GEÇİŞLİ DÜZGÜNÜMSÜ UZAYLARIN TEORİSİ

THE THEORY OF TRANSITIVE QUASI-UNIFORM SPACES

ŞULE HASMAN

DOÇ. DR. FİLİZ YILDIZ
Tez Danışmanı

Hacettepe Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin
Matematik Anabilim Dalı için Öngördüğü
YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırlanmıştır

2017

ŞULE HASMAN' ın hazırladığı "**Geçişli Düzgünümsü Uzayların Teorisi**" adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **MATEMATİK ANABİLİM DALI'** nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Haydar EŞ ....
Başkan

Doç. Dr. Filiz YILDIZ ....
Danışman

Prof .Dr. Duran TÜRKOĞLU ....
Üye

Prof. Dr. Rıza ERTÜRK ....
Üye

Prof .Dr. Selma ÖZÇAĞ ....
Üye

Bu tez Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. Menemşe GÜMÜŞDERELİOĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

YAYINLAMA VE FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI BEYANI

Enstitü tarafından onaylanan lisansüstü tezimin/raporumun tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı (kağıt) ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda verilen koşullarla kullanıma açma iznini Hacettepe üniversitesine verdiğimi bildiririm. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet haklarım bende kalacak, tezimin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanım hakları bana ait olacaktır.

Tezin kendi orijinal çalışmam olduğunu, başkalarının haklarını ihlal etmediğimi ve tezimin tek yetkili sahibi olduğumu beyan ve taahhüt ederim. Tezimde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanması zorunlu metinlerin yazılı izin alarak kullandığımı ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederim.

☒ **Tezimin/Raporumun tamamı dünya çapında erişime açılabilir ve bir kısmı veya tamamının fotokopisi alınabilir.**
(Bu seçenekle teziniz arama motorlarında indekslenebilecek, daha sonra tezinizin erişim statüsünün değiştirilmesini talep etseniz ve kütüphane bu talebinizi yerine getirse bile, tezinin arama motorlarının önbelleklerinde kalmaya devam edebilecektir.)

☐ **Tezimin/Raporumun .... tarihine kadar erişime açılmasını ve fotokopi alınmasını (İç Kapak, Özet, İçindekiler ve Kaynakça hariç) istemiyorum.**
(Bu sürenin sonunda uzatma için başvuruda bulunmadığım taktirde, tezimin/raporumun tamamı her yerden erişime açılabilir, kaynak gösterilmek şartıyla bir kısmı ve ya tamamının fotokopisi alınabilir)

☐ **Tezimin/Raporumun .... tarihine kadar erişime açılmasını istemiyorum, ancak kaynak gösterilmek şartıyla bir kısmı veya tamamının fotokopisinin alınmasını onaylıyorum.**

☐ **Serbest Seçenek/Yazarın Seçimi**

15 / 11 / 2017

(İmza)

Şule HASMAN

ETİK

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında,

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversitede veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

15/11/2017

ŞULE HASMAN

ÖZET

GEÇİŞLİ DÜZGÜNÜMSÜ UZAYLARIN TEORİSİ

Şule HASMAN

Yüksek Lisans, Matematik Bölümü

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Filiz YILDIZ

Kasım 2017, 74 sayfa

Bu tezde, asimetrik topolojiye özgü olarak oluşturulan, geçişli düzgünümsü uzayların teorisi ve bu teori içerisinde doğal biçimde geliştirilen geçişli topolojik uzayların temel özellikleriyle birlikte, elde edilen çeşitli sonuçlar hakkında detaylı bir derleme çalışması sunulmuştur.

Tez, beş bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm olarak Giriş bölümü ile başlayan tezin ikinci bölümünde, tez çalışması içerisinde ihtiyaç duyulan bazı kavramlar ve sonuçları içeren temel bilgiler, topoloji ve düzgünlük teorileri çerçevesinde ifade edilmiştir.

Bunu takiben, literatürde asimetrik yapılar olarak bilinen düzgünümsü ve yakınımsı uzaylara, üç alt bölümden oluşan üçüncü bölümde detaylarıyla yer verilmiştir. Burada, düzgünümsü ve yakınımsı uzayların birbirleri ile ilişkilerinin yanı sıra, bu yapıların, topolojik ve ikili topolojik uzaylar ile olan çeşitli bağlantıları da incelenmiştir.

Tezin ana fikrini oluşturan dördüncü bölümünde, geçişli düzgünümsü yapıların teorisi, geçişli düzgünümsü uzaylar ve geçişli topolojik uzaylar olarak iki alt bölümde ele alınmıştır. Buna göre; teoriyi geliştiren bazı önemli karakterizasyonlar, örnekler ve teorinin temel sonuçlarıburada geniş ölçüde sunulmuştur.

Dördüncü bölüm, her metriklenebilir uzayın bir geçişli uzay olduğu gerçeğinin kanıtlanması, ve ilişkili bir örnek ile tamamlanmıştır.

Son kısım olan beşinci bölümde ise, tez çalışmasında elde edilen bazı önemli sonuçlara kısaca değinilmiş ve tez, kaynaklar dizini ile sonlandırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Düzgün uzay, simetrizasyon, asimetrik topoloji, geçişli düzgünümsü uzay, metriklenebilir uzay, komşuağı, Pervin düzgünümsü uzay, geçişli topolojik uzay, tam sınırlı metrikimsi uzay, düzgün sürekli fonksiyon, ikili topolojik uzay, ikişer tamamen regüler uzay, sıfır –küme, yakınımsı uzay, yakın sürekli fonksiyon, düzgünleştirilebilir uzay, sıfır –boyutlu uzay, Arşimed özelliği, yarı-hesaplanabilir uzay, orto-kompaktu zay.

ABSTRACT

THE THEORY OF TRANSITIVE QUASI-UNIFORM SPACES

Şule HASMAN

Post Graduate, Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Filiz YILDIZ

November 2017, 74 pages

In this thesis, a detailed compilation study about the theory of transitive quasi-uniform spaces constructed in peculiar to asymmetric topology as well as the various results, together with the fundamental properties of transitive topological spaces developed within this theory, was presented.

The thesis consists of five sections.

In the second section of the thesis which starts with Introductionsection, the basic knowledge containing some concepts and results required inside the thesisis mentioned in the context of the theories of topology and uniformity.

Following that, quasi-uniform and quasi-proximity spaces known as asymmetric structures in the literature, are mentioned in detail, in the third section consisting of three subsections. Here, some various connections between the structures of quasi-uniform and quasi-proximity, and topological –bitopologica lspaces have been investigated, besides there lationships among these structures.

In the fourth section comprising the main topic of thesis, the theory of transitive quasi-uniform structures is handled in two subsections as the transitivequasi-uniform spaces and the transitive topological spaces. According to that, some important characterizations, examples and fundamental results effecting in improving this theory are presented here, widely.

The fourth section is concluded by proving that the fact every metrizable space is transitive, and with an associated example.

In the last part which is the fifth section, some major results which are obtained in that theory are mentioned, briefly and the thesis finished with the references list.

Keywords: Uniform space, symmetrization, asymmetrictopology, transitive quasi-uniform space, metrizable space, neighbornet, Pervin quasi-uniform space, transitive topologica lspace, totally bounded quasi-metric space, uniformly continuous function, bitopological space, pairwise completely regular space, zero-set, quasi-proximity space, proximally continuous function, uniformizable space, zero-dimensiona lspace, Archimedean property, semi-stratifiable space, orthocompact space.

TEŞEKKÜR

Çalışma süresince sabır ve anlayış ile emek gösteren, ilgisini ve zamanını ayıran değerli hocam Doç. Dr. Filiz YILDIZ'a ,

Gösterdikleri sevgi ile çalışmamın her aşamasında destek olan aileme,

Verdiği güven ve destek ile beni yalnız bırakmayan arkadaşlarıma bir borç bildiğim sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

1 GİRİŞ

Weil, düzgün yapılarla ilgili çalışmasını 1937'de yayınladıktan üç yıl sonra Tukey, düzgünlüklere örtüsel yaklaşımı önermiştir. Düzgünümsü yapılar üzerine çalışmalar ise 1948'de Nachbin'in " topolojik sıralı uzaylar " çalışması ile başlamıştır.

Düzgün yapılar gibi düzgünümsü yapılar da bir topoloji üretir. $\mathcal{U}$ düzgünümsü yapının tersi olan $\mathcal{U}^{-1}$ süzgeci de bir düzgünümsüdür. Böylece düzgünümsü yapılar, doğal olarak ikili topolojik uzaylarla bağlantılıdır. Kelly, 1963'deki çalışmasında bu ilişkiden bahsetmiştir. Bir X uzayının düzgünleştirilebilir olması için o uzayın tamamen regüler olması gerekirken; ikili topolojik uzaylarda uzayın ikişer tamamen regüler olması bu uzayın düzgünümsüleştirilebilir olmasını gerektirmektedir.

Yakınımsı kavramı ise, tam sınırlı düzgünümsülerle ilişkili olarak ortaya çıkmıştır. Ayrıca görülmüştür ki; bir yakınımsıdan elde edilen düzgünümsünün ürettiği topoloji ile o yakınımsıdan elde edilen topoloji çakışmaktadır.

Herhangi bir topolojik uzayla uyumlu en ince düzgünümsü, her zaman geçişli civarlardan oluşan bir tabana sahip olmak zorunda değildir. Ancak, metriklenebilir uzaylar ile uyumlu en ince düzgünümsünün geçişli civarlardan oluşan bir tabanı daima vardır.

Bu çalışmada düzgünümsü yapılar civarlar yoluyla ele alınmıştır. Giriş bölümü olan birinci bölümde asimetrik topolojik uzaylarla ilgili bazı çalışmaların tarihsel süreçleri verilmiştir.

İkinci bölüm, tezde hatırlatılmasına ihtiyaç duyulan bazı temel kavramlardan oluşmuştur.

Üçüncü bölümde, düzgünümsü ve yakınımsı uzaylar ve bu yapılarla ilgili bazı temel teoremler verilmiştir. Bu asimetrik yapıların topolojik uzaylarla ilişkisi incelenmiştir. Topolojik uzaylarda sağlanmayan bazı özelliklerin bu uzaylarda sağlandığı görülmüştür. Örneğin, düzgünümsü uzaylarda bölüm dönüşümlerinin çarpımı yine bir bölüm dönüşümü iken topolojik uzaylarda bu durum geçerli değildir.

Dördüncü bölümde geçişli civarlardan oluşan tabana sahip düzgünümsü yapılara değinilmiştir. Geçişli düzgünümsü uzaylardan elde edilen topolojik uzaylar ile ilgili bazı temel teoremler bu bölümde verilmiş ve metriklenebilir uzayların geçişli olduğu sonucuna varılmıştır.

Beşinci bölüm olan son bölümde ise, bu tez çalışmasında elde edilen önemli bazı sonuçlara yer verilmiştir.

2 TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tez konusunda ihtiyaç duyulan bazı topolojik kavramlara yer verilmiştir ve [1] ve [2] nolu kaynaklardan yararlanılmıştır. Simetrik yapıların ele alındığı bu bölüm, iki alt bölümden oluşmaktadır.

2.1 Topolojik Uzaylar

Tanım 2.1.1. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. $\overline{A}$ ile A kümesinin kapanışı ve A° ile de A kümesinin içi gösterilsin.

a) Eğer $(\overline{A})^\circ = \emptyset$ ise A kümesine (X, τ)'da *hiç bir yerde yoğun değildir (seyrektir)* denir.

b) Eğer A, (X, τ)'daki sayılabilir sayıdaki seyrek $A_n, (n = 1, 2, \ldots)$ kümelerinin birleşimi olarak yazılabiliyorsa A kümesine (X, τ)'da *1. kategoridendir* denir. X'in 1. kategoriden olmayan diğer bütün altkümelerine ise *2. kategoridendir* denir.

Örnek 2.1.2. Her $q \in \mathbb{Q}$[1] için $\{q\}$, $(\mathbb{R}, \tau_e)$ Öklid uzayında hiç bir yerde yoğun değildir ve $\mathbb{Q} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}$ olarak yazılabileceğinden $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$'de 1. kategoridendir.

Herhangi bir küme üzerinde sürekli dönüşümler yardımıyla topoloji üretilebilir.

Teorem 2.1.3. X bir küme, (Y, τ), bir topolojik uzay ve $f : X \to Y$ bir dönüşüm ise $\{f^{-1}(G) | G \in \tau\}$ ailesi, X üzerinde f dönüşümünü sürekli yapan en kaba topolojidir.
Kanıt: Bakınız [1, Teorem 6.1]. $\square$

Tanım 2.1.4. X bir küme, (Y, τ), bir topolojik uzay ve $f : X \to Y$ bir dönüşüm olsun. f dönüşümünü süekli yapan X üzerindeki en kaba topoloji olan $\{f^{-1}(G) | G \in \tau\}$ topolojisine f dönüşümü ile X üzerinde üretilen *başlangıç topolojisi* denir.

Örnek 2.1.5. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olmak üzere A üzerindeki $\tau|_A$ alt topolojisi, $i(x) = x$ özdeşlik dönüşümü ile üretilen bir başlangıç topolojisidir.

Tanım 2.1.6. $(X_\alpha, \tau_\alpha)_{\alpha \in A}$, topolojik uzayların bir ailesi olsun. $\Pi_{\alpha \in A} X_\alpha$ çarpım kümesi üzerinde, $p_\alpha : \Pi_{\alpha \in A} X_\alpha \to X_\alpha$, $p_\alpha(x) = x_\alpha$ izdüşüm dönüşümlerinin $(p_\alpha)_{\alpha \in A}$ ailesi ile üretilen başlangıç topolojisine *çarpım topolojisi* denir ve $\{p_\alpha^{-1}(G_\alpha) | G_\alpha \in \tau_\alpha, \alpha \in A\}$ ailesi bu topolojinin bir alttabanıdır.

[1] $\mathbb{Q}$, rasyonel sayılar kümesidir.

Not 2.1.7. $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $(X_i, \tau_i)_{i \in N}$ topolojik ailesi için $\Pi_{i=1}^n X_i$ üzerindeki çarpım topolojisinin bir tabanı $\{\Pi_{i=1}^n G_i | G_i \in \tau_i, i \in N\}$ biçimindedir.

Teorem 2.1.8. (X, τ) bir topolojik uzay, Y bir küme ve $f : X \to Y$ bir dönüşüm ise $\{G \subset Y | f^{-1}(G) \in \tau\}$ ailesi, Y üzerinde f dünüşümünü sürekli yapan en ince topolojidir.

Kanıt: Bakınız [1, Teorem 6.7]. □

Tanım 2.1.9. (X, τ) bir topolojik uzay, Y bir küme ve $f : X \to Y$ bir dönüşüm olsun. f dönüşümünü sürekli yapan Y üzerindeki en ince topoloji olan $\{G \subset Y | f^{-1}(G) \in \tau\}$ topolojisine, f dönüşümü ile Y üzerinde üretilen *bitiş topolojisi* denir.

Tanım 2.1.10. (X, τ) bir topolojik uzay, "R", X üzerinde bir ikili denklik bağıntısı ve $[x] = \{y \in X | xRy\}$ kümesi, bu bağıntıya göre x noktasının denklik sınıfı olsun. X'den X'in R ikili bağıntısına göre bölüm kümesi $X/R = \{[x] | x \in X\}$ üzerine $q : X \to X/R$, $q(x) = [x]$ ile tanımlanan bölüm dönüşümünün ürettiği bitiş topolojsine τ'nun R ikili bağıntısına göre *bölüm topolojisi* denir.

Örnek 2.1.11. Her $x, y \in \mathbb{R}$ için $xRy \Leftrightarrow (x \leq 0$ ve $y \leq 0)$ veya $(x > 0$ ve $y > 0)$ ile tanımlı R ikili bağıntısını ve $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$ sonlu tümleyenler topolojisini düşünelim. $\mathbb{R}/R = \{[0], [1]\}$ bölüm kümesi üzerinde $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/R$, $q(x) = [x]$ bölüm dönüşümü ile üretilen bitiş topolojisi, $\mathbb{R}$ üzerindeki ayrık olmayan topolojidir.

Tanım 2.1.12. (X, τ) topolojik uzayı için X'in her noktasının hem kapalı hem açık kümelerden oluşan bir komşuluk tabanı varsa (X, τ) uzayına *sıfır-boyutlu uzay* denir.

Aşağıda herhangi bir topolojik yapı olmaksızın bir X kümesi üzerinde tanımlı olan ve düzgün(ümsü) yapıların temelini teşkil eden süzgeç kavramı verilecektir:

Tanım 2.1.13. X bir küme, $P(X)$, X'in kuvvet kümesi ve $\emptyset \neq \mathcal{F} \subset P(X)$ olsun. Eğer $\mathcal{F}$, aşağıdaki şartları sağlıyorsa $\mathcal{F}$ ailesine X üzerinde bir *süzgeç* denir.

i) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

ii) $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ ise $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$'dir.

iii) $F \in \mathcal{F}$ ve $E \supset F$ ise $E \in \mathcal{F}$'dir.

$\mathcal{F}$ bir süzgeç ve $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ olsun. Eğer her $F \in \mathcal{F}$ için $B \subset F$ olacak şekilde bir $B \in \mathcal{B}$ varsa $\mathcal{B}$ ailesine $\mathcal{F}$'nin bir *tabanı* denir.

Örnek 2.1.14. (X,τ) bir topolojik uzay ve $x \in X$ olsun. x noktasının tüm komşuluklarının $\mathcal{K}_\tau(x)$ ailesi X üzerinde bir süzgeçtir ve bu süzgece, x'in *komşuluk süzgeci* denir.

Tanım 2.1.15. (X,τ) bir topolojik uzay, $\mathcal{F}$, X üzerinde bir süzgeç ve $x \in X$ olsun.

i) Eğer $\mathcal{K}_\tau(x) \subset \mathcal{F}$ ise $\mathcal{F}$ süzgeci x noktasına *yakınsar* ve x'e $\mathcal{F}$'nin bir *limiti* denir.

ii) Eğer her $N \in \mathcal{K}_\tau(x)$ ve her $F \in \mathcal{F}$ için $N \cap F \neq \emptyset$ ise x noktasına $\mathcal{F}$ süzgecinin bir *yığılma noktası* denir.

2.2 Düzgün Uzaylar

Tanım 2.2.1. (a) X boştan farklı herhangi bir küme olmak üzere $\Delta=\{(x,x)|x \in X\}$ ile gösterilen kümeye $X \times X$'in *köşegeni* denir.

(b) $A \subset X \times X$ olmak üzere $A^{-1} = \{(x,y)|(y,x) \in A\}$ şeklinde tanımlanır. Eğer $A = A^{-1}$ oluyorsa A'ya *simetrik küme* denir.

(c) $A, B \subseteq X \times X$ ise, $A \circ B = \{(x,y)|\exists z \in X : (x,z) \in B \text{ ve } (z,y) \in A\}$ şeklinde tanımlanır. Bu bileşke işlemi [3]'de şu şekilde alınmıştır: $U, V \in X \times X$ olmak üzere $U \circ V = \{(x,y)|\exists z \in X : (x,z) \in U \text{ ve } (z,y) \in V\}$. Ancak bu çalışmada bileşke işlemi, ilk tanım dikkate alınarak kullanılacaktır.

Tanım 2.2.2. $X \neq \emptyset$ bir küme, $\mathcal{U}$, $X \times X$ üzerinde bir süzgeç ve $\mathcal{U} \neq \emptyset$ olsun.

a) Her $U \in \mathcal{U}$ için $\Delta \subset U$'dır.

b) Her $U \in \mathcal{U}$ için $V \circ V \subset U$ olacak şeklide $V \in \mathcal{U}$ vardır.

c) Her $U \in \mathcal{U}$ için $V^{-1} \subset U$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{U}$ vardır.

Eğer $\mathcal{U}$, yukarıdaki **a)-c)** şartlarını sağlıyorsa X üzerinde bir *düzgün yapı* ve $(X,\mathcal{U})$ ikilisine de *düzgün uzay* denir. Düzgünlüğün elemanlarına *civar* denir.

Tanım 2.2.3. $(X,\mathcal{U})$, bir düzgün uzay ve $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$ olsun. Eğer her $U \in \mathcal{U}$ için $B \subset U$ olacak şekilde bir $B \in \mathcal{B}$ varsa, $\mathcal{B}$ ailesine $\mathcal{U}$ düzgünlüğü için bir *taban* denir.

Önerme 2.2.4. X bir küme ve $\mathcal{B} \subset P(X \times X)$ olmak üzere eğer $\mathcal{B}$,

i) Her $B \in \mathcal{B}$ için $\Delta \subset B$,

$ii)$ Her $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ için $B_3 \subset B_1 \cap B_2$ olacak şekilde $B_3 \in \mathcal{B}$ var,

$iii)$ Her $B \in \mathcal{B}$ için $C \circ C \subset B$ olacak şekilde bir $C \in \mathcal{B}$ var,

$iv)$ Her $B \in \mathcal{B}$ için $C^{-1} \subset B$ olacak şekilde bir $C \in \mathcal{B}$ var,

koşullarını sağlıyorsa $\mathcal{B}$, X üzerinde bir düzgünlüğün tabanıdır.

Kanıt: Bakınız [1, Teorem 13.1]. □

Örnek 2.2.5. a) X bir küme olmak üzere $\{\Delta\}$, X üzerinde bir düzgünlüğün tabanıdır. Bu düzgünlük Δ'yı içeren bütün altkümelerin ailesi olan *ayrık düzgünlüktür.*

b) Herhangi bir X kümesi üzerinde $\{X \times X\}$ kümesi de bir düzgün yapıdır ve bu düzgün yapıya *ayrık olmayan düzgünlük* denir.

Örnek 2.2.6. Her $\epsilon > 0$ için $U_\epsilon = \{(x, y) : |x - y| < \epsilon\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ olsun[2]. Bu durumda $\mathcal{B} = \{U_\epsilon | \epsilon > 0\}$ ailesi, $\mathbb{R}$ üzerinde bir düzgün yapının tabanıdır. Bu düzgün yapıya $\mathbb{R}$'nin *doğal düzgün yapısı* denir.

Örnek 2.2.7. $a \in \mathbb{R}$ ve $U_a = \Delta \cup \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | x > a, y > a\}$ olsun. Bu durumda $\{U_a | a \in \mathbb{R}\}$ ailesi, $\mathbb{R}$ üzerinde bir düzgünlüğün tabanıdır.

Not 2.2.8. d, bir X kümesi üzerinde metrik olsun. d ile X üzerinde düzgünlük üretilebilir. Bu düzgünlüğün tabanı da $\epsilon > 0$ ve $U_\epsilon = \{(x, y) \in X \times X | d(x, y) < \epsilon\}$ olmak üzere $\{U_\epsilon | \epsilon > 0\}$ ailesidir.

Eğer bir düzgün uzay bir metrik ile üretilebiliyorsa bu düzgün uzaya *metriklenebilirdir* denir.

Not 2.2.9. Her düzgünlüğün simetrik civarlardan oluşan bir tabanı vardır.

Tanım 2.2.10. $(X, \mathcal{U})$ bir düzgün uzay ve $x \in X$ olsun. Her $U \in \mathcal{U}$ için $U(x) = \{y \in X | (x, y) \in U\}$ ile tanımlıdır.

Teorem 2.2.11. $(X, \mathcal{U})$ bir düzgün uzay olsun. Her $x \in X$ için $\mathcal{N}_x = \{U(x) | U \in \mathcal{U}\}$ ailesi, X üzerinde bir topolojinin x noktasındaki komşuluk süzgecini oluşturur.

Kanıt: Bakınız [1, Teorem 13.2]. □

Önceki teoremde bahsedilen $\mathcal{N}_x$ ailesinin x'in komşuluk süzgeci olduğu topolojiye (*$\mathcal{U}$ düzgünlüğü ile tanımlanan*) *düzgün topoloji* denir ve $\tau_{\mathcal{U}}$ ile gösterilir.

Bir topolojik uzay herhangi bir düzgünlük ile üretilebiliyorsa uzaya *düzgünleştirilebilir* denir.

[2] $\mathbb{R}$ ile reel sayılar kümesi gösterilmektedir.

Örnek 2.2.12. $(\mathbb{R}, \tau_e)$ Öklid topolojik uzayı, Örnek 2.2.6'daki düzgün yapı ile belirlenebildiğinden düzgünleştirilebilirdir.

Her topolojik uzay düzgünleştirilebilir olmak zorunda değidir. Örneğin reel sayılar üzerindeki $(\mathbb{R}, \tau_{\text{cof}})$ sonlu tümleyenler topolojisi düzgünleştirilebilir değildir.

Teorem 2.2.13. Bir topolojik uzayın düzgünleştirilebir olması için gerek ve yeter koşul o topolojik uzayın tamamen regüler olmasıdır.

Kanıt: Kanıt için [2, Teorem 38.2] bakınız . $\square$

Ayrıca düzgünleştirilemeyen topolojilerin supremum topolojileri düzgünleştirilebilir olabilir. Örneğin; $\mathbb{R}$ üzerindeki $\tau_{\text{alt}} = \{\mathbb{R}, \emptyset\} \cup \{(a, \infty) | a \in \mathbb{R}\}$ ve $\tau_{\text{üst}} = \{\mathbb{R}, \emptyset\} \cup \{(-\infty, b) | b \in \mathbb{R}\}$ topolojileri T_1 değildir ve dolayısıyla düzgünleştirilemezler. Ancak $\tau_{\text{alt}} \vee \tau_{\text{üst}} = \tau_{\text{e}}$ dir[3].

[3]Burada τ_{e}, $\mathbb{R}$ üzerindeki Öklid topolojisidir.

3 ASİMETRİK YAPILAR

3.1 Düzgünümsü Uzaylar

Bu bölümde düzgünümsü uzaylarla ilgili bazı temel bilgiler ve sonuçlar verilecektir. Ek olarak, bu uzayların topolojik yapılarla olan ilişkisi incelenecektir. Burada [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7] ve [8] nolu kaynaklardan yararlanılmıştır.

Tanım 3.1.1. X boştan farklı bir küme ve $\mathcal{U}$, $X \times X$ üzerinde bir süzgeç olmak üzere;

(a) $\mathcal{U}$'nun her elemanı Δ'yı içerir,

(b) Eğer $U \in \mathcal{U}$ ise bu durumda $V^2 \subset U$ olacak şekilde en az bir $V \in \mathcal{U}$ vardır

şartları sağlanıyorsa $\mathcal{U}$'ya X kümesi üzerinde bir *düzgünümsü* denir. $\mathcal{U}$'nun elemanlarına *civar* ve $(X,\mathcal{U})$ ikilisine de *düzgünümsü uzay* denir.

Burada $V^2 = V \circ V$ ve $V^{n+1} = V^n \circ V$ (n=1,2,...) ile tanımlıdır. Hatta $V \subset V^2 \subset V^3 \subset \ldots$ dır. Ayrıca X üzerindeki herhangi bir $\mathcal{U}$ düzgünümsülüğü için $\mathcal{U}^{-1} = \{U^{-1} | U \in \mathcal{U}\}$ da yine X üzerinde bir düzgünümsülüktür. $\mathcal{U}^{-1}$'e $\mathcal{U}$'nun eşleniği denir ve $\mathcal{U}^{-1} = \mathcal{U}$ oluyorsa $\mathcal{U}$, Bölüm 2.2' de verilen tanımın koşullarını sağlar, yani bir düzgünlük olur.

Bir $\mathcal{U}$ düzgünümsülüğünün herhangi bir $\mathcal{B}$ altailesi için $\mathcal{U}$'nun her elemanı $\mathcal{B}$'nin bir elemanını içeriyorsa, $\mathcal{B}$'ye $\mathcal{U}$'nun bir *tabanı* denir. Eğer $\mathcal{B}$, $\mathcal{U}$ için bir taban ve n bir pozitif tamsayı ise bu durumda $\{B^n | B \in \mathcal{B}\}$ ailesi de $\mathcal{U}$ için bir taban olur: $U \in \mathcal{U} \Rightarrow \exists B \in \mathcal{B}$: $B \subset U \Rightarrow B \in \mathcal{U}$ olduğundan $\exists V \in \mathcal{U}$: $V^2 \subset B \subset U \Rightarrow \exists B^\star \in \mathcal{B}$: $B^{\star 2} \subset V \Rightarrow B^{\star 2} \subset U$ olur. Bu şekilde devam edilirse $n = 2k, k \in Z^+$ için $\{B^n | B \in \mathcal{B}\}$ ailesi $\mathcal{U}$'nun bir tabanı olur. Ayrıca $B^{2k+1} \subset B^{2k+2}$ olduğundan $n = 2k+1$ tipindeki pozitif tamsayılar için de kanıt tamamlanır.

$\mathcal{U}$'nun bir $\mathcal{S}$ altailesi için, $\mathcal{S}$'nin elemanlarının sonlu arakesitleri $\mathcal{U}$'nun bir tabanı oluyorsa bu altaileye $\mathcal{U}$ için bir *alttaban* denir.

Not 3.1.2. X'in yansıyan bağıntılarından oluşan bir $\mathcal{B}$ tabanı ile üretilen filtrenin bir düzgünümsülük olması için gerek ve yeter koşul, her $B \in \mathcal{B}$ için $C^2 \subseteq B$ olacak şekilde bir $C \in \mathcal{B}$ bulunmasıdır.

Önerme 3.1.3. X üzerindeki her $\mathcal{U}$ düzgünümsülüğü için $\bigcap \mathcal{U}$ yansıyan ve geçişlidir, yani bir önsıralama bağıntısıdır.

Kanıt: Her $U \in \mathcal{U}$ için $\Delta \subset U$ olduğundan $\bigcap \mathcal{U}$ yansıyandır. Herhangi $x, y, z \in X$ için $(x, y), (y, z) \in \bigcap \mathcal{U}$ olsun. Bu durumda, her $U \in \mathcal{U}$ için $(x, y), (y, z) \in U$ olur ve

$\mathcal{U}$ bir düzgünümsü yapı olduğundan $V^2 \subset U$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{U}$ vardır. Ayrıca $(x,y),(y,z) \in \bigcap \mathcal{U}$ olduğundan $(x,y),(y,z) \in V$ dir. Buradan $(x,z) \in V^2 \subset U$ olur.

Örnek 3.1.4. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi üzerinde U_ϵ,Q_ϵ,Z_ϵ ve M_ϵ bağıntılarını aşagıdaki gibi tanımlayalım:

$U_\epsilon = \{(x,y)||x-y| < \epsilon\}$, $Q_\epsilon = \{(x,y)|x-y < \epsilon\}$, $Z_\epsilon = \{(x,y)|x \leq y < x+\epsilon\}$, $M_\epsilon = \Delta \cup \{(x,y)|x$ rasyonel ve $|x-y| < \epsilon\}$. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ üzerinde $\{U_\epsilon|\epsilon > 0\}$ tabanı tarafından üretilen süzgeç $\mathcal{E}$, $\{Q_\epsilon|\epsilon > 0\}$ tabanı ile üretilen süzgeç $\mathcal{Q}$, $\{Z_\epsilon|\epsilon > 0\}$ tabanı ile üretilen süzgeç $\mathcal{Z}$ ve $\{M_\epsilon|\epsilon > 0\}$ tabanı ile üretilen süzgeç de $\mathcal{M}$ olsun. Bu durumda $\mathcal{E}$, $\mathbb{R}$ üzerinde bir düzgünlük , ayrıca $\mathcal{Q}, \mathcal{Z}$ ve $\mathcal{M}$ ise birer düzgünümsü yapı olurlar. Hatta $\mathcal{E}$'ye Örnek 2.2.6'da da bahsedildiği gibi, $\mathbb{R}$'nin doğal düzgün yapısı denir. Burada $\mathcal{Z}$'nin bir düzgünümsü yapı olduğunu gösterelim: Herhangi bir ϵ>0 için $Z_\epsilon \in \{Z_\epsilon|\epsilon > 0\}$ alalım. $Z_\epsilon = \{(x,y)|x \leq y < x+\epsilon\}$ için $Z_{\frac{\epsilon}{2}}$ de taban elemanıdır ve $Z_{\frac{\epsilon}{2}} \circ Z_{\frac{\epsilon}{2}} \subset Z_\epsilon$ dır.

Örnek 3.1.5. T, bir X kümesi üzerinde yansıyan ve geçişli bir ikili bağıntı ise $X \times X$ üzerinde $\{T\}$ tarafından üretilen süzgeç bir düzgünümsü yapı olur: $T \in \{T\}$ için T geçişli olduğundan $T^2 = T$ olup $T^2 \subseteq T$ dir.

Örnek 3.1.6. $X = \{1,2,3,4,5\}$ ve $R = \{(x,y)|x \leq y\}$ olsun. $R^2 = R$ olduğundan {R} tabanı tarafından X üzerinde üretilen süzgeç bir düzgünümsü yapıdır.

Örnek 3.1.7. (X,τ) bir topolojik uzay ve $G \in \tau$ olsun. $S_G = [(X \setminus G) \times X] \cup [X \times G]$ ile tanımlı küme X üzerinde bir önsıralama bağıntısıdır (yani yansımalı ve geçişli bir bağıntıdır): Yansıma özelliği açıktır. $x,y,z \in X$ için $(x,y),(y,z) \in S_G$ olsun. Bu durumda ($x \notin G$ veya $y \in G$) ve ($y \notin G$ veya $z \in G$) olur. O halde ($x \notin G$ ve $y \notin G$) veya ($y \in G$ ve $y \notin G$) veya ($x \notin G$ ve $z \in G$) veya ($y \in G$ ve $z \in G$) olur. Buradan da $x \notin$ G veya $z \in G$ olup $(x,z) \in S_G$ elde edilir. Böylece S_G geçişli olur ve S_G'nin bir ikili önsıralama bağıntısı olduğu görülür. Bu durumda önceki nota göre $\{S_G|G \in \tau\}$ ailesi X üzerinde bir düzgünümsülüğün alttabanı olur. Bu düzgünümsülüğe de (X,τ)'nun *Pervin düzgünümsülüğü* denir ve $\mathcal{P}_\tau$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.8. $\mathcal{B}_1$ ve $\mathcal{B}_2$ bir X kümesi üzerinde iki düzgünümsü yapı için tabanlar olsun. Eğer $\mathcal{B}_2$'nin her elemanı $\mathcal{B}_1$'in bir elemanını içeriyorsa $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$'den *daha ince* veya $\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1$'den *daha kabadır* denir. Yine X kümesi üzerindeki $\mathcal{U}_1$ ve $\mathcal{U}_2$ düzgünümsü yapıları için de $\mathcal{U}_2 \subset \mathcal{U}_1$ oluyorsa $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$'den daha incedir denir ve tersine $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$'den daha ince ise $\mathcal{U}_2 \subset \mathcal{U}_1$ dır. Aynı düzgünümsü yapıyı üreten (alt)tabanlara *denk (alt)tabanlar* denir.

Örnek 3.1.9. Yukarıda verilen $\{U_\epsilon|\ \epsilon>0\}$, $\{Q_\epsilon|\ \epsilon > 0\}$, $\{Z_\epsilon|\ \epsilon > 0\}$ ve $\{M_\epsilon|\ \epsilon > 0\}$ tabanlarından herhangi iki tanesi denk değildir. Örneğin $\{Q_\epsilon|\ \epsilon > 0\}$ ve $\{Z_\epsilon|\ \epsilon > 0\}$ ailelerinin denk olabilmeleri için herhangi bir $\epsilon > 0$ için $Q_\epsilon \subset Z_\epsilon$ olacak şekilde $Z_\epsilon \in \{Z_\epsilon|\ \epsilon > 0\}$ elemanına karşılık bir $Q_\epsilon \in \{Q_\epsilon|\ \epsilon > 0\}$ olmalıdır. $Q_\epsilon \subset Z_\epsilon$ olması için her $x \in X$'e karşılık $Q_\epsilon(x) \subset Z_\epsilon(x)$ olmalıdır. Ancak $Q_\epsilon(x) = (x-\epsilon, \infty)$ ve $Z_\epsilon(x) = [x, x+\epsilon)$ olduğundan hiç bir $\epsilon > 0$ için $Q_\epsilon(x) \subset Z_\epsilon(x)$ olması mümkün değildir. Herhangi bir $n \in Z^+$ için $R_n = \{(x,y)|\frac{-2}{n} \leq x - y \leq \frac{1}{n}\}$ olsun. Bu durumda $\{R_n|n \in Z^+\}$ ve $\{U_\epsilon|\ \epsilon > 0\}$ tabanları denk olur: $\mathcal{E}$ için $\{R_n|n \in Z^+\}$'ın bir taban olduğunu göstermek yeterlidir. $U \in \mathcal{E}$ alalım. Bir $\epsilon > 0$ için $U_\epsilon \subset U$ olur. $\frac{1}{\epsilon} \in \mathbb{R}$'dir ve reel sayıların Arşimed özelliğinden $\frac{1}{\epsilon} < \frac{n}{2}$ olacak şekilde bir n doğal sayısı vardır. Buradan $\frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \epsilon$ olur. O halde $\{(x,y)|\frac{-2}{n} \leq x - y \leq \frac{1}{n}\} \subset U_\epsilon \subset U$'dur. Böylece $\{R_n|n \in Z^+\}$ ailesinin $\mathcal{E}$ için bir taban olduğu görülür.

Tanım 3.1.10. X bir küme ve $d : X \times X \to [0, \infty)$ bir fonksiyon olsun. d aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa d'ye X üzerinde bir *yarı-metrikimsi* denir:

(*i*) $\forall x \in X$ için $d(x,x) = 0$

(*ii*) $\forall x, y, z \in X$ için $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Herhangi $x, y \in X$ için $d^{-1}(x,y) = d(y,x)$ ile tanımlı $d^{-1} : X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonu da bir yarı-metrikimsidir ve d^{-1}'e, *d'nin yarı-metrikimsi eşleniği* denir. Bir d yarı-metrikimsisine, eğer her $x, y \in X$ için $d(x,y) = d(y,x)$ oluyorsa *yarı-metrik* denir. d'nin *simetrizasyonu* $d^s = sup\{d, d^{-1}\}$ ile tanımlıdır ve X üzerindeki herhangi bir d yarı-metrikimsisi için d^s bir yarı-metriktir: $x, y, z \in X$ olsun. $d^s(x,y) = sup\{d(x,y), d^{-1}(x,y)\} = sup\{d^{-1}(y,x), d(y,x)\} = d^s(y,x)$ ve $d^s(x,x) = sup\{d(x,x), d^{-1}(x,x)\} = sup\{0,0\} = 0$ olur. Ayrıca $d^s(x,z) = sup\{d(x,z), d^{-1}(x,z)\} \leq sup\{d(x,y) + d(y,z), d^{-1}(x,y) + d^{-1}(y,z)\} = sup\{d(x,y), d^{-1}(x,y)\} + sup\{d(y,z), d^{-1}(y,z)\} = d^s(x,y) + d^s(y,z)$ olur ve $d^s(x,z) \leq d^s(x,y) + d^s(y,z)$ elde edilir.

d, X üzerinde bir yarı-metrikimsi olsun. Eğer her $x, y, z \in X$ için $d(x,z) \leq sup\{d(x,y), d(y,z)\}$ sağlanıyorsa d'ye *Arşimed-özelliği göstermeyen* denir.

Örnek 3.1.11. $d : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$,

$$d(m,n) = \begin{cases} \frac{1}{n} & ;m < n \\ 1 & ;m > n \\ 0 & ;m = n \end{cases}$$

ile tanımlanan d dönüşümü Arşimed-özelliği göstermeyen bir metrikimsidir.

d, X üzerinde bir yarı-metrikimsi ve $\forall \epsilon > 0$ için $U_\epsilon = \{(x,y) \in X \times X | d(x,y) < \epsilon\}$ olsun. $\{U_\epsilon | \epsilon > 0\}$ tabanı tarafından $X \times X$ üzerinde üretilen süzgeç, X üzerinde d ile üretilen düzgünümsülüktür. Gerçekten her $\epsilon > 0$ için $U_{\frac{\epsilon}{2}} \in \{U_\epsilon | \epsilon > 0\}$ ve ${U_{\frac{\epsilon}{2}}}^2 \subset U_\epsilon$ olduğundan bu süzgeç bir düzgünümsü yapı olur. Biz bu düzgünümsülüğü $\mathcal{U}_d$ ile göstereceğiz.

Not 3.1.12. d, bir X kümesi üzerinde bir yarı-metrikimsi olsun. Bu durumda $\mathcal{U}_{d^{-1}} = {\mathcal{U}_d}^{-1}$ olacağı açıktır.

$\{\mathcal{U}_i | i \in I\}$ ailesi bir X kümesi üzerindeki düzgünümsü yapıların bir ailesi olsun. $\{\mathcal{U}_i | i \in I\}$'nın supremumu $\bigvee_{i \in I} \mathcal{U}_i$, X üzerindeki tüm $\mathcal{U}_i$'lerden daha ince olan en kaba düzgünümsülük olarak tanımlanır ve $\bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$ alttabanı ile üretilir. $\{\mathcal{U}_i | i \in I\}$'nın infimumu $\bigwedge_{i \in I} \mathcal{U}_i$, X üzerindeki tüm $\mathcal{U}_i$'lerden daha kaba olan en ince düzgünümsülük olarak tanımlanır. $\bigwedge_{i \in I} \mathcal{U}_i$'nın bir alttabanı için supremumda olduğu gibi kullanışlı bir tasvir yoktur [6].

$\mathcal{U}$, bir X kümesi üzerinde düzgünümsülük ise $\mathcal{U} \bigvee \mathcal{U}^{-1}$'e $\mathcal{U}$'nun *simetrizasyonu* denir. $\mathcal{U}$'nun simetrizasyonu bu çalışmada $\mathcal{U}^s$ ile gösterilecektir. $\{U \cap U^{-1} | U \in \mathcal{U}\}$ ailesi $\mathcal{U}^s$ için bir tabandır. Ayrıca $\mathcal{U}^s$ bir düzgünlüktür: $U \in \mathcal{U}^s \Rightarrow \exists W \in \mathcal{U} : W \cap W^{-1} \subset U \Rightarrow (W \cap W^{-1})^{-1} \subset U^{-1} \Rightarrow W^{-1} \cap W \subset U^{-1} \Rightarrow W \cap W^{-1} \subset U^{-1} \Rightarrow U^{-1} \in \mathcal{U}^s$.

Önerme 3.1.13. Bir X kümesi üzerindeki ayrık düzgünlük, bu küme üzerindeki tüm düzgünümsülüklerin supremumudur.

Kanıt: $\mathcal{D}$, X üzerindeki ayrık düzgünlük, ve $\{U_i | i \in I\}$, X üzerindeki tüm düzgünümsü yapıların ailesi olsun. Bir $U \in \bigvee_{i \in I} \mathcal{U}_i$ alalım. Quasi düzgünlük tanımından $\triangle \subset U$ olup $U \in \mathcal{D}$ elde edilir. Böylece $\bigvee_{i \in I} \mathcal{U}_i \subset \mathcal{D}$ bulunur. Diğer kapsama için bir $D \in \mathcal{D}$ alalım. Zaten $\triangle \subset D$ dir. S, I'nın sonlu bir altkümesi olsun. Bu durumda $\bigcup_{i \in I} (\bigcap_{j \in S} \triangle) = \triangle \subset D$ olup $D \in \bigvee_{i \in I} \mathcal{U}_i$ elde edilir. □

Örnekler 3.1.14. Bölümün başında verilen $\mathbb{R}$ üzerindeki $\mathcal{E}$ düzgünlüğünü ve $\mathcal{Q}$,$\mathcal{Z}$ düzgünümsülüklerini düşünelim.

(a) $Z_\epsilon \cap {Z_\epsilon}^{-1} = \{(x,y)|x=y\}$ olduğundan $\mathcal{Z}^s$, $\mathbb{R}$ üzerindeki ayrık düzgünlüktür.

(b) $\mathcal{Q}^s = \mathcal{E} = \mathcal{E}^s$ dir: $\mathcal{E}$ bir düzgünlük olduğundan $\mathcal{E}^s = \mathcal{E}$ olduğu açıktır. Ayrıca $Q_\epsilon \cap {Q_\epsilon}^{-1} = \{(x,y)| -\epsilon < y-x < \epsilon\} = \{(x,y)||x-y| < \epsilon\}$ oluşundan $\mathcal{Q}^s = \mathcal{E}$ olduğu görülür.

Önerme 3.1.15. $X \neq \emptyset$ ve $\mathcal{U}, X$ üzerinde bir düzgünümsü yapı olsun. Her $x \in X$ ve her $U \in \mathcal{U}$ için $U(x) = \{y \in X|(x,y) \in \mathcal{U}\}$ oluşturalım. $x \in X$ olmak üzere $\mathcal{N}(x) = \{U(x)|U \in \mathcal{U}\}$ ailesi X üzerindeki bir topolojiye göre x'in komşuluk süzgecini oluşturur ki bu topoloji $\tau_{\mathcal{U}} = \{T \subset X|x \in T \Rightarrow \exists V \in \mathcal{U} : V(x) \subset T\}$ 'dir. Ayrıca bu $\tau_{\mathcal{U}}$ topolojisine göre herhangi bir $x \in X$ in komşuluklar ailesi olan $\mathcal{K}_{\tau_{\mathcal{U}}}(x)$ ile $\mathcal{N}(x)$ ailesi çakışır.

Kanıt: Öncelikle, $\mathcal{N}(x)$'in X üzerinde herhangi bir topolojiye göre x'in komşuluk süzgeci olduğunu gösterelim.

(N1) Bir $U(x) \in \mathcal{N}(x)$ alalım. $\triangle \subset U$ olduğundan her $x \in X$ için $(x,x) \in U$ olup $x \in U(x)$ elde edilir.

(N2) $U(x) \in \mathcal{N}(x)$ ve $N \supset U(x)$ olsun. $V := U \cup \{(x,y)|y \in N\}$ şeklinde tanımlanırsa $N = V(x)$ olur. Ayrıca $V \supset U$ olduğundan $V \in \mathcal{U}$ olup $N \in \mathcal{N}(x)$ elde edilir.

(N3) $U_1(x), U_2(x) \in \mathcal{N}(x)$ olsun. $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$ ve $U_1(x) \cap U_2(x) = (U_1 \cap U_2)(x)$ olduğundan $U_1(x) \cap U_2(x) \in \mathcal{N}(x)$ bulunur.

(N4) $U(x) \in \mathcal{N}(x)$ alalım. Bu durumda $\exists V \in \mathcal{U}$ için $V^2 \subset U$ olur. Bu V için $V(x) \in \mathcal{N}(x)$ dir ve $\forall y \in V(x)$ için $U(x) \in \mathcal{N}(y)$ sağlanır. Gerçekten; $y \in V(x)$ olsun. $U(x) \in \mathcal{N}(y)$ olduğunu göstermek için $V(y) \subset U(x)$ olduğunu göstermek yeterlidir. $z \in V(y) \Rightarrow (x,y),(y,z) \in V$ olduğundan $(x,z) \in V^2 \Rightarrow V^2 \subset U$ olduğundan $(x,z) \in U \Rightarrow z \in U(x)$ olur.

Şimdi de $\tau_{\mathcal{U}} = \{T \subset X|x \in T \Rightarrow \exists V \in \mathcal{U} : V(x) \subset T\}$ ailesinin topoloji olma şartlarını sağladığını gösterelim.

(T1) $x \notin \emptyset$ olduğundan önerme sağlanacağı için $\emptyset \in \tau_{\mathcal{U}}$ olur. $x \in X$'e karşılık her $U \in \mathcal{U}$ için $U(x) \subset X$ olacağından yine $X \in \tau_{\mathcal{U}}$'dur.

(T2) $T_1, T_2 \in \tau_{\mathcal{U}} \Rightarrow x \in T_1 \cap T_2$ için $\exists U_1, U_2 \in \mathcal{U} : U_1(x) \subset T_1$ ve $U_2(x) \subset T_2 \Rightarrow U_1(x) \cap U_2(x) = (U_1 \cap U_2)(x) \subset T_1 \cap T_2$ ve $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$ olduğundan $T_1 \cap T_2 \in \tau_{\mathcal{U}}$ olur.

(T3) $(T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset \tau_{\mathcal{U}}$ ve $x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} T_\lambda$ olsun. Bu durumda bir $\lambda_0 \in \Lambda$ için $x \in T_{\lambda_0}$'dır. Buradan $x \in U_0(x) \subset T_{\lambda_0}$ olacak şekilde bir $U_0 \in \mathcal{U}$ vardır ve $T_{\lambda_0} \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} T_\lambda$ olduğundan $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} T_\lambda \in \tau_{\mathcal{U}}$ bulunur.

Son olarak $\tau_{\mathcal{U}}$ topolojisine göre herhangi bir $x \in X$'in komşuluklar ailesi $\mathcal{K}_{\tau_{\mathcal{U}}}(x)$'in $\mathcal{N}(x)$ ailesi ile çakıştığını gösterelim.
$U(x) \in \mathcal{N}(x)$ alalım. $U^*(x) := \{y \in X | U(x) \in \mathcal{N}(y)\}$ tanımlayalım. Bu U^* için $U^*(x) \in \tau_{\mathcal{U}}$ ve $x \in U^*(x) \subset U(x)$ sağlanır. Şimdi bunları gösterelim. $U(x) \in \mathcal{N}(x)$ ve $U^*(x)$'in tanımından $x \in U^*(x)$ olur. Her $y \in U^*(x)$ için $U(x) \in \mathcal{N}(y)$ olduğundan **(N4)**'e göre bir $M \in \mathcal{N}(y)$ var öyle ki her $z \in M$ için $U(x) \in \mathcal{N}(z)$ sağlanır. $U^*(x)$'in tanımından $z \in U^*(x)$ olur. Buradan $M \subset U^*(x)$ olur ve $\tau_{\mathcal{U}}$'nun tanımından $U^*(x) \in \tau_{\mathcal{U}}$ elde edilir. Diğer taraftan, her $y \in U^*(x)$ için $U(x) \in \mathcal{N}(y)$ olduğundan $y \in U(x)$'tir. Yani $U^*(x) \subset U(x)$ dır. $U^*(x) \in \tau_{\mathcal{U}}$ ve $x \in U^*(x) \subset U(x)$ olduğundan komşuluk tanımı gereği $U(x) \in \mathcal{K}_{\tau_{\mathcal{U}}}(x)$ olur. Böylece $\mathcal{N}(x) \subset \mathcal{K}_{\tau_{\mathcal{U}}}(x)$ olduğu gösterilmiş oldu. Şimdi de diğer kapsamayı gösterelim. $K \in \mathcal{K}_{\tau_{\mathcal{U}}}(x)$ alalım. Komşuluk tanımından bir $T \in \tau_{\mathcal{U}}$ için $x \in T \subset K$ sağlanır. $\tau_{\mathcal{U}}$'nun tanımından $\exists V \in \mathcal{U} : x \in V(x) \subset T$ olur. Buradan $V(x) \subset T \subset K$ ve **(N2)**'den $K \in \mathcal{N}(x)$ elde edilir. □

Tanım 3.1.16. $(X, \mathcal{U})$ bir düzgünümsü uzay ise önceki önermede tanımlanan $\tau_{\mathcal{U}}$ topolojisine *$\mathcal{U}$ tarafından üretilen topoloji* veya *$\mathcal{U}$ ile uyumlu topoloji* denir.

Örnek 3.1.17. $\tau_{\text{üst}}$ reel sayılar üzerindeki üst topoloji ve $\mathcal{P}$ de $(\mathbb{R}, \tau_{\text{üst}})$'ün Pervin düzgünümsülüğü olmak üzere $\tau_{\mathcal{P}^s}$ Sorgenfrey topolojisi olur.

Dikkat edilirse, herhangi bir $x \in X$ ve $U \in \mathcal{U}$ için $U(x), \tau_{\mathcal{U}}$-açık olmak zorunda değildir.
$A, B \subset X$ için eğer $U(A) = \cup_{x\in A} U(x) \subset B$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{U}$ varsa B'ye A'nın *$\mathcal{U}$-komşuluğu* denir.

Önerme 3.1.18. Bir kompakt kümenin her komşuluğu $\mathcal{U}$-komşuluktur.
Kanıt: Kanıt için [1, Teorem 13.6] bakınız. □

Önerme 3.1.19. $\{\mathcal{U}_i | i \in I\}$, bir X kümesi üzerindeki düzgünümsülüklerin bir ailesi olsun. Bu durumda $\bigvee_{i\in I} \mathcal{U}_i$ 'ın ürettiği topoloji ile $\mathcal{U}_i$'lerin ürettiği topolojilerin supremumu çakışır. Yani $\tau_{\bigvee_{i\in I} \mathcal{U}_i} = \bigvee_{i\in I} \tau_{\mathcal{U}_i}$ dır.
Kanıt: $G \in \tau_{\bigvee_{i\in I} \mathcal{U}_i} \Leftrightarrow \exists U \in \bigvee_{i\in I} \mathcal{U}_i : \forall x \in G$ için $U(x) \subset G \Leftrightarrow$ Bir sonlu $S \subset I$ altkümesi için $\bigcup_{i\in I}(\bigcap_{j\in S} \mathcal{U}_{j,i}) = U \Leftrightarrow \bigcup_{i\in I}(\bigcap_{j\in S} \mathcal{U}_{j,i})(x) = U(x) \subset G \Leftrightarrow \forall j \in S$ ve $\exists i \in I$

için $\exists U_{j,i} \in \mathcal{U}_{j,i} : U_{j,i} \subset U$ ve $U_{j,i}(x) \subset G \Leftrightarrow G \in \bigcup_{i\in I}(\bigcap_{j\in S} \tau_{\mathcal{U}_{j,i}}) \Leftrightarrow G \in \bigvee_{i\in I} \tau_{\mathcal{U}_i}$ □

Gösterim. Bundan sonra yazımda kolaylık olması için $(X,\mathcal{U})$ düzgünümsü uzayından elde edilen topoloji, eğer herhangi bir $\boldsymbol{T}$ topolojik özelliğine sahipse $(X,\mathcal{U})$, $\boldsymbol{T}$ *özelliğine sahiptir* diyeceğiz.

Önerme 3.1.20. $(X,\mathcal{U})$ bir düzgünümsü uzay olsun.

(i) $(X,\mathcal{U})$ T_0'dır $\Leftrightarrow \cap\mathcal{U}$ kısmi sıralıdır.

(ii) $(X,\mathcal{U})$ T_0'dır $\Leftrightarrow (X,\mathcal{U}^s)$ Hausdorff'tur.

(iii) $(X,\mathcal{U})$ T_1'dır $\Leftrightarrow \cap\mathcal{U} = \triangle$.

Kanıt:

(i) $(\Rightarrow)$ Her $U \in \mathcal{U}$ için $\triangle \subset U$ olduğundan $\triangle \subset \cap\mathcal{U}$ olup yansıma özelliği sağlanır. Herhangi $x, y \in X$ için $(x, y) \in \cap\mathcal{U}$ ve $x \neq y$ olsun. $\tau_{\mathcal{U}}$, T_0 olduğundan $\exists G \in \tau_{\mathcal{U}}$ için $(x \in G, y \notin G)$ veya $(x \notin G, y \in G)$ sağlanır. Genelliği bozmaksızın $(x \notin G, y \in G)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\exists U \in \mathcal{U} : U(y) \subset G$ ve $x \notin G$ olur. Buradan $x \notin U(y)$ olur ve $(y, x) \notin U$ olup $(y, x) \notin \cap\mathcal{U}$ elde edilir. Böylece ters simetri özelliği sağlanmış olur.

$x, y, z \in X$ için $(x, y), (y, z) \in \cap\mathcal{U}$ ve $(x, z) \notin \cap\mathcal{U}$ olduğunu varsayalım. $\exists U_0 \in \mathcal{U}$ için $(x, z) \notin U_0$ ve $(x, y) \in U_0$ olur. $z \notin U_0(x)$ ve $y \in U_0(x)$ olduğundan $y \neq z$ dir. Ayrıca $(y, z) \in \cap\mathcal{U}$ olduğundan her $V \in \mathcal{U}$ için $z \in V(y)$ olur ve bu da y'yi içeren her açık kümenin z'yi de içerdiği anlamına gelir. Bu ise $\tau_{\mathcal{U}}$'nun T_0 olması ile çelişir. Buradan $\cap\mathcal{U}$ geçişli olur.

$(\Leftarrow)$ $x, y \in X$ ve $x \neq y$ olsun. $(x, y) \in \cap\mathcal{U}$ ise $(y, x) \notin \cap\mathcal{U}$ olur. Bu durumda her $U \in \mathcal{U}$ için $(x, y) \in U$ ve en az bir $U_0 \in \mathcal{U}$ için de $(y, x) \notin U_0$ olur. Buradan $y \in U_0(y)$ ve $x \notin U_0(y)$ olur. Ayrıca $U_0(y) \in \mathcal{N}(y)$ olduğundan $\tau_{\mathcal{U}}$, T_0 elde edilir.

(ii) $(\Rightarrow)$ $x, y \in X$ ve $x \neq y$ olsun. $(X, \tau_{\mathcal{U}})$, T_0 olduğundan $\exists U \in \mathcal{U} : y \notin U(x)$ olur. $U \in \mathcal{U}$ olduğundan $V^2 \subset U$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{U}$ vardır. Bu V civarı için $x \in (V \cap V^{-1})(x), y \in (V \cap V^{-1})(y)$ ve $(V \cap V^{-1})(x) \cap (V \cap V^{-1})(y) = \emptyset$ sağlanır. Ayrıca $(V \cap V^{-1})(x)$ ve $(V \cap V^{-1})(y)$ kümeleri $\tau_{\mathcal{U}^s}$ ye göre sırasıyla x ve y nin komşuluklarıdır. Buradan $(X, \tau_{\mathcal{U}^s})$ Hausdorff olur.

$(\Leftarrow)$ $x, y \in X$ ve $x \neq y$ olsun. $(X, \tau_{\mathcal{U}^s})$ Hausdorff olduğundan $\exists U, V \in \mathcal{U}$:

$(U \cap U^{-1})(x) \cap (V \cap V^{-1})(y) = \emptyset$ sağlanır. Buradan $x \notin V(y)$ veya $x \notin V^{-1}(y)$ olup $x \notin V(y)$ veya $y \notin V(x)$ bulunur. Genelliği bozmaksızın $x \notin V(y)$ olduğunu kabul edelim. Burada $V(y) \in \mathcal{K}_{\tau_\mathcal{U}}(y)$ olduğundan $(X, \tau_\mathcal{U})$ T_0 elde edilir.

(iii) $\cap\mathcal{U} \not\subset \Delta$ kabul edelim. O halde $x \neq y$ ve $(x, y) \in \cap\mathcal{U}$ olacak şekilde $x, y \in X$ vardır. Her $U \in \mathcal{U}$ için $y \in U(x)$ olur. Bu durumda $x \in G$ olan her $G \in \tau_\mathcal{U}$ için $V(x) \subset G$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{U}$ olmalıdır. Ayrıca her $U \in \mathcal{U}$ için $y \in U(x)$ olduğundan $y \in V(x)$ olup $y \in G$ elde edilir. Bu ise $(X, \tau_\mathcal{U})$'nun T_1 olması ile çelişir. O halde $\cap\mathcal{U} \subset \triangle$ olmalıdır. Diğer taraftan, her $U \in \mathcal{U}$ için $\triangle \subset U$ olduğundan $\triangle \subset \cap\mathcal{U}$ gerçeği zaten vardır.

($\Leftarrow$) $x, y \in X$ alalım ve $x \neq y$ olsun. $x \in G$ olan her $G \in \tau_\mathcal{U}$ için $y \in G$ olsun. Her $U \in \mathcal{U}$ için $\triangle \subset U$ olduğundan $(x, x) \in U$'dır. Buradan $x \in U(x)$ ve $U(x) \in \mathcal{K}_{\tau_\mathcal{U}}(x)$ olduğundan varsayım gereği $y \in U(x)$ olmalıdır. Böylece $\forall U \in \mathcal{U}$ için $(x, y) \in U$ olup $(x, y) \in \cap\mathcal{U}$ elde edilir. Bu ise $\cap\mathcal{U} = \triangle$ olması ile çelişir. □

Daha önce gördüğümüz gibi her d yarı-metrikimsisinden bir düzgünümsülük elde edilir. Ancak bunun tersi her zaman geçerli değildir. Yani, her düzgünümsülük bir yarı-metrikimsiden elde edilmek zorunda değildir. Eğer bir düzgünümsülük bir yarı-metrikimsiden elde edilebiliyorsa bu düzgünümsü yapıya *yarı-metrikimsilenebilirdir* denir. Bununla ilgili önemli bir teorem aşağıda sunulmuştur.

Teorem 3.1.21. $(X,\mathcal{U})$ bir düzgünümsü uzay olsun. $\mathcal{U}$ düzgünümsülüğünün yarı-metriklenebilir olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{U}$'nun sayılabilir bir tabana sahip olmasıdır.

Kanıt: Örtüsel kanıt için [2,Teorem 38.3] bakınız. □

X bir küme ve d, X üzerinde bir yarı-metrikimsi olsun. $x \in X$ alalım ve $\epsilon > 0$ olsun. $B_d(x, \epsilon) = \{y \in X | d(x, y) < \epsilon\}$ ile tanımlı kümeye x civarındaki *ϵ-yuvarı* denir. $\{B_d(x, \epsilon) | x \in X, \epsilon > 0\}$ tabanı ile X üzerinde üretilen topolojiye d ile üretilen topoloji denir ve τ_d ile gösterilir. Eğer herhangi bir topoloji bir yarı-metrikimsi tarafından üretilebiliyorsa, bu topolojiye *yarı-metrikimsilenebilirdir* denir.

Önerme 3.1.22. X bir küme ve d, X üzerinde bir yarı-metrikimsi olsun. Bu durumda $\tau_{\mathcal{U}_d} = \tau_d$ olur.

Kanıt:

- $G \in \tau_{\mathcal{U}_d}$ olsun. Her $x \in G$ için bir $U \in \mathcal{U}_d$ vardır öyle ki $U(x) \subset G$ sağlanır. Bu durumda $\exists \epsilon > 0 : B_d(x, \epsilon) \subset U(x) \subset G$ olur. Buradan da $G \in \tau_d$ elde edilir.

- $H \in \tau_d$ olsun. Her $x \in H$ için bir $\epsilon^* > 0$ vardır öyle ki $B_d(x, \epsilon^*) \subset H$ sağlanır. Ayrıca $\mathcal{U}_d$'nin bir U taban elemanı için $U(x) = B_d(x, \epsilon^*)$ olduğundan $U(x) \subset H$'dır ve $H \in \tau_{\mathcal{U}_d}$ elde edilir. □

Bölümün başında bahsettiğimiz $\mathbb{R}$ üzerindeki $\mathcal{E}$ düzgünlüğünü, $\mathcal{Q}, \mathcal{Z}$ ve $\mathcal{M}$ düzgünümsülüklerini düşünelim. $\tau_{\mathcal{E}}$ Öklid topolojisidir. $\tau_{\mathcal{Q}}$, $\{(x, \infty) | x \in \mathbb{R}\}$ tabanına sahip olan alt topolojidir. $\tau_{\mathcal{Z}}$, $\{[a, b) | a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$ tabanı ile üretilen Sorgenfrey topolojisidir. $\tau_{\mathcal{M}} = \{G \cup H | G \in \tau_{\mathcal{E}}$ ve $H \subset \mathbb{Q}'\}$ Michael line topolojisidir [4]. $\mathcal{E}, \mathcal{Q}, \mathcal{Z}$ ve $\mathcal{M}$ 'nin hepsi metrikimsilenebilirdir. Örneğin $\mathcal{Z}$ düzgünümsülüğü,

$$d_{\mathcal{S}}(x, y) = \begin{cases} y - x & ; x \leq y \\ 1 & ; x > y \end{cases}$$

metrikimsisi ile üretilir.

Teorem 3.1.23. *d, X üzerinde bir yarı-metrikimsi olsun. Eğer τ_d'nin κ kardinalitesine sahip bir $\mathcal{B}$ tabanı varsa bu durumda $\tau_{d^{-1}}$'in de κ kardinalitesine sahip bir tabanı vardır.*

Kanıt: Her $B \in \mathcal{B}$ için $S_{B,n} = \{B | x \in B \subset B_d(x, 2^{-n})\}$ olsun. $\mathcal{S} = \{S_{B,n} | B \in \mathcal{B}, n \in \mathbb{N}\}$ kuralım. $\mathcal{B}' = \{B_{d^{-1}}(S, 2^{-n}) | S \in \mathcal{S}, n \in \mathbb{N}\}$ olsun. $\mathcal{B}'$ ve $\mathcal{S}$ 'nin tanımından $\mathcal{B}'$ 'nin kardinalitesinin $\mathcal{B}$ 'nin kardinalitesinden daha büyük olmadığı görülür. Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ ve $B \in \mathcal{B}$ için $S_{B,n} \times S_{B,n} \subset U_{2^{-n}}$ olur. Gerçekten; $(a, b) \in S_{B,n} \times S_{B,n}$ alalım. Bu durumda $a \in S_{B,n}$ ve $b \in S_{B,n}$ olacağından $a \in B \subset B_d(a, 2^{-n})$ ve $b \in B \subset B_d(b, 2^{-n})$'dir. Buradan $b \in B \subset B_d(a, 2^{-n})$ olup $d(a, b) < 2^{-n}$ ve $(a, b) \in U_{2^{-n}}$ elde edilir. $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in X$ seçelim. $\mathcal{B}$, τ_d için bir taban olduğundan $x \in B \subseteq B_d(x, 2^{-(n+1)})$ olacak şekilde bir $B \in \mathcal{B}$ vardır. Herhangi bir $y \in S_{B,n+1}$ için $y \in B \subset B_d(y, 2^{-(n+1)})$ ve $x \in B$ olduğundan $x \in B_d(y, 2^{-(n+1)})$ ve $d(y, x) < 2^{-(n+1)}$ olup $d^{-1}(x, y) < 2^{-(n+1)}$ bulunur. Buradan da $y \in B_{d^{-1}}(x, 2^{-(n+1)})$ olup $S_{B,n+1} \subset B_{d^{-1}}(x, 2^{-(n+1)})$ bulunur. Ayrıca herhangi bir $z \in B_{d^{-1}}(S_{B,n+1}, 2^{-(n+1)}) = \bigcup_{t \in S_{B,n+1}} B_{d^{-1}}(t, 2^{-(n+1)})$ için $\exists t \in S_{B,n+1} : z \in B_{d^{-1}}(t, 2^{-(n+1)})$ olur. Buradan da $d(t, x) < 2^{-(n+1)}$ ve $d(z, t) < 2^{-(n+1)}$ olup $d(z, x) < 2^{-n}$ bulunur ve $z \in B_{d^{-1}}(x, 2^{-n})$ elde edilir. Sonuç olarak, $S_{B,n+1} \subset B_{d^{-1}}(x, 2^{-(n+1)})$ ve $B_{d^{-1}}(S_{B,n+1}, 2^{-(n+1)}) \subseteq B_{d^{-1}}(x, 2^{-n})$ olduğundan $x \in S_{B,n+1} \subseteq B_{d^{-1}}(S_{B,n+1}, 2^{-(n+1)}) \subseteq B_{d^{-1}}(x, 2^{-n})$ olur. Böylece $\mathcal{B}'$, $\tau_{d^{-1}}$ için tabandır. □

[4]Burada $\mathbb{Q}'$ ile irrasyonel sayıların kümesi gösterilmektedir.

Önerme 3.1.24. X boştan farklı bir küme ve d, X üzerinde bir yarı-metrikimsi olsun.

(*i*) τ_d bir T_0-uzaydır $\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in X$ için $d(x,y) = d(y,x) = 0$ olması $x = y$ olmasını gerektirir.

(*ii*) τ_d bir T_1-uzaydır $\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in X$ için $d(x,y) = 0$ olması $x = y$ olmasını gerektirir.

Kanıt:

(*i*) $(\Rightarrow)$ $x, y \in X$ ve $x \neq y$ olsun. τ_d, T_0 olduğundan $\exists \epsilon > 0 : y \notin B_d(x, \epsilon)$ veya $x \notin B_d(y, \epsilon)$ olur. Buradan $d(x,y) \geq \epsilon$ veya $d(y,x) \geq \epsilon$ olur. Bu ise $d(x,y) = d(y,x) = 0$ olması ile çelişir.

$(\Leftarrow)$ τ_d'nin T_0 olmadığını kabul edelim. $x, y \in X$ alalım ve $x \neq y$ olsun. Bu durumda her $\epsilon > 0$ için $y \in B_d(x, \epsilon)$ ve $x \in B_d(y, \epsilon)$ olur. Yani her $\epsilon > 0$ için $d(x,y) < \epsilon$ ve $d(y,x) < \epsilon$'dır. Buradan $\lim_{\epsilon \to 0} d(x,y) = 0$ ve $\lim_{\epsilon \to 0} d(y,x) = 0$ olacağından varsayım ile $x = y$ olması gerekir. Bu ise $x \neq y$ seçimi ile çelişir.

(*ii*) $(\Rightarrow)$ $x, y \in X$ olsun. $d(x,y) = 0$ ve $x \neq y$ olduğunu varsayalım. τ_d, T_1 olduğundan $\exists \epsilon_1, \epsilon_2 > 0 : [x \in B_d(x, \epsilon_1), y \notin B_d(x, \epsilon_1)]$ ve $[y \in B_d(y, \epsilon_2), x \notin B_d(y, \epsilon_2)]$ olur. Buradan $d(x,y) \geq \epsilon_1$ ve $d(y,x) \geq \epsilon_2$ olur. Bu ise $d(x,y) = 0$ olması ile çelişir.

$(\Leftarrow)$ τ_d'nin T_1 olmadığını varsayalım. $x, y \in X$ ve $x \neq y$ olsun. Bu durumda her $\epsilon > 0$ için $y \in B_d(x, \epsilon)$ olur. Yani her $\epsilon > 0$ için $d(x,y) < \epsilon$'dır. Buradan $\lim_{\epsilon \to 0} d(x,y) = 0$ ve varsayımdan $x = y$ olması gerekir. Bu ise çelişkidir. $\square$

Önerme 3.1.24 (*i*)'de bahsedilen d yarı-metrikimsisi, T_0-*yarı-metrikimsi* olarak adlandırılır.

Örnek 3.1.25. $l : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $l(x,y) = \max\{x - y, 0\}$ ile tanımlı l dönüşümü, $\mathbb{R}$ üzerinde bir T_0-yarı-metrikimsidir. l'nin eşleniği ise $l^{-1}(x,y) = \max\{y - x, 0\}$ ile tanımlıdır. $\tau_l = \{(a, \infty) | a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}, \emptyset\}$ ve $\tau_{l^{-1}} = \{(-\infty, b) | b \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}, \emptyset\}$'dir. l^s ise $\mathbb{R}$ üzerindeki öklid metriğidir.

Tanım 3.1.26. (X, τ) bir topolojik uzay ve W, X üzerinde bir ikili bağıntı olsun. Eğer her $x \in X$ için $W(x)$, x'in bir komşuluğu oluyorsa W ikili bağıntısına (X, τ)'nun bir *komşuağı* denir.

W, (X, τ)'nun bir komşuağı olmak üzere eğer W simetrik (geçişli) bir ikili bağıntı ise W'ye simetrik (geçişli) komşuağı denir. Eğer her $x \in X$ için $W(x)$ açık (kapalı) oluyorsa W'ye açık (kapalı) komşuağı denir.

Tanım 3.1.27. Bir (X, τ) topolojik uzayının komşuağlarının bir $< U_n >$ dizisine, eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $(U_{n+1})^2 \subset U_n$ olma şartını sağlıyorsa *normal dizi* denir.
U, (X, τ) topolojik uzayının bir komşuağı olsun. Eğer U, (X, τ)'nun komşuağlarının en az bir normal dizisinin elemanı ise U'ya *normal komşuağı* denir.

Not 3.1.28. X bir küme olsun.

1) $(X, \mathcal{U})$ bir düzgünümsü uzay ve $U \in \mathcal{U}$ olsun. Bu durumda U, $(X, \tau_{\mathcal{U}})$'nın bir normal komşuağı olur: Öncelikle $U_1 := U$ seçelim. $V^2 \subset U$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{U}$ vardır. $U_2 := V$ seçelim. Yine $W^2 \subset V$ olacak şekilde bir $W \in \mathcal{U}$ vardır. $U_3 := W$ seçelim. Bu şekilde seçime devam edilerek oluşturulan $< U_n >$ dizisi bir normal dizi olur.

2) Her geçişli komşuağı bir normal komşuağıdır: U bir geçişli komşuağı olsun. Bu durumda $U^2 \subset U$ olur. $< U_n >$ dizisi olarak da her $n \in \mathbb{N}$ için $U_n = U$ sabit dizisini alırsak $U_{n+1} \subset U_n$ sağlanır. Böylece, her geçişli komşuağı normal komşuağı olur.

3) Eğer $< U_n >$ bir normal dizi ise $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ bir geçişli bağıntıdır: $x, y, z \in X$ alalım ve $(x, y), (y, z) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $(x, y), (y, z) \in U_n$ olur. Bu durumda $n+1$ için de $(x, y), (y, z) \in U_{n+1}$ olur. Buradan, her $n \in \mathbb{N}$ için $(x, z) \in U_{n+1}^2 \subset U_n$ olup $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$'ın geçişli olduğu görülür.

Önerme 3.1.29. (X, τ) bir topolojik uzay ve U bir komşuağı olsun. $U^{\infty} = \cup\{U^n | n \in \mathbb{N}\}$ geçişli bir komşuağıdır.
Kanıt: Öncelikle U^{∞}'ın bir komşuağı olduğunu gösterelim. $x \in X$ için $U^{\infty}(x) = (\cup\{U^n | n \in \mathbb{N}\})(x)$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $U^n(x) \subset U^{\infty}(x)$'dır ve $U^{\infty}(x) \in \mathcal{K}_{\tau}(x)$ olur. Şimdi de U^{∞}'ın geçişliliğini gösterelim. Herhangi $a, b, c \in X$ için $(a, b), (b, c) \in U^{\infty}$ olsun. $(a, b) \in U^n$ olma şartını sağlayan $n \in \mathbb{N}$ doğal sayılarının içinde en küçük olanı n_1 olsun ve yine aynı şekilde $(b, c) \in U^n$ olma şartını saglayan $n \in \mathbb{N}$ doğal sayılarının içinde en küçük olanı n_2 olsun. $n := max\{n_1, n_2\}$ olarak seçilirse $(a, b), (b, c) \in U^n$ olur. Buradan $(a, c) \in U^{2n}$ ve $(a, c) \in U^{\infty}$ olur. $\square$

Yardımcı Teorem 3.1.30. (X, τ) bir topolojik uzay ve U, (X, τ)'nun bir komşuağı olsun. Bu durumda her $A \subset X$ için $\overline{A} \subset U^{-1}(A)$ olur.

Kanıt: $A \subset X$ ve $a \in \overline{A}$ olsun. Kapanış tanımından $A \cap U(a) \neq \emptyset$'dır ve buradan $a \in U^{-1}(A)$ olur. $\square$

Önerme 3.1.31. (X, τ) bir topolojik uzay ve U, (X, τ)'nın bir komşuağı olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

(a) U^{-1} bir komşuağıdır.

(b) U bir simetrik komşuağı içerir.

(c) Her $A \subset X$ için $\overline{A} \subset U(A)$ dır.

Kanıt: $(a) \Rightarrow (b)$ $U(x), U^{-1}(x) \in \mathcal{K}_\tau(x)$ ve $U \cap U^{-1} \subset U$ olduğundan U bir simetrik komşuağı içerir.
$(b) \Rightarrow (c)$ $a \in \overline{A}$ alalım. Varsayımdan, simetrik bir $V \subset U$ vardır ve $A \cap V(a) \neq \emptyset$ olur. Buradan $A \cap V^{-1}(a) \neq \emptyset$ olup $a \in V(A)$ elde edilir. Böylece $a \in U(A)$ bulunur.
$(c) \Rightarrow (a)$ $x \in X$ alalım. $x \notin U(X \setminus U^{-1}(x))$ olduğundan varsayımdan $x \notin \overline{X \setminus U^{-1}(x)}$ olur. Buradan $\exists N \in \mathcal{K}_\tau(x)$ için $N \cap (X \setminus U^{-1}(x)) = \emptyset$ olup $N \subset U^{-1}(x)$ bulunur. O halde $U^{-1}(x) \in \mathcal{K}_\tau(x)$'dir. $\square$

Önerme 3.1.32. $\mathcal{B}$, X üzerindeki bir $\mathcal{U}$ düzgünümsülüğü için bir taban olsun. Herhangi bir $A \subset X$ için A'nın $\tau_{\mathcal{U}}$ topolojisine göre kapanışı $\overline{A} = \bigcap_{U \in \mathcal{B}} U^{-1}(A)$'dır.
Kanıt:

- Her $U \in \mathcal{B}$ birer komşuağı olduğu için Yardımcı Teorem 3.1.30'den $\overline{A} \subset U^{-1}(A)$ olup $A \subset \bigcap_{U \in \mathcal{B}} U^{-1}(A)$ bulunur.

- $x \in \bigcap_{U \in \mathcal{B}} U^{-1}(A)$ alalım. Her $U \in \mathcal{B}$ için $x \in U^{-1}(A)$ olur. Bu durumda her $U \in \mathcal{B}$ için en az bir $a \in A$ var öyle ki $x \in U^{-1}(a)$ sağlanır. Öyleyse her $U \in \mathcal{B}$ için $A \cap U(x) \neq \emptyset$ olur. Ayrıca her $N \in \mathcal{K}_{\tau_{\mathcal{U}}}(x)$ için $V(x) \subseteq N$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{B}$ vardır. Buradan $A \cap N \neq \emptyset$ olup $x \in \overline{A}$ elde edilir. $\square$

Önerme 3.1.33. $(X, \mathcal{U})$ bir düzgünümsü uzay olsun. bu durumda aşağıdakiler vardır:

(i) $(X, \mathcal{U}), R_0$ uzaydır $\Leftrightarrow \cap\mathcal{U}$ simetriktir.

(ii) $(X, \mathcal{U})$, Hausdorff uzaydır $\Leftrightarrow \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U^{-1} \circ U = \triangle$.

Kanıt:

(i) ($\Rightarrow$) $x, y \in X$, $x \neq y$ ve $(x,y) \in \cap\mathcal{U}$ olsun. Her $U \in \mathcal{U}$ için $y \in U(x)$ olur. Buradan $x \in \overline{\{y\}}$ bulunur. Diğer yandan $U(y) \in \mathcal{K}_{\tau_\mathcal{U}}(y)$ olduğundan $y \in T \subset U(y)$ olacak şekilde bir $T \in \tau_\mathcal{U}$ vardır. $(X, \tau_\mathcal{U})$ R_0 olduğundan $\overline{\{y\}} \subset T \subset U(y)$ olur. Ayrıca $x \in \overline{\{y\}}$ olduğundan $x \in U(y)$ bulunur. Böylece her $U \in \mathcal{U}$ için $(y,x) \in U$ olduğundan $\cap\mathcal{U}$ simetrik elde edilir.

($\Leftarrow$) $G \in \tau_\mathcal{U}$ ve $x \in G$ olsun. Bu durumda $x \in U_0(x) \subset G$ olacak şekilde bir $U_0 \in \mathcal{U}$ vardır. $y \in \overline{\{x\}}$ alalım. Her $U \in \mathcal{U}$ için $x \in U(y)$ olur. Buradan da $(y,x) \in \cap\mathcal{U}$ ve $\cap\mathcal{U}$ simetrik olduğundan $(x,y) \in \cap\mathcal{U}$ bulunur. Her $U \in \mathcal{U}$ için $(x,y) \in U$ olduğundan $(x,y) \in U_0$ ve $U_0(x) \subset G$ olduğundan $y \in G$ bulunur. Böylece $\overline{\{x\}} \subset G$ elde edilir.

(ii) ($\Rightarrow$) Her $U \in \mathcal{U}$ ve her $x \in X$ için $(x,x) \in U$ ve $(x,x) \in U^{-1}$ olduğundan $(x,x) \in U^{-1} \circ U$'dır ve $\triangle \subset \bigcap_{U \in \mathcal{U}}(U^{-1} \circ U)$ elde edilir. Tersine, $x, y \in X$, $x \neq y$ ve $(x,y) \in \bigcap_{U \in \mathcal{U}}(U^{-1} \circ U)$ olsun. Her $U \in \mathcal{U}$ için $(x,y) \in U^{-1} \circ U$ olur. Bu durumda $\exists z \in X : (x,z) \in U$ ve $(z,y) \in U^{-1}$'dir. Buradan $(x,z), (y,z) \in U$ olup $z \in U(x)$ ve $z \in U(y)$ bulunur. Bu ise $(X, \tau_\mathcal{U})$'nun Hausdorff olması ile çelişir. O halde $\bigcap_{U \in \mathcal{U}}(U^{-1} \circ U) \subset \triangle$ olmalıdır.

($\Leftarrow$) $x, y \in X$ ve $x \neq y$ olsun. Bu durumda, her $U \in \mathcal{U}$ için $U(x) \cap U(y) = \emptyset$ olur. Aksine $U(x) \cap U(y) \neq \emptyset$ olsa $\exists z \in X : (x,z) \in U$ ve $(y,z) \in U$'dur. Böylece $(x,y) \in \bigcap_{U \in \mathcal{U}}(U^{-1} \circ U)$ olur ve bu da $\bigcap_{U \in \mathcal{U}}(U^{-1} \circ U) = \triangle$ olması ile çelişir. O halde $U(x) \cap U(y) = \emptyset$ olmalıdır. Ayrıca $U(x) \in \mathcal{K}_{\tau_\mathcal{U}}(x)$ ve $U(y) \in \mathcal{K}_{\tau_\mathcal{U}}(y)$ olduğundan $(X, \tau_\mathcal{U})$'nun Hausdorff olduğu görülür. $\square$

Tanım 3.1.34. $(X,\mathcal{U})$ ve $(Y,\mathcal{V})$ düzgünümsü uzaylar ve $f : (X,\mathcal{U}) \to (Y,\mathcal{V})$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $V \in \mathcal{V}$ için $(f \times f)(U) \subset V$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{U}$ varsa yani her $V \in \mathcal{V}$ için $(f \times f)^{-1}(V) \in \mathcal{U}$ oluyorsa f'ye *düzgün sürekli* denir [5]. Bu çalışmada gösterimde kolaylık olması için $f \times f$ yerine f ifadesini kullanacağız.

Tanım 3.1.34'den bir düzgünümsü uzaydan kendisine olan birim dönüşüm düzgün süreklidir. Quasi düzgün uzaylar arasındaki düzgün sürekli dönüşümlerin bileşkeleri de yine düzgün sürekli olur.

Önerme 3.1.35. $\{\mathcal{U}_i | i \in I\}$ ve $\{\mathcal{V}_i | i \in I\}$ sırasıyla X ve Y üzerinde düzgünümsü yapıların aileleri olsun. $\mathcal{U} = \bigvee_{i \in I} \mathcal{U}_i$ ve $\mathcal{V} = \bigvee_{i \in I} \mathcal{V}_i$ olmak üzere eğer her $i \in I$ için

[5] $f \times f : X \times X \to Y \times Y, (f \times f)(x_1, x_2) = (f(x_1), f(x_2))$ ile tanımlıdır.

$f:(X,\mathcal{U}_i)\to(Y,\mathcal{V}_i)$ düzgün sürekli ise $f:(X,\mathcal{U})\to(Y,\mathcal{V})$ düzgün süreklidir.

Kanıt: $V\in\mathcal{V}$ alalım. $\bigcap_{j\in S}\mathcal{V}_j\subset V$ olacak şekilde bir sonlu $S\subset I$ altkümesi vardır. $f:(X,\mathcal{U}_i)\to(Y,\mathcal{V}_i)$ düzgün sürekli olduğundan her $i\in I$ için $f^{-1}(\mathcal{V}_i)\in\mathcal{U}_i$ olur. Ayrıca $f^{-1}(\bigcap_{j\in S}\mathcal{V}_j)\subset f^{-1}(V)$ olduğundan $\bigcap_{j\in S}(f^{-1}(\mathcal{V}_j))\subset f^{-1}(V)$ olup $f^{-1}(V)\in\mathcal{U}$ elde edilir. $\square$

Not 3.1.36. $f:(X,\mathcal{U})\to(Y,\mathcal{V})$ düzgün sürekli olsun. Herhangi bir $V\in\mathcal{V}$ için $(f^{-1}(V))^{-1}=f^{-1}(V^{-1})$ olduğundan $f:(X,\mathcal{U}^{-1})\to(Y,\mathcal{V}^{-1})$ düzgün sürekli olur.

Sonuç 3.1.37. $f:(X,\mathcal{U})\to(Y,\mathcal{V})$ düzgün sürekli ise $f:(X,\mathcal{U}^s)\to(Y,\mathcal{V}^s)$ düzgün sürekli olur.

Kanıt: Önerme 3.1.35 ve Not 3.1.36'den bulunur. $\square$

Önerme 3.1.38. Quasi düzgün uzaylar arasındaki düzgün sürekli dönüşüm, bu uzayların ürettikleri topolojilere göre de süreklidir.

Kanıt: $(X,\mathcal{U})$ ve $(Y,\mathcal{V})$ düzgünümsü uzaylar ve $f:(X,\mathcal{U})\to(Y,\mathcal{V})$ düzgün sürekli bir dönüşüm olsun. $G\in\tau_{\mathcal{V}}$ ve $x\in f^{-1}(G)$ alalım.Bu durumda $f(x)\in G$ ve böylece $\exists V\in\mathcal{V}: f(x)\in V(f(x))\subset G$ olur. Buradan $f^{-1}(V(f(x)))\subset f^{-1}(G)$'dir. O halde $f^{-1}(V(f(x)))=(f^{-1}(V))(x)$ ve $f^{-1}(V)\in\mathcal{U}$ olduğundan $f^{-1}(G)\in\tau_{\mathcal{U}}$ bulunur. $\square$

Önceki önermenin tersi her zaman doğru olmak zorunda değildir. Bununla ilgili kullanışlı bir teorem ilerleyen bölümlerde verilecektir. Ancak (X_1,τ_1) ve (X_2,τ_2) topolojik uzaylar olmak üzere $f:(X_1,\tau_1)\to(X_2,\tau_2)$ sürekli bir dönüşüm ise $f:(X_1,\mathcal{P}_{\tau_1})\to(X_2,\mathcal{P}_{\tau_2})$ düzgün sürekli olur: $C\in\mathcal{P}_{\tau_2}$ alalım. Bu durumda bir $n\in\mathbb{N}$ için $G_1,G_2,\cdots G_n\in\tau_2$ vardır öyle ki $S_{G_1}\cap S_{G_2}\cap\cdots\cap S_{G_n}\subset C$ olur. $f:(X_1,\tau_1)\to(X_2,\tau_2)$ sürekli olduğundan $f^{-1}(G_1),\cdots,f^{-1}(G_n)\in\tau_1$ dir. Diğer yandan $f^{-1}(S_{G_1}\cap\cdots\cap S_{G_n})=f^{-1}(S_{G_1})\cap\cdots\cap f^{-1}(S_{G_n})=S_{f^{-1}(G_1)}\cap\cdots\cap S_{f^{-1}(G_n)}$ dir. $f^{-1}(S_{G_1}\cap\cdots\cap S_{G_n})\subset f^{-1}(C)$ ve $f^{-1}(G_1),\cdots,f^{-1}(G_n)\in\tau_1$ olduğundan $f^{-1}(C)\in\mathcal{P}_{\tau_1}$ elde edilir. Böylece $f:(X_1,\mathcal{P}_{\tau_1})\to(X_2,\mathcal{P}_{\tau_2})$ düzgün sürekli olur.

Yukarıda Pervin düzgünümsülük için bahsedilen durum ileride tanımlayacağımız *iyi monoton düzgünümsülük* ve *ince düzgünümsülük* için de geçerli olacaktır.

Sonuç 3.1.39. $f:(X,\mathcal{U})\to(Y,\mathcal{V})$ düzgün sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda f, $\tau_{\mathcal{U}^{-1}}-\tau_{\mathcal{V}^{-1}}$ ve $\tau_{\mathcal{U}^s}-\tau_{\mathcal{V}^s}$ sürekli olur.

Kanıt: Not 3.1.36, Sonuç 3.1.37 ve Önerme 3.1.38'dan bulunur. $\square$

Herhangi bir topolojik uzay düzgünleştirilebilir olmak zorunda olmasa da kesinlikle her topolojik uzay düzgünümsüleştirilebilirdir yani, bir düzgünümsülük tarafından üretilebilirdir. Dikkat edilirse Örnek 3.1.7 de geçen Pervin düzgünümsülük her topolojiden elde edilebilir ve Pervin düzgünümsülük hangi topolojiden elde edilmiş ise yine o topolojiyi üretir. Yani (X,τ) bir topolojik uzay olmak üzere $\tau_{\mathcal{P}_\tau} = \tau$ olur.

Burada değinilmesi gereken bir diğer konu da şudur: Her topolojik uzay, bir en ince düzgünümsülük ile uyumludur. (X,τ) bir topolojik uzay olmak üzere τ ile uyumlu olan en ince düzgünümsülük, $\mathcal{FN}_\tau$ ile gösterilir ve (X,τ)'nun *ince düzgünümsülüğü* denir. İnce düzgünümsülük, o topoloji ile uyumlu olan düzgünümsülüklerin supremumu olarak ifade edilir. Buna göre, $\{\mathcal{U}_i, i \in I\}$, bir X kümesi üzerindeki düzgünümsülüklerin bir ailesi olmak üzere $\tau_{\bigvee_{i\in I}\mathcal{U}_i} = \bigvee_{i\in I}\tau_{\mathcal{U}_i}$ olduğundan $\tau_{\mathcal{FN}_\tau} = \tau$'dur.

Önerme 3.1.40. (X,τ) bir topolojik uzay olsun. $\mathcal{FN}_\tau$, τ'nun tüm normal komşuağlarından oluşur.

Kanıt: $\mathcal{W} = \{W | W, \tau\text{'nun bir normal komşuağı}\}$ ailesini kuralım ve $W \in \mathcal{W}$ olsun. Böylece her $x \in X$ için $W(x) \in \mathcal{K}_\tau(x)$ ve her $x \in X$ için $(x,x) \in W$'dir. Ayrıca W bir normal komşuağı olduğundan $V^2 \subset W$ olacak şekilde bir V ikili bağıntısı vardır öyle ki $V, W \in < V_n >$ olacak şekilde bir $< V_n >$ normal dizisi elde edilir. Böylece $\mathcal{W}$ ailesi, τ ile uyumlu bir düzgünümsülük oluşturur. Buradan $\mathcal{W} \subset \mathcal{FN}_\tau$ bulunur. Tersine $U \in \mathcal{FN}_\tau$ alalım. Her civar bir normal komşuağı olduğundan $U \in \mathcal{W}$ olur. Böylece $\mathcal{FN}_\tau \subset \mathcal{W}$ elde edilir. □

Önerme 3.1.41. (X,τ) bir topolojik uzay ve $(Y,\mathcal{V})$ bir düzgünümsü uzay olsun. $f : (X,\tau) \to (Y,\mathcal{V})$ sürekli bir dönüşüm olmak üzere, $\mathcal{U}$, τ ile uyumlu ve $f : (X,\mathcal{U}) \to (Y,\mathcal{V})$ düzgün süreklidir $\Leftrightarrow \mathcal{U} = \mathcal{FN}_\tau$'dır.

Kanıt: $(\Rightarrow)$ $\tau_{\mathcal{U}} = \tau$ olduğundan $\mathcal{U} \subset \mathcal{FN}_\tau$ dır. Biz $\mathcal{FN}_\tau \subset \mathcal{U}$ olduğunu göstermeliyiz. $U \in \mathcal{FN}_\tau$ alalım. Y yerine X, $\mathcal{V}$ yerine $\mathcal{FN}_\tau$ ve f olarak da $\mathrm{id}_X : (X,\tau) \to (X,\tau_{\mathcal{FN}_\tau})$ birim dönüşümü alınırsa $\tau_{\mathcal{FN}_\tau} = \tau$ olduğundan id_X sürekli ve hipotezden $\mathrm{id}_X : (X,\mathcal{U}) \to (X,\mathcal{FN}_\tau)$ düzgün sürekli olur. Buradan, ${\mathrm{id}_X}^{-1}(U) \in \mathcal{U}$ olacağından $U \in \mathcal{U}$ olup $\mathcal{FN}_\tau \subset \mathcal{U}$ elde edilir.

$(\Leftarrow)$ $V \in \mathcal{V}$ alalım. $f^{-1}(V)$'nin τ'nun bir normal komşuağı olduğunu göstereceğiz. Her $x \in X$ için $(f(x),f(x)) \in V$ olduğundan $f(x) \in V(f(x)) \in \mathcal{K}_{\tau_\mathcal{V}}(f(x))$'dir. f sürekli olduğundan $f^{-1}(V(f(x))) = (f^{-1}(V))(x) \in \mathcal{K}_{\tau_\mathcal{U}}(x)$ bulunur ve böylece $f^{-1}(V)$ bir komşuağı olur. V bir civar olduğundan $\tau_\mathcal{V}$'nin bir normal komşuağıdır. Çünkü $W^2 \subset V$

olacak şekilde bir $W \in \mathcal{V}$ vardır. Bu durumda, $V_1 := V$ ve $V_2 := W$ olarak seçelim. Yine $O^2 \subset W$ olacak şekilde bir $O \in \mathcal{V}$ vardır. $V_3 := O$ seçelim ve bu şekilde seçime devam ederek $< V_n >$ dizisini oluşturalım. Böylece $< V_n >$ bir normal dizi olur. $U_1 := f^{-1}(V), U_2 := f^{-1}(W), U_3 := f^{-1}(O) \cdots$ şeklinde bir $< U_n >$ dizisi oluşturalım. $W^2 \subset V$ iken $(f^{-1}(W))^2 \subset f^{-1}(V)$ olduğundan $f^{-1} < V_n >=< U_n >$ yine bir normal dizi olur. Böylece $f^{-1}(V)$ bir normal komşuağı olacağından $f^{-1}(V) \in \mathcal{FN}_\tau$ elde edilir. $\square$

Tanım 3.1.42. X bir küme ve I bir indis kümesi olmak üzere her $i \in I$ için $(Y_i,\mathcal{U}_i)$ düzgünümsü uzay ve $f_i : X \to Y_i$ dönüşüm olsun. X üzerinde her $i \in I$ için f_i dönüşümünü düzgün sürekli yapan bir en kaba $\mathcal{U}$ düzgünümsülüğü vardır. $\mathcal{U}$'ya *başlangıç düzgünümsülüğü* denir ve $\{f_i^{-1}(U_i)|U_i \in \mathcal{U}_i$ ve $i \in I\}$ alttabanı ile üretilir. Eğer her $\mathcal{U}_i$, düzgünlük ise $\mathcal{U}$ başlangıç düzgünümsülüğü de bir düzgünlük olur.

Önerme 3.1.43. X bir küme ve I bir indis kümesi olmak üzere her $i \in I$ için $(Y_i,\mathcal{U}_i)$ düzgünümsü uzay ve $f_i : X \to Y_i$ dönüşüm olsun. $\mathcal{U}$, X üzerinde $(f_i)_{i\in I}$ ailesi ile üretilen başlangıç düzgünümsülüğü olmak üzere $\mathcal{U}$, her $i \in I$ için $f_i : X \to (Y_i, \tau_{\mathcal{U}_i})$ dönüşümünü sürekli yapan en kaba topoloji τ ile uyumludur.

Kanıt:

- $G \in \tau$ ve $x \in G$ olsun. Bu durumda bir $n \in \mathbb{N}$ için $x \in f^{-1}(G_1) \cap f^{-1}(G_2) \cap \cdots \cap f^{-1}(G_n) \subset G$ olacak şekilde $G_1 \in \tau_{\mathcal{U}_1}, \cdots G_n \in \tau_{\mathcal{U}_n}$ vardır. Buradan $f(x) \in G_1, f(x) \in G_2, \cdots, f(x) \in G_n$ olur. Bu durumda $\exists U_1 \in \mathcal{U}_1, \cdots, U_n \in \mathcal{U}_n$: $f(x) \in U_1(f(x)) \subset G_1, \cdots, f(x) \in U_n(f(x)) \subset G_n$ dır. Böylece $x \in f^{-1}(U_1)(x) \subset f^{-1}(G_1), \cdots, x \in f^{-1}(U_n)(x) \subset f^{-1}(G_n)$ olur. Buradan da $x \in (f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2) \cap \cdots \cap f^{-1}(U_n))(x) \subset G$ olup $G \in \tau_{\mathcal{U}}$ elde edilir.

- $H \in \tau_{\mathcal{U}}$ alalım ve $x \in H$ olsun. Bu durumda $\exists U \in \mathcal{U} : x \in U(x) \subset H$ olur ve $\exists n \in \mathbb{N}$: her $i = 1,..,n$ için $x \in \bigcap f^{-1}(U_i)(x) \subset U(x) \subset H$ olacak şekilde $U_i \in \mathcal{U}_i$ vardır. $f^{-1}(U_i)(x) = f^{-1}(U_i(f(x)))$ olduğundan $f(x) \in \bigcap_{i=1}^n U_i(f(x)) \subset f(H)$ olur. Her $i = 1,..,n$ için $U_i(f(x)) \in \mathcal{K}_{\tau_{\mathcal{U}_i}}(f(x))$ olduğundan $\exists G_i \in \tau_{\mathcal{U}_i} : f(x) \in G_i \subset U_i(f(x))$ bulunur ve $x \in \bigcap_{i=1}^n f^{-1}(G_i) \subset H$ olup $H \in \tau$ elde edeilir. $\square$

$(X,\mathcal{U})$ bir düzgünümsü uzay ve $A \subset X$ olsun. $\{U \cap (A \times A)|U \in \mathcal{U}\}$ ailesine *$\mathcal{U}$'nun A üzerine indirgediği altuzay düzgünümsülüğü* denir ve $\mathcal{U}|_A$ ile gösterilir. Ayrıca $\mathcal{U}|_A$, i :

$A \to (X,\mathcal{U})$ birim dönüşümünü düzgün sürekli yapan A üzerindeki en kaba düzgünümsülüktür. Önerme 3.1.43'dan $\tau_{\mathcal{U}|_A} = \tau_{\mathcal{U}}|_A$ eşitliğine ulaşılır. Eğer $f : (X,\mathcal{U}) \to (Y,\mathcal{V})$ düzgün sürekli bir dönüşüm ise $f|_A$ kısıtlama dönüşümü de $\mathcal{U}|_A - \mathcal{V}$ düzgün süreklidir. $B \subset A \subset X$ olmak üzere $\mathcal{U}$ ve $\mathcal{U}|_A$'nın B üzerindeki altuzay düzgünümsülükleri çakışır.

(X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Herhangi bir $G \in \tau$ için $S_G \cap (A \times A) \subset S_{G\cap A}$ olduğundan $\mathcal{P}_{\tau|_A} = \mathcal{P}_\tau|_A$ olur. Ancak $\mathcal{FN}_{\tau|_A} = \mathcal{FN}_\tau|_A$ eşitliği her zaman doğru olmak zorunda değildir. Örneğin, $X = \mathbb{R}, \tau = \tau_e$ öklid topolojisi ve $A = \mathbb{Q}$ alınırsa $\mathcal{FN}_{\tau|_\mathbb{Q}} = \mathcal{FN}_\tau|_\mathbb{Q}$ sağlanmaz. Bu durum ilerleyen bölümlerde verilecek bir teorem ile açıklanacaktır.

Tanım 3.1.44. $\{(X_i,\mathcal{U}_i)|i \in I\}$ düzgünümsü uzayların bir ailesi ve $X = \prod_{i\in I} X_i$ olsun. $\pi_i : X \to X_i$ izdüşüm dönüşümü olmak üzere X üzerinde tüm izdüşüm dönüşümlerini düzgün sürekli yapan en kaba düzgünümsülüğe *çarpım düzgünümsülüğü* denir. Eğer $(X,\mathcal{U})$ ve $(Y,\mathcal{V})$ düzgünümsü uzaylar ise $X\times Y$ üzerindeki çarpım düzgünümsülüğünün tabanı $\mathcal{B}$ şu şekildeki bağıntıları içerir: $B \in \mathcal{B}$ için bir $U \in \mathcal{U}$ ve bir $V \in \mathcal{V}$ vardır öyle ki her $x, y \in X$ için $B((x,y)) = U(x) \times V(y)$ olur. Önerme 3.1.43'den, başlangıç düzgünümsülüğü başlangıç topolojisini ürettiğinden çarpım düzgünümsülüğü de çarpım topolojisi ile uyumludur.

Önerme 3.1.45. $f : (X,\mathcal{U}) \to \prod_{i\in I}(Y_i,\mathcal{V}_i)$ olsun. f düzgün süreklidir $\Leftrightarrow$ Her $i \in I$ için $\pi_i \circ f$ düzgün süreklidir.

Kanıt: $(\Rightarrow)$ f düzgün sürekli olsun. Her $i \in I$ için π_i düzgün sürekli olduğundan $\pi_i \circ f$ dönüşümü de düzgün sürekli olur.

$(\Leftarrow)$ $\prod_{i\in I} Y_i$ çarpım düzgünümsülüğünün herhangi bir $\pi_j^{-1}(V_j)$, $(j \in I, V_j \in \mathcal{V}_j)$ civarı için $\pi_i \circ f$ düzgün sürekli olduğundan $f^{-1}(\pi_j^{-1}(V_j)) = (\pi_j \circ f)^{-1}(V_j) \in \mathcal{U}$ olur ve f'nin düzgün sürekli olduğu görülür. □

Teorem 3.1.46. T, $(X_i,\mathcal{U}_i)$ $(i \in I)$ düzgünümsü uzaylarının herhangi bir ailesinin bir altkümesi olsun. Bu durumda (Y,d) bir T_0-yarı-metrikimsi uzay olmak üzere $f : T \to (Y,d)$ düzgün sürekli dönüşümü $g \circ (\pi|_T)$ şeklindedir. Burada en az bir sayılabilir $C \subset I$ vardır ki $\pi : \prod_{i\in I} X_i \to \prod_{i\in C} X_i$ dönüşümü $\pi((x_i)_{i\in I}) = (x_i)_{i\in C}$ ile tanımlıdır ve $g : \pi(T) \to Y$ bir düzgün sürekli dönüşümdür.

Kanıt: f düzgün sürekli olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için I'nın sonlu bir I_n altkümesi ve $i \in I_n$ için $U_i \in \mathcal{U}_i$ vardır öyle ki $(x,y) \in [\cap_{i\in I_n}(\pi_i \times \pi_i)^{-1}U_i] \cap (T \times T)$ için

$d(f(x), f(y)) < \frac{1}{n+1}$ olur. $C = \cup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ olsun ve yukarıda tanımlanan $\pi((x_i)_{i\in I}) = (x_i)_{i\in C}$ izdüşüm dönüşümünü düşünelim. Her $x \in \pi(T)$ için $t_x \in T \cap \pi^{-1}(\{x\})$ olsun ve $x \mapsto f(t_x)$ kuralı ile $g : \pi(T) \to Y$ dönüşümünü tanımlayalım. $t', t'' \in T$ alalım. Eğer $\pi(t') = \pi(t'')$ ise $I_n \subset C$ $(n \in \mathbb{N})$ olduğundan $d(f(t'), f(t'')) < \frac{1}{n+1}$ olur. $n \to \infty$ için $d(f(t'), f(t'')) = 0$ ve $d(f(t''), f(t')) = 0$ olur. d, T_0-yarı-metrikimsi olduğundan $f(t') = f(t'')$ elde edilir. Buradan her $x \in \pi(T)$ noktasına karşılık t_x'in seçiminden ve g'nin tanımından $f = g \circ (\pi|T)$ olduğu sonucuna varılır. Şimdi de g'nin düzgün sürekli olduğunu gösterelim: $n \in \mathbb{N}$ olsun. Her $i \in I_n$ için $(\pi(t)_i, \pi(t')_i) \in U_i$ olacak şekilde $t, t' \in T$ alınırsa, varsayımdan $d(g(\pi(t)), g(\pi(t'))) = d(f(t), f(t')) < \frac{1}{n+1}$ olur. Böylece g'nin düzgün sürekli olduğu görülür. □

Önerme 3.1.47. $\mathcal{U}$ ve $\mathcal{V}$, bir X kümesi üzerinde düzgünümsülükler olsun. $U \in \mathcal{U}$, $V \in \mathcal{V}$ ve $M \subset X \times X$ olmak üzere, $V \circ M \circ U$ bileşkesi, $\mathcal{U}^{-1} \times \mathcal{V}$'nin ürettiği topolojiye göre M'nin bir komşuluğudur.

Kanıt: $(x_1, x_2) \in M$ alalım. $U^{-1}(x_1) \in \mathcal{K}_{\tau_{\mathcal{U}^{-1}}}(x_1)$ ve $V(x_2) \in \mathcal{K}_{\tau_{\mathcal{V}}}(x_2)$'dir. Öyleyse bir $G_{x_1} \in \tau_{\mathcal{U}^{-1}}$ ve bir $G_{x_2} \in \tau_{\mathcal{V}}$ vardır ki $x_1 \in G_{x_1} \subset U^{-1}(x_1)$ ve $x_2 \in G_{x_2} \subset V(x_2)$ olur. Bu durumda $M \subset \bigcup_{(x_1,x_2)\in M} G_{x_1} \times G_{x_2} \subset \bigcup_{(x_1,x_2)\in M} U^{-1}(x_1) \times V(x_2) \subset V \circ M \circ U$ olacağından $\bigcup_{(x_1,x_2)\in M} G_{x_1} \times G_{x_2} \in \tau_{\mathcal{U}^{-1}\times\mathcal{V}}$ gerçeği ile, $V \circ M \circ U \in \mathcal{K}_{\tau_{\mathcal{U}^{-1}\times\mathcal{V}}}$ elde edilir. □

Sonuç 3.1.48. $(X, \mathcal{U})$ bir düzgünümsü uzay olsun. Bu durumda $\{U | U \in \mathcal{U}$ ve $U \in \tau_{\mathcal{U}^{-1}\times\mathcal{U}}\}$ ailesi $\mathcal{U}$ için bir tabandır.

Kanıt: $U \in \mathcal{U}$ alalım. $U \subset X \times X$ olduğundan Önerme 3.1.47'den $U \circ U \circ U \in \mathcal{K}_{\tau_{\mathcal{U}^{-1}\times\mathcal{U}}}(U)$'dır. $U \in \mathcal{U}$ olduğundan $W^2 \subset U$ olacak şekilde bir $W \in \mathcal{U}$ vardır. Herhangi bir $(x, y) \in W^2$ için önceki önermeden $W \circ \{(x, y)\} \circ W \in \mathcal{K}_{\tau_{\mathcal{U}^{-1}\times\mathcal{U}}}((x, y))$ ve ayrıca $W \circ \{(x, y)\} \circ W \subset W^2$ olduğundan $W^2 \in \tau_{\mathcal{U}^{-1}\times\mathcal{U}}$ elde edilir. □

Örnek 3.1.49. Bölümün başında $\mathbb{R}$ üzerindeki $\mathcal{Q}$ düzgünümsülüğü için tanımlanan Q_ϵ civarlarını düşünelim. Hiçbir $\tau_{\mathcal{Q}\times\mathcal{Q}}$ açık küme $\triangle$'yı kapsayamayacağından Q_ϵ civarı, $\triangle$'nın $\tau_{\mathcal{Q}\times\mathcal{Q}}$ komşuluğu olamaz. Ancak her $Q_\epsilon \in \mathcal{Q}$ için $V^2 \subset Q_\epsilon$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{Q}$ var ve önceki sonuçtan da $V^2 \in \tau_{\mathcal{Q}^{-1}\times\mathcal{Q}}$ olduğundan Q_ϵ, $\triangle$'nın $\tau_{\mathcal{Q}^{-1}\times\mathcal{Q}}$ komşuluğu olur.

Önerme 3.1.50. $\mathcal{U}$ ve $\mathcal{V}$, bir X kümesi üzerinde düzgünümsü yapılar olsun. $M \subset X \times X$ olmak üzere M'nin $\tau_{\mathcal{U}\times\mathcal{V}}$ topolojisine göre kapanışı $\overline{M} = \cap\{V^{-1} \circ M \circ U | U \in \mathcal{U}$

ve $V \in \mathcal{V}\}$ olur.

Kanıt:

- $(a,b) \in \overline{M} \Rightarrow \forall N \in \mathcal{K}_{\tau_{\mathcal{U}\times\mathcal{V}}}((a,b))$ için $N \cap M \neq \emptyset \Rightarrow$ Önerme 3.1.47'den her $U \in \mathcal{U}$ ve $V \in \mathcal{V}$ için $V \circ \{(a,b)\} \circ U^{-1} \in \mathcal{K}_{\tau_{\mathcal{U}\times\mathcal{V}}}((a,b)) \Rightarrow \exists (c,d) \in X \times X$: $(c,d) \in V \circ \{(a,b)\} \circ U^{-1}$ ve $(c,d) \in M \Rightarrow \exists z,t \in X : (c,t) \in U^{-1}, (t,z) \in \{(a,b)\}$ ve $(z,d) \in V \Rightarrow (a,c) \in U, (c,d) \in M$ ve $(d,b) \in V^{-1} \Rightarrow \forall U \in \mathcal{U}$ ve $V \in \mathcal{V}$ için $(a,b) \in V^{-1} \circ M \circ U$.

- $(a,b) \in \cap\{V^{-1} \circ M \circ U | U \in \mathcal{U},\ V \in \mathcal{V}\}$ ve $N \in \mathcal{K}_{\tau_{\mathcal{U}\times\mathcal{V}}}((a,b))$ olsun. Bu durumda $(a,b) \in G \times H \subset N$ olacak şekilde $G \in \tau_{\mathcal{U}}$ ve $H \in \tau_{\mathcal{V}}$ vardır. Buradan $\exists U_1 \in \mathcal{U}$ ve $V_1 \in \mathcal{V}$ için $a \in U_1(a) \subset G$ ve $b \in V_1(b) \subset H$ olur ve $U_1(a) \times V_1(b) \subset N$ elde edilir. Ayrıca hipotezden $(a,b) \in V_1^{-1} \circ M \circ U_1$'dir ve böylece $\exists z,t \in X$ için $t \in U_1(a), z \in V_1(b)$ ve $(t,z) \in M$ olur. O halde $(t,z) \in U_1(a) \times V_1(b)$ olduğundan $N \cap M \neq \emptyset$ ve $(a,b) \in \overline{M}$ bulunur. □

Sonuç 3.1.51. $\mathcal{U}$, X üzerinde bir düzgünümsü yapı olsun. Bu durumda $\{U | U \in \mathcal{U}$ ve $U, \tau_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}^{-1}}$-kapalı$\}$ ailesi $\mathcal{U}$ için bir taban olur.

Önerme 3.1.52. τ_1 ve τ_2 bir X kümesi üzerindeki topolojiler olsun. $(Y,\mathcal{V})$ bir düzgünümsü uzay ve $f : X \to Y$ $\tau_1 - \tau_{\mathcal{V}}$ ve $\tau_2 - \tau_{\mathcal{V}^{-1}}$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda her $V \in \mathcal{V}$ için $f^{-1}(V) \in \mathcal{K}_{\tau_2\times\tau_1}(\triangle)$ olur.

Kanıt: $V \in \mathcal{V}$ alalım. Böylece $W^2 \subset V$ olacak şekilde bir $W \in \mathcal{V}$ vardır. Eğer bir $x \in X$ alınırsa f,$\tau_1 - \tau_{\mathcal{V}}$ ve $\tau_2 - \tau_{\mathcal{V}^{-1}}$ sürekli olduğundan bir $G_1 \in \tau_1$ ve $G_2 \in \tau_2$ vardır öyle ki $x \in G_1 \cap G_2$, $f(G_1) \subset W(f(x))$ ve $f(G_2) \subset W^{-1}(f(x))$ olur. Herhangi bir $(a,b) \in G_2 \times G_1$ için $(f(a), f(x)), (f(x), f(b)) \in W$ olduğundan $(f(a), f(b)) \in W^2 \subset V$'dir ve $(a,b) \in f^{-1}(V)$ bulunur. Böylece $G_2 \times G_1 \subset f^{-1}(V)$'dir ve ayrıca $G_2 \times G_1 \in \tau_2 \times \tau_1$ olduğu dikkate alınırsa, $f^{-1}(V)$, $\triangle$'nın $\tau_2 \times \tau_1$ komşuluğu olur. □

Teorem 3.1.53. (X,τ) kompakt Hausdorff uzay ve G, X üzerinde kapalı kısmi sıralı küme olsun. Bu durumda X üzerinde $\cap\mathcal{U} = G$ ve $\tau_{\mathcal{U}^s} = \tau$ olacak şekilde sadece bir $\mathcal{U}$ düzgünümsülüğü vardır.

Kanıt: $\mathcal{U}$, X üzerinde $\cap\mathcal{U} = G$ ve $\tau_{\mathcal{U}^s} = \tau$ şartını sağlayan bir düzgünümsülük olsun. Öncelikle $\mathcal{U}$ süzgecinin, G'nin tüm $\tau \times \tau$ komşuluklarından oluştuğunu gösterelim. Sonuç 3.1.48'den $\mathcal{U}$'nun tüm elemanları zaten G'nin $\tau\times\tau$ komşuluğudur. $\mathcal{U}$'nun elemanı olmayan G'nin bir V $\tau \times \tau$ komşuluğunu alalım. Bu durumda $\{U \setminus V | U \in \mathcal{U}\}$ ailesi $X \times X$ üzerinde bir $\mathcal{V}$ süzgeci için taban olur. Çünkü $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ olmak üzere $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$ dır ve $(U_1 \cap U_2) \setminus V \subset (U_1 \setminus V) \cap (U_2 \setminus V)$ dir. (X, τ) kompakt olduğundan $\mathcal{V}$'nin bir $\tau \times \tau$ yığılma noktası (x, y) vardır ve $(x, y) \notin G$ dir. Aksine, $(x, y) \in G$ olsa $(x, y) \in V$ olur ve $V \in \mathcal{K}_{\tau \times \tau}(V)$ olduğundan $G \subset T \subset V$ olacak şekilde bir $T \in \tau \times \tau$ vardır. Ayrıca $(x, y) \in \bigcap_{U \in \mathcal{U}} \overline{(U \setminus V)}$ olduğundan $T \cap (U \setminus V) \neq \emptyset$'dir. Böylece, $z \in T, z \in U$ ve $z \notin V$ olacak şekilde bir $z \in X$ olmalıdır. Bu ise $T \subset V$ olması ile çelişir. O halde $(x, y) \notin G$ olmalıdır. $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$'den daha kaba olduğundan (x, y), $\mathcal{U}$'nun da bir yığılma noktasıdır. Ayrıca Sonuç 3.1.51'den $\mathcal{U}$'nun elemanlarının $\tau \times \tau$'ya göre kapanışlarının arakesiti G olur. Bu ise (x, y)'nin $\mathcal{U}$'nun bir yığılma noktası ve $(x, y) \notin G$ olması ile çelişir. Böylece $\mathcal{U}$'nun, G'nin tüm $\tau \times \tau$ komşuluklarından oluştuğu gösterilmiş olur. Kanıtın tamamlanması için $\mathcal{U}$'nun, X üzerinde $\cap\mathcal{U} = G$ ve $\tau_{\mathcal{U}^s} = \tau$ şartlarını sağlayan bir düzgünümsü yapı olduğu gösterilmelidir. $\mathcal{U}$'nun yapısından dolayı açıkça $\cap\mathcal{U} = G$ dir. $\mathcal{U}$'nun, X üzerinde bir düzgünümsülük olduğunu göstermek için Tanım 3.1.1'deki (b) şartını sağladığını göstermek yeterlidir. Bir $\tau \times \tau$ açık $U \in \mathcal{U}$ alalım öyle ki her $V \in \mathcal{U}$ için $V^2 \not\subset U$ yani $V^2 \setminus U \neq \emptyset$ olsun. Her $V \in \mathcal{U}$ için $V' := \{((x, y), z) \in X^2 \times X | (x, y) \notin U, (x, z), (z, y) \in V\}$ kümesini tanımlayalım. Buradan $\mathcal{B} = \{V' | V \in \mathcal{U}\}$ ailesi $[(X \times X) \setminus U] \times X$ üzerinde bir süzgecin tabanı olur. Ayrıca, $(X \times X) \setminus U \subset X \times X$ ve $(X \times X) \setminus U$ altkümesi $\tau \times \tau$ kapalı olduğundan kompakt olur. Yine X kompakt olduğundan $[(X \times X) \setminus U] \times X$ kompakttır. Böylece, $\mathcal{B}$ bir $((a, b), c)$ yığılma noktasına sahiptir ve $(a, c) \in G$ dir. Aksine $(a, c) \notin G$ olsa, X kompakt ve Hausdorff olduğundan regülerdir ve buradan $G \subset L$ ve $(a, c) \in H$ olacak şekilde ayrık açık L ve H kümeleri vardır. Şimdi $W = \{((x, y), z) | (x, z) \in H\}$ kümesini kuralım. Bu durumda $(a, c) \in H$ olduğundan $((a, b), c) \in W$ ve $W \cap V' = \emptyset$ olur. Bu ise $((a, b), c)$'nin $\mathcal{B}$'nin bir yığılma noktası olması ile çelişir. Buradan $(a, c) \in G$ olmalıdır. $(c, b) \in G$ olduğu da aynı şekilde gösterilir. G kısmi sıralı olduğundan geçişlidir ve $(a, b) \in G$ olur. Ancak $((a, b), c) \in [(X \times X) \setminus U] \times X$ olduğundan $(a, b) \notin U$ dır ve $\cap\mathcal{U} = G$ olduğundan $G \subset U$ dır. Böylece $(a, b) \in G$ olmasının bir çelişki olduğu görülür. O halde, $\mathcal{U}$ bir düzgünümsü yapıdır. Şimdi de $\tau_{\mathcal{U}^s} = \tau$ olduğunu gösterelim. $H \in \tau_{\mathcal{U}^s}$ ve $x \in H$ alalım. Bu durumda $\exists V \in \mathcal{U} : (V \cap V^{-1})(x) \subset H$ olur. $\mathcal{U}$'nun tüm elemanları G'nin $\tau \times \tau$ komşuluğu olduğundan $G \subset A \times B \subset V$ olacak şekilde $A, B \in \tau$ vardır. Ayrıca $G^{-1} \subset B \times A \subset V^{-1}$ dir ve G yansımalı olduğundan $x \in (G \cap G^{-1})(x)$ olur. Buradan

$x \in [(A\times B)\cap(B\times A)](x) \subset H$'dir. Ayrıca $[(A\times B)\cap(B\times A)](x) \in \tau$ olduğundan H'ın her elemanı bir iç nokta olur ve $H \in \tau$ elde edilir. Böylece $\tau_{\mathcal{U}^s} \subset \tau$ bulunur. $\cap\mathcal{U}$ kısmi sıralı olduğundan $\tau_{\mathcal{U}^s}$ topolojisi Hausdorff'tur. Gerçekten; $x, y \in X$ ve $x \neq y$ olsun. G kısmi sıralı olduğundan $(x,y) \notin \cap\mathcal{U}$ veya $(y,x) \notin \cap\mathcal{U}$ olur. $(x,y) \notin \cap\mathcal{U}$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $\exists U \in \mathcal{U} : (x,y) \notin U^2$'dir. Ayrıca $U \cap U^{-1} \in \mathcal{U}^s$ civarı için $V = U \cap U^{-1}$ alalım. Bu durumda $x \in V(x)$ ve $y \in V(y)$ olur. Ayrıca $V(x) \cap V(y) = \emptyset$ dir. $V(x) \in \mathcal{K}_{\tau_{\mathcal{U}^s}}(x)$ ve $V(y) \in \mathcal{K}_{\tau_{\mathcal{U}^s}}(y)$ olduğundan $\tau_{\mathcal{U}^s}$ topolojisi Hausdorff'tur. Hausdorff uzaylar içerisinde kompakt olanlar minimal olduğundan $\tau \subset \tau_{\mathcal{U}^s}$ olur ve böylece $\tau_{\mathcal{U}^s} = \tau$ elde edilir. $\square$

Sonuç 3.1.54. (X, τ) kompakt Hausdorff bir uzay olsun. τ ile uyumlu tek düzgünlük $\triangle$'nın tüm komşuluklar ailesidir.

Kanıt: Bilindiği gibi $\triangle$ kümesi, Hausdorff uzaylar için çarpım uzayında kapalıdır. Bu durumda önceki teoremde G yerine $\triangle$'yı ve $\mathcal{U}$'yu da düzgünlük alırsak $\mathcal{U}^s = \mathcal{U}$ olacağından $\tau_{\mathcal{U}} = \tau$ elde edilir. $\square$

Not 3.1.55. Daha önce belirttiğimiz gibi, düzgün sürekli dönüşümler, tanımlı oldukları düzgünümsü uzayların uyumlu olduğu topolojilere göre de sürekli olurlar. Bu durumun tersinin hangi şartlar altında geçerli olduğu aşağıdaki teorem ile verilecektir. Diğer yandan, düzgün uzaylar arasında tanımlı bir sürekli dönüşümün tanımlı olduğu düzgün uzayın düzgün topolojisi kompakt ise bu dönüşümün düzgün sürekli olduğu bilinmektedir. Bununla ilgili literatür kanıtına bu çalışmada değinilmemiştir ancak ilgili okuyucular için [1, Teorem 13.8] önerilir.

Teorem 3.1.56. $(X,\mathcal{U})$ ve $(Y,\mathcal{V})$ düzgünümsü uzaylar ve $(X,\mathcal{U}^s)$ bir kompakt Hausdorff uzay olsun. Eğer $f : X \to Y$ dönüşümü $\tau_{\mathcal{U}} - \tau_{\mathcal{V}}$ ve $\tau_{\mathcal{U}^{-1}} - \tau_{\mathcal{V}^{-1}}$ sürekli ise $f : (X,\mathcal{U}) \to (Y,\mathcal{V})$ düzgün sürekli olur.

Kanıt: $V \in \mathcal{V}$ alalım. Önerme 3.1.52'den $f^{-1}(V)$, $\triangle$'nın bir $\tau_{\mathcal{U}^{-1}\times\mathcal{U}}$ komşuluğu olur. Ayrıca Teorem 3.1.53'a göre, $\mathcal{U}$, $\triangle$'nın tüm komşuluklarından oluştuğundan $f^{-1}(V) \in \mathcal{U}$'dur. $\square$

Yukarıdaki teoremde bir $\mathcal{U}$ düzgünümsülüğü için kurulan $\mathcal{U}^s$ simetrizasyonu ile üretilen topolojinin kompakt olması koşulunun kaçınılmaz olduğuna dikkat edilmelidir. $\mathcal{U}$ ve $\mathcal{U}^{-1}$ düzgünümsülüklerinin her ikisinin de topolojilerinin kompakt olması teorem için yeterli değildir.

Örnek 3.1.57. $X = [-1,1] - \{0\}$ ve $\mathcal{Q}$, bölümün başında tanımlanan düzgünümsülük olmak üzere $\mathcal{U} = \mathcal{Q}|_{X\times X}$ olsun. Bu durumda $(X, \tau_{\mathcal{U}})$ ve $(X, \tau_{\mathcal{U}^{-1}})$ topolojik uzaylarının her ikisi de kompakttır. $f : X \to X$,

$$f(x) = \begin{cases} -1 & ;x < 0 \\ 1 & ;x > 0 \end{cases}$$

dönüşümünü tanımlayalım. f, $\tau_{\mathcal{U}} - \tau_{\mathcal{U}}$ ve $\tau_{\mathcal{U}^{-1}} - \tau_{\mathcal{U}^{-1}}$ süreklidir ancak, $f : (X,\mathcal{U}) \to (X,\mathcal{U})$ düzgün sürekli değildir.

Tanım 3.1.58. Y bir küme ve I bir indis kümesi olmak üzere her $i \in I$ için $(X_i,\mathcal{U}_i)$ düzgünümsü uzay ve $f_i : X_i \to Y$ bir dönüşüm olsun. Y üzerinde her $i \in I$ için f_i dönüşümünü düzgün sürekli yapan bir en ince $\mathcal{V}$ düzgünümsülüğü vardır. Bu şekilde tanımlı $\mathcal{V}$'ye *bitiş düzgünümsülüğü* denir. Açıkça $\mathcal{V}$, $\{U : \triangle \subset U \subset Y \times Y$ ve her $i \in I$ için $f_i^{-1}(U) \in \mathcal{U}_i\}$ süzgecinden daha kabadır. Eğer her $\mathcal{U}_i$ süzgeci düzgünlük ise $\mathcal{V}$ bitiş düzgünümsülüğü de bir düzgünlük olur.

X ve Y düzgünümsü uzaylar olmak üzere $f : X \to Y$ düzgün sürekli ve örten bir dönüşüm olsun. Eğer Y üzerinde f ile oluşturulan bitiş düzgünümsülüğü varsa f bölüm dönüşümü olur.

$(X,\mathcal{U})$ bir düzgünümsü uzay olsun. Açıktır ki, $(\cap\mathcal{U}) \cap (\cap\mathcal{U})^{-1}$ ikili bağıntısı X üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Bu denklik bağıntısını $\sim$ ile gösterelim. $q : X \to X/\sim$ bölüm dönüşümü ile $X/\sim$ üzerinde oluşturulan bitiş düzgünümsülüğüne, *$\mathcal{U}$'nun T_0 bölümü*, yani *$\mathcal{U}$' nun bölüm düzgünlüğü* denir.

Bu bölümün kalan kısmında yazımda kolaylık olması amacıyla şu gösterimler kullanılacaktır. X bir düzgünümsü uzay olmak üzere X uzayının düzgünümsülüğü $\mathcal{U}_X$ ile ve X'in ayrık düzgünlük ile donatılmış olan kümesi DX ile gösterilecektir.

Yardımcı Teorem 3.1.59. X ve Y düzgünümsü uzaylar olsun. Bu durumda $\mathcal{U}_{X\times Y}$ çarpım düzgünümsülüğü, $\mathcal{U}_{X\times DY}$ ve $\mathcal{U}_{DX\times Y}$ düzgünümsülüklerinin her ikisinden de daha kaba olan en ince düzgünümsülüktür.

Kanıt: İstenileni elde etmek için $\mathcal{U}_{DX\times Y} \wedge \mathcal{U}_{X\times DY} = \mathcal{U}_{X\times Y}$ olduğunu göstermeliyiz. $Z \in \mathcal{U}_{DX\times Y} \wedge \mathcal{U}_{X\times DY}$ alınırsa, $W^2 \subset Z$ olacak şekilde bir $W \in \mathcal{U}_{DX\times Y} \wedge \mathcal{U}_{X\times DY}$ vardır. O halde her $x \in X$ ve her $y \in Y$ için $U(x) \times \{y\} \subset W(x,y)$ ve $\{x\} \times V(y) \subset W(x,y)$ olacak şekilde $U \in \mathcal{U}_X$ ve $V \in \mathcal{U}_Y$ bulunur. Belirli bir $x \in X$ ve $y \in Y$ seçelim. Herhangi bir $(a,b) \in U(x) \times V(y)$ için $(a,b) \in U(x) \times \{b\} \subset W(x,b)$ ve $(x,b) \in \{x\} \times V(y) \subset$

$W(x,y)$ olur. $(x,b) \in W(x,y)$ gerçeğinden $W(x,b) \subset W(W(x,y)) = W^2(x,y)$ olup $(a,b) \in W^2(x,y) \subset Z(x,y)$ bulunur. Buradan her $x \in X$ ve $y \in Y$ için $U(x) \times V(y) \subset Z(x,y)$ olur ve böylece $Z \in \mathcal{U}_{X\times Y}$ elde edilir. Diğer taraftan bir $W \in \mathcal{U}_{X\times Y}$ alalım. Bu durumda her $x \in X$ ve $y \in Y$ için $U(x) \times V(Y) \subset W(x,y)$ olacak şekilde $U \in \mathcal{U}_X$ ve $V \in \mathcal{U}_Y$ vardır. U ve V aynı zamanda ayrık düzgünlüğün de civarları olduğundan $U(x) \times V(y) \in \mathcal{U}_{DX\times Y} \cap \mathcal{U}_{X\times DY}$ olur. Buradan da $W \in \mathcal{U}_{DX\times Y} \wedge \mathcal{U}_{X\times DY}$ elde edilir. $\square$

Teorem 3.1.60. X ve Y düzgünümsü uzaylar ve $f : X \to Y$ bir bölüm dönüşümü olsun. D ve E ayrık düzgünlüğü taşıyan düzgün uzaylar ve $g : D \to E$ bir örten dönüşüm olsun. Bu durumda $f \times g : X \times D \to Y \times E$ dönüşümü düzgünümsü uzaylar arasında bir bölüm dönüşümü olur.

Kanıt: Z bir düzgünümsü uzay ve $h : Y \times E \to Z$, $h \circ (f \times g)$ düzgün sürekli olacak şekilde bir dönüşüm olsun. $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, her $n \in \mathbb{N}$ için $Z_{n+1}^2 \subset Z_n$ olacak şekilde $\mathcal{U}_Z$'nin civarlarının bir dizisi olsun. Gerçekten her civar bir normal komşuağı olduğundan böyle bir dizi vardır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $W_n = h^{-1}(Z_n)$ oluşturalım. W_n yansıyandır ve $W_{n+1}^2 \subset W_n$'dir. Ayrıca $h \circ (f \times g) : X \times D \to Z$ düzgün sürekli olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $(h \circ (f \times g))^{-1}(Z_n) = (f \times g)^{-1}(W_n) \in \mathcal{U}_{X\times D}$ dır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $V_n = \{(y_1, y_2) \in Y \times Y : ((y_1, e), (y_2, e)) \in W_n, e \in E\}$ kümesini oluşturalım. W_n yansıyan olduğundan V_n de yansıyandır ve $V_{n+1}^2 \subset V_n$ dır. Üstelik $\{((y_1, e), (y_2, e)) : (y_1, y_2) \in V_n, e \in E\} \in \mathcal{U}_{Y\times E}$ olduğundan, $V_n \in \mathcal{U}_Y$ ise $W_n \in \mathcal{U}_{Y\times E}$ olur. Ayrıca V_n'in tanımından $\{((y_1, e), (y_2, e)) : (y_1, y_2) \in V_n, e \in E\} \subset W_n$ olduğu göz önüne alınırsa $W_n \in \mathcal{U}_{Y\times E}$ bulunur. O halde $V_n \in \mathcal{U}_Y$ olduğu gösterilmelidir. Bunun için, f bir bölüm dönüşümü olduğundan $f^{-1}(V_n) \in \mathcal{U}_X$ olduğunu göstermek yeterli olur. $n \in \mathbb{N}$ alalım. $(f \times g)^{-1}(W_n) \in \mathcal{U}_{X\times D}$ olduğundan bir $M_n \in \mathcal{U}_X$ vardır öyle ki $\{((f(m_1), g(d)), (f(m_2), g(d))) : (m_1, m_2) \in M_n, d \in D\} \subset W_n$ olur. $(m_1, m_2) \in M_n$ olsun. Herhangi bir $e \in E$ için g örten olduğundan $g(d) = e$ olacak şekilde bir $d \in D$ vardır ve böylece V_n'in tanımından $(f(m_1), f(m_2)) \in V_n$ bulunur. Buradan $M_n \subset f^{-1}(V_n)$ olup $f^{-1}(V_n) \in \mathcal{U}_X$ elde edilir. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $V_n \in \mathcal{U}_Y$ olur ve h'ın düzgün sürekli olduğu görülür. $\square$

Topolojik uzaylarda herhangi iki bölüm dönüşümünün çarpımı bir bölüm dönüşümü olmak zorunda değilken[6] düzgünümsü uzaylarda bölüm dönüşümlerinin çarpımı yine bir bölüm dönüşümüdür.

[6]Örnek için bakınız [8, Örnek 2.4.20].

Yardımcı Teorem 3.1.61. $f : X \to Y$ ve $g : Z \to T$ düzgünümsü uzaylar arasında bölüm dönüşümleri olsun. Bu durumda $f \times g$ de bir bölüm dönüşümü olur.

Kanıt: E herhangi bir düzgünümsü uzay olsun. Bir $h : Y \times T \to E$ dönüşümü için $h \circ (f \times g) : X \times Z \to E$ dönüşümünün düzgün sürekli olduğunu varsayalım. Teorem 3.1.60'den $f \times g : X \times DZ \to Y \times DT$ ve $f \times g : DX \times Z \to DY \times T$ dönüşümlerinin her ikisi de bölüm dönüşümüdür. $h \circ (f \times g) : X \times DZ \to E$ ve $h \circ (f \times g) : DX \times Z \to E$ düzgün sürekli dönüşümleri göz önüne alınınca, Teorem 3.1.60'in kanıtından $h : Y \times DT \to E$ ve $h : DY \times T \to E$ dönüşümleri de düzgün sürekli olur. Böylece Yardımcı Teorem 3.1.59'den herhangi bir $U \in \mathcal{U}_E$ için $h^{-1}(U) \in \mathcal{U}_{DY \times T}$ ve $h^{-1}(U) \in \mathcal{U}_{Y \times DT}$ iken $h^{-1}(U) \in \mathcal{U}_{Y \times T}$ olacağından $h : Y \times T \to E$ düzgün sürekli olur. Sonuç olarak, $f \times g$ bölüm dönüşümüdür. $\square$

Teorem 3.1.62. Quasi düzgün uzaylar arasındaki $f_i : X_i \to Y_i$, $(i \in I)$ bölüm dönüşümlerinin herhangi bir $(f_i)_{i \in I}$ ailesinin $\prod_{i \in I} f_i$ çarpımı bir bölüm dönüşümüdür.

Kanıt: Teoremin kanıtına cok uzun olduğu için bu çalışmada yer verilememiştir. Ancak isteyen okuyucular kanıta [5, Önerme 2.1.21]'den ulaşabilirler. $\square$

3.2 Yakınımsı Uzaylar

Bu bölümde öncelikle yakınımsı uzaylarla ilgili bazı temel bilgiler ve sonuçlar verilecek ve daha sonra yakınımsı uzayların, topolojik uzaylar ve düzgünümsü uzaylarla olan ilişkisi incelenecektir. Bu kısımda [3],[5] ve [6] nolu kaynaklardan yararlanılmıştır.

Gösterimlerde $A, B \subset X$ ve δ, $P(X)$, kuvvet kümesinde bir ikili bağıntı olmak üzere $(A, B) \in \delta$ yerine $A\delta B$ ve $(A, B) \notin \delta$ yerine de $A\overline{\delta}B$ kullanılacaktır.

Tanım 3.2.1. X boştan farklı bir küme, $P(X)$, X'in kuvvet kümesi ve δ, $P(X)$'te bir ikili bağıntı olsun. Aşağıdaki şartları sağlıyorsa δ'ya, *yakınımsılık* ve (X, δ) ikilisine de *yakınımsı uzay* denir:

a) $X\overline{\delta}\emptyset$ ve $\emptyset\overline{\delta}X$

b) $C\delta A \cup B \Leftrightarrow C\delta A$ veya $C\delta B$

$A \cup B\delta C \Leftrightarrow A\delta C$ veya $B\delta C$

c) $\forall x \in X$ için $\{x\}\delta\{x\}$

d) Eğer $A\overline{\delta}B$ ise $A\overline{\delta}C$ ve $X \setminus C\overline{\delta}B$ olacak şekilde bir $C \subset X$ vardır.

δ'nın tersi δ^{-1} ile gösterilir ve δ bir yakınımsılık ise δ^{-1} de bir yakınımsılıktır. Burada eğer $\delta = \delta^{-1}$ oluyorsa δ bir *yakınlık* olur.
(X, δ) bir yakınımsı uzay ve $A, B \subset X$ olmak üzere eğer $A\delta B$ ise A, B'ye *yakındır* ve benzer olarak, eğer $A\overline{\delta}B$ ise A, B'den *uzaktır* denir.

Önerme 3.2.2. (X, δ) bir yakınımsı uzay olsun Bu durumda aşağıdakiler vardır:

i) $A \subset A'$, $B \subset B'$ ve $A\delta B$ ise $A'\delta B'$ dır.

ii) $A \cap B \neq \emptyset$ ise $A\delta B$ dır.

Kanıt:

i) $A' = A \cup (A' \setminus A)$ olarak yazalım. $A\delta B$ olduğundan yakınlık tanımı **b)**'den $A'\delta B$ bulunur. Aynı şekilde $B' = B \cup (B' \setminus B)$ olarak yazılırsa $A'\delta B$ olduğundan $A'\delta B'$'dir.

ii) Yakınlık tanımı **c)**'den $(A \cap B)\delta(A \cap B)$'dır. $A \cap B \subset A$ ve $A \cap B \subset B$ olduğundan *i*)'ye göre $A\delta B$ olur. $\square$

$A, B \subset X$ ve (X, δ) bir yakınımsı uzay olmak üzere eğer $A\overline{\delta}(X \setminus B)$ oluyorsa B'ye A'nın bir δ-*komşuluğu* denir.

Önerme 3.2.3. (X, δ) bir yakınımsı uzay ve $\ll_\delta$, $P(X)$ üzerinde aşağıdaki gibi tanımlı bir ikili bağıntı olsun:

$A \ll_\delta B \Leftrightarrow B$, A'nın bir δ-komşuluğudur.

Bu durumda $\ll_\delta$ aşağıdaki şartları sağlar:

a) $X \ll_\delta X$ ve $\emptyset \ll_\delta \emptyset$

b) $A \ll_\delta B$ ise $A \subset B$ dir.

c) $A \subset B \ll_\delta C \subset D$ ise $A \ll_\delta D$ olur.

d) $A \ll_\delta B_1$ ve $A \ll_\delta B_2$ ise $A \ll_\delta B_1 \cap B_2$ dır.

e) $A_1 \ll_\delta B$ ve $A_2 \ll_\delta B$ ise $A_1 \cup A_2 \ll_\delta B$ dır.

f) $A \ll_\delta B$ ise $A \ll_\delta C \ll_\delta B$ olacak şekilde bir $C \subset X$ vardır.

Kanıt:

a) $\quad * \; X\overline{\delta}\emptyset \Rightarrow X\overline{\delta}(X \setminus X) \Rightarrow X \ll_\delta X$

$\quad * \; \emptyset\overline{\delta}X \Rightarrow \emptyset\overline{\delta}(X \setminus \emptyset) \Rightarrow \emptyset \ll_\delta \emptyset$

b) $A \ll_\delta B \Rightarrow A\overline{\delta}(X \setminus B) \Rightarrow$ Önerme 3.2.2 ii)'den $A \cap (X \setminus B) = \emptyset \Rightarrow A \subset B$.

c) $B \ll_\delta C$ olduğundan $B\overline{\delta}(X \setminus C)$ dir. $B = B \cup A$ ve $X \setminus C = (X \setminus C) \cup (X \setminus D)$ olarak yazılabildiğinden yakınlık tanımı **b)**'den $A\overline{\delta}(X \setminus D)$ olur ve $A \ll_\delta (X \setminus D)$ bulunur.

d) $A\overline{\delta}(X \setminus B_1)$ ve $A\overline{\delta}(X \setminus B_2)$ olduğundan $A\overline{\delta}(X \setminus B_1) \cup (X \setminus B_2)$ olur ve $A \ll_\delta B_1 \cap B_2$ bulunur.

e) $A_1\overline{\delta}(X \setminus B)$ ve $A_2\overline{\delta}(X \setminus B)$ olduğundan $A_1 \cup A_2\overline{\delta}(X \setminus B)$ olur ve $A_1 \cup A_2 \ll_\delta B$ bulunur.

f) $A \ll_\delta B$ olduğundan $A\overline{\delta}(X \setminus B)$ olur ve bir $E \subset X$ için $A\overline{\delta}E$ ve $(X \setminus E)\overline{\delta}(X \setminus B)$ sağlanır. Bu durumda $C := X \setminus E$ seçilirse $A \ll_\delta C \ll_\delta B$ elde edilir. $\square$

Yukarıda tanımlanan $\ll_\delta$ ikili bağıntısına δ*'nın güçlü içermesi* denir.

Not 3.2.4. X bir küme olmak üzere $\ll$ ikili bağıntısı $P(X)$ üzerinde Önerme 3.2.3'deki **a)-f)** şartlarını sağlayan bir ikili bağıntı olsun. " $A \ll (X \setminus B) \Rightarrow A\overline{\delta}B$ " ile tanımlanan δ ikili bağıntısı X üzerinde bir yakınımsılık olur. Ayrıca bu tanımlanan δ için $A\overline{\delta}(X \setminus B) \Leftrightarrow A \ll B$ karakterizasyonu açıktır.
Böylece herhangi bir güçlü içermeden bir yakınımsılık ve herhangi bir yakınımsılıktan da bir güçlü içerme elde edilebildiği görülmüş olur. O halde güçlü içermenin simetri şartı, yakınımsılığa simetri şartı eklenerek yakınlık yapılması ile örtüşür. Buradan güçlü içermenin simetri şartı şu şekilde ifade edilebilir:

$$A \ll_\delta B \Leftrightarrow (X \setminus B) \ll_\delta (X \setminus A)$$

Önerme 3.2.5. (X, δ) bir yakınımsı uzay ise $\mathrm{cl}_\delta : P(X) \to P(X)$, $\mathrm{cl}_\delta(A) = \{x : \{x\}\delta A\}$ ile tanımlı dönüşümü X üzerinde bir kapanış operatörüdür.
Kanıt:

- $x \in A \Rightarrow \{x\}\delta\{x\}$ ve $A = \{x\} \cup (A \setminus \{x\})$ olduğundan $\{x\}\delta A \Rightarrow x \in \mathrm{cl}_\delta(A) \Rightarrow A \subset \mathrm{cl}_\delta(A)$.

- Yukarıdan $\mathrm{cl}_\delta(A) \subset \mathrm{cl}_\delta(\mathrm{cl}_\delta(A))$ olduğu açıktır. Şimdi diğer kapsamayı gösterelim. $x \in \mathrm{cl}_\delta(\mathrm{cl}_\delta(A))$ ise $\{x\}\delta\ \mathrm{cl}_\delta(A)$'dır ve $\mathrm{cl}_\delta(A) = A \cup (\mathrm{cl}_\delta(A) \setminus A)$ olduğundan $\{x\}\delta A$ olup $x \in \mathrm{cl}_\delta(A)$ elde edilir. Böylece her iki kapsamadan $\mathrm{cl}_\delta(\mathrm{cl}_\delta(A)) = \mathrm{cl}_\delta(A)$ bulunur.

- $x \in \mathrm{cl}_\delta(A \cup B) \Leftrightarrow \{x\}\delta A \cup B \Leftrightarrow \{x\}\delta A$ veya $\{x\}\delta B \Leftrightarrow x \in \mathrm{cl}_\delta(A)$ veya $x \in \mathrm{cl}_\delta(B) \Leftrightarrow x \in \mathrm{cl}_\delta(A) \cup \mathrm{cl}_\delta(B)$.

- $x \in \mathrm{cl}_\delta(\emptyset)$ alınırsa, $\{x\}\delta\ \emptyset$ olur. Ayrıca, $X = \{x\} \cup (X \setminus \{x\})$ olarak yazılabildiğinden $X\delta\ \emptyset$ bulunur. Bu ise çelişkidir. O halde $\mathrm{cl}_\delta(\emptyset) = \emptyset$ olmalıdır. □

Bir X kümesi üzerindeki δ yakınımsılığı ile üretilen τ_δ topolojisi önceki önermede tanımlanan kapanış operatörü yolu ile verilir ve bu topolojiye δ *ile uyumlu* denir. Yani τ_δ topolojisine göre bir $A \subset X$'in kapanışını $\overline{A}$ ile gösterirsek $\overline{A} = \mathrm{cl}_\delta(A)$ olur.
Dikkat edilirse $A\overline{\delta}B$ iken $\mathrm{cl}_\delta B \subset X \setminus A$ olur: Bir $x \in \mathrm{cl}_\delta B$ için $x \in A$ olsa $A = \{x\} \cup (A \setminus \{x\})$ olarak yazılabileceğinden ve $\{x\}\delta B$ olduğundan $A\delta B$ olurdu.
Herhangi bir $A \subset X$ altkümesinin içini iç(A) ile gösterelim. $A\overline{\delta}B$ iken $A \subset$ iç$(X \setminus B)$ olur. Böylece herhangi bir $x \in X$ ve $A \subset X$ için $\{x\}\overline{\delta}(X \setminus A)$ ise kesinlikle $\{x\}\delta A$ olur.

Önerme 3.2.6. (X, δ) bir yakınımsı uzay ve $x \in X$ olsun. Bir $A \subset X$ altkümesinin x'in τ_δ-komşuluğu olması için gerek ve yeter koşul x'in bir δ-komşuluğu olmasıdır.
Kanıt: $(\Rightarrow)$ $A \in \mathcal{K}_{\tau_\delta}(x)$ alalım. $x \in G \subset A$ olacak şekilde $G \in \tau_\delta$ vardır. $G \in \tau_\delta$ olduğundan $\mathrm{cl}_\delta(X \setminus G) = X \setminus G$ olur. Ayrıca $x \notin X \setminus A \subset X \setminus G = \mathrm{cl}_\delta(X \setminus G)$ dır. Böylece $\{x\}\overline{\delta}(X \setminus G)$ olur. Diğer yandan, $X \setminus G = (X \setminus A) \cup (A \cup G)$ ve $\{x\}\overline{\delta}(X \setminus G)$ olduğundan $\{x\}\overline{\delta}(X \setminus A)$ bulunur ve A, x'in bir δ-komşuluğu olur.
$(\Leftarrow)$ A, x'in bir δ-komşuluğu olsun. Bu durumda $\{x\}\overline{\delta}(X \setminus A)$ dır. Buradan $x \in$iç(A) olur ve iç$(A) \in \tau_\delta$ olduğundan $A \in \mathcal{K}_{\tau_\delta}(x)$ bulunur. □

Önerme 3.2.7. $(X,\mathcal{U})$ bir düzgünümsü uzay olsun. $\delta_\mathcal{U}$, $P(X)$ üzerinde "$A\delta_\mathcal{U}B \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}$ için $(A \times B) \cap U \neq \emptyset$" ile tanımlı bir ikili bağıntı olsun. Bu durumda $\delta_\mathcal{U}$, X üzerinde bir yakınımsılık olur.
Kanıt: $\delta_\mathcal{U}$'nın Tanım 3.2.1'deki **a)**, **b)** ve **c)** şartlarını sağladığı açıktır. Biz **d)** şartının sağlandığını gösterelim. $A\overline{\delta_\mathcal{U}}B$ olsun. Bu durumda $\exists U \in \mathcal{U} : (A \times B) \cap U = \emptyset$ olur. Buradan $U(A) \cap B = \emptyset$ olur. Ayrıca $V^2 \subset U$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{U}$ vardır. Üstelik, $[A \times (X \setminus V(A))] \cap V = \emptyset$ ve $[V(A) \times B] \cap V = \emptyset$ olduğundan $A\overline{\delta_\mathcal{U}}(X \setminus V(A))$ ve $V(A)\overline{\delta_\mathcal{U}}B$ olur. Bu durumda, $X \setminus V(A) \subset X$ olduğundan istenen elde edilir. □

Herhangi bir $(X,\mathcal{U})$ düzgünümsü uzayı için Önerme 3.2.7'de tanımlanan $\delta_\mathcal{U}$'ya $\mathcal{U}$ ile üretilen yakınımsılık denir. Hatta $\delta_\mathcal{U}$'ya karşılık gelen $\ll_\mathcal{U}$ güçlü içermesi $''A \ll_\mathcal{U} B \Leftrightarrow \exists U \in \mathcal{U} : U(A) \subset B''$ ile verilir.

Önerme 3.2.8. $(X,\mathcal{U})$ bir düzgünümsü uzay olsun. Bu durumda $\tau_\mathcal{U} = \tau_{\delta_\mathcal{U}}$ olur.

Kanıt:

- $G \in \tau_\mathcal{U}$ olsun. Zaten $X \setminus G \subset \mathrm{cl}_{\delta_\mathcal{U}}(X \setminus G)$ vardır. Diğer kapsamayı gösterelim. $x \in \mathrm{cl}_{\delta_\mathcal{U}}(X \setminus G)$ ve $x \in G$ olsun. Buradan $\{x\}\delta_\mathcal{U}(X \setminus G)$ olur. Bu durumda her $U \in \mathcal{U}$ için $U(x) \cap (X \setminus G) \neq \emptyset$ olur. Ayrıca $x \in G$ olduğundan $V(x) \subset G$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{U}$ vardır. O halde $V(x) \cap (X \setminus G) \neq \emptyset$ olmalıdır. Bu ise mümkün değildir. Böylece $\mathrm{cl}_{\delta_\mathcal{U}}(X \setminus G) \subset X \setminus G$ olur ve $G \in \tau_{\delta_\mathcal{U}}$ elde edilir.

- $G \in \tau_{\delta_\mathcal{U}}$ ve $x \in G$ olsun $x \notin (X \setminus G)$ ve $X \setminus G = \mathrm{cl}_{\delta_\mathcal{U}}(X \setminus G)$ olduğundan $U(x) \cap (X \setminus G) = \emptyset$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{U}$ vardır. Bu durumda, $U(x) \subset G$ olduğundan $G \in \tau_\mathcal{U}$ elde edilir. □

Tanım 3.2.9. Bir $\mathcal{U}$ düzgünümsü yapısı için eğer $\delta_\mathcal{U} = \delta$ oluyorsa $\mathcal{U}$, δ *ile uyumludur* denir. (X, δ) bir yakınımsı uzay olsun. δ ile uyumlu düzgünümsülüklerin sınıfı $\pi(\delta)$ ile gösterilir. Yani $\pi(\delta) = \{\mathcal{U} | \delta_\mathcal{U} = \delta\}$'dır. $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \pi(\delta)$ ise $\mathcal{U}$ ile $\mathcal{V}$ *yakınımsı denktir* denir ve kısaca qp-denk yazılır.

Önerme 3.2.10. $\mathcal{U}$ ve $\mathcal{V}$, X üzerinde iki düzgünümsülük olsun. Eğer $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ ise $\tau_\mathcal{U} \subset \tau_\mathcal{V}$ ve $\delta_\mathcal{V} \subset \delta_\mathcal{U}$ olur.

Kanıt:

- $G \in \tau_\mathcal{U}$ ve $x \in G$ olsun. Bu durumda $x \in U(x) \subset G$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{U}$ vardır. Aynı zamanda $U \in \mathcal{V}$ olduğundan $G \in \tau_\mathcal{V}$ olur.

- $(A, B) \in \delta_\mathcal{V}$ olsun. O halde her $V \in \mathcal{V}$ için $(A \times B) \cap V \neq \emptyset$ olur. Ayrıca her $U \in \mathcal{U}$ için $U \in \mathcal{V}$ dır. Buradan her $U \in \mathcal{U}$ için de $(A \times B) \cap U \neq \emptyset$ olur ve $(A, B) \in \delta_\mathcal{U}$ elde edilir. □

Örnek 3.2.11. Her $A, B \subset \mathbb{R}$ için $d(A, B) = \inf\{|a - b| : a \in A, b \in B\}$ tanımlayalım.

a) $\mathbb{R}$ üzerindeki $\mathcal{E}$ düzgünlüğü için $A\delta_\mathcal{E}B \Leftrightarrow d(A, B) = 0$ dır: Öncelikle bu şekilde tanımlı olan $\delta_\mathcal{E}$'nin bir yakınımsılık olduğunu gösterelim. $\delta_\mathcal{E}$'nin Tanım 3.2.1'deki **a)**,**b)** ve **c)** şartlarını sağladığı açıktır. **d)** şartının da sağlandığını gösterelim.

$A\overline{\delta_{\mathcal{E}}}B$ olsun. Bu durumda $d(A,B) \neq 0$ dır. $\epsilon := d(A,B)$ ve $d(A,x) = d(B,x)$ olacak şekilde $x \in X$ seçelim. $C := B_d(x, \epsilon/4) \cup B$ olarak alırsak $A\overline{\delta_{\mathcal{E}}}C$ ve $(X-C)\overline{\delta_{\mathcal{E}}}B$ olur.

Şimdi $\delta_{\mathcal{E}}$ için Önerme 3.2.7'de verilen tanım ile bu örnekte verilen tanımın çakıştığını yani $''\forall\epsilon > 0$ için $(A \times B) \cap U_\epsilon \neq \emptyset \Leftrightarrow d(A,B) = 0''$ olduğunu gösterelim:

$(\Rightarrow)$ $d(A,B) \neq 0$ olduğunu varsayalım. $\epsilon := d(A,B)$ olarak seçersek $(A \times B) \cap U_\epsilon = \emptyset$ olur ve hipotez ile çelişir.

$(\Leftarrow)$ Bir $\epsilon > 0$ için $(A \times B) \cap U_\epsilon = \emptyset$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda her $a \in A$ ve her $b \in B$ için $|a - b| \geq \epsilon$ olur. Bu ise $d(A,B) = 0$ olması ile çelişir.

b) $\mathbb{R}$ üzerinde $''A \ll B \Leftrightarrow A \subset B$ ve $d(\mathbb{Q} \cap A, X - B) > 0''$ ile $\ll$ ikili bağıntısını tanımlayalım. Bu durumda $\ll$ bir güçlü içerme olur ve uyumlu olduğu yakınımsılık da $\delta_{\mathcal{M}}$ dir: δ'nın Önerme 3.2.3'deki şartları sağladığını göstermek kolaydır. Biz $A \ll (X - B) \Leftrightarrow \exists\epsilon > 0 : A \times B \cap M_\epsilon = \emptyset$ olduğunu gösterelim.

$(\Rightarrow) A \ll (X - B) \Rightarrow A \subset B$ ve $d(A \cap \mathbb{Q}, B) > 0 \Rightarrow \epsilon := d(A \cap \mathbb{Q}, B)$ için $(A \times B) \cap M_\epsilon = \emptyset$.

$(\Leftarrow)$ $(A \times B) \cap M_\epsilon = \emptyset$ olacak şekilde bir $\epsilon > 0$ var olsun. Bu durumda $M_\epsilon(A) \subset X - B$ olur. Buradan da $A \cap B = \emptyset$ ve her $a \in A \cap \mathbb{Q}$ ve her $b \in B$ için $|a - b| \geq \epsilon$ olur.

Verilecek olan teorem için gerekli olan "tam sınırlılık" kavramı ve ilgili özelliklerinden kısaca söz edelim.

Tanım 3.2.12. Bir $(X,\mathcal{U})$ düzgünümsü uzayına eğer her $U \in \mathcal{U}$ civarı (veya alttaban elemanı) ve her $A \in \mathcal{A}$ için $A \times A \subset U$ olacak şekilde X'in sonlu bir $\mathcal{A}$ örtüsü varsa *tam sınırlıdır* denir.

Yukarıdaki tanıma göre;

Önerme 3.2.13. ***i)*** $\mathcal{U}$, bir X kümesi üzerinde bir düzgünümsülük ise $\mathcal{U}$,$\mathcal{U}^{-1}$ ve $\mathcal{U}^s$ nin hepsi birden tam sınırlıdır ya da hiçbiri tam sınırlı değildir.

ii) $E \subset X$ ve $(X,\mathcal{U})$ tam sınırlı olsun. Bu durumda $\mathcal{U}|_{E \times E}$ da tam sınırlıdır.

iii) Tam sınırlı düzgünümsülüklerin ters resmi tam sınırlıdır.

iv) Tam sınırlı düzgünümsülüklerin bir çarpımı tam sınırlıdır.

v) Tam sınırlılık düzgün sürekli dönüşüm altında korunur.

vi) Tam sınırlı bir düzgünümsü çarpım uzayının her bir çarpanı da tam sınırlıdır.

Kanıt: ***i)*** ve ***ii)***'yi kanıtlayalım. Öncelikle $A \subset X$ ve U bir civar olmak üzere $A \times A \subset U$ iken $A \times A \subset U^{-1}$ ve $A \times A \subset U \cap U^{-1}$ olduğundan ***i)*** açıktır. Şimdi ***ii)***'yi görelim: $U \in \mathcal{U}|_{E\times E}$ için $V \cap (E \times E)$ olacak şekilde $V \in \mathcal{U}$ vardır. O halde X'in bir sonlu $\mathcal{A}$ örtüsü vardır ki her $A \in \mathcal{A}$ için $A \times A \subset V$ olur. Buradan da $(A \cap E) \times (A \cap E) \subset U$ olur ve $\{A \cap E | A \in \mathcal{A}\}$ ailesi de E'nin sonlu bir örtüsü olduğundan $\mathcal{U}|_{E\times E}$ tam sınırlı elde edilir.
Diğer kanıtlar benzer biçimde görülür.

Önerme 3.2.14. X üzerinde $\{\mathcal{U}_i | i \in I\}$ tam sınırlı düzgünümsü yapıların bir ailesi olsun. Bu durumda $\bigvee_{i\in I} \mathcal{U}_i$ supremum düzgünümsülüğü de tam sınırlı olur.
Kanıt: $U_i \in \mathcal{U}_i$ $(i \in I)$ olmak üzere bir $\bigcup_{i\in I} U_i$ alttaban elemanını alalım. Her $i \in I$ için $\mathcal{U}_i$ tam sınırlı olduğundan X'in sonlu $\mathcal{A}_i$ örtüleri var ve her $A_i \in \mathcal{A}_i$ için $A_i \times A_i \subset U_i$ olur. Bu durumda herhangi bir $i_0 \in I$ için $\mathcal{A}_{i_0}$, X'in bir sonlu örtüsüdür ve her $A_{i_0} \in \mathcal{A}_{i_0}$ için $A_{i_0} \times A_{i_0} \subset U_{i_0} \subset \bigcup_{i\in I} U_i$ olur.

Örnek 3.2.15. $\mathbb{R}$ üzerindeki $\mathcal{E}$ düzgünlüğünü düşünelim. $\mathbb{R}$'nin herhangi bir $\mathcal{A}$ örtüsünün sonlu olması için $\mathbb{R} \in \mathcal{A}$ olmalıdır. Bu durumda $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \subset U_\epsilon$ olacak şekilde bir $\epsilon > 0$ sayısı bulunamayacağından $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ tam sınırlı olamaz. Benzer şekilde $\mathcal{Q}, \mathcal{Z}$ ve $\mathcal{M}$ düzgünümsülükleri de tam sınırlı değildir. Ancak açıktır ki, $\mathcal{E}$, $\mathbb{R}$'nin sınırlı bir altkümesine kısıtlanırsa tam sınırlı olur ve $\mathcal{Q}^s = \mathcal{E}$ olduğundan bu sınırlı altküme üzerinde $\mathcal{Q}$ da tam sınırlı olur.

Bu bilgilerden sonra yukarıda sözü edilien teorem için gerekli bir yardımcı teorem verelim.

Yardımcı Teorem 3.2.16. (X, δ) bir yakınımsı uzay olsun. Eğer $A\delta B$ ve $E\overline{\delta}F$ ise, $(A \setminus E)\delta B$ veya $A\delta(B \setminus F)$ olur.
Kanıt: $(A\setminus E)\overline{\delta}B$ olduğunu kabul edelim. $A = (A\cap E)\cup(A\setminus E)$ olarak yazılabildiğinden ve $A\delta B$ olduğundan $(A\cap E)\delta B$'dir. Üstelik, $B = (B\cap F)\cup(B\setminus F)$ ve $E\overline{\delta}F$ olduğundan $(A \cap E)\delta(B \setminus F)$'dir. Böylece $A\delta(B \setminus F)$ bulunur. □

X bir küme ve $A, B \subset X$ olmak üzere $T(A, B) = (X \times X) - (A \times B)$ gösterimini kullanalım.

Teorem 3.2.17. (X,δ) bir yakınımsı uzay ve $A\overline{\delta}B$ şartını sağlayan tüm $T(A,B)$ şeklindeki kümelerin ailesi $\mathcal{S}$ olsun. $\mathcal{S}$, δ ile uyumlu olan bir tam sınırlı $\mathcal{U}_\delta$ düzgünümsülüğünün alttabanıdır. Ayrıca $\mathcal{U}_\delta$, δ ile uyumlu en kaba düzgünümsülüktür ve $\pi(\delta)$'nın tek tam sınırlı elemanıdır.

Kanıt:

- $\mathcal{S}$, $\mathcal{U}_\delta$'nın bir alttabanıdır: Her $T(A,B)\in\mathcal{S}$ elemanı yansıyandır. $T(A,B)\in\mathcal{S}$ olsun. $A\overline{\delta}B$ olduğundan bir $C\subset X$ vardır ki $A\overline{\delta}C$ ve $(X\setminus C)\overline{\delta}B$ olur. Buradan $T(A,C), T(X\setminus C,B)\in\mathcal{S}$ ve $[T(A,C)\cap T(X\setminus C,B)]^2\subset T(A,B)$ olur.

- $\mathcal{U}_\delta$ tam sınırlıdır: $T(A,B)\in\mathcal{S}$ olsun. $A\overline{\delta}B$ olduğundan $A\cap B=\emptyset$ dir ve $(X-A)\cup(X-B)=X$ olur. Ayrıca $(X-A)\times(X-A)\subset T(A,B)$ ve $(X-B)\times(X-B)\subset T(A,B)$ dir. O halde $T(A,B)$'ye karşılık X'in sonlu $\mathcal{A}=\{X-A,X-B\}$ örtüsünün her bir elemanının kendisi ile kartezyen çarpımı $T(A,B)$ tarafından kapsanır.

- $\mathcal{U}_\delta\in\pi(\delta)$ dır: $\alpha,\mathcal{U}_\delta$ ile üretilen bir yakınımsılık olsun. $\alpha=\delta$ olduğunu gösterelim. Eğer $A\overline{\delta}B$ ise $T(A,B)\in\mathcal{U}_\delta$ dır. Ayrıca $(A\times B)\cap T(A,B)=\emptyset$ olduğundan $A\overline{\alpha}B$ olur. Böylece $\alpha\subset\delta$ bulunur. Diğer kapsama için; her $n\in\mathbb{N}$, her $(A,B)\in\delta$ ve $\mathcal{S}$'nin her $\{T(E_i,F_i)|1\leq i\leq n\}$ altailesi için $(A\times B)\cap[\cap\{T(E_i,F_i)|1\leq i\leq n\}]\neq\emptyset$ olduğunu tümevarım yöntemi ile gösterelim: $n=1$ için bakalım. Yani $(A\times B)\cap T(E,F)\neq\emptyset$ olup olmadığını görelim. $(A\times B)\cap T(E,F)=[(A-E)\times B]\cup[A\times(B-F)]$ dir. $A\delta B$ ve $E\overline{\delta}F$ olduğundan önceki yardımcı teoreme göre $(A\times B)\cap T(E,F)=\emptyset$ olması $A\delta B$ ile çelişir. O halde $(A\times B)\cap T(E,F)\neq\emptyset$ olmalıdır. Şimdi $k<n$ için istenen sağlansın $k=n$ için de sağlandığını gösterelim. Her $k\leq n$ için $G_k=\cap\{T(E_i,F_i)|1\leq i\leq k\}$ olsun. Bu durumda $(A\times B)\cap G_n=[((A\times B)\cap(X-E_n)\times X)\cap G_{n-1}]\cup[(A\times B\cap X\times(X-F_n))\cap G_{n-1}]=[((A-E_n)\times B)\cap G_{n-1}]\cup[(A\times(B-F_n))\cap G_{n-1}]$ olur. Önceki lemma ve tümevarımdan bu birleşimdeki her bir terim boştan farklı olur. Böylece $(A,B)\in\alpha$ bulunur ve $\delta\subset\alpha$ olur.

- $\mathcal{U}_\delta$, δ ile uyumlu en kaba düzgünümsülüktür: $\mathcal{U}\in\pi(\delta)$ olsun. $T(A,B)\in\mathcal{U}_\delta$ alalım. $A\overline{\delta}B$ ve $\delta_{\mathcal{U}}=\delta$ olduğundan $(A\times B)\cap U=\emptyset$ olacak şekilde bir $U\in\mathcal{U}$ vardır. Buradan $U\subset T(A,B)$ olur. Böylece $T(A,B)\in\mathcal{U}$ olur ve $\mathcal{U}_\delta\subset\mathcal{U}$ elde edilir.

- $\mathcal{U}_\delta$, δ ile uyumlu tek tam sınırlı düzgünümsülüktür: $\mathcal{U} \in \pi(\delta)$ ve $\mathcal{U}$ tam sınırlı olsun. $W^2 \subset U$ olacak şekilde $U, W \in \mathcal{U}$ alalım. $\mathcal{U}$ tam sınırlı olduğundan X'in sonlu bir $\{A_i|1 \leq i \leq n\}$ örtüsü vardır ve her $i \in \{1, 2, ..., n\}$ için $A_i \times A_i \subset W$ olur. $(A_i \times (X - W(A_i))) \cap W = \emptyset$ olduğundan $A_i\overline{\delta}(X - W(A_i))$ olur. $V = \cap\{T(A_i, X - W(A_i))|1 \leq i \leq n\}$ olsun. Bu durumda $V \in \mathcal{U}_\delta$ ve $V \subset \cup\{A_i \times W(A_i)|1 \leq i \leq n\} \subset W^2 \subset U$ olur. Buradan $U \in \mathcal{U}_\delta$ ve $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}_\delta$ bulunur. Daha önce $\mathcal{U}_\delta \subset \mathcal{U}$ olduğundan $\mathcal{U} = \mathcal{U}_\delta$ elde edilir. $\square$

Sonuç 3.2.18. δ ve ρ, bir X kümesi üzerinde yakınımsılık olsunlar. Bu durumda $\delta \subset \rho$ ise $\mathcal{U}_\rho \subset \mathcal{U}_\delta$ olur.

Kanıt: $T(A, B) \in \mathcal{U}_\rho \Rightarrow A\overline{\rho}B \Rightarrow A\overline{\delta}B \Rightarrow T(A, B) \in \mathcal{U}_\delta$. $\square$

Sonuç 3.2.19. δ, bir X kümesi üzerinde bir yakınımsılık olsun. Bu durumda $\delta_{\mathcal{U}_\delta} = \delta$ olur.

Kanıt:

- $A\overline{\delta_{\mathcal{U}_\delta}}B \Rightarrow \exists T(C, D) \in \mathcal{U}_\delta : A \times B \cap T(C, D) = \emptyset \Rightarrow C\overline{\delta}D$ ve $A \times B \cap (X \times X \setminus C \times D) = \emptyset \Rightarrow C\overline{\delta}D$ ve $A \subset C, B \subset D \Rightarrow A\overline{\delta}B \Rightarrow \delta \subset \delta_{\mathcal{U}_\delta}$.

- $A\overline{\delta}B \Rightarrow T(A, B) \in \mathcal{U}_\delta$ ve $A \times B \cap T(A, B) = \emptyset \Rightarrow A\overline{\delta_{\mathcal{U}_\delta}}B \Rightarrow \delta_{\mathcal{U}_\delta} \subset \delta$. $\square$

Not 3.2.20. (X, δ) bir yakınımsı uzay olsun. Bu durumda, $\delta_{\mathcal{U}_\delta} = \delta$ olduğundan $\tau_{\delta_{\mathcal{U}_\delta}} = \tau_\delta$'dır. Ayrıca, Önerme 3.2.8'den $\tau_{\delta_{\mathcal{U}_\delta}} = \tau_{\mathcal{U}_\delta}$ ve böylece $\tau_{\mathcal{U}_\delta} = \tau_\delta$ olur.

Gösterim. $(X,\mathcal{U})$ bir düzgünümsü uzay olsun. Bu durumda $\mathcal{U}_\omega$, $\delta_{\mathcal{U}}$ ile uyumlu tam sınırlı düzgünümsülüğü göstersin.

Teorem 3.2.17'den $\delta_{\mathcal{U}}$ ile uyumlu tam sınırlı düzgünümsülük $\mathcal{U}_{\delta_{\mathcal{U}}}$ olmalıdır. O halde $\mathcal{U}_\omega = \mathcal{U}_{\delta_{\mathcal{U}}}$'dur.

Diğer yandan, $\mathcal{U}_\omega$, X üzerinde $\mathcal{U}$'dan daha kaba olan en ince tam sınırlı düzgünümsülüktür: $\mathcal{U}_\omega \subset \mathcal{U}$ olduğu açıktır. $\mathcal{U}_\omega \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ ve $\mathcal{V}$ tam sınırlı bir düzgünümsülük olsun. Bu durumda $\delta_{\mathcal{U}} \subset \delta_{\mathcal{V}} \subset \delta_{\mathcal{U}_\omega}$ olur. Ayrıca, $\delta_{\mathcal{U}} = \delta_{\mathcal{U}_\omega}$ olduğundan $\delta_{\mathcal{V}} = \delta_{\mathcal{U}}$ ve böylece de $\mathcal{V} \in \pi(\delta_{\mathcal{U}})$ olur. $\mathcal{V}$ tam sınırlı olduğundan $\mathcal{V} = \mathcal{U}_\omega$ bulunur.

Önerme 3.2.21. Bir X kümesi üzerindeki düzgünümsülüklerin boş olmayan $\{\mathcal{U}_i|i \in I\}$ ailesi için $(\wedge_{i\in I}\mathcal{U}_i)_\omega = \wedge_{i\in I}(\mathcal{U}_i)_\omega$'dır.

Kanıt: Her $i \in I$ için $(\mathcal{U}_i)_\omega \subset \mathcal{U}_i$ olduğundan $\wedge_{i\in I}(\mathcal{U}_i)_\omega \subset \mathcal{U}_i$'dir. Buradan $\wedge_{i\in I}(\mathcal{U}_i)_\omega \subset \wedge_{i\in I}\mathcal{U}_i$ olur. $\wedge_{i\in I}(\mathcal{U}_i)_\omega$ tam sınırlı ve $\wedge_{i\in I}\mathcal{U}_i$'den daha kaba olan en ince düzgünümsülük

$(\wedge_{i\in I}\mathcal{U}_i)_\omega$ olduğundan $\wedge_{i\in I}(\mathcal{U}_i)_\omega \subset (\wedge_{i\in I}\mathcal{U}_i)_\omega$'dir. Diğer taraftan, her $i \in I$ için $\wedge_{i\in I}\mathcal{U}_i \subset \mathcal{U}_i$ olduğundan $(\wedge_{i\in I}\mathcal{U}_i)_\omega \subset \mathcal{U}_i$'dir. $(\wedge_{i\in I}\mathcal{U}_i)_\omega$ tam sınırlı ve $\mathcal{U}_i$'den daha kaba olan en ince tam sınırlı düzgünümsülük $(\mathcal{U}_i)_\omega$ olduğundan $(\wedge_{i\in I}\mathcal{U}_i)_\omega \subset (\mathcal{U}_i)_\omega$'dır. Böylece $(\wedge_{i\in I}\mathcal{U}_i)_\omega \subset \wedge_{i\in I}(\mathcal{U}_i)_\omega$ elde edilir. □

Tanım 3.2.22. δ ve ρ, bir X kümesi üzerinde yakınımsılık olsunlar. Eğer $\rho \subset \delta$ oluyorsa δ, *ρ'dan daha kaba (veya ρ, δ'dan daha ince)* denir. Her X kümesi üzerinde bir en ince yakınımsılık vardır. Bu yakınımsılığa *ayrık yakınımsılık* denir ve $A\delta B \Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset$ ile verilir. Yine X kümesi üzerinde $A\delta B \Leftrightarrow A \neq \emptyset$ ve $B \neq \emptyset$ ile tanımlı bir en ince yakınımsılık vardır.

Önerme 3.2.23. $\{\delta_i | i \in I\}$, bir X kümesi üzerindeki yakınımsılıkların boştan farklı bir ailesi olsun ve δ_0 şu şekilde tanımlansın: $A\delta_0 B \Leftrightarrow A$'nın sonlu her $\mathcal{A}$ örtüsü ve B'nin her sonlu $\mathcal{B}$ örtüsü için $A' \in \mathcal{A}$ ve $B' \in \mathcal{B}$ vardır öyle ki her $i \in I$ için $A'\delta_i B'$ dır.
Bu durumda δ_0, X üzerinde bir yakınımsılıktır ve her $i \in I$ için δ_i'den daha ince olan en kaba yakınımsılıktır.

Kanıt: δ_0'in Tanım 3.2.1'deki **a)**,**b)** ve **c)** şartlarını sağladığı açıktır. Biz **d)** şartının sağladığını gösterelim. $A\overline{\delta_0}B$ olsun. Bu durumda A ve B'nin birer sonlu $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ örtüleri vardır ki her $A' \in \mathcal{A}$ ve $B' \in \mathcal{B}$ için bir $i \in I$ vardır ve $A'\overline{\delta_i}B'$ olur. $\mathcal{E} = \{E' | A'\overline{\delta_i}E', (X - E')\overline{\delta_i}B', A' \in \mathcal{A}, B' \in \mathcal{B}\}$ ve $\mathcal{D} = \{X - E' | A'\overline{\delta_i}E', (X - E')\overline{\delta_i}B', A' \in \mathcal{A}, B' \in \mathcal{B}\}$ kuralım. $\mathcal{E}$ ve $\mathcal{D}$ sonludur. O halde $E = \cup\mathcal{E}$ olarak seçilirse $A\overline{\delta_0}E$ ve $(X - E)\overline{\delta_0}B$ sağlanır. $A\delta_0 B$ olsun. Tanımdan, A'nın $\{A\}$ ve B'nin $\{B\}$ örtülerine karşılık her $i \in I$ için $A\delta_i B$ olmalıdır. Böylece $\delta_0 \subset \delta_i$ olur. Buradan her $i \in I$ için δ_0, δ_i'den daha ince olur. Şimdi de δ_0'ın δ_i'lerden daha ince olan en kaba yakınımsılık olduğunu gösterelim. Her $i \in I$ için $\delta_0 \subset \delta \subset \delta_i$ olacak şekilde bir δ yakınımsılığı var ve $A\overline{\delta_0}B$ olsun. Bu durumda A ve B'nin öyle sonlu örtüleri $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ var ki her $A' \in \mathcal{A}$ ve $B' \in \mathcal{B}$ için $A'\overline{\delta_i}B'$ olacak şekilde bir $i \in I$ vardır. Buradan $A'\overline{\delta}B'$ olur. Ayrıca $A \in \mathcal{A}$ ve $B \in \mathcal{B}$ olduğundan $A\overline{\delta}B$ bulunur. Böylece $\delta \subset \delta_0$ elde edilir. □

Gösterim. Yukarıdaki önermede tanımlanan δ_0, $\{\delta_i | i \in I\}$ yakınımsılık ailesinin supremum yakınımsılığıdır. δ bir yakınımsılık olmak üzere δ ve δ^{-1}'in her ikisinden de daha ince olan en kaba yakınımsılık vardır ve δ^s ile gösterilir. Burada, $\delta^s = \delta \vee \delta^{-1}$ olduğu açıktır. Sonuç olarak, $A\delta^s B$ ancak ve ancak $\mathcal{A}$, A'nın bir sonlu örtüsü ve $\mathcal{B}$, B'nin bir sonlu örtüsü olmak üzere $A'\delta B'$ ve $B'\delta A'$ olacak şekilde $A' \in \mathcal{A}$ ve $B' \in \mathcal{B}$ vardır.

Diğer yandan, yakınımsılıkların bir $\{\delta_i | i \in I\}$ ailesinin infimumu daima vardır ve bu infimum, tüm δ_i'lerden daha kaba olan yakınımsılıkların supremumuna eşittir.

Önerme 3.2.24. $\{\mathcal{U}_i | i \in I\}$ bir X kümesi üzerindeki tam sınırlı düzgünümsülüklerin bir ailesi olmak üzere $\delta_0 = \bigvee_{i \in I} \delta_{\mathcal{U}_i}$ ve $\mathcal{U} = \bigvee_{i \in I} \mathcal{U}_i$ olsun. Bu durumda $\delta_0 = \delta_{\mathcal{U}}$'dur.
Kanıt: Her $i \in I$ için $\mathcal{U}_i \subset \mathcal{U}$ olduğundan $\delta_{\mathcal{U}} \subset \delta_{\mathcal{U}_i}$'dir ve böylece $\delta_{\mathcal{U}} \subset \delta_0$ olur. $A\overline{\delta_{\mathcal{U}_i}}B$ iken $A\overline{\delta_0}B$ olduğundan $T(A,B) \in \mathcal{U}_i$ iken $T(A,B) \in \mathcal{U}_{\delta_0}$ olur. O halde her $i \in I$ için $\mathcal{U}_i \subset \mathcal{U}_{\delta_0}$'dır. Böylece $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}_{\delta_0}$ bulunur ve $\delta_{\mathcal{U}_{\delta_0}} \subset \delta_{\mathcal{U}}$ olup $\delta_0 \subset \delta_{\mathcal{U}}$ elde edilir.

Sonuç 3.2.25. Eğer $\{\delta_i | i \in I\}$, bir X kümesi üzerinde yakınımsılıkların bir ailesi ise $\delta_0 = \bigvee_{i \in I} \delta_i$ ve $\tau = \bigvee_{i \in I} \tau_{\delta_i}$ olmak üzere $\tau_{\delta_0} = \tau$ dır.

Sonuç 3.2.26. Verilen bir topoloji ile uyumlu yakınımsılıkların supremumu yine o topoloji ile uyumludur.

Teorem 3.2.27. (X, δ) bir yakınımsı uzay ve her $C \subset X$ için $C \ll V(C)$ olacak şekilde $V \subset X \times X$ olsun. Bu durumda $C \subset X$ ve $U \in \mathcal{U}_\delta$ ise $C \ll (U \cap V)(C)$ olur.
Kanıt: $U = \bigcap_{i=1}^{n} T(A_i, B_i)$ $(n \in \mathbb{N})$ olarak alabiliriz. Tümevarım yöntemi ile $C \ll (U \cap V)(C)$ olduğunu gösterelim. Öncelikle $n = 1$ olma durumunu inceleyelim. $U = T(A,B)$ olsun. Bu durumda $(U \cap V)(C) = (U \cap V)(C \cap A) \cup (U \cap V)(C - A) = [(X-B) \cap V(C \cap A)] \cup V(C-A)$ olur. Diğer yandan $C \cap A \subset X$ ve $C - A \subset X$ olduğundan $C \cap A \ll V(C \cap A)$ ve $C - A \ll V(C-A)$ dır. Ayrıca $A\overline{\delta}B$ olduğundan $(C \cap A)\overline{\delta}B$ dir ve $C \cap A \ll X - B$ olur. Böylece $C \ll (U \cap V)(C)$ elde edilir. $U = \bigcap_{i=1}^{k} T(A_i, B_i)$ için $C \ll (U \cap V)(C)$ iken $U = \bigcap_{i=1}^{k+1} T(A_i, B_i)$ için de $C \ll (U \cap V)(C)$ sağlandığı açıktır.
$\square$

Önerme 3.2.28. $\mathcal{U}$ ve $\mathcal{V}$, bir X kümesi üzerinde düzgünümsü yapılar olsun. Eğer $\mathcal{U}$ tam sınırlı ise $\delta_{\mathcal{U} \vee \mathcal{V}} = \delta_{\mathcal{U}} \vee \delta_{\mathcal{V}}$ dır.
Kanıt:

- $\mathcal{U} \subset \mathcal{U} \vee \mathcal{V}$ ve $\mathcal{V} \subset \mathcal{U} \vee \mathcal{V} \Rightarrow \delta_{\mathcal{U} \vee \mathcal{V}} \subset \delta_{\mathcal{U}}$ ve $\delta_{\mathcal{U} \vee \mathcal{V}} \subset \delta_{\mathcal{V}} \Rightarrow \delta_{\mathcal{U} \vee \mathcal{V}} \subset \delta_{\mathcal{U}} \vee \delta_{\mathcal{V}}$.

- Kısalık olması için gösterimlerde $\ll_{\delta_{\mathcal{U}} \vee \delta_{\mathcal{V}}}$ yerine $\ll$ ve $\ll_{\delta_{\mathcal{U} \vee \mathcal{V}}}$ yerine de $\ll'$ kullanalım. $A \ll' B$ iken $A \ll B$ olduğunu göstermek $\delta_{\mathcal{U}} \vee \delta_{\mathcal{V}} \subset \delta_{\mathcal{U} \vee \mathcal{V}}$ nın ispatı için yeterli olur. $A \ll' B$ olsun. Bu durumda $(U \cap V)(A) \subset B$ olacak şekilde $U \in \mathcal{U}$ ve $V \in \mathcal{V}$ vardır. Ayrıca her $C \subset X$ için $(C \times (X - V(C))) \cap V = \emptyset$ olduğundan $C \ll V(C)$ dir. Diğer yandan, $\mathcal{U}$ tam sınırlı olduğundan $\mathcal{U}_{\delta_{\mathcal{U}}} = \mathcal{U}_\omega = \mathcal{U}$ dır ve böylece $\mathcal{U}$, $\pi(\delta_{\mathcal{U}} \vee \delta_{\mathcal{V}})$ nin tam sınırlı elemanından daha kabadır. O halde

$U \in \mathcal{U}_{\delta_{\mathcal{U}} \vee \delta_{\mathcal{V}}}$ dır ve önceki teoremden $A \ll (U \cap V)(A) \subset B$ olur. Buradan da $A \ll B$ elde edilir. □

Aşağıdaki sonuç, önceki önermeden kolayca görülür.

Sonuç 3.2.29. $\{\mathcal{U}_i | i \in I\}$, bir X kümesi üzerindeki düzgünümsülüklerin bir ailesi olsun ve en çok bir $i \in I$ için $\mathcal{U}_i$ tam sınırlı olmasın. Bu durumda $\delta_{\bigvee_{i\in I}\mathcal{U}_i} = \bigvee_{i\in I} \delta_{\mathcal{U}_i}$ olur.

Yukarıdaki sonuç dikkate alındığında $\mathcal{U}_\omega$'nın tam sınırlı oluşundan aşağıdaki açıktır.

Sonuç 3.2.30. Eğer $\mathcal{U}$ ve $\mathcal{V}$ bir X kümesi üzerinde düzgünümsü yapılar ise, $\mathcal{U}_\omega \vee \mathcal{V}$ ve $\mathcal{V}_\omega \vee \mathcal{U}$ qp-denk olurlar.

Sonuç 3.2.31. Eğer $\mathcal{U}$ tam sınırlı bir düzgünümsülük ise, $\delta_{\mathcal{U}^s} = (\delta_{\mathcal{U}})^s$ olur.
Kanıt: $\delta_{\mathcal{U}^{-1}} = (\delta_{\mathcal{U}})^{-1}$ olduğundan istenen elde edilir. □

Önceki sonuçta $\mathcal{U}$ tam sınırlı değilse $\delta_{\mathcal{U}^s} = (\delta_{\mathcal{U}})^s$ olmak zorunda değildir.

Örnek 3.2.32. Bölümün başında tanımlanan $\mathbb{R}$ üzerindeki $\mathcal{Q}$ düzgünümsülüğünü düşünelim. $\delta_{\mathcal{Q}^s} \neq (\delta_{\mathcal{Q}})^s$ dır: A çift tamsayılar ve B tek tamsayılar kümesi olsun. inf$A \leq$sup$B$ ve inf$B \leq$sup$A$ olduğundan $A(\delta_{\mathcal{Q}})^s B$ olur. Diğer taraftan $\mathcal{Q}^s = \mathcal{E}$ olduğundan $A\delta_{\mathcal{Q}^s}B$ olması için $d(A,B) = 0$ olmalıdır. Ancak herhangi bir $a \in A$ ve $b \in B$ için $|a - b| = 1$ dir. Dolayısıyla $A\overline{\delta_{\mathcal{Q}^s}}B$ olur.

Önerme 3.2.33. $\mathcal{U}$ bir düzgünümsülük ve δ bir yakınımsılık olmak üzere aşağıdakiler eşitlikler vardır.

a) $(\mathcal{U}_\omega)^{-1} = (\mathcal{U}^{-1})_\omega$

b) $(\mathcal{U}_\delta)^{-1} = \mathcal{U}_{\delta^{-1}}$

c) $(\mathcal{U}_\delta)^s = \mathcal{U}_{\delta^s}$

Kanıt: Tanımlardan kolayca görülür. □

Önerme 3.2.34. (X, δ) bir yakınımsı uzay olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

a) $A\delta B$

b) $\mathrm{cl}_{\delta^s} A \delta \mathrm{cl}_{\delta^s} B$

c) $\mathrm{cl}_{\delta^{-1}} A \delta \mathrm{cl}_{\delta} B$

Kanıt: a)⇒b) Her $a \in A$ için $\{a\}\delta^s A$ dır. Buradan $\mathrm{cl}_{\delta^s}A \supset A$, $\mathrm{cl}_{\delta^s}B \supset B$ ve $A\delta B$ olduğundan $\mathrm{cl}_{\delta^s}A\delta\mathrm{cl}_{\delta^s}B$ bulunur.
b)⇒c) $\delta^s \subset \delta^{-1}$ ve $\delta^s \subset \delta$ olduğundan $\mathrm{cl}_{\delta^s}A \subset \mathrm{cl}_{\delta^{-1}}A$ ve $\mathrm{cl}_{\delta^s}B \subset \mathrm{cl}_\delta B$ dır. Böylece $\mathrm{cl}_{\delta^{-1}}A\delta\mathrm{cl}_\delta B$ olur.
c)⇒a) $\mathrm{cl}_{\delta^{-1}}A\delta\mathrm{cl}_\delta B$ ve $A\overline{\delta}B$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $A\overline{\delta}C$ ve $(X-C)\overline{\delta}B$ olacak şekilde bir $C \subset X$ vardır. Buradan $\mathrm{cl}_\delta B \subset C$ olur ve $A\overline{\delta}\mathrm{cl}_\delta B$ bulunur. Dolayısıyla $\mathrm{cl}_\delta B\overline{\delta^{-1}}A$ dır. O halde $\mathrm{cl}_\delta B\overline{\delta^{-1}}D$ ve $(X-D)\overline{\delta}^{-1}A$ olacak şekilde bir $D \subset X$ vardır. Aynı şekilde $\mathrm{cl}_{\delta^{-1}}A \subset D$ elde edildiğinden $\mathrm{cl}_\delta B\overline{\delta^{-1}}\mathrm{cl}_{\delta^{-1}}A$ olur. Bu ise kabul ile çelişir. □

Önerme 3.2.35. (X,τ) bir normal Hausdorff uzay olsun. $''A\delta B \Leftrightarrow \overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset''$ ile tanımlı δ ikili bağıntısı, τ ile uyumlu en ince yakınlıktır.
Kanıt: δ'nın bir yakınlık olduğu açıktır. $\tau_\delta = \tau$ olduğunu göstermek için de herhangi bir $x \in X$'in δ-komşulukları ile τ-komşuluklarının çakıştığını gösterelim. $x \in X$ ve N, x'in bir δ-komşuluğu olsun. O halde $\{x\}\overline{\delta}(X\backslash N)$'dir. δ'nın tanımından $\overline{\{x\}}\cap\overline{(X-N)} = \emptyset$'dir. Buradan $x \in \overline{\{x\}} \subset X - \overline{(X-N)} = N^o \subset N$ olur ve $N \in \mathcal{K}_\tau(x)$ elde edilir. Tersine, $x \in X$ ve $K \in \mathcal{K}_\tau(x)$ alalım. Bu durumda $x \in G \subset K$ olacak şekilde bir $G \in \tau$ vardır ve $x \notin X \setminus K \subset X \setminus G$ olur. Ayrıca (X,τ) Hausdorff olduğundan $\{x\}$ kapalıdır. $x \notin X \setminus G$ olduğundan $\overline{\{x\}} \cap \overline{(X \setminus G)} = \emptyset$ olur ve δ'nın tanımından $\{x\}\overline{\delta}(X-G)$ bulunur. Böylece $\{x\}\overline{\delta}(X-K)$ elde edilir. O halde K, x'in bir δ-komşuluğudur. X üzerinde $\beta \subset \delta$ ve $\tau_\beta = \tau$ olacak şekilde bir β yakınımsılığı var olsun. $A\overline{\beta}B$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $A\overline{\beta}C$ ve $(X-C)\overline{\beta}B$ olacak şekilde bir $C \subset X$ vardır. Buradan $B = \mathrm{cl}_\beta B \subset C$ ve $A \subset (X-C)^o \subset X - C$ olur. (X,τ) normal olduğundan $\overline{A} \subset X \setminus C$ dir. Böylece $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$ bulunur ve $A\overline{\delta}B$ elde edilir. □

Sonuç 3.2.36. Bir kompakt Hausdorff topolojik uzay ile uyumlu tek yakınlık Önerme 3.2.35'de tanımlanan yakınlıktır.

Önerme 3.2.37. (X,τ) bir kompakt Hausdorff uzay ise Önerme 3.2.35'de tanımlanan ρ yakınlığı, τ ile uyumlu yakınımsılıkların en kabasıdır ve $\mathcal{U}_\rho$, τ ile uyumlu en kaba düzgünlüktür.
Kanıt: δ, τ ile uyumlu bir yakınımsılık olsun. Eğer $A\overline{\rho}B$ ise Önerme 3.2.34'den $\overline{A}\overline{\rho}\overline{B}$ dır. Önceki nottan $\overline{A}\ \overline{\delta}\ \overline{B}$ ve böylece $A\overline{\delta}B$ olur. O halde ρ, τ ile uyumlu en kaba yakınımsılıktır. Ayrıca Teorem 3.2.17 ve Sonuç 3.2.18'den $\mathcal{U}_\rho$, τ ile uyumlu en kaba düzgünümsülük olur. □

Daha önce $\mathcal{U} - \mathcal{V}$ düzgün sürekli bir dönüşümün aynı zamanda $\tau_{\mathcal{U}} - \tau_{\mathcal{V}}$ sürekli olduğu gösterilmişti. Şimdi bu durumun tersinin hangi şartlar altında doğru olduğu verilecektir.

Sonuç 3.2.38. $(X,\mathcal{U})$ düzgün uzayı kompakt Hausdorff ve $(Y,\mathcal{V})$ bir düzgün uzay olsun. $f : (X,\tau_{\mathcal{U}}) \to (Y,\tau_{\mathcal{V}})$ sürekli bir dönüşüm ise $f : (X,\mathcal{U}) \to (Y,\mathcal{V})$ düzgün süreklidir.

Kanıt: Önceki önermede olduğu gibi ρ, τ ile uyumlu en kaba yakınımsılık olsun. $\mathcal{U}^s = \mathcal{U}$ ve $\mathcal{V}^{-1} = \mathcal{V}$ dir. $(\mathcal{U}_\rho)^{-1} = \mathcal{U}_{\rho^{-1}} = \mathcal{U}_\rho$ ve $\tau_{\mathcal{U}_\rho} = \tau_{\mathcal{U}}$ olduğundan f, $\tau_{\mathcal{U}} - \tau_{\mathcal{V}}$ ve $\tau_{\mathcal{U}^{-1}} - \tau_{\mathcal{V}^{-1}}$ süreklidir. Böylece Teorem 3.1.56'den $f, \mathcal{U}_\rho - \mathcal{V}$ düzgün sürekli olur. Önceki önermeye göre $\mathcal{U}_\rho \subset \mathcal{U}$ dır ve buradan $f : (X,\mathcal{U}) \to (Y,\mathcal{V})$ düzgün sürekli bulunur. $\square$

Yardımcı Teorem 3.2.39. (X,τ), bir yerel kompakt Hausdorff uzay olsun ve $\ll$, şu bağıntıyı göstersin: "$A \ll B \Leftrightarrow B = X$ veya $A \subset K \subset G \subset B$ olacak şekilde bir G açık altkümesi ve bir K kompakt altkümesi vardır."
Bu durumda $\ll$, güçlü içerme şartlarını sağlar ve ilgili yakınımsılık τ ile uyumludur.

Kanıt: Önerme 3.2.3'deki **a) e)** şartlarının sağlandığı açıktır. **f)** şartı için $A \ll B$ ve $B \neq X$ olsun. Bu durumda $A \subset K \subset G \subset B$ olacak şekilde bir G açık altkümesi ve bir K kompakt altkümesi vardır. Her $x \in K$ için C_x, x'i içeren bir açık küme olsun öyle ki $\overline{C_x}$ kompakt ve $\overline{C_x} \subset G$ sağlansın. Buradan K'nın sonlu bir I altkümesi vardır ki $K \subset \cup\{C_x | x \in I\}$ olur. $C = \cup\{C_x | x \in I\}$ kümesini kuralım. O halde $A \subset K \subset C \subset \overline{C} \subset G \subset B$ dır. Böylece $A \ll C$ ve $C \ll B$ elde edilir. Eğer $B = X$ ise $C := X$ seçildiğinde istenen sağlanır. $\square$

Tanım 3.2.40. (X,δ) ve (Y,ρ) yakınımsı uzaylar ve $f : X \to Y$ olsun.

$$\text{"}A\delta' B \Leftrightarrow f(A)\rho f(B)\text{"}$$

ile verilen δ' ikili bağıntısı X üzerinde bir yakınımsılıktır. Eğer $\delta \subset \delta'$ ise $f : (X,\delta) \to (Y,\rho)$'ye *yakın sürekli* denir. Yani, $A\delta B$ iken $f(A)\rho f(B)$ oluyorsa f yakın süreklidir. Böylece, $f : X \to (Y,\rho)$ dönüşümünü yakın sürekli yapan en kaba yakınımsılık δ' olur. Eğer $\mathcal{V} \in \pi(\rho)$ ve $\mathcal{U}$ da $\{f^{-1}(V) | V \in \mathcal{V}\}$ ailesinin taban olduğu X üzerindeki düzgünümsülüğü gösteriyorsa $\mathcal{U} \in \pi(\delta')$ olacağı açıktır.

Yukarıdaki bilgiler ışığında aşağıdaki önerme verilebilir.

Önerme 3.2.41. $f : X \to Y$ ve $\mathcal{V}$, Y üzerinde bir düzgünümsülük olsun. Eğer $\mathcal{U}$, $\{f^{-1}(V) | V \in \mathcal{V}\}$ ailesinin taban olduğu düzgünümsülük ise $\{f^{-1}(V) | V \in \mathcal{V}_\omega\}$, $\mathcal{U}_\omega$ için bir tabandır.

Kanıt: $C \in \mathcal{U}_\omega$, $C = T(A,B)$, $A, B \subset X$ ve $A\overline{\delta_{\mathcal{U}}}B$ olsun. Bu durumda $(A \times B) \cap U = \emptyset$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{U}$ vardır. Buradan $U \subset C$ olur. O halde $f^{-1}(V) \subset U \subset C$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{V}$ vardır. Ayrıca $[f(A) \times f(B)] \cap V = \emptyset$ dır. Böylece $T(f(A), f(B)) \in \mathcal{U}_{\delta_{\mathcal{V}}} = \mathcal{V}_\omega$ olur. Diğer yandan $f^{-1}[T(f(A), f(B))] \subset C$ dir. □

Aşağıdaki ifadeler "yakın sürekli" ve "düzgün sürekli" tanımlarından açıkça görülür.

Teorem 3.2.42. **a)** Eğer $f : (X,\delta) \to (Y,\rho)$ yakın sürekli ise $f : (X,\delta^{-1}) \to (Y,\rho^{-1})$ ve $f : (X,\delta^s) \to (Y,\rho^s)$ yakın süreklidir.

b) Herhangi iki yakın sürekli dönüşümün bileşkesi de yine yakın süreklidir.

c) Eğer $f : (X,\delta) \to (Y,\rho)$ yakın sürekli ise f, $\tau_\delta - \tau_\rho$ ve $\tau_{\delta^{-1}} - \tau_{\rho^{-1}}$ süreklidir.

d) $f : (X,\mathcal{U}) \to (Y,\mathcal{V})$ düzgün sürekli ise $f : (X,\delta_{\mathcal{U}}) \to (Y,\delta_{\mathcal{V}})$ yakın sürekli ve $f : (X,\mathcal{U}_\omega) \to (Y,\mathcal{V}_\omega)$ düzgün süreklidir.

Teorem 3.2.43. (X,δ) ve (Y,ρ) yakınımsı uzaylar ve (X,δ^s) bir kompakt Hausdorff uzay olsun. Eğer $f : X \to Y$ dönüşümü $\tau_\delta - \tau_\rho$ ve $\tau_{\delta^{-1}} - \tau_{\rho^{-1}}$ sürekli ise f, $\delta - \rho$ yakın sürekli olur.

Kanıt: $\tau_\delta = \tau_{\mathcal{U}_\delta}$ olduğundan f, $\tau_{\mathcal{U}_\delta} - \tau_{\mathcal{U}_\rho}$ sürekli ve $(\mathcal{U}_\delta)^{-1} = \mathcal{U}_{\delta^{-1}}$ olduğundan da f, $\tau_{(\mathcal{U}_\delta)^{-1}} - \tau_{(\mathcal{U}_\rho)^{-1}}$ süreklidir. Teorem 3.1.56'den f, $\mathcal{U}_\delta - \mathcal{U}_\rho$ düzgün sürekli olur. Böylece önceki not **c)**'den $f : (X,\delta) \to (Y,\rho)$ yakın sürekli bulunur. □

$\{(X_i,\delta_i)|i \in I\}$, yakınımsı uzayların boştan farklı bir ailesi ve $X = \Pi_{i\in I}X_i$ olsun. X üzerindeki her $i \in I$ için π_i izdüşüm dönüşümünü yakın sürekli yapan en kaba yakınımsılık, çarpım yakınımsılığıdır. Her $i \in I$ için π_i'yi yakın sürekli yapan en kaba yakınımsılık δ'_i ile gösterilirse $\sup\{\delta'_i|i \in I\}$, çarpım yakınımsılığıdır. Önerme 3.2.23'e göre δ çarpım yakınımsılığı şu şekilde karakterize edilebilir: $A, B \subset X$ olsun. $A\delta B \Leftrightarrow \mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ sırasıyla A ve B nin sonlu birer örtüleri ise her $i \in I$ için $\pi_i(A')\delta'_i\pi_i(B')$ olacak şekilde $A' \in \mathcal{A}$ ve $B' \in \mathcal{B}$ vardır.

Önerme 3.2.44. Her $i \in I$ için $\mathcal{U}_i$, δ_i yakınımsılığını üreten düzgünümsülük olsun ve $\mathcal{U}_i$ lerin en fazla bir tanesi tam sınırlı olmasın. Bu durumda $\Pi_{i\in I}\mathcal{U}_i$, $\Pi_{i\in I}\delta_i$ yi üretir.

Kanıt: Sonuç 3.2.29'den kanıt açıktır. □

Önerme 3.2.45. Eğer $f : (X,\delta) \to (Y,\rho)$ yakın sürekli dönüşüm ve $\mathcal{V} \in \pi(\rho)$ ise $f : (X,\mathcal{U} \to (Y,\mathcal{V})$ düzgün sürekli olacak şekilde bir $\mathcal{U} \in \pi(\delta)$ vardır.

Kanıt: $\mathcal{W}$, $\{f^{-1}(V)|V \in \mathcal{V}\}$ tabanı ile üretilen düzgünümsülük olsun. $\delta_{\mathcal{W}}$, $f : X \to (Y,\rho)$ dönüşümünü yakın sürekli yapan en kaba yakınımsılıktır. Böylece $\delta \subset \delta_{\mathcal{W}}$ olur. Şimdi, $\mathcal{U} = \mathcal{U}_\delta \vee \mathcal{W}$ olsun. $\mathcal{U}_\delta$ tam sınırlı olduğundan $\delta_{\mathcal{U}} = \delta_{\mathcal{U}_\delta} \vee \delta_{\mathcal{W}}$ dır ve $\delta \subset \delta_{\mathcal{U}}$ olur. Ayrıca $\mathcal{U}_\delta \subset \mathcal{U}$ olduğunda $\delta_{\mathcal{U}} \subset \delta_{\mathcal{U}_\delta}$ olup $\delta_{\mathcal{U}} \subset \delta$ bulunur. Buradan $\delta = \delta_{\mathcal{U}}$ olur, yani $\mathcal{U} \in \pi(\delta)$ dır. $\mathcal{W} \subset \mathcal{U}$ olduğundan da $f : (X,\mathcal{U}) \to (Y,\mathcal{V})$'nin düzgün sürekli olduğu açıktır. $\Box$

Sonuç 3.2.46. $(X,\mathcal{U})$ herhangi bir düzgünümsü uzay ve $(Y,\mathcal{V})$ bir tam sınırlı düzgünümsü uzay olsun. Bu durumda $f : (X,\mathcal{U}) \to (Y,\mathcal{V})$ düzgün süreklidir $\Leftrightarrow$ $f : (X,\delta_{\mathcal{U}}) \to (Y,\delta_{\mathcal{V}})$ yakın süreklidir.

Kanıt: $(\Rightarrow)$ Teorem 3.2.42 **c)**'den görülür.

$(\Leftarrow)$ $\mathcal{V}$ tam sınırlı olduğundan önceki önermede elde edilen düzgünümsülük için $\mathcal{U} = \mathcal{U}_\delta$ olur. Ayrıca yine önceki önermede f, $\mathcal{U}_\delta - \mathcal{U}_{\delta_{\mathcal{V}}}$ düzgün sürekli idi. Üstelik, $\mathcal{U} = \mathcal{U}_\delta$ ve $\mathcal{U}_{\delta_{\mathcal{V}}} = \mathcal{V}_\omega = \mathcal{V}$ olduğu göz önüne alınırsa, f, $\mathcal{U} - \mathcal{V}$ düzgün sürekli olur. $\Box$

3.3 İkili Topolojik Uzaylara Düzgünümsüler ile Yaklaşım

Bu bölümde ikili topolojik uzaylara dair bazı temel bilgiler verilecek ve ikili topolojik yapıların düzgünümsü yapılarla olan ilişkisi incelenecektir. Burada [9],[10] ve [11] nolu kaynaklardan yararlanılmıştır.

Tanım 3.3.1. Üzerinde herhangi iki τ_1 ve τ_2 topolojileri tanımlı olan bir X uzayına *ikili topolojik uzay* denir ve (X,τ_1,τ_2) ile gösterilir.

Tanım 3.3.2. (X,τ_1,τ_2) bir ikili topolojik uzay olmak üzere $\{U \cap V | U \in \tau_1, V \in \tau_2\}$ ailesi, X üzerinde bir topolojinin tabanıdır. Bu topolojiye τ_1 ve τ_2'nin *ortak topolojisi* denir ve $\tau_1 \vee \tau_2$ ile gösterilir.

Quasi-yarı-metrikten ve düzgünümsülükten ikili topolojik uzaylar üretilebilir:

Önerme 3.3.3. d, bir X kümesi üzerinde yarı-metrikimsi olmak üzere $(X,\tau_d,\tau_{d^{-1}})$ bir ikili topolojik uzaydır.

Kanıt: $x \in X$ olmak üzere $B_d(x,\epsilon) = \{y | d(x,y) < \epsilon\}$ ve $B_{d^{-1}}(x,\epsilon) = \{y | d(y,x) < \epsilon\}$ kümelerini kuralım. $\tau_d = \{G \subset X | \forall x \in G : \exists \epsilon > 0, B_d(x,\epsilon) \subset G\}$ ve $\tau_{d^{-1}} = \{G \subset X | \forall x \in G : \exists \epsilon > 0, B_{d^{-1}}(x,\epsilon) \subset G\}$ ile tanımlıdır. Tanımdan görüldüğü gibi τ_d ve $\tau_{d^{-1}}$ yapılarının her biri X üzerinde birer topolojidir. $\Box$

Yukarıdaki önermede bahsedilen τ_d ve $\tau_{d^{-1}}$ topolojilerinin ortak topolojisi, d ve d^{-1} yarı-metrikimsilerinin simetrizasyon metriğinden elde edilen topoloji olur. Yani;

Önerme 3.3.4. d bir yarı-metrikimsi olmak üzere $\tau_{d^s} = \tau_{d \vee d^{-1}} = \tau_d \vee \tau_{d^{-1}}$'dir.

Kanıt: $G \in \tau_{d^s}$ ve $x \in G$ olsun. Bu durumda $B_{d^s}(x, \epsilon) \subset G$ ve olacak şekilde bir $\epsilon > 0$ vardır. Ayrıca bu $\epsilon > 0$ sayısı için $B_d(x, \epsilon), B_{d^{-1}}(x, \epsilon) \subset B_{d^s}(x, \epsilon) \subset G$'dir. Böylece $G \in \tau_d \vee \tau_{d^{-1}}$ olur. Diğer yandan, $H \in \tau_d \vee \tau_{d^{-1}}$ ve $x \in H$ olsun. Bu durumda $x \in G_1 \cap G_2 \subset H$ olacak şekilde $G_1 \in \tau_d$ ve $G_2 \in \tau_{d^{-1}}$ vardır. O halde birer $\epsilon_1 > 0$ ve $\epsilon_2 > 0$ sayıları için $B_d(x, \epsilon_1) \subset G_1$ ve $B_{d^{-1}}(x, \epsilon_2) \subset G_2$ olur. $\epsilon := min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ olarak seçilirse $B_{d^s}(x, \epsilon) = B_d(x, \epsilon) \cap B_{d^{-1}}(x, \epsilon) \subset G_1 \cap G_2 \subset H$ olacağından $H \in \tau_{d^s}$ elde edilir. □

Önerme 3.3.5. $\mathcal{U}$, bir X kümesi üzerinde düzgünümsü olmak üzere $(X, \tau_{\mathcal{U}}, \tau_{\mathcal{U}^{-1}})$ bir ikili topolojik uzaydır.

Kanıt: Önerme 3.1.15'den $\tau_{\mathcal{U}}$'nun bir topoloji olduğu bilinmektedir. $\tau_{\mathcal{U}^{-1}}$ topolojisi de $\mathcal{U}^{-1}$ düzgünümsüsü yardımıyla, benzer şekilde kurulur. □ Önceki önermede sözü edilen $\tau_{\mathcal{U}}$ ve $\tau_{\mathcal{U}^{-1}}$ topolojilerinin ortak topolojisi, $\mathcal{U}$ ve $\mathcal{U}^{-1}$ düzgünümsülerinin simetrizasyonundan elde edilen topoloji olur. Yani;

Önerme 3.3.6. $\mathcal{U}$ bir düzgünümsü olmak üzere $\tau_{\mathcal{U}^s} = \tau_{\mathcal{U} \vee \mathcal{U}^{-1}} = \tau_{\mathcal{U}} \vee \tau_{\mathcal{U}^{-1}}$'dir.

Kanıt: Önerme 3.3.4'nin kanıtında yarı-metrikimsi yerine düzgünümsü alınarak benzer kanıt görülür.

Not 3.3.7. Önceki bölümde verilen $\mathcal{U}_\omega$ gösterimi hatırlanırsa, $\mathcal{U}$ ile $\mathcal{U}_\omega$'nın aynı ikili topolojiyi ürettiği açıkça görülür.

Örnek 3.3.8. Örnek 3.1.25'deki l ve l^{-1} yarı-metrikimsilerini düşünürsek $\tau_l = R$ ve $\tau_{l^{-1}} = S$ olmak üzere $(\mathbb{R}, R, S)$ bir ikili topolojik uzaydır. Üstelik, $\tau_l \vee \tau_{l^{-1}} = \tau_{l \vee l^{-1}} = \tau_{l^s} = \tau_e$'dir.

Tanım 3.3.9. İkili topolojik uzaylar arasında tanımlı $f : (X, \tau_1, \tau_2) \to (Y, \zeta_1, \zeta_2)$ dönüşümü için $f : (X, \tau_1) \to (Y, \zeta_1)$ ve $f : (X, \tau_2) \to (Y, \zeta_2)$ dönüşümleri sürekli oluyorsa $f : (X, \tau_1, \tau_2) \to (Y, \zeta_1, \zeta_2)$ dönüşümüne *ikişer sürekli* denir.

Tanım 3.3.10. (X, τ) bir topolojik uzay, $x_0 \in X$ ve $f : X \to \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda

i) Her $\epsilon > 0$ reel sayısına karşılık bir $N \in \mathcal{K}_\tau(x_0)$ komşuluğu, her $x \in N$ için $f(x) < f(x_0) + \epsilon$ olacak şekilde bulunabiliyorsa f'ye x_0 *noktasında üst yarı süreklidir* denir.

ii) Her $\epsilon > 0$ reel sayısına karşılık bir $N \in \mathcal{K}_\tau(x_0)$ komşuluğu, her $x \in N$ için $f(x) > f(x_0) - \epsilon$ olacak şekilde bulunabiliyorsa f'ye x_0 *noktasında alt yarı süreklidir* denir.

Tanım 3.3.11. (X, τ_1, τ_2) bir ikili topolojik uzay ve $A, B \subset X$ olsun. Eğer X üzerinde $f(A) = \{0\}$, $f(B) = \{1\}$, $0 \leq f \leq 1$ olacak şekilde τ_1-ays ((X, τ_1) üzerinde alt yarı sürekli) ve τ_2-üys ((X, τ_2) üzerinde üst yarı sürekli) bir f dönüşümü varsa A, B'den τ_2*'ye göre* τ_1*-tamamen ayrılmıştır* denir.

Tanım 3.3.12. (X, τ_1, τ_2) bir ikili topolojik uzay olsun. Eğer her τ_1-kapalı $A \subset X$ altkümesi, $X - A$'daki her noktadan τ_2'ye göre τ_1-tamamen ayrılmış ise τ_1, τ_2'ye *göre tamamen regülerdir* denir. Eğer τ_1, τ_2'ye göre tamamen regüler ve τ_2, τ_1'e göre tamamen regüler ise, (X, τ_1, τ_2) uzayı *ikişer tamamen regülerdir* denir.

Tanım 3.3.13. (X, τ_1, τ_2) bir ikili topolojik uzay olsun. Eğer X üzerinde τ_1-ays ve τ_2-üys olan reel değerli bir f fonksiyonu varsa $\{x \in X | f(x) \leq 0\}$ kümesi τ_1*-sıfır-kümesidir* ve $\{x \in X | 0 \leq f(x)\}$ kümesi τ_2*-sıfır-kümesidir* denir.

Önerme 3.3.14. Bir (X, τ_1, τ_2) ikili topolojik uzayı ikişer tamamen regülerdir $\Leftrightarrow$ τ_1-sıfır-kümelerin ailesi, τ_1-kapalı kümeler için bir tabandır ve τ_2-sıfır-kümelerin ailesi, τ_2-kapalı kümeler için bir tabandır.

Yardımcı Teorem 3.3.15. X bir küme ve $\{U_n | n \in \mathbb{N}\} \subset P(X \times X)$, $U_0 = X \times X$, her $n \in \mathbb{N}$ için $\Delta \subset U_n$ ve $(U_{n+1})^3 \subset U_n$ olsun. Bu durumda bir $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ dönüşümü;

a) Her $x, y, z \in X$ için $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$

b) Her pozitif n tamsayısı için $U_n \subset \{(x, y) | d(x, y) < 2^{-n}\} \subset U_{n-1}$

şartlarını sağlayacak şekilde vardır. Hatta eğer her $n \in \mathbb{N}$ için U_n simetrik ise **b)** şartını sağlayan bir d yarı-metriği vardır.

Kanıt: Kanıt için [11, Yardımcı Teorem 6.12] bakınız. $\square$

Daha önce belirtildiği gibi bir topolojik uzayın düzgünleştirilebilir olması için gerek ve yeter koşul tamamen regüler olmasıdır. Diğer taraftan, Örnek 3.1.7'da görüldüğü gibi, her topolojik uzay Pervin düzgünümsülüğü ile düzgünümsüleştirilebilirdir. Ayrıca bir (X, τ_1, τ_2) ikili topolojik uzayın düzgünümsüleştirilebilir olması için $\tau_{\mathcal{U}} = \tau_1$ ve

$\tau_{\mathcal{U}^{-1}} = \tau_2$ olacak şekilde bir $\mathcal{U}$ düzgünümsü yapısı var olmalıdır. O halde $\tau_{\mathcal{U}_1} = \tau_1$ ve $\tau_{\mathcal{U}_2} = \tau_2$ olacak şekilde $\mathcal{U}_1$ ve $\mathcal{U}_2$ düzgünümsü yapıları kesinlikle vardır, ancak $\mathcal{U}_1$ ile $\mathcal{U}_2$ arasında eşlenik ilişkisi olmak zorunda değildir. Aşağıdaki teoremde bir ikili topolojik uzayın düzgünümsüleştirilebilir olması için gerekli şart verilecektir.

Teorem 3.3.16. Bir (X, τ_1, τ_2) ikili topolojik uzayı düzgünümsüleştirilebilirdir $\Leftrightarrow$ bu uzay ikişer tamamen regülerdir.

Kanıt: $(\Rightarrow)$ X üzerinde $\tau_{\mathcal{U}} = \tau_1$ ve $\tau_{\mathcal{U}^{-1}} = \tau_2$ olacak şekilde bir $\mathcal{U}$ düzgünümsülüğü olsun. τ_1-sıfır-kümelerin τ_1-kapalı kümeler için bir taban oluşturduğunu gösterelim. $G \in \tau_1$ ve $a \in G$ olsun. Bu durumda en az bir $V \in \mathcal{U}$ vardır ki $V(a) \subset G$ olur. $\mathcal{U}^3 = \{U^3 | U \in \mathcal{U}\}$ ailesi $\mathcal{U}$ için bir tabandır. Tümevarımla her $n \in \mathbb{N}$ için $(U_{n+1})^3 \subset U_n$ olacak şekilde $\mathcal{U}$'nun elemanlarının bir $\{U_n | n = 0, 1, \ldots\}$ dizisini tanımlayalım. $\mathcal{U}^3$, $\mathcal{U}$ için bir taban olduğundan $W^3 \subset U_n$ olacak şekilde bir $W \in \mathcal{U}$ vardır. $U_{n+1} = W$ olsun. Bu durumda, önceki yardımcı teoremden X üzerinde her $n = 1, 2, \ldots$ için $U_n \subset \{(x, y) \in X \times X | p(x, y) < 2^{-n}\} \subset U_{n-1}$ olacak şekilde bir p yarı-metrikimsisi vardır. $q = p^{-1}$, $\tau_p = \tau_1'$ ve $\tau_q = \tau_2'$ olsun. $\tau_1' \subset \tau_1$ ve $\tau_2' \subset \tau_2$ olduğunu gösterelim. $K \in \tau_1'$ ve $z \in K$ ise $\{y \in X | p(z, y) < \epsilon\} \subset K$ olacak şekilde $\epsilon > 0$ vardır. $\epsilon > 2^{-n}$ olarak seçelim. Bu durumda $U_n(z) \subset K$ olur ve böylece $K \in \tau_1$ elde edilir. Benzer şekilde $\tau_2' \subset \tau_2$ olduğu da görülür. X üzerinde f dönüşümü $f(y) = p(a, y)$ ile tanımlanırsa f, τ_1'-üys ve τ_2'-ays olur. Böylece f, τ_1-üys ve τ_2-ays bulunur. Buradan $Z = \{y \in X | f(y) > \frac{1}{4}\}$ kümesi bir τ_1-sıfır-kümesidir. $p(a, a) = 0$ olduğundan $a \notin Z$ ve $X - G \subset Z$'dir. Böylece τ_1-sıfır-kümelerin τ_1-kapalı kümeler için bir taban olduğu gösterilmiş olur. O halde önceki önermeden τ_1, τ_2'ye göre tamamen regülerdir. Benzer şekilde τ_2'nin de τ_1'e göre tamamen regüler olduğu gösterilir. Böylece (X, τ_1, τ_2) ikişer tamamen regüler olur.

$(\Leftarrow)$ X üzerindeki her reel değerli f dönüşümü için $p(f)(x, y) = 0 \vee (f(x) - f(y))$ tanımlayalım. Bu durumda p, X üzerinde bir yarı-metrikimsi olur. Şimdi, $(p(f))^{-1} = q(f)$ alınırsa, $q(f) = p(-f)$'dir. $U_{(p(f), r)} = \{(x, y) | p(f)(x, y) < r\}$ ve $\mathcal{S} = \{U_{(p(f), r)} | r > 0, f, \tau_1\text{-ays ve } \tau_2\text{-üys}\}$ kuralım. $\mathcal{S}$, X üzerinde bir $\mathcal{U}$ düzgünümsülüğünün alttabanıdır. $\tau_{\mathcal{U}} = \tau_1$ ve $\tau_{\mathcal{U}^{-1}} = \tau_2$ olduğunu gösterelim. $G \in \tau_1$ ve $x \in G$ ise X üzerinde $f(X - G) = \{0\}$ ve $f(x) = 1$ olacak şekilde τ_1-ays ve τ_2-üys olan bir f dönüşümü vardır. Bu durumda $x \in U_{(p(f), \frac{1}{2})}(x) = \{y \in X | 0 \vee (1 - f(y)) < \frac{1}{2}\} \subset G$ olduğundan $G \in \tau_{\mathcal{U}}$'dur. Diğer taraftan, $H \in \tau_{\mathcal{U}}$ ve $x \in H$ ise $V(x) \subset H$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{U}$ vardır. $\mathcal{S}$, $\mathcal{U}$ için bir alttaban olduğundan X üzerindeki τ_1-ays ve τ_2-üys olan dönüşümlerin sonlu bir F altkümesi var ve pozitif reel sayıların sonlu bir $\{r(f)|f \in F\}$ kümesi için $\bigcap_{f\in F} U_{(p(f),r(f))} \subset V$ olur. Belirli bir $x \in X$ ve $f \in F$ için $U_{(p(f),r(f))}(x) = \{y \in X|0 \vee (f(x) - f(y)) < r(f)\}$ kümesi τ_1-açıktır. Buradan $x \in \bigcap_{f\in F} U_{(p(f),r(f))}(x) \subset V(x) \subset H$ olduğundan H, τ_1-açık olur. Böylece $\tau_1 = \tau_{\mathcal{U}}$'dur. Yine benzer şekilde $\tau_2 = \tau_{\mathcal{U}^{-1}}$ bulunur ve (X, τ_1, τ_2) düzgünümsüleştirilebilir olur. $\square$

4 GEÇİŞLİ DÜZGÜNÜMSÜ YAPILAR

4.1 Geçişli Düzgünümsü Uzaylar

Bu bölümde geçişli tabana sahip düzgünümsülüklerin özellikleri verilmiş ve bu yapıların yakınımsılıklar ve topolojik uzaylarla ilişkisi incelenmiştir. Bu kısımda [1], [3], [5] ve [12] nolu kaynaklardan yararlanılmıştır.

Tanım 4.1.1. $\mathcal{B}$, ikili bağıntılardan oluşan bir aile olsun. Her $B \in \mathcal{B}$ geçişli ise $\mathcal{B}$ de geçişlidir. Bir geçişli (alt)tabana sahip bir düzgünümsülüğe *geçişli düzgünümsülük* denir.

Örnek 4.1.2. Pervin düzgünümsülüğü geçişlidir.

Örnek 4.1.3. d, X üzerinde Arşimed-özelliği göstermeyen bir yarı-metrikimsi ise $\mathcal{U}_d$ sayılabilir bir geçişli tabana sahip olur.

Teorem 4.1.4. (X,τ) bir topolojik uzay ise $\mathcal{S} = \{T(A, X-A) | A \in \tau\}$, τ ile uyumlu bir tam sınırlı geçişli düzgünümsülük için bir alttabandır.

Kanıt: $T(A, X-A)$ kümesini S_A ile gösterelim. $S_A = (X \times X) - (A \times X - A)$ dır. Her $A \in \tau$ için $\Delta \subset S_A$ ve $S_A \circ S_A = S_A$ olduğundan $\mathcal{S}$, X üzerinde bir $\mathcal{U}$ düzgünümsülüğü için bir alttabandır. $U \in \mathcal{U}$ ve $x \in X$ olsun. $\bigcap_{i=1}^{n} S_{A_i} \subset U$ olacak şekilde bir $\{S_{A_i} | 1 \leq i \leq n\}$,$(n \in \mathbb{N})$ ailesi vardır. Eğer $x \notin \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ ise $X = \bigcap_{i=1}^{n} S_{A_i}(x) \subset U(x)$ olur. Bu durumda $U(x) = X \in \tau$ dır. Eğer $x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ ise $\bigcap_{i=1}^{n} S_{A_i}(x) = \bigcap\{A_i | x \in A_i, 1 \leq i \leq n\}$, $U(x)$'in bir açık altkümesi olur. Buradan $\tau_{\mathcal{U}} \subset \tau$ dır. Tersine,$A \in \tau$ ve $x \in A$ ise $S_A \in \mathcal{U}$ ve $S_A(x) = A$ dır. O halde $A \in \tau_{\mathcal{U}}$ dır ve $\tau \subset \tau_{\mathcal{U}}$ olur. Böylece τ, $\mathcal{U}$ ile uyumludur. Herhangi bir $S_A \in \mathcal{S}$ için $\mathcal{A} = \{A, X-A\}$ ailesi X'in sonlu bir örtüsüdür. $A \times A \subset S_A$ ve $(X-A) \times (X-A) \subset S_A$ olduğundan $\mathcal{U}$ tam sınırlı olur. $\square$

Dikkat edilirse, önceki teoremde tanımlanan düzgünümsülük Örnek 3.1.7'de verilen Pervin düzgünümsülüğüdür. (X,τ) bir topolojik uzay olmak üzere "$A\delta_{\mathcal{P}_\tau}B \Leftrightarrow A \cap \overline{B} \neq \emptyset$" ile tanımlı $\delta_{\mathcal{P}_\tau}$, *Pervin yakınımsılığıdır.* Böylece, her topolojik uzay bir yakınımsılık ile uyumludur. Ayrıca $\delta_{\mathcal{P}_\tau}$, τ ile uyumlu en ince yakınımsılıktır: δ, τ ile uyumlu herhangi bir yakınımsılık olsun. $A\overline{\delta}B$ ise $A \subset X - \overline{B}$ dır. Buradan $A \cap \overline{B} = \emptyset$ olur ve $A\overline{\delta_{\mathcal{P}_\tau}}B$ bulunur. $\delta_{\mathcal{P}_\tau}$, τ ile uyumlu en ince yakınımsılık olduğundan τ ile uyumlu olan herhangi bir tam sınırlı düzgünümsülük $\mathcal{P}_\tau$'dan daha kabadır.

Not 4.1.5. (X,τ) bir topolojik uzay olmak üzere $\mathcal{P}_\tau$, τ ile uyumlu en ince tam sınırlı düzgünümsülüktür.

Örnek 4.1.6. τ, reel sayılar üzerindeki üst topoloji ve $\mathcal{P}$ de $(\mathbb{R},\tau)$'nun Pervin düzgünümsülüğü olsun. Bu durumda $\tau_{\mathcal{P}^s}$, Sorgenfrey topolojisidir. $\mathbb{R}$ üzerindeki Sorgenfrey topolojisi $\mathcal{S}$ ve $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere x'in komşulukları $\mathcal{B}_x = \{[x,y)|x < y, y \in \mathbb{R}\}$ ile gösterilirse $\mathcal{S} =< \{\mathcal{B}_x|x \in \mathbb{R}\} >$ dır. Ayrıca üst topoloji $\tau = \{\mathbb{R},\emptyset\} \cup \{(-\infty,a)|a \in \mathbb{R}\}$ dır ve $\mathcal{P} =<< \{S_G|G \in \tau\} >>$, $S_G = S_{(-\infty,a)} = \mathbb{R}\times\mathbb{R} - (-\infty,a)\times[a,\infty)$ olur. $T \in \tau_{\mathcal{P}^s}$ ve $x \in T$ olsun. Bu durumda $x \in U(x) \subset T$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{P}^s$ vardır. O halde bir $a \in \mathbb{R}$ vardır ki $x \neq a$ ve $(S_{(-\infty,a)} \cap S_{[a,\infty)})(x) \subset T$ sağlanır. Burada $x < a$ veya $a < x$ olabilir. $x < a$ olduğunu kabul edelim. $[x,a) \in \{\mathcal{B}_x|x \in \mathbb{R}\}$ dir. Ayrıca $[x,a) \subset (S_{(-\infty,a)} \cap S_{[a,\infty)})(x)$ dir. Böylece $x < a$ iken $(S_{(-\infty,a)} \cap S_{[a,\infty)})(x)$, Sorgenfrey topolojisinin taban elemanlarından birini kapsar. Benzer şekilde $a < x$ iken de $[a,x) \in \{\mathcal{B}_x|x \in \mathbb{R}\}$ ve $[a,x) \subset (S_{(-\infty,a)} \cap S_{[a,\infty)})(x)$ dir. O halde $\{\mathcal{B}_x|x \in \mathbb{R}\}$, $\tau_{\mathcal{P}^s}$ için bir tabandır.

Tanım 4.1.7. $\mathcal{A}$, (X,τ) topolojik uzayının açık kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer her $\mathcal{D} \subset \mathcal{A}$ alt ailesi için $\cap\mathcal{D}$ açık oluyorsa $\mathcal{A}$'ya *iç koruyan* denir.

Örnek 4.1.8. R, bir X topolojik uzayında bir ikili ön sıralama bağıntısı ve her $x \in X$ için $R(x)$ açık olsun. Bu durumda $\{R(x)|x \in X\}$ iç korur: $Y \subset X$ herhangi bir altküme olsun. $\cap_{y\in Y} R(y)$ nin açık olduğunu gösterelim. $z \in \cap_{y\in Y} R(y)$ alalım. Bu durumda her $y \in Y$ için $z \in R(y)$ olur. Buradan $R(z) \subset R(R(y)) = R(y)$ olup $R(z) \subset \cap_{y\in Y} R(y)$ bulunur. $R(z)$ açık olduğundan $\cap_{y\in Y} R(y)$ nın her noktasının iç nokta olduğu gösterilmiş olur ve $\cap_{y\in Y} R(y)$ kümesinin açık olduğu görülür.

Gösterim. X bir küme olmak üzere $\mathcal{C} \subset P(X)$ ve $x \in X$ ise $\mathcal{C}_x$ ile $\{C \in \mathcal{C}|x \in C\}$ ailesi gösterilecektir. Bu bağlamda $\cap\mathcal{C}_x = \cap\{C \in \mathcal{C}|x \in C\}$'dir.

Not 4.1.9. (X,τ) bir topolojik uzay olmak üzere $\mathcal{C} \subset \tau$ ise $\mathcal{C}$ iç koruyandır ancak ve ancak her $x \in X$ için $\cap\mathcal{C}_x \in \tau$ dur.

Gösterim. X bir küme ve $\mathcal{C} \subset P(X)$ olmak üzere $U_{\mathcal{C}}$ ile $\{(x,y)|x \in X$ ve $y \in \cap\mathcal{C}_x\}$ ailesi gösterilecektir. Buna göre, $U_{\mathcal{C}}$ yansıyan ve geçişlidir. Diğer yandan, $\mathcal{A}$, X'in altkümelerinin ailelerinin boştan farklı bir ailesi olmak üzere $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$, $\{U_{\mathcal{C}}|\mathcal{C} \in \mathcal{A}\}$ alttabanı ile üretilen düzgünümsülüğü gösterilecektir. Eğer V, bir (X,τ) topolojik uzayının bir komşu ağı ise $\mathcal{C}_V$ ile $\{V(x)|x \in X\}$ ailesi gösterilsin.

Teorem 4.1.10. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $\mathcal{A}$, iç koruyan açık ailelerin bir ailesi ve $\cup\mathcal{A}$ ailesi, τ'nun alttabanı olsun. Bu durumda $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$, τ ile uyumlu geçişli bir düzgünümsülüktür. Hatta $\mathcal{U}$, τ ile uyumlu herhangi bir düzgünümsülük ise X'in iç koruyan açık örtülerinin öyle bir $\mathcal{A}$ ailesi vardır ki $\cup\mathcal{A}$, τ için bir alttabandır ve $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ dır.

Kanıt: Her $\mathcal{C} \in \mathcal{A}$ için $U_{\mathcal{C}}$ geçişli olduğundan $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$, X üzerinde geçişli bir düzgünümsülüktür. $G \in \tau_{\mathcal{U}_{\mathcal{A}}}$ ve $x \in G$ olsun. Bu durumda $\bigcap_{i=1}^{n}(U_{\mathcal{C}_i}(x)) \subset G$ olacak şekilde $\mathcal{A}$'nın bir sonlu $\{\mathcal{C}_i | 1 \leq i \leq n\}$, $(n \in \mathbb{N})$ altailesi vardır. Şimdi her $i \in \{1, \ldots, n\}$ için $\mathcal{C}_i$ bir iç koruyan ailedir. Böylece $U_{\mathcal{C}_i}(x) \in \tau$ olur. O halde $\bigcap_{i=1}^{n}(U_{\mathcal{C}_i}(x)) \in \tau$ dır. Buradan $G \in \tau$ olur ve $\tau_{\mathcal{U}_{\mathcal{A}}} \subset \tau$ elde edilir. $G \in \tau$ ve $x \in G$ olsun. $\cup\mathcal{A}$, τ için bir alttaban olduğundan $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i \subset G$ olacak şekilde $A_1, \ldots, A_n \in \cup\mathcal{A}$ vardır. Her $i \in \{1, \ldots, n\}$ için $A_i \in \mathcal{C}_i$ olacak şekilde $\mathcal{C}_i \in \mathcal{A}$ olsun. Bu durumda $\bigcap_{i=1}^{n} U_{\mathcal{C}_i} \in \mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ olur ve $\bigcap_{i=1}^{n}(U_{\mathcal{C}_i}(x)) \subset G$ olup $G \in \tau_{\mathcal{U}_{\mathcal{A}}}$ elde edilir. O halde $\tau = \tau_{\mathcal{U}_{\mathcal{A}}}$ dır.

$\mathcal{U}$'nun τ ile uyumlu bir düzgünümsülük ve $\mathcal{B}$'nin de $\mathcal{U}$'nun geçişli bir tabanı olduğunu varsayalım. $V \in \mathcal{B}$, $y \in X$ ve $G = \cap\{V(x) | y \in V(x), x \in X\}$ olsun. $p \in G$ alalım. $y \in V(x)$ şartını sağlayan her $x \in X$ için $V(p) \subset V(x)$'tir. Böylece $V(p) \subset G$ olur ve $G \in \tau$ elde edilir. Buradan, her $V \in \mathcal{B}$ için $\mathcal{C}_V$, X'in bir iç koruyan açık örtüsüdür. Diğer yandan, $\mathcal{A} = \{\mathcal{C}_V | V \in \mathcal{B}\}$ olsun. Her $x \in X$ ve $V \in \mathcal{B}$ için $V(x) = U_{\mathcal{C}_V}(x)$ olduğundan $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ olduğu görülür. Ayrıca $\cup\mathcal{A} \subset \tau$ ve her $V \in \mathcal{B}$ için $V = U_{\mathcal{C}_V}$ olduğundan $\cup\mathcal{A}$, τ için bir alttabandır. $\square$

Sonuç 4.1.11. (X, τ) bir topolojik uzay ve $\mathcal{A}$, X'in tüm iç koruyan açık örtülerinin ailesi olsun. Bu durumda $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$, τ ile uyumlu olan en ince geçişli düzgünümsülük olur.

Kanıt: $\mathcal{U}$, τ ile uyumlu herhangi bir geçişli düzgünümsülük olsun. Bu durumda önceki teoremden X'in iç koruyan açık örtülerinin bir $\mathcal{D}$ ailesi vardır ve $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{\mathcal{D}}$ dir. Ayrıca $\mathcal{D} \subset \mathcal{A}$ dır. O halde $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{\mathcal{D}} \subset \mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ olur. $\square$

Tanım 4.1.12. Önceki sonuçta verilen en ince geçişli düzgünümsülüğe (X, τ) için *ince geçişli düzgünümsülük* denir ve $\mathcal{FT}_\tau$ ile gösterilir. Açıkça görülür ki; $\tau_{\mathcal{FT}_\tau} = \tau$'dur.

Önerme 4.1.13. Bir topolojik uzayın tüm geçişli komşuağlarının ailesi, ince geçişli düzgünümsülük için bir tabandır.

Kanıt: (X, τ) bir topolojik uzay, $\mathcal{W} = \{W | W, \tau\text{'nun bir geçişli komşuağı}\}$ ve $\mathcal{S} = \{U_{\mathcal{C}} | \mathcal{C} \in \mathcal{A}\}$ olsun. $U \in \mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ alalım. Bu durumda $U_{\mathcal{C}_1} \cap \cdots \cap U_{\mathcal{C}_n} \subset U$ olacak şekilde $U_{\mathcal{C}_1}, \ldots, U_{\mathcal{C}_n} \in \mathcal{S}$, $(n \in \mathbb{N})$ vardır. $x \in X$ ve her $i \in \{1, \ldots, n\}$ için $U_{\mathcal{C}_i}(x)$ açıktır ve sonlu arakesitleri de açık olacağından $\bigcap_{i=1}^{n}(U_{\mathcal{C}_i}(x))$, x'in bir komşuluğu olur. Ayrıca her bir $U_{\mathcal{C}_i}$ geçişli olduğundan $\bigcap_{i=1}^{n} U_{\mathcal{C}_i} \in \mathcal{W}$ dir. □

Önerme 4.1.14. (X, τ) bir topolojik uzay ve $\mathcal{A}$, X'in tüm sonlu açık örtülerinin ailesi olsun. Bu durumda $\mathcal{U}_{\mathcal{A}} = \mathcal{P}_{\tau}$ olur.

Kanıt: $\mathcal{S}_1 = \{U_{\mathcal{C}} | \mathcal{C} \in \mathcal{A}\}$, $\mathcal{U}_{\mathcal{A}} =<< \mathcal{S}_1 >>$, $\mathcal{S}_2 = \{S_G | G \in \tau\}$, $\mathcal{P}_{\tau} =<< \mathcal{S}_2 >>$ ve $U_{\mathcal{C}} \in \mathcal{S}_1$ alalım. Her $C \in \mathcal{C}$ için $C \in \tau$ ve $\mathcal{C}$ sonlu olduğundan $x \in X$ için $\cap\mathcal{C}_x$, x'i içeren sonlu tane C'nin arakesiti olup yine $\cap\mathcal{C}_x \in \tau$ olur. Ayrıca $U_{\mathcal{C}} = S_{\cap\mathcal{C}_x}$ dir. Buradan $U_{\mathcal{C}} \in \mathcal{S}_2$ dir ve $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_2$ elde edilir. Bir $S_G \in \mathcal{S}_2$ alalım. X'in $\mathcal{C} := \{X, G\}$ açık örtüsünü düşünelim. Bu durumda $S_G = U_{\mathcal{C}}$ olur. Böylece $S_G \in \mathcal{S}_1$ olup $\mathcal{S}_2 \subset \mathcal{S}_1$ bulunur. O halde $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2$ dir. □

Teorem 4.1.15. (X, τ) bir topolojik uzay ve $\mathcal{A}$, $\tau =< \cup\mathcal{A} >$ olacak şekilde iç koruyan açık ailelerin bir ailesi olsun. $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ tam sınırlıdır ancak ve ancak $\mathcal{A}$'nın her elemanı sonlu bir ailedir.

Kanıt: Bakınız [3, Önerme 2.8]. □

Sonuç 4.1.16. (X, τ) bir topolojik uzay ise $\mathcal{P}_{\tau} = \mathcal{FT}_{\tau}$'dur ancak ve ancak X'in her iç koruyan açık örtüsü sonludur.

Kanıt: $\mathcal{A}$, X'in tüm iç koruyan açık örtülerinin ailesi olmak üzere $\mathcal{FT}_{\tau} = \mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ dır.

($\Rightarrow$) $\mathcal{P}_{\tau} = \mathcal{FT}_{\tau}$ olduğundan $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ tam sınırlıdır. Önceki teoremden $\mathcal{A}$'nın tüm elemanları sonlu olur.

($\Leftarrow$) X'in her iç koruyan açık örtüsü sonlu ise önceki teoremden $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ tam sınırlıdır. O halde $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$, τ ile uyumlu en ince tam sınırlı geçişli düzgünümsülük olur. Buradan $\mathcal{P}_{\tau} \subset \mathcal{U}_{\mathcal{A}} = \mathcal{FT}_{\tau}$ bulunur. Diğer yandan $\mathcal{P}_{\tau}$, τ ile uyumlu herhangi bir tam sınırlı düzgünümsülükten daha ince olduğundan $\mathcal{FT}_{\tau} \subset \mathcal{P}_{\tau}$ dır. Böylece $\mathcal{P}_{\tau} = \mathcal{FT}_{\tau}$ olur. □

Tanım 4.1.17. $X \neq \emptyset$ ve (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer $\mathcal{C} \subset P(X)$ ve küme içerme kısmi sıralaması, $\mathcal{C}$ üzerinde bir iyi sıralama ise $\mathcal{C}$'ye *iyi monoton* denir. $\mathcal{A}$, X'in tüm iyi monoton açık ailelerinin ailesi olmak üzere $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ düzgünümsülüğü, X'in *iyi monoton düzgünümsülüğü* olarak adlandırılır ve $\mathcal{M}_{\tau}$ ile gösterilir.

Önerme 4.1.18. (X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere $\mathcal{P}_{\tau} \subset \mathcal{M}_{\tau}$'dur.

Kanıt: Zermelo İyi Sıralama Teoremi'ne göre her küme iyi sıralanabildiğinden X'in tüm sonlu açık aileleri de birer iyi sıralı aile olur. Böylece $\mathcal{P}_{\tau} \subset \mathcal{M}_{\tau}$ elde edilir. □

Her $\epsilon > 0$ ve $f : X \to \mathbb{R}$ dönüşümü için $U_{(\epsilon,f)} = f^{-1}(Q_\epsilon) = \{(x,y)|f(x) - f(y) < \epsilon\}$ olsun.

Önerme 4.1.19. $\mathcal{U}$, X üzerinde bir düzgünümsülük ise $f : (X,\mathcal{U}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{Q})$ dönüşümü düzgün süreklidir $\Leftrightarrow$ Her $\epsilon > 0$ için $U_{(\epsilon,f)} \in \mathcal{U}$ dur.
Kanıt: Düzgün süreklilik tanımından açıktır. □
Gösterim. $(X,\mathcal{U})$ bir düzgünümsü uzay olsun. $(X,\mathcal{U})$'dan $(\mathbb{R}, \mathcal{Q})$'ya tüm düzgün sürekli [sınırlı] dönüşümlerin ailesi $Q(\mathcal{U})$ $[QB(\mathcal{U})]$ ile ve benzer şekilde (X, δ) bir yakınımsı uzay olmak üzere (X, δ)'dan $(\mathbb{R}, \delta_\mathcal{Q})$'ya tüm yakın sürekli [sınırlı] dönüşümlerin ailesi de $Q(\delta)$ $[QB(\delta)]$ ile gösterilsin.

Not 4.1.20. $\mathcal{U}$ ve $\mathcal{V}$, bir X kümesi üzerinde düzgünümsü yapılar ve δ da, X üzerinde bir yakınımsılık olsun. Bu durumda aşağıdakiler açıktır:

a) $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ ise $Q(\mathcal{U}) \subset Q(\mathcal{V})$ ve $QB(\mathcal{U}) \subset QB(\mathcal{V})$ dır.

b) $Q(\mathcal{U}) \subset Q(\delta_\mathcal{U})$.

c) $f \in Q(\mathcal{U})$ (veya $f \in Q(\delta)$) ise f altyarı süreklidir.

d) $QB(\delta) \subset QB(\mathcal{U}_\delta)$.

Yardımcı Teorem 4.1.21. (X, δ) bir yakınımsı uzay ve $A, B \subset X$, $A\overline{\delta}B$ olsun. Bu durumda $f(A) = 1$ ve $f(B) = 0$ olacak şekilde bir $f : X \to [0,1]$, $f \in QB(\delta)$ vardır.
Kanıt: [3, Yardımcı Teorem 4.26.]'da T_0 uzaylar için uygun kanıt verilmiştir. □

Teorem 4.1.22. (X, δ) bir yakınımsı uzay olmak üzere,

$$\mathcal{U} \in \pi(\delta) \Leftrightarrow QB(\mathcal{U}) = QB(\delta).$$

Kanıt: $(\Rightarrow)$ $\mathcal{U} \in \pi(\delta)$ olsun. Not 4.1.20 **d)**'den $Q(\mathcal{U}_\delta) = QB(\delta)$ olduğunu göstermek yeterlidir. $f \in Q(\mathcal{U}_\delta)$ olsun. $\mathcal{U}_\delta$ tam sınırlı olduğundan $\cup\{A_i \times A_i|1 \leq i \leq n\} \subset U(1,f)$ olacak şekilde X'in sonlu bir $\{A_i|1 \leq i \leq n\}$, $n \in \mathbb{N}$ örtüsü vardır. Her $i \in \{1,\ldots,n\}$ için $a_i \in A_i$ seçelim. $F = \{a_i|1 \leq i \leq n\}$ kümesini kuralım. Bu durumda $U_{(1,f)}(F) = X$ olur ve böylece $1+\max\{f(x)|x \in F\}$, f için bir üst sınır ve $-1+\min\{f(x)|x \in F\}$, f için bir alt sınır olur. Buradan $f \in QB(\mathcal{U}_\delta)$ ve $Q(\mathcal{U}_\delta) = QB(\mathcal{U}_\delta)$ dır. Böylece, $\mathcal{U}_\delta \subset \mathcal{U}$ ve Not 4.1.20 **a)**'dan $QB(\mathcal{U}_\delta) \subset QB(\mathcal{U})$ dır. Not 4.1.20 **b)**'den $QB(\mathcal{U}) \subset QB(\delta)$ dır. Yine Not 4.1.20 **d)**'den $QB(\delta) \subset QB(\mathcal{U}_\delta)$ dir ve $QB(\mathcal{U}) = QB(\delta)$ olur.

($\Leftarrow$) $\delta = \delta_{\mathcal{U}}$ olduğunu gösterelim. $A\overline{\delta}B$ olsun. Bu durumda önceki yardımcı teoremden $f(A) = 1$ ve $f(B) = 0$ olacak şekilde bir $f \in QB(\delta)$ vardır. $QB(\delta) = QB(\mathcal{U})$ olduğundan $f : (X,\mathcal{U}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{Q})$ düzgün süreklidir. Her $\epsilon > 0$ için $f^{-1}(Q_\epsilon) \in \mathcal{U}$ dır. Her $U \in \mathcal{U}$ için $(A \times B) \cap U \neq \emptyset$ olsaydı $\epsilon = \frac{1}{2}$ için de $(A \times B) \cap f^{-1}(Q_\epsilon) \neq \emptyset$ olurdu. Ancak $(x, y) \in (A \times B) \cap f^{-1}(Q_\epsilon)$ alınırsa $f(x) = 1$ ve $f(y) = 0$ olduğundan $1 < \frac{1}{2}$ elde edilir. O halde bir $U \in \mathcal{U}$ için $(A \times B) \cap U = \emptyset$ olmalıdır. Buradan $A\overline{\delta_{\mathcal{U}}}B$ olur. Bu durumda $\delta_{\mathcal{U}} \subset \delta$ dır. Tersine, $A\overline{\delta_{\mathcal{U}}}B$ ise $f(A) = 1$ ve $f(B) = 0$ olacak şekilde bir $f \in QB(\delta_{\mathcal{U}})$ vardır. Buradan $f \in QB(\mathcal{U})$ dır. Ayrıca $QB(\mathcal{U}) = QB(\delta)$ olduğundan $f \in QB(\delta)$ olur. Şimdi $A\delta B$ olduğunu varsayalım. $f(A)\delta_{\mathcal{Q}}f(B)$ dır ve her $\epsilon > 0$ için $(A\times B)\cap f^{-1}(Q_\epsilon) \neq \emptyset$ dir. $f^{-1}(Q_\epsilon) \in \mathcal{U}$ olduğu bilindiğinden $A\delta_{\mathcal{U}}B$ olur. O halde $A\overline{\delta}B$ olmalıdır. Buradan $\delta \subset \delta_{\mathcal{U}}$ bulunur. □

Sonuç 4.1.23. (X, δ) bir yakınımsı uzay olsun. $\{U_{(\epsilon,f)}|\epsilon > 0, f \in QB(\delta)\}$, $\mathcal{U}_\delta$ için bir alttaban olur.

Kanıt: $\mathcal{U}$, X üzerinde $\{U_{(\epsilon,f)}|\epsilon > 0, f \in QB(\delta)\}$ alttabanına sahip düzgünümsülük olsun. $QB(\delta) = QB(\mathcal{U}_\delta)$ olduğundan $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}_\delta$ ve $QB(\mathcal{U}) \subset QB(\delta) \subset QB(\mathcal{U})$ olur. Böylece önceki teoremden $\mathcal{U} \in \pi(\delta)$ dır. $\mathcal{U}$'nun tam sınırlı olduğu gösterilirse $\mathcal{U} = \mathcal{U}_\delta$ olur. $f \in QB(\delta)$ ve $\epsilon > 0$ olsun. Genelliği bozmaksızın her $x \in X$ için $f(x) \geq 0$ alalım. Her negatif olmayan i tamsayısı için $A_i = \{t||f(t) - \frac{i\epsilon}{2}| < \frac{\epsilon}{2}\}$ olsun. O halde f sınırlı olduğundan $\cup_{i=1}^{n} A_i = X$ olacak şekilde bir n pozitif tamsayısı vardır. $j \in [0, n]$, j bir tamsayı ve $(x, y) \in A_j \times A_j$ olsun. Bu durumda $|f(x) - \frac{j\epsilon}{2}| < \frac{\epsilon}{2}$ ve $|f(y) - \frac{j\epsilon}{2}| < \frac{\epsilon}{2}$ olur. Sonuç olarak $f(x) - f(y) \leq |f(x) - f(y)| < \epsilon$ dır ve $(x, y) \in U_{(\epsilon,f)}$ elde edilir. Yani $A_j \times A_j \subset U_{(\epsilon,f)}$ ve $U_{(\epsilon,f)} \in \mathcal{U}$ dır. Böylece $\mathcal{U}$ tam sınırlı olur ve δ ile uyumlu tek tam sınırlı düzgünümsülük var olduğundan $\mathcal{U} = \mathcal{U}_\delta$ dır. □

Bu tez çalışmasında, $C(X)$, X kümesi üzerindeki reel değerli sürekli fonksiyonların kümesini ve $C^*(X)$, $C(X)$'in sınırlı elemanlarının kümesini gösterecektir.

Not 4.1.24. (X, τ), tamamen regüler bir topolojik uzay ise, $\{U_{(\epsilon,f)}|\epsilon > 0, f \in C(X)\}$, X üzerinde τ ile uyumlu bir düzgünlüğün alttabanıdır.

Önerme 4.1.25. Herhangi bir (X, τ) topolojik uzayı için $C(X)$ ve $C^*(X)$ ile elde edilen düzgünümsülükler sırasıyla $\mathcal{U}_{\mathcal{C}}$ ve $\mathcal{U}_{\mathcal{C}^*}$ olsun. $\mathcal{U}_{\mathcal{C}}$ ve $\mathcal{U}_{\mathcal{C}^*}$ düzgünümsüleri, τ ile uyumlu olmak zorunda değildir. Ancak τ tamamen regüler topoloji ise bu düzgünümsüler τ ile uyumlu olur.

Kanıt: Bakınız [1, Teorem 8.14]. □

Önerme 4.1.26. (X,τ) bir topolojik uzay ve $\mathcal{D}$, X üzerindeki altyarı sürekli fonksiyonların bir ailesi olsun öyle ki $G \in \tau$ ve $x \in G$ için $f(x) = 1$ ve $f(X - G) = 0$ olacak şekilde bir $f \in \mathcal{D}$ var olsun. Bu durumda $\{U_{(\epsilon,f)} | \epsilon > 0, f \in \mathcal{D}\}$, τ ile uyumlu olan bir düzgünümsülük için bir alttaban olur.

Kanıt: $\mathcal{S} = \{U_{(\epsilon,f)} | \epsilon > 0, f \in \mathcal{D}\}$ olsun. Her $\epsilon > 0$ ve $f \in \mathcal{D}$ için $\Delta \subset U_{(\epsilon,f)}$ ve $U_{(\epsilon/2,f)} \circ U_{(\epsilon/2,f)} \subset U_{(\epsilon,f)}$ olduğundan $\mathcal{S}$, X üzerinde bir $\mathcal{U}$ düzgünümsülüğü için bir alttabandır. $\epsilon > 0$, $f \in \mathcal{D}$ ve $x \in X$ olsun. Bu durumda $U_{(\epsilon,f)}(x) = f^{-1}(f(x) - \epsilon, \infty)$ olur ve f altyarı sürekli olduğundan $f^{-1}(f(x) - \epsilon, \infty) \in \tau$ dır. O halde $\tau_{\mathcal{U}} \subset \tau$ dır. Şimdi, $G \in \tau$ ve $x \in G$ alalım. Bu durumda $f(x) = 1$ ve $f(X - G) = 0$ olacak şekilde $f \in \mathcal{D}$ vardır. Böylece, $x \in U_{(1,f)}(x) \subset G$ olur ve $\tau \subset \tau_{\mathcal{U}}$ elde edilir. $\square$

Tanım 4.1.27. (X,τ) bir topolojik uzay olmak üzere önceki önermede oluşturulan düzgünümsülüğe (X,τ) için *yarı sürekli düzgünümsülük* denir ve $\mathcal{SC}_\tau$ ile gösterilir.

Not 4.1.28. Yarı sürekli düzgünümsülük, X üzerindeki her bir $f : X \to (\mathbb{R}, \mathcal{Q})$ sürekli dönüşümünü düzgün sürekli yapan en kaba düzgünümsülüktür.

Tanım 4.1.29. (X,τ) bir topolojik uzay ve $\mathcal{A} \subset P(X)$ olsun. Eğer her $x \in X$ noktasının $\mathcal{A}$'nın en çok sonlu sayıda elemanını kesen bir komşuluğu varsa, $\mathcal{A}$ ailesine *yerel sonlu aile* denir. Eğer her $x \in X$ noktası, $\mathcal{A}$'nın en çok sonlu sayıda elemanının içine düşüyorsa $\mathcal{A}$ ailesine *nokta sonlu aile* denir.

Tanım 4.1.30. (X,τ) bir topolojik uzay ve $\mathcal{A}$, X'in tüm nokta sonlu (yerel sonlu) açık örtülerinin ailesi ise $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$'ya (X,τ) için *nokta sonlu (yerel sonlu) örtüsel düzgünümsülük* denir ve $\mathcal{PF}_\tau(\mathcal{LF}_\tau)$ ile gösterilir.

Tanım 4.1.31. $\{A_n | n \in \mathbb{Z}\}$[7], X'in açık altkümelerinin bir ailesi olsun. Her $n \in \mathbb{Z}$ için $A_n \subset A_{n+1}$, $\cap_{n\in\mathbb{Z}} A_n = \emptyset$ ve $\cup_{n\in\mathbb{Z}} A_n = X$ oluyorsa $\{A_n | n \in \mathbb{Z}\}$ ailesine X'in bir *açık spektrumu* denir ve $\mathfrak{a}$ ile gösterilir. Her açık spektrumun iç koruyan olduğu kolayca görülür.

Önerme 4.1.32. $\mathfrak{a}$ bir açık spektrum ise $A_n = X$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{Z}$ vardır ancak ve ancak $\mathfrak{a}$ bir nokta sonlu açık örtüdür.

Kanıt: $(\Rightarrow)$ $A_n = X$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{Z}$ var ve $x \in X$ olsun. $A_n \subset A_{n+1} \subset \cdots$ olduğundan A_n ve A_n'i kapsayan tüm kümeler X'e eşittir. Buradan $\mathfrak{a}$, sonlu bir aile

[7] $\mathbb{Z}$, tamsayılar kümesidir.

olur. Böylece x, $\mathfrak{a}$'nın en fazla sonlu elemanının içine düşer.
($\Leftarrow$) Her $x \in X$ için $x \in A_{n_x} \in \mathfrak{a}$ olacak şekilde $n_x \in \mathbb{Z}$ var ve $A_{n_x} \subset A_{n_x+1} \subset \cdots$ olsun. $\mathfrak{a}$ nokta sonlu olduğundan $A_{n_x+m} = X$ olacak şekilde bir $m \in \mathbb{Z}$ olmalıdır. □

Önceki önermede bulunan şartı sağlayan $\mathfrak{a}$ açık spektrumuna *nokta sonlu açık spektrum* denir. Ayrıca herhangi bir $\mathfrak{a}$ açık spektrumu için $U_{\mathfrak{a}} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(A_n \setminus A_{n-1}) \times A_n$ olduğu açıktır.

Teorem 4.1.33. $\mathcal{A}$, bir (X, τ) topolojik uzayında tüm açık spektrumların ailesi olsun. Bu durumda $\mathcal{U}_{\mathcal{A}} = \mathcal{SC}_\tau$ olur.
Kanıt: $\mathcal{D}$, tüm altyarı sürekli dönüşümlerin ailesi olsun. $\{U_{\mathfrak{a}} | \mathfrak{a} \in \mathcal{A}\}$ ile $\{U_{(\epsilon,f)} | \epsilon > 0, f \in \mathcal{D}\}$ ailelerinin denk tabanlar olduğunu gösterelim. $f \in \mathcal{D}$ ve $\epsilon > 0$ verilsin ve $x_0 \in X$ alalım. Her $n \in \mathbb{Z}$ için $A_n = \{x | f(x) > f(x_0) - (n+1)\epsilon\}$ kümesini ve $\mathfrak{a} = \{A_n | n \in \mathbb{Z}\}$ ailesini kuralım. $(x, y) \in U_{\mathfrak{a}}$ için $U_{\mathfrak{a}} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(A_n \setminus A_{n-1}) \times A_n$ eşitliğinden $f(x_0) - n\epsilon \geq f(x) > f(x_0) - (n+1)\epsilon$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{Z}$ vardır. Buradan $y \in U_{\mathfrak{a}}(x)$'tir ve $f(y) > f(x_0) - (n+1)\epsilon$ elde edilir. Böylece, $f(x) - f(y) < f(x_0) + n\epsilon - (f(x_0) - (n-1)\epsilon) = \epsilon$ ve $(x, y) \in U_{(\epsilon,f)}$ olur. Diğer yandan $\mathfrak{a} \in \mathcal{A}$ olsun. Her $x \in X$ için $x \in A_n \setminus A_{n-1}$ şartını sağlayan $n \in \mathbb{Z}$ için $f(x) = -n$ tanımlayalım. Buradan f, altyarı süreklidir. Şimdi $(x, y) \in U_{(1,f)}$ ve $x \in A_n \setminus A_{n-1}$ olsun. Bu durumda $f(y) > f(x) - 1 = -(n+1)$'dir ve $y \in A_n$ elde edilir. Böylece $(x, y) \in (A_n \setminus A_{n-1}) \times A_n \subset U_{\mathfrak{a}}$ olur. □

Sonuç 4.1.34. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Bu durumda $\mathcal{SC}_\tau$, geçişli bir düzgünümsülüktür.
Kanıt: Önceki teoremden, $\mathcal{A}$, tüm açık spektrumların ailesi olmak üzere $\mathcal{U}_{\mathcal{A}} = \mathcal{SC}_\tau$ olduğu görüldü. Daha önceden $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$'nın alttabanının geçişli olduğu gösterilmiş olduğundan $\mathcal{SC}_\tau$ düzgünümsülüğü, geçişli olur. □

Sonuç 4.1.35. (X, τ) sayılabilir kompakt bir topolojik uzay ise X'in her açık spektrumu bir nokta sonlu açık örtüdür ve $\mathcal{SC}_\tau \subset \mathcal{PF}_\tau$ olur.
Kanıt: $\mathfrak{a}$ bir açık spektrum ise aynı zamanda X'in sayılabilir bir açık örtüsüdür. (X, τ) sayılabilir kompakt olduğundan $\mathfrak{a}$'nın sonlu bir $\mathfrak{a}'$ altörtüsü vardır. Buradan her $x \in X$ için x, $\mathfrak{a}$'nın en fazla sonlu tane elemanının içinde bulunacağından $\mathfrak{a}$, X'in bir nokta sonlu açık örtüsü olur. □

Şimdi, Sonuç 4.1.39'u vermek için gerekli olan önermeleri sunalım:

Önerme 4.1.36. $(X,\mathcal{U})$ tam sınırlı bir düzgünümsülük olsun. $\mathcal{U}$ ayrık ise X sonludur.

Kanıt: $\mathcal{U}$ ayrık olduğundan $U \subset \Delta$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{U}$ vardır. Ayrıca $\mathcal{U}$'nun tam sınırlılığından her $i \in \{1, \ldots, n\}$ için $A_i \times A_i \subset U$ olacak şekilde X'in bir $\{A_i, \ldots, A_n\}$, $(n \in \mathbb{N})$ örtüsü vardır. Her $i \in \{1, \ldots, n\}$ için $x_i \in A_i$ seçelim. $A_i \subset U(x_i)$'dir. Buradan $X = \cup_{i=1}^n A_i \subset \cup_{i=1}^n U(x_i) \subset \cup_{i=1}^n \Delta(x_i) = \cup_{i=1}^n \{x_i\}$ olur ve X, sonlu elde edilir. □

Önerme 4.1.37. $(X, \mathcal{P})$ Pervin düzgünümsü uzayı için $\mathcal{P}$ ayrık ise X sonludur.

Kanıt: Pervin düzgünümsülüğü tam sınırlı olduğundan önceki önermeden istenen elde edilir. □

Önerme 4.1.38. (X, τ) Hausdorff uzay ve $\mathcal{U}$, τ ile uyumlu bir düzgünümsülük olsun. Eğer $\delta_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}}$, $X \times X$ üzerindeki Pervin yakınımsılığı ise $\mathcal{U}$ ayrık düzgünlüktür.

Kanıt: (X, τ), Hausdorff olduğundan $\overline{\Delta} = \Delta$'dır ve $(X \times X \setminus \Delta) \cap \overline{\Delta} = \emptyset$ olur. $\delta_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}}$'nun Pervin yakınımsı oluşundan $(X \times X \setminus \Delta)\overline{\delta_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}}}\Delta$'dır. O halde $\{((a, b), (c, d)) | (a, c), (b, d) \in U\} \cap [(X \times X - \Delta) \times \Delta] = \emptyset$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{U}$ vardır. Böylece, her $x \in X$ için $U^{-1}(x) = \{x\}$ olur ve $U = \Delta$ elde edilir. □

Sonuç 4.1.39. (X, τ) bir Hausdorff uzay ve $\mathcal{P}_X$, X üzerindeki Pervin düzgünümsülüğü olsun. $\mathcal{P}_X \times \mathcal{P}_X = \mathcal{P}_{X\times X}$ ise X sonludur.

Önerme 4.1.40. X bir topolojik uzay ve S, X'in bir kapalı veya açık altuzayı olsun. S'nin her normal (geçişli) komşuağı, X'in bir normal (geçişli) komşuağının S'ye kısıtlamasıdır.

Kanıt: V, S'nin bir normal komşuağı olsun. Eğer S açık ise $V^* = V \cup ((X - S) \times X)$ ve S kapalı ise $V^* = V \cup (X \times X - S)$ kuralım. V^*, X'in bir komşuağı olur. V geçişli ise V^* da geçişlidir. □

Sonuç 4.1.41. X bir topolojik uzay ve $S \subset X$ olsun. S, bir açık ve bir kapalı kümenin arakesiti şeklinde yazılsın. Bu durumda $\mathcal{FN}_X|_{S\times S} = \mathcal{FN}_S$ ve $\mathcal{FT}_X|_{S\times S} = \mathcal{FT}_S$'dir.

Kanıt: $\mathcal{FN}$, X'teki tüm normal komşuağlarından oluştuğundan ve X'in tüm geçişli komşuağları $\mathcal{FT}$ için bir taban olduğundan önceki önermeden istenen elde edilir. □

Teorem 4.1.42. X bir T_1 uzay ve $D = \{x_n | n \in \mathbb{N}\}$, X'in yoğun bir altuzayı olsun. Eğer $X - D$, X'te 2. kategoriden ise X'in her V komşuağı için $(V^2 \cap (D \times D)) - U \neq \emptyset$ olacak şekilde D'nin bir U normal komşuağı vardır.

Kanıt: Her $m, n \in \mathbb{N}$ için $g(m, x_n) = D - \{x_i | i \leq m, x_i \neq x_n\}$ kuralım ve $U =$

$\bigcup_{i=1}^{\infty}(\{x_n\} \times g(n, x_n))$ olsun. D'nin $\mathcal{C} = \{D\}$ örtüsünü düşünelim. $\mathcal{C}$, D'nin bir nokta sonlu örtüsüdür ve $U_{\mathcal{C}} = D \times D$ olduğundan U, D üzerindeki nokta sonlu düzgünümsülüğün bir elemanıdır. Buradan U, D'nin bir normal komşuağıdır. $V^2 \cap (D \times D) \subset U$ olacak şekilde X'in bir V komşuağı olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n = \{x \in X - D | \forall y \in D : V(x) \cap D - g(n, y) \neq \emptyset\}$ kuralım. Bu durumda $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X - D$ olur ve böylece $X - D$, 2. kategoriden olduğundan $(\overline{A})^{\circ} \neq \emptyset$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. O halde $x_m \in D \cap (\overline{A})^{\circ}$ olacak şekilde bir $m > n$ vardır. Şimdi, $x \in V(x_m) \cap A_n$ olsun. Böylece $V(x) \cap D \subset V^2(x_m) \cap D \subset U(x_m) = g(m, x_m) \subset g(n, x_m)$ olur ve $V(x) \cap D \subset g(n, x_m)$ kapsaması, A_n'in kuruluşu ile çelişir. □

Örnek 4.1.43. $(\mathbb{R}, \tau_e)$ Öklid topolojisi T_1'dir ve $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, 2. kategoridendir. Bu durumda önceki teoreme göre, $\mathbb{Q}$'nun bir U normal komşuağı vardır ki, $\mathbb{R}$'nin her V komşuağı için $V^2 \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \not\subset U$ olur. Bu ise $\mathbb{R}$'deki komşuağlarının $\mathbb{Q}$'ya kısıtlamasının $\mathbb{Q}$'daki komşuağları ile birebir örtüşemeyeceğini gösterir. Buradan, $\mathcal{FN}_{\mathbb{R}}$, $\mathbb{R}$ üzerindeki τ_e'nin ince düzgünümsülüğü olmak üzere $\mathcal{FN}_{\mathbb{R}}|_{\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}} \neq \mathcal{FN}_{\mathbb{Q}}$ sonucu elde edilir.

Tanım 4.1.44. Bir X kümesi üzerindeki bir δ yakınımsılığına, $x \in X$ ve $A \subset X$ olmak üzere $A\delta\{x\}$ iken $\{x\}\delta A$ oluyorsa *nokta simetriktir* denir.

Önerme 4.1.45. $(X, \mathcal{U})$ bir düzgünümsü uzay olsun. Aşağıdakiler denktir:

i) $(X, \delta_{\mathcal{U}})$ nokta simetriktir.

ii) Her $U \in \mathcal{U}$ ve $x \in X$ için $V(x) \subset U(x)$ olacak şekilde simetrik bir $V \in \mathcal{U}$ vardır.

iii) Her $U \in \mathcal{U}$ ve $x \in X$ için $V^{-1}(x) \subset U(x)$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{U}$ vardır.

iv) $\tau_{\mathcal{U}} \subset \tau_{\mathcal{U}^{-1}}$.

Kanıt: *i)* $\Rightarrow$ *ii)* $U \in \mathcal{U}$ ve $x \in X$ olsun. Bu durumda $\{x\}\overline{\delta_{\mathcal{U}}}(X - U(x))$'dir. *i)*'den $(X - U(x))\overline{\delta_{\mathcal{U}}}\{x\}$ olur. Şimdi $V = T(\{x\}, X - U(x)) \cap T(X - U(x), \{x\})$ kümesini kuralım. Teorem 3.2.17'den $V \in \mathcal{U}_{\delta}$ ve $\mathcal{U}_{\delta} \subset \mathcal{U}_{\omega} \subset \mathcal{U}$ olduğundan $V \in \mathcal{U}$'dur. Ayrıca V simetriktir ve $V(x) \subset U(X)$'dir.
ii) $\Rightarrow$ *iii)* V simetrik ve $V(x) \subset U(x)$ olduğundan $V^{-1}(x) \subset U(X)$ olur.
iii) $\Rightarrow$ *iv)* $G \in \tau_{\mathcal{U}}$ ve $x \in G$ olsun. $U(x) \subset G$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{U}$ vardır. *iii)*'den bir $V \in \mathcal{U}$ için $V^{-1}(x) \subset U(x) \subset G$ olur ve $G \in \tau_{\mathcal{U}^{-1}}$ elde edilir.
iv) $\Rightarrow$ *i)* $x \in X$, $A \subset X$ ve $\{x\}\overline{\delta_{\mathcal{U}}}A$ olsun. Bu durumda $\{x\} \times A \cap U = \emptyset$ olacak şekilde bir

$U \in \mathcal{U}$ vardır. O halde $A \cap U(x) = \emptyset$'dir ve $x \notin \overline{A}$ olur. Buradan $x \in X - \overline{A} \in \tau_{\mathcal{U}} \subset \tau_{\mathcal{U}^{-1}}$ olacağından bir $V \in \mathcal{U}$ için $x \in V^{-1}(x) \subset X - \overline{A}$'dır. Böylece $A\overline{\delta_{\mathcal{U}}}\{x\}$ olur. $\square$

Bir düzgünümsülüğe, önceki önermedeki $i) - iv)$ şartlarından birini sağlıyorsa *nokta simetriktir* denir. Buna göre aşağıdaki üç sonuç, kolayca görülür.

Sonuç 4.1.46. Nokta simetrik bir düzgünümsülük ile uyumlu topolojik uzay R_0'dır.

Sonuç 4.1.47. δ, nokta simetrik bir yakınımsılık ise $\tau_{\delta^{-1}} = \tau_{\delta^s}$'dir.

Sonuç 4.1.48. δ bir yakınımsılık olmak üzere δ^{-1} nokta simetrik ise (X, τ_δ) topolojik uzayı, tamamen regülerdir.

Sonuç 4.1.49. δ bir yakınımsılık olmak üzere;

$$\tau_\delta = \tau_{\delta^{-1}} \Leftrightarrow \delta \text{ ve } \delta^{-1} \text{ nokta simetriktir.}$$

Kanıt: $(\Rightarrow)$ $\{x\}\overline{\delta}A$ olsun. Bu durumda $x \notin \mathrm{cl}_\delta A$'dır ve $x \notin \mathrm{cl}_{\tau_\delta} A = \mathrm{cl}_{\tau_{\delta^{-1}}} A$ olur. Böylece $x \notin \mathrm{cl}_{\delta^{-1}} A$ olup $A\overline{\delta}\{x\}$ elde edilir. Buradan δ nokta simetriktir. Benzer şekilde δ^{-1} de nokta simetrik bulunur.
$(\Leftarrow)$ δ nokta simetrik olduğundan $\tau_{\delta^{-1}} \subset \tau_\delta$ ve δ^{-1} nokta simetrik olduğundan $\tau_\delta \subset \tau_{\delta^{-1}}$'dir. $\square$

Önerme 4.1.50. (X, τ), R_0 uzay ise $\delta_{\mathcal{P}_\tau}$ nokta simetriktir.

Kanıt: $\tau = \tau_{\mathcal{P}_\tau} = \tau_{{\mathcal{P}_\tau}^{-1}}$ olduğunu gösterelim. $G \in \tau$ ve $x \in G$ olsun. (X, τ)'nun R_0 olmasından $\overline{\{x\}} \subset G$'dir. Ayrıca $X - \overline{\{x\}} \in \tau$ ve $(S_{X - \overline{\{x\}}})^{-1} = S_{\overline{\{X\}}}$'dir. $S_{\overline{\{X\}}} \in {\mathcal{P}_\tau}^{-1}$ ve $x \in S_{\overline{\{X\}}}(x) \subset G$ olduğundan istenen elde edilir. $\square$

Önerme 4.1.51. Eğer $(X, \mathcal{U})$ bir kompakt T_1 düzgünümsü uzay ise $\mathcal{U}$ nokta simetriktir.

Kanıt: $\mathcal{U}$ nokta simetrik olmasın ve $y \in X$ alalım. Bu durumda, $\{U^{-1}(y) \setminus V(y) | U \in \mathcal{U}\}$ ailesi X üzerinde bir $\mathcal{F}$ süzgecinin tabanı olacak şekilde bir $V \in \mathcal{U}$ vardır. $(X, \tau_{\mathcal{U}})$ kompakt olduğundan $\mathcal{F}$'nin bir x yığılma noktası vardır. Böylece her $U \in \mathcal{U}$ için $U(x) \cap (U^{-1}(y) \setminus V(y)) \neq \emptyset$ ve $U(x) \cap U^{-1}(y) \neq \emptyset$ olur. $\tau_{\mathcal{U}}$ topolojisi T_1 olduğundan $x = y$ olmalıdır. Buradan $V(x) \cap (U^{-1}(y) \setminus V(y)) \neq \emptyset$ oluşundan $V(x) \cap (U^{-1}(x) \setminus V(x)) \neq \emptyset$'dir ve $V(x) \cap (X \setminus V(x)) \neq \emptyset$ çelişkisi bulunur. $\square$

Tanım 4.1.52. (X, δ) bir yakınımsı uzay, $x \in X$ ve $A \subset X$ olsun. x'in her G τ_δ-komşuluğu için $A\delta G$ iken $\{x\}\delta A$ oluyorsa, δ'ya *yerel simetrik* denir.

Not 4.1.53. **1)** (X,δ) bir yakınımsı uzay , $x \in X$ ve $A \subset X$ olsun. Eğer $\{x\}\overline{\delta}A$ ise $G\overline{\delta}A$ olacak şekilde x'in bir τ_δ-komşuluğu vardır.

2) Her yakınlık yerel simetriktir.

3) Nokta simetri ve yerel simetri kalıtsal özelliklerdir.

Önerme 4.1.54. Eğer ρ yerel simetrik bir yakınımsılık, $\delta \subset \rho$ ve $\tau_\delta = \tau_\rho$ olacak şekilde bir δ yakınımsılık varsa δ da yerel simetriktir.

Kanıt: $x \in X$'in her G τ_δ-komşuluğu için $A\delta G$ olsun. Böylece $(A,G) \in \delta \subset \rho$'dır ve $A\rho G$ olur. $\tau_\rho = \tau_\delta$ olduğundan G, aynı zamanda x'in τ_ρ -komşuluğudur ve ρ yerel simetrik olduğundan $\{x\}\rho A$'dır. Buradan $x \in \mathrm{cl}_\rho A = \mathrm{cl}_\delta A$ olup $\{x\}\delta A$ elde edilir. □

Örnek 4.1.55. $X = [0,1] \subset \mathbb{R}$ ve her $\epsilon > 0$ için $V_\epsilon = \Delta \cup [\{0\} \times [0,\epsilon)] \cup [\{1\} \times (1-\epsilon, 1]] \cup [(\frac{1}{2}-\epsilon, \frac{1}{2}) \times ((0,\epsilon) \cup (1-\epsilon, 1))]$ olsun. Bu durumda $\mathcal{U} =< \{V_\epsilon | \epsilon > 0\} >$ alalım. Açıktır ki, $\lim_{\epsilon \to 0}(V_\epsilon)^{-1} = \Delta$'dır. Buradan $\tau_{\mathcal{U}^{-1}}$ ayrık topoloji olur ve böylece, $\tau_{\mathcal{U}} \subset \tau_{\mathcal{U}^{-1}}$ olacağından $\mathcal{U}$ nokta simetriktir. $Y = (0,1) \subset X$ olmak üzere $\mathcal{V} = \mathcal{U}|_{Y\times Y}$ olsun. $\delta_{\mathcal{V}}$ bir yakınlık olmamasına rağmen $\tau_{\delta_{\mathcal{V}}} = \tau_{\delta_{\mathcal{V}^{-1}}}$'dir. Çünkü $\delta_{\mathcal{V}}$ nokta simetriktir.

Önerme 4.1.56. $(X,\mathcal{U})$ bir düzgünümsü uzay olsun. Aşağıdakiler denktir:

i) $(X,\delta_{\mathcal{U}})$ yerel simetriktir.

ii) Her $U \in \mathcal{U}$ ve $x \in X$ için $V^2(x) \subset U(x)$ olacak şekilde simetrik bir $V \in \mathcal{U}$ vardır.

iii) Her $U \in \mathcal{U}$ ve $x \in X$ için $V^{-1}(V(x)) \subset U(x)$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{U}$ vardır.

iv) Her $x \in X$ için $\{U^{-1}(U(x)) | U \in \mathcal{U}\}$ ailesi, x'in $\tau_{\mathcal{U}}$-komşuluk süzgecinin bir tabanıdır.

Kanıt: *i)* $\Rightarrow$ *ii)* $U \in \mathcal{U}$ ve $x \in X$ olsun. Öncelikle $\{x\}\overline{\delta_{\mathcal{U}}}(X-U(x))$'dir ve böylece $(X-U(x))\overline{\delta_{\mathcal{U}}}G$ ile $G\overline{\delta_{\mathcal{U}}}(X-U(x))$ olacak şekilde bir $G \in \mathcal{K}_{\tau_{\delta_{\mathcal{U}}}}(x)$ vardır. Diğer yandan $\{x\}\overline{\delta_{\mathcal{U}}}(X-G)$ olduğundan bir $H \in \mathcal{K}_{\tau_{\delta_{\mathcal{U}}}}(x)$ vardır ki $(X-G)\overline{\delta_{\mathcal{U}}}H$ ve $H\overline{\delta_{\mathcal{U}}}(X-G)$ sağlanır. $V = T(X-U(x),G) \cap T(G, X-U(x)) \cap T(H, X-G) \cap T(X-G, H)$ olsun. Bu durumda $\mathcal{U}_\delta \subset \mathcal{U}$ olduğundan $V \in \mathcal{U}$'dur ve V simetriktir. Ayrıca $V(V(x)) \subset V(G) \subset U(x)$'dir.

ii) $\Rightarrow$ *iii)* $V = V^{-1}$ olduğundan istenen elde edilir.

iii) $\Rightarrow$ *iv)* $N \in \mathcal{K}_{\tau_{\mathcal{U}}}(x)$ olsun. Bu durumda $U(x) \subset N$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{U}$ vardır.

iii)'den bir $V \in \mathcal{U}$ için $V^{-1}(V(x)) \subset U(x) \subset N$ sağlanır.

$iv) \Rightarrow i)$ $x \in X$ ve x'in her G $\tau_{\delta_{\mathcal{U}}}$-komşuluğu için $A\delta_{\mathcal{U}}G$ ve $\{x\}\overline{\delta_{\mathcal{U}}}A$ olsun. Bu durumda $(\{x\} \times A) \cap U = \emptyset$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{U}$ vardır. $A \cap U(x) = \emptyset$'dir. Ayrıca iv)'den $V^{-1}(V(x)) \subset U(x)$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{U}$ vardır. Buradan $A \cap V^{-1}(V(x)) = \emptyset$ olur. Ancak bu, varsayım ile çelişir. □

Tanım 4.1.57. Bir düzgünümsülüğe, önceki önermedeki $i) - iv)$ şartlarından birini sağlıyorsa *yerel simetrik* denir.

Önerme 4.1.58. Bir yerel simetrik düzgünümsülük ile uyumlu topolojik uzay regülerdir.

Kanıt: $A \subset X$ kapalı ve $x \notin A$ olsun. $x \in X - A$'dır ve bir $U \in \mathcal{U}$ için $x \in U(x) \subset X - A$ sağlanır. $\mathcal{U}$ yerel simetrik olduğundan $x \in V^{-1}(V(x)) \subset U(x)$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{U}$ vardır. Ayrıca $x \in \mathrm{cl}V(x) \subset V^{-1}(V(x)) \subset U(x) \subset X - A$'dır. Sonuç olarak $x \notin A \subset X - \mathrm{cl}V(x)$ ve $x \in V(x) \in \mathcal{K}_{\tau_{\mathcal{U}}}(x)$ olduğundan $\tau_{\mathcal{U}}$ regüler elde edilir. □

Önerme 4.1.59. (X, τ) regüler uzay ise $\mathcal{P}_\tau$ yerel simetriktir.

Kanıt: $x \in X$ ve $U \in \mathcal{K}_\tau(x)$ olsun. τ regüler olduğundan $\overline{V} \subset U$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{K}_\tau(x)$ vardır. Şimdi $H := S_V \cap S_{X-\overline{V}}$ olsun. Böylece, $H(x) \subset V$'dir. Üstelik $S_{X-\overline{V}}(X - U) = X - U$ olduğundan $H^{-1}(H(x)) = \overline{V} \subset U$ olur. Böylece $\mathcal{P}_\tau$ yerel simetrik elde edilir. □

Yardımcı Teorem 4.1.60. (X, τ) kompakt olmayan bir topolojik uzay ve $\mathcal{F}$, X üzerinde yığılma noktası olmayan bir süzgeç olsun. Bu durumda $\{T(G, X - G) | G \in \tau, X - G \in \mathcal{F}\}$ ailesi, τ ile uyumlu olan tam sınırlı geçişli bir düzgünümsülük için bir alttabandır.

Kanıt: Kanıtı Teorem 4.1.4'e benzerdir.

Önerme 4.1.61. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer τ ile uyumlu tüm yakınımsı yapılar nokta simetrik ise (X, τ) kompakttır.

Kanıt: $\mathcal{F}$, X üzerinde yığılma noktası olmayan bir süzgeç olsun. Yardımcı Teorem 4.1.60' den $\{T(G, X - G) | G \in \tau, X - G \in \mathcal{F}\}$ ailesi, τ ile uyumlu olan bir $\mathcal{U}$ düzgünümsülük için bir alttabandır. $F \in \mathcal{F} - \{X\}$, $x \in F$ ve F kapalı olsun. Bu durumda $F\delta_{\mathcal{U}}\{x\}$'dir ve $\delta_{\mathcal{U}}$ nokta simetrik olduğundan $\{x\}\delta_{\mathcal{U}}F$ olur ki bu durum, x'in $\mathcal{F}$'nin bir yığılma noktası olduğu anlamına gelir. □

Önerme 4.1.62. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer $\mathcal{P}_\tau$ bir düzgünlük ise her $x \in X$ için x'i içeren en küçük açık küme $\overline{\{x\}}$'dir.

Kanıt: $x \in X$ ve $U = T(X - \overline{\{x\}}, \overline{\{x\}})$ olsun. Bu durumda $\mathcal{P}_\tau$ bir düzgünlük olduğundan $U^{-1} \in \mathcal{P}_\tau$'dur ve böylece $U^{-1}(x) = \overline{\{x\}}$ olduğundan $\overline{\{x\}}$, x'in bir komşuluğu olur. (X, τ) tamamen regüler olduğundan $\overline{\{x\}}$, x'in her komşuluğunun altkümesidir. Buradan $\overline{\{x\}}$, x'i içeren en küçük açık küme olur. □

Sonuç 4.1.63. (X, τ) bir T_0 uzay olsun. $\mathcal{P}_\tau$ düzgünlüktür $\Leftrightarrow$ τ ayrık topolojidir.

Kanıt: ($\Rightarrow$) $x \in X$ alalım. Önerme 4.1.62'den $\overline{\{x\}} \in \tau$'dır. $y \in \overline{\{x\}}$ ve $x \neq y$ olsun. (X, τ), T_0 olduğundan $x \in G$ ve $y \notin G$ olacak şekilde bir $G \in \tau$ vardır. Yine Önerme 4.1.62'den $x \in \overline{\{x\}} \subset G$'dir ve $y \notin G$ olduğundan $y \notin \overline{\{x\}}$ bulunur. O halde $x = y$'dir. Böylece $\overline{\{x\}} \subset \{x\}$ olur ve $\{x\}$ açık elde edilir.

($\Leftarrow$) Her $G \in \tau$ için $(S_G)^{-1} = S_{(X-G)}$'dir. τ ayrık olduğundan $X - G \in \tau$'dır ve $(S_G)^{-1} \in \mathcal{P}_\tau$ olur. □

Tanım 4.1.64. X bir topolojik uzay, $x, y \in X$ ve $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$ olsun. Eğer x ve y'nin arakesitleri boş olan komşulukları varsa, bu uzaya R_1 *uzay* denir.

Not 4.1.65. (X, τ) bir topolojik uzay olsun.

a) X bir R_1 uzay ise R_0'dır.

b) X'in Hausdorff uzay olması için gerek ve yeter koşul, R_1 ve T_1 uzay olmasıdır.

Teorem 4.1.66. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $i)$'den $iv)$'ye olan tüm durumlar ardışığını gerektirir. Üstelik eğer (X, τ) R_1 ise aşağıdakiler denktir.

i) τ sonludur.

ii) $\mathcal{P}_\tau$, τ ile uyumlu tek düzgünümsülüktür.

iii) Her iç koruyan açık aile sonludur.

iv) (X, τ) kalıtsal kompakttır.

v) $\delta_{\mathcal{P}_\tau}$, τ ile uyumlu tek yakınımsılıktır.

Kanıt: $iv) \Rightarrow v)$ (X, τ) kalıtsal kompakt ve δ, τ ile uyumlu bir yakınımsılık olsun. $\delta_{\mathcal{P}_\tau}$, τ ile uyumlu en ince yakınımsılık olduğundan $\delta_{\mathcal{P}_\tau} \subset \delta$'dır. Şimdi $\delta \subset \delta_{\mathcal{P}_\tau}$ olduğunu

gösterelim. $A\overline{\delta_{\mathcal{P}_\tau}}B$ olsun. Buradan $A\cap\overline{B}=\emptyset$ olur ve A kompakt olduğundan $A\overline{\delta}B$'dır.
i) $\Rightarrow$ *ii)* $\mathcal{U}$, τ ile uyumlu bir düzgünümsülük olsun. τ sonlu olduğundan tüm altuzay topolojileri de sonludur. Topolojisi sonlu olan uzay kompakttır ve böylece (X,τ) kalıtsal kompakt olur. (X,τ) kalıtsal kompakt olduğundan [13]'e göre ve *iv)* $\Rightarrow$ *v)*'den $\delta_{\mathcal{U}}=\delta_{\mathcal{P}_\tau}$'dır ve böylece δ ile uyumlu en kaba düzgünümsülük $\mathcal{P}_\tau$ olduğundan $\mathcal{P}_\tau\subset\mathcal{U}$ olur. τ sonlu olduğundan Önerme 4.1.14'den $U_\tau\in\mathcal{P}_\tau$'dır. X'in her komşuağı U_τ'yu içerdiğinden $\mathcal{U}\subset\mathcal{P}_\tau$ olur.
ii) $\Rightarrow$ *iii)* *ii)*'den $\mathcal{FT}_\tau=\mathcal{P}_\tau$'dır. Böylece Sonuç 4.1.16'den her iç koruyan açık aile sonlu olur.
iii) $\Rightarrow$ *iv)* Bakınız [13].
v) $\Rightarrow$ *i)* (X,τ), R_1 ve $\delta_{\mathcal{P}_\tau}$, τ ile uyumlu tek yakınımsılık olsun. O halde $\delta_{\mathcal{P}_\tau}$ nokta simetriktir. Önerme 4.1.61'den ve $\delta_{\mathcal{P}_\tau}$, τ ile uyumlu tek yakınımsılık olduğundan (X,τ) kompakt olur. Diğer taraftan her kompakt R_1 uzay tamamen regüler olduğundan $\mathcal{P}_\tau$ bir düzgünlüktür. Böylece önceki önermeden $\mathcal{C}=\{\overline{\{x\}}|x\in X\}$ ailesi, X'in bir açık örtüsüdür. Ayrıca (X,τ) kompakt olduğundan $\mathcal{C}$ sonludur. Sonuç olarak, her $G\in\tau$ için $G=\cup\{\overline{\{x\}}|x\in G\}$ olduğundan τ sonludur. □

Aşağıdaki sonuç önceki teoremden açıktır.

Sonuç 4.1.67. (X,τ) bir Hausdorff uzay olsun. Buna göre aşağıdakiler denktir:

a) X sonludur.

b) $\mathcal{P}_\tau$, τ ile uyumlu tek düzgünümsülüktür.

c) $\delta_{\mathcal{P}_\tau}$, τ ile uyumlu tek yakınımsılıktır.

Örnek 4.1.68. Burada tek yakınımsılık ile uyumlu iken birden fazla düzgünümsülük ile de uyumlu olan bir uzay örneği verilecektir: $N=\mathbb{N}-\{0\}$ ve τ, N üzerinde sonlu tümleyenler topolojisi olsun. (N,τ) kalıtsal kompakt olduğundan önceki teoremden $\delta_{\mathcal{P}_\tau}$, tek uyumlu yakınımsılık olur. $G_1=N$ ve her $n>1$ için $G_n=N-\{1,2,\ldots,n-1\}$ kuralım. Bu durumda $\mathcal{G}=\{G_n|n\in N\}$ ailesi, N'in sonsuz bir iç koruyan açık örtüsü olur. Teorem 4.1.15'den $\mathcal{FT}_\tau$ tam sınırlı değildir ve böylece $\mathcal{FT}_\tau\neq\mathcal{P}_\tau$ olur.

4.2 Geçişli Topolojik Uzaylar

Bu kesimde geçişli topolojik uzaylar ile ilgili bazı temel teoremlere ve örneklere yer verilmiştir. Burada, [3], [5], [8], [14], [15], [16], [17] ve [18] nolu kaynaklardan yararlanılmıştır.

Tanım 4.2.1. Bir (X, τ) topolojik uzayına, $\mathcal{FN}_\tau = \mathcal{FT}_\tau$ oluyorsa *geçişli* denir.

Daha önce bir topolojik uzayın düzgünleştirilebilir olması için tamemen regüler olması gerektiği ifade edilmişti. Aşağıdaki önermede ise bir topolojik uzayın geçişli bir düzgünlük ile uyumlu olabilmesinin şartı verilecektir. Açıktır ki; her düzgünlük bir düzgünümsü olduğundan geçişli civarlardan oluşan bir tabana sahip olan düzgünlükler geçişlidir. Temel kavramlar bölümünde tanımı verilen " sıfır-boyutlu uzay " kavramını hatırlayarak aşağıdaki karakterizasyonu verelim.

Önerme 4.2.2. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. τ ile uyumlu geçişli bir düzgünlüğün olması için gerek ve yeter şart (X, τ)'nun sıfır-boyutlu olmasıdır. Eğer (X, τ) bir sıfır-boyutlu uzay ve $\mathcal{A}$, X'in tüm açık bölüntülerinin ailesi ise sayfa 51'deki tanım ile oluşturulan $\mathcal{U}_\mathcal{A}$ yapısı, τ ile uyumlu en ince düzgünlük olur.

Kanıt: $(\Rightarrow)$ $\mathcal{U}$, τ ile uyumlu geçişli bir düzgünlük olsun. Not 2.2.9'dan $\mathcal{U}$'nun simetrik civarlardan oluşan bir tabanı olduğu bilinmektedir. Ayrıca $\mathcal{U}$, bir düzgünlük olduğundan her bir civar Δ'yı kapsar. Bu durumda $\mathcal{U}$'nun X üzerindeki denklik bağıntılarından oluşan bir $\mathcal{B}$ tabanı vardır. Her $x \in X$ ve $B \in \mathcal{B}$ için $B(x)$, hem açık hem kapalı olduğundan $\{B(x) | x \in X, B \in \mathcal{B}\}$ ailesi τ için hem açık hem kapalı kümelerden oluşan bir tabandır. Böylece (X, τ) sıfır-boyutlu olur.

$(\Leftarrow)$ $\mathcal{A}$, X'in tüm açık bölüntülerinin ailesi olsun. Her $\mathcal{C} \in \mathcal{A}$ için $\mathcal{C}$ iç koruyan ve $\cup\mathcal{A}$, τ için bir alttaban olduğundan $\mathcal{U}_\mathcal{A}$, τ ile uyumlu geçişli bir düzgünlük olur. Şimdi de $\mathcal{U}_\mathcal{A}$'nın τ ile uyumlu en ince geçişli düzgünlük olduğunu gösterelim. $\mathcal{V}$, τ ile uyumlu geçişli düzgünlük ve $\mathcal{B}$, $\mathcal{V}$'nin denklik bağıntılarından oluşan tabanı olsun. Her $B \in \mathcal{B}$ için $\{B(x) | x \in X\} \in \mathcal{A}$'dır ve böylece $B \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ olur. Sonuç olarak $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}_\mathcal{A}$ elde edilir. $\square$

Önerme 4.2.3. (X, τ), yerel kompakt sıfır boyutlu Hausdorff uzay olsun. τ ile uyumlu en kaba düzgünümsülük geçişlidir.

Kanıt: δ, Yardımcı Teorem 3.2.39'de tanımlanan güçlü içerme ile belirlenen yakınımsılık olsun. Bu durumda δ, τ ile uyumlu olduğundan $\mathcal{U}_\delta$ da τ ile uyumlu en kaba düzgünümsülüktür. Bir $T(A, B) \in \mathcal{U}_\delta$ elemanının geçişli bir civar kapsadığını gösterelim. $B \neq \emptyset$ ve $A \bar{\delta} B$ olsun. Bu durumda $A \subset K \subset G \subset X - B$ olacak şekilde bir kompakt K kümesi ve bir açık G kümesi vardır. (X, τ) sıfır boyutlu olduğundan K'nın hem açık hem kapalı olduğunu varsayabiliriz. Şimdi, $U = T(K, X - K)$ olsun. Yardımcı Teorem 3.2.39'deki $\ll$ güçlü içerme tanımından $K \ll K$'dır ve dolayısıyla $U \in \mathcal{U}_\delta$ olur. Diğer yandan, U geçişlidir ve $U \subset T(A, B)$'dir. □

Yardımcı Teorem 4.2.4. $\mathcal{U}$, bir X kümesi üzerinde geçişli bir düzgünümsülük ise $\mathcal{U}_\omega$ da geçişlidir.

Kanıt: $\mathcal{V}$, X üzerinde $\{T(G, X-G) | G\overline{\delta_{\mathcal{U}}}(X-G)\}$ alttabanı ile üretilen düzgünümsülük olsun. $\mathcal{V}, \mathcal{U}$'dan daha kaba olan bir tam sınırlı düzgünümsülük olduğundan $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}_\omega$'dır. Şimdi $\delta_{\mathcal{V}} \subset \delta_{\mathcal{U}}$ olduğu gösterilirse $\mathcal{V} = \mathcal{V}_\omega = \mathcal{U}_{\delta_{\mathcal{V}}} \supset \mathcal{U}_{\delta_{\mathcal{U}}} = \mathcal{U}_\omega$ olacağından $\mathcal{V} = \mathcal{U}_\omega$ bulunur ve istenen elde edilir. O halde $\delta_{\mathcal{V}} \subset \delta_{\mathcal{U}}$ olduğunu gösterelim: $A\overline{\delta_{\mathcal{U}}}B$ olsun. Buradan geçişli bir $U \in \mathcal{U}$ civarı için $(A \times B) \cap U = \emptyset$'dir. Ayrıca $U \cap (U(A) \times (X - U(A))) = \emptyset$ olduğundan $V := T(U(A), X - U(A)) \in \mathcal{V}$'dır. Böylece $(A \times B) \cap V = \emptyset$ olur ve $A\overline{\delta_{\mathcal{V}}}B$ bulunur. □

Şimdi tanımı, 2.1. alt bölümünde verilen "sıfır-küme" kavramını ve Önerme 4.1.25'de verilen $\mathcal{U}_\mathcal{C}$, $\mathcal{U}_{\mathcal{C}^*}$ gösterimlerini hatırlayarak aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz:

Teorem 4.2.5. (X, τ) tamamen regüler uzay olsun. Aşağıdakiler denktir:

a) Eğer R, bir Z sıfır-kümesini içeren bir sıfır-olmayan-küme ise $Z \subset H \subset R$ olacak şekilde hem açık hem kapalı bir H kümesi vardır.

b) Her sıfır-küme, hem açık hem kapalı kümelerin sayılabilir kesişimidir.

c) τ ile uyumlu olan en ince düzgünlük geçişlidir.

d) $\mathcal{U}_{\mathcal{C}^*}$ geçişli bir düzgünlüktür.

e) $\mathcal{U}_\mathcal{C}$ geçişli bir düzgünlüktür.

Kanıt: Teoremin kanıtına çok uzun olduğu için bu çalışmada yer verilememiştir. Ancak ilgili okuyucular kanıta [3, Teorem 6.4]'den ulaşabilir. □

Tanım 4.2.6. Teorem 4.2.5'de bulunan denklik şartlarından herhangi birini sağlayan bir tamamen regüler uzaya *güçlü-sıfır-boyutlu uzay* denir.

Not 4.2.7. Her güçlü-sıfır-boyutlu uzay sıfır-boyutludur.

Önerme 4.2.8. Her sıfır-boyutlu Lindelöf uzayı güçlü-sıfır-boyutludur

Kanıt: (X, τ) bir sıfır-boyutlu Lindelöf uzay, Z bir sıfır-küme ve R, Z'yi içeren bir sıfır-olmayan-küme olsun. Her $x \in X$ için $G_x \cap Z \neq \emptyset$ iken $G_x \subset R$ olacak şekilde hem açık hem kapalı G_x kümesi alalım. Bu durumda $\{G_x|x \in X\}$ ailesi sayılabilir $\{G_{x_n}|n \in \mathbb{N}\}$ altörtüsüne sahiptir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $H_n = G_{x_n} - \cup_{i<n} G_{x_i}$ ve $H = \cup\{H_n|H_n \cap Z \neq \emptyset\}$ kuralım. O halde H hem açık hem kapalı bir kümedir ve $Z \subset H \subset R$'dir. □

Sonuç 4.2.9. Bir sayılabilir regüler uzay ile uyumlu en ince düzgünlük geçişlidir.
Kanıt: [8, Sonuç 6.2.8]'den sayılabilir regüler uzay güçlü-sıfır-boyutludur. Böylece Tanım 4.2.6 ve Teorem 4.2.5 **c)**'den τ ile uyumlu olan en ince düzgünlük geçişlidir. □

Tanım 4.2.10. Bir (X, τ) topolojik uzayında açık kümelerin bir sayılabilir ailesinin arakesiti açık oluyorsa (X, τ)'ya *P-uzayı* denir.

Önerme 4.2.11. (X, τ) bir tamamen regüler P-uzayı ise güçlü-sıfır-boyutludur.
Kanıt: $\mathcal{U}$, τ ile uyumlu en ince düzgünlük, $U \in \mathcal{U}$ ve $< U_n >$, $\mathcal{U}$'nun simetrik civarlarının bir normal dizisi olsun. Bu durumda $V = \cap_{n=1}^{\infty} U_n$ geçişli olduğundan, v, X üzerinde bir denklik bağıntısıdır ve her $x \in X$ için $V(x) = \cap_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ kümesi açıktır. Öyleyse V geçişli komşuağı ve $V \subset U$ olduğundan $\mathcal{U}$'nun geçişli ve simetrik civarlardan oluşan bir tabanı vardır ve buradan $\mathcal{U}$ geçişlidir. □

Teorem 4.2.12. (X, τ) bir T_0 topolojik uzay olsun. Buna göre, aşağıdakiler denktir:

i) (X, τ) güçlü-sıfır-boyutlu ve metriklenebilirdir.

ii) τ ile uyumlu ve sayılabilir geçişli tabanı olan bir $\mathcal{U}$ düzgünlüğü vardır.

iii) (X, τ) Arşimed özelliğini sağlamayacak biçimde metriklenebilirdir.

Kanıt: *i)* $\Rightarrow$ *ii)* d, X üzerinde τ ile uyumlu bir metrik ve her $n \in \mathbb{N}$ için $U_n = \{(x, y)|d(x, y) < 2^{-n}\}$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için U_n, τ ile uyumlu en ince düzgünlüğün bir elemanı olduğundan $V_n \subset U_n$ olacak şekilde en ince düzgünlüğün bir V_n civarı vardır. (X, τ) güçlü-sfır-boyutlu olduğundan bu en ince düzgünlük geçişlidir ve böylece V_n denklik bağıntısıdır. Bu durumda $\{V_n|n \in \mathbb{N}\}$, τ ile uyumlu olan bir düzgünlük için sayılabilir geçişli bir taban olur.
ii) $\Rightarrow$ *iii)* $\mathcal{U}$, τ ile uyumlu ve sayılabilir geçişli bir tabanı $\{U_n|n \in \mathbb{N}\}$ olan bir düzgünlük olsun. Genelliği bozmaksızın, her $n \in \mathbb{N}$ için $U_{n+1} \subset U_n$ ve U_n simetrik kabul edelim. Her $x \in X$ için $d(x, x) = 0$ tanımlayalım. $x \neq y$ için $(x, y) \notin U_j$ olan en küçük j pozitif tam sayısı n olmak üzere $d(x, y) = 2^{-n}$ olsun. Bu durumda $\mathcal{U}_d = \mathcal{U}$ olduğundan d, τ ile uyumludur ve Arşimed-özelliği göstermeyen bir metriktir.

$iii) \Rightarrow i)$ (X,d), Arşimed-özelliği göstermeyen ve $\tau = \tau_d$ olacak şekilde bir metrik uzay ve F, X'in kapalı bir altkümesi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $V_n = \{(x,y) | d(x,y) < \frac{1}{n}\}$ kuralım. $V_n(F)$ açıktır ve ayrıca $V_n(F)$'deki her yakınsak dizinin limiti yine $V_n(F)$'de olduğundan kapalıdır. $F = \cap_{n=1}^{\infty} V_n(F)$ olduğundan önceki teoremin **b)** şıkkına göre (X, τ_d), güçlü-sıfır-boyutludur. □

Önerme 4.2.13. Her P-uzayı geçişlidir.

Kanıt: Önerme 4.2.11'un kanıtında belirtildiği gibi, P-uzayının komşuağlarının bir normal dizisinin elemanlarının arakesiti geçişli komşuağı olduğundan istenen elde edilir. □

Önerme 4.2.14. Kapalı geçişli uzayların her sayılabilir birleşimi geçişlidir.

Kanıt: $X = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$ ve F_n, X'in kapalı ve geçişli altuzayı olsun. U, X'in bir normal komşuağı ve $< U_n >$, $U_1^4 \subset U$ olacak şekilde X'in komşuağlarının bir normal dizisi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için F_n altuzaylarının $V_n \subset U_n$ olacak şekilde bir geçişli V_n komşuağı vardır. Önerme 4.1.40'den her $n \in \mathbb{N}$ için $W_n \cap (F_n \times F_n) = V_n$ olacak şekilde bir $W_n \in \mathcal{FT}_X$ vardır. Her $x \in X$ için $m(x)$ ile $\{n \in \mathbb{N} | x \in F_n\}$ kümesinin en küçük elemanı gösterilsin. Şimdi, X uzayının bir W komşuağını şu şekilde tanımlayalım: $W(x) = (W_{m(x)} \cap U_{m(x)})(x) - \cup\{F_n | n < m(x)\}$.

Böylece, Önerme 3.1.29'a göre W komşuağı için tanımlı W^∞ ikili bağıntısı, geçişli olur. Bu durumda, $W^\infty \subset U$ olduğunu gösterelim: $(x,y) \in W^\infty$ ve k, $(x,y) \in W^n$ şartını sağlayan $n \in \mathbb{N}$ pozitif tamsayılarının en küçüğü olsun. Bu durumda sonlu bir $x = x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1} = y$ dizisi vardır ki; her $i \leq k$ için $(x_i, x_{i+1}) \in W$ olur. Ayrıca her $i \leq k$ için $m(x_i) \leq m(x_{i+1})$'dir. Şimdi $m(x_i) = m(x_{i+1}) = m(x_{i+2}) = m$ olacak şekilde bir $i < k$ sayısı var olsun. Bu durumda $x_{i+1} \in W_m(x_i) \cap F_m = V_m(x_i)$'dir ve benzer olarak $x_{i+2} \in V_m(x_{i+1})$ olur. Böylece $x_{i+2} \in V_m(x_i) \subset W_m(x_i) \cap U_m(x_i)$ olacağından $(x_i, x_{i+2}) \in W$'dir ve buradan $(x,y) \in W^{k-1}$ bulunur. Bu ise k'nın seçimi ile çelişir. O halde her $i < k$ için $m(x_i) < m(x_{i+2})$ olmalıdır. Böylece $(x,y) \in U_{m(x_1)} \circ U_{m(x_2)} \circ \cdots \circ U_{m(x_k)} \subset U_1 \circ U_1 \circ U_2 \circ U_2 \circ \cdots \circ U_k \circ U_k \subset (U_1)^4 \subset U$ olur. □

Not 4.2.15. Bir geçişli uzayın açık sürekli görüntüsü geçişli olması gerekmediğine örnek [3, Bölüm 6.34]'de verilmiştir. Buna rağmen geçişli uzayların kapalı sürekli görüntüleri için durum farklıdır:

Önerme 4.2.16. Bir geçişli uzayın kapalı sürekli görüntüsü geçişlidir.

Kanıt: (X, τ) bir topolojik uzay ve $f : X \to Y$ sürekli kapalı bir dönüşüm olsun. Y'nin komşuağlarının bir $< U_n >$ normal dizisi $U_1 = U$ olacak şekilde vardır. Her $n \in \mathbb{N}$ için X'in bir $< V_n >$ komşuağını, her $x \in X$ için $V_n(x) = f^{-1}(U_n(f(x)))$ şeklinde tanımlayalım. Açıktır ki; $< V_n >$ bir normal dizidir. O halde V_1, X'in bir normal komşuağıdır. $W \subset V_1$ olacak şekilde W, X'in bir geçişli komşuağı olsun. Her $y \in Y$ için $Q(y) = Y - f(X - W(f^{-1}(y)))$ olacak şekilde Y'nin bir Q komşuağını tanımlayalım. f kapalı olduğundan Q bir komşuağıdır. $W \subset V_1$ olduğundan $Q \subset U_1 \subset U$'dur. Şimdi $z \in Q(y)$ olsun. Bu durumda $z \notin f(X - W(f^{-1}(y)))$ olduğundan $f^{-1}(z) \in W(f^{-1}(y))$'dir ve W geçişli olduğundan $W(f^{-1}(z)) \subset W^2(f^{-1}(y)) = W(f^{-1}(y))$ bulunur. Böylece $Q(z) \subset Q(y)$ olup Q'nun geçişli olduğu görülür. □

Sonuç 4.2.17. Geçişli topolojik uzay olma özelliği homeomorfizma altında korunur.

Önerme 4.2.18. (X, τ) geçişli bir uzay olsun. X'in bir açık ve bir kapalı kümenin arakesiti şeklinde yazılabilen her altuzayı geçişlidir.

Kanıt: $S \subset X$ ve S, bir açık ve bir kapalı kümenin ara kesiti şeklinde yazılsın. Bu durumda Sonuç 4.1.41'den $\mathcal{FN}_X|_{S\times S} = \mathcal{FN}_S$ ve $\mathcal{FT}_X|_{S\times S} = \mathcal{FT}_S$ olduğundan S'nin her normal komşuağı bir geçişli komşuağı kapsar. □

Aşağıdaki iki sonuç, önceki önermeden açıktır.

Sonuç 4.2.19. Bir geçişli uzayın her açık altuzayı geçişlidir.

Sonuç 4.2.20. Bir geçişli uzayın her kapalı altuzayı geçişlidir.

Sonuç 4.2.21. Bir Hausdorff geçişli uzayın her yerel kompakt altuzayı geçişlidir.

Kanıt: Hausdorff uzaylarda yerel kompakt altuzaylar bir kapalı ve bir açık kümenin arakesiti şeklinde yazılabildiğinden istenen elde edilir. □

Şimdi, geçişli olmayan önemli bir topolojik uzay örneği verelim.

Örnek 4.2.22. (Kofner Düzlemi) $X = \mathbb{R}^2$ olmak üzere her $x = (x_0, y_0) \in X$ ve her $\epsilon > 0$ için $C(x, \epsilon)$ ile x merkezli ϵ yarıçaplı, x-ekseninin yukarısında ve x_0'da bu eksene teğet yuvar gösterilsin. Her negatif olmayan n tamsayısı için $U_n = \{(x, y)|y = x$ veya $y \in C(x, 2^{-n})\}$ ve her pozitif m tamsayısı için $U_{m,n} = U_n \cap \{(x, y)|\pi_2(y) - \pi_2(x) < 2^{-m}\}$ olsun (π_2, ikinci izdüşüm dönüşümüdür.). $U_n = U_{n+1}^2$ olduğundan $\{U_n|n \in \mathbb{N}\}$ ailesi, X üzerindeki bir $\mathcal{U}$ düzgünümsülüğü için tabandır. Bu şekilde oluşturulan $(X, \tau_{\mathcal{U}})$ topolojik uzayına *Kofner Düzlemi* denir. Kofner Düzlemi geçişli değildir:

U_1, bir W geçişli komşuağını içersin. Her $m, n \in \mathbb{N}$ için $A(m, n) = \{x|U_{m,n}(x) \subset$

$W(x), \forall j \in \mathbb{N} : U_{j,n-1}(x) \not\subset W(x)\}$ kuralım. $X = \cup\{A(m,n)|m,n \in \mathbb{N}\}$ olduğundan Baire Kategori Teoremi' nden $G \subset \overline{A(m,n)}$[8] olacak şekilde Öklid topolojisine göre açık olan bir G kümesi ve $m,n \in \mathbb{N}$ vardır. Şimdi, $x \in A(m,n) \cap G$ olsun. G, Öklid topolojisine göre açık olduğundan bir $j > m$ tamsayısı vardır ki, $U_{j,n}(x) \subset G$ olur. Buna göre, $B = A(m,n) \cap U_{j,n}(x)$ kuralım. Bu durumda $U_{j,n}(x) \subset \overline{B}$ ve $B \subset U_{j,n}(x) \subset U_{m,n}(x) \subset W(x)$'dir. $z \in U_{j,n-1}(x)$ olsun. Buradan bir $p \in U_{j,n}(x) \subset \overline{B}$ vardır ve $z \in U_{j,n}(p)$ olur. O halde $U_{j,n-1}(x) \subset U_{j,n}(B)$'dir. Genelliği bozmaksızın, $z \neq p$ olduğunu varsayalım. Her $t \in X$ için $S(t,\epsilon)$ ile t merkezli ϵ yarıçaplı Öklid topolojisinde tanımlı yuvar gösterilsin. $S(z,\epsilon) \subset U_{j,n}(p)$ olacak şekilde $\epsilon > 0$ seçelim. $p \in \overline{B}$ olduğundan bir $y \in S(p,\epsilon) \cap B$ vardır. Buradan $z \in U_{j,n}(y)$'dir ve $B \subset A(m,n)$ olduğundan $U_{m,n}(B) \subset W(B) \subset W(W(x)) \subset W(x)$ olur. Böylece $U_{j,n-1}(x) \subset W(x)$ çelişkisi elde edilir.

Şimdi, artık geçişliliğin keyfi altuzaylara göre kalıtsal olmadığına örnek, Kofner Düzlemi yardımıyla verilebilir.

Örnek 4.2.23. $X = (\mathbb{R}^2 \times \{1\}) \cup (\mathbb{R}^2 \times \{-1\})$ olsun. Her $r = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $S_n(r)$, x-ekseni üstünde ve r_1'de bu eksene teğet olan 2^{-n} yarıçaplı açık disk olsun. Benzer şekilde ${S_n}^{-1}(r)$, x-ekseninin altında ve r_1'de bu eksene teğet olan 2^{-n} yarıçaplı açık disk olsun. Her $r \in \mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{N}$ ve $i \in \{1,-1\}$ için (r,i) noktasında $K_n(r,i)$ temel açık komşuluklarını tanımlayalım. Burada $K_n(r,1) = [(S_n(r) \cup \{r\}) \times \{1\}] \cup [S_n(r) \times \{-1\}]$ ve $K_n(r,-1) = [{S_n}^{-1}(r) \times \{1\}] \cup [({S_n}^{-1}(r) \cup \{r\}) \times \{-1\}]$'dir. X üzerinde bu temel açık komşulukları veren taban ile üretilen topolojiyi düşünelim. Bu durumda $\mathbb{R}^2 \times \{1\}$ ve $\mathbb{R}^2 \times \{-1\}$ uzayları Kofner düzlemine homeomorf olduğu için geçişli değillerdir, ancak X geçişlidir[9].

Önerme 4.2.24. (X,τ), biri açık veya kapalı olan iki geçişli altuzayın birleşimi şeklindeyse geçişlidir.

Kanıt: Genelliği bozmaksızın $X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, A açık ve geçişli, ayrıca B'nin kapalı ve geçişli olduğunu kabul edelim. Şimdi, $(U_1)^3 \subset U$ olacak şekilde U ve U_1 , X'in normal komşuağları olsun. Buna göre, $V \subset U_1 \cap (A \times A)$ olacak şekilde A'nın bir V geçişli komşuağını ve $W \subset U_1 \cap (B \times B)$ olacak şekilde de B'nin bir W geçişli komşuağını seçelim. Önerme 4.1.40'daki gibi $V^* = V \cup (B \times X)$ ve $W^* = W \cup (X \times A)$

[8]Burada $\overline{A(m,n)}$ ile $A(m,n)$ kümesinin Öklid topolojisine göre kapanışı gösterilmektedır.

[9][15 ,Örnek 1]

kümelerini kuralım. Bu durumda, $Q = W^* \cap V^* \cap U_1 = W \cup V \cup ((B \times A) \cap U_1)$'dir ve Q^∞, X'in geçişli bir komşuağıdır. Böylece $Q^\infty = Q^3 \subset (U_1)^3 \subset U$ olur. $\Box$

Önerme 4.2.24'den aşağıdaki sonuç kolayca elde edilir.

Sonuç 4.2.25. Sonlu sayıdaki açık (veya kapalı) geçişli uzayların birleşimi geçişlidir.

Teorem 4.2.26. Açık geçişli uzayların her sayılabilir birleşimi geçişlidir.

Kanıt: $X = \cup_{n=1}^{\infty} G_n$ ve G_n, X'in açık ve geçişli altuzayı olsun. $G_0 = \emptyset$ ve Önerme 4.2.24'e göre genelliği bozmaksızın her $n \in \mathbb{N}$ için $G_n \subset G_{n+1}$ olduğunu kabul edelim. Her $x \in X$ için $m(x)$, $x \in G_n - G_{n-1}$ şartını sağlayan doğal sayı olsun. U, X'in bir normal komşuağı ve $< U_n >$, X'in, $(U_1)^2 \subset U$ şartını sağlayan bir normal dizisi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $U_n \cap (G_n \times G_n)$, G_n geçişli uzayının bir normal komşuağıdır. Buradan $V_n \subset U_n$ olacak şekilde G_n'in bir geçişli komşuağı V_n vardır. Şimdi, $V = \cup_{n=1}^{\infty} [V_n \cap (G_n - G_{n-1}) \times G_n]$ olsun. $V^\infty \subset U$ olduğunu gösterelim. $(x, y) \in V^\infty$ ve k, $(x, y) \in V^n$ şartını sağlayan n pozitif tamsayılarının en küçüğü olsun. Bu durumda $1 \leq i \leq k$ için $(x_i, x_{i+1}) \in V$ olacak şekilde sonlu bir $x = x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1} = y$ dizisi vardır. Her $i < k$ için $m(x_i) \geq m(x_{i+1})$'dir. Ayrıca her $m(x_i) = m(x_{i+1})$ için $(x_i, x_{i+2}) \in V$ olur ki, bu da k'nın seçimi ile çelişir. O halde her $i < k$ için $m(x_i) > m(x_{i+1})$ olmalıdır. Böylece $(x, y) \in U_{m(x_1)} \circ U_{m(x_2)} \circ \cdots \circ U_{m(x_k)} \subset U_1 \circ U_2 \circ \cdots \circ U_k \subset (U_1)^2 \subset U$ olur. $\Box$

Önerme 4.2.27. (X, τ) bir topolojik uzay ve $\mathcal{C} = \{C_i | i \in I\}$, X'in bir nokta sonlu açık örtüsü olsun. $\mathcal{C}$'nin her elemanı geçişli bir altuzay ise (X, τ) geçişlidir.

Kanıt: V, X'in bir normal komşuağı olsun. Her $i \in I$ için C_i'nin bir geçişli komşuağı V_i vardır ki her $x \in C_i$ için $V_i(x) \subset V(x)$ olur. Şimdi $W = \{(x, y) | x \in C_i \Rightarrow y \in V_i(x)\}$ kuralım. Bu durumda W, X'in geçişli bir komşuağıdır ve $W \subset V$'dir. $\Box$

Tanım 4.2.28. Bir topolojik uzaya, kapalı ayrık altuzayların sayılabilir birleşimi olarak yazılabiliyorsa F_σ*-ayrık uzay* denir.

Sonuç 4.2.29. Her F_σ-ayrık uzay geçişlidir.

Kanıt: Ayrık topolojik uzay ayrık düzgünlük ile uyumludur ve ayrık düzgünlük de geçişlidir. Ayrık düzgünlük, ayrık topoloji ile uyumlu en ince düzgünümsülük olduğundan ayrık topolojik uzay geçişlidir. Bu durumda, Önerme 4.2.14 göz önüne alınırsa, F_σ-ayrık uzay geçişli olur. $\Box$

Tezin kalan kısmında " her metriklenebilir uzayın geçişli olduğu " temel sonucuna ulaşmak için orto-kompakt" ve "yarı-hesaplanabilme" kavramlarına ihtiyaç vardır. Orto-kompaktlık hakkında detaylara [3] nolu kaynaktan ve yarı-hesaplanabilirlik ile ilgili detaylı bilgiye [17] nolu kaynaktan ulaşılabilir.

Tanım 4.2.30. Bir topolojik uzayın her açık örtüsünün bir iç koruyan açık incesi varsa bu uzaya *orto-kompakt uzay* denir.

Önerme 4.2.31. Her para-kompakt uzay orto-kompakttır.

Kanıt: Bir noktayı içeren açık kümelerin sayısı sonlu ise, bu kümelerin arakesiti de açık olur. Böylece tanımlardan; her nokta-sonlu açık örtü, iç koruyan olduğundan her para-kompakt uzay orto-kompakttır. □

Tanım 4.2.32. Bir (X, τ) topolojik uzayında, X'in kapalı her E altkümesine karşılık X'in açık altkümelerinin bir $< E_n >$ dizisi; $\cap_{n=1}^{\infty} E_n = E$, her $n \in \mathbb{N}$ ve $E \subset F = \cap_{n=1}^{\infty} F_n$ için $E_n \subset F_n$ olacak şekilde bulunabiliyorsa (X, τ)'ya, *yarı-hesaplanabilirdir* denir.

Önerme 4.2.33. Her metrik uzay yarı-hesaplanabilirdir.

Kanıt: [17]'da verilen Sonuç 1.4, T_1 ve birinci sayılabilir olduğu bilinen metrik uzaylar için de geçerli bir karakterizasyon sağladığından istenen açıktır. □

X bir yarı-hesaplanabilir uzay, $< x_n >$, X'te bir dizi ve $< V_n >$, X'in komşuağlarının azalan bir dizisi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $p \in V_n(x_n)$ iken p, $< x_n >$'in yığılma noktası oluyorsa $< V_n >$'e X'in bir *yarı-hesabı* denir.

Yardımcı Teorem 4.2.34. U, bir yarı-hesaplanabilir. X uzayının bir komşuağı olsun. X orto-kompakt ise her $x \in X$ için $V(x) \subset U(y)$ ve $\{x, y\} \subset U(z) \cap U^{-1}(z)$ olacak şekilde $y, z \in X$ olmasını sağlayacak şekilde bir $V \in \mathcal{FT}_{\tau}$ vardır.

Kanıt: $< U_n >$, $U_n \subset U$ şartını sağlayan X'in bir yarı-hesabı ve her $n \in \mathbb{N}$ için $H_n = \{x \in X | (U_n)^{-1}(x) \subset U_n(x)\}$ olsun. Bu durumda $\cup_{n=1}^{\infty} H_n = X$'dir. Şimdi her $x \in X$ için $k_x = min\{n \in \mathbb{N} | x \in \overline{H_n}\}$ tanımlayalım. Ayrıca, $< V_n >$, komşuağlarının bir dizisi ve $\{(V_n)^6(x) | x \in X\}$, $\{U_n(x) | x \in X\}$ kümesinin bir incesi olsun. Buna göre, $V = \{(x, y) | y \in V_{k_x}(x) - \cup_{n<k_x} \overline{H_n}\}$ kuralım ve $x \in X$, $z \in H_{k_x} \cap (U_{k_x} \cap V_{k_x})(x)$ alalım. Bu durumda $(V_{k_x})^6(x) \subset U_{k_x}(y) \subset U(y)$ olacak şekilde $y \in X$ vardır. Böylece $\{x, y\} \subset U^{-1}(z)$ olduğu açıktır ve $z \in H_{k_x}$ olduğundan $(U_{k_x})^{-1}(z) \subset U(z)$ ile $x \in (U_{k_x})^{-1}(z) \subset U(z)$ elde edilir. Ayrıca $y \in (U_{k_x})^{-1}(z) \subset U(z)$'dir ve böylece $\{x, y\} \subset U(z)$ olur. Buradan $\{x, y\} \subset U(z) \cap U^{-1}(z)$ bulunur. Şimdi $(a, b), (b, c) \in V$ olsun. Bu durumda $k_c \geq k_b \geq k_a$'dır. O halde $c \in (V_{k_a})^2(a) - \cup_{n<k_a} \overline{H_n} = V_{k_a}(x) - \cup_{n<k_a} \overline{H_n}$ ve $(a, c) \in V$ bulunur. Buradan V geçişlidir. □

Teorem 4.2.35. X bir yarı-hesaplanabilir orto-kompakt uzay ise geçişlidir.

Kanıt: W, bir normal komşuağı ve $U^3 \subset W$ olsun. Yardımcı Teorem 4.2.34'den $V \subset U^3$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{FT}_\tau$ vardır. $\square$

Yukarıda elde edilenler ışığında, bu tez çalışmasının önemli bir sonucu, bu aşamada ifade edilebilir.

Sonuç 4.2.36. Her metriklenebilir uzay geçişlidir.

Kanıt: (X, τ) bir metriklenebilir uzay olsun. Bu durumda (X, τ) yarı-hesaplanabilirdir. Diğer yandan, [18, Sonuç 1]'e göre (X, τ) metriklenebilir uzayının parakompakt olduğu bilinmektedir. Böylece Önerme 4.2.31'e göre (X, τ) topolojik uzayı orto-kompakttır. O halde Teorem 4.2.35'den (X, τ) uzayının geçişli olduğu sonucuna ulaşılır.$\square$

Örnek 4.2.37. $(\mathbb{R}, \tau_e)$ öklid topolojik uzayı ve tüm alt uzayları metriklenebilir olduğundan önceki sonuca göre geçişli uzaylardır.

5 SONUÇLAR

Klasik topolojide, topolojik uzayların düzgünleştirilebilir olması için uzayın tamamen regüler olması, gerek ve yeter koşul iken, tüm topolojik uzayların, hiç bir koşul olmaksızın Pervin düzgünümsü yapılar sayesinde düzgünümsüleştirilebilir olduğu, bu tez çalışmasının üçüncü bölümünde ifade edildi.

Buna rağmen, ikili topolojik uzaylar teorisine bakıldığında, bir ikili topolojik uzayın ikişer tamamen regülerlik aksiyomunu sağlamasının, düzgünümsüleştirilebilir olmak için gerek ve yeter koşul olduğu ise, yine tezin üçüncü bölümünde kanıtıyla sunuldu. Bu durum, topolojide asimetrik yapıların, yani, simetrinin bulunmadığı yapıların doğal biçimde ortaya çıkardığı bir sonuçtur.

Diğer yandan, düzgünümsü yapıların özel bir türü olan geçişli düzgünümsü yapılar, ilk olarak, 1982'de Fletcher ve Lingdren [3]'de tanımlamıştır. Özel olarak, ince geçişli düzgünümsülerin yapısı, asimetrik topoloji literatüründe kullanışlı çeşitli sonuçlar ortaya çıkarmış, üstelik yakınımsılar ile düzgünümsüler arasında kuvvetli ilişkilerin elde edilmesini sağlamıştır.

Sözü edilen sonuçlar içerisinde, bir temel yapı olarak "geçişli topolojik uzaylar teorisi" ortaya çıkmıştır. Geçişli topolojik uzayların özellikleri dördüncü bölümün son alt bölümünde örnekler ile ele alındı. Burada değinilmesi gereken birkaç noktayı ifade edelim:

- Kompaktlıkta olduğu gibi geçişlilik de topolojik uzaylarda kalıtsal bir özellik değildir. Buna rağmen,
- Bir geçişli topolojik uzayın, açık alt kümesi geçişli alt uzay, ve
- Bir geçişli topolojik uzayın, kapalı alt kümesi, geçişli alt uzaydır.

Diğer yandan, geçişli uzaylar teorisinin, orto-kompakt ve yarı-hesaplanabilir uzaylar ile ilişkisi, aşağıdaki önemli sonucu ortaya koymuştur.

"Tüm metriklenebilir uzaylar geçişlidir"

Böylece özel olarak, reel sayılar ve tüm alt kümelerinin doğal (aşikar) topoloji ile geçişli topolojik uzaylar oldukları da bu tez çalışmasında açıkça görülmüştür.

KAYNAKLAR

[1] Bülbül, A., *Genel Topoloji,* Hacettepe Üniversitesi Yayınları, **2011**.

[2] Willard, S., *General Topology,* Addison-Wesley Publishing Company, **1970.**

[3] Fletcher, P., Lindgren, W. F., *Quasi Uniform-Spaces,* Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker, **1982**.

[4] Hicks, T. L., Carlson, J. W., Some Quasi-Uniform Spaces Examples*, Journal Of Mathematical Analysis And Applications,* 39, 712-716, **1972**.

[5] Künzi, H. P. A., An Introduction to Quasi- Uniform Spaces, *American Mathematical Society,* 501-566, **2008**.

[6] Künzi, H. P. A., Jager, E.P. Infıma and Complements in thr Lattice of Quasi Uniformities, *Topology and its Applications,* 154, 2117-2126, **2007**.

[7] Lopez, J. R., Romaguera, S., Asymmetric Topology and its Applicattions, *Quaderni di Matematica,* 26, 179-209, **2011.**

[8] Engelking, R., *General Topology,* Helderman Verlag, **1989**.

[9] Lane, E. P. Bitopological Spaces and Quasi Uniform Spaces, *Proceeding London Of Mathematical Society,* 17, 241-256, **1967**.

[10] Kelly, J. C., Bitopological Spaces, *Proceeding London Of Mathematical Society,* 13,71-89, **1963**.

[11] Kelley, J. L., *General Topology,* D. Van Nostrand Company, **1968**.

[12] Künzi, H. P. A., Topological Spces With a Unique Compatible Quasi-Uniformity, *Canadian Mathematical Society,* 29, 40-43, **1986**.

[13] Stone, A. H., Hereditarily Compact Spaces, *American Journal of Mathematics,* 82, 900-916, **1960**.

[14] Künzi, H. P. A., Quasi-Uniform Spaces- Eleven Years Later, *Topology Proceedings,* 19, 143-171,**1993.**

[15] Künzi, H. P. A., Transitivity is Neither Hereditary nor Finitely Productive, *Topology and its Applications,* 19, 165-168, **1985**.

[16] Losonczi, A., Notes on the Coarsest Element of $\pi(\delta)$, *Acta Mathematica Hungarica,* 92, 137-141, **2001**.

[17] Greede, G. D. D., Concerning Semi-Stratifiable Spaces, *Pacific Journal of Mathematical,* 32, 47-54, **1970**.

[18] Stone, A. H., Paracopactness and Product Spaces, *Bulletin American Mathematics Society,* 54, 977-982, **1948**.

ÖZGEÇMİŞ

Kimlik Bilgileri:

Adı Soyadı : Şule HASMAN

Doğum Yeri : Yerköy/ Yozgat

Medeni Hali : Bekar

E-Posta : hasman.sulehotmail.com

Adresi : Malazgirt Mahallesi Torun Sokak 49/14 Sincan Ankara

Eğitim

Lise : İbni Sina Yabancı Dil Ağırlıklı Lise

Lisans : Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matmatik Öğretmenliği

Yabancı Dil ve Düzeyi

İngilizce ve Almanca orta düzey

İş Deneyimi

-

Deneyim Alanları

-

Tezden Üretilmiş Projeler ve Bütçesi

-

Tezden Üretilmiş Yayınlar

-

Tezden Üretilmiş Tebliğ ve/veya Poster Sunumu ile Katıldığı Toplantılar

-

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS/DOKTORA TEZ ÇALIŞMASI ORJİNALLİK RAPORU

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI BAŞKANLIĞI'NA

Tarih: 14/ 11/ 2017

Tez Başlığı / Konusu: **GEÇİŞLİ DÜZGÜNÜMSÜ UZAYLARIN TEORİSİ**

Yukarıda başlığı/konusu gösterilen tez çalışmamın a) Kapak sayfası, b) Giriş, c) Ana bölümler d) Sonuç kısımlarından oluşan toplam **74** sayfalık kısmına ilişkin, **14 Kasım 2017** tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından *Turnitin* adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı **% 10** 'dur.

Uygulanan filtrelemeler:
1- Kaynakça hariç
2- Alıntılar ~~hariç~~/dâhil
3- 5 kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Çalışması Orjinallik Raporu Alınması ve Kullanılması Uygulama Esasları'nı inceledim ve bu Uygulama Esasları'nda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

14 Kasım 2017

Tarih ve İmza

Adı Soyadı: Şule HASMAN
Öğrenci No: N15128070
Anabilim Dalı: Matematik
Programı:
Statüsü: ☒ Y.Lisans ☐ Doktora ☐ Bütünleşik Dr.

DANIŞMAN ONAYI

UYGUNDUR.

Doç. Dr. Filiz YILDIZ

(Unvan, Ad Soyad, İmza)