçüm sistemi Define, Measure, Analyze, Improve, Control (DMAIC)³ yani tanımlama, ölçme, analiz etme, iyileştirme ve kontrol etme adımlarından oluşmaktadır. Etkin olmayan bir ölçüm sistemi iş performansını önemli ölçüde etkileyebilir.

Tekrar Edilebilirlik ve Tekrar üretilebilirlik olmak üzere iki ölçüm sistemi yeterliliği bulunmaktadır.

Tekrar Edilebilirlik: Aynı koşullar altında aynı birimin, birkaç kez ölçülmesi durumunda aynı gözlemlenen değerler elde edilip edilemeyeceğini sorgulamaktadır.

Tekrar Üretilebilirlik: Birimlerin farklı operatörler, farklı zaman periyodları gibi farklı koşullar altında ölçülmesi durumunda gözlemlenen değerlerdeki farkın ne kadar olduğunu sorgulamaktadır.

Yukarıda tanımlanan bu nicelikler, dolaylı olarak temel bir soruyu yanıtlamaktadır: Sistem iyi ve kötü parçaları birbirinden ayırt edebiliyor mu? Başka bir ifadeyle, iyi bir

³ DMAIC: İş süreçlerini ve tasarımları iyileştirmek, optimize etmek ve dengelemek için kullanılan veri odaklı iyileştirme döngüsünü ifade etmektedir.

birimin hatalı olması ve bunun tam tersi, kötü bir birimin müşteriye iyi olarak ulaşma olasılığı nedir? Yanlış sınıflandırma olasılıklarını, standart bir ölçüm sistemi yeterliliği çalışmasının sonuçlarından hesaplamak ve ölçüm sisteminin performansı hakkında güvenilir, kullanışlı ve anlaşılır bilgiler sağlamak oldukça kolaydır.

Tekrar Edilebilirlik ve Tekrar Üretilebilirlik özelliklerine ek olarak ölçüm sisteminin yeterliliği konusunda diğer önemli hususlar:

1. Doğrusallık

2. Durağanlık

3. Yanlılık

Doğrusallık: Bu özelliği tanımlamak için basit doğrusal regresyon modeli kullanılmaktadır. Doğrusallık ile ilgili problemler genellikle kalibrasyon ve onarımdan kaynaklanmaktadır.

Durağanlık: Çevresel faktörler, ısınma etkileri, tutarsız operatör performansı ve yetersiz standart işletim prosedüründen kaynaklanabilir.

Yanlılık: Gözlemlenen ölçümler ile temel bir standarttan veya doğru değerleri ürettiği bilinen farklı bir ölçüm tekniğinden elde edilen “gerçek” değerler arasındaki farkı yansıtmaktadır.

Yetersiz bir ölçüm sistemi ile bir süreci izlemek, kontrol etmek, iyileştirmek veya etkili bir şekilde yönetmek oldukça zordur. Örneğin, sisli bir havada radar olmadan gemiye yön vermek oldukça güçtür. Gemi, en nihayetinde buzdağına çarpacaktır.

Ölçüm sistemleri analizi ile ilgili temel prensipleri tanımlamak amacıyla ölçüm sistemi yeterlilik çalışmaları için Eşitlik 4.1’de verilen basit fakat uygun bir model düşünülebilir.

$$y = x + \varepsilon \quad (4.1)$$

Modelde,

y: Toplam gözlemlenen ölçüm,

x: Bir ürün birimindeki ölçümün gerçek değeri,

ε : Ölçüm hatasını ifade etmektedir.

$$x \sim N(\mu, \sigma_{\text{Parça}}^2)$$

$$\varepsilon \sim N(0, \sigma_{\text{Ölçüm Sistemi}}^2)$$

x ve ε 'un normal dağılımlı ve bağımsız rassal değişkenler olduğu varsayılmaktadır. Burada, $\sigma_{\text{Parça}}^2$ herhangi bir ölçüm sisteminde ölçümlenen parçalara ait varyansı, $\sigma_{\text{Ölçüm Sistemi}}^2$ ise ölçüm hatasını ifade etmektedir.

Toplam varyans, Eşitlik 4.2'deki biçimde tanımlanır.

$$\sigma_{\text{Toplam}}^2 = \sigma_{\text{Parça}}^2 + \sigma_{\text{Ölçüm Sistemi}}^2 \quad (4.2)$$

Kontrol grafikleri ve Sinyal Gürültü Oranı (SGO) (Signal-to-Noise Ratio), Ayıricılık Oranı (AO) (Discrimination Ratio) gibi diğer istatistiksel yöntemler, ölçüm sisteminin yeterliliğinin bir değerlendirmesini yapmak için kullanılabilir.

Ölçüm sisteminin yeterliliği için önerilen başka ölçütler de bulunmaktadır. Bunlardan biri Eşitlik 4.3'te verilen, parçaya ait varyansın toplam varyansa oranıdır. Bu oran, toplam varyansın ne kadarlık kısmının parçalar arasındaki farklılıktan kaynaklandığını göstermektedir.

$$\rho_{\text{Parça}} = \frac{\sigma_{\text{Parça}}^2}{\sigma_{\text{Toplam}}^2} \quad (4.3)$$

Diğer ölçüt ise Eşitlik 4.4'te verilen, ölçüm sistemi varyansının toplam varyansa oranıdır. Bu oran, toplam varyansın ne kadarlık kısmının ölçüm sisteminden kaynaklandığını göstermektedir.

$$\rho_{\text{M}} = \frac{\sigma_{\text{Ölçüm Sistemi}}^2}{\sigma_{\text{Toplam}}^2} \quad (4.4)$$

Açık bir şekilde görülmektedir ki, $\rho_{\text{Parça}} = 1 - \rho_M$ olmaktadır.

Ölçüm sistemi yeterliliğinin diğer bir ölçütü ise AIAG [6] tarafından Eşitlik 4.5'te verilen SGO olarak tanımlanmıştır.

$$SGO = \sqrt{\frac{2\rho_{\text{Parça}}}{1 - \rho_{\text{Parça}}}} \quad (4.5)$$

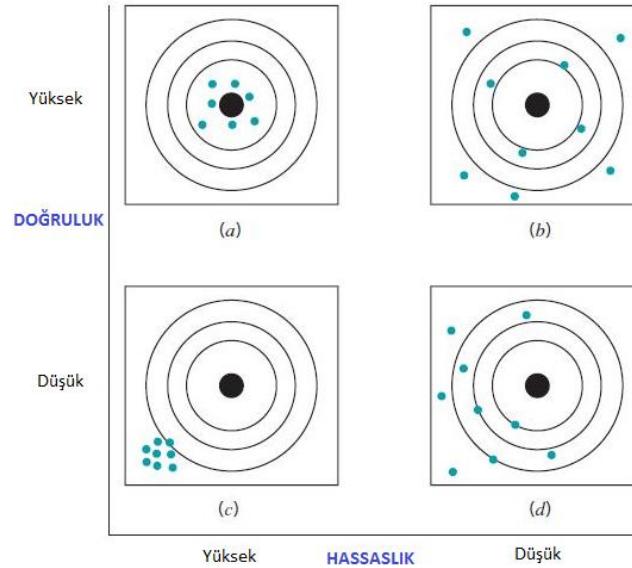
AIAG, SGO'yu ölçümlerden güvenilir şekilde elde edilebilen farklı düzey veya kategorilerin sayısı olarak ifade etmektedir. Yeterli bir ölçüm sistemi için SGO değerinin 5 veya daha fazla olması önerilmektedir.

Ölçüm sisteminin yeterliliği için bir diğer ölçüt ise Eşitlik 4.6'da verilen AO:

$$AO = \frac{1 + \rho_{\text{parça}}}{1 - \rho_{\text{Parça}}} \quad (4.6)$$

Bazı yazarlar, ölçüm sisteminin yeterli olabilmesi için AO değerinin 4'ü geçmesi gerektiğini önermektedir.

Sonuç olarak buraya kadar ki bölümde ölçü aletinin doğruluğuna değil, hassaslığına odaklanılmıştır. Bu iki kavram, Şekil 4.1'de gösterilmiştir.



Şekil 4.1 Ölçü Aletinin Doğruluğu ve Hassasiyeti

Şekil 4.1'de, ölçümü yapılan karakteristiğin gerçek değerinin, merkezdeki nokta olduğu veya Eşitlik 4.1'de verilen x 'in ortalaması μ olduğu kabul edilir.

Şekil 4.1'e göre,

- (a) Ölçü aleti doğru ve hassas ölçümler yapmaktadır.
- (b) Ölçü aleti doğru fakat hassas olmayan ölçümler yapmaktadır.
- (c) Ölçü aleti doğru olmayan fakat hassas ölçümler yapmaktadır.
- (d) Ölçü aleti hem doğru olmayan hem de hassas olmayan ölçümler yapmaktadır.

Doğruluk: Bir özelliğin ölçümünde gerçek değer ile ölçü aletinin gösterdiği değer arasındaki farktır.

Hassaslık: Bir ölçüm sisteminin aynı özelliğe ait tekrarlanan çeşitli ölçümler esnasında aynı değeri verebilme özelliğidir. Diğer bir ifadeyle, ölçüm sistemindeki değişkenliğin bir ölçüsüdür.

Genellikle Tekrar Edilebilirlik ve Tekrar Üretilbilirlik olarak bilinen ölçüm hatasının Eşitlik 4.7'de verilen iki bileşenini araştırmak için, ölçüm sistemi yeterliliği çalışmaları tasarlanabilir.

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{Ölçüm Hatası}}^2 &= \sigma_{\text{Ölçüm Sistemi}}^2 \\ &= \sigma_{\text{Tekrar Edilebilirlik}}^2 + \sigma_{\text{Tekrar Üretilbilirlik}}^2\end{aligned}\tag{4.7}$$

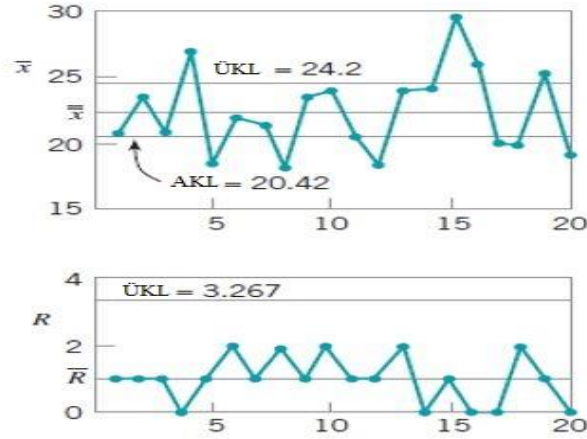
$\sigma_{\text{Ölçüm Sistemi}}^2$ 'nin iki bileşenini ölçmek için yapılan çalışmalara genellikle Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilbilirlik adı verilmektedir [10].

Örnek: Bir süreçten rassal olarak seçilen 20 parça, 1 operatör tarafından belirli bir ölçü aletini rassal sırada 2 kez kullanarak ölçülmüştür. Her parçanın tekrarlanan ölçümleri ölçüm sürecinin yeterliliğini değerlendirmek için kullanılmıştır. Burada n değeri 2'dir. Ölçüm sonuçları Çizelge 4.1'de verilmiştir.

Çizelge 4.1 Ölçüm Sonuçları⁴

Parça	Ölçümler		\bar{X}	R
	1	2		
1	21	20	20,5	1
2	24	23	23,5	1
3	20	21	20,5	1
4	27	27	27	0
5	19	18	18,5	1
6	23	21	22	2
7	22	21	21,5	1
8	19	17	18	2
9	24	23	23,5	1
10	25	23	24	2
11	21	20	20,5	1
12	18	19	18,5	1
13	23	25	24	2
14	24	24	24	0
15	29	30	29,5	1
16	26	26	26	0
17	20	20	20	0
18	19	21	20	2
19	25	26	25,5	1
20	19	19	19	0

Verilerin, ölçüm sistemi yeterliliği çalışması için gerekli \bar{X} ve R grafikleri Şekil 4.2'de verilmiştir.



Şekil 4.2 \bar{X} ve R Grafikleri⁵

⁴ Montgomery [10]

⁵ Montgomery [10]

Grafik incelendiğinde, \bar{X} grafiği 20 parçanın 2 tekrarlı ölçümlerinin ortalamalarını, ölçüm sisteminin ayırt edici gücünü ve ürün birimleri arasında ayırt edebilme yeteneğini tam anlamıyla göstermektedir. R grafiği ise, ölçümler arasındaki farkı yani Genişlik değerini göstermektedir. Ölçüm hatasının büyüklüğünü veya ölçüm sisteminin yeterliliğini (Tekrar Edilebilirlik) ifade etmektedir. Bu örnekte, R grafiği kontrol limitleri içerisinde yer almaktadır. Bu durum, operatörün tutarlı ölçümler yaptığını göstermektedir. R grafiğinde yer alan kontrol dışı noktalar ise operatörün ölçü aletini kullanırken zorlandığını göstermektedir.

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{\text{Toplam}}^2 &= s^2 & (4.8) \\ &= (3.17)^2 \\ &= 10,05\end{aligned}$$

$$\sigma_{\text{Toplam}}^2 = \sigma_{\text{Parça}}^2 + \sigma_{\text{Ölçüm Sistemi}}^2$$

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{\text{Ölçüm Sistemi}}^2 &= \left(\frac{\bar{R}}{d_2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{1,128}\right)^2 \\ &= (0,887)^2 \\ &= 0,79\end{aligned}$$

Farklı örneklem büyüklükleri için d_2 değerleri EK 1'de verilmiştir. Buna göre, parçaya ait varyans tahmini,

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{\text{Parça}}^2 &= \hat{\sigma}_{\text{Toplam}}^2 - \hat{\sigma}_{\text{Ölçüm Sistemi}}^2 & (4.9) \\ &= 10,05 - 0,79 \\ &= 9,26\end{aligned}$$

olarak elde edilmektedir. Standart sapma ise,

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{\text{Parça}} &= \sqrt{9,26} & (4.10) \\ &= 3,04\end{aligned}$$

olarak elde edilmektedir.

Ölçüm sistemi varyansının toplam varyansa oranı,

$$\hat{\rho}_M = \frac{\hat{\sigma}_{\text{Ölçüm Sistemi}}^2}{\hat{\sigma}_{\text{Toplam}}^2} \quad (4.11)$$

$$= \frac{0,79}{10,05}$$

$$= 0,0786$$

olarak elde edilir. Böylece, ölçüm sisteminin varyansı toplam gözlemlenen varyansın %7,86'sını oluşturmaktadır.

$$\hat{\rho}_M = 0,0786$$

$$\hat{\rho}_{\text{Parça}} = 1 - \hat{\rho}_M$$

$$\hat{\rho}_{\text{Parça}} = 1 - \hat{\rho}_M$$

$$= 1 - 0,0786$$

$$= 0,9214$$

elde edilir. Buradan SGO tahmini,

$$SGO = \sqrt{\frac{2\hat{\rho}_{\text{Parça}}}{1 - \hat{\rho}_{\text{Parça}}}} \quad (4.12)$$

$$= \sqrt{\frac{2(0,9214)}{1 - 0,9214}}$$

$$= 4,84$$

olarak bulunmaktadır. Bu ise $SGO \geq 5$ koşulunu karşılamayacaktır.

Bir diğer ölçüt olan AO ise,

$$\widehat{AO} = \frac{1 + \hat{\rho}_p}{1 - \hat{\rho}_p} \quad (4.13)$$

$$= \frac{1 + 0,9214}{1 - 0,9214}$$

$$= 24,45$$

olarak hesaplanmıştır. Ölçüte göre, ölçüm sisteminin yeterli olduğu görülmektedir.

5. ÖLÇÜM SİSTEMLERİ ANALİZİNDE VARYANS BİLEŞENLERİNİN TAHMİN YÖNTEMLERİ

Bu bölümde varyans bileşenleri tahmininde kullanılan tanım ve kavramlar verilmiştir. Ayrıca, ölçüm sistemleri analizinde varyans bileşenlerini tahmin etmek için uygulamalarda sıklıkla kullanılan dört farklı varyans tahmin yöntemi olan Varyans Çözümlemesi (VÇ), En Çok Olabilirlik Tahmini (EÇOB), Kısıtlı En Çok Olabilirlik Tahmini (KEÇOB), Minimum Norm Karesel Yansız Tahmin (MNKY) incelenmiştir.

Dengede olan veri: Kayıp gözlemin bulunmadığı ve her bir birim için eşit örneklem büyüklüğünün olduğu durumdur.

Dengede olmayan veri: Eşit olmayan gözlem sayısının olması durumudur.

Sabit Etkili Model: Uygulama yapısındaki faktörlerin hepsi sabit etkili ise ve çalışmada yalnızca tek bir deney birimi varsa, bloklama yoksa ve varyansların hepsi eşit ise bu modele sabit veya sabit etkili model denir.

Rassal Etkili Model: Uygulama yapısındaki faktörlerin hepsi rassal etkili ise bu modele rassal veya rassal etkili model denir.

Karışık Etkili Model: Uygulama yapısındaki faktörlerin bazıları sabit etkili ve bazıları rassal etkili ise veya uygulama yapısındaki tüm faktörler sabit etkili ve deney yapısında birden fazla deney birimi olduğunda veya modelde en az iki varyans bileşeni varsa bu modele karışık veya karışık etkili model denir [21].

Sabit etkili modellerde uygulama etkilerinin karşılaştırılması ile, rassal modellerde ve karışık modellerde ise varyans bileşenlerinin tahmin edilmesi ile ilgilenilmektedir.

5.1 Varyans Çözümlemesi (VÇ) Yöntemi

VÇ tahmin yöntemi, Gruplar Arası Kareler Toplamı (KT_A) ve Grup İçi Kareler Toplamının (KT_H) beklenen değerlerini türetmeye dayanmaktadır. Gözlemlenen ve beklenen değerler birbirine eşitlenir ve tahmin edici için çözümlenir. Genel model denklemi Eşitlik 5.1'de gösterilmiştir.

$$y_{ij} = \mu + a_i + e_{ij} \quad (5.1)$$

$$i = 1, 2, \dots, a \quad j = 1, 2, \dots, n_i \quad n_i \geq 1 \text{ için}$$

Model denkleminde yer alan terimler:

y_{ij} : i. gruptaki j. gözlem

μ : Genel ortalama

a_i : i. grupta yer alan gözlemin y değişkeni üzerindeki etkisi

e_{ij} : Artık terimi

Dengede olan veriler için her grupta aynı sayıda gözlem bulunduğundan, yani her grup için $n_i = n \forall i$ olur.

Rassal etkili modelde, dengede olan veriler için tek yönlü varyans çözümü Çizelge 5.1’de gösterilmiştir.

Çizelge 5.1 Rassal Etkili Modelde, Dengede Olan Veriler için Tek Yönlü Varyans Çözümü

Varyans Kaynağı	Serbestlik Derecesi	Kareler Toplamı (KT)	Kareler Ortalaması (KO)	F
Gruplar Arası	$a - 1$	$KT_A = n \sum_{i=1}^a (\bar{y}_i - \bar{y}_{..})^2$	$KO_A = KT_A / (a - 1)$	$\frac{KO_A}{KO_H}$
Grup İçi	$a(n - 1)$	$KT_H = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_i)^2$	$KO_H = KT_H / a(n - 1)$	
Toplam	$an - 1$	$KT_{TM} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2$		

KT_{TM} : Ortalama için düzeltilmiş toplam kareler toplamını ifade etmektedir.

5.1.1 VÇ’de Doğrudan Türetme Yöntemi

Kareler toplamlarının beklenen değerlerinin hesaplanması için kullanılan bir yöntemdir.

$$y_{ij} = \mu + a_i + e_{ij} \quad (5.2)$$

$$i = 1, 2, \dots, a \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Eşitlik 5.2’de verilen model denkleminde Eşitlik 5.3’te yer alan sonuçlara ulaşılmaktadır.

$$\bar{y}_i = \mu + a_i + \bar{e}_i \quad \bar{e}_i = \sum_{j=1}^n e_{ij} / n \text{ için,} \quad (5.3)$$

$$\bar{y}_{..} = \mu + \bar{a} + \bar{e}_{..} \quad \bar{a} = \sum_{i=1}^a a_i / a \text{ ve } \bar{e}_{..} = \sum_{i=1}^a \bar{e}_i / a$$

Böylelikle $E(a_i e_{i'j'}) = 0$ bilgisi kullanılarak $E(KT_A)$,

$$\begin{aligned}
 E(KT_A) &= E \left[n \sum_{i=1}^a (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 \right] & (5.4) \\
 &= n \sum_{i=1}^a E[(a_i - \bar{a}) + (\bar{e}_{i.} - \bar{e}_{..})]^2 \\
 &= n \sum_{i=1}^a E(a_i - \bar{a})^2 + E(\bar{e}_{i.} - \bar{e}_{..})^2
 \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır.

$E(a_i) = 0 = E(e_{ij})$, $E(y_{ij}) = \mu$, $Cov(e_{ij}, e_{i'j'}) = 0$ $i = i'$ ve $j = j'$ hariç bilgileri de kullanılarak Eşitlik 5.5 elde edilir.

$$\begin{aligned}
 E(KT_A) &= n \sum_{i=1}^a [V(a_i - \bar{a}) + V(\bar{e}_{i.} - \bar{e}_{..})]^2 & (5.5) \\
 &= n \sum_{i=1}^a \left(\sigma_a^2 + \frac{\sigma_a^2}{a} - \frac{2\sigma_a^2}{a} \right) + n \sum_{i=1}^a \left(\frac{\sigma_e^2}{n} + \frac{\sigma_e^2}{an} - \frac{2n\sigma_e^2}{nan} \right) \\
 &= n(a-1)\sigma_a^2 + (a-1)\sigma_e^2 \\
 &= (a-1)(n\sigma_a^2 + \sigma_e^2)
 \end{aligned}$$

$KO_A = KT_A / (a-1)$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
 E(KO_A) &= \frac{E(KT_A)}{a-1} \\
 &= n\sigma_a^2 + \sigma_e^2
 \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde Eşitlik 5.6 ve Eşitlik 5.7'de verilen $E(KT_H)$ ve $E(KO_H)$ 'ya ulaşılabilir.

$$E(KT_H) = E \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2 \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned}
 &= a(n-1)\sigma_e^2 \\
 E(KO_H) &= \frac{E(KT_H)}{a(n-1)} & (5.7) \\
 &= \frac{a(n-1)\sigma_e^2}{a(n-1)}
 \end{aligned}$$

$$= \sigma_e^2.$$

5.1.2 VÇ Tahmin Edicileri

Eşitlik 5.5 ve Eşitlik 5.6'ta yer alan sonuçlar elde edildikten sonra, VÇ tahmin yöntemi olarak ifade edilen kareler toplamını, beklenen değerlerine eşitle prensibi kullanılabilir. Varyans bileşenlerinde doğrusal olan bu eşitlikler, $\hat{\sigma}_e^2$ ve $\hat{\sigma}_a^2$ tahmin edicileri kullanılarak Eşitlik 5.8'de yeniden düzenlenmiştir.

$$\begin{aligned} KT_A &= E(KT_A) & (5.8) \\ &= (a - 1)(n\hat{\sigma}_a^2 + \hat{\sigma}_e^2) \\ KT_H &= E(KT_H) \\ &= a(n - 1)\hat{\sigma}_e^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise Eşitlik 5.9'da verilen tahmin edicileri getirmektedir.

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_e^2 &= \frac{KT_H}{a(n - 1)} & (5.9) \\ &= KO_H \\ \hat{\sigma}_a^2 &= \left(\frac{KT_A}{a - 1} - \hat{\sigma}_e^2 \right) / n \\ &= \frac{KO_A - KO_H}{n} \end{aligned}$$

$E(\hat{\sigma}_e^2) = \sigma_e^2$ ve $E(\hat{\sigma}_a^2) = \sigma_a^2$ olduğu için bu tahmin ediciler yansızdır.

5.1.3 Varyans Bileşenlerinin Negatif Tahmini

VÇ tahminlerinde negatif tahminler ile karşılaşılabilir. Eğer $KO_A - KO_H$ ise sonuç negatif olacaktır. Bu durum verinin özelliği ile ilgilidir. Bazı verilerde $KO_A < KO_H$ iken bazılarında böyle bir durum olmamaktadır. VÇ metodunda, negatif tahminleri giderecek bir yöntem yoktur. Bilindiği gibi varyans asla negatif olamaz. Burada iki sorun ortaya çıkmaktadır. Bunlardan birincisi, negatif bir varyans tahmini ile ne yapılabileceği, ikincisi ise negatif tahminlerden nasıl sakınılabileceğidir.

Birinci sorunun cevabı olarak, negatif tahmin yanlış bir modelin kullanıldığının göstergesi olabilir. Bu durumda modelin değiştirilmesi denenebilir. Ya da varyans bileşeninin gerçek değerinin sıfır olduğunun göstergesi olabilir. Yani $\sigma_a^2 = 0$ 'dır. Eğer σ_a^2 değeri özellikle büyük ve negatif ise ve yansız olması $\sigma_a^2 = 0$ olduğunu ifade

edebilir. Eğer bu şekilde kabul edilirse, Eşitlik 5.1'de verilen model denklemi $y_{ij} = \mu + e_{ij}$ olacak şekilde indirgenir. Burada σ_e^2 'nin VÇ tahmin edicisi $\hat{\sigma}_e^2 = \frac{KT_{TM}}{an-1}$ olur.

İkinci sorunun cevabı olarak ise negatif tahminlerden kaçınmak için öncelikli olarak hatalı veri girişi veya aritmetiksel bir hata olup olmadığı kontrol edilmelidir. İkinci olarak ise daha fazla veri toplanarak, toplam veri setinin pozitif tahminler getirmesi beklenebilir. Daha ciddi bir alternatif olarak, negatif tahmin olasılıklarını açık bir şekilde ortadan kaldıran EÇOB, KEÇOB ve BAYES tahminleri kullanılabilir. Varyans bileşenleri hakkında güçlü bir ön bilgi var ise, MNKY tahmini denenebilir [11].

5.1.4 Klasik Bir Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilirlik Çalışması

Klasik bir Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilirlik analizi $\sigma_{\text{Tekrar Edilebilirlik}}^2$ ve $\sigma_{\text{Tekrar Üretilirlik}}^2$ tahminlerini elde etmek için örneklem genişliklerini kullanmaktadır. Bir deney düzeni modelinin varyans bileşenlerinin tahmin edildiği Ölçüm Sistemi çalışması için deney düzeni yaklaşımı tanımlanmıştır. Benzer bir yaklaşım Tsai [8] ve Deutler [33] tarafından kullanılmıştır. i. operatör tarafından j. parçanın k. tekrarının ölçümü X_{ijk} ile gösterilmektedir. Eşitlik 5.10'da iki etkenli faktöriyel model varsayılmıştır.

$$Y_{ijk} = \mu + O_i + P_j + (OP)_{ij} + R_{k(ij)} \quad (5.10)$$

$$i = 1, 2, \dots, o \quad j = 1, 2, \dots, p \quad k = 1, 2, \dots, n$$

O_i , P_j , OP_{ij} ve $R_{k(ij)}$ sırasıyla operatörün, parçanın, operatör x parça etkileşiminin ve ölçümlerdeki tekrarların etkilerini ifade eden rassal değişkenlerdir. μ ise tüm gözlemlerin ortalama değeridir. Ölçüm sistemi yeterliliği çalışmalarında genellikle operatör, parça, operatör x parça etkileşimi ve tekrar etkenlerinin Eşitlik 5.11'deki varsayımlar ile bağımsız, rassal etkili olduğu ve normal dağılıma uyduğu düşünülmektedir.

$$O_i \sim N(0, \sigma_o^2) \quad (5.11)$$

$$P_j \sim N(0, \sigma_p^2)$$

$$(OP)_{ij} \sim N(0, \sigma_{op}^2)$$

$$R_{k(ij)} \sim N(0, \sigma_R^2).$$

Ölçüm sistemi yeterliliği çalışmalarında parçalar genellikle rassal etkili kabul edilmektedir. Bazı durumlarda operatörlerin mevcut olan tek operatörler olmasından dolayı, operatörlere sabit etkili davranılıp davranılmayacağı tartışılabilir. Bununla birlikte, genellikle operatörlerin daha geniş kitleden rassal seçilen operatörler olması arzu edilmektedir. Bu nedenle, operatörler için rassal etkili yaklaşımı genellikle uygun olmaktadır. Operatör ve parça etkenleri faktöriyel değişkenlerdir. Çünkü parçaların tamamı tüm operatörler tarafından ölçülmüştür ve Tekrar Edilebilirlik etkeni parça ve operatör içerisinde yer almıştır.

Eşitlik 5.10'da verilen model kolaylıkla açıklanıp analiz edilmesine rağmen, bu modelin bir takım etkileri önemlidir.

Parça, operatör, parça x operatör etkileşimi ve tekrar ile ilgili modeldeki terimlerin ortalamalarının sıfır olması varsayımı, ölçüm sisteminin yansız olduğunu göstermektedir.

Varyans bileşenleri sabit kabul edilmektedir. Örneğin, varyans ölçümün büyüklüğüyle artmaz. Varyans ölçüm büyüklüğü ile orantılı ise bağımlı değişkenin logaritma dönüşümü veya yüzde değişimleri kullanılabilir. Modelde ölçümlerin parça, operatör, parça x operatör etkileşimi ve tekrar etkenlerinin de doğrusal olduğu varsayılmaktadır.

Eşitlik 5.10'da verilen modele göre Beklenen Kareler Toplamı $E(KT)$ ve Varyans Bileşenlerinin Tahmini aşağıdaki formüllere göre bulunmaktadır.

Beklenen Kareler Toplamı:

$$E(KT_O) = \sigma_R^2 + n\sigma_O^2 + pn\sigma_0^2$$

$$E(KT_P) = \sigma_R^2 + n\sigma_{OP}^2 + on\sigma_P^2$$

$$E(KT_{OP}) = \sigma_R^2 + n\sigma_{OP}^2$$

$$E(KT_R) = \sigma_R^2$$

Varyans Bileşenlerinin Tahmini:

$$\sigma_0^2 = (KT_O - KT_{OP})/pn$$

$$\sigma_P^2 = (KT_P - KT_{OP})/on$$

$$\sigma_{OP}^2 = (KT_{OP} - KT_R)/n$$

$$\sigma_R^2 = KT_R$$

$$\sigma_{\text{Tekrar Edilebilirlik}}^2 = \sigma_R^2 \quad (5.12)$$

$$\sigma_{\text{Tekrar Üretilebilirlik}}^2 = \sigma_0^2 + \sigma_{OP}^2$$

σ_0^2 çalışmada farklı operatörlerden kaynaklanan varyansın miktarını ifade etmektedir. Varyans bileşenlerinin tahmininde VÇ yönteminde, beklenen kareler ortalaması gözlemlenen değerlere eşitlenir ve elde edilen eşitlikler varyans bileşenlerinin tahmini için çözümlenir. Bir moment tahmin edicisi olan bu yöntemin teknik detayları Searle [11] tarafından açıklanmıştır. Daha önce bahsedildiği gibi VÇ yöntemi, varyans bileşenleri için negatif tahminler üretebilmektedir. Bu durumun VÇ'nin en büyük dezavantajlarından biri olduğu düşünülmektedir. Varyans bileşeninin negatif tahminine bir yaklaşım olarak negatif tahminler sıfır ile değiştirilebilmektedir. Bununla birlikte Searle [11], varyans bileşeninin negatif tahminini sıfır ile değiştirmenin modelde yer alan diğer parametrelerin yanlış tahminlerine neden olabileceğini belirtmiştir. Modifiye edilmiş bir varyans analizi yönteminin daha iyi bir alternatif olduğu düşünülmüştür [9].

5.2 En Çok Olabilirlik Yöntemi (EÇOB)

Bu yöntem ilk olarak Hartley and Rao [15] tarafından 1967 yılında ortaya konmuştur. Varyans bileşenlerini tahmin etmek için EÇOB yaklaşımı birtakım ilgi çekici özelliklere sahiptir. EÇOB tahmin edicileri istatistiksel olarak yeterlidir, tutarlıdır ve asimptotik olarak normaldir ve etkilidir. Bu özelliklere rağmen varyans bileşenlerinin EÇOB tahmin edicileri pratikte pek kullanılamamıştır. Bu durumun çeşitli nedenleri bulunmaktadır. Bunların en önemlisi EÇOB tahmin edicilerinin hesaplanması, kısıtlı doğrusal olmayan bir optimizasyon probleminin sayısal çözümünü gerektirmektedir. Bilgisayarlar yaygınlaştıktan sonra bile EÇOB, varyans bileşenlerini tahmin etmek için çok fazla kullanılmamıştır. İkinci olarak, varyans bileşenlerinin EÇOB tahmin edicileri modelde yer alan sabit etkilerin tahmininden kaynaklanan serbestlik derecesi kaybını hesaba katmamaktadır. Son olarak EÇOB tahmin edicileri, veri vektörünün dağılımı için genellikle normal dağılım olan, belirli bir parametrik form varsayımı altında türetilmektedir. Bahsi geçen problemlerden birincisi, Patterson ve Thompson [17] tarafından 1971 yılında KEÇOB yaklaşımı ile ortadan kaldırılmıştır [34].

Herbach [14], bazı dengede olan veri modelleri için EÇOB tahmin edicileri türetmiş ve bu tahmin edicilerin negatif olmaması gerekliliğini dikkate almıştır.

Sürekli değişkenli bir veriden elde edilen varyans bileşenlerinin EÇOB tahminleri genellikle normallik varsayımı ile sınırlıdır. Dengede olmayan veriler için,

$$y = N(\mu 1_N, V = k\sigma_a^2 J_{n_i} + \sigma_e^2 I_{n_i}) \quad (5.13)$$

olarak tanımlanmıştır.

Eşitlik 5.13'te yer alan,

1_N : Elemanları 1'lerden oluşan N boyutlu bir sütun matrisi

V: Yayılım matrisi veya varyans-kovaryans matrisi

J_{n_i} matrisi : $1_{n_i} 1_{n_i}' = J_{n_i}$

I_{n_i} matrisi : n_i boyutlu birim matrisi ifade etmektedir.

k indisi ile sadece köşegen elemanlarının değer aldığı, diğer elemanların 0 olduğu köşegen matris gösterilmektedir.

Olabilirlik fonksiyonu Eşitlik 5.14'te tanımlanmıştır.

$$L = L(\mu, V | y) \quad (5.14)$$

$$= \frac{\exp\left[-\frac{1}{2}(y - \mu 1_N)'V^{-1}(y - \mu 1_N)\right]}{(\sqrt{2\pi})^N |V|^{\frac{1}{2}}}$$

Eşitlik 5.14, y'nin yoğunluk fonksiyonu olan $f(y | \mu, V)$ ile aynıdır.

$$L(\mu, V | y) \equiv f(y | \mu, V) \quad (5.15)$$

Her ne kadar bu iki ifade tam olarak aynı fonksiyonu temsil ediyor olsa da her biri kendi bağlamında kullanılmaktadır. $f(y | \mu, V)$ gösterimi, μ ve V'nin sabit davranıldığı, y'nin yoğunluk fonksiyonuna odaklanıldığı durumda kullanılmakta iken $L(\mu, V | y)$, aynı fonksiyon yani Eşitlik 5.14'ün sağ tarafı, verilen herhangi bir y veri vektörü için μ ve V'nin bir fonksiyonu olarak görülebileceği vurgulanmak istenildiğinde kullanılmaktadır. μ ve V'nin EÇOB tahmininin temeli olarak kullanılan bağlamdır. V'nin EÇOB tahmini, V'nin σ_a^2 ve σ_e^2 'nin EÇOB tahminleri yerine konulduğunda elde edilen halidir.

Eşitlik 5.13'te ifade edilen, $aI + BJ$ gösterimini içeren V ile Eşitlik 5.16'daki ifadeler elde edilmektedir.

$$V^{-1} = \left\{ \frac{1}{k\sigma_e^2} \left(I_{n_i} - \frac{\sigma_a^2}{\sigma_e^2 + n_i\sigma_a^2} J_{n_i} \right) \right\} \quad (5.16)$$

$$|V| = \prod_{i=1}^a \sigma_e^{2(n_i-1)} (\sigma_e^2 + n_i\sigma_a^2)$$

Daha sonra Eşitlik 5.17 elde edilir.

$$L = \frac{\exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_e^2} \left[\sum_i \sum_j (y_{ij} - \mu)^2 - \sum_i \frac{\sigma_a^2}{\sigma_e^2 + n_i\sigma_a^2} (y_i - n_i\mu)^2 \right] \right\}}{(\sqrt{2\pi})^N \sigma_e^{2\left[\frac{1}{2}(N-a)\right]} \prod_{i=1}^a (\sigma_e^2 + n_i\sigma_a^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (5.17)$$

L'yi maksimum yapan parametre değerleri L'nin doğal logaritmasını maksimum yapan değerlere eşittir. Ayrıca, l ile ifade edilen logaritması alınan fonksiyon log L, matematiksel açıdan işlem kolaylığı sağladığı için Eşitlik 5.18 ile ilgilenilmiştir.

$$\begin{aligned} l &= \log L & (5.18) \\ &= \log[L(\mu, V | y)] \\ &= -\frac{1}{2}N \log 2\pi - \frac{1}{2}(N-a) \log \sigma_e^2 - \frac{1}{2} \sum_i \log (\sigma_e^2 + n_i\sigma_a^2) \\ &\quad - \frac{\sum_i \sum_j (y_{ij} - \mu)^2}{2\sigma_e^2} + \frac{1}{2\sigma_e^2} \sum_i \frac{\sigma_a^2}{\sigma_e^2 + n_i\sigma_a^2} (y_i - n_i\mu)^2 \end{aligned}$$

5.2.1 Dengede Olan Veriler için Olabilirlik

Dengede olan veriler için $n_i = n \forall i$ 'dir. Bu durum, log L'yi büyük ölçüde basitleştirmektedir ve Eşitlik 5.19'a ulaşılmaktadır.

$$\begin{aligned} l &= \log L & (5.19) \\ &= -\frac{1}{2}N \log 2\pi - \frac{1}{2}a(n-1) \log \sigma_e^2 - \frac{1}{2}a[\log(\sigma_e^2 + n\sigma_a^2)] \\ &\quad - \frac{\sum_i \sum_j (y_{ij} - \mu)^2}{2\sigma_e^2} + \frac{n^2\sigma_a^2 \sum_i (\bar{y}_i - n_i\mu)^2}{2\sigma_e^2(\sigma_e^2 + n\sigma_a^2)} \end{aligned}$$

Son iki terim KT_A ve KT_H 'yi göstermek için Eşitlik 5.20'deki gibi düzenlenebilir.

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2\sigma_e^2} \left[\sum_i \sum_j (y_{ij} - \bar{y}_i + \bar{y}_i - \mu)^2 - \frac{n\sigma_a^2}{\sigma_e^2 + n\sigma_a^2} \sum_i n(\bar{y}_i - \mu)^2 \right] & (5.20) \\ &= -\frac{1}{2\sigma_e^2} \left[KT_H + \left(1 - \frac{n\sigma_a^2}{\sigma_e^2 + n\sigma_a^2} \right) \sum_i n(\bar{y}_i - \bar{y}_{..} + \bar{y}_{..} - \mu)^2 \right] \\ &= -\frac{1}{2\sigma_e^2} \left\{ KT_H + \frac{\sigma_e^2}{\sigma_e^2 + n\sigma_a^2} [KT_A + an(\bar{y}_{..} - \mu)^2] \right\} \end{aligned}$$

Gösterim: Parametrelerin fonksiyonunun EÇOB tahminleri parametrelerin EÇOB tahminleri ile aynı fonksiyon olduğu için, gösterim $\lambda = \sigma_e^2 + n\sigma_a^2$ şeklinde yazılarak basitleştirilmiştir. Daha sonra 1, Eşitlik 5.21 şeklinde elde edilmiştir [11].

$$l = \log L \quad (5.21)$$

$$= -\frac{1}{2}N \log 2\pi - \frac{1}{2}a(n-1) \log \sigma_e^2 - \frac{1}{2}a \log \lambda - \frac{KT_H}{2\sigma_e^2} - \frac{KT_A}{2\lambda} - \frac{an(\bar{y}_{..} - \mu)^2}{2\lambda}$$

5.2.2 EÇOB Eşitlikleri ve Çözümleri

EÇOB tahmin edicileri $\log L$ 'nin μ , σ_e^2 , λ 'a göre kısmi türevleri sıfıra eşitlenerek, Eşitlik 5.22'de verilen biçimde elde edilmektedir.

$$\frac{\partial l}{\partial \mu} = \frac{an(\bar{y}_{..} - \mu)}{\lambda} \quad (5.22)$$

$$\frac{\partial l}{\partial \sigma_e^2} = \frac{-a(n-1)}{2\sigma_e^2} + \frac{KT_H}{2\sigma_e^4} = \frac{-a(n-1)}{2\sigma_e^4} \left[\sigma_e^2 - \frac{KT_H}{a(n-1)} \right]$$

$$\frac{\partial l}{\partial \lambda} = -\frac{a}{2\lambda} + \frac{KT_A}{2\lambda^2} + \frac{an(\bar{y}_{..} - \mu)^2}{2\lambda^2} = \frac{-a}{2\lambda^2} \left(\lambda - \frac{KT_A}{a} \right) + \frac{an(\bar{y}_{..} - \mu)^2}{2\lambda^2}$$

Eşitlik 5.22'de verilen kısmi türevler sıfıra eşitlenirken μ , σ_e^2 ve λ parametreleri, bu eşitliklerin çözümlerini ifade eden $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}_e^2$, $\hat{\lambda}$ ile değiştirilmiştir.

$$\hat{\mu} = \bar{y}_{..} \quad (5.23)$$

$$\hat{\sigma}_e^2 = KO_H$$

$$\hat{\lambda} = \frac{KT_A}{a} = \left(1 - \frac{1}{a}\right) KO_A$$

$$\hat{\sigma}_a^2 = \frac{\hat{\lambda} - \hat{\sigma}_e^2}{n} = \frac{\left(1 - \frac{1}{a}\right) KO_A - KO_H}{n}$$

Eşitlik 5.23'de gösterilenler, EÇOB eşitliklerinin çözümleridir. $L(\hat{\mu}, \hat{\sigma}_e^2, \hat{\sigma}_a^2 | y)$ ile aynı olan $L(\hat{\mu}, \hat{\nu} | y)$ ifadesi, μ , σ_e^2 ve σ_a^2 'daki değişim için $L(\mu, \sigma_e^2, \sigma_a^2 | y)$ 'nin maksimumu olmasına rağmen bunlar EÇOB tahmin edicileri değildir.

5.2.3 EÇOB Tahmin Edicileri

EÇOB tahmin edicileri $\tilde{\mu}$, $\tilde{\sigma}_e^2$, $\tilde{\sigma}_a^2$ şeklinde gösterilsin. Bunun sebebi, elde edilen çözümlerin μ , σ_e^2 , σ_a^2 için parametre uzayında her zaman yer almamasıdır. Özellikle de, $\tilde{\sigma}_a^2$ tahmini negatif olabilmektedir. Böyle bir durum olduğunda varyans olarak tanımlanan ve negatif olmaması gereken σ_a^2 , $(0, \infty)$ olan parametre uzayında

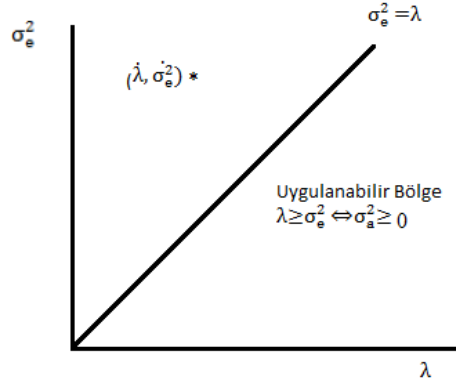
bulunmamaktadır. Yani $0 \leq \sigma_a^2 < \infty$ olmalıdır. Böylelikle genel olarak, σ_a^2 çözümü, $\tilde{\sigma}_a^2$ 'nın sadece negatif olmadığı durumda EÇOB tahmini olacaktır. EÇOB tanımına göre Olabilirlik parametre uzayı içerisinde maksimum olmalıdır. Bu yüzden, EÇOB tahmin edicileri parametre uzayında yer almalıdır ki bu $\tilde{\sigma}_e^2 > 0$ ve $\tilde{\sigma}_a^2 \geq 0$ anlamına gelmektedir.

Neyse ki tek yönlü sınıflandırmada σ_a^2 , mutlaka parametre uzayında olması gerekmeyen üç tane $\mu, \sigma_e^2, \sigma_a^2$ EÇOB çözümlerinden sadece biridir. Bu durum, $-\infty < \mu < +\infty$, $0 \leq \sigma_a^2 < \infty$ ve $0 < \sigma_e^2 < \infty$ olduğundan parametrelerin yapısından kaynaklanmaktadır. $\mu, \sigma_e^2, \sigma_a^2$ için sırası ile çözümler düşünülecektir. Öncelikle μ, σ_e^2 ve σ_a^2 ya bağlı olmadığından ve $\mu = \bar{y}_..$ açık bir şekilde μ uzayında olduğundan, Eşitlik 5.24'te ifade edildiği gibi, bu μ 'nün EÇOB tahmin edicisidir,

$$EÇOB(\mu) = \tilde{\mu} = \hat{\mu} = \bar{y}_.. \quad (5.24)$$

ve KT_H değeri asla negatif olamayacağından $\sigma_e^2 = KT_H$, σ_e^2 için parametre uzayında yer almaktadır. Fakat σ_a^2 değeri, σ_e^2 'e bağlı olduğundan, sadece $\tilde{\sigma}_e^2$ 'nin σ_e^2 için parametre uzayında bulunduğunu değil ayrıca $(\tilde{\sigma}_e^2, \tilde{\sigma}_a^2)$ tahmin edici çiftlerinin de (σ_e^2, σ_a^2) olarak tanımlanan iki boyutlu uzayında yer alması sağlanmalıdır. Sonuç olarak, $\sigma_e^2 = KT_H$ koşulu altında, σ_e^2 'nun EÇOB tahmin edicisi değildir.

Şimdi σ_a^2 ve σ_e^2 için, σ_a^2 ve σ_e^2 EÇOB çözümlerinden $\tilde{\sigma}_a^2, \tilde{\sigma}_e^2$ EÇOB tahmin edicilerinin elde edilmesi için Herbach [14] tarafından oluşturulana benzer bir argüman hatırlatılacaktır. Bunu yapmak için, σ_e^2 ve σ_a^2 yerine de $\lambda = \sigma_e^2 + n\sigma_a^2$ göz önünde bulundurulsun. Öyleyse, L pozitif parametreler olan σ_e^2 ve λ 'nin pozitif bir fonksiyonudur. (σ_e^2, λ) düzleminde pozitif dördlüğün yukarısında L'nin 3. boyut olarak Şekil 5.1'deki grafiği çizilebilir.



Şekil 5.1 (λ, σ_e^2) Düzleminde $\lambda = \sigma_e^2 + n\sigma_a^2$ için Pozitif Dörtlük

$\sigma_e^2 = \lambda$ olduğu çizgide uygulanabilir bölgeyi fakat çözüm noktasının uygulanabilir bölgede olmadığını göstermektedir. $\sigma_e^2 = \lambda$ olduğu doğru düşünölsün. $\sigma_a^2 \geq 0$ ifadesi $\lambda = \sigma_e^2 + n\sigma_a^2 \geq \sigma_e^2$ anlamına geldiğinden ve şekildeki $\lambda \geq \sigma_e^2$ için tüm noktalar $\lambda = \sigma_e^2$ doğrusunun altında ve üstünde bulunduğundan verilen şekilde EÇOB tahmin noktası $(\tilde{\lambda}, \tilde{\sigma}^2)$ bu bölgedir. Bu bölge uygulanabilir bölgedir. Ne zaman $(\hat{\lambda}, \hat{\sigma}_e^2)$ noktaları o bölgede ise, bu EÇOB tahmin noktasıdır. Diğer bir deyişle, $\hat{\sigma}_a^2 \geq 0$ olduğu durumda, $\tilde{\sigma}_a^2 = \hat{\sigma}_a^2$ ve $\tilde{\sigma}_e^2 = \hat{\sigma}_e^2$ olacaktır. Bu ise örnekte gösterilen $\hat{\lambda} < \hat{\sigma}_e^2$ olan durum $\hat{\sigma}_a^2 < 0$ olduğunda, EÇOB tahminlerine ihtiyaç duyulmasını sağlamaktadır. Burada, bu çelişki ile $\hat{\sigma}_a^2 < 0$ olduğu durumda, $\tilde{\sigma}_a^2$ 'nın sıfıra eşit olması gerektiğini savunulmuştur. Bu sebeple $\hat{\sigma}_a^2 < 0$ fakat $\tilde{\sigma}_a^2 > 0$ olduğu yani $\tilde{\lambda} > \tilde{\sigma}_e^2$ olduğu durum varsayılınsın. Daha sonra $\tilde{\sigma}_e^2 < \hat{\sigma}_e^2$ ve $\tilde{\sigma}_e^2 \geq \hat{\sigma}_e^2$ olduğu iki durum ayrı ayrı değerlendirilsin. $\tilde{\sigma}_e^2 < \hat{\sigma}_e^2$ olduğu birinci durumda ve daha önce elde edilen Eşitlik 5.22'den EÇOB tahmini,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \log L}{\partial \sigma_e^2} \right|_{\sigma_e^2 = \tilde{\sigma}_e^2} &= \frac{-a(n-1)}{2\tilde{\sigma}_e^4} \left[\tilde{\sigma}_e^2 - \frac{KT_H}{a(n-1)} \right] \\ &= \frac{-a(n-1)}{2\tilde{\sigma}_e^4} (\tilde{\sigma}_e^2 - \hat{\sigma}_e^2) > 0 \end{aligned} \quad (5.25)$$

olacaktır. Böylelikle λ ve σ_e^2 'nin bir fonksiyonu olan $\log L$ 'yi, $\tilde{\sigma}_e^2$ 'den $\hat{\sigma}_e^2$ 'ye artırarak ve λ 'yi $\tilde{\lambda}$ da bırakarak artırılabilir. Bu durum, $\tilde{\sigma}_e^2$ 'nin EÇOB tahmini olabilmesi için bir çelişkidir. Bu yüzden ikinci durum olan $\tilde{\sigma}_e^2 \geq \hat{\sigma}_e^2$ olduğu durumda

$$\tilde{\lambda} \geq \tilde{\sigma}_e^2 \geq \hat{\sigma}_e^2 > \hat{\lambda} \quad (5.26)$$

olmaktadır. Birinci eşitsizlik, EÇOB tahminlerinin uygulanabilir bölgede olması için bir gerekliliktir. İkinci eşitsizlik ise ikinci durumdur ve $\sigma_a^2 < 0$ olmasından dolayı üçüncü eşitsizlik takip edilecektir. EÇOB tahmininde ve Eşitlik 5.22'den elde edilen bilgi ile,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \log L}{\partial \lambda} \right|_{\substack{\mu=\bar{y}_{..} \\ \lambda=\tilde{\lambda}}} &= \frac{-a}{2\tilde{\lambda}^2} \left(\tilde{\lambda} - \frac{KT_A}{a} \right) + \frac{an(\bar{y}_{..} - \bar{y}_{..})^2}{2\tilde{\lambda}^2} \\ &= \frac{-a}{2\tilde{\lambda}^2} (\tilde{\lambda} - \lambda) < 0 \end{aligned} \quad (5.27)$$

durumu Eşitlik 5.26'dan elde edilir. Bu yüzden, $\tilde{\lambda}$ 'dan λ 'ya azaltarak ve σ_e^2 'yi $\tilde{\sigma}_e^2$ 'da bırakarak $\log L$ 'yi artırılabilir. Bu durum, $\tilde{\lambda}$ 'nın EÇOB tahmini olabilmesi için bir çelişkidir. Böylelikle, $\sigma_a^2 < 0$ durumunda, $\tilde{\sigma}_a^2 > 0$ olduğu ve $\tilde{\sigma}_a^2$ 'nin sıfır olması gerektiği yani $\tilde{\sigma}_a^2 = 0$ ve eşit bir biçimde, $\sigma_a^2 < 0$ durumunda $\tilde{\lambda} = \tilde{\sigma}_e^2$ olduğu sonucunun çelişkili olduğu gösterilmiştir.

Dolayısıyla, $\tilde{\sigma}_a^2 = 0$ olduğu durumda μ ve σ_e^2 'a ait EÇOB tahmin edicilerini bulmak için, $\lambda = \sigma_e^2$ koşuluna bağlı kalarak, $\log L$ 'nin maksimize edilmesi gerekmektedir. Bu durum, modelde $\lambda = \sigma_e^2$ alındığı anlamına gelmemekte fakat $\log L$ 'yi maksimize etmek için 3-boyutlu uzayda (L, σ_e^2, λ) , $\lambda = \sigma_e^2$ düzlemi ile sınırlandırılmaktadır. Böylelikle $\lambda = \sigma_e^2$ olduğu durumda \log Olabilirlik $l(\lambda = \sigma_e^2)$ olarak belirtildiğinde, Eşitlik 5.21'de $\lambda = \sigma_e^2$ yerine konulduğunda,

$$l(\lambda = \sigma_e^2) = -\frac{1}{2} N \log 2\pi - \frac{1}{2} N \log \sigma_e^2 - \frac{KT_A + KT_H}{2\sigma_e^2} - \frac{an(\bar{y}_{..} - \mu)^2}{2\sigma_e^2} \quad (5.28)$$

sonucuna ulaşılmaktadır. Elde edilen sonucu μ ve σ_e^2 'a göre maksimize etmek, $\tilde{\mu} = \bar{y}_{..} = \mu$ sebep olur ve

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_e^2 &= \frac{KT_A + KT_H}{N} \\ &= \frac{KT_{TM}}{an} \\ &= \frac{(a-1)KO_A + a(n-1)KO_H}{an} \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) KO_H + \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{a}\right) KO_A \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$= KO_H + \frac{1}{n} \left[\left(1 - \frac{1}{a}\right) KO_A - KO_H \right] = \dot{\sigma}_e^2 + \dot{\sigma}_a^2 < \dot{\sigma}_e^2$$

$$[\dot{\sigma}_a^2 < 0]$$

elde edilir.

$\dot{\sigma}_a^2 < 0$ ifadesi, Eşitlik 5.29 için negatif olamaz (Çünkü $\tilde{\sigma}_e^2 = KT_{TM}/an$ ve KT_{TM} negatif olamaz). Böylelikle $\dot{\sigma}_a^2 < 0$ olduğunda, EÇOB tahminleri $\tilde{\sigma}_a^2 = 0$ ve $\tilde{\sigma}_e^2 = KT_{TM}/an$ olur.

Özet olarak EÇOB tahmin edicileri,

$$\tilde{\sigma}_e^2 = \begin{cases} KO_H & \text{eğer } \left(1 - \frac{1}{a}\right) KO_A \geq KO_H \\ \frac{KT_{TM}}{an} & \text{eğer } \left(1 - \frac{1}{a}\right) KO_A < KO_H \end{cases} \quad (5.30)$$

ve

$$\tilde{\sigma}_a^2 = \begin{cases} \left[\left(1 - \frac{1}{a}\right) KO_A - KO_H \right] / n & \text{eğer } \left(1 - \frac{1}{a}\right) KO_A \geq KO_H \\ 0 & \text{eğer } \left(1 - \frac{1}{a}\right) KO_A < KO_H \end{cases} \quad (5.31)$$

olacaktır. VÇ yöntemi tahmininden farklı olarak, EÇOB tahmininin temel gerekliliklerinden biri verilerin temelinde bulunan olasılık dağılımı varsayımına sahip olmasıdır. Çok değişkenli normal dağılım doğal bir seçenektir. Denge de olmayan deney düzenlerinde dahi, normallik varsayımı, varyans bileşenlerinin tahmin edilebileceği tüm farklı veri türleri için uygun olmasından değil, matematiksel olarak çözümlenebilir olduğundan tercih edilmektedir [11].

Varyans bileşenlerini tahmin etmek için EÇOB prosedürü, sabit parametrelerin tahmini için kaybedilen serbestlik derecelerini hesaba katmamaktadır fakat KEÇOB yöntemi ile bu durum düzeltilmiştir [35]. EÇOB tahminlerinin ilgi çekici özelliklerinden birisi de tahmin edicilerin, asimptotik dağılım matrisinin her zaman bulunmasıdır [11].

5.3 Kısıtlı En Çok Olabilirlik Yöntemi (KEÇOB)

EÇOB yönteminin bir başka uyarlaması, Kısıtlı En Çok Olabilirlik (KEÇOB) tahmin yöntemidir. Bu yöntem Patterson ve Thompson [17] tarafından 1971 yılında geliştirilmiştir. KEÇOB, Olabilirliğin modelde yer alan konum parametrelerinden yani diğer bir deyişle sabit etkilerden bağımsız olan kısmının maksimize edilmesidir. Tek yönlü sınıflandırmada, bu durum Olabilirlik'te μ 'yü içermeyen kısmın maksimize

edilmesi anlamına gelmektedir. Bu fikir ilk olarak Anderson ve Bancroft [16] tarafından bulunmuş, daha sonra W.A.Thompson (1962) tarafından genişletilmiş olup, Patterson ve R.Thompson tarafından genelleştirilmiştir. Bu bölümde tek yönlü varyans çözümlemesinde rassal modeller için uygulaması gösterilecektir.

KEÇOB tahmininin özelliğinin, esas itibarıyla kabul edildiği bir geçiş dikkate alınabilir. Her ne kadar sabit etkilerin tahminleri ile ilgilenilmese de modelde yer alan sabit etkilerin serbestlik derecelerinin dikkate alındığı bir EÇOB yöntemidir. KEÇOB tahmini ayrıca Marjinal Olabilirlik tahmininin bir örneğidir. Aşağıda $N(\mu, \sigma^2)$ ile normal dağılıma uyan, n bağımsız gözlemden oluşan basit bir örneklemin varyansını tahmin etmeye yönelik temel bir örnek verilmiştir. Veriler x_1, x_2, \dots, x_n ise,

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}{n - 1} \quad (5.32)$$

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

Eşitlik 5.32'de gösterilenler, σ^2 'nin en iyi bilinen tahmin edicileridir. Birincisi $\hat{\sigma}^2$, yansızdır; ikincisi $\tilde{\sigma}^2$, normallik koşulu altında EÇOB tahmin edicisidir. Ayrıca $\hat{\sigma}^2$ bir KEÇOB tahmin edicisidir ve görülmektedir ki μ 'nün tahmin edilebilmesi için gerekli olan tek serbestlik derecesini dikkate almaktadır.

5.3.1 Dengede Olan Veriler için Olabilirlik

Dengede olan veriler için Kısıtlı Olabilirlik fonksiyonu kolaylıkla türevlenebilmektedir. Bunu yaparken, Olabilirlik fonksiyonunun farklı kısımlarına açıklık getirmek için $L(\cdot | \cdot)$ gösterimi kullanılmıştır. Başlangıç noktası olarak,

$$L(\mu, \sigma_e^2, \sigma_a^2 | y) = \frac{\exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{KT_H}{\sigma_e^2} + \frac{KT_A}{\lambda} + \frac{(\bar{y}_{..} - \mu)^2}{\lambda/an} \right] \right\}}{(2\pi)^{\frac{1an}{2}} \sigma_e^2 \frac{[1a(n-1)]}{2} \lambda^{\frac{1a}{2}}} \quad (5.33)$$

Eşitlik 5.21'de gösterilen Log L, Eşitlik 5.33'teki gibi yeniden düzenlenebilir. $\bar{y}_{..}$ değeri hem KT_H hem de KT_A 'dan bağımsız olduğundan, daha önce ifade edilen Olabilirlik gösterimi

$$L(\mu, \sigma_e^2, \sigma_a^2 | y) = L(\mu | \bar{y}_{..}) L(\sigma_e^2, \sigma_a^2 | KT_A, KT_H) \quad (5.34)$$

olarak faktörlerine ayrılabilir. Burada $L(\mu | \bar{y}_{..})$, $\bar{y}_{..}$ 'nin verilmesi durumunda μ 'nün Olabilirlik fonksiyonudur. Yani,

$$L(\mu | \bar{y}..) = \frac{\exp\left[-\frac{(\bar{y}.. - \mu)^2}{2\lambda/an}\right]}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}(\lambda/an)^{\frac{1}{2}}} \quad (5.35)$$

ve

$$L(\sigma_e^2, \sigma_a^2 | KT_H, KT_A) = \frac{\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{KT_H}{\sigma_e^2} + \frac{KT_A}{\lambda}\right)\right]}{(2\pi)^{\frac{1(an-1)}{2}} \sigma_e^2 \left[\frac{1a(n-1)}{2}\right] \lambda^{\frac{1(a-1)}{2}} (an)^{\frac{1}{2}}} \quad (5.36)$$

olur. KT_H ve KT_A 'nin verilmesi durumunda σ_e^2 ve σ_a^2 'nin Olabilirlik fonksiyonudur. Eşitlik 5.36 ayrıca, Marjinal Olabilirlik ilişkisini gösteren Eşitlik 5.37 şeklinde de açıklanabilir.

$$L(\sigma_e^2, \sigma_a^2 | KT_H, KT_A) = \int L(\mu, \sigma_e^2, \sigma_a^2 | y) d\mu \quad (5.37)$$

Bu ifade, tek yönlü varyans çözümlemesinde dengede olan veriler için Kısıtlı Olabilirlik veya bazen Marjinal Olabilirlik olarak bilinmektedir.

5.3.2 KEÇOB Eşitlikleri ve Çözümleri

KEÇOB tahminleri σ_e^2 ve σ_a^2 için Eşitlik 5.36'da verilen ifadeyi $\sigma_e^2 > 0$ ve $\sigma_a^2 \geq 0$ olan parametre uzayı içerisinde maksimize ederek elde edilmektedir. İlgili fonksiyonun logaritması Eşitlik 5.38'deki gibi l_R ile gösterilsin.

$$\begin{aligned} l_R &= \log L(L(\sigma_e^2, \sigma_a^2 | KT_H, KT_A)) \quad (5.38) \\ &= -\frac{1}{2}(an-1) \log 2\pi - \frac{1}{2} \log an - \frac{1}{2} a(n-1) \log \sigma_e^2 - \frac{1}{2}(a-1) \log \lambda \\ &\quad - \frac{KT_H}{2\sigma_e^2} - \frac{KT_A}{2\lambda} \end{aligned}$$

Bu ifadelerin türevleri,

$$l_{R,\sigma_e^2} = \frac{-a(n-1)}{2\sigma_e^2} + \frac{KT_H}{2\sigma_e^4} \quad (5.39)$$

ve

$$l_{R,\lambda} = \frac{-a(n-1)}{2\lambda} + \frac{KT_A}{2\lambda^2} \quad (5.40)$$

olur. Bu eşitlikler sıfıra eşitlenerek, σ_e^2 ve λ 'leri $\hat{\sigma}_{e,R}^2$ ve $\hat{\lambda}_R$ olan çözümleri ile yer değiştirilir.

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_R &= \frac{KT_A}{a-1} \\ &= KO_A\end{aligned}\quad (5.41)$$

ve

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_{e,R}^2 &= \frac{KT_H}{a(n-1)} \\ &= KO_H\end{aligned}\quad (5.42)$$

çözümleri elde edilir. Böylelikle,

$$\dot{\sigma}_{a,R}^2 = \frac{1}{n}(KO_A - KO_H) \quad (5.43)$$

elde edilir. Bu ifadeler KEÇOB çözümlerini verir.

5.3.3 KEÇOB Tahmin Edicileri

EÇOB yöntemine benzer bir şekilde daha önce verilen KEÇOB çözümleri, sadece ikisinin de negatif olmadığı durumda KEÇOB tahmin edicileridir. $\dot{\sigma}_{e,R}^2$ negatif olamaz iken $\dot{\sigma}_{a,R}^2$ negatif olabilir. Bu yüzden I_R 'yi $\dot{\sigma}_{a,R}^2 = 0$ koşulu altında maksimize etmek gerekmektedir. Bu ise, $\dot{\sigma}_{e,R}^2$ 'nin $KTT_m/(an-1)$ olmasına sebep olacaktır.

Böylelikle KEÇOB tahmin edicileri,

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_{a,R}^2 \geq 0 \text{ durumunda,} \quad & \tilde{\sigma}_{e,R}^2 = KO_H \quad \text{ve} \quad \tilde{\sigma}_{a,R}^2 = \frac{1}{n}(KO_A - KO_H) \\ \dot{\sigma}_{a,R}^2 < 0 \text{ durumunda,} \quad & \tilde{\sigma}_{e,R}^2 = \frac{KT_{TM}}{an-1} \quad \text{ve} \quad \tilde{\sigma}_{a,R}^2 = 0\end{aligned}\quad (5.44)$$

olarak elde edilir.

5.3.4 Dengede Olmayan Veriler için

Dengede olmayan veriler için Olabilirlik fonksiyonu,

$$L(\mu, \sigma_e^2, \sigma_a^2 | y) = \frac{\exp\left\{-\left[\frac{\sum_i \sum_j (y_{ij} - \mu)^2}{2\sigma_e^2} - \sum_i \frac{n_i^2 \sigma_a^2 (\bar{y}_i - \mu)^2}{2\sigma_e^2 (\sigma_e^2 + n_i \sigma_a^2)}\right]\right\}}{(2\pi)^{\frac{1N}{2}} \sigma_e^2 \frac{[1(N-a)]}{2} \prod_{i=1}^a (\sigma_e^2 + n_i \sigma_a^2)^{\frac{1}{2}}}\quad (5.45)$$

olarak tanımlanır.

5.4 Minimum Norm Karesel Yansız Tahmin Yöntemi (MNKY)

Rao [19] 1970 yılında değişen varyanslı regresyon modelleri için minimum norm karesel yansız tahmini tanımlamıştır. Daha sonra [19], [20] çalışmaları ile bunu varyans ve kovaryans bileşenleri modelleri için genelleştirmiştir. MNKY tahmin

edicileri, modelde rassal etkiler veya hata terimleri için dağılım özellikleri gerektirmemektedir. İterasyon içermemekte, yalnızca doğrusal denklemlerin çözümünü içermektedir. Elde edilen MNKY tahmin edicileri yansızdır [11].

N. K. Rao ve Subrahmanium [36] tarafından 1971 yılında yapılan çalışmada, bu yöntemin en büyük eksikliğinin negatif olmaması gereken varyans için negatif değerler üretmesi olduğu belirtilmiştir.

Doğrusal modeller için Eşitlik 5.46'da verilen model göz önünde bulundurulmuştur.

$$Y = X\beta + \varepsilon \quad (5.46)$$

Burada ε yerine $\varepsilon = U_1\xi_1 + \dots + U_k\xi_k$ yazıldığında model,

$$Y = X\beta + U_1\xi_1 + \dots + U_k\xi_k \quad (5.47)$$

şekline dönüşür. Burada,

$Y_{n \times 1}$: Doğrusal yapıya sahip rassal değişkenlerin bir n-vektörüdür. (Gözlem vektörü)

$X_{n \times s}$: Verilen n x s boyutlu bir matris

$\beta_{s \times 1}$: Bilinmeyen parametrelerin s-vektörü

$(U_i)_{n \times c_i}$: ξ_i vektörleri için verilen tasarım matrisi $i = 1, 2, \dots, k$

$\xi_{i c_i \times 1}$: Rassal etki vektörü $i = 1, 2, \dots, k$. Ortalaması sıfır, dağılım matrisi $\sigma_i^2 I$ olan hipotezsel değişkenlerin bir c_i boyutlu vektörüdür. Ayrıca ξ_i ile ξ_j arasında korelasyon yoktur yani $Cov(\xi_i, \xi_j) = 0 \quad \forall i \neq j$ 'dir. $\xi_i \sim (0, \sigma_i^2 I_{c_i \times c_i})$ dağılımına sahiptir. Model, Eşitlik 5.48'deki gibi kompakt formda ifade edilmiştir.

$$Y = X\beta + U\xi \quad (5.48)$$

Burada,

$$U = (U_1: U_2: \dots: U_k) \quad (5.49)$$

$$\xi' = (\xi'_1: \xi'_2: \dots: \xi'_k)$$

olarak tanımlanmaktadır. Eşitlik 5.48'de beklenen değer,

$$E(Y) = E(X\beta + U\xi) = XE(\beta) + UE(\xi) = X\beta \quad (5.50)$$

Varyans-Kovaryans matrisi,

$$\begin{aligned}
 D(Y) &= D(X\beta + U\xi) = D(U_1\xi_1 + \dots + U_k\xi_k) & (5.51) \\
 &= U_1D(\xi_1)U_1' + U_2D(\xi_2)U_2' + \dots + U_kD(\xi_k)U_k' \\
 &= U_1\sigma_1^2IU_1' + U_2\sigma_2^2IU_2' + \dots + U_k\sigma_k^2IU_k' \\
 &= \sigma_1^2U_1U_1' + \sigma_2^2U_2U_2' + \dots + \sigma_k^2U_kU_k' \\
 D(Y) &= \sigma_1^2V_1 + \dots + \sigma_k^2V_k \text{ olarak elde edilmektedir.}
 \end{aligned}$$

$V_i = U_iU_i'$ $i = 1, 2, \dots, k$ 'dir. $D(Y) = \sigma_1^2V_1 + \dots + \sigma_k^2V_k$ eşitliğindeki parametrelere varyans bileşenleri adı verilmektedir. Burada problem, β 'nin ortalama değerini ve $\sigma_1^2, \dots, \sigma_k^2$ olan varyans bileşenlerini tahmin etmektir.

5.4.1 Varyans Bileşenlerinin Tahmin İlkeleri

C. R. Rao [19] çalışmalarında, Eşitlik 5.52'de yer alan varyans bileşenlerinin doğrusal bir fonksiyonunun tahminini Eşitlik 5.48'deki rassal değişken Y gözlem vektörünün $Y'AY$ karesel fonksiyonuyla hesaplanabileceğini göstermiştir.

$$p_1\sigma_1^2 + \dots + p_k\sigma_k^2 \quad (5.52)$$

Bunu yapmak için de simetrik A matrisini belirlemek için aşağıda yer alan kriterler geliştirilmiştir.

5.4.1.1 Yansızlık

Tahmin edicinin yansız olabilmesi için,

$$E(Y'AY) = \text{İz } A E(Y'Y) = \beta'X'AX\beta + \sum \sigma_i^2 \text{İz } AV_i = \sum p_i \sigma_i^2 \quad (5.53)$$

sağlanması gerekmektedir. Ayrıca, $X'AX = 0$ ve $\text{İz } (A, V_i) = p_i$, $i = 1, \dots, k$ koşullarını sağlamalıdır.

5.4.1.2 β Parametresinin Dönüşümü Altında Değişmezlik

Eğer β yerine bilinmeyen parametre olarak $\gamma = \beta - \beta_0$ düşünülürse Eşitlik 5.48'de verilen modelden,

$$Y - X\beta_0 = X\gamma + U\xi \quad (5.54)$$

elde edilir. Eşitlik 5.52'de verilen tahmin edici

$$(Y - X\beta_0)'A(Y - X\beta_0) \quad (5.55)$$

olmaktadır. Bu durum sadece $AX = 0$ koşulu altında, β_0 değeri ne olursa olsun, $Y'AY$ değeri ile aynıdır.

$$AX = 0 \Rightarrow X'AX = 0. \quad (5.56)$$

5.4.1.3 Değişmezlik ve Yansızlık ile Minimum Norm

Eğer hipotezsel değişken ξ biliniyorsa, $\sum p_i \sigma_i^2$ 'nin doğal tahmin edicisi olarak

$$(p_1/c_1)\xi_1' \xi_1 + \dots + (p_k/c_k)\xi_k' \xi_k = \xi' \Delta \xi \quad (5.57)$$

seçilebilir. Δ , uygun bir şekilde tanımlanmış köşegen matristir.

$$\Delta = \text{Köşegen}((p_1/c_1)I_{c_1} + \dots + (p_k/c_k)I_{c_k}) \quad (5.58)$$

$$\begin{aligned} & E(p_1/c_1)\xi_1' \xi_1 + (p_2/c_2)\xi_2' \xi_2 + \dots + (p_k/c_k)\xi_k' \xi_k \\ &= (p_1/c_1) E(\xi_1' \xi_1) + \dots + (p_k/c_k) E(\xi_k' \xi_k) \\ &= (p_1/c_1)c_1 \sigma_1^2 + \dots + (p_k/c_k)c_k \sigma_k^2 \\ &= p_1 \sigma_1^2 + \dots + p_k \sigma_k^2 = \sum_{i=1}^k p_i \sigma_i^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Fakat önerilen tahmin edici,

$$Y'AY = \xi'U'AU\xi + 2\beta'X'AU\xi + \beta'X'AX\beta = \xi'U'AU\xi \quad (AX = 0) \text{ olduğu için,} \quad (5.59)$$

ile doğal tahmin edici arasındaki $\xi'(U'AU - \Delta)\xi$ olan fark, $\|U'AU - \Delta\|$ normu minimize edilerek küçültülebilir. Burada $\|\cdot\|$, matrisin normunu göstermektedir. Daha sonra, problem $AX = 0$ ve $\sum AV_i = p_i, i = 1, \dots, k$ koşulları altında, $\|U'AU - \Delta\|$ ifadesini minimize etmek için indirgenir. Böylelikle elde edilen $Y'AY$ karesel tahmini MNKY olarak isimlendirilir. Eğer $\|\cdot\|$ normu, öklit normu ise⁶ yani matristeki tüm elemanların karelerinin toplamının karekökü ise Eşitlik 5.61'de verilen durumdan dolayı Eşitlik 5.60'taki sonuca ulaşılır.

$$\|U'AU - \Delta\|^2 = \sum U'AUU'AU - 2 \sum U'AU\Delta + \sum \Delta\Delta = \sum AVAV - \sum \Delta\Delta \quad (5.60)$$

$$\sum U'AU\Delta = \sum AU\Delta U' = \sum (p_i/c_i) AV_i = \sum \Delta\Delta \quad (5.61)$$

Eşitlik 5.60'ta $V = UU' = V_1 + \dots + V_k$, V_i Eşitlik 5.51'deki gibi tanımlanmıştır. Böylelikle, öklit normunda A 'nın belirlenmesi problemi $X'AX = 0$ ve $\sum (A, V_i) =$

⁶ Herhangi bir X matrisinin Öklit Normu : $\|X\| = \sqrt{\sum (X'X)}$ formülü ile hesaplanmaktadır.

$p_i, i = 1, \dots, k$ koşullarını sağlayan $\dot{I}z AVAV = (AV, VA)$ 'nin minimuma indirilmesi problemidir.

5.4.1.4 Varyans Bileşenlerinin Hesaplanması

Değişmezlik durumunda MNKY tahmininde; doğrusal bir model olan $Y = X\beta + U\xi$, $E(Y) = X\beta$ beklenen değerine ve $D(Y) = \sigma_1^2 V_1 + \dots + \sigma_k^2 V_k$ varyans-kovaryans matrisine sahiptir. $AX = 0$ ve $\dot{I}z (A, V_i) = p_i, i = 1, 2, \dots, k$ koşullarını sağlayan,

$V = V_1 + \dots + V_k$ veya $a_1^2 V_1 + \dots + a_k^2 V_k$ 'nin olduğu ve (AV, VA) 'değerinin minimum olduğunda $\sum p_i \sigma_i^2$ 'nin değişmezlik durumunda MNKY değeri $Y'AY$ 'dir.

Teorem 5.4.1.4: A matrisi simetrik bir matris, V matrisi de simetrik ve tersinir bir matris olsun. Bu durumda $\dot{I}z AVAV$ ifadesinin $AX = 0$ ve $\dot{I}z (A, V_i) = p_i$ şartları altında minimum değeri $A = \sum_{j=1}^k \lambda_j RV_jR$ olduğunda elde edilir [19]. Burada,

$$\begin{aligned} R &= V^{-1}Q_v \\ &= Q_v'V^{-1} \end{aligned} \quad (5.62)$$

$$Q_v = 1 - P_v$$

$$P_v = X(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}$$

olarak tanımlanmaktadır. Ayrıca λ_j çarpanları $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)'$

$$S = \dot{I}z(RV_iRV_j) \quad i, j = 1, 2, \dots, k$$

$p = (p_1, p_2, \dots, p_3)'$ ile birlikte $S\lambda = p$ denklemi çözümlenerek bulunur.

O halde $\sum_{i=1}^k p_i \sigma_i^2$ nin MNKY tahmin edicisi Eşitlik 5.63'te verilen

$$p = (p_1, p_2, \dots, p_3)' \quad (5.63)$$

$$\hat{\sigma}^2 = (\hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_2^2, \dots, \hat{\sigma}_k^2)'$$

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_k)'$$

$$u_i = e'V^{-1}V_iV^{-1}$$

$$e = Q_vY$$

gösterimler yardımıyla, Eşitlik 5.64 elde edilir.

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^k p_i \sigma_i^2 \\ &= p' \hat{\sigma}^2 \\ &= Y'AY \end{aligned} \quad (5.64)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^k \lambda_i Y' R V_i R' Y \\
&= \sum_{i=1}^k \lambda_i Y' Q_v' V^{-1} V_i V^{-1} Q_v Y \\
&= \sum_{i=1}^k \lambda_i e' V^{-1} V_i V^{-1} e \\
&= \sum_{i=1}^k \lambda_i u_i \\
&= \lambda' u = p' S^{-1} u
\end{aligned}$$

Eşitlik 5.64 düzenlenerek, Eşitlik 5.65'te verilen sonuç elde edilir.

$$\hat{\sigma}^2 = S^{-1} u \quad (5.65)$$

MNKY yöntemi ile elde edilen tahmin ediciler yansızdır ve en küçük normludur [37].

6. SAYISAL ÖRNEKLER

Bu bölümde, birbirinden farklı özelliklere sahip dört farklı örnekte ölçüm sistemi analizi yapılmıştır. Ölçüm sisteminin yeterli olup olmadığı **MINITAB** programında gerçekleştirilen uygulama ile tespit edilmiştir. Daha sonra **R** programı kullanılarak VÇ, EÇOB, KEÇOB ve MNKY varyans tahmin yöntemleri ile ölçüm sisteminde yer alan parça, operatör, parça x operatör etkileşimi ve tekrar bileşenlerinin varyans tahminleri yapılmıştır. Bu tahminlerin birbiri ile kıyaslaması yapılmış olup, hangi yöntemin daha iyi sonuçlar verdiği, negatif tahminler ile karşılaşma durumları gibi konular ele alınmıştır. Sayısal örneklerde 1. örnek yarı iletken güç modüllerinin termal iç direncinin ölçümü, 2. örnek dişli çapı ölçümü, 3. örnek manganez konsantrasyonu, 4. örnek paralel plaka uzunluklarının ölçümlerini içermektedir.

Örnek I: Yarı İletken Güç Modüllerinin Termal İç Direncinin Ölçülmesi

Hauf ve Berman [38] 1988 yılında yarı iletken güç modüllerinin termal iç direncini ölçmek amacıyla kullanılan cihazlar hakkında bir Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilirlik çalışması yapmıştır. Çalışmada, rassal olarak seçilen 3 operatör her biri rassal seçilen 10 parçayı 3 defa ölçmüştür. Toplam 90 ölçüme ait veri seti Çizelge 6.1'de gösterilmektedir. Ölçümler °C/Watt olarak verilmiştir. Burada, her bir parça her bir operatör tarafından aynı sayıda ölçüldüğünden model, dengede olan rassal etkili modeldir.

Çizelge 6.1 Örnek I Yarı İletken Güç Modüllerinin Termal İç Direnci Ölçümü

Parça	Operatör 1			Operatör 2			Operatör 3		
1	37	38	37	41	41	40	41	42	41
2	42	41	43	42	42	42	43	42	43
3	30	31	31	31	31	31	29	30	28
4	42	43	42	43	43	43	42	42	42
5	28	30	29	29	30	29	31	29	29
6	42	42	43	45	45	45	44	46	45
7	25	26	27	28	28	30	29	27	27
8	40	40	40	43	42	42	43	43	41
9	25	25	25	27	29	28	26	26	26
10	35	34	34	35	35	34	35	34	35

Örneğe ilişkin model denklemi:

Termal İç Direnç (Y) = μ + Parça + Operatör + Parça x Operatör + Tekrar Edilebilirlik

Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilebilirlik Analizi Sonuçları

Elde edilen ölçümlere ait Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilebilirlik çalışması için iki yönlü VÇ yöntemi sonuçları Çizelge 6.2'de verilmiştir.

Çizelge 6.2 Örnek I için İki Yönlü VÇ (Etkileşim terimi ile birlikte)

Varyans Kaynağı	Serbestlik Derecesi	KT	KO	F	P
Parça	9	3935,96	437,32	162,27	0,000*
Operatör	2	39,27	19,633	7,285	0,005*
Parça x Operatör	18	48,51	2,695	5,273	0,000*
Tekrar Edilebilirlik	60	30,67	0,511		
Toplam Varyans	89	4054,40			

*P<0,05

Çizelge 6.2'ye göre; Parça, Operatör ve Parça x Operatör etkileşimi değişkenleri %5 anlamlılık düzeyinde anlamlı bulunmuştur. Bu deney düzeninde, parçaya ait F değeri diğer değişkenlere göre oldukça yüksek bulunmuştur. Bunun anlamı parça değişkeninin etkisi diğer değişkenlere göre oldukça fazladır. Çizelge 6.3'te Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilebilirlik varyans bileşenlerinin tahminleri ve bu bileşenlerin toplam varyansa katkısı yer almaktadır.

Çizelge 6.3 Örnek I için Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilebilirlik Varyans Bileşenleri

Varyans Kaynağı	Varyans Bileşeni	%Varyans Bileşeninin Katkısı
Toplam Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik&Tekrar Üretilebilirlik	1,8037	3,60
Tekrar Edilebilirlik	0,5111	1,02
Tekrar Üretilebilirlik	1,2926	2,58
Operatör	0,5646	1,13
Operatör x Parça	0,7280	1,45
Parçadan Parçaya	48,2926	96,40
Toplam Varyans	50,0963	100,00

Parçadan Parçaya Varyans, farklı parçaların ölçümlerindeki varyansı ifade etmektedir.

Geçerli bir ölçüm sisteminde, toplam varyansın çok büyük bir oranda parçadan parçaya varyans ile açıklanması istenirken, Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilirlik bileşenin çok küçük olması istenir. Çizelge 6.3'e göre, Parçadan Parçaya varyansın (96,40) katkı yüzdesi Toplam Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilirlik'in (3,60) katkısından oldukça fazladır. Bu durum, varyansın çoğunun parçalar arasındaki farklılıktan kaynaklandığını ifade etmektedir. Toplam Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilirlik değerinin katkısı %9'dan küçüktür. Bu ise ölçüm sisteminin yeterli olduğunu ve parçaları birbirinden yeterli düzeyde ayırt edebildiğini göstermektedir. Çizelge 6.4'te Ölçüm Sistemi değerlendirmesi yer almaktadır.

Çizelge 6.4 Örnek I için Ölçüm Sistemi Değerlendirmesi

Varyans Kaynağı	Std. Sapma	Çalışma Varyansı	%Çalışma Varyansı
	(S.S)	(6 × S.S)	
Toplam Ölçüm Sistemleri Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilirlik	1,34302	8,0581	18,97
Tekrar Edilebilirlik	0,71492	4,2895	10,10
Tekrar Üretilirlik	1,13692	6,8215	16,06
Operatör	0,75140	4,5084	10,62
Operatör x Parça	0,85322	5,1193	12,05
Parçadan Parçaya	6,94929	41,6957	98,18
Toplam Varyans	7,07787	42,4672	100,00

Farklı Kategori Sayısı = 7

Çizelge 6.4'e göre, Toplam Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilirlik'e ait %Çalışma Varyansı değeri %18,97'dir. Bu değer ise üst sınır olan %30'un altındadır.

Farklı Kategori Sayısını gösteren SGO değeri:

$$\sigma_{\text{Toplam}}^2 = \sigma_{\text{Parça}}^2 + \sigma_{\text{Ölçüm Sistemi}}^2$$

$$\hat{\sigma}_{\text{Toplam}}^2 = s^2 = 50,0963$$

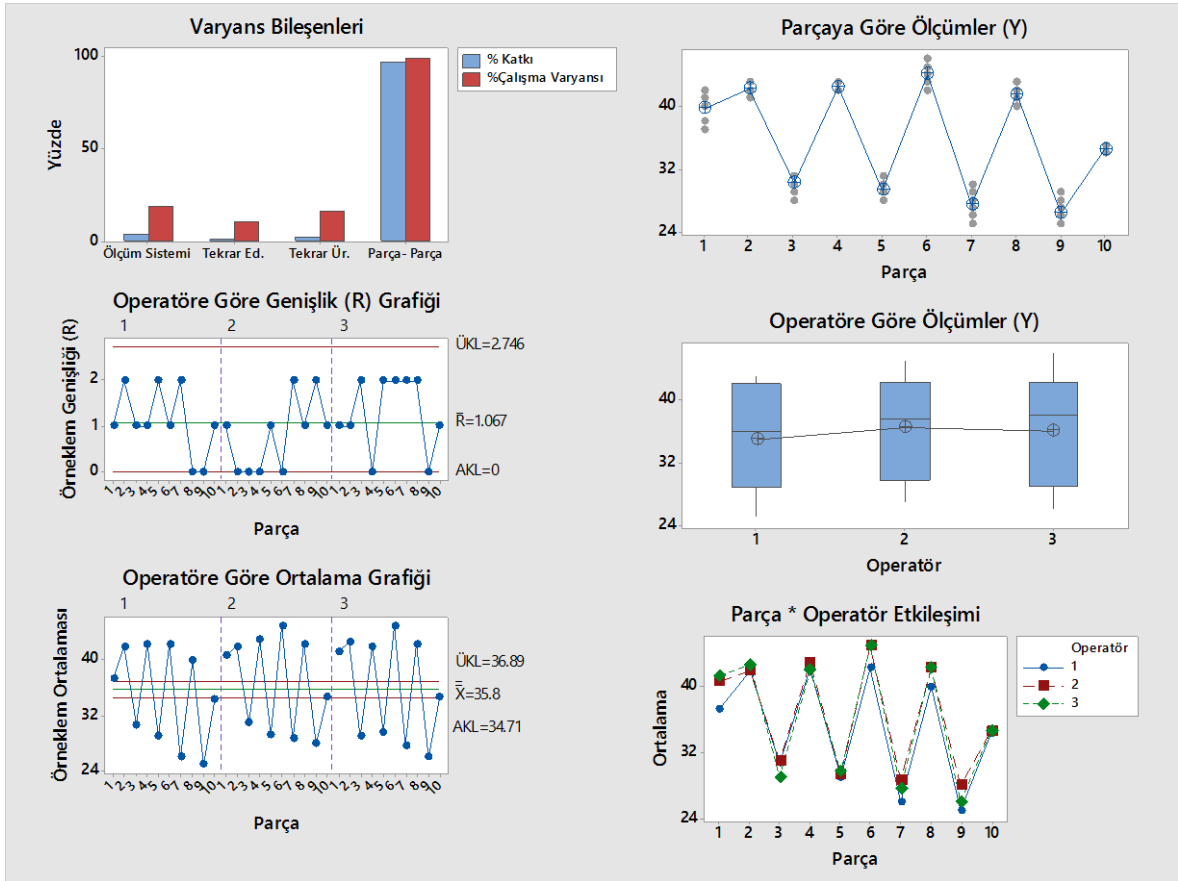
$$\hat{\sigma}_{\text{Ölçüm Sistemi}}^2 = 1,8037$$

$$\hat{\sigma}_{\text{Parça}}^2 = 48,2926$$

$$\rho_{\text{Parça}} = \frac{\sigma_{\text{Parça}}^2}{\sigma_{\text{Toplam}}^2} = \frac{48,2926}{50,0963} = 0,9639$$

$$\text{SGO} = \sqrt{\frac{2\hat{\rho}_{\text{Parça}}}{1 - \hat{\rho}_{\text{Parça}}}} = \sqrt{\frac{2(0,9639)}{1 - 0,9639}} = 7,3 \sim 7$$

olarak hesaplanmaktadır. AIAG'ye göre iyi bir ölçüm sisteminde Farklı Kategori Sayısı değerinin en az 5 olması gerekmektedir. Burada 7 olarak bulunmuştur. Dolayısıyla, ölçüm sisteminin parçaları çok iyi ayırt edebildiği ve herhangi bir kalibrasyon işlemine ihtiyaç duyulmadığı görülmektedir.



Şekil 6.1 Örnek I için Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilebilirlik

Şekil 6.1'de yer alan Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilebilirlik grafiğine göre aşağıdaki yorumlar yapılabilir:

Varyans Bileşenleri grafiğine göre, parçalar arasındaki farklılıklar toplam varyansın büyük bir kısmını açıklamaktadır.

Operatöre Göre Genişlik (R) grafiğine göre, her bir nokta, 3 operatör için 10 parçanın ölçümündeki en büyük ve en küçük değeri arasındaki farkı yani Genişliği (R) göstermektedir. Genel olarak, Genişlik değerleri kabul edilebilir limitler içerisinde kaldığından, operatörlerin tutarlı ölçümler yaptığı söylenebilir.

Operatöre Göre Ortalama grafiğine göre, her bir nokta, 3 operatör için 10 parçanın ölçümlerinin ortalamasını göstermekte olup, birçok nokta kontrol limitleri içerisinde yer almaktadır. Bu durum, varyansın büyük bir kısmının parçalardan kaynaklandığını belirtmektedir.

Parçaya Göre Ölçümler grafiği, her bir parça için ölçümlerin dağılımını göstermektedir. İstenilen durum, noktaların birbirine çok yakın olması böylelikle ölçüm sisteminin düşük varyansa sahip olmasıdır. Burada, 4. ve 10. parçanın ölçümleri birbirine çok yakındır.

Operatöre Göre Ölçümler grafiği, operatörlerin yaptığı tüm ölçümlerin ortalamalarını ve dağılımlarını bir kutu grafiği (box plot) yardımıyla göstermektedir. Kutuların içerisinde yer alan noktalar, her bir operatörün tüm ölçümlerinin ortalamalarını göstermektedir. Kutular arasındaki yatay çizgi, her operatör için ölçüm ortalamalarının yakın olduğunu göstermektedir.

Parça x Operatör Etkileşimi grafiği, operatörler ile parçaların etkileşimini göstermektedir. Çakışan çizgiler, operatörlerin aynı şekilde ölçtüklerini ifade etmektedir. Örneğin, 1. parçanın ölçümünde 2. ve 3. operatörler birbirine çok yakın ölçümler yaparken, 1. operatör daha düşük ölçümler yapmıştır. 1. operatörün genellikle daha düşük ölçtüğü görülmektedir.

Varyans Bileşenlerinin Tahmin Yöntemleri

Örnek I için VÇ, EÇOB, KEÇOB ve MNKY yöntemleri ile varyans tahminleri Çizelge 6.5'te verilmiştir.

Çizelge 6.5 Örnek I için VÇ, EÇOB, KEÇOB ve MNKY Yöntemleri ile Varyans Tahminleri

Varyans Kaynağı	VÇ	EÇOB	KEÇOB	MNKY
Parça	48,28889	43,6092	48,2926	48,2925926
Operatör	0,5633333	0,5497	0,5646	0,5646091
Parça x Operatör	0,7333333	0,7283	0,728	0,7279835
Hata	0,50	0,5111	0,5111	0,5111111

Çizelge 6.5'ten elde edilen sonuçlara göre; varyans bileşenleri bakımından dört yöntemden elde edilen sonuçların birbirine oldukça yakın olduğu ve negatif varyans durumu ile karşılaşılmadığı görülmektedir. Varyans bileşenleri yöntemlerinin kıyaslamasında hata varyansını minimum tahmin eden yöntem en iyi yöntem olarak açıklanmaktadır [25], [26]. Varyans bileşenlerinin toplam varyanstaki oranı, yöntemlerin kıyaslanmasında diğer önemli bir ölçüt olarak alınmakta ve hatanın toplam varyanstaki oranının küçük olması istenmektedir [27].

Çalışmada minimum hata varyansı VÇ yönteminden 0,50 olarak elde edilirken; EÇOB, KEÇOB ve MNKY tahmin yöntemlerinde minimum hata varyansı 0,51 olarak tahmin edilmiştir. Hata varyansının minimum olması, bu tahmin yönteminin seçilebilmesi için bir avantajdır. Ancak bu durum tek başına yeterli değildir. Bunun yanı sıra diğer kıstaslara da bakılmalıdır. Bahsedildiği üzere varyans bileşenlerinin toplam varyanstaki oranı, yöntemlerin kıyaslanmasında diğer önemli bir ölçüt olarak alınmakta ve hatanın toplam varyanstaki oranının küçük olması istenmektedir. Bu kıstasa göre, VÇ yöntemi ile hata varyansının toplam varyanstaki payı hesaplandığında,

$$\frac{\sigma^2_{\text{Hata}}}{\sigma^2_{\text{Toplam}}} = 0,009$$

olarak elde edilmektedir. EÇOB yöntemi ile hata varyansının toplam varyanstaki payı ise 0,011; KEÇOB yöntemi ile 0,010; MNKY yöntemi ile 0,010 olarak bulunmuştur. Bu nedenle bu ölçüte göre, uygulamada elde edilen $\sigma^2_{\text{Hata}}/\sigma^2_{\text{Toplam}}$ değerlerinden en küçük olanının en iyi tahmin yöntemi olduğu söylenebilir. Burada VÇ yöntemi en iyi varyans tahmin yöntemi olarak belirlenmiştir.

Ölçüm sisteminin yeterli düzeyde iyi olduğu bir Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilirlik çalışmasında, VÇ, EÇOB, KEÇOB ve MNKY varyans tahmin yöntemlerinden elde edilen sonuçlar birbirine oldukça yakın bulunmuş ve negatif varyans durumu ile karşılaşılmamıştır. Hata varyansını minimum olarak tahmin eden ve hata varyansının toplam varyans içerisindeki oranı minimum olan VÇ yöntemi bu uygulamada en iyi varyans tahmin yöntemi olarak tespit edilmiştir.

Örnek II: Dişli Çapı Uygulaması

Bu uygulamada, rassal seçilen 2 operatör tarafından rassal seçilen 10 parçanın dişli çapı (mm) 2 defa ölçülmüştür. Veri seti Al-Refaie ve Bata [39] tarafından 2010 yılında yayımlanmış olan çalışmadan alınmıştır. Model, dengede olan rassal etkili modeldir. Ölçüm sonuçları (mm) Çizelge 6.6'da verilmiştir.

Çizelge 6.6 Örnek II Dişli Çapı Ölçüm Sonuçları (mm)

Parça Numarası	Operatör 1		Operatör 2	
	Ölçümler (mm)		Ölçümler (mm)	
	M1	M2	M1	M2
1	3,045	3,041	3,048	3,046
2	3,037	3,038	3,031	3,038
3	3,021	3,024	3,023	3,022
4	3,017	3,012	3,011	3,016
5	3,048	3,049	3,042	3,048
6	3,046	3,045	3,042	3,043
7	3,039	3,034	3,033	3,035
8	3,033	3,035	3,038	3,037
9	3,048	3,041	3,034	3,032
10	3,041	3,049	3,046	3,045

Dişli çapı (Y) = μ + Parça + Operatör + Parça x Operatör + Tekrar Edilebilirlik

Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilirlik Analizi Sonuçları

Elde edilen ölçümlere ait Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilirlik çalışması için iki yönlü VÇ yöntemi sonuçları Çizelge 6.7'de verilmiştir.

Çizelge 6.7 Örnek II için İki Yönlü VÇ (Etkileşim terimi ile birlikte)

Varyans Kaynağı	Serbestlik Derecesi	KT	KO	F	P
Parça	9	0,0040780	0,0004531	238,446	0,000*
Operatör	1	0,0000272	0,0000272	14,327	0,262
Parça x Operatör	9	0,0001710	0,0000190	23,679	0,052
Tekrar Edilebilirlik	20	0,0001605	0,0000080		
Toplam Varyans	39	0,0044368			

*P < 0,05

Çizelge 6.7'e göre, Parça değişkeni %5 anlamlılık düzeyinde anlamlı bulunmuştur. Parça değişkenine ait F değeri diğer değişkenlerden oldukça fazladır. Bu ise ölçüm sistemindeki varyansın büyük bir kısmının parçalardan kaynaklı olduğunu göstermektedir. Ayrıca, Operatör ve Parça x Operatör etkileşimi değişkenleri %5 anlamlılık düzeyinde anlamsız bulunmuştur. Etkileşim terimi anlamsız bulunduğundan, MINITAB programı etkileşim teriminin yer almadığı bir VÇ çizelgesi daha üretmektedir. Bu çizelge ise Çizelge 6.8'de gösterilmiştir.

Çizelge 6.8 Örnek II için İki Yönlü VÇ (Etkileşim terimi olmadan)

Varyans Kaynağı	Serbestlik Derecesi	KT	KO	F	P
Parça	9	0,0040780	0,0004531	396,35	0,000*
Operatör	1	0,0000272	0,0000272	23,815	0,134
Tekrar Edilebilirlik	29	0,0003315	0,0000114		
Toplam Varyans	39	0,0044368			

*P<0,05

Çizelge 6.8'e göre, Parça değişkeni %5 anlamlılık düzeyinde anlamlı iken, operatör değişkeni anlamsız bulunmuştur. Bu durum operatörlerden kaynaklı bir sorun olabileceğine işaret etmektedir. Ölçüm sisteminin önemli bir parçası olan operatörlerin, parçaları doğru bir şekilde ölçemedikleri düşünülmektedir. Çizelge 6.9'da Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilirlik varyans bileşenleri çizelgesi yer almaktadır.

Çizelge 6.9 Örnek II için Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilirlik Varyans Bileşenleri

Varyans Kaynağı	Varyans Bileşeni	%Varyans Bileşeninin Katkısı
Toplam Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilirlik	0,0000122	9,97
Tekrar Edilebilirlik	0,0000114	9,32
Tekrar Üretilirlik	0,0000008	0,64
Operatör	0,0000008	0,64
Parçadan Parçaya	0,0001104	90,03
Toplam Varyans	0,0001226	100,00

Çizelge 6.9'a göre, Parçadan Parçaya varyansın (90,03) katkı yüzdesi Toplam Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilirlik'in (9,97) katkısından oldukça fazladır. Bu durum, varyansın çoğunun parçalar arasındaki farklılıktan kaynaklandığını göstermektedir. Toplam Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilirlik değerinin katkısı sınır değer olan %9'dan biraz fazladır. Bu sebeple ölçüm sisteminin yeterli olmadığı ve parçaları birbirinden yeterli düzeyde ayırt edemediği sonucuna ulaşılmaktadır. Çizelge 6.10'da Ölçüm Sistemi değerlendirmesi yer almaktadır.

Çizelge 6.10 Örnek II için Ölçüm Sistemi Değerlendirmesi

Varyans Kaynağı	Std. Sapma	Çalışma Varyansı	%Çalışma Varyansı
	(S.S)	(6 × S.S)	
Toplam Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilirlik	0,0034959	0,0209756	31,57
Tekrar Edilebilirlik	0,0033811	0,0202867	30,53
Tekrar Üretilirlik	0,0008886	0,0053318	8,02
Operatör	0,0008886	0,0053318	8,02
Parçadan Parçaya	0,0105081	0,0630487	94,89
Toplam Varyans	0,0110744	0,0664463	100,00

Farklı Kategori Sayısı = 4

Çizelge 6.10'a göre, Toplam Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilirlik'e ait %Çalışma Varyansı değeri %31,57'dir. Bu ise sınır değer olan %30'un biraz üzerindedir.

Farklı Kategori Sayısını gösteren SGO değeri:

$$\sigma_{\text{Toplam}}^2 = \sigma_{\text{Parça}}^2 + \sigma_{\text{Ölçüm Sistemi}}^2$$

$$\hat{\sigma}_{\text{Toplam}}^2 = s^2 = 0,0001226$$

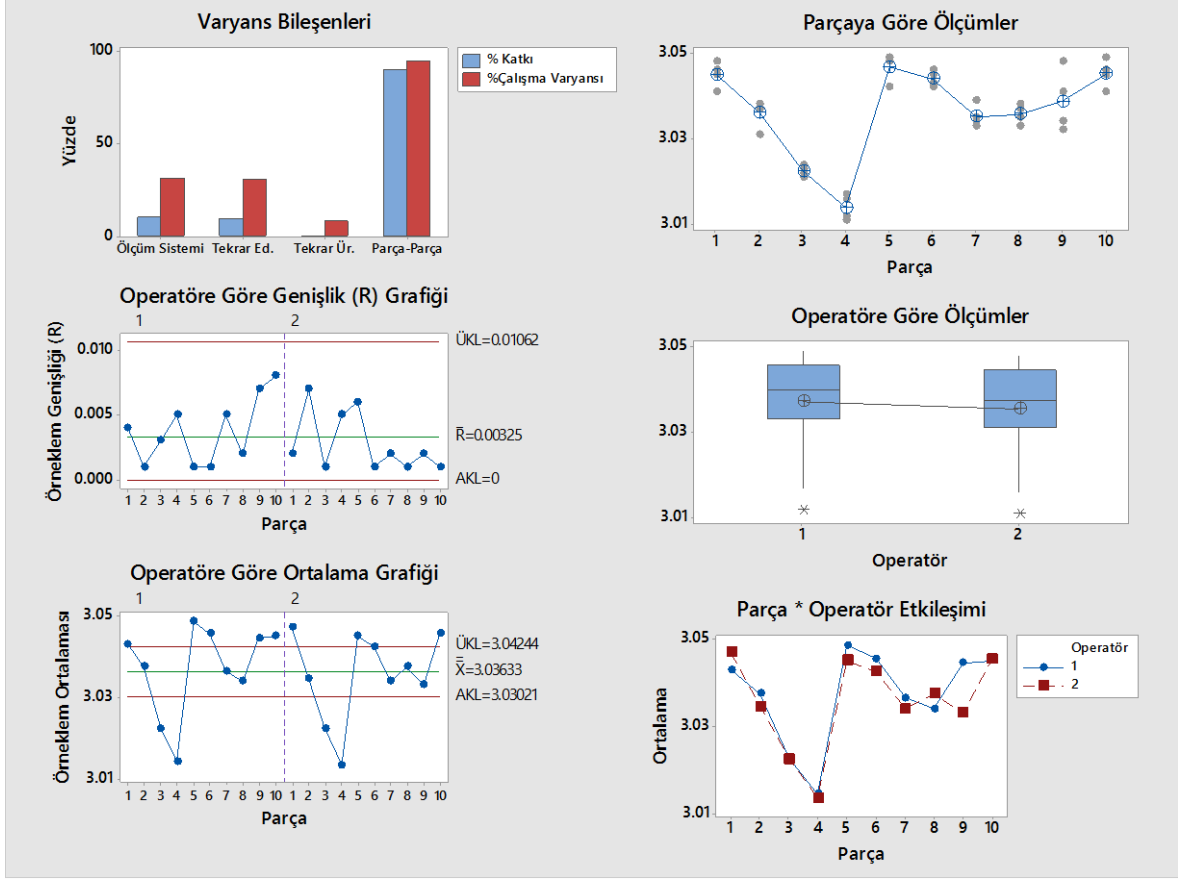
$$\hat{\sigma}_{\text{Ölçüm Sistemi}}^2 = 0,0000122$$

$$\hat{\sigma}_{\text{Parça}}^2 = 0,0001104$$

$$\rho_{\text{Parça}} = \frac{\sigma_{\text{Parça}}^2}{\sigma_{\text{Toplam}}^2} = \frac{0,0001104}{0,0001226} = 0,9004$$

$$SGO = \sqrt{\frac{2\hat{\rho}_{\text{Parça}}}{1 - \hat{\rho}_{\text{Parça}}}} = \sqrt{\frac{2(0,9004)}{1 - 0,9004}} = 4,25 \sim 4$$

olarak hesaplanmaktadır. $SGO < 5$ bulunduğundan, ölçüm sisteminin çok iyi olmadığı, parçaları yeterli düzeyde ayırt edemediği ve kalibrasyon işlemlerinin yapılması gerektiği görülmektedir.



Şekil 6.2 Örnek II için Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilebilirlik

Şekil 6.2'de yer alan Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilebilirlik grafiğine göre aşağıdaki yorumlar yapılabilir:

Varyans Bileşenleri grafiğine göre, parçalar arasındaki farklılıklar toplam varyansın büyük bir kısmını açıklamaktadır.

Operatöre Göre Genişlik (R) grafiği, 2 operatör tarafından ölçümlenen 10 parçanın ölçümleri arasındaki farkı yani genişlik değerlerini göstermektedir. Genişlik değerleri kabul edilebilir limitler içerisinde kaldığından, operatörlerin tutarlı ölçümler yaptığı söylenebilir.

Operatöre Göre Ortalama grafiğine göre, her bir nokta, 2 operatör için 10 parçanın ölçümlerinin ortalamasını göstermekte olup, birçok nokta kontrol limitleri içerisinde yer almaktadır. Bu durum, varyansın büyük bir kısmının parçalardan

kaynaklandığını göstermektedir. Grafiğe göre, operatörler tarafından gerçekleştirilen 9. parçanın ölçüm ortalamaları birbirinden oldukça farklı bulunmuştur.

Parçaya Göre Ölçümler grafiği, her bir parça için ölçümlerin dağılımını göstermektedir. İstenilen durum, noktaların birbirine çok yakın olması böylelikle ölçüm sisteminin düşük varyansa sahip olmasıdır. Grafiğe göre, 9. parçanın ölçümü diğer parçalara göre daha dağınıktır.

Operatöre Göre Ölçümler grafiği, operatörlerin yaptığı tüm ölçümlerin ortalamalarını ve dağılımlarını bir kutu grafiği yardımıyla göstermektedir. Yıldız ile gösterilen noktalar aykırı değerlerdir. Grafiğe göre, her bir operatör için ölçüm ortalamaları yakındır.

Parça x Operatör Etkileşimi grafiği, operatörler ile parçaların etkileşimini göstermektedir. Çakışan çizgiler, operatörlerin aynı şekilde ölçtüklerini ifade etmektedir. Grafiğe göre, 3. ve 4. parçaların ölçümünde iki operatör de birbirine çok yakın ölçümler, 9. parçanın ölçümünde ise oldukça farklı ölçümler elde etmiştir.

Varyans Bileşenlerinin Tahmin Yöntemleri

Örnek II için VÇ, EÇOB, KEÇOB ve MNKY yöntemleri ile varyans tahminleri Çizelge 6.11'de verilmiştir.

Çizelge 6.11 Örnek II için VÇ, EÇOB, KEÇOB ve MNKY Yöntemleri ile Varyans Tahminleri

Varyans Kaynağı	VÇ	EÇOB	KEÇOB	MNKY
Parça	0	0,000097	0	0
Operatör	0,000000411	0	0,000000411	1
Parça x Operatör	0,00000549	0,0000059	0,00000549	0,00000549
Hata	0,00000802	0,00000802	0,00000802	0,00000802

Çizelge 6.11'de yer alan sonuçlara göre; varyans bileşenleri bakımından, EÇOB tahmin yöntemi sonuçlarının diğer üç yöntemden elde edilen sonuçlar ile farklılık gösterdiği tespit edilmiştir. Ayrıca VÇ, KEÇOB ve MNKY yöntemlerinin kullanımı ile elde edilen tahmin değerleri aynı bulunmuştur.

Bu uygulamada, hata varyansı tüm tahmin yöntemleri için 0,00000802 olarak bulunmuştur. Bu kriter ile bir değerlendirme yapılamayacağından diğer kriterlere bakılmalıdır. VÇ, KEÇOB ve MNKY yöntemleri ile hata varyansının toplam varyanstaki payı hesaplandığında,

$$\frac{\sigma^2_{\text{Hata}}}{\sigma^2_{\text{Toplam}}} = 0,5761$$

elde edilmekte olup, bu değer oldukça yüksektir. EÇOB yöntemi ile hata varyansının toplam varyanstaki payı ise,

$$\frac{\sigma^2_{\text{Hata}}}{\sigma^2_{\text{Toplam}}} = 0,0723$$

olarak bulunmuştur. Bu sebeple bu ölçüte göre, uygulamada elde edilen $\sigma^2_{\text{Hata}}/\sigma^2_{\text{Toplam}}$ değerlerinden en küçük olanının en iyi tahmin yöntemi olduğu söylenebilir. Burada EÇOB yöntemi en iyi varyans tahmin yöntemi olarak belirlenmiştir. Varyans tahmin yöntemi sonuçlarında, varyans bileşenlerinin negatif tahminlerine rastlanılmamıştır. Ancak bazı tahminlerin sıfır olduğu görülmektedir. Bunun sebebi, yöntemlerin teori bölümünde anlatıldığı üzere varyansa ait değer ya gerçekten sıfırdır ya da modelin hatalı olabileceği düşünülmektedir. Negatif varyanslılık durumunda bu değer genellikle sıfıra eşitlenir. Ancak, bu durum sonuçların yanlı olmasına sebep olabilmektedir.

Ölçüm sisteminin yeterli olmadığı bu Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilbilirlik çalışmasında VÇ, KEÇOB ve MNKY varyans tahmin yöntemlerinden elde edilen sonuçlar birbirine eşit bulunmuştur. Negatif varyans durumu görülmemiş ancak sıfır varyans değeri ile karşılaşılmıştır. Hata varyansını minimum olarak tahmin eden ve hata varyansının toplam varyans içerisindeki oranı minimum olan EÇOB, bu uygulamada en iyi varyans tahmin yöntemi olarak tespit edilmiştir.

Örnek III: Manganez Konsantrasyonu Uygulaması

Bu çalışma optik emisyon spektrometresini kullanarak çeliğin kimyasının belirlenmesi ile ilgilidir. Çalışmadaki veriler 1992 yılında Journal of Quality Technology dergisinden alınmıştır [40]. Söz konusu çalışmada, çelik konsantrasyonu verilerinin VÇ ve KEÇOB tahminleri yapılmıştır. Buradaki çalışmada ise bunlara ek olarak Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilbilirlik analizi ile ölçüm sisteminin analizi yapılmış olup, EÇOB ve MNKY varyans tahmin yöntemleri de elde edilerek bu dört varyans analizi tahmin yöntemleri kıyaslanmıştır. 4 operatör tarafından 10 parçanın 2 tekrarlı ölçümü yapılmıştır. Bu uygulama, dengede olan iç içe deney düzenidir. Ölçüme ait sonuçlar Çizelge 6.12'de gösterilmiştir.

Çizelge 6.12 Örnek III Manganez Konsantrasyonu Ölçüm Sonuçları (%)

Parça	Operatör							
	1		2		3		4	
	Tekrar		Tekrar		Tekrar		Tekrar	
	1	2	1	2	1	2	1	2
1	0,63	0,60	0,62	0,62	0,60	0,60	0,59	0,61
2	0,64	0,63	0,63	0,64	0,67	0,65	0,62	0,64
3	0,60	0,58	0,60	0,61	0,60	0,60	0,58	0,60
4	0,75	0,74	0,74	0,74	0,74	0,73	0,73	0,76
5	0,71	0,68	0,69	0,70	0,69	0,67	0,68	0,71
6	0,65	0,63	0,62	0,65	0,63	0,64	0,62	0,64
7	0,67	0,64	0,66	0,67	0,65	0,65	0,64	0,66
8	0,65	0,63	0,65	0,64	0,62	0,62	0,60	0,62
9	0,68	0,66	0,67	0,68	0,67	0,67	0,65	0,68
10	0,67	0,64	0,66	0,66	0,65	0,64	0,64	0,66

Konsantrasyon (Y) = μ + Parça + Operatör + Parça x Operatör + Tekrar (Operatör) + Tekrar Edilebilirlik

Burada her bir parça, farklı bir çelik kütüğünden alınmış ve her kütük farklı bir çelik grubundan alınmıştır. Her parça, dörde bölünmüş ve dört operatörün her birine analiz etmesi için her dilimden on parça verilmiştir. Her operatör, tüm parçaları rassal sırada analiz etmiştir. Dolayısıyla, her parça operatöre özgüdür yani iki operatör aynı parçayı ölçmemiştir. Ayrıca, herhangi bir operatör tarafından yapılan

iki tekrarlı analiz aynı gün içerisinde gerçekleşirken, operatörlerin deneyleri farklı günlerde gerçekleşmiştir. Rassallık, her bir operatör için ayrı bir tekrar etkisi olacak şekildedir. Bu nedenle, iç içe (Nested) etki modelde yer alacaktır.

Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilebilirlik Analizi Sonuçları

Çizelge 6.13'te iki yönlü VÇ sonuçları yer almaktadır.

Çizelge 6.13 Örnek III için İki Yönlü VÇ

Varyans Kaynağı	S.D	Ardışık KT	Düzeltilmiş KT	Düzeltilmiş KO	F	P
Parça	9	0,1263312	0,1263312	0,0140368	107,5	0,000*
Operatör	3	0,0014138	0,0014138	0,0004713	0,32	0,809
Tekrar (Operatör)	4	0,005435	0,005435	0,0013588	37,2	0,000*
Parça x Operatör	27	0,0035238	0,0035238	0,0001305	3,57	0,000*
Tekrar Edilebilirlik	36	0,001315	0,001315	0,0000365		
Toplam Varyans	79	0,1380187				

* P<0,05

Çizelge 6.13'e göre; Parça, Tekrar (Operatör), Parça x Operatör etkileşimi %5 anlamlılık düzeyinde anlamlı bulunmuştur. Operatör etkisi ise anlamlı bulunmamıştır. Bu deney düzeninde, parçaya ait F değerinin yüksek olması sebebiyle parçaların etkisi oldukça fazla iken operatörlerin etkisi ise oldukça düşüktür. Çizelge 6.14'te Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilebilirlik varyans bileşenleri çizelgesi yer almaktadır.

Çizelge 6.14 Örnek III için Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilirlik Varyans Bileşenleri

Varyans Kaynağı	Varyans Bileşeni	%Varyans Bileşeninin Katkısı
Toplam Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilirlik	0,0000835	4,27
Tekrar Edilebilirlik	0,0000365	1,87
Tekrar Üretilirlik	0,0000470	2,40
Operatör	0,0000000	0,00
Parça x Operatör	0,0000470	2,40
Parçadan Parçaya	0,0018705	95,73
Parça	0,0017383	88,96
Tekrar (Operatör)	0,0001322	6,77
Toplam Varyans	0,0019540	100,00

Çizelge 6.14'e göre, Parçadan Parçaya varyansın (95,73) katkı yüzdesi Toplam Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilirlik'in (4,27) katkısından daha fazladır. Bu durum, varyansın büyük bir kısmının parçalar arasındaki farklılıktan kaynaklandığını ifade etmektedir. Toplam Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilirlik değerinin katkısı %9'dan küçüktür. Bu ise ölçüm sisteminin yeterli olduğunu göstermektedir. Çizelge 6.15'te Ölçüm Sistemi değerlendirmesi yer almaktadır.

Çizelge 6.15 Örnek III için Ölçüm Sistemi Değerlendirmesi

Varyans Kaynağı	Std. Sapma (S.S)	Çalışma Varyansı	%Çalışma Varyansı
		(6 x S.S)	
Toplam Ölçüm Sistemi Edilebilirlik & Tekrar Üretilirlik	0,0091388	0,054833	20,67
Tekrar Edilebilirlik	0,0060438	0,036263	13,67
Tekrar Üretilirlik	0,0068550	0,041130	15,51
Operatör	0,0000000	0,000000	0,00
Parça x Operatör	0,0068550	0,041130	15,51
Parçadan Parçaya	0,0432494	0,259496	97,84
Parça	0,0416928	0,250157	94,32
Tekrar (Operatör)	0,0114988	0,068993	26,01
Toplam Varyans	0,0442044	0,265226	100,00

Farklı Kategori Sayısı = 6

Çizelge 6.15'e göre, Toplam Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilirlik'e ait %Çalışma Varyansı değeri 20,67'dir. Bu değer, sınır değer olan %30'un altındadır. Toplam Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilirlik kabul edilebilir sınırlar içerisinde kalmaktadır.

Farklı Kategori Sayısını gösteren SGO değeri:

$$\sigma_{\text{Toplam}}^2 = \sigma_{\text{Parça}}^2 + \sigma_{\text{Ölçüm Sistemi}}^2$$

$$\hat{\sigma}_{\text{Toplam}}^2 = s^2 = 0,0019540$$

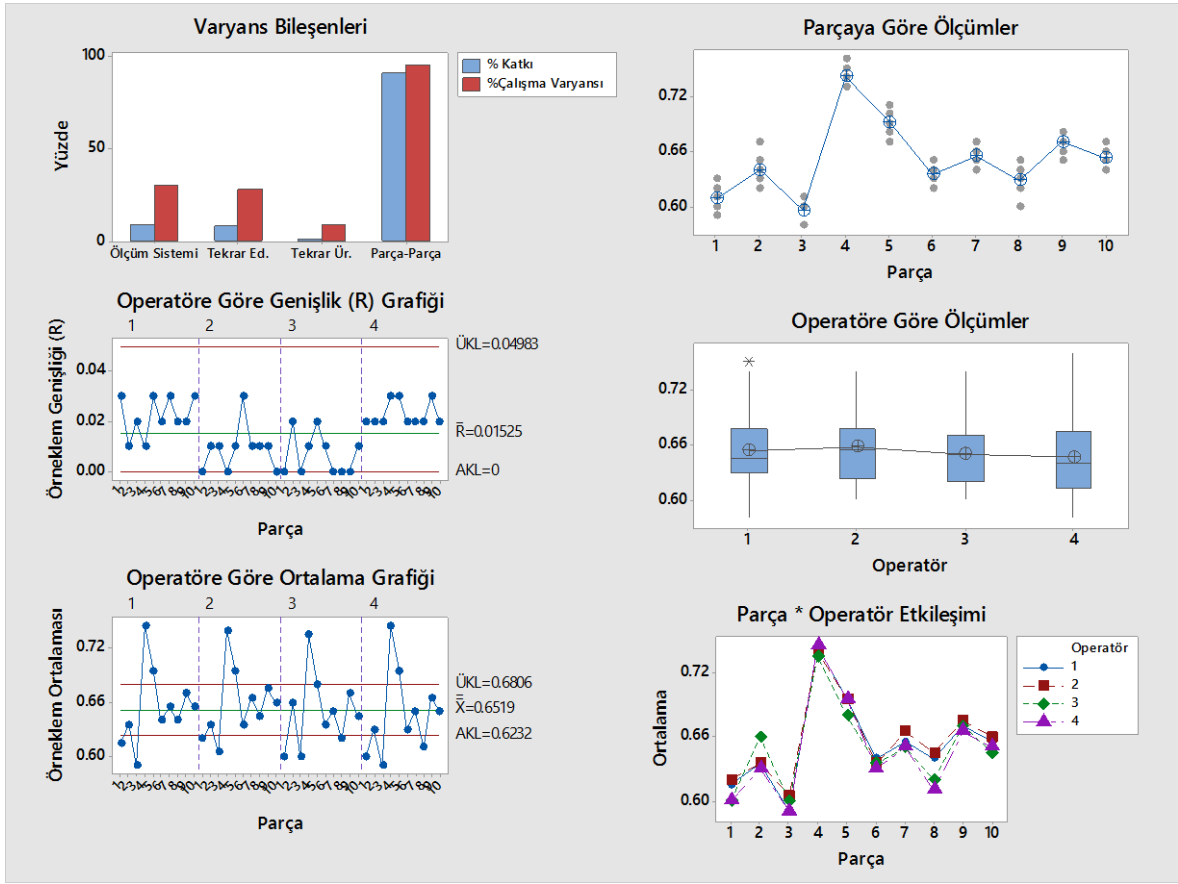
$$\hat{\sigma}_{\text{Ölçüm Sistemi}}^2 = 0,0000835$$

$$\hat{\sigma}_{\text{Parça}}^2 = 0,0018705$$

$$\rho_{\text{Parça}} = \frac{\sigma_{\text{Parça}}^2}{\sigma_{\text{Toplam}}^2} = \frac{0,0018705}{0,0019540} = 0,9572$$

$$\text{SGO} = \sqrt{\frac{2\hat{\rho}_{\text{Parça}}}{1 - \hat{\rho}_{\text{Parça}}}} = \sqrt{\frac{2(0,9572)}{1 - 0,9572}} = 6,68 \sim 6$$

olarak hesaplanmaktadır. Bu durum ölçüm sisteminin yeterli olduğunu göstermektedir.



Şekil 6.3 Örnek III için Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilebilirlik

Şekil 6.3'te yer alan Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilebilirlik grafiğine göre aşağıdaki yorumlar yapılabilir:

Varyans Bileşenleri grafiği, Parçadan Parçaya varyansın katkı oranının Toplam Ölçüm Sisteminden fazla olduğunu göstermektedir. Bu durum, varyansın büyük bir kısmının parçalar arasındaki farklılıktan kaynaklandığını göstermektedir.

Operatöre Göre Genişlik (R) grafiği, 4 operatör tarafından ölçümlenen 10 parçanın ölçümleri arasındaki farkı göstermektedir. Bu değerler kabul edilebilir limitler içerisindedir.

Operatöre Göre Ortalama grafiğine göre, her bir nokta, 4 operatör için 10 parçanın ölçümlerinin ortalamasını göstermekte olup, birçok nokta kontrol limitleri içerisinde yer almaktadır. Bu durum, varyansın büyük bir kısmının parçalardan kaynaklandığını göstermektedir. Grafiğe göre, 2. parçayı 3. operatörün diğer operatörlerden oldukça farklı ölçtüğü görülmektedir.

Parçaya Göre Ölçümler grafiği, her bir parça için ölçümlerin dağılımını göstermektedir. Grafiğe göre, parçalara ait ölçümlerin oldukça dağınık olduğu görülmektedir.

Operatöre Göre Ölçümler grafiği, operatörlerin yaptığı tüm ölçümlerin ortalamalarını ve dağılımlarını göstermektedir. Grafiğe göre, 1. operatörün ölçümünde aykırı değer vardır. Her bir operatör için ölçüm ortalamaları yakındır.

Parça x Operatör Etkileşimi grafiği, operatörler ile parçaların etkileşimini göstermektedir. Grafiğe göre 4, 6 ve 9. parçaların ölçümünde operatörler birbirine çok yakın ölçümler, diğer parçaların ölçümünde ise oldukça farklı ölçümler elde etmiştir.

Varyans Bileşenlerinin Tahmin Yöntemleri

Örnek III için VÇ, EÇOB, KEÇOB ve MNKY yöntemleri ile varyans tahminleri Çizelge 6.16'da verilmiştir.

Çizelge 6.16 Örnek III için VÇ, EÇOB, KEÇOB ve MNKY Yöntemleri ile Varyans Tahminleri

Kaynak	VÇ	EÇOB	KEÇOB	MNKY
Parça	0,00174	0,001574	0,001738	0,001738287
Operatör	-0,00005	0	0	-0,00000004907407
Parça xOperatör	0,00005	0,00004647	0,00004647	0,00004699074
Tekrar(Operatör)	0,00013	0,00009346	0,00009448	0,000132222
Hata	0,00004	0,00003659	0,00003659	0,00003652778

Çizelge 6.16'daki sonuçlara göre varyans bileşenleri bakımından dört yöntem arasında farklılıklar tespit edilmiştir. VÇ ve MNKY yöntemlerinde Operatör için negatif varyans tahminleri ile karşılaşmıştır. Bu durum operatör için yapılan varyans tahminini hatalı kılmaktadır. Diğer taraftan, EÇOB ve KEÇOB yöntemlerinde Operatör için varyans tahmini sıfır olarak bulunmuştur.

Varyans bileşenleri yöntemlerinin kıyaslamasında hata varyansını minimum tahmin eden yöntemin en iyi yöntem olduğu ifade edilmişti. Burada hata varyansını minimum tahmin eden yöntem 0,00003652778 ile MNKY yöntemidir. Fakat MNKY yöntemi negatif tahminler ürettiği için bu uygulamada bu yöntem en iyi tahmin yöntemi olamamaktadır. EÇOB ve KEÇOB yöntemlerinde ise hata varyansı

(0,00003659) birbirine eşittir. Bu aşamada bu kriter ile bir karar verilememektedir. Diğer kriterler değerlendirilmelidir. Bu sebeple, varyans bileşenlerinin toplam varyanstaki oranı, yöntemlerin kıyaslanmasında diğer önemli bir ölçüt olarak alınmaktadır ve hatanın toplam varyanstaki oranının küçük olması istenmektedir. Bu kriter değerlendirildiğinde, EÇOB yöntemi ile hata varyansının toplam varyanstaki payı hesaplandığında,

$$\frac{\sigma^2_{\text{Hata}}}{\sigma^2_{\text{Toplam}}} = 0,0209$$

elde edilmektedir. KEÇOB yöntemi ile hata varyansının toplam varyanstaki payı ise,

$$\frac{\sigma^2_{\text{Hata}}}{\sigma^2_{\text{Toplam}}} = 0,0191$$

olarak bulunmuştur. Bu sebeple bu ölçüte göre, uygulamada elde edilen $\sigma^2_{\text{Hata}}/\sigma^2_{\text{Toplam}}$ değerlerinden en küçük olanın en iyi tahmin yöntemi olduğu söylenebilir. Burada KEÇOB yöntemi en iyi varyans tahmin yöntemi olarak belirlenmiştir.

Ölçüm sisteminin oldukça yeterli düzeyde olduğu bu Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilbilirlik çalışmasında VÇ, EÇOB, KEÇOB ve MNKY varyans tahmin yöntemlerinden elde edilen sonuçlar arasında farklılıklar tespit edilmiştir. MNKY ve VÇ tahmin yöntemlerinde negatif varyans tahminleri ve sıfır varyans tahminleri ile karşılaşılmıştır. Negatif varyansın bulunmadığı ve hata varyansının toplam varyans içerisindeki oranının minimum olduğu KEÇOB yöntemi bu uygulamada en iyi varyans tahmin yöntemi olarak tespit edilmiştir.

Örnek IV: Paralel Plaka Parçalarının Uzunluk Ölçümleri Uygulaması

Çalışmadaki veriler 2010 yılında International Journal for Quality Research dergisinde yayımlanan çalışmadan alınmıştır [41]. Söz konusu çalışmada 3 parça rassal olarak seçilmiş ve 5 operatör her parçayı iki farklı sıcaklık koşulunda toplam 4 defa ölçmüştür. Böylece, aynı karakteristik aynı operatörün aynı ölçü aletiyle 4 defa ölçülmüştür. Model, dengede olan rassal etkili modeldir. Ölçüm sonuçları Çizelge 6.17’de gösterilmiştir.

Çizelge 6.17 Örnek IV Paralel Plaka Parçalarının Uzunlukları Ölçüm Sonuçları

Operatör	1. Parça			
	1	2	3	4
1	10,0000	10,0004	10,0003	10,0002
2	10,0000	10,0004	10,0003	10,0003
3	10,0000	10,0004	10,0006	10,0005
4	10,0000	10,0004	10,0004	10,0008
5	10,0000	10,0002	10,0006	10,0005
Operatör	2. Parça			
	1	2	3	4
1	10,0001	10,0003	10,0004	10,0003
2	10,0003	10,0005	10,0002	10,0001
3	10,0001	10,0003	10,0004	10,0005
4	10,0001	10,0001	10,0000	10,0002
5	10,0003	10,0003	10,0000	10,0002
Operatör	3. Parça			
	1	2	3	4
1	10,0000	10,0004	10,0001	10,0002
2	10,0000	10,0004	10,0003	10,0001
3	10,0004	10,0001	10,0002	10,0000
4	10,0003	10,0004	10,0005	10,0001
5	10,0003	10,0001	10,0001	10,0004

Uzunluk Ölçümü (Y) = μ + Parça + Operatör + Parça x Operatör + Tekrar Edilebilirlik

Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilirlik Analizi Sonuçları

Çizelge 6.18’de iki yönlü VÇ sonuçları yer almaktadır.

Çizelge 6.18 Örnek IV için İki Yönlü VÇ (Etkileşim terimi ile birlikte)

Varyans Kaynağı	S.D	KT	KO	F	P
Parça	2	0,0000001	0,0000001	2,24224	0,169
Operatör	4	0,0000000	0,0000000	0,27329	0,887
Parça x Operatör	8	0,0000002	0,0000000	0,74308	0,653
Tekrar Edilebilirlik	45	0,0000016	0,0000000		
Toplam Varyans	59	0,0000020			

Çizelge 6.18'e göre; Parça, Operatör ve Parça x Operatör etkileşimi %5 anlamlılık düzeyinde anlamsız bulunmuştur. Bu deney düzeninde, parçaya ait F değerinin diğerlerine göre daha yüksek olması sebebiyle parçaların etkisi daha fazladır. Analizde, etkileşim terimi de anlamsız bulunduğundan MINITAB, etkileşim teriminin bulunmadığı yeni bir VÇ çizelgesi daha üretecektir. Bu çizelge ise Çizelge 6.19'da gösterilmiştir.

Çizelge 6.19 Örnek IV için İki Yönlü VÇ (Etkileşim terimi olmadan)

Varyans Kaynağı	S.D	KT	KO	F	P
Parça	2	0,0000001	0,0000001	1,73338	0,187
Operatör	4	0,0000000	0,0000000	0,21127	0,931
Tekrar Edilebilirlik	53	0,0000018	0,0000000		
Toplam Varyans	59	0,0000020			

Etkileşim teriminin bulunmadığı Çizelge 6.19'da, Parça ve Operatör değişkenlerine ait P değerleri 0,05 değerinden büyük olduğundan, bu değişkenler %5 anlamlılık düzeyinde anlamsızdır. Ölçüm sisteminin önemli bir parçası olan bu değişkenlerin anlamsızlığının Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilirlik analizinin sonuçlarını da olumsuz yönde etkilemesi beklenmektedir. Çizelge 6.20'de Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilirlik varyans bileşenleri yer almaktadır.

Çizelge 6.20 Örnek IV için Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilirlik Varyans Bileşenleri

Varyans Kaynağı	Varyans Bileşeni	%Varyans Bileşeninin Katkısı
Toplam Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilirlik	0,00000003470769	96,46
Tekrar Edilebilirlik	0,00000003470769	96,46
Tekrar Üretilirlik	0	0,00
Operatör	0	0,00
Parçadan Parçaya	0,00000000127449	3,54
Toplam Varyans	0,00000003598609	100,00

Çizelge 6.20'ye göre, Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilirlik bileşenine ait katkı yüzdesi değeri (96,46), parçadan parçaya varyansın katkı yüzdesinden (3,54) oldukça fazladır. Varyansın neredeyse tamamı ölçüm sisteminden kaynaklanmaktadır. Söz konusu ölçüm sistemi ile yapılan ölçüm sonuçları güvenilir değildir. Dolayısıyla, ölçüm sistemi yetersizdir ve acilen kalibrasyon işlemleri yapılmalıdır.

Çizelge 6.21 Örnek IV için Ölçüm Sistemi Değerlendirmesi

Varyans Kaynağı	Std. Sapma (S.S)	Çalışma Varyansı	%Çalışma Varyansı
		(6 × S.S)	
Toplam Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilirlik	0,0001863	0,0011178	98,22
Tekrar Edilebilirlik	0,0001863	0,0011178	98,22
Tekrar Üretilirlik	0,0000000	0,0000000	0,00
Operatör	0,0000000	0,0000000	0,00
Parçadan Parçaya	0,0000357	0,0002141	18,81
Toplam Varyans	0,0001897	0,0011382	100,00

Farklı Kategori Sayısı = 1

Çizelge 6.21'e göre, Toplam Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilirlik'e ait %Çalışma Varyansı değeri 98,22'dir. Bu değer, sınır değer olan %30'un çok üzerindedir. Toplam Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilirlik kabul edilebilir limitler dışarısında kalmıştır.

Farklı Kategori Sayısını gösteren SGO değeri:

$$\sigma_{\text{Toplam}}^2 = \sigma_{\text{Parça}}^2 + \sigma_{\text{Ölçüm Sistemi}}^2$$

$$\hat{\sigma}_{\text{Toplam}}^2 = s^2 = 0,00000003598609$$

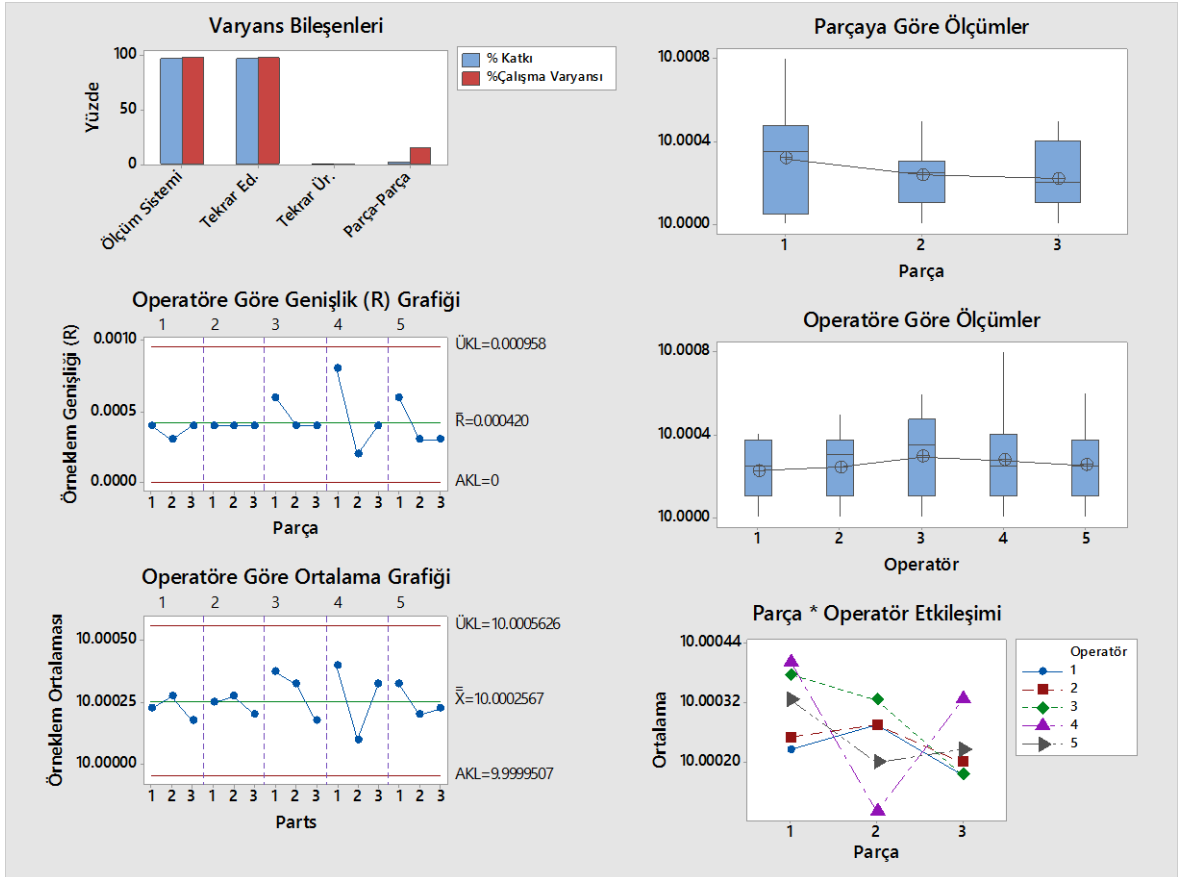
$$\hat{\sigma}_{\text{Ölçüm Sistemi}}^2 = 0.00000003470769$$

$$\hat{\sigma}_{\text{Parça}}^2 = 0.0000000127449$$

$$\rho_{\text{Parça}} = \frac{\sigma_{\text{Parça}}^2}{\sigma_{\text{Toplam}}^2} = \frac{0.0000000127449}{0,00000003598609} = 0,0354$$

$$\text{SGO} = \sqrt{\frac{2\hat{\rho}_{\text{Parça}}}{1 - \hat{\rho}_{\text{Parça}}}} = \sqrt{\frac{2(0,0354)}{1 - 0,0354}} = 0,27 \sim 1$$

olarak hesaplanmaktadır. SGO<5 bulunduğundan, ölçüm sisteminin parçaları birbirinden yeterli düzeyde ayırt edemediği ve ölçüm sisteminin çok yetersiz olduğu söylenebilir.



Şekil 6.4 Örnek IV için Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilebilirlik

Şekil 6.4'te yer alan Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilirlik grafiğine göre aşağıdaki yorumlar yapılabilir:

Varyans Bileşenleri grafiğine göre, Ölçüm Sistemine ait varyansın katkı oranı oldukça fazla iken Parçadan Parçaya varyansın katkı oranı çok azdır. Bu ise tercih edilmeyen bir durumdur ve varyansın büyük bir oranda ölçüm sisteminden kaynaklandığını göstermektedir.

Operatöre Göre Genişlik (R) grafiğine göre, 5 operatörün ölçümleri kontrol limitleri içerisinde kalmıştır. 4. operatör tarafından gerçekleştirilen 1. parçanın ölçümleri arasındaki fark dikkat çekmektedir.

Operatöre Göre Ortalama grafiğine göre, her bir nokta 5 operatör için 3 parçanın ölçümlerinin ortalamasını göstermekte olup, kontrol limitleri içerisinde yer almaktadır. Grafiğe göre, 2. parçayı 3. operatörün diğer operatörlerden oldukça farklı ölçtüğü görülmektedir. 4. operatörün tekrarlı ölçümleri arasındaki fark biraz daha fazladır.

Parçaya Göre Ölçümler grafiği, her bir parça için ölçümlerin dağılımını göstermektedir. Grafiğe göre, 1. parçaya ait ölçümlerin daha dağınık olduğu görülmektedir.

Operatöre Göre Ölçümler grafiği, operatörlerin yaptığı tüm ölçümlerin ortalamalarını ve dağılımlarını göstermektedir. Grafiğe göre, 5 operatörün ölçümleri arasında 3. operatörün ölçümlerinin ortalaması diğer operatörlere göre daha yüksektir.

Parça x Operatör Etkileşimi grafiğine göre, tüm parçalarda 5 operatörün ölçüm ortalamaları arasındaki fark oldukça fazladır. Parça x Operatör etkileşimi anlamlı bulunmamıştır.

Varyans Bileşenlerinin Tahmin Yöntemleri

Örnek IV için VÇ, EÇOB, KEÇOB ve MNKY yöntemleri ile varyans tahminleri Çizelge 6.22'de verilmiştir.

Çizelge 6.22 Örnek IV için VÇ, EÇOB, KEÇOB ve MNKY Yöntemleri ile Varyans Tahminleri

Kaynak	VÇ	EÇOB
Parça	0,000000001667	0,0000000003661
Operatör	-0,000000001625	0
Parça x Operatör	-0,000000002320	0
Hata	0,000000036110	0,0000000327900
Kaynak	KEÇOB	MNKY
Parça	0,000000001369000	0,00000000166667
Operatör	0	-0,000000000003944
Parça x Operatör	0,0000000000000000004155	-0,000000000003944
Hata	0,000000032790000	0,000000036111110

Çizelge 6.22'deki sonuçlara göre varyans bileşenleri bakımından dört yöntem arasında farklılıklar tespit edilmiştir. VÇ ve MNKY yöntemlerinde Operatör ve Parça x Operatör için negatif varyans tahminleri ile karşılaşmıştır. Diğer taraftan, EÇOB yönteminde Operatör ve Parça x Operatör için varyans tahmini sıfır olarak bulunurken, KEÇOB yönteminde Operatör için varyans tahmini sıfır olarak bulunmuştur.

Hata varyansını minimum tahmin eden yöntemler 0,00000003279 ile EÇOB ve KEÇOB yöntemleridir. VÇ ve MNKY yöntemleri negatif tahminler ürettiği için, uygun bir tahmin yöntemi olamamaktadır. Bu sebeple, negatif tahminlerin üretilmediği ve minimum hata varyansına sahip olan EÇOB ve KEÇOB yöntemlerinden en uygun olanı seçilecektir. Bu sebeple, hatanın toplam varyanstaki oranının en küçük olması istenilmektedir. Bu kriter değerlendirildiğinde, EÇOB yöntemi ile hata varyansının toplam varyanstaki payı hesaplandığında,

$$\frac{\sigma^2_{Hata}}{\sigma^2_{Toplam}} = 0,988$$

elde edilmektedir. KEÇOB yöntemi ile hata varyansının toplam varyanstaki payı ise,

$$\frac{\sigma^2_{Hata}}{\sigma^2_{Toplam}} = 0,959$$

olarak bulunmuştur. Bu sebeple bu ölçüte göre, uygulamada elde edilen $\sigma^2_{Hata}/\sigma^2_{Toplam}$ değerlerinden en küçük olanın en iyi tahmin yöntemi olduğu

söylenbilir. Burada KEÇOB yöntemi en iyi varyans tahmin yöntemi olarak belirlenmiştir.

Ölçüm sisteminin oldukça yetersiz olduğu bu uygulamada VÇ, EÇOB, KEÇOB ve MNKY varyans tahmin yöntemlerinden elde edilen sonuçlar arasında farklılıklar tespit edilmiştir. MNKY ve VÇ tahmin yöntemlerinde negatif varyans tahminleri ile karşılaşmıştır. Negatif varyansın bulunmadığı ve hata varyansının toplam varyans içerisindeki oranının minimum olduğu KEÇOB yöntemi bu uygulamada en iyi varyans tahmin yöntemi olarak tespit edilmiştir.

7. SONUÇ VE TARTIŞMA

Tez çalışmasında, herhangi bir ölçüm sisteminin yeterli olup olmadığını tespit etmek amacıyla kullanılan Ölçüm Sistemleri Analizi (Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilirlik), birbirinden farklı özellikler sergileyen 4 farklı veri kümesinde uygulanmıştır. Daha sonra, ölçüm sisteminin önemli bileşenlerinden olan Parça, Operatör ve Parça x Operatör etkileşimi terimleri VÇ, EÇOB, KEÇOB ve MNKY varyans tahmin yöntemleri ile tahmin edilmiştir. Bu dört tahmin yöntemi arasından belirli kriterlere göre en uygun yöntem belirlenmiştir.

1. uygulamada, yarı iletken güç modüllerinin termal iç direncini ölçmek amacıyla kullanılan cihazlar hakkında bir Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilirlik çalışması yapılmıştır. Çalışmada, rassal olarak seçilen 3 operatör her biri rassal seçilen 10 parçayı 3 defa ölçmüştür. Toplam 90 ölçüm gerçekleştirilmiştir. Deney düzeni, 3 operatör x 10 parça x 3 tekrar şeklindedir. İki yönlü VÇ çizelgesi sonuçlarına göre, Parça, Operatör ve Parça x Operatör etkileşimi %5 anlamlılık düzeyinde anlamlı bulunmuştur. Bu deney düzeninde parçaların etkisi oldukça fazladır. Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilirlik analizi sonucunda, toplam varyansın büyük bir kısmının parçalar arasındaki farklılıktan kaynaklandığı ve ölçüm sisteminin yeterli düzeyde olduğu tespit edilmiştir. Varyans bileşenleri bakımından VÇ, EÇOB, KEÇOB ve MNKY varyans tahmin yöntemlerinden elde edilen sonuçların birbirine oldukça yakın olduğu ve negatif varyans durumu ile karşılaşmadığı görülmüştür. Hata varyansını minimum tahmin eden ve hata varyansının toplam varyans içerisindeki oranı minimum olan VÇ yöntemi bu uygulamada en iyi varyans tahmin yöntemi olarak tespit edilmiştir.

2. uygulamada, rassal seçilen 2 operatör tarafından rassal seçilen 10 parçanın dişli çapı (mm) 2 defa ölçülmüştür. Toplam 40 ölçüm gerçekleştirilmiştir. Deney düzeni, 2 operatör x 10 parça x 2 tekrar şeklindedir. İki yönlü varyans çözümlemesi çizelgesi sonuçlarına göre, Parça değişkeni %5 anlamlılık düzeyinde anlamlı bulunurken, Operatör ve Parça x Operatör etkileşimi anlamlı bulunmamıştır. Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilirlik analizi sonucunda, Toplam Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilirlik değerinin katkısı sınır değer olan %9'dan biraz fazla olduğu, bu sebeple ölçüm sisteminin yeterli olmadığı ve parçaları birbirinden yeterli düzeyde ayırt edemediği tespit edilmiştir. Ölçüm sisteminin yeterli olmadığı bu uygulamada VÇ, KEÇOB ve MNKY varyans tahmin yöntemlerinden

elde edilen sonuçlar birbirine eşit bulunmuştur. Negatif varyans durumu görülmemiştir. Hata varyansını minimum olarak tahmin eden ve hata varyansının toplam varyans içerisindeki oranı minimum olan EÇOB yöntemi bu uygulamada en iyi varyans tahmin yöntemi olarak tespit edilmiştir.

3. uygulamada, optik emisyon spektrometresini kullanarak çeliğin kimyasının belirlenmesi ile ilgili olarak, 4 operatör tarafından 10 parçanın ve 2 tekrarlı ölçümü yapılmıştır. Toplam 80 ölçüm gerçekleştirilmiştir. Burada herhangi bir operatör tarafından yapılan iki tekrarlı analiz aynı gün içerisinde gerçekleştirirken, operatörlerin deneyleri farklı günlerde gerçekleştirilmiştir. Rassallık, her bir operatör için ayrı bir tekrar etkisi olacak şekildedir. Bu yüzden iç içe (Nested) etki modelde yer almıştır. İki Yönlü VÇ çizelgesi sonuçlarına göre; Parça, Tekrar (Operatör), Parça x Operatör etkileşimi %5 anlamlılık düzeyinde anlamlı bulunurken, Operatör etkisi anlamlı bulunmamıştır. Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilbilirlik çalışması sonuçlarına göre, varyansın büyük bir kısmının parçalar arasındaki farklılıktan kaynaklandığı görülmüş ve ölçüm sisteminin yeterli olduğu tespit edilmiştir. Varyans bileşenleri bakımından, VÇ ve MNKY yöntemlerinde Operatör için negatif varyans tahminleri ile karşılaşılmıştır. Varyans tanımı gereğince negatif olmadığından, bu durum operatör için yapılan varyans tahminini hatalı kılmaktadır. Negatif varyansın bulunmadığı ve hata varyansının toplam varyans içerisindeki oranının minimum olduğu KEÇOB yöntemi bu uygulamada en iyi varyans tahmin yöntemi olarak belirlenmiştir.

4. uygulamada ise, rassal olarak seçilmiş 3 adet paralel plaka parçalarının uzunlukları 5 operatör tarafından her parça için iki farklı sıcaklık koşulu altında toplam 4 defa ölçülmüştür. İki yönlü VÇ çizelgesi sonuçlarına göre; Parça, Operatör ve Parça x Operatör etkileşimi %5 anlamlılık düzeyinde anlamsız bulunmuştur. Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilbilirlik analizi sonucunda, varyansın neredeyse tamamının ölçüm sisteminden kaynaklandığı ve sonuçların güvenilir olmadığı saptanmıştır. Dolayısıyla, ölçüm sisteminin oldukça yetersiz olduğu görülmüştür. Ölçüm sisteminin oldukça yetersiz olduğu Ölçüm Sistemi Tekrar Edilebilirlik & Tekrar Üretilbilirlik çalışmasında MNKY ve VÇ tahmin yöntemlerinde negatif varyans tahminleri ile karşılaşılmıştır. Negatif varyansın bulunmadığı ve hata varyansının toplam varyans içerisindeki oranının minimum

olduğu KEÇOB yöntemi bu uygulamada en iyi varyans tahmin yöntemi olarak tespit edilmiştir.

Genel Yorum: Birbirinden farklı özellikler gösteren bu dört uygulama neticesinde, VÇ ve MNKY varyans tahmin yöntemlerinde negatif varyanslılık durumu ile karşılaşılmıştır. Diğer taraftan EÇOB ve KEÇOB varyans tahmin yöntemlerinde negatif varyans tahmini görülmez iken, sıfır varyans tahminleri ile karşılaşılmıştır. Oldukça yetersiz olan bir ölçüm sisteminde, VÇ ve MNKY negatif varyans tahminleri üretebilmektedir. 2. ve 3. örnekler karşılaştırıldığında, operatör sayısındaki artış ve ölçüm sisteminin daha yeterli bir duruma gelmesi sonucunda, KEÇOB varyans tahmin yönteminin daha iyi sonuçlar verdiği görülmüştür. Operatör ve tekrar sayısının 3 olduğu ve ölçüm sisteminin oldukça yeterli olduğu 1. örnekte, VÇ tahmin yönteminin negatif olmayan tahminler ürettiği tespit edilmiştir. 3. ve 4. örneklerde KEÇOB varyans tahmin yöntemi en uygun sonuçları vermiştir.

KAYNAKLAR

- [1] Pan, J., *Evaluating the Gage Repeatability and Reproducibility for Different Industries*, Quality & Quantity (2006) 40: 499–518, **2006**.
- [2] Montgomery, D. C., Runger, G. C., *Gage Capability Analysis and Designed Experiment, Part II: Experimental Design Models and Variance Component Estimation*, Quality Engineering, 6, 2, 289-305. **1993**.
- [3] Joiner, B. L., Gaudard, M. A., *Variation Management and W. Edwards Deming*. Quality Progress, 23, 12, **1990**.
- [4] MacKay, R. J., Steiner, S. H., *Strategies for Variability Reduction*. Quality Engineering, 10, 1, 125-136, **1997**.
- [5] McGhee, J. W., *Introductory Statistics*, St. Paul, MN: West, **1985**.
- [6] Automotive Industry Action Group (AIAG), *Measurement Systems Analysis Reference Manual*, third ed., Chrysler, Ford, General Motors Supplier Quality Requirements Task Force, **2002**.
- [7] Grubbs, F.E., *Errors of Measurement, Precision, Accuracy and the Statistical Comparison of Measuring Instruments*. Technometrics, 15, 53–66, **1973**.
- [8] Tsai, P., *Variable Gage Repeatability and Reproducibility Study Using the Analysis of Variance Method*. Quality Engineering, 1, 1, 107-115, **1989**.
- [9] Montgomery, D. C., Runger, G. C., *Gage Capability Analysis and Designed Experiments. Part I: Basic Methods*, Qual. Eng., 6, 115-135, **1993**.
- [10] Montgomery, D.C., *Statistical Quality Control: A Modern Introduction*, sixth ed., Wiley, New York, **2009**.
- [11] Searle, S.R., Casella, G., McCulloch, C.E., *Variance Components*, Wiley, New York. **1992**.
- [12] Crump, L., *The Estimation of Components of Variance in Multiple Classifications*. Ph. D. Dissertation, Iowa State University, Ames, IA. **1947**.
- [13] Crump, L., *The Present Status of Variance Components Analysis*, Biometrics, 7, 1-16, **1951**.
- [14] Herbach, Leon H., *Properties of Model II- Type Analysis of Variance Tests*, Ann. Math. Stat., Vol.30 (1959), pp.939-959, **1959**.
- [15] Hartley, H.O., Rao, J.N.K., *Maximum Likelihood Estimation for the Mixed Analysis of Variance Model*. Biometrika 54, 93-108. **1967**.
- [16] Anderson, R.L., Bancroft, T.A. *Statistical Theory in Research*. McGraw-Hill, New York, 358-366. **1952**.
- [17] Patterson, H. D., Thompson, R., *Recovery of Inter-Block Information When Block Sizes Are Unequal*. Biometrika, 58(3):545–554, **1971**.

- [18] Rao, C. R., *Estimation of Heteroscedastic Variances in Linear Models*, J. Amer. Statist. Assoc., 65, 16, 1-172, **1970**.
- [19] Rao, C. R., *Estimation of Variance and Covariance Components MINQUE Theory*, J. Multi. Anal., 3, 257-275, **1971**.
- [20] Rao, C. R., *Minimum Variance Quadratic Unbiased Estimation of Variance Components*, J. Multi. Anal., 4, 445-456, **1971**.
- [21] Milliken, G. A., Johnson, D. E., *Analysis of Messy Data. Volume I: Designed Experiments*, Van Nostrand Reinhold, New York, **1984**.
- [22] Bhakhri, R., Belokar, R.M., Quality Improvement Using Gage Repeatability & Reproducibility : A Case Study, *International Research Journal of Engineering and Technology (IRJET)*, Volume04, **2017**.
- [23] Yurdigül, E. Y., *Dengeli Veri Kümelerinde Varyans Bileşenlerinin Kestirimi*, Yüksek Lisans Tezi. Atatürk Üniversitesi. Fen Bilimleri Enstitüsü, Zootekni Anabilim Dalı, **2013**.
- [24] Ünalın, A., Çankaya, S., Jersey Sığırlarında Süt Verimine Ait Varyans Unsurlarının Farklı Yöntemlerle Tahmini, *Anadolu Tarım Bilim Dergisi*, 27(1):41-47, **2011**.
- [25] Kayaalp, G.T., Bek, Y., Varyans Unsurları Tahmin Yöntemlerinin Karşılaştırmalı Olarak İncelenmesi, *Çukurova Üniversitesi Ziraat Fakültesi Dergisi*, 2: 127-142. **1994**.
- [26] Karabayır, A., *Atatürk Üniversitesi Tarım İşletmesinde Yetiştirilen Esmer Sığırların Süt Verim Özellikleri için Farklı Metod ve Modeller ile Varyans Unsurları ve Kalıtım Derecesi Tahminleri*, Yüksek Lisans Tezi. Atatürk Üniv. Fen Bil. Enst., Zootekni Anabilim Dalı. **1996**.
- [27] Esenbuğa, N., Dayıoğlu, H., İvesi ve Morkaraman Koyunlarında Döl Verimi ile Kuzuların Büyüme ve Gelişme Özellikleri için Farklı Metotlarla Varyans Bileşenlerinin Tahmini. *Turkish Journal of Veterinary and Animal Sciences*, 26:161–169. **2002**.
- [28] Başkan, Şanslı., *İstatistiksel Kalite Kontrolü*, Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, No:159, 68-273 ss., İzmir. **1997**.
- [29] Özdemir, T., *İstatistiksel Kalite Kontrol*. A. Ü. F. F. Döner Sermaye İşletmesi Yayınları. Ankara. **2000**.
- [30] Patır, S., İstatistiksel Proses Kontrol Teknikleri ve Kontrol Grafiklerinin Malatyadaki Bir Tekstil (iplik dokuma) İşletmesinde Bobin Sarım Kontrolüne Uygulanması. *Sosyal ve Ekonomik Araştırmalar Dergisi*.12 (18), 231-249. **2009**.
- [31] Türkiye İstatistik Kurumu (TÜİK). İstatistiksel Kalite Kontrol, Sorularla resmi istatistikler dizisi, **2011**, www.tuik.gov.tr/Kitap.do?metod=KitapDetay&KT_ID=18&KITAP_ID=245
- [32] Bircan, H., Özcan, S., *Excel Uygulamalı Kalite Kontrol*, Yargı Yayınevi, Sivas, **2003**.

- [33] Duetler, T., Grubbs-Type Estimators for Reproducibility Variances in an Interlaboratory Test Study. *Journal of Quality Technology*, vol 23, no 4, 324-335, **1991**.
- [34] Harville, D.A., *Maximum Likelihood Approaches to Variance Component Estimation and to Related Problems*, J. Amer. Stat. Ass. 72:320-338. **1977**.
- [35] Poduri S.R.S. Rao, *Variance Components Estimation Mixed Models, Methodologies and Applications*, Chapman&Hall/CRC. **1997**.
- [36] Rao, J. N. K., Subrahmaniam, K., *Combining independent estimators and estimation in Linear regression with unequal variances*, Biometrics, 27,971-990. **1971**.
- [37] Mollaoğulları, A., *Varyans Bileşenleri için Minimum Karesel Tahmin Yöntemleri*, Yüksek Lisans Tezi. Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi. Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, **2011**.
- [38] Houf, R. E., Berman, D. B., *Statistical Analysis of Power Modüle Thermal Test Equipment Performance*, IEEE Transactions on Components, Hybrids and Manufacturing Techonology, 4:516–520. **1988**.
- [39] Refaie, A., Bata, N., Evaluating Measurement and Process Capabilities by Gage Repeatability & Reproducibility with Four Quality Measures, *Measurement*, 43,842–851, **2010**.
- [40] Inman, J., Ter, J.L., Lenth, R.V., Niemi, L., Two Case Studies Involving an Optical Emission Spectrometer, *Journal of Qualify Technology*, Vol. 24, No. 1, January, **1992**.
- [41] Louka, G.A., Besseris, G.J., Gage Repeatability & Reproducibility for an Optical Micrometer Industrial Type Machine”. *International Journal for Quality Research*. Vol.4, No.4, **2010**.

EKLER

EK 1: Kontrol Grafikleri için Değerler

	Kontrol Grafikleri için Sabitler															
	Ortalamalar için						Standart Sapma için						Genişlik için			
	Kontrol Limitleri için Sabitler		Merkez Çizgisi için Sabitler		Kontrol Limitleri için Sabitler		Merkez Çizgisi için Sabitler		Kontrol Limitleri için Sabitler		Kontrol Limitleri için Sabitler		Kontrol Limitleri için Sabitler			
A	A ₂	A ₃	c ₄	1/c ₄	B ₃	B ₄	B ₅	B ₆	d ₂	1/d ₂	d ₃	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄	
2	2.121	1.880	2.659	0.7979	1.2533	0	3.267	0	2.606	1.128	0.8865	0.853	0	3.686	0	3.267
3	1.732	1.023	1.954	0.8862	1.1284	0	2.568	0	2.276	1.693	0.5907	0.888	0	4.358	0	2.574
4	1.500	0.729	1.628	0.9213	1.0854	0	2.266	0	2.088	2.059	0.4857	0.880	0	4.698	0	2.282
5	1.342	0.577	1.427	0.9400	1.0638	0	2.089	0	1.964	2.326	0.4299	0.864	0	4.918	0	2.114
6	1.225	0.483	1.287	0.9515	1.0510	0.030	1.970	0.029	1.874	2.534	0.3946	0.848	0	5.078	0	2.004
7	1.134	0.419	1.182	0.9594	1.0423	0.118	1.882	0.113	1.806	2.704	0.3698	0.833	0.204	5.204	0.076	1.924
8	1.061	0.373	1.099	0.9650	1.0363	0.185	1.815	0.179	1.751	2.847	0.3512	0.820	0.388	5.306	0.136	1.861
9	1.000	0.337	1.032	0.9693	1.0317	0.239	1.761	0.232	1.707	2.970	0.3367	0.808	0.547	5.393	0.184	1.816
10	0.949	0.308	0.975	0.9727	1.0281	0.284	1.716	0.276	1.669	3.078	0.3249	0.797	0.687	5.469	0.223	1.777
11	0.905	0.285	0.927	0.9754	1.0252	0.321	1.679	0.313	1.637	3.173	0.3152	0.787	0.811	5.535	0.256	1.744
12	0.866	0.266	0.886	0.9776	1.0229	0.354	1.646	0.346	1.610	3.258	0.3069	0.778	0.922	5.594	0.283	1.717
13	0.832	0.249	0.850	0.9794	1.0021	0.382	1.618	0.374	1.585	3.336	0.2998	0.770	1.025	5.647	0.307	1.693
14	0.802	0.235	0.817	0.9810	1.0194	0.406	1.594	0.399	1.563	3.407	0.2935	0.763	1.118	5.696	0.328	1.672
15	0.775	0.223	0.789	0.9823	1.0180	0.428	1.572	0.421	1.544	3.472	0.2880	0.756	1.203	5.741	0.347	1.653
16	0.750	0.212	0.763	0.9835	1.0168	0.448	1.552	0.440	1.526	3.532	0.2831	0.750	1.282	5.782	0.363	1.637
17	0.728	0.203	0.739	0.9845	1.0157	0.466	1.534	0.458	1.511	3.588	0.2787	0.744	1.356	5.820	0.378	1.622
18	0.707	0.194	0.718	0.9854	1.0148	0.482	1.518	0.475	1.496	3.640	0.2747	0.739	1.424	5.856	0.391	1.608
19	0.688	0.187	0.698	0.9862	1.0140	0.497	1.503	0.490	1.483	3.689	0.2711	0.734	1.487	5.891	0.403	1.597
20	0.671	0.180	0.680	0.9869	1.0133	0.510	1.490	0.504	1.470	3.735	0.2677	0.729	1.549	5.921	0.415	1.585
21	0.655	0.173	0.663	0.9876	1.0126	0.523	1.477	0.516	1.459	3.778	0.2647	0.724	1.605	5.951	0.425	1.575
22	0.640	0.167	0.647	0.9882	1.0119	0.534	1.466	0.528	1.448	3.819	0.2618	0.720	1.659	5.979	0.434	1.566
23	0.626	0.162	0.633	0.9887	1.0114	0.545	1.455	0.539	1.438	3.858	0.2592	0.716	1.710	6.006	0.443	1.557
24	0.612	0.157	0.619	0.9892	1.0109	0.555	1.445	0.549	1.429	3.895	0.2567	0.712	1.759	6.031	0.451	1.548
25	0.600	0.153	0.606	0.9896	1.0105	0.565	1.435	0.559	1.420	3.931	0.2544	0.708	1.806	6.056	0.459	1.541

n>25 için.

$$A = \frac{3}{\sqrt{n}} \quad A_5 = \frac{3}{c_4 \sqrt{n}} \quad c_4 = \frac{4(n-1)}{4n-3}$$

$$B_5 = 1 - \frac{c_4 \sqrt{2(n-1)}}{3} \quad B_4 = 1 + \frac{c_4 \sqrt{2(n-1)}}{3}$$

$$B_5 = c_4 - \frac{\sqrt{2(n-1)}}{3} \quad B_6 = c_4 + \frac{\sqrt{2(n-1)}}{3}$$

EK 2: R Kodları

```
> getwd()
> setwd("C:/Users/Zeliha/Desktop")
> list.files()
veri <- read.csv("veri.csv", header=TRUE)
> veri
> summary(veri)
```

VÇ Kodları

```
> library(daewr)
> ornek4$Parts <- as.factor(ornek4$Parts)
> ornek4$Operators <- as.factor(ornek4$Operators)
> Model1 <- aov(Y ~ Parts + Operators + Parts:Operators, data=ornek4)
> summary(ornek4)

> sigma2 <- 0.5
> sigma2po <- (2.7-sigma2)/3
> sigma2o <- (19.6-sigma2- 3*sigma2po)/30
> sigma2p <- (437.3-sigma2- 3*sigma2po)/9
> cat("Momentler Yöntemi Varyans Bileşeni Tahminleri", "\n", "Var(Error)=", sigma2
, "\n", "Var(Parts x Operators)=", sigma2po, "\n", "Var(Operators)=", sigma2o, "\n", "
Var(Parts)=", sigma2p, "\n")
```

EÇOB Kodları

```
> modr1 <- lmer(Y ~ 1 + (1|PART) + (1|OPER) + (1|PART:OPER), data = veri,
REML=FALSE)
> summary(modr1)
```

KEÇOB Kodları

```
> library(lme4)
> modr2 <- lmer(Y ~ 1 + (1|PART) + (1|OPER) + (1|PART:OPER), data = veri)
> summary(modr2)
```

MNKY Kodları

```
library(minque)
res=lmm.perm(Y ~ 1|PART+OPER+PART*OPER, data=veri, method=c("reml",
"minque"))
> res[[1]]
> res[[2]]
```

ÖZGEÇMİŞ

Kimlik Bilgileri

Adı Soyadı : Zeliha DİNDAŞ
Doğum Yeri : Yozgat
Medeni hali : Evli
E-posta : sener_zeliha@hotmail.com
Adresi : Tunahan mah. 254 cad. Sarıgül sitesi Etimesgut / ANKARA

Eğitim

Lise : Moda Kadıköy Anadolu Meslek Lisesi, Bilgisayar Bölümü
Ön Lisans : Yıldız Teknik Üniversitesi, Bilgisayar Teknolojileri ve Programlama
Lisans : Hacettepe Üniversitesi, İstatistik Bölümü
Yüksek lisans : Hacettepe Üniversitesi, İstatistik Bölümü

Yabancı Dil ve Düzeyi

İngilizce (YDS 2017: 83.75/100)
Almanca (A2)

İş Deneyimi

2014 - : T.C Bilim, Sanayi ve Teknoloji Bakanlığı
Metroloji ve Standardizasyon Genel Müdürlüğü
Sanayi ve Teknoloji Uzmanı
2013 - 2014 : T.A.O Türkiye Vakıflar Bankası, Uzman Yardımcısı

Deneyim Alanları

Tezden Üretilmiş Projeler ve Bütçesi

Tezden Üretilmiş Yayınlar

Tezden Üretilmiş Tebliğ ve/veya Poster Sunumu ile Katıldığı Toplantılar

Dındaş, Z., Altunay, S. A., Ölçüm Sistemleri Analizinde Varyans Bileşenlerinin Tahminleri, 10. Uluslararası İstatistik Kongresi (İSTKON), Ankara, Türkiye, 2017.



HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS/DOKTORA TEZ ÇALIŞMASI ORJİNALLİK RAPORU

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
İSTATİSTİK ANABİLİM DALI BAŞKANLIĞI'NA

Tarih: 09/02/2018

Tez Başlığı: Ölçüm Sistemleri Analizinde Varyans Bileşenlerinin Tahminleri

Yukarıda başlığı gösterilen tez çalışmamın a) Kapak sayfası, b) Giriş, c) Ana bölümler d) Sonuç kısımlarından oluşan toplam 73 sayfalık kısmına ilişkin, 09/02/2018 tarihinde tez danışmanım tarafından *Turnitin* adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı %4 'tür.

Uygulanan filtrelemeler:

- 1- Kaynakça hariç
- 2- Alıntılar ~~hariç~~/dâhil
- 3- 5 kelimedenden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Çalışması Orjinallik Raporu Alınması ve Kullanılması Uygulama Esasları'nı inceledim ve bu Uygulama Esasları'nda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

Tarih ve İmza

Adı Soyadı: Zeliha Dindaş
Öğrenci No: 14328593
Anabilim Dalı: İstatistik
Programı: İstatistik Yüksek Lisans Programı
Statüsü: Y.Lisans Doktora Bütünleşik Dr.

09.02.2018

DANIŞMAN ONAYI

UYGUNDUR.

Prof.Dr. Serpil Aktaş Altunay

(Unvan, Ad Soyad, İmza)