

**BAĞIMLI ÇOKLU YAŞAM DURUMUNDA STOKASTİK  
ÖLÜMLÜLÜK YAKLAŞIMLARI VE AKTÜERYAL  
FİYATLANDIRMA**

**STOCHASTIC MORTALITY APPROACHES IN  
DEPENDENT MULTIPLE LIFE INSURANCE AND  
ACTUARIAL PRICING**

**TUĞBA AKTAŞ**

**Prof. Dr. Meral SUCU**

**Tez Danışmanı**

**Dr. Öğr. Üyesi Emel KIZILOK KARA**

**Eş Danışman**

Hacettepe Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin

Aktüerya Bilimleri Anabilim Dalı için Öngördüğü

YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırlanmıştır.

# ÖZET

## BAĞIMLI ÇOKLU YAŞAM DURUMUNDA STOKASTİK ÖLÜMLÜLÜK YAKLAŞIMLARI VE AKTÜERYAL FİYATLANDIRMA

**Tuğba AKTAŞ**

**Yüksek Lisans, Aktüerya Bilimleri Bölümü**

**Tez Danışmanı: Prof. Dr. Meral SUCU**

**Eş Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Emel KIZILOK KARA**

**Haziran 2023, 75 sayfa**

Hayat ürünlerinin fiyatlandırılması, aktüerler tarafından gerçekleştirilen kapsamlı bir süreçtir. Fiyatlandırma aşamasında sigortalının zaman içindeki ölüm gelişimini modellemek son derece önemlidir. Ölüm olayının gerçekleşme zamanının belirsiz olması ve birçok faktörden etkilenmesi modellemenin daha ayrıntılı bir şekilde yapılmasını gerektirmektedir. Dolayısıyla, ölümlülüğün zamanla deterministik gelişim gösterdiğini varsaymak gerçekçi bir yaklaşım olmayabilir. Bu düşünce doğrultusunda, ölümlülüğün stokastik açıdan ele alınması sigortalanan bireylere daha adil bir fiyatlandırma sunacaktır.

Aktüerya bilimlerinde çoklu hayat ürünleri fiyatlandırılırken genellikle bireylerin gelecek yaşam süreleri birbirinden bağımsız kabul edilmektedir. Bu varsayım, hesaplamalarda kolaylık sağlasa da gerçeği yeterince yansıtmamaktadır. Birden fazla bireyin sigortalandığı hayat ürünlerinde bireyler arasında bağımlılık söz konusudur ve bu bağımlılık yapısının aktüeryal anlamda değerlendirilmesi gerekmektedir.

Bu çalışmada, hayat ürünlerinin net tek primleri hesaplanırken stokastik ölümlülük yaklaşımı kullanılmıştır. Bireylerin anlık ölüm hızları zamanla değişen Brown hareketi olarak modellenmiştir. Burada zaman değişimi subordinatörler aracılığıyla stokastik olarak ele alınmıştır. Subordinatörlerin ters Gauss (IG) dağılımına uyduğu varsayılmıştır. Böylece bireylerin anlık ölüm hızlarının normal ters Gauss (NIG) dağıldığı kabul edilmiştir. Parametre tahmini Dabrowska tahmini ile birleşik yaşam fonksiyonunun tahmini arasındaki hata kareler toplamı minimum olacak şekilde gerçekleştirilmiştir. Modelin anlamlılığı parametrik ve parametrik olmayan yaklaşımlar kullanılarak gösterilmiştir. Eşler arasındaki bağımlılık yapısı subordinatörler aracılığıyla modele dahil edilmiştir. Tahmin edilen parametre değerlerine bağlı olarak marjinal yaşam olasılıkları elde edilmiştir. Birleşik yaşam olasılıkları ise bireylerin gelecek yaşam sürelerinin bağımlı ve bağımsız olduğu varsayımına dayanarak her iki durum için hesaplanmıştır. Ardından bireylerin bağımlılık yapısına göre çoklu yaşam durumunda hayat annüiteleri ve hayat sigortalarına ilişkin net tek prim değerleri elde edilmiştir. Son olarak, net yıllık prim tutarları hesaplanmış ve sonuçlar karşılaştırılmıştır. Böylelikle, bireyler arasındaki bağımlılığın dikkate alınmasıyla aktüeryal hesaplamalarda ortaya çıkan farklılıklar açık bir şekilde görülmüştür.

**Anahtar Kelimeler:** Çoklu Hayat Ürünleri, Stokastik Ölümlülük, Cox Süreci, Bağımlılık, Prim, Subordinatör

# **ABSTRACT**

## **STOCHASTIC MORTALITY APPROACHES IN DEPENDENT MULTIPLE LIFE INSURANCE AND ACTUARIAL PRICING**

**Tuğba AKTAŞ**

**Master of Science, Department of Actuarial Sciences**

**Supervisor: Prof. Dr. Meral SUCU**

**Co- Supervisor: Assist. Prof. Dr. Emel KIZILOK KARA**

**June 2023, 75 pages**

Pricing of life products is a comprehensive process performed by actuaries. At the pricing stage, it is extremely important to model the mortality development of the insured in time. The fact that the time of death is uncertain and affected by many factors requires more detailed modelling. Therefore, it may not be a realistic approach to assume a deterministic development of mortality over time. In line with this idea, a stochastic approach to mortality will provide a fairer pricing to the insured individuals.

In actuarial sciences, when pricing multiple life products, the future life times of individuals are generally assumed to be independent from each other. Although this assumption provides convenience in calculations, it does not reflect the reality sufficiently. In life products in which more than one individual is insured, there is dependency between individuals and this dependency structure needs to be evaluated actuarially.

In this study, stochastic mortality approach is used to calculate the net single premiums of life products. Instantaneous mortality rates of individuals are modelled as time-changed Brownian motion. Here the time change is considered stochastically by means of subordinators. Subordinators are assumed to fit an inverse Gaussian distribution. Thus, the instantaneous mortality rates of individuals are assumed to follow a normal inverse Gaussian distribution. Parameter estimation was performed in such a way that the sum of squared errors between the Dabrowska estimate and the estimate of the joint survival function was minimised. The significance of the model was demonstrated using parametric and non-parametric approaches. The dependency structure between spouses is included in the model through subordinators. Marginal survival probabilities were obtained based on the estimated parameter values. Joint survival probabilities are calculated for both situations based on the assumption that individuals' future life times are dependent and independent. Then, according to the dependency structure of individuals, net single premium values for life annuities and life insurances are obtained in the multiple life situation. Finally, net annual premiums were calculated and the results were compared. Thus, the differences arising in actuarial calculations by taking into account the dependency between individuals are clearly seen.

**Keywords:** Multiple Life Products, Stochastic Mortality, Cox Process, Dependency, Premium, Subordinator

# İÇİNDEKİLER

ÖZET .....	i
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR.....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
İÇİNDEKİLER .....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ .....	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR .....	ix
1. GİRİŞ .....	1
1.1 Giriş .....	1
1.2 Literatür İncelemesi .....	4
2. STOKASTİK SÜREÇLER.....	11
2.1. Sayma Süreci .....	12
2.2. Poisson Süreci.....	12
2.3. Lévy Süreci .....	14
2.3.1. Subordinatör.....	15
2.3.2. Brown Hareketi.....	16
2.3.3. Sürüklemeli Brown Hareketi .....	16
2.3.4. Zamanla Değişen Brown Hareketi.....	17
2.4. Cox Süreci.....	17
3. STOKASTİK ÖLÜMLÜLÜK YAKLAŞIMLARI .....	20
3.1. Afin Süreçleri.....	20
3.2. Normal Ters Gauss Süreci .....	24
4. YAŞAM MODELLERİ.....	37
4.1. Çoklu Yaşam Durumu .....	40
4.2. Tekli Yaşam Durumunda Annüite ve Sigorta Ürünlerinin Net Tek Primleri.....	43
4.3. Çoklu Yaşam Durumunda Annüite ve Sigorta Ürünlerinin Net Tek Primleri ....	47

4.4. Tekli ve Çoklu Yaşam Durumunda Net Yıllık Primler .....	50
5. BAĞIMLILIK DURUMUNDA ANNÜİTE VE SİGORTA ÜRÜNLERİNİN FİYATLANDIRILMASI.....	51
5.1. Parametrik Olmayan Tahmin Yöntemleri.....	51
5.1.1. Tek Değişkenli Yaşam Fonksiyonunun Kaplan-Meier Tahmini .....	51
5.1.2. İki Değişkenli Yaşam Fonksiyonunun Dabrowska Tahmini .....	55
5.2. Parametrik Tahmin Yöntemleri .....	59
5.3. Marjinal ve Birleşik Yaşam Olasılıklarının Hesaplanması.....	61
5.4. Kesikli Hayat Annüitesi ve Hayat Sigortası Ürünlerine İlişkin Hesaplamalar....	62
5.5. Sürekli Hayat Annüitesi ve Hayat Sigortası Ürünlerine İlişkin Hesaplamalar....	64
6. SONUÇLAR VE TARTIŞMA .....	67
7. KAYNAKLAR .....	69
EKLER.....	76
ÖZGEÇMİŞ .....	77

## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1. $G_t^K$ ve $G_t^E$ Subordinatörlerinin Yörüngeleri.....	33
Şekil 5.1. Erkek Bireylerin Marjinal Yaşam Olasılıklarının Kaplan-Meier Tahmini. ...	54
Şekil 5.2. Kadın Bireylerin Marjinal Yaşam Olasılıklarının Kaplan-Meier Tahmini. ...	55



## ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4.1. Tekli Yaşam Durumunda Net Yıllık Primler. ....	50
Çizelge 4.2. Çoklu Yaşam Durumunda Net Yıllık Primler... ..	50
Çizelge 5.1. Kişi Sayıları. ....	53
Çizelge 5.2. Toplam Çift Sayısı.....	53
Çizelge 5.3. Kaplan-Meier Marjinal Yaşam Olasılıkları.....	54
Çizelge 5.4. $H(u, v)$ Çarpanı. ....	58
Çizelge 5.5. Parametre Tahmini. ....	60
Çizelge 5.6. Marjinal Yaşam Olasılıkları (Bağımsız).....	61
Çizelge 5.7. Marjinal Yaşam Olasılıkları (Bağımlı).....	61
Çizelge 5.8. Birleşik Yaşam Olasılıkları .....	62
Çizelge 5.9. Tekli Yaşam Durumunda Net Tek Primler (Kesikli) .....	62
Çizelge 5.10. Tekli Yaşam Durumunda Net Yıllık Primler (Kesikli) .....	63
Çizelge 5.11. Bireylerin Bağımlılık Yapısına Göre Net Tek Primler (Kesikli) .....	63
Çizelge 5.12. Bireylerin Bağımlılık Yapısına Göre Net Yıllık Primler (Kesikli) .....	64
Çizelge 5.13. Tekli Yaşam Durumunda Net Tek Primler (Sürekli) .....	64
Çizelge 5.14. Tekli Yaşam Durumunda Net Yıllık Primler (Sürekli) .....	65
Çizelge 5.15. Bireylerin Bağımlılık Yapısına Göre Net Tek Primler (Sürekli) .....	65
Çizelge 5.16. Bireylerin Bağımlılık Yapısına Göre Net Yıllık Primler (Sürekli) .....	66

## SİMGELER VE KISALTMALAR

### Simgeler

$\beta$	Sürüklenme Katsayısı
$\sigma$	Difüzyon Katsayısı (Volatilité)
$\delta$	Anlık Faiz Oranı
$\mu$	Anlık Ölüm Hızı
$T$	Bireyin Gelecek Yaşam Süresi (Ölüm Zamanı) Rastgele Değişkeni
$X_0$	$X_t$ Sürecinin Başlangıç Noktası
$W_t$	Standart Brown Hareketi
$w$	Yaşayan Son Yaş

### Kısaltmalar

NTP	Net Tek Prim
MAPE	Mean Absolute Percentage Error (Ortalama Mutlak Hata Yüzde)
IG	Inverse Gaussian (Ters Gauss)
NIG	Normal Inverse Gaussian (Normal Ters Gauss)

# 1. GİRİŞ

## 1.1. Giriş

İnsanların hayatları boyunca ileride karşılaşılabilecekleri olaylara karşı önlem alma istekleri, sigortacılığın doğmasında önemli bir etken olmuştur. Sigortayla birlikte kişilerin geleceğin belirsizliğine karşı kendilerini güvende hissetmeleri mümkün hale gelmiştir. Rastgele bir şekilde gerçekleştiği takdirde sigortacıya tazminat ödeme yükümlülüğü yaratabilecek olaylar sigortacılıkta riziko olarak ifade edilmektedir. Rizikonun gerçekleşmesi durumunda sigortalı üstlendiği riski önceden yapmış olduğu ödemeler karşılığında sigortacıya devretmektedir. Sigortacının yükümlülüklerini yerine getirebilmek amacıyla sigortalıdan almış olduğu bu bedel, prim olarak adlandırılmaktadır. Sigortalının yapmış olduğu prim ödemeleriyle birlikte zamanla ortaya çıkabilecek finansal kayıpların etkileri, sigorta sözleşmesi aracılığıyla güvence altına alınmaktadır.

Rizikonun kapsamı sigorta ürünlerine göre değişkenlik göstermektedir. Hayat sigortalarında riziko, sigortalının vefat etmesi halinde poliçede belirtilen aile bireylerinin maddi kayıplarını ifade ederken, hayat dışı sigortalarında sözleşmeye konu olan menfaatin zarara uğraması neticesinde oluşan finansal kayıpları ifade etmektedir. Sigortacı, söz konusu kayıpları karşılamak için sigortalıya teminat sağlamakla yükümlüdür. Bu yükümlülüğünü ise sigortalının belirli zaman aralıklarında yapmış olduğu prim ödemeleriyle finanse etmektedir. Prim ödemelerinin belirli aralıklarla yapılması, düzenli ödeme dizisi olarak da bilinen annüite kavramını beraberinde getirmektedir. Annüite ürünleri; sigortalının hayatta kalma durumuna bağlı olarak oluşturulan hayat annüiteleri ve yaşama koşuluna bakılmaksızın ödemelerin yapıldığı kesin annüiteler olmak üzere ikiye ayrılmaktadır. Hayat annüitelerinde ödemeler, sigortalının poliçeyi satın aldığı yaş itibarıyla başlayabileceği gibi daha sonrasında da yapılabilmektedir. Ayrıca, ödeme periyodunun belirli bir zaman ile sınırlandırıldığı hayat annüiteleri dönemsel hayat annüitesi olarak adlandırılırken, ödeme süresine ilişkin herhangi bir kısıtlamanın yapılmadığı hayat annüiteleri tam hayat annüitesi olarak adlandırılmaktadır. Kesin annüitelerde ise ödemeler belirli zaman aralıklarında düzenli veya değişken tutarlarda olabilmektedir.

Sigortalının ödemekle sorumlu olduğu prim tutarı belirlenirken sigorta sözleşmesindeki tarafların yükümlülükleri eş zamanlı olarak değerlendirilmektedir. Prim tutarı, aktüeryal

denge eşitliği olarak da bilinen sigortacının yükümlülüğünün sigortalının yükümlülüğünü karşılaması gerçeğine dayanarak hesaplanmaktadır. Hayat sigortalarında sigortacının yükümlülüğü, sigortalının ölmesi halinde yakınlarının yaşam standardını korumak üzere teminat sağlamak iken, hayat dışı sigortalarında oluşan maddi hasara karşılık teminat sağlamaktır.

Hayat sigortaları, tazminat ödemesinin yapıldığı zamana göre kesikli ve sürekli olmak üzere iki kategoride sınıflandırılmaktadır. Tazminat demesi, sigortalının ölüm yılının sonunda yapılıyorsa kesikli hayat sigortası, ölüm anında yapılıyorsa sürekli hayat sigortası adını almaktadır. Hayat sigortası ürünleri, tazminat ödemelerinin yapıldığı vadenin uzunluğuna göre de gruplandırılmaktadır. Tazminat demeleri belirli bir dönemi kapsayacak şekilde yapılıyorsa dönemsel hayat sigortası, herhangi bir dönem sınırlaması olmaksızın sigortalının vefatına kadar yapılıyorsa tam hayat sigortası olarak adlandırılmaktadır.

Sigortalının yaşama durumuna bağlı olarak oluşturulan ve sigortalanan birey sayısının birden fazla olduğu sigorta ürünlerine çoklu hayat ürünleri denilmektedir. Bu ürünlerde sigortalanan bireyler arasındaki ölüm sırası belirleyici rol oynamaktadır. Çoklu yaşam durumundaki hayat annüiteleri; ödemelerin ilk ölüm gerçekleşene kadar sürdüğü birleşik yaşam (joint life) hayat annüitesi ve son ölüm gerçekleşene kadar devam ettiği son yaşayan (last survival) hayat annüitesi olarak iki başlık altında toplanmaktadır. Çoklu yaşama dair oluşturulan hayat sigortalarında ise ölüm teminatlarının ödenme zamanı hayat annüiteleri ile benzer bir yapıya sahiptir. Bireyler arasında ilk veya son ölümün gerçekleşmesiyle birlikte ödenen ölüm teminatları, tekli yaşam durumundaki gibi hem ölüm yılının sonunda hem de ölüm anında yapılabilmektedir.

Aktüerler tarafından ölümlülük analizlerinde çoğunlukla deterministik modeller tercih edilmektedir. Anlık lm hızının zaman içerisinde aynı kalacağını varsayan bu modeller, bireylerin ölüm olasılıklarında meydana gelebilecek değişiklikleri göz ardı etmektedir. Ancak bireyin ölüm gelişimi, yaşının yanı sıra yaşam koşulları, beslenme alışkanlığı, sağlık hizmetlerine erişebilirliği gibi birçok faktör tarafından etkilenmektedir. Dolayısıyla, deterministik modellerin ölümlülüğü modelleme konusunda yetersiz kaldığı açıktır. Buradan hareketle, sigorta şirketlerinin karşı kaşıya kaldığı ölüm riskinin sayısal olarak belirlenmesini ve ölümlülük analizinde daha gerçekçi sonuçların elde edilmesini

sağlayan stokastik modeller geliştirilmiştir. Stokastik yaklaşımların kullanılmasıyla, zaman içinde ölüm olasılıklarında yaşanabilecek dalgalanmalar hesaba katılmaktadır.

Çoklu hayat ürünlerinde, sigortalanan bireylerin gelecek yaşam süreleri genellikle birbirinden bağımsız varsayılmaktadır. Sigorta ürünlerinin fiyatlandırılması aşamasında bu öngörünün, benzer riskleri paylaşan bireyler için gerçekliği yansıtmadığı ortadadır. Bu düşünce doğrultusunda bireyler arasındaki bağımlılığı modellemek için çeşitli yaklaşımlar benimsenmiştir. Öne çıkan yöntemlerden biri, bağımlılığı zamanın deterministik bir fonksiyonu olarak modelleyen kopula yaklaşımlarıdır. Bu modellerde, bireylerin gelecek yaşam sürelerini gösteren rastgele değişkenlerin marjinal dağılım fonksiyonları kullanılarak birleşik dağılım fonksiyonu elde edilmektedir. Ayrıca kopula modelleri, anlık ölüm hızlarının stokastik süreci takip ettiği durumda, bağımlılığın yaşam olasılıkları üzerindeki etkisini ölçme imkânı da sunmaktadır.

Son zamanlarda, yaşamlar arasındaki bağımlılığın stokastik yaklaşımlar aracılığıyla modellendiği görülmektedir. Stokastik süreçlere bağımlılığı dahil etmenin başka bir yöntemi ise subordinatör yapısının kullanılmasıdır [1]. Subordinatörler aracılığıyla bireylerin anlık ölüm hızları arasındaki ilişki, zamanın stokastik olarak bağımlı kabul edilmesiyle modellenmektedir. Yani, bağımlılık yapısı zamanın da stokastik bir süreci takip etmesi yoluyla oluşturulmaktadır. Böylelikle, bağımlı yaşamların ölümlülük eğilimleri daha kapsamlı bir şekilde ele alınarak yorumlanmaktadır.

Çoklu hayat ürünlerinde bireylerin bağımlılık durumlarının incelenmesi, aktüeryal hesaplamalarda önemli bir yer tutmaktadır. Bu durum dikkate alındığında elde edilen prim tutarları, bağımsızlık durumuna göre farklılık göstermektedir. Bireylerin gelecek yaşam süreleri bağımsız varsayıldığında genelde, sigortalanan kişiler birleşik yaşam durumundan ödemesi gereken tutardan daha fazla, son yaşayan durumunda ise daha az bir meblağ ödemektedir. Bağımlılığın göz önünde bulundurulması, sigorta ürünlerinin net tek primlerinin birleşik yaşam durumunda azalmasına, son yaşayan durumunda artmasına neden olmaktadır. Annüite ürünlerinin net tek primlerinde ise tersine bir değişim söz konusudur. Dolayısıyla, sigortalının ödeyeceği prim tutarı birleşik yaşam durumunda azalırken son yaşayan durumunda artmaktadır. Sonuç olarak, hem sigortalı hem de sigortacı açısından daha adil bir fiyatlandırma bağımlılığın hesaba katılmasıyla mümkündür.

Bu tez çalışmasında çoklu yaşam durumu evli çiftler üzerinden ele alınmıştır. Sigortalanan birey sayısının iki olarak belirlendiği çoklu hayat ürünleri için aktüeryal hesaplamalar yapılmıştır. Çiftler arasındaki bağımlılık yapısı stokastik ölümlülük modeli kullanılarak analiz edilmiştir. Çalışmanın birinci bölümünde, çoklu yaşam durumunda bireylerin bağımlılıklarını sergileyen ölümlülük modelleriyle ilgili geçmişte yapılan çalışmalar incelenmiştir. İkinci bölümde, stokastik süreçler hakkında genel bir bilgilendirme yapılmış ve modele ilişkin kavramlar tanıtılmıştır. Üçüncü bölümde, literatürde öne çıkan stokastik ölümlülük modelleri verildikten sonra tezde uygulanan model açıklanmıştır. Ardından, marjinal yaşam fonksiyonu ile bağımlılık durumundaki birleşik yaşam fonksiyonu analitik olarak ifade edilmiştir. Dördüncü bölümde, yaşam modellerine ilişkin temel formüller verilmiş, tekli ve çoklu yaşam durumunda annüite ve sigorta ürünlerinin net tek primleri ile net yıllık prim tutarları tanımlanmıştır. Beşinci bölümde, tezdeki stokastik ölümlülük modelinin güvenilirliği parametrik ve parametrik olmayan yaklaşımlar kullanılarak gösterilmiştir. Bireylerin gelecek yaşam sürelerinin bağımlı ve bağımsız olduğu durumlar için marjinal ve birleşik yaşama olasılıkları hesaplanmıştır. Son olarak, bağımlılık yapısına göre hayat ürünlerinin net tek prim ve net yıllık prim tutarları elde edilmiştir.

## **1.2. Literatür İncelemesi**

Kişinin yaşama koşuluna bağlı olarak düzenlenen hayat ürünleri sigorta sektöründe oldukça önemli bir yere sahiptir. İlk örneklerine 18. yüzyılda rastlanan bu ürünler, zamanla aktüerya bilimlerinin bir parçası haline gelmiştir. Hayat ürünleri başlangıçta sadece bir kişinin yaşama durumu ele alınarak oluşturulmuş, zamanla aynı poliçedeki kişi sayısının artması üzerine çoklu yaşam durumu dikkate alınmıştır. Sonuç olarak, poliçeye kayıtlı kişi sayısının değişmesi ürünlere ilişkin yapılan her türlü hesaplamaların değişeceği anlamına gelmektedir. Dolayısıyla, tekli hayat ürünlerinden çoklu hayat ürünlerine doğru yapılan bu geçiş aktüeryal yapının uygun bir şekilde genişletilmesini gerektirmektedir. Bu düşünce doğrultusunda Bowers vd. [2], çoklu yaşam modellerinin tanıtıldığı ilk çalışmayı aktüerya literatürüne kazandırmışlardır. Kişilerin gelecek yaşam sürelerinin bir rastgele değişken olarak ifade edildiği bu kitapta bağımlılık durumları kapsamlı bir şekilde ele alınmıştır.

Birden fazla yaşamın göz önünde bulundurulduğu hayat ürünlerinin değerlendirilmesinde en önemli unsur bireyler arasındaki bağımlılık yapısıdır. Geleneksel olarak, çoklu yaşam

olasılıklarında ilgili bireylerin kalan yaşam sürelerinin karşılıklı olarak bağımsız olduğu varsayılmaktadır [3]. Bu varsayım, birleşik yaşam olasılığının tek bir yaşam olasılığına indirgenmesi yoluyla fiyatlandırma hesaplamalarında kolaylık sağlasa da gerçeği yansıtmamaktadır [4]. Norberg [5], bağımlılığın ölümlülük modeline dahil edildiği takdirde çoklu yaşam durumunda oluşturulan sigorta ve annüite ürünlerinin net tek primlerinde değişim olduğunu, prim tutarında ise kayda değer bir azalış gerçekleştiğini göstermiştir.

Bağımlı ölümlük modellerinin gelişim sürecine öncülük eden kavramların başında “kırık kalp sendromu” gelmektedir. Kırık kalp sendromu, eşlerden birinin ölmesi durumunda geride kalan bireyin ölümlülük oranında geçici bir artışa neden olan kısa süreli bağımlılığın en yaygın şeklidir [3]. İlk olarak, Parkes vd. [6] ve Ward [7] tarafından literatüre kazandırılan bu kavram daha sonları Jagger ve Sutton’nun [8] çalışmalarıyla desteklenmiştir. Bunun yanı sıra Hougaard [9], Danimarkalı ikizler üzerine yapmış olduğu çalışmada, ikizlerden birinin ölmesi halinde diğerinin uzun ömürlülük açısından nasıl etkileneceğini araştırmıştır.

Gelecek yaşam süreleri arasında bağımlılık söz konusu olan bireylerin ölümlüğünü modellemeye yönelik birçok yaklaşım mevcuttur. “Kopula” yaklaşımı bu bağlamda en popüler yöntemlerden biridir. Kopula fonksiyonu ilk olarak Sklar [10] tarafından tanıtılmıştır. Zamanla sigorta ve aktüerya sektörlerinde uygulama alanı bulan kopula fonksiyonları, bağımlılığı modelleme aşamasında sıkça başvurulan istatistiksel araçlar haline gelmiştir. Frees vd. [11], Frank kopula yardımıyla tekli yaşam durumunda ödenecek olan net tek primin, bağımlılık hesaba katılması durumunda ödenecek olan tutardan daha yüksek olduğu sonucuna varmıştır. Carriere [12], bireylerin marjinal yaşam fonksiyonlarının Gombertz tipinde olduğunu varsayarak birleşik yaşamlar için bağımlılık incelemesinde bulunmuş ve söz konusu bireylerin ölüm zamanları arasında oldukça yüksek olan pozitif bir korelasyon değeri elde etmiştir.

Evli bir çift adına düzenlenen sigorta sözleşmesi, bireyler arasındaki ölüm trendlerinin incelenebilmesi açısından oldukça uygun bir üründür. Youn ve Shemyakin [13], çiftler arasındaki bağımlılığı ölçmek için Hougaard kopula fonksiyonunu kullanmış, ardından her çiftin kadın ve erkek üyeleri arasındaki yaş farkını dikkate alan parametrik bir yöntem geliştirmiştir. Dufresne vd. [14] bağımlılığı, yaş farkının azalan bir fonksiyonu biçiminde modelleyerek Clayton, Frank, Gumbel ve Joe kopulaları yardımıyla eşlerden birinin

ölmesi halinde kadınlar ve erkekler arasında asimetrik bir etki olduğunu gözlemlemiştir. Spreeuw ve Wang [15], bağımlılık varsayımı altında birleşik yaşam durumunda hayat annüitesinin net tek priminin daha düşük fiyatlandığını, son yaşayan durumunda ise daha yüksek fiyatlandığını göstermiştir. Kızılok Kara [16], tam hayat sigortaları için son yaşayan durumunda FGM (Farlie-Gumbel-Morgenstern) ve GFGM II (Generalized Farlie-Gumbel-Morgenstern) kopula ailelerini kullanarak, asimetrik bağımlılığın aktüeryal primler üzerindeki etkisini incelemiştir. Ayrıca, Kızılok Kara [17] birleşik yaşam durumunda simetrik ve asimetrik bağımlılığın etkisini görmek için diğer hayat sigortası ürünlerinde (tam hayat, dönemsel, karma) net tek prim tutarlarını hesaplamıştır.

Aktüerya bilimi, zaman içerisinde öngörülemeyen olayların finansal etkisi ile ilgilendiğinden, ileriye yönelik yükümlülüklerin hesaplanması aşamasında koşullu dağılımlara başvurmaktadır. Bu bakış açısıyla Spreeuw [3], koşullu ölümlülük modeli oluşturarak çiftlerden birinin ölmesi durumunda hayatta kalan bireyin ölüm gelişimini bir kopula modeli yardımıyla incelemiştir. Luciano [18], Arşimedyan kopula aracılığıyla yaptığı bağımlılık analizinde genç yaşlardaki birleşik yaşamlar için bağımlılığın azaldığını gözlemlemiştir. Ayrıca, Bakar ve Büyükyazıcı [19], çiftlerin gelecek yaşam süreleri arasındaki bağımlılığı Frank kopula modeliyle analiz etmiş, uzun ömürlülüğün ve stokastik getiri oranlarının net tek primler üzerindeki etkisini araştırmışlardır.

Kopula yaklaşımlarına alternatif olarak, bireylerin yaşam süreleri arasındaki bağımlılık incelemesi “ortak etki” modeli aracılığıyla yapılmıştır. Marshall ve Olkin [20] tarafından tanıtilen bu modele göre, bir çiftin aralarındaki bağımlılık ilişkisinde dış faktörler (kaza, hastalık, doğal afet vb.) etkilidir. Bu dış faktörlerden ötürü çiftin her iki üyesinin de ölümlülük eğilimi zaman içerisinde değişkenlik göstermektedir. Gobbi vd. [21], Pinto ve Kolev [22] tarafından tanıtilen ve kopula ile ortak etki modelini birleştiren genişletilmiş Marshall-Olkin modelini kullanarak, birleşik yaşam durumunda sigorta ürünlerinin fiyatlandırılmasına yönelik incelemelerde bulunmuşlardır.

Hayat ürünleri, bir bireyin ne kadar süre hayatta kalacağıyla ilgili finansal belirsizliği yönetmek için tasarlanmış ürünlerdir [23]. Buradan hareketle söz konusu belirsizliği modellemek amacıyla oluşturulan yaklaşımların, gerçek verilere uygunluk sağlaması son derece önemlidir. Başlangıçta hayat sigortası ve hayat annüitesi gibi ürünlerin fiyatlandırılmasında ölüm oranlarının deterministik olarak ele alındığı aktüeryal



yaklaşımlar benimsenmiştir. Bu yaklaşımlarda, ölüm oranları yaşın (zamanın) bir fonksiyonu olarak kabul edilmektedir.

Deterministik ölümlülük modelleriyle ilgili ilk teorik çalışma 1725 yılında De Moivre [24] tarafından sunulmuştur. De Moivre, kişinin yaşama olasılığını yaşın doğrusal bir fonksiyonu olarak ifade edip ölümlerin tek düze dağıldığını öne sürmüştür.

Ölümlülük modellerinde teorik hipotezlerin gelişmesine öncülük eden bir diğer çalışma Gompertz [25]'e aittir. Gompertz, ölümlük oranlarının yaşla birlikte üstel bir şekilde arttığını varsayarak modelini oluşturmuştur. Bunun yanı sıra, Gompertz fonksiyonlarının ampirik verilere uyumu neticesinde parametrik modeller genişletilmiştir. Brockett [26], bağımlılığı iki değişkenli Gompertz dağılımları yardımıyla birleşik yaşam durumuna dahil etmiştir. Gavrilov ve Gavrilova [27], ilerlemiş yaşlar için Gompertz yasasının ölümlülük oranlarında gerçeğe yakın sonuçlar verdiğini göstermiştir.

Ölümlülük çalışmalarında deterministik aktüeryal yaklaşımların benimsendiği modellerin zaman içinde yetersiz kaldığı görülmüştür. Bu modellerde, ölüm oranlarında gözlemlenebilecek olası değişiklikler göz ardı edilmektedir. Dolayısıyla, geleceğe yönelik yapılan ölümlülük tahminlerinde önemli ölçüde sapmalar gözlenmektedir. Ölüm oranlarında yaşanan iyileştirmeleri sürece yansıtmak sigorta ürünlerinin daha tutarlı fiyatlandırılmasına yol açacaktır, bu da ancak iyi bir modelin oluşturulması ile mümkündür. Buradan hareketle, son zamanlarda stokastik ölümlük modelleri geliştirilmiştir. Ölümlülük projeksiyonlarında stokastik yaklaşımların benimsenmesi ile demografik varsayımlarda oluşabilecek değişiklikler dikkate alınmaya başlanmıştır.

Literatürde stokastik ölümlük modellerine yönelik ilk çalışma 1992 yılında Ronald Lee ve Lawrance Carter [28] tarafından sunulmuştur. Lee-Carter adı verilen modele göre ölümlülüğün uzun dönemdeki gelişimi mercek altına alınmış ve oldukça başarılı sonuçlar elde edilmiştir. Genel olarak birçok ülke tarafından kabul görmüş ve ölümlülük tahminlerinde tatmin edici sonuçlara ulaşan bu yöntem, parametre sayısının azlığı açısından uygulamada kolay bir çözüm sunmaktadır. Zaman etkisinin dikkate alındığı Lee-Carter modelinde, iki parametreye bağlı olarak ölümlülükteki değişimler tanımlanmaya çalışılmıştır. Parametrelerden ilki her yaş grubu için sadece yaş indisine bağlı bir bileşen iken diğeri ölümlülüğün yıllar içerisindeki değişimini ifade eden ve aynı zamanda farklı yaş gruplarında gözlemlenen ölümlülük eğilimlerini de hesaba katan bir bileşendir. Kul ve Sucu [29] Türkiye nüfusuna yönelik yapmış oldukları çalışmada, kadın

ve erkek bireylerin anlık ölüm hızlarında takvim yılı ile kuşak etkisini dikkate alarak, Lee-Carter modeli aracılığıyla ölümlülüğü stokastik açıdan incelemişlerdir.

Ölüm oranlarının belirlenmesinde stokastik süreçlerin kullanılması, ölümlülük modeline gelecekteki ölüm gelişiminin belirsizliğini ve zamana bağımlılığını dahil etme imkânı vermektedir [4]. Milevsky ve Promislow [30], uygun parametre seçimi altında beklenen ölüm oranının, Gompertz sürecini takip ettiği bir stokastik ölümlülük yaklaşımı önermişlerdir. Bu çalışmada, temerrütsüz bonolar, yaşam durumunda sigorta (pure endowment) ve hayat sigortası ürünleri kullanılarak hem kesikli hem de sürekli zamanlı fiyatlandırma çerçevesinde riskten nasıl korunulacağı gösterilmiştir.

Kredi riskinde temerrüde kadar geçen süre ile ölümlülük projeksiyonlarında kişinin gelecek yaşam süresi arasındaki benzerlikten yola çıkılarak stokastik ölümlülük modelleri geliştirilmiştir. Sigorta sözleşmeleri ile krediye duyarlı menkul kıymetler arasındaki bu ilişki, ilk olarak Artzner ve Delbaen [31] tarafından önerilmiştir. Bu düşünce doğrultusunda, Dahl [32], Biffis [33], Denuit ve Devolder [34], Luciano ve Vigna [35] ve Schrage [36] tarafından stokastik ölüm oranları ayrıntılı bir şekilde çalışılmıştır. Başlangıçta Hull ve White [37] tarafından faiz oranı için bir model olarak düşünülen Cox-Ingersoll-Ross (CIR) modeli, Dahl [32] tarafından genişletilmiş ve ölüm oranlarının hesaplanmasında kullanılmıştır. Dahl [32], ortalamaya dönen Gompertz (MRG) sürecinin genelleştirilmesi olan bir difüzyon modeli oluşturup, anlık ölüm hızını stokastik açıdan ele almıştır. Biffis [33], demografik ve finansal risk faktörlerinin gelişimini analitik olarak incelemeyi mümkün kılan afin süreçleri yardımıyla ölümlülük analizini gerçekleştirmiştir. Ölüm oranları için iki afin modeli uygulanan bu çalışmada, farklı risk kaynakları dikkate alındığında aktüeryal değerlemelerin nasıl etkileneceği gösterilmiştir. Ortalamaya dönen afin süreçlerin geleceğe yönelik ölüm oranlarını tahmin etmede yetersiz olduğu, İngiltere nüfusuna ait veriler üzerinde yapılan analizler sonucunda Luciano ve Vigna [35] tarafından kanıtlanmıştır. Denuit ve Devolder [34], Lee-Carter modelinin sürekli zamanlı versiyonlarını kullanarak ölümlük oranlarına ilişkin çeşitli stokastik modeller sunmuşlardır. Schrage [36], afin süreçlerine dayanan yeni bir stokastik ölümlülük modeli önermiş ve sonuçlarını Hollanda ölümlük oranları ile karşılaştırmıştır. Ölümlülüğün zaman içindeki rastgele gelişimini modellemek için oluşturulan mevcut birçok yaklaşımın ayrıntılı bir çalışması ise Cairns, Blake ve Dowd [38] tarafından literatüre kazandırılmıştır.

Aktüeryal varsayımlar altında oluşturulan hayat annüiteleri, emeklilik planları ve hayat sigortaları gibi ürünler, vadelerinin uzun olmasından dolayı zaman içinde mortalite oranlarında yaşanabilecek değişikliklerden doğrudan etkilenmektedir. Dolayısıyla, ürünlerin fiyatlandırma aşamasına, gerçek ölüm sayısının beklenenden ne ölçüde saptığı, diğer bir deyişle ölüm oranlarında oluşabilecek hareketliliği dahil etmek analizlerin güvenilirliği açısından son derece önemlidir. Bu bağlamda, ölümlülük sürecindeki stokastik oynaklığı dikkate alan Lorenzo vd. [39], ölüm oranlarını Cox-İngersoll-Ross (CIR) tipinin stokastik orantılı tehlike modeli aracılığıyla incelemiştir.

Son zamanlarda, bireyin gelecek yaşam süresi içindeki sıçramaları izlemeye olanak sağlayan Cox süreçleri, ölümlülüğün stokastik olarak modellenmesinde araştırmacılar tarafından yoğun ilgi görmektedir. 1955 yılında ilk defa Cox [40] tarafından tanıtılan bu süreçler daha sonra Bartlett [41] tarafından ayrıntılı bir şekilde ele alınmıştır. Cox süreçlerinin durma zamanı (stopping time), bir kişinin ölüm zamanı olarak yorumlanmaktadır. Ölüm gerçekleşinceye kadar geçen süre içinde ani değişikliklerin gözlenmesi olasıdır, dolayısıyla oluşabilecek rastgele değişimleri süreç şiddetinin deterministik kabul edildiği standart Poisson süreciyle yakalamak pek mümkün değildir. Bu nedenle süreç şiddetinin de bir stokastik süreç olduğu Cox süreçleri aracılığıyla ölümlülük analizi yapmak daha sağlıklı sonuçlar doğuracaktır. Dahl [32], Biffis [33], Luciano ve Vigna [35], Schrage [36], bir bireyin anlık ölüm hızının stokastik bir süreci takip ettiğini varsayarak kişinin gelecek yaşam süresini Cox süreçleri yardımıyla modellemişlerdir. Bunun yanı sıra, Luciano vd. [42], Cox süreci aracılığıyla çiftlerin marjinal stokastik ölüm oranlarına ilişkin öncü bir çalışma sunmuşlardır.

Bağımlılık durumu stokastik süreçler yardımıyla incelenmek istendiğinde subordinatör kavramı kullanılmaktadır. Bochner [43], tarafından önerilen bu kavram zamanla önemli bir çalışma alanı haline gelmiştir. Subordinatörler, ilk olarak menkul kıymetlerin fiyatlarında yaşanan dalgalanmaların finansal etkisini modellemek amacıyla kullanılmıştır.

Literatüre bakıldığında, anlık ölüm hızının zamanla değişen Brown hareketi olarak modellendiği stokastik ölümlülük yaklaşımlarıyla karşılaşılmaktadır. Zamanla değişen Brown hareketi ilk olarak Clark [44] tarafından menkul kıymetlerin fiyatları için bir model olarak kullanılmıştır. Genellikle kredi riskinin modellenmesinde tercih edilen bu süreç, yakın zamanda ölümlülüğün modellenmesinde de uygulanmaya başlanmıştır.

Zhang ve Brockett [1] tarafından sunulan çalışmada, erkek ve kadın bireylerin anlık ölüm hızları zamanla değişen Brown hareketi olarak modellenmiş, bireyler arasındaki bağımlılık yapısı ise subordinatörler kullanılarak oluşturulmuştur. Jevtic ve Hurd [45], Henshaw vd. [4] çalışmalarında bağımlılığı ilişkili subordinatörler aracılığıyla modellemişlerdir. Ayrıca, Henshaw vd. [4] ve Walter vd. [46] bağımlılık yapısı üzerinde sosyoekonomik etkilerin var olduğu fikrini de değerlendirmişlerdir.

## 2. STOKASTİK SÜREÇLER

Stokastik bir sürecin matematiksel olarak ilk tanımı 1930'lu yılların başında Aleksandr Khinchin tarafından yapılmıştır. İlerleyen zamanlarda Andrey Kolmogorov, William Feller, Maurice Fréchet, Paul Lévy, Wolfgang Doeblin, Harald Cramér gibi çok sayıda bilim insanının olasılık teorisi üzerine yapmış olduğu çalışmalar aracılığıyla günümüzde stokastik süreçler önemli bir çalışma alanı haline gelmiştir.

Stokastik süreç, zaman içinde olasılık kurallarına göre gelişen sistemleri incelemek için kullanılan rastgele değişkenler ailesi olarak tanımlanmaktadır. Genel olarak, olasılık teorisinde stokastik süreç, değişimi rastgele bir varyasyona bağlı olan bir değişken tarafından temsil edilen bazı sistemlerin gelişimini yansıtan bir zaman dizisidir [47]. Stokastik süreçlerin uygulama alanları arasında mühendislik, istatistik, fizik, kimya, biyoloji, nörobilim ve bilgisayar gibi birçok disiplin mevcuttur. Bunun yanı sıra ekonomi, finans ve sigorta alanlarında modellerin matematiksel olarak ifade edilmesinde stokastik süreçler sıkça kullanılmaktadır.

Matematiksel olarak stokastik bir süreç aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır;

$(\Omega, F, P)$  bir olasılık uzayı ve  $T$  indeks kümesi olmak üzere,

$$X: T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(t, \omega) \rightarrow X(t, \omega)$$

şeklinde  $X$  fonksiyonu verilsin.  $\forall t \in T$  için  $X(t, \omega)$  fonksiyonu bir rastgele değişken ise  $X$  fonksiyonuna bir stokastik süreç denir. Rastgele değişkenlerden oluşan bu süreç genellikle  $\{X_t, t \in T\}$  biçiminde ifade edilir. Ayrıca,  $X_t$  yerine  $X(t)$  gösterimi de kullanılır. Burada, zaman ( $t$ ) sürecin parametresidir.  $\forall t \in T$  için  $X(t, \omega)$  fonksiyonunun aldığı değerlerin kümesine durum uzayı denir ve  $E$  ile gösterilir.  $\forall \omega \in \Omega$  için bu sürecin verdiği  $t$ 'nin fonksiyonuna sürecin bir yörüngesi denir. Yani, deneyin her tekrarlanışında sürecin bir yörüngesi oluşur. Dolayısıyla, yapılan deneye göre sürecin yörüngeleri rastgele zamanlarda kesikli veya sürekli gelişim gösterebilir.

Stokastik süreçler, rastgelelik içeren olayların zaman içindeki gelişimini incelediğinden indeks kümesinin özelliğine göre iki başlık altında sınıflandırılır;

- $T$  indeks kümesinin sayılabilir/kesikli olması durumunda  $\{X_t, t \in T\}$  stokastik süreci kesikli parametrelidir,

- T indeks kümesinin sürekli olması durumunda  $\{X_t, t \in T\}$  stokastik süreci sürekli parametrelidir.

stokastik süreç olarak adlandırılır.

Diğer taraftan, stokastik süreçler rastgele değişkenler arasındaki ilişkiye göre bağımsız artışı süreç ve durağan artışı süreç olarak gruplandırılmaktadır.

$\{X_t, t \in T\}$  bir stokastik süreç olsun. Bu durumda;

- $\forall t_0 < t_1 < t_2 \dots < t_n$  ve  $t_i \in T, i = 0, 1, 2, \dots, n$  olmak üzere  $X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$  rastgele değişkenleri birbirinden bağımsız ise  $\{X_t, t \in T\}$  stokastik sürecine bağımsız artışı süreç denir.
- $\forall h > 0$  ve  $\forall t+h \in T$  için  $X_{t+h} - X_t$  rastgele değişkeninin dağılımı t uzunluğundan bağımsız yani sadece h'ye bağlı ise  $X_t$  stokastik sürecine durağan artışı süreç denir.

## 2.1. Sayma Süreci

Herhangi bir olayın belirli bir zaman aralığında ortaya çıkma sayısını belirlemek amacıyla sayma süreçleri kullanılır.

$t \geq 0$  için  $N_t$ ,  $(0, t]$  zaman aralığında gerçekleşen olayların sayısını göstermek üzere kesikli parametrelidir  $\{N_t, t \geq 0\}$  stokastik sürecine sayma süreci denir. Bu süreç  $T = [0, \infty)$  ile sürekli parametrelidir,  $E = \{0, 1, 2, \dots\}$  ile kesikli durum uzaylı bir süreçtir.  $\{N_t, t \geq 0\}$  sayma süreci aşağıdaki özellikleri sağlar;

- $\forall t \geq 0$  için  $N_t \geq 0$
- $N_t$  negatif olmayan tam sayı değerli bir rastgele değişkendir.
- Zaman ilerledikçe gerçekleşen olay sayısı artar. Dolayısıyla  $s < t$  ise  $N_s \leq N_t$  'dir. (monotonluk özelliği)
- $s < t$  için,  $N_t - N_s$ ,  $(s, t]$  aralığında gerçekleşen olayların sayısını ifade eder.

Sayma süreçlerine örnek olarak, bir gün içinde bankaya kredi başvurusunda bulunan müşteri sayısı veya üç ay içinde sigorta şirketine bildirilen hasar sayısı verilebilir.

## 2.2. Poisson Süreci

Poisson süreci, zaman içinde rastgele bir şekilde meydana gelen olayları tanımlamak amacıyla kullanılan durum uzayı kesikli, indeks kümesi sürekli olan önemli bir stokastik süreçtir.

Literatüre bakıldığında Poisson sürecine ilişkin iki tanımlamanın yapıldığı görülmektedir.

**Tanım 1:**  $\{N_t, t \geq 0\}$  bir sayma süreci ve  $\lambda$  pozitif bir sabit olmak üzere;

- i.  $N_0 = 0$
- ii.  $\{N_t, t \geq 0\}$  bağımsız artışı
- iii.  $s, t \geq 0$  için  $N_{t+s} - N_s$  rastgele değişkeni  $\lambda t$  ortalamalı Poisson, yani
$$P(N_{t+s} - N_s = k) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!}, k = 0, 1, 2, \dots$$

şartlarını sağlayan  $\{N_t, t \geq 0\}$  sayma sürecine  $\lambda$  oranlı Poisson süreci denir.

Poisson süreci, (ii) ve (iii) özelliklerinden de görüldüğü üzere artışları bağımsız ve durağan olan bir sayma sürecidir. Belirli bir zaman aralığında gerçekleşen olayların sayısı yalnızca aralığın uzunluğuna bağlı olduğundan  $N_t \sim \text{Poisson}(\lambda t)$ 'dir.

**Tanım 2:**  $\{N_t, t \geq 0\}$  bir sayma süreci ve  $\lambda$  pozitif bir sabit olmak üzere;

- i.  $N_0 = 0$
- ii.  $\{N_t, t \geq 0\}$  bağımsız ve durağan artışı
- iii.  $P(N_h = 1) = \lambda h + o(h)$
- iv.  $P(N_h \geq 2) = o(h)$

şartlarını sağlayan  $\{N_t, t \geq 0\}$  sayma sürecine  $\lambda$  oranlı Poisson süreci denir.

**Teorem:** Tanım 1 ve Tanım 2 denktir [48].

Poisson süreçleri  $\lambda$  parametresinin durumuna göre iki başlık altında sınıflandırılır.

**Tanım:**  $t \geq 0$  olmak üzere  $\lambda(t)$  şiddet fonksiyonuna sahip  $\{N_t, t \geq 0\}$  sayma süreci,

- i.  $N_0 = 0$
- ii.  $\{N_t, t \geq 0\}$  bağımsız artışı
- iii.  $h \geq 0$  için  $P(N_{t+h} - N_t = 1) = \lambda(t)h + o(h)$
- iv.  $h \geq 0$  için  $P(N_{t+h} - N_t \geq 2) = o(h)$

ise homojen olmayan Poisson süreci olarak adlandırılır.

Buradan,  $\lambda(t)$  şiddetli  $\{N_t, t \geq 0\}$  homojen olmayan Poisson süreci aşağıdaki şekilde ifade edilir;

$$P(N_{t+s} - N_s = n) = \frac{\left( \int_s^{t+s} \lambda(x) dx \right)^n}{n!} \exp \left( - \int_s^{t+s} \lambda(x) dx \right)$$

Sürece ilişkin verilen  $\lambda$  parametresi sabit ise bu sürece homojen Poisson süreci adı verilir. Yani, homojen olmayan Poisson sürecinin  $\lambda(t)$  şiddet fonksiyonu  $\forall t \geq 0$  için  $\lambda(t) = \lambda$  şeklinde ise bu süreç  $\lambda$  oranlı Poisson sürecidir. Homojen Poisson süreci ile karşılaştırıldığında, homojen olmayan Poisson sürecinin artışlarının durağan olmadığı görülmektedir.

### 2.3. Lévy Süreçleri

Olasılık teorisinde Fransız matematikçi Paul Lévy'nin adını taşıyan Lévy süreçleri, artışların bağımsız ve durağan olarak karakterize edildiği doğrusal fonksiyonların stokastik bir versiyonu olarak düşünülebilir. Doğrusal fonksiyonlar sabit artışlara sahipken, Lévy süreçleri birbirinden bağımsız ve aynı dağılımlı artışlara sahiptir. Brown hareketi/Wiener süreci, homojen Poisson süreci ve subordinatörler gibi önemli stokastik süreçler Lévy süreçlerinin en bilinen örnekleri arasındadır.

Lévy süreçlerinin teorik olarak ifade edilmesinden önce sıçrama süreçleri ve Càdlàg kavramı açıklanacaktır.

Rastgele zamanlarda yörüngelerinde sıçrama adı verilen kesikli olayların gözlemlendiği stokastik süreçlere sıçrama süreçleri denilmektedir. Poisson ve bileşik Poisson süreçleri sıçrama süreçlerine örnek olarak verilebilir.

Càdlàg, sıçrama sürecinin incelenmesi amacıyla kullanılan önemli bir kavramdır. Càdlàg fonksiyonları, Brown hareketinin aksine sıçramalara izin veren stokastik süreçlerde uygulama alanı bulmaktadır. Matematikte Càdlàg fonksiyonu, reel sayılar üzerinde her noktada sağdan sürekli ve sol limitlere sahip olan bir fonksiyondur [49].

X fonksiyonu iyi sıralı bir T kümesi üzerinde tanımlı olmak üzere aşağıdaki koşulu sağlıyorsa Càdlàg'dır;

$$\forall t_0 \in T \text{ için } \lim_{t \rightarrow t_0^-} X(t) < \infty \text{ ve } \lim_{t \rightarrow t_0^+} X(t) = X(t_0)$$

Yani, X fonksiyonu sol limitlerle sağdan süreklidir.

Càdlàg fonksiyonlarına örnek olarak, reel sayılar üzerinde tanımlı bütün sürekli fonksiyonlar ve kümülatif dağılım fonksiyonları verilebilir. Ayrıca,  $\forall t$  için  $\{X_t, t \in T\}_{t \geq 0}$  stokastik sürecinin yörüngeleri sol limitlerle sağdan sürekli ise Càdlàg süreci (RCLL process) adını alır.



Buradan hareketle,  $(\Omega, F_{t \in [0, \infty)}, P)$  filtrelenmiş olasılık uzayında tanımlı  $\{X_t, t \in T\}_{t \geq 0}$  sürekli zamanlı stokastik süreci aşağıdaki koşulları sağlıyorsa,  $\mathbb{R}$  üzerinde Lévy süreci olarak adlandırılır;

- i.  $\forall t$  için sürecin yörüngeleri sol limitlerle sağdan sürekli, yani Càdlàg'dır.
- ii. Artışlar bağımsızdır. Diğer bir deyişle;  $\forall 0 = t_1 < t_2 \dots < t_n < \infty$  için;
$$P(X_{t_0} \cap X_{t_1} - X_{t_0} \cap X_{t_2} - X_{t_1} \cap \dots \cap X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$$

$$= P(X_{t_0})P(X_{t_1} - X_{t_0})P(X_{t_2} - X_{t_1}) \dots P(X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$$
- iii. Artışlar durağandır. Yani,  $\forall h \geq 0$  için  $X_{t+h} - X_t$  ile  $X_h$  rastgele değişkenleri aynı dağılıma sahiptir. Sonuç olarak artışların dağılımı t zaman uzunluğuna bağlı değildir.
- iv.  $P(X_0 = 0) = 1$ 'dir. Yani, süreç kesin olarak (1 olasılığıyla) 0'dan başlar.
- v. Süreç, stokastik olarak süreklidir. Yani,  $\forall \varepsilon > 0, \lim_{h \rightarrow 0} P(|X_{t+h} - X_t| \geq \varepsilon) = 0$

### 2.3.1. Subordinatör

Subordinatörler, Lévy süreçlerinin alt sınıfını oluşturur [50]. Zamanın deterministik olarak değiştiği varsayımıyla oluşturulan modellerden farklı olarak, subordinatör kavramı zamanın stokastik olarak gelişimini tanımlamaktadır. Yörüngelerinin artan olduğu Lévy süreçlerine subordinatör denir [51]. Subordinatörler aşağıda verilen tüm özellikleri sağlayan  $\{X_t, t \in T\}_{t \geq 0}$  stokastik süreçleridir;

- i.  $X_0 = 0$
- ii.  $\forall t$  için  $X_t \geq 0$
- iii.  $X_t$ , artışları bağımsız ve durağan olan bir süreçtir.
- iv.  $X_t$ 'nin yörüngeleri Càdlàg'dır.

O halde,  $\{X_t, t \in T\}_{t \geq 0}$  sürecinin yörüngeleri bir olasılığıyla azalmayan yani  $P(X_{t+h} \geq X_t; h \in \mathbb{R}^+) = 1$  ise Lévy sürecinin subordinatör olduğu söylenir.

Stokastik sürecin subordinatör olması için bu sürecin Lévy süreci olması gerekmektedir [52]. Dolayısıyla, subordinatör aynı zamanda artan bir Levy sürecidir [53].

Subordinatörlerin olasılık teorisindeki en önemli uygulamalarından birisi de zaman değişimidir. Şöyle ki,  $X = \{X_t, t \in T\}_{t \geq 0}$  herhangi bir Lévy süreci,  $G = \{G_t, t \in T\}_{t \geq 0}$  de X ile aynı olasılık uzayı üzerinde tanımlı ve X'den bağımsız bir subordinatör olsun. Bu durumda  $Z_t = X_{G_t}$ ,  $t \geq 0$  şeklinde tanımlanan  $Z = \{Z_t, t \in T\}_{t \geq 0}$  süreci bir Lévy sürecidir [52].

### 2.3.2. Brown Hareketi

Çoğu Lévy sürecinin süreksiz yörüngelere sahip olan sıçrama süreçlerine karşılık geldiği düşünülmektedir. Ancak, Lévy süreçlerinin tanımı gereği yörüngelerinin sol limitlerle sağdan sürekli olması koşulu bu algının yanlış olduğunu göstermektedir. Çünkü tüm sürekli süreçler sol limitlerle sağdan sürekli süreçlerdir. Sürekli yörüngelere sahip tek Lévy süreci ise Brown hareketidir [54].

En önemli stokastik süreçlerden biri olan Brown hareketinin temelleri ilk olarak 1827 yılında iskoç botanikçi Robert Brown tarafından suyun üzerindeki polen parçacıklarının gözlemlenmesi sonucunda atılmıştır. Hareketin matematiksel modeli ise Norbert Wiener tarafından oluşturulmuştur. Bu nedenle Brown hareketi Wiener süreci olarak da anılmaktadır. Günümüzde Brown hareketinin ekonomi, biyoloji, mühendislik gibi birçok alanda kullanıldığı görülmektedir.

$(\Omega, F, P)$  olasılık uzayı üzerinde tanımlı  $W = \{W_t, t \geq 0\}$  stokastik süreci aşağıdaki koşulları sağlıyorsa Brown hareketi olarak adlandırılır;

- i. Süreç 0'dan başlar. Yani;  $W_0 = 0$ 'dır.
- ii.  $W$  bağımsız artışı bir süreçtir. Yani;  $\forall t \geq 0$  ve  $s > 0$  için  $W_{t+s} - W_t$  artışları birbirinden bağımsızdır.
- iii.  $\forall 0 \leq s < t$  için  $W_t - W_s$  artışları sıfır ortalama ve  $\sigma^2(t - s)$  varyansı ile normal dağılıma sahiptir. Yani;  $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2(t - s))$

Buradan, Brown hareketinin artışlarının başlangıç noktasından bağımsız ve yalnızca zaman aralığının uzunluğa göre değiştiği söylenebilir. Diğer taraftan, (iii) koşulu, Brown hareketine karşılık gelen yörüngelerin belirli bir zaman aralığında sürekli yani Càdlàg olduğunu göstermektedir. Dolayısıyla, Brown hareketi aynı zamanda Lévy sürecidir.

Özel olarak,  $\sigma^2 = 1$  olarak alınırsa  $W = \{W_t, t \geq 0\}$  stokastik süreci standart Brown hareketi olarak adlandırılır.

### 2.3.3. Sürüklemeli Brown Hareketi (Brownian motion with drift)

Filtrelenmiş olasılık uzayı  $(\Omega, F_{t \in [0, \infty)}, P)$  üzerinde tanımlı  $\{W_t, t \geq 0\}$  standart Brown hareketi verilsin. Bu durumda  $\{X_t, t \in T\}_{t \geq 0}$  sürüklemeli Brown hareketi,  $x_0$  başlangıç noktası olmak üzere  $dX_t = \beta dt + \sigma dW_t$  stokastik diferansiyel denkleminin çözümü olup aşağıdaki şekilde tanımlanan reel değerli bir stokastik süreçtir;

$$X_t = x_0 + \beta t + \sigma W_t$$

Burada,  $\beta \in \mathbb{R}$  sürüklenme (drift) katsayısı iken  $\sigma \in \mathbb{R}^+$  difüzyon (volatilite) katsayısıdır.

$\{X_t, t \in T\}_{t \geq 0}$  şeklinde ifade edilen sürüklemeli Brown hareketi aşağıdaki koşulları sağlar;

- i.  $X_t$ , artışları bağımsız ve durağan olan bir süreçtir.
- ii. Artışlar  $x_0 + \beta t$  ortalama ve  $\sigma^2 t$  varyans ile normal dağılım göstermektedir.  
Yani,  $X_t = x_0 + \beta t + \sigma W_t \sim \mathcal{N}(x_0 + \beta t, \sigma^2 t)$

Stokastik süreçler içerisinde bazı rastgele zaman tanımları kullanılmaktadır. Bunlardan biri olan ilk geçiş zamanı, stokastik sürecin belirli bir eşik değerine ilk kez ulaştığı zaman olarak tanımlanır.  $X_t = x_0 + \sigma W_t + \beta \sigma^2 t$  eşitliği ile ifade edilen sürüklemeli Brown hareketinin ilk geçiş zamanının kümülatif dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibidir;

$$F(t; x_0, \sigma, \beta) = \Phi\left(\frac{-x_0 - \beta \sigma^2 t}{\sigma \sqrt{t}}\right) + e^{2\beta x_0} \Phi\left(\frac{-x_0 + \beta \sigma^2 t}{\sigma \sqrt{t}}\right)$$

Burada  $\Phi(\cdot)$  standart normal dağılımın kümülatif dağılım fonksiyonudur.

#### 2.3.4. Zamanla Değişen Brown Hareketi (Time-Changed Brownian Motion)

Zamanla değişen Brown hareketi ilk olarak Clark [44] tarafından, logaritmik menkul kıymetlerin fiyatlandırılmasında model olarak kullanılmıştır. Bunun yanı sıra finans alanındaki birçok modelin, zamanın subordinatör olarak seçildiği zamanla değişen Brown hareketine dayandığı görülmektedir. Bağımsız bir subordinatör tarafından zamanla değişen Brown hareketi her zaman Lévy süreci oluşturur. [55]. Zaman değişiminin bağımsız Lévy sürecini takip ettiği modellere örnek olarak varyans gamma (VG) ve normal ters Gauss (NIG) süreçleri verilebilir.

$(\Omega, F, P), G_0 = 0$  başlangıç değeri ile bağımsız artan C\`adl\`ag sürecini (subordinatör) ve  $W$  Brown hareketini destekleyen filtrelenmiş bir olasılık uzayı olsun.  $x_0$  noktasında başlayan ve sabit  $\beta \sigma^2$  sürüklenmesi ile  $\sigma > 0$  volatilitesine sahip Brown hareketi  $X_t = x_0 + \sigma W_t + \beta \sigma^2 t$  şeklinde ifade edilsin. Bu durumda,  $X$  ve  $G$  tarafından üretilen zamanla değişen Brown hareketi  $X_{G_t}, t \geq 0$  süreci olarak tanımlanır [56].

#### 2.4. Cox Süreci

Olasılık teorisinde Cox süreci 1955 yılında ilk olarak D.R. Cox [40] tarafından tanımlanmıştır. Ardından 1976 yılında Grandell [57], Cox sürecinin temel özelliklerini açıklayan öncü bir çalışma sunmuştur. Cox sürecinde Poisson sürecine karşılık gelen

şiddet fonksiyonu, deterministikten ziyade stokastik süreç olarak ele alınmaktadır. Şiddet fonksiyonunun pozitif rastgele değişkene bağlı olarak ifade edilmesine olanak sağlayan Cox süreci, temelde Poisson sürecinin genelleştirilmiş halidir. Şiddet fonksiyonunun homojen Poisson sürecinde sabit ( $\lambda$ ), homojen olmayan Poisson sürecinde ise zamana bağlı bir fonksiyon ( $\lambda(t)$ ) olarak tanımlanması, bu süreçleri aslında Cox sürecinin özel bir durumu yapmaktadır. Cox süreçlerinin nüfus dinamiklerinin yanı sıra finansal araçların fiyatlandırılması ve uzun ömürlülüğün modellenmesinde yaygın olarak kullanıldığı görülmektedir. Öte yandan, sigorta ve kredi riski modellemesinde de birçok uygulaması mevcuttur. Bu bağlamda Lando [58], kredi riskini analiz etmek amacıyla bir şirketin temerrüt zamanını Cox süreci aracılığıyla tanımlamış, ardından temerrüde düşme olasılığını incelemiştir. Son zamanlarda hayat dışı sigorta alanında Cox süreçlerinin kullanılmasına yönelik birçok çalışma gerçekleştirilmiştir.

**Tanım:**  $\forall t \geq 0$  için  $\Lambda_t$  artan olmak üzere  $\{\Lambda_t, t \geq 0\}$  stokastik süreci verilsin.  $\{N_t, t \geq 0\}$  sayma sürecine ilişkin şiddet fonksiyonu  $\lambda(t) = \Lambda_t$  şeklinde rastgele bir süreç olarak tanımlansın. Bu durumda  $\{N_t, t \geq 0\}$  sürecine Cox süreci denir. Ayrıca,  $\{\Lambda_t, t \geq 0\}$  şiddet süreci olarak adlandırılır.

Cox sürecinin artışlarının olasılık dağılımı ise aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır;

(s, t) zaman aralığında şiddet sürecinin  $N_t - N_s$  artışlarının olasılık dağılımı;

$$P(N_t - N_s = n | \Lambda_u = \lambda(u), s \leq u \leq t) = \frac{\left(\int_s^t \lambda(u) du\right)^n}{n!} \exp\left(-\int_s^t \lambda(u) du\right)$$

şeklindedir.

Stokastik süreçlerde kullanılan rastgele zaman tanımlarından bir diğeri ise durma zamanıdır. Her  $n \in T$  için  $\{T \leq n\}$  olayı  $X_0, X_1, \dots, X_n$  rastgele değişkenleri tarafından belirlenebiliyorsa, T rastgele değişkeni  $\{X_t, t \in T\}_{t \geq 0}$  stokastik süreci için bir durma zamanıdır.

Cox sürecinin durma zamanı ise şu şekilde ifade edilmektedir;

$X_t$ 'den bağımsız  $F_E(t) = P(E < t) = 1 - e^{-t}$  dağılımına sahip  $E \sim \text{Üstel}(1)$  rastgele değişkeninin olduğu varsayalım. Cox sürecinin durma zamanını gösteren  $\tau$  rastgele değişkeni,  $\int_0^t \Lambda_u du$  sürecinin E rastgele seviyesine ilk ulaştığı veya aştığı zaman olarak tanımlanır. Yani;

$$\tau = \inf \left\{ t \geq 0: \int_0^t \Lambda_u du \geq E \right\}$$

$\Lambda_u$  büyük olduğunda  $\int_0^t \Lambda_u du$  integrali daha hızlı büyür, böylece bağımsız ve üstel dağılıma sahip E rastgele değişkenine daha hızlı ulaşır. Dolayısıyla,  $\tau$ 'nin küçük olma olasılığı daha büyük olur [58]. Buradan hareketle aşağıda verilen eşitlikler yazılabilir;

$$P(\tau > t | \Lambda_u = \lambda(u), s \leq u \leq t) = P\left(E > \int_s^t \lambda(u) du\right) = \exp\left(-\int_s^t \lambda(u) du\right)$$

$$P(\tau > t) = E \left[ \exp\left(-\int_s^t \lambda(u) du\right) \right]$$

Yukarıda elde edilen sonuçlar aktüerya alanında ölümlülüğü modellemek için kullanılabilir. Cox sürecinin şiddeti  $\mu(u)$  olacak şekilde bireyin anlık ölüm hızını belirttiğinde, sürecin durma zamanını gösteren  $\tau$  rastgele değişkeni, bireyin ölüm zamanına karşılık gelecektir. Bu durumda, x yaşındaki bir bireyin gelecek yaşam süresini (ölüm zamanını) gösteren  $T_x$  rastgele değişkeni için yaşam fonksiyonu;

$$S_x(t) = P(T_x > t) = E \left[ \exp\left(-\int_0^t \mu(u) du\right) \right]$$

biçiminde ifade edilebilir.

Ek olarak,  $\mu(u)$  anlık ölüm hızının bireyin yaşıyla orantılı olarak artan bir eğilim göstermesi, zaman geçtikçe E üstel rastgele değişkene daha hızlı ulaşmasına neden olur. Bu da  $\mu(u)$  anlık ölüm hızının yükselmesine bağlı olarak  $T_x$ 'in ilerleyen zamanlarda küçük olma olasılığının artacağı yani ölümün göreceli bir şekilde daha erken gerçekleşeceği anlamına gelmektedir.

### 3. STOKASTİK ÖLÜMLÜLÜK YAKLAŞIMLARI

Son zamanlarda, bireyin yaşama durumuna bağlı olarak oluşturulan sigorta ürünlerinde ölüm riski modellenirken stokastik yaklaşımlara başvurulmaktadır. Zaman geçtikçe hayat standartlarının iyileşmesi, beklenen yaşam süresinin artması ve bunun sonucunda ölüm eğilimlerinde gözlemlenen dalgalanmalar, stokastik yaklaşımların benimsenmesine neden olmuştur. Bu bölümde literatürde öne çıkan bazı stokastik ölümlülük modelleri hakkında bilgi verilecek, ardından tezde uygulanan stokastik ölümlülük modeli tanıtılacaktır.

#### 3.1. Afin Süreçleri

Hayat sigortalarında ölüm riskinin modellenmesi ile kredinin temerrüde düşme riskinin modellenmesi arasında oldukça benzer bir yapı söz konusudur. Faiz oranı ve kredi riski modellenirken kullanılan matematiksel araçlar, yaşam analizinde ölüm zamanı tanımlanırken uygulanmaktadır. Bu yaklaşım temerrüt zamanı ile ölüm zamanının öngörülemez olmasına izin veren indirgenmiş form özelliği göstermektedir. Böylelikle, bir bireyin ölümüne neden olan faktörler ile bir firmanın temerrüde düşmesine neden olan faktörler farklı olsa da finansal yaklaşımla paralellik kurulabilmektedir [42]. Bu ilişki,  $\mu$  şiddetine sahip Cox sürecinin durma zamanı olan  $\tau$  rastgele değişkeninin bireyin gelecek yaşam süresini temsil etmesiyle kurulmaktadır.

$\tau \geq t$  olmak üzere;

$$P(\tau > s | F_t) = E \left[ e^{-\int_t^s \mu(u) du} \middle| F_t \right] \quad (3.1)$$

ifadesi  $t$  yaşına kadar yaşadığı bilinen bir bireyin  $s - t$  yıl daha yaşaması olasılığına karşılık gelmektedir. (3.1) eşitliği aynı zamanda finans literatüründe anlık faiz oranının  $\mu$  sürecini takip ettiği ve vadesi  $s > t$  olan kupon ödemesiz tahvilin  $t$  anındaki fiyatını da göstermektedir. (3.1) eşitliğinde beklenen değer hesaplanması oldukça zordur. Bu sebeple  $\mu(u)$  için afin süreçler kullanılarak analitik çözümlerin daha kolay bir şekilde elde edilmesi amaçlanmıştır.

Mevcut aktüerya literatürüne bakıldığında anlık ölüm hızının “afin süreçleri aracılığıyla” stokastik açıdan ele alındığı görülmektedir.

(3.1) eşitliğinde kişinin anlık ölüm hızını ifade eden  $\mu$ 'nün stokastik diferansiyel eşitliği Dahl [32] tarafından şu şekilde tanımlanmıştır;

$$d\mu(t) = \delta(t, \mu(t))dt + \sigma(t, \mu(t))dW(t) + dJ(t) \quad (3.2)$$

Afin süreci olarak adlandırılan (3.2) eşitliğinde W standart Brown hareketi, J ise saf sıçrama sürecidir. (pure jump process) Diğer taraftan,  $\delta$  sürüklenme bileşenini gösterirken  $\sigma$  difüzyon bileşenini göstermektedir.

(3.1) eşitliği teknik koşullar altında aşağıdaki şekilde ifade edilebilmektedir;

$$P(\tau > s | F_t) = E \left[ e^{-\int_t^s \mu(u)du} \middle| F_t \right] = e^{\alpha(t,s) + \beta(t,s)\mu(t)}$$

Burada, deterministik  $\alpha(\cdot)$  ve  $\beta(\cdot)$  fonksiyonları genelleştirilmiş Riccati eşitlikleri olarak bilinen adi diferansiyel denklem sisteminin çözülmesiyle elde edilir.

Ölümlülük modelleri oluşturulurken kullanılan başlıca afin stokastik modeller aşağıda verilmiştir.

1977 yılında Vasicek [59] tarafından tanıtılan ve ortalamaya dönme özelliğine sahip Vasicek modelinde, anlık ölüm hızı  $\mu(0) > 0$  koşulu altında aşağıda verilen eşitlik aracılığıyla ifade edilmektedir;

$$d\mu(t) = k(\theta - \mu(t))dt + \sigma dW(t) \quad (3.3)$$

Bu eşitlikte;

$\theta$ : Ortalama anlık ölüm hızı ( $\theta > 0$ )

k: Ortalamaya dönme hızı ( $k < 0$ )

$\sigma$ : Volatilite ( $\sigma > 0$ )

olarak tanımlanmaktadır.

Vasicek modelinin Afin bir süreç olmasından dolayı yaşam olasılıkları şu şekilde yazılabilir;

$$P(\tau > s | F_t) = E \left[ e^{-\int_t^s \mu(u)du} \middle| F_t \right] = \alpha(t, s)e^{-\beta(t,s)\mu(t)}$$

Burada;

$$\alpha(t, s) = \frac{1}{k} [1 - e^{-2k(s-t)}]$$

$$\beta(t, s) = \exp \left\{ \left( \theta - \frac{\sigma^2}{2k^2} \right) [\alpha(t, s) - (t - s)] - \frac{\sigma^2}{4k} [\alpha(t, s)]^2 \right\}$$

biçimindedir.

Vasicek modelinin önemli bir dezavantajı, anlık ölüm hızının negatif olmasına imkân vermesidir.

Cox, Ingersoll ve Ross [60] tarafından önerilen CIR modeli kullanıldığında bireyin anlık ölüm hızı aşağıda şekilde ifade edilmektedir;

$$d\mu(t) = k(\theta - \mu(t))dt + \sigma\sqrt{\mu(t)}dW(t) \quad (3.4)$$

Burada, anlık ölüm hızının ortalama (beklenen) değeri  $\theta$ 'ya karşılık gelirken, volatilitesi  $\sigma$  ile gösterilmektedir. Ayrıca,  $\mu(0)$ ,  $\theta$  ve  $\sigma$  değerleri pozitiftir.  $k$  ise negatif değerli olup ortalamaya dönme hızını belirtmektedir. Dolayısıyla, sürüklenme faktörü olan  $k((\theta - \mu(t)))$  ifadesi  $k$  hızına bağlı olarak anlık ölüm hızının ortalama değere geri dönüşünü sağlamaktadır.

Vasicek modeli ile CIR modeli arasındaki temel farkı (3.3) ve (3.4) nolu eşitliklerden görmek mümkündür. Vasicek modelinde difüzyon bileşeni volatilitayı temsil eden sabit bir  $\sigma$  parametresi ile ölçeklendirilirken, CIR modelinde difüzyon bileşeni  $\sigma\sqrt{\mu(t)}$  ile ölçeklendirilmektedir. Benimsenen bu yaklaşım sayesinde, CIR modelinin Vasicek modeline göre en büyük avantajı sayılan  $\mu(t)$  anlık ölüm hızını negatif olmayacak şekilde ayarlama fırsatı oluşmaktadır. Bunun garanti edilebilmesi için  $\sigma^2 \geq 2k\theta$  koşulunun sağlanması gerekmektedir. Aksi takdirde, anlık ölüm hızı sıfıra eşit olabilmektedir.

Benzer şekilde, CIR modeli afin bir süreç olduğundan yaşam olasılıkları aşağıdaki şekilde yazılabilir;

$$P(\tau > s | F_t) = E \left[ e^{-\int_t^s \mu(u) du} \middle| F_t \right] = \alpha(t, s) e^{-\beta(t, s) \mu(t)}$$

Burada,  $\gamma = \sqrt{k^2 + 2\sigma^2}$  olmak üzere;

$$\alpha(t, s) = \left[ \frac{2\gamma e^{\frac{1}{2}(k+\gamma)(s-t)}}{2\gamma + (k + \gamma)(e^{\gamma(s-t)} - 1)} \right]^{\frac{2k\theta}{\sigma^2}}$$

$$\beta(t, s) = \frac{2(e^{\gamma(s-t)} - 1)}{2\gamma + (k + \gamma)(e^{\gamma(s-t)} - 1)}$$

biçimindedir.

Vasicek modeli ile CIR modelinde anlık ölüm hızlarının ortalamaya dönme eğilimi gösterdikleri varsayımı, anlık ölüm hızının beklenenin üzerinde olması durumunda belirli bir süre sonra azalacağı veya anlık ölüm hızının ortalama değerinin altında olması



durumunda ise zamanla artacağı anlamına gelmektedir. Bu durum, zaman geçtikçe ölüm olasılıklarının artmasından dolayı ortalama değere düşmesi varsayımıyla uyuşmamaktadır. Dolayısıyla, ortalamaya dönen Afin süreçler, anlık ölüm hızının zaman içindeki gelişimini temsil etmede yetersiz kalmaktadır.

Anlık ölüm hızını modellemek için afin süreçlerin uygulandığı çalışmalarda, ortalamaya dönmeyen modellerin ortalamaya dönen modellere kıyasla daha uygun olduğu görülmüştür. Bunun yanı sıra, mevcut araştırmalar ortalamaya dönen Afin süreçlerin gözlemlenen mortalite tablolarına uymadığını belirtirken, ölüm oranlarının üstel bir şekilde davrandığını göstermektedir [35].

Ortalamaya dönmeyen Afin süreçlere örnek olarak Ornstein Uhlenbeck modeli ve Feller modeli verilecektir.

Leonard Ornstein ve George Eugene Uhlenbeck [61] tarafından tanıtılan Ornstein Uhlenbeck süreci kullanılarak anlık ölüm hızı aşağıdaki stokastik diferansiyel eşitlik yardımıyla modellenmektedir;

$$d\mu(t) = a\mu(t)dt + \sigma dW(t) \quad (3.5)$$

Burada,  $\alpha > 0$ ,  $\sigma \geq 0$  ve  $W(t)$  standart Brown hareketidir.

(3.5) eşitliğinin aynı zamanda bir Afin süreç olması nedeniyle Ornstein Uhlenbeck modeline karşılık gelen yaşam olasılıkları aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$P(\tau > s | F_t) = E \left[ e^{-\int_t^s \mu(u)du} \middle| F_t \right] = e^{\alpha(t,s) + \beta(t,s)\mu(t)}$$

Burada;

$$\alpha(t, s) = \frac{\sigma^2}{2a^2} (s - t) - \frac{\sigma^2}{a^3} e^{a(s-t)} + \frac{\sigma^2}{4a^3} e^{2a(s-t)} + \frac{3\sigma^2}{4a^3}$$

$$\beta(t, s) = \frac{1}{a} [1 - e^{a(s-t)}]$$

şeklindedir.

Ornstein Uhlenbeck modelinde yaşam olasılığı, yeterince büyük s değerleri için yaşın artan bir fonksiyonu olup sonsuz eğilim göstermektedir. Gerçekliği yansıtmayan bu durum sonucunda bireyin anlık ölüm hızı negatif değerler almaktadır. Bu nedenle Ornstein Uhlenbeck modelinin ölümlülüğün modellenmesinde yetersiz olduğu kabul

edilebilir. Ancak uygulamada aktüerler tarafından yapılan gerekli ayarlamalar neticesinde bu modelin oldukça faydalı sonuçlar sağladığı görülmüştür.

Feller modelinde anlık ölüm hızı aşağıdaki eşitlik yardımıyla ifade edilmektedir;

$$d\mu(t) = a\mu(t)dt + \sigma\sqrt{\mu(t)}dW(t) \quad (3.6)$$

Burada,  $\alpha > 0, \sigma \geq 0$  ve  $W(t)$  standart Brown hareketidir.

(3.6) ile verilen stokastik diferansiyel eşitlik de Afın bir süreci temsil ettiğinden yaşam olasılıkları aşağıdaki şekilde yazılabilir;

$$P(\tau > s | F_t) = E \left[ e^{-\int_t^s \mu(u)du} \middle| F_t \right] = e^{\alpha(t,s) + \beta(t,s)\mu(t)}$$

Burada;

$$b = -\sqrt{a^2 + 2\sigma^2}, c = \frac{a + b}{2}, d = \frac{b - a}{2}$$

olmak üzere;

$$\alpha(t, s) = 0$$

$$\beta(t, s) = \frac{1 - e^{b(s-t)}}{c + de^{b(s-t)}}$$

biçimindedir.

Sürecin başlangıç noktası olan  $\mu(0)$  değerinin pozitif olması şartıyla, Feller modelinde anlık ölüm hızı negatif değerler almamaktadır. Bu durum, Ornstein Uhlenbeck modeli ile karşılaştırıldığında anlık ölüm hızının sıfır olmasına da izin veren Feller modeli için büyük bir avantaj sağlamaktadır. Ayrıca, negatif değerli b, c ve d katsayıları göz önüne alındığında ve  $e^{b(s-t)}(\sigma^2 + 2d^2) > \sigma^2 - 2dc$  koşulunun gerçekleşmesi halinde yaşam olasılığı zamanla azalmaktadır.

Literatürde öne çıkan stokastik ölümlülük modelleriyle ilgili bilgi verilmiştir. Sonrasında ters Gauss dağılımı ile normal ters Gauss süreci tanımlanacak, ardından tezde kullanılan stokastik ölümlülük modeli tanıtılacaktır.

### 3.2. Normal Ters Gauss Süreci

Ters Gauss dağılımı ilk olarak 1900 yılında Louis Bachelier [62] tarafından, hisse senetlerinin belirli bir fiyat seviyesine ulaşana kadar geçen zamanının olasılık dağılımı olarak tanıtılmıştır. 1915 yılında ise Schrödinger [63] ve Smoluchowski [64] ters Gauss

dağılımını pozitif sürüklenmeye sahip Brown hareketinin ilk geçiş zamanının dağılımı olarak tanımlamıştır. Zaman negatif değerler alamayacağından dolayı ters Gauss dağılımı yalnızca pozitif tanımlıdır. Wald dağılımı olarak da bilinen ters Gauss dağılımı, konum ve şekil parametresi olmak üzere iki parametrelili sürekli bir dağılımdır. Ters Gauss dağılımı tıp, finans, aktüerya, demografi ve yaşam analizi gibi birçok alanda uygulanmaktadır. Ayrıca, negatif olmayan ve tehlike fonksiyonunun monoton olmadığı durumlarda, sağa çarpık verilerin modellenmesinde bu dağılım sıkça tercih edilmektedir. Literatürde, ters Gauss dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonuna ilişkin iki karakterizasyon sunulmaktadır.

Tankov [49],  $\mu$  ve  $\lambda$  parametrelili ters Gauss dağılımının olasılık yoğunluk ve dağılım fonksiyonunu,

$$f(x; \mu, \lambda) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi x^3}} \exp\left[-\frac{\lambda(x - \mu)^2}{2\mu^2 x}\right]; \quad x > 0, \quad \mu > 0, \quad \lambda > 0$$

$$F(x; \mu, \lambda) = \Phi\left[\sqrt{\frac{\lambda}{x}}\left(\frac{x}{\mu} - 1\right)\right] + e^{\frac{2\lambda}{\mu}} \Phi\left[-\sqrt{\frac{\lambda}{x}}\left(\frac{x}{\mu} + 1\right)\right]$$

şeklinde tanımlamıştır.

Burada,  $\mu$  konum parametresi (ortalama),  $\lambda$  şekil parametresi iken  $\Phi(\cdot)$  standart normal dağılımın kümülatif dağılım fonksiyonudur.

$X \sim IG(\mu, \lambda)$  olmak üzere ters Gauss dağılımının beklenen değeri ve varyansı sırasıyla;

$$E[X] = \mu$$

$$V[X] = \frac{\mu^3}{\lambda}$$

olarak ifade edilir [65].

Diğer taraftan, Barndorff-Nielsen [66] tarafından sunulan ters Gauss dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x; a, b) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \exp(ab) x^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(a^2 x^{-1} + b^2 x)\right)$$

biçimindedir.

Burada,  $a$  ölçek parametresi iken  $b$  şekil parametresidir.

$X \sim IG(a, b)$  olduğu durumda ise beklenen değer ve varyans,

$$E[X] = \frac{a}{b}$$

$$V[X] = \frac{a}{b^3}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Ters Gauss dağılımının bazı özellikleri;

- $c > 0$  olmak üzere  $X \sim IG(a, b)$  ise  $cX \sim IG\left(a\sqrt{c}, \frac{b}{\sqrt{c}}\right)$
- $X \sim IG(a_1, b)$  ve  $Y \sim IG(a_2, b)$  dağılımlarına sahip birbirinden bağımsız  $X$  ve  $Y$  rastgele değişkenleri verilsin. Bu durumda,  $X + Y \sim IG(a_1 + a_2, b)$

Ters Gauss dağılımı, pozitif sürüklenmeye sahip Brown hareketinin sabit pozitif bir seviyeye ulaşmak için geçen sürenin dağılımı olarak ifade edilmektedir. Brown hareketi ile ters Gauss dağılımı arasındaki bu ilişki aşağıdaki şekilde oluşturulmaktadır;

Başlangıç noktası  $X_0 = x_0$  olan  $\{X_t, t \in T\}_{t \geq 0}$  stokastik süreci verilsin.  $W_t$  standart Brown hareketi olmak üzere sürüklenme katsayısı  $\beta\sigma^2 > 0$  ve varyansı  $\sigma^2$  olan sürüklemeli Brown hareketi  $X_t = x_0 + \sigma W_t + \beta\sigma^2 t$  şeklinde ifade edilir. Buradan,  $X_t$  sürüklemeli Brown hareketinin ilk geçiş zamanı için olasılık yoğunluk ve kümülatif dağılım fonksiyonu sırasıyla;

$$f(x; x_0, t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} \exp\left[-\frac{(x - x_0 - \beta\sigma^2 t)^2}{2\sigma^2 t}\right]$$

$$F(t; x_0) = \Phi\left(\frac{-x_0 - \beta\sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}}\right) + e^{-2\beta x_0} \Phi\left(\frac{-x_0 + \beta\sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}}\right)$$

eşitlikleriyle verilmektedir.

Burada  $\Phi(\cdot)$  standart normal dağılımın kümülatif dağılım fonksiyonudur.

Diğer taraftan,  $T$  rastgele değişkeni  $X_t = x_0 + vt + \sigma W_t$  şeklinde ifade edilen sürüklemeli Brown hareketinin ilk geçiş zamanını gösterebiliriz.  $a > x_0$  olmak üzere  $T$ 'nin ilk geçiş zamanı olması için aşağıda verilen koşulları sağlaması gerekmektedir [65];

$$X_0 = x_0$$

$$X_t < a, 0 < t < T$$

$$X_T = a$$

Özel olarak  $X_0 = x_0 = 0$  alınrsa, yani  $X_t$  stokastik sürecinin sıfır noktasından başladığı varsayılırsa, ilk geçiş zamanı olan  $T$  aşağıdaki gibi ifade edilir;

$$T_a = \inf\{t > 0 | X_t = a\}$$

Bu durumda;

$$T_a \sim IG\left(\frac{a}{v}, \frac{a^2}{\sigma^2}\right)$$

olur. Dolayısıyla  $T_a$ 'nın olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki biçimde yazılabilir;

$$f_{T_a}(x; a, v, \sigma) = \frac{a}{\sigma\sqrt{2\pi x^3}} \exp\left[-\frac{(a - vx)^2}{2\sigma^2 x}\right]$$

Ayrıca,  $\{Y_t, t \in T\}_{t \geq 0}$  stokastik süreci aşağıda verilen özellikleri sağlanması durumunda ters Gauss süreci olarak adlandırılır;

- i.  $Y_t$  bağımsız artışı bir süreçtir.
- ii.  $\forall 0 \leq s < t$  için  $Y_t - Y_s \sim IG(\mu(t - s), \lambda(t - s)^2)$

Yani,  $\{Y_t, t \in T\}_{t \geq 0}$  stokastik süreci, artışları birbirinden bağımsız, durağan ve negatif olmayan bir süreçtir. Dolayısıyla ters Gauss süreci subordinatör olarak uygulanabilir.

Normal ters Gauss dağılımı, ilk olarak Ole Barndorff-Nielsen [67] tarafından tanıtılmış olup daha sonra Rydberg [68] tarafından kapsamlı bir şekilde ele alınmıştır. Dağılım, homojen bir Lévy sürecini belirler ve bu süreç, Brown hareketinin ters Gauss süreci tarafından tabi kılınması yoluyla temsil edilebilir [66]. Yani, normal ters Gauss süreci zaman değişiminin ters Gauss sürecini izlediği sürüklemeli Brown hareketi olarak yorumlanabilir [69].

Normal ters Gauss dağılımı dört parametrelilik karma bir dağılımdır [70].  $\alpha, \beta, \sigma$  ve  $\mu$  parametreleri ile normal ters Gauss dağılımı gösteren  $X$  rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu ve kümülatif dağılım fonksiyonu;

$X \sim NIG(\alpha, \beta, \mu, \sigma)$  olmak üzere;

$$\begin{aligned} f_X(x; \alpha, \beta, \mu, \sigma) &= \int_0^{\infty} f_N(x; \mu + \beta y, y) f_{IG}(y; \sigma y, y^2) dy \\ &= \frac{\alpha\sigma}{\pi} \exp\left[\sigma\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} + \beta(x - \mu)\right] \frac{K_1\left[\alpha\sqrt{\sigma^2 + (x - \mu)^2}\right]}{\sqrt{\sigma^2 + (x - \mu)^2}}; x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$F_X(x; \alpha, \beta, \mu, \sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{-x - \mu - \beta t}{\sqrt{t}}\right) \rho(t) dt$$

şeklindedir.

Burada,  $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ ,  $f_N$  ise ortalaması  $\mu + \beta\gamma$  ve varyansı  $\gamma$  olan normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonudur.  $K_1(x) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}x\left(t + \frac{1}{t}\right)\right] dt$  (düzeltilmiş 3.tip Bessel fonksiyonu),  $\alpha > 0$  kuyruk ağırlığı,  $\beta$  asimetri/çarpıklık ( $0 \leq |\beta| < \alpha$ ),  $\mu$  konum ve  $\sigma > 0$  ölçek parametresidir. Ayrıca,  $\Phi(\cdot)$  standart normal dağılımın kümülatif dağılım fonksiyonu iken  $\rho(t)$ ,  $(\sigma, \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})$  parametrelili ters Gauss dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonudur.

Ayrıca,  $\{X_t, t \in T\}_{t \geq 0}$  stokastik süreci;

- i)  $X_0 = 0$
- ii) Artışları bağımsız ve durağan olan bir süreçtir.
- iii)  $\forall 0 \leq s < t$  için  $X_t - X_s \sim NIG(\alpha, \beta, \mu(t-s), \sigma(t-s))$

koşullarını sağlıyorsa normal ters Gauss süreci olarak adlandırılır.

Ek olarak,  $\alpha > 0, -\alpha < \beta < \alpha, \sigma > 0$  olmak üzere  $W_t$  standart Brown hareketi,  $a = 1$  ve  $b = \sigma\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$  parametreleri ile  $\{G_t, t \in T\}_{t \geq 0}$  ters Gauss süreci olsun. Bu durumda,  $X_t = \sigma W_t + \beta\sigma^2 G_t$  süreci  $(\alpha, \beta, \sigma)$  parametreleri ile normal ters Gauss sürecidir.

Bu çalışmada anlık ölüm hızının normal ters Gauss sürecini takip ettiği varsayılarak çiftlerin birleşik yaşam durumundaki ölümlülüğü incelenmiştir. Uygulanacak olan stokastik ölümlülük modelinin çerçevesi ise şu şekildedir;

$(\Omega, F, P)$  olasılık uzayında tanımlı birbirinden bağımsız  $W_t$  ve  $G_t$  stokastik süreçleri ele alınsın.  $W_t$  süreci standart Brown hareketi iken  $G_t$  süreci sıfırdan başlayan artan C dl g sürecini göstersin. Yani,  $G_t$  stokastik sürecinin yörüngeleri sol limitlerle sağdan sürekli olup subordinatör olarak değerlendirilmektedir. Diğer taraftan,  $\sigma > 0$  ve  $\beta \in \mathbb{R}$  olmak üzere  $X_0$  noktasında başlayan ve  $X_t = X_0 + \sigma W_t + \beta\sigma^2 t$  şeklinde tanımlanan sürüklemeli Brown hareketi dikkate alınsın. Modelde anlık ölüm hızı  $\mu(t) = X_{G_t}$  olacak şekilde zamanla değerşen Brown hareketi olarak ifade edilmektedir. Anlık  l m hızının bu şekilde tanımlanması, X süreci için zaman  l eği olan t'nin  $G_t$  sürecine göre hareket ettiği yönünde yorumlanabilir. Bunun yanı sıra, bireyin ölüm zamanını gösteren T rastgele değerşkeni, şiddeti  $X_{G_t}$  olan Cox sürecinin durma zamanı olarak tanımlanmaktadır.

Dolayısıyla, s yaşına kadar hayatta olduğu bilinen bir bireyin ölüm zamanı aşağıdaki şekilde yazılabilir;

$$T_s = \inf \left\{ t: \int_s^t \mu(u) du \geq E \mid F_s \right\} \quad (3.7)$$

Burada, E ortalaması bir olan üstel rastgele değişkeni,  $F_s$  ise bireyin s yaşına kadarki  $\mu(t)$  bilgisini temsil etmektedir. Ek olarak, durma zamanı, indirgenmiş form özelliği göstermektedir. Yani, zamanla değişen Brown hareketinin gelişimi hakkında tam bilgiye sahip olunmama ile birlikte durma zamanının da erişilemez olduğu bilinmektedir. Ölümlülük modeli için bu özelliğin kabul edilebilir olduğu açıktır. Çünkü, ölüm olayı beklenmedik bir şekilde gerçekleştiğinden öncesinde ölüm zamanını öngörmek mümkün değildir. Ayrıca, bireyin gözlemlenen zaman aralığında ölüm eğiliminin nasıl gelişeceği konusunda kesin bir bilgi olmaması, durma zamanının belirlenememesine yol açmaktadır.

$t \geq s$  koşulu altında anlık ölüm hızının gözlemlenen zaman aralığında belirli iken s yaşına kadar yaşadığı bilinen bir bireyin ölüm zamanının t'den sonra olması, başka bir deyişle s yaşındaki bireyin t - s yıl daha yaşaması olasılığı aşağıdaki şekilde ifade edilebilir;

$${}_{t-s}p_s = P(T_s > t \mid (X_{G_u})_{s \leq u \leq t}) = \exp \left( - \int_s^t X_{G_u} du \right) \quad (3.8)$$

(3.8) eşitliği esasında (s, t) aralığında şiddeti  $\mu(u) = X_{G_u}$  olan Cox sürecinin olasılık dağılımından elde edilmektedir. Ölümün t anından sonra meydana geldiğini gösteren  $T_s > t$  ifadesi aynı zamanda (s, t) aralığında herhangi bir ölümün gerçekleşmediği anlamını taşımaktadır. Bu düşünce doğrultusunda,  $\mu(u)$  şiddetine sahip ve  $\{N_t, t \in T\}_{t \geq 0}$  şeklinde ifade edilen Cox sürecinin (s, t) zaman aralığında  $N_t - N_s$  artışlarının dağılımı;

$$P(N_t - N_s = n \mid \mu(u), s \leq u \leq t) = \frac{\left( \int_s^t \mu(u) du \right)^n}{n!} \exp \left( - \int_s^t \mu(u) du \right) \quad (3.9)$$

biçiminde olup bu zaman aralığında hiç ölüm olmadığı için (3.9) eşitliğinde  $n = 0$  alınarak yeniden düzenleme yapılabilir. Buradan, Cox süreci aracılığıyla bir bireyin (s, t) zaman aralığında yaşaması olasılığı aşağıdaki şekilde temsil edilebilir;

$$P(N_t - N_s = 0 \mid \mu(u) = X_{G_u}, s \leq u \leq t) = \exp\left(-\int_s^t X_{G_u} du\right) \quad (3.10)$$

Sonuç olarak, (3.8) ve (3.10) eşitliğinin aynı olduğu görülmektedir.

Anlık ölüm hızının  $\mu(u) = X_{G_u}$  şeklinde zamanla değişen Brown hareketi olarak modellenmesi, ölümlülüğün gelişimini incelerken bazı durumların eş zamanlı olarak değerlendirilmesini sağlar. Belirli bir bölgede yaşayan insanların ölüm olasılıklarının zaman içindeki gelişimi genel olarak  $X_t$  süreci ile tanımlanır. t zamanının  $G_t$  sürecini izlemesi durumunda ise, ölüm olasılıklarında meydana gelen değişimler daha özel anlamda ele alınır. Dolayısıyla, anlık ölüm hızı her iki durumun da dikkate alınmasıyla kapsamlı bir şekilde hesaplanır. Ayrıca, her bireyin ölüm gelişiminin kişisel olarak incelenmesine imkân sunan  $G_t$  süreci, gözlem süresi içerisinde sıçramalar yaşanmasına izin veren sürekli veya süreksiz bir süreç olabilir.

Zamanın deterministik yaklaşımdan ziyade  $G_t$  gibi stokastik bir süreç aracılığıyla modellenmesi, ölümlülük analizinde ulaşılan sonuçların daha gerçekçi olmasını sağlar. Bunun sebebi,  $G_t$  süreciyle birlikte kişinin yaşama olasılığını etkileyen iç ve dış faktörlerin modele dahil edilmesidir. Çünkü, kişinin gelecek yaşam süresi yaş, sağlık durumu gibi iç faktörlerin yanı sıra hava kalitesi, ekonomik koşullar gibi dış faktörler tarafından da etkilenir. Bu düşünce doğrultusunda, modelde her bireyin anlık ölüm hızına karşılık gelen subordinatör kısmı iki bileşenin kombinasyonu şeklinde ifade edilmiştir. Bileşenlerden biri bireyin kendine özgü özelliklerinin yansıtıldığı süreci gösterirken diğeri çiftin birlikte geçirdiği ortak süreci göstermektedir. Ortak süreç, birlikte yaşayan bireylerden birinin ölüm olasılığında sıçramaya neden olan faktörün diğer bireyin ölüm olasılığını da etkilediği varsayımına dayanmaktadır. Yani, modelde oluşturulan subordinatörler, bireyin hem eşiyle paylaştığı ortak süreci, hem de yaş ve cinsiyet gibi faktörlerin belirlediği bireysel süreci içermektedir.

Çiftlerin anlık ölüm hızlarında ilişkili subordinatörler kullanılarak birleşik yaşam durumundaki bağımlılıkları aşağıdaki şekilde modellenmiştir;

Modelde kadın birey K, erkek birey ise E sembolüyle gösterilmektedir.

$X_t^K$  kadın bireyin anlık ölüm hızı,  $X_t^E$  ise erkek bireyin anlık ölüm hızı olmak üzere;

$$X_t^K = X_0^K + \sigma^K W_t^K + \beta^K (\sigma^K)^2 t \quad (3.11)$$



$$X_t^E = X_0^E + \sigma^E W_t^E + \beta^E (\sigma^E)^2 t \quad (3.12)$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Burada,  $W_t^K$  ( $W_t^E$ ) standart Brown hareketi,  $X_0^K$  ( $X_0^E$ ) kadın (erkek) bireyin anlık ölüm hızının başlangıç değeridir.  $\sigma^K$  ( $\sigma^E$ ) parametresi volatilité,  $\beta^K$  ( $\beta^E$ ) parametresi ise sürüklenme katsayısıdır.

Kadın ve erkek bireyin anlık ölüm hızına karşılık gelen subordinatörler sırasıyla  $G_t^K$  ve  $G_t^E$  ile belirtilmekte olup aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir;

$$G_t^K = \alpha^K G_t + (1 - \alpha^K) G_t^{K0} ; 0 \leq \alpha^K \leq 1 \quad (3.13)$$

$$G_t^E = \alpha^E G_t + (1 - \alpha^E) G_t^{E0} ; 0 \leq \alpha^E \leq 1 \quad (3.14)$$

Burada,  $G_t$ ,  $G_t^{K0}$  ve  $G_t^{E0}$  birbirinden bağımsız ve sıçramalara izin veren artan C dl g süreçleridir. Ayrıca,  $X_t^K$ ,  $X_t^E$  ve  $G_t^K$ ,  $G_t^E$  süreçleri de birbirinden bağımsız stokastik süreçlerdir.  $\alpha^K$  ve  $\alpha^E$  katsayıları ise sıfır ile bir arasında değer alan reel sayılardır.

Çiftlerin çoğu zaman aynı ortamda yaşamaları, benzer yiyecekler tüketmeleri ve birlikte araba kullanmaları gibi birçok ortak yaşam tarzını benimsemesi sonucunda benzer risk faktörlerine maruz kalmaları sebebiyle ortaya çıkan bağımlılık yapısı  $G_t$  s re iyle ifade edilmektedir. Ayrıca, (3.13) ve (3.14) nolu eşitliklerden de g r ld ğ i üzere  $G_t^K$  ve  $G_t^E$  subordinat rleri iki süreç içermektedir. Kişinin karakteristik özelliklerini simgeleyen  $G_t^{K0}$  ( $G_t^{E0}$ ) subordinatörü birleşik yaşam durumunda kadın (erkek) bireyin  l ml l ğ n n bireysel bileşenini temsil ederken,  $G_t$  subordinatörü kadın ve erkek arasındaki bağımlılığa neden olan ortak süreci temsil etmektedir. Bu formülasyon, birlikte yaşayan insanların benzer dış faktörleri paylaştığı gerçeğine dayanarak, çiftlerin ölüm olasılıklarının gelişimini hem ayrı ayrı hem de eşleriyle bağlantılı olarak gözleme fırsatı sunmaktadır. Zaman içinde ölüm eğilimlerini saptamada i  ve dış faktörlerin bir dengesi olduğundan her bireyin zaman değişimini bu iki süreç ve bunların ağırlıkları tarafından belirlenmektedir. Yapılan ağırlıklandırma ile gözlemlenen ölüm olasılıklarının bu i  ve dış faktörlere ne kadar bağlı olduğu tespit edilmektedir. Ağırlıklandırma parametrelerinin sayısal değerine göre çiftlerin evlilikten kaynaklanan bağımlılık düzeyleri yorumlanmaktadır. (3.13) nolu eşitlikte  $\alpha^K$  değerinin yüksek olması,  $G_t$  sürecinin t zamanında  $G_t^K$  süreci üzerinde daha etkili olduğu anlamına gelmektedir. Yani, kadın bireyin eşiyle bağımlılık durumunu gösteren süreç, anlık ölüm hızının belirlenmesinde etkin bir rol oynamaktadır. Dolayısıyla,  $\alpha^K$  değeri ne kadar yüksekse çiftin gelecek yaşam

süreleri de zaman içinde birbirine benzer bir gelişim göstermektedir. Özel olarak,  $\alpha^K$  ağırlığının sıfır olması durumunda kadın bireyin  $G_t^K$  subordinatörü yalnızca  $G_t^{K0}$  sürecini takip etmektedir. Böylece, kadın bireyin anlık ölüm hızı eşinden bağımsız bir şekilde karakteristik özellikleri tarafından belirlenmektedir. Benzer şekilde,  $\alpha^K$  ağırlığı bir değerini aldığı anda  $G_t^K$  subordinatörü sadece  $G_t$  sürecini izlemektedir. Bu durum ise kadın bireyin anlık ölüm hızının tamamen eşine bağlı olarak geliştiği anlamını taşımaktadır.

Modelde subordinatörlerin ters Gauss sürecine uyduğu varsayılmıştır. Artışları ters Gauss dağılımı gösteren bu sürecin tercih edilmesinin nedeni, her zaman pozitif değerler alan homojen Lévy süreci olmasıdır. Böylece, ters Gauss süreci subordinatör olarak uygulanabilmektedir. Diğer taraftan, ters Gauss sürecinin yaşam verileri ile iyi bir uyum iyiliğine sahip olması ve kolay simüle edilmesi, bu sürecin seçilmesinde etkili olmuştur. Literatüre bakıldığında, Mitchell [71] ve Wang [72] tarafından yapılan çalışmalarda, ölümlülük modellerinin ters Gauss süreci kullanılarak oluşturulduğu görülmektedir.

Subordinatörlerin ters Gauss sürecini izlemesiyle birlikte bireylerin anlık ölüm hızı normal ters Gauss sürecini takip etmektedir. Subordinatörlerin dağılımının elde edilmesi Luciano ve Semeraro [73] tarafından ayrıntılı bir şekilde ele alınmıştır. Normal ters Gauss süreci subordinatörlerin aşağıdaki formda yazılmasını gerektirir [1];

$$G_t \sim IG(t, b)$$

$$G_t^{K0} \sim IG\left(\frac{1 - \sqrt{\alpha^K}}{\sqrt{1 - \alpha^K}} t, \frac{b\sqrt{1 - \alpha^K}}{\sqrt{\alpha^K}}\right)$$

$$G_t^{E0} \sim IG\left(\frac{1 - \sqrt{\alpha^E}}{\sqrt{1 - \alpha^E}} t, \frac{b\sqrt{1 - \alpha^E}}{\sqrt{\alpha^E}}\right)$$

$G_t$ ,  $G_t^{K0}$  ve  $G_t^{E0}$  subordinatörlerinin ters Gauss dağılımına sahip ve birbirlerinden bağımsız olmaları  $G_t^K$  ve  $G_t^E$ 'nin de ters Gauss dağılımına uymasına neden olmaktadır. Ters Gauss dağılımının özelliklerinden yararlanılarak  $G_t^K$  ve  $G_t^E$  subordinatörlerinin dağılımı aşağıdaki şekilde elde edilmiştir;

$$G_t^K \sim IG\left(t, \frac{b}{\sqrt{\alpha^K}}\right)$$

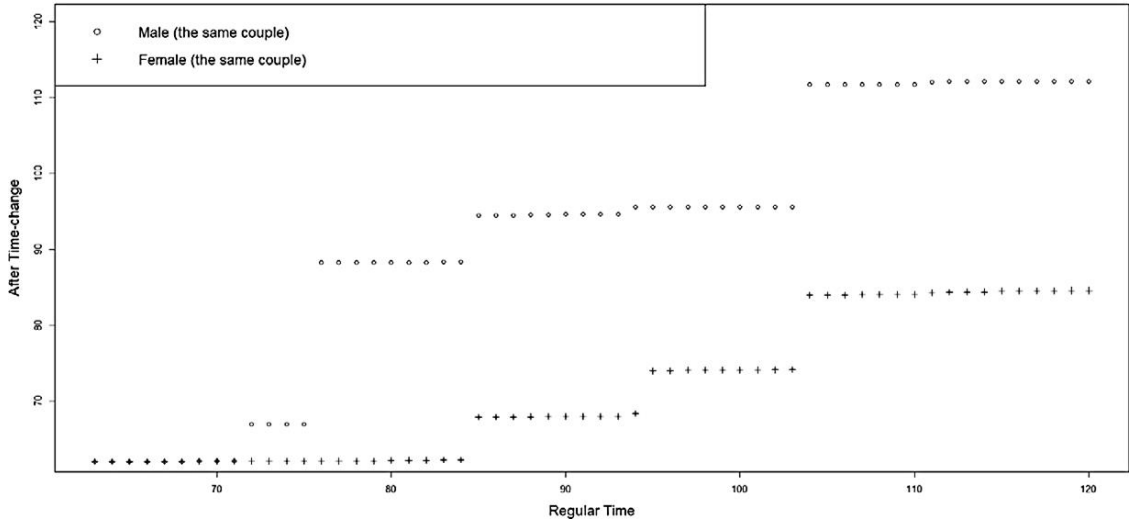
$$G_t^E \sim IG\left(t, \frac{b}{\sqrt{\alpha^E}}\right)$$

Buradan hareketle,  $X_{G_t^K}^K$  ve  $X_{G_t^E}^E$  olarak ifade edilen zamanla değişen Brown hareketinin kadın ve erkek bireylere karşılık gelen sürüklenme katsayıları ise sırasıyla aşağıdaki gibidir;

$$\beta^{K+} = \sqrt{(\alpha^K)^2 - \frac{b^2}{\alpha^K(\sigma^K)^2}}$$

$$\beta^{E+} = \sqrt{(\alpha^E)^2 - \frac{b^2}{\alpha^E(\sigma^E)^2}}$$

Zhang ve Brockett'den [1] alınan Şekil 3.1.'de bir çiftin kadın ve erkek bireylerine karşılık gelen subordinatörlerin yörüngeleri verilmiştir. Kadın bireyin  $G_t^K$  subordinatörünün  $\alpha^K = 0,60$ ,  $\sigma^K = 0,03$ ,  $b = 0,0011$  parametreleriyle ters Gauss sürecine uyduğu, erkek bireyin  $G_t^E$  subordinatörünün ise  $\alpha^E = 0,65$ ,  $\sigma^E = 0,08$ ,  $b = 0,0011$  parametreleriyle ters Gauss sürecine uyduğu varsayılmıştır.



**Şekil 3.1.**  $G_t^K$  ve  $G_t^E$  Subordinatörlerinin Yörüngeleri

Şekil 3.1.'den görüldüğü üzere, erkek ve kadın bireyin anlık ölüm hızlarının takip ettiği zaman değişimleri farklı yollar izlemektedir. Ancak, bu yolların zaman ilerledikçe artış eğiliminde olduğu ve süreç içerisinde yaşanan sıçramalar da dikkate alındığında oldukça benzer bir gelişim gösterdiği görülmektedir. Hem erkek hem de kadın bireyin 85 ve 104 yaşına geldiğinde subordinatörlerinde eş zamanlı bir sıçrama gerçekleşmiştir. Bu sıçrama, çiftin birlikte yaşadığı süreci temsil eden  $G_t$  sürecindeki sıçramalardan kaynaklanmaktadır. Yani, çiftlerin gelecek yaşam süreleri paylaştıkları ortak süreçten büyük ölçüde etkilenmekte ve buna bağlı olarak ölüm olasılıklarının zaman içerisindeki

gelişimi birbirine benzemektedir. Diğer taraftan, erkek birey 72 ve 76 yaşlarındayken eşinin aksine zaman içinde bir sıçrama yaşamıştır. Bunun sebebi, erkek bireyin kendine özgü özelliklerinin yansıtıldığı  $G_t^{E0}$  sürecinde oluşan sıçramalardır. Benzer bir durum kadın birey için 95 yaşındayken gözlemlenmektedir. Erkek bireyden farklı olarak bu olayın yaşanmasına  $G_t^{K0}$  sürecindeki sıçramalar neden olmuştur. Çiftlerin birbirinden farklı zamanlarda sıçramalara sahip olmaları, kendi sağlık durumlarında gerçekleşen bir değişiklikten veya bireysel yaşam tarzlarından kaynaklanmaktadır.

Kadın ve erkek bireylere ait ölüm olasılıkları hesaplanırken Hurd [56] tarafından sunulan çalışma referans alınmıştır. Hurd [56] kredi riskini, stokastik volatilitenin etkilerini ve olası sıçramaları içerebilen zamanla değişen Brown hareketi kullanarak modellemiştir. Zamanla değişen Brown hareketi olan  $X_{G_t}$ 'nin durma zamanını gösteren  $\tau$  rastgele değişkeni, bir firmanın temerrüde düşme zamanı olarak değerlendirilmiş ve matematiksel yapısı iki farklı formda oluşturulmuştur;

$$\tau = \inf\{t \mid X_{G_t} \leq 0\} \quad (3.15)$$

$$\tau = \inf\{t \mid G_t \geq t^*\} \quad (3.16)$$

Burada,  $t^* = \inf\{t \mid X_t \leq 0\}$  biçiminde olup  $X_t$  sürecinin ilk geçiş zamanını göstermektedir.  $G_t$  süreci sıfırdan başlayan artan C adl ag süreci iken  $X_t$  s ur uklemeli Brown hareketidir.  $X_0$  noktasında başlayan  $X_t$  süreci, volatilit e katsayısı  $\sigma > 0$  ve s ur uklenme katsayısı  $\beta\sigma^2$  olacak şekilde  $X_t = X_0 + \sigma W_t + \beta\sigma^2 t$  biçiminde ifade edilmiştir.

Zamanla değişen Brown hareketinin durma zamanına y onelik yukarıda verilen tanımlamalar ile tezde uygulanan stokastik  l uml l k modelinin durma zamanı ilişkilendirilmiştir. Bireyin  l m zamanının Cox sürecinin durma zamanı olarak ifade edildiği (3.7) nolu eşitliğine Leibniz kuralının uygulanması sonucunda (3.15) nolu eşitlik elde edilmiştir. Üstelik,  $G_t$  sürekli bir süreç olduğu takdirde (3.15) ve (3.16) nolu eşitlikler birbirine denk olmaktadır [56]. Modelimizde de  $G_t$  süreci ters Gauss sürecini takip ettiğinden (3.7) nolu eşitlik (3.16) nolu eşitliğe karşılık gelmektedir. Sonuç olarak, Hurd [56] tarafından (3.16) nolu eşitliğindeki  $\tau$  durma zamanına ilişkin verilen kümülatif dağılım fonksiyonu, (3.7) nolu eşitliğindeki T durma zamanı için de yazılabilmektedir. Buradan hareketle, bireyin ölüm zamanını gösteren T rastgele değişkeninin kümülatif dağılım fonksiyonu aşağıdaki Şekilde tanımlanmaktadır;

$$P(T \leq t) = \int_0^{\infty} \left[ \Phi \left( \frac{-x_0 - \beta \sigma^2 y}{\sigma \sqrt{y}} \right) + e^{-2\beta x_0} \Phi \left( \frac{-x_0 + \beta \sigma^2 y}{\sigma \sqrt{y}} \right) \right] \rho_t(y) dy \quad (3.17)$$

Burada,  $\rho_t$  fonksiyonu  $G_t$  sürecinin olasılık yoğunluk fonksiyonunu temsil etmektedir. (3.17) nolu eşitlik aynı zamanda bireyin  $t$  yıl içerisinde ölmesi olasılığını göstermektedir.

Tezde bireylerin gelecek yaşam süreleriyle ilgili iki varsayımda bulunulmuştur. Marjinal yaşam olasılıkları bağımlılık ve bağımsızlık durumlarına göre hesaplanmıştır. Böylece, (3.17) eşitliğiyle bağımlılık yapısının bireyin ölüm gelişimi üzerindeki etkisini gözlemlene fırsatı doğmuştur. Bağımsızlık söz konusu olduğunda kadın ve erkek birey için sırasıyla  $G_t^{K0}$  ve  $G_t^{E0}$  subordinatörleri dikkate alınırken, bağımlılık durumunda her iki birey için  $G_t$  subordinatörü dikkate alınmıştır. Bağımlılık durumundaki hesaplamalar; kadının anlık ölüm hızının  $X_{G_t}^K$  sürecini, erkeğin anlık ölüm hızının ise  $X_{G_t}^E$  sürecini takip etmesiyle yapılmıştır. Benzer şekilde bağımsızlık durumunda kadın ve erkek bireyler için anlık ölüm hızları  $X_{G_t^{K0}}^K$  ve  $X_{G_t^{E0}}^E$  süreçleri aracılığıyla modellenmiştir. Bu noktada, (3.17) eşitliği kullanılarak marjinal yaşam olasılıklarının hesaplanabilmesi için öncelikle  $\beta$  sürüklenme katsayılarının belirlenmesi gerekmektedir. Normal ters Gauss dağılımının özellikleri kullanılarak bağımsızlık durumunda  $X_{G_t^{K0}}^K$  ve  $X_{G_t^{E0}}^E$  süreçlerine karşılık gelen  $\beta^{K0}$  ve  $\beta^{E0}$  sürüklenme katsayıları aşağıdaki şekilde elde edilmiştir;

$$\beta^{K0} = \sqrt{(\alpha^K)^2 - \frac{(1 - \alpha^K)b^2}{\alpha^K(\sigma^K)^2}}$$

$$\beta^{E0} = \sqrt{(\alpha^E)^2 - \frac{(1 - \alpha^E)b^2}{\alpha^E(\sigma^E)^2}}$$

Benzer şekilde, bağımlılık durumunda  $X_{G_t}^K$  ve  $X_{G_t}^E$  süreçlerine karşılık gelen  $\beta^K$  ve  $\beta^E$  sürüklenme katsayıları;

$$\beta^K = \sqrt{(\alpha^K)^2 - \frac{b^2}{(\sigma^K)^2}}$$

$$\beta^E = \sqrt{(\alpha^E)^2 - \frac{b^2}{(\sigma^E)^2}}$$

olarak bulunmuştur.

Bu model altında, koşullu birleşik kümülatif dağılım fonksiyonu ise aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır.

$$P(T^i \leq t | T^j > t) = \int_0^{\infty} (1 - H^i(x_0^i, y)) H^j(x_0^j, y) \rho_t(y) dy ; i \neq j, i, j \in \{K, E\} \quad (3.18)$$

Burada;

$$H^m(x, y) = \frac{e^{-\beta^{m+} x}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z \sin(zx)}{z^2 + (\beta^{m+})^2} \exp \left[ -\frac{\alpha^m (\sigma^m)^2 (z^2 + (\beta^{m+})^2) y}{2} - \psi^{G^{m0}} \left( \frac{(1 - \alpha^m) (\sigma^m)^2 (z^2 + (\beta^{m+})^2)}{2}, y \right) \right] dz ; m = K, E$$

Ayrıca  $\psi^{G^{m0}}(u, t) := -\log E[e^{-uG_t^{m0}}]$  olmak üzere  $G_t^{m0}$ 'ın Laplace üstelini göstermektedir.  $\rho_t$  ise  $G_t$ 'nin dağılım fonksiyonunu temsil etmektedir.

(3.18) eşitliği j bireyinin t zamanından sonra öldüğü bilindiğinde i bireyinin t zamanından önce ölmesinin koşullu kümülatif dağılım fonksiyonuna karşılık gelmektedir. Temel olasılık teorisinden  $P(T^i \leq t | T^j > t) = 1 - P(T^i > t | T^j > t)$  şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla, koşullu olasılığın tanımı gereği,

$$P(T^i \leq t | T^j > t) = 1 - P(T^i > t | T^j > t) = 1 - \frac{P(T^i > t, T^j > t)}{P(T^j > t)} \quad (3.19)$$

biçiminde düzenlenebilir.

(3.19) eşitliğinden birleşik yaşam fonksiyonu,

$$P(T^i > t, T^j > t) = [1 - P(T^i \leq t | T^j > t)] P(T^j > t) \quad (3.20)$$

şeklinde elde edilir.

(3.20) eşitliği, kadın ve erkek bireylerin gelecek yaşam sürelerinin bağımlı olduğu varsayımına dayanarak belirlenmiştir. Burada, bağımlılık durumu bireylerin ortak paylaştığı  $G_t$  sürecine karşılık gelen  $\rho_t$  dağılım fonksiyonunun hesaplamalara dahil edilmesiyle oluşturulmuştur.

## 4. YAŞAM MODELLERİ

Aktüerya bilimlerinde, yaşam ürünlerine ilişkin yapılan hesaplamalarda kişinin hayatta kalma durumu dikkate alınmaktadır. Dolayısıyla kişinin gelecek yaşam süresini ifade eden bir rastgele değişken tanımlama gereği duyulmuştur. Genellikle T ile ifade edilen bu rastgele değişken bir bireyin mevcut yaşı ile ölümü arasında geçen zamana karşılık gelmektedir. Dolayısıyla T pozitif değerler alan sürekli bir rastgele değişkendir.

Şu anda x yaşında olan bir kişinin gelecek yaşam süresi  $T_x$  ile gösterilir ve

$$T_x = X - x | X > x, \quad T_x > 0$$

şeklinde tanımlanır. Burada; X ölüm yaşını gösteren bir rastgele değişkendir. Dolayısıyla iki temel rastgele değişken arasında  $X = x + T_x$  ilişkisi yazılabilir.

$T_x$  rastgele değişkeninin dağılım fonksiyonu  $F_{T_x}(t)$  ile gösterilir ve

$$F_{T_x}(t) = P[T_x \leq t]$$

şeklinde ifade edilir.  $F_{T_x}(t)$ , x yaşındaki bir bireyin x + t yaşından sonra hayatta kalmama olasılığını temsil eder [74].

Hayat sigortası uygulamalarının çoğunda ölümden ziyade yaşam olasılıkları ile ilgilenilmektedir.  $T_x$  rastgele değişkeninin yaşam fonksiyonu  $S_{T_x}(t)$  ile gösterilir ve

$$S_{T_x}(t) = 1 - F_{T_x}(t) = P[T_x > t]$$

biçiminde ifade edilir.  $S_{T_x}(t)$ , x yaşındaki bir bireyin en az t yıl hayatta kalma olasılığını temsil eder ve yaşam fonksiyonu olarak bilinmektedir [74].

$S(t)$ , yaşam fonksiyonu aşağıda verilen özellikleri sağlamaktadır;

- 1) Negatif bir yaşam süresinden bahsedilemeyeceği için sıfır anında yaşam fonksiyonu bir değerini alır. Yani;  $S(0) = 1$
- 2) Zaman geçtikçe ölüm riskinin artmasından dolayı yaşam fonksiyonu azalan bir eğilim göstermektedir. Yani;  $u > t$  için  $S(t) \geq S(u)$
- 3) Her birey için ölüm mutlak yani t sonlu olduğundan  $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = 0$  olmaktadır.

Bir sigorta şirketi poliçe düzenlediğinde, sigortalının ne zaman öleceğini bilmediği için poliçe sahibinin belirli yaşlardaki ölüm olasılıklarını hesaplamak ister.  $T_x$  yardımıyla tekli yaşam durumuna ilişkin olasılık ifadeleri şu şekilde oluşturulabilir;

x yaşındaki bir bireyin t yıl içinde ölmesi olasılığı;

$${}_tq_x = P[T_x \leq t], t \geq 0$$

x yaşındaki bir bireyin t yıl yaşaması olasılığı;

$${}_tp_x = 1 - {}_tq_x = P[T_x > t], t \geq 0$$

t yıl yaşadığı bilinen x yaşındaki bir bireyin u yıl içinde ölmesi olasılığı;

$${}_{t|u}q_x = P[t < T_x \leq t + u] = {}_tp_x - {}_{t+u}p_x = {}_{t+u}q_x - {}_tq_x = {}_tp_x {}_uq_{x+t}$$

$T_0$  yeni doğan bir bireyin gelecek yaşam süresini gösteren bir rastgele değişken olmak üzere, x yaşındaki bir bireyin x + t yaşına ulaşma olasılığı koşullu olasılık yardımıyla yaşam fonksiyonu cinsinden şu şekilde ifade edilebilir;

$$S_{T_x}(t) = P[T_x > t] = P[T_0 > x + t | T_0 > x] = \frac{S_{T_0}(x + t)}{S_{T_0}(x)} = {}_tp_x$$

Benzer şekilde, x yaşındaki bir bireyin t yıl içinde ölmesi olasılığı;

$${}_tq_x = F_{T_x}(t) = P[T_x \leq t] = P[T_0 \leq x + t | T_0 > x] = \frac{S_{T_0}(x) - S_{T_0}(x + t)}{S_{T_0}(x)} = 1 - {}_tp_x$$

şeklinde yazılabilir. Buradan hareketle;

$$\begin{aligned} {}_{t|u}q_x &= P(t < T_x \leq t + u) = P[x + t < T_0 \leq x + t + u | T_0 > x] \\ &= \frac{S_{T_0}(x + t)}{S_{T_0}(x)} - \frac{S_{T_0}(x + t + u)}{S_{T_0}(x)} = {}_tp_x - {}_{t+u}p_x \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Hayat ürünlerine yönelik gelecek yaşam süresi modellenirken karşımıza çıkan bir diğer önemli kavram anlık ölüm hızıdır.

x yaşındaki bir bireyin anlık ölüm hızı  $\mu_x$  ile gösterilir ve şu şekilde tanımlanır;

$$\mu_x = \lim_{dx \rightarrow 0^+} \frac{1}{dx} P[T_0 \leq x + dx | T_0 > x]$$

$P[T_x \leq t] = P[T_0 \leq x + t | T_0 > x]$  olduğundan bu eşitlik yardımıyla anlık ölüm hızı aşağıdaki gibi ifade edilebilir;

$$\mu_x = \lim_{dx \rightarrow 0^+} \frac{1}{dx} P[T_x \leq dx]$$



Böylece  $\mu_x$ , çok küçük bir  $dx$  için  $x$  yaşına ulaşmış bir bireyin  $x + dx$  yaşına gelmeden önce ölmesi olasılığı şeklinde yorumlanabilir.

Ayrıca,  $F_{T_x}(t) = P[T_x \leq t]$  ve  $S_{T_x}(t) = 1 - F_{T_x}(t)$  eşitlikleri dikkate alınarak anlık ölüm hızı  $S_{T_x}$  yaşam fonksiyonu cinsinden şu şekilde ifade edilebilir;

$$\mu_x = \lim_{dx \rightarrow 0^+} \frac{1}{dx} [1 - S_{T_x}(dx)]$$

Yeni doğan bir bireyin yaşam fonksiyonunu gösteren  $S_{T_0}$  ile anlık ölüm hızı arasında şu ilişki kurulabilir;

$$S_{T_x}(dx) = \frac{S_{T_0}(x+dx)}{S_{T_0}(x)} \text{ eşitliği göz önüne alındığında;}$$

$$\mu_x = \lim_{dx \rightarrow 0^+} \frac{1}{dx} [1 - S_{T_x}(dx)] = \lim_{dx \rightarrow 0^+} \frac{1}{dx} \left[ 1 - \frac{S_{T_0}(x+dx)}{S_{T_0}(x)} \right] = -\frac{d}{dx} \ln(S_{T_0}(x))$$

biçiminde yazılabilir.

Diğer yandan,  $T_x$  rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu olan  $f_{T_x}(t)$ 'nin dağılım fonksiyonu  $F_{T_x}(t)$  ve yaşam fonksiyonu  $S_{T_x}(t)$  ile arasındaki ilişkiyi gösteren;

$$f_{T_x}(t) = \frac{d}{dt} F_{T_x}(t) = \frac{d}{dt} (1 - S_{T_x}(t)) = -\frac{d}{dt} S_{T_x}(t)$$

eşitliğini kullanarak anlık ölüm hızına ilişkin aşağıdaki alternatif formül elde edilebilir;

$$\mu_x = \frac{f_{T_0}(x)}{S_{T_0}(x)}$$

Buradan hareketle,  $t > 0$  olmak üzere herhangi bir  $x + t$  yaşı için anlık ölüm hızı,  $x$  yaşındaki bir bireyin yaşam fonksiyonu cinsinden şu şekilde ifade edilebilir;

$$\mu_{x+t} = -\frac{d}{dt} \ln(S_{T_x}(t))$$

Sonuç olarak,  $\mu_{x+t} = \frac{f_{T_x}(t)}{S_{T_x}(t)}$  eşitliği elde edilir.

$\mu_{x+t} = -\frac{d}{dt} \ln(S_{T_x}(t))$  eşitliği göz önünde bulundurulduğunda;

$$S_{T_x}(t) = \exp \left\{ -\int_x^{x+t} \mu_r dr \right\} = \exp \left\{ -\int_0^t \mu_{x+s} ds \right\}$$

şeklinde tanımlanabilir.

Yani,  $\forall x \geq 0$  için  $\mu_x$  bilindiğinde herhangi bir  $x$  ve  $t$  değeri için tüm yaşam olasılıkları hesaplanabilir.

Gelecek yaşam süresini gösteren  $T_x$  rastgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu, bir bireyin  $x$  yaşına kadar hayatta kalma durumu göz önüne alındığında  $x + t$  yaşındaki koşullu yoğunluğunu ifade eden bir fonksiyondur ve şu şekilde elde edilir;

$$f_{T_x}(t) = \frac{d}{dt} F_{T_x}(t) = \frac{d}{dt} [1 - S_{T_x}(t)] = -\frac{d}{dt} S_{T_x}(t) = -\frac{d}{dt} ({}_t p_x)$$

$\mu_{x+t} = -\frac{d}{dt} \ln(S_{T_x}(t))$  ve  $S_{T_x}(t) = {}_t p_x$  olduğundan anlık ölüm hızı aşağıdaki biçimde yazılabilir;

$$\mu_{x+t} = -\frac{d}{dt} \ln({}_t p_x)$$

Buradan,  ${}_t p_x = \exp \left[ -\int_0^t \mu_{x+s} ds \right]$  şeklinde elde edilir.

Ayrıca,  $\mu_{x+t} = \frac{f_{T_x}(t)}{S_{T_x}(t)}$  eşitliğinden,  $f_{T_x}(t) = S_{T_x}(t) \mu_{x+t} = {}_t p_x \mu_{x+t}$  biçiminde yazılabilir.

#### 4.1. Çoklu Yaşam Durumu

Aktüerya'da birden fazla bireyin yaşama durumunun eş zamanlı olarak değerlendirilmesi çoklu yaşam durumu olarak adlandırılmaktadır. Çoklu yaşam durumu, sigortalanan bireylerin yaşam durumlarına göre iki kategoriye ayrılır;

- 1) Birleşik yaşam durumu
- 2) Son yaşayan durumu

Bir dizi yaşamın tüm üyelerinin hayatta kaldığı süre boyunca devam eden ve ilk ölüm gerçekleştiğinde başarısız olan bir duruma birleşik yaşam durumu denir [2].

Çoklu yaşam durumuna geçildiğinde standart aktüerya teorisi sigortalı bireylerin gelecekteki yaşam sürelerinin bağımsız olduğunu varsaymaktadır. Bu varsayım altında yaşları  $x$  ve  $y$  olan gelecek yaşam süreleri sırasıyla  $T_x$  ve  $T_y$  ile ifade edilen iki birey için birleşik yaşam durumunda ilk ölüm gerçekleşene kadar geçen süre matematiksel olarak şu şekilde yazılabilir;

$$T_{xy} = \min[T_x, T_y] = \begin{cases} T_x, & T_x \leq T_y \\ T_y, & T_x > T_y \end{cases}$$

$\forall t \geq 0$  için  $T_{xy}$ 'nin dağılım fonksiyonu;

$$F_{T_{xy}}(t) = P(T_{xy} \leq t) = P(\min[T_x, T_y] \leq t) = P(T_x \leq t, T_y \leq t)$$

biçiminde ifade edilir.

Ayrıca, dağılım fonksiyonu ölüm olasılıkları cinsinden şu şekilde ifade edilebilir;

$$F_{T_{xy}}(t) = {}_tq_x + {}_tq_y - {}_tq_x {}_tq_y = {}_tq_{xy}$$

${}_tq_{xy}$ , x ve y yaşlarındaki iki bireyden ilk ölümün t yıl içinde gerçekleşmesi olasılığını göstermektedir.

$T_{xy}$ 'nin yaşam fonksiyonu ise;

$$S_{T_{xy}}(t) = P(T_{xy} > t) = P(\min[T_x, T_y] > t) = P(T_x > t, T_y > t)$$

şeklinde ifade edilir.

İki bireyin gelecek yaşam sürelerinin bağımsızlığı varsayımı altında bu eşitlik şu şekilde düzenlenebilir;

$$P(T_{xy} > t) = P(T_x > t, T_y > t) = P(T_x > t)P(T_y > t) = {}_tp_x {}_tp_y = {}_tp_{xy}$$

${}_tp_{xy}$ , x ve y yaşlarındaki iki bireyin birlikte t yıl yaşaması olasılığını göstermektedir.

Birleşik yaşam durumunda gelecek yaşam süresini ifade eden  $T_{xy}$  rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu, iki bireyin bağımsızlığı varsayımı altında şu şekilde tanımlanır;

$$f_{T_{xy}}(t) = {}_tp_{xy}(\mu_{x+t} + \mu_{y+t})$$

Tekli yaşam durumuna benzer olarak birleşik yaşam durumunda anlık ölüm hızı;

$$\mu_{x+t:y+t} = \frac{f_{T_{xy}}(t)}{S_{T_{xy}}(t)}$$

formülü ile hesaplanabilir.

Ayrıca;

$$\mu_{x+t:y+t} = \mu_{x+t} + \mu_{y+t}$$

olduğundan  $f_{T_{xy}}(t) = {}_tp_{xy}\mu_{x+t:y+t}$  şeklinde ifade edilebilir.

İlk ölümün dikkate alındığı hayat ürünlerinin yanı sıra son ölüm zamanına göre aktüeryal hesaplamaların yapıldığı ürünler de mevcuttur. Bir dizi yaşamın en az bir üyesi hayatta olduğu sürece devam eden ve son ölüm gerçekleştiğinde başarısız olan bir duruma son

yaşayan durumu denir [2]. Dolayısıyla, durumun devamlılığı için üyelerden herhangi birinin veya daha fazlasının hayatta kalması gerekmektedir.

x ve y yaşındaki iki birey için son yaşayan durumunda  $\overline{xy}$  gösterimi kullanılmaktadır.  $T_{\overline{xy}}$  ise bu duruma ilişkin gelecek yaşam sürelerini ifade eden rastgele değişken olarak tanımlanmaktadır. İki birey söz konusu olduğunda bu rastgele değişken son yaşayan durumunda en son hayatta kalan kişiye göre şu şekilde ifade edilir;

$$T_{\overline{xy}} = \max[T_x, T_y] = \begin{cases} T_x, & T_x > T_y \\ T_y, & T_x \leq T_y \end{cases}$$

x ve y yaşlarındaki iki bireyin gelecek yaşam süreleri sırasıyla  $T_x$  ve  $T_y$  olmak üzere  $T_{\overline{xy}}$ 'nin dağılım fonksiyonu;

$$F_{T_{\overline{xy}}}(t) = P(T_{\overline{xy}} \leq t)$$

şeklinde tanımlanır.

Yaşam fonksiyonu ise;

$$S_{T_{\overline{xy}}}(t) = P(T_{\overline{xy}} > t) = 1 - F_{T_{\overline{xy}}}(t)$$

olarak elde edilir.

Buradan hareketle, gelecek yaşam sürelerinin bağımsızlığı varsayımı altında x ve y yaşlarındaki iki birey için son yaşayan durumuna ilişkin olasılık fonksiyonları aşağıdaki gibi oluşturulabilir;

$$\begin{aligned} {}_tq_{\overline{xy}} &= P(T_{\overline{xy}} \leq t) = P(\max\{T_x, T_y\} \leq t) = P(T_x \leq t, T_y \leq t) \\ &= P(T_x \leq t)P(T_y \leq t) = {}_tq_x {}_tq_y \end{aligned}$$

$${}_tq_{\overline{xy}} + {}_tp_{\overline{xy}} = 1 \text{ olduğundan;}$$

$${}_tp_{\overline{xy}} = 1 - {}_tq_{\overline{xy}} = {}_tp_x + {}_tp_y - {}_tp_x {}_tp_y$$

şeklinde elde edilebilir.

Ayrıca,

$${}_t|uq_{\overline{xy}} = {}_tp_{\overline{xy}} - {}_{t+u}p_{\overline{xy}} = {}_t|uq_x + {}_t|uq_y - {}_t|uq_{xy}$$

biçiminde yazılabilir.

Birleşik yaşam durumuna benzer olarak, son yaşayan durumunda  $T_{\overline{xy}}$  rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu, iki bireyin bağımsızlığı varsayımı altında şu şekilde tanımlanır;

$$f_{T_{\overline{xy}}}(t) = \frac{d}{dt}F_{T_{\overline{xy}}}(t) = {}_t p_x \mu_{x+t} + {}_t p_y \mu_{y+t} - {}_t p_{xy} \mu_{x+t:y+t}$$

Buradan, son yaşayan durumunda anlık ölüm hızı;

$$\mu_{T_{\overline{xy}}}(t) = \frac{f_{T_{\overline{xy}}}(t)}{S_{T_{\overline{xy}}}(t)} = \frac{{}_t p_x \mu_{x+t} + {}_t p_y \mu_{y+t} - {}_t p_{xy} \mu_{x+t:y+t}}{{}_t p_x + {}_t p_y - {}_t p_x {}_t p_y} = \mu_{\overline{x+t:y+t}}$$

şeklinde tanımlanır.

#### 4.2. Tekli Yaşam Durumunda Annüite ve Sigorta Ürünlerinin Net Tek Primleri

Hayat annüitesi ve sigorta ürünleri, sigortalının yaşama koşuluna bağlı olarak yapılan ödemelerin değerlendirilmesi ile ilgilenen koşullu yaşam modelleri olarak anılmaktadır.

Hayat annüitesi, belirli bir dönem boyunca, genellikle eşit miktarlarda, annüitant olarak adlandırılan belirli bir kişinin ödeme zamanında hayatta olması koşuluyla yapılan ödemeler kümesidir [75].

Annüiteler, emeklilik ödemeleri, poliçe değerleri ve primlerin hesaplanmasında kullanıldığından bu ürünlerin fiyatlandırılması oldukça önemlidir.

Hayat annüiteleri, genel anlamda ödeme sıklıklarına göre kesikli ve sürekli olmak üzere iki başlık altında incelenir. Ödemelerin yıllık, altı aylık, üç aylık, aylık vb. biçimde belirli zaman aralıklarında yapıldığı ürünler kesikli olarak adlandırılırken, ödemeler arasındaki geçen süre kısaltıkça ödemelerin sürekli bir şekilde yapıldığı kabul edilen ürünler sürekli olarak adlandırılmaktadır. Hayat annüiteleri, ödeme döneminin uzunluğuna ve başlangıç zamanına göre sınıflandırılabilir. Annüite, annüitantın yaşama koşuluna bağlı olarak sigortalandığı yaş itibari ile başlayıp tüm yaşamı boyunca devam ediyorsa tam hayat annüitesi, belirli bir süre sonra sona eriyorsa dönemsel hayat annüitesi adını alır. Kesikli ürünlerde ilk ödemenin yapıldığı zamana göre hayat annüiteleri dönem başı ve dönem sonu olmak üzere ikiye ayrılır.

$x$  yaşındaki bir sigortalının yaşadığı süre boyunca her yılın sonunda bir birim ödenen tam hayat annüitesinin net tek primi  $a_x$  ile gösterilir ve;

$$a_x = \sum_{t=1}^{\infty} v^t {}_t p_x = \sum_{t=1}^{\infty} (1+i)^{-t} {}_t p_x$$

eşitliği ile hesaplanır. Burada,  $i$  zamana göre değişmeyen ve yıllık efektif faiz oranını gösteren deterministik bir değerdir.

Dönem başı tam hayat annüitesinin dönem sonu annüiteden tek farkı, ilk yılın başında yapılan bir birimlik ödemedir.

$x$  yaş için düzenlenmiş dönem başlarında yıllık bir birimin yaşama koşuluna bağlı olarak ödendiği tam hayat annüitesinin net tek primi  $\ddot{a}_x$  ile gösterilir ve;

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^t {}_t p_x$$

eşitliği ile hesaplanır.

$x$  yaşındaki bir bireye yaşadığı süre boyunca yıllık bir birimin sürekli olarak ödendiği tam hayat annüitesinin net tek primi ise  $\bar{a}_x$  ile gösterilir ve;

$$\bar{a}_x = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} {}_t p_x dt$$

biçiminde ifade edilir.

Burada,  $\delta$  anlık faiz oranını temsil etmektedir.

Sınırlı bir ürün olan dönemsel hayat annüitesinde sigortalanan kişi vade sonunda yaşıyor olsa bile  $n$ . yılın sonunda ödemeler sona erer.

$x$  yaş için düzenlenmiş, annüitanta  $x$  ile  $x + n$  yaşları arasında yaşadığı süre boyunca her yılın başında bir birim ödenen  $n$  yıllık dönemsel hayat annüitesinin net tek primi  $\ddot{a}_{x:n|}$  ile gösterilir ve;

$$\ddot{a}_{x:n|} = \sum_{t=0}^n v^t {}_t p_x$$

eşitliği ile hesaplanır.

$x$  yaşındaki bir birey için yaşadığı süre boyunca yıllık bir birimin sürekli olarak ödendiği  $n$  yıllık dönemsel hayat annüitesinin net tek primi  $\bar{a}_{x:n|}$  ile gösteriler ve;

$$\bar{a}_{x:n|} = \int_0^n e^{-\delta t} {}_t p_x dt$$

şeklinde ifade edilir.

Hayat sigortası; bir şirket ya da organizasyon tarafından çok sayıda bireyin sigortalanmasıyla, kişisel kayıpların belli bilimsel kurallar altında tüm grup tarafından paylaşılmasıdır [75].

Hayat sigortaları, tazminat ödemesinin sigortalının ölüm yılının sonunda yapılması durumunda kesikli olarak tanımlanırken, ölüm anında yapılması durumunda sürekli olarak tanımlanmaktadır. Annüitelerde olduğu gibi sigorta ürünleri de ödeme dönemlerine göre çeşitlilik gösterebilir. Ödeme dönemi sigortalının ölüm zamanına kadar devam ediyorsa tam hayat, belirli bir süre sonra sona eriyorsa dönemsel hayat sigortası adını alır. Ayrıca, sigortalının vadenin sonunda yaşamasına bağlı olarak ödeme yapılan yaşam durumunda sigorta ve karma hayat sigortası ürünleri de mevcuttur.

$x$  yaşındaki birey için düzenlenmiş ölüm yılının sonunda bir birim ödenen tam hayat sigortasının net tek primi  $A_x$  ile gösterilir ve şu şekilde hesaplanır;

$$A_x = \sum_{k=0}^{w-x-1} v^{k+1} {}_k|q_x$$

$x$  yaşındaki bir sigortalı için düzenlenmiş teminatın ölüm anında bir birim olarak ödendiği tam hayat sigortasının net tek primi  $\bar{A}_x$  ile gösterilir ve;

$$\bar{A}_x = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

eşitliği ile hesaplanır.

Dönem sigortası, sigortalının belirlenen vade içinde ölmesi durumunda yakınlarına tazminat ödemesi sağlayan sigorta türü olarak tanımlanmaktadır. Eğer sigortalı sınırlandırılmış süre içinde hayattaysa sigorta şirketi tarafından herhangi bir ödeme yapılmaz.

$x$  yaş için düzenlenen ve sigortalının  $x$  ile  $x + n$  yaşları arasında ölmesi durumunda yıllık bir birimlik tazminatın ölüm yılının sonunda ödendiği  $n$  yıllık dönem sigortasının net tek primi  $A_{x:n|}$  ile gösterilir ve;

$$A_{x:n|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k|q_x$$

eşitliği ile hesaplanır.

x yaşındaki bir sigortalı için düzenlenen ve bir birimlik tazminatın ölüm anında ödendiği n yıllık dönemsel hayat sigortasının net tek primi  $\bar{A}_{x:n|}$  ile gösterilir ve;

$$\bar{A}_{x:n|} = \int_0^n e^{-\delta t} {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

şeklinde ifade edilir.

x yaşındaki bir sigortalıya n.yılın sonunda yaşaması durumunda yapılan bir birimlik ödemenin bugünkü değeri  ${}_n E_x$  ile gösterilir ve tek ödemeli hayat sigortasının net tek primi olarak bilinir.  ${}_n E_x = v^n {}_n p_x$  formülü ile hesaplanmaktadır.

Sigortalının vade içinde ölmesi durumunda yakınlarına tazminat ödemesinin yapıldığı, vade sonunda hayatta ise aynı tazminat miktarının kendisine ödendiği sigorta türüne karma hayat sigortası denilmektedir. Bu üründe hem ölüm hem de yaşam teminatı söz konusu olduğundan karma sigorta olarak adlandırılmaktadır. Dolayısıyla, karma hayat sigortası dönem sigortası ile yaşam durumunda sigortanın toplamı olarak düşünülebilir. Karma hayat sigortasında da teminat ölüm yılının sonunda ödeniyorsa kesikli, ölüm anında ödeniyorsa sürekli ürün olarak iki kategoriye ayrılmaktadır.

x yaş için düzenlenmiş, sigortalının x ile x + n yaşları arasında ölmesi durumunda ölüm yılının sonunda yakınlarına, x + n yaşında hayatta ise kendisine bir birim tazminat ödemesinin yapıldığı n yıllık karma hayat sigortasının net tek primi  $A_{x:n|}$  ile gösterilir ve şu şekilde ifade edilir;

$$A_{x:n|} = \bar{A}_{x:n|} + {}_n E_x = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k q_x + v^n {}_n p_x$$

x yaşındaki bir sigortalı için düzenlenmiş, bir birimlik ölüm teminatının ölüm anında, yaşam teminatının ise vade sonunda ödendiği n yıllık karma hayat sigortasının net tek primi  $\bar{A}_{x:n|}$  ile gösterilir ve;

$$\bar{A}_{x:n|} = \bar{A}_{x:n|} + {}_n E_x = \int_0^n e^{-\delta t} {}_t p_x \mu_{x+t} dt + v^n {}_n p_x$$

eşitliği ile hesaplanır.



### 4.3. Çoklu Yaşam Durumunda Annüite ve Sigorta Ürünlerinin Net Tek Primleri

Sigorta sektöründe, tekli hayatın yanı sıra çoklu hayat uygulamalarına da sıkça yer verilmektedir. Son yıllarda aktüerya bilimlerinde oldukça popüler hale gelen, birden fazla bireyin sigortalanması durumunun ele alındığı ürünler çoklu hayat ürünleri olarak adlandırılır.

Police sahipleri tarafından çoklu hayat ürünlerinin tercih edilmesinin sebebi, eşlerden biri öldüğünde, hayatta kalan eşin gelecekteki yaşamını garanti altına alma isteğidir. Böylelikle bireyin sahip olduğu refah düzeyinin devamlılığı amaçlanmaktadır. Tek kişinin sigortalanmasına yönelik oluşturulan ürünlere benzer olarak çoklu hayat ürünlerinde de dönemsel, tam hayat, karma hayat vb. gibi poliçe türleri düzenlenmektedir.

Çoklu yaşam durumunda annüite ve sigorta ürünleri, birleşik ve son yaşayan durumları için ayrı olarak düzenlenmektedir. Birleşik yaşam durumunda ödemeler, yaşayan bireyler arasında ilk ölüm gerçekleşinceye kadar yapılırken, son yaşayan durumda yaşayanların en sonuncusunun ölümüne kadar devam etmektedir.

Birleşik yaşam durumunda gelecek yaşam süreleri birbirinden bağımsız x ve y yaşlarındaki iki birey için düzenlenmiş annüite ve sigorta ürünlerinin net tek primleri aşağıdaki eşitlikler yardımıyla hesaplanmaktadır.

Kesikli:

- Tam hayat annüitesi

$$\ddot{a}_{xy} = \sum_{t=0}^{\infty} v^t {}_t p_{xy}$$

- Dönemsel hayat annüitesi

$$\ddot{a}_{xy:n|} = \sum_{t=0}^n v^t {}_t p_{xy}$$

- Tam hayat sigortası

$$A_{xy} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_k q_{xy}$$

- Dönemsel hayat sigortası

$$A_{xy:n|}^1 = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k q_{xy}$$

- Karma haya sigortası

$$A_{xy:n|} = A_{xy:n|}^1 + {}_nE_{xy}$$

Burada,  ${}_nE_{xy} = v^n {}_np_{xy} = v^n {}_np_x {}_np_y$  biçiminde olup yaşam durumunda sigortanın net tek primini göstermektedir.

Sürekli:

- Tam hayat annüitesi

$$\bar{a}_{xy} = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} {}_tp_{xy} dt$$

- Dönemsel hayat annüitesi

$$\bar{a}_{xy:n|} = \int_0^n e^{-\delta t} {}_tp_{xy} dt$$

- Tam hayat sigortası

$$\bar{A}_{xy} = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} {}_tp_{xy} \mu_{x+t:y+t} dt$$

- Dönemsel hayat sigortası

$$\bar{A}_{xy:n|}^1 = \int_0^n e^{-\delta t} {}_tp_{xy} \mu_{x+t:y+t} dt$$

- Karma hayat sigortası

$$\bar{A}_{xy:n|} = \bar{A}_{xy:n|}^1 + {}_nE_{xy} = \int_0^n e^{-\delta t} {}_tp_{xy} \mu_{x+t:y+t} dt + v^n {}_np_{xy}$$

Benzer şekilde, son yaşayan durumunda gelecek yaşam süreleri birbirinden bağımsız x ve y yaşlarındaki iki birey için düzenlenmiş annüite ve sigorta ürünlerinin net tek primleri aşağıdaki eşitlikler yardımıyla hesaplanmaktadır;

Kesikli:

- Tam hayat annüitesi

$$\ddot{a}_{\overline{xy}} = \sum_{t=0}^{\infty} v^t {}_tp_{\overline{xy}} = \ddot{a}_x + \ddot{a}_y - \ddot{a}_{xy}$$

- Dönemsel hayat annüitesi

$$\ddot{a}_{\overline{xy}:n} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t {}_t p_{\overline{xy}} = \ddot{a}_{x:n} + \ddot{a}_{y:n} - \ddot{a}_{xy:n}$$

- Tam hayat sigortası

$$A_{\overline{xy}} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_k q_{\overline{xy}} = A_x + A_y - A_{xy}$$

- Dönemsel hayat sigortası

$$A_{\overline{xy}:n} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k q_{\overline{xy}} = A_{x:n} + A_{y:n} - A_{xy:n}$$

- Karma hayat sigortası

$$A_{\overline{xy}:n} = A_{\overline{xy}:n} + {}_n E_{\overline{xy}} = A_{x:n} + A_{y:n} - A_{xy:n}$$

Burada,  ${}_n E_{\overline{xy}} = v^n {}_n p_{\overline{xy}}$  biçiminde olup yaşam durumunda sigortanın net tek primini göstermektedir.

Sürekli:

- Tam hayat annüitesi

$$\bar{a}_{\overline{xy}} = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} {}_t p_{\overline{xy}} dt = \bar{a}_x + \bar{a}_y - \bar{a}_{xy}$$

- Dönemsel hayat annüitesi

$$\bar{a}_{\overline{xy}:n} = \int_0^n e^{-\delta t} {}_t p_{\overline{xy}} dt = \bar{a}_{x:n} + \bar{a}_{y:n} - \bar{a}_{xy:n}$$

- Tam hayat sigortası

$$\bar{A}_{\overline{xy}} = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} {}_t p_{\overline{xy}} \mu_{\overline{x+t:y+t}} dt = \bar{A}_x + \bar{A}_y - \bar{A}_{xy}$$

- Dönemsel hayat sigortası

$$\bar{A}_{\overline{xy}:n} = \int_0^n e^{-\delta t} {}_t p_{\overline{xy}} \mu_{\overline{x+t:y+t}} dt = \bar{A}_{x:n} + \bar{A}_{y:n} - \bar{A}_{xy:n}$$

- Karma hayat sigortası

$$\bar{A}_{\overline{xy}:n} = \bar{A}_{\overline{xy}:n} + {}_n E_{\overline{xy}} = \bar{A}_{x:n} + \bar{A}_{y:n} - \bar{A}_{xy:n}$$

Sonuç olarak, son yaşayan durumunda oluşturulan annüite ve sigorta ürünlerinin net tek primleri, tekli ve birleşik yaşam durumunda oluşturulan annüite ve sigorta ürünlerinin net tek primleri kullanılarak hesaplanabilmektedir.

#### 4.4. Tekli ve Çoklu Yaşam Durumlarında Net Yıllık Primler

Sigorta ürünlerine ilişkin net yıllık primler aktüeryal denge eşitliği doğrultusunda belirlenmektedir. Bu eşitlik yardımıyla net yıllık prim tutarı, sigortacının yükümlülüğünün bugünkü değerinin sigortalının yükümlülüğünün bugünkü değerine eşitlenmesi sonucunda hesaplanmaktadır. Net yıllık primlerin elde edilişi tekli ve çoklu yaşam durumlarında oldukça benzer bir yapıya sahiptir. Her iki durumda da sigortalının ödemekle yükümlü olduğu prim tutarı aktüeryal denge eşitliği esas alınarak, sigorta ürünlerinin net tek primlerinin annüite ürünlerinin net tek primlerine oranlanmasıyla bulunmaktadır. Tezde kullanılacak olan net yıllık prim formülleri Çizelge 4.1. ve Çizelge 4.2.'de özetlenmiştir.

**Çizelge 4.1.** Tekli Yaşam Durumunda Net Yıllık Primler

	Dönemsel Hayat Sigortası	Karma Hayat Sigortası
Kesikli	$P_{x:n} = \frac{A_{x:n}}{\ddot{a}_{x:n}}$	$P_{x:n} = \frac{A_{x:n}}{\ddot{a}_{x:n}}$
Sürekli	$\bar{P}_{x:n} = \frac{\bar{A}_{x:n}}{\bar{a}_{x:n}}$	$\bar{P}_{x:n} = \frac{\bar{A}_{x:n}}{\bar{a}_{x:n}}$

**Çizelge 4.2.** Çoklu Yaşam Durumunda Net Yıllık Primler

	Birleşik Yaşam Durumu		Son Yaşayan Durumu	
	Dönemsel Hayat Sigortası	Karma Hayat Sigortası	Dönemsel Hayat Sigortası	Karma Hayat Sigortası
Kesikli	$P_{xy:n} = \frac{A_{xy:n}}{\ddot{a}_{xy:n}}$	$P_{xy:n} = \frac{A_{xy:n}}{\ddot{a}_{xy:n}}$	$P_{\bar{x}\bar{y}:n} = \frac{A_{\bar{x}\bar{y}:n}}{\ddot{a}_{\bar{x}\bar{y}:n}}$	$P_{\bar{x}\bar{y}:n} = \frac{A_{\bar{x}\bar{y}:n}}{\ddot{a}_{\bar{x}\bar{y}:n}}$
Sürekli	$\bar{P}_{xy:n} = \frac{\bar{A}_{xy:n}}{\bar{a}_{xy:n}}$	$\bar{P}_{xy:n} = \frac{\bar{A}_{xy:n}}{\bar{a}_{xy:n}}$	$\bar{P}_{\bar{x}\bar{y}:n} = \frac{\bar{A}_{\bar{x}\bar{y}:n}}{\bar{a}_{\bar{x}\bar{y}:n}}$	$\bar{P}_{\bar{x}\bar{y}:n} = \frac{\bar{A}_{\bar{x}\bar{y}:n}}{\bar{a}_{\bar{x}\bar{y}:n}}$

## 5. BAĞIMLILIK DURUMUNDA ANNÜITE VE SİGORTA ÜRÜNLERİNİN FİYATLANDIRILMASI

Bu bölümde ilk olarak, kurulan modelin güvenilirliği parametrik ve parametrik olmayan tahmin yöntemleri aracılığıyla gösterilecektir. Ardından, bireylerin marjinal ve birleşik yaşam olasılıkları söz konusu modele göre analitik olarak elde edilecektir. Burada, birleşik yaşam olasılıkları kadın ve erkek bireylerin gelecek yaşam sürelerinin bağımlı ve bağımsız olduğu varsayımına dayanarak hesaplanacaktır. Son olarak, kesikli ve sürekli hayat ürünlerine ilişkin net tek prim ve net yıllık prim tutarları elde edilecektir. Hesaplamalarda kullanılan parametre değerleri, Zhang ve Brockett [1] tarafından sunulan çalışmadan alınmıştır. Teze ilişkin tüm hesaplamalar Matlab ve Wolfram Mathematica programında gerçekleştirilmiştir.

### 5.1. Parametrik Olmayan Tahmin Yöntemleri

#### 5.1.1. Tek Değişkenli Yaşam Fonksiyonunun Kaplan-Meier Tahmini

Yaşam analizlerinde, yapılan tahmine yönelik önemli çıkarımlar elde edilmesini sağlayan parametrik ve parametrik olmayan yöntemler kullanılmaktadır. Parametrik olmayan yöntemlerde, araştırmacının çalışmasına konu olan veriye ilişkin bir dağılım varsayımında bulunması gerekmemektedir. Dolayısıyla çeşitli alanlarda kullanım imkânı sunan bu yaklaşımlar, veri analizlerinde sıklıkla tercih edilmektedir.

Parametrik olmayan yöntemlerden biri olan Kaplan-Meier tahmini, günümüzde yaşam analizleri ile ilgili yapılan birçok çalışma için önemli bir kaynak teşkil etmektedir. Çarpım-Limit tahmini olarak da bilinen bu yöntem 1958 yılında Edward L. Kaplan ve Paul Meier [76] tarafından geliştirilmiştir. Kaplan-Meier tahmini, yaşam verilerinden marjinal yaşam fonksiyonunun tahmin edilmesinde kullanılan parametrik olmayan bir yöntemdir [76]. Bilgisayar kullanımının yaygınlaşması sonucunda bu yöntem zamanla küçük, orta ve büyük örneklem için kullanılır hale gelmiştir [77].

Analizi yapılan olayın (kansere teşhisi konulan bir kişinin hastalığının nüks etmesi, elektronik bir cihazın bozulması, şirketin iflas etmesi, hayat sigortasına sahip bir bireyin ölmesi vb.) zaman içindeki gelişimini ifade eden Kaplan-Meier tahmini, uygulanabilirlik yönünden basit olmakla beraber nispeten etkili sonuçlar sağlamaktadır. Kaplan-Meier yönteminde her gözlem zamanı için ilgilenilen olayın gerçekleşme olasılığı tahmin edilmektedir. Analiz sonucunda elde edilen tahmini yaşam olasılıkları bir grafiğe

döküldüğünde basamak fonksiyonu şeklinde gözükmektedir. Bunun sebebi, gözlem süresi boyunca olayın ortaya çıkma olasılığının değişmez kabul edilmesi ve ayrıca takip edilen zamanlarda olayın gerçekleşme olasılığının bir öncekinden bağımsız olarak değerlendirilmesidir. Böyle bir çalışma insan yaşamına yönelik ölüm olasılıklarının gelişimini incelemek için yapıldığında, gözlemlenen süre içinde ölüm olasılığının değişmediği varsayılarak, her ölüm zamanı ayrı incelenmekte ve ardışık ölüm zamanları arasında vefat durumunun olmadığı düşünülmektedir.

Kaplan-Meier yönteminin yaşam analizlerinde uygulanması için aşağıdaki varsayımları karşılaması gerekmektedir;

- Analizin yapılacağı periyodun başlangıç ve bitiş tarihi belli olmalıdır.
- Bireylerin çalışmaya dahil olduğu tarih bilinmelidir.
- Araştırmaya konu olan olayın gözlem süresi içinde gerçekleşip gerçekleşmediği bilinmelidir. Eğer gerçekleştiyse ortaya çıkma zamanının da mevcut olması gerekmektedir.

Bu tezde yaşam analizi Edward Frees ve Emiliano Valdez aracılığıyla Society of Actuaries - SOA tarafından sağlanan Kanada sigorta verileri üzerinden yapılmıştır. Söz konusu veri seti 29 Aralık 1988 ile 31 Aralık 1993 tarihleri arasında yapılan 14947 adet birleşik ve son yaşayan annüite sözleşmesinden oluşmaktadır. Çiftlerin satın almış olduğu her ürün için sözleşme başlangıç tarihi bilinmektedir. Sözleşmeler, her iki sigortalının doğum tarihini ve gözlem süresi içinde çiftlerden herhangi birinin ölmesi durumunda ölüm tarihini içermektedir. Dolayısıyla, Kaplan-Meier tahmininin yapılabilmesi için yukarıda ifade edilen varsayımlar bu veri seti için sağlanmaktadır.

Kaplan-Meier tahminini uygulamadan önce veri setinde bazı kısıtlamalara gidilmiştir. Analizde, 1910 ile 1925 yılları arasında doğan ve yaş farkı beşden büyük olmayan çiftler dikkate alınmıştır. Böylece farklı yaş grupları arasındaki ölüm eğilimlerinin zaman içindeki gelişimi incelenmiş, ayrıca bu farktan kaynaklanan olası değişiklikler hesaba katılmıştır. Veri setindeki çift sayısının kısıtlı olması nedeniyle kohort etkisi analize dahil edilmemiştir. Son olarak aynı cinsiyetli evliliklerin çıkarılmasıyla gözlem sayısı 7270 çifte indirgenmiş ve analizler bu örneklem üzerinden gerçekleştirilmiştir. Veri setine ilişkin özet istatistikler Çizelge 5.1. ve Çizelge 5.2.'de sunulmuştur.

**Çizelge 5.1. Kişi Sayıları**

	Erkek	Kadın
Ölen kişi sayısı	967	377
Yaşayan kişi sayısı	7670	7417
Toplam	8637	7794

**Çizelge 5.2. Toplam Çift Sayısı**

		Doğum Yılı (Kadın)															
		1910	1911	1912	1913	1914	1915	1916	1917	1918	1919	1920	1921	1922	1923	1924	1925
Doğum Yılı (Erkek)	1910	13	11	14	9	20	15	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1911	12	19	25	20	26	24	14	11	0	0	0	0	0	0	0	0
	1912	4	16	18	34	26	40	23	23	10	0	0	0	0	0	0	0
	1913	10	12	23	27	36	56	37	56	26	13	0	0	0	0	0	0
	1914	1	15	6	23	45	48	52	51	59	56	22	0	0	0	0	0
	1915	1	6	19	19	40	66	84	60	64	67	74	27	0	0	0	0
	1916	0	2	14	10	44	47	71	51	76	74	68	56	42	0	0	0
	1917	0	0	0	14	15	25	44	72	76	86	83	76	47	30	0	0
	1918	0	0	0	1	10	16	39	57	68	77	112	104	71	61	38	0
	1919	0	0	0	0	5	18	28	31	36	64	84	116	76	95	71	26
	1920	0	0	0	0	0	6	17	29	51	85	118	136	105	96	101	83
	1921	0	0	0	0	0	0	10	15	26	35	83	114	128	89	119	101
	1922	0	0	0	0	0	0	0	7	15	28	55	78	110	129	87	99
	1923	0	0	0	0	0	0	0	0	7	14	34	50	49	98	105	107
	1924	0	0	0	0	0	0	0	0	0	11	23	36	27	60	91	96
	1925	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9	24	22	39	48	102

Genel olarak,  $S(t)$  yaşam fonksiyonunun Kaplan-Meier tahmini aşağıdaki Çarpım-Limit formülü yardımıyla hesaplanmaktadır;

$$\hat{S}(t) = \prod_{i:t_i \leq t} \left(1 - \frac{d_i}{n_i}\right)$$

Burada;  $n_i, t_i$  zamanına kadar yaşadığı bilinen kişi sayısını,  $d_i$  ise  $t_i$  zamanında gerçekleşen ölüm sayısını göstermektedir. Bu formül aynı zamanda kişinin gelecek yaşam süresini gösteren  $T$  rastgele değişkeni yardımıyla aşağıdaki biçimde ifade edilebilir;

$$\hat{S}(t_i) = \prod \hat{P}(T > t_i | T \geq t)$$

Burada  $t$  anına kadar yaşadığı bilinen bir bireyin  $t_i - t$  yıl kadar yaşaması olasılığına karşılık gelen  $\hat{P}(T > t_i | T \geq t)$  ifadesi tek değişkenli Kaplan-Meier tahmini olarak bilinmektedir.

Çalışmamızda çiftlerin doğum yıllarının 16 yıllık bir dönemi kapsaması ve gözlem süresinin beş yıl olmasından dolayı hem erkek hem de kadın bireylere ilişkin tahmini yaşam olasılıkları 21 yıl için elde edilmiştir. Kaplan-Meier tahmini, başlangıç yaşı her iki cinsiyet için de 63 yaş olduğundan koşullu olarak hesaplanmıştır.

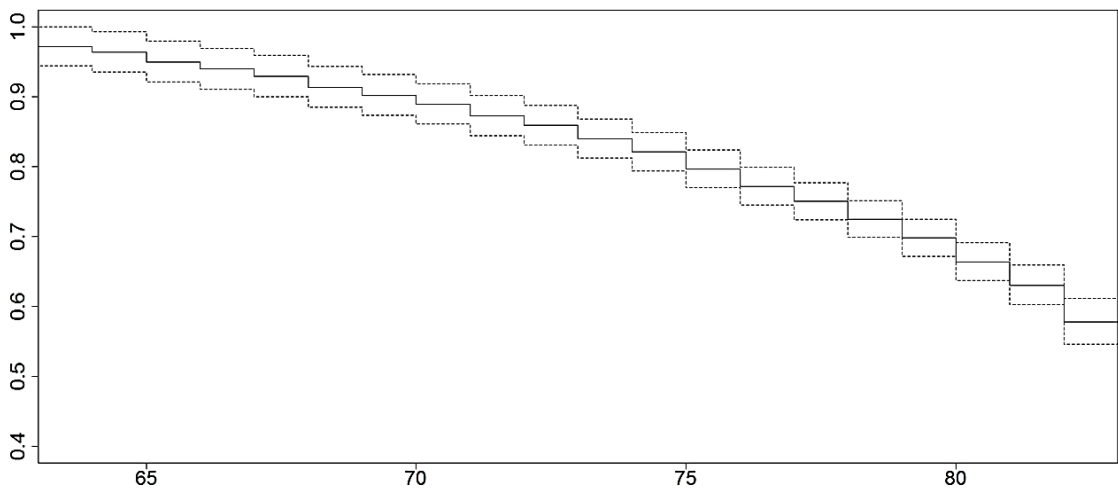
Çizelge 5.3. hem erkek hem de kadın bireylere ilişkin marjinal yaşam olasılıklarının Kaplan-Meier tahmini sonucunda elde edilen değerlerini göstermektedir [1];

**Çizelge 5.3.** Kaplan-Meier Marjinal Yaşam Olasılıkları

Erkek			Kadın			Erkek			Kadın		
$t$	$tP_{63}$	$tP_{63}$	$t$	$tP_{63}$	$tP_{63}$	$t$	$tP_{63}$	$tP_{63}$	$t$	$tP_{63}$	$tP_{63}$
0	0,968	0,998	7	0,886	0,967	14	0,742	0,898			
1	0,960	0,996	8	0,870	0,959	15	0,718	0,884			
2	0,946	0,994	9	0,856	0,946	16	0,690	0,864			
3	0,936	0,989	10	0,837	0,938	17	0,650	0,846			
4	0,926	0,986	11	0,817	0,930	18	0,618	0,806			
5	0,910	0,980	12	0,792	0,917	19	0,558	0,791			
6	0,898	0,975	13	0,766	0,908	20	0,492	0,767			

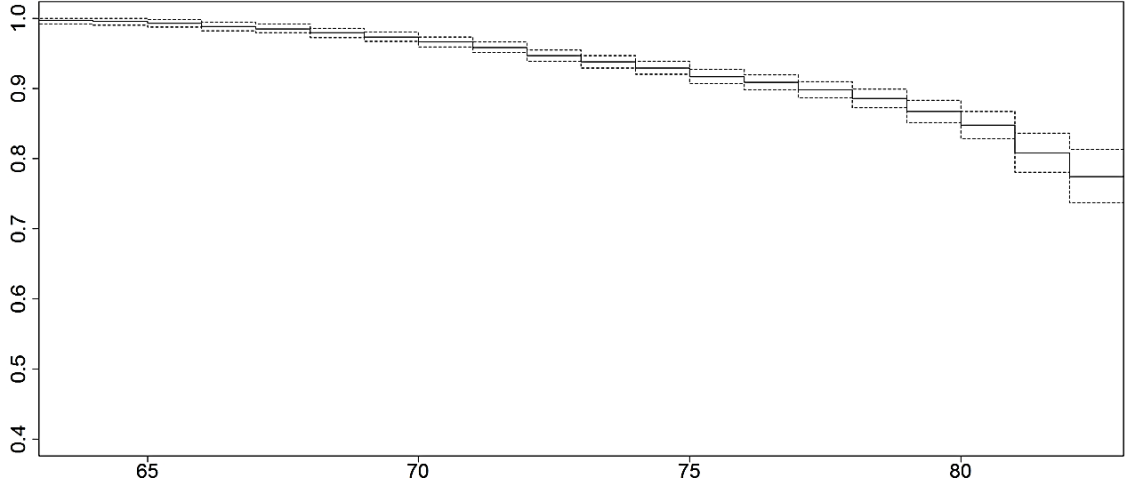
Erkek bireylerin marjinal yaşama olasılıklarında kadın bireylere kıyasla zaman içinde daha hızlı bir azalış olduğu görülmektedir. 63 yaşında olduğu bilinen erkek bireyin bir yıl yaşaması olasılığı 0,960 iken aynı yaştaki kadın için bu oran 0,996 olarak hesaplanmıştır.

Erkek ve kadın bireylere ilişkin marjinal yaşam olasılıklarının Kaplan-Meier tahminleri Şekil 5.1. ve Şekil 5.2. 'de gösterilmiştir [1].



**Şekil 5.1.** Erkek Bireylerin Marjinal Yaşam Olasılıklarının Kaplan-Meier Tahmini (%95 güven aralığında)





**Şekil 5.2.** Kadın Bireylerin Marjinal Yaşam Olasılıklarının Kaplan-Meier Tahmini  
(%95 güven aralığında)

Her gözlem süresinin ayrı olarak değerlendirilmesi ve belirlenen zaman aralığında herhangi bir ölümün gerçekleşmediği varsayımı, Şekil 5.1. ve Şekil 5.2.'den de görüldüğü üzere, her iki cinsiyet için hesaplanan tahmini yaşam olasılıklarının merdiven şeklinde gözükmelerine neden olmuştur. Bunun yanı sıra, kadın bireylerin yaşama olasılıklarının erkek bireylere kıyasla daha yüksek olduğu net bir şekilde görülmektedir.

### 5.1.2. İki Değişkenli Yaşam Fonksiyonunun Dabrowska Tahmini

Son yıllarda çok değişkenli yaşam fonksiyonunun tahminine yönelik birçok çalışma gerçekleştirilmiştir. İki değişkenli yaşam fonksiyonunun Kaplan-Meier tahmini olarak da bilinen ve bu alanda öncü olarak değerlendirilen çalışma, 1988 yılında Dabrowska [78] tarafından sunulmuştur. Dabrowska [78] çalışmasında, iki değişkenli yaşam fonksiyonunun tahminini Çarpım-İntegral gösterimini kullanarak parametrik olmayan bir yaklaşımla ifade etmiştir. Dabrowska tahmininin genel çerçevesi aşağıdaki gibidir;

$(\Omega, F, P)$  olasılık uzayında tanımlı ve negatif olmayan  $T = (T_1, T_2)$  rastgele değişken çifti verilsin. İki değişkenli birleşik yaşam fonksiyonu ve vektör değerli kümülatif tehlike fonksiyonu sırasıyla şu şekilde ifade edilmektedir;

$$S(s, t) = P(T_1 > s, T_2 > t)$$

$$\Lambda(s, t) = (\Lambda_{10}(s, t), \Lambda_{01}(s, t), \Lambda_{11}(s, t))$$

Burada;

$$\Lambda_{11}(ds, dt) = \frac{P(T_1 \in ds, T_2 \in dt)}{P(T_1 \geq s, T_2 \geq t)} = \frac{S(ds, dt)}{S(s^-, t^-)}$$

$$\Lambda_{10}(ds, t) = \frac{P(T_1 \in ds, T_2 > t)}{P(T_1 \geq s, T_2 > t)} = -\frac{S(ds, t)}{S(s^-, t^-)}$$

$$\Lambda_{01}(s, dt) = \frac{P(T_1 > s, T_2 \in dt)}{P(T_1 > s, T_2 \geq t)} = -\frac{S(s, dt)}{S(s^-, t^-)}$$

ve başlangıç koşulları,

$$\Lambda_{10}(0, t) = \Lambda_{01}(s, 0) = \Lambda_{11}(0, 0) = 0$$

şeklindedir.

$T_1 = s^-$  ve  $T_2 = t^-$  olması durumunda iki başarısızlığın da gerçekleşmesi olasılığı  $\Lambda_{11}$  ile ifade edilirken birinci başarısızlığın gerçekleşmesi olasılığı  $\Lambda_{10}$ , ikinci başarısızlığın gerçekleşmesi olasılığı ise  $\Lambda_{01}$  ile gösterilmektedir.

Buradan hareketle,  $S(s, t)$  birleşik yaşam fonksiyonun Çarpım-İntegral gösterimi kümülatif tehlike fonksiyonları cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilebilir;

$$S(s, t) = \prod_{u \leq s} (1 - \Lambda_{10}(du, 0)) \prod_{v \leq t} (1 - \Lambda_{01}(0, dv)) \times \prod_{\substack{u \leq s \\ v \leq t}} (1 - L(du, dv))$$

Burada;

$$0 = u_0 < \dots < u_m = s, 0 = v_0 < \dots < v_n = t \text{ olmak üzere;}$$

$$L(du, dv) = \frac{\Lambda_{10}(du, v^-) \Lambda_{01}(u^-, dv) - \Lambda_{11}(du, dv)}{\{1 - \Lambda_{10}(\Delta u, v^-)\} \{1 - \Lambda_{01}(u^-, \Delta v)\}}$$

$$\prod_{\substack{u \leq s \\ v \leq t}} (1 - L(du, dv)) = \lim_{\substack{\max |u_i - u_{i-1}| \rightarrow 0 \\ \max |v_j - v_{j-1}| \rightarrow 0}} \prod_{i,j} (1 - L((u_{i-1}, u_i] \times (v_{j-1}, v_j]))$$

$$L((u_{i-1}, u_i] \times (v_{j-1}, v_j]) = L(u_i, v_j) - L(u_{i-1}, v_j) - L(u_i, v_{j-1}) + L(u_{i-1}, v_{j-1})$$

$$\prod_{u \leq s} (1 - \Lambda_{10}(du, 0)) = S(s, 0)$$

$$\prod_{v \leq t} (1 - \Lambda_{01}(0, dv)) = S(0, t)$$

Diğer taraftan;

$$1 - \Lambda_{10}(du, v^-) = P(T_1 > u | T_1 \geq u, T_2 \geq v) = \frac{S(u, v^-)}{S(u^-, v^-)}$$

$$1 - \Lambda_{01}(u^-, dv) = P(T_2 > v | T_1 \geq u, T_2 \geq v) = \frac{S(u^-, v)}{S(u^-, v^-)}$$

$$\begin{aligned} 1 - \Lambda_{11}(du, dv) &= (1 - \Lambda_{10}(du, v^-)) + (1 - \Lambda_{01}(u^-, dv)) - P(T_1 > u, T_2 > v | T_1 \geq u, T_2 \geq v) \\ &= \frac{S(u, v^-)}{S(u^-, v^-)} + \frac{S(u^-, v)}{S(u^-, v^-)} - \frac{S(u, v)}{S(u^-, v^-)} \end{aligned}$$

olarak yazılabileceğinden;

$$1 - L(du, dv) = \frac{P(T_1 > u, T_2 > v | T_1 \geq u, T_2 \geq v)}{P(T_1 > u | T_1 \geq u, T_2 \geq v)P(T_2 > v | T_1 \geq u, T_2 \geq v)} = \frac{S(u, v)S(u^-, v^-)}{S(u, v^-)S(u^-, v)}$$

şeklinde düzenlenebilir.

Sonuç olarak  $S(s, t)$  birleşik yaşam fonksiyonun formülü aşağıdaki şekilde yazılabilir;

$$S(s, t) = \prod_{u \leq s} \frac{S(u, v^-)}{S(u^-, v^-)} \prod_{v \leq t} \frac{S(u^-, v)}{S(u^-, v^-)} \times \prod_{\substack{u \leq s \\ v \leq t}} \frac{S(u, v)S(u^-, v^-)}{S(u, v^-)S(u^-, v)}$$

Burada, ilk iki çarpan marjinal yaşam olasılıklarını ifade ederken son çarpan marjinal yaşam olasılıkları verildiğinde  $T_1$  ve  $T_2$  rastgele değişkenleri arasındaki bağımlılığı karakterize etmektedir.

Yapılan tanımlamalar doğrultusunda Dabrowska tahmin edicisi aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir;

$$\hat{S}(s, t) = \hat{S}(s, 0)\hat{S}(0, t) \prod_{\substack{0 < u \leq s \\ 0 < v \leq t}} (1 - \hat{L}(\Delta u, \Delta v))$$

Burada;

$$\hat{S}(s, 0) = \prod_{u \leq s} (1 - \hat{\Lambda}_{10}(\Delta u, 0))$$

$$\hat{S}(0, t) = \prod_{v \leq t} (1 - \hat{\Lambda}_{01}(0, \Delta v))$$

$$\hat{L}(\Delta u, \Delta v) = \frac{\hat{\Lambda}_{10}(\Delta u, v^-)\hat{\Lambda}_{01}(u^-, \Delta v) - \hat{\Lambda}_{11}(\Delta u, \Delta v)}{\{1 - \hat{\Lambda}_{10}(\Delta u, v^-)\}\{1 - \hat{\Lambda}_{01}(u^-, \Delta v)\}}$$

ve  $\hat{S}(s, 0)$  ve  $\hat{S}(0, t)$  tek değişkenli Kaplan-Meier tahminine karşılık gelmektedir. Ayrıca,  $\Delta u = u - u^-$  olmak üzere  $u$  ile  $u^-$  zamanları arasında geçen süreyi göstermektedir. Dabrowska tahmininde başarısızlık, ölüm olayının gerçekleşmesi olarak düşünülebilir. Bu durumda, birinci bireyin  $u^-$ , ikinci bireyin ise  $v^-$  zamanına kadar yaşadığı

bilindiğinde  $\widehat{\Lambda}_{11}(\Delta u, \Delta v)$  ifadesi iki bireyin  $(u, v)$  noktasında ölmesinin tahmini kümülatif tehlike fonksiyonu iken  $\widehat{\Lambda}_{10}(\Delta u, v^-)$  ve  $\widehat{\Lambda}_{01}(u^-, \Delta v)$  ifadeleri sırasıyla birinci bireyin  $u$  noktasında ölmesinin tahmini kümülatif tehlike fonksiyonu ve ikinci bireyin  $v$  noktasında ölmesinin tahmini kümülatif tehlike fonksiyonudur.

Bu tez çalışmasında, çiftler üzerinden yapılan yaşam analizinde hem erkek hem de kadın bireylerin gözlemlenmeye başladığı tarihte minimum yaşı 63 yaş olduğundan yaşam olasılıkları koşullu olarak tahmin edilmiştir.  $T^K$  kadın bireyin gelecek yaşam süresini (ölüm zamanını) gösteren rastgele değişken,  $T^E$  erkek bireyin gelecek yaşam süresini gösteren rastgele değişken olsun. Bu durumda analizde kullanılacak koşullu birleşik yaşam fonksiyonunun Dabrowska tahmini aşağıdaki şekilde ifade edilebilir [1];

$$\begin{aligned} \widehat{P}(T^E > s, T^K > t | T^E \geq 63, T^K \geq 63) &= \widehat{P}(T^E > s | T^E \geq 63) \widehat{P}(T^K > t | T^K \geq 63) \\ &\times \prod_{\substack{0 < u \leq s \\ 0 < v \leq t}} (1 - \widehat{L}(\Delta u, \Delta v | T^E \geq 63, T^K \geq 63)) \end{aligned}$$

Ek olarak,

$$H(u, v | T^E \geq 63, T^K \geq 63) = \prod_{\substack{0 < u \leq s \\ 0 < v \leq t}} (1 - \widehat{L}(\Delta u, \Delta v | T^E \geq 63, T^K \geq 63))$$

şeklinde tanımlansın.

Burada,  $H(u, v | T^E \geq 63, T^K \geq 63)$  çarpanının bire eşit olması erkek ve kadın bireylerin gelecek yaşam sürelerinin birbirinden bağımsız olduğu anlamına gelmektedir. Çiftlerin gelecek yaşam sürelerinin arasında bağımlılık söz konusu ise bu çarpan birden büyük değerler almaktadır.

Çizelge 5.4.'de analiz sonucunda ulaşılan  $H(u, v | T^E \geq 63, T^K \geq 63)$  çarpanına ilişkin değerler verilmiştir.

**Çizelge 5.4.**  $H(u, v)$  Çarpanı

		Kadın					
		0	1	2	3	4	$\geq 5$
Erkek	$s \setminus t$	0	1	1	1	1	1
	0	1	1	1	1	1	1
	1	1	1,00084	1,00104	1,00156	1,00216	1,00222
	2	1	1,00094	1,00243	1,00376	1,00435	1,00521
	3	1	1,00149	1,00328	1,00652	1,00767	1,00910
	4	1	1,00162	1,00340	1,00662	1,00941	1,01110
$\geq 5$	1	1,00188	1,00366	1,00700	1,01025	1,01495	

Hesaplamalar, kullanılan veri setine bağılı olarak ampirik bir şekilde yapılmıştır. Söz konusu veri setinde 29 Aralık 1988 ile 31 Aralık 1993 tarihleri arasındaki beş yıllık süre içinde meydana gelen ölüm bilgileri yer aldığından, olası 25 durum için analiz gerçekleştirilmiştir. Veri setinin sağdan sansürlü olması nedeniyle, gözlem süresi bittikten sonra takip edilen yıllar için beşinci yıldaki ölümlülük oranları kabul edilmiştir. Birleşik yaşam olasılıkları bu varsayım doğrultusunda hesaplanmıştır. Çiftlerin gelecek yaşam sürelerinin bağımsızlığı varsayımı altında hesaplanan ölüm olasılıkları ile veriden elde edilen gerçekleşen ölüm sayılarının dikkate alınarak hesaplandığı birleşik ölüm olasılıkları eşleştirilmiştir. Bu hesaplama sonucunda ortaya çıkan negatif fark, çiftler arasında pozitif yönde bir ilişkinin olduğunu göstermektedir [42]. Yapılan hesaplamaların sonucunda her gözlem aralığına karşılık gelen  $H(u, v | T^E \geq 63, T^K \geq 63)$  çarpanının birden büyük bir değer aldığı görülmüştür. Bu durum, çiftlerin gelecek yaşam sürelerinin birbiriyle bağımlı olduğu anlamına gelmektedir. Diğer taraftan, Çizelge 5.4.'e bakıldığında zaman ilerledikçe satır ve sütunlardaki çarpan değerlerinin yani çiftler arasındaki bağımlılık düzeyinin de arttığı görülmektedir.

## 5.2. Parametrik Tahmin Yöntemleri

Yaşam analizlerinde parametrik olmayan yöntemlerin yanı sıra parametrik yaklaşımların benimsendiği yöntemler de kullanılmaktadır. Bu yöntemlerde araştırmaya konu olan veri parametrik bir şekilde modellenmektedir. Parametrik tahmin yöntemlerinin kullanıldığı çalışmalarda verinin bir dağılıma uyduğu düşünülerek analiz yapılmaktadır.

Bu tez çalışmasında, iki değişkenli yaşam fonksiyonunun parametrik tahmini, zamanla değişen Brown hareketi kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Parametrik olmayan Kaplan-Meier tahmini kullanılarak hesaplanan marjinal yaşam olasılıkları, Luciano ve Vigna'nın [35] benimsediği metodoloji referans alınarak, analitik yaşam fonksiyonunun elde edilmesi aşamasında girdi olarak kullanılmıştır. Gözlemlenen süre içerisinde her iki cinsiyet için de 63 yaş veri setinin minimum yaşına karşılık geldiğinden hesaplamalarda başlangıç yaş olarak kabul edilmiştir.

Kaplan-Meier tahmini sonucunda 63 yaşındaki erkek bireyin bir yıl yaşaması olasılığı 0,968, 63 yaşındaki kadın bireyin bir yıl yaşaması olasılığı ise 0,998 olarak bulunmuştu. Buradan hareketle, ilk olarak hem erkek hem de kadın bireye karşılık gelen ve anlık ölüm hızlarının başlangıç noktasını gösteren  $X_0$  değeri sırasıyla aşağıdaki şekilde elde edilmiştir;

$$X_0^E = \mu_{63}^E(0) = -\ln(0,968) = 0,032523191$$

$$X_0^K = \mu_{63}^K(0) = -\ln(0,998) = 0,0020020026$$

Hesaplamalarda kullanılan  $\{\alpha^E, \alpha^K, b, \sigma^E, \sigma^K\}$  parametre kümesi, Zhang ve Brockett [1] tarafından simülasyon yoluyla tahmin edilmiştir. Parametre tahmini, iki değişkenli yaşam fonksiyonunun Dabrowska tahmini ile analitik yaşam fonksiyonunun tahmini arasındaki hata kareler toplamı minimum olacak şekilde yapılmıştır [1].

Parametrik tahmin yöntemi ile parametrik olmayan tahmin yöntemi arasındaki tutarsızlığı ölçmek amacıyla, analizde çiftler için olası yaş kombinasyonu  $(83-63+1) \times (83-63+1) = 441$  adet olduğundan MAPE değeri (ortalama mutlak hata toplamı) bu noktalarda hesaplanmıştır. MAPE istatistiği,

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{|\hat{Y}_t - Y_t|}{Y_t} * 100$$

formülü yardımıyla hesaplanmaktadır. Burada,  $Y_t$  gerçekleşen değerler iken  $\hat{Y}_t$  tahmin edilen değerlerdir.

MAPE, tahmin hatasını gerçek değer yüzdesi olarak ifade etmektedir. Dolayısıyla, tek başına taşımış olduğu anlam sayesinde uygulamalarda diğer yöntemlere kıyasla daha çok tercih edilmektedir. Buradan hareketle, Dabrowska tahmini ile bu çalışmada yapılan tahmin arasındaki farkın MAPE değeri hesaplanmış ve sonucun yalnızca %5,95 olduğu görülmüştür. Bu sonuç modelin güvenilir olduğunu ortaya koymakla beraber, aktüerya alanında çoklu hayat ürünlerinin fiyatlandırılmasına yönelik uygulama imkânı sunmuştur.

Simülasyon sonucunda ulaşılan parametre tahmin değerleri aşağıdaki Çizelge 5.5.'de verilmiştir [1].

**Çizelge 5.5.** Parametre Tahmini

	$\alpha^E$	$\alpha^K$	$b$	$\sigma^E$	$\sigma^K$
Tahmin edilen değer	0,38	0,23	0,00004	0,004	0,0037

Çizelge 5.5.'de  $\sigma^E$  parametresinin tahmin edilen değerinin  $\sigma^K$  parametresine göre daha büyük olduğu görülmektedir. Bu durum, kadın bireylerin ölüm hızının erkek bireylere kıyasla daha yavaş olduğu anlamına gelmektedir. Diğer taraftan,  $\alpha^E$  ve  $\alpha^K$  parametreleri arasındaki büyüklük ilişkisine bakıldığında, kadınlar için tahmin edilen değer erkeklerin tahmini değerinden daha düşük olduğu görülmektedir. Buradan, kadın

bireylerin birleşik yaşam durumunda erkeklere kıyasla daha az bağımlı bir gelişim gösterdiği yorumu yapılmaktadır.

### 5.3. Marjinal ve Birleşik Yaşam Olasılıklarının Hesaplanması

Marjinal yaşam olasılıkları, tahmin edilen parametre değerlerinin (3.17) eşitliğinde yerine yazılması sonucunda elde edilmiştir. Ayrıca, hesaplamalarda Luciano vd. [42] tarafından sunulan çalışmadaki metodoloji benimsenmiştir. Bağımsızlık durumunda kadın ve erkek bireylere karşılık gelen marjinal yaşam olasılıkları aşağıdaki Çizelge 5.6.'da verilmiştir.

**Çizelge 5.6.** Marjinal Yaşam Olasılıkları (Bağımsız)

$t$	${}_t p_{63}^{K0}$	${}_t p_{63}^{E0}$	$t$	${}_t p_{63}^{K0}$	${}_t p_{63}^{E0}$
1	0,942914	0,951939	11	0,899955	0,908597
2	0,940500	0,949520	12	0,890955	0,899510
3	0,937876	0,946876	13	0,879955	0,888404
4	0,934972	0,943946	14	0,866205	0,874523
5	0,931731	0,940675	15	0,848527	0,856675
6	0,928088	0,936998	16	0,824957	0,832878
7	0,923960	0,932831	17	0,791958	0,799562
8	0,919244	0,928070	18	0,742460	0,749590
9	0,913803	0,922578	19	0,659964	0,666302
10	0,907456	0,916169	20	0,494973	0,499726

Bağımlılık durumunda kadın ve erkek bireylere karşılık gelen marjinal yaşam olasılıkları Çizelge 5.7.'de verilmiştir.

**Çizelge 5.7.** Marjinal Yaşam Olasılıkları (Bağımlı)

$t$	${}_t p_{63}^K$	${}_t p_{63}^E$	$t$	${}_t p_{63}^K$	${}_t p_{63}^E$
1	0,945335	0,951950	11	0,902333	0,908650
2	0,942953	0,949554	12	0,893309	0,899563
3	0,940335	0,946917	13	0,882281	0,888457
4	0,937429	0,943992	14	0,868494	0,874575
5	0,934184	0,940724	15	0,850770	0,856726
6	0,930533	0,937047	16	0,827138	0,832928
7	0,926397	0,932883	17	0,794052	0,799610
8	0,921669	0,928122	18	0,744424	0,749635
9	0,916216	0,922629	19	0,661710	0,666342
10	0,909852	0,916222	20	0,496282	0,499757

Çizelge 5.6. ve Çizelge 5.7.'ye bakıldığında, bağımsız durumda bireylerin yaşama olasılıklarının bağımlılık durumunda elde edilen yaşama olasılıklarından daha düşük olduğu görülmektedir. Yani, bireyler arasındaki bağımlılık yapısının dikkate alınmasıyla marjinal yaşam olasılıklarında artış meydana gelmektedir.

Son olarak,  $63 \leq t_1 \leq 83$  ve  $63 \leq t_2 \leq 83$  olmak üzere (3.20) eşitliği kullanılarak bağımlılık durumundaki  $\hat{P}(T^E > t_1, T^K > t_2 | T^E \geq 63, T^K \geq 63)$  birleşik yaşam olasılıkları hesaplanmıştır. Çizelge 5.8’de bireylerin gelecek yaşam sürelerinin bağımlı ve bağımsız varsayılması sonucunda elde edilen birleşik yaşam olasılıkları verilmiştir.

**Çizelge 5.8. Birleşik Yaşam Olasılıkları**

$t$	Bağımlı	Bağımsız	$t$	Bağımlı	Bağımsız
	${}_t p_{63:63}^{E,K}$	${}_t p_{63:63}^{E,K}$		${}_t p_{63:63}^{E,K}$	${}_t p_{63:63}^{E,K}$
1	0,938858	0,897597	11	0,848872	0,817697
2	0,928648	0,893024	12	0,835768	0,801423
3	0,919849	0,888052	13	0,820551	0,781756
4	0,911826	0,882563	14	0,802533	0,757517
5	0,904042	0,876456	15	0,780680	0,726912
6	0,896268	0,869616	16	0,753338	0,687089
7	0,888250	0,861899	17	0,717367	0,633220
8	0,879784	0,853123	18	0,666710	0,556541
9	0,870550	0,843054	19	0,587157	0,439735
10	0,860338	0,831383	20	0,436072	0,247351

Çizelge 5.8’den görüldüğü üzere, bireylerin bir yıl birlikte yaşamaları olasılığı gelecek yaşam süreleri bağımlı varsayıldığında 0,938858 iken bağımsız varsayıldığında 0,897597’dir. Sonuç olarak, bireyler arasındaki bağımlılık yapısının değerlendirilmesi birlikte geçirecekleri zamanın uzunluğunu etkilemekte ve bağımsız duruma kıyasla daha uzun süreli olmaktadır.

#### 5.4. Kesikli Hayat Annüitesi ve Hayat Sigortası Ürünlerine İlişkin Hesaplamalar

Elde edilen yaşam olasılıklarına bağlı olarak, kesikli hayat ürünlerinin net tek prim ve net yıllık prim tutarları, Bölüm 4’teki formüller kullanılarak hesaplanmıştır. Hesaplamalarda yıllık efektif faiz oranı (i) %3 alınmıştır. Öncelikle Çizelge 5.6’daki marjinal yaşam olasılıkları kullanılarak, tekli yaşam durumunda annüite ve sigorta ürünlerinin net tek primleri elde edilmiştir.

**Çizelge 5.9. Tekli Yaşam Durumunda Net Tek Primler (Kesikli)**

	$\ddot{a}_{63:20 }$	$A_{63:20 }^1$	$E_{63:20 }$	$A_{63:20 }$
Kadın	13,581993	0,326283	0,274054	0,600338
Erkek	13,702758	0,320095	0,276686	0,596781

Ardından dönemsel ve karma hayat sigortasına ilişkin net yıllık prim tutarları hesaplanmıştır.



**Çizelge 5.10.** Tekli Yaşam Durumunda Net Yıllık Primler (Kesikli)

	$P_{63:20 }^1$	$P_{63:20 }$
Kadın	0,024023	0,044201
Erkek	0,023359	0,043551

Çizelge 5.10.'a bakıldığında erkek bireylerin dönemsel ve karma hayat sigortasında ödemekle yükümlü olduğu net yıllık prim tutarının kadın bireylere kıyasla daha düşük olduğu görülmektedir.

Çoklu yaşam durumunda ise bireylerin gelecek yaşam sürelerinin bağımlı ve bağımsız olduğu her iki durum için hesaplamalar gerçekleştirilmiştir. Bu doğrultuda Çizelge 5.8'deki birleşik yaşam olasılıkları kullanılarak, kesikli ürünlere ilişkin net tek prim ile net yıllık prim tutarları birleşik ve son yaşayan durumları için elde edilmiştir.

**Çizelge 5.11.** Bireylerin Bağımlılık Yapısına Göre Net Tek Primler (Kesikli)

Birleşik Yaşam Durumu			Son Yaşayan Durumu		
NTP	Bağımlı	Bağımsız	NTP	Bağımlı	Bağımsız
$\ddot{a}_{63:63:20 }$	12,984409	12,357198	$\ddot{a}_{63:63:20 }$	14,300343	14,927553
$A_{63:63:20 }^1$	0,376622	0,499700	$A_{63:63:20 }^1$	0,269758	0,146678
$E_{63:63:20 }$	0,241442	0,136952	$E_{63:63:20 }$	0,309299	0,413788
$A_{63:63:20 }$	0,618064	0,636653	$A_{63:63:20 }$	0,579056	0,560467

Bireylerin gelecek yaşam sürelerinin bağımsızlığı varsayımı altında hesaplanan dönemsel hayat annüitesinin net tek primi birleşik yaşam durumunda 12,357198 iken, son yaşayan durumunda 14,927553 olarak bulunmuştur. Bağımlılık söz konusu olduğunda dönemsel hayat annüitesinin net tek primi birleşik yaşam durumunda 12,984409, son yaşayan durumunda ise 14,300343'tür. Yani bireyler arasındaki bağımlılığın hesaplamalara dahil edilmesi birleşik yaşam durumunda dönemsel hayat annüitesinin net tek primini artırırken, son yaşayan durumunda azaltmaktadır. Hayat sigortalarının net tek primlerinde ise tersine bir durum söz konusudur. Bireylerin gelecek yaşam süreleri bağımsız olduğu takdirde birleşik yaşam durumunda dönemsel ve karma hayat sigortalarının net tek primleri sırasıyla 0,499700 ve 0,636653 iken son yaşayan durumunda 0,146678 ve 0,560467'dir. Bağımlı olduğu takdirde birleşik yaşam durumu için dönemsel ve karma hayat sigortasının net tek primleri sırasıyla 0,376622 ve 0,618064, son yaşayan durumunda ise 0,269758 ve 0,579056'dır.

Sonuç olarak, bireylerin gelecek yaşam sürelerinin bağımlı varsayılması birleşik yaşam durumunda sigorta ürünlerinin net tek primlerinin azalmasına, son yaşayan durumda ise artmasına neden olmaktadır.

Buradan hareketle, bireylerin bağımlılık yapısına göre birleşik ve son yaşayan durumda ödeyecekleri net yıllık prim tutarları Çizelge 5.12.'de gösterilmiştir.

**Çizelge 5.12.** Bireylerin Bağımlılık Yapısına Göre Net Yıllık Primler (Kesikli)

Birleşik Yaşam Durumu			Son Yaşayan Durumu		
Net Yıllık Prim	Bağımlı	Bağımsız	Net Yıllık Prim	Bağımlı	Bağımsız
$P_{63:63:20}^1$	0,029006	0,040438	$P_{63:63:20}^1$	0,018864	0,009826
$P_{63:63:20}$	0,047600	0,051521	$P_{63:63:20}$	0,040492	0,037546

Çizelge 5.12.'den görüldüğü üzere, birleşik yaşam durumunda dönemsel ve karma hayat sigortasına ilişkin net yıllık prim tutarları bağımsızlık varsayımı altında sırasıyla 0,040438 ve 0,051521 iken bağımlılık varsayımı altında 0,029006 ve 0,047600'dür. Son yaşayan durumda ise bağımsızlık varsayımı altında dönemsel ve karma hayat sigortalarına karşılık gelen net yıllık primler 0,009826 ve 0,037546 iken bağımlılık varsayımı altında bu tutarlar 0,018864 ve 0,040492'dir. Sonuç olarak, bireylerin gelecek yaşam sürelerinin bağımlı varsayılması ödenecek net yıllık prim tutarını birleşik yaşam durumunda azaltırken son yaşayan durumda arttırmaktadır.

### 5.5. Sürekli Hayat Annüitesi ve Hayat Sigortası Ürünlerine İlişkin Hesaplamalar

Sürekli ürünlere ilişkin hesaplamalarda anlık faiz oranı ( $\delta$ ) %3 olarak varsayılmıştır. İlk olarak Çizelge 5.6'daki marjinal yaşam olasılıkları kullanılarak tekli yaşam durumunda kadın ve erkek bireyler için oluşturulmuş annüite ve sigorta ürünlerinin net tek primleri hesaplanmıştır.

**Çizelge 5.13.** Tekli Yaşam Durumunda Net Tek Primler (Sürekli)

	$\bar{a}_{63:20}$	$\bar{A}_{63:20}^1$	$E_{63:20}$	$\bar{A}_{63:20}$
Kadın	12,944353	1,652606	0,271647	1,924253
Erkek	13,068597	1,543633	0,274255	1,817889

İkinci olarak, dönemsel ve karma hayat sigortalarına karşılık gelen net yıllık prim tutarları elde edilmiştir.

**Çizelge 5.14.** Tekli Yaşam Durumunda Net Yıllık Primler (Sürekli)

	$\bar{P}_{63:20 }^1$	$\bar{P}_{63:20 }$
Kadın	0,127670	0,148656
Erkek	0,118118	0,139104

Çizelge 5.14'e bakıldığında, her iki hayat sigortası ürününde de erkek bireylerin ödeyeceği net yıllık prim tutarlarının kadın bireylere göre daha düşük olduğu görülmektedir.

Çoklu yaşam durumunda kesikli hayat ürünlerine yönelik yapılan aktüeryal hesaplamalar, sürekli hayat ürünleri için genişletilmiştir. Benzer şekilde, bireylerin gelecek yaşam sürelerinin bağımlı ve bağımsız olduğu kabul edilmiştir. Bu varsayım doğrultusunda birleşik ve son yaşayan durumları için net tek prim ve net yıllık prim tutarları, Bölüm 4'teki formüller kullanılarak hesaplanmıştır. Net tek prim tutarlarına ilişkin elde edilen sonuçlar Çizelge 5.15'te verilmiştir.

**Çizelge 5.15.** Bireylerin Bağımlılık Yapısına Göre Net Tek Primler (Sürekli)

Birleşik Yaşam Durumu			Son Yaşayan Durumu		
NTP	Bağımlı	Bağımsız	NTP	Bağımlı	Bağımsız
$\bar{a}_{63:63:20 }$	12,306636	11,568080	$\bar{a}_{\overline{63:63:20 }}$	13,706313	14,444869
$\bar{A}_{63:63:20 }^1$	2,151339	2,594179	$\bar{A}_{\overline{63:63:20 }}^1$	1,044900	0,602060
$E_{63:63:20 }$	0,239321	0,135749	$E_{\overline{63:63:20 }}$	0,306581	0,410153
$\bar{A}_{63:63:20 }$	2,390660	2,729928	$\bar{A}_{\overline{63:63:20 }}$	1,351482	1,012213

Birleşik yaşam durumunda bireylerin gelecek yaşam süreleri bağımsız kabul edildiğinde dönemsel hayat annüitesinin net tek primi 11,568080, dönemsel hayat sigortasının net tek primi 2,594179, karma hayat sigortasının net tek primi 2,729928 olarak elde edilmiştir. Bireylerin gelecek yaşam süreleri bağımlı varsayıldığında ise bu değerler sırasıyla 12,306636, 2,151339 ve 2,390660'dır. Yani, birleşik yaşam durumunda bağımlılığın dikkate alınması annüite ürününün net tek priminde artışa, sigorta ürünlerinin net tek primlerinde ise azalışa neden olmuştur. Son yaşayan durumunda bireylerin gelecek yaşam süreleri bağımlıyken dönemsel hayat annüitesinin net tek primi 13,706313, bağımsızken 14,444869'dur. Diğer taraftan, bağımlılık varsayımı altında dönemsel ve karma hayat sigortalarının net tek primleri sırasıyla 1,044900 ve 1,351482, bağımsızlık varsayımı altında ise 0,602060 ve 1,012213'tür. Sonuç olarak, bireyler arasındaki bağımlılık yapısı

son yaşıyan durumunda dönemsel hayat annüitesinin net tek primini azaltırken dönemsel ve karma hayat sigortalarının net tek primlerini arttırmaktadır.

Son olarak, bireylerin bağımlılık yapısına göre birleşik ve son yaşıyan durumlarında ödeyecekleri net yıllık prim tutarları Çizelge 5.16’da verilmiştir.

**Çizelge 5.16.** Bireylerin Bağımlılık Yapısına Göre Net Yıllık Primler (Sürekli)

Birleşik Yaşam Durumu			Son Yaşıyan Durumu		
Net Yıllık Prim	Bağımlı	Bağımsız	Net Yıllık Prim	Bağımlı	Bağımsız
$\bar{P}_{63:63:20 }^1$	0,174811	0,224253	$\bar{P}_{63:63:20 }^1$	0,076235	0,041680
$\bar{P}_{63:63:20 }$	0,194258	0,235988	$\bar{P}_{63:63:20 }$	0,098603	0,070074

Çizelge 5.16’den görüldüğü üzere, bireylerin gelecek yaşam süreleri bağımlı olduğunda birleşik yaşam durumu için net yıllık prim tutarları dönemsel hayat sigortasında 0,174811 iken karma hayat sigortasında 0,194258’dir. Bağımsızlık durumunda bu tutarlar sırasıyla 0,224253 ve 0,235988’dir. Son yaşıyan durumuna bakıldığında ise bağımlılık varsayımı altında dönemsel ve karma hayat sigortalarının net yıllık prim tutarlarının 0,076235 ve 0,098603 olduğu görülmektedir. Bağımsızlık varsayımı altında bu tutarlar sırasıyla 0,01680 ve 0,070074 olarak elde edilmiştir. Sonuç olarak, bireyler arasındaki bağımlılık yapısı birleşik yaşam durumunda net yıllık prim tutarını azaltırken son yaşıyan durumunda arttırmaktadır.

## 6. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Aktüerya bilimlerinde ilgilenilen olayın gerçekleşme riskinin gerçeğe yakın bir şekilde modellenmesi oldukça önemlidir. Hem hayat sigortaları hem de hayat dışı sigortaları branşlarında bu riskin yönetilebilmesi için çeşitli yaklaşımlar benimsenmiştir. Hayat sigortalarında söz konusu olan ölüm riski modellenirken bireyin gelecek yaşam süresini gösteren rastgele değişkenden yararlanılmaktadır. Sigortalanan birey sayısının birden fazla olduğu hayat ürünlerinde ise bu rastgele değişkenler arasındaki ilişkiye bağlı olarak fiyatlandırma yapılmaktadır.

Çoklu yaşam durumunda bireylerden birinin vefat etmesi halinde geride kalan bireyin gelecek yaşam süresinin bu durumdan ne ölçüde etkilendiğini belirlemek, sigorta şirketi açısından büyük önem taşımaktadır. Uygulamada çoğu sigorta şirketi, bireyleri birbirinden bağımsız kabul etmektedir. Gerçekçi olmayan bu varsayım sigorta sektörü üzerinde potansiyel olarak önemli bir mali etkiye sahiptir. Bu noktada olası finansal etkileri kontrol edebilmek amacıyla bağımlılığı modelleme ihtiyacı duyulmuştur. Literatüre bakıldığında bireyler arasındaki bağımlılık durumunun deterministik bakış açısıyla modellendiği kopula yaklaşımlarına yönelik birçok çalışmanın olduğu görülmektedir. Ancak ölüm riskinin zaman içindeki gelişimi değişken olduğundan bağımlılığın deterministik bir yaklaşımdan ziyade stokastik bir bakış açısıyla modellenmesi gerektiği artık kabul gören bir gerçektir.

Bu çalışmada, bireyin ölüm zamanı anlık ölüm hızının üstel bir rastgele değişkene ilk ulaştığı veya onu aştığı zaman yani Cox sürecinin durma zamanı olarak tanımlanmıştır. Burada, bireylerin anlık ölüm hızları zamanla değişen Brown hareketi olarak modellenmiştir. Ayrıca, zaman değişiminin ters Gauss sürecine uyduğu kabul edilerek anlık ölüm hızlarının normal ters Gauss sürecini takip ettiği varsayılmıştır. Analizler evli çiftler üzerinden gerçekleştirilmiştir. Bireyler arasındaki bağımlılık yapısı ise subordinatörler aracılığıyla oluşturulmuştur. Her bireyin subordinatörü hem eşiyile paylaştığı ortak süreci hem de kendi yaşı, cinsiyeti vb. tarafından belirlenen bireysel süreci içermektedir. Genel olarak, oluşturulan model birleşik yaşamlar için ölüm olasılığının gelişimini açıklamada yeni bir çerçeve sağlamaktadır. Özel olarak ise birleşik yaşamlar arasındaki ilişki düzeyinin zaman içinde değişmesine izin vermektedir. Bu da bireylerin kendine özgü özelliklerinin yaşlandıkça ölüm olasılığını belirlemede giderek daha önemli bir rol oynayabileceği gerçeğini yakalamaktadır [79]. Ayrıca anlık ölüm

hızlarının monoton olmadığı bu modelde bireyin sağlık durumunun iyileştirilebilmesi ve ölüm hızının yavaşlatılabilmesi ihtimali de değerlendirilmektedir.

Bu tezde, bireylerin marjinal yaşam olasılıkları oluşturulan stokastik ölümlülük modeline göre analitik olarak elde edilmiştir. Aynı zamanda bireyin eşiyle paylaştığı ortak sürecin bağımsız duruma kıyasla ölüm gelişimi üzerindeki etkisi gösterilmiştir. Çoklu yaşam durumunda birleşik yaşam olasılıkları, bireylerin gelecek yaşam sürelerinin bağımlı ve bağımsız olduğu her iki durum için hesaplanmıştır. Bağımlı durumda bireylerin birlikte yaşamaları olasılığı bağımsız duruma göre daha yüksek bulunmuştur. Ardından elde edilen olasılık değerleri kullanılarak çoklu hayat ürünlerine ilişkin net tek prim ve net yıllık prim tutarları hesaplanmıştır. Bağımlılığın birleşik ve son yaşayan durumda oluşturulan hayat ürünleri üzerine etkisinin farklı olduğu görülmüştür. Birleşik yaşam durumunda bireylerin gelecek yaşam süreleri bağımlı olduğunda hayat annüitelerinin net tek primleri bağımsız duruma göre daha yüksek sonuçlar vermiştir. Tersine, son yaşayan durumunda ise bağımsızlık durumunda hayat annüitelerinin net tek primleri bağımlılık durumuna göre daha yüksek elde edilmiştir. Bireylerin gelecek yaşam süreleri bağımlı varsayıldığında, birleşik yaşayanda hayat sigortalarının net tek primlerinin bağımsız duruma göre daha düşük, son yaşayanda ise daha yüksek olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Dolayısıyla, bireylerin gelecek yaşam sürelerinin bağımlı kabul edilmesi, birleşik yaşam durumunda net yıllık prim tutarının azalmasına, son yaşayan durumunda ise net yıllık prim tutarının artmasına neden olmuştur. Sonuç olarak, bireyler arasındaki bağımlılığın aktüeryal hesaplamalara yansıtılması ödenecek net yıllık prim tutarını etkilemekte olup bu değerlendirmenin sigorta şirketleri açısından önemli olduğu düşünülmektedir.

Bu çalışma risk ve sigorta alanında potansiyel uygulamalara sahiptir. Model birleşik yaşamların ölümlülüğündeki eğilimlere dikkat çektiğinden hane halkının finansal yönetimi ve emeklilik planlamasına rehberlik etmek için kullanılabilir. İlerleyen zamanlarda modele kohort etkisi ve çiftler arasındaki yaş farkı dahil edilip bu faktörlerin sonuçları nasıl değiştirdiği araştırılabilir. Çiftler üzerinden yapılan modelleme hane halkının birden fazla üyesi arasındaki bağımlılığı tanımlamak için genişletilebilir. Ayrıca, oluşturulan stokastik model hayat dışı sigortalarında karşılaşılabilecek bağımlılık durumlarını modellemek amacıyla uygulanabilir. Bu da sigorta şirketlerinin uygun fiyatlandırma stratejileri belirlemesine yardımcı olmaktadır.

## 7. KAYNAKLAR

- [1] Zhang, Y. and Brockett, P., Modeling Stochastic Sortality for Joint Lives Through Subordinators, *Insurance: Mathematics and Economics*, 95, 166-172, **2020**.
- [2] Bowers, N. L., Gerber, H. U., Hickman, J. C., Jones, D. A. and Nesbitt, C. J., *Actuarial Mathematics*, The Society of Actuaries, New York, **1997**.
- [3] Spreeuw, J., Types of Dependence and Time-dependent Association Between Two Lifetimes in Single Parameter Copula Models. *Scandinavian Actuarial Journal*, (5), 286–309, **2006**.
- [4] Henshaw, K., Constantinescu, C. and Menoukeu Pamen, O., Stochastic Mortality Modelling for Dependent Coupled Lives, *Risks*, 8(1), 17, **2020**.
- [5] Ragnar, N., Actuarial Analysis of Dependent Lives, *Bulletin of the Swiss Association of Actuaries*, 2, 243–254, **1989**.
- [6] Parkes, C. M., Benjamin B. and Fitzgerald, R. G., Broken Heart: A Statistical Study of Increased Mortality Among Widowers, *British Medical Journal*, 1(5646), 740-743, **1969**.
- [7] Ward, A., Mortality of Bereavement, *British Medical Journal*, 1(6011), 700-702, **1976**.
- [8] Jagger, C. and Sutton, C. J., Death After Marital Bereavement-is the Risk Increased?, *Statistics in Medicine*, 10(3), 395-404, **1991**.
- [9] Hougaard, P., Harvald, B. and Holm, N. V., Measuring the Similarities Between the Lifetimes of Adult Danish Twins Born Between 1881–1930, *Journal of the American Statistical Association*, 87(417), 17-24, **1992**.
- [10] Sklar, A., Fonctions de repartition a n dimensions et leurs marges, *Public Institution of Statistical University*, 8, 229-231, **1959**.
- [11] Frees, E. W., Carriere, J. F. and Valdez E., Annuity Valuation With Dependent Mortality, *The Journal of Risk and Insurance*, 63(2), 229-261, **1996**.
- [12] Carriere, J. F., Bivariate Survival Models for Coupled Lives, *Scandinavian Actuarial Journal*, 2000(1), 17–32, **2000**.

- [13] Youn, H. and Shemyakin, A., Pricing Practices for Joint Last Survivor Insurance, Actuarial Research Clearing House, 1(2-3), **2001**.
- [14] Dufresne, F., Hashorva, E., Ratovomirija, G. and Toukourou, Y., On Age Difference in Joint Lifetime Modelling with Life Insurance Annuity Applications, Annals of Actuarial Science, 12(2), 350–371, **2018**.
- [15] Spreeuw, J. and Wang, X., Modelling the Short-term Dependence Between Two Remaining Lifetimes, Cass Business School Discussion Paper 2(3), **2008**.
- [16] Kara, E. K., On Actuarial Premiums For Joint Last Survivor Life Insurance Based On Asymmetric Dependent Lifetimes. Current Academic Studies in Science and Mathematics Sciences-II, D. E. Yıldız, E. Y. Özkan (Eds), Livre de Lyon, France 33, **2021**.
- [17] Kara, E. K., On the Impact of Asymmetric Dependence in the Actuarial Pricing of Joint Life Insurance Policies, Sains Malaysiana, 51(11), 3807-3817, **2022**.
- [18] Luciano, E., Spreeuw, J. and Vigna, E., Spouses Dependence Across Generations and Pricing Impact on Reversionary Annuities., Risks, 4 (2), **2016**.
- [19] Bakar, Ö., Büyükyazıcı, M., Stochastic Analysis of Longevity Risk in Dependent Multiple Life Annuities, Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences, 40(2), 235-242, **2022**.
- [20] Marshall, A. W. and Olkin, I., A Multivariate Exponential Distribution, Journal of the American Statistical Association, 62, 30–44, **1967**.
- [21] Gobbi, F., Kolev, N. And Mulinacci, S., Joint Life Insurance Pricing Using Extended Marshall–Olkin Models, ASTIN Bulletin: The Journal of the International Actuarial Association, 49 (2), 409–432, **2019**.
- [22] Pinto, J. and Kolev, N., Extended Marshall–Olkin Model and its Dual Version, In Marshall Olkin Distributions-Advances in Theory and Applications, Springer, Italy, 87–113, **2015**.
- [23] Liu, X., Stochastic Mortality Modelling, PhD Thesis, Department of Statistics University of Toronto, Ontario, **2008**.
- [24] De Moivre, A., Annuities upon lives: or, the valuation of annuities upon any number of lives; as also, of reversions, Vol. 1, William Person, London, **1725**.



- [25] Gompertz, B., On the Nature of the Function Expressive of the Law of Human Mortality, and on a New Mode of Determining the value of Life Contingencies, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 115, 513–585, **1825**.
- [26] Brockett, P. L., General Bivariate Makeham Laws, *Scandinavian Actuarial Journal*, 1984(3), 150–156, **1984**.
- [27] Gavrilova, N. S., Gavrilov, L. A., Ageing and Longevity: Mortality Laws and Mortality Forecasts for Ageing Population, *Demografie*, 53(2), 109–128, **2011**.
- [28] Lee, R. D. and Carter, L. R., Modelling and Forecasting U.S. Mortality, *Journal of the American Statistical Association*, 419, 659–675, **1992**.
- [29] Kul, F., Sucu, M., Türkiye Nüfusu İçin Stokastik Ölümlülük Modelleri, *Nüfusbilim Dergisi*, 34(1), 31–50, **2012**.
- [30] Milevsky, M. A., Promislow, S. D., Mortality Derivatives and the Option to Annuitise, *Insurance: Mathematics and Economics*, 29(3), 299–318, **2001**.
- [31] Artzner, P. and Delbaen, F., Default Risk Insurance and Incomplete Markets, *Mathematical Finance*, 5(3), 187–195, **1995**.
- [32] Dahl, M., Stochastic Mortality in Life Insurance: Market Reserves and Mortality-linked Insurance Contracts, *Insurance: Mathematics and Economics*, 35(1), 113–136, **2004**.
- [33] Biffis, E., Affine Processes for Dynamic Mortality and Actuarial Valuations, *Insurance: Mathematics and Economics*, 37(3), 443–468, **2005**.
- [34] Denuit, M. and Devolder, P. Continuous time stochastic mortality and securitization of longevity risk, ACTU Working Paper, No: 2006-02, **2006**.
- [35] Luciano, E., Vigna, E., Non Mean Reverting Affine Processes for Stochastic Mortality, ICER working paper and Proceedings of the XVth International AFIR Colloquium, Zurich, **2005**.
- [36] Schrage, D.F., Affine Stochastic Mortality, *Insurance: Mathematics and Economics*, 38(1), 81–97, **2006**.
- [37] Hull, J., White, A., Pricing Interest-rate Derivative Securities, *The Review of Financial Studies*, 3(4), 573–592, **1990**.

- [38] Cairns, A. J. G., Blake, D. and Dowd, K., Pricing Death: Framework for the Valuation and Securitization of Mortality Risk, *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 36(1), 79–120, **2006**.
- [39] Lorenzo, E. D., Sibillo, M., & Tessitore, G., A Stochastic Proportional Hazard Model for the Force of Mortality. *Journal of Forecasting*, 25(7), 529-536, **2006**.
- [40] Cox, D. R., Some Statistical Methods Connected with Series of Events, *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 17(2), 129-157, **1955**.
- [41] Bartlett, M. S., The Spectral Analysis of Point Processes, *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 25(2), 264-281, **1963**.
- [42] Luciano, E., Spreeuw, J., & Vigna, E., Modeling Stochastic Mortality for Dependent Lives, *Insurance: Mathematics and Economics*, 43(2), 234–244, **2008**.
- [43] Bochner, S., *Harmonic Analysis and the Theory of Probability*, Berkeley: University of California Press, **1955**.
- [44] Clark, P. K., A Subordinated Stochastic Process with Finite Variance for Speculative Prices, *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 41, 135-155, **1973**.
- [45] Jevtić, P. and Hurd T. R., The Joint Mortality of Couples in Continuous Time, *Insurance: Mathematics and Economics*, 75, 90–97, **2017**.
- [46] Walter, O., Patrick, W., Ottieno J. and Carolyne O., Positive Stable Frailty Approach in the Construction of Dependence Life-Tables, *Open Journal of Statistics*, 11(4), 506–523, **2021**.
- [47] Lawler, G. F., *Introduction to Stochastic Processes*, Vol.1, CRC Press, **2006**.
- [48] Ross, S. M., *Stochastic Processes*, Vol. 2, John Wiley & Sons, **2008**.
- [49] Tankov, P., *Financial Modelling with Jump Processes*, Chapman and Hall/CRC Press, New York, **2003**.
- [50] Bertoin, J., *Lévy Processes*, Vol. 121, Cambridge University Press, **1996**.
- [51] Kyprianou, A. E., *Fluctuations of Lévy Processes with Applications: Introductory Lectures*, Springer Science & Business Media, **2014**.
- [52] Applebaum, D., *Lévy Processes and Stochastic Calculus*, Cambridge University Press, **2009**.

- [53] Li, J., Li, L., & Zhang, G., Pure Jump Models for Pricing and Hedging VIX Derivatives, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 74, 28-55, **2017**.
- [54] Matsuda, K., Introduction to the Mathematics of Lévy Processes, PhD Thesis, Department of Economics the City University of New York, New York, **2005**.
- [55] Veraart, A. E. and Winkel M., Time Change, *Encyclopedia of Quantitative Finance*, 4, 1812-1816, **2010**.
- [56] Hurd, T. R., Credit Risk Modeling Using Time-Changed Brownian Motion, *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 12(08), 1213-1230, **2009**.
- [57] Grandell, J., Doubly Stochastic Poisson Processes, Vol. 1, Springer, New York, **1976**.
- [58] Lando, D., On Cox Processes and Credit Risky Securities, *Review of Derivatives Research*, 2, 99-120, **1998**.
- [59] Vasicek, O., An Equilibrium Characterization of the Term Structure, *Journal of Financial Econometrics*, 5(2), 177-188, **1977**.
- [60] Cox, C., Ingersoll, E. J. and Ross A. S., A Theory of the Term Structure of Interest Rates, *Econometrica*, 53(2), 385-407, **1985**.
- [61] Uhlenbeck, G. E., & Ornstein, L. S., On the Theory of the Brownian Motion, *Physical Review*, 36(5), 823-841, **1930**.
- [62] Bachelier, Louis (1900), The Theory of Speculation, *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 3(17), 21–86, **1900**.
- [63] Schrödinger, E., Zur Theorie der Fall- und Steigversuche an Teilchen mit Brownscher Bewegung (On the Theory of Fall- and Rise Experiments on Particles with Brownian Motion), *Physikalische Zeitschrift*, 16, 289–295, **1915**.
- [64] Smoluchowski, M., Notiz über die Berechnung der Brownschen Molekularbewegung bei der Ehrenhaft-Millikanschen Versuchsanordnung (Note on the Calculation of Brownian Molecular Motion in the Ehrenhaft-Millikan Experimental Setup), *Physikalische Zeitschrift*, 16 (17-18), 318–321, **1915**.
- [65] Chhikara, R. S., Folks, J. L., *The Inverse Gaussian Distribution: Theory, Methodology and Applications*, Marcel Dekker, New York, **1989**.

- [66] Barndorff-Nielsen, O. E. Normal Inverse Gaussian Distributions and Stochastic Volatility Modelling, *Scandinavian Journal of Statistics*, 24(1), 1-13, **1997**.
- [67] Barndorff-Nielsen, O. E., Normal Inverse Gaussian Processes and the Modeling of Stock Returns, PhD Thesis, University of Aarhus, Department of Theoretical Statistics, Institute. of Mathematics, Denmark, **1995**.
- [68] Rydberg, T. H., A Note on the Existence of Unique Equivalent Martingale Measures in a Markovian Setting, *Finance and Stochastics*. 1, 251–257, **1997**.
- [69] Aguilar, J. P. Explicit Option Valuation in the Exponential NIG Model, *Quantitative Finance*, 21(8), 1281-1299, **2021**.
- [70] Barndorff-Nielsen, O. E., Exponentially Decreasing Distributions for the Logarithm of Particle Size, *Proceedings of the Royal Society of London*, 353(1674), 401–419, **1977**.
- [71] Mitchell, D., Brockett, P. L., Mendoza-Arriaga, R., Muthuraman, K., Credit Risk Modeling Using Time-Changed Brownian Motion, *Insurance: Mathematics and Economics*, 52, 275–285, **2013**.
- [72] Wang, C. W., Huang, H. C., Liu, I. C., A Quantitative Comparison of the Lee–Carter Model under Different Types of Non-Gaussian Innovations, *The Geneva Papers on Risk Insurance - Issues and Practice*, 36, 675–696, **2011**.
- [73] Luciano, E., Semeraro, P., Multivariate Time Changes for Lévy Asset Models: Characterization and Calibration, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 233(8), 1937–1953, **2010**.
- [74] Dickson, D. C., Hardy, M. R., Hardy, M., & Waters, H. R., *Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks*. Cambridge University Press, **2013**.
- [75] Menge, W. O. and Fischer, C. H., *The Mathematics of Life Insurance: A Practical Guide to the Application of Insurance Principles*, The MacMillan Company, New York, **1965**.
- [76] Kaplan, E. L. and Meier, P., Nonparametric Estimation from Incomplete Observations, *Journal of the American Statistical Association*, 53(282), 457-481, **1958**.

- [77] Lee, E. T. and Wang, J., *Statistical Methods for Survival Data Analysis*, Vol. 476, John Wiley & Sons, **2003**.
- [78] Dabrowska, D. M., Kaplan–Meier Estimate on the Plane, *The Annals of Statistics*, 16(4), 1475–1489, **1988**.
- [79] Austad, S. N., Why Women Live Longer than Men: Sex Differences in Longevity, *Gender Medicine*, 3(2), 79-92, **2006**.