DEĞİŞMELİ OLMAYAN HALKALARDA COHEN VE KAPLANSKY TEOREMLERİNİN GENELLEMELERİ

GENERALIZATIONS OF COHEN AND KAPLANSKY THEOREMS IN NONCOMMUTATIVE RINGS

BURCU KAYIKÇI

Doç. Dr. PINAR AYDOĞDU

Tez Danışmanı

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ

Lisansüstü Eğitim–Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin

Matematik Anabilim Dalı için Öngördüğü

YÜKSEK LİSANS TEZİ

olarak hazırlanmıştır.

2017

BURCU KAYIKÇI'nın hazırladığı "**Değişmeli Olmayan Halkalarda Cohen ve Kaplansky Teoremlerinin Genellemeleri**" adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **MATEMATİK ANABİLİM DALI**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Ayşe Çiğdem ÖZCAN
Başkan ....

Doç. Dr. Pınar AYDOĞDU
Danışman ....

Prof. Dr. Ali ERDOĞAN
Üye ....

Prof. Dr. Mustafa ALKAN
Üye ....

Yrd. Doç. Dr. Oğuz YAYLA
Üye ....

Bu tez Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. Menemşe GÜMÜŞDERELİOĞLU
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

YAYINLAMA VE FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI BEYANI

Enstitü tarafından onaylanan lisansüstü tezimin tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı (kağıt) ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda verilen koşullarla kullanıma açma iznini Hacettepe üniversitesine verdiğimi bildiririm. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet haklarım bende kalacak, tezimin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanım hakları bana ait olacaktır.

Tezin kendi orijinal çalışmam olduğunu, başkalarının haklarını ihlal etmediğimi ve tezimin tek yetkili sahibi olduğumu beyan ve taahhüt ederim. Tezimde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanması zorunlu metinlerin yazılı izin alarak kullandığımı ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederim.

☒ **Tezimin/~~Raporumun~~ tamamı dünya çapında erişime açılabilir ve bir kısmı veya tamamının fotokopisi alınabilir.**
(Bu seçenekle teziniz arama motorlarında indekslenebilecek, daha sonra tezinizin erişim statüsünün değiştirilmesini talep etseniz ve kütüphane bu talebinizi yerine getirse bile, tezinin arama motorlarının önbelleklerinde kalmaya devam edebilecektir.)

☐ **Tezimin/Raporumun .... tarihine kadar erişime açılmasını ve fotokopi alınmasını (İç Kapak, Özet, İçindekiler ve Kaynakça hariç) istemiyorum.**
(Bu sürenin sonunda uzatma için başvuruda bulunmadığım taktirde, tezimin/raporumun tamamı her yerden erişime açılabilir, kaynak gösterilmek şartıyla bir kısmı ve ya tamamının fotokopisi alınabilir)

☐ **Tezimin/Raporumun .... tarihine kadar erişime açılmasını istemiyorum, ancak kaynak gösterilmek şartıyla bir kısmı veya tamamının fotokopisinin alınmasını onaylıyorum.**

☐ **Serbest Seçenek/Yazarın Seçimi**

16 /08 / 2017

Burcu KAYIKÇI

ETİK

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı beyan ederim.

16/08/2017

Burcu KAYIKÇI

Bu tez, 3501 Kariyer Geliştirme Programı kapsamında Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK, Proje No:113F032) tarafından desteklenmiştir.

ÖZET

DEĞİŞMELİ OLMAYAN HALKALARDA COHEN VE KAPLANSKY TEOREMLERİNİN GENELLEMELERİ

BURCU KAYIKÇI

Yüksek Lisans, Matematik Bölümü

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Pınar AYDOĞDU

Ağustos 2017

Değişmeli halka teorisinde, bir halkanın yapısının belirlenmesinde asal idealler oldukça önemli araçlardır. Bu tez çalışmasında, yapı teoremlerinden Cohen ve Kaplansky'ye ait teoremler ele alınacaktır. Tezin amacı, özellikle Reyes'in 2010 ve 2012 yıllarında yaptığı çalışmaları dikkate alarak Cohen ve Kaplansky Teoremleri'nin değişmeli olmayan halkalardaki genellemelerini incelemektir. Giriş bölümünde, tez konusunun tarihsel gelişimi ve halka teorisindeki önemi açıklanmaktadır. İkinci bölüm, tez için gerekli olan temel bilgileri içermektedir. Üçüncü bölümde, Cohen ve Kaplansky Teoremleri'nin değişmeli halkalardaki rolleri üzerinde durulmuştur. Ayrıca, Anderson ve Dumitrescu'nun üzerinde çalıştığı S-Noether halka yapısı tanıtılmış ve bu halka sınıfının bazı özelliklerinden bahsedilmiştir. Dördüncü bölümde, asal ideallerin değişmeli olmayan halkalardaki tek yönlü genellemesi üzerinde durulmuş ve tamamen asal sağ idealler ve Oka aileleri gibi bazı kavramlar tanıtılmıştır. Bu kavramların değişmeli olmayan bir halka yapısını belirlemedeki rolü uygulamalı olarak incelenmiştir. Beşinci bölüm, Cohen ve Kaplansky Teoremleri'nin Oka aileleri ve nokta sıfırlayıcı kümeler yardımıyla elde edilen değişmeli olmayan halkalardaki genellemelerini içermektedir. Son bölümde ise Cohen ve Kaplansky Teoremleri'nin farklı yaklaşımlarla elde edilen genellemeleri üzerinde durulmuştur. Koh, Chandran ve Michler tarafından ele alınan genellemelerin yanı sıra, S-Noether halka yapısının değişmeli olmayan halkalardaki genellemesi incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Asal idealler, tek yönlü asal idealler, tamamen asal idealler, Noether halka, S-Noether halka, temel ideal halkası, Oka ailesi, nokta sıfırlayıcı kümeler.

ABSTRACT

GENERALIZATIONS OF COHEN AND KAPLANSKY THEOREMS IN NONCOMMUTATIVE RINGS

BURCU KAYIKÇI

Master of Science, Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Pınar AYDOĞDU

August 2017

In commutative setting, prime ideals are very important tools to determine the structure of a ring. In this thesis, some structure theorems will be discussed which belong to Cohen and Kaplansky. The aim of this thesis is to examine the noncommutative generalizations of Cohen and Kaplansky Theorems, especially considering Reyes's works in 2010 and 2012. The introductory chapter consists of informations about the importance and the historical improvement of the thesis subject. The second chapter contains basic information needed throughout the thesis. In the third chapter, Cohen and Kaplansky Theorems and their roles in commutative rings are emphasized. Also, S-Noetherian ring structure which was defined by Anderson and Dumitrescu is introduced and some features of this structure are indicated. In the fourth chapter, one-sided generalizations of prime ideals in noncommutative settings are examined and some concepts like completely prime ideals and Oka families are described. Their role in the structure of a noncommutative ring is examined with applications. The fifth chapter is concerned with the noncommutative generalizations of Cohen and Kaplansky Theorems by the Oka families and the point annihilator sets. In the last chapter, noncommutative generalizations of Cohen and Kaplansky Theorems obtained by different approaches are investigated. Among the generalizations discussed by Koh, Chandran and Michler, the noncommutative generalization of S-Noether ring structure is also examined.

Keywords: Prime ideals, one-sided prime ideals, completely prime ideals, Noetherian ring, S-Noetherian ring, principal ideal ring, Oka family, point annihilator set.

TEŞEKKÜR

Bu tezin oluşmasında çok büyük katkı sağlayan, değerli bilgi ve deneyimleriyle bana her konuda büyük bir sabır ve anlayışla yol gösteren, inancını ve desteğini her zaman hissettiğim çok değerli hocam
Doç. Dr. Pınar AYDOĞDU'ya;

bana her zaman güvenen, attığım her adımda yanımda olan, maddi ve manevi desteklerini bir an olsun esirgemeyen canım ablam Yasemin TUNCEL'e, anneme ve babama,

sevinçlerimi paylaşan ve zorlu günlerimde beni hiç yalnız bırakmayan çok kıymetli arkadaşlarım
Damla ACAR ve Sibel KURT'a;

sonsuz teşekkürler...

İçindekiler

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

R	R birimli ve birleşmeli halka
M_R	M birimsel sağ R–modül
$\oplus M_i$	M_i modüllerinin dik toplamı
ΠM_i	M_i modüllerinin dik çarpımı
$ann_r(m)$	$m \in M$'nin sıfırlayıcısı
$r.ann_R(x)$	$x \in R$'nin sağ sıfırlayıcısı
$l.ann_R(x)$	$x \in R$'nin sol sıfırlayıcısı
$I \lhd R$	I R'nin ideali
$A \leq M$	A M'nin alt modülü
$A \leq_e M$	A M'nin geniş alt modülü
$A \leq_d M$	A M'nin yoğun alt modülü
$E(M)$	M modülünün injektif zarfı
$\mathrm{Rad}(M)$	M modülünün Jacobson Radikali
$J(R)$	R halkasının Jacobson Radikali
$Z(R_R) = Z_r$	R halkasının sağ tekil ideali
$Z({}_RR) = Z_l$	R halkasının sol tekil ideali
$C(0)$	R halkasının düzenli elemanlarının kümesi
$U(R)$	R halkasının birimsel elemanlarının kümesi
$Sat_S(I)$	I idealinin S-doymuşluğu
$Soc(M)$	$\cap\{N \mid N \leq_e M\} = \oplus\{L \mid L\ M$'nin basit alt modülü$\}$
$Z(M)$	M modülünün tekil alt modülü
$\mathrm{Hom}_R(M, N)$	M'den N'ye R–modül homomorfizmalarının kümesi
$\mathrm{End}_R(M) = E_M$	M'nin R–modül endomorfizmalarının kümesi
$\text{Çek}(f)$	f homomorfizmasının çekirdeği
$\text{Gör}(f)$	f homomorfizmasının görüntü kümesi
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}_n$	$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ devirli grubu
$\mathbb{Z}_{p^\infty}$	Prüfer p–grup

1 GİRİŞ

Değişmeli halka teorisinden iyi bilindiği gibi asal idealler, halka yapısını belirlemede kullanılan en temel araçlardır. Bu tez çalışmasında, bazı yapı teoremlerinden Cohen ve Kaplansky'e ait olanlar ele alınacaktır.

Cohen Teoremi: [1] Değişmeli bir R halkasının Noether olması için gerek ve yeter koşul R'nin her asal idealinin sonlu üretilmiş olmasıdır.

Kaplansky Teoremi: [2] Değişmeli bir Noether R halkasının temel ideal halkası olması için gerek ve yeter koşul R'nin her maksimal idealinin temel ideal olmasıdır.

Bu çalışmaların ardından elde ettiği sonuçlarla Cohen'in elde ettiği sonuçları bir araya getiren Kaplansky, aşağıdaki sonuca ulaşmıştır:

Kaplansky-Cohen Teoremi: [2] Değişmeli bir R halkasının temel ideal halkası olması için gerek ve yeter koşul her maksimal idealin temel ideal olmasıdır.

Değişmeli halkalarda maksimal bir ideal olma bir asal ideal olmayı gerektirdiğinden, Cohen Teoremi'nde olduğu gibi Kaplansky Teoremi de halkanın yapısını belirlemek için asal ideallerin kontrolünün yeterli olduğunu belirtir. Değişmeli olmayan halkalarda iki yönlü asal idealler çalışılmış olmasına rağmen, Cohen ve Kaplansky Teoremleri'nin ifade ettiği anlamda değişmeli halkaların yapısını kontrol edememişlerdir. Buradaki sorun, karmaşık bir yapıya sahip pek çok halkanın az sayıda iki yönlü ideale sahip olmasıdır. Etkileyici örneklerden biri basit halkalardır. Basit halkaların bir tek asal ideali olmasına rağmen çoğunlukla tek yönlü ideallerinin ilginç yapıları vardır.

2012'de Anderson ve Dumitrescu değişmeli S-Noether halka kavramını tanımlamışlardır (bkz. [3]). Bu tanıma göre, R bir halka, $S \subseteq R$ bir çarpımsal kapalı küme olmak üzere, bir $I \trianglelefteq R$ için $sI \subseteq J \subseteq I$ olacak biçimde sonlu üretilmiş (sırasıyla, temel) bir $J \trianglelefteq R$ ideali ve bir $s \in S$ varsa, I idealine *S-sonlu (sırasıyla, S-temel)* denir. R'nin her ideali S-sonlu (sırasıyla, S-temel) ise, R'ye *S-Noether (sırasıyla, S-TİH) halka* denir. Anderson ve Dumitrescu, Cohen Teoremi'ni bu tanıma uyarlayarak R halkasının bir S-Noether halka olması için gerek ve yeter koşulun halkadaki her asal idealin S-sonlu olması olduğu sonucuna varmışlardır. Dolayısıyla, bu çalışmaya göre, asal idealler S-Noether halkaların yapısını kontrol etmek için yeterlidir.

Değişmeli halkalardaki asal ideal prensibi, eğer $\mathcal{F}$ bir Oka ailesi ise, bu ailenin tümleyeni olan $\mathcal{F}'$ ailesinin maksimal elemanlarının, R değişmeli halkasının asal idealleri olduğunu söyler. Dolayısıyla değişmeli cebirde "maksimal idealin asal olmasını gerektiren" pek çok sonuç asal ideal prensibi kullanılarak doğrudan elde edilir. 2010'da Reyes, değişmeli halkalardaki asal ideallerin tek yönlü bir genellemesi olarak "tamamen asal sağ ideal"leri ve bu ideallerin bir alt kümesi olan "comonoform sağ idealler"i tanımlamıştır (bkz. [4]). R bir halka ve P, R'nin bir öz sağ ideali olmak üzere, $ab \in P$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ koşulu sağlanıyorsa, P'ye *tamamen asal sağ ideal* denir. Bunun yanı sıra Reyes, değişmeli halkalarda kullanılan ideallerin Oka ailesi kavramını değişmeli olmayan halkalara taşıyarak, sağ ideallerin Oka ailesini tanımlamıştır.

R değişmeli olmayan bir halka olmak üzere, sağ ideallerden oluşan bir $\mathcal{F}$ ailesi aşağıdaki özellikleri sağlasın:

- $R \in \mathcal{F}$,
- $I_R \subseteq R$ sağ ideali ve $a \in R$ elemanı için $I + aR \in \mathcal{F}$ ve $a^{-1}I = \{r \in R \mid ar \in I\} \in \mathcal{F}$ iken $I \in \mathcal{F}$'dir.

Bu durumda, $\mathcal{F}$ ailesine *bir sağ Oka ailesi* denir.

$\mathcal{F}$, bir R halkasının sağ ideallerinin bir Oka ailesi olsun. O halde, her $I \in Max(\mathcal{F}')$ tamamen asal sağ idealdir. Böylece, Reyes değişmeli halkada verilen Asal İdeal Prensibi'ni değişmeli olmayan halkalarda tamamen asal sağ ideallere taşımıştır.

Verilen tanımların denklikleri ve sağladığı özellikler, örnekler ve uygulamaları ile Reyes'in aynı çalışmasında belirtilmiş ve derlenerek bu tez çalışmasının dördüncü bölümünde yer almıştır.

2012'de Reyes, Oka aileleri yardımıyla Cohen ve Kaplansky Teoremleri'nin değişmeli olmayan halkalardaki genellemelerini elde etmiştir (bkz. [5]). Değişmeli olmayan halkalarda sağ ideallerin belirli özelliklerini test etmek için "nokta sıfırlayıcı küme" kavramını tanımlamış ve bu kavram yardımıyla elde ettiği genellemeler ve uygulamalar tezin beşinci bölümünde ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Bir R halkasında $\mathcal{C}$ sağ R-modüllerin bir sınıfı ve $\mathcal{S}$ sağ ideallerin bir sınıfı olsun. Sıfırdan farklı her $M \in \mathcal{C}$ modülünün $\mathcal{S}$ kümesi içinde bir nokta sıfırlayıcı sağ ideali varsa, $\mathcal{S}$ kümesine $\mathcal{C}$ için bir *nokta sıfırlayıcı küme* denir. Tüm sağ R-modüllerin nokta sıfırlayıcı kümesine R halkasının *(sağ) nokta sıfırlayıcı kümesi* denir. Tüm Noether sağ R-modüllerin nokta sıfırlayıcı kümesine R halkasının *(sağ) Noether nokta*

sıfırlayıcı kümesi denir. Tanımlanan bu kavramlar ve kavramların sağladığı özellikler doğrultusunda Cohen Teoremi, Kaplansky-Cohen Teoremi ve Kaplansky Teoremi'nin değişmeli olmayan genellemeleri şu şekilde verilmiştir:
Değişmeli Olmayan Cohen Teoremi: Bir R halkası için $\mathcal{S}$ kümesi bir sağ Noether nokta sıfırlayıcı küme olsun. R'nin bir sağ Noether halka olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{S}$ içindeki her sağ idealin sonlu üretilmiş olmasıdır.
Değişmeli Olmayan Kaplansky-Cohen Teoremi: $\mathcal{S}$, bir R halkasının benzerlik altında kapalı olan bir sağ Noether nokta sıfırlayıcı kümesi olsun. R'nin bir temel sağ ideal halkası olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{S}$ içindeki her sağ idealin temel olmasıdır.
Değişmeli Olmayan Kaplansky Teoremi: Noether bir R halkasının bir temel sağ ideal halkası olması için gerek ve yeter koşul halkadaki tüm maksimal sağ ideallerin temel sağ ideal olmasıdır.

Altıncı bölümde, Cohen ve Kaplansky Teoremleri'nin literatürde yer alan değişmeli olmayan halkalardaki diğer genellemeleri üzerinde durulmuştur. Ayrıca, bu genellemelerin, Reyes'in elde ettiği versiyonlarla nasıl ilişkilendirilebileceği tartışılmıştır. Bunun yanı sıra üçüncü bölümde verilen S-Noether halkaların değişmeli olmayan genellemeleri incelenmiştir.
1971 yılında, tek yönlü asal ideal tanımını şu şekilde vermiştir: R bir halka, $I_R \subsetneq R$ ve $A_R, B_R \subseteq R$ sağ idealler olsun. $AI \subseteq I$ ve $AB \subseteq I$ iken $A \subseteq I$ veya $B \subseteq I$ koşulunu sağlayan I sağ idealine *Koh-asal sağ ideali* denir (bkz. [6]). Bu tanımla Koh, yukarıdaki iki teoremi de genellemeyi başarmıştır. Ancak, Chandran da 1978 yılında Cohen ve Kaplansky teoremleri için bir genelleme vermiş (bkz. [7]), ancak Koh'un sonucunun Chandran'ın sonucunu gerektirdiği gözlenmiştir. Diğer taraftan 1972 yılında Michler, "bir R halkası, $I_R \subseteq R$ sağ ideali ve $a, b \in R$ için, $aRb \subseteq I$ iken $a \in I$ veya $b \in I$ koşulunu sağlayan I_R sağ idealine *Michler-asal sağ ideal* denir" tanımını vermiştir (bkz. [8]). Michler de bu tanımı kullanarak Cohen Teoremi'ni genellemiştir. Michler'in tanımladığı asal sağ ideallerin kümesi, Koh'un asal sağ idealler kümesinin bir alt kümesi olduğundan, Cohen Teoremi'nin Michler versiyonu Koh'un versiyonunun bir genellemesidir.

1994 senesinde Smith, tam sınırlı halkalar üzerinde Cohen Teoremi'nin bir başka versiyonunu ispatlamıştır. R bir asal halka olmak üzere, R'nin her geniş sağ ideali sıfırdan farklı bir ideal içerirse R'ye *sağ sınırlı halka* denir. R halkasının her asal faktörü bir

sağ sınırlı halkaysa, R'ye *sağ tam sınırlı halka* denir. Smith'in elde ettiği sonuca göre, sağ tam sınırlı bir R halkasının sağ Noether olması için gerek ve yeter koşul her asal idealin sağ ideal olarak sonlu üretilmiş olmasıdır (bkz. [9]).
2017'de Bilgin, Reyes ve Tekir, üçüncü bölümde değişmeli S-Noether halkalar için verilen Cohen Teorem'nin değişmeli olmayan S-Noether halkalar üzerindeki versiyonunu, Reyes'in teknikleri kullanılarak elde etmişlerdir (bkz. [10]). R bir halka, $S \subseteq R$ bir çarpımsal kapalı küme ve $I_R \subseteq R$ bir sağ ideal olmak üzere, $Is \subseteq J \subseteq I$ olacak biçimde bir $s \in S$ ve sonlu üretilmiş bir $J_R \subseteq R$ sağ ideali varsa, I_R'ye bir *S-sonlu* sağ ideal denir. R'nin her sağ ideali S-sonlu ise, R'ye bir *sağ S-Noether* halka denir. Elde edilen sonuca göre, R değişmeli olmayan bir halka ve $S \subseteq R$ bir çarpımsal kapalı küme olmak üzere, R'nin bir sağ S-Noether halka olması için gerek ve yeter koşul her tamamen asal sağ idealinin S-sonlu olmasıdır.

Görüldüğü gibi tek yönlü asal ideal üzerinde yapılan çalışmalar yeni değildir. Bu çalışmaların ortak noktası ise, tek yönlü asal ideal tanımlarının, değişmeli halkalardaki asal ideal tanımının basitçe deformasyonu şeklinde ele alınmasıdır. Bu nedenle, bu yapıların kullanılması değişmeli teorideki kadar etkin olamamıştır. Ancak 2010 yılındaki [4] çalışmasında Reyes değişmeli halka teorisinden gelen sonuçların sistematik bir analizini yaparak, tek yönlü asal ideallere daha farklı bir yaklaşım sunmuştur. Cohen ve Kaplansky, teoremlerin ispatını çelişki elde etme yöntemiyle yapmışlardır. Ulaşmak istedikleri sonucun aksini varsayarak, belli bir özelliği sağlamayan elemanların boştan farklı bir kümesini oluşturmuşlar ve Zorn Önteoremi ile bu kümenin maksimal elemanını elde etmişlerdir. "Maksimal asalı gerektirir" kuralından yola çıkarak çelişki elde etmişler ve böylece istedikleri sonuçlara ulaşmışlardır. Reyes çalışmalarında, sözü edilen tekniği Oka aileleri yardımıyla değişmeli olmayan halkalara taşımıştır.

2 TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Tez boyunca R ile değişmeli olması gerekmeyen birleşmeli ve birimli bir halka temsil edilecektir. Modüller, aksi belirtilmedikçe, birimsel sağ R-modüller olacaktır. Tamlık bölgesi ile değişmeli olması gerekmeyen sıfır-bölensiz bir halka kastedilecektir.

2.1 Temel Halka ve Modül Terimleri

Tanım 2.1.1 [11] R bir halka, M bir R-modül ve N, M'nin bir alt modülü olsun. M'nin sıfırdan farklı her X alt modülü ile N'nin arakesiti sıfırdan farklı ise, N'ye M'nin bir *geniş (essential) alt modülü* denir ve $N \leq_e M$ ile gösterilir. M ise *N'nin geniş genişlemesi (essential extension)* olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.2 [11] Bir R halkası için I_R sağ ideali R'nin bir geniş alt modülü ise, I_R'ye *geniş sağ ideal* denir.

Tanım 2.1.3 [11] R bir halka, M bir R-modül ve N, M'nin bir alt modülü olsun. M'nin herhangi bir N' alt modülü, $N \cap N' = 0$ özelliğine göre maksimal ise, N' alt modülüne *N'nin M'deki tamlayanı (complement)* denir.

Zorn Önteoremi'nden her $N \leq M$ alt modülünün M'de bir tamlayanı vardır.

Önerme 2.1.4 [11] *$N \leq M$ olsun. N', N'nin M'deki tamlayanı ise $N \oplus N' \leq_e M$'dir.*

Tanım 2.1.5 [11] M bir sağ R-modül olsun. $m \in M$ için $\{r \in R \mid mr = 0\}$ kümesine m'nin *sağ sıfırlayıcısı (right annihilator)* denir ve $r.ann_R(m)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.6 [11] M bir sol R-modül olsun. $m \in M$ için $\{r \in R \mid rm = 0\}$ kümesine m'nin *sol sıfırlayıcısı (left annihilator)* denir ve $l.ann_R(m)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.7 [11] Bir R halkasının *sağ (sırasıyla, sol) sıfırlayıcı ideali* R'nin bir alt kümesinin sağ (sırasıyla, sol) sıfırlayıcısına eşit olan bir sağ (sırasıyla, sol) idealdir.

Tanım 2.1.8 [11] M bir sağ R–modül olsun. Eğer $m \in M$ için $ann_r(m) \leq_e R_R$ ise m'ye *tekil (singular) eleman* denir. M'nin tekil elemanlarının kümesi $Z(M)$ ile gösterilir ve M'nin *tekil alt modülü (singular submodule) olarak adlandırılır.*

Tanım 2.1.9 [11] M_R sağ modülü ve $Z(M)$ tekil alt modülü için $M = Z(M)$ oluyorsa M_R modülüne *tekil modül (singular module)* denir. $Z(M) = 0$ koşulu sağlanıyorsa M_R modülüne *tekilsiz (non-singular module)* denir.

Uyarı 2.1.10 [11] R'nin sağ tekil ideali $Z(R_R)$ ile sol tekil ideali $Z({}_RR)$ genel olarak birbirine eşit değildir. (Örnek için, bkz. [12, Exercise 1, p. 36])

Önerme 2.1.11 [11] *R halkası üzerindeki bir M sağ R-modülü için,*

$$Z(M) = \{m \in M \mid mI = 0 \text{ olacak biçimde } I \leq_e R_R \text{ vardır}\}$$

Tanım 2.1.12 [13] R bir halka olmak üzere $e^2 = e$ koşulunu sağlayan $e \in R$ elemanına *eşkare (idempotent) eleman* denir.

Bir halkada 0 ve 1 elemanları her zaman eşkaredir.

Tanım 2.1.13 [13] $M \neq 0$ bir modül olsun. M modülünün 0 ve M'den farklı dik toplananı yok ise M'ye *ayrıştırılamaz modül (indecomposable module)* denir.

Tanım 2.1.14 [13] I, bir R halkasının bir sağ ideali olmak üzere her $x \in I$ için $x^n = 0$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ bulunabiliyorsa, I'ya *nil sağ ideal* denir. Eğer $I^n = 0$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ bulunabiliyorsa I'ya bir *üstel sıfır (nilpotent) sağ ideal* denir.

Tanım 2.1.15 [13] Bir $0 \neq M$ modülünün aşikar olmayan hiçbir alt modülü yoksa M'ye *basit modül (simple module)* denir.

Önteorem 2.1.16 [14] (Schur Önteoremi) *Her basit modülün endomorfizma halkası bir bölümlü halkadır.*

Tanım 2.1.17 [14] M'nin tüm basit alt modüllerinin toplamı, aynı zamanda tüm geniş alt modüllerinin arakesitidir ve $\mathrm{Soc}(M)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.18 [13] Bir M sağ R–modülünün *Jacobson radikali,* M'nin tüm maksimal alt modüllerinin arakesitidir ve $\mathrm{Rad}(M)$ ile gösterilir. Bir R halkası için Jacobson radikali $J(R)$ veya J ile gösterilir. $\mathrm{Rad}({}_RR) = J(R) = \mathrm{Rad}(R_R)$'dir.

Tanım 2.1.19 [14] $\{T_\alpha\}_{\alpha \in A}$, bir M modülünün basit alt modüllerinin bir ailesi olsun. Eğer $M = \bigoplus_{\alpha \in A} T_\alpha$ yazılabiliyorsa ya da buna denk olarak $Soc(M) = M$ ise, M'ye *yarıbasit modül (semisimple module)* denir.

Teorem 2.1.20 [14] *Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir:*

(1) *Tüm sağ R-modüller yarıbasittir.*

(2) *Tüm sol R-modüller yarıbasittir.*

(3) R_R *yarıbasittir.*

(4) ${}_RR$ *yarıbasittir.*

Tanım 2.1.21 [14] Önerme 2.1.20'deki denk koşullardan birini sağlayan bir R halkasına *yarıbasit (semisimple) halka* denir.

Tanım 2.1.22 [14] Bir R halkasındaki tüm asal ideallerin ara kesiti olan ideale *yarıasal (semiprime) ideal* denir.

Tanım 2.1.23 [14] 0 idealinin yarıasal olduğu R halkasına *yarıasal (semiprime) halka* denir.

Tanım 2.1.24 [15] Bir R halkası için $R/J(R)$ bir sol Artin halkaysa veya denk olarak, $R/J(R)$ bir yarıbasit halkaysa, R'ye bir *yarıyerel (semilocal) halka* denir.

Önerme 2.1.25 [15] *Bir R halkasının sonlu sayıda maksimal sol ideali varsa, R bir yarıyerel halkadır.*

Tanım 2.1.26 [13] I, bir R halkasının bir tek yönlü ideali olsun. $a \in R$ için $a^2 - a \in I$ iken $e - a \in I$ olacak şekilde $e^2 = e \in R$ varsa *eşkareler I'ya göre yükselir (idempotents lift modulo I)* denir.

Tanım 2.1.27 [15] R bir yarıyerel halka olmak üzere, $R/J(R)$'nin eşkare elemanları R'ye yükseltilebilirse, R halkasına *yarıtam (semiperfect) halka* denir.

Tanım 2.1.28 [13] I, bir R halkasının alt kümesi olmak üzere I'daki her bir $a_1, a_2, \ldots$ dizisi için $a_n.a_{n-1} \ldots a_2.a_1 = 0$ olacak şekilde bir $n \geq 1$ tamsayısı bulunabiliyorsa, I'ya *sağ T–üstel sıfır (right T–nilpotent)* denir. Eğer I'daki her bir $a_1, a_2, \ldots$ dizisi için $a_1.a_2 \ldots a_{n-1}.a_n = 0$ olacak şekilde bir $n \geq 1$ tamsayısı bulunabiliyorsa, I'ya *sol* T–*üstel sıfır* denir. Bu tanımdan, her üstel sıfır idealin sağ ve sol T–üstel sıfır olduğu açıktır. Ayrıca, her sağ veya sol T–üstel sıfır idealin bir nil ideal olduğu açıktır.

Tanım 2.1.29 [15] Bir R halkası için $R/J(R)$ yarıbasit ve $J(R)$ sağ (sırasıyla, sol) T-üstelsıfır ise, R'ye *sağ (sırasıyla, sol) tam halka* denir. R bir sol ve sağ tam halka ise, R'ye *tam halka* denir.

Teorem 2.1.30 [15] *Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir:*

(1) *R'nin bir tek maksimal sol ideali vardır.*

(2) *R'nin bir tek maksimal sağ ideali vardır.*

(3) *$R/J(R)$ bir bölümlü halkadır.*

(4) *$R\backslash U(R)$, R'nin bir idealidir.*

(5) *Herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için $a_1 + \ldots + a_n \in U(R)$ iken $a_i \in U(R)$ olacak biçimde $i = 1, \ldots, n$ vardır.*

(6) *$a + b \in U(R)$ ise, $a \in U(R)$ veya $b \in U(R)$'dir.*

Tanım 2.1.31 [15] Teorem 2.1.30'daki denk koşullardan birini sağlayan R halkasına bir *yerel (local) halka* denir.

Teorem 2.1.32 [15] *Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir:*

(1) *Her $a \in R$ için $axa = a$ olacak biçimde bir $x \in R$ elemanı vardır.*

(2) *Her temel sol (sağ) ideal bir eşkare eleman tarafından üretilmiştir.*

(3) *Her temel sol (sağ) ideal ${}_RR$'nin (R_R'nin) bir dik toplananıdır.*

(4) *Her sonlu üretilmiş sol (sağ) ideal bir eşkare eleman tarafından üretilmiştir.*

(5) *Her sonlu üretilmiş sol (sağ) ideal ${}_RR$'nin (R_R'nin) bir dik toplananıdır.*

Tanım 2.1.33 [15] Teorem 2.1.32'deki denk koşullardan birini sağlayan bir R halkasına *von Neumann düzenli halka* denir.

Tanım 2.1.34 [13] M ve U, R–modüller olsun. Eğer her $f : K \longrightarrow U$ monomorfizması ve her $\gamma : K \to M$ homomorfizması için $hf = \gamma$ olacak şekilde bir $h : U \longrightarrow M$ homomorfizması varsa M'ye *U–injektif (U–injective)* denir. Eğer M her U modülü için U–injektif ise M'ye *injektif modül (injective module)* denir.

Önteorem 2.1.35 [13] (Baer Kriteri) *M sağ R-modülü için aşağıdaki ifadeler denktir:*

(1) *M bir injektif modüldür.*

(2) *M bir R–injektif modüldür.*

(3) *Her sağ ideal $I \leq R_R$ ve her R–homomorfizma $h : I \longrightarrow M$ için $h(a) = xa$ $(a \in I)$ olacak şekilde $x \in M$ vardır.*

Tanım 2.1.36 [13] M ve U, R–modüller olsun. Eğer her $f : M \to N$ homomorfizması ve her $\gamma : U \to N$ epimorfizması için $\gamma h = f$ olacak şekilde $h : M \to U$ homomorfizması varsa M'ye *U–projektif (U–projective)* denir. Eğer M her U modülü için U–projektif ise M'ye *projektif (projective)* denir.

Tanım 2.1.37 [13] M bir sağ R-modül, $(x_\alpha)_{\alpha\in I} \in M$ ve $(f_\alpha)_{\alpha\in I} \in \mathrm{Hom}_R(M,R)$ olsun. Eğer her $x \in M$ için

(1) hemen hemen her $\alpha \in I$ için $f_\alpha(x) = 0$,

(2) $x = \sum\limits_{\alpha\in I} f_\alpha(x)x_\alpha$

koşulları sağlanıyorsa $((x_\alpha)_{\alpha\in I}, (f_\alpha)_{\alpha\in I})$ çiftine M'nin *dual tabanı (dual basis)* denir.

Önteorem 2.1.38 [13] (Dual Taban Önteoremi) *M'nin bir projektif sağ R-modül olması için gerek ve yeter koşul M'nin dual tabana sahip olmasıdır.*

Önteorem 2.1.39 [15] (Schanuel Önteoremi) *R bir halka ve M bir R-modül olsun. P_1 ve P_2 projektif modüller olmak üzere $0 \to K \to P_1 \to M \to 0$ ve $0 \to L \to P_2 \to M \to 0$ tam dizileri alınsın. O zaman, $K \oplus P_2 \cong L \oplus P_1$'dir.*

Önteorem 2.1.40 [15] (Nakayama Önteoremi) *R bir halka ve $I_R \subseteq R$ bir sağ ideal olsun. O zaman, aşağıdaki ifadeler denktir:*

(1) $I \subseteq J(R)$

(2) *M_R sonlu üretilmiş bir sağ R-modül olmak üzere, $IM = M$ ise $M = 0$ dır.*

(3) *M/N sonlu üretilmiş olacak biçimde seçilen bir $N_R \subseteq M_R$ sağ alt modülü için, $N + IM = M$ ise $N = M$ dir.*

2.2 Değişmeli Halkalarda Asal İdealler

Bu alt bölüm boyunca R bir değişmeli halkayı temsil edecektir.

Tanım 2.2.1 [16] I, R halkasının bir ideali olsun. Her $a, b \in R$ için $ab \in I$ iken $a \in I$ veya $b \in I$ koşulu sağlanıyorsa, I'ya bir *asal ideal* denir.

Önerme 2.2.2 [16] *R/I'nın bir tamlık bölgesi olması için gerek ve yeter koşul I'nın asal ideal olmasıdır.*

Tanım 2.2.3 [16] $S \subseteq R$ alt kümesi verilsin. Her $a, b \in S$ için $ab \in S$ ve $1 \in S$ oluyorsa, S'ye *çarpımsal kapalı küme* denir.

Önerme 2.2.4 [16, Theorem 1] *S, R halkasında çarpımsal kapalı bir küme olsun. I, S ile ayrık olma özelliğine göre maksimal olan bir ideal ise, I asaldır.*

J, çarpımsal kapalı bir S kümesi ile ayrık olan bir ideal olsun. Zorn Önteoremi ile J ideali, S ile ayrık olma özelliğine göre maksimal olan I idealine genişletilebilir. Dolayısıyla, elimizde bir asal ideal inşa edebileceğimiz bir metot vardır.

Tanım 2.2.5 [16] $S \subseteq R$ çarpımsal kapalı bir küme olsun. Her $a, b \in R$ için $ab \in S$ iken $a \in S$ ve $b \in S$ koşulu sağlanıyorsa S kümesine *doymuş (saturated) küme* denir.

Önerme 2.2.6 [16, Theorem 2] *Bir $S \subseteq R$ kümesi için aşağıdaki ifadeler denktir:*

(1) *S bir doymuş çarpımsal kapalı kümedir.*

(2) *S'nin tümleyeni, R'nin asal ideallerinin küme-teorik birleşimidir.*

Örnek 2.2.7 [16, p. 3] S, bir R halkasındaki sıfır-bölen olmayan tüm elemanların bir kümesi olsun. Bu durumda, S bir doymuş çarpımsal kapalı kümedir. Dolayısıyla, R halkasındaki sıfır-bölen elemanlar, asal ideallerin birleşimidir.

Sıradaki iki teoremle çarpımsal kapalı bir küme kullanmadan asal ideal elde etmenin iki yolu verilecektir.

Önerme 2.2.8 [16, Theorem 6] *R bir halka ve A bir R-modül olsun. I, A'nın sıfırdan farklı elemanlarının tüm sıfırlayıcıları arasında maksimal olan bir ideal olsun. O halde, I bir asal idealdir.*

Önerme 2.2.9 [16, Theorem 7] *Sonlu üretilmiş olmayan bir I ideali, R içindeki sonlu üretilmiş olmayan tüm ideallerin arasında maksimal olsun. O halde, I bir asal idealdir.*

2.3 Sonluluk Koşulları

Tanımlar 2.3.1 [15, p. 20] Bir M modülünün alt modüllerinin her boştan farklı kümesi bir maksimal (sırasıyla, minimal) elemana sahipse M modülüne *Noether (sırasıyla, Artin) modül* denir. R bir halka olsun. R_R bir Noether (sırasıyla, Artin) modül ise R'ye bir *sağ Noether (sırasıyla, sağ Artin) halka* denir. Sol Noether (sırasıyla, sol Artin) halka benzer şekilde tanımlanır. Hem sağ hem de sol Noether (sırasıyla, sağ ve sol Artin) olan R halkasına *Noether (sırasıyla, Artin) halka* denir.

Önerme 2.3.2 [14, p. 1] *M bir modül ve $A \leq M$ olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:*

(1) *M Noether'dir.*

(2) *M'nin alt modüllerinin her artan dizisi $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots$ için, $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots \subseteq A_n = A_{n+1}$ olacak biçimde bir $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır.*

(3) *M nin her alt modülü sonlu üretilmiştir.*

Önerme 2.3.3 [14, p. 2] *Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir:*

(1) *R (sağ) Noether'dir.*

(2) *R'nin (sağ) ideallerinin her artan dizisi $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \cdots$ için $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \cdots \subseteq I_n = I_{n+1}$ olacak biçimde bir $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır.*

(3) *R nin her (sağ) ideali sonlu üretilmiştir.*

Önerme 2.3.4 [15, 4.15] (Hopkins-Levitzki Teoremi) *R bir sağ (sırasıyla, sol) Artin halka olsun. O zaman, R bir sağ (sırasıyla, sol) Noether halkadır.*

Tanım 2.3.5 [11, p. 57] R bir halka ve $0 \to K \to F \to M \to 0$ R-modüllerin bir tam dizisi olsun. K bir sonlu üretilmiş modül ve F bir sonlu üretilmiş serbest modül ise, M_R modülüne *sonlu gösterimli (finitely presented)* denir.

Önerme 2.3.6 [11, Önerme 4.8] *R bir halka ve $M, M^{'}, M^{''}$ R-modüller olsun. $0 \to M^{'} \to M \to M^{''} \to 0$ tam dizisi için $M^{'}$ ve $M^{''}$ sonlu gösterimli modüller ise, M modülü de sonlu gösterimlidir.*

Önerme 2.3.7 [11] *R bir halka, M Noether bir sağ R-modül ve $f : M \longrightarrow M$ bir örten homomorfizma olsun. O halde, f birebirdir.*

Önerme 2.3.8 [11] *R bir halka, N Artin bir sağ R-modül ve $g : N \longrightarrow N$ bir birebir homomorfizma olsun. O halde, g örtendir.*

Tanım 2.3.9 [11] M_R bir modül olsun. M'nin alt modüllerinden oluşan ve $\bigcap\limits_{i \in I} N_i = 0$ olan her $\{N_i \mid i \in I\}$ kümesi için, $\bigcap\limits_{j \in J} N_j = 0$ koşulunu sağlayan sonlu bir $J \subseteq I$ alt kümesi varsa, M_R'ye *sonlu eşüretilmiş (finitely cogenerated) modül* denir.

Bu tanıma denk olarak, M'nin sonlu eşüretilmiş bir modül olması için gerek ve yeter koşul $Soc(M)$ sonlu üretilmesi ve $Soc(M) \leq_e M$ olmasıdır.

Önerme 2.3.10 [11] *Artin modüller sonlu eşüretilmiştir.*

Sonuç 2.3.11 [11] *Artin modüllerin her faktörü sonlu eşüretilmiştir.*

Tanım 2.3.12 [11] Tüm birebir endomorfizmaları otomorfizma olan modüle *cohopfian modül* denir.

Örnek 2.3.13 [11] Önerme 2.3.8'den, Artin modüller cohopfiandır.

Tanım 2.3.14 [11] Bir R halkasında her $a, b \in R$ için $ab = 1$ iken $ba = 1$ koşulu sağlanıyorsa R halkasına *Dedekind-sonlu halka (Dedekind-finite ring)* denir.

Önerme 2.3.15 [11] *R halkasının Dedekind-sonlu olması için gerek ve yeter koşul $I_R \leq R_R$ sağ ideali için $R \cong I \oplus R$ iken $I = 0$ olmasıdır.*

Önerme 2.3.16 [11] *Bir R halkası sağ Noether ise, Dedekind-sonludur.*

Tanım 2.3.17 [14] Bir M modülü için, alt modüllerin

$$A_0 = 0 < A_1 < \ldots < A_n = A$$

zinciri her $i = 1, \ldots, n$ için A_i/A_{i-1} faktör modülü basit olacak biçimde oluşturula-biiliyorsa, bu zincire M modülünün *kompozisyon serisi (composition series)* denir. Burada n sayısına *serinin kompozisyon uzunluğu* denir. Kompozisyon serisi olan bir modül sonlu uzunluktadır.

Önerme 2.3.18 [14] Bir M modülünün Artin ve Noether olması için gerek ve yeter koşul modülün sonlu uzunlukta olmasıdır.

Önerme 2.3.19 [17] R bir değişmeli halka veya bir sol Noether halka ise, her sonlu üretilmiş Artin sol R-modül sonlu uzunlukludur.

İspat: R bir sol Noether halka ve ${}_RM$ bir sonlu üretilmiş Artin modül olsun. ${}_RM$ modülü sonlu üretilmiş olduğundan Noetherdir. Hipotezde Artin olduğunun da belirtilmesi dolayısıyla, ${}_RM$ sonlu uzunluklu olur.
R değişmeli bir halka olsun. $M = x_1R + .. + x_nR$ olup M modülü devirli Artin alt modüllerin bir sonlu dik toplamı olarak yazılacağından, M devirli kabul edilebilir. Bir $I \subseteq R$ ideali için $M = R/I$ formunda yazılabilir. R değişmeli bir halka olarak kabul edildiğinden I bir ideal olur. ${}_RM$'nin Artin olması ve $R \longleftrightarrow R/I$ birebir eşlemesinden dolayı, R/I Artin halka olur. Önerme 2.3.4 ile, R/I bir Noether halkadır. Böylece ${}_RM$ sonlu uzunluklu olur. $\square$

Örnek 2.3.20 [17, Example 4.28] Değişmeli ve sol Noether olmayan bir halka üzerinde sonsuz uzunluklu devirli bir Artin sol modül oluşturulacaktır.

${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ sonlu üretilmemiş olduğu için, $R=\begin{pmatrix} \mathbb{Q} & 0 \\ \mathbb{Q} & \mathbb{Z} \end{pmatrix}$ halkası sol Noether değildir. $e=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ eşkare elemanı için, $Re=\begin{pmatrix} \mathbb{Q} & 0 \\ \mathbb{Q} & 0 \end{pmatrix}$ ideali üretilir. Bu, $\begin{pmatrix} \mathbb{Q} \\ \mathbb{Q} \end{pmatrix}$ basit formunda alınsın ve $\mathbb{Z}_{(p)}$, $\mathbb{Z}$'nin (p) asal idealindeki lokalizasyonu olmak üzere $\begin{pmatrix} 0 \\ \mathbb{Z}_{(p)} \end{pmatrix}$ alt modülü düşünülsün.

$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ cx & 0 \end{pmatrix}$ $(a, b \in \mathbb{Q},\ c \in \mathbb{Z})$ olduğundan, Re'nin $\begin{pmatrix} 0 \\ \mathbb{Q} \end{pmatrix}$ üzerindeki etkisi sıfırdır. Dolayısıyla G, $\mathbb{Q}$'nun alt grubu olmak üzere; $\begin{pmatrix} 0 \\ \mathbb{Q} \end{pmatrix}$'nun alt modülleri $\begin{pmatrix} 0 \\ G \end{pmatrix}$ formundadır. Öte yandan, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(p)} \cong \mathbb{Z}_{p^\infty}$ olur ve $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ $\mathbb{Z}$-modül olarak sonsuz uzunluktadır. Böylece, $M=\begin{pmatrix} \mathbb{Q} \\ \mathbb{Q} \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbb{Z}_{(p)} \end{pmatrix}$ devirli R-modülü için, $M \supseteq M' = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbb{Q} \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbb{Z}_{(p)} \end{pmatrix} \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(p)}$ modülü de sonsuz uzunlukta olur. Yani M modülünün sonsuz uzunlukta bir alt modülü vardır.

$M/M' \cong \begin{pmatrix} \mathbb{Q} \\ \mathbb{Q} \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbb{Q} \end{pmatrix}$ basit R-modüldür. Ayrıca $M' \cong \mathbb{Z}_{p^\infty}$ olduğundan, M' bir Artin $\mathbb{Z}$-modüldür. Dolayısıyla, M bir Artin R-modül olur ve istenen elde edilir.

2.4 Krull Boyut Ve Kritik Modüller

Tanım 2.4.1 [14] Bir R halkası üzerindeki modüller için Krull boyutu tanımlamak amacıyla, öncelikle sonluötesi tümevarım kullanılarak, her α ordinali için R-modüllerin K_α sınıfları tanımlanacaktır. Başlangıç olarak, K_{-1} sınıfı sadece sıfır modülünden oluşsun. Bir $\alpha \geq 0$ ordinali düşünülsün. Eğer her $\beta < \alpha$ ordinali için K_β tanımlanmışsa K_α, M R-modüllerinin şu özelliği sağlayan bir sınıfı olsun: Her (sayılabilen)

$$M_0 \geq M_1 \geq M_2 \geq \cdots$$

alt modül zinciri için $M_i/M_{i+1} \in \bigcup_{\beta<\alpha} K_\beta$ koşulu sonlu sayıda hariç i indisi için sağlansın. Eğer bir M R-modülü bir K_α'ya aitse, bu özelliği sağlayan en küçük α ordinaline M nin *Krull boyutu* denir.

Öte yandan M modülü herhangi bir K_α'ya ait değilse *M'nin Krull boyutu yoktur* denir.

Uyarı 2.4.2 [14] Krull Boyutu α olan bir M modülü için gösterim $K.boy(M) = \alpha$ şeklinde yapılacaktır.

Önerme 2.4.3 [14] *Bir M modülü için, $K.boy(M) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $M \neq 0$ olması ve M nin alt modülleri üzerinde azalan zincir koşulunu sağlamasıdır. Diğer bir deyişle $K.Boy(M) = 0$ olan bir M modülü sıfırdan farklı bir Artin modüldür.*

Önerme 2.4.4 [14] *M bir modül ve bir α ordinali için $K.Boy(M) \leq \alpha$ olsun. M'nin N alt modülü için $K.Boy(N) \leq \alpha$ ve $K.Boy(M/N) \leq \alpha$'dır.*

Önerme 2.4.5 [14] *M bir modül ve N, M'nin bir alt modülü olsun. O zaman, $K.Boy(M)$'nin tanımlı olması için gerek ve yeter koşul $K.Boy(N)$ ve $K.Boy(M/N)$'nin tanımlı olmasıdır. Bu durumda,*

$$K.Boy(M) = max\{K.Boy(N), K.Boy(M/N)\}$$

olur.

Tanım 2.4.6 [14] Bir R halkasının tüm asal ideallerinin arakesitine *asal radikal (prime radical)* denir.

Tanım 2.4.7 [14] P bir R halkasının bir asal ideali olsun. P'nin öz olarak içerdiği herhangi bir asal ideal yoksa, P'ye *minimal asal ideal (minimal prime ideal)* denir.

Tanım 2.4.8 [14] Bir R halkası için R_R sağ modülünün (varsa) Krull boyutuna *R'nin sağ Krull boyutu* denir ve $r.K.Boy(R)$ ile gösterilir.
Benzer şekilde, sol Krull da tanımlanır ve $l.K.Boy(R)$ ile gösterilir.

Önerme 2.4.9 [18, Corollary 3.8] *R sağ Krull boyutu olan bir halka ve N, bu halkanın asal radikali olsun. Bu durumda,*

$$\begin{aligned} r.K.Boy(R) &= sup\{r.K.Boy(R/P) \mid P \in Spec(R)\} \\ &= sup\{r.K.Boy(R/P_i) \mid i = 1,..,m; m \in \mathbb{Z}^+\} \\ &= r.K.Boy(R/N) \end{aligned}$$

olur.

Tanım 2.4.10 [18] $x \in R$ olsun. Her $r \in R$ için $xr = 0$ iken $r = 0$ oluyorsa, x'e *sağ düzenli (right regular) eleman* denir. Denk olarak $\mathrm{r.ann}_R(x) = 0$ koşulunu sağlayan x elemanı sağ düzenlidir. Benzer şekilde *sol düzenli (left regular) eleman* tanımı da verilebilir.

Sağ ve sol düzenli olan elemana *düzenli (regular) eleman* denir.

Önerme 2.4.11 [18] R halkasının düzenli elemanlarının kümesi $C(0)$ çarpımsal kapalıdır.

Önteorem 2.4.12 [5, Lemma 7.2] *R halkası aşağıdaki özellikleri sağlayan bir halka olsun.*

(1) *Düzenli (sırasıyla, sol düzenli) elemanların çarpımsal kapalı kümesi doymuş olsun.*

(2) *$s \in R$ elemanının bir (sırasıyla, sol) düzenli eleman olduğu Rs formundaki sol idealler üzerinde artan zincir koşulu sağlansın.*

(3) *Halkadaki her maksimal sağ ideal temel olsun.*

O halde, $b \in R$ bir (sırasıyla, sol) düzenli eleman ise, R/bR sonlu uzunluktadır.

Önerme 2.4.13 [18, Lemma 6.3.9] *R sağ Krull boyutu olan bir halka ve $c \in C(0)$ olsun. Bu durumda;*

$$K.Boy(R/cR) < r.K.Boy(R)$$

olur.

Önerme 2.4.14 [18, Proposition 6.3.10] *R sağ Krull boyutu olan yarıasal bir halka olsun. Bu durumda,*

$$r.K.Boy(R) = sup\{K.Boy(R/E) + 1 \mid E \leq_e R_R\}$$

olur.

Önerme 2.4.15 [14, Lemma 15.3] *M bir Noether modül ise, $K.Boy(M)$ tanımlıdır.*

Tanım 2.4.16 [14] $\alpha \geq 0$ bir ordinal ve M bir modül olsun. M'nin sıfırdan farklı her N alt modülü için $K.Boy(M/N) < \alpha$ iken $K.Boy(M) = \alpha$ koşulu sağlanıyorsa, M modülüne *α-kritik (critical) modül* denir. $\alpha \geq 0$ ordinali ve M modülü için M α-kritik bir modül ise, M'ye *kritik modül* denir.

0-kritik modüller basit modüllerdir. Krull boyutu olan bir M modülünün 1-kritik olması için gerek ve yeter koşul M'nin tüm öz faktörleri Artin iken M'nin Artin olmamasıdır. Örneğin, $\mathbb{Z}$ kendi üzerinde 1-kritik modüldür ([14, p. 259]).

Tanım 2.4.17 [19, p.9] I_R bir R halkasının sağ ideali olsun. R/I modülü α-kritik modül ise I_R sağ idealine *α-eşkritik (cocritical) sağ ideal* denir.

Tanım 2.4.18 [19, p.9] Bir α ordinali ve I_R sağ ideali için I_R α-eşkritik ise, I_R'ye *eşkritik sağ ideal* denir.

Önerme 2.4.19 [14, Exercise 15H] *M bir α-kritik modül olsun. N, M'nin sıfırdan farklı bir alt modülü ise N modülü de α-kritiktir.*

Önerme 2.4.20 [14, Lemma 15.8] *M Krull boyutu olan sıfırdan farklı bir modül olsun. O halde, M'nin kritik alt modülü vardır. Ancak, M kendisiyle aynı Krull boyuta sahip bir alt modüle sahip olmak zorunda değildir.*

2.5 Ore Kümeler, Klasik Kesirler Halkası ve Goldie Teoremi

Tanım 2.5.1 [14] X, bir R halkası içinde çarpımsal kapalı bir küme olsun. Her $x \in X$ ve $r \in R$ için $ry = xs$ olacak biçimde bir $y \in X$ ve $s \in R$ bulunuyorsa, *X kümesi sağ Ore koşulunu sağlar* denir. Sağ Ore koşulunu sağlayan kümelere *sağ Ore küme* denir.

Benzer şekilde *sol Ore küme* tanımı da yapılır. Bir Ore kümesi hem sağ hem sol Ore olan çarpımsal kapalı bir kümedir.

Uyarı 2.5.2 [14] Değişmeli halkalarda her çarpımsal küme Ore kümedir.

Tanım 2.5.3 [14] R bir tamlık bölgesi olsun. R içindeki sıfırdan farklı elemanlar bir sağ Ore küme oluşturursa R'ye *sağ Ore bölgesi* denir.

Tanım 2.5.4 [14, p. 126] R bir halka ve A bir sağ R-modül olmak üzere,

$$t(A) = \{a \in A \mid x \in R \text{ düzenli elemanı için } ax = 0\}$$

alt modülüne R'nin *burulmalı (torsion) alt modülü* denir.

Tanım 2.5.5 [14, p. 126] $t(A) = A$ koşulunu sağlayan A_R modülüne *burulmalı (torsion) modül* denir.

Tanım 2.5.6 [14, p. 126] $t(A) = 0$ koşulunu sağlayan A_R modülüne *burulmasız (torsion-free) modül* denir.

Tanım 2.5.7 [18] R bir halka ve $X \subseteq R$ düzenli elemanların bir çarpımsal kapalı kümesi olsun. $S \supseteq R$ halkası aşağıdaki özellikleri sağlasın:

(1) X'in her elemanı S içinde tersinirdir.

(2) S'nin her elemanı, bazı $a \in R$ ve $x \in X$ için ax^{-1} formunda yazılır.

S halkasına *R için X'e bağlı sağ klasik kesirler halkası* denir. Bu durumda R, S içinde bir sağ düzen halkadır (right order ring) denir.

Benzer şekilde *sol klasik kesirler halkası* da tanımlanır.

Tanım 2.5.8 [18, 2.2.5] $M \neq 0$ ve M'nin sıfırdan farklı her alt modülü geniş ise, M'ye *düzgün modül (uniform module)* denir.

Tanım 2.5.9 [18, 2.2.6] Bir M modülü sıfırdan farklı alt modüllerin sonsuz dik toplamını içermiyorsa, *M modülünün sonlu düzgün boyutu vardır* denir.

Önerme 2.5.10 [18, 2.2.6] *M modülünün sonlu düzgün boyutu olsun. N, M'nin bir alt modülü ise, N'nin de sonlu düzgün boyutu vardır.*

Önteorem 2.5.11 [18, Lemma 2.2.7] *Sıfırdan farklı M modülünün sonlu düzgün boyutu varsa, M bir düzgün alt modül içerir.*

Önteorem 2.5.12 [18, Lemma 2.2.8] *M sonlu düzgün boyutu olan bir modülse, M geniş bir alt modül içerir ve bu geniş alt modül düzgün alt modüllerin sonlu dik toplamıdır.*

Teorem 2.5.13 [18, Theorem 2.2.9] *M sonlu düzgün boyutu olan bir modül olsun. $\bigoplus_{i=1}^{n} U_i$ alt modülü M'nin düzgün alt modüllerinin M içinde geniş olan sonlu bir dik toplamı olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır:*

(1) *M'nin sıfırdan farklı alt modüllerinin her dik toplamı en fazla n tane dik toplanan içerir.*

(2) *M'nin düzgün alt modüllerinin dik toplamının M içinde geniş olması için gerek ve yeter koşul dik toplamın tam olarak n tane dik toplanan içermesidir.*

Tanım 2.5.14 [18, 2.2.10] Teorem 2.5.13'te geçen negatif olmayan n sayısına *düzgün boyut (uniform dimension)* veya *Goldie boyut (Goldie dimension)* adı verilir ve bir M modülünün düzgün boyutu $u.Boy(M)$ ile gösterilir. M sonlu düzgün boyuta sahip değilse, $u.Boy(M) = \infty$ olarak yazılır.

Önerme 2.5.15 [20, 6.2] *Krull boyutu olan bir modülün sonlu düzgün boyutu vardır.*

Tanım 2.5.16 [18, 2.3.1] Bir R halkası aşağıdaki koşulları sağlasın:

(1) R_R sonlu düzgün boyuta sahiptir.

(2) R sağ sıfırlayıcılar üzerinde artan zincir koşulunu sağlar.

O halde, R halkasına *sağ Goldie halkası* denir.

Sol Goldie halkası da benzer şekilde tanımlanır.

Önerme 2.5.17 [18, Proposition 2.3.1] *Q, R'nin sağ klasik kesirler halkası olsun.*

(1) *Q bir sağ Goldie halkaysa, R de bir sağ Goldie halkadır.*

(2) *Q bir yarıbasit Artin halkaysa, R bir yarıasal sağ Goldie halkadır.*

(3) *Q bir basit Artin halkaysa, R bir asal sağ Goldie halkadır.*

Teorem 2.5.18 [18, Theorem 2.3.6] (Goldie Teoremi) *Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir:*

(1) *R bir yarıasal sağ Goldie halkasıdır.*

(2) *R yarıasaldır, $Z_r = 0$ ve sağ $u.Boy(R_R) < \infty$ dur.*

(3) *Q, R'nin yarıbasit Artin sağ kesirler halkasıdır.*

Dahası, R'nin asal olması için gerek ve yeter koşul Q'nun bir basit halka olmasıdır.

Önerme 2.5.19 [18, Proposition 6.3.5] *Sağ Krull boyutu olan yarıasal R halkası sağ Goldie halkadır.*

Önerme 2.5.20 [11, 11.13] *R, bir yarıasal sağ Goldie halka olsun. Bu durumda,*

(1) *R'nin düzenli elemanlarının kümesi doymuştur.*

(2) *R halkasının geniş sağ idealleri düzenli bir eleman içeren sağ ideallerdir.*

Önerme 2.5.21 [21, Theorem C] *Bir sol Noether temel sağ ideal halkası asal halkalarla ile Artin halkaların bir dik toplamı şeklinde yazılır.*

Önerme 2.5.22 [22, Theorem 1] *$I_R \subseteq R$ sağ ideali için*

$$C(I) = \{c \in R \mid c + I, R/I \text{ halkasının bir düzenli elemanı}\}$$

kümesi tanımlansın. Asal radikali N olan Noether bir R halkasının, bir Artin halka ile bir yarıasal halkanın dik toplamı olarak yazılabilmesi için gerek ve yeter koşul her $c \in C(N)$ için $N = cN = Nc$ olmasıdır.

Sonuç 2.5.23 [22, p. 346] R, asal radikali N olan bir Noether halka ve her $c \in C(N)$ için $N = cN$ olsun. Bu durumda, eRe yarıasal halka, $(1-e)R(1-e)$ Artin halka, $eR(1-e) = 0$ ve

$$R \cong \begin{pmatrix} (1-e)R(1-e) & eR(1-e) \\ 0 & eRe \end{pmatrix}$$

olacak şekilde bir $e \in R$ eşkare elemanı vardır.

2.6 Yoğun ve Monoform Modüller

Bu alt bölümde genel bir halkadaki comonoform sağ ideal kavramından bahsedilecektir. R halkasının bu özel I_R sağ idealleri, R/I modülü üzerine bir koşul koyarak tanımlanacaktır.

Tanım 2.6.1 [11, Definition 8.2] R bir halka, M bir R-modül ve $N \subseteq M$ bir alt modül olsun. Her $x, y \in M$ ve sıfırdan farklı x elemanı için $x(y^{-1}N) \neq 0$ oluyorsa, M_R modülüne *yoğun (dense) modül* denir ve $N \leq_d M$ ile gösterilir.

Uyarı 2.6.2 Bir M_R modülü için $E(M)$, M'nin injektif zarfını göstersin. Yani $E(M)$ injektiftir ve M'nin maksimal geniş genişlemesidir.

Önerme 2.6.3 [11, Proposition 8.6] *Bir M_R modülü ve bir $N \subseteq M$ alt modülü için aşağıdaki ifadeler denktir:*

(1) $N \leq_d M$,

(2) $Hom_R(M/N, E(M)) = 0$,

(3) $N \subseteq U \subseteq M$ *olacak biçimde bir* U_R *alt modülü için* $Hom_R(U/N, M) = 0$*'dır.*

Önerme 2.6.4 [11] *R bir halka ve M_R bir modül olsun. Her $N \subseteq M$ alt modülü için $N \leq_d M$ ise $N \leq_e M$ olur.*

Yukarıdaki önermenin tersi her zaman doğru değildir.

Örnek 2.6.5 [11, Example 8.3(1)] $R = \mathbb{Z}$ ve p asal olmak üzere $n \geq 1$ için $M = \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z}$ modülü ile $N = p\mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z}$ alt modülü alınsın. M'nin alt modülleri $\overline{p}\mathbb{Z} \supseteq \overline{p}^2\mathbb{Z} \supseteq \cdots$ biçiminde bir zincir oluşturur. Dolayısıyla M'nin her alt modülünün N ile arakesiti sıfırdan farklıdır. Böylece $N \leq_e M$ olur.

Ancak $N \leq_d M$ değildir. Örneğin, $y = \overline{1} \in M$ ve $x = \overline{p^n} \in M$ olsun. $yr \in N$ için $\overline{p^n}\overline{r} = \overline{p^n}\overline{p}k = \overline{p^{n+1}}k = 0$ elde edilir. Yani $x(y^{-1}N) = 0$ olur.

Önerme 2.6.6 [11, Proposition 8.7] *Bir R halkası ve M_R modülü için aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

(1) *Her $N \subseteq U \subseteq M$ için $N \leq_d M$ olması için gerek ve yeter koşul $N \leq_d U$ ve $U \leq_d M$ olmasıdır.*

(2) *$N, N' \subseteq M$ için $N \leq_d M$ ve $N' \leq_d M$ ise $N \cap N' \leq_d M$ olur.*

(3) *M_R tekilsiz bir modül ise $N \leq_e M$ olması için gerek ve yeter koşul $N \leq_d M$ olmasıdır.*

Önerme 2.6.7 [19, Proposition 2.6] *Sıfırdan farklı M_R modülü için aşağıdaki ifadeler denktir:*

(1) *Sıfırdan farklı her $N \subseteq M$ alt modülü için $N \leq_d M$'dir.*

(2) *Sıfırdan farklı her devirli $C \subseteq M$ alt modülü için $C \leq_d M$'dir.*

(3) *Her $x, y, z \in M$ ve $x, z \neq 0$ için $x[y^{-1}(zR)] \neq 0$'dır.*

(4) *Sıfırdan farklı her $f \in Hom_R(M, E(M))$ birebirdir.*

(5) *Her $N \subseteq M$ alt modülü için sıfırdan farklı $f \in Hom_R(N, M)$ (sırasıyla, sıfırdan farklı $f \in Hom_R(N, E(M))$) birebirdir.*

(6) *M_R düzgündür ve devirli her $C \subseteq M$ alt modülü için sıfırdan farklı*

$f \in Hom_R(C, M)$ *birebirdir.*

(7) *M'nin herhangi bir öz faktör modülünün herhangi bir alt modülünden M'ye (sırasıyla, $E(M)$'ye) giden sıfırdan farklı bir R-homomorfizması yoktur.*

Yukarıdaki önermenin (6) koşulunda M modülünün düzgün olması koşulunun gerekliliği üzerine basit bir örnek verilebilir.

Örnek 2.6.8 [4, p. 907] k bir bölümlü halka, V_k bir vektör uzayı olsun. Sıfırdan farklı devirli bir $C \leq V$ alt modülü için, sıfırdan farklı her $f : C \to V$ homomorfizması birebirdir. Gerçekten, C basit olduğundan $Çek(f) = 0$ veya $Çek(f) = C$ olmalıdır. Fakat f sıfırdan farklı seçildiğinden $Çek(f) = 0$ olur ve böylece f birebirdir. Ancak $boy_k V > 1$ ise V'nin bütün alt modülleri dik toplanandır. Dolayısıyla, V düzgün değildir.

Tanım 2.6.9 [19] Önerme 2.6.7'deki denkliklerden birini sağlayan M_R modülüne *monoform modül* denir. $P_R \lneq R$ sağ ideali için R/P modülü monoform ise, P_R sağ idealine *comonoform ideal* denir.

Örnek 2.6.10 [4] Basit modüller monoformdur, çünkü basit modüllerin sıfır ve kendilerinden başka alt modülü yoktur ve bir modül kendi üzerinde yoğun olduğundan, Önerme 2.6.7(1) koşulu sağlanır. Böylece basit modüller monoform olur.

Örnek 2.6.11 [4] Maksimal sağ idealler comonoformdur, çünkü maksimal bir M sağ ideali için R/M basit modül olur ve dolayısıyla monoformdur.

Önerme 2.6.12 [19, Proposition 2.6] *Bir R halkası için M_R modülü monoform ise, M'nin sıfırdan farklı her endomorfizması birebirdir.*

Önerme 2.6.13 [19, Proposition 2.6] *Monoform modüllerin alt modülleri de monoformdur.*

Önerme 2.6.14 [4, Lemma 6.4] *$P_R \leq R$ comonoform sağ ideali ve $x \in R \backslash P$ için $x^{-1}P$ sağ ideali comonoformdur.*

Önerme 2.6.15 [4] *$I \lhd R$ ideali ve $I \subseteq J_R$ ise $J_R \subseteq R_R$ sağ idealinin comonoform olması için gerek ve yeter koşul J/I'nın R/I içinde comonoform sağ ideal olmasıdır.*

Önerme 2.6.16 [4, Proposition 6.5] *Bir $P \lhd R$ idealinin comonoform sağ ideal olması için gerek ve yeter koşul R/P'nin sağ Ore bölgesi olmasıdır.*

Sonuç 2.6.17 [4, Corollary 6.7] *Değişmeli bir R halkasında asal ideal olma kavramı ile comonoform ideal olma kavramı denktir.*

Önerme 2.6.18 [18] (1) *Kritik bir modül daima monoformdur.*

(2) *Eşkritik bir sağ ideal comonoformdur.*

Sağ ideal olarak eşkritik olan (iki yönlü) idealleri karakterize etmek mümkündür.

Önerme 2.6.19 [5, Proposition 3.13] *Bir R halkası ve $P \lhd R$ ideali için aşağıdaki ifadeler denktir:*

(1) *P bir sağ ideal olarak eşkritiktir.*

(2) *R/P sağ Krull boyutu olan bir (sağ Ore) bölgedir.*

Örnek 2.6.20 [19, Example 10.1] k değişmeli bir tamlık bölgesi olmak üzere, $R = k[x_1, x_2, \ldots]$ halkasının Krull boyutu yoktur. Çünkü bir $R[x]$ polinom halkasının Krull boyutu olması için gerek ve yeter koşul R halkasının sağ Noether olmasıdır.

Örnek 2.6.21 [5, Example 3.14] Önerme 2.6.19 yardımıyla, (sağ veya sol) kritik olmayan bir (sağ ve sol) comonoform ideal oluşturulabilir.

Eğer R halkası, Krull boyutu olmayan değişmeli bir tamlık bölgesi ise, $\{0\}$ ideali asaldır ve Önerme 2.6.16 ile comonoformdur. Fakat Önerme 2.6.19'den dolayı, R'nin Krull boyutu olmadığından, $\{0\}$ ideali eşkritik olamaz. Örnek 2.6.20'deki k değişmeli bir tamlık bölgesi olmak üzere, $R = k[x_1, x_2, \ldots]$ halkası ele alınabilir.

Önteorem 2.6.22 [5, Lemma 3.16] *M_R yarı Artin bir R-modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:*

(1) *M monoformdur.*

(2) *Sıfırdan farklı bir $K_R \subseteq M$ alt modülü için $Soc(M)$ ve $Soc(M/K)$'nın sıfırdan farklı izomorf alt modülleri yoktur.*

(3) *$Soc(M)$ basittir ve M'nin herhangi bir öz faktörüne gömülemez.*

2.7 Gabriel Filtreleri

Tanım 2.7.1 [23] Bir R halkasının sağ ideallerinden oluşan $\mathcal{F}$ ailesi asağıdaki koşulları sağlasın: I_R, J_R sağ idealleri için,

- $I \in \mathcal{F}$ ve $J \supseteq I$ ise $J \in \mathcal{F}$'dir.

- $I, J \in \mathcal{F}$ ise $I \cap J \in \mathcal{F}$'dir.
- $I \in F$ ve $x \in R$ iken $x^{-1}I \in \mathcal{F}$'dir.
- $I \in F$ ve her $x \in I$ için $x^{-1}J \in \mathcal{F}$ olacak biçimde J_R sağ ideali varsa $J \in \mathcal{F}$'dir.

Böyle bir $\mathcal{F}$ ailesine *sağ Gabriel filtresi* denir.

Tanım 2.7.2 [23] Verilen bir $\mathcal{F}$ sağ Gabriel filtresi ve M_R modülü için

$$t_{\mathcal{F}}(M) = \{m \in M \mid ann(m) \in \mathcal{F}\}$$

kümesine *M'nin $\mathcal{F}$-burulmalı alt modülü* denir.

$t_{\mathcal{F}}(M) = M$ koşulu sağlanıyorsa M'ye *$\mathcal{F}$-burulmalı modül* denir. $t_{\mathcal{F}}(M) = 0$ koşulu sağlanıyorsa M'ye *$\mathcal{F}$-burulmasız modül* denir.

Uyarı 2.7.3 [23] Bir $\mathcal{F}$ sağ Gabriel filtresi ve bir I_R sağ ideali verilsin. $I_R \in \mathcal{F}$ olması için gerek ve yeter koşul R/I modülünün $\mathcal{F}$-burulmalı olmasıdır.

Tanım 2.7.4 [23] Bir R halkasında, modüllerden oluşan bir sınıf faktör modül, keyfi dik toplam ve genişleme altında kapalı olma koşullarını sağlıyorsa, bu sınıfa *kalıtsal burulmalı sınıf (hereditary torsion class)* denir.

Önerme 2.7.5 [23] Bir $\mathcal{F}$ sağ Gabriel filtresi için, tüm $\mathcal{F}$-burulmalı sağ R-modüllerin sınıfı olan $T_{\mathcal{F}} := \{M_R \mid M\ \mathcal{F}\text{-burulmalı modül}\}$ sınıfı kalıtsal burulmalı sınıf olma aksiyomlarını sağlar.

Uyarı 2.7.6 [23] Verilen bir E_R injektif modülü için $\{M_R \mid Hom(M, E) = 0\}$ sınıfı kalıtsal burulmalı bir sınıftır.

Tanım 2.7.7 [23] Yukarıda verilen $\{M_R \mid Hom(M, E) = 0\}$ sınıfına *E tarafından eş üretilen burulmalı sınıf* denir. Buna ilişkin sağ Gabriel filtresine *E tarafından eşüretilen sağ Gabriel filtre* denir. E'nin burulmasız olduğu en büyük sağ Gabriel filtre budur.

I_R sağ ideali için $\mathcal{F}_I$ ile $E(R/I)$ tarafından eşüretilen sağ Gabriel filtre gösterilecektir. Bu durumda, $\mathcal{F}_I = \{J_R \mid Hom_R(R/J, E(R/I)) = 0\}$ olur.

3 DEĞİŞMELİ HALKALAR

Bu bölümde, diğer bölümlerdeki çalışmalara ışık tutacak olan değişmeli halkalar üzerindeki Cohen ve Kaplansky Teoremleri irdelenecektir. Bu bölüm boyunca, R birimli ve değişmeli bir halkayı temsil edecektir.

3.1 Değişmeli Halkalarda Cohen ve Kaplansky Teoremleri

Değişmeli cebirdeki, Cohen ve Kaplansky'e ait iki ünlü teorem, değişmeli bir halkada her idealin sonlu üretilmiş (sırasıyla, temel) olup olmadığını test etmek için sadece asal idealleri kontrol etmenin yeterli olduğunu ifade eder. Aşağıda, bu teoremler ispatlarıyla verilmiştir.

Teorem 3.1.1 [1] (Cohen Teoremi) *R halkasının Noether olması için gerek ve yeter koşul her asal idealin sonlu üretilmiş olmasıdır.*

İspat: ($\Rightarrow$) Açıktır.

($\Leftarrow$) R Noether olmasın. O zaman,

$$\Theta = \{I \trianglelefteq R \,|I \text{ sonlu üretilmeyen ideal}\}$$

kümesi boştan farklı olur ve kapsama özelliğine göre kısmi sıralıdır. Zorn Önteoremi'nden Θ'nın bir maksimal elemanı vardır. Θ kümesinin bir maksimal elemanı P'nin, asal ideal olduğu gösterilerek çelişki bulunacak ve dolayısıyla R halkasının Noether olduğu sonucuna varılacaktır. R halkası sonlu üretilmiş olduğundan $P \subsetneq R$'dir. $a, b \in R \backslash P$ ve $ab \in P$ olsun. O zaman, $P \subsetneq P + Ra$'dır ve P'nin maksimalliğinden dolayı $P + Ra$ sonlu üretilmiştir. $p_1, p_2, .., p_n \in P$ ve $r_1, r_2, .., r_n \in R$ olmak üzere $P + Ra$ ideali

$$p_1 + r_1 a, \dots, p_n + r_n a$$

tarafından üretilsin. $K := (P : a)$ olsun. O zaman, $P \subsetneq P + Rb \subseteq K$'dır. P'nin maksimalliğinden, K sonlu üretilmiştir. Böylece, aK ideali de sonlu üretilmiş olur.

<u>İddia:</u> $P = Rp_1 + ... + Rp_n + aK$ olur:

$P \supseteq Rp_1 + ... + Rp_n + aK$ olduğu açıktır. Kapsamanın diğer yönünü göstermek için $r \in P \subsetneq P + Ra$ alınsın. O zaman, $r = c_1(p_1 + r_1 a) + \cdots + c_n(p_n + r_n a)$ olacak biçimde $c_1, \dots, c_n \in R$ vardır. Şimdi $(\sum_{i=1}^{n} c_i r_i)a = r - \sum_{i=1}^{n} c_i p_i \in P$ olur. Dolayısıyla, $\sum_{i=1}^{n} c_i r_i \in (P : a) = K$ ve buradan

$$r = \sum_{i=1}^{n} c_i p_i + (\sum_{i=1}^{n} c_i r_i)a \in \sum_{i=1}^{n} Rp_i + aK$$

elde edilir. Sonuç olarak, P'nin sonlu üretilmiş olduğu çelişkisi elde edilir. O halde, $ab \notin P$ olmalıdır. Bu ise P idealinin asal olduğu anlamına gelir. Böylece sonlu üretilmiş olmayan bir asal ideal bulunmuş olur. Bu durumda varsayım yanlıştır ve R halkası Noether'dir. $\square$

Teorem 3.1.2 [2] (Kaplansky Teoremi) *Bir Noether R halkasının temel ideal halkası olması için gerek ve yeter koşul R'nin her maksimal idealinin temel ideal olmasıdır.*

İspat: ($\Rightarrow$) Açıktır.

($\Leftarrow$) Her $a, b \in R$ için $aR + bR$ idealinin temel ideal olduğunu göstermek yeterlidir. Eğer $aR + bR = R$ ise ispat biter. $aR + bR \neq R$ olsun. O zaman, bir $cR \subsetneq R$ maksimal ideali için $aR + bR \subseteq cR$ olur. Buradan, $a = a_1 c$ ve $b = b_1 c$ olacak şekilde $a_1, b_1 \in R$ vardır. $aR \subsetneq a_1 R$ dir. Eğer $a_1 R + b_1 R = R$ ise, $aR + bR = cR$ olur ve ispat biter. Eğer değilse, benzer adımlar tekrarlanır ve sonlu bir adımda $aR + bR$ ideali temel ideal olur ve istenen elde edilir. $\square$

Önteorem 3.1.3 [2] *R bir halka ve U ideali R'nin temel olmayan idealleri arasında maksimal olsun. Bu durumda, U asaldır.*

İspat: U asal olmasın. Bu durumda, $A'B' \subseteq U$, $A' \nsubseteq U$ ve $B' \nsubseteq U$ olacak şekilde A' ve B' idealleri vardır. $A = U + A'$ ve $B = U + B'$ alınırsa $AB \subseteq U$, $U \subsetneqq A$ ve $U \subsetneqq B$ olur. U idealinin maksimalliğinden dolayı A temel idealdir. $A =< a >$ olsun. $I = \{r \in R \mid ar \in U\}$ kümesi R'nin bir idealidir. $aB \subseteq AB \subseteq U$ olduğundan, $B \subseteq I$ elde edilir. Dolayısıyla, I bir temel idealdir ve $I =< x >$ yazılabilir. $U \subseteq A =< a >$ olduğundan, herhangi bir $u \in U$ elemanı için $u = ar$ olacak şekilde bir $r \in R$ vardır. Buradan, I'nın tanımından dolayı $r \in I$ elde edilir ve bir $s \in R$ için $r = sx$ yazılır. Sonuç olarak, $u = ar = asx \in < ax >$ ve $U \subseteq < ax >$ bulunur. Ayrıca, $x \in I$ olduğundan ve I'nın tanımından $ax \in U$'dur. Bu ise $U =< ax >$ olduğu anlamına gelir ve böylece U bir temel ideal olur. Elde ettiğimiz çelişki sonucunda, varsayım yanlıştır. Böylece, U bir asal idealdir. $\square$

Teorem 3.1.4 [2] (Kaplansky-Cohen Teoremi) *Bir R halkasındaki her asal ideal temel ideal ise, R bir temel ideal halkası olur.*

İspat: R içinde temel olmayan bir A ideali ele alınsın. $\mathcal{S}$, R içindeki tüm temel olmayan ideallerden oluşan küme olarak belirlensin. $A \in \mathcal{S}$ olduğundan $\mathcal{S}$ kümesi boştan farklıdır. $\mathcal{S}$ küme kapsamasına göre kısmî sıralıdır. Zorn Önteoremi'nden, $\mathcal{S}$'nin bir maksimal elemanı vardır. Bu eleman U olsun. Önteorem 3.1.3'ten U asal olmak zorundadır. Böylece, hipotezden, U temel ideal olur ve çelişki elde edilir. Sonuç olarak, R bir temel ideal halkasıdır. □

3.2 S-Noether Halkalar

Bu alt bölümde, Anderson ve Dumitrescu'nun [3] çalışmasında tanımladığı değişmeli S-Noether halkalar çalışılacaktır. Ayrıca, yine aynı çalışmada verilen Cohen ve Kaplansky Teoremleri'nin değişmeli S-Noether halkalar üzerindeki versiyonu incelenecektir.

Tanım 3.2.1 [3, Definition 1] R bir halka, $S \subseteq R$ bir çarpımsal kapalı bir küme ve $I \trianglelefteq R$ olsun. $sI \subseteq J \subseteq I$ olacak biçimde sonlu üretilmiş (sırasıyla, temel) bir $J \trianglelefteq R$ ideali ve bir $s \in S$ varsa, I idealine *S-sonlu (sırasıyla, S-temel)* denir. R'nin her ideali S-sonlu (sırasıyla, S-temel) ise, R'ye *S-Noether halka (sırasıyla, S-TİH)* denir.

Örnek 3.2.2 [24, Example 2.5] p bir asal sayı olmak üzere;

$$T = \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}_{p^n},\ 1_T = (1, 1, 1, \ldots) \text{ ve } R =< \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}_{p^n}, 1_T >\subseteq T$$

olsun. Dolayısıyla,

$$R = \{(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_t}, \overline{x}, \overline{x}, \ldots) \mid \overline{a_i} \in \mathbb{Z}_{p^i}; \overline{x} \in \mathbb{Z}_{p^k}; k > t; k, t \in \mathbb{N}\}$$

yapısındadır. $s = (1, p, p, 0, 0, \ldots)$ ve $S = \{1, s, s^2, s^3\}$ olsun. Bu durumda, S çarpımsal kapalı bir kümedir. A, R'nin bir ideali olsun. O zaman, As kümesi $(a_1 + p\mathbb{Z}, a_2p + p^2\mathbb{Z}, a_3p + p^3\mathbb{Z}, 0, 0, \ldots)$ formunda elemanlardan oluşur. A bir ideal olduğundan, $As \subseteq A$'dır. As sonlu bir küme olduğundan, $As = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ise, $As \subseteq x_1R + \ldots + x_nR \subseteq A$ elde edilir. Dolayısıyla, $As \subseteq F \subseteq A$ olacak biçimde sonlu üretilmiş bir F ideali vardır. O halde, R bir S-Noether halkadır. Ancak, $B = \oplus_{n=1}^{\infty} p\mathbb{Z}_{p^n}$ kümesi R'nin üstelsıfır olmayan bir nil ideali olduğundan R halkası Noether değildir.

Tanım 3.2.3 [3] R bir halka, $S \subseteq R$ bir çarpımsal kapalı küme ve $I \trianglelefteq R$ olsun. R_S, R'nin S'ye göre kesirler halkası olmak üzere, $Sat_S(I) := IR_S \cap R$ kümesine *I'nın S-doymuşluğu* denir. Eğer $Sat_S(I) = I$ ise, I idealine *S-doymuş* denir.

Önerme 3.2.4 [3, Proposition 2] *R bir halka, $S \subseteq R$ bir çarpımsal kapalı küme ve $I \trianglelefteq R$ olsun. I'nın S-doymuşluk $Sat_S(I)$ kümesi S-sonlu (sırasıyla, S-temel) ise, I ideali de S-sonludur (sırasıyla, S-temeldir) ve bir $s \in S$ için $Sat_S(I) = (I : s)$ olur.*

İspat: Eğer $J := Sat_S(I)$ bir S-temel ideal ise $sJ \subseteq fR$ olacak biçimde bir $s \in S$ ve bir $f \in J$ vardır. O zaman, $stI \subseteq stJ \subseteq ftR \subseteq I$ olacak şekilde bir $t \in S$ vardır. Böylece, $J = (I : (st))$ olur.

S-sonlu olma durumunun ispatı benzer şekilde yapılır. □

Tanım 3.2.5 [3] R bir halka, M bir R-modül ve $S \subseteq R$ bir çarpımsal kapalı küme olsun. $sM \subseteq F$ olacak biçimde bir $s \in S$ ve sonlu üretilmiş bir $F \subseteq M$ alt modülü varsa, M'ye *S-sonlu* denir. M'nin her alt modülü S-sonlu ise M'ye *S-Noether alt modül* denir.

Önerme 3.2.6 [3] *R bir halka, M, M' ve M'' R-modüller olsun. Bir*

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

tam dizisi için M'nin S-Noether olması için gerek ve yeter koşul M' ve M'' modüllerinin de S-Noether olmasıdır.

Sonuç 3.2.7 *R bir S-Noether halka ise, sonlu üretilmiş her R-modül de S-Noetherdir.*

Önteorem 3.2.8 [3, Lemma 3] *R bir halka, $S \subseteq R$ bir çarpımsal kapalı küme ve M bir S-sonlu R-modül olsun. N, M'nin S-sonlu olmayan tüm alt modülleri arasında maksimal ise, $(N : M)$ ideali R'nin bir asal idealidir.*

İspat: $P := (N : M)$ ve P asal olmasın. O zaman, $ab \in P$ olacak biçimde $a, b \in R \setminus P$ vardır. Dolayısıyla, $N + aM$ S-sonludur. Buradan,

$$s(N + aM) \subseteq \ < n_1 + am_1, \ldots, n_p + am_p >$$

olacak biçimde bir $s \in S$; $n_1, \ldots, n_p \in N$ ve $m_1, \ldots, m_p \in M$ vardır. Öte yandan $(N : a)$ da S-sonlu olduğundan,

$$t(N:a) \subseteq \ < q_1, \ldots, q_k >$$

olacak biçimde bir $t \in S$ ve $q_1, \ldots, q_k \in (N : a)$ vardır. $x \in N$ olsun. O halde, $sx = \sum_{i=1}^{p} r_i(n_i + am_i)$ olacak biçimde $r_i \in R$ vardır. Dolayısıyla, $y = \sum_{i=1}^{p}(r_i m_i) \in (N : a)$ dir. Böylece, bazı $c_j \in R$ için $ty = \sum_{j=1}^{k} c_j q_j$ elde edilir. O halde, $stx = \sum_{j=1}^{k} r_i tn_i + \sum ac_j q_j$ dir ve buradan, $stN \subseteq< tn_1, \ldots, tn_p, aq_1, \ldots, aq_k >$ olup N'nin bir S-sonlu modül olduğu çelişkisi elde edilir. □

Önerme 3.2.9 [3, Proposition 4] *R bir halka, $S \subseteq R$ bir çarpımsal kapalı küme ve M bir S-sonlu R-modül olsun. M'nin bir S-Noether modül olması için gerek ve yeter koşul R'nin (S ile ayrık olan) her P asal ideali için PM formundaki alt modüllerin S-sonlu olmasıdır.*

İspat: ($\Rightarrow$) Açıktır.

($\Leftarrow$) Hipotez kabul edilsin. M modülü S-sonlu olduğundan, M'nin sonlu üretilmiş bir F alt modülü ve bir $w \in S$ için $wM \subseteq F$'dir. M, S-Noether olmasın. O zaman, M'nin S-sonlu olmayan alt modüllerinin $\mathcal{F}$ kümesi boştan farklı ve üstten sınırlıdır. Zorn Önteoremi'nden, $\mathcal{F}$ kümesinin maksimal bir N elemanı vardır. Önteorem 3.2.8'den, $P := (N : M)$ bir asal idealdir. Burada $S \cap P = \emptyset$'tur. Çünkü, aksi durumda bir $s \in S$ için $sM \subseteq N$ olacağından, $swN \subseteq sF \subseteq N$ çelişkisi elde edilir. O halde,

$$P = (N : M) \subseteq (N : F) \subseteq (N : wM) = (P : w) = P$$

elde edilir. Böylece, $P = (N : F)$ dir.

$\{f_1, \ldots, f_k\}$, F'nin bir üreteç kümesi olsun. O zaman,

$$P = (N : f_1) \cap (N : f_2) \cap \cdots \cap (N : f_k)$$

ve P asal olduğundan, bir $g := f_i$ için $P = (N : g)$'dir. $g \notin N$'dir. N'nin maksimalliğinden, $N + Rg$ S-sonlu bir modüldür. Dolayısıyla, bir $t \in S$, $n_1, \ldots, n_p \in N$ ve $a_1, \ldots, a_p \in R$ için $t(N + Rg) \subseteq< n_1 + a_1g, \ldots, n_p + a_pg >$'dir. Önteorem 3.2.8'nin kanıtına benzer şekilde devam edildiğinde, $N' =< n_1, \ldots, n_p >$ olmak üzere,

$$tN \subseteq N' + Pg \subseteq N' + PM$$

elde edilir. PM modülü S-sonlu olduğundan, bir $v \in S$ ve sonlu üretilmiş bir $G \subseteq PM$ alt modülü için, $vPM \subseteq G$ olur. Böylece, $tvN \subseteq vN' + G \subseteq N$ olup N'nin bir S-sonlu alt modül olduğu çelişkisi elde edilir. □

Aşağıdaki sonuç, Cohen Teoremi'nin S-versiyonunu vermektedir.

Sonuç 3.2.10 [3, Corollary 5] *R bir halka ve $S \subseteq R$ bir çarpımsal kapalı küme olsun. R'nin S-Noether olması için gerek ve yeter koşul R'nin (S ile ayrık olan) her asal idealinin S-sonlu olmasıdır.*

Sonuç 3.2.11 [3, Corollary 6] *$A \subseteq B$ bir halka genişlemesi ve $S \subseteq A$ bir çarpımsal kapalı küme olsun. B bir S-sonlu A-modül ve A'nın (S ile ayrık olan) her asal ideali P için PB modülü B'nin bir S-sonlu ideali ise, A bir S-Noether halkadır.*

İspat: A, B'nin bir A-alt modülü olduğundan, B nin bir S-Noether A-modül olduğunu göstermek yeterlidir. P, R'nin S ile ayrık bir asal ideali olsun. Hipotezden, $s, w \in S$, $b_1, \ldots, b_n \in B$ ve $p_1, \ldots, p_m \in P$ için

$$sB \subseteq < b_1, \ldots, b_n > A \text{ ve } wPB \subseteq < p_1, \ldots, p_m > B$$

olur. O halde, $swPB \subseteq < p_1b_1, \ldots, p_mb_n > A \subseteq PB$ olur ve böylece PB alt modülü S-sonlu bir A-modüldür. Önerme 3.2.9 ile, istenen elde edilir. □

Sonuç 3.2.12 [3, Corollary 7] *$A \subseteq B$ bir halka genişlemesi, $S \subseteq A$ bir çarpımsal kapalı küme ve B bir S-sonlu A-modül olsun. B bir S-Noether halka ise, A da bir S-Noether halkadır.*

Aşağıdaki teorem, Cohen-Kaplansky Teoremi'nin S-versiyonunu vermektedir.

Teorem 3.2.13 [3, Proposition 16] *R bir halka ve $S \subseteq R$ bir çarpımsal kapalı küme olsun. R'nin bir S-temel ideal halkası olması için gerek ve yeter koşul R'nin (S ile ayrık olan) her asal idealinin S-temel olmasıdır.*

İspat: ($\Rightarrow$) Açıktır.

($\Leftarrow$) R, S-temel ideal halkası olmasın. R'nin S-temel olmayan ideallerinin boştan farklı $\mathcal{F}$ kümesi kapsama özelliğine göre kısmen sıralıdır ve üstten sınırlıdır. Dolayısıyla, Zorn Önteoremi ile maksimal bir $P \in \mathcal{F}$ vardır. P ideali S kümesi ile ayrıktır ve

Önerme 3.2.4'ten P ideali S-doymuştur. P bir asal ideal değilse, $ab \in P$ olacak biçimde $a, b \in R \setminus P$ vardır. P'nin maksimalliği ile $P + Ra$ bir S-temel idealdir. Dolayısıyla, bir $s \in S$ ve $c \in P + Ra$ için $s(P + Ra) \subseteq cR$'dir. Buradan, $(P + Ra)R_S = cR_S$'dir ve dolayısıyla, $bc/1 \in PR_S$ olur. $p \in P$ ve $t \in S$ olmak üzere, $bc/1 = p/t$ yazılsın. O halde, bir $w \in S$ için $btwc = pw$'dur ve Önerme 3.2.4'ten $btw \notin P$'dir. Böylece, $P \subsetneq (P : c)$ elde edilir ve $(P : c)$ bir S-temel idealdir. Dolayısıyla, bir $u \in S$ ve $d \in (P : c)$ için $u(P : c) \subseteq dR$ olur. $x \in P$ olsun. O zaman bir $y \in R$ için $sx = cy$ olur. Buradan, $y \in (P : c)$ ve dolayısıyla, bir $z \in R$ için $uy = dz$ elde edilir. Sonuçta, $sux = cuy = cdz$ elde edilir. O halde, $suP \subseteq cdR \subseteq P$'dir. Böylece, P'nin bir S-temel ideal olduğu çelişkisi elde edilir. □

Önerme 3.2.14 [10] M bir vefalı S-Noether R-modül olsun. Bu durumda, R halkası S-Noetherdir.

İspat: M bir S-Noether modül olduğundan, S-sonludur. O zaman, en az bir $s \in S$ ve sonlu üretilmiş bir $F \subseteq M$ alt modülü için, $sM \subseteq F \subseteq M$'dir. $F = \sum_{i=1}^{n} m_i R$ için, $R \xrightarrow{f} F^n$, $r \mapsto (rm_1, \ldots, rm_n)$ epimorfizmasından, F^n modülünün de S-Noether olduğu görülür. Dolayısıyla, $R/Çek(f)$ modülü de S-Noether olur. R bir değişmeli halka olduğundan, $ann(sR) = ann(s)$'dir. $x \in Çek(f)$ olsun. Buradan, $f(x) = 0$'dır. O halde, her $i = 1, \ldots, n$ için $xm_i = 0$'dır. Böylece, $xF = 0$ ve dolayısıyla $sxM = 0$ olur. O halde, $sx \in ann_R(M)$'dir. M vefalı bir R-modül olduğundan, $sx = 0$ ve $x \in ann(s)$ bulunur. Sonuç olarak, $Çek(f) \subseteq ann(s)$ olur. Dolayısıyla,

$$R/Çek(f) \to R/ann(s)\ ,\ r + Çek(f) \mapsto r + ann(s)$$

epimorfizması tanımlanabilir. Buradan, sR modülü S-Noether olur. Bir $T/sR \subseteq R/sR$ alt modülü için, $s(T/sR) = 0 \subseteq T/sR$ olacağından, R/sR modülü de S-Noetherdir. Böylece, R bir S-Noether halka olur. □

4 TEK YÖNLÜ ASAL İDEAL PRENSİBİ

Bu bölüm Reyes'in [4] çalışması temel alınarak oluşturulmuştur. Öncelikle, değişmeli halkalardaki asal ideal kavramının tek yönlü bir genellemesi olarak tamamen asal sağ idealler tanımlanmış ve bu sağ ideallerin özellikleri incelenmiştir. Tamamen asal sağ idealler ile bu sağ ideallerin değişmeli halkalardaki karşılıkları arasındaki benzerlikler ve farklılıklar ortaya konmuştur. Tamamen Asal İdeal Prensibi, belirli bir özelliğe göre maksimal olan sağ ideallerin tamamen asal olduğunu ifade etmektedir. Bu prensibin halka ve modül teori üzerindeki bazı uygulamaları üzerinde de çalışılmıştır. Bu uygulamalar, tamamen asal sağ ideallerin bir halkanın tek yönlü yapısını nasıl kontrol ettiğini göstermektedir. Son olarak, genel bir halkanın tamamen asal sağ idealler kümesinin daha iyi anlaşılmasını sağlamak amacıyla, bu kümenin özel bir alt kümesi olan comonoform sağ idealler kümesi incelenmiştir.

Bu bölüm boyunca bir halkanın sağ ideallerinin bir ailesi $\mathcal{F}$ ile gösterilecektir. $\mathcal{F}^{'}$ ile $\mathcal{F}$ ailesinin tamlayanı ve $Max(\mathcal{F}^{'})$ ile $\mathcal{F}^{'}$ ailesinin maksimal elemanlarının kümesi temsil edilecektir.

4.1 Tamamen Asal Sağ İdealler

R bir halka ve M_R bir modül olsun. $N \leq M$ ve $m \in M$ için,

$$m^{-1}N = \{r \in R \mid mr \in \mathrm{N}\}$$

kümesi R'nin bir sağ idealidir. Bu tezde, genellikle, $I_R \leq R_R$ ve $a \in R$ olmak üzere $a^{-1}I$ sağ ideali ile ilgilenilecektir. Değişmeli cebirde bu ideal, $(I : a)$ ile gösterilen ideale karşılık gelir.

Tanım 4.1.1 [4, Definition 2.1] $P_R \subsetneq R$ bir sağ ideal olsun. $a, b \in R$ için $aP \subseteq P$ ve $ab \in P$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ koşulu sağlanıyorsa, P'ye *tamamen asal sağ ideal (completely prime right ideal)* denir.

Önerme 4.1.2 [4, p. 879] *$P_R \subsetneq R$ sağ idealinin tamamen asal sağ ideal olması için gerek ve yeter koşul $a \in R$ için $aP \subseteq P$ ve $a \notin P$ iken $a^{-1}P = P$ olmasıdır.*

İspat: ($\Rightarrow$) $a \in R$ için $aP \subseteq P$ ve $a \notin P$ olsun. $a^{-1}P = \{r \in R \mid ar \in \mathrm{P}\} = P$ olduğu gösterilmelidir.

$aP \subseteq P$ ile $P \subseteq a^{-1}P$ olur. Öte yandan $r \in a^{-1}P$ iken $ar \in P$'dir. $a \notin P$ olduğundan $r \in P$ bulunur. Böylece istenen eşitlik elde edilir.

($\Leftarrow$) $a, b \in R$ için $aP \subseteq P$ ve $ab \in P$ olsun. $a \in P$ ise ispat biter. $a \notin P$ ise $a^{-1}P = P$ ve $b \in a^{-1}P = P$ olur. Böylece istenen elde edilir. $\square$

Tanım 4.1.3 [15] $P \lhd R$ ideali için R/P tamlık bölgesi ise, P idealine *tamamen asal ideal* denir.

Önerme 4.1.4 [15] *$P \lhd R$ idealinin tamamen asal olması için gerek ve yeter koşul $P \neq R$ ve her $a, b \in R$ için $ab \in P$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ olmasıdır.*

Aşağıdaki önerme, sağ ideal olarak tamamen asal olan idealleri karakterize etmektedir.

Önerme 4.1.5 [4, Proposition 2.2] *Bir R halkasında $P \lhd R$ idealinin sağ ideal olarak tamamen asal olması için gerek ve yeter koşul P'nin tamamen asal ideal olmasıdır.*

Özel olarak; bir P idealinin sağ ideal olarak tamamen asal olması için gerek ve yeter koşul P'nin sol ideal olarak tamamen asal olmasıdır.

İspat: Bir $P \lhd R$ ideali için $a \in R$ ise $aP \subseteq P$ her zaman sağlanır. Dolayısıyla $a, b \in R$ ve $ab \in P$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ olması için gerek ve yeter koşul P'nin tamamen asal ideal olmasıdır. Ayrıca $P \lhd R$ olduğundan $Pa \subseteq P$ kapsaması da vardır. Bu durumda, P sol ideal olarak da tamamen asaldır. $\square$

Sonuç 4.1.6 [4, Corollary 2.3] *R bir değişmeli halka ve $P \lhd R$ olsun. P'nin tamamen asal olması için gerek ve yeter koşul P'nin asal ideal olmasıdır.*

Dolayısıyla tamamen asal sağ idealler, değişmeli olmayan halkalardaki tamamen asal ideal kavramını geneller. Bu sağ idealler aynı zamanda değişmeli bir halkadaki asal ideal kavramının direkt olarak bir genellemesidir.

Şimdi tamamen asal ideal tanımının neden değişmeli halkalardaki tanımın doğrudan bir genellemesi olarak alınmadığı üzerinde durulacaktır.

Tanım 4.1.7 [25] $P_R \subsetneq R$ bir sağ ideal olsun. $a, b \in R$ ve $ab \in P$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ koşulu sağlanıyorsa P sağ idealine *oldukça asal sağ ideal (extremely prime right ideal)* denir.

İleride bir maksimal sağ idealin tamamen asal olduğu gösterilecektir. Böylece, sıfırdan farklı her halka bir tamamen asal ideale sahiptir. Ancak, oldukça asal sağ ideali olmayan sıfırdan farklı pek çok halka örneği vardır. Bu örneklerden bahsetmek için aşağıdaki önermeye ihtiyaç vardır.

Önerme 4.1.8 [4, Proposition 2.4] *R bir basit halka olsun ve aşikar olmayan bir eşkare eleman içersin. O halde R'nin oldukça asal sağ ideali yoktur.*

İspat: $I_R \lneq R$, bir oldukça asal sağ ideali olsun. e, aşikar olmayan eşkare eleman ise, $f = 1 - e$ elemanı da eşkare eleman olur. $RfR \subseteq R$ olduğu açıktır. f elemanı sıfırdan farklı olduğundan RfR ideali de sıfırdan farklıdır. R basit halka kabul edildiğinden, $RfR = R$ olmak zorundadır. $(eRf)^2 = (eRf)(eRf) = 0$ olduğundan $(eRf)^2 \subseteq I$'dır. I oldukça asal olduğu için $eRf \subseteq I$ elde edilir. Buradan $eRfR \subseteq I$ ve böylece $eR \subseteq I$ bulunur. O halde, $e \in I$'dır. Benzer işlemler f elemanı için de yapılırsa $f \in I$ olduğu görülür. Dolayısıyla $e + f = 1$ olup $1 \in I$'dır. Bu ise $I = R$ çelişkisini verir. Sonuç olarak, R halkasının oldukça asal sağ ideali yoktur. $\square$

Örnek 4.1.9 [4, p. 880] D bir bölümlü halka olmak üzere, $R = M_n(D)$ matris halkası basit bir halkadır ve Önerme 4.1.8'den oldukça asal sağ ideale sahip değildir.

Örnek 4.1.10 [4, p. 880] D bir bölümlü halka ve V_D boyutu sonsuz bir α kardinalitesi olan bir D-vektör uzayı olsun. $E := End_D(V)$ halkasının tek maksimal ideali

$$M = \{g \in E \mid boy_k(g(V)) < \alpha\}$$

olur. O zaman, $R = E/M$ basit bir halkadır.

Sonsuz bir $\beta \leq \alpha$ kardinali için, $rank(f) = boy_D f(V)$ olmak üzere,

$$E_\beta = \{f \in E \mid rank(f) < \beta\}$$

ele alınsın. E_β, E'nin bir idealidir. Dahası E'nin idealleri $(0), E$ ve E_β formundadır. Bu iddiayı kanıtlamak için aşağıdaki gözleme ihtiyaç vardır:

$(*)$ $f, h \in E$ için $rank(h) \leq rank(f)$ ise $h \in EfE$'dir.

$V = Çek(h) \oplus V_1 = Çek(f) \oplus V_2$ olacak şekilde $V_1, V_2 \leq V$ alt uzayları vardır. $\{u_i \mid i \in I\}$ kümesi V_1 için, $\{v_j \mid j \in J\}$ kümesi V_2 için birer taban olsun.

$$V/Çek(h) \cong h(V) \cong V_1 \text{ ve } V/Çek(f) \cong f(V) \cong V_2$$

olduğundan $|I| = rank(h)$ ve $|J| = rank(f)$ elde edilir. $rank(h) \leq rank(f)$ olduğundan $I \subseteq J$ kabul edilebilir. $g(\text{Çek}(h)) = 0$ ve her $i \in I$ için $g(u_i) = v_i$ olacak şekilde bir $g \in E$ tanımlansın. Ayrıca, $\{f(v_j) \mid j \in J\}$ lineer bağımsızdır. Gerçekten, $\sum_{i=1}^{n} a_i f(v_i) = 0$ ise $f(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i) = 0$ olur. Buradan $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i \in \text{Çek}(f) \cap V_2$ olur. $\text{Çek}(f) \cap V_2 = 0$ ve $\{v_j \mid j \in J\}$ lineer bağımsız olduğundan $a_1, .., a_n = 0$ elde edilir.

O halde, lineer dönüşümlerin varlığından dolayı, her $i \in I$ için $g^{'}(f(v_i)) = h(u_i)$ olacak biçimde en az bir $g^{'} \in E$ varlığından bahsedilebilir. $x \in \text{Çek}(h)$ ve $y \in V_1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} h(v) &= h(x+y) = h(y) = h(\sum_{i=1}^{n} a_i u_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i h(u_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i g^{'}(f(v_i)) = \sum_{i=1}^{n} g^{'}(a_i f(v_i)) = g^{'}(\sum_{i=1}^{n} a_i f(g(u_i))) \\ &= g^{'}(f(g(\sum_{i=1}^{n} a_i u_i)) = g^{'} f g(v) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla, $h = g^{'} f g$'dir. Böylece, $h \in EfE$ olur.

Şimdi $\{0\}$ ve E idealinde farklı olacak biçimde bir $\mathcal{U}$ ideali alınsın. Her $f \in \mathcal{U}$ için $rank(f) < \alpha$ olduğu gösterilecektir.

Id birim dönüşümü temsil etmek üzere, $rank(f) = \alpha = rank(Id)$ olursa, $(*)$'dan, $Id \in EfE \subseteq \mathcal{U}$ elde edilir. Ancak, $\mathcal{U} \neq E$ olduğundan bu bir çelişki olur. Kardinal sayılar sınıfı iyi sıralı olduğundan, her $f \in \mathcal{U}$ için $rank(f)$'ten büyük olacak biçimde en küçük bir $\beta \leq \alpha$ kardinali mevcuttur. $Boy_D(V)$ sonlu olmadığından β sonlu olmayan bir kardinaldir. Dolayısıyla, $\mathcal{U} \subseteq E_\beta$ elde edilir. Ters kapsama için $h \in E_\beta$ alınsın. O halde, $rank(h) < \beta \leq \alpha = rank(f)$ olur. Buradan, $rank(h) \leq rank(f)$ olur ve $(*)$ ile $h \in EfE \subseteq \mathcal{U}$ elde edilir. Sonuç olarak, $\mathcal{U} = E_\beta$ bulunur.

Böylece E_α, E'nin tek maksimal ideali olur. Dolayısıyla, $R = E/E_\alpha$ bir basit halkadır. Önerme 4.1.8'den R halkasının oldukça asal sağ ideali yoktur.

İki yönlü tamamen asal ideallerden bahsederken, Önerme 4.1.5'ten dolayı sağ ve sol olma özellikleri ihmal edilebilir. Yine aynı önermeden, tamamen asal ideali bulunmayan halkaların varlığından söz edilebilir.

Örnek 4.1.11 [4, p. 881] Tamlık bölgesi olmayan basit halkaların tamamen asal ideali yoktur. Gerçekten, R halkası basit olduğundan $\{0\} \lneq R$ ideali maksimal ideal olur. $R/\{0\}$ tamlık bölgesi olmadığından $\{0\}$ tamamen asal ideal değildir, fakat asal idealdir.

Uyarı 4.1.12 [4, p. 881] Örnek 4.1.11'den, bir asal idealin tamamen asal olmayabileceği sonucu da çıkar. Ayrıca, değişmeli olmayan bir R halkası için $P \triangleleft R$ asal ideali tamamen asal sağ ideal olmayabilir. Yani tamamen asal sağ idealler, değişmeli halkalardaki asal ideal kavramını değişmeli olmayan halkalarda bilinen iki yönlü asal ideallerden daha farklı geneller. Her iki "asal"lık türü de halkanın yapısına farklı bir şekilde etki eder. Ancak, bu tezde anlatılmak istenildiği üzere, tamamen asal sağ idealler bir halkanın "sağ-yönlü" yapısını daha iyi betimler.

$J_R \subseteq R$ sağ ideal olmak üzere, $\mathbb{I}_R(J) = \{x \in R \mid xJ \subseteq J\}$ kümesine *J'nin ideal yapıcısı (idealizer)* denir. Bu küme R'nin alt halkasıdır. Ayrıca, J'nin iki yönlü ideal olduğu en büyük alt halkadır. $End_R(R/J) \cong \mathbb{I}_R(J)/J$ olduğu kolayca görülebilir.

Önerme 4.1.13 [4, Proposition 2.5] *$P \subsetneq R$ sağ ideali için aşağıdaki ifadeler denktir:*

(1) *P tamamen asaldır.*

(2) *Her $a, b \in R$ için $ab \in P$ ve $a \in \mathbb{I}_R(P)$ iken $a \in P$ veya $b \in P$'dir.*

(3) *Sıfırdan farklı her $f \in End_R(R/P)$ fonksiyonu birebirdir.*

(4) *$E := End_R(R/P)$ tamlık bölgesidir ve ${}_E(R/P)$ modülü burulmasızdır.*

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) P tamamen asal sağ ideal olsun. $a, b \in R$ için $ab \in P$ ve $a \in \mathbb{I}_R(P)$ alınsın. Buradan, $aP \subseteq P$ olur. $ab \in P$ ve P tamamen asal sağ ideal olduğundan $a \in P$ veya $b \in P$ bulunur.

(2) $\Rightarrow$ (1) Tanımdan açıktır.

(1) $\Rightarrow$ (3) P tamamen asal sağ ideal olsun. Sıfırdan farklı $f \in End_R(R/P)$ için $f(1+P) = x + P$ olacak şekilde bir $x \in R\backslash\{0\}$ vardır. Bu durumda, $(1+P)P = 0$ iken $f(1+P)P = (x+P)P = 0$ olur. O halde, $xP \subseteq P$ dir. Böylece, P tamamen asal olduğundan $x^{-1}P = P$ bulunur. Sonuçta, $Çek(f) = x^{-1}P/P = 0$ olur.

(3) $\Rightarrow$ (1) Sıfırdan farklı $f \in End_R(R/P)$ homomorfizması birebir olsun. $x, y \in R$ için $xP \subseteq P$ ve $xy \in P$ kabul edilsin. O zaman, $f(r+P) = xr + P$ olacak şekilde bir $f \in End(R/P)$ vardır. $x \notin P$ ise $f \neq 0$ olur ve hipotezden f birebirdir.
$f(y+P) = xy + P = 0 + P = (x+P)(y+P)$ ise $y + P = 0 + P$ olur. Dolayısıyla, $y \in P$'dir. Sonuç olarak, P tamamen asal sağ ideal olur.

(4) $\Rightarrow$ (3) $M = R/P$, $E = End_R(M)$ tamlık bölgesi ve ${}_EM$ burulmasız bir modül olsun. Sıfırdan farklı $f : M \to M$ homomorfizması için $m_1 \neq m_2$ kabul edilsin. ${}_EM$

burulmasız olduğundan $f(m_1 - m_2) = f(m_1) - f(m_2) \neq 0$ dır. Böylece, f birebir bulunur.

(3) $\Rightarrow$ (4) $M = R/P$ ve M'nin içindeki sıfırdan farklı tüm endomorfizmalar birebir olsun. $f, g \in M \backslash \{0\}$ ve $m \in M \backslash \{0\}$ kabul edilsin. $f(g(m)) = 0$ ise $g(m) = 0$ olur. Benzer şekilde g birebir olduğundan $m = 0$ çelişkisi bulunur. Dolayısıyla, $f = 0$ veya $g = 0$ dır. O halde, E tamlık bölgesidir.

$f(m) = 0$ ve $f \neq 0$ ise, $m \in \c{C}ek(f)$ olmalıdır. Dolayısıyla, $m = 0$ elde edilir. Böylece ${}_EM$ burulmasızdır. $\square$

Önerme 4.1.13'e göre, tamamen asal olma özelliği sadece bölüm modülü R/P'ye bağlıdır. Ayrıca, $\mathbb{I}(P)/P \cong End_R(R/P)$ bir tamlık bölgesi olduğundan, R'nin bir tamamen asal sağ ideali olan P, $\mathbb{I}_R(P)$ alt halkasının bir tamamen asal idealidir.

Örnek 4.1.14 [4, Example 2.6] $R = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z}_n \\ 0 & \mathbb{Z} \end{pmatrix}$ halkası ve $n > 1$ tamsayısı için $J_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{Z} \end{pmatrix} \subseteq R$ sağ ideali göz önüne alınsın. $a, b \in \mathbb{Z}$ için, $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin J$ ve $B = \begin{pmatrix} 0 & \overline{b} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin J$ olmasına rağmen $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in J$'dir. O halde, J_R tamamen asal sağ ideal değildir.

$\mathbb{I}_R(J) = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & 0 \\ 0 & \mathbb{Z} \end{pmatrix}$ olduğu iddia edilsin: $a, b \in \mathbb{Z}$ için $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & 0 \\ 0 & \mathbb{Z} \end{pmatrix}$ olsun. $c \in \mathbb{Z}$ için

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & bc \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{Z} \end{pmatrix}$$

olur. O halde, $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in \mathbb{I}_R(J)$'dir.

Tersine, $a, c, x \in \mathbb{Z}$ ve $\overline{b} \in \mathbb{Z}_n$ için

$$\begin{pmatrix} a & \overline{b} \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{Z} \end{pmatrix}$$

olsun.

O halde, $\overline{b} = \overline{0}$'dir ve böylece $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & 0 \\ 0 & \mathbb{Z} \end{pmatrix}$ elde edilir. Sonuç olarak, $R/J = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z}_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ve $\mathbb{I}_R(J)/J = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$'dır. Dolayısıyla, $\mathbb{I}_R(J)/J \cong \mathbb{Z}$ olur.

$End_R(R/J) \cong \mathbb{I}_R(J)/J \cong \mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Z}$ tamlık bölgesi olduğundan $E = End_R(R/J)$ de tamlık bölgesidir. Ancak, $\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Z}_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ modülü $\begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z}_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ R-modülünün burulmalı bir alt modülüdür. ${}_E(R/J)$'nin $\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Z}_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ alt modülüne izomorf sıfırdan farklı bir alt modülü olduğundan ${}_E(R/J)$ burulmasız değildir.

Dolayısıyla ,Önerme 4.1.13 (4)'te verilen "burulmasız" olma koşulu gereksiz değildir.

R değişmeli bir halka ise, bir P asal ideali için R/P ayrıştırılamaz bir modüldür; yani R/P aşikâr olmayan dik toplananlara sahip değildir (bkz. [26]). Önerme 4.1.13'ten, benzer durumun tamamen asal sağ idealler için de geçerli olduğu görülür.

Sonuç 4.1.15 [4, Corollary 2.7] *P, R halkasının tamamen asal sağ ideali olsun. R/P sağ R-modülü ayrıştırılamazdır.*

Değişmeli bir R halkasının P asal ideali için R/P sadece ayrıştırılamaz bir modül değil, aynı zamanda düzgün bir modüldür (bkz. [26]). Başka bir deyişle R/P'nin sıfırdan farklı her alt modülü geniştir. Ancak, Örnek 4.1.16'da görüleceği gibi, R halkasının bir tamamen asal P sağ ideali için R/P sağ R-modül olarak düzgün olmayabilir.

Örnek 4.1.16 [4, Example 2.8] k bir bölümlü halka ve $R = \begin{pmatrix} k & k & k \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} \subseteq M_3(k)$ olsun. $J(R) = \begin{pmatrix} 0 & k & k \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ve dolayısıyla, $R/J(R) \cong \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$ dır. Bu durumda, R halkasının 3 tane basit sağ R-modülü vardır. Bu modüller

$$S_1 = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

olur. $P := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$ sağ ideali ele alınsın. O zaman, $R/P \cong \begin{pmatrix} k & k & k \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ elde edilir.

$$V := \begin{pmatrix} k & k & k \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ sağ R-modülünün tek maksimal alt modülü } M = \begin{pmatrix} 0 & k & k \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olur. Ayrıca, M sıfırdan farklı iki tane alt modüle sahiptir. Bu alt modüller

$$U := \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olur. Bu durumda, V'nin kompozisyon serileri $0 \subsetneqq U \subsetneqq M \subsetneqq V$ ve $0 \subsetneqq W \subsetneqq M \subsetneqq V$ olduğundan kompozisyon faktörleri de

$$V/M \cong S_1 \ , \ M/W \cong U \cong S_2 \ , \ M/U \cong W \cong S_3$$

şeklinde elde edilir. S_1, V nin sıfırdan farklı her faktör modülünün bir kompozisyon faktörüdür, fakat V nin herhangi bir öz alt modülünün bir kompozisyon faktörü olamaz.

Şimdi sıfırdan farklı bir $f : V \to V$ homomorfizması verilsin. O zaman,

$$\text{Çek}(f) = \{0\}, \ \text{Çek}(f) = U, \ \text{Çek}(f) = W \text{ veya } \text{Çek}(f) = M$$

olmalıdır. Ç$ek(f) = U$ olsa, $V/U \cong f(V) \neq 0$ olur, fakat bu mümkün değildir. Ç$ek(f) = W$ olsa, $V/W \cong f(V) \neq 0$ olur, fakat bu da mümkün değildir. Ç$ek(f) = M$ ise $V/M \cong S_1 \cong f(V)$ olur. Buradan $f(V) = U \cong S_2$ veya $f(V) = W \cong S_3$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla, Ç$ek(f) = \{0\}$ olmalıdır. Böylece, f birebir olur.

Dolayısıyla, V modülünün sıfırdan farklı her endomorfizması birebirdir. O halde, Önerme 4.1.13 (3) ile, P bir tamamen asal sağ idealdir. Ancak, $U \oplus W \subseteq V$ olduğundan V düzgün modül değildir. Dolayısıyla, R/P modülü de düzgün olmaz.

Önerme 4.1.17 [4, Proposition 2.9] *Bir $P \subseteq R$ sağ ideali için $E := End_R(R/P)$ bölümlü halka olsun. O halde, P bir tamamen asal sağ idealdir. Bu ifadenin tersi, R/P modülünün cohopfian olması durumunda doğrudur.*

İspat: $P \subseteq R$ sağ ideal ve $E := End_R(R/P)$ bölümlü halka olsun. Her $f \in E$ tersinir olacağından, Önerme 4.1.13 ile, P_R bir tamamen asal sağ idealdir. Tersine, P_R bir tamamen asal sağ ideal ve R/P bir cohopfian modül olsun. Önerme 4.1.13'ten, sıfırdan farklı her $f \in E$ birebirdir. R/P cohopfian olduğundan f bir otomorfizmadır. Böylece E bir bölümlü halkadır. □

Sonuç 4.1.18 [4, Corollary 2.10] *(A) Maksimal bir $m_R \subseteq R$ sağ ideali tamamen asal sağ idealdir.*

(B) R sağ Artin bir halka olmak üzere, bir $P_R \subseteq R$ sağ ideali için aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) *P bir tamamen asal sağ idealdir.*

(2) *$End_R(R/P)$ bölümlü halkadır.*

(3) *P sağ ideali, $\mathbb{I}_R(P)$ içinde bir maksimal sağ (sırasıyla, maksimal sol) ideal olur.*

İspat: (A) $m_R \leq R$ maksimal sağ ideali için R/m sağ R-modülü basit modüldür. Schur Önteoremi ile $End_R(R/m)$ bir bölümlü halkadır. Dolayısıyla, Önerme 4.1.17'den m_R bir tamamen asal sağ ideal olur.

(B) (1) $\Leftrightarrow$ (2) Önerme 4.1.17 ile açıktır.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) $\mathbb{I}_R(P)/P \cong End_R(R/P)$ izomorfizmasından istenen sağlanır. □

Zorn Önteoremi'nden sıfırdan farklı her halka bir maksimal ideale sahiptir. Dolayısıyla, Önerme 4.1.18(A) yardımıyla, sıfırdan farklı her halkanın bir tamamen asal sağ ideal bulundurduğu sonucuna varılır. Ancak, aynı durum tamamen asal iki-yönlü ideller veya oldukça asal sağ idealler için geçerli değildir. Diğer taraftan, Örnek 4.1.16 bir Artin halkada tamamen asal bir sağ idealin maksimal olması gerekmediğini gösterir. Dolayısıyla, Sonuç 4.1.18'in (B) bölümünün güçlendirilmesi mümkün değildir.

Değişmeli bir halkanın her öz ideali asal ise, o halka bir cisimdir. Bu durumun değişmeli olmayan halkalardaki karşılığı aşağıdaki şekilde verilebilir.

Önerme 4.1.19 [4, Proposition 2.11] *R sıfırdan farklı bir halka olsun. R halkasının her öz sağ idealin tamamen asal olması için gerek ve yeter koşul R'nin bir bölümlü halka olmasıdır.*

İspat: ($\Leftarrow$) Açıktır.

(⇒) Sıfırdan farklı bir $a \in R$ elemanının sağ tersinir olduğunu göstermek yeterlidir. Aksine, $aR \neq R$ olsun. $J = a^2R$ sağ ideali için $J \subseteq aR \subsetneq R$'dir. Buradan, hipotez ile J bir tamamen asal sağ idealdir. Öte yandan $J = a^2R$ sağ ideali için $a \in \mathbb{I}_R(J)$ olduğu açıktır. O halde, Önerme 4.1.13 ile $a \in J$ bulunur. Buradan, $t \in R$ olmak üzere $a = a^2t$ yazılır. Aynı zamanda $0 \subsetneq R$ ideali de tamamen asal sağ idealdir ve Önerme 4.1.5 ile tamamen asal ideal olur. Böylece, $R/0 = R$ tamlık bölgesidir. Bu durumda, $a = a^2t$ iken $at = 1$ olmalıdır. Bu ise $aR = R$ çelişkisini verir. Dolayısıyla kabulümüz yanlıştır. R bir bölümlü halkadır. □

Uyarı 4.1.20 [4, p. 884] Değişmeli olmayan halkalardaki asal idealler için Öner-me 4.1.19 geçerli değildir. Örneğin; D bir bölümlü halka ve V_D, boyutu en az $\aleph_0$ olan bir D-vektör uzay olsun. $R = End(V_D)$ halkası basit ve değişmeli olmayan bir halkadır. Diğer taraftan, R'nin öz idealleri asaldır.

Önerme 4.1.21 [4, p. 884] *Sıfırdan farklı bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir:*

(1) *R bir bölümlü halkadır.*

(2) *Sıfırdan farklı devirli her sağ R-modülün endomorfizma halkası tamlık bölgesidir.*

(3) *R bir tamlık bölgesidir ve devirli her sağ R-modülün endomorfizma halkası indirgenebilirdir, yani sıfırdan farklı üstel-sıfır elemanı yoktur.*

İspat: (1) ⇒ (2) R bir bölümlü halka olsun. R'nin sıfırdan farklı devirli tek sağ R-modülü kendisidir. Dolayısıyla istenen elde edilir.

(2) ⇒ (3) $End(R_R) \cong R$ olduğundan, R bir tamlık bölgesidir.

(3) ⇒ (1) Sıfırdan farklı $a \in R$ verilsin. $f : R/a^2R \to R/a^2R$, $1 + a^2R \mapsto a + a^2R$ bir homomorfizmadır. Buradan, $(f \circ f)(1 + aR) = 0$ olur. $End(R/a^2R)$ indirgenebilir olduğundan, $f = 0$ elde edilir. O halde, $a \in a^2R$'dir. R bir tamlık bölgesi olduğundan, Önerme 4.1.19'un ispatından R bir bölümlü halka bulunur. □

Uyarı 4.1.22 [4, Remark 2.12] $\mathcal{P}$ aşağıdaki koşulu sağlayan modül-teorik bir özellik olsun:

V_R bir modül, I R'nin bir ideali ve $I \subseteq ann(V)$ olsun. V'nin R-modül olarak $\mathcal{P}$ özelliğini sağlaması için gerek ve yeter koşul V'nin R/I-modül olarak $\mathcal{P}$ özelliğini sağlamasıdır.

$\mathcal{S}(R)$, R/P'nin $\mathcal{P}$ özelliğini sağlayan tüm P_R sağ ideallerinin kümesi olsun. O halde, $\mathcal{P}$ özelliği üzerindeki kabulümüzden, $P \longleftrightarrow P/I$ ile verilen

$$\{P_R \in \mathcal{S}(R) \mid P \supseteq \mathrm{I}\} \longleftrightarrow \mathcal{S}(R/I)$$

birebir eşleşmesi vardır.

$\mathcal{P}$ özelliği olarak "V modülünün sıfırdan farklı olması ve V'nin sıfırdan farklı her endomorfizmasının birebir olması" alınabilir.

Bu durumda, $\mathcal{S}(R) = \{P_R \in R \mid R/P$ modülü $\mathcal{P}$ özelliğini sağlar$\}$ kümesi Önerme 4.1.13'ten tamamen asal sağ idealler kümesine karşılık gelir. Bu durumda, her $I \lhd R$ ideali için R/I'nın tamamen asal sağ idealleri kümesi, R halkasının I idealini içeren tamamen asal sağ idealleri kümesi ile birebir eşleşir.

Önerme 4.1.23 [4, p. 885] *R ve S halkaları için, $f : R \to S$ örten bir halka homomorfizması olsun. Bu homomorfizma altında S halkasının herhangi bir tamamen asal sağ idealinin ters görüntüsü, R halkasının tamamen asal bir sağ ideali olur.*

İspat: $f : R \to S$ bir örten halka homomorfizması ve $P_S \subseteq S$ bir tamamen asal sağ ideal olsun. Uyarı 4.1.22 yardımıyla, $\{X_R \in \mathcal{S}(R) \mid \text{Ç}ek(f) \subseteq \mathrm{X}\} \longleftrightarrow \mathcal{S}(R/\text{Ç}ek(f))$ arasında birebir eşleme kurulabilir. Buradan $f^{-1}(P_s) \subseteq R$ bir tamamen asal sağ ideal olur. $\square$

Sıradaki örnek, Önerme 4.1.23'ün herhangi bir homomorfizma için geçerli olması gerekmediğini gösterir.

Örnek 4.1.24 [4, Example 2.13] k bir bölümlü halka, $S = M_3(k)$ ve

$$R = \begin{pmatrix} k & k & k \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} \subseteq S$$

olsun.

ve

$$Q_S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ d & e & f \end{pmatrix} \mid a, b, c, d, e, f \in k \right\} \leq M_3(k)$$

ve

$$P_R = \begin{pmatrix} k & k & k \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leq R$$

sağ idealleri verilsin.

Burada, $Q_S \cong \begin{pmatrix} k & k & k \end{pmatrix}_S^2$ modülünün kompozisyon uzunluğu 2 olduğundan, Q_S sağ ideali S'nin bir maksimal sağ ideali olur. Dolayısıyla, Sonuç 4.1.18'den, Q_S tamamen asaldır.

$f : R \to S$ içerim homomorfizması göz önüne alınsın. O halde, $P = Q \cap R = f^{-1}(Q)$ olur. Ancak, $(R/P)_R \cong \begin{pmatrix} 0 & k & k \end{pmatrix}_R \cong \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \end{pmatrix}_R \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 & k \end{pmatrix}_R$ olduğu için, $(R/P)_R$ ayrıştırılabilirdir. Bu durumda, Sonuç 4.1.15'ten, P_R bir tamamen asal sağ ideal değildir.

Sonuç olarak, tamamen asal olan bir sağ idealin herhangi bir homomorfizma altındaki ön görüntüsü tamamen asal olmayabilir.

Önerme 4.1.25 [4, Proposition 2.14] *R ve S halkaları için $f : R \to S$ halka homomorfizması, $Q_S \subsetneq S$ tamamen asal sağ ideal ve $P_R = f^{-1}(Q)$ olsun. $f(\mathbb{I}_R(P)) \subseteq \mathbb{I}_S(Q)$ ise P_R, R halkasının bir tamamen asal sağ idealidir.*

İspat: $Q \neq S$ olduğundan $f^{-1}(Q) = P$ için $P \neq R$ olur. $a \in \mathbb{I}_R(P)$ ve $ab \in P$ olsun. $f(ab) = f(a)f(b) \in f(P)$ ve $f(a) \in f(\mathbb{I}_R(P))$'dir. O zaman, $f(a)f(b) \in Q$ ve $f(a) \in \mathbb{I}_S(Q)$ olur. Q_S bir tamamen asal sağ ideal olduğundan, $f(a) \in Q$ veya $f(b) \in Q$ bulunur. Buradan $a \in f^{-1}(Q)$ veya $b \in f^{-1}(Q)$ olduğu için P_R tamamen asal sağ idealdir. $\square$

Uyarı 4.1.26 [4, p. 886] Önerme 4.1.25'teki Q_S, S halkasının iki yönlü bir ideali ise, $\mathbb{I}_S(Q) = S$ olur ve dolayısıyla $f(\mathbb{I}_R(P)) = \mathbb{I}_S(Q)$ sağlanır. Diğer taraftan, $Q \subseteq$Gör(f) (örneğin, f örten ise) ve $f(P) = Q$ olduğundan $f(\mathbb{I}_R(P)) \subseteq \mathbb{I}_S(Q)$ elde edilir.

4.2 Tamamen Asal İdeal Prensibi

Değişmeli cebirdeki pek çok önemli teoremin ortaya koyduğu gibi, belirli bir özelliğe göre maksimal olan bir ideal asal olmak zorundadır. Bu bilgi doğrultusunda, ideallerin bir $\mathcal{F}$ ailesi düşünülerek $\mathcal{F}$'nin tümleyeni $\mathcal{F}^{'}$ ailesinde maksimal olan bir idealin ne zaman asal olacağı sorgulanabilir. Bu tarz $\mathcal{F}$ ailelerinin en bilinen örnekleri

• $S \subseteq R$ çarpımsal kapalı kümesi ile kesişen ideallerin ailesi,

• sonlu üretilmiş ideallerin ailesi,

• temel ideallerin ailesi,

• bir M_R modülünün sıfırdan farklı hiçbir elemanının sıfırlayıcısı olmayan ideallerin ailesi olarak verilebilir.

R bir değişmeli halka olsun. R'nin ideallerinden oluşan ve R'yi içeren bir $\mathcal{F}$ ailesi verilsin. Her $I \lhd R$ ideali ve $a \in R$ elemanı için $I + (a) \in \mathcal{F}$ ve $(I : a) \in \mathcal{F}$ iken $I \in \mathcal{F}$ koşulu sağlanıyorsa, $\mathcal{F}$ ailesine *Oka ailesi* denir. (bkz. [27])

Değişmeli halkalardaki asal ideal prensibiyle, eğer $\mathcal{F}$ bir Oka ailesi ise $\mathcal{F}^{'}$ ailesinin maksimal elemanları, R değişmeli halkasının asal idealleridir (bkz. [27, Prime Ideal Principle 2.4]). Dolayısıyla, değişmeli cebirde "bir özelliğe göre maksimal olan idealin asal olmasını gerektiren" pek çok sonuç asal ideal prensibi kullanılarak doğrudan elde edilir.

Bu alt bölümde, yukarıda sözü edilen kavramların değişmeli olmayan halkalardaki karşılıkları verilecektir.

Tanım 4.2.1 [4, Definition 3.1] R bir halka olsun ve sağ ideallerden oluşan bir $\mathcal{F}$ ailesi aşağıdaki özellikleri sağlasın:

• $R \in \mathcal{F}$,

• $I_R \subseteq R$ sağ ideali ve $a \in R$ elemanı için $I + aR \in \mathcal{F}$ ve $a^{-1}I \in \mathcal{F}$ iken $I \in \mathcal{F}$'dir.

Bu durumda, $\mathcal{F}$ ailesine *bir sağ Oka ailesi* denir.

Bu tanım, değişmeli halkalardaki Oka ailesi tanımı ile çakışır.

Önerme 4.2.2 [4, Remark 3.3] Bir R halkasında sağ ideallerin Oka ailelerinin koleksiyonu keyfi arakesit altında kapalıdır.

Önerme 4.2.2'den bir R halkasının sağ Oka ailelerinin kümesi kapsama bağıntısı altında bir tam latis (complete lattice) olur.

Teorem 4.2.3 [4, Teorem 3.4] *(Tamamen Asal İdeal Prensibi) $\mathcal{F}$, bir R halkasının sağ ideallerinin bir Oka ailesi olsun. O halde, her $I \in Max(\mathcal{F}^{'})$ tamamen asal sağ idealdir.*

İspat: $I \in Max(\mathcal{F}')$ olsun. $R \in \mathcal{F}$ olduğundan $I \neq R$'dir. I_R sağ idealinin tamamen asal sağ ideal olmadığı kabul edilsin. O zaman $aI \subseteq I$ ve $ab \in I$ olacak biçimde $a, b \in R \backslash I$ elemanları vardır. $a \notin I$ olduğundan $I \subsetneq I + aR$ olur. Ayrıca, $I \subseteq a^{-1}I$ ve $b \in a^{-1}I$ olduğundan $I \subsetneq a^{-1}I$ bulunur. $I \in Max(\mathcal{F}')$ olduğundan $I + aR \in \mathcal{F}$ ve $a^{-1}I \in \mathcal{F}$ elde edilir. $\mathcal{F}$ bir sağ Oka ailesi olduğu için $I \in \mathcal{F}$ dir. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla, I_R bir tamamen asal sağ idealdir. □

Değişmeli halkalarda, Oka aileleri için verilen "Asal İdeal Prensibinin Tümleyeni (Prime Ideal Principle Supplement)" Cohen Teoremi gibi bazı sonuçları elde etmek için kullanılmıştır (bkz [27]). Tamamen Asal İdeal Prensibi ile bu olguyu değişmeli olmayan halkalara genellemek mümkündür. Bu sonuç, belirli bir $\mathcal{F}$ sağ Oka ailesinin, R'nin tüm sağ ideallerini içerip içermediğini test etmek için, sadece tamamen asal sağ idealleri kontrol etmenin yeterli olduğunu söyler.

Tanım 4.2.4 [23] Bir R halkasında sağ ideallerin bir $\mathcal{F}$ ailesi verilsin. R halkasının her I_R, J_R sağ ideali için $I \in \mathcal{F}$ ve $J \supseteq I$ iken $J \in \mathcal{F}$ oluyorsa $\mathcal{F}$ ailesine *yarıfiltre (semifilter)* denir.

Teorem 4.2.5 [4, Theorem 3.6] *(Tamamen Asal İdeal Prensibinin Tümleyeni) $\mathcal{F}$, bir R halkasının bir sağ Oka ailesi ve $\mathcal{F}'$ içindeki sağ ideallerin kapsama bağıntısına göre boştan farklı her zincirinin $\mathcal{F}'$ içinde bir üst sınırı olsun. $\mathcal{S}$, R halkasının tamamen asal sağ ideallerinin bir kümesi ise aşağıdaki ifadeler sağlanır:*

(1) *$\mathcal{F}_0$ sağ ideallerin bir yarıfiltresi ve $\mathcal{S} \cap \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ ise $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ olur.*

(2) *Bir $J_R \subseteq R$ sağ idealini (öz olarak) içeren $\mathcal{S}$ içindeki tüm sağ idealler $\mathcal{F}$'ye aitse, J sağ idealini (öz olarak) içeren tüm sağ idealler de $\mathcal{F}$'ye aittir.*

(3) *$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}$ ise R halkasının tüm sağ idealleri $\mathcal{F}$ ailesine aittir.*

İspat: (1) $\mathcal{F}_0$ sağ ideallerin bir yarıfiltresi olsun. $\mathcal{S} \cap \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ ve $\mathcal{F}_0 \nsubseteq \mathcal{F}$ kabul edilsin. Buradan, en az bir $I_R \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_0$ vardır. Dolayısıyla, $I_R \in \mathcal{F}' \cap \mathcal{F}_0$ olur. $\mathcal{F}'$ ile ilgili hipotez ile, Zorn Önteoremi yardımıyla $P \in Max(\mathcal{F}')$ ve $P \supseteq I$ olacak biçimde bir sağ ideal vardır. Teorem 4.2.3 ile $P \in \mathcal{S}$ olmalıdır. $\mathcal{F}_0$, I_R idealini içeren bir yarıfiltre olduğundan $P \in \mathcal{F}_0$'dır. Dolayısıyla, $P \in \mathcal{S} \cap \mathcal{F}_0$ ve $P \notin \mathcal{F}$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. O halde, $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ olur.

(2)'nin ispatı için (1)'de $\mathcal{F}_0$, J'yi (öz olarak) kapsayan sağ ideallerin ailesi; (3)'ün ispatı için de (1)'de $\mathcal{F}_0$, R'nin tüm sağ ideallerinin ailesi olarak alınır. □

Aşağıdaki sonuç, bir sağ Oka ailesi elde etmenin bir yolunu vermektedir. Burada, $\mu(M)$, M_R modülünün en küçük kardinaliteye sahip üreteç kümesinin kardinalitesini göstermektedir.

Önerme 4.2.6 [4, Proposition 3.7] *α sonsuz bir kardinal olsun. $\mathcal{F}_{<\alpha}$ ile $\mu(I) < \alpha$ olacak biçimde tüm $I_R \subseteq R$ sağ ideallerin kümesi gösterilsin. O zaman $\mathcal{F}_{<\alpha}$ bir sağ Oka ailesidir ve $\mu(I) \geq \alpha$ özelliğine göre maksimal olan I_R tamamen asal bir sağ idealdir.*

Özel olarak; sonlu üretilmiş sağ ideallerin kümesi bir sağ Oka ailesidir. Dolayısıyla, sonlu üretilmiş olmama özelliğine göre maksimal olan bir sağ ideal tamamen asaldır.

İspat: $I_R \subseteq R$ sağ ideali ve $a \in R$ elemanı için $I + aR, a^{-1}I \in \mathcal{F}_{<\alpha}$ olsun. O zaman $\mu(I + aR) < \alpha$ ve $\mu(a^{-1}I) < \alpha$ olur. $\mu(I_0) < \alpha$ ve $I + aR = I_0 + aR$ olacak şekilde bir $I_0 \subseteq I$ sağ ideali vardır. Dolayısıyla, $I_0 + a(a^{-1}I) = I$ elde edilir.

$x \mapsto ax$ ile tanımlı $f : a^{-1}I \to a(a^{-1}I)$ fonksiyonu örten olduğundan, bir

$$g : a(a^{-1}I) \to a^{-1}I$$

birebir fonksiyonu vardır. Buradan, $\mu(a(a^{-1}I)) \leq \mu(a^{-1}I) < \alpha$ elde edilir. O zaman, $\mu(I) \leq \mu(I_0) + \mu(a(a^{-1}I)) < \alpha + \alpha = \alpha$ olur. Böylece, $I \in \mathcal{F}_{<\alpha}$ bulunur. Öte yandan, $R \in \mathcal{F}_{<\alpha}$ olduğu açıktır. O halde, $\mathcal{F}_{<\alpha}$ bir sağ Oka ailesidir.

Eğer I_R sağ ideali $\mu(I) \geq \alpha$ özelliğine göre maksimal ise $I \in Max(\mathcal{F}')$ olur. Teorem 4.2.3'ten, I_R bir tamamen asal sağ idealdir.

$\alpha = \aleph_0$ alınırsa, $\mathcal{F}_{<\alpha}$ ailesi sonlu üretilmiş sağ ideallerden oluşur. Böylece sonlu üretilmiş olmama özelliğine göre maksimal olan bir sağ ideal, Teorem 4.2.3'ten tamamen asal olur. $\square$

Tamamen Asal İdeal Prensibinin Tümleyeni yardımıyla, Cohen Teoremi'nin tamamen asal sağ idealler için değişmeli olmayan halkalardaki genellemesi aşağıdaki şekilde verilir.

Teorem 4.2.7 [4, Theorem 3.8] *(Değişmeli Olmayan Halkalarda Cohen Teoremi) Bir R halkasının sağ Noether olması için gerek ve yeter koşul halkadaki tüm tamamen asal sağ ideallerin sonlu üretilmiş olmasıdır.*

İspat: ($\Rightarrow$) R halkası sağ Noether ise, Önerme 2.3.3'ten bütün sağ idealler sonlu üretilmiş olur. Dolayısıyla, tamamen asal sağ idealler de sonlu üretilmiş olur.

($\Leftarrow$) $\mathcal{F}$ ailesi olarak Önerme 4.2.6 kanıtında $\mathcal{F}_{<\aleph_0}$ alınırsa, $\mathcal{F}$ ailesi sonlu üretilmiş sağ ideallerden oluşur. Teorem 4.2.5(3)'ten, R halkasının tüm sağ idealleri sonlu üretilmiş olur. O halde, Önerme 2.3.3'ten, R sağ Noether bir halka olur. □

Uyarı 4.2.8 [4, p. 889] Teorem 4.2.7'de tamamen asal sağ idealler yerine oldukça asal sağ idealler alınırsa, teorem istenen sonucu vermez. Gerçekten, Önerme 4.1.8 kullanılarak, oldukça asal bir sağ ideal içermeyen ve sağ Noether olmayan halkaların varlığı görülür. Bu durumda, genel bir R halkasının sağ yönlü yapısını yönetmede, tamamen asal sağ idealler oldukça asal sağ ideallere oranla daha etkilidir.

Herhangi bir β kardinali için, $\mathcal{F}_{\leq\beta} = \{ I_R \leq R \mid \mu(I) \leq \beta \}$ kümesini tanımlayabiliriz. β^+, β'nın ardılı olmak üzere; $\mathcal{F}_{\leq\beta} = \mathcal{F}_{<\beta^+}$ dır. Dolayısıyla, Önerme 4.2.6'daki genellemeler geçerli olmaya devam eder. Özel olarak, $\beta = \aleph_0$ alınırsa, tüm sayılabilir üretilmiş sağ ideallerin ailesi, bir sağ Oka ailesi olur.

Şimdi Tamamen Asal İdeal Prensibi Teorem 4.2.3'ün bir tür "tersi" verilecektir.

Önerme 4.2.9 [4, Proposition 3.10] *R bir halka ve $\mathcal{F}$ sağ ideallerin bir ailesi olsun. $Max(\mathcal{F}')$ içerisindeki tüm sağ ideallerin tamamen asal olması için gerek ve yeter koşul $J_R \in \mathcal{F}$ ve $I_R \subsetneq J_R$ olan her I_R sağ ideali ve her $a \in \mathbb{I}_R(I)$ elemanı için Oka özelliğinin sağlanmasıdır.*

İspat: ($\Leftarrow$) Tamamen Asal İdeal Prensibi ile açıktır (bkz. Teorem 4.2.3).

($\Rightarrow$) $Max(\mathcal{F}')$ tamamen asal sağ ideallerden oluşsun. $I_R \leq R$ ve $a \in \mathbb{I}_R(I)$ belirtilen özellikleri sağlasın. $I_R \notin \mathcal{F}$ ise $I \in Max(\mathcal{F}')$ olur. Dolayısıyla, I_R tamamen asal sağ idealdir. Öte yandan, $I \notin \mathcal{F}$ ve $I + aR \in \mathcal{F}$ olduğundan, $a \notin \mathcal{F}$ sonucuna varılır. O zaman, $aI \subseteq I$ ve $a \notin I$ olduğundan, Önerme 4.1.2 ile $I = a^{-1}I \in \mathcal{F}$ çelişkisi elde edilir. O halde, $I \in \mathcal{F}$ olmalıdır. □

Uyarı 4.2.10 [4, p. 890] Değişmeli bir R halkası için Önerme 4.2.9, hangi $\mathcal{F}$ ailelerinin $Max(\mathcal{F}') \subseteq Spec(R)$ koşulunu sağladığını tam olarak belirtir.

4.3 Oka Aileleri

Tamamen Asal İdeal Prensibi'ni uygulayabilmek için sağ Oka aileleri inşa etmenin etkili bir yoluna ihtiyaç vardır. Değişmeli halkalarda, bir R halkasının Oka aileleri ile devirli R-modüllerin belirli sınıfları arasında birebir bir eşleme vardır. Aşağıda, bu önemli sonucun bir genellemesi verilecektir. Bu alt bölüm boyunca, $\mathfrak{M}_R$ ile tüm sağ R-modüllerin sınıfı, $\mathfrak{M}_R^c$ ile devirli sağ R-modüllerin alt sınıfı temsil edilecektir.

Tanım 4.3.1 [4, Definition 4.1] R bir halka ve $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{M}_R^c$ sıfırı içeren bir alt sınıf olsun. Devirli sağ R-modüllerin her

$$0 \to L \to M \to N \to 0$$

tam dizisi için $L, N \in \mathfrak{C}$ iken $M \in \mathfrak{C}$ koşulu sağlanıyorsa, $\mathfrak{C}$ *alt sınıfı genişleme altında kapalıdır* denir.

Önerme 4.3.2 [27] *R bir değişmeli halka olsun. $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{M}_R^c$ alt sınıfı genişleme altında kapalı iken $\mathcal{F}_{\mathfrak{C}} = \{\ I \lhd R \mid R/I \in \mathfrak{C}\ \}$ bir Oka ailesidir. Ayrıca $\mathcal{F}$, R halkasındaki ideallerin bir Oka ailesi ise $\mathfrak{C}_{\mathcal{F}}$=$\{\ M \in \mathfrak{M}_R \mid M \cong R/I$ olacak şekilde bir $I \in \mathcal{F}$ vardır$\} \subseteq \mathfrak{M}_R^c$ alt sınıfı genişleme altında kapalıdır. Dolayısıyla,*

$$\{R \text{ halkasındaki Oka aileleri}\} \longleftrightarrow \{\text{Devirli } R\text{-modüllerin genişleme altında kapalı sınıfları}\}$$

birebir eşlemesi vardır.

Değişmeli bir R halkası için yukarıda verilen eşlemede $\mathcal{F}$, $\mathfrak{C}$ ile belirlenmiştir. $I \lhd R$ ideali R/I devirli modülünün izomorfizma sınıfıyla belirlenebilir, çünkü I bu devirli modülün sıfırlayıcısıdır. Gerçekten, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathfrak{C}}$'dir, çünkü $I \in \mathcal{F}$ ise $R/I \in \mathfrak{C}$ olur ve böylece $I \in \mathcal{F}_{\mathfrak{C}}$ elde edilir. Tersine $I \in \mathcal{F}_{\mathfrak{C}}$ ise $R/I \cong R/J$ olacak biçimde $J \in \mathcal{F}$ vardır. R değişmeli olduğundan $ann_R(R/I) = I$'dır. $f : R/I \to R/J$ izomorfizması için $x \in J$ iken $f(1 + I)x = 0$ olur. Buradan, $f(x + I) = 0$ ve f birebir olduğundan $x \in I$ elde edilir. Benzer şekilde ters kapsama da görülür ve böylece $I = J$ bulunur.

Ancak aşağıdaki örnekte görüleceği gibi, değişmeli olmayan bir halkada, $R/I \cong R/J$ iken $I \neq J$ olacak biçimde I_R, J_R sağ idealleri bulunabilir.

Örnek 4.3.3 [4, Example 4.2] R basit Artin bir halka olsun. Dolayısıyla, R basit sağ modüllerin tek izomorfizma sınıfına sahiptir. Böylece, $M_R \subseteq R$ maksimal sağ idealleri izomorf R/M faktör modüllerine sahiptir. Ancak bir k bölümlü halkası için $R \cong M_n(k)$ ve $n > 1$ ise; yani R bölümlü halka değilse, o zaman birden fazla maksimal sağ ideal vardır.

$i = 1, 2, \ldots, n$ için M_i'ler i. satırı sıfır olan sağ idealler olsun. Aslında, sonlu olmayan bir k bölümlü halkası üzerinde, $M_2(k)$ halkasının bile sonsuz çoklukta maksimal sağ ideali vardır, çünkü her $\lambda \in k$ için,

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \lambda a & \lambda b \end{pmatrix} \mid a, b \in k \right\}$$

maksimal ideal olur. Bu maksimal idealler her λ değeri için birbirinden farklıdır. Benzer durum $n > 2$ olacak biçimde $M_n(k)$ için de geçerlidir.

Örnek 4.3.3'ten dolayı, sağ ideallerin her Oka ailesinin, devirli modüllerin bir sınıfı ile birebir eşleme kurması beklenmez. Bu durum, aşağıdaki tanımların verilmesini teşvik eder.

Tanım 4.3.4 [4, Definition 4.3] $I_R, J_R \subseteq R$ sağ idealleri için sağ R-modül olarak $R/I \cong R/J$ ise, I_R ve J_R *benzerdir* denir.

Tanım 4.3.5 [4, Definition 4.3] R halkasında sağ ideallerin bir ailesi $\mathcal{F}$ olsun. Benzer $I_R, J_R \leq R$ sağ idealleri için $I \in \mathcal{F}$ iken $J \in \mathcal{F}$ koşulu sağlanıyorsa, $\mathcal{F}$ *ailesi benzerlik altında kapalıdır* denir. Denk olarak, $R/I \cong R/J$ iken $I \in \mathcal{F}$ olması için gerek ve yeter koşul $J \in \mathcal{F}$ olmasıdır.

Önerme 4.3.6 [4, Proposition 4.4] *Herhangi bir R halkası için,*

$$\{\textit{Sağ ideallerin benzerlik altında kapalı } \mathcal{F} \textit{ aileleri}\} \longleftrightarrow \{\textit{Devirli sağ } R\textit{-modüllerin izomorfizma altında kapalı olan } \mathfrak{C} \textit{ sınıfları}\}$$

birebir eşlemesi vardır.

Yukarıdaki gibi bir $\mathcal{F}$ ailesi ve $\mathfrak{C}$ sınıfı için, sözü edilen eşleme

$$\mathcal{F} \longleftrightarrow \mathfrak{C}_{\mathcal{F}} = \{ \ M_R \mid I \in \mathcal{F} \text{ için } M \cong R/I \ \}$$

$$\mathfrak{C} \longleftrightarrow \mathcal{F}_{\mathfrak{C}} = \{ \ I_R \leq R \mid R/I \in \mathfrak{C} \ \}$$

ile verilir.

Önerme 4.3.6'yı ispatlamak için aşağıdaki sonuçlara ihtiyaç vardır.

Önteorem 4.3.7 [4, Lemma 4.5] *R bir halka olsun.*

(A) Her $I \subseteq R$ sağ ideali ve $a \in R$ için

$$R/a^{-1}I \to (I + aR)/I \subseteq R/I$$

$$r + a^{-1}I \mapsto ar + I$$

ile verilen bir izomorfizma vardır.

(B) I_R, J_R sağ idealleri verilsin. $R/I \cong R/J$ olması için gerek ve yeter koşul $I + aR = R$ ve $a^{-1}I = J$ koşulunu sağlayan en az bir $a \in R$ bulunmasıdır.

İspat: (A)

$$\alpha : R/a^{-1} \to I + aR/I; \, r + a^{-1}I \mapsto ar + I$$

dönüşümünü tanılayalım.

α'nın iyi tanımlı ve bir homomorfizma olduğu açıktır.

• α birebirdir: $ar_1 + I = ar_2 + I$ ise, $ar_1 - ar_2 = a(r_1 - r_2) \in I$ olur. Böylece $r_1 - r_2 \in a^{-1}I$'dır ve dolayısıyla $r_1 + a^{-1}I = r_2 + a^{-1}I$ olur.

• α örtendir: $x + I \in (I + aR)/I$ olsun. $x \in I + aR$ olduğundan, $t \in I$ ve $r \in R$ için $x = t + ar$ şeklinde yazılır. $\overline{x} = x + I = (t + ar)I = (t + I) + (ar + I) = ar + I = \overline{ar}$ olacağından α örtendir. □

Önerme 4.3.8 [4, Proposition 4.6] *$\mathcal{F}$, bir R halkasının sağ ideallerinin bir ailesi olsun. $\mathcal{F}$ ailesinin benzerlik altında kapalı olması için gerek ve yeter koşul $I_R \subseteq R$ sağ ideali ve $a \in R$ elemanı için $I + aR = R$ ve $a^{-1}I \in \mathcal{F}$ iken $I \in \mathcal{F}$ olmasıdır.*

Özel olarak, her $\mathcal{F}$ sağ Oka ailesi benzerlik altında kapalıdır.

İspat: Önteorem 4.3.7'den ilk istenen açıktır. Oka ailesinin tanımından da ikinci istenen elde edilir. □

Böylece, Önerme 4.3.6 içerisinde söylendiği gibi her sağ Oka ailesinin, devirli sağ modüllerin bazı sınıflarına eşlendiği görülür. Eşlenen bu sınıfların özelliğini vermeden önce bir hatırlatma yapılmalıdır. $0 \in \mathfrak{C}$ koşulunu ve $L_R \cong M_R$ için

$$0 \to L \to M \to 0 \to 0$$

tam dizisini göz önüne alırsak, devirli modüllerin genişleme altında kapalı olan sınıfının izomorfizmalar altında kapalı olduğu da görülür.

Şimdi bu alt bölümün temel sonucu kanıtlanabilir.

Teorem 4.3.9 [4, Theorem 4.7] *Devirli sağ R-modüllerin genişleme altında kapalı olan bir $\mathfrak{C}$ sınıfı için,*

$$\mathcal{F}_{\mathfrak{C}} = \{\ I_R \leq R \mid R/I \in \mathfrak{C}\ \}$$

bir sağ Oka ailesi olur.

Ayrıca, $\mathcal{F}$ sağ Oka ailesi için, devirli sağ R-modüllerin sınıfı

$$\mathfrak{C}_{\mathcal{F}} = \{\ M_R \mid M \cong R/I \text{ olacak şekilde bir } I \in \mathcal{F} \text{ vardır}\}$$

genişleme altında kapalı olur.

İspat: $\mathfrak{C}$ sınıfı genişleme altında kapalı olsun. $0 \in \mathfrak{C}$ olduğundan, $I_R = R$ alındığında $R \in \mathcal{F}_{\mathfrak{C}}$ olur. $I + aR \in \mathcal{F}_{\mathfrak{C}}$ ve $a^{-1}I \in \mathcal{F}_{\mathfrak{C}}$ olacak biçimde $I_R \in R$ ve $a \in R$ verilsin. O zaman, $R/(I + aR) \in \mathfrak{C}$ ve $R/a^{-1}I \in \mathfrak{C}$ olur. Şimdi

$$\varphi : R/I \to R/I + aR;\ x + I \mapsto x + (I + aR)$$

homomorfizmasının çekirdeği Ç$ek(\varphi) = (I + aR)/I$'dır. Buradan,

$$0 \to (I + aR)/I \to R/I \to R/(I + aR) \to 0$$

tam dizisi elde edilir. Önteorem 4.3.7'den, $R/a^{-1}I \cong (I + aR)/I$ olduğundan ve $\mathfrak{C}$ izomorfizma altında kapalı olduğundan $R/I \in \mathfrak{C}$ elde edilir. O halde, $I \in \mathcal{F}_{\mathfrak{C}}$ bulunur. Böylece, $\mathcal{F}_{\mathfrak{C}}$ bir sağ Oka ailesidir. Şimdi $\mathcal{F}$ bir sağ Oka ailesi olarak alınsın.

$$\mathfrak{C}_{\mathcal{F}} = \{\ M_R \mid M \cong R/I \text{ olacak şekilde bir } I \in \mathcal{F} \text{ vardır}\}$$

sınıfının genişleme altında kapalı olduğu gösterilecektir.

$R \in \mathcal{F}$ olduğundan $0 \in \mathfrak{C}_{\mathcal{F}}$ olur. L, M, N devirli sağ R-modül ve $L, N \in \mathfrak{C}_{\mathcal{F}}$ olmak üzere

$$0 \to L \to M \to N \to 0$$

tam dizisi verilsin. $L \in \mathfrak{C}_{\mathcal{F}}$ olduğundan $L \cong R/A$ olacak biçimde $A_R \in \mathcal{F}$ sağ ideali vardır. Benzer olarak $N \in \mathfrak{C}_{\mathcal{F}}$ olduğundan $N \cong R/B$ olacak biçimde $B \in \mathcal{F}$ sağ ideali vardır. Ayrıca, M devirli bir modül olduğundan bir $I_R \leq R$ sağ ideali için $M \cong R/I$'dır. L devirli ve $L \hookrightarrow M \cong R/I$ olduğundan $L \cong (I + aR)/I$ koşulunu sağlayan bir $a \in R$ vardır. Dolayısıyla, $R/(I+aR) \cong N \cong R/B$ olur ve Önerme 4.3.8'den $I+aR \in \mathcal{F}$ elde edilir. Benzer olarak, $R/a^{-1}I \cong (I + aR)/I \cong L \cong R/A$ olur ve yine Önerme 4.3.8'den $a^{-1}I \in \mathcal{F}$ bulunur. $\mathcal{F}$ bir sağ Oka ailesi olduğundan $I \in \mathcal{F}$ sonucuna varılır. Böylece $M_R \cong R/I$ olacak biçimde $I \in \mathcal{F}$ bulunmuş olur. Sonuçta, $M_R \in \mathfrak{C}_{\mathcal{F}}$ elde edilir. □

Şimdi Teorem 4.3.9, Tamamen Asal İdeal Prensibi Teorem 4.2.3'ün, Bölüm 4.2'nin sonunda verilenden farklı olarak, "ikinci" bir tersini elde etmek için uygulanacaktır.

Önteorem 4.3.10 [4, Remark 4.10] *V_R bir modül olsun ve*

$$\xi[V] = \{M_R \mid M = 0 \textit{ veya } M,\ V \textit{ içine gömülmez}\}$$

sınıfı tanımlansın. $\xi[V]$, $\mathfrak{M}_R$ içinde genişleme altında kapalıdır.

İspat: $L, N \in \xi[V]$ için $0 \to L \to M \to N \to 0$ tam dizisi verilsin. Eğer $L = 0$ ise $M \cong N$ olur ve dolayısıyla $M \in \xi[V]$ bulunur. Eğer $L \neq 0$ ise L, V içine gömülmez. $L \hookrightarrow M$ olduğundan M modülü de V içine gömülemez. Bu durumda da $M \in \xi[V]$ olur. Dolayısıyla, $\xi[V]$ genişleme altında kapalıdır. □

Önerme 4.3.11 [4, Proposition 4.11] *Bir R halkasının tamamen asal bir sağ ideali P için, $P \in Max(\mathcal{F}')$ olacak biçimde bir $\mathcal{F}$ sağ Oka ailesi vardır.*

İspat: $V_R = R/P$ ve $\xi[V] = \{M_R \mid M = 0$ veya M, V içine gömülemez$\}$ olsun. $\mathfrak{C}$ sınıfı olarak $\mathfrak{C} = \xi[V] \cap \mathfrak{M}_R{}^{\mathfrak{C}}$ ve $\mathcal{F}$ olarak $\mathcal{F}_{\mathfrak{C}}$ ele alınsın. Teorem 4.3.9'dan, $\mathcal{F}$ bir sağ Oka ailesidir. $R/P = V \notin \xi[V]$ olduğundan $P \notin \mathcal{F}$ olur. Dolayısıyla, P'nin maksimalliğini göstermek yeterlidir. Aksine P maksimal olmasın. O zaman $P \subsetneq I$ olacak biçimde bir $I_R \notin \mathcal{F}$ sağ ideali vardır. O halde, $R/P \to R/I \to 0$ epimorfizması vardır. $I \notin \mathcal{F}$ olduğundan $R/I \neq 0$'dır ve böylece $0 \neq R/I \hookrightarrow V = R/P$ elde edilir.

$g_1 : R/P \to R/I;\ x + P \mapsto x + I$ doğal dönüşümü ve $g_2 : R/I \longrightarrow R/P$ içerim dönüşümü için $f = g_2 g_1 \neq 0$ olur. Ancak $\c{C}ek(f) = I/P \neq 0$'dır. Bu durum ise Önerme 4.1.13(3) ile çelişir. Böylece, $P \in Max(\mathcal{F}')$ olmak zorundadır. □

Uyarı 4.3.12 [4, Remark 5.1] Sağ Oka ailelerinin oluşturulması için aşağıdaki yollar izlenebilir:

(1) $\mathfrak{M}_R$ içinde genişleme altında kapalı olan $\xi \subseteq \mathfrak{M}_R$ alt sınıfı verilsin. O zaman, $\mathfrak{C} = \xi \cap \mathfrak{M}_R^c$ devirli modüllerin genişleme altında kapalı sınıfı olur. Dolayısıyla, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathfrak{C}}$ bir sağ Oka ailesidir.

(2) Bir k halkası için, sabit bir $k \to R$ homomorfizması ile R'ye bir *k-halka* denir. Bir R k-halkası için ξ_1, sağ k-modüllerin $\mathfrak{M}_k$ içinde genişleme altında kapalı olan bir sınıfı olsun. ξ ile $\mathfrak{M}_R$'nin, $k \to R$ dönüşümü altında k-modül olarak düşünülen ve ξ_1 içinde bulunan modüllerin alt sınıfı gösterilsin. Bu durumda, ξ alt sınıfı $\mathfrak{M}_R$ içinde genişleme altında kapalıdır. Böylece, $\mathfrak{C} = \xi \cap \mathfrak{M}_R^c$ genişleme altında kapalı olur. Dolayısıyla $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathfrak{C}}$ bir sağ Oka ailesidir.

4.4 Tamamen Asal İdeal Prensibinin Bazı Uygulamaları

Bu alt bölümde Tamamen Asal İdeal Prensibi'nin bazı uygulamaları verilecektir. Bu uygulamaların her biri, bir halkanın tek yönlü yapısını çalışmak amacıyla oluşturulmuş tamamen asal sağ ideallerin yeni bir kaynağı ya da sağ Oka ailelerinin bir uygulaması olarak görülmelidir.

Öncelikle, değişmeli bir halkanın idealleri ile üzerindeki modülleri arasındaki bağıntıyı sağlayan nokta sıfırlayıcılardan bahsedilecektir. Değişmeli cebirde, asal idealler, bir modülün ilişkili asalları formunda oldukça önemli bir rol oynarlar. Şimdi bu kavramların değişmeli olmayan halkalar üzerindeki karşılıkları incelenecektir.

Tanım 4.4.1 [4, Definition 5.2] Bir R halkası ve sıfırdan farklı bir M_R modülü verilsin. Sıfırdan farklı bir $m \in M$ elemanı için $ann(m) = \{r \in R \mid mr = 0\}$ formundaki sağ ideale M modülünün bir *nokta sıfırlayıcısı (point annihilator)* denir.

Değişmeli bir R halkası üzerindeki bir M modülü için, maksimal nokta sıfırlayıcısının asal ideal olduğu oldukça iyi bilinen bir sonuçtur. Aşağıdaki önerme, bu sonucun doğrudan bir genellemesidir.

Önerme 4.4.2 [4, Proposition 5.3] *R bir halka ve M_R sıfırdan farklı bir modül olsun. M'nin nokta sıfırlayıcısı olmayan sağ ideallerin $\mathcal{F}$ ailesi bir sağ Oka ailesidir. Dolayısıyla, M'nin bir maksimal nokta sıfırlayıcısı, tamamen asal sağ idealdir.*

İspat: Önteorem 4.3.10'da verildiği gibi

$$\xi\ [M] = \{N_R \mid N = 0 \text{ veya } N,\ M \text{ içine gömülemez}\}$$

kümesi oluşturulsun ve $\mathfrak{C} = \xi\ [M] \cap \mathfrak{M}_R^{\mathfrak{c}}$ olsun. Bu sınıf, genişleme altında kapalıdır. Dolayısıyla, $\mathcal{F}_{\mathfrak{C}}$ bir sağ Oka ailesidir.

$\xi[M]$'nin tanımından,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mathfrak{C}}^{'} &= \{I_R \subseteq R \mid 0 \neq R/I \hookrightarrow M\} \\ &= \{ann(m) \mid 0 \neq m \in M\} \\ &= \mathcal{F}^{'} \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathfrak{c}}$ bir sağ Oka ailesidir. Tamamen Asal İdeal Prensibi'nden, M'nin maksimal nokta sıfırlayıcısının tamamen asal sağ ideal olduğu sonucu çıkar. □

Değişmeli olmayan bir R halkasında $P_R \subseteq R$ bir tamamen asal sağ ideal ve M_R bir modül olsun. P, M nin bir nokta sıfırlayıcı ideali ise, P'ye *M ile ilişkili tamamen asal sağ ideal (associated to M)* denir. Değişmeli bir halka üzerindeki bir Noether modülün sonlu sayıda ilişkili asalının var olduğu iyi bilinen bir sonuçtur (bkz.[28, Theorem 3.1]). Ancak bu durum, değişmeli olmayan halkalarda tamamen asal idealler için geçerli değildir (bkz. Örnek 4.3.3).

Tanım 4.4.3 [15] R bir halka ve M_R sıfırdan farklı bir modül olsun. M modülünün sıfır-bölenlerinin kümesi

$$Sb(M) = \{z \in R \mid mz = 0 \text{ olacak şekilde } m \in M \text{ vardır}\}$$

olarak tanımlanır.

Değişmeli halkalarda, bir modülün sıfır-bölenlerinin kümesi, asal ideallerin bir birleşimidir (bkz. [15]). Şimdi bu durumun Noether sağ modüller için genellemesi verilecektir. Bu sonuç, Önerme 4.4.2'nin bir uygulamasıdır.

Sonuç 4.4.4 [4, Corollary 5.4] *R bir halka ve M_R bir modül olsun. R halkası, M modülünün nokta sıfırlayıcı idealleri üzerinde artan zincir koşulunu sağlarsa (örneğin, M_R ya da R_R Noether ise), M_R modülünün sıfır-bölenlerinin kümesi tamamen asal sağ ideallerin birleşimidir.*

İspat: M_R modülünün bir sıfır böleni $z \in R$ olsun. O zaman $z \in ann(m)$ olacak biçimde sıfırdan farklı bir $m \in M$ vardır. R halkası M_R modülünün nokta sıfırlayıcı idealleri üzerinde artan zincir koşulu sağladığından, $P_z \supseteq ann(m)$ olacak biçimde bir maksimal nokta sıfırlayıcı $P_z \subseteq R$ vardır. Dolayısıyla, $z \in ann(m) \subseteq P_z$ olur. Önerme 4.4.2'den, P_z tamamen asal bir sağ idealdir. M_R'nin her sıfır-bölen elemanı için bu şekilde bir P_z ideali seçilirse, $Sb(M) = \bigcup_z P_z$ elde edilir.

Eğer R_R Noether ise, artan zincir kuralı sağlanacağından istenen elde edilir. Eğer M_R Noether ise, R halkasının M_R'nin nokta sıfırlayıcıları üzerinde artan zincir koşulu sağladığını görmek gerekir. Her i indisi için $m_i \in M \backslash \{0\}$ için

$$I := ann(m_0) \subseteq ann(m_1) \subseteq ...$$

nokta sıfırlayıcı ideallerinin bir artan zinciri olsun. Buradan $R/I \cong m_0R \subseteq M$ bir Noether modül olur. Böylece, R halkası, I_R idealini içeren sağ idealler üzerinde artan zincir koşulunu sağlar. Sonuç olarak, M_R modülünün nokta sıfırlayıcı ideallerinin artan zinciri bir noktada durmak zorundadır. □

Lam ve Reyes; [27] çalışmasında değişmeli bir R halkasının tamlık bölgesi olması için gerek ve yeter koşulun halkadaki sıfırdan farklı her asal idealin bir düzenli eleman içermesi olduğunu göstermişlerdir. Şimdi bu durumun değişmeli olmayan halkalardaki karşılığı verilecektir.

Tanım 4.4.5 [14] R bir halka ve $I_R \subseteq R$ bir sağ ideal olsun. Sıfırdan farklı bir $x \in R$ için $I = ann_r(x)$ formundaki bir sağ ideale *sağ temel sıfırlayıcı (right principal annihilator)* denir.

Tanım 4.4.5'te verilen kavram, R_R modülünün nokta sıfırlayıcı ideali ile aynı kavramdır. Ancak sıfırlayıcı ideal üzerince zincir koşulu fikrini çağrıştırması amacıyla yukarıdaki tanım kullanılacaktır.

Önerme 4.4.6 [4, Proposition 5.5] *Sıfırdan farklı bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir:*

(1) *R bir tamlık bölgesidir.*

(2) *R halkası, sağ temel sıfırlayıcı idealleri üzerinde artan zincir koşulu sağlar ve sıfırdan farklı her $P_R \subsetneq R$ tamamen asal sağ ideali için, P bir temel sağ sıfırlayıcı değildir.*

(3) *R halkası, sağ temel sıfırlayıcı idealleri üzerinde artan zincir koşulu sağlar ve sıfırdan farklı her $P_R \subsetneq R$ tamamen asal sağ ideali bir sol düzenli eleman içerir.*

İspat: (1) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (2) Tanımlardan dolayı açıktır.

(2) $\Rightarrow$ (1) R halkası hipotezde verilen koşulları sağlasın. $\mathcal{F}$ ailesi olarak R_R modülünün nokta sıfırlayıcı olmayan ideallerinin ailesini alalım. Önerme 4.4.2'den, $\mathcal{F}$ bir sağ Oka ailesi olur. Tanım gereği, R_R modülünün her nokta sıfırlayıcı ideali bir sağ temel sıfırlayıcı ideal olduğundan, ilk hipotez $\mathcal{F}'$ ailesinin artan zincir koşulu sağladığını gösterir. Dahası, ikinci varsayım R halkasının sıfırdan farklı her tamamen asal sağ idealinin $\mathcal{F}$ içinde bulunduğunu gösterir. Dolayısıyla, Teorem 4.2.5(2)'den, sıfırdan farklı tüm sağ idealler $\mathcal{F}$ içerisinde bulunur. Buradan sıfırdan farklı her $x \in R$ için $ann_r(x) = 0$ olur. Böylece, R bir tamlık bölgesidir. □

Yukarıda verilen önermede, (1) $\Leftrightarrow$ (2) denkliği için, artan zincir koşulunun gerekli olduğuna dair bir örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek 4.4.7 [4] k bir cisim olsun. R değişmeli k-cebiri, ${x_i}^2 = 0$ ilişkisi ile verilen $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ kümesi tarafından üretilsin. R'nin bir tamlık bölgesi olmadığı açıktır, ancak tek asal ideali $< x_0, x_1, .. >$ bir temel sıfırlayıcı değildir.

Gerçekten, $p(x) \in R \setminus \{0\}$ olacak biçimde $I =< x_0, x_1, .. >= ann_r(p(x))$ ve $p(x) = c$ sabit ise $< c >= k \cong R$ çelişkisi elde edilir. $p(x)$ sabit olmasın. O halde, $k \cong R/ann_r(p(x)) \cong < p(x) >$ olur ve bu durumda $< p(x) >$ basit olmaz. Böylece, yine bir çelişki elde edilir.

Bu durumda, bir R halkasının her tamamen asal sağ ideali sol düzenli eleman içeriyorken tamlık bölgesi olup olmayacağı sorusu akla gelir. Profesör G. Bergman, bu soruya aşağıdaki sonuç ile olumlu cevap vermiştir.

Önteorem 4.4.8 [4, Lemma 5.6] *R bir halka ve M_R bir modül olsun. Her $m \in M$ için $mX = 0$ iken $m = 0$ koşulunu sağlayan, boştan farklı sonlu bir $X \subseteq I$ alt kümesine sahip I_R sağ ideallerinden oluşan $\mathcal{F}$ ailesi bir sağ Oka ailedir.*

İspat: $X = \{1\} \subseteq R$ alınırsa $R \in \mathcal{F}$ olduğu görülür. Şimdi $I + aR \in \mathcal{F}$ ve $a^{-1}I \in \mathcal{F}$ olacak biçimde $I_R \subseteq R$ sağ ideali ve $a \in R$ elemanı verilsin. $i_k \in I$ olmak üzere, boştan farklı $X_0 = \{i_1 + ar_1, \cdots, i_p + ar_p\} \subseteq I + aR$ ve $X_1 = \{x_1, \cdots, x_q\} \subseteq a^{-1}I$

kümeleri seçilsin. Bu kümeler, $j = 0, 1$ ve $m \in M$ için $mX_j = 0$ iken $m = 0$ koşulunu sağlasın. $X := \{i_1, i_2, .., i_p, ax_1, ..ax_q\} \subseteq I$ tanımlansın. $mX = 0$ olacak şekilde $m \in M$ var olsun. O zaman, $maX_1 \subseteq mX = 0$ ise $ma = 0$ elde edilir. Buradan, $mX_0 = 0$ ve böylece $m = 0$ elde edilir. Sonuç olarak, $I \in \mathcal{F}$ bulunur. O halde, $\mathcal{F}$ bir sağ Oka ailesidir. $\square$

Önerme 4.4.9 [4, Proposition 5.7] *Bir R halkası üzerindeki sıfırdan farklı bir M modülü için aşağıdaki ifadeler denktir:*

(1) *M_R modülünün sıfır-böleni yoktur (yani, $0 \neq m \in M$ ve $0 \neq r \in R$ için $mr \neq 0$ dır).*

(2) *Sıfırdan farklı her $P_R \subsetneq R$ tamamen asal sağ ideali, M_R modülü için sıfır-bölen olmayan bir eleman içerir.*

(3) *Sıfırdan farklı her $P_R \subseteq R$ tamamen asal sağ ideali boştan farklı sonlu bir $X \subseteq P$ alt kümesi içerir ve bu küme her $m \in M$ için $mX = 0$ iken $m = 0$ koşulunu sağlar.*

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) $P_R \neq 0$ ise en az bir sıfırdan farklı $x \in P$ vardır. O halde, sıfırdan farklı her $m \in M$ için $mx \neq 0$ olur. Böylece istenen elde edilir.

(2) $\Rightarrow$ (3) İspat açıktır.

(3) $\Rightarrow$ (1) $\mathcal{F}$ ailesi olarak Önteorem 4.4.8'de tanımlanan sağ ideallerin Oka ailesini alalım. O halde,

$$\mathcal{F}' = \{I_R \leq R \mid \text{her sonlu } X \subseteq I \text{ alt kümesi için } mX = 0 \text{ olacak biçimde en az bir sıfırdan farklı } m \in M \text{ vardır}\}$$

olur. $\mathcal{F}'$ içerisindeki her zincirin birleşimi de $\mathcal{F}'$ içinde yer alır. Hipotez ile, sıfırdan farklı her $P_R \subseteq R$ tamamen asal sağ ideali $\mathcal{F}$ içinde olur. O halde, Tamamen Asal İdeal Prensibinin Tümleyeni Teorem 4.2.5'ten, R halkasının sıfırdan farklı tüm sağ idealleri $\mathcal{F}$ içinde yer alır. $\mathcal{F}$'deki hiçbir sağ idealin, M_R'nin nokta sıfırlayıcı ideali olamayacağı açıktır. Dolayısıyla, M_R modülünün sıfır-böleni de yoktur. $\square$

Sonuç 4.4.10 [4, Corollary 5.8] *R sıfırdan farklı bir halka olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:*

(1) *R bir tamlık bölgesidir.*

(2) *Sıfırdan farklı her* $P_R \subsetneq R$ *tamamen asal sağ ideali sol düzenli eleman içerir.*

(3) *Sıfırdan farklı her* $P_R \subsetneq R$ *tamamen asal sağ idealinin boştan farklı, sonlu ve sol sıfırlayıcısı sıfır olan bir alt kümesi vardır.*

Önerme 4.1.8 kullanılarak oldukça asal ideali bulunmayan ve tamlık bölgesi olmayan halkalar kurulabilir. Bu tarz halkalar için her oldukça asal sağ idealin bir düzenli eleman içerdiğini söylemek doğrudur fakat anlamsızdır. Dolayısıyla, halkaların yapısını kontrol etmede tamamen asal sağ ideallerin, oldukça asal sağ ideallere kıyasla daha etkili olduğu sonucu bir kez daha elde edilir.

Homolojik cebirde, genişlemeler altında korunan modül teorik özellikler doğal bir şekilde ortaya çıkar. Bu, sağ Oka aileleri ve dolayısıyla Tamamen Asal İdeal Prensibi'ni kullanarak tamamen asal sağ idealler elde etmek için zengin bir kaynak oluşturur.

Örnek 4.4.11 [4, Example 5.9] k bir halka ve R de bir k-halka olsun. Bir $I_R \subseteq R$ sağ ideali için,

(1) R/I projektif sağ k-modül

(2) R/I injektif sağ k-modül

özellikleri göz önüne alınsın. Yukarıdaki her bir özellik için, bu özelliği sağlayan $\mathcal{F}$ ailesi, Uyarı 4.3.12'den, bir sağ Oka ailesi olur. Dolayısıyla, $Max(\mathcal{F}')$ tamamen asal sağ ideallerden oluşur.

Önerme 4.4.12 [4, Proposition 5.10] *R bir halka olsun. R'nin dik toplanan sağ ideallerinin ailesi $\mathcal{F}$ bir sağ Oka ailedir. R_R'nin dik toplananı olmama özelliğine göre maksimal olan bir $I_R \subseteq R$ sağ ideali bir maksimal sağ idealdir.*

R halkasının yarıbasit olması için gerek ve yeter koşul halkanın her maksimal sağ idealinin R_R'nin dik toplananı olmasıdır.

İspat: $I \in \mathcal{F}$ ise, o zaman I sağ ideali, R_R'nin bir dik toplananı olur. Buradan, R/I bir projektif sağ R-modüldür. Dolayısıyla, Örnek 4.4.11'den, $\mathcal{F}$ bir sağ Oka ailesi olur.

$P \in Max(\mathcal{F}')$ olsun. O zaman, P bir tamamen asal sağ idealdir. Bu durumda, Sonuç 4.1.15'ten, R/P ayrıştırılamazdır. Öte yandan P sağ idealini öz olarak içeren $X_R \subseteq R_R$ sağ ideali, R_R'nin bir dik toplananı olur. Dolayısıyla, R/P yarıbasittir. R/P ayrıştırılamaz ve yarıbasit olduğundan basittir. Böylece, P bir maksimal sağ idealdir.

Son ifade için R yarıbasit halka ise her maksimal sağ idealinin R_R içinde dik toplanan olduğu açıktır. Gereklilik için R halkasının her maksimal sağ idealinin dik toplanan olduğu varsayılsın. Halkanın yarıbasit olduğunu göstermek için, halkadaki her tamamen asal sağ idealin bir maksimal sağ ideal olduğunu ispatlamak yeterlidir, çünkü bu durumda her tamamen asal sağ ideal, sağ Oka ailesi $\mathcal{F}$ içinde bulunur. $\mathcal{F} = \{eR \mid e^2 = e \in R\}$ olduğundan, $\mathcal{F}$ temel sağ ideallerden oluşmuştur. Dolayısıyla, Tamamen Asal İdeal Prensibinin Tümleyeni Teorem 4.2.5(3) ile, halkanın her sağ ideali bir dik toplanan ve böylece R halkası yarıbasit olur.

$P_R \subsetneq R$ bir tamamen asal sağ ideal olsun. $P \subseteq \mathfrak{m}$ olacak biçimde R halkasının bir maksimal $\mathfrak{m}$ sağ ideali vardır. $\mathfrak{m}$, R_R modülünün bir öz dik toplananı olduğundan, $\mathfrak{m}/P$ alt modülü de R/P'nin bir dik toplananıdır. Önerme 4.1.15 ile, R/P ayrıştırılamaz olduğu için $\mathfrak{m}/P = 0$ ve böylece $\mathfrak{m} = P$ bulunur. □

Tanım 4.4.13 [15] R bir halka ve M_R modül bir modül olsun. M_R modülü devirli ve $M \ncong R_R$ ise, M_R modülüne *öz devirli modül (proper cyclic module)* denir.

Tanım 4.4.14 [29] R bir halka olsun. R'nin her öz devirli sağ R-modülü injektif ise, R halkasına *sağ PCI-halka* denir. Kendi üzerinde sağ injektif olmayan böyle bir halkaya *öz sağ PCI-halka* denir.

Faith'in aşağıdaki sonucu (bkz. [29]), Tamamen Asal İdeal Prensibi'nin öz sağ PCI-halkalar üzerindeki bir uygulaması olarak elde edilmiştir.

Önerme 4.4.15 [4, Proposition 5.11] R bir öz sağ PCI-halka ise, R bir tamlık bölgesidir.

İspat: Sağ PCI-halkaların sağ Noether olduğu, Damiano [30] tarafından gösterilmiştir. Özel olarak, R bir sağ PCI-halka ise Dedekind sonludur (bkz. Önerme 2.3.16).

R bir öz sağ PCI-halka ise sıfırdan farklı her $I_R \subseteq R$ sağ ideali için $R/I \ncong R_R$ olur, çünkü aksi takdirde $0 \to I \to R \to R \to 0$ tam dizisinden $R \cong I \oplus R$ olur. Ancak R Dedekind-sonlu olduğundan, $I = 0$ çelişkisi elde edilir.

$\mathcal{F}$, R/I'nın infektif olma koşulunu sağladığı I_R sağ ideallerinin ailesi olsun. Buradan $0 \in Max(\mathcal{F}')$'dir. Örnek 4.4.11 ile, $\mathcal{F}$ bir sağ Oka ailesi olur. Tamamen Asal İdeal Prensibi Teorem 4.2.3 ve Önerme 4.1.5 ile, R bir tamlık bölgesi olur. □

Son olarak, Temel Asal İdeal Prensibi'nin modüller üzerindeki sonluluk koşullarından, bir halkanın çarpımsal kapalı alt kümelerinden ve tersinir sağ ideallerinden gelen bazı uygulamalarından bahsedilecektir.

Örnek 4.4.16 [4, Example 5.18] k bir halka ve R de bir k-halka olsun. R halkasının bir I sağ ideali için aşağıdaki özellikler göz önüne alınsın:

(1) R/I sonlu üretilmiş bir sağ k-modül

(2) R/I sonlu eşüretilmiş bir sağ k-modül

(3) Sonsuz bir α kardinali için R/I kardinalitesi α'dan küçük bir sağ k-modül

(4) R/I Noether bir sağ k-modül

(5) R/I bir Artin sağ k-modül

(6) R/I sonlu uzunluklu bir sağ k-modül

(7) R/I sonlu düzgün boyuta sahip bir sağ k-modül

Yukarıdaki özelliklerden birini sağlayan sağ ideallerden oluşan $\mathcal{F}$ ailesi, Uyarı 4.3.12 ile, bir sağ Oka ailesidir. Dolayısıyla, $Max(\mathcal{F}')$ tamamen asal sağ ideallerden oluşur.

Tanım 4.4.17 [23] R halkasının çarpımsal kapalı bir $S \subseteq R$ alt kümesi ve bir M_R modülü verilsin. Her $m \in M$ için $ms = 0$ olacak biçimde en az bir $s \in S$ varsa M modülüne bir *S-burulmalı modül* denir.

Örnek 4.4.18 [4, Example 5.19] S-burulmalı modüllerin sınıfı genişleme altında kapalıdır. Dolayısıyla, R/I modülü S-burulmalı olacak biçimde seçilen I sağ ideallerinin $\mathcal{F}$ ailesi bir sağ Oka ailesidir. Böylece, $\mathrm{Max}(\mathcal{F}')$ ailesi tamamen asal sağ ideallerden oluşur.

Örnek 4.4.19 [4, Example 5.19] Çarpımsal kapalı bir S kümesinin sağ Ore olması için gerek ve yeter koşul her M_R modülü için M'nin S-burulmalı elemanlarının oluşturduğu

$$t_s(M) := \{m \in M \mid ms = 0 \text{ olacak biçimde } s \in S \text{ vardır}\}$$

kümesinin M içinde bir alt modül olmasıdır. Böyle bir S kümesi için, $I_R \subseteq R$ bir sağ ideal ise R/I modülünün S-burulmalı olması için gerek ve yeter koşul $I \cap S \neq \emptyset$ olmasıdır. Sağ Ore olan bir $S \subseteq R$ kümesi için $I \cap S \neq \emptyset$ koşulunu sağlayan I sağ ideallerinin ailesi

$$\mathcal{F} = \{I_R \leq R_R \mid R/I \text{ bir } S\text{-burulmalı modül}\}$$

kümesine eşittir ve dolayısıyla bir sağ Oka ailesidir. Böylece, S ile ayrık olma özelliğine göre maksimal olan bir sağ ideal tamamen asal olur.

Sağ ideallerin tersinirliği yardımıyla da sağ Oka aileleri elde edilebilir. $R \subseteq Q$ olacak biçimde bir Q halkası verilsin. $I_R \leq Q_R$ alt modülü için

$$I^* = \{q \in Q \mid qI \subseteq R\}$$

kümesi ${}_RQ$'nun bir alt modülüdür. $\sum x_i q_i = 1$ koşulunu sağlayan $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ ve $q_1, q_2, \ldots, q_n \in I^*$ elemanları varsa $I_R \subseteq Q_R$ alt modülüne Q *içinde sağ tersinir* denir. Eğer I sağ ideali Q içinde sağ tersinir ise sonlu üretilmiştir.

Tersinir sağ ideal kavramı değişmeli halkalarda tersinir idealler kavramının bir genellemesidir. Bu kavram bize yeni bir sağ Oka ailesi verir.

Önerme 4.4.20 [4, Proposition 5.20] *R, bir Q halkasının alt halkası olsun. O zaman*

$$\mathcal{F} = \{I_R \leq R_R \mid I_R, Q \text{ içinde sağ tersinirdir}\}$$

ailesi sağ Okadır ve $Max(\mathcal{F}')$ kümesi tamamen asal sağ ideallerden oluşur.

İspat: $I + aR \in \mathcal{F}$ ve $a^{-1}I \in \mathcal{F}$ olacak biçimde $I_R \leq R_R$ ve $a \in R$ alalım. O zaman $I+aR$ ve $a^{-1}I$ sağ idealleri Q içinde sağ tersinirdir. Bu durumda, $\sum\limits_{i=1}^{m} i_k q_k + aq = 1$ olacak biçimde $i_1, \ldots, i_m \in I$ ve $q_k, q \in (I + aR)^*$ vardır. Benzer olarak, $\sum\limits_{j=1}^{n} x_j p_j = 1$ olacak biçimde $x_1, \ldots, x_n \in a^{-1}I$ ve $p_1, \ldots, p_n \in (a^{-1}I)^*$ vardır. Bu eşitlikler birleştirildiğinde;

$$\begin{aligned} 1 &= \sum i_k q_k + aq = \sum i_k q_k + a(\sum x_j p_j)q \\ &= \sum i_k q_k + \sum (ax_j)(p_j q) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikte, $i_k \in I$, $q_k \in (I + aR)^* \subseteq I^*$ ve $ax_j \in a(a^{-1}I) \subseteq I$ olur. Dolayısıyla, her j için $p_j q \in I^*$ olduğunu görmek yeterlidir.

$qI \subseteq a^{-1}I$ olduğu iddia edilsin. Her $i \in I$ için $q_k i \in R$'dir. Buradan,

$$aqi = (1 - \sum i_k q_k)i = i - \sum i_k(q_k i) \in I$$

olur. Böylece,

$$(p_j q)I = p_j(qI) \subseteq (a^{-1}I)^*(a^{-1}I) \subseteq R$$

bulunur. O halde, $p_j q \in I^*$'dır. Sonuç olarak, I_R sağ tersinir ve böylece $\mathcal{F}$ bir sağ Oka ailesi olur. $\square$

Önerme 4.4.21 [23, Proposition 4.3] *R halkası, bir Q halkası içinde sağ düzen ve I_R, Q_R'nin bir alt modülü olsun. I'nın sağ tersinir olması için gerek ve yeter koşul I'nın projektif bir modül olması ve R halkasının düzenli bir elemanını bulundurmasıdır.*

İspat: ($\Rightarrow$) I_R sağ tersinir olsun. O zaman $1 = \sum a_i q_i$ olacak biçimde $a_i \in I$ ve $q_i \in I^*$ elemanları vardır. $x \mapsto q_i x$ ile tanımlı $\varphi_i : I \to R$ homomorfizmaları alınırsa, (φ_i, a_i) ikilileri I için bir dual taban olur. Önteorem 2.1.38 ile, I_R projektif olur.

$C(0)$ ile R'nin düzenli elemanlarının kümesi gösterilsin. $q_1, q_2 \in Q$ olsun. O zaman $q_1 = x_1 y_1^{-1}$ ve $q_2 = x_2 y_2^{-1}$ olacak biçimde $x_1, x_2 \in R$ ve $y_1, y_2 \in C(0)$ vardır. R halkası sağ Ore olduğundan, $y_1 C(0) \cap y_2 R \neq \emptyset$ olur. Dolayısıyla, $t = y_1 s = y_2 r$ olacak biçimde $s \in C(0)$ ve $r \in R$ vardır. $C(0)$ çarpımsal kapalı olduğundan $t = y_1 s \in C(0)$ olur. O halde, $q_1 t = x_1 y_1^{-1} y_1 s = x_1 s \in R$ ve $q_2 t = x_2 y_2^{-1} y_2 r = x_2 r \in R$'dir. Tümevarımla her i için $q_i s \in R$ olacak biçimde $s \in C(0)$ bulunur. Sonuçta, $s = \sum a_i q_i s \in I \cap C(0) \neq \emptyset$ elde edilir.

($\Leftarrow$) I_R projektif ve $I \cap C(0) \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda, (φ_j, a_j) ikilileri I için bir dual tabandır. Her bir $\varphi_j : I \to R$ homomorfizması bir $q_j \in I^*$ için $\varphi_j(x) = q_j x$ formundadır. Eğer $s \in I \cap C(0)$ ise $s = \sum a_j \varphi_j(s) = \sum a_j q_j s$ olur. Buradan, s düzenli olduğundan $1 = \sum a_j q_j$ elde edilir. Böylece, I_R sağ tersinirdir. $\square$

Tersinirlik kavramı kullanılarak Cohen Teoremi şöyle genelleştirilebilir:

Değişmeli bir R halkasının Dedekind bölgesi olması için gerek ve yeter koşul R'nin sıfırdan farklı her asal idealinin tersinir olmasıdır (bkz. [11]).

Önerme 4.4.22 [4, Proposition 5.21] *R halkası Q'nun bir alt halkası olsun. R'nin sıfırdan farklı her sağ idealinin Q içinde sağ tersinir olması için gerek ve yeter koşul R'nin sıfırdan farklı her tamamen asal sağ idealinin Q içinde sağ tersinir olmasıdır.*

R, sağ klasik kesirler halkası Q olan bir sağ Ore halkası ise sağ kalıtsal, sağ Noether bir tamlık bölgesi olması için gerek ve yeter koşul R içindeki sıfırdan farklı her tamamen asal sağ idealin Q içinde sağ tersinir olmasıdır.

İspat: R bir sağ Ore halka olsun. Önerme 4.4.21'den, R'nin bir idealinin Q içinde sağ tersinir olması için gerek ve yeter koşul o idealin projektif olması ve bir düzenli eleman içermesidir. Dolayısıyla, sağ Ore halkası R'nin sağ kalıtsal, sağ Noether bir tamlık bölgesi olması için gerek ve yeter koşul R'nin sıfırdan farklı her sağ idealinin R'nin sağ klasik kesirler halkası içinde sağ tersinir olmasıdır. O halde ilk ifadeyi kanıtlamak yeterlidir.

$\mathcal{F} = \{I_R \leq R_R \mid I, Q$ içinde sağ tersinirdir$\}$ ailesi, Önerme 4.4.20'den bir sağ Oka ailesidir. Sağ tersinir bir sağ ideal sonlu üretilmiş olduğundan, Tamamen Asal İdeal Prensibinin Tümleyeni Teorem 4.2.5 ile iddia kanıtlanır. □

4.5 Comonoform Sağ İdealler İçin Asal İdeal Prensibi

Bu alt bölümde genel bir halkadaki tamamen asal ideallerin bir alt kümesi olan comonoform sağ idealler üzerinde çalışılacaktır. Amaç, tamamen sağ idealleri daha iyi anlamaktır. Asal İdeal Prensibi'nin comonoform sağ idealler için verilen özel halinin, halkaların tek yönlü yapısını anlamak amacıyla uygulamaları ele alınacaktır.

Comonoform sağ idealler, tamamen asal sağ ideallerden daha özel özelliklere sahiptir. Örneğin, Önerme 2.6.7'den $P_R \subsetneq R$ bir comonoform sağ idealken R/P düzgün modüldür. Ancak, Örnek 4.1.16'da tamamen asal sağ ideallerin bu özelliği her zaman sağlamadığı gösterilmiştir. Ayrıca, aşağıdaki örnek, comonoform sağ idealler için sağlanan Önerme 2.6.14'ün tamamen asal idealler için geçerli olmadığını gösterir.

Örnek 4.5.1 [4, p. 908] Bir k bölümlü halkası için

$$R = \begin{pmatrix} k & k & k \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} \subseteq M_3(k) \text{ ve } P_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

alınsın. $x = E_{12} + E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$ elemanı için $x^{-1}P = \{r \in R \mid xr \in P\}$ kümesi oluşturulsun.

$a, b, c, d, e \in k$ olmak üzere; $r = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$ ise,

$$xr = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in P$$

olur. Bu durumda $d = e = 0$ olmalıdır. Dolayısıyla, $x^{-1}P = \begin{pmatrix} k & k & k \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ bulunur.

Buradan, $R/x^{-1}P \cong \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$ ayrıştırılabilir bir modül olur. Sonuç 4.1.15'ten $x^{-1}P$ bir tamamen asal sağ ideal değildir.

Önerme 2.6.16 comonoform olmayan bir tamamen asal sağ idealin var olduğunu gösterir. Örneğin, bir R tamlık bölgesi sağ Ore olmasın. $P = 0 \lhd R$ ideali, Önerme 4.1.5'ten tamamen asaldır. Ancak, R sağ Ore olmadığından P_R comonoform değildir.

Ayrıca, her monoform modül düzgün olduğu için, Örnek 4.1.16 comonoform olmayan ve tamamen asal bir sağ ideali olan bir Artin halka örneği vermektedir.

Tamamen Asal İdeal Prensibi tamamen asal sağ ideallerin varlığını keşfetmede önemli bir yöntem vermektedir. Bu yöntemin daha özel bir hâli comonoform sağ ideallerin varlığını keşfetmek için verilecektir. Buradaki fikir, comonoform sağ ideallerin, ek bir koşul sağlayan sağ Oka ailelerinin tümleyenlerindeki maksimaller olduğunu göstermektir.

Tanım 4.5.2 [4, Definition 6.8] $\mathcal{F}$, bir R halkasındaki sağ ideallerin bir ailesi olsun. Her $a \in R$ için $I \in \mathcal{F}$ iken $a^{-1}I \in \mathcal{F}$ koşulu sağlanıyorsa $\mathcal{F}$ ailesine *bölünebilir (divisible)* denir.

Aşağıdaki önteorem, bölünebilir sağ Oka aileleri için "daha kuvvetli Asal İdeal Prensibi"ni ispatlamada kullanılacaktır.

Önteorem 4.5.3 [4, Lemma 6.9] *Bir R halkası için $I_R, K_R \subsetneq R$ sağ idealleri ve $a \in R$ verilsin. $a^{-1}I \subseteq K$ olması için gerek ve yeter koşul $K = a^{-1}J$ ve $I \subseteq J_R$ olacak biçimde bir J_R sağ idealinin var olmasıdır.*

İspat: ($\Leftarrow$) $I \subseteq J$ için $a^{-1}J = K$ olsun. O zaman $a^{-1}I \subseteq a^{-1}J = K$ olur.

($\Rightarrow$) $a^{-1}I \subseteq K$ olsun. $J := I + aK$ için $K = a^{-1}J$ olduğunu görmek gerekir. $k \in K$ olsun. Buradan, $ak \in aK \subseteq J$ olur ve dolayısıyla, $k \in a^{-1}J$ elde edilir. Öte yandan, $x \in a^{-1}J$ ise, $ax \in J = I + aK$ olur. Dolayısıyla, $ax = ak + i$ olacak biçimde

$k \in K$ ve $i \in I$ vardır. Buradan, $a(x-k) = i$ ve $x - k \in a^{-1}I$ bulunur. Öyleyse, $x = (x-k) + k \in a^{-1}I + K = K$ elde edilir. $\square$

Teorem 4.5.4 [4, Theorem 6.10] *$\mathcal{F}$ bölünebilir bir sağ Oka ailesi olsun. Bu durumda, $P \in Max(\mathcal{F}^{'})$ bir comonoform sağ idealdir.*

İspat: $P \in Max(\mathcal{F}^{'})$ olsun. $R \in \mathcal{F}$ olduğundan $P \neq R$'dir ve dolayısıyla $R/P \neq 0$'dır. R/P modülünün monoform olduğunu görmek gerekir. Bunun için, R/P'nin sıfırdan farklı her I/P alt modülünün yoğun olduğunu görmek yeterlidir. Yani sıfırdan farklı her $x+P \in R/P$ ve $y+P \in R/P$ için $(x+P)[(y+P)^{-1}(I/P)] \neq 0$ olduğu gösterilmelidir.

$(y+P)^{-1}(I/P) = y^{-1}I$ olduğu iddia edilsin. $r \in R$ için $(y+P)r \in I/P$ iken $yr + P \in I/P$ olur. Buradan $yr \in I$ ve dolayısıyla $r \in y^{-1}I$'dır. Ters kapsama için de $r \in y^{-1}I$ için $yr \in I$ ve dolayısıyla $yr + P \in I/P$ olur. O halde, $(y+P)r \in I/P$ olur ve istenen elde edilir.

Böylece, $P \subsetneq I$ sağ ideali ile $x \in R \setminus P$ ve $y \in R$ elemanları için $x(y^{-1}I) \nsubseteq P$ olduğunu görmek yeterlidir. $x(y^{-1}I) \subseteq P$ olsun. O zaman $y^{-1}I \subseteq x^{-1}P$ olur. Önteorem 4.5.3 ile en az bir $I \subseteq J$ sağ ideali için $x^{-1}P = y^{-1}J$'dir. $P \in Max(\mathcal{F}^{'})$ ise, $P \subsetneq I \subseteq J$ olduğundan, $J \in \mathcal{F}$ olmalıdır. $\mathcal{F}$ bölünebilir olduğundan, $x^{-1}P = y^{-1}J \in \mathcal{F}$'dir. Ayrıca, $x \notin P$ ve $P \in Max(\mathcal{F}^{'})$ için $P + xR \in \mathcal{F}$ olur. Buradan, $\mathcal{F}$ bir sağ Oka ailesi olduğundan $P \in \mathcal{F}$ çelişkisi elde edilir. $\square$

Şimdiki teorem comonoform sağ idealler için "Asal İdeal Prensibinin Tümleyeni" niteliğindedir.

Teorem 4.5.5 [4, Theorem 6.11] *$\mathcal{F}$, bir R halkasının bölünebilir bir sağ Oka ailesi ve $\mathcal{F}^{'}$ ailesindeki sağ ideallerin boştan farklı her zincirinin $\mathcal{F}^{'}$ içinde (kapsama özelliğine göre) bir üst sınırı olsun. $\mathcal{S}$, R halkasının comonoform sağ ideallerinin bir kümesi ise aşağıdaki ifadeler sağlanır:*

(1) *$\mathcal{F}_0$ sağ ideallerin bir yarıfiltresi ise, $\mathcal{S} \cap \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ iken $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ olur.*

(2) *$J_R \subseteq R$ için, J sağ idealini (öz olarak) içeren $\mathcal{S}$ içindeki tüm sağ idealler $\mathcal{F}$'de ise, J sağ idealini (öz olarak) içeren tüm sağ idealler de $\mathcal{F}$'dedir.*

(3) *$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}$ iken R halkasının tüm sağ idealleri $\mathcal{F}$ ailesindedir.*

İspat: (1) $\mathcal{F}_0$ sağ ideallerin bir yarıfiltresi olsun. $\mathcal{S} \cap \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ iken $\mathcal{F}_0 \nsubseteq \mathcal{F}$ kabul edilsin. O zaman en az bir $I_R \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_0$ vardır. Dolayısıyla, $I_R \in \mathcal{F}^{'} \cap \mathcal{F}_0$ olur.

$\mathcal{F}'$ ile ilgili hipotez ve Zorn Önteoremi yardımıyla, $P \in Max(\mathcal{F}')$ olacak biçimde bir $P \supseteq I$ sağ ideali vardır. Teorem 4.5.4 ile, $P \in \mathcal{S}$ olmalıdır. $\mathcal{F}_0$, I_R idealini içeren bir yarıfiltre olduğundan $P \in \mathcal{F}_0$ elde edilir. Dolayısıyla, $P \in \mathcal{S} \cap \mathcal{F}_0$ ve $P \notin \mathcal{F}$ olur. Bu ise bir çelişkidir. O halde, $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ olmalıdır.

(2) $\mathcal{F}_0 = \{I_R \subseteq R \mid I \supseteq J\}$ kümesi alınsın. $I_R \in \mathcal{F}_0$ ve $K_R \supseteq I_R$ olsun. Burada $K \supseteq I \supseteq J$ olduğundan $K \in \mathcal{F}_0$'dır. Dolayısıyla, $\mathcal{F}_0$ bir yarıfiltredir. Hipotez ile, $\mathcal{S} \cap \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ sağlanır. Dolayısıyla, (1) ile, $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ elde edilir.

(3) $\mathcal{F}_0$, R halkasının tüm sağ ideallerinden oluşsun. $I_R \in \mathcal{F}_0$ ve $T_R \supseteq I_R$ olsun. Burada, $T_R \in \mathcal{F}_0$ olduğu açıktır. Dolayısıyla, $\mathcal{F}_0$ bir yarıfiltredir. Hipotez ile, $\mathcal{S} \cap \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ sağlanır. Dolayısıyla, benzer şekilde (1) ile, $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ elde edilir. □

Önerme 4.5.6 [4, Remark 6.12] *$\xi \subseteq \mathfrak{M}_R$ sağ R-modüllerin genişleme ve alt modüle geçiş altında kapalı bir alt sınıfı olsun. Bu durumda, $\mathfrak{C} = \xi \cap \mathfrak{M}_R^c$ için $\mathcal{F}_{\mathfrak{C}}$ sağ Oka ailesi bölünebilirdir.*

İspat: $\mathcal{F}_{\mathfrak{C}} = \{I_R \leq R \mid R/I \in \mathfrak{C}\}$ ailesi, Teorem 4.3.9'dan bir sağ Oka ailesidir. Dolayısıyla, $\mathcal{F}_{\mathfrak{C}}$ ailesinin bölünebilir olduğunu görmek yeterlidir.

$I \in \mathcal{F}_{\mathfrak{C}}$ ve $x \in R$ olsun. Önteorem 4.3.7(A)'dan,

$$R/x^{-1}I \cong (xR + I)/I \subseteq R/I$$

izomorfizması vardır. Hipotezden, ξ alt modüle geçiş altında kapalı olduğundan $(xR + I)/I \in \xi$ olur. Dolayısıyla, $R/x^{-1}I \in \xi \cap \mathfrak{M}_R^c$ olur ve buradan $R/x^{-1}I \in \mathfrak{C}$ bulunur. Böylece, $x^{-1}I \in \mathcal{F}_{\mathfrak{C}}$ elde edilir. □

Önerme 4.5.6, pek çok $\mathcal{F}_{\mathfrak{C}}$ ailesine uygulanabilir. Aşağıdaki örneklerde bunlardan bazıları ele alınacaktır.

Örnek 4.5.7 [4] Örnek 4.4.16'da incelenen özellikler arasında alt modüle geçmeyen tek özellik "sonlu üretilmiş olma" özelliğidir. Dolayısıyla, diğer özellikler alt modül altında kapalı olduğundan R/I'nın belirtilen diğer özelliklere sahip olmama durumuna göre maksimal olan I_R sağ idealleri comonoform olur.

Örnek 4.5.8 [31] Bir R halkasında sıfırdan farklı I_R sağ idealleri için R/I modülünün sağ Artin R-modül olduğu halkalara *sağ kısıtlanmış minimum koşulu sağlayan halkalar* denir. Bu koşulu sağlayan ve sağ Artin olmayan bir R halkası için

$$\mathcal{F} = \{I_R \subseteq R \mid R/I \text{ sağ Artin } R\text{-modül}\}$$

ailesi bölünebilir bir sağ Oka ailesidir. $R/\{0\} = R$ sağ Artin olmadığından $\{0\} \notin \mathcal{F}$ olur. Dolayısıyla, $\{0\} \in Max(\mathcal{F}')$ ve Teorem 4.5.4'ten $\{0\}$ comonoform sağ ideal olur. Ayrıca, Önerme 2.6.16 ile de R bir sağ Ore bölge olur.

Sağ kısıtlanmış minimum koşulu sağlayan, sağ Artin olmayan bir halkanın sağ Ore bölge olduğu Ornstein tarafından Cohen'in [1, Corollary 2] sonucunun bir genellemesi olarak ispatlanmıştır (bkz. [31, Theorem 13]).

Örnek 4.5.9 [4] Çarpımsal kapalı bir $S \subseteq R$ kümesi için S-burulmalı modüllerin sınıfı genişleme ve alt modüle geçiş altında kapalıdır (bkz. Örnek 4.4.19). Dolayısıyla, $\mathcal{F} = \{I_R \mid R/I \text{ bir } S\text{-burulmalı modül}\}$ olmak üzere, $P \in Max(\mathcal{F}')$ sağ ideali comonoform olur.

Örnek 4.5.10 [4] R halkasının çarpımsal kapalı bir $S \subseteq R$ alt kümesi ve bir M_R modülü verilsin. Her $m \in M$ ve $s \in S$ için $ms = 0$ iken $m = 0$ koşulu sağlanıyorsa, M_R modüle *S-burulmasız modül* denir.

S-burulmasız modüller genişleme ve alt modüle geçiş altında kapalıdır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \{I_R \leq R \mid R/I \text{ bir } S\text{-burulmasız modül}\} \\ &= \{I_R \leq R \mid r \in R \text{ ve } s \in S \text{ için } rs \in I \Rightarrow r \in I\} \end{aligned}$$

ailesi bölünebilir bir sağ Oka ailesidir. Böylece, $P \in Max(\mathcal{F}')$ sağ ideali comonoformdur.

Tanım 4.2.4'e benzer olarak bir R halkasındaki *iki yönlü ideallerin yarıfiltresi* tanımı verilebilir. İki yönlü ideallerin bir $\mathcal{G}$ ailesi için; $I, J \lhd R$, $I \in \mathcal{G}$ ve $I \subseteq J$ iken $J \in \mathcal{G}$ koşulu sağlanıyorsa $\mathcal{G}$ ailesine *yarıfiltre* denir (bkz. [27]).

Bölünebilir bir sağ Oka ailesi oluşturmanın etkili bir diğer yolu, iki yönlü ideallerin belirli ailelerini kullanmaktır. Bu yöntem, Önerme 4.5.12 ile verilecektir. Bir I_R sağ ideali için, I'da içerilen R'nin en büyük iki yönlü idealine I'nın *özü (core of I)* denir ve öz(I) ile gösterilir.

Bir I_R sağ ideali için öz$(I) = ann(R/I)$'dır.

Önteorem 4.5.11 [4, Lemma 6.14] *Bir R halkasının iki yönlü ideallerinin bir kümesi $\mathcal{G}$ olmak üzere*

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= \{I_R \subseteq R \mid I \supseteq J \text{ olacak biçimde } J \in \mathcal{G} \text{ vardır}\} \\ &= \{I_R \subseteq R \mid \text{öz}(I) \in \mathcal{G}\}\end{aligned}$$

ailesi bölünebilirdir.

İspat: Önce iki kümenin eşitliğini görmek gerekir. $J =$öz(I) seçilirse, $I \supseteq J$ olur. Diğer kapsama için $I \in \mathcal{F}$ olsun. O zaman, bir $J \in \mathcal{G}$ için $I \supseteq J$ olur. $\mathcal{G}$ bir yarıfiltre ve öz(I) iki yönlü bir ideal olduğundan öz$(I) \in \mathcal{G}$ elde edilir.

Şimdi $\mathcal{F}$ ailesinin bölünebilir olduğunu görmek için $I \in \mathcal{F}$ alınsın. O zaman en az bir $J \in \mathcal{G}$ için $I \supseteq J$ olur. Buradan, $a \in R$ için $aJ \subseteq J \subseteq I$ ve böylece $J \subseteq a^{-1}I$ olur. $\mathcal{F}$ bir yarıfiltre olduğundan $a^{-1}I \in \mathcal{F}$ elde edilir. □

$(P1)$ ile "iki yönlü ideallerin $\mathcal{G}$ ailesi, ikili çarpım altında kapalıdır ve R'yi içeren bir yarıfiltredir" özelliği temsil edilsin.

Değişmeli halkalarda, $(P1)$ özelliğini sağlayan bir $\mathcal{G}$ ailesinin Oka ailesi olduğu [27]'de gösterilmiştir. Burada, bu durumun değişmeli olmayan halkalardaki karşılığı verilecektir.

Önerme 4.5.12 [4, Proposition 6.15] *$\mathcal{G}$, bir R halkasındaki ideallerin $(P1)$ özelliğini sağlayan bir ailesi olsun. O zaman, $\mathcal{G}$ tarafından üretilen sağ ideallerin $\mathcal{F}$ yarıfiltresi bölünebilir bir sağ Oka ailesidir. Dolayısıyla, $P \in Max(\mathcal{F}')$ bir comonoform sağ idealdir.*

İspat: $\mathcal{F} = \{I_R \leq R \mid I \supseteq J$ olacak biçimde $J \in \mathcal{G}$ vardır$\}$ olsun ve $\mathcal{G}$ ailesi $(P1)$ özelliğini sağlasın. $\xi = \{M_R \mid ann(M) \in \mathcal{G}\}$ sınıfının genişleme altında kapalı olduğunu görmek amacıyla, L_R, M_R, N_R için $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ tam dizisi ve $L, N \in \xi$ alınsın. Buradan $ann(L), ann(N) \in \mathcal{G}$ olur. $\mathcal{G}$ ailesi $(P1)$ özelliğini sağladığından

$$ann(L).ann(N) \subseteq ann(M) \in \mathcal{G}$$

elde edilir:

$x \in ann(N)$ ve $y \in ann(L)$ için $Nx = 0$ ve $Ly = 0$'dır. $m \in M$ ise, $g(m) \in N$'dir. O zaman, $g(m)x = g(mx) = 0$ ve $mx \in$ Ç$ek(g)$ =Gör(f) olur. Dolayısıyla,

$f(l) = mx$ olacak biçimde en az bir $l \in L$ vardır. Öyleyse, $f(l)y = f(ly) = mxy = 0$ bulunur. Böylece, $xy \in ann(M)$ olur. Yani $ann(M) \supseteq ann(L).ann(N)$'dir. $\mathcal{G}$ bir yarıfiltre olduğundan $ann(M) \in \mathcal{G}$ ve dolayısıyla $M_R \in \xi$ elde edilir.

$ann(R/I) =$öz(I) olduğundan, $\mathfrak{C} := \xi \cap \mathfrak{M}_R^c$ için $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathfrak{C}}$ olduğu ispatlanırsa istenen sağlanır.

$I_R \in \mathcal{F}$ ise $I \supseteq J$ olacak biçimde bir $J \in \mathcal{G}$ vardır. öz(I) ideali I'nın kapsadığı en geniş ideal olduğundan öz$(I) \in \mathcal{G}$ elde edilir. Dolayısıyla, $ann(R/I) \in \mathcal{G}$ olup $R/I \in \xi$ ve böylece $R/I \in \mathfrak{C}$ bulunur. O halde, $I \in \mathcal{F}_{\mathfrak{C}}$'dir. Öte yandan, $I \in \mathcal{F}_{\mathfrak{C}}$ için $R/I \in \mathfrak{C}$ olur. Buradan, $R/I \in \xi$ ve böylece $ann(R/I) \in \mathcal{G}$'dir. Sonuçta, öz$(I) \in \mathcal{G}$ olup $I \in \mathcal{F}$ elde edilir.

O halde, $\mathcal{F}_{\mathfrak{C}}$ bir sağ Oka ailesi olduğundan $\mathcal{F}$ ailesi de bir sağ Oka ailesidir. Önteorem 4.5.11 ile, $\mathcal{F}$ bölünebilir olur. Teorem 4.5.4'ten de, $P \in Max(\mathcal{F}')$ comonoform sağ idealdir. □

Önerme 4.5.13 [4, Proposition 6.20] *Bir R halkası üzerindeki herhangi bir sağ Gabriel filtresi $\mathcal{F}$ bölünebilir bir sağ Oka ailesidir ve $P \in Max(\mathcal{F}')$ bir comonoform sağ idealdir.*

İspat: $\mathcal{F}$ bir sağ Gabriel filtre olsun. Tanım 2.7.1'den, $\mathcal{F}$'nin bölünebilir olduğu açıktır. $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ burulma sınıfı genişleme altında kapalı olduğundan, devirli $\mathcal{F}$-burulmalı modüllerden oluşan $\mathfrak{C} := \mathcal{T}_{\mathcal{F}} \cap \mathfrak{M}_R^c$ sınıfı da genişleme altında kapalıdır.

$I \in \mathcal{F} \Leftrightarrow R/I \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}} \Leftrightarrow R/I \in \mathfrak{C} \Leftrightarrow I \in \mathcal{F}_{\mathfrak{C}}$ olduğundan $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathfrak{C}}$ elde edilir. Dolayısıyla, Teorem 4.3.9 ile $\mathcal{F}$ bir sağ Oka ailedir. Ayrıca, Teorem 4.5.4'ten, $P \in Max(\mathcal{F}')$ bir comonoform sağ idealdir. □

Önerme 4.5.14 [4, Proposition 6.21] *$P_R \subsetneq R$ sağ ideali için aşağıdaki ifadeler denktir:*

(1) *Bir $\mathcal{F}$ sağ Gabriel filtresi için $P \in Max(\mathcal{F}')$'dür.*

(2) *$P \in Max(\mathcal{F}_p')$'dür.*

(3) *P bir comonoform sağ idealdir.*

İspat: (2) $\Rightarrow$ (1) Açıktır.

(1) $\Rightarrow$ (3) Teorem 4.5.13 ile istenen elde edilir.

(3) $\Rightarrow$ (2) P bir comonoform sağ ideal olsun. O zaman R/P modülü monoformdur. Önerme 2.6.7 ile, her $I \supsetneq P$ sağ ideali için $Hom(R/I, E(R/P)) = 0$ olur.

$\mathcal{F}_P = \{I_R \mid Hom(R/I, E(R/P) = 0\}$ sınıfı için $I \in \mathcal{F}_P$ iken $P \notin \mathcal{F}_P$'dir, çünkü

$$Hom(R/P, E(R/P)) \neq 0$$

dır. Ayrıca P'yi öz olarak kapsayan bir sağ ideal kesinlikle $\mathcal{F}_P$ içerisinde olacağından, P sağ ideali $\mathcal{F}_P$ içinde bulunmayanlar arasında maksimaldir. Böylece, $P \in Max(\mathcal{F}_P^{'})$ elde edilir. □

Sonuç 4.5.15 [4] *Her comonoform sağ ideal tamamen asal sağ idealdir.*

İspat: Verilen bir P_R comonoform sağ ideali için Önerme 4.5.14'ten $P \in Max(\mathcal{F}^{'})$ olacak şekilde bir $\mathcal{F}$ sağ Gabriel filtresi vardır. Önerme 4.5.13'ten $\mathcal{F}$ bir sağ Oka ailesi olur. Dolayısıyla, Teorem 4.2.5 ile P bir tamamen asal sağ idealdir. □

Önerme 4.5.16 [32, Proposition 2.7] *Bir R halkasının injektif bir E_R modülü verilsin. E modülünün bir maksimal nokta sıfırlayıcı sağ ideali comonoformdur.*

İspat: $\mathcal{F} = \{I_R \mid Hom(R/I, E) = 0\}$ sınıfı E tarafından eşüretilen bir sağ Gabriel filtresi olsun. Buradan, $\mathcal{F}^{'} = \{I_R \mid Hom(R/I, E) \neq 0\}$ olur. E'nin maksimal nokta sıfırlayıcılarının kümesinin $Max(\mathcal{F}^{'})$ olduğu kolayca görülebilir. Böylece, istenen sonuç Önerme 4.2.5'ten elde edilir. □

Örnek 4.5.17 [23] Bir R halkasının yoğun sağ ideallerinin kümesi $\mathcal{F}$ bir sağ Gabriel filtredir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \{I_R \mid I_R \leq_d R_R\} \\ &= \{I_R \mid Hom(R/I, E(R_R)) = 0\} \end{aligned}$$

olduğu gösterilmişti. Dolayısıyla, $\mathcal{F}$ bir sağ Oka ailesidir. Böylece, $P \in Max(\mathcal{F}^{'})$ comonoform bir sağ ideal olur.

Tekilsiz bir halka için geniş sağ idealler ile yoğun sağ idealler aynı olacağından $\mathcal{F} = \{I_R \mid I_R \leq_e R_R\}$ bir sağ Gabriel filtre ve dolayısıyla bir sağ Oka ailesi olur. Benzer şekilde, $P \in Max(\mathcal{F}^{'})$ bir comonoform sağ idealdir.

Örnek 4.5.18 [4, Example 6.24] S, R halkasında bir sağ Ore küme olsun. $\mathcal{F} = \{I_R \mid I \cap S \neq \emptyset\}$ bir sağ Gabriel filtredir:

• $I \in \mathcal{F}$ ve $J \supseteq I$ olsun. O zaman $I \cap S \neq \emptyset$'tur. Dolayısıyla $J \cap S \neq \emptyset$ olur ve böylece $J \in \mathcal{F}$ elde edilir.

• $I, J \in \mathcal{F}$ olsun. O zaman, $I \cap S \neq \emptyset$ ve $J \cap S \neq \emptyset$ olur. $x \in I \cap S$ ve $y \in J \cap S$ için S bir Ore küme olduğundan, $xr^{'} = ys^{'}$ olacak biçimde bir $r^{'} \in R$ ve $s^{'} \in S$ vardır. Dolayısıyla; $xr^{'} \in I$, $ys^{'} \in J$ ve $ys^{'} \in S$ elde edilir. O halde, $ys^{'} \in I \cap J \cap S$ olup $(I \cap J) \cap S \neq \emptyset$ bulunur. Sonuç olarak, $I \cap J \in \mathcal{F}$'dir.

• $I \in \mathcal{F}$ ve $x \in R$ olsun. O zaman $I \cap S \neq \emptyset$ olur. $y \in I \cap S$ alınsın. Buradan S bir Ore küme olduğundan $yR \cap xS \neq \emptyset$'tur. Öyleyse, $yr^{'} = xs^{'}$ olacak biçimde bir $r^{'} \in R$ ve $s^{'} \in S$ vardır. $yr^{'} \in I$ olduğundan $xs^{'} \in I$'dır ve böylece $s^{'} \in x^{-1}I$ elde edilir. Dolayısıyla $x^{-1}I \cap S \neq \emptyset$ olup $x^{-1}I \in \mathcal{F}$ bulunur.

• $I \in \mathcal{F}$ ve her $x \in I$ için $x^{-1}J \in \mathcal{F}$ olacak biçimde $J_R \subseteq R$ ele alınsın. O zaman $I \cap S \neq \emptyset$ ve her $x \in I$ için $(x^{-1}J) \cap S \neq \emptyset$ dır.

$x \in I \cap S$ için $xr \in J$ olacak biçimde bir $r \in S$ vardır. Buradan $r \in S$ ve $x \in S$'dir. S çarpımsal kapalı olduğundan $xr \in S$ elde edilir. Böylece, $J \cap S \neq \emptyset$ olur ve $J \in \mathcal{F}$ elde edilir.

Sonuç olarak, $\mathcal{F}$ bir sağ Gabriel filtredir. O halde, $\mathcal{F}$ bölünebilir bir sağ Oka ailesidir ve $P \in Max(\mathcal{F}^{'})$ bir comonoform sağ ideal olur.

5 OKA AİLELERİ YAKLAŞIMIYLA COHEN VE KAPLANSKY TEOREMLERİNİN GENELLEMELERİ

Bu bölümde, bir halkanın bir özelliğinin hangi durumlarda "asal sağ idealleri" ile test edilebileceği araştırılacaktır. Bu doğrultuda, Cohen ve Kaplansky Teoremlerinin genellemeleri bir önceki bölümde detaylı olarak incelenen Oka aileleri yardımıyla verilecektir. Bu bölüm Reyes'in [5] çalışmasının bir derlemesinden oluşmaktadır.

5.1 Nokta Sıfırlayıcı Kümeler

Bu alt bölüm, değişmeli olmayan halkalarda sağ ideallerin belirli özelliklerini test etmek için oluşturulan "nokta sıfırlayıcı kümeler"e adanmıştır. Sonraki alt bölümlerde, ana teoremleri ifade etmek için bu kavrama ihtiyaç vardır.

Bir M_R modülünün *nokta sıfırlayıcısı* sıfırdan farklı bir $m \in M$ elemanının sıfırlayıcısıdır. Aşağıdaki tanımda, *nokta sıfırlayıcı küme* kavramı tanıtılmaktadır.

Tanım 5.1.1 [5, Definition 3.1] Bir R halkası için $\mathcal{C}$, sağ R-modüllerin ve $\mathcal{S}$ de R'nin sağ ideallerinin bir sınıfı olsun. Sıfırdan farklı her $M \in \mathcal{C}$ modülünün $\mathcal{S}$ kümesi içinde bir nokta sıfırlayıcı sağ ideali varsa, $\mathcal{S}$ kümesine $\mathcal{C}$ için bir *nokta sıfırlayıcı küme* denir.

Tüm sağ R-modüllerin nokta sıfırlayıcı kümesine R halkasının *(sağ) nokta sıfırlayıcı kümesi* denir. Tüm Noether sağ R-modüllerin nokta sıfırlayıcı kümesine R halkasının *(sağ) Noether nokta sıfırlayıcı kümesi* denir.

Uyarı 5.1.2 [5] Bir nokta sıfırlayıcı kümenin R'yi bulundurması gerekmez, çünkü nokta sıfırlayıcılar her zaman öz sağ ideallerdir. Gerçekten, sıfırdan farklı bir $m \in M$ için $ann(m) = R$ olsa, $1 \in ann(m)$ elde edilir. Bu durumda, $m.1 = 0$ çelişkisi bulunur. Dolayısıyla, $ann(m) \lneq R$ olmalıdır.

Uyarı 5.1.3 [5, Remark 3.2] Sağ R-modüllerin bir $\mathcal{C}$ sınıfının bir nokta sıfırlayıcı kümesi $\mathcal{S}$'nin tanımlanmasının arkasında yatan fikir, $\mathcal{S}$ kümesinin $\mathcal{C}$'deki sıfırdan farklı her modülünün bir nokta sıfırlayıcısını içerecek kadar "büyük" olmasıdır. Özel olarak, yukarıda veilen tanımda $\mathcal{S}$'deki her sağ idealin $\mathcal{C}$'deki bir modülün nokta sıfırlayıcısı olması gerekmez. Bu, şu anlama gelmektedir: $\mathcal{S}'$ sağ ideallerin başka bir kümesi ve

$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}'$ ise $\mathcal{S}'$ kümesi de $\mathcal{C}$ için bir nokta sıfırlayıcı küme olur. Diğer taraftan, $\mathcal{C}_0 \subseteq \mathcal{C}$ modüllerin bir alt sınıfı ise $\mathcal{S}$ kümesi $\mathcal{C}_0$ için de bir nokta sıfırlayıcı kümedir.

Uyarı 5.1.4 [5, Remark 3.3] Bir R halkasında sağ ideallerin bir $\mathcal{S}$ sınıfının, sağ modüllerin bir $\mathcal{C}$ sınıfı için bir nokta sıfırlayıcı küme olması için gerek ve yeter koşul sıfırdan farklı her $M_R \in \mathcal{C}$ için $R/I \hookrightarrow M$ koşulunu sağlayan en az bir $I \in \mathcal{S}$ öz sağ idealinin bulunmasıdır.

Aşağıdaki sonuç, bir R halkasının Noether nokta sıfırlayıcı kümelerinin, Noether sağ R-modüller üzerindeki kontrolünü göstermektedir.

Önteorem 5.1.5 [5, Lemma 3.4] *Bir R halkasında sağ ideallerden oluşan bir $\mathcal{S}$ kümesinin Noether nokta sıfırlayıcı küme olması için gerek ve yeter koşul sıfırdan farklı her M_R Noether modülünün sonlu bir $0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \cdots \subsetneq M_n = M$ filtrasyonunun ve her $1 \leq j \leq n$ için $M_j/M_{j-1} \cong R/I_j$ koşulunu sağlayan bir $I_j \in \mathcal{S}$ sağ idealinin var olmasıdır.*

İspat: $(\Rightarrow)$ M_R sıfırdan farklı bir Noether modül olsun. Yukarıda bahsedilen filtrasyon yapısı $\mathcal{S}$-filtrasyon olarak adlandırılsın. $\mathcal{X} = \{N \leq M \mid N$ nin $\mathcal{S}$-filtrasyonu vardır$\}$ kümesi ele alınsın. Sıfırdan farklı bir $m \in M$ için $R/ann(m) \cong mR$ ve $ann(m) \in \mathcal{S}$ olur. Dolayısıyla, $N = mR \in \mathcal{X}$ elde edilir ve böylece $\mathcal{X}$ boştan farklıdır. M bir Noether modül olduğundan $\mathcal{X}$ kümesinin bir maksimal elemanı vardır. Bu elemanın $N \neq M$ olduğu kabul edilsin. O halde, $0 \neq M/N$ modülü de Noether olur. Hipotez ile, sıfırdan farklı bir $\overline{x} = x + N \in M/N$ için $ann(\overline{x}) = I \in \mathcal{S}$'dir ve I bir öz sağ idealdir. Dolayısıyla, $R/I = R/ann(\overline{x}) \cong \overline{x}R \subseteq M/N$'dir. Buradan, $xR + N = N'$ modülünün de bir $\mathcal{S}$-filtrasyona sahip olduğu görülür. Böylece $N' \in \mathcal{X}$ olur. Ancak bu durum N'nin maksimalliği ile çelişir. Dolayısıyla, $N = M \in \mathcal{X}$'dir.

$(\Leftarrow)$ M_R sıfırdan farklı bir Noether modül olsun. Hipotez ile, $j = 1$ için $R/I_1 \cong M_1/0 = M_1$ olacak biçimde bir $I_1 \in \mathcal{S}$ vardır. $R/I_1 \cong M_1 \hookrightarrow M$ olduğundan, Uyarı 5.1.4 ile $\mathcal{S}$ kümesi bir Noether nokta sıfırlayıcı kümedir. $\square$

Tanım 5.1.6 [5, Definition 3.5] Bir R halkasındaki sağ ideallerin bir kümesi $\mathcal{S}$ olsun. Her $I \in \mathcal{S}$ için R/I'nın her nokta sıfırlayıcısı $\mathcal{S}$'de ise, $\mathcal{S}$ kümesine *nokta sıfırlayıcılar altında kapalıdır* denir.

Önerme 5.1.7 [5] *Sağ ideallerin bir* $\mathcal{S}$ *kümesinin nokta sıfırlayıcı altında kapalı olması için gerek ve yeter koşul* $I \in \mathcal{S}$ *ve* $x \in R \setminus I$ *iken* $x^{-1}I \in \mathcal{S}$ *olmasıdır.*

Tanım 5.1.8 [5] $\mathcal{S}$, bir R halkasının sağ ideallerinin bir kümesi ve $\mathcal{C}$, sağ R-modüllerin bir sınıfı olsun. $\mathcal{S}, \mathcal{C}$ için bir nokta sıfırlayıcı küme ve $\mathcal{S}$ nokta sıfırlayıcılar altında kapalı ise $\mathcal{S}$ kümesine $\mathcal{C}$'nin *kapalı nokta sıfırlayıcı kümesi* denir.

Aşağıdaki sonuç, kapalı nokta sıfırlayıcı kümelerin önemini açıklamaktadır.

Önteorem 5.1.9 [5, Lemma 3.6] *$\mathcal{C}$, bir R halkası üzerindeki sağ modüllerin alt modüle geçiş altında kapalı bir sınıfı olsun. $\mathcal{S}$, $\mathcal{C}$ nin kapalı bir nokta sıfırlayıcı kümesi ise, $\mathcal{C}$'nin başka bir nokta sıfırlayıcı kümesi $\mathcal{S}_1$ için $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}$ kümesi de bir nokta sıfırlayıcı kümedir.*

İspat: Sıfırdan farklı bir $M_R \in \mathcal{C}$ verilsin. $\mathcal{S}, \mathcal{C}$ için bir nokta sıfırlayıcı küme olduğundan sıfırdan farklı bir $m \in M$ için $I = ann(m) \in \mathcal{S}$'dir. Hipotez ile, $mR \in \mathcal{C}$'dir. $\mathcal{S}_1$ kümesi de $\mathcal{C}$ için bir nokta sıfırlayıcı küme olduğundan, sıfırdan farklı bir $mr \in mR$ için $ann(mr) \in \mathcal{S}_1$'dir. $R/I = R/ann(m) \cong mR$ ve $\mathcal{S}$ kapalı bir nokta sıfırlayıcı küme olduğundan $ann(mr) \in \mathcal{S}$'dir. Böylece, $ann(mr) \in \mathcal{S} \cap \mathcal{S}_1$ elde edilir. Bu da $\mathcal{S} \cap \mathcal{S}_1$ kümesinin de $\mathcal{C}$ için bir nokta sıfırlayıcı küme olduğunu ispatlar. $\square$

Noether nokta sıfırlayıcı kümelerin en bilinen örneği, değişmeli halkalardaki tüm asal ideallerin kümesidir. Aslında, Önerme 5.1.11'de gösterileceği gibi, değişmeli halkalarda her Noether nokta sıfırlayıcı küme asal ideallerin kümesi olarak yazılabilir.

Önteorem 5.1.10 [14, Example 3K] Değişmeli olmayan bir R halkası için $P_1, \ldots, P_n$ idealleri bir A_R modülünün farklı ilişkili asal idealleri olsun. Her i için $ann_R(B_i) = P_i$ olacak biçimde A_R modülünün B_i asal alt modülleri ele alınsın. Bu durumda, $B_1, \ldots, B_n$ alt modülleri dik toplanabilirdir. Dahası, bir Noether modülün sonlu tane ilişkili asal alt modülü vardır.

Önerme 5.1.11 [5, Proposition 3.7] *Değişmeli bir R halkası için tüm asal ideallerin oluşturduğu küme $Spec(R)$ bir kapalı Noether nokta sıfırlayıcı kümedir. Ayrıca, R halkasının bir Noether nokta sıfırlayıcı kümesi $\mathcal{S}$ için $\mathcal{S} \cap Spec(R)$ kümesi de asal ideallerden oluşan bir Noether nokta sıfırlayıcı kümedir.*

İspat: $Spec(R)$ kümesi bir Noether nokta sıfırlayıcı kümedir, çünkü değişmeli bir halkadaki ilişkili asal kavramı ile değişmeli olmayan halkalardaki ilişkili asal kavramı birbirlerine karşılık gelir ve Önteorem 5.1.10 ile her Noether modülün ilişkili asal ideali vardır. Ayrıca, bu küme kapalıdır, çünkü $P \in Spec(R)$ olmak üzere her sıfırdan farklı $r + P \in R/P$ için $ann(r + P) = P$ dir. Gerçekten, $x \in ann(r + P)$ için $rx \in P$ olur. P bir asal ideal olduğundan, $r \in P$ veya $x \in P$ olur. Ancak $r \notin P$ olduğundan, $x \in P$ dir. Buradan, $ann(r + P) \subseteq P$ olur. Dolayısıyla, Önteorem 5.1.9 ile $\mathcal{S} \cap Spec(R)$ bir Noether nokta sıfırlayıcı küme olur. $\square$

Bu anlamda, bir halkanın sağ Noether nokta sıfırlayıcı kümeleri, değişmeli halkalardaki asal spektrum kavramının genellemesidir. Ancak değişmeli halkalarda, $Spec(R)$ kümesini kapsayan ideallerin bir $\mathcal{S}$ kümesi de Noether nokta sıfırlayıcı küme olur. Aslında, Önerme 5.1.11 ile, değişmeli bir R halkasının, en küçük Noether nokta sıfırlayıcı olan $\mathcal{S}_0 := \{P \in Spec(R) \mid R/P \text{ Noether}\}$ kümesi vardır.

Önerme 5.1.12 [5, p. 940] *Değişmeli bir R halkasının ideallerinden oluşan $\mathcal{S}$ kümesinin bir Noether nokta sıfırlayıcı küme olması için gerek ve yeter koşul*

$$\mathcal{S}_0 := \{P \in Spec(R) \mid R/P \ \textit{Noether}\} \subseteq \mathcal{S}$$

olmasıdır.

İspat: ($\Rightarrow$) $\mathcal{S}_0 = \{P \in Spec(R) \mid R/P \text{ Noether}\}$ olsun. $\mathcal{S}$ bir Noether nokta sıfırlayıcı küme olmak üzere, Önerme 5.1.11 ile, $\mathcal{S} \cap Spec(R)$ bir Noether nokta sıfırlayıcı kümedir. $\mathcal{S}_0$ kümesinin elemanlarının yapısından, $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S} \cap Spec(R)$ olur. Dolayısıyla, $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}$ olur.

($\Leftarrow$) $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}$ olsun. Sıfırdan farklı bir M_R Noether modül alınsın. Sıfırdan farklı bir $m \in M$ için $mR \subseteq M$ alt modülü de Noether olur. $R/ann(m) \cong mR$ olduğundan $R/ann(m)$ de bir Noether modüldür ve böylece $ann(m) \in \mathcal{S}_0$'dır. Hipotezden, $ann(m) \in \mathcal{S}$'dir. Böylece, $\mathcal{S}$ bir Noether nokta sıfırlayıcı küme olur. $\square$

Aşağıda bazı nokta sıfırlayıcı küme örnekleri verilmiştir.

Örnek 5.1.13 [5] (1) Bir R halkasındaki tüm sağ ideallerin kümesi, her sağ R-modül sınıfı için bir nokta sıfırlayıcı kümedir.

(2) Bir R halkasındaki maksimal sağ ideallerin ailesi, sonlu uzunluklu sağ R-modüllerin sınıfı veya daha geniş olan Artin sağ R-modüllerin sınıfı için bir nokta sıfırlayıcı kümedir. Daha özel olarak, bir $\{m_i\}$ maksimal sağ idealler kümesi için izomorfizma farkıyla R/m_i'nin temsil ettiği tüm izomorf sınıfları almak yeterlidir.

Örnek 5.1.14 [5, Example 3.8] Bir R halkasının sağ yarı-Artin olması için gerek ve yeter koşul sıfırdan farklı her M_R sağ R-modülü için $Soc(M_R) \neq 0$ olmasıdır. Dolayısıyla, böyle bir R halkası için maksimal sağ ideallerin kümesi bir (Noether) nokta sıfırlayıcı küme olur.

Örnek 5.1.15 [5, Example 3.9] R bir sol tam halka olsun. Dolayısıyla, $R/J(R)$ yarıbasit olur ve $J(R)$ bir sol T-üstelsıfır idealdir. Bass Teoremi ile, böyle bir halka üzerinde her sağ R-modül devirli alt modülleri üzerinde artan zincir koşulu sağlar. Dolayısıyla, sıfırdan farklı her M_R modülü için $Soc(M) \neq 0$'dır ve böyle bir halka sağ yarı-Artin olur. R'nin izomorfizma farkıyla sonlu çoklukta basit modülü vardır. $\mathcal{S} = \{m_1, \ldots, m_n\}$ maksimal sağ ideallerin kümesi olsun ve R/m_i, basit sağ R-modüllerin bir izomorfizma sınıfını temsil etsin. Uyarı 5.1.4'ten, $\mathcal{S}$ kümesi herhangi bir sağ modül sınıfı $\mathcal{C}$ için bir nokta sıfırlayıcı kümedir. Dolayısıyla, $\mathcal{S}$ kümesi R halkasının bir sağ Noether nokta sıfırlayıcı kümesi olur.

Değişmeli halkalarda asal spektrumun bir Noether nokta sıfırlayıcı küme olduğu sonucu direkt genelleştirilirse, değişmeli olmayan halkalar için aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Önerme 5.1.16 [5, Proposition 3.10] *Bir R halkasındaki tamamen asal sağ ideallerin kümesi bir Noether nokta sıfırlayıcı kümedir.*

İspat: M_R sıfırdan farklı Noether bir modül olsun. Sıfırdan farklı bir $m \in M$ için $R/ann(m) \cong mR \hookrightarrow M$ olduğundan $R/ann(m)$ Noether olur. $I := ann(m)$ olsun. $\mathcal{A} = \{P_R \subseteq R \mid I \subseteq P$ ve P, M nin bir nokta sıfırlayıcısı$\}$ kümesi ele alınsın. $I \in \mathcal{A}$ olduğu açıktır. Öte yandan, $\mathcal{B} = \{P/I \subseteq R/I \mid P$, M'nin nokta sıfırlayıcı kümesi$\}$ alınsın. $I = P$ için $0 \in \mathcal{B}$ olur ve böylece $\mathcal{B}$ kümesi de boştan farklıdır. R/I Noether olduğu için boştan farklı sağ ideallerinin bir kümesinin bir maksimali vardır. O halde, $\mathcal{B}$ bir maksimal içerir. Bu elemena P/I denirse P, $\mathcal{A}$ kümesinin maksimali olur, çünkü aksi takdirde $I \subseteq P \subsetneq P'$ olacak biçimde bir P' sağ ideali var olur ve buradan $P/I \subsetneq P'/I$

olacağından, P/I'nın maksimalliği ile çelişki elde edilir. Dolayısıyla, M'nin $I \subseteq P_R$ olacak biçimde bir maksimal nokta sıfırlayıcı sağ ideali P_R bulunur. Önerme 4.4.2'den, P bir tamamen asal sağ ideal olur. $\square$

Önerme 5.1.17 [5, Proposition 3.11] *Bir R halkası için comonoform sağ ideallerin kümesi bir kapalı Noether nokta sıfırlayıcı kümedir.*

İspat: $\mathcal{S} = \{I_R \leq R_R \mid I_R \text{ comonoform sağ ideal}\}$ olsun. Önce, $\mathcal{S}$ kümesinin bir Noether nokta sıfırlayıcı küme olduğu gösterilecektir. M_R sıfırdan farklı bir Noether modül olsun.

$$\mathcal{A} = \{L \subseteq M \mid N \hookrightarrow M \text{ olacak şekilde bir } 0 \neq N \subseteq M/L \text{ devirli alt modülü vardır}\}$$

kümesi boştan farklıdır. M_R Noether olduğundan, $\mathcal{S}$ kümesinin maksimal bir L_R elemanı vardır. Dolayısıyla $N/L \hookrightarrow M$ olacak şekilde bir $0 \neq N/L \subseteq M/L$ devirli alt modülü vardır. Amaç, N/L alt modülünün monoform olduğunu görmektir. Dolayısıyla, Önerme 2.6.7'den, sıfırdan farklı bir $K/L \subseteq N/L$ için sıfırdan farklı herhangi bir $f : K/L \to N/L$ homomorfizmasının birebir olduğunu görmek gerekir. $T \subseteq K$ olmak üzere, Çek$(f) = T/L \neq 0$ olsun. 1. İzomorfizma Teoremi'nden, $0 \neq \frac{K/L}{T/L} = K/T \cong$Gör$(f) \subseteq N/L$'dir. Buradan, M/T'nin M içine gömülebilen bir devirli alt modülü vardır. O halde, $T \in \mathcal{A}$'dır. Bu ise L'nin maksimalliği ile çelişeceğinden, $T = L$ ve dolayısıyla Çek$(f) = 0$ elde edilir. O halde, f birebirdir. Böylece, N/L alt modülü monoform olur. N/L devirli olduğundan, bir $I_R \in \mathcal{S}$ için $N \cong R/I$'dır. Uyarı 5.1.4'ten, $\mathcal{S}$ bir Noether nokta sıfırlayıcı kümedir.

Şimdi, $\mathcal{S}$'nin nokta sıfırlayıcılar altında kapalı olduğu gösterilecektir. Bunun için, her $I \in \mathcal{S}$ için R/I'nın nokta sıfırlayıcılarının $\mathcal{S}$ içinde olduğunu görmek gerekir. Dolayısıyla, sıfırdan farklı bir $\overline{r} \in R/I$ için $ann(\overline{r})$ sağ idealinin comonoform olduğunu göstermek yeterlidir. $R/ann_R(\overline{r}) \cong \overline{r}R \hookrightarrow R/I$ olur. R/I monoform olduğundan, Önerme 2.6.13 gereğince, $R/ann_R(\overline{r})$ modülü de monoform olmalıdır. Böylece, $ann_R(\overline{r})$ comonoform olur ve istenen elde edilir. Böylece comonoform sağ ideallerin kümesi kapalı bir Noether nokta sıfırlayıcı küme olur. $\square$

Önerme 5.1.18 [5, Proposition 3.15] *Bir R halkasında tüm eşkritik sağ ideallerin kümesi, Krull boyutu olan sağ R-modüllerin sınıfı için bir kapalı nokta sıfırlayıcı kümedir. Özel olarak, bu küme R için kapalı bir Noether nokta sıfırlayıcı kümedir.*

İspat: Önerme 2.4.20 ile Krull boyutu olan sıfırdan farklı her modülün kritik bir alt modülü vardır. Dolayısıyla, Uyarı 5.1.4'ten R'nin eşkritik sağ ideallerinin kümesi Krull boyutu olan sağ R-modüllerin sınıfı için bir nokta sıfırlayıcı kümedir.

Önerme 2.4.15 ile, her Noether modülün Krull boyutu olduğundan, Uyarı 5.1.3'ten aynı küme R için bir sağ Noether nokta sıfırlayıcı küme olur. Önerme 2.6.18(1)'den, bu kümenin nokta sıfırlayıcılar altında kapalı olduğu elde edilir. □

Şimdiye kadar incelenen sağ ideallerin kümeleri arasında aşağıdaki kapsama ilişkileri verilebilir:

$\{$Tamamen Asal$\} \supseteq \{$Comonoform$\} \supseteq \{$Eşkritik$\} \supseteq \{$Maksimal$\}$

Değişmeli bir halkada, ilk iki küme Sonuç 4.1.6 ve Sonuç 2.6.17'den, R halkasının asal idealleri kümesine karşılık gelir. Ayrıca, değişmeli bir R halkasının Krull boyutu varsa (örneğin, R bir Noether halka ise), Önerme 2.6.19'dan üçüncü küme de asal idealler kümesine karşılık gelir. Ancak üçüncü kapsamanın öz olacağına dair pek çok örnek verilebilir. Örneğin, Krull boyutu sıfırdan büyük olan değişmeli bir R halkasında, eşkritik olup maksimal olmayan bir ideal vardır. Aşağıda, Noether bir halka üzerinde bile ilk iki kapsamanın da öz olduğu bir örnek verilecektir.

Örnek 5.1.19 [5, Example 3.17] k bir bölümlü halka ve $a, b, c, d, e \in k$ olmak üzere R halkası

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

formunda olan matrislerden oluşan bir halka olsun. O zaman $J(R)=\begin{pmatrix} 0 & k & k \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$'dır. Bu durumda, R halkasının izomorfizma farkıyla iki tane basit sağ modülü vardır. Bu modüller, a ile sağdan çarpma etkisi ile verilen $S_1 = k$ ve d ile sağdan çarpma etkisi ile verilen $S_2 = k$ olarak görülebilir.

$$P_0 := \{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix} \} \subseteq P_1 := \{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix} \} \subseteq P_2 := \{ \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix} \}$$

sağ idealleri göz önüne alınsın.

$V := R/P_0 =$ devirli modülü, $\begin{pmatrix} k & k & k \end{pmatrix}_R$ satır uzayına doğal sağ R-etkisi ile izomorftur. $i = 1, 2$ için $V_i := P_i/P_0$ olmak üzere

$$V_1 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & k \end{pmatrix}_R \text{ ve } V_2 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & k & k \end{pmatrix}_R$$

eşlemesi yapılabilir. Ayrıca, V'nin alt modülleri sadece $0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq V$'dir ve dolayısıyla, bu V'nin tek kompozisyon serisidir. Böylece, $V_2/V_1 \cong V_1 \cong S_2$ ve $V/V_2 \cong S_1$ olduğu görülür.

<u>İddia 1</u>: P_0 comonoform olmayan tamamen asal bir sağ idealdir:

P_0'ın tamamen asal sağ bir ideal olduğunu görmek için $V = R/P_0$'ın sıfırdan farklı her endomorfizmasının birebir olduğu ispatlanmalıdır.

V'nin öz faktörleri V/V_1 ve V/V_2'dir. Sıfırdan farklı bir $f : V \to V$ için $V/\text{Ç}ek(f)$ faktörü V'nin bir alt modülüne izomorftur. $\text{Ç}ek(f) = V_1$ veya $\text{Ç}ek(f) = V_2$ veya $\text{Ç}ek(f) = 0$ olur. $\text{Ç}ek(f) = 0$ ise f birebir olur ve istenen elde edilir. $\text{Ç}ek(f) = V_1$ ise $V/V_1 \cong\subseteq V$ olacağından, $V/V_1 \cong V_1$ veya $V/V_1 \cong V_2$ veya $V/V_1 \cong V$ sağlanır. $V/V_1 \cong V$ olamaz, çünkü V'nin kompozisyon uzunluğu üç iken V/V_1'in kompozisyon uzunluğu ikidir. Benzer şekilde, $V/V_1 \cong V_1$ olamaz, çünkü V_1'in kompozisyon uzunluğu 1'dir. $V/V_1 \cong V_2$ olamaz, çünkü her ikisinin kompozisyon uzunluğu aynı olduğu halde kompozisyon faktörleri izomorf değildir. $\text{Ç}ek(f) = V_2$ olması durumunda da benzer çelişkiler elde edilir. Sonuç olarak V'nin öz faktörleri V içine gömülemez ve dolayısıyla P_0 tamamen asal bir sağ ideal olur.

P_0'ın comonoform olmadığını göstermek için

$$Soc(V) = V_1 \cong V_2/V_1 = Soc(V/V_1)$$

göz önüne alınsın. Önteorem 2.6.22'den, V monoform değildir. Böylece, P_0 bir comonoform sağ ideal değildir.

<u>İddia 2:</u> P_1 eşkritik olmayan bir comonoform sağ idealdir:

Artin halkaların Krull boyutu 0'dır. Bir Artin halka üzerindeki sonlu üretilmiş bir modül de Artin olacağından, devirli modülün de Krull boyutunun 0 olduğu söylenebilir, yani 0-kritik bir modüldür. Dolayısıyla, basit olması gerekir. Böylece, sağ Artin bir halka içindeki eşkritik bir sağ ideal maksimal olmak zorundadır. Ancak, $P_1 \subseteq P_2$ olduğundan P_1 maksimal değildir, dolayısıyla eşkritik değildir.

$R/P_1 \cong V/V_1$'in tek kompozisyon serisinin $0 \subseteq V_2/V_1 \subseteq V/V_1$ olduğu bilinmektedir. V/V_1'in öz faktörü V/V_2'dir ve $Soc(V/V_1) = V_2/V_1$ modülü V/V_2 içine gömülmez. Önteorem 2.6.22(3)'ten, R/P_1 monoform olur. Böylece, P_1 bir comonoform sağ idealdir.

Bu örnek, aynı zamanda tamamen asal sağ ideallerin kümesinin nokta sıfırlayıcılar altında her zaman kapalı olması gerekmediğini de gösterir. V'nin V_2 alt modülü ele alınsın. $V_2/V_1 \cong S_2$ ve S_2 bir basit modül olduğundan, bir $x \in V_2$ için $V_2 = xR + V_1$ olarak yazılabilir. V_2'nin alt modülleri V_1, 0 ve kendisidir. Bu durumda, $xR = V_2$ olmak zorundadır, yani V_2 bir devirli modüldür. Öte yandan, $V_2/V_1 \cong V_1$ olduğundan, V_2'nin sıfırdan farklı birebir olmayan bir endomorfizması mevcuttur. Ayrıca, $V_2 = xR \cong R/ann(x)$ olduğundan, Önerme 4.1.13 ile, $ann(x)$ bir tamamen asal ideal değildir. Dolayısıyla, tamamen asal sağ idealler kümesi nokta sıfırlayıcılar altında kapalı olmak zorunda değildir.

5.2 Nokta Sıfırlayıcı Küme Teoremi ve Cohen Teoremi

Nokta sıfırlayıcı küme teoremi, sağ ideallerin bir $\mathcal{F}_0$ ailesinin, sağ ideallerin ikinci bir ailesi $\mathcal{F}$ içinde hangi koşullar altında bulunabileceğini ifade eder.

Değişmeli cebirde önemli sonuçlar, her asal ideal belirli bir özelliği sağlarken ne zaman bütün ideallerin de o özelliği sağlayacağını ifade eder. Daha önce de belirtildiği gibi Cohen ve Kaplansky Teoremleri, Oka aileleri ve Asal İdeal Prensibi yardımıyla değişmeli olmayan halkalara genelleştirilmiştir. Burada işe yarayan araç "Asal İdeal Prensibi Tümleyeni" olmuştur. Bu alt bölümün amacı, herhangi bir nokta sıfırlayıcı kümeyi ele alarak Asal İdeal Prensibi Tümleyeni'ni geliştirmektir.

Teorem 5.2.1 [5, Theorem 4.1] (Nokta Sıfırlayıcı Küme Teoremi) *$\mathcal{F}$, bir R halkasının bir sağ Oka ailesi ve $\mathcal{F}'$ içindeki sağ ideallerin boştan farklı her zincirinin $\mathcal{F}'$ içinde kapsamaya göre bir üst sınırı olsun.*

(1) *$\mathcal{F}_0$, bir R halkasındaki sağ ideallerin bir yarıfiltresi olsun. Eğer $\mathcal{F}$,*

$$\{R/I \mid I_R \in Max(\mathcal{F}') \cap \mathcal{F}_0\}$$

modül sınıfı için bir nokta sıfırlayıcı küme ise, $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$'dir.

(2) *Bir* $J_R \subseteq R$ *sağ ideali için* $\mathcal{F}$, $I \in Max(\mathcal{F}')$ *ve* $I \supseteq J$ *(sırasıyla,* $I \supsetneq J$*) olacak biçimdeki* R/I *modüllerinin bir sınıfının bir nokta sıfırlayıcı kümesi ise,* J*'yi (sırasıyla, öz olarak) içeren tüm sağ idealler* $\mathcal{F}$ *içindedir.*

(3) $\mathcal{F}$, $\{R/I \mid I_R \in Max(\mathcal{F}')\}$ *modül sınıfı için bir nokta sıfırlayıcı küme ise,* $\mathcal{F}$ *kümesi* R *içindeki tüm sağ ideallerden oluşur.*

İspat: (1) Bir $I_0 \in \mathcal{F}_0 \setminus \mathcal{F}$, yani $I_0 \in \mathcal{F}'$ olduğu kabul edilsin. O zaman,

$$\mathcal{A} = \{I \in \mathcal{F}' \mid I_0 \subseteq I\}$$

ailesi ele alınsın. $I_0 \in \mathcal{A}$ olduğundan, $\mathcal{A} \neq \emptyset$ olur. $\mathcal{F}'$ üzerindeki kabullerden $\mathcal{A}$ kümesi üstten sınırlıdır. Dolayısıyla, Zorn Önteoremi'nden $\mathcal{A}$ kümesinin bir maksimal elemanı vardır. Yani $I \supseteq I_0$ olacak biçimde bir $I \in Max(\mathcal{F}')$ bulunabilir. Dolayısıyla, $\mathcal{F}_0$ yarıfiltre olduğundan, $I \in \mathcal{F}_0$'dır. O halde, $I \in Max(\mathcal{F}') \cap \mathcal{F}_0$ olur. Öyleyse, $ann(a+I) = a^{-1}I \in \mathcal{F}$ olacak biçimde en az bir $a+I \in R/I$ vardır. Öte yandan, $a+I$ sıfırdan farklı olduğundan $a \notin I$'dır. Buradan, $I + aR \supsetneq I$ olur. I'nın maksimalliğinden $I + aR \in \mathcal{F}$ elde edilir. $\mathcal{F}$ bir sağ Oka ailesi olduğundan $I \in \mathcal{F}$ çelişkisi elde edilir. O halde, $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ olmalıdır.

(2) $\mathcal{F}_0$ olarak J'yi içeren tüm sağ idealler alınırsa, (1)'den istenen elde edilir.

(3) $\mathcal{F}_0$ olarak R'nin tüm sağ idealleri alınırsa, (1)'den istenen elde edilir. □

Bir değişmeli halka üzerindeki sonlu üretilmiş her Artin modülün sonlu uzunluklu olduğu iyi bilinen bir sonuçtur. Ancak Örnek 2.3.20'den, değişmeli olmayan halkalar üzerinde sonlu uzunluklu olmayan devirli Artin modüllerin varlığı bilinmektedir. Aşağıdaki sonuçta, Teorem 5.2.1'in yardımıyla, bir halka üzerindeki sonlu üretilmiş Artin sağ modüllerin sonlu uzunlukta olması için bir yeter koşul verilmektedir.

Önerme 5.2.2 [5, Proposition 4.2] *Bir* R *halkasındaki tüm maksimal sağ idealler sonlu üretilmiş ise, her sonlu üretilmiş Artin sağ* R*-modül sonlu uzunlukludur.*

İspat: x_1R ve x_2R devirli modülleri için $0 \to x_1R \xrightarrow{f} x_1R + x_2R \to \frac{x_1R+x_2R}{x_1R} \to 0$ tam dizisi ele alınsın. Burada x_1R ve $\frac{x_1R+x_2R}{x_1R}$ sonlu uzunluklu ise, $x_1R + x_2R$ de sonlu uzunluklu olur. Dolayısıyla her devirli Artin sağ R-modülün sonlu uzunluklu olduğunu göstermek yeterlidir.

$\mathcal{F}_0 = \{I_R \mid R/I \text{ sağ Artin}\}$ bir yarıfiltre ve $\mathcal{F} = \{I_R \mid R/I \text{ sonlu uzunlukludur}\}$ ailesi bir sağ Oka ailesidir. Sıfırdan farklı devirli her Artin modülün bir basit alt modülü olduğundan, $\mathcal{F}$ ailesi $\{R/I \mid I \in \mathcal{F}_0\} \supseteq \{R/I \mid I \in Max(\mathcal{F}^{'}) \cap \mathcal{F}_0\}$ sınıfı için bir nokta sıfırlayıcı kümedir. Öte yandan, hipotezden tüm basit sağ R-modüller sonlu gösterimlidir. Eğer $I \in \mathcal{F}$ ise R/I sonlu uzunlukludur. O zaman bir

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_n = R/I$$

kompozisyon serisinin her faktör modülü $M_j/M_{j-1} \cong R/I_j$ basit olduğundan, M_j/M_{j-1} sonlu gösterimlidir. O halde, I sonlu üretilmiştir (bkz. [4, Corollary 4.9]). Böylece, $\mathcal{F}$ sonlu üretilmiş sağ ideallerden oluşur ve $\mathcal{F}^{'}$ ailesindeki her boştan farklı zincirin $\mathcal{F}^{'}$ içinde bir üst sınırı olur. Böylece, Teorem 5.2.1'den $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ elde edilir. □

Teorem 5.2.3 [5, Theorem 4.3] *$\mathcal{F}$, bir R halkasının bir sağ Oka ailesi ve $\mathcal{F}^{'}$ içindeki sağ ideallerin boştan farklı her zincirinin $\mathcal{F}^{'}$ içinde kapsamaya göre bir üst sınırı olsun. Sağ ideallerden oluşan $\mathcal{S}$ kümesi, $\{R/I \mid I \in Max(\mathcal{F}^{'})\}$ modül sınıfı için nokta sıfırlayıcı bir küme olsun.*

(1) *$\mathcal{F}_0$, R içindeki sağ ideallerin bölünebilir bir yarıfiltresi olsun. Eğer $\mathcal{F}_0 \cap \mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}$ ise $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ olur.*

(2) *Bir $J \lhd R$ ideali için, $\mathcal{S}$ içindeki J'yi içeren tüm idealler $\mathcal{F}$ içindeyse, J'yi içeren her sağ ideal $\mathcal{F}$ içindedir.*

(3) *$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}$ ise, R nin tüm sağ idealleri $\mathcal{F}$'dedir.*

İspat: (1) $\mathcal{F}$ ailesinin $\{R/I \mid I \in Max(\mathcal{F}^{'})\}$ için bir nokta sıfırlayıcı küme olduğunu görmek gerekir. Bu şekilde seçilen R/I modülleri için $I_R \in Max(\mathcal{F}^{'})$ olacağından, hipotez ile, R/I'nın $\mathcal{S}$ içinde bir nokta sıfırlayıcısı vardır. $0 \neq x + I \in R/I$ olmak üzere $A = ann(x + I) \in \mathcal{S}$ ele alınsın. $I \in \mathcal{F}_0$ ve $\mathcal{F}_0$ bölünebilir olduğundan $x^{-1}I = A \in \mathcal{F}_0$ olur. Dolayısıyla, $A \in \mathcal{S} \cap \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ olacağından R/I'nın bir nokta sıfırlayıcısı $\mathcal{F}$ içinde olur. Böylece, $\mathcal{F}$ bir nokta sıfırlayıcı kümedir. O halde, Teorem 5.2.1 ile, $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ elde edilir.

(2) $\mathcal{F}_0$ olarak J'yi içeren tüm sağ idealler alınırsa, (1)'den istenen elde edilir.

(3) $\mathcal{F}_0$ olarak R'nin tüm sağ idealleri alınırsa, (1)'den istenen elde edilir. □

Sonuç 5.2.4 [5, Corollary 4.4] *$\mathcal{F}$ sonlu üretilmiş sağ ideallerin bir Oka ailesi ve $\mathcal{S}$ kümesi R için bir nokta sıfırlayıcı küme olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:*

(1) *$\mathcal{F}$, R'nin tüm sağ ideallerinden oluşur.*

(2) *$\mathcal{F}$ bir Noether nokta sıfırlayıcı kümedir.*

(3) *$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}$'dir.*

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) $\mathcal{F}$ kümesi R'nin tüm ideallerinden oluşsun. O zaman, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}$'dir. Dolayısıyla, $\mathcal{F}$ de R için bir Noether nokta sıfırlayıcı küme olur.

(1) $\Rightarrow$ (3) Açıktır.

(2) $\Rightarrow$ (1) $\mathcal{F}^{'}$ ailesi sonlu olmayan sağ ideallerden oluşur. Bir $I \in Max(\mathcal{F}^{'})$ için, $I_R \subsetneq K_R \subseteq R$ olmak üzere R/I'nın sıfırdan farklı alt modülleri K/I formundadır. Bu durumda, K_R sonlu üretilmiş bir sağ idealdir. Böylece, R/I'nın her alt modülü sonlu üretilmiş olur. Dolayısıyla, $\{R/I \mid I \in Max(\mathcal{F}^{'})\}$ kümesi Noether modüllerden oluşur. Teorem 5.2.1-(3) ile, $\mathcal{F}$ kümesi R'nin tüm sağ ideallerinden oluşur.

(3) $\Rightarrow$ (1) $\{R/I \mid I \in Max(\mathcal{F}^{'})\}$ kümesi Noether modüllerden oluştuğundan, Teorem 5.2.3(3) ile, R nin tüm sağ idealleri $\mathcal{F}$ kümesindedir. $\square$

Yukarıdaki sonucun bir uygulaması olarak Cohen Teoremi'nin değişmeli olmayan halkalardaki genellemesi aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 5.2.5 [5, Theorem 4.5] (Değişmeli Olmayan Cohen Teoremi) *Bir R halkası için $\mathcal{S}$ kümesi bir sağ Noether nokta sıfırlayıcı küme olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:*

(1) *R bir sağ Noether halkadır.*

(2) *$\mathcal{S}$ içindeki her sağ ideal sonlu üretilmiştir.*

(3) *Sıfırdan farklı her Noether sağ R-modülün bir sonlu üretilmiş nokta sıfırlayıcısı vardır.*

(4) *Sıfırdan farklı her Noether sağ R-modülün sıfırdan farklı devirli sonlu gösterimli bir alt modülü vardır.*

Özel olarak, R halkasının sağ Noether olması için gerek ve yeter koşul her eşkritik sağ idealin sonlu üretilmiş olmasıdır.

İspat: Önerme 4.2.6 ile sonlu üretilmiş sağ ideallerin ailesi bir sağ Oka ailesidir. Sonuç 5.2.4'ten, (1), (2) ve (3) ifadelerinin denkliği elde edilir.

(3) $\Leftrightarrow$ (4) Bir I sağ idealinin bir M modülünün bir nokta sıfırlayıcısı olması için gerek ve yeter koşul bir $R/I \hookrightarrow M$ monomorfizmasının var olmasıdır. Ayrıca, R/I modülü sonlu gösterimlidir ancak ve ancak I bir sonlu üretilmiş sağ idealdir.

Önerme 5.1.18 ile de son ifade elde edilir. $\square$

Teorem 5.2.5'te, özel olarak $\mathcal{S}$ kümesi olarak tamamen asal sağ idealler kümesi alınırsa, Teorem 4.2.7 elde edilir. Ayrıca, (4) ifadesindeki "devirli olma" özelliğinin kaldırılabilir bir özellik olduğu aşağıdaki sonuçta gösterilmiştir. Bunun ayrı bir sonuç olarak verilmesinin sebebi, bu özelliğin kaldırılması için uygulanan stratejinin her zamanki "ispat stratejisi"nden farklı olmasıdır.

Önerme 5.2.6 [5, Proposition 4.6] *Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir:*

(1) *R bir sağ Noether halkadır.*

(2) *$\mathcal{S}$ içindeki her sağ ideal sonlu üretilmiştir.*

(3) *Sıfırdan farklı her Noether sağ R-modülün bir sonlu üretilmiş nokta sıfırlayıcısı vardır.*

(4) *Sıfırdan farklı her Noether sağ R-modülün sıfırdan farklı bir devirli sonlu gösterimli alt modülü vardır.*

(5) *Sıfırdan farklı her Noether sağ R-modülün sıfırdan farklı bir sonlu gösterimli alt modülü vardır.*

İspat: Teorem 5.2.5 ile, (1) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (5) elde edilir.

(5) $\Rightarrow$ (1) Sıfırdan farklı her Noether sağ R-modülün sıfırdan farklı sonlu gösterimli bir alt modülü olsun ve R nin bir sağ Noether halka olmadığı kabul edilsin. O halde, R'nin sonlu üretilmiş olmayan bir sağ ideali vardır. Böylece,

$$\mathcal{A} = \{I_R \mid I \text{ sonlu üretilmiş olmayan bir sağ ideal}\}$$

kümesi boştan farklı olur. Ayrıca, Zorn Önteoremi ile, $\mathcal{A}$ kümesinin maksimal bir $I_R \subseteq R$ sağ ideali vardır. I'yı öz olarak içeren her ideal sonlu üretilmiş olacağından, R/I Noether olur. Hipotez ile, sıfırdan farklı bir $J/I \subseteq R/I$ sonlu gösterimli alt modülü vardır. $I \subsetneq J$ olduğundan J sonlu üretilmiştir. Böylece, R/J sonlu gösterimli olur. $0 \to J/I \to R/I \to R/J \to 0$ tam dizisi ele alınırsa, Önerme 2.3.6 ile, R/I sonlu gösterimli olur. Buradan, I_R'nin sonlu üretilmiş olduğu çelişkisi elde edilir. O halde, R sağ Noetherdir. $\square$

Teorem 5.2.7 [1] (Akizuki-Cohen Teoremi) *Değişmeli bir R halkasının Artin olması için gerek ve yeter koşul halkanın Noether olması ve halkadaki her asal idealin maksimal olmasıdır.*

Teorem 5.2.8 [27, 5.17] *Değişmeli bir R halkasının Artin olması için gerek ve yeter koşul her P asal ideali için P'nin sonlu üretilmiş olması ve R/P'nin sonlu eşüretilmiş olmasıdır.*

Şimdi bu sonuçların değişmeli olmayan halkalardaki genellemeleri verilecektir.

Önerme 5.2.9 [5, Proposition 4.7] *$\mathcal{S}$, bir R halkasının sağ Noether nokta sıfırlayıcısı olsun. Bu durumda, aşağıdakiler ifadeler denktir:*

(1) *R bir sağ Artin halkadır.*

(2) *R bir sağ Noether halkadır ve her $P \in \mathcal{S}$ için $(R/P)_R$ sonlu uzunlukludur.*

(3) *Her $P \in \mathcal{S}$ için P_R sonlu üretilmiştir ve $(R/P)_R$ sonlu uzunlukludur.*

(4) *Her $P \in \mathcal{S}$ için P_R sonlu üretilmiştir ve $(R/P)_R$ sonlu eşüretilmiştir.*

(5) *R bir sağ Noether halkadır ve R'nin her eşkritik sağ ideali maksimaldir.*

(6) *R nin her eşkritik sağ ideali sonlu üretilmiş ve maksimaldir.*

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) R bir sağ Artin halka olsun. Önerme 2.3.4 ile, R bir sağ Noether halkadır. Dolayısıyla, her $P \in \mathcal{S}$ için $(R/P)_R$ sonlu uzunlukludur.

(2) $\Rightarrow$ (1) Açıktır.

(2) $\Rightarrow$ (3) Teorem 5.2.5(2)'den, P sonlu üretilmiş olur ve R/P sonlu uzunlukludur.

(3) $\Rightarrow$ (2) Örnek 4.4.16(6)'dan,

$$\mathcal{F} = \{I \leq R \mid R/I \text{ sonlu uzunluklu}\}$$

bir sağ Oka ailesi olur. Dolayısıyla, Teorem 5.2.5'ten, istenen elde edilir.

(1) $\Rightarrow$ (4) Önerme 2.3.10'dan ve Sonuç 2.3.11'den açıktır.

(4) $\Rightarrow$ (1) Örnek 4.4.16(2)'den, $\mathcal{F} = \{I_R \leq R \mid R/I_R \text{ sonlu eşüretilmiş}\}$ bir sağ Oka ailesidir. Dolayısıyla, Sonuç 5.2.4'ten R bir sağ Artin halkadır.

(1) $\Leftrightarrow$ (5) $\Leftrightarrow$ (6) Artin kritik modüller basit olacağından, $\mathcal{S}$ kümesi olarak R'nin eşkritik sağ idealleri alınarak istenen denklikler elde edilir. $\square$

Önerme 5.2.10 [5] *Bir sağ Noether halkanın sağ Artin olması için gerek ve yeter koşul tüm eşkritik sağ ideallerinin maksimal olmasıdır.*

İspat: Sağ Krull boyutu α olan bir sağ Noether R halkası için

$$\mathcal{A} = \{I_R \leq R \mid \text{K.Boy}(R/I) = \alpha\}$$

kümesi ele alınsın. R sağ Noether olduğundan, bu kümenin maksimal bir I_R elemanı vardır. O zaman, $J \supseteq I$ sağ ideali için $K.Boy(R/J) < K.Boy(R/I) = \alpha$ olur. Buradan, I_R bir eşkritik sağ ideal olur. Dolayısıyla,

$$r.K.Boy(R) = sup\{K.Boy(R/I) \mid I_R \subseteq R \text{ eşkritik}\}$$

olur. 0-eşkritik modüllerin basit modül olması nedeniyle istenen elde edilir. □

5.3 Kaplansky-Cohen Teoremi

Bu alt bölüm boyunca, bir R halkasının temel sağ ideallerinin ailesi $\mathcal{F}_{pr}(R)$ ile gösterilecektir. Sözü edilen halkanın R olduğu açık ise gösterim $\mathcal{F}_{pr}$ şeklinde olacaktır.

Kaplansky-Cohen Teoremi değişmeli bir halkanın temel ideal halkası olması için gerek ve yeter koşulun halkanın tüm asal ideallerinin temel olduğunu ifade eder (bkz. Teorem 3.1.4). Bu alt bölümde, bir R halkasının tüm eşkritik sağ ideallerinin temel iken R'nin temel sağ ideal halkası olup olmadığı araştırılacaktır. Buradaki başlangıç noktası ise $\mathcal{F}_{pr}(R)$ ailesinin bir sağ Oka ailesi olup olmadığının araştırılmasıdır. Sıradaki önerme bu duruma ışık tutmaktadır.

Önerme 5.3.1 [5, Proposition 5.1] *R bir halka ve $\mathcal{S} \subseteq R$ çarpımsal kapalı bir küme olsun. $\mathcal{F} = \{sR \mid s \in \mathcal{S}\}$ ailesinin bir sağ Oka ailesi olması için gerek ve yeter koşul bu ailenin benzerlik altında kapalı olmasıdır.*

Özel olarak, bir R halkasında $\mathcal{F}_{pr}$ ailesinin bir sağ Oka ailesi olması için gerek ve yeter koşul ailenin benzerlik altında kapalı olmasıdır.

İspat: Önerme 4.3.8 ile, her sağ Oka ailesi benzerlik altında kapalıdır. Tersine, $\mathcal{F}$ ailesi benzerlik altında kapalı olsun. $a \in R$ için $a^{-1}I, I + aR \in \mathcal{F}$ kabul edilsin. $\mathcal{F}$'nin tanımından $I + aR = sR$ olacak biçimde bir $s \in S$ vardır.

$$0 \to (I + aR)/I \to R/I \to R/(I + aR) \to 0$$

kısa tam dizisinde $R/a^{-1}I \cong (I + aR)/I = sR/I \cong R/(s^{-1}I)$ olur. $\mathcal{F}$ benzerlik altında kapalı olduğundan ve $a^{-1}I \in \mathcal{F}$ olduğundan, $s^{-1}I \in \mathcal{F}$'dir. O zaman, $s^{-1}I = tR$ olacak biçimde bir $t \in \mathcal{S}$ vardır. $I \subseteq I + aR = sR$ olduğundan, $I = s(s^{-1}I) = stR$ elde edilir. Böylece, $I \in \mathcal{F}$ olur. O halde, $\mathcal{F}$ bir sağ Oka ailedir. □

Sonuç 5.3.2 [5, Corollary 5.2] *$\mathcal{S}$, bir R halkası için bir sağ Noether nokta sıfırlayıcı küme olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:*

(1) *R bir temel sağ ideal halkasıdır.*

(2) *$\mathcal{F}_{pr}$ benzerlik altında kapalıdır ve $\mathcal{S}$ içindeki her sağ ideal bir temel idealdir.*

(3) *$\mathcal{F}_{pr}$ benzerlik altında kapalıdır ve bir sağ Noether nokta sıfırlayıcı kümedir.*

İspat: R bir temel sağ ideal halkası ise, $\mathcal{F}_{pr}$ ailesi R'nin tüm sağ ideallerinin ailesine eşit olur ve dolayısıyla, benzerlik altında kapalıdır. Ayrıca, Önerme 5.3.1'den, $\mathcal{F}_{pr}$ benzerlik altında kapalı olduğu için bir sağ Oka ailesidir. Dolayısıyla, (1) $\Rightarrow$ (2) ve (2) $\Rightarrow$ (3) gerektirmeleri elde edilir.

(3) $\Rightarrow$ (1) Sonuç 5.2.4 ile R bir temel sağ ideal halkası olur. $\square$

Sonuç 5.3.2, $\mathcal{F}_{pr}$ ailesinin hangi durumlarda benzerlik altında kapalı ve dolayısıyla sağ Oka ailesi olacağının belirlenmesine yardımcı olur.

Örnekler 5.3.3 (1) Bir R halkasının her sağ ideali iki yönlü bir idealse halkaya *sağ ikili halka (right duo ring)* denir (bkz. [20]). Bir sağ ikili halkada ve özel olarak tüm değişmeli halkalarda, sağ ideallerin her ailesi benzerlik altında kapalıdır. Dolayısıyla, değişmeli halkalarda ve sağ ikili halkalarda $\mathcal{F}_{pr}$'nin bir sağ Oka ailesi olduğunu göstermek için Önerme 5.3.1 kullanılabilir. Değişmeli halkalar için $\mathcal{F}_{pr}$'nin bir sağ Oka ailesi olduğu bilinmektedir (bkz. [27, 3.17]).

(2) $\mathcal{F}_{pr}$'nin benzerlik altında kapalı olduğu bir diğer örnek yerel halkalardır. Bunu göstermek için Önerme 4.3.8 kullanılacaktır.

R bir yerel halka olsun. $I + aR = R$ ve $a^{-1}I = xR$ olacak biçimde bir $I_R \subseteq R$ ve $a \in R$ verilsin. $U(R)$ ile R'nin birimsel elemanlar grubu temsil edilsin. Bir $i_0 \in I$ ve $r \in R$ için $1 = i_0 + ar$ olsun. $i_0 \in U(R)$ ise $I = R$ olur. $i_0 \notin U(R)$ olsun. R bir yerel halka olduğundan, $1 - i_0 = ar \in U(R)$ olur. Ancak, R yerel olduğundan, sağ tersinir elemanlar tersinirdir. Bu durumda, $a \in U(R)$'dir. Buradan, $I = a(a^{-1}I) = axR$ elde edilir. Böylece, I bir temel sağ ideal olur ve $I \in \mathcal{F}_{pr}$ elde edilir.

Uyarı 5.3.4 [5, Remark 5.3] Bir R halkasında, $J = xR$ bir temel sağ ideali ve $R/I \cong R/J$ olacak biçimde bir $I_R \subsetneq R$ sağ ideali verilsin. Bu durumda, I_R sağ ideali en fazla iki elemanla üretilmiştir.

Gerçekten de,

$$0 \to I \to R \to R/I \to 0$$

ve

$$0 \to J \to R \to R/J \to 0$$

kısa tam dizilerine Schanuel Önteoremi uygulanırsa $R \oplus I \cong R \oplus J$ elde edilir. J_R bir devirli sağ ideal olduğundan, $R \oplus J$ en fazla iki elemanla üretilir. Dolayısıyla, $R \oplus I$ da en fazla iki elemanla üretilir. I_R, $R \oplus I$'nın bir dik toplananı olduğundan, I_R de en fazla iki elemanla üretilir.

Tanım 5.3.5 [33] R bir halka ve M, X, Y sağ R-modüller olsun. $M \oplus X \cong M \oplus Y$ iken $X \cong Y$ koşulu sağlanıyorsa, M_R modülüne *silinebilir (cancellable)* denir.

Örnek 5.3.6 [5, p. 953] R_R modülü sağ R-modüllerin kategorisinde silinebilir ise, $\mathcal{F}_{pr}$ ailesi benzerlik altında kapalıdır ve dolayısıyla bir sağ Oka ailesidir.

İspat: $I_R, J_R \subseteq R$ sağ idealleri için J_R temel sağ ideal ve $R/J \cong R/I$ olsun. Uyarı 5.3.4 ile I, en fazla iki elemanla üretilir ve dolayısıyla sonlu üretilmiş bir sağ ideal olur. Schanuel Önteoremi ile, $R \oplus I \cong R \oplus J$'dir ve silinebilir olma kabulünden $I_R \cong J_R$ elde edilir. O zaman, I_R bir temel idealdir. O halde, $I_R \in \mathcal{F}_{pr}$'dir. Böylece, $\mathcal{F}_{pr}$ benzerlik altında kapalı olur. $\square$

Tanım 5.3.7 [33] Bir R halkası ve $a, b \in R$ verilsin. $aR + bR = R$ iken $(a + br)R = R$ olacak biçimde bir $r \in R$ varsa, R halkasına *(sağ) sabit sırası 1 (has (right) stable range 1)* denir.

Örnek 5.3.8 [5, p. 953] Sabit sırası 1 olan bir halka için, R_R modüllü R-modüllerin kategorisinde silinebilirdir (bkz. [34, Theorem 10.2]) ve dolayısıyla, $\mathcal{F}_{pr}$ bir sağ Oka ailesidir. Sabit sırası 1 olan halkalar sınıfı, yarıyerel halka sınıfını içerdiğinden, Örnekler 5.3.3(2)'de yerel halkalar için söylenenler, yarıyerel halkalara genelleştirilebilir.

Tanım 5.3.9 [5, p.953] Bir R halkası için, rankı 2 olan serbest sağ R-modüllerin değişmez taban numarası (invariant basis number) varsa ve R'nin en fazla iki elemanla üretilen her sağ ideali serbest ise, R halkasına *2-sih* denir. Burada sih kısaltmasının açılımı serbest ideal halkasıdır.

Örnek 5.3.10 [5, p. 953] R bir 2-sih ise, $\mathcal{F}_{pr}$ ailesi benzerlik altında kapalıdır.

İspat: I_R, J_R sağ idealleri için $R/I \cong R/J$ ve $J \in \mathcal{F}_{pr}$ olsun. Schanuel Önteoremi'nden, $R \oplus I \cong R \oplus J$'dir ve I en fazla iki elemanla üretilir. O zaman, R bir 2-sih olduğundan, I serbesttir ve bir $m \in \mathbb{N}$ için $I \cong R^m$'dir. J bir temel sağ ideal olduğundan, $n \leq 1$ için $J \cong R^n$'dir. Buradan, $n + 1 \leq 2$ olmak üzere, $R^{n+1} \cong R^{m+1}$ elde edilir. Dolayısıyla, değişmez taban numarası hipotezinden, $m = n \leq 1$ olmalıdır. O halde, I_R bir temel sağ ideal olur ve $I \in \mathcal{F}_{pr}$ bulunur. $\square$

Tanım 5.3.11 [23] Bir R halkasının her sonlu üretilmiş sağ ideali bir temel idealse, R halkasına *sağ Bezout halka* denir.

Örnek 5.3.12 [5] R bir Bezout halka ise, $\mathcal{F}_{pr}$, R'nin tüm sonlu üretilmiş sağ idealleri kümesine eşit olur ve Önerme 4.2.6 ile bu aile bir sağ Oka ailesi olur. Von Neumann düzenli halkalar, Bezout halkalara örnektir. Bu halkalarda sonlu üretilmiş her sağ ideal R_R'nin bir dik toplananıdır.

Sonuç 5.3.13 [5, Corollary 5.5] *R bir sol tam halka ve her $i = 1, \ldots, n$ için R/m_i basit sağ R-modüllerin tüm izomorf sınıflarını temsil edecek şekilde $m_1, \ldots, m_n$ maksimal sağ idealler olsun. R halkasının bir temel sağ ideal halkası olması için gerek ve yeter koşul m_i'lerin temel sağ ideal olmasıdır.*

İspat: Örnek 5.3.8 ile, yarıyerel halkalar için $\mathcal{F}_{pr}$ bir sağ Oka ailesidir. Örnek 5.1.15'ten, $\{m_i\}$ kümesi bir sağ Noether nokta sıfırlayıcı küme olur. O halde, Sonuç 5.3.2'den, R bir temel sağ ideal halkasıdır. $\square$

$\mathcal{F}_{pr}$ ailesinin bir Noether tamlık bölgesi üzerinde dahi bir sağ Oka ailesi olması gerekmez. Buna dair örnek aşağıda verilmiştir.

Önteorem 5.3.14 [5, Lemma 5.6] *R bir halka ve $x \in R$ sol sıfır-bölen olmayan bir eleman olsun.*

(1) *$J \subseteq xR$ koşulunu sağlayan J ve K sağ idealleri için, $x^{-1}(J + K) = x^{-1}J + x^{-1}K$'dır.*

(2) *Her $f \in R$ için $x^{-1}(xfR + (1 + xy)R) = fR + (1 + yx)R$'dir.*

İspat: (1) $\supseteq$ kapsaması x, J ve K üzerinde bir kabul olmadan da geçerlidir, çünkü $x(x^{-1}J + x^{-1}K) = x(x^{-1}J) + x(x^{-1}K) \subseteq J + K$'dır. Kapsamanın diğer yönü için $f \in x^{-1}(J+K)$ olsun. O zaman, en az bir $j \in J$ ve $k \in K$ için $xf = j + k$'dır. $J \subseteq xR$ olduğundan, $j = xj_0$ olacak biçimde bir $j_0 \in R$ vardır. Buradan, $j_0 \in x^{-1}J$ olur ve $xf = xj_0 + k$ elde edilir. O zaman, $x(f - j_0) = k$ ve dolayısıyla $f - j_0 \in x^{-1}K$ olur. Böylece, $f - j_0 = k_0$ için $xk_0 = k$ olur. O halde, $xf = xj_0 + xk_0$'dır ve x sol sıfır-bölen olmadığından $f = j_0 + k_0 \in x^{-1}J + x^{-1}K$ elde edilir.

(2) $J = xfR$ ve $K = (1+xy)R$ alınırsa $x^{-1}J = fR$ ve $x^{-1}K = (1+yx)R$ bulunur. (1)'den, $x^{-1}(xfR + (1+xy)R) = fR + (1+yx)R$ elde edilir. □

Aşağıdaki örnek, $\mathcal{F}_{pr}$ ailesinin bir sağ Oka ailesi olmayabileceğini göstermektedir.

Örnek 5.3.15 [5, Example 5.7] k bir cisim olsun.

$$R := A_1(k) = k < x, y : xy = yx + 1 >$$

olarak tanımlı halka, k üzerinde *birinci Weyl cebiri (first Weyl algebra)* olarak bilinir. R bir Noether tamlık bölgesidir (bkz. [15]).

$I_R := x^2R + (1+xy)R \subseteq R$ sağ ideali ele alınsın. $I + xR$, hem $1 + xy$ hem de xy elemanlarını içerir. Buradan, $-xy \in R$ olur. O halde, $1 + xy - xy = 1 \in I + xR$'dir. Böylece, $I + xR = R$ olur. $1 + yx = xy \in xR$ olduğundan, Önteorem 5.3.14(2)'de $f = x$ alınırsa, $x^{-1}(x^2R + (1+xy)R) = xR + (1+yx)R$ ve buradan

$$x^{-1}I = xR + (1+yx)R = xR + xyR$$

elde edilir. Böylece, $x^{-1}I = xR$ olur. Dolayısıyla, $I + xR = R \in \mathcal{F}_{pr}$ ve $x^{-1}I = xR \in \mathcal{F}_{pr}$ dir, ancak $I = x^2R + (1+xy)R \notin \mathcal{F}_{pr}$'dir. Böylece, $\mathcal{F}_{pr}$ bir sağ Oka ailesi olamaz.

Aslında, I temel olmayan bir sağ ideal olmak üzere $R/I \cong R/xR$ izomorfizması, Önerme 5.3.1'den dolayı, $\mathcal{F}_{pr}$'nin benzerlik altında kapalı olmadığını gösterir.

Tanım 5.3.16 [5, Definition 5.8] Bir R halkası için,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{pr}^{\circ}(R) &= \{I_R \subseteq R \mid J_R \subseteq R \text{ için } I \sim J \text{ ise } J \in \mathcal{F}_{pr}(R)\} \\ &= \{I_R \subseteq R \mid I \text{ sadece temel sağ idealler ile benzerdir}\} \end{aligned}$$

tanımlansın. Burada, $I \sim J$ sembolü, I ile J'nin benzerliğini ifade etmek için kullanılmaktadır.

Bu tanıma alternatif olarak, $\mathcal{F}_{pr}^{\circ}(R)$ kümesi, $\mathcal{F}_{pr}(R)$'nin benzerlik altında kapalı en büyük alt kümesidir.

Önerme 5.3.17 [5, Proposition 5.9] *Herhangi bir R halkası için $\mathcal{F}_{pr}^{\circ}(R)$ sağ ideallerin bir Oka ailesidir.*

İspat: $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{pr}^{\circ}(R)$ olarak gösterilsin. $I_R \sim R_R$ ise $I = R \in \mathcal{F}_{pr}$ olduğundan, $R \in \mathcal{F}$'dir. $I + aR, a^{-1}I \in \mathcal{F}$ olacak şekilde $I_R \subseteq R$ ve $a \in R$ verilsin. $R/a^{-1}I \cong (I + aR)/I$ izomorfizması (bkz. Önteorem 4.3.7) ve $0 \to (I + aR)/I \to R/I \to R/(I + aR) \to 0$ tam dizisi göz önüne alınsın. $C_1 := R/a^{-1}I$ ve $C_2 := R/(I + aR)$ alınırsa

$$0 \to C_1 \to R/I \to C_2 \to 0$$

tam dizisi elde edilir.

$I \in \mathcal{F}$ olduğunu göstermek için $R/I \cong R/J$ olacak biçimde J_R sağ ideali alınsın. J'nin bir temel ideal olduğu gösterilecektir. Benzer olarak, bir

$$0 \to C_1 \to R/J \to C_2 \to 0$$

tam dizisi ele alınsın. $R/I \cong R/J$ olduğundan, $f(a + I) = x + J$ tanımlanabilir.

$ar + I \mapsto xr + J$ ile tanımlı $\varphi : (I + aR)/I \to (J + xR)/J$ dönüşümü bir izomorfizmadır. Bu durumda, $(I+aR)/I \cong (J+xR)/J$ olduğundan, $C_1 = R/a^{-1}I \cong (J+xR)/J$ olur. Benzer şekilde, $C_2 = R/(I+aR) \cong R/(J+xR)$ elde edilir. $I+aR \in \mathcal{F}$ olduğundan, $J + xR$ bir temel sağ ideal olmalıdır. O zaman, $J + xR = cR$ olacak biçimde bir $c \in R$ vardır.

$$R/a^{-1}I = C_1 \cong (J + xR)/J = cR/J \cong R/c^{-1}J$$

ve $a^{-1}I \in \mathcal{F}$ olduğundan, $c^{-1}J$ de bir temel sağ idealdir. Böylece, $J \subseteq J + xR = cR$ olduğundan, $J = c(c^{-1}J)$ elde edilir. Bu da J'nin bir temel sağ ideal olduğunu gösterir. $\square$

Önteorem 5.3.18 [5, Lemma 5.10] *$\mathcal{S}$, R halkasındaki sağ ideallerin benzerlik altında kapalı bir kümesi olsun. $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}_{pr}$ ise, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}_{pr}^{\circ}$ olur.*

Önteorem 5.3.18, $\mathcal{F}_{pr}^{\circ}$'nin benzerlik altında kapalı en büyük temel sağ ideal ailesi olduğunu ifade eder.

Şimdi, Kaplansky-Cohen Teoremi'nin değişmeli olmayan halkalardaki genellemesi verilecektir.

Teorem 5.3.19 [5, Theorem 5.11] (Değişmeli Olmayan Kaplansky-Cohen Teoremi) *$\mathcal{S}$, bir R halkasının benzerlik altında kapalı olan bir sağ Noether nokta sıfırlayıcı kümesi olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:*

(1) *R bir temel sağ ideal halkasıdır.*

(2) *$\mathcal{S}$ içindeki her sağ ideal temeldir.*

(3) *$\mathcal{F}_{pr}^{\circ}$ bir sağ Noether nokta sıfırlayıcı kümedir.*

Özel olarak, R'nin bir temel sağ ideal halkası olması için gerek ve yeter koşul R'nin her eşkritik sağ idealinin bir temel sağ ideal olmasıdır.

İspat: R'nin eşkritik sağ ideallerinin kümesi benzerlik altında kapalı bir Noether nokta sıfırlayıcı kümedir. Dolayısıyla, ilk üç denklik ispatlanırsa son ifade de gösterilmiş olur.

(1) $\Rightarrow$ (2) Açıktır.

(2) $\Rightarrow$ (3) $\mathcal{S}$ kümesindeki her sağ ideal temel olsun. Önteorem 5.3.18'den, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}_{pr}^{\circ}$ elde edilir. Dolayısıyla, $\mathcal{F}_{pr}^{\circ}$ bir sağ Noether nokta sıfırlayıcı kümedir.

(3) $\Rightarrow$ (1) $\mathcal{F}_{pr}^{\circ}$ bir sağ Noether nokta sıfırlayıcı küme olsun. Sonuç 5.2.4'ten, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}_{pr}^{\circ}$ elde edilir. Önerme 5.3.17'den, istenen sağlanır. $\square$

Kaplansky-Cohen Teoremi'nin iki versiyonu karşılaştırılırsa, Sonuç 5.3.2'nin Teorem 5.3.19'dan elde edildiği görülür. Ancak bu durum, Sonuç 5.3.2'nin tercih edilmeyeceği anlamına gelmez. Eğer nokta sıfırlayıcı küme $\mathcal{S}$ ile ilgili yeterli bilgi varsa, ancak $\mathcal{F}_{pr}$'nin benzerlik altında kapalı olduğu bilinmiyorsa, Teorem 5.3.19 tercih edilir. Öte yandan, $\mathcal{F}_{pr}$'nin benzerlik altında kapalı olduğu halka sınıflarında çalışılıyorsa, Sonuç 5.3.2 daha kullanışlıdır. Bu durum, Sonuç 5.3.13'te nokta sıfırlayıcı küme $\mathcal{S}$ sonlu kümeye indirgendiğinde kanıtlanmıştır.

Sonuç 5.3.20 [5] *Sağ Krull boyutu ≤ 1 olan bir R tamlık bölgesinin bir temel sağ ideal bölgesi olması için gerek ve yeter koşul halkadaki maksimal sağ ideallerin temel olmasıdır.*

İspat: Önerme 2.6.19'dan R halkasının 0 ideali sağ ideal olarak 1-eşkritiktir. Dolayısıyla, R halkasının sıfırdan farklı her eşkritik sağ ideali 0-kritiktir ve böylece bir maksimal sağ idealdir. O halde, Teorem 5.3.19'dan istenen sağlanır. □

5.4 Dik Toplanan Altında Kapalı Aileler

Bu alt bölümde, Cohen Teoremi ve Kaplansky-Cohen Teoremleri'nin önceki genellemeleri, bir halkadaki "test edilmesi" gereken sağ ideallerin kümesi daha da indirgenerek geliştirilecektir. Özel olarak, önceki teoremlerde söylenen, bazı Noether nokta sıfırlayıcı $\mathcal{S}$ kümesinde bulunan her sağ idealin sonlu üretilmiş (sırasıyla, temel) olması koşulu, $\mathcal{S}$ içindeki her geniş sağ idealin sonlu üretilmiş (sırasıyla, temel) olmasının kontrolüne indirgenecektir.

Tanım 5.4.1 [5, Definition 6.1] R bir halka ve M_R bir modül olsun. M'nin alt modüllerinden oluşan bir $\mathcal{F}$ ailesi verilsin. $N \subseteq M$ bir alt modül olmak üzere $N \in \mathcal{F}$ iken N'nin herhangi bir dik toplananı da $\mathcal{F}$ ailesinin bir elemanı oluyorsa, $\mathcal{F}$ ailesine *dik toplanan altında kapalıdır* denir.

Bir M modülünün alt modüllerinden oluşan ve dik toplananlar altında korunan bir $\mathcal{F}$ ailesi için $\mathcal{F} \neq \emptyset$ olduğu sürece $0 \in \mathcal{F}$'dir. Sıradaki önteorem, dik toplananlar altında kapalı olan ailelerle M'nin geniş alt modüllerinin arasındaki bağı gösterir.

Önteorem 5.4.2 [5, Lemma 6.2] *$\mathcal{F}$, bir M_R modülünün dik toplananlar altında kapalı olan alt modüllerinin bir ailesi olsun. O halde, M'nin her alt modülünün $\mathcal{F}$ içinde olması için gerek ve yeter koşul M'nin her geniş alt modülünün $\mathcal{F}$'de olmasıdır.*

Özel olarak; $\mathcal{F}$, R'nin sağ ideallerinin dik toplananlar altında kapalı bir ailesi olsun. O halde, R'nin tüm sağ ideallerinin $\mathcal{F}$ içinde olması için gerek ve yeter koşul R'nin tüm geniş sağ ideallerinin $\mathcal{F}$ içinde olmasıdır.

İspat: ($\Rightarrow$) Açıktır.

($\Leftarrow$) M'nin her geniş alt modülü $\mathcal{F}$'de ve $L_R \subseteq M_R$ olsun. Zorn Önteoremi'nden, $L \cap N = 0$ özelliğine göre maksimal bir N_R alt modülü vardır. Önerme 2.1.4'ten, $N \oplus L \leq_e M$'dir. Bu durumda, $N \oplus L \in \mathcal{F}$ olur. $\mathcal{F}$ dik toplananlar altından kapalı olduğundan, $L \in \mathcal{F}$'dir. Böylece, M'nin her alt modülü $\mathcal{F}$ içinde bulunmuş olur ve istenen elde edilir. □

Şimdi, bu özelliği sağlayan aile örnekleri verilecektir:

Örnek 5.4.3 [5, Example 6.3] Herhangi bir M_R modülünde dik toplananlar altında kapalı ailelerin en bilinen örneği, M'nin tüm dik toplananlarının ailesidir. Ayrıca Önteorem 5.4.2'nin bir uygulaması olarak, M'nin yarıbasit modül olması için gerek ve yeter koşulun M içindeki her alt modülün bir dik toplanan olması olduğu sonucuna varılabilir.

Örnek 5.4.4 [5, Example 6.4] Bir M_R modülünün sonlu üretilmiş alt modüllerinin ailesi dik toplananlar altında kapalıdır. Dolayısıyla, M'nin sağ Noether modül olması için gerek ve yeter koşul M'nin geniş alt modüllerin sonlu üretilmiş olmasıdır.

Örnek 5.4.5 Örnek 5.4.4'ü genellemek mümkündür. Bir α kardinali (sonlu veya sonsuz) ve $\mathcal{F}$ olarak M'nin, üreteç kümesi α'dan küçük olan tüm alt modüllerinin ailesi alınsın. $\mathcal{F}$ ailesi dik toplananlar altında kapalıdır. O halde, Önteorem 5.4.2'den, M içindeki her alt modülün, kardinali α'dan kesin küçük bir üreteç kümesine sahip olması için gerek ve yeter koşul M içindeki geniş alt modüllerin, kardinali α'dan kesin küçük bir üreteç kümesine sahip olmasıdır.

Özel olarak, $M_R = R_R$ ve $\alpha = 2$ alınırsa, $\mathcal{F}_{pr}$'nin dik toplananlar altında kapalı olduğu görülür. Önteorem 5.4.2'den, R'nin bir temel sağ ideal halkası olması için gerek ve yeter koşul R içindeki geniş sağ ideallerin temel olmasıdır.

Örnek 5.4.6 [5, Example 6.5] M_R modülü için $\mathcal{F}$ ailesi, her $f : I \to M$ modül homomorfizmasının $R \to M$ genişleyebiliyor olması koşulunu sağlayan I_R sağ ideallerinden oluşsun. $\mathcal{F}$ bir sağ Oka ailesidir (bkz. [4, Proposition 5.16]). Bu ailenin dik toplanan altında kapalı olduğu iddia edilmektedir.

$I \oplus J \in \mathcal{F}$ ve $f : I \to M$ bir modül homomorfizması olsun. $I \oplus J \xrightarrow{\pi} I$ kanonik epimorfizmasının varlığı bilinmektedir. Buradan, $f\pi : I \oplus J \to M$ olur. $I \oplus J \in \mathcal{F}$ olduğundan, $f\pi$ homomorfizması bir $h : R \to M$ homomorfizmasına genişler. Yani, $i_1 : I \oplus J \to R$ ve $i_2 : I \to I \oplus J$ içerim homomorfizmalar olmak üzere, $f\pi = hi_1 = h \underset{I \oplus J}{|}$ elde edilir. $f\pi i_2(I) = f\pi(I) = f(I)$ olduğundan, $f\pi i_2 = f : I \to M$'dir. Dolayısıyla, $x \in I$ için $h\underset{I}{|}(x) = hi_1(x) = f\pi(x) = f(x)$ elde edilir. Böylece, $f\pi$ homomorfizmasını genişleten h, aynı zamanda f homomorfizmasını da genişletir. O halde, $I \in \mathcal{F}$ olur. Bu durumda, $\mathcal{F}$ ailesi dik toplananlar altında kapalıdır.

Baer Kriteri ile her sağ ideal $\mathcal{F}$ içindeyse, M bir injektif modül olur. Dolayısıyla, Önteorem 5.4.2 ile M'nin injektif olması için gerek ve yeter koşul R içindeki her geniş sağ idealin $\mathcal{F}$ içinde olmasıdır.

Önerme 5.4.7 [5, Remark 6.7] *Geniş sağ ideallerin kümesi bir bölünebilir yarıfiltredir ve benzerlik altında kapalıdır.*

İspat: $I_R \subseteq J_R$ sağ idealleri ve $I \leq_e R$ için $I \leq_e J \leq_e R$ olduğundan $J \leq_e R$'dir. Dolayısıyla, geniş sağ ideallerin kümesinin yarıfiltre olduğu açıktır. Öte yandan, bir $f : M_R \to N_R$ modül homomorfizması ve bir $N_0 \subseteq N$ geniş alt modülü için $f^{-1}(N_0)$ alt modülü M'de geniştir. I_R sağ ideali için $x \mapsto xr$ ile tanımlı $R_R \to R_R$ homomorfizması altında I'nın ön görüntüsü $x^{-1}I$'dır. O halde, I_R geniş sağ ideal iken $x^{-1}I$ sağ ideali de geniştir. Dolayısıyla, $\mathcal{F}$ ailesi bölünebilirdir.

Son olarak, $I \in \mathcal{F}$ ve $R/I \cong R/J$ olsun. O zaman, R/I bir tekil modül olacağından, R/J de bir tekil modül olur. Böylece, J_R bir geniş sağ idealdir ve $J \in \mathcal{F}$ elde edilir. □

Tanım 5.4.8 [5, Definition 6.8] $\mathcal{F}$, R halkasındaki sağ ideallerin bir ailesi olsun.

$$\widetilde{\mathcal{F}} := \{I_R \subseteq R \mid I \oplus J \in \mathcal{F} \text{ olacak biçimde bir } J_R \subseteq R \text{ vardır.}\}$$

ailesi tanımlansın. Bu aile, $\mathcal{F}$ ailesini içeren en küçük dik toplananlar altında kapalı ailedir.

Teorem 5.4.9 [5, Theorem 6.9] *$\mathcal{F}$, R halkasındaki sağ ideallerin bir sağ Oka ailesi olsun.*

(1) $\mathcal{F}'$ içindeki sağ ideallerin her zincirinin $\mathcal{F}'$ içinde bir üst sınırı ve $\mathcal{S}$ kümesi, $\{R/I \mid I \in Max(\mathcal{F}')\}$ modül sınıfı için bir nokta sıfırlayıcı küme olsun. Bu durumda, $\mathcal{S}$ içindeki her geniş sağ ideal $\mathcal{F}$ içindeyse, R'deki tüm sağ idealler $\widetilde{\mathcal{F}}$ içindedir.

(2) $\mathcal{S}$, R için bir sağ Noether nokta sıfırlayıcı küme olsun ve $\mathcal{F}$ sonlu üretilmiş sağ ideallerden oluşsun. Bu durumda, $\mathcal{S}$'deki her geniş sağ ideal $\mathcal{F}$ içindeyse, R'deki tüm sağ idealler de $\widetilde{\mathcal{F}}$ içindedir.

İspat: (1) $\mathcal{S}$ ve $\mathcal{F}$ verilen hipotezi sağlasın. $\mathcal{F}_0$, R'nin geniş sağ ideallerinin bölünebilir yarıfiltresi olsun. Kabulden, $\mathcal{F}_0 \cap \mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}$ olur. Dolayısıyla, Teorem 5.2.3'ten $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ elde edilir. $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F} \subseteq \widetilde{\mathcal{F}}$ olduğundan, R içindeki tüm geniş sağ idealler $\widetilde{\mathcal{F}}$ içinde olur. Önteorem 5.4.2'den, tüm sağ idealler $\widetilde{\mathcal{F}}$ ailesindedir.

(2) $\mathcal{F}$'nin sonlu üretilmiş sağ ideallerden oluşması demek, hem $\mathcal{F}^{'}$ ailesindeki her sağ ideal zincirinin $\mathcal{F}^{'}$ içinde bir üst sınırı olması hem de $\{R/I \mid I \in Max(\mathcal{F}^{'})\}$ sınıfının Noether modüllerden oluşması demektir. Dolayısıyla, (1)'den istenen elde edilir. $\square$

Özel olarak, Teorem 5.4.9'da sağ Oka ailesi $\mathcal{F}$, dik toplananlar altında kapalı ise, $\mathcal{F} = \widetilde{\mathcal{F}}$ olur. Bu durumda, Teorem 5.4.9, Teorem 5.2.3'ün bir genellemesidir.

Şimdi Teorem 5.4.9'un bir uygulaması olarak kuvvetlendirilmiş değişmeli olmayan Cohen Teoremi verilecektir.

Teorem 5.4.10 [5, Theorem 6.10] *Bir R halkası için $\mathcal{S}$ bir sağ Noether nokta sıfırlayıcı küme olsun (örneğin, eşkritik idealler kümesi). Bu durumda, R halkasının sağ Noether olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{S}$ içindeki her geniş sağ idealin sonlu üretilmiş olmasıdır.*

İspat: ($\Rightarrow$) Açıktır.

($\Leftarrow$) Teorem 5.4.9(2)'de $\mathcal{F} = \widetilde{\mathcal{F}}$ olarak sonlu üretilmiş sağ ideallerin ailesi alınırsa, Örnek 5.4.4'ten, R halkasının sağ Noether olduğu elde edlir. $\square$

Teorem 5.4.9'un şimdi verilecek olan uygulaması, Kaplansky-Cohen Teoremi'nin değişmeli olmayan versiyonunu güçlendirecektir.

Teorem 5.4.11 [5, Theorem 6.11] *R bir halka ve $\mathcal{S}$ benzerlik altında kapalı bir sağ Noether nokta sıfırlayıcı bir küme olsun. Bu durumda, R'nin bir temel sağ ideal halkası olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{S}$ içindeki her geniş sağ idealin temel olmasıdır.*

İspat: ($\Rightarrow$) Açıktır.

($\Leftarrow$) $\mathcal{S}$ içindeki her geniş sağ ideal temel olsun ve $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{pr}^{\circ}$ ailesi alınsın. $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}$ kümesi $\mathcal{S}$ içindeki geniş sağ ideallerin kümesi ise, Önerme 5.4.7'den, $\mathcal{S}_0$ benzerlik altında kapalıdır. Hipotez ile, $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{F}_{pr}$ olduğundan, Önteorem 5.3.18'den $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{F}_{pr}^{\circ} =: \mathcal{F}$ olur. O halde, $\mathcal{S}$'deki her geniş sağ ideal $\mathcal{F}$ içindedir. Dolayısıyla, Teorem 5.4.9(2)'den, R'deki tüm sağ idealler $\widetilde{\mathcal{F}}$ içindedir. Öte yandan, Örnek 5.4.4 ile, $\mathcal{F}_{pr}$ dik toplananlar altında kapalıdır. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_{pr}$ olduğundan, $\widetilde{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{F}_{pr}$ ve böylece R içindeki her sağ ideal temel olur. $\square$

5.5 Kaplansky Teoremi

Bu alt bölümün temel amacı, Kaplansky Teoremi'nin değişmeli olmayan bir genellemesini ispatlamaktır. Önerme 5.5.11'de, tüm maksimal sağ idealleri temel olan bir Noether halkanın bir temel sağ ideal halkası olduğu gösterilecektir. Goldie'nin bir sonucuna göre, sol Noether bir temel sağ ideal halkası, bir yarıasal halka ile bir Artin halkanın dik toplamıdır (bkz. Önerme 2.5.21). Bu sonuçtan yola çıkarak temel teoremin ispatı, maksimal sağ idealleri temel olan bir Noether halkanın bir yarıasal halka ile bir Artin halkaya ayrıştırılması yardımıyla verilecektir. Sonuç 5.3.13 ile, bir Artin halkanın bir temel sağ ideal halkası olduğunu göstermek için maksimal sağ idealleri kontrol etmek yeterli olduğundan, ispatta bu yolun izlenmesi uygundur.

Öncelikle, yarıasal bir halka üzerinde temel sağ ideal halkası olma koşulunun hangi durumlarda sadece maksimal sağ ideallerin kontrolüyle sorgulanacağı incelenecektir.

Önerme 5.5.1 [5, Proposition 7.1] *R halkası $r.K.Boy(R) \leq 1$ olan yarıasal bir halka olsun. R halkasının bir temel sağ ideal halkası olması için gerek ve yeter koşul halkadaki maksimal sağ ideallerin temel olmasıdır.*

İspat: ($\Rightarrow$) Açıktır.

($\Leftarrow$) Teorem 5.4.11 ile R halkasının geniş eşkritik sağ ideallerinin temel olduğunu görmek yeterlidir. Dolayısıyla, R halkasının her geniş eşkritik sağ idealinin maksimal olduğunu görmek yeterlidir. Önerme 2.4.14 ile, sağ Krull boyutu olan yarıasal bir halkada her geniş $E_R \subseteq R$ sağ ideali için

$$r.K.Boy(R) = sup\{K.Boy(R/E) + 1 \mid E_R \leq_e R\} \leq 1$$

olur. Yani geniş her E_R sağ ideali için $K.Boy(R/E) < r.K.Boy(R) = 1$'dir. Buradan, $K.Boy(R/E) \leq 0$ ve E_R eşkritik olduğundan, E_R bir 0-eşkritik sağ ideal olur. O halde, E bir maksimal sağ idealdir ve sonuç olarak E_R bir temel sağ ideal olur. □

Tanım 5.5.2 [5, Definition 7.3] R bir halka ve $s \in R$ bir düzenli eleman olmak üzere, Rs formundaki sol idealler üzerinde artan zincir koşulu sağlayan R halkasına *sol AZK-düz (left ACC-reg) koşulunu sağlar* denir.

Önerme 5.5.3 [5, Proposition 7.4] *Sağ Krull boyutu olan ve sol AZK-düz koşulunu sağlayan yarıasal bir R halkası verilsin. R halkasının tüm maksimal sağ idealleri temel ise, $r.K.Boy(R) \leq 1$'dir ve R bir temel sağ ideal halkasıdır.*

İspat: Önerme 2.5.19 ve Önerme 2.5.20 ile, Önteorem 2.4.12'nin koşulları sağlanır. $E_R \subseteq_e R$ sağ ideali için $b \in E$ olacak şekilde bir $b \in R$ düzenli elemanı vardır. Önerme 2.4.12'den, R/bR sonlu uzunlukludur. $R/bR \to R/E \to 0$ epimorfizmasından dolayı R/E de sonlu uzunlukludur. Böylece, R/E bir Artin modüldür. Dolayısıyla, $K.boy(R/E)$ en fazla 0 olur. Böylece, Önerme 2.4.14 ile,

$$r.K.Boy(R) = sup\{K.Boy(R/E) + 1 \mid E_R \leq_e R\} \leq 1$$

olur. Önerme 5.5.1'den, R bir temel sağ ideal halkası olur. □

Sonuç 5.5.4 [5, Corollary 7.5] *R bir yarıasal halka olsun.*

(1) *R halkasının bir temel ideal halkası olması için gerek ve yeter koşul R'nin sağ ve sol Krull boyutlarının en fazla 1 olması ve halkadaki maksimal sağ ve maksimal sol ideallerin temel olmasıdır.*

(2) *R sol AZK-düz koşulunu sağlayan bir halka olsun. R'nin bir temel sağ ideal halkası olması için gerek ve yeter koşul $r.K.boy(R) \leq 1$ ve R içindeki maksimal ideallerin temel olmasıdır.*

İspat: (1) R bir temel ideal halkası ise bir Noether halkadır. Dolayısıyla, artan zincir koşulunu sağlar ve bir düzgün boyutu vardır. Böylece, bir (sağ ve sol) Goldie halka olur. O halde, Önerme 5.5.3 ile istenen elde edilir.

(2) R bir temel sağ ideal halkası olduğundan bir sağ Noether halkadır. Dolayısıyla, sağ Goldie halka olur ve Önerme 5.5.3 ile istenen elde edilir. □

Sonuç 5.5.5 [5, Corollary 7.6] *R sağ Krull boyutu olan bir halka olsun ve N, R halkasının asal radikali olsun. Aşağıdaki iki koşuldan biri sağlansın:*

(1) *R/N sol AZK-düz koşulunu sağlar.*

(2) *Her minimal asal ideal $P \lhd R$ için, R/P sol AZK-düz koşulunu sağlar.*

Eğer R halkasının maksimal sağ idealleri temel ise $r.K.Boy(R) \leq 1$'dir.

Özel olarak, maksimal sağ idealleri temel olan bir Noether halkanın sağ Krull boyutu en fazla 1'dir.

İspat: Sağ Krull boyutu olan bir R halkasının sonlu sayıda minimal asalı olduğu bilinmektedir (bkz. [18, 6.3.8]). Bu minimal asallar $P_1, \ldots, P_n$ olmak üzere, Önerme 2.4.9'dan,

$$r.K.Boy(R) = r.K.Boy(R/N) = max\{r.K.Boy(R/P_i)\}$$

dir. R'nin maksimal sağ idealleri temel olduğundan, R'nin her faktör halkasının da maksimal sağ idealleri temeldir.

Şimdi (1) koşulu sağlansın. N bir asal radikal olduğundan R/N yarıasal olur. R'nin sağ Krull boyutu olduğundan R/N'nin de sağ Krull boyutu vardır. Hipotez ile, R/N sol AZK-düz koşulunu sağlar. Dolayısıyla, Önerme 5.5.3'ten $r.K.Boy(R/N) \leq 1$ olur. O halde, $r.K.Boy(R) \leq 1$ elde edilir.

Şimdi (2) koşulu sağlansın. P bir minimal asal olduğundan, R/P yarıasal olur. Yukarıdaki eşitlikten, R/P'nin Krull boyutu vardır ve hipotezden R/P sol AZK-düz koşulunu sağlar. O halde, Önerme 5.5.3'ten her i için $r.K.Boy(R/P_i) \leq 1$'dir. Dolayısıyla, $r.K.Boy(R) \leq 1$ olur.

Böylece her iki durumda da istenen elde edilir. □

Bir Noether halkasının sağ ve sol Krull boyutunun eşit olup olmadığı açık bir sorudur. Ancak Önerme 5.5.3'ün bir başka uygulaması bu soruya kısmi bir cevap niteliğindedir.

Sonuç 5.5.6 [35, Corollary 3.7] Bir R halkası Noether temel sağ ideal halkası ise, aynı zamanda bir temel sol ideal halkasıdır.

Sonuç 5.5.7 [5, Corollary 7.7] *R bir sol Noether temel sağ ideal halkası olsun.*

$$l.K.Boy(R) = r.K.Boy(R) \leq 1 \ dir.$$

İspat: Önerme 2.4.9'dan, R'nin Krull boyutu ile R/N'nin Krull boyutu aynıdır. Dolayısıyla, R halkasının yarıasal olduğu varsayılabilir. Sonuç 5.5.6 ile R bir temel sol ideal halkasıdır. O halde, Önerme 5.5.3 ile, $r.K.boy(R)$ ve $l.K.boy(R)$ en fazla 1 olmalıdır.

R sağ Artin ise Krull boyutu sağ R-modül olarak 0, R sol Artin ise Krull boyut sol R-modül olarak 0'dır. Ancak Hopkins-Levitzki Teoremi'nden, Noether bir halkanın bir taraftan Artin olması için gerek ve yeter koşul halkanın diğer taraftan Artin olmasıdır. Dolayısıyla, R halkasının sağ ve sol Krull boyutunun çakıştığı görülür. R halkası Artin iken her iki boyut 0'dır, R halkası Artin değilken her iki boyut 1'dir. □

Sıradaki önteorem, yarıyerel halkalar üzerindeki bir modülün 0 olup olmadığını test etmek için bir yöntem verir. Bu yöntem, Nakayama Önteoremi'nin bir varyasyonu olarak düşünülebilir.

Önteorem 5.5.8 [5, Lemma 7.8] *R yarıyerel bir halka olsun ve $_RB$ bir sonlu üretilmiş sol modül olsun. R'nin her $\mathfrak{m}$ maksimal sağ ideali için $B = \mathfrak{m}B$ ise, $B = 0$'dır.*

Şimdi elimizdeki bilgiler ışığında, Kaplansky Teoremi'nin değişmeli olmayan bir genellemesi verilecektir.

Teorem 5.5.9 [5, Theorem 7.9] (Değişmeli Olmayan Halkalarda Kaplansky Teoremi) *Noether bir R halkasının temel sağ ideal halkası olması için gerek ve yeter koşul halkadaki tüm maksimal sağ ideallerin temel sağ ideal olmasıdır.*

İspat: ($\Rightarrow$) Açıktır.

($\Leftarrow$) R maksimal sağ idealleri temel olan Noether bir halka olsun. R'nin her faktör halkası da aynı hipotezi sağlar. N, R'nin asal radikali olsun.

<u>İddia:</u> Her $c \in C(N)$ için $N = cN$'dir.

<u>İddianın ispatı:</u> $x \mapsto \overline{x}$ ile tanımlı $R \to R/N =: \overline{R}$ kanonik dönüşümü ele alınsın. R/N Noether olduğundan Krull boyutu vardır ve sol AZK-düz koşulunu sağlar. Dolayısıyla, Önerme 5.5.3 ile, $r.K.boy(\overline{R}) \leq 1$'dir. $C(N)$ ile R/N halkasının düzenlli elemanlarının kümesi temsil edilsin. O zaman, $c \in C(N)$ olmak üzere $c + N =: \overline{c} \in R/N$ bir düzenli elemandır. Önerme 2.4.13 ile, $K.Boy(\overline{R}/\overline{c}\overline{R}) < r.K.Boy(\overline{R}) \leq 1$ olur. $\overline{R}/\overline{c}\overline{R} = \frac{R/N}{(cR+N)/N} \cong R/(cR+N)$ olduğundan, $R/(cR+N)$'nin de Krull boyutu en fazla 0'dır ve sonlu uzunlukludur. Böylece, $R/(cR+N)$'nin, $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n$ R halkasının maksimal sağ idealleri olmak üzere, $R/\mathfrak{m}_i$ basit modüllerine izomorf faktörlere sahip bir kompozisyon serisi vardır. R'nin maksimal sağ ideallerinin kümesi benzerlik altında kapalıdır. Dolayısıyla, Önteorem 5.3.18 ile, tüm maksimal sağ idealler sağ Oka ailesi $\mathcal{F}^{\circ}_{pr}$ içinde yer aldığından, $cR + N \in \mathcal{F}^{\circ}_{pr}$ olur (bkz. [4, Corollary 4.9]). Yani, $cR + N$ devirlidir. O halde, bir $d \in R$ için $cR + N = dR$'dir. R/N halkasında $\overline{c}\overline{R} = \overline{d}\overline{R}$ elde edilir. O halde, $\overline{c} = \overline{d}\overline{r}$ olacak biçimde bir $r \in R$ vardır. Yarıasal Noether $\overline{R}$ halkasında, düzenli elemanların kümesi doymuştur. O halde, $c \in C(N)$ ise $d \in C(N)$ olur. Öte yandan $N \subseteq dR$ olduğundan, $N = d(d^{-1}N)$ elde edilr. $d \in C(N)$ olduğundan, $d^{-1}N = N$'dir. O halde, $N = d(d^{-1}N) = dN = (cR + N)N = cN + N^2$ elde edilir. Nakayama Önteoremi ile, $N = cN$ olur ve iddia doğrulanır.

Robson'ın ayrıştırmasına göre (bkz. Sonuç 2.5.23), A bir Artin halka, S bir yarıasal halka ve ${}_AB_S$ sol ve sağ Noether bimodül olmak üzere;

$$R = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & S \end{pmatrix}$$

formundadır. A'nın her maksimal $\mathfrak{m}$ sağ ideali için $B = \mathfrak{m}B$ olduğu gösterilecektir. $\mathfrak{m}$, A_A'da maksimal iken

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{m} & B \\ 0 & S \end{pmatrix}$$

sağ ideali de R'de maksimal olur. Öyleyse, $\begin{pmatrix} \mathfrak{m} & B \\ 0 & S \end{pmatrix}$ temeldir.

Dolayısıyla, bir $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} \mathfrak{m} & B \\ 0 & S \end{pmatrix}$ için $\begin{pmatrix} \mathfrak{m} & B \\ 0 & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} R$ olur. $\beta \in B$ ise,

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} \mathfrak{m} & B \\ 0 & S \end{pmatrix}$$

olacak biçimde en az bir $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in R$ vardır. O halde, $zS = S$ elde edilir. S Noether ve $End(S_S) \cong S$ olduğundan, $x \mapsto zx$ ile tanımlı $f_z : S \to S$ örten dönüşümü birebirdir. $zt = 1$ ise, $f_z(tz - 1) = z(tz - 1) = ztz - z = 0$ olup $tz = 1$'dir. Dolayısıyla, z bir tersinir elemandır. Bu durumda, $zc = 0$ ise $c = 0$ olur. O halde, $\beta = xb \in \mathfrak{m}B$'dir. Böylece, $B = \mathfrak{m}B$ elde edilir. Dolayısıyla, Önteorem 5.5.8 ile, $B = 0$'dır.

Bu durumda, $R = A \oplus S$ elde edilir. $S \cong R/A$ ve $A \cong R/S$ olduğundan, R'nin maksimal sağ idealleri temel ise, A ve S halkalarının maksimal sağ idealleri de temel olur. Sonuç 5.3.13 ile, Artin A halkası bir temel sağ ideal halkasıdır. Ayrıca, Önerme 5.5.3 ile, yarıasal S halkası bir temel sağ ideal halkası olur. □

Aşağıdaki örnek, "sol Noether olma" hipotezi kaldırıldığında Kaplansky Teoremi'nin genellenemeyeceğini gösterir.

Örnek 5.5.10 [5, Example 7.10] k bir cisim olsun. Bir $\theta : k(x) \to k$ (k'yı sabit bırakmayan) cisim izomorfizması verilsin. $A = k[x]_{(x)}$ ayrık değer halkası göz önüne alınsın. Ayrık değer halkasının sağ Krull boyutu 1'dir (bkz. [11]). Sonlu üretilmiş M_A modülü için, $R := A \oplus M$ halkası üzerindeki işlem

$$(a,m)(a',m') = (aa', m'\theta(a) + ma')$$

olarak tanımlansın. $\mathfrak{m} = xA \oplus M$ ve $N = 0 \oplus M$, R'nin idealleridir. $\overline{R} := R/N \cong A$ bir tamlık bölgesidir ve $N^2 = 0$'dır. Dolayısıyla, N ideali üstelsıfırdır. O halde, N ideali R'nin asal radikalidir. Böylece, $N \subseteq J(R)$ elde edilir. $R/J(R) \cong \overline{R}/J(\overline{R})$ bir cisim olduğundan, R halkası Jacobson radikali $\mathfrak{m}$ olan bir yerel halkadır.

Sıfırdan farklı $\theta(x) \in k$ elemanı A içinde tersinirdir. O zaman

$$(xa, m) = (x, 0)(a, m\theta(x)^{-1}) \in (x, 0)R$$

elde edilir. $(x, 0)R \subseteq \mathfrak{m}$ olduğu ise açıktır. Dolayısıyla, $\mathfrak{m} = (x, 0).R$, yani $\mathfrak{m}$ bir temel sağ idealdir.

$R/N \cong A$ ve A Noether olduğundan R/N sağ R-modül olarak Noether'dir. Ayrıca $N^2 = 0$ olduğundan, N'nin R/N-modül yapısı da vardır. A Noether bir halka ve M_A sonlu üretilmiş olduğundan, M_A modülü de Noether'dir. Buradan, $N_(R/N)$ ve dolayısıyla N_R Noether'dir. R/N ve N Noether sağ R-modüller olduğundan, R bir sağ Noether halkadır.

Öte yandan, R'nin asal radikali N olduğundan, Önerme 2.4.9'dan,

$$r.K.Boy(R) = r.K.Boy(R/N) = r.K.Boy(A) = 1$$

olur.

$N_R = (0 \oplus M)_R$ modülü üzerindeki R-etkisi ile R/N-modül yapısına sahip olduğundan, M_A devirli olmayan bir modül ise, N_R de devirli olmaz, çünkü N_R'nin üreteç sayısı M_A'nın üreteç sayısına bağlıdır. Başka bir deyişle, N, R halkası içinde sağ ideal olarak devirli değildir, Böylece, R bir temel ideal halkası değildir.

Dolayısıyla, tek maksimal sağ ideali temel olan, ancak kendisi bir temel ideal halkası olmayan, sağ Krull boyutu 1 olan yerel bir sağ Noether halka örneği verilmiş olur.

Önerme 5.5.11 [5, Proposition 7.13] *R bir yarıasal sol Noether halka olsun ve her geniş sağ ideali düzenli eleman içersin (ikinci hipotez R tamlık bölgesiyse veya sağ Goldie halkası ise sağlanır). R'nin her maksimal sağ ideali temel ise, R bir temel sağ ideal halkasıdır.*

İspat: Örnek 5.4.4 ile, R'nin her geniş sağ idealinin temel olduğunu görmek yeterlidir. $E_R \leq_e R$ olsun. R'nin bir yarıbasit sol klasik kesirler halkası olduğundan,

R'nin düzenli elemanlarının çarpımsal kapalı kümesi doymuş olur. O halde, Önteorem 2.4.12'nin hipotezleri sağlanır. E bir düzenli eleman içerdiğinden, Önteorem 2.4.12 ile, R/E sonlu uzunlukludur. Dolayısıyla, $m_1, m_2, \ldots, m_n$ maksimal idealler olmak üzere R/E'nin R/m_i'ye izomorf faktörleri olan bir kompozisyon serisi vardır. Maksimal sağ ideallerin kümesi benzerlik altında kapalı olduğundan, Önteorem 5.3.18 ile R'nin tüm maksimal sağ idealleri $\mathcal{F}_{pr}^{\circ}$ içinde yer alır. O halde, $E \in \mathcal{F}_{pr}^{\circ} \subseteq \mathcal{F}_{pr}$ olur. Dolayısıyla, E bir temel sağ idealdir. $\square$

6 FARKLI YAKLAŞIMLARLA COHEN VE KAPLANSKY TEOREMLERİNİN GENELLEMELERİ

Tezin son bölümünde Cohen ve Kaplansky Teoremleri'nin literatürde yer alan değişmeli olmayan halkalardaki diğer genellemeleri üzerinde durulacaktır. Ayrıca, bu genellemelerin Teorem 5.2.5 ve Teorem 5.3.19 ile nasıl ilişkilendirilebileceği tartışılacaktır.

6.1 Koh ve Chandran Yaklaşımı

Koh, [6] çalışmasında, hem Cohen hem de Kaplansky teoremlerini genellemiştir. Koh'un "asal sağ ideal" tanımı aşağıda verilmiştir.

Tanım 6.1.1 [6] R bir halka, $I_R \subsetneq R$ ve $A_R, B_R \subseteq R$ sağ idealler olsun. $AI \subseteq I$ ve $AB \subseteq I$ iken $A \subseteq I$ veya $B \subseteq I$ koşulunu sağlayan I_R sağ idealine *Koh-asal sağ ideali* denir.

Yukarıdaki tanıma denk olarak; $a, b \in R$ için $aRb \subseteq I$ ve $aRI \subseteq I$ iken $a \in I$ veya $b \in I$ koşulu sağlanıyorsa I_R bir *Koh-asal sağ ideali* olur.

Teorem 6.1.2 [6, Theorem 1] *R bir halka olsun.*

(1) *R'nin bir sağ Noether halka olması için gerek ve yeter koşul her Koh-asal sağ idealin sonlu üretilmiş olmasıdır.*

(2) *R'nin bir temel sağ ideal halkası olması için gerek ve yeter koşul her Koh-asal sağ idealin temel olmasıdır.*

İspat: (1) ($\Rightarrow$) Açıktır.

($\Leftarrow$) R'nin her Koh-asal sağ ideali sonlu üretilmiş olsun. R bir Noether halka değilse R'nin sonlu üretlmiş olmayan bir sağ ideali vardır. Dolayısıyla,

$$\mathcal{L} = \{I_R \leq R \mid I \text{ sonlu üretilmemiştir}\}$$

kümesi boştan farklıdır. Zorn Önteoremi ile, $\mathcal{L}$ kümesinin bir maksimal I_0 elemanı vardır. I_0 bir Koh-asal sağ ideal değildir. Dolayısıyla, $AI_0 \subseteq I_0$ ve $AB \subseteq I_0$ iken $A \nsubseteq I_0$ ve $B \nsubseteq I_0$ olacak biçimde $A_R, B_R \subseteq R$ sağ idealleri vardır. $a \notin I_0$ olacak biçimde $a \in A$ alınsın. Buradan, $I_0 \subsetneq I_0 + aR$ olur ve I_0'ın maksimalliğinden $I_0 + aR$ sonlu üretilmiş olur. O halde, $I_0 + aR = x_1R + x_2R + \cdots + x_nR$ olacak biçimde $x_1, \ldots, x_n \in R$ vardır.

$J := a^{-1}I_0$ olsun. O zaman, $I_0 + B \subseteq J$'dir. $B \nsubseteq I_0$ olduğundan, $I_0 \subsetneq J$ olur. Dolayısıyla, J sonlu üretilmiştir. Buradan, $J = y_1R + \cdots + y_mR$ olacak biçimde $y_1, \ldots, y_m \in R$ vardır. Şimdi, $i = 1, \ldots, n$ için $b_i \in I_0$ ve $r_i \in R$ olacak biçimde $x_i = b_i + ar_i$ şeklinde yazılsın.

$b_1R + b_2R + \cdots + b_nR + aJ \subseteq I_0$ olduğu açıktır. Tersine, $w \in I_0$ olsun.

$$\begin{aligned} w = x_1c_1 + x_2c_2 + \cdots + x_nc_n &= (b_1 + ar_1)c_1 + \cdots + (b_n + ar_n)c_n \\ &= b_1c_1 + \cdots + b_nc_n + a(r_1c_1 + \cdots + r_nc_n) \end{aligned}$$

olacak biçimde $c_1, c_2, \ldots, c_n \in R$ vardır. $r_1c_1 + \cdots + r_nc_n \in J$ olduğundan,

$$I_0 \subseteq b_1R + b_2R + \cdots + b_nR + aJ$$

elde edilir. Öte yandan, $aJ = ay_1R + ay_2R + \cdots + ay_mR$ olduğundan I_0 sonlu üretilmiş olur ve çelişki elde edilir.

(2) ($\Rightarrow$) Açıktır.

($\Leftarrow$) Her Koh-asal sağ ideal temel olsun. I_R temel olmayan bir sağ ideal olsun. O zaman, $\mathcal{L} = \{I_R \leq R \mid I \text{ temel olmayan sağ idealdir}\}$ kümesi boştan farklıdır ve Zorn Önteoremi ile, $\mathcal{L}$'nin maksimal bir I_0 elemanı vardır. I_0 bir Koh-asal sağ ideal değildir. Dolayısıyla, $AI_0 \subseteq I_0$ ve $AB \subseteq I_0$ iken $A \nsubseteq I_0$ ve $B \nsubseteq I_0$ olacak şekilde $A_R, B_R \subseteq R$ sağ idealleri vardır. $I_0 \subsetneq aR + I_0$ ve I_0 ın maksimalliğinden, $aR + I_0$ bir temel sağ ideal olur. O zaman, $aR + I_0 = bR$ olacak biçimde $b \in R$ vardır. Dolayısıyla, $b = i_0 + ar_0$ olacak biçimde $i_0 \in I_0$ ve $r_0 \in R$ vardır.

$b^{-1}I_0 = \{x \in R \mid bx \in I_0\}$ kümesi göz önüne alınsın. $I_0 \subseteq bR$ olduğundan, $b(b^{-1}I_0) = I_0$'dır. $b = i_0 + ar_0$ olduğundan, $I_0 \subseteq b^{-1}I_0$ dır. $b^{-1}I_0 \neq I_0$ olsa, $b^{-1}I_0$ bir temel sağ ideal olur ve dolayısıyla $b^{-1}I_0 = dR$ olacak biçimde bir $d \in R$ vardır. O zaman, $I_0 = b(b^{-1}I_0) = bdR$ olur. Böylece, I_0'ın bir temel sağ ideal olduğu çelişkisi elde edilir. Öyleyse, $b^{-1}I_0 = I_0$'dır.

$(ar_0)^{-1}I_0 = \{x \in R \mid ar_0x \in I_0\}$ sağ ideali için $I_0 \subseteq (ar_0)^{-1}I_0$ olur. $B \subseteq (ar_0)^{-1}I_0$ olduğundan, $(ar_0)^{-1}I_0 \neq I_0$'dır. Ancak, $b = i_0 + ar_0$ olduğundan, $(ar_0)^{-1}I_0 = b^{-1}I_0 = I_0$ elde edilir ve böylece çelişki bulunur. $\square$

Koh'dan bağımsız olarak, Chandran da [7] çalışmasında Cohen ve Kaplansky Teoremleri'nin aşağıdaki genellemelerini vermiştir.

Teorem 6.1.3 [7, Theorem 1] *R bir sol-ikili halka olsun. R'nin her asal ideali bir temel ideal ise R bir temel ideal halkasıdır.*

İspat: R bir temel ideal halkası olmasın. O zaman,

$$\mathcal{L} = \{I \trianglelefteq R \mid I \text{ bir temel ideal değildir}\}$$

kümesi boştan farklıdır ve kapsama özelliğine göre kısmî sıralıdır. O zaman, Zorn Önteoremi ile, temel ideal olmama özelliğine göre maksimal bir M elemanı vardır. M ideali asal değildir. Dolayısıyla, $a, b \notin M$ iken $ab \in M$ koşulunu sağlayan $a, b \in R$ vardır. Buradan, $M \subsetneq M + Rb$ olur. Bu durumda, $M + Rb$ bir temel idealdir. Dolayısıyla, $M + Rb = Rc$ olacak biçimde bir $c \in R$ vardır.

$K := b^{-1}M = \{r \in R \mid rb \in M\}$ bir sol idealdir ve dolayısıyla iki-yönlüdür. $a \notin M$ ve $a \in K$ olduğundan, $M \subsetneq K$'dır. Dolayısıyla, K bir temel idealdir. O zaman, $K = Rd$ olacak biçimde bir $d \in R$ vardır. $M + Rb = Rc$ olduğundan, her $m \in M$ için $m = xc$ olacak biçimde bir $x \in R$ vardır. Aynı eşitlikten, bir $s \in R$ için $b = sc$ olur. Ayrıca, R bir sol ikili halka olduğundan, $xs = tx$ olacak şekilde bir $t \in R$ vardır. Dolayısıyla,

$$xb = x(sc) = (xs)c = (tx)c = t(xc) = tm \in M$$

eşitliğinden $x \in K$ bulunur. Böylece, $x = rd$ olacak biçimde bir $r \in R$ vardır. Herhangi bir $m \in M$ için $m = rdc$ olacağından $M \subseteq Rdc$ kapsaması elde edilir. Ayrıca, $c = m+rb$ olacak biçimde bir $m \in M$ ve $r \in R$ vardır. Öyleyse, $dc = dm + drb =$ olur. R sol-ikili bir halka olduğundan $dr = r^{'}d$ eşitliğini sağlayan bir $r' \in R$ vardır. Böylece, $d \in K$ olduğundan, $dc = dm + r^{'}(db) \in M$ elde edilir. Dolayısıyla, $Rdc \subseteq M$ elde edilir. Sonuçta, $M = Rdc$ olacağından çelişki bulunur. □

Teorem 6.1.4 [7, Theorem 2] *R bir sol ikili-halka olsun. R'nin her asal ideali sonlu üretilmişse, R Noether'dir.*

İspat: R'nin sonlu üretilmiş olmayan bir ideal içerdiği kabul edilsin. O zaman,

$$\mathcal{L} = \{I \trianglelefteq R \mid I \text{ sonlu üretilmemiştir}\}$$

kümesi boştan farklıdır. Dolayısıyla, Zorn Önteoremi ile $\mathcal{L}$'nin maksimal bir M elemanı vardır. M asal ideal değildir. O zaman, $a, b \notin M$ iken $ab \in M$ olacak biçimde $a, b \in R$ vardır. Dolayısıyla, $M \subsetneq M + Rb$'dir ve M'nin maksimalliğinden $M + Rb$ sonlu üretilmiştir. Bu durumda, $M+Rb=Rx_1+Rx_2+\cdots+Rx_n$ olacak biçimde $x_1,\ldots,x_n\in R$ vardır. Her $i=1,2,\ldots,n$ için $m_i\in M$ ve $r_i\in R$ olmak üzere $x_i=m_i+r_ib$ yazılır. Buradan,

$$M+Rb=Rm_1+Rm_2+\cdots+Rm_i+Rb$$

olur ve $\{m_1,m_2,..,m_n,b\}$ kümesi $M+Rb$ için bir sonlu üreteç kümesi olur.

$K:=b^{-1}R=\{r\in R\mid rb\in M\}$ bir sol idealdir ve dolayısıyla iki yönlüdür. $a\in K$ ve $a\notin M$ olduğundan, $M\subsetneq K$'dır. O zaman, K ideali sonlu üretilmiştir. Bu durumda, $K=Ry_1+Ry_2+\cdots+Ry_m$ olacak biçimde bir $\{y_1,y_2,\ldots,y_m\}$ üreteç kümesi vardır.

$m\in M$ olsun. $r_i\in R$ ve $r\in R$ için, $m=r_1m_1+r_2m_2+\cdots+r_nm_n+rb$ olur. O zaman, $r\in K$'dır ve dolayısıyla, $r=r_1^{'}y_1+r_2^{'}y_2+\cdots+r_m^{'}y_m$ olacak şekilde $r_1^{'},\ldots,r_m^{'}\in R$ vardır. Buradan, $m=r_1m_1+r_2m_2+\cdots+r_nm_n+r_1^{'}(y_1b)+\cdots+r_1^{'}(y_mb)$ elde edilir. Böylece, $\{m_1,m_2,\ldots,m_n,y_1b,\ldots,y_mb\}$ kümesi M için sonlu bir üreteç kümesi olur. Bu ise, M'nin sonlu üretilmemiş olması ile çelişir. $\square$

İki yönlü bir idealin sağ ideal olarak Koh-asal olması için gerek ve yeter koşul idealin bilinen anlamda asal ideal olmasıdır. Dolayısıyla, Koh'un elde ettiği sonuç, Chandran'ın elde ettiği sonucu gerektirir.

Önerme 6.1.5 [5] *Bir R halkasındaki tamamen asal sağ idealler, Koh-asal sağ ideallerdir.*

İspat: $P_R\subseteq R$ bir tamamen asal sağ ideal olsun. $AP\subseteq P$ ve $AB\subseteq P$ olacak biçimde $A_R,B_R\subseteq R$ sağ idealleri ele alınsın. $A\subsetneq P$ ise, sıfırdan farklı en az bir $a\in A\setminus P$ vardır. $aP\subseteq P$ ve her $b\in B$ için $ab\in P$ dir. P bir tamamen asal sağ ideal olduğundan, $b\in P$'dir. Dolayısıyla $B\subseteq P$ olur. O halde, P bir Koh-asal sağ idealdir. $\square$

Uyarı 6.1.6 [5] *Teorem 5.2.5'te ve Teorem 5.3.19'da $\mathcal{S}$ kümesi olarak tamamen asal sağ ideallerin kümesi alınırsa, Koh'un elde ettiği sonuçlara, dolayısıyla Chandran'ın sonuçlarına ulaşılır.*

6.2 Michler Yaklaşımı

G.O. Michler [8], Cohen Teoremi'nin değişmeli olmayan bir başka genellemesini ele almıştır. Michler "asal sağ ideal" tanımını aşağıdaki şekilde vermiştir.

Tanım 6.2.1 [8] R bir halka ve $I_R \subseteq R$ bir sağ ideal olsun. $a, b \in R$ için, $aRb \subseteq I$ iken $a \in I$ veya $b \in I$ koşulunu sağlayan I_R sağ idealine *Michler-asal sağ ideal* denir.

Bu tanıma denk olarak; $A_R, B_R \subseteq R$ sağ idealleri için, $AB \subseteq I$ iken $A \subseteq I$ veya $B \subseteq I$ koşulunu sağlayan I_R sağ ideali bir *Michler-asal sağ ideal* olur.

Michler'in sonucunu ispatlamak için aşağıdaki bilgilere ihtiyaç vardır.

Önteorem 6.2.2 [8, Lemma 2] *$i = 1, 2, \ldots, k$ için R/P_i halkaları sağ Noether olacak biçimde $P_1, P_2, \ldots, P_k$ sonlu üretilmiş idealler verilsin. Bu durumda,*

$$P_1 \cdots P_k \leq A \leq \bigcap_{i=1}^{k} P_i$$

koşulunu sağlayan her A sağ ideali sonlu üretilmiştir.

İspat: $P_1 \geq P_1P_2 \geq \cdots \geq P_1P_2 \cdots P_{k-1} \geq P_1P_2..P_{k-1}P_k$ azalan zinciri sonlu üretilmiş sağ ideallerden oluşur. Her $i = 1, 2, \ldots, k-1$ için $(P_1P_2 \cdots P_i)/P_1P_2 \cdots P_iP_{i+1}$ bir sonlu üretilmiş R/P_{i+1}-modüldür. Dolayısıyla, $P_1/(P_1P_2 \cdots P_k)$ sağ R-modülünün her alt modülü sonlu üretilmiştir. O halde, $A/(P_1P_2 \cdots P_k)$ de sonlu üretilmiştir. Böylece, A sağ ideali sonlu üretilmiş olur. $\square$

Önteorem 6.2.3 [8, Lemma 3] *R halkasının her ideali ve her Michler-asal sağ ideali sonlu üretilmiş bir sağ ideal ise, R bir sağ Noether halkadır.*

İspat: R'nin her ideali sonlu üretilmiş ise, R idealler üzerinde artan zincir koşulunu sağlar. Dolayısıyla, R bir sağ Noether halka değilse, boştan farklı

$$\mathcal{L} = \{X \trianglelefteq R \mid R/X \text{ sağ Noether değildir}\}$$

kümesinin bir maksimal M elemanı vardır. $M = 0$ ve $\mathcal{I} = \{Y_R \leq R_R \mid \text{Y sonlu üretilmemiştir}\}$ kümesi boştan farklı kabul edilebilir. Zorn Önteoremi ile, $\mathcal{I}$ kümesinin bir maksimal elemanı vardır. Bu eleman G olsun. G sağ ideali sonlu üretilmediğinden, Michler-asal sağ ideal değildir. Dolayısıyla, $aRb \subseteq G$ olacak biçimde $a \notin G$ ve $b \notin G$ elemanları vardır. $A = aR+G$ sonlu üretilmiştir. $U = RbR$ ideali, R'nin sonlu üretilmiş bir sağ ideali olduğundan, AU da R'nin G içinde kapsanan sonlu üretilmiş bir sağ idealidir. $R = RbR$ ise, $a \in aR = aRbR \subseteq G$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla, R/U sağ Noetherdir ve G/AU bir sonlu üretilmiş R-modüldür. Sonuç olarak, G sağ ideali sonlu üretilmiştir. Bu çelişkiden, R bir sağ Noether halkadır. $\square$

Önteorem 6.2.4 [8, Lemma 4] *R'nin her asal ideali sonlu üretilmiş bir sağ ideal ise, her A ideali, her biri A'yı içeren sonlu sayıdaki P_i asal ideallerinin çarpımını içerir.*

İspat: Aksi iddia edilsin. O zaman,

$$\mathcal{R} = \{A \trianglelefteq R \mid A, \text{ sonlu sayıda } P_i \geq A \text{ asal ideallerinin çarpımını içermez}\}$$

kümesi boştan farklıdır. $X_i \in \mathcal{R}$ için $X_1 < X_2 < \cdots$ sonsuz bir kesin artan zincir ise, $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i \in \mathcal{R}$ olur. Aksi durumda; $j = 1, 2, \ldots, k$ için $Q_1 Q_2 \cdots Q_k \leq X$ olacak biçimde sonlu sayıda $Q_j \geq X$ asal ideali var olurdu. $Q_1 \cdots Q_k$ çarpımı R'nin sonlu üretilmiş sağ ideali olduğundan, $T = Q_1 \cdots Q_k \leq X_s$ olacak biçimde bir $s \in \mathbb{Z}$ bulunur. Bu durum ise $X_s \notin \mathcal{R}$ çelişkisi verir.

Dolayısıyla, Zorn Önteoremi ile, $\mathcal{R}$'nin maksimal bir G elemanı vardır ve G asal ideal değildir. O zaman, $i = 1, 2$ için $A_1 A_2 \leq G$ olacak biçimde $A_i > G$ idealleri vardır. $A_i \notin \mathcal{R}$ olduğundan; $i = 1, 2$ için

$$P_{i1} P_{i2} \cdots P_{ik_i} \leq A_i \leq \bigcap_{j=1}^{k_i} P_{ij}$$

olacak biçimde P_{ij} asal idealleri vardır. Bu durumda,

$$P_{11} P_{12} \cdots P_{1k_1} P_{22} \cdots P_{2k_2} \leq A_1 A_2 \leq G < (\bigcap_{j=1}^{k_1} P_{ij}) \cap (\bigcap_{j=1}^{k_2} P_2)$$

ve böylece $G \notin \mathcal{R}$ çelişkisi elde edilir. □

Önteorem 6.2.5 [8, Lemma 5] *R halkasının her asal ideali R'nin sonlu üretilmiş bir sağ idealiyse, R halkası asal idealleri üzerinde artan zincir koşulu sağlar.*

İspat: İddia edilenin aksi varsayılırsa, P_i asal ideallerinin sonsuz kesin artan bir zinciri vardır. $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i$ olsun. Önteorem 6.2.4 ile,

$$T = Q_1 Q_2 \cdots Q_k \leq X < \bigcap_{j=1}^{k} Q_j$$

olacak şekilde R halkasının sonlu sayıda $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ asal ideali vardır. T sonlu üretilmiş bir sağ idealdir. Dolayısıyla, bir $s \in \mathbb{Z}$ için $T = Q_1 \cdots Q_k \leq P_s$ olur. Ancak, P_s ideali R'nin asal ideali olduğundan, bir $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ için $Q_j \leq P_s < X \leq Q_j$ çelişkisi elde edilir. □

Teorem 6.2.6 [8, Theorem 6] *Bir R halkasının sağ Noether olması için gerek ve yeter koşul her Michler-asal sağ idealinin sonlu üretilmiş olmasıdır.*

İspat: ($\Rightarrow$) Açıktır.

($\Leftarrow$) R'nin her Michler-asal sağ ideali sonlu üretilmiş olsun. O zaman, Önteorem 6.2.3 ile, her idealin sonlu üretilmiş sağ ideal olduğunu görmek yeterlidir. Her asal P ideali için R/P sağ Noether ise Önteorem 6.2.2 ve Önteorem 6.2.4 ile istenen elde edilir.

$\mathcal{P} = \{P \lhd R$ asal ideal$|\ R/P$ sağ Noether değildir$\}$ kümesi ele alınsın. Her Michler-asal sağ ideal sonlu üretilmiş olduğundan, Önteorem 6.2.5 ile, R asal idealler üzerinde artan zincir koşulunu sağlar. Dolayısıyla, $\mathcal{P}$ boştan farklı ise, maksimal bir M elemanı içerir. $M = 0$ kabul edilebilir. R sağ Noether olmadığından, Önteorem 6.2.3'ten, R'nin sağ ideal olarak sonlu üretilmemiş olan sıfırdan farklı bir A ideali vardır. Önteorem 6.2.4 ile, $i = 1, 2, \ldots, k$ için $P_1P_2 \cdots P_k \leq A$ olacak biçimde sonlu sayıda asal $P_i \geq A$ ideali vardır. Her i için $P_i \neq 0$ olduğundan, R/P_i halkaları sağ Noetherdir.

Önteorem 6.2.2 uygulanırsa A, R'nin sonlu üretilmiş bir sağ ideali olur ve çelişki elde edilir. Dolayısıyla, $\mathcal{P} = \emptyset$ olmalıdır. Böylece, R bir sağ Noether halkadır. $\square$

Bir halkanın Michler-asal sağ idealleri, bu halkanın tüm Koh-asal sağ ideallerinin bir alt kümesini oluşturur. Dolayısıyla, Cohen Teoremi'nin Michler versiyonu, Koh'un versiyonunu geneller.

Michler'in teoremini, Teorem 5.2.5'ten direkt olarak elde etmek için Michler-asal sağ ideallerin bir R halkası üzerinde bir Noether nokta sıfırlayıcı küme oluşturup oluşturmadığını kontrol etmek gerekir. Bunun doğru olup olmadığını belirlemek için Michler-asal sağ idealler için alternatif bir karakterizasyon verilecektir.

Tanım 6.2.7 [14] R bir halka olsun. Bir M_R modülü ve sıfırdan farklı her $N \subseteq M$ alt modülü için $ann(M) = ann(N)$ oluyorsa, M_R modülüne *asal modül* denir.

Önerme 6.2.8 [14] *Bir asal modülün sıfırlayıcısı asal idealdir.*

Önerme 6.2.9 [5, Proposition 8.1] *Bir R halkasında $P_R \subsetneq R$ sağ idealinin Michler-asal sağ ideal olması için gerek ve yeter koşul R/P'nin asal modül olmasıdır.*

İspat: ($\Rightarrow$) P_R bir Michler-asal sağ ideal olsun. Sıfırdan farklı bir $A/P \subseteq R/P$ alt modülü alınsın. $B := ann(A/P)$ olsun. Buradan, $AB \subseteq P$'dir. P bir Michler-asal sağ ideal ve $P \subsetneq A$ olduğundan, $B \subseteq P$ olur. O halde, $(R/P)B = (P+B)/P = 0$'dır. Dolayısıyla, $B = ann(R/P)$ dir. Böylece, R/P bir asal modül olur.

($\Leftarrow$) R/P bir asal modül olsun. $aRb \subseteq P$ ve $a \notin P$ olacak şekilde $a, b \in R$ alınsın. b elemanı sıfırdan farklı $(P + aR)/P$ modülünü sıfırlar. Dolayısıyla,

$$b \in ann((P + aR)/P) = ann(R/P)$$

olur. O zaman, $(R/P)b = 0$'dır ve böylece $b \in P$ elde edilir. O halde, P bir Michler-asal sağ idealdir. □

Önerme 6.2.10 [11] Asal bir modülün alt modülü de asaldır.

Önerme 6.2.11 [11, Lemma 3.58] *R, idealleri üzerinde artan zincir koşulunu sağlayan bir halka ise, sıfırdan farklı her sağ R-modülün bir asal alt modülü vardır.*

Sonuç 6.2.12 [5, Corollary 8.2] *R bir halka ve* $\mathcal{S} = \{P_R \leq R_R \mid P$ *Michler-asal sağ ideal*$\}$ *olsun.* $\mathcal{S}$*'nin bir Noether nokta sıfırlayıcı küme olması için gerek ve yeter koşul sıfırdan farklı her Noether sağ R-modülün bir asal alt modülünün bulunmasıdır.*

İspat: ($\Rightarrow$) $\mathcal{S}$ bir Noether nokta sıfırlayıcı küme olsun. Sıfırdan farklı bir Noether M modülü için $ann(m) \in \mathcal{S}$ olacak biçimde en az bir sıfırdan farklı $m \in M$ vardır ve hipotez ile $ann(m)$ bir Michler-asal sağ idealdir. Önerme 6.2.9'dan, $R/ann(m)$ bir asal modüldür. O halde, $R/ann(m) \cong mR \subseteq M$ oluğundan istenen elde edilir.

($\Leftarrow$) M_R, asal alt modülü N olan bir sağ modül olsun. Sıfırdan farklı bir $m \in N$ için $R/ann(m) \cong mR \subseteq N$'dir. Önerme 6.2.10'dan, mR bir asal modüldür. Dolayısıyla, Önerme 6.2.9'dan, $ann(m)$ bir Michler-asal sağ idealdir. Sonuç olarak, $\mathcal{S}$ kümesi bir Noether nokta sıfırlayıcı kümedir. □

Sonuç 6.2.13 [5, Corollary 8.2]*R halkası idealleri üzerinde artan zincir koşulunu sağlarsa, R'nin Michler-asal sağ ideallerinden oluşan* $\mathcal{S}$ *kümesi bir Noether nokta sıfırlayıcı kümedir.*

İspat: Önerme 6.2.11 ve Sonuç 6.2.12'den elde edilir. □

Aşağıdaki sonuç, Michler'in Cohen versiyonunu ispatlamak için kullandığı bir adım niteliğindedir (bkz. Önteorem 6.2.3).

Sonuç 6.2.14 [5, p. 970] Bir R halkasının sağ Noether olması için gerek ve yeter koşul idealleri üzerinde artan zincir koşulunu sağlaması ve tüm Michler-asal sağ ideallerin sonlu üretilmiş olmasıdır.

İspat: Sonuç 6.2.12'den ve Teorem 5.2.5'ten elde edilir. □

Bazı halkalar üzerinde, asal alt modülü olmayan sıfırdan farklı Noether modüller vardır. Dolayısıyla, Michler-asal idealler her halkada bir Noether nokta sıfırlayıcı küme oluşturmazlar.

Örnek 6.2.15 [5, Example 8.3] k bir bölümlü halka ve R, k üzerindeki $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ tipindeki satır-sonlu üst üçgen matrislerin halkası olsun. $M_R = \bigoplus_{\mathbb{N}} k$ ele alınsın. Bu modül, sağ R-etkisi ile k üzerindeki satır vektörler olarak görülebilir. Her i indisi için M_i'ler ilk i girişi 0 olan satır vektörlerden oluşan alt modüller olsun. O zaman,

$$M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq M_2 \supsetneq \cdots$$

M'nin sıfırdan farklı tüm alt modüllerini oluşturur.

Sıfırdan farklı bir $X \subseteq M$ verilsin. O zaman, sıfırdan farklı bir $(c_1, \ldots, c_n, 0, 0, \ldots) \in X$ vardır. Dolayısıyla, en az bir i indisi için $c_i \neq 0$'dır. $X =< (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots) >_R = M_i$ olduğu açıktır. Bu durumda, M_i'ler M'nin tüm alt modülleridir. Başka bir deyişle, M'nin tüm alt modülleri temeldir ve standart taban vektörlerden biri ile üretilmiştir. Dolayısıyla, M bir Noether modüldür.

Ancak, $ann(M_i)$ ideali R'nin ilk i girişi hariç kalanı 0 olan tüm matrislerin kümesine eşittir. O halde, $ann(M_0) \subsetneq ann(M_1) \subsetneq ann(M_2) \subsetneq \cdots$ olur. Böylece M'nin asal alt modülü yoktur.

Uyarı 6.2.16 [5] Örnek 6.2.15'de verilen M_R modülü asal olmayan, devirli ve 1-kritik bir modül örneğidir. Dolayısıyla, $R/I \cong M$ olacak biçimde seçilen bir $I_R \subseteq R$ sağ ideali (örneğin, R'nin ilk satırı 0 olan matrislerin sağ ideali) için I bir eşkritik sağ idealdir ancak Michler-asal değildir.

Önteorem 6.2.17 [36, Lemma 2] *R aşağıdaki iki özelliği sağlayan bir halka olsun:*

(1) *Her $I \subseteq R$ ideali, her birinin I'yı içerdiği sonlu sayıda asal idealin çarpımını içerir.*

(2) *R halkası asal idealler üzerinde artan zincir koşulu sağlar.*

Bu durumda, sıfırdan farklı her sağ R-modülün bir asal alt modülü vardır.

Teorem 6.2.18 [5, Theorem 8.4] *Bir R halkasının sağ Noether olması için gerek ve yeter koşul R'nin tüm Michler-asal sağ ideallerinin sonlu üretilmiş olmasıdır.*

İspat: R'nin tüm Michler-asal sağ idealleri sonlu üretilmiş olsun. R'nin tüm asal idealleri Michler-asaldır ve dolayısıyla sağ ideal olarak sonlu üretilmiştir. Önteorem 6.2.4 ve Önteorem 6.2.5 ile aşağıdaki iki koşul sağlanır:

(1) Her $I \subseteq R$ ideali, her birinin I'yı içerdiği sonlu sayıda asal idealin çarpımını içerir.

(2) R halkası asal idealler üzerinde artan zincir koşulu sağlar.

Dolayısıyla, Önteorem 6.2.17 ile, sıfırdan farklı bir sağ R-modülün bir asal alt modülü
vardır. Sonuç 6.2.12'den Michler-asal sağ idealler kümesi, R için bir Noether nokta sıfırlayıcı kümedir. O zaman, Teorem 5.2.5 ile, R bir sağ Noether halkadır. $\square$

Reyes'in geliştirdiği yöntemler sayesinde, Michler'in ispatlayamadığı aşağıdaki sonucu vermek mümkündür.

Teorem 6.2.19 [5, Theorem 8.5] *Bir R halkasının bir temel sağ ideal halkası olması için gerek ve yeter koşul R'nin tüm Michler-asal sağ ideallerinin temel olmasıdır.*

İspat: ($\Rightarrow$) Açıktır.

($\Leftarrow$) R'nin tüm Michler-asal sağ idealleri temel olsun. Teorem 6.2.18'in kanıtına benzer olarak, tüm Michler-asal sağ ideallerin $\mathcal{S}$ kümesi, R için bir Noether nokta sıfırlayıcı kümedir. Önerme 6.2.9 ile, bu küme benzerlik altında kapalıdır. O halde, Teorem 5.3.19'dan, R bir temel sağ ideal halkasıdır. $\square$

Bir R halkası için Michler Teoremi ile Değişmeli Olmayan Cohen Teoremi'nde $\mathcal{S}$ kümesi olarak tamamen asal sağ ideallerin alınmasının etkinliği kıyaslanabilir. Bu kıyas "test edilecek" kümenin yaygınlığına veya nadirliğine bağlıdır. Örneğin, basit halka üzerinde sıfırdan farklı her sağ R-modül asal olacağından, R'nin her öz sağ ideali Michler-asal olacaktır. (Aslında, Koh [37, Theorem 4.2]'de daha fazlasını göstermiştir. Koh'un bu sonucuna göre, bir R halkasının basit olması için gerek ve yeter koşul her öz sağ idealinin Michler-asal olmasıdır.) Dolayısıyla, bir basit halka için Michler Teoremi'ni kullanmak avantajlı olmayacaktır. Başka bir deyişle, R'nin bir sağ Noether halka olup olmadığının tespit edilmesi için hâlâ her sağ idealin test edilmesine ihtiyaç vardır. Öte yandan, Önerme 4.1.19 ile bir R halkasının her öz sağ ideali tamamen asal ise R bölümlü halkadır. Dolayısıyla, bu aşikâr sınıf dışında $\mathcal{S}$ kümesi olarak tamamen asal sağ idealler alınırsa, Teorem 5.2.5 halkanın sağ Noether olup olmadığını belirlemek için test edilmesi gereken sağ idealler kümesini daraltır.

6.3 Tam Sınırlı Halkalar ve Cohen Teoremi

Bu alt bölümde, Smith'in tam sınırlı halkalar üzerinde ispatladığı Cohen Teoremi'nin bir başka versiyonu incelenecektir (bkz.[9]).

Tanım 6.3.1 [18] R bir asal halka olsun. R'nin her geniş sağ ideali sıfırdan farklı bir ideal içerirse R'ye *sağ sınırlı (right bounded) halka* denir.

Tanım 6.3.2 [18] R halkasının her asal faktörü bir sağ sınırlı halkaysa, R'ye *sağ tam sınırlı (right fully bounded)* denir.

Önteorem 6.3.3 [9, Lemma 4] *R, her asal ideali sağ ideal olarak sonlu üretilen bir halka ve her $P \lhd R$ asal ideali için R/P sağ Noether olsun. O zaman, R sağ Noether'dir.*

İspat: Bu sonuç, Önteorem 6.2.2'nin genelleştirilmiş bir ifadesi olup, ispatı benzer şekilde yapılmaktadır. □

Teorem 6.3.4 [9, Theorem 1] *Sağ tam sınırlı bir R halkasının sağ Noether olması için gerek ve yeter koşul her asal idealin sağ ideal olarak sonlu üretilmiş olmasıdır.*

İspat: ($\Rightarrow$) Açıktır.

($\Leftarrow$) R, her asal ideali sağ ideal olarak sonlu üretilen bir sağ tam sınırlı halka olsun. R'nin sağ Noether olmadığı kabul edilsin. Önteorem 6.3.3'ten, R/P sağ Noether olmayacak biçimde asal bir P ideali vardır. Önteorem 6.2.5 ile, bu özelliğe göre maksimal olan bir P seçilebilir. Genelliği bozmadan $P = 0$ varsayılsın. Sıfırdan farklı bir $I \subsetneq R$ ideali verilsin. Önteorem 6.2.4 ile, I sıfırdan farklı asal ideallerin bir sonlu çarpımını içerir. Bu çarpıma J denirse, Önteorem 6.3.3'ten, R/J sağ Noether olur. Dolayısıyla, R/I sağ Noether'dir. Böylece I/J sonlu üretilmiştir. O zaman, I sonlu üretilmiş bir sağ idealdir. E, R'nin geniş bir sağ ideali olsun. Hipotezden, $K \subseteq E$ olacak biçimde sıfırdan farklı bir K ideali vardır. Ancak, R/K sağ Noether halkadır ve K bir sonlu üretilmiş sağ idealdir. Dolayısıyla, E bir sonlu üretilmiş sağ idealdir. Bu durumda, her geniş sağ ideal sonlu üretilmiş olur. R'nin her sağ ideali geniş bir sağ idealin dik toplananı olduğundan, R'nin her sağ ideali sonlu üretilmiş olur ve çelişki elde edilir. Dolayısıyla, R bir sağ Noether halkadır. Bu ise bir çelişkidir. $\square$

6.4 Değişmeli Olmayan S-Noether Halkalar

Bu alt bölümde, Anderson ve Dumitrescu tarafından çalışılan [3] ve tezin üçüncü bölümünde ele alınan S-Noether halkaların, değişmeli olmayan bir genellemesi üzerinde durulacaktır. Üçüncü bölümde, değişmeli S-Noether halkalar için verilen Cohen Teorem'nin değişmeli olmayan S-Noether halkalar üzerindeki versiyonu, Reyes'in teknikleri kullanılarak elde edilecektir.

Tanım 6.4.1 [10, Definition 1.1] R bir halka, $S \subseteq R$ bir çarpımsal kapalı küme ve $I_R \subseteq R$ bir sağ ideal olsun. $Is \subseteq J \subseteq I$ olacak biçimde bir $s \in S$ ve sonlu üretilmiş bir $J_R \subseteq R$ sağ ideali varsa, I_R'ye bir S-*sonlu* sağ ideal denir. R'nin her sağ ideali S-sonlu ise, R ye bir *sağ* S-*Noether* halka denir.

Örnek 6.4.2 [10, Example 1] R, S-Noether olup Noether olmayan değişmeli bir halka ve $S \subseteq R$ çarpımsal kapalı bir küme olsun (bkz. Örnek 3.2.2). T halkası olarak, R üzerinde 2×2 formundaki üst üçgensel matrislerin halkası alınsın. R Noether olmadığından, T bir sağ Noether halka değildir (bkz. [14, Proposition 1.8]).

$$S' = \{ \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid s \in S\} \subseteq T$$

kümesi bir çarpımsal kapalı kümedir. J, T'nin bir sağ ideali olsun. O zaman $I_1, I_2, I_3 \trianglelefteq R$ ve $I_1 + I_3 \subseteq I_2$ olmak üzere;

$$J = \begin{pmatrix} I_1 & I_2 \\ 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

formunda yazılabilir (bkz. [15, Proposition 1.7]). R bir S-Noether halka olduğundan, $I_2 s \subseteq F$ olacak biçimde bir $s \in S$ elemanı ve sonlu üretilmiş bir $F \subseteq R$ ideali vardır. Dolayısıyla,

$$J \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \subseteq \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & F \end{pmatrix}$$

elde edilir. O halde, T bir sağ S'-Noether halkadır.

Bir halkanın sağ S-Noether olup olmadığını test etmek için sadece tamamen asal sağ ideallerini kontrol etmemizin yeterli olduğu görülecektir. Bunu ispatlamak için, öncelikle, bir R halkasının tüm S-sonlu sağ ideallerinin bir sağ Oka ailesi oluşturduğu gösterilecektir.

Önteorem 6.4.3 [10, Lemma 2.1] *R bir halka ve $S \subseteq R$ bir çarpımsal kapalı bir küme olsun. R'nin tüm S-sonlu sağ ideallerinin kümesi $\mathcal{F}$ bir sağ Oka ailesidir.*

İspat: R halkası sonlu üretilmiş olduğundan, S-sonludur ve dolayısıyla $R \in \mathcal{F}$'dir. Bir $I_R \subseteq R$ sağ ideali ve bir $a \in R$ için $I + aR$, $a^{-1}I$ S-sonlu sağ idealler olsun. O zaman, $(I + aR)s \subseteq J \subseteq I + aR$ ve $(a^{-1}I)t \subseteq K \subseteq a^{-1}I$ olacak şekilde $s, t \in S$ ve sonlu üretilmiş J ve K sağ idealleri vardır. $J \subseteq I + ar$ olduğundan, J'nin üreteçleri, $x_i \in I$ ve $r_i \in R$ için $x_i + ar_i$ biçiminde yazılabilir. O zaman, $I_0 := \sum x_i R \subseteq I$ sağ ideali için, $J = \sum(x_i + ar_i)R \subseteq I_0 + aR$ elde edilir. Buradan, $Is \subseteq I_0 + a(a^{-1}I)$ bulunur. Böylece,

$$Ist \subseteq I_0 t + a(a^{-1}I)t \subseteq I_0 + aK$$

olur. Buradan, $I_0 t, aK \subseteq I$ sonlu üretilmiş sağ idealler olduğundan,

$$Ist \subseteq I_0 + aK \subseteq I$$

elde edilir. Dolayısıyla, I_R bir S-sonlu sağ idealdir. Böylece, $I_R \in \mathcal{F}$'dir. $\square$

Teorem 6.4.4 [10, Theorem 2.2] *R bir halka ve $S \subseteq R$ bir çarpımsal kapalı küme olsun. R'nin bir sağ S-Noether halka olması için gerek ve yeter koşul her tamamen asal sağ idealinin S-sonlu olmasıdır.*

İspat: $(\Rightarrow)$ Açıktır.

$(\Leftarrow)$ $\mathcal{F} := \{I_R \leq R_R \mid I, S\text{-sonlu}\}$ kümesi ele alınsın. Önteorem 6.4.3'ten, $\mathcal{F}$ bir sağ Oka ailesidir. Λ bir indis kümesi ise, $\{I_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$, $\mathcal{F}'$ ailesinin boştan farklı bir zinciri olsun ve $I := \bigcup_{\alpha \in \Lambda} I_\alpha$ oluşturulsun. I bir sağ idealdir. I'nın bir S-sonlu sağ ideal olduğu kabul edilsin. O zaman, $Is \subseteq J \subseteq I$ olacak biçimde bir $s \in S$ ve bir sonlu üretilmiş $J_R \subseteq R$ sağ ideali vardır. $x_i \in R$ olmak üzere, $J :=< x_1, \ldots, x_k >$ olsun. $J \subseteq I$ olduğundan, $J \subseteq I_\beta$ olacak biçimde bir $\beta \in \Lambda$ vardır. Dolayısıyla, $I_\beta s \subseteq J \subseteq I$ olur. Bu ise, I_β'nın

S-sonlu bir sağ ideal olmamasıyla çelişir. O halde, $I \in \mathcal{F}^{'}$ olur. Böylece, $\mathcal{F}^{'}$ ailesindeki boştan farklı her zincirin $\mathcal{F}^{'}$ ailesinde bir üst sınırı vardır. Teorem 4.2.5 ile, R'nin tüm sağ idealleri $\mathcal{F}$'dedir. Dolayısıyla, R bir S-Noether halkadır. $\square$

Tanım 6.4.5 [10, Definition 1.1] M bir sağ R-modül ve $S \subseteq R$ bir çarpımsal kapalı küme olsun. Bir $s \in S$ ve sonlu üretilmiş bir $F \subseteq M$ alt modülü için $Ms \subseteq F$ koşulu sağlanıyorsa, M'ye bir *S-sonlu modül* denir. M'nin her alt modülü S-sonlu ise, M'ye bir *S-Noether modül* denir.

Önerme 6.4.6 [10] R bir halka ve $M, M^{'}$ ve $M^{''}$ sağ R-modüller olsun. Bir

$$0 \to M^{'} \to M \to M^{''} \to 0$$

tam dizisi için, M'nin bir S-Noether modül olması için gerek ve yeter koşul $M^{'}$ ve $M^{''}$ sağ R-modüllerinin de S-Noether olmalarıdır.

Sonuç 6.4.7 [10] R bir sağ S-Noether halka ise R'nin sonlu üretilmiş sağ R-modülleri de S-Noetherdir.

Aşağıdaki sonuç, S-Noether modülleri karakterize etmektedir.

Teorem 6.4.8 [10, Theorem 2.3] *R bir halka, $S \subseteq R$ bir çarpımsal kapalı küme ve M bir sağ R-modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:*

(1) *M sağ S-Noetherdir.*

(2) *I bir indis kümesi olmak üzere, M'nin alt modüllerinin her*

$$K_1 \subsetneq K_2 \subsetneq \cdots \subsetneq K_i \subsetneq \cdots$$

zinciri ve her $i \in I$ için $K_i s \subseteq F \subseteq K_j$ olacak biçimde bir $j \in I$ ve sonlu üretilmiş bir $F \subseteq K_j$ alt modülü vardır.

(3) *M'nin alt modüllerinin boştan farklı her $\mathcal{F}$ kümesi için; bir $K \in \mathcal{F}$, sonlu üretilmiş bir $F \subseteq K$ alt modülü ve bir $s \in S$ vardır öyle ki bir $K^{'} \in \mathcal{F}$ için $K \subseteq K^{'}$ iken $K^{'}s \subseteq F \subseteq K$ sağlanır.*

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) M bir S-Noether sağ R-modül olsun. Bir I indis kümesi için, M'nin alt modüllerinden oluşan bir $K_1 \subsetneq K_2 \subsetneq \cdots K_i \subsetneq \cdots$ zinciri verilsin. $K := \bigcup\limits_{i \in I} K_i$ kümesi M nin bir alt modülüdür ve S-sonludur. Dolayısıyla, $Ks \subseteq F \subseteq K$ olacak biçimde bir $s \in S$ ve sonlu üretilmiş bir $F \subseteq K$ alt modülü vardır. F sonlu üretilmiş olduğundan, bir $j \in I$ için $F \subseteq K_j$'dir. O halde, $Ks \subseteq F \subseteq K_j$ elde edilir ve dolayısıyla, her $i \in I$ için $K_i s \subseteq F \subseteq K_j$'dir.

(2) $\Rightarrow$ (1) $N \subseteq M$ alt modülü verilsin ve N'nin sonlu üretilmiş olmadığı kabul edilsin. O zaman, $a_k \in N$ olmak üzere, alt modüllerin bir

$$< a_1 > \subsetneq < a_1, a_2 > \subsetneq \cdots \subsetneq < a_1, a_2, \cdots, a_i > \subsetneq \cdots$$

zinciri vardır. Kabulden, her $i \in I$ için, $< a_1, \ldots, a_n > s \subseteq < a_1, \ldots, a_j >$ olacak biçimde bir $s \in S$ ve $j \in I$ vardır. Buradan;

$$Ns = \bigcup_{i \in I} < a_1, \ldots, a_i > s \subseteq < a_1, \ldots, a_j > \subseteq N$$

elde edilir. O halde N, S-sonludur.

(2) $\Rightarrow$ (3) $\mathcal{F}$, M'nin alt modüllerinin (3) koşulunu sağlamayan boştan farklı bir kümesi olsun. O zaman, her $K \in \mathcal{F}$, sonlu üretilmiş her $F \subseteq K$ alt modülü ve her $s \in S$ için, $K \subseteq K'$ ve $K's \nsubseteq K$ olacak biçimde bir K' vardır. $K_1 \in \mathcal{F}$ olsun. O halde, her $s \in S$ için, $K_2 s \nsubseteq K_1 \subseteq K_2$ olacak biçimde bir $K_2 \in \mathcal{F}$ bulunabilir. Bu şekilde devam edilirse, M'nin alt modüllerden oluşan bir

$$K_1 \subsetneq K_2 \subsetneq \cdots \subsetneq K_i \subsetneq \cdots$$

zinciri elde edilir. Bu ise (2) koşulu ile çelişir.

(3) $\Rightarrow$ (2) M'nin alt modüllerinin I tarafından indekslenen bir

$$K_1 \subsetneq K_2 \subsetneq \cdots \subsetneq K_i \subsetneq \cdots$$

zinciri alınsın. $\mathcal{F} := \{K_i \mid i \in I\}$ kümesi boştan farklıdır. Dolayısıyla, hipotez ile, her $i \in I$ için $K_i s \subseteq F \subseteq K_j$ olacak biçimde bir $K_j \in \mathcal{F}$, bir $s \in S$ ve sonlu üretilmiş bir $F \subseteq K_j$ alt modülü vardır. □

Tanım 6.4.9 [10] Teorem 6.4.8(3)'te geçen K alt modülü, $\mathcal{F}$'nin *S-maksimal elemanı* olarak adlandırılır.

Tanım 6.4.10 [10, Definition 2.4] Tüm S-Noether sağ R-modüllerin sınıfı için bir nokta sıfırlayıcı kümeye, R için bir *sağ S-Noether nokta sıfırlayıcı küme* denir.

R bir sağ S-Noether halka ise, R'nin her sağ S-Noether nokta sıfırlayıcı kümesi, R için bir sağ nokta sıfırlayıcı kümedir. Aşağıdaki örnekte de görüleceği gibi, sağ S-Noether nokta sıfırlayıcı kümeler vardır.

Örnek 6.4.11 [10, Example 2] R bir değişmeli halka ve $S \subseteq R$ bir çarpımsal kapalı küme olsun. $\mathcal{F}_0 := \{I \trianglelefteq R \mid I \neq R \text{ ve } I \cap S \neq \emptyset\}$ kümesi göz önüne alınsın. $\mathcal{F} := Spec(R) \cup \mathcal{F}_0$ ve M sıfırdan farklı bir S-Noether sağ R-modül olsun. $R' := R/ann_R(M)$ için, M bir vefalı S-Noether R'-modüldür. Dolayısıyla, Önerme 3.2.14'ten R', S-Noether olur. $\mathcal{G} = \{ann_{R'}(m) \mid 0 \neq m \in M_{R'}\}$ kümesi boştan farklıdır. O halde, Teorem 6.4.8'den, $I = ann_{R'}(x)$ sıfırlayıcısı $\mathcal{G}$'de S-maksimal olacak biçimde bir $0 \neq x \in M$ vardır. $x \neq 0$ olduğundan, I bir öz idealdir. I asal olmasın. $ab \in I$ olacak şekilde $a, b \in R' - I$ verilsin. $a \notin I$ olduğundan, $ax \neq 0$'dır. O zaman, $ann_{R'}(ax) \supsetneq ann_{R'}(x) = I$ elde edilir. Ayrıca, $ann_{R'}(ax) \in \mathcal{G}$'dir. I, S-maksimal olduğundan, en az bir $s \in S$ için $ann_{R'}(ax)s \subseteq I$ olur. Buradan, $bs \in I$'dır. Benzer şekilde, bir $t \in S$ için $at \in I$ olur. $stx = 0$ ise $st \in S \cap I$ elde edilir. $stx \neq 0$ ise $ann_{R'}(x) \supsetneq ann_{R'}(tx)$ bulunur. $tx \neq 0$ olduğundan $ann_{R'}(tx) \in \mathcal{G}$'dir. Yine I'nın S-maksimalliğinden, $ann_{R'}(tx)s' \subseteq I$ olacak şekilde bir $s' \in S$ vardır. Buradan, $ss' \in S \cap I$ bulunur. Dolayısıyla, $I \cap S \neq \emptyset$'dır. O halde, $I = ann_R(x)/ann_R(M)$ olduğundan, ya $ann_R(x)$ asaldır ya da $ann_R(x) \cap S \neq \emptyset$'dır. Sonuç olarak, $\mathcal{F}$ ailesi R için bir S-Noether nokta sıfırlayıcı kümedir.

Şimdi Cohen Teoremi'nin değişmeli olmayan halkalarda başka bir genellemesi verilecektir.

Teorem 6.4.12 [10, Theorem 2.5] *R bir halka, $S \subseteq R$ bir çarpımsal kapalı küme ve $\mathcal{T}$ R için bir sağ S-Noether nokta sıfırlayıcı küme olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:*

(1) *R bir sağ S-Noether halkadır.*

(2) *$\mathcal{T}$'nin her sağ ideali S-sonludur.*

(3) *Sıfırdan farklı her S-Noether sağ R-modülün bir S-sonlu nokta sıfırlayıcısı vardır.*

İspat: Önteorem 6.4.3 ile, S-sonlu sağ ideallerin kümesi $\mathcal{F}$ bir sağ Oka ailesidir. Ayrıca, $\mathcal{F}'$ ailesindeki boştan farklı her zincirin $\mathcal{F}'$ içinde bir üst sınırı vardır. $I \in Max(\mathcal{F}')$ olsun. R/I sağ R-modülünün boştan farklı her alt modülü, I'yı öz olarak içeren bir sağ idealin görüntüsü olduğundan, R/I bir S-Noether sağ R-modüldür. Yani, $\{R/I \mid I \in Max(\mathcal{F}')\}$ kümesi S-Noether sağ R-modüllerden oluşur.

(1) $\Rightarrow$ (2) Açıktır.

(2) $\Rightarrow$ (1) $\mathcal{T}$ içindeki her sağ ideal S-sonlu olsun. O zaman, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{F}$'dir. Teorem 5.2.3(3)'ten, R'nin her sağ ideali $\mathcal{F}$'dedir. Dolayısıyla, R halkası sağ S-Noether'dir.

(1) $\Rightarrow$ (3) Açıktır.

(3) $\Rightarrow$ (1) Sıfırdan farklı her S-Noether sağ R-modülün bir S-sonlu nokta sıfırlayıcısı olsun. O zaman, $\mathcal{F}$ kümesi $\{R/I \mid I \in Max(\mathcal{F}')\}$ kümesi için bir nokta sıfırlayıcı kümedir. Dolayısıyla, Teorem 5.2.1(3)'ten, $\mathcal{F}$ kümesi R'nin tüm sağ ideallerinden oluşur. Böylece, R bir sağ S-Noether halkadır. $\square$

7 SONUÇLAR

Bu bölümde, tez genelinde elde edilen temel sonuçlara yer verilecektir.

- Tamamen Asal İdeal Prensibi: $\mathcal{F}$, bir R halkasının sağ ideallerinin bir Oka ailesi olsun. O halde, her $I \in Max(\mathcal{F}^{'})$ tamamen asal sağ idealdir (bkz. [4]).

- Tamamen Asal İdeal Pensibinin Tümleyeni: $\mathcal{F}$, bir R halkasının bir sağ Oka ailesi ve $\mathcal{F}^{'}$ içindeki sağ ideallerin kapsama bağıntısına göre boştan farklı her zincirinin $\mathcal{F}^{'}$ içinde bir üst sınırı olsun. $\mathcal{S}$, R halkasının tamamen asal sağ ideallerinin bir kümesi ise aşağıdaki ifadeler sağlanır:

  (1) $\mathcal{F}_0$ sağ ideallerin bir yarıfiltresi ve $\mathcal{S} \cap \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ ise $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ olur.

  (2) Bir $J_R \subseteq R$ sağ idealini (öz olarak) içeren $\mathcal{S}$ içindeki tüm sağ idealler $\mathcal{F}$'ye aitse, J sağ idealini (öz olarak) içeren tüm sağ idealler de $\mathcal{F}$'ye aittir.

  (3) $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}$ ise R halkasının tüm sağ idealleri $\mathcal{F}$ ailesine aittir (bkz. [4]).

- Değişmeli Olmayan Halkalarda Cohen Teoremi: Bir R halkasının sağ Noether olması için gerek ve yeter koşul halkadaki tüm tamamen asal sağ ideallerin sonlu üretilmiş olmasıdır (bkz. [4]).

- Tez boyunca incelenen sağ ideallerin kümeleri arasında aşağıdaki kapsama ilişkileri verilebilir (bkz. [5]):

  $\{$Tamamen Asal$\} \supseteq \{$Comonoform$\} \supseteq \{$Eşkritik$\} \supseteq \{$ Maksimal$\}$

- Nokta Sıfırlayıcı Küme Teoremi: $\mathcal{F}$, bir R halkasının bir sağ Oka ailesi olsun ve $\mathcal{F}^{'}$ içindeki sağ ideallerin boştan farklı her zincirinin $\mathcal{F}^{'}$ içinde kapsamaya göre bir üst sınırı olsun.

  (1) $\mathcal{F}_0$, bir R halkasındaki sağ ideallerin bir yarı-filtresi olsun. Eğer $\mathcal{F}$, $\{R/I \mid I_R \in Max(\mathcal{F}^{'}) \cap \mathcal{F}_0\}$ modül sınıfı için bir nokta sıfırlayıcı küme ise, $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$'dir.

  (2) Bir $J_R \subseteq R$ sağ ideali için $\mathcal{F}$, $I \in Max(\mathcal{F}^{'})$ ve $I \supseteq J$ (sırasıyla, $I \supsetneq J$) olacak biçimdeki R/I modüllerin bir sınıfı için nokta sıfırlayıcı küme ise, J'yi (sırasıyla, özolarak) içeren tüm sağ idealler $\mathcal{F}$ içindedir.

  (3) $\mathcal{F}$, $\{R/I \mid I_R \in Max(\mathcal{F}^{'})\}$ modül sınıfı için bir nokta sıfırlayıcı küme ise, $\mathcal{F}$ kümesi R içindeki tüm sağ ideallerden oluşur (bkz. [5]).

- Değişmeli Olmayan Cohen Teoremi: Bir R halkası için $\mathcal{S}$ kümesi bir sağ Noether nokta sıfırlayıcı küme olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

  (1) R bir sağ Noether halkadır.

  (2) $\mathcal{S}$ içindeki her sağ ideal sonlu üretilmiştir.

  (3) Sıfırdan farklı her Noether sağ R-modülün bir sonlu üretilmiş nokta sıfırlayıcısı vardır.

  (4) Sıfırdan farklı her Noether sağ R-modülün sıfırdan farklı devirli sonlu gösterimli alt modülü vardır.

  Özel olarak, R halkasının sağ Noether olması için gerek ve yeter koşul her eşkritik sağ idealin sonlu üretilmiş olmasıdır (bkz. [5]).

- Değişmeli Olmayan Kaplansky-Cohen Teoremi: $\mathcal{S}$, bir R halkasının benzerlik altında kapalı olan bir sağ Noether nokta sıfırlayıcı kümesi olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

  (1) R bir temel sağ ideal halkasıdır.

  (2) $\mathcal{S}$ içindeki her sağ ideal temeldir.

  (3) $\mathcal{F}_{pr}^{\circ}$ bir sağ Noether nokta sıfırlayıcı kümedir.

  Özel olarak, R'nin bir temel sağ ideal halkası olması için gerek ve yeter koşul R'nin her eşkritik sağ idealinin bir temel sağ ideal olmasıdır (bkz. [5]).

- Değişmeli Olmayan Halkalarda Kaplansky Teoremi: Noether bir R halkasının temel sağ ideal halkası olması için gerek ve yeter koşul halkadaki tüm maksimal sağ ideallerin temel sağ ideal olmasıdır (bkz. [5]).

- Koh'un elde ettiği sonuçlara göre (bkz. [6]), bir R halkası için aşağıdaki ifadeler sağlanır :

  (1) R'nin bir sağ Noether halka olması için gerek ve yeter koşul her Koh-asal sağ idealin sonlu üretilmiş olmasıdır.

  (2) R'nin temel sağ ideal halkası olması için gerek ve yeter koşul her Koh-asal sağ idealin temel olmasıdır.

- Chandran'ın elde ettiği sonuçlara göre (bkz. [7]), R bir sol ikili-halka olmak üzere, R'nin her asal ideali sonlu üretilmişse, R Noether'dir.

- Michler'in elde ettiği sonuçlara göre (bkz. [8]), bir R halkasının sağ Noether olması için gerek ve yeter koşul her Michler-asal sağ idealinin sonlu üretilmiş olmasıdır.

- İki yönlü bir idealin sağ ideal olarak Koh-asal olması için gerek ve yeter koşul idealin bilinen anlamda asal ideal olmasıdır. Dolayısıyla, Koh'un elde ettiği sonuç, Chandran'ın elde ettiği sonucu gerektirir.

- Bir halkanın Michler-asal sağ idealleri, bu halkanın tüm Koh-asal sağ ideallerinin bir alt kümesini oluşturur. Dolayısıyla, Cohen Teoremi'nin Michler versiyonu, Koh'un versiyonunu geneller.

- Smith'in elde ettiği sonuçlara göre (bkz. [9]), sağ tam sınırlı bir R halkasının sağ Noether olması için gerek ve yeter koşul her asal idealin sağ ideal olarak sonlu üretilmiş olmasıdır.

- Anderson'un elde ettiği sonuçlara göre (bkz. [3]), R değişmeli bir halka ve $S \subseteq R$ bir çarpımsal kapalı küme olmak üzere, R'nin S-Noether olması için gerek ve yeter koşul R'nin (S ile ayrık olan) her asal idealinin S-sonlu olmasıdır.

- Cohen Teoremi'nin değişmeli olmayan S-Noether halkalardaki genellemesi ile ilgili elde edilen sonuca göre (bkz. [10]), R bir halka, $S \subseteq R$ bir çarpımsal kapalı küme ve $\mathcal{T}$ R için bir sağ S-Noether nokta sıfırlayıcı küme olmak üzere, aşağıdaki ifadeler denktir:

  (1) R bir sağ S-Noether halkadır.

  (2) $\mathcal{T}$'nin her sağ ideali S-sonludur.

  (3) Sıfırdan farklı her S-Noether sağ R-modülün bir S-sonlu nokta sıfırlayıcısı vardır.

Kaynaklar

[1] Cohen, I.S., Commutative rings with restricted minimum condition, *Duke Mathematical Journal,* 17, 27-42 **1950**

[2] Kaplansky, I., Elementary divisors and modules, *Transactions of the American Mathematical Society,* 66, 464-491, **1949**.

[3] Anderson, D.D. and Dumitrescu, T., S-Noetherian rings, *Communications in Algebra,* Vol. 30, No. 9, pp 4407-4416, **2002**

[4] Reyes, M.L., A one-sided prime ideal principle for noncommutative rings, *Journal of Algebra and Its Applications,* 9(6), 877-919, **2010**.

[5] Reyes, M.L., Noncommutative Generalizations of Theorems of Cohen and Kaplansky,*Algebr. Represent. Theory,* 15(5) 933-975 **2012**

[6] Koh, K., On prime one-sided ideals, *Canadian Mathematical Bulletin,* 14(2), 259-260, **1971**.

[7] Chandran, V.R., On two analogues of Cohen's Theorem., *Indian Journal Pure and Applied Mathematics,* 8(1), 54-59, **1977**.

[8] Michler, G.O., *Prime right ideals and right noetherian rings,* Ring Theory, Academic Press, New York, **1972**.

[9] Smith, P.F., *Concerning a theorem of I.S. Cohen,* 11th National Conference of Algebra, Constanta, **1994**.

[10] Bilgin, Z., Reyes, M.L. and Tekir Ü., *On right S-Noetherian rings and S-Noetherian modules,*Communications in Algebra, DOI: 10.1080/00927872.2017.1332199, **2017**.

[11] Lam, T.Y., *Lectures on Modules and Rings,* Graduate Texts in Mathematics, vol 189, Springer-Verlag, New York, **1999**.

[12] Goodearl, K.R., *Ring Theory: Nonsingular Rings and Modules,* Marcel Dekker, New York, **1976**.

[13] Anderson, F.W. and Fuller, K.R., *Rings and Categories of Modules,* Second ed., Springer-Verlag, New York, **1992**.

[14] Goodearl, K.R. and Warfield Jr, R.B., *An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings,* London Mathematical Society Student Texts 61, Cambridge University Press, Cambridge, **2004.**

[15] Lam, T.Y., *A First Course in Noncommutative Rings,* Graduate Texts in Mathematics, Vol.131, Second Edition, Springer-Verlag, New York, **2001**.

[16] Kaplansky, I., *Commutative Rings,* Allyn and Bacon, Boston, **1970**.

[17] Lam, T.Y., *Exercises in Classical Ring Theory,* Problem Books in Mathematics, Second Edition, Springer-Verlag, New York, **2003**.

[18] McConnell, J.C and Robson, J.C., *Noncommutative Noetherian Rings,* Graduate Studies in Mathematics, vol 30, revised ed. American Mathematical Society, **2001**.

[19] Gordon, R. and Robson, J.C., *Krull Dimension,* American Mathematical Society, **1973**.

[20] Dung, N.Y., Huynh, D.V., Smith, Patrick F., Wisbauer, Robert, *Extending Modules,* CRC Press, **1994**.

[21] Goldie, A.W., Non-commutative principal ideal rings, *Archiv der Mathematik,* 13, 213-221, **1962**.

[22] Robson, J.C., Decomposition of noetherian rings, *Communications in Algebra,* 1, 345-349 **1974**.

[23] Stenström, B., *Rings of Quotients-An Introduction to Methods of Ring Theory,* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg/New York, **1975**.

[24] Baeck, J., Lee, G. and Lim, J.W., S-Noetherian Rings and Their Extentions, *Taiwanese Journal of Mathematics,* 20(6), 1231-1250, **2016**.

[25] Andrunakievich, V.A., On completely prime ideals of a ring, *Matematicheskii Sbornik (N.S.),* 121(163)(3), 291-296, **1983**.

[26] Sharp, R.Y., *Steps in Commutative Algebra,* Second edition, London Mathematical Society Student Texts 51, Cambridge University Press, Cambridge, **2000**.

[27] Lam, T.Y. and Reyes, Manuel L., A prime ideal principle in commutative algebra, *Journal of Algebra,* 319(7), 3006-3027, **2008**.

[28] Eisenbud, D., *Commutative Algebra With a View Toward Algebraic Geometry,* Graduate Texts in Mathematics, vol 150, Springer-Verlag, New York, **1994**.

[29] Faith, C., When are proper cyclics injective?, *Pacific Journal of Mathematics,* 45, 97-112, **1973**.

[30] Damiano, R.F., A right PCI ring is right noetherian, *Proceedings of The American Mathematical Society,* 77 (1), 11-14, **1979**.

[31] Ornstein, A.J., Rings with restricted minimum condition, *Proceedings Of The American Mathematical Society,* 19, 1145-1150, **1968**.

[32] Lambek, J. and Michler, G., The torsion theorey at a prime ideal of a right noetherian ring, *Journal Of Algebra,* 25, 364-369 **1973**.

[33] Lam, T.Y., A crash course on stable range, cancellation, substitution and exchange, *Journal of Algebra Applications,* 3(3), 301-343, **2004**.

[34] Evans, E.G.Jr., Krull-Schmidt and cancellation over local rings, *Pacific Journal of Mathematics,* 46, 115-121, **1973**.

[35] Robson, J.C., Rings in which finitely generated right ideals are principal, *London Mathematical Society,* 17(3), 617-628, **1967**.

[36] Smith, P.F., Injective modules and prime ideals, *Communications in Algebra,* 9(9), 989-999, **1981**.

[37] Koh, K., On one sided ideals of a prome type, *Proc. Amer. Math. Soc.,* 28, 321-329, **1971**.

ÖZGEÇMİŞ

Kimlik Bilgileri

Adı Soyadı	:	Burcu KAYIKÇI
Doğum Yeri	:	HATAY
Medenî Hali	:	Bekar
E-Posta	:	burcukayikci90@gmail.com
Adres	:	Cumhuriyet Mahallesi Atatürk Caddesi No:29 Samandağ/HATAY

Eğitim

Lise	:	2004-2008 Hatay Nihal-Turgut Anlar Anadolu Öğretmen Lisesi
Lisans	:	2008-2009 Hacettepe Üniversitesi, Yabancı Diller Yüksekokulu, Almanca Hazırlık 2009-2014 Hacettepe Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik Öğretmenliği

Yabancı Dili ve Düzeyi

İngilizce, Çok iyi

İş Deneyimi

2016- Araştırma Görevlisi, İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Matematik Bölümü

Deneyim Alanları

-

Tezden Üretilmiş Projeler ve Bütçesi

-

Tezden Üretilmiş Yayınlar

-

Tezden Üretilmiş Tebliğ ve/veya Poster Sunumu İle Katıldığı Toplantılar

-

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS/DOKTORA TEZ ÇALIŞMASI ORJİNALLİK RAPORU

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI BAŞKANLIĞI'NA

Tarih: 16/08/2017

Tez Başlığı / Konusu: DEĞİŞMELİ OLMAYAN HALKALARDA COHEN VE KAPLANSKY TEOREMLERİNİN GENELLEMELERİ

Yukarıda başlığı/konusu gösterilen tez çalışmamın a) Kapak sayfası, b) Giriş, c) Ana bölümler d) Sonuç kısımlarından oluşan toplam 136 sayfalık kısmına ilişkin, 02/08/2017 tarihinde tez danışmanım tarafından *Turnitin* adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 7 'dir.

Uygulanan filtrelemeler:

1- Kaynakça dâhil
2- Alıntılar dâhil
3- 5 kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları dâhil

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Çalışması Orjinallik Raporu Alınması ve Kullanılması Uygulama Esasları'nı inceledim ve bu Uygulama Esasları'nda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

16/08/2017

Adı Soyadı: BURCU KAYIKÇI

Öğrenci No: N14129696

Anabilim Dalı: MATEMATİK

Programı: TEZLİ YÜKSEK LİSANS

Statüsü: ☒ Y.Lisans ☐ Doktora ☐ Bütünleşik Dr.

DANIŞMAN ONAYI

UYGUNDUR.

DOÇ. DR. PINAR AYDOĞDU