

**MALZEME ÖZELLİKLERİ SICAKLIĞA BAĞIMLI OLAN
İZOTROPİK FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ
MALZEMELERDE BULUNAN EĞİK ÇATLAKLARIN
GERİLME ŞİDDET ÇARPANLARI J_K – İNTEGRAL
YÖNTEMİ İLE HESAPLANMASI.**

**CALCULATION OF STRESS INTENSITY FACTORS OF
INCLINED CRACK EMBEDDED IN ISOTROPIC
FUNCTIONALLY GRADED MATERIALS WITH
TEMPERATURE DEPENDENCE MATERIAL PROPERTIES
USING J_K –INTEGRAL METHOD.**

MORTEZA YEGANEHPoor

Hacettepe Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim – Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin

MAKİNA Mühendisliği Anabilim Dalı İçin Öngördüğü

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Olarak hazırlanmıştır.

2012

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne,

Bu çalışma jürimiz tarafından **MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI 'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Yar.Doç. Dr. Benat Koçkar

Danışman : Prof. Dr. Bora Yıldırım

Yrd. Danışman : Doç. Dr. Serkan Dağ

Üye :Dr. Selçuk Himmetoğlu

Üye :Dr. Özgür Ekici

ONAY

Bu tez Hacettepe Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri uyarınca yukarıdaki jüri üyeleri tarafından 07/12/2012 tarihinde uygun görülmüş ve Enstitü Yönetim Kurulunca/...../..... tarihinde kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Fatma Sevin Düz
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

MALZEME ÖZELLİKLERİ SICAKLIĞA BAĞIMLI OLAN İZOTROPİK FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ MALZEMELERDE BULUNAN EĞİK ÇATLAKLARIN GERİLME ŞİDDET ÇARPANLARI J_K – İNTEGRAL YÖNTEMİ İLE HESAPLANMASI.

Morteza Yeganehpour

Öz

Bu çalışmanın amacı, J_k -integral yöntemini kullanarak Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemelerdeki eğik çatlak ucunda parametrelerini hesaplamaktır. Çatlak, karışık modda termal yüklemeye maruz kalmaktadır. J_k -integrali en genel formu göz önüne alındığında bu integral çatlak ucunda tanımlanmış bir eğri integraldir eğri üzerinde tanımlanmış integral ile çalışmanın mümkün olmamasından, J_k -integral, düzlemsel termal elastikiyet kuramları ile alan ve çizgi integralleri içeren ve alandan bağımsız bir integral haline dönüştürülmüştür. Karışık modda termal yükleme altındaki çatlak analizleri mod-I ve mod-II gerilme şiddeti faktörlerinin hesap edilmesini gerektirmektedir. Gerilme şiddet faktörlerinin hesabına ek olarak enerji bırakma miktarı ve T-gerilimi de J_k -integral metodu ile hesap edilmektedir

Genel amaçlı sonlu eleman analiz yazılımı olan ANSYS' te yapılan termal ve yapısal analizlerde derecelendirilmiş izoparametrik elemanlara sahip sonlu eleman modelleri oluşturulmuştur. J_k -integral formülasyonunda gerekli olan bütün malzeme özelliklerinin, fonksiyonel derecelendirilmiş ortamda sürekli uzaysal değişimlere sahip oldukları varsayılmıştır. Elde edilen sayısal sonuçlar Yer Değiştirme Bağıntısı Tekniği ile elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. J_k -integralinin alandan bağımsız olma özelliği de gösterilmiştir. Bu çalışmada elde edilen sonuçlar çatlak pozisyonunun, çatlak boyu, çatlağın açısı ve malzeme özelliklerinin derecelendirilme profillerinin gerilme şiddeti faktörlerine, enerji bırakma miktarına etkilerini göstermektedir.

Anahtar Kelimeler: Sonlu Elemanlar Metodu, Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemeler, Eğik çatlak, J_k -integrali, Karışık-Mod Gerilme Şiddeti Faktörleri, Termal Gerilmeler

Danışman: Prof. Bora YILDIRIM, Hacettepe Üniversitesi, Makina Mühendisliği Bölümü

Yrd. Danışman: Doç. Dr. Serkan DAĞ, ODTÜ, Makina Mühendisliği Bölümü

CALCULATION OF STRESS INTENSITY FACTORS OF INCLINED CRACK EMBEDDED IN ISOTROPIC FUNCTIONALLY GRADED MATERIALS WITH TEMPERATURE DEPENDENCE MATERIAL PROPERTIES USING J_K – INTEGRAL METHOD.

Morteza Yeganehpoor

ABSTRACT

The main aim of this study is to utilize a J_k -integral for the analysis of inclined cracks located in functionally graded materials (FGMs). The crack is subjected to mixed mode thermal loading. The generalized definition of the J_k -integral over a vanishingly small curve at the tip of an inclined crack is converted to a domain independent form that consists of area and line integrals defined over finite domains. A numerical procedure based on the finite element method is then developed, which allows the evaluation of the components of the J_k -integral, the modes I and II stress intensity factors, energy release rate and the T-stresses at the crack tips.

In both thermal and structural analyses, finite element models that possess graded isoparametric elements are created in the general purpose finite element analysis software ANSYS. In the formulation of J_k -integral, all required engineering material properties are assumed to possess continuous spatial variations through the functionally graded medium. The numerical results are compared to the results obtained from Displacement Correlation Technique (DCT). The domain independence of J_k -integral is also demonstrated. Detailed parametric analyses are conducted by considering an inclined crack in an FGM layer that is subjected to steady-state thermal stresses. The results obtained in this study show the effects of relative location, relative crack size, material property profile and the crack inclination angle on stress intensity factors and energy release rate.

Keywords: Finite element method, Functionally graded materials (FGMs), Inclined crack, J_k -integral, Mixed-Mode Stress Intensity Factors, Thermal stresses.

Advisor: Prof. Dr. Bora YILDIRIM, Hacettepe University, Department of Mechanical Engineering

Co-advisor: Assoc. Prof. Dr. Serkan DAĞ, METU, Department of Mechanical Engineering

TEŞEKKÜR SAYFASI

Bu tezin reallaşmasında Prof. Dr. Bora YILDIRIM (Tez müşaviri) və Doç. Dr. Serkan DAĞ (Yrd. Müşaviri) verdikləri qatqılarına görə, işin nəticəyə çatdırılmasında və verdikləri dəstəkləri üçün təşəkkür edirəm.

Bu günə gəlməmə böyük pay sahibi olan Anam və Atamdan və hər zaman arxamda olduqları üçün təşəkkürümü bildirirəm.

Qardaşlarımdan və qardaşımın hayat yoldaşından yardım etdikləri üçün təşəkkür edirəm.

Elyar inşallah səndə öz ölkəndə ana dilində məktəbdə dərs oxuyasan.

Bütün yoldaşlarımdan xüsusilə İlqar Ansari 'dən köməkləri və dəstəkləri üçün təşəkkür edirəm.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Öz.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR SAYFASI	iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ.....	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	v
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	vii
1.Giriş.....	1
1.1 Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemeler(FDM).....	1
1.2 Kırılma Mekaniği	2
1.2.1 Kırılma Mekaniği Teorileri İle İlgili Temel Bilgiler	2
1.2.2 Kırılma modelleri	4
1.2 LİTERATÜR ARAŞTIRMASI.....	5
1.4 Tezin Amacı.....	6
2. FORMÜLASYON.....	8
2.1 Düzlem İzotropik Termoelastisite Yapı İlişkileri	8
2.2 Karışık Mod Gerilme Şiddeti Çarpanları ve T-Gerilmesi Hesapları	19
3. SONLU ELEMENLAR YUGULAMASI.....	22
3.1 Sonlu Elemanlar Yöntemi	22
3.2 Sonlu elemanlar prosedürü.....	31
4. ANALİZLER VE SONUÇLAR.....	38
EK.....	68
A. Mekanik gerinim enerjisi yoğunluğu fonksiyonunun	68
B.İraksama Teoremi	70
Kaynaklar.....	72

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1 İzotropik elastik ortam içerisinde bulunan bir çatlak.....	2
Şekil 1.2 Çatlak açılma deformasyonu	4
Şekil 1.3 Çatlak kayma deformasyonu	4
Şekil 1.4 Çatlak yırtılma deformasyonu	5
Şekil 2.1 İzotropik derecelendirilmiş ortamda bulunan eğik çatlak.....	8
Şekil 2.2 Çatlak çevresinde tanımlanan kapalı eğri Γ	13
Şekil 2.3 İntegrasyon alanı A ve Γ_c	16
Şekil 2.4 Konik q fonksiyonu.....	17
Şekil 2.5 İntegrasyon güzergâhı şeması	18
Şekil 3.1 Bir sonlu eleman modelinde nod noktaları ve elemanlar	23
Şekil 3.2 esas elemanın eğri dörtgen elemana dönüşümü	25
Şekil 3.3 PLANE 77 ve PLANE 82 elemanları.....	28
Şekil 3.4 alan integrali için Gauss nokta pozisyonları	29
Şekil 3.5 çizgi integrali için Gauss nokta pozisyonları	29
Şekil 3.6 a) Genel koordinat sistemindeki bir eğri dörtgen eleman. b) Genel koordinat sistemindeki bir üçgen eleman. c) Eşit parametrik sistemdeki dörtgen ve üçgen eleman gösterimi.	31
Şekil 3.7 Ω alanının kapsadığı bölgede tanımlanan I. Ve II. Çizgiler	32
Şekil 4.1 İzotropik derecelendirilmiş ortamda bulunan sürekli rejim eğik çatlak problemi geometrisi ve termal sınır koşulları	38
Şekil 4.2 Çatlağın B ucundaki sıcaklık normalize edilmiş, çatlağın açısına bağlı değişimi. $h/L=0.6, h_c/L=0.3, T_0=25^\circ C$	41
Şekil 4.3 Çatlağın C ucundaki sıcaklık normalize edilmiş, çatlağın açısına bağlı değişimi. $h/L=0.6, h_c/L=0.3, T_0=25^\circ C$	42
Şekil 4.4 (a) Sonlu elemanlar ağının deforme olmuş şekli. (b) Çatlak yüzeylerin yakın planı. (c) İntegrasyon alanının ve çatlağın B ucunun yakın planı. (d) İntegrasyon alanının ve çatlağın B ucunun yakın planı.	46
Şekil 4.5 Çatlağın B ucunda normalize mod-I gerilme şiddet çarpanının çatlağın açısına bağlı değişimi. $h/L=0.6, h_c/L=0.3, T_0=25^\circ C, \omega_1=\omega_2=1.5, \omega_3=\omega_4=2$	48
Şekil 4.6 Çatlağın C ucunda normalize edilmiş mod-I gerilme şiddet çarpanının çatlağın açısına bağlı değişimi. $h/L=0.6, h_c/L=0.3, T_0=25^\circ C, \omega_1=\omega_2=1.5, \omega_3=\omega_4=2$	49
Şekil 4.7 Çatlağın B ucunda normalize mod-II gerilme şiddet çarpanının çatlağın açısına bağlı değişimi. $h/L=0.6, h_c/L=0.3, T_0=25^\circ C, \omega_1=\omega_2=1.5, \omega_3=\omega_4=2$	50
Şekil 4.8 Çatlağın C ucunda normalize mod-II gerilme şiddet çarpanının çatlağın açısına bağlı değişimi. $h/L=0.6, h_c/L=0.3, T_0=25^\circ C, \omega_1=\omega_2=1.5, \omega_3=\omega_4=2$	51
Şekil 4.9 Çatlağın B ucunda normalize edilmiş enerji salınımının çatlağın açısına bağlı değişimi. $h/L=0.6, h_c/L=0.3, T_0=25^\circ C, \omega_1=\omega_2=1.5, \omega_3=\omega_4=2$	52
Şekil 4.10 Çatlağın C ucunda normalize enerji edilmiş salınımının çatlağın açısına bağlı değişimi. $h/L=0.6, h_c/L=0.3, T_0=25^\circ C, \omega_1=\omega_2=1.5, \omega_3=\omega_4=2$	53
Şekil 4.11 Çatlağın B ucunda normalize mod-I gerilme şiddet çarpanının çatlağın açısına bağlı değişimi. $h/L=0.6, a/L=0.1, T_0=25^\circ C, \omega_1=\omega_2=1.5, \omega_3=\omega_4=2$	54
Şekil 4.12 Çatlağın C ucunda normalize mod-I gerilme şiddet çarpanının çatlağın açısına bağlı değişimi. $h/L=0.6, a/L=0.1, T_0=25^\circ C, \omega_1=\omega_2=1.5, \omega_3=\omega_4=2$	55
Şekil 4.13 Çatlağın B ucunda normalize mod-II gerilme şiddet çarpanının çatlağın açısına bağlı değişimi. $h/L=0.6, a/L=0.1, T_0=25^\circ C, \omega_1=\omega_2=1.5, \omega_3=\omega_4=2$	56

Şekil 4.14 Çatlağın C ucunda normalize mod-II gerilme şiddet çarpanının çatlağın açısına bağlı değişimi. $h/L=0.6, a/L=0.1, T_0=25^\circ C, \omega_1=\omega_2=1.5, \omega_3=\omega_4=2$	57
Şekil 4.15 Çatlağın B ucunda normalize edilmiş enerji salınımının çatlağın açısına bağlı değişimi. $h/L=0.6, a/L=0.1, T_0=25^\circ C, \omega_1=\omega_2=1.5, \omega_3=\omega_4=2$	58
Şekil 4.16 Çatlağın C ucunda normalize enerji salınımı çatlağın açısına bağlı değişimi. $h/L=0.6, a/L=0.1, T_0=25^\circ C, \omega_1=\omega_2=1.5, \omega_3=\omega_4=2$	59
Şekil 4.17 Çatlağın B ucunda normalize mod-I gerilme şiddet çarpanının çatlağın açısına bağlı değişimi. $h/L=0.6, h_c/L=0.3, a/L=0.1, T_0=25^\circ C$	60
Şekil 4.18 Çatlağın C ucunda normalize mod-I gerilme şiddet çarpanının çatlağın açısına bağlı değişimi. $h/L=0.6, h_c/L=0.3, a/L=0.1, T_0=25^\circ C$	61
Şekil 4.19 Çatlağın B ucunda normalize mod-II gerilme şiddet çarpanının çatlağın açısına bağlı değişimi. $h/L=0.6, h_c/L=0.3, a/L=0.1, T_0=25^\circ C$	62
Şekil 4.20 Çatlağın C ucunda normalize mod-II gerilme şiddet çarpanının çatlağın açısına bağlı değişimi. $h/L=0.6, h_c/L=0.3, a/L=0.1, T_0=25^\circ C$	63
Şekil 4.21 Çatlağın B ucunda normalize enerji salınım çatlağın açısına bağlı değişimi. $h/L=0.6, h_c/L=0.3, a/L=0.1, T_0=25^\circ C$	64
Şekil 4.22 Çatlağın C ucunda normalize enerji salınım çatlağın açısına bağlı değişimi. $h/L=0.6, h_c/L=0.3, a/L=0.1, T_0=25^\circ C$	65
Şekil B.1 Kartezyen koordinatta tanımlanan Ω alandaki Iraksama teoremi	69

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 3.1 (J_2) integrali bileşenleri.....	34
Çizelge 3.2 J_1 integrali bileşenleri.....	36
Çizelge 4.1 J_k - integral ve YDBT vasıtasıyla bulunarak normalize edilmiş mod-I ve mod-II gerilme şiddeti çarpanlarının malzeme özellikleri sıcaklığa bağımlı ve bağımlı olmayan durumlar için sürekli rejim sonuçları. $h / L=0.6$, $h_c / L=0.3$, $a/L=0.2$, $T_0=25^\circ\text{C}$, $\omega_1=\omega_2=1.5$, $\omega_3=\omega_4=2$	43
Çizelge 4.2 J_k - integral ve YDBT vasıtasıyla bulunarak normalize edilmiş mod-I ve mod-II gerilme şiddeti çarpanlarının sürekli rejim sonuçları. $h / L=0.6$, $h_c / L=0.35$, $a/L=0.1$, $T_0=25^\circ\text{C}$, $\omega_1=\omega_2=1.5$, $\omega_3=\omega_4=2$	44

1. Giriş

1.1 Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemeler(FDM)

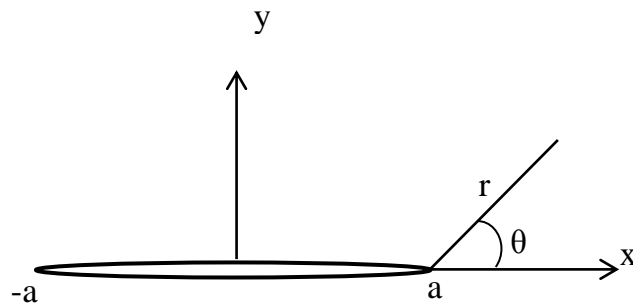
Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler (FDM) konsepti ilk olarak 1980'li yılların ortalarında Japonya'da incelenmiştir (NIINO and Maeda 1990). İlk olarak uzay araçları için tasarlanan FDM'ler iyi ısı iletkenlik ve iyi ısı direnç gibi iki zıt özelliğin bir malzemede bulunabilmesi amacıyla geliştirilmiştir. Bu özellikler sayesinde hafiflik, güçlülük ve sağlamlık mümkün olmaktadır. FDM'leri diğer mühendislik malzemelerinden ayıran temel özellik yapıları içerisinde birden fazla malzeme bulunması ve bu malzemelerin hacim oranlarında genellikle kalınlık koordinatı boyunca sürekli değişimler olmasıdır. Bu malzemelerin ilk olarak havacılık ile ilgili uygulamalarda yüksek ısı akısına direnç gösteren kaplamalar olarak kullanılması önerilmiştir (NIINO and Maeda 1990; NODA 1999). Günümüzde hem bu malzemelerin üretiminde kullanılan tekniklerde hem de uygulama alanlarında büyük bir çeşitlilik bulunmaktadır. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerin kullanıldığı güncel uygulamalar arasında aşınmaya dirençli kaplamalar(DAHAN et al. 2001), enerji dönüşüm cihazları (KOHRI and Shiota 2006), bio-medikal malzemeler (WATARI et al. 2004) ve eko-malzemeler (MALININA et al. 2005) bulunmaktadır. Bu malzemelerin hacim oranlarında mikro-yapı içerisinde sürekli değişimler olması nedeniyle yoğunluk, termal genleşme katsayısı ve elastisite modülü gibi fiziksel özellikler uzaysal koordinatların fonksiyonu olmaktadır. Bu nedenle bu malzemelerin davranışının incelenmesi için geliştirilen yöntemlerde fiziksel özelliklerin uzaysal koordinatlara bağlı değişkenler olduğu kabul edilmiştir (DAĞ et al. 1999). Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerin üretiminde kullanılan tekniklerin bir kısmının bu malzemelerde ortotropik bir yapıya neden olduğu bilinmektedir. Örneğin plazma sprey yöntemi ile üretilen FDM kaplamalarda yüzeye paralel yönde zayıf ayrılma düzlemleri oluşmaktadır (SAMPATH et al. 1995; SEVOSTIANOV and Kachanov 2001). Elektron ışını ile fiziksel buhar biriktirme yöntemi ile oluşturulan FDM katmanlarda ise yüzeye dik yönde kolon şeklinde bir mikro-yapı meydana gelmektedir (KAYSSER and IIschner 1995; SCHULZ and Schmücker 2000).

Uzay araçlar ve gelecek nesil fizyon reaktörleri uygulamalarında ısıl gerilmeleri azaltmada kullanılmak üzere geliştirilmiş ve bu uygulamalarda anahtar teknoloji görevinde olan Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzeme (FDM) kavramını, dereceli yapısal fonksiyonlara sahip metal/seramik kompozisyonlu yeni bir malzeme olarak tanımlayabiliriz. FDM'in en büyük avantaj, yapı boyunca tokluk ve diğer malzeme özelliklerine ait dereceli fonksiyonlar içermesidir.

1.2 Kırılma Mekaniği

1.2.1 Kırılma Mekaniği Teorileri İle İlgili Temel Bilgiler

Kırılma mekaniği mühendislik malzemelerinde ve doğada bulunan diğer malzemelerde meydana gelen kırılma olayını, çatlak oluşumu ve ilerlemesi süreçlerini inceleyerek açıklamaya çalışan bir bilimsel disiplindir. Malzemelerde çatlaklar imalat süresince oluşabileceği gibi kullanım sırasında da oluşabilirler. Tekrar eden yüklemelerin etkisi altında ya da çevre koşulları nedeniyle malzemelerde bulunan çatlaklar ilerleyebilmekte diğer bir deyişle çatlakların yüzey alanlarında büyüme meydana gelebilmektedir. Kırılma mekaniği teorisine göre bir yapı içerisinde bulunan bir çatlak kritik bir büyüklüğe ulaştığında o yapıda verilen yüklemeye altında kırılma olayı meydana gelir. Kırılma mekaniği disipliniinde çatlak davranışını inceleyebilmek için kullanılan başlıca parametre gerilme şiddeti çarpanı olarak tanımlanmıştır. Bu önemli parametreyi tanımlayabilmek için Şekil 2.1 de(DAĞ 2008) gösterildiği gibi elastik ortam içerisinde bulunan bir çatlağı ele alalım.



Şekil 1.1 İzotropik elastik ortam içerisinde bulunan bir çatlak.

Bu şekilde gösterilen çatlakın uzunluğu $2a$ olarak verilmiştir. x - y , orijini çatlak merkezinde konumlanmış bir koordinat sistemidir. r ve θ ise çatlak ucunda konumlanmış kutupsal bir koordinat sistemini göstermektedir. Düzlemsel elastisite

teorisinde izotropik bir ortamda bulunan bir çatlak için r sıfıra giderken çatlak ucundaki asimtotik gerilme dağılımı aşağıdaki gibi ifade edilir (Kachanov et al. 2003)

$$\sigma_{xx}(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right) - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right) + T \quad (1.1)$$

$$\sigma_{yy}(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad (1.2)$$

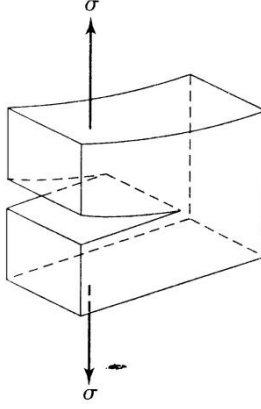
$$\sigma_{xy}(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right), \quad (1.3)$$

Bu denklemlerde K_I ve K_{II} sırasıyla mod-I ve mod-II gerilme şiddeti çarpanlarını, T ise T -gerilmesini göstermektedir. Kırılma mekaniği teorisine göre K_I ve K_{II} değerleri kritik bir noktaya ulaştığında kırılma meydana gelir. Kritik değerleri bulabilmek için ilgili standartlarda detaylandırılan deneyleri yapmak gerekmektedir. T -gerilmesi ise çatlak ucu plastik bölge büyüklüğü ve çatlak ilerleme açısı gibi değişkenlerin hesaplanmasında kullanılır.

1.2.2 Kırılma modelleri

Kırılma tokluğu ölçülürken, kırılmada üç model düşünülür.

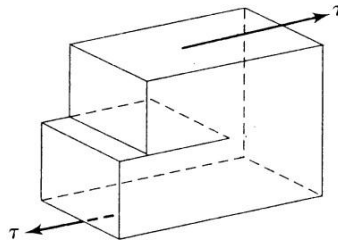
Mod-I) Çatlak açılma deformasyon tipi



Şekil 1.2 Çatlak açılma deformasyonu

Mod I deformasyon tipinde, gerilmenin normal bileşeni, çatlak yüzeyine dik olarak y eksenini doğrultusunda etki etmektedir. Açılma deformasyon türü bunlar içerisinde en önemlisi ve kırılma bakımından en tehlikeli olup, bu sebeple en çok bu kırılma şekli incelenmiştir.

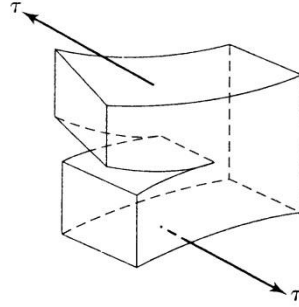
Mod-II) Çatlak kayma deformasyon tipi



Şekil 1.3 Çatlak kayma deformasyonu

Mod-II deformasyon tipinde, gerilmenin kayma bileşeni, çatlağa x eksenini doğrultusunda etki etmektedir.

Mod-III) Çatlak yırtılma deformasyon tipi



Şekil 1.4 Çatlak yırtılma deformasyonu

Mod III deformasyon tipinde, gerilmenin kayma bileşeni, çatlığa z eksenine doğrultusunda, çatlığın dip kenarına paralel olarak etki etmektedir

1.2 LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

J_k -integrali en genel formu göz önüne alındığında bu integral çatlak ucunda tanımlanmış bir eğri integralidir. J_k -integralinin kırılma mekaniği analizlerinde nasıl kullanılabileceği ile ilgili ilk çalışmalar (Knowles and Sternberg 1972), (Budiansky and Rice 1973), ve (Hellen and Blackburn 1975) tarafından yazılmış makalelerde anlatılmıştır. Termal yükleme uygulanmış homojen izotropik yapılar için J_k -integrali formülasyonunu (Chen and Chen 1981), sonlu elemanlar uygulamasını ise (Chen and Ting 1985) yapmıştır. Mekanik yükleme altındaki homojen anizotropik malzemeler için J_k -integrali uygulamalarının nasıl yapılacağı sonlu elemanlar yöntemi ile (Chu and Hong 1990) tarafından, sınır elemanları yöntemi ile de (Sollero and Aliabadi 1993) tarafından gösterilmiştir. J_K -integralinin derecelendirilmiş malzemelerin kırılma analizi için kullanımı konusunda da teknik literatürde çalışmalar bulunmaktadır. (Eischen 1987b), ve (Kim and Paulino 2002a) mekanik olarak yüklenmiş derecelendirilmiş ortotropik malzemelerin kırılma analizi için J_K -integrali yöntemini kullanmıştır. İzotropik derecelendirilmiş malzemelerin termal kırılma analizi için J_k -integraline dayalı hesaplamalı yöntemler (Dağ 2007), ve (Dağ and Yıldırım 2009) tarafından geliştirilmiştir. Mekanik yükleme uygulanmış ortotropik derecelendirilmiş malzemeler için J_k -integrali uygulamasının nasıl yapılacağını (Kim and Paulino 2003) anlatmıştır. (Dağ et al. 2010) ise ortotropik derecelendirilmiş malzemelerin termal kırılma analizi için J_k -integrali'ne dayalı bir sonlu elemanlar yöntemi geliştirmişlerdir.

Bu çalışma kapsamında yukarıda bahsedilen makalelerin birçoğundan, yapılmakta olan teorik çalışmalarda faydalanılmaktadır. Tezin ana konusu malzeme özellikleri sıcaklığı bağımlı olan izotropik ortamda bulunan eğik çatlak problemidir. Bu çatlağın termal yükleme etkisi altında olduğu varsayılmaktadır. Bu problemin çözümü için gerekli J_K -integrali formülasyonunun geliştirilmesinde özellikle (Dağ et al. 2010; Dağ and Yıldırım 2009; Kim and Paulino 2002a; Kim and Paulino 2003; Sollero and Aliabadi 1993), ve tarafından yazılmış olan makaleler ağırlıklı olarak kullanılmaktadır.

1.4 Tezin Amacı

Tezin temel amacı termal yükleme altında bulunan malzeme özellikleri sıcaklığa bağımlı olan izotropik fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerin kırılma analizlerini gerçekleştirebilmek için J_k -integrali hesaplamalı yöntemler geliştirmektir.

Tez projesi kapsamında malzeme özellikleri sıcaklığa bağımlı olan derecelendirilmiş malzemelerin kırılma mekaniği üzerine çalışmalar yapılmıştır. Günümüzde özellikle birden çok fazın bir arada bulunduğu kompozit formundaki derecelendirilmiş malzemelerde üretim ya da kullanım sırasında çatlak oluşumu bu malzemelerin yapısal bütünlüğünü olumsuz etkileyen en önemli faktörlerden birisidir. Tekrar eden yüklerin etkisi altında çatlak oluşumu sürecini çatlak ilerlemesi takip eder ve çatlak kritik bir büyüklüğe ulaştığında kırılma meydana gelir. Bu nedenle kırılma mekaniği yaklaşımı derecelendirilmiş malzemelerin tasarım süreçlerinde önemli bir yer kazanmıştır.

Kırılma mekaniği yöntemlerine dayalı incelemeler yapabilmek için ele alınan malzemenin oluşum sal bağıntıları, yükleme koşulları ve geometrik parametreler ile ilgili detaylı bilgilere ihtiyaç vardır. Derecelendirilmiş malzemelerde karmaşık mikro-yapıdan kaynaklanan ve geleneksel mühendislik malzemelerinde rastlanmayan iki önemli oluşum sal özelliğe rastlanabilmektedir. Bunlar mekanik özelliklerde yön-bağımlılık ve uzaysal koordinatlara bağlı değişkenliktir. Örnek olarak, derecelendirilmiş malzemeler arasında yer tutan fiber takviyeli kompozitlerde mekanik özellikler yön-bağımlıdır. Yön bağımlı malzemeler, yön-bağımlılık özelliklerine göre anizotropik, monoklinik, ortotropik, tetragonal ve kübik malzemeler gibi sınıflara ayrılırlar. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler

(FDM) ve katmanlı malzemelerde ise mekanik özelliklerin uzaysal koordinatlara bağımlılığı gözlenmektedir. Plazma spreyi ile şekillendirme veya elektron ışını ile fiziksel buhar biriktirme gibi bazı özel teknikler ile üretilmiş FDM'lerde ise mekanik özellikler hem yöne hem de uzaysal koordinatlara bağlıdır.

Önerilen tez çalışmasının temel amacı termal yükleme etkisi altında olan ileri malzemeler için J_k -integrali dayalı hesaplamalı karışık-mod kırılma analizi yöntemleri geliştirmektir. Bu kapsamda, öncelikle kararlı termal yükleme altındaki bir derecelendirilmiş izotropik katmanda bulunan eğri çatlak ele alınacaktır. Bu çatlak göz önüne alınarak J_k -integrali ilgili formülasyonlar yapılacaktır. Daha sonra bu formülasyonlar programlama ile (ANSYS 1997) adlı genel sonlu elemanlar yazılımı içerisinde entegre edilecektir. Bu şekilde tanımlanan termal yükleme altındaki derecelendirilmiş izotropik katmanda bulunan eğri çatlak probleminin bazı özel durumlarının incelenmesi ile, teknik literatürde üzerinde çalışma yapılmamış olan başka bazı ileri malzeme problemleri için de sayısal çözümler üretmek mümkün olacaktır. Ele alınacak problem derecelendirilmiş izotropik katmanda eğri çatlaktaki, çatlak parametrelerinin J_k -integrali metodu ile hesaplanmasıdır.

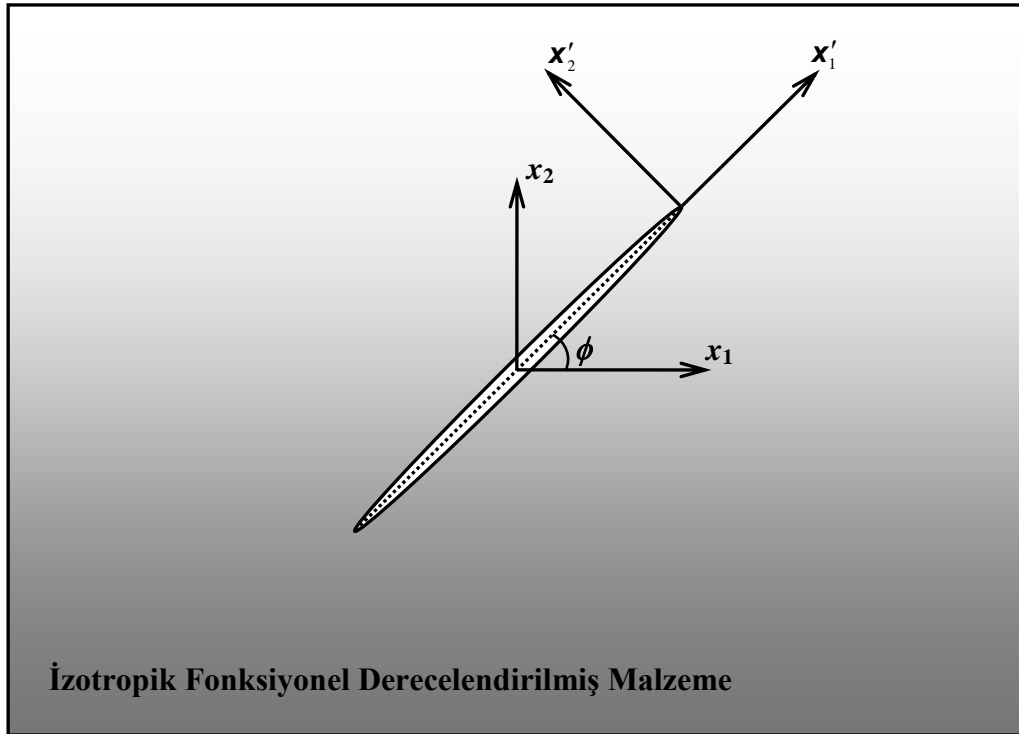
J_k -integrali bir vektördür ve orijini çatlak ucunda bulunan herhangi bir koordinat sisteminde hesaplanabilecek iki bileşeni bulunmaktadır. Bu bileşenler J_1 ve J_2 integralleridir. J_k -integralinin en genel tanımı çatlak ucunda tanımlanan ve limite çatlak ucunda bir noktaya indirgenen bir eğri üzerinde yapılır (Anderson 1991; Dağ 2007). Fakat, J_k -integralinin bu genel tanımının sonlu elemanlar yöntemi gibi sayısal yöntemlerle hesabı mümkün olmadığından, integral teoremleri kullanılarak J_k -integrali sonlu alan ve eğriler üzerinde hesaplanan bir formda ifade edilir. J_k -integralinin en önemli özelliği sonlu alan ve eğriler üzerinde hesaplanan formun kullanılan alanın büyüklüğü ve şeklinden bağımsız olmasıdır.

2. FORMÜLASYON

2.1 Düzlem İzotropik Termoelastisite Yapı İlişkileri

Yapı ilişkileri malzemenin uygulanan yüklere olan reaksiyon karakterize etmektedir. Eğer bir malzemenin yapısal davranışı sadece sahip olduğu deplasmanların ve malzeme özelliklerinin fonksiyon olarak tanımlanabiliyorsa, bu malzeme elastik olarak adlandırılabilir. Elastik malzemeler gerilme altında deforme olan, gerilme geri çekildiğinde eski haline dönebilen malzemelerdir. Gerime uygulandığında elde edilen deformasyon miktarına gerinim adı verilir. Malzemelerin anizotropileri yapısal davranışlarını önemli oranda etkilemektedir. Malzeme özelliklerinin eksenlere bağlı olarak değişmesi malzemenin anizotropik olduğu anlamına gelir. Öte yandan, herhangi bir malzeme bütün yönlerde aynı optik karakteri gösteriyorsa, bir başka deyişle, bir malzemenin bütün özellikleri tüm yönlerde aynıysa bu tür malzemelere izotropik malzeme adı verilir.

İzotropik bir ortamda termal yüke maruz kalan oluşan gerilme-gerinim ilişkileri aşağıdaki gibidir.



Şekil 2.1 İzotropik derecelendirilmiş ortamda bulunan eğik çatlak.

$$\{\varepsilon\} = [S]\{\sigma\} + \{\alpha\}\Delta T \quad (2.1)$$

Bu eşitlikte $\Delta T = T - T_0$ olarak ifade edilir, T sıcaklığı gösterir. T_0 ise, sıcaklık referans değeridir. $\{\varepsilon\}$, $[S]$, $\{\sigma\}$ ve $\{\alpha\}$ ifadeleri sırasıyla, gerinim vektörü, yapı matrisi, gerilme vektörü ve ısı genleşme katsayısı vektörü temsil eder. Bu ifadelerin açılımları aşağıda gösterilmiştir.

$$\{\alpha\} = \begin{Bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{\lambda + \mu}{\eta} & \frac{-\lambda}{2\eta} & \frac{-\lambda}{2\eta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\lambda}{2\eta} & \frac{\lambda + \mu}{\eta} & \frac{-\lambda}{2\eta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\lambda}{2\eta} & \frac{-\lambda}{2\eta} & \frac{\lambda + \mu}{\eta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Burada

$$\eta = \mu(3\lambda + 2\mu) \quad (2.6)$$

Burada görülen sabitlere Lamé sabitleri adı verilir. Bu sabitlerin mühendislik sabitleri veya teknik sabitler adı verilen E , G ve ν sırasıyla elastisite modulu, kayma modulu ve poisson oranının değerlerine ifade etmektedirler.

$$\mu = G \quad (2.7)$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (2.8)$$

Şeklinde. Ayrıca E ve G arasında aşağıda verilen bağıntı vardır.

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.9)$$

J_k -integral uygulamasında, termal gerilmelere maruz kalan izotropik ortamdaki tam çatlaklar incelenmektedir. Problemin geometrisi şekil 2.1 de (Dağ and Yıldırım 2009) görünmektedir. Ele alınan problemin düzlem gerilim ya da gerinim koşullarını sağladığı varsayıldığından (2.1) numaralı eşitlik daha basit şekilde yazılabilir. Örneğin, düzlem gerilim durumu için termal yükleme probleminin bünye denklemleri aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda + \mu}{\eta} & \frac{-\lambda}{2\eta} & 0 \\ \frac{-\lambda}{2\eta} & \frac{\lambda + \mu}{\eta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha \Delta T \\ \alpha \Delta T \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Düzlem gerinim geçerli olması halinde ise termal problem için bünye denklemleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda + 2\mu}{\zeta} & \frac{-\lambda}{\zeta} & 0 \\ \frac{-\lambda}{\zeta} & \frac{\lambda + 2\mu}{\zeta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha \Delta T \\ \alpha \Delta T \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Burada

$$\zeta = 4\mu(\lambda + \mu) \quad (2.12)$$

Şekil 2.1 de görülen çatlak için J_K –integralin genel tanımı aşağıdaki gibi yapılmıştır (Eischen 1987a).

$$J_k = \lim_{\Gamma_\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} (W n_k - \sigma_{ij} n_j u_{i,k}) ds \right\}, \quad (i, j, k = 1, 2) \quad (2.13)$$

Bu eşitlikte Γ_ε çatlağın alt yüzeyinden üst yüzeyine doğru giden bir eğriyi ve n_j eğriye dik olan birim vektörü temsil etmektedir. Bunlara ek olarak; W , mekanik gerinim enerjisi yoğunluğu fonksiyonunu; σ_{ij} gerilme tensörünü; u_i yer değiştirme vektörünü; s ise ark uzunluğunu, virgül ise kısmi türev işlemini temsil eder. $(.)_{,j} \equiv \partial(.)/\partial x_j$. Asimtotik temsillerinde ki gerilimler ve deplasmanlar ve denklem (2.13) kullanarak, J_K –integralin birleşenleri ve karışık mod gerilme şiddeti çarpanlar aralarında denklem aşağıdaki gibi yazabiliriz (Eischen 1987a).

$$J_1 = \frac{1}{E'} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad (2.14)$$

$$J_2 = -\frac{1}{E'} (2K_I K_{II}) \quad (2.15)$$

Burada K_I ve K_{II} sırasıyla mod-I ve mod-II gerilme şiddeti çarpanları ifade eder.

$$E' = \begin{cases} E_{tip}, & \text{Düzlem gerilim için} \\ \frac{E_{tip}}{(1 - \nu_{tip})^2}, & \text{Düzlem gerinim için} \end{cases} \quad (2.16)$$

Burada E_{tip} ve ν_{tip} sırasıyla elastisite modulu ve poisson oranının ifade eder. "tip" alt indisi bu değerlerin çatlak ucunda hesaplandığını gösterir. Şekil 2.1 de fonksiyonel derecelendirilmiş malzemesini gösterilmiş olan lineer elastik farz ederek, 3 boyutlu durum için gerilim yapı denklemi aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} - \beta(\Delta T)\delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.17)$$

Burada δ_{ij} kronecker deltayı, ε_{ij} toplam gerinim, $\Delta T = T - T_0$ olarak ifade edilir, T sıcaklığı gösterir. T_0 ise, sıcaklık referans değeridir. β Aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\beta = \frac{E}{1 - 2\nu} \alpha \quad (2.18)$$

Burada α ısı genleşme katsayısını ifade eder. Lineer elastik için mekanik gerinim enerjisi yoğunluğu aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} (\varepsilon_{ij} - \alpha \Delta T \delta_{ij}), \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.19)$$

Denklem (2.17) denklem (2.19) da kullanarak aşağıdaki denklemi yaza biliriz.

$$W = \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{\lambda}{2} (\varepsilon_{kk})^2 - \beta (\Delta T) \varepsilon_{kk} + \frac{3}{2} \beta \alpha (\Delta T)^2 \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.20)$$

Düzlem gerilim ve gerinim için aşağıdaki denklemleri yaza biliriz.

düzlem gerinim için $\varepsilon_{33} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{13} = 0$ varsayalım:

$$W = \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{\lambda}{2} (\varepsilon_{kk})^2 - \beta (\Delta T) \varepsilon_{kk} + \frac{3}{2} \beta \alpha (\Delta T)^2 \quad (2.21)$$

düzlem gerilim için $\sigma_{23} = \sigma_{13} = \sigma_{33} = 0$ varsayalım:

$$W = \mu (\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{21}^2 + \varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2) + \frac{\lambda}{2} (\varepsilon_{kk})^2 - \beta (\Delta T) \varepsilon_{kk} + \frac{3}{2} \beta \alpha (\Delta T)^2 \quad (2.22)$$

Burada

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{2\mu + \lambda} (\beta \Delta T - \lambda (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})) \quad (2.23)$$

Bu nedenle, iki düzlem için aşağıdaki denklemi yaza biliriz.

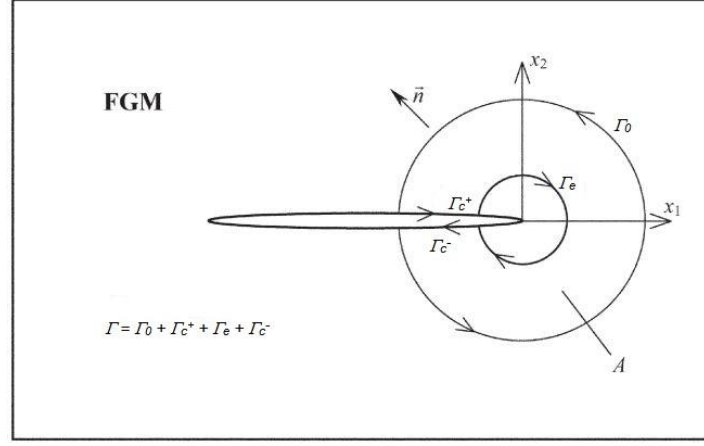
$$W = W(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{22}, \mu, \beta, \lambda, \alpha, \Delta T) \quad (2.24)$$

Denklem (2.13) de verilen J_k –integrali, sonsuz küçüklüğe sahip bir eğri olan Γ_ε açık eğrisi üzerinde hesaplanacaktır. Fakat J_K –integralin bu halini sonlu elemanlar yöntemi hesaplamak mümkün değildir. J_K –integralin tanımını sonlu alanla hesaplanacak şekilde değiştirmek için, öncelikle I_K ile gösterilen bir çizgi integrali tanımlayalım.

$$I_k = \int_{\Gamma} b_k ds, \quad (k = 1, 2) \quad (2.25)$$

Burada

$$b_k = (\sigma_{ij}u_{i,k} - W\delta_{kj})qn_j, \quad (i, j, k = 1, 2) \quad (2.26)$$



Şekil 2.2 Çatlak çevresinde tanımlanan kapalı eğri Γ

Denklem (2.25) de görünen integrasyon, düzgün eğri parçalarının oluşturduğu kapalı bir eğri olan Γ üzerinde hesaplanır (Şekil 2.2)(Yıldırım 2006). Γ , Γ_0 , Γ_c^+ , Γ_e ve Γ_c^- ile gösterilen dört ayrı eğri parçasından oluşmaktadır. Denklem (2.26) da yer alan δ_{ij} Kronecker delta'yı, n_j ise Γ eğrisinin birim normal vektörünü ve q , Γ_e eğrisi üzerinde 1 değerini, Γ_0 eğrisi üzerinde 0 değerini veren ve eğriler üzerinde devamlık gösteren bir fonksiyonu göstermektedir. (denklem (2.44)). I_k Ek.B de verilen İraksama Yöntemi kullanarak aşağıdaki alan integraline dönüştürülür.

$$I_k = \iint_A \{(\sigma_{ij}u_{i,k} - W\delta_{kj})q\}_{,j} dA \quad (i, j, k = 1, 2) \quad (2.27)$$

Burada A , Γ_e ve Γ_0 eğrileri arasındaki alanı gösterir. Yukarıdaki integralin iç fonksiyonunun türev işlemi yapılarak, denge denklemi $\sigma_{ij,j} = 0, (i, j = 1, 2)$ kullanarak, aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$I_k = \iint_A (\sigma_{ij}u_{i,k} - W\delta_{kj})q_{,j} dA + \iint_A (\sigma_{ij}u_{i,kj} - W_{,k})q dA \quad (i, j, k = 1, 2) \quad (2.28)$$

Yukarıdaki denklemde ikinci integral, W ' nün eksenlere göre kısmi türevini göstermektedir. Kısmi türev her iki düzlem için aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{\partial W}{\partial x_k} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_k} + \left(\frac{\partial W}{\partial x_k} \right)_{expl} \quad (i, j, k = 1, 2) \quad (2.29)$$

Burada $(W_{,k})_{expl}$ mekanik gerinim enerjisi yoğunluğu fonksiyonu açık türevi olarak tanımlanır. Termo-mekanik için malzeme özelliklerin göz önüne alındığında bu açık türevi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial W}{\partial x_k} \right)_{expl} &= \frac{\partial W}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial x_k} + \frac{\partial W}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_k} + \frac{\partial W}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial x_k} \\ &+ \frac{\partial W}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x_k} + \frac{\partial W}{\partial (\Delta T)} \frac{\partial (\Delta T)}{\partial x_k} \quad (k = 1, 2), \end{aligned} \quad (2.30)$$

Bu tez proje kapsamında malzeme özellikleri sıcaklığa bağımlı oldu için

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x_k} = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x_k} \right)_{T=sabit} + \frac{\partial \lambda}{\partial T} \frac{dT}{dx_k} \quad (k = 1, 2) \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial x_k} = \left(\frac{\partial \beta}{\partial x_k} \right)_{T=sabit} + \frac{\partial \beta}{\partial T} \frac{dT}{dx_k} \quad (k = 1, 2) \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial x_k} = \left(\frac{\partial \mu}{\partial x_k} \right)_{T=sabit} + \frac{\partial \mu}{\partial T} \frac{dT}{dx_k} \quad (k = 1, 2) \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x_k} = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_k} \right)_{T=sabit} + \frac{\partial \alpha}{\partial T} \frac{dT}{dx_k} \quad (k = 1, 2) \quad (2.34)$$

$(W_{,k})_{expl}$ teriminin, W' nün malzeme özellikleri sıcaklığa göre ve sıcaklık farkının eksenlere göre türevlerine bağlı olduğu görülmektedir. Sıcaklık farkının eksenlere göre türevleri sonlu elemanlar uygulanması sırasında nümerik olarak hesaplanabilir.

Bu tez proje kapsamında malzeme özellikleri sıcaklığa bağımlı oldu için W' nün sıcaklık farkına göre türevleri, sembolik işlem kapasitesinde sahip MATLAB yazılımı sayesinde kapalı formada Ek.A de bulunur.

Küçük deformasyon teorisine göre, elastik malzemeler için aşağıdaki eşitlikleri yazılabilir.

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij}, (i, j = 1, 2) \quad (2.35)$$

$$\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2, (i, j = 1, 2) \quad (2.36)$$

Yukarıdaki denklemleri kullanarak denklem (2.29) aşağıda yeniden yazılmıştır.

$$\frac{\partial W}{\partial x_k} = \sigma_{ij} u_{i,kj} + (W_{,k})_{expl} \quad (i, j, k = 1, 2) \quad (2.37)$$

(2.25), (2.26), (2.28), ve (2.37) denklemlerin kullanarak aşağıdaki denklem elde edilir.

$$I_k = \int_{\Gamma} b_k ds = \iint_A (\sigma_{ij} u_{i,k} - W \delta_{kj}) q_{,j} dA - \iint_A (W_{,k})_{expl} q dA, (i, j, k = 1, 2) \quad (2.38)$$

Γ_0 eğrisi üzerinde $q = 0$ olduğu için, çizgi integrali ifadesi aşağıdaki gibi sadeleştirilebilir.

$$I_k = \int_{\Gamma_c^+} b_k ds + \int_{\Gamma_e} b_k ds + \int_{\Gamma_c^-} b_k ds, (k = 1, 2) \quad (2.39)$$

Γ_e eğrisi üzerinde yönü, saat yönünü, saat yönünü tersine çevirerek yeni yön ele edilir bu yön Γ_ε tanımlanır, şekil (2.2) gösterilmiş. Bu nedenle aşağıdaki ifade elde edilir.

$$I_k = \int_{\Gamma_c^+} b_k ds - \int_{\Gamma_\varepsilon} b_k ds + \int_{\Gamma_c^-} b_k ds, (k = 1, 2) \quad (2.40)$$

Denklem (2.36) $\Gamma_\varepsilon \rightarrow 0$, limit alındığında, Γ_ε eğrisi üzerinde $q = 1$ göz önüne alınmıştır. Denklem (2.13), (2.38), ve (2.40) kullanarak J_k -integral ifadesi aşağıdaki gibi yazılabilir.

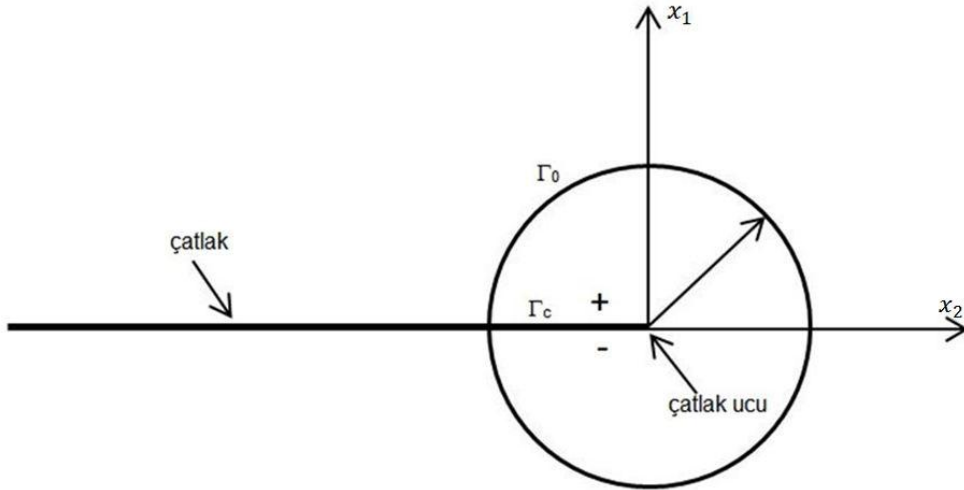
$$J_k = \iint_A (\sigma_{ij} u_{i,k} - W \delta_{kj}) q_{,j} dA - \iint_A (W_{,k})_{expl} q dA - \int_{\Gamma_c^+} b_k ds - \int_{\Gamma_c^-} b_k ds \quad (i, j, k = 1, 2) \quad (2.41)$$

Burada A çatlak ucun ve Γ_0 eğrisi arasında alana ifade eder. Eğer çatlak yüzeyine hiçbir dış mekanik yüklenme ise, Γ_c^+ ve Γ_c^- eğrisi üzerine, $\sigma_{12} = \sigma_{22} = 0$ olur. Üstelik eğriye dik olan birim birinci bileşeni yani n_1 , Γ_c^+ ve Γ_c^- eğrileri üzerinde sıfıra eşittir. Bu koşullara dayanarak J_k -integral birleşenleri aşağıdaki gibi yazılır.

$$J_1 = \iint_A (\sigma_{ij}u_{i,1} - W\delta_{1j})q_j dA - \iint_A (W_{,1})_{expl} q dA \quad (i,j = 1,2) \quad (2.42)$$

$$J_2 = \iint_A (\sigma_{ij}u_{i,2} - W\delta_{2j})q_j dA - \iint_A (W_{,2})_{expl} q dA$$

$$- \int_{\Gamma_c} (W^+ - W^-) q ds \quad (i,j = 1,2) \quad (2.43)$$

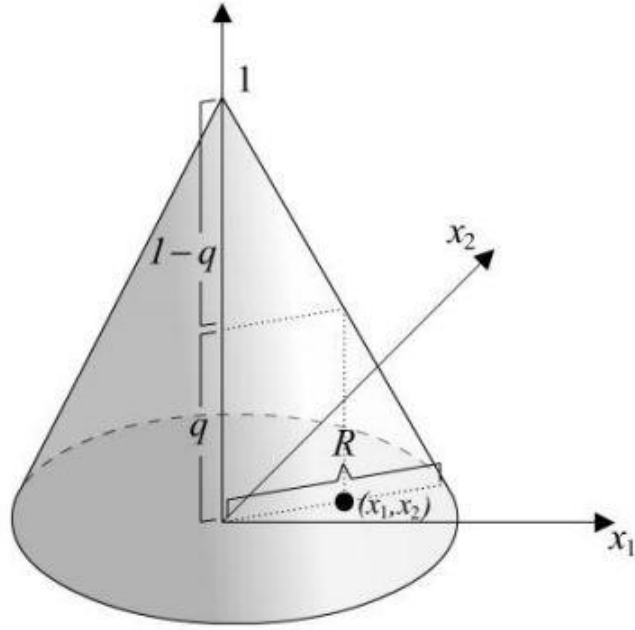


Şekil 2.3 integrasyon alanı A ve Γ_c

J_1 terimi sadece alan integrallerinden ve J_2 terimi ise alan ve çizgi integrallerinin birleşmişinden oluşmaktadır. Denklem (2.41) de kullanılan integrasyon alanı A ve Γ_c şekil 2.3 de görülmektedir. Γ_c ise, Γ_0 açık eğrisinin çatlak yüzeylerini kestiği noktalar ile çatlak ucu noktası arasında tanımlanan düz çizgilerdir. W^+ ve W^- sırasıyla çatlağın üst ve alt yüzeylerinde tanımlanan mekanik gerinim enerjisi yoğunluğu fonksiyonlarını temsil eder. J_1 ve J_2 içerisinde alan integralleri Gauss dördüllemesi tekniği kullanarak nümerik olarak hesaplayabiliriz. Burada mekanik

gerinim enerjisi yoğunluğu farkı ($W^+ - W^-$) içerisinde gerinimler çatlak ucunda çok fazla büyüyerek tekil davranış gösterirler.

J_k -integral hesaplandığı alanın büyüklüğünden bağımsız bir yöntemdir. Dolayısıyla, çatlağın etrafında tanımlanan A alanın büyüklüğü ve şekli hesaplamalarda önem arz etmez. Bu tezdeki hesaplamalarda, A alanı R yarıçapına sahip dairesel bir yüzey olarak tanımlanmıştır. J_k -integral birleşenlerini hesaplarken kullanılan q-fonksiyonu,



Şekil 2.4 Konik q fonksiyonu

Şekil 2.4 de görüldüğü gibi konik davranışa sahip bir fonksiyondur ve aşağıdaki denklem gibi yazılır.

$$q(x_1, x_2) = 1 - \frac{\sqrt{x_1^2 - x_2^2}}{R} \quad (2.44)$$

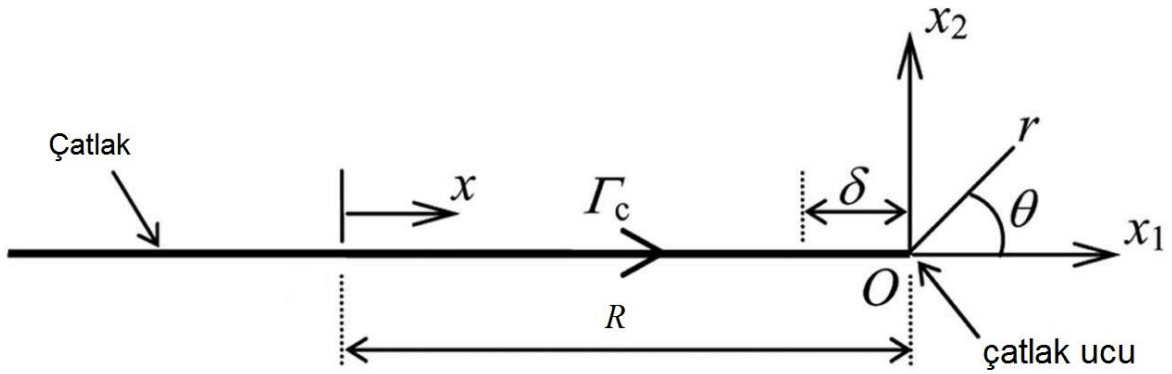
Bu nedenle J_2 içerisinde çizgi integralinin hesabı farklı bir yaklaşım gerektirir. (Eischen 1987a) çizgi integralinin alındığı aralığı iki parçaya ayırarak iki ayrı çizgi integrali oluşturur ve birbirleriyle toplar. Böylece tüm çizgi integralinin hesaplaya biliriz. Bu aralıklardan biri çatlak ucuna yakın ve diğeri çatlak ucundan uzakta tanımlanır. Çatlak ucunda yakın aralığı sahip olan çizgi integrali, mekanik gerinim

enerjisi yoğunluğu farkı üzerinde asimptotik yaklaşımın uygulanması ile kapalı formda hesaplanabilir. Bu yöntem (Kim and Paulino 2002a; Kim and Paulino 2003) tarafından kabul edilmiştir. Bu çalışmada çizgi integral aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_c} (W^+ - W^-) q ds &= \int_0^R (W^+ - W^-) q dx \\ &= \int_0^{R-\delta} (W^+ - W^-) q dx + \int_{R-\delta}^R (W^+ - W^-) q dx \end{aligned} \quad (2.45)$$

Burada R , Γ_c ile gösterilen integrasyon güzergâhının uzunluğu, δ , $(W^+ - W^-)$ ifadesinin asimptotik olarak tanımlandığı aralık, x ise integral değişkenidir. İntegral güzergahı şekil (2.5) de gösterilmiştir. Bu şekilde orijini çatlak ucu olan bir polar koordinat sistemi tanımlanmıştır. Bu koordinat sistemdeki mekanik gerinim enerjisi yoğunluğu farkı aşağıda belirlenmiştir.

$$W^+ - W^- = W(r, \pi) - W(r, -\pi) \quad (2.46)$$



Şekil 2.5 Integrasyon güzergâhı şeması

Gerinim ve gerilim düzlem için çatlak ucun yanında asimptotik gerilme ifadesi aşağıda belirtildiği şekilde verilmiştir (Paulin and Kim 2004).

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^I(\theta) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{II}(\theta) + T_s \delta_{1i} \delta_{1j} \quad (i, j = 1, 2) \quad (2.47)$$

Burada $f_{ij}^I, f_{ij}^{II}, (i, j = 1, 2)$ bir fonksiyon T_s ve θ bağılı olarak tanımlanır tekil olmayan gerilim birleşimi ya da T-gerilim de diye biliriz. (2.19), (2.46) ve (2.47) denklemleri kullanarak asimptotik yaklaşımı mekanik gerilim enerjisi yoğunluğu farkı için aşağıda gibi ifade edilir.

$$W^+ - W^- = W(r, \pi) - W(r, -\pi) \cong -\frac{4K_{II}T_s}{E'\sqrt{2\pi r}} \quad 0 < r < \delta \quad (2.48)$$

Denklem (2.45) deki fark $(R - \delta) < x < R$ arasında asimptotik olarak ifade edilebilir. Dolayısıyla, denklem 2.41 nin sağ tarafındaki ikinci integral denklem (2.44) ve (2.48) kullanarak kapalı formda hesaplanabilir. Entegrasyon gerçekleştirdikten sonra, J_2 sonunda aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$J_2 = \iint_A (\sigma_{ij}u_{i,2} - W\delta_{2j}) q_j dA - \iint_A (W_{,2})_{expl} q dA - \int_0^{R-\delta} (W^+ - W^-) q dx + \frac{8K_{II}T_s\sqrt{\delta}(3L - \delta)}{3LE'\sqrt{2\pi}} \quad (i, j = 1, 2) \quad (2.49)$$

2.2 Karışık Mod Gerilme Şiddeti Çarpanları ve T-Gerilmesi Hesapları

Denklem (2.49) da J_2 için iki bilinilmeyen parametre yanı K_{II} ve T_s vardır. Karışık mod gerilme şiddeti çarpanlar ve T-gerilim hesaplamak için yeni bir parametre \hat{J}_2 kullanmalıyız. Bu parametre aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\hat{J}_2 = \iint_A (\sigma_{ij}u_{i,2} - W\delta_{2j}) q_j dA - \iint_A (W_{,2})_{expl} q d - \int_0^{R-\delta} (w^+ - w^-) q dx \quad (i, j = 1, 2) \quad (2.50)$$

Denklem (2.49) ve (2.50) kullanarak aşağıdaki denklem yazabiliriz.

$$\hat{J}_2 = J_2 - \frac{8K_{II}T_s\sqrt{\delta}(3L - \delta)}{3LE'\sqrt{2\pi}} \quad (2.51)$$

Çözüm aşamasında \hat{J}_2 parametresi iki farklı δ değeri için hesaplanır. Başka bir değişler, δ_1 ve δ_2 değerleri için sırasıyla \hat{J}_2^1 ve \hat{J}_2^2 değerleri elde edilir.

$$\hat{J}_2^1 = J_2 + \sqrt{\delta_1} \left(1 - \frac{\delta_1}{3R}\right) S \quad (2.52)$$

$$\hat{J}_2^2 = J_2 + \sqrt{\delta_2} \left(1 - \frac{\delta_2}{3R}\right) S \quad (2.53)$$

Burada,

$$S = -\frac{8K_{II}T_s}{\sqrt{2\pi E'}} \quad (2.54)$$

Denklemler (2.52) ve (2.53) ortak çözüldüğünde J_2 ve S aşağıdaki gibi elde edilir.

$$J_2 = \frac{\sqrt{\delta_1} \left(1 - \frac{\delta_1}{3R}\right) \hat{J}_2^2 - \sqrt{\delta_2} \left(1 - \frac{\delta_2}{3R}\right) \hat{J}_2^1}{\sqrt{\delta_1} \left(1 - \frac{\delta_1}{3R}\right) - \sqrt{\delta_2} \left(1 - \frac{\delta_2}{3R}\right)} \quad (2.55)$$

$$S = \frac{\hat{J}_2^1 - \hat{J}_2^2}{\sqrt{\delta_1} \left(1 - \frac{\delta_1}{3R}\right) - \sqrt{\delta_2} \left(1 - \frac{\delta_2}{3R}\right)} \quad (2.56)$$

J_k -integral birleşenlerin hesaplamak için denklem (2.42) ve (2.55) kullanabiliriz. J_1 ve J_2 hesapladıktan sonra, denklem (2.14) ve (2.15) kullanarak Karışık mod gerilme şiddeti çarpanlar denklemleri aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

$$K_I = \pm \left\{ \frac{E'J_1}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{J_2}{J_1}\right)^2} \right] \right\}^{1/2} \quad (2.57)$$

$$K_{II} = \pm \left\{ \frac{E'J_1}{2} \left[1 \mp \sqrt{1 - \left(\frac{J_2}{J_1}\right)^2} \right] \right\}^{1/2} \quad (2.58)$$

Denklem (2.57) ve (2.58) ile hesaplanan dört K_I ve K_{II} değerinden hangisinin doğru olduğu öngörülen bir ayrıştırma tekniği sayesinde belirlenir (Sollero and Aliabadi 1993). Bu ayrıştırma tekniğinde, biri alt biri üst çatlak yüzeyinde yer alan çatlakla yakın iki noktanın, görel normal ve görel teğet deplasmanları hesaplanmaktadır. Şekil 2.5 referans alınarak, görel normal ve görel teğet deplasmanları aşağıda sırasıyla belirtilmiştir.

$$\Delta_n = u_2^+ - u_2^- \quad (2.59)$$

$$\Delta_t = u_1^+ - u_1^- \quad (2.60)$$

Burada u_2 ve u_1 sırasıyla x_2 ve x_1 eksenlerinde tanımlanan mutlak deplasmanlardır. Üstsimgeler (+) ve (-) sırasıyla çatlakın üst ve alt yüzeyin gösterir. Sonlu elemanlar analizlerinde Δ_n ve Δ_t çatlakın ucunun yakın çevresinde hesaplanır. Denklem (2.57) de parantez içindeki işaret aşağıdaki koşullara dayanarak seçmemiz gerekir.

$$\text{Eğer } |\Delta_n| \geq |\Delta_t|, \quad [+] \text{ seçeriz} \quad (2.61)$$

$$\text{Eğer } |\Delta_n| < |\Delta_t|, \quad [-] \text{ seçeriz} \quad (2.62)$$

Denklem (2.58) de parantez içindeki işaret, Denklem (2.57) de parantez içindeki işaretin tersi olmaktadır. Gerilme şiddeti çarpanları hesapladıktan sonra T-gerilim, aşağıda yazıldığı gibi bula biliriz.

$$T_s = -\frac{\sqrt{2\pi}E'}{8K_{II}}S \quad (2.63)$$

3. SONLU ELEMANLAR YUGULAMASI

3.1 Sonlu Elemanlar Yöntemi

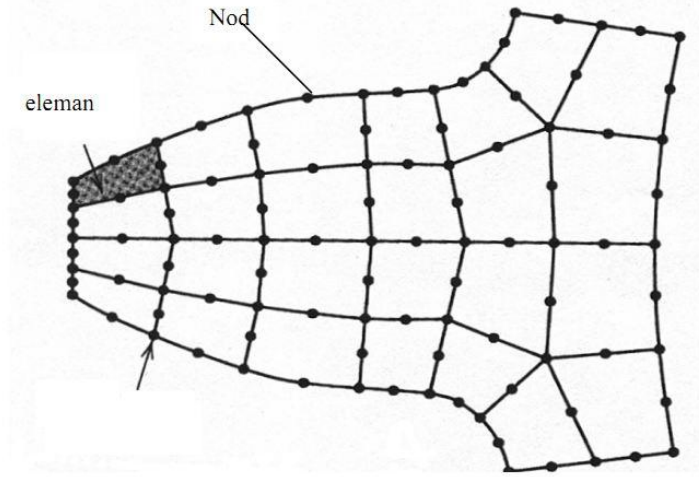
Sonlu elemanlar metodu matematikçilerden ziyade daha çok mühendisler tarafından geliştirilmiştir. Yöntem ilk olarak gerilme analizi problemlerine uygulanmıştır. Tüm bu uygulamalarda bir büyüklük alanının hesaplanması istenmektedir. Gerilme analizinde bu değer deplasman alanı veya gerilme alanı; ısı analizinde sıcaklık alanı veya ısı akısı; akışkan problemlerinde ise akım fonksiyonu veya hız potansiyel fonksiyonudur. Hesaplanan büyüklük alanın almış olduğu en büyük değer veya en büyük gradyen pratikte özel bir öneme haizdir.

Sonlu elemanlar metodunda yapı, davranışı daha önce belirlenmiş olan bir çok elemana bölünür. Elemanlar “nod” adı verilen noktalarda tekrar birleştirilirler (Şekil 3.1). Bu şekilde cebrik bir denklem takımı elde edilir. Gerilme analizinde bu denklemler nodlardaki denge denklemleridir. İncelenen probleme bağlı olarak bu şekilde yüzlerce hatta binlerce denklem elde edilir. Bu denklem takımının çözümü ise bilgisayar kullanımını zorunlu kılmaktadır.

Sonlu elemanlar metodunda temel fikir sürekli fonksiyonları bölgesel (genellikle polinomlar) ile temsil etmektir. Bunun anlamı bir eleman içerisinde hesaplanması istenen büyüklüğün (örneğin deplasmanın) değeri o elemanın nodlardaki değerler kullanılarak interpolasyon ile bulunur. Bu nedenle sonlu elemanlar metodunda bilinmeyen ve hesaplanması istenen değerler nodlardaki değerlerdir. Bir varyasyonel prensip(örneğin; enerjinin minimum olması prensibi) kullanılarak büyüklük alanının nodlardaki değerleri için bir denklem takımı elde edilir. Bu denklem takımının matris formundaki aşağıdaki gibi yazılır.

$$[K].[D] = [R] \quad (3.1)$$

Burada $[D]$ büyüklük alanının nodlardaki bilinmeyen değerlerini temsil eden vektör, $[R]$ bilinen yük vektörü ve $[K]$ ise bilinen sabitler matrisidir. Gerilme analizinde $[K]$ rijitlik matrisi olarak bilinmektedir.



Şekil 3.1 Bir sonlu eleman modelinde nod noktaları ve elemanlar

Bu tezde, termal kırılma parametrelerinin belirlenebilmesi için, izotropik fonksiyonel derecelenmiş malzeme ortam üzerindeki düğüm noktalarının sıcaklık değerlerini bilinmesi gerekmektedir. İzotropik fonksiyonel derecelenmiş malzemelerdeki sürekli ısı akışı aşağıdaki denklemlerle temsil edilir.

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(k(x_1, x_2) \frac{\partial T}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(k(x_1, x_2) \frac{\partial T}{\partial x_2} \right) = 0 \quad (3.2)$$

Burada k ısı iletkenlik katsayısıdır.

İzotropik fonksiyonel derecelenmiş malzemeler için sıcaklık süreksiz rejimdeki dağılımları aşağıdaki gibidir.

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(k(x_1, x_2) \frac{\partial T}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(k(x_1, x_2) \frac{\partial T}{\partial x_2} \right) = \rho(x_1, x_2) C(x_1, x_2) \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.3)$$

Burada t zamanı, ρ kütle yoğunluğunu ve C ise spesifik ısı katsayısını gösterilmektedir.

Bu tezde yürütülen nümerik analizlerin önemli amacı, J_k -integral içerisinde gösterilen alan ve eğri integrallerinin bulmasıdır. Bu integralleri cebirsel zorluklarından dolayı hesaplamak çok zordur. Bu neden ile integralleri alınan fonksiyonlar yeterli dereceye sahip polinomlar ile yaklaşık olarak temsil edilirler. Bunun nedeni polinomların integralleri tam olarak bulunmaktadır. Bu tezde, J_k -

integralinde olan integrallerin hesaplayabilmesi için nümerik integrasyon yöntemi kullanılmıştır.

Aşağıda gösterildiği gibi bir integral yazalım,

$$A = \int_{x_a}^{x_b} F(x) dx \quad (3.4)$$

$F(x)$ polinom yaklaşım yöntemi ile aşağıda yazıldığı gibi temsil edilebilir,

$$F(x) \approx \sum_{i=1}^N F_i \psi_i(x) \quad (3.5)$$

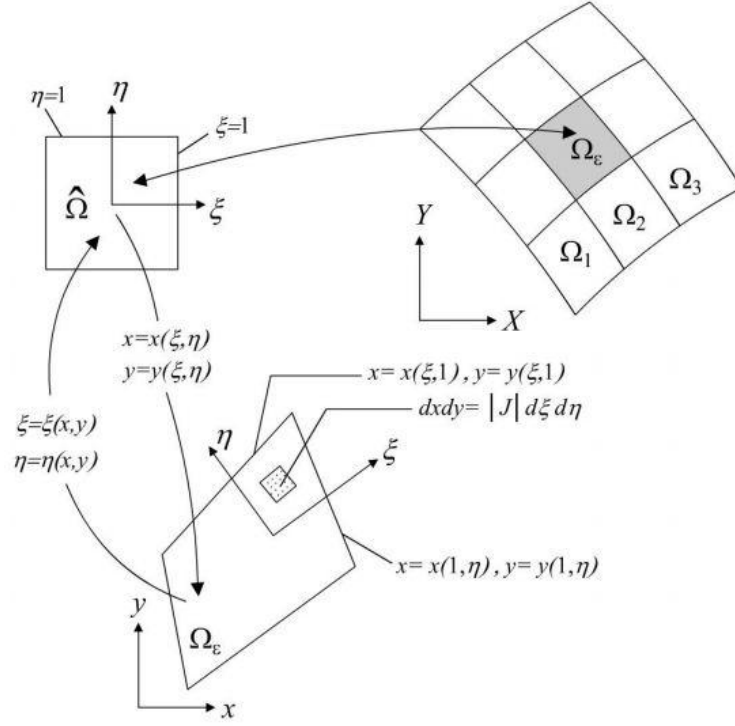
Burada F_i , $F(x)$ ifadesinin $[x_a, x_b]$ aralığının i ' inci noktasındaki değerini gösterir ve $\psi_i(x)$ ise $(N - 1)$ derecesine sahip bir polinomdur.

Genel olarak dördülleme formülasyonu aşağıda yazıldı gibidir.

$$A = \int_{x_a}^{x_b} F(x) dx \approx \sum_{i=1}^r F(x_i) W_i \quad (3.6)$$

Burada x_i dördülleme noktaları ve W_i ise dördülleme ağırlıklarıdır.

Eğri dörtgen elemanları, çizgisel olmayan hatalara sahip alanların doğru temsili için kullanılması gereken eleman çeşitleridir. Yalnız bu elemanlarda tanımlanan şekli fonksiyonlarının ve integrallerinin hesaplanması oldukça güçtür. Bu nedenle, eğri dörtgen elemanlar üzerinde gösterilen integraller düzgün dörtgen eleman integralleri halinde yazılır. Bu değişiklik şekli 3.2 de görülmektedir. Gauss-legendre dördüllemesi J_k -integrali hesaplamalarında kullanılmıştır. Gauss-legendre dördüllemesi, Şekli 3.2 de $\hat{\Omega}$ sembolü ile temsil edilen kare alan üzerinde integral hesaplamayı gerektirir ve (ξ, η) koordinat sistemi $[-1,1]$ aralığında yer alır. Hesaplama yaparken bu aralığı kullanabilmek için, genel koordinat sisteminden, yerel koordinat sistemine dönüş yapılmıştır. Yerel koordinat sistemi değerleri her zaman $[-1,1]$ aralığında tanımlanır ve kare elemanın merkezi ise koordinat sisteminin orijinin ifade etmektedir.



Şekil 3.2 esas elemanın eğri dörtgen elemana dönüşümü

Eğer yerel koordinat sistemi kullanılırsa 2 şekilde kolaylık sağlar. Bu iki şekil aşağıda ifade edilmiştir.

- 1) interpolasyon fonksiyonlarının oluşturulmasında
- 2) nümerik integrasyon sırasında kullanılan Gauss-legendre dördülmesinde gereklidir.

$\hat{\Omega}$ Sembolü ile gösterilen elemanı 'Esas Eleman' olarak ifade edelim. J_k -integral bulması için sonlu eleman ağındaki kullanılan her bir eleman, $\hat{\Omega}$ şeklinde yazılır.

$\hat{\Omega}$ ve Ω_ϵ arasındaki dönüş, bir koordinat değişimi ile aşağıdaki denklemleri ((3.7) ve (3.8)) kullanarak hesaplanır.

$$x = \sum_{i=1}^m x_i \psi_i(\xi, \eta) \quad (3.7)$$

$$y = \sum_{i=1}^m y_i \psi_i(\xi, \eta) \quad (3.8)$$

Burada $\psi_i(\xi, \eta)$ şekli fonksiyonlarının ifade eder. Genel olarak problemdeki başka değişkenlerin koordinat dönüşü de, denklemler (3.7) ve (3.8) ye benzer bir ifade ile gösterilir. Bu anlatım (3.9) denkleminde gösterilmiştir.

$$u(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n u_i \hat{\psi}_i(\xi, \eta) \quad (3.9)$$

Sırasıyla geometrik ve başka değişkenlerin koordinat geçişini yapmak için kullanılan ψ_i ve $\hat{\psi}_i$ ifadeleri aynı değildir ve birbirlerinden farklıdır.

Geometri ve problemdeki değişkenler için kullanılan göreceli yaklaşım derecelerine bağlı olarak, sonlu elemanlar denklemleri üç farklı türe ayrılır. Bunlardan birincisi olan üst parametrik yaklaşımda, geometrik değişkenler için kullanılan yaklaşım dereceleri, problemin başka değişkenleri için kullanılan yaklaşım derecelerinden daha büyüktür ($m > n$). İkinci yaklaşımda ise, eşit parametrikte iki tür değişken için kullanılan yaklaşım dereceleri birbirlerine beraberdır ($m = n$). Üçüncü yaklaşım çeşidi olan alt parametrik yaklaşımda, geometrik değişkenler için kullanılan yaklaşım dereceleri, problemin başka değişkenleri için kullanılan derecelerinden daha azdır ($m < n$).

Bu çalışmada, tüm J_k -integral değişkenleri eşit parametrik yaklaşımı kullanarak ve denklem (3.10) vasıtasıyla hesaplanmaktadır.

Bu nedenle bir çizgi integrali, Gauss-Legendre dördüllemesi de kullanılarak aşağıda gösterildiği gibi ifade edilebilir.

$$\int_a^b F(x)dx = \int_{-1}^1 \bar{F}(\xi)d\xi \approx \sum_{i=1}^r F(\xi_i)w_i \quad (3.10)$$

Burada

$$\bar{F}(\xi) = F(x(\xi))J(\xi), \quad dx = Jd\xi \quad (3.11)$$

$$J = \sum_{i=1}^m x_i \frac{d\psi_i}{d\xi} \quad (3.12)$$

r , taban noktası sayısının ve w_i ise ağırlık faktörünün ifade eder.

Alan integralin hesaplamak için yine Gauss-Legendre dördülmesi vasıtasıyla, aşağıda gösterildiği gibi temsil edilebilir.

$$\int_{\Omega} F(x, y) dx dy = \int_{\Omega} \bar{F}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_{-1}^1 \left[\int_{-1}^1 \bar{F}(\xi, \eta) d\xi \right] d\eta$$

$$\approx \int_{-1}^1 \left[\sum_{i=1}^N \bar{F}(\xi_i, \eta) w_i \right] d\eta \approx \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \bar{F}(\xi_i, \eta_j) w_i w_j \quad (3.13)$$

$$\bar{F} = (\xi, \eta) = F(x(\xi), y(\eta)) |J|, \quad dx dy = |J| d\xi d\eta \quad (3.14)$$

Burada $|J|$, jacobian matris determinantın ifade eder. Jacobian matris ve determinantı aşağıda verilmiştir.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum x_i \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} & \sum y_i \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} \\ \sum x_i \frac{\partial \psi_i}{\partial \eta} & \sum y_i \frac{\partial \psi_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

$$|J| = J_{11}J_{22} - J_{21}J_{12} \quad (3.16)$$

Bu tezde, ikinci dereceden Gauss Legendre dördülmesi kullanılmıştır. İkinci dereceden Gauss Legendre dördülmesi kullanılarak, çizgi integrali için tanımlanan gauss noktaları aşağıda tanımlanmıştır.

$$(\xi_i, \eta_j) = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, -1 \right) \quad (3.17)$$

$$w_i = 1 \quad (3.18)$$

Alan integrali için gauss noktaları ve ağırlıkları aşağıda belirtilmiştir.

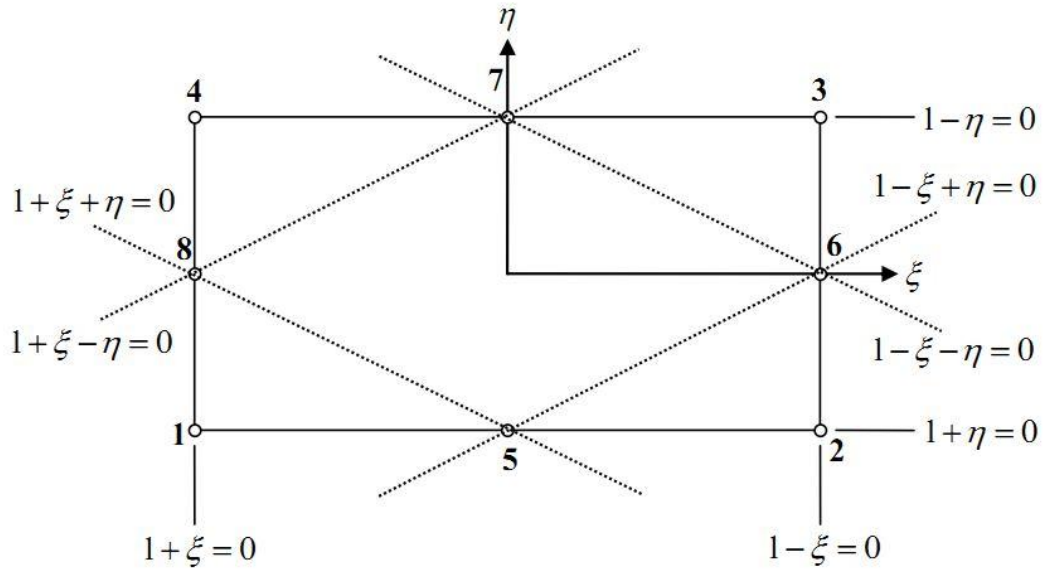
$$(\xi_i, \eta_j) = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad (3.19)$$

$$w_i = 1, \quad w_j = 1 \quad (3.20)$$

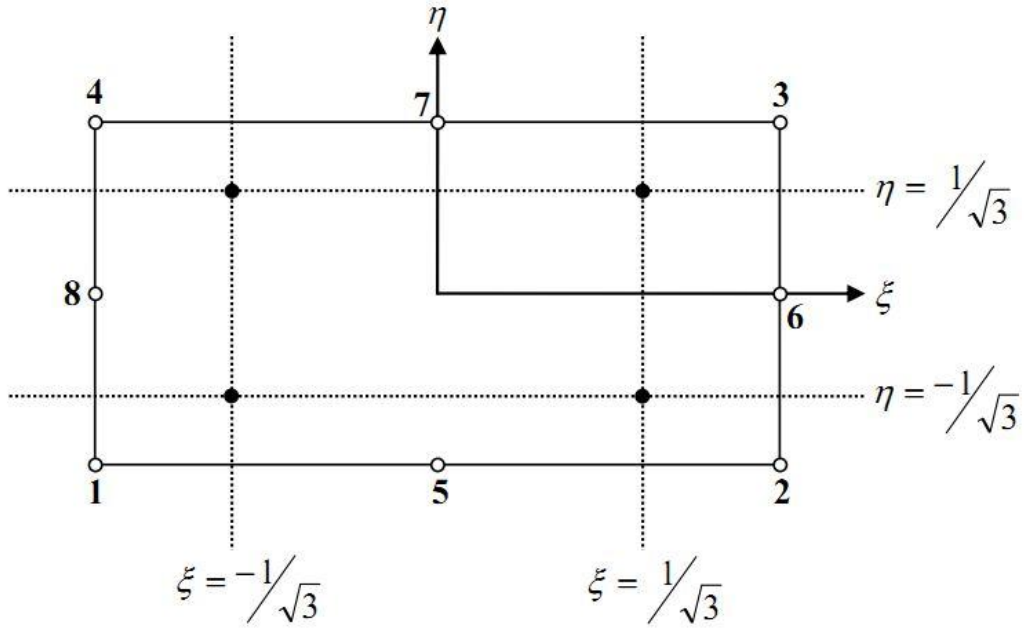
Bu tezde, yukarıda yazılan nümerik prosedür, genel amaçlı sonlu elemanlar yöntemi analizi yazılımı olan ANSYS (1997) kullanarak entegre edilmiştir. Bu

çalışmada, toplam 2 tür analiz yapılmıştır. Birincisi yapısal ve ikincisi ısı transfer analizidir. Termal analizinde, sürekli rejim ısı geçişi analizleri yapılarak her düğüm noktasındaki sıcaklık miktarları, denge koşulunda tespit edilmiştir. Daha sonra her düğüm noktası için sürekli rejim yapısal analizi ile ısısal yüklemenin neden olduğu deplasmanlar hesaplanmıştır. Isı geçişi ANSYS yazılımında yer alan PLANE77 elemanı kullanılmıştır. Bu elemanın düğüm noktaları sıcaklık serbestlik derecesine sahiptirler. Bütün yapısal analizlerde ise PLANE82 elemanı ile gerçekleştirilmiştir. Bu elemanın düğüm noktaları deplasman serbestlik derecesine sahiptirler.

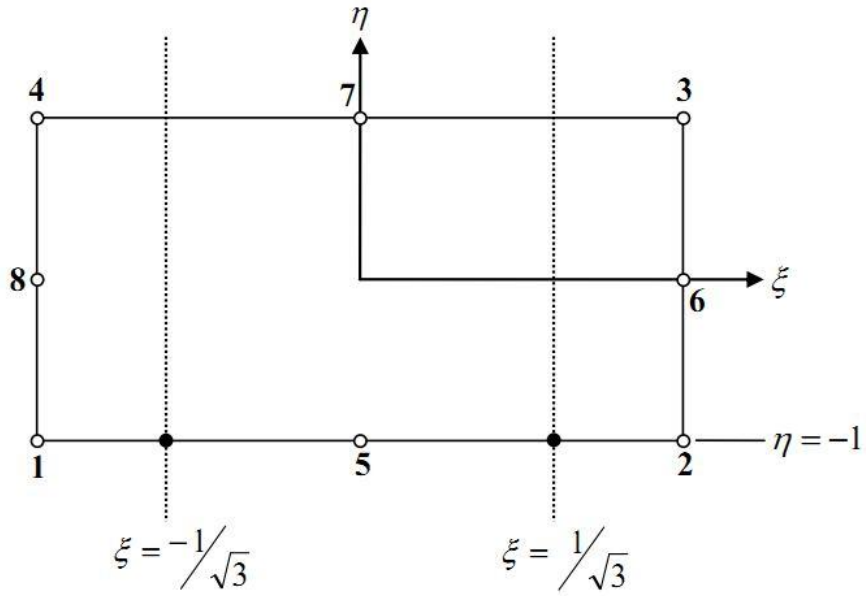
Bu iki sonlu eleman şekil 3.3 de gösterilmiştir. Ayrıca bu elemanlarda gösterilen gauss noktalarının yerleşimi alan ve çizgi integralleri için şekil 3.4 ve 3.5 de ifade edilmiştir.



Şekil 3.3 PLANE 77 ve PLANE 82 elemanları



Şekil 3.4 alan integrali için Gauss nokta pozisyonları



Şekil 3.5 çizgi integrali için Gauss nokta pozisyonları

PLANE 77 ve PLANE 82 elemanları için şekil fonksiyonları denklemler (3.21) - (3.28) arasında yazılmıştır.

$$\psi_1 = -\frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \xi + \eta) \quad (3.21)$$

$$\psi_2 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta) \quad (3.22)$$

$$\psi_3 = -\frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 + \xi + \eta) \quad (3.23)$$

$$\psi_4 = \frac{1}{2}(1 - \xi)(1 - \eta^2) \quad (3.24)$$

$$\psi_5 = \frac{1}{2}(1 + \xi)(1 - \eta^2) \quad (3.25)$$

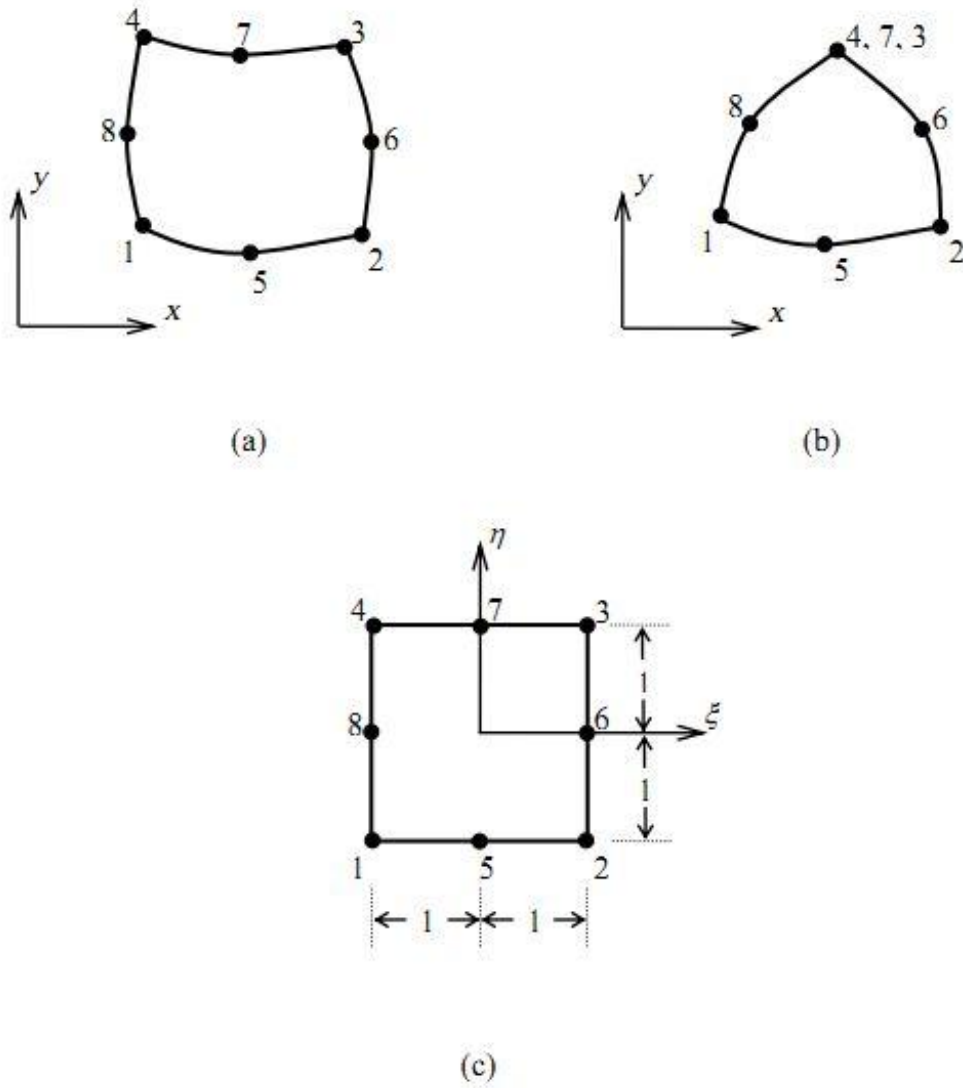
$$\psi_6 = -\frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \xi - \eta) \quad (3.26)$$

$$\psi_7 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta) \quad (3.27)$$

$$\psi_8 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \xi - \eta) \quad (3.28)$$

PLANE 82 ve PLANE 77 elemanları 8 düğüm noktalı eğri dörtgen elemanlardır. Bu tezde, PLANE 82 ve PLANE 77 elemanların ilk 3 düğüm noktası şekil 3.6 de gösterildiği gibi birleştirilerek 6 düğümlü elemanlar tanımlanmıştır.

Bu dönüşümün nedeni, üçgen elemanların geometriyi daha iyi ifade ederek çok daha doğru sonuç vermeleridir. Dolayısıyla, sonlu elemanlar ağı bu üçgen elemanlar ile ifade edilmiştir. Bu üçgen elemanlar 6 düğüm noktalı görünseler de, aslında 8 düğüm noktasından oluşması neden ile, şekil fonksiyonları 8 düğümlü eğri dörtgen elemanlar baz alınarak yazılmıştır.



Şekil 3.6 a) Genel koordinat sistemindeki bir eğri dörtgen eleman. b) Genel koordinat sistemindeki bir üçgen eleman. c) Eşit parametrik sistemdeki dörtgen ve üçgen eleman gösterimi.

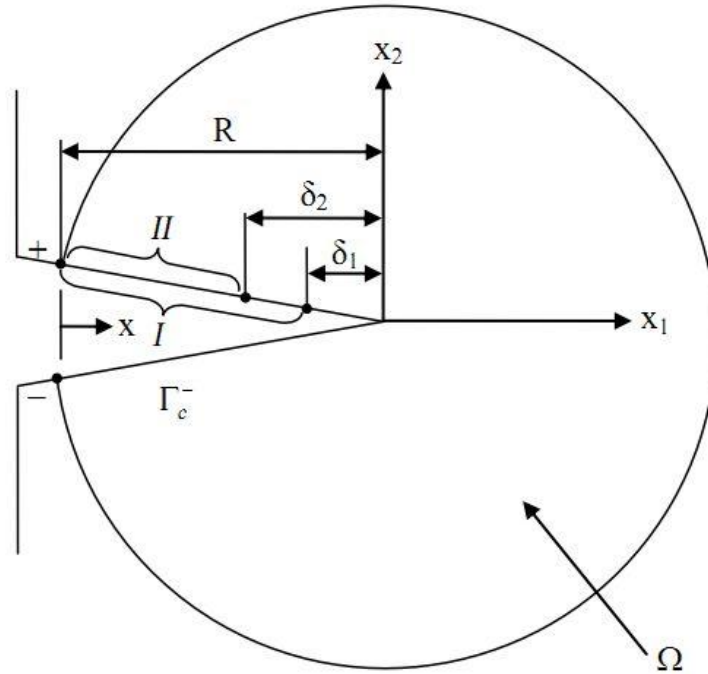
3.2 Sonlu elemanlar prosedürü

Bu tezde ikinci bölümde izah edilen J_K -integrali yöntemi, ANSYS in programlama dili olan APDL (ANSYS Parametrik Design Language) ortamında yazılan kod ile entegre edilmiştir. Isı transferi ve yapısal analizler sonunda, J_K -integrali yöntemine bağlı ve çatlak ucunda tanımlanan birleşenler ile gerilme şiddeti çarpanları, enerji salınım oranı ve T-gerilmesi APDL ortamında hesaplanmaktadır.

Alan integrali bulması için, çatlak ucu çevresinde dört farklı yarıçapa sahip dairesel alanlar gösterilmiştir. J_K -integrali yöntemi ile her bir farklı alan yarıçapında çatlak ucunda parametreleri için aynı değerleri elde edilmesi gösterilecektir. Yani, J_K - integrali yönteminin kullanılan alanın şekli ve boyutundan bağımsız sonuç verdiği ispatlanmış olacaktır.

Çizgi integralleri, şekil 3.7 de gösterildiği gibi dört parça çizgi üzerinde tanımlanan elemanlar üzerinde hesaplanmaktadır. Bu dört parça çizgiden ikisi çatlakın alt yüzünde, diğer ikisi de çatlakın üst yüzünde belirtilir. Çatlakın üst yüzündeki ilk çizgi parçası, dairesel alan yüzeyinin çatlakın üst yüzeyini kestiği nokta ile çatlak ucundan δ_1 kadar uzaklıkta olan üst yüzey noktasının arasında belirtilir. Çatlakın üst yüzeyindeki ikinci çizgi parçası ise, çatlak ucundan δ_2 kadar uzaklıkta olan üst yüzey noktası ile, dairesel alan yüzeyinin çatlakın üst yüzeyini kestiği noktası arasında tanımlanır. Alt yüzey üzerindeki diğer iki çizgi parçasını da bulmak için üst yüzey çizgilerini bulmakta kullanılan aynı işlem uygulanır.

Alan integralleri hesaplaması için, yukarıda çizgi parçalarını tanımlarken kullanılan dairesel alan olan ve Ω olarak ifade edilen alanı kullanılır (şekil 3.7).



Şekil 3.7 Ω alanının kapsadığı bölgede tanımlanan I. Ve II. Çizgiler

Bundan sonraki etapta, J_1 ve \hat{J}_2 bileşenleri hesaplaması için sonlu elemanlar yöntemi kullanılacaktır. \hat{J}_2 de çizgi integrali oldu için, öncelikle bu bileşenin hesabını yapalım.

\hat{J}_2 integrali denklem (2.46) de tanımlanmıştır.

$$\hat{J}_2 = \iint_{\Omega} (\sigma_{ij} u_{i,2} - W \delta_{2j}) q_{,j} d\Omega - \iint_{\Omega} (W_{,2})_{expl} q d\Omega - \int_0^{R-\delta} (W^+ - W^-) q dx, \quad (i, j = 1, 2) \quad (3.29)$$

Çizgi integralleri denklemler (3.10) – (3.12) vasıtasıyla ile hesaplanmaktadır. Çizgi integrali hesaplaması için gerekli olan gerinim enerjisi yoğunluğu değeri, denklem (2.19) kullanarak elde edilir. Denklem (2.44) da tanımlanan q fonksiyonu, şekil 3.5 de gösterilen çizgi elemanın her iki gauss noktasında da hesaplanmaktadır. Örneğin, $\delta = \delta_1$ için üst çatlak yüzeyinde tanımlanan çizgi integrali aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$L_1 = \int_0^{R-\delta_1} W^+ q dx \quad (3.30)$$

$$L_1 \approx \sum_{i=1}^2 W_i^+ \left(\frac{R - |x(\xi_i)|}{R} \right) |J| \quad (3.31)$$

Burada R , şekil 3.7 de tanımlanan dairesel alanın yarıçapını, $|x|$ mutlak değeri ve i indisi gauss noktalarını ifade eder. Jacobian fonksiyonu denklem (3.15) de tanımlanmıştır. Üst çatlak yüzeyi için L_2 değerinin de hesaplanması lazımdır. L_2 hesabı için, denklemler (3.30)-(3.31) vasıtasıyla $\delta = \delta_2$ için hesaplanmaktadır. Alt çatlak yüzey için tanımlanan çizgi integralleri L_3 ve L_4 , sırası ile $\delta = \delta_1$ ve $\delta = \delta_2$ için aynı işlemi kullanarak hesaplanmaktadır.

\hat{J}_2 'nin alan integrali bileşenini hesaplamak için, çizelge 3.1 de tanımlanan bütün değişkenler hesaplanmalıdır. Bu değişkenler şekil 3.7 da gösterilen Ω alanı dâhilindeki her elemanın dört gauss noktasının her biri için elde edilmelidir.

Çizelge 3.1 \hat{f}_2 integrali bileşenleri

Bileşen	Tanım	Açık şekli
σ_{ij}	Eleman üzerindeki gerilme dağılımı	$\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$
$u_{i,2}$	Deplasmanların x_2 eksenine göre türevleri	$\frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$
W	Mekanik gerinim enerjisi yoğunluğu fonksiyonu	Denklem (2.19)
$(W_{,2})_{expl}$	Mekanik gerinim enerjisi yoğunluğu fonksiyonunun x_2 eksenine göre türevleri	Denklem(2.30)
J	Jacobian determinanı	Denklem(3.16)
q	q fonksiyonu	Denklem(2.44)

\hat{f}_2 ' nin alan integrali bileşenini \hat{f}_2^{domain} olarak gösterelim.

$$\hat{f}_2^{domain} = \iint_{\Omega} ((\sigma_{ij}u_{i,2} - W\delta_{2,j}) q_{,j} - (W_{,2})_{expl}q) d\Omega, \quad (i, j = 1, 2) \quad (3.32)$$

Denklem (3.32), eşit-parametrik nümerik formülasyonu yardımı ile aşağıda gösterildi gibi ifade edilir.

$$\hat{f}_2^{domain} = \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 \hat{f}_2^{domain}(\xi_k, \eta_l) \quad (3.33)$$

Denklem (3.32) de verilen gerilme bileşenleri (σ_{ij}), denklem (2.10) vasıtasıyla düzlem gerilmesi varsayımı ve denklem (2.11) yardımı ile düzlem gerinim varsayımı için hesaplanır. Tüm bu gerilme değerleri, gerinim değerleri cinsinden hesaplanır. Aşağıda verilen deplasman birleşenleri kullanarak gerinim değerleri hesaplanır.

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial \psi_i}{\partial x_1} u_{1i} \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial \psi_i}{\partial x_2} u_{1i} \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial \psi_i}{\partial x_1} u_{2i} \quad (3.36)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial \psi_i}{\partial x_2} u_{2i} \quad (3.37)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^8 \frac{\partial \psi_i}{\partial x_2} u_{1i} + \sum_{i=1}^8 \frac{\partial \psi_i}{\partial x_1} u_{2i} \right) \quad (3.38)$$

Burada u_1 , x_1 eksenindeki deplasmanı, u_2 ise x_2 eksenindeki deplasmanı ifade etmektedir.

Mekanik gerinim enerjisi yoğunluğu fonksiyonu W ; gerilme, gerinim ve malzeme özellikleri cinsinden ifade edildiği için, denklemler (2.21) ve (2.22) sırasıyla düzlem gerinim ve düzlem gerilim için yazılmış oldu kullanarak kolaylıkla hesaplanabilir.

Mekanik gerinim enerjisi yoğunluğu fonksiyonunun türevini, $(W_2)_{expl}$ bulmak için aşağıdaki parametreleri hesaplamak lazım.

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda}, \frac{\partial W}{\partial \mu}, \frac{\partial W}{\partial \alpha}, \frac{\partial W}{\partial (\Delta T)} \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial (\Delta T)}{\partial x_2} = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial \psi_i}{\partial x_2} (\Delta T)_i \quad (3.40)$$

Şekil fonksiyonlarının genel koordinat sistemi eksenlerine göre olan türevleri aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial \eta} = \frac{\partial \psi_i}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \eta} + \frac{\partial \psi_i}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} = \frac{\partial \psi_i}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi_i}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \quad (3.42)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \psi_i}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial \xi} & -\frac{\partial x_2}{\partial \eta} \\ -\frac{\partial x_1}{\partial \xi} & \frac{\partial x_1}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

J_1 integrali hesabı, \hat{f}_2^{domain} integralinde kullanılan işlemin aynısıdır. J_1 integrali denklem (2.38) da verilen şekliyle aşağıdaki gibi temsil edilir.

$$J_1 = \iint_{\Omega} (\sigma_{ij} u_{i,1} - W \delta_{1j}) q_{1,j} d\Omega - \iint_{\Omega} (W_{,1})_{expl} q d\Omega, \quad (i, j = 1, 2) \quad (3.44)$$

Bu integrali hesaplamak için çizelge 3.2 de gösterilen bileşenler, şekil 3.4 de görülen her bir gauss noktası için hesaplanması gerekir.

Çizelge 3.2 J_1 integrali bileşenleri

Bileşen	Tanım	Açık Şekli
σ_{ij}	Eleman üzerindeki gerilme dağılımı	$\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$
$u_{i,1}$	Deplasmanların x_1 eksenine göre türveleri	$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$
w	Mekanik gerinim enerjisi yoğunluğu fonksiyonu	Denklem (2.19)
$(w_{,1})_{expl}$	Mekanik gerinim enerjisi yoğunluğu fonksiyonunun x_1 eksenine göre türveleri	Denklem (2.30)
J	Jacobian determinanti	Denklem(3.16)
q	q fonksiyonu	Denklem (2.44)

Eşit-parametrik nümerik formülasyonu yardımı ile, J_1 integrali aşağıda gösterildiği gibi yeniden yazılır.

$$J_1 = \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 \bar{J}_1(\xi_k, \eta_l) \quad (3.45)$$

Denklem (3.44) de verilen gerilme bileşenleri (σ_{ij}), denklem (2.10) vasıtasıyla düzlem gerilmesi varsayımı ve denklem (2.11) yardımı ile düzlem gerinim varsayımı için hesaplanır. Gerinim değerlerini hesaplayabilmek için denklemler (3.34) – (3.38) kullanılmaktadır.

Mekanik gerinim enerjisi yoğunluğu fonksiyonu, gerilme, gerinim ve malzeme özellikleri cinsinden gösterildiği için, denklemler (2.21) ve (2.22) sırasıyla düzlem gerinim ve düzlem gerilim için yazılmış oldu kullanarak kolaylıkla hesaplanabilir.

Mekanik gerinim enerjisi yoğunluğu fonksiyonunun türevini, $(W_{,1})_{expl}$ bulmak için aşağıdaki parametreleri hesaplamak lazım.

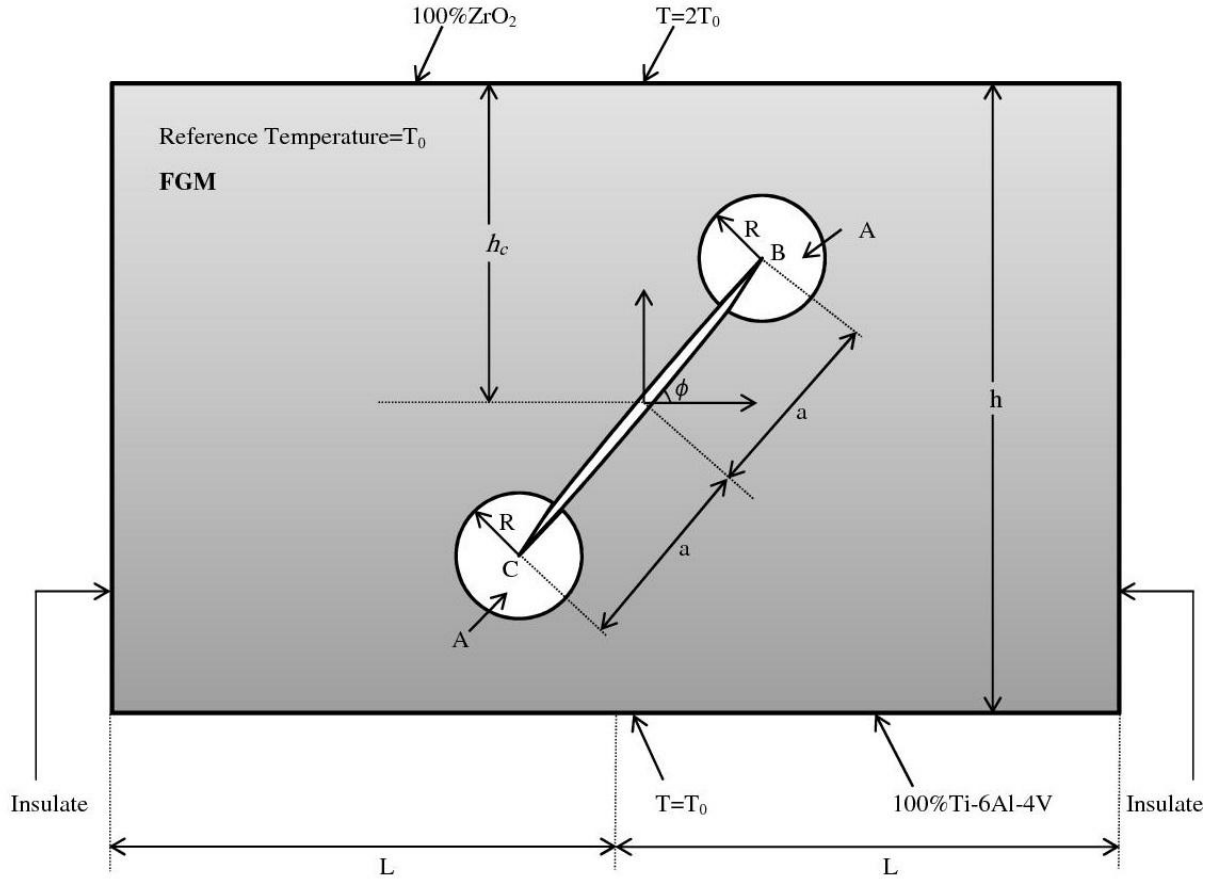
$$\frac{\partial W}{\partial \lambda}, \frac{\partial W}{\partial \mu}, \frac{\partial W}{\partial \alpha}, \frac{\partial W}{\partial (\Delta T)} \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial (\Delta T)}{\partial x_1} = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial \psi_i}{\partial x_1} (\Delta T)_i \quad (3.47)$$

Böylelikle J_k -integrali bileşenleri, yukarıda tanımlanan matematiksel prosedür doğrultusunda nümerik olarak hesaplanmaktadır. Bu bileşenler daha sonra, çatlak ucu parametrelerinin hesabında kullanılmaktadır.

4. ANALİZLER VE SONUÇLAR

Bu bölümde, termal yük altında bulunan malzeme özellikleri sıcaklığa bağımlı olarak derecelendirilmiş izotropik bir ortamda yer alan $2a$ uzunluğundaki eğik çatlak, düzlem gerinim varsayımı ile sürekli rejimde incelenerek karışık mod kırılma parametreleri hesaplanır. Şekil 4.1, problemin geometrisi ve termal sınır şartları göstermektedir.



Şekil 4.1 İzotropik derecelendirilmiş ortamda bulunan sürekli rejim eğik çatlak problemi geometrisi ve termal sınır koşulları

İzotropik derecelendirilmiş ortamda bulunan seramik ve metal, zirkonya (ZrO_2) ve titanyum alaşımı ($Ti-6Al-4V$) olarak alınmıştır. Malzeme özellikleri $x_2=h_c - h$ da %100 $Ti-6Al-4V$ $x_2=h_c$ %100 ZrO_2 kademli olarak değişmektedir. Çatlağın uzunluğu 2a olarak alınmıştır.

Fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme de ilk olarak $T_r=T_0$ sıcaklığına sahiptir. Geometrinin $x_2=h_c$ sınırındaki sıcaklık $2T_0$ değerine çıkarılmış ve geometrinin diğer sınırları $x_1=\pm L$ ve çatlak yüzeylerinin ısıya karşı izole edildiği varsayılmıştır.

Malzeme özellikleri sıcaklığa bağımlı olarak fonksiyon şeklinde (Ootao et al. 1999)'da tanımlanmaktadır.

[ZrO₂]

$300K \leq T \leq 1300K$

$$E_{cr} = 132.2 - 50.3 \times 10^{-3}T - 8.1 \times 10^{-6}T^2 \quad [GPa] \quad (4.1)$$

$$\nu_{cr} = 0.333 \quad (4.2)$$

$$K_{cr} = 1.71 + 0.21 \times 10^{-3}T + 0.116 \times 10^{-6}T^2 \quad [W/mk] \quad (4.3)$$

$$\alpha_{cr} = 13.3 \times 10^{-6} - 18.9 \times 10^{-9}T + 12.7 \times 10^{-12}T^2 \quad [1/k] \quad (4.4)$$

[Ti-6Al-4V]

$300K \leq T \leq 1300K$

$$E_m = 122.7 - 0.0565T \quad [GPa] \quad (4.5)$$

$$\nu_m = 0.2888 + 32.0 \times 10^{-6}T \quad (4.6)$$

$$K_m = 1.1 + 0.017T \quad [W/mk] \quad (4.7)$$

$$\alpha_m = 7.43 \times 10^{-6} + 5.56 \times 10^{-9}T - 2.69 \times 10^{-12}T^2 \quad [1/k] \quad (4.8)$$

İzotropik derecelendirilmiş ortamda malzeme özellikleri fonksiyon olarak x_2 eksenine bağlı olarak aşağıdaki gibidir.

$$E(y) = E_{cr} + (E_m - E_{cr}) \left(\frac{h_c - y}{h} \right)^{w_1}, h_c - h < y < h_c \quad (4.9)$$

$$\nu(y) = \nu_{cr} + (\nu_m - \nu_{cr}) \left(\frac{h_c - y}{h} \right)^{w_2}, h_c - h < y < h_c \quad (4.10)$$

$$\alpha(y) = \alpha_{cr} + (\alpha_m - \alpha_{cr}) \left(\frac{h_c - y}{h} \right)^{w_3}, h_c - h < y < h_c \quad (4.11)$$

$$k(y) = k_{cr} + (k_m - k_{cr}) \left(\frac{h_c - y}{h} \right)^{w_4}, h_c - h < y < h_c \quad (4.12)$$

Burada cr ve m indisleri sırasıyla seramik ve metali sembolize eder.

(4.9) – (4.12) Fonksiyonlarında gösterilen kuvvet son derecede esnek ve genellikle FDM' davranışların modellemek için kullanılır. $w_i, (i = 1, \dots, 4)$ Kullanılan (4.9) – (4.12) fonksiyonlarda bir pozitif sabit sayını ifade eder ve bu sayı malzeme özelliklerin FDM ortamında tanımlatmaktadır. Mesela eğer kuvvet birden fazla olursa malzeme özellik şekil değişiminde seramik fazladır ve eğer birden az olursa malzeme özellik profil değişiminde metal etkindir.

Şekil 4.1 de görüldüğü gibi R yarıçapına sahip ve merkezi çatlak ucunda konumlanan bir dairesel alan, termal parametrelerini elde etmek için tanımlanmıştır. Elde edemiz sonuçlar dairesel alanın büyüklüğünden bağımsızdır. Yani, farklı R yarıçapı değerler ile aynı sonuçları bulmamız gerekir. Problemin bundan sonraki kısmında, geometri, çatlağın açısı değiştirerek ve malzeme özelliklerine ait çeşitli parametrelerin farklı kombinasyonlar için sonuçlar elde edilen sayısal kırılma parametreleri grafik olarak gösterilecektir. Bunun yanında J_k -integral yönteminden alınan sonuçların alanın şeklinden ve büyüklüğünden bağımsız olduğu ve elde edimiz sonuçlar, yer değiştirme bağıntısı tekniğinden (YDBT) bulunan sonuçlar ile karşılaştırılacaktır.

Şekil 4.1 de gözlenen çatlak ucundaki sıcaklık normalize edilmiş çatlağın açısına bağımlı olarak şekil 4.2 ve 4.3 de verilmiştir.

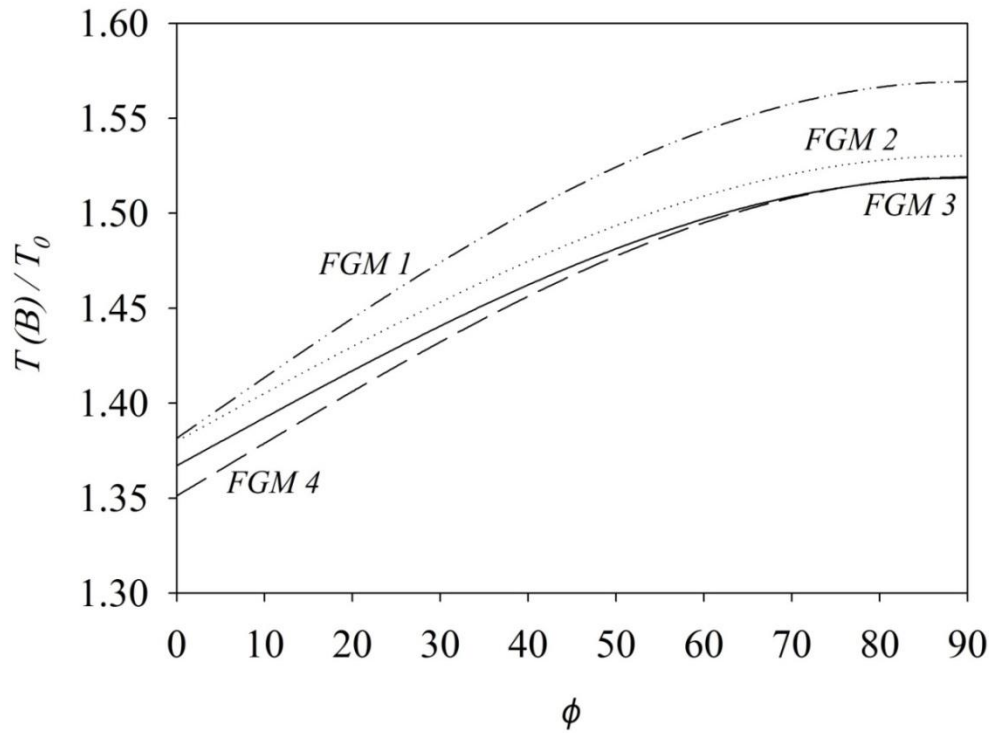
Şekil 4.2 ve 4.3 FGM türleri aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$FGM1) \omega_1 = \omega_2 = 2.5, \omega_3 = \omega_4 = 4 \quad (4.13)$$

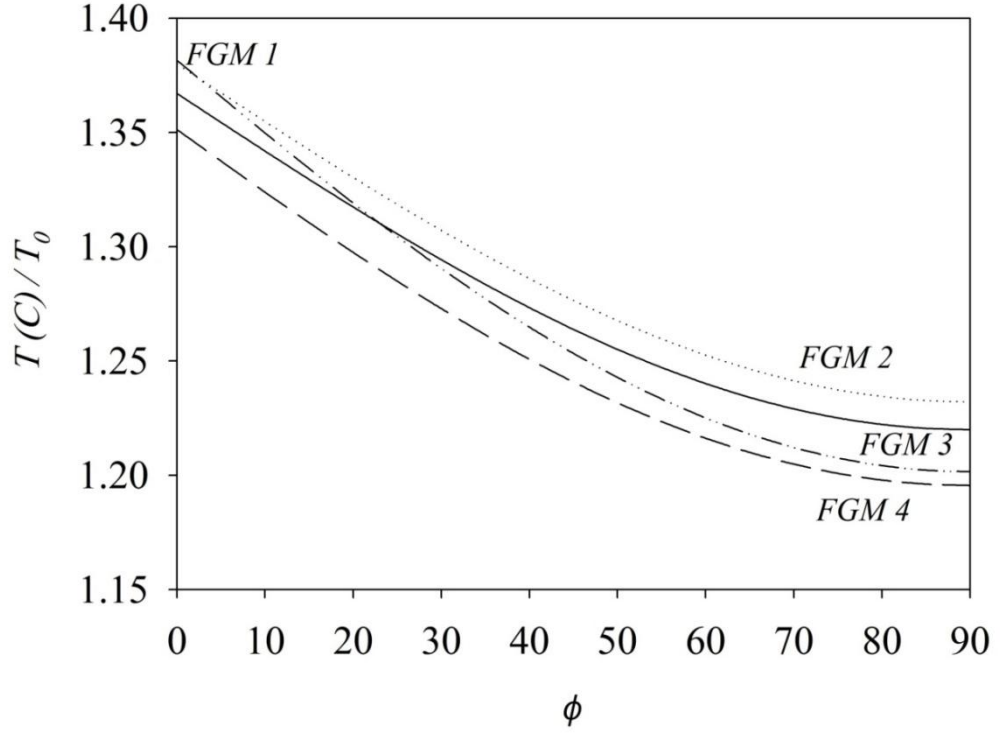
$$FGM2) \omega_1 = \omega_2 = 0.5, \omega_3 = \omega_4 = 0.8 \quad (4.14)$$

$$FGM3) \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = 1 \quad (4.15)$$

$$FGM4) \omega_1 = \omega_2 = 1.5, \omega_3 = \omega_4 = 2 \quad (4.16)$$



Şekil 4.2 Çatlağın B ucundaki sıcaklık normalize edilerek, çatlağın açısına bağlı değişimi. $h/L=0.6$, $h_c/L=0.3$, $T_0=25^\circ C$



Şekil 4.3 Çatlağın C ucundaki sıcaklık normalize edilerek, çatlağın açısına bağlı değişimi. $h/L=0.6$, $h_c/L=0.3$, $T_0=25^\circ C$

Düzlem Gerinim		Sıcaklığa bağımlı olan J_K -integral	Sıcaklığa bağımlı olan DCT	Sıcaklığa Bağımlı olmayan J_K -integral	Sıcaklığa Bağımlı olmayan DCT
$\phi=0^0$	$K_{In}(B)$	0.0078	0.0079	0.0090	0.0090
	$K_{In}(C)$	0.0078	0.0079	0.0089	0.0090
	$K_{IIIn}(B)$	0.0803	0.0800	0.0824	0.0821
	$K_{IIIn}(C)$	-0.0803	-0.0800	-0.0824	-0.0821
$\phi=30^0$	$K_{In}(B)$	0.0281	0.0282	0.0304	0.0305
	$K_{In}(C)$	0.0057	0.0058	0.0073	0.0074
	$K_{IIIn}(B)$	0.0550	0.0548	0.0549	0.0546
	$K_{IIIn}(C)$	-0.0873	-0.0870	-0.0906	-0.0903
$\phi=60^0$	$K_{In}(B)$	0.0472	0.0471	0.0515	0.0515
	$K_{In}(C)$	0.0247	0.0249	0.0274	0.0275
	$K_{IIIn}(B)$	0.0303	0.0304	0.0296	0.0296
	$K_{IIIn}(C)$	-0.060	-0.0597	-0.0622	-0.0620
$\phi=90^0$	$K_{In}(B)$	0.044	0.0440	0.0488	0.0488
	$K_{In}(C)$	0.0379	0.0379	0.0408	0.0409
	$K_{IIIn}(B)$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	$K_{IIIn}(C)$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Çizelge 4.1 J_k - integral ve YDBT vasıtasıyla bulunarak normalize edilmiş mod-I ve mod-II gerilme şiddeti çarpanlarının malzeme özellikleri sıcaklığa bağımlı ve bağımlı olmayan durumlar için sürekli rejim sonuçları. $h / L=0.6$, $h_c / L=0.3$, $a/L=0.2$, $T_0=25^{\circ}C$, $\omega_1=\omega_2=1.5$, $\omega_3=\omega_4=2$

Yukarıdaki çizelgede (4.1) gösterildiği gibi J_k - integral yöntem ile elde edilen sonuçlar ve Yer Değiştirme Bağıntısı Tekniği (YDBT) sonuçları malzeme özellikleri sıcaklığa bağımlı ve bağımlı olmadı durumları da karşılaştırabilir. Malzeme özellikleri sıcaklığa bağımlı olmadı durumda, denklem 4.1-4.8'lerde T yerine T_0 ($T_0 = 25^{\circ}c$) değerini yerleştirip ve bu özellikleri kullanarak sonuçlar elde edilip.

Gerinim Düzlemi		J_k -integral				DCT
		R/a=0.1	R/a=0.2	R/a=0.3	R/a=0.4	
$\phi=0^0$	$K_{In}(B)$	0.0042	0.0042	0.0043	0.0044	0.0043
	$K_{In}(C)$	0.0042	0.0042	0.0043	0.0044	0.0043
	$K_{IIIn}(B)$	0.0434	0.0434	0.0436	0.0437	0.0433
	$K_{IIIn}(C)$	-0.0434	-0.0434	-0.0436	-0.0437	-0.0433
$\phi=30^0$	$K_{In}(B)$	0.0205	0.0207	0.0208	0.0209	0.0204
	$K_{In}(C)$	0.0110	0.0110	0.0111	0.0113	0.0111
	$K_{IIIn}(B)$	0.0174	0.0175	0.0176	0.0177	0.0176
	$K_{IIIn}(C)$	-0.0550	-0.0550	-0.0552	-0.0553	-0.0548
$\phi=60^0$	$K_{In}(B)$	0.0507	0.0508	0.0508	0.0509	0.0507
	$K_{In}(C)$	0.0298	0.0299	0.0300	0.0301	0.0300
	$K_{IIIn}(B)$	-0.0003	-0.0003	-0.0003	-0.0004	-0.0002
	$K_{IIIn}(C)$	-0.0393	-0.0393	-0.0394	-0.0395	-0.0390
$\phi=90^0$	$K_{In}(B)$	0.0666	0.0667	0.0668	0.0669	0.0667
	$K_{In}(C)$	0.0402	0.0402	0.0403	0.0405	0.0403
	$K_{IIIn}(B)$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
	$K_{IIIn}(C)$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Çizelge 4.2 J_k - integral ve YDBT vasıtasıyla bulunarak normalize edilmiş mod-I ve mod-II gerilme şiddeti çarpanlarının sürekli rejim sonuçları. $h / L=0.6$, $h_c / L=0.35$, $a/L=0.1$, $T_0=25^{\circ}C$, $\omega_1=\omega_2=1.5$, $\omega_3=\omega_4=2$

Yukarıdaki çizelgede (4.2) gösterildiği gibi J_k - integral yöntem ile elde edilen sonuçlar ve Yer Değiştirme bağıntısı Tekniği (YDBT) sonuçları karşılaştırılabilir. J_k - integral yönteminin alandan bağımsız olduğunu ve sonuçlar farklı alanlarda aynı çıkmasını, farklı alanları kullanarak elde edilmiş mod-I ve mod-II gerilme şiddet çarpanlarının sonuçları çizelge 4.2 de verilmişti. Çatlağın ucunda bulunana karışık

mod gerilme şiddet çarpanları normalize olmuş halı aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır.

$$K_{In} = \frac{K_{In}}{K_0} \quad (4.17)$$

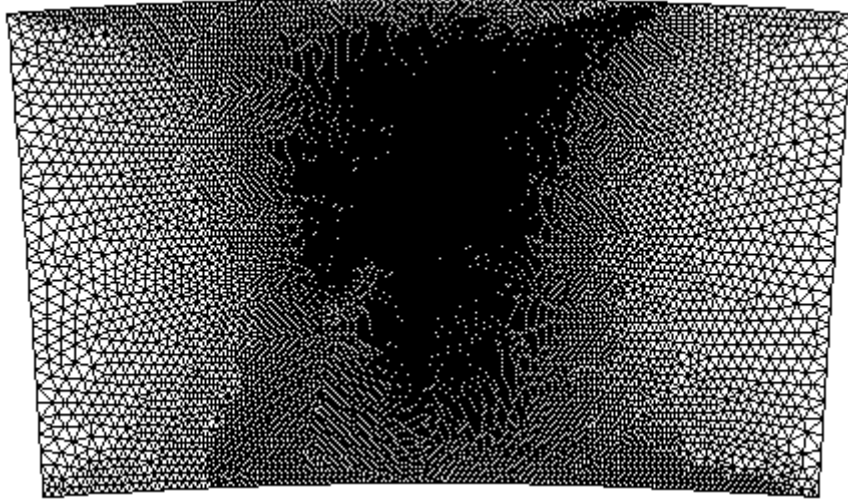
$$K_{IIIn} = \frac{K_{IIIn}}{K_0} \quad (4.18)$$

Yukarıda ki fonksiyonlarda

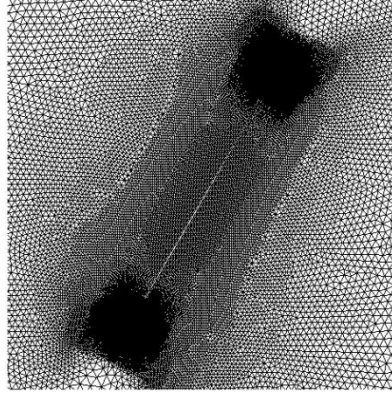
$$K_0 = \sigma_0 \sqrt{\pi a} \quad (4.19)$$

$$\sigma_0 = \alpha_{cr} E_{cr} T_0 \quad (4.20)$$

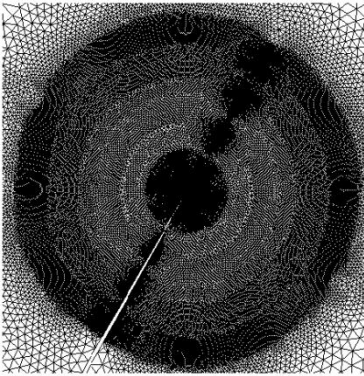
Çizelge 4.2 de dört farklı çatlağın açısına göre her açı için, dört farklı alanlarda (R/a) bulunan mod-I ve mod-II için gerilim çarpan şiddeti sonuçları bulunup ve yukarıdaki çizelgede gösterilmiştir. Farklı alanlarda elde edemiz sonuçlara bakarak, sonuçlar bir birbirleri ile çok iyi uyum göstermektedir, bu da bunu gösterir ki J_k - integral yöntemi alandan bağımsız olduğunu ispat etmektedir. Çizelgede 4.2 ağı sonuçlara bakarak, buldu muz J_k - integral yöntemi sonuçları YDBT sonuçları ile örtüşmektedir. Dolayısıyla, J_k - integrali yönteminin yüksek derecede verdiği sayısal sonuçlar doğru ola bilir. Sonuçlar buldu muz zaman en fazla h_c / L değeri 0.35 alınmıştır. Çünkü bunda daha fazla büyük oldu an çatla kapanmaktadır. Elde edimiz tüm sonuçlarda çatlak tamamen açılmaktadır ve parametreleri bu şartı da kapsasın değiştirilmiş. Sonuç üretilirken kullanılan sonlu elemanlar ağının deforme olmuş şekli ve çatlak yüzeylerinin yakın plan görüntüsü şekil 4.4 de gösterilmiş.



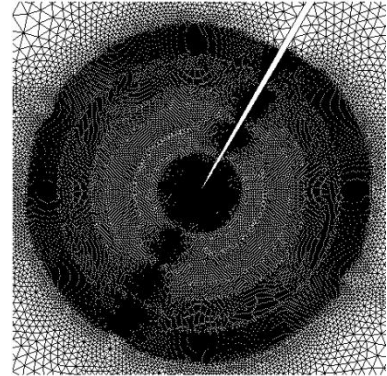
(a)



(b)



(c)



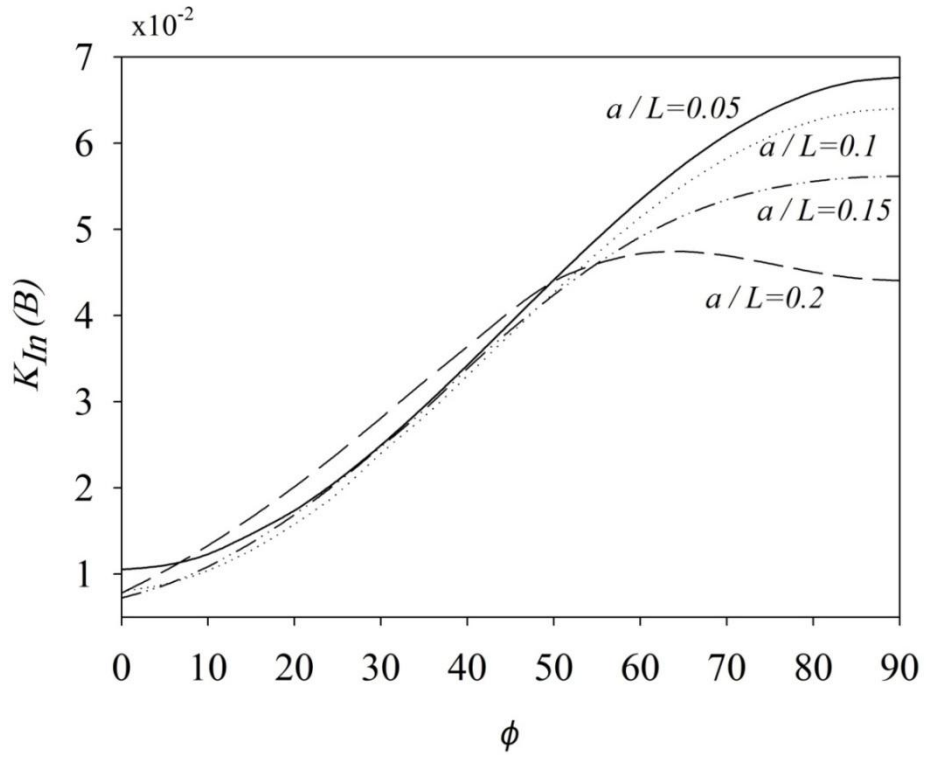
(d)

Şekil 4.4 (a) Sonlu elemanlar ağının deforme olmuş şekli. (b) Çatlak yüzeylerin yakın planı. (c) İntegrasyon alanının ve çatlağın B ucunun yakın planı. (d) İntegrasyon alanının ve çatlağın B ucunun yakın planı.

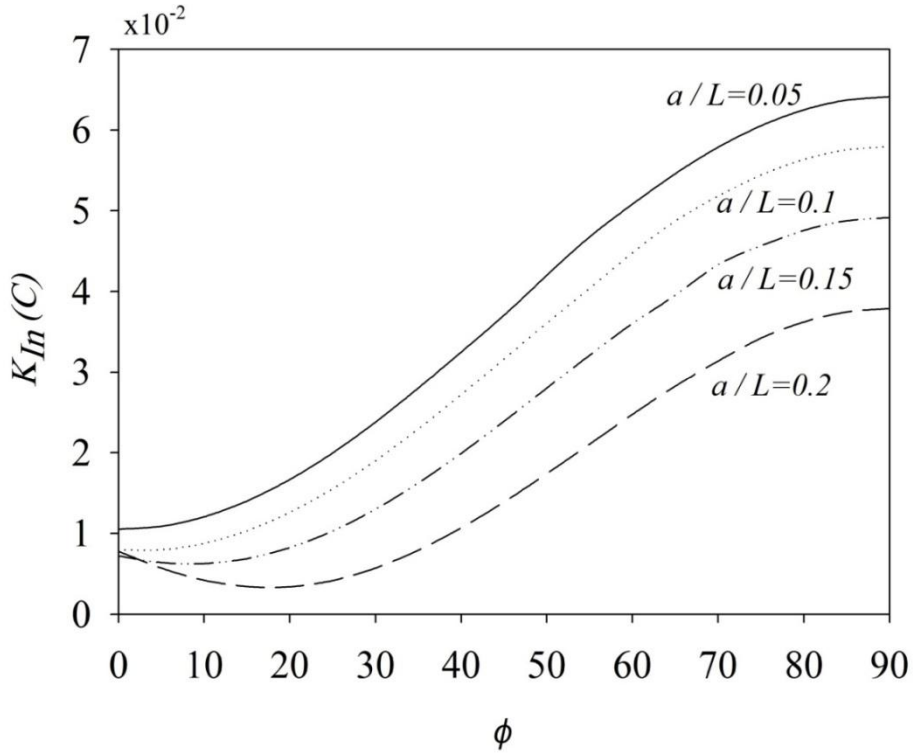
Şekil 4.5-4.21 de çatlağın açısı, görelî çatlak uzunluğu a/L , görelî çatlak pozisyonu h_c/L ve FDM türlerinin, mod-I ve mod-II gerilme şiddet çarpanları ve enerji salınım oranı üzerine olan etkileri profilleri gösterilmiştir. Bu şekillerde çatlağın açısı 0-90 arası değişmektedir ve tüm açılarda çatlak tamamen açılmaktadır. Her şekilde dört farklı durumlar için sonuçlar gösterilmiştir.

Normalize edilmiş karışık mod gerilme şiddet çarpanları denklem (4.17) ve (4.18) de gösterilmiştir. Enerji salınım oranının normalizasyonu da aşağıda ki gibi ifade edilmiştir.

$$J_{1n} = \frac{J_1}{\sigma_0^2 \pi a / E_{cr}} \quad (4.21)$$

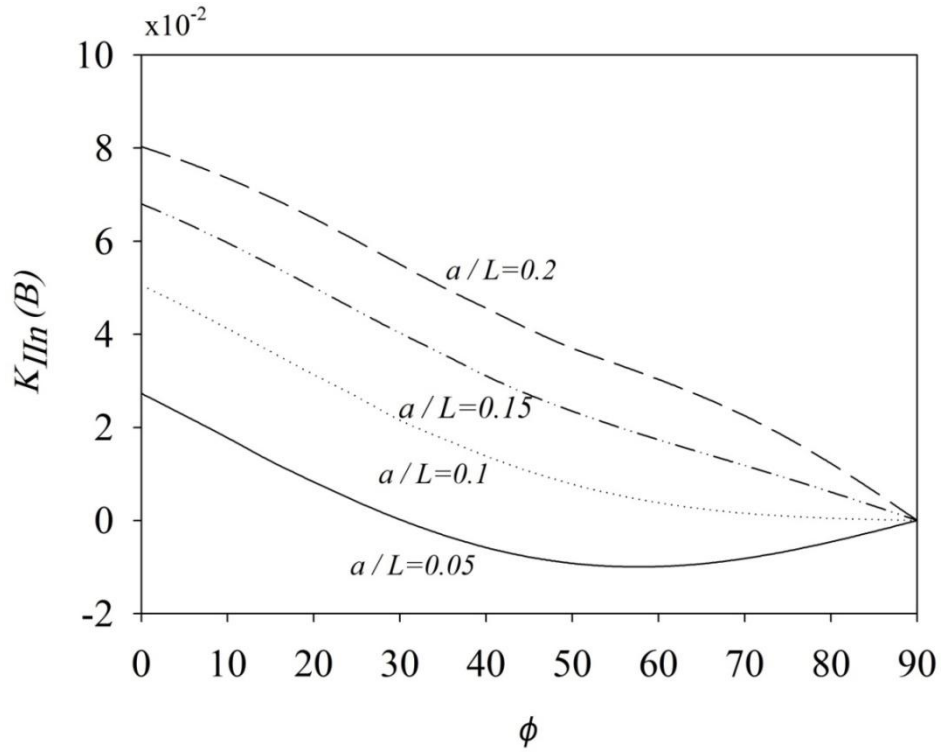


Şekil 4.5 Çatlağın B ucunda normalize mod-I gerilme şiddet çarpanının çatlağın açısına bağlı değişimi. $h/L=0.6$, $h_c/L=0.3$, $T_0=25^\circ C$, $\omega_1=\omega_2=1.5$, $\omega_3=\omega_4=2$

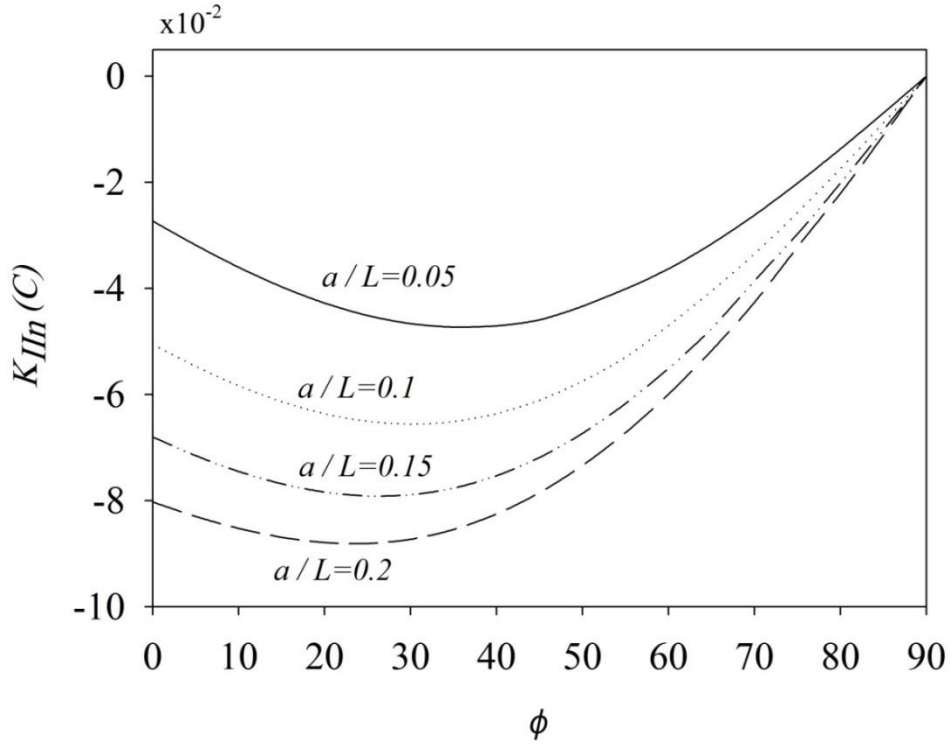


Şekil 4.6 Çatlağın C ucunda normalize edilmiş mod-I gerilme şiddet çarpanının çatlağın açısına bağlı değişimi. $h/L=0.6$, $h_c/L=0.3$, $T_0=25^\circ\text{C}$, $\omega_1=\omega_2=1.5$, $\omega_3=\omega_4=2$

Şekiller 4.5 ve 4.6 de çatlağın açısı ϕ , görel çatlağın uzunluğu, mod-I gerilme şiddet çarpanları üzerine olan etkileri şekil olarak gösterilmiştir. Şekil 4.5 gördünüz gibi çatlağın B ucunda açı 55 değerinden büyük oldu yerlerde herhangi bir sabit açı değeri için, çatlağın uzunluğu a/L 'nin, arttırıldığında mod-I gerilme şiddet çarpanının azalması görülmektedir. Şekil 4.6 gördünüz gibi çatlağın C ucunda herhangi bir sabit açı değeri için, çatlağın uzunluğu a/L 'nin, arttırıldığında mod-I gerilme şiddet çarpanının azalması görülmektedir. Bütün mod-I gerilme şiddeti çarpanı profilleri açı 90 değeri iken maksimum gerilme şiddeti çarpanı değerlerine ulaşmaktadır.

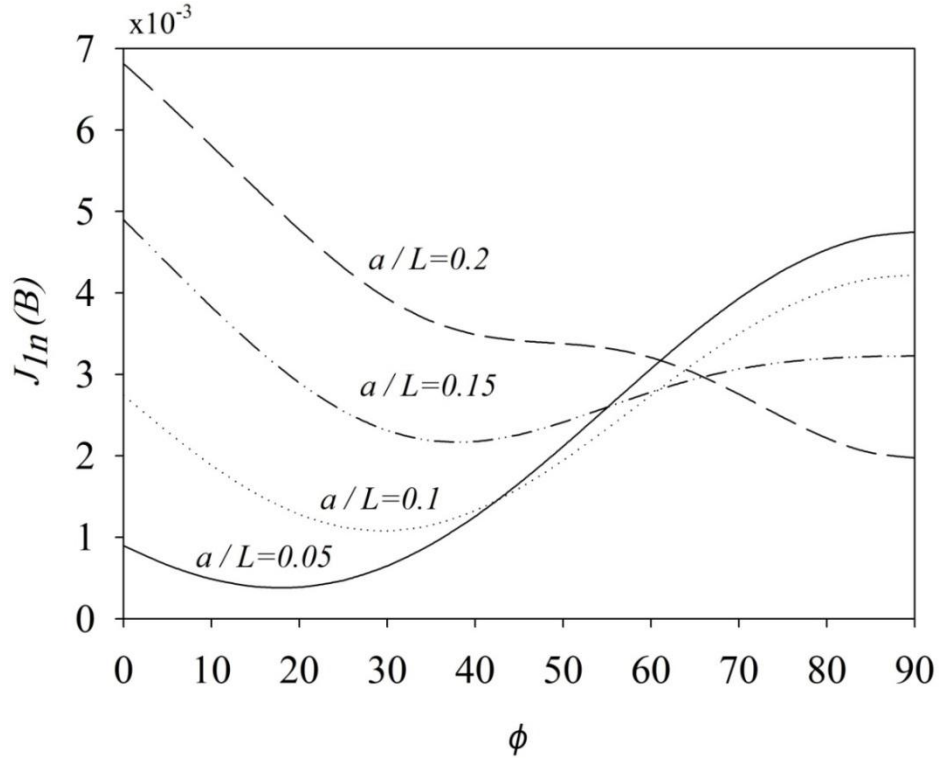


Şekil 4.7 Çatlağın B ucunda normalize mod-II gerilme şiddet çarpanının çatlağın açısına bağlı değişimi. $h/L=0.6$, $h_c/L=0.3$, $T_0=25^\circ C$, $\omega_1=\omega_2=1.5$, $\omega_3=\omega_4=2$

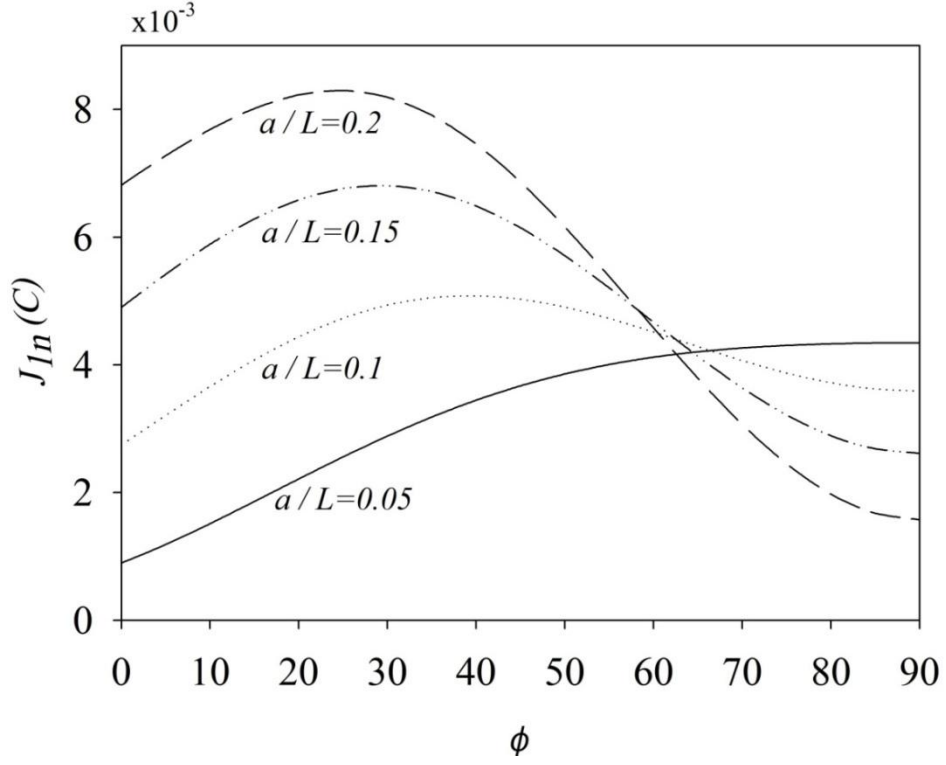


Şekil 4.8 Çatlağın C ucunda normalize mod-II gerilme şiddet çarpanının çatlağın açısına bağlı değişimi. $h/L=0.6$, $h_c/L=0.3$, $T_0=25^\circ C$, $\omega_1=\omega_2=1.5$, $\omega_3=\omega_4=2$

Şekiller 4.7 ve 4.8 de çatlağın açısı ϕ , görel çatlağın uzunluğu a/L , mod-II gerilme şiddet çarpanları üzerine olan etkileri şekil olarak gösterilmiştir. Şekil 4.7 gördünüz gibi çatlağın B ucunda herhangi bir sabit açı değeri için, çatlağın uzunluğu a/L 'nin, arttırıldığında mod-II gerilme şiddet çarpanının arttığı görülmektedir ama çatlağın diğer ucunda tam ters görünmektedir yani herhangi bir sabit açı değeri için, çatlağın uzunluğu a/L 'nin, arttırıldığında mod-II gerilme şiddet çarpanının azalması görülmektedir. Şekil 4.7 gösterdiği gibi açının maksimum değerinde mod-II gerilme şiddet çarpanı en küçük değerinde yani mod-I gerilme şiddet çarpanının tam tersi olmaktadır.

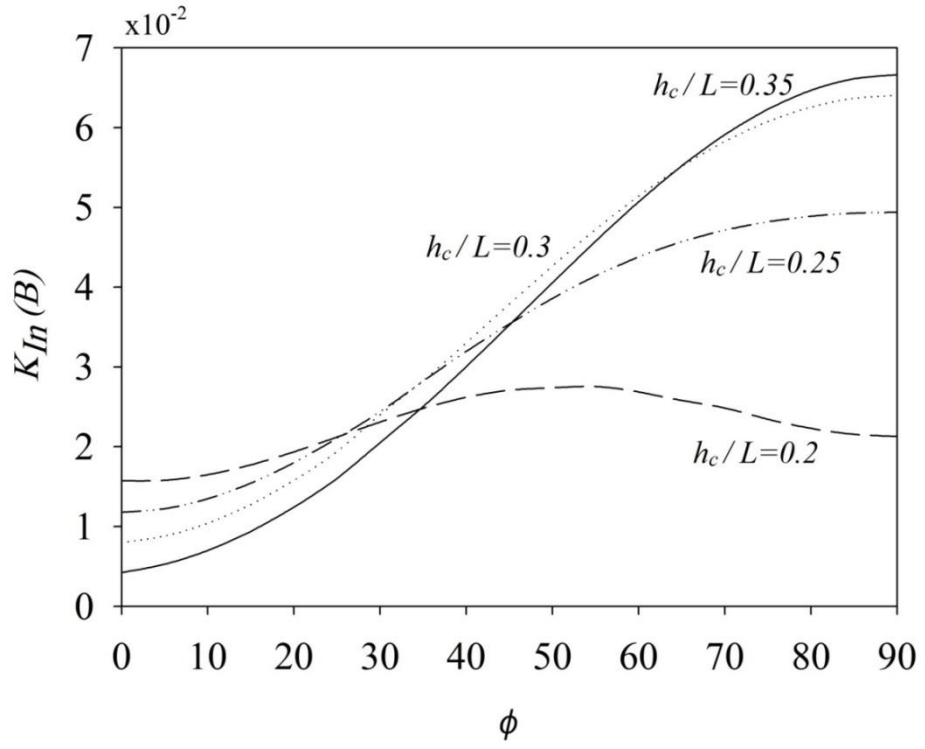


Şekil 4.9 Çatlağın B ucunda normalize edilmiş enerji salınımının çatlağın açısına bağlı değişimi. $h/L=0.6$, $h_c/L=0.3$, $T_0=25^\circ C$, $\omega_1=\omega_2=1.5$, $\omega_3=\omega_4=2$

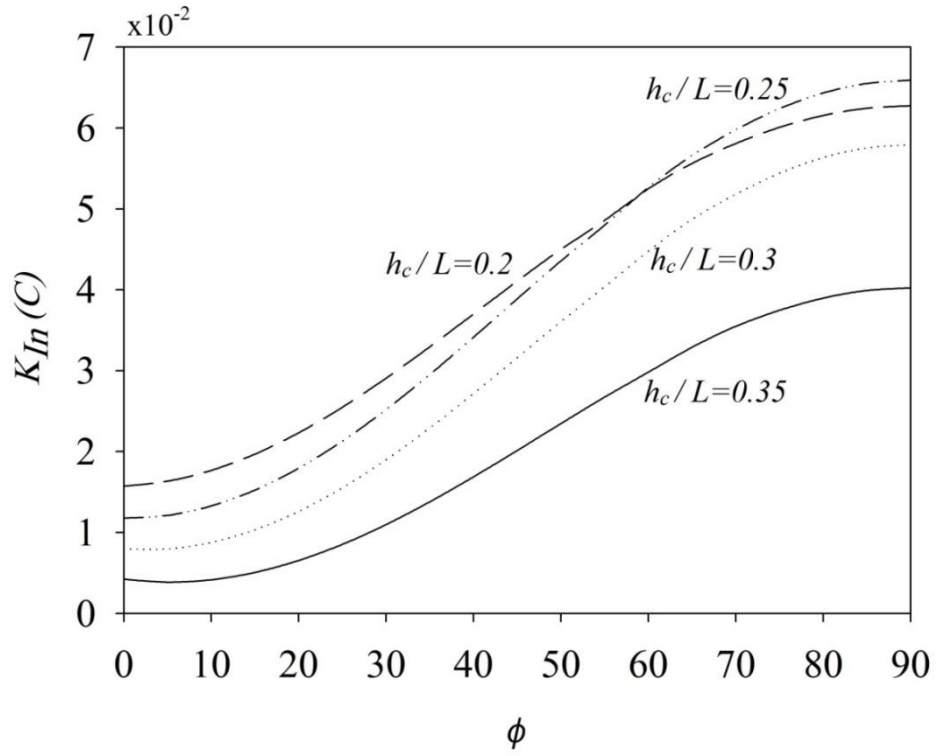


Şekil 4.10 Çatlağın C ucunda normalize enerji edilmiş salınımının çatlağın açısına bağlı değişimi. $h/L=0.6$, $h_c/L=0.3$, $T_0=25^\circ C$, $\omega_1=\omega_2=1.5$, $\omega_3=\omega_4=2$

Şekil 4.9 ve 4.10 da çatlağın 2 ucunda enerji salınımı, çatlağın açısına bağlı olarak grafikleri görünmektedir. Bu şekillerde enerji salınımı, dört farklı çatlağın uzunluğuna sonuçlar bulunup ve profil olarak çizilip.

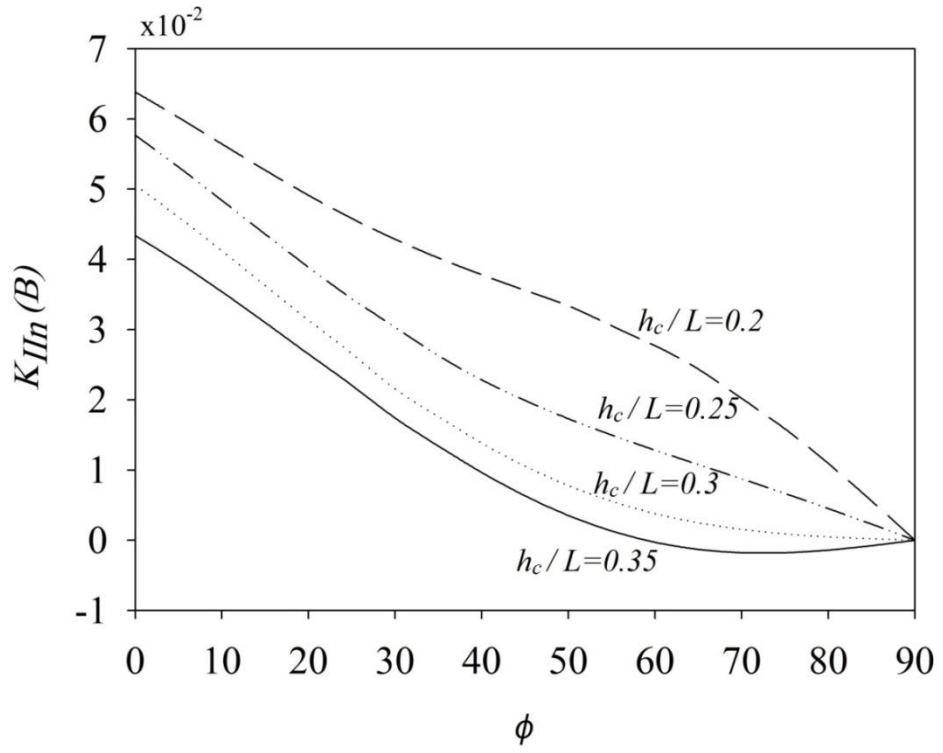


Şekil 4.11 Çatlağın B ucunda normalize mod-I gerilme şiddet çarpanının çatlağın açısına bağlı değişimi. $h/L=0.6$, $a/L=0.1$, $T_0=25^\circ C$, $\omega_1=\omega_2=1.5$, $\omega_3=\omega_4=2$

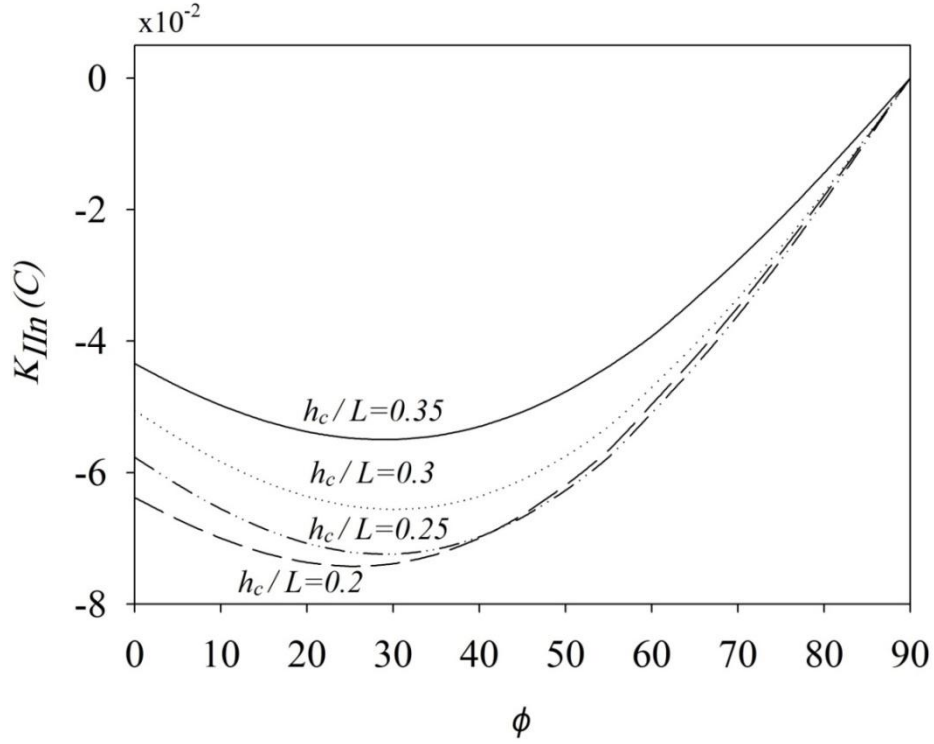


Şekil 4.12 Çatlağın C ucunda normalize mod-I gerilme şiddet çarpanının çatlağın açısına bağlı değişimi. $h/L=0.6$, $a/L=0.1$, $T_0=25^\circ C$, $\omega_1=\omega_2=1.5$, $\omega_3=\omega_4=2$

Şekil 4.11 ve 4.12 de çatlağın açısı ϕ , görelî çatlağın pozisyonu h_c/L mod-I gerilme şiddeti çarpanları üzerine olan etkileri gösterilmiştir. Çatlağın açısı arttırıldığında mod-I gerilme şiddet çarpanı da arttığı görülmektedir.

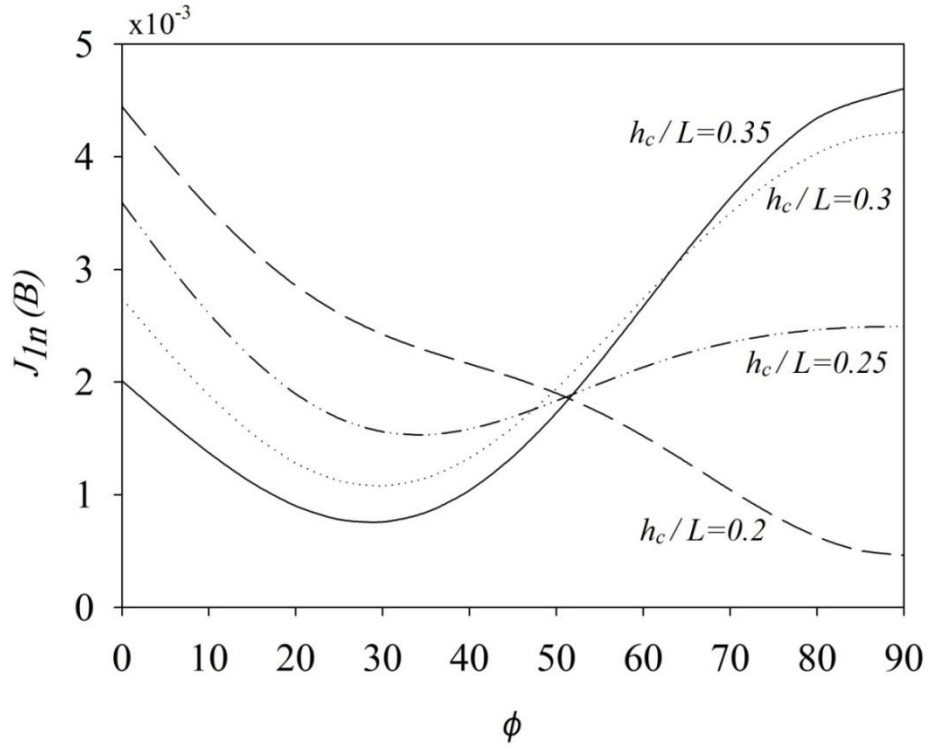


Şekil 4.13 Çatlağın B ucunda normalize mod-II gerilme şiddet çarpanının çatlağın açısına bağlı değişimi. $h/L=0.6$, $a/L=0.1$, $T_0=25^\circ\text{C}$, $\omega_1=\omega_2=1.5$, $\omega_3=\omega_4=2$

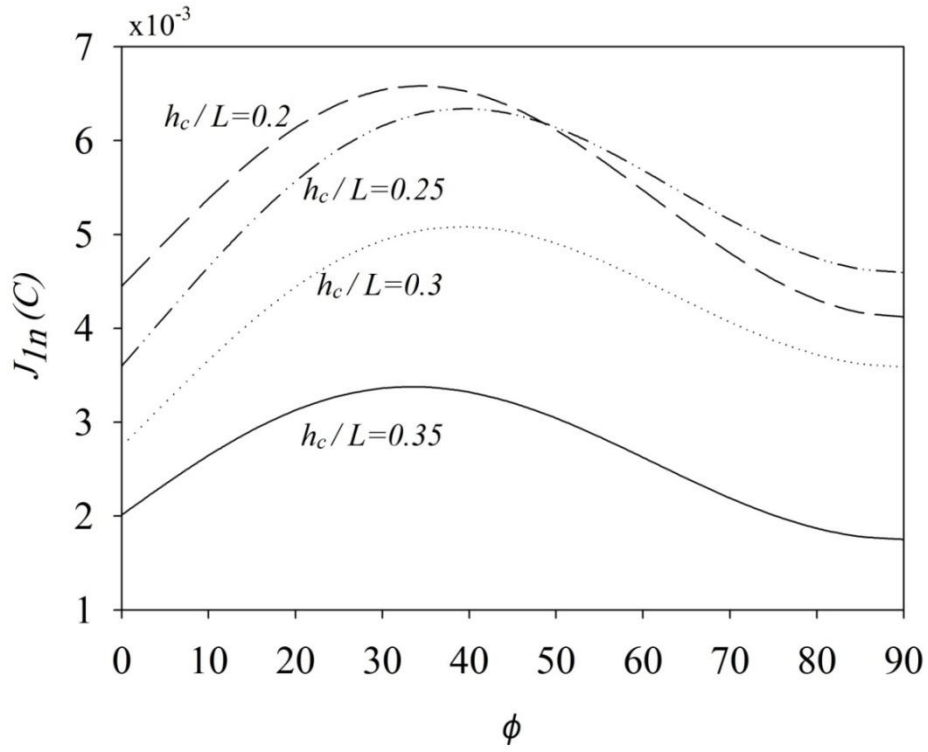


Şekil 4.14 Çatlağın C ucunda normalize mod-II gerilme şiddet çarpanının çatlağın açısına bağlı değişimi. $h/L=0.6$, $a/L=0.1$, $T_0=25^\circ C$, $\omega_1=\omega_2=1.5$, $\omega_3=\omega_4=2$

Şekil 4.13 ve 4.14 de çatlağın açısı ϕ , görelî çatlağın pozisyonu h_c / L mod-II gerilme şiddeti çarpanları üzerine olan etkileri gösterilmiştir. Şekil 4.13 çatlağın açısı arttırıldığında mod-II gerilme şiddet çarpanı da azalması görülmektedir ve bu mod-I gerilme şiddeti çarpanı profilin tam tersi olmaktadır yani mod-I gerilme şiddeti çarpanı, açı arttırıldığında artmaktadır. Çatlağın diğer ucunda mod-II gerilme şiddet çarpanının maksimum değeri açın maksimum değerinde elde edilir.

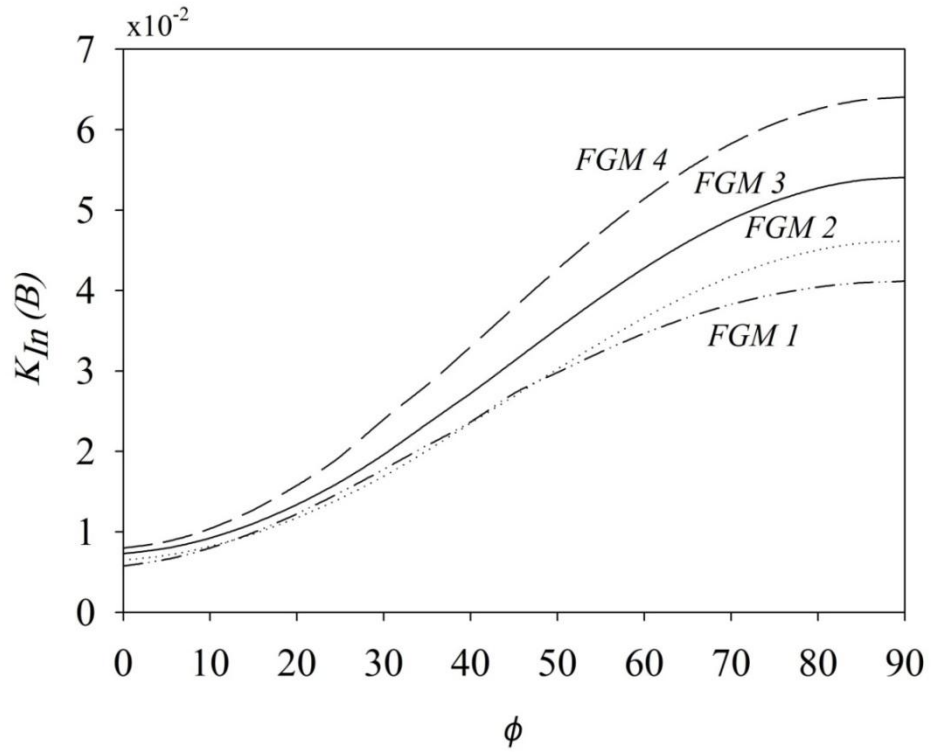


Şekil 4.15 Çatlağın B ucunda normalize edilmiş enerji salınımının çatlağın açısına bağlı değişimi. $h/L=0.6$, $a/L=0.1$, $T_0=25^\circ C$, $\omega_1=\omega_2=1.5$, $\omega_3=\omega_4=2$

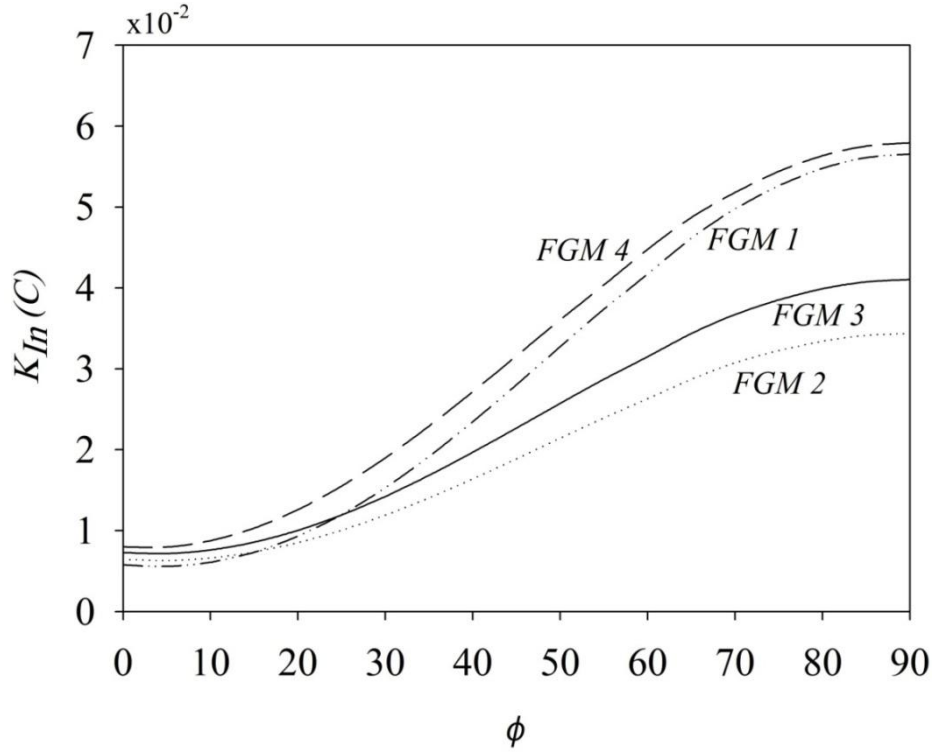


Şekil 4.16 Çatlağın C ucunda normalize enerji salınımı çatlağın açısına bağlı değişimi. $h/L=0.6$, $a/L=0.1$, $T_0=25^\circ C$, $\omega_1=\omega_2=1.5$, $\omega_3=\omega_4=2$

Şekil 4.15 ve 4.16 çatlağın 2 ucunda normalize enerji salınımı çatlağın açısına bağımlı olarak çatlağın 4 farklı pozisyonda h_c / L gösterilmiştir. Şekil 4.16 gösterildiği gibi çatlağın C ucunda en düşük değerler $h_c / L = 0.35$, elde edilir.

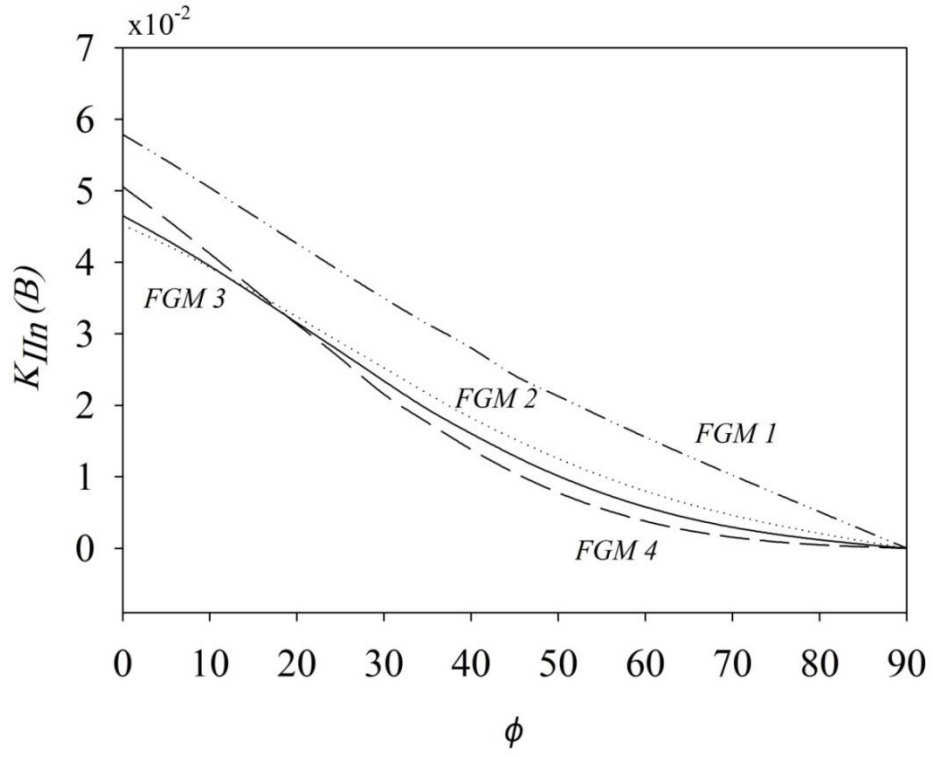


Şekil 4.17 Çatlağın B ucunda normalize mod-I gerilme şiddet çarpanının çatlağın açısına bağlı değişimi. $h/L=0.6$, $h_c/L=0.3$, $a/L=0.1$, $T_0=25^\circ C$

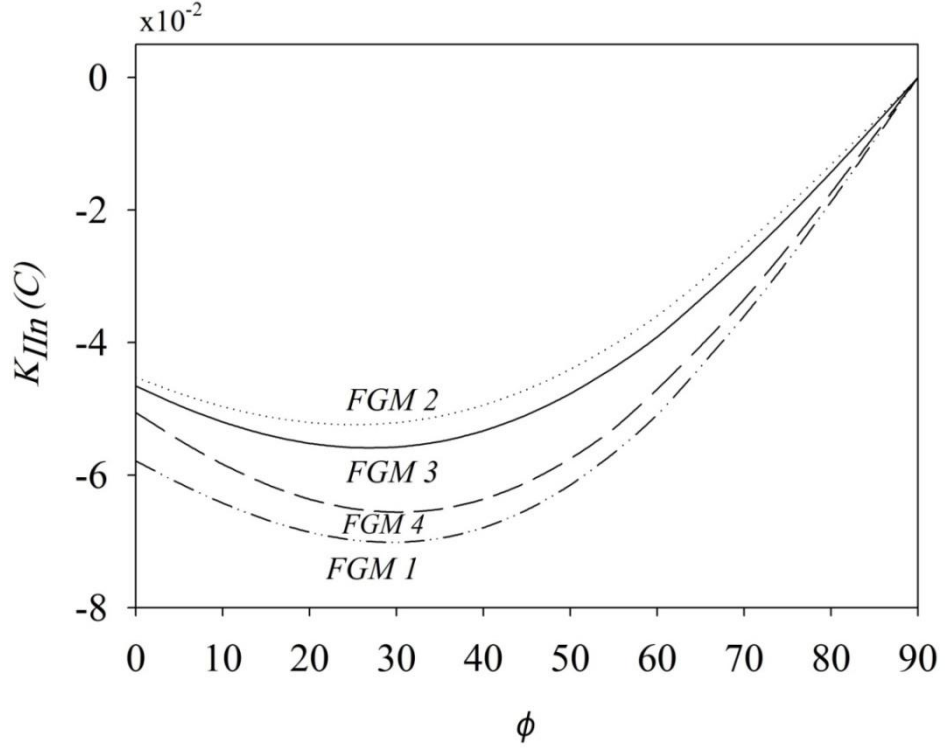


Şekil 4.18 Çatlağın C ucunda normalize mod-I gerilme şiddet çarpanının çatlağın açısına bağlı değişimi. $h/L=0.6$, $h_c/L=0.3$, $a/L=0.1$, $T_0=25^\circ C$

Şekil 4.17 ve 4.18 çatlağın 2 ucunda mod-I gerilme şiddet çarpanının normalize olmuşu çatlağın açısına göre çizilmiş. Çatlağın 2 ucunda şekillerde gösterdiği gibi çatlağın açısı arttırıldığında, mod-I gerilme şiddet çarpanını da artmaktadır ve maksimum değeri açı 90 derece iken elde edilir.

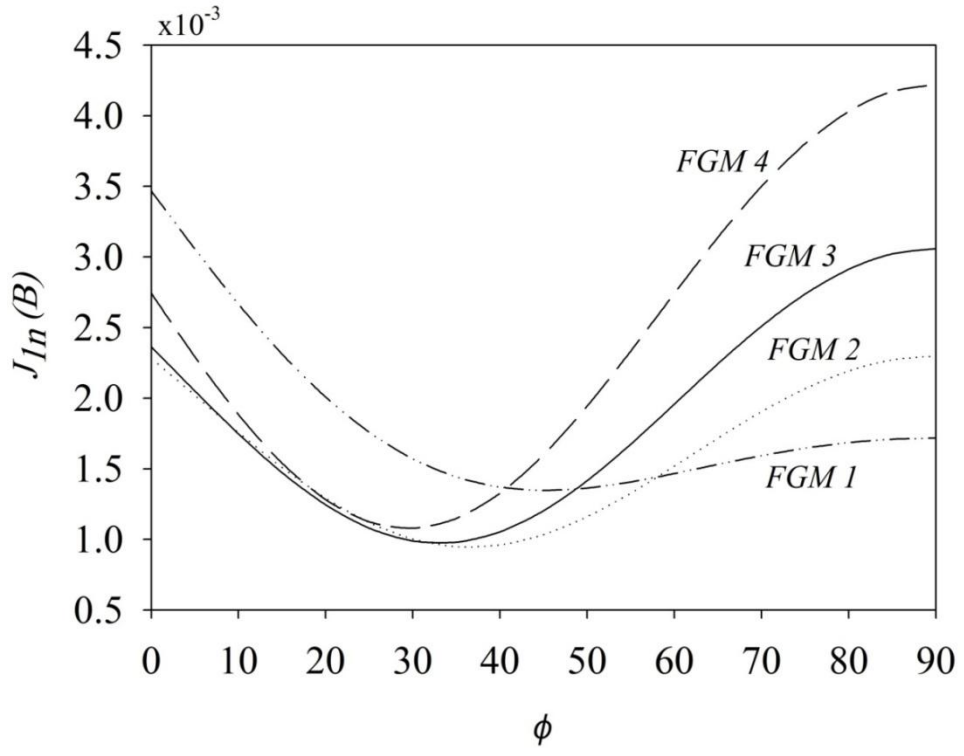


Şekil 4.19 Çatlağın B ucunda normalize mod-II gerilme şiddet çarpanının çatlağın açısına bağlı değişimi. $h/L=0.6$, $h_c/L=0.3$, $a/L=0.1$, $T_0=25^\circ C$

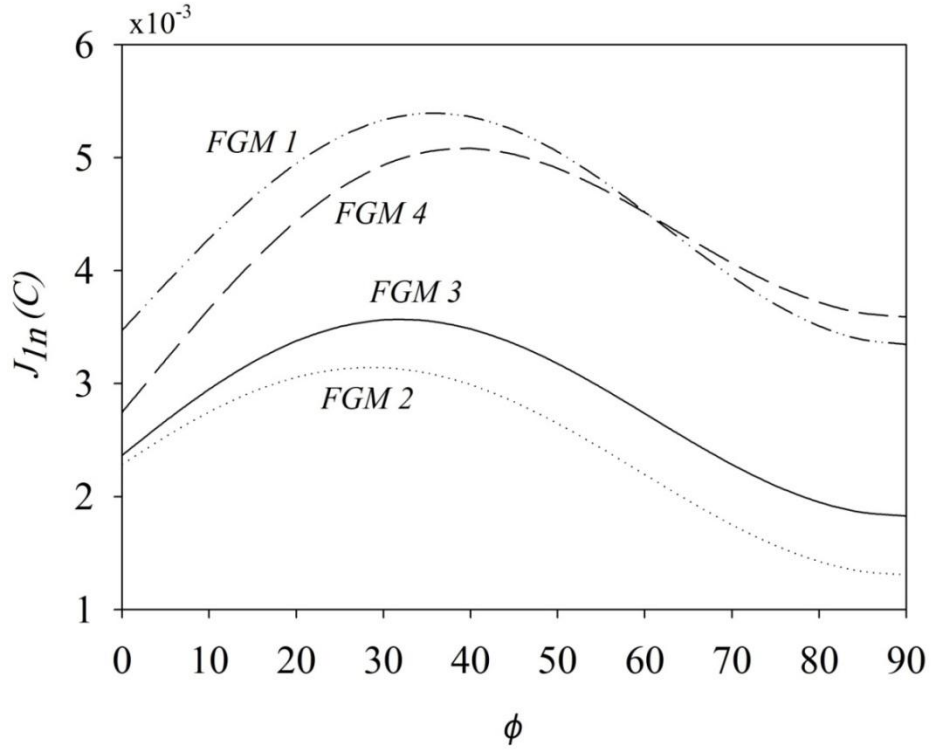


Şekil 4.20 Çatlağın C ucunda normalize mod-II gerilme şiddet çarpanının çatlağın açısına bağlı değişimi. $h/L=0.6$, $h_c/L=0.3$, $a/L=0.1$, $T_0=25^\circ C$

Şekil 4.19 ve 4.20 mod-II gerilme şiddet çarpanının, çatlağın açısına bağlı değişimi gösterilmiştir. Çatlağın B ucunda çatlağın açısı arttırıldığında mod-II gerilme şiddet çarpanının da düşmektedir ama çatlağın diğer ucunda önce düşmeye başlamaktadır sonra artmaktadır.



Şekil 4.21 Çatlağın B ucunda normalize enerji salınım çatlağın açısına bağlı değişimi. $h/L=0.6$, $h_c/L=0.3$, $a/L=0.1$, $T_0=25^\circ C$



Şekil 4.22 Çatlağın C ucunda normalize enerji salınım çatlağın açısına bağlı değişimi. $h/L=0.6$, $h_c/L=0.3$, $a/L=0.1$, $T_0=25^\circ C$

Şekil 4.21 ve 4.22 enerji salınımının, çatlağın açısına bağlı değişimi 4 farklı FGM için gösterilmiştir. FGM türlerde fonksiyon 4.13-4.16 verilmiştir. Şekil 4.22 gördüğümüz gibi dört farklı FGM içinde FGM1 de enerji salınım yüksek oldu için tehlikeli malzeme tanımlanır. Yani bu FGM de kırılma imkânı daha yüksektir.

SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında, termal yük altında bulunan malzeme özellikleri sıcaklığa bağımlı olarak derecelendirilmiş izotropik bir ortamda yer alan 2a uzunluğundaki eğik çatlak, düzlem gerinim varsayımı ile sürekli rejimde incelenerek karışık mod kırılma parametreleri hesaplanır. J_k -integralinin en genel tanımı çatlak ucunda tanımlanan ve limitte çatlak ucunda bir noktaya indirgenen bir eğri üzerinde yapılır. FDM üst yüzey termal referansın 2 katı ve alt yüzeyi termal referans ve diğer yüzeyler izole farz edilmiştir. Bu nedenle, sıcaklık dağılımı model içinde iki boyutta olmaktadır. Malzeme özelliği kademeli değişimi göstermek için, güç-yasası kullanılmaktadır. Termal ve yapı analizler için, genel amaçlı sonlu elemanlar yöntemi analizi programı olan ANSYS (1997)'e entegre edilmiştir. Bu tezde formülasyonlar programlama ile ANSYS adlı genel sonlu elemanlar yazılımı içerisinde kod şeklinde yazılmış ve farklı parametreler için mod-I ve mod-II gerilim şiddet çarpanları normalize olmuş ve enerji bırakma miktarı normalizesi ve T-gerilme normalize olmuşu hesaplanmış ve profil olarak gösterilmiştir.

Kırılma mekanik parametreleri çatlağın açısına bağımlı olarak, farklı parametreleri değiştirilerek şekil olarak çatlağın 2 ucunda gösterilmiştir.

Güç (power function) fonksiyon da kuvvetleri değiştirilerek, kırılma mekanik parametreleri üzerine etkileri şekil olarak gösterilmiştir. Şekiller baktığımızda çatlağın açısı arttırıldığında mod-I gerilme şiddet çarpanı her iki yönde artmaktadır ama mod-II çatlağın B ucunda sürekli düşmektedir ve C ucunda önce düşmektedir sonra artmaktadır. Çatlağın açısı arttırıldığında (0-90) normalde sinüs değeri de artmaktadır ve bu nedenle mod-I gerilme şiddet çarpanı her iki yönde artmaktadır.

Mod-II gerilme şiddet çarpanı, çatlağın uzunluğu a/L , arttırıldığında çatlağın B ucunda artmaktadır ama çatlağın diğer tarafı tam ters olmaktadır yani çatlağın C ucunda çatlağın uzunluğu a/L , arttırıldığında mod-II gerilme şiddet çarpanı düşmektedir. Çatlağın B ucunda a/L , arttırıldığında sıcaklık çatlağın ucunda artıyor ve mod-II gerime şiddet çarpanı artmaktadır ama çatlağın diğer ucunda tam ters olmaktadır yani a/L , arttırıldığında sıcaklık çatlağın ucunda düşmektedir ve mod-II gerilme şiddet çarpanı da düşmektedir.

Mod-I gerilme şiddet çarpanı, çatlağın uzunluğu a/L , arttırıldığında çatlağın C ucunda düşmektedir ve mod-II gerilme şiddet çarpanı ile beraber aynı davranışı gösterilmektedir.

Varyasyon profil kırılma mekanik parametreler için 4 farklı değer için çatlağın pozisyona göre şekilde ifade edilmiştir.

EK

A. Mekanik gerinim enerjisi yoğunluğu fonksiyonunun

$$\frac{\partial \lambda}{\partial T} = \frac{((dv/dt)E + (dE/dt)v)(1 - v - 2v^2) + vE((dv/dt + 4(dv/dt)v))}{(1 - v - 2v^2)^2} \quad (A.1)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial T} = \frac{1}{2} \left(\frac{(dE/dt)(1 + v) - E(dv/dt)}{(1 + v)^2} \right) \quad (A.2)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial T} = \frac{((d\alpha/dt)E + (dE/dt)\alpha)(1 - 2v) + 2\alpha E(dv/dt)}{(1 - 2v)^2} \quad (A.3)$$

Düzlem gerilim için:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \mu} \right) = \varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2 + \varepsilon_{12}^2 + \frac{2\beta(\Delta T)\varepsilon_{33} - 2\lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})\varepsilon_{33} - 4\mu\varepsilon_{33}^2}{(2\mu + \lambda)} \quad (A.4)$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda} \right) = \frac{(2\mu - \lambda)(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})^2}{2(2\mu + \lambda)} + \frac{\beta(\Delta T)(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) - 2\mu((\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})\varepsilon_{33} + \varepsilon_{33}^2)}{(2\mu + \lambda)} \quad (A.5)$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \beta} \right) = \frac{3\alpha(\Delta T)^2}{2} - \frac{2\mu(\Delta T)(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + \beta(\Delta T)^2}{(2\mu + \lambda)} \quad (A.6)$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \alpha} \right) = \frac{3\beta(\Delta T)^2}{2} \quad (A.7)$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial (\Delta T)} \right) = 3\beta\alpha(\Delta T) - \frac{2\mu\beta(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + \beta^2(\Delta T)}{(2\mu + \lambda)} \quad (A.8)$$

Düzlem gerinim için:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda}\right) = \frac{(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})^2}{2} \quad (\text{A. 9})$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \mu}\right) = \varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{21}^2 + \varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{22}^2 \quad (\text{A. 10})$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \beta}\right) = (\Delta T) \left(\frac{3}{2} \alpha (\Delta T) - (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \right) \quad (\text{A. 11})$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \alpha}\right) = \frac{3}{2} \beta \Delta T^2 \quad (\text{A. 12})$$

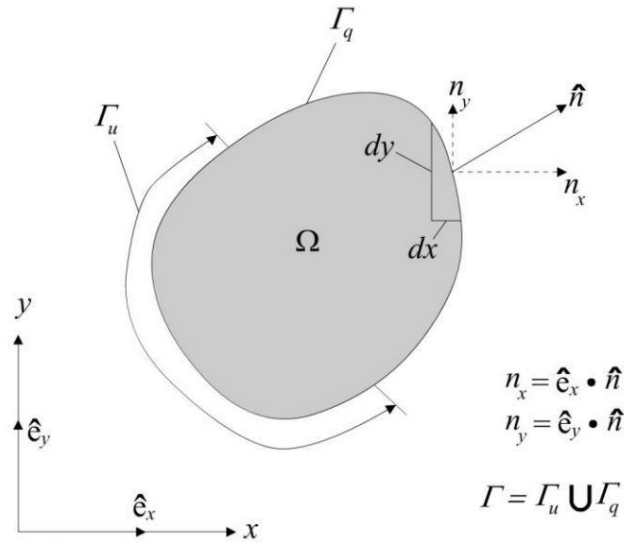
$$\left(\frac{\partial W}{\partial (\Delta T)}\right) = 3\beta\alpha(\Delta T) - \beta(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \quad (\text{A. 13})$$

B. Iraksama Teoremi

İki boyutlu Kartezyen koordinat sisteminde (x, y) , $\vec{\nabla}$ işaretinin Laplace işlemini temsil ettiğini varsayalım. Şekil 6.1.B

$$\vec{\nabla} = \hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y} \quad (B.1)$$

Burada \hat{e}_x ve \hat{e}_y sırasıyla x ve y koordinatlarındaki birim vektörleri göstermektedir. Eğer $G(x,y)$ fonksiyonu, bir skaler fonksiyon şekil B.1 deki Ω alanı üzerinde tanımlanırsa, Iraksama teoremi aşağıdaki gibi gösterilir.



Şekil B.1 Kartezyen koordinatta tanımlanan Ω alandaki Iraksama teoremi

$$\int_{\Omega} \text{div} G \, dx dy \equiv \int_{\Omega} \nabla \cdot G \, dx dy = \oint_{\Gamma} \hat{n} \cdot G ds \quad (B.2)$$

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\Gamma} (n_x G_x + n_y G_y) ds \quad (B.3)$$

Ya da indis gösterimi ile aşağıdaki gibi yazıla bilir.

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial G_i}{\partial x_i} \right) dx dy = \oint_{\Gamma} (n_i G_i) ds \quad (B.4)$$

Burada nokta işareti, vektörlerin skaler çarpımlarını gösterir. S , Γ yüzeyinde tanımlanan bir eğri parçasını, \hat{n} ise Γ yüzeyinde dik olan birim vektörü ifade eder. n_x ve n_y , \hat{n} birim vektörünün dik bileşenleridir.

Kaynaklar

- Anderson, T. L. 1991. Fracture Mechanics Fundamentals and Applications, CRC Press, Boca Raton, Florida, ABD
- ANSYS. 1997. ANSYS Basic Analysis Procedures Guide, Release 5.4. ANSYS Inc., Canonsburg, PA, USA.
- Budiansky, B., and J. R. Rice. 1973. Conservation laws and energy - release rates. . *J. Appl. Mech. - T. ASME* 40:201-205.
- Chen, W.-H., and K.-T. Chen. 1981. On the study of mixed - mode thermal fracture using modified J_k -integrals. . *Int. J. Fracture* 17:R99-R103.
- Chen, W.-H., and K. Ting. 1985. Finite element analysis of mixed - mode thermoelastic fracture problems *Nucl. Eng. Des* 90:55-65.
- Chu, S. J., and C. S. Hong. 1990. Application of the J_k integral to mixed mode crack problems for anisotropic composite laminates. *Eng. Fract. Mech.* 35:1093-1103.
- Dağ, S. 2007. Mixed - mode fracture analysis of functionally graded materials under thermal stresses: A new approach using J_k - integral. *J. Therm. Stresses* 30:269-296.
- . 2008. Ortotropik Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemelerin Kırılma ve Temas Mekanığı
- Dağ, S., E. E. Arman, and B. Yıldırım. 2010. Computation of thermal fracture parameters for orthotropic functionally graded materials using J_k - integral. *International Journal of Solids and Structures* 47:3480-3488.
- DAĞ, S., S. Kadioğlu, and O. S. Yahşi. 1999. Circumferential Crack Problem for an FGM Cylinder Under Thermal Stresses. *Journal of Thermal Stresses* 22:659-687.
- Dağ, S., and B. Yıldırım. 2009. Computation of thermal fracture parameters for inclined cracks in functionally graded materials using J_k - integral *J. Therm. Stresses* 32:530-556.
- DAHAN, I., U. Admon, N. Frage, J. Sariel, M. P. Dariel, and J. J. Moore. 2001. The Development of a Functionally Graded TiC-Ti Multilayer Hard Coating. *Surface and Coatings Technology* 137:111-115.
- Eischen, J. W. 1987a. An improved method for computing the J_2 integral. *Eng. Fract. Mech* 26:691-700.
- . 1987b. Fracture of nonhomogeneous materials. . *Int. J. Fracture* 34:3-22.
- Hellen, T. K., and W. S. Blackburn. 1975. The calculation of stress intensity factors for combined tensile and shear loading. . *Int. J. Fracture* 11:605-617.
- Kachanov, M., B. Shafiro, and I. Tuskrov. 2003. Handbook of Elasticity Solutions. *Kluwer Academic Publishers, Dordrecht*:136.
- KAYSSER, W. A., and B. Ilschner. 1995. FGM Research Activities in Europe. *MRS Bulletin* 20:22-26.
- Kim, J.-H., and G. H. Paulino. 2003. Mixed - mode J_k - integral formulation and implementation using graded finite elements for fracture analysis of nonhomogeneous orthotropic materials. *Mech. Mater.* 35:107-128.
- Kim, J. H., and G. H. Paulino. 2002a. Finite element evaluation of mixed mode stress intensity factors in functionally graded materials. . *Int. J. Numer. Meth. Eng* 53:1903-1935.
- Knowles, J. K., and E. Sternberg. 1972. On a class of conservation laws in linearized and finite elastostatics. . *Arch. Ration. Mech. An.* 44:187-211.
- KOHRI, H., and I. Shiota. 2006. Development of Thermoelectric Cooling Devices with Graded Structure. *Materials Science Forum* 492-493:151-156.

- MALININA, M., T. Sammi, and M. Gasik. 2005. Corrosion Resistance of Homogeneous and FGM Coatings. *Materials Science Forum* 492-493:305-310.
- NIINO, M., and S. Maeda. 1990. Recent Development Status of Functionally Gradient Materials. *ISIJ International* 30:699-703.
- NODA, N. 1999. Thermal Stresses in Functionally Graded Materials. *Journal of Thermal Stresses* 22:477-512.
- Ootao, Y., Y. tanigawa, and T. Nakamura. 1999. Optimization of material composition of FGM hollow circular cylinder under thermal loading: a neural network approach. *Composite Part B* 30:415-422.
- Paulin, G. H., and J.-H. Kim. 2004. A New Approach to Compute T-stress in Functionally Graded Materials by Means of the Interaction Integral Method. *Engineering Fracture Mechanics* 71:1907-1950.
- SAMPATH, S., H. Herman, N. Shimoda, and T. Saito. 1995. Thermal Spray Processing of FGMs. *MRS Bulletin* 20:27-31.
- SCHULZ, U., and M. Schmücker. 2000. Microstructure of ZrO₂ Thermal Barrier Coatings Applied by EB-PVD. *Materials Science and Engineering A* 276:1-8.
- SEVOSTIANOV, I., and M. Kachanov. 2001. Plasma-Sprayed Ceramic Coatings: Anisotropic Elastic and Conductive Properties in Relation to the Microstructure; Cross-Property Correlations. *Materials Science and Engineering A* 297:235-243.
- Sollero, P., and M. H. Aliabadi. 1993. Fracture mechanics analysis of anisotropic plates by the boundary element method. . *Int. J. Fracture* 64:269-284.
- WATARI, F., A. Yokoyama, M. Omori, T. Hirai, H. Kondo, M. Uo, and T. Kawasaki. 2004. Biocompatibility of Materials and Development to Functionally Graded Implant for BioMedical Application. *Composite Science and Technology* 64:893-908.
- Yıldırım, B. 2006. An Equivalent Domain Integral Method for Fracture Analysis of Functionally Graded Materials under Thermal Stresses. *Journal of Thermal Stresses* 29:371-397.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Morteza YEGANEHPOOR

Doğum Yeri : TEBRİZ

Doğum Yılı : 1984

Medeni Hali : Bekâr

Eğitim ve Akademik Durumu:

Lise 1998-2002

Lisans 2004 - 2008

Yabancı Dil: İngilizce

İş Tecrübesi:

SGİ-(Shomale Gherb) 2007-2008