BULANIK-RASTGELE LEE-CARTER MODELİ İLE ÖLÜMLÜLÜĞÜN MODELLENMESİ

MODELLING MORTALITY WITH FUZZY-RANDOM LEE-CARTER MODEL

EZGİ UÇAR

PROF. DR. MERAL SUCU

Tez Danışmanı

Hacettepe Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin

Aktüerya Bilimleri Anabilim Dalı için Öngördüğü

YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırlanmıştır.

2023

ÖZET

BULANIK-RASTGELE LEE-CARTER MODELİ İLE ÖLÜMLÜLÜĞÜN MODELLENMESİ

Ezgi UÇAR

Yüksek Lisans, Aktüerya Bilimleri Bölümü
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Meral SUCU
Ocak 2023, 80 sayfa

Ölüm hızlarını modellemede kullanılan popüler yöntemlerden biri de Lee-Carter modelidir. Bu tezde Lee-Carter modelinin bulanık-rastgele bir genişlemesi üzerinde çalışılmıştır. Yaşa bağlı değişkenler, üçgensel bulanık sayılar kullanılarak bulanıklaştırılmış, bu amaçla bulanık regresyon modeli geliştirilmiş ve çözülmüştür. Zamana bağlı değişken ise ARIMA zaman serileri olarak modellenmiştir. Bulanık ölüm hızları elde edildikten sonra onunla ilişkili olan ölüm olasılıkları ve beklenen yaşam süreleri elde edilmiştir. Uygulama kısmında ise 1970-2000 yılları arasındaki ABD erkek nüfusunun merkezi ölüm hızları kullanılarak, sonraki on yıl için ölüm hızlarının öngörüsü yapılmıştır. Son olarak ise elde edilen bulanık sonuçlar durulaştırılarak Lee Carter modeli ile karşılaştırılmıştır. Yapılan karşılaştırmada, durulaştırılan merkezi ölüm hızlarının performansının daha iyi olduğu sonucuna varılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Ölümlülük, Bulanık Regresyon, Bulanık Kümeler, Lee-Carter Modeli, Üçgensel Bulanık Sayılar, Durulaştırma

ABSTRACT

MODELLING MORTALITY WITH FUZZY-RANDOM LEE-CARTER MODEL

Ezgi UÇAR

Master of Science, Department of Actuarial Science

Supervisor: Prof. Dr. Meral SUCU

Ocak 2023, 80 Pages

This thesis studies a fuzzy-random extension of the Lee-Carter model, which is one of the popular methods for modelling mortality rates. Age-related variables are fuzzified by using triangular fuzzy numbers and for this purpose a fuzzy regression model is developed and solved. The time-dependent variable is modelled as an ARIMA time series. After obtaining the fuzzy mortality rates, the associated probabilities of death and life expectancy were obtained. In the application part, the central mortality rates of the U.S. male population between 1970 and 2000 were used to predict the mortality rates for the next ten years. Finally, the obtained fuzzy results are defuzzified and compared with the Lee Carter model. In the comparison, it was concluded that the performance of the defuzzified central death rates was better.

Keywords: Mortality, Fuzzy Regression, Fuzzy Sets, Lee-Carter Model, Triangular Fuzzy Numbers, Defuzzification

İÇİNDEKİLER

ÖZET i
ABSTRACT ii
İÇİNDEKİLER iii
ÇİZELGELER DİZİNİ v
ŞEKİLLER DİZİNİ vi
SİMGELER VE KISALTMALAR vii
1. GİRİŞ ve GENEL BİLGİLER 1
1.1. Ölümlülük ile İlgili Çalışmalar 1
1.2. Bulanıklık Kavramı, Sigortacılıkta Kullanımı 2
2. LEE-CARTER MODELİ 7
2.1. Modelin Tanımı 7
2.2. Lee-Carter Modeli 7
3. BULANIK SAYILAR 11
3.1 Giriş 11
3.2 Bulanık Küme Tanımı 12
3.3 Bulanık Kümelerde Temel Kavramlar 13
3.3.1 Bulanık Kümelerde Birleşim, Kesişim ve Tümleme İşlemleri 14
3.3.2 Bulanık Kümelerde Kapsama, Eşitlik ve Boş Olma Kavramları 14
3.3.3 Bulanık Sayıların Desteği, Merkezi, Çekirdeği ve Yüksekliği 15
3.3.4 Bulanık Kümelerde Üs Alma 15
3.4 Alfa-Kesim Kümeleri 15
3.5 Bulanık Kümelerde Konvekslik 16
3.6 Bulanık Sayılar 17
4. BULANIK REGRESYON 26
4.1 Asimetrik Katsayılar ile Bulanık Regresyon Modeli 28
4.2. Bulanık Doğrusal Regresyon için Sistem Güvenilirliği 31
4.3 LC Modeline Bulanık-Rastgele Yaklaşım 34
4.3.1 LC Model Parametrelerinin Bulanık-Rastgele Tahmin Edilmesi 34
4.3.2 Bulanık-Rastgele LC Modeli ile Öngörü 39
5. BULANIK-RASTGELE LC MODELİ İÇİN BİR UYGULAMA 42

5.1 Merkezi Ölüm Hızlarının Bulanık-Rastgele LC Yöntemi ile Modellenmesi 42
5.2 Bulanık-Rastgele LC Modeli ile Beklenen Yaşam Süresinin Öngörüsü..... 51
6. LC MODELİ İLE BULANIK-RASTGELE LC MODELİNİN KARŞILAŞTIRILMASI 61
6.1 Durulaştırma Yöntemi ile Noktasal Değer Karşılaştırmaları 62
6.2 Güven Aralıkları ile Yapılan Karşılaştırmalar 65
7. SONUÇ ve ÖNERİLER..... 67
KAYNAKLAR..... 69
EKLER 73
Ek 1. Bulanık Merkezi Ölüm Hızlarının Merkezleri..... 73
Ek 1a. Bulanık Merkezi Ölüm Hızlarının Sol Genişlikleri 74
Ek 1b. Bulanık Merkezi Ölüm Hızlarının Sağ Genişlikleri 75
Ek 2. Bulanık Beklenen Yaşam Sürelerinin Merkezleri 76
Ek 2a. Bulanık Beklenen Yaşam Sürelerinin Sol Genişlikleri..... 77
Ek 2b. Bulanık Beklenen Yaşam Sürelerinin Sağ Genişlikleri..... 78
Ek 3. Durulaştırılmış Merkezi Ölüm Hızları..... 79
Ek 4. Durulaştırılmış Beklenen Yaşam Süreleri 80

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 1.1. İki değerli ile çok değerli mantığın karşılaştırılması 3
Çizelge 5.1. a_x^* ve b_x^* üçgensel bulanık sayıları. 45
Çizelge 5.2. Zaman indeksi kt için öngörü değerleri. 47
Çizelge 5.3. 2004 yılı için bulanık kestirim değerleri. 49
Çizelge 5.4. Doğumda beklenen bulanık yaşam sürelerinin ve bulanık yaşam güven aralıklarının kestirimleri. 57
Çizelge 5.5. Emeklilikte beklenen bulanık yaşam sürelerinin ve bulanık yaşam güven aralıklarının kestirimleri. 59
Çizelge 6.1. Merkezi ölüm hızı tahminlerine ilişkin RMSE ve MAE değerleri. 64
Çizelge 6.2. Beklenen yaşam süresi tahminlerine ilişkin RMSE ve MAE değerleri. ... 64
Çizelge 6.3. Merkezi ölüm hızları için başarılı kestirimlerinin ortalama oranları. 65
Çizelge 6.4. Beklenen yaşam süreleri için başarılı kestirimlerinin ortalama oranları. .. 66

.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1. Rubik'in Küpü 4
Şekil 3.1. Klasik küme için üyelik fonksiyonu grafiği 12
Şekil 3.2. Bulanık kümelerde birleşim, kesişim ve tümleme işlemi. 14
Şekil 3.3. Üyelik fonksiyonu kısımları 16
Şekil 3.4. Üçgensel bulanık sayı. 17
Şekil 4.1 Gözlenen değeri bulunduran bulanık çıktıların üyelik fonksiyonlarının eşit olduğu durum. 31
Şekil 4.2 Gözlenen değeri bulunduran bulanık çıktıların genişliklerinin eşit olduğu durum. 32
Şekil 4.3. Optimize edilmiş alfa-kesim kümeye göre bulanık parametre ax'in sol genişliği 33
Şekil 5.1. 1970 ve 2000 yıllarındaki merkezi ölüm hızları. 42
Şekil 5.2. a_x^* parametresi. 43
Şekil 5.3. k_t Parametresi 44
Şekil 5.4. b_x^* parametresi. 44
Şekil 5.5. 1970-2000 yılları için gözlenen merkezi ölüm hızlarının ortalama üyelik dereceleri. 46
Şekil 5.6. k_t parametresinin 10 yıllık öngörüsü. 47
Şekil 5.7. 2001-2010 yılları için gözlenen merkezi ölüm hızlarının ortalama üyelik dereceleri. 48
Şekil 5.8. 2001-2010 yılları arasında [0,1) yaş grubu için merkezi ölüm hızlarının ortalama üyelik dereceleri 50
Şekil 5.9. 2001-2010 yıllarındaki doğumda beklenen yaşam süresinin üyelik dereceleri. 58
Şekil 5.10. 2001-2010 yılları için emeklilikte beklenen bulanık yaşam sürelerinin üyelik dereceleri. 59

SİMGELER VE KISALTMALAR

Kısaltmalar

LC	Lee-Carter
BR	Bulanık Regresyon
ÜBS	Üçgensel Bulanık Sayı
BDR	Bulanık Doğrusal Regresyon
BRLC	Bulanık-Rastgele Lee-Carter
EKK	En Küçük Kareler
TÜİK	Türkiye İstatistik Kurumu

1. GİRİŞ ve GENEL BİLGİLER

1.1. Ölümlülük ile İlgili Çalışmalar

Risk, birçok alanda olduğu gibi sigortaya da konu olan ve bu alandaki araştırmaların temeli olarak kabul edilen bir kavramdır. Sigorta şirketlerinin risk gerçekleştiğinde sigortalıya gerekli tazminatı ödeyebilmesi, risk primini doğru hesaplaması gerekir. Doğru hesaplanmayan risk primi, sigorta şirketini finansal anlamda zorlayarak iflasa kadar götürebilmekte veya sigortalının fazla prim ödemesine sebep olabilmektedir. Özel olarak hayat sigortaları ürünleri için en büyük risk uzun ömürlülük olup, kişilerin yaşam süresinin doğru modellenmesi, bu riskin önlenmesinde kilit rol oynamaktadır. Bu riskin minimize edilmesi için ölümlülük öngörü modellerinden yararlanılmaktadır. Gelecek yaşam sürelerinin temelinde "ölüm hızı" kavramı vardır. Ölüm hızı, ölüme maruz kalmayı ifade etmektedir ve nüfus sayımları ile elde edilen verilerden yararlanılarak oluşturulmaktadır.

Nüfus ile ilgili yapılan çalışmalardan ilkinin İbn Haldun (1332-1406) tarafından yapıldığı kabul edilmektedir [1]. Nüfus kavramı ilk kez 14.yy'daki büyük veba salgını ile Avrupa nüfusunun üçte birinin yok olması sonucunda, gelecekteki salgın riskini ölçmek için Londra'da, ölenlerin sayısının kaydedilmesiyle ortaya çıkmıştır. John Grant (1662) yayınladığı kitabında, ham veriyi hayat tablosuna dönüştürmüştür. Graunt'ın oluşturduğu hayat tablosu ile ölüm tarihleri kesin olarak bilinmemesine karşın, aynı yaştaki kişilerin ölüm hızlarının benzer olduğu fark edilmiştir. Admon Halley (1693) bu benzerliklerin finansal kayıpları karşılarken nasıl kullanılacağını göstermiştir [2]. Genel olarak sistem veri toplama, model oluşturma, ürün geliştirme ve sonuçların gözlemlenmesi şeklinde ilerlemektedir. Gözlemler sonucunda tahmin edilen ölüm hızları ile gerçekleşen ölüm hızları arasındaki fark fazla ise sebepleri araştırılmaktadır.

Gelecekte gerçekleşecek ölüm hızlarını tahmin edebilmek için geçmiş yıllardaki veriyi doğru modelleme ihtiyacı, ölüm hızı modelleme tekniklerinin gelişmesini sağlamıştır. Bu modellere örnek olarak De Moivre, Gompertz, Makehum, Sang ve Weibull gösterilebilir [3]. Günümüzde kullanılan model ise halen popülerliğini sürdüren Lee ve Carter'ın [4] modelidir. Lee ve Carter 1933-1987 yılları arasındaki ABD ölümlülüğünü, logaritması alınan yaşa-özel ölüm hızlarının doğrusal projeksiyonları ile öngörülebileceğini öne

sürmüşlerdir [4]. Lee-Carter (LC) yöntemi birçok tahmin yönteminin geliştirilmesine ve çözülmesine yardımcı olmuştur.

1.2. Bulanıklık Kavramı, Sigortacılıkta Kullanımı

Yunan Filozofu olan Aristo (M.Ö. 384-322), günümüzde kullanılan bilimsel terimlerin çoğunun temelini oluşturmuştur. Bu disiplinlerden biri olan mantığın da kurucusudur. Aristo'nun temelini attığı klasik, iki değerli mantıktır. İki değerli mantığın ifade edilmesi zor ve sınırlayıcıdır. Bu durum zaman içerisinde çok değerli mantığın doğmasına yol açmıştır. 1920'li yıllardaki mantıkçılar, çok değerli mantığı ilk olarak Heisenberg'in kuantum mekaniğindeki belirsizlik prensibini anlamak için çalışmışlardır [5]. Böylece klasik iki değerli mantık, $n \geq 2$ olmak üzere n-değerli mantığa genişletilmiştir. Bu süreç ile üç değerli mantık, değeri üçten fazla olan sonlu değerli mantık ve sonsuz değerli mantık (bulanık mantık, olasılıksal mantık) kavramları ortaya çıkmıştır. Çok değerli mantığın sistemleştirilmesi Polonyalı mantıkçı Jan Lukasiewicz (1920) ve Post (1921) tarafından gerçekleştirilmiştir [6]. Bertrand Russel gibi mantıkçılar "belirsizlik" terimini çok değerli mantığı tanımlamak için kullanmışlardır. Çok değerli mantık ile belirsizlik 0 ile 1 arasında bir değer olarak atanmıştır. 1937 yılına gelindiğinde ise filozof olan Max Black [7], belirsiz kümelerle ilgili bir makale yayınlamıştır. Ancak Black'in makalesi bilim dünyası tarafından kabul görmemiştir [5]. Yaklaşık 30 yıl sonra ise belirsiz mantık bugünkü adıyla "bulanık mantık" olarak tanımlanacaktır.

Klasik mantıktan tamamen farklı olan bulanık mantık kavramından ilk olarak, 1965 yılında UC Berkeley'de Elektrik Mühendisliği Bölümü Başkanı olarak görev yapan Lotfi Zadeh'in yayınlanan, "Bulanık Kümeler" adlı makalesinde bahsedilmiştir [8]. Geleneksel mantık sistemlerinin aksine, bulanık mantık kesin olmaktan ziyade, yaklaşık olan akıl yürütme yöntemleri için bir model sağlamayı amaçlamaktadır [9]. Zadeh makalesinde, belirsiz kümelere bulanık etiketini koymuş, bu kümelerin elemanlarının farklı dereceler ile o kümelere ait olduğunu belirtmiştir. Zadeh'in makalesini temel alarak bulanık kümeleri uygulamaya döken ilk kişi, buhar makinesi için denetleyici tasarlayan İbrahim Mamdani'dir [10].

Klasik mantıkta bir çiçek ya papatyadır ya da değildir. Fakat görsel olarak bir renk yeşil ya da yeşilimsi olabilir. Bu durumda klasik mantık ile gerçek dünyaya ait durumları ifade etmek oldukça zorlayıcıdır. Bulanık mantık, kesin sınırları ve tanımı olmayan bu tip

kavramları ifade etmek için kullanılmaktadır. Bir durum veya kavram, ne kadar karşıtına benziyorsa o kadar bulanıklaşmaktadır. Öyle ki yarısı boş olan bir bardağın aynı zamanda yarısının dolu olması bu duruma bir örnektir [5].

Çizelge 1.1. İki değerli ile çok değerli mantığın karşılaştırılması [5].

İki Değerlilik	**Çok Değerlilik**
Aristoteles	Buda
A veya A değil	A ve A değil
Tam	Kısmi
0 veya 1	0 ve 1
Dijital Bilgisayar	Sinir Ağları (Beyin)
Hepsi veya Hiçbiri	Belirli derecede

Bulanık mantık uygulamalarının sırasıyla birtakım avantajları ve dezavantajları aşağıda verilmiştir [10]:
Avantajları,

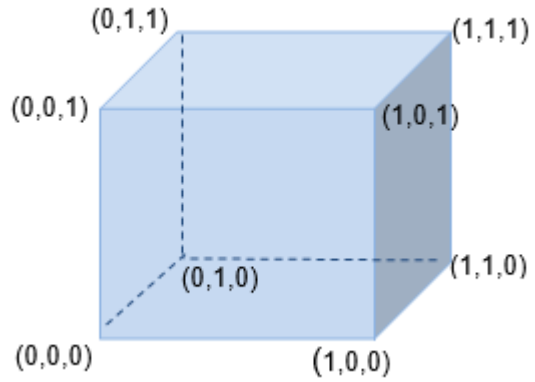
- Oldukça fazla değişken sisteme dahil edilebilir.
- Anlaşılması kolay olmayan durumlar için kurallar az sayıdadır.
- Daha güçlüdür.
- Dile dair değişkenler kullanıldığı için insan beyninin düşünme yapısına benzer.

Dezavantajları ise:

- Model geliştirilmesi daha zordur.
- Üyelik fonksiyonlarına ait değişkenler sınama yöntemi ile belirlendiğinden bu süreç uzun sürebilmektedir[11].

Bulanık mantık kavramına örnek verebilmek için Rubik'in küpünden yararlanılacaktır [5]. Bir fileden 3 adet elma seçerek, bu elmaları kırmızı olma veya olmama durumuna göre sınıflandıran bir manav olsun. Manavın örneklem uzayı 8 adet durumdan oluşmaktadır. Rubik'in küpünde de 8 adet köşe vardır. Bu durumlar ile köşeler eşlenecektir. Söz konusu eşleme matematikte bir izomorfizm olarak adlandırılmaktadır. Küpün dik kenarlarından herhangi üçü uzunluk, derinlik ve boy ile ilgili bilgi verecektir veya bu dik kenarlardan herhangi üçü üzerinde bulunan noktaların, elmanın kırmızılık ölçüleri olduğu düşünülmelidir. Her dik kenar, yüzde sıfırdan yüzde yüze bir kırmızı olma

oranı içermektedir. Eğer elma renginin belirlenmesi olayı, iki değerli olacak şekilde kısıtlanırsa, küpün köşeleriyle eşlenen, 0 ve 1'lerden oluşan 8 adet durum çıkar. Burada 0, çekilen elmanın kırmızı olmama, 1 kırmızı olma durumudur.



Şekil 1.1. Rubik'in Küpü

Şekil 1.1 ile gösterilen küp için, $(1,0,0)$ olan köşe ile, ilk elmanın kırmızı geri kalan elmaların ise kırmızı olmadığı durum gösterilmektedir. O halde burada küpün içi neyi ifade etmektedir? Örneğin, $\left(0,\frac{1}{4},0\right)$ ile seçilen birinci elmanın kırmızı olmadığı, ikinci elmanın yüzde 25 kırmızı olduğu, üçüncü elmanın ise yine kırmızı olmadığı ifade edilmektedir. Burada klasik mantık için $\left(0,\frac{1}{4},0\right)$ durumu $(0,0,0)$ şeklinde yuvarlanmaktadır ki bu doğruluğun belli bir oranda kaybedilmesi anlamına gelmektedir. Öyleyse $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ nasıl yuvarlanacaktır? Manav burada üç elmayı da yüzde 50 kırmızı bulmuş ve aynı zamanda yüzde 50 kırmızı bulmamıştır. Bu nokta, küpün içerisinde tüm köşelere eşit uzaklıkta olan tek noktadır ve hiçbir köşeye yuvarlanamaz. Böylece küpün köşeleri iki değerliliği ifade ederken geri kalan kısımları ise çok değerliliği göstermektedir.

Bulanık mantık kavramının sigortadaki ilk uygulaması ise DeWit (1982) tarafından yapılmış, sigorta poliçesi oluşturmadaki bulanıklık derecelendirilmeye çalışılmıştır [12]. Bulanık kümelerin sigortacılıktaki uygulamaları 1990 yılında Lemaire tarafından sürdürülmüştür. Lemaire bulanık sayılar teorisini genişleterek bulanık faiz oranını tanımlamıştır [13]. 1993 yılında Ostaszewski [14], bulanık faiz oranlarını bulanık sigorta ile genişletmiş ve prim hesaplamaları yapmıştır. 1996'da Young [15], sigortanın fiyatlandırılmasında bulanık mantığı kullanmıştır. 1997'de Cummins ve Derrig [16],

önceki çalışmaları destekleyerek, bulanık aritmetik ile mal ve yükümlülük sigortasında fiyatlama yapmışlardır. 1998 yılında Horgby [17], bulanık çıkarım yöntemi ile risk faktörlerini bulanık kümeler olarak almış, hayat sigortalarını sınıflandırmıştır. Sanchez ve Gomez [18], faiz oranındaki belirsizliği modelleyerek bulanık regresyonun aktüeryal analizdeki uygulamalarını çalışmışlardır. 2005'te Kıyak [19], bulanık hayat sigortası çalışmış ve tam, dönemsel, tek ödemeli, karma hayat sigortaları ile ölüm anında ödenen sigorta için, prim hesaplamalarını yapmıştır. 2006'da Koissi ve Shapiro [20] ölüm hızı tahmini için LC modelinin bulanık formülasyonunu geliştirmişlerdir. 2007'de Sanchez [21], sigorta şirketlerinin finansal dengesi için hayati olan rezerv hesaplamalarında, bulanık küme teorisinden yararlanarak bulanık regresyonu kullanmıştır. 2009 yılında Gao ve diğerleri [22], bulanık faiz oranını kullanarak hayat sigortası modellerini incelemişler ve belirsizlik teorisini tanıtmışlardır. 2010'da Yıldırım [3], Türkiye ölümlülük yapısının bulanık LC ile modellenmesini çalışmıştır. 2011'de Başer ve diğerleri [23] hayat sigortasında risk sınıflandırmasına uyarlanabilir ağ tabanlı bulanık çıkarım sistemi yaklaşımı (ANFIS) ile, sigortalılar tarafından ödenen brüt primleri elde etmek için, sigortalıları risk özelliklerine göre sınıflandırarak, risk yükleme oranını tahmin etmişlerdir. 2017'de Szymański ve Rossa [24], cebirsel yöntemler aracılığıyla bulanık ölüm hızı modelleri geliştirmişlerdir. Yine 2017'de Anzilli ve Facchinetti [25], üyelik fonksiyonları üst-yarı sürekli olan bulanık sayıların varyansı ve ortalama değerleri için yeni bir tanımlama yaparak hayat sigortası poliçesi fiyatlandırılmasında kullanmışlardır. 2019'da Wang [26], LR(left,right)-bulanık-rastgele değişkenlerini, iskonto fonksiyonunu tahmin etmek ve aynı zamanda gelecek yaşam süresine ait bulanık rastlantı değişkeni elde etmek için kullanmıştır. Buna bağlı olarak hayat anüitelerini modelleyip, net primi hesaplamıştır. Önerilen bu modeli örneklendirmek için istatistiksel bir simülasyon kullanılmıştır. 2021'de Szymański ve Rossa [27] cebirsel bulanık sayılara dayalı bulanık ölümlülük modeli üzerinde çalışmışlardır.

Bu tez kapsamında Sanchez ve Puchades [28] tarafından önerilen LC modelinin bulanık-rastgele bir yaklaşımı, ABD verileri üzerinde çalışılmıştır. Sözü edilen bulanık yaklaşım, Bulanık-Rastgele Lee-Carter (BRLC) modeli olarak adlandırılmıştır. Bu tezin ilk bölümünde literatürde bulunan hali hazırdaki çalışmalardan söz edilmiş, ölüm hızı kavramının önemi açıklanmıştır. İkinci bölümde, LC modeli tanımlanmış, parametrelerin tahminlerinin nasıl elde edileceği ve merkezi ölüm hızlarının nasıl öngörüleceği açıklanmıştır. Üçüncü bölümde, bulanık küme kavramı incelenmiş, bulanık sayılarda

aritmetik işlemler ve üyelik fonksiyonları ile bulanık sayıların birtakım özelliklerinden bahsedilmiştir. Dördüncü bölümde, bulanık regresyon kavramı anlatılmış, bulanıklığın nasıl minimize edileceği hakkında bilgiler verilmiştir. Beşinci bölümde, klasik LC modeli ile önerilen model olan, BRLC modelinin karşılaştırılması için öncelikle TÜİK'ten elde edilen Türk nüfus ve ölüm verileri kullanılmaya çalışılmıştır. Ancak Türkiye'de Adrese Dayalı Nüfus Kayıt Sistemi'nin 2007 yılından sonra uygulanması sebebiyle, düzenli işlenen verilerin hacim olarak yeterli olmaması ve 2007 yılından önceki verilerin ise eksik ve hatalı olmasından dolayı, ABD verisinin kullanılmasına karar verilmiştir. ABD ölüm hızları verisi kullanılarak parametre tahminleri yapılmış ve on yıllık bir öngörüde bulunulmuştur. Altıncı bölümde LC modeli ile BRLC modeli hata metrikleri ve güven aralıkları yardımıyla karşılaştırılmıştır. Son bölümde ise elde edilen sonuçlar değerlendirilmiş ve sonuçların kullanılabileceği çalışmalar hakkında önerilerde bulunulmuştur.

2. LEE-CARTER MODELİ

2.1. Modelin Tanımı

Lee ve Carter tarafından önerilen LC modeli, "demografi literatüründe istatistiksel olarak ölümlülük tahmininde lider" olan modellerden biri haline gelmiştir [29]. Model hem ölüm hızının hem de beklenen yaşam süresinin öngörülmesinde kullanılmaktadır. İki boyutlu olup, yaşlara ve yıllara göre ölüm hızları hesaplanmaktadır. Tahmin gücü oldukça yüksek, basit bir modeldir. Modelleme yapılırken salgınlar, afet gibi nedenlerle yaşanan ölümler her yaş grubu için farklı olacağından, ölümlülüğün yıllar içerisindeki değişiminden her yaş grubunun farklı etkileneceği göz önünde bulundurulmaktadır.

Yaş indisine bağlı olan, a_x ve b_x ile gösterilen, iki parametresi vardır. Ayrıca t, takvim yılı indisi olmak üzere, ölüm hızlarının yıllar içerisindeki değişimini gösteren ve zamana bağlı olan k_t parametresi ile toplamda üç parametreden oluşan, tek bir doğrusal denklem şeklinde ifade edilmektedir. Ölüm hızları hesaplanırken hem yaşın kullanılması hem de yılların etkisinin katılması ile başarılı sonuçlar elde edilmektedir. Ancak geçmişteki veriler kullanılarak parametre tahmini yapılması modelin dezavantajlarındandır. Çünkü olağanüstü durumlarda ölüm hızlarında artış gözlemleneceği için geleceğe yönelik hesaplamalarda hata payı olabilmektedir.

2.2. Lee-Carter Modeli

Lee-Carter modeli, verilen $m(x,t)$ matrisi için, $t = 0,1,\dots,T;\ x = 0,1,2,\dots,\omega$ iken,

$$ln\big(m(x,t)\big) = a_x + b_x k_t + \varepsilon \tag{2.1}$$

gibi veya buna denk olarak,

$$m(x,t) = e^{a_x + b_x k_t + \varepsilon(x,t)}$$

şeklinde ifade edilmektedir [4]. Bu denklemde x yaşı ifade ederken, t ise takvim yılını göstermektedir. Aşağıda modelin parametreleri ve açıklamaları verilmektedir:

$m(x,t)$: x yaş ve t takvim yılı için merkezi ölüm hızıdır.

a_x: x yaş için ortalama ölüm hızıdır ve takvim yılından bağımsızdır.

b_x: x yaş için ölüm hızındaki değişimi zamana göre ifade eder. Aynı zamanda logaritması alınmış merkezi ölüm hızının, x yaş ve t zamanı için k_t'deki değişime bağlı olarak duyarlılığını ölçer $\left(\frac{d\,(ln(m(x,t)))}{dt}\right) = \left(b_x \frac{dk_t}{dt}\right)$ [28].

k_t: t yılı için ölüm hızı düzeyini ifade etmektedir.

$\varepsilon(x,t)$: x yaş ve t takvim yılı için rastgele hata terimidir. 0 ortalama ve sabit standart sapma σ_ε ile normal dağılıma sahip olup aynı zamanda bağımsızlardır. Model tarafından yakalanamayan yaşa-özel tarihsel etkileri yansıtmaktadır.

Burada Eş. (2.1) ile ifade edilen $ln\big(m(x,t)\big)$ matrisinin girişi, sütunları yılları ve satırları yaş gruplarını gösteren ölüm hızı matrisinin logaritması alınmış halidir.

Modelde Eş. (2.1)'e en küçük kareler (EKK) yöntemi ile çözüm aranmaktadır. Eş. (2.1) ile verilen denklem için a_x, b_x ve k_t'nin hesaplandığı varsayılsın. Burada elde edilen çözüm (a_x, b_x, k_t)iken, $\left(a_x, \frac{b_x}{c}, ck_t\right)$ veya $(a_x + cb_x, b_x, k_t - c)$ incelenirse,

$$a_x + \left(\frac{b_x}{c}\right) ck_t + \varepsilon = (a_x + cb_x) + b_x(k_t - c) + \varepsilon \quad = a_x + b_x k_t + \varepsilon \;=\; ln\big(m(x,t)\big) \tag{2.2}$$

elde edilir. Eş. (2.1)'in çözümünün tek olmadığı görülmektedir [28]. Eş. (2.2)'ye göre her c, reel sayısı için bir çözüm bulunabilmektedir. Bu durumu engellemek için Lee ve Carter [4] modele iki kısıt eklemiştir:

$$\sum_x b_x = 1 \tag{2.3}$$

$$\sum_t k_t = 0 \tag{2.4}$$

Bu kısıtlar Lee-Carter modelinin tanımlanabilirliği için gereklidir. Bu kısıtlar olmadan modelden tahminler yapıldığında, farklı araştırmacılar aynı veri seti için farklı sonuçlar bulabilmektedir, yani problemin kaynağı parametrelerin tahmininin tek olmamasıdır.

Gelecek yıllardaki ölüm hızının öngörüsü için modeldeki parametrelerin tahmin edilmesi gerekmektedir. Bu amaçla a_x, parametresinin tahmininde EKK yöntemi kullanılacaktır. EKK yönteminde amaç, hata terimi minimum olacak şekilde, parametre tahminlerinin

yapılmasıdır. Yani herhangi bir t için $\sum_T \varepsilon_{x,t} = 0$ olacak şekilde hata minimize edilecektir. Eş. (2.3) ve Eş. (2.4) ile gösterilen kısıtlamalar göz önüne alındığında a_x parametresinin tahmin edicisinin $ln\big(m(x,t)\big)$ 'nin yıllar bazında ortalaması olduğu görülmektedir ki bu da aşağıdaki gibi ifade edilmektedir [30]:

$$ln\big(m(x,t)\big) = a_x + b_x k_t \; + \; \varepsilon_{x,t}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{t=0}^{T} ln\big(m(x,t)\big) = \sum_{t=0}^{T} \big(a_x + b_x k_t + \varepsilon_{x,t}\big)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{t=0}^{T} ln\big(m(x,t)\big) = \sum_{t=0}^{T} a_x + \; b_x \sum_{t=0}^{T} k_t \; + \; \sum_{t=0}^{T} \varepsilon_{x,t}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{t=0}^{T} ln(m(x,t)) = (T+1)a_x + \; 0 + \; 0$$

$$\Leftrightarrow a_x^* = \frac{\sum_{t=0}^{T} ln(m(x,t))}{T+1} \tag{2.5}$$

a_x parametresi hesaplandıktan sonra k_t ve b_x parametreleri hesaplanacaktır. Bu parametrelerin hesabı için tekil değer ayrışımından (TDA) yararlanılması önerilmiştir [4]. Eş. (2.1)'de parametre sayısı üç olup, bu sayı denklem sayısından fazla olduğu için sıradan regresyon yöntemleri kullanılarak parametre kestirimi yapılamamaktadır. Ancak kısıtlamalar eklendikten sonra TDA, EKK çözümü bulmak için kullanılmaktadır. Ek olarak, LC modelinde, TDA çözümüne yakınsayan bir yaklaşım da önerilmiştir [4]. Bu tez kapsamında sözü edilen alternatif yöntem uygulanacaktır. $Z_{x,t}$ matrisinin elemanları, t takvim yılı ve x yaş için, logaritması alınmış merkezi ölüm hızından, x yaş için ortalama merkezi ölüm hızının çıkarılmasıyla,

$$Z_{x,t} = ln\big(m(x,t)\big) - a_x{}^* \tag{2.6}$$

eşitliği ile elde edilmektedir. Burada $Z_{x,t}$ matrisi nxT boyutlu bir matristir. Eş. (2.6) için Eş. (2.3) ve Eş. (2.4) kısıtlamaları geçerli olup,

$$k_t{}^* = \sum_x ln\big(m(x,t)\big) - \sum_x a_x{}^* \tag{2.7}$$

eşitliği ile k_t^* bulunmaktadır. Daha sonra b_x tahmini yapılırken doğrusal olan $Z_{x,t} = b_x k_t + \varepsilon_{x,t}$ modeline sıradan EKK yöntemi uygulandığında parametre tahmini,

$$b_x^* = \frac{\sum_t Z_{x,t} k_t *}{\sum_t (k_t^*)^2} = \frac{\sum_t \big(ln(m(x,t) - a_x *)\big) k_t *}{\sum_t (k_t^*)^2} \tag{2.8}$$

eşitliği ile bulunmaktadır. Parametrelerin tahminleri $t = 0,1,\ldots,T+1$ ve $X = 0,1,\ldots,\omega$ için bulunduktan sonra, zamana bağlı olarak ölüm hızındaki değişim olan, $k_t = T+1,\ldots$, parametresi ARIMA modeli ile tahmin edilir. Buna bağlı olarak k_t ile ilişkili değişkenler, güven aralıkları, yaşam ve ölüm olasılıkları, beklenen yaşam süreleri de bulunmaktadır [28].

3. BULANIK SAYILAR

3.1 Giriş

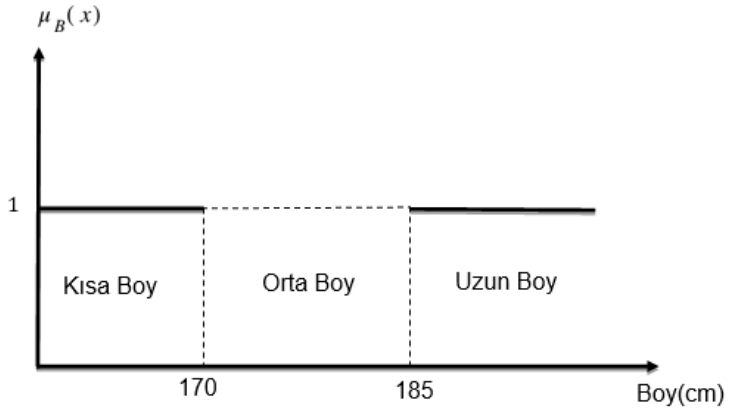
Klasik kümelerde bir elemanın kümeye ait olma durumu kesinlik içermektedir. Örneğin; $T = \{t, y, z\}$ kümesi ele alınsın. Bu kümede görüldüğü üzere $t \in T, a \notin T$ ile t'nin T kümesine ait ve a 'nın ait olmadığı ifade edilmektedir. Aidiyetler bir fonksiyon yardımıyla ifade edilebilir. Burada E evrensel bir küme ve $T \subseteq E$ olmak üzere,

$$\mu_T(x) = \begin{cases} 1\,; & x \in T \\ 0\,; & x \notin T \end{cases}$$

fonksiyonuna T'nin üyelik fonksiyonu denilir ($\mu_T(x)$: $E \to \{0,1\}$). Üyelik fonksiyonu ile eğer bir eleman söz edilen kümeye ait ise derecesi 1, değilse derecesi 0 değerini almaktadır. Dolayısıyla $\mu_T(t) = 1$ ve $\mu_T(a) = 0$ olmaktadır [11]. Üyelik fonksiyonu ile gösterim klasik kümeler de pek yaygın olmamasına rağmen, bulanık kümeler için oldukça önemlidir.

Klasik kümeler için birleşim, kesişim, kapsama, tümleme gibi işlemler söz konusudur. Herhangi iki klasik küme olan A ve B için birleşim işlemi $A \cup B$ ile gösterilir ve bu birleşimde bütün elemanlar A veya B 'den gelmektedir. Kesişim işlemi ise $A \cap B$ gösterimine sahip olup elemanlar hem A hem de B 'den gelmektedir. Kapsama durumunda yani $A \subset B$ iken, A'ya ait tüm elemanların aynı zamanda B'de bulunduğu anlaşılmaktadır. Son olarak bir kümenin tümleyenini almak ise evrensel kümede olup, tümleyeni alınan kümede olmayan bütün elemanları ifade etmektedir. Bulanık kümelerde ise bu işlemler, üyelik fonksiyonları yardımıyla gerçekleştirilmektedir.

Örnek 3.1: Klasik anlamda bir küme olan B kümesinin elemanları kısa boylu ve uzun boylu erkeklerden oluşsun. Burada erkekler için 170cm ve altı kısa boy, 170-185cm normal boy ve 185cm ve üzeri uzun boylu sayılsın. B kümesinin üyelik fonksiyonunun grafiği Şekil 3.1 ile gösterilmektedir.



Şekil 3.1. Klasik küme için üyelik fonksiyonu grafiği

3.2 Bulanık Küme Tanımı

Zadeh, bulanık küme kavramını reel eksendeki aralıklar olarak tanımlamaktadır [10]. Bulanık kümeler, sınırları kesin olarak tanımlanamayan toplulukları tanımlamada kullanılmaktadır. Örneğin, bir dağ zaman içerisinde sırayla tepeye ve daha sonra ise ovaya dönüşebilmektedir. Peki ne kadar süre sonra bu dağ artık bir tepe, tepe ise ova olarak adlandırılabilir? Çevredeki maddeler kesin bir şekilde siyah ve beyaz gibi etiketlendirilebilmektedir. Ancak zaman içerisinde bu etiketler doğruluğunu yitirmeye başlayacaktır. Bu noktada değişen dünya koşullarını dilsel olarak doğru ifade etmede bulanık olma kavramı devreye girmekte ve bulanık kümeler ile dilsel ifadeler, matematiksel olarak ifade edilebilmektedir. Bulanık kümelerde değişkenlerin belirli bir üyelik derecesi olup, bu üyelik derecesine göre kümeye ait olma durumları söz konusudur. Bulanık kümelere ait tüm özellikler klasik kümeler için de geçerlidir. Ancak tersi durum her zaman doğru değildir. Örneğin, bulanık kümelerde tümleme işlemi klasik kümelerdeki tümleme işleminden farklıdır.

Bulanık bir kümenin elemanları, $\mu_{küme}(x)$ üyelik fonksiyonu ile ifade edilmektedir. Bu fonksiyon $[0,1]$ aralığında değerler almaktadır. Eğer herhangi bir eleman kümeye dahil değilse üyelik derecesi 0, kesin olarak dahilse üyelik derecesi 1 ve eğer kısmen dahil ise üyelik derecesi $(0,1)$ arasında olmaktadır. Bir A bulanık kümesi, $\tilde{A}$ ile gösterilir. $\mu_{\tilde{A}}(x)$ ile x'in $\tilde{A}$ kümesi içerisinde olma derecesi gösterilir ve bu değer 1'e doğru yaklaştıkça x'in üyelik derecesinin arttığı söylenir [10]. X üzerinde bir $\tilde{A}$ bulanık kümesi, $X \neq \emptyset$ iken $\mu_{\tilde{A}} : X \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu ile karakterize edilir ve sıralı ikililer ile

$$\tilde{A} = \{x, \mu_{\tilde{A}}(x) \mid \mathrm{x} \in X\}$$

şeklinde tanımlanır. $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ sonlu bir küme iken X üzerinde bir $\tilde{A}$ bulanık kümesi,

$$\tilde{A} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_i)}{x_i} \tag{3.1}$$

şeklinde gösterilir [31]. Eğer X sayılamaz bir küme ise $\tilde{A}$ bulanık kümesi,

$$\tilde{A} = \int_x \frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{x} \tag{3.2}$$

ile gösterilir. Burada sırasıyla Eş. (3.1) ve Eş. (3.2) ile gösterilen $\sum$ ve $\int$ sembolleri bilinen toplama ve integral işlemleri olmayıp, bulanık kümelerin daha kolay anlaşılması için kullanılan sembollerdir. Ayrıca bu eşitliklerde üyelik derecesi "0" olan terimler gösterilmemektedir.

Örnek 3.2:

$X = \mathbb{N}$ olsun. $\widetilde{K} = \{x \in \mathbb{N} : x, 45'ten\ çok\ büyük\ bir\ sayıdır\}$ bulanık kümesi ele alınsın. Bu bulanık kümenin üyelik fonksiyonu her birey için farklılık gösterecek olup,

$$\widetilde{K} = \{(0.7, 2500), (0.8,2501), (1, x): x \geq 2502\} \cup \{(0, x): x \leq 2499\}$$

gibi veya

$$\widetilde{K} = \frac{0,7}{2500} + \frac{0,8}{2501} + \sum_{n=2502}^{\infty} \frac{1}{n}$$

şeklinde yazılabilmektedir.

3.3 Bulanık Kümelerde Temel Kavramlar

Bulanık kümeler üzerindeki işlemler üyelik fonksiyonları aracılığıyla tanımlanmaktadır.

3.3.1 Bulanık Kümelerde Birleşim, Kesişim ve Tümleme İşlemleri

$\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$, X evrensel kümesi üzerinde, $\mu_{\tilde{A}} : X \to [0,1]$ ve $\mu_{\tilde{B}} : X \to [0,1]$ şeklinde tanımlı üyelik fonksiyonlarına sahip bulanık kümeler olsunlar. Öyleyse her $x \in X$ için Şekil 3.2'de görüldüğü gibi, aşağıdaki işlemler geçerlidir [32]:

- Birleşimleri

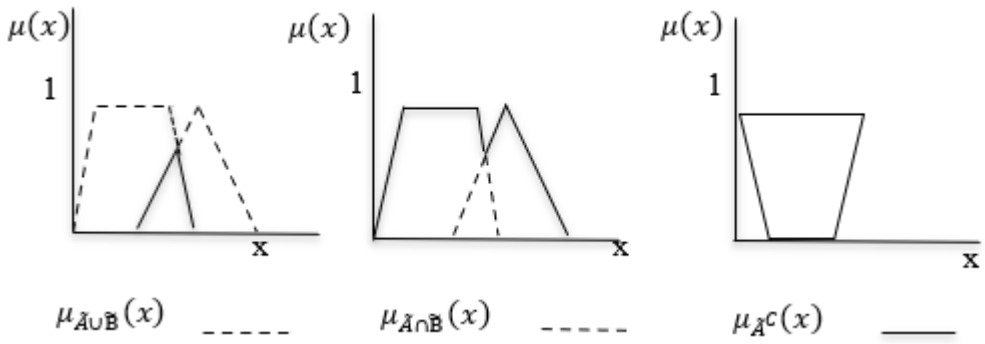
$$\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x) = max\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\} = \mu_{\tilde{A}}(x) \vee \mu_{\tilde{B}}(x),$$

- Kesişimleri

$$\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x) = min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\} = \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(x),$$

- $\tilde{A}$ kümesinin tümleyeni

$$\mu_{\tilde{A}^c}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x).$$



Şekil 3.2. Bulanık kümelerde birleşim, kesişim ve tümleme işlemi.

3.3.2 Bulanık Kümelerde Kapsama, Eşitlik ve Boş Olma Kavramları

$X \neq \emptyset$ olmak üzere $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$, X üzerinde iki bulanık küme olsun. Aşağıdaki ifadeler Zadeh'in [33] tanımına göre yazılmıştır:

- $\tilde{A} \subset \tilde{B}$'dir $\Leftrightarrow$ $Her\ x \in X\ için\ \mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x)$ olmaktadır.

- $\tilde{A} = \tilde{B}$ 'dir. $\Leftrightarrow$ $Her\ x \in X\ için\ \mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x)$ Ayrıca $\tilde{A}$ kümesinin $\tilde{B}$ kümesine eşit olması demek $\tilde{A} \subset \tilde{B}$ ve $\tilde{B} \subset \tilde{A}$ olmasına denktir.

- Bir $\tilde{A}$ kümesi boştur $Her\ x \in X\ için\ \mu_{\tilde{A}}(x) = 0$.

3.3.3 Bulanık Sayıların Desteği, Merkezi, Çekirdeği ve Yüksekliği

Tanım 3.1: $X \neq \emptyset$ ise X'in bulanık alt kümesi olsun.

- $Supp(\tilde{A}) = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}$ kümesine $\tilde{A}$'nın desteği (dayanağı) denir [34]. Dayanak kümesi sözü edilen bulanık kümenin üyeliği sıfırdan farklı olan elemanlarını içermektedir.

- $Core(\tilde{A}) = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\}$ kümesine $\tilde{A}$'nın çekirdeği denir ve kümeye kesin olarak ait olan elemanları içermektedir. Eğer $Core(\tilde{A}) \neq \emptyset$ ise $\tilde{A}$ bulanık kümesine normal bulanık küme, aksi halde ise alt normal bulanık küme denir [35]. Bir bulanık kümenin normal olması demek kümedeki en az bir elemanın üyelik derecesinin 1'e eşit olması anlamına gelmektedir.

- $Hgt(\tilde{A}) = sup_{x \in X}\{\mu_{\tilde{A}}(x)\}$ sayısına $\tilde{A}$'nın yüksekliği denir. $\tilde{A}$'daki en büyük üyelik derecesini ifade etmektedir [35].

3.3.4 Bulanık Kümelerde Üs Alma

X üzerinde bir $\tilde{A}$ bulanık kümesinin $m \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere m'inci dereceden kuvveti,

$$\mu_{\tilde{A}^m}(x) = \left(\mu_{\tilde{A}}(x)\right)^m$$

şeklinde ifade edilmektedir.

3.4 Alfa-Kesim Kümeleri

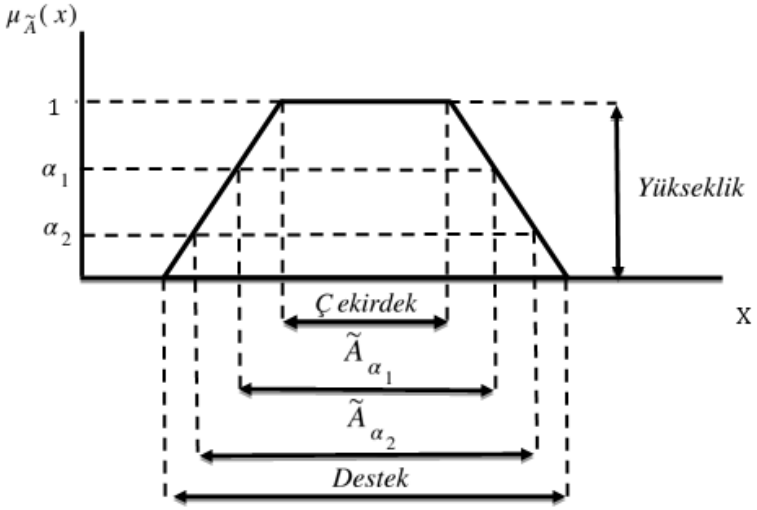
Pratikte bulanık kümelerin kullanıldığı uygulamaların çoğunda belirli bir seviye baz alınmaktadır. Sözü edilen bulanık küme seviyelerinden ilk olarak Tadecki'nin [36] "Level Fuzzy Sets" adlı makalesinde bahsetmiştir.

Tanım 3.2: $\tilde{A}$, X üzerinde bir bulanık küme olsun. $\tilde{A}$'nın alfa-kesim kümesi, $\alpha \in [0,1]$ olmak üzere,

$$\tilde{A}_\alpha = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$$

eşitliği ile tanımlanmaktadır. Ayrıca aşağıda güçlü alfa-kesim kümesi verilmiştir:

$$\tilde{A}_{\alpha^+} = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > \alpha\}.$$



Şekil 3.3. Üyelik fonksiyonu kısımları.

Tanım 3.3 [36]**:** $\tilde{A}_\alpha$ ve $\tilde{B}_\beta$, X üzerinde kesim kümeleri olsun. Bu iki kesim kümesinin eşitliği:

$$\tilde{A}_\alpha = \tilde{B}_\beta \Leftrightarrow Her\ x \in X\ için\ \mu_{\tilde{A}_\alpha}(x) = \mu_{\tilde{B}_\beta}(x).$$

biçimindedir.

3.5 Bulanık Kümelerde Konvekslik

Zadeh [33]'in konvekslik tanımına göre X evrensel bir küme ve $\tilde{A}$, X'in bulanık bir alt kümesi olmak üzere, $\tilde{A}$'nın sırasıyla konveks ve güçlü konveks bir küme olması için gerek ve yeter koşul aşağıda verilmiştir:

$$\forall\alpha \in [0,1]\ ve\ x_1, x_2 \in X\ için\ \mu_{\tilde{A}}(\alpha x_1 + (1-\alpha\lambda)x_2) \geq min\{\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)\},$$

$$\forall\alpha \in [0,1]\ ve\ x_1, x_2 \in X\ için\ \mu_{\tilde{A}}(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) > min\{\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)\}$$

.

3.6 Bulanık Sayılar

Eğer bir bulanık küme konveks ve normal olup aynı zamanda üyelik fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlanmış ve parçalı sürekli bir fonksiyon ise sözü edilen bulanık küme, bulanık sayı adını almaktadır [37]. Tanım 3.4'te ise bulanık küme olma alfa-kesim kümeleri yardımıyla tanımlanmaktadır.

Tanım 3.4**:** Bir $\tilde{A}$ bulanık alt kümesinin tanımlı olduğu küme reel sayılar kümesi ise ve aşağıdaki koşulları sağlıyorsa $\tilde{A}$ bir bulanık sayıdır:

i. $\tilde{A}$ bulanık kümesinin bütün alfa-kesim kümeleri $0 \leq \alpha \leq 1$ aralığında boş kümeden farklıdır,

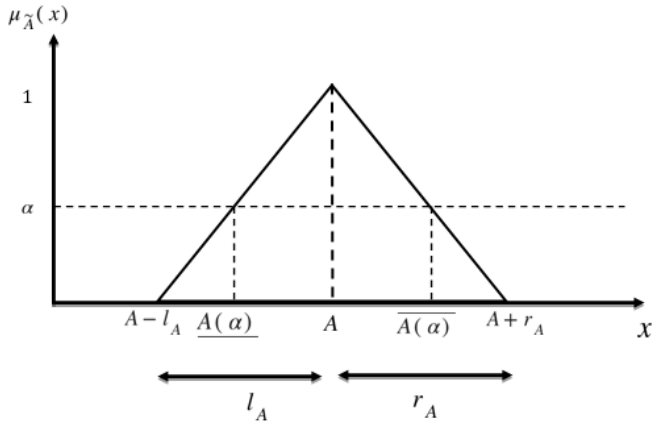
ii. $\tilde{A}$ bulanık kümesinin bütün alfa-kesimleri $\mathbb{R}$ üzerinde kapalı aralıklardır,

iii. $\tilde{A}$ kümesinin desteği,

$$Supp(\tilde{A}) = \tilde{A}_{0^+} = \{x \in \mathbb{R} \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\},$$

kümesi sınırlıdır [32].

Genel olarak üçgensel bulanık sayılar, yamuksal bulanık sayılar, LR bulanık sayıları ve Gauss bulanık sayıları gibi bulanık sayılar bulunmaktadır. Bu tez kapsamında üçgensel bulanık sayılar ile ilgilenilecektir. Üçgensel bulanık sayılar $\tilde{A} = (A, l_A, r_A)$ gibi ifade edilmektedir. Burada üçgensel bulanık sayının merkezi (çekirdeği) A, sol genişliği l_A ve sağ genişliği r_A'dır.



Şekil 3.4. Üçgensel bulanık sayı.

Üçgensel bulanık sayıların üyelik fonksiyonu,

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{l_A}\left(x-(A-l_A)\right) \;;\; A-l_A \le x \le A \\ -\frac{1}{r_A}\left(x-(A+r_A)\right) \;;\; A \le x \le A+r_A \\ 0 \qquad\qquad ;\quad d.y. \end{cases} \quad \begin{cases} 1+\frac{1}{l_A}(x-A) \;;\; A-l_A \le x \le A \\ 1+\frac{1}{r_A}(A-x) \;;\; A \le x \le A+r_A \\ 0 \qquad\qquad ;\; d.y. \end{cases}$$

biçimindedir. Üçgensel bulanık sayının seçilen farklı alfa değerleri için alfa-kesim kümesi,

$$\tilde{A}_\alpha = \{x \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \ge \alpha\}$$

$$\Leftrightarrow\ 1+\frac{1}{l_A}(x-A) \ge\ \alpha\ \ \wedge\ \ 1+\frac{1}{r_A}(A-x) \ge \alpha$$

$$\Leftrightarrow (1-\alpha) \ge \frac{1}{l_A}(A-x)\ \ \wedge\ \ (1-\alpha) \ge \frac{1}{r_A}(x-A)$$

$$\Leftrightarrow\ l_A(1-\alpha) \ge (A-x)\ \ \wedge\ \ r_A(1-\alpha) \ge\ (x-A)$$

$$\Leftrightarrow\ x\ \ge A-l_A(1-\alpha)\ \ \wedge\ \ A+r_A(1-\alpha) \ge\ x$$

$$\Leftrightarrow A-l_A(1-\alpha) \le x\ \ \wedge\ \ x \le\ A+r_A(1-\alpha)$$

$$\Leftrightarrow\ A-l_A(1-\alpha)\ \le x\ \le\ A+r_A(1-\alpha)$$

$$\Leftrightarrow\ x\ \in\ [A-l_A(1-\alpha), A+r_A(1-\alpha)].$$

biçimindedir. Görüldüğü üzere alfa-kesim kümeleri kapalı aralıklardan oluşmaktadır. Bir alfa-kesim kümesi

$$\tilde{A}_\alpha = \left[\underline{A(\alpha)}, \overline{A(\alpha)}\right] = [A-l_A(1-\alpha), A+r_A(1-\alpha)] \qquad (3.3)$$

şeklinde ifade edilmektedir [28].

Tanım 3.5 (Zadeh'in Genişleme Prensibi) [38]**:** X ve Y klasik kümeler ve f, X'ten Y'ye,

$$f: X \to Y$$

her bir $x \in X, f(x) = y \in Y$ olacak şekilde bir dönüşüm olsun. Genişleme prensibine göre $\tilde{A}$, X'in bulanık bir alt kümesi iken Y'nin,

$$\mu_{f(\tilde{A})}(y) = \begin{cases} sup_{x \in f^{-1}(y)}\left(\mu_{\tilde{A}}(x)\right), & f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 \qquad\qquad\qquad\quad , & f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

üyelik fonksiyonuna sahip, bir $f\left(\tilde{A}\right)$bulanık alt kümesi vardır.

Ayrıca genişleme prensibi n-değişkenli fonksiyonlar için de uygulanmaktadır.
$X_1, X_2, \ldots, X_n$ve Y boştan farklı kümeler ve f dönüşümü

$$f: X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \rightarrow Y$$
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in Y$$

gibi olsun. $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \ldots, \tilde{A}_n$ sırasıyla $X_1, X_2, \ldots, X_n$ kümelerinin bulanık alt kümesi iken genişleme prensibi ile $f\left(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \ldots, \tilde{A}_n\right) = \tilde{B}$ kümesine, Y'nin bir bulanık alt kümesidir denilir ve üyelik fonksiyonunun

$$\mu_{f\left(\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_n\right)}(y) = \begin{cases} sup_{(x_1, x_2, \ldots x_n) \in f^{-1}(y)} \left\{ min\left\{\mu_{\tilde{A}_i}(x_i)\right\}, \quad f^{-1}(y) \neq \emptyset, i = \overline{1,n} \right\} \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad , \quad f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

olduğu söylenir.

Sürekli, gerçel değerli ve n-değişkenli bir f fonksiyonunun giriş değerleri $x_j, j = 1,2, \ldots, n$ reel sayıları yerine $\tilde{A}_j, j = 1,2 \ldots, n$ olan bulanık sayılardan oluştuğunda tanım 3.5'ten $\tilde{B} = f\left(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \ldots, \tilde{A}_n\right)$ fonksiyonu bir bulanık sayıdır. Herhangi bir $\alpha \in (0,1]$ iken

$$\tilde{B}_\alpha = f\left(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \ldots, \tilde{A}_n\right)_\alpha = f\left(\tilde{A}_{1_\alpha}, \tilde{A}_{2_\alpha}, \ldots, \tilde{A}_{n_\alpha}\right) \qquad (3.4)$$

olmaktadır [39]. f fonksiyonu artan bir fonksiyon olduğunda her $\alpha \in (0,1]$ iken aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$\tilde{B}_\alpha = f\left(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \ldots, \tilde{A}_n\right)_\alpha = f\left(\tilde{A}_{1_\alpha}, \tilde{A}_{2_\alpha}, \ldots, \tilde{A}_{n_\alpha}\right)$$

$$= \left[f\left(\underline{A_1(\alpha)}, \underline{A_2(\alpha)}, \ldots, \underline{A_n(\alpha)}\right), f\left(\overline{A_1(\alpha)}, \overline{A_2(\alpha)}, \ldots, \overline{A_n(\alpha)}\right)\right].$$

Son eşitlik, f fonksiyonunun sürekli olması ve üçgensel bulanık sayıların kapalı aralıklardan oluşması ile sağlanmıştır. Burada aynı koşullar altında f fonksiyonu ilk m değişken için azalan ve geri kalan (n-m) değişken için artan olduğunda alfa-kesim kümelerin f altındaki görüntüleri Eş. (3.5) ile verilmiştir [40] :

$$\tilde{B}_\alpha = f\left(\tilde{A}_{1_\alpha}, \tilde{A}_{2_\alpha}, \dots, \tilde{A}_{n_\alpha}\right)$$

$$= [f(\underline{A_1(\alpha)}, \dots, \underline{A_m(\alpha)}, \overline{A_{m+1}(\alpha)}, \dots, \overline{A_n(\alpha)}),$$

$$f(\overline{A_1(\alpha)}, \dots, \overline{A_m(\alpha)}, \underline{A_{m+1}(\alpha)}, \dots, \underline{A_n(\alpha)})] \quad (3.5)$$

Eş. (3.5)'te girdi olan bulanık sayılar, özel olarak üçgensel bulanık sayı iken, gerçel değerli ve sürekli f fonksiyonu altındaki görüntüsü, f fonksiyonu doğrusal olmadığında üçgensel bulanık sayı olmamaktadır. Bu sebep ile Dubois ve Prade [40] birinci dereceden Taylor polinomu ile doğrusallaştırma içeren bir üçgensel bulanık sayı yaklaşımı önermişlerdir. Birinci dereceden Taylor polinomu genişlemesi ile fonksiyonun doğrusallaştırılması yapılmaktadır. Böylece n-değişkenli, reel değerli ve doğrusal olmayan bir fonksiyonun girdileri olan üçgensel bulanık sayıların, f altındaki görüntülerinin de her alfa-kesim için üçgensel bulanık sayı olması sağlanmaktadır**.**

Tanım 3.6 (Birinci Mertebeden Taylor Polinomu) [41]**:** Differansiyellenebilir bir f fonksiyonunun bir a noktasındaki doğrusallaştırılması,

$$L(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

ile ifade edilen birinci dereceden bir polinomdur. Burada f'nin L ile

$$f(x) \approx L(x)$$

şeklindeki yaklaşımına, f fonksiyonunun a noktasındaki standart doğrusal yaklaşımı denilmektedir ve $x = a$ noktası da bu yaklaşımın merkezi kabul edilmektedir. f fonksiyonu iki değişkenli bir fonksiyon ve kısmi türevleri sürekli iken doğrusallaştırılması aşağıdaki gibi olmaktadır:

$$f(x, y) \approx f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b).$$

$\tilde{B} \approx (B, l_B, r_B)$ için $\tilde{A}_j$ üçgensel bulanık sayılarının merkezleri sırasıyla $A_j, j = \overline{1,n}$ olmak üzere $\tilde{B}$ bulanık sayısı için merkez, sol ve sağ genişlikler, birinci dereceden Taylor polinom genişlemesi ile herhangi bir alfa-kesim için ifade edilebilmektedir [28]. Eş. (3.4)'de sözü edilen, girdi değerleri ilk m değişken için azalan ve geri kalan (n-m) değişken için artan olan ve f 'in tanım kümesi üzerinde bulunan $\tilde{A}_1 = \left(A_1, l_{A_1}, r_{A_1}\right), \ldots, \tilde{A}_n = \left(A_n, l_{A_n}, r_{A_n}\right)$ üçgensel bulanık sayıları olsun. Sözü edilen f, doğrusal olmayan, reel değerli bir fonksiyon iken kısmi türevleri de sürekliyse, f'in $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ noktasındaki birinci mertebeden Taylor polinomu ile doğrusallaştırılması,

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, x_m) \approx\ & f(A_1, \ldots, A_n) + f_{x_1}(A_1, \ldots, A_n)(x_1 - A_1) + \\ & f_{x_2}(A_1, \ldots, A_n)(x_2 - A_2) + \ldots + f_{x_m}(A_1, \ldots, A_n)(x_m - A_m) + \\ & f_{x_{m+1}}(A_1, \ldots, A_n)(x_{m+1} - A_{m+1}) + \ldots + f_{x_n}(A_1, \ldots, A_n)(x_n - A_n) \end{aligned} \quad (3.6)$$

gibi olmaktadır. Eş. (3.5) ile Eş. (3.6) birlikte düşünüldüğünde,

$$\begin{aligned} \tilde{B}_\alpha =\ & f(\tilde{A}_{1_\alpha}, \ldots, \tilde{A}_{n_\alpha}) \\ =\ & [f(\underline{A_1(\alpha)}, \ldots, \underline{A_m(\alpha)}, \overline{A_{m+1}(\alpha)}, \ldots, \overline{A_n(\alpha)}), f(\overline{A_1(\alpha)}, \ldots, \overline{A_m(\alpha)}, \underline{A_{m+1}(\alpha)}, \ldots, \underline{A_n(\alpha)})] \\ \approx\ & [\, f(A_1, \ldots, A_n) + f_{x_1}(A_1, \ldots, A_n)\left(\underline{A_1(\alpha)} - A_1\right) + \ldots + f_{x_m}(A_1, \ldots, A_n)\left(\underline{A_m(\alpha)} - A_m\right) \\ & + f_{x_{m+1}}(A_1, \ldots, A_n)\left(\overline{A_{m+1}(\alpha)} - A_{m+1}\right) + \ldots + f_{x_n}(A_1, \ldots, A_n)\left(\overline{A_n(\alpha)}\right. \\ & \left. - A_n\right), f(A_1, \ldots, A_n) \\ & + f_{x_1}(A_1, \ldots, A_n)\left(\overline{A_1(\alpha)} - A_1\right) + \ldots + f_{x_m}(A_1, \ldots, A_n)\left(\overline{A_m(\alpha)} - A_m\right) \\ & + f_{x_{m+1}}(A_1, \ldots, A_n)\left(\underline{A_{m+1}(\alpha)} - A_{m+1}\right) + \\ & \ldots + f_{x_n}(A_1, \ldots, A_n)(\underline{A_n(\alpha)} - A_n) \end{aligned} \quad (3.7)$$

eşitliğine ulaşılmaktadır.

Her $j = 1,2,\ldots,n$ için Eş. (3.3) yardımıyla, Eş. (3.7)'de alfa kesim üçgensel bulanık sayıların alt ve üst sınırları yerine konulursa,

$$\tilde{B}_\alpha = f\left(\tilde{A}_{1_\alpha}, \ldots, \tilde{A}_{n_\alpha}\right)$$

$$= [\, f(A_1, \ldots, A_n)$$
$$+ f_{x_1}(A_1, \ldots, A_n)\left(A_1 - l_{A_1}(1-\alpha) - A_1\right) + \ldots + f_{x_m}(A_1, \ldots, A_n)\left(A_m$$
$$- l_{A_m}(1-\alpha) - A_m\right)$$
$$+ f_{x_{m+1}}(A_1, \ldots, A_n)\left(A_{m+1} + r_{A_{m+1}}(1-\alpha)\right.$$
$$\left. - A_{m+1}\right) + \ldots + f_{x_n}(A_1, \ldots, A_n)\left(A_n + r_{A_n}(1-\alpha) - A_n\right), f(A_1, \ldots, A_n)$$
$$+ f_{x_1}(A_1, \ldots, A_n)\left(A_1 + r_{A_1}(1-\alpha) - A_1\right) + \ldots + f_{x_m}(A_1, \ldots, A_n)\left(A_m$$
$$+ r_{A_m}(1-\alpha) - A_m\right)$$
$$+ f_{x_{m+1}}(A_1, \ldots, A_n)\left(A_{m+1} - l_{A_{m+1}}(1-\alpha)\right.$$
$$\left. - A_{m+1}\right) + \ldots + f_{x_n}(A_1, \ldots, A_n)\left(A_n - l_{A_n}(1-\alpha) - A_n\right)]$$

$$= [\, f(A_1, \ldots, A_n) + (1-\alpha)\sum_{j=1}^{m} f_{x_j}(A_1, \ldots, A_n)\left(-l_{A_j}\right) +$$

$$(1-\alpha)\sum_{j=m+1}^{n} f_{x_j}(A_1, \ldots, A_n)\left(r_{A_j}\right), f(A_1, \ldots, A_n) +$$

$$(1-\alpha)\sum_{j=1}^{m} f_{x_j}(A_1, \ldots, A_n) r_{A_j} + (1-\alpha)\sum_{j=m+1}^{n} f_{x_j}(A_1, \ldots, A_n)(-l_{A_j}) \qquad (3.8)$$

elde edilmektedir. Artık Eş. (3.3) yardımıyla Eş. (3.8)'den $\tilde{B}$ üçgensel bulanık sayısının merkezi ile sol ve sağ genişlikleri çekilecektir.

$$\tilde{B}_\alpha = [\, f(A_1, \ldots, A_n) + (1-\alpha)\sum_{J=1}^{m} f_{x_j}(A_1, \ldots, A_n)(-l_{A_j}) +$$

$$(1-\alpha)\sum_{j=m+1}^{n} f_{x_j}(A_1, \ldots, A_n)\left(r_{A_j}\right), f(A_1, \ldots, A_n) + (1-\alpha)\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{m}} f_{x_j}(A_1, \ldots, A_n)\left(r_{A_j}\right)$$
$$+ (1-\alpha)\sum_{j=m+1}^{n} f_{x_j}(A_1, \ldots, A_n)\left(-l_{A_j}\right)]$$

$$= [B - l_B(1-\alpha), B + r_B(1-\alpha)]$$

$$\Leftrightarrow B = f(A_1, \ldots, A_n) = f(A_C), \tag{3.9}$$

$$l_B = \sum_{j=1}^{m} f_{x_j}(A_1, \ldots, A_n) l_{A_J} - \sum_{j=m+1}^{n} f_{x_j}(A_1, \ldots, A_n) r_{A_J} \tag{3.10}$$

$$r_B = \sum_{j=1}^{m} f_{x_j}(A_1, \ldots, A_n) r_{A_J} - \sum_{j=m+1}^{n} f_{x_j}(A_1, \ldots, A_n) l_{A_j} \tag{3.11}$$

$\tilde{A} = (A, l_A, r_A)$, $\tilde{B} = (B, l_B, r_B)$, $\tilde{A}_1 = (A_1, l_{A_1}, r_{A_1})$, $\tilde{A}_2 = (A_2, l_{A_2}, r_{A_2})$ üçgensel bulanık sayılar olmak üzere üzerlerinde tanımlanan bazı işlemler aşağıdadır. Doğrusal dönüşüm olmayan fonksiyonlar için Eş. (3.9), Eş. (3.10) ve Eş. (3.11)'den yararlanılmıştır.

1. Toplama İşlemi

$\tilde{C} = \tilde{A} + \tilde{B}$ işlemi aşağıda gösterilmiştir.

$$\Leftrightarrow \tilde{C} = (A + B, l_A + l_B, r_A + r_B)$$

2. Skaler ile Çarpma

$$k\tilde{A} = \begin{cases} (kA, kl_A, kr_A) & ; k \geq 0 \\ (kA, |k|r_A, |k|l_A) & ; k < 0 \end{cases}$$

3. Üçgensel Bulanık Sayının Simetriği

$$-\tilde{A} = -(A, l_A, r_A) = (-A, r_A, l_A).$$

4. Çıkarma İşlemi

$$\tilde{A} + (-\tilde{B}) = (A, l_A, r_A) + (-B, r_B, l_B) = (A - B, l_A + r_B, r_A + l_B).$$

5. Üçgensel Bulanık Sayıların Eşitliği

$$\tilde{A} = \tilde{B} \Leftrightarrow (A, l_A, r_A) = (B, l_B, r_B) \Leftrightarrow A = B, l_A = l_B, r_A = r_B.$$

6. Çarpma İşlemi

Destekleri $\mathbb{R}^+$ 'da bulunan iki üçgensel bulanık sayının $\tilde{B} = \tilde{A}_1 . \tilde{A}_2$ işlemi incelenmektedir. Tanımı,

$$f: IR^+ \times IR^+ \to IR^+$$
$$(x, y) \to f(x, y) = xy$$

gibi olan f fonksiyonu için keyfi $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in IR^+ \times IR^+$ elemanları alınsın. Sözü edilen fonksiyon,

$$f\big((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\big) = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2)$$
$$= x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$$
$$f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) = x_1y_1 + x_2y_2$$
$$\Rightarrow f\big((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\big) \neq f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2)$$

sebebiyle, doğrusal bir dönüşüm değildir. Bu işlem (A_1, A_2) noktası civarında birinci mertebeden Taylor polinomu aracılığıyla tanımlanmıştır:

$$f(x, y) \approx f(A_1, A_2) + f_{x_1}(A_1, A_2)(x_1 - A_1) + f_{x_2}(A_1, A_2)(x_2 - A_2)$$
$$= A_1A_2 + A_2(x_1 - A_1) + A_1(x_2 - A_2)$$
$$\Rightarrow B = f(A_1, A_2) = f(A) = A_1.A_2$$
$$l_B = \sum_{j=1}^{2} f_{x_j}(A_1, A_2) l_{A_J} = A_2 l_{A_1} + A_1 l_{A_2}$$
$$r_B = \sum_{j=1}^{2} f_{x_j}(A_1, A_2) r_{A_J} = A_2 r_{A_1} + A_1 r_{A_2}$$
$$\Rightarrow \tilde{B} = \tilde{A}_1.\tilde{A}_2 = \big(A_1A_2, A_2l_{A_1} + A_1l_{A_2}, A_2r_{A_1} + A_1r_{A_2}\big)$$

7. İki Pozitif Bulanık Sayının Bölümü

Üçgensel bulanık iki sayının bölümü olan $\tilde{C} = \frac{\tilde{A}_1}{\tilde{A}_2}$ işlemi (A_1, A_2) noktası civarında birinci mertebeden Taylor polinomundan yararlanılarak bulunmuştur. Bu işlemin tanımlandığı fonksiyonun ikinci bileşen için azalan olduğu dikkate alınarak aşağıdaki sonuç elde edilmiştir:

$$\Rightarrow \tilde{B} = \frac{\tilde{A}_1}{\tilde{A}_2} = \left(\frac{A_1}{A_2}, \frac{l_{A_1}}{A_2} + \frac{A_1 r_{A_2}}{{A_2}^2}, \frac{r_{A_1}}{A_2} + \frac{A_1 l_{A_2}}{{A_2}^2}\right)$$

8. Üstel Fonksiyon

Üçgensel bulanık sayının üstel fonksiyonu:

$$\Rightarrow \tilde{B} = exp(\tilde{A}) \approx (exp(A), exp(A)l_A, exp(A)r_A)$$

9. Logaritma Fonksiyonu

Üçgensel bulanık bir sayının logaritma fonksiyonu:

$$\Rightarrow \tilde{B} = \ln(\tilde{A}) = (\ln(A), \frac{l_A}{A}, \frac{1}{A}r_A)$$

4. BULANIK REGRESYON

Regresyon analizi çeşitli analitik konulara cevaplar sağlamada önemli bir aracı olduğu için, bilimsel çalışmalarda yaygın bir kullanıma sahiptir. İstatistiksel teknikler veride olduğu düşünülen bazı kalıpların, matematiksel olarak ifade edilmesini sağlamaktadır. Regresyon analizi de bilim insanlarının veriye dair sorularına yanıt bulmak amacıyla geliştirdikleri bir yöntemdir. Regresyon analizi kavramı 19.yy. sonlarında İngiltere'de Francis Galton ile ortaya çıkmıştır [42]. Galton boy uzunluğunun kalıtsal olup olmadığına bakmak için, ailelerin ve çocuklarının boy uzunluklarına dair verileri toplamış ve boyları uzun (kısa) olan ailelerin çocuklarının boylarının da genellikle uzun (kısa) olduğunu görmüştür. Yani ailelerin boy uzunluklarına bakarak çocuklarının boy uzunluklarını öngörmeye çalışmıştır.

Ancak daha sonrasında ise uzun (kısa) boylu aileye sahip olan bireylerin ortalamadan uzun (kısa) boylu fakat aileleri kadar uzun (kısa) boylu olmadıklarını fark etmiştir. Fakat yine de bu bireyler ortalamadan uzun (kısa) boya sahip olmaktadırlar. Galton bu benzerliği "regresyon ortalaması" olarak adlandırmıştır. Bazı ilişkilerin daha öngörülebilir olduğunu fark eden Galton bir ilişkideki öngörülebilirlik derecesini ise "korelasyona yakınlık" olarak tanımlamıştır.

Regresyon ve korelasyonun matematiksel olarak gösterimleri ise Galton'dan birkaç yıl sonra Francis Edgeworth, Karl Pearson ve George Yule adlı İngiliz istatistikçiler tarafından tanımlanmıştır [42].

Klasik regresyon ve korelasyon bugünkü kullanılan regresyon analizinin temellerini oluşturmaktadır. Genel olarak regresyon analizi bir veya daha fazla değişkenin değerleri yardımıyla tek bir değişkenin değerinin tahmin edilmesidir. Değeri tahmin edilen değişken "bağımlı değişken", değeri tahmin edilecek değişken için kullanılan diğer değişkenler ise "bağımsız değişken" adını almaktadır. Regresyon analizi ile bağımlı ve bağımsız değişken arasındaki ilişki, bu ilişkinin doğruluğu ölçülmekte ve bu ilişkinin istatistiksel olarak önemine de ulaşılmaktadır.

Regresyon analizi istatistiksel olarak güçlü bir analitik araç olmasına rağmen verinin bazı varsayımları sağlaması gerekmektedir. İstatistikçiler bu varsayımları sağlamayan veriler için başka teknikler (lojistik regresyon gibi) geliştirmişlerdir.

Genellikle gözlemlerin matematiksel gösterimlerde kesin bir dil ile ifade edildiği görülmektedir. Örneğin; herhangi bir ürün için puanlandırma yoluyla yapılan değerlendirme düşünülebilir (5 çok iyi, 4 iyi, 3 orta, 2 kötü, 1 çok kötü). Burada verinin gereğinden fazla basitleştirilmesi regresyon modellerindeki önemli bilgilerin göz ardı edilmesine sebep olmaktadır. Bu gibi değişkenler için bulanık küme teorisi, üyelik fonksiyonlarından yararlanılarak modelleme yapabilmeyi mümkün kılmaktadır.

Literatürde bulanık regresyon kullanımında katsayıları tahmin etme ölçütüne bağlı olarak üç farklı yöntem bulunmaktadır [43]:

1. Minimum bulanıklık kriterinin kullanıldığı yöntemler,

2. Sıradan en küçük kareler yöntemini örneklemdeki bulanıklığa göre genelleyen yöntemler,

3. Yukarıdaki kriterlerin sırayla kullanıldığı yöntemler.

İlk kriter ile sistemdeki belirsizlik minimize edilmeye çalışılmaktadır. İkincisi ile kestirilen bulanık çıktılar ile gözlenen bulanık çıktılar arasındaki uzaklığa dayanarak, tahmin değerindeki hata kareler toplamı minimize edilmeye çalışılmaktadır.

Tanaka [44] 1982 yılında bulanık regresyon modelini, Zadeh'in genişleme prensibi ile tanımlanan bulanık fonksiyonları kullanarak, doğrusal bir model olarak önermiştir [45]. Bulanık doğrusal regresyon (BDR) modelinde girdiler bulanık sayı veya bulanık olmayan sayılar olabilmektedir. Modelde girdilerin katsayıları bulanık sayılardan oluşmaktadır. Bu katsayılar üçgensel bulanık sayı (ÜBS), yamuk bulanık sayı veya üstel bulanık sayı gibi çeşitli bulanık sayılardan oluşabilmektedir.

Minimum bulanıklık kriterinin kullanıldığı BDR modellerinde kullanılan önemli bir parametre olan α, özünde alfa-kesim kümelerdeki tanımla örtüşmektedir. Bu parametre tahmin edilen bulanık doğrusal ilişkinin, eldeki veriler ile uyum derecesini doğrudan etkilemektedir. Ayrıca α parametresi ile bulanık katsayıların aralıklarının ne ölçüde daraltılacağı belirlenmektedir. Tanaka ve Watada [46] α 'nın toplanan veri setinin büyüklüğüne göre seçilmesini savunmuşlar, veri yeterince büyük ise $\alpha = 0$ seçilmesini, yeterince küçük ise değerin arttırılmasını önermişlerdir. Bazı BDR modellerinde karar vericiler α değerine kendileri karar vermektedir. Liu ve Chen [47] simetrik üçgensel

bulanık katsayılar ile minimum bulanıklık kriterini kullanarak, BDR için bir α değeri optimize edilmesini önermişlerdir. Liu ve Chen'in yaklaşımını ise Chen ve diğerleri [45] genişleterek optimal α değerini, asimetrik katsayılar içeren BDR modelinin sistem kredibilitesinin maksimize edilmesi yöntemiyle hesaplamışlardır.

4.1 Asimetrik Katsayılar ile Bulanık Regresyon Modeli

Bu tez kapsamında EKK yöntemiyle Tanaka'nın [44] minimum bulanıklık prensibini birleştiren, Ishibuchi ve Nii'nin [48] bulanık regresyon modeli kullanılmaktadır. Kullanılan modeldeki katsayılar bulanık olduğundan gerçel değerli girdiler kullanılsa bile çıktılar bulanık olacaktır.

Örneklemin $i = 0,1,\dots,n$ için i'inci gözlemine dair girdi-çıktı ikilisi, $(\tilde{y}_i, x_i)_{i=1,2,\dots,n}$ şeklinde tanımlansın. Burada x_i'ler bulanık olmayan bağımsız değişkenler olup, $x_{ij} \in \mathbb{R}$ iken $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ij})$ şeklinde gösterilmektedir. Bağımlı değişken ise bulanık olup $\tilde{y}_i = (y_i, l_{y_i}, r_{y_i})$ ile ifade edilmektedir. Bağımlı değişken, bağımsız değişkenlerin doğrusal kombinasyonu ile gösterilmektedir. Bağımsız değişkenlerin katsayıları $\tilde{a}_j = (a_j, l_{a_j}, r_{a_j})$, $j = 0,1,\dots,m$ şeklinde üçgensel bulanık sayılardan oluşmaktadır. Böylelikle çoklu doğrusal bulanık regresyon modeli,

$$\tilde{y}_i = \tilde{a}_0 + \sum_{j=1}^{m} \tilde{a}_j x_{ij}$$

$$\Leftrightarrow (y_i, l_{y_i}, r_{y_i}) = (a_0, l_{a_0}, r_{a_0}) + \sum_{i=1}^{m} (a_j, l_{a_j}, r_{a_j}) x_{ij}$$

biçimindedir. Bu modelde m tane bağımsız değişken ve n tane gözlem değeri olduğu görülmektedir. Burada $\tilde{a}_0$ sabit terim olarak adlandırılmaktadır ve girdi değerleri sıfır olduğunda çıktının aldığı ortalama değeri göstermektedir. Ayrıca son eşitlik x_{ij} reel girdilerinin pozitif ve negatif olma durumuna göre düzenlenebilmektedir. Aşağıda sözü edilen duruma göre bulanık bağımlı değişkenin sırasıyla merkezi, sol ve sağ genişlikleri verilmiştir:

$$(y_i, l_{y_i}, r_{y_i}) = (a_0, l_{a_0}, r_{a_0}) + \sum_{i=1}^{m} (a_j, l_{a_j}, r_{a_j}) x_{ij}$$

$$= \begin{cases} (a_0, l_{a_0}, r_{a_0}) + \sum_{i=1}^{m} \left(x_{ij}a_j, x_{ij}l_{a_j}, x_{ij}r_{a_j}\right) & ;\ x_{ij} \geq 0 \\ (a_0, l_{a_0}, r_{a_0}) + \sum_{i=1}^{m} \left(x_{ij}a_j, |x_{ij}|l_{a_j}, |x_{ij}|r_{a_j}\right) & ;\ x_{ij} < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (a_0 + x_{i1}a_1 + \cdots + x_{im}a_m, l_{a_0} \\ +x_{i1}l_{a_1} + \cdots + x_{im}l_{a_m}, r_{a_0} + x_{i1}r_{a_1} + \cdots + x_{im}r_{a_m}) & ;\ x_{ij} \geq 0 \\ (a_0 + (-x_{i1})a_1 + \cdots + (-x_{im})a_m, l_{a_0} \\ +|x_{i1}|r_{a_1} + \ldots + |x_{im}|r_{a_m}, r_{a_0} + |x_{i1}|l_{a_1} + \ldots + |x_{im}|l_{a_m}) & ;\ x_{ij} < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (a_0 + \sum_{j=1}^{m} x_{ij}a_j, l_{a_0} + \sum_{j=1}^{m} x_{ij}l_{a_j}, r_{a_0} + \sum_{j=1}^{m} x_{ij}r_{a_j}) & ;\ x_{ij} \geq 0 \\ (a_0 + \sum_{j=1}^{m} x_{ij}a_j, l_{a_0} - \sum_{j=1}^{m} x_{ij}r_{a_j}, r_{a_0} - \sum_{j=1}^{m} x_{ij}l_{a_j}) & ;\ x_{ij} < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\ y_i = a_0 + \sum_{j=1}^{m} x_{ij}a_j,$$

$$l_{y_i} = \begin{cases} l_{a_0} + \sum_{j=1}^{m} x_{ij}l_{a_j} & ;\ x_{ij} \geq 0 \\ l_{a_0} - \sum_{j=1}^{m} x_{ij}r_{a_j} & ;\ x_{ij} < 0 \end{cases},$$

$$r_{y_i} = \begin{cases} r_{a_0} + \sum_{j=1}^{m} x_{ij}r_{a_j} & ;\ x_{ij} \geq 0 \\ r_{a_0} - \sum_{j=1}^{m} x_{ij}l_{a_j} & ;\ x_{ij} < 0 \end{cases}$$

Bulanık katsayılar olan $\tilde{a}_j = \left(a_j, l_{a_j}, r_{a_j}\right)$'lerin tahminleri $i = 0,1,\ldots,m$ için

$$\tilde{a}_j^* = \left(a_j^*, l_{a_j^*}, r_{a_j^*}\right)$$

şeklinde gösterilecektir. Sánchez ve Puchades'in [28] sunduğu adımlar gösterilmiştir, bu adımlar izlenerek parametre tahminleri yapılacaktır:

Adım 1: Bağımlı değişkenin merkezleri alınarak, bulanık katsayıların merkezlerinin tahmin edilmesi için, $y_i = a_0 + \sum_{j=1}^{m} a_j x_{ij}$ eşitliğine EKK yöntemi uygulanacaktır.

Adım 2: Bu adımda Tanaka'nın [44] minimum bulanıklık kriteri uygulanarak parametrelerin genişlikleri tahmin edilecektir. Sözü edilen genişlikler öncelikle herhangi bir α-kesim değeri için hesaplanacaktır. Tahmin edilen çıktıların belirsizliği, gerçel gözlem değerlerini bir α seviyesinde içermeleri koşulu altında minimize edilecektir. Doğrusal programlama modeli ile genişlikler elde edilecektir. Modelin amaç fonksiyonu toplam genişliklerin minimize edilmesidir.

Bulanık katsayıların genişliklerinin ve modelin çıktılarının tahminleri sırasıyla $y_i^* = a_0 + \sum_{j=1}^{m} a_j^* x_{ij}$ eşitliğini sağlayan, $l_{a_j^*}, r_{a_j^*}, j = 0,1,\ldots,m$ ve $\tilde{y}_i^* = \left(y_i^*, l_{y_i^*}, r_{y_i^*}\right)$ dir. Bu değerler herhangi bir α değeri için sağlanmaktadır. Ayrıca $\tilde{y}_i \subseteq_\alpha \tilde{y}_i^* \Leftrightarrow y_{i_\alpha} \subseteq y_{i_\alpha}^*$ olduğundan, α sabit iken $l_{a_j^*}, r_{a_j^*}, j = 0,1,\ldots,m$ tahminlerinin minimize edilmesi için kullanılan doğrusal programlama modelinin amaç fonksiyonu ve kısıtları,

$$\min_{l_{a_j}, r_{a_j}} Z = \sum_{i=1}^{n} l_{y_i} + \sum_{i=1}^{n} r_{y_i} \tag{4.1}$$

Kısıtlar,

$y_{i_\alpha} \subseteq y_{i_\alpha}^*, i = 1,2,\ldots,n$

$l_{a_j}^*, r_{a_j}^* \geq 0, j = 0,1,\ldots,m$

biçimindedir [28]. Amaç fonksiyonu ile toplam genişlik minimize edilmektedir. Kısıtlar ise seçilen bir α kesimi için, bulanık tahmin değerlerinin, gözlem değerlerini içermesi gerektiğini belirtmektedir. Böylece doğrusal programlama modeli ile katsayıların genişlikleri tahmin edilmektedir.

Adım 3: Optimal bir α değerinin belirlendiği adımdır. Burada sözü edilen optimal değer modelin sistem kredibilitesinin maksimize edilmesi ile bulunmaktadır [45]. Liu ve Chen [47] farklı α değerleri ile BDR modellerinin performansını değerlendirmek için ve α değerini optimize edebilmek için bir programlama modeli geliştirmişlerdir. Önerilen bu

modelde hem sistem bulanıklığı hem de sistemin üyelik derecesi hesaba katılmıştır. Bu adımda Liu ve Chen'in önerdiği model kullanılacaktır.

4.2. Bulanık Doğrusal Regresyon için Sistem Güvenilirliği

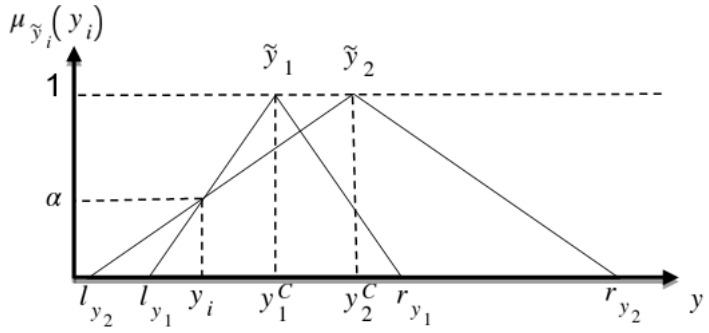
Üçgensel bulanık sayılar olan çıktı değerlerinin genişlikleri, α tarafından belirlenmektedir. $0 \leq \alpha_1 < 1 \; ve \; 0 \leq \alpha_2 < 1$, $j = 0,1,2,\ldots,m$ için iki farklı α değeri ve $\tilde{A}_j^1$, $\tilde{A}_j^2$ bulanık katsayıları, bu α değerlerine göre sırasıyla $\tilde{y}_i^1, \tilde{y}_i^2$ çıktılarına ilişkin bulanık katsayılardır. Burada $\tilde{y}_i^1, \tilde{y}_i^2$ ile tanımlanan değerler, y_i'nin bulanık tahminleridir,

$$.\tilde{y}_i^1 = \tilde{a}_j^1 + \sum_{j=1}^{m} \tilde{a}_j^1 x_{ij}$$

$$.\tilde{y}_i^2 = \tilde{a}_0^2 + \sum_{j=1}^{m} \tilde{a}_j^2 x_{ij}$$

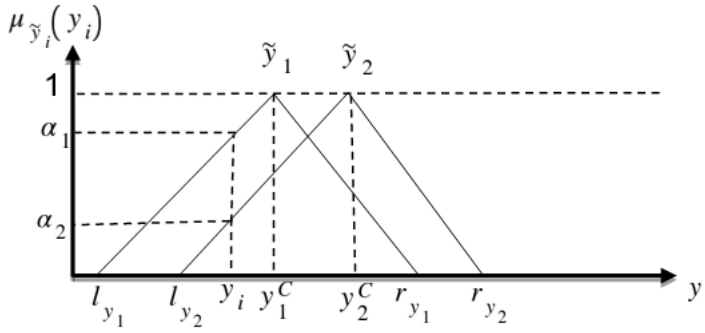
eşitlikleri ile gösterilmektedir. $\tilde{y}_i^1$ ve $\tilde{y}_i^2$ değerlerinden hangisinin y_i'yi daha iyi temsil ettiğinin belirlenmesinde, Liu ve Chen [47] iki faktörün önemli olduğunu öne sürmüşlerdir. Sözü edilen faktörler sırasıyla, tahmin edilen bulanıklık $\Delta\tilde{y}_i = l_{y_i} + r_{y_i}$ ve bulanıklığın üyelik derecesi $\mu_{\tilde{y}_i}(y_i)$'dir. Bu iki faktör, model kurulurken, α_1 ve α_2 düzeylerinin hangisinin daha iyi olduğunu belirlemektedir:

Sözü edilen iki faktörü incelemek için, Şekil 4.1 ve Şekil 4.2'den yararlanılmıştır. Genel olarak genişliklerin daha dar ve üyelik derecesinin daha yüksek olması, modelin daha iyi performans göstermesini sağlamaktadır.



Şekil 4.1 Gözlenen değeri bulunduran bulanık çıktıların üyelik fonksiyonlarının eşit olduğu durum.

Şekil 4.1 ile gözlenen herhangi bir değer olan y_i'nin hangi bulanık aralığa düşmesinin daha iyi olacağı düşünüldüğünde, her iki üyelik fonksiyonuna da aidiyetinin aynı olduğu görülmektedir $\left(\mu_{\tilde{y}_1}(y_i) = \mu_{\tilde{y}_2}(y_i)\right)$. Aynı zamanda $\Delta\tilde{y}_1 < \Delta\tilde{y}_2$ olduğu için bulanıklığı daha az olan $\tilde{y}_1$ daha iyi bir temsilcidir. Bu durumda y_i değerlerinin $\tilde{y}_1$ tarafından temsil edilmesi daha uygun görünmektedir.



Şekil 4.2 Gözlenen değeri bulunduran bulanık çıktıların genişliklerinin eşit olduğu durum.

Şekil 4.2 ile y_i gözlemi, her ikisi de eş bulanıklık içeren $\tilde{y}_1$ ve $\tilde{y}_2$ bulanık sayılarının içerisinde bulunmaktadır. Bu gözlemin üyelik değeri daha yüksek olan $\tilde{y}_1$ tahmininin içerisine düşmesi daha uygundur. Çünkü genişlikler aynı veya yaklaşık iken üyelik fonksiyonu daha yüksek olan bulanık sayının seçilmesi beklenmektedir. Dolayısıyla Şekil 4.2'de $\Delta\tilde{y}_1 = \Delta\tilde{y}_2$ iken $\mu_{\tilde{y}_1}(y_i) > \mu_{\tilde{y}_2}(y_i)$ olduğundan $\tilde{y}_1$, gözlenen değer olan y_i'nin daha iyi bir tahminidir.

Şekil 4.1 ve Şekil 4.2 ile iki özel durumdan bahsedilmekte ve daha genel bir formülasyon

$$c_i^{\alpha} = \frac{\mu_{\tilde{y}_i^{*\alpha}}(y_i)}{l_{y_i^{*\alpha}} + r_{y_i^{*\alpha}}}$$

şeklinde olmaktadır [28]. Ayrıca c_i^{α} arttıkça, $\tilde{y}_1$ bulanık tahmininin, y_i gözlemini temsil etme performansı da artmaktadır. Burada c_i^{α} ile i. gözlemin α düzeyindeki güvenilirliği ifade edilmektedir. O halde bütün sistem için toplam güvenilirlik,

$$c^{\alpha} = \sum_{i=0}^{n} \frac{\mu_{\tilde{y}_i^{*\alpha}}(y_i)}{l_{y_i^{*\alpha}} + r_{y_i^{*\alpha}}}$$

eşitliği ile ifade edilmektedir. Güvenilirliğin maksimize edilmesi karesel programlama problemidir. Chen vd. [45] tarafından

$$p^0 = \sum_{i=0}^{n} \frac{1 - \mu_{\tilde{y}_i^{*0}}(y_i)}{l_{y_i^{*0}} + r_{y_i^{*0}}}$$

$$c^0 = \sum_{i=0}^{n} \frac{\mu_{\tilde{y}_i^{*0}}(y_i)}{l_{y_i^{*0}} + r_{y_i^{*0}}}$$

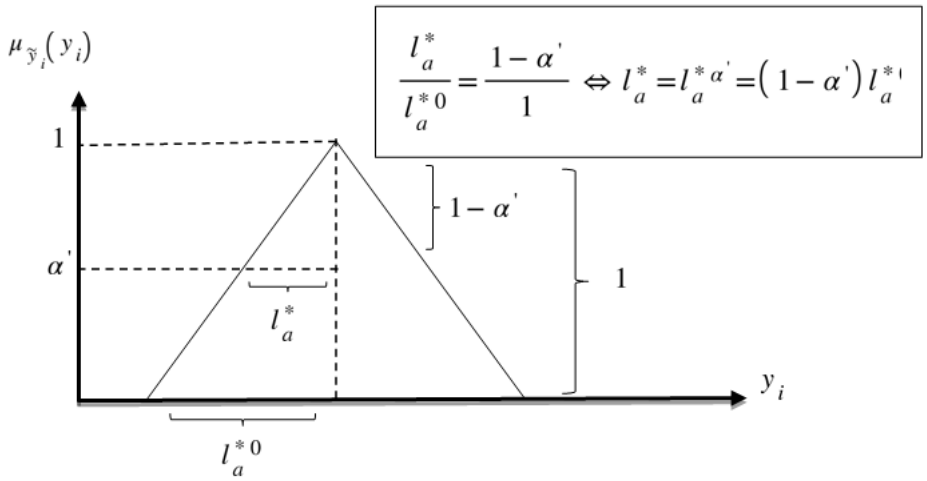
iken, amaç fonksiyonu,

$$max\ c^{\alpha} = -p^0\alpha^2 + (p^0 - c^0)\alpha, \alpha \in [0,1]$$

şeklinde olan karesel programlama probleminin çözümü,

$$\alpha = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{c^0}{p^0}\right), c^0 < p^0 \\ 0 \qquad , d.y \end{cases} \tag{4.2}$$

şeklinde elde edilmiştir. Böylece Adım 2'de $\alpha = 0$ baz alınarak hesaplanan bulanık katsayıların genişlikleri, Eş. (4.2) ile optimize edilmiş α olan, α' ile yenilenerek, $l_{a_j}^{*0}, r_{a_j}^{*0}, l_{b_j}^{*0}, r_{b_j}^{*0}$ iken sırasıyla $l_{a_j}^{*}, r_{a_j}^{*}, l_{b_j}^{*}, r_{b_j}^{*}$ değerlerine dönüştürülecektir. Şekil 4.3 ile temel üçgen benzerliği kullanılarak α ve α' ile genişlikler arasındaki ilişki gösterilmiştir.



Şekil 4.3. Optimize edilmiş alfa-kesim kümeye göre bulanık parametre $\tilde{a}_x$'in sol genişliği

Benzer şekilde $r_{a_j}^*, l_{b_j}^*, r_{b_j}^*$ için de

$$r_{a_j}^* = r_{a_j}^{*\alpha'} = (1-\alpha')r_{a_j}^{*0}$$
$$l_{b_j}^* = l_{b_j}^{*\alpha'} = (1-\alpha')l_{b_j}^{*0}$$
$$r_{b_j}^* = r_{b_j}^{*\alpha'} = (1-\alpha')r_{b_j}^{*0}$$

eşitlikleri yazılmaktadır.

4.3 LC Modeline Bulanık-Rastgele Yaklaşım

4.3.1 LC Model Parametrelerinin Bulanık-Rastgele Tahmin Edilmesi

Bu tez kapsamında iki varsayım kabul edilmiştir [28]:

i. Yaşa-özel ortalama ölüm hızını tanımlayan bulanık katsayı ve zamana bağlı olarak merkezi ölüm hızındaki değişimi gösteren bulanık katsayı,

$$\tilde{\mathrm{a}}_x = \left(a_x, l_{a_x}, r_{a_x}\right)$$
$$\tilde{\mathrm{b}}_x = \left(b_x, l_{b_x}, r_{b_x}\right)$$

ile ifade edilmektedir.

ii. Merkezi ölüm hızlarının öngörülmesi için, ölümlülük indeksi k_t'nin aldığı değerlerin projeksiyonunun yapılması gerekmektedir. Bu amaçla bu değerlerin $t \leq T$ için, rastlantı değişkeni $\boldsymbol{k_t}$'nin çıktısı olduğu varsayılarak, *ARIMA* stokastik süreci ile öngörüsü $E^*(k_t)$, hesaplanacaktır.

Bu varsayımlar temel alınarak ortalama ölüm hızı $\tilde{\mathrm{a}}_x$, $\tilde{\mathrm{b}}_x$, k_t parametrelerinin tahminleri hesaplanacaktır.

Merkezi ölüm hızına ilişkin bulanık regresyon modeli,

$$\ln\left(\tilde{\mathrm{m}}(x,t)\right) = \tilde{\mathrm{a}}_x + \tilde{\mathrm{b}}_x k_t \qquad (4.3)$$

eşitliği ile gösterilmektedir ve burada $\ln\left(\tilde{\mathrm{m}}(x,t)\right)$,

$$ln\left(\tilde{\mathrm{m}}(x,t)\right) = \left(ln\left(m(x,t)\right), l_{ln(m(x,t))}, r_{ln(m(x,t))}\right)$$

eşitliği ile ifade edilmektedir. Ayrıca Eş. (4.3)'ten

$$\begin{aligned}&\left(ln\left(m(x,t)\right), l_{ln(m(x,t))}, r_{ln(m(x,t))}\right)\\&= \left(a_x, l_{a_x}, r_{a_x}\right) + \left(b_x, l_{b_x}, r_{b_x}\right)k_t\end{aligned} \tag{4.4}$$

eşitliği elde edilmektedir. Eş. (4.4), k_t'nin işaretine göre parçalı fonksiyon şeklinde ifade edildiğinde, logaritması alınan bulanık merkezi ölüm hızlarının merkezi, sol ve sağ genişlikleri aşağıdaki gibi olmaktadır:

$$\left(\ln\left(m(x,t)\right), l_{\ln(m(x,t))}, r_{\ln(m(x,t))}\right)$$

$$= \left(a_x, l_{a_x}, r_{a_x}\right) + \left(b_x, l_{b_x}, r_{b_x}\right)k_t$$

$$= \begin{cases}\left(a_x + k_t b_x, l_{a_x} + k_t l_{b_x}, r_{a_x} + k_t r_{b_x}\right) & , k_t \geq 0\\ \left(a_x + k_t b_x, l_{a_x} - k_t r_{b_x}, r_{a_x} - k_t l_{b_x}\right) & , k_t < 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\ ln\left(m(x,t)\right) = a_x + b_x k_t \tag{4.5}$$

$$l_{\ln(m(x,t))} = \begin{cases}l_{a_x} + k_t l_{b_x} & , k_t \geq 0\\ l_{a_x} - k_t r_{b_x}, & k_t < 0\end{cases} \tag{4.6}$$

$$r_{\ln(m(x,t))} = \begin{cases}r_{a_x} + k_t r_{b_x} & , k_t \geq 0\\ r_{a_x} - k_t l_{b_x} & , k_t < 0\end{cases} \tag{4.7}$$

Bulanık katsayıların tahminleri olan $\tilde{\mathrm{a}}_x^* = \left(a_x^*, l_{a_x^*}, r_{a_x^*}\right)$, $\tilde{b}_x^* = \left(b_x^*, l_{b_x^*}, r_{b_x^*}\right)$ ve $k_t^*, t \leq T$ parametreleri, Bölüm 4.2'de bahsedilen adımlar yardımıyla hesaplanacaktır. Aşağıda her adım için yapılacaklar anlatılmaktadır:

Adım 1: Bulanık LC modelinin merkezi $ln\left(m(x,t)\right)$ ve $\tilde{\mathrm{a}}_x, \tilde{b}_x$ bulanık sayılarının merkezleri ile rastlantı değişkeni k_t'nin çıktısı olan k_t^* tahmin edilecektir. Klasik LC modelinin parametreleri, bulanık parametrelerin merkezleri olarak kullanılmaktadır. Bu hesaplamalar Bölüm 2'deki tanımlar aracılığıyla gerçekleştirilecektir.

Adım 2: Bu adımda $\alpha = 0$ için hesaplanan $l_{a_x}^{*0}, l_{b_x}^{*0}, r_{a_x}^{*0}, r_{b_x}^{*0}$ genişlikleri, (4.1) ile ifade edilen doğrusal programlama problemi kullanılarak çözülecektir. Daha sonra minimum

bulanıklık kriteri modele uygulanacaktır. Burada genişlik tahminleri, gözlemleri içerecek şekilde minimize edilmektedir. Tahmin edilen ÜBS'lerin alt ve üst sınırı birbirine ne kadar yakın olursa, tahmin gücü de o kadar artmaktadır. Bu durumun bir diğer açıklaması standart hata miktarı azaldıkça güven aralığının daralmasıdır. Amaç fonksiyonu, (4.1)'den yararlanılarak,

$$\min_{l_{a_x}, r_{a_x}, l_{b_x}, r_{b_x}} \left(\sum_x \sum_t l_{ln(m(x,t))} + \sum_x \sum_t r_{ln(m(x,t))} \right) \tag{4.8}$$

biçiminde elde edilmiştir [28]. Ayrıca t_1 sayıda k_t için $k_t \geq 0$ olduğu varsayıldığında, Amaç fonksiyonu 4.8, Eş. (4.6) ve Eş. (4.7) yardımıyla aşağıdaki gibi düzenlenmektedir:

$$\sum_x \sum_t l_{ln(m(x,t))} + \sum_x \sum_t r_{ln(m(x,t))}$$

$$= \left(\sum_x \sum_{t=0}^{t_1} \left(l_{a_x} + k_t l_{b_x} \right) + \sum_x \sum_{t=t_1+1}^{T} \left(l_{a_x} - k_t r_{b_x} \right) \right)$$

$$+ \left(\sum_x \sum_{t=0}^{t_1} \left(r_{a_x} + k_t r_{b_x} \right) + \sum_x \sum_{t=t_1+1}^{T} \left(r_{a_x} - k_t l_{b_x} \right) \right)$$

$$= \sum_x \left[(t_1+1) l_{a_x} + l_{b_x} \textstyle\sum_{t=0}^{t_1} k_t \right] + \sum_x \left[(T-(t_1+1)+1) l_{a_x} - r_{b_x} \textstyle\sum_{t=t_1+1}^{T} k_t \right]$$

$$+ \sum_x \left[(t_1+1) r_{a_x} + r_{b_x} \textstyle\sum_{t=0}^{t_1} k_t \right] + \sum_x \left[(T-(t_1+1)+1) r_{a_x} - l_{b_x} \textstyle\sum_{t=t_1+1}^{T} k_t \right]$$

$$= (t_1+1) \sum_x l_{a_x} + \sum_x l_{b_x} \textstyle\sum_{t=0}^{t_1} k_t \; + (T-(t_1+1)+1) \sum_x l_{a_x}$$

$$- \sum_x r_{b_x} \sum_{t=t_1+1}^{T} k_t \; + (t_1+1) \sum_x r_{a_x} \; + \sum_x r_{b_x} \sum_{t=0}^{t_1} k_t \; + \; (T-(t_1+1)+1) \sum_x r_{a_x}$$

$$- \sum_x l_{b_x} \sum_{t=t_1+1}^{T} k_t$$

$$= (T+1) \sum_x \left(l_{a_x} + r_{a_x} \right) + \sum_x l_{b_x} \left[\sum_{t=0}^{t_1} k_t - \sum_{t=t_1+1}^{T} k_t \right] + \sum_x r_{b_x} \left[\sum_{t=0}^{t_1} k_t - \sum_{t=t_1+1}^{T} k_t \right]$$

$$=(T+1)\sum_x\left(l_{a_x}+r_{a_x}\right)\ +\ \sum_x\left(l_{b_x}+r_{b_x}\right)\sum_T|k_t|$$

$$=(T+1)\sum_x\left(l_{a_x}+r_{a_x}\right)\ +\ \sum_T|k_t|\sum_x\left(l_{b_x}+r_{b_x}\right)$$

Böylece amaç fonksiyonu

$$\min_{l_{a_x},r_{a_x},l_{b_x},r_{b_x}}(T+1)\sum_x\left(l_{a_x}+r_{a_x}\right)+\sum_T|k_t|\sum_x\left(l_{b_x}+r_{b_x}\right)$$

elde edilmektedir. Kısıtlar ise, $\mu_{ln\left(\tilde{m}(x,t)\right)}\left(ln\left(m(x,t)\right)\right)$ ile gösterilen, logaritması alınmış merkezi ölüm hızlarının üçgensel üyelik fonksiyonunun aralıkları olan

$$\ln\left(m^*(x,t)\right)-l_{\ln\left(m^*(x,t)\right)}\le\ln\left(m(x,t)\right)\le\ln\left(m^*(x,t)\right)$$

$$\ln\left(m^*(x,t)\right)\le\ln\left(m(x,t)\right)\le\ln\left(m^*(x,t)\right)+r_{\ln\left(m(x,t)\right)}$$

eşitsizlikleri kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$\ln\left(m^*(x,t)\right)-\left(l_{a_x}+k_t l_{b_x}\right)\le\ln\left(m(x,t)\right),k_t>0$$

$$\ln\left(m^*(x,t)\right)-\left(l_{a_x}-k_t r_{b_x}\right)\le\ln\left(m(x,t)\right),k_t\le 0$$

$$\ln\left(m^*(x,t)\right)+\left(r_{a_x}+k_t r_{b_x}\right)\ge\ln\left(m(x,t)\right),k_t>0$$

$$\ln\left(m^*(x,t)\right)+\left(r_{a_x}-k_t l_{b_x}\right)\ge\ln\left(m(x,t)\right),k_t\le 0$$

$$b_x^*\ge 0\ \ iken\ \ b_x^*-l_{b_x}\ge 0$$

$$b_x^*<0\ \ iken\ \ b_x^*+r_{b_x}<0$$

Adım 3: Bu adımda ise adım 2'de tahmin edilen $l_{a_x}^{*0},r_{a_x}^{*0},l_{b_x}^{*0},r_{b_x}^{*0}$ değerleri, Eş. (4.2) kullanılarak elde edilen optimal α değeri α' yardımıyla

$$l_{a_x}^*=(1-\alpha')l_{a_x}^{*0}$$

$$r_{a_x}^* = (1-\alpha')r_{a_x}^{*0}$$

$$l_{b_x}^* = (1-\alpha')l_{b_x}^{*0}$$

$$r_{b_x}^* = (1-\alpha')r_{b_x}^{*0}$$

eşitlikleri hesap edilecektir.

Tüm adımlar tamamlanıp merkezler ve genişlikler tahmin edildikten sonra, logaritması alınan bulanık ölüm hızlarının tahmini, Bölüm (3.6)'da gösterilen üstel fonksiyon yardımıyla logaritmadan arındırılacak ve böylece $\tilde{m}^*(x,t)$ elde edilecektir. Bulanık ölüm hızı tahmini

$$\begin{aligned}\ln\big(\tilde{m}^*(x,t)\big) &= \Big(\ln\big(m*(x,t)\big), l_{\ln(m*(x,t))}, r_{\ln(m*(x,t))}\Big) \\ &= \big(a_x^*, l_{a_x^*}, r_{a_x^*}\big) + k_t^*\big(b_x^*, l_{b_x^*}, r_{b_x^*}\big)\end{aligned}$$

ile gösterilmekte olup, Eş. (4.5-4.7), kullanılarak tahmin edilen bulanıklık genişlikler ve merkezler

$$\ln\big(m^*(x,t)\big) = a_x^* + b_x^* k_t^* \tag{4.9}$$

$$l_{\ln(m^*(x,t))} = \begin{cases} l_{a_x^*} + k_t^* l_{b_x^*} & , k_t^* \geq 0 \\ l_{a_x^*} - k_t^* r_{b_x^*}, & k_t^* < 0 \end{cases} \tag{4.10}$$

$$r_{\ln(m(x,t))} = \begin{cases} r_{a_x^*} + k_t^* r_{b_x^*} & , k_t^* \geq 0 \\ r_{a_x^*} - k_t^* l_{b_x^*} & , k_t^* < 0 \end{cases} \tag{4.11}$$

gibidir [28]. Logaritma fonksiyonu doğrusal bir dönüşüm olmadığından bulanık merkezi ölüm hızlarının yaklaşık değeri, Bölüm (3.6)'daki üstel fonksiyonda işlem göz önünde bulundurularak:

$$\tilde{\mathrm{m}}^*(x,t) = \big(m^*(x,t), l_{m^*(x,t)}, r_{m^*(x,t)}\big) \approx$$

$$(exp(a_x^* + b_x^* k_t^*), exp(a_x^* + b_x^* k_t^*) l_{\ln(m^*(x,t))}, exp(a_x^* + b_x^* k_t^*) r_{\ln(m^*(x,t))}) \tag{4.12}$$

biçiminde yazılmaktadır.

4.3.2 Bulanık-Rastgele LC Modeli ile Öngörü

Gelecekteki merkezi ölüm hızlarını ve ilişkili değişkenleri öngörmek için, her $t > T$ için k_t indeksinin değerlerinin projeksiyonunun yapılması gerekmektedir. Bu tez kapsamında da kullanılan Sánchez ve Puchades [28] tarafından önerilen yaklaşımda, projeksiyonu yapılan her bir yıl için, $t > T, k_t$ birer rastlantı değişkeni çıktılarıdır ve bu çıktılar veri seti $\{k_t^*, t > T\}$ kümesine ARIMA(p,1,q) uygulanarak elde edilir. Bu projeksiyonlar Eş. (4.9-4.12) ile birleştirilecektir. Merkezi ölüm hızlarının kestirimleri, Yager'in [49] çalışmaları doğrultusunda öngörüsü yapılan $t > T, k_t$ değerlerinin, noktasal değerler veya istatistiksel güven aralıkları olmasına bağlı olarak hesaplanabilmektedir [28]. Ayrıca k_t'nin noktasal kestirimine ait değerler kullanılarak elde edilen merkezi ölüm hızları, $\tilde{a}_x$ ve $\tilde{b}_x$ parametreleri bulanık katsayılar olduklarından dolayı bulanıktır. Burada eğer $t > T, k_t$ için olasılıksal güven aralıkları kullanılırsa, merkezi ölüm hızlarının kestirimi bulanık- olasılıksal güven aralığı olur ki bu da kestirimlerin sınırlarının bulanık sayılardan oluşacağı anlamına gelmektedir.

$k_t, t > T$ için tahminler ve buna bağlı olarak merkezi ölüm hızlarının öngörüsü iki farklı şekilde yapılacaktır [28]:

1. Matematiksel beklenti ile $E^*(k_t)$ kullanılarak öngörü yapılabilmektedir. Bu durumda logaritması alınan merkezi ölüm hızı $\ln(\tilde{m}(x,t))$, $E^*\left(\ln(\tilde{m}(x,t))\right)$ile

$$E^*\left(\ln(\tilde{m}(x,t))\right) = \left(E^*\left(\ln(m(x,t))\right), l_{E^*(\ln(m(x,t)))}, r_{E^*(\ln(m(x,t)))}\right)$$
$$= E^*\left[\left(a_x^*, l_{a_x^*}, r_{a_x^*}\right) + k_t\left(b_x^*, l_{b_x^*}, r_{b_x^*}\right)\right]$$
$$= \left(a_x^*, l_{a_x^*}, r_{a_x^*}\right) + E^*(k_t)\left(b_x^*, l_{b_x^*}, r_{b_x^*}\right) \quad (4.13)$$

   biçiminde yazılmaktadır. Ayrıca burada üstel fonksiyon yardımıyla logaritma yok edilerek:

$$E^*(\tilde{m}(x,t)) \approx exp\left(E^*\left(\ln(\tilde{m}(x,t))\right)\right) \quad (4.14)$$

   gösterimi ile merkezi ölüm hızı değerlerinin kestirimi elde edilmektedir. Eş. (4.13) hesaplanırken Eş. (4.9-4.12)'den yararlanılacaktır.

2. k_t için $1-\varepsilon$ güven aralığı $\widetilde{k_t^{*,\varepsilon}} = \left[k_t^{*,\frac{\varepsilon}{2}}, k_t^{*,1-\frac{\varepsilon}{2}}\right]$ olarak yazılır ve $\ln\left(\tilde{\mathrm{m}}(x,t)\right) - veya\ \tilde{\mathrm{m}}(x,t)$ için $1-\varepsilon$ düzeyinde güven aralığı tahmini, $\widetilde{\ln\left(\tilde{\mathrm{m}}^{*,\varepsilon}(x,t)\right)} - veya\ \widetilde{\tilde{\mathrm{m}}^{*,\varepsilon}(x,t)}$ olacak şekilde bulanık güven aralığıdır.

   i. Eğer $\tilde{\mathrm{b}}_x$ ÜBS'si pozitif bölgede ise yani $b_x^* - l_{b_x^*} \geq 0$ ise, $\widetilde{\ln\left(\tilde{\mathrm{m}}^{*,\varepsilon}(x,t)\right)}$'nın alt sınırı bulanık sayı olmaktadır ve

$$\ln\left(\tilde{\mathrm{m}}^{*,\frac{\varepsilon}{2}}(x,t)\right) = \left(a_x^*, l_{a_x^*}, r_{a_x^*}\right) + k_t^{*,\frac{\varepsilon}{2}}\left(b_x^*, l_{b_x^*}, r_{b_x^*}\right)$$

   şeklinde gösterilmektedir. Buna karşılık olarak $\widetilde{\ln\left(\tilde{\mathrm{m}}^{*,\varepsilon}(x,t)\right)}$'nın üst sınırı ise

$$\ln\left(\tilde{\mathrm{m}}^{*,1-\frac{\varepsilon}{2}}(x,t)\right) = \left(a_x^*, l_{a_x^*}, r_{a_x^*}\right) + k_t^{*,1-\frac{\varepsilon}{2}}\left(b_x^*, l_{b_x^*}, r_{b_x^*}\right)$$

   biçimindedir.

   ii. Eğer $\tilde{\mathrm{b}}_x$ ÜBS'si negatif bölgede ise yani $b_x^* - l_{b_x^*} < 0$ ise, $\widetilde{\ln\left(\tilde{\mathrm{m}}^{*,\varepsilon}(x,t)\right)}$'nın üst sınırı bulanık sayı olur ve

$$\ln\left(\tilde{\mathrm{m}}^{*,\frac{\varepsilon}{2}}(x,t)\right) = \left(a_x^*, l_{a_x^*}, r_{a_x^*}\right) + k_t^{*,1-\frac{\varepsilon}{2}}\left(b_x^*, l_{b_x^*}, r_{b_x^*}\right)$$

   şeklinde gösterilir. Buna karşılık olarak $\widetilde{\ln\left(\tilde{\mathrm{m}}^{*,\varepsilon}(x,t)\right)}$'nın alt sınırı ise

$$\ln\left(\tilde{\mathrm{m}}^{*,1-\frac{\varepsilon}{2}}(x,t)\right) = \left(a_x^*, l_{a_x^*}, r_{a_x^*}\right) + k_t^{*,\frac{\varepsilon}{2}}\left(b_x^*, l_{b_x^*}, r_{b_x^*}\right)$$

   ile gösterilmektedir.

Merkezi ölüm hızı $\widetilde{\tilde{\mathrm{m}}^{*,\varepsilon}(x,t)}$ için güven aralığı ise aşağıda verilmektedir:

$$\tilde{\mathrm{m}}^{*,\frac{\varepsilon}{2}}(x,t) \approx exp\left(\ln\left(\tilde{\mathrm{m}}^{*,\frac{\varepsilon}{2}}(x,t)\right)\right),$$

$$\tilde{\mathrm{m}}^{*,1-\frac{\varepsilon}{2}}(x,t) \approx exp\left(\ln\left(\tilde{\mathrm{m}}^{*,^{1-\frac{\varepsilon}{2}}}(x,t)\right)\right)$$

5. BULANIK-RASTGELE LC MODELİ İÇİN BİR UYGULAMA

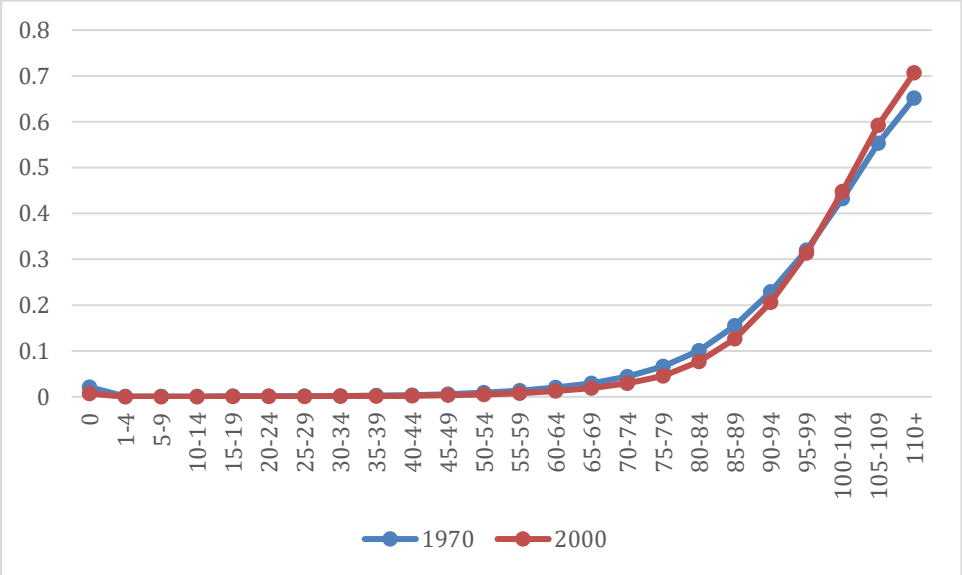
Bu tez kapsamında 1970-2010 yılları arası ABD'ye ait erkek nüfusu için https://mortality.org/ sitesinden alınan yaşam tablosu verileri kullanılmıştır [50]. Veride yaş grupları ilk iki ve son grup hariç beşer yıllık aralıklar ile verilmiş olup, ilk yaş grubu [0,1), ikinci yaş grubu [1,4) ve son yaş grubu ise 110+ olarak verilmektedir.

İlk olarak veriden 1970-2000 yıllarına ait merkezi ölüm hızları çekilmiştir. Bu yıllar için bulanıklaştırmaya dair hesaplamalar R programında yapılarak, görselleştirmeler için Excel'den yararlanılmıştır. 1970-2000 yılları için 31 yıllık merkezi ölüm hızlarına ait veri bulanıklaştırılarak, zaman serileri yardımıyla on yıllık öngörüde bulunulmuştur. 2001-2010 yıllarındaki gerçekleşen ölüm hızları verileri ise on yıllık öngörü değerleri ile karşılaştırılmada kullanılmıştır.

5.1 Merkezi Ölüm Hızlarının Bulanık-Rastgele LC Yöntemi ile Modellenmesi

Merkezi ölüm hızlarının bulanıklaştırılması yapılmadan önce yaşlara göre, ilk ve son yıllar bazında değişimleri incelenmiştir.

Şekil 5.1 ile 1970 ve 2000 yıllarındaki Amerika erkek nüfusu için merkezi ölüm hızları gösterilmektedir.

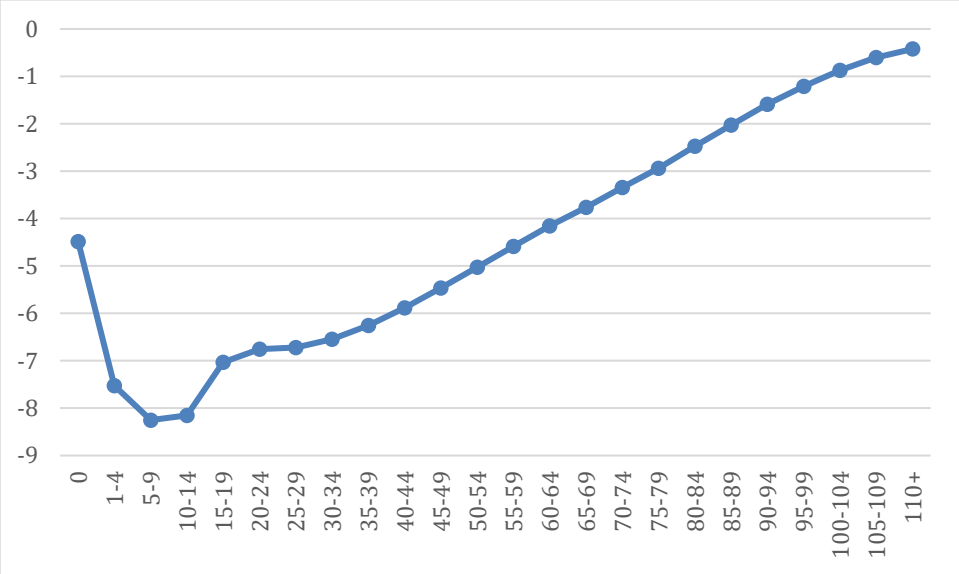


Şekil 5.1. 1970 ve 2000 yıllarındaki merkezi ölüm hızları.

Doğumdan [1-4) yaş grubuna kadar merkezi ölüm hızları azalan bir yapıya sahiptir. [60-64) yaş grubundan sonra ise, hem 1970 hem de 2000 yılları için merkezi ölüm hızları artmaya başlamaktadır. 2000 yılındaki merkezi ölüm hızları 1970 yılına kıyasla [70-74) yaş grubundan itibaren, [95-99) yaş grubuna kadar daha düşük seyretmektedir. [95-99) yaş grubundan sonrasında ise 2000 yılı için merkezi ölüm hızlarının daha yüksek seyrettiği görülmektedir.

Merkezi ölüm hızlarının Lee-Carter modeli ile tahmini için a_x^*, b_x^* ve k_t parametrelerine ilişkin görselleştirmeler aşağıda sunulmaktadır.

Şekil 5.2 ile Amerikan erkek nüfusu için hesaplanan a_x^* değerleri gösterilmektedir. Takvim yılından bağımsız olan ortalama ölüm hızı, a_x^*, her bir yaş grubu için yıllar üzerinden logaritması alınmış merkezi ölüm hızları toplamının, incelenen takvim yılı sayısına (31) bölünmesiyle elde edilmiştir.

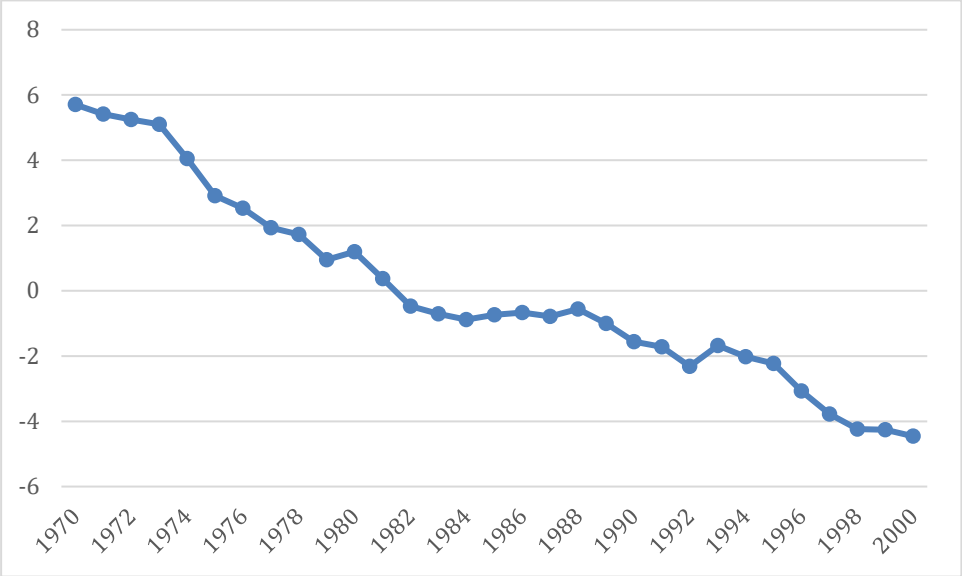


Şekil 5.2. a_x^* parametresi.

Belirli bir yaş için ortalama ölüm hızını gösteren a_x^* parametresinin, [10-14) yaş grubuna kadar azaldığı, sonrasında ise artmaya başladığı gözlenmektedir.

Şekil 5.3 ile k_t parametresinin değişimi gösterilmiştir. Merkezi ölüm hızlarının yıllara göre değişimini gösteren bu parametre her bir takvim yılı için logaritması alınmış ölüm

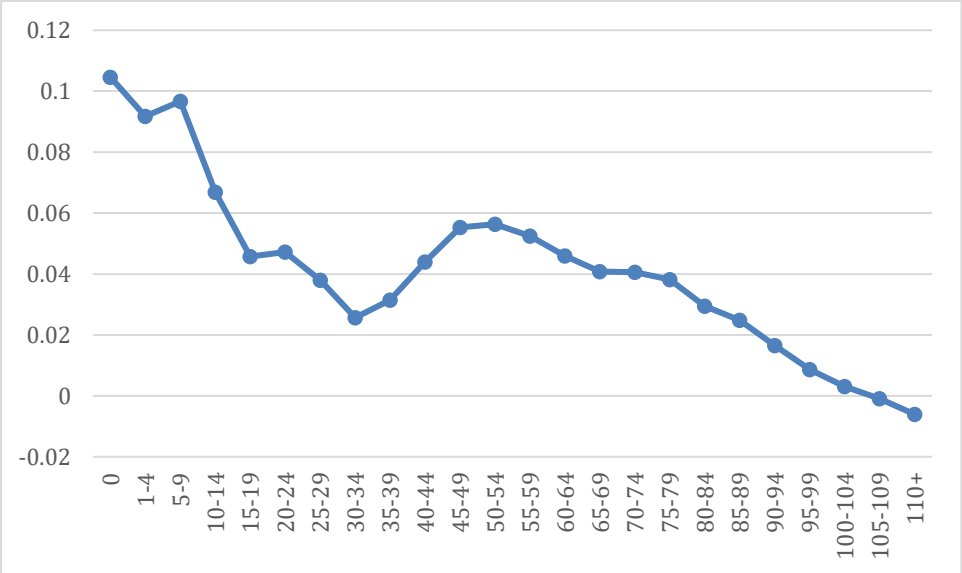
hızlarının toplamından, ortalama ölüm hızlarının toplamının çıkarılmasıyla elde edilmektedir.



Şekil 5.3. k_t Parametresi

Şekil 5.3 ile zaman içerisindeki ölümlülük trendinin düştüğü görülmektedir.

Logaritması alınmış merkezi ölüm hızlarının zamana bağlı duyarlılığını gösteren b_x^* parametresi ise Eş. (2.8) ile elde edilmiş ve Şekil (5.4) ile gösterilmiştir.



Şekil 5.4. b_x^* parametresi.

Lee-Carter modeli ile tahmin edilen merkezi ölüm hızları üçgensel bulanık sayı olacak şekilde bulanıklaştırılmıştır. Lee-Carter modeli parametreleri a_x^*, b_x^* üçgensel bulanık sayıları a_x^* ve b_x^* için merkez değerlerini ifade etmektedir.

Çizelge 5.1 ile $\tilde{a}_x^*$ ve $\tilde{b}_x^*$ parametrelerinin üçgensel bulanık sayı tahminleri gösterilmektedir.

Çizelge 5.1. $\tilde{a}_x^*$ ve $\tilde{b}_x^*$ üçgensel bulanık sayıları.

	a_x^*			b_x^*		
	Merkez	**Sol Genişlik**	**Sağ Genişlik**	**Merkez**	**Sol Genişlik**	**Sağ Genişlik**
0	-4,48622541	0,131581358	0,081956457	0,104608324	0	0
1-4	-7,52734496	0,054924414	0,115188923	0,091729085	0,005705938	0,005623273
5-9	-8,25222726	0,100669987	0,11682945	0,096682012	0	0
10-14	-8,15289778	0,004270066	0,034058574	0,066800201	0,00527632	0,01767015
15-19	-7,03222795	0,070724405	0,074981357	0,04569274	0	0,000338833
20-24	-6,75767143	0,038925631	0,074138686	0,047228092	0,000379662	0,000979709
25-29	-6,72376857	0,0034852	0,075267642	0,037976928	0,014881875	0,029092975
30-34	-6,54587744	0,078808851	0,147406448	0,025684068	0,003109163	0,014389175
35-39	-6,25224655	0,120346972	0,142258967	0,031490082	0	0
40-44	-5,88408323	0,073000489	0,093183007	0,043952033	0	0
45-49	-5,46363908	0,057309643	0,027709412	0,055322949	0,007478611	0
50-54	-5,02915224	0,039780021	0,051163813	0,056381994	0,000561377	0
55-59	-4,58869017	0,044239193	0,066634925	0,052421158	0	0
60-64	-4,15730006	0,032875568	0,050606541	0,045911001	0	0
65-69	-3,76387714	0,033508335	0,047562785	0,040773954	0	0
70-74	-3,34326117	0,035395913	0,040874759	0,040625613	0	0
75-79	-2,94112399	0,03573728	0,035785943	0,038123826	0	0
80-84	-2,47572875	0,030532925	0,012950128	0,029395012	0,007418548	0,001154065
85-89	-2,02533758	0,036059463	0	0,024866875	0,016432225	0,006171072
90-94	-1,59121794	0,046556868	0,011969696	0,016530161	0,016530161	0,005995854
95-99	-1,20918805	0,059736577	0,048753546	0,008677686	0,008677686	0,000552131
100-104	-0,87409564	0,067559907	0,069703999	0,0030745	0,0030745	0
105-109	-0,6009802	0,066967176	0,045314105	-0,00092496	0,00612759	0,000924956
110+	-0,42276204	0,062899533	0,030311873	-0,00604668	0,004149608	0,006046677

Çizelge 5.1 ile $\tilde{a}_x^*$ ve $\tilde{b}_x^*$ parametreleri için merkezler ve genişlikler hesaplanırken 4. Bölümde verilen Adım 1, Adım 2 sırasıyla uygulanmıştır. Adım 3, yani son adımda minimizasyon problemi ile hesap edilen genişlikler için $c^0 = 3528.988 > p^0 = 3097.191$ sonucuna varıldığından, yeni bir alfa değeri hesaplanmamıştır.

Çizelge 5.1'den yararlanılarak Eş. (4.9-4.11) yardımıyla logaritması alınmış merkezi ölüm hızlarının genişlikleri elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar, Eş. (4.12) kullanılarak logaritmadan arındırılmıştır. Ardından gözlenen merkezi ölüm hızlarının, bulanık

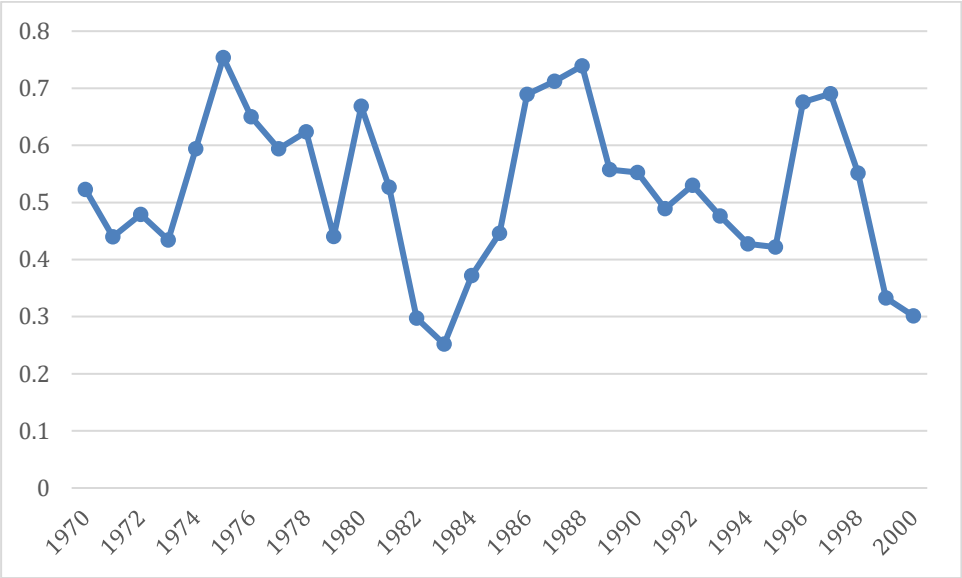
merkezi ölüm hızlarının üyelik fonksiyonuna ne derecede ait olduğuna bakılmıştır. Burada $m(x,t)$ gerçekte gözlenen merkezi ölüm hızları, $m^*(x,t)$ LC ile tahmin edilen merkezi ölüm hızları ve $\tilde{m}^*(x,t)$ tahmin edilen bulanık merkezi ölüm hızları olmak üzere, $\mu_{\tilde{m}^*(x,t)}\big(m(x,t)\big)$ bulanık merkezi ölüm hızlarının üyelik fonksiyonunu ifade etmektedir. Bölüm 3'te verilen bulanık merkezi ölüm hızlarının üyelik fonksiyonu, üçgensel bulanık sayıların üyelik fonksiyonundan yararlanılarak,

$$\mu_{\tilde{m}^*(x,t)}\big(m(x,t)\big) = \begin{cases} 1 + \dfrac{m(x,t) - m^*(x,t)}{l_{m^*(x,t)}}, & m^*(x,t) - l_{m^*(x,t)} \le m(x,t) \le m^*(x,t) \\ 1 + \dfrac{m^*(x,t) - m(x,t)}{r_{m^*(x,t)}}, & m^*(x,t) \le m(x,t) \le m^*(x,t) + r_{m^*(x,t)} \end{cases}$$

elde edilmiştir. Elde edilen üyelik dereceleri ise yıllar bazında,

$$\overline{\mu}_t = \frac{\sum_x \mu_{\tilde{m}^*(x,t)}\big(m(x,t)\big)}{31}$$

eşitliği ile ortalamaları alınarak Şekil 5.5 ile gösterilmektedir.



Şekil 5.5. 1970-2000 yılları için gözlenen merkezi ölüm hızlarının ortalama üyelik dereceleri.

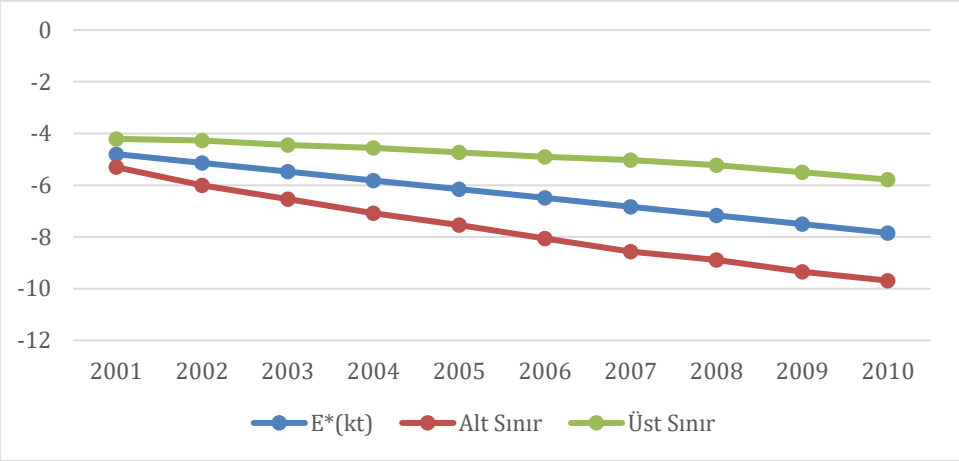
Şekil 5.5'te ortalama üyelik derecelerinin 0,8 ile 0,2 arasında dalgalandığı görülmektedir. 1982-1986 ve 1998-2000 yılları hariç, ortalama üyelik derecelerinin 0,4'ten yüksek

olduğu gözlenmektedir. Yalnızca bahsi geçen yıllarda, gözlenen merkezi ölüm hızlarının, bulanık olarak tahmin edilen merkezi ölüm hızlarına üyeliklerinin, düşük olduğu görülmektedir.

R programında auto.arima() komutuyla k_t parametresinin en iyi ARIMA(0,1,0) ile modellenebileceği görülmüştür. k_t parametresinin 2001-2010 yılları için %90 güven seviyesinde yapılan öngörüsü ve bootstrap yöntemi ile 1000 kez simüle edilerek oluşturulan kestirim aralıkları Çizelge 5.2 ile verilmiştir.

Çizelge 5.2. Zaman indeksi k_t için öngörü değerleri.

	Ön Görüm	**Alt Sınır**	**Üst Sınır**
2001	-4,79838271	-5,30507	-4,209492344
2002	-5,137206959	-6,00587	-4,267674848
2003	-5,476031209	-6,54393	-4,444622226
2004	-5,814855459	-7,0793	-4,554258355
2005	-6,153679708	-7,54047	-4,734710982
2006	-6,492503958	-8,06326	-4,908144516
2007	-6,831328207	-8,57233	-5,022319913
2008	-7,170152457	-8,88467	-5,224165055
2009	-7,508976707	-9,34766	-5,497750446
2010	-7,847800956	-9,69106	-5,781348623

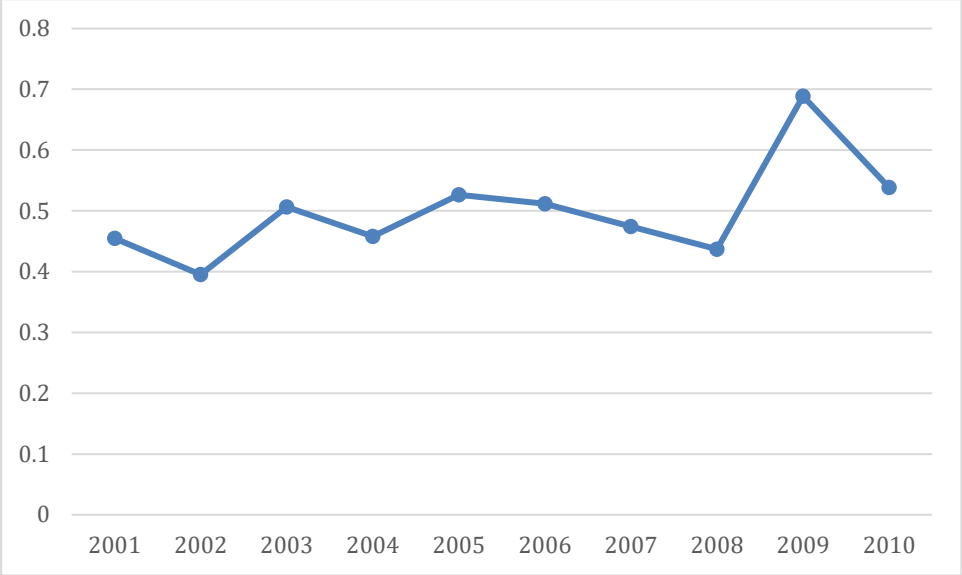


Şekil 5.6. k_t parametresinin 10 yıllık öngörüsü.

Zaman serileri ile öngörülen k_t değerleri $E^*(k_t)$ olmak üzere, bu değerler Eş. (4.13)'te yerine yazılarak, 2001-2010 yıllarına ait logaritması alınan bulanık merkezi ölüm hızlarının, öngörü değerleri elde edilmiştir. Eş. (4.14) yardımıyla, öngörüsü yapılan bulanık merkezi ölüm hızlarının üyelik fonksiyonlarının, yıllar bazında ortalamaları,

$$\overline{\mu}_t = = \frac{\sum_x \mu_{E\left(\widetilde{m}^*(x,t)\right)}^{\left(m(x,t)\right)}}{10}$$

eşitliği kullanılarak, elde edilmiştir.



Şekil 5.7. 2001-2010 yılları için gözlenen merkezi ölüm hızlarının ortalama üyelik dereceleri.

Daha önce Şekil 5.5 ile 1970-2000 yıllarına ait gözlenen merkezi ölüm hızlarının, bulanık değerlerin içerisinde bulunma derecesi incelenmişti. Şekil 5.7 ile 2001-2010 arasında öngörülen bulanık merkezi ölüm hızlarının, 2001-2010 yılındaki gözlenen merkezi ölüm hızlarını ne derecede içerdiğine bakılmaktadır. Örneğin, 2009 yılı için gerçekleşen merkezi ölüm hızlarının, öngörülen modele üyelik derecesi 0,7'dir. Genel olarak gerçekleşen merkezi ölüm hızlarının üyelik derecelerinin 0,5 ve üzerinde olduğu görülmektedir.

Çizelge 5.3. 2004 yılı için bulanık kestirim değerleri.

	$E(\tilde{m}^*(x,2004))$			$\tilde{m}^*(x,2004)^{\%5}$			$\tilde{m}^*(x,2004)^{\%95}$		
	Merkez	**Sol Genişlik**	**Sağ Genişlik**	**Merkez**	**Sol Genişlik**	**Sağ Genişlik**	**Merkez**	**Sol Genişlik**	**Sağ Genişlik**
0	0,00613	0,00081	0,00699	0,00537	0,00071	0,00044	0,00699	0,00092	0,00057
1-4	0,00032	0,00003	0,00035	0,00028	0,00003	0,00004	0,00035	0,00003	0,00005
5-9	0,00015	0,00001	0,00017	0,00013	0,00001	0,00002	0,00017	0,00002	0,00002
10-14	0,00020	0,00002	0,00021	0,00018	0,00002	0,00001	0,00021	0,00002	0,00001
15-19	0,00068	0,00005	0,00072	0,00064	0,00005	0,00005	0,00072	0,00005	0,00005
20-24	0,00088	0,00004	0,00094	0,00083	0,00004	0,00006	0,00094	0,00004	0,00007
25-29	0,00096	0,00017	0,00101	0,00092	0,00019	0,00017	0,00101	0,00014	0,00014
30-34	0,00124	0,00020	0,00128	0,00120	0,00022	0,00020	0,00128	0,00018	0,00021
35-39	0,00160	0,00019	0,00167	0,00154	0,00019	0,00022	0,00167	0,00020	0,00024
40-44	0,00216	0,00016	0,00228	0,00204	0,00015	0,00019	0,00228	0,00017	0,00021
45-49	0,00307	0,00018	0,00329	0,00286	0,00016	0,00023	0,00329	0,00019	0,00020
50-54	0,00472	0,00019	0,00506	0,00439	0,00017	0,00024	0,00506	0,00020	0,00027
55-59	0,00750	0,00033	0,00801	0,00701	0,00031	0,00047	0,00801	0,00035	0,00053
60-64	0,01198	0,00039	0,01270	0,01131	0,00037	0,00057	0,01270	0,00042	0,00064
65-69	0,01830	0,00061	0,01926	0,01738	0,00058	0,00083	0,01926	0,00065	0,00092
70-74	0,02789	0,00099	0,02936	0,02649	0,00094	0,00108	0,02936	0,00104	0,00120
75-79	0,04231	0,00151	0,04439	0,04032	0,00144	0,00144	0,04439	0,00159	0,00159
80-84	0,07089	0,00264	0,07356	0,06830	0,00264	0,00447	0,07356	0,00263	0,00344
85-89	0,11419	0,00821	0,11782	0,11065	0,00882	0,01287	0,11782	0,00756	0,00882
90-94	0,18501	0,01506	0,18891	0,18118	0,01613	0,02337	0,18891	0,01395	0,01648
95-99	0,28375	0,01786	0,28688	0,28066	0,01786	0,03092	0,28688	0,01786	0,02532
100-104	0,40985	0,02769	0,41144	0,40826	0,02758	0,03734	0,41144	0,02780	0,03444
105-109	0,55123	0,03988	0,55188	0,55059	0,03919	0,04031	0,55188	0,04057	0,04895
110+	0,67868	0,06655	0,68389	0,67353	0,06091	0,03314	0,68389	0,07229	0,04082

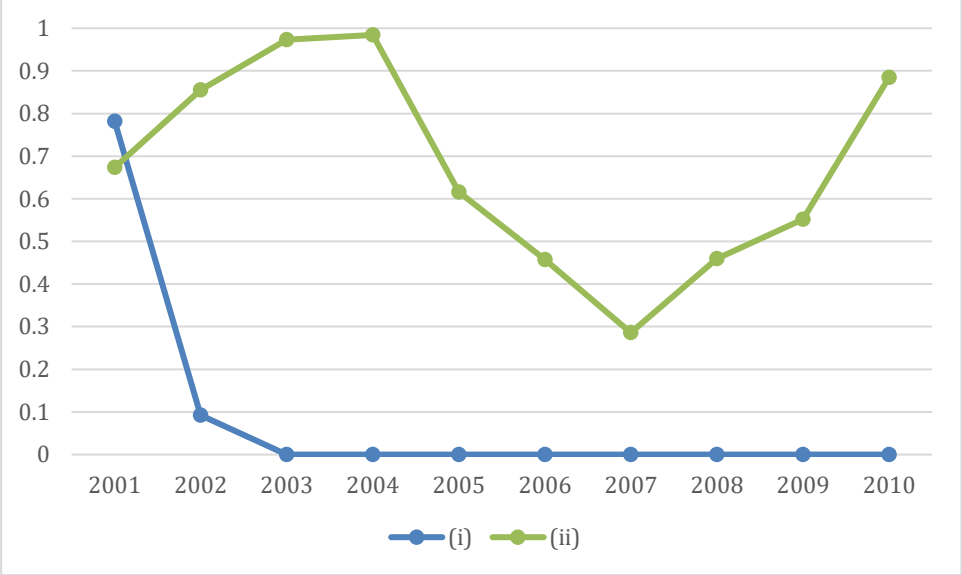
Çizelge 5.3'te 2004 yılı için bulanık merkezi ölüm hızlarının kestiriminde, Bölüm 4.2 içerisinde bahsedilen öngörü yöntemlerinden ikisi de uygulanmıştır. Bu yöntemlerden ilki, bulanık merkezi ölüm hızlarının, k_t'nin noktasal kestirim değerleri yardımıyla elde edilmesidir. İkincisi ise daha önce bulanık olarak alınmayan zaman indeksi k_t'nin %90 güven düzeyinde oluşturulan kestirim aralıklarının içerisine gömülerek bulanıklaştırılması ile (bilinen güven aralığı), 2004 yılına ait merkezi ölüm hızlarının bulanık güven aralıkları yardımıyla öngörülmesini içermektedir. Burada $\widetilde{\mathrm{m}^{*,\%10}(x,t)} = [\tilde{\mathrm{m}}^{*,\%5}(x,t), \tilde{\mathrm{m}}^{*,\%95}(x,t)]$ bulanık güven aralığıdır. Örneğin, [1,4) yaş grubu baz alındığında,

$$\tilde{E}^*\big(m([1,4),2004)\big) = (0.00032, 0.00003, 0.00035)$$

eşitliği ile 2004 yılı için öngörülen merkezi ölüm hızı, yaklaşık olarak 0,00032 olup 0,00029 ve 0,00067 arasında değişebilmektedir. Benzer şekilde $\widetilde{m^{*,\%10}([1,4),2004)}$ bulanık güven aralığı da alt ve üst bulanık sınırlara sahiptir ve bu sınırlar sırasıyla, $\tilde{\mathrm{m}}^{*,\%5}([1,4),2004)$, $\tilde{\mathrm{m}}^{*,\%95}([1,4),2004)$ üçgensel bulanık sayıları olmaktadır. Bu

üçgensel sayılara ait merkezler, alt ve üst sınırlar Çizelge 5.3 yardımıyla sırasıyla $(0.00028,0.00003,0.00004)$ ve $(0.00035,0.00003,0.00005)$ olarak elde edilmektedir. 2004 yılında gerçekleşen merkezi ölüm hızları %90 güvenle yaklaşık olarak 0.00028 ile yaklaşık olarak 0.00035 arasında olacaktır. Sıradan LC modeli düşünüldüğünde yaklaşıklıktan söz edilmez ve [1,4) yaş grubu için gerçekleşen merkezi ölüm hızını içeren güven aralığının %90 güven ile [0.00028,0.00035] arasında olduğu söylenir. Bulanık merkezi ölüm hızları EK 1'de verilmektedir.

Şekil 5.8 ile önemli bir yaş grubu olan [0,1) için, gerçekteki merkezi ölüm hızlarını $\tilde{E}^*\big(m([0,1),t)\big)$ ve $\tilde{\mathrm{m}}^{*,\%95}([0,1),t)$ bulanık sayılarının ne derece içerdiği gösterilmektedir.



Şekil 5.8. 2001-2010 yılları arasında [0,1) yaş grubu için merkezi ölüm hızlarının ortalama üyelik dereceleri

$$(i)\mu_{E^*(\tilde{\mathrm{m}}([0,1),t))}\big(m(x,t)\big)$$
$$(ii)\mu_{\tilde{\mathrm{m}}^{*,\%95}([0,1),t)}\big(m(x,t)\big)$$

Şekil 5.8'te k_t parametresinin noktasal öngörüsü ile kestirilen bulanık merkezi ölüm hızlarının, gözlenen merkezi ölüm hızlarını, [0,1) yaş grubunda içermede, $\tilde{\mathrm{m}}^{*,\%95}([0,1),t)$ kadar iyi olmadığı görülmektedir. Öyle ki 2003 yılından sonra gerçekleşen merkezi ölüm hızlarını içerme derecesi $\tilde{E}^*\big(m([0,1),t)\big)$bulanık sayısı için sıfır iken, $\tilde{\mathrm{m}}^{*,\%95}([0,1),t)$ için 2005, 2008 yılları hariç 0,5'in üzerindedir.

5.2 Bulanık-Rastgele LC Modeli ile Beklenen Yaşam Süresinin Öngörüsü

Gelecek yaşam süresinin hesaplanabilmesi için öngörülen yıllara ait yaşam tablolarının kestirilen merkezi ölüm hızları ile oluşturulması gerekmektedir.

Yaşam tabloları,

- ${}_nq_x$, x ile $x+n$ yaşları arasında ölme olasılığı,
- l_x, x yaşında yaşayan kişi sayısı,
- ${}_nd_x$, x ile $x+n$ yaşları arasında ölen kişi sayısı,
- ${}_nL_x$, x ile $x+n$ yaşları arasında yaşanmış birey yıl sayısı,
- T_x, x yaştan sonra toplam yaşanmış birey yıl sayısı,
- e_x , beklenen yaşam süresi veya x yaşından sonra yaşanmış birey yılların ortalaması,

gibi fonksiyonları içermektedir. Reed ve Merrell (1939), Greville (1943), Barclay (1958), Coale ve Demeny (1966), Chiang (1968), Fergany (1971) ölüm olasığını türetmek için farklı yaklaşımlar önermişlerdir. Bu tez kapsamında oluşturulan yaşam tabloları hesaplanılırken Chiang'in yaklaşımını temel alarak, gözlemlenen merkezi ölüm hızlarından yararlanan Schoen'in modeli kullanılmıştır [51]. Schoen önerdiği yöntemi 1969-1971 yıllarındaki Amerikan hayat tablosunu baz alarak, Reed-Merrell, Keyfitz Fraunthal, üstel model ve ağırlıklandırılmış üstel model ile yaşayan kişi sayısındaki değişim, Δl_x, bakımından karşılaştırmıştır. Bu karşılaştırmada Schoen, Amerikan hayat tablosundaki l_x değerlerine en yakın değerlerin önerdiği model ile elde edileceğini göstermiştir [51].

Yaşam tablosunun radiksi olarak adlandırılan $l(0)$ değeri çoğunlukla 100.000 olarak alınmaktadır. Yaşam tabloları oluşturulurken genellikle yıl ortası nüfus ile ölüm sayılarına ilişkin verilerden yararlanılmaktadır.

$M(x,n)$, $(x, x+n)$ yaş aralığı için ölüm hızını, $D(x,n)$, $(x, x+n)$ yaş aralığında gerçekleşen ölümleri, $P(x,n), (x, x+n)$, yaş aralığındaki yıl ortası nüfusu ifade etmek üzere yaşa özel merkezi ölüm hızları

$$M(x,n) = \frac{D(x,n)}{P(x,n)}$$

eşitliği ile elde edilmektedir [52]. Genellikle ölümlerin tam olarak ne zaman gerçekleştiği ile ilgili kayıtlara ulaşmak zor olduğundan yaşanmış birey yıllar sayısı L_x 'i hesaplamak güçleşmektedir. Yaşanmış birey yıllar, L_x , hesaplanırken çoğu zaman ölümlerin yıl ortasında gerçekleştiği varsayımı kabul edilmektedir. Ancak ölümlerin belirli bir yaş yılı için eşit aralıklar ile dağıldığı varsayımı gerçeği yansıtmamaktadır. Bu sebeple x yaş yılı içerisinde, bir yıl içinde ölenlerin ortalama olarak yaşadığı birey yılların sayısını ifade eden, ${}_n a_x$ parametresi ile

$$ {}_nL_x = {}_na_x l_x + \left(n - {}_na_x\right) l_{x+n} \tag{5.1}$$

eşitliği elde edilmiştir [53]. Eş. (5.1)'in bir sonucu olarak

$$l_{x+n} = l_x \frac{1 - {}_na_x \cdot {}_nM_x}{1 + \left(n - {}_na_x\right) {}_nM_x} \tag{5.2}$$

eşitliği elde edilmektedir. Burada doğrusal varsayım altında ${}_n a_x$ parametresi $n/2$ ifadesine dönüşmektedir. Schoen'in [51] ölüm hızlarından yararlanarak elde ettiği yaşayan kişi sayılarına ilişkin eşitlik,

$$l_{x+n} = l_x \left(\frac{1 - {}_nM_x\left(\frac{n^2}{240}\right)\left({}_nM_{x+n}\right) + 38\,{}_nM_x + {}_nM_{x-n}}{1 + {}_nM_x n + {}_nM_x\left(\frac{n^2}{240}\right)\left(14\,{}_nM_{x+n} + 72\,{}_nM_x\right) - 6\,{}_nM_{x-n}} \right) \tag{5.3}$$

biçimindedir. Eş. (5.3) ölümlerin yıl ortasında gerçekleştiği varsayımı altında kullanılan

$$l_{x+n} = l_x \left(\frac{1 - \frac{n}{2}\,{}_nM_x}{1 + \frac{n}{2}\,{}_nM_x} \right)$$

eşitliğinden yola çıkılarak :

i. Mevcut aralıktaki yaşam fonksiyonuna doğrusal bir eğri ile yaklaşım yapılabileceği,

ii. Aralıkların azalım gücüne ise karesel bir eğri ile yaklaşım yapılabileceği,

varsayımları altında kabul edilmektedir [51].

Böylece Eş. (5.1) içerisinde gösterilen ve literatürde Chiang'in a'sı olarak adlandırılan ${}_n a_x$ parametresi, gözlenen ölüm hızlarından yararlanılarak tahmin edilmiş olunmaktadır. Bulanık merkezi ölüm hızlarının merkezleri kullanılarak her biri için Schoen'in yöntemi ile ilk önce, Eş. (5.3) yardımıyla yaşayan kişi sayısı l_x bulunmuş ve daha sonra Eş. (5.1)'den yararlanılarak ${}_n a_x$ sabiti, Excel yardımıyla hesaplanmıştır. ${}_n a_x$ sabiti üretildikten sonra ise Eş. (5.2)'nin sonucu olan,

$$ {}_{n_x}q_{x,t} = \frac{n_x\, m(x,t)}{1+\left(n_x - {}_n a_x\right) m(x,t)} \tag{5.4} $$

eşitliği kullanılarak hayat tabloları oluşturulmuştur. Beklenen yaşam süresinin hesaplanması için Eş. (5.1) ile gösterilen yaşanmış birey yıllar toplanılarak toplam yaşanmış birey yıllar bulunmuştur. Toplam yaşanmış birey yıllar, o yıl için yaşayan kişi sayısına bölünmüş ve böylece beklenen yaşam süresi elde edilmiştir. Bu yöntem ile elde edilen beklenen yaşam sürelerinin sol ve sağ genişliklerinin elde edilmesi için Eş. (3.10) ve Eş. (3.11) ile gösterilen üçgensel bulanık sayı yaklaşımı kullanılacaktır. Bu amaçla ilk önce Eş. (5.4) ile gösterilen ölüm olasılıkları aşağıdaki gibi bulanıklaştırılmıştır:

1. Eş. (5.4) bir fonksiyon olarak kabul edilir ve bu eşitlikte n_x ve ${}_n a_x$ sabit birer sayıdır. Daha sonra ise bulanık ölüm olasılığının merkezinin fonksiyonu Eş. (3.9) gereğince yazılır. Bahsi geçen fonksiyon,

$$ y = f(k),\ f(k) \in [0,1] $$
$$ y = \frac{n_x.k}{1+\left(n_x - {}_n a_x\right)k} $$

şeklinde tanımlanır.

2. Ölüm olasılığı fonksiyonunun bulanık sayılarda işlemlerin tanımı (Taylor genişlemesi) gereğince türevi alınır. Bu fonksiyonun birinci türevi

$$f'(k) = \frac{n_x}{\left(1+\left(n_x - {}_n a_x\right)k\right)^2} > 0$$

olarak elde edilmektedir. Türevin sıfırdan büyük olması fonksiyonun artan olduğunu, ölüm hızları arttıkça ölüm olasılıklarının arttığını göstermektedir, bu beklenen bir durumdur. Türev sıfırdan büyük olduğu için bulanık merkezi ölüm hızlarının sol (sağ) genişlikleri bulunurken, elde edilen birinci türev, bulanık merkezi ölüm hızlarının sol (sağ) genişliği ile çarpılarak elde edilmektedir.

Bulanık ölüm olasılıklarının genişlikleri elde edilirken, merkezden sapmaların sol genişlik için sıfırdan küçük ve sağ genişlik için birden büyük olmamasına dikkat edilmelidir. Aşağıda bulanık ölüm hızlarının merkezi ve sırasıyla sol ve sağ genişlikleri verilmektedir [28]:

$${}_{n_x}q^*_{x,t} = \frac{n_x m^*(x,t)}{1+\left(n_x - {}_n a_x\right)m(x,t)}$$

$$l_{{}_{n_x}q^*_{x,t}} = min\left\{ {}_{n_x}q^*_{x,t}, \frac{n_x l_{m^*(x,t)}}{\left(1+\left(n_x - {}_n a_x\right)m(x,t)\right)^2} \right\}$$

$$r_{{}_{n_x}q^*_{x,t}} = min\left\{ 1 - {}_{n_x}q^*_{x,t}, \frac{n_x r_{m^*(x,t)}}{\left(1+\left(n_x - {}_n a_x\right)m(x,t)\right)^2} \right\}$$

Ölüm olasılıkları bulanıklaştırıldıktan sonra ise Eş. (5.1) kullanılarak beklenen yaşam süresi her bir yaş grubu için hesap edilecektir. Aşağıda doğumda beklenen yaşam süresi bulunmuştur:

$$e_0 = \frac{{}_1L_0 + {}_4L_1 + {}_5L_5 + \ldots + {}_5L_{105} + L_{110^+}}{l_0}$$

$$= \frac{\left({}_1a_0\, l_0 + {}_1a_0\, l_1\right) + \left({}_4a_1\, l_1 + {}_4a_1\, l_5\right) + \left({}_5a_5\, l_5 + {}_5a_5\, l_{10}\right) + \ldots + \left({}_5a_{105}\, l_{105} + {}_5a_{105}\, l_{110^+}\right) + \frac{l_{110^+}}{m_{110^+}}}{l_0}$$

$$= \left({}_1a_0 + {}_1a_0\left(1 - {}_1q_0\right)\right) +$$
$$\left({}_4a_1\left(1 - {}_1q_0\right) + {}_4a_1\left(1 - {}_1q_0\right)\left(1 - {}_4q_1\right)\right) +$$
$$\left({}_5a_5\left(1 - {}_1q_0\right)\left(1 - {}_4q_1\right) + {}_5a_5\left(1 - {}_1q_0\right)\left(1 - {}_4q_1\right)\left(1 - {}_5q_5\right)\right) +$$
$$\ldots +$$
$$\left({}_5a_{105}\left(1 - {}_1q_0\right)\left(1 - {}_4q_1\right)\ldots\left(1 - {}_5q_{100}\right) + {}_5a_{105}\left(1 - {}_1q_0\right)\left(1 - {}_4q_1\right)\ldots\left(1 - {}_5q_{105}\right)\right) + 0$$

$$= \left({}_1a_0 + {}_1a_0\left(1 - {}_1q_0\right)\right) +$$
$$\left(1 - {}_1q_0\right)\left[{}_4a_1 + \left(4 - {}_4a_1\right)\left(1 - {}_4q_1\right)\right] +$$
$$\left(1 - {}_1q_0\right)\left(1 - {}_4q_1\right)\left[{}_5a_5 + \left(5 - {}_5a_5\right)\left(1 - {}_5q_5\right)\right] +$$
$$\ldots +$$
$$\left(1 - {}_1q_0\right)\left(1 - {}_4q_1\right)\ldots\left(1 - {}_5q_{100}\right)\left[{}_5a_{105} + \left(5 - {}_5a_5\right)\left(1 - {}_5q_{105}\right)\right].$$

Beklenen yaşam süresi için genel bir formülasyon, t takvim yılı da göz önünde bulundurularak

$$e_x = \sum_{i \geq x} \prod_{x \leq j < i} \left(1 - {}_{n_j}q_{j,t}\right)\left[{}_{n_i}a_i + \left(n_i - {}_{n_i}a_i\right)\left(1 - {}_{n_i}q_{i,t}\right)\right] \qquad (5.5)$$

eşitliği ile ifade edilmektedir. Burada Eş. (5.5) üçgensel bulanık beklenen yaşam süresinin merkezini oluşturmaktadır. Üçgensel bulanık beklenen yaşam süresinin genişliklerinin bulunması için aynı ölüm olasılıklarında olduğu gibi Eş. (5.5) bir fonksiyon olarak düşünülecek ve birinci dereceden türevi alınacaktır. Türevi alınan beklenen yaşam fonksiyonu,

$$\frac{\partial e_{x,t}}{\partial\, {}_{n_i}q_{i,t}} = (-1)\sum_{i \geq x}\left\{\prod_{x \leq j < i}\left(1 - {}_{n_j}q_{j,t}\right)\left(n_i - {}_{n_i}a_i\right) + \sum_{\substack{k > i \\ j \neq i}} \prod_{x \leq j < k}\left(1 - {}_{n_j}q_{j,t}\right)\left(\left[{}_{n_k}a_k + \left(n_k - {}_{n_k}a_k\right)\left(1 - {}_{n_k}q_{k,t}\right)\right]\right)\right\}$$

biçimindedir. Beklenen yaşam süresi fonksiyonunun ölüm olasılığına göre birinci türevinin negatif olması beklenen bir sonuçtur. Bu sonuç ölüm olasılığı arttıkça beklenen yaşam süresinin kısaldığı anlamına gelmektedir. Dolayısıyla üçgensel bulanık yaşam süresinin sol (sağ) genişliği bulunurken son alınan türev üçgensel bulanık ölüm

olasılığının sağ (sol) genişliği ile çarpılmaktadır. Bulanık beklenen yaşam süresinin merkezi, sol ve sağ genişlikleri sırasıyla:

$$e_x^* = \sum_{i \geq x} \prod_{x \leq j < i} \left(1 - {}_{n_j}q_{j,t}^*\right) \left[{}_{n_i}a_i + \left(n_i - {}_{n_i}a_i\right)\left(1 - {}_{n_i}q_{i,t}^*\right)\right] \qquad (5.6)$$

$$l_{e_{x,t}^*} = [\sum_{i \geq x} \{ \prod_{x \leq j < i} \left(1 - {}_{n_j}q_{j,t}^*\right)\left(n_i - {}_{n_i}a_i\right) + \\ + \sum_{\substack{k>i \\ j \neq i}} \prod_{x \leq j < k} \left(1 - {}_{n_j}q_{j,t}^*\right)\left({}_{n_k}a_k + \left(n_k - {}_{n_k}a_k\right)\left(1 - {}_{n_k}q^*{}_{k,t}\right)\right)] \, r_{{}_{n_i}q^*{}_{i,t}} \qquad (5.7)$$

$$r_{e_{x,t}^*} = [\sum_{i \geq x} \{ \prod_{x \leq j < i} \left(1 - {}_{n_j}q_{j,t}^*\right)\left(n_i - {}_{n_i}a_i\right) + \\ + \sum_{\substack{k>i \\ j \neq i}} \prod_{x \leq j < k} \left(1 - {}_{n_j}q_{j,t}^*\right)\left({}_{n_k}a_k + \left(n_k - {}_{n_k}a_k\right)\left(1 - {}_{n_k}q^*{}_{k,t}\right)\right)] \, l_{{}_{n_i}q^*{}_{i,t}} \qquad (5.8)$$

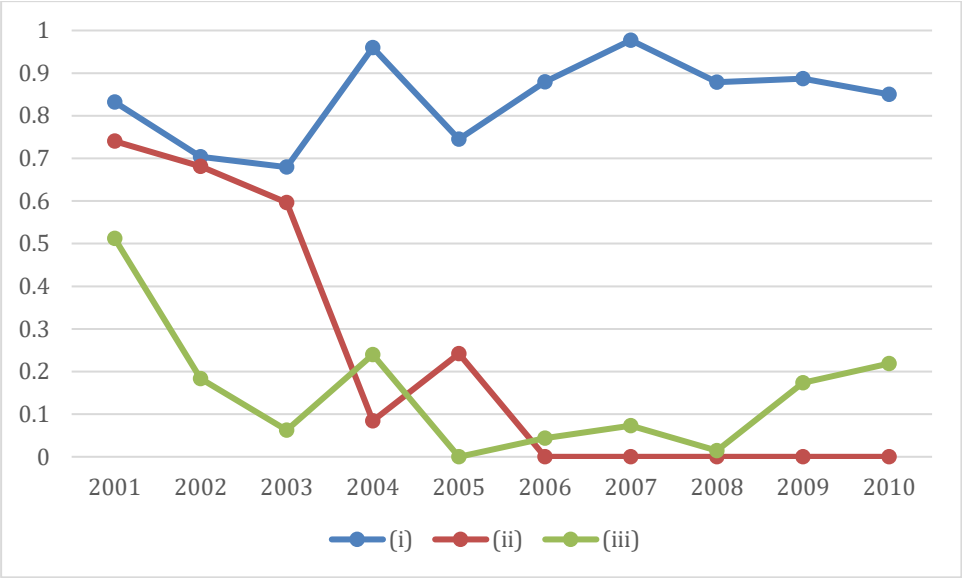
biçimindedir. Eş. (5.6-5.8), yardımıyla $E\left(\tilde{e}_{x,t}^*\right)$, $\widetilde{\tilde{e}_{x,t}^{*,0,05}}$ ve $\widetilde{\tilde{e}_{x,t}^{*,0,95}}$değerleri hesaplanmıştır. Ayrıca k_t 'nin güven aralığı $\widetilde{k_t^{*,\varepsilon}} = \left[k_t^{*,\frac{\varepsilon}{2}}, k_t^{*,1-\frac{\varepsilon}{2}}\right]$ olacak şekilde alındığında, $\widetilde{\tilde{e}_{x,t}^{*,\varepsilon}} = \left[e_{x,t}^{*,\frac{\varepsilon}{2}}, e_{x,t}^{*,1-\frac{\varepsilon}{2}}\right]$ elde edilmektedir. Genel olarak $b_x^* > 0$ iken $k_t^{*,\frac{\varepsilon}{2}}$, $e_{x,t}^{*,1-\frac{\varepsilon}{2}}$'yi belirlerken; $b_x^* < 0$ iken ise $k_t^{*,1-\frac{\varepsilon}{2}}$, $e_{x,t}^{*,\frac{\varepsilon}{2}}$ ' yi belirlemektedir.

Çizelge 5.4. Doğumda beklenen bulanık yaşam sürelerinin ve bulanık yaşam güven aralıklarının kestirimleri.

	$E\left(\tilde{e}^{*}_{[0,1),t}\right)$			$\tilde{e}^{*,0,05}_{[0,1),t}$			$\tilde{e}^{*,0,95}_{[0,1),t}$		
Yıl	Merkez	Sol Genişlik	Sağ Genişlik	Merkez	Sol Genişlik	Sağ Genişlik	Merkez	Sol Genişlik	Sağ Genişlik
2001	77,0834	0,7935	0,6715	76,7773	0,7756	0,6650	77,3452	0,8099	0,6773
2002	77,2581	0,8042	0,6753	76,8078	0,7774	0,6657	77,7003	0,8332	0,6855
2003	77,4313	0,8152	0,6792	76,9005	0,7828	0,6676	77,9688	0,8518	0,6920
2004	77,6031	0,8264	0,6831	76,9577	0,7861	0,6688	78,2324	0,8709	0,6986
2005	77,7734	0,8379	0,6871	77,0515	0,7917	0,6708	78,4567	0,8878	0,7045
2006	77,9422	0,8497	0,6912	77,1413	0,7972	0,6727	78,7079	0,9075	0,7112
2007	78,1096	0,8616	0,6954	77,2002	0,8008	0,6740	78,9495	0,9273	0,7180
2008	78,2757	0,8738	0,6996	77,3038	0,8073	0,6763	79,0963	0,9396	0,7221
2009	78,4403	0,8862	0,7039	77,4435	0,8162	0,6794	79,3118	0,9583	0,7285
2010	78,6036	0,8989	0,7083	77,5872	0,8256	0,6828	79,4701	0,9724	0,7332

Çizelge 5.4'te yalnızca merkez değerleri göz önünde bulundurulursa LC modelinin kestirimleri elde edilmektedir. Örneğin, $e^{*}{}_{(0,1],2002}$ (2002 yılı için LC modeline göre doğumda beklenen yaşam süresi) yaklaşık 77,26 yıl olup, k_t'nin %90 güven aralığı baz alındığında ise doğumda beklenen yaşam süresi [76.81,77.70] arasında değişmektedir. $e^{*}{}_{(0,1],2002}$, ÜBS olarak (77.2581,0.8042,0.6753)şeklinde ifade edilir ve bu ÜBS'nin %90 güven düzeyinde alt ve üst sınırları yine birer üçgensel bulanık sayı olup sırasıyla (76.8078,0.7773,0.6657), (77.7003,0.8332,0.6855)gibi ifade edilmektedir.

Şekil 5.9 ile 2001-2010 yılları arasında, doğumda beklenen bulanık yaşam sürelerinin üyelik fonksiyonları olan $\mu_{E\left(\tilde{e}^{*}_{[0,1),t}\right)}\left(e_{[0,1),t}\right)$, $\mu_{\tilde{e}^{*,0,05}_{[0,1),t}}\left(e_{[0,1),t}\right)$ ve $\mu_{\tilde{e}^{*,0,95}_{[0,1),t}}\left(e_{[0,1),t}\right)$ gösterilmektedir. Burada üyelik fonksiyonları gerçekte gözlenen değerlerin bulanık değerlere olan üyeliklerini derecelendirmektedir.



Şekil 5.9. 2001-2010 yıllarındaki doğumda beklenen yaşam süresinin üyelik dereceleri.

$$(i)\mu_{E\left(\tilde{e}^{*}_{[0,1),t}\right)}\left(e_{[0,1),t}\right)$$

$$(ii)\mu_{\tilde{e}^{*,0,05}_{[0,1),t}}\left(e_{[0,1),t}\right)$$

$$(ii)\mu_{\tilde{e}^{*,0,95}_{[0,1),t}}\left(e_{[0,1),t}\right)$$

Şekil 5.9 incelendiğinde gerçekleşen beklenen yaşam sürelerinin tüm yıllar için (i) seçeneği ile daha iyi ön görüldüğü anlaşılmaktadır. Dolayısıyla k_t 'nin noktasal kestiriminden elde edilen bulanık beklenen yaşam projeksiyonu, k_t 'nin %90 güven aralığı alınarak elde edilen ve sınırları %5 ve %95 güven düzeyinde olan bulanık beklenen yaşam projeksiyonundan daha iyi performans göstermektedir. Ayrıca $\mu_{E\left(\tilde{e}^{*}_{[0,1),t}\right)}\left(e_{[0,1),t}\right)$ üyelik değerlerinin tüm yıllar için 0,7'den daha yüksek olması modelin performansının yüksek olduğunun bir göstergesidir. Dolayısıyla $e_{[0,1),t}$, $E\left(\tilde{e}^{*}_{[0,1),t}\right)$ tarafından oldukça iyi kestirilmiştir. Uzun ömürlülük riskinin olduğu ülkelerde (iii) seçeneğinin daha iyi performans göstermesi beklenebilir. Aksine yaşam süresinin gelecekte daha düşük olması bekleniyorsa (ii) seçeneği daha iyi performans verecektir.

Öte yandan Aktüerya Bilimlerinde önem arz eden bir diğer yaş grubu ise emekliliğin gerçekleştiği 65 yaşı içeren yaş grubu [65,69) olmaktadır. Çizelge 5.5 ile 2001-2010 yılları için emeklilik sonrasında beklenen bulanık yaşam süreleri $E\left(\tilde{e}^{*}_{[65,69),t}\right)$ ve bulanık güven aralığı $\widetilde{\tilde{e}^{*,0,1}_{[65,69),t}}$= $[\tilde{e}^{*,0,05}_{[65,69),t}, \tilde{e}^{*,0,95}_{[65,69),t}]$ gösterilmektedir.

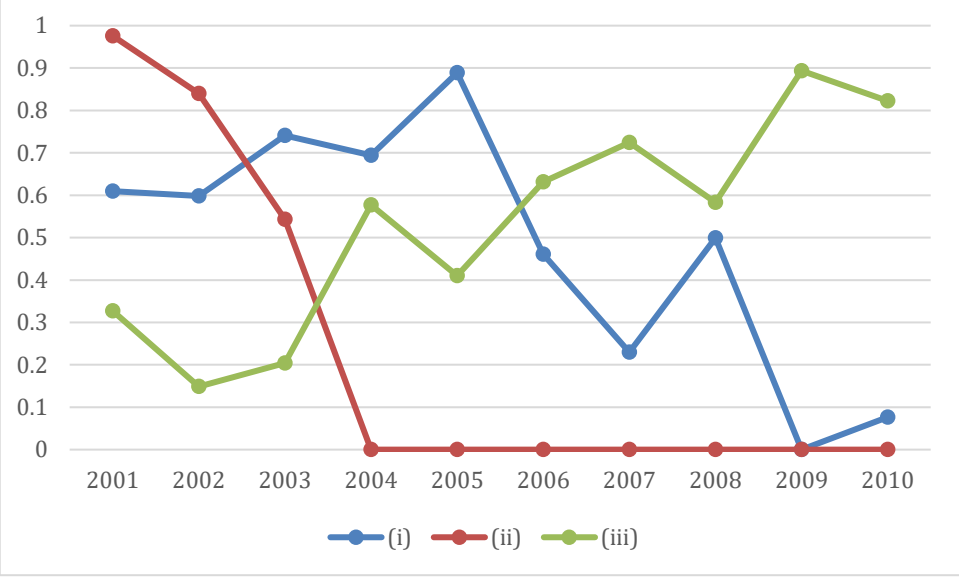
Çizelge 5.5. Emeklilikte beklenen bulanık yaşam sürelerinin ve bulanık yaşam güven aralıklarının kestirimleri.

	$E(\tilde{e}^{*}_{[65,69),t})$			$\tilde{e}^{*,0,05}_{[65,69),t}$			$\tilde{e}^{*,0,95}_{[65,69),t}$		
Yıl	Merkez	Sol Genişlik	Sağ Genişlik	Merkez	Sol Genişlik	Sağ Genişlik	Merkez	Sol Genişlik	Sağ Genişlik
2001	18,0075	0,4285	0,3486	17,8498	0,4041	0,3406	18,1434	0,4508	0,3561
2002	18,0981	0,4431	0,3534	17,8654	0,4065	0,3414	18,3302	0,4819	0,3662
2003	18,1886	0,4578	0,3583	17,9129	0,4139	0,3438	18,4730	0,5064	0,3742
2004	18,2789	0,4729	0,3632	17,9424	0,4185	0,3453	18,6146	0,5313	0,3823
2005	18,3690	0,4881	0,3682	17,9908	0,4262	0,3479	18,7361	0,5532	0,3894
2006	18,4589	0,5035	0,3732	18,0373	0,4336	0,3503	18,8734	0,5785	0,3976
2007	18,5486	0,5192	0,3783	18,0678	0,4385	0,3519	19,0066	0,6036	0,4057
2008	18,6381	0,5350	0,3834	18,1218	0,4473	0,3548	19,0880	0,6192	0,4107
2009	18,7273	0,5511	0,3886	18,1949	0,4592	0,3587	19,2083	0,6426	0,4182
2010	18,8164	0,5674	0,3939	18,2705	0,4718	0,3628	19,2973	0,6602	0,4238

Şekil 5.10 ile 2001-2010 yılları içinde, emeklilikte beklenen bulanık yaşam sürelerinin üyelik fonksiyonları olan

$$\mu_{E(\tilde{e}^{*}_{[65,69),t})}(e_{[65,69),t}),\ \mu_{\tilde{e}^{*,0,05}_{[65,69),t}}(e_{[65,69),t}),\ \mu_{\tilde{e}^{*,0,95}_{[65,69),t}}(e_{[65,69),t})$$

verilmiştir.



Şekil 5.10. 2001-2010 yılları arasında emeklilikte beklenen bulanık yaşam sürelerinin üyelik dereceleri.

$$(i)\mu_{E\left(\tilde{e}^{*}_{[65,69),t}\right)}\left(e_{[65,69),t}\right)$$

$$(ii)\mu_{\tilde{e}^{*,0,05}_{[65,69),t}}\left(e_{[65,69),t}\right)$$

$$(ii)\mu_{\tilde{e}^{*,0,95}_{[65,69),t}}\left(e_{[65,69),t}\right)$$

Şekil 5.10 ile emeklilikte gerçekleşen beklenen yaşam süreleri, $e_{[65,69),t}$ değerinin, 2002 yılının ortalarına kadar $\tilde{e}^{*,0,05}_{[65,69),t}$, 2002 yılı ortasından 2006 yılına kadar $E\left(\tilde{e}^{*}_{[65,69),t}\right)$ve sonraki yıllar için $\tilde{e}^{*,0,95}_{[65,69),t}$ tarafından daha iyi kestirildiği görülmektedir. Ayrıca $\tilde{e}^{*,0,05}_{[65,69),t}$'nin 2004 yılından sonra gözlenen yaşam sürelerini hiç içermediği görülmektedir. $E\left(\tilde{e}^{*}_{[65,69),t}\right)$ ise 2009 yılındaki gözlenen yaşam süresini içermemekte ve 2007, 2009 ve 2010 yılları için üyelik dereceleri düşük değerlerde seyretmektedir. Bulanık beklenen yaşam süreleri EK 2'de verilmektedir.

6. LC MODELİ İLE BULANIK-RASTGELE LC MODELİNİN KARŞILAŞTIRILMASI

Bu bölümde klasik LC modeli ile önerilen model olan BRLC modelinin gelecekteki değerleri kestirme kapasitesinin anlaşılması adına, öngörülen süre olan 10 yıl için karşılaştırılmaları yapılmıştır. BRLC modelinde merkez değerleri klasik LC modeli ile aynı olduğundan iki modelin karşılaştırılması iki farklı şekilde gerçekleştirilmiştir.

a) İlk olarak BRLC değerlerine sentroid (ağırlık merkezi) yöntemi ile durulaştırma işlemi uygulanmıştır. Bahsi geçen yöntem ilk kez Sugeno tarafından 1985 yılında geliştirilmiştir. Bu yöntem ile bulanık aralığı temsil eden bir z noktası,

$$z^* = \frac{\int \mu(z) z.\, dz}{\int \mu(z).\, dz} \tag{6.1}$$

eşitliği ile bulunmaktadır [10]. Son eşitlik yardımıyla her yaş ve yıl için noktasal değerler elde edildikten sonra, kök ortalama kare hata (RMSE) ve mutlak ortalama hata (MAE) metrikleri kullanılarak LC modeli ile karşılaştırmalar, yıllar baz alınarak yapılmıştır.

b) İkinci karşılaştırma ise güven aralıkları baz alınarak gerçekleştirilmiştir. Karşılaştırmalar hem merkezi ölüm hızları hem de beklenen yaşam süreleri üzerinden yürütülmüştür. Önerilen yöntemin doğruluğu, beklenen yaşam sürelerinin veya merkezi ölüm hızlarının kestirilme oranlarının doğruluğuna, güven aralıkları yardımıyla bakılarak belirlenmiştir. Bu karşılaştırmada aşağıdaki bilgiler dikkate alınmalıdır:

   I. Klasik LC modeli yalnızca k_t 'nin belirsizliğini göz önünde bulundurmaktadır. Bu uygulamada kullanılan önem düzeyi $\varepsilon = 0{,}1$ olup %90 güven düzeyinde aralıklar için karşılaştırma yapılmıştır.

   II. BRLC modelinde oluşturulan güven aralıklarının sınırları da bulanık sayılardan oluşmakta ve sırasıyla alt ve üst sınırların önem düzeyleri $\frac{\varepsilon}{2} = 0{,}05$ ve $1 - \frac{\varepsilon}{2} = 0{,}95$ olmaktadır. Bu iki güven aralığını sınır kabul eden bulanık güven aralığı, $C(.)$, yani dış bükey örtü yardımıyla sıradan

güven aralığına dönüştürülecektir. Bir dış bükey örtü bir kümeyi kapsayan en küçük dış bükey küme anlamına gelmektedir. Herhangi bir kümenin dış bükey örtüsü o kümenin tüm elemanlarını içermektedir veya kümenin elemanları bu dış bükey örtünün sınırında yer almaktadır [54]. Sistem basit bir şekilde, $m(x,t)$ve $e_{x,t}$ için sırasıyla $1-\varepsilon = 1-0{,}1$ güven düzeyinde aşağıdaki gibidir [28]:

$$C\left(e_I\left(\tilde{m}_{x,t}^{*,0,05}\right) \cup e_I\left(\tilde{m}_{x,t}^{*,0,95}\right)\right)$$

$$C\left(e_I\left(\tilde{e}_{x,t}^{*,0,05}\right) \cup e_I\left(\tilde{e}_{x,t}^{*,0,95}\right)\right).$$

Örneğin, 2004 yılında [1,4) yaş grubu için,

$$\tilde{m}^{*,\%5}([1,4),2004)=(0.00028,0.00003,0.00004)$$
$$\tilde{m}^{*,\%95}([1,4),2004)=(0.00035,0.00003,0.00005)$$

değerlerinin geçerli olduğu Çizelge 5.3 ile verilmişti. Burada inşa edilen standart güven aralığı

$$e_I\left(\tilde{m}^{*,\%5}([1,4),2004)\right)=[0.00025,0.00031]$$
$$e_I\left(\tilde{m}^{*,\%95}([1,4),2004)\right)=[0.00032,0.00040]$$
$$C([0.00025,0.00031]\cup[0.00032,0.00040])=[0.00025,0.00040]$$

şeklindedir.

6.1 Durulaştırma Yöntemi ile Noktasal Değer Karşılaştırmaları

Üçgensel bulanık merkezi ölüm hızlarının üyelik fonksiyonu,

$$\mu_{\tilde{m}^*(x,t)}\left(m(x,t)\right) = \begin{cases} 1+\dfrac{m(x,t)-m^*(x,t)}{l_{m^*(x,t)}}, & m^*(x,t)-l_{m^*(x,t)} \le m(x,t) \le m^*(x,t) \\ 1+\dfrac{m^*(x,t)-m(x,t)}{r_{m^*(x,t)}}, & m^*(x,t) \le m(x,t) \le m^*(x,t)+r_{m^*(x,t)} \end{cases}$$

eşitliği ile ifade edilmektedir. Örneğin, 2004 yılı ve [0,1) yaş aralığı için tahmin edilen üçgensel bulanık merkezi ölüm hızı Çizelge 5.3'te $\tilde{m}^*([0,1),2004) = (0.00613,0.00081,0.00699)$ şeklinde elde edilmiştir. İlgili yaş grubu ve yıl için bulanık merkezi ölüm hızının üyelik fonksiyonu,

$$\mu_{\tilde{m}^*([0,1),2004)}\big(m([0,1),2004)\big)$$
$$= \begin{cases} 1 + \dfrac{m([0,1),2004) - 0.00613}{0.00081}, & 0.00613 - 0.00081 \le m([0,1),2004) \le 0.00613 \\ 1 + \dfrac{0.00613 - m([0,1),2004)}{0.00699}, & 0.00613 \le m([0,1),2004) \le 0.00613 + 0.00699 \end{cases}$$

gibi olmaktadır. Yazım açısından kolaylık olması için $m([0,1),2004) = z$ iken üyelik fonksiyonu düzenlendiğinde,

$$\mu(z) = \begin{cases} 1 + \dfrac{z - 0.00613}{0.00081}, & 0.00532 \le z \le 0.00613 \\ 1 + \dfrac{0.00613 - z}{0.00699}, & 0.00613 \le z \le 0.00663 \end{cases}$$

Biçiminde ifade edilebilir. Eş. (6.1) yardımıyla $\tilde{m}^*([0,1),2004) = (0.00613,0.00081,0.00699)$ bulanık sayısının durulaştırılmış değeri,

$$z^* = \frac{\int_{0.00532}^{0.00613} \left(1 + \frac{z - 0.00613}{0.00081}\right) z dz \; + \int_{0.00613}^{0.00663} \left(1 + \frac{0.00613 - z}{0.00699}\right) z dz}{\int_{0.00532}^{0.00613} \left(1 + \frac{z - 0.00613}{0.00081}\right) dz \; + \int_{0.00613}^{0.00663} \left(1 + \frac{0.00613 - z}{0.00699}\right) dz}$$

$$= 0.00638$$

gibi bulunmaktadır. Durulaştırılmış merkezi ölüm hızları EK 3 ile durulaştırılmış beklenen yaşam süreleri EK 4 ile verilmektedir.

2004 yılı ve [0,1) yaş grubu için gözlenen değer ise 0,00698'dir. Bu yöntem ile yıllar bazında, LC modeli ile elde edilen merkezi ölüm hızları ve bulanık modelin durulaştırılmasıyla elde edilen merkezi ölüm hızları, RMSE ve MAE metrikleri

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_T \left(m^*(x,t) - z^*(x,t)\right)^2}{T}}$$

$$MAE = \frac{\sum_T |m^*(x,t) - z^*(x,t)|}{T}$$

ile ifade edilmek üzere, bu metrikler kullanılarak karşılaştırılmıştır.

Çizelge 6.1. Merkezi ölüm hızı tahminlerine ilişkin RMSE ve MAE değerleri.

Yıllar	RMSE_LC	RMSE_z	MAE_LC	MAE_z	Yıllar
2001	0,015084	0,008087	0,007154	0,003867	**2001**
2002	0,017438	0,010255	0,008298	0,004893	**2002**
2003	0,018882	0,011549	0,008826	0,005334	**2003**
2004	0,011044	0,003685	0,005243	0,001931	**2004**
2005	0,016478	0,008826	0,007717	0,004228	**2005**
2006	0,012067	0,004468	0,005754	0,002386	**2006**
2007	0,009931	0,002745	0,004809	0,001646	**2007**
2008	0,014251	0,006303	0,006689	0,003153	**2008**
2009	0,004676	0,0052	0,002343	0,002999	**2009**
2010	0,007541	0,003056	0,003714	0,001775	**2010**
Toplam	**0,127392**	**0,064174**	**0,060547**	**0,032212**	**Toplam**

Çizelge 6.1'de 2009 yılı hariç RMSE ve MAE değerlerinin LC modeli için daha yüksek olduğu görülmektedir. Dolayısıyla durulaştırılan merkezi ölüm hızları, gözlenen merkezi ölüm hızları değerlerini daha az hata ile yansıtmaktadır.

Çizelge 6.2. Beklenen yaşam süresi tahminlerine ilişkin RMSE ve MAE değerleri.

Yıllar	RMSE_LC	RMSE_z	MAE_LC	MAE_z	Yıllar
2001	0,191932	0,164011	0,179405	0,146239	**2001**
2002	0,240059	0,206588	0,229255	0,193367	**2002**
2003	0,232034	0,196213	0,219495	0,180844	**2003**
2004	0,111517	0,119159	0,086554	0,106649	**2004**
2005	0,165308	0,136762	0,144552	0,114687	**2005**
2006	0,132978	0,144013	0,101886	0,120174	**2006**
2007	0,167691	0,200588	0,1455	0,17635	**2007**
2008	0,133428	0,141894	0,098145	0,11953	**2008**
2009	0,217653	0,265205	0,185387	0,225622	**2009**
2010	0,208491	0,256309	0,186585	0,227531	**2010**
Toplam	**1,801089**	**1,830743**	**1,576765**	**1,610994**	**Toplam**

Çizelge 6.2'de beklenen yaşam sürelerinin LC modeli ile daha iyi tahmin edildiği görülmektedir. Öngörülen 10 yıl içerisinde hem RMSE hem de MAE metrikleri için 6 yıl LC modeli ve kalan 4 yıl ise durulaştırılmış modelin tahminleri daha iyi yaptığı gözlemlenmektedir. Merkezi ölüm hızları tahminlerinde durulaştırılmış model daha iyi iken, beklenen yaşam süresi tahminlerinde neredeyse iki model denktir. Bu durumun sebebinin bulanık beklenen yaşam süresi hesaplanırken birden fazla kez bulanık yaklaşım ile genişliklerin belirlenmesi olduğu düşünülmektedir. Önceki bölümlerde ilk olarak merkezi ölüm hızları bulanıklaştırılmış, sonrasında merkezi ölüm hızlarından yararlanılarak ölüm olasılıkları bulanıklaştırılmıştı. Son olarak ise bulanık ölüm olasılıklarından yararlanılarak beklenen yaşam süresi bulanık olarak elde edilmişti. Dolayısıyla merkezi ölüm hızları minimum bulanıklık kriteri yardımıyla bulanık hale getirilirken, beklenen yaşam süresileri bulanık işlemler (yaklaşım) yardımıyla, genişlikler elde edilerek bulanıklaştırılmaktadır.

6.2 Güven Aralıkları ile Yapılan Karşılaştırmalar

Aşağıda 2001-2010 yılları arasında gözlenen merkezi ölüm hızlarının, klasik LC modelinin %90 güven düzeyinde oluşturulan güven aralıklarının ve BRLC modelinin dış bükey fonksiyonu yardımıyla oluşturulan %90 güven düzeyindeki güven aralıklarının, içerisinde bulunma oranları Çizelge 6.3 ile verilmiştir.

Çizelge 6.3. Merkezi ölüm hızları için başarılı kestirimlerinin ortalama oranları.

Yıllar	LC	BRLC
2001	0,291667	0,875
2002	0,416667	0,791667
2003	0,5	0,791667
2004	0,416667	0,958333
2005	0,416667	0,916667
2006	0,375	0,916667
2007	0,416667	1
2008	0,333333	0,958333
2009	0,458333	0,916667
2010	0,416667	0,958333

Çizelge 6.3'te BRLC yöntemi ile elde edilen güven aralıklarının, gözlenen merkezi ölüm hızlarını ortalama içerme oranının, LC modeline göre her yıl için daha yüksek olduğu görülmektedir.

2001-2010 yılları arasında gerçekleşen beklenen yaşam sürelerinin, klasik LC modeli için %90 güven düzeyinde oluşturulan güven aralıklarının ve BRLC modelinin %90 güven düzeyinde, dış bükey fonksiyonu yardımıyla oluşturulan güven aralıklarının, içerisinde ortalama olarak bulunma oranları Çizelge 6.4 ile verilmiştir.

Çizelge 6.4. Beklenen yaşam süreleri için başarılı kestirimlerinin ortalama oranları.

Yıllar	**LC**	**BRLC**
2001	0,5833	0,875
2002	0,625	0,7917
2003	0,6667	0,8333
2004	0,75	0,9167
2005	0,7083	0,875
2006	0,75	0,875
2007	0,7917	0,9167
2008	0,75	0,875
2009	0,875	0,9583
2010	0,7917	0,9167

Çizelge 6.4'te BRLC yöntemi ile elde edilen güven aralıklarının, gerçekleşen beklenen yaşam sürelerine ait değerleri içerme oranının, LC modeline göre her yıl için daha yüksek olduğu görülmektedir.

7. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu çalışmada hayat sigortalarının fiyatlandırılmasında büyük öneme sahip olan ölüm hızları üçgensel bulanık sayılar yardımıyla öngörülmüştür. Literatürde hali hazırda ölüm hızlarını elde etmede en popüler yöntemlerden biri LC modelidir. Model parametrelerinin hesaplanmasında, tekil değer ayrışımı veya bu çalışmada kullanılan alternatif yöntem olan EKK yöntemi kullanılmaktadır. LC modelinde yakalanamayan yaşa özgü tarihsel etkilerin, stokastik bir hata teriminden kaynaklandığı varsayılmaktadır. Bu tez kapsamında belirsizliğin temel sebebinin bulanıklık da olabileceği düşünülmüş ve buna bağlı olarak yaşa bağlı parametreler Sanchez ve Puchades [28] tarafından önerilen yöntem ile üçgensel bulanık sayı olarak modellenmiştir. Zamana bağlı k_t parametresi bulanık bir sayı olarak modellenmemiş ve kesin bir sayı olarak alınmıştır.

Bu çalışmanın uygulama aşamasında ilk önce TÜİK'ten nüfus sayımları ve gerçekleşen ölümlere dair veriler alınmıştır. Türkiye'de yapılan nüfus sayımlarının 2007 yılından sonra Adrese Dayalı Nüfus Kayıt Sistemi ile yapılmasından dolayı, hali hazırdaki ölüm sayıları ve nüfus sayımlarını içeren veriler yaklaşık 10 yıllık çok kısa bir süreci kapsamaktadır. Ayrıca TÜİK'ten alınan daha önceki yıllara ait, yaşlara göre ölüm sayılarını ve nüfus sayılarını içeren verilerin eksik olması sebebiyle Türkiye verisi kullanılamamıştır.

Birçok ülkenin yaşam tablolarını bulunduran" http://www.mortality.org" sitesi aracılığı ile ABD için 1970-2000 yılları arasındaki merkezi ölüm hızları elde edilmiş ve BRLC modelinin uygulamasında kullanılmıştır. ARIMA zaman serileri yardımıyla zamana bağlı indeks k_t parametresi için 10 yıllık bir öngörü yapılmış ve 2001-2010 yıllarındaki ABD merkezi ölüm hızları baz alınarak modellerin performansları karşılaştırılmıştır.

Yaşa bağlı parametrelerin kullanılmasında üçgensel bulanık sayılardan yararlanılmıştır. Üyelik fonksiyonunun çekirdeğinin tek elemanlı olması, yani yalnızca tek bir gözlem değerinin üyeliğinin 1 olması, LC modelinde kullanılmaya uygun olduğunu göstermektedir. Buradan yola çıkılarak LC modeli ile elde edilen merkezi ölüm hızları, bulanık sayıların merkezi olarak alınmıştır. Üçgensel bulanık sayıların üyelik fonksiyonlarının sınırlarından yararlanılarak, k_t indeksinin işaretine göre değişen kısıtlar içeren ve bulanık merkezi ölüm hızları genişlikleri toplamını minimize eden amaç fonksiyonundan oluşan, doğrusal programlama problemi ile bulanık merkezi ölüm

hızlarının genişlikleri elde edilmiştir. Merkezi ölüm hızları bulanıklaştırıldıktan sonra ise Taylor genişlemesi yardımıyla ölüm olasılıkları bulanıklaştırılmıştır. Bulanıklaştırılan ölüm olasılıklarından ise beklenen yaşam süreleri elde edilmiş ve benzer şekilde beklenen yaşam süreleri de bulanıklaştırılmıştır.

Performans karşılaştırması yapılırken, LC modeli merkezi ölüm hızlarını noktasal kestirimler olarak içerdiği ve BRLC modelinde ise merkezi ölüm hızları aralık olarak hesaplandığından, sentroid durulaştırma yöntemi yardımıyla BRLC aralıklarını temsil eden bir sayı atanmıştır. Böylelikle BRLC modelinden elde edilen bulanık merkezi ölüm hızları, noktasal değerlere indirgenmiştir. İki modelin karşılaştırması için RMSE ve MAE hata metrikleri kullanılmıştır. Durulaştırılan bulanık ölüm hızlarının, LC modelinden daha düşük hata ile tahmin yaptığı sonucuna varılmıştır. Bulanık beklenen yaşam süreleri de yine sentroid yöntemi ile durulaştırılmıştır. Beklenen yaşam sürelerinin bulanıklaştırılması, bulanık yaklaşım yardımıyla yapıldığından, durulaştırma işleminden sonra yapılan karşılaştırmada, RMSE ve MAE metrikleri yardımıyla, LC yöntemine göre daha zayıf bir performans sergilediği görülmüştür.

Bir diğer karşılaştırma yöntemi ise bulanık merkezi ölüm hızlarına durulaştırma işlemi uygulanmadan, bulanık güven aralıklarının dış bükey fonksiyon yardımıyla standart güven aralığına çevrilmesidir. Öncelikle LC modelinde merkezi ölüm hızlarının güven aralığı içerisine giren gözlenen değerlerinin oranı, yıllar bazında bulunmuştur. Benzer şekilde kestirimleri doğru içerme oranı, BRLC modelinin standart güven aralığı için de yıllar bazında oluşturulmuştur. Gözlenen değerleri oransal olarak BRLC modelinin daha çok içerdiği görülmüştür.

Bu tez kapsamında üçgensel bulanık sayı olarak ifade edilen merkezi ölüm hızlarının, sentroid yöntemi ile durulaştırılmasıyla, LC yönteminden daha iyi performans sergilediği sonucuna ulaşılmıştır. Bu sonuç kullanılarak durulaştırılan merkezi ölüm hızlarından, ölüm olasılıkları elde edilebilmekte ve hayat anüiteleri primleri, hayat sigortaları tazminatları, rezervler hesaplanabilmektedir.

.

KAYNAKLAR

[1] E. Başer, Demografi, 2. Baskı, Gazi Yayınevi, **2013**.

[2] V. D. Preez, The Evolution of Actuarial Modelling in Life Insurance, https://www.actuartech.com/insights/the-evolution-of-actuarial-modelling-in-life-insurance **(Erişim Tarihi: 15 Ekim 2021)**.

[3] F. Yıldırım, Türkiye Ölümlülük Yapısının Lee-Carter ve Bulanık Lee-Carter ile Modellenmesi, Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, **2010**.

[4] R.D. Lee, L.R. Carter, Modeling and Forecasting U. S. Mortality, J. Am. Stat. Assoc. 87 **(1992)** 659-671.

[5] B. Kosko, Fuzzy Thinking: The New Science of Fuzzy Logic, Flamingo, **1993**.

[6] Ş. Ural, Çok Değerli Mantık, Felsefe Arkivi, 26 **(1987)**.

[7] M. Black, Vagueness. An Exercise in Logical Analysis, Philosophy Of Science. 4 **(1937)** 427-455.

[8] L.A. Zadeh, The Birth And Evolution Of Fuzzy Logic, International Journal of General System, 17 **(1990)** 95-105.

[9] K.M. White, Longevity Advances in High-Income Countries, Population and Development Review. 28 **(2002)** 59-76.

[10] T. Paksoy, N. Yapıcı Pehlivan, E. Özceylan, Bulanık Küme Teorisi, 1. Baskı, Nobel Yayıncılık, **2013**.

[11] B. Bolayır, A. Ergülen, Bulanık Mantık, Doğrusal Programlama ve Bulanık Doğrusal Programlama, 1. Baskı, Ekin Yayıncılık, **2019**.

[12] A.F. Shapiro, An Overview Of Insurance Uses Of Fuzzy Logic, Computational Intelligence in Economics and Finance, 2 **(2007)** 26-61.

[13] J. Lemaire, Fuzzy Insurance, ASTIN Bulletin: The Journal of The IAA, 20 **(1990)** 33–55.

[14] K. Ostaszewski, An Investigation Into Possible Applications of Fuzzy Set Methods in Actuarial Science, Society of Actuaries,1. Baskı, **1993**.

[15] V.R. Young, Insurance Rate Changing : A Fuzzy Logic Approach, Journal of Risk and Insurance, 63 **(1996)** 461–484.

[16] D. Cummins, R.A.Derrig, Fuzzy Financial Pricing of Property-Liability Insurance, North American Actuarial Journal, 1 **(1997)** 21–40.

[17] P.J. Horgby, Risk Classification by Fuzzy Inference, The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory, 23 **(1998)** 63–82.

[18] J. Sanchez, A.T. Gomez, A. Risk, Applications of Fuzzy Regression in Actuarial Analysis, The Journal of Risk and Insurance , 70 **(2003)** 665–699.

[19] B. Kıyak, Stokastik Yaşam Süresi için Bulanık Hayat Sigortası, Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, **2005**.

[20] M.C. Koissi, A.F. Shapiro, Fuzzy Formulation of the Lee-Carter Model for Mortality Forecasting, Insurance, Mathematics and Economics, 39 **(2006)** 287–309.

[21] J. Sánchez, Claim Reserving with Fuzzy Regression and Taylor's Geometric Separation Method., Insurance, Mathematics and Economics, 40 **(2007)** 145–163.

[22] J.G. Gao, X.Y. Zhao, M.Q. Zhao, The Life Insurance Model Under Fuzzy Rates of Interest, Fuzzy Information and Engineering, 2 **(2009)** 1629–1637.

[23] F. Başer, T.E. Dalkılıç, T.E.; K.Ş. Kula; A. Apaydın, An Approach of Adaptive Network Based Fuzzy Inference System to Risk Classification in Life Insurance, Operations Research Proceedings, **(2011)** 27–32.

[24] A. Szymański, A. Rossa, Improvement of Fuzzy Mortality Models by Means of Algebraic Methods, Statistics. 18 **(2017)** 701–724

[25] L. Anzilli, G. Facchinetti, New Definitions of Mean Value and Variance of Fuzzy Numbers: An Application to The Pricing of Life Insurance Policies and Real Options, International Journal of Approximate Reasoning, 91 **(2017)** 96–113.

[26] D. Wang, A Net Premium Model for Life Insurance Under a Sort of Generalized Uncertain Interest Rates, International Conference Series on Soft Methods in Probability and Statistics, **(2019)** 224–232.

[27] A. Szymański, A. Rossa, The Modified Fuzzy Mortality Model Based On The Algebra of Ordered Fuzzy Numbers, Biometrical Journal, 63.3, **(2021)**, 671-689.

[28] J. D. Andrés-Sánchez, L. Gonzalez-Vila Puchades, A Fuzzy-Random Extension of The Lee–Carter Mortality Prediction Model, International Journal Of Computational Intelligence Systems, 12 **(2019)** 775–794

[29] F. Girosi, G. King, Understanding the Lee-Carter Mortality Forecasting Method, Working paper, Harvard University, USA, **2007**.

[30] L. Safitri, S. Mardiyati, H. Rahim, Estimation Of Mortality Rate in Indonesia With Lee-Carter Model, AIP Conference Proceedings, 2023 **(2018)**.

[31] L.A. Zadeh, A Fuzzy-Set-Theoretic Interpretation of Linguistic Hedges, Journal of Cybernetics, 2 **(1972)** 4–34.

[32] A. Syropoulos, T. Grammenos, A Modern Introduction to Fuzzy Mathematics, John Wiley & Sons, **2020**.

[33] L.A. Zadeh, Fuzzy Sets, Information and Control, 8 **(1965)** 338–353.

[34] A. Kaur, J. Kacprzyk, A. Kumar, Fuzzy Transportation and Transshipment Problems, Springer International Publishing, **2020**.

[35] E. Ruspini, P. Bonissone, W. Pedrycz, Handbook of Fuzzy Computation, CRC Press, **2020**.

[36] T. Radecki, Level Fuzzy Sets, Cybernetics and System, 7 **(1977)** 189–198.

[37] N. Irmak, N. Demirtaş, Fuzzy Fibonacci and Fuzzy Lucas Numbers with Their Properties, Mathematical Sciences and Applications E-Notes, 7 **(2019)** 218–224.

[38] R. Fullér, Introduction to Neuro-Fuzzy Systems, Springer Science & Business Media, **2000**.

[39] M.Z. Ahmad, M.K. Hasan, A New Approach for Computing Zadeh's Extension Principle, Matematika: Malaysian Journal of Industrial and Applied Mathematics, **(2010)** 71–81.

[40] D. Dubois, H. Prade, Fuzzy Numbers: An Overview., Morgan Kaufmann Publishers, **1987**.

[41] G.B. Thomas, M.D. Weir, J.R. Hass, Thomas' Calculus, 14. baskı, Pearson, **2018**.

[42] M.P. Allen, Understanding Regression Analysis, Springer Science & Business Media, **2004**.

[43] J.D. Andrés-Sánchez, Fuzzy Regression Analysis: An Actuarial Perspective, Fuzzy Statistical Decision-Making, Springer, 175–201, **2016**

[44] H. Tanaka, Fuzzy Data Analysis by Possibilistic Linear Models, Fuzzy Sets and Systems. 24 **(1987)** 363–375.

[45] F. Chen, Y. Chen, J. Zhou, Y. Liu, Optimizing h Value for Fuzzy Linear Regression with Asymmetric Triangular Fuzzy Coefficients, Engineering Applications of Artificial Intelligence. 47 **(2016)** 16–24.

[46] H. Tanaka, J. Watada, Possibilistic Linear Systems and Their Application To The Linear Regression Model, Fuzzy Sets And Systems, 27 **(1988)** 275–289.

[47] X. Liu, Y. Chen, A Systematic Approach to Optimizing Value for Fuzzy Linear Regression with Symmetric Triangular Fuzzy Numbers, Mathematical Problems in Engineering, 6 **(2013)** 1-9

[48] H. Ishibuchi, M. Nii, Fuzzy Regression Using Asymmetric Fuzzy Coefficients And Fuzzified Neural Networks, Fuzzy Sets And Systems. 119 **(2001)** 273–290.

[49] R.R. Yager, Fuzzy Prediction Based on Regression Models, Information Sciences, 26 **(1982)** 45–63.

[50] J.R. Wilmoth, et al., Methods Protocol for the Human Mortality Database, University of California, Berkeley and Max Planck Institute for Demographic

Research, Rostock, URL: http://mortality.org [version 31/05/2007], 9 **(2007)** 10-11.

[51] R. Schoen, Calculating Life Tables by Estimating Chiang's a from Observed Rates, Demography, 15 **(1978)** 625–635.

[52] R.J. Hyndman, G. Athanasopoulos, Forecasting: Principles and Practice, OTexts, **2018**.

[53] R. Schoen, Modeling Multigroup Populations, Springer Science & Business Media, **2013**.

[54] R. Laurini, Geographic Knowledge Infrastructure: Applications to Territorial Intelligence and Smart Cities, Elsevier, **2017**.

EKLER

Ek 1. Bulanık Merkezi Ölüm Hızlarının Merkezleri

	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
0	0,006818	0,006581	0,006352	0,00613	0,005917	0,005711	0,005512	0,00532	0,005135	0,004956
1-4	0,000347	0,000336	0,000326	0,000316	0,000306	0,000297	0,000288	0,000279	0,00027	0,000262
5-9	0,000164	0,000159	0,000154	0,000149	0,000144	0,000139	0,000135	0,00013	0,000126	0,000122
10-14	0,000209	0,000204	0,0002	0,000195	0,000191	0,000187	0,000182	0,000178	0,000174	0,00017
15-19	0,000709	0,000698	0,000688	0,000677	0,000667	0,000656	0,000646	0,000636	0,000627	0,000617
20-24	0,000926	0,000912	0,000897	0,000883	0,000869	0,000855	0,000842	0,000828	0,000815	0,000802
25-29	0,001002	0,000989	0,000976	0,000964	0,000952	0,000939	0,000927	0,000915	0,000904	0,000892
30-34	0,00127	0,001259	0,001248	0,001237	0,001226	0,001215	0,001205	0,001194	0,001184	0,001174
35-39	0,001656	0,001638	0,001621	0,001604	0,001587	0,00157	0,001553	0,001537	0,001521	0,001504
40-44	0,002254	0,002221	0,002188	0,002156	0,002124	0,002092	0,002061	0,002031	0,002001	0,001971
45-49	0,00325	0,00319	0,00313	0,003072	0,003015	0,002959	0,002904	0,00285	0,002797	0,002745
50-54	0,004993	0,004899	0,004806	0,004715	0,004626	0,004538	0,004452	0,004368	0,004285	0,004204
55-59	0,007905	0,007766	0,007629	0,007495	0,007363	0,007233	0,007106	0,006981	0,006858	0,006737
60-64	0,012555	0,012362	0,012171	0,011983	0,011798	0,011616	0,011437	0,01126	0,011086	0,010915
65-69	0,019072	0,01881	0,018552	0,018298	0,018047	0,017799	0,017555	0,017314	0,017077	0,016842
70-74	0,029066	0,028668	0,028276	0,02789	0,027509	0,027132	0,026762	0,026396	0,026035	0,025679
75-79	0,043978	0,043414	0,042857	0,042307	0,041764	0,041228	0,040699	0,040176	0,039661	0,039152
80-84	0,073038	0,072314	0,071597	0,070888	0,070185	0,06949	0,068801	0,068119	0,067444	0,066776
85-89	0,117108	0,116125	0,115151	0,114185	0,113227	0,112277	0,111335	0,110401	0,109475	0,108556
90-94	0,188146	0,187095	0,18605	0,185011	0,183978	0,18295	0,181929	0,180913	0,179902	0,178897
95-99	0,286268	0,285428	0,28459	0,283754	0,282921	0,28209	0,281262	0,280436	0,279613	0,278792
100-104	0,411129	0,410701	0,410273	0,409846	0,409419	0,408993	0,408567	0,408142	0,407717	0,407292
105-109	0,550713	0,550885	0,551058	0,551231	0,551404	0,551576	0,551749	0,551922	0,552095	0,552268
110+	0,674524	0,675908	0,677294	0,678683	0,680075	0,681469	0,682867	0,684267	0,685671	0,687077

Ek 1a. Bulanık Merkezi Ölüm Hızlarının Sol Genişlikleri

	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
0	0,000897	0,000866	0,000836	0,000807	0,000779	0,000751	0,000725	0,0007	0,000676	0,000652
1-4	2,84E-05	2,82E-05	2,79E-05	2,77E-05	2,74E-05	2,71E-05	2,68E-05	2,66E-05	2,63E-05	2,6E-05
5-9	1,65E-05	1,6E-05	1,55E-05	1,5E-05	1,45E-05	1,4E-05	1,36E-05	1,31E-05	1,27E-05	1,23E-05
10-14	1,86E-05	1,94E-05	2,02E-05	2,09E-05	2,16E-05	2,22E-05	2,28E-05	2,34E-05	2,39E-05	2,44E-05
15-19	5,13E-05	5,06E-05	4,99E-05	4,92E-05	4,85E-05	4,79E-05	4,72E-05	4,65E-05	4,59E-05	4,53E-05
20-24	4,04E-05	4,01E-05	3,97E-05	3,94E-05	3,91E-05	3,87E-05	3,84E-05	3,81E-05	3,77E-05	3,74E-05
25-29	0,000143	0,000151	0,000159	0,000166	0,000174	0,000181	0,000188	0,000194	0,000201	0,000207
30-34	0,000188	0,000192	0,000197	0,000201	0,000205	0,000209	0,000213	0,000217	0,000221	0,000225
35-39	0,000199	0,000197	0,000195	0,000193	0,000191	0,000189	0,000187	0,000185	0,000183	0,000181
40-44	0,000165	0,000162	0,00016	0,000157	0,000155	0,000153	0,00015	0,000148	0,000146	0,000144
45-49	0,000186	0,000183	0,000179	0,000176	0,000173	0,00017	0,000166	0,000163	0,00016	0,000157
50-54	0,000199	0,000195	0,000191	0,000188	0,000184	0,000181	0,000177	0,000174	0,00017	0,000167
55-59	0,00035	0,000344	0,000338	0,000332	0,000326	0,00032	0,000314	0,000309	0,000303	0,000298
60-64	0,000413	0,000406	0,0004	0,000394	0,000388	0,000382	0,000376	0,00037	0,000364	0,000359
65-69	0,000639	0,00063	0,000622	0,000613	0,000605	0,000596	0,000588	0,00058	0,000572	0,000564
70-74	0,001029	0,001015	0,001001	0,000987	0,000974	0,00096	0,000947	0,000934	0,000922	0,000909
75-79	0,001572	0,001551	0,001532	0,001512	0,001493	0,001473	0,001454	0,001436	0,001417	0,001399
80-84	0,002635	0,002637	0,002639	0,00264	0,002641	0,002642	0,002643	0,002644	0,002644	0,002644
85-89	0,007691	0,007869	0,008044	0,008215	0,008383	0,008547	0,008708	0,008866	0,00902	0,009172
90-94	0,014173	0,014473	0,014771	0,015064	0,015354	0,01564	0,015922	0,0162	0,016475	0,016747
95-99	0,017859	0,01786	0,017861	0,017862	0,017862	0,017862	0,017862	0,017863	0,017862	0,017862
100-104	0,027776	0,027747	0,027718	0,027689	0,02766	0,027632	0,027603	0,027574	0,027545	0,027517
105-109	0,039324	0,039509	0,039694	0,039879	0,040064	0,04025	0,040435	0,040621	0,040807	0,040993
110+	0,061998	0,06351	0,065028	0,066552	0,068081	0,069617	0,071159	0,072707	0,074261	0,075821

Ek 1b. Bulanık Merkezi Ölüm Hızlarının Sağ Genişlikleri

	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
0	0,000559	0,000539	0,000521	0,000502	0,000485	0,000468	0,000452	0,000436	0,000421	0,000406
1-4	4,94E-05	4,85E-05	4,77E-05	4,68E-05	4,6E-05	4,52E-05	4,43E-05	4,35E-05	4,27E-05	4,19E-05
5-9	1,92E-05	1,85E-05	1,79E-05	1,74E-05	1,68E-05	1,63E-05	1,57E-05	1,52E-05	1,47E-05	1,43E-05
10-14	1,24E-05	1,25E-05	1,26E-05	1,26E-05	1,27E-05	1,27E-05	1,28E-05	1,28E-05	1,28E-05	1,29E-05
15-19	5,32E-05	5,24E-05	5,15E-05	5,08E-05	5E-05	4,92E-05	4,85E-05	4,77E-05	4,7E-05	4,63E-05
20-24	7,04E-05	6,94E-05	6,84E-05	6,74E-05	6,64E-05	6,55E-05	6,46E-05	6,37E-05	6,27E-05	6,19E-05
25-29	0,000147	0,00015	0,000153	0,000156	0,000159	0,000161	0,000164	0,000167	0,000169	0,000171
30-34	0,000206	0,000206	0,000205	0,000205	0,000204	0,000204	0,000203	0,000203	0,000202	0,000202
35-39	0,000236	0,000233	0,000231	0,000228	0,000226	0,000223	0,000221	0,000219	0,000216	0,000214
40-44	0,00021	0,000207	0,000204	0,000201	0,000198	0,000195	0,000192	0,000189	0,000186	0,000184
45-49	0,000207	0,000211	0,000215	0,000219	0,000222	0,000226	0,000229	0,000232	0,000235	0,000237
50-54	0,000269	0,000265	0,000261	0,000257	0,000253	0,000249	0,000245	0,000241	0,000237	0,000234
55-59	0,000527	0,000517	0,000508	0,000499	0,000491	0,000482	0,000474	0,000465	0,000457	0,000449
60-64	0,000635	0,000626	0,000616	0,000606	0,000597	0,000588	0,000579	0,00057	0,000561	0,000552
65-69	0,000907	0,000895	0,000882	0,00087	0,000858	0,000847	0,000835	0,000824	0,000812	0,000801
70-74	0,001188	0,001172	0,001156	0,00114	0,001124	0,001109	0,001094	0,001079	0,001064	0,00105
75-79	0,001574	0,001554	0,001534	0,001514	0,001495	0,001475	0,001456	0,001438	0,001419	0,001401
80-84	0,003546	0,003692	0,003836	0,003976	0,004113	0,004247	0,004378	0,004506	0,00463	0,004752
85-89	0,009234	0,009803	0,010362	0,01091	0,011449	0,011978	0,012498	0,013008	0,013508	0,013999
90-94	0,017175	0,018127	0,019068	0,019998	0,020917	0,021824	0,022722	0,023608	0,024484	0,025349
95-99	0,025876	0,02664	0,027398	0,028152	0,028901	0,029646	0,030386	0,031121	0,031852	0,032578
100-104	0,034723	0,035114	0,035505	0,035895	0,036284	0,036672	0,03706	0,037446	0,037832	0,038217
105-109	0,041147	0,042304	0,043461	0,044619	0,045778	0,046938	0,048098	0,049259	0,050421	0,051583
110+	0,033877	0,034897	0,03592	0,036948	0,03798	0,039016	0,040056	0,041101	0,042149	0,043201

Ek 2. Bulanık Beklenen Yaşam Sürelerinin Merkezleri

	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
0	77,08343	77,25813	77,43133	77,60307	77,77335	77,9422	78,10964	78,27568	78,44034	78,60364
1-4	76,60873	76,76627	76,92288	77,07854	77,23327	77,38706	77,53992	77,69186	77,84287	77,99296
5-9	72,7129	72,86746	73,02117	73,17402	73,32602	73,47715	73,62743	73,77686	73,92543	74,07315
10-14	67,77049	67,92332	68,07535	68,22656	68,37697	68,52656	68,67535	68,82332	68,97049	69,11684
15-19	62,83869	62,99015	63,14083	63,29073	63,43984	63,58817	63,73571	63,88247	64,02844	64,17362
20-24	58,05244	58,20114	58,34909	58,49629	58,64274	58,78843	58,93337	59,07755	59,22098	59,36365
25-29	53,31013	53,4554	53,59997	53,74382	53,88696	54,02939	54,1711	54,3121	54,45237	54,59193
30-34	48,56484	48,70756	48,84959	48,99093	49,13158	49,27154	49,41079	49,54936	49,68722	49,82438
35-39	43,85749	43,99857	44,13896	44,27867	44,41768	44,55601	44,69364	44,83057	44,96681	45,10235
40-44	39,20033	39,33893	39,47685	39,61409	39,75066	39,88653	40,02173	40,15624	40,29006	40,42319
45-49	34,61466	34,74867	34,88203	35,01476	35,14684	35,27828	35,40907	35,53922	35,66871	35,79755
50-54	30,13802	30,26438	30,3902	30,51547	30,64019	30,76436	30,88797	31,01102	31,13352	31,25545
55-59	25,83232	25,94849	26,06424	26,17956	26,29446	26,40892	26,52296	26,63656	26,74971	26,86243
60-64	21,76669	21,87061	21,97424	22,07757	22,18061	22,28334	22,38576	22,48787	22,58967	22,69115
65-69	18,00745	18,09814	18,18864	18,27894	18,36903	18,45892	18,54861	18,63807	18,72732	18,81636
70-74	14,55039	14,62772	14,70491	14,78197	14,8589	14,93568	15,01231	15,0888	15,16513	15,24131
75-79	11,42781	11,48924	11,55061	11,61192	11,67315	11,73432	11,79541	11,85643	11,91738	11,97824
80-84	8,617974	8,662358	8,706747	8,751139	8,795533	8,839927	8,884319	8,928708	8,973092	9,01747
85-89	6,344946	6,375427	6,405921	6,436425	6,466941	6,497465	6,527999	6,558541	6,58909	6,619644
90-94	4,546227	4,563133	4,580051	4,596983	4,613927	4,630884	4,647853	4,664834	4,681826	4,69883
95-99	3,265752	3,273055	3,280363	3,287676	3,294993	3,302315	3,309642	3,316973	3,32431	3,33165
100-104	2,392084	2,394175	2,396266	2,398357	2,400448	2,402539	2,40463	2,406721	2,408812	2,410903
105-109	1,807739	1,807132	1,806526	1,80592	1,805314	1,804708	1,804102	1,803496	1,802891	1,802286
110+	1,504191	1,50265	1,501112	1,499575	1,49804	1,496506	1,494974	1,493443	1,491914	1,490387

Ek 2a. Bulanık Beklenen Yaşam Sürelerinin Sol Genişlikleri

	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
0	0,793452	0,804204	0,815202	0,826443	0,837927	0,849651	0,861614	0,873813	0,886246	0,898912
1-4	0,755789	0,767834	0,780083	0,792536	0,805192	0,818051	0,831111	0,844372	0,857833	0,871493
5-9	0,741978	0,754243	0,76671	0,779379	0,79225	0,805322	0,818594	0,832065	0,845734	0,8596
10-14	0,735855	0,748333	0,761007	0,773877	0,786942	0,800201	0,813655	0,827303	0,841142	0,855173
15-19	0,734485	0,746917	0,759547	0,772376	0,785403	0,798628	0,81205	0,825668	0,83948	0,853487
20-24	0,721145	0,73379	0,746633	0,759672	0,772907	0,786339	0,799964	0,813784	0,827797	0,842001
25-29	0,705877	0,71874	0,731797	0,74505	0,758496	0,772136	0,785969	0,799993	0,814208	0,828612
30-34	0,673816	0,685769	0,69794	0,710329	0,722934	0,735754	0,748789	0,762037	0,775496	0,789166
35-39	0,625163	0,637219	0,649494	0,661989	0,674702	0,687633	0,70078	0,714142	0,727718	0,741505
40-44	0,582025	0,594464	0,607122	0,619999	0,633093	0,646404	0,65993	0,67367	0,687622	0,701785
45-49	0,549825	0,562654	0,575702	0,588967	0,602449	0,616146	0,630057	0,64418	0,658514	0,673058
50-54	0,524276	0,536411	0,548792	0,561418	0,574288	0,5874	0,600751	0,614341	0,628166	0,642224
55-59	0,496689	0,50944	0,522429	0,535656	0,549117	0,562813	0,576739	0,590895	0,605277	0,619885
60-64	0,461831	0,475377	0,489155	0,503162	0,517396	0,531857	0,54654	0,561445	0,576569	0,591909
65-69	0,428487	0,443055	0,457845	0,472854	0,488082	0,503525	0,519181	0,535048	0,551123	0,567402
70-74	0,392261	0,408444	0,424831	0,441422	0,458213	0,475201	0,492385	0,50976	0,527325	0,545077
75-79	0,368389	0,387015	0,405812	0,424777	0,443908	0,463202	0,482655	0,502265	0,522029	0,541943
80-84	0,358348	0,380084	0,401944	0,423925	0,446026	0,468243	0,490572	0,513012	0,535559	0,55821
85-89	0,323869	0,343448	0,363126	0,382903	0,402777	0,422747	0,442809	0,462962	0,483204	0,503533
90-94	0,384272	0,399337	0,414409	0,429493	0,444587	0,459691	0,474806	0,48993	0,505063	0,520206
95-99	0,266732	0,276218	0,285653	0,295048	0,304401	0,313712	0,322982	0,33221	0,341396	0,35054
100-104	0,179436	0,186899	0,194294	0,201668	0,209019	0,216348	0,223654	0,230937	0,238197	0,245433
105-109	0,131884	0,136207	0,140531	0,144857	0,149183	0,153511	0,15784	0,162171	0,166502	0,170834
110+	1E-07	1E-07	1E-07	1E-07	1E-07	1E-07	1E-07	1E-07	1E-07	1E-07

Ek 2b. Bulanık Beklenen Yaşam Sürelerinin Sağ Genişlikleri

	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
0	0,671454	0,675271	0,67916	0,68312	0,687149	0,691246	0,69541	0,699639	0,703932	0,708288
1-4	0,606877	0,612822	0,618771	0,624725	0,630684	0,636649	0,64262	0,648598	0,654583	0,660577
5-9	0,599182	0,605164	0,611154	0,617153	0,623161	0,629178	0,635205	0,641241	0,647289	0,653347
10-14	0,593873	0,600031	0,606192	0,612356	0,618525	0,624697	0,630875	0,637058	0,643247	0,649442
15-19	0,590158	0,596069	0,601995	0,607937	0,613893	0,619866	0,625854	0,631859	0,637879	0,643915
20-24	0,576727	0,582761	0,588809	0,594872	0,600951	0,607045	0,613155	0,61928	0,625421	0,631578
25-29	0,568986	0,575056	0,581142	0,587244	0,593361	0,599495	0,605644	0,611809	0,617991	0,624188
30-34	0,53687	0,540784	0,544761	0,5488	0,552902	0,557065	0,561289	0,565573	0,569918	0,574322
35-39	0,492565	0,49544	0,498392	0,50142	0,504525	0,507704	0,510958	0,514287	0,517689	0,521164
40-44	0,455763	0,458845	0,462005	0,465242	0,468555	0,471943	0,475407	0,478946	0,482558	0,486244
45-49	0,430254	0,433644	0,437111	0,440651	0,444266	0,447954	0,451715	0,455549	0,459454	0,46343
50-54	0,406522	0,410281	0,414112	0,418013	0,421984	0,426025	0,430134	0,434312	0,438558	0,44287
55-59	0,387322	0,391406	0,395558	0,399777	0,404062	0,408413	0,412829	0,41731	0,421854	0,426462
60-64	0,366157	0,370617	0,375142	0,37973	0,384381	0,389094	0,393869	0,398704	0,4036	0,408554
65-69	0,348635	0,353423	0,358273	0,363184	0,368156	0,373188	0,378279	0,383429	0,388636	0,393899
70-74	0,327436	0,332767	0,338155	0,3436	0,3491	0,354655	0,360264	0,365926	0,37164	0,377405
75-79	0,304241	0,310382	0,316572	0,322809	0,329092	0,335421	0,341794	0,34821	0,354669	0,361169
80-84	0,285676	0,292888	0,300135	0,307414	0,314725	0,322067	0,329438	0,336837	0,344263	0,351716
85-89	0,265234	0,27238	0,279549	0,28674	0,293953	0,301187	0,308441	0,315714	0,323006	0,330315
90-94	0,289721	0,292986	0,296248	0,299507	0,302764	0,306018	0,309269	0,312517	0,315762	0,319004
95-99	0,206143	0,208281	0,2104	0,2125	0,214581	0,216644	0,218688	0,220713	0,222719	0,224706
100-104	0,147177	0,149543	0,151901	0,15425	0,156591	0,158923	0,161246	0,163561	0,165867	0,168164
105-109	0,091022	0,091317	0,091612	0,091906	0,0922	0,092494	0,092788	0,093081	0,093373	0,093666
110+	0,000001	0,000001	0,000001	0,000001	0,000001	0,000001	0,000001	0,000001	0,000001	0,000001

Ek 3. Durulaştırılmış Merkezi Ölüm Hızları

	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
0	0,006705	0,006472	0,006246	0,006029	0,005819	0,005616	0,005421	0,005232	0,00505	0,004874
1-4	0,000354	0,000343	0,000332	0,000322	0,000312	0,000303	0,000293	0,000284	0,000276	0,000267
5-9	0,000165	0,000159	0,000154	0,000149	0,000145	0,00014	0,000135	0,000131	0,000127	0,000123
10-14	0,000207	0,000202	0,000197	0,000192	0,000188	0,000183	0,000179	0,000175	0,000171	0,000167
15-19	0,00071	0,000699	0,000688	0,000677	0,000667	0,000657	0,000647	0,000637	0,000627	0,000617
20-24	0,000936	0,000921	0,000907	0,000892	0,000878	0,000864	0,00085	0,000837	0,000823	0,00081
25-29	0,001003	0,000989	0,000974	0,00096	0,000947	0,000933	0,00092	0,000906	0,000893	0,00088
30-34	0,001276	0,001263	0,00125	0,001238	0,001226	0,001214	0,001202	0,00119	0,001178	0,001166
35-39	0,001668	0,00165	0,001633	0,001616	0,001598	0,001581	0,001565	0,001548	0,001532	0,001515
40-44	0,002269	0,002236	0,002203	0,00217	0,002138	0,002106	0,002075	0,002045	0,002014	0,001985
45-49	0,003257	0,003199	0,003142	0,003087	0,003032	0,002978	0,002925	0,002873	0,002822	0,002772
50-54	0,005017	0,004922	0,004829	0,004738	0,004649	0,004561	0,004475	0,004391	0,004308	0,004227
55-59	0,007964	0,007824	0,007686	0,007551	0,007418	0,007287	0,007159	0,007033	0,006909	0,006788
60-64	0,01263	0,012435	0,012243	0,012054	0,011868	0,011685	0,011504	0,011327	0,011152	0,01098
65-69	0,019161	0,018899	0,018639	0,018384	0,018131	0,017883	0,017637	0,017395	0,017157	0,016921
70-74	0,029119	0,028721	0,028328	0,027941	0,027559	0,027182	0,02681	0,026444	0,026082	0,025726
75-79	0,043979	0,043415	0,042857	0,042307	0,041764	0,041228	0,040699	0,040177	0,039661	0,039152
80-84	0,073342	0,072666	0,071996	0,071333	0,070676	0,070025	0,069379	0,06874	0,068106	0,067479
85-89	0,117622	0,11677	0,115924	0,115084	0,114249	0,113421	0,112598	0,111781	0,11097	0,110165
90-94	0,189147	0,188313	0,187483	0,186656	0,185832	0,185012	0,184195	0,183382	0,182572	0,181765
95-99	0,28894	0,288354	0,287769	0,287184	0,286601	0,286018	0,285437	0,284856	0,284276	0,283697
100-104	0,413445	0,413157	0,412869	0,412581	0,412294	0,412007	0,41172	0,411433	0,411146	0,410859
105-109	0,551321	0,551817	0,552314	0,552811	0,553308	0,553806	0,554303	0,554802	0,5553	0,555798
110+	0,66515	0,66637	0,667591	0,668815	0,670041	0,671269	0,672499	0,673732	0,674967	0,676204

Ek 4. Durulaştırılmış Beklenen Yaşam Süreleri

	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
0	77,04276	77,21515	77,38599	77,55529	77,72309	77,8894	78,05424	78,21762	78,37957	78,5401
1-4	76,55909	76,7146	76,86911	77,0226	77,1751	77,32659	77,47709	77,6266	77,77512	77,92265
5-9	72,6653	72,81777	72,96932	73,11995	73,26965	73,41844	73,5663	73,71325	73,85928	74,0044
10-14	67,72316	67,87389	68,02374	68,17272	68,32083	68,46806	68,61442	68,75991	68,90452	69,04827
15-19	62,79058	62,93987	63,08831	63,23592	63,38267	63,52858	63,67365	63,81787	63,96124	64,10376
20-24	58,0043	58,1508	58,29649	58,44136	58,58542	58,72867	58,8711	59,01272	59,15352	59,2935
25-29	53,2645	53,40751	53,54975	53,69122	53,83192	53,97184	54,111	54,24937	54,38697	54,52379
30-34	48,51919	48,65923	48,79853	48,93709	49,07491	49,21197	49,34829	49,48387	49,61869	49,75276
35-39	43,81329	43,95131	44,0886	44,22515	44,36096	44,49603	44,63036	44,76395	44,8968	45,0289
40-44	39,15824	39,29372	39,42848	39,56251	39,69581	39,82838	39,96022	40,09133	40,2217	40,35135
45-49	34,5748	34,70566	34,83584	34,96532	35,09412	35,22222	35,34963	35,47634	35,60236	35,72768
50-54	30,09876	30,22234	30,34531	30,46767	30,58942	30,71056	30,8311	30,95101	31,07031	31,189
55-59	25,79586	25,90914	26,02194	26,13427	26,2461	26,35746	26,46832	26,57869	26,68857	26,79795
60-64	21,73479	21,83569	21,93624	22,03643	22,13627	22,23575	22,33487	22,43363	22,53201	22,63003
65-69	17,98083	18,06826	18,15545	18,24238	18,32906	18,41548	18,50164	18,58753	18,67316	18,75852
70-74	14,52878	14,60249	14,67602	14,74937	14,82253	14,8955	14,96827	15,04085	15,11324	15,18542
75-79	11,40643	11,4637	11,52087	11,57793	11,63488	11,69173	11,74846	11,80508	11,86159	11,91798
80-84	8,59375	8,633293	8,672811	8,712302	8,751766	8,791201	8,830607	8,869983	8,909327	8,948639
85-89	6,325401	6,351738	6,378061	6,404371	6,430666	6,456946	6,48321	6,509458	6,53569	6,561905
90-94	4,51471	4,527682	4,540664	4,553654	4,566653	4,57966	4,592674	4,605696	4,618726	4,631763
95-99	3,245556	3,250409	3,255278	3,26016	3,265053	3,269959	3,274877	3,279808	3,28475	3,289705
100-104	2,381331	2,381723	2,382135	2,382551	2,382972	2,383397	2,383827	2,384262	2,384702	2,385147
105-109	1,794118	1,792169	1,79022	1,78827	1,786319	1,784369	1,782418	1,780467	1,778515	1,776563
110+	1,504191	1,502651	1,501112	1,499575	1,49804	1,496506	1,494974	1,493443	1,491914	1,490387