

**FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ
KONİK KESİTLİ MİKRO-KİRİŞLERİN
SERBEST TİTREŞİM ANALİZİ**

**FREE VIBRATION ANALYSIS OF FUNCTIONALLY
GRADED MICRO-BEAMS WITH TAPERED
CROSS SECTION**

DUYGU İPÇİ

PROF. DR. BORA YILDIRIM

Tez Danışmanı

Hacettepe Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim – Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin

MAKİNE Mühendisliği Anabilim Dalı İçin Öngördüğü

YÜKSEK LİSANS TEZİ

olarak hazırlanmıştır.

2014

DUYGU İPCİ' nin hazırladığı “**Fonksiyonel Derecelendirilmiş Konik Kesitli Mikro-Kirişlerin Serbest Titreşim Analizi**” adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI'** ında **YÜKSEK LİSANS** tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Halit KARABULUT :.....

Başkan

Prof. Dr. Bora YILDIRIM :.....

Danışman

Yrd. Doç. Dr. Can Ulaş DOĞRUER :.....

Üye

ONAY

Bu tez Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. Fatma SEVİN DÜZ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada,

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversitede veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

...../...../2014

(İmza)

DUYGU İPCİ

ÖZET

FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ KONİK KESİTLİ MİKRO-KİRİŞLERİN SERBEST TİTREŞİM ANALİZİ

Duygu İPCİ

Yüksek Lisans, Makine Mühendisliği Bölümü

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Bora YILDIRIM

Haziran 2014, 87 sayfa

Bu tezde değişken kesite alanlı fonksiyonel derecelendirilmiş (FD) bir mikro kirişin serbest titreşimi teorik olarak incelenmiştir. Malzeme özelliklerinin kirişin kalınlığı doğrultusunda kuvvet yasası dağılımına göre olduğu varsayılmıştır. Ana denklem, vektörel koordinat sisteminde genişliği üstel olarak değişen kesit alan geometrisi için adi diferansiyel bir denkleme indirgenmiştir. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden yapılan mikro kirişlerin titreşim davranışları modifiye gerilme çifti teorisi baz alınarak elastik değişim aralığında analitik olarak incelenmiştir. Ana hareket denklemleri ve sınır koşulları Hamilton prensibi ile türetilmiştir. Doğal frekansların analitik sonuçları, her iki ucu basit mesnetli, her iki ucu ankastre ve bir ucu ankastre diğer ucu serbest üstel FD kirişler için elde edilmiştir. Doğal frekanslar için çözümler kirişin karakteristik büyüklüğünün malzeme iç uzunluk parametresine oranı olarak ve FDM dağılım fonksiyonu özelliklerine göre elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler, Mikro-kiriş, Serbest titreşim analizi, Konik kesit alanı

ABSTRACT

FREE VIBRATION ANALYSIS OF FUNCTIONALLY GRADED MICRO-BEAMS WITH TAPERED CROSS-SECTION

Duygu İPCİ

Master of Science, Department of Mechanical Engineering

Supervisor: Prof. Dr. Bora YILDIRIM

June 2014, 87 pages

In this thesis a theoretical investigation in free vibration of a functionally graded tapered (FG) micro beam is presented. It is assumed that material properties vary along the beam thickness according to power law distributions. The governing equation is reduced to an ordinary differential equation in spatial coordinate for cross-section geometries with exponentially varying width. The vibration behaviors of micro-beams made of functionally graded materials are analytically investigated on the basis of the modified couple stress theory in the elastic range. The governing equations of motion and boundary conditions are derived on the basis of Hamilton principle. Analytical solutions of the natural frequencies are obtained for exponential FG beams with hinged-hinged, clamped-clamped and clamped-free end supports. Solutions for the natural frequencies are obtained FGM distribution functions of properties and as a function of the ratio of the beam characteristic size to the internal material length scale parameter.

Keywords: Functionally graded materials, Micro-beam, Free vibration analysis, Tapered cross-section.

TEŐEKKÜR

Tez alıőmamın planlanmasında, araőtırılmasında, gösterdiği ilgi ve destek için danıőmanım Prof. Dr. Bora YILDIRIM'a teőekkürlerimi sunarım.

Engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, yönlendirme ve bilgilendirmeleriyle tez çalıőmama yardımını esirgemeyen Prof. Dr. Halit KARABULUT'a teőekkür ederim.

Bu süreçte yanımda olan sevgili aileme gösterdikleri özveriden dolayı tüm kalbimle teőekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
1.GİRİŞ	1
1.1 Genel Bilgiler.....	1
1.2 Literatür Araştırması.....	3
1.3 Tezin Amacı	7
2. FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ MALZEME VE MİKRO KİRİŞLERİN TANIMI	8
2.1 Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemeler	8
2.2 Mikro-Kirişler	10
3.SERBEST TİTREŞİM ANALİZİ	12
3.1 FDM Konik Kesitli Mikro Kirişin Yapısal Özellikleri	12
3.2 Yer değiştirme ile Şekil Değiştirme Arasındaki Kinematik Bağlantılar	13
3.3 Modifiye Gerilme Çifti Teorisini Kullanarak Euler - Bernoulli Kiriş İçin Potansiyel Enerji	14
3.4 Modifiye Gerilme Çifti Teorisini Kullanarak Euler- Bernoulli Kiriş İçin Kinetik Enerji.....	19
3.5 Euler- Bernoulli Kiriş İçin Harici Kuvvetlerin Yaptığı İş	20
3.6 Ana Hareket Denkleminin Türetilmesi	20
3.7 Kesit Değişim Analizi.....	21
3.7.1 Lineer Konik Durumun İncelenmesi	22
3.7.2 Üstel Konik Durumun İncelenmesi	24
3.8 Üstel Kesit Değişimine Sahip Kirişin Analitik Çözümü.....	26
3.8.1 İki Ucu Basit Mesnetli Kiriş İçin Çözüm.....	28
3.8.2 İki Ucu Ankastre Kiriş İçin Çözüm	31
3.8.3 Bir Ucu Ankastre Bir Ucu Serbest Kiriş İçin Çözüm	34
3.8.4 Bir Ucu Ankastre Bir Ucu Serbest Olan ve Serbest Ucunda Kütle Bulunan Kiriş.....	37
3.9 Bir Ucu Ankastre Bir Ucu Serbest Boyutsuz Konik Kirişin Frekans Değerlerinin Diğer Çalışmaların Sonuçlarıyla Karşılaştırılması	40
4. FGM KİRİŞTE MALZEME DAĞILIMININ ETKİSİNİN ELE ALINMASI	43

4.1 Kirişin Gerçek Doğal Frekansının Hesaplanması.....	45
4.1.1 İki Ucu Basit Mesnetli FGM Kiriş İçin ω/ω_0 Oranının; Beta ve h/l Oranının Değişimine Bağlı Olarak Çizilen Grafikler ve Grafiklerin Yorumları .	46
4.1.2 İki Ucu Ankastre FGM Kiriş İçin ω/ω_0 Oranının; Beta ve h/l Oranının Değişimine Bağlı Olarak Çizilen Grafikler ve Grafiklerin Yorumları.....	51
4.1.3 Bir Ucu Ankastre Diğer Ucu Serbest FGM Kiriş İçin ω/ω_0 Oranının; Beta ve h/l Oranının Değişimine Bağlı Olarak Çizilen Grafikler ve Grafiklerin Yorumları	56
4.2 Bir Ucu Ankastre Diğer Ucu Serbest Kirişin Grafik Sonuçlarının Diğer Makaleler İle Karşılaştırılması	62
4.3 Sonuçlar Hakkında Yorumlar	644
KAYNAKLAR.....	655
EK-1	699
EK-2	70
EK-3.....	71
ÖZGEÇMİŞ.....	72

ÇİZELGELER

Sayfa

Tablo 2.1 Dörtgen kesit alanlı konik kiriş çeşitleri	11
Tablo 3.1 Kiriş uç durumuna göre sınır koşulları	27
Tablo 3.2 İki ucu basit mesnetli ve iki ucu sabit konik kirişler için doğal frekanslar ...	33
Tablo 3.3 Bir ucu ankastre diğer ucu serbest konik kiriş için doğal frekanslar.....	36
Tablo 3.4 Bir ucu ankastre bir ucu serbest ve ucunda kütle bulunan kirişin doğal frekansları.....	40
Tablo 3.5 Bir ucu ankastre diğer ucu serbest konik kiriş için doğal frekansların karşılaştırılması	40
Tablo 4.1 Germanyum ve Silisyum elementlerinin malzeme özellikleri	45
Tablo 4.2 İki ucu basit mesnetli fgm kirişin β , n ve h/l oranı değerlerine göre gerçek doğal frekans oranları	47
Tablo 4.3 İki ucu ankastre fgm kirişin β , n ve h/l oranı değerlerine göre gerçek doğal frekans oranları.....	52
Tablo 4.4 Bir ucu ankastre diğer ucu serbest fgm kirişin β , n ve h/l oranı değerlerine göre gerçek doğal frekansları	56

ŞEKİLLER

Sayfa

Şekil 1.1 Elektrotermal mikroaktüatör	2
Şekil 1.2 Bir MEMS'in iç yapısı	2
Şekil 2.1 Fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme dağılımı	8
Şekil 2.2 Malzeme özellikleri kalınlık boyunca değişen fonksiyonel derecelendirilmiş kiriş (TFGM).....	9
Şekil 2.3 Malzeme özellikleri aksenal yönde fonksiyonel derecelendirilmiş kiriş (AFGM).....	9
Şekil 2.4 AFM kiriş.....	10
Şekil 3.1 Fonksiyonel derecelendirilmiş konik kiriş	12
Şekil 3.2 Konik bir kirişin nötr ekseni ve kesit alanı	13
Şekil 3.3 Konik bir kirişin eğilmesi sonucunda seçilen bir noktanın nötr eksene göre yer değişimi	13
Şekil 3.4 İki ucu basit mesnetli kiriş	27
Şekil 3.5 İki ucu basit mesnetli kirişin β değişimine göre doğal frekansları oranı mod =1,2,3,4,5	29
Şekil 3.6 İki ucu basit mesnetli kirişin β_e değişimine göre doğal frekansları oranı mod =1,2,3,4,5 (daralan - genişleyen).....	30
Şekil 3.7 İki ucu ankastre kiriş	31
Şekil 3.8 İki ucu ankastre kirişin β değişimine göre doğal frekansları oranı mod =1,2,3,4,5	32
Şekil 3.9 İki ucu ankastre kirişin β_e değişimine göre doğal frekansları oranı mod =1,2,3,4,5	33
Şekil 3.10 Bir ucu ankastre diğer ucu serbest kiriş	34
Şekil 3.11 Bir ucu ankastre diğer ucu serbest kirişin β değişimine göre doğal frekansları oranı mod =1,2,3,4,5	35
Şekil 3.12 Bir ucu ankastre diğer ucu serbest kiriş β_e değişimine göre doğal frekansları oranı mod =1,2,3,4,5	36
Şekil 3.13 Bir ucu ankastre bir ucu serbest olan ve serbest ucunda kütle bulunan kiriş.....	37
Şekil 3.14 Bir ucu ankastre bir ucu serbest ve ucunda kütle bulunan kirişin β değişimine göre mod 1 deki doğal frekansları oranı $m_e = 0,0.1,0.2,0.5,0.8$	38
Şekil 3.15 Bir ucu ankastre bir ucu serbest ve ucunda kütle bulunan kirişin β değişimine göre mod 2 deki doğal frekansları oranı $m_e = 0,0.1,0.2,0.5,0.8$	38

Şekil 3.16 Bir ucu ankastre bir ucu serbest ve ucunda kütle bulunan kirişin β değişimine göre mod 3 deki doğal frekansları oranı $m_e = 0, 0.1, 0.2, 0.5, 0.8$	39
Şekil 3.17 İki ucu basit mesnetli kirişin β_e değişimine göre doğal frekansları oranlarının başka bir çalışmayla karşılaştırılması mod =1,2,3,4,5	41
Şekil 3.18 İki ucu ankastre kirişin β_e değişimine göre doğal frekansları oranlarının başka bir çalışmayla karşılaştırılması mod =1,2,3,4,5	41
Şekil 3.19 Bir ucu ankastre diğer ucu serbest kirişin β_e değişimine göre doğal frekansları oranlarının başka bir çalışmayla karşılaştırılması mod =1,2,3,4,5	42
Şekil 4.1 Kalınlığı boyunca fonksiyonel derecelendirilmiş kiriş ve nötr eksenini	43
Şekil 4.2 İki ucu basit mesnetli konik fgm kiriş için h/l oranına bağlı ω/ω_0 frekans oranları $\beta = 0.2, n = 0, 0.5, 1, 2$	47
Şekil 4.3 İki ucu basit mesnetli konik fgm kiriş için h/l oranına bağlı ω/ω_0 frekans oranları $\beta = 0.5, n = 0, 0.5, 1, 2$	48
Şekil 4.4 İki ucu basit mesnetli konik fgm kiriş için h/l oranına bağlı ω/ω_0 frekans oranları $\beta = 0.8, n = 0, 0.5, 1, 2$	48
Şekil 4.5 İki ucu basit mesnetli konik fgm kiriş için h/l oranına bağlı ω/ω_0 frekans oranları $\beta = 1, n = 0, 0.5, 1, 2, 5$	49
Şekil 4.6 İki ucu basit mesnetli fgm kiriş için β oranına bağlı ω/ω_0 frekans oranları $h/l = 0.5, n = 0, 0.5, 1, 2, 5$	50
Şekil 4.7 İki ucu basit mesnetli fgm kiriş için β oranına bağlı ω/ω_0 frekans oranları $h/l = 1, n = 0, 0.5, 1, 2, 5$	50
Şekil 4.8 İki ucu basit mesnetli fgm kiriş için β oranına bağlı ω/ω_0 frekans oranları $h/l = 2, n = 0, 0.5, 1, 2, 5$	51
Şekil 4.9 İki ucu ankastre fgm kiriş için h/l oranına bağlı ω/ω_0 frekans oranları $\beta = 0.2, n = 0, 0.5, 1, 2$	52
Şekil 4.10 İki ucu ankastre fgm kiriş için h/l oranına bağlı ω/ω_0 frekans oranları $\beta = 0.5, n = 0, 0.5, 1, 2$	53
Şekil 4.11 İki ucu ankastre fgm kiriş için h/l oranına bağlı ω/ω_0 frekans oranları $\beta = 0.8, n = 0, 0.5, 1, 2$	53
Şekil 4.12 İki ucu ankastre fgm kiriş için h/l oranına bağlı ω/ω_0 frekans oranları $\beta = 1, n = 0, 0.5, 1, 2$	54
Şekil 4.13 İki ucu ankastre fgm kiriş için β oranına bağlı ω/ω_0 frekans oranları $h/l = 0.5, n = 0, 0.5, 1, 2, 5$	55

Şekil 4.14 İki ucu ankastre fgm kiriş için β oranına bağlı ω/ω_0 frekans oranları $h/l=1, n=0, 0.5, 1, 2, 5$	55
Şekil 4.15 İki ucu ankastre fgm kiriş için β oranına bağlı ω/ω_0 frekans oranları $h/l=2, n=0,0.5,1,2,5$	56
Şekil 4.16 Bir ucu ankastre diğer ucu serbest fgm kiriş için h/l oranına bağlı ω/ω_0 frekans oranları $\beta=0.2, n=0,0.5,1,2$	57
Şekil 4.17 Bir ucu ankastre diğer ucu serbest fgm kiriş için h/l oranına bağlı ω/ω_0 frekans oranları $\beta=0.5, n=0,0.5,1,2$	58
Şekil 4.18 Bir ucu ankastre diğer ucu serbest fgm kiriş için h/l oranına bağlı ω/ω_0 frekans oranları $\beta=0.8, n=0,0.5,1,2$	58
Şekil 4.19 Bir ucu ankastre diğer ucu serbest fgm kiriş için h/l oranına bağlı ω/ω_0 frekans oranları $\beta=1, n=0,0.5,1,2$	59
Şekil 4.20 Bir ucu ankastre diğer ucu serbest fgm kiriş için β oranına bağlı ω/ω_0 frekans oranları $h/l=0.5, n=0,0.5,1,2,5$	60
Şekil 4.21 Bir ucu ankastre diğer ucu serbest fgm kiriş için β oranına bağlı ω/ω_0 frekans oranları $h/l=1, n=0,0.5,1,2,5$	60
Şekil 4.22 Bir ucu ankastre diğer ucu serbest fgm kiriş için β oranına bağlı ω/ω_0 frekans oranları $h/l=2, n=0,0.5,1,2,5$	61
Şekil 4.23 Bir ucu ankastre diğer ucu serbest fgm kirişin grafik sonuçlarının diğer çalışmalarla karşılaştırılması $\beta=1, n=0$	62

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

- P_t : Kirişin en üst kısmını oluşturan malzemenin mekanik özellikleri
- P_b : Kirişin en alt kısmını oluşturan malzemenin mekanik özellikleri
- V_t : Kirişin en üst kısmını oluşturan malzemenin hacimsel dağılım fonksiyonu
- V_b : Kirişin en alt kısmını oluşturan malzemenin hacimsel dağılım fonksiyonu
- h : Kirişin yüksekliği, m
- \tilde{z}_c : Nötr eksenin kirişin alt kısmına uzaklığı, m
- \tilde{z} : Kiriş üzerinde seçilen bir noktanın kirişin alt kısmı arasındaki uzaklık, m
- z : Nötr eksen ile seçilen bir nokta arasında uzaklık, m
- n : Malzeme dağılım indeksi
- ψ : Kirişin nötr ekseninin rotasyon açısı, rad
- σ_{ij} : Gerilme (stress) tensörü, N / m^2
- ε_{ij} : Gerinim tensörü
- m_{ij} : Gerilme çiftinin fark (sapma) tensörü
- χ_{ij} : Eğrilik (Curvature) tensörü
- θ : Rotasyon vektörü, rd
- u : x yönündeki yer değişim, m
- w : z yönündeki yer değişim, m
- v : y yönündeki yer değişim, m
- L : Kirişin uzunluğu, m
- t : Zaman, sn
- E : Elastik modül, GPa
- I : Atalet momenti, m^4
- A : Kirişin kesit alanı, m^2
- ρ : Yoğunluk, g / cm^3
- b : Kesit alan genişliği, m
- h : Kesit alan yüksekliği, m
- c_i : Atalet momenti için kesit alan şekil fonksiyonu sabiti

- c_a : Kesit alanı için şekil fonksiyonu sabiti
 η : Kirişin birim uzunluğu
 τ : Birim zaman
 $y(\eta)$: z (yükseklik) yönündeki koniklik şekil fonksiyonu
 $z(\eta)$: y (genişlik) yönündeki koniklik şekil fonksiyonu
 $i(\eta)$: Atalet değişim fonksiyonu
 $a(\eta)$: Kesit alanı değişim fonksiyonu
 α : Kirişin baş uç genişliği ile son uç genişliğinin oranı
 β : Kirişin baş uç yüksekliği ile son uç yüksekliğinin oranı
 y : z yönündeki boyutsuz yer değiştirme
 α_e : z (yükseklik) yönündeki üstel kesit değişim fonksiyonu
 β_e : y (genişlik) yönündeki üstel kesit değişim fonksiyonu
 $W(\eta)$: Kirişin hareket denkleminin yer değişime bağlı fonksiyonu
 $F(t)$: Kirişin hareket denkleminin zamana bağlı fonksiyonu
 Ω^2 : Boyutsuz kirişin doğal frekansı, *rad*
 ω : Kirişin gerçek frekansı, *rad*
 ω_0 : Homojen malzeme dağılımlı ve kesit alanı değişmeyen kirişin frekansı
 δ_v : Virtüel yer değişimi
 l : Malzeme iç uzunluk parametresi, *m*
 M_L : Kirişin kütlesi, *kg*
 m_L : Kirişin birim kütlesi
 M_e : Kirişin ucundaki kütle, *kg*
 m_e : Kirişin ucundaki birim birim kütle

Kısaltmalar

- FDM (FGM) : Fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme
TFDM : Kalınlık yönünde fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme
AFDM : Eksenel yönde fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme

P-FDM	: Güç yasası dağılımlı fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme
E-FDM	: Üstel dağılımlı fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme
S-FDM	: Sigmoid dağılımlı fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme
MEMS	: Mikro-elektromekanik sistemler
NEMS	: Nano-elektromekanik sistemler
AFM	: Atomik kuvvet mikroskobu
DTM	: Diferansiyel transform metodu
DTEM	: Diferansiyel transform element metodu
DQEL	: Diferansiyel kuadratör element metodu
Ark.	: Arkadaşları

1.GİRİŞ

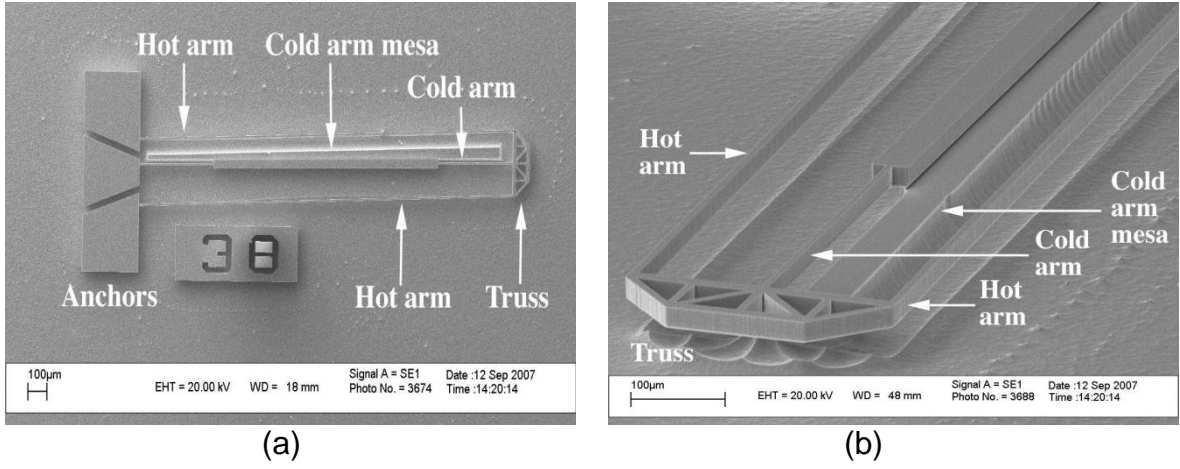
1.1 Genel Bilgiler

Metal ve seramiklerin birlikte kullanıldıkları lamine kompozitlerin yüksek sıcaklık uygulamalarında metal-seramik katmanı arasındaki süreksizlik nedeniyle oluşan ısı ve artık gerilmeler, tabakalar arasında yırtılmalar ve çatlaklar oluşmasına sebep olmaktadır. Bu tip tabakalı kompozitlerin seramik kısmının düşük toklukta olması ve metal kısmının yüksek sıcaklıkta aşınması ve oksitlenmesi gibi zayıf özelliklerinin ortaya çıkması yeni malzeme arayışlarına neden olmuştur. Bu sebeple metalin tokluk özelliğini ve seramiğin yüksek ısıl dayanımını kullanmak amaçlı fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme (FDM; functionally graded material, FGM) kavramı ortaya çıkmıştır. Tokluk malzemenin kırılmadan önce sönümlendiği enerjinin bir ölçüsüdür. FDM malzemeler iki veya daha fazla malzemenin belli bir hacimsel oranda karıştırılmasıyla elde edilmekte ve malzemeler birbirleri ile malzeme kalınlığı ya da eksenini doğrultusunda bir fonksiyona bağlı olarak değişmektedir. Bu yöntem sayesinde malzemelerin birbiriyle derecelendirilmiş olarak dağılımı, sürekli bir değişime sebep olduğundan malzemeler arasında çatlakların gelişebileceği bir ara yüzey oluşmasını engellemekte ve FDM'leri ileri teknolojik uygulamalar için tercih edilen ideal malzemeler haline getirmektedir.

Titreşim üzerine yapılan ilk çalışmalar makro boyutlu yapılar üzerinde gerçekleştirilmiştir. Mikro yapılar üzerine ilk çalışmayı R.D. Mindlin [1] lineer elastisite özelliği gösteren mikro-yapılar üzerine yapmıştır. Daha sonra Fleck ve Hutchinson [2] makro boyutlu yapılar için kullanılan klasik gerilme çifti teorisini yeniden formüle etmişlerdir. Yang F. ve ark. [3] gerilme çifti teorisini kullanarak modifiye gerilme çifti teorisini (modified couple stress; strain gradient) geliştirmiştir. S.K. Park ve X-L Gao [4] modifiye gerilme çifti teorisini kullanarak yeni bir Euler-Bernoulli kiriş modeli oluşturmuşlardır. Bu modelleme, mikro yapıları kiriş yapıları için en uygun çözüm yolu olmuştur.

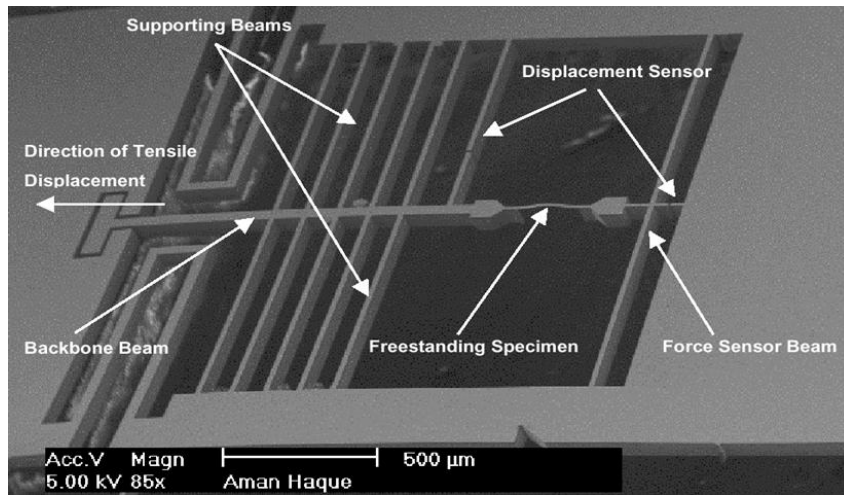
FDM'ler ilk kez ısı bariyeri görevi gören kaplama malzemesi olarak füzyon enerji cihazlarında, uzay araçlarında, uçaklarda, reaktör kazanlarında kullanılmıştır. Son yıllarda FD malzemeler şekil bellek alaşımlarından oluşan ince filmler [5], mikro-ve nano-elektromekanik sistemler (MEMS ve NEMS) [6-7] biyosensörler, aktüatörler [8-9] ve atomik kuvvet mikroskopları (AKM) [10] gibi mikro ve nano

yapıya sistemlerde çok yaygın olarak kullanılmaktadır. Şekil 1.1'de bir mikro aktüatörün iç yapısı görülmektedir.



Şekil 1.1 Elektrotermal mikroaktüatör (a) yan profilden görünüş (b) üstten görünüş

MEMS, NEMS ve AKM gibi cihazlarda kiriş yapıları bulunmaktadır. Kiriş yapılar uniform olmakla birlikte değişken kesitli de olabilmektedir. Bu tür mikro boyutlu yapılarda malzemenin statik ve dinamik davranışlarının analizi büyük bir role sahiptir. Sistemlerin doğru çalışabilmesi için kiriş yapılarının doğal frekanslarının belirlenmesi gerekmektedir. Çünkü sistemin sorunsuz çalışması için ortamda oluşan frekansın tasarlanan sistemin doğal frekansı (rezonans frekansı) ile aynı olamaması gerekmektedir. Yani serbest titreşim analizlerinin yapılması sorunsuz bir tasarım için çok önemlidir. Şekil 1.2'de Mikro elektro mekanik sistemdeki kirişler görülmektedir.



Şekil 1.2 Bir MEMS'in iç yapısı

1.2 Literatür Araştırması

FDM olarak adlandırılan bu özel kompozit yapı ilk kez Japonya'da Sendai grubu tarafından 1984 yılında üretilmiştir. Isı bariyeri görevi görmesi amacıyla roket gövdesinin kaplama malzemesi olarak kullanılmıştır.

Makro boyutlu FDM kirişlerin eğilme, titreşim ve statik özellikleri hakkında araştırmacıların yaptığı birçok çalışma mevcuttur. Bu çalışmalarda klasik sürekli ortam teorileri kullanılmıştır. Genellikle malzeme özelliklerinin kalınlık boyunca değişimi göz önüne alınarak çözümler yapılmıştır [11-12-13-14]. Eksenel yönde derecelendirilmiş kirişlerde meydana gelen problemlerin çözümü çok değişkenli katsayılı ana denklemler yüzünden karmaşık olduğundan daha az sayıda çalışma bulunmaktadır [15-16]. Elishakoff ve ark. semi-inverse metodunu kullanarak farklı uç destek yapılı kirişlerin ana frekanslarının gerçeğe en yakın sonuçlarını elde etmek için çalışmalar yapmışlardır. Semi-inverse metodu bir kapalı-form çözümü vermektedir. Bu çözüm, belirli eğilme rijitliği ve kütle yoğunluğu için bazı özel polinomlara benzer sonuçlar vermiş ve bu yöntemin yüksek dereceli doğal frekansların belirlenmesi için uygun olmadığı anlaşılmıştır. Bundan dolayı Huang ve Li [17] değişken katsayılı hareket denklemini Fredholm denklemine dönüştürerek doğal frekansları bulmaya çalışmıştır. Fakat bu metot ile doğal frekanslar ancak yaklaşık olarak bulunabilmektedir. Murin ve ark. [18] değişken malzeme özellikli kirişler için analitik bir yöntem geliştirmiştir. Denklemlerin oluşturulmasında doğrusal kiriş teorisi kullanılmış, atalet momenti kesme kuvveti etkisi ve kütle dağılımı dikkate alınmıştır. Elde edilen sonuçlar sonlu elemanlar çözümü ile karşılaştırılmıştır. Bu çalışmada kirişin sabit kesit alanına sahip olduğu varsayılmıştır.

Shahba ve Rajasekaran [19] eksenel FD konik Euler-Bernoulli kirişlerinin statik ve serbest titreşim davranışlarını analiz etmek için ana hareket denklemlerin türetilmesi üzerine çalışmışlardır. Klasik diferansiyel transform metodunu (DTM) kullanarak analiz sonuçlarını irdelleyerek yakınsama oranı daha iyi olan diferansiyel transform element metodunu (DTEM) geliştirmişlerdir. DTEM metoduna ek olarak düşük dereceli diferansiyel kuadratör element metodunu (DQEL) ana diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanmışlardır. Gerçekleştirdikleri nümerik çalışmalarda, FD kirişlerinin boyuna ve enine serbest

frekanslarının ve kritik burulma yüklemelerinin doğruluğunu DQEL ve DTEM yöntemleri kullanılarak kanıtlamışlardır.

Park ve Gao [4] Euler-Bernoulli kiriş metodunu ve modifiye gerilme çifti teorisini kullanarak yeni bir model geliştirmişlerdir. Bu yeni modelin bir iç malzeme uzunluk ölçek parametresi içerdiğini ve boyut etkisinin çözümlerde önemli ölçüde etkili olduğunu göstermişlerdir. Yeni geliştirilmiş modelleme ile klasik kiriş teorine göre kirişin daha büyük eğilme rijitliğine sahip olduğunu bulmuşlardır. Bu iki modelde meydana gelen sapma miktarları arasındaki fark kiriş kalınlığı azaldıkça artmıştır. Kirişin kalınlığı artıkça iki yöntemde de birbirine yakın sonuçlar alındığı görülmüştür.

Reddy [20] çalışmasında mikro-yapı bağımlı doğrusal olmayan Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş teorilerini virtüel yer değişimi prensibini kullanarak geliştirmiştir. Kirişi oluşturan iki malzemenin kiriş kalınlığı boyunca güç yasası fonksiyonuna göre dağıldığını varsaymıştır. Bulduğu bu yeni denklem modifiye stres çifti teorisi, güç yasası dağılımı ve doğrusal olmayan Von-Kârmân geometrisini temel almaktadır. Bu model klasik Euler-Bernoulli ve Timoshenko teorilerinin aksine FDM'deki boyut bağımlılığını gösteren malzeme uzunluk parametresini içermektedir. Statik bükülme, titreşim ve burulmanın parametre üzerine etkisini araştırmıştır. Ortaya koyduğu bu teorik gelişmeler ayrıca sonlu elemanlar modelinin geliştirilmesine olanak sağlamıştır. Ayrıca doğrusal olmayan geometrinin ve mikro-yapı bağımlı temel bağıntının burkulma sonrası üzerine etkisini belirlemiştir.

Asghari ve ark. [21] FD malzemeden yapılan mikro kirişlerin boyut bağımlı statik ve titreşim davranışlarını modifiye gerilme çifti teorisini temel alarak elastik bölgede analitik olarak incelemişlerdir. Ana hareket denklemi ve sınır koşulları Hamilton prensibine dayanarak türetilmiştir. Doğal frekans ve statik sapma için kapalı form çözümünü, kirişin karakteristik boyutunun iç malzeme parametresine oran fonksiyonuna ve malzeme özellikleri dağılım fonksiyonuna bağlı olarak elde etmişlerdir. Bu sonuçlar kirişin karakteristik boyutunun iç malzeme uzunluk parametresine oranı küçük olduğunda Modifiye Gerilme Çifti Teorisinden elden edilen statik sapma ve doğal frekanslar, klasik kiriş teorisine göre büyük farklılıklar göstermektedir.

Şimşek [14] gerçekleştirdiği çalışmada değişken kesit alanlı ve malzeme özellikleri aksenel yönde değişen FD konik nano-çubukların serbest titreşimini lokal olmayan elastisite teorisiyle incelemiştir. Bu çalışmada nano-çubuğun elastisite modülünün ve kütle yoğunluğunun güç dağılımı yasasına göre aksenel doğrultuda değişim gösterdiği varsayılmıştır. Nano-çubuklar için iki ucu sabit ve bir ucu sabit diğer ucu serbest olan iki tip sınır koşulu kullanılmıştır. Serbest titreşim frekanslarını elde etmek için Galerkin metodundan yararlanmıştır. Lokal olmayan parametrenin etkisi, farklı malzeme bileşimi, koniklik oranı, kesit alanındaki değişimler ve sınır koşulları gibi değişimlerin aksenel FD nano-çubuğun serbest titreşimi üzerine etkileri araştırılmıştır. Kesit alanı sinüzoidal değişimli izotropik kirişin ve değişken yarıçaplı konik nano-çubuğun serbest titreşim frekansını elde etmiş ve daha önce yapılan çalışmaların sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır. Bulunan sonuçların önceki sonuçlarla benzer olduğu görülmüştür. Bu lokal olmayan etkilerin göz ardı edildiği klasik (lokal) kiriş modeli kullanılarak titreşim frekanslarının tahmini değerlerden daha fazla olduğu belirlenmiştir.

Akgöz ve Civalek [22] homojen olmayan ve konik kesitli mikro-kirişlerin titreşim davranışlarını belirlemek için Euler-Bernoulli kiriş ve modifiye gerilme çifti teorisini birleştirerek analiz etmişlerdir. Mikro-kirişin çözümünde sınır koşulu olarak bir ucu sabit diğer ucu serbest kiriş olduğu kabul edilmiş ve malzeme özelliklerinin aksenel yönde değiştiği varsayılmıştır. Rayleigh–Ritz metodu serbest transverse titreşim probleminin yaklaşık olarak çözümünün elde edilmesini sağlamıştır. Aksenel fonksiyonel derecelendirilmiş mikro-kirişin doğal frekansına etki eden koniklik oranı ve malzeme özelliklerinin etkileri detaylı bir şekilde açıklanmıştır.

Huang ve ark. [17] homojen olmayan kesit alanına sahip ve malzeme özellikleri aksenel dağılımlı FD Timoshenko kirişlerinin titreşim davranışlarını gözlemlemek için yeni bir yöntem ileri sürmüşlerdir. Yardımcı fonksiyonları tanımlayarak sapma ve dönüş miktarını belirten değişken katsayılı ana denklem çiftini tek bir ana denkleme dönüştürmüşlerdir. Üstelik fiziksel nicelikler en son bulunan denklemin çözülmesi cinsinden elde ettiler. Bilinmeyen fonksiyon için kuvvet serilerinden yararlanarak, lineer cebirsel denklem sistemini tek bir denklem sistemine dönüştürmüşler ve farklı sınır koşulları için doğal frekansları bir karakteristik denkleme haline getirmişlerdir. Önerilen ileri yaklaşım çoklu-köklerden eş zamanlı elde edilen düşük ve yüksek dereceli doğal frekansları içeren polinomal

denklemlerdir. Homojen olmayan ve aksenel FD kirişler için hesaplanan doğal frekansların sonuçlarına göre bulunan yöntemin yakınsamayı daha hızlı yaptığını ve nümerik sonuçları yüksek doğrulukta verdiğini belirtmişlerdir.

Tong ve Tabarrok [23] çalışmalarında, basamaklı Timoshenko kirişlerin, serbest ve zorlanmış titreşim durumundaki davranışlarını analitik olarak açıklamak için farklı bir çözüm önermişlerdir. Bu çözümü genellikle homojen yapılı olmayan Timoshenko kirişlerinin titreşim analizlerini yaklaşık olarak hesaplamak için kullanmışlardır. Serbest titreşim halindeki frekans denklemini kirişin bir ucundaki başlangıç parametreleri cinsinden elde edilmişlerdir. Fakat zorlanmış titreşim durumundaki kirişin analitik çözümünü iki bilinmeyenli cebirsel denklem kümesinin çözümü ile elde etmişlerdir.

Kahrobaiyan ve ark. [24] boyut bağımlı FD Euler- Bernoulli kiriş modelini, mikro ölçekli yapılardaki boyut etkisine duyarlı klasik olmayan teorilere ve gerinim gradyan teorisine dayandırarak geliştirmişlerdir. Ana denklemi, klasik ve klasik olmayan sınır koşullarını varyasyonel yaklaşım yöntemini kullanarak elde etmişlerdir. Bu yeni modeli geliştirmek için daha önceleri kullanılan, kalınlık boyunca sabit kabul edilen uzunluk ölçek parametresini göz ardı etmişleridir. Bunun bir sonucu olarak eşdeğer uzunluk parametresi, fonksiyonel derecelendirilmiş mikro-kirişlerin bileşenlerinin uzunluk parametrelerinin bir fonksiyonu olarak gösterilmiştir. Genel kapalı-form çözümünü yeni modelin statik sapmasını bulmak için türetmişlerdir. Bu çalışmada yeni modelin statik ve serbest titreşim davranışını, basit mesnetli FD mikro-kiriş için analiz etmişlerdir. FD kirişin malzeme özelliklerinin kalınlık doğrultusunda güç yasası dağılımı fonksiyonuna sahip olduğunu dikkate almışlardır. Yeni modelin sonucunu modifiye gerilme çifti teorisi ve klasik süreklilik teorileriyle karşılaştırmışlardır. Son iki teoride kullanılan gerinim gardiyan teorilerini özel durumlar için elde etmişlerdir.

1.3 Tezin Amacı

Titreşim periyodik salınım hareketinin sonucunda meydana gelen bir olaydır. Titreşimlerin bazı durumlarda sönümlenerek ortadan kaldırılması istenirken, bazı uygulamalarda ise kontrol edilerek ya da minimize edilerek yararlı bir hale dönüştürülmesi hedeflenmektedir.

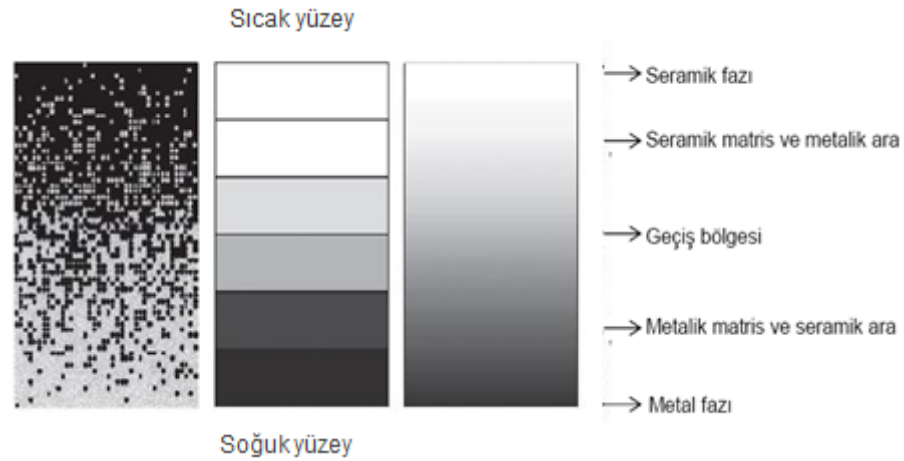
Son 20 yıldır mikrometre ve nanometre ölçeğindeki sistemlerin ve cihazların geliştirilmesi mikro ve mikro-altı ölçekli titreşim analizlerinin önemini artırmıştır. Homojen olmayan kirişlerin dinamik analizleri çok değişken katsayılı denklemlerin ortaya çıkması nedeniyle homojen kirişlerin analizlerine göre çok daha karmaşıktır. Homojen malzeme dağılımına sahip olmayan kirişlerin titreşim analizlerini basitleştirmek için Euler-Bernoulli kiriş modeline dayalı birçok metot önerilmiştir. Özellikle analitik yönden çözülemeyen hareket denklemleri için diferansiyel transform metodunun kullanılması, çözüme ulaşmak için hem kolaylık sağlamakta hem de kesin bir doğrulukta sonuç vermektedir. Genellikle Emden-Flowner ve Fredholm diferansiyel denklemlerine benzeyen ana denklemler DTM dönüşüm tablosu kullanılarak tekrar düzenlenmekte ve çözümler elde edilmektedir.

Bu tezin temel amacı elastik yapıları makro boyutlu kirişlerin titreşim analizinde kullanılan geleneksel modelleme teorilerini, mikro boyuta sahip fonksiyonel derecelendirilmiş kirişlere uyarlamak ve malzemenin serbest titreşimini analitik yollarla elde etmektir. Analitik çözümler kirişin sınır şartlarına, kesit alanının geometrisine, malzeme özelliklerinin dağılım fonksiyonuna ve doğrultusuna göre yapılmıştır. Uzunluğu boyunca kesit alanı değişen mikro boyutlu kirişlerin hareket denklemleri; modifiye gerilme çifti teorisi ve Hamilton prensibi temel alınarak elde edilmiş ve analitik çözümü bulunan dörtgen kesitli kiriş için analiz gerçekleştirilmiştir.

2. FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ MALZEME VE MİKRO KİRİŞLERİN TANIMI

2.1 Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemeler

Bileşenlerinin özellikleri, hacimsel bir oran dağılımına bağlı olan malzemeler fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme olarak tanımlanır. FDM'yi oluşturan bileşenler birbirleriyle kimyasal etkileşime girmemektedirler. FDM'ler bu iki özelliğiyle kompozit malzemelere benzemektedirler. Kompozitler, temel olarak kalıp görevi gören reçine içine gömülmüş sürekli veya kırılmış elyaflardan oluşmaktayken FDM'yi oluşturan iki bileşen birbiri içerisinde dağılmış olarak bulunur. FDM'nin seramik yüzeyi sıcak yüzey, metal yüzeyi ise soğuk yüzey olarak adlandırılmaktadır. Şekil 2.1'de fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeyi oluşturan, metal ve seramik malzemelerin faz geçişleri gösterilmiştir.



Şekil 2.1 Fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme dağılımı

FDM'lerin hacimsel oran dağılımı eşitlik (2.1-2.2)'de gösterilmektedir.

$$P = P_t V_t + P_b V_b \quad (2.1)$$

$$V_b + V_t = 1 \quad (2.2)$$

$$P = P_t + V_b (P_b - P_t) \quad \text{veya} \quad P = P_b + V_t (P_t - P_b) \quad (2.3)$$

P_t ve P_b sırasıyla kirişin üst ve alt yüzeyinin malzeme özelliği, V_t ve V_b ise sırasıyla üst ve alt kirişin malzeme dağılım fonksiyondur.

Fonksiyonel derecelendirilmiş kirişlerde malzeme dağılımı; kalınlık veya eksenel doğrultuda olabilmektedir. Şekil 2.2'de malzeme özellikleri kalınlık doğrultusunda değişen FGM kirişi ve şekil 2.3'te malzeme özellikleri eksen doğrultusunda değişen FGM kiriş göstermektedir. Malzeme dağılımları, kuvvet yasası dağılımı (P-FGM), üstel dağılım (E-FGM), sigmoid dağılım (S-FGM) [9] gibi çeşitli fonksiyonlara bağlı olmaktadır. Bu malzemeler döküm ve toz metalürji adları altında birçok farklı üretim yöntemi ile imal edilebilmektedirler

Kirişlerin matematiksel modellemesi (2.1),(2.2) ve (2.3) eşitlikleri temel alınarak yapılmaktadır. Aşağıda kuvvet yasası, üstel ve sigmoid dağılım fonksiyonları verilmiştir¹.

Kuvvet yasası dağılım;

$$P(z) = P_b + (z/h)^n (P_t - P_b) \quad (2.4)$$

Üstel dağılım;

$$P(z) = P_t \exp\left(\left(z/h\right)^n \log(P_b / P_t)\right) \quad (2.5)$$

Sigmoid dağılım;

$$\begin{aligned} P(z) &= (P_t - P_b) \left[0.5(1 + 2z/h)^n \right] + P_b & -h/2 \leq z \leq 0 \\ P(z) &= (P_b - P_t) \left[0.5(1 - 2z/h)^n \right] + P_t & 0 \leq z \leq h/2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

h : Kirişin yüksekliği

z : Kiriş üzerinde seçilen bir noktanın kirişin alt yüzeyine olan uzaklığı

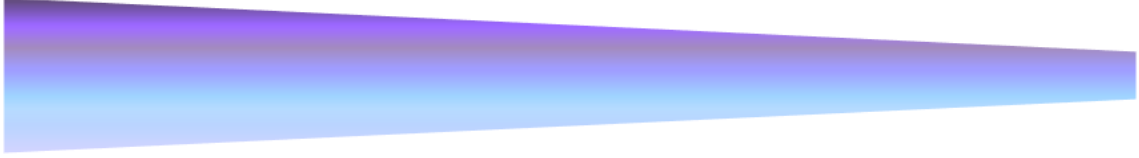
n : Malzeme dağılım indeksi

Dağılım fonksiyonları kirişin bulunduğu ortamın çalışma şartlarına göre seçilebilmektedir. Örneğin; Bir FDM kirişin malzeme dağılımı değiştirilerek, çalışma frekansıya denk olmayacağı bir doğal frekansa sahip olması sağlanabilmektedir. Statik sapmanın belirli bir düzeyi geçmemesi gereken ya da burkulma yükünün belirlenmiş bir seviyeden az olmaması istenen durumlar için de dağılım fonksiyonları seçilebilir.

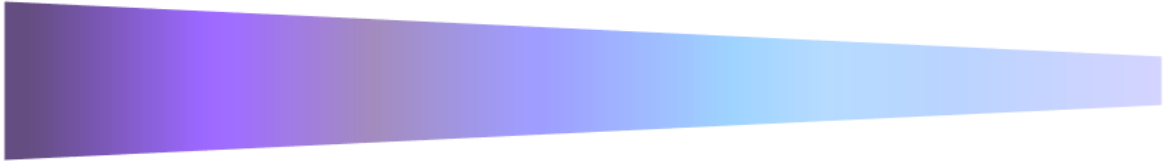
¹ (Hui-Shen Shen, Functionally Graded Materials, Nonlinear Analysis of Plates and Shells, 2009)

2.2 Mikro-Kirişler

MEMS, NEMS ve AKM gibi cihazlarda mikro ve mikro-altı ölçek boyutlarında kiriş yapıları bulunmaktadır. Bu tip sistemlerde küçük değişimler kirişin statik ve dinamik davranışı üzerinde çok önemli bir etkiye sahiptir. Kirişlerdeki malzeme dağılımı kalınlık yönünde olabileceği gibi eksen doğrultusunda da olabilmektedir.

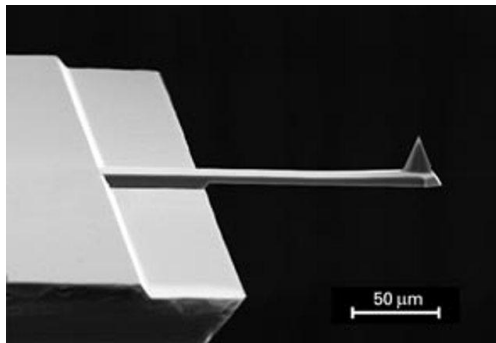


Şekil 2.2 Malzeme özellikleri kalınlık boyunca değişen fonksiyonel derecelendirilmiş kiriş (TFGM)



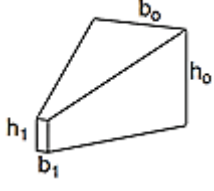
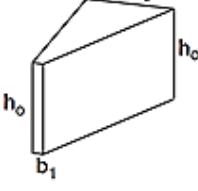
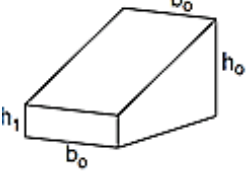
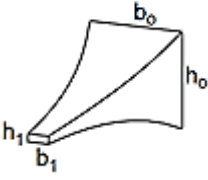
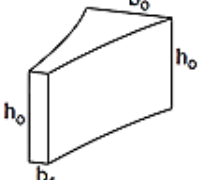
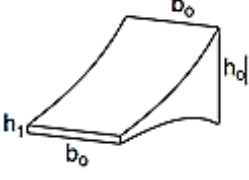
Şekil 2.3 Malzeme özellikleri aksel yönde fonksiyonel derecelendirilmiş kiriş (AFGM)

Bir kirişin kesit alanı dikdörtgen, dairesel veya üçgen geometriye sahip olabilmektedir. Tablo 2.1'de dörtgen kesit alanlı lineer ve üstel konik kiriş geometrileri gösterilmektedir. Örneğin, üçgen kesitli konik kirişler atomik kuvvet mikroskop uygulamalarında kullanılmaktadır. Bu geometriye sahip kirişlerin uç yapısı, kan hücresi gibi mikro boyutlu yapıların hacmini belirlemek amacıyla parçacığın yüzeyine etki eder ve bu şekilde cismin üç boyutlu (3D) geometrisi elde edilir. Şekil 2.4 'de atomik kuvvet mikroskopunda bulunan bir kirişin fotoğrafı görülmektedir



Şekil 2.4 AFM kiriş

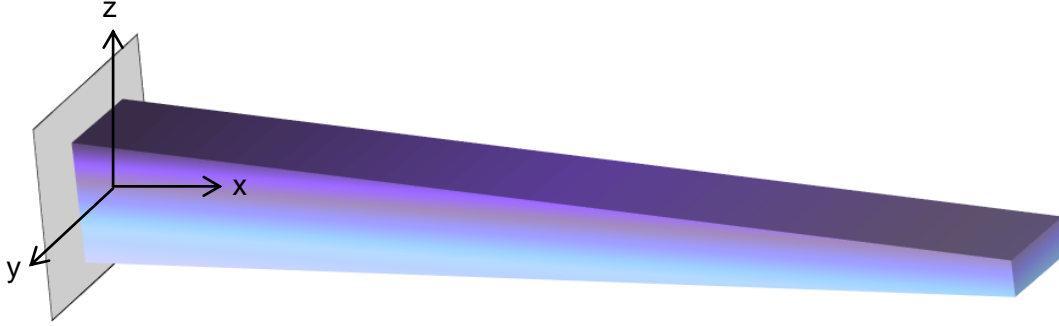
Tablo 2.1 Dörtgen kesit alanlı konik kiriş çeşitleri [22]

	Çift Yönlü Konik	Derinlik Boyunca Konik	Yükseklik Boyunca Konik
Lineer			
Üstel			

3.SERBEST TİTREŞİM ANALİZİ

3.1 FDM Konik Kesitli Mikro Kirişin Yapısal Özellikleri

Genellikle FDM kirişlerin bir yüzeyi saf metalden diğer yüzeyi ise saf seramikten oluşmaktadır. Kirişi oluşturan metal ve seramik bileşenler kirişin kalınlığı boyunca belirli bir dağılıma göre hacimsel oranla karıştırılmış olup birbirleriyle inert elementlerden seçilmişlerdir.



Şekil 3.1. Fonksiyonel derecelendirilmiş konik kiriş

Şekil 3.1'deki FDM mikro kiriş kalınlığı doğrultusu boyunca malzeme dağılımına sahiptir. Bu tür bir kirişte malzemenin dağılımı kalınlık doğrultusunda olduğundan malzeme özellikleri kalınlık boyunca değişecektir. Bu sebeple kalınlık yönünde seçilen bir noktadaki malzeme özellikleri tanımlanmıştır.

$$\rho(\tilde{z}) = \rho_b + \left(\frac{\tilde{z}}{h}\right)^n (\rho_t - \rho_b) \quad (3.1)$$

$$E(\tilde{z}) = E_b + \left(\frac{\tilde{z}}{h}\right)^n (E_t - E_b) \quad (3.2)$$

$$\mu(\tilde{z}) = \mu_b + \left(\frac{\tilde{z}}{h}\right)^n (\mu_t - \mu_b) \quad (3.3)$$

Seçilen \tilde{z} noktasında;

$\rho(\tilde{z})$: Yoğunluk

$E(\tilde{z})$: Elastisite modülü

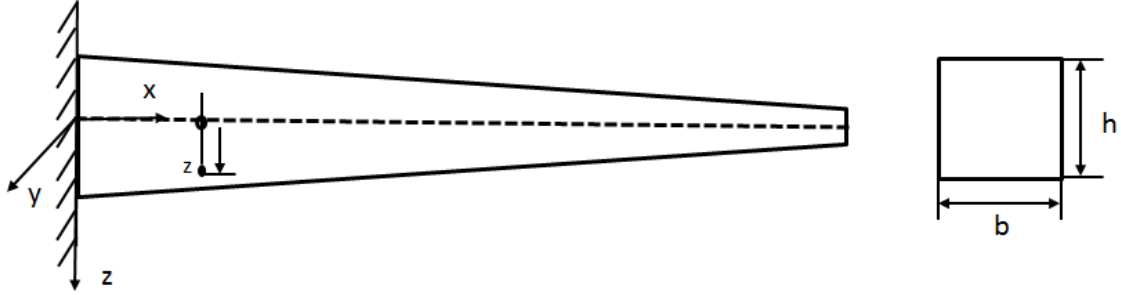
$\mu(\tilde{z})$: Kesme modülü

b ve t indisleri sırasıyla kirişin alt ve üst yüzeylerindeki malzemeleri temsil etmektedir. n sembolü güç yasası dağılım fonksiyonuna göre dağılım fonksiyon indeksini göstermektedir.

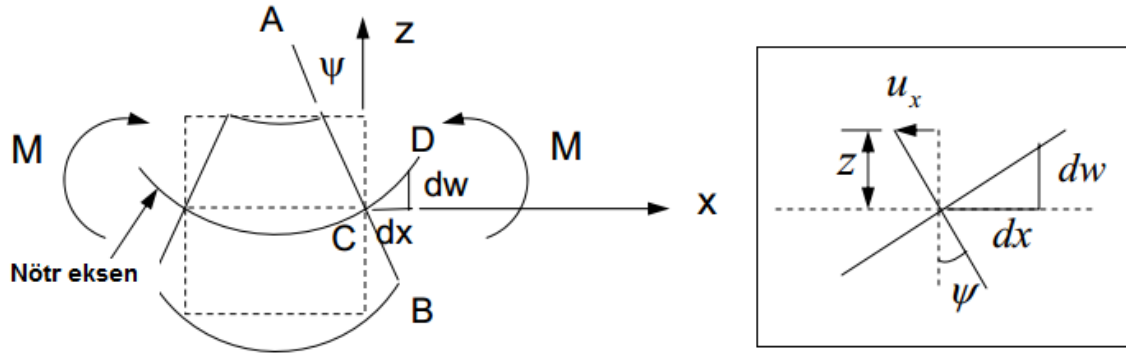
3.2 Yer değiştirme ile Şekil Değiştirme Arasındaki Kinematik Bağlantılar

Euler-Bernoulli kiriş teorisinde; x , y ve z koordinatları doğrultularında yer değiştirme miktarı aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

$$u_x = -z\psi, \quad u_y = v = 0, \quad u_z = w = w(x,t) \quad (3.4)$$



Şekil 3.2 Konik bir kirişin nötr eksenini ve kesit alanını



Şekil 3.3 Konik bir kirişin eğilmesi sonucunda seçilen bir noktanın nötr eksene göre yer değerişimini

z parametresi kirişin nötr eksenini ile Şekil değerişimini için seçilen noktayla arasındaki uzaklığı temsil ederken, \tilde{z} sembolü seğili noktanın kirişin alt yüzeyine olan uzaklığını göstermektedir. ψ kirişin (centroidal) merkez ekseninin rotasyon açısını temsil etmektedir. Kirişin hareket durumu, göz önüne alınarak bu sapmanın çok küçük bir sapma olduğu tespit edilmiştir.

$$\psi \approx \frac{dw}{dx} \quad (3.5)$$

(3.4) deki u eşitliğine (3.5) deki ψ değeri yazılarak $w(w,t)$ 'ye bağlı u elde edilir.

$$u = -z \frac{dw}{dx} \quad (3.6)$$

3.3 Modifiye Gerilme Çifti Teorisini Kullanarak Euler - Bernoulli Kiriş İçin Potansiyel Enerji

Yang ve çalışma arkadaşları, gerinim enerjisi yoğunluğunu eğrilik tensörü ve gerinim tensörünün fonksiyonu cinsinden elde ederek modifiye gerilme çifti teorisini ifade etmişlerdir. Lineer elastik izotropik malzeme özelliğine sahip kirişin hacminde meydana gelen şekil değiştirme enerjisi (U), modifiye gerilme çifti teorisini kullanarak yazılmıştır [37].

$$U = \frac{1}{2} \iiint_v (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + m_{ij} \chi_{ij}) dv \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (3.7)$$

(3.7) denklemini kartezyen koordinatları gösterilerek yeniden yazılmıştır.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + m_{xy} \chi_{xy}) dx dy dz \quad (3.8)$$

Eşitlik (3.8)'deki $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, m_{ij}$ ve χ_{ij} sembolleri sırasıyla gerilme tensörü, gerinim tensörü, gerilme çiftinin deviatorik (fark) tensörü ve eğrilik tensörünü temsil etmektedir.

$$\sigma_{ij} = \lambda tr(\varepsilon_{ij}) I + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (3.9)$$

$$m_{ij} = 2l^2 \mu \chi_{ij} \quad (3.10)$$

l malzeme iç uzunluk parametresi, λ ve μ lame sabitleridir. Lame sabitleri gerilme-şekil değiştirme arasındaki bağıntıyı veren sabitlerdir. λ birinci lame sabiti, μ ikinci lame sabiti (kayma modülü) olarak adlandırılmaktadır.

$$\chi_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla \theta + \nabla \theta^T) \quad (3.11)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^T) \quad (3.12)$$

ε ve χ tensörleri simetrik özellik gösterdiğinden (3.11) ve (3.12) eşitlikleriyle tanımlanmıştır. ε_{ij} ve χ_{ij} 'nin simetrik özelliğinden dolayı (3.9) ve (3.10)'daki σ_{ij} ve m_{ij} olarak ifade edilen tensörler de simetriktirler ($\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^T$ ve $m_{ij} = m_{ij}^T$).

Eşitlik (3.11)'deki θ rotasyon vektörünü temsil etmektedir. Rotasyon vektörü eşitlik (3.13) gösterilmiştir

$$\theta_{ij} = \frac{1}{2} \text{curl}(u)_i \quad (3.13)$$

(3.4)'deki tanımlanan eşitlikler (3.13) denkleminde yerine yazılarak yeniden düzenlenmiştir.

$$\theta_{ij} = \frac{1}{2} \text{curl}(u)_i = \frac{1}{2} \bar{\nabla} \times \bar{u} = \frac{1}{2} \det \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \det \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -z \frac{dw}{dx} & 0 & w(x,t) \end{vmatrix} \quad (3.14)$$

$$\theta_{ij} = i \underbrace{\left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial y} - \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)}_0 - j \left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z} \left(-z \frac{dw}{dx} \right) \right) + k \underbrace{\left(\frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left(-z \frac{dw}{dx} \right) \right)}_0 \quad (3.15)$$

$$\theta_y = -\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}, \quad \theta_x = \theta_z = 0 \quad (3.16)$$

(3.16) elde ettiğimiz rotasyon vektör değerleri (3.11) denkleminde yazılmıştır.

$$\nabla \theta = \theta_{i,j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} & \frac{\partial \theta_x}{\partial y} & \frac{\partial \theta_x}{\partial z} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial x} & \frac{\partial \theta_y}{\partial y} & \frac{\partial \theta_y}{\partial z} \\ \frac{\partial \theta_z}{\partial x} & \frac{\partial \theta_z}{\partial y} & \frac{\partial \theta_z}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(-z \frac{dw}{dx} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$\chi_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla \theta + (\nabla \theta)^T) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{d^2 w}{dx^2} & 0 \\ -\frac{d^2 w}{dx^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

$$\chi_{xy} = -\frac{1}{2} \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad \chi_{xx} = \chi_{yy} = \chi_{zz} = \chi_{yz} = \chi_{xz} = 0 \quad (3.19)$$

Eşitlik (3.12)'de tanımlanan gerinim tensörü denklemine (3.4)'deki yer değiştirme eşitlikleri yazılarak kirişin x, y ve z doğrultularındaki şekil değişimi belirlenmiştir.

$$\nabla u = u_{i,j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(-z \frac{d^2 w}{dx^2} \right) & 0 & -\frac{dw}{dx} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{dw}{dx} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

ε_{ij} gerinim tensörünü elde etmek için eşitlik (3.12)'deki denklemden ∇u yerine yazılmıştır. Elde edilen matrise göre sadece x doğrultusunda gerinimin oluştuğu tespit edilmiştir.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} \left(-z \frac{d^2 w}{dx^2} \right) & 0 & -\frac{dw}{dx} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{dw}{dx} & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left(-z \frac{d^2 w}{dx^2} \right) & 0 & \frac{dw}{dx} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{dw}{dx} & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \left(-z \frac{d^2 w}{dx^2} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$\varepsilon_{xx} = -z \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (3.22)$$

Elastik sabitlerinin birbiriyle arasındaki bağıntıyı gösteren ek-1'deki tablodan yararlanarak λ ve μ sabitleri yazılmıştır.

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (3.23)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.24)$$

E : Elastik modül

ν : Possion oranı

Kirişte oluşan gerilmelerin yönleri belirlemek için (3.9) gerilme tensörü denkleminde (3.22) , (3.23) ve (3.24) eşitlikleri yerine yazılmıştır.

$$\sigma = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) [I]_{3 \times 3} + 2 \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} \left(-z \frac{d^2 w}{dx^2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

$$\sigma = \begin{bmatrix} -z \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & -z \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & -z \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

$$\sigma_{xx} = -z \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (3.27)$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(-z \frac{d^2 w}{dx^2}\right) \quad (3.28)$$

Mikro kirişler gibi boyunun enine göre oranı çok fazla olan kirişlerde, kiriş teorisini sade bir şekilde formüle etmek için Possion oranının etkisi göz ardı edilir. Bu sebepten dolayı possion oranı göz ardı edilip σ_{xx}, σ_{yy} ve σ_{zz} yeniden düzenlenmiştir ($\nu=0$).

$$\sigma_{xx} = -zE \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \quad (3.29)$$

(3.10) denkleminde tanımlanmış olan gerilme çiftini fark tensörü (3.17) ve (3.27) eşitlikleri ile yeniden düzenlenerek x , y ve z doğrultularındaki değişimler gösterilmiştir.

$$m_{ij} = 2l^2 \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{d^2w}{dx^2} & 0 \\ -\frac{d^2w}{dx^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

$$m_{xy} = -l^2 \mu \frac{d^2w}{dx^2}, \quad m_{xx} = m_{yy} = m_{zz} = m_{xz} = m_{yz} = 0 \quad (3.31)$$

Modifiye gerilme çifti teorisine göre kirişin potansiyel enerjisini elde etmek için (3.19), (3.22), (3.29) ve (3.31) eşitlikleri (3.7) denkleminde yerine yazıp yeniden düzenlenir.

$$U = -\frac{1}{2} \int_0^L \left[M_x \frac{d^2w(x,t)}{dx^2} + Y_x \frac{d^2w(x,t)}{dx^2} \right] dx \quad (3.32)$$

M_x bileşke momenti, Y_x moment çiftini tanımlamaktadır [4].

$$M_x = \int_A \sigma_{xx} z dA \quad (3.33)$$

$$Y_x = \int_A m_{xy} dA \quad (3.34)$$

A kirişin kesit alanıdır. Kirişin boyutunu tanımlamak için seçilen kalınlık ve yükseklik sembolleri kullanılarak; kirişin kesit alanının atalet momenti aşağıdaki gibi ifade edilmektedir. Kesit alanı bu durumda $A = bh$ olarak ele alınmalıdır.

$$I = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz \quad (3.35)$$

Kalınlık yönünde malzeme özellikleri fonksiyonel olarak değiştiğinden E elastik modülü ve μ kesme modülü z eksenine bağlı olarak değişecektir. Bu durumda (3.33) ve (3.34) eşitlikleri yeniden düzenlenir [4].

$$M_x = \int_A \sigma_{xx} z dA = - \int_A E(\tilde{z}) z^2 \frac{d^2 w(x,t)}{dx^2} dA \quad (3.36)$$

$$Y_{xy} = \int_A m_{xy} dA = - \int_A \mu(\tilde{z}) l^2 \frac{d^2 w(x,t)}{dx^2} dA \quad (3.37)$$

3.4 Modifiye Gerilme Çifti Teorisini Kullanarak Euler- Bernoulli Kiriş İçin Kinetik Enerji

Titreşim yapan kiriş kesitinin herhangi bir noktasının herhangi bir andaki hızı aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

$$v_x = \frac{du}{dt} = \frac{d}{dt} \left(-z \frac{dw(x,t)}{dx} \right) = -z \frac{d^2 w(x,t)}{dx dt} \quad (3.38)$$

$$v_z = \frac{dw(x,t)}{dx} \quad (3.39)$$

Euler-Bernoulli kirişi için kinetik enerji ifadesi elde edilirken, atalet momentinin etkisi ihmal edilir. Bu sebeple kiriş kesit hızının v_x bileşeni ihmal edilir. Böylece tüm kiriş için kinetik enerji ifadesi aşağıdaki şekilde olur.

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \left(\frac{dw(x,t)}{dx} \right)^2 dV \quad (3.40)$$

Burada ρ kirişin (yoğunluk) birim hacim kütesidir. Bu ifade kartezyen koordinatlarda daha ayrıntılı olarak izleyen şekilde yazılabilir.

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(\frac{dw(x,t)}{dx} \right)^2 dx dy dz \quad (3.41)$$

Eşitlik (3.41)'deki integral işlemi için gerekli hesaplamalar yapılarak Euler-Bernoulli kirişi için kinetik enerji ifadesi elde edilmiştir.

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left(\frac{dw(x,t)}{dx} \right)^2 dx \quad (3.42)$$

3.5 Euler- Bernoulli Kiriş İçin Harici Kuvvetlerin Yaptığı İş

Kirişin üzerine $q(x,t)$ kadar yayılı bir kuvvet olduğu varsayarak iş denklemini elde edilmiştir.

$$V = \int_0^L q(x,t)w(x,t) dx \quad (3.43)$$

3.6 Ana Hareket Denkleminin Türetilmesi

Kirişin dinamik hareket denklemini genişletilmiş Hamilton prensibi ile türetilmiştir. Lineer elastisite anizotropik ortam için elastodinamik davranış gösteren bir sistemin dalga hareketini tanımlamakta genişletilmiş Hamilton ilkesi ile tanımlanmaktadır. Bu prensibe göre; bir sistem, belli bir zaman aralığında, kinetik ve potansiyel (elastik) enerjilerinin değişimi ile kendisine etkimekte olan aktif kuvvetlerin virtüel işleri toplamının integrali sıfır olacak şekilde hareket eder. Hamilton prensibi hareket denklemini belirli bir koordinata bağlı olmadan sadece sınır koşullarına bağlı olarak analitik yoldan sonuca ulaşılmasını sağlamaktadır.

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta_v T + \delta_v V - \delta_v U] dt = 0 \Rightarrow \delta_v \int_{t_1}^{t_2} (T - U + V) dt = 0 \quad (3.44)$$

T : Kinetik enerji

U : Potansiyel (elastik) enerji

V : Harici kuvvetler tarafından yapılan iş

$$\delta_v \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[\frac{1}{2} \rho A \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^L (M_x + Y_{xy}) \frac{d^2 w(x,t)}{dx^2} dx + \int_0^L q(x,t) w(x,t) dx \right] dt \quad (3.45)$$

Kirişin doğal frekansını bulmak için harici kuvvetler yok sayılarak denklem yeniden düzenlendiğinde aşağıdaki hareket denklemini elde edilir. Ek-2'de eşitlik (3.45)'den eşitlik (3.46)'e geçiş açıklanmıştır.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left((EI(x) + I^2 \mu A(x)) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right) + \rho A(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (3.46)$$

3.7 Kesit Değişim Analizi

Kiriş yüksekliği sabit olan ve genişliği üstel olarak değişen kiriş modeli için ana hareket denklemi elde edilmiştir.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} (EI(x) + l^2 \mu A(x)) \right) = -\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} A(x) \quad (3.47)$$

Eşitlik (3.47)'deki $I(x)$ ve $A(x)$ sırasıyla kiriş uzunluğuna (x yönündeki yer değişimi) bağlı atalet momentini ve alanını göstermektedir.

$$I(x) = I_0 i(x) \quad (3.48)$$

$$A(x) = A_0 a(x) \quad (3.49)$$

$i(x)$ ve $a(x)$ sırasıyla atalet momenti şekil fonksiyonu ve alan şekil fonksiyonudur [27]. (3.48) ve (3.49) denklemleri eşitlik (3.47)'de yerine yazılmıştır.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left((EI_0 i(x) + l^2 \mu A_0 a(x)) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right) + \rho A_0 a(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (3.50)$$

Kirişin hareket denklemi boyutsuzlaştırmak amacıyla (3.51)'deki eşitlikler tanımlanmıştır.

$$\eta = \frac{x}{L}, \quad \tau = \frac{t}{t_0}, \quad y = \frac{w}{L} \quad (3.51)$$

(3.51)'de tanımlanan eşitlikler (3.50) denkleminde yerine yazılmıştır.

$$\frac{\partial^2}{\partial (\eta L)^2} \left((EI_0 i(\eta L) + l^2 \mu A_0 a(\eta L)) \frac{\partial^2 (yL)}{\partial (\eta L)^2} \right) + \rho A_0 a(\eta L) \frac{\partial^2 (yL)}{\partial (\tau t_0)^2} = 0 \quad (3.52)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left((EI_0 i(\eta) + l^2 \mu A_0 a(\eta)) \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \right) + \frac{\rho A_0 L^4}{t_0^2} a(\eta) \frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} = 0 \quad (3.53)$$

Eşitlik (3.53) denklemindeki $i(\eta)$ atalet şekil fonksiyonu ve $a(\eta)$ alan şekil fonksiyonunu tanımlamak gerekli olduğundan farklı kesit alanlarına sahip kirişler için atalet momenti aşağıdaki denklemle ifade edilmiştir.

$$I = c_i b h^3 \quad (3.54)$$

b, h ve c_i sırasıyla kesit genişliği, kesit yüksekliği ve kesit alanı şekil fonksiyonu sabitini göstermektedir. Örneğin; dikdörtgen kesit alanı için $c_i = 1/12$ iken, dairesel kesit alanı ve eliptik kesit alanı için $c_i = \pi/64$ 'dir. Dairesel kesit alanında b ve h yarıçapa eşit iken, eliptik kesit alanında b ve h 'dan biri majör eksen, diğeri de minör eksen olarak kabul edilir. Yalnız dairesel ve eliptik kesit alanına sahip kirişlerde bu tanımlamayı kullanabilmek için koniklik y ve z eksenlerinde eşit olmalıdır[27].

$$I = I_0 i(\eta) \quad (3.55)$$

$$I_0 = c_i b_0 h_0^3 \quad (3.56)$$

$$i(\eta) = y(\eta) z^3(\eta) \quad (3.57)$$

$y(\eta)$ ve $z(\eta)$ birbirinden bağımsız boyutsuz parametrelerdir. Tek ve çift yönlü konik kirişler bu eşitlikle tanımlanabilir. Kesit alanını, yukarıda tanımlanan atalet momentinin tanımına benzer bir şekilde yazılmıştır.

$$A = c_a b h \quad (3.58)$$

c_a kesit alanı şekil fonksiyonu sabitini göstermektedir. Örneğin; kare ve dikdörtgen kesit için $c_a = 1$, dairesel ve eliptik kesit alanı için $c = \pi/4$ 'tür.

$$A = A_0 a(\eta) \quad (3.59)$$

$$A_0 = c_a b_0 h_0 \quad (3.60)$$

$$a(\eta) = y(\eta) z(\eta) \quad (3.61)$$

3.7.1 Lineer Konik Durumun İncelenmesi

$\eta = 0 \Rightarrow h = h_1, b = b_1$ ve $\eta = 1 \Rightarrow h = h_0, b = b_0$ başlangıç şartlarına sahip olan kesiti lineer değişen bir kiriş koniklik fonksiyonları aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned} y(\eta) &= (b_0 - b_1)\eta + b_1 \\ z(\eta) &= (h_0 - h_1)\eta + h_1 \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} y(\eta) &= (1 - \beta)\eta + \beta \\ z(\eta) &= (1 - \alpha)\eta + \alpha \end{aligned} \quad (3.63)$$

$\alpha = h_1 / h_0 \leq 1$ ve $\beta = b_1 / b_0 \leq 1$, çubuğun ilk yükseklik ve genişlik değeri 1 indisiyle, çubuğun son yükseklik ve genişlik değeri 0 indisiyle gösterilmiştir. Genişleyen konik kiriş için şekil fonksiyonları elde edilmiştir.

Eşitlik 3.56'da tanımlanan atalet moment şekil fonksiyonunda ve eşitlik (3.61)'ta tanımlana kesit alanı şekil fonksiyonunda 3.63'deki eşitlikler yazılarak β ve α koniklik fonksiyonları cinsinden yeniden tanımlanırlar.

$$\begin{aligned} i(\eta) &= y(\eta) z^3(\eta) = [(1-\beta)\eta + \beta][(1-\alpha)\eta + \alpha]^3 \\ a(\eta) &= y(\eta) z(\eta) = [(1-\beta)\eta + \beta][(1-\alpha)\eta + \alpha] \end{aligned} \quad (3.64)$$

Tablo 2.1'de gösterilen üç farklı konik kiriş geometrisi ele alınarak 3.64'deki eşitliklerden farklı konik kirişlerin matematiksel modellemeleri yapılmaktadır. Çift-konik kirişler için $\alpha = \beta$ seçilerek konik kirişin atalet ve alan şekil fonksiyonları elde edilmiştir.

$$\begin{aligned} i(\eta) &= y(\eta) z^3(\eta) = [(1-\alpha)\eta + \alpha]^4 \\ a(\eta) &= y(\eta) z(\eta) = [(1-\alpha)\eta + \alpha]^2 \end{aligned} \quad (3.65)$$

Yüksekliği sabit ($\alpha = h_1 / h_0 = 1 \Rightarrow z(\eta) = 1$), genişliği lineer değişen bir kiriş için atalet ve alan fonksiyonu yazılmıştır.

$$\begin{aligned} i(\eta) &= [(1-\beta)\eta + \beta] \\ a(\eta) &= [(1-\beta)\eta + \beta] \end{aligned} \quad (3.66)$$

Tek taraflı konik kesitli kiriş için tanımlanan (3.65)'deki atalet değişim fonksiyon ve alan değişim fonksiyon eşitlikleri, kiriş yüksekliğinin sabit olduğu durum için farklı, genişliğinin sabit olduğu durum için farklı fonksiyonlar oluşturmaktadır.

Genişliği sabit olan ($\beta = b_1 / b_0 = 1 \Rightarrow y(\eta) = 1$), yüksekliği lineer değişen bir kiriş için atalet ve alan fonksiyonu yazılmıştır.

$$\begin{aligned} i(\eta) &= [(1-\alpha)\eta + \alpha]^3 \\ a(\eta) &= [(1-\alpha)\eta + \alpha] \end{aligned} \quad (3.67)$$

Sonuç olarak $\alpha = \beta$ olduğu kabul edilerek tek yönlü ve çift yönlü lineer konik kirişler (3.67)'deki eşitliklerle gösterilebilir.

3.7.2 Üstel Konik Durumun İncelenmesi

Kesiti üstel olarak değişen bir kirişin kesit değişim fonksiyonları tanımlanmıştır [22].

$$y(\eta) = e^{\beta_e(1-\eta)}, \quad \beta_e = \ln \beta \quad (3.68)$$

$$z(\eta) = e^{\alpha_e(1-\eta)}, \quad \alpha_e = \ln \alpha \quad (3.69)$$

(3.68) ve (3.69) eşitliklerinde $\alpha \leq 1$ ve $\beta \leq 1$ olduğundan üstel değişim miktarları $\alpha_e \leq 0$ ve $\beta_e \leq 0$ olur. Çift taraflı üstel konik kiriş konikliğin simetrik olmaması için $\alpha = \beta$ alınarak (3.64)'deki denklemler yeniden düzenlenmiştir.

$$\begin{aligned} i(\eta) &= e^{(1-\eta)(\beta_e + 3\alpha_e)} \\ a(\eta) &= e^{(1-\eta)(\beta_e + \alpha_e)} \end{aligned} \quad (3.70)$$

Yüksekliği sabit olan ($\alpha = 1 \Rightarrow z(\eta) = 0$ ve $\alpha_e = 0$) genişliği üstel değişen bir kiriş için atalet ve alan fonksiyonu yazılmıştır.

$$\begin{aligned} i(\eta) &= e^{\beta_e(1-\eta)} \\ a(\eta) &= e^{\beta_e(1-\eta)} \end{aligned} \quad (3.71)$$

Genişliği sabit olan ($\beta = 1 \Rightarrow y(\eta) = 0$ ve $\beta_e = 0$) yüksekliği üstel değişen bir kiriş için atalet ve alan fonksiyonu yazılmıştır.

$$\begin{aligned} i(\eta) &= e^{3\alpha_e(1-\eta)} \\ a(\eta) &= e^{\alpha_e(1-\eta)} \end{aligned} \quad (3.72)$$

3.8. Hareket Denkleminin Analitik Olarak Çözümü

Analitik çözüm özel durumlar için elde edilmektedir. Bu sebepten dolayı 3.7.1 ve 3.7.2 başlıkları altında türetilmiş olan atalet ve alan şekil fonksiyonları ve gerçek frekansı elde etmek için malzemenin dağılım fonksiyonları incelendiğinde; analitik çözümlerden birinin üstel olarak genişliği değişen tek taraflı kiriş geometrisi için olacağı tespit edilmiştir.

(3.53) denklemi $i(\eta) = a(\eta)$ olarak alınarak ve (3.71)'deki eşitlikler kullanılarak yeniden düzenlenir.

$$\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left((EI_0 + l^2 \mu A_0) i(\eta) \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \right) + a(\eta) \frac{\rho A_0 L^4}{t_0^2} \frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} = 0 \quad (3.73)$$

$$\Omega^4 = \omega^2 t_0^2, \quad (3.74)$$

(3.51) ve (3.74)'de tanımlanan eşitlikler kullanılarak denklem yeniden düzenlenmiştir.

$$\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left(i(\eta) \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \right) + a(\eta) \frac{\rho A_0 L^4}{(EI_0 + l^2 \mu A_0) t_0^2} \frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} = 0 \quad (3.75)$$

Eşitlik (3.75) hem zaman hem de yola bağlı bir denklem olduğundan çözümün zamandan bağımsız olması için eşitlik (3.76) kullanılmıştır.

$$y(\eta, \tau) = W(\eta) F(\tau) \quad (3.76)$$

Eşitlik (3.76) kullanılarak (3.75) denklemini değişkenlerine ayırılır. Bu yöntemle, yer değiştirmeye bağlı bir çözüm denklemi ve zamana bağlı bir çözüm denklemi elde edilmiş olur.

$$\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left(i(\eta) \frac{\partial^2 W(\eta)}{\partial \eta^2} F(\tau) \right) + a(\eta) \frac{\partial^2 F(\tau)}{\partial \tau^2} W(\eta) = 0 \quad (3.77)$$

$$\frac{1}{W(\eta)} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left(i(\eta) \frac{\partial^2 W(\eta)}{\partial \eta^2} \right) = - \underbrace{\frac{1}{F(\tau)} \frac{\partial^2 F(\tau)}{\partial \tau^2}}_{-\omega^2} a(\eta) \quad (3.78)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left(i(\eta) \frac{\partial^2 W(\eta)}{\partial \eta^2} \right) - \omega^2 t_0^2 a(\eta) W(\eta) = 0 \quad (3.79)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left(i(\eta) \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \right) - a(\eta) \Omega^4 W = 0 \quad (3.80)$$

(3.80) denklemi ana hareket denkleminin yola bağlı kısmıdır. Yani kirşin uzunluğu boyunca (x eksenini doğrultusunda) alınan bir uzaklığa bağlı kirşin çökme (z eksenini doğrultusundaki yer değişim) miktarını vermektedir.

$$F''(\tau) + \omega^2 F(\tau) = 0 \quad (3.81)$$

(3.81) denklemini ana hareket denkleminin zamana bağılı kısmıdır. Bu denklem iki dereceli homojen diferansiyel bir denklemdir ve çözümü aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$F(\tau) = C_1 \cos(\omega\tau) + C_2 \sin(\omega\tau) \quad (3.82)$$

3.8 Üstel Kesit Değişimine Sahip Kirişin Analitik Çözümü

Eşitlik (3.71)'de üstel kesit değişimi için elde edilen atalet ve alan değişim fonksiyonları (3.80) denkleminde yerine yazılıp tekrar düzenlenir [31].

$$\frac{d^2}{d\eta^2} \left(e^{-\beta_e \eta} \frac{d^2 W}{d\eta^2} \right) - \Omega^4 e^{-\beta_e \eta} W = 0 \quad (3.83)$$

$$W(\eta) = e^{\delta \eta} [C_1 \cosh(\varepsilon_1 \eta) + C_2 \sinh(\varepsilon_1 \eta) + C_3 \cos(\varepsilon_2 \eta) + C_4 \sin(\varepsilon_2 \eta)] \quad (3.84)$$

$$\begin{aligned} \delta &= \beta_e / 2 \\ \varepsilon_1 &= \sqrt{\Omega^2 + \delta^2} \quad \Omega^2 > \delta^2 \\ \varepsilon_2 &= \sqrt{\Omega^2 - \delta^2} \end{aligned} \quad (3.85)$$

(3.81) denkleminde elde edilen Ω^2 değerleri kirişin doğal frekansı olarak tanımlanır. Bu denkleminin sonsuz tane kökü bulunmaktadır. Her bir doğal frekansa karşılık kirişin almış olduğu şekil mod şekli olarak tanımlanır. Doğal frekansların küçükten büyüğe doğru sıralanması sonucunda elde edilen en küçük frekans temel frekans ve bu frekansa karşılık gelen mod şekli birinci mod şekli olarak adlandırılır.

Kirişin sınır koşuluna bağlı olarak kirişin uçlarında meydana gelen değişimlerinin kullanılması için hareket denkleminin türevlerinin belirlenmesi gerekir. Bu sebeple çözüm için seçilen kirişin hareket denkleminin birinci, ikinci ve üçüncü türevleri türetilmiştir. Tablo 3.1'de tezde kullanılmış olan üç sınır koşulu verilmektedir.

Tablo 3.1 Kiriş uç durumuna göre sınır koşulları

Sınır koşulu	Boyutlu form	Boyutsuz form	Yola bağımlı
<i>Basit mesnetli uç</i>	$w = 0, \frac{\partial w}{\partial x} = 0$	$y = 0, \frac{\partial y}{\partial \eta} = 0$	$W(\eta) = 0, W'(\eta) = 0$
<i>Ankastre uç</i>	$w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$	$y = 0, \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} = 0$	$W(\eta) = 0, W''(\eta) = 0$
<i>Serbest uç</i>	$EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$ $\frac{\partial w}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0$	$\frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} = 0$ $\frac{\partial y}{\partial \eta} \left(i(\eta) \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \right) = 0$	$W''(\eta) = 0, W'''(\eta) = 0$

Kirişteki çökme miktarını $W(\eta)$, eğimi $W'(\eta)$, eğilme momenti $W''(\eta)$ ve kesme gerilmesini $W'''(\eta)$ temsil etmektedir. Aşağıdaki eşitliklerde (3.84)'de tanımlanan hareket denkleminin türevleri gösterilmektedir.

$$W'(\eta) = e^{\delta\eta} \left[\begin{array}{l} \delta(C_1 \cosh(\varepsilon_1\eta) + C_2 \sinh(\varepsilon_1\eta) + C_3 \cos(\varepsilon_2\eta) + C_4 \sin(\varepsilon_2\eta)) + \\ C_1\varepsilon_1 \sinh(\varepsilon_1\eta) + C_2\varepsilon_1 \cosh(\varepsilon_1\eta) - C_3\varepsilon_2 \sin(\varepsilon_2\eta) + \varepsilon_2 C_4 \cos(\varepsilon_2\eta) \end{array} \right] \quad (3.86)$$

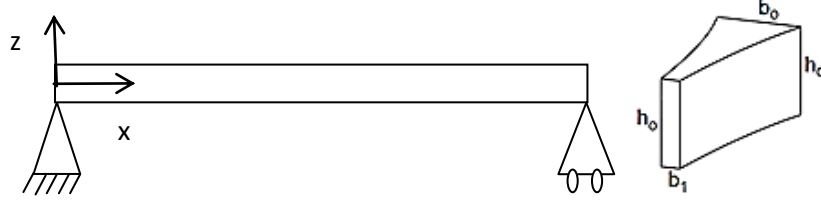
$$W''(\eta) = e^{\delta\eta} \left[\begin{array}{l} \delta^2(C_1 \cosh(\varepsilon_1\eta) + C_2 \sinh(\varepsilon_1\eta) + C_3 \cos(\varepsilon_2\eta) + C_4 \sin(\varepsilon_2\eta)) + \\ 2\delta(C_1\varepsilon_1 \sinh(\varepsilon_1\eta) + C_2\varepsilon_1 \cosh(\varepsilon_1\eta) - C_3\varepsilon_2 \sin(\varepsilon_2\eta) + C_4\varepsilon_2 \cos(\varepsilon_2\eta)) + \\ C_1\varepsilon_1^2 \cosh(\varepsilon_1\eta) + C_2\varepsilon_1^2 \sinh(\varepsilon_1\eta) - C_3\varepsilon_2^2 \cos(\varepsilon_2\eta) - C_4\varepsilon_2^2 \sin(\varepsilon_2\eta) \end{array} \right] \quad (3.87)$$

$$W'''(\eta) = e^{\delta\eta} \left[\begin{array}{l} \delta^3(C_1 \cosh(\varepsilon_1\eta) + C_2 \sinh(\varepsilon_1\eta) + C_3 \cos(\varepsilon_2\eta) + C_4 \sin(\varepsilon_2\eta)) + \\ 3\delta^2(C_1\varepsilon_1 \sinh(\varepsilon_1\eta) + C_2\varepsilon_1 \cosh(\varepsilon_1\eta) - C_3\varepsilon_2 \sin(\varepsilon_2\eta) + C_4\varepsilon_2 \cos(\varepsilon_2\eta)) + \\ 3\delta(C_1\varepsilon_1^2 \cosh(\varepsilon_1\eta) + C_2\varepsilon_1^2 \sinh(\varepsilon_1\eta) - C_3\varepsilon_2^2 \cos(\varepsilon_2\eta) + C_4\varepsilon_2^2 \sin(\varepsilon_2\eta)) + \\ (C_1\varepsilon_1^3 \sinh(\varepsilon_1\eta) + C_2\varepsilon_1^3 \cosh(\varepsilon_1\eta) + C_3\varepsilon_2^3 \sin(\varepsilon_2\eta) - C_4\varepsilon_2^3 \cos(\varepsilon_2\eta)) \end{array} \right] \quad (3.88)$$

3.8.1 İki Ucu Basit Mesnetli Kiriş İçin Çözüm

Boyutsuz kiriş için başlangıç noktasındaki değeri $x=0 \Rightarrow \eta=0$ ve kirişin bitiş noktasındaki değeri ise $x=1 \Rightarrow \eta=1$ olur. Her iki ucu basit mesnetli kiriş için sınır şartları simetrik olduğundan kirişin herhangi bir ucu koordinat merkezi seçilebilir. Tablo 3.1'den yararlanarak sınır koşulları;

$$W(0)=0, \quad W''(0)=0, \quad W(1)=0, \quad W''(1)=0 \quad (3.89)$$



Şekil 3.4 İki ucu basit mesnetli kiriş

Kirişin sol tarafından diğer uçuna doğru kesit alanı değişiminin daraldığını belirtmek için β_e negatif, genişlediğini belirtmek için β_e pozitif olarak seçilir. Bu şekilde daralan veya genişlemenin olduğu konik kirişlerin frekansları bulunmaktadır.

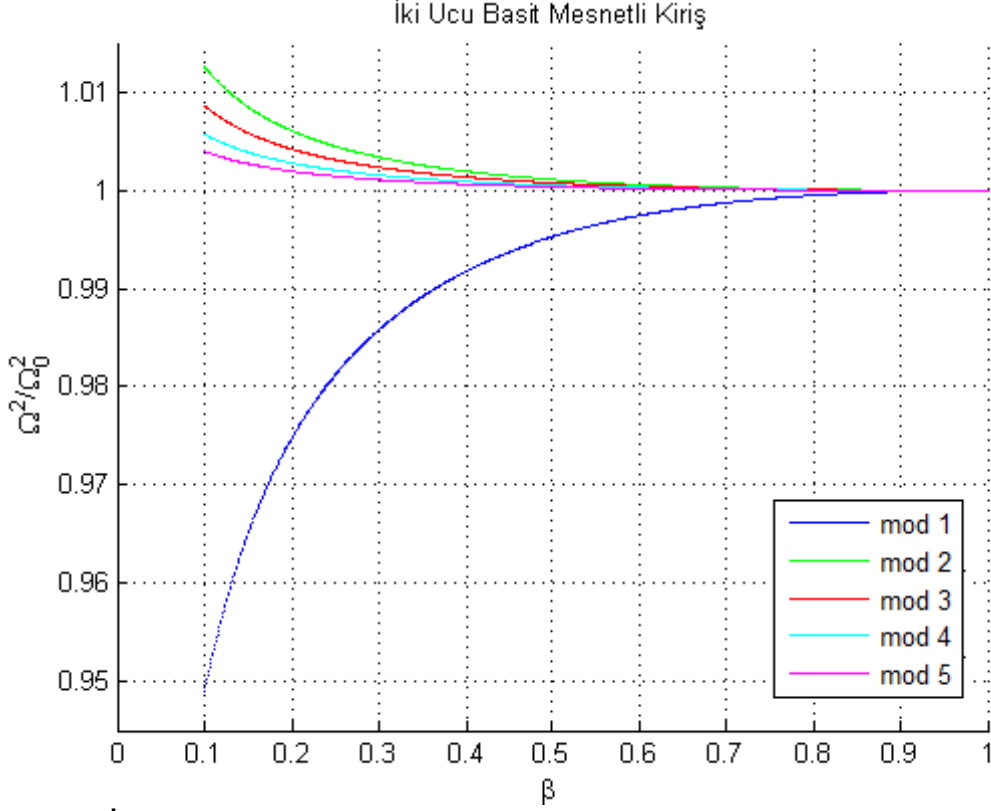
Her iki ucu serbest mesnetli kiriş için (3.89)'daki sınır koşullarını gösteren eşitlikler (3.84) ve (3.87) eşitliklerinde yerine yazılarak (3.90) eşitliği elde edilir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \delta^2 + \varepsilon_1^2 & 2\delta\varepsilon_1 & \delta^2 - \varepsilon_2^2 & 2\delta\varepsilon_2 \\ \cosh \varepsilon_1 & \sinh \varepsilon_1 & \cos \varepsilon_2 & \sin \varepsilon_2 \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.90)$$

$$\begin{aligned} c_{41} &= \delta^2 \cosh \varepsilon_1 + 2\delta\varepsilon_1 \sinh \varepsilon_1 + \varepsilon_1^2 \cosh \varepsilon_1 \\ c_{42} &= \delta^2 \sinh \varepsilon_1 + 2\delta\varepsilon_1 \cosh \varepsilon_1 + \varepsilon_1^2 \sinh \varepsilon_1 \\ c_{43} &= \delta^2 \cos \varepsilon_2 - 2\delta\varepsilon_2 \sin \varepsilon_2 - \varepsilon_2^2 \cos \varepsilon_2 \\ c_{44} &= \delta^2 \sin \varepsilon_2 + 2\delta\varepsilon_2 \cos \varepsilon_2 - \varepsilon_2^2 \sin \varepsilon_2 \end{aligned} \quad (3.91)$$

(3.90) eşitliğinin sağ tarafı sıfıra eşit olduğundan çözümün bulunması için bu eşitlikteki matrisin determinantının sıfıra eşit olması gerekir. Bu şekilde determinant alınarak elde edilen denklem Ω 'ya bağlı bir eşitlik olmaktadır. Bu

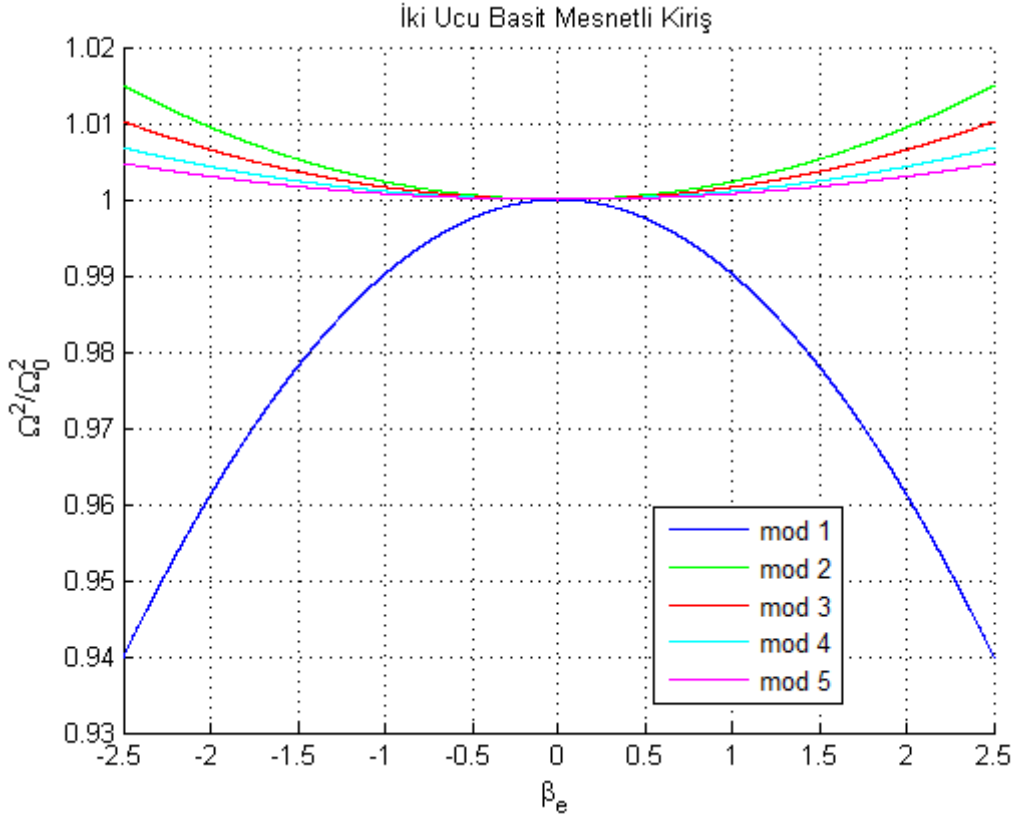
eşitliğin köklerinin karesi ise kirişin geometrisine bağlı doğal frekansını vermektedir. Bulunan en küçük kökün karesi kirişin ana frekansını vermektedir. Köklerin bulunması için Matlab programındaki “fzero” komutundan yararlanılmıştır. Diğer bütün sınır koşulları için çözümler bu yöntem kullanılarak yapılmıştır.



Şekil 3.5 İki ucu basit mesnetli kirişin β değişimine göre doğal frekansları oranı, mod =1,2,3,4,5

Şekil 3.5'te iki ucu basit mesnetli kirişin kesit değişiminin (β), ilk beş mod durumuna göre elde edilen doğal frekanslarının, sabit kesitli bir kirişin doğal frekanslarının oranları değişimini göstermektedir. Beta değerinin bir olması kesit değişiminin olmadığı yani konik olmayan bir kirişin frekanslarını vermektedir. Bu sebeple beta 1 değerine yaklaştıkça, oranlarda 1 değerine yaklaşmaktadır. Mod 1 için doğal frekansları oranı 1 değerinin altındaki değerden başlayarak 1'de sabitleşmektedir. Grafiğe göre ilk doğal frekansların (mod 1) oranları sabit kesitli bir kirişin doğal frekansından küçük olurken, diğer mod (2, 3, 4 ve 5) biçimlerinin frekanslarının büyük olduğu görülmektedir. Mod 2'de elde edilen frekans sonuçları artan mod değerlerine göre en yüksek doğal frekansları vermektedir. Sonuç olarak

mod değeri sonsuza gittikçe kirişin koniklik oranının betanın değişimini doğal frekanslara etkisinin azaldığı görülmektedir. Diğer bir deyişle mod arttıkça sabit kesitli bir kiriş için hesaplanan doğal frekans değeri, konik kesitli bir kiriş için hesaplanan doğal frekansa çok yakın olacağı görülmektedir.



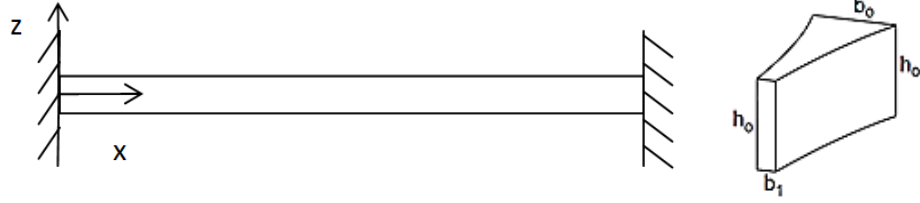
Şekil 3.6 İki ucu basit mesnetli kirişin β_e değişimine göre doğal frekansları oranı mod =1,2,3,4,5

Şekil 3.6'da beta-e ($\beta_e = \ln \beta \Leftrightarrow \beta = e^{\beta_e}$) değerinin sıfıra eşit olduğu noktaya karşılık gelen frekanslar sabit kesitli bir kirişin doğal frekanslarını göstermektedir. Yani beta-e sıfır iken kiriş konik değildir. Beta-e'nin -2.5 ile 0 arası değeri, beta'nın 1'e yakın bir değerinden başlayarak 0'a giderken elde edilen değerleri gösterirken, Beta-e'nin 0 ile 2.5 arası değeri, beta'nın 0'dan 1'e yaklaşırken elde edilen değerlerini göstermektedir. Kirişin sınır koşullarının simetrik olmasından dolayı grafik simetrik 0 eksenine göre simetrik olduğu görülmektedir. Şekil 3.5'de mod değerlerine göre doğal frekanslar hakkında ayrıntılı bir yorum yapılmıştır.

3.8.2 İki Ucu Ankastre Kiriş İçin Çözüm

Her iki ucu ankastre kiriş için sınır koşulları aşağıdaki gibi olur.

$$W(0)=0, \quad W'(0)=0, \quad W(1)=0, \quad W'(1)=0 \quad (3.92)$$



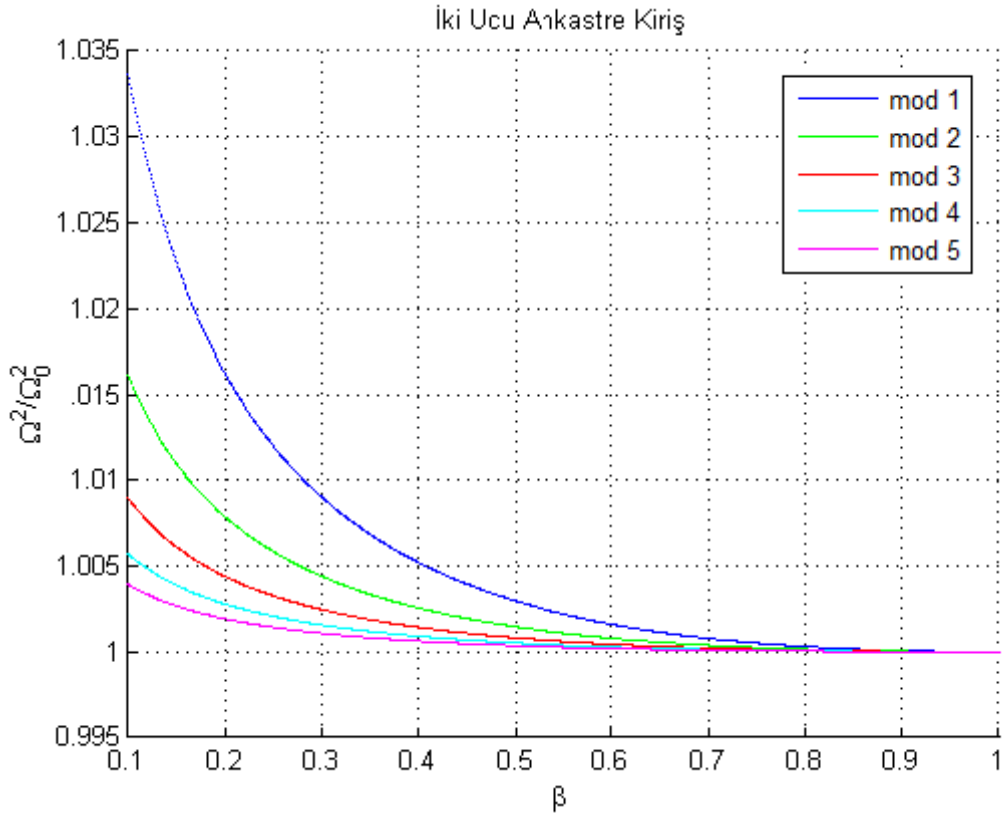
Şekil 3.7 İki ucu ankastre kiriş

Her iki ucu ankastre kiriş için (3.92)'deki sınır koşullarını gösteren eşitlikler (3.80) ve (3.82) eşitliklerinde yerine yazılarak (3.93) matris eşitliği elde edilir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \delta & \varepsilon_1 & \delta & \varepsilon_2 \\ \cosh \varepsilon_1 & \sinh \varepsilon_1 & \cos \varepsilon_2 & \sin \varepsilon_2 \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.93)$$

$$\begin{aligned} c_{41} &= \delta \cosh \varepsilon_1 + \varepsilon_1 \sinh \varepsilon_1 \\ c_{42} &= \delta \sinh \varepsilon_1 + \varepsilon_1 \cosh \varepsilon_1 \\ c_{43} &= \delta \cos \varepsilon_2 - \varepsilon_2 \sin \varepsilon_2 \\ c_{44} &= \delta \sin \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \cos \varepsilon_2 \end{aligned} \quad (3.94)$$

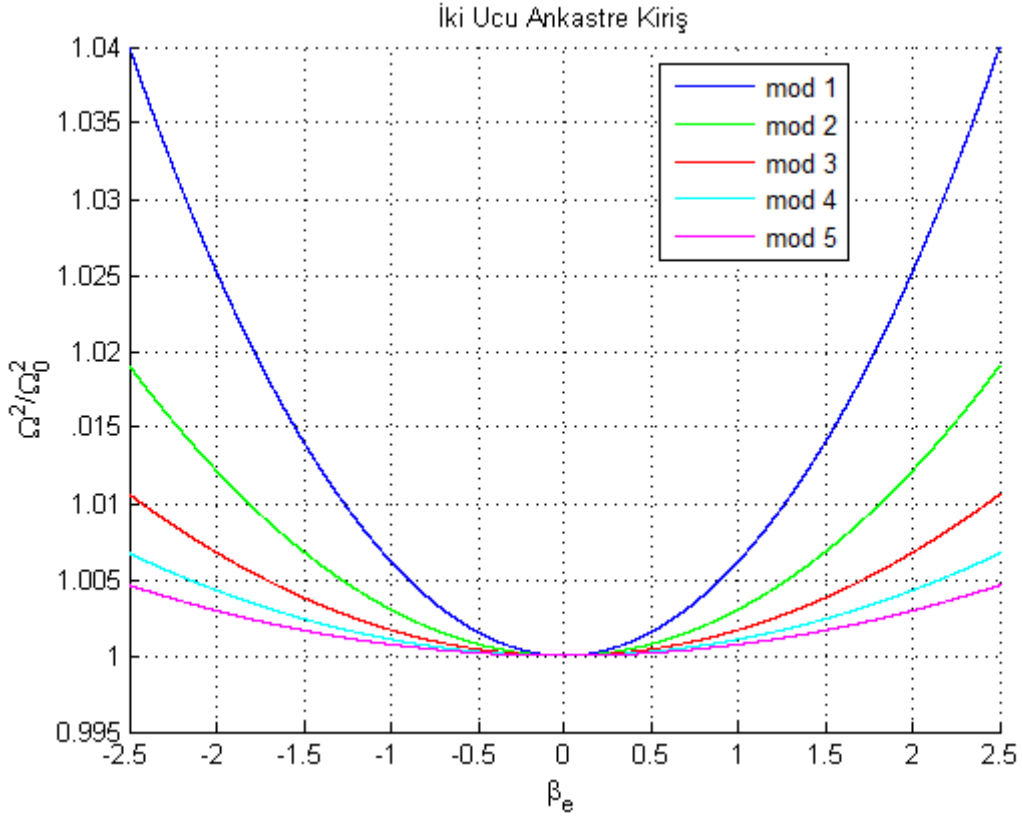
(3.93)'daki eşitliğin sağ tarafı sifıra eşit olduğundan matrisin determinantının sifıra eşit olması gerekir. Elde edilen kök değerleri doğal frekansları vermektedir. Örneğin bulunan en küçük kök 1. mod şeklinin frekansının vermektedirken ikinci en büyük kök değerinin 2. mod şekli için elde edilen doğal frekansını vermektedir.



Şekil 3.8 İki ucu ankastre kirişin β değişimine göre doğal frekansları oranı, mod =1,2,3,4,5

Şekil 3.8'te iki ucu ankastre kirişin kesit değişiminin (β), ilk beş mod durumuna göre elde edilen doğal frekanslarının, sabit kesitli bir kirişin doğal frekanslarının oranları değişimini göstermektedir. Beta değerinin bir olması kesit değişiminin olmadığı yani konik olmayan bir kirişin frekanslarını vermektedir. Bu sebeple beta 1 değerine yaklaştıkça, oranlarda 1 değerine yaklaşmaktadır. Mod 1 için doğal frekans oranı diğer mod şekillerine göre en yüksek doğal frekans değerlerinin vermektedir. Grafiğe göre mod değerlerinin 1'den sonsuza gittikçe sabit kesitli bir kirişin seçilen modu için hesaplanan doğal frekansına yaklaştığı görülmektedir. Örneğin mod 1'de betanın 0.4 değeri için doğal frekans sabit kesitli bir kirişin 1. modu için hesaplanan frekansın yaklaşık 1.005 katı kadar olacağı görülmektedir.

Şekil 3.9'da beta-e ($\beta_e = \ln \beta \Leftrightarrow \beta = e^{\beta_e}$) değerinin sıfıra eşit olduğu noktaya karşılık gelen frekanslar sabit kesitli bir kirişin doğal frekanslarını göstermektedir. Yani beta-e sıfır iken kiriş konik değildir. Kirişin sınır koşullarının simetrik olmasından dolayı şekil 3.6'daki grafik gibi simetrik bir grafik elde edilmiştir. Şekil 3.8'de mod değerleri için doğal frekanslar hakkında ayrıntılı bir yorum yapılmıştır.



Şekil 3.9 İki ucu ankastre kirişin β_e değişimine göre doğal frekansları oranı
mod = 1, 2, 3, 4, 5

Tablo 3.2. İki ucu basit mesnetli ve iki ucu sabit konik kirişler için doğal frekanslar

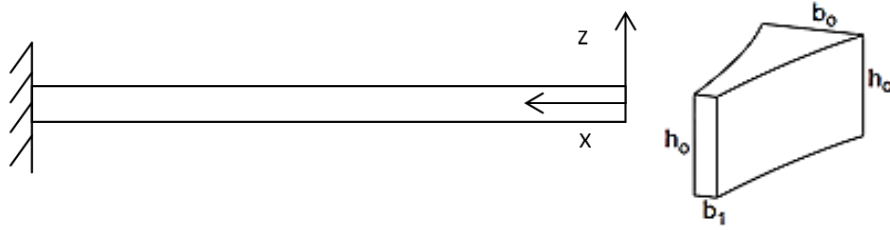
Beta- e $ \beta_e $	Mo d	Doğal Frekanslar (Ω^2)	
		İki ucu basit mesnetli kiriş	İki ucu sabit kiriş
0	1	9.86960440	22.37328545
	2	39.47841760	61.67282287
	3	88.82643961	120.90339173
	4	157.91367042	199.85944813
	5	246.74011003	298.55553528
1	1	9.77291040	22.51168213
	2	39.57036604	61.85969723
	3	88.97052285	121.10798499
	4	158.08418930	200.07412053
	5	246.92650018	298.77662010
2	1	9.48725368	22.93772677
	2	39.85231597	62.42273218
	3	89.40520305	121.72273237
	4	158.59689077	200.71860945
	5	247.48629444	299.44013905

Tablo 3.2'de iki basit mesnetli ve iki ucu ankastre kirişi için seçilen beta-e değerlerine ve mod şekillerine göre elde edilen doğal frekansları göstermektedir.

Her iki ucu basit mesnetli ve ankastre kirişler için kesit değişim fonksiyonuna göre çizilen grafiklerde Ω^2 / Ω_0^2 oranlarının simetrik olduğu görülmüştür. Bu sebeple bu iki durum için kesit değişim fonksiyon değeri β_e mutlak değer olarak alınarak tabloda doğal frekanslar gösterilmiştir.

3.8.3 Bir Ucu Ankastre Bir Ucu Serbest Kiriş İçin Çözüm

Bir ucu ankastre bir ucu serbest kiriş modeli 3.8.1 ve 3.8.2 deki kiriş durumları gibi simetrik sınır şartlarına sahip olmadığından koordinat merkezi ankastre uçta veya serbest uçta seçilebileceğinden sınır koşulları 2 farklı durum için ele alınabilmektedir. Kirişin koordinat merkezinin serbest ucunda seçilmesi daha az çarpanın kullanılmasını gerektirdiğinden çözümü daha kolaylaştırmaktadır. Bu durum şekil 3.10'da gösterilmiştir.



Şekil 3.10 Bir ucu ankastre diğer ucu serbest kiriş

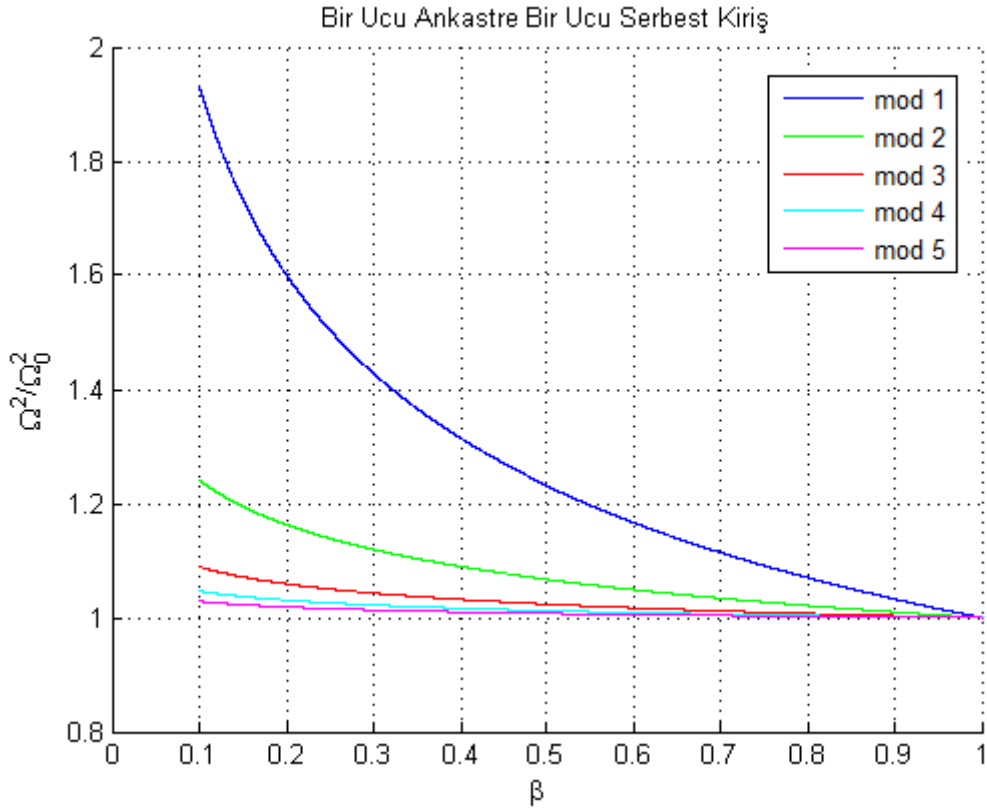
Bir ucu ankastre diğer ucu serbest kiriş için sınır koşulları eşitlik (3.95)'de gösterilmiştir.

$$W(1)=0, \quad W'(1)=0, \quad W''(0)=0, \quad W'''(0)=0 \quad (3.95)$$

Bir ucu ankastre diğer ucu serbest kiriş için (3.95)'deki sınır koşullarını gösteren eşitlikler, (3.80) ve (3.82) eşitliklerinde yerine yazılarak (3.96) matris eşitliği elde edilir.

$$\begin{bmatrix} \cosh \varepsilon_1 & \sinh \varepsilon_1 & \cos \varepsilon_2 & \sin \varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 \cosh \varepsilon_1 & \varepsilon_1 \sinh \varepsilon_1 & -\varepsilon_2 \sin \varepsilon_2 & \varepsilon_2 \cos \varepsilon_2 \\ \delta^2 + \varepsilon_1^2 & 2\delta\varepsilon_1 & \delta^2 - \varepsilon_2^2 & 2\delta\varepsilon_2 \\ \delta^3 + 3\delta\varepsilon_1^2 & 3\delta^2\varepsilon_1 + \varepsilon_1^3 & \delta^3 - 3\delta\varepsilon_2^2 & 3\delta^2\varepsilon_2 - \varepsilon_2^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.96)$$

(3.96)'daki eşitliğin sağ tarafı sıfıra eşit olduğundan matrisin determinantının sıfıra eşit olmasa gerekir. Elde edilen kök değerleri doğal frekansları vermektedir.

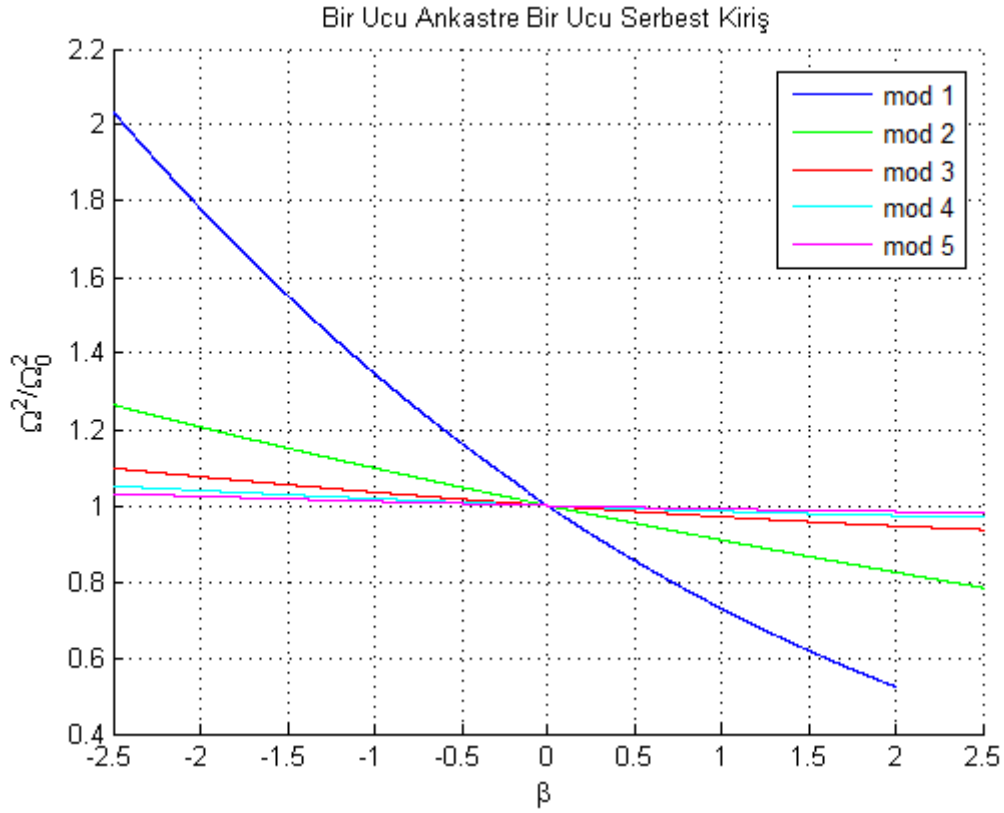


Şekil 3.11 Bir ucu ankastre diğer ucu serbest kirişin β değişimine göre doğal frekansları oranı mod = 1, 2, 3, 4, 5

Şekil 3.11'de bir ucu ankastre diğer ucu serbest kirişin kesit değişiminin (β), ilk beş mod durumuna göre elde edilen doğal frekanslarının, sabit kesitli bir kirişin doğal frekanslarının oranları değişimini göstermektedir. Mod 1 için doğal frekansların sabit kesitli bir kirişin 1. mod şeklindeki frekansına oranı diğer mod şekillerine göre daha büyük olduğu görülmektedir. Mod değerinin arttıkça Ω^2 / Ω_0^2 oranının 1'e yaklaştığı görülmektedir. Örneğin konik bir kirişin mod 1'de betanın 0.1 değeri için doğal frekans sabit kesitli bir kirişin 1. modu için hesaplanan frekansının yaklaşık 2 katına yakın olduğu görülmektedir.

Şekil 3.12'de beta-e ($\beta_e = \ln \beta \Leftrightarrow \beta = e^{\beta_e}$) değerinin sıfıra eşit olduğu noktaya karşılık gelen frekanslar sabit kesitli bir kirişin doğal frekanslarını göstermektedir. Kirişin sınır koşullarının simetrik olmadığından grafikte; negatif beta-e değerler için hesaplanan doğal frekansları pozitif beta-e değerleri için elde edilen doğal

frekanslarıyla farklılık göstermektedir. Mod şekil sayısı arttıkça frekans oran değerlerinin 1'e yaklaşmaktadır.



Şekil 3.12 Bir ucu ankastre diğer ucu serbest olan kirişin β_e değişimine göre doğal frekansları oranı mod = 1, 2, 3, 4, 5

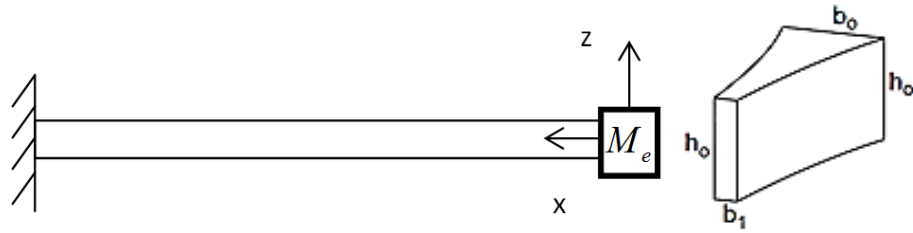
Tablo 3.3. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest konik kiriş için doğal frekanslar

Beta-e $ \beta_e $	Mod	Doğal Frekanslar (Ω^2)	
		Bir ucu sabit diğer ucu serbest kiriş	
0	1	3.5160152685	
	2	22.0344915647	
	3	61.6972144136	
	4	120.9019160523	
	5	199.85953012048	
1		$\beta_e < 0$	$\beta_e > 0$
	1	4.7349065422	2.5653424254
	2	24.1738448690	20.0383790960
	3	63.8644902793	59.8708487989
	4	123.0979084129	119.0986270918
2	5	202.0687685365	198.0696408407
	1	6.2626425689	1.8405716499
	2	26.5835932004	18.1721206455
	3	66.3744954400	58.3886853513
	4	125.684715943	117.6921743424
	5	204.695312943	196.702245964

3.8.4 Bir Ucu Ankastre Bir Ucu Serbest Olan ve Serbest Ucunda Kütle Bulunan Kiriş

Bir ucu ankastre diğer ucu serbest olan ve serbest ucunda kütle bulunan kiriş için, başlangıç noktası olarak serbest uç kabul edilerek sınır koşulları yazılmıştır. Bu sayede çözüm daha hızlı ve kolay bulunabilmektedir. Çubuğun uç kısmında M_e kütlesi bulunmaktadır.

$$W(1)=0, W'(1)=0, W''(0)=0, W'''(0)=0 \quad (3.97)$$



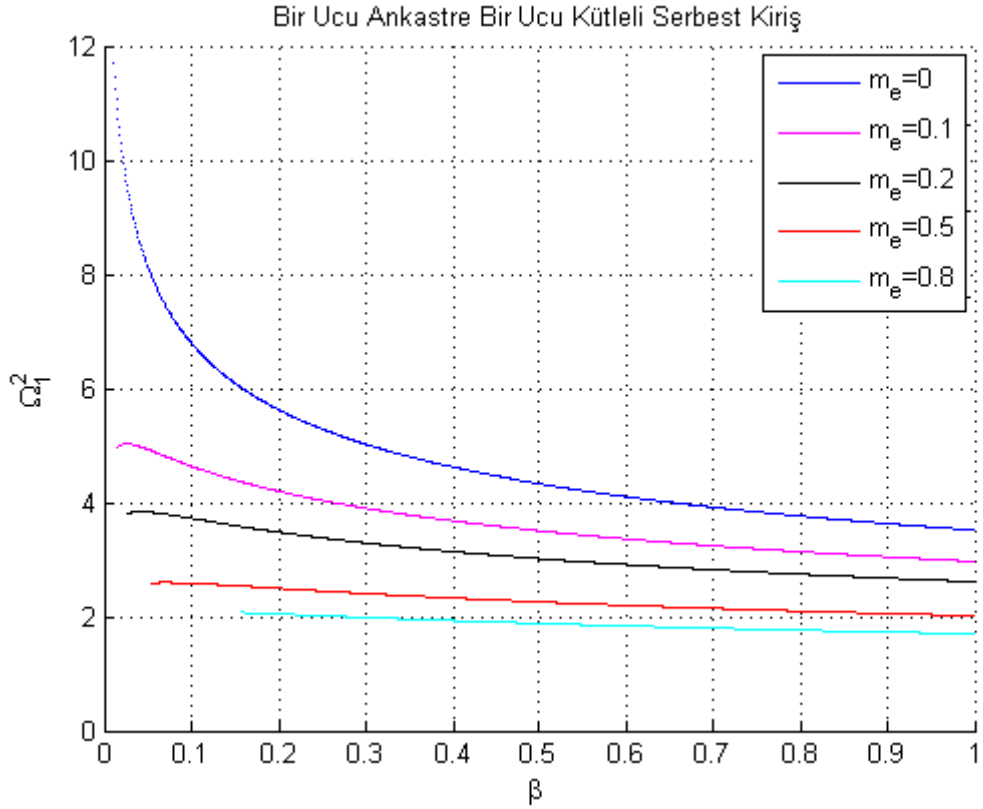
Şekil 3.13 Bir ucu ankastre bir ucu serbest olan ve serbest ucunda kütle bulunan kiriş

$$m_e = M_e / m_L, m_L = M_L c_e, M_L = \rho A_0 L, c_e = -\frac{1}{\beta_e} (1 - e^{\beta_e}) \quad (3.98)$$

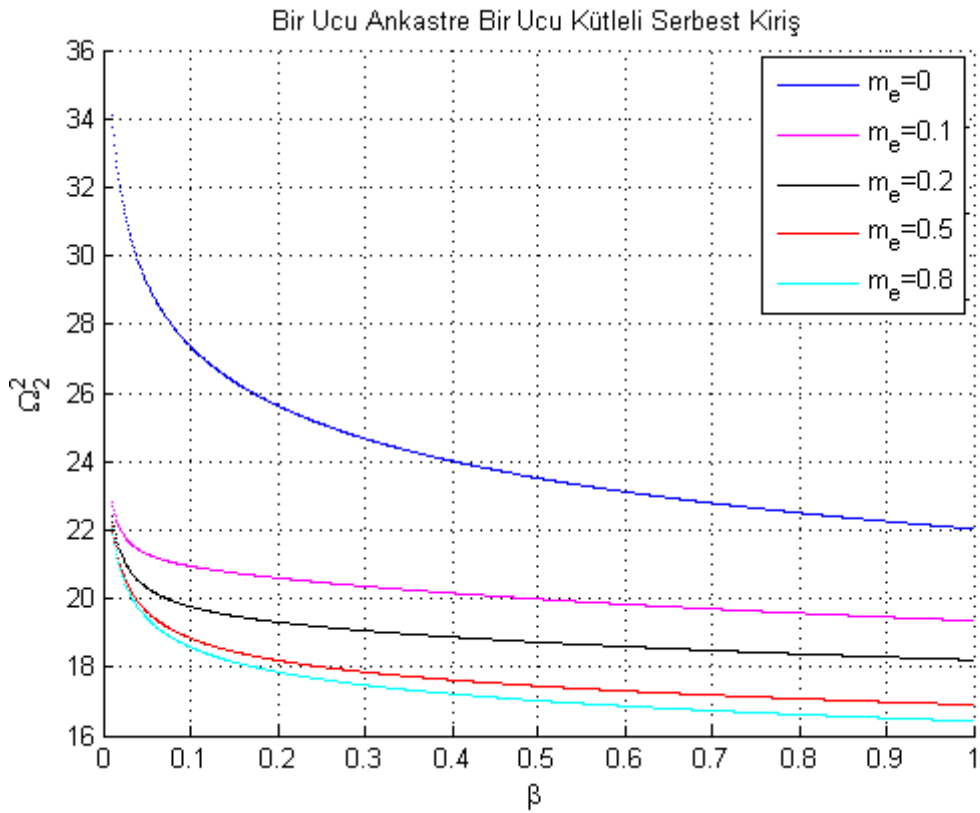
Bir ucu ankastre bir ucu serbest ve ucunda kütle bulunan kiriş için (3.97)'deki sınır koşullarını gösteren eşitlikler, (3.80) ve (3.82) eşitliklerinde yerine yazılarak (3.96) matris eşitliği elde edilir. Sabit kesit alanlı kirişin kütlesi M_L , kirişin ucunda asılı olan birim kütle m_e , kirişin kütlesi m_L ve kesit değişim fonksiyonu c_e ile temsil edilmiştir.

$$\begin{bmatrix} \cosh \varepsilon_1 & \sinh \varepsilon_1 & \cos \varepsilon_2 & \sin \varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 \sinh \varepsilon_1 & \varepsilon_1 \cosh \varepsilon_1 & -\varepsilon_2 \sin \varepsilon_2 & \varepsilon_2 \cos \varepsilon_2 \\ \delta^2 + \varepsilon_1^2 & 2\delta \varepsilon_1 & \delta^2 - \varepsilon_2^2 & 2\delta \varepsilon_2 \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.99)$$

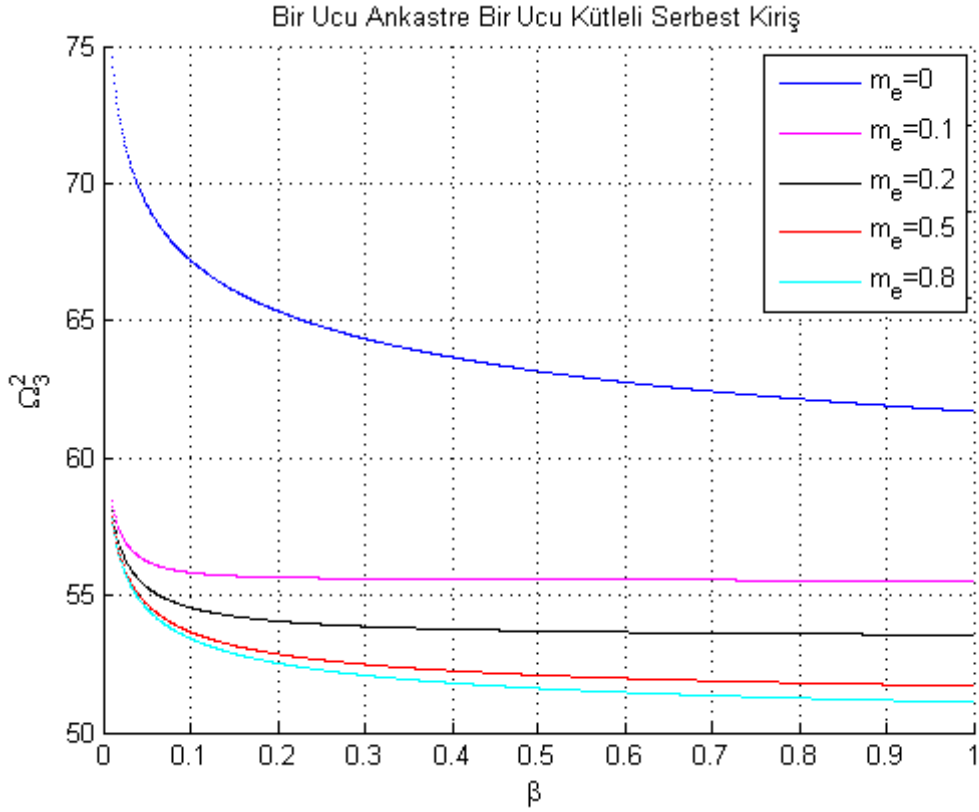
$$\begin{aligned} c_{41} &= \delta^3 + 3\delta \varepsilon_1^2 - m_e c_e^{-\beta_e} \Omega^4 \\ c_{42} &= 3\delta^2 \varepsilon_1 + \varepsilon_1^3 \\ c_{43} &= \delta^3 - 3\delta \varepsilon_2^2 - m_e c_e^{-\beta_e} \Omega^4 \\ c_{44} &= 3\delta^2 \varepsilon_2 + \varepsilon_2^3 \end{aligned} \quad (3.100)$$



Şekil 3.14 Bir ucu ankastre bir ucu serbest olan ve serbest ucunda kütle bulunan kirişin β değişimine göre mod 1 deki doğal frekansları oranı $m_e = 0, 0.1, 0.2, 0.5, 0.8$



Şekil 3.15 Bir ucu ankastre bir ucu serbest ve ucunda kütle bulunan kirişin β değişimine göre mod 1 deki doğal frekansları oranı $m_e = 0, 0.1, 0.2, 0.5, 0.8$



Şekil 3.16 Bir ucu ankastre bir ucu serbest ve ucunda kütle bulunan kirişin β değişimine göre mod 3 deki doğal frekansları oranı $m_e = 0, 0.1, 0.2, 0.5, 0.8$

Şekil 3.14'te bir ucu ankastre bir ucu serbest olan ve serbest ucunda kütle bulunan kirişin kesit değişiminin (β), farklı kütle miktarları için 1. mod şeklinin doğal frekansları değişimi gösterilmektedir. Şekil 3.15 ve 3.16'daki grafiklerde sırasıyla mod 2 ve mod 3 için doğal frekans grafikleri çizilmiştir. Bu üç grafik içinde serbest ucundaki kütle miktarı arttıkça kesit alanı değişim oranının etkisinin azaldığı görülmektedir. Tablo 3.3'te Bir ucu ankastre bir ucu serbest olan ve serbest ucunda kütle bulunan kirişin doğal frekansları gösterilmektedir.

Tablo 3. 3 Bir ucu ankastre bir ucu serbest olan ve serbest ucunda kütle bulunan kirişin doğal frekansları

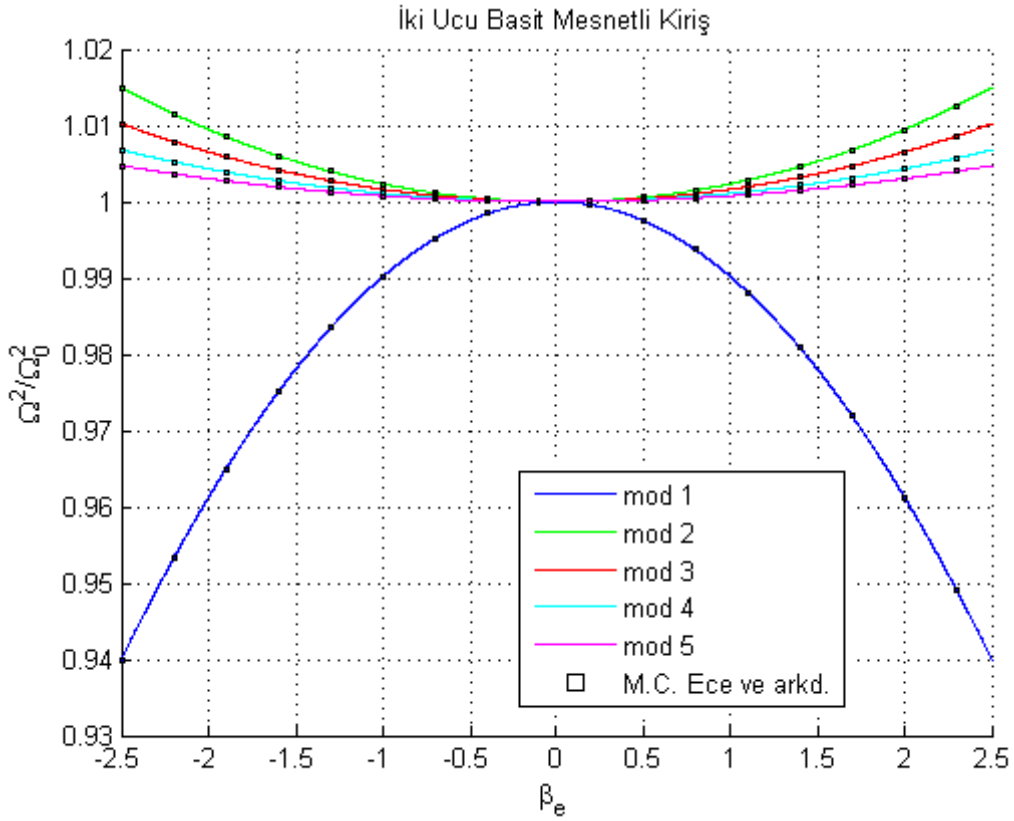
Beta (β)	Mod	Doğal frekans (Ω^2)		
		$m_e = 0.2$	$m_e = 0.5$	$m_e = 0.8$
0.2	1	3.4808773831	2.4957928371	2.0464301768
	2	19.3138790339	18.1968016311	17.8587717459
	3	54.0606737555	52.8627512123	52.5282596716
	4	108.4088714768	107.2008961862	106.8750180148
	5	182.4620714059	181.2504060519	180.9294183632
0.5	1	3.0164952715	2.2585955516	1.8816266453
	2	18.7286919769	17.4501945973	17.0220765812
	3	53.7011763990	52.0943816355	51.6131316494
	4	108.1407316961	106.4016721313	105.9078935106
	5	182.2516920938	180.4361697755	179.9355986304
0.8	1	2.7446092125	2.0983548886	1.7628966028
	2	18.3858960033	17.0799929795	16.6182039459
	3	53.5976552310	51.8124492831	51.2545788557
	4	108.1574938261	106.1459876527	105.5559391540
	5	182.3465948195	180.1969529116	179.5885922812

3.9 Bir Ucu Ankastre Bir Ucu Serbest Boyutsuz Konik Kirişin Frekans Değerlerinin Diğer Çalışmaların Sonuçlarıyla Karşılaştırılması

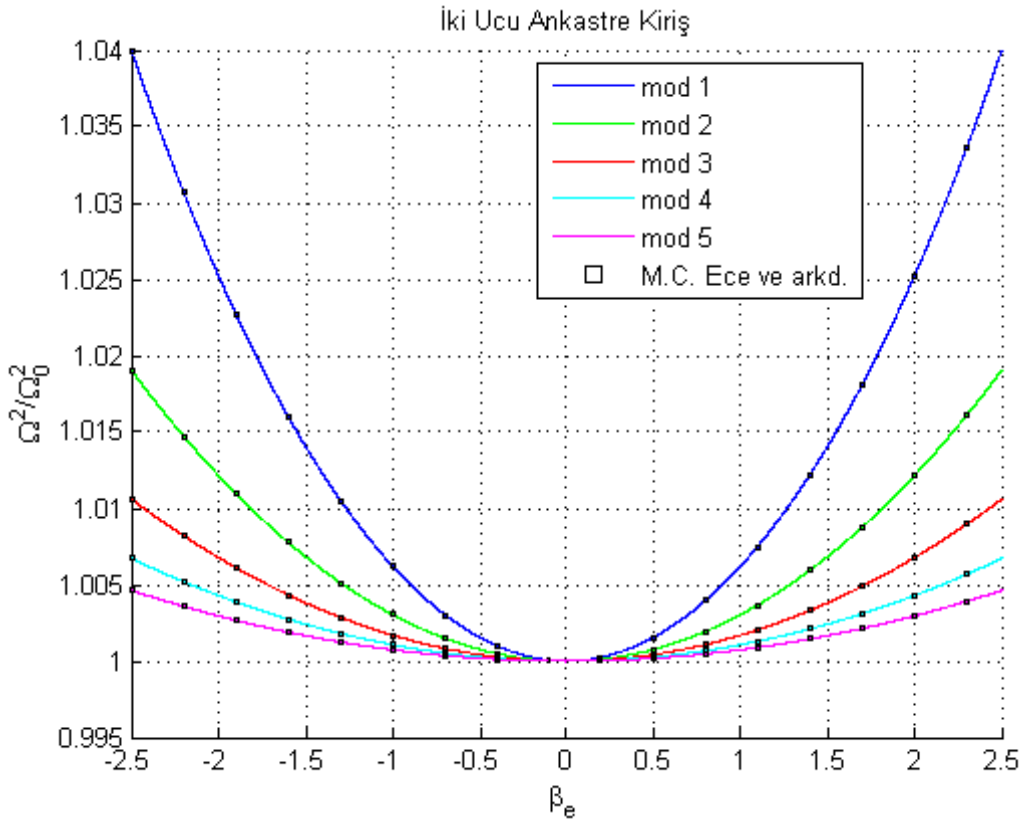
Cranch ve Adler [11], Tong ve Tabarrok [33], M.C. Ece ve ark.'nın [13] bir ucu ankastre bir ucu serbest daralan konik kiriş için yapmış oldukları çalışmaların sonuçlarıyla bu tezde 3.8.3 başlıkta incelenen durum için elde edilen sonuçların karşılaştırılması yapılmıştır. Çözüm yöntemi Cranch ve Adler'in yöntemi ile aynıdır. Tezde bulunan mod sayısı fazla olup çözümler daha fazla hassasiyetle yapılmıştır.

Tablo 3.5. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest konik kiriş için doğal frekansların karşılaştırılması

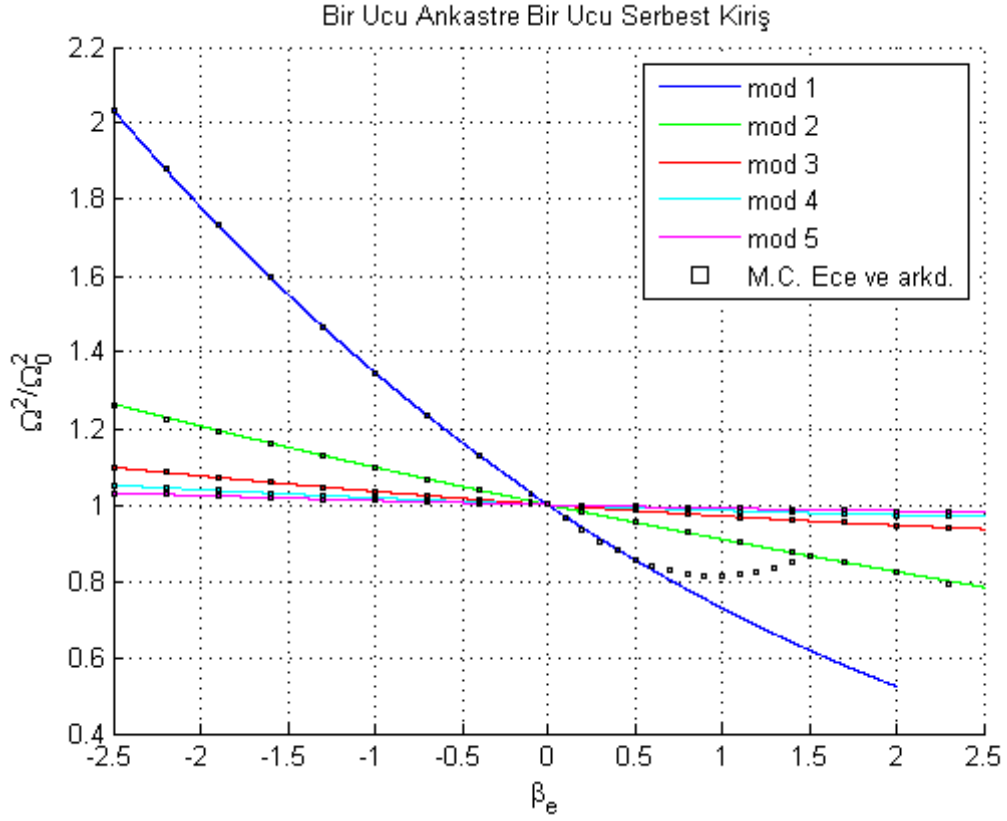
Mod ($\beta_e = -1$)	Cranch ve Adler (1956)	Tong and Tabarrok (1995)	M.C. Ece ve Arkd. (2007)	Tez sonuçları (2014)
1	4.735	4.7347	4.72298	4.7349065422
2	24.2025	24.2005	24.20168	24.1738448690
3	63.85	63.8608	63.86448	63.8644902793
4	-	123.091	123.09790	123.0979084129
5	-	-	202.06876	202.0687685365



Şekil 3.17 İki ucu basit mesnetli kirişin β_e değişimine göre doğal frekansları oranlarının başka bir çalışmayla karşılaştırılması mod =1,2,3,4,5



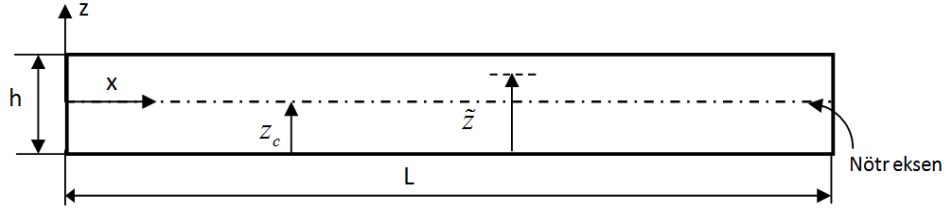
Şekil 3.18 İki ucu ankastre kirişin β_e değişimine göre doğal frekansları oranlarının başka bir çalışmayla karşılaştırılması mod =1,2,3,4,5



Şekil 3.19 Bir ucu ankastre diğer ucu serbest kirişin β_e değişimine göre doğal frekansları oranlarının başka bir çalışmayla karşılaştırılması mod =1,2,3,4,5

M.C.Ece ve ark.; iki ucu basit mesnetli, iki ucu ankastre ve bir ucu ankastre bir ucu serbest; genişliği üstel olarak değişen konik kirişler için elde ettikleri sonuçları; tezde elde edilen sonuçlarla karşılaştırmak amacıyla şekil (3.17), (3.18) ve (3.19) grafikleri üzerinden gösterilmiştir. Bu sayede sonuçların birbirine çok yakın olduğu görülmüş olup kullanılan analitik çözüm yolunun doğruluğu kanıtlanmıştır.

4. FGM KİRİŞTE MALZEME DAĞILIMININ ETKİSİNİN ELE ALINMASI



Şekil 4.1 Kalınlığı boyunca fonksiyonel derecelendirilmiş kiriş ve nötr eksenii[22]

Kirişin hareketi sırasında kiriş üzerinde herhangi bir uzamaya veya kısalmaya maruz kalmayan bir eksen bulunmaktadır. Buna nötr eksen denmektedir. z_c kirişin alt kısmından nötr eksene kadar olan uzaklığını temsil etmektedir. Nötr eksenin pozisyonunu belirlemek için kuvvet dengesi yazılır[21].

$$\int_A \sigma_{xx} dA = - \int_A E(\tilde{z}) z \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} dA = 0 \quad (4.1)$$

$$\int_A E(\tilde{z}) z dA = \int_A E(\tilde{z}) (\tilde{z} - z_c) dA = 0 \quad (4.2)$$

(3.76) bileşke kuvveti eşitliğini, (3.77) ise kuvvet çiftini gösteren denklemdir. Alt yüzeyden nötr eksene kadar olan z_c uzaklığı aşağıda gösterilmiştir.

$$z_c = \frac{\int_A E(\tilde{z}) \tilde{z} dA}{\int_A E(\tilde{z}) dA} = \frac{\int_A E(\tilde{z}) \tilde{z} b d\tilde{z}}{\int_A E(\tilde{z}) b d\tilde{z}} \quad (4.3)$$

z_c uzaklığı; güç yasası dağılımı indeksi (n) ve kirişi oluşturan malzemelerin elastisite modülleri (E_b, E_t) cinsinden gösterimi aşağıdaki gibi olmuştur.

$$z_c = h \frac{E_b + \frac{(E_t - E_b)}{(n+2)}}{E_b + \frac{(E_t - E_b)}{n+1}} \quad (4.4)$$

3.35 'deki bileşke moment denklemini yeniden düzenleyip, malzeme dağılımını göz önüne alınmıştır.

$$M_x = \int_A E(\tilde{z}) z^2 \frac{d^2 w(x,t)}{dx^2} dA = (EI_0)_{eq} \frac{d^2 w(x,t)}{dx^2} \quad (4.5)$$

$$(EI_0)_{eq} = E(\tilde{z}) I_0 = \int_0^h E_b + \left(\frac{\tilde{z}}{h}\right)^n (E_t - E_b) (\tilde{z} - z_c)^2 b d\tilde{z} \quad (4.6)$$

$$(EI_0)_{eq} = b \left[h^3 \left(\frac{E_b}{3} + \frac{(E_t - E_b)}{n+3} \right) - \tilde{z}_c h^2 \left(E_b + \frac{2(E_t - E_b)}{n+2} \right) + \tilde{z}_c^2 h \left(E_b + \frac{(E_t - E_b)}{n+1} \right) \right] \quad (4.7)$$

(4.4)'deki \tilde{z}_c eşitliği (4.7) denkleminde yerine yazılarak kirişin yükseklik doğrultusunda seçilen bir nokta için sadece malzeme dağılım indeksine bağlı elastisite modülünü tanımlayan denklem edilmektedir.

$$E(n) = \left(\frac{E_b}{3} + \frac{(E_t - E_b)}{n+3} \right) - \frac{\left(\frac{E_b}{2} + \frac{(E_t - E_b)}{(n+2)} \right)}{\left(E_b + \frac{(E_t - E_b)}{n+1} \right)} \left(E_b + \frac{2(E_t - E_b)}{n+2} \right) + \frac{\left(\frac{E_b}{2} + \frac{(E_t - E_b)}{(n+2)} \right)^2}{\left(E_b + \frac{(E_t - E_b)}{n+1} \right)} \left(E_b + \frac{(E_t - E_b)}{n+1} \right) \quad (4.8)$$

Eşitlik (3.37)'deki moment çifti denklemini tekrar düzenlenip, malzeme dağılımını göz önüne alınmaktadır.

$$Y_{xy} = \int_A l^2 \mu(\tilde{z}) \frac{d^2 w(x,t)}{dx^2} dA = l^2 (\mu A_0)_{eq} \frac{d^2 w(x,t)}{dx^2} \quad (4.9)$$

$$(\mu A_0)_{eq} = \int_0^h \left[\mu_b + \left(\frac{\tilde{z}}{h}\right)^n (\mu_t - \mu_b) \right] b d\tilde{z} \quad (4.10)$$

$$(\mu A_0)_{eq} = bh \left[\mu_b + (\mu_t - \mu_b) \frac{1}{n+1} \right] \quad (4.11)$$

Eşitlik (3.74)'deki $(\rho A_0)_{eq}$ eşitliği ve malzeme dağılımı kullanılarak kirişin toplam kütlesi hesaplanmaktadır.

$$(\rho A_0)_{eq} = \int_0^h \rho_b + \left(\frac{\tilde{z}}{h}\right)^n (\rho_t - \rho_b) b d\tilde{z} \quad (4.12)$$

$$(\rho A_0)_{eq} = bh \left[\rho_b + (\rho_t - \rho_b) \frac{1}{n+1} \right] \quad (4.13)$$

4.1 Kirişin Gerçek Doğal Frekansının Hesaplanması

Kesit değişiminin sadece kirişin genişliği boyunca olduğu, 3 farklı durum için frekanslar hesaplanmıştır. (3.75) denkleminde yararlanarak malzeme dağılımının etkisinin de göz önüne alındığı gerçek frekanslar bulunur.

$$\omega = \Omega^2 \sqrt{\frac{(EI_0 + I^2 \mu A_0)}{\rho A_0 L^4}} \quad (4.14)$$

Gerçek frekansın hesaplanması için malzeme seçimi yapılmıştır. Genellikle MEMS'lerde kullanılan Germanyum-Silisyum (Ge-Si) elementleri seçilmiştir. Tablo 4.1'de çözümde kullanılan malzemelerin özellikleri verilmiştir.

Tablo 4.1 Germanyum ve Silisyum elementlerini malzeme özellikleri

	Germanyum	Silisyum
Kesme Modülü (G)	41 GPa	79.9 GPa
Possion oranı (ν)	0.28	0.26
Yoğunluk (ρ)	5.33 g/cm ³	2.33 g/cm ³
Elastisite (Young's) Modülü (E)	102.7 GPa	131 GPa

Kirişin yüksekliği: $h_0 = 10^{-6} m$, genişliği $b = 2h_0$, uzunluğu $L = 20h_0$ ve iç uzunluk ölçeği (l); $0 \leq h/l \leq 10$ olarak seçilmiştir. Kirişin üst yüzeyinin germanyumdan alt yüzeyinin silisyumdan olduğu varsayılmıştır.

Titreşim sırasında iki farklı seviyede iki çeşit deformasyon meydana gelmektedir. Bunlar parçacık düzeyinde mikro rotasyon ve yapısal düzeyde makro-deformasyonlardır. Parçacık düzeyinde mikro deformasyonda iç uzunluk ölçeği; parçacığın mikro özelliklerini belirleyen bir parametredir. Genellikle iç uzunluk parametresi olarak adlandırılır. Yaygın olarak kullanılan iç uzunluk parametresi,

uzunluk ölçek büyüklüğünün elde edilmesini için gerekli olan ortalama parçacık boyutunun bulunmasını sağlayan temel faktörlerden biridir. Ortalama parçacık boyutu arttığında/azaldığında uzunluk ölçeğinin büyüklüğü artacaktır/azalacaktır. Uzunluk ölçeği Vardoulakis and Sulem (1995) tarafından tanımlanmıştır.

$$l = \sqrt{\frac{M}{G}} \quad (4.15)$$

G : Kesme modülü

M :Birim kuvvetin momenti.

Her bir kiriş durumu için ω/ω_0 oran değerinin h_0/l oran değerini kıyaslayan grafikler elde edilmiştir. ω_0 değeri, sabit kesit alanlı ve içi uzunluk parametresi sıfır olan kiriş için elde edilen frekansı temsil etmektedir ($\beta=1, l=0$). İç uzunluk parametresini sıfır olması hareket denklemini klasik Euler- Bernoulli denklemine indirger [21].

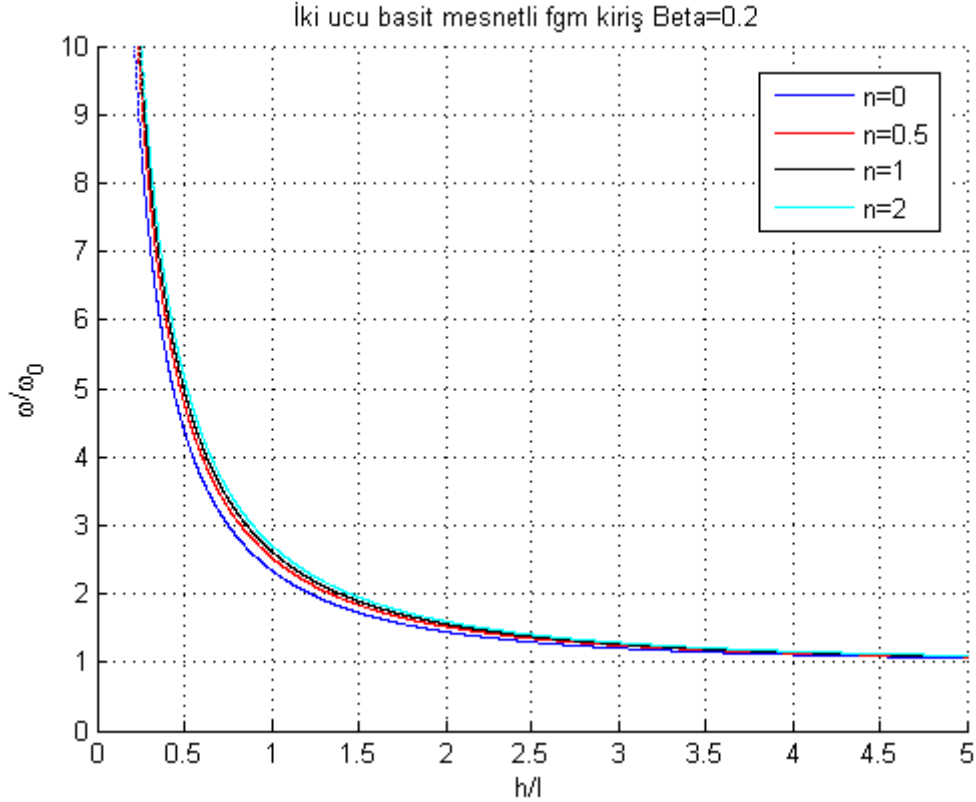
$$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{\Omega^2}{\Omega_0^2} \sqrt{1 + \frac{\mu_0}{E_0 \left(\frac{h}{l}\right)^2}} \quad (4.16)$$

4.1.1 İki Ucu Basit Mesnetli FGM Kiriş İçin ω/ω_0 Oranının; Beta ve h/l Oranının Değişimine Bağlı Olarak Çizilen Grafikler ve Grafiklerin Yorumları

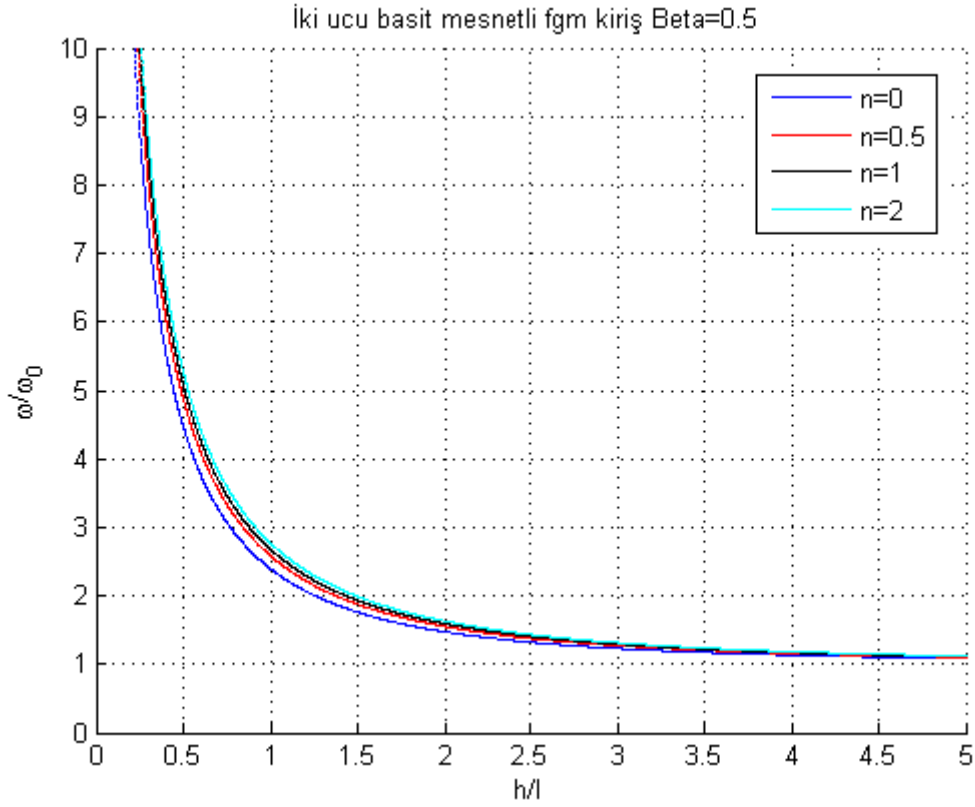
Tablo 4.2’te iki ucu basit mesnetli fgm kirişin β, n ve h/l değerlerine göre gerçek doğal frekanslarının sabit kesitli homojen bir kirişin frekansına olan oranları gösterilmektedir.

Tablo 4.2 İki ucu basit mesnetli fgm kirişin β , n ve h/l oranı değerlerine göre gerçek doğal frekans oranları

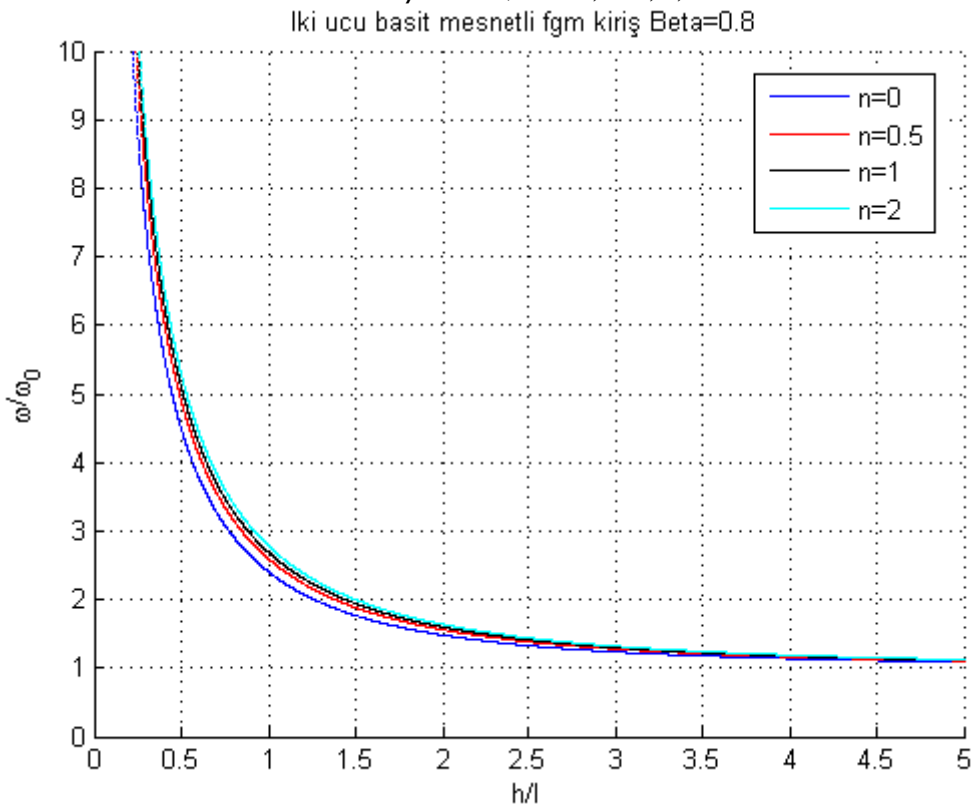
Beta (β)	Üstel dağılım indeksi (n)	Gerçek frekans oranları ω/ω_0			
		$h_0/l=0.2$	$h_0/l=0.5$	$h_0/l=1$	$h_0/l=2$
0.2	0	10.7121824720	4.3770190231	2.3456802522	1.4450591422
	0.5	11.7207784931	4.7726745915	2.5312541659	1.5213329275
	1	12.2174275657	4.9679618366	2.6235097038	1.5599175474
	2	12.6991286965	5.1576174871	2.7134657726	1.5979255577
0.5	0	10.9375422084	4.4691014588	2.3950279817	1.4754598704
	0.5	11.9673567752	4.8730807123	2.5845059447	1.5533382810
	1	12.4744542046	5.0724763530	2.6787023274	1.5927346328
	2	12.9662892218	5.2661219231	2.7705508654	1.6315422444
0.8	0	10.9839921799	4.4880810094	2.4051992779	1.4817259096
	0.5	12.0181802025	4.8937758974	2.5954819231	1.5599350573
	1	12.5274311926	5.0940183391	2.6900783426	1.5994987190
	2	13.0213549535	5.2884862905	2.7823169465	1.6384711403



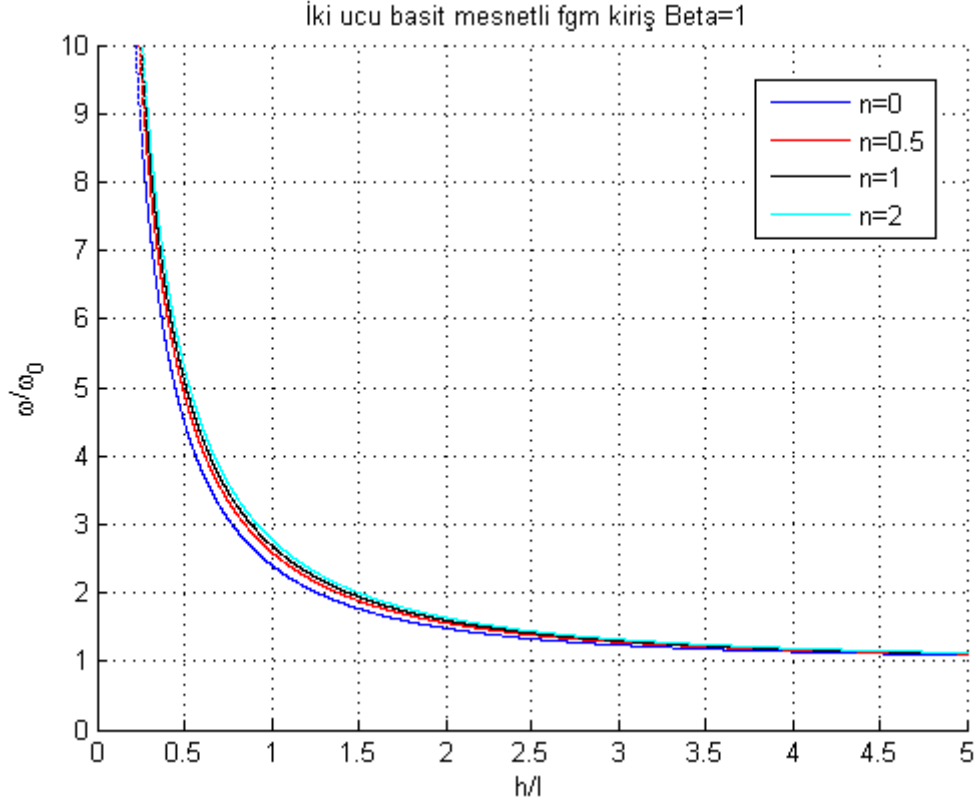
Şekil 4.2 İki ucu basit mesnetli konik fgm kiriş için h/l oranına bağlı ω/ω_0 frekans oranları $\beta=0.2$, $n=0, 0.5, 1, 2$



Şekil 4.3 İki ucu basit mesnetli konik fgm kiriş için h/l oranına bağlı ω/ω_0 frekans oranları $\beta = 0.5$, $n = 0, 0.5, 1, 2$



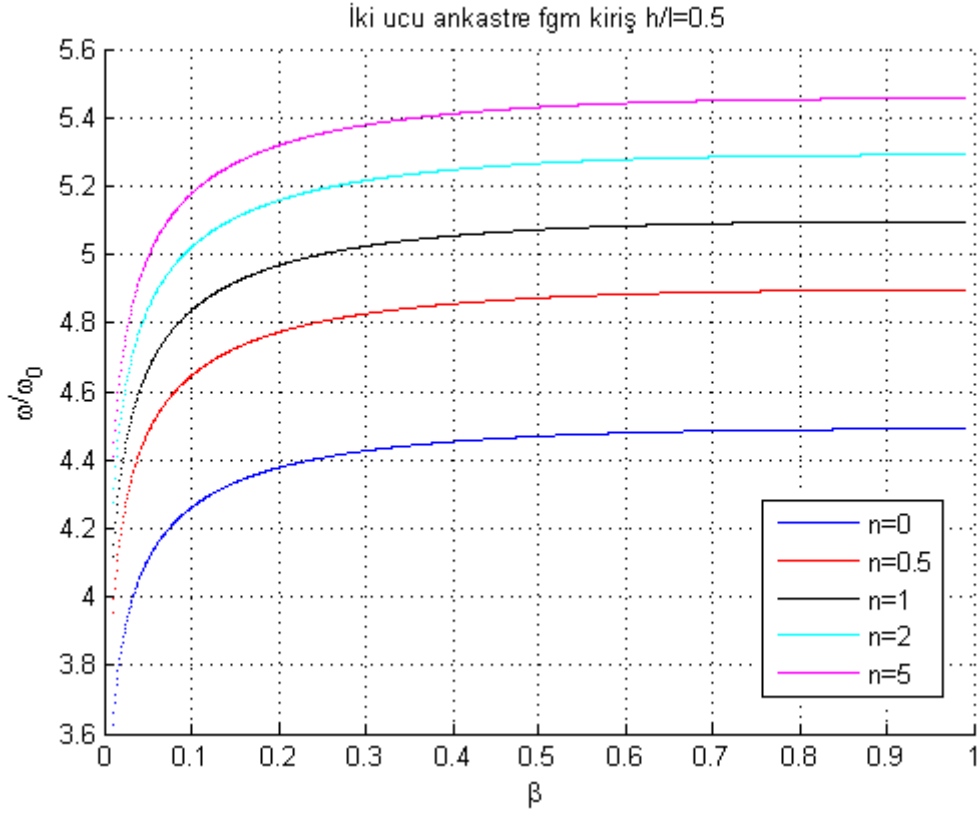
Şekil 4.4 İki ucu basit mesnetli konik fgm kiriş için h/l oranına bağlı ω/ω_0 frekans oranları $\beta = 0.8$, $n = 0, 0.5, 1, 2$



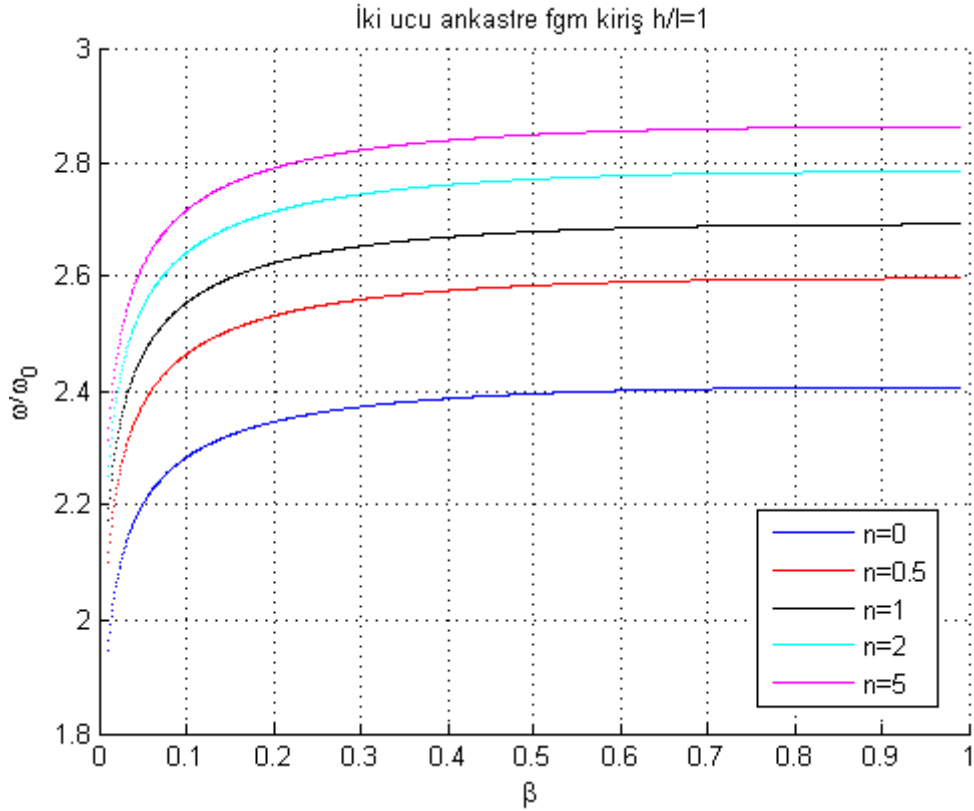
Şekil 4.5 İki ucu basit mesnetli konik fgm kiriş için h/l oranına bağlı ω/ω_0 frekans oranları $\beta=1$, $n=0, 0.5, 1, 2$

Şekil 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 ve 4.5'te kirişin koniklik değeri betanın sabit olduğu, h/l oranının 0.2 ile 1.5 değerleri arasında değiştiği durum incelendiğinde gerçek frekans oranlarının çok hızlı bir şekilde değiştiği görülmektedir. h/l değeri 1.5 ile 4 arasındayken bu grafiklere göre kirişte daha az frekans oranının değişiminin meydana geldiği saptanmaktadır. h/l değeri 4 ve daha üzeri olduğunda frekanslar oranı 1 değerine yaklaştığından kirişin gerçek frekans değerinin klasik Euler-Bernoulli kiriş teorisine yakın sonuçlar verdiği görülmektedir.

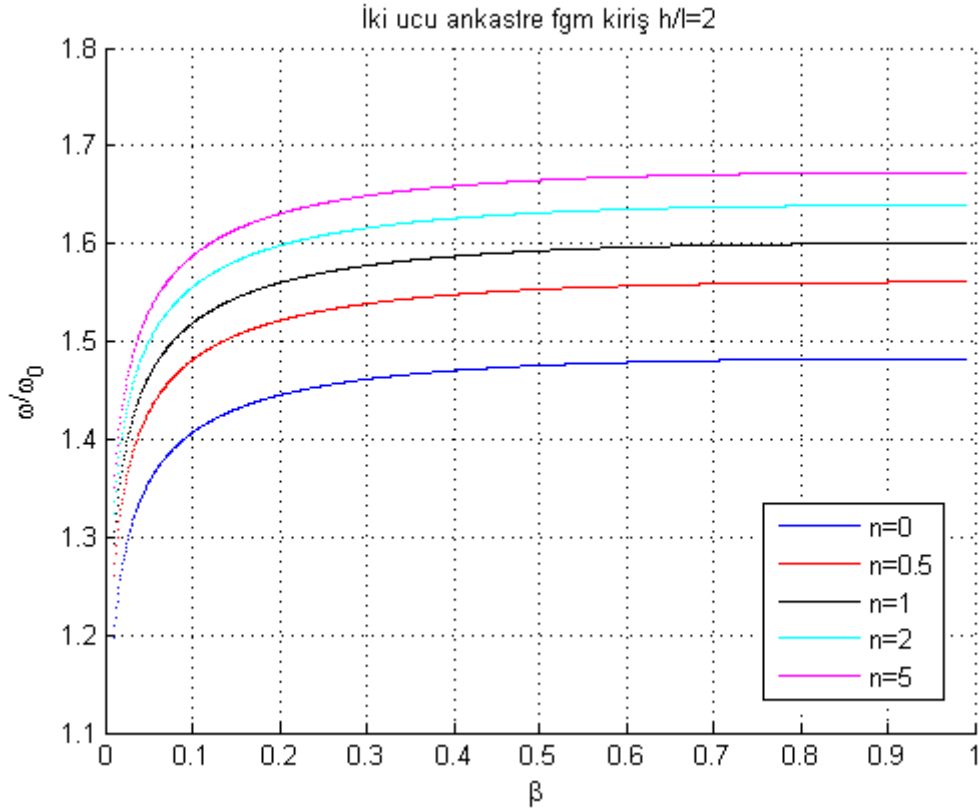
Ayrıca bu grafiklere göre malzeme dağılım indeksinin artışı, frekans oranları eğrisinde çok büyük farklılıklar oluşturmamaktadır. Bu indeks değerinin her bir artışı sonucunda oluşan eğriler, kendinden bir önceki eğriye daha fazla yaklaşmaktadır. Sonuç olarak indeks değerinin sonsuza gitmesiyle etkisinin azalacağı anlaşılmaktadır.



Şekil 4.6 İki ucu basit mesnetli fgm kiriş için β oranına bağlı ω/ω_0 frekans oranları $h/l=0.5$ $n=0, 0.5, 1, 2, 5$



Şekil 4.7 İki ucu basit mesnetli fgm kiriş için β oranına bağlı ω/ω_0 frekans oranları $h/l=1$ $n=0, 0.5, 1, 2, 5$



Şekil 4.8 İki ucu basit mesnetli fgm kiriş için β oranına bağlı ω/ω_0 frekans oranları $h/l=2$ $n=0, 0.5, 1, 2, 5$

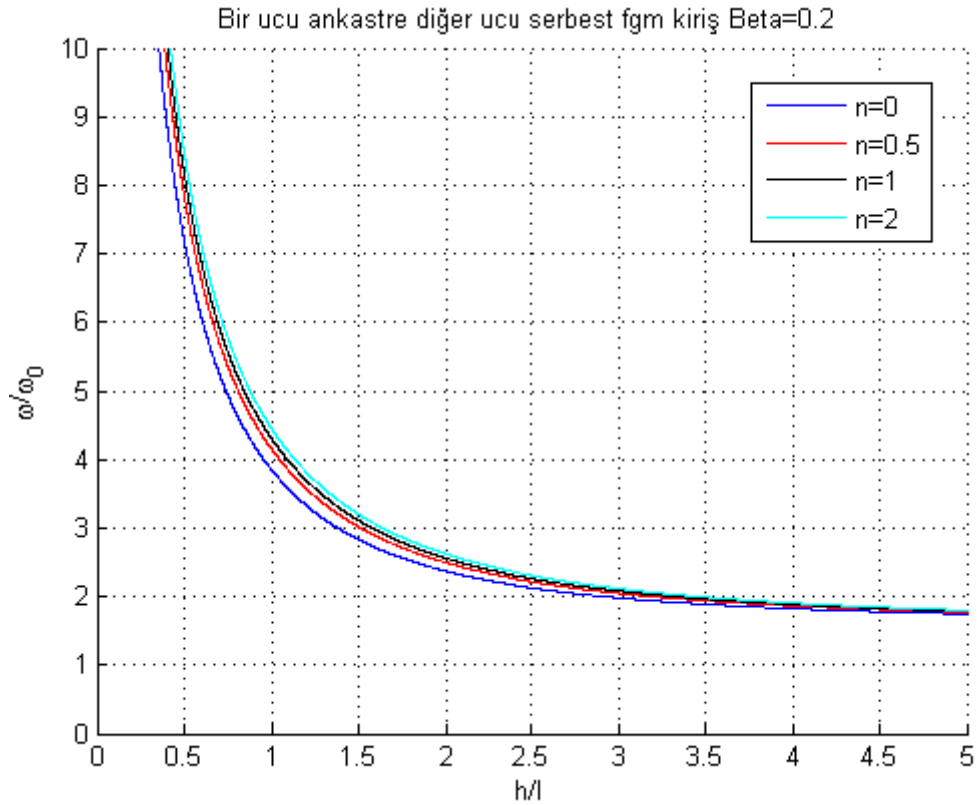
Şekil 4.6, 4.7 ve 4.8'de kirişin h/l oranının sabit olduğu, koniklik değeri betanın 0 ile 0.2 değerleri arasında iken frekans oranları değişimi hızlı bir şekilde artmaktadır. Beta değeri 0.2 ve daha üzeri bir değer seçildiğinde frekans oranları belirli bir oranda sabitleşmeye başladığı görülmektedir. Malzeme dağılım indeksinin seçilen değerlerin küçük olduğu durumlarda değerinin artışı, frekans oranları eğrileri arasında daha fazla farklılık göstermektedir. Seçilen indeks değeri 5 ve üzeri iken frekans eğrilerinin arasındaki farklılıkların gittikçe küçüleceği ve belirli bir indeks değerinden sonra sonuçları etkilemeyeceği saptanmaktadır.

4.1.2 İki Ucu Ankastre FGM Kiriş İçin ω/ω_0 Oranının; Beta ve h/l Oranının Değişimine Bağlı Olarak Çizilen Grafikler ve Grafiklerin Yorumları

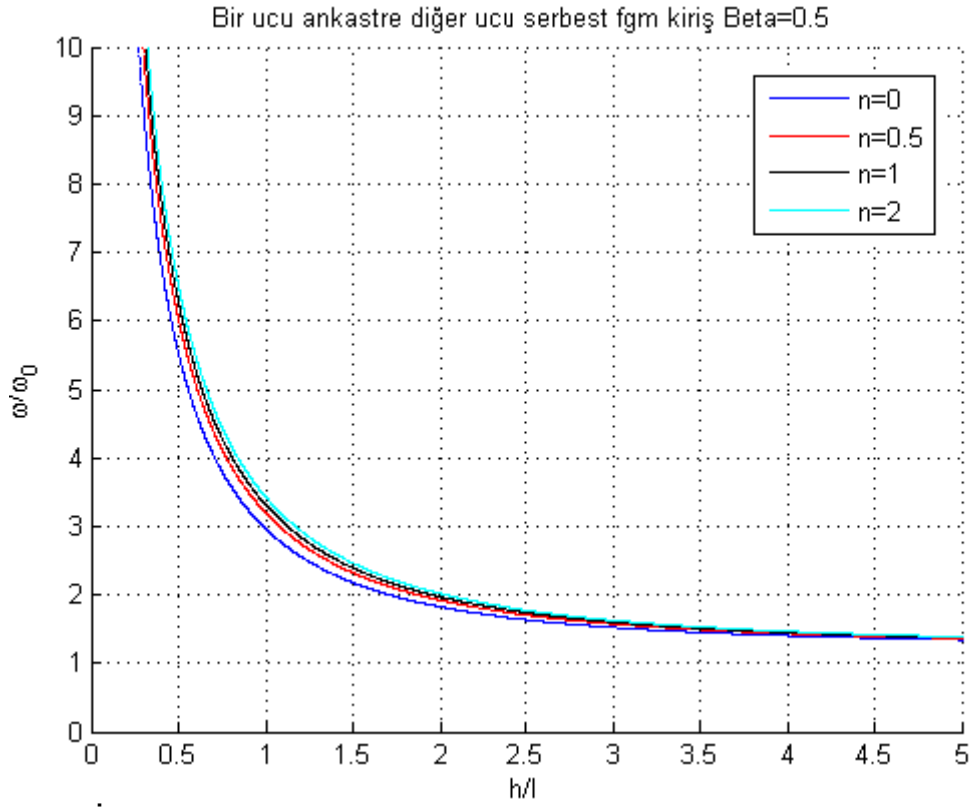
Tablo 4.3'te iki ucu ankastre fgm kirişin β , n ve h/l değerlerine göre gerçek doğal frekanslarının sabit kesitli homojen bir kirişin frekansına olan oranları gösterilmektedir.

Tablo 4.3 İki ucu ankastre fgm kirişin β , n ve h/l oranı değerlerine göre gerçek doğal frekans oranları

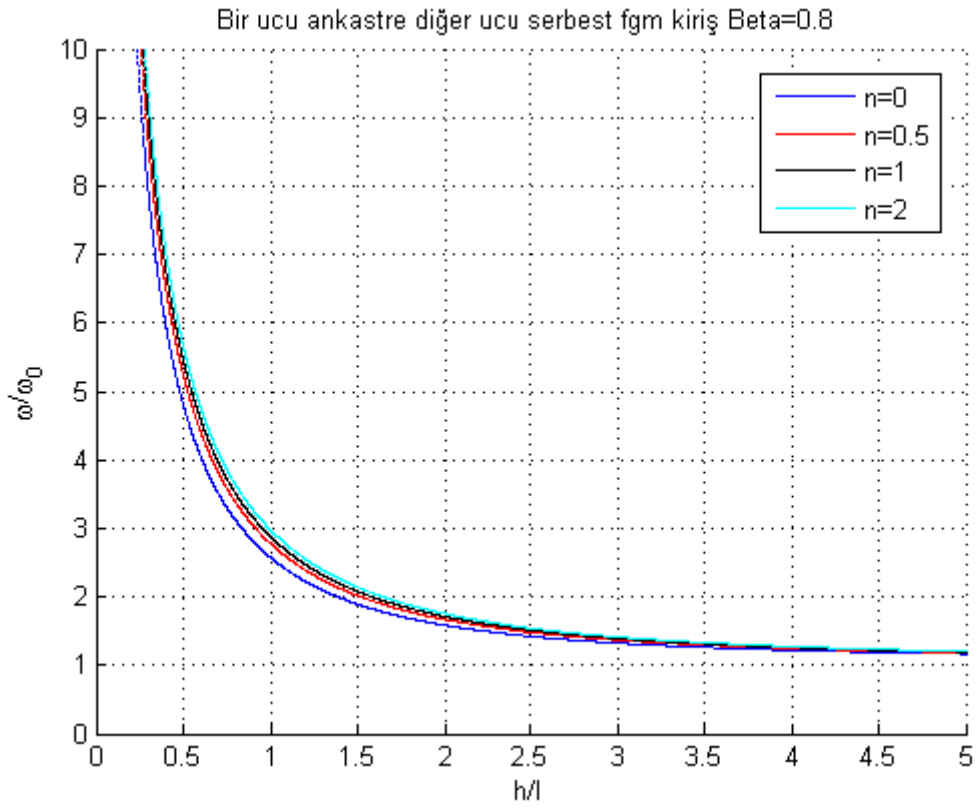
Beta (β)	Üstel dağılım indeksi (n)	Gerçek frekans oranları ω/ω_0			
		$h_0/l=0.2$	$h_0/l=0.5$	$h_0/l=1$	$h_0/l=2$
0.2	0	11.1673014090	4.5629815243	2.4453390757	1.5064540804
	0.5	12.2187487492	4.9754469577	2.6387973027	1.585968441
	1	12.7364985077	5.1790311977	2.7349724193	1.6261923721
	2	13.2386652446	5.3767445785	2.8287503713	1.6658151948
0.5	0	11.0219195494	4.5035782078	2.4135043531	1.4868422612
	0.5	12.0596785897	4.9106739472	2.6044440382	1.5653214626
	1	12.5706880069	5.1116078195	2.6993670961	1.6050217363
	2	13.0663172706	5.3067472625	2.7919241969	1.6441287281
0.8	0	10.9927358809	4.4916537029	2.4071139136	1.4829054233
	0.5	12.0277471589	4.8976715405	2.5975480315	1.5611768286
	1	12.5374035333	5.0980733832	2.6922197535	1.6007719845
	2	13.0317204774	5.2926961390	2.7845317831	1.6397754294



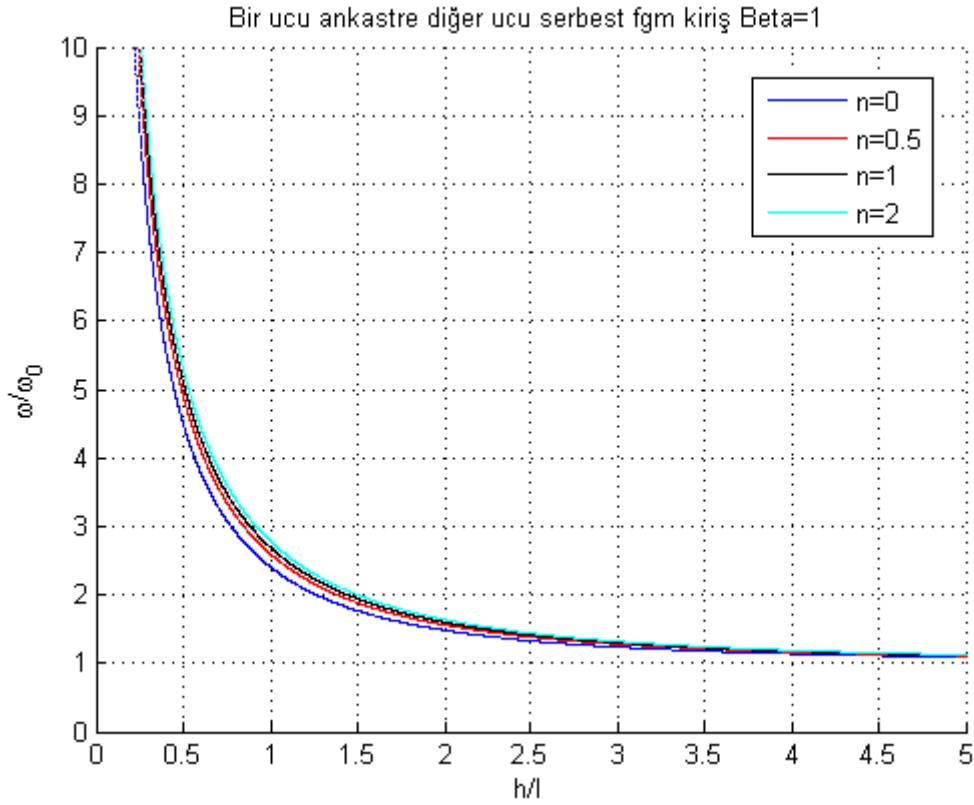
Şekil 4.9 İki ucu ankastre fgm kiriş için h/l oranına bağlı ω/ω_0 frekans oranları $\beta = 0.2$, $n = 0, 0.5, 1, 2$



Şekil 4.10 İki ucu ankastre fgm kiriş için h/l oranına bağlı ω/ω_0 frekans oranları
 $\beta = 0.5, n = 0, 0.5, 1, 2$

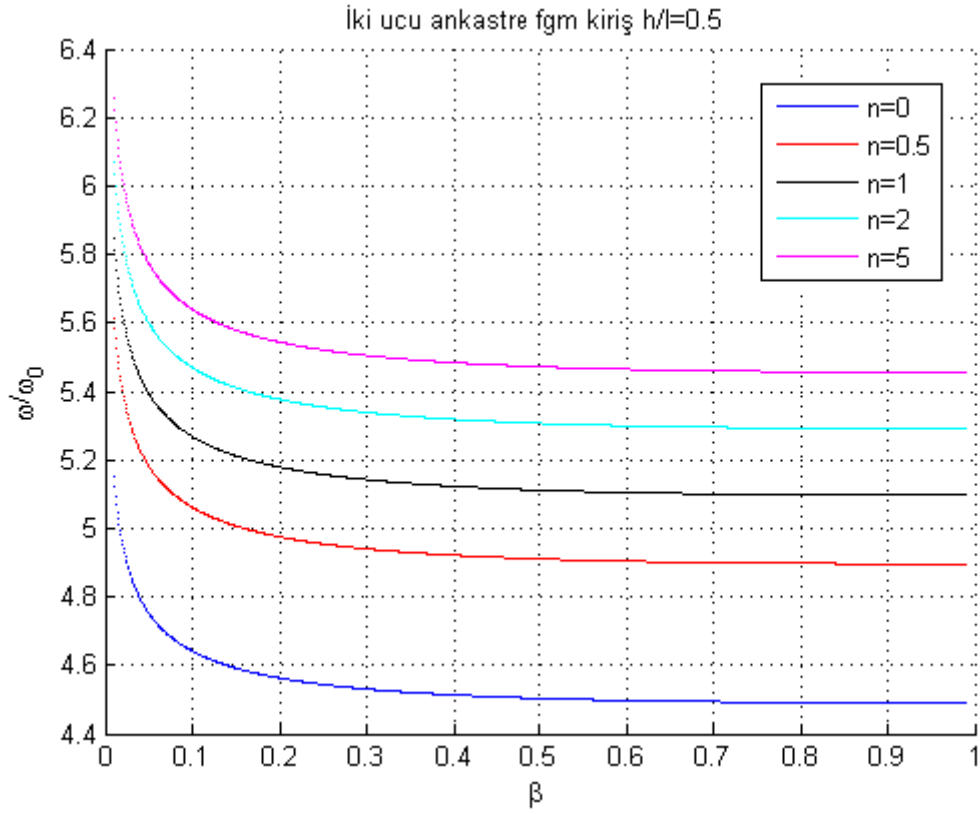


Şekil 4.11 İki ucu ankastre fgm kiriş için h/l oranına bağlı ω/ω_0 frekans oranları
 $\beta = 0.8, n = 0, 0.5, 1, 2$

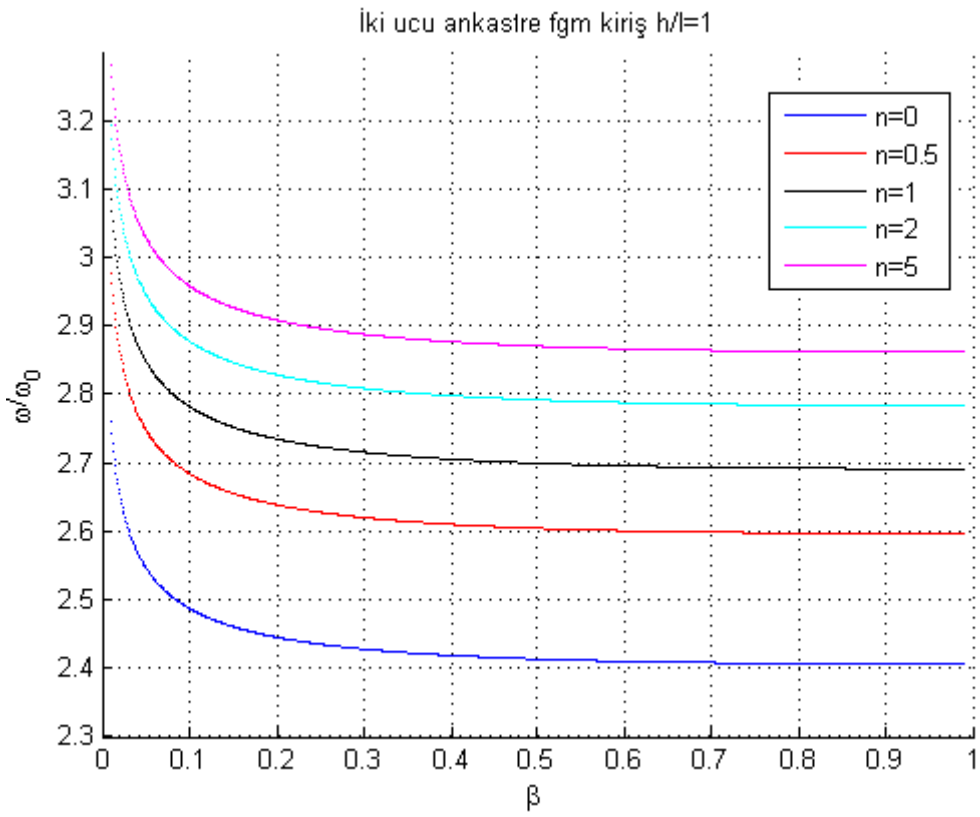


Şekil 4.12 İki ucu ankastre fgm kiriş için h/l oranına bağlı ω/ω_0 frekans oranları $\beta=1, n=0,0.5,1,2$

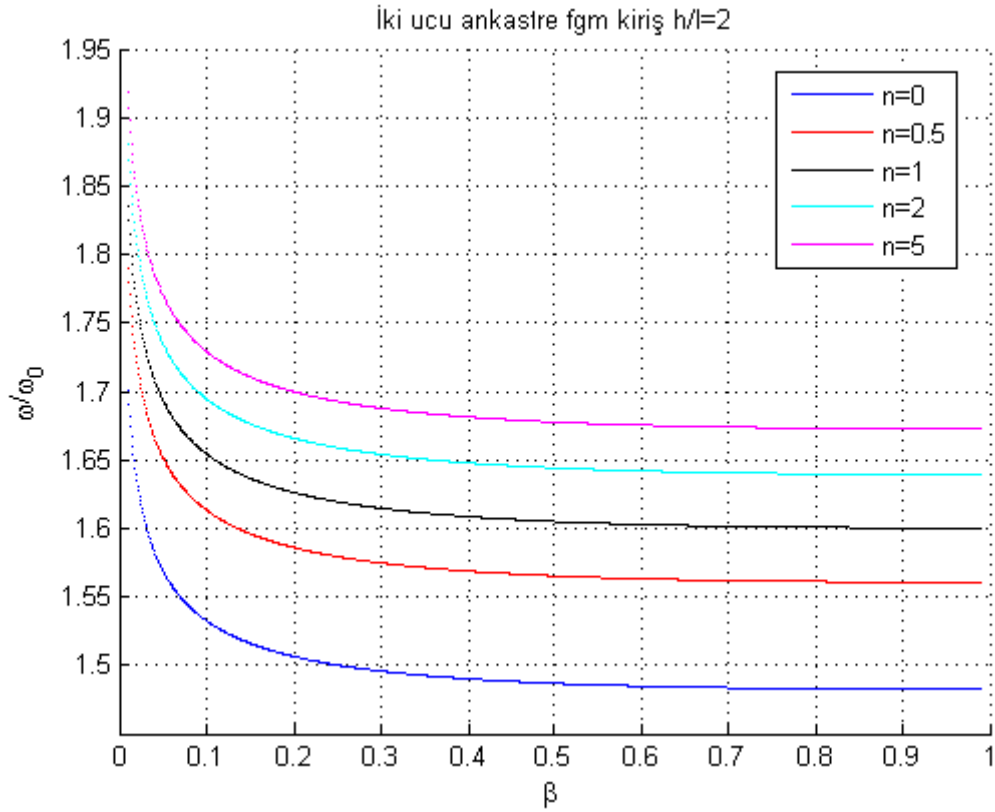
Şekil 4.9, 4.10, 4.11 ve 4.12'de kirişin koniklik değeri beta sabit olduğu, h/l oranı 0.2 ile 1.5 değerleri arasındayken frekans oranlarının değişimi çok hızlı bir şekilde değişmekte olduğu görülmektedir. h/l değeri 1.5 ile 4 arasında değişmekte iken kirişte daha az frekans oranı değişimi meydana gelmektedir. h/l değeri 4 ve daha üzeri bir değer seçildiğinde ise belirli bir frekans oranının sabit kalmakta olup beta değeri 1'e yaklaştıkça frekans oranları değeri 1 olmaktadır. Bu durumda beta değeri 1'e yakın ve h/l oranı 4 ve daha üzeri seçildiğinde sonucun klasik Euler-Bernoulli kiriş teorisine yakın sonuçlar verdiği anlaşılmaktadır. Malzeme dağılım indeksinin artışı frekans oranları eğrisinden çok büyük fark oluşturmamakla birlikte, değerlerin her bir artışı kendinden bir önceki eğriye daha da yaklaşmakta olduğu saptanmıştır.



Şekil 4.13 İki ucu ankastre fgm kiriş için β oranına bağlı ω/ω_0 frekans oranları
 $h/l=0.5, n=0, 0.5, 1, 2, 5$



Şekil 4.14 İki ucu ankastre fgm kiriş için β oranına bağlı ω/ω_0 frekans oranları
 $h/l=1, n=0, 0.5, 1, 2, 5$



Şekil 4.15 İki ucu ankastre fgm kiriş için β oranına bağlı ω/ω_0 frekans oranları
 $h/l=2, n=0,0.5,1,2,5$

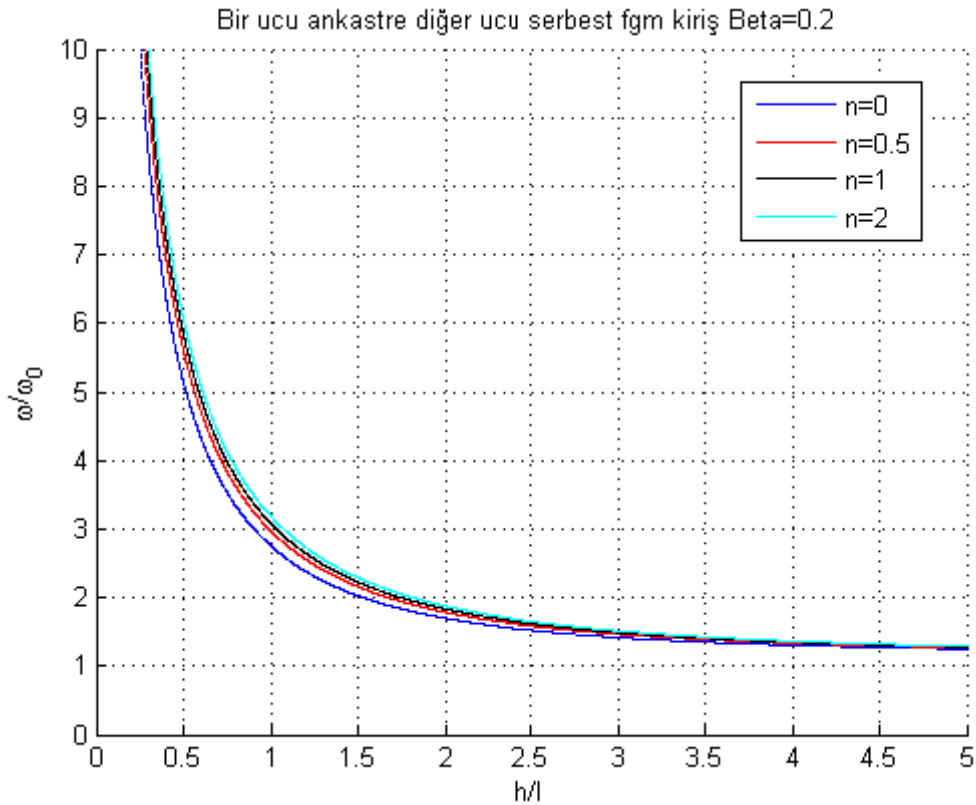
Şekil 4.13, 4.14 ve 4.15 'te kirişin h/l oranı sabit olduğu durumlarda, koniklik değeri beta 0 ile 0.2 değerleri arasında iken frekans oranları değişimlerinin hızlı bir şekilde azalmakta olduğu ve beta değeri 0.2 ve daha üzeri bir değer seçildiğinde frekans oranları değişimlerinin belirli bir oranda sabitleşmeye başladığı görülmektedir. Malzeme dağılım indeksi için seçilen değerlerin küçük olması ve bu değerlerin çok az miktardaki değişiminin, frekans oranları eğrileri arasındaki farkı çok fazla etkilediği gözlemlenmektedir. .

4.1.3 Bir Ucu Ankastre Diğer Ucu Serbest FGM Kiriş İçin ω/ω_0 Oranının; Beta ve h/l Oranının Değişimine Bağlı Olarak Çizilen Grafikler ve Grafiklerin Yorumları

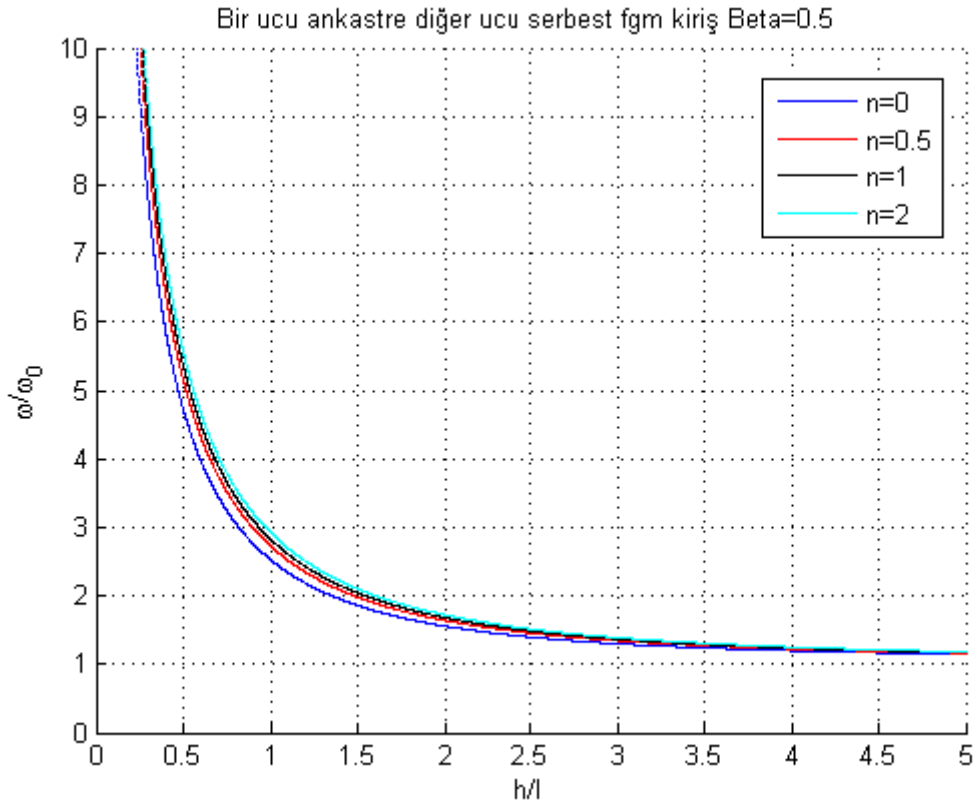
Tablo 4.4'te bir ucu ankastre diğer ucu fgm kirişin β, n ve h/l değerlerine göre gerçek doğal frekanslarının sabit kesitli homojen bir kirişin frekansına olan oranları gösterilmektedir.

Tablo 4.4 İki ucu ankastre diğer ucu serbest fgm kirişin β , n ve h/l oranı değerlerine göre gerçek doğal frekans oranları

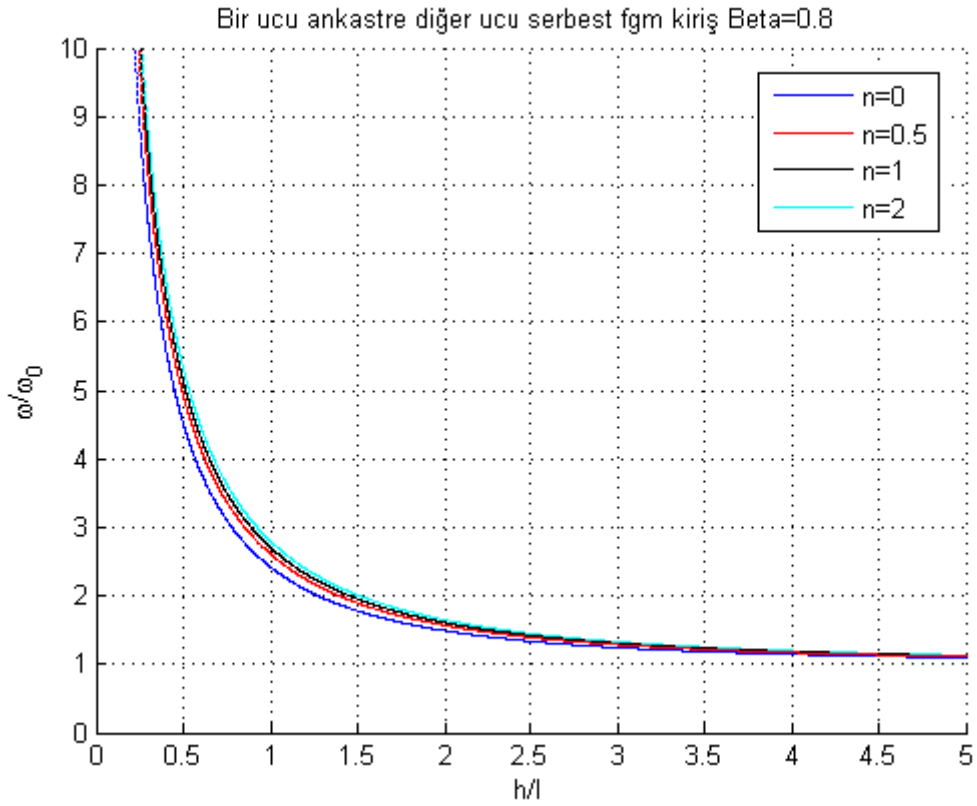
Beta (β)	Üstel dağılım indeksi (n)	Gerçek frekansların oran ω/ω_0			
		$h_0/l=0.2$	$h_0/l=0.5$	$h_0/l=1$	$h_0/l=2$
0.2	0	17.5865238282	7.1858885477	3.8509763772	2.3723986316
	0.5	19.2423673507	7.8354486256	4.1556388551	2.4976196820
	1	20.0577316121	8.1560577824	4.3070976469	2.5609652551
	2	20.8485553717	8.4674213747	4.4547813287	2.6233641902
0.5	0	13.5330799336	5.5296433258	2.9633810322	1.8255944511
	0.5	14.8072750483	6.0294890339	3.1978231372	1.9219538284
	1	15.4347094312	6.2762023349	3.3143728293	1.9706991468
	2	16.0432595492	6.5158010426	3.4280175205	2.0187160139
0.8	0	11.7621929393	6.5158010426	2.5756043432	1.5867041552
	0.5	12.8696517628	5.2404931981	2.7793682525	1.6704543135
	1	13.4149824860	5.4549225417	2.8806666983	1.7128210063
	2	14.5483088051	5.6631682804	2.9794402807	1.7545545701



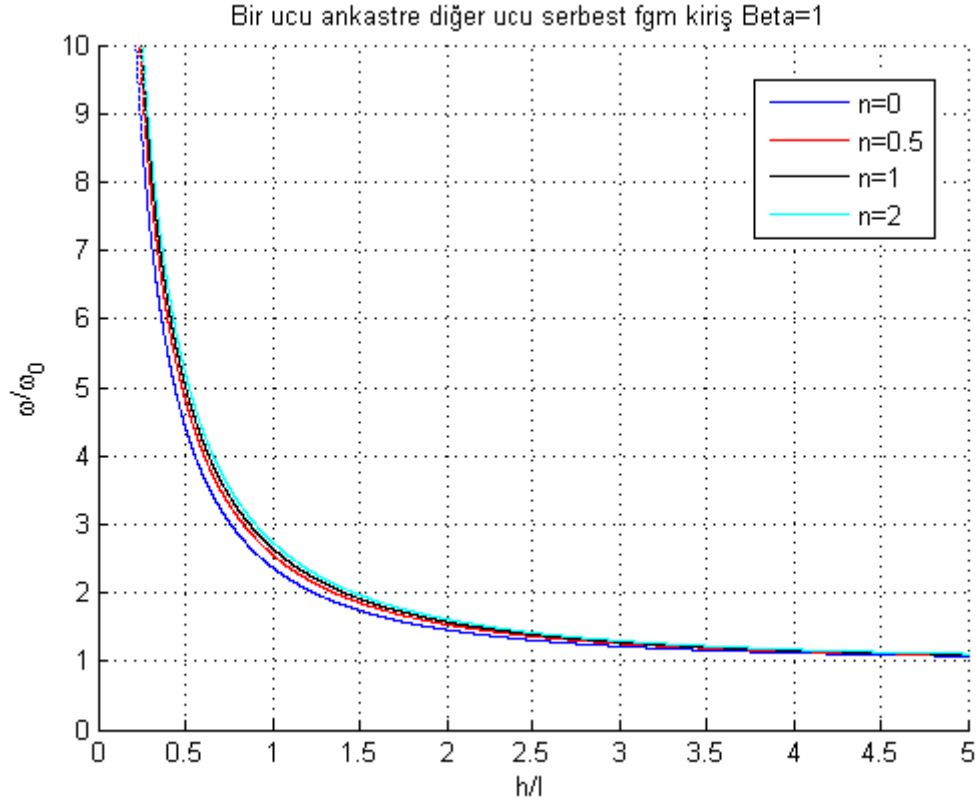
Şekil 4.16 Bir ucu ankastre diğer ucu serbest fgm kiriş için h/l oranına bağlı ω/ω_0 frekans oranları $\beta = 0.2$, $n = 0, 0.5, 1, 2$



Şekil 4.17 Bir ucu ankastre diğer ucu serbest fgm kiriş için h/l oranına bağlı ω/ω_0 frekans oranları $\beta = 0.5$, $n = 0, 0.5, 1, 2$

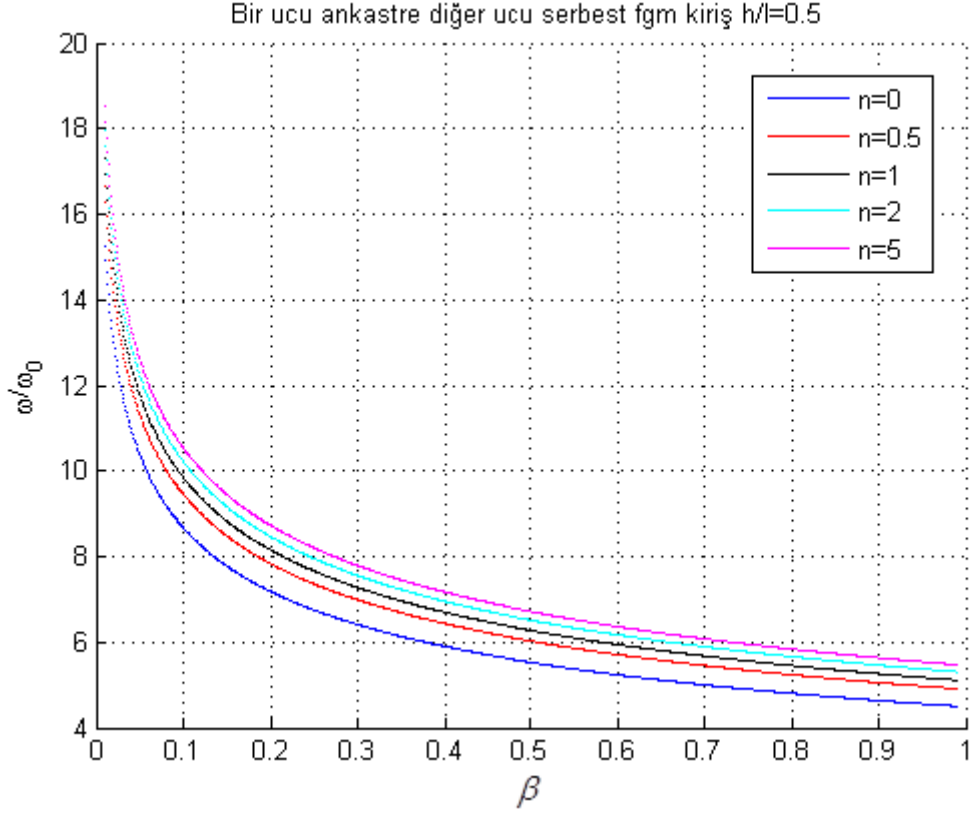


Şekil 4.18 Bir ucu ankastre diğer ucu serbest fgm kiriş için h/l oranına bağlı ω/ω_0 frekans oranları $\beta = 0.8$, $n = 0, 0.5, 1, 2$

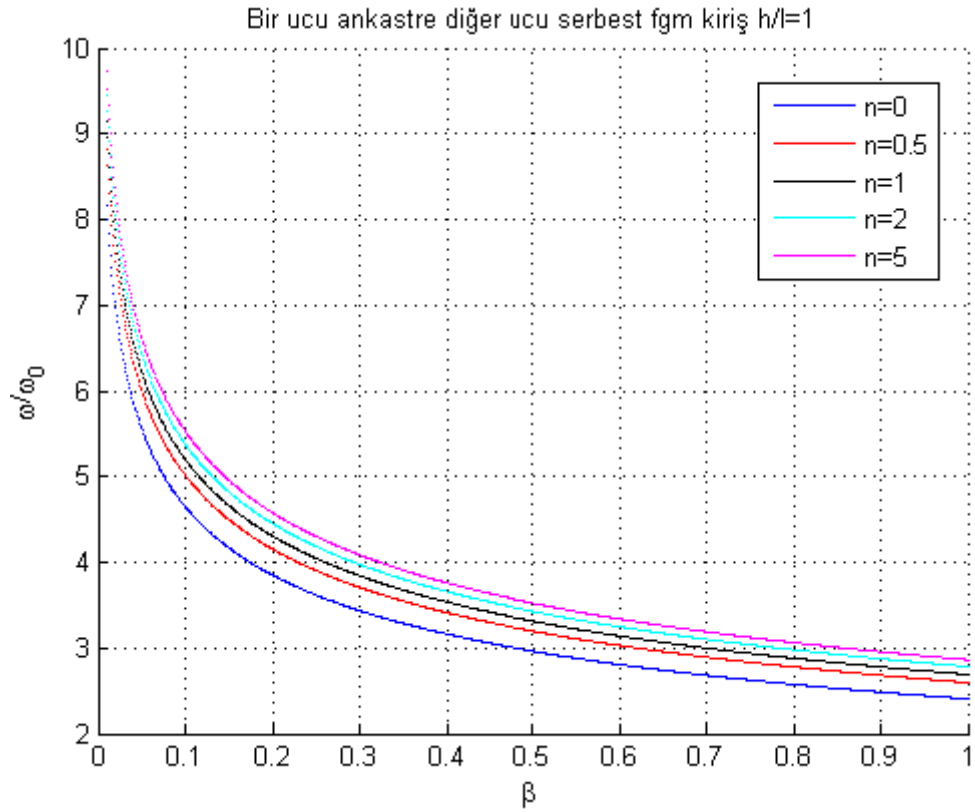


Şekil 4.19 Bir ucu ankastre diğ̈er ucu serbest fgm kiriş̈ için h/l oranına bağılı ω/ω_0 frekans oranları $\beta=1$, $n=0,0.5,1,2$

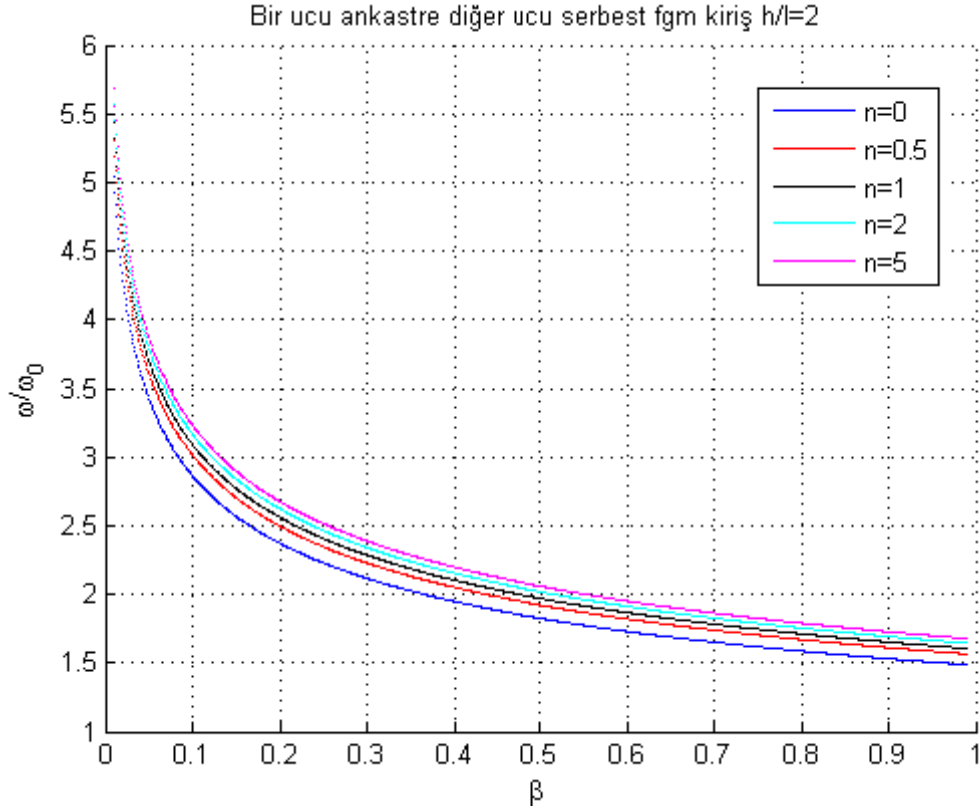
Şekil 4.17, 4.18 ve 4.19 grafikleri birbirine çok yakın sonuçlar verdiğinden bu üç grafik için ortak yorumlar yapılabilir. Her üç grafikte de h/l oranı 0.2 ile 1.5 değerleri arasında iken frekans oranlarının değışimi çok hızlı bir şekilde değıştiğı gözlemlenmektedir. h/l oranı 1.5-4 değıer aralığında kirişte daha az frekans oranı değışimi meydana getirmektedir. h/l değıeri 4 ve daha üzeri bir değıer seğıildiğinde frekans oranları 1'ya yaklaşmaktadır. Özellikle beta değıerinin 1' yakın olması bu oranı 1'e daha da yaklaştırmaktadır. Bu üç grafikte malzeme dağıılım indeksinin artışı frekans oranları eğrileri arasında çok büyük fark oluşturmamakla birlikte, değıerin her bir artışı kendinden bir önceki eğriye daha da yaklaştırmaktadır. Grafik sonuçlarına göre seğıilen indeks değıerinin 2'den fazla olması sonuçlarda çok fazla değışimin olmayacağını göstermektedir.



Şekil 4.20 Bir ucu ankastre diğer ucu serbest fgm kiriş için β oranına bağlı ω/ω_0 frekans oranları $h/l=0.5$, $n=0,0.5,1,2,5$



Şekil 4.21 Bir ucu ankastre diğer ucu serbest fgm kiriş için β oranına bağlı ω/ω_0 frekans oranları $h/l=1$, $n=0,0.5,1,2,5$



Şekil 4.22 Bir ucu ankastre diğer ucu serbest fgm kiriş için β oranına bağlı ω/ω_0 frekans oranları $h/l=2$, $n=0,0.5,1,2,5$

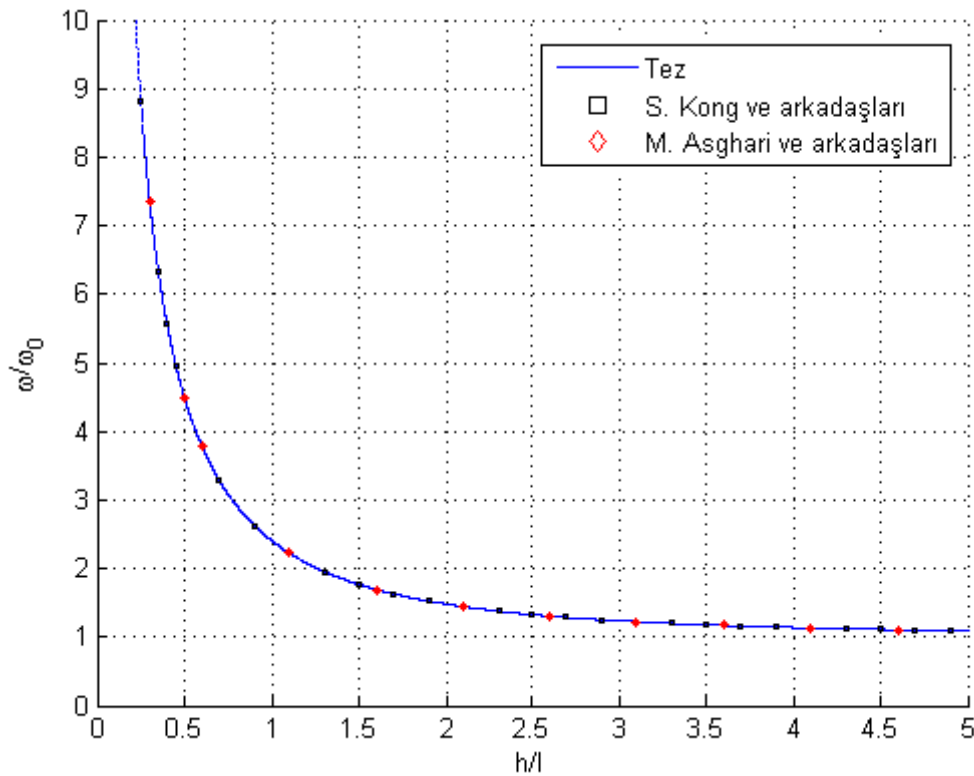
Şekil 4.20, 4.21 ve 4.22'de, beta 0 ile 0.15 değerleri arasında iken frekans oranları değişimi hızlı bir şekilde azalmakta olduğu tespit edilmiştir. Beta değeri 0.15'den 1'e doğru giderken frekans oranları azalan bir eğimle azalmaktadır. h/l değeri 2 ve üzeri bir değer seçildiğinde Malzeme dağılım indeksi için, seçilen değerlerin küçük olduğu durumlarda frekans oranları eğrileri arasında daha fazla fark göstermekte olduğu görülmektedir. Özellikle h/l değerinin 2 ise frekans oranı 1'e yaklaşmakta yani klasik Euler-Bernoulli teorisinin verdiği sonuçlara yakınsamaktadır. Grafıklara göre malzeme dağılım indeksinin 2 ve 2'den daha büyük olması sonuçlarda çok büyük değişime sebep olmayacağı öngörülmektedir. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest bir konik fgm mikro kiriş tasarımı yapılırken; betanın 0 ile 0.4 aralığında ve h/l değerinin 0 ile 2 arasında bulunduğu durumlar için daha hassas bir tasarım yapılmalıdır.

4.2 Bir Ucu Ankastre Diğer Ucu Serbest Kirişin Grafik Sonuçlarının Diğer Makaleler İle Karşılaştırılması

S.Kong ve ark. ve Asghari; Euler-Bernoulli kiriş modelini ve modifiye gerilme çifti teorisini kullanarak dörtgen kesitli, bir ucu ankastre diğer ucu serbest kiriş için çalışmalar yapmışlardır. Tezde kullanılan yöntemin doğruluğunu kanıtlamak için yukarıda bahsedilen her iki makalenin kiriş şartlarını sağlayarak, sonuçlar grafik üzerinden birbirleriyle karşılaştırmıştır. Bu şartların sağlanması amacıyla beta bire eşit seçilerek kesit değişiminin olmadığı ve malzeme dağılım indeksi sıfıra eşit seçilerek kirişin homojen olduğu durum tanımlanmıştır.

$$E(\tilde{z}) = E_b + \left(\frac{\tilde{z}}{h}\right)^n (E_t - E_b), \quad n=0 \Rightarrow E(\tilde{z}) = E_t \quad (4.17)$$

$$\mu(\tilde{z}) = \mu_b + \left(\frac{\tilde{z}}{h}\right)^n (\mu_t - \mu_b), \quad n=0 \Rightarrow \mu(\tilde{z}) = \mu_t \quad (4.18)$$



Şekil 4.23 Bir ucu ankastre diğer ucu serbest fgm kirişin grafik sonuçlarının diğer çalışmalarla karşılaştırılması $\beta = 1, n = 0$

Malzeme dağılım indeksinin sıfır olması kirişin tek bir malzemedan yapılmış olduğunu tanımlayarak karşılaştırma için gerekli olan şartı sağlamıştır. Beta'nın bir olması durumunda konikliğin olmadığı bölüm 3'te ayrıntılı bir şekilde açıklanmıştır.

Grafikte S. Kong ve ark.'nın yapmış olduğu çalışmanın sonuçları ile tezde kullanılan yöntem karşılaştırıldığında yöntemin doğru olduğu görölmektedir.

M. Asghari ve ark.'nın çalışmasında; nötr eksen uzaklık hesabının hatalı olduğu tespit edilmiş olup bu hata düzeltilerek grafik karşılaştırılması yapılmıştır. Bunun sonucunda bu çalışmanın diğerk çalışmalarıla paralel olduğu ve doğru sonuçlar verdiği kanıtlanmış olup FGM konik giriş frekans sonuçları doğrulanmıştır.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Kalınlığı boyunca malzeme özellikleri kuvvet yasası dağılımı ve kesit alan genişliği üstel olarak değişen FGM kirişler için analitik çözümler elde edilmiştir. Aynı çözüm yöntemi analitik olarak çözümü yapılabilen lineer kesit değişimine sahip çift konik ya da tek yönlü (yükseklik boyunca) konik kirişler içinde yapılabilmektedir. Üstel kesit değişimi, diğer sonuçların diğer literatürdeki sonuçlarla karşılaştırmasını yapmak amacıyla seçilmiştir. Ayrıca grafiklerdeki çözümlerin frekans oranı olarak ele alınması, Euler - Bernoulli teorisinden elde edilen sonuçlarla bulunan sonuçlar arasındaki bağlantıyı göstermektedir. Böylece bu katsayılar kullanılarak seçilen herhangi bir durum için frekansını bulmada kolaylık sağlayacaktır. Kıyaslanan ω_0 değeri malzemenin homojen ve kesit alanı değişiminin meydana gelmediği ve malzeme içi uzunluk parametresinin sıfır ($l=0$) olduğu durum için hesaplanan değeri temsil etmektedir. Böylece normal bir durumdaki kiriş ile konik TFGM kiriş frekansları ne kadar farkı olacağını hesaplama açısından kolaylık sağlanmıştır.

Bölüm 4 te elde edilen her üç durum için beta değerini sabit seçildiğinde birbirine benzer grafikler vermiştir. Bu durumda tasarım yaparken h/l oranın 0 ile 2 arasında iken çok fazla hassaslaştığını göstermektedir. Fakat belirli bir h/l oranı seçilip beta için seçim yapılacaksa betanın değişimi farklı sonuçlar vermektedir. Örneğin iki ucu basit mesnetli kiriş için frekans oranını arttırırken, iki ucu ankastre kiriş ve bir ucu ankastre diğer ucu serbest kiriş için betanın artışı frekans oranı değerlerini azaltmaktadır. Özellikle iki ucu ankastre kiriş için betanın 0 ile 0.2 arasında hızlı bir değişime sahip olduğu görülmüştür.

KAYNAKLAR

- [1] R. D. Mindlin, Micro-structure in Linear Elasticity, *Rational Mechanics and Analysis*, 16, 1, 51-78, **1964**
- [2] Fleck N. A., Hutchinson J. W., *Strain gradient plasticity*, *Advances in Applied Mechanics*, 33, **1994**
- [3] Yang F, Chong ACM, Lam DCC, Tong P., Couple stress based strain gradient theory for elasticity, *International Journal of Solids Structures*, 39(10), 2731–43, **2002**.
- [4] S K Park and X-L Gao., Bernoulli–Euler beam model based on a modified couple stress theory, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 12, 2355–2359, **2006**.
- [5] Craciunescu C.M., Wuttig M., New ferromagnetic and functionally grade shape memory alloys, *Journal of Optoelectronics Advanced Materials*, 139-46, **2003**.
- [6] Lee Z, et al., Metallic NEMS components fabricated from nanocomposite Al–Mo films, *Journal of Nanotechnology*, 17(12), 3063–70, **2006**.
- [7] Witvrouw A, Mehta A., The use of functionally graded poly-SiGe layers for MEMS applications, *Journal of Functionally Graded Materials*, 492–493:255–60, **2005**
- [8] Hudnut, S., Almajid, A.,Taya, M., Functionally Graded Piezoelectric Bimorph Type Actuator., *Proceeding of The International Society for Optical Engineering*, 3992, 376–386, **2000**.
- [9] Takagi, K., et. al., Fabrication and Evaluation of PZT/Pt Piezoelectric Composites and Functionally Graded Actuators, *Journal of the European Ceramic Society*, 23, 1577–1583, **2003**.
- [10] Rahaeifard M, et.al, Sensitivity analysis of atomic force microscope cantilever made of functionally graded materials, *3rd international conference on micro- and nano-systems*. San Diego, CA, USA. August 30–September 2, **2009**.

- [11] Aydogdu M, Taskin V, Free vibration analysis of functionally graded beams with simply supported edges, *Material Design*, 28, 1651–6, **2007**.
- [12] B.V.Sankar, An elasticity solution for functionally graded beams, *Composite Science and Technology*, 61, 689–696, **2001**.
- [13] Sina, S.A. et.al, An analytical method for free vibration, *Materials and Design*, 741–747, **2009**.
- [14] Şimşek M., Nonlocal effects in the free longitudinal vibration of axially functionally graded tapered nano-rods, *Computational Materials Science*, 61 257–265, **2012**.
- [15] Candan S., Elishakoff I., Apparently first closed-form solution for vibrating inhomogeneous beams, *International Journal of Solids Structures*, 38, 19 3411–41, **2001**.
- [16] Elishakoff I, Becquet R., Closed-form solutions for natural frequency for inhomogeneous beams with one sliding support and the other pinned, *Journal of Sound Vibration*, 238(3), 529–39, **2000**.
- [17] Huang Y, Li XF., A new approach for free vibration of axially functionally graded beams with non-uniform cross-section, *Journal of Sound and Vibration*, 329(11), 2291–303, **2010**.
- [18] Murin J., Aminbaghai M., Kutti V., Exact solution of the bending vibration problem of FGM beams with variation of material properties, *Engineering Structures*, 32, 1631-1640, **2010**
- [19] Ahmad Shahba, Sundaramoorthy Rajasekaran, Free vibration and stability of tapered Euler–Bernoulli beams made of axially functionally graded materials, *Applied Mathematical Modelling*, 36, 3094–3111, **2012**
- [20] Reddy, J.N., Microstructure-dependent couple stress theories of functionally graded beams, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 59, 2382–2399, **2011**.
- [21] M. Asghari, M.T. Ahmadian, M.H. Kahrobaian, M. Rahaeifard, On the size-dependent behavior of functionally graded micro-beams, *Materials and Design*, 2324–2329, **2010**.

- [22] Akgöz B., Civalek Ö., Free vibration analysis of axially functionally graded tapered Bernoulli–Euler, *Composite Structures*, **2012**.
- [23] Tong X, Tabarrok B., Vibration analysis of Timoshenko beams with nonhomogeneous and varying cross-section, *Journal of Sound and Vibration*, 186, 821–35, **1995**.
- [24] M.H. Kahrobaiyan , M. Rahaeifard , S.A. Tajalli , M.T. Ahmadian., A strain gradient functionally graded Euler–Bernoulli beam formulation, *International Journal of Engineering Science* , 52 , 65–76, **2012**.
- [25] Alshorbagy AE, Eltaher MA, Mahmoud FF, Free vibration characteristics of a functionally graded beam by finite element method, *Applied Mathematical Modelling*, 35, 1, 412–25, **2011**.
- [26] Hui Shen Shen, *Functionally Graded Materials; Nonlinear Analysis of Plates and Shells*, CRC Press, eBook ISBN: 978-1-4200-9257-8, **2009**
- [27] Magrab, Edward B. *Vibrations of Elastic Systems with Applications to MEMS and NEMS*. Maryland: Springer, **2012**.
- [28] Balachandran B, Magrab E.B. *Vibrations. 2nd*. Toronto: Cengage Learning, **2009**.
- [29] Bekir Akgöz, Ömer Civalek, Free vibration analysis of axially functionally graded tapered Bernoulli–Euler micro-beams based on the modified couple stress theory, *Composite Structures*, 2012.
- [30] Chi Shyang-Ho, Chung Yen-Ling, Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load, *International Journal of Solids Structures*, 3657–3674, **2006**.
- [31] Cranch, E.T., Adler, A., Bending vibrations of variable section beams. *Journal of Applied Mechanics*, 103–108, **1956**.
- [32] Dağ S. *Ortotropik Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemelerin Kırılma ve Temas Mekaniği*. TÜBİTAK Destekli Projeler Veri Tabanı, Ankara: Ulakbim, **2008**.
- [33] Ece M. C., Aydoğdu M., Taskın V., Vibration of a variable cross section beam, *Mechanica Research Communications*, 34, 78-84, **2007**

- [34] Fu YQ, Du HJ, Zhang S., Functionally graded TiN/TiNi shape memory alloy films, *Journal of Materials Science Letters*, 57 (20), 2995–9, **2003**.
- [35] S.Kapuria et.al., Bending and free vibration response of layered functionally graded beams:a theoretical model and its experimental validation, *Composite Structures*, 82, 390–402, **2008**.
- [36] X.F.Li., A unified approach for analyzing static and dynamic behaviors of functionally graded Timoshenko and Euler–Bernoulli beams, *Journal of Sound and Vibration*, 318, 1210–1229, **2008**.
- [37] Y.-A.Kang,X.-F.Li., Bending of functionally graded cantilever beam with power-law non-linearity subjected to an end force, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 696–703, **2009**.
- [38] Yong Huang, Ling-E Yang, Qi-Zhi Luo., Free vibration of axially functionally graded Timoshenko beams with non-uniform cross-section, *Composites: Part B*, 45, 1493–1498, **2013**.
- [39] Yong Huang, Ling-E Yang, Qi-Zhi Luo., Free vibration of axially functionally graded Timoshenko beams with non-uniform cross-section, *Composites: Part B*, 1493–1498, **2012**.
- [40] Hassen Ait Atmane, Abdelouahed Tounsi, Sid Ahmed Meftah and Hichem Abdesselem Belhadj, Free Vibration Behavior of Exponential Functionally Graded Beams with Varying Cross-section, *Journal of Vibration and Control* 17: 311, **2011**
- [41] Martin H. Saad, *Elasticity; Theory, Applications and Numerics*, Elsevier, **2009**

EK-1

Tablo - Elastik katsayılar arasındaki ilişkiler [41]

	E	ν	k	μ	λ
E, ν	E	ν	$\frac{E}{3(1-2\nu)}$	$\frac{E}{2(1+\nu)}$	$\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$
E, k	E	$\frac{3k-E}{6k}$	k	$\frac{3kE}{9k-E}$	$\frac{3k(3k-E)}{9k-E}$
E, μ	E	$\frac{E-2\mu}{2\mu}$	$\frac{\mu E}{3(3\mu-E)}$	μ	$\frac{\mu(E-2\mu)}{3\mu-E}$
E, λ	E	$\frac{2\lambda}{E+\lambda+R}$	$\frac{E+3\lambda+R}{6}$	$\frac{E-3\lambda+R}{4}$	λ
ν, k	$3k(1-2\nu)$	ν	k	$\frac{3k(1-2\nu)}{2(1+\nu)}$	$\frac{3k\nu}{1+\nu}$
ν, μ	$2\mu(1+\nu)$	ν	$\frac{2\mu(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$	μ	$\frac{2\mu\nu}{1-2\nu}$
ν, λ	$\frac{\lambda(1+\nu)(1-2\nu)}{\nu}$	ν	$\frac{\lambda(1+\nu)}{3\nu}$	$\frac{\lambda(1-2\nu)}{2\nu}$	λ
k, μ	$\frac{9k\mu}{3k+\mu}$	$\frac{3k-2\mu}{6k+2\mu}$	k	μ	$k - \frac{2}{3}\mu$
k, λ	$\frac{9k(k-\lambda)}{3k-\lambda}$	$\frac{\lambda}{3k-\lambda}$	k	$\frac{3}{2}(k-\lambda)$	λ
μ, λ	$\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$	$\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$	$\frac{3\lambda+2\mu}{3}$	μ	λ

k : hacimsel esneklik katsayısı (Bulk modulus)

E : Elastisite modülü

ν : Poisson oranı

λ : Birinci Lamé sabiti

μ : İkinci Lamé sabiti (Kayma Modülü)

EK-2

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L (M_x + Y_{xy}) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \int_0^L (EI + l^2 \mu A) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2$$

$$V = \int_0^L q(x,t) w(x,t) dx$$

$$\dot{w} = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad w' = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad w'' = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\delta_v \left[\int_{t_1}^{t_2} (T - U + V) dt \right] = 0$$

$$\delta_v \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[\frac{1}{2} \rho A (\dot{w})^2 - \frac{1}{2} (EI + l^2 \mu A) (w'')^2 + qw \right] dx dt = 0$$

$$\text{Lagrange fonksiyonu; } \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial H}{\partial x}$$

$$H = \frac{1}{2} \rho A (\dot{w})^2 - \frac{1}{2} (EI + l^2 \mu A) (w'')^2 + qw$$

$$\delta_v \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[\frac{1}{2} \rho A (\dot{w})^2 - \frac{1}{2} (EI + l^2 \mu A) (w'')^2 + qw \right] dx dt = 0$$

$$= \delta_v \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L [H(w'', w, \dot{w})] dx dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^L \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(\frac{\partial H}{\partial w''} \right) + \frac{\partial H}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial H}{\partial \dot{w}} \right) \right] \delta_v w dx \right\} dt$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} \left[-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H}{\partial w''} \right) \delta_v w + \frac{\partial H}{\partial w''} \delta_v w' \right]_0^L dt + \int_0^L \frac{\partial H}{\partial \dot{w}} \delta_v w \Big|_{t_1}^{t_2} dx$$

H eşitliği yukarıdaki denkleme yazılır.

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[-(EI + l^2 \mu A) w^{(4)} - \rho A \ddot{w} + q \right] \delta_v w dx dt - \int_{t_1}^{t_2} \left[(EI + l^2 \mu A) w''' \delta_v w \right]_0^L dt$$

$$- \int_{t_1}^{t_2} \left[(EI + l^2 \mu A) w'' \delta_v w' \right]_0^L dt + \int_0^L [\dot{w} \delta_v w]_{t_1}^{t_2} dx = 0 \text{ hA}$$

Harici kuvvetler yok sayılır.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left((EI + l^2 \mu A) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right) + \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

EK-3

$$\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left(e^{-\beta_e \eta} \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \right) - \Omega^4 e^{-\beta_e \eta} W = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(e^{-\beta_e \eta} \frac{\partial^3 W}{\partial \eta^3} - e^{-\beta_e \eta} \beta_e \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \right) - \Omega^4 e^{-\beta_e \eta} W = 0$$

$$e^{-\beta_e \eta} \left(\beta_e^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} - 2\beta_e \frac{\partial^3 W}{\partial \eta^3} + \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} \right) = \Omega^4 e^{-\beta_e \eta} W \quad \text{her iki taraf } e^{-\beta_e \eta} \text{ ile bölünür.}$$

$$\frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} - 2\beta_e \frac{\partial^3 W}{\partial \eta^3} + \beta_e^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} = \Omega^4 W, \quad W(\eta) = e^{\lambda \eta} \text{ yazılır.}$$

$$\frac{\partial^4}{\partial \eta^4} e^{\lambda \eta} - 2\beta_e \frac{\partial^3}{\partial \eta^3} e^{\lambda \eta} + \beta_e^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} e^{\lambda \eta} - \Omega^4 e^{\lambda \eta} = 0$$

$$\lambda^4 e^{\lambda \eta} - 2\beta_e \lambda^3 e^{\lambda \eta} + \beta_e^2 \lambda^2 e^{\lambda \eta} - \Omega^4 e^{\lambda \eta} = 0$$

$$\lambda^4 - 2\beta_e \lambda^3 + \beta_e^2 \lambda^2 - \Omega^4 = 0 \quad \text{çarpanlarına ayrılır.}$$

$$-\left((\lambda^2 - \beta_e \lambda + \Omega^2)(\Omega^2 - \lambda^2 + \beta_e \lambda) \right) = 0$$

$$\Delta = \sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{\beta_e^2 + 4\Omega^2} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{b \pm \Delta}{2a} = \frac{\beta_e \pm \sqrt{\beta_e^2 + 4\Omega^2}}{2} = \frac{\beta_e}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta_e}{2}\right)^2 + \Omega^2}$$

$$\Delta = \sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{\beta_e^2 - 4\Omega^2} \Rightarrow \lambda_{3,4} = \frac{b \pm \Delta}{2a} = \frac{\beta_e \pm \sqrt{\beta_e^2 - 4\Omega^2}}{2} = \frac{-\beta_e}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta_e}{2}\right)^2 - \Omega^2}$$

$$= \frac{\beta_e}{2} \pm \sqrt{\Omega^2 - \left(\frac{\beta_e}{2}\right)^2}$$

$$\delta = \frac{\beta_e}{2}, \quad \varepsilon_1 = \sqrt{\Omega^2 + \delta^2}, \quad \varepsilon_2 = \sqrt{\Omega^2 - \delta^2}$$

$$W(\eta) = C_1 e^{\lambda_1 \eta} + C_2 e^{\lambda_2 \eta} + C_3 e^{\lambda_3 \eta} + C_4 e^{\lambda_4 \eta}$$

$$W(\eta) = C_1 e^{\eta(\delta + \sqrt{\Omega^2 + \delta^2})} + C_2 e^{\eta(\delta - \sqrt{\Omega^2 + \delta^2})} + C_3 e^{\eta(\delta + \sqrt{\Omega^2 - \delta^2})} + C_4 e^{\eta(\delta - \sqrt{\Omega^2 - \delta^2})}$$

$$W(\eta) = e^{\delta \eta} \left(C_1 e^{\eta \sqrt{\Omega^2 + \delta^2}} + C_2 e^{-\eta \sqrt{\Omega^2 + \delta^2}} + C_3 e^{\eta \sqrt{\Omega^2 - \delta^2}} + C_4 e^{-\eta \sqrt{\Omega^2 - \delta^2}} \right)$$

$$W(\eta) = e^{\delta \eta} \left(C_1 e^{\eta \varepsilon_1} + C_2 e^{-\eta \varepsilon_1} + C_3 e^{\eta \varepsilon_2} + C_4 e^{-\eta \varepsilon_2} \right)$$

$$W(\eta) = e^{\delta \eta} \left(C_1 \cosh(\varepsilon_1 \eta) + C_2 \sinh(\varepsilon_1 \eta) + C_3 \cos(\varepsilon_2 \eta) + C_4 \sin(\varepsilon_2 \eta) \right)$$

ÖZGEÇMİŞ

Kimlik Bilgileri

Adı Soyadı : Duygu İPCİ
Doğum Yeri : Bilecik
Medeni Hali : Bekar
E-posta : duyguipci@yahoo.com

Eğitim

Lise : Y.D.A Mobil Lisesi
Lisans : Hitit Üniversitesi, Makine Mühendisliği Bölümü
Yüksek Lisans : Hacettepe Üniversitesi, Makine Mühendisliği ABD

Yabancı Dil ve Düzeyi

İngilizce: İleri seviye

İş Deneyimi

2011-2013 Arş. Gör. Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, Makine Teorisi ve Dinamiği ABD
2013- Arş. Gör. Gazi Üniversitesi, Teknoloji Fakültesi, Otomotiv Mühendisliği Bölümü

Deneyim Alanları

Tezden Üretilmiş Projeler ve Bütçesi

Tezden Üretilmiş Yayınlar

Tezden Üretilmiş Tebliğ ve/veya Poster Sunumu ile Katıldığı Toplantılar