SIRALI BANACH UZAYLARI ÜZERİNDE TANIMLI HOMOJEN MARKOV ZİNCİRLERİNİN CESÀRO ORTALAMALARININ PERTÜRBASYON SINIRLARI

PERTURBATION BOUNDS OF CESÀRO AVERAGES OF HOMOGENEOUS MARKOV PROCESSES DEFINED ON ORDERED BANACH SPACES

FATMA ÖZBAY

Yrd. Doç. Dr. NAZİFE ERKURŞUN ÖZCAN

Tez Danışmanı

Hacettepe Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim – Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin
Matematik Anabilim Dalı İçin Öngördüğü
YÜKSEK LİSANS TEZİ
olarak hazırlanmıştır.

2017

FATMA ÖZBAY'ın hazırladığı **"Sıralı Banach Uzayları Üzerinde Tanımlı Homojen Markov Zincirlerinin Cesàro Ortalamalarının Pertürbasyon Sınırları"** adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **MATEMATİK ANABİLİM DALI**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Cihan ORHAN
Başkan
....

Yrd. Doç. Dr. Nazife ERKURŞUN ÖZCAN
Danışman
....

Prof. Dr. Mehmet Zafer NURLU
Üye
....

Prof. Dr. Emin ÖZÇAĞ
Üye
....

Prof. Dr. Bahri TURAN
Üye
....

Bu tez Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. Menemşe GÜMÜŞDERELİOĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

YAYINLAMA VE FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI BEYANI

Enstitü tarafından onaylanan lisansüstü tezimin/raporumun tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı (kağıt) ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda verilen koşullarla kullanıma açma iznini Hacettepe Üniversitesi'ne verdiğimi bildiririm. Bu izinle üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet haklarım bende kalacak, tezimin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanım hakları bana ait olacaktır.

Tezin kendi orijinal çalışmam olduğunu, başkalarının haklarını ihlal etmediğimi ve tezimin tek yetkili sahibi olduğumu beyan ve taahhüt ederim. Tezimde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanılması zorunlu metinlerin yazılı izin alarak kullandığımı ve istenildiğinde suretlerini üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederim.

☐ **Tezimin/Raporumun tamamı dünya çapında erişime açılabilir ve bir kısmı veya tamamının fotokopisi alınabilir.**
(Bu seçenekle teziniz arama motorlarında indekslenebilecek, daha sonra tezinizin erişim statüsünün değiştirilmesini talep etseniz ve kütüphane bu talebinizi yerine getirse bile, teziniz arama motorlarının önbelleklerinde kalmaya devam edecektir.)

☒ **Tezimin/Raporumun 2020 tarihine kadar erişime açılmasını ve fotokopi alınmasını (İç Kapak, Özet, İçindekiler ve Kaynakça hariç) istemiyorum.**
(Bu sürenin sonunda uzatma için başvuruda bulunmadığım taktirde, tezimin/raporumun tamamı her yerden erişime açılabilir, kaynak gösterilmek şartıyla bir kısmı veya tamamının fotokopisi alınabilir.)

☐ **Tezimin/Raporumun .... tarihine kadar erişime açılmasını istemiyorum, ancak kaynak gösterilmek şartıyla bir kısmı veya tamamının fotokopisinin alınmasını onaylıyorum.**

☐ **Serbest seçenek/Yazarın seçimi**

18./12/ 2017

F. Özbay

Fatma ÖZBAY

ETİK

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

18/12/2017

F. Özbay

Fatma ÖZBAY

ÖZET

SIRALI BANACH UZAYLARI ÜZERİNDE TANIMLI HOMOJEN MARKOV ZİNCİRLERİNİN CESÀRO ORTALAMALARININ PERTÜRBASYON SINIRLARI

FATMA ÖZBAY
Yüksek Lisans, Matematik Bölümü
Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. NAZİFE ERKURŞUN ÖZCAN
Aralık 2017, 81 sayfa

Markov süreçleri teorisinde limitsel davranışların incelenmesi için kullanılan en etkili araçlardan biri Dobrushin ergodiklik katsayısıdır. Özel birtakım Banach uzayları üzerinde tanımlı pozitif operatörlerin birçok ilginç ergodiklik özelliği üzerinde daha önceden Dobrushin ergodiklik katsayısından faydalanılarak durulmuştur.
Biz ise yürüttüğümüz bu tez çalışmasında ilk olarak, bazı olan sıralı Banach uzayları üzerinde tanımlı Markov operatörlerinin ergodiklik katsayısı özelliklerinden bahsedeceğiz. Ardından bu operatörlerin düzgün ortalama ergodikliğini ve asimtotik kararlılığını ele alacağız. Bunlara ek olarak, düzgün ortalama ergodiklik kriterleri ergodiklik katsayısına bağlı kalınarak incelenecek ve sıralı Banach uzayları üzerindeki düzgün asimtotik kararlı Markov zincirleri için pertürbasyon teorisi kurulacaktır.
Daha sonra, Dobrushin ergodiklik katsayısı yardımıyla C_0-Markov yarıgruplarının düzgün asimtotik kararlılığı incelenerek bu yarıgrupların kararlılığı ve Markov operatörlerinin pertürbasyonlarına ilişkin sabit nokta duyarlılığı arasında lineer bir ilişki kurulacaktır. Ayrıca düzgün asimtotik kararlı yarıgrupların zaman ortalamaları için de pertürbasyon sınırları inşa edilecektir. Devamında ergodiklik katsayısından tekrar yardım alınarak Markov operatörü zaman ortalamalarının düzgün ve zayıf ergodikliklerinin birbirlerine denk oldukları gösterilecektir. Buradan elde edilen sonuç ise yarıgrupların benzer çeşitleri için bazı benzer çeşitte pertürbasyon sınırlarının üretilebileceğinin mümkün olmasıdır.
Tezin son kısmında ise sıralı Banach uzayları üzerinde tanımlı LR-netlerin ergodiklik özelliklerinden bahsedilecektir.
Yukarıda genel hatlarından bahsettiğimiz bu tez çalışmasında derlenen sonuçlar, Banach uzayları üzerinde tanımlı kuantum Markov süreçlerinin pertürbasyon teorisi için yeni bir perspektif kazandıracaktır.

Anahtar Kelimeler: Sıralı Banach uzayı, homojen Markov operatörü, Dobrushin katsayısı (ergodiklik katsayısı), pertürbasyon sınırı, Ces*à*ro ortalaması, Lotz-R*ä*biger ağları, normlu sıralı uzay, düzgün asimtotik kararlı

ABSTRACT

PERTURBATION BOUNDS OF CESÀRO AVERAGES OF HOMOGENEOUS MARKOV PROCESSES DEFINED ON ORDERED BANACH SPACES

FATMA ÖZBAY
Master of Science, Department of Mathematics
Supervisor: Assist. Prof. Dr. NAZİFE ERKURŞUN ÖZCAN
December 2017, 81 pages

Dobrushin's ergodicity coefficient is one of the effective tools for the investigations of limiting behaviours on the Markov process theory. Several interesting properties of the ergodicity of positive operators defined on some previous Banach spaces previously have been studied with the aid of Dobrushin's ergodicity coefficient.
In this thesis, we firstly mention ergodicity coefficient properties of Markov operators defined on ordered Banach space with a base. Then we deal with uniformly mean ergodic and asymptotically stable of these operators. Additionally, we examine uniform mean ergodicity criterion in terms of the ergodicity coefficient and set the perturbation theory for uniformly asymptotically stable Markov chains on ordered Banach spaces.
Subsequently, we study the uniform asymptotical stability for C_0-Markov semigroups in terms of the Dobrushin's ergodicity coefficient. In this way, we obtain a linear relation between the stability of the semigroup and the sensitivity of its fixed point with respect to perturbations of Markov operators. Moreover, we also establish perturbation bounds for the time averages of the uniform asymptotically stable semigroups.
Furthermore, we study the equivalence of uniform and weak ergodicities of the time averages Markov semigroups in terms of the ergodicity coefficient. This result allows us to produce some kind of perturbation bounds for such kind of semigroups.
In this thesis finally we consider properties of the ergodicity of LR-nets defined on ordered Banach space.
The results of this thesis which we have compiled above in general lines open a new perspective in perturbation theory for quantum Markov processes on Banach spaces.

Keywords: Ordered Banach space, homogen Markov operator, Dobrushin's coefficient (ergodicity coefficient), perturbation bound, Cesàro average, Lotz-R$\ddot{a}$biger nets, ordered norm space, uniformly asymptotically stable

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans eğitimim boyunca edindiğim bilgilerin temel kaynağı, birçok konuda yol göstericim ve bu çalışmanın ortaya çıkmasında bana bütün emek, ilgi ve zamanını ayıran, yeganeliğin en güzel örneği olan değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Nazife ERKURŞUN ÖZCAN'a,

Her zaman bana güven duyan ve desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen, bu hayattaki en büyük şansım olan aileme SONSUZ TEŞEKKÜRLER.

İÇİNDEKİLER

1 GİRİŞ

Henri Poincaré'ın kurucusu olarak kabul edildiği ve kökeni Newton mekaniğine (klasik mekanik) dayanan Dinamik Sistemler'in, uzay katmanındaki bir noktanın zamana bağlı durumunu incelemesi, bizim bu tezi oluştururken ergodik teoriye yönelmemizi sağlamıştır.

Ergodik teori deyince aklımıza gelen ilk iki isim George David Birkhoff ve John von Neumann'dır. Birkhoff, 1913 yılında Henri Poincaré'ın "Last Geometric Theorem"ini özel bir durum için kanıtlayarak ismini dünyaya duyurmuştur. 1927 yılında ise şimdi ergodik teorem olarak bilinen ve en önemli çalışmalarından biri olan "Dynamical Systems"i yayınlamıştır. Ergodik teori üzerinde yürütülen çalışmalar günümüzde de hız kesmeden devam etmekte ve bu alanda çalışan birçok kişiye de ödül kazandırmaktadır. "Matematiğin Nobeli" olarak adlandırılan "Fields Matematik Ödülü" 2010 yılında İsrailli matematikçi Elon Lindenstrauss ve 2014 yılında ise bu ödülü kazanan ilk kadın matematikçi olan İranlı Meryem Mirzakhani'ye verilmiştir.

Evreni gözlem yoluyla anlamaya çalışmak oldukça zor ve hatta neredeyse imkansızdır. Bu yüzden yüzyıllardır matematik ve felsefe gibi alanlardan faydalanılmaktadır. Matematiğin felsefeye kıyasla kesinliği oldukça fazladır. Fakat buna rağmen çoğu zaman belirsiz durumlar veya belirsizliklerle karşılaşılmaktadır. Bizim çalışmamızda da belirsizlik denilince akla gelecek olan yapı Markov süreçleridir.

Markov süreçleri teorisinde, geçiş olasılıkları veya bir başka deyişle geçiş ihtimalleri olasılıkları önemli bir rol oynamaktadır. Bu olasıkları kullanarak L_1 uzaylarında Markov operatörleri olarak adlandırılan lineer operatörler tanımlanabilir. Markov süreçlerinin çeşitli ergodik özelliklerini çalışırken, Markov operatörlerinin iterasyonlarının asimptotik davranışlarını da incelemek oldukça önemlidir.

Yürütülen herhangi bir çalışmada Markov süreçlerinin tamamını ele almak yerine Markov operatörlerine karşılık gelen limitsel davranışlardan faydalanmak daha mantıklıdır (bakınız [29]). Bu tür bir yaklaşım kuantum istatistiksel fizik ve kuantum optik gibi kuantum fiziğin çeşitli yönlerinde doğal olarak görülen Markov zincirlerinin kuantum benzerlerinin geliştirilmesinde kolaylık sağlar.

Kuantum ve klasik durumlar arasındaki farklılıklar için daha fazla bilgi edinmek isteyen okuyucuya [1, 24] referansları önerilebilir. Kuantum sistemlerindeki çalışmaların odak noktası, gerçek bir maddenin fiziksel özelliklerini ve davranışlarını anlayabilmek için oluşturulmuş olan basit düzeydeki modellerdir. Kuantum bilgi teorisi, bilginin uzun süre depolanabilmesi için nasıl bir kuantum yapının oluşturulması gerektiğine dair yönelttiği sorularla bu alanda yeni bir perspektif oluşturmuştur.

Birçok fiziksel yapının ister teorik modelleri üzerinde isterse bizzat orjinal modeli üzerinde çalışılsın, çalışılan modelin pertürbasyon sınırları altındaki kararlılığının bilinmesi oldukça önemlidir.

Operatör ortalamalarının kümeleriyle ilgilenildiğinde bir dizi veya bir ağ oluşturmak oldukça doğaldır. Burada aklımıza gelen ilk şey bu dizi veya ağın yakınsaklık davranışının nasıl olduğudur. Sağlıklı bir çalışma için bu konuda titiz davranılmalıdır. Bu sebeple bu tezin öncelikli amacı, soyut uzaylar üzerinde tanımlı homojen Markov süreçlerinin Cesàro ortalamalarının pertüsbasyon sınırlarını belirlemektir. Ayrıca burada dikkat çekilmek istenen bir diğer konu ise, Dobrushin ergodiklik katsayısının Markov süreçlerindeki limitsel davranışların belirlenmesinde oldukça önemli bir yere sahip olmasıdır [27, 28, 33, 45].

Konu dağılımı bakımından 6 bölümden oluşan bu tez çalışmasının birinci bölümünde, tez boyunca temel alınacak olan tanım ve kavramlardan bahsedilmiştir.

İkinci bölümünde, Markov operatörlerinin limit özelliklerinden bahsedilmiş ve buna bağlı olarak oluşan pertürbasyon sınırları üzerinde durulmuştur [19, 38].

Üçüncü bölümde, Markov operatörlerinin Cesàro ortalamalarının limit özelliklerinden söz edilmiş, düzgün ve zayıf ergodikliklerinin birbirlerine denk oldukları gösterilmiş ve pertürbasyon sınırları incelenmiştir [19, 20, 21].

Dördüncü bölümde, C_0-Markov yarıgrupları tanımlanmış ve sağladığı özelliklerden bahsedilmiştir. Ayrıca Dobrushin ergodiklik katsayısı yardımıyla C_0-Markov yarıgrupla-rının düzgün asimptotik kararlılığı incelenmiş ve pertürbasyon sınırlarından bahsedilmiştir [22].

Beşinci bölümde, üçüncü bölümün benzeri C_0-Markov yarıgrupları için incelenmiştir [22].

Altıncı bölümde yani konu itibariyle son bölümde, Lotz-R$\ddot{a}$biger ağları tanımlanıp örneklendirilmiş, yakınsaklık incelemesi yapılmış ve Cesàro ortalamalarının genellemesi olan ULR-ağları ve ergodiklik kriterleri verilerek tez tamamlanmıştır [20, 21].

Ayrıca son kısımda, Sonuç ve Öneriler olarak verilen bölümde, bu tezin devamı niteliğinde olacak olan açık problemden bahsedilmiş ve hangi yöntemin kullanılacağı ifade edilerek tez tamamlanmıştır.

2 TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Bu bölümde tez boyunca kullanılacak olan temel tanım ve kavramlar verilecektir. Detaylı bilgi için herhangi bir klasik fonksiyonel analiz veya Banach Latisleri ve Pozitif Operatörler kitabına bakılabilir.

2.1 Bazı Olan Sıralı Banach Uzayları

Bu alt bölümde tezin temelini oluşturan OBSB uzaylarının inşası için gerekli olan kavramlar ele alınacaktır. Detaylar için [4, 2, 31] kitaplarından faydalanılabilir.

Tanım 2.1.1. Bir vektör uzayının boştan farklı bir $\mathcal{C}$ alt kümesine eğer

- $\mathcal{C} + \mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}$
- $\alpha\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}, \quad \forall\alpha \geq 0$
- $\mathcal{C} \cap (-\mathcal{C}) = \{0\}$

koşullarını sağlıyorsa *koni* denir.

Tanım 2.1.2. P herhangi bir küme olsun. Bu küme üzerinde tanımlanan "$\leq$" işlemi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa P kümesine *kısmi sıralı küme* denir.
Her $a, b, c \in P$ için,

- $a \leq a$ (yansıma)
- $a \leq b$ ve $b \leq a \Rightarrow a = b$ (ters simetri)
- $a \leq b$ ve $b \leq c \Rightarrow a \leq c$ (geçişme)

Tanım 2.1.3. V üzerindeki kısmi sıralama bağıntısıyla bir vektör uzayı olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa V kısmi sıralı vektör uzayına *sıralı vektör uzayı* denir.
Her $x, y, z \in V$ ve $0 \leq \lambda \in \mathbb{F}$ için,

- $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$
- $x \leq y \Rightarrow \lambda x \leq \lambda y$

Tanım 2.1.4. X vektör uzayının herhangi bir $\mathcal{C}$ konisi yardımıyla X üzerinde "$\leq$" sıralama bağıntısı tanımlanabilir. Bu sıralama her $x, y \in X$ için,

$$x \leq y \Leftrightarrow y - x \in \mathcal{C}$$

şeklindedir. Bu sıralamanın bir kısmi sıralama olduğu aşikardır.
Ayrıca $x, y, z \in X$ için $y \leq z$ olsun. Böylece $z - y \in \mathcal{C}$ ve $x - x + z - y \in \mathcal{C}$ dir. Buradan

$$x + z - (x + y) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow x + y \leq x + z$$

olduğu görülür. Ek olarak, herhangi $\lambda \in \mathbb{R}_+$ için koni özelliğinden $z - y \in \mathcal{C}$ ise $\lambda(z - y) \in \mathcal{C}$ olur. Böylece

$$y \leq z \Rightarrow \lambda y \leq \lambda z$$

elde edilir. Kısacası X vektör uzayı, üzerindeki herhangi $\mathcal{C}$ konisi yardımıyla oluşturulan sıralama ile sıralı bir vektör uzayı olur. Burada $\mathcal{C}$ konisi $(X, \leq)$ sıralı vektör uzayının pozitif konisidir, $X_+ = \mathcal{C}$. Buradan da görüldüğü üzere vektör sıralaması ile koni arasında birebir bir ilişki vardır. Her koni bir sıralama verirken her sıralama yardımı ile de bir koni tanımlanabilir.

Bu tanımdan itibaren $\mathcal{C}$ yerine X_+ gösterimi kullanılacaktır.

Tanım 2.1.5. X_+, X vektör uzayının bir konisi olmak üzere $\mathcal{B}$, $X_+\backslash\{0\}$ kümesinin konveks bir alt kümesi olsun. Eğer her $x \in X_+\backslash\{0\}$ için tek bir $\lambda > 0$ ve $b \in \mathcal{B}$ var ve $x = \lambda b$ şeklinde yazılabiliyor ise $\mathcal{B}$ kümesine X_+ konisi için *bazdır* denir.

Bu bazın varlığı lineer ve kesin pozitif fonksiyonellerin varlığı ile ilişkilidir. Bu ilişki aşağıdaki teorem ile verilir.

Teorem 2.1.6. *X vektör uzayı olmak üzere X_+ konisinin bazının olabilmesi için gerek ve yeter koşul X'in lineer ve X_+ üzerinde kesin pozitif fonksiyonele sahip olmasıdır. Ek olarak, eğer $f : X \to \mathbb{R}$ lineer ve X_+ üzerinde kesin pozitif fonksiyonel ise her $\alpha > 0$ için,*

$$\mathcal{B} = \{x \in X_+ : f(x) = \alpha\}$$

konveks kümesi X_+ için bir bazdır.

Kanıt. $\mathcal{B}$, X_+ konisi için bir baz olsun. Yukarıdaki tanımdan her $x > 0$ için tek bir $\lambda \in \mathbb{R}_+$ ve $b \in \mathcal{B}$ vardır öyle ki $x = \lambda b$ biçiminde yazılabilir. Burada $f : X_+ \to [0, \infty)$ fonksiyonu $f(0) = 0$ ve her $x > 0$ için $f(x) = \lambda$ koşulunu sağlasın. O halde f fonksiyonunun kesin pozitif olduğu kolaylıkla görülebilir. f'nin tüm X üzerinde lineer bir fonksiyonel olarak tanımlanabilmesi için Kantorovich-Hahn-Banach Teoremi'nden toplamsal olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır. Bunun için $x, y \in X_+$ ve $x \neq 0$, $y \neq 0$ olsun. Tanımdan tek bir $b_1, b_2 \in \mathcal{B}$ vardır öyle ki $x = f(x)b_1$ ve $y = f(y)b_2$ şeklinde yazılabilir.

$$b = \frac{f(x)}{f(x) + f(y)} b_1 + \frac{f(y)}{f(x) + f(y)} b_2$$

elemanı $\frac{f(x)}{f(x)+f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)+f(y)} = 1$ ve $\mathcal{B}$ konveks olduğundan $\mathcal{B}$'nin elemanıdır. Ayrıca

$$\begin{aligned} x + y &= f(x)b_1 + f(y)b_2 \\ &= (f(x) + f(y)) \left(\frac{f(x)}{f(x) + f(y)} b_1 + \frac{f(y)}{f(x) + f(y)} b_2 \right) \\ &= (f(x) + f(y))b \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir ki bu da baz tanımından $x + y = f(x + y)b = (f(x) + f(y))b$ olduğunu söyler. Böylece $f(x + y) = f(x) + f(y)$ olup f toplamsaldır.
Tersi için $f : X \to \mathbb{R}$ lineer ve X_+ üzerinde kesin pozitif bir fonksiyonel olsun. Bir tane $\alpha > 0$ için $\mathcal{B} = \{x \in X_+ : f(x) = \alpha\}$ alınsın. $\mathcal{B}$'nin X_+ konisi için baz olduğunu göstermeliyiz. Eğer $x \in X_+$ ve $x \neq 0$ ise $\alpha > 0$ ve $f(x) > 0$ olduğundan $\frac{\alpha}{f(x)} x \in X_+$ olur. Ayrıca $f\left(\frac{\alpha}{f(x)} x\right) = \alpha$ olduğundan $\frac{\alpha}{f(x)} x \in \mathcal{B}$'dir. Buradan her $x \in X_+$ ve $x \neq 0$ için bir tane $b = \frac{\alpha}{f(x)} x$ bulunur öyle ki $x = \frac{f(x)}{\alpha} b$ eşitliği elde edilir. $\lambda = \frac{f(x)}{\alpha}$ alalım. Eğer λ'nın ve b'nin tek olduğu gösterilir ise $\mathcal{B}$ konveks kümesinin, tanımdan X_+ için baz olduğu gösterilmiş olur. Teklik için $x = \lambda_1 b_1 = \lambda_2 b_2$ koşulunu sağlayan $\lambda_i \in \mathbb{R}_+$ ve $b_i \in \mathcal{B},\ i = 1, 2$ elemanlarını alalım. O halde

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_1}{\alpha} f(b_1) = \frac{1}{\alpha} f(\lambda_1 b_1) = \frac{1}{\alpha} f(x) = \frac{1}{\alpha} f(\lambda_2 b_2) = \frac{\lambda_2}{\alpha} f(b_2) = \lambda_2$$

yazılabilir. Buradan $\lambda_1 = \lambda_2$ ve böylece $b_1 = b_2$ bulunur. $\square$

Şimdi tez boyunca kullanacağımız OBSB tanımını verebiliriz.

Tanım 2.1.7. X, X_+ konisi ile birlikte bir sıralı vektör uzayı olmak üzere f lineer ve X_+ üzerinde kesin pozitif $(x > 0 \Rightarrow f(x) > 0)$ bir fonksiyonel olsun. $\mathcal{K} = \{x \in X_+ : f(x) = 1\}$ alt kümesine X uzayının *bazı* ve X uzayına da *bazı olan sıralı vektör uzayı* denir. Bu uzay genel olarak $(X, X_+, \mathcal{K}, f)$ şeklinde gösterilir.

U, $\mathcal{K} \cup (-\mathcal{K})$ kümesinin konveks zarfı olmak üzere

$$\|x\|_{\mathcal{K}} = \inf\{\lambda \in \mathbb{R}_+ : x \in \lambda U\}$$

olsun. $x \in X$ olmak üzere $\gamma_x = \{\lambda > 0 : x \in \lambda U\}$ alınsın. $\lambda \in \gamma_x$ olmak üzere $\mu > \lambda$ olsun. $0 \in U$ ve U konveks olduğundan $\mu \in \gamma_x$ tir. O halde $\mathbb{R} \supset \gamma_x$ kümesinin bir alt sınırı vardır ve $\inf$ değeri anlamlıdır. Böylece

$$\|x\|_{\mathcal{K}} = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda U\}$$

değerinden bahsedilebilir.
Bu durumda $\|\cdot\|_{\mathcal{K}}$, X üzerinde bir seminormdur. Şöyle ki,

$c \in \mathbb{F}$ ve her $x, y \in X$ olmak üzere;

$n_1)$ $\|x\|_{\mathcal{K}} = \inf\{\lambda \in \mathbb{R}_+ : x \in \lambda U\} \geq 0$ ($\lambda \in \mathbb{R}_+$)

$n_2)$ $x = 0$ olsun. $0 \in U$ olduğundan her $\lambda \geq 0$ için $x \in \lambda U$ olur. Böylece

$$\|x\|_{\mathcal{K}} = \inf\{\lambda \in \mathbb{R}_+ : x \in \lambda U\} = 0$$

elde edilir.

$n_3)$ $c = 0$ ise aşikardır $(n_2\ den)$. $c \neq 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\|x\|_{\mathcal{K}} &= \inf\left\{\frac{\lambda}{|c|} \in \mathbb{R}_+ : x \in \frac{\lambda}{|c|}U\right\} \\
&= \frac{1}{|c|}\inf\left\{\lambda \in \mathbb{R}_+ : x \in \frac{\lambda}{|c|}U\right\} \\
&= \frac{1}{|c|}\inf\left\{\lambda \in \mathbb{R}_+ : |c|x \in \lambda U\right\} \\
&= \frac{1}{|c|}\|cx\|_{\mathcal{K}}
\end{aligned}$$

$$\therefore \|cx\|_{\mathcal{K}} = |c|\|x\|_{\mathcal{K}}$$

$n_4)$ $x, y \in X$ olmak üzere bir $\varepsilon > 0$ sayısı alınsın.

$$\lambda = \|x\|_{\mathcal{K}} + \frac{\varepsilon}{2} \text{ ve } \mu = \|y\|_{\mathcal{K}} + \frac{\varepsilon}{2}$$

sayıları için $x \in \lambda U$ ve $y \in \mu U$ sağlanır. Böylece $a \in U$ ve $b \in U$ için $x = \lambda a$ ve $y = \mu b$ yazılabilir.
U konveks olduğundan $x + y \in (\lambda + \mu)U$ bulunur. Böylece

$$\|x + y\|_{\mathcal{K}} \leq \|x\|_{\mathcal{K}} + \|y\|_{\mathcal{K}} + \varepsilon$$

olur. Herhangi bir ε için bu eşitsizlik sağlanacağından

$$\|x+y\|_{\mathcal{K}} \leq \|x\|_{\mathcal{K}} + \|y\|_{\mathcal{K}}$$

üçgen eşitsizliği elde edilir.

Burada $\mathcal{K}$ bazı her $x \in X_+$ için $f(x) = \|x\|_{\mathcal{K}}$ alınarak $\mathcal{K} = \{x \in X_+ : \|x\|_{\mathcal{K}} = 1\}$ şeklinde yazılabilir. Eğer *U* kümesi radyal kompakt ise yani orijinden geçen herhangi ℓ doğrusu ile elde edilen $U \cap \ell$ kümesi kapalı ve sınırlı bir doğru parçası ise $\|\cdot\|_{\mathcal{K}}$ bir normdur ve bu durumda $(X, X_+, \mathcal{K}, f)$ uzayı *bazı olan sıralı normlu uzay* olarak adlandırılır. Dahası *X*, $\|\cdot\|_{\mathcal{K}}$ normu ile tam ve X_+ kapalı olduğunda $(X, X_+, \mathcal{K}, f)$ *bazı olan sıralı Banach uzayı* olarak adlandırılır. Orjinalliğe bağlılık ve yazım kolaylığı açısından bu uzay bundan sonra "OBSB" ile temsil edilecektir. Ayrıca $\|\cdot\|_{\mathcal{K}}$ normu yerine de gösterim kolaylığı ve alışılmışlık gereği $\|\cdot\|$ normu kullanılacaktır.

Şimdi de OBSB için örnekler verelim.

Örnek 2.1.8. *: $X = \ell_p, 1 < p < \infty$ olsun.*

$$X_+ = \left\{ x = (x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots) \in \ell_p : x_0 \geq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p} \right\}$$

ve f_0 kesin pozitif lineer bir fonksiyonel olacak şekilde $f_0(x) = x_0$ olarak tanımlansın. Bu durumda $\mathcal{K} = \{x \in X_+ : f_0(x) = 1\}$ olur. Dolayısıyla $(X, X_+, \mathcal{K}, f_0)$ uzayının bir OBSB olduğu görülür. Ayrıca şunu da belirtmeliyiz ki, ℓ_1 uzayının kendiliğinden OBSB olması onun yukarıdaki inşaya dahil edilmesini gereksiz kılmıştır.

Sonuç 2.1.9. *Örnek 2.1.8 dikkate alındığında $\|\cdot\|_{\mathcal{K}}$ normu ile ℓ_p normu birbirine denktir.*

Kanıt. $x \in X = \ell_p$ için,

$$\begin{aligned}
\|x\|_{\mathcal{K}} = 1 = x_0 &\leq x_0 + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} \\
&= \|x\|_p
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$\|x\|_{\mathcal{K}} \leq \|x\|_p$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}
\|x\|_p &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} \\
&= \sqrt[p]{x_0{}^p + x_1{}^p + \cdots} \\
&\leq \sqrt[p]{x_0{}^p + x_0{}^p} \\
&= \sqrt[p]{2x_0{}^p} \\
&= \sqrt[p]{2} \\
&= \sqrt[p]{2}\|x\|_{\mathcal{K}}
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$\frac{1}{\sqrt[p]{2}}\|x\|_p \leq \|x\|_{\mathcal{K}}$$

yazılabilir. Böylece

$$m\|x\|_p \leq \|x\|_{\mathcal{K}} \leq M\|x\|_p$$

olacak şekilde en az bir tane m ve M sayılarının bulunabileceği görülür. O halde $\|\cdot\|_{\mathcal{K}}$ normu ile $\|\cdot\|_p$ normu birbirine denktir. □

Örnek 2.1.10. *: $I \subset \mathbb{R}$ alt aralığını alalım.*

$$\mathcal{L}_1 := \{g : I \to \mathbb{R} | \text{ g ölçülebilir } ve \ \|g\|_1 < \infty\}$$

vektör uzayı üzerinde

$$\|g\|_1 := \int_I |g(x)|d\mathrm{x}$$

dönüşümü bir seminormdur. Dolayısıyla $\mathcal{L}_1$ uzayı bir Banach uzayı değildir. O halde $\mathcal{N} := \{g \in \mathcal{L}_1 : g \equiv 0\}$ olmak üzere $L_1 := \mathcal{L}_1 \backslash \mathcal{N}$ vektör uzayını alırsak bu uzay bir Banach uzayı olur. Bununla birlikte f birim fonksiyonu olarak alınırsa pozitif fonksiyonların oluşturduğu koni ile birlikte L_1 uzayı OBSB olur. Yani $(L_1, X_+, \|\cdot\|_1, \mathbb{1})$ uzayı, bazı olan sıralı Banach uzayıdır.

Lemma 2.1.11. *$(X, X_+, \mathcal{K}, f_0)$ uzayı OBSB olsun. Bu uzaydan alınan her x elemanı, $y, z \geq 0$ ve $\|x\| = \|y\| + \|z\|$ olacak şekilde $x = y - z$ olarak ayrışabilir.*

Kanıt. U, $\mathcal{K} \cup (-\mathcal{K})$ kümesinin konveks zarfı olmak üzere $x \in \|x\|U$ olsun. Bu durumda,

$$x = \lambda_0\|x\|y_0 - \mu_0\|x\|z_0 \ , \qquad \lambda_0 + \mu_0 = 1$$

olacak şekilde $y_0, z_0 \in \mathcal{K}$ ve $\lambda_0, \mu_0 \geq 0$ vardır. Buradan $y = \lambda_0\|x\|y_0$ ve $z = \mu_0\|x\|z_0$ olarak alınırsa $x = y - z$ ve dolayısıyla

$$\|y\| + \|z\| = \lambda_0\|x\|\|y_0\| + \mu_0\|x\|\|z_0\| = \lambda_0\|x\|1 + \mu_0\|x\|1 = \|x\|(\lambda_0 + \mu_0) = \|x\|$$

elde edilir. □

Lemma 2.1.11'de göstermiş olduğumuz ayrışma prensibi doğrultusunda aşağıdaki lemmayı verebiliriz.

Lemma 2.1.12. *$(X, X_+, \mathcal{K}, f)$ uzayı OBSB olsun. $\mathcal{N} = \{x \in X : f(x) = 0\}$ olmak üzere her $x, y \in X$ için $x - y \in \mathcal{N}$ olacak şekilde*

$$x - y = \frac{\|x - y\|}{2}(u - v)$$

eşitliğini sağlayan $u, v \in \mathcal{K}$ vardır.

Kanıt. $z = x - y$ olsun. Lemma 2.1.11'den $a, b \in X_+$ için $z = a - b$ ve $\|z\| = \|a\| + \|b\|$ eşitlikleri yazılabilir. Buradan $f(a) = \|a\|$, $f(b) = \|b\|$ ve $\|a\| = \|b\|$ gösterimlerine geçilirse $\|a\| = \frac{\|z\|}{2}$ eşitliğini yazmak mümkündür. Dolayısıyla

$$u = \frac{a}{\|a\|} \ , \ v = \frac{b}{\|b\|}$$

alındığında,

$$\begin{aligned}
\frac{\|x-y\|}{2}(u-v) &= \frac{\|z\|}{2}\left(\frac{a}{\|a\|}-\frac{b}{\|b\|}\right)\\
&= \frac{\|a\|+\|b\|}{2}\left(\frac{a}{\|a\|}-\frac{b}{\|b\|}\right)\\
&= \|a\|\left(\frac{a}{\|a\|}-\frac{b}{\|b\|}\right)\\
&= a-b\\
&= z\\
&= x-y
\end{aligned}$$

elde edilir ve sonuç olarak,

$$x-y=\frac{\|x-y\|}{2}(u-v)$$

eşitliği sağlanacak şekilde $u, v \in \mathcal{K}$ elemanlarının varlığı gösterilmiş olur. □

2.2 Markov Operatörleri

Tanım 2.2.1. $(X, X_+, \mathcal{K}, f)$ uzayı OBSB olsun. $x \in X$ için eğer $x \geq 0$ olduğunda $Tx \geq 0$ oluyorsa $T : X \to X$ lineer operatörüne *pozitif operatör* denir. Eğer $T(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}$ ise $T : X \to X$ pozitif lineer operatörüne *Markov operatörü* denir.

Burada $\|T\| = 1$ olmakla birlikte $T^* : X^* \to X^*$ operatörü Banach uzayı X^* üzerindeki eşlenik dönüşümdür. Ayrıca $T^* f = f$ dir.

Şimdi Örnek 2.2.3'i anlamak adına kısa bir tanım verelim.

Tanım 2.2.2. Eğer A $n \times n$ kare matrisinin bütün elemanları pozitif ve sütun elemanları toplamı 1 ise A matrisine *Markov matrisi* denir. Markov matrisi sıklıkla *stokastik matris* olarak da adlandırılır.

Örnek 2.2.3. *$X = \mathbb{R}^n, X_+ = \mathbb{R}^n_+$ ve $\mathcal{K} = \{(x_i) \in \mathbb{R}^n : x_\mathrm{i} \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$ durumlarında $\mathbb{R}^n$ üzerinde herhangi bir T Markov operatörü tanımlanabilir ve tanımlanan bu operatör, A Markov matrisi ile de rahatlıkla gösterilebilir.*

Örnek 2.2.4. *L_1 uzayı ve $T : L_1 \to L_1$ pozitif operatörü ele alınsın. Eğer her $f \in (L_1)_+$ için $\|Tf\| = \|f\|$ koşulu sağlanıyorsa T operatörüne Markov operatörü denir. Şöyle ki, $(L_1, (L_1)_+, \|\cdot\|_1, \mathbb{1})$ uzayının OBSB olduğunu biliyoruz. $\mathcal{K} = \{f \geq 0 : \|f\|_1 = 1\}$ bazı dikkate alındığında,*

$$f \geq 0 \Rightarrow Tf \geq 0 \ \text{ ve ayrıca } \ \|Tf\| = \|f\| = 1 \ \text{ olur.}$$

Dolayısıyla buradan da $T(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}$ elde edilir. Böylece T operatörünün Markovluğu gösterilmiş olur. Bu şekilde tanımlanan T Markov operatörü aşağıdaki koşulları da sağlar.
Her $f \in L_1$ için,

(i) $(Tf)^+ \leq Tf^+$

(ii) $(Tf)^- \leq Tf^-$

(iii) $|Tf| \leq T|f|$

dir.

Kanıt.
(i)

$$\begin{aligned}(Tf)^+ = (T(f^+ - f^-))^+ &= (Tf^+ - Tf^-)^+ \\ &= \max\{0, Tf^+ - Tf^-\} \\ &\leq \max\{0, Tf^+\} \\ &= Tf^+\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}(Tf)^- = (T(f^+ - f^-))^- &= (Tf^+ - Tf^-)^- \\ &= \max\{0, -(Tf^+ - Tf^-)\} \\ &\leq \max\{0, Tf^-\} \\ &= Tf^-\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}|Tf| &= (Tf)^+ + (Tf)^- \\ &\leq Tf^+ + Tf^- \\ &= T(f^+ + f^-) \\ &= T|f|\end{aligned}$$

□

2.3 Dobrushin Katsayısı

Bu tezde ergodiklik karakterizasyonları verilirken Dobrushin ergodiklik katsayısının özellikleri kullanılacaktır. Bu sebeple bu bölümde Dobrushin katsayısının bir operatör için tanımı ve özellikleri verilecektir. OBSB uzaylarında daha detaylı bilgi için [9, 38] ve sonlu boyutlu uzaylardaki karşılığı için [35] makalelerine bakılabilir.

Tanım 2.3.1. $(X, X_+, \mathcal{K}, f)$ uzayı OBSB ve $T : X \to X$ lineer sınırlı bir operatör olsun.

$$\mathcal{N} = \{x \in X : f(x) = 0\} \tag{2.3.1}$$

eşitliğiyle birlikte

$$\delta(T) = \sup_{x \in \mathcal{N}, x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \tag{2.3.2}$$

tanımlanır. Tanımlanan $\delta(T)$ değerine T operatörünün *Dobrushin ergodiklik katsayısı* denir.

Ayrıca her $y \in X$ için $T_y : X \to X$ lineer operatörü $T_y(x) = f(x)y$ olarak tanımlanabilir.

Teorem 2.3.2. *[38] $(X, X_+, \mathcal{K}, f)$ uzayı OBSB ve $T, S : X \to X$ Markov operatörleri olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

(i) $0 \leq \delta(T) \leq 1$

(ii) $|\delta(T) - \delta(S)| \leq \delta(T - S) \leq \|T - S\|$

(iii) $\delta(TS) \leq \delta(T)\delta(S)$

(iv) *Eğer $H^*(f) = 0$ olacak şekilde $H : X \to X$ lineer sınırlı bir operatör ise $\|TH\| \leq \delta(T)\|H\|$ olur.*

(v)

$$\delta(T) = \frac{1}{2} \sup_{u,v \in \mathcal{K}} \|Tu - Tv\| \tag{2.3.3}$$

(vi) *Eğer $\delta(T) = 0$ ise $T = T_{y_0}$ olacak şekilde bir $y_0 \in X_+$ vardır.*

Kanıt.
(i) Norm tanımı gereği $\delta(T) \geq 0$ olur. Diğer yandan

$$\delta(T) = \sup_{x \in \mathcal{N}, x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \sup_{x \in \mathcal{N}, x \neq 0} \frac{\|T\|\|x\|}{\|x\|} = 1$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$0 \leq \delta(T) \leq 1$$

dir.
(ii)

$$\delta(T - S) = \sup_{x \in \mathcal{N}, x \neq 0} \frac{\|(T - S)(x)\|}{\|x\|} \leq \sup_{x \in \mathcal{N}, x \neq 0} \frac{\|T - S\|\|x\|}{\|x\|} = \sup_{x \in \mathcal{N}, x \neq 0} \|T - S\| = \|T - S\|$$

Buradan, $\delta(T - S) \leq \|T - S\|$ olduğu görülür. Şimdi de eşitsizliğin ilk tarafını gösterelim. Genelliği bozmadan $\delta(S) \leq \delta(T)$ alalım. Herhangi $\varepsilon > 0$ için $\delta(T) \leq \|Tx_\varepsilon\| + \varepsilon/2$ olacak şekilde $\|x_\varepsilon\| = 1$ özelliğini sağlayan $x_\varepsilon \in \mathcal{N}$ bulunabilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\delta(T) - \delta(S) &\leq \|Tx_\varepsilon\| + \varepsilon/2 - \sup_{x \in \mathcal{N}, x \neq 0} \|Sx\| \\
&\leq \|Tx_\varepsilon\| + \varepsilon/2 - (\|Sx_\varepsilon\| - \varepsilon/2) \\
&= \|Tx_\varepsilon\| - \|Sx_\varepsilon\| + \varepsilon \\
&\leq \|(T - S)x_\varepsilon\| + \varepsilon \\
&\leq \sup_{x \in \mathcal{N}, \|x\| = 1} \|(T - S)x\| + \varepsilon \\
&= \delta(T - S) + \varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\delta(T) - \delta(S) \leq \delta(T - S)$ olduğu görülür. Benzer şekilde genelliği bozmadan $\delta(T) \leq \delta(S)$ alınarakta $\delta(S) - \delta(T) \leq \delta(T - S)$ elde edilir. Sonuç olarak,

$$|\delta(T) - \delta(S)| \leq \delta(T - S)$$

bulunur. O halde istenilen eşitsizlikler gösterilmiş olur.
(iii) $x \in \mathcal{N}$ ve S Markov operatörü olsun. S operatörü Lemma 2.1.12 dikkate alınarak

düşünüldüğünde $f(Sx) = 0$ olur. Buradan $Sx \in \mathcal{N}$ olduğu görülür. O halde

$$\begin{aligned}
\delta(TS) &= \sup_{x \in \mathcal{N}, \|x\|=1} \|TSx\| \\
&= \sup_{x \in \mathcal{N}, u,v \in \mathcal{K}} \left\| T \frac{\|Sx\|}{2}(u-v) \right\| \\
&= \sup_{x \in \mathcal{N}, u,v \in \mathcal{K}} \frac{1}{2} \|Tu - Tv\| \|Sx\| \\
&\leq \delta(T)\delta(S)
\end{aligned}$$

edilir.
(iv) $H : X \to X$ sınırlı lineer operatörü $H^*(f) = 0$ koşulunu sağlasın. Böylece her $x \in X$ için $Hx \in \mathcal{N}$ olur. Böylece $\|THx\| \leq \delta(T)\|Hx\| \leq \delta(T)\|H\|\|x\|$ yazılabilir. O halde $\|TH\| \leq \delta(T)\|H\|$ olur.
(v) $x \in \mathcal{N}$ ve $x \neq 0$ olsun. Lemma 2.1.12 kullanılırsa,

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \frac{\frac{\|x\|}{2}\|T(u-v)\|}{\|x\|} = \frac{\|Tu - Tv\|}{2}$$

eşitlikleri yazılabilir. Buradan

$$\delta(T) = \sup_{x \in \mathcal{N}, x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \frac{1}{2} \sup_{u,v \in \mathcal{K}} \|Tu - Tv\|$$

elde edilir. O halde istenilen gösterilmiş olur.
(vi) $\delta(T) = 0$ olsun. O halde (2.3.3) eşitliğinden $u, v \in \mathcal{K}$ için $Tu = Tv$ elde edilir. $y_0 := Tu$ olarak alınsın. Buradan $y_0 \in \mathcal{K}$ olduğu açıktır. Şimdi de $x \in X_+$ olsun. O halde $\|x\| = f(x)$ olarak alınırsa,

$$Tx = \|x\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = f(x)y_0$$

bulunur. Eğer $x \in X$ ise $y, z \geq 0$ için $x = y - z$ olarak yazılabilir. Böylece

$$T(x) = T(y) - T(z) = f(y)y_0 - f(z)y_0 = f(x)y_0$$

olur. Sonuç olarak eğer $\delta(T) = 0$ ise $T = T_{y_0}$ olacak şekilde bir $y_0 \in X_+$ vardır. □

3 MARKOV OPERATÖRÜNÜN ERGODİKLİĞİ VE PERTÜRBASYON SINIRLARI

Bu bölümde bazı olan sıralı Banach uzayları üzerinde tanımlı olan Markov operatörlerinin öncelikle ergodiklik özellikleri Dobrushin katsayısı yardımı ile incelenecek ve daha sonra pertürbasyon sınırları verilecektir.

3.1 Ergodiklik ve Dobrushin Katsayısı

Bu alt bölümde ergodiklik tanımları ve daha sonra [38] makalesinde incelenen $(T^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ayrık Markov zincirlerinin ergodiklik karakterizasyonu sonuçları verilecektir.

Tanım 3.1.1. $(X, X_+, \mathcal{K}, f)$ uzayı OBSB ve $T : X \to X$ Markov operatörü olsun. T operatörüne eğer

(i)

$$\lim_{n\to\infty} \|T^n - T_{y_0}\| = 0$$

olacak şekilde bir $y_0 \in \mathcal{K}$ varsa *düzgün asimtotik kararlı*

(ii)

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x,y\in\mathcal{K}} \|T^n x - T^n y\| = 0$$

oluyorsa *zayıf ergodik* denir.

Sonuç 3.1.2. $(X, X_+, \mathcal{K}, f)$ *uzayı OBSB ve* $T : X \to X$ *Markov operatörü olsun. Bu durumda T operatörünün zayıf ergodik olabilmesi için gerek ve yeter koşul* $n \to \infty$ *iken* $\delta(T^n) \to 0$ *olmasıdır.*

Kanıt.
:$\Rightarrow$ T Markov operatörü zayıf ergodik olsun.

$$\lim_{n\to\infty} \delta(T^n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \sup_{u,v\in\mathcal{K}} \|T^n u - T^n v\| = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \sup_{u,v\in\mathcal{K}} \|T^n u - T^n v\| = 0$$

:$\Leftarrow$ $n \to \infty$ iken $\delta(T^n) \to 0$ olsun. $\delta(T^n) = \frac{1}{2}\sup_{u,v\in\mathcal{K}} \|T^n u - T^n v\|$ olduğu dikkate alınarak $\lim_{n\to\infty} \sup_{u,v\in\mathcal{K}} \|T^n u - T^n v\| = \lim_{n\to\infty} 2\delta(T^n) = 0$ yazılır. □

Teorem 3.1.3. $(X, X_+, \mathcal{K}, f)$ *uzayı OBSB ve* $T : X \to X$ *Markov operatörü olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:*

(i) *T operatörü zayıf ergodiktir.*

(ii) $\delta(T^{n_0}) \le \rho$ *olacak şekilde* $\rho \in [0, 1)$ *ve* $n_0 \in \mathbb{N}$ *vardır.*

(iii) *T operatörü düzgün asimtotik kararlıdır. Diğer taraftan*

$$\|T^n - T_{x_0}\| \le Ce^{-\alpha n}, \quad \forall n \ge n_0 \tag{3.1.1}$$

olacak şekilde $C, \alpha, n_0 \in \mathbb{N}$ *pozitif sabitleri ve* $x_0 \in \mathcal{K}$ *vardır.*

Kanıt.
$(i) \Rightarrow (ii)$ T operatörü zayıf ergodik olsun. Biliniyor ki, zayıf ergodik olan bir operatör aynı zamanda $n \to \infty$ iken $\delta(T^n) \to 0$ koşulunu da sağlar. Dolayısıyla buradan Markov operatörünün $0 \leq \delta(T) \leq 1$ özelliği sayesinde $\delta(T^{n_0}) \leq \rho$ olacak şekilde bir $\rho \in [0,1)$ ve $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ $\delta(T^{n_0}) \leq \rho$ olacak şekilde bir $\rho \in [0,1)$ ve $n_0 \in \mathbb{N}$ olsun. Teorem 2.3.2'deki (i) ve (iii) özellikleri kullanılarak $n \to \infty$ iken

$$\delta(T^n) \leq \rho^{[n/n_0]} \to 0 \tag{3.1.2}$$

yazılabilir. Buradaki $[n/n_0]$ ifadesi bir tamdeğerdir.
Bahsedilenleri biraz açmak gerekirse, $\rho \in [0,1)$ olduğu için $\rho^{[n/n_0]}$ sayısı $n \to \infty$ için 0 değerini alacaktır. Ayrıca kabul dikkate alındığında da

$$\delta(T^n) \leq \rho^{[n/n_0]}$$

yazımı elde edilir. Şimdi de $\{T^n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Teorem 2.3.2-(iv) ve (3.1.2) denkleminden,

$$\begin{aligned}
\|T^n - T^{n+m}\| &= \|T^{n-1}(T - T^{m+1})\| \\
&\leq \delta(T^{n-1})\|T - T^{m+1}\| \\
&\leq \delta(T^{n-1})\left(\|T\| + \|T^{m+1}\|\right) \\
&\leq \delta(T^{n-1})(\|T\| + \|T\|^{m+1}) \\
&= 2\delta(T^{n-1})
\end{aligned}$$

ve böylece

$$n \to \infty \; iken \; 2\delta(T^{n-1}) \to 0 \tag{3.1.3}$$

elde edilir. Yani bu durumda $n \to \infty$ iken $\|T^n - Q\| \to 0$ olacak şekilde bir lineer Q operatörü vardır denilebilir. Şimdi bu operatörün Markov operatörü olduğunu gösterelim. $x \in X_+$ alınırsa her $n \in \mathbb{N}$ için $T^n x \geq 0$ olur. X_+ kapalı olduğundan $\lim_{n\to\infty} T^n x \in X_+$ bulunur ki bu da $Qx \geq 0$ olduğu anlamına gelir. T operatörünün Markov olmasından faydalanarak her $x \in \mathcal{K}$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $f(T^n x) = 1$ elde edilir.
Son olarak en az bir tane $x_0 \in X_+$ elemanı için $Q = T_{x_0}$ olduğu gösterilirse ispat tamamlanmış olur. Bunun için Teorem 2.3.2-(vi) özelliğine göre $\delta(Q) = 0$ eşitliğinin sağlandığını göstermemiz yeterlidir. Teorem 2.3.2-(ii) özelliğini kullanırsak,

$$|\delta(T^n) - \delta(Q)| \leq \|T^n - Q\|$$

elde edilir. Eşitsizliğin her iki tarafının $n \to \infty$ için limiti alınır ve (3.1.2) göz önünde bulundurulursa $\delta(Q) = 0$ olur. Sonuç olarak (3.1.2), (3.1.3) ve $Q = T_{x_0}$ dikkate alındığında istenilen gösterilmiş olur. İspatın ikinci kısmı ise yukarıdaki bilgiler doğrultusunda rahatlıkla gösterilebilir. Şöyle ki, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\|T^n - T_{x_0}\| &\leq 2\rho^{[n/n_0]} \\
&= 2e^{\log \rho^{[n/n_0]}} \\
&= 2e^{[n/n_0]\log \rho} \\
&= 2e^{-\alpha(n-A)} && (\log \rho = -\alpha \text{ ve } [n/n_0] + A = n) \\
&= 2e^{-\alpha n + \alpha A} \\
&= 2e^{\alpha A} e^{-\alpha n} \\
&= Ce^{-\alpha n} && (2e^{\alpha A} = C)
\end{aligned}$$

yazılabilir. O halde $0 < \rho < 1 \Rightarrow \alpha = \log \rho < 1$ ve $[{}^{n}\!/\!{}_{n_0}] < n \Rightarrow [{}^{n}\!/\!{}_{n_0}] + A = n$ olacak şekilde α, n_0, A ve C pozitif sabitleri bulunabileceğinden ispat tamamlanmış olur.
$(iii) \Rightarrow (i)$ T operatörü düzgün asimtotik kararlı olsun. Diğer yandan

$$\|T^n - T_{x_0}\| \leq Ce^{-\alpha n}, \ \forall n \geq n_0$$

olacak şekilde $C, \alpha, n_0 \in \mathbb{N}$ pozitif sabitleri ve $x_0 \in \mathcal{K}$ var olsun.
Burada,

$$\begin{aligned}
\sup_{x,y\in\mathcal{K}} \|T^n x - T^n y\| &= \sup_{x,y\in\mathcal{K}} \|T^n x - T_{x_0} + T_{x_0} - T^n y\| \\
&\leq \sup_{x,y\in\mathcal{K}} \|T^n x - T_{x_0}\| + \sup_{x,y\in\mathcal{K}} \|T^n y - T_{x_0}\| \\
&\leq Ce^{-\alpha n} + Ce^{-\alpha n} \\
&= 2Ce^{-\alpha n}
\end{aligned}$$

olur. Her iki tarafın $n \to \infty$ için limiti alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x,y\in\mathcal{K}} \|T^n x - T^n y\| \leq \lim_{n\to\infty} 2Ce^{-\alpha n} = 0$$

elde edilir. Yani

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x,y\in\mathcal{K}} \|T^n x - T^n y\| = 0$$

olup T zayıf ergodiktir. □

3.2 Pertürbasyon Sınırları ve Düzgün Asimtotik Kararlılık

Bu alt bölümde C ve e^{α} sabitlerine göre $\|T^n - T_{x_0}\| \leq Ce^{-\alpha n}$ koşulunu sağlayan pertürbasyon sınırlarından bahsedilecek ve Dobrushin ergodiklik katsayısı açısından da birkaç sınır verilecektir. Buradaki sonuçlar [19] makalesinden derlenmiştir.

Teorem 3.2.1. *$(X, X_+, \mathcal{K}, f)$ uzayı OBSB ve S ile T, X üzerinde Markov operatörü olsun. Eğer T düzgün asimtotik kararlı ise $\tilde{n} := \left[\frac{\log(1/C)}{\log e^{-\alpha}}\right]$, $C \in \mathbb{R}_+, \alpha \in \mathbb{R}_+$ ve $x, z \in \mathcal{K}$ ifadeleri dikkate alındığında*

$$\|T^n x - S^n z\| \leq \begin{cases} \|x - z\| + n\|T - S\|, & \forall n \leq \tilde{n} \\ Ce^{-\alpha n}\|x - z\| + \left(\tilde{n} + C\frac{e^{-\alpha\tilde{n}} - e^{-\alpha n}}{1 - e^{-\alpha}}\right)\|T - S\|, & \forall n > \tilde{n} \end{cases} \tag{3.2.1}$$

Kanıt. Herbir $n \in \mathbb{N}$ için tümevarımdan,

$$S^n - T^n = \sum_{i=0}^{n-1} T^{n-i-1}(S - T)S^i \tag{3.2.2}$$

yazılabilir.
$x, z \in \mathcal{K}$ olsun. $z_i = S^i z$ olacak şekilde (3.2.2)

$$\begin{aligned}
T^n x - S^n z &= T^n x - T^n z - \sum_{i=0}^{n-1} T^{n-i-1}(S - T)S^i(z) \\
&= T^n(x - z) - \sum_{i=0}^{n-1} T^{n-i-1}(S - T)(z_i)
\end{aligned}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Böylece,

$$\begin{aligned}\|T^n x - S^n z\| &= \left\| T^n(x-z) - \sum_{i=0}^{n-1} T^{n-i-1}(S-T)(z_i) \right\| \\ &\leq \|T^n(x-z)\| + \sum_{i=0}^{n-1} \|T^{n-i-1}(S-T)(z_i)\|\end{aligned}$$

olur. T ile S Markov operatörü olduğundan ve 2.3.2-(iv)'den dolayı

$$\|T^{n-i-1}(S-T)(z_i)\| \leq \delta(T^{n-i-1})\|S-T\|$$

ve

$$\|T^n(x-z)\| \leq \delta(T^n)\|x-z\|$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned}\|T^n x - S^n z\| &\leq \delta(T^n)\|x-z\| + \sum_{i=0}^{n-1} \delta(T^{n-i-1})\|S-T\| \\ &= \delta(T^n)\|x-z\| + \|S-T\| \sum_{i=0}^{n-1} \delta(T^i) \qquad (3.2.3)\end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 2.3.2-(v)'den

$$\begin{aligned}\delta(T^i) &= \frac{1}{2} \sup_{u,v \in \mathcal{K}} \|T^i u - T^i v\| \\ &\leq \frac{1}{2} \sup_{u,v \in \mathcal{K}} \|T^i u - T_{x_0} u + T_{x_0} v - T^i v\| \\ &\leq \frac{1}{2} \sup_{u,v \in \mathcal{K}} \big(\|T^i u - T_{x_0} u\| + \|T^i v - T_{x_0} v\|\big) \\ &\leq \frac{1}{2} \sup_{u \in \mathcal{K}} \|T^i u - T_{x_0} u\| + \frac{1}{2} \sup_{v \in \mathcal{K}} \|T^i v - T_{x_0} v\| \\ &\leq \sup_{u \in \mathcal{K}} \|T^i u - T_{x_0} u\|\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla Teorem 3.1.3 göz önüne alındığında $\tilde{n} = \left[\frac{\log(1/C)}{\log e^{-\alpha}}\right] = [\log C^{\alpha}]$ olacak şekilde

$$\delta(T^n) \leq \begin{cases} 1, & \forall n \leq \tilde{n} \\ Ce^{-\alpha n}, & \forall n > \tilde{n} \end{cases} \qquad (3.2.4)$$

bulunur. (3.2.4) eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1} \delta(T^i) &= \sum_{i=0}^{\tilde{n}-1} \delta(T^i) + \sum_{i=\tilde{n}}^{n-1} \delta(T^i) \\ &\leq \tilde{n} + \sum_{i=\tilde{n}}^{n-1} Ce^{-\alpha i} \\ &= \tilde{n} + C(e^{-\alpha\tilde{n}} + e^{-\alpha(\tilde{n}+1)} + \cdots + e^{-\alpha(n-1)}) \\ &= \tilde{n} + Ce^{-\alpha\tilde{n}}(1 + e^{-\alpha} + \cdots + e^{-\alpha(n-1)+\alpha\tilde{n}}) \\ &= \tilde{n} + Ce^{-\alpha\tilde{n}} \left(\frac{1-(e^{-\alpha})^{n-\tilde{n}}}{1-e^{-\alpha}} \right) \qquad , \forall n > \tilde{n} \qquad (3.2.5)\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (3.2.3), (3.2.4) ve (3.2.5) dikkate alındığında,

$$\|T^n x - S^n z\| \le \begin{cases} \|x-z\| + n\|S-T\|, & \forall n \le \tilde{n} \\ Ce^{-\alpha n}\|x-z\| + \left(\tilde{n} + Ce^{-\alpha\tilde{n}}\frac{1-e^{-\alpha(n-\tilde{n})}}{1-e^{-\alpha}}\right)\|T-S\|, & \forall n > \tilde{n} \end{cases}$$

sonucuna ulaşılır. □

Sonuç 3.2.2. *$(X, X_+, \mathcal{K}, f)$ uzayı OBSB ve S ile T, X üzerinde Markov operatörü olsun. Eğer T operatörü T_{x_0}'a düzgün asimtotik kararlı olarak yaklaşıyorsa her $x, y \in \mathcal{K}$ için,*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T^n x - S^n z\| \le \|x-z\| + \left(\tilde{n} + C\frac{e^{-\alpha\tilde{n}}}{1-e^{-\alpha}}\right)\|T-S\| \tag{3.2.6}$$

olur. Ek olarak, eğer S operatörü S_{z_0}'a düzgün asimtotik kararlı olarak yaklaşıyorsa,

$$\|T_{x_0} - S_{z_0}\| \le \left(\tilde{n} + C\frac{e^{-\alpha\tilde{n}}}{1-e^{-\alpha}}\right)\|T-S\| \tag{3.2.7}$$

dir.

Kanıt. (3.2.6) eşitsizliği, (3.2.1) eşitsizliğinin direk sonucudur. Şöyle ki, (3.2.3) ve (3.2.5) eşitsizlikleri dikkate alındığında,

$$\|T^n x - S^n z\| \le \delta(T^n)\|x-z\| + \left(\tilde{n} + C\frac{e^{-\alpha\tilde{n}} - e^{-\alpha n}}{1-e^{-\alpha}}\right)\|T-S\|$$

bulunur. Eşitsizliğinin her iki tarafının $n \in \mathbb{N}$ için supremumu alınırsa,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T^n x - S^n z\| \le \|x-z\| + \left(\tilde{n} + C\frac{e^{-\alpha\tilde{n}}}{1-e^{-\alpha}}\right)\|T-S\|$$

elde edilir. (3.2.7) eşitsizliğinin gösterimi için tekrar (3.2.3) eşitsizliği düşünülürse,

$$\begin{aligned} \|T^n - S^n\| &= \sup_{x,z\in\mathcal{K}} \|T^n x - S^n z\| \\ &\le \delta(T^n) \sup_{x,z\in\mathcal{K}} \|x-z\| + \sum_{i=0}^{n-1} \delta(T^{n-i-1})\|T-S\| \end{aligned}$$

olur. Her iki tarafın $n \to \infty$ için limiti alınırsa,

$$\|T_{x_0} - S_{z_0}\| \le \|T-S\| \sum_{i=0}^{\infty} \delta(T^i)$$

elde edilir.
Bulunan bu ifade (3.2.5) eşitsizliği yardımıyla yeniden yazılırsa,

$$\|T_{x_0} - S_{z_0}\| \le \|T-S\| \left(\tilde{n} + C\frac{e^{-\alpha\tilde{n}}}{1-e^{-\alpha}}\right)$$

sonucuna varılır. Böylece istenilen gösterilmiş olur. □

(3.2.3) eşitsizliği, T operatörünün Dobrushin katsayısı bakımından pertürbasyon sınırlarının elde edilmesini sağlar. Yani (3.2.3) sayesinde aşağıdaki teorem yazılabilir.

Teorem 3.2.3. *$(X, X_+, \mathcal{K}, f)$ uzayı OBSB ve S ile T, X üzerinde Markov operatörü olsun. Eğer $\delta(T^m) < 1$ (T düzgün asimtotik kararlı) olacak şekilde pozitif bir m tamsayısı varsa her $x, z \in \mathcal{K}$ için,*

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \|T^{km}x - S^{km}z\| \leq \delta(T^m)\|x - z\| + \frac{\|T^m - S^m\|}{1 - \delta(T^m)} \tag{3.2.8}$$

ve

$$\|T^n x - S^n z\| \leq \begin{cases} \|x - z\| + \max_{0<i<m} \|T^i - S^i\|, & n < m \\ \delta(T^m)\left(\|x - z\| + \max_{0<i<m} \|T^i - S^i\|\right) + \frac{\|T^m - S^m\|}{1-\delta(T^m)}, & n \geq m \end{cases} \tag{3.2.9}$$

olur. Ek olarak, eğer S operatörü S_{z_0}'a düzgün asimtotik kararlı olarak yaklaşıyorsa,

$$\|T_{x_0} - S_{z_0}\| \leq \frac{\|T^m - S^m\|}{1 - \delta(T^m)} \tag{3.2.10}$$

olur.

Kanıt. (3.2.3) eşitsizliğinden her $x, z \in \mathcal{K}$ için,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T^n x - S^n z\| \leq \delta(T^n)\|x - z\| + \|T - S\|\frac{1}{1 - \delta(T)}$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin $\delta(T) < 1$ olması durumunda geçerli olduğuna dikkat edilmelidir. Ayrıca eğer S operatörü S_{z_0}'a düzgün asimtotik kararlı olarak yaklaşıyorsa,

$$\|T_{x_0} - S_{z_0}\| \leq \frac{\|T - S\|}{1 - \delta(T)}$$

olur. Eğer T ve S operatörleri yerine sırasıyla T^m ve S^m yazılırsa (3.2.8) ve (3.2.10) eşitsizlikleri elde edilir. Herhangi $n < m$ için,

$$T^n x - S^n z = S^n(x - z) + (T^n - S^n)x$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned} \|T^n x - S^n z\| &\leq \|x - z\| + \|T^n - S^n\| \\ &\leq \|x - z\| + \max_{0<i<m} \|T^i - S^i\| \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

olur. Eğer $n \geq m$ alınırsa $n = km + r,\ 0 \leq r < m$ yazılabilir. O halde

$$\begin{aligned} T^n x - S^n z &= T^{mk+r}x - S^{mk+r}z \\ &= (T^{mk} - S^{mk})S^r x + T^{mk}(T^r x - S^r z) \end{aligned}$$

göz önüne alındığında

$$\|T^n x - S^n z\| \leq \|T^{mk} - S^{mk}\| + \delta^k(T^m)\|T^r x - S^r z\| \tag{3.2.12}$$

bulunur. Diğer yandan (3.2.2) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} \|T^{mk} - S^{mk}\| &\leq \sum_{l=0}^{k-1} \delta(T^{m(k-l-1)})\|T^m - S^m\| \\ &\leq \sum_{l=0}^{k-1} \delta^l(T^m)\|T^m - S^m\| \\ &\leq \frac{\|T^m - S^m\|}{1 - \delta(T^m)} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece son eşitsizlik, (3.2.11) ve (3.2.12) gösterimleriyle birlikte

$$\|T^n x - S^n z\| \leq \delta(T^m)\left(\|x-z\| + \max_{0<i<m} \|T^i - S^i\|\right) + \frac{\|T^m - S^m\|}{1-\delta(T^m)}$$

sonucuna ulaşmamızı sağlar. Böylece (3.2.9) gösterilmiş ve ispat tamamlanmış olur. □

Aşağıdaki teorem $\delta(T^m)$ bakımından pertürbasyon sınırlarının elde edilmesinin daha alternatif bir yolunu verecektir.

Teorem 3.2.4. *Bazı $m \in \mathbb{N}$ için $\delta(T^m) < 1$ olsun. Bu durumda her $x, z \in \mathcal{K}$ için,*

$$\|T^n x - S^n z\| \leq \delta(T^m)^{[n/m]}(\|x-z\| + \max_{0<i<m} \|T^i - S^i\|) + \frac{1-\delta(T^m)^{[n/m]}}{1-\delta(T^m)}\|T^m - S^m\| \tag{3.2.13}$$

vardır.

Kanıt. Eğer $n < m$ ise (3.2.13) eşitsizliğinin, (3.2.11)'in bir genelleştirilmesi olduğu görülür. Ancak eğer $n \geq m$ ise

$$\begin{aligned} T^n x - S^n z &= T^m(T^{n-m}x) - S^m(S^{n-m}z) \\ &= T^m(T^{n-m}x - S^{n-m}z) + (T^m - S^m)S^{n-m}z \end{aligned}$$

yazılabilir. Dolayısıyla,

$$\|T^n x - S^n z\| \leq \|T^{n-m}x - S^{n-m}z\|\delta(T^m) + \|T^m - S^m\|$$

olur. Bu eşitsizliği,

$$\|T^{n-m}x - S^{n-m}z\|, \cdots, \|T^{n-m([n/m]-1)}x - S^{n-m([n/m]-1)}z\|$$

ifadeleri için de kullanır ve daha sonra $\|T^{n-m([n/m])}x - S^{n-m([n/m])}z\|$ normunu sınırlandırmak için (3.2.12)'den yararlanılırsa,

$$\begin{aligned} \|T^n x - S^n z\| &\leq \delta(T^m)\|T^{n-m}x - S^{n-m}z\| + \|T^m - S^m\| \\ &\leq \delta(T^m)^{[n/m]}(\|x-z\| + \max_{0<i<m} \|T^i - S^i\|) + (\delta(T^m)^{[n/m]-1} + \cdots + 1) \\ &\quad \|T^m - S^m\| \\ &= \delta(T^m)^{[n/m]}(\|x-z\| + \max_{0<i<m} \|T^i - S^i\|) + \frac{1-\delta(T^m)^{[n/m]}}{1-\delta(T^m)}\|T^m - S^m\| \end{aligned}$$

sonucuna varılır. O halde istenilen gösterilmiş olur. □

Sonuç 3.2.5. *Bazı $m \in \mathbb{N}$ için $\delta(T^m) < 1$ olsun. Bu durumda her $x, z \in \mathcal{K}$ için,*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T^n x - S^n z\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \delta(T^m)^{[n/m]} + \frac{m\|T - S\|}{1-\delta(T^m)} \tag{3.2.14}$$

vardır.

Kanıt. $T^i - S^i = T(T^{i-1} - S^{i-1}) + (T-S)S^{i-1}$ olduğu için

$$\begin{aligned}
\|T^i - S^i\| &= \|T(T^{i-1} - S^{i-1}) + (T-S)S^{i-1}\| \\
&\leq \|T(T^{i-1} - S^{i-1})\| + \|(T-S)S^{i-1}\| \\
&\leq \|T^{i-1} - S^{i-1}\| + \|T-S\| \\
&= \|T(T^{i-2} - S^{i-2}) + (T-S)S^{i-2}\| + \|T-S\| \\
&\leq \|T(T^{i-2} - S^{i-2})\| + \|(T-S)S^{i-2}\| + \|T-S\| \\
&\leq \|T^{i-2} - S^{i-2}\| + \|T-S\| + \|T-S\| \\
&\vdots
\end{aligned}$$

yazılırsa, tümevarım yardımıyla

$$\max_{0<i\leq m} \|T^i - S^i\| \leq m\|T-S\| \tag{3.2.15}$$

elde edilmiş olur. (3.2.13) ve (3.2.15) eşitsizliklerinden,

$$\begin{aligned}
\|T^n x - S^n z\| &\leq \delta(T^m)^{[n/m]}\|x-z\| + \left(\delta(T^m)^{[n/m]} + \frac{1-\delta(T^m)^{[n/m]}}{1-\delta(T^m)}\right) \max_{0<i\leq m} \|T^i - S^i\| \\
&= \delta(T^m)^{[n/m]}\|x-z\| + \frac{(1-\delta(T^m)^{[n/m]+1})}{1-\delta(T^m)} \max_{0<i\leq m} \|T^i - S^i\| \\
&\leq \delta(T^m)^{[n/m]}\|x-z\| + \frac{(1-\delta(T^m)^{[n/m]+1})}{1-\delta(T^m)} m\|T-S\|
\end{aligned}$$

bulunur. O halde her iki tarafın $n \in \mathbb{N}$ için supremumu alınırsa ispat tamamlanmış olur. □

Teorem 3.2.6. *Eğer bazı $m \in \mathbb{N}$ için $\delta(T^m) < 1$ ise $\|S^m - T^m\| < 1 - \delta(T^m)$ koşulunu sağlayan her S Markov operatörü düzgün asimtotik kararlıdır ve*

$$\|x_0 - z_0\| \leq \frac{\|S^m - T^m\|}{1 - \delta(T^m) - \|S^m - T^m\|} \tag{3.2.16}$$

olacak şekilde tek bir $z_0 \in \mathcal{K}$ sabit noktası vardır.

Kanıt. Öncelikle $(I - S^m)^{-1}$ operatörünün $\mathcal{N}$ kümesi üzerinde sınırlı olduğu gösterilmelidir. Aslında alınan herhangi $x \in \mathcal{N}$ için $\rho = \|S^m - T^m\| + \delta(T^m) < 1$ olacak şekilde

$$\|S^m x\| \leq \|S^m x - T^m x\| + \|T^m x\| \leq \rho\|x\| \tag{3.2.17}$$

yazılabilir. Böylece (3.2.17)'den her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\|S^{mn} x\| \leq \rho^n \|x\|$$

elde edilir. Dolayısıyla $\sum_n S^{mn} x$ serisi yakınsaktır. Burada,

$$(I - S^m)^{-1} x = \sum_n S^{mn} x$$

eşitliğini yazmak mümkündür. Dahası her $x \in \mathcal{N}$ için,

$$\|(I - S^m)^{-1} x\| \leq \frac{\|x\|}{1-\rho}$$

olduğunu görmek mümkündür. Ayrıca bu eşitsizlik, $(I - S^m)^{-1}$ operatörünün $\mathcal{N}$ üzerinde sınırlı olduğunu göstermektedir. Açıkça görülmektedir ki, $z_0 \in \mathcal{K}$ elemanıyla birlikte $S^m z_0 = z_0$ denklemi $(I - S^m)(z_0 - x_0) = -(I - S^m)x_0$ denklemine denktir. $(I - S^m)x_0 \in \mathcal{N}$ olduğu için son denklemin tek bir

$$z_0 = x_0 - (I - S^m)^{-1}\left((I - S^m)x_0\right)$$

çözümü vardır. Özdeşlikten,

$$\begin{aligned}
z_0 - x_0 &= S^m z_0 - T^m x_0 \\
&= S^m z_0 - S^m x_0 + S^m x_0 - T^m z_0 + T^m z_0 - T^m x_0 + T^m x_0 - T^m x_0 \\
&= T^m(z_0 - x_0) + (S^m - T^m)(z_0 - x_0) + (S^m - T^m)x_0
\end{aligned}$$

bulunur ve buradan,

$$\begin{aligned}
\|z_0 - x_0\| &= \|T^m(z_0 - x_0) + (S^m - T^m)(z_0 - x_0) + (S^m - T^m)x_0\| \\
&\leq \|T^m(z_0 - x_0)\| + \|(S^m - T^m)(z_0 - x_0)\| + \|(S^m - T^m)x_0\| \\
&\leq \left(\delta(T^m) + \|S^m - T^m\|\right)\|z_0 - x_0\| + \|S^m - T^m\|
\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitsizlikte gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\|x_0 - z_0\| \leq \frac{\|S^m - T^m\|}{1 - \delta(T^m) - \|S^m - T^m\|}$$

(3.2.16) eşitsizliğine karşılık gelen bu sonuca ulaşılır.
$S^m(Sz_0) = S(S^m z_0) = Sz_0$ ifadesinden ve S^m için z_0 elemanının tekliğinden dolayı $Sz_0 = z_0$ elde edilir. Şimdi varsayalım ki, S operatörünün bir diğer sabit noktası $\tilde{z}_0 \in \mathcal{K}$ dır. O halde $S^m \tilde{z}_0 = \tilde{z}_0$ yazılabilir. Buradan $Sz_0 = \tilde{z}_0$ ve dolayısıyla $\tilde{z}_0 = z_0$ elde edilir. Dolayısıyla bu da S operatörünün tek bir sabit noktaya sahip olduğunu gösterir.
Son olarak, (3.2.17) eşitsizliğinden $\delta(S^m) < 1$ elde edilir ve dolayısıyla Teorem 3.1.3'den dolayı S düzgün asimtotik kararlı bir Markov operatörüdür denir. O halde ispat tamamlanmış olur. $\square$

Açıklama 3.2.7. *Elde edilen sonuçlara birçok yönden başvurulabilir. Bu sonuçlar sayesinde,*

(i) [28, 33, 43]'deki temel sonuçlar genel Banach uzaylarına genişletilebilir.

(ii) Klasik L_p-uzayları üzerinde tanımlanan asimtotik kararlı Markov zincirlerinin pertürbasyon sınırları elde edilebilir. Diğer yandan daha komplike fonksiyonel uzaylar üzerinde tanımlanan Markov zincirlerinin sonuçlarına direk başvurulabilir. Dahası Banach uzayı çeşitlendirilerek ölçüm-değerli Markov süreçleri teorisinde birçok sonuç elde edilebilir.

4 MARKOV OPERATÖRÜNÜN CESÀRO ORTALAMASI

4.1 Önbilgiler

Tanım 4.1.1. T, X üzerinde tanımlı bir operatör olmak üzere,

$$A_n(T) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k, \qquad n \in \mathbb{N}$$

operatörüne T'nin *Cesàro Ortalaması* adı verilir.

$(X, X_+, \mathcal{K}, f)$ uzayı OBSB olsun. Her $y \in X$ için $T_y : X \to X$ lineer operatörü $T_y(x) = f(x)y$ olarak tanımlanabilir. Bu bilgiler ışığında aşağıdaki tanımlar T Markov operatörünün yakınsaklık kavramlarını verecektir.

Tanım 4.1.2. $T : X \to X$ Markov operatörüne, eğer

(i)

$$\lim_{n\to\infty} \|T^n - T_{y_0}\| = 0$$

olacak şekilde bir $y_0 \in \mathcal{K}$ varsa *düzgün asimtotik kararlı* (Tanım 3.1.1-(i))

(ii)

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n(T) - T_{y_0}\| = 0$$

olacak şekilde bir $y_0 \in \mathcal{K}$ varsa *düzgün ortalama ergodik*

(iii)

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x,y\in\mathcal{K}} \|T^n x - T^n y\| = 0$$

oluyorsa *zayıf ergodik* (Tanım 3.1.1-(ii))

(iv)

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x,y\in\mathcal{K}} \|A_n(T)x - A_n(T)y\| = 0$$

oluyorsa *zayıf ortalama* ergodik denir.

Sonuç 4.1.3. *Düzgün asimtotik kararlı bir T Markov operatörü düzgün ortalama ergodikliği gerektirir.*

Kanıt. $T : X \to X$ düzgün asimtotik kararlı Markov operatörü olsun. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} \|T^n - T_{y_0}\| = 0$$

olacak şekilde $y_0 \in \mathcal{K}$ vardır. Ayrıca

$$\begin{aligned}\|A_n(T) - T_{y_0}\| &= \left\| \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T_{y_0} \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} (T^k - T_{y_0}) \right\| \\ &\le \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \|T^k - T_{y_0}\|\end{aligned}$$

yazılabilir. O halde her iki tarafın öncelikle $k \to \infty$ ve daha sonra $n \to \infty$ için limiti alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n(T) - T_{y_0}\| = 0$$

elde edilir. Böylece istenilen gösterilmiş olur. □

Sonuç 4.1.4. *Eğer T Markov operatörü düzgün ortalama ergodik ise T_{y_0} ile ilişkili y_0 elemanı T operatörünün sabit noktasıdır.*

Kanıt. T Markov operatörü düzgün ortalama ergodik olsun.

$$A_n(T) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k$$

olduğu dikkate alınarak

$$(1 + \frac{1}{n})A_{n+1}(T) - \frac{1}{n}I = TA_n(T)$$

eşitliği yazılabilir. Bu durumda son eşitliğin her iki tarafının limiti alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty} \left((1 + \frac{1}{n})A_{n+1}(T) - \frac{1}{n}I\right) = \lim_{n\to\infty} TA_n(T)$$

elde edilir ve buradan da $T_{y_0} = TT_{y_0}$ olduğu görülür. Bu eşitlikten $Ty_0 = y_0$ ifadesini yazmak mümkündür. Dolayısıyla y_0 elemanının T operatörünün sabit bir noktası olduğu ispatlanmış olur. □

4.2 Markov Operatörlerinin Düzgün Ortalama Ergodikliği

Bu bölümde daha önceden üzerinde durulan Teorem 3.1.3'nin düzgün ortalama ergodik Markov operatörleri içinde uygulanabileceği gösterilecektir. Verilen sonuçlar [19, 20] makalelerinden elde edilen sonuçlar olup ayrıntısı ile incelenmiştir.
$(X, X_+, \mathcal{K}, f)$ uzayı OBSB olsun. Bu doğrultuda bölüm boyunca temel alınacak

$$\mathfrak{U} = \{T | T : X \to X \text{ Markov operatör, } T^*f = f\}$$

kümesi tanımlanıp, gerekli teoremler verilmeye başlanabilir.

Teorem 4.2.1. *$(X, X_+, \mathcal{K}, f)$ uzayı OBSB ve $T \in \mathfrak{U}$ olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:*

(i) *T operatörü zayıf ortalama ergodiktir.*

(ii) *$\delta(A_n(T)) \leq \rho$ eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $\rho \in [0, 1)$ ve $n \in \mathbb{N}$ vardır.*

(iii) *T operatörü düzgün ortalama ergodiktir.*

Kanıt.
$(i) \Rightarrow (ii)$ $T \in \mathfrak{U}$ olduğundan T bir Markov operatörüdür. Dolayısıyla $T^k \geq 0$ lineer ve $T^k(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}$ ($k \in \mathbb{N}$) olup

$$A_n(T) = \frac{1}{n}(I + T + \cdots + T^{n-1})(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K} \ (n \in \mathbb{N})$$

operatörü de bir Markov operatörü olur. Böylece Markov operatörü özelliğinden

$$\delta(A_n(T)) = \frac{1}{2} \sup_{u,v \in \mathcal{K}} \|A_n(T)u - A_n(T)v\|$$

eşitliğini yazmak mümkündür. Buradan norm ve supremum tanımı gereğince $\delta(A_n(T)) \geq 0$ olur. Diğer yandan T, zayıf ortalama ergodik olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \sup \|A_n(T)u - A_n(T)v\| = 0$$

olup

$$\lim_{n\to\infty} \delta(A_n(T)) = 0$$

yazılabilir. O halde her ρ için en az bir tane n_0 vardır, öyle ki her $n > n_0$ için $0 \leq \delta(A_n(T)) < \rho$ olur. Sonuç olarak, $\lim_{n\to\infty} \delta(A_n(T)) = 0$ olduğundan $\rho \in [0, 1)$ bulunur. Böylece istenilen gösterilmiş olur.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ T, X üzerinde Markov operatörü olduğundan,

$$\begin{aligned}
\|A_n(T)(I - T)\| &= \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k (I - T) \right\| \\
&= \frac{1}{n} \left\| \sum_{k=0}^{n-1} T^k (I - T) \right\| \\
&= \frac{1}{n} \left\| \sum_{k=0}^{n-1} T^k - \sum_{k=0}^{n-1} T^{k+1} \right\| \\
&= \frac{1}{n} \|I - T^n\| \\
&\leq \frac{1}{n} (1 + \|T\|^n)
\end{aligned}$$

olur ve her $k \in \mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned}
\|A_n(T)(I - T^k)\| &= \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} T^i (I - T^k) \right\| \\
&= \frac{1}{n} \left\| \sum_{i=0}^{n-1} (T^i - T^{i+k}) \right\| \\
&= \frac{1}{n} \left\| T^0 + \cdots + T^{n-1} - (T^k + \cdots + T^{k+n-1}) \right\| \\
&\leq \frac{1}{n} \left(1 + \|T\| + \cdots + \|T^{k-1}\| + \cdots + \|T^{k+n-1}\| \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $n \to \infty$ iken eşitsizliğin her iki tarafının da sıfıra gittiği görülür. Dolayısıyla her bir $m \in \mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \|A_n(T)(I - A_m(T))\| &= \lim_{n\to\infty} \left\| A_n(T) \left(\frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} (I - T^k) \right) \right\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} A_n(T)(I - T^k) \right\| \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

olur. O halde,

$$\lim_{n\to\infty} \delta(A_n(T)(I - A_m(T))) = 0 \tag{4.2.1}$$

yazılabilir. Teorem 2.3.2-(ii)'den

$$|\delta(A_n(T)A_{n_0}(T)) - \delta(A_n(T))| \leq \delta(A_n(T)(I - A_{n_0}(T)))$$

olur. Şimdi aynı teoremin (iii) özelliğinden yararlanılırsa,

$$\begin{aligned}
\delta(A_n(T)(I - A_{n_0}(T))) &\geq \delta(A_n(T)) - \delta(A_n(T)A_{n_0}(T)) \\
&\geq \delta(A_n(T)) - \delta(A_n(T))\delta(A_{n_0}(T)) \\
&\geq (1-\rho)\delta(A_n(T)) \qquad (4.2.2)
\end{aligned}$$

bulunur. (4.2.1) ve (4.2.2)'den

$$\lim_{n\to\infty} \delta(A_n(T)) = 0$$

elde edilir. Yani,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x,y\in\mathcal{K}} \|A_n(T)x - A_n(T)y\| = 0 \tag{4.2.3}$$

dır.
$T \in \mathfrak{U}$ olduğundan sabit bir $y_0 \in \mathcal{K}$ noktası vardır. Bu nokta (4.2.3) eşitliğinden kolaylıkla elde edilebilir. Şöyle ki,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathcal{K}} \|A_n(T)x - y_0\| &= \lim_{n\to\infty} \sup_{x,y_0\in\mathcal{K}} \|A_n(T)x - A_n(T)y_0\| \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \sup_{x,y\in\mathcal{K}} \|A_n(T)x - A_n(T)y\| \\
&= 0
\end{aligned}$$

dır. Buradan da T operatörünün düzgün ortalama ergodik olduğu söylenebilir.
$(iii) \Rightarrow (i)$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sup_{x,y\in\mathcal{K}} \|A_n^T x - A_n^T y\| &= \frac{1}{2}\sup_{x,y\in\mathcal{K}} \|A_n^T x - A_n^T y + T_{y_0}x - T_{y_0}x + T_{y_0}y - T_{y_0}y\| \\
&\leq \frac{1}{2}\sup_{x,y\in\mathcal{K}} \left(\|A_n^T x - T_{y_0}x\| + \|T_{y_0}x - T_{y_0}y\| + \|T_{y_0}y - A_n^T y\|\right) \\
&\leq \frac{1}{2}\left(\sup_{x,y\in\mathcal{K}} \|A_n^T - T_{y_0}x\| + \sup_{x,y\in\mathcal{K}} \|T_{y_0}x - T_{y_0}y\| + \sup_{x,y\in\mathcal{K}} \|T_{y_0}y - A_n^T y\|\right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\sup_{x,y\in\mathcal{K}} \|A_n^T x - A_n^T y\| &\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\big(\sup_{x,y\in\mathcal{K}} \|A_n^T x - T_{y_0}x\| + \sup_{x,y\in\mathcal{K}} \|T_{y_0}x - T_{y_0}y\| \\
&\qquad + \sup_{x,y\in\mathcal{K}} \|T_{y_0}y - A_n^T y\|\big) \\
&\leq \frac{1}{2}\big(\lim_{n\to\infty} \sup_{x,y\in\mathcal{K}} \|A_n^T x - T_{y_0}x\| + \lim_{n\to\infty} \sup_{x,y\in\mathcal{K}} \|T_{y_0}x - T_{y_0}y\| \\
&\qquad + \lim_{n\to\infty} \sup_{x,y\in\mathcal{K}} \|T_{y_0}y - A_n^T y\|\big)
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer yandan her bir $y_0 \in X$ için $T_{y_0}x = f(x)y_0$ ve $x, y \in \mathcal{K}$ için $f(x) = f(y) = 1$ bilgileri yardımıyla

$$\|T_{y_0}x - T_{y_0}y\| = \|f(x)y_0 - f(y)y_0\| = \|y_0 - y_0\| = 0$$

bulunur. Yukarıda elde edilen ifadeler ve T operatörünün düzgün ortalama ergodikliği sayesinde

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sup_{x,y\in\mathcal{K}} \|A_n^T x - A_n^T y\| &\le \lim_{n\to\infty} \sup_{x,y\in\mathcal{K}} \|A_n^T x - T_{y_0}x\| + \lim_{n\to\infty} \sup_{x,y\in\mathcal{K}} \|T_{y_0}x - T_{y_0}y\| \\ &\quad + \lim_{n\to\infty} \sup_{x,y\in\mathcal{K}} \|T_{y_0}y - A_n^T y\| \\ &= 0\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Böylece düzgün ortalama ergodik olan T operatörünün zayıf ortalama ergodik olduğu gösterilmiş olur. □

Bir sonraki teoreme geçilmeden önce

$$\mathfrak{U}_{ume} = \{T \in \mathfrak{U} | T : X \to X \text{ düzgün ortalama ergodik Markov operatörü}\}$$

kümesi tanımlansın. Buradan

$$\mathfrak{U}_{ume} \subset \mathfrak{U} \subset L(X)$$

eşitsizliğini yazmak mümkündür.

Teorem 4.2.2. *$(X, X_+, \mathcal{K}, f)$ uzayı OBSB olsun. $\mathfrak{U}_{ume}$, norm yoğun ve $\mathfrak{U}$ kümesinin açık bir alt kümesidir.*

Kanıt. $\phi \in \mathcal{K}$ sabit noktasıyla birlikte keyfi $T \in \mathfrak{U}$ operatörü alınsın. $0 < \varepsilon < 2$ keyfi bir sayı olsun.

$$T^{(\varepsilon)} = \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) T + \frac{\varepsilon}{2} T_\phi$$

operatörü tanımlansın.
Herhangi $x \in \mathcal{K}$ için $T_\phi x = f(x)\phi$ olduğundan $T_\phi(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}$ dır. Çünkü $\phi \in \mathcal{K}$ ve $f(x) \in \mathbb{R}$ olduğundan $T_\phi x \in \mathcal{K}$ dır. Ayrıca T_ϕ pozitif ve lineer olduğundan Markov operatörüdür. Diğer yandan,

$$\begin{aligned}T^{(\varepsilon)} f &= \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) T f + \frac{\varepsilon}{2} T_\phi f \\ &= \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) f + \frac{\varepsilon}{2} f \\ &= f\end{aligned}$$

olur.
Her $T \in \mathfrak{U}$ ve her $\varepsilon > 0$ için en az bir tane $T^{(\varepsilon)}$ vardır, öyle ki

$$\begin{aligned}\|T - T^{(\varepsilon)}\| &= \left\|T - \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \frac{\varepsilon}{2} T_\phi\right\| \\ &\le \frac{\varepsilon}{2}\|T\| + \frac{\varepsilon}{2}\|T_\phi\| \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

dır.
Dolayısıyla buradan $T^{(\varepsilon)} \in \mathfrak{U}$ olur. Şimdi de $T^{(\varepsilon)} \in \mathfrak{U}_{ume}$ olduğunu gösterelim. Bunun için $T^{(\varepsilon)}$ operatörünün düzgün asimtotik kararlı olduğu gösterilmelidir (Sonuç 4.1.3 gereğince).
Lemma 2.1.12'den $x - y \in \mathcal{N}$ ve $u, v \in \mathcal{K}$ için,

$$\begin{aligned}
\|T^{(\varepsilon)}(x-y)\| &= \frac{\|x-y\|}{2}\|T^{(\varepsilon)}(u-v)\| \\
&= \frac{\|x-y\|}{2}\left\|\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)T(u-v)+\frac{\varepsilon}{2}T_\phi(u-v)\right\| \\
&= \frac{\|x-y\|}{2}\left\|\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)T(u-v)+\frac{\varepsilon}{2}\left(T_\phi u-T_\phi v\right)\right\| \\
&= \frac{\|x-y\|}{2}\left\|\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)T(u-v)+\frac{\varepsilon}{2}\left(f(u)\phi-f(v)\phi\right)\right\| \\
&= \frac{\|x-y\|}{2}\left\|\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)T(u-v)\right\| \ (u, v \in \mathcal{K} \text{ olduğu için } f(u)=f(v)=1) \\
&= \frac{\|x-y\|}{2}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\|T(u-v)\| \\
&= \frac{\|x-y\|}{2}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\|Tu-Tv\| \\
&\leq \frac{\|x-y\|}{2}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)(\|Tu\|+\|Tv\|) \\
&= \frac{\|x-y\|}{2}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)2 \\
&= \|x-y\|\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)
\end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$\|T^{(\varepsilon)}(x-y)\| \leq \left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\|x-y\|$$

olduğu için

$$\delta(T^{(\varepsilon)}) \leq 1-\frac{\varepsilon}{2}$$

elde edilir.
Böylece Teorem 3.1.3'den dolayı $T^{(\varepsilon)}$, düzgün asimtotik kararlıdır. Şimdi de $\mathfrak{U}_{ume}$ kümesinin norm açık küme olduğunu gösterelim. Bunun için ilk olarak her bir $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\mathfrak{U}_{ume,n} = \{T \in \mathfrak{U} | \delta(A_n(T)) < 1\}$$

kümesi tanımlansın.

$$\mathfrak{U}_{\mathfrak{ume}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{U}_{\mathfrak{ume},\mathfrak{n}}$$

$(\delta(A_n(T)) \leq \rho$ olacak şekilde $\rho \in [0,1)$ ve $n \in \mathbb{N}$ var $\Leftrightarrow$ T düzgün ortalama ergodik) olduğu için $\mathfrak{U}_{\mathfrak{ume}}$ kümesinin norm açık olduğunu göstermek yerine $\mathfrak{U}_{\mathfrak{ume},\mathfrak{n}}$ kümesinin norm açık olduğunu göstermek yeterli olacaktır.
Herhangi $T \in \mathfrak{U}_{\mathfrak{ume},\mathfrak{n}}$ alınsın ve $\alpha := \delta(A_n(T)) < 1$ olarak yazılsın. Ayrıca buradan $\alpha+\beta < 1$ olacak şekilde $0 < \beta < 1$ sayısı seçilsin. Bu durumda

$$\left\{H \in \mathfrak{U} : \|H-T\| < \frac{2\beta}{n+1}\right\} \subset \mathfrak{U}_{\mathfrak{ume},\mathfrak{n}}$$

olduğunun gösterilmesi ispatı tamamlar.
Her bir $k \in \mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned}
\|H^k - T^k\| &= \|H^{k-1}(H-T) + (H^{k-1} - T^{k-1})T\| \\
&\leq \|H^{k-1}(H-T)\| + \|(H^{k-1} - T^{k-1})T\| \\
&\leq \|H-T\| + \|H^{k-1} - T^{k-1}\| \\
&= \|H-T\| + \|H^{k-2}(H-T) + (H^{k-2} - T^{k-2})T\| \\
&\leq \|H-T\| + \|H^{k-2}(H-T)\| + \|(H^{k-2} - T^{k-2})T\| \\
&= \|H-T\| + \|H-T\| + \|H^{k-2} - T^{k-2}\| \\
&= 2\|H-T\| + \|H^{k-2} - T^{k-2}\| \\
&\vdots \\
&\leq k\|H-T\| \qquad (4.2.4)
\end{aligned}$$

elde edilir.
Teorem 2.3.2-(ii) ve (4.2.4) eşitsizliği dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned}
|\delta(A_n(H)) - \delta(A_n(T))| &\leq \|A_n(H) - A_n(T)\| \\
&= \left\| \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} H^k - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k \right\| \\
&= \frac{1}{n}\left\| \sum_{k=0}^{n-1} H^k - \sum_{k=0}^{n-1} T^k \right\| \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \|H^k - T^k\| \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} k\|H-T\| \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\|H-T\| \\
&= \frac{n+1}{2}\|H-T\|
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned}
|\delta(A_n(H)) - \delta(A_n(T))| &\leq \frac{n+1}{2}\|H-T\| \\
&< \frac{n+1}{2}\frac{2\beta}{n+1} \\
&= \beta
\end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak,

$$\delta(A_n(H)) < \delta(A_n(T)) + \beta < 1$$

bulunur ve $H \in \mathfrak{U}_{\mathfrak{ume},\mathfrak{n}}$ olduğu söylenir. Bu da ispatı tamamlar. □

Açıklama 4.2.3. *Aslında dikkat çekilmek istenen temel konu, düzgün ergodik operatörler kümesinin geometrik yapısının ne olduğudur. Bu konu üzerinde daha önceden [26] referansında durulmuştur.*

4.3 Pertürbasyon Sınırları

Bu alt bölümde Cesáro ortalamaları için pertürbasyon sınırları ele alınacaktır. Sonuçlar [21] makalesinde elde edilen sonuçların derinlemesine incelenmesidir.

Teorem 4.3.1. $(X, X_+, \mathcal{K}, f)$ *uzayı OBSB ve* $x_0 \in \mathcal{K}$ *sabit noktasıyla birlikte* $T \in \mathfrak{U}$ *olsun. Eğer bazı* $m \in \mathbb{N}$ *için* $\delta(A_m(T)) < 1$ *ise* $\|A_m(S) - A_m(T)\| < 1 - \delta(A_m(T))$ *koşulunu sağlayan her* S *Markov operatörü düzgün ortalama ergodiktir ve*

$$\|x_0 - z_0\| \leq \frac{\|A_m(S) - A_m(T)\|}{1 - \delta(A_m(T)) - \|A_m(S) - A_m(T)\|} \tag{4.3.1}$$

olacak şekilde bir tek $z_0 \in \mathcal{K}$ *sabit noktasına sahiptir.*

Kanıt. İlk olarak $(I - A_m(S))^{-1}$ operatörünün $\mathcal{N}$ üzerinde sınırlı olduğunu ispat edeceğiz (Bakınız Lemma 2.1.12).
Herhangi $x \in \mathcal{N}$ için,

$$\begin{aligned}
\|A_m(S)x\| &= \|A_m(S)x - A_m(T)x - A_m(T)x\| \\
&\leq \|(A_m(S) - A_m(T))x\| + \|A_m(T)x\| \\
&\leq \|A_m(S) - A_m(T)\|\|x\| + \delta(A_m(T))\|x\| \\
&= (\underbrace{\|A_m(S) - A_m(T)\| + \delta(A_m(T))}_{\rho})\|x\| \\
&= \rho\|x\|
\end{aligned} \tag{4.3.2}$$

olur. Böylece (4.3.2) yardımıyla her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\|(A_m(S))^n x\| \leq \rho^n \|x\|$$

olur. Dolayısıyla $\sum_n (A_m(S))^n x$ serisi yakınsaktır. Seri açılımından,

$$(I - A_m(S))^{-1} x = \sum_n A_m(S)^n X$$

ve dahası her $x \in \mathcal{N}$ için $\|(I - A_m(S))^{-1}x\| \leq \frac{\|x\|}{1-\rho}$ yazılabilir. Buradan $(I - A_m(S))^{-1}$ operatörünün $\mathcal{N}$ üzerinde sınırlı olduğu görülür.
$z_0 \in \mathcal{K}$ için $A_m(S)z_0 = z_0$ denklemi

$$(I - A_m(S))(z_0 - x_0) = -(I - A_m(S))x_0$$

denklemine denktir. $(I - A_m(S))x_0 \in \mathcal{N}$ olduğundan son denklemin

$$z_0 = x_0 - (I - A_m(S))^{-1}((I - A_m(S))x_0)$$

bir tek çözümü vardır. Özdeşlikten,

$$z_0 - x_0 = A_m(T)(z_0 - x_0) + (A_m(S) - A_m(T))(z_0 - x_0) + (A_m(S) - A_m(T))x_0$$

ve $z_0 - x_0 \in \mathcal{N}$ olduğu düşünülürse,

$$\begin{aligned}
\|z_0 - x_0\| &= \|A_m(T)(z_0 - x_0) + (A_m(S) - A_m(T))(z_0 - x_0) + (A_m(S) - A_m(T))x_0\| \\
&\leq \|A_m(T)(z_0 - x_0)\| + \|(A_m(S) - A_m(T))(z_0 - x_0)\| + \|(A_m(S) - A_m(T))x_0\| \\
&\leq \delta(A_m(T))\|z_0 - x - 0\| + \|A_m(S) - A_m(T)\|\|z_0 - x_0\| + \|A_m(S) - A_m(T)\| \\
&= (\delta(A_m(T)) + \|A_m(S) - A_m(T)\|)\,\|z_0 - x_0\| + \|A_m(S) - A_m(T)\| \quad (4.3.3)
\end{aligned}$$

elde edilir.
$A_m(S)(Sz_0) = S(A_m(S)z_0) = Sz_0$ ve $A_m(S)$ için z_0 elemanının tekliğinden $Sz_0 = z_0$ yani $S \in \mathfrak{U}$ sonucuna varılır. Dahası (4.3.2)'den dolayı $\delta(A_m(S)) < 1$ ve dolayısıyla S düzgün ortalama ergodik olur. Böylece z_0, S için tek bir sabit noktadır. O halde istenilen gösterilmiş olur. □

Sonuç 4.3.2. *$(X, X_+, \mathcal{K}, f)$ uzayı OBSB olsun. Eğer T operatörü X üzerinde, bazı $m \in \mathbb{N}$ için $\delta(A_m(T)) < 1$ olacak şekilde bir Markov operatörü ise*

$$\|S - T\| < \frac{2(1 - \delta(A_m(T)))}{m + 1}$$

koşulunu sağlayan her S Markov operatörü düzgün ortalama ergodiktir ve

$$\|x_0 - z_0\| \leq \frac{\|S - T\|}{2(1 - \delta(A_m)(T))/(m + 1) - \|S - T\|}$$

koşulunu sağlayan tek bir $z_0 \in \mathcal{K}$ sabit noktası vardır.

Kanıt. Her bir $k \in \mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned}
\|S^k - T^k\| &= \|S^{k-1}(S - T) + (S^{k-1} - T^{k-1})T\| \\
&\leq \|S^{k-1}(S - T)\| + \|(S^{k-1} - T^{k-1})T\| \\
&\leq \|S - T\| + \|S^{k-1} - T^{k-1}\| \\
&\vdots \\
&\leq k\|S - T\| \qquad (4.3.4)
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
\|A_m(S) - A_m(T)\| &= \left\| \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} S^k - \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} T^k \right\| \\
&= \frac{1}{m} \left\| \sum_{k=0}^{m-1} S^k - T^k \right\| \\
&\leq \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \|S^k - T^k\| \\
&\leq \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} k\|S - T\| \\
&= \frac{m + 1}{2} \|S - T\| \\
&< \frac{m + 1}{2} \left(\frac{2(1 - \delta(A_m(T)))}{m + 1} \right) \\
&= 1 - \delta(A_m(T))
\end{aligned}$$

elde edilir. İlerleyen kısımlarda gösterilecek olan Pertürbasyon Sınırları alt başlıklı bölümün, Teorem 6.2.3'ün ispatında verilecek olan detaylı gösterimden dolayı yukarıdaki gösterimin, ispatın tamamlanması için yeterli bir sonuç olduğu söylenebilir. □

5 C_0-MARKOV YARIGRUPLARININ ERGODİKLİĞİ VE PERTÜRBASYON SINIRLARI

5.1 Önbilgiler ve Temel Kavramlar

Burada verilen kavramların derinlemesine incelenmesi [23] kitabı baz alınarak yapılabilir. Bu başlık altında işlenecek olan temel konu ise güçlü sürekli yarıgruplardır. Bir başka deyişle üzerinde durulacak olan konu, X Banach uzayı üzerinde $\xi : \mathbb{R}_+ \to L(X)$ dönüşümü yardımıyla tanımlanan ve aşağıdaki koşulları sağlayan $(T_t)_{t\geq 0}$ operatörler ailesi olan C_0-yarıgruplarıdır.

(i) $T_0 = I, X$ üzerinde birim operatördür.

(ii) $\forall t, s \geq 0 : T_{t+s} = T_t T_s$

(iii) $t \downarrow 0$ iken $\forall x_0 \in X$ için $\|T_t x_0 - x_0\| \to 0$

İlk iki aksiyom cebirseldir ve $\mathcal{T} = (T_t)_{t\geq 0}$ ile $(\mathbb{R}_+, +)$ yarıgrubu temsil edilmektedir (representation). Son aksiyom ise topolojiktir ve ayrıca $\mathcal{T}$ dönüşümü güçlü operatör topolojisi üzerinde süreklidir.
$\mathcal{T} = (T_t)_{t\geq 0}$ C_0-yarıgrubu olsun. Eğer her bir $t \in \mathbb{R}_+$ için T_t operatörü Markov ise $\mathcal{T} = (T_t)_{t\geq 0}$ yarıgrubuna C_0- *Markov yarıgrubu* denir. Eğer her $t \in \mathbb{R}_+$ için $T_t x_0 = x_0$ eşitliği sağlanıyorsa $x_0 \in X$ elemanına $\mathcal{T} = (T_t)_{t\geq 0}$ yarıgrubunun *sabit noktası* denir.

Tanım 5.1.1. X Banach uzayı üzerindeki $(T_t)_{t\geq 0}$ güçlü sürekli yarıgrubunun üreteci $A : D(A) \subseteq X \to X$ olmak üzere

$$Ax := \dot{\xi}_x(0) = \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}(T_t x - x) \tag{5.1.1}$$

şeklinde tanımlanır. Burada A operatörünün tanım kümesi

$$D(A) := \{x \in X : \xi_x,\ \mathbb{R}_+ \ \text{üzerinde türevlenebilir}\} \tag{5.1.2}$$

$$D(A) := \{x \in X : \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}(T_t x - x) \ \text{var}\} \tag{5.1.3}$$

şeklindedir. Bir altuzay olan $D(A)$ tanım kümesi, A üretecinin tanımlanmasında önemli bir yere sahiptir. Dolayısıyla üretecin gösterimi $(A, D(A))$ ikilisi şeklindedir. Fakat biz yazım kolaylığı açısından sadece A yazacağız ve tanım kümesi için (5.1.3) ifadesini göz önüne alacağız.

Lemma 5.1.2. *[23, Lemma 1.3] $(T_t)_{t\geq 0}$ güçlü sürekli yarıgrubunun $(A, D(A))$ üreteci için aşağıdaki özellikler sağlanır.*

(i) $A : D(A) \subseteq X \to X$ *lineer operatördür.*

(ii) *Eğer $x \in D(A)$ ise $T_t x \in D(A)$ ve her $t \geq 0$ için $\frac{d}{dt} T_t x = T_t A x = A T_t x$*

(iii) *Her $t \geq 0$ ve $x \in X$ için,*

$$\int_0^t T_s x ds \in D(A)$$

dır.

(iv) *Her* $t \geq 0$ *için,*

$$\textit{eğer } \; x \in X \;\; ise \;\; T_t x - x = A \int_0^t T_s x ds \tag{5.1.4}$$

$$\textit{eğer } \; x \in D(A) \;\; ise \;\; T_t x - x = \int_0^t T_s Ax ds \tag{5.1.5}$$

dır.

Kanıt.

(i) • $x, y \in D(A)$ için,

$$\begin{aligned} A(x+y) &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t}(T_t(x+y) - (x+y)) \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t}(T_t x + T_t y - x - y) \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t}(T_t x - x) + \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t}(T_t y - y) \\ &= Ax + Ay \end{aligned}$$

• $\alpha \in \mathbb{F}$ için,

$$\begin{aligned} A(\alpha x) &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t}(T_t \alpha x - \alpha x) \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{\alpha}{t}(T_t x - x) \\ &= \alpha \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t}(T_t x - x) \\ &= \alpha Ax \end{aligned}$$

$\therefore$ A lineer operatördür.

(ii) $x \in D(A)$ olsun.

$$\begin{aligned} \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h}(T_h(T_t x) - T_t x) &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h}(T_t(T_h x - x)) \\ &= T_t \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h}(T_h x - x) \\ &= T_t Ax \end{aligned}$$

eşitliğinden

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h}(T_h(T_t x) - T_t x)$$

limitinin var olduğu görülür. Böylece (5.1.3)'den $T_t x \in D(A)$ olur ve buradan $AT_t x = T_t Ax$ yazılabilir. O halde ispat tamamlanmış olur.

(iii) Aşağıdaki ispatta (iii) iddiasının doğruluğu gösterildiği için ayrıca burada da kanıtlama yoluna gidilmeyecektir.

(iv) $x \in X$ ve $t \geq 0$ için,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}\left(T_h \int_0^t T_s x ds - \int_0^t T_s x ds\right) &= \frac{1}{h}\int_0^t T_{s+h} x ds - \frac{1}{h}\int_0^t T_s x ds \\
&= \frac{1}{h}\int_h^{t+h} T_s x ds - \frac{1}{h}\int_0^t T_s x ds \\
&= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T_s x ds - \frac{1}{h}\int_0^h T_s x ds
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla bu eşitlik, $h \downarrow 0$ iken $T_t x - x$ operatörüne yaklaşır. Böylece (5.1.4) sağlanmış olur.
Eğer $x \in D(A)$ ise $s \longmapsto T_s(T_h x - x)/h$ fonksiyonları $[0, t]$ üzerinde $h \downarrow 0$ iken $s \longmapsto T_s A x$ fonksiyonuna düzgün yaklaşır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
\lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h}(T_h - I)\int_0^t T_s x ds &= \lim_{h\downarrow 0}\int_0^t T_s \frac{1}{h}(T_h - I) x ds \\
&= \int_0^t T_s A x ds
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Tanım 5.1.3. X ve Y herhangi iki topolojik vektör uzayı olsun.

$$T : D(T) \subseteq X \to Y$$

lineer dönüşümü dikkate alındığında $D(T)$ kümesi yani T lineer operatörünün tanım kümesi, X uzayının yoğun bir alt uzayı ise T operatörüne *yoğun tanımlıdır (densely defined)* denir.

Şimdi Lemma 5.1.2'den faydalanarak Tanım 5.1.1'de ifade edilen üretecin birkaç özelliğini verelim.

Teorem 5.1.4. *[23, Teorem 1.4] Güçlü sürekli yarıgrupların üreteci, yarıgrupların biricik olmasını sağlayan kapalı ve yoğun tanımlı (densely defined) lineer bir operatördür.*

Kanıt. $(T_t)_{t\geq 0}$, X Banach uzayı üzerinde güçlü sürekli bir yarıgrup olsun. Bu yarıgrubun üreteci $(A, D(A))$ lineer bir operatördür (bakınız 5.1.2). A üretecinin kapalı olduğunu göstermek için, $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ve $\lim_{n\to\infty} Ax_n = y$ limitleri var olacak şekilde bir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ dizisi alalım. (5.1.5)'den $t \geq 0$ için,

$$T_t x_n - x_n = \int_0^t T_s A x_n ds$$

dır. $n \to \infty$ iken $[0, t]$ aralığı üzerinde $(T_s A x_n)$ dizisinin düzgün yakınsaklığı

$$T_t x - x = \int_0^t T_s y ds$$

eşitliğine karşılık gelmektedir. Eğer eşitliğin her iki tarafı $1/t$ ile çarpılıp $t \downarrow 0$ için limiti alınırsa,

$$\begin{aligned}
\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}(T_t x - x) &= \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}\int_0^t T_s y ds \\
Ax &= y
\end{aligned}$$

ve $x \in D(A)$ elde edilir. Yani A üreteci kapalı olur.
Lemma 5.1.2-(iii)'den $\frac{1}{t}\int_0^t T_s x ds \in D(A)$ dır. $(T_t)_{t\geq 0}$ yarıgrubunun güçlü sürekliliğinden her $x \in X$ için,

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}\int_0^t T_s x ds = x$$

olur. Bu da $D(A)$'nın X üzerinde yoğun olduğu anlamına gelir. Son olarak, $(S_t)_{t\geq 0}$ yarıgrubunun $(A, D(A))$ üretecinin ürettiği bir diğer güçlü sürekli yarıgrup olduğunu varsayalım. Ayrıca $x \in D(A)$ ve $t > 0$ için,

$$s \longmapsto \eta_x(s) := T_{t-s}S_s x \quad 0 \leq s \leq t$$

dönüşümünü ele alalım. Sabit s elemanından dolayı

$$\left\{\frac{S_{s+h}x - S_s x}{h} : h \in (0,1]\right\} \cup \{AS_s x\}$$

kümesi kompakttır. Aşağıdaki

$$\frac{1}{h}\left(\eta_x(s+h) - \eta_x(s)\right) = T_{t-s-h}\frac{1}{h}(S_{s+h}x - S_s x) + \frac{1}{h}(T_{t-s-h} - T_{t-s})S_s x$$

eşitliğin, Lemma 5.1.2-(ii) ve güçlü operatör topolojisi üzerinde sürekli olan bir dönüşümün, kompakt her alt küme üzerinde de düzgün sürekli olacağı bilgisi yardımıyla

$$\frac{d}{ds}\eta_x(s) = T_{t-s}AS_s x - AT_{t-s}S_s x = 0$$

değerine yakınsadığını görürüz. $\eta_x(0) = T_t x$ ve $\eta_x(t) = S_t x$ olduğundan dolayı yoğun tanım kümesi $D(A)$'dan alınan her x için,

$$T_t x = S_t x$$

elde edilir. Böylece her bir $t \geq 0$ için $T_t = S_t$ bulunur. Dolayısıyla üretecin ürettiği yarıgrubun biricikliği gösterilmiş olur. $\square$

Şimdi üreteç ve onun ürettiği yarıgruba dair birkaç örnek verelim.

Örnek 5.1.5. *$X = \mathbb{R}^2$ ve $t \geq 0$ için $T_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T_t = e^{tA}$ yarıgrubunu dikkate alalım. Bu durumda*

$$T_t = e^{tA} = \begin{bmatrix} Cosht & Sinht \\ Sinht & Cosht \end{bmatrix}$$

yazımından faydalanarak

$$A = \left.\frac{dT_t}{dt}\right|_{t=0} = \left.\begin{bmatrix} Sinht & Cosht \\ Cosht & Sinht \end{bmatrix}\right|_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

üreteci elde edilebilir.

Örnek 5.1.6. *$X = c_0$ olmak üzere $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi için $T_t x = (e^{-n^2 t} x_n)_n$ yarıgrubunu ele alalım. Böylece*

$$\begin{aligned} Ax : &= \lim_{t\downarrow 0} \frac{T_t x - x}{t} \\ &= \lim_{t\downarrow 0} \left(\frac{e^{-t}x_1 - x_1}{t}, \frac{e^{-4t}x_2 - x_2}{t}, \cdots \right) \\ &= \lim_{t\downarrow 0} \left(-e^{-t}x_1, -4e^{-4t}x_2, \cdots \right) \\ &= (-x_1, -4x_2, \cdots) \\ &= (-n^2 x_n)_n \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer yandan,

$$\begin{aligned} D(A) &= \{x \in X : Ax \in c_0\} \\ &= \{x \in X : (-n^2)x \in c_0\} \end{aligned}$$

olur. O halde $(T_t)_{t\geq 0}$ yarıgrubunun üreteci olan $(A, D(A))$ ikilisi elde edilmiş olur.

Örnek 5.1.7.

$$\begin{aligned} A : c_0 &\longrightarrow c_0 \\ (x_1, x_2, \cdots) &\longmapsto (x_2, x_3, \cdots) \text{ ve } \|A\| \leq 1 \end{aligned}$$

olacak şekilde bir A üretecini alalım.

$$\begin{aligned} I = (x_1, x_2, \cdots) &\Rightarrow I = (x_1, x_2, \cdots) \Rightarrow I = (x_1, x_2, \cdots) \\ A = (x_2, x_3, \cdots) &\Rightarrow tA = t(x_2, x_3, \cdots) \Rightarrow tA = t(x_2, x_3, \cdots) \\ A^2 = (x_3, x_4, \cdots) &\Rightarrow t^2 A^2 = t^2(x_3, x_4, \cdots) \Rightarrow \frac{t^2 A^2}{2!} = \frac{t^2}{2!}(x_3, x_4, \cdots) \\ &\vdots \\ A^n = (x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots) &\Rightarrow t^n A^n = t^n(x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots) \Rightarrow \frac{t^n A^n}{n!} = \frac{t^n}{n!}(x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots) \end{aligned}$$

Yukarıdaki açılım dikkate alındığında,

$$T_t := I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \cdots + \frac{t^n}{n!}A^n$$

eşitliği yani

$$T_t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n$$

yazılabilir. Dolayısıyla burada, sınırlı bir üretecin yarıgrup ürettiği görülür.

Yapılan bu 3 örnek ve benzerlerinden yola çıkarak, yarıgruptan rahatlıkla üreteç elde edebilirken, varlığını bildiğimiz üreteçten yarıgrubu nasıl tanımlayacağımıza dair pek bir bilgimiz olmadığını görürüz. Burada asıl sıkıntı yaratan, üretecin sınırsız olması durumudur. Aslında bu durum için çeşitli yaklaşımlar mevcuttur. Bunlardan en bilinenleri Hille -Yoshida ve Lumer-Phillips Teoremleri'dir.

Teorem 5.1.8. *[23] (Generation Theorem) (Contraction Case, Hille, Yoshida, 1948) X Banach uzayı üzerindeki $(A, D(A))$ lineer operatörü için aşağıdaki özellikler birbirine denktir:*

(i) $(A, D(A))$ *güçlü sürekli bir daralma (contraction) yarıgrubu üretir.*

(ii) $(A, D(A))$ *kapalı ve yoğun tanımlıdır. Ayrıca her $\lambda > 0$ için $\lambda \in \rho(A)$ ve*

$$\|\lambda R(\lambda, A)\| \leq 1 \tag{5.1.6}$$

dir.

(iii) $(A, D(A))$ *kapalı ve yoğun tanımlıdır. Ayrıca her $\lambda \in \mathbb{C}, Re\lambda > 0$ için $\lambda \in \rho(A)$ ve*

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{Re\lambda}$$

dır.

Kanıt.
$(i) \Rightarrow (iii)$
Her $Re\lambda > w$ için,

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{Re\lambda - w}$$

eşitsizliğinin yazılabileceğini biliyoruz. Özel olarak $M = 1$ ve $w = 0$ alınırsa,

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{Re\lambda}$$

olur. O halde istenilen eşitsizlik gösterilmiş olur.
$(iii) \Rightarrow (ii)$
Her $\lambda \in \mathbb{C}$, $Re\lambda > 0$ için $\lambda \in \rho(A)$ ve

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{Re\lambda}$$

olduğundan her $\lambda > 0$ için $Re\lambda = \lambda$ ve dolayısıyla

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \|\lambda R(\lambda, A)\| \leq 1$$

olur.
$(ii) \Rightarrow (i)$ Öncelikle

$$A_n := nAR(n, A) = n^2R(n, A) - nI \quad , n \in \mathbb{N}$$

sözde Yoshida yaklaştıranlarını (so-called Yoshida approximants) tanımlayalım. Bunlar sınırlıdır ve her bir $n \in \mathbb{N}$ için operatörlerle yerdeğiştirebilirler. Daha sonra

$$T_t^n := e^{tA_n}, \quad t \geq 0$$

ile verilen düzgün sürekli yarıgruplarını düşünelim. $D(A)$ üzerinde A_n, A'ya yaklaştığı için aşağıdaki özelliklerden bahsedebiliriz.

(i) Her bir $x \in X$ için $T_t x := \lim_{n\to\infty} T_t^n x$

(ii) $(T_t)_{t\geq 0}$, X üzerinde güçlü sürekli bir daralma yarıgrubudur.

(iii) $(T_t)_{t\geq 0}$ yarıgrubunun üreteci $(A, D(A))$ dır.

Bu önermelerin varlığını gösterdiğimiz takdirde ispat tamamlanmış olur.
(i) Her bir $({T_t}^n)_{t\geq 0}$ daralma yarıgrubudur. Çünkü $t \geq 0$ için,

$$\|{T_t}^n\| \leq e^{-nt} e^{\|n^2 R(n,A)\| t} \leq e^{-nt} e^{nt} = 1$$

dir. Analizin vektör değerli fonksiyonlar için olan temel teoreminden faydalanılırsa $0 \leq s \leq t$, $x \in D(A)$ ve $m, n \in \mathbb{N}$ için,

$$s \longmapsto T^m_{t-s} {T_s}^n x$$

yazılabilir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $(T^n_t)_{t\geq 0}$ yarıgrubunun değişme özelliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} T^n_t x - T^m_t x &= \int_0^t \frac{d}{ds}(T^m_{t-s} T^n_s x) ds \\ &= \int_0^t T^m_{t-s} T^n_s (A_n x - A_m x) ds \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla buradan da,

$$\|T_n(t)x - T_m(t)x\| \leq t\|A_n x - A_m x\| \tag{5.1.7}$$

elde edilir.
Her $x \in D(A)$ için,

$$\lambda A R(\lambda, A)x = \lambda R(\lambda, A)Ax \longrightarrow Ax$$

olduğundan $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ bir Cauchy dizisidir. Dolayısıyla herbir $x \in D(A)$ hatta $x \in X$ için $(T^n_t x)_{n\in\mathbb{N}}$ yakınsaktır. Ayrıca her $[0, t_0]$ aralığı üzerinde de düzgündür.
(ii) $(T^n_t)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin noktasal yakınsaklığı, $(T_t)_{t\geq 0}$ limit ailesinin fonksiyonel denklemi (FE) sağladığı anlamına gelmektedir. Böylece $(T_t)_{t\geq 0}$ bir yarıgrup hatta bir daralma yarıgrubudur. Dahası her bir $x \in D(A)$ için yörünge dönüşümüne karşılık gelen

$$\xi : t \longmapsto T_t x, \quad 0 \leq t \leq t_0$$

dönüşümü sürekli fonksiyonların düzgün limitidir (bakınız (5.1.7)) ve dolayısıyla süreklidir. Sonuç olarak buradan da $(T_t)_{t\geq 0}$ yarıgrubunun güçlü sürekli olduğu görülür.
(iii) $(B, D(B)), (T_t)_{t\geq 0}$ yarıgrubunun üreteci olsun ve $x \in D(A)$ sabitlensin. Her bir $[0, t_0]$ kompakt aralığında

$$\xi_n : t \longmapsto T^n_n t x$$

fonksiyonları (5.1.7) dikkate alındığında düzgün yakınsaktır.

$$\dot{\xi}_n : t \longmapsto T^n_t A_n x$$

türev fonksiyonları da

$$\eta : t \longmapsto T_t A x$$

fonksiyonlarına düzgün yakınsar. Buradan da $\dot{\xi}(0) = \eta(0)$ eşitliğini sağlayan ξ fonksiyonunun türevlenebilir olduğu gözlenir. Yani $D(A) \subset D(B)$ ve $x \in D(A)$ için $Ax = Bx$ dir. Şimdi $\lambda > 0$ alalım. $\lambda \in \rho(A)$ kabulünden dolayı $\lambda - A$, $D(A)$'dan X'e birebir ve örtendir. Diğer yandan B bir daralma yarıgrubu üretir ve dolayısıyla $\lambda \in \rho(B)$ olur. Böylece $\lambda - B$ dönüşümü de $D(B)$'den X'e birebir ve örtendir. O halde $D(A)$ üzerinde $\lambda - B$ ile $\lambda - A$ birbiriyle çakışır. Fakat bu durum yanlızca $D(A) = D(B)$ ve $A = B$ eşitlikleri için geçerlidir. □

Şimdi kısa bir tanımın ardından resolventlara gerek duyulmaksızın üretecin karakteri yardımıyla daralma yarıgrubunu oluşturmamızda önemli bir yere sahip olan Lumer-Phillips Teoremi'ni vereceğiz.

Tanım 5.1.9. X Banach uzayı üzerinde her $\lambda > 0$ ve $x \in D(A)$ için,

$$\|(\lambda - A)x\| \geq \lambda\|x\|$$

koşulunu sağlayan $(A, D(A))$ lineer operatörüne dissipative (sömüren) denir.

Teorem 5.1.10. *[23] (Lumer, Phillips, 1961) X Banach uzayı üzerindeki yoğun tanımlı, sömüren $(A, D(A))$ operatörü için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:*

(i) *A'nın kapanışı daralma yarıgrubu üretir.*

(ii) *Bazı (ya da her) $\lambda > 0$ için $rg(\lambda - A)$, X'de yoğundur.*

Kanıt.
$(i) \Rightarrow (ii)$ Generation Teoremi'nden her $\lambda > 0$ için $rg(\lambda - \bar{A}) = X$ olur.
$x_n \to 0$ ve $Ax_n \to y$ koşulunu sağlayan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ dizisini alalım. Sömüren operatör tanımı gereğince her $w \in D(A)$ ve her $\lambda > 0$ için,

$$\|\lambda(\lambda - A)x_n + (\lambda - A)w\| \geq \lambda\|\lambda x_n + w\|$$

yazılabilir. Eşitsizliğin her iki tarafının $n \to \infty$ için limiti alınırsa,

$$\| - \lambda y + (\lambda - A)w\| \geq \lambda\|w\| \quad \text{ve böylece} \quad \left\| -y + w - \frac{1}{\lambda}Aw \right\| \geq \|w\|$$

elde edilir. $\lambda \to \infty$ için,

$$\| - y + w\| \geq \|w\|$$

ve $D(A)$'dan rasgele seçilen $w, y \in \overline{rg(A)}$ elemanına yaklaşır.
Dolayısıyla

$$0 \geq \|y\| \quad \text{yani} \quad y = 0$$

olur.
$\bar{A}$ operatörünün sömüren olduğunu kanıtlamak için $x \in D(\bar{A})$ alalım. Lineer operatörlerin kapanışı tanımı gereğince $n \to \infty$ iken $x_n \to x$ ve $Ax_n \to \bar{A}x$ koşullarını sağlayan bir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ dizisi vardır. A sömüren ve norm sürekli olduğu için her $\lambda > 0$ için $\|(\lambda - \bar{A})x\| \geq \lambda\|x\|$ olur. Böylece $\bar{A}$ sömürendir. Son olarak $rg(\lambda - A)$ değer kümesinin $rg(\lambda - \bar{A})$'da yoğun olduğunu gösterelim. A kapalı olduğu için $rg(\lambda - \bar{A})$, X üzerinde kapalıdır. Dolayısıyla her $\lambda > 0$ için $rg(\lambda - \bar{A}) = \overline{rg(\lambda - A)}$ elde edilir. Buradan da bazı (her) $\lambda > 0$ için $rg(\lambda - A)$, X üzerinde yoğundur.
$(ii) \Rightarrow (i)$ $rg(\lambda - A)$ değer kümesinin yoğun olması $(\lambda - \bar{A})$ operatörünün örten olması anlamına gelmektedir. Buradan da $(0, \infty) \subset \rho(\bar{A})$ olur. Şöyle ki, bazı $\lambda_0 > 0$ için $(\lambda_0 - \bar{A})$ örten olsun. Ayrıca $\lambda_0 \in \rho(\bar{A})$ ve $\|R(\lambda_0, \bar{A})\| \leq \frac{1}{\lambda_0}$ yazılabilir. Diğer yandan resolventlerin seri açılımlarından $(0, 2\lambda_0) \subset \rho(\bar{A})$ olur. $\bar{A}$ sömüren olduğundan $0 < \lambda < 2\lambda_0$ için,

$$\|R(\lambda, \bar{A})\| \leq \frac{1}{\lambda}$$

yazılabilir. Bu şekilde devam edilirse her $\lambda > 0$ için $\lambda - A$ operatörünün örten olduğu görülür. Dolayısıyla $(0, \infty) \subset \rho(\bar{A})$ olur. O halde A'nın sömürenliğinden

$$\lambda > 0 \text{ için } \|R(\lambda, \bar{A})\| \leq \frac{1}{\lambda}$$

dır. Böylece Generation Teoremi'nden $\bar{A}$ bir daralma operatörü üretir. □

Eğer üreteç sınırlı bir operatör ise aşağıdaki denklik ifadeleri verilebilir.

Sonuç 5.1.11. *[23, Sonuç 1.5] X Banach uzayı üzerinde tanımlanan ve $(A, D(A))$ üretecinin ürettiği $(T_t)_{t\geq 0}$ güçlü sürekli yarıgrubu için aşağıdaki iddialar birbirine denktir:*

(i) *A üreteci sınırlıdır; yani her $x \in D(A)$ için,*

$$\|Ax\| \leq M\|x\|$$

olacak şekilde bir $M > 0$ vardır.

(ii) *Tanım kümesi $D(A)$, X kümesinin tamamıdır.*

(iii) *Tanım kümesi $D(A)$, X üzerinde kapalıdır.*

(iv) *$(T_t)_{t\geq 0}$ yarıgrubu düzgün süreklidir.*

Yukarıdaki herbir durum için yarıgrup

$$T_t = e^{tA} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}, \quad t \geq 0$$

olarak alınacaktır.

Kanıt.
$(i) \Rightarrow (ii)$

$$D(A) = \{x \in X : Ax \in X\}$$

tanım kümesi için $D(A) \neq X$ yani en az bir tane $x \in D(A)$ olsun. Bu durumda Ax tanımlı değildir. (i)'den $\|Ax\| \leq M\|x\|$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısının varlığından söz edilmiştir ki, bu da bir çelişkidir. O halde $D(A) = X$ yani tanım kümesi $D(A)$, X kümesinin tamamına eşit olur.
$(ii) \Rightarrow (iii)$
$D(A)$ kümesi yoğun ve (ii)'den $D(A) = X$ olduğundan

$$D(A) = X = \overline{D(A)}$$

yazılabilir. Dolayısıyla buradan da $D(A) = \overline{D(A)}$ olduğu için $D(A)$ tanım kümesi X üzerinde kapalıdır.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Verilen yarıgruptan faydalanılırsa,

$$\begin{aligned}
\lim_{t\downarrow 0}\|T_t - I\| &= \lim_{t\downarrow 0}\left\|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n A^n}{n!} - I\right\| \\
&= \lim_{t\downarrow 0}\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n A^n}{n!}\right\| \\
&\leq \lim_{t\downarrow 0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n\|A\|^n}{n!} \\
&= \lim_{t\downarrow 0} e^{t\|A\|} - 1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

sonucuna varılır. O halde $(T_t)_{t\geq 0}$ yarıgrubu düzgün süreklidir.
$(iv) \Rightarrow (i)$ $(T_t)_{t\geq 0}$ yarıgrubu düzgün sürekli olsun. Bu durumda,

$$\|Ax\| = \left\|\lim_{t\downarrow 0}\frac{T_t x - x}{t}\right\| \leq \lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\|T_t - I\|\|x\| < \infty$$

olur. O halde A üreteci sınırlıdır. □

5.2 Ergodiklik ve Dobrushin Katsayısı

Bu bölümde C_0-Markov yarıgruplarının Dobrushin ergodiklik katsayısı açısından düzgün asimtotik kararlılığı incelenecektir.
Bu da bize, Dobrushin ergodiklik katsayılarını kullanarak pertürbasyon sınırlarının yarıgruplar için oluşturulmasında yardımcı olacaktır. 5.2 ve 5.3 bölümleri [22] makalesinin derlemesidir.

Tanım 5.2.1. X üzerinde tanımlı $\mathcal{T} = (T_t)_{t\geq 0}$ C_0-Markov yarıgrubuna eğer

(i)

$$\lim_{t\to\infty}\|T_t - T_{x_0}\| = 0$$

olacak şekilde bir $x_0 \in X$ varsa *düzgün asimtotik kararlı*

(ii)

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{x,y\in\mathcal{K}}\|T_t x - T_t y\| = 0$$

sağlanıyorsa *zayıf ergodik* denir.

Teorem 5.2.2. *$(X, X_+, \mathcal{K}, f)$ uzayı OBSB ve $\mathcal{T} = (T_t)_{t\geq 0}$ bir C_0-Markov yarıgrubu olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:*

(i) *$\mathcal{T}$ zayıf ergodiktir.*

(ii) *$\delta(T_{t_0}) \leq \rho$ olacak şekilde $\rho \in [0,1)$ ve $t_0 \in \mathbb{R}_+$ vardır.*

(iii) *$\mathcal{T}$ düzgün asimtotik kararlıdır. Dahası*

$$\|T_t - T_{x_0}\| \leq Ce^{-\alpha t}, \ \forall t \geq t_0 \tag{5.2.1}$$

olacak şekilde $C, \alpha, t_0 \in \mathbb{R}$ pozitif sabitleri ve $x_0 \in \mathcal{K}$ vardır.

Kanıt.
$(i) \Rightarrow (ii)$ $\mathcal{T}$ yarıgrubu zayıf ergodik olsun. Biliyoruz ki, zayıf ergodik olan bir Markov operatörü aynı zamanda $t \to \infty$ iken $\delta(T_t) \to 0$ koşulunu da sağlar. Dolayısıyla burada Markov özelliğinden $\delta(T_{t_0}) \leq \rho$ olacak şekilde bir $\rho \in [0,1)$ ve $t_0 \in \mathbb{R}_+$ vardır.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ $\delta(T_{t_0}) \leq \rho$ olacak şekilde $\rho \in [0,1)$ ve $t_0 \in \mathbb{R}_+$ olsun. Her $t \in \mathbb{R}_+$ için T_t, Markov operatörü olduğundan Teorem 2.3.2-(iii)'den ve $0 \leq r < t_0$ eşitsizliğinden faydalanarak

$$\begin{aligned}\delta(T_t) = \delta(T_{[t/t_0]t_0+r}) &\leq \delta(T_{[t/t_0]t_0}T_r)\\ &\leq \delta(T_{[t/t_0]t_0})\\ &\leq \delta(T_{t_0})^{[t/t_0]}\\ &\leq \rho^{[t/t_0]}\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada a bir sayı olmak üzere $[a]$ ifadesi a sayısının tam kısmını göstermektedir. O halde,

$$t \to \infty \ iken \ \rho^{[t/t_0]} \to 0 \tag{5.2.2}$$

olur. Şimdi $\mathcal{T}$ yarıgrubunun norma göre bir Cauchy olduğunu gösterelim. Teorem 2.3.2-(iv)'den

$$\begin{aligned}\|T_t - T_{t+s}\| &= \|T_{[t/t_0]t_0+r} - T_{([t/t_0]t_0+r)+s}\|\\ &= \|T_{[t/t_0]t_0}T_r - (T_{[t/t_0]t_0}T_{r+s})\|\\ &= \|T_{[t/t_0]t_0}(T_r - T_{r+s})\|\\ &\leq \delta(T_{[t/t_0]t_0})\|T_r - T_{r+s}\|\\ &\leq \delta(T_{t_0})^{[t/t_0]}\|T_r - T_{r+s}\|\\ &\leq \delta(T_{t_0})^{[t/t_0]}(\|T_r\| + \|T_{r+s}\|)\\ &= 2\delta(T_{t_0})^{[t/t_0]}\end{aligned}$$

elde edilir. O halde (5.2.2)'den $t \to \infty$ iken $2\delta(T_{t_0})^{[t/t_0]} \to 0$ olur. Böylece $\|T_t - Q\| \to 0$ olacak şekilde bir Q Markov operatörü vardır. Son olarak bazı $x_0 \in X_+$ elemanları için $Q = T_{x_0}$ olduğunu gösterirsek ispat tamamlanmış olur. Bunun için $\delta(Q) = 0$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. Dolayısıyla

$$|\delta(T_t) - \delta(Q)| \leq \|T_t - Q\| \text{ ve } \lim_{t\to\infty} \delta(T_t) = 0$$

yardımıyla $\delta(Q) = 0$ sonucuna varılır. O halde ispat tamamlanmış olur.
$(iii) \Rightarrow (i)$ $\mathcal{T}$ yarıgrubu düzgün asimtotik kararlı olsun. Diğer yandan,

$$\|T_t - T_{x_0}\| \leq Ce^{-\alpha t}, \ \forall t \geq t_0$$

olacak şekilde $C, \alpha, t_0 \in \mathbb{R}$ pozitif sabitleri ve $x_0 \in \mathcal{K}$ var olsun. Burada,

$$\begin{aligned}\sup_{x,y\in\mathcal{K}} \|T_t x - T_t y\| &= \sup_{x,y\in\mathcal{K}} \|T_t x - T_{x_0} + T_{x_0} - T_t y\|\\ &\leq \sup_{x,y\in\mathcal{K}} (\|T_t x - T_{x_0}\| + \|T_t y - T_{x_0}\|)\\ &\leq \sup_{x,y\in\mathcal{K}} \|T_t x - T_{x_0}\| + \sup_{x,y\in\mathcal{K}} \|T_t y - T_{x_0}\|\\ &\leq Ce^{-\alpha t} + Ce^{-\alpha t}\\ &= 2Ce^{-\alpha t}\end{aligned}$$

olur. Her iki tarafın $t \to \infty$ için limiti alınırsa,

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{x,y\in\mathcal{K}} \|T_t x - T_t y\| \leq \lim_{t\to\infty} 2Ce^{-\alpha t} = 0$$

elde edilir. Yani

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{x,y\in\mathcal{K}} \|T_t x - T_t y\| = 0$$

olup $\mathcal{T}$ zayıf ergodiktir. □

Açıklama 5.2.3. *Yukarıdaki teoreme göre eğer $\mathcal{T} = (T_t)_{t\geq 0}$ C_0-Markov yarıgrubunun bazı $t_0 \in \mathbb{R}_+$ için T_{t_0} operatörlerinden biri düzgün asimtotik kararlı ise $\mathcal{T} = (T_t)_{t\geq 0}$ yarıgrubu da düzgün asimtotik kararlıdır.*

Açıklama 5.2.4. *Klasik düzenlemelerde bu açıklamanın sonlu boyutlu uzaylardaki benzer çeşitleri [33]'de kurulmuştur.*

5.3 Pertürbasyon Sınırları ve Düzgün Asimtotik Kararlılık

C_0-yarıgrubunun pertürbasyon sınırlarını kurmak için birkaç yardımcı teoreme ihtiyacımız vardır (bakınız [23]).

Teorem 5.3.1. *[23, Teorem 1.3 ve Sonuç 1.7] $(A, D(A))$, X Banach uzayı üzerinde $\mathcal{T} = (T_t)_{t\geq 0}$ C_0-yarıgrubunun bir üreteci olsun. Ayrıca bazı $w \in \mathbb{R}, M \geq 1$ ve her $t \geq 0$ için,*

$$\|T_t\| \leq Me^{wt}$$

sağlansın. Eğer $B \in L(X)$ ise $D(C) := D(A)$ olacak şekilde $C := A + B$,

$$\|S_t\| \leq Me^{(w+M\|B\|)t}, \quad \forall t \geq 0$$

koşulunu sağlayan bir $\mathcal{S} = (S_t)_{t\geq 0}$ C_0-yarıgrubunu üretir. Dahası bu yeni yarıgrubun gösterimi (representation) aşağıdaki integral denklemi ile yapılır.
Her $t \geq 0$ ve $x \in X$ için,

$$S_t x = T_t x + \int_0^t T_{t-s} B S_s x ds$$

dir.

Kanıt. Öncelikle $w = 0$ ve $M = 1$ alalım. Daha sonra her $\lambda > 0$ için $\lambda \in \rho(A)$ olsun. Burada

$$\lambda - C = \lambda - A - B = (I - BR(\lambda, A))(\lambda - A) \tag{5.3.1}$$

ayrıştırmasını yazmak mümkündür. $\lambda - A$, 1-1 ve örten olduğundan $\lambda - C$ de 1-1 ve örten olur. Yani $\lambda \in \rho(C)$ olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$I - BR(\lambda, A)$$

ifadesinin $L(X)$'de tersinir olmasıdır. Eğer durum böyleyse

$$R(\lambda, C) = R(\lambda, A)(I - BR(\lambda, A))^{-1}$$

eşitliği yazılabilir. Şimdi $Re\lambda > \|B\|$ olsun. O halde $\|BR(\lambda, A)\| \leq {}^{\|B\|}/_{Re\lambda} < 1$ (bakınız Generation Theorem) elde edilir. Böylece

$$R(\lambda, C) = R(\lambda, A)\sum_{n=0}^{\infty}(BR(\lambda, A))^n \tag{5.3.2}$$

ile birlikte $\lambda \in \rho(C)$ olur. Her $Re\lambda > \|B\|$ için,

$$\|R(\lambda, C)\| \leq \frac{1}{Re\lambda}\frac{1}{1 - {}^{\|B\|}/_{Re\lambda}} = \frac{1}{Re\lambda - \|B\|}$$

yazılabilir. Bu durumda C üreteci,

$$t \geq 0 \;\text{ için }\; \|S_t\| \leq e^{\|B\|t}$$

koşulunu sağlayan $(S_t)_{t\geq 0}$ güçlü sürekli yarıgrubunu üretir.
$w \in \mathbb{R}$ ve $M \geq 1$ genelliği için öncelikle $w = 0$ için sonuç elde etmeliyiz. Çünkü rescaled yarıgruplar bize orjinal ile rescaled nesneleri arasında kolaylıkla değişiklik yapılabileceğinin mümkün olduğunu söylemektedir. Diğer yandan, X Banach uzayı üzerinde tanımlı güçlü sürekli yarıgrup $(T_t)_{t\geq 0}$ sınırlı ise X uzayında tanımlanan norma denk başka bir

$$|\|x\|| := \sup_{t\geq 0}\|T_t x\|, \quad x \in X$$

normunun tanımlanabileceğini biliyoruz. Ayrıca

$$\|x\| \leq |\|x\|| \leq M\|x\|$$

eşitsizlik bağıntısını sağlayan bu norm $(T_t)_{t\geq 0}$ yarıgrubunu, daralma (contraction) yarıgrubu yapar. Buradan her $x \in X$ için,

$$|\|Bx\|| \leq M\|B\|\|x\| < M\|B\||\|x\||$$

yazılabilir. O halde ispatın ilk kısmı olan $C = A + B$ toplamının,

$$|\|S_t\|| \leq e^{|\|B\||t} \leq e^{M|\|B\||t}$$

eşitsizliğini sağlayan $(S_t)_{t\geq 0}$ güçlü sürekli yarıgrubunu ürettiği gösterilmiş olur.
Böylece her $t \geq 0$ için,

$$\|S_t x\| \leq |\|S_t x\|| \leq e^{M\|B\|t}|\|x\|| \leq Me^{M\|B\|t}\|x\|$$

elde edilir, ki bu da $w = 0$ için iddia edilendir. Şimdi de teoremin ikinci kısmının sağlandığını gösterelim.
$x \in D(A)$ alınsın ve

$$[0, t] \ni s \longmapsto \xi_x(s) := T_{t-s}S_s x \in X$$

düşünülsün. $D(A) = D(C)$ her iki yarıgrup altında da değişmez (invariant) olduğu için,

$$\frac{d}{ds}\xi_x(s) = T_{t-s}CS_s x - T_{t-s}AS_s x = T_{t-s}BS_s x$$

türeviyle birlikte $\xi_x(\cdot)$ sürekli türevlenebilirdir. Dolayısıyla buradan da,

$$S_t x - T_t x = \xi_x(t) - \xi_x(0) = \int_0^t {\xi_x}'(s)ds = \int_0^t T_{t-s}BS_s x ds$$

elde edilir. O halde $D(A)$ kümesinin yoğun oluşu ve operatörlerin sınırlılığı bu integralin bütün $x \in X$ elemanları için sağlandığını gösterir. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Pertürbasyon sınırlarıyla alakalı ilk sonuç aşağıdaki teorem ile verilecektir. Verilen sonuçlar detaylı olarak [22] makalesinde ispatlanmıştır.

Teorem 5.3.2. *$(X, X_+, \mathcal{K}, f)$ uzayı OBSB ve X üzerinde sırasıyla A ve C üreteçlerinin ürettiği $\mathcal{S} = (S_t)_{t\geq 0}$ ile $\mathcal{T} = (T_t)_{t\geq 0}$ C_0-Markov yarıgrupları olsun ve $B := C - A$ sınırlı kabul edilsin. Eğer $\delta(T_{t_0}) \leq \rho$ olacak şekilde $\rho \in [0, 1)$ ve $t_0 \in \mathbb{R}$ var ise her $x, z \in \mathcal{K}$ için,*

$$\|T_t x - S_t z\| \leq \begin{cases} \|x - z\| + t\|B\|, & \forall t \leq t_0 \\ \rho^{[t/t_0]}\|x - z\| + \left(\frac{t_0(1-\rho^{[t/t_0]})}{1-\rho} + \rho^{[t/t_0]}(t - t_0[t/t_0])\right)\|B\|, & \forall t > t_0 \end{cases} \tag{5.3.3}$$

dır.

Kanıt. Teorem 5.3.1'ten her bir $t \in \mathbb{R}$ için,

$$S_t x = T_t x + \int_0^t T_{t-s} B S_s x ds \tag{5.3.4}$$

yazılabilir. $x, z \in \mathcal{K}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} T_t x - S_t z &= T_t x - T_t z - \int_0^t T_{t-s} B S_s z ds \\ &= T_t(x - z) - \int_0^t T_{t-s} B S_s z ds \\ &= T_t(x - z) - \int_0^t T_s B S_{t-s} z ds \\ &= T_t(x - z) - \int_0^t T_s B z_s ds \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $z_s := S_{t-s} z$ alınabileceğine dikkat edilmelidir. Böylece

$$\begin{aligned} \|T_t x - S_t z\| &= \left\| T_t(x - z) - \int_0^t T_s B z_s ds \right\| \\ &\leq \|T_t(x - z)\| + \left\| \int_0^t T_s B z_s ds \right\| \\ &\leq \|T_t(x - z)\| + \int_0^t \|T_s B z_s\| \, ds \end{aligned} \tag{5.3.5}$$

elde edilir. T_t ile S_t C_0-yarıgruplarının Markovluğundan ve Teorem 2.3.2-(iv)'den

$$\|T_s B(z_s)\| \leq \delta(T_s)\|B\| \quad , \quad \|T_t(x - z)\| \leq \delta(T_t)\|x - z\|$$

yazılabilir. O halde (5.3.5)'den

$$\|T_t x - S_t z\| \leq \delta(T_t)\|x - z\| + \|B\| \int_0^t \delta(T_s) ds \tag{5.3.6}$$

olur.
Teoremde geçen koşula göre,

$$\delta(T_t) \leq \begin{cases} 1, & \forall t \leq t_0 \\ \rho, & \forall t > t_0 \end{cases} \tag{5.3.7}$$

çıkarımında bulunulabilir. Dahası eğer $t > t_0$ ve $[t/t_0]$ bir tamsayı ise $\delta(T_t) < 1$ olur, ki bu da $\delta(T_t) < \delta(T_{t_0})^{[t/t_0]} < \rho^{[t/t_0]}$ olduğunu ima eder. Dolayısıyla (5.3.7)'den, $n = [t/t_0]$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\int_0^t \delta(T_s)ds &= \int_0^{nt_0} \delta(T_s)ds + \int_{nt_0}^t \delta(T_s)ds \\
&= \int_0^{t_0} \delta(T_s)ds + \int_{t_0}^{2t_0} \delta(T_s)ds + \cdots + \int_{(n-1)t_0}^{nt_0} \delta(T_s)ds + \int_{nt_0}^t \delta(T_s)ds \\
&\leq t_0(1 + \delta(T_{t_0}) + \cdots + \delta(T_{t_0})^{n-1}) + (t - nt_0)\delta(T_{t_0})^n \\
&= \frac{t_0(1 - \delta(T_{t_0})^n)}{1 - \delta(T_{t_0})} + \delta(T_{t_0})^n(t - nt_0), \quad \forall t > t_0
\end{aligned} \tag{5.3.8}$$

bulunur. Böylece (5.3.6) ve bulunan bu son eşitsizlik dikkate alındığında her $t > t_0$ için,

$$\begin{aligned}
\|T_t x - S_t z\| &\leq \delta(T_t)\|x - z\| + \|B\| \int_0^t \delta(T_s)ds \\
&\leq \delta(T_t)\|x - z\| + \|B\| \left(\frac{t_0(1 - \delta(T_{t_0})^n)}{1 - \delta(T_{t_0})} + \delta(T_{t_0})^n(t - nt_0) \right) \\
&\leq \rho^{[t/t_0]}\|x - z\| + \|B\| \left(\frac{t_0(1 - \rho^{[t/t_0]})}{1 - \rho} + \rho^{[t/t_0]}(t - t_0[t/t_0]) \right)
\end{aligned}$$

olur. O halde sonuç olarak,

$$\|T_t x - S_t z\| \leq \begin{cases} \|x - z\| + t\|B\|, & \forall t \leq t_0 \\ \rho^{[t/t_0]}\|x - z\| + \|B\| \left(\frac{t_0(1 - \rho^{[t/t_0]})}{1 - \rho} + \rho^{[t/t_0]}(t - t_0[t/t_0]) \right), & \forall t > t_0 \end{cases}$$

elde edilir. □

Sonuç 5.3.3. *Teorem 5.3.2'in koşulları sağlansın. O halde $x, y \in \mathcal{K}$ için,*

$$\sup_{t \geq 0} \|T_t x - S_t z\| \leq \|x - z\| + \frac{t_0}{1 - \rho}\|B\| \tag{5.3.9}$$

olur. Ek olarak eğer $\mathcal{S}$, S_{z_0}'a düzgün asimtotik kararlı olarak yaklaşıyorsa,

$$\|T_{x_0} - S_{z_0}\| \leq \frac{t_0}{1 - \rho}\|B\| \tag{5.3.10}$$

olur.

Kanıt. (5.3.9) eşitsizliği (5.3.3) eşitsizliğinin direk sonucudur. Şöyle ki,

$$\|T_t x - S_t z\| \leq \rho^{[t/t_0]}\|x - z\| + \left(\frac{t_0(1 - \rho^{[t/t_0]})}{1 - \rho} + \rho^{[t/t_0]}(t - t_0[t/t_0]) \right) \|B\|$$

eşitsizliğinin her iki tarafının $t \geq 0$ için supremumu alınırsa,

$$\sup_{t \geq 0} \|T_t x - S_t z\| \leq \|x - z\| + \frac{t_0}{1 - \rho}\|B\|$$

elde edilir. (5.3.10) eşitsizliğinin gösterimi için ise (5.3.6) eşitsizliğinin $t \to \infty$ için limiti alınırsa,

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \|T_t x - S_t z\| &\le \lim_{t\to\infty} \left(\delta(T_t)\|x-z\| + \|B\| \int_0^t \delta(T_s) ds \right) \\
&\le \lim_{t\to\infty} \delta(T_t)\|x-z\| + \|B\| \int_0^\infty \delta(T_s) ds \\
&= \|B\| \int_0^\infty \delta(T_s) ds
\end{aligned}$$

olur. Yani

$$\|T_{x_0} - S_{z_0}\| \le \|B\| \int_0^\infty \delta(T_s) ds$$

dir. Bulunan bu ifade, (5.3.8) eşitsizliği yardımıyla yeniden yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\|T_{x_0} - S_{z_0}\| &\le \|B\| \int_0^\infty \delta(T_s) ds \\
&\le \lim_{t\to\infty} \|B\| \left(\frac{t_0(1-\delta(T_{t_0})^{[t/t_0]-1})}{1-\delta(T_{t_0})} + \delta(T_{t_0})^{[t/t_0]}(t - t_0[t/t_0]) \right) \\
&= \|B\| \frac{t_0}{1-\rho}
\end{aligned}$$

sonucuna varılır. Böylece istenilen gösterilmiş olur. □

Aşağıdaki teorem $\delta(T_{t_0})$ açısından pertürbasyon sınırları elde etmenin alternatif bir yolunu verecektir.

Teorem 5.3.4. *Teorem 5.3.2'in koşulları sağlansın. O halde her bir $x, z \in \mathcal{K}$ için,*

$$\|T_t x - S_t z\| \le \delta(T_{t_0})^{[t/t_0]}(\|x-z\| + \sup_{0<t<t_0} \|T_t - S_t\|) + \frac{1-\delta(T_{t_0})^{[t/t_0]}}{1-\delta(T_{t_0})} \|T_{t_0} - S_{t_0}\|, \quad t \in \mathbb{R}_+ \tag{5.3.11}$$

dır.

Kanıt. Eğer $t < t_0$ ise

$$\begin{aligned}
\|T_t x - S_t z\| &= \|T_t x - S_t x + S_t x - S_t z\| \\
&\le \|T_t x - S_t x\| + \|S_t x - S_t z\| \\
&= \|T_t x - S_t x\| + \|S_t(x-z)\| \\
&\le \|T_t - S_t\|\|x\| + \|S_t\|\|x-z\| \\
&= \|T_t - S_t\| + \|x-z\|
\end{aligned}$$

olup (5.3.11) eşitsizliği sağlanır. Eğer $t \ge t_0$ ise

$$\begin{aligned}
T_t x - S_t z &= T_{t_0}(T_{t-t_0} x) - S_{t_0}(S_{t-t_0} z) \\
&= T_{t_0}(T_{t-t_0} x - S_{t-t_0} z) + (T_{t_0} - S_{t_0}) S_{t-t_0} z
\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\|T_t x - S_t z\| &= \|T_{t_0}(T_{t-t_0} x - S_{t-t_0} z) + (T_{t_0} - S_{t_0}) S_{t-t_0} z\| \\
&\le \|T_{t_0}(T_{t-t_0} x - S_{t-t_0} z)\| + \|(T_{t_0} - S_{t_0}) S_{t-t_0} z\| \\
&\le \|T_{t-t_0} x - S_{t-t_0} z\| \delta(T_{t_0}) + \|T_{t_0} - S_{t_0}\|
\end{aligned}$$

olur. Yukarıdaki ilişkiyi

$$\|T_{t-t_0}x - S_{t-t_0}x\|, \cdots, \|T_{t-t_0([t/t_0]-1)}x - S_{t-t_0([t/t_0]-1)}z\|$$

içinde sürdürürsek,

$$\begin{aligned}
\|T_tx - S_tz\| &\leq \delta(T_{t_0})^{[t/t_0]}\left(\|x-z\| + \sup_{0<t<t_0}\|T_t - S_t\|\right) \\
&+ \left(\delta(T_{t_0})^{[t/t_0]-1} + \delta(T_{t_0})^{[t/t_0]-2} + \cdots + 1\right)\|T_{t_0} - S_{t_0}\| \\
&= \delta(T_{t_0})^{[t/t_0]}\left(\|x-z\| + \sup_{0<t<t_0}\|T_t - S_t\|\right) + \frac{1-\delta(T_{t_0})^{[t/t_0]}}{1-\delta(T_{t_0})}\|T_{t_0} - S_{t_0}\|
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. □

Teorem 5.3.5. *Eğer bazı $t_0 \in \mathbb{R}_+$ için $\delta(T_{t_0}) < 1$ ise $\|S_{t_0} - T_{t_0}\| < 1 - \delta(T_{t_0})$ koşulunu sağlayan her $\mathcal{S} = (S_t)_{t\geq 0}$ C_0-Markov yarıgrubu düzgün asimtotik kararlıdır ve*

$$\|x_0 - z_0\| \leq \frac{\|S_{t_0} - T_{t_0}\|}{1 - \delta(T_0) - \|S_{t_0} - T_{t_0}\|} \tag{5.3.12}$$

olacak şekilde bir tek $z_0 \in \mathcal{K}$ sabit noktası vardır.

Kanıt. Herhangi $x \in \mathcal{N}$ alınsın. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\|S_{t_0}x\| &= \|S_{t_0}x - T_{t_0}x + T_{t_0}x\| \\
&\leq \|S_{t_0}x - T_{t_0}x\| + \|T_{t_0}x\| \\
&\leq \|S_{t_0} - T_{t_0}\|\|x\| + \|x\|\delta(T_{t_0}) \\
&= \|x\|\left(\|S_{t_0} - T_{t_0}\| + \delta(T_0)\right) \\
&\leq \rho\|x\|
\end{aligned} \tag{5.3.13}$$

elde edilir. Burada $\rho = \|S_{t_0} - T_{t_0}\| + \delta(T_{t_0}) < 1$ dir. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için (5.3.13)'den,

$$\|S_{t_0}^n x\| \leq \rho^n\|x\|$$

elde edilir. Dolayısıyla $(I - S_{t_0})^{-1}$, $\mathcal{N}$ kümesi üzerinde sınırlıdır. Açıkça görülmektedir ki, $z_0 \in \mathcal{K}$ elemanıyla birlikte $S_{t_0}z_0 = z_0$ denklemi

$$(I - S_{t_0})(z_0 - x_0) = -(I - S_{t_0})x_0$$

denklemine denktir. $(I - S_{t_0})x_0 \in \mathcal{N}$ olduğu için son denklemin tek bir

$$z_0 = x_0 - (I - S_{t_0})^{-1}((I - S_{t_0})x_0)$$

çözümü vardır. Dahası özdeşlikten,

$$z_0 - x_0 = T_{t_0}(z_0 - x_0) + (S_{t_0} - T_{t_0})(z_0 - x_0) + (S_{t_0} - T_{t_0})x_0$$

ve

$$\begin{aligned}
\|z_0 - x_0\| &= \|T_{t_0}(z_0 - x_0) + (S_{t_0} - T_{t_0})(z_0 - x_0) + (S_{t_0} - T_{t_0})x_0\| \\
&\leq \|T_{t_0}(z_0 - x_0)\| + \|S_{t_0} - T_{t_0}(z_0 - x_0)\| + \|(S_{t_0} - T_{t_0})x_0\| \\
&\leq \delta(T_{t_0})\|z_0 - x_0\| + \|S_{t_0} - T_{t_0}\|\|z_0 - x_0\| + \|(S_{t_0} - T_{t_0})x_0\| \\
&= \left(\delta(T_{t_0}) + \|S_{t_0} - T_{t_0}\|\right)\|z_0 - x_0\| + \|S_{t_0} - T_{t_0}\|
\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitsizlikte gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\|x_0 - z_0\| \leq \frac{\|S_{t_0} - T_{t_0}\|}{1 - \delta(T_{t_0}) - \|S_{t_0} - T_{t_0}\|}$$

(5.3.12) eşitsizliğine karşılık gelen bu sonuca ulaşılır.
Herbir $t \in \mathbb{R}_+$ için $S_{t_0}(S_t z_0) = S_t(S_{t_0} z_0) = S_t z_0$ olur. S_{t_0} için z_0 elemanının tekliğinden dolayı $S_t z_0 = z_0$ elde edilir. Şimdi varsayalım ki, $\mathcal{S}$ yarıgrubunun bir diğer sabit noktası $\tilde{z}_0 \in \mathcal{K}$ dır. O halde $S_{t_0}\tilde{z}_0 = \tilde{z}_0$ yazılabilir. Buradan $S_t z_0 = \tilde{z}_0$ ve dolayısıyla $z_0 = \tilde{z}_0$ elde edilir. Bu durumda $\mathcal{S}$ yarıgrubunun bir tek sabit noktaya sahip olduğu gösterilmiş olur. Ayrıca $\delta(S_{t_0}) < 1$ olduğu için Teorem 5.2.2'den dolayı $\mathcal{S}$ düzgün asimtotik kararlıdır. Böylece ispat tamamlanmış olur. $\square$

Yukarıdaki teorem, verilen düzgün asimtotik kararlı bir yarıgrup (T_t) için belli bir t_0 zamanında T_{t_0} ile S_{t_0} operatörleri birbirine çok yakın olacak şekilde bir (S_t) Markov yarıgrubu bulunabiliyor ise (S_t) yarıgrubunun genellikle düzgün asimtotik kararlı olduğunu söyler.

6 $\mathbf{C_0}-$MARKOV YARIGRUPLARININ CESÀRO ORTALAMASI

6.1 Düzgün Ortalama Ergodiklik ve Dobrushin Katsayısı

Bu bölümde Teorem 5.2.2'in benzeri, düzgün ortalama ergodik Markov operatörleri için kurulacak ve onun uygulamalarını sağlayacak teoremler verilecektir. Burada [22] makalesi ele alınmış ve sonuçları bu bölümde incelenmiştir.
$(X, X_+, \mathcal{K}, f)$ uzayı OBSB olsun. $\mathfrak{U}$ sembolü ile $\mathcal{K}$'ya ait tek bir sabit noktaya sahip olan X üzerinde tanımlanan bütün $\mathcal{T} = (T_t)_{t\geq 0}$ C_0-Markov operatörlerinin kümesi gösterilecektir.

Açıklama 6.1.1. *$\mathcal{T} = (T_t)_{t\geq 0}$ C_0-Markov yarıgrubu olsun. Eğer bazı $t_0 > 0$ için T_{t_0} operatörü özdeğeri 1 olan tek bir $x_0 \in \mathcal{K}$ özvektörüne sahipse $\mathcal{T} \in \mathfrak{U}$ dır. Aslında*

$$T_t x_0 = T_t T_{t_0} x_0 = T_{t+t_0} x_0 = T_{t_0} T_t x_0$$

eşitliklerinden dolayı yani T_{t_0} için özvektörün tekliği ve T_t'nin Markovluğundan her $t \in \mathbb{R}_+$ için $T_t x_0 = x_0$ olur.

$\mathcal{T}$ C_0-yarıgrubunun Cesàro ortalaması

$$A_t(\mathcal{T}) = \frac{1}{t}\int_0^t T_s ds, \qquad t \in \mathbb{R}_+$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Bu tanımdaki integral, güçlü operatör topolojisine göre verilmektedir.

Tanım 6.1.2. X üzerinde tanımlı $\mathcal{T} = (T_t)_{t\geq 0}$ C_0-Markov yarıgrubuna eğer

(i)

$$\lim_{t\to\infty} \|T_t - T_{x_0}\| = 0$$

olacak şekilde bir $x_0 \in X$ varsa *düzgün asimtotik kararlı* (Tanım 5.2.1-(i))

(ii)

$$\lim_{t\to\infty} \|A_t(\mathcal{T}) - T_{x_0}\| = 0$$

olacak şekilde bir $x_0 \in X$ varsa *düzgün ortalama ergodik*

(iii)

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{x,y\in\mathcal{K}} \|T_t x - T_t y\| = 0$$

sağlanıyorsa zayıf ergodik (Tanım 5.2.1-(ii))

(iv)

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{x,y\in\mathcal{K}} \|A_t(\mathcal{T})x - A_t(\mathcal{T})y\| = 0$$

sağlanıyorsa *zayıf ortalama ergodik* denir.

Açıklama 6.1.3. *Düzgün asimtotik kararlı olan bir C_0-Markov yarıgrubu düzgün ortalama ergodikte olur. Ayrıca eğer $\mathcal{T}$ düzgün ortalama ergodik ise T_{x_0} ifadesine karşılık gelen x_0 elemanı $\mathcal{T}$ yarıgrubunun sabit noktasıdır. Şöyle ki, her $t \in \mathbb{R}_+$ için $T_t T_{x_0} = T_{x_0}$ eşitliğinden $T_t x_0 = x_0$ dir. Burada asıl önemli olan nokta her düzgün ortalama ergodik Markov operatörlerinin tek bir sabit noktaya sahip olmasıdır.*

Teorem 6.1.4. *$(X, X_+, \mathcal{K}, f)$ uzayı OBSB ve $\mathcal{T} \in \mathfrak{U}$ olacak şekilde $\mathcal{T} = (T_t)_{t\geq 0}$ C_0-Markov yarıgrubu olsun. O halde aşağıdaki önermeler birbirine denktir:*

(i) *$\mathcal{T}$ zayıf ortalama ergodiktir.*

(ii) *$\delta(A_{t_0}(\mathcal{T})) \leq \rho$ olacak şekilde $\rho \in [0, 1)$* ve *$t_0 \in \mathbb{R}_+$ vardır.*

(iii) *$\mathcal{T}$ düzgün ortalama ergodiktir.*

Kanıt.
$(i) \Rightarrow (ii)$ $\mathcal{T} \in \mathfrak{U}$ olduğundan $A_t(\mathcal{T})$ operatörü de bir Markov operatörüdür. Böylece Markov operatörü özelliğinden

$$\delta(A_t(\mathcal{T})) = \frac{1}{2} \sup_{u,v\in\mathcal{K}} \|A_t(\mathcal{T})u - A_t(\mathcal{T})v\|$$

eşitliğini yazmak mümkündür. Buradan norm ve supremum tanımı gereğince $\delta(A_t(\mathcal{T})) \geq 0$ olur. Diğer yandan $\mathcal{T}$, zayıf ortalama ergodik olduğundan

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{2} \sup_{u,v\in\mathcal{K}} \|A_t(\mathcal{T})u - A_t(\mathcal{T})v\| = 0$$

olup

$$\lim_{t\to\infty} \delta(A_t(\mathcal{T})) = 0$$

yazılabilir.
O halde her ρ için en az bir tane t_0 vardır, öyle ki her $t > t_0$ için $0 \leq \delta(A_t(\mathcal{T})) < \rho$ olur. Sonuç olarak, $\lim_{t\to\infty} \delta(A_t(\mathcal{T})) = 0$ olduğundan $\rho \in [0, 1)$ bulunur. Böylece istenilen gösterilmiş olur.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ $\delta(A_{t_0}(\mathcal{T})) \leq \rho$ olacak şekilde $t_0 \in \mathbb{R}_+$ ve $\rho \in [0, 1)$ olduğunu varsayalım.
T_t, X üzerinde Markov operatörü olduğu için,

$$\begin{aligned}
\|A_t(\mathcal{T})(I - T_s)\| &= \left\| \frac{1}{t} \int_0^t T_u du (I - T_s) \right\| \\
&= \left\| \frac{1}{t} \int_0^t T_u (I - T_s) du \right\| \\
&= \left\| \frac{1}{t} \int_0^t T_u du - \frac{1}{t} \int_0^t T_u T_s du \right\| \\
&= \left\| \frac{1}{t} \int_0^t T_u du - \frac{1}{t} \int_s^{t+s} T_u du \right\| \\
&= \left\| \frac{1}{t} \int_0^s T_u du + \frac{1}{t} \int_t^{t+s} T_u du \right\| \\
&\leq \frac{1}{t} \int_0^s \|T_u\| du + \frac{1}{t} \int_t^{t+s} \|T_u\| du \\
&= \frac{2s}{t}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece her bir $s \in \mathbb{R}_+$ için,

$$\begin{aligned}
\|A_t(\mathcal{T})(I - A_s(\mathcal{T}))\| &= \left\| A_t(\mathcal{T}) \left(\frac{1}{s} \int_0^s (I - T_u) du \right) \right\| \\
&= \left\| \frac{1}{s} \int_0^s A_t(\mathcal{T})(I - T_u) du \right\| \\
&\le \frac{1}{s} \int_0^s \|A_t(\mathcal{T})(I - T_u)\| du \\
&\le \frac{1}{s} \int_0^s \frac{2u}{t} du \\
&= \frac{s}{t}
\end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$\delta(A_t(\mathcal{T})(I - A_s(\mathcal{T}))) \le \|A_t(\mathcal{T})(I - A_s(\mathcal{T}))\| \le \frac{s}{t} \tag{6.1.1}$$

yazılabilir. Teorem 2.3.2-(ii)'den

$$|\delta(A_t(\mathcal{T})A_{t_0}(\mathcal{T})) - \delta(A_t(\mathcal{T}))| \le \delta(A_t(\mathcal{T})(I - A_{t_0}(\mathcal{T})))$$

eşitsizliğini yazmak mümkündür. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
\delta(A_t(\mathcal{T})(I - A_{t_0}(\mathcal{T}))) &\ge \delta(A_t(\mathcal{T})) - \delta(A_t(\mathcal{T})A_{t_0}(\mathcal{T})) \\
&\ge \delta(A_t(\mathcal{T})) - \delta(A_t(\mathcal{T}))\delta(A_{t_0}(\mathcal{T})) \\
&\ge (1 - \rho)\delta(A_t(\mathcal{T})) \qquad (6.1.2)
\end{aligned}$$

olur. O halde (6.1.1) ve (6.1.2)'den

$$\delta(A_t(\mathcal{T})) \le \frac{t_0}{t(1 - \rho)}$$

elde edilir. Böylece $\lim_{n\to\infty} \delta(A_t(\mathcal{T})) = 0$ olur. Şimdi $(A_t(\mathcal{T}))$'nin Cauchy olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
\|A_{t+s}(\mathcal{T}) - A_t(\mathcal{T})\| &= \left\| \frac{1}{t+s} \int_0^{t+s} T_u du - \frac{1}{t} \int_0^t T_u du \right\| \\
&= \left\| \frac{1}{t+s} \int_0^{t+s} T_u du - \frac{1}{t} \int_0^{t+s} T_u du + \frac{1}{t} \int_0^{t+s} T_u du - \frac{1}{t} \int_0^t T_u du \right\| \\
&\le \left| \frac{1}{t+s} - \frac{1}{t} \right| \left\| \int_0^{t+s} T_u du \right\| + \frac{1}{t} \left\| \int_0^{t+s} T_u du - \int_0^t T_u du \right\| \\
&= \frac{s}{t(t+s)}(t+s) + \frac{1}{t} \left\| \int_t^{t+s} T_u du \right\| \\
&\le \frac{s}{t} + \frac{1}{t} \int_t^{t+s} \|T_u\| \, du \\
&= \frac{2s}{t}
\end{aligned}$$

$t \to \infty$ iken $\frac{2s}{t} \to 0$ olur. Böylece $(A_t(\mathcal{T}))$ bir Cauchy ağı olur. O halde $A_t(\mathcal{T}) \to P$ (norm) yani $\|A_t(\mathcal{T}) - P\| \to 0$ olacak şekilde bir P vardır.
$\delta(A_t(\mathcal{T})) \to 0$ ve $|\delta(A_t(\mathcal{T})) - \delta(P)| \le \|A_t(\mathcal{T}) - P\| \to 0$ olduğundan dolayı $\delta(P) = 0$

elde edilir. Böylece $P = T_{x_0}$ olacak şekilde bir $x_0 \in \mathcal{K}$ vardır yani (T_t) düzgün ortalama ergodiktir. Bu durumda ispat tamamlanmış olur.
$(iii) \Rightarrow (i)$ Burada

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sup_{x,y\in\mathcal{K}}\|A_t(\mathcal{T})x - A_t(\mathcal{T})y\| &\le \frac{1}{2}\sup_{x,y\in\mathcal{K}}\|A_t(\mathcal{T})x - A_t(\mathcal{T})y + T_{y_0}x - T_{y_0}x + T_{y_0}y - T_{y_0}y\| \\
&\le \frac{1}{2}\sup_{x,y\in\mathcal{K}}(\|A_t(\mathcal{T})x - T_{y_0}x\| + \|T_{y_0}x - T_{y_0}y\| \\
&+ \|T_{y_0}y - A_t(\mathcal{T})y\|) \\
&\le \frac{1}{2}(\sup_{x,y\in\mathcal{K}}\|A_t(\mathcal{T})x - T_{y_0}x\| + \sup_{x,y\in\mathcal{K}}\|T_{y_0}x - T_{y_0}y\| \\
&+ \sup_{x,y\in\mathcal{K}}\|T_{y_0}y - A_t(\mathcal{T})y\|)
\end{aligned}$$

eşitsizliği dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2}\sup_{x,y\in\mathcal{K}}\|A_t(\mathcal{T})x - A_t(\mathcal{T})y\| &\le \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2}(\sup_{x,y\in\mathcal{K}}\|A_t(\mathcal{T})x - T_{y_0}x\| + \sup_{x,y\in\mathcal{K}}\|T_{y_0}x - T_{y_0}y\| \\
&+ \sup_{x,y\in\mathcal{K}}\|T_{y_0}y - A_t(\mathcal{T})y\|) \\
&\le \frac{1}{2}(\lim_{t\to\infty}\sup_{x,y\in\mathcal{K}}\|A_t(\mathcal{T})x - T_{y_0}x\| + \lim_{t\to\infty}\sup_{x,y\in\mathcal{K}}\|T_{y_0}x - T_{y_0}y\| \\
&+ \lim_{t\to\infty}\sup_{x,y\in\mathcal{K}}\|T_{y_0}y - A_t(\mathcal{T})y\|)
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer yandan her bir $y_0 \in X$ için $T_{y_0}x = f(x)y_0$ ve $x, y \in \mathcal{K}$ için $f(x) = f(y) = 1$ bilgileri yardımıyla,

$$\|T_{y_0}x - T_{y_0}y\| = \|f(x)y_0 - f(y)y_0\| = \|y_0 - y_0\| = 0$$

bulunur. Yukarıda elde edilen ifadeler ve $\mathcal{T}$ yarıgrubunun düzgün ortalama ergodikliği sayesinde,

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty}\sup_{x,y\in\mathcal{K}}\|A_t(\mathcal{T})x - A_t(\mathcal{T})y\| &\le \lim_{t\to\infty}\sup_{x,y\in\mathcal{K}}\|A_t(\mathcal{T})x - T_{y_0}x\| + \lim_{t\to\infty}\sup_{x,y\in\mathcal{K}}\|T_{y_0}x - T_{y_0}y\| \\
&+ \lim_{t\to\infty}\sup_{x,y\in\mathcal{K}}\|T_{y_0}y - A_t(\mathcal{T})y\| = 0
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Böylece düzgün ortalama ergodik olan $\mathcal{T}$ yarıgrubunun zayıf ortalama ergodik olduğu gösterilmiş olur. □

Sonuç 6.1.5. *$(X, X_+, \mathcal{K}, f)$ uzayı OBSB ve $x_0 \in \mathcal{K}$ noktasıyla birlikte $T \in \mathfrak{U}$ olacak şekilde $\mathcal{T} = (T_t)_{t\ge 0}$ C_0-Markov yarıgrubu olsun. Eğer $\delta(A_{t_0}(\mathcal{T})) \le \rho$ koşulunu sağlayan $\rho \in [0, 1)$ ve $t_0 \in \mathbb{R}_+$ var ise*

$$\sup_{x\in\mathcal{K}}\|A_t(\mathcal{T})x - x_0\| \le \frac{2t_0}{t(1-\rho)}$$

dır.

Kanıt. Bir önceki teoremin ispatından faydalanılırsa,

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in\mathcal{K}}\|A_t(\mathcal{T})x-x_0\| &= \sup_{x,y\in\mathcal{K}}\|A_t(\mathcal{T})x-A_t(\mathcal{T})y+A_t(\mathcal{T})y-x_0\|\\
&\le \sup_{x,y\in\mathcal{K}}\left(\|A_t(\mathcal{T})x-A_t(\mathcal{T})y\|+\|A_t(\mathcal{T})y-x_0\|\right)\\
&\le \sup_{x,y\in\mathcal{K}}\|A_t(\mathcal{T})x-A_t(\mathcal{T})y\|+\sup_{x,y\in\mathcal{K}}\|A_t(\mathcal{T})y-x_0\|\\
&= \sup_{x,y\in\mathcal{K}}\|A_t(\mathcal{T})x-A_t(\mathcal{T})y\|+\sup_{x,y\in\mathcal{K}}\|A_t(\mathcal{T})y-T_{x_0}y\|\\
&\le 2\delta(A_t(\mathcal{T}))\\
&\le \frac{2t_0}{t(1-\rho)}
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. O halde istenilen gösterilmiş olur. □

6.2 Pertürbasyon Sınırları

Bu alt bölümde C_0-Markov yarıgruplarının Cesáro ortalamalarının pertürbasyon sınırları, Dobrushin katsayısına bağlı olarak incelenecektir. Burada [22] makalesinin sonuçları ve ispatları derinlemesine verilmiştir .

Teorem 6.2.1. *$(X, X_+, \mathcal{K}, f)$ uzayı OBSB ve $\mathcal{T}=(T_t)_{t\ge 0}$, X üzerinde C_0-Markov yarıgrubu olsun. Eğer $\delta(T_{t_0})\le\rho$ olacak şekilde $\rho\in[0,1)$ ve $t_0\in\mathbb{N}$ var ise her $x\in\mathcal{K}$ için,*

$$\|A_t(\mathcal{T})x-x_0\|\le\left(\frac{t_0(1-\delta(T_{t_0})^{[t/t_0]-1})}{t(1-\delta(T_{t_0}))}+\delta(T_{t_0})^{[t/t_0]}\frac{t-t_0[t/t_0]}{t}\right)\|x-x_0\|$$

dır.

Kanıt. Teoremin koşulu dikkate alındığında yarıgrup düzgün asimtotik kararlıdır yani herhangi $x\in\mathcal{K}$ için $t\to\infty$ iken $T_tx\to x_0$ olur. Böylece

$$\begin{aligned}
\|A_t(\mathcal{T})x-x_0\| &= \left\|\left(\frac{1}{t}\int_0^t T_s ds\right)x-x_0\right\|\\
&\le \frac{1}{t}\int_0^t\|x_0-T_sx\|ds\\
&= \frac{1}{t}\int_0^t\|T_sx_0-T_sx\|ds\\
&\le \frac{1}{t}\int_0^t\|x_0-x\|\delta(T_s)ds\\
&= \frac{\|x-x_0\|}{t}\int_0^t\delta(T_s)ds
\end{aligned}$$

elde edilir. (5.3.8) eşitsizliği yukarıdaki ifade de yerine konulursa,

$$\|A_t(\mathcal{T})x-x_0\|\le\frac{\|x-x_0\|}{t}\left(\frac{t_0(1-\delta(T_{t_0})^{[t/t_0]-1})}{1-\delta(T_{t_0})}+\delta(T_{t_0})^{[t/t_0]}(t-t_0[t/t_0])\right)$$

istenilen eşitsizlik elde edilmiş olur. □

Teorem 6.2.2. *$(X, X_+, \mathcal{K}, f)$ uzayı OBSB ve X üzerinde sırasıyla A ve C üreteçlerinin ürettiği $\mathcal{S} = (S_t)_{t\geq 0}$ ile $\mathcal{T} = (T_t)_{t\geq 0}$ C_0-Markov yarıgrupları olsun ve $B := C - A$ sınırlı kabul edilsin. O halde her $x, z \in \mathcal{K}$ için,*

$$\|A_t(\mathcal{T})x - A_t(\mathcal{S})z\| \leq \left(\frac{t_0(1 - \delta(T_{t_0})^{[t/t_0]-1})}{1 - \delta(T_{t_0})} + \delta(T_{t_0})^{[t/t_0]}(t - t_0[t/t_0]) \right) \left(\|B\| + \frac{\|x - z\|}{t} \right)$$

dır.

Kanıt. (5.3.6) eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned}
\|A_t(\mathcal{T})x - A_t(\mathcal{S})z\| &\leq \frac{1}{t}\int_0^t \|T_u x - S_u z\| du \\
&\leq \frac{\|x - z\|}{t}\int_0^t \delta(T_s)ds + \frac{\|B\|}{t}\int_0^t \left(\int_0^s \delta(T_u)du\right) ds \\
&\leq \frac{\|x - z\|}{t}\int_0^t \delta(T_s)ds + \|B\|\int_0^t \delta(T_u)du \\
&= \left(\frac{\|x - z\|}{t} + \|B\|\right)\int_0^t \delta(T_u)du
\end{aligned}$$

elde edilir. Son ifade için de (5.3.8) eşitsizliğine başvurulursa,

$$\|A_t(\mathcal{T})x - A_t(\mathcal{S})z\| \leq \left(\frac{t_0(1 - \delta(T_{t_0})^{[t/t_0]-1})}{1 - \delta(T_{t_0})} + \delta(T_{t_0})^{[t/t_0]}(t - t_0[t/t_0]) \right) \left(\|B\| + \frac{\|x - z\|}{t} \right)$$

sonucuna ulaşılır. O halde istenilen gösterilmiş olur. □

Şimdi de $A_t(\mathcal{T})$ için Teorem 5.3.5'un benzer bir yapısını oluşturalım.

Teorem 6.2.3. *$(X, X_+, \mathcal{K}, f)$ uzayı OBSB ve $x_0 \in \mathcal{K}$ sabit noktasıyla birlikte $T \in \mathfrak{U}$ olacak şekilde $\mathcal{T} = (T_t)_{t\geq 0}$ bir C_0-Markov yarıgrubu olsun. Eğer bazı $t_0 > 0$ için $\delta(A_{t_0}) < 1$ ise $\|A_{t_0}(\mathcal{S}) - A_{t_0}(\mathcal{T})\| < 1 - \delta(A_{t_0}(\mathcal{T}))$ koşulunu sağlayan her $\mathcal{S} = (S_t)_{t\geq 0}$ C_0-Markov yarıgrubu düzgün ortalama ergodiktir ve*

$$\|x_0 - z_0\| \leq \frac{\|A_{t_0}(\mathcal{S}) - A_{t_0}(\mathcal{T})\|}{1 - \delta(A_{t_0}(\mathcal{T})) - \|A_{t_0}(\mathcal{S}) - A_{t_0}(\mathcal{T})\|} \tag{6.2.1}$$

olacak şekilde bir tek $z_0 \in \mathcal{K}$ sabit noktası vardır.

Kanıt. Teoremin ispatı için öncelikle $\mathcal{N}$ kümesi üzerinde $(I - A_{t_0}(\mathcal{S}))^{-1}$ operatörünün sınırlı olduğu gösterilmelidir (bakınız (2.3.1)).
Herhangi $x \in \mathcal{N}$ için,

$$\begin{aligned}
\|A_{t_0}(\mathcal{S})x\| &= \|A_{t_0}(\mathcal{S})x - A_{t_0}(\mathcal{T})x + A_{t_0}(\mathcal{T})x\| \\
&\leq \|A_{t_0}(\mathcal{S})x - A_{t_0}(\mathcal{T})x\| + \|A_{t_0}(\mathcal{T})x\| \\
&\leq \|A_{t_0}(\mathcal{S}) - A_{t_0}(\mathcal{T})\|\|x\| + \delta(A_{t_0}(\mathcal{T}))\|x\| \\
&= \left(\underbrace{\|A_{t_0}(\mathcal{S}) - A_{t_0}(\mathcal{T})\| + \delta(A_{t_0}(\mathcal{T}))}_{\rho} \right) \|x\| \\
&= \rho\|x\|
\end{aligned} \tag{6.2.2}$$

Böylece (6.2.2)'den her $n \in \mathbb{N}$ için $\|(A_{t_0}(\mathcal{S}))^n x\| \leq \rho^n \|x\|$ elde edilir. Dolayısıyla $\sum_n (A_{t_0}(\mathcal{S}))^n x$ serisi yakınsaktır. Ayrıca

$$(I - A_{t_0}(\mathcal{S}))^{-1} x = \sum_n A_{t_0}(\mathcal{S})^n x$$

eşitliğini yazmak mümkündür. Bu durumda her $x \in \mathcal{N}$ için,

$$\begin{aligned}
\|(I - A_{t_0}(\mathcal{S}))^{-1} x\| = \left\| \sum_n A_{t_0}(\mathcal{S})^n x \right\| &\leq \sum_n \|(A_{t_0}(\mathcal{S}))^n x\| \\
&= \sum_n \rho^n \|x\| \\
&= \frac{\|x\|}{1 - \rho}
\end{aligned}$$

olur. Bunun anlamı ise $(I - A_{t_0}(\mathcal{S}))^{-1}$ operatörünün $\mathcal{N}$ üzerinde sınırlı olduğudur. $z_0 \in \mathcal{K}$ elemanıyla birlikte $A_{t_0}(\mathcal{S}) z_0 = z_0$ eşitliği

$$(I - A_{t_0}(\mathcal{S}))(z_0 - x_0) = -(I - A_{t_0}(\mathcal{S})) x_0$$

eşitliğine denktir. $(I - A_{t_0}(\mathcal{S})) x_0 \in \mathcal{N}$ olduğu için son denklemin tek bir

$$z_0 = x_0 - (I - A_{t_0}(\mathcal{S}))^{-1}((I - A_{t_0}(\mathcal{S})) x_0)$$

çözümü vardır.
Özdeşlikten,

$$z_0 - x_0 = A_{t_0}(\mathcal{T})(z_0 - x_0) + (A_{t_0}(\mathcal{S}) - A_{t_0}(\mathcal{T}))(z_0 - x_0) + (A_{t_0}(\mathcal{S}) - A_{t_0}(\mathcal{T})) x_0$$

olur. $z_0 - x_0 \in \mathcal{N}$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}
\|z_0 - x_0\| &= \|A_{t_0}(\mathcal{T})(z_0 - x_0) + (A_{t_0}(\mathcal{S}) - A_{t_0}(\mathcal{T}))(z_0 - x_0) + (A_{t_0}(\mathcal{S}) - A_{t_0}(\mathcal{T})) x_0\| \\
&\leq \|A_{t_0}(\mathcal{T})(z_0 - x_0)\| + \|(A_{t_0}(\mathcal{S}) - A_{t_0}(\mathcal{T}))(z_0 - x_0)\| \\
&+ \|(A_{t_0}(\mathcal{S}) - A_{t_0}(\mathcal{T})) x_0\| \\
&\leq \delta(A_{t_0}(\mathcal{T})) \|z_0 - x_0\| + \|A_{t_0}(\mathcal{S}) - A_{t_0}(\mathcal{T})\| \|z_0 - x_0\| + \|A_{t_0}(\mathcal{S}) - A_{t_0}(\mathcal{T})\| \\
&= \left(\delta(A_{t_0}(\mathcal{T})) + \|A_{t_0}(\mathcal{S}) - A_{t_0}(\mathcal{T})\|\right) \|z_0 - x_0\| + \|A_{t_0}(\mathcal{S}) - A_{t_0}(\mathcal{T})\| \quad (6.2.3)
\end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitsizlikte gerekli düzenlemeler yapılırsa, (6.2.1) elde edilmiş olur. $A_{t_0}(\mathcal{S})(S_t z_0) = S_t(A_{t_0}(\mathcal{S}) z_0) = S_t z_0$ eşitliklerinden ve $A_{t_0}(\mathcal{S})$ için z_0 elemanının tekliğinden her $t \in \mathbb{R}_+$ için $S_t z_0 = z_0$ çıkarımı yapılabilir. Yani bu da $S \in \mathfrak{U}$ olduğu anlamına gelir. Dahası (6.2.2)'den $\delta(A_{t_0}(\mathcal{S})) < 1$ sonucuna varılır. Dolayısıyla Teorem 6.1.4'den $\mathcal{S}$ düzgün ortalama ergodiktir. O halde z_0, $\mathcal{S}$ yarıgrubunun tek bir sabit noktası olur (bakınız Açıklama 6.1.3). Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Sonuç 6.1.5 ve Teorem 6.2.3'den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 6.2.4. *Teorem 6.2.3'ün koşulları sağlansın. Her bir $x, z \in \mathcal{K}$ için,*

$$\begin{aligned}
\sup_{x,z \in \mathcal{K}} \|A_{t_0}(\mathcal{T}) x - A_{t_0}(\mathcal{S}) z\| \leq \frac{2t_0}{t(1 - \delta(A_{t_0}(\mathcal{T})))} &+ \frac{2t_0}{t(1 - \delta(A_{t_0}(\mathcal{T})) - \|A_{t_0}(\mathcal{S}) - A_{t_0}(\mathcal{T})\|)} \\
&+ \frac{\|A_{t_0}(\mathcal{S}) - A_{t_0}(\mathcal{T})\|}{1 - \delta(A_{t_0}) - \|A_{t_0}(\mathcal{S}) - A_{t_0}(\mathcal{T})\|}
\end{aligned}$$

dır.

Kanıt. Teorem 2.3.2-(ii)'den,

$$\begin{aligned}
|\delta(A_{t_0}(\mathcal{S})) - \delta(A_{t_0}(\mathcal{T}))| &\leq \delta(A_{t_0}(\mathcal{S}) - A_{t_0}(\mathcal{T})) \\
&\leq \|A_{t_0}(\mathcal{S}) - A_{t_0}(\mathcal{T})\|
\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Dolayısıyla buradan da

$$-\|A_{t_0}(\mathcal{S}) - A_{t_0}(\mathcal{T})\| \leq \delta(A_{t_0}(\mathcal{S})) - \delta(A_{t_0}(\mathcal{T})) \leq \|A_{t_0}(\mathcal{S}) - A_{t_0}(\mathcal{T})\|$$

olur. Yukarıdaki ifadenin ikinci eşitsizliğine bakılırsa,

$$\delta(A_{t_0}(\mathcal{S})) \leq \delta(A_{t_0}(\mathcal{T})) + \|A_{t_0}(\mathcal{S}) - A_{t_0}(\mathcal{T})\|$$

yazılabilir.
O halde elde edilen son eşitsizlik Sonuç 6.1.5 ve Teorem 6.2.3'ten,

$$\|A_{t_0}(\mathcal{T}) - A_{t_0}(\mathcal{S}) - x_0 + x_0 - z_0 + z_0\| \leq \|A_{t_0}(\mathcal{T}) - x_0\| + \|x_0 - z_0\| + \|A_{t_0}(\mathcal{S}) - z_0\|$$

olur. Eşitsizliğin her iki tarafının supremumu alınırsa,

$$\begin{aligned}
\sup_{x,z\in\mathcal{K}} \|A_{t_0}(\mathcal{T})x - A_{t_0}(\mathcal{S})z\| &\leq \sup_{x,z\in\mathcal{K}} (\|A_{t_0}(\mathcal{T})x - x_0\| + \|x_0 - z_0\| + \|A_{t_0}(\mathcal{S})z - z_0\|) \\
&\leq \sup_{x,z\in\mathcal{K}} \|A_{t_0}(\mathcal{T})x - x_0\| + \|x_0 - z_0\| + \sup_{x,z\in\mathcal{K}} \|A_{t_0}(\mathcal{S})z - z_0\| \\
&\leq \frac{2t_0}{t(1-\delta(A_{t_0}))} + \frac{\|A_{t_0}(\mathcal{S}) - A_{t_0}(\mathcal{T})\|}{1 - \delta(A_{t_0}(\mathcal{T})) - \|A_{t_0}(\mathcal{S}) - A_{t_0}(\mathcal{T})\|} \\
&+ \frac{2t_0}{t(1 - \delta(A_{t_0}(\mathcal{T})) - \|A_{t_0}(\mathcal{S}) - A_{t_0}(\mathcal{T})\|}
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Böylece istenilen gösterilmiş olur. □

7 LR-AĞLARININ ERGODİKLİĞİ

7.1 Tanımlar ve Örnekler

Tanım 7.1.1. X Banach uzayı olmak üzere $L(X)$, X uzayındaki bütün sınırlı lineer operatörlerin cebiri ve $I = I_x$ ise X uzayının birim operatörü olsun. $\Lambda = (\Lambda, \prec)$ yönlendirilmiş kümesi tarafından indislenen $\Theta = (T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subseteq L(X)$ ailesine *operatör ağı* denir. Eğer her $\lambda \in \Lambda$ için $T_\lambda x = x$ ise $x \in X$ vektörüne de Θ ağının *sabit noktası* denir.

Fix(Θ) ifadesi ile Θ ağının bütün sabit vektörlerinin kümesi gösterilecektir. Fix(Θ) kümesinin X uzayının kapalı bir alt uzayı olduğu açıktır. Verilecek olan bir sonraki kavram UM-sequence olarak [32] H.P.Lotz tarafından tanıtılmıştır. Bu kavramın rasgele ağlara genelleştirilmesi ise M-ağları tanımını kullanan F. R$\ddot{a}$biger [42] tarafından yapılmıştır. Fakat biz burada [12] makalesini temel alarak Lotz-R$\ddot{a}$biger ağları ismini kullanacağız.

Tanım 7.1.2. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanırsa $\Theta = (T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ağına Lotz-R$\ddot{a}$biger (LR) ağı denir.

(i) Θ düzgün sınırlıdır, $\sup_{\lambda\in\Lambda} \|T_\lambda\| < +\infty$

(ii) Her $\mu \in \Lambda$ ve her $x \in X$ için,

$$\lim_{\lambda\to\infty} \|T_\lambda(T_\mu - I)x\| = 0$$

(iii) Her $\mu \in \Lambda$ ve her $x \in X$ için,

$$\lim_{\lambda\to\infty} \|(T_\mu - I)T_\lambda x\| = 0$$

Ayrıca eğer düzgün operatör topolojisinde limit koşulları sağlanıyorsa, operatör ağına *düzgün LR-ağı* veya *ULR-ağı* denir.

Verilen $\Theta = (T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ LR-ağı için $\lambda_0 \notin \Lambda$ olacak şekilde $\hat{\Lambda} = \Lambda \cup \{\lambda_0\}$ kümesi göz önüne alındığında kısmi sıralama her $\lambda \in \Lambda$ için $\lambda_0 < \lambda$ bağıntısı yardımıyla genişletilebilir.
$T_{\lambda_0} = I_x$ alınsın. $\hat{\Theta} = (T_\lambda)_{\lambda\in\hat{\Lambda}}$ ağı açıkça birim operatörü içeren bir LR-ağıdır.
Böylece her LR-ağı genellikle bir birim operatör bulundurabilir. Ayrıca burada şuna dikkat edilmelidir ki, her LR-ağının eşleniğinin (adjoint) de LR-ağı olması gerekmez.
Şimdi LR-ağları için birkaç örnek verelim.

Örnek 7.1.3. *[12] X ve Y normlu vektör uzaylar olmak üzere $T : X \to Y$ sınırlı operatörü $\|T\| \leq 1$ koşulunu sağlasın. Bu operatöre özel olarak daralma (contraction) operatörü denir. Bu durumda*

$$A_n(T) := \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k$$

olarak tanımlı $\{A_n(T)\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi bir LR-dizisidir. Şöyle ki,

(i)

$$\begin{aligned}
\|A_n(T)\| &= \left\| \frac{1}{n}(I + T + T^2 + \cdots + T^{n-1}) \right\| \\
&= \frac{1}{n} \left\| (I + T + T^2 + \cdots + T^{n-1}) \right\| \\
&\leq \frac{1}{n} \left(\|I\| + \|T\| + \|T^2\| + \cdots + \|T^{n-1}\| \right) \\
&\leq \frac{1}{n} \left(\|I\| + \|T\| + \|T\|^2 + \cdots + \|T\|^{n-1} \right) \\
&\leq \frac{1}{n} n \\
&= 1
\end{aligned}$$

$\therefore \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \|A_n(T)\| \leq 1$ *olup* $\{A_n(T)\}_{n=1}^{\infty}$ *düzgün sınırlıdır.*

(ii) *Adım(I): Öncelikle,*

$$\begin{aligned}
A_n(T)(I - T^i)x &= \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k \right) (I - T^i)x \\
&= \frac{1}{n}(I + T + \cdots + T^{n-1})(I - T^i)x \\
&= \frac{1}{n} \left(I + \cdots + T^{n-1} - T^i - T^{i+1} - \cdots - T^{n+i-1} \right) x \\
&= \frac{1}{n} \left(I + \cdots + T^{i-1} - T^n - \cdots - T^{n+i-1} \right) x \\
&= \frac{1}{n} \left(x + \cdots + T^{i-1}x - T^n x - \cdots - T^{n+i-1}x \right)
\end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$A_n(T)(I - T^i)x = \frac{1}{n}(x + \cdots + T^{i-1}x - T^n x - \cdots - T^{n+i-1}x)$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafının önce normu daha sonra da n *için limiti alınırsa,*

$$\lim_{n \to \infty} \|A_n(T)(I - T^i)x\| \leq \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \|x\| 2i = 0$$

bulunur. Sonuç olarak,

$$\lim_{n \to \infty} \|A_n(T)(I - T^i)x\| = 0$$

olur.

Adım (II): Adım (I)'den faydalanılırsa her $m \in \mathbb{N}$ ve her $x \in X$ için,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \|A_n(T)(I - A_m(T))x\| &= \lim_{n\to\infty} \left\| A_n(T) \left(I - \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} T^i \right) x \right\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\| A_n(T) \left(\frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} (I - T^i) \right) x \right\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} A_n(T)(I - T^i)x \right\| \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \left\| A_n(T)(I - T^i)x \right\| \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir.
Bu durumda LR-dizisi olmanın ikinci koşulu da sağlanmış olur.
(iii)*Bir önceki şıkta takip edilen yol burada da izlenirse,*

$$\lim_{n\to\infty} \|(I - A_m(T))A_n(T)x\| = 0$$

elde edilir.

Örnek 7.1.4. *[12] $T \in L(X)$ olmak üzere $n^{-1}T^n \to 0$ (güçlü) koşulu sağlanacak şekilde $A_n(T) := \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k$ Cesàro ortalamasının düzgün sınırlı dizisi $\{A_n(T)\}_{n=1}^{\infty}$ bir LR-dizisidir. Şöyle ki,*
(i)

$$\begin{aligned}
\|A_n(T)x\| &= \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} T^k x \right\| \\
&= \frac{1}{n} \|(I + T + \cdots + T^{n-1})x\| \\
&\leq \frac{1}{n} \left(\|x\| + \|Tx\| + \cdots + \|T^{n-1}x\| \right) \\
&\leq \frac{1}{n} \left(\|x\| + \|Tx\| + \cdots + \|Tx\|^{n-1} \right) \\
&= \frac{1}{n} \left(\frac{\|x\| - \|Tx\|^n}{1 - \|Tx\|} \right) \\
&= \frac{1}{1 - \|Tx\|} \left(\frac{\|x\|}{n} - \frac{\|Tx\|^n}{n} \right)
\end{aligned}$$

dır. Buradan,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n(T)x\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{1 - \|Tx\|} \left(\frac{\|x\|}{n} - \frac{\|Tx\|^n}{n} \right) \leq K_x$$

olur. Her $x \in X$ için $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n(T)x\| \leq K_x$ sağlandığından Düzgün Sınırlılık İlkesi gereğince, $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n(T)\| \leq K < \infty$ yazılabilir. Böylece $\{A_n(T)\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi düzgün

sınırlıdır.
***(ii)** Her $m \in \mathbb{N}$ ve her $x \in X$ için,*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \|A_n(T)(A_m(T)-I)x\| &= \lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k \left(\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} T^k - I \right) x \right\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{n}\left(I+T+\cdots+T^{n-1}\right) \right. \\
&\qquad \left. \left(\frac{1}{m}(I+T+\cdots+T^{m-1}) - I \right) x \right\| \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left\| I+T+\cdots+T^{n-1} \right\| \\
&\qquad \left\| \left(\frac{1}{m}(I+T+\cdots+T^{m-1}) - I \right) x \right\| \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\|I\|+\|T\|+\cdots+\|T^{n-1}\| \right) \\
&\qquad \left\| \left(\frac{1}{m}(I+T+\cdots+T^{m-1}) - I \right) x \right\| \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\|I\|+\|T\|+\cdots+\|T\|^{n-1} \right) \\
&\qquad \left\| \left(\frac{1}{m}(I+T+\cdots+T^{m-1}) - I \right) x \right\| \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \|A_n(T)(A_m(T)-I)x\| = 0$$

***(iii)**Bir önceki şıkta takip edilen yol burada da izlenirse,*

$$\lim_{n\to\infty} \|(A_m(T)-I)A_n(T)x\| = 0$$

elde edilir.

Örnek 7.1.5. *[12] $\mathcal{T} = (T_t)_{t\geq 0}$, X Banach uzayı üzerinde bir yarıgrup olsun. Eğer bu yarıgrup düzgün sınırlı ise $A_t(\mathcal{T})$ Cesàro ortalaması bir LR-ağı olur. Şöyle ki, $x \in X$ için,*

$$\begin{aligned}
\|A_t(\mathcal{T})(I-T_u)x\| &= \left\| \frac{1}{t}\int_0^t T_s(I-T_u)x\,ds \right\| \\
&= \left\| \frac{1}{t}\left(\int_0^t T_s x\,ds - \int_0^t T_s T_u x\,ds \right) \right\| \\
&= \left\| \frac{1}{t}\int_0^t T_s x\,ds - \frac{1}{t}\int_u^{u+t} T_s x\,ds \right\| \\
&= \left\| \frac{1}{t}\int_0^u T_s x\,ds - \frac{1}{t}\int_t^{u+t} T_s x\,ds \right\| \\
&\leq \frac{1}{t}\int_0^u \|T_s x\|\,ds + \frac{1}{t}\int_t^{u+t} \|T_s x\|\,ds \\
&\leq \frac{1}{t}Mu + \frac{1}{t}Mu \\
&= \frac{2}{t}Mu
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $t \to \infty$ iken $\lim_{t\to\infty} \|A_t(\mathcal{T})(I - T_u)x\| = 0$ olur. Bu durumda her $t^{'}$ ve her $x \in X$ için,

$$\begin{aligned}
\|A_t(\mathcal{T})(A_{t'}(\mathcal{T}) - I)x\| &= \left\| A_t(\mathcal{T}) \left(\frac{1}{t'} \int_0^{t'} T_u x du - \frac{1}{t'} \int_0^{t'} x du \right) \right\| \\
&= \left\| A_t(\mathcal{T}) \frac{1}{t'} \int_0^{t'} (T_u - I) x du \right\| \\
&= \left\| \frac{1}{t'} \int_0^{t'} \left(A_t(\mathcal{T})(T_u - I)x \right) du \right\| \\
&\leq \frac{1}{t'} \int_0^{t'} \|A_t(\mathcal{T})(T_u - I)x\| du
\end{aligned}$$

bulunur. O halde

$$\lim_{t\to\infty} \|A_t(\mathcal{T})(A_{t'} - I)x\| = 0$$

elde edilir.
Benzer şekilde

$$\lim_{t\to\infty} \|(A_{t^{'}} - I)A_t x\| = 0$$

sonucuna ulaşılabilir. Böylece $\mathcal{T} = (T_t)_{t\geq 0}$ yarıgrubunun düzgün sınırlı olduğu durumlarda Cesàro ortalamasının LR-ağı olduğu görülür.

Örnek 7.1.6. *[12] $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ yönlendirilmiş bir küme ve $(R_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subseteq L(X)$, her $\lambda, \mu \in \Lambda$ için, $R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda) R_\lambda \circ R_\mu$ Hilbert özdeşliğini sağlayan pseudoresolvent olsun. Ayrıca (λR_λ) ağı da düzgün sınırlı olsun. Bu durumda,*
***(a)**eğer $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda = a \in \mathbb{C}$ ise $((\lambda - a)R_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ bir LR-ağıdır.*
***(b)**eğer $\lim_{\lambda\to\infty} |\lambda| = \infty$ ise $(I - \lambda R_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ bir LR-ağıdır.*
Şöyle ki,
(a)
***(i)** $\sup_{\lambda\in\Lambda}(\lambda - a)R_\lambda < +\infty$ (Kabülden)*
***(ii)** $T_\lambda = (\lambda - a)R_\lambda$ olarak alınırsa her $\mu \in \Lambda$ ve her $x \in X$ için,*

$$\begin{aligned}
\|T_\lambda(I - T_\mu)x\| &= \|(\lambda - a)R_\lambda(I - (\mu - a)R_\mu)x\| \\
&= \|(\lambda - a)R_\lambda x - (\lambda - a)(\mu - a)R_\lambda R_\mu x\| \\
&= \left\| (\lambda - a)R_\lambda x - (\lambda - a)(\mu - a) \left(\frac{R_\lambda - R_\mu}{\mu - \lambda} \right) x \right\| \\
&= \left\| (\lambda - a) \left(R_\lambda x - (\mu - a) \left(\frac{R_\lambda - R_\mu}{\mu - \lambda} \right) x \right) \right\|
\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan,

$$\lim_{\lambda\to\infty} \|T_\lambda(I - T_\mu)x\| = 0$$

olur.

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda\to\infty} \|T_\lambda(I-T_\mu)x\| &\le \lim_{\lambda\to\infty} \left\| \frac{(\lambda-a)(\mu-\lambda)-(\lambda-a)(\mu-a)}{\mu-\lambda} R_\lambda x \right\| \\
&= \lim_{\lambda\to\infty} \left\| \frac{(\lambda-a)}{\mu-\lambda}(a-\lambda) R_\lambda x \right\| \\
&= \lim_{\lambda\to\infty} \left\| \frac{(\lambda-a)^2}{\mu-\lambda} R_\lambda x \right\| \\
&\le \lim_{\lambda\to\infty} \frac{|\lambda-a|^2}{|\mu-\lambda|} \|R_\lambda x\| \\
&\le \lim_{\lambda\to\infty} \frac{|\lambda-a|^2}{|\mu-\lambda|} K\|x\| \quad ((\lambda R_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \textit{ düzgün sınırlı}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{\lambda\to\infty} \|T_\lambda(I-T_\mu)x\| = 0$$

***(iii)**Bir önceki şıkta takip edilen yol burada da izlenirse,*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \|(I-T_\mu)T_\lambda x\| = 0$$

elde edilir.

(b)

(i)

$$\begin{aligned}
\sup_{\lambda\in\Lambda} \|I-\lambda R_\lambda\| &\le \sup_{\lambda\in\Lambda}\|I\| + \sup_{\lambda\in\Lambda}\|\lambda R_\lambda\| \\
&\le I + K = M \qquad ((\lambda R_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \textit{ düzgün sınırlı})
\end{aligned}$$

$$\therefore \sup_{\lambda\in\Lambda} \|I-\lambda R_\lambda\| < +\infty$$

***(ii)** Her $\mu \in \Lambda$ ve her $x \in X$ için,*

$$\begin{aligned}
\|(I-\lambda R_\lambda)(I-(I-\mu R_\mu))x\| &= \|(I-\lambda R_\lambda)\mu R_\mu x\| \\
&= \|\mu R_\mu x - \lambda\mu R_\lambda R_\mu x\| \\
&= \left\| \mu R_\mu x - \lambda\mu \frac{R_\lambda - R_\mu}{\mu-\lambda} x \right\| \\
&= \left\| \mu R_\mu x - \lambda\mu \frac{R_\lambda x - R_\mu x}{\mu-\lambda} \right\| \\
&= \left\| \mu R_\mu x - \frac{\lambda\mu}{\mu-\lambda} R_\lambda x + \frac{\lambda\mu}{\mu-\lambda} R_\mu x \right\| \\
&= \left\| \frac{\mu^2-\mu\lambda+\mu\lambda}{\mu-\lambda} R_\mu x - \frac{\lambda\mu}{\mu-\lambda} R_\lambda x \right\| \\
&\le \left\| \frac{\mu^2}{\mu-\lambda} R_\mu x \right\| + \left\| \frac{\lambda\mu}{\mu-\lambda} R_\lambda x \right\|
\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan,

$$\lim_{\lambda\to\infty} \left\| \frac{\mu^2}{\mu-\lambda} R_\mu x \right\| = 0$$

olur.

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to\infty}\|(I-\lambda R_\lambda)\mu R_\mu x\| &\leq \lim_{\lambda\to\infty}\left\|\frac{\lambda\mu}{\mu-\lambda}R_\lambda x\right\| \\ &\leq \lim_{\lambda\to\infty}\frac{|\mu|}{|\mu-\lambda|}\|\lambda R_\lambda x\| \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{\lambda\to\infty}\|(I-\lambda R_\lambda)\mu R_\mu x\| = 0$$

(iii) *Bir önceki şıkta takip edilen yol burada da izlenirse,*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\|(I-T_\mu)T_\lambda x\| = 0$$

elde edilir.

Örnek 7.1.7. *[12, 29] X reel veya kompleks vektör uzayı olsun. X üzerindeki sürekli lineer operatörlerin bir semigrubu olan $\mathfrak{T}$, eğer aşağıdaki koşulları sağlıyorsa sağ $\mathfrak{T}-$ergodik ağ $(\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\})$ olarak adlandırılır. T sürekli lineer operatörleri göstermek üzere Λ yönlendirilmiş bir küme olsun.*

(E_1) *X'deki her bir A_λ bir lineer operatör,*

(E_2) *Her bir $x \in X$ ve $\forall\lambda$ için $A_\lambda x \in \overline{co}\mathfrak{T}x$,*

(E_3) *$A_\lambda x$ düzgün sınırlı,*

(E_4r) *Her $x \in X$ ve $T \in \mathfrak{T}$ için* $\lim_\lambda(A_\lambda Tx - A_\lambda x) = 0$

Eğer (E_4r) yerine,

(E_4l) *Her $x \in X$ ve $T \in \mathfrak{T}$ için* $\lim_\lambda(TA_\lambda Tx - A_\lambda x) = 0$

sağlanıyorsa $\mathfrak{T}$, sol-ergodik ağ olarak adlandırılır.
Ayrıca eğer $\mathfrak{T}$, hem sağ hem de sol $\mathfrak{T}$-ergodik ise kısaca $\mathfrak{T}$-ergodik olarak adlandırılır. Yukarıdaki özellikler dikkate alındığında $\mathfrak{T}$-ergodik ağının bir LR-ağı olduğu açıkça görülür.

LR-netlerine daha fazla örnek operatör semigrupları üzerine yapılan çalışmalarda görülebilir. Ayrıca daha fazla LR-ağı örneği için [10, 12, 13, 16, 29, 32, 42] referanslarından faydalanılabilir.

7.2 Güçlü Yakınsaklık Karakterizasyonu

Tanım 7.2.1. X Banach uzayı ve $\Theta = (T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ LR-ağı olsun. Eğer her $x \in X$ için en az bir tane $y \in X$ vardır, öyle ki $\lim_{\lambda\to\infty}\|T_\lambda x - y\| = 0$ oluyorsa Θ ağı *güçlü yakınsak*tır denir.

Bu tanım bazı kaynaklarda "her $x \in X$ için norm-limit $\|\cdot\|$-$\lim_{\lambda\to\infty} T_\lambda x$ var ise Θ güçlü yakınsaktır" şeklinde de gösterilmektedir.

Aşağıdaki teorem ispatsız ilk olarak [42] makalesinde ifade edilmiştir.

Teorem 7.2.2. *[12] $\Theta = (T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, X Banach uzayı üzerinde bir Lotz-Räbiger ağı olsun. Aşağıdaki koşullar birbirine denktir:*

(i) *Θ güçlü yakınsaktır.*

(ii) *Her $x \in X$ için $(T_\lambda x)_{\lambda\in\Lambda}$ ağı zayıf bir yığılma noktasına sahiptir.*

(iii) $X = \mathit{Fix}(\Theta) \oplus \overline{\mathit{span}\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(I - T_\lambda)X}$.

(iv) *Fix(Θ) uzayı Fix$(\Theta^*) = \{y \in X^* : T_\lambda^* y = y, \forall\lambda \in \Lambda\}$ uzayını ayırır.*

Eğer bu koşullardan herhangi biri sağlanıyorsa $(T_\lambda)_\lambda$ ağının güçlü limiti,

$$\mathit{Fix}(\Theta) = \{x \in X : T_\lambda x = x, \forall\lambda \in \Lambda\}$$

sabit uzayı üzerine bir izdüşümdür.

Kanıt.
$(i) \Rightarrow (ii)$
Θ ağı güçlü yakınsak olduğundan dolayı her x için $\lim_{\lambda\to\infty} T_\lambda x = Px$ olacak şekilde bir $Px \in \{T_\lambda x\}_{\lambda\in\Lambda}$ vardır. Ayrıca Θ güçlü yakınsak olduğundan dolayı Θ ağı zayıf yakınsaktır da denilebilir. Dolayısıyla her $f \in X'$ için,

$$\lim_{\lambda\to\infty} f(T_\lambda x) = f(Px)$$

olduğundan

$$w - \lim_{\lambda\to\infty} T_\lambda x = Px$$

olur. Dolayısıyla Px, $\{T_\lambda x\}_{\lambda\in\Lambda}$ ağının zayıf bir yığılma noktasıdır denir.
$(ii) \Rightarrow (i)$
$x \in X$ olmak üzere $y, (T_\lambda x)_{\lambda\in\Lambda}$ ağının zayıf yığılma noktası olsun. Mazur Teoremi'nden (zayıf yığılma noktası, ağın elemanlarının konveks kombinasyonlarının oluşturduğu kümenin içindedir.) $y \in co(T_\lambda x)$ olur. Herhangi bir $\mu \in \Lambda$ ve $\varepsilon > 0$ için y zayıf limit noktası olduğundan

$$| < T_\mu y, h > - < y, h > | \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

yazılabilir. Ayrıca (T_λ) LR-ağı olduğundan

$$\begin{aligned}
| < T_\mu y, h > - < T_\mu T_\xi x, h > | &\leq \frac{\varepsilon}{3} \\
| < T_\mu T_\xi x, h > - < T_\xi x, h > | &\leq \frac{\varepsilon}{3} \\
| < T_\xi x, h > - < y, h > | &\leq \frac{\varepsilon}{3}
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri vardır. Buradan her $h \in X'$ ve her $\mu \in \Lambda$ için,

$$| < T_\mu y, h > - < y, h > | \leq \varepsilon$$

elde edildiğinden $y \in Fix(\Theta)$ söylenebilir.
Şimdi $(T_\lambda x)_{\lambda\in\Lambda}$ ağının y noktasında norm yakınsak olduğunu gösterelim. Yine Mazur Teoremi'nden bir tane $S \in co(T_\lambda)$ operatörü bulunur öyle ki

$$\|y - Sx\| \leq \varepsilon$$

koşulu sağlanır. LR-ağının özelliğinden $\lim_{\lambda\to\infty}\|T_\lambda(S-I)x\|=0$ ve böylece

$$\begin{aligned}\|y-T_\lambda x\| &\le \|y-T_\lambda Sx\|+\|T_\lambda Sx-T_\lambda x\|\\ &\le \|T_\lambda y-T_\lambda Sx\|+\|T_\lambda Sx-T_\lambda x\|\\ &\le \|T_\lambda\|\|y-Sx\|+\|T_\lambda(S-I)x\|\\ &\le M\varepsilon+\varepsilon<\varepsilon^{'}\end{aligned}$$

elde edilir.
$(ii)\Rightarrow(iii)$
Herhangi $x\in X$ alınsın. $(T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, LR-ağı ve bu ağ zayıf bir yığılma noktasına sahip olduğu için her $\mu\in\Lambda$ için,

$$T_\mu(Px)-Px=(T_\mu-I)\lim_{\lambda\to\infty}T_\lambda x=\lim_{\lambda\to\infty}(T_\mu-I)T_\lambda x=0 \qquad (7.2.1)$$

yazılabilir. Böylece $Px\in$ Fix(Θ) ve $P^2x=Px$ olur. Bu durumda herhangi x için P, Fix(Θ) üzerinde sürekli bir izdüşümdür denir. O halde

$$\begin{aligned}X&=\text{kerP}\oplus\text{ranP}\qquad(\text{ranP}=P(X))\\ &=\text{kerP}\oplus\text{Fix}(\Theta)\end{aligned}$$

yazılabilir. Dolayısıyla,

$$X=\text{Fix}(\Theta)\oplus\overline{\text{span}\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(I-T_\lambda)X}$$

olduğunu göstermek için,

$$\overline{\text{span}\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(I-T_\lambda)X}=\text{kerP}$$

eşitliğinin sağlandığını göstermek yeterli olacaktır. (7.2.1)'den,

$$\overline{\text{span}\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(I-T_\lambda)X}\subseteq\text{kerP} \qquad (7.2.2)$$

olur. Daha açık bir şekilde ifade edilecek olursa, $x\in\overline{\text{span}\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(I-T_\lambda)X}$ alalım. Bu durumda, en az bir tane $z\in X$ ve en az bir tane $\lambda\in\Lambda$ için $x=(I-T_\lambda)z$ yazılabilir. O halde

$$Px=P(I-T_\lambda)z=Pz-PT_\lambda z=Pz-T_\lambda P_z=0$$

olur. Dolayısıyla $x\in$ ker$P$ dir. Burada,

$$T_\mu(Px)-Px=0\ \text{ ve }\ P(T_\mu-I)x=0$$

eşitliklerinden dolayı $T_\mu Px=PT_\mu x$ değişme özelliğinin sağlandığına dikkat edilmelidir. Ayrıca bir konuya daha değinilmelidir ki; o da $\overline{\bigcup(I-T_\lambda)X}$ uzayı lineer olduğundan dolayı $\overline{\text{span}\bigcup(I-T_\lambda)X}=\overline{\bigcup(I-T_\lambda)X}$ olduğudur.
O halde şimdi $x\in$ ker$P$ alınsın. Bu durumda

$$\lim_{\lambda\to\infty}T_\lambda x=Px=0$$

ve

$$x = \lim_{\lambda\to\infty}(I - T_\lambda)x \in \text{span}\bigcup(I - T_\lambda)x \tag{7.2.3}$$

olur. (7.2.2) ve (7.2.3) dikkate alındığında,

$$\ker P = \overline{\text{span}\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(I - T_\lambda)X}$$

elde edilir. Böylece

$$X = \text{Fix}(\Theta) \oplus \overline{\text{span}\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(I - T_\lambda)X}$$

sonucuna varılır.
$(iii) \Rightarrow (i)$
Kabul edelim ki,

$$X = \text{Fix}(\Theta) + Y$$

olsun.
Θ ağının güçlü yakınsak olduğunu söyleyebilmek için $\|\cdot\| - \lim_{\lambda\to\infty} T_\lambda x (x \in X)$ varlığını göstermek gerekmektedir.
$x \in X$ için $x = x_1 + x_2$ ve $T_\lambda x_1 = x_1$ yazılabilir. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda\to\infty} T_\lambda &= \lim_{\lambda\to\infty} T_\lambda(x_1 + x_2) \\
&= \lim_{\lambda\to\infty}(T_\lambda x_1 + T_\lambda x_2) \\
&= \lim_{\lambda\to\infty} T_\lambda x_1 + \lim_{\lambda\to\infty} T_\lambda x_2 \\
&= x_1 + \lim_{\lambda\to\infty} T_\lambda x_2
\end{aligned}$$

olur. Burada $x_2 \in Y$ için $\lim_{\lambda\to\infty}\|T_\lambda x_2\|$ varlığını göstermek ispatı tamamlar.
$x_2 \in Y = \overline{\text{span}\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(I - T_\lambda)X}$ için en az bir tane $z \in X$ ve en az bir tane $\mu \in \Lambda$ vardır, öyle ki $x_2 = (I - T_\mu)z$ yazılabilir. O halde,

$$\lim_{\lambda\to\infty}\|T_\lambda x_2\| = \lim_{\lambda\to\infty}\|T_\lambda(I - T_\mu)z\| = 0 \qquad ((T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \text{ LR-ağı})$$

olur. Bu durumda $\lim_{\lambda\to\infty}\|T_\lambda x_2\|$ olduğundan $\|\cdot\| - \lim_{\lambda\to\infty}\|T_\lambda x\|$ mevcuttur. Dolayısıyla Θ güçlü süreklidir.
$(iii) \Rightarrow (iv)$
Herhangi $h \in \text{Fix}(\Theta^*)$ fonksiyoneli alınsın ve $h \neq 0$ olsun. Bu durumda $x \in X$ için,

$$\begin{aligned}
h(Px) &= h(\lim_{\lambda\to\infty} T_\lambda x) \\
&= \lim_{\lambda\to\infty} h(T_\lambda x) \\
&= \lim_{\lambda\to\infty} T_\lambda^* h(x) \\
&= \lim_{\lambda\to\infty} h(x) \\
&= h(x)
\end{aligned}$$

elde edilir. $Px \in \text{Fix}(\Theta)$ olduğundan bir tane $\text{Fix}(\Theta)$ elemanı bulunmuştur. Öyle ki, $h(Px) \neq 0$ dır. Bu da bize $\text{Fix}(\Theta)$ uzayının $\text{Fix}(\Theta^*)$ uzayını ayırdığını söyler.

$(iv) \Rightarrow (i)$
Θ ağının güçlü yakınsak olduğunu göstermek için,

$$X = \text{Fix}(\Theta) \oplus \overline{\text{span} \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (I - T_\lambda)X}$$

ifadesini göstermek yeterlidir. O halde kabul edelim ki, bu ifade sağlanmasın. Bu durumda Hahn-Banach Teoremi'nden burada

$$x \in \text{Fix}(\Theta) \oplus \overline{\text{span} \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (I - T_\lambda)X}$$

için $h(x) \neq 0$ olacak şekilde $h \in X^*$ $(h \neq 0)$ elemanı vardır. Böylece $h \in \text{Fix}(\Theta^*)$ olduğunu gösterirsek ispat tamamlanmış olur.

$$(y - T_\mu y) \in \overline{\text{span} \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (I - T_\lambda)X} \qquad (\forall y \in X, \forall \mu \in \Lambda)$$

olduğu için,

$$h(y) = h(T_\mu y) = T_\mu^* h(y) = 0 \qquad (\forall y \in X, \forall \mu \in \Lambda)$$

bulunur. Bu durumda her $\mu \in \Lambda$ için $T_\mu^* h = h$ ve dolayısıyla $h \in \text{Fix}(\Theta^*)$ elde edilir. O halde her $x \in \text{Fix}(\Theta)$ için $h(x) = 0$ olacak şekilde Θ^* ağının sıfırdan farklı sabit bir h noktası vardır. Fakat bu durum $\text{Fix}(\Theta)$ uzayının $\text{Fix}(\Theta^*)$ uzayını bölmesi ile çelişir. Dolayısıyla sonuç olarak Θ güçlü süreklidir. □

7.3 Dobrushin Ergodiklik Katsayısı ve ULR-Ağları

Bu bölümde OBSB üzerinde tanımlanan Markov ULR-ağlarının davranışlarını çalışabilmek için Dobrushin ergodiklik katsayısı üzerinde durulacaktır. Verilen sonuçlar [42] makalesinden olup, daha derin incelemesi için bu makaleden yararlanılabilir.

Tanım 7.3.1. $\Theta = (T_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, OBSB olan X üzerinde bir Markov ULR-ağı olsun. $\Theta = (T_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağına,

(i) eğer

$$\lim_{\lambda \to \infty} \sup_{x,y \in \mathcal{K}} \|T_\lambda x - T_\lambda y\| = 0$$

ise *zayıf ergodik*

(ii)

$$\lim_{\lambda \to \infty} \|T_\lambda - T_{y_0}\| = 0$$

olacak şekilde $y_0 \in \mathcal{K}$ varsa *düzgün ergodik* denir.

Önerme 7.3.2. *X OBSB ve $\Theta = (T_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ Markov ULR-ağı olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:*

(i) $\delta(T_{\lambda_0}^{n_0}) < 1$ *olacak şekilde $\lambda_0 \in \Lambda$ ve $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır.*

(ii) $\delta(A_{n_0}(T_{\lambda_0})) < 1$ *olacak şekilde $\lambda_0 \in \Lambda$ ve $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır.*

(iii) $\lim_{\lambda \to \infty} \delta(T_\lambda) = 0$

(iv) Θ *zayıf ergodiktir.*

Kanıt.
$(i) \Rightarrow (ii)$ δ tanımı ve Teorem 2.3.2-(i)'den,

$$\begin{aligned}
\delta(A_{n_0}(T_{\lambda_0})) &= \delta\left(\frac{1}{n_0}\sum_{k=1}^{n_0} T_{\lambda_0}^k\right) \\
&= \delta\left(\frac{1}{n_0}\left(\sum_{k=1}^{n_0-1} T_{\lambda_0}^k + T_{\lambda_0}^{n_0}\right)\right) \\
&= \frac{1}{n_0}\delta\left(\sum_{k=1}^{n_0-1} T_{\lambda_0}^k + T_{\lambda_0}^{n_0}\right) \\
&\leq \frac{1}{n_0}\left(\sum_{k=1}^{n_0-1} \delta(T_{\lambda_0}^k) + \delta(T_{\lambda_0}^{n_0})\right) \\
&\leq \frac{1}{n_0}\left(n_0 - 1 + \delta({T_{\lambda_0}}^{n_0})\right) \\
&< 1
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece istenilen gösterilmiş olur.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ $\rho := \delta(A_{n_0}(T_{\lambda_0})) < 1$ olacak şekilde $\lambda_0 \in \Lambda$ ve $n_0 \in \mathbb{N}$ var olsun. ULR-ağının tanımından her bir $k \in \mathbb{N}$ ve $\mu \in \Lambda$ için,

$$\lambda \to \infty \text{ iken } \|T_\lambda(I - A_{n_0}(T_{\lambda_0}))\| \to 0$$

elde edilir.
Dolayısıyla Teorem 2.3.2-(ii)'den,

$$\lim_{\lambda\to\infty} \delta(T_\lambda(I - A_{n_0}(T_{\lambda_0}))) \leq \lim_{\lambda\to\infty} \|T_\lambda(I - A_{n_0}(T_{\lambda_0}))\| = 0 \tag{7.3.1}$$

olur. Diğer yandan tekrar Teorem 2.3.2-(ii) kullanılırsa,

$$|\delta(T_\lambda A_{n_0}(T_{\lambda_0})) - \delta(T_\lambda)| \leq \delta(T_\lambda(I - A_{n_0}(T_{\lambda_0})))$$

bulunur. Bu eşitsizlik Teorem 2.3.2-(iii) ile birlikte dikkate alındığında,

$$\begin{aligned}
\delta(T_\lambda(I - A_{n_0}(T_{\lambda_0}))) &\geq \delta(T_\lambda) - \delta(T_\lambda A_{n_0}(T_{\lambda_0})) \\
&\geq \delta(T_\lambda) - \delta(T_\lambda)\delta(A_{n_0}(T_{\lambda_0})) \\
&\geq \delta(T_\lambda)(1 - \delta(A_{n_0}(T_{\lambda_0}))) \\
&\geq (1 - \rho)\delta(T_\lambda)
\end{aligned} \tag{7.3.2}$$

olur. Böylece (7.3.1) ve (7.3.2)'den

$$\lim_{n\to\infty} \delta(T_\lambda) = 0$$

elde edilir.
$(iii) \Rightarrow (i)$ Teorem 2.3.2-(i) ve $\lim_{\lambda\to\infty} \delta(T_\lambda) = 0$ olduğu dikkate alınırsa,

$$\forall \rho, \exists \lambda_0 : \forall \lambda \geq \lambda_0 \text{ için } 0 \leq \delta(T_\lambda) \leq \rho$$

olur. Dolayısıyla $\delta(T_\lambda) \leq \rho$ olacak şekilde $\lambda_0 \in \Lambda$ ve $0 \leq \rho < 1$ vardır. Ayrıca

$$\delta(T_\lambda^{n_0}) \leq \underbrace{\delta(T_\lambda)...\delta(T_\lambda)}_{n_0 \ \textit{tane}}$$

olduğu için $\delta(T_\lambda^{n_0}) < 1$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır denilebilir.
$(iii) \Rightarrow (iv)$ Teorem 2.3.2-(v) kullanılırsa,

$$\delta(T_\lambda) = \frac{1}{2} \sup_{x,y \in \mathcal{K}} \|T_\lambda x - T_\lambda y\|$$

yazılabilir. Eşitliğin her iki tarafının $\lambda \to \infty$ için limiti alınırsa,

$$\lim_{\lambda \to \infty} \delta(T_\lambda) = \lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{2} \sup_{x,y \in \mathcal{K}} \|T_\lambda x - T_\lambda y\|$$

elde edilir. Buradan da,

$$\lim_{\lambda \to \infty} \sup_{x,y \in \mathcal{K}} \|T_\lambda x - T_\lambda y\| = 0$$

olduğu görülür. Dolayısıyla $(T_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ Markov ULR-ağı zayıf ergodiktir.
$(iv) \Rightarrow (iii)$ Yukarıdaki ispat yöntemi buradaki sonuca ulaşmak için de kullanılabilir. $\square$

$\mathfrak{T}$ sembolü ile $\mathcal{K}$ bazına ait aşikar olmayan sabit noktaları bulunduran X OBSB uzayı üzerindeki bütün $\Theta = (T_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ Markov ULR-ağlarının kümesi gösterilecektir.

Sonuç 7.3.3. *$(X, X_+, \mathcal{K}, f)$ uzayı OBSB ve $\Theta = (T_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \mathfrak{T}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:*

(i) *Θ zayıf ergodiktir.*

(ii) *$\delta(T_{\lambda_0}^{n_0}) < 1$ olacak şekilde $\lambda_0 \in \Lambda$ ve $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır.*

(iii) *Θ düzgün ergodiktir.*

Kanıt.
$(i) \Rightarrow (ii)$ İfadelerinin ispatı Önerme 7.3.2'nin ispatında olduğu gibidir.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ ULR-ağı olma koşulundan dolayı her ε için her $\lambda, \mu \geq \lambda_0$ olacak şekilde bir $\lambda_0 \in \Lambda$ vardır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \|T_\lambda - T_\mu\| &= \|T_\lambda - T_\lambda T_\mu + T_\lambda T_\mu - T_\mu\| \\ &\leq \|T_\lambda (I - T_\mu)\| + \|(T_\lambda - I) T_\mu\| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

olur. Böylece (T_λ)'nın Cauchy olduğu gözlenir. Ayrıca $\lambda \to \infty$ iken $\|T_\lambda - P\| \to 0$ olur. Yani (T_λ), P'ye yakınsar. O halde buradan,

$$|\delta(T_\lambda) - \delta(P)| \leq \|T_\lambda - P\|$$

eşitsizliği dikkate alındığında $\delta(T_\lambda) \to \delta(P)$ olur. Önerme 7.3.2'den dolayı $\lim_{\lambda \to \infty} \delta(T_\lambda) = 0$ dır. Dolayısıyla $\delta(P) = 0$ olur. Bu durumda $P = T_{y_0}$ olacak şekilde bir $y_0 \in \mathcal{K}$ vardır. Sonuç olarak $\Theta = (T_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ düzgün ergodiktir.
$(iii) \Rightarrow (i)$ $\Theta = (T_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ düzgün ergodik olduğundan dolayı

$$\lim_{\lambda \to \infty} \|T_\lambda - T_{y_0}\| = 0$$

olacak şekilde bir $y_0 \in \mathcal{K}$ vardır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}\|T_\lambda x - T_\lambda y\| &= \|T_\lambda x - T_{y_0} + T_{y_0} - T_\lambda y\| \\ &\leq \|T_\lambda x - T_{y_0}\| + \|T_\lambda y - T_{y_0}\|\end{aligned}$$

ve buradan da

$$\begin{aligned}\lim \sup_{x,y\in\mathcal{K}} \|T_\lambda x - T_\lambda y\| &\leq \lim \sup_{x,y\in\mathcal{K}} \|T_\lambda x - T_{y_0}\| + \lim \sup_{x,y\in\mathcal{K}} \|T_\lambda y - T_{y_0}\| \\ &= 0\end{aligned}$$

elde edilir. O halde Θ ağının zayıf ergodik olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur. $\square$

8 SONUÇ ve ÖNERİLER

Hille-Yoshida veya Lumer-Phillips teoremlerinin somut bir probleme yönelik koşullarının doğrulanması, genellikle oldukça zor bir görevdir. Diğer yandan birçok modelleme de operatörlerin daha basit özelliklere sahip operatörlerin kombinasyonu olarak yazılabildiğini görürüz. Böylece incelenmesi daha kolay olan operatörlerin özelliklerini ele alarak genel operatörün bazı özelliklerine varabiliriz. Kısaca problem bir C_0-yarıgrubunun üreteci olan $(A, D(A))$ operatörü ve diğer bir $(B, D(B))$ operatörü ele alındığında hangi koşullar altında $A + B$ operatörü yeni bir C_0-yarıgrubu üretir sorusudur. Cebirsel olarak bu toplam operatörünü tanımlamak kolay iken topolojik özellikleri sağlatmak oldukça sıkıntılı olabilir. Bunun için pertürbasyon teorisi geliştirilmiştir. En uygunu ve sıklıkla karşılaşılanı sınırlı pertürbasyondur. Bunun için alınacak olan B operatörü sınırlı bir operatör olmalıdır. Tez boyunca C_0-Markov yarıgruplarının ve Cesaro ortalamalarının pertürbasyon sınırları ele alınırken sınırlı pertürbasyon düşünülmüş ve incelemeler bu duruma göre yapılmıştır. Bunun dışında iki farklı pertürbasyon teorisi de düşünülebilir. Bunlardan ilki Miyadera diğeri ise dissipative (sömüren) operatörlerin pertürbasyon teorisidir.

Dissipative pertürbasyon teorisinde A ve B, $D(A) \subseteq D(B)$ koşulunu sağlayan iki lineer operatör ve her $0 \leq t \leq 1$ için $A + tB$ dissipative operatör olsun. Eğer her $x \in D(A)$ ve $0 \leq a < 1$ için

$$\|Bx\| \leq a \|Ax\| + b \|x\|$$

koşulu var ve bazı $t_0 \in [0, 1]$ için $(A + t_0 B, D(A))$ operatörü dissipative ise her $t \in [0, 1]$ için $A + tB$ operatörü bir daralma yarıgrubu üretir.

Miyadera pertürbasyon teorisinde ise B operatörü A-sınırlı yani $D(A)$ üzerinde tanımlı graf normuna göre sınırlı bir operatör olsun. Ayrıca eğer $0 < \alpha < \infty$ ve $0 \leq \gamma < 1$ sayıları ve (T_t) yarıgrubu A tarafından üretilmiş olmak üzere her $x \in D(A)$ için,

$$\int_0^\alpha \|BT_t x\| \, dt \leq \gamma \|x\|$$

koşulu sağlanıyor ise B operatörü A operatörünün Miyadera pertürbasyonudur denir. Böylelikle $(A + B, D(A))$ operatörü bir C_0-yarıgrubunu üretir.

Bu tezin devamı olarak, bu iki farklı pertürbasyon teorisi kullanılarak C_0-Markov yarıgrupları için pertürbasyon sınırlarının belirlenebileceği düşünülmüş ve bu konuda çalışılmaya başlanmıştır.

Kaynaklar

[1] S.Albeverio, R.Høegh-Krohn, Frobenius theory for positive maps of von Neumann algebras, *Comm. Math. Phys.*, 83–94, 64, **1978**.

[2] E.M. Alfsen, *Compact Convex Sets and Boundary Integrals*, Springer-Verlag, Berlin, **1971**.

[3] C.D. Aliprantis, O. Burkinshaw, *Positive operators*, Reprint of the 1985 original, Springer, Dordrecht, **2006**.

[4] C.D. Aliprantis, R. Tourky, *Cones and duality*, Graduate Studies in Mathematics, 84, American Mathematical Society, Providence, RI, **2007**.

[5] L. Arlotti, B. Lods, M. Mokhtar-Kharroubi, On perturbed stochastic semigroups on abstract state spaces, *Z. Anal. Anwend.*, 457–495, 30, **2011**.

[6] W. Bartoszek, Asymptotic properties of iterates of stochastic operators on (AL) Banach lattices, *Anal. Polon. Math.*, 165-173, 52, **1990**.

[7] W. Bartoszek W, N. Erkursun, On Quasi Compact Markov Nets, *E*rgodic Theory Dynam. Systems, no. 4, 1081 – 1094, 31, **2011**.

[8] J. E. Cohen, Y. Iwasa, G. Rautu, M.B. Ruskai, E. Seneta, G. Zbaganu, Relative entropy under mappings by stochastic matrices, *Linear Algebra Appl.*, 211-235, 179, **1993**.

[9] R. L. Dobrushin, Central limit theorem for nonstationary Markov chains. I, II, *Theor. Probab. Appl.*, 65–80, 329–383, 1, **1956**.

[10] E.Yu. Emel'yanov, Asymptotic behavior of Lotz - R$\ddot{a}$biger nets and of martingale nets, *Sib. Math. J.*, 810–817, 51, **2010**.

[11] E. Yu. Emelyanov, Non-spectral asymptotic analysis of one-parameter operator semigroups. Operator Theory: Advances and Applications, 173. Birkh$\ddot{a}$user Verlag, Basel, **2007**. viii+174 pp. ISBN: 978-3-7643-8095-3; 3-7643-8095-0.

[12] E.Yu. Emel'yanov, N. Erkursun, Generalization of Eberlein's and Sine's Ergodic Theorems to LR-nets, *Vladikavkaz. Mat. Zh.*, no.3, 22–26, 9, **2007**.

[13] E. Yu. Emel'yanov, N. Erkursun, Lotz-Raebiger's nets of Markov operators in L1-spaces, *J*. Math. Anal. Appl., no. 2, 777 – 783, 371, **2010**.

[14] E. Yu. Emel'yanov, M.P.H. Wolff, Positive operators on Banach spaces ordered by strongly normal cones, *Positivity*, 3–22, 7, **2003**.

[15] E. Yu. Emel'yanov, M.P.H. Wolff, Asymptotic behavior of Markov semigroups on non-commutative L_1-spaces, In book: *Quantum Probability and Infinite Dimensional Analysis* (Burg, **2001**), 77–83, QP–PQ: Quantum Probab. White Noise Anal., 15,World Sci. Publishing, River Edge, NJ, **2003**.

[16] E.Yu. Emel'yanov, R. Zaharopol, Convergence of Lotz-R$\ddot{a}$biger Nets of Operators on Spaces of Continuous Functions. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, 1–26, 55, **2010**.

[17] N. Erkursun Ozcan, Asymptotic behavior of operator sequences on KB-spaces, (kabul edildi, Positivity) DOI: 10.1007/s11117-017-0545-2.

[18] N. Erkursun Ozcan, Stability and lower-bound function on KB-spaces, *Communications Faculty of Sciences University of Ankara - Series A1: Mathematics and Statistics*, no.1, 260–265, 67, **2018**.

[19] N. Erkursun Ozcan, F. Mukhamedov, Uniform ergodicities and perturbation bounds of Markov chains on base norm spaces (kabul edildi, Quaestiones Mathematicae)

[20] N. Erkursun Ozcan, F. Mukhamedov, Uniform ergodicities and perturbation bounds of Markov chains on ordered Banach spaces, *I*OP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series no.1, 12–15, 819, **2017**.

[21] N. Erkursun Ozcan, F. Mukhamedov, Uniform ergodicity of Lotz - Rabiger's nets of Markov operators on abstract state spaces, (gönderildi).

[22] N. Erkursun Ozcan, F. Mukhamedov, Perturbation bounds of C_0- Markov semigroups on ordered Banach spaces. (gönderildi).

[23] K. J. Engel, R. Nagel, *A Short Course on Operator Semigroups*, Springer, New York, **2006**.

[24] F. Fagnola, R. Rebolledo, On the existence of stationary states for quantum dyanamical semigroups, *Jour. Math. Phys.*, 1296–1308, 42, **2001**.

[25] S. Gaubert, Z. Qu, Dobrushin's ergodicity coefficient for Markov operators on cones and beyond, *Integ. Eqs. Operator Theor.*, 127–150, 81, **2014**.

[26] P.R. Halmos, *Lectures on Ergodic Theory*, Chelsea, New York, **1960**.

[27] I.C.F. Ipsen, T.M. Salee, Ergodicity coefficients defined by vector norms, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 153–200, 32, **2011**.

[28] N.V. Kartashov, Inequalities in theorems of ergodicity and stability for Markov chains with common Phase space, I, *Probab. Theor. Appl.*, 247–259, 30, **1986**.

[29] U. Krengel, *Ergodic Theorems*, Walter de Gruyter, Berlin-New York, **1985**.

[30] A. Lucia, T. S. Cubitt, S. Michalakis, D. Perez-Garcia, Rapid mixing and stability of quantum dissipative systems, *Phys. Rev. A* 91, **2015**, 040302.

[31] W. A. J. Luxemburg, A. C. Zaanen, *Riesz spaces*. Vol. I, North-Holland Mathematical Library, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London; American Elsevier Publishing Co., New York, **1971**.

[32] H.P. Lotz, Tauberian theorems for operators on L_∞ and similar spaces. In book: *Functional Analysis: Surveys and Recent Results, III* (Paderborn, **1983**), 117–133, North-Holland Math. Stud., 90, North-Holland, Amsterdam, **1984**.

[33] A. Mitrophanov, Sensitivity and convergence of uniform ergodic Markov chains, *J. Appl. Probab.*, 1003–1014, 42, **2005**.

[34] A. Mitrofanov, Stability estimates for continuous-time finite homogeneous Markov chains, *Theory Probab. Appl.* 50 (**2006**), no. 2, 319–326.

[35] A. Mitrophanov, Ergodicity coefficient and perturbation bounds for continuous-time Markov chains. *Math. Inequal. Appl.* 8 (**2005**), no. 1, 159–168.

[36] A. Mitrophanov, Stability and exponential convergence of continuous-time Markov chains, *J. Appl. Probab.* 40, **2003**, no. 4, 970–979.

[37] F. Mukhamedov, Dobrushin ergodicity coefficient and ergodicity of noncommutative Markov chains, *J. Math. Anal. Appl.*, 364–373, 408, **2013**.

[38] F. Mukhamedov, Ergodic properties of nonhomogeneous Markov chains defined on ordered Banach spaces with a base, *Acta. Math. Hungar.*, 294–323, 147, **2015**.

[39] F. Mukhamedov, Strong and weak ergodicity of nonhomogeneous Markov chains defined on ordered Banach spaces with a base, *Positivity*, 135–153, 20, **2016**.

[40] C. Niculescu, A. Str*ö*h, L. Zsid*ó*, Noncommutative extensions of classical and multiple recurrence theorems, *J. Operator Theory*, 3–52, 50, **2003**.

[41] F. Pastawski, L. Clemente, J. I. Cirac, Quantum memories based on engineered dissipation, *Phys. Rev. A* 83, **2011**, 012304.

[42] F. R*ä*biger, Stability and ergodicity of dominated semigroups: II. The strong case, *Math. Ann.*, 103–116, 297, **1993**.

[43] D. Reeb, M. J. Kastoryano, M. M. Wolf, Hilbert's projective metric in quantum information theory, *J. Math. Phys.*, 082201, 52, **2011**.

[44] T.A. Sarymsakov, N.P.Zimakov, Ergodic principle for Markov semi-groups in ordered normal spaces with basis, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 554–558, 289, **1986**.

[45] E. Seneta, *Non-negative Matrices and Markov Chains*, Springer, Berlin, **2006**.

[46] O. Szehr, M.M. Wolf, Perturbation bounds for quantum Markov processes and their fixed points, *J. Math. Phys.*, 032203, 54, **2013**.

ÖZGEÇMİŞ

Kimlik Bilgileri

Adı Soyadı :Fatma ÖZBAY

Doğum Yeri :Gazimağusa, KIBRIS

Medeni Hali :Bekar

E-posta :ozbyftma@gmail.com

Adres :Antalyalılar Mah., Uzunoluk Sok., No:3, Gazimağusa, KIBRIS

Eğitim

Lise :Gazimağusa Türk Maarif Koleji, 2003-2010, KIBRIS

Lisans :Gazi Üniversitesi, Matematik, 2011-2015

Lisans(ÇAP) :Gazi Üniversitesi, İstatistik, 2013-2016

Yüksek Lisans :Hacettepe Üniversitesi, Matematik, 2016-2017

Yabancı Dil ve Düzeyi

İngilizce-Orta Seviye

Almanca-Başlangıç Seviyesi

İş Deneyimi

-

Deneyim Alanı

-

Tezden Üretilmiş Projeler ve Bütçesi

-

Tezden Üretilmiş Yayınlar

-

Tezden Üretilmiş Tebliğ ve/veya Poster Sunumu ile Katıldığı Toplantılar

-

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS/DOKTORA TEZ ÇALIŞMASI ORJİNALLİK RAPORU

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI BAŞKANLIĞI'NA

Tarih:18 /12 /2017

Tez Başlığı / Konusu: **Sıralı Banach Uzayları Üzerinde Tanımlı Homojen Markov Zincirlerinin Cesàro Ortalamalarının Pertürbasyon Sınırları**
Yukarıda başlığı/konusu gösterilen tez çalışmamın a) Kapak sayfası, b) Giriş, c) Ana bölümler d) Sonuç kısımlarından oluşan toplam **75** sayfalık kısmına ilişkin, **18 /12/ 2017** tarihinde ~~şahsım~~/tez danışmanım tarafından *Turnitin* adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı **% 10** 'tür.

Uygulanan filtrelemeler:
1- Kaynakça ~~hariç~~ / **dâhil**
2- Alıntılar ~~hariç~~/**dâhil**
3- 5 kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları ~~hariç~~ / **dâhil**

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Çalışması Orjinallik Raporu Alınması ve Kullanılması Uygulama Esasları'nı inceledim ve bu Uygulama Esasları'nda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

18/12/2017
Tarih ve İmza

F. Özbay

Adı Soyadı:	Fatma ÖZBAY
Öğrenci No:	N15221282
Anabilim Dalı:	Matematik
Programı:	Tezli Yüksek Lisans
Statüsü:	☒ Y.Lisans ☐ Doktora ☐ Bütünleşik Dr.

DANIŞMAN ONAYI

UYGUNDUR.

Yrd. Doç. Dr. Nazife ERKURŞUN ÖZCAN

(Unvan, Ad Soyad, İmza)