

KANONİK KORELASYON ANALİZİ İLE SİSTEM TANIMA

SYSTEM IDENTIFICATION VIA CANONICAL CORRELATION ANALYSIS

KEMAL GÜRKAN TOKER

Yrd. Doç. Dr. Yakup Sabri ÖZKAZANÇ
Tez Danışmanı

Hacettepe Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim - Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin
Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı İçin Öngördüğü
YÜKSEK LİSANS TEZİ
olarak hazırlanmıştır.

2013

KEMAL GÜRKAN TOKER'in hazırladığı **Kanonik Korelasyon Analizi ile Sistem Tanıma** adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **ELEKTRİK VE ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Başkan

(Prof. Dr. Hüseyin DEMİRCİOĞLU)

Danışman

(Yrd. Doç. Dr. Yakup Sabri ÖZKAZANÇ)

Üye

(Prof. Dr. A. Salim KAYHAN)

Üye

(Doç. Dr. Murat EFE)

Üye

(Yrd. Doç. Dr. Derya ALTUNAY)

Bu tez Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Fatma SEVİN DÜZ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

... / ... / 2013

Kemal Gürkan TOKER

ÖZET

KANONİK KORELASYON ANALİZİ İLE SİSTEM TANIMA

KEMAL GÜRKAN TOKER

Yüksek Lisans, Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Yakup Sabri ÖZKAZANÇ

Temmuz 2013, 62 sayfa

Bu çalışmada doğrusal sistem tanıma yöntemi olarak bir istatistiksel analiz yöntemi olan kanonik korelasyon analizi çalışılmıştır. Doğrusal, kesikli zamanlı bir sistemin fark denklemi ile ifadesi ve kanonik korelasyon analizi yöntemi arasındaki benzerliklerden faydalanarak, kanonik korelasyon analizinin; sistemin aktarım işlevi parametrelerinin kestiriminde kullanılabileceği gösterilmiştir.

Kanonik korelasyon analizi iki değişken kümesi arasındaki ilintileri belirlemede kullanılan güçlü bir yöntemdir. Bu yaklaşım, bu iki değişken kümesinin doğrusal fonksiyonlarını maksimum korelasyon gösterecek şekilde bulmaya çalışır. Sistem tanıma probleminde kullanılan giriş ve çıkış verilerinden kanonik korelasyon analizi ile incelenmek üzere veri kümeleri oluşturulmuş ve sistem parametreleri kestirilmeye çalışılmıştır. Doğrusal, tek girişli tek çıkışlı, kesikli zamanlı sistemlere ait aktarım işlevi kestiriminin yanı sıra; doğrusal, çok girişli çok çıkışlı, kesikli zamanlı sistemler de bu analiz yöntemi altında ele alınmıştır. Ayrıca, gerçek zamanlı tanıma uygulamaları ile uyumlu ve gerçekleştirimi yüksek seviyeli bir dil gerektirmeyen nümerik bir algoritma da önerilmektedir.

Anahtar Kelimeler: Kanonik Korelasyon Analizi, Sistem Tanıma

ABSTRACT

SYSTEM IDENTIFICATION VIA CANONICAL CORRELATION ANALYSIS

KEMAL GÜRKAN TOKER

**Master of Science, Department of
Electrical and Electronics Engineering**

Supervisor: Yrd. Doç. Dr. Yakup Sabri ÖZKAZANÇ

July 2013, 62 pages

In this thesis, canonical correlation analysis is introduced for linear system identification. By taking into account the similarities between difference equation representation of a linear discrete time system and canonical correlation analysis, it is shown that canonical correlation analysis can be used for system identification.

Canonical correlation analysis (CCA) is a powerful method which is used to measure the relationship between two multidimensional variables. This approach tries to find the linear combinations of these two variables with maximum correlation. Data sets are obtained from input and output data of the systems and system parameters are estimated using these data. Linear, discrete time SISO and MIMO systems have been studied using this analysis method. Also, a numerical algorithm is introduced for real time system identification implementation.

Keywords: Canonical Correlation Analysis, System Identification

TEŞEKKÜR

Tez dönemim boyunca, çalışmalarımı engin bilgi birikimi ve tecrübeleri doğrultusunda yönlendiren, karşılaştığım sorunlar karşısında bana daima destek olan danışmanım Sayın Yrd. Doç. Dr. Yakup Özkazanç'a,

Bana karşı koşulsuz desteklerini her zaman hissettiğim annem Birgül TOKER'e, babam Ergün TOKER'e ve kardeşlerime,

İlgi ve desteklerinden dolayı arkadaşlarıma teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
ŞEKİLLER	vi
ÇİZELGELER	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR	ix
1. GİRİŞ	1
2. KANONİK KORELASYON ANALİZİ	5
2.1. Kanonik Korelasyon Analizi Yöntemi	7
3. TEK GİRİŞLİ TEK ÇIKIŞLI SİSTEM TANIMA ARACI OLARAK KANONİK KORELASYON ANALİZİ	14
3.1. Kanonik Korelasyon Analizi ile Doğrusal Sistem Tanıma	14
3.1.1. Uçuş Dinamiği Modelinin Benzetim ile Kestirimi	17
3.1.2. Bir Su Tankı Sisteminin Deneysel Olarak Tanınması	21
3.2. Kanonik Korelasyon Analizi ile Sistem Model Yapısının Belirlenmesi ..	25
3.2.1. Uçak Dinamiği Modeli Yapısı Kestirimi	26
3.3. Kanonik Korelasyon Analizi ile Sistem Derecesinin İndirgenmesi	29
3.3.1. Uçağın Dikey Hareketi İçin Kısa Periyot Mod Kestirimi	30
4. ÇOK GİRİŞLİ ÇOK ÇIKIŞLI SİSTEM TANIMA ARACI OLARAK KANONİK KORELASYON ANALİZİ	37
4.1. Örnekler	39
5. SİSTEM TANIMA YÖNTEMİNİN GERÇEK ZAMANLI GERÇEKLEŞTİRİMİ İÇİN NÜMERİK BİR ALGORİTMA	43
5.1. Kovaryans Matrisinin Özyinelemeli olarak Hesaplanması	45
5.2. Gauss Jordan Eleme Yöntemi Kullanılarak Matris Tersinin Alınması ...	46
5.3. Özdeğer-Özvektör Problemlerinin Güç Ötelemesi Yöntemi ile Çözülmesi	48

5.4. Örnekler	49
6. SONUÇLAR	53
KAYNAKLAR	55
EKLER	58
ÖZGEÇMİŞ	61

ŞEKİLLER

	<u>Sayfa</u>
Şekil 1.1. Dinamik Sistem Yapısı	1
Şekil 2.1. Kanonik Korelasyon Analizi Genel Yapısı	7
Şekil 2.2. Kovaryans Matris Formları	12
Şekil 3.1. Giriş-Çıkış Modeli	14
Şekil 3.2. Kanonik Korelasyon Analizi ile Sistem Tanıma Şematiği	16
Şekil 3.3. Uçak Hareket Eksenleri	17
Şekil 3.4. Ling-Temco-Vought A-7A Corsair II Uçağı	18
Şekil 3.5. Ling-Temco-Vought A-7A Corsair II Uçağı 1 rad İrtifa Dümeni Açısı için Yunuslama Açısı Adım Tepkisi	19
Şekil 3.6. Giriş δ_e İrtifa Dümeni Açısı (rad) ve Çıkışı Uçağın İlerleme Hızı u (ft/s) için Dinamik Model	20
Şekil 3.7. Ling-Temco-Vought A-7A Corsair II Uçağı 1 rad İrtifa Dümeni Açısı için Uçağın İlerleme Hızı Adım Tepkisi Gerçek ve Kestirilen Değerler	21
Şekil 3.8. DTS200 Su Tankı Sistemi	22
Şekil 3.9. DTS200 Su Tankı Şematiği	22
Şekil 3.10. Su Tankı Giriş ve Çıkışı	23
Şekil 3.11. Farklı derecelerde Su Tankı için Kestirilen Çıkış ve Sistem Çıkışı ...	24
Şekil 3.12. Giriş δ_e İrtifa Dümeni Açısı (rad) ve Çıkışı w Uçağın Dikey Eksendeki Hızı (ft/s) Uçak Modeli Kesikli Zaman Aktarım İşlevine Ait Kutup Sıfır Grafiği	27
Şekil 3.13. Giriş δ_e İrtifa Dümen Açısı (rad) ve Çıkışı Uçağın İlerleme Hızı u (ft/s) Uçak Modeli Kesikli Zaman Aktarım İşlevine ait Kutup Sıfır Grafiği	29
Şekil 3.14. Giriş δ_e İrtifa Dümeni Açısı (rad) ve Çıkışı w Uçağın Dikey Eksendeki Hızı (ft/s) olan Uçak Modeli için Gerçek ve Kestirilen Bode Diagram	32
Şekil 3.15. Giriş δ_e İrtifa Dümeni Açısı (rad) ve Çıkışı w Uçağın Dikey Eksendeki Hızı (ft/s) olan Uçak Modeli için Gerçek ve Kestirilen Adım Tepkisi	33

Şekil 3.16. Giriş δ_e İrtifa Dümeni Açısı (rad) ve Çıkışı Yunuslama Açısal Hızı q (rad/s) Uçak Modeli Aktarım İşlevine ait Kutup Sıfır Grafiği	34
Şekil 3.17. Giriş δ_e İrtifa Dümeni Açısı (rad) ve Çıkışı Yunuslama Açısal Hızı q (rad/s) olan Uçak Modeli için Gerçek ve Kestirilen Bode Diagram . . .	35
Şekil 3.18. Giriş δ_e İrtifa Dümeni Açısı (rad) ve Çıkışı Yunuslama Açısal Hızı q (rad/s) olan Uçak Modeli için Gerçek ve Kestirilen Adım Tepkisi	36
Şekil 4.1. Çok Girişli Çok Çıkışlı Sistem Yapısı	37
Şekil 4.2. Doğrusal 2 Girişli 2 Çıkışlı Sisteme ait Altsistem Parametreleri	41
Şekil 5.1. Nümerik Yöntemlerle Sistem Tanıma Şeması	44
Şekil 5.2. Parametreleri Ani Değişen Sisteme Ait a_1, a_2, b_0, b_1, b_2 Kestirilen Parametreler	50
Şekil 5.3. Parametreleri Ani Değişen Sisteme Ait a_2, b_0, b_1, b_2 Kestirilen Parametreler	51
Şekil 5.4. Parametreleri Ani Değişen Sisteme Ait a_1, b_0, b_1 Kestirilen Parametreler	52

ÇİZELGELER

	<u>Sayfa</u>
Çizelge 3.1. Ling-Temco-Vought A-7A Corsair II Uçağı Dikey Hareket Modeli Kutupları	19
Çizelge 3.2. Su Tankı için Kestirilen Modellere Ait Yüzde Bağlı Hata ve Kanonik Korelasyon Bilgileri	25
Çizelge 3.3. Giriş δ_e İrtifa Dümeni Açısı (rad) ve Çıkış w Uçağın z Eksenindeki Hızı (ft/s) Uçak Modeli Aktarım İşlevi Farklı Model Yapılarında Kestirimleri için Kanonik Korelasyon Katsayıları	26
Çizelge 3.4. Giriş δ_e İrtifa Dümeni Açısı (rad) ve Çıkış uçağın ilerleme hızı u (ft/s) Uçak Modeli Aktarım İşlevi Farklı Model Yapılarında Kestirimleri için Kanonik Korelasyon Katsayıları	28
Çizelge 3.5. Giriş δ_e (rad) Çıkış w için Kestirilen Kutup ve Sıfırlar	31
Çizelge 3.6. Giriş δ_e (rad) Çıkış q için Kestirilen Kutup ve Sıfırlar	34
Çizelge 4.1. 2 Girişli 2 Çıkışlı Sistem Aktarım İşlevlerine ait Gerçek Parametre Değerleri	41
Çizelge 4.2. 2 Girişli 2 Çıkışlı Sistem Aktarım İşlevlerine ait Kestirilen Parametre Değerleri	41
Çizelge 5.1. Parametreleri Ani Değişen Sisteme Ait a_1, a_2, b_0, b_1, b_2 Gerçek Parametre Değerleri	49
Çizelge 5.2. Parametreleri Ani Değişen Sisteme Ait a_2, b_0, b_1, b_2 Gerçek Parametre Değerleri	50
Çizelge 5.3. Parametreleri Ani Değişen Sisteme Ait a_1, b_0, b_1 Gerçek Parametre Değerleri	52

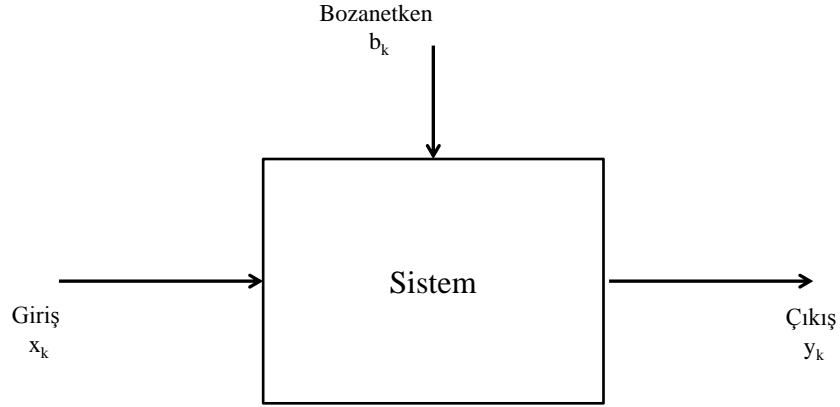
SİMGELER VE KISALTMALAR

Kısaltmalar

AR	Autoregressive (Özbağlanımlı)
ARMA	Autoregressive Moving-Average (Özbağlanımlı Yürüyen Ortalama)
CCA	Canonical Correlation Analysis
KKA	Kanonik Korelasyon Analizi
Kov	Kovaryans
ÖS-SÖ	Örneksel-Sayısal Sayısal-Örneksel
MIMO	Multiple Input Multiple Output (Çok Girişli Çok Çıkışlı)
SISO	Single Input Single Output (Tek Girişli Tek Çıkışlı)
SNR	Signal to Noise Ratio (Sinyal Gürültü Oranı)
Var	Varyans
ZOH	Zero Order Hold (Sıfır Derece Tutucu)

1. GİRİŞ

Sistem tanıma, süreçlerden elde edilen verilerle bir dinamik sistem modelinin oluşturulması olarak tanımlanabilir. Gerçek bir sistemin doğru modellenmesi ve modele ait parametrelerin doğru kestirilmesi; sistemin etkin bir şekilde analizi ve kontrolü açısından önemlidir. Sistem tanıma bilimsel araştırmalarda yaygın alanda kullanılan bir paradigmadır. Haberleşme, elektrik, havacılık, kimya gibi mühendisliğin farklı alanlarında uygulandığı gibi; biyoloji, ekoloji, psikoloji ve ekonomi gibi alanlarda da kullanılmaktadır [1, 2]. Bu alanların hemen hemen hepsinde dinamik sistem yapısı genel olarak Şekil 1.1'deki gibi resmedilebilir [3, 4].



Şekil 1.1. Dinamik Sistem Yapısı

Dinamik sistem modelleri çok çeşitli olabilirler, fakat bilimsel alanlarda en çok kullanılanı, matematiksel modellerdir. Matematiksel model bir sistemin veya bir sürecin davranışının matematiksel formülasyon ile açıklanmasıdır. Matematiksel modelleme; birçok alanda problemlerin ilişkilerini çok daha kolay görebilmemizi, onları keşfedip aralarındaki ilişkileri, matematik terimleriyle ifade edebilmemizi, genelledebilmemizi, sınıflandırabilmemizi ve sonuç çıkarabilmemizi kolaylaştıran dinamik bir yöntemdir.

Matematiksel modeller iki yol ile oluşturulabilir. Bunlardan ilki fizik tabanlıdır ve bir sürecin ya da sistemin dinamik davranışını fiziğin temel kurallarını kullanarak betimlemeye çalışır. Bu yaklaşım biraz karmaşık olmasından ve köklü, eksiksiz bir alan bilgisi gerektirmesinden dolayı mühendislik alanında pek kullanılan bir anlayış değildir. Diğer yaklaşım ise sistem tanımadır ve deneysel bir yaklaşımdır. Sistem üze-

rinde yapılan bazı deneyler sonucunda elde edilen verilerle sistemi tanımlayan bir model belirlemeye çalışır. İlk yaklaşım ile kıyasladığımızda modelin elde edilmesi görece daha kolaydır ve bazı varsayımlar ile daha basit veya karmaşık model oluşturmamıza olanak tanır. Diğer yandan bu yaklaşımda, model yapısının seçimi gibi önemli bir problem söz konusudur ve modelin geçerliliği deneysel verilerin kapsamı ile sınırlıdır [3, 4, 5].

Sistem tanıma sürecinden bahsedecek olursak, bu sürecin;

- Deneyin planlanması,
- Deney yapılması ve verilerin elde edilmesi,
- Model yapısının belirlenmesi,
- Modelin kestirimi,
- Modelin doğrulanması

adımlarımdan oluştuğu söylenebilir[1, 3].

Deneyin planlanması, sistem tanıma için gerekli verilerin toplanması için yapılacak deneyin belirlenmesi adımıdır.

Verilerin elde edilmesi, gerçek sistem üzerinde deneylerle ya da sistemi matematiksel olarak ifade ederek benzetim ortamında yapılabilir. Başarılı bir sistem tanıma süreci için yeterli bilgi içeren verilere ihtiyaç duyulabilir; bu yüzden giriş sinyali yeterince çeşitlilik sağlayacak şekilde seçilmelidir [6].

Model yapısının belirlenmesi, kestirilecek model yapısının seçimi ve modelin karmaşıklığının seçimi olarak özetlenebilir.

Matematiksel modeller sürekli zamanlı, kesikli zamanlı; doğrusal ve doğrusal olmayan; zamana göre değişen, değişmeyen; deterministik veya stokastik matematiksel modeller olarak farklı anlayışlarda sınıflandırılmaktadır [4]. Sürekli zamanlı dinamik modeller türevsel denklemlerle tanımlanırlar, kesikli zamanlı dinamik modeller ise fark denklemleri ile tanımlanırlar. Bilgisayarların hızlarının artması, yazılımların kullanım alanlarının artması ile kesikli zamanlı modellerin kullanım alanı hızla artmak-

tadır. Doğrusal modeller, girişleri doğrusal çözümler olan türevsel veya fark denklemleriyle tanımlanırlar, doğrusal olmayan matematiksel modelleri tanımlayan denklemler ise bir veya daha fazla doğrusal olmayan terim içerirler. Doğrusal modeller, kuramsal alt yapısının gelişmiş olmasından dolayı çok yaygın olarak kullanılmaktadırlar. Zamana göre değişen modeller, katsayıları zamana bağlı olan türevsel veya fark denklemleriyle tanımlanırlar. Zamana göre değişmeyen matematiksel modeller ise katsayıları zamana bağlı olmayan türevsel veya fark denklemlerinden oluşurlar. Deterministik modeller bütün şartların ideal olduğu durumda geçerli bir modelleme biçimidir. Sadece giriş ve çıkış bilgisine bağlı bilgiler modelde yer alır, sistemi dışardan etkileyen belirsizlikler ihmal edilir, modellenmez. Stokastik modellerde ise sisteme etki eden belirsizlikler istatistiksel olarak modellenir.

Modelin kestirimi, bir yapı seçilerek, modelle sistem davranışı arasındaki hatayı en aza indirgeyecek parametrelerin kestirildiği adımdır.

Modelin doğrulanması adımı kestirilen modelin belirli yöntemlerle geçerliliğinin veya etkinliğinin belirlendiği adımdır.

Bu tez çalışmasında kesikli zamanlı doğrusal sistemlerde parametre kestirimi üzerinde bir yöntem geliştirilmiş ve giriş-çıkış zaman serilerinin fark denklemleri modelleri esas alınmıştır. Zaman serisi kestirimi ve öngörmede sık kullanılan parametrik model yapıları arasında AR (Özbağlanımlı), MA (Yürüyen Ortalama), ARMA (Özbağlanımlı Yürüyen Ortalama) gibi birçok yapı bulunmaktadır [7]. Bu çalışmada ARMA tabanlı bir yapı üzerinde çalışılmıştır. ARMA modelinin kanonik korelasyon analizi ile benzerliği gösterilmiş ve dinamik sistem modeli çıkarılırken giriş ve çıkış verileri arasında dinamik bağlantı, kanonik korelasyon analizi yöntemi kullanılarak bulunmuştur. Kanonik korelasyon analizi iki değişken kümesi arasındaki ilişkileri, bahsedilen değişken kümelerinin doğrusal birleşimleri arasındaki maksimum korelasyonları bulmaya çalışarak analiz eder [8, 9].

Kanonik korelasyon analizi; çok değişkenli istatistiksel analiz alanında bilinen ve ekonomi, meteoroloji, sosyoloji gibi birçok konuda kullanılan bir tekniktir. Bilgisayar teknolojisinin gelişmesi ve yazılımların daha yaygın kullanılabilir hale gelmesi ile bu analiz yönteminin uygulama alanı gün geçtikçe artmaktadır. Sinyal işleme alanında son zamanlarda keşfedilmiş ve yeni yeni kullanılmaya başlanmış bir araçtır. Sistem tanımada ise literatürde durum uzayında ve izge kestirim modelleri için kullanılmış-

tır [4]. Kanonik korelasyon analizi ile sistem tanıma konusunda yapılan bazı çalışmalardan bahsedecek olursak; [10] düşük SNR değerlerinde ARMA modeli izge kestirimi üzerine bir araştırmadır. Burada kanonik korelasyon analizi Markov modeli durum uzayı parametrelerinin hesaplanması için kullanılmıştır, [11] kanonik korelasyon analizi esas alınarak stokastik sistem kuramı ışığında zaman serileri için durum uzayı tanıma üzerine bir çalışmadır, [12]'te iyonosferin kesikli zamandaki sistem modeli kanonik korelasyon analizi yöntemi kullanılarak çıkarılmıştır. [13]'te ise durum uzayı modellenmesine yönelik bir yaklaşım sunulmuştur.

Bu tez çalışmasında aktarım işlevi ve fark denklemleri modelleri esas alınmış ve etkin bir tanıma yöntemi önerilmiştir [14]. Sisteme ait giriş ve çıkış verilerinden kanonik korelasyon analizi kullanılarak sistemin doğrusal, kesikli zaman aktarım işlevi elde edilmiştir. İkinci kısımda, sistem tanımada kullanılan istatistiksel yöntem olan kanonik korelasyon analizi ayrıntılı olarak sunulmuştur. Üçüncü kısımda, doğrusal, kesikli zamanlı bir sistemin fark denklemleri ile ifadesi ve kanonik korelasyon analizi yöntemi arasındaki benzerliklerden faydalanarak, kanonik korelasyon analizinin; sistemin aktarım işlevi parametrelerinin kestiriminde kullanılabileceği gösterilmiştir. Su tankı sistemine ait veriler ve uçağın dinamik modeli ile benzetim ortamında elde edilen veriler; kanonik korelasyon analizi yöntemi içerisinde kullanılmıştır ve bu verilerle kesikli zamanlı, tek girişli tek çıkışlı doğrusal sistemlerin modellenmesi üzerine örnekler çalışılmıştır. Ayrıca sisteme ait model yapısı kestirimi ve model indirgeme çalışmalarına da yer verilmiştir. Dördüncü kısımda, çok girişli çok çıkışlı, kesikli zamanlı, doğrusal sistemler için kanonik korelasyon analizi yöntemi ile bir tanıma yaklaşımı sunulmaktadır. Beşinci kısımda, yöntemin gerçek zamanlı uygulanabilmesine yönelik olarak nümerik bir yaklaşım geliştirilmiştir. Altıncı ve son bölümde ise çalışmadan elde edilen sonuçlara ve gelecekte yapılabilecek çalışmalara değinilmiştir.

2. KANONİK KORELASYON ANALİZİ

Bilimsel araştırmalarda veri kümeleri aralarındaki ilişkiler bulunmaya çalışılmaktadır. Örneğin insanların akademik başarısı ile iş yerindeki başarısı; öğretmenlerin tutumuna karşılık öğrencilerin tutumu, insanların bir konudaki yeteneği ve o konudaki başarısı; öğrencilerin lisedeki ortalaması ile üniversite sınavındaki başarısı gibi bir çok konuda neden sonuç ilişkisi içerisinde olan ya da aralarında ilinti olduğu düşünölen iki veri kümesi arasındaki ilişkilerin somutlaştırılması ve yorumlanması için istatistiksel analiz yöntemleri kullanılmaktadır. İstatistiksel analiz yöntemleri verilerin sadece analitik olarak incelenmesini sağlamamakta, aynı zamanda problem çözme ve tasarımı veya karar verme için de kullanılabilir [15, 16].

İstatistiksel analiz yöntemleri tek değişkenli ve çok değişkenli analiz yöntemleri olarak ayrılmaktadır. Günümüzde yapılan çalışmalar, sağlıklı ve güvenilir sonuçlar verebilmesi açısından bütün yönleriyle ele alınmaktadır, bu yüzden araştırmalarda mümkün olduğunca bütün değişkenler incelemeye alınmakta ve değişkenlerin ayrı ayrı etkilerinin incelenmesi gerekmektedir. Bu yüzden tek değişkenli analiz yöntemlerinin kullanımı giderek azalmakta ve çok değişkenli analiz yöntemleri ön plana çıkmaktadır. Çok değişkenli istatistiksel yöntemlerden yaygın olarak kullanılanlara; çok değişkenli varyans analizi (multivariate analysis of variance), kümeleme analizi (clustering analysis), temel bileşenler analizi (principle component analysis), ayırma analizi (discriminant analysis), regresyon analizi (regression analysis), kanonik korelasyon analizi (canonical correlation analysis) örnek olarak verilebilir [17, 9]. Çok değişkenli analiz yöntemleri psikoloji, sosyoloji, iktisat gibi alanlarda yaygın olarak kullanılmaktadır [18]. Bu çalışmada bu çok değişkenli istatistiksel yöntemler arasında önemli bir yere sahip olan kanonik korelasyon analizi yöntemi kullanılmıştır.

Çok sayıda değişkenden oluşan iki veri kümesi arasındaki ilişki yapısını analiz etmek için kullanılan kanonik korelasyon analizi, Hotelling tarafından 1936 yılında geliştirilmiştir [19]. Kanonik korelasyon analizinin amacı iki değişken kümesi arasındaki ilişkileri, sözkonusu değişken kümelerinin doğrusal fonksiyonları arasındaki maksimum korelasyonları bulmaya çalışarak analiz etmektir [19, 8].

Verilerin doğrusallığı sağlayamadığı durumlar için doğrusal olmayan kanonik korelasyon analizi geliştirilmiştir, benzer şekilde ikiden fazla veri kümesi için ise çoklu kanonik korelasyon analizi geliştirilmiştir [20].

Kanonik korelasyon analizinin amaçlarından bazıları şu şekilde sıralanabilir [15];

- Bağımsız ve bağımlı değişken kümelerine ait değişkenler arasındaki korelasyonu maksimum yapan doğrusal birleşimlerin belirlenmesi,
- İki değişken kümesinin istatistiksel olarak birbirinden bağımsız olup olmadığının test edilmesi,
- Kümelerarası korelasyona en fazla katkıda bulunan her iki değişken kümesindeki değişkenlerin belirlenmesi,
- Bir değişken kümesinin diğer bir değişken kümesi tarafından ne ölçüde açıklanabildiğinin belirlenmesi,

Bu amaçlar doğrultusunda kanonik korelasyon analizi ekonomi, finans, pazarlama, eğitim, ekoloji, atmosfer bilimi (hava tahmini vb.) alanlarda uygulanmakta ve kuramsal problemlerin çözümü için sıklıkla kullanılmaktadır [21, 15].

Kanonik korelasyon analizinin uygulanabilmesi için veri kümelerinin ve bu veri kümelerinde yer alan değişkenlerin bazı varsayımlara uyması gerekmektedir [22]. Bu varsayımlar sıralandığında;

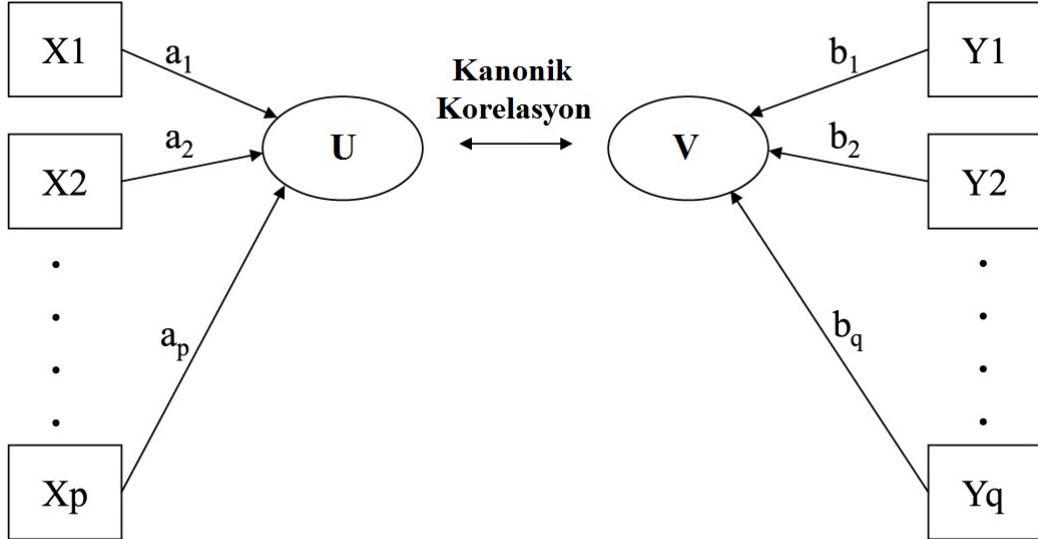
- Kanonik korelasyon analizi uygulanacak veri matrisinde gereğinden fazla ve problemle ilgisi olmayan değişkenlerin yer almaması gerekir. Veri matrisinde bir değişkenin iki kez yer alması, bir değişkenin karesinin, küpünün vb. formlarının birlikte yer alması gibi koşullarda veri matrisi şişkinlik göstermekte, aşırı bilgi içermekte ve kanonik korelasyon analizi için kötü koşullama (ill conditioning) oluşabilmektedir.
- Kanonik korelasyon analizi uygulanacak veri kümelerinde aykırı değerlerin olup olmadığının kontrol edilmesi yararlıdır. Aykırı değerler, değişkenler arasındaki korelasyonları önemli düzeyde etkilediği için analiz öncesinde gerekli düzeltme ya da ayıklama işleminin yapılması gürbüzlük açısından önem taşımaktadır.
- Kanonik korelasyon analizi ile elde edilen sonuçların güvenli olması için küme-lerdeki veri sayısının yeterince fazla olması gerekmektedir. Veri matrislerinde, toplam değişken sayısının yaklaşık 20 katı kadar veri elde edilmiş olması önerilmektedir [23].

- Kanonik korelasyon analizinde kullanılan değişken kümelerinde yer alan değişkenlerin eşit sayıda olma zorunluluğu yoktur.
- Kanonik korelasyon analizi kovaryans matrisi ya da korelasyon matrisi yardımı ile uygulanmaktadır. Bu yüzden veri kümelerinden elde edilen kovaryans ve korelasyon matrisleri parçalanabilir ve tersi alınabilir olmalıdır.

Kanonik korelasyon analizi uygulanacak verilerin yukarıdaki özellikleri taşıması önerilmekte aksi halde verilerin düzeltilerek analize uygun hale getirilmesi gerekmektedir. Bunlar da mümkün değilse kanonik korelasyon analizi yöntemi sağlıklı sonuçlar vermeyeceği için vazgeçilmelidir [22].

2.1 Kanonik Korelasyon Analizi Yöntemi

Kanonik korelasyon analizinin amacı, iki değişken kümesi arasındaki ilişkileri, bahsedilen değişken kümelerinin doğrusal fonksiyonları arasındaki maksimum korelasyonları bulmaya çalışarak analiz etmektir [8, 9].



Şekil 2.1. Kanonik Korelasyon Analizi Genel Yapısı

Denklem 2.1’de iki veri kümesi görülmektedir, X kümesine ait veri matrisi p değişken ve Y kümesine ait veri matrisi de q değişken içermektedir ve her bir değişkenin

+1 arasında değişim gösterir. Kanonik korelasyonun 1 olması mükemmel doğrusal ilişkiyi göstermektedir. Korelasyon katsayısının 0.9-1 arasında olması çok yüksek bir ilintiyi, 0-0.25 arasında olması ise zayıf bir ilintiyi temsil etmektedir. Denklem 2.3'te kanonik korelasyon ifadesi verilmiştir. Amaç, U ve V birim varyanslı değişkenleri arasındaki korelasyonu maksimum kılacak \mathbf{a} ve \mathbf{b} vektörlerinin seçilmesidir. Kanonik değişkenler arasındaki korelasyon, yani kanonik korelasyon:

$$\rho = \frac{Kov(\mathbf{a}^T \mathbf{X}, \mathbf{b}^T \mathbf{Y})}{\sqrt{Var(\mathbf{a}^T \mathbf{X}) Var(\mathbf{b}^T \mathbf{Y})}} = \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{C}_{xy} \mathbf{b}}{\sqrt{\mathbf{a}^T \mathbf{C}_{xx} \mathbf{a}} \sqrt{\mathbf{b}^T \mathbf{C}_{yy} \mathbf{b}}} \quad (2.3)$$

olarak ifade edilir.

$$Var(U) = \mathbf{a}^T \mathbf{C}_{xx} \mathbf{a} = 1 \quad (2.4)$$

$$Var(V) = \mathbf{b}^T \mathbf{C}_{yy} \mathbf{b} = 1$$

Varyans değerleri bir olacak şekilde a ve b vektörlerinin seçilmesinden dolayı korelasyon katsayısı, U ve V arasındaki kovaryans değerine eşit olmaktadır.

$$\begin{aligned} \rho &= Kov(U, V) \\ &= \mathbf{a}^T \mathbf{C}_{xy} \mathbf{b} \\ &= \mathbf{b}^T \mathbf{C}_{yx} \mathbf{a} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Bu şekilde, kanonik değişkenler arasındaki korelasyonun maksimize edilmesi, kısıtlı bir eniyileme problemine karşılık gelmektedir.

$$\max_{a,b} \mathbf{a}^T \mathbf{C}_{xy} \mathbf{b} \quad (2.6)$$

$$KISIT : \quad \mathbf{a}^T \mathbf{C}_{xx} \mathbf{a} = \mathbf{b}^T \mathbf{C}_{yy} \mathbf{b} = 1 \quad (2.7)$$

Denklem 2.6'da bu eniyileme problemi; başarıml ölçütü ve kısıtları ile formüle edilmiştir. Bu kısıtlar altında katsayıların maksimizasyon problemi olarak düşünülüp ortaya koymak için, λ_1 ve λ_2 langrange çarpanları olmak üzere bir Langrange fonksiyonu biçiminde ifade edilebilir [24]:

$$L = \mathbf{a}^T \mathbf{C}_{xy} \mathbf{b} - 0.5\lambda_1(\mathbf{a}^T \mathbf{C}_{xx} \mathbf{a} - 1) - 0.5\lambda_2(\mathbf{b}^T \mathbf{C}_{yy} \mathbf{b} - 1) \quad (2.8)$$

Lagrange fonksiyonu \mathbf{a} , \mathbf{b} , λ_1 ve λ_2 'ye göre kısmi türev alınıp sifira eşitlenirse,

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{a}} &= \mathbf{C}_{xy}\mathbf{b} - \lambda_1\mathbf{C}_{xx}\mathbf{a} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{b}} &= \mathbf{C}_{yx}\mathbf{a} - \lambda_2\mathbf{C}_{yy}\mathbf{b} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} &= \mathbf{a}^T\mathbf{C}_{xx}\mathbf{a} - 1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} &= \mathbf{b}^T\mathbf{C}_{yy}\mathbf{b} - 1 = 0\end{aligned}\quad (2.9)$$

elde edilir. Denklem 2.9'da verilen ilk eşitlik soldan \mathbf{a}^T ile ikinci eşitlik ise soldan \mathbf{b}^T ile çarpıldığında aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\begin{aligned}\mathbf{a}^T\mathbf{C}_{xy}\mathbf{b} - \lambda_1(\mathbf{a}^T\mathbf{C}_{xx}\mathbf{a}) &= 0 \\ \mathbf{b}^T\mathbf{C}_{yx}\mathbf{a} - \lambda_2(\mathbf{b}^T\mathbf{C}_{yy}\mathbf{b}) &= 0\end{aligned}\quad (2.10)$$

Denklem 2.9'un son iki eşitliğini, Denklem 2.10'da yerine koyduğumuzda elde edilen denklem,

$$\lambda_1 = \mathbf{a}^T\mathbf{C}_{xy}\mathbf{b} \quad \text{ve} \quad \lambda_2 = \mathbf{b}^T\mathbf{C}_{yx}\mathbf{a} \quad (2.11)$$

şeklinde olmaktadır. Buradan da,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \mathbf{a}^T\mathbf{C}_{xy}\mathbf{b} = \rho \quad (2.12)$$

olduğu görülmektedir. Bu bilgiler ışığında Denklem 2.9'daki ilk iki denklem

$$\begin{bmatrix} -\rho\mathbf{C}_{xx} & \mathbf{C}_{xy} \\ \mathbf{C}_{yx} & -\rho\mathbf{C}_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

şeklinde yazılabilmektedir.

Denklem 2.13'te görülen denklem sisteminde sıfırdan farklı \mathbf{a} ve \mathbf{b} vektörleri elde etmemiz için bu matrisin tekil olması gerekmektedir. Bu da matrisin determinatının

sıfır olması durumunda geçerli olacaktır. Bu yüzden determinantı sıfır yapacak ρ değerinin bulunması gerekmektedir.

$$\begin{vmatrix} -\rho \mathbf{C}_{xx} & \mathbf{C}_{xy} \\ \mathbf{C}_{yx} & -\rho \mathbf{C}_{yy} \end{vmatrix} = 0 \quad (2.14)$$

Determinantın çözümü ifade edildiğinde,

$$\begin{vmatrix} -\rho^2 \mathbf{C}_{xx} \mathbf{C}_{yy} + \mathbf{C}_{xy} \mathbf{C}_{yx} \end{vmatrix} = 0 \quad (2.15)$$

$$\begin{vmatrix} -\rho^2 \mathbf{C}_{xx} + \mathbf{C}_{xy} \mathbf{C}_{yy}^{-1} \mathbf{C}_{yx} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{veya} \quad \begin{vmatrix} -\rho^2 \mathbf{C}_{yy} + \mathbf{C}_{xy} \mathbf{C}_{xx}^{-1} \mathbf{C}_{yx} \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{C}_{xx}^{-1} \mathbf{C}_{xy} \mathbf{C}_{yy}^{-1} \mathbf{C}_{yx} - \rho^2 \mathbf{I} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{veya} \quad \begin{vmatrix} \mathbf{C}_{yy}^{-1} \mathbf{C}_{yx} \mathbf{C}_{xx}^{-1} \mathbf{C}_{xy} - \rho^2 \mathbf{I} \end{vmatrix} = 0$$

işlemlerinden biri yapılır.

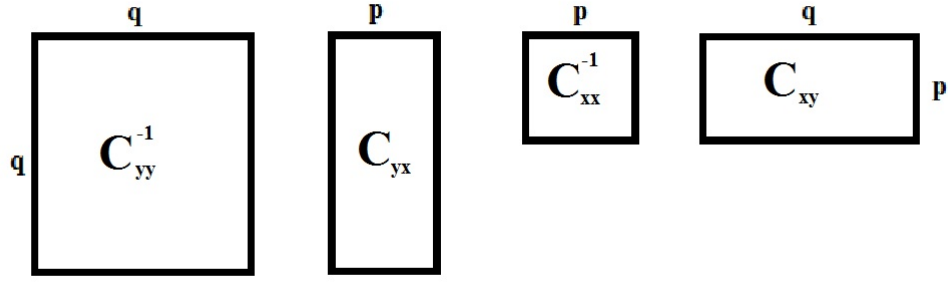
$$\begin{aligned} (-\rho^2 \mathbf{C}_{xx} + \mathbf{C}_{xy} \mathbf{C}_{yy}^{-1} \mathbf{C}_{yx}) \mathbf{a} &= (\mathbf{C}_{yy}^{-1} \mathbf{C}_{yx} \mathbf{C}_{xx}^{-1} \mathbf{C}_{xy} - \rho^2 \mathbf{I}) \mathbf{a} = 0 \\ (-\rho^2 \mathbf{C}_{yy} + \mathbf{C}_{xy} \mathbf{C}_{xx}^{-1} \mathbf{C}_{yx}) \mathbf{b} &= (\mathbf{C}_{yy}^{-1} \mathbf{C}_{yx} \mathbf{C}_{xx}^{-1} \mathbf{C}_{xy} - \rho^2 \mathbf{I}) \mathbf{b} = 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Sonuç olarak kanonik korelasyon analizi yöntemi aşağıdaki gibi iki ayrı özdeğer özvektör problemine indirgenir.

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{xx}^{-1} \mathbf{C}_{xy} \mathbf{C}_{yy}^{-1} \mathbf{C}_{yx} \mathbf{a} &= \rho^2 \mathbf{a} \\ \mathbf{C}_{yy}^{-1} \mathbf{C}_{yx} \mathbf{C}_{xx}^{-1} \mathbf{C}_{xy} \mathbf{b} &= \rho^2 \mathbf{b} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Denklem 2.17'deki özdeğer özvektör problemleri aynı özdeğerlere, fakat farklı özvektörlere sahiptir [17]. Bu problemin çözümü ile elde edilen özdeğerler $\rho_1^2, \rho_2^2, \dots, \rho_r^2$ kanonik korelasyonların karesini, bu özdeğerlere ait özvektörler de kanonik katsayılar olarak adlandırılan \mathbf{a}_i ve \mathbf{b}_i vektörlerini verir. Bu denklemlerde yer alan matrisler Şekil 2.2'deki formdadır [17].

Buradan da görülmektedir ki $\mathbf{C}_{xx}^{-1} \mathbf{C}_{xy} \mathbf{C}_{yy}^{-1} \mathbf{C}_{yx}$ $p \times p$ 'lik, $\mathbf{C}_{yy}^{-1} \mathbf{C}_{yx} \mathbf{C}_{xx}^{-1} \mathbf{C}_{xy}$ matrisi ise $q \times q$ 'luk bir matristir. p ve q 'nun eşit olmadığı durumda büyük boyutlu olan matris tekil, küçük boyutlu olan matris ise tekil olmayan matristir. $p \leq q$ olduğu durumda



Şekil 2.2. Kovaryans Matris Formları

C_{yy}^{-1} 'nin kertesı q , $C_{yx}C_{xx}^{-1}C_{xy}$ 'nin ise kertesinin p olmasından dolayı $C_{yy}^{-1}C_{yx}C_{xx}^{-1}C_{xy}$ matrisinin kertesı p olacaktır. Bu durumda p tane özdeğer sıfırdan farklı değer alacak, geri kalan $q - p$ özdeğer ise sıfır değerini alacaktır. Bu yüzden p tane sıfırdan farklı ρ^2 elde edilebilir. Bulunan bu değerlerin karekökleri kanonik korelasyonları verecektir. Bu yüzden az olan değişken sayısı kadar kanonik korelasyon elde edilir. Elde edilen herhangi bir ρ_i^2 değerinin Denklem 2.17'de yerine konması ile \mathbf{a}_i ve \mathbf{b}_i kanonik katsayılar elde edilir. En büyük kanonik korelasyon katsayısının denklemde yerine konulması ile elde edilen kanonik değişkenler birinci kanonik değişken çiftini (U_1 ve V_1) vermektedir. Bir değişken çiftinin bilgisi, diğer bir değişken çifti için kullanılamaz, çünkü kanonik korelasyon analizi ile U_1, U_2, \dots, U_p kendi aralarında ilintisiz olacak şekilde elde edilirler. V_1, V_2, \dots, V_p kanonik değişkenleri de aynı şekilde kendi aralarında ilintisiz olacak şekilde elde edilirler, doğal olarak da $i \neq j$ durumunda da U_i kanonik değişkeni ile V_j kanonik değişkenleri arasında bir korelasyon yoktur [19].

$$\begin{cases} Cov(U_i, U_j) = 0, \\ Cov(V_i, V_j) = 0, \\ Cov(U_i, V_j) = 0, \end{cases} \quad i \neq j \text{ için} \quad (2.18)$$

Denklem 2.17 özdeğer-özvektör problemleri tek bir genelleştirilmiş özdeğer-özvektör problemi olarak da yazılabilir [19].

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{C}_{xy} \\ \mathbf{C}_{yx} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{xx} & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Elde ettiğimiz genelleştirilmiş özdeğer-özvektör probleminin çözümü, kanonik korelasyon analizinin de çözümünü verecektir.

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_p \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{iq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_q \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

$$a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + \cdots + a_{ip}X_p \leftrightarrow b_{i1}Y_1 + b_{i2}Y_2 + \cdots + b_{iq}Y_q \quad (2.21)$$

$$U_i \leftrightarrow V_i \quad \rho_i : i = 1 \cdots p \quad (p < q)$$

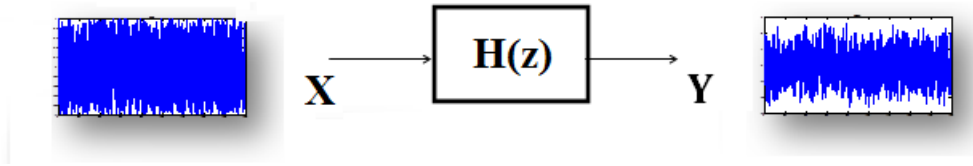
Denklem 2.21’de her bir kanonik korelasyona ait kanonik fonksiyon ve değişken ifadeleri yer almaktadır. \mathbf{X} ve \mathbf{Y} değişken kümelerinde değişken sayıları farklı ise az olan değişken kümesindeki değişken adedi kadar kanonik korelasyon elde edilir. Kanonik korelasyon, kanonik değişkenler arasındaki ortak bilginin ölçüsüdür. ρ_1 maksimal genelleştirilmiş özdeğer ise, ilk kanonik değişken çifti $U_1 = \mathbf{a}_1^T \mathbf{X}$ ve $V_1 = \mathbf{b}_1^T \mathbf{Y}$, iki değişken kümesi arasında en yüksek korelasyona sahip olacak şekilde elde edilir. İkinci kanonik değişken çifti, ilk kanonik değişken çifti tarafından hesaba alınmayan iki değişken kümesi arasındaki maksimum ilişkiyi ortaya koyar ve her ek fonksiyon elde edildikçe kanonik korelasyonun değeri azalır. Bütün korelasyonlar bulunana kadar bu şekilde devam eder [26].

3. TEK GİRİŞLİ TEK ÇIKIŞLI SİSTEM TANIMA ARACI OLARAK KANONİK KORELASYON ANALİZİ

Uygulamalı bilim dallarında modeller genelde giriş-çıkış, sebep-sonuç ilişkileri üzerine kurulmaktadır. Bu ilişkilerin incelenmesi, yorumlanabilmesi için istatistiksel analiz teknikleri tercih edilmektedir. Bu bölümde istatistiksel analiz yöntemleri arasında önemli bir yere sahip olan kanonik korelasyon analizinin sistem tanıma için kullanılabilecek bir yöntem olduğu ortaya konulmaktadır.

3.1 Kanonik Korelasyon Analizi ile Doğrusal Sistem Tanıma

Bu kısımda, dinamik bir sistemden elde edilen deneysel veriler ile kanonik korelasyon analizi yöntemi kullanılarak sistem modellemesi sunulmaktadır. Zaman serileri üzerinde işlemler yaptığımız için kesikli zamanlı sistemler esas alınmıştır. Doğrusal, kesikli zamanlı sistemler, başlangıç koşullarının sıfır olduğu varsayımı altında, aktarım işlevi ile eksiksiz bir şekilde ifade edilebilir. Z dönüşümü, kesikli zamanlı sistemlerin analiz ve tasarımında kullanılan güçlü bir dönüşümdür ve fark denklemlerinden kesikli zamanlı aktarım işlevlerinin elde edilmesini sağlar [27].



Şekil 3.1. Giriş-Çıkış Modeli

Doğrusal zamanla değişmeyen, tek girişli, tek çıkışlı, kesikli zamanlı bir sistemin z-dönüşümlü aktarım işlevi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_pz^{-p}}{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_qz^{-q}} = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (3.1)$$

Şekil 3.1'de doğrusal sistemin genel yapısı gösterilmiştir. Bu kesikli zamanlı sistem Denklem 3.2'de görüldüğü gibi bir fark denklemi olarak da ifade edilebilir [28].

$$\sum_{k=0}^q b_k y[n-k] = \sum_{k=0}^p a_k x[n-k] \quad (3.2)$$

$$b_0 y[n] + b_1 y[n-1] + \dots + b_q y[n-q] = a_0 x[n] + a_1 x[n-1] + \dots + a_p x[n-p]$$

Denklemdede yer alan x ve y sistemin giriş ve çıkış dizileri, a ve b sabit katsayılarıdır. Denklem 3.2'deki fark denkleminde baktığımızda sistem tanıma; giriş ve çıkış verileri \mathbf{X} , \mathbf{Y} ile sistem parametreleri a_i ve b_i 'leri kestirme problemidir. Bu problem, kanonik korelasyon analizi problemi ile aynı yapıdadır, keza Denklem 2.21 ve Denklem 3.2'yi kıyasladığımızda bu iki formülasyonun örtüştüğü görülmektedir.

Denklem 3.1'de aktarım işlevi ile ve Denklem 3.2'de fark denkleminde ifade edilmiş olan dinamik sistem, gerektiğinde durum uzayında da ifade edilebilir. Bu çalışmada, bir sistemin giriş ve çıkış sinyallerine kanonik korelasyon analizi uygulamak yaklaşımı ile sistem tanıma yapılacağından dolayı, durum uzayı modelleri yalnızca sistemlerin benzetim için gerçekleştirilmesi aşamasında kullanılmış, temel sistem modeli olarak fark denklemleri esas alınmıştır. Artık elimizde sistem tanıma için deneysel giriş ve çıkış verileri olmak üzere iki zaman serisi vardır. Bu iki veriyi Denklem 3.3'teki gibi ifade ettiğimizde oluşan bu veri kümeleri kanonik korelasyon analizi için gerekli olan iki veri kümesini verir.

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x[n] & x[n-1] & \dots & x[n-k-1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x[n-p] & x[n-p-1] & \dots & x[n-p-k-1] \end{bmatrix}_{(p+1) \times k} \quad (3.3)$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y[n] & y[n-1] & \dots & y[n-k-1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y[n-q] & y[n-q-1] & \dots & y[n-q-k-1] \end{bmatrix}_{(q+1) \times k}$$

Burada sistem tanıma için kullanılacak olan giriş (x) ve çıkış (y) zaman serisi uzunluğu k olarak alınmıştır. Tanıyacağımız modelleri nedensel modeller olarak seçeceğimiz için $p \leq q$ alınacaktır. q aynı zamanda sistemin derecesini belirlemektedir. Kestirimlerin tutarlılığı açısından, gözlem penceresi boyutunun, model derecesinin yaklaşık 40 katı seçilmesini [23]'e dayanarak önermekteyiz. \mathbf{C}_{xx} , \mathbf{C}_{xy} , \mathbf{C}_{yx} , \mathbf{C}_{yy} bu veri kümeleri üzerinden hesaplanacak kovaryans matrisleri olarak alınacak ve kanonik korelasyon analizi problemi bir genelleştirilmiş özdeğer-özvektör problemi olarak formüle edilecektir.

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{C}_{xy} \\ \mathbf{C}_{yx} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{xx} & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

Bu problemin çözümünde maksimum genelleştirilmiş özdeğer (ρ_{max}) kanonik korelasyon katsayısını, (ρ_{max}) ile eşleşik özvektör $[a^T \ b^T]$ ise sistemin katsayılarını verecektir.

$$a^T = [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_p]$$

$$b^T = [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_q]$$

Bu şekilde elde edilen,

$$b_0y[n] + b_1y[n-1] + \dots + b_qy[n-q] = a_0x[n] + a_1x[n-1] + \dots + a_px[n-p]$$

fark denklemi, sistem tanıma probleminin çözümünü oluşturacaktır. Kanonik korelasyon katsayısının 1'e ne ölçüde yakın olduğu ise, tanınan doğrusal modelin, giriş ve çıkış zaman serileri arasındaki ilişkiyi ne ölçüde yakalayabildiğinin bir ölçütü olarak alınacaktır. $\rho_{max} = 1$ olması, giriş ve çıkış arasındaki ilişkinin tam olarak verilen yapıdaki bir doğrusal model ile açıklanabileceğini göstermektedir. $\rho_{max} \neq 1$ olduğu durumlarda ise, ortaya çıkan parametreler verilen doğrusal yapı içinde giriş çıkış davranışını en iyi biçimde yakalayan modeli tanımlamaktadır.

Modellenen sistemin geçerliliğini doğrulamak ve öngörü kalitesini değerlendirmek için istatistiksel kavramlar kullanılır. Kanonik korelasyon analizi ile sistem tanımada bu görevi kanonik korelasyon katsayıları üstlenmektedir.



Şekil 3.2. Kanonik Korelasyon Analizi ile Sistem Tanıma Şematiği

Kanonik korelasyonun yüksek olması giriş ve çıkıştan elde edilen doğrusal fonksiyonlar arasındaki bağlantının doğru kurulduğu ve sistemin iyi modellendiği anlamına

gelmektedir.

Kanonik korelasyon analizi yöntemi ile birisi benzetim tabanlı, diğeri ise gerçek verilere dayalı olarak iki farklı uygulama çalışılmıştır. Ayrıca kanonik korelasyon analizi ile model yapısının belirlenmesi ve model indirgeme çalışmalarına da yer verilmiştir. Kestirilen modelin geçerliliği, elde edilen veriler, benzetimler, istatistiksel analiz yöntemleri ile doğrulanmıştır.

3.1.1 Uçuş Dinamiği Modelinin Benzetim ile Kestirimi

Bir uçak, üç eksen etrafında hareket eder. Bunlardan uzunlamasına eksen, uçağın ağırlık merkezinden geçip burnundan kuyruğuna uzanan eksendir. Uçağın bu eksen etrafında yaptığı harekete yatış (roll) hareketi denir. Uçağın bu eksen etrafındaki hareketi, kanat arka yüzeyindeki kanatçıklar ile kontrol edilir.

Enlemesine eksen, uçağın ağırlık merkezinden geçip bir kanat ucundan diğerkanat ucuna doğru uzanan eksendir. Uçağın bu eksen etrafında yaptığı harekete yunuslama (pitch) hareketi denir. Uçağın bu eksen etrafında yaptığı hareket, irtifa dümeni (elevatör) tarafından kontrol edilir.

Düşey eksen, uçağın ağırlık merkezinden geçip gövde üst kısmından gövde alt kısmına uzanan eksendir. Uçağın düşey eksen etrafında yaptığı harekete sapma (yaw) hareketi denir. Uçağın bu eksen etrafındaki hareket, istikamet dümeni tarafından sağlanır [29].



Şekil 3.3. Uçak Hareket Eksenleri

Bu kısımda gerçek bir uçağın dikey hareketi üzerinde benzetime dayalı bir sistem tanıma çalışması yapılmıştır.

Denklem 3.4'te Ling-Temco-Vought A-7A Corsair II uçağı için (15.000ft-0.3 mach) dikey hareketini tanımlayan durum uzayı denklemi verilmiştir [30].



Şekil 3.4. Ling-Temco-Vought A-7A Corsair II Uçağı

Model değişkenleri;

- q uçağın yunuslama açısai hızını (rad/sn),
- θ yunuslama açısını (rad),
- u uçağın ilerleme hızını (ft/sn),
- w uçağın dikey eksendeki hızını (ft/sn),
- δ_e ise irtifa dümeni açısını (rad) göstermektedir.

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.04225 & -0.11421 & 0 & -32.2 \\ -0.20455 & -0.49774 & 317.48 & 0 \\ 0.00003 & -0.00790 & -0.39499 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ q \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.00381 \\ -24.4568 \\ -4.51576 \\ 0 \end{bmatrix} \delta_e \quad (3.4)$$

Dikey harekete ait karakteristik polinom Denklem 3.4'ten elde edildiğinde aşağıdaki gibi bulunmaktadır:

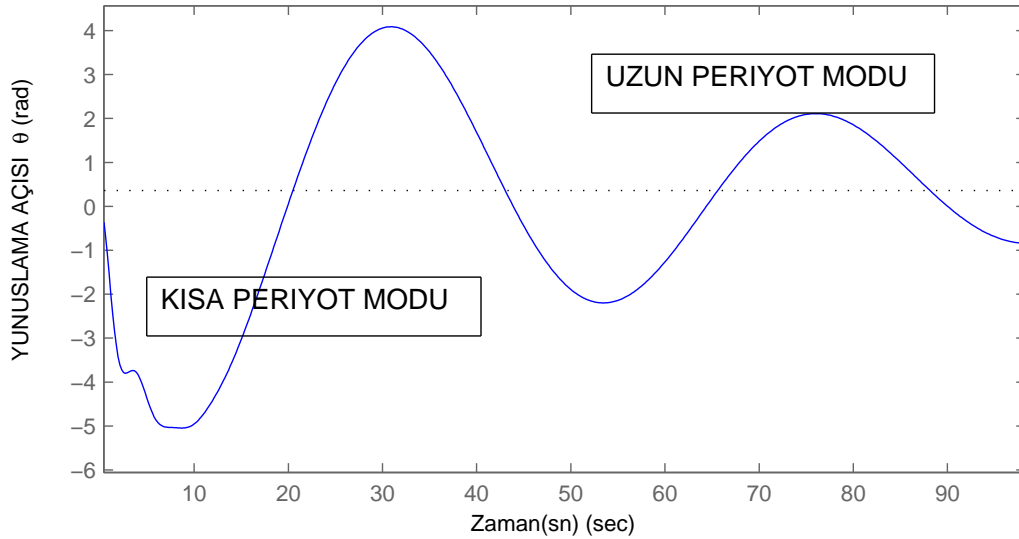
$$s^4 + 0.935s^3 + 2.719s^2 + 0.1071s + 0.05251 = 0 \quad (3.5)$$

Karakteristik polinomdan elde edilen kökler Çizelge 3.1'de gösterilmektedir.

Çizelge 3.1. Ling-Temco-Vought A-7A Corsair II Uçağı Dikey Hareket Modeli Kutupları

Kökler	Sönümlenme Faktörü	Doğal Frekans
-0.0167 - 0.1393i	0.119	0.140 rad/sn
-0.0167 + 0.1393i	0.119	0.140 rad/sn
-0.4508 - 1.5704i	0.276	1.63 rad/sn
-0.4508 + 1.5704i	0.276	1.63 rad/sn

Uçaktaki dikey hareketin karakteri; iki ayrı davranış biçimi ile incelenmektedir. Bunlar Şekil 3.5'de gösterilen uzun periyot (phugoid) ve kısa periyot modudur. Kısa periyot uçuş durumu, uçak için kısa sürede (birkaç saniyede) gerçekleşen ve yüksek sönümlenme oranına sahip harekettir. Uzun periyot (phugoid) uçuş durumu ise, uzun zaman devam eden (30 saniye civarında ya da daha fazla sürede gerçekleşen) ve daha düşük sönümlenmeye sahip olan, ancak daha kolay kontrol edilebilen bir davranıştır. Phugoid modun zaman ölçeği yeterince uzun olmasından dolayı pilot için probleme neden olmaz, kontrol girişleri tarafından giderilmektedir [31, 32].



Şekil 3.5. Ling-Temco-Vought A-7A Corsair II Uçağı 1 rad İrtifa Dümeni Açısı için Yunuslama Açısı Adım Tepkisi

Çizelge 3.1'deki ilk çift sanal eksene yakındır ve phugoid modu temsil etmektedir, diğer çift ise sanal eksenden daha uzakta olup kısa periyot modunu temsil etmektedir.

Denklem 3.4'ten giriş δ_e irtifa dümeni açısı (rad) ve çıkışı uçağın ilerleme hızı u (ft/s) olacak şekilde ($C = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$) alınarak uçuş dinamik modeli kestirilmeye çalışılacaktır. Denklem 3.4'ten elde edilen ve kestirilmeye çalışılacak gerçek aktarım işlevi Denklem 3.6'da verilmektedir.



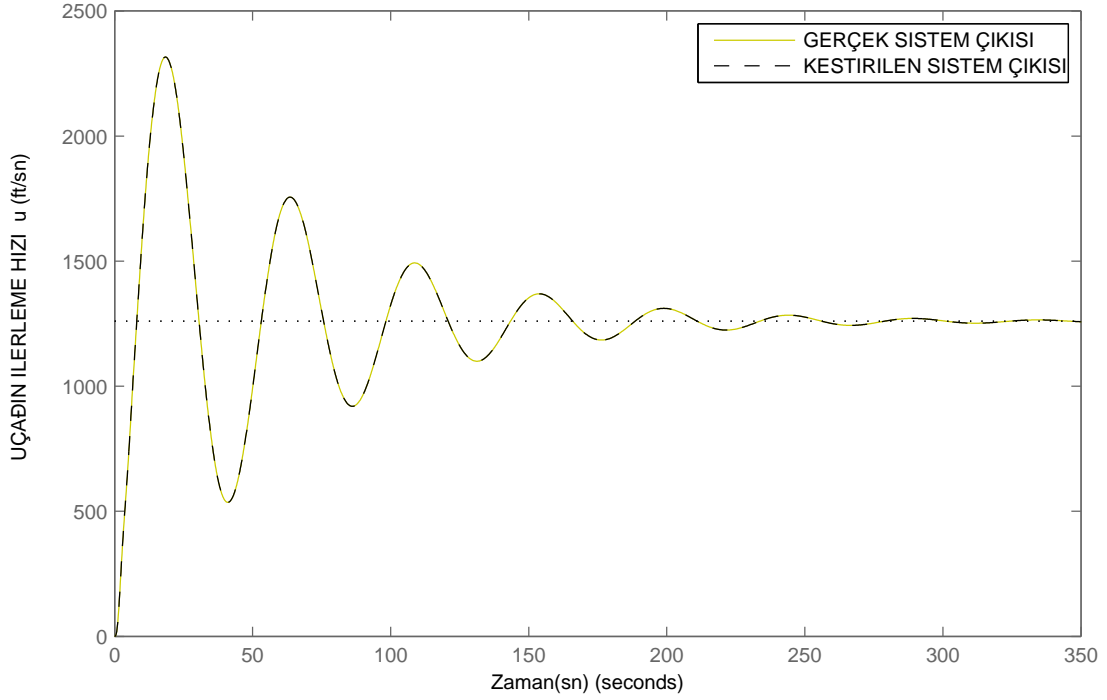
Şekil 3.6. Giriş δ_e İrtifa Dümeni Açısı (rad) ve Çıkışı Uçağın İlerleme Hızı u (ft/s) için Dinamik Model

$$H(s) = \frac{u(s)}{\delta_e(s)} = \frac{0.00381s^3 + 2.797s^2 + 310.3s + 66.15}{s^4 + 0.935s^3 + 2.719s^2 + 0.1071s + 0.05251} \quad (3.6)$$

Sistem tanımada sık kullanılan sanal bir veri, sözde rastgele ikili dizi, giriş verisi olarak kullanılmak üzere oluşturulmuştur. Örnek sayısı kestirim kalitesini etkilememesi açısından yeterince büyük seçildi ve 12600 örnekten oluşan bir giriş alındı. Sürekli zamanlı modellerden, örnekleme zamanı 0.1 alınarak ZOH yöntemi ile kesikli zamanlı modellere geçildi. Denklem 3.4 ile ifade edilen modele verilen bu giriş sonucu elde ettiğimiz çıkış verisi ile artık elimizde kanonik korelasyon analizi yöntemi ile model kestirme için gerekli iki veri bulunmaktadır. Bu verilerle kanonik korelasyon analizi yöntemini kullanarak sistem modellediğimizde kanonik korelasyon katsayısı 1 çıkmaktadır, bu da bu iki veri kümesinin doğrusal fonksiyonları arasındaki ilişkiyi çok iyi tanımladığı ve mükemmel bir model oturttuğu anlamına gelir.

Kanonik korelasyon analizinin diğer çıktıları olan kanonik katsayılar da, daha önce bahsettiğimiz gibi kesikli zaman aktarım işlevi parametrelerini vermektedir. Kestirilen bu aktarım işlevi Denklem 3.7'de gösterilmiştir.

$$H(z) = \frac{u(z)}{\delta_e(z)} = \frac{0.06461z^3 + 0.1344z^2 - 0.1575z - 0.03515}{z^4 - 3.885z^3 + 5.68z^2 - 3.706z + 0.9107} \quad (3.7)$$



Şekil 3.7. Ling-Temco-Vought A-7A Corsair II Uçağı 1 rad İrtifa Dümeni Açısı için Uçağın İlerleme Hızı Adım Tepkisi Gerçek ve Kestirilen Değerler

Bu aktarım işlevini sıfır derece tutucu (ZOH) yöntemi ile sürekli zaman aktarım işlevine çevirdiğimizde elde ettiğimiz s dönüşüm aktarım işlevi de Denklem 3.8'de yer almaktadır.

$$H(s) = \frac{u(s)}{\delta_e(s)} = \frac{0.00381s^3 + 2.797s^2 + 310.3s + 66.15}{s^4 + 0.935s^3 + 2.719s^2 + 0.1071s + 0.05251} \quad (3.8)$$

Denklem 3.8 bir kez daha kestirimin doğruluğunu bize ispatlamaktadır, Şekil 3.7 incelendiğinde de kanonik korelasyon analizi ile elde edilen model çıkışı ile gerçek çıkışın bire bir örtüştüğü görülmektedir.

3.1.2 Bir Su Tankı Sisteminin Deneysel Olarak Tanınması

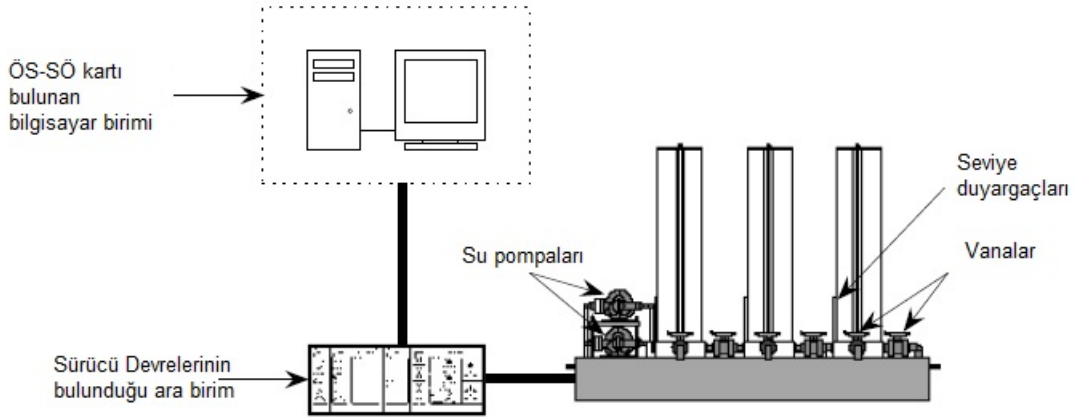
Bu kısımda Şekil 3.8'da gösterilen AMIRA DTS200 su tankı sistemi için doğrusal model kestirimi kanonik korelasyon analizi yöntemi kullanılarak gerçekleştirilmiştir.

Uygulamada kullanılan su tankı sistemi ardışık bağlı üç eşdeğer su tankı, 2 adet pompa motoru ve motorların herbirinde yer alan duyurgaçlardan oluşmaktadır. Seviye denetiminin yapıldığı her üç göz de sabit kesit alanına sahip özdeş silindirlere sahiptir.



Şekil 3.8. DTS200 Su Tankı Sistemi

Su tankı sisteminde kullanılan su pompaları tankın alt haznesinden suyu sağdaki ve soldaki gözlerle basmaktadır; ortadaki göze bir pompa bağlantısı mevcut değildir. Basınca duyarlı duyargaçlar su yüksekliği ile doğru orantılı gerilim üreterek su seviyelerinin ölçülmesinde kullanılır. Bu duyargaçlar üç gözde de sabit olarak mevcut olduğundan istenilen gözdeki su seviyesi ölçülebilmektedir.

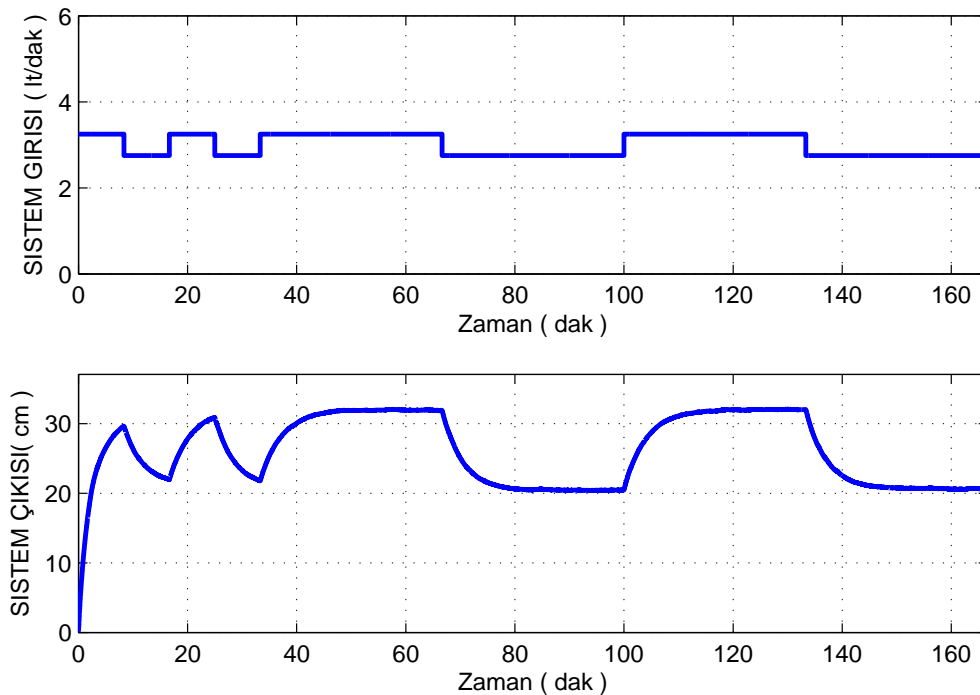


Şekil 3.9. DTS200 Su Tankı Şematiği

Seviye denetimi uygulamasında, giriş değişkeni lt/dak cinsinden pompaların bastığı su miktarıdır. Pompalar doğru akımla çalışmaktadır ve doğrusal bir giriş-çıkış ilişkisine sahiptir. Vanalar yardımıyla sistem modeli tek girişli tek çıkışlı veya çok-değişkenli olacak şekilde ayarlanabilmektedir. Gözler ile su tankının alt haznesine olan bağlantı da yine ayarlanabilir vanalarla sağlanmaktadır ve bu vanalar yardımıyla gözlerden tahliye edilen su miktarı da isteğe göre arttırılabilir veya azaltılabilir. Ayarlanabilir vanaların fiziksel yapısı ve bu vanalardaki su akışının çalkantılı (tur-

bulant) biçimde olması, sistem modelinde doğrusal olmayan etkilerin oluşmasına neden olmaktadır [33, 34, 35].

Ayrıca sistem, algoritmaların programlandığı bir örneksel-sayısal ve sayısal-örneksel (ÖS-SÖ) çevirici kartı ile ara birime bağlanan bir bilgisayar yardımıyla denetlenebilmektedir. Bu ÖS-SÖ kart yardımıyla seviye duyurgaçlarından alınan seviye bilgisi bilgisayarda bulunan denetim algoritmasına, algoritma tarafından hesaplanan denetim sinyali ise su pompalarına iletilir. Su tankı, pompalar ve seviye duyurgaçlarından oluşan su tankı birimi ile kişisel bilgisayar ve ÖS-SÖ çevirici kartından oluşan bilgisayar birimi arasındaki bağlantıyı ara birim sağlamaktadır. Ara birim, su pompalarını sürmek için gerekli sürücü devreleri içerir; çevirici kartın ± 10 V örneksel çıkış gerilimini, su pompalarını sürmek için gerekli olan gerilim seviyesine (0 - 12 V) getirir ve gerekli olan akımı sağlar. Ayrıca seviye duyurgaçlarının besleme gerilimlerini yine bu ara birim sağlamaktadır. Seviye duyurgaçlarından alınan ölçüm sonuçları da bu birim sayesinde çevirici karta aktarılmaktadır [35].



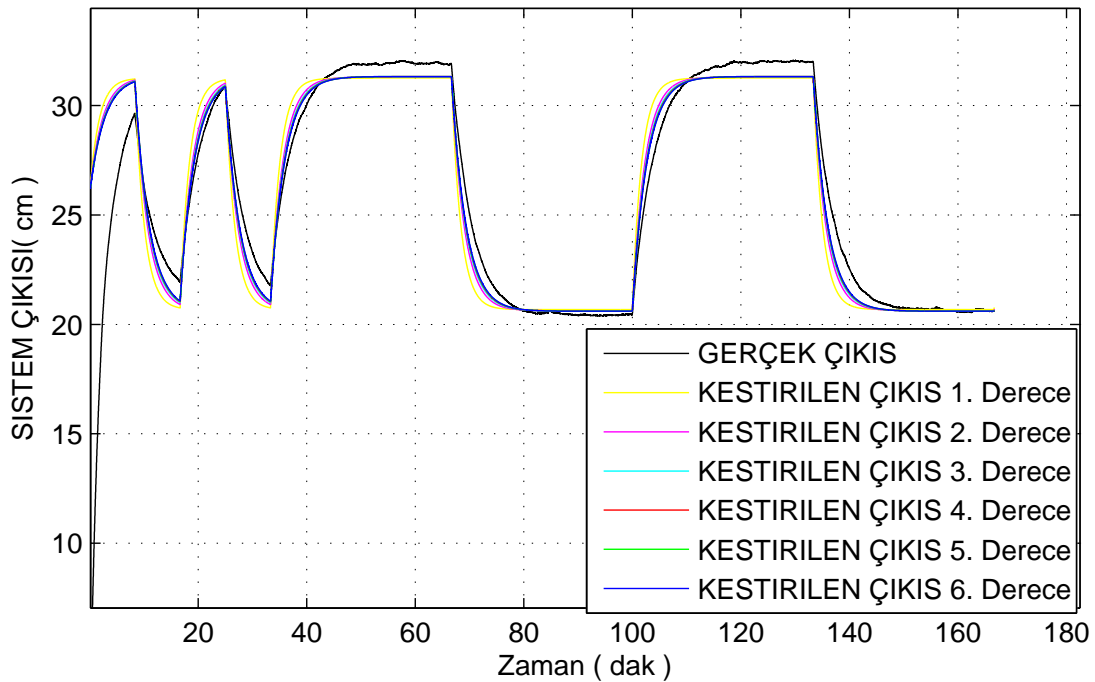
Şekil 3.10. Su Tankı Giriş ve Çıkışı

Su tankı sisteminde tanklardaki su seviyeleri değiştikçe aktarım işlevi de değişmektedir. Bu da farklı çalışma noktaları için farklı aktarım işlevleri kullanmayı gerektirmektedir. Bahsedilen su tankı sisteminden veriler elde edilirken, iki göz ardışık bağlı

olacak şekilde alınmış, üçüncü göz bağlanmamıştır. Pompa ile bir gözden su basılmış ve diğer su tankından su seviyesi okunmuştur. Giriş değişkeni lt/dak cinsinden pompaların bastığı su miktarı, çıkış değişkeni ise cm cinsinden su seviyesidir. 0.5 saniye aralıklarla 20002 örnek alınmıştır. Şekil 3.10'te gösterilen giriş ve çıkış verileri kullanılarak kanonik korelasyon analizi ile doğrusal, kesikli zamanlı 1. 2. 3. 4. 5. ve 6. derece modeller kestirilmiştir. Kestirilen modellere ait aktarım işlevleri aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned}
 H_1(s) &= \frac{-0.05471s + 0.2058}{s + 0.00972} \\
 H_2(s) &= \frac{8.395s^2 - 68.5s + 162.5}{s^2 + 1057s + 7.605} \\
 H_3(s) &= \frac{-0.09693s^3 + 1.335s^2 - 5.475s + 10.11}{s^3 + 0.2411s^2 + 71.2s + 0.4722} \\
 H_4(s) &= \frac{10.69s^4 - 146.9s^3 + 1136s^2 - 3039s + 4912}{s^4 + 1602s^3 + 175.1s^2 + 3.578e004s + 229.2} \\
 H_5(s) &= \frac{-0.09581s^5 + 3.025s^4 - 18.42s^3 + 110.1s^2 - 208.2s + 314.2}{s^5 + 0.3153s^4 + 211.4s^3 + 19.98s^2 + 2330s + 14.65} \\
 H_6(s) &= \frac{15.29s^6 - 292.2s^5 + 4081s^4 - 1.692 \times 10^4s^3 + 10^4(7.554s^2 - 10.9s + 15.62)}{s^6 + 2688s^5 + 502s^4 + 1.8 \times 10^5s^3 + 1.606 \times 10^4s^2 + 1.171 \times 10^6s + 7279}
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Bu modellerle kestirilen çıkışlar ve gerçek çıkış Şekil 3.11'te gösterilmektedir. Gerçek çıkışın bu modellerle yaklaşık olarak yakalandığı görülmektedir.



Şekil 3.11. Farklı derecelerde Su Tankı için Kestirilen Çıkış ve Sistem Çıkışı

Bu modellere ait kanonik korelasyon ve yüzde bağıl hata (sistem çıkışı ile kestirilen model çıkışı arasındaki farkların mutlak değerleri toplamının, sistem çıkış değerlerinin toplamına oranının yüz katı) bilgileri de Çizelge 3.2'de gösterilmektedir..

Çizelge 3.2. Su Tankı için Kestirilen Modellere Ait Yüzde Bağıl Hata ve Kanonik Korelasyon Bilgileri

Sistem derecesi	Yüzde Bağıl Hata	Kanonik Korelasyon
1. derece	3.2209	0.8801
2. derece	2.3985	0.9396
3. derece	2.1504	0.9602
4. derece	2.0428	0.9696
5. derece	1.9840	0.9744
6. derece	1.9479	0.9772

Kanonik korelasyon ile yüzde bağıl hata arasında paralellik gözlenmektedir. Bu da korelasyon katsayısının kestirdiğimiz sistem modelinin geçerliliğini gösteren bir ölçüt olarak kullanılabileceğini kanıtlar niteliktedir. Gerçek sistem çıkışı ve kestirilen modellere ait çıkışların gösterildiği Şekil 3.11'den görüldüğü gibi 6. derece sistem en yüksek korelasyona ve en az yüzde bağıl hataya sahiptir. Korelasyon katsayısının yüksek çıkmasının yanında yüzde bağıl hatanın da düşük değerler alması modellenin geçerliliğini göstermektedir.

3.2 Kanonik Korelasyon Analizi ile Sistem Model Yapısının Belirlenmesi

Bu kısımda aktarım işlevi parametreleri kestirimi ile değil, model yapısının belirlenmesi ile ilgilenildi. Korelasyon katsayısının kestirdiğimiz sistem modelinin geçerliliğini gösteren bir ölçüt olarak kullanılabileceği önceki kısımlarda gösterilmişti. Bu kısımda da modelleri farklı yapılar için kestirmeye çalışarak, her biri için kanonik korelasyon değerleri incelenip sistemi en iyi modelleyen yapı bulunmaya çalışılmaktadır.

Daha önceki kısımlarda da bahsedildiği üzere deneysel giriş ve çıkış verilerini Denklem 3.3'tekine benzer bir şekilde ifade ederek, oluşan bu veri kümelerini kanonik korelasyon analizine tabi tuttuğumuzda; kanonik korelasyon analizi yöntemi, en iyi doğrusal modeli tanımlamaya çalışmaktadır. Farklı sayıda kutup ve sıfır içeren modeller kestirilmiş, kanonik korelasyon katsayısına bakılarak, kestirimin iyi olduğu model yapısı belirlenmiştir.

3.2.1 Uçak Dinamiği Modeli Yapısı Kestirimi

Denklem 3.4'te Ling-Temco-Vought A-7A Corsair II uçağı için (15.000ft-0.3 mach) verilen dinamik için giriş δ_e irtifa dümeni açısı (rad) ve çıkış w uçağın dikey eksenindeki hızı (ft/s) ($C = [0 \ 1 \ 0 \ 0]$) alındığında aktarım işlevi aşağıdaki gibidir.

$$\frac{w(s)}{\delta_e(s)} = \frac{-24.46s^3 - 1444s^2 - 60.98s - 29.77}{s^4 + 0.935s^3 + 2.719s^2 + 0.1071s + 0.05251} \text{ ft/s/rad} \quad (3.10)$$

Bu sürekli zaman dinamik sistem modelini örnek zamanını 0.1 alarak, sıfır dereceli tutucu (ZOH) yöntemini kullanarak ayrıklaştırdığımızda elde edilen doğrusal, kesikli zamanlı sistem aktarım işlevi;

$$\frac{w(z)}{\delta_e(z)} = \frac{-9.32z^3 + 14.14z^2 - 0.3878z - 4.438}{z^4 - 3.885z^3 + 5.68z^2 - 3.706z + 0.9107} \text{ ft/s/rad} \quad (3.11)$$

şeklinde bulunmaktadır. Giriş verisi olarak sanal bir veri, sözde rastgele ikili dizi Denklem 3.10 ile ifade edilen modele giriş olarak verilmiş ve çıkış verisi elde edilmiştir. Bu verilerle kanonik korelasyon analizi yöntemi ile farklı model yapıları için model kestirimleri yapılmıştır. Farklı model yapıları için elde edilen kanonik korelasyon katsayıları Çizelge 3.3'te gösterilmektedir.

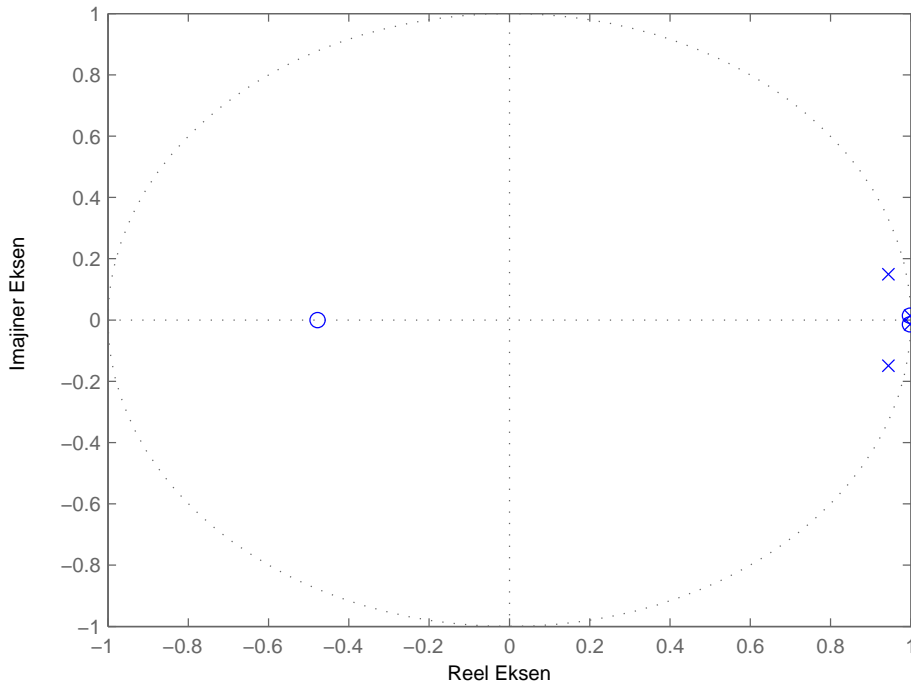
Çizelge 3.3. Giriş δ_e İrtifa Dümeni Açısı (rad) ve Çıkış w Uçağın z Eksenindeki Hızı (ft/s) Uçak Modeli Aktarım İşlevi Farklı Model Yapılarında Kestirimleri için Kanonik Korelasyon Katsayıları

	Payda	1. derece	2.derece	3.derece	4.derece	5.derece
Pay						
1. derece		0.2834	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
2.derece		0.2833	0.9998	1.0000	1.0000	1.0000
3.derece		0.2832	0.9998	1.0000	1.0000	1.0000
4.derece		0.2834	0.9998	1.0000	1.0000	1.0000
5.derece		0.2833	0.9998	1.0000	1.0000	1.0000

Kutup sıfır haritasına Şekil 3.12'den baktığımızda kesikli zaman aktarım işlevi için kutup değerleri $0.9442 \pm 0.1495i$ ve $0.9982 \pm 0.0139i$ ve sıfır değerleri $0.9978 \pm 0.0142i$ - $0.4782i$ 'dir. Sistem gerçekte 4 kutup, 3 sıfıra sahip olmasına rağmen, kanonik korelasyon analizi ile Çizelge 3.3'te görüldüğü üzere dinamik, 2 kutup 1 sıfır ile de

yüksek korelasyonlarla modellenebilmektedir. Sistemin 2 kutup 1 sıfıra sahip model ile de iyi bir şekilde modellenebileceğini kanonik korelasyonun 0.9998 çıkmasından anlamaktayız.

4 kutup, 3 sıfıra sahip sistemin; 2 kutup, 1 sıfır ile de yüksek korelasyon ile modelenebilmesini; Şekil 3.12'de görüldüğü üzere birbirine yakın iki kutup ve sıfırın olması açıklamaktadır. Bu kutup ve sıfırların birbirini götürmesi, sistemin 2 kutup 1 sıfır ile yaklaşık olarak modellenebileceğini göstermektedir.



Şekil 3.12. Giriş δ_e İrtifa Dümeni Açısı (rad) ve Çıkış w Uçağın Dikey Eksendeki Hızı (ft/s) Uçak Modeli Kesikli Zaman Aktarım İşlevine Ait Kutup Sıfır Grafiği

Uçağın dikey eksendeki hızı çıkış alındığında; bu dikey dinamiğinde kısa periyot modun baskın olduğu, uzun periyot modun ihmal edilebileceği ve uçağın yalnızca kısa periyot mod ile modellenebileceğini Şekil 3.12'den anlaşılmaktadır.

Başka bir dinamik model ele aldığımızda; Denklem 3.4'ten giriş δ_e irtifa dümeni açısı (rad) ve çıkış uçağın ilerleme hızı u (ft/s) ($C = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$) alındığında aktarım işlevi;

$$\frac{u(s)}{\delta_e(s)} = \frac{0.00381s^3 + 2.797s^2 + 310.3s + 66.15}{s^4 + 0.935s^3 + 2.719s^2 + 0.1071s + 0.05251} \text{ ft/s/rad} \quad (3.12)$$

olarak bulunmaktadır. Bu sürekli zaman dinamik sistem modelini örnekleme zamanı 0.1 olarak sıfır dereceli tutucu (ZOH) yöntemi kullanarak ayrıklaştırdığımızda elde edilen kesikli zaman, doğrusal aktarım işlevi;

$$\frac{u(z)}{\delta_e(z)} = \frac{0.06461z^3 + 0.1344z^2 - 0.1575z - 0.03515}{z^4 - 3.885z^3 + 5.68z^2 - 3.706z + 0.9107} \text{ft/s/rad} \quad (3.13)$$

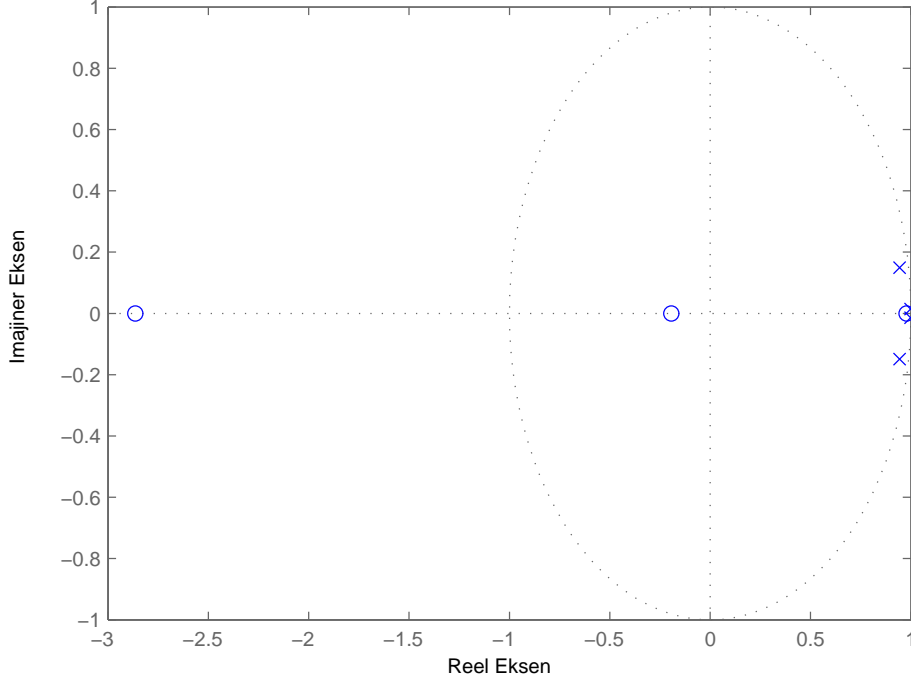
şeklinde bulunmaktadır. Giriş verisi olarak sanal bir veri, sözde rastgele ikili dizi Denklem 3.12 ile ifade edilen modele giriş olarak verilmiş ve çıkış verisi elde edilmiştir. Bu verilerden farklı model yapıları için model kestirimleri yapılmıştır. Farklı model yapıları için elde edilen kanonik korelasyon katsayıları Çizelge 3.4'te gösterilmektedir.

Çizelge 3.4. Giriş δ_e İrtifa Dümeni Açısı (rad) ve Çıkış uçağın ilerleme hızı u (ft/s) Uçak Modeli Aktarım İşlevi Farklı Model Yapılarında Kestirimleri için Kanonik Korelasyon Katsayıları

	Payda	1. derece	2.derece	3.derece	4.derece	5.derece
Pay						
1. derece		0.0221	0.3695	0.9263	0.9778	0.9804
2.derece		0.0255	0.3695	0.9723	0.9778	0.9939
3.derece		0.0286	0.3696	0.9723	1.0000	1.0000
4.derece		0.0316	0.3698	0.9723	1.0000	1.0000
5.derece		0.0345	0.3701	0.9723	1.0000	1.0000

Kutup sıfır haritasına Şekil 3.13'ten baktığımızda kesikli zaman aktarım işlevi için kutup değerleri $0.9442 \pm 0.1495i$ ve $0.9982 \pm 0.0139i$ ve sıfır değerleri -2.8641 , 0.9789 ve -0.1940 'dir.

4 kutup, 3 sıfıra sahip sistemin; 3 kutup, 2 sıfır ile yüksek korelasyon ile modellenbilmesini; Şekil 3.13'te görüldüğü üzere 0.9789 sıfır değerinin , $0.9982 \pm 0.0139i$ kutup değerlerine yakın olması açıklamaktadır. Kanonik korelasyon katsayısının sistemin ne kadar iyi modellendiği hakkında bir ölçüt olması, kestirilecek sistemin yapısı hakkında fikir edinebilmemizi sağlamaktadır.



Şekil 3.13. Giriş δ_e İrtifa Dümen Açısı (rad) ve Çıkışı Uçağın İlerleme Hızı u (ft/s) Uçak Modeli Kesikli Zaman Aktarım İşlevine ait Kutup Sıfır Grafiği

3.3 Kanonik Korelasyon Analizi ile Sistem Derecesinin İndirgenmesi

Düşük karmaşıklık, hızlı hesaplama ile iyi bir model elde edilmesi sistem tanımada önemli bir ölçüttür. Büyük ve karmaşık yapıdaki sistemlerin dinamik analizinde; bu karmaşık yapıyı belirli bir amaç ışığında mevcut en iyi modele basitleştirmek için model derece indirgeme işlemleri yapılmaktadır. Ayrıca, önemli sistem dinamikleri korunarak daha küçük boyutlu modeller elde etmek, tasarım doğrulama aşamasında benzetim sürecini hızlandırmak ya da daha düşük karmaşıklık ile modeli tanımlamak gibi nedenlerle model derecesi indirgeme işlemleri yapılabilmektedir. Bu sayede problemin hesaplama maliyeti ve hesaplama boyutu düşürülmüş olmakta ya da modelin sadece istenen alt bileşeni incelenebilmektedir. Ayrıca denetleç tasarımı için de indirgenmiş basit modellerin kullanımı genel olarak daha uygundur [36].

Bu kısımda kanonik korelasyon analizinin model derecesi indirgenmesinde kullanılması üzerinde durulmaktadır. Daha önceki kısımlarda da bahsedildiği üzere deneysel giriş ve çıkış verileri Denklem 3.3'tekine benzer bir biçimde ifade edilerek oluşan veri kümeleri kanonik korelasyon analizine tabi tutulduğunda, kanonik korelasyon

analizi en iyi doğrusal modeli tanımlamaya çalışmaktadır. Bu ifadedeki değişkenlere bağlı olarak sistem istenilen yapıda modellenebilmektedir.

3.3.1 Uçağın Dikey Hareketi İçin Kısa Periyot Mod Kestirimi

Uçağın dikey hareketinin iki davranış moduna (kısa periyot, uzun periyot) sahip olduğundan daha önceki kısımlarda bahsedilmişti. Bu kısımda kanonik korelasyon analizi yardımı ile uçağın dikey hareket modelinin indirgenerek uçağın yalnızca kısa periyot modu ile modellenmesi üzerine bir çalışma yapılmıştır.

Dikey harekete ait karakteristik polinom Denklem 3.4'teki durum uzay denkleminde elde edildiğinde aşağıdaki gibi bulunmaktadır.

$$s^4 + 0.935s^3 + 2.719s^2 + 0.1071s + 0.05251 = 0 \quad (3.14)$$

Karakteristik polinomdan elde edilen kökler $-0.0167 \pm 0.1393i$ ve $-0.4508 \pm 1.5704i$ sırası ile uzun periyot ve kısa periyot modunu temsil etmektedir. Kısa periyot mod kestirimi için indirgenmiş model Denklem 3.4'te u ve θ değerleri ihmal edilerek şu şekilde elde edilebilir.

$$\begin{bmatrix} \dot{w} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.49774 & 317.48 \\ -0.00790 & -0.39499 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -24.4568 \\ -4.51576 \end{bmatrix} \delta_e \quad (3.15)$$

Buradan elde edilen aktarım işlevleri Denklem 3.16'daki gibi verilmektedir.

$$\begin{aligned} \frac{w(s)}{\delta_e(s)} &= \frac{-24.457(s + 59.015)}{s^2 + 0.893s + 2.704} \text{ ft/s/rad} \\ \frac{q(s)}{\delta_e(s)} &= \frac{-4.516(s + 0.455)}{s^2 + 0.893s + 2.704} \text{ rad/s/rad(deg/s/deg)} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Bunlar kısa periyodun baskın olduğu değişkenlerin indirgenmiş aktarım işlevlerleridir ve doğrudan elde edilen basit modelleridir.

Denklem 3.4'ten giriş δ_e irtifa dümeni açısı (rad) ve çıkışı w uçağın dikey eksenindeki hızı (ft/s) olacak şekilde $C = [0 \ 1 \ 0 \ 0]$ alındığında aktarım işlevi;

$$\frac{w(s)}{\delta_e(s)} = \frac{-24.46s^3 - 1444s^2 - 60.98s - 29.77}{s^4 + 0.935s^3 + 2.719s^2 + 0.1071s + 0.05251} \text{ ft/s/rad} \quad (3.17)$$

olarak bulunmaktadır. Bu sürekli zaman dinamik sistem modelini örnekleme zamanı 0.1 olarak sıfır dereceli tutucu (ZOH) yöntemi kullanarak ayrıklaştırdığımızda elde edilen kesikli zaman, doğrusal aktarım işlevi;

$$\frac{w(z)}{\delta_e(z)} = \frac{-9.32z^3 + 14.14z^2 - 0.3878z - 4.438}{z^4 - 3.885z^3 + 5.68z^2 - 3.706z + 0.9107} \text{ ft/s/rad} \quad (3.18)$$

şeklinde bulunmaktadır. Buradan elde edilen kesikli zaman kutuplar $0.9442 \pm 0.1495i$ ve $0.9982 \pm 0.0139i$ sıfırlar ise $0.9978 \pm 0.0142i$ ve -0.4782 'dir.

Şekil 3.12'deki kutup sıfır haritasında yukarıda da bahsedilen phugoid ve kısa periyot uçuş durumuna ait kökler görülmektedir. Bu kutup sıfır haritasını incelediğimizde phugoid mod köklerine yakın sıfırlar bulunmaktadır. Bu da kısa periyot modu yakalamamızı kolaylaştırmaktadır ve sistemi 2 kutup 1 sıfır ile yaklaşık olarak modelleyebileceğimizi göstermektedir. Bir önceki kısımda da sistemin 2 kutup, 1 sıfıra sahip kesikli zaman aktarım işlevi ile iyi bir şekilde modellenebileceği yüksek kanonik korelasyon değerinden anlaşılmaktadır.

Giriş verisi olarak sanal bir veri, sözde rastgele ikili dizi Denklem 3.4 ile ifade edilen modele giriş olarak verilmiş ve çıkış verisi elde edilmiştir. Bu verilerden Denklem 3.3'e benzer formatta veri kümeleri oluşturup kanonik korelasyon analizi yöntemini kullanarak 2 kutup, 1 sıfır ile modeli kestirmeye çalıştığımızda; yöntem kanonik korelasyon katsayıları 0.9998 ve 0.2578 olan iki model oturtmaktadır. Yüksek korelasyona ait kestirilen kesikli zaman aktarım işlevi kutup ve sıfır değerleri de Çizelge 3.5'te verilmektedir.

Çizelge 3.5. Giriş δ_e (rad) Çıkış w için Kestirilen Kutup ve Sıfırlar

Kanonik Korelasyon	Kutuplar	Sıfırlar
0.9998	$0.9441 \pm 0.1488i$	-0.4792

Çizelge 3.5'ten de açıkça görüldüğü gibi yüksek korelasyona ait kestirilen kutup ve sıfır değerlerinden kısa periyot köklerinin yakalandığı gözlemlenmektedir. Kestirilen kesikli zaman aktarım işlevi aşağıda verilmektedir.

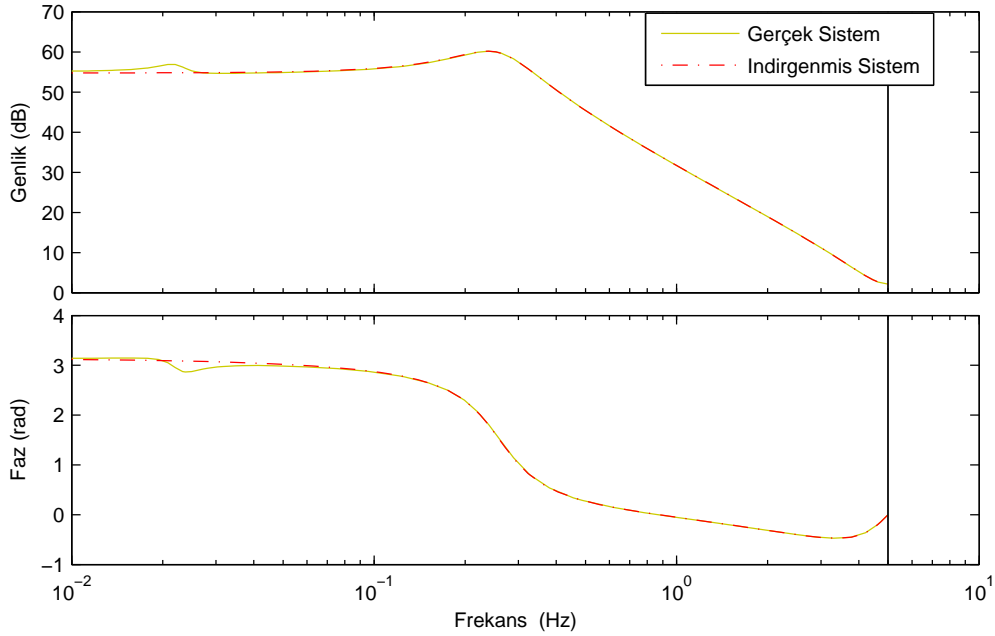
$$\frac{w(z)}{\delta_e(z)} = \frac{-9.323z - 4.467}{z^2 - 1.888z + 0.9135} \text{ ft/s/rad} \quad (3.19)$$

Bu kesikli zaman modeli ZOH yöntemi yardımı ile sürekli zamana çevirdiğimizde;

$$\frac{w(s)}{\delta_e(s)} = \frac{-24.41(s + 59.28)}{s^2 + 0.9047s + 2.646} \text{ ft/s/rad} \quad (3.20)$$

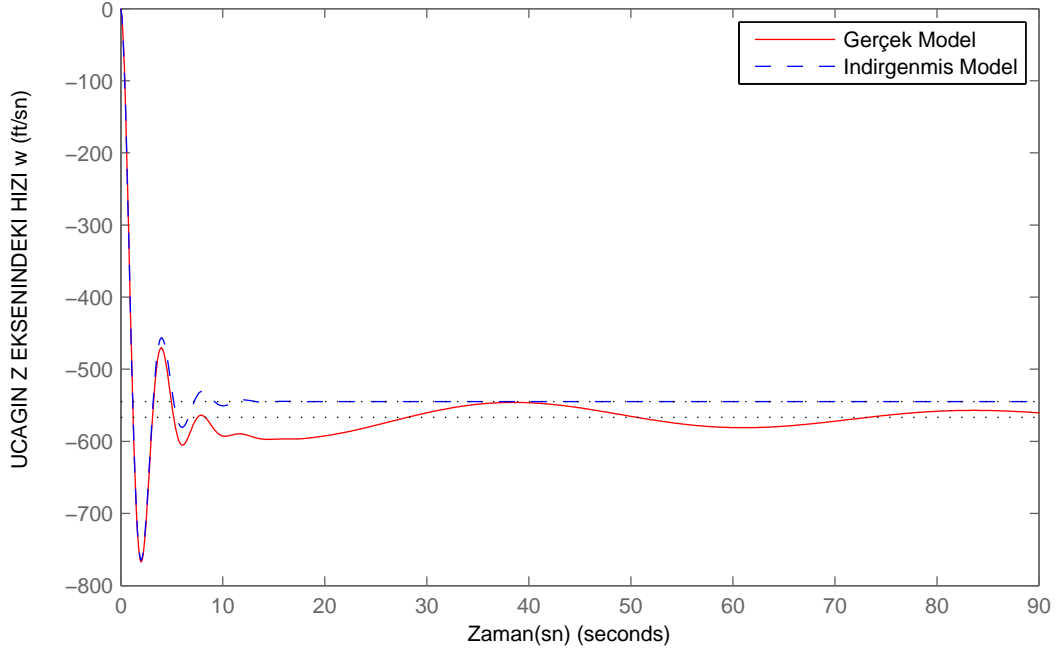
aktarım işlevi elde edilmektedir. Bu denklemin [30]'da verilen Denklem 3.16'daki aktarım işlevine yaklaşık olarak denk olması analizimizi teyit eder niteliktedir.

Adım tepkisi ve bode diagramı yardımı ile kestirimin kalitesi incelenmiştir. Bode diagrama Şekil 3.14'ten baktığımızda yüksek frekans değerlerinin daha iyi yakalandığı görülmekte; bu da kısa periyot modun yakalandığını göstermektedir.



Şekil 3.14. Giriş δ_e İrtifa Dümeni Açısı (rad) ve Çıkışı w Uçağın Dikey Eksendeki Hızı (ft/s) olan Uçak Modeli için Gerçek ve Kestirilen Bode Diagram

Benzer şekilde Şekil 3.15'teki adım tepkisinden de görüyoruz ki çabuk sönmölen kısa sürede biten davranışların yakalandığı, düşük sönmölenmeye sahip olan ve uzun süre devam eden uzun periyot modun ise yakalanamadığı görölmektedir. İlk beş saniyedeki geçici durum iyi yakalanmaktadır, sonrası için model iyi değildir.



Şekil 3.15. Giriş δ_e İrtifa Dümeni Açısı (rad) ve Çıkışı w Uçağın Dikey Eksendeki Hızı (ft/s) olan Uçak Modeli için Gerçek ve Kestirilen Adım Tepkisi

Denklem 3.4'ten giriş δ_e irtifa dümeni açısı (rad) ve çıkış yunuslama açısai hızı q (rad/s) olacak şekilde $C = [0 \ 0 \ 1 \ 0]$ alındığında aktarım işlevi;

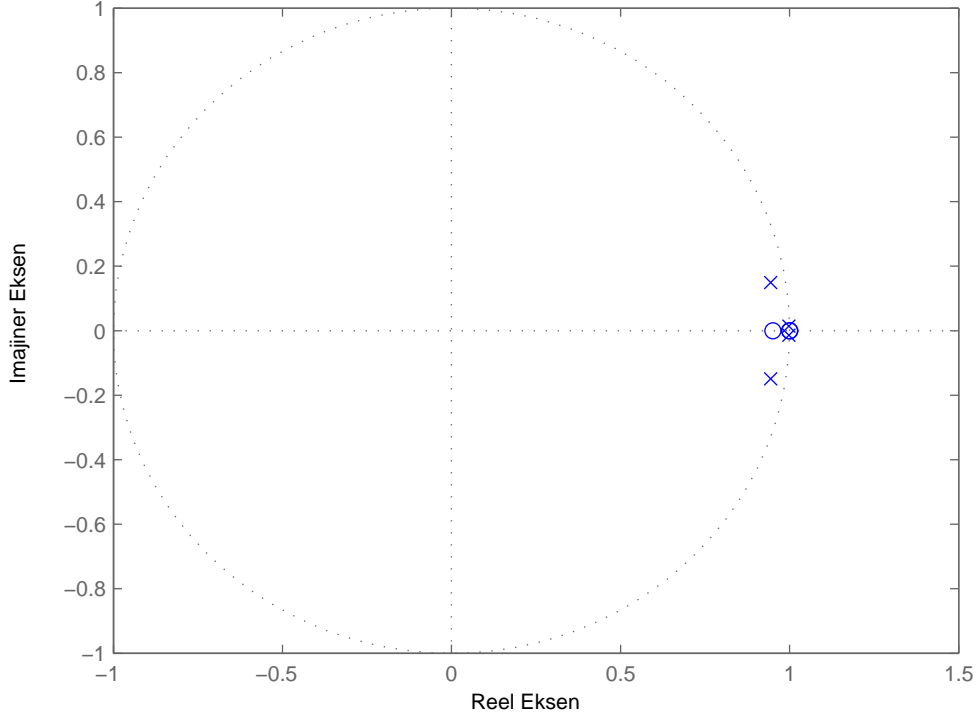
$$\frac{q(s)}{\delta_e(s)} = \frac{-4.516s^3 - 2.245s^2 + 0.01878s}{s^4 + 0.935s^3 + 2.719s^2 + 0.1071s + 0.05251} \text{rad/s/rad} \quad (3.21)$$

olarak bulunmaktadır. Bu aktarım işlevi de indirgeme yaklaşımı altında incelenmiştir. Bu sürekli zaman dinamik sistem modelini örnekleme zamanı 0.1 olarak sıfır dereceli tutucu (ZOH) yöntemi ile ayrıklaştırdığımızda elde edilen kesikli zaman, doğrusal aktarım işlevi;

$$\frac{q(z)}{\delta_e(z)} = \frac{-0.44z^3 + 1.299z^2 - 1.277z + 0.4186}{z^4 - 3.885z^3 + 5.68z^2 - 3.706z + 0.9107} \text{rad/s/rad} \quad (3.22)$$

şeklinde bulunmaktadır. Buradan elde edilen kesikli zaman kutuplar $0.9442 \pm 0.1495i$ ve $0.9982 \pm 0.0139i$ sıfırlar ise 1.0008 1.0000 ve 0.9506'dır.

Şekil 3.16'daki kutup sıfır haritasında yukarıda da bahsedilen phugoid, kısa periyot uçuş durumuna ait kökler görülmektedir.



Şekil 3.16. Giriş δ_e İrtifa Dümeni Açısı (rad) ve Çıkışı Yunuslama Açısai Hızı q (rad/s) Uçak Modeli Aktarım İşlevine ait Kutup Sıfır Grafiği

Sistemi yine 2 kutup 1 sıfır ile yaklaşık olarak modellemeye çalıştığımızdaki maksimum kanonik korelasyon katsayısı 0.9999 elde edilmektedir ve buna ait kestirilen kutup ve sıfır değerleri Çizelge 3.6'da verilmektedir.

Çizelge 3.6. Giriş δ_e (rad) Çıkış q için Kestirilen Kutup ve Sıfırlar

Kanonik Korelasyon	Kutuplar	Sıfırlar
0.9999	$0.9474 \pm 0.1472i$	0.9615

Çizelge 3.6'dan da açıkça görüldüğü gibi yüksek korelasyona ait kestirilen kutup ve sıfır değerlerinden kısa periyot köklerinin yakalandığı gözlemlenmektedir. Kanonik korelasyon analizi ile kestirilen 2 kutup, 1 sıfıra sahip aktarım işlevi Denklem 3.24'te gösterilmektedir.

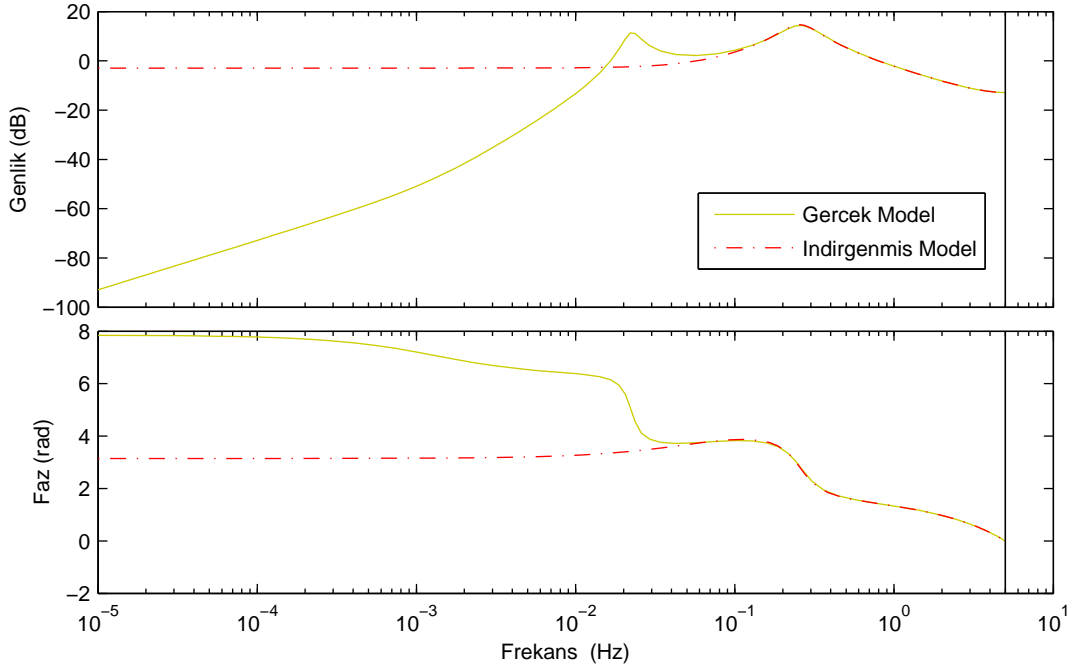
$$\frac{q(z)}{\delta_e(z)} = \frac{-0.44z + 0.4231}{z^2 - 1.895z + 0.9192} \text{rad/s/rad} \quad (3.23)$$

Bu kesikli zaman modeli ZOH yöntemi yardımı ile sürekli zamana çevirdiğimizde;

$$\frac{q(s)}{\delta_e(s)} = \frac{-4.517(s + 0.4074)}{s^2 + 0.8544s + 2.583} \text{ rad/s/rad} \quad (3.24)$$

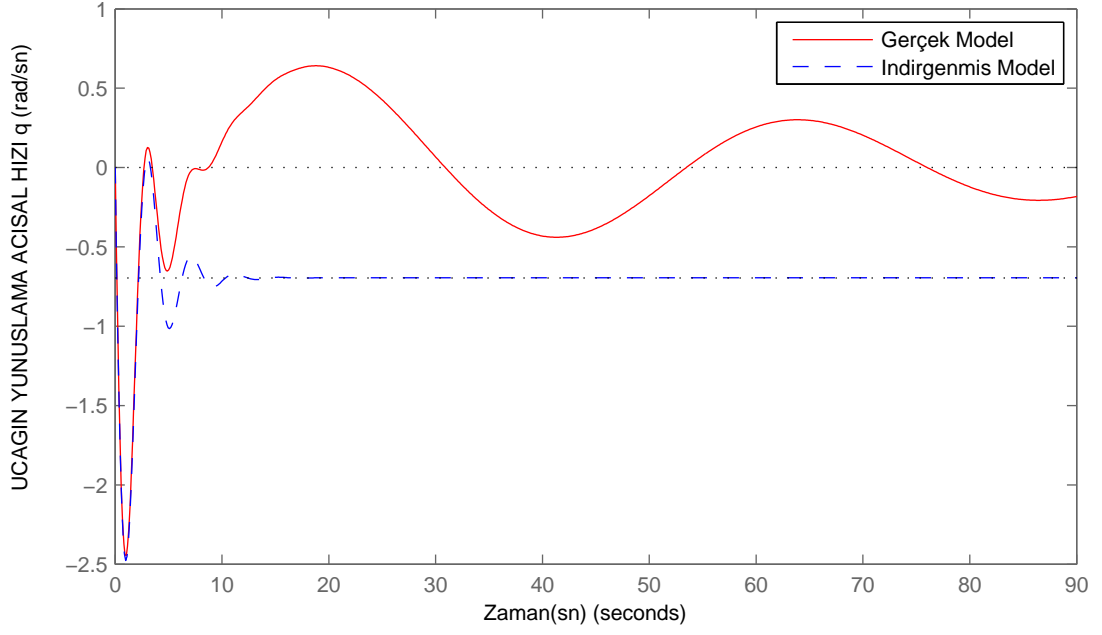
aktarım işlevi elde edilmektedir. Bu denklemin [30]'da verilen Denklem 3.16'daki aktarım işlevine yaklaşık olarak denk olduğu görülmektedir.

Bir öncekine benzer biçimde Şekil 3.17'deki bode diagramda yüksek frekans değerlerinin daha iyi yakalandığı görülmekte; bu da kısa periyot modun yakalandığını göstermektedir. Yaklaşık olarak 0.1 Hz'den yüksek frekanslarda indirgenmiş modelin gerçek model ile tam olarak örtüştüğü görülmektedir.



Şekil 3.17. Giriş δ_e İrtifa Dümeni Açısı (rad) ve Çıkışı Yunuslama Açısız Hızı q (rad/s) olan Uçak Modeli için Gerçek ve Kestirilen Bode Diagram

Şekil 3.18'deki adım tepkisinden de görüyoruz ki çabuk sönümlenen kısa sürede biten davranışlar yakalanmıştır. Düşük sönümlenmeye sahip olan ve uzun süre devam eden uzun periyot mod ise yakalanamamaktadır.

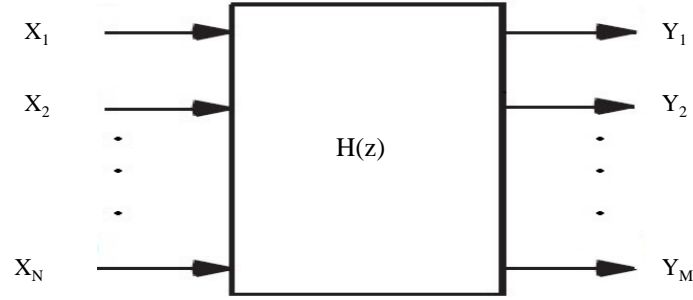


Şekil 3.18. Giriş δ_e İrtifa Dümeni Açısı (rad) ve Çıkışı Yunuslama Açısıl Hızı q (rad/s) olan Uçak Modeli için Gerçek ve Kestirilen Adım Tepkisi

Şekil 3.18'den ayrıca yaklaşık olarak ilk beş saniyede modelin çok iyi yakalandığı görülmektedir.

4. ÇOK GİRİŞLİ ÇOK ÇIKIŞLI SİSTEM TANIMA ARACI OLARAK KANONİK KORELASYON ANALİZİ

Bu kısımda çok girişli çok çıkışlı, kesikli zamanlı, doğrusal sistemlerin kanonik korelasyon analizi yöntemi kullanılarak tanınmasına yönelik bir yaklaşım sunulmaktadır. Tek girişli tek çıkışlı sistemlere benzer olarak, çok girişli çok çıkışlı sistemlerde de doğrudan sistemin giriş ve çıkış ölçümlerine bakılarak sistem tanıma işlemi gerçekleştirilmektedir. Şekil 4.1'de N girişli, M çıkışlı doğrusal bir sisteme ait genel yapı gösterilmektedir.



Şekil 4.1. Çok Girişli Çok Çıkışlı Sistem Yapısı

Denklem 4.1'de çok girişli çok çıkışlı bir sisteme ait aktarım işlevi $H(z)$ gösterilmektedir.

$$\begin{bmatrix} Y_1(z) \\ Y_2(z) \\ \vdots \\ Y_M(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}(z) & H_{12}(z) & \dots & H_{1N}(z) \\ H_{21}(z) & H_{22}(z) & \dots & H_{2N}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{M1}(z) & H_{M2}(z) & \dots & H_{NM}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(z) \\ X_2(z) \\ \vdots \\ X_N(z) \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

Bu çok girişli çok çıkışlı sistem, çok girişli tek çıkışlı M tane sistem biçiminde;

$$Y_i(z) = H_{i1}(z)X_1(z) + H_{i2}(z)X_2(z) + \dots + H_{iN}(z)X_N(z), \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (4.2)$$

ifade edilir.

Giriş ve çıkış sayısı aynı (p), giriş ve çıkışlardaki en büyük gecikme m olan çok girişli çok çıkışlı bir sistem; fark denklemleri olarak aşağıdaki formda ifade edilebilir.

$$\sum_{k=0}^m \sum_{i=1}^p b_{ik,l} y_i[n-k] = \sum_{k=0}^m \sum_{i=1}^p a_{ik,l} x_i[n-k], \quad l = 1, 2, \dots, p \quad (4.3)$$

Burada p giriş ve çıkış sayısını ve aynı zamanda fark denklemleri sayısını, m sistemdeki en büyük gecikmeyi, l fark denklemlerini ifade etmektedir. Herbirinde en fazla m gecikme olan p tane dinamik değişkenden (y_1, y_2, \dots, y_p) oluşmaktadır. Bu ifade;

$$\mathbf{B}_{i,l} = \begin{bmatrix} b_{i0,l} & b_{i1,l} & \dots & b_{im,l} \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_{i,l} = \begin{bmatrix} a_{i0,l} & a_{i1,l} & \dots & a_{im,l} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}_i = \begin{bmatrix} y_i[n] \\ y_i[n-1] \\ \vdots \\ y_i[n-m] \end{bmatrix} \quad \mathbf{X}_i = \begin{bmatrix} x_i[n] \\ x_i[n-1] \\ \vdots \\ x_i[n-m] \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

olarak alındığında,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{1,l} & \mathbf{B}_{2,l} & \dots & \mathbf{B}_{p,l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1,l} & \mathbf{A}_{2,l} & \dots & \mathbf{A}_{p,l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_p \end{bmatrix} \quad l = 1, 2, \dots, p \quad (4.5)$$

$$\mathbf{B}_l \mathbf{Y} = \mathbf{A}_l \mathbf{X} \quad l = 1, 2, \dots, p$$

bu şekilde de yazılabilir. Bu p girişli p çıkışlı sistem Denklem 4.5'teki yapıda p tane fark denklemleri ile ifade edilir. Bu ifade kanonik korelasyon analizi problemi ile bire bir aynı yapıdadır. Denklem 4.5 ve Denklem 2.21 ifadeleri karşılaştırıldığında bu benzerlik açıkça görülmektedir. Denklem 4.5'te \mathbf{Y} , $p \times (m+1)$ değişken içeren çıkış verileri; \mathbf{X} , $p \times (m+1)$ değişken içeren giriş verilerinden oluşmaktadır. Bu veri kümeleri kanonik korelasyon yöntemi içerisinde analiz edildiğinde \mathbf{B}_l , \mathbf{A}_l elde edilecektir. Bunlardan en yüksek korelasyonlu p tanesi bize, Denklem 4.5'teki fark denklemlerini tanımlayacaktır. Bu denklemlerden de çok girişli çok çıkışlı sistemlere ait aktarım

işlevleri aşağıdaki gibi elde edilebilmektedir. Denklem 4.3'teki fark denkleminin z dönüşümünü aldığımızda;

$$\sum_{k=0}^m \sum_{i=1}^p b_{ik,l} Y_i(z) z^{-k} = \sum_{k=0}^m \sum_{i=1}^p a_{ik,l} X_i(z) z^{-k}, \quad l = 1, 2, \dots, p \quad (4.6)$$

olmaktadır. Bu yapı aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\begin{bmatrix} b_{11}(z) & b_{12}(z) & \dots & b_{1p}(z) \\ b_{21}(z) & b_{22}(z) & \dots & b_{2p}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1}(z) & b_{p2}(z) & \dots & b_{pp}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1(z) \\ Y_2(z) \\ \vdots \\ Y_p(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(z) & a_{12}(z) & \dots & a_{1p}(z) \\ a_{21}(z) & a_{22}(z) & \dots & a_{2p}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1}(z) & a_{p2}(z) & \dots & a_{pp}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(z) \\ X_2(z) \\ \vdots \\ X_p(z) \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$$B(z)Y(z) = A(z)X(z)$$

$$Y(z) = B(z)^{-1}A(z)X(z)$$

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

Böylece Denklem 4.1'de gösterilen çok girişli çok çıkışlı sistem aktarım işlevi elde edilebilmektedir.

4.1 Örnekler

Örnek 1: İlk olarak bağımsız olmayan Denklem 4.8'de gösterilen fark denklemleri üzerinde çalışacağız.

$$y_1[n] = 0.5x_1[n] \quad (4.8)$$

$$y_2[n] - 0.2y_2[n-1] = 0.3x_2[n-1]$$

Bu denklemlerden elde edilen aktarım işlevi aşağıda gösterilmektedir.

$$H(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{10z-2} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

x_1 ve x_2 sanal, rastgele, normal dağılımlı giriş verileri bu fark denkleminde eşdeğer modele giriş olarak verilir. Çıkış verileri oluşturulduktan parametreler kanonik korelasyon analizi ile kestirilmeye çalışılmıştır. Kanonik korelasyon analizi sonucunda

bize iki tanesi kanonik korelasyon katsayısı 1 olan fark denklemleri kestirmiştir. Kestirilen fark denklemleri gerçek fark denklemleri ile birebir aynıdır. Bu yüzden Denklem 4.10'da gösterilen aktarım işlevi de orijinali ile aynı çıkmaktadır.

$$H_d(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{10z-2} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Kestirilen parametrelerin gerçek parametrelerle aynı olduğu gözlenmekte ve kanonik korelasyon katsayısının 1 olması fark denklemlerinin çok iyi yakalandığını doğrulamaktadır.

Örnek 2: Fark denklemleri aşağıda gösterilen 2 girişli 2 çıkışlı sistem üzerinde çalışacağız.

$$\begin{aligned} 0.3y_1[n-1] + y_2[n] - 0.3y_2[n-1] &= 0.5x_2[n-1] \\ y_1[n] &= 0.1x_1[n] \end{aligned} \quad (4.11)$$

Bu denklemlerden elde edilen aktarım işlevi aşağıda gösterilmektedir.

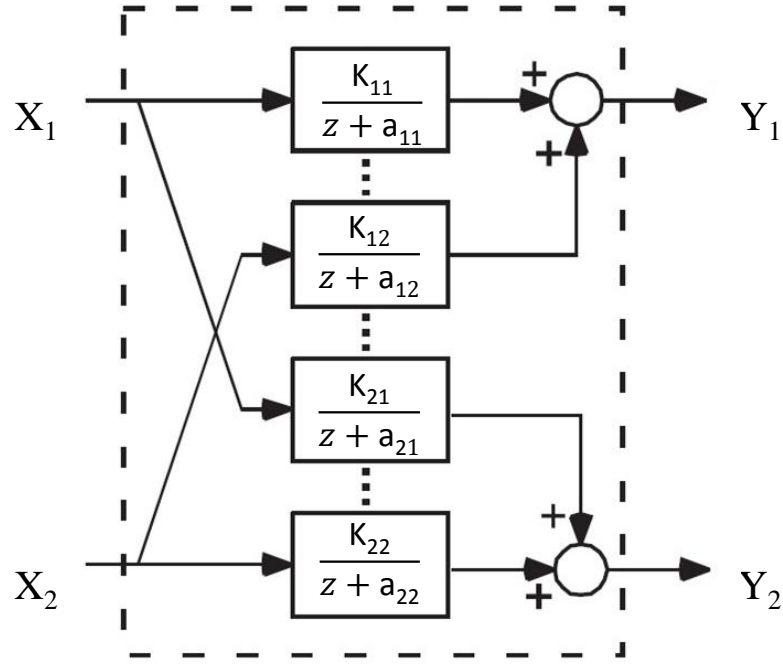
$$H(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 \\ -3 & 5 \\ \frac{1}{100z-30} & \frac{5}{10z-3} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

x_1 ve x_2 sanal, rastgele, normal dağılımlı giriş verileri bu fark denklemine eşdeğer modele giriş olarak verilir çıkış verileri oluşturulduktan parametreler kanonik korelasyon analizi ile kestirmeye çalışılmıştır. Kanonik korelasyon analizi sonucunda bize iki tanesi kanonik korelasyon katsayısı 1 olan fark denklemleri kestirmiştir. Kestirilen fark denklemleri gerçek fark denklemleri ile birebir aynıdır. Bu yüzden Denklem 4.13'te gösterilen aktarım işlevi de orijinali ile aynı çıkmaktadır.

$$H_d(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 \\ -3 & 5 \\ \frac{1}{100z-30} & \frac{5}{10z-3} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Kestirilen parametrelerin gerçek parametrelerle aynı olduğu gözlenmekte ve kanonik korelasyon katsayısının 1 olması fark denklemlerinin çok iyi yakalandığını doğrulamaktadır.

Örnek 3: Gerçek parametre değerleri Çizelge 4.1’de gösterilen Şekil 4.2 yapısındaki sistem üzerinde çalışacağız.



Şekil 4.2. Doğrusal 2 Girişli 2 Çıkışlı Sisteme ait Altsistem Parametreleri

Çizelge 4.1. 2 Girişli 2 Çıkışlı Sistem Aktarım İşlevlerine ait Gerçek Parametre Değerleri

K_{11}	K_{12}	K_{21}	K_{22}	a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}
1	3	1	1	0.8	0.5	0.2	0.5

Bir önceki örneğe benzer şekilde x_1 ve x_2 sanal, rastgele, normal dağılımlı giriş verileri Şekil 4.2 yapısına giriş olarak verilip çıkış verileri oluşturulduktan sonra bu verileri kanonik korelasyon analizine tabi tuttuğumuzda, kanonik korelasyon katsayısı bir çıkmakta ve kestirilen parametreler Çizelge 4.2’de gösterilmektedir.

Çizelge 4.2. 2 Girişli 2 Çıkışlı Sistem Aktarım İşlevlerine ait Kestirilen Parametre Değerleri

K_{11}	K_{12}	K_{21}	K_{22}	a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}
1	3	1	1	0.8	0.5	0.2	0.5

Çizelge 4.2'den parametrelerin birebir elde edildiğini ve aktarım işlevinin eksiksiz elde edildiği görülmektedir. Kanonik korelasyon analizi yönteminin çok girişli çok çıkışlı sistemlerin tanınması için önemli bir araç olduğu örneklerde görülmektedir.

5. SİSTEM TANIMA YÖNTEMİNİN GERÇEK ZAMANLI GERÇEKLEŞTİRİMİ İÇİN NÜMERİK BİR ALGORİTMA

Çalışmanın bundan önceki bölümlerinde kanonik korelasyon analizinin, doğrusal sistem tanıma aracı olarak kullanılabileceği örnekleri ile ortaya konulmaktadır. Kanonik korelasyon analizi, çeşitli kovaryans matrislerinin hesaplanması, matris tersi alınması ve özdeğer-özvektör probleminin çözülmesi gibi işlemler içermektedir. Günümüzde matematiksel analiz yazılımları ile bu işlemleri gerçekleştirmek bir problem teşkil etmese de, gerçek zamanlı bir gerçekleştirimde bu matematiksel işlemlerin hızlı ve etkin bir biçimde çözülmesi gerekliliği ortadadır. Bu anlayış içerisinde, bu bölümde önerdiğimiz sistem tanıma yönteminin gerçek zamanlı uygulanabilmesine yönelik olarak nümerik bir yaklaşım geliştirilmiştir. Geliştirilen yaklaşım, kanonik korelasyon analizinin gerektirdiği tüm matematiksel işlem yükünün yalnızca matrisvektör çarpımına ve skaler işlemlere dayanacak biçimde nümerik olarak gerçekleştirilmesine dayanmaktadır.

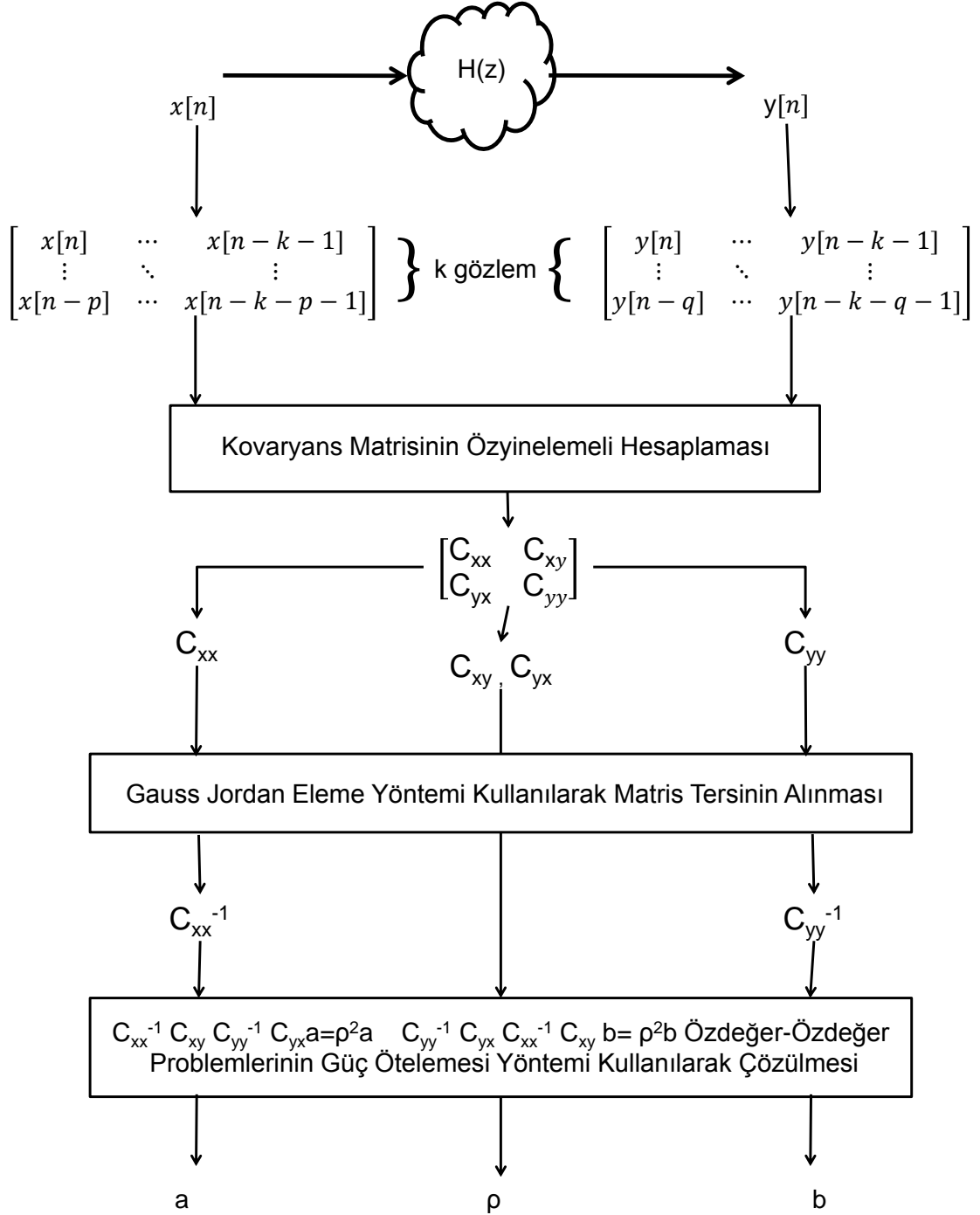
Doğrusal sistemin giriş ve çıkış verilerinden kanonik korelasyon analizi yöntemi kullanılarak Denklem 5.1'de gösterilen aktarım işlevi parametrelerinin elde edilmesi işlemi Denklem 5.2'de gösterilen bir özdeğer özvektör problemi halini almıştır.

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_p z^{-p}}{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_q z^{-q}} = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (5.1)$$

Daha önce de bahsedildiği gibi bu problemde elde edilen özvektörler sistem parametrelerini, özdeğerlerin karekökü ise ilgili parametrelerin kestirim kalitesini gösteren korelasyon katsayısını vermektedir.

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{xx}^{-1} \mathbf{C}_{xy} \mathbf{C}_{yy}^{-1} \mathbf{C}_{yx} \mathbf{a} &= \rho^2 \mathbf{a} \\ \mathbf{C}_{yy}^{-1} \mathbf{C}_{yx} \mathbf{C}_{xx}^{-1} \mathbf{C}_{xy} \mathbf{b} &= \rho^2 \mathbf{b} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Nümerik olarak bu problemin çözülmesi için adımlar Şekil 5.1'de gösterilmektedir. İlk adım sisteme ait giriş ve çıkış verilerinden oluşturulan veri matrislerinden özyinelemeli olarak kovaryans matrislerinin bulunmasıdır.



Şekil 5.1. Nümerik Yöntemlerle Sistem Tanıma Şeması

Daha sonra özyinelemeli olarak bulunan bu kovaryans matrislerinin terslerinin alınması ve son olarak da kanonik korelasyon analizi problemine eşdeğer olan özdeğer-özvektör problemlerinin nümerik olarak hesaplanması adımlarının yapılması gerekmektedir. Böylece her gelen yeni giriş ve çıkış verisinde kestirilen parametre değerleri güncellenmektedir. Ayrıca nümerik yöntemlerin kullanılması; matrisler üzerinde yapılacak kovaryans, ters alma vb. karmaşık işlemleri, sadece matris çarpım ve toplamı gibi basit bir yapıya indirgemektedir. Nümerik hesaplama yapısı zamanla değişen sistemlerin parametrelerinin kestirimi açısından da önem taşımaktadır.

5.1 Kovaryans Matrisinin Özyinelemeli olarak Hesaplanması

X skaler bir zaman serisi X_1, X_2, \dots, X_n , M_k bu zaman serisinde ilk k tanelik gözlemin ortalaması ise; yeni gözlem geldiğinde $(k + 1)$. ortalama;

$$M_{k+1} = M_k + \frac{1}{k+1}(X_{k+1} - M_k) \quad (5.3)$$

şeklinde hesaplanabilir. Benzer bir yaklaşımla, $(k+1)$ örnek üzerinden hesaplanan varyans (σ_{k+1}^2) , k . varyans ve son gözlem X_{k+1} cinsinden;

$$\sigma_{k+1}^2 = \sigma_k^2 + \frac{1}{k+1} \left[\frac{k}{k+1} (X_{k+1} - M_k)^2 - \sigma_k^2 \right] \quad (5.4)$$

şeklinde yinelemeli olarak formüle edilir [37].

X vektörel bir zaman serisi olarak alındığında, özyineleme formu korunurken, kovaryans matrisini özyinelemeli olarak hesaplamak için;

$$\mathbf{C}_{k+1} = \frac{k}{k-1} \left[\frac{k-2}{k-1} \mathbf{C}_k + \frac{1}{k} \left[\frac{k-1}{k} (\mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{M}_k)(\mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{M}_k)^T - \frac{k-2}{k-1} \mathbf{C}_k \right] \right] \quad (5.5)$$

ifadesi kullanılabilir. Bu özyinelemeli formülasyon kullanılarak, kanonik korelasyon için gerekli \mathbf{C}_{xx} , \mathbf{C}_{xy} , \mathbf{C}_{yx} , \mathbf{C}_{yy} kovaryans matrisleri her bir yeni gözlem anında hızlı bir biçimde güncellenebilirler.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{xx} & \mathbf{C}_{xy} \\ \mathbf{C}_{yx} & \mathbf{C}_{yy} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

5.2 Gauss Jordan Eleme Yöntemi Kullanılarak Matris Tersinin Alınması

Kovaryans matrisleri hesaplandıktan sonra ikinci adım bulunan \mathbf{C}_{xx} ve \mathbf{C}_{yy} kovaryans matrislerinin terslerinin hesaplanmasıdır. Bunun için etkin bir yöntem olan Gauss Jordan Eleme yöntemi kullanılmıştır. $n \times n$ 'lik bir \mathbf{A} matrisinin tersini alma problemi, \mathbf{A} matrisinin tersi bir bilinmeyen \mathbf{X} gibi düşünüldüğünde, Denklem 5.7'de görülen n tane doğrusal denklem sistemi çözme problemine eşdeğer olmaktadır. \mathbf{I} birim matrisini, $\mathbf{i}_{1,2,\dots,n}$ birim matrisin sütun vektörlerini, $\mathbf{x}_{1,2,\dots,n}$ ise \mathbf{A} matrisinin tersinin sütun vektörlerini göstermektedir.

$$\mathbf{AX} = \mathbf{I} \quad (5.7)$$

$$\mathbf{Ax}_1 = \mathbf{i}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Ax}_2 = \mathbf{i}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots \quad \mathbf{Ax}_n = \mathbf{i}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Denklem 5.7'teki eşitliklerin herbiri Gauss Jordan Eleme Yöntemi ile çözüldüğünde matrisin tersi elde edilmektedir. Gauss Jordan Eleme Yöntemi, doğrusal denklem sisteminin daha kolay çözülecek hale getirilmesini sağlamaktadır. Denklem 5.7, Denklem 5.8 haline getirildiğinde Denklem 5.9'da gösterildiği gibi çözüm değişmemektedir [38].

$$\mathbf{MAx}_i = \mathbf{Mi}_i \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}_{n-1} \dots \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1 \quad (5.8)$$

$$\mathbf{x}_i = (\mathbf{MA})^{-1} \mathbf{Mi}_i = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{Mi}_i = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{i}_i \quad (5.9)$$

Gauss Jordan'ın amacı matris çarpımı \mathbf{MA} 'nın Denklem 5.10'da görüldüğü gibi köşegen yapıya getirilip, sadece bölme işlemleri ile \mathbf{X} 'in bileşenlerinin kolayca bulunmasıdır. Böylece \mathbf{A} matrisinin tersi kolayca bulunabilmektedir.

$$\mathbf{M}_{n-1} \cdots \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1 \mathbf{A} = \mathbf{MA} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{(n-1)(n-1)} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (5.10)$$

A matrisinin sütun vektörlerinin bu yapıya dönüştürülmesi için Denklem 5.10'daki dönüşüm yapılmaktadır. Bu dönüşümün olabilmesi için **M** matrisleri Denklem 5.11 yapısında alınmaktadır.

$$\mathbf{M}_k \mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & -m_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -m_{k-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -m_{k+1} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -m_n & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n} \begin{bmatrix} a_{k1} \\ \vdots \\ a_{k(k-1)} \\ a_{kk} \\ a_{k(k+1)} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{bmatrix}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{kk} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{n \times 1} \quad (5.11)$$

$$m_i = a_{ki}/a_{kk}, \quad i = k + 1, \dots, n$$

Genel doğrusal sistem denklemini $\mathbf{Ax}_i = \mathbf{i}_i$ 'nin köşegen forma çevrilmesi için öncelikle **M**₁ ; **A** matrisinin ilk sütununun ilk satırı hariç, ilk sütunun hepsi sıfır olacak şekilde seçilmektedir. Böylece sistem $\mathbf{M}_1 \mathbf{Ax}_i = \mathbf{M}_1 \mathbf{i}_i$ haline gelmekte ve çözüm değişmemektedir. Daha sonra **M**₂ ; **A** matrisinin ikinci sütunun ikinci sırası hariç, ikinci sütunun hepsi sıfır olacak şekilde seçilmektedir. Bu da aynı şekilde sistemi $\mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1 \mathbf{Ax}_i = \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1 \mathbf{i}_i$ haline getirmekte ve yine sistem çözümü değişmemektedir. Bu işlem her sütun için, **A** matrisi köşegen yapıya gelene kadar devam etmektedir. Sonuçta oluşan köşegen matrisi;

$$\mathbf{M}_{n-1} \cdots \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1 \mathbf{Ax}_i = \mathbf{M}_{n-1} \mathbf{M}_2 \cdots \mathbf{M}_1 \mathbf{i}_i \quad (5.12)$$

kolaylıkla çözümü bulunacak hale getirilmiştir. Bu andan itibaren **X**, **A** matrisinin tersi sadece bölme işlemleri ile kolayca elde edilmektedir [38].

5.3 Özdeğer-Özvektör Problemlerinin Güç Ötelemesi Yöntemi ile Çözülmesi

Son adım olarak Denklem 5.2'de gösterilen özdeğer-özvektör probleminin güç öteleme/yineleme yöntemi kullanılarak çözülmesi ele alınmaktadır. güç öteleme yöntemi özvektör ve özdeğerleri bulunacak matrisin rastgele bir başlangıç vektörü ile tekrar tekrar çarpılması ile matrise ait tek bir özdeğer-özvektör çiftinin bulunmasını sağlayan temel bir yöntemdir [38].

Yineleme sıfırdan farklı rastgele bir vektör \mathbf{x}_0 ile başlayarak, Denklem 5.13 görüldüğü gibi yinelenmeye sokulmaktadır.

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1} \quad (5.13)$$

Yeterli yinelemeden sonra elde edilen \mathbf{x}_k baskın özdeğere ait özvektörü, \mathbf{x}_k vektörünün büyüklüğünün (normunun), bir önceki \mathbf{x}_{k-1} değerinin büyüklüğüne oranı ise baskın özdeğeri vermektedir.

Hesaplanan bileşenlerin her bir yinelemede geometrik büyümesi olası üsttaşma ya da alttaşma riskine neden olmaktadır. Bu yüzden her bir yinelemede kestirilen özvektörler aşağıdaki gibi normalize edilmektedir.

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_k &= \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1} \\ \mathbf{x}_k &= \mathbf{y}_k / \|\mathbf{y}_k\|_\infty \end{aligned} \quad (5.14)$$

\mathbf{A} simetrik ve pozitif belirli bir matris ise;

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y}_k\|_\infty &\rightarrow \lambda_{max}(\mathbf{A}) \\ \mathbf{x}_k &\rightarrow \text{ozvektor}(\lambda_{max}) \end{aligned} \quad (5.15)$$

şeklinde olur. Güç Ötelemesi Yöntemi uygulanarak $\mathbf{C}_{xx}^{-1}\mathbf{C}_{xy}\mathbf{C}_{yy}^{-1}\mathbf{C}_{yx}$ ve $\mathbf{C}_{yy}^{-1}\mathbf{C}_{yx}\mathbf{C}_{xx}^{-1}\mathbf{C}_{xy}$ matrislerine ait özdeğer ve özvektör değerleri hesaplanmaktadır. Bu yineleme kanonik korelasyon analizi için en anlamlı özdeğere yani baskın özdeğere ve ona ait özvektöre yakınsamaktadır. Baskın özdeğer en yüksek kanonik korelasyonu, bu özdeğere ait özvektör ise kanonik katsayıları vermektedir. Farklı manipülasyonlar yapılarak baskın özdeğerden geriye kalan özdeğer-özvektör çiftleri de güç öteleme

yöntemi ile bulunabilmektedir.

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_p z^{-p}}{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_q z^{-q}} = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (5.16)$$

5.4 Örnekler

Bahsedilen nümerik doğrusal sistem tanıma algoritmasının başarımını göstermek için benzetim işlemlerinde parametreleri ani değişen sistemlere ait parametre kestirimi üzerinde durulmuştur.

Örnek 1: Aktarım işlevi Denklem 5.17 yapısında bir sistemin değişen parametrelerinin gerçek değerleri Çizelge 5.1'de gösterilmiştir.

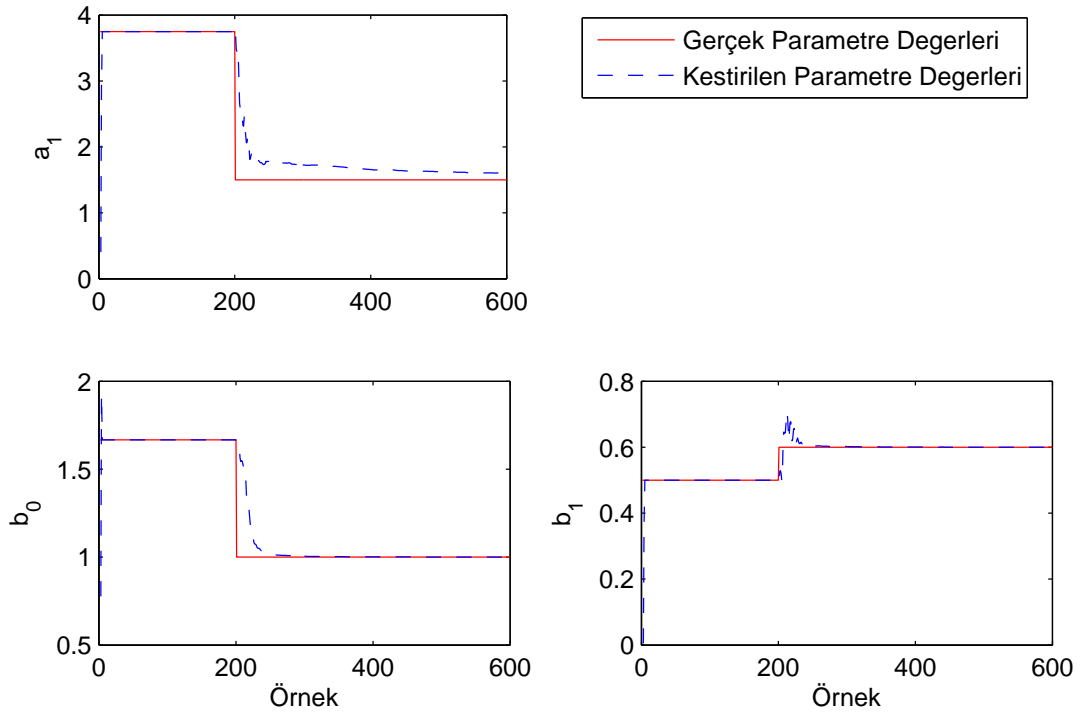
$$H(z) = \frac{a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}} \quad (5.17)$$

Sisteme giriş olarak normal dağılımlı rastgele bir sinyal alınmıştır ve durum uzay denklemleri ile çıkışlar elde edilmektedir. Her yineleme sırasında parametreler kestirilmektedir.

Çizelge 5.1. Parametreleri Ani Değişen Sisteme Ait a_1 , a_2 , b_0 , b_1 , b_2 Gerçek Parametre Değerleri

	a_1	a_2	b_0	b_1	b_2
200 örnekten önce	3.75	1	1.66	0.5	1
200 örnekten sonra	1.5	1	1	0.6	1

Kestirim sırasında 5.16'daki a_p ve b_q parametreleri 1 değerini alacak şekilde parametreler normalize edilmiştir, bu yüzden Şekil 5.2 kestirilen a_2 ve b_2 parametreleri yer almamaktadır ve 1 olarak kabul edilmektedir.



Şekil 5.2. Parametreleri Ani Değişen Sisteme Ait a_1 , a_2 , b_0 , b_1 , b_2 Kestirilen Parametreler

Kestirilen parametrenin gerçek parametreyi takip edebildiği grafikte açıkça görülmektedir.

Örnek 2: Benzetim için Denklem 5.18 yapısında farklı bir sistem ele alınmıştır.

$$H(z) = \frac{a_2 z^{-2}}{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}} \quad (5.18)$$

Bu sisteme ait aktarım işlevi parametrelerinin gerçek değerleri Çizelge 5.2'de verilmiştir.

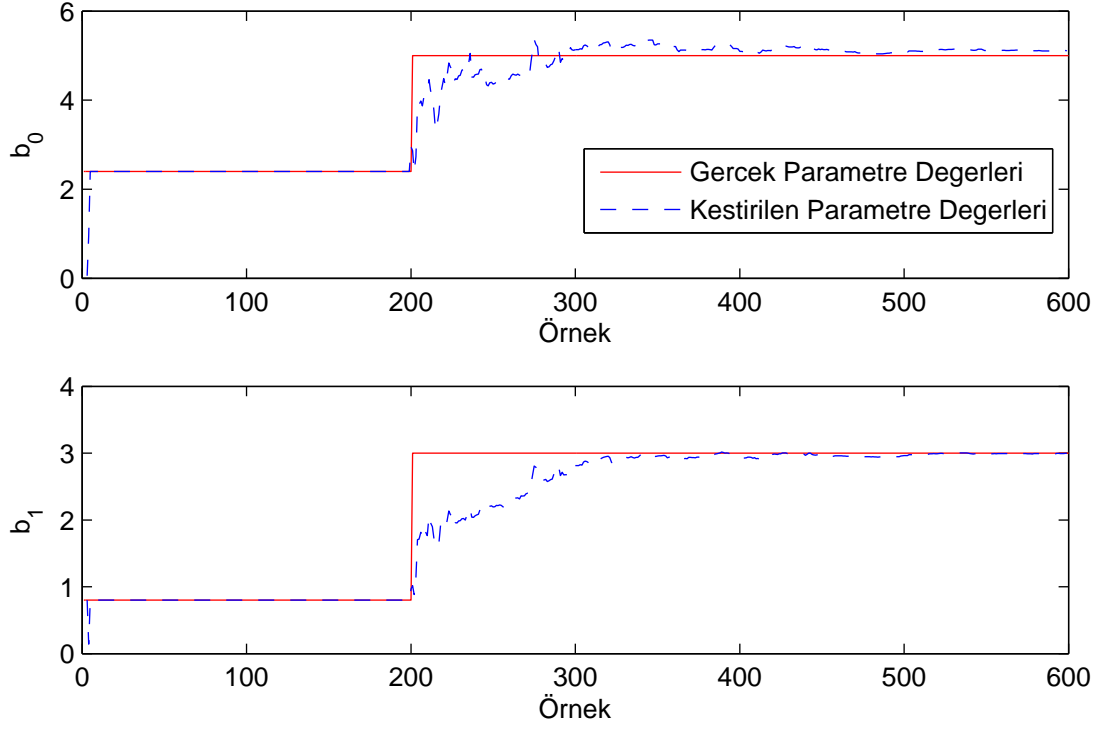
Çizelge 5.2. Parametreleri Ani Değişen Sisteme Ait a_2 b_0 b_1 b_2 Gerçek Parametre Değerleri

	a_2	b_0	b_1	b_2
200 örnekten önce	1	2.4	0.8	1
200 örnekten sonra	1	5	3	1

Sisteme giriş olarak normal dağılımlı rastgele bir sinyal alınmıştır ve durum uzay

denklemleri ile çıkışlar elde edilmektedir. Her yineleme sırasında parametreler kestirilmektedir.

Kestirilen a_2 ve b_2 'ye göre parametreler normalize edildiği için Şekil 5.3'te yer almaktadır ve 1 olarak kabul edilmektedir. Gerçek parametre değerleri ve kestirilen parametre değerleri Şekil 5.3'te gösterilmektedir.



Şekil 5.3. Parametreleri Ani Değişen Sisteme Ait a_2 b_0 b_1 b_2 Kestirilen Parametreler

Bir önceki örneğe benzer şekilde kestirilen parametreler gerçek parametreleri yakalamaktadır.

Örnek 3: Benzetim için aktarım işlevi Denklem 5.19 yapısında olan farklı bir sistem daha ele alınmıştır

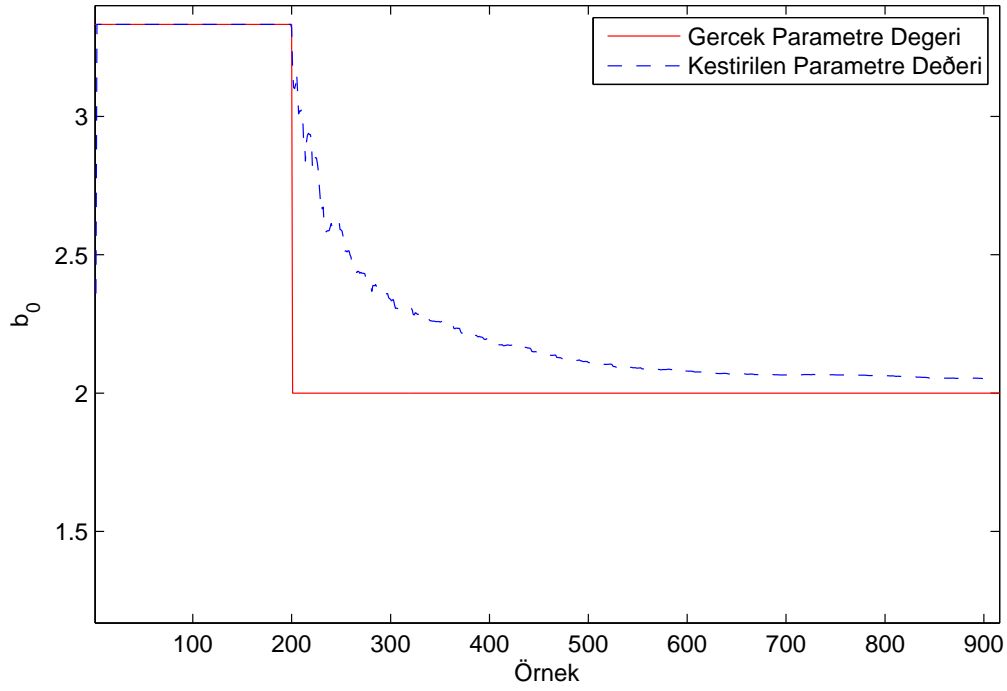
$$H(z) = \frac{a_1 z^{-1}}{b_0 + b_1 z^{-1}} \quad (5.19)$$

Bu sisteme ait aktarım işlevi parametrelerinin gerçek değerleri Çizelge 5.3'te verilmiştir.

Çizelge 5.3. Parametreleri Ani Değişen Sisteme Ait a_1 b_0 b_1 Gerçek Parametre Değerleri

	a_1	b_0	b_1
200 örnekten önce	1	3.333	1
200 örnekten sonra	1	2	1

Gerçek parametre değerleri ve kestirilen parametre değerleri Şekil 5.4'te gösterilmektedir.



Şekil 5.4. Parametreleri Ani Değişen Sisteme Ait a_1 b_0 b_1 Kestirilen Parametreler

Kestirilen a_1 ve b_1 'a göre parametreler normalize edildiği için Şekil 5.4 yer almamaktadır ve 1 olarak kabul edilmektedir. Bir önceki örneklere benzer şekilde kestirilen parametreler gerçek parametreleri takip etmektedir.

6. SONUÇLAR

Bu çalışmada, istatistiksel analiz yöntemleri arasında önemli bir yere sahip olan kanonik korelasyon analizi yöntemi bir sistem tanıma aracı olarak önerilmiştir. Bir sistemden elde edilen deneysel verilerin kanonik korelasyon yöntemi içerisinde kullanılarak doğrusal, kesikli zaman aktarım işlevi parametre kestirimi yapılmasına dair bir çerçeve geliştirilmiş ve bu yaklaşımın çeşitli yönleri çalışılmıştır.

Kanonik korelasyon analizi yöntemi çalışmada ayrıntılarıyla verilmiş ve sistem tanıma için yöntemin uygunluğu matematiksel olarak ifade edilmiştir. Kanonik korelasyon analizinin üzerinde çalıştığı problem ve sistem tanıma problemi arasındaki benzerlikler gösterilmiştir. Özdeğer özvektör problemine eşdeğer olan Kanonik korelasyon analizi yönteminden elde edilen özvektörlerin kesikli zaman sistemlerin aktarım işlevi parametrelerini verdiği, özdeğerin karekökünün ise belirlenen modelin geçerliliğinin bir ölçütü olduğu ortaya konulmuştur.

Önerilen yöntem tek girişli tek çıkışlı kesikli zaman sistem aktarım işlevi parametrelerinin kestiriminde, çok girişli çok çıkışlı kesikli zaman sistem aktarım işlevi parametrelerinin kestiriminde kullanılmıştır. Ayrıca, kesikli zaman sistem yapısının kestirimi ve model indirgeme çalışmalarına da yer verilmiştir. Yöntem nümerik hale getirilmiş ve parametreleri değişen sistemler üzerinde de kullanılmıştır.

Uygulamalar sırasında su tankından elde edilen veriler ve benzetim ortamında oluşturulan modellerden elde edilen veriler kullanılmıştır. Öncelikle tek girişli tek çıkışlı kesikli zamanlı sistemlerin aktarım işlevinin kestirilmesi için kanonik korelasyon analizi kullanılmıştır. Su tankı sistemini tanıma uygulamasında farklı dereceler için kestirimler yapılmıştır. Kanonik korelasyon katsayısı ile yüzde bağıl hata arasında paralellik gözlenmiştir. Bu da korelasyon katsayısının kestirdiğimiz sistem modelinin geçerliliğini gösteren bir ölçüt olarak kullanılabileceğini kanıtlar niteliktedir. Korelasyonun artması ile beraber kestirimin iyi sonuç vermesi bize sistem model yapısının kestirilebileceği fikrini vermiştir. Buna paralel olarak korelasyonun yüksek olduğu sistemin gerçek derecesinden daha düşük derecelerde kestirimler yapılarak; önerdiğimiz yaklaşımın model indirgemedede de kullanılabilmesi uygulamalarla gösterilmiştir. Tek girişli-tek çıkışlı, kesikli zamanlı sistemlerin aktarım işlevlerinin kestirilmesine benzer şekilde çok girişli-çok çıkışlı, kesikli zamanlı sistem aktarım işlevi parametrelerinin kestirimi problemi de incelenmiş ve örneklerle sunulmuştur. Ayrıca sistem

tanıma yönteminin gerçek zamanlı gerçekleştirimi için nümerik bir algoritma geliştirilmiş, parametreleri değişen sistemler üzerinde de kestirimin başarımının iyi olduğu gözlemlenmiştir. Sonuç olarak analitik ve deneysel uygulamalar, doğrusal model tanıma açısından kanonik korelasyon analizinin etkin bir yöntem olarak kullanılabilirliğini ortaya koymuştur.

Gelecek çalışmalarda, bu yöntem doğrusal olmayan modeller üzerinde de incelenebilir ve geliştirilebilir. Yöntemin gerçek zamanlı sistemlerde çevrimiçi kullanılması sağlanabilir. Deterministik modellerin yanı sıra stokastik modeller üzerinde de çalışılabilir. Ayrıca, kullandığımız yöntemin başarımı, mevcut kullanılan sistem tanıma yöntemleri ile kıyaslanabilir.

KAYNAKLAR

- [1] L. Ljung, Ed., *System identification (2nd ed.): Theory for The User*. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice Hall PTR, **1999**.
- [2] L. Ljung ve T. Söderström, *Theory and Practice of Recursive Identification*, ser. MIT Press series in signal processing, optimization, and control. MIT Press, **1985**.
- [3] T. Soderstrom ve P. Stoica, *System Identification*, ser. Prentice Hall International Series In Systems And Control Engineering. Prentice Hall, **1989**.
- [4] P. van Overschee ve L. de Moor, *Subspace Identification for Linear Systems: Theory, Implementation, Applications*. Kluwer Academic Publishers, **1996**, no. v. 1.
- [5] R. Toth, *Modeling and Identification of Linear Parameter-Varying Systems*, ser. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer, **2010**.
- [6] D. Xue, Y. Chen, ve D. P. Atherton, *Linear Feedback Control: Analysis and Design with MATLAB*, ser. Advances in design and control. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, **2007**.
- [7] S. M. Kay, *Modern Spectral Estimation Theory and Application*. Prentice Hall, **1988**, ch. 5, pp. 106–138.
- [8] H. Hotelling, "Relations Between Two Sets of Variates," *Biometrika*, vol. 28, no. 3/4, pp. 321–377, Dec. **1936**.
- [9] W. K. Härdle ve L. Simar, *Applied Multivariate Statistical Analysis*, 2nd ed. Springer, **2003**.
- [10] S. Kiaei ve L. Luo, "Canonical correlation analysis (cca) for arma spectral estimation," in *Circuits and Systems, 1989., IEEE International Symposium on*, may **1989**, pp. 1319 –1322 vol.2.
- [11] A. Lindquist ve G. Picci, "Canonical correlation analysis, approximate covariance extension, and identification of stationary time series," *Automatica*, vol. 32, pp. 709–733, **1996**.
- [12] M. Köroğlu, "İyonosfer dinamiğinin analizi ve model tanıma çalışmaları," Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi, **2012**.
- [13] C. Heij ve B. Roorda, "A modified canonical correlation approach to approximate state space modelling," in *Decision and Control, 1991., Proceedings of the 30th IEEE Conference on*, dec **1991**, pp. 1343 –1348 vol.2.
- [14] K. G. Toker ve Y. Özkazanç, "Identification of linear systems via canonical correlation analysis," in *Signal Processing and Communications Applications Conference (SIU), 2013 21st*. IEEE, **2013**.
- [15] J. F. Hair, R. L. Tatham, R. E. Anderson, ve W. Black, *Multivariate Data Analysis (5th Edition)*, 5th ed. Prentice Hall, March **1998**.

- [16] K. Yang ve J. Trewn, *Multivariate Statistical Methods in Quality Management*, ser. McGraw-Hill engineering reference. McGraw-Hill Education, **2004**.
- [17] A. C. Rencher, *Methods of Multivariate Analysis*, 2nd ed. John Wiley & Sons, **2002**.
- [18] H. Tatlıdil, *Uygulamalı Çok Değişkenli İstatistiksel Analiz*. Akademi Matbaa, **2002**.
- [19] M. Borga, "Learning multidimensional signal processing," Doktora Tezi, Linköping University, Sweden, **1998**.
- [20] J. R. Kettenring, "Canonical analysis of several sets of variables," *Biometrika*, vol. 58, no. 3, pp. pp. 433–451, **1971**.
- [21] A. J. Izenman, *Modern Multivariate Statistical Techniques : Regression, Classification, and Manifold Learning*, ser. Springer Texts in Statistics. Springer New York, **2008**.
- [22] K. Özdamar, *Paket Programlar ile İstatistiksel Veri Analizi*. Kaan Kitabevi, **1999**, ch. 12, pp. 421–428.
- [23] J. Stevens, *Applied Multivariate Statistics for The Social Sciences*. L. Erlbaum Associates Inc., **1986**.
- [24] T. W. Anderson, *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*, 3rd ed., ser. Wiley series in probability and mathematical statistics. New York, NY: Wiley, **2003**.
- [25] K. Varmuza ve P. Filzmoser, *Introduction to Multivariate Statistical Analysis in Chemometrics*. Boca Raton, FL: CRC Press, **2009**.
- [26] M. Bilodeau, D. Brenner, ve M. Bilodeau, "Theory of multivariate statistics," **1999**.
- [27] K. Ogata, *Discrete-Time Control Systems*. Prentice Hall, **1995**.
- [28] H. J. Bessai, *Mimo Signals and Systems*. Springer-Verlag GmbH, **2005**.
- [29] E. Kıyak, A. Kahvecioğlu, ve G. İyibakanlar, "Uçak eyleyici arızasının tespiti, yalıtımı ve sistemin yeniden yapılandırılması," *Uludağ Üniversitesi Mühendislik-Mimarlık Fakültesi Dergisi*, vol. 15, no. 1, **2010**.
- [30] M. V. Cook, *Flight Dynamics Principles*, 2nd ed. Amsterdam: Elsevier, **2007**, pp. 155–160.
- [31] R. C. Nelson, *Flight Stability and Automatic Control*, 2nd ed. McGraw-Hill Companies, **1998**, ch. 4, pp. 147–150.
- [32] D. Allerton, *Principles of Flight Simulation*. United Kingdom: John Wiley and Sons, **2009**.
- [33] *DTS200 Laboratory Setup Three Tank System Manual*, **2002**.

- [34] Ş. Kumbay, "Model dayanaklı uyarlamalı denetim uygulamaları," Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi, **2006**.
- [35] Ç. Yavuzıılmaz, "Kısıtlı süreklı zaman öngörölü denetim," Doktora Tezi, Hacettepe Üniversitesi, **2006**.
- [36] Y. Zhu, *Multivariable System Identification For Process Control*. Elsevier Science, **2001**.
- [37] F. L. Lewis, *Optimal Estimation: with An Introduction to Stochastic Control Theory*, ser. A Wiley-interscience publication. Wiley, **1986**.
- [38] M. T. Heath, *Scientific Computing An Introductory Survey*, 2nd ed. McGraw Hill, **2002**.

EKLER

EK 1: TÜRKÇE-İNGİLİZCE TERİMLER SÖZLÜĞÜ

Adım Tepkisi	:	Step Response
Aktarım İşlevi	:	Transfer Function
Alt Sistem	:	Subsystem
Alttaşma	:	Underflow
Analiz	:	Analysis
Ayırma Analizi	:	Discriminant Analysis
Bağlaşım	:	Coupling
Başarım	:	Performance
Benzetim	:	Simulation
Birleşim	:	Combination
Bozaretken	:	Disturbance
Çıkış	:	Output
Çok Değişkenli Varyans Analizi	:	Multivariate Analysis of Variance
Denetleç	:	Controller
Dikey Hareket	:	Longitudinal Motion
Dizi	:	Sequence
Doğrusal	:	Linear
Dürtü İşlevi (Tepkisi)	:	Impulse Function (Response)
Eleme	:	Elimination
Faz	:	Phase
Frekans	:	Frequency
Genlik	:	Amplitude
Giriş	:	Input
Güç Ötelemesi Yöntemi	:	Power Iteration Method
İlintili	:	Correlated
İlintisiz	:	Uncorrelated
İndirgeme	:	Reduction

İstatistiksel	:	Statistical
İşlev	:	Function
İzge	:	Spectrum
Kanonik Değişkenler	:	Canonical Variables
Kanonik Korelasyon Analizi	:	Canonical Correlation Analysis
Kanonik Korelasyon Katsayısı	:	Canonical Correlation Coefficient
Kanonik Kökler	:	Canonical Roots
Kararlı	:	Stable
Karmaşık	:	Complex
Kaydırma	:	Shift
Kısa Periyot	:	Short Period
Kestirim	:	Estimation
Kesikli Zaman	:	Discrete Time
Kerte	:	Rank
Kutup	:	Pole
Kümeleme Analizi	:	Clustering Analysis
Matris	:	Matrix
Nedensellik	:	Causality
Ortalama Hata	:	Mean Square Error
Ölçek	:	Scale
Öngörü	:	Prediction
Örnek	:	Sample
Özdeğer	:	Eigenvalue
Özvektör	:	Eigenvector
Özyineleme	:	Iteration
Regresyon Analizi	:	Regression Analysis
Sapma	:	Yaw
Sıfır Derece Tutucu	:	Zero Order Hold
Sıfır	:	Zero
Sürekli Zaman	:	Continuous Time
Taban	:	Base
Tekil	:	Singular

Tekil Olmayan	:	Nonsingular
Temel Bileşenler Analizi	:	Principle Component Analysis
Tepki	:	Response
Türevsel	:	Differential
Üsttaşma	:	Overflow
Yakınsama	:	Converge
Yaklaşıklık	:	Approximation
Vektör	:	Vector
Yatış	:	Roll
Yunuslama	:	Pitch

ÖZGEÇMİŞ

Kimlik Bilgileri

Adı Soyadı: Kemal Gürkan TOKER

Doğum Yeri: Denizli

Medeni Hali: Bekar

E-posta: kgtoker@ee.hacettepe.edu.tr

Adresi: Beytepe Öğrenci Evleri D Blok 117 Beytepe / ANKARA

Eğitim

Lise: Denizli Anadolu Lisesi, DENİZLİ

Lisans: Hacettepe Üniversitesi Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü, ANKARA

Yabancı Dil ve Düzeyi

İngilizce : Çok iyi

Almanca : Başlangıç

İş Deneyimi

Şubat 2011-Eylül 2011 : Araştırmacı, Modelleme ve Benzetim Birimi, Tübitak SAGE, ANKARA

Eylül 2011-... : Araştırma Görevlisi, Hacettepe Üniversitesi Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü, ANKARA

Deneyim Alanları

Görüntü İşleme, Denetim Sistemleri Tasarımı, Java Yazılım

Tezden Üretilmiş Projeler ve Bütçesi

Tezden Üretilmiş Yayınlar

Kanonik Korelasyon Analizi ile Doğrusal Sistem Tanıma, *K. G. Toker, Y. Özkazanç*,
SIU2013

Tezden Üretilmiş Tebliğ ve/veya Poster Sunumu ile Katıldığı Toplantılar

SIU2013 IEEE Sinyal İşleme ve İletişim Uygulamaları Kurultayı, Girne