

**NEWTON METODUNDAN ELDE EDİLEN RASYONEL
FONKSİYONLARIN DİNAMİĞİ VE GEOMETRİSİ**

**THE GEOMETRY AND THE DYNAMICS OF RATIONAL
FUNCTIONS OBTAINED FROM NEWTON'S METHOD**

ABDÜSSELAM YÜCEER

DOÇ.DR. AYŞE ALTIN

Tez Danışmanı

Hacettepe Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim-Öğretim Sınav Yönetmeliğinin

Matematik Anabilim Dalı için Öngördüğü

YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırlanmıştır.

2017

**THE GEOMETRY AND THE DYNAMICS OF RATIONAL
FUNCTIONS OBTAINED FROM NEWTON'S METHOD**

**NEWTON METODUNDAN ELDE EDİLEN RASYONEL
FONKSİYONLARIN DİNAMİĞİ VE GEOMETRİSİ**

ABDÜSSELAM YÜCEER

DOÇ.DR AYŞE ALTIN

Supervisor

Submitted to Graduate School of Science and Engineering of Hacettepe University
as a Partial Fulfillment to the Requirement
for the Award of the Degree of Master of Science
in Mathematics

2017

ABDÜSSELAM YÜCEER' in hazırladığı “**Newton Metodundan Elde Edilen Rasyonel Fonksiyonların Dinamiği ve Geometrisi**” adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **MATEMATİK ANABİLİM DALI'** nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Yusuf YAYLI

Başkan



.....

Doç. Dr. Ayşe ALTIN

Danışman



.....

Prof. Dr. Adnan TERCAN

Üye



.....

Doç. Dr. İsmail GÖK


Üye



.....

Doç. Dr. Canan KÖROĞLU

Üye



.....

Bu tez Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından **Yüksek lisans tezi** olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. Menemşe GÜMÜŞDERELİOĞLU

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

YAYINLAMA VE FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI BEYANI

Enstitü tarafından onaylanan lisansüstü tezimin/raporumun tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı (kağıt) ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda verilen koşullarla kullanıma açma iznini Hacettepe üniversitesine verdiğimi bildiririm. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet haklarım bende kalacak, tezimin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanım hakları bana ait olacaktır.

Tezin kendi orijinal çalışmam olduğunu, başkalarının haklarını ihlal etmediğimi ve tezimin tek yetkili sahibi olduğumu beyan ve taahhüt ederim. Tezimde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanması zorunlu metinlerin yazılı izin alarak kullandığımı ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederim.

- Tezimin/Raporumun tamamı dünya çapında erişime açılabilir ve bir kısmı veya tamamının fotokopisi alınabilir.**

(Bu seçenkle teziniz arama motorlarında indekslenebilecek, daha sonra tezinizin erişim statüsünün değiştirilmesini talep etmeniz ve kütüphane bu talebinizi yerine getirirse bile, tezinin arama motorlarının önbelleklerinde kalmaya devam edebilecektir.)

- Tezimin/Raporumun tarihine kadar erişime açılmasını ve fotokopi alınmasını (İç Kapak, Özet, İçindekiler ve Kaynakça hariç) istemiyorum.**

(Bu sürenin sonunda uzatma için başvuruda bulunmadığım takdirde, tezimin/raporumun tamamı her yerden erişime açılabilir, kaynak gösterilmek şartıyla bir kısmı ve ya tamamının fotokopisi alınabilir)

- Tezimin/Raporumun tarihine kadar erişime açılmasını istemiyorum, ancak kaynak gösterilmek şartıyla bir kısmı veya tamamının fotokopisinin alınmasını onaylıyorum.**

- Serbest Seçenek/Yazarın Seçimi**

27 /03/2017

Abdüsselam YÜCEER

ETİK

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada,

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan bütün verilerde herhangi bir tafrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversitede veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

23.03.2017



ABDÜSSELAM YÜCEER

ÖZET

NEWTON METODUNDAN ELDE EDİLEN RASYONEL FONKSİYONLARIN DİNAMİĞİ VE GEOMETRİSİ

Abdüsselam YÜCEER

Yüksek Lisans, Matematik Bölümü

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Ayşe ALTIN

Mart 2017, 50 sayfa

Bu çalışmada kompleks polinomların bütün köklerini Newton metodundan faydalanarak bulmak için yeni bir metot tanıtılmıştır. Benzer yöntemlerde Sutherland 1989'da $\frac{\pi^2}{4}d^{\frac{3}{2}}$ mertebesinde Hubbard, Schleicher ve Sutherland 2001'de $1,1d(\log d)^2$ mertebesinde sonuçlar elde etmişlerdir. Bu çalışmada elde edilen sonuç ise en kötü durumda $\frac{d^2}{2}$ şeklindedir.

Polinomun kökleri Newton fonksiyonunun sabit noktaları olur. Ayrıca bu sabit noktalar çekici sabit noktadır. Her sabit nokta komşuluğunda kendine yakınsayan çekici havzaları vardır. Çekici bölgedeki herhangi bir noktaya Newton metodu iterasyonu uygulanırsa Newton fonksiyonunun sabit noktası, yani polinomun kökü bulunur. Her farklı

çekici sabit noktanın çekici havzasından en az bir noktaya Newton iterasyonu uygulanırsa polinomun bütün köklerine ulaşılır.

Bunu başarmak için Sutherland bir çember üzerine $\frac{\pi^2}{4}d^{\frac{3}{2}}$ adet noktayı eşit aralıklı olacak şekilde dağıtarak bütün çekici havzalara en az bir nokta düşeceğini göstermiştir. Hubbard, Schleicher ve Sutherland benzer bir metot kullanarak $1,1d(\log d)^2$ adet noktayı eşit aralıklı olacak şekilde çemberler ailesi üzerine dağıtarak bütün köklerin çekici havzalarına en az bir nokta düşeceğini göstermiştir.

Bu çalışmada polinomun köklerinin birim çemberin içerisinde olduğu farz edilecektir. Şayet değilse afin dönüşümü ile kökler birim çember içine toplanabilir. Kökleri bulmak için önce d nokta birim çember üzerine eşit aralıklarla dağıtılır ve bu noktalara Newton metodu uygulanır. Bütün kökler bulunmaz ise dağıtılan noktalar döndürülür. Her döndürme işleminin ardından noktalara tekrar Newton metodu uygulanır. Döndürme işlemi ile her kökün çekici havzasına en az bir nokta düşer. Bu noktalara Newton metodu uygulanırsa polinomun köklerine yakınsar. Dolayısıyla bütün kökler bulunur.

Bu yönteme göre en iyi durumda d nokta ile bütün kökler bulunur. En kötü durumda $\frac{d^2}{2}$ nokta ile bütün kökler bulunur.

Anahtar Kelimeler: Newton Metodu, Modül, Polinom kökleri, Çekici havza.

ABSTRACT

THE DYNAMICS AND THE GEOMETRY OF RATIONAL FUNCTIONS OBTAINED FROM NEWTON METHOD

Abdüsselam YÜCEER

Master Degree, Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ayşe ALTIN

Mart 2017, 50 pages

In this study a new iterative method is introduced, aims to find all roots of complex polynomials with help of Newton's method. There are methods similar to this one, their degrees are $\frac{\pi^2}{4}d^{\frac{3}{2}}$ introduced by Sutherland in 1989 and $1,1d(\log d)^2$ which is introduced by Hubbard, Schleicher and Sutherland in 2001. The worst case result obtained in this paper is $\frac{d^2}{2}$.

The root of polynomial is fixed point of Newton function. Moreover, these fixed points are attractive fixed points. There are attractive basins surrounding every attractive fixed points. If Newton's Method is applied to any point in the attractive basin, the fixed point of Newton's map or root of polynomial will be found. If at least one point which belongs to attractive basins of every different fixed points then Newton's method will be applied to these points one could reach all roots of polynomial.

In order to achieve this Sutherland distribute $\frac{\pi^2}{4}d^{\frac{3}{2}}$ points on the disc with equal distance between them. Then he showed at least one point fall in all attractive basins.

Hubbard, Schleicher and Sutherland used similar method that they distribute $1,1d(\log d)^2$ points on circles families with equal diatances then they showed at least one point will fall on the all attractive basins of different roots.

In this thesis, we assume that all roots of polynomial is in the unit disc. Unless with an affine transformation all roots can be collected in the unit disc. In order to find roots firstly d points distributed on the unit disc. Then Newton's method is applied to them. If all roots is not found then the distributed points will be rotated. After every rotation Newton's method will be applied to these points again. With rotation at least one point fall on the attractive basin of every roots. If Newton's method is applied to these points, they converge to root of polynomial. Therefore, all roots are found.

According to this method in the best case with d points all roots can be found and in the worst case with $\frac{d^2}{2}$ points all roots can be found.

Key Words: Newton's Method, Modulus, Roots of Polynomials, Attractive Basin.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmam süresince bana yardımlarını esirgemeyen, sürekli destek olan değerli tez danışmanı hocam Sayın Doç. Dr. Ayşe ALTIN'a,

Tez çalışmam boyunca yönlendirmeleriyle bana destek olan, değerli hocam Sayın Figen ÇİLİNGİR'e,

Bugüne kadar yaşamımın her döneminde olduğu gibi Yüksek lisans boyunca da maddi-manevi anlamda hep yanımda olan ve haklarını hiçbir zaman ödeyemeyeceğim babam İsa YÜCEER, annem Zeliha YÜCEER, abilerim Muhammed YÜCEER, Abdalbaki YÜCEER ve ablam Fatıma YAVÇIN'a;

En içten teşekkürlerimi sunmayı borç bilirim.

Abdüsselam YÜCEER

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR.....	v
İÇİNDEKİLER.....	vi
SİMGELER DİZİNİ.....	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	viii
1. GİRİŞ.....	1
1.1 Kompleks Fonksiyonların Dinamiği.....	3
1.2 Konformal Fonksiyonların Geometrisi.....	13
1.3 Newton Metodunun Geometrisi.....	18
2. İTERATİF YÖNTEM İLE KOMPLEKS POLİNOMUN BÜTÜN KÖKLERİNİ BULMA.....	23
2.1 Uygulamalar.....	30
3. SONUÇ.....	46
KAYNAKLAR.....	48
ÖZGEÇMİŞ.....	50
CURRICULUM VITAE.....	51

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler

$\hat{\mathbb{C}}$	Riemann küresi
\mathbb{C}	Kompleks düzlem
∂	Sınır operatorü
Δ	Birim disk
$A(z_0)$	z_0 noktasının çekici havzası
$K(f)$	f fonksiyonu altında dolu Julia kümesi
$l_p(\gamma)$	γ eğrisinin p metriğine göre uzunluğu
$A_p(D)$	D bölgesinin p metriğine göre alanı
$L_p(\Gamma)$	Γ eğri ailesinin p metriğine göre uzunluğu
$m(D, \Gamma)$	D bölgesindeki Γ eğri ailesinin modülü
$\lambda(D, \Gamma)$	D bölgesindeki Γ eğri ailesinin extremal uzunluğu
d	Polinomun derecesi

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 1: $f(z) = z^2 - 1,25$ için Julia kümesi.....	7
Şekil 2: $f(z) = z^2 - 0,305 - 0,5134i$ için Julia kümesi.....	7
Şekil 3: $f(z) = z^2 - 1,005 - 0,4134i$ için Julia kümesi.....	8
Şekil 4: Mandelbrot kümesi.....	10
Şekil 5: $P(z) = z^6 - 3z^4 - z^2 + 3$ polinomu için Newton grafiği.....	11
Şekil 6: $f(z) = z^3 - 1$ için Newton Grafiği.....	12
Şekil 7: d noktanın birim disk üzerine eşit aralıklı dağıtılması.....	25
Şekil 8: x_i noktasının dönme işlemi ve oluşan yeni D_i^j bölgesi.....	28
Şekil 9: 5. Derece $P(z)$ polinomunun Newton grafiği.....	30
Şekil 10: 30. Derece $P(z)$ polinomunun Newton grafiği.....	33
Şekil 11: 7. Derece $P(z)$ polinomunun Newton grafiği.....	42

1.GİRİŞ

Kompleks dinamik, kompleks fonksiyonların iterasyonlarının incelenmesiyle ortaya çıkmıştır. Fonksiyonların bazı noktalar için yakınsak veya periyodik davrandığı ancak bazı noktalarda ise hareketinin tahmin edilemeyecek şekilde davrandığı görülmüştür. Kompleks dinamik, bu kararlı ve kaotik davranan noktaların kümesini ve onların özelliklerini inceler.

Kompleks fonksiyonların dinamiği ilk olarak Newton metodunun kompleks fonksiyonlara uygulanmasının incelenmesiyle ortaya çıkmıştır. Bu konuda ilk çalışmalar Schröder tarafından 1870-1871 ve Cayley tarafından 1879'da yapılmıştır [1]. Newton metodu fonksiyonların kökünü bulmak için yaygın kullanılan yaklaşım metotlarından biridir. Newton metodu ile hem reel hem de kompleks fonksiyonların köklerine herhangi bir başlangıç değeri seçimi ile fonksiyonun köküne yakınsanamayabilir.

Polinomlara Newton metodu uygulanınca rasyonel fonksiyonlar elde edilir. Schröder ve Cayley kompleks polinomlara Newton metodu uygulayarak elde edilen rasyonel fonksiyonun dinamiğini ilk inceleyenlerdendir. Newton metodunun reel fonksiyonlar için belirli noktalarda yakınsak davranmadığı biliniyordu. Schröder, Newton metodunun kompleks polinomlardaki yakınsaklığını incelemiştir.

Schröder, polinomun kökünün Newton metot altında çekici(attractive) sabit nokta olduğunu ve dolayısıyla komşuluğunun kendisine yakınsayacağını göstermiştir. Schröder kompleks kuadratik polinomların Newton metodu altındaki davranışlarını incelemiş ve y eksenine paralel bir doğru üzerinde yakınsak davranmadığını, doğrunun sağındaki bölgeye ait noktaların bir köke, doğrunun solundaki bölgeye ait noktaların diğer köke yakınsadığını göstermiştir. Ayrıca; Schröder, kompleks dinamikte fazlasıyla kullanılan eşlenik fonksiyonları tanıtmıştır [1].

Kuadratik polinomlar için Newton metodu, sadece y eksenine paralel bir doğru üzerinde kaotik davranır. Ancak, üç ve daha yüksek dereceli polinomların Newton metodunun oluşturduğu rasyonel fonksiyonun dinamiği oldukça karmaşıktır. Ayrıca bu rasyonel fonksiyonun grafiği bir fraktal üretir. Schröder ve Cayley, Newton metodunun dinamiğini üç ve daha yüksek dereceli polinomlar için incelememişlerdir. Fatou ve Julia $f(z) = z^3 - 1$ polinomuna Newton metodunu uygulamış ve Julia kümesinin düzlemi sonsuz parçaya böldüğünü göstermiştir [1].

Fatou ve Julia daha çok kompleks fonksiyonların global dinamiği üzerine çalışmışlardır. Kompleks fonksiyonların iterasyonunu belirlerken Montel'in normal fonksiyon aileleri teoreminden yararlanmışlardır. Fatou ve Julia, fonksiyonun iterasyonların oluşturduğu ailenin normal olup olmamasına göre, kompleks düzlemi ikiye ayırmıştır. Normal olmayan ailelerin oluşturduğu kümeye Julia kümesi tümleyenine ise Fatou kümesi denir [1].

Kompleks fonksiyonların dinamiği, kritik noktalar ve sabit noktalar ile belirlendiğinden araştırmalar bu yönde olmuştur. Schröder, Leau, Grevy, Böttcher sabit noktaların komşuluğunu yani; kompleks fonksiyonların yerel dinamiği üzerine çalışmışlardır [1].

Kompleks fonksiyonların dinamiğindeki en önemli gelişmelerden biride 1982'de Sullivan'ın Fatou kümesindeki bölgeleri sınıflandırmasıdır [2]. Sullivan, Fatou kümesindeki bölgelerin preperiyodik olduğunu göstermiştir [3].

Lineer olmayan kompleks fonksiyonların iterasyonu genellikle fraktal yapılar üretir. İlk fraktal yapılar Cantor kümesi(1878), Peano(1890) Koch(1904) eğrileri gibi tanımlanan eğriler olmasına rağmen *fraktal* ismini Benoit Mandelbrot Latince dilinde "kırılmış" anlamına gelen "*fractus*" kelimesinden türeterek koymuştur. Mandelbrot, fraktalları tamsayı olmayan Hausdorff boyutu olan kümeler olarak tanımlar [4]. Fraktalların en temel özelliği kendine benzerliktir. Kendine benzerlik, yapının ölçek değişimi altında değişmez kalmasıdır [5]. Bir fraktal büyütülünce veya küçültülünce yine aynı şekil elde edilir.

İlk tanımlanan fraktal yapılar ve kompleks fonksiyonların dinamiği kompleks yapıda olduğu için uzun süre incelenmemiş "*canavar*" veya "*patolojik*" olarak adlandırılmışlardır [4]. Bilgisayar grafiklerinin gelişmesiyle birlikte kompleks fonksiyonların grafikleri görselleştirilebildiğinden bu konuya olan ilgi günden güne artmıştır.

Fonksiyonların köklerini bulma problemi çok eski bir problem olup birçok çözüm yöntemi sunulmuştur. Bu metotlardan biride Newton metodudur. Ancak Newton metodu türevin sıfır olduğu noktalarda sonuç vermez. Newton metodu ile köklere yakınsamak için iterasyona başlanılacak başlangıç noktasının seçimi çok önemlidir. Çünkü; Newton metodu her başlangıç noktası için yakınsak değildir. Her kökün komşuluğunda iterasyon altında o

köke yakınsayan belirli bir bölge vardır. Başlangıç noktası olarak bu bölgeye ait noktalar seçilmelidir.

Bu çalışmada amaç en küçük kardinaliteye sahip küme kullanarak, kompleks polinomun bütün köklerine Newton metodu yardımıyla ulaşmaktır. Bu durumda her kökün yakınsaklık bölgesinde bu başlangıç kümesine ait en az bir nokta bulunmalıdır.

Newton metodu yardımıyla polinomun bütün köklerini bulmak için daha önce bazı yöntemler verilmiştir. d polinomun derecesi olmak üzere Sutherland 1989'da $\frac{\pi^2}{4}d^{\frac{3}{2}}$ noktayı çember üzerine Hubbard, Schleicher ve Sutherland 2001'de $1,1d(\log d)^2$ noktayı çemberler aileleri üzerine eşit aralıklarla dağıtarak ve bu noktalara Newton metodunu uygulayarak polinomun bütün köklerinin bulunacağını göstermişlerdir [6,7].

Bu tez çalışmasında tanıtılacak yöntemde iteratif bir metot kullanılacaktır. Bu yönteme göre öncelikle d nokta düzleme dağıtılır ve bu noktalara Newton metodu uygulanır. Bütün kökler bulunmaz ise bütün kökleri bulana kadar noktalar belirli açılarla döndürülür ve döndürülen noktalara tekrar Newton metodu uygulanır. Bu yöntem ile en iyi durumda d nokta ile bütün kökler bulunur. En iyi durum ilk dağıtılan noktalara Newton metodu uygulanmasıyla bütün köklerin bulunduğu durumdur. En kötü durumda $\frac{d^2}{2}$ nokta ile bütün kökler bulunur. En kötü durum, ilk dağıtılan noktaları ardışık iki nokta arasını tamamen kapatacak kadar dönme işleminin yapıldığı durumdur. Bu çalışmadaki çizimler ve nümerik hesaplar için Wolfram Mathematica 8 programı kullanılmıştır.

1.1. Kompleks Fonksiyonların Dinamiği

Dinamik sistemler, bir sistemdeki değişimin zamana bağlı olarak incelendiği sistemlerdir. Dinamik sistemlerin amacı, incelediği sistemin davranışını belirlemektir ve zamanla nasıl değişeceğini tahmin etmektir. Dinamik sistem bazen kararlı davranır ve bu durumda sistem tahmin edilebilir. Dolayısıyla, herhangi bir zamanda sistemin faz değişkenleri bulunabilir. Ancak bazı durumlarda kaotik davranabilir. Bu durumda dinamik sistem tahmin edilemezdir [8].

Zamanla sistemdeki değişim sürekli modellenirse *sürekli dinamik sistem* denir. Diferansiyel denklemler ile ifade edilir. Kaotik davranan Lorenz, Rössler çekicileri sürekli dinamik sistemlerin birer modelidir. Zamana bağlı değişim belli zaman aralıkları için

modellenirse *ayrık dinamik sistem* denir. Fark denklemleri ile modellenir. Kaotik davranan ayrık dinamik sistemlere lojistik denklemi, Henon fonksiyonu ve kompleks fonksiyonların iterasyonu örnek olarak verilebilir. Bu çalışmada ayrık dinamik sistemler ile çalışılacaktır [9].

Tanım 1: \wp , U bölgesinde tanımlı fonksiyon ailesi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ bulunabilir ki $z, z_0 \in U$ olmak üzere $d(z, z_0) < \delta$ iken $d(f_i(z), f_i(z_0)) < \varepsilon$ şartı $\forall f_i \in \wp$ için sağlansın. Bu durumda \wp fonksiyon ailesine U bölgesinde *eşsüreklili* denir [10].

Tanım 2: U , $\hat{\mathbb{C}}$ 'de açık küme ve \wp , U bölgesinde tanımlı holomorfik fonksiyon ailesi olsun. \wp ailesinin her f_n dizisinin, U bölgesinin kompakt alt kümesinde düzgün yakınsayan bir alt dizisi veya sonsuza ıraksayan bir alt dizisi bulunabiliyor ise \wp fonksiyon ailesi *normaldir* [11]. Eğer bir z noktasının komşuluğunda $f^{\circ n}$ fonksiyon ailesi normal ise z noktasına *kararlı nokta* denir [12].

Lemma 1: Arzela–Ascoli teoreminden \wp fonksiyon ailesinin normal olması için gerek ve yeter şart eşsüreklili olmasıdır [11].

Montel Normallik Kriteri: $a, b, c \in \hat{\mathbb{C}}$ olmak üzere herhangi bir D bölgesinden $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{a, b, c\}$ bölgesine tanımlı her analitik fonksiyon ailesi normaldir [11].

Uniformizasyon Teoremi: Her basit bağlantılı Riemann yüzeyi $\hat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}$ veya birim diske konformal denktir [13].

Tanım 3: Kompleks rasyonel fonksiyon Riemann küresinden Riemann küresine tanımlı holomorfik fonksiyonlardır. $P(z), Q(z)$ polinomlar olmak üzere rasyonel fonksiyon

$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, $Q(z) \neq 0$ şeklinde tanımlı olup rasyonel fonksiyonun derecesi $\max\{\deg P(z), \deg Q(z)\}$ olur [14].

Tanım 4: $z_n = f(z_{n-1})$ şeklinde tanımlanan $z_0, z_1 \dots z_{n-1}, z_n$ dizisi z_0 noktasının $f(z)$ altındaki ileri yörüngesidir. Benzer şekilde $z_0, z_{-1} \dots z_{-n+1}, z_{-n}$ dizisi z_0 noktasının $f(z)$ altındaki geri yörüngesidir. $z_0 = z_n$ şartı sağlanıyorsa z_0 noktası periyodik olup bu şartı sağlayan en küçük n sayısı z_0 'ın periyodudur. Bu durumda $z_0, z_1 \dots z_{n-1}, z_n$ dizisine

periyodik döngü denir. $n = 1$ ise z_0 sabit nokta olup bu noktada $f(z_0) = z_0$ sağlanır. $n > 1$ için $f^{(n)}(z_0)$ periyodik ise z_0 preperiyodiktir. Burada $f^{(n)}(z_0)$, $f(z)$ 'nin n . iterasyonunu gösteriyor [13].

$f'(z) = 0$ denkleğinin sağlandığı nokta kritik noktadır. Kritik noktanın görüntüsü kritik değerdur. Kompleks fonksiyonların iterasyonunu incelemede kritik nokta en önemli faktörlerden biridir [15].

Kompleks fonksiyonların dinamiğı kritik nokta ve sabit noktaların yardımı ile belirlenir. Sabit nokta $f(z_0) = z_0$ şartının sağlandığı noktalardır. $\lambda = f'(z_0)$, z_0 sabit noktasının çarpanıdır. Çarpanın durumuna göre sabit noktalar sınıflandırılırlar.

$|\lambda| < 1$ ise çekici sabit nokta

$|\lambda| = 0$ ise süper çekici sabit nokta

$|\lambda| > 1$ ise itici sabit nokta

$|\lambda| = 1$ ve $\lambda = e^{2\pi i\theta}$, $\theta \in \mathbb{Q}$ ise rasyonel nötral sabit nokta

$|\lambda| = 1$ ve $\lambda = e^{2\pi i\theta}$, $\theta \notin \mathbb{Q}$ ise irrasyonel nötral sabit noktadır.

z_0 çekici sabit nokta olsun. Bu durumda $|\lambda| < p < 1$ ve z_0 'ın komşuluğunda $|f(z) - z_0| \leq p|z - z_0|$ sağlanacaktır. Buradan z_0 çekici sabit noktasının komşuluğı için $|f^n(z) - z_0| \leq p^n|z - z_0|$ sağlanır. Dolayısıyla çekici sabit noktanın komşuluğundaki noktalar iterasyonla birlikte sabit noktaya yakınsayacaktır.

Çekici sabit noktaya yakınsayan bölgeye *çekici havza* denir ve z_0 sabit nokta olmak üzere $A(z_0)$ ile gösterilir. Bu bölgede Schröder eşitliğini sağlayacak şekilde bir eşlenik fonksiyon bulmak mümkündür. Dolayısıyla bu bölgede sistem lineer fonksiyon gibi davranır. $A(z_0)$ bölgesinin z_0 noktasını içeren bağlantılı alt kümesine *immediate çekici havza* denir. Rasyonel fonksiyonlar için her immediate çekici havza en az bir kritik nokta içerir [3].

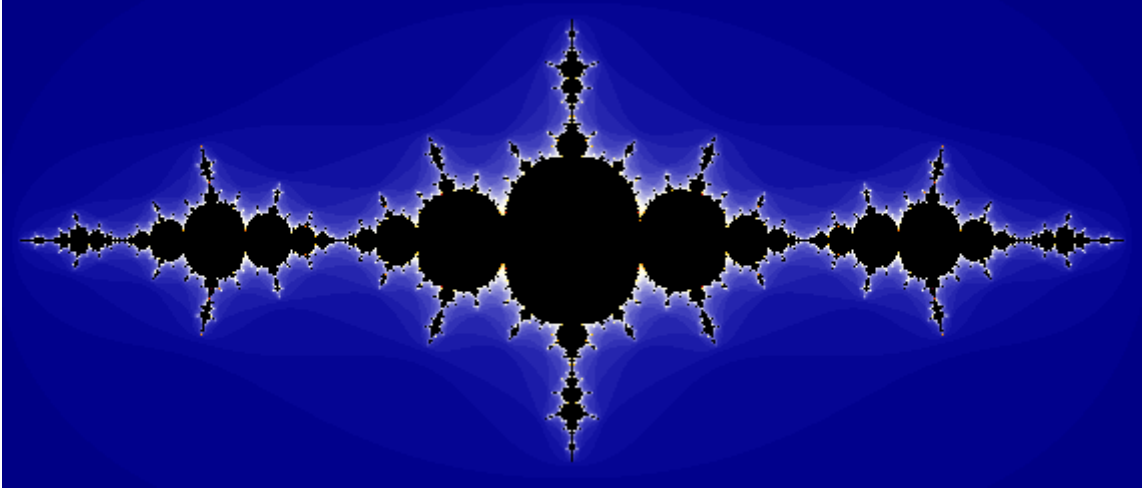
İtici sabit noktanın komşuluğunda sistem sabit noktadan uzaklaşır. İtici periyodik noktaların kapanışı düzlemde kaotik davranan bölgeyi verir.

Süper çekici sabit noktanın komşuluğunda sistem sabit noktaya çekici sabit noktadan daha hızlı yakınsar ve Böttcher eşitliğini sağlar.

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & U' \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ V & \xrightarrow{g} & V' \end{array}$$

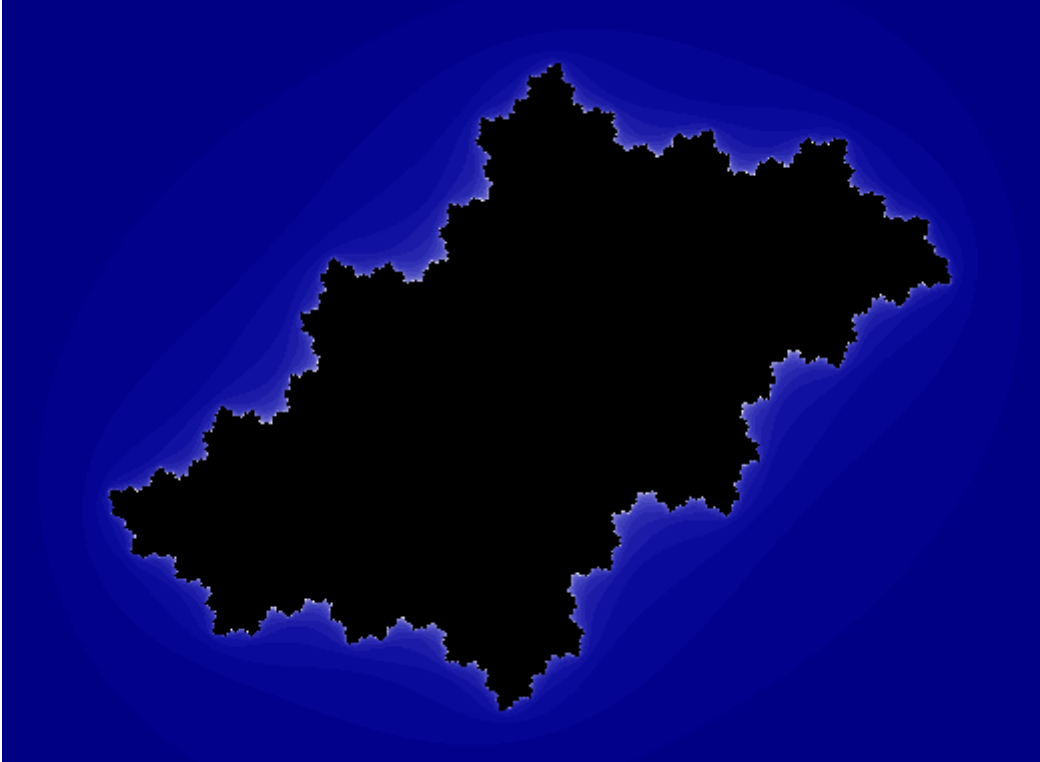
Kompleks fonksiyonların dinamiği incelenirken ele alınan sistem daha basit sisteme indirgenir. Bu indirgeme için eşlenik fonksiyonlar kullanılır. $U, U', V, V' \subset \mathbb{C}$ ve $f: U \rightarrow U'$ fonksiyonu $g: V \rightarrow V'$ fonksiyonuna eşlenik olabilmesi için $g(z) = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi(z)$ olacak şekilde bir $\varphi: U \rightarrow V$ fonksiyonu bulunabilmelidir. Eşlenik fonksiyonlar altında sistemin dinamiği değişmezdir. z_0 noktası f altında sabit nokta ise $\varphi(z_0)$ noktası g fonksiyonunun sabit noktası olup çarpanları ve sabit noktanın türü aynıdır. f fonksiyonunun çekici bölgesi, φ dönüşümü ile g fonksiyonunun çekici bölgesine taşınır [13].

Kompleks fonksiyonların iterasyonu kompleks düzlemi iki parçaya böler. Kompleks fonksiyonun iterasyonu altında kaotik davranan(aperiyodik) bölge Julia kümesidir. Dolayısıyla Julia kümesindeki elemanların iterasyonu yakınsak veya periyodik davranmaz ve bu küme kompakt kapalı bir kümedir. Ayrıca, rasyonel fonksiyonlar için $\partial A(\infty)$ şeklinde de tanımlanabilir. Burada $\partial A(\infty)$ sonsuza ıraksayan noktaların kümesinin sınırındır. İtici döngüler ve rasyonel nötral noktalar bu kümenin elemanlarıdır. Julia kümesi itici periyodik noktaların kapanışı olarak da tanımlanabilir [16],[17].



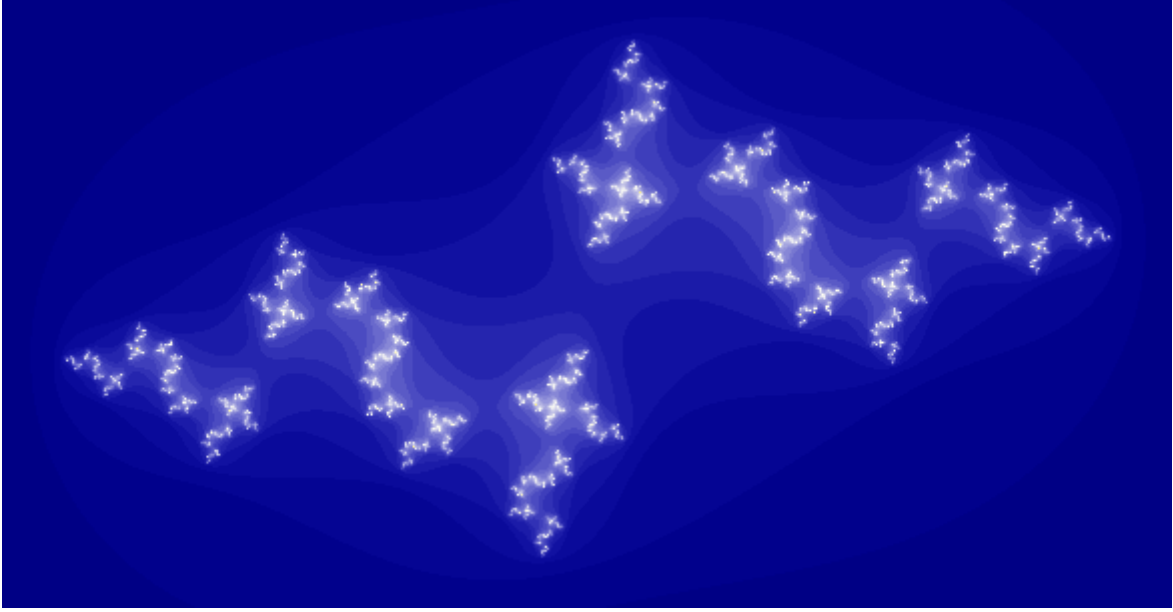
Şekil 1: $f(z) = z^2 - 1,25$ için Julia kümesi

Julia kümesi en az üç nokta içeren kompakt kümedir. Julia kümesindeki noktaların davranışı tahmin edilemez. Dolayısıyla kaotiktir. Julia kümesi çoğunlukla fraktal yapıdadır.[18] Yani kendine benzerlik gösterir. Ancak bu kendine benzerlik tam kendine benzerlik değildir [19]. Julia kümesi ya bağlantılıdır ya da Cantor kümesine homomorftur (tamamen bağlantısızdır).



Şekil 2: $f(z) = z^2 - 0,305 - 0,5134i$ için Julia kümesi

Julia kümesinin ya içi boştur yada Riemann küresine denk olur [20]. Latte Riemann küresine denk olan örneği veren ilk isimdir. Belirli λ değerleri için $f(z) = \lambda z e^z$ ve $f(z) = \lambda \tan z$ fonksiyonları için Julia kümesi $\hat{\mathbb{C}}$ 'ye denk olur. Julia kümesi iç nokta içeriyorsa Riemann küresine, aksi takdirde Cantor kümesine denktir [16].



Şekil 3: $f(z) = z^2 - 1,005 - 0,4134i$ için Julia kümesi

İterasyon altında sonsuza ıraksamayan noktaların oluşturduğu kümeye *dolu Julia kümesi* denir. $K(f) = \mathbb{C} / A(\infty)$ şeklinde gösterilir. Dolu Julia kümesinin sınırı Julia kümesini verir [21].

Julia kümesinin tümleyeni Fatou kümesidir. $z \in \hat{\mathbb{C}}$ noktasını içeren bir U komşuluğunda, f fonksiyonunun iterasyonunun oluşturduğu fonksiyon ailesi normal ise z noktası Fatou kümesinin elemanıdır. Fatou kümesindeki noktalar kararlıdır (hareketleri tahmin edilebilir). Fatou kümesi açık bir kümedir. Lattenin verdiği ters örneğe göre Fatou kümesi boş küme olabilir [13]. z_0 çekici sabit nokta ise z_0 'ın çekici havzası normal olacağından Fatou kümesinin alt kümesidir. Çekici ve süper çekici döngüler Fatou kümesinin alt kümesidir.

No Wandering Teoremi: Rasyonel fonksiyonun oluşturduğu Fatou kümesinin her bileşeni preperiyodiktir [12].

Tanım 5: $U \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ boş olmayan kümesi için $f(U) \subseteq U$ ise U ileri değişmez, $f^{-1}(U) \subseteq U$ ise geri değişmezdir. Hem ileri hem de geri değişmez kümeye *tamamen değişmez* denir. Julia ve Fatou kümeleri tamamen değişmezdir.

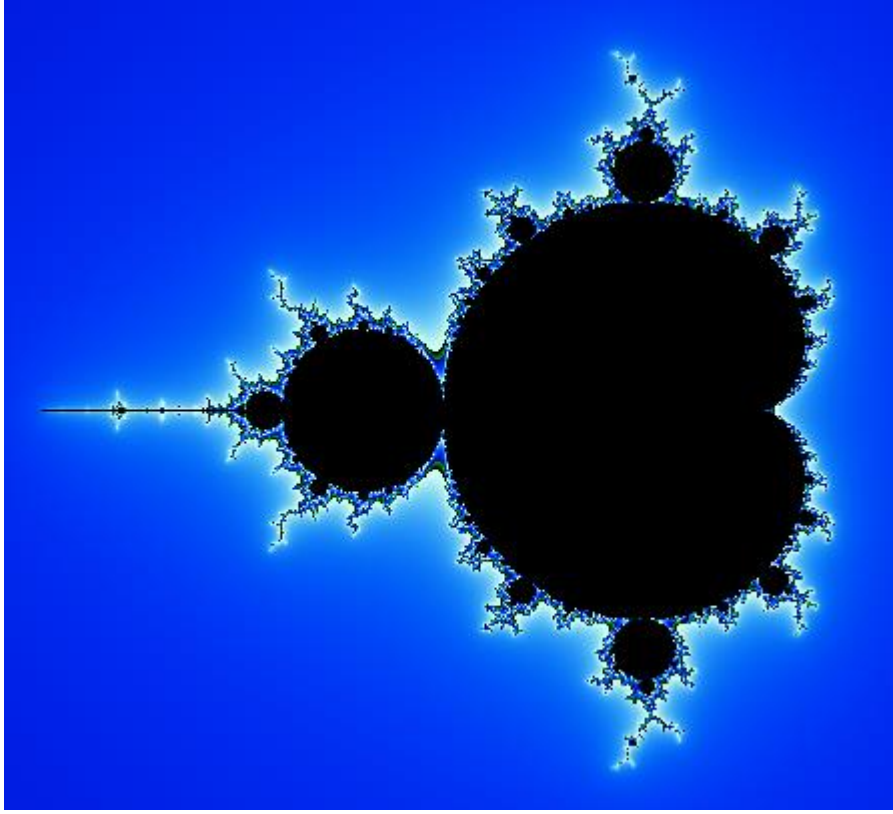
Kompleks dinamikte en çok ilgi gören problemlerden biride $f(z) = z^2 + c$, $c \in \mathbb{C}$ polinomunun dinamiğidir. Bunun sebebi herhangi bir ikinci derece polinomun $f(z) = z^2 + c$ 'ye eşlenik olmasıdır [13]. Genel olarak bütün polinomlarda ∞ , süper çekici noktadır. Polinomlarda $\partial A(\infty)$ Julia kümesini oluşturur. Benzer şekilde, dolu Julia kümesi de $A(\infty)^c$ şeklinde verilebilir.

c 'nin değişen değerlerine göre Julia kümesinin topolojik yapısı da değişir. Julia kümesi c 'nin değerine göre basit bağlantılı (kuasicircle) veya tamamen bağlantısız (Cantor kümesi) olabilir.

Bilgisayar grafiklerinin gelişmesiyle birlikte kompleks fonksiyonların dinamiğinin incelenmesi de kolaylaştı. Kompleks fonksiyonların iterasyonlarının grafiği birçok bilim adamının ilgisini çekmiştir. Bu iterasyonların oluşturduğu Mandelbrot kümesi matematikteki en karmaşık grafiklerden biridir. Grafikleri çizerken en çok tercih edilen algoritma kaçış zamanı algoritması olup iterasyonun ıraksayıp ıraksamadığı tespit edilerek ıraksama hızına göre boyama işleminin yapılmasıyla çizilir.[22]

Mandelbrot kümesinin elemanları $f(z) = z^2 + c$ fonksiyonunun iterasyonunda Julia kümesinin bağlantılı olduğu c noktalarıdır. Mandelbrot kümesi kritik noktanın iterasyonunun sonlu kaldığı c noktalarından oluşur [23].

$$M = \{c \in \hat{\mathbb{C}} : f^{\circ n}(z) = z^2 + c \text{ sınırlıdır, } z_0 = 0\}$$



Şekil 4: Mandelbrot kümesi

Mandelbrot kümesi kendine benzer olup kendi içinde küçük Mandelbrot kümeleri barındırır. Şekil 4’de görülen ana kardioid içindeki noktalar sabit değer alırlar (iterasyon sonucu sabit noktaya yakınsar). Ana kardiyoide bağlı odacıklar bulunmakta bunlara hiperbolik bileşen denir. Hiperbolik bileşenler periyodik bölgelerdir.

Nümerik analizde en önemli problemlerden biri verilen bir $f(z)$ fonksiyonunun köklerini bulma problemidir. Bu problemin çözümü için birçok çalışma yapılmıştır [24]. Bu problem için önerilen bazı iteratif metotlar bulunmaktadır. Bunlardan en yaygın kullanılanlarından biride Newton metodudur. $f: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ fonksiyonunun köklerini Newton metodu ile bulmak için bir z_0 başlangıç noktası alınarak

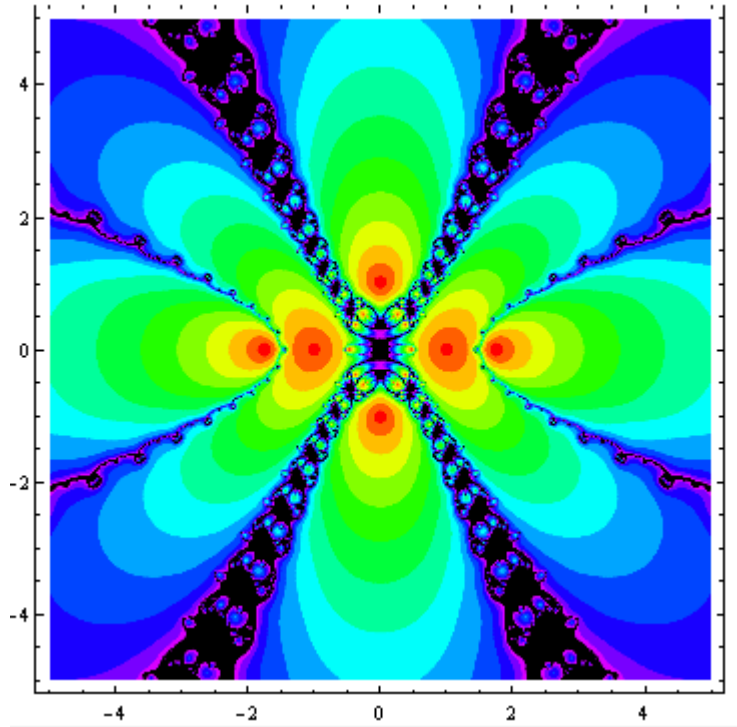
$$N_f(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)}, \quad f'(z) \neq 0 \quad (1.1)$$

fonksiyonu uygulanır ve $z_n = N_f(z_{n-1})$ iterasyonu ile z_n bulunur. $z_n = N_f^n(z_0)$ şeklinde de yazılabilir. Yukarıdaki fark denklemi bir ayrık dinamik sistem oluşturur. $f(z)$ fonksiyonunun kökü ξ olsun. Bu durumda ξ , $N_f(z) = z$ denliğini sağladığından $N_f(z)$

fonksiyonunun sabit noktası olur. $f(z)$ polinom ise $N_f(z)$ rasyonel fonksiyon verir. $N_f(z)$ 'in tanımından görüldüğü gibi Newton metodu kritik noktalarda kullanılamaz [25].

Dinamik sistemlerin davranışını belirlerken kritik nokta ve sabit nokta göz önünde bulundurulur. Polinomun kökü Newton metodunun sabit noktasıdır. Kök basit ise $N'_f(\xi) = \frac{f(\xi)f''(\xi)}{(f'(\xi))^2} = 0$ şeklinde olup süper çekici noktadır aynı zamanda kritik noktadır.

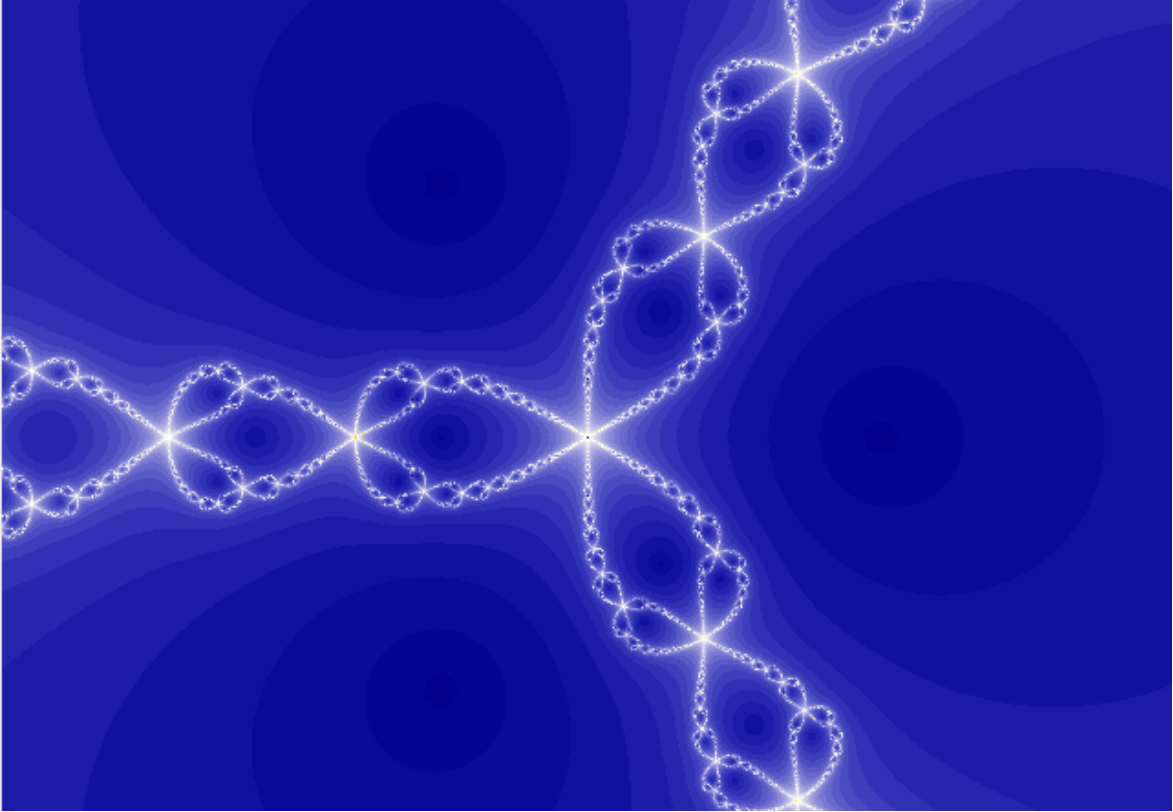
Eğer kök $m \geq 2$ katlı ise $N'_f(\xi) = \frac{m-1}{m}$ şeklinde tanımlanır ve $|N'_f(\xi)| < 1$ olduğundan çekici sabit noktadır. Görüldüğü üzere $N'_f(\xi)$ her durumda $|N'_f(\xi)| < 1$ eşitsizliğini sağladığı için ξ süper çekici veya çekici sabit noktadır ve bu noktanın komşuluğunda iterasyon bu noktaya yakınsar. Dolayısıyla $z \in U_\xi$ için $N_f^n(z) \rightarrow \xi$ sağlanır [25]. Newton metodu sonucu elde edilen rasyonel fonksiyonlarda ∞ itici sabit noktadır.



Şekil 5: $P(z) = z^6 - 3z^4 - z^2 + 3$ polinomu için Newton grafiği

Newton metodu hem reel hem de kompleks fonksiyonlar için her başlangıç noktası için köke yakınsamayabilir. Her kökün kendi komşuluğunda köke yakınsayan bir çekici havzası vardır. Ancak çekici havzanın sınırı Julia kümesi olup Newton metodunun iterasyonu altında kaotik davranır ve köke yakınsamaz.

Newton metodu 2. derece polinomlar için genellikle yakınsaktır. Sadece bir doğru üzerinde yakınsak davranmaz. Üçüncü derece polinomların Newton metodu sonucu elde edilen Julia kümelerinin Hausdorff boyutu 2'den küçük olduğu için hemen hemen alınan her başlangıç kümesi köke yakınsar. McMullen dört ve daha yüksek dereceli polinomların köklerini bulmak için yakınsak davranan saf iteratif bir yöntemin olmadığını göstermiştir [26].



Şekil 6: $f(z) = z^3 - 1$ için Newton grafiği

Newton metodu polinomun kökü basit ise kuadratik, katlı ise lineer yaklaşır [25]. m katlı kökün kuadratik yakınsamasını sağlamak için Newton metodu $\sqrt[m]{f(z)}$ fonksiyonuna uygulanır ve aşağıdaki hızlandırılmış Newton metodu elde edilir [14].

$$N_f(z) = z - \frac{mf(z)}{f'(z)}$$

f derecesi d olan bir polinom ise N_f bir rasyonel fonksiyon tanımlar ve en az $2d - 2$ kritik noktası vardır [16].

Newton metoduyla ilgili en önemli problem Cayley tarafından verilmiştir. Bu problem $f(z)$ polinomunun bir kökü bulunmak istendiğinde hangi noktalara Newton

metodunun uygulanması gerektiğini sorgular. ξ kökünün immediate havzasının hangi küme olduğu bilinirse bu problemin cevabı verilebilir. 2. bölümde bu problem üzerine çalışılacaktır.

Büyük O Notasyonu: Verilen $g(N)$ ve $f(N)$ fonksiyonları ve $\forall N > N_0$ için $g(N) < c_0 f(N)$ eşitsizliğini sağlayacak şekilde c_0 ve N_0 sabitleri bulunabiliyorsa $g(N)$ fonksiyonu $O(f(N))$ mertebesindedir [27].

1.2. Konformal Fonksiyonların Geometrisi

D ve E kompleks düzlemde bölgeler Γ ve Γ' sırasıyla bu bölgelerde tanımlı doğrultulabilir eğriler aileleri olsun. f D 'den E 'ye tanımlı konformal bir fonksiyon olsun. Bu durumda bu fonksiyon altında bazı özellikler değişmez kalacaktır. Değişmez kalan özelliklerden biri modül ve extremal uzunluktur [28][29].

Modül-Extremal Uzunluk

D kompleks düzlemde bir bölge ve Γ bu bölgede tanımlı doğrultulabilir eğriler ailesi olsun.

$p: D \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa p kabul edilebilir fonksiyondur.

i) $p \geq 0$ ve ölçülebilirdir.

ii) $A_p(D) = \iint p^2 dx dy \neq 0$ ve $A_p(D) = \iint p^2 dx dy \neq \infty$

$\gamma \in \Gamma$ eğrisi için p uzunluğu

$$l_p(\gamma) := \int_{\gamma} p(z) |dz|$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $p(z) = 1$ alınırsa bu integral eğrinin Öklid uzunluğunu verir.

D bölgesi için p alanı

$$A_p(D) := \iint_D p^2 dx dy \quad (1.1)$$

şeklinde tanımlanır. Γ eğri ailesi için p uzunluğu

$$L_p(\Gamma) := \inf_{\gamma \in \Gamma} l_p(\gamma)$$

şeklinde verilir. D bölgesindeki Γ eğri ailesi için modül aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$m(D, \Gamma) = \inf_p \frac{A_p(D)}{L_p(\Gamma)}$$

Burada infimum tanımlı bütün kabul edilebilir p metrikleri içinden alınır. Modülü veren metriğe extremal metrik denir [30]. Modülün çarpmaya göre tersi extremal uzunluğu verir. Extremal uzunluk bir nevi ortalama minimum uzunluktur [29]. Aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\lambda(D, \Gamma) = \frac{1}{m(D, \Gamma)} = \sup_p \frac{L_p(\Gamma)}{A_p(D)}$$

Extremal uzunluk ve modül konformal fonksiyonlar altında değişmezdir [29][31].

Teorem 1: Γ ve $\tilde{\Gamma}$ sırasıyla $D, \tilde{D} \subset \mathbb{C}$ bölgelerinde tanımlı eğri aileleri olsun. $f : D \rightarrow \tilde{D}$ $f(z) = w$ şeklinde tanımlı konformal fonksiyon olsun. $\tilde{\Gamma} = f(\Gamma)$ ise $m(D, \Gamma) = m(\tilde{D}, \tilde{\Gamma})$ olur. Yani modül konformal değişmez bölgeler için denklik sınıfı oluşturur[30].

Teorem 2: p_1 ve p_2 $m(D, \Gamma)$ modülü için iki extremal metrik ise hemen hemen her yerde $p_1 = p_2$ olur [31].

Teorem 3: D bölgesinde $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$ ise $m(D, \Gamma_1) \geq m(D, \Gamma_2)$ olur [29].

Teoremin ispatı $L_p(\Gamma_1) \leq L_p(\Gamma_2)$ eşitsizliğinden gösterilebilir.

Teorem 4: Γ_1 ve Γ_2 ayrık ölçülebilir D_1 ve D_2 kümelerindeki eğri aileleri ise;

i) $\lambda(D_1 \cup D_2, \Gamma_1 + \Gamma_2) \geq \lambda(D_1, \Gamma_1) + \lambda(D_2, \Gamma_2)$ burada $\gamma_1 \in \Gamma_1$ ve $\gamma_2 \in \Gamma_2$ olmak üzere $\gamma_1 + \gamma_2$ eğrisi γ_1 ve γ_2 eğrilerinin uç uca eklenmesiyle oluşturulur.

ii) $\lambda(D_1 \cup D_2, \Gamma_1 \cup \Gamma_2)^{-1} \geq \lambda(D_1, \Gamma_1)^{-1} + \lambda(D_2, \Gamma_2)^{-1}$ [29].

İspat: i) $0 \leq \lambda(D_1, \Gamma_1), \lambda(D_2, \Gamma_2) < \infty$ olduğunu farz edelim. Aksi takdirde eşitsizlik aşıkardır.

Normalleştirme yapılırsa

$$L_{p_1}(\Gamma_1) = A_{p_1}(D_1)$$

$$L_{p_2}(\Gamma_2) = A_{p_2}(D_2)$$

$p = \max\{p_1, p_2\}$ seçilirse

$$L_p(D_1 \cup D_2, \Gamma_1 + \Gamma_2) \geq L_{p_1}(D_1, \Gamma_1) + L_{p_2}(D_2, \Gamma_2) = A_{p_1}(D_1) + A_{p_2}(D_2)$$

$$A_p(D_1 \cup D_2) \leq A_{p_1}(D_1) + A_{p_2}(D_2)$$

Extremal uzunluğun tanımından

$$\begin{aligned} \lambda(D_1 \cup D_2, \Gamma_1 + \Gamma_2) &= \sup \frac{L_p(D_1 \cup D_2, \Gamma_1 + \Gamma_2)^2}{A_p(D_1 \cup D_2)} \geq A_{p_1}(D_1) + A_{p_2}(D_2) \\ &= \frac{L_{p_1}(D_1, \Gamma_1)^2}{A_{p_1}(D_1)} + \frac{L_{p_2}(D_2, \Gamma_2)^2}{A_{p_2}(D_2)} \end{aligned}$$

Dolayısıyla $\lambda(D_1 \cup D_2, \Gamma_1 + \Gamma_2) \geq \lambda(D_1, \Gamma_1) + \lambda(D_2, \Gamma_2)$ elde edilir [29].

ii) $\lambda(D_1 \cup D_2, \Gamma_1 \cup \Gamma_2) = 0$ ise ispat açıktır.

Kabul edilebilir bir p için $L_p(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) > 0$ sağlansın. D_1 bölgesinde $p_1 = p$, D_2 bölgesinde $p_2 = p$ ve bu bölgelerin dışında sıfır olarak tanımlansın. Bu durumda

$$L_{p_1}(D_1, \Gamma_1) \geq L_p(D_1 \cup D_2, \Gamma_1 \cup \Gamma_2)$$

$$L_{p_2}(D_2, \Gamma_2) \geq L_p(D_1 \cup D_2, \Gamma_1 \cup \Gamma_2)$$

$$A_p(D_1 \cup D_2) = A_{p_1}(D_1 \cup D_2) + A_{p_2}(D_1 \cup D_2)$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{A_p(D_1 \cup D_2)}{L_p(D_1 \cup D_2, \Gamma_1 \cup \Gamma_2)^2} \geq \frac{A_{p_1}(D_1 \cup D_2)}{L_{p_1}(D_1, \Gamma_1)^2} + \frac{A_{p_2}(D_1 \cup D_2)}{L_{p_2}(D_2, \Gamma_2)^2}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\lambda(D_1 \cup D_2, \Gamma_1 \cup \Gamma_2)^{-1} \geq \lambda(D_1, \Gamma_1)^{-1} + \lambda(D_2, \Gamma_2)^{-1}$$

gösterilmiş olur [29].

Örnek: D bölgesi kenar uzunlukları a, b olan bir dikdörtgensel bölge ve Γ , bölgenin uzunluğu b olan karşılıklı kenarlarını birleştiren eğriler ailesi ise Γ ailesinin extremal uzunluğu $\frac{a}{b}$ olur [29].

İspat: Herhangi bir kabul edilebilir p fonksiyonu için

$$\int_0^a p(x+yi)dx \geq L_p(D, \Gamma)$$

$$\iint_D p dx dy \geq b L_p(D, \Gamma)$$

sağlanır.

$$b^2 L_p^2(D, \Gamma) \leq ab \iint_D p^2 dx dy \leq ab A_p(D)$$

Dolayısıyla

$$\frac{L_p^2(D, \Gamma)}{A_p(D)} \leq \frac{a}{b} \text{ yani } \lambda(D, \Gamma) \leq \frac{a}{b}$$

elde edilir. $\lambda(D, \Gamma) \geq \frac{a}{b}$ olduğunu göstermek için $p=1$ yani Öklid metriği seçilirse

$L_p(D, \Gamma) = a$ ve $A_p(D) = ab$ bulunur. Buradan $\lambda(D, \Gamma) \geq \frac{a}{b}$ elde edilir. Bu durumda ispat tamamlanmış olur [29].

Örnek: D bölgesi $r_1 \leq |z| \leq r_2$ şeklinde tanımlanan halka ve Γ iç ve dış çemberi birleştiren

eğriler ailesi ise Γ ailesinin extremal uzunluğu $\frac{\log \frac{r_2}{r_1}}{2\pi}$ olur [29].

İspat: p uzunluğunun tanımından dolayı aşağıdaki (1.2) ve (1.3) eşitsizlikleri sağlanır.

$$\int_{r_1}^{r_2} p dr \geq L_p(D, \Gamma) \quad (1.2)$$

$$\iint p dr d\theta \geq 2\pi L_p(D, \Gamma) \quad (1.3)$$

$$4\pi^2 L_p(D, \Gamma)^2 \leq 2\pi \log \frac{r_2}{r_1} \iint p^2 r dr d\theta$$

$$\frac{L_p(D, \Gamma)^2}{A_p(D)} \leq \frac{1}{2\pi} \log \frac{r_2}{r_1}$$

elde edilir. Ters yönü göstermek için $p = \frac{1}{r}$ alınırsa

$$L_p(D, \Gamma) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} dr = \log \frac{r_2}{r_1} \quad \text{ve}$$

$$A_p(D) = \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} p^2 r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} dr d\theta = 2\pi \log \frac{r_2}{r_1}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\lambda(D, \Gamma) \geq \frac{1}{2\pi} \log \frac{r_2}{r_1}$$

elde edilir [29].

Örnek: D bölgesi $r_1 \leq |z| \leq r_2$ şeklinde tanımlanan halka ve Γ iç ve dış çemberi ayıran eğriler ailesi ise Γ ailesinin extremal uzunluğu $\frac{2\pi}{\log \frac{r_2}{r_1}}$ olur [29].

İspat: Önceki ispattaki gibi

$$L_p(D, \Gamma) \leq \int_0^{2\pi} p(re^{i\theta}) r d\theta$$

$$\frac{L_p(D, \Gamma)}{r} \leq \int_0^{2\pi} p d\theta$$

$$L_p(D, \Gamma) \log \frac{r_2}{r_1} \leq \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} p dr d\theta$$

$$L_p(D, \Gamma)^2 \log^2 \frac{r_2}{r_1} \leq 2\pi \log \frac{r_2}{r_1} \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} p^2 r dr d\theta$$

$$\frac{L_p(D, \Gamma)^2}{A_p(D)} \leq \frac{2\pi}{\log \frac{r_2}{r_1}}$$

elde edilir. Ters yönü göstermek için $p = \frac{1}{2\pi r}$ seçilirse ispat tamamlanır [29].

Hiperbolik iki bağlantılı bir bölgenin $\{z: 1 < |z| < R\}$ halkasına veya herhangi bir iki bağlantılı bir bölgeye konformal homomorfik olması için gerek ve yeter şart iki bölgenin modüllerinin eşit olmasıdır [30].

Birinci Grötzsch Lemma: $D = \{z: r < |z| < R\}$ şeklinde tanımlı halka bölgesi, Γ bu bölgenin sınırlarını ayıran eğriler ailesi ve D_1, D_2, \dots, D_n üst üste gelmeyen D bölgesinin sınırlarını ayıran iki bağlantılı halka bölgeleri olsun. Bu durumda

$$m(D, \Gamma) \geq \sum_{j=1}^n m(D_j, \Gamma_j)$$

eşitsizliği sağlanır. $\bigcup_{j=1}^n \bar{D}_j = D$ ve ∂D_j çemberleri eş merkezli ise eşitlik sağlanır [30].

İkinci Grötzsch Lemma: $D = \{z = x + yi: 0 < x < l, 0 < y < 1\}$ şeklinde tanımlı dikdörtgensel bölge, Γ bu bölgenin yatay karşılıklı kenarlarını birleştiren eğriler ailesi ve D_1, D_2, \dots, D_n üst üste gelmeyen D bölgesinin yatay karşılıklı kenarlarını birleştiren dörtgen bölgeler olsun. Bu durumda $m(D, \Gamma)$ D bölgesinin modülü ise

$$m(D, \Gamma) \geq \sum_{j=1}^n m(D_j, \Gamma_j)$$

eşitsizliği sağlanır. $\bigcup_{j=1}^n \bar{D}_j = D$ ve D_j bölgeleri dikdörtgen ise eşitlik sağlanır [30].

1.3. Newton Metodun Geometrisi

Polinom Köklerinin Geometrisi

Lucas Teoremi: Sabit olmayan bir $f(z)$ polinomunun kritik noktaları, polinomun köklerini içeren dışbükey örtünün içinde kalır. Ayrıca $f(z)$ 'nin yüksek dereceden türevlerini sıfır yapan değerlerini de içerir [32].

İspat: Sadece kritik noktaları içeren dışbükey örtünün kökleri de içerdiği gösterilirse tümevarımdan yüksek dereceden türevlerin sıfırı da bu dışbükey örtünün içinde kaldığı

gösterilebilir. Bütün köklerin üst veya alt yarı düzlemde toplandığını farz edelim. Bütün kökler aynı yarı düzlemde değilse affine dönüşümü ile aynı yarı düzleme taşınabilir. Bütün köklerin alt yarı düzlemde olduğu durum ele alınsın. $f(z)$ polinomu

$$f(z) = \prod_i (z - \xi_i)$$

şeklinde ise türevi

$$f'(z) = \prod_i (z - \xi_i) \cdot \sum_i \left(\frac{1}{z - \xi_i} \right)$$

olarak yazılabilir. z , $z - \xi_i$ 'nin reel kısmı sıfırdan büyük herhangi bir sayı olsun.

Dolayısıyla $\frac{1}{z - \xi_i}$ pozitiftir. Bu durumda türev z noktasında sıfır veya negatif olamaz.

Lucas teoremine göre bir polinomun köklerini içeren disk aynı zamanda kritik noktalarını da içerir [6].

Teorem 5: (Newton fonksiyonunun asimptotik geometrisi) $|z| \geq 1$ için

$$\left| N_p(z) - \frac{d-1}{d} z \right| < \frac{1}{d} \quad \text{ve} \quad |N_p(z)| < |z|$$

olur [6].

Teorem 6: (Sonsuzun yakınında lineerleştirme) $U := \{z : |z| > 1\}$ bölgesi olsun. Bu durumda $V \subset U$ ve U üzerinde $N_p \circ g = id$ olacak şekilde $g : U \rightarrow V$ konformal

izomorfizmi vardır. Ayrıca $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi \circ N_p = \frac{d-1}{d} \varphi$ şeklinde univalent fonksiyonu

vardır öyle ki $\forall z \in V$ için $|z| > \frac{d+1}{d-1}$ eşitsizliği sağlanır [6].

$N_p(z)$ rasyonel fonksiyonunun ξ sabit noktasının çekici havzası iterasyon sonucu ξ noktasına yakınsayan z noktalarından oluşur. Newton fonksiyonunda bütün polinomun kökleri ya çekici yada superçekici sabit nokta olduğundan köklerin çekici havzası kökün komşuluğunu içerir ve boş kümeden farklıdır. ξ kökünün U_ξ immediate çekici havzası ξ kökünün çekici havzanın kökü içeren bağlantılı kısmıdır.

z_0 noktası Newton metodu altında köke yakınsıyorsa bu noktaya sıfıra yaklaşan nokta denir. Eğer $|N_f^n(z_0) - \xi| \leq 8 \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n} |z_0 - \xi|$ ise z_0 noktası ξ köküne yakınsar [24].

Teorem 7: (Çekici Havzanın Basit Bağlantılılığı) $\xi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ rasyonel fonksiyonunun çekici sabit noktası ve U bu noktanın immediate çekici havzası olsun. Eğer ∂U f 'in birden fazla sabit noktasını içermiyorsa U bölgesi basit bağlantılıdır [33].

Bu teorem Newton metoduna uyarlanırsa Newton fonksiyonunun her çekici sabit noktasının immediate havzası basit bağlantılıdır. Riemann mapping teoreminden dolayı bu bölge birim diske konformal homomorfiktir. Shishikura bu teoremi genişleterek Fatou kümesinin her bileşeninin bağlantılı olduğunu göstermiştir [34].

İspat: $W_0 \subset U$, ξ noktasını içeren basit bağlantılı bir bölge olsun. ∂W_0 basit eğri, hiçbir kritik yörünge ∂W_0 ile kesişmesin ve W_0 $f^{-1}(W_0)$ içinde göreceli kompakt olsun.

$W_k := U \cap f^{-k}(W_0)$ ve V_k , W_k 'nin ξ noktasını içeren bölgesi olsun. V_k , W_k 'nin sınırları basit eğrilerdir. $V = \bigcup V_k$ U 'nun açık alt kümesi olup sınırı U bölgesinin sınırı içerisindedir. Dolayısıyla $V = U$ dur. Bütün V_k 'lar basit bağlantılı ise U bölgesi de basit bağlantılıdır.

Eğer U basit bağlantılı değilse öyle bir k bulunabilir ki ilk k için V_k bölgesi basit bağlantılı olmasın. A_1, A_2, \dots, A_m bölgeleri \mathbb{C}/V_k 'nin bağlantılı parçaları olsunlar. Burada her parçanın sabit nokta içerdiği gösterilecektir. Bu parçalar A olsun.

$V_k / \overline{V_{k-1}}$ yol bağlantılı (açık bağlantılı kümeden kapalı disk çıkarılıyor.) olup öyle bir γ_0 eğrisi seçilebilir ki $z_1 \in \partial A$ noktasını $z_0 = f(z_1) \in \partial V_{k-1}$ noktası ile birleştirir. Bu eğri U bölgesindeki kritik yörünge ile kesişmez. γ_1 eğrisi z_1 den başlayan $f^{-1}(\gamma_0)$ 'in bir parçası olsun. Bu eğri z_2 noktasında son bulsun. Bu şekilde devam edilirse γ_{k+1} eğrisi z_{k+1} den başlayıp z_{k+2} de son bulan $f^{-1}(\gamma_k)$ 'in bir parçası olur. γ eğrisi γ_i 'lerin birleşiminden oluşan A bölgesindeki basit eğri olsun. Dolayısıyla z_1, z_2, \dots noktaları da A bölgesindedir. Şimdi bu noktaların f 'nin sabit noktasına yakınsadığı gösterilecektir.

Öyle bir n vardır ki W_n f 'nin U bölgesindeki bütün kritik değerlerini içerir. $f: U/\overline{W_{n+1}} \rightarrow U/\overline{W_n}$ bir örtü fonksiyonudur. Bu yüzden Poincare metriğine göre iki uzay arasında yerel izometridir. Dolayısıyla $U/\overline{W_n}$ de Poincare metrik kullanılırsa hem tanım hem de görüntü kümesinde fonksiyon genişleyendir. Bütün γ_i 'ler $i+k \geq n$ iken $U/\overline{W_n}$ içindedir. $U/\overline{W_n}$ 'de Poincare metriğe göre γ_i eğrileri git gide kısalır ve ∂U sınırında yığılır bu yüzden uzunlukları sıfıra yakınsar. γ eğrisinin yığılma kümesi ∂U 'nun bağlantılı alt kümesi olup noktasal olarak sabittir. Bu yüzden A bölgesindeki tek sabit noktadır.

Eğer ∂U tek sabit nokta içeriyorsa \mathbb{C}/V_k her k için basit bağlantılıdır. Bu yüzden bütün V_k 'lar yani U bölgesi basit bağlantılıdır.

Newton metodunda kök olmayan tek sabit nokta ∞ dur. Dolayısıyla bütün immediate havzalar basit bağlantılıdır [6].

m_ξ , U_ξ bölgesindeki Newton fonksiyonunun kritik nokta sayısı olsun. ξ çekici sabit nokta olduğundan her ξ kökü için $m_\xi \geq 1$ olur. $N_f: U_\xi \rightarrow U_\xi$ uygun ve d_ξ dereceli fonksiyondur. Önceki teorem ve Riemann-Hurwitz formülünden dolayı $d_\xi = m_\xi + 1$ olur [6].

$U \subset \hat{\mathbb{C}}$ ve $v \in \partial U$ olsun. Eğer $\gamma: [0,1] \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, $\gamma([0,1)) \subset U$ ve $\gamma(1) = v$ olacak şekilde bir γ eğrisi bulunabiliyorsa v noktası U 'dan erişilebilirdir [35].

Her immediate havzanın sınırında ∞ bulunur ve kök ile sonsuzu birleştiren basit bir eğri vardır. Bu eğrilerin homotopi sınıflarına sonsuza erişim denir [6].

Teorem 8: (Immediate Havzadaki Sonsuza Erişim) Her U_ξ immediate havzanın m_ξ tane farklı sonsuza erişimi vardır [6].

ξ kökünün kanalı U_ξ/Δ sınırsız bağlantılı parçasıdır. Bu bölge W ile gösterilsin. $w \in W$ noktası $N_p(w)$ noktası ile W bölgesindeki bir eğri ile bağlantılıdır. U_ξ bölgesindeki her sonsuza erişim bir kanal belirler. Birim diskin dışındaki orijin merkezli her çember her immediate havzanın her kanalı ile kesişir [6].

Kanalların Geometrisi

Birim diskin dışında Newton metodu hemen hemen lineer davranır. İmmEDIATE havzanın basit bağlantılı oluşu ve birim diskin dışının kanalları oluşturmasından dolayı kanallar halkalara konformal homomorfiktir. Dolayısıyla çevre uzunluğu c yüksekliği h olan silindire konformal homomorftur. Bu silindirde kenarları c ve h olan dikdörtgene konformal homomorftur. Bu dikdörtgenin modülü $\frac{h}{c}$ olur. Modül konformal dönüşümler altında değişmez olduğundan silindirinde modülü $\frac{h}{c}$ olur. Bu kısımda kanalların modülü için bir alt sınır verilecektir.

Teorem 9: (Kanalların Modülü) Herhangi bir immediate havzadaki kritik nokta sayısı m ise bu immediate havzaya ait kanalın modülü en az $\frac{\pi}{\log(m+1)}$ olur. Her immediate havzanın en az bir kanalının modülü en az $\frac{\pi}{\log d}$ olur. Ayrıca her kanal polinomun derecesinden bağımsız olarak modülü en az $\frac{\pi}{\log 3}$ olur [6].

Polinomun Bütün Köklerini Bulmak İçin Kullanılan Yöntemler

Verilen bir polinomun bütün köklerini bulmak çok önceye dayanan bir problemdir. Bu problem için tanıtılan bisection, sekant, sabit nokta iterasyonu, Newton metodu gibi birçok yöntem kullanılmıştır. Bunların arasında en yaygını ve kullanışlı olan Newton metodudur. Sutherland ve Hubbard, Schleicher, Sutherland Newton metodunu kullanarak polinomun bütün köklerini bulan yöntemleri tanıtmışlardır. Sutherland'ın yönteminde kompleks düzlemde bir çember üzerine eşit aralıklı olarak dağıtılan $\frac{\pi^2}{4}d^{\frac{3}{2}}$ noktaya Newton metodu uygulanması ile bütün köklere ulaşılır. Bu durumda kompleks düzleme $O(d^{\frac{3}{2}})$ mertebesinde nokta dağılımı yapılır [7]. Hubbard, Schleicher, Sutherland'ın yönteminde kompleks düzlemde çemberler ailesi üzerine eşit aralıklı olarak dağıtılan $1,1d(\log d)^2$ noktaya Newton metodu uygulanması ile bütün köklere ulaşılır. Dolayısıyla kompleks düzleme $O(d(\log d)^2)$ mertebesinde nokta dağılımı yapılır. Ayrıca şayet kökler reel ise bu sayı $1,3d$ olur. Hubbard, Schleicher, Sutherland metodunu oluştururken kanalların

modüllerinin en az $\frac{\pi}{\log d}$ olmasını kullanarak her kanala en az bir nokta düşürecek şekilde çemberler ailesine nokta dağılımı yapmıştır [6].

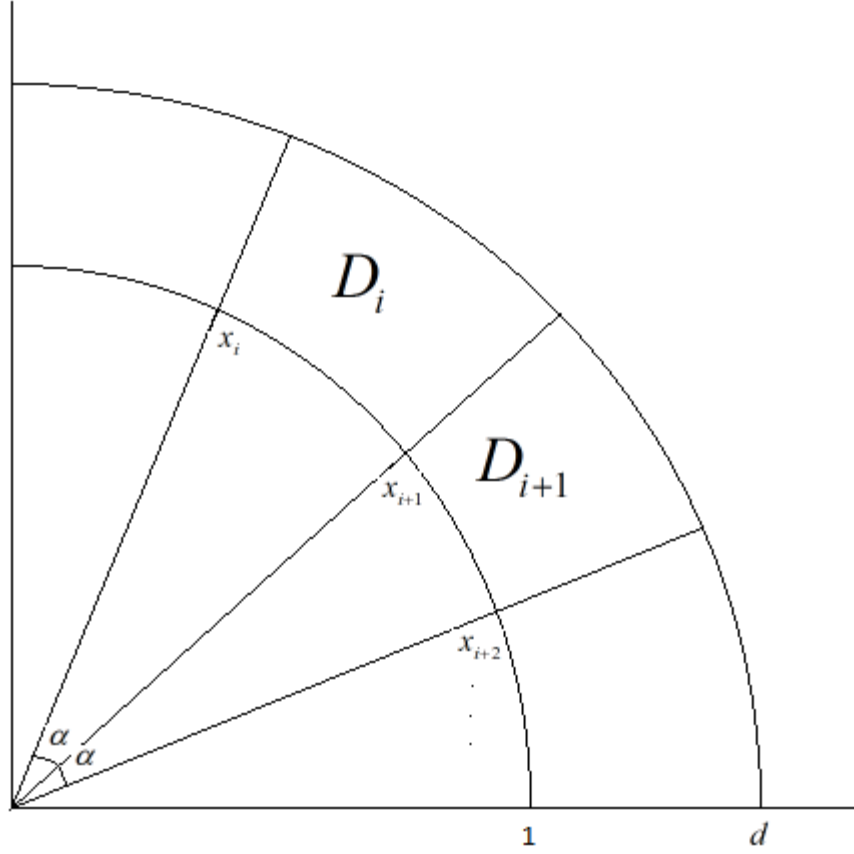
2. İTERATİF YÖNTEM İLE POLİNOMUN BÜTÜN KÖKLERİNİ BULMA

Bu bölümde Hubbard, Schleicher ve Sutherland'ın tanıttığı yöntemde kullandığı argümanları daha farklı kullanarak polinomun bütün köklerini bulmak için kullanılabilir yeni bir iteratif yöntem inşa edilecektir. Sutherland (1989) ve Hubbard, Schleicher ve Sutherland'ın (2001) çalışmalarında tanıtılan iki yöntem sırasıyla $\frac{\pi^2}{4}d^{\frac{3}{2}}$ ve $1,1d(\log d)^2$ noktayı kompleks düzleme eşit aralıklı dağıtarak, bu noktalara Newton metodun uygulanmasıyla bütün kökleri bulmayı garantiliyor [6]. Bu bölümde tanıtılacak yöntem iteratif yöntem olup en iyi durumda d en kötü durumda $\frac{d^2}{2}$ noktayı birim çemberin üzerine eşit aralıklı olarak dağıtımı ile bütün köklere ulaşmayı garantiliyor.

Bu yöntemde amaç önceki bölümde elde edilen kanalların modüllerinin en az $\frac{\pi}{\log d}$ olmasını kullanarak polinomun bütün köklerine Newton metodu ile ulaşmaktır. İlk olarak kompleks düzlemde birim çembere eşit aralıklı noktalar dağıtılır. Bu noktaların farklı köklerin immediate çekici havzasına düşmeleri istenen durumdur. Bu durumda bu noktalara Newton metodu uygulanarak bütün köklere ulaşılır. Ancak noktalar çekici havzaya düşmezse veya bazı köklerin çekici havzasına nokta düşmemesi durumunda bütün kökler bulunamayacaktır. Bu durumda döndürme işlemi ile bütün köklerin immediate çekici havzasına en az bir nokta düşmesi sağlanır. Dolayısıyla çekici havzaya düşen noktalara Newton metodu uygulayarak bütün kökleri bulmak mümkün olur.

Bu bölümde bütün köklerin birim diskin içinde bulunduğu farz edilecektir. Kökler birim diskin dışında olursa affine dönüşümü ile bütün kökler birim diskin içine toplanabilir, üstelik bu dönüşüm altında Newton metodun dinamiği değişmez [6].

Polinomun derecesi d olsun bu durumda birim çemberin üzerine d nokta aralarında eşit uzaklık olacak şekilde birim disk üzerine dağıtılır.



Şekil 7: d noktanın birim disk üzerine eşit aralıklı dağıtılması

Şekil 7'da görüldüğü gibi $x_i, i=1,2,\dots,d$ noktaları aralarında eşit uzaklık ve açı olacak şekilde birim çember üzerine dağıtılır. Burada aralarındaki açı $\alpha = \frac{2\pi}{d}$ olacaktır. Yarıçapı 1 ve d olan çemberler arasındaki halka göz önüne alınırsa noktaların dağıtılmasıyla halka Şekil 7'da gösterilen eş $D_i, i=1,2,\dots,d-1$ bölgelerine bölünür. Bu bölgeler dikdörtgene konformal homomorfiktir.

Bu yöntemle göre en iyi durumda ilk dağıtılan x_i noktalarının hepsi farklı köklerin immediate çekici havzaya düşer. Bu noktalara Newton metodu uygulanması ile polinomun bütün kökleri bulunur. Dolayısıyla en iyi durumda d nokta ile bütün köklere ulaşılır yani en iyi durumda bu yöntem $O(d)$ asimptotik mertebesindedir.

Dağıtılan x_i noktalarının Newton iterasyonu ile bütün köklere ulaşamaz ise dönme işlemi yapılır. $x + yi$ noktası için dönme işlemi matris gösterimi ile yazılabilir. Saat yönünün tersinde θ açısı kadar yapılan dönmenin matris gösterimi

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{bmatrix}$$

şeklindedir [38]. Dağıtılan ilk noktaların konumları ve yapılacak dönme işleminin yönü iterasyon sayısını etkileyebilir.

D_i bölgeleri eş parçalar olduğundan modülleri eşittir [35]. D_i bölgesinin modülünü hesaplamak için D_i bölgesindeki eğri ailesi olarak iki çemberi birleştiren eğriler alınır. D_i bölgeleri birbirine eş ve ayırık olduğundan modülleri aşağıdaki şekilde bulunur.

p uzunluğunun tanımından dolayı aşağıdaki (2.1) ve (2.2) eşitsizlikleri sağlanır.

$$\int_{r_1}^{r_2} p dr \geq L_p(D, \Gamma) \quad (2.1)$$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{d}} \int_{r_1}^{r_2} p dr d\theta \geq \frac{2\pi}{d} L_p(D, \Gamma) \quad (2.2)$$

$$\frac{4\pi^2}{d^2} L_p(D, \Gamma)^2 \leq \frac{2\pi}{d} \log \frac{r_2}{r_1} \iint p^2 r dr d\theta$$

$$\frac{A_p(D)}{L_p(D, \Gamma)^2} = m(D, \Gamma) \geq \frac{2\pi}{d \log d}$$

elde edilir. Ters yönü göstermek için $p = \frac{1}{r}$ alınırsa

$$L_p(D, \Gamma) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} dr = \log \frac{r_2}{r_1} = \log d$$

$$A_p(D) = \int_0^{\frac{2\pi}{d}} \int_{r_1}^{r_2} p^2 r dr d\theta = \int_0^{\frac{2\pi}{d}} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} dr d\theta = \frac{2\pi}{d} \log \frac{r_2}{r_1} = \frac{2\pi \log d}{d}$$

$$m(D, \Gamma) \leq \frac{2\pi}{d \log d}$$

bulunur. Buradan

$$m(D, \Gamma) = \frac{2\pi}{d \log d}$$

elde edilir [34]. Newton metodunda köklere yakınsayan her immediate havzanın en az bir kanalının modülü en az $\frac{\pi}{\log d}$ olabildiği 1. bölümde gösterilmiştir [6]. Düzleme dağıtılmış

d nokta ile oluşturulan D_i dörtgenlerinin modülünün $\frac{2\pi}{d \log d}$ olduğu yukarıda

ispatlanmıştır. Her D_i bölgesi modülü $\frac{\pi}{\log d}$ olacak şekilde alt dörtgen parçalara bölünür.

Noktalar bu alt dörtgenlere bir nokta düşecek şekilde dağıtılmalıdır. Bu durumda bütün köklerin immediate çekici havzasına en az bir nokta gelir. Dolayısıyla bu noktalara Newton metodu uygulanması ile bütün kökler kesin olarak bulunur. $d \geq 2$ için

$\frac{2\pi}{d \log d} \leq \frac{\pi}{\log d}$ olduğundan dolayı dağıtılan iki nokta arasında birden fazla kanal olabilir.

Amaç D_i dörtgensel bölgelerini modülü $\frac{\pi}{\log d}$ olan parçalara bölmektir. Oluşan

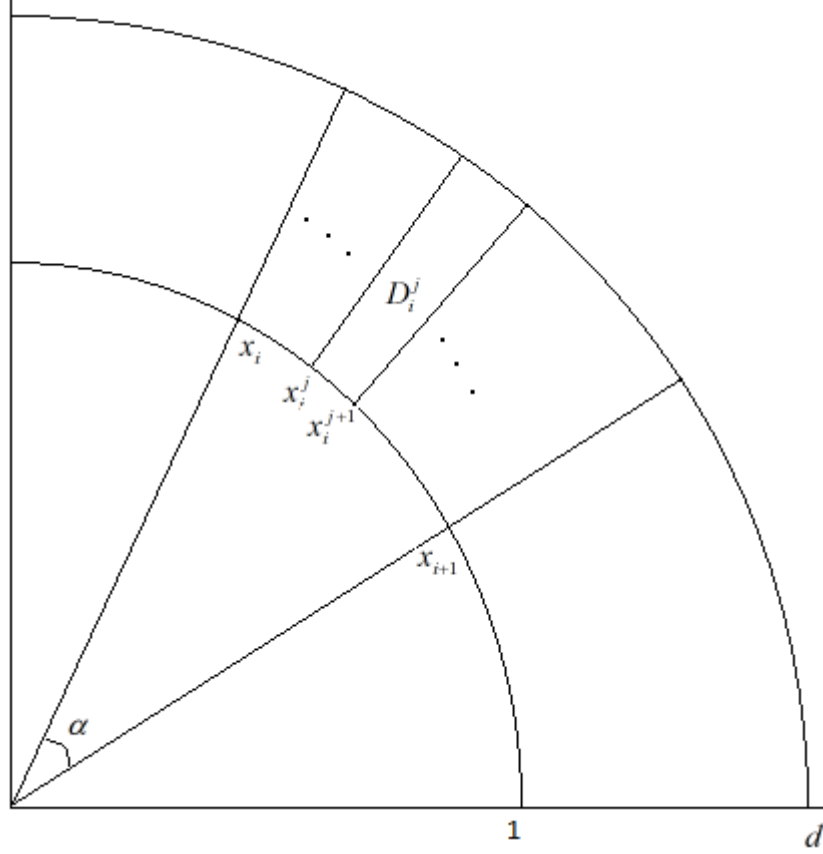
parçalara birer nokta dağıtılsa modülü en az $\frac{\pi}{\log d}$ olan kanallara da en az birer nokta

düşürülmüş olur. D_i dörtgensel bölgesini parçalamak için her x_i noktaları için dönme dönüşümü yapılmalıdır. Dönme sonucu iki çember arasında şekil 8'de gösterilen yeni D_i^j

$j=1,2,\dots,k$ dörtgenleri oluşacaktır. Burada k yapılacak dönme sayısıdır. Oluşan yeni

dörtgen bölgenin modülü $\frac{\pi}{\log d}$ olmalıdır. Bu şekilde D_i^j dörtgenleri ile her kanalın

kesişimi boş kümeden farklı olur böylece her kanala en az bir nokta düşmesi sağlanır. Bu noktalara Newton metodu uygulanmasıyla bütün kökler bulunur.



Şekil 8: x_i noktasının dönme işlemi ve oluşan yeni D_i^j bölgesi

D_i Bölgesindeki eğri ailelerinin modülü $\frac{2\pi}{d \log d}$ olduğundan D_i bölgesi kenar uzunlukları 2π ve $d \log d$ olan K dikdörtgenine konformal homomorfiktir. Benzer şekilde D_i^j dörtgeni, kenar uzunlukları π ve $\log d$ olan M dikdörtgenine konformal homomorfiktir [30]. Dolayısıyla dönme işlemi ile K dikdörtgeni M dikdörtgenleri ile örtülür.

Yapılan dönme veya iterasyon sayısı k olsun. Bu durumda M dikdörtgenlerinin modüllerinin çarpmaya göre terslerinin toplamı K dikdörtgeninin modülüne eşit olur.

Böylece D_i bölgesi, modülleri $\frac{\pi}{\log d}$ olan alt ayrık D_i^j dörtgenleri ile örtülür.

İterasyon sayısı

$$\sum \lambda(D_i^j, \Gamma) = k \frac{\log d}{\pi} = \frac{d \log d}{2\pi}$$

$$k = \frac{d}{2}$$

şeklinde bulunur. Her iterasyondaki dönme açısı γ , eğer d çift ise

$$\gamma = \frac{\frac{2\pi}{d}}{k} = \frac{\frac{2\pi}{d}}{\frac{d}{2}} = \frac{4\pi}{d^2}$$

şeklinde, eğer d tek ise $k = \frac{d+1}{2}$ şeklinde alınmalıdır. Bu durumda dönme açısı

$$\gamma = \frac{\frac{2\pi}{d}}{k} = \frac{\frac{2\pi}{d}}{\frac{d+1}{2}} = \frac{4\pi}{d^2 + d}$$

şeklinde bulunur.

Sonuç olarak öncelikle düzleme d nokta düzgün olarak dağıtılıyor. Bu noktaların yakınsaklık durumu Newton metodu ile kontrol edilir. Bütün köklere ulaşmaya kadar bu noktalara γ açısı kadar dönme yaptırılır. Her dönme işleminin ardından yeni noktalara tekrar Newton metodu uygulanır. Bütün köklerin immediate havzasına en az bir nokta düşünceye kadar dönme iterasyonu yapılır. Immediate havzaya düşen noktalara Newton metodu uygulanarak bütün kökler bulunur.

En kötü durumda ilk dağıtılan iki nokta arasını tamamen kapatacak şekilde dönme yapılır. Dolayısıyla düzleme toplam kd kadar nokta dağıtılır. Toplam nokta sayısı

$$kd = \frac{d^2}{2}$$

olarak bulunur.

Bu yöntem ile en iyi durumda d nokta yani $O(d)$ mertebesinde en kötü durumda ise $\frac{d^2}{2}$ yani $O(d^2)$ mertebesinde nokta dağıtılır.

Bu yöntem katlı kök olması durumunda kullanışlı olmayacaktır. Çünkü d dereceden bir polinomun köklerini araştırırken d adet farklı kök aranacaktır. Ancak herhangi bir kökün katlı olması durumunda d 'den az sayıda farklı kök olacaktır. İterasyon

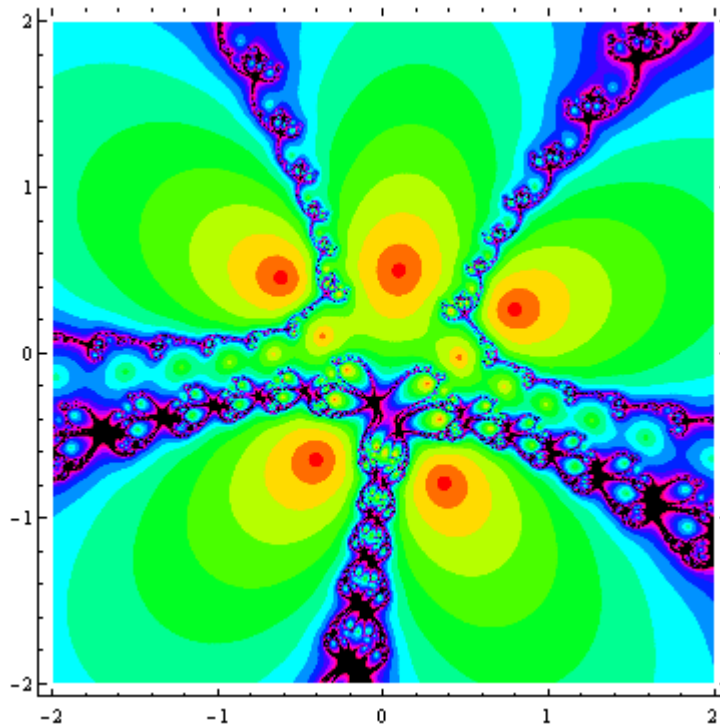
yaparken d adet farklı kök bulmaya çalışılacaktır. Dolayısıyla olmayan bir kökü bulmak için gereksiz yere noktaları döndürme işlemi yapılacaktır. Bunu önlemek için bulunan her kökün katlı kök olup olmadığı şayet katlı ise kaç katlı kök olduğunun incelenmesi katlı kök olması durumunda da yöntemi elverişli hale getirecektir.

2.1 Uygulamalar

Bu bölümde yukarıda tanıtılan metodu kullanarak örneklerde verilen polinomların köklerine ulaşılabilecektir. Örnekler seçilirken köklerin birim diskin içinde bulunduğu polinomlar dikkate alındığından kökleri birim diskin içine toplamak için bir affine dönüşümü uygulanmasına gerek duyulmamıştır.

Örnek: Aşağıda tanımlanan 5.dereceden $P(z)$ polinomunun köklerini yukarıda tanımlanan yöntem ile bulmak için;

$$P(z) = z^5 + z^4(-0,23+0,23i) + 0,12z^3 + z^2(-0,107-0,281i) + z(0,192-0,075i) - 0,123-0,17i$$



Şekil 9: 5. Derece $P(z)$ polinomunun Newton grafiği [39]

Polinomun derecesi $d = 5$ olduğundan düzleme öncelikle 5 nokta eşit aralıklı olarak dağıtılacaktır. Dolayısıyla her nokta arası açı $\alpha = \frac{2\pi}{d} = \frac{2\pi}{5} = 72^\circ$ olur. Bu çalışmada

noktaların dağıtımına $x_1 = 1$ noktası ile başlanmıştır. Daha farklı başlangıç noktası da seçilebilir. Ancak bu durumda iterasyon sayısı değişebilir. Bu noktalar

$$\begin{aligned}x_1 &= 1 \\x_2 &= (\sin 72^\circ + i \cos 72^\circ) \\x_3 &= (\sin 144^\circ + i \cos 144^\circ) \\x_4 &= (\sin 216^\circ + i \cos 216^\circ) \\x_5 &= (\sin 288^\circ + i \cos 288^\circ)\end{aligned}$$

şeklinde alınsın.

$P(z)$ polinomuna Newton metodu uygulanırsa

$$N(z) = z - \frac{P(z)}{P'(z)} = z - \frac{z^5 + z^4(-0,23 + 0,23i) + 0,12z^3 + z^2(-0,107 - 0,281i) + z(0,192 - 0,075i) - 0,123 - 0,17i}{5z^4 + 4z^3(-0,23 + 0,23i) + 0,36z^2 + 2z(-0,107 - 0,281i) + 0,192 - 0,075i}$$

elde edilir. Her x_i noktası Newton metodunda yerine konulursa yakınsadığı kökler aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned}x_1 = 1 &\Rightarrow N(x_1) \rightarrow 0,093919 + 0,492898i \\x_2 = (\sin 72^\circ + i \cos 72^\circ) &\Rightarrow N(x_2) \rightarrow 0,366327 - 0,786525i \\x_3 = (\sin 144^\circ + i \cos 144^\circ) &\Rightarrow N(x_3) \rightarrow 0,366327 - 0,786525i \\x_4 = (\sin 216^\circ + i \cos 216^\circ) &\Rightarrow N(x_4) \rightarrow 0,366327 - 0,786525i \\x_5 = (\sin 288^\circ + i \cos 288^\circ) &\Rightarrow N(x_5) \rightarrow -0,614971 + 0,449776i\end{aligned}$$

İlk dağıtılan 5 nokta ile $0,093919 + 0,492898i$, $0,366327 - 0,786525i$ ve $-0,614971 + 0,449776i$ köklerine ulaşıldı. Diğer iki köke de ulaşabilmek için döndürme işleminin yapılması gerekir.

$$k = \frac{d+1}{2} = 3$$

x_i ve x_{i+1} noktaları arasında 3 dönme işlemi yapılmalıdır. x_i ve x_{i+1} arasındaki açı 72° dir. Aralarında 3 dönme yapılacağından dönme açısı 24° olur. İlk iterasyon sonucu

$$x_1^1 = (\sin 336^\circ + i \cos 336^\circ) \Rightarrow N(x_1^1) \rightarrow 0,366327 - 0,786525i$$

$$x_2^1 = (\sin 48^\circ + i \cos 48^\circ) \Rightarrow N(x_2^1) \rightarrow -0,404422 - 0,645343i$$

$$x_3^1 = (\sin 120^\circ + i \cos 120^\circ) \Rightarrow N(x_3^1) \rightarrow 0,093919 + 0,492898i$$

$$x_4^1 = (\sin 192^\circ + i \cos 192^\circ) \Rightarrow N(x_4^1) \rightarrow -0,404422 - 0,645343i$$

$$x_5^1 = (\sin 264^\circ + i \cos 264^\circ) \Rightarrow N(x_5^1) \rightarrow 0,093919 + 0,492898i$$

noktaları elde edilir. Bu iterasyonda bir önceki iterasyona ek olarak $-0,404422 - 0,645343i$ köküne ulaşılmış olur. Bütün kökler bulunamadığından x_i^1 noktaları tekrar saat tersi yönde 24° ile döndürülür. İkinci iterasyon da elde edilen noktalar

$$x_1^2 = (\sin 312^\circ + i \cos 312^\circ) \Rightarrow N(x_1^2) \rightarrow -0,404422 - 0,645343i$$

$$x_2^2 = (\sin 24^\circ + i \cos 24^\circ) \Rightarrow N(x_2^2) \rightarrow -0,614971 + 0,449776i$$

$$x_3^2 = (\sin 96^\circ + i \cos 96^\circ) \Rightarrow N(x_3^2) \rightarrow 0,789147 + 0,259193i$$

$$x_4^2 = (\sin 168^\circ + i \cos 168^\circ) \Rightarrow N(x_4^2) \rightarrow 0,093919 + 0,492898i$$

$$x_5^2 = (\sin 240^\circ + i \cos 240^\circ) \Rightarrow N(x_5^2) \rightarrow 0,789147 + 0,259193i$$

şeklindedir. Bu iterasyonda x_3^2 noktası ile $0,789147 + 0,259193i$ kökü de bulunarak polinomun bütün kökleri bulunmuş olur. Bu örnekte toplam 13 nokta ile $P(z)$ polinomunun bütün köklerine ulaşılr.

$P(z)$ polinomunun gerçek kökleri $-0,404422 - 0,645343i$, $0,789147 + 0,259193i$, $-0,614971 + 0,449776i$, $0,093919 + 0,492898i$, $0,366327 - 0,786525i$ şeklindedir.

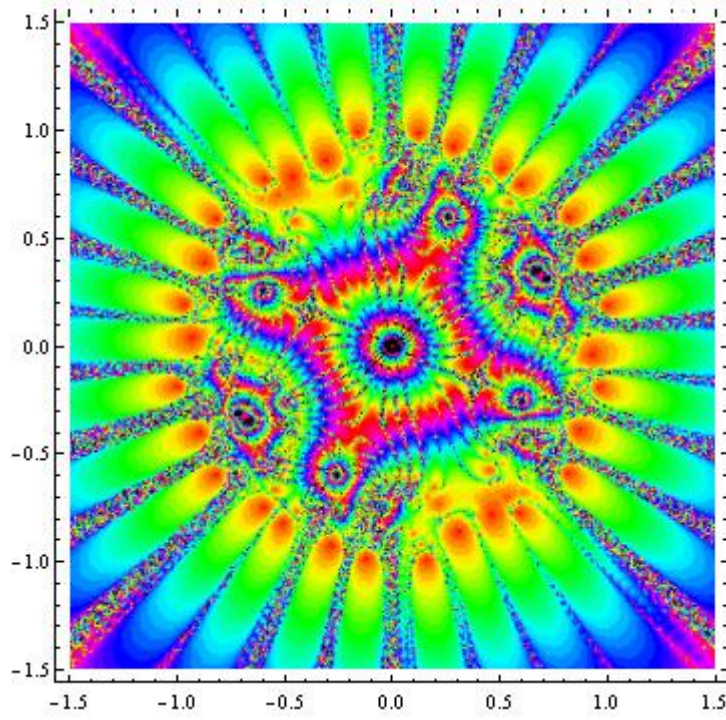
Köklerin, üçüne dağıtılan ilk noktalar ile birine ilk iterasyon da kalan son köke de ikinci iterasyon da ulaşıldı.

Diğer yöntemler ile karşılaştırma yapılırsa Sutherland $\frac{\pi^2}{4} d^{\frac{3}{2}}$ nokta yani $27,58 \approx 28$ noktayı çembere eşit aralıklı olarak dağıtarak bütün kökler bulunur. Hubbard, Schleicher, Sutherland'ın metodunda $1,1d(\log d)^2$ nokta yani $14,24 \approx 15$ nokta dağıtılarak bütün kökler bulunur. Bu çalışmada tanıtılan metot bu örnekte 13 noktayı birim çembere dağıtarak bütün köklere ulaşıldı. Görüldüğü üzere bu çalışmada tanıtılan metot bu örnekte diğer iki yönteme göre daha az nokta ile bütün köklere ulaşmıştır.

Aşağıdaki örnekte yüksek dereceden polinomlar için bu metot kullanılacaktır.

Örnek 2: Aşağıda tanımlanan 30.dereceden $P(z)$ polinomunun köklerini yukarıda tanımlanan yöntem ile bulmak için;

$$P(z) = z^{30} + 0,6z^{14} + (0,4 + 0,2i)z^6 - (0,1 - 0,2i)z^2 - 0,4$$



Şekil 10: 30. Derece $P(z)$ polinomunun Newton grafiği

Polinomun derecesi $d = 30$ olduğundan düzleme öncelikle 30 nokta eşit aralıklı olarak dağıtılacaktır. Dolayısıyla her nokta arası açı $\alpha = \frac{2\pi}{d} = \frac{2\pi}{30} = 12^\circ$ olur. Bu noktalar

$$\begin{aligned} x_1 &= (\sin 0^\circ + i \cos 0^\circ) \\ x_2 &= (\sin 12^\circ + i \cos 12^\circ) \\ x_3 &= (\sin 24^\circ + i \cos 24^\circ) \\ x_4 &= (\sin 36^\circ + i \cos 36^\circ) \\ x_5 &= (\sin 48^\circ + i \cos 48^\circ) \\ &\dots \\ &\dots \\ &\dots \\ x_{29} &= (\sin 336^\circ + i \cos 336^\circ) \\ x_{30} &= (\sin 348^\circ + i \cos 348^\circ) \end{aligned}$$

şeklinde belirlensin.

$P(z)$ polinomuna Newton metodu uygulanırsa

$$N(z) = z - \frac{P(z)}{P'(z)} = z - \frac{z^{30} + 0,6z^{14} + (0,4 + 0,2i)z^6 - (0,1 - 0,2i)z^2 - 0,4}{30z^{29} + 8,4z^{13} + (2,4 + 1,2i)z^5 - (0,2 - 0,4i)z}$$

elde edilir. Her x_i noktası Newton metodunda yerine konulursa yakınsadığı noktalar aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} x_1 &= (\sin 0^\circ + i \cos 0^\circ) \Rightarrow N(x_1) \rightarrow -0,895584 - 0,402188i \\ x_2 &= (\sin 12^\circ + i \cos 12^\circ) \Rightarrow N(x_2) \rightarrow -0,465272 + 0,780254i \\ x_3 &= (\sin 24^\circ + i \cos 24^\circ) \Rightarrow N(x_3) \rightarrow -0,866841 + 0,387611i \\ x_4 &= (\sin 36^\circ + i \cos 36^\circ) \Rightarrow N(x_4) \rightarrow -0,895584 - 0,402188i \\ x_5 &= (\sin 48^\circ + i \cos 48^\circ) \Rightarrow N(x_5) \rightarrow -0,927263 + 0,0428195i \\ x_6 &= (\sin 60^\circ + i \cos 60^\circ) \Rightarrow N(x_6) \rightarrow -0,283657 - 0,924569i \\ x_7 &= (\sin 72^\circ + i \cos 72^\circ) \Rightarrow N(x_7) \rightarrow 0,31007 - 0,859238i \\ x_8 &= (\sin 84^\circ + i \cos 84^\circ) \Rightarrow N(x_8) \rightarrow 0,159277 - 0,990817i \\ x_9 &= (\sin 96^\circ + i \cos 96^\circ) \Rightarrow N(x_9) \rightarrow 0,963724 - 0,191528i \\ x_{10} &= (\sin 108^\circ + i \cos 108^\circ) \Rightarrow N(x_{10}) \rightarrow 0,895584 + 0,402188i \\ x_{11} &= (\sin 120^\circ + i \cos 120^\circ) \Rightarrow N(x_{11}) \rightarrow 0,594704 + 0,750177i \\ x_{12} &= (\sin 132^\circ + i \cos 132^\circ) \Rightarrow N(x_{12}) \rightarrow 0,122682 + 0,985213i \\ x_{13} &= (\sin 144^\circ + i \cos 144^\circ) \Rightarrow N(x_{13}) \rightarrow -0,465272 + 0,780254i \\ x_{14} &= (\sin 156^\circ + i \cos 156^\circ) \Rightarrow N(x_{14}) \rightarrow -0,866841 + 0,387611i \\ x_{15} &= (\sin 168^\circ + i \cos 168^\circ) \Rightarrow N(x_{15}) \rightarrow -0,927263 + 0,0428195i \\ x_{16} &= (\sin 180^\circ + i \cos 180^\circ) \Rightarrow N(x_{16}) \rightarrow -0,817842 - 0,59587i \\ x_{17} &= (\sin 192^\circ + i \cos 192^\circ) \Rightarrow N(x_{17}) \rightarrow -0,283657 - 0,924569i \\ x_{18} &= (\sin 204^\circ + i \cos 204^\circ) \Rightarrow N(x_{18}) \rightarrow 0,159277 - 0,990817i \\ x_{19} &= (\sin 216^\circ + i \cos 216^\circ) \Rightarrow N(x_{19}) \rightarrow 0,465272 - 0,780254i \\ x_{20} &= (\sin 228^\circ + i \cos 228^\circ) \Rightarrow N(x_{20}) \rightarrow 0,963724 - 0,191528i \\ x_{21} &= (\sin 240^\circ + i \cos 240^\circ) \Rightarrow N(x_{21}) \rightarrow 0,927263 - 0,0428195i \\ x_{22} &= (\sin 252^\circ + i \cos 252^\circ) \Rightarrow N(x_{22}) \rightarrow 0,594704 + 0,750177i \\ x_{23} &= (\sin 264^\circ + i \cos 264^\circ) \Rightarrow N(x_{23}) \rightarrow 0,122682 + 0,985213i \\ x_{24} &= (\sin 276^\circ + i \cos 276^\circ) \Rightarrow N(x_{24}) \rightarrow -0,465272 + 0,780254i \\ x_{25} &= (\sin 288^\circ + i \cos 288^\circ) \Rightarrow N(x_{25}) \rightarrow -0,283657 - 0,924569i \\ x_{26} &= (\sin 300^\circ + i \cos 300^\circ) \Rightarrow N(x_{26}) \rightarrow -0,927263 + 0,0428195i \\ x_{27} &= (\sin 312^\circ + i \cos 312^\circ) \Rightarrow N(x_{27}) \rightarrow -0,817842 - 0,59587i \\ x_{28} &= (\sin 324^\circ + i \cos 324^\circ) \Rightarrow N(x_{28}) \rightarrow 0,963724 - 0,191528i \\ x_{29} &= (\sin 336^\circ + i \cos 336^\circ) \Rightarrow N(x_{29}) \rightarrow 0,159277 - 0,990817i \\ x_{30} &= (\sin 348^\circ + i \cos 348^\circ) \Rightarrow N(x_{30}) \rightarrow 0,590269 - 0,772092i \end{aligned}$$

Görüldüğü üzere dağıtılan her nokta çekici havzaya düştü dolayısıyla Newton metodu ile bir köke yakınsadı. İlk dağıtılan 30 nokta ile

$$\begin{aligned} & -0,895584 - 0,402188i \quad -0,465272 + 0,780254i \quad -0,866841 + 0,387611i \\ & -0,927263 + 0,0428195i \quad -0,283657 - 0,924569i \quad 0,31007 - 0,859238i \\ & 0,159277 - 0,990817i \quad 0,963724 - 0,191528i \quad 0,895584 + 0,402188i \\ & 0,594704 + 0,750177i \quad 0,122682 + 0,985213i \quad -0,817842 - 0,59587i \\ & 0,465272 - 0,780254i \quad 0,927263 - 0,0428195i \quad 0,590269 - 0,772092i \end{aligned}$$

olmak üzere polinomun 15 farklı köküne ulaşıldı. Diğer köklere de ulaşabilmek için döndürme işleminin yapılması gerekir.

$$k = \frac{d}{2} = 15$$

x_i ve x_{i+1} noktaları arasında en fazla 15 dönme işlemi yapılmalıdır. x_i ve x_{i+1} arasındaki açı 12° olur. Aralarında 15 dönme yapılacağından dönme açısı $0,8^\circ$ olur. İlk dönme işlemi ve elde edilen yeni noktaların Newton metoduna göre yakınsadığı kökler

$$\begin{aligned}
x_1^1 &= (\sin 359,2^\circ + i \cos 359,2^\circ) \Rightarrow N(x_1^1) \rightarrow -0,31007 + 0,859238i \\
x_2^1 &= (\sin 11,2^\circ + i \cos 11,2^\circ) \Rightarrow N(x_2^1) \rightarrow -0,963724 + 0,191528i \\
x_3^1 &= (\sin 23,2^\circ + i \cos 23,2^\circ) \Rightarrow N(x_3^1) \rightarrow -0,895584 - 0,402188i \\
x_4^1 &= (\sin 35,2^\circ + i \cos 35,2^\circ) \Rightarrow N(x_4^1) \rightarrow -0,594704 - 0,750177i \\
x_5^1 &= (\sin 47,2^\circ + i \cos 47,2^\circ) \Rightarrow N(x_5^1) \rightarrow -0,122682 - 0,985213i \\
x_6^1 &= (\sin 59,2^\circ + i \cos 59,2^\circ) \Rightarrow N(x_6^1) \rightarrow 0,465272 - 0,780254i \\
x_7^1 &= (\sin 71,2^\circ + i \cos 71,2^\circ) \Rightarrow N(x_7^1) \rightarrow 0,927263 - 0,0428195i \\
x_8^1 &= (\sin 83,2^\circ + i \cos 83,2^\circ) \Rightarrow N(x_8^1) \rightarrow 0,927263 - 0,0428195i \\
x_9^1 &= (\sin 96,2^\circ + i \cos 95,2^\circ) \Rightarrow N(x_9^1) \rightarrow 0,866841 - 0,387611i \\
x_{10}^1 &= (\sin 107,2^\circ + i \cos 107,2^\circ) \Rightarrow N(x_{10}^1) \rightarrow 0,122682 + 0,985213i \\
x_{11}^1 &= (\sin 119,2^\circ + i \cos 119,2^\circ) \Rightarrow N(x_{11}^1) \rightarrow -0,159277 + 0,990817i \\
x_{12}^1 &= (\sin 131,2^\circ + i \cos 131,2^\circ) \Rightarrow N(x_{12}^1) \rightarrow -0,31007 + 0,859238i \\
x_{13}^1 &= (\sin 143,2^\circ + i \cos 143,2^\circ) \Rightarrow N(x_{13}^1) \rightarrow -0,963724 + 0,191528i \\
x_{14}^1 &= (\sin 155,2^\circ + i \cos 155,2^\circ) \Rightarrow N(x_{14}^1) \rightarrow 0,927263 - 0,0428195i \\
x_{15}^1 &= (\sin 167,2^\circ + i \cos 167,2^\circ) \Rightarrow N(x_{15}^1) \rightarrow -0,594704 - 0,750177i \\
x_{16}^1 &= (\sin 179,2^\circ + i \cos 179,2^\circ) \Rightarrow N(x_{16}^1) \rightarrow -0,122682 - 0,985213i \\
x_{17}^1 &= (\sin 191,2^\circ + i \cos 191,2^\circ) \Rightarrow N(x_{17}^1) \rightarrow 0,590269 - 0,772092i \\
x_{18}^1 &= (\sin 203,2^\circ + i \cos 203,2^\circ) \Rightarrow N(x_{18}^1) \rightarrow -0,998077 - 0,18789i \\
x_{19}^1 &= (\sin 215,2^\circ + i \cos 215,2^\circ) \Rightarrow N(x_{19}^1) \rightarrow 0,927263 - 0,0428195i \\
x_{20}^1 &= (\sin 227,2^\circ + i \cos 227,2^\circ) \Rightarrow N(x_{20}^1) \rightarrow 0,594704 + 0,750177i \\
x_{21}^1 &= (\sin 239,2^\circ + i \cos 239,2^\circ) \Rightarrow N(x_{21}^1) \rightarrow -0,31007 + 0,859238i \\
x_{22}^1 &= (\sin 251,2^\circ + i \cos 251,2^\circ) \Rightarrow N(x_{22}^1) \rightarrow -0,159277 + 0,990817i \\
x_{23}^1 &= (\sin 263,2^\circ + i \cos 263,2^\circ) \Rightarrow N(x_{23}^1) \rightarrow -0,590269 + 0,772092i \\
x_{24}^1 &= (\sin 275,2^\circ + i \cos 275,2^\circ) \Rightarrow N(x_{24}^1) \rightarrow -0,465272 + 0,780254i \\
x_{25}^1 &= (\sin 287,2^\circ + i \cos 287,2^\circ) \Rightarrow N(x_{25}^1) \rightarrow -0,927263 + 0,0428195i \\
x_{26}^1 &= (\sin 299,2^\circ + i \cos 299,2^\circ) \Rightarrow N(x_{26}^1) \rightarrow -0,594704 - 0,750177i \\
x_{27}^1 &= (\sin 311,2^\circ + i \cos 311,2^\circ) \Rightarrow N(x_{27}^1) \rightarrow -0,510631 - 0,820623i \\
x_{28}^1 &= (\sin 323,2^\circ + i \cos 323,2^\circ) \Rightarrow N(x_{28}^1) \rightarrow 0,31007 - 0,859238i \\
x_{29}^1 &= (\sin 335,2^\circ + i \cos 335,2^\circ) \Rightarrow N(x_{29}^1) \rightarrow 0,817728 - 0,587058i \\
x_{30}^1 &= (\sin 347,2^\circ + i \cos 347,2^\circ) \Rightarrow N(x_{30}^1) \rightarrow 0,927263 - 0,0428195i
\end{aligned}$$

şeklindedir. Bu iterasyonda bir önceki iterasyona ek olarak

$$\begin{aligned} & -0,31007 + 0,859238i \quad -0,963724 + 0,191528i \quad -0,594704 - 0,750177i \\ & -0,122682 - 0,985213i \quad 0,866841 - 0,387611i \quad 0,817728 - 0,587058i \\ & -0,159277 + 0,990817i \quad -0,998077 - 0,18789i \quad -0,590269 + 0,772092i \\ & -0,510631 - 0,820623i \end{aligned}$$

olmak üzere 11 farklı köke daha ulaşılmış olur. Henüz bütün köklere ulaşamadığı için bir dönme işlemi daha yapılmalıdır. İkinci iterasyon da yani yapılan dönme işlemi sonucu elde edilen noktalar ve onların Newton metoduna göre yakınsadığı kökler

$$\begin{aligned}
x_1^2 &= (\sin 358,4^\circ + i \cos 358,4^\circ) \Rightarrow N(x_1^2) \rightarrow 0,283657 + 0,924569i \\
x_2^2 &= (\sin 10,4^\circ + i \cos 10,4^\circ) \Rightarrow N(x_2^2) \rightarrow -0,817842 - 0,59587i \\
x_3^2 &= (\sin 22,4^\circ + i \cos 22,4^\circ) \Rightarrow N(x_3^2) \rightarrow 0,927263 - 0,0428195i \\
x_4^2 &= (\sin 34,4^\circ + i \cos 34,4^\circ) \Rightarrow N(x_4^2) \rightarrow 0,159277 - 0,990817i \\
x_5^2 &= (\sin 46,4^\circ + i \cos 46,4^\circ) \Rightarrow N(x_5^2) \rightarrow 0,590269 - 0,772092i \\
x_6^2 &= (\sin 58,4^\circ + i \cos 58,4^\circ) \Rightarrow N(x_6^2) \rightarrow 0,927263 - 0,0428195i \\
x_7^2 &= (\sin 70,4^\circ + i \cos 70,4^\circ) \Rightarrow N(x_7^2) \rightarrow 0,159277 - 0,990817i \\
x_8^2 &= (\sin 82,4^\circ + i \cos 82,4^\circ) \Rightarrow N(x_8^2) \rightarrow 0,594704 + 0,750177i \\
x_9^2 &= (\sin 94,4^\circ + i \cos 94,4^\circ) \Rightarrow N(x_9^2) \rightarrow 0,122682 + 0,985213i \\
x_{10}^2 &= (\sin 106,4^\circ + i \cos 106,4^\circ) \Rightarrow N(x_{10}^2) \rightarrow -0,31007 + 0,859238i \\
x_{11}^2 &= (\sin 118,4^\circ + i \cos 118,4^\circ) \Rightarrow N(x_{11}^2) \rightarrow -0,817728 + 0,587058i \\
x_{12}^2 &= (\sin 130,4^\circ + i \cos 130,4^\circ) \Rightarrow N(x_{12}^2) \rightarrow -0,927263 + 0,0428195i \\
x_{13}^2 &= (\sin 142,4^\circ + i \cos 142,4^\circ) \Rightarrow N(x_{13}^2) \rightarrow 0,866841 - 0,387611i \\
x_{14}^2 &= (\sin 154,4^\circ + i \cos 154,4^\circ) \Rightarrow N(x_{14}^2) \rightarrow -0,817842 - 0,59587i \\
x_{15}^2 &= (\sin 166,4^\circ + i \cos 166,4^\circ) \Rightarrow N(x_{15}^2) \rightarrow 0,159277 - 0,990817i \\
x_{16}^2 &= (\sin 178,4^\circ + i \cos 178,4^\circ) \Rightarrow N(x_{16}^2) \rightarrow 0,590269 - 0,772092i \\
x_{17}^2 &= (\sin 190,4^\circ + i \cos 190,4^\circ) \Rightarrow N(x_{17}^2) \rightarrow 0,122682 + 0,985213i \\
x_{18}^2 &= (\sin 202,4^\circ + i \cos 202,4^\circ) \Rightarrow N(x_{18}^2) \rightarrow 0,998077 + 0,18789i \\
x_{19}^2 &= (\sin 214,4^\circ + i \cos 214,4^\circ) \Rightarrow N(x_{19}^2) \rightarrow 0,594704 + 0,750177i \\
x_{20}^2 &= (\sin 226,4^\circ + i \cos 226,4^\circ) \Rightarrow N(x_{20}^2) \rightarrow 0,895584 + 0,402188i \\
x_{21}^2 &= (\sin 238,4^\circ + i \cos 238,4^\circ) \Rightarrow N(x_{21}^2) \rightarrow 0,31007 + 0,859238i \\
x_{22}^2 &= (\sin 250,4^\circ + i \cos 250,4^\circ) \Rightarrow N(x_{22}^2) \rightarrow -0,817728 + 0,587058i \\
x_{23}^2 &= (\sin 262,4^\circ + i \cos 262,4^\circ) \Rightarrow N(x_{23}^2) \rightarrow -0,927263 + 0,0428195i \\
x_{24}^2 &= (\sin 274,4^\circ + i \cos 274,4^\circ) \Rightarrow N(x_{24}^2) \rightarrow -0,895584 - 0,402188i \\
x_{25}^2 &= (\sin 286,4^\circ + i \cos 286,4^\circ) \Rightarrow N(x_{25}^2) \rightarrow -0,510631 - 0,820623i \\
x_{26}^2 &= (\sin 298,4^\circ + i \cos 298,4^\circ) \Rightarrow N(x_{26}^2) \rightarrow 0,465272 - 0,780254i \\
x_{27}^2 &= (\sin 310,4^\circ + i \cos 310,4^\circ) \Rightarrow N(x_{27}^2) \rightarrow 0,590269 - 0,772092i \\
x_{28}^2 &= (\sin 322,4^\circ + i \cos 322,4^\circ) \Rightarrow N(x_{28}^2) \rightarrow 0,866841 - 0,387611i \\
x_{29}^2 &= (\sin 334,4^\circ + i \cos 334,4^\circ) \Rightarrow N(x_{29}^2) \rightarrow 0,998077 + 0,18789i \\
x_{30}^2 &= (\sin 346,4^\circ + i \cos 346,4^\circ) \Rightarrow N(x_{30}^2) \rightarrow 0,283657 + 0,924569i
\end{aligned}$$

şeklindedir. Bu iterasyonda x_1^2 , x_{11}^2 ve x_{19}^2 noktaları ile $P(z)$ polinomunun $0,283657 + 0,924569i$ $-0,817728 + 0,587058i$ $0,998077 + 0,18789i$ olmak üzere üç farklı kökü daha bulunmuş olur. Bulunamayan kökler olduğundan iterasyona devam edilmelidir.

$$\begin{aligned}
x_1^3 &= (\sin 357,6^\circ + i \cos 357,6^\circ) \Rightarrow N(x_1^3) \rightarrow -0,465272 + 0,780254i \\
x_2^3 &= (\sin 9,6^\circ + i \cos 9,6^\circ) \Rightarrow N(x_2^3) \rightarrow -0,122682 - 0,985213i \\
x_3^3 &= (\sin 21,6^\circ + i \cos 21,6^\circ) \Rightarrow N(x_3^3) \rightarrow 0,31007 + 0,859238i \\
x_4^3 &= (\sin 33,6^\circ + i \cos 33,6^\circ) \Rightarrow N(x_4^3) \rightarrow 0,817728 - 0,587058i \\
x_5^3 &= (\sin 45,6^\circ + i \cos 45,6^\circ) \Rightarrow N(x_5^3) \rightarrow 0,927263 - 0,0428195i \\
x_6^3 &= (\sin 57,6^\circ + i \cos 57,6^\circ) \Rightarrow N(x_6^3) \rightarrow 0,895584 + 0,402188i \\
x_7^3 &= (\sin 69,6^\circ + i \cos 69,6^\circ) \Rightarrow N(x_7^3) \rightarrow 0,510631 + 0,820623i \\
x_8^3 &= (\sin 81,6^\circ + i \cos 81,6^\circ) \Rightarrow N(x_8^3) \rightarrow -0,465272 + 0,780254i \\
x_9^3 &= (\sin 93,6^\circ + i \cos 93,6^\circ) \Rightarrow N(x_9^3) \rightarrow 0,590269 - 0,772092i \\
x_{10}^3 &= (\sin 105,6^\circ + i \cos 105,6^\circ) \Rightarrow N(x_{10}^3) \rightarrow -0,866841 + 0,387611i \\
x_{11}^3 &= (\sin 117,6^\circ + i \cos 117,6^\circ) \Rightarrow N(x_{11}^3) \rightarrow -0,998077 - 0,18789i \\
x_{12}^3 &= (\sin 129,6^\circ + i \cos 129,6^\circ) \Rightarrow N(x_{12}^3) \rightarrow -0,594704 - 0,750177i \\
x_{13}^3 &= (\sin 141,6^\circ + i \cos 141,6^\circ) \Rightarrow N(x_{13}^3) \rightarrow -0,283657 - 0,924569i \\
x_{14}^3 &= (\sin 153,6^\circ + i \cos 153,6^\circ) \Rightarrow N(x_{14}^3) \rightarrow 0,31007 - 0,859238i \\
x_{15}^3 &= (\sin 165,6^\circ + i \cos 165,6^\circ) \Rightarrow N(x_{15}^3) \rightarrow 0,817728 - 0,587058i \\
x_{16}^3 &= (\sin 177,6^\circ + i \cos 177,6^\circ) \Rightarrow N(x_{16}^3) \rightarrow 0,927263 - 0,0428195i \\
x_{17}^3 &= (\sin 189,6^\circ + i \cos 189,6^\circ) \Rightarrow N(x_{17}^3) \rightarrow 0,895584 + 0,402188i \\
x_{18}^3 &= (\sin 201,6^\circ + i \cos 201,6^\circ) \Rightarrow N(x_{18}^3) \rightarrow 0,510631 + 0,820623i \\
x_{19}^3 &= (\sin 213,6^\circ + i \cos 213,6^\circ) \Rightarrow N(x_{19}^3) \rightarrow -0,465272 + 0,780254i \\
x_{20}^3 &= (\sin 225,4^\circ + i \cos 225,6^\circ) \Rightarrow N(x_{20}^3) \rightarrow 0,122682 + 0,985213i \\
x_{21}^3 &= (\sin 237,6^\circ + i \cos 237,6^\circ) \Rightarrow N(x_{21}^3) \rightarrow -0,866841 + 0,387611i \\
x_{22}^3 &= (\sin 249,6^\circ + i \cos 249,6^\circ) \Rightarrow N(x_{22}^3) \rightarrow -0,998077 - 0,18789i \\
x_{23}^3 &= (\sin 261,6^\circ + i \cos 261,6^\circ) \Rightarrow N(x_{23}^3) \rightarrow 0,927263 - 0,0428195i \\
x_{24}^3 &= (\sin 273,6^\circ + i \cos 273,6^\circ) \Rightarrow N(x_{24}^3) \rightarrow -0,283657 - 0,924569i \\
x_{25}^3 &= (\sin 285,6^\circ + i \cos 285,6^\circ) \Rightarrow N(x_{25}^3) \rightarrow 0,31007 - 0,859238i \\
x_{26}^3 &= (\sin 297,6^\circ + i \cos 297,6^\circ) \Rightarrow N(x_{26}^3) \rightarrow -0,594704 - 0,750177i \\
x_{27}^3 &= (\sin 309,6^\circ + i \cos 309,6^\circ) \Rightarrow N(x_{27}^3) \rightarrow 0,963724 - 0,191528i \\
x_{28}^3 &= (\sin 321,6^\circ + i \cos 321,6^\circ) \Rightarrow N(x_{28}^3) \rightarrow 0,895584 + 0,402188i \\
x_{29}^3 &= (\sin 333,6^\circ + i \cos 333,6^\circ) \Rightarrow N(x_{29}^3) \rightarrow 0,510631 + 0,820623i \\
x_{30}^3 &= (\sin 345,6^\circ + i \cos 345,6^\circ) \Rightarrow N(x_{30}^3) \rightarrow 0,510631 + 0,820623i
\end{aligned}$$

Bu iterasyonda $0,510631 + 0,820623i$ kökü x_7^3 noktası yardımıyla bulunur.

Noktalar tekrar döndürülmelidir. Çünkü bütün köklere ulaşamadı.

$$\begin{aligned}
x_1^4 &= (\sin 356,8^\circ + i \cos 356,8^\circ) \Rightarrow N(x_1^4) \rightarrow -0,963724 + 0,191528i \\
x_2^4 &= (\sin 8,8^\circ + i \cos 8,8^\circ) \Rightarrow N(x_2^4) \rightarrow 0,590269 - 0,772092i \\
x_3^4 &= (\sin 20,8^\circ + i \cos 20,8^\circ) \Rightarrow N(x_3^4) \rightarrow 0,866841 - 0,387611i \\
x_4^4 &= (\sin 32,8^\circ + i \cos 32,8^\circ) \Rightarrow N(x_4^4) \rightarrow 0,998077 + 0,18789i \\
x_5^4 &= (\sin 44,8^\circ + i \cos 44,8^\circ) \Rightarrow N(x_5^4) \rightarrow 0,594704 + 0,750177i \\
x_6^4 &= (\sin 56,8^\circ + i \cos 56,8^\circ) \Rightarrow N(x_6^4) \rightarrow 0,283657 + 0,924569i \\
x_7^4 &= (\sin 68,8^\circ + i \cos 68,8^\circ) \Rightarrow N(x_7^4) \rightarrow -0,31007 + 0,859238i \\
x_8^4 &= (\sin 80,8^\circ + i \cos 80,8^\circ) \Rightarrow N(x_8^4) \rightarrow -0,927263 + 0,0428195i \\
x_9^4 &= (\sin 92,8^\circ + i \cos 92,8^\circ) \Rightarrow N(x_9^4) \rightarrow -0,895584 - 0,402188i \\
x_{10}^4 &= (\sin 104,8^\circ + i \cos 104,8^\circ) \Rightarrow N(x_{10}^4) \rightarrow -0,895584 - 0,402188i \\
x_{11}^4 &= (\sin 116,8^\circ + i \cos 116,8^\circ) \Rightarrow N(x_{11}^4) \rightarrow -0,510631 - 0,820623i \\
x_{12}^4 &= (\sin 128,8^\circ + i \cos 128,8^\circ) \Rightarrow N(x_{12}^4) \rightarrow 0,998077 + 0,18789i \\
x_{13}^4 &= (\sin 140,8^\circ + i \cos 140,8^\circ) \Rightarrow N(x_{13}^4) \rightarrow 0,465272 - 0,780254i \\
x_{14}^4 &= (\sin 152,8^\circ + i \cos 152,8^\circ) \Rightarrow N(x_{14}^4) \rightarrow 0,866841 - 0,387611i \\
x_{15}^4 &= (\sin 164,8^\circ + i \cos 164,8^\circ) \Rightarrow N(x_{15}^4) \rightarrow 0,465272 - 0,780254i \\
x_{16}^4 &= (\sin 176,8^\circ + i \cos 176,8^\circ) \Rightarrow N(x_{16}^4) \rightarrow -0,283657 - 0,924569i \\
x_{17}^4 &= (\sin 188,8^\circ + i \cos 188,8^\circ) \Rightarrow N(x_{17}^4) \rightarrow 0,283657 + 0,924569i \\
x_{18}^4 &= (\sin 200,8^\circ + i \cos 200,8^\circ) \Rightarrow N(x_{18}^4) \rightarrow -0,31007 + 0,859238i \\
x_{19}^4 &= (\sin 212,8^\circ + i \cos 212,8^\circ) \Rightarrow N(x_{19}^4) \rightarrow -0,465272 + 0,780254i \\
x_{20}^4 &= (\sin 224,8^\circ + i \cos 224,8^\circ) \Rightarrow N(x_{20}^4) \rightarrow -0,963724 + 0,191528i \\
x_{21}^4 &= (\sin 236,8^\circ + i \cos 236,8^\circ) \Rightarrow N(x_{21}^4) \rightarrow -0,895584 - 0,402188i \\
x_{22}^4 &= (\sin 248,8^\circ + i \cos 248,8^\circ) \Rightarrow N(x_{22}^4) \rightarrow -0,594704 - 0,750177i \\
x_{23}^4 &= (\sin 260,8^\circ + i \cos 260,8^\circ) \Rightarrow N(x_{23}^4) \rightarrow -0,122682 - 0,985213i \\
x_{24}^4 &= (\sin 272,8^\circ + i \cos 272,8^\circ) \Rightarrow N(x_{24}^4) \rightarrow 0,465272 - 0,780254i \\
x_{25}^4 &= (\sin 284,8^\circ + i \cos 284,8^\circ) \Rightarrow N(x_{25}^4) \rightarrow 0,866841 - 0,387611i \\
x_{26}^4 &= (\sin 296,8^\circ + i \cos 296,8^\circ) \Rightarrow N(x_{26}^4) \rightarrow 0,927263 - 0,0428195i \\
x_{27}^4 &= (\sin 308,8^\circ + i \cos 308,8^\circ) \Rightarrow N(x_{27}^4) \rightarrow 0,817842 + 0,59587i \\
x_{28}^4 &= (\sin 320,8^\circ + i \cos 320,8^\circ) \Rightarrow N(x_{28}^4) \rightarrow 0,283657 + 0,924569i \\
x_{29}^4 &= (\sin 332,8^\circ + i \cos 332,8^\circ) \Rightarrow N(x_{29}^4) \rightarrow -0,31007 + 0,859238i \\
x_{30}^4 &= (\sin 344,8^\circ + i \cos 344,8^\circ) \Rightarrow N(x_{30}^4) \rightarrow -0,465272 + 0,780254i
\end{aligned}$$

x_{26}^4 noktası ile $0,817842 + 0,59587i$ kökü bulunur. Bu durumda polinomun bütün kökleri bulunmuş olur. Toplam 146 nokta ile $P(z)$ polinomunun bütün köklerine ulaşılır.

$P(z)$ polinomunun gerçek kökleri

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0,159277 - 0,990817i & x_2 &= -0,159277 + 0,990817i & x_3 &= 0,122682 + 0,985213i \\
x_4 &= -0,283657 - 0,924569i & x_5 &= 0,31007 - 0,859238i & x_6 &= 0,465272 - 0,780254i \\
x_7 &= -0,465272 + 0,780254i & x_8 &= 0,590269 - 0,772092i & x_9 &= -0,590269 + 0,772092i \\
x_{10} &= 0,594704 + 0,750177i & x_{11} &= -0,817842 - 0,59587i & x_{12} &= -0,866841 + 0,387611i \\
x_{13} &= 0,866841 - 0,387611i & x_{14} &= -0,895584 - 0,402188i & x_{15} &= 0,895584 + 0,402188i \\
x_{16} &= 0,927263 - 0,0428195i & x_{17} &= -0,927263 + 0,0428195i & x_{18} &= 0,963724 - 0,191528i \\
x_{19} &= 0,998077 + 0,18789i & x_{20} &= -0,122682 - 0,985213i & x_{21} &= 0,283657 + 0,924569i \\
x_{22} &= -0,31007 + 0,859238i & x_{23} &= 0,510631 + 0,820623i & x_{24} &= -0,510631 - 0,820623i \\
x_{25} &= -0,594704 - 0,750177i & x_{26} &= 0,817842 + 0,59587i & x_{27} &= -0,817728 + 0,587058i \\
x_{28} &= -0,963724 + 0,191528i & x_{29} &= 0,817728 - 0,587058i & x_{30} &= -0,998077 - 0,18789i
\end{aligned}$$

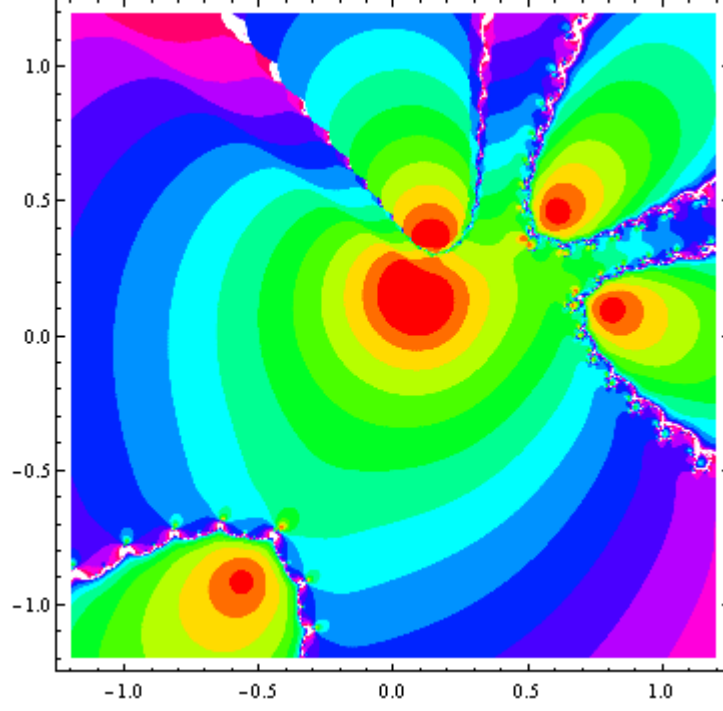
şeklinde olup bu yöntem ile ilk dağıtılan 30 noktayı her iterasyonda $0,8^\circ$ 'lik açılarla dört defa döndürerek bütün kökler bulunabiliyor.

Dağıtılan ilk noktalar ile 15 kök, ilk iterasyonda kalan 10 kök, ikinci iterasyonda 3 kök, üçüncü iterasyonda 1 ve dördüncü iterasyondada 1 farklı kökün immediate havzaine en az birer nokta düşürülerek polinomun bütün köklerine ulaşıldı.

Diğer yöntemler ile karşılaştırma yapılırsa Sutherland $\frac{\pi^2}{4}d^{\frac{3}{2}}$ nokta yani $405,435 \approx 406$ noktayı çembere eşit aralıklı olarak dağıtarak bütün kökler bulunur. Schleicher'in metodunda $1,1d(\log d)^2$ nokta yani $381,784 \approx 382$ nokta dağıtılarak bütün kökler bulunur. Bu çalışmada tanıtılan metot bu örnekte 146 nokta birim çembere dağıtarak bütün köklere ulaşıldı. Görüldüğü üzere bu çalışmada tanıtılan metot yüksek derece polinomda da diğer iki yönteme göre çok daha az nokta ile bütün köklere ulaşmıştır.

Örnek 3: Aşağıda tanımlanan 7.dereceden $P(z)$ polinomunun köklerini yukarıda tanımlanan yöntem ile bulmak için;

$$\begin{aligned}
P(z) &= z^7 - (1,29 + 0,44i)z^6 + (0,6675 - 0,3895i)z^5 - (1,062 - 0,75675i)z^4 \\
&\quad - (0,812779 + 0,0558275i)z^3 - (0,138389 + 0,179992i)z^2 \\
&\quad - (0,00732866 - 0,0284446i)z + (0,00133761 - 0,000537213i)
\end{aligned}$$



Şekil 9: 7. Derece $P(z)$ polinomunun Newton grafiği

Polinomun derecesi $d = 7$ olduğundan düzleme öncelikle 7 nokta eşit aralıklı olarak

dağıtılacaktır. Dolayısıyla her nokta arası açı $\alpha = \frac{2\pi}{d} = \frac{2\pi}{7} \approx 51,42^\circ$ olur. Bu noktalar

$$x_1 = (\sin 0^\circ + i \cos 0^\circ)$$

$$x_2 = (\sin 51,42^\circ + i \cos 51,42^\circ)$$

$$x_3 = (\sin 102,84^\circ + i \cos 102,84^\circ)$$

$$x_4 = (\sin 154,26^\circ + i \cos 154,26^\circ)$$

$$x_5 = (\sin 205,68^\circ + i \cos 205,68^\circ)$$

$$x_6 = (\sin 257,1^\circ + i \cos 257,1^\circ)$$

$$x_7 = (\sin 308,52^\circ + i \cos 308,52^\circ)$$

şeklinde belirlensin.

$P(z)$ polinomuna Newton metodu uygulanırsa

$$N(z) = z - \frac{P(z)}{P'(z)} = z - \frac{z^7 - (1,29 + 0,44i)z^6 + (0,6675 - 0,3895i)z^5 - (1,062 - 0,75675i)z^4 - (0,812779 + 0,0558275i)z^3 - (0,138389 + 0,179992i)z^2 - (0,00732866 - 0,0284446i)z + (0,00133761 - 0,000537213i)}{7z^6 - (7,74 + 2,64i)z^5 + (3,3375 - 1,9475i)z^4 - (4,248 - 3,027i)z^3 - (2,438337 + 1,674825i)z^2 - (0,276778 + 0,359984i)z - (0,00732866 - 0,0284446i)}$$

elde edilir. Her x_i noktası Newton metodunda yerine konulursa yakınsadığı kökler aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} x_1 &= (\sin 0^\circ + i \cos 0^\circ) \Rightarrow N(x_1) \rightarrow 0,15 + 0,35i \\ x_2 &= (\sin 51,42^\circ + i \cos 51,42^\circ) \Rightarrow N(x_2) \rightarrow 0,10001 + 0,150002i \\ x_3 &= (\sin 102,84^\circ + i \cos 102,84^\circ) \Rightarrow N(x_3) \rightarrow 0,10001 + 0,150002i \\ x_4 &= (\sin 154,26^\circ + i \cos 154,26^\circ) \Rightarrow N(x_4) \rightarrow 0,10001 + 0,150002i \\ x_5 &= (\sin 205,68^\circ + i \cos 205,68^\circ) \Rightarrow N(x_5) \rightarrow 0,10001 + 0,150002i \\ x_6 &= (\sin 257,1^\circ + i \cos 257,1^\circ) \Rightarrow N(x_6) \rightarrow 0,10001 + 0,149998i \\ x_7 &= (\sin 308,52^\circ + i \cos 308,52^\circ) \Rightarrow N(x_7) \rightarrow 0,6 + 0,45i \end{aligned}$$

Görüldüğü üzere dağıtılan her nokta çekici havzaya düştü bu yüzden Newton metodu ile bir köke yakınsadı. İlk dağıtılan 7 nokta ile $0,15 + 0,35i$ $0,6 + 0,45i$ $0,1 + 0,15i$ olmak üzere polinomun 3 farklı köküne ulaşıldı. Ancak kontrol edilirse $0,1 + 0,15i$ kökünün 3 katlı kök olduğu görülecektir. Dolayısıyla bu problemde 7 farklı kök aramak yerine 5 farklı kök aranmalıdır. Diğer köklere de ulaşabilmek için döndürme işleminin yapılması gerekir. Yukarıdaki değerler hesaplanırken Newton metodu ile 1000 iterasyon yapılarak verilmiştir. Dikkat edilirse katlı köklerin kesin değerine ulaşamamıştır. Çünkü katlı kök olduğu için Newton metodu köke lineer yaklaşır.

Bütün kökleri bulmak için gerekli olan en fazla iterasyon sayısı

$$k = \frac{d+1}{2} = 4$$

şeklinde bulunur. Bu durumda x_i ve x_{i+1} noktaları arasında en fazla 4 dönme işlemi yapılmalıdır. x_i ve x_{i+1} arasındaki açı $51,42^\circ$ olur. Aralarında 4 dönme yapılacağından dönme açısı $12,855^\circ$ olur. Dolayısıyla ilk dönme işlemi ve elde edilen yeni noktaların Newton metoduna göre yakınsadığı kökler

$$\begin{aligned}
x_1^1 &= (\sin 347,145^\circ + i \cos 347,145^\circ) \Rightarrow N(x_1^1) \rightarrow 0,8 + 0,1i \\
x_2^1 &= (\sin 38,565^\circ + i \cos 38,565^\circ) \Rightarrow N(x_2^1) \rightarrow 0,6 + 0,45i \\
x_3^1 &= (\sin 89,985^\circ + i \cos 89,985^\circ) \Rightarrow N(x_3^1) \rightarrow 0,10001 + 0,150002i \\
x_4^1 &= (\sin 141,405^\circ + i \cos 141,405^\circ) \Rightarrow N(x_4^1) \rightarrow 0,10001 + 0,149998i \\
x_5^1 &= (\sin 192,825^\circ + i \cos 192,825^\circ) \Rightarrow N(x_5^1) \rightarrow 0,10001 + 0,149998i \\
x_6^1 &= (\sin 244,245^\circ + i \cos 244,245^\circ) \Rightarrow N(x_6^1) \rightarrow 0,10001 + 0,150002i \\
x_7^1 &= (\sin 295,665^\circ + i \cos 295,665^\circ) \Rightarrow N(x_7^1) \rightarrow 0,10001 + 0,150002i
\end{aligned}$$

şeklindedir. Bu iterasyonda ek olarak $0,8 + 0,1i$ kökü bulundu. Bulunması gereken bir kök daha olduğundan noktalar döndürülmelidir.

$$\begin{aligned}
x_1^2 &= (\sin 334,29^\circ + i \cos 334,29^\circ) \Rightarrow N(x_1^2) \rightarrow 0,10001 + 0,149998i \\
x_2^2 &= (\sin 25,71^\circ + i \cos 25,71^\circ) \Rightarrow N(x_2^2) \rightarrow 0,10001 + 0,149998i \\
x_3^2 &= (\sin 77,13^\circ + i \cos 77,13^\circ) \Rightarrow N(x_3^2) \rightarrow 0,8 + 0,1i \\
x_4^2 &= (\sin 128,55^\circ + i \cos 128,55^\circ) \Rightarrow N(x_4^2) \rightarrow 0,10001 + 0,149998i \\
x_5^2 &= (\sin 179,97^\circ + i \cos 179,97^\circ) \Rightarrow N(x_5^2) \rightarrow 0,10001 + 0,149998i \\
x_6^2 &= (\sin 231,39^\circ + i \cos 231,39^\circ) \Rightarrow N(x_6^2) \rightarrow 0,10001 + 0,150002i \\
x_7^2 &= (\sin 282,81^\circ + i \cos 295,665^\circ) \Rightarrow N(x_7^2) \rightarrow 0,15 + 0,35i
\end{aligned}$$

Bu iterasyonda herhangi bir yeni köke ulaşamadığından noktalar tekrar döndürülmelidir.

$$\begin{aligned}
x_1^3 &= (\sin 321,435^\circ + i \cos 321,435^\circ) \Rightarrow N(x_1^3) \rightarrow 0,6 + 0,45i \\
x_2^3 &= (\sin 12,855^\circ + i \cos 12,855^\circ) \Rightarrow N(x_2^3) \rightarrow 0,15 + 0,35i \\
x_3^3 &= (\sin 64,275^\circ + i \cos 64,275^\circ) \Rightarrow N(x_3^3) \rightarrow 0,8 + 0,1i \\
x_4^3 &= (\sin 115,695^\circ + i \cos 115,695^\circ) \Rightarrow N(x_4^3) \rightarrow 0,10001 + 0,150002i \\
x_5^3 &= (\sin 166,935^\circ + i \cos 166,935^\circ) \Rightarrow N(x_5^3) \rightarrow 0,56 + 0,91i \\
x_6^3 &= (\sin 218,535^\circ + i \cos 218,535^\circ) \Rightarrow N(x_6^3) \rightarrow 0,10001 + 0,149998i \\
x_7^3 &= (\sin 269,955^\circ + i \cos 269,955^\circ) \Rightarrow N(x_7^3) \rightarrow 0,15 + 0,35i
\end{aligned}$$

Bu dönme işlemi sonucu x_5^3 noktası ile $0,56 + 0,91i$ kökü de bulunarak bütün kökler bulunmuş olur. Toplam 26 nokta kullanılarak katlı kök içeren polinomun bütün köklerine ulaşıldı.

Diğer yöntemler ile karşılaştırma yapılırsa Sutherland $\frac{\pi^2}{4} d^{\frac{3}{2}}$ nokta yani $45,69 \approx 46$ noktayı çembere eşit aralıklı olarak dağıtarak bütün kökler bulunur. Schleicher'in metodunda $1,1d(\log d)^2$ nokta yani $29,15 \approx 30$ nokta dağıtılarak bütün

kökler bulunur. Bu çalışmada tanıtılan metot bu örnekte 26 nokta birim çembere dağıtarak bütün köklere ulaşıldı. Görüldüğü üzere bu çalışmada tanıtılan metot katlı kök içeren polinomda da diğer iki yönteme göre çok daha az nokta ile bütün köklere ulaşmıştır.

3. SONUÇ

Bu çalışmada kompleks dinamiğin ortaya çıkış sorusu olan Newton metodunu kompleks polinomlara uygulanması problemi üzerine çalışılmıştır. Polinomlara Newton metodunun uygulamasıyla rasyonel fonksiyonlar elde edilir. Newton metodu her başlangıç noktası için yakınsayan bir metot değildir. Dolayısıyla incelenen fonksiyonun köklerini bulmak için başlangıç noktaları seçimine dikkat edilmelidir. Bu tezde kompleks polinomun bütün köklerini en az sayıda başlangıç noktası kullanarak nasıl bulunabilir problemine çözüm aranmıştır.

Newton metodunun grafiği düzlemi iki ayrı kümeye böler biri Julia kümesi olup iterasyon altında köklere yakınsamayan küme olup kaotik, kapalı ve kompaktır. Diğer küme ise Newton metodunun yakınsak davrandığı bölge olup köklerin çekici havzalarından oluşur. Bu kümenin noktaları ile fonksiyonların köklerine ulaşmak mümkündür. Polinomlara Newton metodu uygulanınca polinomun kökleri yeni elde edilen rasyonel fonksiyonun sabit noktaları olup çekici tiptedirler. Bu durumda belirli bir komşuluğu iterasyon altında köke yakınsayacaktır. [6]'da her kökün immediate havzalarının sonsuza erişimini sağlayan kanalların olduğu gösterilmiştir. Ayrıca her immediate havzanın modülü en az $\frac{\pi}{\log d}$ olan bir kanalı olduğu gösterilmiştir.

Daha önce Sutherland (1985) ve Hubbard, Schleicher, Sutherland (2000) bu problemle ilgilenmişler. Sırasıyla düzleme eşit aralıklı dağıtılan $\frac{\pi^2}{4}d^{\frac{3}{2}}$ ve $1,1d(\log d)^2$ başlangıç noktasına Newton metodu uygulayarak polinomun bütün köklerine ulaşacağını göstermişlerdir.

Son bölümde tanıtılan iteratif metotta ilk olarak polinomun köklerinin birim disk içinde olduğu varsayıyor. d dereceli polinomun bütün köklerini bulmak için birim disk üzerine eşit aralıklı olarak d nokta dağıtılır ve bu noktalara Newton metodu uygulanarak yakınsaklık durumları test edilir. Bütün köklerin bulunması durumunda iterasyon durdurulur. Bulunmayan köklere ulaşmak için yeni noktalar düzleme dağıtılır. Bu yeni noktalar dağıtılırken eski noktalardan faydalanılır. Dağıtılmış olan noktalar 2. Bölümde verilen açıyla döndürülerek yeni noktalar bulunur.

Noktaların dağılımı sonucu oluşan 1 yarıçaplı ve d yarıçaplı çemberler ile ardışık iki noktanın sınırladığı dörtgenlerin modüllerinin $\frac{\pi}{\log d}$ olması bütün köklerin sonsuza uzanan kanallarına en az bir nokta düşmesini sağlar. Dolayısıyla bu noktalara Newton metodu uygulanmasıyla polinomun bütün köklerine erişimi mümkün kılar.

Böylece en iyi durumda d nokta yani $O(d)$ mertebesinde, en kötü durumda ise $\frac{d^2}{2}$ yani $O(d^2)$ mertebesinde nokta dağıtılarak Newton metodu yardımıyla kompleks polinomun bütün köklerine ulaşılabilir.

KAYNAKLAR

- [1] Alexander, D S., *A History of Complex Dynamics. From Schröder to Fatou and Julia*, Aspects of Mathematics, E24. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, **1994**.
- [2] Blanchard, P., Chiu, A., Complex dynamics: an informal discussion. *Fractal geometry and analysis*, 45–98, NATO Advanced Science Institutes Series C: Mathematical and Physical Sciences. 346, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, **1991**.
- [3] Steinmetz, N., *Rational iteration. Complex Analytic Dynamical Systems*, de Gruyter Studies in Mathematics, 16. Walter de Gruyter & Co., Berlin, **1993**.
- [4] Mandelbrot, B., *The fractal geometry of nature*, W. H. Freeman and Company, New York, **1983**.
- [5] Jones, H., Fractals before Mandelbrot: a selective history. *Fractals and chaos*, 7–33, Springer, New York, **1991**.
- [6] Hubbard, J., Schleicher, D., Sutherland, S., How to find all roots of complex polynomials by Newton's method. *Inventory Mathematics* 146, no. 1, 1–33, **2001**.
- [7] Sutherland, S., *Finding roots of complex polynomials with Newton's method*. Phd. Thesis, Boston University **1989**.
- [8] Strogatz, S., *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Addison-Wesley, **1994**.
- [9] Feldman, D., *Chaos and Fractal An Elementary Introduction*. Oxford University Press, United Kingdom, **2012**.
- [10] Ahlfors, L., *Complex analysis. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable*, Third edition. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Book Company, New York, **1978**.
- [11] Carleson, L., Gamelin, W., *Complex Dynamics*, Universitext: Tracts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, **1993**.
- [12] Keen, L., Julia sets. *Chaos and fractals* (Providence, RI, 1988), 57–74, Proceeding of Symposia in Applied Mathematics, 39, American Mathematics Society, Providence, RI, **1989**.
- [13] Blanchard, P., Complex analytic dynamics on the Riemann sphere. *Bulletin of American Mathematics Society* (N.S.) 11, no. 1, 85–141, **1984**.
- [14] Smale, S., On the efficiency of algorithms of analysis. *Buletin of American Mathematics Society* (N.S.) 13, no. 2, 87–121, **1985**.
- [15] Milnor, J., *Dynamics in one complex variable*, Third edition. Annals of Mathematics Studies, 160. Princeton University Press, Princeton, NJ, **2006**.
- [16] Brolin, H., Invariant sets under iteration of rational functions. *Arkiv för Matematik* 6 1965 103–144 **1965**.
- [17] McMullen, C., *Complex dynamics and renormalization*, Annals of Mathematics Studies, 135. Princeton University Press, Princeton, NJ, **1994**.
- [18] Beardon, A., *Iteration of rational functions. Complex analytic dynamical systems*, Graduate Texts in Mathematics, 132. Springer-Verlag, New York, **1991**.
- [19] Reeve, D., Mandelbrot, Julia sets and nonlinear mappings. *Fractals and chaos*, 35–42, Springer, New York, **1991**.
- [20] Bergweiler, W., Iteration of meromorphic functions. *Buletin of American Mathematics Society* (N.S.) 29 , no. 2, 151–188, **1993**.
- [21] Branner, B., The Mandelbrot set. *Chaos and fractals* (Providence, RI, 1988), 75–105, Proceeding of Symposia in Applied Mathematics, 39, American Mathematics Society, Providence, RI, **1989**.

- [22] William, F., *The Computational Beauty of Nature*, MIT Press, **2000**.
- [23] Mandelbrot, B., *Fractals and chaos. The Mandelbrot set and beyond*, Selecta Volume C. With a foreword by P. W. Jones and texts co-authored by C. J. G. Evertsz and M. C. Gutzwiller. Selected Works of Benoit B. Mandelbrot. Springer-Verlag, New York, **2004**.
- [24] Kim, M., Sutherland, Scott Polynomial root-finding algorithms and branched covers. *SIAM Journal on Computing* 23 , no. 2, 415–436, **1994**.
- [25] von Haeseler, F., Peitgen, H.-O., Newton's method and complex dynamical systems. *Acta Applicandae Mathematica* 13, no. 1-2, 3–58, **1988**.
- [26] McMullen, C., Families of rational maps and iterative root-finding algorithms. *Annals of Mathematics* (2) 125 , no. 3, **1987**.
- [27] Sedgewick, R., *Algorithms in C*, Third edition. Addison-Wesley, **1998**.
- [28] Ahlfors, L., Sario, L., *Riemann surfaces*, Princeton Mathematical Series, No. 26 Princeton University Press, Princeton, N.J. **1960**.
- [29] Ahlfors, L., *Lectures on quasiconformal mappings*. With the assistance of Clifford J. Earle, Jr. Reprint of the 1966 original. The Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics Series. Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Monterey, CA, **1987**.
- [30] Vasil'ev, A., *Moduli of families of curves for conformal and quasiconformal mappings*, *Lecture Notes in Mathematics*, 1788. Springer-Verlag, Berlin, **2002**.
- [31] Vuorinen, M., *Conformal geometry and quasiregular mappings*. *Lecture Notes in Mathematics*, 1319. Springer-Verlag, Berlin, **1988**.
- [32] Marden, M., *Geometry of polynomials*, Second edition. Mathematical Surveys, No. 3 American Mathematical Society, Providence, R.I. **1966**.
- [33] Przytycki, F., Remarks on the simple connectedness of basins of sinks for iterations of rational maps. *Dynamical systems and ergodic theory* (Warsaw, 1986), 229–235, Banach Center Publication, 23, PWN, Warsaw, **1989**.
- [34] Shishikura, M., The connectivity of the Julia set and fixed points. *Complex dynamics*, 257–276, A K Peters, Wellesley, MA, **2009**.
- [35] Krzysztof, B., Fagella, N., Jarque, X., *Accesses To Infinity From Fatou Components.*, Preprint, **2014**.
- [36] Schleicher, D., Newton's method as a dynamical system: efficient root finding of polynomials and the Riemann ζ function. Holomorphic dynamics and renormalization, 213–224, Fields Institution Community, 53, *American Mathematics Society, Providence, RI*, **2008**.
- [37] Barnsley, M., *Superfractals*, Cambridge University Press, Cambridge, **2006**.
- [38] Getz, C., Helmstedt, J., *Graphics with Mathematica. Fractals, Julia sets, patterns and natural forms*. Elsevier B. V., Amsterdam, **2004**.

ÖZGEÇMİŞ

Kimlik Bilgileri

Adı Soyadı : Abdüsselam YÜCEER

Doğum Yeri : Mekke

Meden Hali : Bekar

E-posta : asyuceer@gmail.com

Adres : Yenice Mah. Kader Ap. No:8 Kızılcahamam ANKARA.

Eğitim

:

Lisans : İstanbul Teknik Üniversitesi Matematik Mühendisliği 2009-2015.

Yüksek lisans : Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümü 2015-2017.

Yabancı Dil ve Düzeyi

İngilizce ileri düzey

Almanca orta düzey

İş Deneyimleri

Balkaner Enerji – Analist- 03.2015-08.2015

Deneyim Alanları

Tezden Üretilmiş Projeler ve Bütçesi

Tezden Üretilmiş Yayınlar

Tezden Üretilmiş Tebliğ ve/veya Poster Sunumu ile Katıldığı Toplantılar



HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS/DOKTORA TEZ ÇALIŞMASI ORJİNALLİK RAPORU

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI BAŞKANLIĞI'NA

Tarih:23/03/2017

Tez Başlığı / Konusu: Newton Metodundan Elde Edilen Rasyonel Fonksiyonların Dinamiği ve Geometrisi

Yukarıda başlığı/konusu gösterilen tez çalışmamın a) Kapak sayfası, b) Giriş, c) Ana bölümler d) Sonuç kısımlarından oluşan toplam 50 sayfalık kısmına ilişkin, 29/02/2017 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından Turnitin adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 8 'tür.

Uygulanan filtrelemeler:

- 1- Kaynakça hariç
- 2- Alıntılar hariç/dâhil
- 3- 5 kelimedenden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Çalışması Orijinallik Raporu Alınması ve Kullanılması Uygulama Esasları'nı inceledim ve bu Uygulama Esasları'nda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

23.03.2017

Adı Soyadı: Abdüsselam YÜCEER

Öğrenci No: N14228423

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Yüksek Lisans

Statüsü: Y.Lisans Doktora Bütünleşik Dr.

DANIŞMAN ONAYI

UYGUNDUR.


Doç. Dr. Ayşe Altın