

**UYARLANABİLİR KÜME ÖRNEKLEMESİNDE  
ORANSAL TAHMİNLER**

**RATIO ESTIMATES IN  
ADAPTIVE CLUSTER SAMPLING**

**EMEL KINACI**

**PROF. DR. SEVİL BACANLI**  
**Tez Danışmanı**

Hacettepe Üniversitesi  
Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin  
İstatistik Anabilim Dalı için Öngördüğü  
YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırlanmıştır.

2018

**EMEL KINACI'** nin hazırladığı “**Uyarlanabilir Küme Örneklemesinde Oransal Tahminler**” adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **İSTATİSTİK ANABİLİM DALI'** nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Nihal ATA TUTKUN

Başkan



Prof. Dr. Sevil BACANLI

Danışman



Doç. Dr. Nursel KOYUNCU

Üye



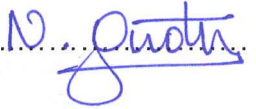
Doç. Dr. Derya ERSEL

Üye



Dr. Öğr. Ü. Necla Gündüz TEKİN

Üye



Bu tez Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. Menemşe GÜMÜŞDERELİOĞLU

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

## YAYINLAMA VE FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI BEYANI

Enstitü tarafından onaylanan lisansüstü tezimin/raporumun tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı (kağıt) ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda verilen koşullarla kullanıma açma iznini Hacettepe üniversitesine verdiğimi bildiririm. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet haklarım bende kalacak, tezimin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanım hakları bana ait olacaktır.

Tezin kendi orijinal çalışmam olduğunu, başkalarının haklarını ihlal etmediğimi ve tezimin tek yetkili sahibi olduğumu beyan ve taahhüt ederim. Tezimde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanması zorunlu metinlerin yazılı izin alarak kullandığımı ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederim.

- Tezimin/Raporumun tamamı dünya çapında erişime açılabilir ve bir kısmı veya tamamının fotokopisi alınabilir.**

(Bu seçenikle teziniz arama motorlarında indekslenebilecek, daha sonra tezinizin erişim statüsünün değiştirilmesini talep etmeniz ve kütüphane bu talebinizi yerine getirirse bile, tezinin arama motorlarının önbelleklerinde kalmaya devam edebilecektir.)

- Tezimin/Raporumun 05.04.2021 tarihine kadar erişime açılmasını ve fotokopi alınmasını (İç Kapak, Özet, İçindekiler ve Kaynakça hariç) istemiyorum.**

(Bu sürenin sonunda uzatma için başvuruda bulunmadığım takdirde, tezimin/raporumun tamamı her yerden erişime açılabilir, kaynak gösterilmek şartıyla bir kısmı ve ya tamamının fotokopisi alınabilir)

- Tezimin/Raporumun .....tarihine kadar erişime açılmasını istemiyorum, ancak kaynak gösterilmek şartıyla bir kısmı veya tamamının fotokopisinin alınmasını onaylıyorum.**

- Serbest Seçenek/Yazarın Seçimi**

10 /04 /2018

EMEL KINACI

## ETİK

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada,

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversitede veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

10/04/2018

EMEL KINACI

## ÖZET

# UYARLANABİLİR KÜME ÖRNEKLEMESİNDE ORANSAL TAHMİNLER

**EMEL KINACI**

**Yüksek Lisans, İstatistik Bölümü**

**Tez Danışmanı: Prof. Dr. Sevil BACANLI**

**Nisan 2018, 76 Sayfa**

Bu çalışmada Uyarlanabilir Küme Örneklemesinde kitle ortalamasının tahminini elde etmek amacıyla literatürde yer alan Horvitz-Thompson ve Hansen-Hurwitz basit ve oransal tahmin edicileri incelenmiştir. Bu tahmin ediciler yeterli istatistiğe sahip değildir. Minimum yeterli istatistiğe sahip tahmin ediciler elde etmek amacıyla Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen uyarlanmış Horvitz-Thompson ve Hansen-Hurwitz tahmin edicilerinin basit ve oransal tahmin edicileri incelenmiştir. Sayısal örnekle tahmin edicilerin ortalama ve varyans tahminleri hesaplanmıştır. Çalışmanın sonucunda, Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen oransal tahmin edicilerin varyans tahminlerinin daha küçük olduğu sayısal olarak gösterilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Uyarlanabilir Küme Örneklemesi, Horvitz-Thompson, Hansen-Hurwitz, Rao-Blackwell

# **ABSTRACT**

## **RATIO ESTIMATES IN ADAPTIVE CLUSTER SAMPLING**

**EMEL KINACI**

**Master of Science, Department of Statistics**

**Supervisor: Prof. Dr. Sevil BACANLI**

**April 2018, 76 Pages**

In this study, simple and ratio estimators of Horvitz-Thompson and Hansen-Hurwitz are investigated in the literature in order to obtain an estimate of population mean in adaptive cluster sampling. These estimators do not have sufficient statistics. Simple and ratio estimators of the modified Horvitz-Thompson and Hansen-Hurwitz estimators improved by the Rao-Blackwell method have been investigated in order to obtain estimators with minimum sufficient statistics. We calculated mean and variance estimates of the estimators with numerical example. As a result of this study, it is shown numerically that the variance estimates of the ratio estimators improved by Rao-Blackwell method is smaller.

**Keywords:** Adaptive Cluster Sampling, Horvitz-Thompson, Hansen-Hurwitz, Rao-Blackwell

## TEŞEKKÜR

Tez alıőma s¼recimde, değerli yorum ve akademik katkılarıyla alıőmalarıma y¼n veren, g¼lery¼z¼ ve samimiyetiyle her zaman desteğini g¼rd¼ę¼m değerli danışmanım canım hocam Prof. Dr. Sevil BACANLI' ya itenlikle teőekk¼r ederim.

T¼m hayatım boyunca maddi ve manevi yardımlarını esirgemeyen ve bug¼nlere gelmemi sağlayan canım annem T¼rkan KINACI' ya, canım babam Burhan KINACI' ya ve kardeőim Dr. Elif KINACI' ya t¼m içtenliğimle teőekk¼r ederim.

Hayatımda bana destek olan ve içtenlikle seven değerli arkadaőlarıma, hocalarıma ve akrabalarıma çok teőekk¼r ederim.

# İÇİNDEKİLER

## Sayfa

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
ÇİZELGELER.....	vi
ŞEKİLLER.....	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. BASİT RASTGELE ÖRNEKLEME.....	3
2.1. Basit Tahmin.....	3
2.2. Oransal Tahmin.....	4
3. FARKLI OLASILIKLI ÖRNEKLEME.....	6
3.1. Basit Tahmin.....	6
3.1.1. Horvitz-Thompson Tahmin Edicisi.....	6
3.1.2. Hansen-Hurwitz Tahmin Edicisi.....	8
3.2. Oransal Tahmin.....	9
3.2.1. Horvitz-Thompson Oransal Tahmin Edicisi.....	9
3.2.2. Hansen-Hurwitz Oransal Tahmin Edicisi.....	10
4. UYARLANABİLİR KÜME ÖRNEKLEMESİ.....	12
4.1. Basit Tahmin.....	16
4.1.1. Uyarlanmış Horvitz-Thompson Tahmin Edicisi.....	16
4.1.2. Uyarlanmış Hansen-Hurwitz Tahmin Edicisi.....	20
4.2. Oransal Tahmin.....	21
4.2.1. Uyarlanmış Horvitz-Thompson Oransal Tahmin Edicisi.....	21
4.2.2. Uyarlanmış Hansen-Hurwitz Oransal Tahmin Edicisi.....	22
5. UYARLANABİLİR KÜME ÖRNEKLEMESİNDE RAO-BLACKWELL YÖNTEMİYLE GELİŞTİRİLEN TAHMİN EDİCİLER.....	24
5.1. Basit Tahmin.....	24
5.1.1. Salehi Tarafından Geliştirilen Basit Tahmin.....	29
5.1.1.1. Uyarlanmış Horvitz-Thompson Tahmin Edicisi.....	29
5.1.1.2. Uyarlanmış Hansen-Hurwitz Tahmin Edicisi.....	32



5.1.2. Dryver-Thompson Tarafından Geliştirilen Basit Tahmin.....	36
5.1.2.1. Uyarlanmış Horvitz-Thompson Tahmin Edicisi.....	36
5.1.2.2. Uyarlanmış Hansen-Hurwitz Tahmin Edicisi.....	38
5.2. Oransal Tahmin.....	39
5.2.1. Salehi Tarafından Geliştirilen Oransal Tahmin Ediciler.....	41
5.2.1.1. Uyarlanmış Horvitz-Thompson Oransal Tahmin Edicisi.....	41
5.2.1.2. Uyarlanmış Hansen-Hurwitz Oransal Tahmin Edicisi.....	43
5.2.2. Dryver-Thompson Tarafından Geliştirilen Oransal Tahmin Ediciler.....	45
5.2.2.1. Uyarlanmış Horvitz-Thompson Oransal Tahmin Edicisi.....	45
5.2.2.2. Uyarlanmış Hansen-Hurwitz Oransal Tahmin Edicisi.....	47
6. SAYISAL ÖRNEK.....	50
7. SONUÇLAR.....	72
KAYNAKLAR.....	73
ÖZGEÇMİŞ.....	76

## ÇİZELGELER

	<b><u>Sayfa</u></b>
<b>Çizelge 6.1.</b> Uyarlanabilir küme örneklemesinde kullanılan veri seti.....	51
<b>Çizelge 6.2.</b> Networklerin kesişim olasılıkları.....	54
<b>Çizelge 6.3.</b> Uyarlanabilir küme örneklemesinde oran tahmini için değişkenler....	58
<b>Çizelge 6.4.</b> Tahmin edicilerin karşılaştırılması.....	70

## ŞEKİLLER

	<b><u>Sayfa</u></b>
<b>Şekil 4.1.</b> Tek Boyutlu Komşuluk.....	13
<b>Şekil 4.2.</b> İki Boyutlu Komşuluk.....	13
<b>Şekil 4.3.</b> Üç Boyutlu Komşuluk.....	13
<b>Şekil 4.4.</b> Örnek Veri Seti.....	14

## SİMGELER VE KISALTMALAR

### Simgeler

$\mu$	Kitle ortalaması
$\sigma^2$	Kitle varyansı
$\bar{y}$	Örneklem ortalaması
$s^2$	Örneklem varyansı
N	Kitle büyüklüğü
n	Örneklem büyüklüğü

### Tahmin Ediciler

$\hat{\mu}_{HT_y}$	Horvitz-Thompson Tahmin Edicisi
$\hat{\mu}_{HH_y}$	Hansen-Hurwitz Tahmin Edicisi
$\hat{\mu}_{HT_{y_u}}$	Uyarlanmış Horvitz-Thompson Tahmin Edicisi
$\hat{\mu}_{HH_{y_u}}$	Uyarlanmış Hansen-Hurwitz Tahmin Edicisi
$\hat{\mu}_{HT_{n_u}}$	Uyarlanmış Horvitz-Thompson Oransal Tahmin Edicisi
$\hat{\mu}_{HH_{n_u}}$	Uyarlanmış Hansen-Hurwitz Oransal Tahmin Edicisi
$\hat{\mu}_{RBHT_{y.u_s}}$	Salehi tarafından Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen Uyarlanmış Horvitz-Thompson Tahmin Edicisi
$\hat{\mu}_{RBHH_{y.u_s}}$	Salehi tarafından Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen Uyarlanmış Hansen-Hurwitz Tahmin Edicisi
$\hat{\mu}_{RBHT_{y.u_d}}$	Dryver-Thompson tarafından Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen Uyarlanmış Horvitz-Thompson Tahmin Edicisi
$\hat{\mu}_{RBHH_{y.u_d}}$	Dryver-Thompson tarafından Rao-Blackwell yöntemiyle

$\hat{\mu}_{RBHT_{r.u_s}}$ 

geliştirilen Uyarlanmış Hansen-Hurwitz Tahmin Edici  
Salehi tarafından Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen  
Horvitz-Thompson Oransal Tahmin Edicisi

 $\hat{\mu}_{RBHH_{r.u_s}}$ 

Salehi tarafından Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen  
Horvitz-Thompson Oransal Tahmin Edicisi

 $\hat{\mu}_{RBHT_{r.u_d}}$ 

Dryver-Thompson tarafından Rao-Blackwell yöntemiyle  
geliştirilen Horvitz-Thompson Oransal Tahmin Edici

 $\hat{\mu}_{RBHH_{r.u_d}}$ 

Dryver-Thompson tarafından Rao-Blackwell yöntemiyle  
geliştirilen Hansen-Hurwitz Oransal Tahmin Edici

### Kısaltmalar

BRÖ	Basit Rastgele Örneklem
UKÖ	Uyarlanabilir Küme Örneklemesi
HT	Horvitz-Thompson Tahmin Edicisi
HH	Hansen-Hurwitz Tahmin Edicisi

# 1. GİRİŞ

Kitle üzerinde çalışmak, araştırmacı için zaman, maliyet ve emek bakımından güç olabilmektedir. Kitlenin tamamına ulaşmakta mümkün olmamaktadır. Bu yüzden örnekleme yöntemleri kullanılmaktadır. Kitleyi en iyi temsil edebilecek aynı özelliğe sahip birimlerin oluşturduğu topluluğa örneklem, kitleden örneklem seçme işlemine de örnekleme adı verilmektedir [1].

Uyarlanabilir küme örnekleme, başlangıç birim örnekleminin yerine konularak ya da yerine konulmadan seçildiği ve örnekleme seçilen kümedeki birimlerden herhangi birisi belirlenen koşul şartını sağlıyorsa bu birimin komşuluğundaki diğer birimlerin de örnekleme dahil edildiği örnekleme yöntemidir.

Uyarlanabilir küme örnekleme çevre ve ekoloji araştırmalarında basit rastgele örnekleme gibi klasik örnekleme yöntemlerinin yetersiz olduğu durumlarda kitle parametre tahmini için uygulanabilmektedir.

Çalışmanın ikinci ve üçüncü bölümünde kitle ortalamasının tahmin etmek için eşit ve farklı olasılıklı örneklemede kullanılan basit ve oransal tahmin edicilerden bahsedilmiştir.

Dördüncü bölümde uyarlanabilir küme örnekleme ve Thompson [2] tarafından geliştirilen uyarlanabilir küme örneklemede kullanılan Horvitz-Thompson ve Hansen-Hurwitz basit ve oransal tahmin edicileri incelenmiştir.

Dördüncü bölümde verilen uyarlanmış Horvitz-Thompson ve Hansen-Hurwitz tahmin edicileri yansız tahmin ediciler olmalarına rağmen yeterli istatistiğe sahip değildir. Bu yüzden minimum yeterli istatistiğe sahip tahmin ediciler elde etmek için Salehi [3] ve Dryver-Thompson [4] tarafından Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen uyarlanmış Horvitz-Thompson ve Hansen-Hurwitz basit ve oransal tahmin edicileri beşinci bölümde incelenmiştir.

Altıncı bölümde uyarlanabilir küme örneklemede örneklem seçimi ve bu çalışmada verilen tahmin edicilerin uygulamasını göstermek amacıyla sayısal örneğe yer verilmiştir. Sayısal örnekte, Chao ve Lin [5] çalışmasında kullanılan Poisson kümesinin veri setinden yararlanılmıştır.

Sayısal örnek üzerinden çalışmada kitle ortalamasının tahmini için verilen basit ve oransal tahmin edicilerin varyansları hesaplanıp karşılaştırılmıştır. Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen uyarlanmış oransal tahmin edicilerin kullanılan diğer tahmin edicilere göre daha küçük varyans tahminlerine sahip olduğu gösterilmiştir.

## 2. BASİT RASTGELE ÖRNEKLEME

### 2.1. Basit Tahmin

N birimden oluşan kitleden n genişliğinde örneklem biriminin eşit seçilme olasılığıyla seçildiği örnekleme yöntemine basit rastgele örnekleme (BRÖ) denir. Örneklem yerine konulmadan ya da yerine konularak seçilmektedir [6].

Yerine konulmadan seçilen örnekleme yönteminde, N birimden oluşan kitleden n birim yerine konulmadan seçilmektedir. Basit rastgele örneklemede kitle ortalaması ( $\mu$ ),

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \quad (2.1)$$

örneklem ortalaması ise,

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad (2.2)$$

biçimde tanımlanır. Kitleden birim başına düşen varyans ( $\sigma^2$ ),

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \mu)^2 \quad (2.3)$$

örneklem varyansı ( $s^2$ ) ise,

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \quad (2.4)$$

biçiminde tanımlanır. BRÖ' de  $\bar{y}$  tahmin edicisinin varyansı,

$$V(\bar{y}) = (1-f) \frac{\sigma^2}{n} \quad (2.5)$$

varyansın yansız tahmin edicisi ise,



$$v(\bar{y}) = (1-f) \frac{s^2}{n} \quad (2.6)$$

biçiminde tanımlanır [7]. Eşitliklerde  $f = n/N$  örnekleme oranı,  $1-f$  ise düzeltme terimidir.

Yerine konularak seçilen örnekleme yönteminde ise, N birimden oluşan kitleden n genişliğinde örneklemin seçimi çekilen birim yerine konularak yapılmaktadır. Bu durum için örneklem ortalaması ( $\bar{y}_n$ ),

$$\bar{y}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad (2.7)$$

biçiminde tanımlanır. Tahminin varyansı,

$$V(\bar{y}_n) = \frac{1}{nN} \sum_{i=1}^N (y_i - \mu)^2 = \frac{\sigma^2}{n} \quad (2.8)$$

varyansın yansız tahmin edicisi ise,

$$v(\bar{y}_n) = \frac{s^2}{n} \quad (2.9)$$

biçiminde tanımlanır [6].

## 2.2. Oransal Tahmin

Tek değişkenin yetersiz olduğu durumlarda X yardımcı değişkeni kullanılarak tahminler yapılır. İki değişken arasındaki ilişki başlangıç noktasından geçen bir doğru denklemiyle gösterilebiliyor ise değişkenlerden biri yardımıyla diğer değişken tahmin edilebilir. Bu tahmin oransal tahmin olarak tanımlanmaktadır. Oransal tahminin kullanılabilmesi için yardımcı değişkene ait kitle ortalamasının ya da kitle toplamının bilinmesi gerekmektedir. Oransal tahminler yanlış tahmin olabilir.

BRÖ' de Y değişkeni için tanımlandığı gibi X yardımcı değişkeninin kitle ortalaması,

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (2.10)$$

X yardımcı değişkeninin örneklem ortalaması ise,

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (2.11)$$

dır. BRÖ' de kitle ortalaması için oransal tahmin,

$$\bar{Y}_r = \frac{\sum_{i=1}^N y_i / N}{\sum_{i=1}^N x_i / N} \bar{X} = R \bar{X} \quad (2.12)$$

biçiminde tanımlanır. Eşitlikte  $R$ , kitlede iki değişkenin birbirine oranıdır. Örneklemden elde edilen oransal tahmin ise,

$$\bar{y}_r = \frac{\sum_{i=1}^n y_i / n}{\sum_{i=1}^n x_i / n} \bar{X} = \hat{R} \bar{X} \quad (2.13)$$

olarak tanımlanır. Eşitlikte  $\hat{R}$ , örneklemden elde edilen iki değişkenin birbirine oranı olarak tanımlanır. BRÖ' de elde edilen oran tahmininde yanlışlık miktarı,

$$\left| E(\hat{R}) - R \right| = \frac{1}{\bar{X}} \left| Cov(\hat{R}, \bar{x}) \right| \quad (2.14)$$

biçiminde tanımlanır. BRÖ' de oransal tahminin yaklaşık varyansı,

$$V(\bar{Y}_r) \approx \frac{1-f}{n} \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - Rx_i)^2}{N-1} \quad (2.15)$$

yaklaşık varyansın tahmin edicisi ise,

$$v(\bar{y}_r) \approx \frac{1-f}{n} \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{R}x_i)^2}{n-1} \quad (2.16)$$

biçiminde tanımlanır [1], [7].

### 3. FARKLI OLASILIKLI ÖRNEKLEME

#### 3.1. Basit Tahmin

Farklı olasılıklı örnekleme yöntemlerinde kitledeki birimlerin örnekleme dahil olma olasılıkları farklıdır. Farklı olasılıklı örnekleme yöntemlerinde örneklem yerine konulmadan ya da yerine konularak iki farklı şekilde seçilebilir.

Farklı olasılıklı örnekleme yöntemlerinde kitleden seçilen birimler büyüklüklerine göre seçilme olasılığına sahiptir. Kitlede yer alan birim daha fazla büyüklüğe sahipse buna bağlı olarak seçilme olasılığı daha fazla olmaktadır. Tanımlanan büyüklük, birimin  $100 km^2$  alanda kapladığı yer olarak da örnek gösterilebilir. Basit rastgele örneklemede birimler eşit seçilme olasılığına sahip iken farklı olasılıklı örnekleme yöntemlerinde farklı seçilme olasılığına sahiptir.

Farklı olasılıklı örnekleme yöntemlerinde Horvitz-Thompson ve Hansen-Hurwitz olmak üzere iki tahmin edici kullanılmaktadır [8].

#### 3.1.1. Horvitz-Thompson Tahmin Edicisi

i. birimin örnekleme dahil olma olasılığı  $\pi_i > 0$  olmak üzere kitle ortalamasının Horvitz-Thompson tahmin edicisi,

$$\hat{\mu}_{HT_y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{\nu} \left( \frac{y_i}{\pi_i} \right) \quad (3.1)$$

biçiminde tanımlanır.

Eşitlikteki  $\nu$ , örneklemden farklı birimlerden oluşan örneklem büyüklüğüdür. Horvitz-Thompson tahmin edicisinde  $\nu = n$  ve  $\pi_i = n/N$  olduğunda basit rastgele örnekleme ortalama tahmini elde edilmektedir. Burada  $\pi_i$  iki farklı şekilde tanımlanır. Örneklem yerine konularak ya da yerine konulmadan olmak üzere iki şekilde seçilmektedir. Örneklem yerine konulmadan seçildiğinde i. birimin dahil olma olasılığı,

$$\pi_i = 1 - \frac{\binom{N-m_i}{n}}{\binom{N}{n}} \quad (3.2)$$

$\pi_{ij} > 0$  ve  $i \neq j$  olmak üzere  $i$ . ve  $j$ . birimin örnekleme birlikte dahil olma olasılığı  $\pi_{ij}$  ise,

$$\pi_{ij} = 1 - \frac{\binom{N-m_i}{n} + \binom{N-m_j}{n} - \binom{N-m_i-m_j}{n}}{\binom{N}{n}} \quad (3.3)$$

biçiminde tanımlanır. Örneklem yerine konularak seçildiğinde  $i$ . birimin dahil olma olasılığı,

$$\pi_i = 1 - \left(1 - \frac{m_i}{N}\right)^n = 1 - (1 - p_i)^n \quad (3.4)$$

$\pi_{ij}$  olasılığı ise,

$$\pi_{ij} = \left(1 - \frac{m_i}{N}\right)^n + \left(1 - \frac{m_j}{N}\right)^n - \left[1 - \left(1 - \frac{m_i}{N} - \frac{m_j}{N}\right)^n\right] \quad (3.5)$$

dır. Eşitliklerde  $m_i$ , kitleden seçilen  $i$ . birimin büyüklüğü olarak tanımlanmaktadır.

Eşitlik (3.1)' de verilen kitle ortalamasının Horvitz-Thompson tahmin edicisi,

$$\hat{\mu}_{HT_y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{y_i I_i}{\pi_i} \quad (3.6)$$

biçiminde de tanımlanabilir. Eşitlikte  $I_i$ ,  $i$ . birim örnekleme dahil olduğunda 1 değerini, dahil olmadığına sıfır değerini almaktadır.

Horvitz-Thompson tahmin edicisinin varyansı,

$$V[\hat{\mu}_{HT_y}] = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left( \frac{\pi_{ij} - \pi_i \pi_j}{\pi_i \pi_j} \right) y_i y_j \quad (3.7)$$

varyansın yansız tahmin edicisi ise,

$$\begin{aligned} v[\hat{\mu}_{HT_y}] &= \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left( \frac{\pi_{ij} - \pi_i \pi_j}{\pi_i \pi_j \pi_{ij}} \right) y_i y_j I_i I_j \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^v \sum_{j=1}^v \left( \frac{\pi_{ij} - \pi_i \pi_j}{\pi_i \pi_j \pi_{ij}} \right) y_i y_j \end{aligned} \quad (3.8)$$

biçiminde tanımlanır. Eşitliklerde  $\pi_{ii} = \pi_i$  ve  $\pi_{jj} = \pi_j$  ' dir [8], [9].

### 3.1.2. Hansen-Hurwitz Tahmin Edicisi

Kitle ortalamasının Hansen-Hurwitz tahmin edicisi,

$$\hat{\mu}_{HH_y} = \frac{1}{nN} \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{p_i} \quad (3.9)$$

biçiminde tanımlanır. Eşitlikte  $p_i = m_i / N$  , örneklemin yerine konularak seçildiği i. birimin örnekleme seçilme olasılığı olduğunda kitle ortalamasının Hansen-Hurwitz tahmin edicisi,

$$\hat{\mu}_{HH_y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{m_i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w_{yi} \quad (3.10)$$

biçiminde de tanımlanabilir. Eşitlikte  $m_i$  , kitleden seçilen i. birimin büyüklüğü olarak tanımlanmaktadır. Hansen-Hurwitz tahmin edicisinin varyansı,

$$V[\hat{\mu}_{HH_y}] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N p_i \left( \frac{y_i}{N p_i} - \mu \right)^2 \quad (3.11)$$

varyansın yansız tahmin edicisi ise,

$$v[\hat{\mu}_{HH_y}] = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \left( \frac{y_i}{Np_i} - \hat{\mu}_{HH_y} \right)^2 \quad (3.12)$$

biçiminde tanımlanır [8], [9].

### 3.2. Oransal Tahmin

#### 3.2.1. Horvitz-Thompson Oransal Tahmin Edicisi

Horvitz-Thompson oransal tahmin edicisi için X yardımcı değişkenine ihtiyaç vardır. Eşitlik (3.1)' de verilen Y değişkeni için kitle ortalamasının Horvitz-Thompson tahmin edicisinde olduğu gibi X yardımcı değişkeni için kitle ortalamasının Horvitz-Thompson tahmin edicisi,

$$\hat{\mu}_{HT_x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^v \left( \frac{x_i}{\pi_i} \right) \quad (3.13)$$

biçiminde tanımlanır. Eşitlikte  $\pi_i$ , X değişkeni için i. birimin örnekleme dahil olma olasılığı,  $x_i$  ise X değişkeninin aldığı değer olarak tanımlanır. Ortalamanın Horvitz-Thompson oransal tahmin edicisi,

$$\hat{\mu}_{HT_r} = \frac{\hat{\mu}_{HT_y}}{\hat{\mu}_{HT_x}} \mu_x = \hat{R}_{HT} \mu_x \quad (3.14)$$

dir. Oransal tahmin ediciler yanlı tahmin edici olduğu için varyansları yaklaşık olarak hesaplanmaktadır. HT oransal tahmin edicisinin yaklaşık varyansı,

$$V[\hat{\mu}_{HT_r}] \approx \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left( \frac{\pi_{ij} - \pi_i \pi_j}{\pi_i \pi_j} \right) y'_i y'_j \quad (3.15)$$

biçiminde tanımlanır. Eşitlikte  $y'_i$ ,

$$y'_i = y_i - R x_i \quad (3.16)$$

dir. Yaklaşık varyansın tahmin edicisi ise,

$$\begin{aligned}
v[\hat{\mu}_{HT_r}] &\approx \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left( \frac{\pi_{ij} - \pi_i \pi_j}{\pi_i \pi_j \pi_{ij}} \right) \hat{y}_i \hat{y}_j I_i I_j \\
&\approx \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^v \sum_{j=1}^v \left( \frac{\pi_{ij} - \pi_i \pi_j}{\pi_i \pi_j \pi_{ij}} \right) \hat{y}_i \hat{y}_j
\end{aligned} \tag{3.17}$$

olarak tanımlanır. Eşitlikte  $\hat{y}_i$ ,

$$\hat{y}_i = y_i - \hat{R}_{HT} x_i \tag{3.18}$$

biçiminde verilir [8].

### 3.2.2. Hansen-Hurwitz Oransal Tahmin Edicisi

Hansen-Hurwitz oransal tahmin edicisi için X yardımcı değişkenine ihtiyaç vardır. Eşitlik (3.10)' da verilen Y değişkeni için kitle ortalamasının Hansen-Hurwitz tahmin edicisinde olduğu gibi X yardımcı değişkeni için kitle ortalamasının Hansen-Hurwitz tahmin edicisi,

$$\hat{\mu}_{HH_x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{m_i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w_{xi} \tag{3.19}$$

biçiminde tanımlanır. Eşitlikte  $m_i$ , yukarıdaki gibi kitleden seçilen X değişkeni için i. birimin büyüklüğü olarak tanımlanmaktadır. Ortalamanın Hansen-Hurwitz oransal tahmin edicisi,

$$\hat{\mu}_{HH_r} = \frac{\hat{\mu}_{HH_y}}{\hat{\mu}_{HH_x}} \mu_x = \hat{R}_{HH} \mu_x \tag{3.20}$$

HH oransal tahmin edicisinin yaklaşık varyansı ise,

$$V[\hat{\mu}_{HH_r}] \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N (w'_i)^2 \tag{3.21}$$

olarak tanımlanır. Eşitlikte  $w'_i$ ,

$$w'_i = w_{yi} - R w_{xi} \quad (3.22)$$

dir. Yaklaşık varyansın tahmin edicisi ise,

$$v[\hat{\mu}_{HH_r}] \approx \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\hat{w}_i)^2 \quad (3.23)$$

olarak tanımlanır. Eşitlikte  $\hat{w}_i$ ,

$$\hat{w}_i = w_{yi} - \hat{R}_{HH} w_{xi} \quad (3.24)$$

biçiminde verilir [9].



## 4. UYARLANABİLİR KÜME ÖRNEKLEMESİ

Ekolojik ve coğrafik araştırmalarda yapılan çalışmalarda örneğin, nesli tükenmekte olan hayvan türlerinin, bitkilerin veya az rastlanan bulaşıcı bir hastalığa yakalanan insanların incelenmesinde kitle tahmini için kullanılan klasik örnekleme tasarımları ele alınan kitlenin belirleyici özelliğini göz önünde bulundurmaması sebebiyle doğru sonuçlar vermeyebilir.

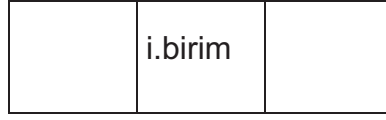
Uyarlanabilir küme örneklemesinin amacı seçilen kümeler içerisinden yeterli sayıda örnekleme ulaşmak ve kitle parametrelerine ait tutarlı ve duyarlı tahminler elde etmektir.

Başlangıç birim örneklemesinin yerine konularak ya da yerine konulmadan seçildiği ve örnekleme seçilen kümedeki birimlerden herhangi birisinin belirlenen koşul şartını sağlaması durumunda bu birimin koşuluğundaki diğer birimlerin de rneklemeye dahil edildiği tasarımlar uyarlanabilir küme rneklemesi (UK) olarak tanımlanır.

Uyarlanabilir küme rneklemesinde seçilen birim belirlenen koşul şartını sağlıyorsa o birimin koşuluğunda bulunan diğer birimlerde örnekleme dahil edilmektedir. Sonlu bir kitlenin  $N$  birimden oluştuğu varsayıldığında ilgilenilen değişken  $y = \{y_1, y_2, \dots, y_N\}$  olarak tanımlanmaktadır. Eğer rneklemdeki  $y$  değeri belirlenen koşulu sağlayan  $C$  kümesinin ( $C\{y/ y \geq c\}$ ) bir elemanı ise ( $\{y_i > c\}$ ), birimin coğrafi koşuluğundaki diğer birimler de örnekleme alınır. Burada  $c$  koşul sayısıdır. Koşulu sağlayan birimlerin koşuluğunda bulunan birimlerden bazıları koşulu sağlarken bazıları koşulu sağlamamaktadır. Bu birimlerden koşulu sağlayanların koşuluarı da örnekleme dahil edilerek süreç devam eder [10].

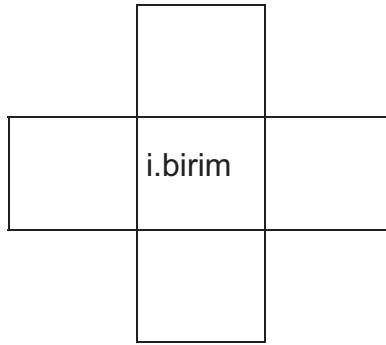
Koşuluk ilişkisi denildiğinde aslında coğrafi koşuluktan bahsedilmektedir. Koşuluk ilişkisi boyut olarak düşünüldüğünde üç şekilde tanımlanabilir. Bunlar tek boyutlu koşuluk, iki boyutlu koşuluk ve üç boyutlu koşuluktur.

Tek boyutlu komşulukta (Şekil 4.1.) koşulu sağlayan birimlerin oluşturduğu örneklem  $i$ . birimin sağındaki ve solundaki birimlerden oluşur [10].



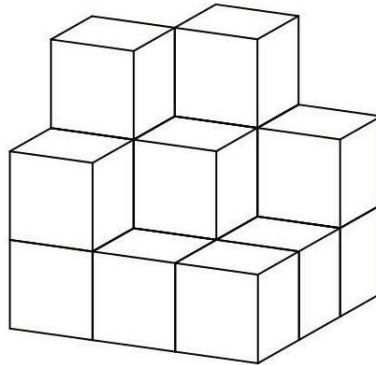
Şekil 4.1. Tek Boyutlu Komşuluk

İki boyutlu komşulukta (Şekil 4.2.) koşulu sağlayan birimlerin oluşturduğu örneklem  $i$ . birimin sağındaki, solundaki, altındaki ve üstündeki birimlerden oluşur.



Şekil 4.2. İki Boyutlu Komşuluk

Üç boyutlu komşulukta (Şekil 4.3.) ise koşulu sağlayan birimlerin oluşturduğu örneklem  $i$ .birimin sağındaki–solundaki, üstündeki–altındaki, önündeki–arkasındaki birimlerden oluşur.



Şekil 4.3. Üç Boyutlu komşuluk [11]

Bununla birlikte bahsedilen komşuluk ilişkisi simetrik olarak tanımlanmaktadır. Eğer  $i$ . birim  $j$ . birimin komşuluğundaysa  $j$ . birimde  $i$ . birimin komşuluğunda olmak durumundadır. Başlangıç örnekleme seçilen birim belirlenen koşulu sağlarsa koşulu sağlayan birimin coğrafik olarak komşuluğunda olan diğer birimler de örnekleme alınır. Belirlenen koşulu sağlayan birimlerin komşuluğundaki birimlerden bazıları koşulu sağlarken bazıları koşulu sağlamamaktadır. Komşuluğundaki koşulu sağlayan birimi örnekleme dahil etme durumu, koşulu sağlamayan birime sıra geldiğinde sonlanmaktadır. Başlangıç örnekleme olarak  $i$ . birim seçildikten sonra belirlenen koşulu sağlayan ya da sağlamayan tüm birimlerin oluşturduğu topluluğa küme denir. Koşulu sağlayan birimin komşuluğundaki diğer birim koşulu sağlamıyorsa sınır birim olarak tanımlanmaktadır. Sınır birimler hariç koşulu sağlayan birimlerden oluşan topluluğa network denilmektedir.  $i$ . birimi içeren network  $A_i$  olarak tanımlanır. Başlangıç örnekleminde yer alıp koşulu sağlamayan bir birim bir çaplı networkü oluşturur [2], [10].

Uyarlanabilir küme örneklemesinin yukarıda anlatılan genel örneklem kuralını göstermek için aşağıda örnek bir veri seti (Şekil-4.4.) oluşturulmuştur. Yukarıda bahsedildiği üzere seçim işlemine başlamadan önce C başlangıç koşulu ve birimlerin komşuluğu belirlenir. Başlangıç örnekleminin seçiminin ardından, uyarlanabilir küme örnekleme seçilen örnekleme bağlı olarak bir sonraki aşamaya geçer. Eğer başlangıç örnekleminde C koşulunu sağlayan komşu birim varsa örnekleme dahil edilir ve bu durum koşulu sağlayan komşu birimler için de incelenir [12].

	0	0	
0	7	3	0
0	9	0	
	0		

Şekil 4.4. Örnek veri seti

Yukarıda verilen örneğe göre koşul durumu  $y_i > 0$  olduğunda bu koşulu sağlayan 3 birimin olduğu görülmektedir. 7, 3 ve 9 değerleri koşulu sağlayan ve örnekleme oluşturan  $y_i$  değerleridir. Koşulu sağlayan birimlerin komşuluğunda olan  $y_i = 0$  olan birimlerde sınır birimlerdir.

Uyarlanabilir küme örneklemesinin avantajları, kitlenin belirleyici özelliklerini içine dahil edebildiği için kitle yoğunluğunu tahmin etmede daha etkilidir. Zaman ve maliyet açısından daha kullanışlıdır. Basit rastgele örneklemenin aksine daha duyarlı tahmin ediciler elde edilir.

Ayrıca araştırmaya ya da incelemeye alınan gözlemlerin kazanımı elde edildiğinden ortalama ve varyans parametrelerine ait daha etkin tahminlerin hesaplanması sağlanır [2].

Uyarlanabilir küme örneklemesinin avantajları olduğu kadar bir takım dezavantajları da vardır. Uyarlanabilir küme örneklemesinde başlangıç örnekleme büyüklüğü, örneklemeden önce tespit edilmesine rağmen son örnekleme büyüklüğü belirlenemez. Örnek vermek gerekirse, büyük kümeler için son örnekleme büyüklüğü başlangıç örnekleme büyüklüğünden büyük olabilir. Bununla birlikte uyarlanabilir küme örneklemesinde belirlenen C koşulu ve komşuluk ilişkisi oldukça önemlidir. Eğer koşul C küçükse buna bağlı olarak son örnekleme büyüklüğü de büyük olacaktır. Kullanılacak C koşulu yanlış belirlenmiş olursa gerekli birimler örnekleme dahil edilemeyebilir. Dolayısıyla son örnekleme büyüklüğü kitlenin özelliğine ve C koşuluna bağlıdır [2], [13].

Uyarlanabilir küme örneklemesiyle ilgili birçok çalışma yapılmıştır:

Thompson [2], uyarlanabilir küme örneklemesi için yansız olan Horvitz-Thompson ve Hansen-Hurwitz tahmin edicilerini geliştirmiştir. Özellikle kümelenmiş ve nadir rastlanan kitleler için uyarlanabilir küme örneklemesinin diğer klasik örnekleme yöntemlerine göre daha etkili olduğunu araştırmıştır. Bununla birlikte bu yansız tahmin edicilerin yeterli istatistiğin bir fonksiyonu olmadığını tahmin etmiştir. Bu durumu, Rao-Blackwell teoremi ile araştırılabileceğini belirtmiştir.

Uyarlanabilir küme örneklemesinde başlangıç örnekleme sistematik örneklemeyle seçilebilir [14]. Thompson [15], tabakalı uyarlanabilir küme örnekleme üzerine çalışma yapmıştır.

Thompson ve Seber [9], Salehi ve Seber [16], farklı başlangıç örnekleri alınarak yapılan uyarlanabilir küme örnekleme üzerine çalışmıştır.

Lo ve diğerleri [17], Acharya ve diğerleri [18], Cormack [19], Seber [20], Bowering ve diğerleri [21], Correl [22], Smith ve diğerleri [23] uyarlanabilir küme örnekleme çevre bilimde kullanmıştır.

Thompson [24], Thompson ve Collins [25] uyarlanabilir küme örnekleme epidemiyoloji bilimde ve sosyal bilimde kullanmıştır.

Salehi ve Seber [26], Felix-Medina ve Thompson [27] iki aşamalı uyarlanabilir küme örnekleme üzerine çalışmıştır. Sonrasında Gattone ve diğerleri [28] sonradan tabakalama iki aşamalı uyarlanabilir küme örnekleme üzerine çalışma yapmıştır.

Salehi [29], başlangıç birim örnekleminin yerine konulmadan basit rastgele örnekleme yöntemiyle seçildiği durumlar için yansız olan uyarlanmış Horvitz-Thompson ve Hansen-Hurwitz tahmin edicilerini istatistiksel olarak karşılaştırmıştır.

#### **4.1. Basit Tahmin**

##### **4.1.1. Uyarlanmış Horvitz-Thompson Tahmin Edicisi**

Farklı olasılıklı örnekleme yönteminde kullanılan Horvitz-Thompson tahmin edicisinde dahil olma olasılığı ( $\pi_i$ ) kitledeki birimin büyüklüğüne ( $m_i$ ) bağlı olarak değişmektedir. Uyarlanabilir küme örnekleme kümeler birbirinden uzak olduğu için her birimin dahil olma olasılığı bilinmemektedir. Uyarlanabilir küme örnekleme kullanılan  $m_i$  ise C koşulunu sağlayan birimlerin  $A_i$  networkünde bulunma sayısı olarak tanımlanmaktadır. Farklı olasılıklı örnekleme yönteminde C koşuluna bağlı olarak örneklem seçimi yapılmamaktadır. Bu yüzden farklı olasılıklı örnekleme koşulu sağlamayan sınır birim ayrımı yapılmamaktadır.

Uyarlanabilir küme örnekleme örnekleme yerine konularak ya da yerine konulmadan seçildiğinde uyarlanmış Horvitz-Thompson tahmin edicisi

kullanılabilir. Bu tahmin edicide başlangıç örnekleme dahil olma (kesişim) olasılıkları kullanılarak hesaplamalar yapılır. Farklı olasılıklı örnekleme yönteminde verilen Eşitlik (3.6)' da  $\pi_i = \pi'_i$  ve  $I_i = I'_i$  olduğunda kitle ortalamasının uyarlanmış Horvitz-Thompson tahmin edicisi,

$$\hat{\mu}_{HT_{y_u}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{y_i I'_i}{\pi'_i} \quad (4.1)$$

biçiminde tanımlanır.

Eşitlikte  $I'_i$ , i. birim örnekleme dahil olduğunda 1 değerini, dahil olmadığıda sıfır değerini almaktadır.  $\pi'_i$ , örneklemin yerine konulmadan ya da yerine konularak seçilmesine göre iki farklı şekilde tanımlanır. Örneklem yerine konulmadan seçildiğinde i. birimin dahil olma olasılığı,

$$\pi'_i = 1 - \frac{\binom{N - m_i}{n}}{\binom{N}{n}} \quad (4.2)$$

$\pi'_{ij} > 0$  ve  $i \neq j$  olmak üzere i. ve j. birimin örnekleme birlikte dahil olma olasılığı  $\pi'_{ij}$  ise,

$$\pi'_{ij} = 1 - \frac{\binom{N - m_i}{n} + \binom{N - m_j}{n} - \binom{N - m_i - m_j}{n}}{\binom{N}{n}} \quad (4.3)$$

biçiminde tanımlanır. Örneklem yerine konularak seçildiğinde i. birimin dahil olma olasılığı,

$$\pi'_i = 1 - \left(1 - \frac{m_i}{N}\right)^n \quad (4.4)$$

$\pi'_{ij}$  olasılığı ise,

$$\pi'_{ij} = (1 - (m_i / N))^n + (1 - (m_j / N))^n - [1 - (1 - \frac{m_i}{N} - \frac{m_j}{N})^n] \quad (4.5)$$

olarak tanımlanır. Eşitliklerde  $m_i$ , C koşulu sağlayan birimlerin  $A_i$  networkünde bulunma sayısı olarak tanımlanmaktadır.  $A_i$  networküne sınır birimler dahil edilmemektedir. Uyarlanabilir küme örneklemede kitle K networkten oluştuğunda ve Eşitlik (4.1)' de  $y_i = y_k^*$ ,  $I'_i = J_k$ ,  $\pi'_i = \alpha_k$  ve  $\hat{\mu}_{HT_y} = \hat{\mu}_{HT_{y_u}}$  olduğunda kitle ortalamasının uyarlanmış Horvitz-Thompson tahmin edicisi,

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{HT_{y_u}} &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^K \frac{y_k^* J_k}{\alpha_k} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^K \frac{y_k^*}{\alpha_k} \end{aligned} \quad (4.6)$$

biçiminde de tanımlanabilir [9]. Eşitlikte  $\alpha_k$ , k. networkün başlangıç örnekleme dahil olma olasılığı,  $y_k^*$ , k. networkte yer alan y değerlerinin toplamı,  $K$ , örneklemedeki farklı networklerin sayısı olarak tanımlanmaktadır. Başlangıç örnekleme k. networkle kesiştiğinde  $J_k$ , 1 değerini kesişmezse sıfır değerini almaktadır. Eşitlikte  $y_k^* = m_k w_{yk}$  olduğunda kitle ortalamasının uyarlanmış Horvitz-Thompson tahmin edicisi,

$$\hat{\mu}_{HT_{y_u}} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^K \frac{m_k w_{yk}}{\alpha_k} \quad (4.7)$$

biçiminde de tanımlanabilir.

Eşitlikte  $m_k$ , k. networkteki birim sayısı,  $w_{yk}$  ise k. networkteki y değerlerinin ortalaması olarak tanımlanmaktadır. Eşitlik (4.2)' de  $\pi'_i = \alpha_k$  ve  $m_i = m_k$  olduğunda k. networkün başlangıç örnekleme dahil olma olasılığı,

$$\alpha_k = 1 - \frac{\binom{N-m_k}{n}}{\binom{N}{n}} \quad (4.8)$$

Eşitlik (4.3)' de  $\pi'_{ij} = \alpha_{jk}$  olduğunda j. ve k. networkün kesişmesi olasılığı,

$$\alpha_{jk} = 1 - \frac{\binom{N-m_j}{n} + \binom{N-m_k}{n} - \binom{N-m_j-m_k}{n}}{\binom{N}{n}} \quad (4.9)$$

biçiminde tanımlanır. Eşitlik (3.7)' de  $N=K$ ,  $\pi'_{ij} = \alpha_{jk}$  ve  $\pi'_i = \alpha_j$  olduğunda örneklem yerine konulmadan seçildiğinde uyarlanmış HT tahmin edicisinin varyansı,

$$V[\hat{\mu}_{HT_{y_u}}] = \frac{1}{N^2} \left[ \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K y_j^* y_k^* \left( \frac{\alpha_{jk} - \alpha_j \alpha_k}{\alpha_j \alpha_k} \right) \right] \quad (4.10)$$

Eşitlik (3.8)' de  $N=K$ ,  $v=K$ ,  $\pi'_{ij} = \alpha_{jk}$  ve  $\pi'_i = \alpha_j$  olduğunda varyansın yansız tahmin edicisi ise,

$$\begin{aligned} v[\hat{\mu}_{HT_{y_u}}] &= \frac{1}{N^2} \left[ \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K y_j^* y_k^* \left( \frac{\alpha_{jk} - \alpha_j \alpha_k}{\alpha_{jk} \alpha_j \alpha_k} \right) J_j J_k \right] \\ &= \frac{1}{N^2} \left[ \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^K \frac{y_j^* y_k^*}{\alpha_{jk}} \left( \frac{\alpha_{jk}}{\alpha_j \alpha_k} - 1 \right) \right] \end{aligned} \quad (4.11)$$

biçiminde tanımlanır [8], [9].



#### 4.1.2. Uyarlanmış Hansen-Hurwitz Tahmin Edicisi

Farklı olasılıklı örnekleme yönteminde kullanılan Hansen-Hurwitz tahmin edicisi için  $n$  birimin yerine konularak seçildiği ve birimin seçilme olasılığının  $p_i$  olduğu tüm birimler için bilinmektedir.

Farklı olasılıklı örnekleme yönteminde verilen  $p_i = m_i / N$  olasılığı için  $m_i$ , kitledeki birimlerin büyüklüğü olarak tanımlanabilir. Uyarlanabilir küme örneklemede kümeler birbirinden uzak olduğu için örneklemedeki her birimin bire bir dahil olma olasılığı bilinmemektedir. Uyarlanabilir küme örneklemede verilen  $m_i$  ise  $C$  koşulunu sağlayan birimlerin  $A_i$  networkünde bulunma sayısı olarak tanımlanmaktadır. Farklı olasılıklı örnekleme yöntemlerinde Hansen-Hurwitz tahmin edicisi örneklem yerine konularak seçildiğinde kullanılmaktadır. Fakat uyarlanabilir küme örneklemede örneklem yerine konularak ya da yerine konulmadan seçildiğinde uyarlanmış Hansen-Hurwitz tahmin edicisi kullanılabilir. Bu tahmin edicide başlangıç kesişim sayıları kullanılarak hesaplamalar yapılır. Farklı olasılıklı örnekleme yönteminde verilen Eşitlik (3.10)' da  $\hat{\mu}_{HH_y} = \hat{\mu}_{HH_{y_u}}$  olduğunda kitle ortalamasının uyarlanmış Hansen-Hurwitz tahmin edicisi,

$$\hat{\mu}_{HH_{y_u}} = \frac{1}{n} \left[ \frac{1}{m_i} \sum_{j \in A_i} y_j \right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w_{yi} \quad (4.12)$$

biçiminde tanımlanır. Eşitlikte  $w_{yi}$ , başlangıç örneklemindeki  $i$  birimi içeren networkteki  $y$  değerlerinin ortalamasını,  $A_i$ ,  $i$  birimi içeren networkü,  $m_i$  de networkteki birimlerin sayısını göstermektedir. Uyarlanmış Horvitz-Thompson tahmin edicisinde olduğu gibi örneklem yerine konulmadan seçildiğinde Eşitlik

(3.11)' de  $\frac{y_i}{Np_i} = w_{yi}$  olduğunda uyarlanmış HH tahmin edicisinin varyansı,

$$V[\hat{\mu}_{HH_{y_u}}] = \frac{N-n}{Nn(N-1)} \sum_{i=1}^N (w_{yi} - \mu)^2 \quad (4.13)$$

biçiminde tanımlanır. Örneklem yerine konulmadan seçildiğinde Eşitlik (3.12)' de

$\frac{y_i}{Np_i} = w_{yi}$  olduğunda varyansın yansız tahmin edicisi ise,

$$v[\hat{\mu}_{HH_{y_u}}] = \frac{N-n}{Nn(n-1)} \sum_{i=1}^n (w_{yi} - \hat{\mu}_{HH_{y_u}})^2 \quad (4.14)$$

biçiminde tanımlanır [8], [9].

## 4.2. Oransal Tahmin

### 4.2.1. Uyarlanmış Horvitz-Thompson Oransal Tahmin Edicisi

Uyarlanmış Horvitz-Thompson oransal tahmin edicisi için X yardımcı değişkenine ihtiyaç vardır. Eşitlik (4.6)' da verilen Y değişkeni kitle ortalamasının Horvitz-Thompson tahmin edicisinde olduğu gibi X yardımcı değişkeni kitle ortalamasının Horvitz-Thompson tahmin edicisi,

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{HT_{x_u}} &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^K \frac{x_k^* J_k}{\alpha_k} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^K \frac{x_k^*}{\alpha_k} \end{aligned} \quad (4.15)$$

biçiminde tanımlanır. Eşitlikte  $\alpha_k$ , k. networkün başlangıç örnekleme dahil olma olasılığı,  $x_k^*$ , k. networkte yer alan x değerlerinin toplamı,  $K$ , örneklemdaki farklı networklerin sayısı olarak tanımlanmaktadır. Başlangıç örnekleme k. networkle kesiştiğinde  $J_k$ , 1 değerini kesişmezse sıfır değerini almaktadır. Eşitlikte  $x_k^* = m_k w_{xk}$  olduğunda X yardımcı değişkeni kitle ortalamasının Horvitz-Thompson tahmin edicisi,

$$\hat{\mu}_{HT_{x_u}} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^K \frac{m_k w_{xk}}{\alpha_k} \quad (4.16)$$

biçiminde de tanımlanabilir. Eşitlikte  $m_k$ , k networkteki birim sayısı,  $w_{xk}$  ise k. networkteki x değerlerinin ortalaması olarak tanımlanmaktadır. Kitle ortalamasının uyarlanmış Horvitz-Thompson oransal tahmin edicisi,

$$\hat{\mu}_{HT_{iu}} = \frac{\hat{\mu}_{HT_{yu}}}{\hat{\mu}_{HT_{xu}}} \mu_x = \hat{R}_{HT_u} \mu_x \quad (4.17)$$

dir. UKÖ' de oransal tahmin ediciler yanlı tahmin edici olduğu için varyansları yaklaşık olarak hesaplanmaktadır. Uyarlanmış HT oransal tahmin edicisinin yaklaşık varyansı,

$$\begin{aligned} V\left[\hat{\mu}_{HT_{iu}}\right] &\approx V(\hat{\mu}_{HT_{yu}} - R\hat{\mu}_{HT_{xu}}) \\ &\approx \frac{1}{N^2} \left[ \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K u_j^* u_k^* \left( \frac{\alpha_{jk} - \alpha_j \alpha_k}{\alpha_j \alpha_k} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.18)$$

biçiminde tanımlanır. Eşitlikte  $u_k^*$ ,

$$u_k^* = y_k^* - R x_k^* \quad (4.19)$$

dir. Yaklaşık varyansın tahmin edicisi ise,

$$\begin{aligned} v\left[\hat{\mu}_{HT_{iu}}\right] &\approx \frac{1}{N^2} \left[ \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K \hat{u}_j^* \hat{u}_k^* \left( \frac{\alpha_{jk} - \alpha_j \alpha_k}{\alpha_j \alpha_k} \right) J_j J_k \right] \\ &\approx \frac{1}{N^2} \left[ \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^K \frac{\hat{u}_j^* \hat{u}_k^*}{\alpha_{jk}} \left( \frac{\alpha_{jk}}{\alpha_j \alpha_k} - 1 \right) \right] \end{aligned} \quad (4.20)$$

biçiminde tanımlanır. Eşitlikte  $\hat{u}_k^*$ ,

$$\hat{u}_k^* = y_k^* - \hat{R}_{HT_u} x_k^* \quad (4.21)$$

olarak verilir [5], [12].

#### 4.2.2. Uyarlanmış Hansen-Hurwitz Oransal Tahmin Edicisi

Uyarlanmış Hansen-Hurwitz oransal tahmin edicisi için X yardımcı değişkenine ihtiyaç vardır. Eşitlik (4.12)' de verilen Y değişkeni kitle ortalamasının Hansen-

Hurwitz tahmin edicisinde olduğu gibi X yardımcı değişkeni kitle ortalamasının Hansen-Hurwitz tahmin edicisi,

$$\hat{\mu}_{HH_{x_u}} = \frac{1}{n} \left[ \frac{1}{m_i} \sum_{j \in A_i} x_j \right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w_{xi} \quad (4.22)$$

biçiminde tanımlanır. Eşitlikte  $w_{xi}$ , başlangıç örneklemindeki i birimi içeren networkteki x değerlerinin ortalamasını,  $A_i$  i birimi içeren networkü,  $m_i$  de networkteki birimlerin sayısını göstermektedir. Kitle ortalamasının uyarlanmış Hansen-Hurwitz oransal tahmin edicisi,

$$\hat{\mu}_{HH_{y_u}} = \frac{\hat{\mu}_{HH_{y_u}}}{\hat{\mu}_{HH_{x_u}}} \mu_x = \hat{R}_{HH_u} \mu_x \quad (4.23)$$

uyarlanmış HH oransal tahmin edicisinin yaklaşık varyansı ise,

$$\begin{aligned} V[\hat{\mu}_{HH_{y_u}}] &\approx V[\hat{\mu}_{HH_{y_u}} - R\hat{\mu}_{HH_{x_u}}] \\ &\approx \frac{N-n}{Nn(N-1)} \sum_{i=1}^N (w_{ui})^2 \end{aligned} \quad (4.24)$$

biçiminde tanımlanır. Eşitlikte  $w_{ui}$ ,

$$w_{ui} = w_{yi} - R w_{xi} \quad (4.25)$$

dir. Yaklaşık varyansın tahmin edicisi ise,

$$v[\hat{\mu}_{HH_{y_u}}] \approx \frac{N-n}{Nn(n-1)} \sum_{i=1}^n (\hat{w}_{ui})^2 \quad (4.26)$$

biçiminde tanımlanır. Eşitlikte  $\hat{w}_{ui}$ ,

$$\hat{w}_{ui} = w_{yi} - \hat{R}_{HH_u} w_{xi} \quad (4.27)$$

olarak verilir [5], [12].

## 5. UYARLANABİLİR KÜME ÖRNEKLEMESİNDE RAO-BLACKWELL YÖNTEMİYLE GELİŞTİRİLEN TAHMİN EDİCİLER

### 5.1. Basit Tahmin

Rao-Blackwell Teoremi yansız tahmin edicilerden daha küçük varyanslı tahmin ediciler elde etmek için uygulanabilir. Uyarlanabilir küme örneklemesinde Rao-Blackwell yöntemiyle ilgili birçok çalışma yapılmıştır.

Salehi [3], başlangıç birim örnekleminin yerine konulmadan basit rastgele örnekleme yöntemiyle seçildiği durumlar için uyarlanmış Horvitz-Thompson ve Hansen-Hurwitz tahmin edicilerini Rao-Blackwell yöntemi kullanarak geliştirmiştir ve tahmin edicileri karşılaştırmıştır.

Felix-Medina [30], uyarlanabilir küme örneklemesinde başlangıç örnekleminin basit rastgele örneklemeyle seçildiği ve Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen Horvitz-Thompson tahmin edicisini elde etmiştir ve tahmin edicinin varyansını incelemiştir.

Dryver ve Thompson [4], yeterli istatistik koşulu altında Rao-Blackwell yöntemi kullanarak uyarlanmış Horvitz-Thompson ve Hansen-Hurwitz tahmin edicilerini geliştirmiştir.

Çalışmanın bu bölümünde Salehi [3] ve Dryver-Thompson [4] tarafından Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen uyarlanmış Horvitz-Thompson ve Hansen-Hurwitz tahmin edicileri incelenecektir.

Rao-Blackwell yönteminde sonlu kitlede  $\theta$ ,  $y$  değerlerine bağlı olarak  $\theta = (y_1, y_2, \dots, y_N)'$  şeklinde tanımlanır ve  $\theta$  bilinmeyen kitle parametresiyle ilişkilidir. Bununla birlikte  $\theta \in \Theta$  olarak tanımlanır ve  $\Theta$ ,  $R^N$ 'nin bir alt kümesidir. Bütün parametreler  $\theta$ 'nin fonksiyonudur. Örneklemden çekilen birimlerin sırasıyla verildiği birim seti  $s_0$  olarak tanımlanmaktadır ve  $s_0 = (i_1, i_2, \dots, i_n)$  şeklinde ifade edilmektedir. Seçilen  $s_0$  birimlerine karşılık gelen  $y$  değerleri  $y_0$  olarak tanımlanmaktadır. Örneklemden seçilen  $n$  birimin ve bu birime karşılık gelen  $y$  değerlerinin olduğu veri seti  $d_0$  olarak tanımlanmaktadır ve  $d_0 = ((i_1, y_1), (i_2, y_2), \dots, (i_n, y_n)) = ((i, y_i) : i \in s_0)$  şeklinde gösterilmektedir. Bu

sıralama  $d_0 = (s_0, y_0)$  şeklinde kısaltılabilir. Örneklem yerine konularak seçilirse seçilen birimlerden bazıları aynı olabilir. Seçilen  $s_0$  kümesindeki birimlerin tekrar edenlerinin azaltılıp artan sırada sıralandığı birim seti  $s$  olarak tanımlanmaktadır. Seçilen birimlere karşılık gelen  $y$  değerleri de  $y_s$  olarak tanımlanmaktadır. Bu sıralı ikilinin yer aldığı veri seti  $d$  olarak ifade edilmektedir ve  $d = (s, y_s)$  şeklinde gösterilmektedir. Aynı bilgiyi içerdiğinden  $d_0 = (s_0, y_s)$  olarak da gösterilebilir. Diğer birim seti olan  $s_R$ ' de,  $s_0$ ' da seçilen birimlerin tekrarlarının azaltılıp artan sırada değil seçim sırasına göre sıralandığı birim seti olarak tanımlanmaktadır. Birim setine karşılık gelen  $y$  değerleri  $y_R$  olarak ifade edilmektedir. Örnekleme seçilen  $s_R$  birimin ve  $y_R$  değerlerinin oluşturduğu veri seti  $d_R$  olarak tanımlanmaktadır ve  $d_R = \{(i, y_i) : i \in s_R\}$ ,  $d_R = (s_R, y_R)$  olarak gösterilmektedir. Burada tutarlılık özelliği kümedeki birimlerin değerlerine bağlı olduğundan  $d_R$  kümesinin  $d_0$  kümesi için uyumlu olduğu söylenebilir [9], [31].

$P_\theta(D_0 = d_0) = P_\theta[D_0 = (s_0, y_s)]$ ,  $d_0$  kümesine bağlı olarak elde edilen olasılık değeridir. Bu olasılık değeri  $L(\theta; d_0) = p(s_0 | y_s)I(d_R, \theta)$  şeklinde olabilirlik fonksiyonunu oluşturmaktadır.  $p(s_0 | y_s)$  olasılığı  $\theta$ ' dan bağımsız bir sabit olduğundan  $d_R$  alt kümesinde en çok olabilirlik tahmin edicisi olduğu söylenebilir. Bu olabilirlik fonksiyonundan yola çıkılarak Rao-Blackwell teoremi için  $D_R$  kümesi kullanılmıştır.

Örnekleme yöntemlerinde geliştirilen tahmin ediciler için yeterlilik önemli bir özelliktir.  $W = g(D_0)$  verildiğinde  $P_\theta(D_0 = d_0 | W = w)$  olasılığı  $\theta$ ' dan bağımsızsa  $W$ ' nun  $\theta$  parametresi için yeterli olduğu söylenebilir. Bu tanımdan yola çıkılarak  $D_R$ ,  $D_0$  kümesinin azaltılmış halini verdiği için  $\theta$  için yeterli olduğu söylenebilir.

Eğer  $W$  yeterli istatistiği,  $W_1 = f(W)$  şeklinde  $f$  fonksiyonu oluşturuyorsa  $W_1$  istatistiği minimum yeterli olarak tanımlanabilir. Elde edilen  $f$  fonksiyonu bire bir fonksiyonsa  $W$ ' da minimum yeterlidir. Tanımdan yola çıkılarak minimum yeterli istatistik,  $\theta$  parametresinde bilgi kaybı olmadan en iyi azaltılmış veri kümesini

verdiğinden  $D_R$ ' nin  $\theta$  parametresi için minimum yeterli istatistik olduğu söylenebilir.

Tahmin ediciyle ilgili diğer özellik tamlik durumudur.  $W$  için  $h(W)$  ve  $E[h(W)] = 0$  olduğunda  $W = h(D_0)$ ' in  $\theta$  için tamlik özelliğini sağladığı söylenebilir. Fakat sonlu kitlelerde tamlik durumu sağlanmadığı için  $D_R$ ' nin tamlik özelliğine sahip olmadığı söylenebilir. Tamlik ve yeterlilik özelliğine sahip istatistikler minimumdur. Fakat minimum yeterli istatistikler tamlik özelliğini sağlamak zorunda değildir [31].

Rao-Blackwell Teoremi:

$T = T(D_0)$ ,  $\phi = \phi(\theta)$ ' nin parametre tahmini olduğunda  $T$  tahmin edicisinin hata kare ortalaması,

$$\begin{aligned} HKO[T] &= E[(T - \phi)^2] \\ &= E[(T - E(T) + E(T) - \phi)^2] \\ &= \text{var}[T] + (E[T] - \phi)^2 \end{aligned}$$

olarak tanımlanır.  $T$  yansız olduğunda  $HKO[T] = \text{var}[T]$  olmaktadır. Rao-Blackwell teoremine göre  $T = T(D_0)$ ,  $\phi = \phi(\theta)$  parametresinin tahmin edicisi olduğunda ve  $W$ ,  $\theta$  için yeterli olduğunda,

$T_w = E[T | W] = \eta(W)$  olarak tanımlanır. Buna bağlı olarak:

1-  $W$ ,  $\theta$  için yeterli olduğundan  $W$  istatistiği verildiğinde  $T$ ' nin koşullu dağılımı  $\theta$ ' dan bağımsız olmaktadır. Bu durumda elde edilen  $T_w$ ' da  $\theta$ ' ya bağlı değildir ve  $T_w$  tahmin edici olarak tanımlanabilir.

2-  $T$  ve  $T_w$  tahmin edicilerinin beklenen değerleri eşit olduğundan,

$$E[T_w] = E[T] \text{ dir.}$$

3-  $HKO[T] = E[(T - T_w)^2] + HKO[T_w]$  olduğundan,

$$HKO[T_w] \leq HKO[T] \text{ tüm } \theta \in \Theta \text{ için } P_\theta(T \neq T_w) > 0 \text{ dir.}$$

Rao-Blackwell teoremine bağılı olarak elde edilen sonuçlar aşağıda verilmektedir.

1-  $D_R$ ,  $\theta$  için yeterli olduğundan  $W = D_R$  olarak gösterilebilir.

$$T_W = T_R = E[T | D_R] \quad (5.1)$$

2-Eğer  $T$  yansız ise  $HKO$  varyans olmaktadır ve aşağıdaki şekilde gösterilmektedir.

$$\begin{aligned} V[T_W] &= V[T] - E_W \{E(T - T_W)^2 | W\} \\ &= V[T] - E_W \{\text{var}[T | W]\} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Yeni bir tahmin edici olan  $T_W$  yansızdır ve  $T$ ' den daha küçük varyansa sahip olduğu söylenebilir.

Bununla birlikte minimum yeterli istatistiğe sahip birden fazla yansız tahmin edici uygulamada kullanılabilir. Ama eşit oranda hangisinin daha iyi olduğu tam olarak söylenememektedir.

$D_R$ , kitledeki  $y$  değerinin  $\theta$  vektörü için yeterli istatistiği olduğundan, Eşitlik (5.2)' de  $W = d_R$  ve  $T_W = T_{RB}$  olduğunda Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen tahmin edicinin varyansı,

$$V[T_{RB}] = V[T] - E\{\text{var}[T | d_R]\} \quad (5.3)$$

biçiminde tanımlanır. Başlangıç örnekleminin yerine konulmadan seçildiği varsayalım.  $\nu$  tane farklı birimin  $n$  genişliğinde örneklem büyüklüğü için oluşturulacak kombinasyon sayısı  $G = \binom{\nu}{n}$  ile bulunabilir. Kombinasyon sırası  $g=1,2,\dots,G$  şeklinde ifade edilir. Başlangıç örneklemini  $g$ . kombinasyonunu içerdiğinde  $t_g$ ,  $T$ ' nin değerini almaktadır. Burada  $g$ . kombinasyonun gösterge değişkeni  $I_g$ ,  $D_R$  için uygunsa 1 değilse 0 değerini almaktadır. Bu durumda uygun kombinasyon sayısı,

$$\xi = \sum_{g=1}^G I_g \quad (5.4)$$



biçiminde tanımlanır. Eşitlik (5.1)' de verilen Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen tahmin edici,

$$T_{RB} = E[T | d_R]$$

$$= \frac{1}{\xi} \sum_{g=1}^{\xi} t_g = \frac{1}{\xi} \sum_{g=1}^G t_g I_g \quad (5.5)$$

biçiminde tanımlanır.  $D_R$  koşulunda her biri eşit olasılıklıdır.  $1/\xi$  olasılığıyla  $T = t_g$  dir. Eşitlik (5.3)' de verilen  $\text{var}[T | d_R]$ ,

$$\text{var}[T | d_R] = E[(T - T_{RB})^2 | d_R]$$

$$= \frac{1}{\xi} \sum_{g=1}^{\xi} (t_g - T_{RB})^2 \quad (5.6)$$

biçiminde tanımlanır. Eşitlik (5.3) ve Eşitlik (5.6)' dan yararlanılarak Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen tahmin edicinin varyansının yansız tahmin edicisi ise,

$$v[T_{RB}] = v[T] - \text{var}\hat{[T | d_R]}$$

$$v[T_{RB}] = v[T] - E[(T - T_{RB})^2 | d_R] \quad (5.7)$$

$$v[T_{RB}] = v[T] - \frac{1}{\xi} \sum_{g=1}^{\xi} (t_g - T_{RB})^2$$

biçiminde tanımlanır [31].

Uyarlanabilir küme örneklemede kitle ortalamasını tahmin etmek için kullanılan yansız olan Horvitz-Thompson ve Hansen-Hurwitz tahmin edicileri minimum yeterli istatistiğin bir fonksiyonu değildir. Her bir tahmin edici için yeterli istatistik koşulu altında beklenen değerleri Rao-Blackwell yöntemi ile düzenlenip geliştirilebilir. Literatürde Salehi [3] ve Dryver-Thompson [4],  $T$  istatistiği yerine uyarlanmış Horvitz-Thompson ve Hansen-Hurwitz tahmin edicilerini kullanmıştır.

### 5.1.1. Salehi Tarafından Geliştirilen Basit Tahmin

Salehi [3] tarafından Rao-Blackwell yöntemiyle uyarlanmış Horvitz-Thompson ve Hansen-Hurwitz tahmin edicileri geliştirilmiştir. Salehi, uyarlanmış tahmin edicilerin minimum yeterli istatistiğini geliştirmiştir.

#### 5.1.1.1. Uyarlanmış Horvitz-Thompson Tahmin Edicisi

Uyarlanmış Horvitz-Thompson tahmin edicisi birimler yerine networkleri temel almaktadır. Salehi [3] tarafından hesaplanan Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen tahmin edici için bir takım hesaplama aşamaları mevcuttur. Elde edilen final örneklemin oluşturduğu örneklem E olarak tanımlanmaktadır. Final örneklem sınır birimler ve koşulu sağlayan birimlerden oluşan örneklemdir. Rao-Blackwell yöntemiyle E olarak tanımlanan final örneklemini  $F_1, F_2, F_3$  olarak üç ayrı networke ayrılmaktadır.  $F_1$ , C koşulunu sağlayan iki ya da daha fazla birimden oluşan networklerden oluşmaktadır.  $F_2$ , sadece koşulu sağlayan birimlerin komşuluğunda olup koşulu sağlamayan sınır birimlerden oluşmaktadır.  $F_3$  ise bunların dışında kalan diğer tüm networklerden oluşmaktadır. Sembolle göstermek gerekirse;  $\eta = |F_1|$ ,  $\phi = |F_2|$ ,  $\zeta = |F_3|$  olarak ifade edilmektedir.  $F_3$  networkündeki birimler başlangıç örneklemiyle kesişeceği için  $\nu' = \nu - \zeta$  ve  $n' = n - \zeta$  olarak gösterilir.  $n'$  örneklemin  $\nu'$  birimden seçilme sayısı  $\binom{\nu'}{n'}$  olarak elde edilir. Networklerin dahil olduğu küme  $d_R = \{(i, y_i); i \in S_R\}$  olarak tanımlanmaktadır. Dahil olup olmama hesabına göre Eşitlik (5.4)' de verilen  $d_R$  kümesinde yer alan başlangıç örnekleminin kombinasyon sayısı  $\xi$ ,

$$\xi = \binom{\nu'}{n'} - \sum_{k \in F_1} \binom{\nu' - m_k}{n'} + \sum_{k, l \in F_1} \binom{\nu' - m_k - m_l}{n'} + \dots + (-1)^{\eta} \binom{\nu' - \sum_{k \in F_1} m_k}{n'} \quad (5.8)$$

biçiminde tanımlanır. Mümkün kombinasyon sayısından  $F_1$  kümesindeki networklerin dahil olma sayısının çıkartılmasıyla elde edilmektedir. Eşitlikte  $m_k$ , k. networkteki birim sayısıdır. Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen tahmin edicinin

verildiği Eşitlik (5.5)' de  $T_{RB} = \hat{\mu}_{RBHT_{y.u_s}}$  ve  $T = \hat{\mu}_{HT_{y_u}}$  olduğunda uyarlanmış Horvitz-Thompson tahmin edicisi için  $t_g$ ,

$$\begin{aligned} t_g &= \frac{1}{N} \sum_{k \in E} \frac{y_k^*}{\alpha_k} I_{gk} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k \in F_1 \cup F_3} \frac{y_k^*}{\alpha_k} + \frac{1}{n} \sum_{k \in F_2} y_k^* I_{gk} \end{aligned} \quad (5.9)$$

biçiminde tanımlanır. Eşitlik (5.5)' de  $T_{RB} = \hat{\mu}_{RBHT_{y.u_s}}$  olduğunda minimum yeterli istatistik koşulunda Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen kitle ortalamasının uyarlanmış HT tahmin edicisi,

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{RBHT_{y.u_s}} &= \frac{1}{\xi} \sum_{g=1}^{\xi} \frac{1}{N} \sum_{k \in E} \frac{y_k^*}{\alpha_k} I_{gk} \\ &= \frac{1}{\xi N} \sum_{k \in E} \frac{y_k^*}{\alpha_k} \sum_{g=1}^{\xi} I_{gk} \end{aligned} \quad (5.10)$$

biçiminde tanımlanır. Eşitlikte  $F_1$  ve  $F_3$  kümesi için  $\sum_{g=1}^{\xi} I_{gk} = \xi$  ve  $F_2$  kümesi için

$\sum_{g=1}^{\xi} I_{gk} = \xi_1$  ile gösterildiğinde Eşitlik (5.10)' dan Rao-Blackwell yöntemiyle

geliştirilen uyarlanmış HT tahmin edicisi,

$$\hat{\mu}_{RBHT_{y.u_s}} = \frac{1}{N} \left( \sum_{k \in F_1} \frac{y_k^*}{\alpha_k} + \frac{\xi_1}{\xi} \cdot \sum_{k \in F_2} \frac{y_k^*}{\alpha_k} + \sum_{k \in F_3} \frac{y_k^*}{\alpha_k} \right) \quad (5.11)$$

biçiminde tanımlanır.  $y_k^*$ , k. networkteki y değerlerinin toplamıdır ve  $y_k^* = m_k w_{yk}$  olarak tanımlandığında, minimum yeterli istatistik koşulunda Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen uyarlanmış HT tahmin edicisi,

$$\hat{\mu}_{RBHT_{y.u_s}} = \frac{1}{N} \left( \sum_{k \in F_1} \frac{m_k w_{yk}}{\alpha_k} + \frac{\xi_1}{\xi} \cdot \sum_{k \in F_2} \frac{m_k w_{yk}}{\alpha_k} + \sum_{k \in F_3} \frac{m_k w_{yk}}{\alpha_k} \right) \quad (5.12)$$

biçiminde tanımlanır. Eşitlikte  $m_k$ , k. networkteki birim sayısını,  $w_{y^k}$  da k. networkteki y değerlerinin ortalamasını,  $\xi_1$  ise  $F_2$  networküyle ilgili olan sınır birimlerin başlangıç kombinasyonunda bulunma sayısını göstermektedir ve  $\xi_1$ ,

$$\xi_1 = \binom{v'-1}{n'-1} - \sum_{k \in F_1} \binom{v'-m_k-1}{n'-1} + \sum_{k,l \in F_1} \binom{v'-m_k-m_l-1}{n'-1} + \dots + (-1)^n \binom{v'-\sum_{k \in F_1} m_k-1}{n'-1} \quad (5.13)$$

biçiminde tanımlanır. Rao-Blackwell yönteminde verilen Eşitlik (5.7)' de  $T_{RB} = \hat{\mu}_{RBHT_{y.u_s}}$  ve  $T = \hat{\mu}_{HT_{y_u}}$  olduğunda Salehi [3] tarafından Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen uyarlanmış HT tahmin edicisinin varyansının yansız tahmin edicisi,

$$v[\hat{\mu}_{RBHT_{y.u_s}}] = v[\hat{\mu}_{HT_{y_u}}] - \text{var}[\hat{\mu}_{HT_{y_u}} | d_R] \quad (5.14)$$

biçiminde tanımlanır. Eşitliğin sağ tarafı Eşitlik (5.6)' dan yararlanarak  $T_{RB} = \hat{\mu}_{RBHT_{y.u_s}}$  ve  $T = \hat{\mu}_{HT_{y_u}}$  olduğunda,

$$\text{var}(\hat{\mu}_{HT_{y_u}} | d_R) = E[(\hat{\mu}_{HT_{y_u}} - \hat{\mu}_{RBHT_{y.u_s}})^2 | d_R]$$

$$\text{var}(\hat{\mu}_{HT_{y_u}} | d_R) = \frac{1}{\xi} \sum_g (t_g - \hat{\mu}_{RBHT_{y.u_s}})^2$$

$$\text{var}(\hat{\mu}_{HT_{y_u}} | d_R) = \frac{1}{\xi} \sum_{g=1}^{\xi} \left( \frac{1}{n} \sum_{k \in F_2} y_k^* I_{gk} - \frac{\xi_1}{n\xi} \sum_{k \in F_2} y_k^* \right)^2$$

$$\text{var}(\hat{\mu}_{HT_{y_u}} | d_R) = \frac{1}{(n\xi)^2} \left( (\xi_1\xi - \xi_1^2) \sum_{k \in F_2} y_k^{*2} + 2(\xi_{12}\xi - \xi_1^2) \sum_{k,l \in F_2, l < k} y_k^* y_l^* \right) \quad (5.15)$$

biçiminde tanımlanır. Eşitlikte  $\xi_{12}$ ,  $F_2$  networküyle ilgili olan iki sınır birimin başlangıç kombinasyonunda bulunma sayısını göstermektedir ve  $\xi_{12}$ ,

$$\xi_{12} = \binom{v'-2}{n'-2} - \sum_{k \in F_1} \binom{v'-m_k-2}{n'-2} + \sum_{k,l \in F_1} \binom{v'-m_k-m_l-2}{n'-2} + \dots + (-1)^\eta \binom{v'-\sum_{k \in F_1} m_k-2}{n'-2} \quad (5.16)$$

biçiminde tanımlanır. Eşitlik (5.14)' den Salehi [3] tarafından Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen uyarlanmış HT tahmin edicisinin varyansının yansız tahmin edicisi,

$$v[\hat{\mu}_{RBHT_{y_{u_s}}}] = v[\hat{\mu}_{HT_{y_u}}] - \frac{1}{(n\xi)^2} \left( (\xi_1\xi - \xi_1^2) \sum_{k \in F_2} y_k^{*2} + 2(\xi_{12}\xi - \xi_1^2) \sum_{k,l \in F_2} \sum_{l < k} y_k^* y_l^* \right) \quad (5.17)$$

biçiminde tanımlanır [3]. Eşitlikte  $v[\hat{\mu}_{HT_{y_u}}]$ , uyarlanmış HT tahmin edicisinin varyans tahmin edicisidir ve Eşitlik (4.11)' de verilmiştir.

### 5.1.1.2. Uyarlanmış Hansen-Hurwitz Tahmin Edicisi

Uyarlanmış Hansen-Hurwitz tahmin edicisi her bir networkün  $w_i$  değerini temel almaktadır. Uyarlanmış Horvitz-Thompson tahmin edicisinde olduğu gibi uyarlanmış Hansen-Hurwitz tahmin edicisinde de  $d_R = \{(i, y_i); i \in S_R\}$  olarak tanımlanmaktadır. Hansen-Hurwitz tahmin edicisinde  $F_{1u}$ ,  $F_1$  kümesinde yer alan birden fazla birim içeren ayrı networkleri tanımlamaktadır. Yukarıda bahsedildiği gibi final örnekleme  $F_1, F_2, F_3$  olarak üç ayrı networke ayrılmaktadır.  $F_1$ , C koşulunu sağlayan iki ya da daha fazla birimden oluşan networklerden oluşmaktadır.  $F_2$ , sadece koşulu sağlayan birimlerin komşuluğunda olup koşulu sağlamayan sınır birimlerden oluşmaktadır.  $F_3$  ise bunların dışında kalan diğer tüm networklerden oluşmaktadır. Sembolle göstermek gerekirse;  $\eta = |F_1|$ ,  $\phi = |F_2|$ ,  $\zeta = |F_3|$  olarak ifade edilmektedir.  $F_3$  networkündeki birimler başlangıç örneklemiyle kesişeceği için  $v' = v - \zeta$  ve  $n' = n - \zeta$  değişkenleri elde edilir.

Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen tahmin edicinin verildiği Eşitlik (5.5)' de  $T_{RB} = \hat{\mu}_{RBHH_{y_{u_s}}}$  ve  $T = \hat{\mu}_{HH_{y_u}}$  olduğunda uyarlanmış Hansen-Hurwitz tahmin edicisi için  $t_g$ ,

$$\begin{aligned}
t_g &= \frac{1}{n} \sum_{i \in d_R} w_{yi} J_{gi} \\
&= \frac{1}{n} \left[ \sum_{i \in F_{1u} \cup F_2} w_{yi} J_{gi} + \sum_{i \in F_3} w_{yi} \right]
\end{aligned} \tag{5.18}$$

biçiminde tanımlanır. Eşitlikte  $J_{gi}$ ,  $i$ . birim  $g$ . kombinasyonunu içeriyorsa 1 değerini içermiyorsa 0 değerini alan gösterge değişken,  $w_{yi}$  ise networkteki birimlerin  $y$  değerlerinin ortalaması olarak tanımlanmaktadır. Eşitlik (5.5)' de  $T_{RB} = \hat{\mu}_{RBHH_{y.us}}$  olduğunda minimum yeterli istatistik koşulunda Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen kitle ortalamasının uyarlanmış HH tahmin edicisi,

$$\begin{aligned}
\hat{\mu}_{RBHH_{y.us}} &= \frac{1}{\xi} \sum_{g=1}^{\xi} \frac{1}{n} \left[ \sum_{i \in F_{1u}} w_{yi} I_{gi} + \sum_{i \in F_2} w_{yi} I_{gi} + \sum_{i \in F_3} w_{yi} \right] \\
&= \frac{1}{n} \left[ \frac{1}{\xi} \sum_{i \in F_{1u}} w_{yi} \sum_{g=1}^{\xi} I_{gi} + \frac{1}{\xi} \sum_{i \in F_2} w_{yi} \sum_{g=1}^{\xi} I_{gi} + \sum_{i \in F_3} w_{yi} \right]
\end{aligned} \tag{5.19}$$

biçiminde tanımlanır.  $\sum_{g=1}^{\xi} I_{gi}$ ,  $i$  birim içeren kombinasyonların sayısı olarak tanımlanan  $\xi_i$ ' ye eşittir. Eşitlik (5.19)' dan minimum yeterli istatistik koşulunda Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen uyarlanmış HH tahmin edicisi,

$$\begin{aligned}
\hat{\mu}_{RBHH_{y.us}} &= \frac{1}{n} \left( \sum_{i \in F_{1u} \cup F_2} \frac{\xi_i}{\xi} w_{yi} + \sum_{i \in F_3} w_{yi} \right) \\
&= \frac{1}{n} \left( \sum_{i \in F_{1u}} \frac{\xi_i}{\xi} w_{yi} + \frac{\xi_1}{\xi} \sum_{i \in F_2} w_{yi} + \sum_{i \in F_3} w_{yi} \right)
\end{aligned} \tag{5.20}$$

biçiminde tanımlanır. Eşitlikte  $\xi$ , dahil olup olmama hesabına göre  $d_R$  kümesinde yer alan başlangıç örnekleminin kombinasyon sayısı Eşitlik (5.8)' de,  $\xi_1, F_2$  networküyle ilgili olan sınır birimlerin başlangıç kombinasyonunda bulunma sayısı Eşitlik (5.13)' de,  $w_{yi}$  ise networkteki birimlerin  $y$  değerlerinin ortalaması Eşitlik (5.18)' de tanımlanmıştır. Eşitlikte  $\xi_i, F_1$  networkündeki birimlerin ayrı network olarak başlangıç kombinasyonunda bulunma sayısını göstermektedir ve  $\xi_i$ ,

$$\begin{aligned} \xi_i &= \binom{\nu'-1}{n'-1} - \sum_{l:l \neq k; l \in F_1} \binom{\nu'-m_l-1}{n'-1} + \sum_{\{l,h:\{l,h\} \neq k; l,h \in F_1\}} \binom{\nu'-m_l-m_h-1}{n'-1} + \dots + (-1)^\eta \binom{\nu'-\sum_{l \in F_1, l \neq k} m_l-1}{n'-1} \quad k \in F_1 \\ &= \binom{\nu'-1}{n'-1} - \sum_{l \in F_1} \binom{\nu'-m_l-1}{n'-1} + \sum_{l,h \in F_1} \binom{\nu'-m_l-m_h-1}{n'-1} + \dots + (-1)^\eta \binom{\nu'-\sum m_l-1}{n'-1} \quad i \in F_2 \end{aligned} \quad (5.21)$$

biçiminde tanımlanır. Rao-Blackwell yönteminde verilen Eşitlik (5.7)' de  $T_{RB} = \hat{\mu}_{RBHH_{y.u_s}}$  ve  $T = \hat{\mu}_{HH_{y_u}}$  olduğunda Salehi [3] tarafından Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen uyarlanmış HH tahmin edicisinin varyansının yansız tahmin edicisi,

$$v[\hat{\mu}_{RBHH_{y.u_s}}] = v[\hat{\mu}_{HH_{y_u}}] - \text{var}[\hat{\mu}_{HH_{y_u}} / d_R] \quad (5.22)$$

biçiminde tanımlanır. Eşitliğin sağ tarafı Eşitlik (5.6)' dan yararlanarak  $T_{RB} = \hat{\mu}_{RBHH_{y.u_s}}$  ve  $T = \hat{\mu}_{HH_{y_u}}$  olduğunda,

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{\mu}_{HH_{y_u}} | d_R) &= E[(\hat{\mu}_{HH_{y_u}} - \hat{\mu}_{RBHH_{y.u_s}})^2 | d_R] \\ \text{var}(\hat{\mu}_{HH_{y_u}} | d_R) &= \frac{1}{\xi} \sum_g (t_g - \hat{\mu}_{RBHH_{y.u_s}})^2 \end{aligned}$$

$$\text{var}(\hat{\mu}_{HH_{y_u}} | d_R) = \frac{1}{(n\xi)^2} \left( \sum_{i \in F_{1u} \cup F_2} (\xi_i \xi - \xi_i^2) w_{yi}^2 + 2 \sum_{i,j \in F_{1u} \cup F_2} \sum_{i < j} (\xi_{ij} \xi - \xi_i \xi_j) w_{yi} w_{yj} \right) \quad (5.23)$$

biçiminde tanımlanır. Eşitlikte  $\xi_{ij}$ ,  $F_{1u} \cup F_2$  içinde i. ve j. birimin başlangıç kombinasyonunda bulunma sayısını göstermektedir ve  $\xi$ ,

$$\xi_{ij} = \left[ \begin{array}{l} \left( \binom{v'-2}{n'-2} - \sum_{h \neq k} \binom{v'-m_h-2}{n'-2} \right) \text{ eğer } k, l \in F_1 \\ + \sum_{h, l \neq k} \binom{v'-m_h-m_e-2}{n'-2} \\ + \dots + (-1)^\eta \binom{v'-m_h-2}{n'-2} \end{array} \right]$$

$$\xi_{ij} = \left[ \begin{array}{l} \left( \binom{v'-2}{n'-2} - \sum_{h \neq k} \binom{v'-m_h-2}{n'-2} \right) k \in F_1 \\ + \sum_{h, l \neq k} \binom{v'-m_h-m_e-2}{n'-2} \\ + \dots + (-1)^\eta \binom{v'-m_h-2}{n'-2} \end{array} \right]$$

$$\xi_{ij} = \left[ \begin{array}{l} \left( \binom{v'-2}{n'-2} - \sum_{h \in F_1} \binom{v'-m_h-2}{n'-2} \right) i, j \in F_2 \\ + \sum_{h, e \neq k, l} \binom{v'-m_h-m_e-2}{n'-2} \\ + \dots + (-1)^\eta \binom{v'-m_h-2}{n'-2} \end{array} \right] \quad (5.24)$$

biçiminde tanımlanır. Eşitlik (5.22)' den Salehi [3] tarafından Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen uyarlanmış HH tahmin edicisinin varyansının yansız tahmin edicisi,

$$v[\hat{\mu}_{RBHH_{y_u}}] = v[\hat{\mu}_{HH_{y_u}}] - \frac{1}{(n\xi)^2} \left( \sum_{i \in F_{1u} \cup F_2} (\xi_i \xi - \xi_i^2) w_{yi}^2 + 2 \sum_{i,j \in F_{1u} \cup F_2} \sum_{i < j} (\xi_{ij} \xi - \xi_i \xi_j) w_{yi} w_{yj} \right) \quad (5.25)$$



biçiminde tanımlanır [3]. Eşitlikte  $v[\hat{\mu}_{HH_{y_u}}]$ , uyarlanmış HH tahmin edicisinin varyansının tahmin edicisidir ve Eşitlik (4.14)' de verilmiştir.

### 5.1.2. Dryver-Thompson Tarafından Geliştirilen Basit Tahmin

Dryver-Thompson [4] tarafından Rao-Blackwell yöntemiyle uyarlanmış Horvitz-Thompson ve Hansen-Hurwitz tahmin edicileri geliştirilmiştir. Dryver-Thompson [4], Salehi [3]' den farklı olarak tahmin edicilerin yeterli istatistiğini geliştirmiştir.

#### 5.1.2.1. Uyarlanmış Horvitz-Thompson Tahmin Edicisi

Dryver-Thompson [4] tarafından geliştirilen Rao-Blackwell yönteminde final örnekleme,  $s_c$  ve  $s_{\bar{c}}$  olmak üzere iki farklı kümeden oluşmaktadır. Başlangıç C koşulunu sağlayan birimlerin oluşturduğu küme  $s_c$  olarak tanımlanırken C koşulunu sağlamayan birimlerin oluşturduğu küme  $s_{\bar{c}}$  olarak tanımlanmaktadır.

$d^+$  kümesi,  $d^+ = \{(i, y_i, f_i) \cup (j, y_j); i \in s_c, j \in s_{\bar{c}}\}$  olarak tanımlanır. Dryver-Thompson [4], Salehi [3] de kullanılan uygun kombinasyon sayısı olarak tanımlanan  $\xi'$  yi kullanmamaktadır. Horvitz-Thompson ve Hansen-Hurwitz tahmin edicilerinde kullanılan  $y$  değerlerinin ortalaması olarak gösterilen  $w$  değerleri  $d^+$  kümesinde koşulu sağlayan değerlere göre değişmektedir.  $d_R$ , kümesi  $\theta$  için minimum yeterli istatistiğe sahipken  $d^+$  kümesi yeterli istatistiğe sahiptir. Dryver-Thompson [4], Salehi [3] den farklı olarak sınır birimleri oluşturan  $F_2$  kümesiyle ilgilenmektedir.

Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen tahmin edicinin verildiği Eşitlik (5.5)' de  $T_{RB} = \hat{\mu}_{RBHT_{y.ud}}$ ,  $T = \hat{\mu}_{HT_{y_u}}$  ve  $d_R = d^+$  olduğunda yeterli istatistik koşulunda Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen kitle ortalamasının uyarlanmış Horvitz-Thompson tahmin edicisi,

$$\hat{\mu}_{RBHT_{y.ud}} = E(\hat{\mu}_{HT_{y_u}} | D^+ = d^+) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{\kappa} \frac{m_k w_{yk}^+}{\alpha_k} \quad (n_k > 0) \quad (5.26)$$

biçiminde tanımlanır. Eşitlikte  $m_k$ , k. networkteki birim sayısını,  $y_k^* = m_k w_{yk}^+$ , k. networkteki  $y$  değerlerinin toplamını,  $w_{yk}^+$  ise sınır birimlerden oluşan  $F_2$

networkünün elemanı olup olmadığına göre networkteki birimlerin ortalamasını göstermektedir ve  $w_{yk}^+$ ,

$$w_{yk}^+ = \left\{ w_{e,y}^+ = \frac{1}{\phi} \sum_{l \in F_2} w_{yl} \quad , \text{ eğer } k \in F_2 \right\}$$

yada

$$= \{ w_{yk} \quad , \text{ eğer } k \notin F_2 \}$$
(5.27)

biçiminde tanımlanır. Rao-Blackwell yönteminde verilen Eşitlik (5.7)' de  $T_{RB} = \hat{\mu}_{RBHT_{y.ud}}$ ,  $T = \hat{\mu}_{HT_{yu}}$  ve  $d_R = d^+$  olduğunda Dryver-Thompson [4] tarafından Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen uyarlanmış HT tahmin edicisinin varyansının yansız tahmin edicisi,

$$v[\hat{\mu}_{RBHT_{y.ud}}] = v[\hat{\mu}_{HT_{yu}}] - \text{var}[\hat{\mu}_{HT_{yu}} / d^+] \quad (5.28)$$

biçiminde tanımlanır. Eşitliğin sağ tarafı Eşitlik (5.6)' dan yararlanarak  $T_{RB} = \hat{\mu}_{RBHT_{y.ud}}$ ,  $T = \hat{\mu}_{HT_{yu}}$  ve  $d_R = d^+$  olduğunda,

$$\text{var}(\hat{\mu}_{HT_{yu}} | d^+) = E[(\hat{\mu}_{HT_{yu}} - \hat{\mu}_{RBHT_{y.ud}})^2 | d^+]$$

$$\text{var}(\hat{\mu}_{HT_{yu}} | d^+) = E \left[ \frac{1}{n^2} \left( \sum_{k \in s_0 \cap F_2} y_k^* - \frac{\phi_{s_0}}{\phi_s} \sum_{k \in F_2} y_k^* \right)^2 \right]$$

$$\text{var}(\hat{\mu}_{HT_{yu}} | d^+) = \frac{1}{(n\phi_s)^2} \left( \phi_{s_0} (\phi_s - \phi_{s_0}) \sum_{i \in F_2} y_k^{*2} + 2 \frac{\phi_{s_0} (\phi_{s_0} - \phi_s)}{\phi_s - 1} \sum_{k,l \in F_2} \sum_{l < k} y_k^* y_l^* \right) \quad (5.29)$$

biçiminde tanımlanır. Eşitlikte  $y_k^*$ , k. networkteki birimlerin toplam değerini,  $\phi_{s_0}$ ,  $s_0$  olarak tanımlanan başlangıç örnekleme seçilen sınır birimlerin sayısını,  $\phi_s$  ise final örneklemindeki sınır birimlerin sayısını göstermektedir.

Eşitlik (5.28)' den Dryver-Thompson [4] tarafından Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen uyarlanmış HT tahmin edicisinin varyansının yansız tahmin edicisi,

$$v[\hat{\mu}_{RBHT_{y.ud}}] = v[\hat{\mu}_{HT_{y_u}}] - \frac{1}{(n\phi_s)^2} \left( \phi_{s_0} (\phi_s - \phi_{s_0}) \sum_{i \in F_2} y_k^{*2} + 2 \frac{\phi_{s_0} (\phi_{s_0} - \phi_s)}{\phi_s - 1} \sum_{k, l \in F_2} \sum_{l < k} y_k^* y_l^* \right) \quad (5.30)$$

biçiminde tanımlanır [4]. Eşitlikte  $v[\hat{\mu}_{HT_{y_u}}]$ , uyarlanmış HT tahmin edicisinin varyansının tahmin edicisidir ve Eşitlik (4.11)' de verilmiştir.

### 5.1.2.2. Uyarlanmış Hansen-Hurwitz Tahmin Edicisi

Uyarlanmış Horvitz-Thompson tahmin edicisinde olduğu gibi uyarlanmış Hansen-Hurwitz tahmin edicisinde de  $d^+$  kümesi  $d^+ = \{(i, y_i, f_i) \cup (j, y_j); i \in s_c, j \in s_{\bar{c}}\}$  olarak tanımlanır.

Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen tahmin edicinin verildiği Eşitlik (5.5)' de  $T_{RB} = \hat{\mu}_{RBHH_{y.ud}}$ ,  $T = \hat{\mu}_{HH_{y_u}}$  ve  $d_R = d^+$  olduğunda yeterli istatistik koşulunda Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen kitle ortalamasının uyarlanmış Hansen-Hurwitz tahmin edicisi,

$$\hat{\mu}_{RBHH_{y.ud}} = E(\hat{\mu}_{HH_{y_u}} | D^+ = d^+) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^K n_k w_{yk}^+ \quad (5.31)$$

biçiminde tanımlanır. Eşitlikte  $w_{yk}^+$ , sınır birimlerden oluşan  $F_2$  networkünün elemanı olup olmadığına göre networkteki birimlerin ortalaması Eşitlik (5.27)' de tanımlanmıştır.

Rao-Blackwell yönteminde verilen Eşitlik (5.7)' de  $T_{RB} = \hat{\mu}_{RBHH_{y.ud}}$ ,  $T = \hat{\mu}_{HH_{y_u}}$  ve  $d_R = d^+$  olduğunda Dryver-Thompson [4] tarafından Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen uyarlanmış HH tahmin edicisinin varyansının yansız tahmin edicisi,

$$v[\hat{\mu}_{RBHH_{y.ud}}] = v[\hat{\mu}_{HH_{y_u}}] - \text{var}[\hat{\mu}_{HH_{y_u}} / d^+] \quad (5.32)$$

biçiminde tanımlanır. Eşitliğin sağ tarafı Eşitlik (5.6)' dan yararlanarak  $T_{RB} = \hat{\mu}_{RBHH_{y.u_d}}$ ,  $T = \hat{\mu}_{HH_{y_u}}$  ve  $d_R = d^+$  olduğunda,

$$\text{var}(\hat{\mu}_{HH_{y_u}} | d^+) = E[(\hat{\mu}_{HH_{y_u}} - \hat{\mu}_{RBHH_{y.u_d}})^2 | d^+]$$

$$\text{var}(\hat{\mu}_{HH_{y_u}} | d^+) = \frac{1}{(n\phi_s)^2} \left( \phi_{s_0} (\phi_s - \phi_{s_0}) \sum_{i \in F_2} w_{yi}^2 + 2 \frac{\phi_{s_0} (\phi_{s_0} - \phi_s)}{\phi_s - 1} \sum_{k,l \in F_2} \sum_{l < k} w_{yi} w_{yj} \right) \quad (5.33)$$

biçiminde tanımlanır. Eşitlikte  $\phi_{s_0}$ ,  $s_0$  olarak tanımlanan başlangıç örnekleme seçilen sınır birimlerin sayısını,  $\phi_s$  ise final örneklemindeki sınır birimlerin sayısını göstermektedir.

Eşitlik (5.32)' den Dryver-Thompson [4] tarafından Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen uyarlanmış HH tahmin edicisinin varyansının yansız tahmin edicisi,

$$v[\hat{\mu}_{RBHH_{y.u_d}}] = v[\hat{\mu}_{HH_{y_u}}] - \frac{1}{(n\phi_s)^2} \left( \phi_{s_0} (\phi_s - \phi_{s_0}) \sum_{i \in F_2} w_{yi}^2 + 2 \frac{\phi_{s_0} (\phi_{s_0} - \phi_s)}{\phi_s - 1} \sum_{k,l \in F_2} \sum_{l < k} w_{yi} w_{yj} \right) \quad (5.34)$$

biçiminde tanımlanır [4]. Eşitlikte  $v[\hat{\mu}_{HH_{y_u}}]$ , uyarlanmış HH tahmin edicisinin varyansının tahmin edicisidir ve Eşitlik (4.14)' de verilmiştir.

## 5.2. Oransal Tahmin

Uyarlanmış Horvitz-Thompson ve Hansen-Hurwitz tahmin edicileri minimum yeterli istatistiğe sahip değildir. Bu yüzden Rao-Blackwell yöntemi kullanılarak minimum yeterli istatistiğe sahip daha küçük varyanslı tahmin ediciler elde edilmektedir. Elde edilen tahmin ediciler yanlı tahmin edici olduğu için varyansları yaklaşık olarak hesaplanmaktadır.

Bir önceki kısımda Rao-Blackwell yöntemiyle tek değişkenler için elde edilen basit tahmin edicilerden bahsedilmişti. Açıklayıcı değişkenin yer aldığı oransal tahmin edicilerin varyansı basit tahmin edicilerin varyansından daha küçük olduğu için oransal tahmin ediciler kitleyi daha iyi temsil etmektedir ve daha doğru sonuçlar ortaya çıkarmaktadır. Fakat uygulama açısından basit tahmin edicilere göre daha zordur. Bu konuyla ilgili birçok çalışma yapılmıştır.

Thompson [2], daha iyi yansız tahmin edici elde edebilmek için minimum yeterli istatistikten ve Rao-Blackwell' den yararlanmaya çalışmıştır.

Salehi [3] ve Felix [30], minimum yeterli istatistik koşuluna dayanan Rao-Blackwell yönteminin analitik şeklini ortaya çıkarmış ve hesaplamıştır.

Chao [32], uyarlanmış Horvitz-Thompson tahmin edicisi için oransal tahmin edici önermiştir.

Dryver ve Thompson [4], yeterli istatistik koşulu altında başka bir Rao-Blackwell yöntemi geliştirmiştir.

Dryver ve Chao [12], uyarlanmış Horvitz-Thompson ve Hansen-Hurwitz oransal tahmin edicilerini geliştirmiştir.

Dryver, Chao ve Lin [33], Rao-Blackwell yöntemini kullanarak uyarlanmış Horvitz-Thompson ve Hansen-Hurwitz oransal tahmin edicilerini geliştirmiştir.

Chao ve Lin [5], Rao-Blackwell yöntemini kullanarak uyarlanmış Horvitz-Thompson ve Hansen-Hurwitz oransal tahmin edicilerinin varyans tahminlerini geliştirmiştir.

Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen basit tahmin ediciler için verilen Eşitlik (5.3)' de  $T_{TB} = \hat{\mu}_{r.i(RB)}$ ,  $T = \hat{\mu}_{y.i} - R\hat{\mu}_{x.i}$  ve  $d_R = d$  olduğunda Taylor serisi kullanılarak Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen oransal tahmin edicinin yaklaşık varyansı genel olarak,

$$V(\hat{\mu}_{r.i(RB)}) \approx V(\hat{\mu}_{y.i} - R\hat{\mu}_{x.i}) - E[\text{var}(\hat{\mu}_{y.i} - R\hat{\mu}_{x.i} | d)] \quad (5.35)$$

biçiminde tanımlanır [5]. Eşitlikte verilen  $\text{var}(\hat{\mu}_{y.i} - R\hat{\mu}_{x.i})$ ,  $\hat{\mu}_{r.i}$ ' nin yaklaşık varyansı olarak düşünülür. Bununla birlikte  $\hat{\mu}_{u.i} = \hat{\mu}_{y.i} - R\hat{\mu}_{x.i}$  olarak tanımlanır. Eşitlik (5.3)' de  $T_{RB} = \hat{\mu}_{r.i(RB)}$ ,  $T = \hat{\mu}_{u.i}$  ve  $d_R = d$  olduğunda Eşitlik (5.35)' den elde edilen oransal tahmin edicinin yaklaşık varyansı,

$$V(\hat{\mu}_{r.i(RB)}) \approx V(\hat{\mu}_{u.i}) - E[\text{var}(\hat{\mu}_{u.i} | d)] \quad (5.36)$$

biçiminde tanımlanır. Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen basit tahmin ediciler için verilen Eşitlik (5.7)' de  $T_{TB} = \hat{\mu}_{r.i(RB)}$ ,  $T = \hat{\mu}_{u.i}$  ve  $d_R = d$  olduğunda Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen oransal tahmin edicinin yaklaşık varyansının tahmin edicisi,

$$v(\hat{\mu}_{r.i(RB)}) \approx v(\hat{\mu}_{r.i}) - \text{var}(\hat{\mu}_{u.i} | d) \quad (5.37)$$

biçiminde tanımlanır [5].

### 5.2.1. Salehi Tarafından Geliştirilen Oransal Tahmin Ediciler

Salehi [3] tarafından Rao-Blackwell yöntemiyle kitle ortalamasının uyarlanmış Horvitz-Thompson ve Hansen-Hurwitz oransal tahmin edicileri geliştirilmiştir. Salehi oransal tahmin edicilerinde X yardımcı değişkenin de ilave edildiği  $d_R = \{(i, y_i, x_i); i \in S_R\}$  kümesi tanımlanmaktadır.

#### 5.2.1.1. Uyarlanmış Horvitz-Thompson Oransal Tahmin Edicisi

Minimum yeterli istatistik koşulunda Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen uyarlanmış Horvitz-Thompson oransal tahmin edicisi için X yardımcı değişkenin ortalama tahmin edicisine ihtiyaç vardır. Eşitlik (5.12)' de verilen Y değişkeni kitle ortalaması için Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen uyarlanmış Horvitz-Thompson tahmin edicisinde olduğu gibi X yardımcı değişkeni kitle ortalamasının Horvitz-Thompson tahmin edicisi,

$$\hat{\mu}_{RBHT_{x.u_s}} = \frac{1}{N} \left( \sum_{k \in F_1} \frac{m_k w_{xk}}{\alpha_k} + \frac{\xi_1}{\xi} \cdot \sum_{k \in F_2} \frac{m_k w_{xk}}{\alpha_k} + \sum_{k \in F_3} \frac{m_k w_{xk}}{\alpha_k} \right) \quad (5.38)$$

biçiminde tanımlanır [33]. Eşitlikte  $m_k$ , k. networkteki birim sayısını,  $w_{xk}$ , k. networkteki x değerlerinin ortalamasını,  $x_k^* = m_k w_{xk}$  ise, k. networkteki x değerlerinin toplamını göstermektedir.  $\xi$ , dahil olup olmama hesabına göre  $d_R$  kümesinde yer alan başlangıç örnekleminin kombinasyon sayısı Eşitlik (5.8)' de,  $\xi_1$ ,  $F_2$  networküyle ilgili olan sınır birimlerin başlangıç kombinasyonunda bulunma sayısı Eşitlik (5.13)' de tanımlanmıştır.

Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen kitle ortalamasının uyarlanmış HT oransal tahmin edicisi,

$$\hat{\mu}_{RBHT_{r.u_s}} = \frac{\hat{\mu}_{RBHT_{y.u_s}}}{\hat{\mu}_{RBHT_{x.u_s}}} \mu_x = \hat{R}_{RBHT_{u_s}} \mu_x \quad (5.39)$$

biçiminde tanımlanır. Eşitlik (5.36)' da  $\hat{\mu}_{r.i(RB)} = \hat{\mu}_{RBHT_{r.u_s}}$ ,  $\hat{\mu}_{u.i} = \hat{\mu}_{HT_{r_u}}$  ve  $d = d_R$  olduğunda Salehi [3] tarafından Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen uyarlanmış HT oransal tahmin edicisinin yaklaşık varyansı,

$$V(\hat{\mu}_{RBHT_{r.u_s}}) \approx V(\hat{\mu}_{HT_{r_u}}) - E[\text{var}(\hat{\mu}_{HT_{r_u}} | d_R)] \quad (5.40)$$

biçiminde tanımlanır. Eşitlikte  $\hat{\mu}_{HT_{r_u}}$ ,

$$\hat{\mu}_{HT_{r_u}} = \hat{\mu}_{HT_{y_u}} - R \hat{\mu}_{HT_{x_u}} \quad (5.41)$$

dır. Eşitlik (5.37)' de  $\hat{\mu}_{r.i(RB)} = \hat{\mu}_{RBHT_{r.u_s}}$ ,  $\hat{\mu}_{u.i} = \hat{\mu}_{HT_{r_u}}$  ve  $d = d_R$  olduğunda Salehi [3] tarafından Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen uyarlanmış HT oransal tahmin edicisinin yaklaşık varyansının tahmin edicisi ise,

$$v(\hat{\mu}_{RBHT_{r.u_s}}) \approx v(\hat{\mu}_{HT_{r_u}}) - \text{var}(\hat{\mu}_{HT_{r_u}} | d_R) \quad (5.42)$$

biçiminde tanımlanır. Eşitliğin sağ tarafı Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen uyarlanmış Horvitz-Thompson basit tahmin edicisi için Eşitlik (5.15)' de verilmiştir ve eşitlikte  $\hat{\mu}_{HT_{y_u}} = \hat{\mu}_{HT_{r_u}}$ ,  $y_k^* = \hat{u}_k^*$  olduğunda,

$$\text{var}(\hat{\mu}_{HT_{r_u}} | d_R) = \frac{1}{(n\xi)^2} \left( (\xi_1 \xi - \xi_1^2 \sum_{k \in F_2} \hat{u}_k^{*2} + 2(\xi_{12} \xi - \xi_1^2 \sum_{k,l \in F_2} \sum_{l < k} \hat{u}_k^* \hat{u}_l^*)) \right) \quad (5.43)$$

biçiminde tanımlanır. Eşitlikte  $\xi_{12}$ ,  $F_2$  networküyle ilgili olan iki sınır birimin başlangıç kombinasyonunda bulunma sayısı Eşitlik (5.16)' da,  $\xi$ , dahil olup olmama hesabına göre  $d_R$  kümesinde yer alan başlangıç örnekleminin

kombinasyon sayısı Eşitlik (5.8)' de,  $\xi_1$  ise  $F_2$  networküyle ilgili olan sınır birimlerin başlangıç kombinasyonunda bulunma sayısı Eşitlik (5.13)' de tanımlanmıştır. Eşitlik (4.21)' de verilen  $\hat{u}_k^* = y_k^* - \hat{R}_{HT_u} x_k^*$  değişken yardımıyla varyans tahmin edicisi bulunmaktadır.

Eşitlik (5.42)' den Salehi [3] tarafından Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen uyarlanmış HT oransal tahmin edicisinin yaklaşık varyansının tahmin edicisi,

$$v(\hat{\mu}_{RBHT_{r,u_s}}) \approx v(\hat{\mu}_{HT_{r_u}}) - \frac{1}{(n\xi)^2} \left( (\xi_1\xi - \xi_1^2 \sum_{k \in F_2} \hat{u}_k^{*2} + 2(\xi_{12}\xi - \xi_1^2 \sum_{k,l \in F_2} \sum_{l < k} \hat{u}_k^* \hat{u}_l^*)) \right) \quad (5.44)$$

biçiminde tanımlanır [5]. Eşitlikte  $v[\hat{\mu}_{HT_{r_u}}]$ , uyarlanmış HT oransal tahmin edicisinin yaklaşık varyansının tahmin edicisidir ve Eşitlik (4.20)' de verilmiştir.

### 5.2.1.2. Uyarlanmış Hansen-Hurwitz Oransal Tahmin Edicisi

Minimum yeterli istatistik koşulunda Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen uyarlanmış Hansen-Hurwitz oransal tahmin edicisi için X yardımcı değişkeni ortalama tahmin edicisine ihtiyaç vardır. Eşitlik (5.20)' de verilen Y değişkeni kitle ortalaması için Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen uyarlanmış Hansen-Hurwitz tahmin edicisinde olduğu gibi X yardımcı değişkeni kitle ortalamasının Hansen-Hurwitz tahmin edicisi,

$$\hat{\mu}_{RBHH_{x,u_s}} = \frac{1}{n} \left( \sum_{i \in F_{1u}} \frac{\xi_i}{\xi} \cdot w_{xi} + \frac{\xi_1}{\xi} \sum_{i \in F_2} w_{xi} + \sum_{i \in F_3} w_{xi} \right) \quad (5.45)$$

olarak tanımlanır [33]. Eşitlikte  $w_{xi}$ , networkteki birimlerin x değerlerinin ortalamasını göstermektedir.  $\xi$ , dahil olup olmama hesabına göre  $d_R$  kümesinde yer alan başlangıç örnekleminin kombinasyon sayısı Eşitlik (5.8)' de,  $\xi_i$ ,  $F_1$  networkündeki birimlerin ayrı network olarak başlangıç kombinasyonunda bulunma sayısı Eşitlik (5.21)' de,  $\xi_1$  ise  $F_2$  networküyle ilgili olan sınır birimlerin başlangıç kombinasyonunda bulunma sayısı Eşitlik (5.13)' de tanımlanmıştır.



Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen kitle ortalamasının uyarlanmış HH oransal tahmin edicisi,

$$\hat{\mu}_{RBHH_{r.u_s}} = \frac{\hat{\mu}_{RBHH_{y.u_s}}}{\hat{\mu}_{RBHH_{x.u_s}}} \mu_x = \hat{R}_{RBHH_{u_s}} \mu_x \quad (5.46)$$

biçiminde tanımlanır. Eşitlik (5.36)' da  $\hat{\mu}_{r.i(RB)} = \hat{\mu}_{RBHH_{r.u_s}}$ ,  $\hat{\mu}_{u.i} = \hat{\mu}_{HH_{r_u}}$  ve  $d = d_R$  olduğunda Salehi [3] tarafından Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen uyarlanmış HH oransal tahmin edicisinin yaklaşık varyansı,

$$V(\hat{\mu}_{RBHH_{r.u_s}}) \approx V(\hat{\mu}_{HH_{r_u}}) - E[\text{var}(\hat{\mu}_{HH_{r_u}} | d_R)] \quad (5.47)$$

biçiminde tanımlanır. Eşitlikte  $\hat{\mu}_{HH_{r_u}}$ ,

$$\hat{\mu}_{HH_{r_u}} = \hat{\mu}_{HH_{y_u}} - R \hat{\mu}_{HH_{x_u}} \quad (5.48)$$

dır. Eşitlik (5.37)' de  $\hat{\mu}_{r.i(RB)} = \hat{\mu}_{RBHH_{r.u_s}}$ ,  $\hat{\mu}_{u.i} = \hat{\mu}_{HH_{r_u}}$  ve  $d = d_R$  olduğunda Salehi [3] tarafından Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen uyarlanmış HH oransal tahmin edicisinin yaklaşık varyansının tahmin edicisi ise,

$$v(\hat{\mu}_{RBHH_{r.u_s}}) \approx v(\hat{\mu}_{HH_{r_u}}) - \text{var}(\hat{\mu}_{HH_{r_u}} | d_R) \quad (5.49)$$

biçiminde tanımlanır. Eşitliğin sağ tarafı Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen uyarlanmış Hansen-Hurwitz basit tahmin edicisi için Eşitlik (5.23)' de verilmiştir ve eşitlikte  $\hat{\mu}_{HH_{y_u}} = \hat{\mu}_{HH_{r_u}}$ ,  $w_{yi} = \hat{w}_{ui}$  olduğunda,

$$\text{var}(\hat{\mu}_{HH_{r_u}} | d_R) = \frac{1}{(n\xi)^2} \left( \sum_{i \in F_u \cup F_2} (\xi_i \xi - \xi_i^2) \hat{w}_{ui}^2 + 2 \sum_{i,j \in F_u \cup F_2} \sum_{i < j} (\xi_{ij} \xi - \xi_i \xi_j) \hat{w}_{ui} \hat{w}_{uj} \right) \quad (5.50)$$

biçiminde tanımlanır. Eşitlikte  $\xi_{ij}$ ,  $F_u \cup F_2$  içinde i. ve j. birimin başlangıç kombinasyonunda bulunma sayısı Eşitlik (5.24)' de,  $\xi$ , dahil olup olmama hesabına göre  $d_R$  kümesinde yer alan başlangıç örneklemine kombinasyon sayısı

Eşitlik (5.8)' de,  $\xi_i$  ise  $F_1$  networkündeki birimlerin ayrı network olarak başlangıç kombinasyonunda bulunma sayısı Eşitlik (5.21)' de tanımlanmıştır. Eşitlik (4.27)' de verilen  $\hat{w}_{ui} = w_{yi} - \hat{R}_{HH_u} w_{xi}$  değişken yardımıyla varyans tahmin edicisi bulunmaktadır.

Eşitlik (5.49)' dan Salehi [3] tarafından Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen uyarlanmış HH oransal tahmin edicisinin yaklaşık varyansının tahmin edicisi,

$$v(\hat{\mu}_{RBHH_{r.us}}) \approx v(\hat{\mu}_{HH_{r.u}}) - \frac{1}{(n\xi)^2} \left( \sum_{i \in F_{1u} \cup F_2} (\xi_i \xi - \xi_i^2) \hat{w}_{ui}^2 + 2 \sum_{i,j \in F_{1u} \cup F_2} \sum_{i < j} (\xi_i \xi - \xi_i \xi_j) \hat{w}_{ui} \hat{w}_{ij} \right) \quad (5.51)$$

biçiminde tanımlanır [5]. Eşitlikte  $v[\hat{\mu}_{HH_{r.u}}]$ , uyarlanmış HH oransal tahmin edicisinin yaklaşık varyansının tahmin edicisidir ve Eşitlik (4.26)' da verilmiştir.

### 5.2.2. Dryver-Thompson Tarafından Geliştirilen Oransal Tahmin Ediciler

Dryver-Thompson [4] tarafından Rao-Blackwell yöntemiyle uyarlanmış Horvitz-Thompson ve Hansen-Hurwitz oransal tahmin edicileri geliştirilmiştir. Dryver-Thompson oransal tahmin edicilerinde X yardımcı değişkenin eklendiği  $d^+ = \{(i, y_i, x_i, f_i); i \in s_c\} \cup \{(j, y_j, x_j); j \in s_c^c\}$  kümesi tanımlanmaktadır.

#### 5.2.2.1. Uyarlanmış Horvitz-Thompson Oransal Tahmin Edicisi

Yeterli istatistik koşulunda Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen uyarlanmış Horvitz-Thompson oransal tahmin edicisi için X yardımcı değişkenin ortalama tahmin edicisine ihtiyaç vardır. Eşitlik (5.26)' da verilen Y değişkeni kitle ortalaması için Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen uyarlanmış Horvitz-Thompson tahmin edicisinde olduğu gibi X yardımcı değişkeni kitle ortalamasının Horvitz-Thompson tahmin edicisi,

$$\hat{\mu}_{RBHT_{x.ud}} = E(\hat{\mu}_{HT_{x_u}} | D^+ = d^+) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^K \frac{m_k w_{xk}^+}{\alpha_k} \quad (n_k > 0) \quad (5.52)$$

biçiminde tanımlanır [33]. Eşitlikte  $m_k$ , k. networkteki birim sayısını göstermektedir. Eşitlikte  $w_{xk}^+$ ,

$$w_{xk}^+ = \{w_{e.x}^+ = \frac{1}{\phi} \sum_{l \in F_2} w_{xl} \quad , \text{ eğer } k \in F_2\}$$

*yada*

$$= \{w_{xk} \quad , \text{ eğer } k \notin F_2\}$$
(5.53)

biçiminde tanımlanır.  $w_{xk}^+$  , sınır birimlerden oluşan  $F_2$  networkünün elemanı olup olmadığına göre networkteki birimlerin x değerlerinin ortalamasını göstermektedir.

Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen kitle ortalamasının uyarlanmış HT oransal tahmin edicisi,

$$\hat{\mu}_{RBHT_{r.ud}} = \frac{\hat{\mu}_{RBHT_{y.ud}}}{\hat{\mu}_{RBHT_{x.ud}}} \mu_x = \hat{R}_{RBHT_{ud}} \mu_x$$
(5.54)

biçiminde tanımlanır. Eşitlik (5.36)' da  $\hat{\mu}_{r.i(RB)} = \hat{\mu}_{RBHT_{r.ud}}$  ,  $\hat{\mu}_{u.i} = \hat{\mu}_{HT_{ru}}$  ve  $d = d^+$  olduğunda Dryver-Thompson [4] tarafından Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen uyarlanmış HT oransal tahmin edicisinin yaklaşık varyansı,

$$V(\hat{\mu}_{RBHT_{r.ud}}) \approx V(\hat{\mu}_{HT_{ru}}) - E[\text{var}(\hat{\mu}_{HT_{ru}} | d^+)]$$
(5.55)

biçiminde tanımlanır. Eşitlikte  $\hat{\mu}_{HT_{ru}}$  ,

$$\hat{\mu}_{HT_{ru}} = \hat{\mu}_{HT_{yu}} - R \hat{\mu}_{HT_{xu}}$$
(5.56)

dır. Eşitlik (5.37)' de  $\hat{\mu}_{r.i(RB)} = \hat{\mu}_{RBHT_{r.ud}}$  ,  $\hat{\mu}_{u.i} = \hat{\mu}_{HT_{ru}}$  ve  $d = d^+$  olduğunda Dryver-Thompson [4] tarafından Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen uyarlanmış HT oransal tahmin edicisinin yaklaşık varyansının tahmin edicisi ise,

$$v(\hat{\mu}_{RBHT_{r.ud}}) \approx v(\hat{\mu}_{HT_{ru}}) - \text{var}(\hat{\mu}_{HT_{ru}} | d^+)$$
(5.57)

biçiminde tanımlanır.

Eşitliğin sağ tarafı Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen uyarlanmış Horvitz-Thompson basit tahmin edicisi için Eşitlik (5.29)' da verilmiştir ve eşitlikte

$$\hat{\mu}_{HT_{y_u}} = \hat{\mu}_{HT_{r_u}}, \quad y_k^* = \hat{u}_k^* \text{ olduğunda,}$$

$$\text{var}(\hat{\mu}_{HT_{r_u}} | d^+) = \frac{1}{(n\phi_s)^2} \left( \phi_{s_0} (\phi_s - \phi_{s_0}) \sum_{i \in F_2} \hat{u}_i^{*2} + 2 \frac{\phi_{s_0} (\phi_{s_0} - \phi_s)}{\phi_s - 1} \sum_{k, l \in F_2} \sum_{l < k} \hat{u}_k^* \hat{u}_l^* \right) \quad (5.58)$$

biçiminde tanımlanır. Eşitlikte  $\phi_{s_0}$ ,  $s_0$  olarak tanımlanan başlangıç örnekleme seçilen sınır birimlerin sayısını,  $\phi_s$  ise final örneklemindeki sınır birimlerin sayısını göstermektedir. Eşitlik (4.21)' de verilen  $\hat{u}_k^* = y_k^* - \hat{R}_{HT_u} x_k^*$  değişken yardımıyla varyans tahmin edicisi bulunmaktadır.

Eşitlik (5.57)' den Dryver-Thompson [4] tarafından Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen uyarlanmış HT oransal tahmin edicisinin yaklaşık varyansının tahmin edicisi,

$$v(\hat{\mu}_{RBHT_{r,u,d}}) \approx v(\hat{\mu}_{HT_{r_u}}) - \frac{1}{(n\phi_s)^2} \left( \phi_{s_0} (\phi_s - \phi_{s_0}) \sum_{i \in F_2} \hat{u}_i^{*2} + 2 \frac{\phi_{s_0} (\phi_{s_0} - \phi_s)}{\phi_s - 1} \sum_{k, l \in F_2} \sum_{l < k} \hat{u}_k^* \hat{u}_l^* \right) \quad (5.59)$$

biçiminde tanımlanır [5]. Eşitlikte  $v[\hat{\mu}_{HT_{r_u}}]$ , uyarlanmış HT oransal tahmin edicisinin yaklaşık varyansının tahmin edicisidir ve Eşitlik (4.20)'de verilmiştir.

### 5.2.2.2. Uyarlanmış Hansen-Hurwitz Oransal Tahmin Edicisi

Yeterli istatistik koşulunda Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen uyarlanmış Hansen-Hurwitz oransal tahmin edicisi için X yardımcı değişkenin ortalama tahmin edicisine ihtiyaç vardır. Eşitlik (5.31)' de verilen Y değişkeni kitle ortalaması için Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen uyarlanmış Hansen-Hurwitz tahmin edicisinde olduğu gibi X yardımcı değişkeni kitle ortalamasının Hansen-Hurwitz tahmin edicisi,

$$\hat{\mu}_{RBHH_{x,u,d}} = E(\hat{\mu}_{HH_{x_u}} | D^+ = d^+) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^K n_k w_{xk}^+ \quad (5.60)$$

biçiminde tanımlanır [33].

Eşitlikte  $W_{xk}^+$ , sınır birimlerden oluşan  $F_2$  networkünün elemanı olup olmadığına göre networkteki birimlerin  $x$  değerlerinin ortalaması Eşitlik (5.53)' de tanımlanmıştır.

Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen kitle ortalamasının uyarlanmış HH oransal tahmin edicisi,

$$\hat{\mu}_{RBHH_{r.ud}} = \frac{\hat{\mu}_{RBHH_{y.ud}}}{\hat{\mu}_{RBHH_{x.ud}}} \mu_x = \hat{R}_{RBHH_{ud}} \mu_x \quad (5.61)$$

biçiminde tanımlanır. Eşitlik (5.36)' da  $\hat{\mu}_{r.i(RB)} = \hat{\mu}_{RBHH_{r.ud}}$ ,  $\hat{\mu}_{u.i} = \hat{\mu}_{HH_{r_u}}$  ve  $d = d^+$  olduğunda Dryver-Thompson [4] tarafından Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen uyarlanmış HH oransal tahmin edicisinin yaklaşık varyansı,

$$V(\hat{\mu}_{RBHH_{r.ud}}) \approx V(\hat{\mu}_{HH_{r_u}}) - E[\text{var}(\hat{\mu}_{HH_{r_u}} | d^+)] \quad (5.62)$$

biçiminde tanımlanır. Eşitlikte  $\hat{\mu}_{HH_{r_u}}$ ,

$$\hat{\mu}_{HH_{r_u}} = \hat{\mu}_{HH_{y_u}} - R \hat{\mu}_{HH_{x_u}} \quad (5.63)$$

biçiminde tanımlanır. Eşitlik (5.37)' de  $\hat{\mu}_{r.i(RB)} = \hat{\mu}_{RBHH_{r.ud}}$ ,  $\hat{\mu}_{u.i} = \hat{\mu}_{HH_{r_u}}$  ve  $d = d^+$  olduğunda Dryver-Thompson [4] tarafından Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen uyarlanmış HH oransal tahmin edicisinin yaklaşık varyansının tahmin edicisi,

$$v(\hat{\mu}_{RBHH_{r.ud}}) \approx v(\hat{\mu}_{HH_{r_u}}) - \text{var}(\hat{\mu}_{HH_{r_u}} | d^+) \quad (5.64)$$

biçiminde tanımlanır. Eşitliğin sağ tarafı Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen uyarlanmış Hansen-Hurwitz basit tahmin edicisi için Eşitlik (5.33)' de verilmiştir ve eşitlikte  $\hat{\mu}_{HH_{y_u}} = \hat{\mu}_{HH_{r_u}}$ ,  $w_{yi} = \hat{w}_{ui}$  olduğunda,

$$\text{var}(\hat{\mu}_{HH_{r_u}} | d^+) = \frac{1}{(n\phi_s)^2} \left( \phi_{s_0} (\phi_s - \phi_{s_0}) \sum_{i \in F_2} \hat{w}_{ui}^2 + 2 \frac{\phi_{s_0} (\phi_{s_0} - \phi_s)}{\phi_s - 1} \sum_{k, l \in F_2} \sum_{l < k} \hat{w}_{ui} \hat{w}_{lj} \right) \quad (5.65)$$

biçiminde tanımlanır. Eşitlikte  $\phi_{s_0}$ ,  $s_0$  olarak tanımlanan başlangıç örnekleme seçilen sınır birimlerin sayısını,  $\phi_s$  ise final örneklemindeki sınır birimlerin sayısını göstermektedir. Eşitlik (4.27)' de verilen  $\hat{w}_{ui} = w_{yi} - \hat{R}_{HH_u} w_{xi}$  değişken yardımıyla varyans tahmin edicisi bulunmaktadır.

Eşitlik (5.64)' den Dryver-Thompson [4] tarafından Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen uyarlanmış HH oransal tahmin edicisinin yaklaşık varyansının tahmin edicisi,

$$v(\hat{\mu}_{RBHH_{r_{u_d}}}) \approx v(\hat{\mu}_{HH_{r_u}}) - \frac{1}{(n\phi_s)^2} \left( \phi_{s_0} (\phi_s - \phi_{s_0}) \sum_{i \in F_2} \hat{w}_{ui}^2 + 2 \frac{\phi_{s_0} (\phi_{s_0} - \phi_s)}{\phi_s - 1} \sum_{k, l \in F_2} \sum_{l < k} \hat{w}_{ui} \hat{w}_{lj} \right) \quad (5.66)$$

biçiminde tanımlanır [5]. Eşitlikte  $v[\hat{\mu}_{HH_{r_u}}]$ , uyarlanmış HH oransal tahmin edicisinin yaklaşık varyansının tahmin edicisidir ve Eşitlik (4.26)' da verilmiştir.

## 6. SAYISAL ÖRNEK

Bu bölümde, uyarlanabilir küme örneklemede örneklem seçimi ve çalışmada kitle ortalamasının tahmini için verilen basit ve oransal tahminlerinin uygulamada kullanımını göstermek amacıyla Chao ve Lin [5] çalışmasında kullanılan Poisson kümesinin veri setinden yararlanılmıştır.

$N=20$  büyüklüğündeki kitleden  $n=5$  genişliğinde yerine konulmadan örneklem seçilmiştir. Uyarlanabilir küme örneklemede koşul sayısı 5 olarak belirlenmiştir. Başlangıç örnekleminde bulunup  $y \geq 5$  koşulunu sağlayan değerlerin komşuluğunda olup koşulu sağlıyorsa değerler kendi içinde network oluştururlar. 5 birimlik örneklemden oluşan başlangıç değerlerinin birim numarası sırasıyla  $i=\{1, 5, 11, 14, 16\}$  ve birimlerin sahip olduğu  $y_i$  değerleri  $\{6, 9, 1, 14, 7\}$ ' dir ve Çizelge 6.1.' de verilmiştir.

Veri seti üzerinden ikinci, dördüncü ve beşinci bölümde verilen tahmin edicilerin kitle ortalaması ve varyans tahmin değerleri hesaplanmıştır ve elde edilen tahminler karşılaştırılmıştır. Sayısal örnekte Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen uyarlanmış oransal tahmin edicilerin diğer tahmin edicilere göre daha küçük varyansa sahip olduğunu gösterilmiştir.

Kullanılan veri seti bulunduğu networkle ve dahil olma olasılıklarıyla Çizelge 6.1.' de verilmiştir ve çizelgede koyu renk ile gösterilen birimler örnekleme seçilen birimlerdir.

Çizelge 6.1. Uyarlanabilir küme örneklemesinde kullanılan veri seti

$i$	$y_i$	$y_k^*$	$w_{yi}$	$x_i$	$x_k^*$	$w_{xi}$	$k$	$m_k$	$\alpha_k$
1	6	24	12	6	17	8,5	1	2	0,44
2	18	24	12	11	17	8,5	1	2	0,44
3	3	3	3	4	4	4	2	1	0,25
4	1	1	1	1	1	1	3	1	0,25
5	9	116	19,3	6	41	6,8	4	6	0,87
6	27	116	19,3	8	41	6,8	4	6	0,87
7	9	116	19,3	3	41	6,8	4	6	0,87
8	14	116	19,3	4	41	6,8	4	6	0,87
9	46	116	19,3	9	41	6,8	4	6	0,87
10	11	116	19,3	11	41	6,8	4	6	0,87
11	1	1	1	1	1	1	5	1	0,25
12	8	47	15,6	8	18	6	6	3	0,60
13	25	47	15,6	10	18	6	6	3	0,60
14	14	47	15,6	0	18	6	6	3	0,60
15	4	4	4	7	7	7	7	1	0,25
16	7	7	7	4	4	4	8	1	0,25
17	2	2	2	3	3	3	9	1	0,25
18	1	1	1	0	0	0	10	1	0,25
19	2	2	2	2	2	2	11	1	0,25
20	1	1	1	2	2	2	12	1	0,25

Uyarlanabilir küme örneklemesinde örneklem seçimi için aşağıda verilen adımlar izlenmiştir:

1- Uyarlanabilir küme örneklemesinde örnekleme dahil edilen birinci birim 6 değerine sahiptir ve  $y \geq 5$  koşulunu sağlamaktadır. İkinci birim, birinci birimin komşuluğunda olup koşulu sağladığı için networke dahil edilir.

2- Örnekleme alınan beşinci birim 9 değerine sahiptir ve  $y \geq 5$  koşulunu sağlamaktadır. Beşinci birimin komşuluğunda olup koşulu sağlayan birimler 6, 7, 8, 9 ve 10. birimlerdir. Bu birimler 6 birimlik bir network oluşturmaktadır.



3- Örnekleme alınan onbirinci birim 1 değerine sahiptir ve  $y \geq 5$  koşulunu sağlamamaktadır. Bu yüzden kendi içinde bir birimlik network oluşturmaktadır.

4- Örnekleme alınan ondördüncü birim 14 değerine sahiptir ve  $y \geq 5$  koşulunu sağlamaktadır. 14 değerinin komşuluğunda olup koşulu sağlayan birimler 13. ve 12. birimlerdir. Bu birimlerde 3 birimlik bir network oluşturmaktadır.

5- Örnekleme alınan onaltıncı birim 7 değerine sahiptir ve  $y \geq 5$  koşulunu sağlamaktadır. Bu birimin komşuluğunda koşulu sağlayan başka birim bulunmamaktadır. Bu yüzden bu birimde kendi içinde bir birimlik network oluşturmaktadır.

6- Koşulu sağlamayıp koşulu sağlayan birimlerin komşuluğunda olan birimlere sınır birim denilmektedir. Bu uygulamada sınır birim olan birimler sırasıyla 3, 4, 11, 15 ve 17. birimlerdir.

Uyarlanabilir küme örneklemesine geçmeden önce basit rastgele örneklemede kullanılan ortalama ve varyans tahminleri hesaplanmıştır. Basit rastgele örneklemede kullanılan örneklem ortalaması Eşitlik (2.2)' den,

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{(6+9+\dots+7)}{5} \\ &= 7,40.\end{aligned}$$

varyans tahmini Eşitlik (2.6)' dan,

$$\begin{aligned}v(\bar{y}) &= \frac{15}{20} x \frac{(6-7,4)^2 + (9-7,4)^2 + \dots + (7-7,4)^2}{4} \\ &= 16,72.\end{aligned}$$

Basit rastgele örneklemede kullanılan oransal tahmin edici için X yardımcı değişkeninin tahminine ihtiyaç vardır. X yardımcı değişkeni için örneklem ortalaması Eşitlik (2.11)' den,

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{(6+6+\dots+4)}{5} \\ &= 3,40.\end{aligned}$$

Oransal tahmin edici Eşitlik (2.13)' den,

$$\bar{y}_r = \frac{7,4}{3,4} \times 5$$

$$= 10,80.$$

Oransal tahmin edicinin varyans tahmini ise Eşitlik (2.16)' dan,

$$v(\bar{y}_r) = \frac{15}{100} \times \frac{(-6,6)^2 + \dots + (-1,4)^2}{4}$$

$$= 9,50.$$

Networklerin başlangıç örneklemeyle kesişmesi olasılığı Eşitlik (4.8)' den,

$$m_2 = 1 \text{ için } \alpha_2 = 1 - \left[ \frac{\binom{20-1}{5}}{\binom{20}{5}} \right] = 0,25.$$

2. network gibi bir birim içeren diğer networklerin başlangıç örneklemeyle kesişmesi olasılığı 0,25 tir.

$$m_1 = 2 \text{ için } \alpha_1 = 1 - \left[ \frac{\binom{20-2}{5}}{\binom{20}{5}} \right] = 0,44.$$

1.network 2 birimden oluşmaktadır. Başlangıç örneklemeyle kesişmesi olasılığı 0,44 tür.

$$m_6 = 3 \text{ için } \alpha_6 = 1 - \left[ \frac{\binom{20-3}{5}}{\binom{20}{5}} \right] = 0,60.$$

6. network 3 birimden oluşmaktadır. Başlangıç örnekleme ile kesişmesi olasılığı 0,60 dır.

$$m_4 = 6 \text{ için } \alpha_4 = 1 - \frac{\binom{20-6}{5}}{\binom{20}{5}} = 0,87.$$

4. network 6 birimden oluşmaktadır. Başlangıç örnekleme ile kesişmesi olasılığı 0,87 dir. Seçilen beş networkün birbirleriyle kesişim olasılıkları Çizelge 6.2.' de verilmiştir.

Çizelge 6.2. Networklerin kesişim olasılıkları

Network-k	1	4	5	6	8
1	0,44	0,36	0,08	0,23	0,08
4	0,36	0,87	0,20	0,49	0,20
5	0,08	0,20	0,25	0,13	0,05
6	0,23	0,49	0,13	0,60	0,13
8	0,08	0,20	0,05	0,13	0,25

Çizelge 6.2.' de gösterilen networklerin kesişim olasılıkları Eşitlik (4.9)' dan,

$$\alpha_{14} = 0,44 + 0,87 - \left[ 1 - \frac{\binom{20-2-6}{5}}{\binom{20}{5}} \right] = 0,36.$$

Birinci ve dördüncü networkün kesişmesi olasılığı 0,36 dır.

$$\alpha_{15} = 0,44 + 0,25 - \left[ 1 - \frac{\binom{20-2-1}{5}}{\binom{20}{5}} \right] = 0,08.$$

Birinci ve beşinci networkün kesişme olasılığı 0,08 dir.

$$\alpha_{68} = 0,60 + 0,25 - \left[ 1 - \frac{\binom{20-3-1}{5}}{\binom{20}{5}} \right] = 0,13.$$

Altıncı ve sekizinci networkün kesişme olasılığı 0,13 tür. Diğer kesişme olasılıkları da bu şekilde benzer olarak bulunmaktadır.

Uyarlanmış Horvitz-Thompson basit tahmin edicisine göre kitle ortalama tahmini Eşitlik (4.7)' den,

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{HT_{y_u}} &= \frac{1}{20} \left[ \frac{2 \times 12}{0,44} + \frac{6 \times 19,3}{0,87} + \dots + \frac{1 \times 7}{0,25} \right] \\ &= 14,91. \end{aligned}$$

Varyans tahmini ise Eşitlik (4.11)' den,

$$\begin{aligned} v[\hat{\mu}_{HT_{y_u}}] &= \frac{1}{20^2} \times \left[ \frac{24^2}{0,44} \left( \frac{1}{0,44} - 1 \right) + \dots + \frac{7^2}{0,25} \left( \frac{1}{0,25} - 1 \right) \right] \\ &\quad + 2 \left[ \frac{24 \times 116}{0,36} \left( \frac{0,36}{0,44 \times 0,87} - 1 \right) + \dots + \frac{47 \times 7}{0,13} \left( \frac{0,13}{0,25 \times 0,60} - 1 \right) \right] \\ &= 6,22. \end{aligned}$$

Uyarlanmış Hansen-Hurwitz basit tahmin edicisine göre kitle ortalama tahmini ise Eşitlik (4.12)' den,

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{HH_{y_u}} &= \frac{1}{5} [12 + 19,3 + \dots + 7] \\ &= 10,98. \end{aligned}$$

Varyans tahmini ise Eşitlik (4.14)' den,

$$v[\hat{\mu}_{HH_{y_u}}] = \frac{20-5}{20 \times 5 \times 4} [(12-10,98)^2 + \dots + (7-10,98)^2]$$

$$= 7,76.$$

Eşitliklerde kullanılan  $w_{yi}$  ve  $y_k^*$  değerleri Çizelge 6.1.' de yer almaktadır. Oransal tahmin ediciye geçmeden önce X yardımcı değişkenine ait olan uyarlanmış Horvitz-Thompson ve Hansen-Hurwitz tahmin edicilerinin bulunması gerekmektedir. Çizelge 6.1.' de X değişkenine ait değerler yer almaktadır.

X yardımcı değişkeni için uyarlanmış Horvitz-Thompson tahmin edicisinin kitle ortalama tahmini Eşitlik (4.16)' dan,

$$\hat{\mu}_{HT_{x_u}} = \frac{1}{20} \left[ \frac{2 \times 8,5}{0,44} + \frac{6 \times 6,8}{0,87} + \dots + \frac{4 \times 1}{0,25} \right]$$

$$= 6,78.$$

Kitle ortalamasının uyarlanmış Horvitz-Thompson oransal tahmini Eşitlik (4.17)' den,

$$\hat{\mu}_{HT_{r_u}} = \frac{14,91}{6,78} \times 5$$

$$= 10,90.$$

X yardımcı değişkeninin kitle ortalaması  $\mu_x = 5$  olarak elde edilir. Uyarlanmış Horvitz-Thompson oransal tahmin edicisinin varyans tahmini Eşitlik (4.20)' den,

$$v[\hat{\mu}_{HT_{r_u}}] = \frac{1}{20^2} \times \left[ \frac{(-11,7)^2}{0,44} \left( \frac{1}{0,44} - 1 \right) + \dots + \frac{(-1,4)^2}{0,25} \left( \frac{1}{0,25} - 1 \right) \right]$$

$$+ 2 \left[ \frac{(-11,7 \times 29,9)}{0,36} \left( \frac{0,36}{0,44 \times 0,87} - 1 \right) + \dots + \frac{(9,2 \times -1,4)}{0,13} \left( \frac{0,13}{0,25 \times 0,60} - 1 \right) \right]$$

$$= 1,83.$$

Horvitz-Thompson oransal tahmin edicisinin varyans tahmini için Eşitlik (4.21)' de verilen  $\hat{u}_k^*$  değişkeni kullanılmıştır ve  $\hat{u}_k^*$  değerleri Çizelge 6.3.' de verilmiştir.

X yardımcı değişkeni için uyarlanmış Hansen-Hurwitz tahmin edicisinin kitle ortalama tahmini Eşitlik (4.22)' den,

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_{HH_{x_u}} &= \frac{1}{5} [8,5 + 6,8 + \dots + 4] \\ &= 5,26.\end{aligned}$$

Kitle ortalamasının uyarlanmış Hansen-Hurwitz oransal tahmini Eşitlik (4.23)' den,

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_{HH_{u_i}} &= \frac{10,98}{5,26} \times 5 \\ &= 10,43.\end{aligned}$$

Uyarlanmış Hansen-Hurwitz oransal tahmin edicisinin varyans tahmini de Eşitlik (4.26)' dan,

$$\begin{aligned}v[\hat{\mu}_{HH_{u_i}}] &= \frac{20-5}{20 \times 5 \times 4} [(-5,68)^2 + \dots + (-1,32)^2] \\ &= 2,68.\end{aligned}$$

Hansen-Hurwitz oransal tahmin edicisinin varyans tahmini için Eşitlik (4.27)' de verilen  $\hat{w}_{ui}$  değişkeni kullanılmıştır ve  $\hat{w}_{ui}$  değerleri Çizelge 6.3.' de verilmiştir. Çizelgede koyu renk ile gösterilen birimler örnekleme seçilen birimlerdir.

Çizelge 6.3. Uyarlanabilir küme örneklemesinde oran tahmini için değişkenler

$i$	$y_i$	$w_{yi}$	$x_i$	$w_{xi}$	$k$	$m_k$	$\hat{w}_{ui}$	$y_k^*$	$x_k^*$	$\hat{u}_k^*$	$\alpha_k$
1	6	12	6	8,5	1	2	-5,68	24	17	-11,7	0,44
2	18	12	11	8,5	1	2	-5,68	24	17	-11,7	0,44
3	3	3	4	4	2	1	-5,32	3	4	-5,4	0,25
4	1	1	1	1	3	1	-1,08	1	1	-1,1	0,25
5	9	19,3	6	6,8	4	6	5,16	116	41	29,9	0,87
6	27	19,3	8	6,8	4	6	5,16	116	41	29,9	0,87
7	9	19,3	3	6,8	4	6	5,16	116	41	29,9	0,87
8	14	19,3	4	6,8	4	6	5,16	116	41	29,9	0,87
9	46	19,3	9	6,8	4	6	5,16	116	41	29,9	0,87
10	11	19,3	11	6,8	4	6	5,16	116	41	29,9	0,87
11	1	1	1	1	5	1	-1,08	1	1	-1,1	0,25
12	8	15,6	8	6	6	3	3,12	47	18	9,2	0,60
13	25	15,6	10	6	6	3	3,12	47	18	9,2	0,60
14	14	15,6	0	6	6	3	3,12	47	18	9,2	0,60
15	4	4	7	7	7	1	-10,56	4	7	-10,7	0,25
16	7	7	4	4	8	1	-1,32	7	4	-1,4	0,25
17	2	2	3	3	9	1	-4,24	2	3	-4,3	0,25
18	1	1	0	0	10	1	1	1	0	1	0,25
19	2	2	2	2	11	1	-2,16	2	2	-2,2	0,25
20	1	1	2	2	12	1	-3,16	1	2	-3,2	0,25

Salehi [3] ve Dryver-Thompson [4] tarafından Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen uyarlanmış Horvitz-Thompson ve Hansen-Hurwitz basit ve oransal tahmin edicilerinin hesaplanabilmesi için final örneklemin oluşturulması gerekmektedir. Final örnekleme sadece koşulu sağlayan birimlerle sınır birimlerden oluşmaktadır. Son 3 birim hem koşulu sağlamamaktadır hem de sınır birim değildir. Bu durumda final örnekleme 20 birimden 17 birime düşmektedir.

Salehi [3] tarafından Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen uyarlanmış Horvitz-Thompson ve Hansen-Hurwitz basit tahmin edicilerinin kitle ortalama ve varyans tahminleri  $d_r$  kümesi kullanılarak hesaplanmıştır.

$$d_R = \{(i, y_i) | i \in s_R\}$$

$$d_R = \{(1,6), (2,18), (3,3), (4,1), (5,9), (6,27), (7,9), (8,14), (9,46), (10,11), (11,1), (12,8), (13,25), (14,14), (15,4), (16,7), (17,2)\}$$

Final örnekleme,  $F_1, F_2$  ve  $F_3$  adı verilen üç kümeden oluşmaktadır.  $F_1, F_2$  ve  $F_3$  kümelerini içeren networkler basit tahmin için aşağıda tanımlanmıştır.

$$F_1 = \{\text{network 1, network 4, network 6}\}$$

$$F_1 = \{(1,6), (2,18) \cup (5,9), (6,27), (7,9), (8,14), (9,46), (10,11) \cup (12,8), (13,25), (14,14)\}$$

$$F_2 = \{\text{network 2, network 3, network 5, network 7, network 9}\}$$

$$F_2 = \{(3,3) \cup (4,1) \cup (11,1) \cup (15,4) \cup (17,2)\}$$

$$F_3 = \{\text{network 8}\}$$

$$F_3 = \{(16,7)\}$$

Bu durumda oluşan yeni örneklem büyüklüğü,

$$(F_1 \text{ için}) \eta = 3, (F_2 \text{ için}) \varphi = 5, (F_3 \text{ için}) \zeta = 1$$

$$v' = v - \zeta = 17 - 1 = 16$$

$$n'_0 = n_0 - \zeta = 5 - 1 = 4$$

olarak tanımlanır. Rao-Blackwell yönteminde  $d_R$  kümesinde yer alan başlangıç kombinasyon sayısı  $\xi$ , Eşitlik (5.8)' den,

$$\xi = \binom{16}{4} - \binom{16-6}{4} - \binom{16-2}{4} - \binom{16-3}{4} + \binom{16-2-3}{4} + \binom{16-6-3}{4} + \binom{16-6-2}{4} - \binom{16-6-2-3}{4}$$

$$= 324.$$

$F_2$  networküne ait birim sayısı  $\xi_1$ , Eşitlik (5.13)' den,



$$\xi_1 = \binom{15}{3} - \binom{15-6}{3} - \binom{15-2}{3} - \binom{15-3}{3} + \binom{15-6-3}{3} + \binom{15-6-2}{3} + \binom{15-2-3}{3} - \binom{15-6-2-3}{3}$$

$$= 36.$$

$F_2$  networkünde olan iki birimin kesişim sayısı  $\xi_{12}$ , Eşitlik (5.16)' dan,

$$\xi_{12} = \binom{14}{2} - \binom{14-6}{2} - \binom{14-2}{2} - \binom{14-3}{2} + \binom{14-6-3}{2} + \binom{14-6-2}{2} + \binom{14-2-3}{2} - \binom{14-6-2-3}{2}$$

$$= 0.$$

Salehi [3] tarafından Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen uyarlanmış Horvitz-Thompson basit tahmin edicisinin kitle ortalama tahmini Eşitlik (5.12)' den,

$$\hat{\mu}_{RBHT_{y.u_s}} = \frac{1}{20} \left[ \left( \frac{2x12}{0,44} + \frac{6x19,3}{0,87} + \frac{3x15,6}{0,60} \right) + \frac{36}{324} \left( \frac{3+1+1+4+2}{0,25} \right) + \frac{7}{0,25} \right]$$

$$= 14,95.$$

Salehi [3] tarafından Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen uyarlanmış Horvitz-Thompson basit tahmin edicisinin varyans tahmini Eşitlik (5.14)' de verilmiştir ve eşitliğin sağ tarafı Eşitlik (5.15)' den,

$$\text{var}(\hat{\mu}_{HT_{y_u}} | d_R) = \frac{1}{(5x324)^2} [(36x324 - 36^2)(3^2 + 1^2 + 1^2 + 4^2 + 2^2)$$

$$+ 2x(0x324 - 36^2)((3x1) + \dots + (4x2))]$$

$$= 0,08.$$

Salehi [3] tarafından Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen uyarlanmış Horvitz-Thompson basit tahmin edicisinin varyans tahmini Eşitlik (5.17)' den,

$$v[\hat{\mu}_{RBHT_{y.u_s}}] = 6,22 - 0,078$$

$$= 6,14.$$

Final örneklemini oluşturan  $F_1, F_2$  ve  $F_3$  kümeleriyle ilgili bilgi yukarıda anlatılmıştır. Uyarlanmış Hansen-Hurwitz tahmin edicisi için 1. networkün  $F_1$  kümesinde bulunma sayısı  $\xi_1$ , Eşitlik (5.21)' den,

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \binom{15}{3} - \binom{15-6}{3} - \binom{15-3}{3} + \binom{15-6-3}{3} \\ &= 171.\end{aligned}$$

4. ve 6. networkün kümede bulunma sayısı,

$$\begin{aligned}\xi_4 &= \binom{15}{3} - \binom{15-2}{3} - \binom{15-3}{3} + \binom{15-2-3}{3} \\ &= 69.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\xi_6 &= \binom{15}{3} - \binom{15-6}{3} - \binom{15-2}{3} + \binom{15-6-2}{3} \\ &= 120.\end{aligned}$$

4. networkün, 6. networkün ve 1. networkün  $F_2$  networküyle kesişme durumu ise Eşitlik (5.24)' den,

$$\begin{aligned}\xi_{42} &= \binom{14}{2} - \binom{14-2}{2} - \binom{14-3}{2} + \binom{14-2-3}{2} \\ &= 6. \rightarrow (6 \text{ elemanlı network})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\xi_{62} &= \binom{14}{2} - \binom{14-2}{2} - \binom{14-6}{2} + \binom{14-2-6}{2} \\ &= 12. \rightarrow (3 \text{ elemanlı network})\end{aligned}$$

$$\xi_{12} = \binom{14}{2} - \binom{14-3}{2} - \binom{14-6}{2} + \binom{14-3-6}{2}$$

$$= 18 \rightarrow .(2 \text{ elemanlı network})$$

Salehi [3] tarafından Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen uyarlanmış Hansen-Hurwitz basit tahmin edicisinin kitle ortalama tahmini Eşitlik (5.20)' den,

$$\hat{\mu}_{RBHH_{y.u_s}} = \frac{1}{5} \left[ \left( \frac{171}{324} \times 2 \times 12 \right) + \left( \frac{69}{324} \times 6 \times 19,3 \right) + \left( \frac{120}{324} \times 3 \times 15,6 \right) + \left( \frac{36}{324} (3+1+1+4+2) \right) + 7 \right]$$

$$= 12,60.$$

Salehi [3] tarafından Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen uyarlanmış HH basit tahmin edicisinin varyans tahmini Eşitlik (5.22)' de verilmiştir ve eşitliğin sağ tarafı Eşitlik (5.23)'den,

$$\text{var}(\hat{\mu}_{HH_{y_u}} | d_R) = \frac{1}{(5 \times 324)^2} [(171 \times 324 - 171^2)(2 \times (12)^2) + \dots + (120 \times 324 - 120^2)(3 \times (15,6)^2 +$$

$$(36 \times 324 - 36^2)((3)^2 + \dots + (2)^2) + 2 \times ((18 \times 324 - 171^2)(12)^2 + \dots$$

$$+ 3 \times (12 \times 324 - 120 \times 36)(15,6 \times 2) + 2 \times ((0 \times 324 - 36^2)(3 \times 1) + \dots$$

$$+ (4 \times 2))]$$

$$= 3,57.$$

Salehi [3] tarafından Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen uyarlanmış HH basit tahmin edicisinin varyans tahmini Eşitlik (5.25)' den,

$$v[\hat{\mu}_{RBHH_{y.u_s}}] = 7,76 - 3,571$$

$$= 4,19.$$

Dryver-Thompson [4] tarafından Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen uyarlanmış Horvitz-Thompson ve Hansen-Hurwitz basit tahmin edicilerinin ortalama ve varyans tahminleri  $d^+$  kümesi kullanılarak hesaplanmıştır.

$$d^+ = \{((i, y_i, f_i); i \in s_c) \cup ((j, y_j); j \in s_c^c)\}$$

$$d^+ = \{(1,6,1), (2,18,1), (5,9,1), (6,27,1), (7,9,1), (8,14,1), (9,46,1), (10,11,1), (12,8,1), \\ (13,25,1), (14,14,1), (16,7,1) \cup (3,3), (4,1), (11,1), (15,4), (17,2)\}$$

Dryver-Thompson [4] tarafından Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen uyarlanmış Horvitz-Thompson basit tahmin edicisinin kitle ortalama tahmini Eşitlik (5.26)' dan,

$$\hat{\mu}_{RBHT_{y,u_d}} = \frac{1}{20} \left[ \frac{2 \times 12}{0,44} + \frac{6 \times 19,3}{0,87} + \frac{1 \times 2,2}{0,25} + \frac{3 \times 15,6}{0,60} + \frac{1 \times 7}{0,25} \right] \\ = 15,15.$$

Ortalama tahmininde  $w_{e,y}^+$ , sınır birimlerin ortalaması olarak tanımlanmaktadır. Başlangıç örnekleminde sınır birim varsa  $w_{yk}^+$  hesaplamasında  $w_{e,y}^+$  kullanılır ve Eşitlik (5.27)' den,

$$w_{e,y}^+ = (3 + 1 + 1 + 4 + 2) / 5 \\ = 2,2.$$

Dryver-Thompson [4] tarafından Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen uyarlanmış HT basit tahmin edicisinin varyans tahmini Eşitlik (5.28)' de verilmiştir ve eşitliğin sağ tarafı Eşitlik (5.29)' dan,

$$\text{var}(\hat{\mu}_{HT_{y_u}} | d^+) = \frac{1}{(5 \times 5)^2} [(1 \times (5-1)) \times ((3)^2 + (1)^2 \dots + (2)^2) \\ + \frac{2 \times 1 \times (1-5)}{5-1} [(3 \times 1) + \dots + (4 \times 2)]] \\ = 0,05.$$

Dryver-Thompson [4] tarafından Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen uyarlanmış HT basit tahmin edicisinin varyans tahmini Eşitlik (5.30)' dan,

$$v[\hat{\mu}_{RBHT_{y,u_d}}] = 6,22 - 0,054 \\ = 6,17.$$

Dryver-Thompson [4] tarafından Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen uyarlanmış Hansen-Hurwitz basit tahmin edicisinin kitle ortalama tahmini Eşitlik (5.31)' den,

$$\hat{\mu}_{RBHH_{y,u_d}} = \frac{1}{5} [12 + 19,3 + 2,2 + 15,6 + 7]$$

$$= 11,22.$$

Dryver-Thompson [4] tarafından Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen uyarlanmış HH basit tahmin edicisinin varyans tahmini Eşitlik (5.32)' de verilmiştir ve eşitliğin sağ tarafı Eşitlik (5.33)' den,

$$\text{var}(\hat{\mu}_{HH_{y_u}} | d^+) = \frac{1}{(5 \times 5)^2} [(1 \times (5-1)) \times ((3)^2 + (1)^2 \dots + (2)^2)$$

$$+ \frac{2 \times 1 \times (1-5)}{5-1} [(3 \times 1) + \dots + (4 \times 2)]]$$

$$= 0,05.$$

Dryver-Thompson [4] tarafından Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen uyarlanmış HH basit tahmin edicisinin varyans tahmini Eşitlik (5.34)' den,

$$v[\hat{\mu}_{RBHH_{y,u_d}}] = 7,76 - 0,054$$

$$= 7,71.$$

Salehi [3] tarafından Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen uyarlanmış Horvitz-Thompson ve Hansen-Hurwitz oransal tahmin edicilerinin kitle ortalama ve varyans tahminleri  $d_R$  kümesi kullanılarak hesaplanmıştır.

$$d_R = \{(i, y_i, x_i) | i \in S_R\}$$

$$d_R = \{(1,6,6), (2,18,11), (3,3,4), (4,1,1), (5,9,6), (6,27,8), (7,9,3), (8,14,4), (9,46,9),$$

$$(10,11,11), (11,1,1), (12,8,8), (13,25,10), (14,14,0), (15,4,7), (16,7,4), (17,2,3)\}$$

$$F_1 = \{(network\ 1, network\ 4, network\ 6)\}$$

$$F_1 = \{(1,6,6), (2,18,11) \cup (5,9,6), (6,27,8), (7,9,3), (8,14,4), (9,46,9), (10,11,11) \cup$$

$$(12,8,8), (13,25,10), (14,14,0)\}$$

$$F_2 = \{(network\ 2, network\ 3, network\ 5, network\ 7, network\ 9)\}$$

$$F_2 = \{(3,3,4) \cup (4,1,1) \cup (11,1,1) \cup (15,4,7) \cup (17,2,3)\}$$

$$F_3 = \{(network\ 8)\}$$

$$F_3 = \{(16,7,4)\}$$

Bu durumda oluşan yeni örneklem büyüklüğü,

$$(F_1 \text{ için}) \eta = 3, (F_2 \text{ için}) \varphi = 5, (F_3 \text{ için}) \zeta = 1$$

$$v' = v - \zeta = 17 - 1 = 16$$

$$n'_0 = n_0 - \zeta = 5 - 1 = 4$$

olarak tanımlanır. Oransal tahmin ediciye geçmeden X yardımcı değişkeninin kitle ortalaması için uyarlanmış Horvitz-Thompson ve Hansen-Hurwitz tahmin edicilerinin bulunması gerekmektedir.

Salehi [3] tarafından Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen X yardımcı değişkeni için uyarlanmış Horvitz-Thompson tahmin edicisinin kitle ortalama tahmini Eşitlik (5.38)' den,

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{RBHT_{x.u_s}} &= \frac{1}{20} \left[ \left( \frac{2 \times 8,5}{0,44} + \frac{6 \times 6,8}{0,87} + \frac{3 \times 6}{0,60} \right) + \frac{36}{324} \left( \frac{4+1+1+7+3}{0,25} \right) + \frac{4}{0,25} \right] \\ &= 6,94. \end{aligned}$$

Salehi [3] tarafından Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen kitle ortalamasının uyarlanmış Horvitz-Thompson oransal tahmini Eşitlik (5.39)' dan,

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{RBHT_{r.u_s}} &= \frac{14,95}{6,94} \times 5 \\ &= 10,77. \end{aligned}$$

Salehi [3] tarafından Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen uyarlanmış HT oransal tahmin edicisinin varyans tahmini Eşitlik (5.42)' de verilmiştir ve eşitliğin sağ tarafı Eşitlik (5.43)' den,

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{\mu}_{HT_{r_u}} | d_R) &= \frac{1}{(5 \times 324)^2} [(36 \times 324 - 36^2)((-5, 4)^2 + \dots + (-4, 3)^2) + \\ &\quad 2 \times (0 \times 324 - 36^2)((-5, 4 \times -1, 1) + \dots + (-10, 7 \times -4, 3))] \\ &= 0,47. \end{aligned}$$

Oransal varyans tahmininde Eşitlik (4.21)' de verilen  $\hat{u}_k^*$  değişkeni kullanılmıştır ve  $\hat{u}_k^*$  değerleri Çizelge 6.3.' de verilmiştir. Salehi [3] tarafından Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen uyarlanmış HT oransal tahmin edicisinin varyans tahmini Eşitlik (5.44)' den,

$$\begin{aligned} v(\hat{\mu}_{RBHT_{r_{u_s}}}) &= 1,827 - 0,47 \\ &= 1,36. \end{aligned}$$

Salehi [3] tarafından Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen X yardımcı değişkeni için uyarlanmış Hansen-Hurwitz tahmin edicisinin kitle ortalama tahmini Eşitlik (5.45)' den,

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{RBHH_{x_{u_s}}} &= \frac{1}{5} \left[ \left( \frac{171}{324} \times 2 \times 8,5 \right) + \left( \frac{69}{324} \times 6 \times 6,8 \right) + \left( \frac{120}{324} \times 3 \times 6 \right) + \left( \frac{36}{324} (4 + 1 + 1 + 7 + 3) \right) + 4 \right] \\ &= 6,02. \end{aligned}$$

Salehi [3] tarafından Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen kitle ortalamasının uyarlanmış Hansen-Hurwitz oransal tahmini Eşitlik (5.46)' dan,

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{RBHH_{r_{u_s}}} &= \frac{12,6}{6,02} \times 5 \\ &= 10,46. \end{aligned}$$

Salehi [3] tarafından Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen uyarlanmış HH oransal tahmin edicisinin varyans tahmini Eşitlik (5.49)' da verilmiştir ve eşitliğin sağ tarafı Eşitlik (5.50)' den,

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{\mu}_{HH_r} | d_R) &= \frac{1}{(5x324)^2} [(171x324-171^2)(2x(-5,68)^2) + \dots + (120x324-120^2)(3x3,12^2) + \\ &\quad (36x324-36^2)((-5,32)^2 + \dots + (-4,24)^2) + 2x((18x324-171^2)(-5,68)^2 + \dots \\ &\quad + 3x((3,12x-10,56) + (3,12x-4,24)) + 2x((0x324-36^2)(-5,32x-1,08) + \dots \\ &\quad + (-10,56x-4,24))] \\ &= 1,07. \end{aligned}$$

Oransal varyans tahmininde Eşitlik (4.27)' de verilen  $\hat{w}_{ui}$  değişkeni kullanılmıştır ve  $\hat{w}_{ui}$  değerleri Çizelge 6.3.' de verilmiştir.

Salehi [3] tarafından Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen uyarlanmış HH oransal tahmin edicisinin varyans tahmini Eşitlik (5.51)' den,

$$\begin{aligned} v(\hat{\mu}_{RBHH_{r,u_s}}) &= 2,68 - 1,07 \\ &= 1,61. \end{aligned}$$

Dryver-Thompson [4] tarafından Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen uyarlanmış Horvitz-Thompson ve Hansen-Hurwitz oransal tahmin edicilerinin kitle ortalama ve varyans tahminleri  $d^+$  kümesi kullanılarak hesaplanmıştır.

$$\begin{aligned} d^+ &= \{((i, y_i, x_i, f_i); i \in s_c) \cup ((j, y_j, x_j); j \in s_c)\} \\ &= \{(1,6,6,1), (2,18,11,1), (5,9,6,1), (6,27,8,1), (7,9,3,1), (8,14,4,1), (9,46,9,1), (10,11,11,1), (12,8,8,1), \\ &\quad (13,25,10,1), (14,14,0,1), (16,7,4,1) \cup (3,3,4), (4,1,1), (11,1,1), (15,4,7), (17,2,3)\} \end{aligned}$$

Oransal tahmin ediciye geçmeden X yardımcı değişkeninin kitle ortalaması için uyarlanmış Horvitz-Thompson ve Hansen-Hurwitz tahmin edicilerinin bulunması gerekmektedir.



Dryver-Thompson [4] tarafından Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen X yardımcı değişkeni için uyarlanmış Horvitz-Thompson tahmin edicisinin kitle ortalama tahmini Eşitlik (5.52)' den,

$$\hat{\mu}_{RBHT_{x,u_d}} = \frac{1}{20} \left[ \frac{2x8,5}{0,44} + \frac{6x6,8}{0,87} + \frac{1x3,2}{0,25} + \frac{3x6}{0,60} + \frac{1x4}{0,25} \right]$$

$$= 7,22.$$

Ortalama tahmininde başlangıç örnekleminde sınır birim varsa  $w_{xk}^+$  olarak hesaplanan  $w_{e.x}^+$  kullanılır. Sınır birimlerin ortalaması olarak tanımlanan  $w_{e.x}^+$  Eşitlik (5.53)' den,

$$w_{e.x}^+ = (4+1+1+7+3) / 5$$

$$= 3,2.$$

Dryver-Thompson [4] tarafından Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen kitle ortalamasının uyarlanmış Horvitz-Thompson oransal tahmini Eşitlik (5.54)' den,

$$\hat{\mu}_{RBHT_{r,u_d}} = \frac{15,15}{7,22} x5$$

$$= 10,49.$$

Dryver-Thompson [4] tarafından Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen uyarlanmış HT oransal tahmin edicisinin varyans tahmini (5.57) eşitliğinde verilmiştir ve eşitliğin sağ tarafı Eşitlik (5.58)' den,

$$\text{var}(\hat{\mu}_{HT_{r,u_d}} | d^+) = \frac{1}{(5x5)^2} [(1x(5-1))x((-5,4)^2 + (-1,1)^2 \dots + (-4,3)^2)$$

$$+ \frac{2x1x(1-5)}{5-1} [(-5,4x-1,1) + \dots + (-10,7x-4,3)]]$$

$$= 0,49.$$

Oransal varyans tahmininde Eşitlik (4.21)' de verilen  $\hat{u}_k^*$  değişkeni kullanılmıştır ve  $\hat{u}_k^*$  değerleri Çizelge 6.3.' de verilmiştir.

Dryver-Thompson [4] tarafından Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen uyarlanmış HT oransal tahmin edicisinin varyans tahmini Eşitlik (5.59)' dan,

$$v(\hat{\mu}_{RBHT_{r,u_d}}) = 1,827 - 0,49 \\ = 1,34.$$

Dryver-Thompson [4] tarafından Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen X yardımcı değişkeni için uyarlanmış Hansen-Hurwitz tahmin edicisinin kitle ortalama tahmini Eşitlik (5.60)' dan,

$$\hat{\mu}_{RBHH_{x,u_d}} = \frac{1}{5}[8,5 + 6,8 + 3,2 + 6 + 4] \\ = 5,7.$$

Dryver-Thompson [4] tarafından Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen kitle ortalamasının uyarlanmış Hansen-Hurwitz oransal tahmini Eşitlik (5.61)' den,

$$\hat{\mu}_{RBHH_{r,u_d}} = \frac{11,22}{5,7} \times 5 \\ = 9,84.$$

Dryver-Thompson [4] tarafından Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen uyarlanmış HH oransal tahmin edicisinin varyans tahmini Eşitlik (5.64)' de verilmiştir ve eşitliğin sağ tarafı Eşitlik (5.65)' den,

$$\text{var}(\hat{\mu}_{HH_{r_u}} | d^+) = \frac{1}{(5 \times 5)^2} [(1 \times (5-1))((-5,32)^2 + (-1,08)^2 + \dots + (-4,24)^2) \\ + \frac{2 \times 1 \times (1-5)}{5-1} [(-5,32 \times -1,08) + \dots + (-10,56 \times -4,24)]] \\ = 0,48.$$

Oransal varyans tahmininde Eşitlik (4.27)' de verilen  $\hat{w}_{ui}$  değişkeni kullanılmıştır ve  $\hat{w}_{ui}$  değerleri Çizelge 6.3.' de verilmiştir.

Dryver-Thompson [4] tarafından Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen uyarlanmış HH oransal tahmin edicisinin varyans tahmini Eşitlik (5.66)' dan,

$$v(\hat{\mu}_{RBHH_{r,u_d}}) = 2,68 - 0,48 \\ = 2,20.$$

Elde edilen tahmin edicilerin varyans tahminleri Çizelge 6.4.' de verilmiştir.

Çizelge 6.4. Tahmin edicilerin karşılaştırılması

Tahmin Edici	Ortalama Tahmini	Varyans Tahmini
$\bar{y}$	7,40	16,72
$\bar{y}_r$	10,80	9,50
$\hat{\mu}_{HT_{y_u}}$	14,91	6,22
$\hat{\mu}_{HH_{y_u}}$	10,98	7,76
$\hat{\mu}_{HT_{r_u}}$	10,90	1,83
$\hat{\mu}_{HH_{r_u}}$	10,43	2,68
$\hat{\mu}_{RBHT_{y.u_s}}$	14,95	6,14
$\hat{\mu}_{RBHH_{y.u_s}}$	12,60	4,19
$\hat{\mu}_{RBHT_{y.u_d}}$	15,15	6,17
$\hat{\mu}_{RBHH_{y.u_d}}$	11,22	7,71
$\hat{\mu}_{RBHT_{r.u_s}}$	10,77	<b>1,36</b>
$\hat{\mu}_{RBHH_{r.u_s}}$	10,46	<b>1,61</b>
$\hat{\mu}_{RBHT_{r.u_d}}$	10,49	<b>1,34</b>
$\hat{\mu}_{RBHH_{r.u_d}}$	9,84	<b>2,20</b>

Sayısal örneğin sonucunda Rao-Blackwell ile geliştirilen uyarlanmış Horvitz-Thompson ve Hansen-Hurwitz oransal tahmin edicilerinin varyans tahminlerinin diğer tahminlere göre daha küçük olduğu söylenebilir.

## 7. SONUÇLAR

Bu çalışmanın amacı, uyarlanabilir küme örneklemesinde kitle ortalamasını tahmin etmek için kullanılan Horvitz-Thompson ve Hansen-Hurwitz tahmin edicilerini incelemek ve tahmin edicilerin ortalama ve varyans tahminlerini diğer tahmin edicilerle karşılaştırmaktır.

Sayısal örnekte Chao ve Lin [5] çalışmasında verilen Poisson kümesinin veri setinden yararlanılmıştır. Uyarlanabilir küme örneklemesinde kullanılan uyarlanmış Horvitz-Thompson ve Hansen-Hurwitz tahmin edicileri yansız tahmin ediciler olmalarına rağmen yeterli istatistiğe sahip olmadığı için Rao-Blackwell yöntemi kullanılarak daha küçük varyanslı minimum yeterli istatistiğe sahip tahmin ediciler önerilmiştir [3], [4].

Sayısal örneğin ilk aşamasında basit rastgele örneklemede kullanılan basit ve oransal tahmin edicilerin ortalama ve varyans tahminleri hesaplanmıştır. Sonrasında uyarlanmış Horvitz-Thompson ve Hansen-Hurwitz basit ve oransal tahmin edicilerinin ortalama ve varyans tahminleri hesaplanmıştır.

Sayısal örneğin sonraki aşamasında Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen uyarlanmış Horvitz-Thompson ve Hansen-Hurwitz basit ve oransal tahmin edicilerinin ortalama ve varyans tahminleri hesaplanmıştır.

Sonuç olarak uyarlanabilir küme örneklemesinde kullanılan tahmin edicilerin basit rastgele örnekleme gibi klasik örnekleme yöntemlerinde kullanılan tahmin edicilere göre daha küçük varyans tahminlerine sahip olduğu gösterilmiştir. Uyarlanabilir küme örneklemesinde Rao-Blackwell yöntemi kullanıldığında ise kitleyi daha iyi temsil edebilen daha küçük varyansa sahip tahmin ediciler elde edilmiştir. Rao-Blackwell yöntemiyle geliştirilen uyarlanmış Horvitz-Thompson ve Hansen-Hurwitz oransal tahmin edicilerinin varyans tahminlerinin diğer tahminlere göre daha küçük olduğu sayısal örnek üzerinden gösterilmiştir.

## KAYNAKLAR

- [1] Cochran, W.G., *Sampling Techniques*, Third Edition, John Wiley & Sons, New York, **1977**.
- [2] Thompson, S.K., Adaptive Cluster Sampling, *Journal of the American Statistical Association*, 85, 1050-1059, **1990**.
- [3] Salehi, M.M., Rao-Blackwell versions of the Horvitz-Thompson and Hansen-Hurwitz in adaptive cluster sampling, *Environmental and Ecological Statistics*, 6, 183-195, **1999**.
- [4] Dryver, A.L., Thompson, S.K., Improved unbiased estimators in adaptive cluster sampling, *Journal of the Royal Statistical Society: Series B*, 67(1), 157-166, **2005**.
- [5] Chao, C.T., Lin, F.M., Variances and variance estimators of the improved ratio estimators under adaptive cluster sampling, *Environmental and Ecological Statistics*, 21, 285-311, **2014**.
- [6] Singh S., *Advanced Sampling Theory with Applications: How Michael 'Selected' Amy*, First Edition, Kluwer Academic Publishers, **2003**.
- [7] Cingi, H., *Örnekleme Kuramı*, 3.Baskı, Bizim Büro Basımevi, Ankara, **2009**.
- [8] Thompson, S.K., *Sampling*, Second Edition, A Wiley-Interscience Publication, New York, **2002**.
- [9] Thompson, S.K., Seber G.A.F., *Adaptive Cluster Sampling*, Wiley, New York, **1996**.
- [10] Canbaş, A.B., *Uyarlanabilir Küme Örnekleme*, Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, **2001**.
- [11] [https://dat.dentalboardsmastery.com/categories/2691-cube counting](https://dat.dentalboardsmastery.com/categories/2691-cube-counting) (Ekim, **2017**).
- [12] Chao, C.T., Dryver, A.L., Ratio estimators in adaptive cluster sampling, *Environmetrics*, 18(6), 607-620, **2007**.
- [13] Onay, İ., Alhan, A., Esin, A.A., Türkiye'deki Demir Envanteri İçin Uyarlanabilir Küme Örneklemeindeki Alternatif Tahmin Edicilerin Karşılaştırılması, *Selçuk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Dergisi*, 25, 63-72, **2005**.
- [14] Thompson, S.K., Adaptive cluster sampling: design with primary and secondary units, *Biometrics*, 47(3), 1103-1115, **1991**.
- [15] Thompson, S.K., Stratified adaptive cluster sampling, *Biometrika*, 78(2), 389-397, **1991**.
- [16] Salehi, M.M., Seber, M.M., Adaptive cluster sampling with networks selected without replacement, *Biometrika*, 84, 209-219, **1997**.

- [17] Lo, N., Griffith, D., Hunter, J.R., Using a Restricted Adaptive Cluster Sampling to Estimate Pacific Hake Larval Abundance, *California Cooperative Oceanic Fisheries Investigations*, 38, 103-113, **1997**.
- [18] Acharya, B., Bhattarai, G., de Gier, A., Stein, A., Systematic adaptive cluster sampling for the assesment of rare tree species in Nepal, *Forest Ecology and Management*, 137, 65-73, **2000**.
- [19] Cormack, R.M., Statistical challenges in the enviromental sciences: A personal view, *Journal of the Royal Statistical Society A*, 151, 201-210, **1988**.
- [20] Seber, G.A.F., A Review of Estimating Animal Abundance, *Biometrics*, 42, 267-292, **1986**.
- [21] Bowering, R., Wigle, R., Padgett, T., Adams, B., Cote, D., Wiersma, Y.F., Searching for a rare species: A comparison of Floristic Habitat Sampling and Adaptive Cluster Sampling for detecting and estimating abundance, *Forest Ecology and Management*, 407, 1- 8, **2018**.
- [22] Correll, R.L., The use of composite sampling in contaminated sites—a case study, *Enviromental and Ecological Statistics*, 8, 185-200, **2001**.
- [23] Smith, D.R., Villella, R.F., Lemarie, D.P., Application of Adaptive Cluster Sampling to Low-Density Populations of Freshwater Mussels, *Enviromental and Ecological Statistics*, 10, 7-15, **2003**.
- [24] Thompson, S.K., Adaptive sampling in behavioral surveys, *NIDA Research Monograph*, 167, 296-319, **1997**.
- [25] Thompson, S.K., Collins, L.M., Adaptive sampling in research on risk-related behaviors, *Drug and Alcohol Dependence, Supplement 1*, 68, 57-67, **2002**.
- [26] Salehi, M.M., Seber, M.M., Two-stage Adaptive Cluster Sampling, *Biometrics*, 10, 959-970, **1997**.
- [27] Felix-Medina, M.H., Thompson, S.K., Adaptive cluster double sampling, *Biometrika*, 91, 877-891, **2004**.
- [28] Gattone, S.A., Giordani, P., Di Battista, T., Fortuna, F., Adaptive cluster double sampling with post stratification with application to an epiphytic lichen community, *Enviromental and Ecological Statistics*, DOI 10.1007/s10651-017-0388-9, **2017**.
- [29] Salehi, M.M., Comparison Between Hansen-Hurwitz and Horvitz-Estimators for Adaptive Cluster Sampling, *Journal of Enviromental and Ecological Statistics*, 10, 115-127, **2003**.
- [30] Felix-Medina, M.H., Analytical expressions for Rao-Blackwell estimators in adaptive cluster sampling, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 84, 221-236, **2000**.
- [31] Seber, G.A.F., Salehi, M.M., *Adaptive Sampling Designs*, Springer Briefs in Statistics, **2013**.
- [32] Chao, C.T., Ratio estimation on adaptive cluster sampling, *Journal of Chinese Statistical Association*, 42, 307-327, **2004**.

- [33] Chao, C.T., Lin, F.M., Dryver, A.L., Leveraging the Rao-Blackwell theorem to improve ratio estimators in adaptive cluster sampling, *Environmental and Ecological Statistics*, 18, 534-568, **2011**.



## ÖZGEÇMİŞ

### Kimlik Bilgileri

Adı Soyadı : Emel KINACI

Doğum Yeri : Bursa / Yıldırım

Medeni Hali : Bekar

E-posta : emel9@hacettepe.edu.tr

Adresi : Devlet Mah. Necatibey Cad. No:114 Çankaya/Ankara

### Eğitim

Lise : 2005 – 2009 Bursa Ahmet Vefik Paşa Anadolu Lisesi

Lisans : 2009 – 2013 Hacettepe Üniversitesi, İstatistik Bölümü

Yüksek Lisans :

### Yabancı Dil ve Düzeyi

İngilizce : 78,75 (YDS)

### İş Deneyimi

Ekim 2015–Türkiye İstatistik Kurumu Uzman Yardımcısı

### Deneyim Alanları

-

### Tezden Üretilmiş Projeler ve Bütçesi

-

### Tezden Üretilmiş Yayınlar

-

### Tezden Üretilmiş Tebliğ ve/veya Poster Sunumu ile Katıldığı Toplantılar

-



HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
YÜKSEK LİSANS/DOKTORA TEZ ÇALIŞMASI ORJİNALLİK RAPORU

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ  
İSTATİSTİK ANABİLİM DALI BAŞKANLIĞINA

Tarih: 10/04/2018

Tez Başlığı / Konusu: UYARLANABİLİR KÜME ÖRNEKLEMESİNDE ORANSAL TAHMİNLER

Yukarıda başlığı/konusu gösterilen tez çalışmamın a) Kapak sayfası, b) Giriş, c) Ana bölümler d) Sonuç kısımlarından oluşan toplam 73 sayfalık kısmına ilişkin, 10/04/2018 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından Turnitin adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 3 'tür.

Uygulanan filtrelemeler:

- 1- Kaynakça hariç
- 2- Alıntılar hariç/~~dâhil~~
- 3- 5 kelimededen daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Çalışması Orijinallik Raporu Alınması ve Kullanılması Uygulama Esasları'nı inceledim ve bu Uygulama Esasları'nda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

Tarih ve İmza

Adı Soyadı: EMEL KINACI  
Öğrenci No: N13128467  
Anabilim Dalı: İSTATİSTİK  
Programı: YÜKSEK LİSANS  
Statüsü:  Y.Lisans  Doktora  Bütünleşik Dr.

10.04.2018

**DANIŞMAN ONAYI**

UYGUNDUR.

PROF. DR. SEVİL BACANLI

(Unvan, Ad Soyad, İmza)