AÇIK ÖRTÜ SINIFLARINA DAYALI ÖZELLİKLER ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

A STUDY ON PROPERTIES BASED UPON THE CLASSES OF OPEN COVERS

NECATİ CAN AÇIKGÖZ

DOÇ. DR. SEÇİL TOKGÖZ

Tez Danışmanı

Hacettepe Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin

Matematik Anabilim Dalı için Öngördüğü

YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırlanmıştır.

2021

ÖZET

AÇIK ÖRTÜ SINIFLARINA DAYALI ÖZELLİKLER ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Necati Can AÇIKGÖZ

Yüksek Lisans, Matematik Bölümü

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Seçil TOKGÖZ

Haziran 2021, 56 sayfa

Bu tez çalışmasının amacı, sonsuz kombinatorik topoloji ya da matematikte seçme prensipleri olarak adlandırılan teori üzerine bir derleme yapmak ve reellerin kümeleri ile Menger Konjektürü arasındaki ilişkileri incelemektir.

Tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde seçme prensipleri ile ilgili yapılan çalışmalardan kısaca bahsedilmiş ve tezin konusu hakkında bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde, tez çalışmasında kullanılacak olan genel tanım, kavram ve sonuçlar verilmiştir. Üçüncü bölümde, örtü sınıfları ve temel seçme prensipleri tanıtılmış, Menger ve Hurewicz Konjektürleri verilerek aralarındaki ilişkiler incelenmiştir. Dördüncü bölümde, reellerin kümelerinden ve birbirleri arasındaki ilişkilerden bahsedilerek, bu kümelerin kardinalleri ile temel seçme prensipleri arasındaki ilişkiler irdelenmiştir. Son olarak beşinci bölümde ise, Luzin ve skale kümeler gibi bazı özel kümelerin hangi koşullar altında inşa edilebileceğinden bahsedilmiş ve Menger Konjektürü'ne ters örnek olan bu kümeler tanıtılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Menger Konjektürü, σ-kompakt, örtü, kardinal, seçme prensipleri, Menger, Hurewicz, Lindelöf.

ABSTRACT

A STUDY ON PROPERTIES BASED UPON THE CLASSES OF OPEN COVERS

Necati Can AÇIKGÖZ

Master of Science, Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Seçil TOKGÖZ

June 2021, 56 pages

The aim of this thesis is to make a compilation on the theory named as infinite combinatorial topology or the selection principles in mathematics and to investigate the relations between the sets of reals and Menger Conjecture.

This thesis consists of five chapters. In the first chapter, the studies about selection principles are briefly mentioned and the informations about the topic of the thesis are given. In the second chapter, the general definitions, concepts and results will be used in the thesis are given. In the third chapter, the classes of covers and classical selection principles are presented, the Conjectures of Menger and Hurewicz are given and the relations between them investigated. In the fourth chapter, the sets of reals and relations between them are mentioned, the relations between the cardinals of the sets of reals and classical selection principles are scrutinized. Finally, in the fifth chapter, it is mentioned under what conditions some special sets like Lusin and scale sets can be constructed and those ones which are counter examples to Menger Conjecture are introduced.

Keywords: Menger Conjecture, σ-compact, cover, cardinal, selection principles, Menger, Hurewicz, Lindelöf.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\bigcup \mathcal{F}$	$\mathcal{F}$ kümeler ailesinin tüm elemanlarının birleşimi
$\bigcap \mathcal{F}$	$\mathcal{F}$ kümeler ailesinin tüm elemanlarının arakesiti
$\mathcal{O}$	Bir topolojik uzayın açık örtülerinin ailesi
$\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$	Doğal sayılar kümesinin tüm sonlu dizilerinin ailesi
$\mathbb{N}^n$	Doğal sayılar kümesinin n uzunluğundaki dizilerinin ailesi
$\prod\limits_{\alpha\in I} X_\alpha$	$\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ kümeler ailesinin kartezyen çarpımı
$\forall_n^\infty$	Sonlu sayıda n dışındaki tüm n'ler için
$\exists_n^\infty$	Sonsuz sayıda n için
C	Cantor kümesi
$\mathcal{C}$	Cantor uzayı
$\mathfrak{d}$	Dominant ailelerin en küçük kardinalitesi
$\mathfrak{b}$	Sınırsız ailelerin en küçük kardinalitesi
$\mathfrak{c}$	$\mathbb{R}$'nin kardinalitesi
$[\mathbb{N}]^{<\infty}$	Doğal sayılar kümesinin tüm sonlu altkümelerinin ailesi
$[\mathbb{N}]^{\infty}$	Doğal sayılar kümesinin tüm sonsuz altkümelerinin ailesi
τ_s^k	$(\mathbb{R}, \tau_s)$ standart topolojik uzayının kapalı kümeler ailesi
$Çap(A)$	Metrik uzayda A kümesinin çapı
$\mathbb{N}^+$	$\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, ...\}$

1 GİRİŞ

Sonsuz Kombinatorik Topoloji ya da *Matematikte Seçme Prensipleri* olarak adlandırılan teori 1996 yılında M. Scheepers'ın "Combinatorics of open covers I: Ramsey Theory" $[30]$ adlı çalışması ile ortaya çıkmıştır. Scheepers bu çalışma ve yine aynı yıl içerisinde yapmış olduğu "Combinatorics of open covers II" $[18]$ isimli diğer bir çalışmasında klasik teoride verilen bazı özellikleri kombinatorik bir çatı altında sınıflayabilmiştir. Bu çalışmaların devamında da gerek Scheepers, gerekse diğer matematikçiler tarafından ardışık bir çok çalışmalar yapılmış ve hala yapılmaya devam etmektedir $[2, 3, 25, 33, 38, 39, 40]$.

Modern matematiğin topoloji alanında karşımıza çıkan bu teorinin oluşumu ve kökleri en az Cantor'un *"Köşegen Tekniği"* kadar eskidir. Seçme prensiplerinde *köşegen tekniği* topolojik uzayların örtü dizileri üzerinde kullanılmaktadır. Seçme prensiplerinin en önemli özelliği topolojiyi matematiğin diğer alanları (Ramsey Teori, Oyun Teori, cebirsel yapılar,...) ile bir araya getiren tekniklere imkan sunabilmesidir. Kullanılan teknikler ile literatürde yer alan çözülememiş topoloji problemlerine önemli katkılar sağlanabilmektedir. Reellerin kümeleri olarak adlandırılan $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ Baire uzayı ve $2^{\mathbb{N}}$ Cantor uzayı, bu teoride elde edilen sonuçlar için temel oluşturmaktadır.

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. Tezin ikinci bölümünde, ilerleyen bölümlerde kullanılacak olan temel bilgiler, tanımlar ve kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde Menger ve Hurewicz özellikleri üzerinde durulmuş, σ-kompaktlık, Lindelöf uzay gibi kavramlar ile ilişkileri incelenmiş, kalıtımsallık, birleşim ve dönüşüm altında korunabilmenin hangi koşullar ile sağlanabileceği gösterilmiştir.

Dördüncü bölümde, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ Baire uzayının topolojik yapısı, topolojisini üreten metrik ile çarpım uzayları için tanımlanan metrik arasındaki ilişkisi ele alınmış, $\mathbb{P}$ irrasyonel sayılar kümesi ile ilişkisi incelenmiştir. Son olarak Cantor kümesi ve Cantor uzayı üzerinde çalışılmış, kritik kardinaller ile ilgili bilgiler verilerek temel seçme prensipleri ve kardinal karakteristikleri arasındaki bazı ilişkiler sunulmuştur.

Beşinci bölümde analitik kümeler için Menger Konjektürü incelenmiştir. Luzin küme tanımı verilmiş ve bu kümenin Süreklilik Hipotezi altında Menger Konjektürü'ne ters bir örnek

2 ÖN BİLGİLER VE TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tezin ilerleyen kısımlarında kullanılacak olan topoloji ve kümeler teorisine ait tanım, teorem ve sonuçlara yer verilecektir. Kaynak olarak $[5, 10, 11, 14, 17, 19, 20, 31, 42]$ kullanılmıştır.

ZFC SİSTEMİ

Alman matematikçi Ernst Zermelo, 1905 yılında Kümeler Kuramını aksiyomatikleştirmeye başlamış ve yedi aksiyomdan oluşan ilk aksiyomatik sistemini 1908 yılında yayımlamıştır. 1922'de Abraham Fraenkel ve Thoralf Skolem birbirlerinden bağımsız olarak Zermelo'nun orjinal aksiyomatik sistemini iyileştirmiş ve genişletmiştir. Sistemin son hali yine Zermelo tarafından 1930 yılında yayımlanmıştır. Sonuç olarak kümeler kuramının Seçme Aksiyomu hariç tüm aksiyomlarını içeren bu aksiyomatik sistem *Zermelo-Fraenkel Küme Teorisi* olarak anılmış ve *ZF* ile gösterilmiştir.

1. **Eşitlik Aksiyomu**

   Aynı elemanlara sahip olan kümeler eşittir.

   $$\forall x \forall y \, (x = y \leftrightarrow \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y))$$

2. **Boş Küme Aksiyomu**

   Hiçbir elemana sahip olmayan bir küme vardır.

   $$\exists x \forall y \, (y \notin x)$$

3. **Temellendirme Aksiyomu**

   Boştan farklı her küme $\in$-*minimal* bir elemana sahiptir.

   $$\forall x \, (x \neq \emptyset \rightarrow \exists y \in x \forall z \in x \, (z \notin y))$$

4. **İki Elemanlı Küme Aksiyomu**

   x ve y birer küme ise, yalnızca x'i ve y'yi içeren bir küme vardır.

   $$\forall x \forall y \exists z \forall u \, (u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y)$$

5. **Birleşim Aksiyomu**

Her x kümesi için x'in birleşimi olarak ifade edilen bir küme vardır.

$$\forall x \exists y \forall z \, (z \in y \leftrightarrow \exists u \, (u \in x \wedge z \in u))$$

x'in birleşimi

$$\bigcup x = \{z : \exists u \in x \; (z \in u)\}$$

şeklinde ifade edilir.

6. **Ayırma Aksiyomu**

Eğer z bir küme, ϕ bir formül ve P , z'nin ϕ ile ifade edilebilen elemanlarının bir özelliği ise, z'nin bu özelliğe sahip bütün elemanları bir küme oluşturur.

$$\forall z \exists y \forall x \, (x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge \phi(x))$$

7. **Kuvvet Kümesi Aksiyomu**

Her x kümesi için x'in bütün altkümelerinden oluşan ve x'in *kuvvet kümesi* olarak adlandırılan bir $\mathcal{P}(x)$ kümesi vardır.

$$\forall x \exists y \forall z \, (z \in y \leftrightarrow z \subseteq x)$$

8. **Yerleştirme Aksiyomu**

Bir kümenin, üzerinde tanımlanabilen bir fonksiyon altındaki görüntüsü de bir kümedir. ϕ bir formül ise,

$$\forall a \; (\forall x \in a \exists ! y \; \phi(x, y) \rightarrow \exists z \forall x \in a \exists y \in z \; \phi(x, y))$$

9. **Sonsuzluk Aksiyomu**

Sonsuz bir küme vardır.

$$\exists x \; (\emptyset \in x \wedge \forall u \, (u \in x \rightarrow u \cup \{u\} \in x))$$

Tanım 2.1. *(Seçme Fonksiyonu)* $\mathcal{F}$ boştan farklı kümelerin bir ailesi olsun. Her $x \in \mathcal{F}$ için $f(x) \in x$ olacak şekilde bir

$$f : \mathcal{F} \longrightarrow \bigcup \mathcal{F}$$

fonksiyonuna $\mathcal{F}$ *için bir seçme fonksiyonu* denir.

Seçme Aksiyomu (AC)

Boştan farklı kümelerin her ailesi bir seçme fonksiyonuna sahiptir.

$$\forall \mathcal{F}(\emptyset \notin \mathcal{F} \rightarrow \exists f(f : \mathcal{F} \longrightarrow \bigcup \mathcal{F} \wedge \forall x \in \mathcal{F}(f(x) \in x)))$$

Zermelo-Fraenkel Küme Teorisi, Seçme Aksiyomu ile birlikte ZF + AC = ZFC sistemini oluşturur. ZFC Aksiyomları ile ilgili daha geniş bilgi için $[17, 19, 21]$ kaynakları incelenebilir.

Tanım 2.2. Bir A kümesi üzerinde verilen bir $\leq$ bağıntısı ;

(i) Her $a \in A$ için $a \leq a$

(ii) Her $a, b \in A$ için $a \leq b$ ve $b \leq a$ ise $a = b$

(iii) Her $a, b, c \in A$ için $a \leq b$ ve $b \leq c$ ise $a \leq c$

koşullarını sağlıyorsa $\leq$ bağıntısına *kısmi sıralama bağıntısı* ve $(A, \leq)$ ikilisine de *kısmi sıralı küme* denir.

Tanım 2.3. Bir A kümesi üzerinde verilen bir $<$ bağıntısı ;

(i) Her $a \in A$ için $a \not< a$

(ii) Her $a, b, c \in A$ için $a < b$ ve $b < c$ ise $a < c$

koşullarını sağlıyorsa $<$ bağıntısına *kesin kısmi sıralama bağıntısı* denir. $(A, <)$ ikilisine de *kesin kısmi sıralı küme* denir.

Tanım 2.4. $(A, \leq)$ kısmi sıralı bir küme olmak üzere, eğer her $a, b \in A$ için

$$a \leq b \text{ veya } b \leq a \text{ veya } a = b$$

sağlanıyorsa, $\leq$ bağıntısına *doğrusal sıralama bağıntısı* denir.

Tanım 2.5. $(A, \leq)$ kısmi sıralı bir küme ve $X \subseteq A$ olsun. Eğer her $x \in X$ için

$$a \leq x$$

olacak şekilde bir $a \in X$ varsa, a'ya X'in *en küçük elemanı* denir.

Tanım 2.6. $(A, \leq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. Eğer A'nın boştan farklı her altkümesi en küçük bir elemana sahipse, $\leq$ bağıntısına *iyi sıralama bağıntısı* ve $(A, \leq)$ ikilisine de *iyi sıralı küme* denir. Eğer A kümesi üzerinde kesin sıralama bağıntısı var ve boştan farklı her altkümesi en küçük bir elemana sahipse, $<$ bağıntısına *kesin iyi sıralama bağıntısı*, $(A, <)$ ikilisine de *kesin iyi sıralı küme* denir.

Tanım 2.7. Eğer bir kümenin bütün elemanları aynı zamanda o kümenin bir altkümesi ise, o kümeye *geçişken bir küme* denir. Eğer bir X kümesi geçişken ise

$$\forall x \, (x \in X \rightarrow x \subseteq X)$$

sağlanır.

Tanım 2.8. Geçişken ve $\in$ bağıntısı ile kesin iyi sıralı olan bir kümeye *ordinal sayı* veya kısaca *ordinal* denir.

Ordinaller için genel olarak $\alpha, \beta, \gamma, ...$ notasyonları kullanılır. Bütün ordinallerin sınıfı Ord ile gösterilir.

Tanım 2.9. α bir ordinal olmak üzere,

$$\alpha \cup \{\alpha\} = \alpha + 1$$

olarak tanımlanan kümeye α ordinalinin *ardılı* denir.

Tanım 2.10. Ardıl olmayan bir ordinale *limit ordinal* denir.

Örnek 2.11. *$\omega = \{n : n$ bir doğal sayı $\}$ olsun. Sonsuzluk aksiyomuna göre $\omega = \mathbb{N}$ olup, ω sıfırdan farklı en küçük limit ordinaldir.*

Tanım 2.12. ω kümesinin her bir elemanına *sonlu ordinal* denir.

Örnek 2.13. *Her $n \in \omega$ için*

$$0 = \emptyset, \; 1 = \{0\}, \; 2 = \{0, 1\}, ..., \; n = \{0, 1, 2, ..., n-1\}, ...$$

sonlu ordinal örnekleridir.

Tanım 2.14. X ve Y iki küme olmak üzere, eğer X'ten Y'ye birebir ve örten bir fonksiyon tanımlanabiliyorsa bu iki kümeye *eş güçlüdür* denir ve

$$X \approx Y$$

şeklinde yazılır.

Tanım 2.15. X bir küme olsun. $X \approx \kappa$'yi sağlayan en küçük κ ordinaline X'in *kardinal sayısı* veya kısaca *X'in kardinalitesi* denir ve $|X|$ ile gösterilir.

Örnek 2.16. $\mathbb{N}$ *doğal sayılar kümesinin kardinalitesi* $\aleph_0$ *ile gösterilir.*

Tanım 2.17. Kardinalitesi $\leq \aleph_0$ olan kümelere *sayılabilir küme* denir.

Örnek 2.18. $\mathbb{N}$ *doğal sayılar kümesi en küçük sayılabilir sonsuz ordinaldir. Dolayısıyla sayılabilir sonsuz olan her küme* $\mathbb{N}$ *ile eş güçlüdür.*

Tanım 2.19. Sayılabilir olmayan bir kümeye *sayılamaz küme* denir.

Tanım 2.20. Tüm sayılabilir ordinallerin kümesi

$$\omega_1 = \{\alpha : \alpha \in Ord \text{ ve } \alpha \text{ sayılabilir } \}$$

ile gösterilir. ω_1'in kardinalitesi, ilk sayılamaz kardinal olan $\aleph_1$ ile gösterilir.

Teorem 2.21. $[0, 1]$ *kapalı aralığı sayılamaz bir kümedir.*

Kanıt. $[0, 1]$ kapalı aralığının sayılamaz olduğu, Cantor'un Köşegen tekniği ile gösterilmiştir. Cantor bu tekniği kullanarak, elemanları sonsuz dizilerden oluşan bir M kümesinin sayılabilir olamayacağını olmayana ergi yöntemi ile göstermiştir. Cantor'un [6]'da vermiş olduğu köşegen tekniğinden bahsedelim.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = m$ veya $x_n = w$ olmak üzere elemanları

$$E = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_\nu, \ldots)$$

olan sonsuz dizilerden oluşan küme

$$M = \{E_0, E_1, E_2, \ldots\ldots\}$$

olsun. M kümesinin her elemanını

$$\begin{aligned}
E_0 &= (a_{00}, a_{01}, a_{02}, ..., a_{0\nu}, ...) \\
E_1 &= (a_{10}, a_{11}, a_{12} ..., a_{1\nu}, ...) \\
E_2 &= (a_{20}, a_{21}, a_{22} ..., a_{2\nu}, ...) \\
&\vdots \\
E_\mu &= (a_{\mu 0}, a_{\mu 1}, a_{\mu 2} ..., a_{\mu\nu}, ...) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

şeklinde yazalım. Burada her bir $a_{\mu\nu}$ koordinatının w ya da m olduğu tanımdan açıktır. Bu şartlarda M'nin bir

$$E^* = (b_0, b_1, b_2 ..., b_\nu, ...)$$

elemanı elde edilebilir öyle ki listemizdeki hiçbir E_μ elemanı için $E^* = E_\mu$ sağlanmaz. Gerçekten her $b_\nu \in E^*$ için eğer $a_{\nu\nu} = m$ ise $b_\nu = w$ ya da $a_{\nu\nu} = w$ ise $b_{\nu\nu} = m$ olarak seçilirse, E^*, M'nin her bir E_μ elemanından en azından tek bir koordinat farkı ile farklıdır. Dolayısıyla E^* yukarıda belirtilen listede mevcut değildir ki bu da kabulümüz ile çelişir. $\square$

$\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinin sayılamazlığı ve Cantor'un köşegen tekniği ile ilgili geniş bilgi için $[6, 7, 12, 31]$ kaynakları incelenebilir.

Tanım 2.22. Bir topolojik uzay hem kapalı hem de açık olan kümelerden oluşan bir tabana sahipse, bu topolojik uzaya *0-boyutlu uzay* denir.

Tanım 2.23. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer $\tau = \tau_\rho$ olacak şekilde X üzerinde bir ρ metriği mevcutsa, (X, τ)'ya *metriklenebilir uzay* denir.

Tanım 2.24. (X, d) bir metrik uzay ve $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ öyle ki } \forall m, n \geq n_0 \text{ için } d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

koşulu sağlanıyorsa, (x_n) dizisine bir *Cauchy dizisi* denir.

Tanım 2.25. (X, d) bir metrik uzay, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ bir dizi ve $x \in X$ olmak üzere, eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ öyle ki } \forall n \geq n_0 \text{ için } d(x_n, x) < \varepsilon$$

koşulu sağlanıyorsa, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine bu uzayda x *noktasına yakınsar* denir.

Tanım 2.26. Bir metrik uzaydaki her Cauchy dizisi bu uzayda bir noktaya yakınsak ise, bu uzay *tam metrik uzay* olarak adlandırılır. Tam metrik uzay üzerinde tanımlı metriğe de *tam metrik* denir.

Tanım 2.27. (X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere, eğer X üzerinde $\tau = \tau_d$ olacak şekilde bir d tam metriği mevcutsa, (X, τ)'ya *tam metriklenebilir uzay* denir.

Tanım 2.28. (X, τ) bir topolojik uzay ve $D \subseteq X$ olsun. Eğer $\overline{D} = X$ ise, D kümesine bu topolojik uzayda *yoğundur* denir.

Tanım 2.29. X bir topolojik uzay ve $N \subseteq X$ olsun. Eğer $\mathring{\overline{N}} = \emptyset$ ise, N kümesine *hiçbir yerde yoğun değildir* denir.

Tanım 2.30. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer X sayılabilir ve yoğun bir altkümeye sahipse, (X, τ)'ya *ayrılabilir uzay* denir.

Tanım 2.31. X bir küme, S bir indis kümesi ve $\{A_s : s \in S\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ olmak üzere,

$$X = \bigcup_{s\in S} A_s$$

eşitliği sağlanıyorsa $\{A_s\}_{s\in S}$ ailesine *X'in bir örtüsü* adı verilir. Eğer $S' \subseteq S$ ve her $s \in S'$ için $\{A_s\}_{s\in S'}$ ailesi de X'in bir örtüsü oluyorsa, bu aileye $\{A_s\}_{s\in S}$ *ailesinin bir altörtüsü* adı verilir.

Tanım 2.32. X bir topolojik uzay ve $\{A_s\}_{s\in S}$ ailesi X'in bir örtüsü olsun. Eğer her $s \in S$ için A_s bu uzayda açık ise, $\{A_s\}_{s\in S}$ ailesine X'in bir *açık örtüsü* denir.

Tanım 2.33. Bir X topolojik uzayının her açık örtüsü sonlu bir altörtüye sahipse, X'e *kompakt topolojik uzay* denir.

Tanım 2.34. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer X kümesi sayılabilir çoklukta kompakt kümelerin birleşimi şeklinde yazılabiliyorsa, diğer bir ifade ile, her $n \in \mathbb{N}$ için $K_n \subseteq X$ kompakt olmak üzere

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$$

sağlanıyorsa, (X,τ)'ya *σ-kompakt topolojik uzay* denir. Tanımdan da anlaşılacağı gibi, her kompakt topolojik uzay aynı zamanda σ-kompakttır

Tanım 2.35. Bir X topolojik uzayının her açık örtüsü sayılabilir bir altörtüye sahipse, X'e *Lindelöf uzay* denir.

Tanım 2.36. I bir indis kümesi olmak üzere, her $\alpha \in I$ için X_α kümesi boştan farklı olsun. $(X_\alpha)_{\alpha\in I}$ kümeler ailesinin kartezyen çarpımı

$$\prod_{\alpha\in I} X_\alpha = \{x : I \longrightarrow \bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha \mid x(\alpha) \in X_\alpha, \alpha \in I\}$$

olarak tanımlanır.

Burada bir $x \in \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ elemanı için, $x(\alpha) = x_\alpha$'ya x noktasının α. *koordinatı*, X_α kümesine ise $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ çarpım kümesinin α. *çarpanı* denir.

Tanım 2.37. I bir indis kümesi, her $\alpha \in I$ için X_α boştan farklı olmak üzere, $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ kümeler ailesinin kartezyen çarpımı $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ olsun. Her $\alpha \in I$ için, $x \in \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ olmak üzere

$$p_\alpha\colon \prod_{\alpha\in I} X_\alpha \longrightarrow X_\alpha$$

$$x \longmapsto x_\alpha$$

olarak tanımlanan p_α fonksiyonuna, α. *izdüşüm fonksiyonu* denir.

Tanım 2.38. $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ çarpım kümesi üzerindeki çarpım topolojisi, her $\alpha \in I$ için p_α izdüşüm fonksiyonunu sürekli kılan en kaba topolojidir. Diğer bir ifadeyle, $(p_\alpha)_{\alpha\in I}$ izdüşüm fonksiyonları ile üretilen izdüşel topoloji $\prod_{\alpha\in} X_\alpha$ üzerindeki *çarpım topolojisidir.*

Bir $\alpha \in I$ için $U_\alpha \subseteq X_\alpha$ olsun. $p_\alpha^{-1}(U_\alpha) \subseteq \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ kümesi

$$p_\alpha^{-1}(U_\alpha) = \{x \in \prod_{\alpha\in I} X_\alpha : p_\alpha(x) = x_\alpha \in U_\alpha\}$$

olarak ifade edilir. Eğer her $\alpha \in I$ için U_α kümesi X_α'da açık ise,

$$\mathcal{S} = \{p_\alpha^{-1}(U_\alpha) : U_\alpha \subseteq X_\alpha \text{ açık }, \alpha \in I\}$$

ailesi çarpım topolojisinin bir alttabanıdır. Bu nedenle çarpım topolojisinin taban elemanları

$$\bigcap_{k=0}^{n} p_{\alpha_k}^{-1}(U_{\alpha_k}) = U_{\alpha_0} \times U_{\alpha_1} \times ... \times U_{\alpha_n} \times \prod_{\alpha \neq \alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n} X_\alpha$$

şeklindedir ve çarpım topolojisinin bir $\mathcal{B}$ tabanı

$$\mathcal{B} = \{ \prod_{\alpha \in I} U_\alpha : U_\alpha \subseteq X_\alpha \text{ açık ve sonlu tane } \alpha \in I \text{ dışındaki her } \alpha \text{ için } U_\alpha = X_\alpha \}$$

olarak ifade edilir.

Tanım 2.39. X bir topolojik uzay olmak üzere, eğer X'in bütün noktaları bir yığılma noktası ise X'e *mükemmel uzay* denir. $A \subseteq X$ olmak üzere, A kümesi kapalı ve altuzay topolojisine göre mükemmel ise, A'ya *X'de mükemmel bir küme* denir.

Tanım 2.40. Eğer bir X topolojik uzayı sayılabilir çoklukta açık kümenin arakesiti olarak ifade edilebiliyorsa, X'e bir *G_δ-küme* denir.

Tanım 2.41. Bir topolojik uzayın sayılabilir çoklukta açık ve yoğun altkümelerinden oluşan her ailesinin arakesiti de bu uzayda yoğun ise, bu topolojik uzaya bir *Baire uzayı* denir.

Tanım 2.42. Bir X topolojik uzayında aşağıdaki koşulları sağlayan en küçük $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ailesine X'in *Borel kümeleri ailesi* adı verilir.

(i) $\mathcal{S}$ ailesi X'in tüm açık kümelerini içerir.

(ii) $A \in \mathcal{S}$ ise $X \setminus A \in \mathcal{S}$'dir.

(iii) Her $i = 1, 2, 3, ...$ için $A_i \in \mathcal{S}$ ise $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{S}$'dir.

3 KLASİK SEÇME PRENSİPLERİ: MENGER VE HUREWICZ

Topolojik uzaylarda açık örtüler ile tanımlanabilen ya da karakterize edilebilen özellikler önemlidir. Bu bölümde, açık örtü sınıflarının oluşturduğu bir sistem ile tanımlanan iki temel seçme prensibini ve teorilerini tez konumuz kapsamında inceleyeceğiz.

Açık örtü kavramını ilk kez 1852 'de Alman matematikçi Peter Gustav Dirichlet, kapalı bir aralığın verilen her açık örtüsünün sonlu bir altörtüsü olduğu kanıtını derslerinde kullanmaya başlasa da, ancak 1904 yılında yayımlanan çalışmaları ile literatürde yerini alabilmiştir $[28]$.

1996 yılında ise M.Scheepers açık örtüleri sınıflayarak, bunların sistematik bir yapısını oluşturmuş ve topolojik özellikleri bu kombinatorik sisteme göre tanımlamıştır $[18, 30]$.

Bu tez çalışması boyunca kullanılacak tüm örtüler sayılabilir kabul edilecektir.

Tanım 3.1. X bir topolojik uzay ve $\mathcal{U}$ ailesi X 'in açık bir örtüsü olsun.

a) Eğer $X \notin \mathcal{U}$ ve her sonlu $F \subseteq X$ için $F \subseteq U$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{U}$ varsa, $\mathcal{U}$ ailesine ω-*örtü* denir.

b) Eğer $\mathcal{U}$ sonsuz elemanlı ve her $x \in X$ için $\{U \in \mathcal{U} : x \notin U\}$ kümesi sonlu ise, $\mathcal{U}$ ailesine γ-*örtü* denir.

Verilen bir X uzayı için örtülerin sınıflandırılmasında,
$\mathcal{O} = \{\mathcal{U} : \mathcal{U}$ ailesi X' in açık örtüsü $\}$,
$\Omega = \{\mathcal{U} : \mathcal{U}$ ailesi X' in ω-örtüsü $\}$,
$\Gamma = \{\mathcal{U} : \mathcal{U}$ ailesi X' in γ-örtüsü$\}$,
gösterimleri kullanılmaktadır.

Yukarıda tanımları verilen örtü aileleri arasında

$$\Gamma \subseteq \Omega \subseteq \mathcal{O}$$

kapsamaları sağlanır.

Tez konusu için yukarıda verilen örtü sınıfları yeterli olacaktır. Ancak literatürde yukarıda sıralananlar dışında farklı örtü sınıfları da yer almaktadır. Örtü sınıfları hakkında daha detaylı bilgi almak için $[18, 30]$ kaynakları incelenebilir.

Matematik biliminde, sayılabilir kümeler üzerinde köşegenleştirme tekniğine dayalı yapılan çalışmalara *seçme prensipleri* denir. Topolojik uzaylarda seçme prensipleri ise, açık örtüler üzerinden belirlenmiş kurallara dayalı bir köşegenleştirme tekniğidir. Bu tekniğin en belirgin özelliği ise, verilen bir $\mathcal{A}$ örtüsü ile belli bir kurala dayalı yeni bir özellik oluştururken, topolojik özelliklerin de kombinatorik bir düzende yerleştirilebiliyor olmasıdır. İlk kez M. Scheepers tarafından keşfedilen bu kombinatorik sistemde (kısaca SP sistemi) üç temel seçme prensibi yer almaktadır. Literatürde *klasik seçme prensipleri* olarak da adlandırılan bu temel prensipler ve ilgili notasyonlar aşağıda sıralanmaktadır. Seçme prensiplerinde çalıştığımız örtüler X uzayını bulundurmayan örtüler olarak kabul edilmektedir.

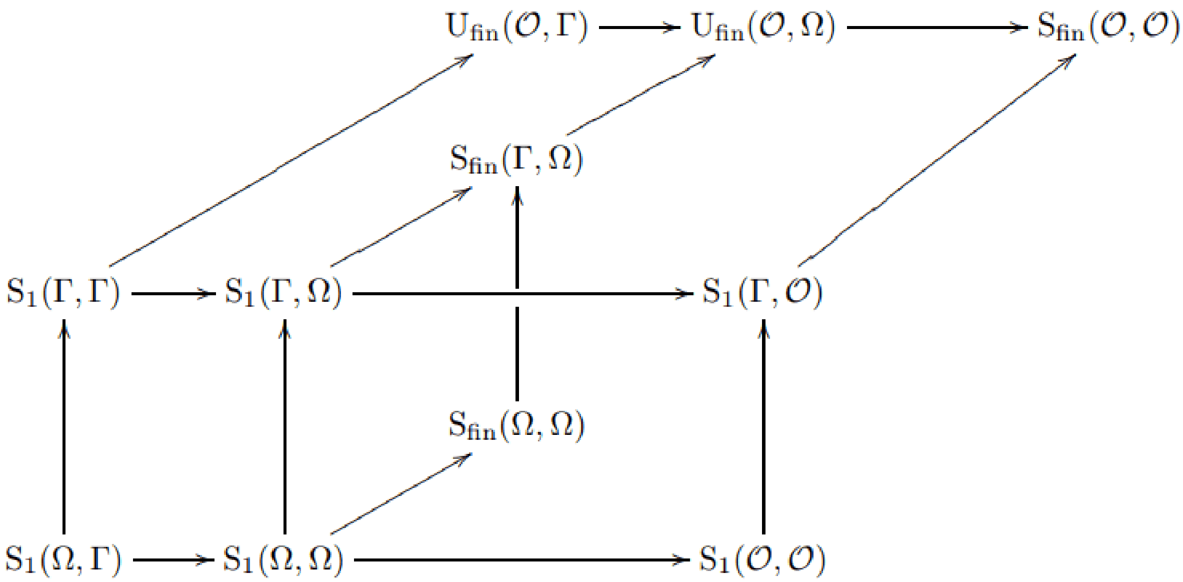
Tanım 3.2. X bir topolojik uzay, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{O}$ ve $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}$ olsun.

1. $S_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ *prensibi:* Her $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, ... \in \mathcal{A}$ için öyle $U_0 \in \mathcal{U}_0, U_1 \in \mathcal{U}_1, U_2 \in \mathcal{U}_2, ...$ vardır ki $\{U_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{B}$ sağlanır.

2. $S_{fin}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ *prensibi:* Her $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, ... \in \mathcal{A}$ için öyle sonlu $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{U}_0, \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{U}_1, \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{U}_2, ...$ vardır ki $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n \in \mathcal{B}$ sağlanır..

3. $U_{fin}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ *prensibi:* X'in sonlu altörtüleri bulunmayan her $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, ... \in \mathcal{A}$ için öyle sonlu $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{U}_0, \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{U}_1, \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{U}_2, ...$ vardır ki $\{\bigcup \mathcal{F}_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{B}$ sağlanır.

$\mathcal{A}$ ile $\mathcal{B}$ ailelerinin seçimi ve belirlenen kurala göre tanımlanan açık örtü özelliklerini gösteren Scheepers diyagramının bir örneği aşağıda verilmiştir $[39]$.



Şema 1: Scheepers Diyagramı

Bu diyagramda yer alan seçme prensiplerinden temel iki seçme prensibini kronolojik sıra ile tanıtalım:

Menger Özelliği

K. Menger 1924 yılında σ-kompakt özelliğinin açık örtülerle nasıl ifade edilebileceği sorusu üzerinde çalışırken metrik uzaylar için, **E** özelliği olarak adlandırdığı, yeni bir taban özelliği tanımlamıştır $[24]$. Günümüzde *Menger Taban Özelliği* olarak bilinen bu özelliğin tanımı şöyledir:

Tanım 3.3. X bir metrik uzay olsun. Eğer X üzerindeki topolojinin her $\mathcal{B}$ tabanı için

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \ \text{ ve } \ \lim_{n\to\infty} Çap(B_n) = 0$$

olacak şekilde $\mathcal{B}$'de bir $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi varsa X uzayı *Menger Taban Özelliğini sağlar* denir.

Menger Taban Özelliğine sahip metrik uzaylar tez çalışmamız boyunca kısaca **MT** uzay olarak adlandırılacatır.

Menger'in σ-kompakt özelliğini karakterize eden ve literatürde *Menger'in Konjektürü* ya da *Menger Konjektürü* olarak bilinen savı şöyledir:

Konjektür 3.4. *(Menger)*
Bir metrik uzayın σ-kompakt olması için gerek ve yeter koşul ***MT*** *uzay olmasıdır.*

W. Hurewicz 1925 ile 1927 yılları arasında Menger'in Konjektörü üzerine araştırmalar yapmış ve **MT** özelliğine denk bir $\mathbf{E}^*$ özelliği tanımlamıştır [15]. Sierpinski 1934 yılına ait bir çalışmasında $\mathbf{E}^*$ özelliği yerine Menger'e ithafen **M** özelliği adını vermiştir. Buna ek olarak 1988 yılında Miller ve Fremlin' in $\mathbf{E}^*$ yerine **M** özelliği olarak çalışmalarında kullandıkları bilinmektedir [13]. Scheepers'ın kombinatorik örtü özellikleri arasında bilinen en eski özellik olan Hurewicz'in tanımladığı açık örtü özelliği günümüzde ise, Menger özelliği olarak bilinmekte ve tanımı aşağıdaki gibi verilmektedir:

Tanım 3.5. X bir topolojik uzay olsun. X' in her $\{\mathcal{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ açık örtüler dizisi için

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{V}_n$$

X'in bir açık örtüsü olacak şekilde sonlu $\mathcal{V}_n \subseteq \mathcal{U}_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) alt aileleri varsa, X'e *Menger uzay* denir. .

Menger özelliği SP sisteminde $\boldsymbol{S_{fin}(\mathcal{O},\mathcal{O})}$ notasyonu ile gösterilmektedir.

Hurewicz Özelliği

Hurewicz, Menger'in Taban Özelliğini örtülerle karakterize etmiş olduğu 1925 yılına ait çalışmasında Menger özelliğinden daha kuvvetli olan, yeni bir özellik daha tanımlamıştır. Günümüzde *Hurewicz Özelliği* olarak adlandırılan ve SP sisteminde $\boldsymbol{U_{fin}(\mathcal{O},\Gamma)}$ ile gösterilen özelliğin tanımı (literatürde kullanılan son hali ile) aşağıda verilmektedir.

Tanım 3.6. X bir topolojik uzay olsun. X' in sonlu alt örtüleri bulunmayan her $\{\mathcal{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ açık örtüler dizisi için

$$\{\bigcup \mathcal{V}_n : n \in \mathbb{N}\}$$

X'in bir γ örtüsü olacak şekilde sonlu $\mathcal{V}_n \subseteq \mathcal{U}_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) varsa veya buna denk olarak, X'in her $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$ açık örtüler dizisi ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\geq n} (\bigcup \mathcal{V}_m)$$

olacak şekilde $\mathcal{V}_n \subseteq \mathcal{U}_n$ sonlu alt aileleri varsa, X'e *Hurewicz uzay* denir.

Lemma 3.7. *Her σ-kompakt uzay Hurewicz özelliğini sağlar.*

Kanıt. X, σ-kompakt bir topolojik uzay olsun. O halde X'in kompakt altkümelerinden oluşan bir $\mathcal{S} = \{S_n : n \in \mathbb{N}\}$ dizisi vardır öyle ki $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$'dir. Burada $\mathcal{S}$ ailesini X uzayının iç-içe geçmiş kompakt altkümelerinin ailesi olarak kabul edebiliriz. X'in bir $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$ açık örtüler dizisini alalım. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$ ailesi S_n'in de bir açık örtüler dizisi olur. Her $n \in \mathbb{N}$ için S_n kompakt olduğundan bir $\mathcal{V}_n \subseteq \mathcal{U}_n$ sonlu alt ailesi vardır öyle ki

$$S_n \subseteq \bigcup \mathcal{V}_n$$

sağlanır. $\mathcal{S}$ ailesi X'in iç-içe geçmiş kompakt kümelerinin bir dizisi olduğundan X'in her bir x elemanı sonlu tanesi dışındaki her n için $\bigcup \mathcal{V}_n$ tarafından içerilir. Sonuç olarak

$$\{\bigcup \mathcal{V}_n : n \in \mathbb{N}\}$$

ailesi, X'in bir γ örtüsü olup, X bir Hurewicz uzaydır. □

Lemma 3.8. *Her Hurewicz uzay bir Menger uzaydır.*

Kanıt. X bir Hurewicz uzay ve $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$, X'in bir açık örtüler dizisi olsun. X Hurewicz uzay olduğundan, her $n \in \mathbb{N}$ için bir $\mathcal{V}_n \subseteq \mathcal{U}_n$ sonlu alt ailesi vardır öyle ki $\mathcal{V} = \{\bigcup \mathcal{V}_n : n \in \mathbb{N}\} \in \Gamma$' dır. $\mathcal{V}$, X'i örteceğinden

$$X \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup \mathcal{V}_n = \bigcup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{V}_n$$

olup, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{V}_n$ X'in bir açık örtüsüdür. Dolayısıyla X aynı zamanda bir Menger uzaydır.

□

Lemma 3.9. *Her Menger uzay bir Lindelöf uzayıdır.*

Kanıt. X bir Menger uzay olsun. X'in bir $\mathcal{U}$ açık örtüsünü alalım. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{U}_n = \mathcal{U}$ olarak alınırsa, $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$ X'in bir açık örtüler dizisi olur. X Menger olduğundan, her $n \in \mathbb{N}$ için, $\mathcal{V}_n \subseteq \mathcal{U}_n$ sonlu alt ailesi vardır öyle ki

$$\mathcal{V} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{V}_n$$

X'in bir açık örtüsü olup, her bir $\mathcal{V}_n$ sonlu olduğundan, $\mathcal{U}$ açık örtüsünün sayılabilir bir altörtüsüdür. Dolayısıyla X bir Lindelöf uzayıdır. □

Bu durumda verilen bir topolojik uzay için

$$\sigma\text{-compact} \rightarrow \text{Hurewicz} \rightarrow \text{Menger} \rightarrow \text{Lindelöf}$$

diyagramı sağlanacaktır. Ancak diyagramın ters yönü genel olarak doğru değildir. Örnekler için $[2, 16, 38]$ numaralı kaynaklar incelenebilir.

Menger'in konjektürünün yanlış olduğuna dair şüpheleri olan Hurewicz 1925 yılına ait çalışmasında aşağıdaki savın doğru olduğunu ileri sürmüştür $[15]$.

Konjektür 3.10. *(Hurewicz)*
Bir metrik uzayın σ-kompakt olması için gerek ve yeter koşul Hurewicz uzay olmasıdır.

Menger'in ve Hurewicz'in savları ile ilgili olarak literatürde yapılan çalışmalar hakkında detaylı bilgi 5. Bölümde verilecektir.

Menger ve Hurewicz uzayların sağladığı bazı temel özellikler aşağıdaki teoremde sıralanmaktadır. Teoremde verilen tüm sonuçlar Hurewicz'in $[16]$ makalesinden elde edilebilmektedir. Günümüz notasyonları ile daha ayrıntılı bir kanıt $[43]$ kaynağında verilmektedir.

Teorem 3.11. *(Hurewicz) X ve Y topolojik uzaylar olsun.*

1. *Eğer X Menger (Hurewicz) ve $F \subseteq X$ kapalı ise F kümesi de Menger (Hurewicz)'dir.*
2. *Eğer X Menger (Hurewicz) ve $f : X \longrightarrow Y$ sürekli ise $f(X)$ kümesi de Menger (Hurewicz)'dir.*
3. *Her $n \in \mathbb{N}$ için X_n Menger (Hurewicz) ise $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ Menger (Hurewicz)'dir.*
4. *Eğer X Menger (Hurewicz) ve $K \subseteq X$ bir F_σ kümesi ise, K kümesi de Menger (Hurewicz)'dir.*

Kanıt. Kanıtı Menger özelliği için vereceğiz. Benzer adımlarla Hurewicz için de gösterilebilir.

1. X bir Menger uzayı, $F \subseteq X$ kapalı bir küme ve $\{\mathcal{U}_n^F : n \in \mathbb{N}\}$, F'nin bir açık örtüler dizisi olsun. Burada $\mathcal{U}_n^F$ örtülerinin elemanlarının her birini X'de açık kabul edebiliriz. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\mathcal{U}_n = \mathcal{U}_n^F \cup \{X \setminus F\}$$

olarak tanımlanan aile X'in bir örtüsü olacağından, X'in $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$ şeklinde bir açık örtüler dizisini elde etmiş oluruz. X uzayı Menger olduğundan öyle bir

$$\{\mathcal{V}_n : n \in \mathbb{N}, \mathcal{V}_n \subseteq \mathcal{U}_n \text{ ve } \mathcal{V}_n \text{ sonlu }\}$$

dizisi vardır ki $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{V}_n$ X'in bir açık örtüsüdür. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\mathcal{V}_n^F = \{V_n^F : V_n^F \in \mathcal{V}_n \text{ ve } V_n^F \cap (X \setminus F) = \emptyset\}$$

olarak seçilirse, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{V}_n^F$ F'nin bir açık örtüsü olacaktır. Diğer taraftan her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{V}_n$ sonlu olduğundan $\mathcal{V}_n^F \subseteq \mathcal{U}_n^F$ sonludur. Böylece F kapalı altkümesi de Menger özelliğini sağlar.

2. (X, τ) topolojik uzayı Menger ve $f : X \longrightarrow Y$ sürekli bir fonksiyon olsun. $f(X) \subseteq Y$'nin bir $\{\mathcal{U}_n^{f(X)} : n \in \mathbb{N}\}$ açık örtüler dizisini alalım. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için

$$f(X) \subseteq \bigcup_{U\in\mathcal{U}_n^{f(X)}} U$$

ve

$$X \subseteq f^{-1}(f(X)) \subseteq f^{-1}\Big(\bigcup_{U\in\mathcal{U}_n^{f(X)}} U\Big)$$

olup

$$X = \bigcup_{U\in\mathcal{U}_n^{f(X)}} f^{-1}(U)$$

eşitliği elde edilir. $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall U \in \mathcal{U}_n^{f(X)}$ için U açık ve f sürekli olduğundan $f^{-1}(U)$ açık olup $\{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}_n^{f(X)}\}$ X'in bir açık örtüsüdür. Her n için $\mathcal{U}_n^X = \{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}_n^{f(X)}\}$ olsun. X Menger olduğundan her n için $\exists \mathcal{V}_n^X \subseteq \mathcal{U}_n^X$ öyle ki $\mathcal{V}_n^X$ sonlu ve $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{V}_n^X$ X'in bir açık örtüsüdür. Her n için $\mathcal{V}_n^X = \{f^{-1}(U_i) : i = 0, 1, 2, ..., m_n \text{ için } U_i \in \mathcal{U}_n^{f(X)}\}$ olarak tanımlanırsa

$$f(X) = f\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{i=0}^{m_n} f^{-1}(U_i)\Big) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{i=0}^{m_n} f(f^{-1}(U_i)) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{i=0}^{m_n} U_i$$

olacağından $\mathcal{V}_n^{f(X)} = \{U_i : i = 0, 1, 2, ..., m_n\}$ dersek $\mathcal{V}_n^{f(X)} \subseteq \mathcal{U}_n^{f(X)}$ sonlu olup $\{\bigcup \mathcal{V}_n^{f(X)} : n \in \mathbb{N}\}$ ailesi $f(X)$'in bir açık örtüsüdür. Böylece $f(X)$ Menger'dir.

3. $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Menger kümelerin bir ailesi ve $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ olsun. X'in bir $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$ açık örtüler dizisini alalım. Şimdi de, $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin, her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n = \{i : i \in \mathbb{N}\}$ ve her $n, m \in \mathbb{N}$ için $A_n \cap A_m = \emptyset$ olacak şekilde bir $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ ayrışımını alalım öyle ki $\mathbb{N}$ kümesi

$$\mathbb{N} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

şeklinde sayılabilir sonsuz çoklukta ayrık sonsuz altkümelerin birleşimi şeklinde yazılabilsin. Bu doğrultuda, $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$ açık örtüler dizisini sayılabilir ve ayrık alt ailelere bölelim öyle ki her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\mathcal{S}_n = \{\mathcal{U}_i : i \in A_n\}$$

olsun. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{S}_n$ ailesi X_n'in bir açık örtüler dizisi olur. X_n Menger olduğundan $\forall i \in A_n$ için bir $\mathcal{V}_i \subseteq \mathcal{U}_i$ sonlu ait ailesi vardır öyle ki $\bigcup_{i\in A_n} \mathcal{V}_i$, X_n'in bir açık örtüsüdür. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\{\bigcup_{i\in A_n} \mathcal{V}_i : n = 0, 1, 2, 3, ...\}$$

X'in bir açık örtüsüdür. Her $i \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{V}_i \subseteq \mathcal{U}_i$ sonlu olduğundan X bir Menger uzaydır.

4. (1) ve (3) kullanılarak Menger özelliğinin F_σ kümeler üzerinde kalıtsal olduğu elde edilir. $\square$

4 REELLERİN KÜMELERİ

Bu bölümde, bazı reellerin kümeleri tanıtılıp topolojik yapıları incelenecek ve bu kümeler arasındaki ilişkiler verilecektir. Kümelerin kardinal karakteristiklerine değinilip, temel iki seçme prensibi olan Menger ve Hurewicz özellikleri ile aralarındaki ilişkiler verilecektir. Bu kısımda $[10, 20, 27, 41, 42]$ kitaplarından kaynak olarak yararlanılmıştır.

4.1 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ Baire Uzayı

$\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi üzerinde ayrık metrik ile üretilen ayrık topoloji olmak üzere, sayılabilir sonsuz tane $\mathbb{N}$ uzayının çarpımından oluşan çarpım uzayını (*Tychonoff Çarpım Uzayı*) $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ile gösterelim. Bu durumda, $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ için

$$x = (x(n))_{n\in\mathbb{N}} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$x(n) = x_n \in \mathbb{N}$$

olarak kabul edilecektir.

Aksi belirtilmediği sürece $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ üzerinde standart çarpım topolojisi var olduğunu kabul edeceğiz. Bu uzay için,

$$s = (s_0, s_1, ..., s_{n-1}) \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} N_s &= \{x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : x_0 = s_0, x_1 = s_1, ..., x_{n-1} = s_{n-1}\} \\ &= \{x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : s \subseteq x\} \end{aligned}$$

kümelerinden oluşan $\{N_s : s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\}$ ailesi bir tabandır. $x \in N_s$ ise, s sonlu dizisinin ilk n terimi ile x'in ilk n terimi birbirine eşittir ve bu $x|n = s$ olarak gösterilir.

Önerme 4.1.1. *Her $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ için N_s kümesi çarpım topolojik uzayında kapalı bir kümedir.*

Kanıt. $\mathbb{N}^n$, n uzunluğundaki dizilerin kümesi olmak üzere $\mathbb{N}^n$'nin bir s elemanını alalım öyle ki $s = (s_0, s_1, s_2, ..., s_{n-1}) \in \mathbb{N}^n$ ve $x \in \mathbb{N}^\mathbb{N} \setminus N_s$ keyfi olsun. $x \notin N_s$ olduğundan $s \nsubseteq x$'dir. Dolayısıyla bir $i \leq n-1$ için $x(i) \neq s(i)$'dir. x noktasının ilk n terimi $t = (t_0, t_1, t_2..., t_{n-1})$ olmak üzere, x'in N_t açık komşuluğunu alalım. O halde her $i \leq n-1$ için $x(i) = t(i)$'dir. Eğer $y \in N_t$ ise her $i \leq n-1$ için $x(i) = y(i)$ olup, dolayısıyla bir $i \leq n-1$ için $y(i) \neq s(i)$'dir. Şu halde $y \notin N_s$'dir. Sonuç olarak $N_t \cap N_s = \emptyset$ olmalıdır. Buradan $x \in N_t \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N} \setminus N_s$'dir. $\mathbb{N}^\mathbb{N} \setminus N_s$ açık olduğundan N_s kapalıdır. □

Sonuç 4.1.2. $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ *Baire uzayı 0-boyutlu bir uzaydır.*

Önerme 4.1.3. $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ *uzayı üzerindeki topoloji* $x, y \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ *için*

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & , x = y \\ \dfrac{1}{min\{i : x(i) \neq y(i)\} + 1} & , x \neq y \end{cases}$$

metriği ile üretilen topolojidir.

Kanıt. Öncelikle d fonksiyonunun $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ üzerinde bir metrik olduğunu gösterelim.

(i) $\forall x, y \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ için $d(x,y) = 0 \iff x = y$

(ii) $\forall x, y \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ için $d(x,y) = d(y,x)$

özellikleri d'nin tanımı kullanılarak kolayca elde edilir.

Üçgen eşitsizliği için $\forall x, y, z \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$'nin

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

şartını sağladığını göstermeliyiz. Eğer $x = y$ veya $y = z$ ise üçgen eşitsizliği kolaylıkla elde edilebilir. O halde $x \neq y \neq z$ olduğunu varsayalım.

$$min\{i : y(i) \neq z(i)\} = k,$$

$$min\{i : x(i) \neq y(i)\} = m,$$

$$min\{i : x(i) \neq z(i)\} = n$$

olsun. Eğer $n \geq min\{m, k\}$ olduğunu gösterirsek istenen sağlanır. Genelliği bozmadan $min\{m, k\} = m$ olsun ve $n < m$ olduğunu varsayalım. O halde $n < m$ için $x(n) = y(n)$'dir. $min\{i : x(i) \neq z(i)\} = n$ olduğundan $x(n) = y(n) \neq z(n)$'dir. Eğer $y(n) \neq z(n)$

ise, $n \geq k$ olduğu açıktır. Fakat bu $n < min\{m, k\} = m$ olması ile çelişir. Dolayısıyla $n \geq min\{m, k\}$ olmalıdır. O halde

$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{m+1} + \frac{1}{k+1}$$

olup

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

sağlanır.

Şimdi de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ üzerindeki d metriğinin $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ üzerindeki çarpım topolojisini ürettiğini gösterelim. τ_B ailesi $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ üzerindeki çarpım topolojisi ve $\mathcal{B} = \{N_s : s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\}$ bu topolojinin bir tabanı olmak üzere $\tau_B = \tau_d$ olduğunu göstermeliyiz. Bunun için öncelikle keyfi bir $N_s \in \mathcal{B}$ ve $x \in N_s$ alalım. Uygun bir $\varepsilon > 0$ için

$$x \in B_d(x, \varepsilon) \subseteq N_s$$

sağlanır. Gerçekten $x \in N_s$ ise, her $i \leq n$ doğal sayısı için $x(i) = s(i)$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan $\varepsilon = \frac{1}{n+1} > 0$ seçilirse istenen sağlanmış olur. Bunu görmek için x'ten farklı bir $y \in B_d(x, \varepsilon)$ alalım. O halde $d(x, y) < \varepsilon$ sağlanır. Dolayısıyla $n < min\{m : x(m) \neq y(m)\}$'dir. Şu halde $\forall i \leq n$ doğal sayısı için $x(i) = y(i)$ olup $y \supset s$'dir. Bu da $y \in N_s$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla $\tau_B \subseteq \tau_d$'dir.

Tersine keyfi bir $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ve $\varepsilon > 0$ alalım. $B_d(x, \varepsilon)$, x'in τ_d metrik topolojisine göre herhangi bir açık komşuluğu olsun. Uygun bir $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ için

$$x \in N_s \subseteq B_d(x, \varepsilon)$$

olacak şekilde bir $N_s \in \tau_B$'nin varlığını göstermeliyiz. Bunun için öncelikle $\varepsilon > 0$ için bir $N \in \mathbb{N}$ bulabiliriz öyle ki $\frac{1}{N} < \varepsilon$ sağlanır. Eğer $x|N = s$ olacak şekilde bir $x \in N_s \in \tau_B$ seçersek istenen sağlanır. Bunu göstermek için x'ten farklı herhangi bir $y \in N_s$ alalım. $x \neq y$ olduğundan, $min\{i : x(i) \neq y(i)\} = n$ ve $n > N$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. Dolayısıyla $d(x, y) = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{N+1} < \varepsilon$ olup $y \in B_d(x, \varepsilon)$ sağlanır. O halde $\tau_d \subseteq \tau_B$'dir ve dolayısıyla bu iki kapsamadan $\tau_B = \tau_d$ elde edilir. $\square$

Teorem 4.1.4. *Her $i \in \mathbb{N}$ için (X_i, ρ_i) ayrık metrik uzay ve $|X_i| = \aleph_0$ olsun. $\prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ çarpım uzayı üzerinde tanımlı*

$$\rho(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \rho_i(x_i, y_i)$$

metriği çarpım topolojisini üretir.

Kanıt. ρ fonkiyonunun $\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ üzerinde bir metrik olduğu kolaylıkla gösterilebilir. $\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ çarpım kümesi üzerindeki çarpım topolojisi τ olsun. $\tau_\rho = \tau$ olduğunu gösterelim. Öncelikle keyfi bir $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ ve x noktasının da çarpım topolojisindeki bir V komşuluk tabanı elemanını alalım öyle ki her $i \in \mathbb{N}$ için $B_{\rho_i}(x_i, \varepsilon_i)$ X_i'de x_i merkezli ε_i yarıçaplı açık komşuluk olmak üzere

$$V = \prod_{i=0}^{n} B_{\rho_i}(x_i, \varepsilon_i) \times \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i$$

olsun. Eğer $\varepsilon = min\{\frac{\varepsilon_i}{2^i} : i = 0, 1, 2, 3, ..., n\}$ olarak seçilirse, $B_\rho(x, \varepsilon) \subseteq V$ olduğu görülür. Dolayısıyla $\tau \subseteq \tau_\rho$ elde edilir. Diğer taraftan, keyfi bir $\varepsilon > 0$ ve $x \in \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ verilsin. Öncelikle $\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde istenildiği kadar büyük bir $k \in \mathbb{N}$ seçilebilir. O halde çarpım topolojisinden alınan x'in bir

$$U = \prod_{i=0}^{k} B_{\rho_i}(x_i, \frac{\varepsilon}{2k}) \times \prod_{i=k+1}^{\infty} X_i$$

açık kümesi için $U \subseteq B_\rho(x, \varepsilon)$ sağlanır. O halde $\tau_\rho \subseteq \tau$ elde edilir. Sonuç olarak bu iki kapsamadan $\tau_\rho = \tau$ olduğu görülür.

□

Çarpım Uzaylarının tamlığı ile ilgili teoreme geçmeden önce, aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 4.1.5. *(X, ρ) bir tam metrik uzay ve $A \subseteq X$ kapalı ise, (A, ρ_A) tam metrik uzaydır.*

Kanıt. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi (A, ρ_A)'da bir Cauchy dizisi olsun. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ X'de de bir Cauchy dizisi olduğundan ve X tam olduğundan $a_n \longrightarrow a$ olacak şekilde bir $a \in X$ vardır. A kapalı bir küme olduğundan $a \in A$ elde edilir. □

Teorem 4.1.6. *Her $i \in \mathbb{N}$ için $X_i \neq \emptyset$, ρ_i 1 ile sınırlanan metrik ve (X_i, ρ_i) metrik uzay olsun. $\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ uzayının $\rho(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\rho_i(x_i, y_i)}{2^i}$ metriği ile tam olması için gerek ve yeter koşul her $i \in \mathbb{N}$ için (X_i, ρ_i) uzayının tam olmasıdır.*

Kanıt. $(\Rightarrow)$ $(\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i, \rho)$ tam olsun. $\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$'nin bir $X_j^* = \prod_{i\in\mathbb{N}} A_i$ altuzayı

1. $i = j$ ise $A_j = X_j$

2. $i \neq j$ ise bir $\{a_i\} \subseteq X_i$ için $A_i = \{a_i\}$

şartlarını sağlasın öyle ki

$$X_j^* = \prod_{i\in\mathbb{N}} A_i = \{(x_0, x_1, x_2, ...) \in \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i : \text{ her } i \neq j \text{ için } x_i = a_i\}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda X_j^* kapalı olup Teorem $4.1.5$'ten tamdır. Diğer taraftan, p_j, j'inci izdüşüm fonksiyonu olmak üzere, p_j^*, p_j'nin X_j^* üzerine kısıtlanmışı olmak üzere

$$p_j^* = p_j|X_j^* : X_j^* \longrightarrow X_j$$

bir homeomorfizmadır. (X_j, ρ_j)'den aldığımız bir (x_j^n) Cauchy dizisi için, $\{p_j^{*-1}(x_j^n)\}$ de X_j^*'de bir Cauchy dizisidir. Gerçekten, (x_j^n), X_j'de bir Cauchy dizisi olduğundan her $\varepsilon > 0$ için bir n_0 vardır öyle ki her $m, n > n_0$ için

$$\rho_j(x_j^n, x_j^m) < \varepsilon$$

sağlanır. O halde buradan

$$\rho(p_j^{*-1}(x_j^n), p_j^{*-1}(x_j^m)) = \frac{1}{2^j}\rho_j(x_j^n, x_j^m) < \frac{1}{2^j}\cdot\varepsilon < \varepsilon$$

olup $\{p_j^{*-1}(x_j^n)\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir. X_j^* tam olduğundan bu dizi yakınsaktır. Dolayısıyla

$$p_j^{*-1}(x_j^n) \longrightarrow x$$

olacak şekilde bir $x \in X_j^*$ vardır. $\{p_j^{*-1}(x_j^n)\}$ 'nin limitinin p_j^* altındaki görüntüsü (x_j^n) dizisinin limiti olacağından, yani

$$p_j^*(p_j^{*-1}(x_j^n)) \longrightarrow p_j^*(x)$$

sağlanacağından, (x_j^n) Cauchy dizisi X_j'de yakınsaktır. Dolayısıyla (X_j, ρ_j) tamdır.

($\Leftarrow$) Her $i \in \mathbb{N}$ için (X_i, ρ_i) tam metrik uzay olsun.
$(x_n) = ((x_n^0), (x_n^1), (x_n^2), ...)$ $\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ çarpım uzayında bir Cauchy dizisi olsun. O halde her $\varepsilon > 0$ için $\exists n_0$ öyle ki her $m, n \geq n_0$ için $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ sağlanır. Buna göre her $i \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{\rho_i(x_i^n, x_i^m)}{2^i} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\rho_i(x_i^n, x_i^m)}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2^i}$$

olup her $i \in \mathbb{N}$ için $\rho_i(x_i^n, x_i^m) < \varepsilon$ sağlanır. Böylece her $i \in \mathbb{N}$ için (x_i^n) dizisi (X_i, ρ_i)'de bir Cauchy dizisidir ve (X_i, ρ_i) tam olduğundan $(x_i^n) \longrightarrow y_i$ olacak şekilde bir $y_i \in X_i$ vardır.

Şimdi de, (x_n) dizisinin $y = (y_i)_{i\in\mathbb{N}}$'ye yakınsadığını göstermek için keyfi bir $\varepsilon > 0$ alalım. Bir $N \in \mathbb{N}$ yeterince büyük seçilirse

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{\rho_i(x_i, y_i)}{2^i} \leq \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2}$$

sağlanır. Diğer yandan her $i = 0, 1, 2, 3, ..., N$ için (x_i^n) yakınsak olduğundan yeterince büyük bir N_ε seçilerek her $n > N_\varepsilon$ için

$$\rho_i(x_i^n, y_i) < \frac{\varepsilon \cdot 2^i}{2N}$$

elde edilir. Böylece $n > N_\varepsilon$ için

$$\begin{aligned}
\rho(x_n, y) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\rho_i(x_i^n, y_i)}{2^i} \\
&= \sum_{i=0}^{N} \frac{\rho_i(x_i^n, y_i)}{2^i} + \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{\rho_i(x_i^n, y_i)}{2^i} \\
&\leq \sum_{i=0}^{N} \frac{\rho_i(x_i^n, y_i)}{2^i} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \sum_{i=0}^{N} \frac{\varepsilon \cdot 2^i}{2N \cdot 2^i} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla (x_n) Cauchy dizisi yakınsak olup $\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ tamdır. □

Teorem 4.1.7. *Tam metrik uzayların G_δ-altkümeleri tam metriklenebilirdir.*

Kanıt. (X, d) bir tam metrik uzay olsun. d tam metriğini 1 ile sınırlı metrik alabiliriz. Öncelikle $G \subseteq X$ açık bir küme olmak üzere, G'nin d tarafından indirgenen topolojisi ile çakışan G üzerinde bir metrik tanımlanabilir. Bunun için G üzerinde, her $x, y \in G$ için

$$\rho(x, y) = d(x, y) + \left| \frac{1}{d(x, X \setminus G)} - \frac{1}{d(y, X \setminus G)} \right|$$

metriğini tanımlamamız yeterli olacaktır.

$U \subseteq X$ bir G_δ-küme olsun. Bu durumda U kümesini, her $n \in \mathbb{N}$ için U_n kümesi X'de açık olmak üzere

$$U = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$$

olarak ifade edebiliriz. Bir ϕ fonksiyonu

$$\phi\colon U \longrightarrow \prod_{n\in\mathbb{N}} U_n$$
$$x \longmapsto (x, x, x, ...)$$

şeklinde tanımlansın. $\prod_{n\in\mathbb{N}} U_n$'deki köşegen kümesi

$$\Delta = \{(x_0, x_1, ...) \in \prod_{n\in\mathbb{N}} U_n : \text{ her } i, j \in \mathbb{N} \text{ için } x_i = x_j \}$$

ile gösterilirse

$$\phi(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n) = \Delta$$

eşitliği sağlanacaktır. ϕ fonksiyonu U ile Δ arasında bir homeomorfizma olduğundan, U kümesi $\prod_{n\in\mathbb{N}} U_n$ çarpım uzayı içine gömülebilirdir.

Her $n \in \mathbb{N}$ için U_n tam olduğundan, bir önceki teoremden $\prod_{n\in\mathbb{N}} U_n$ tam uzaydır. Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ için $U_n \subseteq X$ Hausdorff olacağından $\prod_{n\in\mathbb{N}} U_n$ Hausdorff uzaydır. O halde Δ, $\prod_{n\in\mathbb{N}} U_n$'nin kapalı bir altkümesi olduğundan tam uzay olacaktır. Bu durumda $U = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ tam metriklenebilirdir. □

Teorem 4.1.8. *Her $n \in \mathbb{N}$ için X_n ayrılabilir ise, $X = \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ çarpım topolojisi ile ayrılabilirdir.*

Kanıt. Her $n \in \mathbb{N}$ için Y_n kümesi X_n uzayının sayılabilir yoğun bir altkümesi olsun. $x_n \in Y_n$ olmak üzere, her $m \in \mathbb{N}$ için D_m kümesini

$$\begin{aligned} D_m &= \{y \in \prod_{n\in\mathbb{N}} Y_n : n \geq m \text{ için } y_n = x_n\} \\ &= \prod_{0\leq n<m} Y_n \times \prod_{n\geq m} \{x_n\} = Y_0 \times Y_1 \times Y_2 \times ... \times Y_{m-1} \times \{x_n\} \times ... \end{aligned}$$

olarak tanımlayalım. Bu doğrultuda

$$D = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} D_m$$

olarak tanımlanan küme çarpım uzayının sayılabilir yoğun altkümesi olacaktır. □

Tanım 4.1.9. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer X ayrılabilir ve tam metriklenebilir ise X'e *Polish Uzay* denir.

Teorem 4.1.10. $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ *bir Polish uzaydır.*

Kanıt. Ayrık topoloji ile $\mathbb{N}$ uzayı tam metriklenebilir olduğundan, Teorem $4.1.6$'dan $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tam metriklenebilirdir. Diğer taraftan $\mathbb{N}$ uzayının kendisi sayılabilir ve yoğun olduğundan ayrılabilirdir. Dolayısıyla Teorem $4.1.8$ kullanılarak $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$'nin ayrılabilir bir uzay olduğu sonucu elde edilir. Bu durumda $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ Polish bir uzaydır. □

Örnek 4.1.11. $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$*'nin sayılabilir yoğun bir altkümesi*

$$D = \{x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \exists i \, \forall j \geq i, x(j) = 0\}$$

olarak verilebilir. D'nin her bir elemanı $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ ve $s = (s_0, s_1, s_2, ..., s_i)$ olmak üzere

$$x = (s_0, s_1, s_2, ..., s_i, 0, 0, 0, ...)$$

şeklindedir. Dolayısıyla $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ uzayının $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ sonlu diziler kümesi sayılabilir olduğundan D sayılabilirdir. Diğer yandan her $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ için en az bir $(s_0, s_1, s_2, ..., s_i, 0, 0, 0, ...) \in N_s$ olduğundan $D \cap N_s \neq \emptyset$ olmalıdır. Sonuç olarak D kümesi $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$'de yoğundur.

4.2 İrrasyonel Sayılar Kümesinin Topolojik Özellikleri

İrrasyonel sayıların kümesini $\mathbb{P}$ ile göstereceğiz.

Teorem 4.2.1. $\mathbb{P}$ *tam metriklenebilir bir uzaydır.*

Kanıt. Tam metriklenebilir uzayların G_δ-altkümeleri tam metriklenebilir olduğundan, $\mathbb{P}$ irrasyonel sayılar kümesi tam metriklenebilir. Çünkü $\mathbb{P}$ kümesi $\mathbb{R}$'nin bir G_δ-altkümesidir. Bunu göstermek için de $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesini ele alalım. $\mathbb{Q}$ sayılabilir olduğundan her $q \in \mathbb{Q}$ için

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}$$

olarak yazılırsa, buradan

$$\mathbb{P} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\} = \bigcap_{q \in \mathbb{Q}} \mathbb{R} \setminus \{q\}$$

olduğu görülür. Her $q \in \mathbb{Q}$ için $\{q\}$ tek nokta kümesi $\mathbb{R}$'de kapalı olduğundan $\mathbb{R} \setminus \{q\}$ açıktır. Dolayısıyla $\mathbb{P}$ irrasyonel sayılar kümesi sayılabilir tane açık kümenin arakesiti olarak yazılabildiğinden G_δ-kümedir. □

Teorem 4.2.2. *([11]) $\mathbb{P}$ uzayı 0-boyutludur.*

Kanıt. $(\mathbb{R}, \tau_s)$ standart topolojik uzay olmak üzere, $\mathbb{R}$'nin

$$\mathcal{B} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}, a < b\}$$

tabanını alalım. O halde

$$\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cap \mathbb{P} = \{(a, b) \cap \mathbb{P} : (a, b) \in \mathcal{B}\}$$

$\mathbb{P}$'nin altuzay topolojisi için bir tabandır. $a, b \in \mathbb{Q}$ olduğundan her $U \in \mathcal{B}'$, $(a, b) \in \tau_s$ ve $[a, b] \in \tau_s^k$ olmak üzere

$$U = (a, b) \cap \mathbb{P} = [a, b] \cap \mathbb{P}$$

olarak yazılabileceğinden $\mathcal{B}'$'nin elemanları kapalıdır. Dolayısıyla $\mathbb{P}$ elemanları aynı zamanda kapalı olan bir tabana sahiptir. Şu halde $\mathbb{P}$ uzayı *0-boyutlu* olur. □

Teorem 4.2.3. *$\mathbb{P}$ bir Polish uzaydır.*

Kanıt. $(\mathbb{R}, \tau_s)$ standart topolojik uzayı ikinci sayılabilir olduğundan, $\mathbb{P}$ altuzayı da ikinci sayılabilirdir. O halde $\mathbb{P}$ ayrılabilirdir. Diğer taraftan Teorem $4.2.1$'den $\mathbb{P}$ tam metriklenebilir olup bir Polish uzaydır. □

Örnek 4.2.4. *([32]) $\mathbb{P}$ uzayının sayılabilir yoğun bir altkümesi, $q \in \mathbb{Q}$ olmak üzere*

$$D = \{\pi + q : q \in \mathbb{Q}\}$$

olarak verilebilir.

Teorem 4.2.5. *$\mathbb{P}$ uzayının kompakt altkümelerinin içi boştur.*

Kanıt. $(\mathbb{R}, \tau_s)$ standart topolojik uzay olmak üzere, $\mathbb{P}$ üzerinde altuzay topolojisi olsun. $K \subseteq \mathbb{P}$ kompakt ve $K^{\circ} \neq \emptyset$ olsun. O halde $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olmak üzere $x \in (a, b) \cap \mathbb{P} \subseteq K$ olacak şekilde bir $(a, b) \in \tau_s$ vardır. Bir $r \in (a, b) \cap \mathbb{Q}$ noktası alalım ve bir $n \in \mathbb{N}$ için $2^{-n} < min\{r - a, b - r\}$ ve $k > n$ olacak şekilde her $k \in \mathbb{N}$ için

$$F_k = [r - 2^{-k}, r + 2^{-k}] \cap \mathbb{P}$$

kapalı kümelerini düşünelim. $\forall k > n$ için iç-içe geçmiş F_k kapalı kümeleri için $F_k \subseteq K$'dır. O halde

$$\mathcal{F} = \{F_k : k > n\}$$

K'nın sonlu arakesit özelliğine sahip bir kapalı kümeler ailesidir. K kompakt olduğundan $\bigcap_{k>n} F_k \neq \emptyset$ olmalıdır. Fakat her $k > n$ için iç-içe geçmiş $[r-2^{-k}, r+2^{-k}]$ kapalı aralıklarının arakesiti

$$\bigcap_{k>n} [r - 2^{-k}, r + 2^{-k}] = \{r\}$$

olup

$$\bigcap_{k>n} [r - 2^{-k}, r + 2^{-k}] \cap \mathbb{P} = \bigcap_{k>n} F_k = \emptyset$$

olduğundan bu durum K'nın kompakt olması çelişir. Dolayısıyla $K^{\circ} = \emptyset$ olmalıdır. $\square$

Teorem 4.2.6. $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ *uzayının kompakt altkümelerinin içi boştur.*

Kanıt. $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$'nin her kompakt altkümesinin içinin boş olduğunu göstermek için bir $K \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ altkümesini alalım öyle ki K kompakt olsun. K'nın içinin boştan farklı olduğunu varsayalım. O halde $x \in N_s \subseteq K$ olacak şekilde bir $N_s \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ vardır. $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$'nin taban elemanları aynı zamanda kapalı olduğundan, N_s kapalı olup, kompakt K altkümesinin kapalı altkümesi olarak kompakttır. $s = (a_0, a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ için $N_s = \{x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : s \subseteq x\}$ olup

$$N_s = \{a_0\} \times \{a_1\} \times \{a_2\} \times .... \times \{a_n\} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times ... \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$$

formundadır. Şimdi de $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$U_k = \{a_0\} \times \{a_1\} \times \{a_2\} \times .... \times \{a_n\} \times \{k\} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times ... \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$$

açıklarını alalım. N_s'deki elemanlar başlangıçları $s = (a_0, a_1, a_2..., a_n) \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ olan diziler olduğundan, seçimimizden dolayı keyfi bir $x \in N_s$ ve bir $k \in \mathbb{N}$ için $x \in U_k$ olmalıdır. Dolayısıyla

$$N_s \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_k$$

olup

$$\mathcal{U} = \{U_k : k \in \mathbb{N}\}$$

N_s'nin sonsuz elemanlı bir açık örtüsüdür. N_s kompakt olduğundan, $\mathcal{U}$ açık örtüsünün sonlu bir altörtüsü vardır öyle ki bir $m \in \mathbb{N}$ için

$$N_s \subseteq \bigcup_{k=0}^{m} U_k$$

sağlanır. Fakat N_s'nin $x = (a_0, a_1, a_2, ..., a_n, m+1, m+1, m+1, ...)$ elemanını alırsak, x noktası $N_s \subseteq \bigcup_{k=0}^{m} U_k$ tarafından örtülemez. Dolayısıyla N_s kompakt değildir. Bu da K'nın kompakt olması ile çelişir. Kabulümüz yanlış olup, K kompakt kümesinin içi boştur. □

Aşağıda verilen teorem ile ilgili daha ayrıntılı bilgi için [20] kaynağı incelenebilir.

Teorem 4.2.7. *(Alexandrov-Urysohn) Baire Uzayı $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ kompakt altkümelerinin içi boş olan, homeomorfizma farkıyla, tek boştan farklı 0-boyutlu Polish Uzaydır.*

Sonuç 4.2.8. $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ *uzayı ile* $\mathbb{P}$ *uzayı homeomorftur.*

4.3 Cantor Uzayı

Tanım 4.3.1. Cantor kümesi $[0, 1]$ birim aralığından ardışık adımlarla orta üçte-birlik açık aralıkların çıkarılmasıyla elde edilir.

$$K_0 = [0, 1]$$

olmak üzere, ilk adımda K_0'dan orta $\frac{1}{3}$'lük açık aralık olan $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ aralığını çıkaralım. Bu adım sonrasında uzunlukları $\frac{1}{3}$ olan 2 tane ayrık kapalı aralığın birleşimi

$$K_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$$

kümesi elde edilir. Aynı şekilde K_1 kümesini oluşturan alt aralıkların her birinden yine orta $\frac{1}{3}$'lük açık aralıklar olan $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ ve $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ aralıklarını çıkaralım. Bu işlem sonrasında da uzunlukları $\frac{1}{3^2}$ olan 4 adet ayrık kapalı aralığın birleşimi

$$K_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$$

kümesi elde edilir. Her $n \in \mathbb{N}$ için bu işlem yapılırsa, n'inci adımda uzunlukları $\frac{1}{3^n}$ olan 2^n tane ayrık kapalı aralığın birleşimi kalır. Her $n \in \mathbb{N}$ için K_n kapalı kümelerinin arakesiti olan

$$\mathbf{C} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$$

kümesine *Cantor Kümesi* denir.

Cantor kümesi, sayılabilir sonsuz kapalı kümenin arakesiti olarak kapalı, $[0,1]$ kompakt kümesinin kapalı altkümesi olarak kompakttır. Cantor kümesi'nin her x elemanı 3'lük tabanda sadece 0 ve 2 rakamları kullanılarak tek türlü yazılır. Yani her $i \in \mathbb{N}^+$ için $x_i = 0, 2$ olmak üzere Cantor kümesi'nin her x elemanı

$$x = 0, x_1 x_2 x_3 x_4 ...$$

şeklindedir. [0,1] kapalı aralığının her x elemanı

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i} \text{ ve her } i \in \mathbb{N}^+ \text{ için } x_i = 0, 1, 2$$

olacak şekilde bir seri açılımına sahiptir. Dolayısıyla, her Cantor kümesinin her x elemanı $x_i = 0, 2$ olmak üzere yukarıdaki seri açılımına sahiptir. Böylece Cantor kümesi

$$\mathbf{C} = \{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i} : x_i = 0 \text{ ya da } x_i = 2\}$$

olarak tanımlanır. Cantor'un köşegen tekniği kullanılarak, Cantor kümesinin sayılamaz olduğu gösterilebilir.

Teorem 4.3.2. **C** *Cantor kümesi hiçbir yerde yoğun değildir.*

Kanıt. Cantor kümesi inşası gereği $[0,1]$'in hiçbir açık aralığını kapsayamaz. Bu durumda $(\overline{\mathbf{C}})^{\circ} = \emptyset$ olmalıdır. □

Teorem 4.3.3. *Cantor kümesi mükemmel bir kümedir.*

Kanıt. $x \in \mathbf{C}$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. $n \in \mathbb{N}$ sayısını yeterince büyük seçelim öyle ki $3^{-n} < \varepsilon$ sağlansın. K_n, Cantor kümesinin inşaasında 3^{-n} uzunluğunda 2^n tane kapalı aralığın birleşimi olmak üzere, $x \in K_n$'dir. Dolayısıyla $x \in K_n$, bu 2^n tane ayrık kapalı aralığın bir tanesinde bulunur. x'in bulunduğu bu kapalı aralığa K_{n_1} diyelim. Açıkça

$$K_{n_1} \subseteq B(x, \varepsilon)$$

sağlanır. Şimdi de K_{n+1} kümesini ele alalım. K_{n+1}, her birinin uzunluğu $3^{-(n+1)}$ olan 2^{n+1} tane ayrık kapalı aralığın birleşiminden oluşur öyle ki bu aralıkların iki tanesi K_{n_1} aralığının altkümesidir. Bu altkümeler $K_{n_1^1}$ ve $K_{n_1^2}$ olsun. $x \in K_{n_1^1}$ olduğunu kabul edelim. $x \notin K_{n_1^2}$ ve $\mathbf{C} \cap K_{n_1^2} \neq \emptyset$ olduğundan bir $y \in \mathbf{C} \cap K_{n_1^2}$ vardır. Dolayısıyla

$$\mathbf{C} \cap (B(x,\varepsilon) \setminus \{x\}) \neq \emptyset$$

olmalıdır. O halde x noktası **C**'nin bir yığılma noktasıdır. $x \in \mathbf{C}$ ve $\varepsilon > 0$ keyfi verildiğinden, her $x \in \mathbf{C}$, C'nin bir yığılma noktası olup, izole noktası değildir. Diğer yandan **C** kapalı olduğundan, mükemmel bir kümedir. □

Tanım 4.3.4. $\{0,1\}$ kümesini ayrık topoloji ile birlikte düşünelim. $\{0,1\}$'in kendisiyle sayılabilir sonsuz çarpımı ile elde edilen uzaya bir *Cantor uzayı* denir. $2 = \{0,1\}$ kümesini belirtmek üzere Cantor uzayı

$$\mathcal{C} = 2^{\mathbb{N}} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$$

ile gösterilir.

Cantor kümesinin, her $i \in \mathbb{N}^+$ için $x_i = 0$ ya da $x_i = 2$ olmak üzere her $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i}$ elemanı $\mathcal{C}$'nin elemanlarıyla birebir eşlenebilir. Bu iki uzay arasında

$$\begin{aligned} h\colon \mathbf{C} &\longrightarrow \mathcal{C} \\ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i} &\longmapsto (\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2}, ...) \end{aligned}$$

olarak tanımlanan h fonksiyonu bir homeomorfizmadır.

Teorem 4.3.5. *([20]) X boştan farklı mükemmel bir Polish uzay ise $\mathcal{C}$'den X içine bir gömme dönüşümü vardır.*

Kanıt. X uzayı üzerinde aşağıdaki koşulları sağlayan bir $(U_s)_{s\in 2^{<\mathbb{N}}}$ Cantor Şeması tanımlayacağız.

(i) $\emptyset \neq U_s$,

(ii) $Çap(U_s) \leq 2^{-|s|}$,

(iii) $\overline{U_{s\frown i}} \subseteq U_s$, $s \in 2^{<\mathbb{N}}$, $i \in \{0,1\}$

Burada $s \frown i$ notasyonu ile s sonlu dizisinin sonuna i'nin eklenmesiyle elde edilen dizi ifade edilmektedir.

X uzayının altkümelerinden oluşan $(U_s)_{s\in 2^{<\mathbb{N}}}$ ailesinin kurulumunda tümevarım yöntemi kullanılacaktır.

C'nin hiçbir x noktası bu ayrışımdan dolayı X'in bir yoğunlaşma noktası değildir. Dolayısıyla her $x \in C$ için bir $B_n^x \in \mathcal{B}$ açığı vardır öyle ki B_n^x sayılabilirdir. Diğer yandan B_n^x kümesi her elemanı için bir açık komşuluk olduğundan ve B_n^x sayılabilir olduğundan, hiçbir $y \in B_n^x$ için $y \in X^*$ olamaz. Dolayısıyla her $x \in C$ için

$$B_n^x \cap X^* = \emptyset$$

olmalıdır. Sonuç olarak her $x \in C$ için $B_n^x \subseteq C$'dir. $\mathcal{B}$ sayılabilir olduğundan her $x \in C$ için en fazla sayılabilir tane sayılabilir $B_n^x \in \mathcal{B}$ vardır. Dolayısıyla C kümesi sayılabilir tane sayılabilir açık kümenin birleşimi olarak sayılabilir bir açık kümedir. Diğer taraftan X^* kümesinin mükemmel bir küme olduğu gösterilebilir. Bunun için bir $x \in X^*$ ve x'in herhangi bir V açık komşuluğunu alalım. V, x'in bir açık komşuluğu olduğundan sayılamazdır. C sayılabilir olduğundan $V \setminus C$ sayılamazdır. Dolayısıyla

$$V \setminus C = X^* \cap V$$

sayılamazdır. Sonuç olarak $X^* \cap V$ sayılamazdır. O halde

$$X^* \cap (V \setminus \{x\}) \neq \emptyset$$

olacağından, x noktası X^*'in bir yığılma noktasıdır. Diğer yandan C açık olduğundan $X^* = X \setminus C$ kapalıdır. Şu halde X^* mükemmel bir kümedir. $P = X^*$ olarak seçilirse, $P \cap C = \emptyset$ olup $X = P \cup C$ sağlanır.

Şimdi de X'in aynı şartları sağlayan başka bir ayrışımının olduğunu varsayalım öyle ki P_1 mükemmel bir küme C_1 sayılabilir açık bir küme olmak üzere

$$X = P_1 \cup C_1 \text{ ve } P_1 \cap C_1 = \emptyset$$

olsun. P_1 kapalı olduğundan tam metriklenebilirdir. Ayrıca P_1 ayrılabilir uzaydır. Dolayısıyla P_1 mükemmel bir Polish uzaydır. O halde, P_1^* kümesi P_1'in yoğunlaşma noktaları kümesi olmak üzere $P_1 = P_1^*$'dir. $P_1^* \subseteq P_1$ olduğu açıktır. Diğer yandan $x \in P_1$ ve x'in herhangi bir U açık komşuluğunu alalım. $U \subseteq P_1$ açık olduğundan bir G_δ-kümesidir ve P_1 tam metriklenebilir olduğundan U tam metriklenebilir ve aynı zamanda P_1 ikinci sayılabilir olduğundan U ikinci sayılabilir olup ayrılabilirdir. Dolayısıyla U altuzayı Polish bir uzaydır. Diğer yandan U mükemmel bir altuzaydır. Aksine, U altuzayının x_0 gibi bir izole noktası olsaydı, x_0 aynı zamanda P_1'in de bir izole noktası olurdu ki bu da P_1'in mükemmel bir küme olması ile çelişirdi. Sonuç olarak U mükemmel bir Polish uzay olduğundan sayılamazdır. O halde

$x \in P_1^*$ olmalıdır. Bu yüzden $P_1 \subseteq P_1^*$ olup, $P_1 = P_1^*$'dir. $X^* = P$ kümesi X'in bütün yoğunlaşma noktaları kümesi olduğundan $P_1 \subseteq P$'dir. Öte yandan, eğer $y \in C_1$ ise, C_1 sayılabilir açık bir küme olduğundan $y \in C$ olup $C_1 \subseteq C$'dir. $X = P_1 \cup C_1$ olduğundan $P_1 = P = X^*$ ve $C_1 = C$'dir. Sonuç olarak X'in $P \cup C$ ayrışımı tek türlüdür. $\square$

Sonuç 4.3.9. *Polish uzayların sayılamaz kapalı altkümeleri mükemmel bir küme içerir.*

4.4 Kritik Kardinaller

G. Cantor, 1874'te köşegen tekniğini kullanarak $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinin sayılamaz olduğunu kanıtlamıştır. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinin kardinalitesi $\mathfrak{c}$ sembolü ile gösterilmektedir. $\mathfrak{c} > \aleph_0$ olduğu gösterildikten sonra, $\aleph_0$ ile $\aleph_1$ arasında nasıl bir aritmetik ilgi olduğu sorusu ortaya çıkmıştır. Cantor,

$$\aleph_0 < |A| < \mathfrak{c}$$

olacak şekilde bir A kümesinin var olup olmadığı sorusu üzerinde uzun yıllar çalışmalar yapmış ve sonrasında 1878 yılında Süreklilik Hipotezini ileri sürmüştür.

"*$A \subseteq \mathbb{R}$ sonsuz ise A'nın kardinalitesi ya $\aleph_0$ ya da $\mathfrak{c}$ olacaktır.*"

Süreklilik Hipotezi, Cantor'un çok fazla girişimine rağmen çözümsüz kalmıştır ve D. Hilbert'in sunmuş olduğu *23 önemli açık sorular* listesinde birinci sırayı almıştır.

$$|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}| = \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$$

eşitliği kullanılarak Süreklilik Hipotezi, kısaca CH ile gösterilerek literatürde aşağıdaki şekli ile ifade edilir.

$$\textit{Süreklilik Hipotezi (CH)} : 2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

Kurt Gödel, 1940 yılında Süreklilik Hipotezi ile ilgili birçok çalışma yapmış ve Süreklilik Hipotezinin ZFC (ZF + AC) ile çürütülemez olduğunu kanıtlamıştır ve aynı yüzyılın ikinci yarısında, Paul Cohen, 1963 yılında Süreklilik Hipotezi'nin doğruluğunun ZFC ile kanıtlanamaz olduğunu göstermiştir. Gödel ve Cohen'in bu çalışmaları Süreklilik Hipotezinin ZFC'den bağımsız olduğunu göstermiştir.
Süreklilik Hipotezi ve Cantor'un çalışmaları ile ilgili geniş bilgiye $[8, 9, 17, 21]$ numaralı kaynaklardan ulaşılabilir.

$\aleph_0$ ile $\mathfrak{c}$ arasında yer alan ve belirli özelliklere sahip en küçük kardinalleri karakterize eden kardinal karakteristikler arasında tez çalışmamız için gerekli olanları bu kısımda tanıtacağız.
Öncelikle $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ üzerinde tanımlanan ve sıkça kullanacağımız $\leq^*$ bağıntısından bahsedelim.

Tanım 4.4.1. $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ üzerinde $\leq^*$ ile gösterilen bağıntı her $f, g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ için

$$f \leq^* g \Leftrightarrow \text{ sonlu tanesi dışındaki her } n \in \mathbb{N} \text{ için } f(n) \leq g(n)$$

olarak tanımlansın. Diğer bir ifade ile $\leq^*$;

$$f \leq^* g \Leftrightarrow |\{n \in \mathbb{N} : g(n) < f(n)\}| < \omega$$

ile tanımlıdır.

$\leq^*$ bağıntısı $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ üzerinde yansıma ve geçişme özelliklerini sağlayan bir bağıntıdır.

Tanım 4.4.2. *([4]) (Sınırlı Aile)* $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ olmak üzere, her $f \in \mathcal{A}$ için $f \leq^* g$ olacak şekilde bir $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ varsa, diğer bir ifade ile

$$\forall f \in \mathcal{A}\, \exists g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\, \forall^{\infty} n\, f(n) \leq g(n)$$

sağlanıyorsa $\mathcal{A}$'ya *sınırlı aile* denir. Aksi durumda $\mathcal{A}$'ya *sınırsız aile* denir.

Tanım 4.4.3. *([4]) (Dominant Aile)* $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ olmak üzere, her $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ için $f \leq^* g_f$ olacak şekilde bir $g_f \in \mathcal{A}$ varsa, diğer bir ifade ile

$$\forall f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\, \exists g_f \in \mathcal{A}\, \forall^{\infty} n\, f(n) \leq g_f(n)$$

sağlanıyorsa $\mathcal{A}$'ya *dominant aile* denir.

Tanım 4.4.4. *([4])* Sınırsız ailelerin en küçük kardinalitesi $\mathfrak{b}$ ile gösterilir. Diğer bir ifade ile

$$\mathfrak{b} = min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \text{ sınırsız aile }\}.$$

Tanım 4.4.5. *([4])* Dominant ailelerin en küçük kardinalitesi $\mathfrak{d}$ ile gösterilir. Diğer bir ifade ile

$$\mathfrak{d} = min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \text{ dominant aile }\}.$$

Lemma 4.4.6. *([4])* $\aleph_1 \leq \mathfrak{b}$

Kanıt. Her sınırsız kümenin sayılamaz olduğunu göstermek için, hiçbir sayılabilir ailenin sınırsız olamayacağını gösterelim. Sayılabilir bir $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ailesini alalım öyle ki

$$\mathcal{G} = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$$

olsun. Her $f_n \in \mathcal{G}$ için $f_n \leq^* g$ şartını sağlayan bir $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ fonksiyonunun varlığını göstermeliyiz. Bunun için $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ fonksiyonunu $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$g(m) = max\{f_n(m) : n \leq m\}$$

olarak seçersek istenen sağlanır. Dolayısıyla keyfi sayılabilir bir $\mathcal{G}$ ailesi sınırlı olacağından, sınırsız bir aile sayılamazdır. $\mathfrak{b}$ sınırsız ailelerin en küçük kardinalitesi olduğundan $\aleph_1 \leq \mathfrak{b}$ elde edilir. □

Lemma 4.4.7. *([4])* $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{d}$

Kanıt. $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ dominant bir aile olsun. Eğer $\mathcal{D}$ sınırlı olursa, her $f \in \mathcal{D}$ için tek bir $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ vardır öyle ki $f \leq^* g$'dir. Bu durumda

$$h(n) = g(n) + 1 \; (n \in \mathbb{N})$$

olarak tanımlanan h fonksiyonu için $h \leq^* f$ olacak şekilde bir $f \in \mathcal{D}$ bulunamaz ki bu bir çelişkidir. O halde her dominant aile sınırsızdır. Sonuç olarak $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{d}$ olmalıdır. □

Lemma 4.4.8. *([4])* $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ *dominant bir ailedir.*

Kanıt. Her $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$g_f(n) = f(n) + 1$$

olarak tanımlanırsa, $f \leq^* g_f$ sağlanır. O halde $\mathbb{N}$'den $\mathbb{N}$'ye tüm fonksiyonların ailesi dominant bir ailedir. □

Sonuç 4.4.9. *([4])* $\aleph_0 < \aleph_1 \leq \mathfrak{b} \leq \mathfrak{d} \leq \mathfrak{c}$ *eşitsizliği sağlanır.*

Sonuç 4.4.10. *Süreklilik Hipotezi ile*

$$\aleph_1 = \mathfrak{b} = \mathfrak{d} = \mathfrak{c}$$

elde edilir.

4.5 Temel Seçme Prensipleri Ve Kardinal Karakteristikleri

Bu kısımda Menger ve Hurewicz prensiplerinin kritik kardinalleri incelenecektir.

Tanım 4.5.1. Ayrılabilir, metriklenebilir ve 0-boyutlu bir uzaya *reellerin kümesi* denir.

$\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin tüm altkümelerinin ailesi $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, karakteristik fonksiyonlar kullanılarak $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ Cantor uzayı ile eşleştirilebilir. Diğer taraftan $\mathcal{C}$ Cantor uzayı, **C** Cantor kümesine homeomorf olduğundan, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$'in her altuzayı reel bir küme olarak kabul edilir.

$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ uzayının aşağıda verilen iki önemli altuzayı, bu kısımda verilecek kavramlar için temel oluşturmaktadır.

$[\mathbb{N}]^{<\infty}$: $\mathbb{N}$'nin tüm sonlu altkümelerinin ailesi

$[\mathbb{N}]^{\infty}$: $\mathbb{N}$'nin tüm sonsuz altkümelerinin ailesi

Her $a \in [\mathbb{N}]^{\infty}$ artan bir indeks ile $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ Baire uzayının bir elemanı olarak ifade edilebilir. Bu durumda $n \in \mathbb{N}$ için $a(n)$ notasyonu artan bir indeks ile numaralanan a kümesinde n. elemanı ifade eder. Böylece

$$[\mathbb{N}]^{\infty} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$$

olup, $[\mathbb{N}]^{\infty}$ üzerindeki topoloji ($\mathcal{P}(\mathbb{N})$ Cantor uzayının altuzayı) ile $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tarafından indirgenen altuzay topolojisi çakışacaktır. Dolayısıyla $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ için daha önceki bölümde tanımladığımız klasik notasyonları $[\mathbb{N}]^{\infty}$ uzayı için uyarlayabileceğiz [33].

P, reellerin kümeleri için bir özellik olsun. P özelliği için kritik kardinal

$$\text{non}(P) = min\{|X| : \textit{X, P özelliğini sağlamayan reel bir küme}\}$$

notasyonu ile gösterilir.

Teorem 4.5.2. *([16, 38])* $\text{non}(S_{fin}(\mathcal{O},\mathcal{O})) = \mathfrak{d}$

Kanıt. $(\Rightarrow)$ X reellerin kümesi ve $|X| < \mathfrak{d}$ olsun. X'in $S_{fin}(\mathcal{O},\mathcal{O})$ sınıfından olduğunu göstermek için X'in bir $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, ...$ açık örtüler dizisini alalım. X ayrılabilir olduğundan Lindelöftür. Bu yüzden her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{U}_n$ sayılabilir kabul edilebilir öyle ki olarak tanımlanan f fonksiyonu için $f \leq^* x$ olacak şekilde bir $x \in \mathcal{D}$ bulunamazdı. Bu ise bir çelişkidir. Bu yüzden $x(n) > max\{m : U_m^n \in \mathcal{F}_n\}$ ve $x \notin \bigcup \mathcal{F}_n$ olacak şekilde bir $x \in D$ vardır. O halde D kümesi $S_{fin}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ özelliğini sağlamaz. Çünkü eğer sağlasaydı, D'nin her $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, ...$ açık örtüler dizisi için $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{U}_0, \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{U}_1, ...$ sonlu alt aileleri olurdu öyle ki her $x \in D$ için, x sonsuz tane $n \in \mathbb{N}$ için $x \in \bigcup \mathcal{F}_n$ olurdu. Bunu görmek için ise $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, ...$ dizisi sonsuz çoklukta ayrık alt dizilere bölünebilir ve her bir alt dizi için $S_{fin}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ özelliği uygulanabilir. Fakat tanımladığımız açık örtüler dizisi için bu sağlanmayacağından D $S_{fin}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ özelliğini sağlamaz. □

Sonuç 4.5.3. $[\mathbb{N}]^\infty$*'nin dominant altkümeleri* $S_{fin}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ *özelliğini sağlamaz.*

Aşağıdaki teorem Hurewicz'in 1927 yılındaki bir çalışmasına aittir. Verilen kanıt, günümüz notasyonları kullanılarak sunulacaktır. Kullanılan tekniklere örnek olarak [38, 43] incelenebilir.

Teorem 4.5.4. *([16])* $\mathrm{non}(U_{fin}(\mathcal{O}, \Gamma)) = \mathfrak{b}$

Kanıt. $(\Rightarrow)$ X reellerin kümesi ve $U_{fin}(\mathcal{O}, \Gamma)$ sınıfından olsun. X'in sınırsız bir aile olduğunu varsayalım. X'in bir $\{\mathcal{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ açık örtüler dizisini alalım öyle ki her $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in X$ için $\mathcal{U}_n = \{U_n^x : x \in X\}$ olup, burada

$$U_n^x = \{y \in X : \forall i \leq n \text{ için } y(i) = x(i)\}$$

olarak tanımlansın. X Hurewicz uzay olduğundan her n için bir $\mathcal{V}_n \subseteq \mathcal{U}_n$ sonlu alt ailesi vardır öyle ki her $x \in X$ için ve sonlu tanesi dışındaki her n için $x \in \bigcup \mathcal{V}_n$ sağlanır öyle ki

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup \mathcal{V}_n$$

dir. Fakat $[\mathbb{N}]^\infty$'nin bir f fonksiyonu

$$f(n) = max\{x(n) : x \in U_n^x, U_n^x \in \mathcal{V}_n\} + 1$$

olarak tanımlanırsa, X sınırsız olduğundan bir $g \in X$ olmalıdır öyle ki $g \not\leq^* f$ sağlanmalıdır. Dolayısıyla sonsuz tane $n \in \mathbb{N}$ için $f(n) < g(n)$ olmalıdır. O halde $g \notin \bigcup \mathcal{V}_n$ olup, bu durum X'in Hurewicz olması ile çelişir. Şu halde X Hurewicz ise, X sınırlıdır.

$(\Leftarrow)$ X reellerin kümesi ve $|X| < \mathfrak{b}$ olsun. X'in Hurewicz olmadığını varsayalım öyle ki $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$ X'in açık örtüler dizisi olmak üzere her n için bir $\mathcal{V}_n \subseteq \mathcal{U}_n$ sonlu kümesi var ve bir $x \in X$ ve sonsuz tane $n \in \mathbb{N}$ için $x \notin \bigcup \mathcal{V}_n$ olsun. X Lindelöf olduğundan her n için

$$\mathcal{U}_n = \{U_m^n : m \in \mathbb{N}\}$$

olarak kabul edebiliriz. Her $x \in X$ için bir $f_x \in [\mathbb{N}]^\infty$ tanımlayalım öyle ki $n = 0$ için

$$f_x(0) = min\{m : x \in U_m^0\}$$

ve $n > 0$ için

$$f_x(n) = min\{m > f_x(n-1) : x \in U_m^n\}$$

olsun. Her $x \in X$ için tanımlanan f_x fonksiyonlarının kümesi olan

$$D = \{f_x : x \in X\}$$

sınırsız bir küme olduğunu iddia ediyoruz. İddianın aksini kabul edelim ve D sınırlı olsun. O halde her f_x için bir $f \in [\mathbb{N}]^\infty$ vardır öyle ki sonlu tanesi dışındaki her $n \in \mathbb{N}$ için $f_x(n) \leq f(n)$ sağlanır. O halde bu durumda her n için

$$\mathcal{V}_n = \{U_m^n : m \leq f(n)\}$$

tanımlayabiliriz öyle ki $\mathcal{V}_n \subseteq \mathcal{U}_n$ sonlu ve sonlu tanesi dışındaki her n için ve her $x \in X$ için $x \in \bigcup \mathcal{V}_n$ olur ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $D = \{f_x : x \in X\}$ sınırsız bir kümedir. Fakat bu durum da, $|X| < \mathfrak{b}$ ile çelişeceğinden, kabulümüz yanlış olup, X bir Hurewicz Uzay olmalıdır. Dolayısıyla X kümesi $U_{fin}(\mathcal{O}, \Gamma)$ sınıfındadır. $\square$

Sonuç 4.5.5. $[\mathbb{N}]^\infty$*'nin sınırsız altkümeleri* $U_{fin}(\mathcal{O}, \Gamma)$ *özelliğini sağlamaz.*

Kritik kardinaller ile belirlenen kurallara göre tanımlanan açık örtü özellikleri arasındaki ilişkiyi gösteren Scheepers Diyagramının bir örneği aşağıda verilmiştir [25].

$$
\begin{tikzcd}
 & & \begin{array}{c}\mathsf{U}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{O},\Gamma)\\ \mathfrak{b}\end{array} \arrow[r] & \begin{array}{c}\mathsf{U}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{O},\Omega)\\ \mathfrak{d}\end{array} \arrow[r] & \begin{array}{c}\mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{O},\mathrm{O})\\ \mathfrak{d}\end{array} \\
 & & \begin{array}{c}\mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\Gamma,\Omega)\\ \mathfrak{d}\end{array} \arrow[ur] & & \\
\begin{array}{c}\mathsf{S}_1(\Gamma,\Gamma)\\ \mathfrak{b}\end{array} \arrow[r] \arrow[uurr] & \begin{array}{c}\mathsf{S}_1(\Gamma,\Omega)\\ \mathfrak{d}\end{array} \arrow[rr] \arrow[ur] & & \begin{array}{c}\mathsf{S}_1(\Gamma,\mathrm{O})\\ \mathfrak{d}\end{array} \arrow[uur] & \\
 & & \begin{array}{c}\mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\Omega,\Omega)\\ \mathfrak{d}\end{array} \arrow[uu] & & \\
\begin{array}{c}\binom{\Omega}{\Gamma}\\ \mathfrak{p}\end{array} \arrow[uu] \arrow[r] & \begin{array}{c}\mathsf{S}_1(\Omega,\Omega)\\ \mathrm{cov}(\mathcal{M})\end{array} \arrow[uu] \arrow[ur] \arrow[rr] & & \begin{array}{c}\mathsf{S}_1(\mathrm{O},\mathrm{O})\\ \mathrm{cov}(\mathcal{M})\end{array} \arrow[uu] &
\end{tikzcd}
$$

Şema 2: Kritik kardinallerle Scheepers Diyagramı’na bir örnek

5 MENGER'İN KONJEKTÜRÜ

Bu bölümde Menger'in Konjektürü üzerine yapılan çalışmalardan bahsedilecektir. Bu kısımda $[20, 26, 33, 38, 40]$ numaralı kaynaklardan yararlanılmıştır.

Üçüncü bölümde Menger'in Konjektürünün oluşumu ve denk ifadelerinden bahsedilmişti. Günümüz notasyonu ile Menger'in Konjektürü şöyle ifade edilir:

Konjektür 5.1. *(Menger) Bir metrik uzayın Menger olabilmesi için gerek ve yeter koşul σ-kompakt olmasıdır.*

W. Hurewicz analitik uzaylar için Konjektür 5.1'in doğru olduğunu kanıtlamıştır $[15]$.

Tanım 5.2. X bir Polish uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Eğer A kümesi Polish bir uzayın sürekli görüntüsü olarak ifade edilebiliyorsa A'ya *analitik küme* denir.

Aşağıdaki Lemma'nın daha güncel notasyonları ile kanıtı için $[29]$ numaralı kaynak incelenebilir.

Lemma 5.3. *([16]) İrrasyonel sayıların kümesi $\mathbb{P}$ Menger özelliğini sağlamaz.*

Kanıt. $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$'nin bir $\{\mathcal{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ açık örtüler dizisini alalım öyle ki her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\mathcal{U}_n = \{\{x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : x(n) = k\} : k \in \mathbb{N}\}$$

olarak tanımlansın. Fakat bütün sonlu $\mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{U}_0, \mathcal{V}_1 \subseteq \mathcal{U}_1, ...$ alt aileleri için en az bir $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ vardır öyle ki, her $n \in \mathbb{N}$ için $x \notin \bigcup \mathcal{V}_n$ sağlanır. Gerçekten eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{V}_n \subseteq \mathcal{U}_n$ sonlu alt ailesi, $k^n_m \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\mathcal{V}_n = \{\{x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : x(n) = k^n_m\} : k^n_0, k^n_1, ..., k^n_m \in \mathbb{N}\}$$

olarak seçilirse, k^n_m ne kadar büyük olursa olsun,

$$x(n) = k^n_m + 1$$

olan bir $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ fonksiyonu her $\mathcal{V}_n$ için $x \notin \bigcup \mathcal{V}_n$ olacağından istenen sağlanır. Sonuç olarak, irrasyonel sayıların kümesi $\mathbb{P}$, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$'ye homeomorf olduğundan Menger özelliğini sağlamaz.

□

Lemma 5.4. *(Hurewicz) Eğer $Y \subseteq \mathbb{R}$ analitik ise, Y σ-kompakttır ya da Y irrasyonel sayıların kümesi $\mathbb{P}$'ye homeomorfik bir kapalı küme kapsar.*

Kanıt. Teoremin kanıtı için [20] kitabı sayfa 39 incelenebilir. □

Teorem 5.5. *(Hurewicz) $\mathbb{R}$'nin Menger ve analitik altkümeleri σ-kompakttır.*

Kanıt. Lemma 5.3 ve Lemma 5.4 kullanılarak elde edilir. □

Lemma 5.6. *(Cantor-Bendixon) Her sayılamaz $X \subseteq \mathbb{R}$ σ-kompakt kümesi mükemmel bir küme kapsar.*

Kanıt. Eğer X kümesi σ-kompakt ise, kompakt kümelerin sayılabilir birleşimi olarak yazılabilir. $\mathbb{R}$'nin kompakt altkümeleri kapalı ve X sayılamaz olduğundan en az bir tanesi sayılamazdır. Dolayısıyla Teorem $4.3.8$'den istenen sağlanmış olur. □

Tanım 5.7. (X, τ) bir topolojik uzay, $A \subseteq X$ olsun. Eğer A, sayılabilir tane hiçbir yerde yoğun olmayan kümelerin birleşimi şeklinde yazılabiliyorsa A'ya *1. Kategoriden küme* denir.

Tanım 5.8. $X \subseteq \mathbb{R}$ sayılamaz bir küme olsun. X'in $\mathbb{R}$'nin bütün 1. kategoriden kümeleri ile arakesiti sayılabilir ise, X'e *Luzin küme* denir.

Luzin kümelerin varlığı ZFC'den bağımsızdır. Luzin [22], 1914 yılında Süreklilik Hipotezini kullanarak bir Luzin küme inşa etmiştir. Fakat aynı inşa 1913 yılında Mahlo [23] tarafından yapılmış olmasına rağmen, reel sayıların özel bir altkümesi olan bu küme *Luzin* adıyla anılmıştır.

Teorem 5.9. *([26]) (Luzin (1914), Mahlo (1913)) Süreklilik Hipotezi altında, $\mathbb{R}$'nin her 1. kategoriden kümesi ile arakesiti sayılabilir olan $\mathfrak{c}$ kardinaliteye sahip bir altkümesi vardır.*

Kanıt. $\{C_\alpha : \alpha < \aleph_1\}$ hiçbir yerde yoğun olmayan tüm kapalı kümelerin ailesi olsun. Her $\alpha < \aleph_1$ için bir x_α reel sayısı

$$\{x_\beta : \beta < \alpha\} \cup \bigcup \{C_\beta : \beta < \alpha\}$$

kümesinde bulunmayacak şekilde seçilsin. Dolayısıyla seçilen her x_α reel sayısı için

$$X = \{x_\alpha : \alpha < \aleph_1\}$$

kümesi istenen küme olur. Gerçekten her $\beta < \alpha$ için C_β hiçbir yerde yoğun olmadığından kendisi 1. kategoridendir. Dolayısıyla her $\beta < \alpha$ için

$$\bigcup_{\beta<\alpha} C_\beta$$

kümesi 1. kategoridendir. Diğer yandan x_α'ların seçiminden dolayı her $\beta < \alpha$ için $X \cap C_\beta$ en fazla sayılabilir olacağından

$$X \cap \bigcup_{\beta<\alpha} C_\beta = \bigcup_{\beta<\alpha} X \cap C_\beta$$

sayılabilirdir. O halde X bir Luzin kümedir. □

Teorem 5.10. *([38]) (Sierpinski) Her Luzin küme Menger özelliğini sağlar ve σ-kompakt değildir.*

Kanıt. $L \subseteq \mathbb{R}$ bir Luzin küme ve $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$ L'nin bir açık örtüler dizisi olsun.

$$D = \{d_n : n \in \mathbb{N}\}$$

L'nin sayılabilir yoğun bir altkümesi olsun. D kümesi L'de yoğun olduğundan, her $n \in \mathbb{N}$ için $d_n \in U_n$ olacak şekilde bir $U_n \in \mathcal{U}_n$ seçebiliriz. Her $n \in \mathbb{N}$ için seçilen U_n'ler için

$$U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$$

olsun. D kümesi L'nin sayılabilir yoğun bir altkümesi, U kümesi D'yi içeren açık bir küme ve L bir Luzin küme olduğundan, $L \setminus U$ sayılabilirdir.

$$L \setminus U = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

olarak numaralandıralım. Her $n \in \mathbb{N}$ için bir $V_n \in \mathcal{U}_n$ seçebiliriz öyle ki $x_n \in V_n$'dir ve

$$L \setminus U \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$$

sağlanır. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{F}_n = \{U_n, V_n\} \subseteq \mathcal{U}_n$ sonlu alt ailelerinin birleşimi $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$ L'nin bir açık örtüsüdür. Sonuç olarak L kümesi Menger özelliğini sağlar.

Şimdi de L'nin σ-kompakt olduğunu varsayalım. O halde L sayılabilir tane kompakt kümenin birleşimi şeklinde yazılabilir öyle ki her $n \in \mathbb{N}$ için $K_n \subseteq \mathbb{R}$ kompakt ve

$$L = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$$

'dir. $\mathbb{R}$'nin kompakt altkümeleri kapalı olduğundan, her $n \in \mathbb{N}$ için K_n kapalı ve L sayılamaz olduğundan en az bir $n \in \mathbb{N}$ için K_n sayılamazdır. Dolayısıyla Teorem 4.3.8'den K_n bir mükemmel küme içerir. Diğer yandan $\mathbb{R}$'nin mükemmel altkümeleri hiçbir yerde yoğun olmayan mükemmel bir küme içereceğinden K_n

$$\mathbf{C} \subseteq K_n$$

olacak şekilde bir Cantor kümesi içerir. **C** hiçbir yerde yoğun olmadığından ve L bir Luzin küme olduğundan $L \cap \mathbf{C}$ sayılabilirdir. Fakat bu durum $\mathbf{C} \subseteq L$ olduğundan $L \cap \mathbf{C} = \mathbf{C}$ olması ile çelişeceğinden kabulümüz yanlıştır. Dolayısıyla L Luzin kümesi σ-kompakt değildir. $\square$

Böylece Süreklilik Hipotezi altında Menger Konjektürü'nün yanlış olduğu yukarıdaki teoremden elde edilir.

Tanım 5.11. $S \subseteq [\mathbb{N}]^\infty$ dominant bir aile, $\alpha < \mathfrak{d}$ bir ordinal ve $S = \{s_\alpha : \alpha < \mathfrak{d}\}$ olsun. Eğer her $\alpha < \beta < \mathfrak{d}$ için $s_\alpha \leq^* s_\beta$ oluyorsa S'ye bir *skale* denir.

Lemma 5.12. *([4, 38]) Bir skale kümenin varlığı için gerek ve yeter koşul* $\mathfrak{b} = \mathfrak{d}$ *olmasıdır.*

Kanıt. $(\Leftarrow)$ $\mathfrak{b} = \mathfrak{d}$ olsun ve $[\mathbb{N}]^\infty$'nin dominant bir $D = \{d_\alpha : \alpha < \mathfrak{b}\}$ ailesini alalım. O halde her $\alpha < \mathfrak{b}$ için

$$\{d_\beta : \beta < \alpha\}$$

ailesi sınırlıdır. Dolayısıyla her $\alpha < \mathfrak{b}$ için bir s_α vardır öyle ki

$$\{d_\beta, s_\beta : \beta < \alpha\} \leq^* s_\alpha$$

sağlanır. Sonuç olarak $A = \{s_\alpha : \alpha < \mathfrak{b}\}$ kümesi istenen küme olup, A bir skale kümedir.

$(\Rightarrow)$ $D = \{s_\alpha : \alpha < \mathfrak{d}\}$ bir skale olsun. $\mathfrak{b} < \mathfrak{d}$ olduğunu varsayalım. $B = \{b_\alpha : \alpha < \mathfrak{b}\} \subseteq [\mathbb{N}]^\infty$ sınırsız bir aile olsun. D dominant bir aile olduğundan her $\alpha < \mathfrak{b}$ için bir $\beta_\alpha < \mathfrak{d}$ alalım öyle ki $b_\alpha \leq^* s_{\beta_\alpha}$ sağlansın. Şu halde

$$S = \{s_{\beta_\alpha} : \alpha < \mathfrak{b}\}$$

ailesi dominant bir aile değildir. O halde bir $a \in [\mathbb{N}]^\infty$ vardır öyle ki her $s_{\beta_\alpha} \in S$ için $a \nleq^* s_{\beta_\alpha}$ olmalıdır. Diğer yandan D dominant bir aile olduğundan bir $\gamma < \mathfrak{d}$ için bir $s_\gamma \in D$ vardır öyle ki $a \leq^* s_\gamma$ sağlanır. Ayrıca her $\alpha < \mathfrak{b}$ için $s_\gamma \nleq^* s_{\beta_\alpha}$'dır. Dolayısıyla her $\alpha < \mathfrak{b}$ için

$$b_\alpha \leq^* s_{\beta_\alpha} \leq^* s_\gamma$$

olup, $b_\alpha \leq^* s_\gamma$'dır. O halde B sınırlı olup bu durum B'nin sınırsız bir aile olması ile çelişeceğinden kabulümüz yanlıştır. Sonuç olarak $\mathfrak{b} = \mathfrak{d}$ olmalıdır. $\square$

Mükemmel kümeler ile Borel kümeler arasında aşağıdaki teoremde verilen ilişki Alexandrov tarafından [1]'de kanıtlanmıştır.

Teorem 5.13. *(Alexandrov) Sayılamaz her Borel küme mükemmel bir küme içerir.* □

Tanım 5.14. κ sonsuz bir kardinal, X reellerin bir kümesi ve $Q \subseteq X$ olsun. Eğer Q kümesini içeren her U açık kümesi için

$$|X \setminus U| < \kappa$$

sağlanıyorsa, X'e Q üzerinde κ-*konsantre* denir.

Lemma 5.15. *([40]) X reellerin bir kümesi olmak üzere, sayılabilir bir Q kümesi üzerinde $\mathfrak{c}$-konsantre ise, X mükemmel bir küme içermez.*

Kanıt. X kümesi Q sayılabilir kümesi üzerinde $\mathfrak{c}$-konsantre olsun. X'in bir P mükemmel kümesi içerdiğini varsayalım. Q kümesini

$$Q = \{x_m : m \in \mathbb{N}\}$$

olarak yazalım. Her $m \in \mathbb{N}$ için $\{x_m\}$ tek nokta kümesi Borel'dir.

$$Q = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \{x_m\}$$

sayılabilir tane Borel kümenin birleşimi olarak Borel'dir. O halde $P \setminus Q$ kümesi de Boreldir. Diğer yandan $P \setminus Q$ sayılamaz olduğundan bir mükemmel küme içerir. Bu mükemmel küme P_1 olsun öyle ki $P_1 \subseteq P \setminus Q$ sağlansın. P_1 kapalı olduğundan $\mathbb{R} \setminus P_1 = U$ açıktır ve $\mathbb{R} \setminus (P \setminus Q) \subseteq U$ olduğundan, U açık kümesi Q kümesini içerir. X kümesi Q üzerinde $\mathfrak{c}$-konsantre olduğundan $|X \setminus U| < \mathfrak{c}$'dir. Diğer yandan

$$P_1 = P \setminus U \subseteq X \setminus U$$

olduğundan $X \setminus U$ kümesi P_1 mükemmel kümesini içerir. Reel sayıların mükemmel altkümeleri $\mathfrak{c}$ kardinaliteye sahip olduğundan bu durum $|X \setminus U| < \mathfrak{c}$ olması ile, dolayısıyla X'in Q üzerinde $\mathfrak{c}$-konsantre olması ile çelişir. Şu halde kabulümüz yanlış olup X mükemmel bir küme içeremez. □

Fremlin ve Miller 1988 yılına ait bir çalışmasında Menger Konjektürü'nün yanlış olduğunu kanıtlamışlardır. Kanıtın detayları için [38] kaynağı incelenebilir.

Teorem 5.16. *(Fremlin-Miller) Menger Konjektürü yanlıştır.*

Kanıt. Eğer $\mathfrak{b} < \mathfrak{d}$ olduğunu kabul edersek, kardinalitesi $\mathfrak{b}$ olan reellerin bir kümesi Menger Konjektürü'ne ters bir örnek olurdu. Gerçekten, X reellerin kümesi ve $|X| = \mathfrak{b}$ ise, $|X| < \mathfrak{d}$ olduğundan X Menger özelliğini sağlar. Diğer yandan Lemma 5.6'dan X σ-kompakt değildir. Şimdi $\mathfrak{b} = \mathfrak{d}$ olduğunu varsayalım. O halde Lemma 5.12'den

$$S = \{s_\alpha : \alpha < \mathfrak{d}\}$$

bir skale küme olsun. $S \cup [\mathbb{N}]^{<\infty}$ kümesinin Menger özelliğini sağladığını iddia ediyoruz. Bunun için öncelikle $S \cup [\mathbb{N}]^{<\infty}$'in bir $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$ açık örtüler dizisini alalım. $[\mathbb{N}]^{<\infty}$ sayılabilir olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $U_0 \in \mathcal{U}_0, U_1 \in \mathcal{U}_1, ...$ olacak şekilde U_n'ler seçebiliriz öyle ki

$$[\mathbb{N}]^{<\infty} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$$

sağlanır. $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ olsun. U açık olduğundan $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus U$ kapalıdır. $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ kompakt olduğundan $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus U$ kompakttır. Diğer yandan $a \in [\mathbb{N}]^{\infty}$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için $e_n(a) = a(n)$ ile tanımlanan

$$e_n : [\mathbb{N}]^{\infty} \longrightarrow \mathbb{N}$$

fonksiyonu süreklidir. Dolayısıyla $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus U$ kompakt olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$e_n(\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus U) \subseteq \mathbb{N}$$

kompakttır. $\mathbb{N}$'nin üzerinde ayrık topoloji bulunduğundan ve $e_n(\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus U)$ kümesi kompakt olduğundan sonlu olmalıdır. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için $e_n(\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus U)$ kümesi sınırlıdır. Gerçekten, her $n \in \mathbb{N}$ için $e_n(\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus U)$ sonlu olduğundan, her $n \in \mathbb{N}$ için $t_n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$e_n(\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus U) = \{0, 1, 2, ..., t_n\}$$

olarak yazılabilir. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için

$$b(n) = t_n$$

olarak seçilirse, $b \in [\mathbb{N}]^{\infty}$ elamanı $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus U$ için bir $\leq^*$-sınırdır. Diğer yandan S bir skale olup dominant bir aile olduğundan bir $\alpha < \mathfrak{d}$ için $s_\alpha \in S$ vardır öyle ki $b \leq^* s_\alpha$ sağlanır. Bununla birlikte

$$S \setminus U = S \cap (\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus U) \subseteq \{s_\beta : \beta < \mathfrak{d}, s_\beta \leq^* b\} \subseteq \{s_\beta : \beta < \alpha\}$$

olup $|S \setminus U| < \mathfrak{d}$'dir. Dolayısıyla $S \setminus U$ Menger'dir. O halde $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$ açık örtüler dizisindeki her $\mathcal{U}_n$ için bir $\mathcal{V}_n \subseteq \mathcal{U}_n$ sonlu alt ailesi vardır öyle ki

$$S \setminus U \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup \mathcal{V}_n$$

sağlanır. O halde

$$S \cup [\mathbb{N}]^{<\infty} \subseteq S \cup U \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup \mathcal{V}_n \cup \{U_n\}$$

olarak yazılabileceğinden, her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{V}_n \cup \{U_n\} \subseteq \mathcal{U}_n$ sonlu olup

$$S \cup [\mathbb{N}]^{<\infty} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup \mathcal{V}_n \cup \{U_n\}$$

olduğundan $S \cup [\mathbb{N}]^{<\infty}$ kümesi Menger'dir.

Fakat $S \cup [\mathbb{N}]^{<\infty}$ kümesi σ-kompakt değildir. $[\mathbb{N}]^{<\infty}$ sayılabilir olduğundan kendisini içeren her V açık kümesi için

$$|S \cup [\mathbb{N}]^{<\infty} \setminus V| = |S \setminus V| < \mathfrak{d}$$

olup dolayısıyla $|S \setminus V| < \mathfrak{c}$ olacağından $S \cup [\mathbb{N}]^{<\infty}$ kümesi, $[\mathbb{N}]^{<\infty}$ sayılabilir kümesi üzerinde $\mathfrak{c}$-konsantredir. O halde $S \cup [\mathbb{N}]^{<\infty}$ bir mükemmel küme içermez. Sonuç olarak $S \cup [\mathbb{N}]^{<\infty}$ kümesi σ-kompakt değildir. □

Tanım 5.17. *([38])* $S = \{s_\alpha : \alpha < \mathfrak{d}\} \subseteq [\mathbb{N}]^\infty$ dominant bir aile olsun. Eğer her $\alpha < \beta < \mathfrak{d}$ için

$$s_\beta \nleq^* s_\alpha$$

oluyorsa, diğer bir ifade ile sonsuz $n \in \mathbb{N}$ için $s_\alpha(n) \leq s_\beta(n)$ oluyorsa S'ye bir $\mathfrak{d}$-*skale* küme denir.

Lemma 5.18. *([38])* $\mathfrak{d}$-*skale kümeler vardır.*

Kanıt. $A = \{d_\alpha : \alpha < \mathfrak{d}\}$ dominant bir aile olsun. Her $\alpha < \mathfrak{d}$ için bir $s_\alpha \in [\mathbb{N}]^\infty$ seçelim öyle ki $d_\alpha \leq^* s_\alpha$ olsun. $B = \{s_\beta : \beta < \alpha\}$ kümesi dominant bir aile değildir. Dolayısıyla her $s_\beta \in B$ için bir $d_\alpha \in A$ vardır öyle ki $s_\beta \leq^* d_\alpha$ sağlanır. Sonuç olarak $s_\alpha \nleq^* s_\beta$ olduğundan

$$D = \{s_\alpha : \alpha < \mathfrak{d}\}$$

ailesi bir $\mathfrak{d}$-skale'dir. □

Teorem 5.16'nın kanıtında kullanılan tekniğe benzer bir teknikle aşağıdaki lemma elde edilir.

Lemma 5.19. *Her $\mathfrak{d}$-skale küme $[\mathbb{N}]^{<\infty}$ üzerinde $\mathfrak{d}$-konsantre olur.*

Kanıt. $S \subseteq [\mathbb{N}]^{\infty}$ bir $\mathfrak{d}$-skale olsun. $[\mathbb{N}]^{<\infty}$ kümesini içeren herhangi bir U açığı alalım. Dolayısıyla $K = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus U$ kümesi kapalı olup kompakttır. Diğer yandan $U \supset [\mathbb{N}]^{<\infty}$ olduğundan $K \subseteq [\mathbb{N}]^{\infty}$'dir. O halde $[\mathbb{N}]^{\infty}$'in kompakt altkümeleri sınırlı olduğundan K kümesi sınırlıdır. Dolayısıyla K'nın $k \in [\mathbb{N}]^{\infty}$ gibi bir $\leq^*$-sınırı vardır. Diğer yandan S bir $\mathfrak{d}$-skale olduğundan, bir $\gamma < \mathfrak{d}$ için bir $s_\gamma \in S$ vardır öyle ki $k \leq^* s_\gamma$ sağlanır. Eğer

$$S \cap K \subseteq \{s_\alpha : \alpha < \mathfrak{d}, s_\alpha \leq^* k\} \subseteq \{s_\alpha : \alpha < \gamma\}$$

olarak yazılırsa, $|S \cap K| = |S \setminus U| < \mathfrak{d}$ olduğu görülür. Sonuç olarak S ailesi $[\mathbb{N}]^{<\infty}$ üzerinde $\mathfrak{d}$-konsantre'dir. □

Teorem 5.20. *([3]) (Bartoszynski–Tsaban) Her $\mathfrak{d}$-skale S kümesi için, $S \cup [\mathbb{N}]^{<\infty}$ Menger özelliğini sağlar ve σ-kompakt değildir.*

Kanıt. S bir $\mathfrak{d}$-skale ise, $[\mathbb{N}]^{<\infty}$ üzerinde $\mathfrak{d}$-konsantre'dir. Dolayısıyla $[\mathbb{N}]^{<\infty}$'yi içeren herhangi bir U açığı için $|S \setminus U| < \mathfrak{d}$'dir. O halde $S \setminus U$ Menger özelliğini sağlar. Teorem 5.16'daki aynı adımlar uygulanarak $S \cup [\mathbb{N}]^{<\infty}$'in Menger özelliğini sağladığı görülür. Diğer yandan $[\mathbb{N}]^{<\infty}$'yi içeren her U açığı için $|(S \cup [\mathbb{N}]^{<\infty}) \setminus U| < \mathfrak{d}$ olduğundan $S \cup [\mathbb{N}]^{<\infty}$, $[\mathbb{N}]^{<\infty}$ sayılabilir kümesi üzerinde $\mathfrak{c}$-konsantre'dir. O halde Lemma 5.15 kullanılarak $S \cup [\mathbb{N}]^{<\infty}$'nin σ-kompakt olamayacağı elde edilir. □

Yukarıdaki Teorem Tsaban ve Zdomskyy'nin bir ortak çalışmasında genelleştirilerek verilmiştir [40].

2001 yılında Bartoszynski ve Shelah $\mathfrak{b}$-skale kavramını kullanarak Hurewicz özelliğinde σ-kompakt olmayan reel kümelerin varlığını kanıtlamışlardır [2]. Bu sonuç Bölüm 3'te bahsedilen Hurewicz Konjektürü ve Menger Konjektürü'ne ters cevap vermektedir.

Süreklilik Hipotezi altında Sierpinski kümesi inşası ile Hurewicz Konjektürü'nün yanlış olduğu bilinmektedir. Diğer taraftan 1996'da Just, Miller, Scheepers ve Szeptycki tarafından ZFC'de Hurewicz Konjektürü'ne ters örnek sunulmuştur [18]. Ayrıca Chaber ve Pol tarafından 2002 yılına ait (basılmamış) bir çalışmada bu problem çalışılmıştır.

Günümüzde hala Menger Konjektürü farklı sınıflar ve hipotezler altında çalışılmaya devam etmektedir. Bu çalışmalarda betimleyici küme teorisi, forcing tekniği, Gödel'in Evreni **L** temel oluşturmaktadır. Son yıllarda yapılan çalışmalara örnek olarak $[34, 35, 36, 37]$ numaralı kaynaklar verilebilir.

KAYNAKLAR

[1] P.S. Aleksandrov, Sur la puissance des ensembles mesurables B., Comptes Rendus Hebdomadaires des Sèances de l'Académie des Sciences, vol. 162, 323-325, (**1916**).

[2] T. Bartoszynski and S. Shelah, Continuous images of sets of reals, Topology and its Applications, 116.2, 243-253, (**2001**).

[3] T. Bartoszynski and B. Tsaban, Hereditary topological diagonalizations and the Menger-Hurewicz Conjectures, Proceedings of the American Mathematical Society, 134, 605-615, (**2006**).

[4] A. Blass, Combinatorial Cardinal Characteristics of the Continuum, In: Handbook of Set Theory, M. Foreman, A. Kanamori (Eds.), Springer, Dordrecht, Chapter 6, **2010**.

[5] A. Bülbül, Genel Topoloji, Hacettepe Üniversitesi Yayınları, 4. Baskı, **2014**.

[6] G. Cantor, Ueber eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 1, 75-78, (**1891**).

[7] H. Cantor, Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen, In:Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten, Teubner-Archiv zur Mathematik, vol 2, Springer, Vienna, **1984**.

[8] J.W. Dauben, Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite, Princeton University Press, Princeton, **1990**.

[9] K. Devlin, The Joy of Sets, Fundamentals of Contemporary Set Theory, Springer-Verlag, New York, **1993**.

[10] R. Engelking, General Topology, Sigma series in pure mathematics, vol. 6, Heldermann, Berlin, **1989**.

[11] R. Engelking, Dimension Theory, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, **1978**.

[12] J. Franks, Cantor's Other Proofs that R is Uncountable, Mathematics Magazine, 83(4), 283-289, (**2010**).

[13] D.H. Fremlin and A.W. Miller, On some properties of Hurewicz, Menger, and Rothberger, Fundamenta Mathematicae, 129, 17-33, **(1988)**.

[14] L.J. Halbeisen, Combinatorial Set Theory: With a Gentle Introduction to Forcing, Springer-Verlag, London, **2012**.

[15] W. Hurewicz, Über eine Verallgemeinerung des Borelschen Theorems, Mathematische Zeitschrift, 24.1, 401-421, **(1925)**.

[16] W. Hurewicz, Über Folgen stetiger Funktionen, Fundamenta Mathematicae, 9, 193-204, **(1927)**.

[17] T. Jech, Set Theory, The Third Millennium Edition revised and expanded, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, **2003**.

[18] W. Just, A.W. Miller, M. Scheepers, P.J. Szeptycki, The combinatorics of open covers II, Topology and its Applications, 73(3), 241-266, **(1996)**.

[19] W. Just, M. Weese, Discovering Modern Set Theory I: The Basics, Graduate Studies in Mathematics, vol. 8, American Mathematical Society, **1996**.

[20] A. Kechris, Classical Descriptive Set Theory, Graduate texts in mathematics, vol. 156, **1994**.

[21] K. Kunen, Set Theory An Introduction To Independence Proofs, Studies in Logic and Foundations of Mathematics, v.102, Elsevier, North Holland, **1983**.

[22] N. Luzin, Sur un probleme de M. Biare, C.R. Hebdomadaires Seances Acad. Sci. Paris, 158, 1258-1261, **(1914)**.

[23] P. Mahlo, Über Teilmengen des Kontinuums von dessen Machtigkeit, Sitzungsberichte der Sachsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch Naturwissenschaftliche Klasse 65, 283-315, **(1913)**.

[24] K. Menger, Einige Uberdeckungssätze der Punktmengenlehre, Sitzungsberichte. Abt. 2a, Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und Mechanik (Wiener Akademie), 133, 421-444, **(1924)**.

[25] A. Miller, B. Tsaban, L. Zdomskyy, Selective covering properties of product spaces, II:γ spaces, Transactions of the American Mathematical Society, 368(4), 2865-2889, **(2016)**.

[26] A.W. Miller, Special subsets of the real line, In: Handbook of set-theoretic topology, North Holland, 201-233, Chapter 5, **1984**.

[27] Y.N. Moschovakis, Descriptive set theory, Studies in Logic and Foundations of Mathematics, J. Barwise, D. Kaplan, B. Suppes, A. S. Troelstra (Eds.), v.100, Elsevier, North-Holland, **1980**.

[28] M. Raman-Sundström. A pedagogical history of compactness, The American Mathematical Monthly, 122:7, 619-635, **(2015)**.

[29] D. Repovš, L. Zdomskyy and S. Zhang, Countable dense homogeneous filters and the Menger covering property, Fundamenta Mathematicae, 224, 233-240, **(2014)**.

[30] M. Scheepers, Combinatorics of open covers (I): Ramsey Theory, Topology and its Applications, 69, 31-62, **(1996)**.

[31] K. Simmons, Universality and the Liar: An Essay on Truth and the Diagonal Argument, Cambridge University Press, **1993**.

[32] L.A. Steen, J.A. SeebachJr, Counterexamples in Topology, vol. 18, Springer, New York, **1978**.

[33] P. Szewczak, B. Tsaban, Products of Menger spaces: A combinatorial approach, Annals of Pure and Applied Logic, 168(1), 1-18, **(2017)**.

[34] F.D. Tall and S. Tokgöz, On the definability of Menger spaces which are not σ-compact, Topology and its Applications, 220, 111-117, **(2017)**.

[35] F.D. Tall, Co-analytic spaces, K-analytic spaces and definable versions of Menger's conjecture, Topology and its Applications, 283, 107345, **(2020)**.

[36] F.D. Tall, S. Todorcevic, S. Tokgöz, The strength of Menger's conjecture, Topology and its Applications, 107536, **(2020)**.

[37] S. Tokgöz, A coanalytic Menger group that is not σ-compact, Turkish Journal of Mathematics, 42.1, 12-20, **(2018)**.

[38] B. Tsaban, Menger's and Hurewicz's Problems: Solutions from "The Book" and refinements, Contemporary Mathematics, 533, 211-226, **(2011)**.

[39] B. Tsaban, Selection principles and special sets of reals, In: Open Problems in Topology II, Elliot Pearl (Ed.), Elsevier, Amsterdam, Chapter 9, **2007**.

[40] B. Tsaban and L. Zdomskyy, Scales, fields and a problem of Hurewicz, Journal of the European Mathematical Society, 10.3, 837-866, **(2008)**.

[41] R.W. Vallin, The Elements of Cantor Sets: With Applications, Wiley, **2013**.

[42] S. Willard, General Topology, Addison-Wesley, Massachusetts, **1970**.

[43] L. Wingers, Box products and Hurewicz spaces, Topology and its Applications, 64.1, 9-21, **(1995)**.