OTOMOBİL SİGORTALARINDA DENEYİM FİYATLANDIRMASI

VE

BONUS-MALUS SİSTEMİ

EXPERIENCE RATING AND BONUS-MALUS SYSTEM

IN AUTOMOBILE INSURANCE

NEDİME TÜBA DURAK

Prof. Dr. MERAL SUCU

Tez Danışmanı

Hacettepe Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim – Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin

Aktüerya Bilimleri Anabilim Dalı İçin Öngördüğü

DOKTORA TEZİ

olarak hazırlanmıştır.

2018

Nedime Tüba DURAK'ın hazırladığı **"Otomobil Sigortalarında Deneyim Fiyatlandırması ve Bonus-Malus Sistemi"** adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **AKTÜERYA ANABİLİM DALI**' nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. İsmail ERDEM ....

Başkan

Prof. Dr. Meral SUCU ....

Danışman

Prof. Dr. Cenap ERDEMİR ....

Üye

Doç. Dr. Canan HAMURKAROĞLU ....

Üye

Yrd. Doç. Dr. Yasemin GENÇTÜRK ....

Üye

Bu tez Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından **DOKTORA TEZİ** olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. Menemşe GÜMÜŞDERELİOĞLU

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

YAYINLAMA VE FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI BEYANI

Enstitü tarafından onaylanan lisansüstü tezimin/raporumun tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı (kağıt) ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda verilen koşullarla kullanıma açma iznini Hacettepe üniversitesine verdiğimi bildiririm. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet haklarım bende kalacak, tezimin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanım hakları bana ait olacaktır.

Tezin kendi orijinal çalışmam olduğunu, başkalarının haklarını ihlal etmediğimi ve tezimin tek yetkili sahibi olduğumu beyan ve taahhüt ederim. Tezimde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanması zorunlu metinlerin yazılı izin alarak kullandığımı ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederim.

- ☐ **Tezimin/Raporumun tamamı dünya çapında erişime açılabilir ve bir kısmı veya tamamının fotokopisi alınabilir.**
  (Bu seçenekle teziniz arama motorlarında indekslenebilecek, daha sonra tezinizin erişim statüsünün değiştirilmesini talep etseniz ve kütüphane bu talebinizi yerine getirse bile, tezinin arama motorlarının önbelleklerinde kalmaya devam edebilecektir.)

- ☑ **Tezimin/Raporumun 31.12.2020 tarihine kadar erişime açılmasını ve fotokopi alınmasını (İç Kapak, Özet, İçindekiler ve Kaynakça hariç) istemiyorum.**
  (Bu sürenin sonunda uzatma için başvuruda bulunmadığım taktirde, tezimin/raporumun tamamı her yerden erişime açılabilir, kaynak gösterilmek şartıyla bir kısmı ve ya tamamının fotokopisi alınabilir)

- ☐ **Tezimin/Raporumun ………….. tarihine kadar erişime açılmasını istemiyorum, ancak kaynak gösterilmek şartıyla bir kısmı veya tamamının fotokopisinin alınmasını onaylıyorum.**

- ☐ **Serbest Seçenek/Yazarın Seçimi**

24/01/2018

Nedime Tüba DURAK

ETİK

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversitede veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

24/ 01/ 2018

Nedime Tüba DURAK

ÖZET

OTOMOBİL SİGORTALARINDA DENEYİM FİYATLANDIRMASI VE BONUS-MALUS SİSTEMİ

NEDİME TÜBA DURAK,

Doktora, Aktüerya Bilimleri Bölümü

Tez Danışmanı: Prof. Dr. MERAL SUCU

Ocak 2018, 107 sayfa

Rekabete dayalı sigorta piyasasında sigorta şirketlerinin portföylerini farklı risk gruplarına ayırarak riske dayalı fiyatlandırma yapmaları ve portföyde meydana gelebilecek hasarların yükünü poliçe sahipleri arasında adil bir şekilde dağıtmaları zorunlu hale gelmiştir.

Geçmişten beri motorlu araç sigortalarında sigortalılar yaş, cinsiyet, meslek, aracın kullanım tarzı gibi poliçenin düzenlenmesi aşamasında bilinen risk faktörlerine göre risk gruplarına ayrıştırılarak fiyatlandırma yapılmaktadır. Ancak kullanılan risk sınıflandırması ne kadar ayrıntılı olursa olsun sürücülerin trafik kurallarına uyumu, refleks hızı, alkol alışkanlıkları gibi bazı ölçülemeyen risk faktörleri sebebiyle portföydeki risk sınıfları yeterince homojen olamamaktadır.

Bu çalışmada ülkemizdeki trafik sigortalı verisi kullanılarak risk sınıflandırması yapılmış, sonrasında ise sonsal faktörler dikkate alınarak kredibilite ve bonus-malus yöntemleri ile düzeltme katsayıları tabloları oluşturulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Risk Sınıflandırması, Deneyim Fiyatlandırması, Kredibilite ve Bonus-Malus Sistemi

ABSTRACT

EXPERIENCE RATING AND BONUS-MALUS SYSTEM IN AUTOMOBILE INSURANCE

NEDİME TÜBA DURAK,

Doctor of Philosophy, Department of Actuarial Sciences

Supervisor: Prof. Dr. MERAL SUCU

January 2018, 107 pages

In a competitive market it has become compulsory for insurance companies to partition their portfolios into the risk categories with all policyholders belonging to the same category paying the same premium and to fairly distribute the burden of claims among policyholders.

Existing motor vehicle insurance risk classification plans have been using to create risk classes according to the priori variables of the insureds such as age, gender, occupation, use of the vehicle etc. whose values can be determined during the process of issuance of the policy. But due to the many important factors such as the habit of obeying traffic rules or swiftness of reflexes of the driver which cannot be taken into account, the risk classes are not homogeneous enough. For this reason with the method of so called experience rating, with a correction applied to the base premiums determined by the risk classification of the insureds, it has been possible to obtain premiums closer to the risk level of the insured and to ensure fairness among the insureds.

In this study firstly, insureds are partitioned into the risk classes by using Turkey MTPL (Motor Third Party Liability) insureds data and then adjustment coefficient tables are created with the methods of credibility and bonus-malus system.

Keywords: Risk Classification, Experience Rating, Credibility, Bonus-Malus System.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın yönlendirilmesi ve sonuçlandırılmasında bilgi, deneyimi ve çalışma azmiyle büyük emeği geçen danışmanım Sayın Prof. Dr. Meral SUCU'ya,

Tavsiyeleri ve yardımları için Dr. Funda KARAMAN ve Yrd. Doç. Dr. Murat BÜYÜKYAZICI'ya,

Önerileri için tez jüri üyelerim Sayın Prof. Dr. İsmail ERDEM, Sayın Prof. Dr. Cenap ERDEMİR, Doç. Dr. Canan HAMURKAROĞLU ve Yrd. Doç. Dr. Yasemin GENÇTÜRK'e ,

Her zaman yanımda olan ve desteklerini hiç esirgemeyen aileme,

Mutlu veya sıkıntılı her anımda yanımda olan tüm dostlarıma,

Teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÇİZELGELER

Sayfa

1. GİRİŞ

1.1. Genel Bilgi

Günümüz rekabetçi piyasa ortamında sigorta şirketlerinin, portföylerindeki farklı risk grupları arasındaki dengeyi korumaları oldukça önemli bir hale gelmiştir. Örneğin, kadınların erkeklerden daha az kaza yaptıklarının gözlendiği bir şirkette bu veri gözardı edilerek tüm poliçe sahiplerinden ortalama prim alındığında birçok kadın sürücü, kadınlara düşük fiyat sunan başka şirketlere yönelecektir. Eşit fiyat veren şirketlerde ise hem riski yüksek olan erkek sürücü portföyü ağır basacak, hem de ortalama prim yetersiz kalacaktır. Aktüerler, meydana gelebilecek hasarların yükünü tüm poliçe sahiplerine adil bir şekilde dağıtabilmelerine imkan tanıyan tarifeler oluşturmak durumundadır. Buna göre poliçeler, primlerin aynı olduğu risk sınıflarına ayrılırlar. Risk sınıflandırmasında kullanılan risk faktörleri şirketten şirkete değişiklik göstermektedir. Serbest piyasa ortamında herhangi bir şirket fiyatlandırmaya ilişkin yeni bir faktör kullandığında, diğer şirket aktüerleri de aynı faktörü kullanarak risk sınıflandırmalarını gözden geçirmek durumundadır. Aksi takdirde iyi sürücülerini kaybetme riskiyle karşı karşıya kalmaktadırlar. Risk sınıflandırılmasında kullanılan faktörlerin artması rekabetçi piyasanın bir gereği haline gelmiştir. Ancak risk sınıflandırmasının daha detaylı hale getirilmesi genellikle kötü sürücülerin uygun fiyata sigorta teminatı bulamamalarına, dolayısıyla sigortasız araç kullanmalarına neden olur. Ayrıca fiyatlandırma faktörü ile teminat altına alınan risk arasında bir korelasyon olsa bile sebep-sonuç ilişkisi olmayabilir. Bu durumda bu fiyatlandırma faktörünün kullanılması da sigortacılık anlamında adil bir yaklaşım değildir[1].

Risk sınıflandırmasında kullanılan risk faktörlerine "*önsel değişkenler*" adı verilmektedir. Bu değişkenler sürücünün henüz arabayı kullanmaya başlamadan önce belirli olan özelliklerine göre değer alır. Otomobil sigortasında bu değişkenler aracın park edildiği bölge, kullanım tarzı (tüzel/özel), yaş, cinsiyet, meslek ve medeni durum gibi bireysel karakteristiklere göre belirlenmiştir.

Risk sınıflandırmasında kullanılan faktörlerin günden güne artması, düzenleme otoritelerini bazılarını tarifelerden çıkartmaya yöneltmiştir. Bazı ülkelerde, yaş ve cinsiyet gibi sigortalının kontrolünde olmayan faktörlerin sınıflandırmada kullanılması yasaklanmıştır. Önsel fiyatlandırma sisteminde ortaya çıkan yetersizlikleri giderme yöntemlerinden en yaygın kullanılanı "*deneyim fiyatlandırması*" yapmaktır. Deneysel çalışmalar, bir sürücünün gelecekteki hasar sayısına ilişkin en iyi tahmin edicinin, sürücünün yaşı ya da aracın tipinden ziyade, geçmiş hasar sayısı olduğunu göstermiştir. Bununla birlikte, önsel sınıflandırmayla yapılan fiyatlandırma ile, aslında hiç hasar yapmadığı halde risk faktörleri nedeniyle kötü olarak tanımlanan bir sürücü cezalandırılmış olacaktır. Deneyim fiyatlandırması, bu tür sürücülerin önsel faktörlere göre belirlenen primlerinin, geçmiş hasar sayılarını dikkate alarak düzeltilmesine imkan veren bir yöntemdir. Bu sayede sürücüler arasındaki prim adaleti bir ölçüde sağlanmaktadır [2].

Öte yandan sürücünün alkol alma alışkanlığı, trafik kurallarına uyma alışkanlığı veya refleks hızı gibi önsel risk sınıflandırma yönteminde dikkate alınamayan birtakım önemli risk faktörleri de vardır. Ölçülemeyen bu tür risk faktörleri sebebiyle, tarifede birçok sınıflandırma değişkeni kullanılmasına rağmen, tarife sınıflarında hala heterojenlik olabilmektedir. Bu heterojenlik, istatistiksel bir modelde "rastgele etki" ile modellenmektedir. Bu tür gizli karakteristikler, ölçülememelerine rağmen poliçe sahipleri tarafından bildirilen hasar sayıları ile tespit edilmektedir [3].

Hasar sayıları kullanılarak sigortalının ölçülemeyen risk faktörlerinin ortaya çıkarılmasına yarayan deneyim fiyatlandırma modellerinden birisi kredibite (itibar) modelleridir.

Kredibilite modelleri yardımıyla, şanssız iyi sürücüler ile gerçekten kötü olan sürücüler arasında bir denge kurulabilmektedir. Sonuç olarak, önsel sınıflandırma sisteminin yetersizliklerinin etkili bir deneyim fiyatlandırması modeli ile giderilmesi sürücüler arasındaki adaleti de sağlamaktadır. Bugün özellikle Avrupa ve Asya ülkelerinde önsel fiyatlandırmadan kaynaklanan eksiklikleri gidermek amacıyla sigortalının geçmiş hasar deneyiminin baz alındığı, hasarsızlık indirimi ve deneyim fiyatlandırması gibi sonsal fiyatlandırma modelleri kullanılmaktadır. Bu tür sistemlerin, sürücüyü daha dikkatli araç kullanmaya teşvik etmek dışındaki en büyük amacı, bireysel riskleri daha iyi değerlemek suretiyle uzun vadede herkesin kendi hasar sıklığına karşılık gelen primi ödemesinin sağlanmasıdır[4].

Bugün birçok gelişmiş Avrupa ve Asya ülkesinde trafik sigortalarında, bireylerin geçmiş hasar deneyimlerine göre primlerinin belirlendiği deneyim fiyatlandırması yöntemi kullanılmaktadır. Bu sistemde bir veya birden fazla hasar yapan sigortalı sürprim (cezalı prim) ile cezalandırılmakta, hiç hasar yapmayan sürücüler de prim indirimi ile ödüllendirilmektedir. Sonlu sayıda basamaktan oluşan bu sistemde her basamağın bir prim katsayısı bulunmaktadır. Belirli bir basamakta olan sürücünün primi, önsel risk sınıflandırması ile belirlenmiş baz primi ile ait olduğu basamağın prim katsayısının çarpımından oluşmaktadır. Poliçeler her yıl bu basamak sisteminde hasar sayılarına göre aşağı/yukarı hareket etmektedir. Bu anlamda bonus-malus sistemi, sürücüleri bireysel tecrübelerine göre sınıflara ayıran önsel değerlendirmenin bir düzeltmesi olarak nitelendirilebilmektedir.

20. Yüzyılda birçok Avrupa ülkesi kendi bölgelerindeki tüm şirketlere aynı bonus-malus sistemini zorunlu tutmuştur. 1994'de Avrupa Birliği'nde, sigorta şirketleri arasındaki rekabeti azalttığı ve üçüncü direktifle [5] getirilen fiyatlama özgürlüğü ile çeliştiği gerekçesiyle üye ülkeler zorunlu bonus-malus (ödül-ceza) sistemlerini kaldırmışlardır.

Trafik sigortasında serbest tarife uygulaması yapan Avrupa'daki ülke uygulamalarına bakıldığında, genellikle sigorta birliklerinin, o yıla ilişkin araç türü bazında tavsiye niteliğinde net risk primi hesaplarını sigorta şirketlerine gönderdikleri ve yine tavsiye niteliğinde bonus-malus tabloları oluşturdukları görülmektedir.

Fiyatlandırma yapacak yeterli veriye sahip olmayan şirketler, sigorta birliklerinin tavsiye ettiği fiyatları kullanmakta, diğer şirketler ise kendi tarifelerini oluşturmaktadır. Sigorta birlikleri bunun yanında kendi fiyatlandırmasını yapacak şirketlere de risk faktörleri konusunda tavsiyelerde bulunmaktadır.

Avrupa'daki birçok ülkede sigorta şirketlerine, insanların milliyetini ve etnik kökenini dikkate alan risk faktörleri olmaması koşuluyla, farklı risk sınıflarına göre oluşturulmuş bonus-malus tablosu kullanımı serbest bırakılmıştır. Sadece hesaplanacak primin yeterli düzeyde olması üçüncü direktif [5] gereği tüm ülkelerde yasal olarak zorunlu tutulmuştur.

1.2. Türkiye'deki Durum

Bilindiği gibi ülkemizde 2008 yılına kadar Karayolları Motorlu Araçlar Zorunlu Mali Sorumluluk Sigortası'nın gerek sigorta primi gerekse teminat tutarları Devlet tarafından belirlenmekteydi. Ancak hem sağlıklı bir rekabet ortamı oluşturularak piyasa etkinliğinin temini, hem de tüketicinin orta vadede daha kaliteli hizmeti daha ucuza almasının sağlanması, ayrıca uluslararası en iyi uygulamalara uyum amacıyla, 06.02.2008 tarihli "Karayolları Motorlu Araçlar Zorunlu Mali Sorumluluk Sigortasında Tarife Uygulama Esasları Hakkında Yönetmelikte Değişiklik Yapılmasına Dair Yönetmelik"le 1 Temmuz 2008 tarihinden itibaren sigorta priminin şirketler tarafından serbestçe belirlenmesi, teminatların ise Devletçe belirlenmesine devam edilmesi kararlaştırılmıştır. Söz konusu Yönetmeliğin 1. maddesinin ikinci fıkrasına göre sigorta şirketlerine Yönetmelik eki tablolarda yer alan araç türüne göre il bazında temel sigorta primini serbestçe belirleme yetkisi verilmiştir. Aynı Yönetmeliğin 2. maddesi hükmüyle de hasarsızlık sebebiyle prim indirimi ve hasar sebebiyle prim artırımının Çizelge 1.1.'de yer alan basamak esasına göre uygulanması zorunluluğu getirilmiştir.

Çizelge 1.1.Türkiye'de Uygulanmış Olan Basamak Tablosu

Basamak No	İndirim (%)	Artırım (%)
7	20	-
6	15	-
5	10	-
4	-	-
3	-	20
2	-	40
1	-	60

Basit bir bonus-malus mantığı ile oluşturulan bu sistemde, sigortalılar her bir hasarda bir alt basamağa inerek bir sonraki yıl primi yeni basamağın gerektirdiği artış oranına göre belirlenirken, sigortalının hasarsız bir yıl geçirmesi durumunda bir üst basamağa çıkarak yeni yıldaki primi yeni basamağın gerektirdiği indirimi oranı ile belirlenmiştir. Bu sistemde her bir hasar ile %20 oranında artan prime %60 oranında bir tavan konulması sebebiyle, üç hasar getiren poliçe ile 10 hasar getiren poliçe arasında herhangi bir fark öngörülmemiştir. Oysa gelişmiş ülkelerde böyle bir sınırlama olmadığı gibi, bu denli yüksek sayıda hasara karışan sürücülerin primleri normal primin 10-15 katı kadar olabilmektedir. Bundan da önemlisi aktüeryal ilkeler ve yöntemlere göre hazırlanmamış olan bu basamak sistemi ile sektörün trafik branşındaki teknik zararı artmaya devam etmiştir. 2014 yılında şirketlere trafik primlerinin belirlenmesi konusunda tam serbesti getirilmiştir.

1.3. Tezin Katkısı

Bu tez çalışmasında, ilk olarak Trafik Sigortaları Bilgi Merkezi (TRAMER)'den alınan Türkiye'deki kadar Karayolları Motorlu Araçlar Zorunlu Mali Sorumluluk Sigortası poliçesi sahiplerine ait veri kullanılarak optimal risk sınıflandırılması yapılmıştır. Bu sınıflandırmaya göre hem kredibilite hem de bonus-malus yöntemiyle düzeltme tabloları oluşturulmuştur.

1.4. Veri

Trafik Sigortaları Bilgi Merkezi'nden (TRAMER) 2008-2010 yıllarında düzenlenen Karayolları Motorlu Araçlar Zorunlu Mali Sorumluluk Sigortası poliçelerine ilişkin poliçe numarası, poliçe başlangıç tarihi, sigortalının doğum tarihi, hasar sayısı, cinsiyeti, sigortalı türü ve il plaka kodu bilgisi alınmıştır. Alınan verinin yeterli büyüklükte (3 milyon civarı sigortalıya ait veri) olması sebebiyle, sadece 2008 yılının ilk ayında düzenlenen poliçeler için bir yıldaki hasar verisi kullanılmıştır.

1.5. Çalışma Planı

Tez çalışmasının ikinci bölümünde literatürde yaygın olarak kullanılan hasar sayısı modelleri anlatılmıştır.

Üçüncü bölümde, deneyim fiyatlaması modelleri tanıtılmış ve bu modellerin olumlu ve olumsuz yönleri tartışılmıştır.

Dördüncü bölümde Türkiye Karayolları Motorlu Araçlar Zorunlu Mali Sorumluluk Sigortası poliçesi verisi kullanılarak öncelikle risk sınıflandırması yapılmış, sonrasında kredibilite yöntemiyle her bir risk sınıfı için düzeltme katsayısı tablosu oluşturulmuş, son olarak da tüm risk sınıfları için uygulanabilecek bir bonus-malus tablosu elde edilmiştir.

Son bölüm olan beşinci bölümde ise dördüncü bölümde elde edilen sonuçlar yorumlanmış ve ileride yapılabilecek çalışmalara ilişkin öneriler verilmiştir.

2. HASAR SAYILARININ MODELLENMESİ

2.1. Karma Poisson Modeller

Kesikli sayma verilerinin modellenmesinde ilk akla gelen dağılım Poisson dağılımıdır. Ancak bu dağılımın veriyi iyi modellemesi için verinin alındığı kitlenin homojen olması gerekmektedir. Bu nedenle Poisson dağılımı sigortaya ilişkin veri kümelerinin modellenmesinde uygun bir dağılım değildir. Bunun yerine Poisson karmalarının kullanılması daha uygun olmaktadır. Ortalama hasar sıklığı olan λ 'nın pozitif bir rasgele etki olan Θ ile çarpılması, sıklığın portföy içerisinde gözlemlenemeyen faktörleri temsil eden raslantı değişkeni Θ'ya göre değişkenlik göstermesine olanak sağlamaktadır. Θ, $E(\Theta)=1$ olacak şekilde seçildiğinde, bireyin beklenen hasar sıklığı portföyün beklenen hasar sıklığına eşit olacaktır. Böylece portföyde $\theta \geq 1$ olan bireylerin hasar sıklıkları $(\lambda\theta)$ portföyün ortalama hasar sıklığından yüksek, $\theta < 1$ olanların ise düşük olacaktır. $\Theta = \theta$, bir anlamda sigortalının risk düzeyini temsil etmektedir.

$\Theta = \theta$ olarak verildiğinde, hasar sayısının koşullu olasılığı,

$$\Pr(N=k|\Theta=\theta) = \text{Poiss}(N=k|\lambda\theta) = \exp(-\lambda\theta)\frac{(\lambda\theta)^k}{k!} \quad k=0,1,2,... \tag{2.1}$$

şeklindedir [2]. Bu durumda portföyden rasgele seçilen bir bireyin k tane hasar yapması olasılığı,

$$\Pr(N=k) = \int_0^\infty \exp(-\lambda\theta)\frac{(\lambda\theta)^k}{k!}\, dF_\Theta(\Theta) \quad k=0,1,2,.... \tag{2.2}$$

olur. Burada F_Θ, Θ'nın dağılım fonksiyonu, dF_Θ "yapı fonksiyonu" olarak adlandırılır. Bu yapıda olan N raslantı değişkeninin "parametresi λ, rastgele etkisi (risk düzeyi) de Θ olan karma Poisson dağılımı" olarak adlandırılır ve $N \approx \mathrm{MPoi}(\lambda,\theta)$ ile gösterilir. Bu dağılımın birinci ve ikinci merkezsel olmayan momentleri ile varyansı,

$$E(N) = E\left[E(N|\Theta\right] = E\left[\lambda\Theta\right] = \lambda$$

$$E(N^2) = \lambda E(\Theta) + \lambda^2 E(\Theta^2)\,,$$

$$\begin{aligned} Var(N\ ) &= \lambda E(\Theta) + \lambda^2 E(\Theta^2) - \lambda^2 (E(\Theta))^2 \\ &= \lambda + \lambda^2 Var(\Theta) \end{aligned}$$

olduğundan, varyansının, beklenen değerinden büyük olduğu görülmektedir. Bir başka deyişle, Θ'nın dağılımında 1'de bozulma olmadığı sürece karma Poisson modellerde aşırı yayılım söz konusu olmaktadır.

Karma dağılımın çarpıklık katsayısı ise;

$$\gamma(N) = \frac{1}{(V(N))^{3/2}} \left[3V(N) - 2E(N) + \frac{\gamma(\Theta)}{\sqrt{V(\Theta)}} \frac{(V(N) - E(N))^2}{E(N)} \right] \tag{2.3}$$

biçimindedir [1].

Eş (2.3)'de yer alan,

$$\frac{\gamma(\Theta)}{\sqrt{V(\Theta)}}$$

oranı bir anlamda karma dağılımın çarpıklığını belirlemektedir. Şöyle ki, aynı beklenen değer ve varyansa sahip bir karma dağılımın çarpıklığı rastgele etkinin modellendiği Θ dağılımının varyans ve çarpıklığına göre değişmektedir. Yani bu oran yüksek olduğunda N raslantı değişkeninin çarpıklığı artmaktadır.

2.1.1. Poisson-Gamma (Negatif Binom) Modeli

Eş.(2.1) ve Eş.(2.2) ile kurulan modelde $\Theta \approx Gamma(a,a)$ belirlenmesi durumunda, portföyden rastgele seçilen bir bireyin k tane hasar yapması olasılığı,

$$Pr(N = k) = \binom{a+k-1}{k} \left(\frac{a}{a+\lambda d} \right)^a \left(\frac{\lambda d}{a+\lambda d} \right)^k, \quad k=0,1,2,... \quad a>0 \tag{2.4}$$

biçimindedir. Bu eşitlik; λ yıllık beklenen hasar sayısı, d gözlem periyodunun uzunluğu olmak üzere, parametreleri a ve λd olan negatif binom dağılımının olasılık fonksiyonudur.

$N \approx Neg.Bin(a, \lambda d)$ ile gösterilen bu dağılımın beklenen değeri

$$E(N) = \lambda d$$

varyansı da

$$Var(N) = \lambda d + \frac{(\lambda d)^2}{a}$$

olur. Poisson-Gamma karması olan negatif binom dağılımının çarpıklık katsayısını gösteren Eş.(2.3)'deki $\frac{\gamma(\Theta)}{\sqrt{Var(\Theta)}}$ ifadesinin değeri 2'dir [1].

2.1.2. Poisson-Ters-Gauss Modeli

Θ'nın Gamma dağılımından seçilmesi matematiksel anlamda birçok kolaylık sağlamakla beraber Ters-Gauss dağılımı ile de modellenebilmektedir. Eş.(2.1) ve Eş.(2.2) ile kurulan modelde $E(\Theta) = 1$ özelliğini sağlayacak şekilde seçilen $\Theta \approx Ters - Gauss(1, \tau)$ dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_\theta(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau\theta^3}} \exp\left(-\frac{1}{2\tau\theta}\ \theta - 1\ ^2\right), \quad \theta > 0 \tag{2.5}$$

şeklindedir. Buna göre portföyden rastgele seçilen bir sigortalının hasar sayısının olasılık fonksiyonu,

$$Pr(N = k) = \int_0^\infty \exp(-\lambda d\theta) \frac{(\lambda d\theta)^k}{k!} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau\theta^3}} \exp\left(-\frac{1}{2\tau\theta}(\theta - 1)^2\right) d\theta, \quad k = 0,1,2,... \tag{2.6}$$

eşitliği ile gösterilebilir.

Bu fonksiyon ikinci derece Bessel fonksiyonları kullanılarak ifade edildiğinde, Poisson-Ters-Gauss karma dağılımının olasılıkları ile en çok olabilirlik tahmin edicilerinin bulunmasında kolaylık sağlamaktadır.

Poisson-Ters-Gauss karma dağılımının beklenen değeri,

$$E(N) = \lambda$$

varyansı da

$$Var(N) = \lambda d + \lambda^2 \tau$$

'dır. Ters-Gauss dağılımı için

$$\frac{\gamma(\Theta)}{\sqrt{Var(\Theta)}} = 3$$

olduğundan, Poisson-Ters Gauss karma dağılımı, aynı beklenen değer ve varyansa sahip negatif binom dağılımından daha çarpıktır [1].

Özellikle sağa çarpık verinin modellenmesine uygun bir dağılım olan Ters-Gauss dağılımının Poisson ile karma dağılımı Tremblay [6] tarafından kullanılmıştır. Bu çalışmada hasar sıklığı Poisson-Ters-Gauss karmasıyla modellenmiş, elde edilen Genelleştirilmiş Ters-Gauss dağılımının Poisson-Gamma karmasına göre veriye daha iyi uyduğu gösterilmiştir. Sonrasında da Lemaire [7]'nin önerdiği yöntemle bir bonus-malus sistemi oluşturulmuştur. Willmott [8] çalışmasında Poisson-Ters-Gauss ile negatif binom modellerini karşılaştırmış ve Poisson- Ters-Gauss dağılımının veriye daha iyi uyum sağladığı sonucuna ulaşmıştır.

2.1.3. Poisson-Lognormal Modeli

Daha çok biyoistatistik çalışmalarında kullanılan Poisson-Lognormal karma modeli için Eş.(2.1) ve Eş.(2.2) ile kurulan modelde $E(\Theta) = 1$ eşitliğini sağlayacak şekilde belirlenen

$$\Theta \approx Lognormal(\frac{-\sigma^2}{2}, \sigma^2)$$

dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{\theta}(\theta)=\frac{1}{\theta\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(\ln\theta+\sigma^2/2)^2}{2\sigma^2}\right),\quad \theta>0 \tag{2.7}$$

şeklindedir. Buna göre portföyden rasgele seçilen bir sigortalının hasar sayısının olasılık fonksiyonu,

$$\Pr(N=k)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\frac{(\lambda d)^k}{k!}\int_0^{\infty}\exp(-\lambda d\theta)\theta^{k-1}\exp\left(-\frac{(\ln\theta+\sigma^2/2)^2}{2\sigma^2}\right)d\theta \quad k=0,1,2,... \tag{2.8}$$

eşitliği ile gösterilebilir. Bu karma dağılımın beklenen değeri,

$$E\ N=\lambda$$

varyansı da

$$Var\ N=\lambda+\lambda^2(\exp(\sigma^2)-1)$$

olmaktadır. Poisson-Lognormal dağılımı için,

$$\frac{\gamma(\Theta)}{\sqrt{Var(\Theta)}}=2+\exp(\sigma^2) \tag{2.9}$$

olması bu karma dağılımın aynı beklenen değer ve varyansa sahip Poisson-Ters-Gauss karmasından daha çarpık olduğunu göstermektedir [1].

2.2. Genelleştirilmiş Doğrusal Modeller

Sayma verisi, genellikle aşırı yayılım ve/veya sıfır yığılım içerdiğinden, bu tür veri için klasik Poisson regresyon modelinin kullanımı sınırlı olmaktadır.

Y vektörü birbirinden bağımsız n sayıda Y_i bağımlı değişkenden oluşmaktadır. Doğrusal modelde, açıklayıcı değişkenlerden oluşan X vektörü, parametrelerden oluşan β vektörü ve bağımlı değişkenin aldığı değerlerden oluşan Y vektörü arasında

$$Y = X\beta + \varepsilon \tag{2.9}$$

şeklinde bir ilişki tanımlanır. Buradaki $X\beta$ ifadesi, Y rastlantı değişkeninin beklenen değeridir. Bu değer açıklayıcı değişkenlerin doğrusal birleşimi şeklinde hesaplanır. Eş.(2.9)'da yer alan ε hata terimi; ortalaması 0, varyansı ise σ^2 olan normal dağılıma sahiptir. Doğrusal modellerin amacı, ε hata terimi vektörü elemanlarının kareler toplamını en küçük yapan β vektörünün elemanlarının bulunması, bir başka deyişle bağımlı değişken Y ile bağımsız değişkenler (X'ler) arasındaki ilişkinin bir matematisel model ile belirlenmesidir. Gözlem sayısı n ve modeldeki parametre sayısı k ise, β vektörü k sayıda, ε vektörü ise n sayıda bileşenden oluşur. Burada modelin parametre sayısının (k) gözlem sayısından (n) küçük olması gerekmektedir [9].

Doğrusal modeller üç varsayım içermektedir:

1. Rastgele bileşen: Bağımlı değişken olan Y'nin tüm bileşenleri birbirinden bağımsız ve Normal dağılıma sahiptir. Her bir bileşenin ortalama parametresi (μ_i) değişkenlik gösterebilmekle beraber bütün bileşenlerin varyansı sabit ve birbirine eşit kabul edilmektedir.
2. Sistematik bileşen: Tüm açıklayıcı değişkenlerin birleştirilmesiyle doğrusal önkestirim (linear predictor) olarak adlandırılan $\eta = X\beta$ elde edilir.
3. Bağ fonksiyonu: Modelin yukarıda verilen sistematik ve rastgele bileşenleri arasındaki ilişki, bağ fonksiyonu yardımıyla tanımlanmaktadır. Doğrusal modellerde bağ fonksiyonu, özdeşlik fonksiyonuna eşittir: $E(Y) = \mu = \eta$ [9].

Doğrusal modellerde normal dağılım ve sabit varyans varsayımları modelin kullanımını sınırlayan varsayımlardır. Bağımlı değişkenin sadece pozitif değerler aldığı bir durumda normallik varsayımı uygun olmamaktadır. Diğer taraftan, ikinci ve üçüncü varsayımlardan kaynaklanan önkestirimlerin toplanabilirliği her uygulama için uygun olmamaktadır. Fiyatlandırma faktörlerinin değişiminin birçok sigorta riskine çarpımsal olarak etkisi olmaktadır. Dolayısıyla klasik doğrusal modellerin sigorta verisi için kullanılabilirliği sınırlı hale gelmektedir.

Doğrusal modeller de dahil olmak üzere birçok modeli kapsayan genelleştirilmiş doğrusal modellerde, yukarıda sözü edilen normallik, sabit varyans ve faktörlerin toplanabilirlik varsayımları yerine aşağıdaki varsayımlar kullanılmaktadır:

1. Rasgele bileşen: Bağımlı değişkenin birbirinden bağımsız olan her bir bileşeni üstel dağılım ailesinden bir dağılıma sahiptir.
2. Sistematik bileşen: Açıklayıcı değişkenlerin doğrusal birleşimi sonucu η doğrusal önkestirimi elde edilir:
   $\eta = X\beta$
3. Bağ fonksiyonu: g(x) ile tanımlanan bağ fonksiyonu türevlenebilir ve monoton bir fonksiyon olup rasgele bileşen ile sistematik bileşen arasındaki ilişkiyi verir:
   $E(Y) = \mu = g^{-1}(\eta)$ [9].

Üstel dağılım ailesi, iki parametreli fonksiyonlar kümesi olup, Y bağımlı değişkeninin i sayıdaki elemanlarından her birine ilişkin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(y_i;\theta,\phi) = \exp\left\{\frac{y_i\theta_i - b(\theta_i)}{a_i(\phi)} + c(y_i,\phi)\right\} \qquad (2.10)$$

ile tanımlanmaktadır. Eşitlikte yer alan $a_i(\phi)$, $b(\theta_i)$ ve $c(y_i,\phi)$ tanımlı fonksiyonlarına ilişkin bazı varsayımlar yapılmaktadır. Buna göre $a(\cdot)$ fonksiyonu, pozitif ve sürekli, $b(\cdot)$ fonksiyonu, θ'ya göre ikinci türevi pozitif olmak koşuluyla iki kez türevlenebilir bir fonksiyon, $c(\cdot)$ fonksiyonu ise θ_i parametresinden bağımsız bir fonksiyondur. Burada farklı $a_i(\cdot)$, $b(\cdot)$ ve $c(\cdot)$ fonksiyonları için farklı çözümler elde edilebilmektedir.

$a_i(\cdot)$, $b(\cdot)$ ve $c(\cdot)$ fonksiyonlarının tüm gözlem değerleri için aynı olduğu varsayıldığında ise, tüm gözlemlerin de aynı dağılıma sahip olduğu kabul edilmektedir. Eşitlikte yer alan θ_i parametresi ortalamayla ilgili parametre, ϕ parametresi ölçek veya yayılım parametresidir.

Her bir gözlem değeri için θ_i parametresi, buna bağlı olarak da ortalama değişebilmektedir. Ölçek parametresi ϕ ise tüm gözlemler için sabit kalmaktadır. Poisson dağılımı ($\phi = 1$) gibi üstel dağılım ailesine ait bazı dağılımlar için ölçek parametresi bilinmekte, ancak birçoğu için bilinmediğinden veri kümesi kullanılarak en çok olabilirlik yöntemiyle tahmin edilmektedir [10].

Genelleştirilmiş doğrusal modellerde, gözlem değerlerine ilişkin önsel bilginin modele ağırlık, kredibilite veya başka bir şekilde dahil edilmesine olanak veren sabit w_i değerleri kullanılmaktadır. Ancak hasar sayısına ilişkin modellemelerde önsel ağırlıklar 1 olarak kabul edilmektedir. Üstel dağılım fonksiyonunun yapısında var olan $a_i(\phi)$ fonksiyonu için ölçek parametresinin başlangıçta tanımlanan ağırlığa oranı olan ϕ / w kullanılmaktadır.

Üstel dağılım ailesine mensup dağılımlardan birine sahip olan bağımlı değişkenin ortalama ve varyansı

$$E(Y_i) = \mu_i = b'(\theta) \tag{2.11}$$

$$Var(Y_i) = b''(\theta)\, a_i(\phi) \tag{2.12}$$

şeklinde ifade edilmektedir. Varyans eşitliğinden de görüldüğü üzere bağımlı Y değişkenine ilişkin varyans, Eş. (2.11) ile ifade edilen ortalama $b'(\theta)$ 'nın bir fonksiyonu olarak tanımlanabilmektedir. Bu yüzden bağımlı Y değişkenine ilişkin varyans $V(\mu_i)$ ile gösterilmektedir [11].

Genelleştirilmiş doğrusal modelin biçimini belirleyen faktörler; bağ fonksiyonu, varyans fonksiyonu ve ölçek parametresidir. Üstel dağılım ailesi içinde yer alan bazı dağılımlar için $a_i(\phi)$, $b(\theta_i)$ ve $c(y_i, \phi)$ fonksiyonları Çizelge 2.1' de verilmiştir.

Çizelge 2.1.Üstel Dağılım Ailesinde Yer Alan Bazı Dağılımlar

Dağılım	$a_i(\phi)$	$b(\theta_i)$	$c(y_i,\phi)$
Normal	ϕ/w	$\theta^2/2$	$-1/2\left(wy^2 / \phi + \ln(2\pi\phi / w)\right)$
Poisson	ϕ/w	$\exp(\theta)$	$-\ln y!$
Gamma	ϕ/w	$-\ln(-\theta)$	$(w/\phi)\ln(wy/\phi) - \ln y - \ln(\Gamma(w/\phi))$
Binom (n sayıda deneme)	ϕ/w	$n \cdot \ln(1+e^{\theta})$	$\ln\binom{n}{y}$
Ters Gauss	ϕ/w	$-\sqrt{-2\theta}$	$-1/2\left\{\ln(2\pi\phi y^3 / w) + w / (\phi y)\right\}$

Burada; normal ve Ters-Gauss dağılımlarının $c(y_i,\phi)$ fonksiyonlarındaki π parametresi ait olduğu dağılımın ortalaması olarak tanımlanmaktadır [10].

Genelleştirilmiş doğrusal modeller, verinin yapısına göre belirlenen üstel dağılım ailesindeki dağılımlardan biri kullanılarak oluşturulmaktadır. Bu aileye ait her bir dağılım, ortalama ve varyansı cinsinden ifade edilmektedir. Y_i, i' nci gözleme ilişkin bağımlı değişkeni göstermek üzere bu bağımlı değişkenin ortalaması,

$$\mu_i = E(Y_i) = g^{-1}\left(\sum_j X_{ij}\beta_j + \xi_i\right) \quad i = 1,2,\ldots,n \text{ ; } j = 1,2,\ldots,k \tag{2.13}$$

ve varyansı

$$Var(Y_i) = \frac{\phi V(\mu_i)}{w_i} \tag{2.14}$$

şeklinde ifade edilir. Burada, w_i , i. gözlemin ağırlığını veya kredibilitesini gösteren sabit değer, β_j j. etken parametresini, X_{ij} i. gözlemin j. etkenine ilişkin değerini, ϕ varyans fonksiyonunu ölçeklendiren ölçek parametresini göstermektedir. Modelde yer alan ξ_i ise i' nci gözleme ilişkin bilinmeyen etki terimidir. Açıklayıcı değişkenin bağımlı değişken üzerindeki etkisinin bilindiği durumlarda bu terim kullanılmaktadır.

Söz konusu terimin ilgili modelin doğrusal tahmin edici fonksiyonuna eklenmesiyle

$$\eta = X\beta + \xi \tag{2.15}$$

eşitliği elde edilir. Doğrusal tahmin edici fonksiyonu Eş. (2.15) ile tanımlanan bağımlı değişkenin beklenen değeri,

$$E(Y) = \mu = g^{-1}(\eta) = g^{-1}(X\beta + \xi) \tag{2.16}$$

eşitliği ile elde edilmektedir. i'inci gözlemin ortalaması, i'inci gözleme ilişkin doğrusal tahmin edicinin bir fonksiyonu olarak tanımlanmaktadır. Bu fonksiyon genellikle bağ fonksiyonunun ters fonksiyonudur ve

$$\mu_i = g^{-1}(\eta_i) \tag{2.17}$$

şeklinde ifade edilir. Teorik olarak her bir gözlem değeri için farklı bağ fonksiyonunun kullanılması mümkün olabilirken, uygulamada bu duruma sık rastlanmamaktadır. Çizelge 2.2'de genelleştirilmiş doğrusal modellerde üstel dağılımlar ailesinin en yaygın kullanılan bazı bağ fonksiyonları ve ters fonksiyonları gösterilmiştir [10].

Çizelge 2.2. Bağ Fonksiyonları

Dağılımlar	Bağ Fonksiyonu	g(x)	$g^{-1}(x)$
	Birim	X	X
Poisson	Logaritmik Bağ Fonksiyonu	ln(x)	exp(x)
Binom	Logit Bağ Fonksiyonu	$\ln(x/(1-x))$	$\exp(x) / (1+\exp(x))$
Gamma Üstel	Ters Bağ Fonksiyonu	$1/x$	$1/x$

Genelleştirilmiş doğrusal modellerde kullanılan bağ fonksiyonlarından biri olan logaritmik bağ fonksiyonu, açıklayıcı değişkenlerin bağımlı değişken üzerindeki etkisinin çarpımsal olması durumunda kullanılmaktadır [9].

Logaritmik bağ fonksiyonu $g(x) = \ln x$ olmak üzere i inci gözleme ilişkin ortalama ile k sayıda açıklayıcı değişken arasındaki ilişki,

$$\mu_i = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{k} x_{ij}\beta_j\right) = \exp(\beta_1 X_{i1})\cdot\exp(\beta_2 X_{i2})\cdot\ldots\cdot\exp(\beta_k X_{ik}) \tag{2.18}$$

ile ifade edilmektedir.

2.2.1. Genelleştirilmiş Doğrusal Modellerde (GLM) Olabilirlik Fonksiyonu

GLM için y yanıt vektörü olabilirlik fonksiyonu,

$$f_Y(y,\theta,\varphi) = \exp\left\{\frac{y\theta - b(\theta)}{a(\varphi)} + c(y,\varphi)\right\} \tag{2.19}$$

şeklinde tanımlanır. Burada, a,b ve c fonksiyonları verilen GLM yapısına göre belirlenmektedir. φ ‘nın bilinmesi durumunda rasgele kısım θ parametresi ile üstel dağılım ailesinden olan bir dağılıma, bilinmemesi durumunda iki parametreli üstel dağılım ailesine ait bir dağılıma uymaktadır.

Eş.2.19 ile verilen olabilirlik fonksiyonunun doğal logaritması alındığında

$$l_Y(y,\theta,\varphi) = \frac{y\theta - b(\theta)}{a(\varphi)} + c(y,\varphi) \tag{2.20}$$

elde edilir. Burada,

$$E\left(\frac{\partial l}{\partial\theta}\right) = 0 \quad \text{ve} \quad E\left(\frac{\partial^2 l}{\partial\theta^2}\right) + E\left(\frac{\partial l}{\partial\theta}\right)^2 = 0$$

$$E\left(\frac{\partial l}{\partial\theta}\right) = E\left(\frac{y - b^{'}(\theta)}{a\ \varphi}\right) = \frac{\mu - b^{'}(\theta)}{a\ \varphi} = 0$$

eşitlikleri sağlanmalıdır. Buradan

$$\mu = \frac{db(\theta)}{d\theta} = b'(\theta) = E(Y) \tag{2.21}$$

ve

$$E\left(\frac{\partial^2 l}{\partial \theta^2}\right) + E\left(\frac{\partial l}{\partial \theta}\right)^2 = -\frac{b''(\theta)}{a(\varphi)} + \frac{Var(Y)}{a^2(\varphi)} = 0 \tag{2.22}$$

Eşitliğinden

$$b''(\theta)a(\varphi) = Var(Y) \tag{2.23}$$

sonuçlarına ulaşılır. Genel olarak $a(\varphi)$ fonksiyonu,

$$a(\varphi) = \frac{\varphi}{w_i} = \frac{\sigma^2}{\mu} \quad i = 1,...,n \tag{2.24}$$

şeklindedir. Bu oran, gözlemden gözleme farklılık gösteren w_i ağırlıklarına göre belirlenmiş bir sabittir. Burada $a(\varphi)$ fonksiyonu bir ölçek fonksiyondur.

2.2.2. Log-Doğrusal Poisson Regresyon Modeli

Bir portföyde yer alan sigortalıların risk karakteristiklerine göre risk sınıflandırılması yapıldığında, her bir sınıfta hem riske maruz değer hem de hasar sayısı düşük olacağından, yapılabilecek istatistiksel analizler çok güvenilir sonuçlar vermeyecektir. Bu sebeple regresyon modellerine ihtiyaç duyulmaktadır. Regresyonla bir yanıt (bağımlı-açıklanan) değişkenin değeri, diğer açıklayıcı değişkenler ve parametrelerin bir fonksiyonu ile tahmin edilmektedir. Buna göre herhangi bir sigortalının beklenen hasar sayısı, açıklayıcı diğer değişkenlerin (sigortalının yaşı, cinsiyeti, mesleği, arabanın tipi, kullanımı, vb.) bir fonksiyonu ve belirli parametreler yardımıyla tahmin edilmektedir. Söz konusu parametreler çoğu zaman log-olabilirlik değerlerine bakılarak veriye en iyi uyumu sağlayacak şekilde belirlenmektedir. Ancak tüm açıklayıcı değişkenler kullanılsa dahi sürücünün gizli risk karakteristiklerinden kaynaklanan kalıntı risk mevcut olacağından, bu riski temsil etmek üzere regresyon modellerine “rasgele etki” eklenmiştir. Bu konuda literatürde yaygın olarak kullanılan regresyon modelleri bölüm 2.2.3.’te ele alınacaktır.

N_i (i=1,2,3,.....n) için gözlem süresi boyunca i. sigortalı tarafından bildirilen hasar sayısını, d_i gözlem süresini göstersin. Burada N_i raslantı değişkenlerinin bağımsız olduğu varsayılır. Bu sigortalı için tüm gözlemlenebilir karakteristikler $x_i^T = (x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{ip})$ vektörü ile gösterilsin. $\beta^T = (\beta_0, \beta_1, ..., \beta_p)$ bilinmeyen regresyon katsayıları olmak üzere, $N_i | X_i$ koşullu dağılımı $\text{Poisson}(d_i \exp(\beta^T x_i))$ olsun. Burada $\eta_i = \beta^T x_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + ... + \beta_p x_{ip}$ doğrusal tahmin edici ya da skor olarak tanımlanır; böylece sigortalıları artan skor değerlerine göre en az riskliden en çok riskliye kadar sıralamak mümkün olmaktadır. Logaritmik bağ fonksiyonunun kullanılmasının sebebi, skor negatif olsa bile hasar sıklığının pozitif olmasını sağlamaktır. β_0 sabit etkisini, β_j de j. değişkenin etkisini gösteren katsayıdır. Buna göre i. sigortalının yıllık beklenen hasar sıklığı $\lambda_i = \exp(\eta_i)$ olmaktadır. λ_i’nin ortalama hasar maliyeti ile çarpılmasıyla net prim bulunmaktadır [2]. Burada λ_i bir raslantı değişkeni değildir. Sigortalıların 1 yıl boyunca gözlemlendiği varsayılarak bundan sonraki bölümlerde $d_i = 1$ olarak dikkate alınmıştır. Bu model, p tane değişkenin λ_i’nin tahmini için yeterli bilgiyi içerdiği varsayımı üzerine kurulmuştur [1]. Yani hasar sayısını tahmin etmek için sigortalının yaşı, cinsiyeti, mesleği, arabanın tipi ve kullanım tarzının yeterli olduğu varsayıldığında bu model kullanılabilmektedir. Ancak açıklayıcı değişkenlere ilişkin yeterli bilgiye sahip olunmadığında regresyon denklemine bir rastlantı değişkeninin eklenmesi gerekmektedir [12],[13].

2.2.3. Karma Poisson Regresyon Modelleri

Gözlemlenemeyen veriden kaynaklanan heterojenlik, varyansın ortalamanın çok üzerinde çıkmasına, yani aşırı yayılıma sebep olmaktadır. Bu durumu dikkate almadan Poisson regresyon modeli kullanılarak ($E\ N_i \mid X_i = Var\ N_i \mid X_i = \lambda_i$) yapılan tahmin sonucunda ortaya çıkacak standart sapmalar beklenenin altında, anlamlılık düzeyleri de çok yüksek olacaktır. Karşılaşılabilecek diğer bir sorun da modelin açıklayıcı gücünün zayıf olmasıdır. Dolayısıyla aşırı yayılım sorunuyla karşılaşılan durumlarda, Poisson modeli yerine aşırı yayılımın modele eklenen yayılım parametresi ile açıklandığı karma Poisson dağılımlarından veya Poisson dağılımının genelleştirilmiş biçimlerinden faydalanılmaktadır.

Karma Poisson dağılımlarında, Poisson dağılımının λ parametresi gözlemler arası değişkenlik göstermektedir ve bu değişkenlik gözlemlenmemiş heterojenlik terimi ile açıklanmaktadır.

Gözlemlenemeyen karakteristiklerden kaynaklanan kalıntı etkilerin ε_i raslantı değişkeni ile gösterildiği $N_i \approx \text{Poiss}(\exp(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ij} + \varepsilon_i))$,i=1,2,3,.....,n karma Poisson modelini ele alalım.

Hasar sayısının, parametresi sigortalıdan sigortalıya değişen Poisson dağılımı gösterdiği varsayılarak bu modelde heterojenlik dikkate alınmıştır. Burada bazı gizli karakteristikler X_i gözlemlenebilir karakteristikleri ile bağlantılı olabilir (örneğin yıllık katedilen yol uzunluğu ile aracın özel ya da ticari olması gibi). Dolayısıyla bu modelde ε_i'nin X_i tarafından açıklanmayan karakteristikleri içerdiği ve ε_i ile X_i'nin bağımsız olduğu varsayılmaktadır.

Sonuç olarak karma Poisson regresyon modelinde, yıllık hasar sıklığı $\lambda_i \Theta_i$ raslantı değişkeni ile gösterilmektedir. Burada $\Theta_i = \exp(\varepsilon_i)$, beklenen değeri 1 olacak şekilde λ_i çevresindeki salınımı modellemektedir. $\lambda_i = \exp(\beta^T x_i)$ ve $E\ \Theta_i = 1$ olmak üzere $N_i \approx \mathrm{MPoi}(\lambda_i, \Theta_i)$ biçiminde gösterilir.

$Var\ N_i = \lambda_i + \lambda_i^2 Var\ \Theta_i > \lambda_i = E\ N_i$ olduğundan karma Poisson modelinde aşırı yayılım dikkate alınmış olacaktır [1].

Literatürde aşırı yayılımı test eden birçok istatistiksel test vardır. Bunlardan bazıları heterojen modelin varyans fonksiyonunu, $Var\ N_i = \lambda_i + \lambda_i^2 Var(\Theta_i)$, temel alan istatistiklerdir. $\tau = \text{Var}(\Theta_i)$ olmak üzere $H_0: \tau = 0$ sıfır hipotezi ve $H_1: \tau > 0$ hipotezi ile veride heterojenlik olup olmadığı test edilir. Bu test için kullanılan test istatistiklerinden bazıları aşağıda verilmiştir:

$$Z_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\left(k_i - \hat{\lambda}_i\right)^2 - k_i\right)}{\sqrt{2\sum_{i=1}^{n}\hat{\lambda}_i^2}} \tag{2.25}$$

$$Z_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\left(k_i - \hat{\lambda}_i\right)^2 - k_i\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\left(k_i - \hat{\lambda}_i\right)^2 - k_i\right)^2}} \tag{2.26}$$

Test istatistikleri N(0,1) normal dağılımına uymaktadır [1].

Aşırı yayılım problemine sebep olabilecek durumlardan bazıları aşağıda verilmiştir:

- Model oluşturulurken bazı önemli açıklayıcı değişkenlerin ölçülmemiş veya modelden çıkarılmış olması,
- Bağımsızlık varsayımının sağlanamaması,
- Aralık uzunluğunun sabit olması yerine rasgele olan bir Poisson sürecinin gözlenmesi,
- Verinin, her bir olayın toplama rastgele miktarda katkıda bulunduğu kümelenmiş bir Poisson sürecinden elde edilmesi,
- Diğer taraftan, veride sıfır yığılımın bulunması gözlemlenemeyen heterojenliğe bir anlamda aşırı yayılıma sebep olmaktadır [9].

2.2.3.1. Poisson-Gamma (Negatif Binom) Regresyon Modeli

Bölüm 2.2.3'de oluşturulan karma Poisson modelinde $\Theta_1,\Theta_2,...,\Theta_n$ rastlantı değişkenlerinin bağımsız Gamma(a,a) dağılımı gösterdiği varsayıldığında, beklenen değer ve varyansları da $E\,\Theta_i = 1$ ve $Var\,\Theta_i = \frac{1}{a}$ 'dır. Θ_i'lerin aynı dağılıma ait olduğu varsayımı ile gizli karakteristiklerin etkisinin gözlemlenebilir karakteristiklere bağlı olmadığı varsayılmıştır. Bu modelde, karakteristikleri verilen i inci sigortalının hasar sayısının olasılık fonksiyonu,

$$\begin{aligned} Pr\left[N_i = k_i \middle| x_i\right] &= \int_0^\infty Pr\left[N_i = k_i \middle| x_i, \Theta_i = \theta\right].f_\Theta(\theta)d\theta \\ &= \binom{a+k_i-1}{k_i}\left(\frac{\lambda_i}{a+\lambda_i}\right)^{k_i}\left(\frac{a}{a+\lambda_i}\right)^a \quad k = 0,1,2,...,a > 0 \end{aligned} \tag{2.27}$$

biçimindedir. Eş (2.27) negatif binom dağılımının olasılık fonksiyonudur. Burada rasgele etki Θ_i'ye yer verildiğinden aşırı yayılım dikkate alınmıştır.

Literatürde hasar sayısının modellenmesinde negatif binom modelinin kullanıldığı çok sayıda çalışma vardır. Lawless, J.F., [14], Dionne, G.,ve Vanasse [15],[12] bunlardan bazılarıdır.

2.2.3.2. Poisson-Ters-Gauss Regresyon Modeli

Bölüm 2.2.3'de oluşturulan karma Poisson modelinde bağımsız $\Theta_1,\Theta_2,...,\Theta_n$'lerin Eş.(2.5)'deki olasılık yoğunluk fonksiyonu ile verilen Ters-Gauss(1, τ) dağılımı gösterdiği varsayılır. Ters-Gauss dağılımı pozitif ve sağa çarpık veri için uygun bir dağılımdır.

Ters-Gauss(1, τ) dağılımının beklenen değeri ve varyansı

$$E\,\Theta_i = 1$$

ve

$$Var(\Theta_i) = \tau$$

biçimindedir. Negatif binom dağılımında olduğu gibi aşırı yayılım burada da dikkate alınmıştır.

Büyük k değerleri için i inci sigortalı için $\Pr N_i = k$ olasılığını analitik olarak elde etmek mümkün değildir. Ancak gözlemlenen hasar sayıları küçük değerler olacağından regresyon katsayıları için en çok olabilirlik tahmin edicilerini hesaplamaya yarayan bir iteratif yöntem vardır [2]. Dean, C.B. ve diğerleri [16] Poisson-Ters-Gauss regresyon modelini kullanmıştır.

2.2.3.3. Poisson-Lognormal Regresyon Modeli

Bölüm 2.2.3'de oluşturulan karma Poisson modelinde $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_n$ 'lerin Eş.(2.7)'de olduğu şekilde bağımsız,

$$\mathrm{Lognormal}\left(\frac{-\sigma^2}{2}, \sigma^2\right)$$

dağılımı gösterdiği varsayıldığında beklenen değer ve varyansı da

$$E(\Theta_i) = 1$$

ve

$$\mathrm{Var}(\Theta_i) = \exp(\sigma^2) - 1$$

biçimindedir. i. sigortalı için hasar sayısının koşullu olasılık fonksiyonu,

$$\Pr\left[N_i = k_i \middle| x_i\right] = \int_0^\infty \exp(-\theta\lambda_i) \frac{\theta\lambda_i^{\,k_i}}{k_i!} \frac{1}{\theta\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\left(\ell n\theta + \sigma^2/2\right)^2}{2\sigma^2}\right) d\theta \quad k = 0,1,2,\ldots \tag{2.28}$$

olarak ifade edilmektedir. Kapalı bir formda ifade edilemediğinden olabilirlik eşitlikleri nümerik olarak çözülmektedir.

2.2.4. Sıfır-Yığılımlı Poisson ve Negatif Binom Regresyon Modelleri

Sigortacılıkta etkin bir fiyatlandırma için ilk adım hasar sıklığının modellenmesidir. Elementer branşlarda hasar sayısı dağılımının genellikle Poisson veya negatif binom dağıldığı varsayılmaktadır. Ancak poliçede bir muafiyet söz konusu olduğunda, meydana gelen bir hasarın tutarı, belirlenen muafiyet sınırını aşmadığı takdirde sigortalı bu hasarı şirkete bildirmemekte, dolayısıyla şirket nezdinde bir hasar oluşmamaktadır. Bonus-malus sisteminin uygulandığı trafik sigortalarında da aynı şekilde sigortalı, bir sonraki yıl, primin daha fazla olduğu bir alt basamağa düşmemek için meydana gelen her kazayı sigorta şirketine bildirmemeyi tercih etmektedir.

Lemaire[7], bunu “ödül açlığı” olarak adlandırmış ve bu durumun iki sonucu olduğundan bahsetmiştir. Birincisi, gözlenen hasar sayısında yüksek oranda sıfırlı değerlerin yer almasıdır. Bu nedenle, son yıllarda bu alanda yazılan makalelerde sıfır-yığılımlı dağılımların kullanıldığı görülmüştür. İkinci sonuç ise kaza sayısı ve hasar sayısının farklı bir şekilde gelişme göstermesidir. Araştırmacılar ve sigorta şirketlerinde çalışan aktüerler şirketin veri tabanında kaza sayıları olmadığından, analizlerini hasar sayısı üzerinden yaparak hasar sayısı ve kaza sayısı arasındaki farkı genellikle gözardı etmektedir. Ancak bu tür modellerde, yaptığı kazayı bildirmek/bildirmemek durumunda olan bir sigortalının yaklaşımını belirlemek mümkün olmamaktadır. Boucher, J.ve diğerleri [17] ve [18]’de kaza sayısı ile hasar sayısı arasındaki bu bağlantı araştırılmış, hasar sayısına sıfır-yığılımlı dağılımlar uygulanarak sigortalı bireylerin, hasar bildirme olasılığı modellenmiştir.

Veride yer alan sıfır yoğunluğunun temel sayma dağılımından ayrı bir şekilde analiz edilmesi amacıyla oluşturulan sıfır-yığılımlı modeller, sıfır noktasında bozulmuş dağılımın, diğer noktalarda ise standart bir sayma dağılımının tanımlandığı iki dağılımın karışımı olarak ifade edilmektedir. Olasılık fonksiyonu,

$$\Pr\left[N_i = n_i\right] = \begin{cases} \phi_i + \left(1-\phi_i\right)\Pr\left[K_i = n_i\right] & n_i = 0 \\ \left(1-\phi_i\right)\Pr\left[K_i = n_i\right] & n_i > 0 \end{cases} \qquad , 0 < \phi_i < 1 \tag{2.29}$$

olarak gösterilmektedir. Burada;

K_i sayma dağılımı, negatif olmayan herhangi bir kesikli dağılım olabilmektedir. 0 ve 1 aralığında tanımlı olan ϕ_i değeri ise “yapısal sıfır oranını” göstermektedir. Bu oran gerçekleşen, ancak herhangi bir sebeple (muafiyet, sürprim vs.) bildirilmeyen hasarlardan kaynaklanan sıfır değerlerinin oranını ifade etmektedir. Yapısal sıfır oranı sıfıra eşit olduğunda $(\phi = 0)$ sıfır yığılımlı modeller, sayma dağılımı kullanılarak elde edilen modele indirgenmektedir [19].

Gözlemlenen verinin sıfır değerindeki yoğunluğun Poisson regresyon modeline kıyasla fazla olduğu durumda, sıfır yığılımlı Poisson regresyon modelinin uygunluğunun test edilmesi amacıyla, 1995 yılında Jan Van den Broek [20] tarafından geliştirilen skor testi kullanılmaktadır. Söz konusu test ile sıfır yığılımlı Poisson modeli ile Poisson modeli karşılaştırılmaktadır. Bu karşılaştırmada, yapısal sıfır oranının sıfıra eşitliği test edilmektedir. Buna göre, iki modelin karşılaştırıldığı yokluk hipotezi,

$$H_0 : \phi_i = 0$$

ve seçenek hipotez,

$$H_1 : \phi_i > 0$$

biçiminde ifade edilmektedir. Test istatistiği;

$$S(\hat{\beta}) = U'(\hat{\beta},0)\left[J(\hat{\beta},0)\right]^{-1}U(\hat{\beta},0) \tag{2.30}$$

biçiminde tanımlanmaktadır [20]. Eşitlikte $\hat{\beta}$, $U(\hat{\beta},0)$ ve $J(\hat{\beta},0)$ sırasıyla Poisson regresyon modeli için parametre kestirim değerini, sıfır oranı sıfır değerini aldığında elde edilen skor vektörünü ve beklenen bilgi matrisini göstermektedir.

Yapısal sıfır oranı için açıklayıcı değişkenlerin kullanılmadığı ve bu oranın sabit kabul edildiği durumda Eş.(2.30) ile tanımlanan skor test istatistiği;

$$S(\hat{\beta})=\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{1_{(y_i=0)}-\hat{p}_{0i}}{\hat{p}_{0i}}\right\}^2 \Bigg/ \left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{1-\hat{p}_{0i}}{\hat{p}_{0i}}\right\}-n\bar{y} \tag{2.31}$$

eşitliği ile hesaplanmaktadır. Buradaki $\hat{p}_{0i}$ olasılığı $\exp(-\hat{\mu}_i)$ biçiminde hesaplanmaktadır. Eşitliğin pay kısmında yer alan $I_{(y_i=0)}$ ifadesi gösterge fonksiyonu niteliğinde olup hasar sayısının 0 olduğu durumlarda 1, diğer durumlarda 0 değerini almaktadır. Eşitlikte n gözlem sayısı, $\bar{y}$ de gözlemlenen bağımlı değişken değerlerinin ortalamasıdır. Yokluk hipotezinin doğru olduğu varsayımı altında hesaplanan skor test istatistiği, 1 serbestlik dereceli kikare dağılımına sahiptir [21].

Sıfır yığılımlı modellere ilişkin beklenen değer ve varyans,

$$E(N_i|x_i)=(1-\phi_i)E(K) \tag{2.32}$$

$$Var\left(N_i|x_i\right)=(1-\phi_i)\left\{Var(K)+\phi_i\left[E(K)\right]^2\right\} \tag{2.33}$$

olarak tanımlanmaktadır.

En klasik sıfır-yığılımlı dağılım, K_i dağılımının Poisson olarak tanımlandığı Sıfır-Yığılımlı Poisson (ZIP) dağılımıdır. Bu dağılımın olasılık fonksiyonu,

$$\Pr\left[N_i=n_i\right]=\begin{cases}\phi_i+\left(1-\phi_i\right)e^{-\lambda_i} & n_i=0\\ \left(1-\phi_i\right)\dfrac{e^{-\lambda_i}\lambda_i^{n_i}}{n_i!} & n_i=1,2,3,.....\end{cases} \tag{2.34}$$

olmaktadır [17].

Bu modelde ortalama parametresi için logaritmik bağ fonksiyonu kullanılmaktadır. Yapısal sıfır oranının pozitif bulunması amacıyla genellikle bu oran belirlenirken logit bağ fonksiyonu kullanılmaktadır:

$$\text{logit}(\phi_i)=\ln\ \phi_i/(1-\phi_i)\ =T_i\,\gamma \quad i=1,2,3,....m.$$

Burada; T_i açıklayıcı değişkenlerin matrisi, γ parametre vektörüdür. Yapısal sıfır oranı için regresyon analizi yapılmadığı durumda,

$$lojit(\phi_i) = \ln \phi_i/(1-\phi_i) = \gamma$$

eşitliği ile en çok olabilirlik yöntemiyle tahmin yapılır [22], [23].

ϕ_i ve λ_i'nin tahmini için aynı açıklayıcı değişkenler kullanılabileceği gibi ϕ_i için daha az sayıda değişken kullanmak da mümkün olabilmektedir. Aynı değişkenler kullanıldığında β ve γ vektörleri birbirine eşit olmaktadır [23].

Burada oluşturulan sıfır yığılımlı Poisson dağılımının beklenen değeri ve varyansı

$$E(N_i|x_i) = (1-\phi_i)\lambda_i$$

$$Var(N_i|x_i) = E(N_i)(1+\phi_i\lambda_i) = E(N_i) + E(N_i)\,\phi_i\,\lambda_i$$

şeklindedir. Varyans ifadesindeki ikinci terim sıfır yığılımı ve aşırı yayılımı modellemektedir.

ϕ_i ve λ_i'nin ikisi için de regresyon analizi yapılan bir sıfır yığılımlı Poisson modelinde log-olabilirlik fonksiyonu,

$$\ln L(n;\gamma,\beta) = -\sum_{i=1}^{m}\ln\left(1+e^{T_i\gamma}\right) + \sum_{i=1}^{m}\left\{\begin{array}{l}\sum_{n_i=0}\ln\left(e^{T_i\gamma}+e^{-\lambda_i}\right)\\ +\sum_{n_i>0}\left[n_i\ln(\lambda_i)-\lambda_i-\ln(n_i!)\right]\end{array}\right\} \tag{2.35}$$

biçimindedir [19], [24].

Aşırı yayılım, sıfır yığılımı dışında başka sebeplerden de kaynaklanabildiğinden modeldeki temel sayma dağılımını aşırı yayılımı dikkate alan dağılımlar arasından seçmek daha uygun sonuçlar verecektir. Bunun için Poisson dağılımının genelleştirilmiş halleri kullanılmaktadır. Sıfır-yığılımlı negatif binom ve sıfır-yığılımlı genelleştirilmiş Poisson dağılımları buna örnek olarak verilebilmektedir.

Sıfır-yığılımlı modellerde Poisson-TersGauss ya da Poisson-Lognormal dağılımlarının da kullanıldığı çalışmalar olmuştur [25].

Sıfır yığılımlı negatif binom modelinde olasılık fonksiyonu;

$$\Pr\left(N_i = 0\right) = \phi_i + \left(1 - \phi_i\right)\left(\frac{\alpha^{-1}}{\alpha^{-1} + \lambda_i}\right)^{\alpha^{-1}} \tag{2.36}$$

$$\Pr\left(N_i = n_i\right) = \left(1 - \phi_i\right)\frac{\Gamma(n_i + \alpha^{-1})}{\Gamma(n_i + 1)\Gamma(\alpha^{-1})}\left(\frac{\lambda_i}{\alpha^{-1} + \lambda_i}\right)^{n_i}\left(\frac{\alpha^{-1}}{\alpha^{-1} + \lambda_i}\right)^{\alpha^{-1}} \tag{2.37}$$

$y_i = 1, 2, \ldots \quad i = 1, 2, \ldots, m$

biçimindedir. Buradaki ϕ_i yayılım parametresi olduğundan, bu parametrenin sıfıra eşit olması aşırı yayılımın sadece sıfır yığılımdan kaynaklandığını gösterir. Bu durumda sadece sıfır yığılımlı Poisson dağılımı kullanmak yeterli olacaktır. λ parametresi ise dağılımın ortalamasıdır [19].

ϕ_i ve λ_i'nin ikisi için de regresyon analizi yapılan bir sıfır yığılımlı negatif binom modelinde log-olabilirlik fonksiyonu,

$$\ln L\left(y; \gamma, \beta, \alpha\right) = -\sum_{i=1}^{m} \ln\left(1 + e^{T_i \gamma}\right) + \sum_{i=1}^{m} \left\{ \sum_{y_i = 0} \ln\left[e^{T_i \gamma} + \left(\frac{1}{1 + \alpha\lambda_i}\right)^{\alpha^{-1}} \right] \right.$$

$$\left. + \sum_{y_i > 0} \left[\sum_{t=0}^{y_i - 1} \ln(1 + t\alpha) + y_i \ln(\lambda_i) - (y_i + \alpha^{-1})\ln(1 + \alpha\mu_i) - \ln(y_i!) \right] \right\} \tag{2.38}$$

biçimindedir.

Açıklayıcı değişkenlerin yapısal sıfır oranı üzerindeki etkisi göz ardı edildiğinde bu fonksiyonda $e^{T_i \gamma}$ yerine e^{γ} kullanılmaktadır [19],[24].

Lambert, D. [22] baskı devre kartlarındaki üretim hatalarını sıfır-yığılımlı Poisson (ZIP) regresyon modeli ile ilk defa modellemiştir. Farklı sayma dağılımlarının kullanıldığı modellere ilişkin çalışmalar da literatürde yer almaktadır. Yip, K., ve Yau, K., [19]'de Sıfır-yığılımlı Poisson, negatif binom, genelleştirilmiş Poisson ve Çift Poisson modellerini, kesit otomobil sigortası verisine uygulamış ve bulunan sonuçları standart Poisson ve negatif binom dağılımlarına ilişkin sonuçlarla karşılaştırmıştır. Famoye, F., ve Singh, K., P [23] Sıfır-Yığılımlı Genelleştirilmiş Poisson dağılımı ile aile içi şiddeti modellemiştir.

Boucher, J.-P., M. Denuit, ve M. Guillén [25] kesit veri şeklindeki trafik sigortası hasar sayılarına sıfır-yığılımlı modeller ile engelli (hurdle) modelleri uygulamış, sonuçları karşılaştırmıştır.

Boucher, J., ve Denuit, M., [26]'de sıfır yığılımlı modeller için kredibilite primlerini oluşturmuştur. Boucher, J.P., Denuit, M., Guillen, M., [17]'de ise sıfır-yığılımlı Poisson dağılımına "raslantı etkisi" ekleyerek genelleştirmek suretiyle yeni modeller geliştirmiştir. Bu modellerde panel veri kullanılmıştır. Söz konusu çalışmada, bonus-malus sistemlerinde uygulanan indirim ya da sürprimlerin insanların hasar bildirme davranışı üzerinde etkili olduğu, iyi ya da kötü müşteri olsun, bir kez hasar bildirdikten sonra bir sonraki hasarı bildirme olasılığının değişebildiği, dolayısıyla iyi/kötü müşteri kategorisinin de değişebildiği gösterilmiştir.

2.3. Akaike Bilgi Ölçütü

Akaike bilgi ölçütü (AIC) ve log-olabilirlik değerleri gözlemlenen veriye en uygun modelin seçilmesi amacıyla kullanılan başlıca ölçütlerdir. Herhangi bir açıklayıcı değişken istatistiksel olarak anlamlı olmasına rağmen, modele eklendiğinde uyum derecesini düşürebilmektedir. Veriye uygun model araştırılırken, açıklayıcı değişken sayısı artırıldığında parametre sayısı (k) da artarken, gözlemlenen bağımlı değişken değeri ile model kullanılarak tahmin edilen bağımlı değişken değeri arasındaki fark azalmakta, ancak parametre sayısının artmasından dolayı tahmin edilen parametrelerin varyansı artmakta, modelin uyum derecesi ise azalmaktadır. Bu yüzden modelin hem yeterli sayıda açıklayıcı değişken içermesi, hem de maksimum uyumu sağlayacak şekilde oluşturulması amaçlanmalıdır. Bu yüzden Akaike bilgi ölçütü, modellerin parametre sayısı ile uyum iyiliği arasında dengenin kurulması amacıyla kullanılmaktadır [11].

n gözlem sayısını, k modeldeki parametre sayısını ve InL model için hesaplanan log-olabilirlik fonksiyon değerini göstermek üzere Akaike bilgi ölçütü,

$$AIC= -2lnL+2k \tag{2.39}$$

eşitliği kullanılarak hesaplanmaktadır. AIC ölçütü en küçük çıkan model, gözlemlenen veriye en uygun olan modeldir.

Herhangi bir modelin gözlemlenen veriye uygunluğunu test etmek amacıyla oluşturulan olabilirlik oran test istatistiği,

$$LR=-2(lnL(\text{sıfır model})-lnL(\text{Model}))$$

ile ifade edilmektedir. Burada verilen "sıfır model" hiçbir açıklayıcı değişkenin olmadığı sadece "sabit " değerin yer aldığı modeldir. Yokluk hipotezi ise "uygunluğu test edilen modelle sıfır model arasında fark yoktur" şeklinde kurulur. Oluşturulan test istatistiği iki modelin parametre sayısı arasındaki farka eşit serbest dereceli Ki-kare değeri ile karşılaştırılır. Bu test istatistiği iki ayrı modelin karşılaştırılması için de kullanılmaktadır.

3. DENEYİM FİYATLANDIRMASI MODELLERİ

3.1. Kredibilite Yöntemiyle Oluşturulan Modeller

Tezin ikinci bölümünde regresyon analiziyle, heterojen bir portföy homojen risk sınıflarına ayrılarak aynı sınıfta yer alan sigortalıların aynı primi ödeyeceği bir risk sınıflandırması yapılabileceğini, ancak daha önce de sözü edilen birçok sebepten dolayı (örn. çok sayıda önsel faktörün kullanılması) sınıflar içinde hala heterojenlik olacağı belirtilmiştir. Her bir risk sınıfının beklenen hasar sıklığı grubun geçmişteki hasar deneyiminin ortalaması olacaktır. Ancak bir sınıfta yer alan bir sigortalının geçmiş hasar deneyimi sınıfın ortalama (geçmiş) hasar deneyiminden daha iyi veya kötü olduğunda sigorta şirketinin gruptaki prim adaletini sağlamak için bu sigortalının priminde bir düzeltme yapması gerekecektir. Sigortalının gözlemlenemeyen risk karakteristiklerinden kaynaklanan ve grupta heterojenliğe sebep olan bu durumun giderilmesi amacıyla yapılacak bu düzeltmenin, sigortalının geçmişteki bireysel hasar deneyimine göre yapılması gerekmektedir. Bu bölümde kredibilite kuramı ile düzeltmenin nasıl yapılacağı ele alınacaktır.

Kredibilite kuramı farklı veri gruplarının bir araya getirilerek ortak bir tahmin elde edilmesi yöntemi olarak tanımlanabilmektedir. Sigortacılıkta daha çok heterojen portföylerde yer alan risklerin fiyatlandırmasında kullanılan kredibilite kuramı ile sigorta şirketi, sigortalının geçmiş hasar tecrübesini esas alarak gelecek dönemdeki primini belirleyebilmektedir. Buna *deneyim fiyatlandırması* denilmektedir [2].

Mowbray [27] ve Whitney [28]'in 1900'lerin başında yaptıkları çalışmalar kredibilite kuramının ilk sigortacılık uygulamaları sayılmaktadır. Bu makalelerde, bireyin risk deneyimi ile ait olduğu sınıfın risk deneyimi arasında denge sağlayan primler bulunmaya çalışılmıştır. Bu çalışmalar Herzog, Bühlmann, Norberg gibi birçok bilim adamının çalışmalarına temel oluşturmuştur. Kredibilite kuramını bireysel risk modellerinden ayıran en önemli özellik, risk parametresinin bir raslantı değişkeni olarak ele alınmasıdır. Bu da Bayes'ci yaklaşımın kullanılması sonucunu doğurmuştur.

Bu tez çalışmasında, temel olarak En Büyük Doğruluk Kredibilitesi (Greatest Accuracy Credibility) kullanılacaktır.

Risk sınıflandırması yapılmış olan bir portföyde sınıfların her biri sigorta şirketi tarafından önsel fiyatlandırma değişkenleri (yaş, cinsiyet,…vb) kullanılarak belirlendiğinden bu anlamda bu sınıflar homojendir. Ancak tamamıyla homojen olduğunu söyleyebilmek mümkün değildir. Bu sebeple, önsel fiyatlandırma değişkenleri tarafından yansıtılamayan risk faktörlerinden kaynaklanan kalıntı heterojenliği temsil etmesi amacıyla her bir sigortalının sınıf içindeki risk seviyesini gösteren bir θ parametresi belirlenmektedir. Örneğin bir sigortalının θ parametresinin %50 olması bu sigortalının beklenen hasar sıklığının, ait olduğu sınıfın beklenen hasar sıklığının yarısı kadar olduğu, %200 olması da iki katı kadar olduğu anlamına gelmektedir. İstatistiksel anlamda rasgele etki modeli olarak ifade edilebilen Θ rastlantı değişkeninin birikimli dağılım fonksiyonu olan $F_\Theta(\Theta)$ fonksiyonu, portföyden rasgele seçilen bir sigortalının risk parametresinin θ parametresinden küçük veya eşit olması olasılığını göstermektedir. Veriden tahmin edilebilen $F_\Theta(\Theta)$ dağılım fonksiyonu kullanılarak deneyim fiyatlandırması yapılabilmektedir.

Kredibilite yöntemiyle modellemede üç temel fonksiyon kullanılmaktadır:

Bunlardan ilki hasar sayısı dağılımıdır. Otomobil sigortalarında belirli bir dönem süresince sigortalının hasar sayılarının modellenmesinde Poisson dağılımının uygun bir seçim olduğu birçok bilimsel çalışmayla gösterilmiştir. Bu tez çalışmasında da riske yatkınlığı $\Theta_i = \theta$ ile ifade edilen i. sigortalının t. yıldaki hasar sayısı dağılımı olan $N_{it} \mid \Theta = \theta$'nın $\lambda_{it}\theta$ parametresi ile Poisson dağıldığı varsayılmaktadır. Poisson kredibilite modeli Kesim 3.1.1'de ele alınacaktır.

Kredibilite modellemesinde kullanılan ikinci temel fonksiyon, portföydeki sigortalıların risk parametreleri olan $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots\ldots, \theta_n$ 'lerin portföy düzeyinde gösterdiği değişkenliği belirleyen $F_\Theta(\Theta)$ birikimli dağılımıdır. Θ için aktüerlerce genellikle Gamma dağılımı kullanılsa da literatürde Ters-Gauss ve Lognormal dağılımlarının da kullanıldığı görülmüştür [16].

Üçüncü temel fonksiyon ise Bayes’ci yaklaşımda yararlanılan kayıp fonksiyonudur. Sonsal prim düzeltmesi, hasar sayısı için seçilen modele bakılmaksızın, kayıp fonksiyonu yardımıyla yapılmaktadır. Bu fonksiyonun beklenen değeri minimize edilerek optimal deneyim primi bulunmaktadır. Kayıp fonksiyonu olarak en sık kullanılan fonksiyonlar karesel kayıp ve üstel kayıp fonksiyonlarıdır. Bu fonksiyonlardan karesel kayıp fonksiyonu ile bulunan kredibilite priminin bir sonraki yılın hasar sayısını en iyi tahmin eden fonksiyon olduğu bilimsel çalışmalarla gösterilmiştir. Ancak karesel kayıp fonksiyonunun kullanılmasıyla elde edilen kredibilite sisteminde cezaların çok yüksek olması sebebiyle pratikte, özellikle sigorta şirketlerinde bu fonksiyonun kullanılması neredeyse imkansızdır. Bazı bilim adamları üstel kayıp fonksiyonunu kullanarak bu sorunu gidermeye çalışmış, daha anlamlı ceza oranları elde etmişlerdir [4], [29].

3.1.1. Poisson Kredibilite Modeli

n poliçeden oluşan bir portföyde yer alan poliçelerin her biri T_i yıl boyunca gözlemlenmiş olsun.

N_{it}, i. poliçe tarafından t. yılda yani (t-1,t) döneminde bildirilen hasar sayısını gösteren raslantı değişkeni olarak tanımlansın. i. sigortalının T_i yıl boyunca bildirdiği hasar sayıları,

$$N_i = (N_{i1}, N_{i2}, \ldots, N_{iT_i})^T$$

dizisiyle gösterilsin.

Portföyde yer alan i. poliçe $(\Theta_i, N_{i1}, N_{i2}, \ldots, N_{iT_i})$ dizisi ile ifade edilmektedir. Portföy düzeyinde bu dizilerden her birinin i=1,2,....n olmak üzere birbirinden bağımsız olduğu varsayılmaktadır. Burada Θ_i daha önceki bölümlerde olduğu gibi sigortalının bilinmeyen risk faktörlerini temsil eden rastlantı değişkenidir. $(\Theta_i, N_{i1}, N_{i2}, \ldots, N_{iT_i})$ dizisi ile ifade edilen i. poliçenin t=1,2,3,…, T_i yıllarındaki hasar sayılarını gösteren,

$$N_{i1}\big|\Theta_i = \theta,\ N_{i2}\big|\Theta_i = \theta, ...$$

koşullu raslantı değişkenlerinin birbirinden bağımsız ve $\lambda_{it}\theta$ parametreleriyle Poisson dağıldığı, yani bir sigortalının yıllar bazında hasar sayılarının birbirinden bağımsız olduğu varsayılmaktadır. Bir başka deyişle, i. sigortalının risk karakteristikleri hakkında tam bir bilgiye sahip olunabilirse, $\Theta_i = \theta$ deterministik bir değer alacağından sigortalının yıllar itibariyle hasar sayılarını gösteren $N_{i1}, N_{i2}, ..., N_{iT_i}$'ler de bağımsız olur. Ancak Θ'nın bilinmediği durumda bu raslantı değişkenlerinin $(N_{i1}, N_{i2}, ..., N_{iT_i})$ davranışları Θ_i'ye bağlı olduğundan kendi aralarında bir bağımlılık söz konusudur [4].

Diğer taraftan portföy düzeyinde i=1,2,…..,n için $(\Theta_i\ ,\ N_i)$ dizilerinin de, yani sigortalıların hasar sayılarının da, birbirinden bağımsız olduğu varsayılmaktadır.

Θ_i risk parametresi ile tanımlanan ve açıklanamayan heterojenlik, sigortalının hasar ve prim deneyimine göre Bayes'ci yaklaşım ile ortaya çıkarılarak deneyime göre primde düzeltme yapılır.

$$N_{i\bullet} = \sum_{t=1}^{T_i} N_{it}$$

poliçe tarafından ilk T_i yıl boyunca bildirilen toplam hasar sayısını,

$$\lambda_{i\bullet} = \sum_{t=1}^{T_i} \lambda_{it}$$

ise aynı sürede toplam beklenen hasar sayısını gösterir.

Özellik 1.

Yukarıdaki şekilde oluşturulan Poisson kredibilite modelinde Θ_i'nin önsel dağılımı, T_i yıl boyunca bildirilen toplam hasar sayısını gösteren $N_{i\bullet}$'ye bağlı olmaktadır. Yani, $\Pr(\Theta_i \le t \mid N_{i1}, N_{i2},..., N_{iT_i}) = \Pr(\Theta_i \le t \mid N_{i\bullet})$ eşitliği her $t \ge 0$ için doğru olmaktadır.

İspat 1.

$N_{i1}= k_{i1},.....,N_{iT_i}= k_{iT_i}$ yıllar bazında hasar sayıları, $k_{i\bullet}= \sum_{t=1}^{T_i} k_{it}$ toplam hasar sayısını göstermek üzere,

$$
\begin{aligned}
f_\Theta(\theta \mid k_{i1},.....,k_{iT_i}) &= \frac{\Pr\left[N_{i1}= k_{i1},.....,N_{iT_i}= k_{iT_i} \mid \Theta_i = \theta\right].f_\Theta(\theta)}{\Pr\left[N_{i1}= k_{i1},.....,N_{iT_i}= k_{iT_i}\right]} \\
&= \frac{\exp(-\theta\lambda_{i\bullet})\theta^{k_{i\bullet}} f_\Theta(\theta)}{\int_0^{+\infty} \exp(-\xi\lambda_{i\bullet})\xi^{k_{i\bullet}} f_\Theta(\xi)d\xi}
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

eşitliği sadece $k_{i\bullet}$'a bağlı olmaktadır.

Bu özellik sayesinde hasarların hangi yıllarda yapıldığı önemli olmayıp T_i yıl boyunca bildirilen toplam hasar sayısı yeterli olacaktır [1].

Θ_i'nin tahmin edilmesinde yaygın olarak kullanılan karesel ve üstel kayıp fonksiyonları aşağıda ayrıntılı olarak ele alınmaktadır.

3.1.2. Karesel Kayıp Fonksiyonu

Uygulamalı istatistikte, bilinmeyen bir büyüklüğe ilişkili olduğu değişkenlerin bir fonksiyonu ile yaklaşım sağlamak en sık kullanılan yöntemlerden biridir. Öyle ki bu fonksiyon, kendisi ile yaklaşım sağladığı büyüklük arasındaki farkın karesinin beklenen değerini minimum yapacak şekilde belirlenmektedir. Buna “ortalama karesel hatanın tahmin edicisi” denilmektedir.

Önerme 1.

$\{N_{i1},N_{i2},.....\}$ raslantı değişkenleri dizisi ile Θ risk parametresini ele alalım. Θ’nın verilmesi koşulu altında N_{it}’lerin bağımsız ve ilk iki momentlerinin sonlu olduğu varsayılsın. Ayrıca bu değişkenlerin koşullu olasılıklarının,

$$\mu_t(\Theta) = E\left[N_{it} \mid \Theta \right], \ t = 1, \ 2, 3, ...$$

beklenen değeri de

$$E\left[\mu_t(\Theta)\right] = \mu_t$$

olarak tanımlanmış olsun.

Buna göre $\psi : \mathbb{R}^T \to \mathbb{R}$ ölçülebilir fonksiyonları arasında,

$$E\left[\left(\mu_{T+1}(\Theta) - \psi(N_{i1},N_{i2},....,N_{iT})\right)^2\right] \text{ b}$$

eklenen değerini minimum yapan $\psi(X_{i1},X_{i2},....,X_{iT})$ tahmin edicisi,

$$\psi\ (N_{i1},N_{i2},....,N_{iT}) = E\left[N_{T+1} \middle| N_{i1}, N_{i2}, ..., N_{iT}\right] = E\left[\mu_{T+1}(\Theta) \middle| N_{i1}, N_{i2}, ..., N_{iT}\right]$$

beklenen değerine eşittir [29].

Yani ortalama karesel hataya göre $\mu_{T+1}(\Theta) = E\left[N_{T+1} \middle| \Theta\right]$ beklenen değerine en iyi yaklaşım sağlayan fonksiyon $E\left[N_{T+1} \middle| N_{i1},N_{i2},....,N_{iT}\right]$ önsel beklenen değeri olmuştur.

Yukarıdaki önermede elde edilen sonucu bölüm 3.1.1.’de tanımlanan Poisson kredibilite modeline uygulandığında, $N_{i,T_i+1} \middle| N_{i1} = k_1,...,N_{i,T_i} = k_{T_i}$ önsel dağılımı kullanılarak, riske yatkınlığı bilinen i. sigortalının bir sonraki yıl beklenen hasar sayısının geçmiş yıllardaki hasar tecrübesi ile tahmin edilebileceği görülmektedir.

Önsel beklenen değerin bulunması için Θ koşulu altında N_{it}’lerin dağılımı ile Θ önsel dağılımının bulunması gerekmektedir.

Buna göre $N_{i,T_i+1} \middle| N_{i1} = k_1, \ldots, N_{i,T_i} = k_{T_i}$ önsel dağılımının olasılık fonksiyonu,

$$\Pr\left[N_{i,T_i+1} \middle| N_{i1} = k_1, N_{i2} = k_2, \ldots\ldots, N_{i,T_i} = k_{T_i}\right]$$
$$= \frac{\int_0^\infty \left(\prod_{t=1}^{T_i} \Pr\left(N_{it} = k_t \middle| \Theta_i = \theta\right)\right) \Pr\left(N_{i,T_i+1} = k \middle| \Theta_i = \theta\right) dF_\Theta(\Theta)}{\int_0^\infty \left(\prod_{t=1}^{T_i} \Pr\left(N_{it} = k_t \middle| \Theta_i = \xi\right)\right) dF_\Theta(\xi)}$$

$$= \frac{\int_0^\infty \exp(-\lambda_{i\bullet}\theta)\theta^{k_\bullet} \exp(-\lambda_{i,T_i+1}\theta) \frac{(-\lambda_{i,T_i+1}\theta)^k}{k!} dF_\Theta(\Theta)}{\int_0^\infty \exp(-\lambda_{i\bullet}\xi)\xi^{k_\bullet} dF_\Theta(\xi)} \tag{3.2}$$

olarak,

$\Theta_i \middle| N_{i1} = k_1, \ldots\ldots\ldots, N_{i,T_i} = k_{T_i}$ sonsal dağılımı da ,

$$\Pr\left(\Theta_i \middle| N_{i1} = k_1, \ldots\ldots\ldots, N_{i,T_i} = k_{T_i}\right) = \frac{\prod_{t=1}^{T_i} \exp(-\lambda_{it}\theta) \frac{\left(\theta\lambda_{it}\right)^{k_{it}}}{k_{it}!} dF_\Theta(\Theta)}{\int_0^\infty \prod_{t=1}^{T_i} \exp(-\lambda_{it}\xi) \frac{\left(\xi\lambda_{it}\right)^{k_{it}}}{k_{it}!} dF_\Theta(\xi)}$$
$$= \frac{\exp(-\lambda_{i\bullet}\theta)\theta^{k_\bullet} dF_\Theta(\Theta)}{\int_0^\infty \exp(-\lambda_{i\bullet}\xi)\xi^{k_\bullet} dF_\Theta(\xi)} \tag{3.3}$$

olarak ifade edilir. Böylece $N_{i,T_i+1} \middle| N_{i1} = k_1, \ldots, N_{i,T_i} = k_{T_i}$ raslantı değişkeninin olasılık fonksiyonu yukarıdaki sonsal dağılım dikkate alınarak yeniden düzenlendiğinde elde edilen

$$\Pr\left[N_{i,T_i+1} \middle| N_{i1} = k_1, N_{i2} = k_2, \ldots\ldots, N_{i,T_i} = k_{T_i}\right] = \int_0^\infty \exp(-\lambda_{i,T_i+1}\theta) \frac{\left(\theta\lambda_{i,T_i+1}\right)^k}{k\ !} dF_\Theta(\theta | k_\bullet) \tag{3.4}$$

olasılık yoğunluk fonksiyonunun, $\Theta_i \middle| N_{i\bullet} = k$ koşullu dağılımı ile oluşturulan bir karma Poisson dağılımı olduğu görülmektedir. Başka bir ifadeyle, geçmiş yıllardaki hasar sayılarının toplamı kullanılarak Θ_i'nin dağılımı düzeltilmekte (güncellenmekte), yeni dağılım da T_{i+1} inci yıldaki hasar sayısının bulunmasında kullanılmaktadır.

Bayes'ci kredibilite primi olarak adlandırdığımız, önsel dağılımın beklenen değeri,

$$E\left[N_{i,T_i+1} \middle| N_{i1}=k_1, N_{i2}=k_2, \ldots\ldots, N_{i,T_i}=k_{T_i}\right]=\int_0^\infty \lambda_{i,T_i+1}\theta \, dF_\Theta(\theta|k_\bullet)$$

$$=\lambda_{i,T_i+1}E\left[\Theta_i \middle| N_{i1}=k_1, N_{i2}=k_2, \ldots\ldots, N_{i,T_i}=k_{T_i}\right] \tag{3.5}$$

olur. Burada;

$$E\left[\Theta_i \middle| N_{i1}=k_1, \ldots\ldots\ldots, N_{i,T_i}=k_{T_i}\right]=\frac{\int_0^\infty \theta\left(\prod_{t=1}^{T_i}\Pr\left(N_{it}=k_t \middle| \Theta_i=\theta\right)\right)dF_\Theta(\Theta)}{\int_0^\infty\left(\prod_{t=1}^{T_i}\Pr\left(N_{it}=k_t \middle| \Theta_i=\xi\right)\right)dF_\Theta(\xi)}$$
$$=\frac{\int_0^\infty \exp(-\lambda_{i\bullet}\theta)\theta^{k_\bullet+1}dF_\Theta(\Theta)}{\int_0^\infty \exp(-\lambda_{i\bullet}\xi)\xi^{k_\bullet}dF_\Theta(\xi)} \tag{3.6}$$

biçimindedir [1].

Sonuç olarak, i. sigortalının T_{i+1} inci yıldaki beklenen hasar sayısı, λ_{i,T_i+1} ile düzeltme katsayısı olan $E\left[\Theta_i \middle| N_{i1}=k_1, N_{i2}=k_2, \ldots\ldots, N_{i,T_i}=k_{T_i}\right]$ nin çarpılması sonucunda bulunmaktadır. Yani sigortalının ait olduğu grubun beklenen hasar sayısı ile, sigortalının geçmiş hasar tecrübesine göre güncellenmiş Θ_i değerinin çarpılmasıyla elde edilmektedir.

Bu yaklaşımla $E\left[E\left[\Theta_i \middle| N_{i1}=k_1, N_{i2}=k_2, \ldots\ldots, N_{i,T_i}=k_{T_i}\right]\right]=E\left[\Theta_i\right]=1$ olduğundan finansal denge kriteri sağlanır. Yani, yapılan düzeltmelerin ortalaması 1 olmaktadır. Böylelikle sigorta şirketi tarafından her yıl toplanan prim sabit kalmakta, sadece toplam primin sigortalılar arasındaki dağılımı değişmektedir [1].

3.1.3. Karesel Kayıp Fonksiyonu ile Poisson-Gamma Karma Kredibilite Modeli

Bölüm 3.1.1.'de oluşturulan kredibilite modelinde, portföyde yer alan ve $(\Theta_i, N_{i1}, N_{i2}, ..., N_{iT_i})$ dizisi ile ifade edilen i. poliçenin t=1,2,3,…., T_i yıllardaki hasar sayılarını gösteren $N_{i1}|\Theta_i = \theta, N_{i2}|\Theta_i = \theta, ...$ koşullu raslantı değişkenlerinin birbirinden bağımsız ve $\lambda_{it}\theta$ parametreleriyle Poisson dağıldığı varsayılmıştır. Yine daha önceki bölümlerde olduğu gibi portföyde i. sigortalının riske yatkınlığını temsil eden Θ_i rastlantı değişkeninin $\Theta_i \approx \text{Gamma}(a,a)$ dağıldığı varsayılmaktadır.

Buna göre $(N_{i1}, N_{i2}, ..., N_{i,T_i})$ raslantı değişkeninin bileşik olasılık fonksiyonu olan

$$\Pr\left[N_{i1} = k_1, N_{i2} = k_2, ..., N_{i,T_i} = k_{iT_i}\right] = \left(\prod_{t=1}^{T_i} \frac{\lambda_{it}^{k_{it}}}{k_{it}!}\right)\left(\frac{a}{a + \sum_{t=1}^{T_i} \lambda_{it}}\right)^a \left(a + \sum_{t=1}^{T_i} \lambda_{it}\right)^{-\sum_{t=1}^{T_i} k_{it}} . \frac{\Gamma\left(a + \sum_{t=1}^{T_i} k_{it}\right)}{\Gamma(a)} \quad k = 0,1,2,... \tag{3.7}$$

ile $(\Theta_i, N_{i1}, N_{i2}, ..., N_{i,T_i})$ raslantı değişkeninin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu olan

$$\Pr(\Theta_i, N_{i1}, N_{i2}, ..., N_{i,T_i}) = \prod_{t=1}^{T_i} \exp(-\theta_i\lambda_{it}) \frac{(-\theta_i\lambda_{it})^{k_{it}}}{k_{it}!} \frac{1}{\Gamma(a)} a^a \theta_i^{a-1} \exp(-a\theta_i) \tag{3.8}$$

kullanılarak

$$\Pr(\Theta_i = \theta_i | N_{i1}, N_{i2}, ..., N_{i,T_i}) = \exp\left[-\theta_i\left(a + \sum_{t=1}^{T_i} \lambda_{it}\right)\right] \theta_i^{a + \sum_{t=1}^{T_i} k_{it} - 1} \frac{\left(a + \sum_{t=1}^{T_i} \lambda_{it}\right)^{a + \sum_{t=1}^{T_i} k_{it}}}{\Gamma\left(a + \sum_{t=1}^{T_i} k_{it}\right)}, \ a > 0 \tag{3.9}$$

koşullu olasılık fonksiyonu elde edilir [1]. Eş (3.9)'da verilen $\text{Gamma}(a+N_{i\bullet}, a+\lambda_{i\bullet})$ dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonudur.

$\Theta_i \left| N_{i1}, N_{i2}, \ldots, N_{iT_i} \right. \approx \text{Gamma}(a+N_{i\bullet}, a+\lambda_{i\bullet})$ olduğundan düzeltme katsayısı

$$E\left(\Theta_i \left| N_{i1}, N_{i2}, \ldots, N_{iT_i}\right.\right) = \frac{a+N_{i\bullet}}{a+\lambda_{i\bullet}} \tag{3.10}$$

olarak bulunur.

Bu koşullu dağılımın varyansı

$$\text{Var}\left(\Theta_i \left| N_{i1}, N_{i2}, \ldots, N_{iT_i}\right.\right) = \frac{a+N_{i\bullet}}{\left(a+\lambda_{i\bullet}\right)^2} \tag{3.11}$$

biçimindedir [1]. Buna göre, $\Theta_i \left| N_{i1}, N_{i2}, \ldots, N_{iT_i}\right.$ sonsal dağılımı $\text{Gamma}(a+N_{i\bullet}, a+\lambda_{i\bullet})$ olduğundan $N_{i,T_i+1} \left| N_{i\bullet} = k_\bullet\right.$ önsel dağılımı da negatif binom olup olasılık fonksiyonu aşağıdaki şekildedir.

$$\Pr\left[N_{i,T_i+1} = k \left| N_{i\bullet} = k_\bullet\right.\right] = \binom{a+k_\bullet+k-1}{k}\left(\frac{\lambda_{i,T_i+1}}{a+\lambda_{i\bullet}+\lambda_{i,T_i+1}}\right)^k\left(\frac{a+\lambda_{i\bullet}}{a+\lambda_{i\bullet}+\lambda_{i,T_i+1}}\right)^{a+k_\bullet} \tag{3.12}$$

$k = 0,1,\ldots \quad a > 0$

Geçmiş T_i yılına ait hasar deneyimi verilen bir sigortalının T_{i+1} inci yılda beklenen hasar sayısı, aynı zamanda Bayes'ci kredibilite primi

$$E\left(N_{i,T_i+1} \left| N_{i1}, N_{i2}, \ldots, N_{iT_i}\right.\right) = E\left(N_{i,T_i+1} \left| N_{i\bullet} = k_\bullet\right.\right) = \lambda_{i,T_i+1}.E\left[\Theta_i \left| N_{i\bullet} = k_\bullet\right.\right] = \lambda_{i,T_i+1}\frac{a+k_\bullet}{a+\lambda_{i\bullet}} \tag{3.13}$$

biçiminde ifade edilmektedir [29]. Bu prim,

$$E\left(N_{i,T_i+1} \left| N_{i\bullet} = k_\bullet\right.\right) = \left(\underbrace{\frac{a}{a+\lambda_{i\bullet}}}_{w_1}\ \underbrace{E\left[\Theta_i\right]}_{1} + \underbrace{\frac{\lambda_{i\bullet}}{a+\lambda_{i\bullet}}}_{w_2}\ \underbrace{\frac{k_\bullet}{\lambda_{i\bullet}}}_{\text{ort.hasar sıklığı}}\right)\underbrace{E\left[N_{i,T_i+1}\right]}_{\lambda_{i,T_i+1}} \tag{3.14}$$

biçiminde yazıldığında, düzeltme katsayısı,

$$E\left(\Theta_i \middle| N_{i1}, N_{i2}, \ldots, N_{iT_i}\right) = \frac{a+k_{\bullet}}{a+\lambda_{i\bullet}},$$

şeklinde ifade edilmektedir [1].

$$E\left(\Theta_i \middle| N_{i1}, N_{i2}, \ldots, N_{iT_i}\right) = \frac{a+N_{i\bullet}}{a+\lambda_{i\bullet}}$$

düzeltme katsayısı şu şekilde yorumlanmaktadır:

Aynı portföyde bulunan i. ve j. sigortalılardan, $T_i = T_j$ yıl boyunca, i. sigortalının önsel olarak j sigortalıdan daha az riskli bir sürücü olduğu varsayılsın. Yani $\lambda_{i\bullet} < \lambda_{j\bullet}$'dir.

Aynı süre boyunca gözlemlenen bu sigortalıların bu periyotta hiç hasar getirmediği varsayılsın, yani $N_{i\bullet} = N_{j\bullet} = 0$ olsun. Bu durumda bu sigortalılara uygulanacak düzeltme faktörleri için $\frac{a}{a+\lambda_{i\bullet}} > \frac{a}{a+\lambda_{j\bullet}}$ eşitsizliği sağlanacaktır. Bir anlamda önsel olarak iyi olan sürücü diğerine göre daha az indirim alacaktır. Bunun sebebi bu sigortalı için önsel değerlendirmede zaten daha düşük prim hesaplanmış olmasıdır.

Bu sigortalıların bu periyotta k tane hasar getirdikleri düşünüldüğünde, yine aynı yönde olan eşitsizliğimize $\frac{a+k}{a+\lambda_{i\bullet}} > \frac{a+k}{a+\lambda_{j\bullet}}$ bakıldığında, hasar sayıları aynı olan bu iki sigortalıdan önsel olarak kötü olan sürücünün (j) diğerine göre daha az cezalandırıldığı sonucu çıkmaktadır [1].

Shengwang, Wei ve Whitmore [30]'da ise yapı fonksiyonunun Pareto dağılımı alınması durumunda hasar sayısının koşullu olasılığı negatif binom dağılımı ile modellenmiştir.

3.1.4. Üstel Kayıp Fonksiyonu

Karesel kayıp fonksiyonuna bir alternatif olarak geliştirilen üstel kayıp fonksiyonu asimetrik bir fonksiyon olup kredibilite düzeltmesinin seviyesini belirleyen tek bir parametreye sahiptir. Bu da hasar olduğunda finansal dengeyi sağlamak koşuluyla sonsal düzeltmeyi yumuşatma (şiddetini azaltma) imkanı vermektedir.

Bir sigorta şirketi geçmiş hasar deneyimine göre yeni yılın primlerini belirlerken iki türlü hata riski ile karşı karşıya kalmaktadır. Birincisi, sigortalıdan az prim alınması durumunda şirketin zarar etme riski; diğeri de fazla prim alması durumunda sigortalıyı kaybetme riskidir. Kayıp fonksiyonunun genellikle, olası hatanın negatif olmayan konveks bir fonksiyonu şeklinde olduğu varsayılır. Hata olmadığında kayıp 0, hata olduğunda da pozitif olacaktır.

Önerme 2.

Önerme 1.de olduğu gibi, $\{N_{i1}, N_{i2}, ...\}$ raslantı değişkenleri dizisi ile Θ risk parametresi ele alınsın. Θ'nın verilmesi koşulu altında N_{it}'lerin bağımsız ve ilk iki momentlerinin sonlu olduğu varsayılsın. Ayrıca bu değişkenlerin koşullu olasılıklarının

$$\mu_t(\Theta) = E\left[N_{it} \middle| \Theta\right],\ t = 1,2,3,.....,$$

beklenen değeri de $E\left[\mu_t \ \Theta\ \right] = \mu_t$ olarak tanımlanmış olsun.

$\psi : \mathbb{R}^T \to \mathbb{R}$ ölçülebilir fonksiyonları arasında

$$E\left[\exp\left(-c\left(\mu_{T+1}(\Theta) - \psi(N_{i1}, N_{i2}, ..., N_{iT}\right)\right)\right]$$

beklenen değerini minimum yapan ve

$$E\left[\psi(N_{i1}, N_{i2}, ..., N_{iT}\right] = \mu_{T+1}$$

şartını sağlayan $\psi(N_{i1}, N_{i2}, ..., N_{iT})$ fonksiyonu,

$$\psi(N_{i1},N_{i2},....,N_{iT}) = \mu_{T+1} + \frac{1}{c}\begin{pmatrix} E\left[\ell nE\left[\exp\left(-c\mu_{T+1}(\Theta)\right)\middle| N_{i1},N_{i2}..,N_{iT}\right]\right] \\ -\ell nE\left[\exp\left(-c\mu_{T+1}(\Theta)\right)\middle| N_{i1},N_{i2}..,N_{iT}\right] \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

değerine eşittir. Bu fonksiyona Önerme 1. de verilen fonksiyonla karışmaması için bundan sonra Ψ_2 denilecektir [29].

Burada yer alan $E\left[\Psi(N_{i1},N_{i2}..,N_{iT})\right] = \mu_{T+1}$ şartı, finansal dengenin sağlanması için gereklidir.

Karesel kayıp fonksiyonunun kullanıldığı modellerde görülen en önemli eksiklik "cezaların fazlasıyla yüksek olması" idi. Denuit, M., ve Dhaene, J., [4] ile Bermudez ve diğerleri [29] çalışmalarında üstel kayıp fonksiyonunu kullanarak cezaların daha uygulanabilir düzeylerde belirlendiği bir model oluşturmuşlardır.

Morillo, I. ve Bermudez, L. [31] Ters-Gauss dağılımı ile modelledikleri bonus-malus sisteminde üstel kayıp fonksiyonunu kullanmıştır.

Karesel kayıp fonksiyonu ve üstel kayıp fonksiyonları dışında mutlak değer kayıp ve 4. dereceden kayıp fonksiyonlarının da kullanıldığı çalışmalar görülmüştür [32]. Ancak bu fonksiyonlarla oluşturulan bonus-malus (ödül-ceza) sisteminde finansal denge kriteri sağlanamamıştır.

Önerme 2.de elde edilen sonucu kredibilite modeline uygulandığında,

$$X_t = N_{it}\ , \quad \mu_t(\Theta_i) = \lambda_{it}\Theta_i$$

ve optimal tahmin edici de

$$\Psi_2\left(N_{i1},....,N_{iT_i}\right) = \lambda_{i,T_i+1} + \frac{1}{c}\begin{pmatrix} E\left[\ell nE\left[\exp\left(-c\lambda_{i,T_i+1}\Theta_i\right)\middle| N_{i1},....,N_{iT_i}\right]\right] \\ -\ell nE\left[\exp\left(-c\lambda_{i,T_i+1}\Theta_i\right)\middle| N_{i1},....,N_{iT_i}\right] \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

olur [29].

3.1.5. Üstel Kayıp Fonksiyonu ile Poisson-Gamma Karma Kredibilite Modeli

Üstel kayıp fonksiyonu yukarıda oluşturulan Poisson-Gamma Karma Kredibilite modeline uygulandığında, yani

$$\Theta_i \approx \text{Gamma}(a,a)$$

ve

$$\Theta_i \mid N_{i\bullet} \approx \text{Gamma}(a+N_{i\bullet}, a+\lambda_{i\bullet})$$

alındığında, $\Theta_i \mid N_{i\bullet}$ dağılımının moment türeten fonksiyonu olan

$$M(t)=\left(1-\frac{t}{a+\lambda_{i\bullet}}\right)^{-(a+N_{i\bullet})}, t<a+\lambda_{i\bullet}$$

kullanılarak Eş (3.16) da verilen tahmin edicide yer alan

$$E\left[\exp\left(-c\lambda_{i,T_i+1}\Theta_i\right)\middle|N_{i1},..,N_{iT_i}\right]=\left(\frac{a+\lambda_{i\bullet}}{a+\lambda_{i\bullet}+c\lambda_{i,T_i+1}}\right)^{a+N_{i\bullet}}$$

ifadesinin logaritması

$$\ell nE\left[\exp\left(-c\lambda_{i,T_i+1}\Theta_i\right)\middle|N_{i1},..,N_{iT_i}\right]=-\left(a+N_{i\bullet}\right)\ell n\left(1+\frac{c\lambda_{i,T_i+1}}{a+\lambda_{i\bullet}}\right) \tag{3.17}$$

ve logaritmasının beklenen değeri de

$$E\left[\ell nE\left[\exp\left(-c\lambda_{i,T_i+1}\Theta_i\right)\middle|N_{i1},..,N_{iT_i}\right]\right]=-\left(a+\lambda_{i\bullet}\right)\ell n\left(1+\frac{c\lambda_{i,T_i+1}}{a+\lambda_{i\bullet}}\right) \tag{3.18}$$

olmaktadır. Sonuç olarak tahmin edici;

$$\Psi_2\left(k_{i1},..,k_{iT_i}\right)=\lambda_{i,T_i+1}+\frac{k_{i\bullet}-\lambda_{i\bullet}}{c}\ell n\left(1+\frac{c\lambda_{i,T_i+1}}{a+\lambda_{i\bullet}}\right) \tag{3.19}$$

olarak bulunur.

Burada dikkat edileceği üzere optimal tahmin edici,

$$E\left(N_{i,T_i+1}\right)=\lambda_{i,T_i+1}$$

önsel beklentisine bir düzeltme faktörünün eklenmesiyle elde edilmektedir. Sigortalı beklenenden daha fazla hasar getirmişse ($k_{i\bullet}>\lambda_{i\bullet}$) bu düzeltme pozitif, aksi durumda da negatif bir etkiye sahip olacaktır.

Karesel kayıp fonksiyonu ve üstel kayıp fonksiyonu ile elde edilen tahmin ediciler, Ψ_1 ve Ψ_2 karşılaştırıldığında;

$c\geq 0$ için, Eş(3.19) daki Ψ_2'de yer alan

$$\ell n\left(1+\frac{c\lambda_{i,T_i+1}}{a+\lambda_{i\bullet}}\right)\leq\frac{c\lambda_{i,T_i+1}}{a+\lambda_{i\bullet}} \tag{3.20}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} k_{i\bullet}>\lambda_{i\bullet} \text{ için, } \Psi_2\left(k_{i1},..,k_{iT_i}\right)\leq\Psi_1\left(k_{i1},..,k_{iT_i}\right)\\ k_{i\bullet}<\lambda_{i\bullet} \text{ için, } \Psi_2\left(k_{i1},..,k_{iT_i}\right)\geq\Psi_1\left(k_{i1},..,k_{iT_i}\right)\end{aligned} \tag{3.21}$$

olduğu görülmektedir. Yani, üstel kayıp fonksiyonunda ceza daha küçük, ödül daha büyük olarak görülmektedir [1].

3.2. Bonus-Malus Sistemi

Aktüerin en önemli görevlerinden biri hasar yükünü poliçe sahipleri arasında adil bir şekilde paylaştırmaktır. Bunun için tüm poliçeleri risk sınıflarına ayırarak aynı sınıfta olan poliçe sahiplerinin aynı primi ödemelerini sağlamalıdır. Ancak ne kadar detaylı bir sınıflandırma yapılırsa yapılsın daha önceki bölümlerde söz edilen sebeplerden dolayı risk sınıflarında hala heterojenlik söz konusu olmaktadır. Bugün birçok ülkede, hasar yapan sigortalıların ek primle cezalandırıldıkları, hasarsız sigortalıların prim indirimleri ile ödüllendirildikleri ödül-ceza (bonus-malus) sistemleri uygulanmaktadır. Bölüm 3.1'de, kredibilite kuramı yardımıyla sigortalıların geçmiş hasar tecrübesi dikkate alınarak bayezci prim elde edilmiştir.

Ancak kredibilite primleri, matematiksel olarak karmaşık olması sebebiyle sigortalılar tarafından anlaşılması zor olduğundan sigorta şirketlerince kullanılmamıştır. Bu sebeple kredibilite yönteminin ticari şekli olarak görülen bonus-malus sistemleri geliştirilmiştir. Gelişmiş ülkelerde trafik sigortalarında, sigortalıların kaza sayılarına göre sürprim (ceza) ödedikleri, buna karşın kazasız geçen bir/birkaç yıla karşılık prim indiriminin (ödül) yapıldığı derecelendirme sistemleri uygulanmaktadır. Bu sistemle, bir yandan, sigortalıların daha dikkatli araba kullanmasının teşvik edilmesi, diğer taraftan bireysel risklerin daha iyi ölçülmesi amaçlanmıştır.

Ödül-ceza sisteminde, her birinin prim katsayısı (düzeyi) daha önce belirlenmiş olan sonlu sayıda basamak vardır. Basamaklar arasındaki geçiş kuralları da önceden belirlenmiştir. Sigortalının o yıl içinde bulunduğu basamak ve yine aynı yıl içindeki kaza sayısı dikkate alınarak, sistemin geçiş kuralları uyarınca sigortalının bir sonraki yıl üst ya da alt basamaklara, bir anlamda yeni prim sınıfına geçişi sağlanmaktadır.

Sigortalının sistemdeki mevcut seviyesi ve içinde bulunduğu yıl içindeki hasar sayısı, bir sonraki poliçe yılındaki basamak seviyesini belirlemek için yeterli olmaktadır. Yani t+1. yıldaki seviyesi t. yıldaki seviyesi ile t. yıldaki hasar sayısına göre belirlenmektedir. Daha önceki yıllara ait (1,2,……,t-1) hasar sayılarının herhangi bir etkisi bulunmamaktadır. Bu durum Markov zincirlerinin hafızasızlık özelliğinden kaynaklanmaktadır [7].

Geçiş yapılan sınıfın düzeltme katsayısı ile sigortalının gözlemlenebilir karakteristiklerinden elde edilen (önsel sınıflandırma sonucunda) baz primin, λ_{it}, çarpılması suretiyle sigortalının yeni dönemdeki primi elde edilir. ℓ basamağının prim katsayısı r_ℓ ile gösterilmektedir. Buna göre ℓ sınıfına geçen bir sigortalının yeni primi, r_ℓ ile baz priminin çarpılması sonucunda elde edilir. Buradaki temel amaç, önsel sınıflandırma ile oluşturulan risk sınıflarındaki kalıntı heterojenliğin sonsal düzeltme ile giderilmesidir. Önsel fiyatlandırmada ne kadar çok değişken tanımlanırsa, diğer bir deyişle sınıf içerisindeki heterojenlik ne kadar az olursa, sonsal fiyatlandırmanın (düzeltme) şiddeti de o derece az olmaktadır.

Kredibilite modellerinde olduğu gibi bonus-malus sisteminde de finansal dengenin elde edilmesi büyük önem taşımaktadır. Bu özellik sağlandığında sınıflara ait prim katsayılarının ortalaması %100 olacaktır. Bir başka deyişle ödenen primler, sigortalıların hasar sayılarına göre değişiklik gösterirken şirketin bu sigortalılardan aldığı toplam prim tutarı aynı kalacaktır.

Çizelge 3.1'de bir hasarın 3 basamak ile cezalandırıldığı, hasarsız bir yılın da 1 basamak ile ödüllendirildiği bir bonus-malus sistemine örnek verilmiştir.

Çizelge 3.1.Örnek Bir Bonus-Malus Tablosu

Başlangıç seviyesi	0 Hasar	1 Hasar	2 Hasar	3 veya daha fazla hasar
	Hasar sayısına göre belirlenen yeni seviye			
5	4	5	5	5
4	3	5	5	5
3	2	5	5	5
2	1	5	5	5
1	0	4	5	5
0	0	3	5	5

Bu sistemde 6 tane seviye (basamak) bulunmaktadır. Seviyeler arttıkça primler de artmaktadır. Hasarsız geçen bir yılın sonunda sigortalı bir alt sınıfa, yıl içinde bir hasar olması durumunda üç kademe üst sınıfa, iki hasar veya daha fazla hasar olması durumunda da en üst sınıfa geçiş olmaktadır. Yani hasar olmadığı durumda 1 kademe ödül, hasar olduğu durumda ise hasar başına 3 kademe ceza verilmekte, 2 veya daha fazla hasarda en üst basamağa çıkılmaktadır. Başlangıç seviyesi bazı sistemlerde sigortalının gözlemlenebilen bir karakteristiğine göre belirlenmekte, bazılarında da her yeni sürücü aynı seviyeden başlatılmaktadır.

3.2.1. Modelin Oluşturulması

Bu tez çalışmasında oluşturulacak bonus-malus sisteminde, 0'dan z'ye kadar z +1 seviye olduğu ve yeni bir sürücünün sisteme hangi basamaktan gireceğinin önceden belirlendiği varsayılmaktadır. Hasarsız geçen her yıl "1" bonus seviyesi ile ödüllendirilmekte, yani sigortalı, bulunduğu seviyenin bir basamak altına inmektedir. Hasar durumunda ise sigortalının, her bir hasar için belirli sayıda (β) basamak çıktığı varsayılmaktadır.(örn. Her bir hasar için $\beta = 3$ basamak cezası gibi). Bu varsayım, problemi matematiksel anlamda kolaylaştırmak amacıyla yapılmaktadır. Sigortalının, hasarsız geçen belirli bir yıl sonra, prim indiriminin maksimum olduğu 0 seviyesine inebilme imkanı vardır. Kredibilite modelleri ile oluşturulan tablolarda hasarların yıllara göre dağılımına bakılmaksızın, sigortalının geçmişteki toplam hasar sayısı dikkate alınmaktadır. Bonus-malus sisteminde ise sadece primin belirleneceği yıldan bir önceki yılın hasar sayısı ile o yıl bulunduğu basamağa bakılmaktadır.

Yeni sürücülerin tablonun ilk basamağından yani ℓ_0'dan başladığı varsayılmaktadır. Başlangıç seviyesi her zaman ilk seviye olmak zorunda değildir, sigortalının tecrübesine veya önsel sınıflandırmada daha önce kullanılmayan bir risk karakteristiğine göre de belirlenebilmektedir. Z_k, sigortalının k+1. yılda yani (k,k+1) zaman aralığında bulunacağı seviyeyi göstermektedir. Bu sistemde herhangi bir sigortalının izleyeceği yol $Z_1, Z_2, ...$ şeklinde ifade edilen raslantı değişkenleri dizisiyle belirlenmektedir, öyle ki her biri $\{0,1,....,z\}$ değerlerinden birini almaktadır. Sigortalının (k-1, k) dönemindeki hasar sayısı olan N_k bilindiğinde, (k, k+1) döneminde yer alacağı basamak seviyesi tespit edilmektedir. Varsayımımıza göre $Z_0 = \ell_0$ dır. Buna göre Z_k aşağıdaki şekilde formüle edilebilir:

$$Z_k = \begin{cases} \max\{Z_{k-1} - 1, 0\} & N_k = 0 \text{ ise} \\ \min\{Z_{k-1} + N_k * \beta, \ z\} & N_k \geq 1 \text{ ise} \end{cases} \tag{3.22}$$

Bir seviyeden başka bir seviyeye geçiş olasılığı, içinde bulunulan yıldaki hasar sayısına bağlı olduğundan k hasar bildirildiği düşünüldüğünde,

$$t_{ij}(m) = \begin{cases} 1 & \text{m hasarla i seviyesinden j seviyesine geçiş varsa} \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \tag{3.23}$$

şeklinde ifade edilen seviyeler arasındaki geçişler bir matris formatında ($T(m)$ matrisi)) gösterilirdiğinde; 0 ve 1 lerden oluşan

$$T(m) = \begin{pmatrix} t_{00}(m) & t_{01}(m)........t_{0z}(m) \\ t_{10}(m) & t_{11}(m).........t_{1z}(m) \\ . & \\ t_{z0}(m) & t_{z1}(m)........t_{zz}(m) \end{pmatrix} \tag{3.24}$$

matrisinin her satırında sadece bir tane 1 olacaktır [4].

Örneğin hasarsız bir yıl için 1 seviye inilen, hasar durumunda ise her hasar için 2 seviye çıkılan 6 basamaklı bir bonus-malus tablosu için T(m) matrisleri aşağıdaki şekilde olacaktır.

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{0}) = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{T}(\boldsymbol{1}) = \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{T}(\boldsymbol{2}) = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{k}) = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix} \quad k \geq 3 \text{ için.}$$

T(0) matrisinde, 0 seviyesinde bulunan sigortalı 0 hasar getirdiğinde, daha alt seviyeye inme imkanı olmadığından yine 0 seviyesinde kalacağından

$t_{00}(0) = 1$

değerini alacaktır. Birinci seviyede bulunan sigortalı 0 hasar getirdiğinde bir alt seviye olan 0 seviyesine ineceğinden

$$t_{10}(0)=1$$

olacaktır. Aynı şekilde ikinci seviyede bulunan sigortalı 0 hasarla birinci seviyeye, üçüncü seviyede bulunan sigortalı 0 hasarla ikinci seviyeye, dördüncü seviyede bulunan sigortalı 0 hasarla üçüncü seviyeye, beşinci seviyede bulunan sigortalı da 0 hasarla dördüncü seviyeye ineceğinden inme olasılıklarını gösteren

$$t_{21}(0)=t_{32}(0)=t_{43}(0)=t_{54}(0)=1$$

olacaktır.

3.2.2. Geçiş Olasılıkları

Sigortalının her bir dönemdeki hasar sayılarını gösteren $N_1,N_2,...$ rastlantı değişkenlerinin bağımsız ve x parametresiyle Poisson dağıldığı varsayılsın. Bir sigortalının bonus-malus tablosunda izleyeceği yolu gösteren $Z_1,Z_2,....$ rastlantı değişkenleri dizisi ise yıllık beklenen hasar sıklığı olan x'e bağımlılıklarının vurgulanması amacıyla $Z_1(x),Z_2(x),....$ şeklinde gösterilsin.

Yıllık ortalama hasar sıklığı x olan bir sigortalının, ℓ_1 seviyesinden ℓ_2 seviyesine geçiş olasılığı $p_{\ell_1\ell_2}(x)$ ile gösterilsin. Burada ℓ_1 ,sigortalının k. zamanda bulunduğu seviye, ℓ_2 de k+1. zamanda bulunduğu seviyeyi göstermektedir. Bu olasılık, $p_{\ell_1\ell_2}(x)=\Pr\left[Z_{k+1}(x)=\ell_2 \middle| Z_k(x)=\ell_1\right]$ $\ell_1,\ell_2\in\{0,1,......,z\}$ biçimindedir.

Burada ℓ_1 ve ℓ_2 değerleri için $p_{\ell_1\ell_2}(x)\geq 0$, ℓ_1 den tüm seviyelere geçiş olasılıklarının toplamı da 1 olacaktır.

$$\sum_{\ell_2=0}^{z} p_{\ell_1\ell_2}(x)=1$$

Geçiş olasılıkları, yukarıda tanımlanan $t_{ij}(m)$ ler cinsinden ifade edildiğinde,

$$p_{\ell_1\ell_2}(x)=\sum_{m=0}^{+\infty}\Pr\left[Z_{k+1}(x)=\ell_2 \middle| N_{k+1}=m,\, Z_k(x)=\ell_1\right]\Pr\left[N_{k+1}=m \middle| Z_k(x)=\ell_1\right]$$
$$=\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{x^m}{m!}e^{-x}\,t_{\ell_1\ell_2}(m) \tag{3.25}$$

Eş.(3.25)'de $Z_k(x)$, sigortalının k. dönemde bulunduğu seviye olduğundan o zamana kadarki hasar sayılarına, yani $N_1,N_2,.....,N_k$ lara bağlıdır, ancak N_{k+1} 'den bağımsızdır. Böylelikle,

$$\Pr\left[N_{k+1}=m \middle| Z_k(x)=\ell_1\right]=\Pr\left[N_{k+1}=m\right]=\frac{x^m}{m!}e^{-x}$$

olur. Beklenen hasar sıklığı x olan bir sigortalının herhangi bir zamanda

$\ell_1,\ell_2,.......,\ell_n$ seviyelerinden birinde olması olasılığı, aslında ℓ_0'dan başlayıp, $\ell_1,\ell_2,.......,\ell_{n-1}$ seviyelerinden geçerek ℓ_n'e ulaşma olasılığına eşittir.

Yani;

$$\Pr\left[Z_1(x)=\ell_1,Z_2(x)=\ell_2,...,Z_n(x)=\ell_n \middle| Z_0(x)=\ell_0\right]=p_{\ell_0\ell_1}(x).p_{\ell_1\ell_2}(x)...p_{\ell_{n-1}\ell_n}(x) \tag{3.26}$$

Aynı zamanda,

$$\Pr\left[Z_n(x)=\ell_n \middle| Z_{n-1}(x)=\ell_{n-1},.......,Z_0(x)=\ell_0\right]=p_{\ell_{n-1}\ell_n}(x)$$

olasılığından da anlaşılacağı üzere, sistemde herhangi bir seviyeye geçme olasılığını belirlemek için sadece sistemdeki mevcut seviyenin bilinmesi yeterli olacaktır. Tabiki ℓ_0'dan ℓ_{n-1}'e geçiş olasılığı varsa,

$$\Pr\left[Z_{n-1}(x)=\ell_{n-1},.......,Z_0(x)=\ell_0\right]>0$$

ise, bunu söylemek mümkün olacak, yani $p_{\ell_{n-1}\ell_n}(x)$ olasılığı belirlenebilecektir [3].

3.2.3. Geçiş Matrisi

Geçiş olasılıklarından oluşturulan

$$M(x)=\begin{pmatrix} p_{00}(x) \; p_{01}(x)..........p_{0z}(x) \\ p_{10}(x) \; p_{11}(x)..........p_{1z}(x) \\ . \\ p_{z0}(x) \; p_{z1}(x)..........p_{zz}(x) \end{pmatrix} \tag{3.27}$$

matrisi bir adımda geçiş matrisi olarak tanımlanmaktadır. Burada yer alan olasılıklar sıfıra eşit ya da sıfırdan büyük ve satır toplamları 1 e eşit olduğundan stokastik bir matristir. Bu matris hasar sayısının Poisson (x) dağılımlı olduğu varsayıldığında

$$M(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}e^{-x}\,T(k) \tag{3.28}$$

şeklinde ifade edilmektedir. Burada N_t'lerin bağımsız olduğu ve Poisson dağıldığı varsayımı devam etmektedir [2].

Geçiş kuralları yukarıda verilen; hasarsız bir yıl için bir seviye inilen, hasar durumunda ise her hasar için 2 seviye çıkılan 6 basamaklı bir bonus-malus tablosu için bir adımda geçiş matrisi

$$M(x)=\begin{pmatrix} e^{-x} & 0 & xe^{-x} & 0 & \frac{x^2}{2}e^{-x} & 1-e^{-x}\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right) \\ e^{-x} & 0 & 0 & xe^{-x} & 0 & 1-e^{-x}(1+x) \\ 0 & e^{-x} & 0 & 0 & xe^{-x} & 1-e^{-x}(1+x) \\ 0 & 0 & e^{-x} & 0 & 0 & 1-e^{-x} \\ 0 & 0 & 0 & e^{-x} & 0 & 1-e^{-x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-x} & 1-e^{-x} \end{pmatrix} \tag{3.29}$$

biçimindedir. 0 seviyesinde bulunan bir sigortalı hasarsız bir yıl sonunda sıfır hasar olasılığı (e^{-x}) ile yine 0 seviyesinde kalacaktır.

1 hasar getirmesi durumunda 1 hasar olasılığı ile (xe^{-x}) ikinci basamağa çıkacaktır.

Aynı şekilde 2 hasar getirmesi durumunda iki hasar olasılığı ($\frac{x^2}{2}e^{-x}$) ile 4. seviyeye,

3 ve daha fazla hasar getirmesi durumunda da 3 ve daha fazla hasar getirme olasılığı $1-e^{-x}\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)$ ile son seviye olan 5. seviyeye

çıkacaktır. Matrisin ilk satırı bu şekilde oluşturulmuştur.

3.2.4. n-Adım Geçiş Olasılıkları

$p_{ij}^{(n)}(x)=\Pr\left[Z_{k+n}(x)=j \middle| Z_k(x)=i\right]$ olasılığı, n adımda i seviyesinden j seviyesine geçiş olasılığını vermektedir. Bu olasılık

$p_{ij}^{(n)}(x)=\sum_{i_1=0}^{z}\sum_{i_2=0}^{z}\ldots\ldots\sum_{i_{n-1}=0}^{z}p_{ii_1}(x)p_{i_1i_2}(x)\ldots\ldots.p_{i_{n-1}j}(x)$ i den j ye mümkün olan bütün geçiş yolları ile ulaşabilme olasılıklarını içermektedir. Buna göre n-adım geçiş matrisi de

$$M^{(n)}(x)=\begin{pmatrix} p_{00}^{(n)}(x) & p_{01}^{(n)}(x) & \ldots\ldots\ldots p_{0z}^{(n)}(x) \\ p_{10}^{(n)}(x) & p_{11}^{(n)}(x) & \ldots\ldots\ldots p_{1z}^{(n)}(x) \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ p_{z0}^{(n)}(x) & p_{z1}^{(n)}(x) & \ldots\ldots\ldots p_{zz}^{(n)}(x) \end{pmatrix} \tag{3.30}$$

şeklinde oluşturulmaktadır [2].

Özellik 2: n ve m=0,1,…olmak üzere $M^{(n)}(x)=M(x).M(x)\ldots\ldots.M(x)=M^{n}(x)$ ve dolayısıyla $M^{(n+m)}(x)=M^{(n)}(x)M^{(m)}(x)$ dir.

Chapman Kolmogorov adı verilen bu özellikle, bir adımda geçiş matrisi olan $M(x)$'in n. kuvvetinin alınmasıyla n adım geçiş matrisi elde edilir, öyle ki bu matrisin $p_{ij}^{(n)}(x)$ olarak gösterilen ij. elemanı, i den j ye n adımda geçiş olasılığını vermektedir. Bu eşitliği kullanarak (k, k+1) zaman aralığında (k+1.yıl) sigortalının bulunduğu seviyeyi gösteren Z_k raslantı değişkeninin olasılık dağılımı,

$$\mathbf{p}^{(k)}(x) = \left(\Pr\left[Z_k(x)=0\right], \Pr\left[Z_k(x)=1\right], \ldots\ldots\ldots, \Pr\left[Z_k(x)=z\right]\right)^T$$

biçiminde ve

$$M^{(k+n)}(x) = M^{(k)}(x)M^{n}(x)$$

eşitliğini sağlamaktadır.

3.2.5. Ergodiklik Özelliği ve Düzenli Geçiş Matrisi

Geçiş matrisi M olan bir Markov zinciri için M^{n_0} matrisinin tüm gözeleri (elemanları) pozitif olacak şekilde bir $n_0 \geq 1$ değeri varsa, bu zincire ergodik, M geçiş matrisine de düzenli geçiş matrisi denilmektedir. Bu koşul, herhangi bir i seviyesinden j seviyesine sonlu sayıda adımla geçiş olasılığının pozitif olması anlamına gelmektedir. Başka bir deyişle Markov zincirinin herhangi bir durumundan başlamak üzere diğer durumların hepsine sonlu sayıda adımla gidebilmek mümkündür.

Bütün bonus-malus tablolarının, sigortalının hasarsız geçen bir dönemin sonunda aynı seviyede kaldığı bir “en iyi seviye” si vardır. Burada 0 seviyesi en iyi seviye olarak kurgulanmıştır. Herhangi bir seviyeden başlayarak, hasarsız geçen belirli sayıda yıldan sonra bu seviyeye ulaşmak mümkündür. Yani yeterince büyük bir n sayısı için $p_{\ell 0}^{(n)}(x) > 0$ olmaktadır [3].

3.2.6. Bonus-Malus Sistemlerinin Uzun Dönemdeki Durumu

Yıllık hasar sayılarının bağımsız ve Poisson dağılımına sahip oldukları varsayıldığından, her sigortalı nihai olarak, yıllık beklenen hasar sıklığı x'e karşılık gelen bir denge seviyesine ulaşacaktır. Yani sistemin uzun vadede durağan olması beklenmektedir.

Örneğin Eş.(3.29)'daki geçiş matrisi M için x=0,1 alındığında matrisin belirli bir kuvvetten sonraki bütün kuvvetlerinin aynı olduğu, yani

$$\mathbf{M}^n(0,1)=\begin{pmatrix} 0,782901 & 0,082338 & 0,090998 & 0,022278 & 0,016387 & 0,005097 \\ 0,782901 & 0,082338 & 0,090998 & 0,022278 & 0,016387 & 0,005097 \\ 0,782901 & 0,082338 & 0,090998 & 0,022278 & 0,016387 & 0,005097 \\ 0,782901 & 0,082338 & 0,090998 & 0,022278 & 0,016387 & 0,005097 \\ 0,782901 & 0,082338 & 0,090998 & 0,022278 & 0,016387 & 0,005097 \\ 0,782901 & 0,082338 & 0,090998 & 0,022278 & 0,016387 & 0,005097 \end{pmatrix} \tag{3.31}$$

matrisine (durağan durum matrisi) yakınsadığı görülmektedir. Başka bir deyişle, başlangıç noktası ne olursa olsun, durağan duruma ulaştıktan sonraki herhangi bir n için,

$$\mathbf{M}^n(0,1)=(0,782901\ \ 0,082338\ \ 0,090998\ \ 0,022278\ \ 0,016387\ \ 0,005097)^{\mathrm{T}}$$

olacaktır. Bu durumda durağan durumdan sonraki bir zamanda, sigortalıların yaklaşık %78,29'u 1. seviyede, %8,23'ü 2. seviyede, %9,09'u 3. seviyede,………..,%0,5'i de 6. seviyede olacaktır [1].

Yukarıda örnekle açıklanan durağan durum dağılımı,

$$\Pi(x)=\left(\pi_0(x),\pi_1(x),\pi_2(x),........,\pi_z(x)\right)^{\mathrm{T}}$$

vektörü ile tanımlanmaktadır. Bu vektörün herhangi bir $\pi_\ell(x)$ elemanı, ortalama hasar sıklığı x olan bir sigortalının ℓ seviyesinde bulunmasının durağan durum olasılığıdır ve $\pi_\ell\ x=\lim_{n\to\infty} p^{(n)}_{\ell_1\ell}(x)$ limiti ile ifade edilir. Yani, dönem sayısı sonsuza gittikçe sigortalının ℓ seviyesinde olması olasılığının limit değeri olarak tanımlanmaktadır. Burada durağan durum dağılımının başlangıç seviyesine bağlı olmadığına dikkat edilmesi gerekmektedir.

Bir adım geçiş matrisi $M(x)$'in n. kuvveti olan $M^n(x)$ matrisi tüm satırları aynı olan $\boldsymbol{\Pi}(x)$ vektörüne yakınsamakta, yani

$$\boldsymbol{\Pi}(x) = \lim_{n\to\infty} M^n \quad x$$

vektörün elemanları olan $\pi_\ell(x)$ olasılıklarının hesaplanmasına gelince; i'den j'ye n+1 adımda geçiş olasılığı,

$$p_{ij}^{(n+1)}(x) = \sum_{\ell=0}^{z} p_{i\ell}^{(n)}(x) p_{\ell j}(x)$$

şeklinde n. adımda ℓ seviyesinde olacak şekilde koşullu olarak yazılabilir. Eşitliğin her iki tarafının n sonsuza giderken limiti alındığında,

$$\boldsymbol{\pi}_j \ x = \sum_{\ell=0}^{z} \pi_\ell \ x \ p_{\ell j} \ x \qquad , j \in \ 0,1,......, z \tag{3.32}$$

olasılığı elde edilir. Bu olasılığın matris olarak gösterimi ise,

$$\begin{cases} \pi^T(x) = \pi^T(\theta)M(x) \\ \pi^T(x)e = 1 \end{cases} \tag{3.33}$$

şeklindedir. Burada "e" her elemanı 1 olan sütun vektörüdür. $\pi(\theta)$, $M(\theta)$ geçiş matrisinin sol öz vektörüdür [2].

3.2.7.Rolski-Schmidli-Schmidt-Teugels Formulü

E, tüm gözeleri 1 olan bir (z+1)x(z+1) matris, e de tüm gözeleri 1 olan sütun matris olsun.

Özellik 3: $M(x)$ stokastik matrisi düzenli olsun.Bu durumda $\mathbf{I} - \mathbf{M}(\mathbf{x}) + \mathbf{E}$ matrisi tersi alınabilir bir matristir ve

$$\begin{cases} \pi^T(x) = \pi^T(x)M(x) \\ \pi^T(x)e = 1 \end{cases}$$

sisteminin çözümü

$\pi^T(x) = e^T\left(I - M(x) + E\right)^{-1}$ olarak elde edilmektedir [33].

Tablodaki seviye sayısını gösteren z+1 küçük ise $\mathbf{I} - \mathbf{M}(\mathbf{x}) + \mathbf{E}$ matrisinin tersi kolaylıkla alınabilmektedir. z+1 in büyük olması durumunda Gauss Eliminasyon yöntemi gibi nümerik yöntemler kullanılmaktadır.

3.2.8. Düzeltme Katsayıları

Bonus-malus tablosunda her ℓ seviyesi için bir r_ℓ düzeltme katsayısı belirlenmektedir. Buna göre, ℓ seviyesinde bulunan bir sigortalının ödeyeceği prim, gözlemlenebilir karakteristiklerine göre elde edilen önsel primin r_ℓ katı olarak hesaplanmaktadır.

Önsel sınıflandırılması yapılmış bir grubun düzeltme katsayıları (r_ℓ' ler) bulunurken amaç, bu katsayıyı portföyden rasgele seçilen bir sigortalının risk faktörü olan θ ya mümkün olduğunca yakın bir değer olarak belirlemektir. Bu yakınlık daha önce de bahsedildiği üzere kayıp fonksiyonları ile ifade edilmektedir.

3.2.9.Bayes’ci Düzeltme Katsayıları

Bonus-malus tablosunda sigortalıların ödediği prim gerçek prime ne kadar yakınsa, bu sistem iyi ve kötü sürücüleri birbirinden ayırt etmede o derece başarılı olarak nitelendirilmektedir.

Portföyden rasgele seçilen bir sigortalının, önsel beklenen hasar sıklığı $\Lambda = \lambda$, önsel seçimde kullanılmayan risk faktörlerinin kalıntı etkisinin de $\Theta = \theta$ olduğu varsayıldığında, gerçek yıllık beklenen hasar sıklığı da $\theta\lambda$ olur. Rastgele etkiyi gösteren Θ, riski etkileyen gizli karakteristiklerin kalıntı etkisini temsil ettiğinden Λ ve Θ’nın karşılıklı bağımsız oldukları varsayılmaktadır. w_k, yıllık beklenen hasar sıklığı λ_k olan k. sınıfın toplam portföydeki ağırlığı olsun. Yani $\Pr(\Lambda = \lambda_k) = w_k$

olur. L ise rasgele seçilmiş bir sigortalının durağan duruma ulaştıktan sonra bulunduğu seviyeyi göstermektedir. L'nin dağılımı,

$$\Pr(L=\ell)=\sum_k w_k \int_0^\infty \pi_\ell\left(\lambda_k\theta\right) dF_\theta\left(\theta\right)$$

olarak ifade edilmektedir. Bu olasılık aynı zamanda ℓ seviyesindeki sigortalıların oranını göstermektedir. Burada, sigortalının riske yatkınlık ölçüsü Θ ile ifade edildiğinden ve sigortalının hasar sıklığı bu değer ile çarpıldığından, yapılan işlem aslında bir düzeltme işlemidir. Bu durumda Θ "gerçek düzeltme faktörü" olarak nitelendirilebilir. Diğer taraftan her bir basamak için belirlenecek olan r_ℓ düzeltme faktörü de bir anlamda tahmin edilecek olan düzeltme faktörü olacaktır. Yapılacak tahmin işleminde de amaç ikisi arasındaki farkın karesinin beklenen değerini minimize etmek olacaktır.

Yani,

$$\begin{aligned}
E\left[\left(\Theta-r_\ell\right)^2\right] &= \sum_{\ell=0}^{z} E\left[\left(\Theta-r_\ell\right)^2 \middle| L=\ell\right]\Pr\left[L=\ell\right] \\
&= \sum_{\ell=0}^{z}\int_0^\infty \left(\theta-r_\ell\right)^2 \Pr\left[L=\ell \middle| \Theta=\theta\right] dF_\Theta\left(\theta\right) \\
&= \sum_k w_k \int_0^\infty \sum_{\ell=0}^{z}\left(\theta-r_\ell\right)^2 \pi_\ell\left(\lambda_k\theta\right) dF_\theta\left(\theta\right)
\end{aligned} \tag{3.34}$$

eşitliğinin minimize edilmesiyle elde edilen sonuç;

$$\begin{aligned}
r_\ell &= E\left[\Theta \middle| L=\ell\right] \\
&= \left[E\left[\Theta \middle| L=\ell,\Lambda\right] \middle| L=\ell\right] \\
&= \sum_k E\left[\Theta \middle| L=\ell,\Lambda=\lambda_k\right]\Pr\left[\Lambda=\lambda_k \middle| L=\ell\right] \\
&= \sum_k \int_0^\infty \theta \frac{\Pr\left[L=\ell \middle| \Theta=\theta,\Lambda=\lambda_k\right]}{\Pr\left[L=\ell,\Lambda=\lambda_k\right]} dF_\Theta\left(\theta\right)\frac{\Pr\left[\Lambda=\lambda_k, L=\ell\right]}{\Pr\left[L=\ell\right]}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\sum_k w_k \int_0^\infty \theta\,\pi_\ell\left(\lambda_k\theta\right) dF_\theta\left(\theta\right)}{\sum_k w_k \int_0^\infty \pi_\ell\left(\lambda_k\,\theta\right) dF_\theta\left(\theta\right)} \tag{3.35}$$

olur. Burada;

$$E[r_\ell] = E\left[E\left[\Theta \middle| L\right]\right] = E[\Theta] = 1$$

olduğundan finansal denge kriteri sağlanmış olmaktadır [34]. Sigorta şirketinin önsel bir fiyatlandırma yapmaması durumunda tüm λ_k değerleri $E[\Lambda] = \bar{\lambda}$ 'ya eşit olacaktır. Bu durumda Eş.(3.35),

$$r_\ell = \frac{\int_0^\infty \theta \pi_\ell\left(\bar{\lambda}\theta\right) dF_\theta(\theta)}{\int_0^\infty \pi_\ell\left(\bar{\lambda}\theta\right) dF_\theta(\theta)} \tag{3.36}$$

değerine eşit olacaktır, ki bu da Norberg [35]'de elde edilen formüldür.

3.3.Sonuç

Bonus-malus sisteminde sigortalının risk sınıfı ne olursa olsun, uygulanan düzeltme, ait olduğu seviyeye göre belirlendiği için önsel olarak kötü olan sigortalılar iki kez cezalandırılmış olmaktadır. Çünkü sigortalının bir yıl sonraki basamağı geçmiş hasar verisine göre belirlenmektedir. Örneğin, önsel risk karakteristiklerine göre beklenen hasar sıklığı yüksek ve şehirde yaşayan genç bir erkek, bonus-malus sisteminde de yüksek bir seviyede olacaktır. Diğer taraftan, önsel risk karakteristiklerine göre beklenen hasar sıklığı düşük ve kırsalda yaşayan orta yaşlı bir bayan, bonus-malus sisteminde de düşük bir seviyede olacaktır. Bu anlamda, bonus-malus sisteminde sigortalının yer alacağı basamak, kısmen şirketin fiyatlandırma kriterleri olarak kullandığı gözlemlenebilir karakteristikleriyle açıklanabilmektedir.

4. UYGULAMA

Trafik Sigortaları Bilgi Merkezi'nden (TRAMER) 2008-2010 yıllarında düzenlenen Karayolları Motorlu Araçlar Zorunlu Mali Sorumluluk Sigortası poliçelerine ilişkin poliçe numarası, poliçe başlangıç tarihi, sigortalının doğum yılı, hasar sayısı, cinsiyeti, sigortalı türü ve il plaka kodu bilgisi alınmıştır. Söz konusu veri kümesi incelendiğinde yıl içindeki tüm aylarda portföye yeni eklenen poliçe olduğu görülmüştür.

Uygulamanın bir yılını tamamlamış poliçeler üzerinden yapılması amacıyla, yalnızca 2008 yılının Ocak ayında başlayan poliçelerin dikkate alınmasının uygun olacağı düşünülerek, tüm analizler seçilen bu örneklem üzerinden yapılmıştır.

2008 yılı için elde edilen 3.699.157 poliçeden Ocak ayında kesilen ve verisi tam olan poliçeler seçildiğinde geriye 40.952 poliçe kalmıştır.

Verinin incelenmesi ve düzenlenmesi aşamasında Excel programı, parametre ve model tahminlerinde R 2.12.2 programı kullanılmıştır.

4.1. Hasar Sayılarının Regresyon ile Modellenmesi

Açıklayıcı değişken bilgisi eksik olan poliçeler örneklemden çıkarıldıktan sonra sigorta poliçeleri,

- yaşadıkları şehre göre iki gruba (büyük/küçük)
- yaş gruplarına göre dört gruba (18-25 yaş arası 1.Grup, 26-35 yaş arası 2.Grup, 36-50 yaş arası 3. Grup, 50 yaşından büyükler de 4. Grup),
- cinsiyetlerine göre iki gruba (kadın/erkek)

ayrılmıştır.

4.1.1. Poisson Regresyon Modeli

Bu tez çalışmasında ilk olarak hasar verisine Kesim 2.2.2'de verilen Poisson regresyon modeli oluşturulmuş, modele ilişkin parametre tahminleri Çizelge 4.1'de verilmiştir.

Çizelge 4.1. Poisson Regresyon Modeli

Açıklayıcı Değişkenler	Tahmini Değer	Standart Hata	z-Değeri	p-değeri
Sabit	-1,902	0,099	-19,190	< 2e-16
Yaş Grubu 2	-0,507	0,105	-4,816	1,47e-06
Yaş Grubu 3	-0,864	0,103	-8,383	< 2e-16
Yaş Grubu 4	-0,859	0,106	-8,084	6,27e-16
SehirK	-0,639	0,059	-10,723	< 2e-16
CinsK	-0,131	0,050	-2,578	0,00994

Çizelge 4.1'de yer alan kısmi Wald testine ilişkin son sütunda verilen p-değerlerinden de görüleceği üzere, açıklayıcı değişkenlerin tümü istatistiksel olarak anlamlı bulunmuştur.

Modelin uyum iyiliğini test etmek için artık değerlerine bakılması gerekmektedir. Artık, mevcut model ile ideal modelin (tahmin edilen değerlerle gözlenen değerlerin eşit olduğu) arasındaki farktır. Dolayısıyla artıkların küçük olması modelin veriye iyi uyduğu anlamına gelmektedir.

Çizelge 4.2. Uyum İyiliği Testi

Artık Sapma	Serbestlik Derecesi	p-değeri
14.444	40.946	1

Çizelge 4.2'de uyum iyiliği testi sonucuna göre p-değerinin bir olması Poisson regresyon modelinin veriye uyduğu anlamına gelmektedir.

Açıklayıcı değişkenlerin modele sırayla eklenmesi durumunda artıklardaki değişim Çizelge 4.3'te verilmiştir.

Çizelge 4.3. Değişkenlerin Modele Sırayla Eklenmesi Durumunda Artık

Değişkenler	**Sapma**	**Serbestlik Derecesi**	**Artık**	**p-değeri**
Değişken Yok		40.946	14.692	
Sadece Yaş Grubu	110,719	40.948	14.582	< 2.2e-16
Yaş Grubu ve Şehir	130,735	40.947	14.451	< 2.2e-16
Yaş Grubu, Şehir ve Cinsiyet	6,825	40.946	14.444	0,009

Çizelge 4.3'te ilk olarak modele yaş grubu değişkeni eklendiğinde; artıkların sapmasının 14.692 den 14.582'ye düştüğü, yani sapmada 110,719 kadarlık bir azalma olduğu görülmektedir. Aynı şekilde şehir değişkeni modele eklendiğinde; artıklarda 130,735 lik bir azalma meydana gelmiştir. Son olarak cinsiyet değişkeninin de modele eklenmesiyle modelin sapması 6,825 daha azalarak 14.444'e ulaşmıştır. Öte yandan değişkenlerin anlamlılığını ölçen p-değerlerinden de görüleceği üzere, modelde değişkenlerin tümü anlamlı bulunmuştur.

4.1.2. Düzeltilmiş (Sandwich-adjusted) Poisson Regresyon Modeli

Sayma verisi genellikle aşırı yayılım ve/ya sıfır yığılımı gösterdiğinden, Poisson regresyon modelinin kullanımı çok kısıtlı olmaktadır. Aşırı yayılımın ilk göstergesi, veride varyansın (0,06934379) ortalamaya (0,06177964) olan oranının 1,122 olarak bulunmuştur. Bu oranın birden büyük olması veride aşırı yayılım olduğunu göstermektedir.

Cameron ve Trivedi [36] varyansın ortalamaya eşit olduğu varsayımının geçerliliğini kontrol etmek amacıyla parametre tahminlerinde güçlü (robust) standard hataların kullanılarak Wald testinin yapılmasını önermiştir. Bu şekilde yapılan regresyon analizine ilişkin sonuç tablosu, Çizelge 4.4'te verilmiştir.

Çizelge 4.4. Güçlü Standart Hata ile Wald Testi

Açıklayıcı Değişkenler	**Tahmini Değer ($\hat{\beta}_j$)**	**Standart Hata ($\hat{\sigma}_j$)**	**Wald Test z-Değeri**	**%95 Güven aralığının alt sınırı**	**%95 Güven aralığının üst sınırı**
Sabit	-1,903	0,105	-18,140	-2,108	-1,697
YaşGrubu2	-0,507	0,111	-4,578	-0,724	-0,290
YaşGrubu3	-0,865	0,108	-7,974	-1,077	-0,652
YaşGrubu4	-0,860	0,112	-7,690	-1,0789	-0,641
SehirK	-0,640	0,063	-10,120	-0,764	-0,516
CinsK	-0,131	0,054	-2,442	-0,236	-0,026

Çizelge 4.4'te güçlü standart hatalar kullanılarak yapılan kısmi Wald testi sonuçlarına göre tüm açıklayıcı değişkenler anlamlı bulunmuş, ancak standart hata değerlerinin Poisson regresyon modelinin hata değerlerinden daha yüksek olduğu görülmüştür. Verinin aşırı yayılım göstermesi nedeniyle, Poisson regresyondaki standart hata değerlerinden daha yüksek değerler olması beklenen bir durumdur. Dolayısıyla Poisson regresyon modelinde standart hataların küçük çıkması yanıltıcı olabileceğinden güçlü standart hataların kullanıldığı kısmi Wald testi sonuçlarına bakmak gerekmektedir.

4.1.3. Quasi-Poisson Regresyon Modeli

Aşırı yayılımı olan veriyi modellemenin bir yolu da, yayılım parametresi olan ϕ'nin sınırlandırılmadığı Quasi-Poisson modelini kullanmaktır [37]. Bu durumda yayılım parametresi olan ϕ veriden tahmin edilecektir. Veri Quasi-Poisson'la modellendiğinde, elde edilen parametre tahminleri ve p-değerleri Çizelge 4.5'te yer almaktadır.

Çizelge 4.5. Quasi-Poisson Modellemesi

Açıklayıcı Değişkenler	**Tahmini değer**	**Std, Hata**	**p-değeri**
Sabit	-1,903	0,105	<2e-16
YaşGrubu2	-0,507	0,111	5,24e-06
YaşGrubu3	-0,865	0,109	2,25e-15
YaşGrubu4	-0,860	0,112	2,09e-14
ŞehirK	-0,640	0,063	< 2e-16
CinsK	-0,131	0,054	0,0147

Quasi-Poisson modelinde ϕ =1.117437 >1 çıkmış olması, veride aşırı yayılımın bir başka göstergesidir. Burada çıkan standart hatalar, sehir ve cinsiyet değişkenleri dışında, düzeltilmiş Poisson modelinden (sandwich-adjusted Poisson) daha yüksek olarak elde edilmiştir. Ancak tüm değişkenler istatistiksel olarak anlamlı bulunmuştur.

Diğer taraftan, Kesim 2.2.3'te,

$$\tau = \mathrm{Var}(\Theta_i)$$

olmak üzere

$$H_0 : \tau = 0$$

$$H_1 : \tau > 0$$

hipotezi Poisson dağılımı heterojen modellere karşı test etmek için kullanılan

$$Z_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\left(k_i - \hat{\lambda}_i\right)^2 - k_i\right)}{\sqrt{2\sum_{i=1}^{n}\hat{\lambda}_i^2}} = 16,648$$

ve

$$Z_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\left(k_i - \hat{\lambda}_i\right)^2 - k_i\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\left(k_i - \hat{\lambda}_i\right)^2 - k_i\right)^2}} = 8{,}083$$

olarak bulunmuştur. Bu istatistikler artıkların N(0,1) normal dağılıma uygunluk göstermesi nedeniyle $H_0 : \tau = 0$ hipotezi reddedilerek, veride aşırı yayılım olduğu kabul edilmiştir.

4.1.4. Poisson-Gamma (Negatif Binom) Regresyon Modeli

Kesim 4.1.3'te, sigortalının yaşı, yaşadığı şehir ve cinsiyeti "önsel" değişkenler (bağımsız değişken) olarak tanımlanmış, sigortalının hasar sayısı da (bağımlı değişken) Poisson regresyon ile modellenmiştir. Buradaki en önemli varsayım bu değişkenlerin, sigortalının yıllık beklenen hasar sıklığının tahmin edilmesi için yeterli olduğu varsayımıdır. Bir anlamda portföyün homojen olduğu varsayılmıştır. Ancak daha önce de ifade edildiği gibi ölçülemeyen bazı faktörler heterojenliğe neden olmaktadır. Söz konusu heterojenlik veride aşırı yayılıma neden olan etkenlerden biridir. Bu yüzden uygulanacak regresyon modelinde "rastgele etki" ye de yer verilmesi gerekmektedir.

Hasar sıklıkları, Kesim 2.2.3.1'te oluşturulan Poisson-Gamma (negatif binom) regresyon modeliyle modellendiğinde elde edilen tahmini değerler Çizelge 4.6'da yer almaktadır.

Çizelge 4.6. Poisson-Gamma (Negatif Binom) Regresyon Modeli

Açıklayıcı Değişkenler	**Tahmini Değer**	**Std. Hata**	**p-değeri**
Sabit	-1,910	0,110	< 2e-16
YaşGrubu2	-0,501	0,117	1,69e-05
YaşGrubu3	-0,859	0,114	5,39e-14
YaşGrubu4	-0,854	0,117	3,50e-13
ŞehirK	-0,638	0,062	< 2e-16
CinsK	-0,128	0,053	0,0164

Çizelge 4.6'da verilen p-değerlerinin tüm parametre tahminleri için istatistiksel olarak anlamlı çıktığı görülmüştür.

Negatif binom regresyon modelinde açıklayıcı değişkenlerin sırasıyla modele eklenmesiyle elde edilen artıkların değişimi, dolayısıyla değişkenlerin etkisini gösteren analizin sonucu ise Çizelge 4.7'de verilmiştir.

Çizelge 4.7. Değişkenlerin Modele Sırayla Eklenmesi Durumunda Artık Sapması

Ekleme	Sapma	Artık.Serb. Derecesi	Artık	p-değeri
Değişken Yok		40.951	11.735	
YaşGrubu	98,79	40.948	11.636	< 2.2e-16
Şehir	118,769	40.947	11.517	< 2.2e-16
Cinsiyet	5,872	40.946	11.512	0,01539

,

Her bir değişkenin modele dahil edilmesiyle artık değeri azalmaktadır. Değişkenlerin anlamlılığını ölçen p-değerlerinden de görüleceği üzere, değişkenlerin tümü model için %1 hata düzeyinde anlamlı bulunmuştur.

Yukarıda yapılan negatif binom regresyon analizi sonucunda elde edilen AIC=19066, Poisson modelin AIC=19221 değerinden daha düşük çıkmıştır. Yani negatif binom dağılımı gözlenen veriye daha iyi uyum sağlamıştır.

Poisson ve negatif binom regresyon modelleri olabilirlik oran testi Çizelge 4.8'de verilmiştir.

Çizelge 4.8. Poisson ve Negatif Binom Modelleri için Olabilirlik Oran Testi

Model	Serbestlik derecesi	LnL	Kikare	p-değeri
Poisson	6	-9604,300		
Neg. Bin.	7	-9526,100	156,460	< 2.2e-16 ***

Kikare değeri (7-6)=1 serbestlik derecesiyle 156,46'ya eşittir. Bu da AIC ölçütünde olduğu gibi negatif binom modelinin gözlenen veriye Poisson'dan daha iyi uyum sağladığını gösterir.

Açıklayıcı değişkenlerin modelden tek tek kaldırılması sonucunda ortaya çıkan modellerin Kesim 2.3'te verilen AIC ölçüt değerleri Çizelge 4.9'da verilmiştir.

Çizelge 4.9. Açıklayıcı Değişkenlerin Modelden Kaldırılmasıyla AIC Değerleri

Kaldırılan Değişken	Serbestlik Derecesi	Sapma	AIC
Hiçbiri		11.512	19.064
YaşGrubu	3	11.607	19.153
Şehir	1	11.633	19.184
Cins	1	11.517	19.068

Çizelge 4.9'a göre modeldeki değişkenlerin hiçbiri kaldırılmazsa AIC değeri 19.064; sadece yaş değişkeni kaldırıldığında, AIC değeri 19153'e; sadece sehir değişkeni kaldırıldığında, AIC değeri 19.184'e ve sadece cinsiyet değişkeni kaldırıldığında ise AIC değeri 19.068'e yükselmektedir. Bu durumda en düşük AIC değeri tüm değişkenlerin olduğu model için elde edildiğinden açıklayıcı değişkenlerin modelden çıkarılmasının anlamlı olmadığı görülmüştür.

Açıklayıcı değişkenlerin ikili olarak etkileri test edildiğinde ise elde edilen AIC değerleri ve test sonuçları Çizelge 4.10'da verilmiştir:

Çizelge 4.10. Değişkenlerin İkili Olarak Test Edilmesi

İkili Değişkenler	Serbestlik derecesi	Sapma	AIC	p-değeri
Hiçbiri		11.512	19.064	
YaşGrubu:Şehir	3	11.510	19.069	0,660
YaşGrubu:Cins	3	11.504	19.063	0,054
Şehir:Cins	1	11.510	19.065	0,295

Çizelge 4.10’da yaş değişkeni ile cinsiyet değişkeninin birbiriyle etkileşimli olduğu kabul edildiğinde, AIC değeri 19.063 olarak elde edilmiştir. Açıklayıcı değişkenler arasında ikili etkileşimin olmadığı varsayımı altında elde edilen modelde AIC değeri en düşük çıkmasına rağmen p-değeri 0,05’den büyük olması nedeniyle bu etkileşim anlamlı değildir.

Sonuç olarak; yaş, şehir ve cinsiyet açıklayıcı değişkenlerinin birbirinden bağımsız olarak kullanılması uygun bulunmuştur.

4.1.5. Sıfır-yığılımlı Poisson Regresyon Modeli

Aşırı yayılımın sebeplerinden biri de veride sıfır yığılımının olmasıdır. Sıfır yığılım, gözlenen hasar sayısının sıfır değerindeki yoğunluğun, modelin beklenen sıfır yoğunluğundan fazla olması durumudur. Veride sıfır yığılım olup olmadığını test etmek amacıyla, bu kesimde sıfır-yığılımlı modeller ele alınacaktır.

Sıfır-yığılımlı modellerde birçok dağılım kullanılmaktadır. En klasik olanı K_i dağılımının Poisson(λ) olarak Eş.(2.34)’de gösterildiği şekilde tanımlandığı sıfır-yığılımlı Poisson (ZIP) dağılımıdır.

Bu bölümde hasar verisi, sıfır-yığılımlı Poisson regresyon ile modellenecektir. Bu çalışmada kullanılan verideki yapısal sıfır oranını test etmek amacıyla hesaplanan Eş.(2.31)’de verilen $S(\hat{\beta})$ skor istatistiği 202,47 (p<< 0,0001) olarak bulunmuştur. Bu değer, belirli yanılma düzeyleri için 1 serbestlik dereceli ki-kare değeri ile karşılaştırılarak yokluk hipotezi reddedilmiştir. Böylece, gözlenen hasar sayısının sıfır değerindeki yoğunluğun, Poisson modeli varsayımı altında beklenen sıfır yoğunluğundan fazla olduğu sonucuna varılmıştır.

Açıklayıcı değişkenlerin hem hasar sayısını hem de sıfır-yığılımı açıklayıp açıklamadığını test etmek için tüm değişkenler dahil edilerek genelleştirilmiş Poisson dağılımı ile parametre tahmini yapılmış ve elde edilen sonuçlar Çizelge 4.11’de verilmiştir.

Çizelge 4.11. Sıfır-Yığılımın Tüm Açıklayıcı Değişkenlerle Test Edilmesi

Sayma modeli parametreleri (Poisson-g(x)=lnx bağ fonksiyonu ile):

Değişkenler	**Tahmini değ.**	**Std. Hata**	**z-değeri**	**p-değeri**
Sabit	-1,193	0,253	-4,717	2,39e-06
YaşGrubu2	-0,392	0,292	-1,343	0,1794
YaşGrubu3	-0,571	0,286	-1,998	0,0457
YaşGrubu4	-0,633	0,315	-2,012	0,0442
ŞehirK	-0,247	0,235	-1,054	0,2920
CinsK	-0,098	0,194	-0,503	0,6152

Sıfır-yığılım modeli parametreleri (Binomial-g(x)=ln(x/1-x) bağ fonksiyonu ile):

Değişkenler	**Tahmini değ.**	**Std. Hata**	**z-değeri**	**p-değeri**
Sabit	0,053	0,446	0,119	0,9052
YaşGrubu2	0,201	0,508	0,396	0,6921
YaşGrubu3	0,491	0,492	0,998	0,3184
YaşGrubu4	0,386	0,537	0,718	0,4728
ŞehirK	0,584	0,318	1,836	0,0663
CinsK	0,051	0,300	0,171	0,8642

Log-olabilirlik değeri = -9.527

Çizelge 4.11'de verildiği üzere sayma modelinde, sabit değer ile üçüncü ve dördüncü yaş gruplarını temsil eden katsayılar dışında hiçbir değişken anlamlı sonuç vermemiştir. Sıfır-yığılım kısmına bakıldığında ise hiçbir değişkenin modeli açıklamaya yeterli olmadığı gözükmektedir. Bu modelde en çok olabilirlik değerinin -9.527 olarak bulunması ve bu değerin Çizelge 4.8'de verilen Poisson ve negatif binom regresyon modellerinden yüksek çıkmış olması nedeniyle, modelleme anlamlı bulunmamıştır.

Sıfır-yığılımın sadece sabit değerle belirlenip belirlenmediğini test etmek için yapılan analiz sonuçları Çizelge 4.12'de verilmiştir.

Çizelge 4.12. Sıfır-Yığılımın Sadece Sabit Değerle Test Edilmesi

Sayma modeli parametreleri (Poisson-g(x)=lnx bağ fonksiyonu ile)

Değişkenler	**Tahmini değ.**	**Std. Hata**	**z-değeri**	**p-değeri**
Sabit	-0,981	0,124	-7.920	2.38e-15
YaşGrubu2	-0,491	0,115	-4.282	1.85e-05
YaşGrubu3	-0,846	0,112	-7.533	4.95e-14
YaşGrubu 4	-0,842	0,116	-7.283	3.27e-13
ŞehirK	-0,636	0,061	-10.325	< 2e-16
CinsK	-0,128	0,053	-2.402	0.0163

Sıfır-yığılım modeli parametreleri (Binomial-g(x)=ln(x/1-x) bağ fonksiyonu ile)

Değişkenler	**Tahmini değ.**	**Std. Hata**	**z-değeri**	**p-değeri**
Sabit	0,445	0,107	4.141	3.45e-05

Log-olabilirlik değeri = **-9.530**

Çizelge 4.12'de verilen p-değerlerine bakıldığında, dağılımın sayma kısmı için tüm açıklayıcı değişkenler anlamlı sonuç vermekle beraber sıfır-yığılımı modelleyen kısmı için de sabit katsayı anlamlı çıkmıştır.

Değişkenlerden herhangi birinin sıfır-yığılım kısmını açıklayıp açıklamadığını tespit edebilmek için Çizelge 4.13, Çizelge 4.14 ve Çizelge 4.15'de verilen analizler yapılmıştır.

İlk olarak **cinsiyet** değişkeni modele dahil edildiğinde, Çizelge 4.13'teki sonuçlar elde edilmiştir.

Çizelge 4.13. Sıfır-Yığılımın Cinsiyet ve Sabit Değerle Test Edilmesi

Sayma modeli parametreleri (Poisson-g(x)=lnx bağ fonksiyonu ile):

Değişkenler	**Tahmini değ.**	**Std. Hata**	**z-değeri**	**p-değeri**
Sabit	-0,999	0,124	-8,065	7,32e-16
YaşGrubu2	-0,495	0,114	-4,321	1,55e-05
YaşGrubu3	-0,851	0,112	-7,570	3,75e-14
YaşGrubu4	-0,846	0,115	-7,322	2,44e-13
ŞehirK	-0,636	0,061	-10,326	< 2e-16

Sıfır-yığılım modeli parametreleri (Binomial-g(x)=ln(x/1-x) bağ fonksiyonu ile):

Değişkenler	**Tahmini değ,**	**Std, Hata**	**z-değeri**	**p-değeri**
Sabit	0,408	0,110	3,708	0,000209
cinsK	0,197	0,081	2,445	0,014479

Log-olabilirlik değeri = **-9,530**

Çizelge 4.13'teki sonuçlar incelendiğinde, sayma kısmının yaş grupları ve şehir değişkeni, sıfır-yığılımı kısmının da cinsiyet ve sabit katsayıyla açıklandığı modelde tüm değişkenler anlamlı bulunmuştur.

Çizelge 4.14'te sıfır-yığılım kısmında **şehir** değişkeni kullanıldığında, modelin biraz daha iyi olduğu görülmüştür. Diğer bir deyişle, sıfır yığılım kısmını şehir değişkeni daha iyi açıklamaktadır.

Çizelge 4.14. Sıfır-Yığılımın Şehir ve Sabit Değerle Test Edilmesi

Sayma modeli parametreleri (Poisson-g(x)=lnx bağ fonksiyonu ile):

Değişkenler	**Tahmini değ.**	**Std. Hata**	**z-değeri**	**p-değeri**
Sabit	-1,032	0,124	-8,303	< 2e-16
YaşGrubu2	-0498	0,114	-4,339	1.43e-05
YaşGrubu3	-0,854	0,112	-7,591	3.16e-14
YaşGrubu4	-0,850	0,115	-7,342	2.11e-13
cinsK	-0,127	0,053	-2,400	0.0164

Sıfır-yığılım modeli parametreleri (Binomial-g(x)=ln(x/1-x) bağ fonksiyonu ile):

Değişkenler	**Tahmini değ.**	**Std. Hata**	**z-değeri**	**p-değeri**
Sabit	0,348	0,112	3,103	0,00191
sehirK	0,905	0,0857	10,560	< 2e-16

Log-olabilirlik değeri = **-9529**

Çizelge 4.15’te yaş grubunun sıfır-yığılım kısmına etkisine bakılmıştır.

Çizelge 4.15. Sıfır-Yığılımın Yaş Grubu ve Sabit Değerle Test Edilmesi

Sayma modeli parametreleri (Poisson-g(x)=lnx bağ fonksiyonu ile):

Değişkenler	**Tahmini değ.**	**Std. Hata**	**z-değeri**	**p-değeri**
Sabit	-1,657	0,069	-23,928	<2e-16
sehirK	-0,639	0,061	-10,367	<2e-16
cinsK	-0,131	0,053	-2,476	0,0133

Sıfır-yığılım modeli parametreleri (Binomial-g(x)=ln(x/1-x) fonksiyonu ile):

Değişkenler	**Tahmini değ.**	**Std. Hata**	**z-değeri**	**p-değeri**
Sabit	-1,090	0,464	-2,347	0,01891
YaşGrubu2	1,222	0,420	2,908	0,00363
YaşGrubu3	1,793	0,424	4,221	2,44e-05
YaşGrubu4	1,779	0,426	4,171	3,03e-05

Log-olabilirlik değeri = **-9530**

En çok olabilirlik değerlerine bakıldığında, veriye en iyi uyan sıfır-yığılımlı Poisson modelinde sıfır-yığılım kısmı şehir ve sabit değerle açıklanırken, sayma kısmı da kalan değişkenlerle açıklandığı görülmüştür.

4.2. Kredibilite Modelleri

Kesim 3.1.1'de anlatılan Poisson kredibilite modeli kullanılmıştır.

4.2.1. Karesel Kayıp Fonksiyonu ile Poisson-Gamma Kredibilite Modeli

Tezin 4.1.kesiminde hasar verisi için çeşitli regresyon analizleri yapılarak en uygun modelin negatif binom (Poisson-Gamma) regresyon modeli olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Bu bölümde, söz konusu modele göre portföyün risk sınıflandırması yapılarak bu sınıfların kredibilite düzeltme katsayısı tabloları oluşturulacaktır.

Gözlemlenebilen karakteristikleri, x_i , verilen ve $\Theta_i = \theta$ olan i. sigortalının yıllık hasar sayısının $\text{Poisson}(\theta\lambda_i)$ dağılımına uyduğu daha önce belirtilmiştir. Burada λ_i sigortalının bilinen özellikleri dikkate alınarak elde edilen yıllık ortalama hasar sıklığı olup $\lambda_i = \exp(\beta^T x_i)$ şeklinde tanımlanmıştır. Buradaki $\beta^T = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5)$ negatif binom regresyon analizi sonucunda elde edilen regresyon katsayıları, $x_i = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ vektörü de sigortalının kişisel özelliklerinin özetlendiği vektördür.

Çizelge 4.6'da elde edilen β_j katsayıları yerlerine konulduğunda,

$$\lambda_i = \exp(\beta^T x_i) = \exp(-1{,}9095 - 0{,}5014x_{i1} - 0{,}85885x_{i2} - 0{,}8535x_{i3} - 0{,}63827x_{i4}$$
$$-0{,}12813x_{i5})$$

elde edilir.

$\exp(\beta_0) = \exp(-1{,}90950) = 0{,}14815$ olduğundan, portföyden seçilen herhangi bir sigortalının yıllık beklenen hasar sıklığı,

$$\lambda_i = 0,14815 * \begin{cases} 1 & ,18 \text{ ile } 25 \text{ yaş arasında ise} \\ \exp(-0,501) & ,\ 26 \text{ ile } 35 \text{ yaş arasında ise} \\ \exp(-0,859) & ,\ 36 \text{ ile } 50 \text{ yaş arasında ise} \\ \exp(-0,854) & ,\ 51 \text{ yaş ve üzerinde ise} \end{cases}$$

$$* \begin{cases} 1 & ,\text{büyük şehirde yaşıyorsa} \\ \exp(-0,638) & ,\text{küçük şehirde yaşıyorsa} \end{cases} \tag{4.1}$$

$$* \begin{cases} 1 & ,\ \text{erkek ise} \\ \exp(-0,128) & ,\ \text{kadın ise} \end{cases}$$

den elde edilir. Bu analizde şehirde yaşayan ve 18-25 yaşları arasındaki erkekler grubu kukla değişkenler olarak tanımlanmıştır.

Buna göre portföyün 16 gruptan oluşan risk sınıflandırması Çizelge 4.16'da verilmiştir.

Kesim 4.1.4'te yapılan negatif binom regresyon analizi sonucunda a katsayısı en çok olabilirlik tahmin yöntemine göre 0,592 olarak tahmin edilmiştir. a katsayısı için başka bir tahmin de

$$\frac{1}{\hat{a}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\left(k_i - d_i \exp(\text{score}_i)\right)^2 - k_i\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(d_i \exp(\text{score}_i)\right)^2} \tag{4.2}$$

eşitliği ile elde edilebilmektedir [1],[38].

Burada k_i, i. sigortalının hasar sayısı, d_i poliçenin yürürlükte olduğu süre (1 yıl),

$$\text{score}_i = \hat{\beta}^T x_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2} + \hat{\beta}_3 x_{i3} + \hat{\beta}_4 x_{i4} + \hat{\beta}_5 x_{i5}$$

da yer alan $\hat{\beta}^T = (\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3, \hat{\beta}_4, \hat{\beta}_5)$ vektörü de verinin Poisson regresyon yöntemi sonucunda elde edilen katsayı değerleridir.

Program sonucunda elde edilen $\hat{a} = 0,5915$ parametre değerini karşılaştırmak amacıyla yukarıda verilen formül kullanılmış ve $\hat{a}$ değeri bu defa 0,53049 olarak bulunmuştur

Çizelge 4.16. Risk Sınıflandırması

	Yaş Kırılımı				Şehir (B)	Şehir (K)	Cinsiyet Kadın (K)	Cinsiyet Erkek (E)	Yıllık Beklenen Has.Freks (%)	Portföydeki Ağırlığı (%)
	18<x<25	26<x<35	36<x<50	51<x						
1	X				X		X		13,03	0,27
2	X					X	X		6,88	0,04
3	X				X			X	**14,82**	1,24
4	X					X		X	7,83	0,36
5		X			X		X		7,89	3,94
6		X				X	X		4,17	0,74
7		X			X			X	8,97	13,87
8		X				X		X	4,74	3,92
9			X		X		X		5,52	8,55
10			X			X	X		**2,92**	1,60
11			X		X			X	6,28	28,99
12			X			X		X	3,32	8,72
13				X	X		X		5,55	4,53
14				X		X	X		2,93	0,81
15				X	X			X	**6,31**	16,95
16				X		X		X	3,33	5,45

Portföyün en riskli, en az riskli ve orta riskli sınıflarına (sırasıyla 3, 10 ve 15.sınıflar) ait kredibilite yöntemiyle elde edilen katsayı (düzeltme katsayıları) tabloları EK-1'de verilmiştir.

EK-1'de verilen tablolardan hasar sıklığı 14,82 olan en riskli sınıf ve hasar sıklığı 2,92 olan sınıf ise en az riskli sınıf olarak elde edilmiştir. Bu iki sınıf için bir yıl içindeki prim düzeltme katsayıları incelendiğinde,

Yıl	Hasar sayısı (λ =%14,82)					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	0,7996	2,1515	3,5034	4,8553	6,2072	7,5591

Yıl	Hasar sayısı (λ =%2,92)					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	0,9530	2,5640	4,1751	5,7862	7,3973	9,0084

farklı risk sınıflarında yer alan sürücüler için temel prime uygulanacak düzeltmelerin de farklı olduğu görülmüştür. Örneğin, risk seviyesi en yüksek olan gruptan bir sürücü, ilk yılı hasarsız geçirdiğinde sonraki yıl primi, temel primin %80'i düzeyinde olacaktır.

Öte yandan en az riskli gruptan bir sürücü ilk yılı hasarsız geçirdiğinde sonraki yıl primi temel primin %95'i kadar olacaktır.

Bir anlamda en riskli gruptan olan sürücü daha fazla ödüllendirilmiş gibi görünse de, aslında riskli sürücüden zaten fazla hasar beklendiğinden, temel primi zaten yüksek hesaplanacak, hasar yapmadığında da diğer gruptan daha fazla bir prim indirimi ile de ödüllendirilerek bir düzeltme yapılmış olacaktır.

Aynı şekilde, az riskli grupta yer alan sürücüden zaten hasar beklentisi de az olacağından temel primi diğerinden daha düşük olacak, hasarsız bir yıl geçirdiğinde de ödüllendirmesi diğerine göre az olacaktır.

Aynı mantıkla, her ikisinin de ilk yıl 1 hasar yaptığı bir durumda, riskli gruptaki sürücü bir sonraki yıl temel primin %215,0 ini ödemekle, az riskli sürücü ise %256,4'ünü ödemekle yükümlü olacaktır. Düzeltme katsayısı riskli sürücünün iki kere cezalandırılmasını, risksiz sürücünün de iki kere ödüllendirilmesini engellemektedir.

4.2.2. Üstel Kayıp Fonksiyonu ile Poisson-Gamma Kredibilite Modeli

3.1.5.Bölümde üstel kayıp fonksiyonu kullanılarak Poisson-Gamma kredibilite modeli için optimal tahmin edici,

$$\Psi_2\left(k_{i1},..,k_{iT_i}\right)=\lambda_{i,T_i+1}+\frac{k_{i\bullet}-\lambda_{i\bullet}}{c}\,\ell n\left(1+\frac{c\lambda_{i,T_i+1}}{a+\lambda_{i\bullet}}\right)$$

olarak elde edilmişti.

Üstel kayıp fonksiyonu kullanılarak portföyün en riskli, en az riskli ve orta riskli sınıflarına (sırasıyla 3, 10 ve 15.sınıflar) ait kredibilite yöntemiyle elde edilen katsayı düzeltme katsayıları) tabloları EK-2'de verilmiştir.

4.2.3. İki Modelin Karşılaştırılması

Karesel kayıp fonksiyonu kullanılarak elde edilen düzeltme katsayıları ile üstel kayıp fonksiyonu ile elde edilen düzeltme katsayıları karşılaştırıldığında, hasar olması durumunda üstel fonksiyona ilişkin katsayıların daha düşük çıktığı, yani daha düşük oranlarda ceza uygulandığı görülmektedir. Diğer taraftan hasarsızlık durumunda, üstel kayıp fonksiyonuna ilişkin katsayıların daha yüksek olduğu yani daha düşük oranlarda ödüllendirme yapıldığı anlaşılmaktadır. Bu modellerde finansal denge kriteri sağlandığından ceza ve ödüllerin birbirini dengelemesi beklenen bir durumdur.

4.3. Bonus-Malus Modeli

Bu tez çalışmasında oluşturulacak bonus-malus sisteminde, 0'dan 5'e kadar 6 seviye olduğu varsayılmaktadır. Hasarsız geçen her yıl "1" bonus seviyesi ile ödüllendirilmekte, yani sigortalı, bulunduğu seviyenin bir basamak altına inmektedir. Hasar durumunda ise sigortalının, her bir hasar için "1" basamak çıktığı varsayılmaktadır. Buna göre $\beta=1$ alınmıştır. Daha önceki bölümlerde de ifade edildiği üzere bonus-malus sisteminde sigortalının herhangi bir yıldaki primi belirlenirken sadece primin belirleneceği yıldan bir önceki yılın hasar sayısı ile o yıl bulunduğu basamağa bakılmaktadır.

4.3.1. Modelin oluşturulması

Bu modelde yeni sürücülerin tablonın ilk basamağından ℓ_0'dan başladığı varsayılmaktadır. Z_k,sigortalının k+1. yılda yani (k,k+1) zaman aralığında bulunacağı seviyeyi göstermektedir. Bu sistemde herhangi bir sigortalının izleyeceği yol $Z_1, Z_2, \ldots$ şeklinde ifade edilen raslantı değişkenleri dizisiyle belirlenmektedir, öyle ki her biri $0,1,\ldots,5$ değerlerinden birini almaktadır. Sigortalının (k-1,k) dönemindeki hasar sayısı olan N_k bilindiğinde (k,k+1) döneminde yer alacağı basamak seviyesi tespit edilmektedir. Varsayımımıza göre $Z_0 = \ell_0$ dır. Buna göre Z_k'yı aşağıdaki şekilde formüle ederiz:

$$Z_k = \begin{cases} \max\left(Z_{k-1} - 1, 0\right) & \text{eğer } N_k = 0 \text{ ise} \\ \min\left(Z_{k-1} + N_k, 5\right) & \text{eğer } N_k \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

Yeni prim hesabının yapıldığı yıldan bir yıl önce k hasar bildirildiği düşünüldüğünde;

$$t_{ij}\left(k\right) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } i \text{ seviyesinden } j \text{ seviyesine geçiş varsa,} \\ 0 & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

şeklinde ifade edilen seviyeler arasındaki geçişleri kullanarak; eşitlik (3.24) de gösterilen T(k) matrisi oluşturulmuştur.

Modele göre oluşturulan T(k) matrisleri aşağıdaki şekilde olacaktır:

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{0}) = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix} \boldsymbol{T}(\boldsymbol{1}) = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix} \boldsymbol{T}(\boldsymbol{2}) = \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{3}) = \begin{pmatrix} 0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix} \boldsymbol{T}(\boldsymbol{4}) = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix} \boldsymbol{T}(\boldsymbol{k}) = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix} \quad k \geq 5 \text{ için.}$$

4.3.2. Geçiş Olasılıkları ve Geçiş Matrisi

4.2.1. Bölümde elimizde verisi bulunan sigortalılar 16 risk grubuna ayrılarak her bir grubun beklenen hasar sıklığı,

Sınıf	Değeri
1	13,03
2	6,88
3	14,82
4	7,83
5	7,89
6	4,17
7	8,97
8	4,74
9	5,52
10	2,92
11	6,28
12	3,32
13	5,55
14	2,93
15	6,31
16	3,33

olarak elde edilmiştir. Buna göre gözlemlenebilen karakteristikleri x_i olarak verilen, riske yatkınlığı ise $\Theta_i = \theta$ olan i. risk grubundan bir sigortalının yıllık hasar sıklığının Poisson $(\theta\lambda_i)$ dağılımına uyduğu, Kesim 4.1 ve Kesim 4.2'de belirtilmişti. Burada λ_i sigortalının bilinen özellikleri dikkate alınarak elde edilen yıllık ortalama hasar sıklığı olup

$$\lambda_i = \exp(\beta^T x_i)$$

şeklinde tanımlanmış,

$$\beta^T = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5)$$

katsayıları da regresyon analiziyle elde edilmiştir.

Buna göre bir sigortalının bonus-malus tablosunda izleyeceği yolu veya rotayı gösteren

$$\{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5\}$$

raslantı değişkenleri dizisi de

$$\{Z_1(\theta), Z_2(\theta), Z_3(\theta), Z_4(\theta), Z_5(\theta)\}$$

şeklinde gösterilebilmektedir. Söz konusu poliçe sahibinin, $p_{\ell_1\ell_2}(\theta)$ ile gösterilen ve Kesim 3.2.2.'de anlatılan ℓ_1 seviyesinden ℓ_2 seviyesine geçiş olasılığı,

$$p_{\ell_1\ell_2}(\theta) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\theta^m}{m!} e^{-\theta} t_{\ell_1\ell_2}(m)$$

kullanılarak modelin tek adımda geçiş matrisi aşağıdaki şekilde oluşturulmuştur.

$$M(x) = \begin{bmatrix} e^{-x} & xe^{-x} & \frac{x^2e^{-x}}{2} & \frac{x^3e^{-x}}{3!} & \frac{x^4e^{-x}}{4!} & 1-e^{-x}(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}) \\ e^{-x} & 0 & xe^{-x} & \frac{x^2e^{-x}}{2} & \frac{x^3e^{-x}}{3!} & 1-e^{-x}(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}) \\ 0 & e^{-x} & 0 & xe^{-x} & \frac{x^2e^{-x}}{2} & 1-e^{-x}(1+x+\frac{x^2}{2}) \\ 0 & 0 & 0 & e^{-x} & 0 & 1-e^{-x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-x} & 1-e^{-x} \end{bmatrix}$$

4.3.3.Durağan Durum Dağılımı

Yıllık hasar sayılarının bağımsız ve eşit dağıldıkları varsayıldığından, her sigortalı nihai olarak yıllık beklenen hasar sıklığı $\theta\lambda$ 'ya karşılık gelen bir denge seviyesine ulaşacaktır. Yani sistemin uzun vadede stabilize olması beklenmektedir.

Bonus-malus sisteminin,

$$\Pi(\theta) = \left(\pi_0(\theta), \pi_1(\theta), \pi_2(\theta), \pi_3(\theta), \pi_4(\theta), \pi_5(\theta)\right)^T$$

vektörü ile tanımlanan durağan durum dağılımının

$$\Pi(\theta) = \lim_{n\to\infty} M^n(\theta)$$

limitiyle elde edildiği 3.bölümde anlatılmıştır. Rolski-Schmidli-Schmidt-Teugels formülü,

$$\Pi^T(\theta) = e^T\left(I - M(\theta) + E\right)^{-1}$$

kullanılarak elde edilen durağan durum dağılımı elde edilmiştir. Ancak farklı $\theta\lambda$ değerleri için söz konusu dağılım aşağıdaki değerleri almıştır:

$$\Pi^T(0,1) = (0{,}8895 \quad 0{,}0935 \quad 0{,}0144 \quad 0{,}0022 \quad 0{,}0003 \quad 0{,}0000)$$
$$\Pi^T(0,2) = (0{,}7562 \quad 0{,}1674 \quad 0{,}0533 \quad 0{,}0164 \quad 0{,}0051 \quad 0{,}0016)$$
$$\Pi^T(1,0) = (0{,}0153 \quad 0{,}0264 \quad 0{,}0563 \quad 0{,}1190 \quad 0{,}2515 \quad 0{,}5315)$$

Buna göre ortalama hasar sıklığı λ=0,1303 olan birinci gruptan olan sigortalılardan riske yatkınlığı θ=0,76746< 1 olanlar, yani gruba göre daha az riskli olanlar durağan duruma ulaştıklarında 0,8895 olasılıkla en az primin alındığı 0'ıncı seviyede, 0,0935 olasılıkla 1'inci seviyede,……., 0,0003 olasılıkla 4'üncü seviyede olacaklardır.

Diğer taraftan, yine aynı grupta ama riske yatkınlığı θ=7,6746 olan, yani grubun ortalama hasar sıklığının yaklaşık 8 katı olan bir sigortalı, durağan duruma geldiğinde, 0,0153 olasılıkla 0'ıncı seviyede, 0,2515 olasılıkla 4'üncü seviyede ve 0,5315 olasılıkla da en fazla primin ödendiği 5'inci seviyede olacaktır.

4.3.4. Bayes'ci Düzeltme Katsayıları

Bonus-malus tablosunda her ℓ seviyesi için bir r_ℓ düzeltme katsayısı belirlendiği, bu katsayı ile önsel primin çarpımının gerçek prime eşit olacağı 3'üncü bölümde anlatılmıştı. Yapılan hesaplama sonucunda elde edilen düzeltme katsayıları aşağıda yer almaktadır:

Çizelge 4.17.Düzeltme Katsayısı Tablosu (Bonus-Malus Tablosu)

Seviye	Düzeltme katsayısı
5	% 240,59
4	% 174,24
3	% 136,65
2	% 104,69
1	% 78,07
0	% 27,94

Tablodan da anlaşılacağı üzere, belirli bir zamanda sigortalıların gerçek primleri, 0'ıncı seviyede yer alan sigortalılar için önsel primlerinin yaklaşık %28i, 1'inci seviyede olanlar için %78 i, ……, 5'inci seviyede olanlar için de yaklaşık %240'ı alınarak hesaplanacaktır. Tezin daha önceki bölümlerinde yapılan testlerle, veride sıfır yığılım olduğu, yani gözlenen hasar sayısının sıfır değerindeki yoğunluğun, Poisson modeli varsayımı altında beklenen yoğunluktan fazla olduğu tezin 4.1.5. bölümünde gösterilmişti. Bu durumun ve 0'ıncı basamakla 1. basamak arasındaki büyük farkın (% 27,94-%78,07) gerçekleşen ancak bildirilmeyen hasarlardan, bir anlamda verideki sahte sıfırlardan kaynaklandığı düşünülmektedir.

4.2'nci bölümde yer alan kredibilite uygulamasında da ayrıntılı şekilde anlatıldığı üzere kredibilite modeliyle bulunan düzeltme katsayıları riski fazla olan sürücünün iki kere cezalandırılmasına, riski az olan sürücünün de iki defa ödüllendirilmesine engel olmaktadır. Ancak bonus-malus sistemlerinde, sigortalıların önsel karakteristiklerine göre hesaplanan hasar sıklıklarına bakılmaksızın bulunduğu seviyeye göre herkese aynı oranda düzeltme uygulanmaktadır. Bu da portföyde adaletsizlik yaratmaktadır. Söz konusu adaletsizliği azaltmak amacıyla şirketler sigortalıların önsel karakteristiklerine göre birkaç tane bonus-malus tablosu hazırlayabilirler.

Pitrebois, S.,ve diğerleri [2] önce tüm sigortalılar için, sonra da kırsal kesimde ve şehirde yaşayan sigortalılar için ayrı bonus-malus tablosu hazırlayarak elde ettikleri düzeltme katsayılarını karşılaştırmışlardır. Buna göre önsel karakteristiklerine göre daha riskli olan şehirde yaşayan sigortalı grubu için elde edilen düzeltme faktörleri aynı seviyede yer alan ancak kırsal kesimde yaşayan sigortalı grubu için hesaplanan düzeltme katsayılarından daha düşük çıkmıştır. Başka bir deyişle, önsel olarak daha riskli olan gruptakiler diğer gruptakilere göre daha az cezalandırılmış, daha fazla ödüllendirilmiştir. Sonuç olarak tek bir bonus-malus tablosunun yaratacağı adaletsizlik bir ölçüde giderilmiştir.

5. SONUÇ

Ülkemizde, 06.02.2008 tarihli Karayolları Motorlu Araçlar Zorunlu Mali Sorumluluk Sigortasında (trafik sigortası) Tarife Uygulama Esasları Hakkında Yönetmelikte Değişiklik Yapılmasına Dair Yönetmelik'le getirilen değişiklikle; sağlıklı bir rekabet ortamı oluşturularak piyasa etkinliğinin temini, tüketicinin orta vadede daha kaliteli hizmeti daha ucuza almasının sağlanması ve uluslararası en iyi uygulamalara uyum amacıyla karayolları motorlu araçlar zorunlu mali sorumluluk sigortası primlerinin sigorta şirketleri tarafından serbestçe belirlenmesi, teminatların ise Devletçe belirlenmesine devam edilmesi kararlaştırılmıştır. Aynı Yönetmeliğin 2. maddesi hükmüyle, sigorta şirketlerine prim indirimi ile prim artırımlarına ilişkin oranların yer aldığı basamak tablosunun (Çizelge 1.1.) uygulanması zorunluluğu getirilmiştir. Buna göre sigorta şirketlerinin il bazında serbestçe belirledikleri temel primlere, sigortalının bulunduğu basamağa göre belirlenen indirim/artırım oranlarının uygulanması suretiyle temel primde düzeltme niteliğinde bir uygulama getirilmiştir. Ancak söz konusu basamak tablosunun (bonus-malus tablosu) aktüeryal ilkelere göre oluşturulmamasının, sigorta sektörünün trafik branşındaki son 10 yıllık süreçte artan teknik zararına büyük katkısının olduğu düşünülmektedir.

Bu tez çalışmasında; trafik sigortasında yaşanan bu sıkıntıdan yola çıkılarak, trafik sigortalılarının verisi ile sigortalılar öncelikle bireysel risklerine uygun risk sınıflarına göre gruplandırılmış, sonrasında aktüeryal ilkeler gözetilerek hem kredibilite hem de bonus-malus yöntemleriyle düzeltme katsayısı tabloları oluşturulmuştur.

İkinci bölümde literatürde hasar sayısının modellemesinde kullanılan regresyon modelleri incelenmiştir. Hasar sayısına ilişkin veri kümelerinin genellikle aşırı yayılım gösterdiği bilindiğinden, buna ilişkin modellemelerde Poisson dağılımı yerine karma Poisson dağılımlarının kullanıldığı görülmüştür. Bunun yanı sıra otomobil sigortalarında (kasko, trafik,…) uygulanan muafiyet, hasarsızlık indirimi veya bonus- malus gibi fiyatlandırma yöntemleriyle sigortalıların, bir sonraki yıl sürprim ihtimalinden kaçınmak amacıyla meydana gelen bir hasarı sigorta şirketlerine bildirmemeyi ve hasar maliyetine katlanmayı tercih ettikleri sıklıkla rastlanılan bir durumdur. Bu nedenle sigorta portföyünde sıfır hasarların beklenenin çok üzerinde olduğu gözlemlenerek, literatürde bu durumu dikkate alan sıfır-yığılımlı modellerin de geliştirildiği görülmüştür.

Risk sınıflandırmasında kullanılan sınıflandırma değişkenlerine “önsel” değişkenler adı verilmektedir. Bu değişkenler, sürücünün henüz arabayı kullanmaya başlamadan önce belirli olan özelliklerine göre değer alır. Trafik sigortasında bu değişkenler aracın park edildiği bölge, kullanım tarzı (tüzel/özel), yaş, cinsiyet, meslek ve medeni durum gibi bireysel karakteristiklere göre belirlenmiştir. Ancak bu özellikler yanında sürücünün alkol alma alışkanlığı, trafik kurallarına uyma alışkanlığı veya refleks hızı gibi önsel risk sınıflandırma yönteminde dikkate alınamayan birtakım önemli risk faktörleri de vardır. Ölçülemeyen bu tür risk faktörleri nedeniyle, tarifede birçok sınıflandırma değişkeni kullanılmasına rağmen, tarife sınıflarında hala heterojenlik olabilmektedir. Bu heterojenlik istatistiksel bir modelde “rastgele etki” ile modellenmektedir. Literatürde yapılan çalışmalar incelendiğinde, sigortalının geçmiş hasar deneyimi dikkate alınarak “rastgele etki”nin modellenmesinde kullanılan deneyim fiyatlandırması modellerinden en yaygın olanının kredibilite modeli ve bonus-malus modeli olduğu görülmüştür. Bu modellerden elde edilen katsayılar, sigortalının bireysel özelliklerine göre belirlenen risk sınıfının temel (baz) primine bir düzeltme faktörü olarak uygulanmaktadır.

Üçüncü bölümde deneyim fiyatlandırması modellerinden kredibilite modeli ile bonus malus modeline ilişkin çalışmalar incelenmiştir.

Kredibilite kuramı, kısaca farklı veri gruplarının bir araya getirilerek ortak bir tahmin elde edilmesi yöntemi olarak tanımlanabilmektedir. Sigortacılıkta daha çok heterojen portföylerde yer alan risklerin fiyatlandırmasında kullanılan kredibilite kuramına ilişkin yapılan çalışmalarda, Bayes’ci yaklaşımla bireyin risk deneyimi ile ait olduğu sınıfın risk deneyimi arasında denge sağlayan primler bulunmaya çalışıldığı görülmüştür.

Kredibilite yöntemiyle oluşturulan fiyatlandırma modelinde literatürde temel olarak karesel ve üstel olmak üzere, iki kayıp fonksiyonunun kullanılmaktadır. Karesel kayıp fonksiyonu kullanılarak elde edilen kredibilite sisteminde cezaların çok yüksek olması nedeniyle, bazı çalışmalarda üstel kayıp fonksiyonunu kullanılarak bu sorunun giderilmeye çalışıldığı ve daha tutarlı ceza oranları elde edildiği görülmüştür. Kredibilite ile elde edilen düzeltme katsayıları incelendiğinde; söz konusu katsayıların hasarsız geçen bir yılın sonunda, risk sınıflandırması sonucunda riski az olan sigortalı sınıfına giren, dolayısıyla taban primi az olan sigortalıya, bir sonraki yıl az indirim, riski fazla olan sigortalı sınıfına giren yani taban primi yüksek olan sigortalıya da çok indirim uygulanabilecek şekilde kurgulandığı görülmüştür. Benzer şekilde, her iki sigortalının aynı sayıda hasar getirdiği bir yılın sonunda ise, riski az olan sigortalı sınıfına giren, dolayısıyla taban primi az olan sigortalıdan, riski fazla olan sigortalı sınıfına giren sigortalıya göre daha fazla prim alınacak şekilde kurgulanmıştır. Dolayısıyla bu sistemde riski az olan sigortalının iki kez ödüllendirilmesi, riski fazla olan sigortalının da iki kez cezalandırılması önlenmiş olmaktadır. Bu durum kredibilite yönteminde finansal denge koşulunun sağlanmış olmasının bir sonucudur. Diğer bir deyişle sigorta şirketinin yıllar bazında portföyün tamamından elde ettiği toplam prim tutarının sabit kaldığı, sadece toplam primin sigortalılar arasındaki dağılımının, riskleri oranında değişitiğini göstermektedir. Ancak kredibilite yöntemi uygulanan sistemin hem karmaşık olması, hem de sigortalılara açıklamasının zor olması nedeniyle literatürde daha ticari bir yöntem olarak nitelendirilen bonus malus sistemlerinin geliştirildiği görülmüştür.

Bonus malus sisteminde, her birinin prim katsayısı (düzeyi) daha önce belirlenmiş olan sonlu sayıda basamak vardır. Basamaklar arasındaki geçiş kuralları da önceden belirlenmiştir. Sigortalının o yıl içinde bulunduğu basamak ve yine aynı yıl içindeki kaza sayısı dikkate alınarak, sistemin geçiş kuralları uyarınca sigortalının bir sonraki yıl üst ya da alt basamaklara, bir anlamda yeni prim sınıfına geçişi sağlanmaktadır. Bu sistemde sigortalıların risk sınıflarına bakılmaksızın tek bir düzeltme katsayısı tablosu kullanılmaktadır. Dolayısıyla sigortalıların önsel karakteristiklerine göre hesaplanan hasar sıklıklarına bakılmaksızın bulunduğu seviyeye göre herkese aynı oranda düzeltme uygulanmaktadır. Bu durum portföyde bir ölçüde adaletsizlik yaratmaktadır. Literatürde söz konusu adaletsizliği azaltmak amacıyla, sigortalıların önsel karakteristiklerine göre belirlenen her bir risk sınıfı için farklı bonus-malus tablosu oluşturulduğu görülmüştür.

Gerek kredibilite yöntemi, gerekse bonus-malus yöntemi ile oluşturulan deneyim fiyatlandırması sistemlerinin, sürücüyü daha dikkatli araç kullanmaya teşvik etmek dışındaki en büyük fonksiyonu, bireysel riskleri daha iyi değerlemek suretiyle uzun vadede herkesin kendi hasar sıklığına karşılık gelen primi ödemesinin sağlanmasıdır.

Dördüncü bölümde Türkiye Karayolları Motorlu Araçlar Zorunlu Mali Sorumluluk Sigortası poliçesi verisi kullanılarak öncelikle risk sınıflandırması yapılmış, sigortalılar bireysel risk karakteristiklerine göre 16 risk sınıfına ayrılmıştır. Regresyon analizi ile elde edilen bir başka sonuç da veride sıfır-yığılım olduğunun tespit edilmesidir.

Risk sınıflandırması yapıldıktan sonra öncelikle kredibilite yöntemiyle her bir risk sınıfı için düzeltme katsayısı tablosu oluşturulmuş, sonrasında da tüm risk sınıfları için uygulanabilecek bir bonus-malus tablosu elde edilmiştir. Oluşturulan tabloda sistemin en alt basamağına (0. Basamak) karşılık gelen düzeltme katsayısı ile bir üst basamak (1. Basamak) arasında meydana gelen farkın, verideki sıfır-yığılımdan kaynaklandığı düşünüldüğünden, izleyen çalışmalarda sıfır-yığılımlı dağılımlar ile hem kredibilite yöntemi hem de bonus-malus yöntemiyle prim düzeltme katsayısı tabloları oluşturularak daha dengeli bir deneyim fiyatlandırması yapılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Denuit, M., Marechal , X., Pitrebois, S., Walhin, J.-F., *Actuarial Modelling of Claim Counts: Risk Classification, Credibility and Bonus-Malus Systems.* John Wiley&Sons , Ltd. 356p, **2007.**

[2] Pitrebois, S., Denuit, M., Walhin, J-F., Marketing and bonus- malus systems, Paper presented at the 2003 *Astin Colloquium*, Berlin, **2003**.

[3] Pitrebois, S., Denuit, M., Walhin, J-F., Multi-Event Bonus-Malus Scales, *Australian Actuarial Journal,*10-1,pp.107-125, **2005.**

[4] Denuit, M., ve Dhaene, J., Bonus-Malus scales using exponential loss functions, *German Actuarial Bulletin* 25, 13-27, **2001**

[5] https://www.tsb.org.tr/images/Documents/MUKTESEBATsfrpdf-tr.pdf, Avrupa Birliği Sigorta Müktesebat Rehberi, (Ocak, **2018**).

[6] Tremblay, L., Using The Poisson-Inverse Gaussian Distribution In Bonus-malus Systems, *Astin Bulletin* 22, 97-106, **1992.**

[7] Lemaire, J., *Bonus-Malus Systems In Automobile Insurance,* Huebner International Series on Risk, Insurance and economic Security 19, University of Pennsylvania, USA, **1995.**

[8] Willmot, G.E., The Poisson-Inverse Gaussian Distribution As An Alternative To The Negative Binomial, *Scandinavian Actuarial Journal* , 113-127, **1987.**

[9] McCullagh, P., Nelder, J.A., *Generalized Linear Models*, 2nd Ed., Chapman and Hall, London, 511p, **1989.**

[10] Anderson, D., Feldblum, S., Modlin, C., Schirmacher, D., Schirmacher, E., Thandi, N., A Practitioner's Guide to Generalized Linear Models, *Casualty Actuarial Society Discussion Paper Program*, 1-116, **2007.**

[11] De Jong, P., Heller, G.Z., *Generalized Linear Models for Insurance Data,* Cambridge University Press, London, 196p, **2008.**

[12] Dionne, G., Vanasse, C., Automobile insurance ratemaking in the presence of asymmetrical Information, *Journal of Applied Econometrics*, Vol.7, No.2 (Apr.-Jun.1992), pp. 149-165, **1992.**

[13] Boucher, J.P., Denuit, M., Fixed versus random effects in Poisson regression models for claim counts: A case study with motor insurance. *Astin Bulletin* 36 (1), 285-301, **2006.**

[14] Lawless, J.F., Negative Binomial and Mixed Poisson Regression, *The Canadian Journal of Statistics,* Vol.15, No:3, pp. 209-225, **1987.**

[15] Dionne, G., Vanasse, C., A generalization of actuarial automobile insurance rating models: The Negative Binomial distribution with a regression component, *Astin Bulletin* 19, 199-212, **1989.**

[16] Dean, C.B., Lawless, J.F., Willmot, G.E., A mixed poisson-inverse gaussian regression model. *The Canadian Journal of Statistics* 17, 171-182, **1989.**

[17] Boucher, J.P., Denuit, M., Guillen, M., Number of Accidents or Number of Claims? An Approach with Zero-inflated Poisson Models for Panel Data". *Journal of Risk and Insurance*, 76, 4, 821-846, **2009.**

[18] Boucher, J.-P., Denuit, M., and Guillen, M., Models of Insurance Claim Counts with Time Dependence Based on Generalisation of Poisson and Negative Binomial Distributions, *Variance* 2 (1):135-162, **2008.**

[19] Yip, K., ve Yau, K., On Modelling Claim Frequency Data in General Insurance with Extra Zeros. *Insurance:Mathematics and Economics* 36:153-163, **2005.**

[20] Vandebroek, M., Bonus-malus system or partial coverage to oppose moral hazard problems?, *Insurance:Mathematics and Economics* 13, 1-5,**1993.**

[21] Flynn, M., Francis, A.,L., More Flexible GLMs: Zero Inflated Models and Hybrid Models, *CAS Ratemaking and Product Management Seminar*, **2009.**

[22] Lambert, D., Zero-inflated poisson regression, with an application to defects in manufacturing, *Technometrics* 34 (1), 1–14, **1992.**

[23] Famoye, F., Singh, K. , Zero-inflated Generalized Poisson Regression Model with an Application to Domestic Violence Data, *Journal of Data Science,* 4, 117-130, **2006.**

[24] Özmen, İ., Demirhan, H., *A Bayesian Approach for Zero-Inflated Count Regression Models by Using the Reversible Jump Markov Chain Monte Carlo Method and an Application,* Communications in Statistics-Theory and Methods, 39, 2109-2127,**2010.**

[25] Boucher, J.-P., M. Denuit, and M. Guillén, Risk Classification for Claim Counts: A Comparative Analysis of Various Zero-Inflated Mixed Poisson and Hurdle Models, *North American Actuarial Journal* 11:4, pp.110-131, **2007.**

[26] Boucher, J.-P. and Denuit, M., Credibility Premiums for the Zero-Infated Model and New Hunger for Bonus Interpretation, *Insurance: Mathematics and Economics* , 42:727-735, **2008.**

[27] Mowbray,.H., How extensive a payroll exposure is necessary to give a dependable pure Premium, *Proceedings of the Casualty Actuarial Society* 1, 24-30, **1914.**

[28] Whitney, W., The Theory Of Experience Rating, *Proceedings of the Casualty Actuarial Society* , 274-292, **1918.**

[29] Bermudez, L., Denuit, M., Dhaene, J., Exponential bonus-malus systems integrating a priori risk classification, **2001.**

[30] Shengwang, M., Wei, Y., Whitmore, G.A., Accounting For Individual Over-dispersion In A Bonus-Malus Automobile Insurance System, **1999.**

[31] Morillo, I., Bermudez, L., Bonus-Malus System Using an Exponential Loss Function with an Inverse-Gaussian Distribution, *Insurance: Mathematics and Economics* 33:49-57, **2003.**

[32] Lemaire, J., and Zı, H., A Comparative Analysis of 30 Bonus-Malus systems”. *ASTIN Bulletin,* 24:287-309, **1994.**

[33] Rolski, T., Schmidli, H., Schmidt V.,Teugels, J., *Stochastic Processes For Insurance and Finance* , John Wiley&Sons, New York, **1999.**

[34] Pitrebois, S., Denuit, M., Walhin, J-F., Setting a bonus- malus scale in the presence of other rating factors:Taylor’s work revisited. *Astin Bulleetin*, 33, pp.419-436, **2003.**

[35] Norberg, R., A Credibility Theory For Automobile Bonus Systems, *SAJ* 1976**,** 92-107**, 1976.**

[36] Cameron, A.C. and Trivedi, P.K. *Microeconometrics Using Stata*. College Station, TX:Stata Pres., **2009.**

[37] Zeiles, A., Kleiber, C., Jackman, S., Regression Models for Count Data in R, *Journal of Statistical Software,* Vol.27, Issue 8, **2008.**

[38] Pitrebois, S., Denuit, M., Walhin, J-F., Bonus-Malus scales in segmented-tariffs: Gilde & Sundt’s work revisited, *Australian Actuarial Journal,*10-1,pp.107-125, **2004.**

EKLER

EK 1. Üstel Fayda Fonksiyonu Çizelgeleri

3. Sınıftan Bir Sigortalı (En Riskli) İçin Temel Prime Uygulanacak Düzeltme Katsayısı Tablosu (Karesel Kayıp Fonksiyonu)

Yıl	**Hasar sayısı (λ =%14,82)**					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	0,7996	2,1515	3,5034	4,8553	6,2072	7,5591
2	0,6662	1,7924	2,9187	4,0449	5,1712	6,2974
3	0,5709	1,5360	2,5012	3,4664	4,4315	5,3967
4	0,4995	1,3438	2,1882	3,0326	3,8770	4,7214
5	0,4439	1,1944	1,9448	2,6953	3,4458	4,1962
6	0,3995	1,0748	1,7502	2,4255	3,1009	3,7763
7	0,3631	0,9770	1,5910	2,2049	2,8188	3,4327
8	0,3328	0,8956	1,4583	2,0210	2,5837	3,1464
9	0,3072	0,8266	1,3460	1,8654	2,3848	2,9042
10	0,2853	0,7675	1,2498	1,7321	2,2144	2,6966

10.Sınıftan Bir Sigortalı (En Az Riskli) İçin Temel Prime Uygulanacak Düzeltme Katsayısı Tablosu (Karesel Kayıp Fonksiyonu)

Yıl	**Hasar sayısı (λ =%2,92)**					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	0,9530	2,5640	4,1751	5,7862	7,3973	9,0084
2	0,9101	2,4488	3,9875	5,5262	7,0649	8,6036
3	0,8710	2,3435	3,8161	5,2886	6,7612	8,2337
4	0,8351	2,2469	3,6588	5,0706	6,4824	7,8943
5	0,8020	2,1580	3,5139	4,8698	6,2258	7,5817
6	0,7715	2,0758	3,3801	4,6844	5,9887	7,2929
7	0,7432	1,9996	3,2561	4,5125	5,7689	7,0254
8	0,7169	1,9289	3,1408	4,3528	5,5648	6,7768
9	0,6924	1,8629	3,0335	4,2040	5,3746	6,5451
10	0,6695	1,8014	2,9332	4,0651	5,1969	6,3288

15.Sınıftan Bir Sigortalı (Orta Riskli) İçin Temel Prime Uygulanacak Düzeltme Katsayısı Tablosu (Karesel Kayıp Fonksiyonu)

Yıl	**Hasar sayısı (λ =%6,31)**					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	0,9036	2,4313	3,9589	5,4866	7,0142	8,5419
2	0,8242	2,2175	3,6108	5,0042	6,3975	7,7909
3	0,7576	2,0383	3,3190	4,5998	5,8805	7,1612
4	0,7009	1,8859	3,0709	4,2558	5,4408	6,6258
5	0,6521	1,7547	2,8572	3,9598	5,0623	6,1648
6	0,6097	1,6406	2,6714	3,7022	4,7330	5,7638
7	0,5725	1,5404	2,5082	3,4761	4,4440	5,4118
8	0,5395	1,4517	2,3639	3,2760	4,1882	5,1003
9	0,5102	1,3727	2,2352	3,0977	3,9602	4,8228
10	0,4838	1,3018	2,1198	2,9378	3,7558	4,5738

EK 2. Karesel Fayda Fonksiyonu Çizelgeleri

3.Sınıftan Bir Sigortalı (En Riskli) İçin Temel Prime Uygulanacak Düzeltme Katsayısı Tablosu (Üstel Kayıp Fonksiyonu)

Ti	**Hasar sayısı (λ =%14,82)**					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	0.8174	2.0496	3.2818	4.5140	5.7462	6.9785
2	0.6913	1.7328	2.7744	3.8160	4.8575	5.8991
3	0.5989	1.5010	2.4031	3.3052	4.2073	5.1093
4	0.5284	1.3240	2.1195	2.9151	3.7107	4.5063
5	0.4727	1.1843	1.8959	2.6075	3.3191	4.0307
6	0.4277	1.0713	1.7150	2.3586	3.0023	3.6459
7	0.3905	0.9780	1.5656	2.1532	2.7407	3.3283
8	0.3592	0.8997	1.4402	1.9806	2.5211	3.0616
9	0.3326	0.8330	1.3334	1.8337	2.3341	2.8345
10	0.3097	0.7755	1.2413	1.7071	2.1729	2.6388

10.Sınıftan Bir Sigortalı (En Az Riskli) İçin Temel Prime Uygulanacak Düzeltme Katsayısı Tablosu (Üstel Kayıp Fonksiyonu)

Ti	**Hasar sayısı (λ =%2,92)**					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	0.9540	2.5284	4.1027	5.6770	7.2514	8.8257
2	0.9121	2.4172	3.9224	5.4275	6.9326	8.4378
3	0.8737	2.3155	3.7572	5.1990	6.6407	8.0825
4	0.8384	2.2219	3.6054	4.9889	6.3724	7.7559
5	0.8059	2.1356	3.4654	4.7952	6.1250	7.4547
6	0.7757	2.0558	3.3359	4.6159	5.8960	7.1761
7	0.7478	1.9817	3.2157	4.4496	5.6835	6.9175
8	0.7218	1.9128	3.1038	4.2948	5.4859	6.6769
9	0.6975	1.8485	2.9995	4.1505	5.3015	6.4525
10	0.6748	1.7884	2.9020	4.0155	5.1291	6.2426

Çizelge 4.22. 15.Sınıftan Bir Sigortalı (Orta Riskli) İçin Temel Prime Uygulanacak Düzeltme Katsayısı Tablosu (Üstel Kayıp Fonksiyonu)

Ti	**Hasar sayısı (λ =%6,31)**					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	0.9080	2.3664	3.8248	5.2833	6.7417	8.2002
2	0.8315	2.1669	3.5024	4.8378	6.1733	7.5088
3	0.7669	1.9985	3.2301	4.4617	5.6933	6.9249
4	0.7116	1.8543	2.9971	4.1399	5.2826	6.4254
5	0.6637	1.7296	2.7955	3.8613	4.9272	5.9931
6	0.6219	1.6206	2.6193	3.6179	4.6166	5.6153
7	0.5850	1.5245	2.4640	3.4034	4.3429	5.2824
8	0.5523	1.4392	2.3261	3.2129	4.0998	4.9867
9	0.5230	1.3629	2.2028	3.0426	3.8825	4.7224
10	0.4967	1.2943	2.0919	2.8895	3.6871	4.4846

ÖZGEÇMİŞ

Kimlik Bilgileri

Adı Soyadı	: Nedime Tüba DURAK
Doğum Yeri	: Ankara
Medeni Hali	: Evli
E- Posta	: tuba.durak@hazine.gov.tr
Adresi	: Hazine Müsteşarlığı, Sigorta Denetleme Kurulu

Eğitim

Lisans : 1990-1995 Orta Doğu Teknik Üniversitesi Matematik Bölümü

Yüksel Lisans : 2001-2003 The University of Iowa Aktüerya Bilimleri Bölümü

Yabancı Dil ve Düzeyi

İngilizce, İleri

İş Deneyimi

1997 -… : Hazine Müsteşarlığı, Sigorta Denetleme Kurulu
Sigorta Denetleme Aktüeri

Deneyim Alanları

Aktüerya Bilimleri

Tezden Üretilmiş Projeler ve Bütçesi

-

Tezden Üretilmiş Yayınlar

-

Tezden Üretilmiş Tebliğ ve/veya Poster Sunumu ile Katıldığı Toplantılar

-

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS/DOKTORA TEZ ÇALIŞMASI ORJİNALLİK RAPORU

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
AKTÜERYA BİLİMLERİ ANABİLİM DALI BAŞKANLIĞI'NA

Tarih: 24/01/2018

Tez Başlığı / Konusu: OTOMOBİL SİGORTALARINDA DENEYİM FİYATLANDIRMASI VE BONUS-MALUS SİSTEMİ

Yukarıda başlığı/konusu gösterilen tez çalışmamın a) Kapak sayfası, b) Giriş, c) Ana bölümler d) Sonuç kısımlarından oluşan toplam 107 sayfalık kısmına ilişkin, 23/01/2018 tarihinde tez danışmanım tarafından *Turnitin* adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 9 'dur.

Uygulanan filtrelemeler:

1- Kaynakça hariç
2- Alıntılar hariç/~~dâhil~~
3- 5 kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Çalışması Orjinallik Raporu Alınması ve Kullanılması Uygulama Esasları'nı inceledim ve bu Uygulama Esasları'nda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

24.01.2018

Adı Soyadı:	NEDİME TÜBA DURAK
Öğrenci No:	A0369235
Anabilim Dalı:	AKTÜERYA BİLİMLERİ ABD
Programı:	AKTÜERYA BİLİMLERİ
Statüsü:	☐ Y.Lisans ☑ Doktora ☐ Bütünleşik Dr.

DANIŞMAN ONAYI

UYGUNDUR.

Prof. Dr. Meral Sucu

(Unvan, Ad Soyad, İmza)