RASTGELELEŞTİRİLMİŞ YANIT MODELLERİNDE ORAN VE ORTALAMA TAHMİN EDİCİLERİ

PROPORTION AND MEAN ESTIMATORS IN RANDOMIZED RESPONSE MODELS

NİLGÜN ÖZGÜL

PROF. DR. HÜLYA ÇINGI

Tez Danışmanı

Hacettepe Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin

İstatistik Anabilim Dalı için Öngördüğü

DOKTORA TEZİ

olarak hazırlanmıştır.

2013

NİLGÜN ÖZGÜL'ün hazırladığı "**Rastgeleleştirilmiş Yanıt Modellerinde Oran ve Ortalama Tahmin Edicileri**" adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **İSTATİSTİK ANABİLİM DALI**'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Başkan
Doç. Dr. Yaprak Arzu ÖZDEMİR

Danışman
Prof.Dr. Hülya ÇINGI

Üye
Prof. Dr. Cem KADILAR

Üye
Doç. Dr. Meral ÇETİN

Üye
Doç. Dr. Mehtap AKÇİL

Bu tez Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından **DOKTORA TEZİ** olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. Fatma SEVİN DÜZ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında,

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversitede veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

26/06/2013

Nilgün ÖZGÜL

ÖZET

RASTGELELEŞTİRİLMİŞ YANIT MODELLERİNDE ORAN VE ORTALAMA TAHMİN EDİCİLERİ

NİLGÜN ÖZGÜL

Doktora, İstatistik Bölümü

Tez Danışmanı: Prof.Dr.HÜLYA ÇINGI

Haziran 2013, 243 Sayfa

Kumar, alkolizm, cinsel tercih, uyuşturucu kullanımı, kürtaj, vergi kaçakçılığı, yasa dışı gelir, mobbing, siyasi görüş gibi hassas konular üzerinde yapılan araştırmalarda cevaplamamadan ya da yanlış cevaplamadan kaynaklanan hatayı azaltmak için Rastgeleleştirilmiş Yanıt Modelleri(RYM) kullanılır. Warner[37]'nin öncülüğünü ettiği bu model daha sonra hem oran hem de ortalama tahmini için geliştirilmiştir. Bu çalışmada toplamsal, çarpımsal ve seçimli rastgeleleştirilmiş yanıt modellerinde önerilen çeşitli tahmin ediciler tanıtılmıştır. Yardımcı değişken bilgisinin kullanıldığı tahmin edicilerden faydalanarak hem oran hem de ortalama tahmini için çeşitli RYM'lerde çeşitli oransal ve regresyon tahmin edicileri önerilmiştir. Önerilen tahmin ediciler ile literatürdeki var olan tahmin ediciler etkinlik bakımından teorik olarak karşılaştırılmış ve bu sonuçları daha kesin elde edebilmek amacıyla bir simülasyon çalışması yapılmıştır. Elde edilen sonuçlar son bölümde tartışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Rastgeleleştirilmiş yanıt modelleri, Hassas soru, Yardımcı değişken, Oransal tahmin edici, Regresyon tahmin edici, Etkinlik, Hata kareler ortalaması.

ABSTRACT

PROPORTION AND MEAN ESTIMATORS IN RANDOMIZED RESPONSE MODELS

NİLGÜN ÖZGÜL

Doctor of Philosophy, Department of Statistics

Supervisor: Prof.Dr.HÜLYA ÇINGI

June 2013, 243 Pages

Randomized Response Models(RRM) are used to reduce nonrespondents rates and biased responses arising from surveys on sensitive subjects such as gambling, alcoholism, sexual abuse, drug addiction, abortion, tax evasion, illegal income, mobbing, political view and many others. Starting from the pioneering work of Warner [37], many versions of RRM have been developed that can deal with both proportion and mean estimation.

in this study, we introduce various randomized response models, some based on the additive and multiplicative RRM, and some from optional RRM's. New ratio and regression estimators for both proportion and mean estimation in various randomized response models are proposed using auxiliary variable information. The efficiency of the proposed estimators with respect to existing estimators in the literatüre are compared theoretically and a simulation study has been performed to control theoretical results. The results obtained in the simulation study are discussed at the final section.

Keywords: Randomized response models; Sensitive question, Auxiliary variable, Ratio estimator, Regression estimator, Efficiency, Mean square error.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın her aşamasında değerli katkı ve eleştiriyle yol gösteren, sonsuz sabırla beni her zaman çalışmaya teşvik eden ve güven veren danışmanım Sayın Prof.Dr. Hülya ÇINGI'ya, önemli yorum ve değerlendirmeleri ile katkıda bulunan jüri üyelerim Sayın Prof.Dr. Cem KADILAR'a, Sayın Doç.Dr. Meral Candan ÇETİN'e, Sayın Doç. Dr. Mehtap AKÇİL OK'a, Sayın Doç. Dr. Yaprak Arzu ÖZDEMİR'e, her türlü desteği esirgemeyen ve çalışmamın her aşamasında manevi olarak yanımda olan değerli arkadaşlarım Dr. Semra TÜRKAN'a, Dr.Nursel KOYUNCU'ya ve Arş.Gör.Esra POLAT'a, simülasyon çalışmasında yardımlarını esirgemeyen arkadaşım Ersin KURTDAL'a, her zaman yanımda olan AİLEM'e içtenlikle teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

1.GİRİŞ

Davranış ve sosyal bilimlerinde karşılaşılan en önemli problemlerden biri kişilerin hassas ya da duyarlı davranışlarını doğru tahmin edememektir. Hassas ya da duyarlı davranışlara, öğrencilerin kopya çekme eğilimleri, kişilerin haftada alkol tüketim miktarları ya da kişilerin uyuşturucu kullanıp kullanmadıklarına dair davranışlar örnek olarak verilebilir. Bu tür hassas davranışların ölçülmesinde yaygın olarak kullanılan teknik ise anket tekniğidir. Bu tür hassas sorular yöneltilen anketlerde, katılımcı toplumsal takdir toplamayacağını bildiği cevaplara daha az yönelmektedir. Bu durumda araştırmacıların araştırma sırasında karşılaştıkları çok önemli bir sorun olan "Toplumsal cazibe yanı" ortaya çıkar. Toplumsal cazibe yanı bir kişinin başkaları tarafından benimsenmesi, daha olası tutumu takınma eğiliminde olmasını açıklamaya yarayan bir bilimsel araştırma terimidir. Bu durum genellikle "iyi" ve "kötü" davranışların abartılmasına varır. Bu etkiye tıp, psikoloji ve sosyal bilimler alanlarında sıkça rastlanmaktadır [30].

Toplumsal cazibe yanının varsayımsal bir örneği madde bağımlılığına yönelik bir çalışma olabilir. "Uyuşturucu madde kullanıyor musunuz?" gibi hassas bir soruyla karşılaşan kişi kullanım yaygınlığı bakımından en yüksek madde olan marijuananın toplum nezdinde olumlu karşılanmayacağı düşüncesiyle hareket ederek uyuşturucu madde kullanmadığını öne sürebilir ya da "Yalnızca arkadaşlarımla birlikteyken marijuana kullanıyorum" gibi bir yanıtla madde kullanım sıklığını düşük göstermeye çalışabilir.

Toplumsal cazibenin kişiler tarafından farklı yorumlandığı diğer alanlar,

- Cinsel alışkanlıklar ve fanteziler
- Kişisel gelirler (genellikle yüksek gösterilirler)
- Özgüven eksikliği ya da güçsüzlük (genellikle geri çevrilir)
- Dışavurum işlevleri
- Uygun dozda ilaç kullanım alışkanlığı
- Din (genellikle rahatsızlık uyandırır)
- Yurtseverlik (genellikle abartılır)
- Bağnazlık ve hoşgörüsüzlük (genellikle geri çevrilir)

- Entelektüel birikim (genellikle abartılır)
- Dış görünüş (olduğundan iyi ya da kötü gösterilir)
- Fiziksel şiddet kullanımı (genellikle geri çevrilir)
- "Kibarlık" ve "cömertlik" belirtileri (genellikle azımsanır)
- Yasadışı eylemler (genellikle geri çevrilir)
- Siyasi eğilimdir.

Araştırmalarda toplumsal cazibe yanını azaltmak için çeşitli teknikler vardır. Bunların başlıcaları:

1. Kimliksiz Özyönetim ve Bilgisayar Yardımıyla Etkisizleştirilmiş Yönetim
2. Toplumsal Cazibe Ölçeği (Marlowe-Crowne Social Desirability Scale-MCSDS)
3. Bogus Pipeline Aygıtı
4. Rastgeleleştirilmiş Yanıt Modelidir [30].

1.1.Kimliksiz Özyönetim ve Bilgisayar Yardımıyla Etkisizleştirilmiş Yönetim

Deneğin kişisel bilgilerinin gizli tutulduğu araştırmalar, deneğin sorulara verdiği yanıtlarda tümüyle dürüst davranamaması nedeniyle kimliksiz özyönetimi öne çıkarır. Kimliksiz özyönetimde, deneklere kimliklerini gizli tutma garantisi verilerek güvence sağlanır. Böylece, kimliksiz özyönetim doğallık, ayrışma ve rahatlama sağlar. Anket sorularının posta yoluyla ya da oy pusulalarına yazılarak dağıtılmasının daha iyi bir yöntem olacağı düşünülmektedir.

Bilgisayar yardımıyla Etkisizleştirilmiş Yönetim McBurney'nin 1994 yılındaki bir araştırmayı kaynak göstererek öne sürdüğü teze göre bilgisayar (özyönetim yazılımı) yardımıyla yapılan test yönetimi bilgisayarın kimliksiz oluşu nedeniyle toplumsal cazibe yanını azaltmaktadır.

Genel anlamda bilgisayar, bu değişkenin etkilerini azaltmada etkili bir aygıt olabilir. Bunun nedeni, bilgisayarın yargılayıcı bir biçime sahip olmaması ve denekle duygusal bir etkileşime girmemesi nedeniyle en iyi anketörden bile daha doğal davranmasıdır.

1.2. Toplumsal Cazibe Ölçeği

Toplumsal cazibe yanını azaltmak amacıyla çeşitli ölçekler geliştirilmiştir. Toplumsal cazibe ölçümünde en yaygın biçimde kullanılan yöntem Marlow-Crowne Toplumsal Cazibe Ölçeği'dir. Araştırmacı, toplumsal cazibe yanlısı yanıtlarla kısıtlı olan bir örneklem oluşturur. Buradaki varsayım, bir kişinin belirli sorulara verdiği yanıtların tüm denekler için aynı sapma oranına sahip olacağıdır. Toplumsal cazibe yanlısı yanıtlara gereğinden fazla bağımlı olan denekler araştırma kapsamından çıkarılır. Bu ölçeğe göre orta katmanda yer alan deneklerin deney istatistiklerine katılıp katılmayacakları ise araştırmacı tarafından belirlenir. Ancak, bu tür ölçeklerin büyük sorunlarından biri deneklerin toplumsal cazibeye olan bağımlılıklarının farklı düzeylerde olmasıdır. Bu, toplumsal cazibe yanının bu olguyu ölçmeye yarayan yöntemler dizgesinin vardığı sonuçlarla ayrışmasına neden olur.

33 madde içeren bu yöntemin kısaltılmış sürümleri sıkça kullanılmaktadır. 1982 yılında Reynold tarafından kullanılan 13 maddelik envanter ve Thompson ve Phua tarafından kullanılan 10 maddelik envanter buna bir örnektir.
1998 yılında konuyla ilgili araştırmalar yapan Paulhus Delroy, deneklerin sorulara verdikleri yanıtlardaki doğruluğu ölçmeye yarayacak bir psikometrik ölçek hazırlamıştır.
Test, araştırmanın ana konusunu belirlemek amacıyla bir ana aygıtla (test ya da görüşme) desteklenmelidir. "Paulhus Aldatma Ölçeği (PDS)" adını taşıyan bu yöntem toplum tarafından daha kolay kabul edilen ve arzulanan yanıtları barındıran eski bir envantere dayanmaktadır. 40 maddeden oluşan PDS iki konuyu irdeler. Bunlar, denekleri yanlış yanıtlar vermeye iten bilinçdışı sürecin boyutlarını ölçen ilk bölüm ve yanıtların denekler tarafından bilinçli bir biçimde saptırılmasını inceleyen ikinci bölümdür [35].

1.3. Bogus Pipeline Aygıtı

Anketlerde verilen yanlış cevapları azaltmak için kullanılan bir tekniktir. İlk defa 1967 yılında Harold Sigall tarafından kullanılmıştır. Deneysel bir teknik olan Bogus Pipeline bir çeşit gerçek sonuç vermeyen yalan makinesidir. Davranış ve duyguları ölçülmek istenen denek bu yalan makinesine bağlanır. Deneyin ilk aşamasında, deneklerin birkaç soruyu cevaplamaları istenir. Bu sorular, araştırmacının makinenin doğru çalıştığını deneğe kanıtlamak için cevabı araştırmacı tarafından bilinen sorulardır. Daha sonraki sorularda denek, gerçek bir aygıtla sınandığını düşündüğü için gerçek cevaplar verecektir. Bu durumda toplumsal cazibe yanı azalacaktır [30].

1.4. Rastgeleleştirilmiş Yanıt Modelleri (RYM)

Toplumsal cazibe yanını azaltmak için kullanılan diğer bir tekniktir. Bu model ilk olarak Warner [37] tarafından toplumsal cazibe yanını azaltmak amacıyla geliştirilmiştir. RYM, “rastgeleleştirilmiş” ve “kimlik gizleme” özellikleri bakımından toplumsal cazibe yanını azaltmada kullanılan önemli bir tekniktir. Model uygulanırken cevaplayıcıya sorulan hassas soruyu ya doğrudan ya da rastgele düzenleri kullanarak cevaplaması istenir. Bu rastgele düzenlerde madeni para, bir çift zar, kart destesi, rastgele sayı türeticisi, rulet tekerleği gibi çeşitli düzenler kullanılır. Burada önemli olan nokta, kişinin cevabının şansa dayalı olduğunun bilinmesidir. Yani tamamen rastgele düzenin sonucuna bağlıdır ve sonuç olarak cevaplayıcının cevabının gizli kalacağından emin olmasıdır.

Örneğin, bir araştırmada günde tüketilen alkol miktarı tahmin edilmek istensin. Normal bir araştırmada, görüşmeci cevaplayıcıya soruyu doğrudan “Günde ne kadar alkollü içecek tüketiyorsunuz?” şeklinde yöneltecektir. Bu soru bazı cevaplayıcıları tedirgin edebilir. Bu durum cevaplayıcının konuyu saptırmasına ya da cevabında daha az miktar belirtmesine yol açabilir. Fakat RYM cevaplayıcının tedirgin olmadan daha doğru cevaplar vermesini sağlayan bir tekniktir. RYM’de, aynı soru için farklı bir süreç geliştirilir. Örneğin, rastgele düzen olarak bir deste kart seçilsin. Bu kartlardaki rakamlar bilinen bir dağılımdan türetilmiş rakamlardır. Cevaplayıcıya bu kartlardan birisini seçmesi istenir. Daha sonra da kendi cevabı ile kartta yazan rakamı toplayıp görüşmeciye sonucu söylemesi istenir. Böylece cevaplayıcının gerçek cevabının görüşmeci tarafından bilinmemesi ve cevaplayıcının daha gerçek cevaplar vermesi sağlanmış olur.

RYM, ortalama ve oran tahmini olmak üzere iki grup altında incelenir. Oran tahmini için geliştirilen yanıt modelleri bir davranış ya da bir olayın gerçekleşme oranının tahmin edilmesinde kullanılır. Örneğin, “gün içinde kahve içmiş olan kişilerin” oranını tahmin etmek için iki farklı kart hazırlanır. Bu kartların birisinin üzerinde ”bugün kahve içtim” ve diğer kartın üzerinde “bugün kahve içmedim” ifadesi yazılır. Cevaplayıcı rastgele olarak bu kartlardan birisini seçer ve seçtiği karta göre “doğru” ya da “yanlış” cevabını verir. Bu durumda cevaplayıcının kartlarda yazan iki ifadeden hangisine doğru ya da yanlış dediği gizli kalır.

Ortalama tahmini için geliştirilen yanıt modellerinde, bir davranış ya da olayın ortalama değeri tahmin edilmek istenir. Ortalama tahmini için geliştirilen yanıt modelleri, ilerleyen konularda toplumsal ya da çarpımsal modeller olarak iki ayrı başlıkta incelenecektir. Ortalama tahmini için yanıt modellerine örnek olarak, “günde ortalama kaç fincan kahve tüketildiği” tahmin edilmek istenebilir. Bunun için bir kart destesi kullanılır. Daha sonra cevaplayıcı rastgele olarak bir kart seçer. Toplamsal model için, cevaplayıcı kartta yazan değer ile kendi gerçek cevabını toplayarak görüşmeciye yanıtını verir. Çarpımsal model için ise, kartta yazan değer ile kendi gerçek cevabını çarparak görüşmeciye yanıtı verir.

RYM’ler, cevaplayıcıların katılım durumlarına göre de gruplandırılabilir. Eğer tüm cevaplayıcılardan yanıtlarını rastgele düzenden faydalanarak verilmesi isteniyorsa, model ”tam rastgeleleştirilmiş model” olarak tanımlanır. Eğer, cevaplayıcılardan sadece bir kesimi rastgele düzenden faydalanarak yanıtlarını veriyorsa, model “kısmi rastgeleleştirilmiş model” ya da “iki aşamalı model” olarak tanımlanır. Eğer, rastgele düzenden yararlanma durumu cevaplayıcının isteğine bağlı olarak gerçekleştirilirse, model “seçimli rastgeleleştirilmiş model” olarak tanımlanır. Her iki farklı gruplama seçenekleri için modeller Bölüm 2’de incelenecektir.

Oran ve ortalama tahmini için literatürde bir çok rastgeleleştirilmiş yanıt modeli önerilmiştir. Oran tahmini için ilk RYM Warner [37] tarafından önerilmiştir. Daha sonra Horvitz v.d. [22], Warner [37] modelinde ikinci bir hassas olmayan ilişkisiz değişken kullanarak yeni bir model geliştirmiştir. Greenberg [13], Horvitz [22] modelinden yararlanarak iki örneklem kullanarak yeni bir model önermiştir. Mangat ve Singh [25], Warner [37] modelini iki aşamalı model için geliştirmiştir. Greenberg v.d. [14] ve Eriksson [11], Greenberg [13] ve Horvitz [22] modellerini ortalama tahmini için geliştirmiştir. Chaudhuri ve Mukerjee [2] ve Grewal v.d. [15] farklı olasılıklı seçimde RYM’ler önermiştir.

Ortalama tahmini için Warner [38] tam toplamsal bir model önermiştir. Thornton ve Gupta [36] kısmi toplamsal modeli önermiştir. Gjestvang ve Singh [12], toplama ve çıkarma tekniklerini bir arada kullanarak yeni bir kısmi model önermiştir. Hussain ve Shabbir [24], Gjestvang ve Singh [12] modelinden faydalanarak iki örneklem için iki aşamalı yeni bir model önermiştir. Eichhorn ve Hayre [10] ortalama tahmini için tam çarpımsal RYM'yi önermiştir. Bar-Lev v.d. [1] ortalama tahmini için kısmi çarpımsal RYM'yi önermiştir. Ryu v.d. [28], Bar-Lev v.d. [1] modelinden yararlanarak iki aşamalı bir çarpımsal model önermiştir. Saha [29] ve Diana ve Perri [7] çarpımsal ve toplamsal teknikleri bir arada kullanarak yeni modeller önermişlerdir.

Gupta v.d [16], Bar-Lev v.d. [1] modelinden faydalanarak seçimli bir model önermiştir. Daha sonra seçimli modeller bir çok araştırmacı tarafından geliştirilmiştir. Gupta ve Shabbir [17], Gupta v.d. [18], Gupta ve Shabbir [19], Gupta v.d. [20], Sehra [30], Singh ve Martur [31] ve Huang [23] seçimli model öneren diğer yazarlardır.

Son yıllarda RYM'de oran ve ortalama tahmininde yardımcı değişken bilgisi kullanılarak farklı tahmin yöntemleri geliştirilmiştir. RYM'de oran tahmini için İlk kez Zaizai [39], Warner [37] modelinde basit tahmin yerine yardımcı değişken bilgisinin kullanıldığı oransal tahmin ediciyi önermiştir. Diana ve Perry [5], Zaizai [39]'un modelinden faydalanarak oransal tahmin edici yerine regresyon tahmin edicisi kullanarak yeni bir model geliştirmiştir. RYM'de daha sonra ortalama tahmini için yardımcı değişken bilgisinin kullanıldığı tahmin ediciler önerilmiştir. RYM'de ortalama tahmininde ilk kez Sousa v.d. [33], Zaizai [39] modelinde oran tahmini yerine ortalama tahmini yaparak yeni bir model geliştirmişlerdir. Gupta v.d. [21] oransal-regresyon tahmin yöntemlerini bir arada kullanarak yeni tahmin ediciler önermişlerdir.

Bu tez çalışmasında literatürdeki oran ve ortalama tahmini için önerilen rastgeleleştirilmiş modeller incelenecektir. Son yıllarda yardımcı değişken bilgisinin kullanıldığı RYM'lerin yardımcı değişken bilgisinin kullanılmadığı RYM'lere göre daha duyarlı sonuçlar verdiği gösterilmiştir. Bu amaçla tezde oran ve ortalama tahmini için yardımcı değişken bilgisinin kullanıldığı yeni tahmin ediciler önerilmiştir.

Tezin 2. bölümünde çeşitli RYM'ler tanıtılmıştır. 3. Bölümde RYM'lerde oran ve ortalama tahmini için yardımcı değişken bilgisinin kullanıldığı tahmin ediciler incelenmiştir. 4. Bölümde tez kapsamında RYM'lerde oran ve ortalama tahmini için yardımcı değişken bilgisinin kullanıldığı yeni tahmin ediciler önerilmiştir ve literatürdeki tahmin edicilerle karşılaştırılmıştır. 5. Bölümde bir simülasyon çalışması gerçekleştirilerek tezde önerilen tahmin edicilerle literatürdeki tahmin ediciler karşılaştırılmıştır.

2.RASGELELEŞTİRİLMİŞ YANIT MODELLERİ (RYM)

2.1. Oran Tahmini için Rastgeleleştirilmiş Yanıt Modelleri

2.1.1. Warner [37] Rastgeleleştirilmiş Yanıt Modeli

Rastgeleleştirilmiş yanıt modellerinin (RYM) çoğu Warner [37]'in modeline dayanır. Warner'in modeli hassas davranışın ya da olayın gerçekleşme oranını tahmin etmede kullanılır. Bu oranı tahmin etmek için, cevaplayıcıların yanıtlarını rastgele olarak vermesini sağlayan bir deste kart kullanılır. Burada örnekleme yöntemi, yerine konularak basit rastgele örnekleme yöntemidir. Kartlarda iki farklı ifade yer almaktadır. Kartların bir kısmının üzerinde "A özelliğine sahibim" ifadesi yazılıdır, geri kalan kartlarda ise "A özelliğine sahip değilim" ifadesi yazılıdır. Eğer cevaplayıcı seçtiği karttaki ifade doğru ise "evet" yanıtını verir, ifade doğru değil ise "hayır" yanıtını verir. Burada önemli olan nokta ise görüşmecinin cevaplayıcının hangi kartı seçtiğini görmemesi ve dolayısıyla hangi ifadeye evet ya da hayır dediğinin bilinmemesidir. Örneğin, bir araştırmada kokain deneyen insanların oranı tahmin edilmek istensin. O halde kartların bir kısmı "kokain denedim" ve geri kalan kısmı "kokain denemedim" olarak düzenlenir. Bu durumda RYM sürecinde dört sonuç ortaya çıkar. Bu dört sonuç Çizelge 2.1'de verilmiştir.

Çizelge 2.1. Warner [37] doğru sınıflama çizelgesi

	Seçilen Kart	
	Kokain denedim (P)	Kokain denemedim (1-P)
Kullanıcı (π)	**Evet**	Hayır
Kullanıcı olmayan $(1-\pi)$	Hayır	**Evet**

Her cevaplayıcı, seçtiği karta göre "evet" ya da "hayır" cevabını verecektir. Gerçekte kokain denemiş olan cevaplayıcı; "kokain denedim" kartını seçerse yanıtı "evet" olacaktır, "kokain denemedim" kartını seçerse yanıtı "hayır" olacaktır. Gerçekte kokain kullanmayan kişiler için de süreç aynı mantıkla olacaktır.

Matematiksel olarak tüm bu ifade edilenler şu şekilde tanımlanır:

π , doğru cevap oranı, yani gerçekten kokain deneyen kişilerin oranı, P "kokain denedim" ifadesinin bulunduğu kartların oranı, λ ise "evet" yanıtını verenlerin oranı olmak üzere,

$$\lambda = P\pi + (1-P)(1-\pi) \tag{2.1}$$

olarak formüle edilebilir.

Burada, kartlar önceden hazırlandığı için "kokain denedim" ve "kokain denemedim" ifadelerinin yer aldığı kart sayısı bilinmektedir. Dolayısıyla P ve (1-P) oranları bilinmektedir. Tahmin edilmek istenen π oranıdır. O halde π oranı Eşitlik (2.1)'den çekilirse,

$$\pi = \frac{\lambda - (1-P)}{2P-1} \qquad P \neq 0{,}5 \tag{2.2}$$

olarak elde edilir.

Warner'ın tahmin edicisi,

$$\hat{\pi}_w = \frac{\hat{\lambda} - (1-P)}{2P-1} \tag{2.3}$$

olarak tanımlanır. Burada, "evet" diyenlerin oranı,

$$\hat{\lambda} = \frac{n_1}{n} \tag{2.4}$$

Eşitlik (2.4)'ten tahmin edilir. n örneklem büyüklüğü, n_1 "evet" diyenlerin sayısıdır.

$\hat{\pi}_w$ tahmin edicisinin varyansı,

$$Var(\hat{\pi}_w) = \frac{Var(\hat{\lambda})}{(2P-1)^2} \tag{2.5}$$

olarak verilir.

$\hat{\lambda}$ **,** Bernoulli dağılımlı olduğundan varyansı,

$$\mathrm{Var}\left(\hat{\lambda}\right)=\frac{\lambda(1-\lambda)}{n} \tag{2.6}$$

şeklindedir.

Eşitlik(2.6)'da $\lambda = P\pi + (1-P)(1-\pi)$ yerine konulursa, $\hat{\pi}_w$ tahmin edicisinin varyansı,

$$\mathrm{Var}\left(\hat{\lambda}\right)=\frac{\left[P\pi+(1-P)(1-\pi)\right]\left[1-P\pi-(1-P)(1-\pi)\right]}{n}$$

$$=\frac{\left(2P\pi+1-P-\pi\right)\left(-2P\pi+P+\pi\right)}{n}$$

$$=\frac{-4P^2\pi^2+4P^2\pi+4P\pi^2-4P\pi+P-P^2+\pi-\pi^2}{n}$$

$$=\frac{\left(\pi-\pi^2\right)(2P-1)^2+P-P^2}{n}$$

$$\mathrm{Var}\left(\hat{\pi}_w\right)=\frac{\pi(1-\pi)}{n}+\frac{P(1-P)}{n(2P-1)^2} \tag{2.7}$$

olarak elde edilir.

Eşitlik (2.7)'de $P \cong 0$ ya da $P \cong 1$ olduğunda varyans küçülecektir.

Warner [37] rastgeleleştirilmiş yanıt modelini bir sayısal örnekle açıklayalım. Örneğin kokain deneyen insanların oranı tahmin edilmek istensin. Kartların P=0,20'sinde "kokain denedim" ve geri kalan kısmı (1-P)=0,80'ininde "kokain denemedim" ifadeleri olsun.

n=5 kişilik bir görüşme sonrası sonuçlar Çizelge 2.2'de verilmiştir.

Çizelge 2.2. Warner [37] rastgeleleştirilmiş yanıt modeli için sayısal örnek

Kişiler	Gerçek Yanıtlar π_i	Seçilen Karttaki İfade*	Verilen Yanıtlar $\hat{\lambda}_i$
1	Hayır	1	Hayır (0)
2	Evet	2	Hayır (0)
3	Evet	2	Hayır (0)
4	Hayır	2	Evet (1)
5	Hayır	2	Evet (1)

*****1: "Kokain denedim" 2**:** "kokain denemedim"

Çizelge 2.2.'de "Gerçek Yanıtlar" sütununda gerçekte bu yanıtlar çalışmada bilinmemesine rağmen bu örnek için kişilerin gerçek yanıtlarının bilindiğini varsayalım. Seçilen kart sütununda 5 kişi için oluşturulan kartlar yer almaktadır. P=0,20 olduğu için kartların 5*0,20=1'inde "kokain denedim"ifadesi bulunur. Kartların 5*0,80=4'ünde "kokain denemedim" ifadesi bulunur. Çizelge 2.2'de 1. kişinin seçtiği karttaki ifade "kokain denedim" şeklindedir. Kişi gerçekte kokain denememiştir. Dolayısıyla kişinin verdiği yanıt "Hayır" olacaktır. 2.kişinin seçtiği karttaki ifade "kokain denemedim" şeklindedir. Kişi gerçekte kokain denemiştir. Dolayısıyla kişinin verdiği yanıt "Hayır" olacaktır. Kokain deneyip denememe ile ilgili değişkende hayır diyenler "0", evet diyenler "1" olarak kodlanırsa bu örnek için oluşacak yanıtlar { Hayır, Hayır, Hayır, Evet, Evet } şeklindedir.

Kişilerin verdiği yanıtlar kullanılarak kişilerin kokain deneme oranı tahmin edilebilir.

Eşitlik (2.3)'ten kokain deneme oran tahmini,

$$\hat{\pi}_w = \frac{\hat{\lambda} - (1-P)}{2P-1} = \frac{(2/5) - (1-0,20)}{(2*0,20-1)} = 0,67$$

olarak hesaplanır.

Eşitlik (2.5)'ten vergi kokain deneme oran tahmininin varyans tahmini,

$$\hat{Var}(\hat{\pi}_w) = \frac{\hat{Var}(\hat{\lambda})}{(2P-1)^2} = \frac{0,40*0,60}{5(2*0,20-1)^2} = 0,13$$

olarak hesaplanır.

2.1.2.Horvitz v.d. [22] Rastgeleleştirilmiş Yanıt Modeli

Horvitz v.d. [22], Warner [37] modelinden faydalanarak ilk kez alternatif bir model geliştirmiştir. Bu modelde cevaplayıcılara tek soru yerine iki soru sorulur. Sorulan alternatif soru tamamen sorulan hassas soruyla alakasız ve hassas olmayan bir sorudur. Bu modelde de hassas soruya ait oranı (π) tahmin etmek için, cevaplayıcıların yanıtlarını rastgele olarak vermesini sağlayan bir deste kart kullanılır. Kartlarda iki farklı ifade yer almaktadır. Kartların bir kısmının (P oranı) üzerinde "A özelliğine sahibim" ifadesi yazılıdır, geri kalan kartlarda (1-P) ise "B özelliğine sahibim” ifadesi yazılıdır. Cevaplayıcı seçtiği karta göre, eğer kartta yazılı olan ifade doğru ise “evet” yanıtını verir, ifade doğru değil ise “hayır” yanıtını verir.

Matematiksel olarak Horvitz v.d. [22] modeli Warner [37] modeline benzemektedir. Horvitz v.d. [22] tahmin edicisini elde etmek için Eşitlik (2.1)’de π yerine π_A, $(1-\pi)$ yerine π_B konulur. π_A , A özelliğine sahip kişilerin oranı; π_B ise B özelliğine sahip kişilerin kitle oranı; λ ise “evet” yanıtını verenlerin oranı,

$$\lambda = P\pi_A + (1-P)\pi_B \tag{2.8}$$

olarak formüle edilir.

O halde π oranı Eşitlik (2.8)’den çekilirse Horvitz v.d. [22] tahmin edicisi,

$$\hat{\pi}_H = \frac{\hat{\lambda} - (1-P)\pi_B}{P} \tag{2.9}$$

olarak tanımlanır. Burada, “evet” diyenlerin oranı,

$$\hat{\lambda} = \frac{n_1}{n} \tag{2.10}$$

eşitliği’nden tahmin edilir. Burada, n örneklem büyüklüğü, n_1 “evet” diyenlerin sayısıdır.

$\hat{\pi}_H$ tahmin edicisinin varyansı,

$$\mathrm{Var}(\hat{\pi}_H) = \frac{\mathrm{Var}(\hat{\lambda})}{P^2} \tag{2.11}$$

olarak verilir.

$\hat{\lambda}$**,** Bernoulli dağılımlı olduğundan varyansı,

$$\mathrm{Var}(\hat{\lambda}) = \frac{\lambda(1-\lambda)}{n} \tag{2.12}$$

şeklindedir. Eşitlik(2.12)’de $\lambda = P\pi_A + (1-P)\pi_B$ yerine konulursa, $\hat{\pi}_H$ tahmin edicisinin varyansı,

$$\mathrm{Var}(\hat{\pi}_H) = \frac{[P\pi_A + (1-P)\pi_B][1 - P\pi_A + (1-P)\pi_B]}{n}$$

$$= \frac{\pi_B(1-P) - \pi_B^2(1-P)^2 + 2\pi_A\pi_B P(P-1) + P\pi_A - P^2\pi_A^2}{n}$$

$$\mathrm{Var}(\hat{\pi}_H) = \frac{\pi_A(1-\pi_A)}{n} + \frac{\pi_A(1-P)(1-2\pi_B)}{nP} + \frac{\pi_B(1-P)[1-(1-P)\pi_B]}{nP^2} \tag{2.13}$$

olarak elde edilir.

Horvitz v.d. [22] rastgeleleştirilmiş yanıt modelini bir sayısal örnekle açıklayalım. Örneğin kokain deneyen insanların oranı tahmin edilmek istensin. Kartların P=0,40’ında “kokain denedim” ve geri kalan kısmı (1-P)=0,60’ında “1920 yılı sonrasında doğdum” ifadeleri olsun.

n=5 kişilik bir görüşme sonrası sonuçlar Çizelge 2.3’te verilmiştir.

Çizelge 2.3. Horvitz v.d. [22] rastgeleleştirilmiş yanıt modeli için sayısal örnek

Kişiler	Gerçek Yanıtlar π_i	Seçilen Karttaki İfade*	Verilen Yanıtlar $\hat{\lambda}_i$
1	Hayır	1	Hayır (0)
2	Evet	2	Evet (1)
3	Evet	1	Evet (1)
4	Hayır	2	Evet (1)
5	Hayır	2	Evet (1)

*****1: “Kokain denedim” **2:”** 1920 yılı sonrasında doğdum ”

Çizelge 2.3.’te “Gerçek Yanıtlar” sütununda gerçekte bu yanıtlar çalışmada bilinmemesine rağmen bu örnek için kişilerin gerçek yanıtlarının bilindiğini varsayalım. Seçilen kart sütununda 5 kişi için oluşturulan kartlar yer almaktadır. P=0,20 olduğu için kartların 5*0,20=1’inde “kokain denedim”ifadesi bulunur. Kartların 5*0,80=4’ünde “1920 yılı sonrasında doğdum” ifadesi bulunur. Çizelge 2.3’te 1. kişinin seçtiği karttaki ifade “kokain denedim” şeklindedir. Kişi gerçekte kokain denememiştir. Dolayısıyla kişinin verdiği yanıt “Hayır” olacaktır. 2.kişinin seçtiği karttaki ifade “1920 yılı sonrasında doğdum” şeklindedir. Kişinin verdiği yanıt “Evet” olacaktır. Kokain deneyip denememe ile ilgili değişkende hayır diyenler “0”, evet diyenler “1” olarak kodlanırsa bu örnek için oluşacak yanıtlar { Hayır,Evet, Evet, Evet, Evet } şeklindedir.

Kişilerin verdiği yanıtlar kullanılarak kişilerin kokain deneme oranı tahmin edilebilir.

Eşitlik (2.9)’dan kokain deneme oran tahmini,

$$\hat{\pi}_H = \frac{\hat{\lambda}-(1-P)\pi_B}{P} = \frac{(4/5)-0,60*1}{0,40} = 0,50 \quad (\pi_B = 1 \text{ olduğu biliniyor})$$

olarak hesaplanır.

Eşitlik (2.11)'den vergi kokain deneme oran tahmininin varyans tahmini,

$$\hat{Var}(\hat{\pi}_H) = \frac{\hat{Var}(\hat{\lambda})}{P^2} = \frac{0{,}80 * 0{,}20}{5 * (0{,}40)^2} = 0{,}20$$

olarak hesaplanır.

2.1.3. Greenberg v.d. [13] Rastgeleleştirilmiş Yanıt Modeli

Greenberg v.d. [13], Horvitz v.d. [22] modelinde sorulan alternatif sorunun kitle oranının bilinmediği durumda yeni bir teori geliştirmiştir. Bu amaçla tek örneklem yerine iki örneklem kullanarak yeni bir model önermişlerdir. Her örneklemde R_1 ve R_2 olmak üzere farklı rastgele düzenler kullanılmıştır. Rastgele düzenlerde kartlarda iki farklı ifade yer almaktadır. Kartların bir kısmının (P_i oranı) üzerinde "A özelliğine sahibim" ifadesi yazılıdır, geri kalan kartlarda ($1-P_i$) ise "B özelliğine sahibim" ifadesi yazılıdır. Cevaplayıcı seçtiği karta göre, eğer kartta yazılı olan ifade doğru ise "evet" yanıtını verir, ifade doğru değil ise "hayır" yanıtını verir.
Burada, her bir örneklemde "evet" diyenlerin oranı,

$$\lambda_i = P_i \pi_A + (1-P_i)\pi_B \qquad i = 1{,}2 \tag{2.14}$$

biçimindedir.

Buradan her örneklem için denklemler,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= P_1\pi_A + (1-P_1)\pi_B \quad \Rightarrow \pi_B = \frac{\lambda_1 - P_1\pi_A}{1-P_1} \\ \lambda_2 &= P_2\pi_A + (1-P_2)\pi_B \quad \Rightarrow \pi_B = \frac{\lambda_2 - P_2\pi_A}{1-P_2} \end{aligned} \tag{2.15}$$

şeklinde elde edilir.

Eşitlik (2.15)'teki denklemler birbirine eşitlenip π_A ifadesi çekilirse, Greenberg v.d. [13] tahmin edicisi,

$$\hat{\pi}_G = \frac{(1-P_2)\hat{\lambda}_1 - (1-P_1)\hat{\lambda}_2}{P_1 - P_2}, \qquad P_1 \neq P_2 \tag{2.16}$$

olarak elde edilir.

$\hat{\pi}_G$ tahmin edicisinin varyansı,

$$Var(\hat{\pi}_G) = \frac{(1-P_2)^2 Var(\hat{\lambda}_1) + (1-P_1)^2 Var(\hat{\lambda}_2)}{(P_1 - P_2)^2} \qquad P_1 \neq P_2 \tag{2.17}$$

olarak verilir.

$\hat{\lambda}_i$, Bernoulli dağılımlı olduğundan varyansı,

$$Var(\hat{\lambda}_i) = \frac{\lambda_i(1-\lambda_i)}{n_i} \tag{2.18}$$

şeklindedir.

Eşitlik (2.18), Eşitlik (2.17)'de yerine konulursa, $\hat{\pi}_G$ tahmin edicisinin varyansı,

$$Var(\hat{\pi}_G) = \frac{1}{(P_1 - P_2)^2}\left[\frac{(1-P_2)^2\lambda_1}{n_1} + \frac{(1-P_1)^2\lambda_2}{n_2}\right], \quad P_1 \neq P_2 \tag{2.19}$$

olarak elde edilir.

Greenberg v.d. [13], iki örneklemden birisinde P_i oranı sıfıra yakın, diğerinde bire yakın olduğunda en iyi sonuç elde edileceğini belirtmişlerdir.

Greenberg v.d. [13] rastgeleleştirilmiş yanıt modelini bir sayısal örnekle açıklayalım. Örneğin kokain deneyen insanların oranı tahmin edilmek istensin. $n_1 = n_2 = 5$'er kişilik iki örneklem seçilsin. İlk örneklemde P_1= 0,20, ikinci örneklemde P_2=0,80 olsun. İlk örneklemde kartların P_1=0,20'sinde "kokain denedim" ve geri kalan kısmı $(1-P_1)$=0,80'inde "1920 yılı sonrasında doğdum" ifadeleri olsun. İkinci örneklemde kartların P_2=0,60'ında "kokain denedim" ve geri kalan kısmı $(1-P_2)$=0,40'ında "1920 yılı sonrasında doğdum" ifadeleri olsun.

n=10 kişilik bir görüşme sonrası sonuçlar Çizelge 2.4'te verilmiştir.

Çizelge 2.4. Greenberg v.d. [13] rastgeleleştirilmiş yanıt modeli için sayısal örnek

Örneklem	Kişiler	Gerçek Yanıtlar λ_i	Seçilen Karttaki İfade*	Verilen Yanıtlar $\hat{\lambda}_i$
1.örneklem	1	Hayır	1	Hayır (0)
1.örneklem	2	Evet	2	Evet (1)
1.örneklem	3	Evet	2	Evet (1)
1.örneklem	4	Evet	2	Evet (1)
1.örneklem	5	Hayır	2	Evet (1)
2.örneklem	6	Evet	1	Evet (1)
2.örneklem	7	Evet	2	Evet (1)
2.örneklem	8	Hayır	1	Hayır (0)
2.örneklem	9	Evet	1	Evet (1)
2.örneklem	10	Evet	2	Evet (1)

*****1: “Kokain denedim” 2**:”** 1920 yılı sonrasında doğdum ”

Çizelge 2.4’te seçilen kart sütununda 10 kişi için oluşturulan kartlar yer almaktadır. Her iki örneklem için Çizelge 2.3’tekine benzer şekilde verilen yanıtlar sütunu oluşturulur.

Kişilerin verdiği yanıtlar kullanılarak kişilerin kokain deneme oranı tahmin edilebilir.

Çizelge 2.4’te verilen yanıtlara göre bazı değerler aşağıda özetlenmiştir.

1.örneklem için $P_1 = 0{,}20$ ve evet diyenlerin oranı $\hat{\lambda}_1 = \frac{4}{5} = 0{,}80$ ’dir.

2.örneklem için $P_2 = 0{,}60$ ve evet diyenlerin oranı $\hat{\lambda}_2 = \frac{4}{5} = 0{,}80$ ’dir.

Eşitlik (2.16)’dan kokain deneme oran tahmini,

$$\hat{\pi}_G = \frac{(1-P_2)\hat{\lambda}_1 - (1-P_1)\hat{\lambda}_2}{P_1 - P_2} = \frac{(1-0{,}60)0{,}80 - (1-0{,}20)0{,}80}{(0{,}20 - 0{,}60)} = 0{,}80$$

olarak hesaplanır.

Eşitlik (2.19)'dan vergi kokain deneme oran tahmininin varyans tahmini,

$$
\begin{aligned}
\hat{Var}(\hat{\pi}_G) &= \frac{1}{(P_1 - P_2)^2}\left[\frac{(1-P_2)^2\hat{\lambda}_1}{n_1} + \frac{(1-P_1)^2\hat{\lambda}_2}{n_2}\right] \\
&= \frac{1}{(0,20-0,60)^2}\left[\frac{(1-0,60)^2 0,80}{5} + \frac{(1-0,20)^2 0,80}{5}\right] \\
&= 0,80
\end{aligned}
$$

olarak hesaplanır.

2.1.4. Mangat ve Singh [25] Rastgeleleştirilmiş Yanıt Modeli

Warner'in modelinden faydalanarak Mangat ve Singh [25] yeni bir model önermiştir. Bu modelde tüm cevaplayıcılara rastgele düzen uygulamak yerine, iki aşamalı bir model önermiştir. 1. aşamada bir kısım cevaplayıcıya doğrudan gerçek yanıtları sorulur. 2. aşamada soru yöneltilmemiş cevaplayıcılara rastgele düzen uygulanır. İlk aşamada cevaplayıcılara "A özelliğine sahibim" sorusuna doğrudan cevap alınır ve burada "A özelliğine sahibim" ifadesinin bulunduğu kartların oranı T'dir. Geriye kalan kartların oranı (1-T)'dir ve bu kartlar ikinci aşamadaki cevaplayıcılara uygulanır. Bu modelde de, görüşmeci cevaplayıcının hangi soruyu yanıtladığını ya da cevaplayıcının 1. aşamada mı yoksa 2. aşamada mı yanıtladığını bilmemektedir. Warner modelinden farklı olarak bu modelde T ve (1-T) oranları yer almaktadır. Bölüm 2.1.1'de aynı örnekten yararlanılırsa bu model Çizelge 2.5'te özetlenmiştir.

Çizelge 2.5. Mangat ve Singh [25] doğru sınıflama çizelgesi

	1.Aşama (T)	2.Aşama (1-T)	Yanıtlanan
Kullanıcı (π)	Doğrudan yanıtı Söyle	-	Evet
	2.Aşamaya git	Kokain denedim	Evet
		Kokain denemedim	Hayır
Kullanıcı olmayan	Doğrudan yanıtı Söyle	-	Hayır
$(1-\pi)$	2.Aşamaya git	Kokain denedim	Hayır
		Kokain denemedim	Evet

O halde aynı mantıkla Mangat ve Singh [25] modelinde “evet” yanıtını verenlerin oranı,

$$\lambda = T\pi + (1-T)[P\pi + (1-P)(1-\pi)] \tag{2.20}$$

olarak verilir. Buradan Mangat ve Singh [25] yansız tahmin edicisi,

$$\hat{\pi}_{MS} = \frac{\hat{\lambda} - (1-T)(1-P)}{(2P-1) + 2T(1-P)} \tag{2.21}$$

olarak elde edilir.

Burada $\hat{\lambda} = \frac{n_1}{n}$, n örneklem büyüklüğü ve n_1 “evet” diyenlerin oranıdır.

Bu tahmin edicinin varyansı,

$$\mathrm{Var}(\hat{\pi}_{MS}) = \frac{\mathrm{Var}(\hat{\lambda})}{[(2P-1) + 2T(1-P)]^2} \tag{2.22}$$

şeklindedir. Burada $\mathrm{Var}(\hat{\lambda}) = \frac{\lambda(1-\lambda)}{n}$’dir.

Eşitlik (2.22)’de $\lambda = T\pi + (1-T)[P\pi + (1-P)(1-\pi)]$ yerine konulursa, $\hat{\pi}_{MS}$ tahmin edicisinin varyansı,

$$\mathrm{Var}(\hat{\pi}_{MS}) = \frac{\pi(1-\pi)}{n} + \frac{(1-T)(1-P)[1-(1-T)(1-P)]}{n[(2P-1) + 2T(1-P)]^2} \tag{2.23}$$

olarak bulunur.

Mangat ve Singh [25] kısmi RYM tahmin edicisi $\hat{\pi}_{MS}$,

$$\mathrm{Var}(\hat{\pi}_{MS}) < \mathrm{Var}(\hat{\pi}_{w})$$

$$\frac{\mathrm{Var}(\hat{\lambda})}{[(2P-1) + 2T(1-P)]^2} < \frac{\mathrm{Var}(\hat{\lambda})}{(2P-1)^2}$$

$$\frac{1-2P}{1-P} < T$$

koşulu altında Warner [27]’nin tam RYM tahmin edicisi π_w’den daha duyarlıdır. Bu koşul ise P>0,5 olduğu durumda sağlanır. Eşitlik (2.24)’te T=0 olduğunda bu model, Warner [27]’nin modeline dönüşür.

Mangat ve Singh [25] RYM'yi bir sayısal örnekle açıklayalım.

İki aşamalı olan bu modelde kişilere "kokain deneyip denemedikleri" sorusu sorulsun. İlk aşamada cevaplayıcıların %20'sine bu soruya doğrudan yanıt vermeleri istensin (Burada T=0,20'dir).Geriye kalan cevaplayıcılar (1-T=0,80) ikinci aşamaya yönlendirilsinler. İkinci aşamada kartların %50'sinde (P=0,50) "kokain denedim" ve geri %50'sinde "kokain denemedim" ifadeleri olsun.

5 kişilik bir görüşme sonrası sonuçlar Çizelge 2.6'da verilmiştir.

Çizelge 2.6. Mangat ve Singh [25] rastgeleleştirilmiş yanıt modeli için sayısal örnek

		(T=0,40)	(1-T=0,60)	
Kişiler	Gerçek Yanıtlar (λ_i)	1.Aşama	2.Aşama Seçilen Karttaki İfade*	Verilen Yanıtlar $\hat{\lambda}_i$
1	Hayır	Doğrudan Yanıt	1	Hayır (0)
2	Evet	2.Aşamaya geç	2	Hayır (0)
3	Evet	2.Aşamaya geç	1	Evet (1)
4	Evet	Doğrudan Yanıt	-	Evet (1)
5	Hayır	2.Aşamaya geç	2	Evet (1)

***1**: "Kokain denedim" **2:"** Kokain denemedim"

n=5 kişilik görüşme sonucunda kişilerin kokain deneme oran tahmini Eşitlik (2.21)'den,

$$\hat{\pi}_{MS}=\frac{\hat{\lambda}-(1-T)(1-P)}{(2P-1)+2T(1-P)}=\frac{(3/5)-(1-0{,}40)(1-0{,}50)}{(2*0{,}50-1)+2*0{,}40(1-0{,}50)}=0{,}75$$

olarak tahmin edilir.

Haftada ortalama tüketilen alkol miktarı için varyans tahmini Eşitlik (2.22)'den

$$\mathrm{Var}(\hat{\pi}_{MS})=\frac{\mathrm{Var}(\hat{\lambda})}{[(2P-1)+2T(1-P)]^2}=\frac{0{,}60*0{,}40}{5[(2*0{,}50-1)+2*0{,}40(1-0{,}50)]^2}=0{,}30$$

olarak tahmin edilmiştir.

2.2. Ortalama Tahmini için Toplamsal Rastgeleleştirilmiş Yanıt Modelleri

Hassas sorulardan elde edilen değişkenlere hassas değişken denilir. Toplamsal RYM'de hassas bir değişkenin ortalaması tahmin edilmek istenmektedir. Toplamsal modelde, cevaplayıcılardan yanıtlarını rastgele düzenden yararlanarak cevaplamaları istenir. Bu rastgele düzen bilinen bir dağılımdan türetilen sayıların yazıldığı deste kartlarından oluşsun. Cevaplayıcıdan bu kartlardan birisini rastgele olarak seçmesi ve kartta yazan değerle gerçek cevabını toplayarak soruyu yanıtlaması istenir.

2.2.1. Warner [38] Rastgeleleştirilmiş Yanıt Modeli

Warner [38] ortalama tahmini için tam toplamsal RYM'yi önermiştir. Tam toplamsal RYM'de tüm cevaplayıcıların rastgele düzeni kullanarak soruları cevaplaması beklenir. Bu model matematiksel olarak,

$$Z=Y+W \tag{2.24}$$

olarak tanımlanır. Burada Z, cevaplayıcının görüşmeciye verdiği yanıt ve Y, ilgilenilen hassas değişken olsun. Y tahmin edilmek istenen değişken olduğu için ortalaması (μ_y) ve varyansı (σ_y^2) bilinmeyen bir değişkendir. W ise rastgele düzende bilinen bir dağılımdan türetilen rastgele değişken olsun. W değişkeninin dağılımı bilindiği için ortalaması ($E(W)=\mu_W$) ve varyansı (σ_w^2) bilinmektedir.

Buradan Cevaplayıcıların verdiği cevapların kitle ortalaması (N için),

$$E(Z)=E(Y)+E(W)$$

$$\bar{Z}=\mu_y+\mu_w \tag{2.25}$$

eşitliğinden bulunur.

Cevaplayıcıların verdiği cevapların örneklem ortalaması (n için) ise,

$$\bar{z}=\hat{\mu}_y+\mu_w \tag{2.26}$$

eşitliğinden bulunur.

Eşitlik (2.26)'dan $\hat{\mu}_y$ değeri çekilirse Warner [38] tahmin edicisi şu şekilde

$$\hat{\mu}_{w1}=\bar{z}-\mu_w \tag{2.27}$$

elde edilir.

Warner [38] tahmin edicisinin varyansı,

$$\begin{aligned} Var(\hat{\mu}_{w1}) = Var(\bar{z}) &= \frac{\sigma_z^2}{n} \\ &= \frac{\sigma_y^2}{n} + \frac{\sigma_w^2}{n} \end{aligned} \tag{2.28}$$

olarak bulunur.

Warner [38] RYM'yi bir sayısal örnekle açıklayalım.

Bu modelde kişilere "haftada ne kadar(kaç şişe) alkol tüketiyorsunuz?" sorusu sorulsun. rastgele düzendeki sayılarda şu şekilde olsun.

Sayılar(S_i)	Frekans(f_i)
5	6
6	10
7	16
8	10
9	6

Yukarıdaki sıklık dağılımının ortalaması $\mu_w = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i S_i}{n} = \frac{5*6+...+9*6}{48} = 7$ ve varyansı

$$\sigma_w^2 = \frac{\left\{\sum_{i=1}^{k} f_i S_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{k} f_i S_i\right)^2 \Big/ n\right\}}{n-1} = \frac{\left(6*5^2+...+6*9^2\right) - (5*6+...+9*6)^2 \big/ 48}{47} = 1{,}42\text{'dir.}$$

5 kişilik bir görüşme sonrası sonuçlar Çizelge 2.7'de verilmiştir.

Çizelge 2.7. Warner [38] rastgeleleştirilmiş yanıt modeli için sayısal örnek

	Gerçek Yanıtlar (Y)	Seçilen Karttaki sayılar (W)	Verilen Yanıtlar Z=Y+W
	5	9	14
	0	7	7
	7	5	12
	6	5	11
	3	6	9

Yapılan çalışma sonucu "Haftada ne kadar alkol tüketiyorsunuz?" sorusuna ilişkin verilen yanıtların ortalaması $\bar{z} = (4 + ... + 9)/5 = 10{,}6$ ve varyans tahmini $\hat{\sigma}_z^2 = 7{,}3$'tür.

n=5 kişilik görüşme sonucunda haftada tüketilen ortalama alkol miktarı Eşitlik (2.27)'den,

$$\hat{\mu}_{w1} = \bar{z} - \mu_w = 10{,}6 - 7 = 3{,}6$$

olarak tahmin edilir.

Haftada tüketilen ortalama alkol miktarı için varyans Eşitlik (2.28)'den

$$\hat{Var}(\hat{\mu}_{w1}) = \frac{\hat{\sigma}_z^2}{n} = \frac{7{,}3}{5} = 1{,}46$$

olarak tahmin edilmiştir.

2.2.2. Thornton ve Gupta [36] Rastgeleleştirilmiş Yanıt Modeli

Thornton ve Gupta [36], tam toplamsal RYM'den yararlanarak kısmi (iki aşamalı) toplamsal RYM'yi önermiştir. İlk aşamada T oranına sahip cevaplayıcılardan doğrudan gerçek yanıtlar alınırken, ikinci aşamada geriye kalan (1-T) oranlık cevaplayıcıya rastgele düzen uygulanır.

O halde bu model şu şekilde tanımlanabilir:

$$Z = \begin{cases} Y & T \\ Y + W & 1 - T \end{cases} \qquad (2.29)$$

Burada Z cevaplayıcılardan alınan yanıt, Y ortalaması ve varyansı bilinmeyen ilgilenilen hassas değişken ve W ortalaması ve varyansı bilinen rastgele düzende türetilen rastgele değişkendir.

Buradan Cevaplayıcıların verdiği cevapların kitle ortalaması,

$$E(Z)=(T)E(Y)+(1\text{-}T)E(Y+W)$$

$$\bar{Z} = (T)\mu_y + (1-T)(\mu_y + \mu_w) \tag{2.30}$$

eşitliğinden bulunur.

Cevaplayıcıların verdiği cevapların örneklem ortalaması ise,

$$\begin{aligned} \bar{z} &= T\hat{\mu}_y + (1-T)(\hat{\mu}_y + \mu_w) \\ &= \hat{\mu}_y + (1-T)\mu_w \end{aligned} \tag{2.31}$$

eşitliğinden bulunur.

Eşitlik (2.31)'den $\hat{\mu}_y$ çekilirse, $\hat{\mu}_{TG}$ tahmin edicisi,

$$\hat{\mu}_{TG} = \bar{z} - (1-T)\mu_w \tag{2.32}$$

olarak elde edilir.

$\hat{\mu}_{TG}$ tahmin edicisinin varyansı,

$$Var(\hat{\mu}_{TG}) = \frac{1}{n} Var(Z)$$

$$= \frac{1}{n}\left[E(Z^2) - \{E(Z)\}^2\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[E\{Y^2 + (1-T)^2W^2 + 2(1-T)YW\} - \{E(Z)\}^2\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[E(Y^2) + E\{(1-T)^2W^2\} + 2E\{(1-T)YW\} - \{\mu_y + (1-T)\mu_w\}^2\right]$$

$$= \frac{1}{n}\Big[(\mu_Y^2 + \sigma_Y^2) + (1-T)(\mu_W^2 + \sigma_W^2) + 2(1-T)\mu_y\mu_w$$

$$-\mu_Y^2 - (1-T)^2\mu_W^2 - 2(1-T)\mu_y\mu_w\Big]$$

$$Var(\hat{\mu}_{TG}) = \frac{1}{n}\left[\sigma_Y^2 + (1-T)(\sigma_W^2 + T\mu_W^2)\right] \tag{2.33}$$

olarak bulunur.

Ayrıca Thornton ve Gupta [36] ortalama tahmini için kısmi RYM'deki varyansın tam RYM'deki varyanstan Eşitlik (2.34) koşulu altında daha küçük olduğunu göstermiştir.

$$Var(\hat{\mu}_{TG}) < Var(\hat{\mu}_{w1})$$

$$\frac{1}{n}\left[\sigma_y^2 + (1-T)\sigma_w^2 + T\mu_w^2\right] < \frac{1}{n}\left[\sigma_u^2 + \sigma_w^2\right]$$

$$\frac{\mu_w^2 - \sigma_w^2}{\mu_w^2} = 1 - C_w^2 < T \tag{2.34}$$

Burada C_w, W değişkeni için değişim katsayısıdır.

Thornton ve Gupta [36] RYM'yi bir sayısal örnekle açıklayalım.

İki aşamalı bu modelde kişilere "haftada ne kadar (kaç şişe) alkol tüketiyorsunuz?" sorusu sorulsun. İlk aşamada cevaplayıcıların %20'sine bu soruya doğrudan yanıt vermeleri istensin (Burada T=0,20'dir).Geriye kalan cevaplayıcılar (1-T=0,80) ikinci aşamaya yönlendirilsinler. İkinci aşamadaki rastgele düzendeki sayılar Bölüm 2.2.1' de verildiği gibi olsun.

Dolayısıyla rastgele değişken için ortalama $\mu_w = 7$ ve varyansı $\sigma_w^2 = 1{,}42$ 'dir.

5 kişilik bir görüşme sonrası sonuçlar Çizelge 2.8'de verilmiştir.

Çizelge 2.8. Thornton ve Gupta [36] rastgeleleştirilmiş yanıt modeli için sayısal örnek

		(T=0,20)	(1-T=0,80)	
	Gerçek Yanıtlar (Y)	1.Aşama	2.Aşama (Seçilen Karttaki sayılar (W))	Verilen Yanıtlar Z=TY+(1-T)(Y+W)
	5	2.Aşamaya geç	9	14
	0	2.Aşamaya geç	7	7
	7	2.Aşamaya geç	5	12
	6	Doğrudan Yanıt	-	6
	3	2.Aşamaya geç	6	9
Ortalama	4,2			9,6
Varyans	7,7			11,3

Yapılan çalışma sonucu "Haftada ne kadar alkol tüketiyorsunuz?" sorusuna ilişkin verilen yanıtların ortalaması $\bar{z} = (4 + \ldots + 9)/5 = 9{,}6$'dır.

n=5 kişilik görüşme sonucunda bir haftada tüketilen ortalama alkol miktarı Eşitlik (2.32)'den,

$$\hat{\mu}_{TG} = \bar{z} - (1 - T)\mu_W = 9{,}6 - 0{,}80 * 7 = 4$$

olarak tahmin edilir.

Bir haftada tüketilen ortalama alkol miktarı için varyans Eşitlik (2.33)'den

$$\hat{Var}(\hat{\mu}_{TG}) = \frac{1}{n}\hat{Var}(z) = \frac{1}{n}\hat{\sigma}_z^2 = \frac{11{,}3}{5} = 2{,}26$$

olarak tahmin edilmiştir.

2.2.3. Gjestvang ve Singh [12] Rasgeleleştirilmiş Yanıt Modeli

Gjestvang ve Singh [12], Warner [38] toplamsal rastgeleleştirilmiş yanıt modelinden faydalanarak iki aşamalı yeni bir model önermişlerdir.
Gjestvang ve Singh [12] tarafından önerilen model için her bir cevaplayıcının verdiği yanıt,

$$Z_i = \begin{cases} Y_i + \alpha W & T = \beta / \alpha + \beta \\ Y_i - \beta W & (1 - T) = \alpha / \alpha + \beta \end{cases} \qquad (2.35)$$

şeklinde açıklanabilir.

T oranında cevaplayıcıdan, seçtikleri karttaki değeri α ile çarpıp gerçek cevaplarına ekleyip yanıtı vermeleri istenir. (1-T) oranında cevaplayıcıdan ise, seçtikleri karttaki değeri β ile çarpıp gerçek cevaplarından çıkarıp yanıtı vermeleri istenir.

Eşitlik (2.35)'den Gjestvang ve Singh [12] tarafından önerilen model için her bir cevaplayıcının verdiği yanıt,

$$Z_i = T(Y_i + \alpha W) + (1 - T)(Y_i - \beta W) \tag{2.36}$$

şeklinde yazılabilir.

Buradan,

$$\begin{aligned} Z_i &= TY_i + T\alpha W + Y_i - \beta W - TY_i + T\beta W \\ &= Y_i + TW(\alpha + \beta) - \beta W \\ &= Y_i + \frac{\beta}{(\alpha + \beta)} W(\alpha + \beta) - \beta W \end{aligned}$$

$$Z_i = Y_i \tag{2.37}$$

şeklinde elde edilir.

O halde Y hassas değişkeni için önerilen yansız tahmin edici,

$$\hat{\mu}_{GS} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i \tag{2.38}$$

şeklinde verilir.

$\hat{\mu}_{GS}$ tahmin edicisinin yanı,

$$E(\hat{\mu}_{GS}) = E_1E_2\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\right] = E_1\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E_2(Z_i)\right] \tag{2.39}$$

$$\begin{aligned} E_2(Z_i) &= TE_2(Y_i + \alpha W) + (1-T)E_2(Y_i - \beta W) \\ &= TY_i + (1-T)Y_i + \alpha p\mu_W - \beta(1-T)\mu_W \\ &= Y_i + \frac{\alpha\beta\mu_W}{(\alpha + \beta)} - \frac{\alpha\beta\mu_W}{(\alpha + \beta)} \end{aligned}$$

$$E_2(Z_i) = Y_i \tag{2.40}$$

olarak elde edilir.

Eşitlik (2.39)'da ve Eşitlik (2.40) yerine konulursa,

$$E(\hat{\mu}_{GS}) = E_1\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i\right] = \mu_Y \tag{2.41}$$

olarak bulunur. $\hat{\mu}_{GS}$ tahmin edicisi yansız bir tahmin edicidir.

$\hat{\mu}_{GS}$ tahmin edicisinin varyansı,

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Var}(\hat{\mu}_{GS}) &= E_1 V_2(\hat{\mu}_{GS}) + V_1 E_2(\hat{\mu}_{GS}) \\
&= E_1\left[\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V_2(Z_i)\right] + V_1\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E_2(Z_i)\right]
\end{aligned} \tag{2.42}
$$

eşitliğinden elde edilir.

$$
\begin{aligned}
V_2(Z_i) &= E_2(Z_i^2) - [E_2(Z_i)]^2 \\
&= TE_2(Y_i + \alpha W)^2 + (1-T)(Y_i - \beta W)^2 - Z_i^2 \\
&= (\sigma_w^2 + \mu_w^2)[T\alpha^2 + (1-T)\beta^2] + 2T_i\mu_w(T\alpha - (1-T)\beta) \\
&= (\sigma_w^2 + \mu_w^2)\left[\frac{\alpha^2\beta}{(\alpha+\beta)} + \frac{\alpha\beta^2}{(\alpha+\beta)}\right] + 2Y_i\mu_w\left[\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)} - \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)}\right]
\end{aligned}
$$

$$
V_2(Z_i) = \alpha\beta\mu_w^2(1 + C_w^2) \tag{2.43}
$$

şeklindedir. Burada, $C_w^2 = \dfrac{\sigma_w^2}{\mu_w^2}$'dir.

Eşitlik (2.42) ve Eşitlik (2.43)'den varyans,

$$
\operatorname{Var}(\hat{\mu}_{GS}) = \frac{1}{n}\left[\sigma_y^2 + \alpha\beta(\sigma_w^2 + \mu_w^2)\right] \tag{2.44}
$$

olarak bulunur.

Gjestvang ve Singh [12] tahmin edicisi ile Warner [38] toplamsal tahmin edicisi karşılaştırılırsa,

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Var}(\hat{\mu}_{w1}) > \operatorname{Var}(\hat{\mu}_{GS}) \\
&\frac{1}{n}(\sigma_y^2 + \sigma_w^2) > \frac{1}{n}\left[\sigma_y^2 + \alpha\beta(\sigma_w^2 + \mu_w^2)\right] \\
&\frac{1}{n}\frac{(\sigma_y^2 + \sigma_w^2)}{\sigma_w^2} > \frac{1}{n}\left[\frac{\sigma_y^2 + \alpha\beta(\sigma_w^2 + \mu_w^2)}{\sigma_w^2}\right] \\
&\frac{1}{n}\left(1 + \frac{\sigma_y^2}{\sigma_w^2}\right) > \frac{1}{n}\left[\frac{\sigma_y^2}{\sigma_w^2} + \alpha\beta(1 + C_w^2)\right] \\
&\frac{1}{1 + C_w^2} > \alpha\beta
\end{aligned} \tag{2.45}
$$

koşulu elde edilir.

α ve β değerlerinin seçimine tahmin edicilerin birbirine göre duyarlılığı değişecektir. Eşitlik (2.45) incelenirse, α ve β çarpımı ne kadar küçük olursa Gjestvang ve Singh [12] tahmin edicisi Warner [38] tahmin edicisine göre daha duyarlı olacaktır.

Gjestvang ve Singh [12] RYM'yi bir sayısal örnekle açıklayalım.

Bu modelde de kişilere "haftada ne kadar(kaç şişe) alkol tüketiyorsunuz?" sorusu sorulsun. Modelde uygulanacak olan düzende $T = \beta / (\alpha + \beta)$ olacak şekilde küçük değerde α ve β değerleri belirlenir. Buna örnek için T=0,40, $\alpha = 1{,}2$ ve $\beta = 0{,}8$ olsun $\left(T = 0{,}8 / (0{,}8 + 1{,}2) = 0{,}40 \right)$. Cevaplayıcıların %40'ı seçtikleri karttaki değeri $\alpha = 1{,}2$ ile çarpıp gerçek cevaplarına ekleyip yanıtlarını verirler. Cevaplayıcıların %60'ı ise seçtikleri karttaki değeri $\beta = 0{,}8$ ile çarpıp gerçek cevaplarından çıkarıp yanıtlarını verirler.

İkinci aşamadaki rastgele düzendeki sayılar Bölüm 2.2.1' de verildiği gibi olsun. Dolayısıyla rastgele değişken için ortalama $\mu_w = 7$ ve varyansı $\sigma_w^2 = 1{,}42$ 'dir.

5 kişilik bir görüşme sonrası sonuçlar Çizelge 2.9'da verilmiştir.

Çizelge 2.9. Gjestvang ve Singh [12] rastgeleleştirilmiş yanıt modeli için sayısal örnek

Kişiler	Gerçek Yanıtlar (Y)	Seçilen Karttaki İfade*	Seçilen Karttaki Sayılar (W)	Verilen Yanıtlar $Z_i = T(Y_i + \alpha W) + (1 - T)(Y_i - \beta W)$
1	5	1	9	5+1,2*9=15,8
2	0	1	7	0+1,2*7=8,4
3	7	2	5	7-0,8*5=3
4	6	2	6	6-0,8*6=1,2
5	3	2	6	3-0,8*6=-1,8
Ortalama	4,2			5,32
Varyans	7,7			48,9

*1: "Seçtiğiniz karttaki sayıyı $\alpha = 1{,}2$ ile çarpıp gerçek cevabınıza ekleyerek yanıtınızı veriniz"

2:"Seçtiğiniz karttaki sayıyı $\beta = 0{,}8$ ile çarpıp gerçek cevabınızdan çıkararak yanıtınızı veriniz"

Yapılan çalışma sonucu "Haftada ne kadar alkol tüketiyorsunuz?" sorusuna ilişkin verilen yanıtların ortalaması $\bar{z} = (5{,}8 + ... - 1{,}8)/5 = 5{,}32$'dır.

n=5 kişilik görüşme sonucunda bir haftada tüketilen ortalama alkol miktarı Eşitlik (2.38)'den

$$\hat{\mu}_{GS} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i = \bar{z} = 5{,}32$$

olarak tahmin edilir.

Bir haftada tüketilen ortalama alkol miktarı için varyans

$$\hat{Var}(\hat{\mu}_{GS}) = \frac{1}{n}\hat{Var}(z) = \frac{1}{n}\hat{\sigma}_z^2 = \frac{48{,}9}{5} = 9{,}61$$

olarak tahmin edilmiştir.

2.2.4. Hussain ve Shabbir [24] Rastgeleleştirilmiş Yanıt Modelleri

Hussain and Shabbir [24] ortalama tahmininde yanıt modelleri için iki aşamalı toplamsal RYM'de iki farklı tahmin edici önermiştir.

i)Hussain ve Shabbir Modeli I

Hussain ve Shabbir [24]'ün önerdiği birinci modelde ilk aşamada kartların T oranında "Hassas değişkene ilişkin gerçek cevabınızı yazınız" ifadesi ve (1-T) oranında "İkinci aşamaya geçiniz" ifadesi yazmaktadır. Bu durumda örneklemdeki kişilerin T oranı hassas değişkene ilişkin gerçek cevaplarını verirken, (1-T) oranındaki kişiler de ikinci aşamadaki düzeni kullanırlar. İkinci aşamada kartların $P = \frac{a}{a+b}$ oranında "Y_i+bW_i sonucunu yazınız" ifadesi ve $(1-P) = \frac{b}{a+b}$ oranında "Y_i-aW_i sonucunu yazınız" ifadesi yazmaktadır. Burada W_i, ortalaması $\mu_w = 1$ ve varyansı σ_w^2 olan rastgele değişkendir. İkinci aşamadaki düzende cevaplayıcılara bu ifadelerin yazıldığı kartlar dışında bir de W rastgele değişkeninin değerleri bulunan kartlar seçtirilir. Böylece ikinci aşamaya yönlendirilen kişilerin P oranı seçtikleri karttaki değerin b ile çarpımını gerçek cevaplarıyla toplayıp yanıtlarını verirken, (1-P) oranındaki kişiler seçtikleri karttaki değerin a ile çarpımını gerçek cevaplarından çıkarıp yanıtlarını verirler. Burada a ve b sabit sayılardır. Y_i ortalaması μ_y ve varyansı σ_y^2 olan hassas değişken, W_i değişkeni ortalaması $\mu_w = 1$ ve varyansı σ_w^2 olan rastgele değişkendir. Z_i her bir cevaplayıcının verdiği yanıttır. Z_i matematiksel olarak şu şekilde yazılmaktadır:

$$Z_i = TY_i + (1-T)\left[P(Y_i + bW_i) + (1-P)(Y_i - aW_i)\right] \tag{2.46}$$

Y_i değişkeni için yansız tahmin edici,

$$\hat{\mu}_{HS1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i \tag{2.47}$$

şeklinde verilir.

$\hat{\mu}_{HS1}$ tahmin edicisinin varyansı,

$$Var(\hat{\mu}_{HS1}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(Z_i) \tag{2.48}$$

olmaktadır. Burada,

$$\begin{aligned} Var(Z_i) &= E(Z_i^2) - \left[E(Z_i)\right]^2 \\ &= \left[TE(Y_i^2) + (1-T)E\{Y_i^2 + PW_i^2(b^2 - a^2) + a^2W_i^2\}\right] - \mu_y^2 \\ &= TE(Y_i^2) + E(Y_i^2) - TE(Y_i^2) + (1-T)abE(W_i^2) \\ &= \frac{1}{n}\left[\sigma_y^2 + (1-T)ab(1+\sigma_w^2)\right] \end{aligned} \tag{2.49}$$

biçiminde elde edilir.

Hussain ve Shabbir [24] RYM I'i bir sayısal örnekle açıklayalım.

Bu modelde de kişilere "haftada ne kadar(kaç şişe) alkol tüketiyorsunuz?" sorusu sorulsun. İlk aşamada cevaplayıcıların %20'sine bu soruya doğrudan yanıt vermeleri istensin (Burada T=0,20'dir). Geriye kalan cevaplayıcılar (1-T=0,80) ikinci aşamaya yönlendirilsinler. İkinci aşamada uygulanacak olan düzen için P=0,50, $a = b = 0,8$

olsun $\left(T = 0{,}8 / (0{,}8 + 0{,}8) = 0{,}50\right)$. İkinci aşamadaki cevaplayıcıların %50'si seçtikleri karttaki değeri $b = 0{,}8$ ile çarpıp gerçek cevaplarına ekleyip yanıtlarını verirler, geriye kalan %50'si ise seçtikleri karttaki değeri $a = 0{,}8$ ile çarpıp gerçek cevaplarından çıkarıp yanıtlarını verirler.

İkinci aşamada rastgele düzendeki değişken ortalaması $\mu_w = 1$ olan poisson dağılımından türetilsin. Seçilen karttaki sayılar Çizelge 2.10'da verilmiştir.

5 kişilik bir görüşme sonrası sonuçlar Çizelge 2.10'da verilmiştir.

Çizelge 2.10. Hussain ve Shabbir [24] rastgeleleştirilmiş yanıt modeli I için sayısal örnek

		1.Aşama (T=0,20)	2.Aşama (1-T)=0,80, P=0,50		
Kişiler	Gerçek Yanıtlar (Y)	1.Aşamadaki İfadeler	Seçilen Karttaki İfade*	Seçilen Karttaki Sayılar (W)	Verilen Yanıtlar $Z_i = T(Y_i + \alpha W) + (1 - T)(Y_i - \beta W)$
1	5	2.Aşamaya geç	1	0	5+0,8*0=5
2	0	2.Aşamaya geç	1	1	0+0,8*1=0,8
3	7	2.Aşamaya geç	2	2	7-0,8*2=5,4
4	6	Doğrudan Yanıt	-	-	6
5	3	2.Aşamaya geç	2	1	3-0,8*1=2,2
Ortalama	4,2				3,88
Varyans	7,7				5,09

*1: "Y_i+0,8*W_i sonucunu yazınız", 2: "Y_i-0,8*W_i sonucunu yazınız"

Yapılan çalışma sonucu "Haftada ne kadar alkol tüketiyorsunuz?" sorusuna ilişkin verilen yanıtların ortalaması $\bar{z} = (5 + \ldots + 2{,}2)/5 = 3{,}88$'dır.

n=5 kişilik görüşme sonucunda bir haftada tüketilen ortalama alkol miktarı Eşitlik (2.38)'den

$$\hat{\mu}_{HS1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i = \bar{z} = 3{,}88$$

olarak tahmin edilir.

Bir haftada tüketilen ortalama alkol miktarı için varyans

$$\hat{Var}(\hat{\mu}_{HS1}) = \frac{1}{n}\hat{Var}(Z) = \frac{1}{n}\hat{\sigma}_z^2 = \frac{5{,}09}{5} = 1{,}09$$

olarak tahmin edilmiştir.

ii)Hussain ve Shabbir Modeli II

Hussain ve Shabbir [24]'ün önerdiği ikinci modelde aynı şekilde iki aşama vardır. İlk aşamada R_1 ve ikinci aşamada R_2 olmak üzere iki rastgele düzen vardır. Cevaplayıcıların T oranı R_1 düzenini kullanması, (1-T) oranındaki cevaplayıcının ise R_2 düzenini kullanması sağlanır. R_1 düzeninde kartların üzerinde $P_1 = \frac{a_1}{a_1 + b_1}$ oranında "Y_i+ b_1W_i sonucunu yazınız" ifadesi ve $(1 - P_1) = \frac{b_1}{a_1 + b_1}$ oranında "Y_i-a_1W_i sonucunu yazınız" ifadesi yazmaktadır. Bu durumda R_1 düzenini kullanan kişilerin P_1 oranı seçtikleri karttaki değerin b_1 ile çarpımını gerçek cevaplarıyla toplayıp yanıtlarını verirken, (1-P_1) oranındaki kişiler seçtikleri karttaki değerin a_1 ile çarpımını gerçek cevaplarından çıkarıp yanıtlarını verirler. R_2 düzeninde kartların üzerinde $P_2 = \frac{a_2}{a_2 + b_2}$ oranında "Y_i+b_2W_i sonucunu yazınız" ifadesi ve $(1 - P_2) = \frac{b_2}{a_2 + b_2}$ oranında "Y_i-a_2W_i sonucunu yazınız" ifadesi yazmaktadır. Böylece R_2 düzenine yönlendirilen kişilerin P_2 oranı seçtikleri karttaki değerin b_2 ile çarpımını gerçek cevaplarıyla toplayıp yanıtlarını verirken, (1-P_2) oranındaki kişiler seçtikleri karttaki değerin a_2 ile çarpımını gerçek cevaplarından çıkarıp yanıtlarını verirler.

Burada a_1, a_2, b_1, b_2 sabit sayılardır. Burada Y_i ortalaması μ_y ve varyansı σ_y^2 olan hassas değişken, W_i değişkeni ortalaması $\mu_w = 1$ ve varyansı σ_w^2 olan rastgele değişkendir. Z_i her bir cevaplayıcının verdiği yanıttır. Z_i matematiksel olarak şu şekilde yazılmaktadır:

$$Z_i = T\left[P_1(Y_i + b_1 W_i) + (1-P_1)(Y_i - a_1 W_i)\right] + (1-T)\left[P_2(Y_i + b_2 W_i) + (1-P_2)(Y_i - a_2 W_i)\right] \tag{2.50}$$

Y_i değişkeni için yansız tahmin edici,

$$\hat{\mu}_{HS2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i \tag{2.51}$$

şeklinde verilir.

$\hat{\mu}_{HS2}$ tahmin edicisinin varyansı,

$$Var(\hat{\mu}_{HS2}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(Z_i)$$

olmaktadır.

Burada,

$$\begin{aligned}
Var(Z_i) &= E(Z_i^2) - [E(Z_i)]^2 \\
&= \begin{bmatrix} T\left[P_1 E(Y_i^2 + b_1^2 W_i^2) + (1-P_1)E(Y_i^2 + a_1^2 W_i^2)\right] \\ + (1-T)\left[P_2 E(Y_i^2 + b_2^2 W_i^2) + (1-P_2)E(Y_i^2 + a_2^2 W_i^2)\right] \end{bmatrix} - \mu_y^2 \\
&= \begin{bmatrix} T\left[E(Y_i^2) + P_1(b_1^2 - a_1^2)E(W_i^2) + a_1^2 E(W_i^2)\right] \\ + (1-T)\left[E(Y_i^2) + P_2(b_2^2 - a_2^2)E(W_i^2) + a_2^2 E(W_i^2)\right] \end{bmatrix} - \mu_y^2 \\
&= \frac{1}{n}\left[\sigma_y^2 + (1+\sigma_w^2)\left((1-T)a_2 b_2 + T a_1 b_1\right)\right]
\end{aligned} \tag{2.52}$$

biçiminde elde edilir.

Hussain ve Shabbir [24] RYM I'i bir sayısal örnekle açıklayalım.

Bu modelde de kişilere "haftada ne kadar(kaç şişe) alkol tüketiyorsunuz?" sorusu sorulsun. Cevaplayıcıların %40'ı (T=0,40) R_1 düzenini, % 60'ı R_2 düzenini kullanacaktır. R_1 düzeni için $a_1 = b_1 = 0{,}8$ olsun $\left(P_1 = 0{,}8 / (0{,}8 + 0{,}8) = 0{,}50\right)$. R_2 düzeni için $a_2 = 0{,}45$ ve $b_2 = 0{,}30$ olsun $\left(P_2 = 0{,}45 / (0{,}30 + 0{,}45) = 0{,}60\right)$.

R_1 düzeninde cevaplayıcıların %50'si (P_1=0,50) "Y_i+ 0,8*W_i sonucunu yazınız" ifadesini, geriye kalan %50'si ise "Y_i- 0,8*W_i sonucunu yazınız" ifadesini yanıtlasınlar. R_2 düzeninde cevaplayıcıların %60'ı (P_2=0,60) "Y_i+0,30*W_i sonucunu yazınız" ifadesini, geriye kalan %40'ı ise "Y_i-0,45*W_i sonucunu yazınız" ifadesini yanıtlasınlar.

İkinci aşamada rastgele düzendeki değişken ortalaması $\mu_w = 1$ olan poisson dağılımından türetilsin. Seçilen karttaki sayılar Çizelge 2.11'de verilmiştir.

5 kişilik bir görüşme sonrası sonuçlar Çizelge 2.11'de verilmiştir.

Çizelge 2.11. Hussain ve Shabbir [24] rastgeleleştirilmiş yanıt modeli II için sayısal örnek

			1.Aşama (T=0,20, P_1=0,50)	2.Aşama (1-T)=0,80, P_2=0,60		
Kişiler	Gerçek Yanıtlar (Y)		1.Aşamada Seçilen Karttaki İfade*	2.Aşamada Seçilen Karttaki İfade*	Seçilen Karttaki Sayılar (W)	Verilen Yanıtlar $Z_i = T\left[P_1(Y_i + b_1 W_i) + (1-P_1)(Y_i - a_1 W_i)\right] + (1-T)\left[P_2(Y_i + b_2 W_i) + (1-P_2)(Y_i - a_2 W_i)\right]$
1	5	R_1	1	-	0	5+0,8*0=5
2	0	R_1	2	-	1	0-0,8*1=-0,8
3	7	R_2	-	1	2	7+0,3*2=7,6
4	6	R_2	-	1	0	6+0,3*0=6
5	3	R_2	-	2	1	3-0,45*1=2,55
Ortalama	4,2					4,07
Varyans	7,7					10,77

*1: Y_i+ 0,8*W_i sonucunu yazınız", 2: "Y_i-0,8*W_i sonucunu yazınız"
**1: "Y_i+0,30*W_i sonucunu yazınız", 2: "Y_i-0,45*W_i sonucunu yazınız"

Yapılan çalışma sonucu "Haftada ne kadar alkol tüketiyorsunuz?" sorusuna ilişkin verilen yanıtların ortalaması $\bar{z} = (2{,}2 + \ldots + 0{,}3)/5 = 4{,}64$ 'tür.

n=5 kişilik görüşme sonucunda bir haftada tüketilen ortalama alkol miktarı Eşitlik (2.51)'den

$$\hat{\mu}_{HS2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i = \bar{z} = 4{,}07$$

olarak tahmin edilir.

Bir haftada tüketilen ortalama alkol miktarı için varyans

$$\hat{Var}(\hat{\mu}_{HS2}) = \frac{1}{n}\hat{Var}(Z) = \frac{1}{n}\hat{\sigma}_z^2 = \frac{10{,}77}{5} = 2{,}15$$

olarak tahmin edilmiştir.

2.3. Ortalama Tahmini için Çarpımsal Rastgeleleştirilmiş Yanıt Modelleri

Ortalama tahmini için kullanılan çarpımsal RYM'de hassas bir değişkenin ortalaması tahmin edilmek istenmektedir. Çarpımsal modelde, cevaplayıcılardan yanıtlarını rastgele düzenden yararlanarak cevaplamaları istenir. Bu rastgele düzen bilinen bir dağılımdan türetilen sayıların yazıldığı deste kartlarından oluşsun. Cevaplayıcıdan bu kartlardan birisini rastgele olarak seçmesi ve kartta yazan değerle gerçek cevabını çarparak soruyu yanıtlaması istenir.

2.3.1. Eichhorn ve Hayre [10] Rastgeleleştirilmiş Yanıt Modeli

Eichhorn ve Hayre [10], ortalama tahmini için tam çarpımsal RYM'yi önermiştir. Tam çarpımsal RYM'de tüm cevaplayıcıların rastgele düzeni kullanarak soruları cevaplaması beklenir. Bu model matematiksel olarak,

$$Z = \frac{YW}{\theta} \tag{2.53}$$

olarak tanımlanır.

Burada Z, cevaplayıcının görüşmeciye verdiği yanıt ve Y, ilgilenilen hassas değişken olsun. Y tahmin edilmek istenen değişken olduğu için ortalaması (μ_y) ve varyansı(σ_y^2) bilinmeyen bir değişkendir. W ise rastgele düzende bilinen bir dağılımdan türetilen rastgele değişken olsun. W değişkeninin dağılımı bilindiği için ortalaması (E(W)= $\mu_w = \theta$) ve varyansı (σ_w^2) bilinmektedir.

Buradan cevaplayıcının görüşmeciye verdiği yanıtların kitle ortalaması,

$$E(Z) = \overline{Z} = \frac{E(Y)E(W)}{\theta} = \mu_y \qquad (2.54)$$

olarak yazılır.

Cevaplayıcının görüşmeciye verdiği yanıtların örneklem ortalaması ise,

$$\bar{z} = \hat{\mu}_y \qquad (2.55)$$

olarak yazılır.

Eşitlik (2.55)'ten Y değişkeni için $\hat{\mu}_{EH}$ tahmin edicisi

$$\hat{\mu}_{EH} = \bar{z} \qquad (2.56)$$

olarak elde edilir. Burada , $\bar{z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i$ 'dir.

Bu tahmin edicinin varyansı,

$$\begin{aligned}
Var(\hat{\mu}_{EH}) &= \frac{1}{n} Var(Z) \\
&= \frac{1}{n}\left\{E(Z^2) - [E(Z)]^2\right\} \\
&= \frac{1}{n}\left\{\frac{E(Y^2)E(W^2)}{\theta^2} - [E(Z)]^2\right\} \\
&= \frac{1}{n}\left\{\frac{(\sigma_y^2 + \mu_y^2)(\sigma_w^2 + \theta^2)}{\theta^2} - \mu_y^2\right\} \\
&= \frac{1}{n}\left\{\frac{\sigma_y^2 + \sigma_w^2(\sigma_y^2 + \mu_w^2)}{\theta^2}\right\} \\
&= \frac{1}{n}\left[\sigma_y^2 + \frac{\sigma_w^2}{\theta^2}(\sigma_y^2 + \mu_w^2)\right] \qquad (2.57)
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Eichhorn ve Hayre [10] RYM'yi bir sayısal örnekle açıklayalım.

Bu modelde de kişilere "haftada ne kadar(kaç şişe) alkol tüketiyorsunuz?" sorusu sorulsun. Rastgele düzendeki sayılar Bölüm 2.2.1' de verildiği gibi olsun. Dolayısıyla rastgele değişken için ortalama $\mu_w = \theta = 7$ ve varyansı $\sigma_w^2 = 1{,}42$ 'dir.

5 kişilik bir görüşme sonrası sonuçlar Çizelge 2.12'de verilmiştir.

Çizelge 2.12. Eichhorn ve Hayre [10] rastgeleleştirilmiş yanıt modeli için sayısal örnek

	Gerçek Yanıtlar (Y)	Seçilen Karttaki sayılar (W)	Verilen Yanıtlar $Z = Y * W / \theta$
	5	9	9*5/7=6,43
	0	7	0*7/7=0
	7	5	7*5/7=5
	6	5	6*5/7=4,29
	3	6	3*6/7=2,57
Ortalama	4,2		3,66
Varyans	7,7		6,11

Yapılan çalışma sonucu "Haftada ne kadar alkol tüketiyorsunuz?" sorusuna ilişkin verilen yanıtların ortalaması $\bar{z} = (6{,}43 + ... + 2{,}57)/5 = 3{,}66$ 'dır.

n=5 kişilik görüşme sonucunda haftada tüketilen ortalama alkol miktarı Eşitlik (2.56)'dan,

$$\hat{\mu}_{EH} = \bar{z} = 3{,}66$$

olarak tahmin edilir.

Haftada tüketilen ortalama alkol miktarı için varyans Eşitlik (2.57)'den

$$V\hat{a}r(\hat{\mu}_{EH}) = \frac{\hat{\sigma}_z^2}{n} = \frac{6{,}11}{5} = 1{,}22$$

olarak tahmin edilmiştir.

2.3.2. Bar-Lev v.d. [1] Rastgeleleştirilmiş Yanıt Modeli

Bar-Lev v.d. [1] rastgeleleştirilmiş yanıt modelinde İki aşamalı toplamsal RYM'ye benzer bir süreç işlemektedir. İlk aşamada T oranına sahip cevaplayıcılardan doğrudan gerçek yanıtlar alınırken, ikinci aşamada geriye kalan (1-T) oranlık cevaplayıcıya rastgele düzen uygulanır. Cevaplayıcılara gerçek cevapları ile seçtikleri karttaki sayıyı çarpıp θ ile bölmeleri istenir. O halde bu model şu şekilde tanımlanabilir:

$$Z = \begin{cases} Y & T \\ \dfrac{YW}{\theta} & 1-T \end{cases} \tag{2.58}$$

Burada Z cevaplayıcılardan alınan yanıt, Y ortalaması ve varyansı bilinmeyen ilgilenilen değişken ve W ortalaması ve varyansı bilinen rastgele düzende türetilen değişkendir.

Buradan cevaplayıcının görüşmeciye verdiği yanıtların kitle ortalaması,

$$\begin{aligned} E(Z) &= (T)E(Y) + (1-T)\frac{E(Y)E(W)}{\theta} \\ \bar{Z} &= T\mu_y + (1-T)\mu_y \\ \bar{Z} &= \mu_y \end{aligned} \tag{2.59}$$

olarak yazılır.

Cevaplayıcının görüşmeciye verdiği yanıtların örneklem ortalaması ise,

$$\bar{z} = \hat{\mu}_y \tag{2.60}$$

olarak yazılır.

Eşitlik (2.60)'dan Y değişkeni için Bar-Lev v.d. [1] tahmin edicisi ise

$$\hat{\mu}_B = \bar{z} \tag{2.61}$$

olarak elde edilir.

için Bar-Lev v.d. [1] tahmin edicisinin varyansı,

$$\mathrm{Var}(\hat{\mu}_B) = \mathrm{Var}(\bar{z}) = \frac{1}{n}\mathrm{Var}(Z) \tag{2.62}$$

şeklindedir.

Burada Z’nin varyansı,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(Z) &= E\left(Z^2\right) - \left[E(Z)\right]^2 \\
&= \left[(T)E(Y^2) + (1-T)\frac{E(Y^2)E(W^2)}{\theta^2}\right] - \mu_y^2 \\
&= (T)\left(\sigma_x^2 + \mu_x^2\right) + (1-T)\frac{\left(\sigma_y^2 + \mu_y^2\right)\left(\sigma_w^2 + \theta^2\right)}{\theta^2} - \mu_y^2 \\
&= \sigma_y^2 + (1-T)\frac{\sigma_w^2}{\theta^2}\left(\sigma_y^2 + \mu_y^2\right)
\end{aligned}
\qquad (2.63)
$$

biçimindedir.

Eşitlik(2.63)’ten, Bar-Lev v.d. [1] tahmin edicinin varyansı,

$$
\mathrm{Var}\left(\hat{\mu}_B\right) = \frac{1}{n}\left[\sigma_y^2 + (1-T)\frac{\sigma_w^2}{\theta^2}\left(\sigma_y^2 + \mu_y^2\right)\right] \qquad (2.64)
$$

olarak bulunur. Bu durumda eğer T>0 ise, iki aşamalı RYM tam çarpımsal RYM’den daha duyarlı olacaktır. Bu koşul her zaman sağlandığı için iki aşamalı RYM tam RYM’den her koşulda daha etkindir.

Bar-Lev v.d. [1] RYM’yi bir sayısal örnekle açıklayalım.

İki aşamalı bu modelde kişilere “haftada ne kadar(kaç şişe) alkol tüketiyorsunuz?” sorusu sorulsun. İlk aşamada cevaplayıcıların %20’sine bu soruya doğrudan yanıt vermeleri istensin (Burada T=0,20’dir).Geriye kalan cevaplayıcılar (1-T=0,80) ikinci aşamaya yönlendirilsinler. İkinci aşamadaki rastgele düzendeki sayılar Bölüm 2.2.1’ de verildiği gibi olsun.

Dolayısıyla rastgele değişken için ortalama $\mu_w = 7$ ve varyansı $\sigma_w^2 = 1{,}42$ ’dir.

5 kişilik bir görüşme sonrası sonuçlar Çizelge 2.13’te verilmiştir.

Çizelge 2.13. Bar-Lev v.d. [1] rastgeleleştirilmiş yanıt modeli için sayısal örnek

		(T=0,20)	(1-T=0,80)	
	Gerçek Yanıtlar (Y)	1.Aşama	2.Aşama (Seçilen Karttaki sayılar (W))	Verilen Yanıtlar $Z_i = TY_i + (1-T) * Y_i W_i / \theta$
	5	2.Aşamaya geç	9	9*5/7=6,43
	0	2.Aşamaya geç	7	0*7/7=0
	7	2.Aşamaya geç	5	7*5/7=5
	6	Doğrudan Yanıt	-	6
	3	2.Aşamaya geç	6	3*6/7=2,57
Ortalama	4,2			4
Varyans	7,7			7,23

Yapılan çalışma sonucu “Haftada ne kadar alkol tüketiyorsunuz?” sorusuna ilişkin verilen yanıtların ortalaması $\bar{z} = (6{,}43 + ... + 2{,}57)/5 = 4$’dır.

n=5 kişilik görüşme sonucunda bir haftada tüketilen ortalama alkol miktarı Eşitlik (2.61)’den,

$$\hat{\mu}_B = \bar{z} = 4$$

olarak tahmin edilir.

Bir haftada tüketilen ortalama alkol miktarı için varyans Eşitlik (2.62)’den,

$$\hat{Var}(\hat{\mu}_B) = \frac{1}{n}\hat{Var}(\bar{z}) = \frac{1}{n}\hat{\sigma}_z^2 = \frac{7{,}23}{5} = 1{,}45$$

olarak tahmin edilmiştir.

2.3.3. Ryu v.d. [28] Rastgeleleştirilmiş Yanıt Modeli

Ryu v.d. [28], Mangat ve Singh [25] modelinden yararlanarak yeni bir model önermişlerdir. Öncelikle n cevaplayıcıdan oluşan örneklem yerine konularak basit rastgele örnekleme ile seçilir. Modelin ilk aşamasında T oranında cevaplayıcıdan sorulan hassas soruya doğrudan gerçek yanıt alınır, geriye kalan (1-T) oranındaki cevaplayıcılar ikinci aşamaya yönlendirilir. İkinci aşamada yine iki farklı durum vardır. P oranındaki cevaplayıcı sorulan hassas soruya doğrudan gerçek yanıtı verecektir. Geriye kalan (1-P) oranındaki cevaplayıcılar ise araştırmacı tarafından hazırlanan rastgele düzeni kullanacaktır. Bu rastgele düzende, cevaplayıcılar gerçek cevapları ile seçtikleri karttaki sayıyı çarpıp son yanıtı verirler (YW).

i.cevaplayıcı için yanıt değişkeninin matematiksel ifadesi:

$$Z_i = TY_i + (1-T)\left[PY_i + (1-P)Y_iW_i\right] \tag{2.65}$$

olarak verilir.

Burada Y_i ortalaması μ_y ve varyansı σ_y^2 olan hassas değişken, W_i değişkeni ortalaması $\mu_w = 1$ ve varyansı σ_w^2 olan rastgele değişkendir. Eğer i'inci cevaplayıcı 1. aşamada 1. ifadeyi seçtiyse $T = 1$, ikinci ifadeyi seçtiyse $T = 0$'dır. Aynı şekilde, eğer i'inci cevaplayıcı 2. aşamada 1.ifadeyi seçtiyse $P = 1$, ikinci ifadeyi seçtiyse $P = 0$ 'dır.

Ryu v.d. [28]'in önerdiği tahmin edici,

$$\hat{\mu}_R = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i \tag{2.66}$$

şeklindedir.

$\hat{\mu}_R$ tahmin edicisinin beklenen değeri,

$$E(\hat{\mu}_R) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(Z_i)$$

şeklindedir. Burada Z_i'nin beklenen değeri,

$$\begin{aligned} E(Z_i) &= E\left[TY_i + (1-T)\{PY_i + (1-P)Y_iW_i\}\right] \\ &= TE(Y_i) + (1-T)\left[PE(Y_i) + (1-P)E(Y_iW_i)\right] \\ &= T\mu_y + (1-T)\left[P\mu_y + (1-P)\mu_y\mu_w\right] \\ &= \mu_y \end{aligned}$$

olarak bulunur. Ryu v.d. [21] tahmin edicisinin beklenen değeri,

$$E(\hat{\mu}_R) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_y = \mu_y \tag{2.67}$$

olarak elde edilir.

$\hat{\mu}_R$ tahmin edicisinin varyansı,

$$Var(\hat{\mu}_R) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(Z_i) \tag{2.68}$$

şeklindedir.

Burada Z_i'nin varyansı,

$$Var(Z_i) = E(Z_i^2) - [E(Z_i)]^2$$

$$= E\left[TY_i + (1-T)\{PY_i + (1-P)Y_iW_i\}\right]^2 - \mu_y^2 \tag{2.69}$$

olarak bulunur.

Eşitlik (2.69), Eşitlik (2.68)'de yerine konulursa Ryu v.d. [28] tahmin edicisinin varyansı,

$$\begin{aligned} Var(\hat{\mu}_R) &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(Z_i) \\ &= \frac{1}{n}\left[\sigma_y^2 + (\mu_y^2 + \sigma_y^2)(1-T)(1-P)\sigma_w^2\right] \end{aligned} \tag{2.70}$$

olarak elde edilir.

Ryu v.d. [21] RYM'yi bir sayısal örnekle açıklayalım.

Bu modelde de kişilere "haftada ne kadar(kaç şişe) alkol tüketiyorsunuz?" sorusu sorulsun. İlk aşamada cevaplayıcıların %20'sine bu soruya doğrudan yanıt vermeleri istensin (Burada T=0,20'dir). Geriye kalan cevaplayıcılar (1-T=0,80) ikinci aşamaya yönlendirilsinler. İkinci aşamada uygulanacak olan düzen için P=0,50 olsun. İkinci aşamadaki cevaplayıcıların %50'si yine doğrudan yanıt verirken, geriye kalan seçtikleri %50'si ise seçtikleri karttaki değeri gerçek cevapları ile çarpıp yanıtlarını verirler.

İkinci aşamadaki rastgele düzendeki sayılar Bölüm 2.2.4' te verildiği gibi olsun.

5 kişilik bir görüşme sonrası sonuçlar Çizelge 2.14'te verilmiştir.

Çizelge 2.14. Ryu v.d. [21] rastgeleleştirilmiş yanıt modeli I için sayısal örnek

		1.Aşama (T=0,20)	2.Aşama (1-T)=0,80, P=0,50		
Kişiler	Gerçek Yanıtlar (Y)	1.Aşamadaki İfadeler	Seçilen Karttaki İfade*	Seçilen Karttaki Sayılar (W)	Verilen Yanıtlar $Z_i = TY_i + (1-T)[PY_i + (1-P)Y_iW_i]$
1	5	2.Aşamaya geç	1	-	5
2	0	2.Aşamaya geç	1	-	0
3	7	2.Aşamaya geç	2	2	7*2=14
4	6	Doğrudan Yanıt	-	-	6
5	3	2.Aşamaya geç	2	1	3*1=3
Ortalama	4,2				5,6
Varyans	7,7				27,3

*1: "Haftada ne kadar alkol tüketiyorsunuz?", 2: "Seçtiğiniz karttaki değeri haftada tükettiğiniz alkol miktarı ile çarpıp yanıtınızı veriniz"

Yapılan çalışma sonucu "Haftada ne kadar alkol tüketiyorsunuz?" sorusuna ilişkin verilen yanıtların ortalaması $\bar{z} = (5 + \ldots + 3)/5 = 5{,}6$'dır.

n=5 kişilik görüşme sonucunda bir haftada tüketilen ortalama alkol miktarı Eşitlik (2.66)'dan

$$\hat{\mu}_R = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i = \bar{z} = 5{,}6$$

olarak tahmin edilir.

Bir haftada tüketilen ortalama alkol miktarı için varyans

$$\hat{\mathrm{Var}}(\hat{\mu}_R) = \frac{1}{n}\hat{\mathrm{Var}}(z) = \frac{1}{n}\hat{\sigma}_z^2 = \frac{27{,}3}{5} = 5{,}46$$

olarak tahmin edilmiştir.

2.4. Seçimli Rastgeleleştirilmiş Yanıt Modelleri

Seçimli RYM'nin, bundan önceki anlatılan modellerden farkı bu modelde, seçimin cevaplayıcının kendisine bırakılmasıdır. Cevaplayıcı isteğine göre ya doğrudan cevap yöntemini kullanır ya da rastgele düzeni kullanır. Eğer soru cevaplayıcı için "çok hassas" bir soru değilse cevaplayıcıdan soruya doğrudan cevap vermesi istenir. Eğer soru cevaplayıcı için "çok hassas" bir soru ise cevaplayıcının rastgele düzeni kullanması sağlanır.

Daha önceki çalışmalarda doğrudan cevap vereceklerin oranı önceden belirlendiği için cevaplayıcıya hiçbir seçim hakkı tanınmıyordu. Seçimli RYM bu yüzden cevaplayıcıya daha fazla güven veren bir modeldir. Cevaplayıcıların kendini daha fazla güvende hissetmesi doğru cevaplama oranını da artıracaktır.

Seçimli RYM'ler tek aşamalı ve iki aşamalı olmak üzere çarpımsal ve toplamsal alt başlıkları altında incelenir. Tek aşamalı modellerde tüm cevaplayıcılara seçme hakkı tanınır. İki aşamalı modellerin ilk aşamasında cevaplayıcıların bir kısmından doğrudan yanıt alınırken ikinci aşamada seçimli model uygulanır.

2.4.1. Gupta v.d. [16] Rastgeleleştirilmiş Yanıt Modeli

Gupta v.d. [16] tarafından tek aşamalı çarpımsal seçimli RYM önerilmiştir. Bu modelde tüm cevaplayıcılara seçme hakkı tanınır. Modelde cevaplayıcılara 2 seçenek sunulur. Eğer soru cevaplayıcı için "çok hassas" bir soru değilse cevaplayıcıdan soruya doğrudan cevap vermesi istenir. Eğer soru cevaplayıcı için "çok hassas" bir soru ise cevaplayıcının rastgele düzeni kullanması sağlanır. Cevaplayıcı rastgele düzeni kullanacaksa açıklamak istemediği kendi cevabıyla rastgele düzende seçtiği cevabı çarparak son yanıtı verir. Bu modelde rastgele düzeni kullananların oranı hassaslık oranı (sensitivity level) olarak adlandırılır. Hassaslık oranı H ile gösterilir ve $0 \leq H \leq 1$ arasında değer alır. Hassaslık oranı bu modelde bir rastlantı değişkenidir. Dolayısıyla modelde tahmin edilmesi gereken iki parametre vardır. Birisi hassas sorunun ortalaması (μ_y) diğeri ise hassaslık oranıdır (H).

Model için hassaslık oranı şu şekilde tanımlanır:

$$C=\begin{cases}1 & \text{Rastgele düzen kullanılırsa}\\ 0 & \text{Rastgele düzen kullanılmazsa}\end{cases}$$

Burada $C \cong$ Bernoulli (H) dağılımlıdır.

O halde C rastlantı değişkeninin beklenen değeri,

$$E(C)=H \tag{2.71}$$

şeklindedir.

Seçimli RYM matematiksel olarak ifadesi Y doğrudan söylenen yanıt değişkeni, W ise ortalaması $\left(E(W)=\mu_w=1\right)$ ve varyansı $\left(\sigma_w^2\right)$ bilinen rastgele değişken olmak üzere yanıt değişkeni

$$Z=W^C Y \tag{2.72}$$

şeklinde yazılır.

Buradan hassas değişken için Gupta v.d. [16]'in önerdiği ortalama tahmin edicisi,

$$\hat{\mu}_{GY}=\bar{z} \tag{2.73}$$

olarak verilir. Burada, $\bar{z}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i$ 'dir.

$\hat{\mu}_{GY}$ tahmin edicisinin beklenen değeri,

$$\begin{aligned}E(\hat{\mu}_{GY}) &= E(\bar{z})=E(W^C Y)\\ &= E\left[W^C Y/C=1\right]P(C=1)+E\left[W^C Y/C=0\right]P(C=0)\\ &= E(W)E(Y)P(C=1)+E(Y)P(C=0)\\ &= \mu_y H+\mu_y(1-H)\\ &= \mu_y\end{aligned} \tag{2.74}$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla $\hat{\mu}_{GY}$ tahmin edicisi yansızdır.

$\hat{\mu}_{GY}$ tahmin edicisinin varyansı,

$$Var(\hat{\mu}_{GY})=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(Z_i) \tag{2.75}$$

olmaktadır.

Burada,

$$\mathrm{Var}(Z_i) = E(Z_i^2) - [E(Z_i)]^2$$

$$= [E(W^{2C}Y^2)H + E(W^{2C}Y^2)(1-H)] - \mu_y^2$$

$$= [E(W^2)E(Y^2)H + E(Y^2)(1-H)] - \mu_y^2$$

$$= (1+\sigma_w^2)(\mu_y^2+\sigma_y^2)H + (\mu_y^2+\sigma_y^2)(1-H) - \mu_y^2$$

$$= \sigma_y^2 + H\sigma_w^2(\mu_y^2+\sigma_y^2) \qquad (2.76)$$

biçiminde elde edilir. Eşitlik (2.76), Eşitlik (2.75)'te yerine konulursa Gupta v.d. [16] tahmin edicisinin varyansı,

$$\mathrm{Var}(\hat{\mu}_{GY}) = \frac{1}{n}\left[\sigma_y^2 + H\sigma_w^2(\mu_y^2+\sigma_y^2)\right] \qquad (2.77)$$

olarak elde edilir.

H hassaslık oranı arttıkça $\mathrm{Var}(\hat{\mu}_{GY})$ artacaktır. Bu da rastgele düzeni kullananların oranı arttıkça (ki bu da hassas soruyu doğrudan cevaplayanların oranının düşük olması demektir) varyansta artış olacağını gösterir. Dolayısıyla tahmin edicinin etkinliğinin azalmasına yol açmaktadır.

Hassas soru için ortalama tahmininden sonra modeldeki diğer parametre olan hassaslık oranı H tahmin edilmelidir.

Hassaslık Oranı H'nin Tahmin Edilmesi:

Tek aşamalı seçimli RYM:

$$Z = W^C Y \qquad (2.78)$$

şeklindedir. Eşitlik (2.78)'in ln fonksiyonu yazılıp beklenen değeri alınırsa, H parametresi

$$\ln(Z) = C\ln(W) + \ln(Y)$$

$$E[\ln(Z)] = E(C)E[\ln(W)] + E[\ln(Y)]$$

$$E[\ln(Z)] \cong HE[\ln(W)] + \ln[E(Y)]$$

$$H \cong \frac{E[\ln(Z)] - \ln(\mu_y)}{E[\ln(W)]} \qquad (2.79)$$

olarak elde edilir. Buradan H parametresinin tahmini,

$$H \cong \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(Z_i) - \ln\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\right\}}{E[\ln(W)]} \tag{2.80}$$

olarak verilir. W rastgele düzen değişkeni olduğu için $E[\ln(W)]$ değeri bilinmektedir.

Gupta v.d. [16] RYM'yi bir sayısal örnekle açıklayalım. Bu örnek için Bölüm 2.3.1'de verilen sayısal örnek kullanılsın.

Bu modelde kişilere "haftada ne kadar (kaç şişe) alkol tüketiyorsunuz?" sorusu sorulsun. Cevaplayıcılara bu soruya doğrudan yanıt vermek isteyip istemedikleri sorulsun. Cevaplayıcıların %20'si bu soruya doğrudan yanıt vermek istesin. Cevaplayıcıların %80'i rastgele düzeni kullanmak istesin. Dolayısıyla bu soru için hassaslık oranı H=0,80'dir. Rastgele düzende türetilen sayılar Bölüm 2.3.1'de verildiği gibi olsun.

Dolayısıyla rastgele değişken için ortalama $\mu_w = 7$ ve varyansı $\sigma_w^2 = 1{,}42$'dir.

5 kişilik bir görüşme sonrası sonuçlar Çizelge 2.15'te verilmiştir.

Çizelge 2.15. Gupta v.d. [16] rastgeleleştirilmiş yanıt modeli için sayısal örnek

			(1-H=0,20)	(H=0,80)	
	Gerçek Yanıtlar (Y)	C	Seçilen Karttaki İfade*	(Seçilen Karttaki sayılar (W))	Verilen Yanıtlar $Z = W^C Y$
	5	1	2	9	9*5=45
	0	1	2	7	0*7=0
	7	1	2	5	7*5=35
	6	0	1	-	6
	3	1	2	6	3*6=18
Ortalama	4,2				20,8
Varyans	7,7				361,7

*1: "Haftada ne kadar(kaç şişe) alkol tüketiyorsunuz?", 2: "Seçtiğiniz karttaki sayı ile haftada içtiğiniz alkol miktarını çarpıp yanıtınızı veriniz"

Yapılan çalışma sonucu "Haftada ne kadar alkol tüketiyorsunuz?" sorusuna ilişkin verilen yanıtların ortalaması $\bar{z} = (45 + ... + 18)/5 = 20{,}8$'dir.

n=5 kişilik görüşme sonucunda bir haftada tüketilen ortalama alkol miktarı Eşitlik (2.73)'ten,

$$\hat{\mu}_{GY} = \bar{z} = 20{,}8$$

olarak tahmin edilir.

Bir haftada tüketilen ortalama alkol miktarı için varyans Eşitlik (2.62)'den,

$$\hat{Var}(\hat{\mu}_{GY}) = \frac{1}{n}\hat{Var}(z) = \frac{1}{n}\hat{\sigma}_z^2 = \frac{361{,}7}{5} = 72{,}34$$

olarak tahmin edilmiştir.

2.4.2. Gupta ve Shabbir [17] Rastgeleleştirilmiş Yanıt Modeli

Gupta ve Shabbir [17], Gupta v.d. [16]'nın önerdiği tek aşamalı seçimli modelini iki bağımsız örneklem kullanarak yeni bir model geliştirmişlerdir. Modellerinde Greenberg v.d. [13]'ün ilgisiz soru (unrelated question) modelini kullanmışlardır.

Bu modelde farklı olarak n_1 ve n_2 büyüklüğünde iki bağımsız örneklem kullanılır. Her iki örneklemde R_1 ve R_2 olmak üzere iki farklı rastgele düzen kullanılır. Bu iki rastgele düzende ortalaması θ_i (i=1, 2) ve varyansı σ_{wi}^2 (i=1, 2) olan iki farklı dağılım kullanılır.

Tek örneklemin kullanıldığı modellerde, eğer soru cevaplayıcı için "çok hassas" bir soru değilse cevaplayıcıdan soruya doğrudan cevap vermesi istenir. Eğer soru cevaplayıcı için "çok hassas" bir soru ise cevaplayıcının rastgele düzeni kullanması sağlanır. Cevaplayıcı rastgele düzeni kullanacaksa açıklamak istemediği kendi cevabıyla rastgele düzende seçtiği cevabı çarparak son yanıtı verir. Bu model için aynı işlemler her bir örneklem için gerçekleştirilir.

i.örneklem (Z_i=1, 2) için yanıt değişkeni:

$$Z_i = \begin{cases} Y, & \text{(1-H) olasılığı ile} \\ W_i Y, & \text{H olasılığı ile} \end{cases}$$

olarak gösterilir. Yanıt değişkeni matematiksel olarak şu şekilde ifade edilebilir:

$$Z_i = (1-H)Y + HW_iY \quad (2.81)$$

Burada Y ortalaması μ_y ve varyansı σ_y^2 olan hassas değişken, H hassaslık oranı ve Wi, ortalaması θ_i (i=1, 2) ve varyansı σ_{wi}^2 (i=1, 2) bilinen rastgele değişkendir.

Her bir örneklem için yanıt değişkeninin beklenen değeri,

$$\begin{aligned} E(Z_i) &= (1-H)E(Y) + HE(W_iY) \\ &= (1-H)\mu_y + H\theta_i\mu_y \\ &= \mu_y\left[1+H(\theta_i-1)\right] \qquad i=1,2 \end{aligned} \quad (2.82)$$

olarak bulunur. Buradan her örneklem için denklemler eşanlı olarak çözümlenirse,

$$\begin{aligned} E(Z_1) &= \bar{Z}_1 = \mu_y\left[1+H(\theta_1-1)\right] \Rightarrow H = \frac{\bar{Z}_1-\mu_y}{\mu_y(\theta_1-1)} \\ E(Z_2) &= \bar{Z}_2 = \mu_y\left[1+H(\theta_2-1)\right] \Rightarrow H = \frac{\bar{Z}_2-\mu_y}{\mu_y(\theta_2-1)} \end{aligned} \quad (2.83)$$

denklemleri elde edilir.

Eşitlik (2.83)'teki denklemler birbirine eşitlenip μ_y ifadesi çekilirse, Gupta ve Shabbir [17] tahmin edicisi,

$$\hat{\mu}_{GS1} = \frac{\bar{z}_1(\theta_2-1) - \bar{z}_2(\theta_1-1)}{\theta_2-\theta_1}, \qquad \theta_1 \neq \theta_2$$

(2.84)

olarak elde edilir. Burada $\bar{z}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} Z_i}{n_1}$ ve $\bar{z}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_2} Z_i}{n_2}$ birinci ve ikinci örneklem için yanıt değişkeni ortalamalarıdır.

Gupta ve Shabbir [17] tahmin edicisinin beklenen değeri,

$$
\begin{aligned}
E\left(\hat{\mu}_{GS1}\right) &= \frac{E\left(\bar{z}_1\right)\left(\theta_2-1\right)-E\left(\bar{z}_2\right)\left(\theta_1-1\right)}{\theta_2-\theta_1} \\
&= \frac{\mu_y\theta_2-\mu_y-\mu_y\theta_1+\mu_y}{\theta_2-\theta_1} \\
&= \mu_y
\end{aligned}
\tag{2.85}
$$

şeklindedir. Dolayısıyla Gupta ve Shabbir [17] tahmin edicisi yansızdır.

Gupta ve Shabbir [17] tahmin edicisinin varyansı,

$$
\begin{aligned}
Var\left(\hat{\mu}_{GS1}\right) &= \frac{1}{\left(\theta_2-\theta_1\right)^2}\left[\left(\theta_2-1\right)^2 Var\left(\bar{z}_1\right)+\left(\theta_1-1\right)^2 Var\left(\bar{z}_2\right)\right] \\
&= \frac{1}{\left(\theta_2-\theta_1\right)^2}\left[\left(\theta_2-1\right)^2\left(\frac{\sigma_{z1}^2}{n_1}\right)+\left(\theta_1-1\right)^2\left(\frac{\sigma_{z2}^2}{n_2}\right)\right]
\end{aligned}
\tag{2.86}
$$

olarak elde edilir.

Burada, σ_{zi}^2 şu şekilde elde edilir:

$$
\begin{aligned}
Var\left(\bar{z}_i\right) &= \frac{1}{n_i} Var\left(z_i\right) \\
Var\left(z_i\right) &= \sigma_{Zi}^2 = E\left(z_i^2\right)-\left[E\left(z_i\right)\right]^2 \\
&= \left[(1-H)E\left(Y^2\right)+HE\left(W_i^2\right)E\left(Y^2\right)\right]-\mu_y^2\left[1+H\left(\theta_i-1\right)\right]^2 \\
&= \left[(1-H)\left(\sigma_y^2+\mu_y^2\right)+HE\left(\theta_i^2+\sigma_{wi}^2\right)\left(\sigma_y^2+\mu_y^2\right)\right]-\mu_y^2\left[1+H\left(\theta_i-1\right)\right]^2 \\
&= \left(\sigma_y^2+\mu_y^2\right)\left[1-H+HE\left(\theta_i^2+\sigma_{wi}^2\right)\right]-\mu_y^2\left[1+H\left(\theta_i-1\right)\right]^2 \qquad i=1,2
\end{aligned}
\tag{2.87}
$$

Hassas soru için ortalama tahmininden sonra modeldeki diğer parametre olan hassaslık oranı H tahmin edilmelidir.

Hassaslık Oranı H'nin Tahmin Edilmesi:

Yanıt değişkeni Z_i için beklenen değer:

$$\begin{aligned} E(Z_i) &= \bar{Z}_i \\ &= \mu_y\left[1+H(\theta_i-1)\right] \qquad i=1,2 \end{aligned} \tag{2.88}$$

Buradan her örneklem için denklemler,

$$\begin{aligned} \bar{Z}_1 &= \mu_y\left[1+H(\theta_1-1)\right] \Rightarrow \mu_y = \frac{\bar{Z}_1}{1+H(\theta_1-1)} \\ \bar{Z}_2 &= \mu_y\left[1+H(\theta_2-1)\right] \Rightarrow \mu_y = \frac{\bar{Z}_2}{1+H(\theta_2-1)} \end{aligned} \tag{2.89}$$

şeklinde elde edilir.

Eşitlik (2.89)'daki denklemler birbirine eşitlenip H ifadesi çekilirse, H için tahmin edici,

$$\hat{H} = \frac{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}{\bar{z}_1(\theta_2-1) + \bar{z}_2(1-\theta_1)} \tag{2.90}$$

olarak elde edilir.

$\hat{H}$ tahmin edicisi doğrusal olmadığı için varyansı Taylor serisi yöntemiyle ya da fark yöntemi ile bulunur.

$\hat{H}$ tahmin edicisinin varyansı,

$$\begin{aligned} Var(\hat{H}) &\cong \frac{1}{(\theta_2-\theta_1)^2\mu_y^2}\left[\{1+H(\theta_2-1)\}^2 Var(\bar{z}_1) + \{1+H(\theta_1-1)\}^2 Var(\bar{z}_2)\right] \\ &\cong \frac{1}{(\theta_2-\theta_1)^2\mu_y^2}\left[\{1+H(\theta_2-1)\}^2\left(\frac{\sigma_{z1}^2}{n_1}\right) + \{1+H(\theta_1-1)\}^2\left(\frac{\sigma_{z2}^2}{n_2}\right)\right] \end{aligned} \tag{2.91}$$

olarak elde edilir.

Gupta ve Shabbir [17] RYM'yi bir sayısal örnekle açıklayalım. Bu örnek için Bölüm 2.3.1'de verilen sayısal örnek kullanılsın.

Bu modelde kişilere "haftada ne kadar(kaç şişe) alkol tüketiyorsunuz?" sorusu sorulsun. $n_1 = n_2 = 5$'er kişilik iki örneklem seçilsin. Cevaplayıcılara bu soruya doğrudan yanıt vermek isteyip istemedikleri sorulsun. Birinci örneklemde cevaplayıcıların %20'si bu soruya doğrudan yanıt vermek istesin. Cevaplayıcıların %80'i rastgele düzeni kullanmak istesin. Dolayısıyla birinci örneklemde hassaslık oranı 0,80'dir. İkinci örneklemde cevaplayıcıların %80'i bu soruya doğrudan yanıt vermek istesin. Cevaplayıcıların %20'si rastgele düzeni kullanmak istesin. Dolayısıyla ikinci örneklemde hassaslık oranı 0,20'dir.

Birinci örneklem için kullanılacak olan rastgele düzende türetilen sayılar Bölüm 2.3.1'de verildiği gibi olsun. İkinci örneklem için kullanılacak olan rastgele düzende türetilen sayılar Bölüm 2.2.4'te verildiği gibi olsun. Dolayısıyla birinci örneklem için türetilen rastgele değişkenin ortalaması $\theta_1 = 7$ ve ikinci örneklem için türetilen rastgele değişkenin ortalaması $\theta_2 = 1$'dir.

n=10 kişilik bir görüşme sonrası sonuçlar Çizelge 2.16'da verilmiştir.

Çizelge 2.16. Gupta ve Shabbir [17] rastgeleleştirilmiş yanıt modeli için sayısal örnek

Örneklem	Kişiler	Gerçek Yanıtlar (Y)	C	Seçilen Karttaki İfade*	(Seçilen Karttaki sayılar (W))	Verilen Yanıtlar $Z_i = (1-H)Y + HW_iY$
1.Örneklem	1	5	1	2	9	9*5=45
1.Örneklem	2	0	1	2	7	0*7=0
1.Örneklem	3	7	1	2	5	7*5=35
1.Örneklem	4	6	0	1	-	6
1.Örneklem	5	3	1	2	6	3*6=18
2.Örneklem	6	4	0	1	-	4
2.Örneklem	7	8	0	1	-	8
2.Örneklem	8	9	0	1	-	9
2.Örneklem	9	10	0	1	-	10
2.Örneklem	10	3	1	2	2	3*2=6

*1: "Haftada ne kadar(kaç şişe) alkol tüketiyorsunuz?", 2: "Seçtiğiniz karttaki sayı ile haftada içtiğiniz alkol miktarını çarpıp yanıtınızı veriniz"

Yapılan çalışma sonucu birinci örneklemde "Haftada ne kadar alkol tüketiyorsunuz?" sorusuna ilişkin verilen yanıtların ortalaması $\bar{z}_1 = (45 + ... + 18)/5 = 20,8$ varyans tahmini $\hat{\sigma}^2_{z1} = 361,7$ 'dir. İkinci örneklemde "Haftada ne kadar alkol tüketiyorsunuz?"

sorusuna ilişkin verilen yanıtların ortalaması $\bar{z}_2 = (4+\ldots+6)/5 = 7{,}4$ varyans tahmini $\hat{\sigma}^2_{z2} = 5{,}8$ ’dir.

n=10 kişilik görüşme sonucunda bir haftada tüketilen ortalama alkol miktarı Eşitlik (2.84)’ten,

$$\hat{\mu}_{GS1} = \frac{\bar{z}_1(\theta_2 - 1) - \bar{z}_2(\theta_1 - 1)}{\theta_2 - \theta_1} = \frac{20{,}8 * (1-1) - 7{,}4 * (7-1)}{1-7} = 7{,}4$$

olarak tahmin edilir.

Bir haftada tüketilen ortalama alkol miktarı için varyans Eşitlik (2.86)’dan,

$$\begin{aligned}
V\hat{a}r(\hat{\mu}_{GS1}) &= \frac{1}{(\theta_2 - \theta_1)^2}\left[(\theta_2 - 1)^2\left(\frac{\hat{\sigma}^2_{z1}}{n_1}\right) + (\theta_1 - 1)^2\left(\frac{\hat{\sigma}^2_{z2}}{n_2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{(1-7)^2}\left[(1-1)^2\left(\frac{361{,}7}{5}\right) + (7-1)^2\left(\frac{5{,}8}{5}\right)\right] \\
&= 1{,}16
\end{aligned}$$

olarak tahmin edilmiştir.

2.4.3. Gupta v.d. [18] Rastgeleleştirilmiş Yanıt Modeli

Gupta v.d. [18], tek aşamalı toplamsal RYM’yi iki bağımsız örneklemde uygulayarak yeni bir model geliştirmişlerdir.

Bu model, iki bağımsız örneklemin kullanıldığı tek aşamalı çarpımsal RYM’ye benzer bir süreç izler. Tek farkı cevaplayıcı rastgele düzeni kullanacaksa açıklamak istemediği kendi cevabıyla rastgele düzende seçtiği cevabı toplayarak son yanıtı verir.

i.örneklem (Z_i=1, 2) için yanıt değişkeni:

$$Z_i = \begin{cases} Y, & \text{(1-H) olasılığı ile} \\ Y + W_i, & \text{H olasılığı ile} \end{cases}$$

olarak gösterilir.

Yanıt değişkeni matematiksel olarak şu şekilde ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} Z_i &= (1-H)Y + H(W_i + Y) \\ Z_i &= Y + HW_i \end{aligned} \tag{2.92}$$

Burada Y, ortalaması μ_y ve varyansı σ_y^2 olan hassas değişken, H hassaslık oranı ve Wi, ortalaması θ_i (i=1, 2) ve varyansı σ_{wi}^2 (i=1, 2) bilinen rastgele değişkendir.

Her bir örneklem için yanıt değişkeninin beklenen değeri,

$$\begin{aligned} E(Z_i) &= E(Y) + HE(W_i) \\ \bar{Z}_i &= \mu_y + H\theta_i \qquad i = 1,2 \end{aligned} \tag{2.93}$$

şeklinde bulunur.

Buradan her örneklem için denklemler,

$$\begin{aligned} E(Z_1) &= \bar{Z}_1 = \mu_y + \theta_1(H) \Rightarrow H = \frac{\bar{Z}_1 - \mu_y}{\theta_1} \\ E(Z_2) &= \bar{Z}_2 = \mu_y + \theta_2(H) \Rightarrow H = \frac{\bar{Z}_2 - \mu_y}{\theta_2} \end{aligned} \tag{2.94}$$

şeklinde elde edilir.

Eşitlik (2.94)'teki denklemler birbirine eşitlenip μ_y ifadesi çekilirse, Gupta v.d. [18] tahmin edicisi,

$$\hat{\mu}_{G1} = \frac{\bar{z}_1\theta_2 - \bar{z}_2\theta_1}{\theta_2 - \theta_1} \qquad \theta_1 \neq \theta_2 \tag{2.95}$$

olarak elde edilir.

Gupta v.d. [18] tahmin edicisinin beklenen değeri,

$$\begin{aligned} E(\hat{\mu}_{G1}) &= \frac{E(\bar{z}_1)\theta_2 - E(\bar{z}_2)\theta_1}{\theta_2 - \theta_1} \\ &= \frac{(\mu_y + \theta_1 H)\theta_2 - (\mu_y + \theta_2 H)\theta_1}{\theta_2 - \theta_1} \\ &= \frac{\mu_y\theta_2 - \mu_y\theta_1}{\theta_2 - \theta_1} \\ &= \mu_y \end{aligned} \tag{2.96}$$

şeklindedir. Dolayısıyla Gupta v.d. [18] tahmin edicisi yansızdır.

Gupta v.d. [18] tahmin edicisinin varyansı,

$$
\begin{aligned}
Var\left(\hat{\mu}_{G1}\right) &= \frac{1}{\left(\theta_2-\theta_1\right)^2}\left[\theta_2^2 Var\left(\bar{Z}_1\right)+\theta_1^2 Var\left(\bar{Z}_2\right)\right] \\
&= \frac{1}{\left(\theta_2-\theta_1\right)^2}\left[\theta_2^2\left(\frac{\sigma_{z1}^2}{n_1}\right)+\theta_1^2\left(\frac{\sigma_{z2}^2}{n_2}\right)\right]
\end{aligned}
\tag{2.97}
$$

olarak elde edilir.

Burada, σ_{zi}^2 şu şekilde elde edilir:

$$Var\left(\bar{Z}_i\right)=\frac{1}{n_i}Var\left(Z_i\right) \tag{2.98}$$

şeklindedir.

$$
\begin{aligned}
Var\left(Z_i\right) &= \sigma_{Zi}^2 = E\left(Z_i^2\right)-\left[E\left(Z_i\right)\right]^2 \\
&= \left[E\left(Y^2\right)+HE\left(W_i^2\right)+2E\left(HY\theta_i\right)\right]-\left(\mu_y+\theta_i H\right)^2 \\
&= \left[\sigma_y^2+\mu_y^2+H\left(\sigma_{wi}^2+\theta_i^2\right)+2H\mu_y\theta_i-\mu_y^2-H^2\theta_i^2-2H\mu_y\theta_i\right]
\end{aligned}
$$

$$Var\left(Z_i\right)=\sigma_y^2+H\left\{\sigma_{wi}^2+(1-H)2\theta_i^2\right\} \qquad i=1,2 \tag{2.99}$$

Eşitlik (2.99), Eşitlik (2.98)'de yerine konulursa σ_{zi}^2,

$$\sigma_{zi}^2=Var\left(\bar{Z}_i\right)=\frac{1}{n_i}\left[\sigma_y^2+H\left\{\sigma_{wi}^2+(1-H)2\theta_i^2\right\}\right] \tag{2.100}$$

olarak elde edilir.

Hassas soru için ortalama tahmininden sonra modeldeki diğer parametre olan hassaslık oranı H tahmin edilmelidir.

Hassaslık Oranı H'nin Tahmin Edilmesi:

Yanıt değişkeni Z_i için beklenen değer:

$$E\left(Z_i\right)=\mu_y+\theta_i\left(H\right) \qquad i=1,2 \tag{2.101}$$

Buradan her örneklem için denklemler,

$$
\begin{aligned}
E(\bar{Z}_1) &= \bar{Z}_1 = \mu_y + \theta_1 (H) \Rightarrow \mu_y = \bar{Z}_1 - \theta_1 H \\
E(\bar{Z}_1) &= \bar{Z}_1 = \mu_y + \theta_1 (H) \Rightarrow \mu_y = \bar{Z}_2 - \theta_2 H
\end{aligned}
\tag{2.102}
$$

denklemleri elde edilir.

Eşitlik (2.102)'deki denklemler birbirine eşitlenip H ifadesi çekilirse, H için tahmin edici,

$$
\hat{H} = \frac{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}{\theta_2 - \theta_1} \qquad \theta_1 \neq \theta_2 \tag{2.103}
$$

olarak elde edilir.

$\hat{H}$ tahmin edicisinin varyansı,

$$
\begin{aligned}
Var(\hat{H}) &= \frac{1}{(\theta_2 - \theta_1)^2} \left[Var(\bar{z}_1) + Var(\bar{z}_2) \right] \\
&= \frac{1}{(\theta_2 - \theta_1)^2} \left(\frac{\sigma_{z1}^2}{n_1} + \frac{\sigma_{z2}^2}{n_2} \right)
\end{aligned}
\tag{2.104}
$$

olarak elde edilir.

Çarpımsal modelde $\hat{H}$ tahmin edicisi oransal bir tahmin edici olduğu için $Var(\hat{H})$'nin yaklaşık değeri bulunmuştu. Toplamsal modelde $\hat{H}$ tahmin edicisi doğrusal bir ifade olduğu için $Var(\hat{H})$ için tam bir eşitlik bulunmuştur. Bunun yanı sıra toplamsal model, cevaplayıcılar için daha kolay bir hesaplama gerektiren bir modeldir [32].

Gupta v.d. [18] RYM'yi bir sayısal örnekle açıklayalım. Bu örnek için Bölüm 2.4.2'de verilen sayısal örnek kullanılsın.

Bu modelde kişilere "haftada ne kadar(kaç şişe) alkol tüketiyorsunuz?" sorusu sorulsun. $n_1 = n_2 = 5$'er kişilik iki örneklem seçilsin. Cevaplayıcılara bu soruya doğrudan yanıt vermek isteyip istemedikleri sorulsun. Birinci örneklemde cevaplayıcıların %20'si bu soruya doğrudan yanıt vermek istesin. Cevaplayıcıların %80'i rastgele düzeni kullanmak istesin. Dolayısıyla birinci örneklemde hassaslık oranı 0,80'dir. İkinci örneklemde cevaplayıcıların %80'i bu soruya doğrudan yanıt vermek istesin. Cevaplayıcıların %20'si rastgele düzeni kullanmak istesin. Dolayısıyla ikinci örneklemde hassaslık oranı 0,20'dir.

Birinci örneklem için kullanılacak olan rastgele düzende türetilen sayılar Bölüm 2.4.2'de verildiği gibi olsun. Dolayısıyla birinci örneklem için türetilen rastgele değişkenin ortalaması $\theta_1 = 7$ ve ikinci örneklem için türetilen rastgele değişkenin ortalaması $\theta_2 = 1$'dir.

n=10 kişilik bir görüşme sonrası sonuçlar Çizelge 2.17'de verilmiştir.

Çizelge 2.17. Gupta v.d. [18] rastgeleleştirilmiş yanıt modeli için sayısal örnek

Örneklem	Kişiler	Gerçek Yanıtlar (Y)	C	Seçilen Karttaki İfade*	(Seçilen Karttaki sayılar (W))	Verilen Yanıtlar $Z_i = (1-H)Y + H(W_i + Y)$
1.Örneklem	1	5	1	2	9	9+5=14
1.Örneklem	2	0	1	2	7	0+7=7
1.Örneklem	3	7	1	2	5	7+5=12
1.Örneklem	4	6	0	1	-	6
1.Örneklem	5	3	1	2	6	3+6=9
2.Örneklem	6	4	0	1	-	4
2.Örneklem	7	8	0	1	-	8
2.Örneklem	8	9	0	1	-	9
2.Örneklem	9	10	0	1	-	10
2.Örneklem	10	3	1	27	2	3+2=5

*1: "Haftada ne kadar(kaç şişe) alkol tüketiyorsunuz?", 2: "Seçtiğiniz karttaki sayı ile haftada içtiğiniz alkol miktarını toplayıp yanıtınızı veriniz"

Çizelge 2.17'de C=0 olması kişibib soruya doğrudan yanıt vermek istediğini gösterirken, C=1 olması kişinin rastgele düzeni kullanmak istediğini gösterir. Yapılan çalışma sonucu birinci örneklemde "Haftada ne kadar alkol tüketiyorsunuz?" sorusuna ilişkin verilen yanıtların ortalaması $\bar{z}_1 = (14 + ... + 9)/5 = 9{,}6$ varyans tahmini $\hat{\sigma}^2_{z1} = 11{,}3$ 'dir. İkinci örneklemde "Haftada ne kadar alkol tüketiyorsunuz?" sorusuna ilişkin verilen yanıtların ortalaması $\bar{z}_2 = (4 + ... + 5)/5 = 7,2$ varyans tahmini $\hat{\sigma}^2_{z2} = 6,7$ 'dir.

n=10 kişilik görüşme sonucunda bir haftada tüketilen ortalama alkol miktarı Eşitlik (2.95)'ten,

$$\hat{\mu}_{G1} = \frac{\bar{z}_1\theta_2 - \bar{z}_2\theta_1}{\theta_2 - \theta_1} = \frac{9,6 * 1 - 7,2 * 7}{1 - 7} = 6,8$$

olarak tahmin edilir.

Bir haftada tüketilen ortalama alkol miktarı için varyans Eşitlik (2.97)'den,

$$\begin{aligned} \hat{\mathrm{Var}}(\hat{\mu}_{G1}) &= \frac{1}{(\theta_2 - \theta_1)^2}\left[\theta_2^2\left(\frac{\hat{\sigma}^2_{z1}}{n_1}\right) + \theta_1^2\left(\frac{\hat{\sigma}^2_{z2}}{n_2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{(1-7)^2}\left[1^2\left(\frac{11,3}{5}\right) + 7^2\left(\frac{6,7}{5}\right)\right] \\ &= 1,89 \end{aligned}$$

olarak tahmin edilmiştir.

2.4.4. Gupta ve Shabbir [19] Rastgeleleştirilmiş Yanıt Modeli

Daha önce de açıklandığı gibi, iki aşamalı RYM'de oranı önceden belirlenen bir kısım cevaplayıcıdan doğrudan cevap alınır, bu da hassas değişkene ilişkin daha iyi tahminler elde edilmesini sağlar. İki aşamalı modelde doğrudan cevap alınma kısmı cevaplayıcıya bağlı olursa daha da iyi tahminler alınabilir. Çünkü rastgele düzeni kullanıp kullanmayacağını cevaplayıcı kendi belirler. Bu amaçla iki aşamalı RYM'ye seçim kriteri de (hassaslık oranı H de denilebilir) eklenerek yeni modeller oluşturulmuştur.

Gupta ve Shabbir [19], iki aşamalı seçimli çarpımsal RYM'yi önermiştir. İlk aşamada T oranına sahip cevaplayıcılardan doğrudan cevap alınırken, ikinci aşamada geriye kalan (1-T) oranlık cevaplayıcıya seçimli model uygulanır. İkinci aşamada (1-H) oranında cevaplayıcı doğrudan cevap yöntemini kullanır, geriye kalan H oranındaki cevaplayıcı rastgele düzeni kullanır. Cevaplayıcı rastgele düzeni kullanacaksa açıklamak istemediği kendi cevabıyla rastgele düzende seçtiği cevabı çarparak son yanıtı verir.

Yanıt değişkeni için dağılım şu şekilde tanımlanır:

$$Z_i = \begin{cases} Y, & \text{T+(1-T)(1-H) olasılığı ile} \\ W_i Y, & \text{(1-T)H olasılığı ile} \end{cases}$$

Burada D~Bernoulli (T), C~Bernoulli (H) dağılımlıdır. Yani E(D)=B ve E(C)=H olacaktır.

Yanıt değişkeni matematiksel olarak şu şekilde ifade edilebilir:

$$Z = \left(Y\right)^{D}\left(YW^{C}\right)^{1-D} \tag{2.105}$$

Burada Y, ortalaması μ_y ve varyansı σ_y^2 olan hassas değişken, H hassaslık oranı ve Wi, ortalaması θ_i (i=1, 2) ve varyansı σ_{wi}^2 (i=1, 2) bilinen rastgele değişkendir.
O halde yanıt değişkeni ortalaması için Gupta ve Shabbir [14] tahmin edicisi,

$$\hat{\mu}_{GS2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i \tag{2.106}$$

şeklinde verilir.
Gupta ve Shabbir [19] tahmin edicisi beklenen değeri,

$$E(Z) = E(Y)P(D=1) + E(YW^{C})P(D=0)$$

$$= E(Y)P(D=1) + E(Y)\left[E(W)P(C=1) + P(C=0)\right]P(D=0)$$

$$= E(Y)P(D=1) + E(Y)P(D=0)$$

$$E(Z) = E(Y) = \mu_y \tag{2.107}$$

Dolayısıyla Gupta ve Shabbir [19] tahmin edicisi yansızdır.

Gupta ve Shabbir [19] tahmin edicisinin varyansı,

$$Var\left(\hat{\mu}_{GS2}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var\left(Z_i\right) \tag{2.108}$$

eşitliğinden bulunur. Eşitlik (2.108)'deki $Var(Z_i)$,

$$
\begin{aligned}
Var(Z_i) &= E(Z_i^2) - [E(Z_i)]^2 \\
&= TE(Y^2) + (1-T)[HE(W^2Y^2) + (1-H)E(Y^2)] - \mu_y^2 \\
&= T(\sigma_y^2+\mu_y^2) + (1-T)[H(1+\sigma_w^2)(\sigma_y^2+\mu_y^2) + (1-H)(\sigma_y^2+\mu_y^2)] - \mu_y^2 \\
&= (\sigma_y^2+\mu_y^2)[T + (1-T)H(1+\sigma_w^2) + 1 - H] - \mu_y^2 \\
&= \sigma_y^2 + (1-T)H(\sigma_y^2+\mu_y^2)
\end{aligned}
\qquad (2.109)
$$

şeklindedir.

Eşitlik (2.109), Eşitlik (2.108)'de yerine konulursa Gupta ve Shabbir [19] tahmin edicisinin varyansı,

$$
Var(\hat{\mu}_{GS2}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(Z_i) = \frac{1}{n}[\sigma_y^2 + (1-T)H(\sigma_y^2+\mu_y^2)] \qquad (2.110)
$$

olarak elde edilir.

Hassas soru için ortalama tahmininden sonra modeldeki diğer parametre olan hassaslık oranı H tahmin edilmelidir.

Hassaslık Oranı H'nin Tahmin Edilmesi:

İki aşamalı seçimli RYM'si:

$$
Z = (Y)^D (YW^C)^{1-D} \qquad (2.111)
$$

şeklindedir.

Eşitlik(2.105)'in ln fonksiyonu yazılıp beklenen değeri alınırsa, H parametresi,

$$
\begin{aligned}
\ln(Z) &= D\ln(Y) + (1-D)[\ln(Y) + C\ln(W)] \\
&= \ln(Y) + (1-D)C\ln(W) \\
E[\ln(Z)] &= E[\ln(Y)] + E(1-D)E(C)E[\ln(W)] \\
&= E[\ln(Y)] + (1-T)(H)E[\ln(W)]
\end{aligned}
\qquad (2.112)
$$

eşitliğinden bulunur.

Eşitlik (2.112)'den H hassaslık oranı:

$$H = \frac{E\left[\ln(Z)\right] - E\left[\ln(Y)\right]}{(1-T)^{E\left[\ln(W)\right]}} \tag{2.113}$$

olarak elde edilir. Buradan H parametresinin tahmini,

$$\hat{H} \cong \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(Z_i\right) - \ln\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Z_i\right\}}{(1-T)^{E\left[\ln(W)\right]}} \tag{2.114}$$

olarak verilir.

W rastgele düzen değişkeni olduğu için $E\left[\ln(W)\right]$ değeri bilinmektedir.

İki aşamalı modelde H'nin tahmini tek aşamalı modele göre daha büyük çıkabilir. H oranı ne kadar fazla olursa hata payı da o kadar az olacaktır. İki aşamalı modelde cevaplayıcıları doğrudan yanıt verme seçimine yönlendirme olduğu için hassas değişkenin ortalama tahmininde önemli bir yaklaşım gerçekleşecektir.

Gupta ve Shabbir [19] RYM'yi bir sayısal örnekle açıklayalım. Bu örnek için Bölüm 2.2.4'te verilen sayısal örnek kullanılsın.

Bu modelde de kişilere "haftada ne kadar(kaç şişe) alkol tüketiyorsunuz?" sorusu sorulsun. İlk aşamada cevaplayıcıların %20'sine bu soruya doğrudan yanıt vermeleri istensin (Burada T=0,20'dir). Geriye kalan cevaplayıcılar (1-T=0,80) ikinci aşamaya yönlendirilsinler. İkinci aşamada cevaplayıcılara bu soruya doğrudan yanıt vermek isteyip istemedikleri sorulsun. Cevaplayıcıların %50'si bu soruya doğrudan yanıt vermek istesin. Geriye kalan cevaplayıcılar ise rastgele düzeni kullanmak istesin. Geriye kalan cevaplayıcılar seçtikleri karttaki değeri gerçek cevapları ile çarpıp yanıtlarını verirler.

İkinci aşamadaki rastgele düzendeki sayılar Bölüm 2.2.4' te verildiği gibi olsun.

n=5 kişilik bir görüşme sonrası sonuçlar Çizelge 2.18'de verilmiştir.

Çizelge 2.18. Gupta ve Shabbir [19] rastgeleleştirilmiş yanıt modeli için sayısal örnek

Kişiler	Gerçek Yanıtlar (Y)	C	D	Seçilen Karttaki İfade*	(Seçilen Karttaki sayılar (W))	Verilen Yanıtlar $Z = \left\{ Y^{D} + (YW)^{C} \right\}^{1-D}$
1	5	1	0	1	0	5
2	0	1	0	1	1	0
3	7	1	1	2	2	7*2=14
4	6	0	-	-	-	6
5	3	1	1	2	1	3*1=3

*1: "Haftada ne kadar(kaç şişe) alkol tüketiyorsunuz?", 2: "Seçtiğiniz karttaki sayı ile haftada içtiğiniz alkol miktarını çarpıp yanıtınızı veriniz"

Çizelge 2.18'de ilk aşamada C=0 olduğu durumda kişi soruya doğrudan yanıt verir, C=1 ise kişi ikinci aşamaya yönlendirilir. İkinci aşamada D=0 olması kişinin soruya doğrudan yanıt vermek istediğini gösterir. D=1 ise kişinin rastgele düzeni kullanmak istediği anlamına gelmektedir. Bu açıklamalara göre yapılan çalışma sonucu "Haftada ne kadar alkol tüketiyorsunuz?" sorusuna ilişkin verilen yanıtların ortalaması $\bar{z} = (5 + ... + 3)/5 = 5{,}6$ ve varyans tahmini $\hat{\sigma}_z^2 = 27{,}3$ olarak bulunur.

n=5 kişilik görüşme sonucunda bir haftada tüketilen ortalama alkol miktarı Eşitlik (2.106)'dan,

$$\hat{\mu}_{GS2} = \bar{z} = 5{,}6$$

olarak tahmin edilir.

Bir haftada tüketilen ortalama alkol miktarı için varyans,

$$\hat{Var}(\hat{\mu}_{GS2}) = \frac{1}{n}\hat{Var}(z_i) = \frac{\hat{\sigma}_z^2}{n} = \frac{27{,}3}{5} = 5{,}46$$

olarak tahmin edilmiştir.

2.4.5. Sehra [30] Seçimli Çarpımsal Rastgeleleştirilmiş Yanıt Modeli

Sehra [30], iki aşamalı seçimli çarpımsal RYM'yi iki bağımsız örneklemde uygulayarak yeni bir model geliştirmişlerdir.

Bu modelin ilk aşamasında T oranına sahip cevaplayıcılardan doğrudan cevap alınırken, ikinci aşamada geriye kalan (1-T) oranlık cevaplayıcıya seçimli model uygulanır. İkinci aşamada (1-H) oranında cevaplayıcı doğrudan cevap yöntemini kullanır, geriye kalan H oranındaki cevaplayıcı rastgele düzeni kullanır. Cevaplayıcı rastgele düzeni kullanacaksa açıklamak istemediği kendi cevabıyla rastgele düzende seçtiği cevabı çarparak son yanıtı verir.

Bu modelde farklı olarak n_1 ve n_2 büyüklüğünde iki bağımsız örneklem kullanılır. Her iki örneklemde R_1 ve R_2 olmak üzere iki farklı rastgele düzen kullanılır. Bu iki rastgele düzende ortalaması θ_i (i=1, 2) ve varyansı σ^2_{wi} (i=1, 2) olan iki farklı dağılım kullanılır.

i.örneklem (Z_i=1, 2) için yanıt değişkeni dağılımı :

$$Z_i = \begin{cases} Y, & T+(1-T)(1-H) \text{ olasılığı ile} \\ W_i Y, & (1-T)H \quad \text{olasılığı ile} \end{cases}$$

şeklinde gösterilir. Yanıt değişkeni matematiksel olarak şu şekilde ifade edilebilir:

$$Z_i = Y\left[T + (1-T)(1-H)\right] + \left[(1-T)H\right] W_i Y \tag{2.115}$$

Burada Y ortalaması μ_y ve varyansı σ^2_y olan hassas değişken, H hassaslık oranı ve Wi, ortalaması θ_i (i=1, 2) ve varyansı σ^2_{wi} (i=1, 2) bilinen rastgele değişkendir.

Her bir örneklem için yanıt değişkeninin beklenen değeri,

$$\begin{aligned} E(Z_i) = \bar{Z}_i &= E(Y)\left[T + (1-T)(1-H)\right] + HE(W_i)E(Y)\left[(1-T)H\right] \\ &= \mu_y\left[T + (1-T)(1-H)\right] + \theta_i \mu_y \left[(1-T)H\right] \\ &= \mu_y\left[\theta_i H(1-T) + (1-H+HT)\right] \\ &= \mu_y\left[\theta_i H(1-T) + 1 - H(1-T)\right] \qquad i = 1,2 \end{aligned} \tag{2.116}$$

şeklinde bulunur. Buradan her örneklem için denklemler,

$$\begin{aligned} E(Z_1) = \bar{Z}_1 = \mu_y\left[\theta_1 H(1-T) + 1 - H(1-T)\right] &\Rightarrow H = \frac{\bar{Z}_1 - \mu_y}{\mu_y (1-T)(\theta_1 - 1)} \\ E(Z_2) = \bar{Z}_2 = \mu_y\left[\theta_2 H(1-T) + 1 - H(1-T)\right] &\Rightarrow H = \frac{\bar{Z}_2 - \mu_y}{\mu_y (1-T)(\theta_2 - 1)} \end{aligned} \tag{2.117}$$

şeklinde elde edilir.

Eşitlik (2.117)'deki denklemler birbirine eşitlenip μ_y ifadesi çekilirse, Sehra [30] tahmin edicisi,

$$\hat{\mu}_{SG1} = \frac{\bar{z}_2(\theta_1 - 1) - \bar{z}_1(\theta_2 - 1)}{\theta_1 - \theta_2}, \qquad \theta_1 \neq \theta_2 \tag{2.118}$$

olarak elde edilir.

Hassas soru için ortalama tahmininden sonra modeldeki diğer parametre olan hassaslık oranı H tahmin edilmelidir.

Hassaslık Oranı H'nin Tahmin Edilmesi:

Yanıt değişkeni Z_i için beklenen değer:

$$E(z_i) = \bar{Z}_i = \mu_y\left[\theta_i H(1-T) + \{1 - H(1-T)\}\right] \qquad i = 1,2 \tag{2.119}$$

Buradan her örneklem için denklemler,

$$E(z_1) = \bar{Z}_1 = \mu_y\left[\theta_1 H(1-T) + \{1 - H(1-T)\}\right] \Rightarrow \mu_y = \frac{\bar{Z}_1}{\left[\theta_1 H(1-T) + \{1 - H(1-T)\}\right]}$$
$$E(z_2) = \bar{Z}_2 = \mu_y\left[\theta_2 H(1-T) + \{1 - H(1-T)\}\right] \Rightarrow \mu_y = \frac{\bar{Z}_2}{\theta_2 H(1-T) + \{1 - H(1-T)\}} \tag{2.120}$$

denklemleri elde edilir.

Eşitlik (2.120)'deki denklemler birbirine eşitlenip H ifadesi çekilirse, H için tahmin edici,

$$\hat{H} = \frac{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}{(1-T)\left[\bar{z}_1(\theta_2 - 1) - \bar{z}_2(\theta_1 - 1)\right]} \tag{2.121}$$

olarak elde edilir.

Sehra. [30] RYM'yi bir sayısal örnekle açıklayalım. Bu örnek için Bölüm 2.4.2'de verilen sayısal örnek kullanılsın.

Bu modelde kişilere "haftada ne kadar(kaç şişe) alkol tüketiyorsunuz?" sorusu sorulsun. $n_1 = n_2 = 5$'er kişilik iki örneklem seçilsin. Birinci ve ikinci örneklemde ilk aşamada cevaplayıcıların %20'sine bu soruya doğrudan yanıt vermeleri istensin (Burada T=0,20'dir). Geriye kalan cevaplayıcılar (1-T=0,80) ikinci aşamaya yönlendirilsinler. İkinci aşamada cevaplayıcılara bu soruya doğrudan yanıt vermek isteyip istemedikleri sorulsun. Birinci örneklemde cevaplayıcıların %20'si bu soruya doğrudan yanıt vermek istesin. Cevaplayıcıların %80'i rastgele düzeni kullanmak istesin. Dolayısıyla birinci örneklemde hassaslık oranı 0,80'dir. İkinci örneklemde cevaplayıcıların %80'i bu soruya doğrudan yanıt vermek istesin. Cevaplayıcıların %20'si rastgele düzeni kullanmak istesin. Dolayısıyla ikinci örneklemde hassaslık oranı 0,20'dir.

Birinci ve ikinci örneklem için kullanılacak olan rastgele düzende türetilen sayılar Bölüm 2.4.2'de verildiği gibi olsun. Dolayısıyla birinci örneklem için türetilen rastgele değişkenin ortalaması $\theta_1 = 7$ ve ikinci örneklem için türetilen rastgele değişkenin ortalaması $\theta_2 = 1$'dir.

n=10 kişilik bir görüşme sonrası sonuçlar Çizelge 2.16'da verilmiştir.

Çizelge 2.19. Sehra [30] rastgeleleştirilmiş yanıt modeli için sayısal örnek

Örneklem	Kişiler	Gerçek Yanıtlar (Y)	1.Aşamada Seçilen Karttaki İfade*	2.Aşamada Seçilen Karttaki İfade**	Seçilen Karttaki sayılar (W)	Verilen Yanıtlar $Z_i = YT + (1-T)(1-H) + (1-T)HW_iY$
1.Örneklem	1	5	2	1	-	5
1.Örneklem	2	0	2	2	7	0*7=0
1.Örneklem	3	7	2	2	5	7*5=35
1.Örneklem	4	6	1	-	-	6
1.Örneklem	5	3	2	2	6	3*6=18
2.Örneklem	6	4	1	-	-	4
2.Örneklem	7	8	2	1	-	8
2.Örneklem	8	9	2	1	-	9
2.Örneklem	9	10	2	1	-	10
2.Örneklem	10	3	2	2	2	3*2=6

*1: "Haftada ne kadar(kaç şişe) alkol tüketiyorsunuz?", 2: "İkinci aşamaya geçiniz"

**1: "Haftada ne kadar(kaç şişe) alkol tüketiyorsunuz?", 2: "Seçtiğiniz karttaki sayı ile haftada içtiğiniz alkol miktarını çarpıp yanıtınızı veriniz"

Yapılan çalışma sonucu birinci örneklemde "Haftada ne kadar alkol tüketiyorsunuz?" sorusuna ilişkin verilen yanıtların ortalaması $\bar{z}_1 = (5 + ... + 18)/5 = 12{,}8$ varyans tahmini $\hat{\sigma}^2_{z1} = 197{,}7$ 'dir. İkinci örneklemde "Haftada ne kadar alkol tüketiyorsunuz?" sorusuna ilişkin verilen yanıtların ortalaması $\bar{z}_2 = \left(4 + \ldots + 6\right)/5 = 7{,}4$ varyans tahmini $\hat{\sigma}^2_{z2} = 5{,}8$ ’dir.

n=10 kişilik görüşme sonucunda bir haftada tüketilen ortalama alkol miktarı Eşitlik (2.118)’den,

$$\hat{\mu}_{SG1} = \frac{\bar{z}_2\left(\theta_1 - 1\right) - \bar{z}_1\left(\theta_2 - 1\right)}{\theta_1 - \theta_2} = \frac{7{,}4 * (7-1) - 12{,}8 * (1-1)}{1-7} = 7{,}4$$

olarak tahmin edilir.

2.4.6 Gupta v.d. [20] Seçimli Toplamsal Rastgeleleştirilmiş Yanıt Modeli

Sehta ve Gupta [20], iki aşamalı seçimli toplamsal RYM’yi iki bağımsız örneklemde uygulayarak yeni bir model geliştirmişlerdir.

Bu modelin ilk aşamasında T oranına sahip cevaplayıcılardan doğrudan cevap alınırken, ikinci aşamada geriye kalan (1-T) oranlık cevaplayıcıya seçimli model uygulanır. İlk aşamadaki düzente T oranı yine rastgele düzene göre belirlenir. Örneğin ilk aşamadaki rastgele düzen bir deste kart olsun. Bu kartların üzerinde T oranında “Gerçek” yazılıdır. Geriye kalan (1-T) oranında da belirli bir dağılımdan türetilen sayılar yazılıdır. Eğer cevaplayıcı üzerinde “Gerçek” yazan kartı seçerse soruya doğrudan cevap vermesi istenir, diğer durumda cevaplayıcı ikinci aşamaya yönlendirilir. İkinci aşamada (1-H) oranında cevaplayıcı doğrudan cevap yöntemini kullanır, geriye kalan H oranındaki cevaplayıcı rastgele düzeni kullanır. Cevaplayıcı rastgele düzeni kullanacaksa açıklamak istemediği kendi cevabıyla rastgele düzende seçtiği cevabı toplayarak son yanıtı verir.

Modelde n_1 ve n_2 büyüklüğünde iki bağımsız örneklem kullanılır. Her iki örneklemde R_1 ve R_2 olmak üzere iki farklı rastgele düzen kullanılır. Bu iki rastgele düzende θ_i (i=1, 2) ve varyansı σ^2_{wi} (i=1, 2) olan iki farklı dağılım kullanılır.

i.örneklem (Z_i=1, 2) için yanıt değişkeni dağılımı :

$$Z_i = \begin{cases} Y, & \text{T+(1-T)(1-H) olasılığı ile} \\ Y + W_i, & \text{(1-T)H olasılığı ile} \end{cases}$$

şeklinde gösterilir.

Yanıt değişkeni matematiksel olarak şu şekilde ifade edilebilir:

$$Z_i = Y\left[T + (1-T)(1-H)\right] + (Y + W_i)(1-T)H \qquad (2.122)$$

Burada Y ortalaması μ_y ve varyansı σ_y^2 olan hassas değişken, H hassaslık oranı ve W_i, ortalaması θ_i (i=1, 2) ve varyansı σ_{wi}^2 (i=1, 2) bilinen rastgele değişkendir.
Her bir örneklem için yanıt değişkeninin beklenen değeri,

$$\begin{aligned} E(Z_i) = \bar{Z}_i &= E(Y)\left[T + (1-T)(1-H)\right] + E(Y + W_i)(1-T)H \\ &= \mu_y\left[T + (1-T)(1-H)\right] + \left[\mu_y(1-T)H + \theta_i(1-T)H\right] \\ &= \mu_y + \theta_i(1-T)H \qquad i = 1,2 \end{aligned} \qquad (2.123)$$

şeklinde bulunur. Buradan her örneklem için denklemler,

$$\begin{aligned} E(Z_1) = \bar{Z}_1 &= \mu_y + \theta_1(1-T)H \Rightarrow H = \frac{\bar{Z}_1 - \mu_y}{\theta_1(1-T)} \\ E(Z_2) = \bar{Z}_2 &= \mu_y + \theta_2(1-T)H \Rightarrow H = \frac{\bar{Z}_2 - \mu_y}{\theta_2(1-T)} \end{aligned} \qquad (2.124)$$

şeklinde elde edilir.

Eşitlik(2.124)'deki denklemler birbirine eşitlenip μ_y ifadesi çekilirse, Gupta v.d. [20] tahmin edicisi,

$$\hat{\mu}_{SG2} = \frac{\bar{z}_1\theta_2 - \bar{z}_2\theta_1}{\theta_2 - \theta_1}, \qquad \theta_1 \neq \theta_2 \qquad (2.125)$$

olarak elde edilir.

Gupta v.d. [20] tahmin edicisinin beklenen değeri,

$$
\begin{aligned}
E\left(\bar{y}_{SG2}\right) &= E\left(\frac{\bar{z}_1\theta_2-\bar{z}_2\theta_1}{\theta_2-\theta_1}\right)\\
&= \frac{1}{\left(\theta_2-\theta_1\right)}E\left(\bar{z}_1\theta_2-\bar{z}_2\theta_1\right)\\
&= \frac{1}{\left(\theta_2-\theta_1\right)}\left[\theta_2 E\left(\bar{z}_1\right)-\theta_1 E\left(\bar{z}_2\right)\right]\\
&= \frac{1}{\left(\theta_2-\theta_1\right)}\left[\theta_2\left\{\mu_y+\theta_1\left(-T\right)\right\}-\theta_1\left\{\mu_y+\theta_2\left(-T\right)\right\}\right]\\
&= \frac{1}{\left(\theta_2-\theta_1\right)}\left(\theta_2-\theta_1\right)\mu_y
\end{aligned}
$$

$$
E\left(\bar{y}_{SG2}\right)=\mu_y \tag{2.126}
$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla, Gupta v.d. [20] tahmin edicisi yansızdır.

Gupta v.d. [20] tahmin edicisinin varyansı,

$$
\begin{aligned}
Var\left(\bar{y}_{SG2}\right) &= Var\left(\frac{\bar{z}_1\theta_2-\bar{z}_2\theta_1}{\theta_2-\theta_1}\right)\\
&= \frac{1}{\left(\theta_2-\theta_1\right)^2}Var\left(\bar{z}_1\theta_2-\bar{z}_2\theta_1\right)\\
&= \frac{1}{\left(\theta_2-\theta_1\right)^2}\left[\theta_2^2 Var\left(\bar{z}_1\right)+\theta_1^2 Var\left(\bar{z}_2\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$
Var\left(\bar{y}_{SG2}\right)=\frac{1}{\left(\theta_2-\theta_1\right)^2}\left[\theta_2^2\left(\frac{\sigma_{z1}^2}{n_1}\right)+\theta_1^2\left(\frac{\sigma_{z2}^2}{n_2}\right)\right] \tag{2.127}
$$

olarak elde edilir.

Burada, σ_{zi}^2

$$
Var\left(z_i\right)=\sigma_{zi}^2=E\left(z_i^2\right)-E\left(z_i\right)^2
$$

formülünden elde edilir.

Bu formüle göre,

$$\begin{aligned} E(Z_i^2) &= E(Y^2)\left[T+(1-T)(1-H)\right]+E\left[(Y+W_i)^2\right](1-T)H \\ &= \left[E(Y^2)T+E(Y^2)(1-T)(1-H)+E(Y^2)(1-T)H\right. \\ &\quad \left. +2E(Y)E(W_i)(1-T)H+E(W_i^2)(1-T)H\right] \\ &= E(Y^2)+\left[2E(Y)E(W_i)+E(W_i^2)\right](1-T)H \\ &= \sigma_y^2+\mu_y^2+2(\mu_y\theta_i+\sigma_{wi}^2+\theta_i^2)H(1-T) \end{aligned} \qquad (2.128)$$

şeklinde yazılır.

Eşitlik (2.128), Eşitlik (2.127)'de yerine yazılırsa σ_{zi}^2,

$$\begin{aligned} \sigma_{Zi}^2 &= \sigma_y^2+\mu_y^2+2(\mu_y\theta_i+\sigma_{wi}^2+\theta_i^2)H(1-T)-\left[\mu_y+\theta_i H(1-T)\right]^2 \\ &= \sigma_y^2+\sigma_{wi}^2 H(1-T)+\theta_i^2 H(1-T)\left[1-H(1-T)\right] \qquad i=1,2 \end{aligned} \qquad (2.129)$$

olarak bulunur.

Hassas soru için ortalama tahmininden sonra modeldeki diğer parametre olan hassaslık oranı H tahmin edilmelidir.

Hassaslık Oranı H'nin Tahmin Edilmesi:

Yanıt değişkeni Z_i için beklenen değer:

$$E(Z_i)=\bar{Z}_i=\mu_y+\theta_i H(1-T) \qquad (2.130)$$

Buradan her örneklem için denklemler,

$$\begin{aligned} E(Z_1)=\bar{Z}_1=\mu_y+\theta_1 H(1-T) &\Rightarrow \mu_y=\bar{Z}_1-\theta_1 H(1-T) \\ E(Z_2)=\bar{Z}_2=\mu_y+\theta_2 H(1-T) &\Rightarrow \mu_y=\bar{Z}_2-\theta_2 H(1-T) \end{aligned} \qquad (2.131)$$

şeklinde elde edilir.

Eşitlik (2.124)'teki denklemler birbirine eşitlenip H ifadesi çekilirse, H için tahmin edici,

$$\hat{H}=\frac{\bar{Z}_2-\bar{Z}_1}{(\theta_2-\theta_1)(1-T)} \qquad \theta_1\neq\theta_2 \qquad (2.132)$$

olarak elde edilir.

$\hat{H}$ tahmin edicisinin varyansı,

$$
\begin{aligned}
Var(\hat{H}) &= Var\left(\frac{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}{(\theta_2 - \theta_1)(1 - T)}\right) \\
&= \frac{1}{(\theta_2 - \theta_1)^2 (1 - T)^2} Var(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) \\
&= \frac{1}{(\theta_2 - \theta_1)^2 (1 - T)^2} \left[\frac{\sigma_{Z1}^2}{n_1} + \frac{\sigma_{Z2}^2}{n_2}\right]
\end{aligned}
\tag{2.133}
$$

olarak elde edilir.

Gupta v.d. [20] RYM'yi bir sayısal örnekle açıklayalım. Bu örnek için Bölüm 2.4.6'da verilen sayısal örnek kullanılsın.

Bu modelde kişilere "haftada ne kadar(kaç şişe) alkol tüketiyorsunuz?" sorusu sorulsun. $n_1 = n_2 = 5$'er kişilik iki örneklem seçilsin. Birinci ve ikinci örneklemde ilk aşamada cevaplayıcıların %20'sine bu soruya doğrudan yanıt vermeleri istensin (Burada T=0,20'dir). Geriye kalan cevaplayıcılar (1-T=0,80) ikinci aşamaya yönlendirilsinler. İkinci aşamada cevaplayıcılara bu soruya doğrudan yanıt vermek isteyip istemedikleri sorulsun. Birinci örneklemde cevaplayıcıların %20'si bu soruya doğrudan yanıt vermek istesin. Cevaplayıcıların %80'i rastgele düzeni kullanmak istesin. Dolayısıyla birinci örneklemde hassaslık oranı 0,80'dir. İkinci örneklemde cevaplayıcıların %80'i bu soruya doğrudan yanıt vermek istesin. Cevaplayıcıların %20'si rastgele düzeni kullanmak istesin. Dolayısıyla ikinci örneklemde hassaslık oranı 0,20'dir. Bölüm 2.4.6'da verilen modelden farklı olarak bu modelde ikinci aşamada kullanılacak olan düzenlerde toplamsal teknik uygulanmaktadır.

Birinci ve ikinci örneklem için kullanılacak olan rastgele düzende türetilen sayılar Bölüm 2.4.2'de verildiği gibi olsun. Dolayısıyla birinci örneklem için türetilen rastgele değişkenin ortalaması $\theta_1 = 7$ ve ikinci örneklem için türetilen rastgele değişkenin ortalaması $\theta_2 = 1$'dir.

n=10 kişilik bir görüşme sonrası sonuçlar Çizelge 2.20'de verilmiştir.

Çizelge 2.20. Gupta v.d. [20] rastgeleleştirilmiş yanıt modeli için sayısal örnek

Örneklem	Kişiler	Gerçek Yanıtlar (Y)	1.Aşamada Seçilen Karttaki İfade*	2.Aşamada Seçilen Karttaki İfade**	(Seçilen Karttaki sayılar (W))	Verilen Yanıtlar $Z_i = YT + (1-T)(1-H)Y + (1-T)H(W_i + Y)$
1.Örneklem	1	5	2	1	-	5
1.Örneklem	2	0	2	2	7	0+7
1.Örneklem	3	7	2	2	5	7+5=14
1.Örneklem	4	6	1	-	-	6
1.Örneklem	5	3	2	2	6	3+6=9
2.Örneklem	6	4	1	-	-	4
2.Örneklem	7	8	2	1	-	8
2.Örneklem	8	9	2	1	-	9
2.Örneklem	9	10	2	1	-	10
2.Örneklem	10	3	2	2	2	3+2=5

*1: "Haftada ne kadar(kaç şişe) alkol tüketiyorsunuz?", 2: "İkinci aşamaya geçiniz"

**1: "Haftada ne kadar(kaç şişe) alkol tüketiyorsunuz?", 2: "Seçtiğiniz karttaki sayı ile haftada içtiğiniz alkol miktarını toplayıp yanıtınızı veriniz"

Yapılan çalışma sonucu birinci örneklemde "Haftada ne kadar alkol tüketiyorsunuz?" sorusuna ilişkin verilen yanıtların ortalaması $\bar{z}_1 = (5 + ... + 9)/5 = 8{,}2$ varyans tahmini $\hat{\sigma}^2_{z1} = 12{,}7$ 'dir. İkinci örneklemde "Haftada ne kadar alkol tüketiyorsunuz?" sorusuna ilişkin verilen yanıtların ortalaması $\bar{z}_2 = (4 + ... + 5)/5 = 7{,}2$ varyans tahmini $\hat{\sigma}^2_{z2} = 6{,}7$ 'dir.

n=10 kişilik görüşme sonucunda bir haftada tüketilen ortalama alkol miktarı Eşitlik (2.125)'ten,

$$\hat{\mu}_{SG2} = \frac{\bar{z}_1\theta_2 - \bar{z}_2\theta_1}{\theta_2 - \theta_1} = \frac{8{,}2 * 1 - 7{,}2 * 7}{1 - 7} = 7{,}03$$

olarak tahmin edilir.

Bir haftada tüketilen ortalama alkol miktarının varyans tahmini Eşitlik (2.127)'den,

$$
\begin{aligned}
V\hat{a}r\left(\hat{\mu}_{SG2}\right) &= \frac{1}{\left(\theta_2-\theta_1\right)^2}\left[\theta_2^2\left(\frac{\hat{\sigma}_{z1}^2}{n_1}\right)+\theta_1^2\left(\frac{\hat{\sigma}_{z2}^2}{n_2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\left(-7\right)^2}\left[1^2\left(\frac{12{,}7}{5}\right)+7^2\left(\frac{6{,}7}{5}\right)\right] \\
&= 1{,}89
\end{aligned}
$$

olarak tahmin edilir.

2.5. Karma Modeller

Ortalama tahmini için yanıt modelleri, toplamsal ya da çarpımsal tekniğin kullanımına göre iki başlık altında incelenmektedir. Bu bölümde hem toplamsal hem de çarpımsal tekniğin bir arada uygulandığı modeller tanıtılacaktır.

2.5.1. Saha [29] Rastgeleleştirilmiş Yanıt Modeli

Saha [29], ortalama tahmini için tam toplamsal-çarpımsal RYM'yi önermiştir. Önerdiği modelde diğer modellerden farklı olarak iki rastgele düzen değişkeni kullanarak toplamsal ve çarpımsal teknikleri bir arada kullanmıştır. Karma RYM'de tüm cevaplayıcıların rastgele düzeni kullanarak soruları cevaplaması beklenir. Bu model matematiksel olarak,

$$Z = W\left(Y+U\right) \quad , \quad Y \geq 0 \tag{2.134}$$

olarak tanımlanır.

Burada, Z cevaplayıcının görüşmeciye verdiği yanıt ve Y ilgilenilen hassas değişken olsun. Y, tahmin edilmek istenen değişken olduğu için ortalaması (μ_Y) ve varyansı (σ_Y^2) bilinmeyen bir değişkendir. W ve U ise rastgele düzende bilinen bir dağılımdan türetilen değişkenler olsun. W ve U değişkenlerinin dağılımları bilindiği için ortalamaları $\left(\mu_W, \mu_u\right)$ ve varyansları (σ_w^2, σ_u^2) bilinmektedir.

Buradan Y değişkeni için yansız tahmin edici,

$$\hat{\mu}_s = \bar{z} \tag{2.135}$$

olarak elde edilir. Burada , $\bar{z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i$ 'dir.

Bu tahmin edicinin varyansı,

$$\begin{aligned} Var(\hat{\mu}_s) &= \frac{1}{n}\frac{Var(Z)}{\mu_w^2} \\ &= \frac{1}{n}\frac{E(Z^2) - [E(Z)]^2}{\mu_w^2} \\ &= \frac{1}{n}\left\{\frac{\mu_u^2\sigma_w^2 + \mu_w^2(\sigma_u^2 + \sigma_y^2) + \sigma_w^2(\mu_y^2 + \sigma_y^2 + \sigma_u^2) + 2\mu_y\mu_u\sigma_w^2}{\mu_w^2}\right\} \end{aligned} \tag{2.136}$$

olarak bulunur.

2.5.2. Diana ve Perri [7] Rastgeleleştirilmiş Yanıt Modelleri

Diana ve Perri [7], Saha [29] modelinden yararlanarak ortalama tahmini için 3 yeni RYM önermişlerdir. Aşağıda bu modeller tek tek ele alınmıştır.

Diana ve Perri [7] Model-1

Diana ve Perri [7], Saha [29]'un tam çarpımsal-toplamsal RYM'sinden yararlanarak kısmi (iki aşamalı) çarpımsal-toplamsal RYM'yi önermiştir.

İlk aşamada P oranına sahip cevaplayıcılardan doğrudan gerçek yanıtlar alınırken, ikinci aşamada geriye kalan (1-P) oranlık cevaplayıcıya rastgele düzen uygulanır. O halde bu model şu şekilde tanımlanabilir :

$$Z = \begin{cases} Y & P \\ W(Y+U) & 1-P \end{cases} \quad , \quad Y \geq 0 \tag{2.137}$$

Burada, Z cevaplayıcının görüşmeciye verdiği yanıt ve Y ilgilenilen hassas değişken olsun. Y, tahmin edilmek istenen değişken olduğu için ortalaması (μ_Y) ve varyansı (σ_Y^2) bilinmeyen bir değişkendir. W ve U ise rastgele düzende bilinen bir dağılımdan türetilen değişkenler olsun. W ve U değişkenlerinin dağılımları bilindiği için ortalamaları (μ_W, μ_u) ve varyansları (σ_w^2, σ_u^2) bilinmektedir.

Bu modelde P=0 olduğunda model Saha [29] modeline, P=1 olduğunda ise doğrudan cevap alma tekniğine dönüşecektir.

Buradan Y değişkeni için yansız tahmin edici,

$$E(Z)=(P)E(Y)+(1-P)E(WY+WU)$$

$$\bar{z} = \mu_y \left[P + (1-P)\mu_w\right] + (1-P)\mu_w\mu_u \tag{2.138}$$

Eşitlik (2.131)'den μ_y çekilirse, $\hat{\mu}_{D1}$ tahmin edicisi ise

$$\hat{\mu}_{D1} = \frac{\bar{z} - (1-P)\mu_w\mu_u}{P + (1-P)\mu_w} \tag{2.139}$$

olarak elde edilir.

Bu tahmin edicinin varyansı,

$$\mathrm{Var}\left(\hat{\mu}_{D1}\right)=\frac{1}{n}\frac{\mathrm{Var}(Z)}{\left[P+(1-P)\mu_w\right]^2}$$

$$=\frac{1}{n}\frac{E\left(Z^2\right)-\left[E(Z)\right]^2}{\left[P+(1-P)\mu_w\right]^2}$$

$$=\frac{1}{n}\left\{\frac{\begin{array}{l}\left[P\left(\mu_y^2+\sigma_y^2\right)+(1-P)\left(\mu_w^2+\sigma_w^2\right)\left\{\left(\mu_y^2+\sigma_y^2\right)+\left(\mu_u^2+\sigma_u^2\right)+2\mu_y\mu_u\right\}\right]\\ -\left[P\mu_y+(1-P)\mu_w\left(\mu_y+\mu_u\right)\right]^2\end{array}}{\left[P+(1-P)\mu_w\right]^2}\right\} \qquad (2.140)$$

olarak bulunur.

Diana ve Perri [7] Model-2

Diana ve Perri [7], ikinci olarak farklı bir tam çarpımsal-toplamsal RYM'yi önermişlerdir. İlk modellerinde P oranında cevaplayıcıdan doğrudan yanıt alınıyordu. İkinci modellerinde cevaplayıcı daha koruma altına alan bir matematiksel ifade kullanmışlardır. Kişilerden doğrudan cevap almak yerine bu modelde doğrudan yanıt yerine çarpımsal teknikle yanıtlar alınmıştır.

İkinci model matematiksel olarak şu şekilde tanımlanabilir :

$$Z=W\left[PU+(1-P)Y\right] \quad , \quad Y\geq 0 \qquad (2.141)$$

Bu modelde P=0 olduğunda model Eichhorn ve Hayre [10] tam rastgeleleştirilmiş çarpımsal modeline dönüşecektir.

Burada Z, cevaplayıcının görüşmeciye verdiği yanıt ve Y ilgilenilen hassas değişken olsun. Y tahmin edilmek istenen değişken olduğu için ortalaması (μ_Y) ve varyansı (σ_Y^2) bilinmeyen bir değişkendir. W ve U ise rastgele düzende bilinen bir dağılımdan türetilen değişkenler olsun. W ve U değişkenlerinin dağılımları bilindiği için ortalamaları (μ_W, μ_u) ve varyansları $(\sigma_w^2,\ \sigma_u^2)$ bilinmektedir.

Buradan Y değişkeni için yansız tahmin edici,

E(Z)=E(W)[PE(U)+(1-P)E(Y)]

$$\bar{z} = \mu_w \left[P\mu_w + (1-P)\mu_y\right] \tag{2.142}$$

şeklindedir.

Eşitlik (2.142)'den μ_y çekilirse, $\hat{\mu}_{D2}$ tahmin edicisi ise

$$\hat{\mu}_{D2} = \frac{\bar{z} - P\,\mu_w\mu_u}{(1-P)\mu_w} \tag{2.143}$$

olarak elde edilir.

Bu tahmin edicinin varyansı,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\hat{\mu}_{D2}) &= \frac{1}{n}\frac{\mathrm{Var}(z)}{(1-P)^2\mu_w^2} \\
&= \frac{1}{n}\frac{E(z^2) - [E(z)]^2}{(1-P)^2\mu_w^2} \\
&= \frac{1}{n}\left\{\frac{P^2\mu_w^2\left(C_w^2(\mu_u^2+\sigma_u^2)+\sigma_u^2\right) + 2P(1-P)\sigma_w^2\mu_y\mu_u + (1-P)^2\mu_w^2\left(\sigma_y^2 + C_w^2(\mu_y^2+\sigma_y^2)\right)}{(1-P)^2\mu_w^2}\right\}
\end{aligned} \tag{2.144}$$

olarak bulunur.

Diana ve Perri [7] Model-3

Diana ve Perri [7], üçüncü olarak farklı bir kısmi(iki aşamalı) çarpımsal-toplamsal RYM'yi önermişlerdir. İlk aşamada P oranına sahip cevaplayıcılardan toplama tekniği ile yanıtlar alınırken, ikinci aşamada geriye kalan (1-P) oranlık cevaplayıcıdan çarpma tekniği ile yanıtlar alınır.

Üçüncü model şu şekilde tanımlanabilir:

$$Z = P(Y + U) + (1 - P)WY \tag{2.145}$$

Bu modelde P=0 olduğunda model Eichhorn ve Hayre [10] tam rastgeleleştirilmiş çarpımsal modeline dönüşecektir.

Buradan Y değişkeni için yansız tahmin edici,

$$E(Z)=P[E(Y)+E(U)]+(1-P)E(W)E(Y)$$

$$\bar{z} = P(\mu_y + \mu_u) + (1-P)\mu_w\mu_y \tag{2.146}$$

şeklindedir.

Eşitlik (2.146)'dan μ_y çekilirse, $\hat{\mu}_{D3}$ tahmin edicisi ise

$$\hat{\mu}_{D3} = \frac{\bar{z} - P\mu_u}{P + (1-P)\mu_w} \tag{2.147}$$

olarak elde edilir.

Bu tahmin edicinin varyansı,

$$\begin{aligned} Var(\hat{\mu}_{D3}) &= \frac{1}{n}\frac{Var(Z)}{[P + (1-P)\mu_w]^2} \\ &= \frac{1}{n}\frac{E(Z^2) - [E(Z)]^2}{[P + (1-P)\mu_w]^2} \\ &= \frac{1}{n}\left\{\frac{\begin{gathered} P^2\left[(\mu_y^2 + \sigma_y^2) + (\mu_u^2 + \sigma_u^2) + 2\mu_y\mu_u\right] + 2P(1-P)\mu_w\left[(\mu_y^2 + \sigma_y^2) + \mu_y\mu_u\right] \\ + (1-P)^2\left[\sigma_y^2(\mu_w^2 + \sigma_w^2) + \sigma_w^2\mu_y^2\right] \end{gathered}}{[P + (1-P)\mu_w]^2}\right\} \end{aligned} \tag{2.148}$$

olarak bulunur.

Diana ve Perri [7]'nin önerdiği modeller ile Eichhorn ve Hayre [10] modelinin karşılaştırılması:

(i) Diana ve Perri [7] model II'nin ile Eichhorn ve Hayre [10] modeli ile karşılaştırıldığında,

$$V\left(t_{D2}\right) < V\left(t_{EH}\right)$$

$$\frac{1}{n}\left\{\frac{p^2\mu_w^2\left[C_w^2\left(\mu_u^2+\sigma_u^2\right)+\sigma_u^2\right]+2p\left(1-p\right)\sigma_w^2\mu_y\mu_u+\left(1-p\right)^2\mu_w^2\left[\sigma_y^2+C_w^2\left(\mu_y^2+\sigma_y^2\right)\right]}{\left(1-p\right)^2\mu_w^2}\right\} < \frac{1}{n}\frac{\sigma_y^2\left(\mu_w^2+\sigma_w^2\right)+\sigma_w^2\mu_y^2}{\mu_w^2}$$

$$\frac{1}{n}\left[\frac{p^2\left[\sigma_w^2\left(\mu_u^2+\sigma_u^2\right)+\sigma_u^2\right]+2p\left(1-p\right)C_w^2\mu_u\mu_y}{\left(1-p\right)^2}\right] < 0 \qquad (2.150)$$

elde edilir.

Eşitlik (2.150)'de verilen koşul altında Diana ve Perri [7] Modeli-II Eichhorn ve Hayre [10] modelinden daha etkindir. P=0 olduğu durumda her iki model varyansı birbirine eşit olacaktır.

Diana ve Perri [7] Model-III ile Eichhorn ve Hayre [10] modeli karşılaştırıldığında,

$$V\left(t_{D3}\right) < V\left(t_{EH}\right)$$

$$0 < \frac{1}{n}\left[\frac{\sigma_w^2\left(\mu_y^2+\sigma_y^2\right)^2}{\mu_w^2\left[\mu_w^2\sigma_u^2+\sigma_w^2\left(\mu_y^2+\sigma_y^2\right)\right]}\right] \qquad (2.151)$$

elde edilir.

Eşitlik (2.151)'de verilen koşul altında Diana ve Perri [7] Modeli-III Eichhorn ve Hayre [10] modelinden daha etkindir. Koşuldaki ifade her zaman pozitif olduğu için Diana ve Perri [7] Modeli-III Eichhorn ve Hayre [10] modelinden her zaman daha etkindir.

2.6. Çeşitli RYM'ler için Sayısal Örnek

Bu bölümde şimdiye kadar tanıtılan bazı tahmin edicilerin değerlerinin ve varyanslarının nasıl hesaplandığını göstermek için bir sayısal çalışma gerçekleştirildi. Aynı zamanda çıkan sonuçlar değerlendirilerek hangi tür modellerde önerilen tahmin edicilerin daha etkin olduğuna yönelik bir karşılaştırma yapılmıştır. Daha önceki bölümlerde verilen sayısal örneklerde kitle bilgisi olmadığı için bir karşılaştırma yapılmamıştır. Bu örnekte kitle bilgisinin elde edilebilir olduğu bir çalışma gerçekleştirilmiştir. Çalışma için Hacettepe Üniversitesi İstatistik Bölümü öğrencilerinin genel akademik ortalamaları (GAO) elde edilmiştir. Kimi öğrenciler için GAO söylenmesi çok da zor, utanç verici bir bilgi olmasa da bazı öğrenciler için GAO bilgisini vermek o kadar da kolay olmayabilir. Hem bu açıdan düşünüldüğünde hem de GAO bilgisine ulaşabilir olduğundan hassas değişken olarak öğrencilerin GAO'ları alınmıştır. GAO nicel bir değişken olduğu için ortalama tahmini için önerilmiş olan modeller ile sayısal çalışma yapılmıştır. Kitle olarak Hacettepe Üniversitesi İstatistik Bölümünde okuyan öğrenciler alınmıştır. Hacettepe Üniversitesi İstatistik Bölümünde okuyan öğrencilerin ortalama GAO'su 2,21 (μ_y) ve varyansı 0,4343 (σ_y^2) olarak hesaplanmıştır. Her model için 30 öğrencilik bir örneklem seçilmiştir. Her bir model için ortalaması 1 (μ_w) ve varyansı 0,5 (σ_w^2) olan rastgele bir değişken türetilmiştir. Tüm iki aşamalı modeller için T=0,40 ve (1-T)=0,60 olarak belirlenmiştir. Gjestvang and Singh [12] modeli için $\alpha = 0{,}012$ ve $\beta = 0{,}008$ olarak belirlenmiştir $(T = \beta/(\alpha+\beta) = 0{,}40)$. Hussain ve Shabbir [24] modelleri için a=0,008 and b=0,012 olarak belirlenmiştir (Hussain ve Shabbir [24] model-II için de aynı değerler alınmıştır). n=30 öğrencilik örneklemlerden her biri içinde 5 öğrencinin yanlış bilgi verdiği düşünülerek buna göre veriler girilip hesaplamalar yapılmıştır. Çizelge 2.21'de tahmin ediciler ve tahmin edicilerle ilgili hesaplamalar verilmiştir. Çizelge 2.21'de $\hat{\mu}_y$, çeşitli tahmin ediciler için GAO tahminini, $V(\hat{\mu}_y)$, bu tahminin varyansını ve $\hat{V}(\hat{\mu}_y)$ ise bu tahminin varyans tahminini göstermektedir.

Çizelge 2.21. Çeşitli RYM'lerde önerilen tahmin ediciler

◖ $= 0{,}40,\ P = 0{,}50,\ H = 0{,}20$ ve $\alpha = b = b_1 = b_2 = 0{,}012,\ \ \beta = a = a_1 = a_2 = 0{,}008$

	Tahmin Ediciler	$\hat{\mu}_y$	$V(\hat{\mu}_y)$	$\hat{V}(\hat{\mu}_y)$
Toplamsal Modeller	Greenberg v.d. [14]	2,2191	0,031144	0,033099
	Thornton ve Gupta [36]	2,2352	0,032478	0,038135
	Gjestvang veSingh [12]	2,1962	0,014483	0,015889
Çarpımsal Modeller	Eichhorn ve Hayre [10]	2,7018	0,103118	0,084554
	Bar-Lev SK v.d. [1]	2,4538	0,067662	0,056645
	Ryu v.d. [28]	2,2334	0,041070	0,037617
	Hussain ve Shabbir-I [24]	2,3136	0,0144811	0,01187
	Hussain ve Shabbir-II [24]	2,0854	0,014483	0,016622
Seçimli Modeller	Gupta v.d. [16]	2,2374	0,032206	0,029465
	Gupta ve Shabbir [19]	2,2148	0,025115	0,025888

Çizelge 2.21.'e göre, Gjestvang ve Singh [12], Hussain ve Shabbir-I [24] ve Hussain ve Shabbir-II[24]'ün önerdiği modellerdeki tahmin ediciler en etkin tahmin edicilerdir. Çünkü önerilen bu modellerde araştırmacının kendi belirlediği sabit katsayılar vardır. Bu tür modellerde bu katsayılar (α, β, a_1, b_1, a_2, b_2) mümkün olduğunca küçük belirlenerek daha küçük varyans elde edilebilir. Ayrıca, Çizelge 2.21. incelendiğinde iki aşamalı modellerin varyansları tek aşamalı modellerin varyanslarından daha küçük bulunmuştur. Dolayısıyla iki aşamalı modellerin tek aşamalı modellerden daha etkin olduğu görülür. Çünkü iki aşamalı modellerde doğrudan gerçek cevabı alma imkanı vardır. Seçimli modeller incelenmek istenirse, seçimli modellerin seçimsiz benzer modellerden daha duyarlı sonuçlar elde edildiği görülmektedir. Seçimli modellerin avantajı ise cevaplayıcının hangi yöntemi kullanacağı hakkında seçim hakkını kullanmasıdır. Soru kişi için hassas ise rastgele düzeni kullanır, hassas değil ise doğrudan yanıtını verir. Bu yüzden seçimli modeller diğer yöntemlere göre daha güvenilir modellerdir.

3.YARDIMCI DEĞİŞKEN BİLGİSİNİN KULLANILDIĞI RASTGELELEŞTİRİLMİŞ YANIT MODELLERİ

N birimden oluşan sonlu bir kitlede, kitle ortalaması birçok tahmin yöntemiyle tahmin edilebilir. Basit tahmin bilinen en klasik tahmin yöntemidir. Tezin önceki bölümlerinde verilen modellerde hassas değişkenin kitle ortalaması tahmininde basit tahmin yöntemi kullanılmıştır. İlgilenilen değişken Y ile yüksek ilişkili olan bir yardımcı değişkenin kullanılmasıyla tahminler daha duyarlı olmaktadır. Yardımcı değişken bilgisi oransal, regresyon ve çarpımsal tahmin edicilerde kullanılır [26]. Bu bölümde rastgeleleştirilmiş yanıt modellerinde yardımcı değişken bilgisinin kullanıldığı tahmin ediciler tanıtılacaktır.

3.1. Oran Tahmini için Rastgeleleştirilmiş Yanıt Modelleri

Bu bölümde rastgeleleştirilmiş yanıt modellerinde literatürde önerilmiş olan oran tahmini için yardımcı değişken bilgisinin kullanıldığı tahmin ediciler tanıtılacaktır.

3.1.1. Rastgeleleştirilmiş Yanıt Modelinde Oran Tahmini için Zaizai [39] Oransal Tahmin Edicisi

Rastgeleleştirilmiş yanıt tekniğinin amacı, cevaplayıcılara güven vererek en etkin tahminleri elde etmektir. Hassas soru içermeyen çalışmalarda yardımcı değişken bilgisini kullanmak daha etkin tahminler elde edilebilir. Bu amaçla Zaizai [39], rastgeleleştirilmiş yanıt modelinde yardımcı değişken bilgisini kullanarak yeni bir model geliştirmiştir. Zaizai [39], Warner [37] modelinde hassas değişken (Y)'den başka bir de yardımcı değişken kullanmıştır. Bu yardımcı değişken (X), hassas olmayan fakat hassas soruyla ilişkili olan bir değişkendir. Örneğin, hassas soru "kişilerin gelirleri" ya da "vergi kaçırıp kaçırmama durumları" olsun. Bu modelde yardımcı değişken (X) olarak kişinin sahip olduğu arabanın markası, oturduğu evin büyüklüğü ya da oturduğu semt gibi hassas olmayan fakat kişinin gelirini ya da vergi kaçırıp kaçırmadığını ilgilendiren değişkenler alınabilir.

Bu model için rastgele düzen bir deste kart olsun. Kartlarda iki ifade bulunmaktadır. P oranındaki kart üzerinde "A hassas davranışa sahibim, X_i değeri nedir" yazılıdır, (1-P) oranındaki kart üzerinde "A hassas davranışa sahip değilim, X_i değeri nedir" yazılıdır.

Her bir ifade aslında 2 soru içermektedir. Eğer cevaplayıcının seçtiği kart, A hassas davranışıyla uyumlu ise evet ya da hayır deyip arkasından yardımcı sorunun cevabını verecektir. Görüldüğü üzere bu modelde sadece hassas değişken rastgeleleştirilmiştir. Kartlardaki her iki ifade de yardımcı değişkene ilişkin bilgi sorulmaktadır. Cevaplayıcı hangi kartı seçerse seçsin mutlaka yardımcı değişkene ilişkin bilgiyi verecektir.

Zaizai [39], oransal RYM tahmin edicisi Bölüm (2.1.1)'de verilen Warner [37] tahmin edicisine benzer şekilde,

$$\hat{\pi}_Z = \frac{\hat{\lambda}_o - (1-P)}{2P-1} \tag{3.1}$$

biçiminde oransal tahminden yararlanarak verilmiştir.

Burada,

$\hat{\lambda}_o = \dfrac{\hat{\lambda}}{\bar{x}}\mu_x$: λ'nın oransal tahmin edicisi, (3.2)

$\hat{\lambda} = \dfrac{n_1}{n}$:Hassas soruya evet diyenlerin oranı, (3.3)

$\mu_x = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$: X yardımcı değişkenin kitle ortalaması, (3.4)

$\bar{x} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$: X yardımcı değişkenin örneklem ortalaması'dır. (3.5)

Zaizai [39], oransal RYM tahmin edicisinin varyansı,

$$Var(\hat{\pi}_Z) = \frac{Var(\hat{\lambda}_o)}{(2P-1)^2} \tag{3.6}$$

şeklindedir. Burada $\hat{\lambda}_o$'nun varyansı,

$$\begin{aligned} Var(\hat{\lambda}_o) &= \frac{1}{n}\left[\sigma_\lambda^2 - 2R\sigma_{\lambda X} + R^2\sigma_x^2\right] \qquad \Rightarrow \quad R = \frac{\lambda}{\mu_x} \\ &= \frac{1}{n}\sigma_\lambda^2 + \frac{1}{n}\left[R^2\sigma_x^2 - 2R\sigma_{\lambda X}\right] \\ &= \frac{1}{n}\sigma_\lambda^2 + \frac{1}{n}\left[\lambda^2 C_x^2 - 2\frac{\lambda}{\mu_x}\sigma_{\lambda X}\right] \end{aligned} \tag{3.7}$$

olarak Taylor Serisi açılımından elde edilir [3].

Eşitlik (3.7), Eşitlik (3.6)'da yerine konulursa Zaizai [39] oransal RYM tahmin edicisinin varyansı,

$$Var(\hat{\pi}_Z)=\frac{1}{n(2P-1)^2}\sigma_\lambda^2+\frac{\lambda}{n(2P-1)^2}\left[\lambda C_x^2-\frac{2\sigma_{\lambda X}}{\mu_x}\right]$$

(3.8)

şeklindedir. Eşitlik (3.8)'de $\sigma_{\lambda X}$ ifadesi

$$\begin{aligned}\sigma_{\lambda X}&=E(\lambda_o X)-E(\lambda_o)E(X)\\&=E\left[\{(2P-1)\pi+(1-P)\}X\right]-E\left[(2P-1)\pi+(1-P)\right]E(X)\\&=(2P-1)E(\pi X)+(1-P)\mu_x-(2P-1)E(\pi)E(X)-(1-P)\mu_x\\&=(2P-1)\left[E(\pi X)-E(\pi)E(X)\right]\\\sigma_{\lambda X}&=(2P-1)\sigma_{\pi X}\end{aligned} \tag{3.9}$$

şeklinde yazılır. Eşitlik (3.9), Eşitlik (3.8)'de yerine yazılırsa Zaizai [39] oransal RYM tahmin edicisinin varyansı,

$$\begin{aligned}Var(\hat{\pi}_Z)&=\frac{1}{n(2P-1)^2}\sigma_\lambda^2-\frac{\lambda}{n(2P-1)^2}\left[\frac{2(2P-1)\sigma_{\pi x}}{\mu_x}-\lambda C_x^2\right]\\&=Var(\hat{\pi}_w)-\frac{\lambda}{n(2P-1)^2}\left[2(2P-1)\pi C_{\pi x}-\lambda C_x^2\right]\end{aligned} \tag{3.10}$$

olarak elde edilir. Burada, $C_{\pi x}=\sigma_{\pi x}/(\mu_x\pi)$'dir. C_x, X değişkeni için değişim katsayısıdır. $C_{\pi x}$, X ile π değişkenleri arasındaki değişim katsayısıdır.

3.1.2. Zaizai [39] Oransal Tahmin Edicisi için Sayısal Örnek

N=100 kişilik bir bölgede kürtaja bakış açısı ile ilgili bir çalışma yapılsın. Hassas değişken kişinin kürtajı onaylayıp onaylamama durumu olsun. Hassas değişkenin tahmininde kullanılacak yardımcı değişken ise kişilerin gelir düzeyi olsun. Kişilerin gelir düzeyi 1 ile 5 arasında yüksek gelir düzeyinden düşük gelir düzeyine kadar sınıflandırılmıştır. Kürtaj değişkeni ise onaylıyorum ve onaylamıyorum olarak iki düzeyli bir nitel değişkendir. n=10 kişi yerine konulmadan basit rastgele örnekleme seçilsin. Kişilere P=0,20 olduğu RYM uygulansın. Bu durumda kişilerin %20'si kürtaj ile soruyu doğrudan yanıtlarken geriye kalan kişilerin %80'i R düzenini kullanarak cevaplarını verir.

Kürtajı onaylayan kişilerin oran tahmini ve bu tahminin hata kareler ortalaması tahmini Çizelge 3.1'de verilen veriler yardımıyla bulunabilir.

Çizelge 3.1. Zaizai [39] Oransal Tahmin Edicisi için Sayısal Örnek

Kişiler	Gerçek Yanıtlar λ_i	X_i	Seçilen Karttaki İfade*	Verilen Yanıtlar $\hat{\lambda}_i$	X_i	Yanıt Dağılımı
1	Evet	1	1	Evet (1)	1	(1, 1)
2	Evet	2	2	Hayır (0)	2	(0, 2)
3	Hayır	3	1	Hayır (0)	3	(0, 3)
4	Hayır	3	2	Evet (1)	3	(1, 3)
5	Hayır	4	2	Evet (1)	4	(1, 4)
6	Hayır	2	2	Evet (1)	2	(1, 2)
7	Hayır	3	2	Evet (1)	3	(1, 3)
8	Evet	2	2	Hayır (0)	2	(0, 2)
9	Evet	1	2	Hayır (0)	1	(0, 1)
10	Hayır	3	2	Evet (1)	3	(1, 3)
Ortalama				0,60	2,4	
Varyans				0,27	0,93	
Değişim Katsayısı				0,86	0,40	

*****1: “Kürtajı onaylıyorum, Gelir düzeyiniz nedir?” 2**:** “Kürtajı onaylamıyorum, Gelir düzeyiniz nedir?”

Çizelge 3.1.’de “Gerçek Yanıtlar” sütununda gerçekte bu yanıtlar çalışmada bilinmemesine rağmen bu örnek için kişilerin gerçek yanıtlarının bilindiğini varsayalım. Seçilen kart sütununda 10 kişi için oluşturulan kartlar yer almaktadır. P=0,20 olduğu için kartların 10*0,20=2’sinde “Kürtajı onaylıyorum, Gelir düzeyiniz nedir?” ifadesi bulunur. Kartların 10*0,80=8’inde “Kürtajı onaylamıyorum, Gelir düzeyim…’dır” ifadesi bulunur. Kişiler seçtiği ifadeye uygun yanıtı vererek(evet ya da hayır), gelir düzeyi ile ilgili durum için gerçek yanıtlarını direkt verirler. Çizelge 3.1’de 1. kişinin seçtiği karttaki ifade “Kürtajı onaylıyorum, Gelir düzeyiniz nedir?” şeklindedir. Kişi gerçekte kürtajı onaylıyor ve gelir düzeyi 1’dir yani çok yüksektir. Dolayısıyla kişinin verdiği yanıt “Evet, 1” olacaktır. 2.kişinin seçtiği karttaki ifade “Kürtajı onaylamıyorum, Gelir düzeyiniz nedir?” şeklindedir. Kişi gerçekte kürtajı onaylıyor ve gelir düzeyi 2’dir yani yüksektir. Dolayısıyla kişinin verdiği yanıt “Hayır, 2” olacaktır. Kürtajı onaylayıp onaylamama ile ilgili değişkende hayır diyenler “0”, evet diyenler “1” olarak kodlanırsa bu örnek için oluşacak yanıt dağılımı { (1, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 3), (1, 4), (1, 2), (1, 3), (0, 2), (0, 1), (1, 3) şeklindedir.

Kişilerin verdiği yanıtlar kullanılarak kişilerin kürtajı onaylama oranı tahmin edilebilir.

Çizelge 3.1.’deki verilere ait bazı bilgiler aşağıda özetlenmiştir.

$\hat{\lambda} = \frac{n_1}{n} = \frac{6}{10} = 0{,}60$ (Evet diyenlerin oranı), $\bar{x} = 2{,}4$, $\hat{\sigma}_{\lambda}^2 = 0{,}27$, $\hat{C}_{\lambda} = 0{,}86$, $\hat{\sigma}_x^2 = 0{,}93$,

$\hat{C}_x = 0{,}40$, $\hat{\sigma}_{\lambda x} = 0{,}18$, $r_{\lambda u} = 0{,}36$.

O bölgedeki kişilerin gelir düzeylerinin $\mu_x = 2$ olduğu biliniyor.

Eşitlik (3.1)'den kürtajı onaylama oran tahmini,

$$\hat{\pi}_Z = \frac{\hat{\lambda}\left(\frac{\mu_x}{\bar{x}}\right) - (1-P)}{2P-1} = \frac{0{,}60 * \left(\frac{2}{2{,}4}\right) - 0{,}80}{-0{,}60} = 0{,}50$$

olarak hesaplanır.

Eşitlik (3.8)'den kürtajı onaylama oran tahmininin hata kareler ortalaması tahmini,

$$\begin{aligned} \hat{Var}(\hat{\pi}_Z) &= \frac{1}{n(2P-1)^2}\hat{\sigma}_{\lambda}^2 + \frac{\lambda}{n(2P-1)^2}\left[\hat{\lambda}\hat{C}_x^2 - \frac{2\hat{\sigma}_{\lambda x}}{\mu_x}\right] \\ &= \frac{1}{10(-0{,}60)^2}0{,}27 + \frac{0{,}60}{10(-0{,}60)^2}\left[0{,}60 * 0{,}40^2 - \frac{2 * 0{,}18}{2}\right] \\ &= 0{,}0678 \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

3.1.3. Rastgeleleştirilmiş Yanıt Modelinde Oran Tahmini için Diana ve Perri [5] Regresyon Tahmin Edici Ailesi

Diana ve Perri [5], Zaizai [39] oransal RYM modelini geliştirerek RYM'de bir tahmin edici ailesi önermiştir.

Diana ve Perri [5] RYM tahmin edici ailesi,

$$\hat{\pi}_{DP} = \frac{\hat{\lambda}_d - c}{h} \tag{3.11}$$

şeklinde verilmiştir. Burada, c ve h sabit değerlerdir.

$\hat{\lambda}_d = \hat{\lambda} - b(\bar{x} - \mu_x)$: λ'nın fark tahmin edicisidir.

(3.12)

Böylece Diana ve Perri [5] RYM tahmin edici ailesi,

$$\hat{\pi}_{DP} = \frac{\hat{\lambda} - b(\bar{x} - \mu_x) - c}{h} \tag{3.13}$$

olur.

Diana ve Perri [5] RYM tahmin edicisi ailesinin varyansı,

$$\begin{aligned} Var(\hat{\pi}_{DP}) &= \frac{Var(\bar{d})}{h^2} \\ &= \frac{1}{nh^2}\left(\sigma_\lambda^2 - 2b\sigma_{\lambda x} + b^2\sigma_x^2\right) \\ &= \frac{1}{nh^2}\sigma_\lambda^2 - \frac{1}{nh^2}\left(2b\sigma_{\lambda x} - b^2\sigma_x^2\right) \\ &= \frac{1}{nh^2}\sigma_\lambda^2 - \frac{b}{nh^2}\left(2\sigma_{\lambda x} - b\sigma_x^2\right) \\ &= \frac{1}{nh^2}\lambda(1-\lambda) - \frac{b}{nh^2}\left(2\sigma_{\lambda x} - b\sigma_x^2\right) \end{aligned} \tag{3.14}$$

olarak elde edilir.

Eşitlik(3.14)'te $b = b_0 = \frac{\sigma_{\lambda x}}{\sigma_x^2}$ konulursa Diana ve Perri [5] RYM tahmin edici ailesinin minimum varyansı,

$$Var(\hat{\pi}_{DP})_{min} = \frac{1}{nh^2}\lambda(1-\lambda) - \frac{1}{nh^2}\frac{\sigma^2_{\lambda x}}{\sigma_x^2} \tag{3.15}$$

olarak elde edilir.

$\hat{\pi}_{DP}$ tahmin edici ailesinden elde edilen bazı tahmin ediciler Çizelge 3.2'de verilmiştir.

Çizelge 3.2. $\hat{\pi}_{DP}$ tahmin edici ailesinden elde edilen bazı tahmin ediciler

Tahmin Edici	**b**	**c**	**h**
Warner [37]	0	(1-P)	(2P-1)
Greenberg v.d. [13]	0	(1-P) π_B	P
Zaizai [39]	λ/μ_x	(1-P)	(2P-1)
Diana ve Perri [6]	$(P-1)\sigma_{\pi x}/\sigma_x^2$	(1-P)	(2P-1)

3.1.4. Diana ve Perri [5] Regresyon Tahmin Edici Ailesi için Sayısal Örnek

Bölüm 3.1.2’de verilen örnek Diana ve Perri [5] regresyon tahmin edici ailesi için de kullanılabilir. Çizelge 3.1’de kişilerin verdiği yanıtlar kullanılarak kişilerin kürtajı onaylama oranı Diana ve Perri [5] regresyon tahmin edici ailesi ile tahmin edilebilir.

Çizelge 3.1.’deki verilere ait bazı bilgiler aşağıda özetlenmiştir.

$\hat{\lambda} = \frac{n_1}{n} = \frac{6}{10} = 0{,}60$ (Evet diyenlerin oranı), $\bar{x} = 2{,}4$, $\hat{\sigma}^2_{\lambda} = 0{,}27$, $\hat{C}_{\lambda} = 0{,}86$, $\hat{\sigma}^2_x = 0{,}93$,

$\hat{C}_x = 0{,}40$, $r_{\lambda u} = 0{,}36$, c= (1-P)=0,80, h= (2P-1)= -0,60, $b = \frac{\hat{\sigma}_{\lambda x}}{\sigma^2_x} = \frac{0{,}18}{0{,}93} = 0{,}19$

O bölgedeki kişilerin gelir düzeylerinin $\mu_x = 2$ olduğu biliniyor.

$$\hat{\pi}_{DP} = \frac{\hat{\lambda} - b(\bar{x} - \mu_x) - c}{h}$$

Eşitlik (3.11)’den kürtajı onaylama oran tahmini,

$$\hat{\pi}_{DP} = \frac{\hat{\lambda} - b(\bar{x} - \mu_x) - c}{h} = \frac{0{,}60 - 0{,}19(2{,}4 - 2) - 0{,}80}{(-0{,}60)} = 0{,}46$$

olarak hesaplanır.

Eşitlik (3.15)’ten kürtajı onaylama oran tahmininin hata kareler ortalaması tahmini,

$$\begin{aligned} Var(\hat{\pi}_{DP})_{min} &= \frac{1}{nh^2}\lambda(1-\lambda) - \frac{1}{nh^2}\frac{\sigma^2_{\lambda X}}{\sigma^2_x} \\ &= \frac{1}{10(-0{,}60)^2}0{,}60(1-0{,}60) - \frac{1}{10(-0{,}60)^2}\frac{(0{,}18)^2}{0{,}93} \\ &= 0{,}0646 \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

3.2. Ortalama Tahmini için Rastgeleleştirilmiş Yanıt Modelleri

Bu bölümde ortalama tahmini için yanıt modellerinde literatürde önerilmiş olan yardımcı değişken bilgisinin kullanıldığı tahmin ediciler tanıtılacaktır. Bu bölümde verilen tahmin edicilerde yerine konulmadan basit rastgele örnekleme kullanılmıştır.

3.2.1. Rastgeleleştirilmiş Yanıt Modelinde Ortalama Tahmini için Diana ve Perri [6] Regresyon Tahmin Edicisi

Diana ve Perri [6], hassas değişkenin nitel olduğu durumda önerdikleri tahmin edici ailesinde nitel değişken tahmini yerine nicel değişken tahmini için önerilen tekniği kullanarak yeni bir tahmin edici ailesi önermişlerdir.

Diana ve Perri [6]'nın önerdikleri tahmin edici ailesi için yanıt değişkeni dağılımı şu şekilde gösterilebilir:

$$(Z, U) \Rightarrow \begin{cases} (Y, X), & P \text{ olasılığı ile} \\ (S, R), & 1\text{-}P \text{ olasılığı ile} \end{cases} \tag{3.16}$$

Eşitlik (3.16) ile verilen dağılımda Y ortalaması μ_y ve varyansı σ_y^2 olan hassas değişken, X hassas olmayan, fakat hassas değişken ile ilişkili olan kitle ortalaması bilinen (μ_x) yardımcı değişkendir. Z, hassas değişken Y üzerindeki yanıt değişkenini ifade etmektedir. Y üzerindeki yanıt değişkeni için kullanılan düzen S ile ifade edilmektedir. U ise yardımcı değişken X üzerindeki yanıt değişkenini ifade etmektedir. X üzerindeki yanıt değişkeni için kullanılan düzen ise R ile ifade edilmektedir. Bu teknik uygulanırken P oranındaki cevaplayıcı X ve Y sorularına doğrudan yanıt verecektir. Geriye kalan (1-P) oranındaki cevaplayıcıya S ve R düzenleri uygulanacaktır. S ve R düzenlerinde doğrudan yanıt alma tekniğinin yanısıra Bölüm 2'de verilen toplamsal ve çarpımsal teknikler de kullanılabilir. Bu teknikler uygulanırken Z yanıt değişkeni için ortalaması μ_w ve varyansı σ_w^2 olan W rastgele değişkeni türetilir. U yanıt değişkeni için ise ortalaması μ_t ve varyansı σ_t^2 olan T rastgele değişkeni türetilir. Burada rastgele düzende türetilen değişkenler ile hassas değişken ve hassas olmayan değişkenler birbirinden bağımsızdır. S ve R düzenlerinin kullanımı Çizelge 3.2'de verilmiştir. Bu açıklamalara göre her bir cevaplayıcı için yanıt dağılımı $(z_1,u_1),(z_2,u_2),...,(z_n,u_n)$ şeklinde olacaktır.

Diana ve Perri [6] RYM tahmin edicisi ailesi,

$$\hat{\mu}_{DP} = \frac{\bar{z}_d - c}{h}, \qquad (h \neq 0) \tag{3.17}$$

şeklinde verilmiştir. Burada, c ve h sabit değerler, $\bar{z}_d = \bar{z} + b(\mu_u - \bar{u})$: μ_z için regresyon tahmin edicisi, $\mu_u = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_i$, $\bar{u} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i$ $E(\bar{z}) = \mu_z$, $E(\bar{u}) = \mu_u$'dır.

Böylece Diana ve Perri [6] RYM tahmin edici ailesi,

$$\hat{\mu}_{DP} = \frac{\bar{z} + b(\mu_u - \bar{u}) - c}{h}, \qquad (h \neq 0) \tag{3.18}$$

Diana ve Perri [6] RYM tahmin edicisi ailesinin yanı,

$$\begin{aligned} E(\hat{\mu}_{DP}) &= \frac{E(\bar{z}_d) - c}{h} \qquad (h \neq 0) \\ &= \frac{\mu_z - c}{h} \\ E(\hat{\mu}_{DP}) &= \mu_z \end{aligned} \tag{3.19}$$

şeklindedir. Dolayısıyla Diana ve Perri [6] RYM tahmin edici ailesi yansızdır.

Diana ve Perri [6] RYM tahmin edicisi ailesinin varyansı,

$$\begin{aligned} Var\left(t_{DP}\right) &= \frac{Var\left(z_d\right)}{h^2} \\ &= \frac{1}{nh^2}\left(\sigma_z^2 - 2b\sigma_{zu} + b^2\sigma_u^2\right) \end{aligned} \tag{3.20}$$

olarak elde edilir.

Eşitlik (3.20)'de $b = b_0 = \frac{\sigma_{zu}}{\sigma_u^2}$ konulursa Diana ve Perri [6] tahmin edici ailesinin minimum varyansı,

$$Var\left(t_{DP}\right)_{min} = \frac{\sigma_z^2}{nh^2}\left(1 - \rho_{zu}^2\right) \tag{3.21}$$

olarak elde edilir.

Eşitlik (3.21)'deki varyans incelendiğinde varyansın iki çarpımdan oluştuğu söylenebilir. Varyansın ilk kısmı $\sigma_z^2 / \left(nh^2\right)$ yardımcı değişkenin kullanılmadığı durumdaki varyans eşitliğidir. Varyansı ikinci kısmı ise $\left(1-\rho_{zu}^2\right)$ yardımcı değişkenin kullanılmasından dolayı gelen bir katsayıdır. Bu katsayıya varyans küçültme katsayısı da denilebilir.

Çizelge 3.2'de S ve R'nin özel durumları için bazı rastgele yanıt modelleri verilmiştir. Çizelge 3.2'de Model sütunu uygulanabilecek modellerin numaralarını, S sütunu Y hassas değişken üzerinde uygulanabilecek olan teknikleri, R sütunu ise X değişkeni üzerinde uygulanabilecek teknikleri göstermektedir. c ve h sütunları ise uygulanan modellere göre c ve h sabitlerinin alacağı değerleri göstermektedir.

Çizelge 3.2. Tahmin edici ailesi için bazı özel rastgele yanıt modelleri

Model	**S**	**R**	**P**	**c**	**h**
M1	Y+W	X	[0,1]	$(1-P)\mu_w$	1
M2	YW	X	[0,1]	0	$P+(1-P)\mu_w$
M3	Y+W	X+T	[0,1]	$(1-P)\mu_w$	1
M4	YW	XT	[0,1]	0	$P+(1-P)\mu_w$

Çizelge (3.2)'de verilen rastgele yanıt modellerinin oluşturulması

Eşitlik (3.21)'de genel varyans eşitliği her bir model için yeniden yazılabilir. Modellerde kullanılmak üzere genel eşitlikler aşağıda verilmiştir. Bu genel eşitliklerden yararlanarak özel modellerdeki ortalama, varyans ve kovaryans eşitlikleri bulunabilir.

Eşitlik (3.16)'dan Z yanıt değişkeninin matematiksel ifadesi,

$$Z = PY + (1-P)S \tag{3.22}$$

Yine Eşitlik (3.16)'dan U yanıt değişkeninin matematiksel ifadesi,

$$U = PX + (1-P)R \tag{3.23}$$

şeklindedir.

Eşitlik (3.22) ve Eşitlik (3.23) kullanılarak her bir model için ortalama, varyans ve kovaryans eşitlikleri elde edilir.

Z yanıt değişkeni için ortalama eşitliği,

$$\begin{aligned} E(Z) &= PE(Y) + (1-P)E(S) \\ \mu_z &= P\mu_y + (1-P)\mu_s, \end{aligned} \tag{3.24}$$

şeklindedir.

U yanıt değişkeni için ortalama eşitliği,

$$\begin{aligned} E(U) &= PE(X) + (1-P)E(R) \\ \mu_u &= P\mu_x + (1-P)\mu_r \end{aligned} \tag{3.25}$$

şeklindedir.

Z yanıt değişkeni için varyans eşitliği,

$$\sigma_z^2 = E\left(Z^2\right) - E\left(Z\right)^2$$
$$= E\left\{P^2Y^2 + \left(1-P\right)^2S^2\right\} - \mu_z^2$$

şeklindedir.Burada E(P)=E(P^2)=P'dir ve E(1-P)=E{$(1-P)^2$}=1-P'dir. O halde Z yanıt değişkeni için varyans eşitliği,

$$\sigma_z^2 = PE\left(Y^2\right) + (1-P)E\left(S^2\right) - \mu_z^2 \tag{3.26}$$

olarak bulunur.

U yanıt değişkeni için varyans eşitliği Eşitlik (3.24) yardımıyla,

$$\sigma_u^2 = PE\left(X^2\right) + (1-P)E\left(R^2\right) - \mu_u^2 \tag{3.27}$$

olarak bulunur.

Z ve U yanıt değişkenleri arasındaki kovaryans eşitliği,

$$\begin{aligned}
\sigma_{zu} &= E\left(ZU\right) - E\left(Z\right)E\left(U\right) \\
&= E\left[\left\{PY + (1-P)S\right\}\left\{PX + (1-P)R\right\}\right] \\
&\quad - \left[\left\{P\mu_y + (1-P)\mu_s\right\}\left\{P\mu_x + (1-P)\mu_r\right\}\right] \\
&= E\left[P^2YX + (1-P)^2SR\right] \\
&\quad - P^2\mu_y\mu_x - P\left(1-P\right)\mu_y\mu_r - P\left(1-P\right)\mu_x\mu_s - (1-P)^2\mu_s\mu_r \\
&= PE(YX) + (1-P)E(RS) \\
&\quad - P^2\mu_y\mu_x - P\left(1-P\right)\mu_y\mu_r - P\left(1-P\right)\mu_x\mu_s - (1-P)^2\mu_s\mu_r
\end{aligned}$$

$$\sigma_{zu} = P\sigma_{yx} + (1-P)\sigma_{sr} - P\left(1-P\right)(\mu_y - \mu_s)\left(\mu_x - \mu_r\right) \tag{3.28}$$

şeklindedir.

Her bir model için tahmin edici ve varyans eşitlikleri aşağıda verilmiştir.

Model 1

Bu model toplamsal modeldir. Modelde yardımcı değişkenin cevabı doğrudan alınırken, hassas değişken için toplamsal model kullanılır.

Bu toplamsal modelde hassas değişken için S=Y+W ve yardımcı değişken için R=X olacaktır. Buna göre S ve R teknikleri için ortalama ve varyans eşitlikleri bulunmalıdır.

S tekniği için ortalama eşitliği:

$$\begin{aligned}
\mu_s &= E\left(S\right) = E\left(Y + W\right) \\
\mu_s &= \left(\mu_y + \mu_w\right)
\end{aligned} \tag{3.29}$$

şeklindedir.

R tekniği için ortalama eşitliği:

$$\mu_r = E(R) = E(X)$$
$$\mu_r = \mu_x \tag{3.30}$$

şeklindedir.

S tekniği için varyans eşitliği:

$$\sigma_s^2 = E(S^2) - E(S)^2$$
$$= E(Y^2 + W^2 + 2YW) - (\mu_y + \mu_w)^2$$
$$= \sigma_y^2 + \mu_y^2 + \sigma_w^2 + \mu_w^2 + 2\mu_y\mu_w - \mu_y^2 - \mu_w^2 - 2\mu_y\mu_w$$
$$\sigma_s^2 = \sigma_y^2 + \sigma_w^2 \tag{3.31}$$

şeklindedir.

R tekniği için varyans eşitliği:

$$\sigma_r^2 = E(R^2) - E(R)^2$$
$$= E(X^2) - E(X)^2$$
$$\sigma_r^2 = \sigma_x^2 \tag{3.32}$$

şeklindedir.

S ve R teknikleri arasındaki kovaryans eşitliği:

$$\sigma_{sr} = E(SR) - E(S)E(R)$$
$$= E[(Y + W)X] - (\mu_y + \mu_w)\mu_x$$
$$= E(YX) - E(WX) - \mu_y\mu_x - \mu_w\mu_x$$
$$\sigma_{sr} = \sigma_{yx} - \sigma_{wx} \tag{3.33}$$

şeklindedir. W değişkeni ile X değişkeni birbirinden bağımsız olduğu için $\sigma_{wx} = 0$'dır ve aralarında ilişki yoktur. Dolayısıyla S ve R teknikleri arasındaki kovaryans eşitliği:

$$\sigma_{sr} = \sigma_{yx} \tag{3.34}$$

olarak elde edilir.

Z ve U yanıt değişkenleri için ortalama eşitlikleri aşağıda verilmiştir.

Eşitlik (3.29), Eşitlik (3.24)'te yerine konulursa Z yanıt değişkeni için ortalama eşitliği,

$$\mu_z = P\mu_y + (1-P)(\mu_y + \mu_w)$$

$$\mu_z = \mu_y + (1-P)\mu_w \tag{3.35}$$

şeklinde bulunur.

Eşitlik (3.30), Eşitlik (3.25)'te yerine konulursa U yanıt değişkeni için ortalama eşitliği,

$$\mu_u = P\mu_x + (1-P)\mu_x,$$

$$\mu_u = \mu_x \tag{3.36}$$

şeklinde bulunur.

Z ve U yanıt değişkenleri için varyans eşitlikleri aşağıda verilmiştir.

Eşitlik (3.29) ve Eşitlik (3.31), Eşitlik (3.26)'da yerine yazılırsa Z yanıt değişkeni için varyans eşitliği,

$$\begin{aligned}
\sigma_z^2 &= PE(Y^2) + (1-P)E(S^2) - \mu_z^2 \\
&= P(\sigma_y^2 + \mu_y^2) + (1-P)(\sigma_s^2 + \mu_s^2) - (P\mu_y + (1-P)\mu_s)^2 \\
&= P(\sigma_y^2 + \mu_y^2) + (1-P)(\sigma_s^2 + \mu_s^2) - P^2\mu_y^2 - (1-P)^2\mu_s^2 - 2P(1-P)\mu_y\mu_s \\
&= P\sigma_y^2 + P(1-P)\mu_y^2 + (1-P)\{\sigma_y^2 + \sigma_w^2 + P(\mu_y + \mu_w)^2\} \\
&\quad - 2P(1-P)\mu_y(\mu_y + \mu_w) + (1-P)\{\sigma_y^2 + \sigma_w^2 + P(\mu_y^2 + \mu_w^2 - 2\mu_y\mu_w)\} \\
&= \sigma_y^2 + (1-P)\sigma_w^2 + P(1-P)\mu_w^2
\end{aligned}$$

$$\sigma_z^2 = \sigma_y^2 + (1-P)(\sigma_w^2 + P\mu_w^2) \tag{3.37}$$

şeklinde bulunur.

Eşitlik (3.30) ve Eşitlik (3.32), Eşitlik (3.27)'de yerine yazılırsa U yanıt değişkeni için varyans eşitliği,

$$\begin{aligned}
\sigma_u^2 &= PE(X^2) + (1-P)E(R^2) - \mu_u^2 \\
&= P(\sigma_x^2 + \mu_x^2) + (1-P)(\sigma_r^2 + \mu_r^2) - \mu_u^2 \\
&= P(\sigma_x^2 + \mu_x^2) + (1-P)(\sigma_x^2 + \mu_x^2) - \mu_x^2
\end{aligned}$$

$$\sigma_u^2 = \sigma_x^2 \tag{3.38}$$

Eşitlik (3.28)'de Eşitlik (3.29), Eşitlik (3.30) ve Eşitlik (3.34) yerine konulursa Z ve U yanıt değişkenleri arasındaki kovaryans eşitliği,

$$\sigma_{zu} = P\sigma_{yx} + (1-P)\sigma_{sr} - P(1-P)(\mu_y - \mu_s)(\mu_x - \mu_r)$$
$$= P\sigma_{yx} + (1-P)\sigma_{sr} - P(1-P)(\mu_y - \mu_y - \mu_w)(\mu_x - \mu_x)$$
$$= P\sigma_{yx} + (1-P)\sigma_{yx}$$

$$\sigma_{zu} = \sigma_{yx} \tag{3.39}$$

şeklinde bulunur.

Eşitlik (3.37), Eşitlik (3.38) ve Eşitşik (3.39)'un Eşitlik (3.21)'de yerine konulmasıyla Model 1 için Diana ve Perri [6] tahmin edicisinin varyansı,

$$\operatorname{Var}(\hat{\mu}_{DP})_{min} = \frac{\sigma_z^2}{nh^2}\left(1-\rho_{zu}^2\right)$$
$$= \frac{\sigma_z^2}{n}\left\{1-\frac{\sigma_{zu}^2}{\sigma_z^2\sigma_u^2}\right\}$$
$$= \frac{\sigma_z^2}{n}\left\{1-\frac{\sigma_{yx}^2}{\sigma_z^2\sigma_x^2}\right\}$$
$$= \frac{\left(\sigma_z^2\sigma_x^2-\sigma_{yx}^2\right)}{n\sigma_x^2}$$
$$= \frac{\left[\sigma_y^2+(1-P)\mu_w^2\left(\sigma_w^2+P\right)\right]\left(1-\rho_{yx}^2\right)}{n} \tag{3.40}$$

olarak elde edilir.

Model 2

Bu model çarpımsal modeldir. Modelde yardımcı değişkenin cevabı doğrudan alınırken, hassas değişken için çarpımsal model kullanılır.

Bu çarpımsal modelde hassas değişken için S=YW ve yardımcı değişken için R=X olacaktır. Buna göre S ve R teknikleri için ortalama ve varyans eşitlikleri bulunmalıdır.

S tekniği için ortalama eşitliği:

$$\mu_s = E(S) = E(YW)$$
$$\mu_s = \mu_y\mu_w \tag{3.41}$$

şeklindedir.

S tekniği için varyans eşitliği:

$$\sigma_s^2 = E(S^2) - E(S)^2$$
$$= E(Y^2W^2) - (\mu_y\mu_w)^2$$
$$\sigma_s^2 = \left(\sigma_y^2+\mu_y^2\right)\left(\sigma_w^2+\mu_w^2\right) - \mu_y^2\mu_w^2 \tag{3.42}$$

şeklindedir.

Bu modelde de yardımcı değişkenin cevabı doğrudan alındığı için R tekniği için ortalama eşitliği Model 1'de verilen Eşitlik (3.30)'dan $\mu_r = \mu_x$'dir. Varyans eşitliği de Eşitlik (3.31)'den $\sigma_r^2 = \sigma_x^2$'dir.

S ve R teknikleri arasındaki kovaryans eşitliği:

$$\begin{aligned}
\sigma_{sr} &= E(SR) - E(S)E(R) \\
&= E(YWX) - (\mu_y \mu_w)\mu_x \\
&= \mu_w E(YX) - \mu_w \mu_y \mu_x \\
&= \mu_w \left[E(YX) - \mu_y \mu_x\right]
\end{aligned}$$

$$\sigma_{sr} = \mu_w \sigma_{yx} \tag{3.43}$$

şeklindedir.

Z ve U yanıt değişkenleri için ortalama eşitlikleri aşağıda verilmiştir.

Eşitlik (3.40), Eşitlik (3.24)'te yerine konulursa Z yanıt değişkeni için ortalama eşitliği,

$$\mu_z = P\mu_y + (1-P)(\mu_y \mu_w)$$

$$\mu_z = \left[P + (1-P)\mu_w\right]\mu_y \tag{3.44}$$

şeklinde bulunur.

U yanıt değişkeni için ortalama eşitliği Model 1'de Eşitlik (3.36)'dan $\mu_u = \mu_x$'tir.

Z ve U yanıt değişkenleri için varyans eşitlikleri aşağıda verilmiştir.

Eşitlik (3.41) ve Eşitlik (3.42), Eşitlik (3.24)'te yerine yazılırsa Z yanıt değişkeni için varyans eşitliği,

$$\begin{aligned}
\sigma_z^2 &= PE(Y^2) + (1-P)E(S^2) - \mu_z^2 \\
&= P(\sigma_y^2 + \mu_y^2) + (1-P)(\sigma_s^2 + \mu_s^2) - \mu_z^2 \\
&= P(\sigma_y^2 + \mu_y^2) + (1-P)\left[(\sigma_y^2 + \mu_y^2)(\sigma_w^2 + \mu_w^2) - \mu_y^2 \mu_w^2 + \mu_y^2 \mu_w^2\right] - \mu_z^2 \\
&= (\sigma_y^2 + \mu_y^2)\left[P + (1-P)(\sigma_w^2 + \mu_w^2)\right] - \mu_z^2
\end{aligned}$$

$$\sigma_z^2 = \mu_y^2 (1 + C_y^2)\left[P + (1-P)\mu_w^2 (1 + C_w^2)\right] - \mu_z^2 \tag{3.45}$$

şeklinde bulunur.

U yanıt değişkeni için varyans eşitliği Model 1'de Eşitlik (3.38)'den $\sigma_u^2 = \sigma_x^2$'tir.

Eşitlik (3.28)'de Eşitlik (3.30), Eşitlik (3.40) ve Eşitlik (3.42) yerine konulursa Z ve U yanıt değişkenleri arasındaki kovaryans eşitliği,

$$
\begin{aligned}
\sigma_{zu} &= P\sigma_{yx} + (1-P)\sigma_{sr} - P(1-P)(\mu_y - \mu_s)(\mu_x - \mu_r) \\
&= P\sigma_{yx} + (1-P)\mu_w\sigma_{yx} - P(1-P)(\mu_y - \mu_y\mu_w)(\mu_x - \mu_x) \\
&= P\sigma_{yx} + (1-P)\mu_w\sigma_{yx}
\end{aligned}
$$

$$\sigma_{zu} = \sigma_{yx}\left[P + (1-P)\mu_w\right] \tag{3.46}$$

olarak bulunur.

Eşitlik (3.38), Eşitlik (3.45) ve Eşitlik (3.46)'nın Eşitlik (3.21)'de yerine konulmasıyla Model 2 için Diana ve Perri [6] tahmin edicisinin varyansı,

$$
\begin{aligned}
Var(t_{DP})_{min} &= \frac{\sigma_z^2}{nh^2}\left(1-\rho_{zu}^2\right) \\
&= \frac{\sigma_z^2}{n}\left\{1 - \frac{\sigma_{yx}^2\left[P+(1-P)\mu_w\right]^2}{\sigma_z^2\sigma_x^2}\right\} \\
&= \frac{\left[\sigma_z^2\sigma_x^2 - \sigma_{yx}^2\left[P+(1-P)\mu_w\right]^2\right]}{n\sigma_x^2} \\
&= \frac{\left[\mu_y^2(1+C_y^2)\left[P+(1-P)\mu_w^2(1+C_w^2)\right]-\mu_z^2\right] - \rho_{yx}^2\left[P+(1-P)\mu_w\right]^2}{n}
\end{aligned}
\tag{3.47}
$$

olarak elde edilir.

Model 3

Bu model toplamsal modeldir. Hem hassas değişken Y için hem de yardımcı değişken X için toplamsal teknik kullanılmıştır.

Bu toplamsal modelde hassas değişken için S=Y+W ve yardımcı değişken için R=X+T olacaktır. Buna göre S ve R teknikleri için ortalama ve varyans eşitlikleri bulunmalıdır.

S tekniği için ortalama eşitliği model 1'de Eşitlik (3.29)'dan $\mu_s = \mu_y + \mu_w$'dir. Varyans eşitliği ise Eşitlik (3.31)'den $\sigma_s^2 = \sigma_y^2 + \sigma_w^2$'dir.

R tekniği için ortalama eşitliği:

$$\begin{aligned} \mu_r &= E(R) = E(X+T) \\ \mu_r &= \mu_x + \mu_t \end{aligned} \qquad (3.48)$$

şeklindedir.

R tekniği için varyans eşitliği:

$$\begin{aligned} \sigma_r^2 &= E(R^2) - E(R)^2 \\ &= E(X^2 + T^2 + 2YT) - (\mu_x + \mu_t)^2 \\ &= \sigma_x^2 + \mu_x^2 + \sigma_t^2 + \mu_t^2 + 2\mu_x\mu_t - \mu_x^2 - \mu_t^2 - 2\mu_x\mu_t \end{aligned}$$

$$\sigma_r^2 = \sigma_x^2 + \sigma_t^2 \qquad (3.49)$$

şeklindedir.

S ve R teknikleri arasındaki kovaryans eşitliği:

$$\begin{aligned} \sigma_{sr} &= E(SR) - E(S)E(R) \\ &= E\left[(Y+W)(X+T)\right] - (\mu_y + \mu_w)(\mu_x + \mu_t) \\ &= E(YX) + E(YT) + E(WX) + E(WT) - \mu_y\mu_x - \mu_y\mu_t - \mu_w\mu_x - \mu_w\mu_t \end{aligned}$$

$$\sigma_{sr} = \sigma_{yx} + \sigma_{yt} + \sigma_{wx} + \sigma_{wt} \qquad (3.50)$$

şeklindedir. Y değişkeni ile T değişkeni birbirinden bağımsız olduğu için $\sigma_{yt} = 0$, W değişkeni ile X değişkeni birbirinden bağımsız olduğu için $\sigma_{wx} = 0$, W değişkeni ile T değişkeni birbirinden bağımsız olduğu için $\sigma_{wt} = 0$’dır. Dolayısıyla S ve R teknikleri arasındaki kovaryans eşitliği:

$$\sigma_{sr} = \sigma_{yx} \qquad (3.51)$$

olarak elde edilir.

Model 3’te Z ve U yanıt değişkenleri için ortalama eşitlikleri aşağıda verilmiştir.

Z modeli için ortalama eşitliği Model 1’de Eşitlik (3.35)’ten $\mu_z = \mu_y + (1-P)\mu_w$’dir. Varyans eşitliği ise Eşitlik (3.37)’den $\sigma_z^2 = \sigma_y^2 + (1-P)\left[\mu_w^2 (\sigma_w^2 + P)\right]$’dir.

Eşitlik (3.49), Eşitlik (3.25)'te yerine konulursa U yanıt değişkeni için ortalama eşitliği,

$$\mu_u = P\mu_x + (1-P)(\mu_x + \mu_t)$$

$$\mu_u = \mu_x + (1-P)\mu_t \tag{3.52}$$

şeklinde bulunur.

Eşitlik (3.47) ve Eşitlik (3.48), Eşitlik (3.27)'de yerine yazılırsa U yanıt değişkeni için varyans eşitliği,

$$\begin{aligned}
\sigma_u^2 &= PE(X^2) + (1-P)E(R^2) - \mu_u^2 \\
&= P(\sigma_x^2 + \mu_x^2) + (1-P)(\sigma_r^2 + \mu_r^2) - (P\mu_x + (1-P)\mu_r)^2 \\
&= P(\sigma_x^2 + \mu_x^2) + (1-P)(\sigma_r^2 + \mu_r^2) - P^2\mu_x^2 - (1-P)^2\mu_r^2 - 2P(1-P)\mu_x\mu_r \\
&= P\sigma_x^2 + P(1-P)\mu_x^2 + (1-P)(\sigma_x^2 + \sigma_t^2 + P(\mu_x + \mu_t)^2) \\
&\quad - 2P(1-P)\mu_x(\mu_x + \mu_t) + (1-P)(\sigma_x^2 + \sigma_t^2 + P(\mu_x^2 + \mu_t^2 - 2\mu_x\mu_t)) \\
&= \sigma_x^2 + (1-P)\sigma_t^2 + P(1-P)\mu_t^2
\end{aligned}$$

$$\sigma_u^2 = \sigma_x^2 + (1-P)(\sigma_t^2 + P\mu_t^2) \tag{3.53}$$

şeklinde bulunur.

Eşitlik (3.28)'de Eşitlik (3.29), Eşitlik (3.48) ve Eşitlik (3.51) yerine konulursa Z ve U yanıt değişkenleri arasındaki kovaryans eşitliği,

$$\begin{aligned}
\sigma_{zu} &= P\sigma_{yx} + (1-P)\sigma_{sr} - P(1-P)(\mu_y - \mu_s)(\mu_x - \mu_r) \\
&= P\sigma_{yx} + (1-P)\sigma_{yx} - P(1-P)(\mu_y - \mu_y - \mu_w)(\mu_x - \mu_x - \mu_t)
\end{aligned}$$

$$\sigma_{zu} = \sigma_{yx} + P(1-P)\mu_w\mu_t \tag{3.54}$$

şeklinde bulunur.

Eşitlik (3.37), Eşitlik (3.53) ve Eşitlik (3.54)'ün Eşitlik (3.21)'de yerine konulmasıyla

Model 3 için Diana ve Perri [6] tahmin edicisinin varyansı,

$$\begin{aligned}
Var(\hat{\mu}_{DP})_{min} &= \frac{\sigma_z^2}{nh^2}(1-\rho_{zu}^2) \\
&= \frac{\sigma_z^2}{n}\left[1 - \frac{(\sigma_{yx} + P(1-P)\mu_w\mu_t)^2}{\sigma_z^2(\sigma_x^2 + (1-P)(\sigma_t^2 + P\mu_t^2))}\right] \\
&= \frac{\sigma_z^2}{n}\,\frac{\sigma_z^2(\sigma_x^2 + (1-P)(\sigma_t^2 + P\mu_t^2)) - (\sigma_{yx} + P(1-P)\mu_w\mu_t)^2}{n(\sigma_x^2 + (1-P)(\sigma_t^2 + P\mu_t^2))}
\end{aligned} \tag{3.55}$$

olarak elde edilir.

Model 4

Bu model çarpımsal modeldir. Hem hassas değişken Y için hem de yardımcı değişken X için çarpımsal teknik kullanılmıştır.

Bu çarpımsal modelde hassas değişken için S=YW ve yardımcı değişken için R=XT olacaktır. Buna göre S ve R teknikleri için ortalama ve varyans eşitlikleri bulunmalıdır

S tekniği için ortalama eşitliği Model 2'de Eşitlik (3.41)'den $\mu_s = \mu_y \mu_w$ 'dir. Varyans eşitliği ise Eşitlik (3.42)'den $\sigma_s^2 = (\sigma_y^2 + \mu_y^2)(\sigma_w^2 + \mu_w^2) - \mu_y^2 \mu_w^2$ 'dir.

R tekniği için ortalama eşitliği:

$$\begin{aligned} \mu_r &= E(R) = E(XT) \\ \mu_r &= \mu_x \mu_t \end{aligned} \tag{3.56}$$

şeklindedir.

R tekniği için varyans eşitliği:

$$\begin{aligned} \sigma_r^2 &= E(R^2) - [E(R)]^2 \\ &= E(X^2T^2) - (\mu_x \mu_t)^2 \end{aligned}$$

$$\sigma_r^2 = (\sigma_x^2 + \mu_x^2)(\sigma_t^2 + \mu_t^2) - \mu_x^2 \mu_t^2 \tag{3.57}$$

şeklindedir.

S ve R teknikleri arasındaki kovaryans eşitliği:

$$\begin{aligned} \sigma_{sr} &= E(SR) - E(S)E(R) \\ &= E[(YW)(XT)] - (\mu_y \mu_w)\mu_x \mu_t \\ &= \mu_w \mu_t E(YX) - \mu_w \mu_t \mu_y \mu_x \\ &= \mu_w \mu_t [E(YX) - \mu_y \mu_x] \end{aligned}$$

$$\sigma_{sr} = \mu_w \mu_t \sigma_{yx} \tag{3.58}$$

şeklindedir.

Z ve U yanıt değişkenleri için ortalama eşitlikleri aşağıda verilmiştir.

Z modeli için ortalama eşitliği Model 2'de Eşitlik (3.44)'ten $\mu_z = [P + (1-P)\mu_w]\mu_y$ 'dir.

Varyans eşitliği ise Eşitlik (3.45)'den $\sigma_z^2 = \mu_y^2 [(1 + C_y^2)[P + (1-P)\mu_w^2 (1 + C_w^2)]] - \mu_z^2$ 'dir.

Eşitlik (3.48), Eşitlik (3.23)'te yerine konulursa U modeli için ortalama eşitliği,

$$\mu_u = P\mu_x + (1-P)(\mu_x\mu_t)$$

$$\mu_u = \left[P + (1-P)\mu_t\right]\mu_x \tag{3.59}$$

şeklinde bulunur.

Eşitlik (3.56) ve Eşitlik (3.57), Eşitlik (3.27)'de yerine yazılırsa U modeli için varyans eşitliği,

$$\begin{aligned}
\sigma_u^2 &= PE(X^2) + (1-P)E(R^2) - \mu_u^2 \\
&= P(\sigma_x^2 + \mu_x^2) + (1-P)(\sigma_r^2 + \mu_r^2) - \mu_u^2 \\
&= P(\sigma_x^2 + \mu_x^2) + (1-P)\left[(\sigma_x^2 + \mu_x^2)(\sigma_t^2 + \mu_t^2) - \mu_x^2\mu_t^2 + \mu_x^2\mu_t^2\right] - \mu_u^2 \\
&= (\sigma_x^2 + \mu_x^2)\left[P + (1-P)(\sigma_t^2 + \mu_t^2)\right] - \mu_u^2
\end{aligned}$$

$$\sigma_u^2 = \mu_x^2(1 + C_x^2)\left[P + (1-P)\mu_t^2(1 + C_t^2)\right] - \mu_u^2 \tag{3.60}$$

şeklinde bulunur.

Eşitlik (3.28)'de Eşitlik (3.41), Eşitlik (3.57) ve Eşitlik (3.58) yerine konulursa Z ve U yanıt değişkenleri arasındaki kovaryans eşitliği,

$$\begin{aligned}
\sigma_{zu} &= P\sigma_{yx} + (1-P)\sigma_{sr} - P(1-P)(\mu_y - \mu_s)(\mu_x - \mu_r) \\
&= P\sigma_{yx} + (1-P)\mu_w\mu_t\sigma_{yx} - P(1-P)(\mu_y - \mu_y\mu_w)(\mu_x - \mu_x\mu_t) \\
&= P\sigma_{yx} + (1-P)\mu_w\mu_t\sigma_{yx} - P(1-P)\mu_y\mu_x(1-\mu_w)(1-\mu_t)
\end{aligned}$$

$$\sigma_{zu} = \sigma_{yx}\left[P + (1-P)\mu_w\mu_t\right] - P(1-P)\mu_y\mu_x(1-\mu_w)(1-\mu_t) \tag{3.61}$$

olarak bulunur.

Eşitlik (3.45), Eşitlik (3.60) ve Eşitlik (3.61)'in Eşitlik (3.21)'de yerine konulmasıyla Model 3 için Diana ve Perri [6] tahmin edicisinin varyansı,

$$\begin{aligned}
Var(\hat{\mu}_{DP})_{min} &= \frac{\sigma_z^2}{nh^2}(1-\rho_{zu}^2) \\
&= \left[\frac{\mu_y^2(1+C_y^2)\left[P+(1-P)\mu_w^2(1+C_w^2)\right]-\mu_z^2}{n}\right] \\
&\quad \left[1-\frac{\left\{\sigma_{yx}\left[P+(1-P)\mu_w\mu_t\right]-P(1-P)\mu_y\mu_x(1-\mu_w)(1-\mu_t)\right\}^2}{\left\{\mu_y^2(1+C_y^2)\left[P+(1-P)\mu_w^2(1+C_w^2)\right]-\mu_z^2\right\}\left\{\mu_x^2(1+C_x^2)\left[P+(1-P)\mu_t^2(1+C_t^2)\right]-\mu_u^2\right\}}\right]
\end{aligned} \tag{3.62}$$

olarak elde edilir.

Yardımcı değişken bilgisinin kullanılmadığı Warner [38] tam rastgeleleştirilmiş toplamsal modeli ile yardımcı değişken bilgisinin kullanıldığı Diana ve Perri [6] regresyon tahmin edicisi karşılaştırıldığında,

$$\begin{gathered} Var(\hat{\mu}_{DP}) < Var(\hat{\mu}_{w1}) \\ Var(\hat{\mu}_{DP}) = \left(\frac{1-f}{n}\right)\mu_z^2(1-\rho_{zx}^2) < \left(\frac{1-f}{n}\right)\sigma_z^2 \\ 0 < \rho_{zx}^2 \end{gathered} \tag{3.63}$$

koşulu elde edilir. Eşitlik (3.63)'de verilen $\rho_{xz}^2 > 0$ koşulu altında Diana ve Perri [6] regresyon tahmin edicisi Warner [38] tam rastgeleleştirilmiş toplamsal modelinde kullanılan basit tahmin ediciden daha duyarlıdır. Bu koşul her zaman sağlanacağı için regresyon tahmin edicisi her zaman basit tahmin ediciden daha duyarlıdır.

Özel Durum: k tane yardımcı değişken olduğunda Diana ve Perri [6] tahmin edici ailesi:

Diana ve Perri [6] k tane yardımcı değişken olduğunda tahmin ediciyi şu şekilde vermişlerdir:

$$\hat{\mu}_{DPk} = \frac{\bar{z}_d - c}{h}, \qquad (h \neq 0) \tag{3.64}$$

şeklinde verilmiştir. Eşitlik(3.64)'te $\bar{z}_d = \bar{z} + \sum_{j=1}^{k} b_j(\mu_{vj} - \bar{v}_j)$'dir.

k yardımcı değişken için Diana ve Perri [6] tahmin edicisi ailesinin minimum varyansı,

$$Var(\hat{\mu}_{DPk})_{min} = \frac{\sigma_z^2}{nh^2}\left[1 - \rho_{z,v1\ldots vk}^2\right] \tag{3.65}$$

olarak elde edilir. Burada $\rho_{z,v1\ldots vk}^2$ çoklu korelasyon katsayısıdır.

3.2.2. Diana ve Perri [6] Regresyon Tahmin Edicisi için Sayısal Örnek

N=100 kişilik bir bölgede kişilerin aylık gelirleri ile ilgili bir çalışma yapılsın. Hassas değişken kişilerin aylık geliri olsun. Hassas değişkenin tahmininde kullanılacak yardımcı değişken ise kişilerin oturduğu evin aylık kirası olsun. n=10 kişi yerine konulmadan basit rastgele örnekleme ile seçilsin. Kişilere P=0,20 olduğu RYM uygulansın. Bu durumda kişilerin %20'si hassas değişken ve yardımcı değişkene doğrudan cevap verecektir. Geriye kalan kişilerin %80'i S ve R düzenlerini kullanarak cevaplarını verecektir. S ve R düzenlerinde uygulanacak farklı tekniklere göre çeşitli modeller oluşturulabilir. Çizelge 3.2' de verilen model 1 için sayısal çalışma aşağıda verilmiştir.

Model 1 için kişilerin ortalama aylık gelir tahmini ve bu tahminin hata kareler ortalaması tahmini Çizelge 3.3'te verilen veriler yardımıyla bulunabilir. S düzeninde toplamsal teknik uygulanır. Toplamsal teknik uygulayabilmek için Y hassas değişkeni için W rastgele değişkeni türetilir. W rastgele değişkeni Uniform (500, 1000) dağılımından türetilsin. W rastgele değişkenin ortalaması $\mu_w = \frac{500+1500}{2} = 750$ ve varyansı $\sigma_w^2 = \frac{(1000-500)^2}{12} = 20833,33$'tür.

Çizelge 3.3. Diana ve Perri [6] regresyon tahmin edici için model 1 örneği

Kişiler	Gerçek Yanıtlar Y_i	X_i	Seçilen Karttaki İfade*	Rastgele Sayılar Destesinden Seçilen Sayı W_i	Verilen Yanıtlar Z_i=Yi+Wi	U_i=X_i	Yanıt Dağılımı (Z_i, U_i)
1	1500	0	1	1000	1500	0	(1500, 0)
2	2000	500	2	500	2000+500	500	(2500, 500)
3	2000	600	1	700	2000	600	(2000, 600)
4	2500	550	2	800	2500+800	550	(3300, 550)
5	1500	0	2	500	1500+500	0	(2000, 0)
6	1000	300	2	1000	1000+1000	300	(2000, 300)
7	3000	700	2	500	3000+500	700	(3500, 700)
8	2500	800	2	800	2500+800	800	(3300, 800)
9	3500	1000	2	1000	3500+1000	1000	(4500, 1000)
10	5000	500	2	500	5000+500	500	(5500, 500)
Ortalama					3010	495	
Varyans					1603222	103583	
Değişim Katsayısı					0,42	0,65	

***1**: "Aylık geliriniz ne kadardır?, Oturduğunuz evin kirası ne kadardır?"
2**:** "Aylık gelirinizin cevabını seçtiğiniz karttaki sayıyla toplayarak veriniz, oturduğunuz evinizin kirası ne kadardır"

Çizelge 3.3'te "Gerçek Yanıtlar" sütununda gerçekte bu yanıtlar çalışmada bilinmemesine rağmen bu örnek için kişilerin gerçek yanıtlarının bilindiğini varsayalım. Seçilen karttaki ifade sütununda 10 kişi için oluşturulan kartlar yer almaktadır. P=0,20 olduğu için kartların 10*0,20=2'sinde "Aylık geliriniz ne kadardır?, oturduğunuz evin kirası ne kadardır?" ifadesi bulunur. Bu kartı seçen kişiler sorulara doğrudan yanıt vereceklerdir. Kartların 10*0,80=8'inde kartlarda "Aylık gelirinizin cevabını seçtiğiniz karttaki sayıyla toplayarak veriniz, oturduğunuz evin kirası ne kadardır?" ifadesi bulunur. Çizelge 3.3'te 1. kişinin seçtiği karttaki ifade "Aylık geliriniz ne kadardır?, oturduğunuz evin kirası ne kadardır?" şeklindedir. Kişinin gerçekte aylık geliri 1500 TL'dir ve oturduğu evin aylık kirası 0 TL'dir. Yani kişi kira ödemiyor. Dolayısıyla kişinin vereceği yanıt "1500, 0" olacaktır. 2.kişinin seçtiği karttaki ifade ""Aylık gelirinizin cevabını seçtiğiniz karttaki sayıyla toplayarak veriniz, oturduğunuz evin kirası ne kadardır?" şeklindedir. Kişinin gerçekte aylık geliri 2000 TL'dir ve oturduğu evin aylık kirası 500 TL'dir. Kişinin S düzeninde rastgele sayılar destesinden seçtiği sayı 500'dür. Kişi yardımcı değişken için yanıtını doğrudan verecektir. Dolayısıyla kişinin vereceği yanıt "2000+500, 500" olacaktır.

Diğer cevaplayıcılar için de rastgeleleştirilmiş yanıt modeli benzer şekilde uygulanırsa tüm örneklem için yanıt dağılımı { (1500, 0), (2500, 500), (2000, 600), (3300, 550), (2000, 0), (2000, 300), (3500, 700), (3300, 800), (4500, 1000), (5500, 500) } şeklinde olacaktır.

Kişilerin verdiği yanıtlar kullanılarak kişilerin ortalama aylık gelirleri tahmin edilebilir.

Model 1 için Çizelge 3.3'teki verilere ait bazı bilgiler aşağıda özetlenmiştir.

$\bar{z} = 3010$, $\bar{u} = \bar{x} = 520$, $\hat{\sigma}_z^2 = 1603222$, $\hat{C}_z = 0{,}42$, $\hat{C}_u = 0{,}65$, $\hat{\sigma}_u^2 = 103583$

$r_{zu} = 0{,}63$, $c = (1-P)\mu_w = 0{,}80 * 750 = 600$, h=1, $b = \dfrac{\hat{\sigma}_{zu}}{\hat{\sigma}_u^2} = \dfrac{256166{,}7}{103583} = 2{,}47$, $\mu_x = 500$

olduğu biliniyor.

Eşitlik (3.18)'den ortalama aylık gelir tahmini ,

$$\hat{\mu}_{DP} = \frac{\bar{z} + b(\mu_u - \bar{u}) - c}{h} = \frac{3010 + 2{,}47 * (500 - 495) - 600}{1} = 2422$$

olarak hesaplanır.

Eşitlik (3.21)'den ortalama aylık gelir tahmininin varyans tahmini,

$$\hat{Var}(\hat{\mu}_{DP})_{min} = \frac{\hat{\sigma}_z^2}{nh^2}(1-r_{zu}^2) = \frac{160322}{10} * (1-0{,}63^2) = 96970$$

olarak hesaplanır.

3.2.3. Rastgeleleştirilmiş Yanıt Modelinde Sousa v.d. [33] Oransal Tahmin Edicisi

Sousa v.d. [33] rastgeleleştirilmiş yanıt modelleri için yeni bir oransal tahmin edici önermişlerdir. Zaizai [39] oransal tahmin edicisinde oran tahmini yerine ortalama tahminini uygulayarak yeni bir tahmin edici önermişlerdir.

Sousa v.d. [33] tahmin edicisi,

$$\hat{\mu}_{SR} = \bar{z}\left(\frac{\mu_x}{\bar{x}}\right) \tag{3.66}$$

şeklindedir. Burada Z değişkeni tam rastgeleleştirilmiş toplamsal modelinde elde edilen yanıt değişkenidir. Yani Z=Y+W'dir. Y değişkeni hassas değişken iken W değişkeni o düzen üretilen rastgele değişkendir.

Sousa v.d. [33] tahmin edicisinin yanı,

$$Yan(\hat{\mu}_{SR}) = \left(\frac{1-f}{n}\right)\mu_z^2\left[C_x^2 - \rho_{xz}C_xC_z\right] \tag{3.67}$$

şeklindedir.

Sousa v.d. [33] tahmin edicisinin hata kareler ortalaması,

$$HKO(\hat{\mu}_{SR}) = \left(\frac{1-f}{n}\right)\mu_z^2\left[C_z^2 + C_x^2 - 2\rho_{xz}C_xC_z\right] \tag{3.68}$$

şeklindedir. Eşitlik(3.68)'de Z değişkeni ile ilgili ifadelerin yerine rastgeleleştirilmiş yanıt modelinde elde edilen eşitlikler konulur. Sousa v.d. [33] tahmin edicisinin önerildiği rastgeleleştirilmiş yanıt modeli Bölüm 2.3.1’de verilen Model 1’dir. Model 1’de verilen eşitlikler bu model için de aynıdır.

Z değişkeni için ortalama eşitliği Eşitlik (3.35)’ten $\mu_z = \mu_y + (1-P)\mu_w$, varyans eşitliği Eşitlik (3.37)’den $\sigma_z^2 = \sigma_y^2 + (1-P)\mu_w^2 (C_w^2 + P)$’dir. U değişkeni için ortalama eşitliği $\mu_u = \mu_x$, varyans eşitliği Eşitlik (3.38)’den $\sigma_u^2 = \sigma_x^2$’dir. Z ve X değişkenleri arasındaki kovaryans Eşitlik (3.39)’dan $\sigma_{zx} = \sigma_{yx}$’dir. Buna göre Eşitlik (3.68)’de kullanılacak diğer eşitlikler:

$$C_z^2 = \frac{\sigma_z^2}{\mu_z^2} = \frac{\sigma_y^2 + (1-P)\mu_w^2 (C_w^2 + P)}{\left(\mu_y + (1-P)\mu_w\right)^2} \tag{3.69}$$

$$\rho_{xz} = \frac{\sigma_{zx}}{\sigma_z \sigma_x} = \frac{\sigma_{yx}}{\sigma_x \sqrt{\sigma_y^2 + (1-P)\mu_w^2 (C_w^2 + P)}} \tag{3.70}$$

şeklindedir.

Eşitlik (3.68)’de Eşitlik (3.35), Eşitlik (3.69) ve Eşitlik (3.70) yerine konulursa Sousa v.d. [33] tahmin edicisinin hata kareler ortalaması elde edilir.

Yardımcı değişken bilgisinin kullanılmadığı Warner [38]’in tam rastgeleleştirilmiş toplamsal modeli ile yardımcı değişken bilgisinin kullanıldığı Sousa v.d. [33] oransal tahmin edici karşılaştırıldığında,

$$HKO(\hat{\mu}_{SR}) < Var(\hat{\mu}_{w1})$$

$$\left(\frac{1-f}{n}\right)\mu_z^2 \left[C_z^2 + C_x^2 - 2\rho_{xz} C_x C_z\right] < \left(\frac{1-f}{n}\right)\sigma_z^2 \tag{3.71}$$

$$\frac{1}{2}\frac{C_x}{C_z} < \rho_{xz}$$

koşulu elde edilir.

Eşitlik (3.71)'de verilen koşul altında Sousa v.d. [33] oransal tahmin edicisi Warner [38]'in tam rastgeleleştirilmiş toplamsal modelinde önerdiği basit tahmin ediciden daha duyarlıdır.

Diana ve Perri [6] regresyon tahmin edicisi ile Sousa v.d. [33] oransal tahmin edicinin karşılaştırıldığında,

$$\mathrm{Var}\left(\hat{\mu}_{DP}\right) < \mathrm{HKO}\left(\hat{\mu}_{SR}\right)$$

$$\left(\frac{1-f}{n}\right)\mu_z^2\left(1-\rho_{zx}^2\right) < \left(\frac{1-f}{n}\right)\mu_z^2\left(C_z^2 + C_x^2 - 2\rho_{xz}C_xC_z\right) \tag{3.72}$$

$$0 < \left(C_x - C_z\rho_{xz}\right)^2$$

koşulu elde edilir.

Eşitlik (3.72)'de verilen $\left(C_x - C_z\rho_{xz}\right)^2 > 0$ koşulu altında önerilen Diana ve Perri [6] regresyon tahmin edicisi Sousa v.d. [33] oransal tahmin edicisinden daha duyarlıdır. Bu koşul eşitlik olması durumu dışında her zaman sağlanacağı için regresyon tahmin edicisi her zaman oransal tahmin ediciden daha duyarlıdır.

3.2.4. Sousa v.d. [33] Oransal Tahmin Edicisi için Sayısal Örnek

N=100 kişilik bir bölgede kişilerin aylık gelirleri ile ilgili bir çalışma yapılsın. Hassas değişken kişilerin aylık geliri olsun. Hassas değişkenin tahmininde kullanılacak yardımcı değişken ise kişilerin oturduğu evin aylık kirası olsun. n=10 kişi yerine konulmadan basit rastgele örnekleme ile seçilsin. Kişilere tam toplamsal RYM uygulansın. Bu durumda kişiler hassas değişken için toplamsal tekniğin uygulandığı düzeni kullanılırlar ve yardımcı değişkene doğrudan cevap verirler.

Kişilerin ortalama aylık gelir tahmini ve bu tahminin hata kareler ortalaması tahmini Çizelge 3.4'te verilen veriler yardımıyla bulunabilir. Rastgele düzende toplamsal teknik uygulayabilmek için Y hassas değişkeni için W rastgele değişkeni türetilir. W rastgele değişkeni Uniform (500, 1000) dağılımından türetilsin. W rastgele değişkenin ortalaması $\mu_w = \frac{500+1500}{2} = 750$ ve varyansı $\sigma_w^2 = \frac{(1000-500)^2}{12} = 20833{,}33$'tür.

Çizelge 3.4. Sousa v.d. [33] oransal tahmin edicisi için örnek

Kişiler	Gerçek Yanıtlar		Rastgele Sayılar Destesinden Seçilen Sayı	Verilen Yanıtlar		Yanıt Dağılımı
	Y_i	X_i	W_i	Z_i=Yi+Wi	X_i	(Z_i, X_i)
1	1500	0	1000	1500+1000	0	(2500, 0)
2	2000	500	500	2000+500	500	(2500, 500)
3	2000	600	700	2000+700	600	(2700, 600)
4	2500	550	800	2500+800	550	(3300, 550)
5	1500	0	500	1500+500	0	(2000, 0)
6	1000	300	1000	1000+1000	300	(2000, 300)
7	3000	700	500	3000+500	700	(3500, 700)
8	2500	800	800	2500+800	800	(3300, 800)
9	3500	1000	1000	3500+1000	1000	(4500, 1000)
10	5000	500	500	5000+500	500	(5500, 500)
Ortalama				3180	495	
Varyans				1244000	103583	
Değişim Katsayısı				0,35	0,65	

Çizelge 3.4'ten kişilerin verdiği yanıtlar kullanılarak kişilerin ortalama aylık gelirleri tahmin edilebilir.

Çizelge 3.4'teki verilere ait bazı bilgiler aşağıda özetlenmiştir.

$\bar{z} = 3180$, $\bar{x} = 495$, $\hat{\sigma}_z^2 = 1244000$, $\hat{C}_z = 0{,}35$, $\hat{C}_x = 0{,}65$, $r_{xz} = 0{,}58$, $\mu_x = 500$

olduğu biliniyor.

Eşitlik (3.66)'dan ortalama aylık gelir tahmini ,

$$\hat{\mu}_{SR} = \bar{z}\left(\frac{\mu_x}{\bar{x}}\right) = 3180 * \left(\frac{500}{495}\right) = 3212$$

olarak hesaplanır.

Eşitlik (3.68)'den ortalama aylık gelir tahmininin hata kareler ortalaması tahmini,

$$
\begin{aligned}
H\hat{K}O(\hat{\mu}_{SR}) &= \left(\frac{1-f}{n}\right)\bar{z}^2\left[\hat{C}_z^2+\hat{C}_x^2-2r_{xz}\hat{C}_x\hat{C}_z\right]\\
&= \left(\frac{1-0{,}10}{10}\right)3180^2\left[0{,}35^2+0{,}65^2-2*0{,}58*0{,}35*0{,}65\right]\\
&= 254462{,}4
\end{aligned}
$$

olarak hesaplanır.

3.2.5. Rastgeleleştirilmiş Yanıt Modelinde Gupta v.d. [21] Regresyon Tahmin Edicileri

Gupta v.d. [21] oransal tahmin içinde regresyon tahminini kullanarak rastgeleleştirilmiş yanıt modellerinde iki yeni bir tahmin edici önermişlerdir.

Rastgeleleştirilmiş Yanıt Modelinde Gupta v.d. [21] Regresyon Tahmin Edicisi-1

Gupta v.d. [21]'in önerdiği oransal-regresyon tahmin edicisi:

$$\hat{\mu}_{RR} = \left[\bar{z}+\hat{\beta}_{zx}(\mu_x-\bar{x})\right]\left(\frac{\mu_x}{\bar{x}}\right) \tag{3.73}$$

şeklindedir. Burada Z değişkeni tam rastgeleleştirilmiş toplamsal modelinde elde edilen yanıt değişkenidir. Yani Z=Y+W'dir.

Gupta v.d. [21] oransal-regresyon tahmin edicisinin hata kareler ortalaması bulunurken fark yöntemi kullanılır. Fark yönteminde tahmin edicide kullanılan her değişken için fark terimleri tanımlanır. Fark terimleri:

$$e_0 = \frac{\bar{z}-\mu_z}{\mu_z} \quad \rightarrow \quad \bar{z} = \mu_z(1+e_0),$$

$$e_1 = \frac{\bar{x}-\mu_x}{\mu_x} \quad \rightarrow \quad \bar{x} = \mu_x(1+e_1) \tag{3.74}$$

şeklinde değerler tanımlanır.

Bu değişkenlerin beklenen değerleri $E(e_i)$, karelerinin beklenen değerleri $E(e_i^2)$ ve kovaryansları $E(e_i e_j)$ aşağıdaki şekildedir:

$$E(e_0) = E(e_1) = 0 \tag{3.75}$$

$$E(e_0^2) = E\left(\frac{\bar{z}-\mu_z}{\mu_z}\right)^2 = \left(\frac{1-f}{n}\right)\frac{\sigma_z^2}{\mu_z^2} = \left(\frac{1-f}{n}\right)C_z^2 \tag{3.76}$$

$$E(e_1^2) = E\left(\frac{\bar{x}-\mu_x}{\mu_x}\right)^2 = \left(\frac{1-f}{n}\right)\frac{\sigma_x^2}{\mu_x^2} = \left(\frac{1-f}{n}\right)C_x^2 \tag{3.77}$$

$$E(e_0 e_1) = E\left(\frac{\bar{z}-\mu_z}{\mu_z}\right)\left(\frac{\bar{x}-\mu_x}{\mu_x}\right) = \left(\frac{1-f}{n}\right)\frac{\sigma_{zx}}{\mu_z\mu_x} = \left(\frac{1-f}{n}\right)\rho_{zx}C_zC_x\,. \tag{3.78}$$

Burada $\left(\frac{1-f}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{N}\right)$'dir.

Gupta v.d. [21] oransal-regresyon tahmin edicisi fark terimleri cinsinden,

$$\hat{\mu}_{RR} = \left[\mu_z(1+e_0) + \beta_{zx}\left(\mu_x - \mu_x(1+e_1)\right)\right]\left(\frac{\mu_x}{\mu_x(1+e_1)}\right) \tag{3.79}$$

şeklinde yazılır. Buradan Gupta v.d. [21] oransal-regresyon tahmin edicisi 2.dereceden sonraki e'li terimler ihmal edilirse,

$$\hat{\mu}_{RR} = \left[\mu_z + \mu_z e_0 - \mu_z e_1 - \beta_{zx}\mu_x e_1 - \mu_z e_0 e_1 + \beta_{zx}\mu_x e_1^2\right] \tag{3.80}$$

olarak elde edilir.

Gupta v.d. [21] oransal-regresyon tahmin edicisinin hata kareler ortalaması,

$$\begin{aligned} HKO(\hat{\mu}_{RR}) &\cong E(\hat{\mu}_{RR} - \mu_z)^2 \\ &\cong E(\mu_z + \mu_z e_0 - \mu_z e_1 - \beta_{zx}\mu_x e_1 - \mu_z e_0 e_1 + \beta_{zx}\mu_x e_1^2 - \mu_z)^2 \end{aligned} \tag{3.81}$$

eşitliğinden bulunur.

Eşitlik (3.81)'de gerekli işlemler yapılıp 2.dereceden sonraki e'li terimler ihmal edilirse Gupta v.d. [21] oransal-regresyon tahmin edicisinin hata kareler ortalaması,

$$HKO\left(\hat{\mu}_{RR}\right) \cong \left(\frac{1-f}{n}\right)\mu_z^2\left[C_z^2\left(1-\rho_{zx}^2\right)+C_x^2\right] \tag{3.82}$$

olarak elde edilir. Eşitlik(3.82)'de Eşitlik(3.35), Eşitlik (3.69) ve Eşitlik(3.70) yerine konulursa Gupta v.d. [21] oransal-regresyon tahmin edicisinin hata kareler ortalaması elde edilir.

Rastgeleleştirilmiş Yanıt Modelinde Gupta v.d. [21] Regresyon Tahmin Edicisi-2

Gupta v.d. [21]'in önerdiği diğer oransal-regresyon tahmin edicisi:

$$\hat{\mu}_{GRR} = \left[b_1\bar{z} + b_2\left(\mu_x - \bar{x}\right)\right]\left(\frac{\mu_x}{\bar{x}}\right) \tag{3.83}$$

şeklindedir. Burada Z değişkeni tam rastgeleleştirilmiş toplamsal modelinde elde edilen yanıt değişkenidir. Yani Z=Y+W'dir. b_1 ve b_2 sabit katsayılardır.

Gupta v.d. [21] tahmin edicisinin hata kareler ortalaması bulunurken fark yöntemi kullanılır.

Gupta v.d. [21] tahmin edicisi fark terimleri cinsinden,

$$\hat{\mu}_{GRR} = \left[b_1\mu_z\left(1+e_0\right) + b_2\left(\mu_x - \mu_x\left(1+e_1\right)\right)\right]\left(\frac{\mu_x}{\mu_x\left(1+e_1\right)}\right) \tag{3.84}$$

şeklinde yazılır. Buradan Gupta v.d. [21] tahmin edicisi 2.dereceden sonraki e'li terimler ihmal edilirse,

$$\hat{\mu}_{GRR} = \left[b_1\mu_z + b_1\mu_z e_0 - b_1\mu_z e_1 - b_2\mu_x e_1 - b_1\mu_z e_0 e_1 + b_1\mu_z e_1^2 + b_1\mu_x e_1^2\right] \tag{3.85}$$

olarak elde edilir.

Gupta v.d. [21] tahmin edicisinin hata kareler ortalaması,

$$
\begin{aligned}
HKO(t_{GRR}) &\cong E(t_{GRR}-\mu_z)^2 \\
&\cong E(b_1\mu_z + b_1\mu_z e_0 - b_1\mu_z e_1 - b_2\mu_x e_1 - b_1\mu_z e_0 e_1 \\
&\qquad + b_1\mu_z e_1^2 + b_1\mu_x e_1^2 - \mu_z)^2
\end{aligned} \tag{3.86}
$$

eşitliğinden bulunur.

Eşitlik (3.86)'da gerekli işlemler yapılıp 2.dereceden sonraki e'li terimler ihmal edilirse, Gupta v.d. [21] tahmin edicisinin hata kareler ortalaması,

$$
\begin{aligned}
HKO(t_{GRR}) \cong{} & (b_1-1)^2\mu_z^2 + \left(\frac{1-f}{n}\right)\Big[b_1^2\mu_z^2(C_z^2 + 3C_x^2 - 4\rho_{zx}C_zC_x) \\
& + b_2^2\mu_x^2C_x^2 - 2b_1\mu_z^2(C_x^2 - \rho_{zx}C_zC_x) \\
& - 2b_2\mu_z\mu_xC_x^2 - 2b_1b_2\mu_z\mu_x(\rho_{zx}C_zC_x - 2C_x^2)\Big]
\end{aligned} \tag{3.87}
$$

olarak elde edilir.

Önerilen tahmin edicide tanımlanan b_1 ve b_2 katsayılarının optimum değerinin bulunmasıyla hata kareler ortalamasının minimum değeri bulunabilir. Bu minimum değer, hata kareler ortalamasının optimumu bulunmak istenen değere göre türevinin alınıp sıfıra eşitlenmesiyle bulunur.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial[HKO(t_{GRR})]}{\partial b_1} ={} & [(b_1-1)\mu_z^2 + 2b_1\mu_z^2 f(C_z^2 + 3C_x^2 - 4\rho_{zx}C_zC_x) \\
& - 2\mu_z^2 f(C_x^2 - \rho_{zx}C_zC_x) - 2b_2\mu_z\mu_x f(\rho_{zx}C_zC_x - 2C_x^2)] = 0 \\
\frac{\partial[HKO(t_{GRR})]}{\partial b_2} ={} & [b_2\mu_x^2 fC_x^2 - 2\mu_z\mu_x fC_x^2 - 2b_1\mu_z\mu_x f(\rho_{zx}C_zC_x - 2C_x^2)] = 0
\end{aligned} \tag{3.88}
$$

Eşitlik(3.88)'den b_1 ve b_2'nin optimum değerleri bulunur. b_1 ve b_2'nin optimal değerleri

$$
b_{1(opt)} = \frac{1-\left(\frac{1-f}{n}\right)C_x^2}{1-\left(\frac{1-f}{n}\right)\left(C_x^2 - C_z^2(1-\rho_{zx}^2)\right)} \tag{3.89}
$$

$$b_{2(opt)} = \frac{\mu_z}{\mu_x}\left\{1 + b_{1(opt)}\left(\frac{\rho_{zx} C_z}{C_x} - 2\right)\right\} \tag{3.90}$$

olarak bulunur.

Eşitlik (3.87)'de Eşitlik (3.89) ve Eşitlik (3.90) yerine konulursa Gupta v.d. [21] tahmin edicisinin minimum hata kareler ortalaması,

$$HKO(\hat{\mu}_{GRR})_{min} \cong \frac{\left(\frac{1-f}{n}\right)\mu_z^2 C_z^2 (1-\rho_{zx}^2)\left\{1-\left(\frac{1-f}{n}\right)C_x^2\right\}}{\left(\frac{1-f}{n}\right)C_z^2 (1-\rho_{zx}^2) + \left\{1-\left(\frac{1-f}{n}\right)C_x^2\right\}} \tag{3.91}$$

olarak elde edilir.

Gupta v.d. [21] 'in ilk oransal-regresyon tahmin edicisi $\hat{\mu}_{RR}$ Diana ve Perri [6]'nın regresyon tahmin edicisi $\hat{\mu}_{DP}$ ile karşılaştırılırsa,

$$\begin{gathered} Var(\hat{\mu}_{DP}) < HKO(\hat{\mu}_{RR}) \\ \left(\frac{1-f}{n}\right)\mu_z^2 C_z^2 (1-\rho_{zx}^2) < \left(\frac{1-f}{n}\right)\mu_z^2 \left[C_z^2 (1-\rho_{zx}^2) + C_x^2\right] \\ 0 < C_x^2 \end{gathered} \tag{3.92}$$

koşulu elde edilir.

Eşitlik (3.92)'de verilen $C_x^2 > 0$ koşulu altında Diana ve Perri [6]'nın regresyon tahmin edicisi $\hat{\mu}_{DP}$, Gupta v.d. [21]'in ilk oransal-regresyon tahmin edicisi $\hat{\mu}_{RR}$'den daha duyarlıdır. Bu koşul her zaman sağlanacağı için Diana ve Perri [6]'nın regresyon tahmin edicisi her zaman Gupta v.d. [21] 'in ilk oransal-regresyon tahmin edicisinden daha duyarlıdır.

Gupta v.d. [21] ‘in ikinci oransal-regresyon tahmin edicisi $\hat{\mu}_{GRR}$ Diana ve Perri [6]’nın regresyon tahmin edicisi $\hat{\mu}_{DP}$ ile karşılaştırılırsa,

$$
\begin{gathered}
HKO\left(\hat{\mu}_{GRR}\right) < Var\left(\hat{\mu}_{DP}\right) \\
\frac{\left(\frac{1-f}{n}\right)\mu_z^2 C_z^2\left(1-\rho_{zx}^2\right)\left\{1-\left(\frac{1-f}{n}\right)C_x^2\right\}}{\left(\frac{1-f}{n}\right)C_z^2\left(1-\rho_{zx}^2\right)+\left\{1-\left(\frac{1-f}{n}\right)C_x^2\right\}} < \left(\frac{1-f}{n}\right)\mu_z^2 C_z^2\left(1-\rho_{zx}^2\right) \\
\left\{1-\left(\frac{1-f}{n}\right)C_x^2\right\} < \left(\frac{1-f}{n}\right)\mu_z^2 C_z^2\left(1-\rho_{zx}^2\right)+\left\{1-\left(\frac{1-f}{n}\right)C_x^2\right\} \qquad (3.93) \\
0 < \left(\frac{1-f}{n}\right)\mu_z^2 C_z^2\left(1-\rho_{zx}^2\right) \\
0 < Var\left(\hat{\mu}_{DP}\right)
\end{gathered}
$$

koşulu elde edilir.

Eşitlik (3.93)’te verilen $Var\left(\hat{\mu}_{DP}\right) > 0$ koşulu altında Gupta v.d. [21] ‘in ikinci oransal-regresyon tahmin edicisi $\hat{\mu}_{GRR}$, Diana ve Perri [6]’nın regresyon tahmin edicisi $\hat{\mu}_{DP}$’den daha duyarlıdır. Bu koşul her zaman sağlanacağı için Gupta v.d. [21] ‘in ikinci oransal-regresyon tahmin edicisi, Diana ve Perri [6]’nın regresyon tahmin edicisinden her zaman daha duyarlıdır.

3.2.6. Gupta v.d. [21] Tahmin Edicileri için Sayısal Örnek

Bölüm 3.2.4’te verilen örnek Gupta v.d. [21] oransal-regresyon tahmin edicileri için de kullanılsın. Çizelge 3.4’ten kişilerin verdiği yanıtlar kullanılarak kişilerin ortalama aylık gelirleri Gupta v.d. [21] oransal-regresyon tahmin edicileri ile tahmin edilebilir.

Çizelge 3.4’teki verilere ait bazı bilgiler aşağıda özetlenmiştir.

$\bar{z} = 3180$, $\bar{x} = 495$, $\hat{\sigma}_z^2 = 1244000$, $\hat{C}_z = 0{,}35$, $\hat{C}_x = 0{,}65$, $r_{xz} = 0{,}58$,

$\hat{\beta}_{zx} = \dfrac{\hat{\sigma}_{xz}}{\hat{\sigma}_x^2} = \dfrac{256166{,}7}{103583} = 2{,}47$, $\mu_x = 500$ olduğu biliniyor.

$$b_{1(opt)} = \frac{1-\left(\frac{1-f}{n}\right)\hat{C}_x^2}{1-\left(\frac{1-f}{n}\right)\left[\hat{C}_x^2-\hat{C}_z^2\left(1-r_{zx}^2\right)\right]} = \frac{1-\left(\frac{1-0{,}10}{10}\right)*0{,}65^2}{1-\left(\frac{1-0{,}10}{10}\right)\left[0{,}65^2-0{,}35^2\left(1-0{,}58^2\right)\right]} = 0{,}99$$

$$b_{2(opt)} = \frac{\bar{z}}{\mu_x}\left\{1+b_{1(opt)}\left(\frac{r_{zx}\hat{C}_z}{\hat{C}_x}-2\right)\right\} = \frac{3180}{500}\left\{1+0{,}99*\left(\frac{0{,}58*0{,}35}{0{,}65}-2\right)\right\} = -4{,}27$$

Gupta v.d. [21] Tahmin Edicisi-1 ile ortalama aylık gelir tahmini

Eşitlik (3.73)'ten,

$$\hat{\mu}_{RR} = \left[\bar{z}+\hat{\beta}_{zx}\left(\mu_x-\bar{x}\right)\right]\left(\frac{\mu_x}{\bar{x}}\right) = \left[3180+2{,}47\left(500-495\right)\right]\left(\frac{500}{495}\right) = 3224{,}6$$

olarak hesaplanır.

Eşitlik (3.82)'den ortalama aylık gelir tahmininin hata kareler ortalaması tahmini,

$$\begin{aligned} H\hat{K}O\left(\hat{\mu}_{RR}\right) &\cong \left(\frac{1-f}{n}\right)\bar{z}^2\left[\hat{C}_z^2\left(1-r_{zx}^2\right)+\hat{C}_x^2\right] \\ &= \left(\frac{1-0{,}10}{10}\right)3180^2\left[0{,}35^2\left(1-0{,}58^2\right)+0{,}65^2\right] \\ &= 458633{,}8 \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Gupta v.d. [21] Tahmin Edicisi-2 ile ortalama aylık gelir tahmini

Eşitlik (3.83)'ten,

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{GRR} &= \left[b_1\bar{z}+b_2\left(\mu_x-\bar{x}\right)\right]\left(\frac{\mu_x}{\bar{x}}\right) \\ &= \left[0{,}99*3180-4{,}27*\left(500-495\right)\right]\left(\frac{500}{495}\right) = 3166{,}3 \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Eşitlik (3.91)'den ortalama aylık gelir tahmininin hata kareler ortalaması tahmini,

$$H\hat{K}O\left(\bar{y}_{GRR}\right)_{min} \cong \frac{\left(\frac{1-f}{n}\right)\hat{\sigma}_z^2\left(1-r_{zx}^2\right)\left\{1-\left(\frac{1-f}{n}\right)\hat{C}_x^2\right\}}{\left(\frac{1-f}{n}\right)\hat{C}_z^2\left(1-r_{zx}^2\right)+\left\{1-\left(\frac{1-f}{n}\right)\hat{C}_x^2\right\}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1-0{,}10}{10}\right)*1244000*\left(1-0{,}58^2\right)*\left\{1-\left(\frac{1-0{,}10}{10}\right)0{,}65^2\right\}}{\left(\frac{1-0{,}10}{10}\right)*0{,}35^2*\left(1-0{,}58^2\right)+\left\{1-\left(\frac{1-0{,}10}{10}\right)0{,}65^2\right\}}$$

$$= 73328{,}9$$

olarak hesaplanır.

4. YARDIMCI DEĞİŞKEN BİLGİSİNİN KULLANILDIĞI RASTGELELEŞTİRİLMİŞ YANIT MODELLER İÇİN ÖNERİLEN TAHMİN EDİCİLER

Tezin bu bölümde literatürde bulunan tahmin edicilerden faydalanarak rastgeleleştirilmiş yanıt modellerinde yardımcı değişken bilgisinin kullanıldığı oran ve ortalama tahmini için yeni tahmin ediciler önerilmiştir.

4.1. Oran Tahmini için Önerilen Tahmin Ediciler

Bu bölümde RYM'lerde oran tahmini için önerdiğimiz yeni tahmin ediciler verilecektir. Rastgeleleştirilmiş yanıt modellerini genelleyerek oran tahmini için yardımcı değişken bilgisinin kullanıldığı üç yeni tahmin edici önerilmiştir.

4.1.1 Oran Tahmini için Önerilen Tek Yardımcı Değişkenin Kullanıldığı Oransal Tahmin Edici

Zaizai [39]'un önerdiği rastgeleleştirilmiş yanıt modelinden yararlanarak oran tahmini için Srivastava [34] tahmin edicisi kullanılarak yeni bir rastgeleleştirilmiş zincirleme oransal tahmin edicisi önerilmiştir.

Zaizai [39]'un tahmin edicisi,

$$\hat{\pi}_Z = \frac{\hat{\lambda}_o - (1-P)}{2P-1} \tag{4.1}$$

şeklindedir. Burada,

$\hat{\lambda}_o = \frac{\hat{\lambda}}{\bar{x}}\mu_x$: λ kitle oranı için oransal tahmin edicisi, (4.2)

$\hat{\lambda} = \frac{n_1}{n}$:Hassas soruya evet diyenlerin oranı, (4.3)

$\mu_x = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$: X yardımcı değişkenin kitle ortalaması, (4.4)

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \text{ : X yardımcı değişkenin örneklem ortalaması'dır.} \qquad (4.5)$$

Önerilen tahmin edici için yanıt değişkeni dağılımı,

$$(\lambda, U) \Rightarrow \begin{cases} (\pi, X), & P \text{ olasılığı ile} \\ (\pi_S, R), & 1\text{-}P \text{ olasılığı ile} \end{cases} \qquad (4.6)$$

şeklinde gösterilebilir. Eşitlik (4.6)'da verilen dağılımda λ, hassas nitel değişken üzerindeki rastgeleleştirilmiş modelleri ifade etmektedir. U ise X yardımcı değişken üzerindeki rastgeleleştirilmiş modelleri ifade etmektedir. Modelde X hassas olmayan, fakat hassas değişken ile ilişkili olan kitle ortalaması (μ_X) bilinen yardımcı değişkendir. λ yanıt değişkeni için Bölüm 2.1'de verilen oran tahmini için geliştirilmiş rastgeleleştirilmiş yanıt modelleri kullanılır. U yanıt değişkeni için ise Bölüm 2.2'de verilen ortalama tahmini için geliştirilmiş rastgeleleştirilmiş yanıt modelleri kullanılır. Bu modellerde doğrudan yanıt tekniği ve toplamsal ya da çarpımsal teknikler kullanılarak π hassas değişken ve X yardımcı değişken bilgileri elde edilir.

Eşitlik (4.6)'da verilen dağılım için P ve (1-P) oranlarında iki deste kart hazırlanır. Kartların üzerinde λ ve U yanıt değişkenleri için iki ayrı ifade yer almaktadır. λ yanıt değişkeni ile ilgili ifade belli bir hassas davranışa sahip olup olmamakla ilgilidir. λ yanıt değişkeni için P oranındaki kartların üzerinde "A hassas davranışa sahibim" ifadesi yazılıdır. (1-P) oranındaki kartların üzerinde farklı ifadeler yer alabilir. Örneğin "A hassas davranışa sahip değilim" ifadesi ya da "S hassas davranışa sahibim" ifadesi yazılı olan bir kart kullanılabilir. Burada S hassas olmayan bir nitel değişkendir. (1-P) oranındaki kartların üzerinde yazan ifadeye göre Eşitlik (4.7)'de önerilen tahmin edicideki c ve h değerleri farklı olacaktır. U yanıt değişkeni için P oranındaki kartların üzerinde "X_i değerini yazınız" ifadesi yazılıdır, (1-P) oranındaki kartların üzerinde ise farklı ifadeler yer alabilir. Örneğin, "Xi değeri ile verilen kart destesinden çektiğiniz sayıyı toplayarak (çarparak) yanıtınızı veriniz". (1-P) oranındaki kartlardaki farklı ifadeleri uygulayabilmek için R düzeni kullanılır. R düzeni, X değişkeni üzerinde uygulanacak değişik rastgele teknikleri ifade etmektedir. Bu rastgele tekniklerde T, ortalaması μ_t ve varyansı σ_t^2 olan rastgele değişken kullanılır. Sonuç olarak P oranındaki kartların üzerinde "A hassas davranışa sahibim, X_i değerini yazınız" ifadesi bulunur. Yani P oranındaki cevaplayıcı "A hassas davranışa sahibim" sorusuna evet ya da hayır yanıtını verip X yardımcı değişken ile ilgili soruya direkt yanıt verecektir. (1-P) oranındaki kartların üzerinde ise "A hassas davranışa sahip değilim, X_i değeri için ilgili düzeni kullanınız" ifadesi bulunur. Yani, (1-P) oranındaki cevaplayıcı "A hassas davranışa sahip değilim" sorusuna evet ya da hayır yanıtını verdikten sonra X sorusunun cevabı için R tekniğini kullanacaktır. Bu açıklamalara göre her bir cevaplayıcı için yanıt dağılımı $(z_1, u_1), (z_2, u_2), ..., (z_n, u_n)$ şeklinde olacaktır. Örneğin vergi kaçakçılığı ile ilgili bir araştırmada hassas soru kişinin vergi kaçırıp kaçırmadığı olsun. Yardımcı değişken ise kişinin oturduğu evin büyüklüğü olsun. P oranındaki kartlarda "Vergi kaçakçılığı yaptım, eviniz kaç m^2'dir?" ifadesi yazılı olacaktır. (1-P) oranındaki kartlarda "Vergi kaçakçılığı yapmadım, eviniz kaç m^2'dir?Lütfen R düzenini kullanınız" ifadesi yazılır. R düzeninde toplamsal bir teknik uygulanacak ise kişi kendi cevabı ile T rastgele dağılımdan türetilen seçtiği karttaki sayıyı toplayıp cevabını verecektir.

Eşitlik (4.6)'daki yanıt dağılımından yararlanarak önerilen oransal tahmin edici:

$$\hat{\pi}_{\text{Öneri } 1} = \frac{\hat{\lambda}_{o1} - c}{h} \tag{4.7}$$

şeklindedir. Burada,

$$\hat{\lambda}_{o1} = \hat{\lambda}\left(\frac{\mu_u}{\bar{u}}\right)^{\alpha} : \lambda\text{'nın zincirleme oransal tahmin edicisi,} \tag{4.8}$$

α, c ve h sabit katsayılardır.

$\hat{\pi}_{\text{Öneri1}}$ tahmin edicisinin hata kareler ortalaması,

$$
\begin{aligned}
HKO\left(\tau_{\text{Öneri1}}\right) &= \frac{E\left(\hat{\lambda}_{o1}-\lambda\right)^2}{h^2} \\
&= \frac{HKO\left(\hat{\lambda}_{o1}\right)}{h^2}
\end{aligned} \tag{4.9}
$$

şeklindedir.

$\hat{\lambda}_{o1}$ oransal tahmin edicisinin hata kareler ortalamasını elde etmek için fark yönteminden yararlanılır [26].

Klasik basit oransal tahmini için fark yönteminde,

$$
e_0 = \frac{\hat{\lambda}-\lambda}{\lambda} \quad \rightarrow \quad \hat{\lambda} = \lambda\left(1+e_0\right), \tag{4.10}
$$

$$
e_1 = \frac{\bar{u}-\mu_u}{\mu_u} \quad \rightarrow \quad \bar{u} = \mu_u\left(1+e_1\right) \tag{4.11}
$$

şeklinde tahmin edicideki değişken sayısı kadar fark terimleri tanımlanır.

Bu değişkenlerin beklenen değerleri $E\left(e_i\right)$, karelerinin beklenen değerleri $E\left(e^2_i\right)$ ve kovaryansları $E\left(e_i e_j\right)\left(i \neq j\right)$ aşağıdaki şekildedir:

$$
E\left(e_0\right) = E\left(e_1\right) = 0 \tag{4.12}
$$

$$
E\left(e_0^2\right) = E\left(\frac{\hat{\lambda}-\lambda}{\lambda}\right)^2 = \frac{\left(1-f\right)}{n}\frac{\sigma_\lambda^2}{\lambda^2} = \frac{\left(1-f\right)}{n}C_\lambda^2 \tag{4.13}
$$

$$
E\left(e_1^2\right) = E\left(\frac{\bar{u}-\mu_u}{\mu_u}\right)^2 = \frac{\left(1-f\right)}{n}\frac{\sigma_u^2}{\mu_u^2} = \frac{\left(1-f\right)}{n}C_u^2 \tag{4.14}
$$

$$E(e_0e_1) = E\left(\frac{\hat{\lambda}-\lambda}{\lambda}\right)\left(\frac{\bar{u}-\mu_u}{\mu_u}\right) = \frac{(1-f)}{n}\frac{\sigma_{\lambda u}}{\lambda\mu_u} = \frac{(1-f)}{n}\rho_{\lambda u}C_{\lambda}C_u \tag{4.15}$$

Burada $\left(\frac{1-f}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{N}\right)$’dir.

$\hat{\lambda}_{o1}$ oransal tahmin edicisi Eşitlik (4.10) ve Eşitlik (4.11)’deki e’li terimler cinsinden yazılarak yeniden ifade edilirse,

$$\hat{\lambda}_{o1} = \lambda(1+e_0)\left\{\frac{\mu_u}{\mu_u(1+e_1)}\right\}^{\alpha}$$

$$\hat{\lambda}_{o1} = \lambda(1+e_0)(1+e_1)^{-\alpha} \tag{4.16}$$

şeklinde elde edilir.

Bu eşitlikteki ifadeler Taylor serisinden yararlanarak,

$$(1+e_1)^{-\alpha} = 1-\alpha e_1 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}e_1^2 + \ldots + e_1^{-\alpha} \tag{4.17}$$

olarak bulunur.

Eşitlik (4.17)’deki 2.dereceden sonraki e’li terimler ihmal edilirse Eşitlik(4.17),

$$(1+e_1)^{-\alpha} \cong 1-\alpha e_1 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}e_1^2 \tag{4.18}$$

şeklinde elde edilir.

Eşitlik (4.18), Eşitlik (4.16)'da yerine konulup çarpımlar yapılırsa ve 2.dereceden e'li terimler ihmal edilirse,

$$\hat{\lambda}_{o1} \cong \lambda(1+e_0)\left(1-\alpha e_1+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}e_1^2\right)$$

$$\hat{\lambda}_{o1} \cong \lambda\left[1+e_0-\alpha e_1-\alpha e_0 e_1+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}e_1^2\right] \tag{4.19}$$

olarak elde edilir.

$\hat{\pi}_{Öneri1}$ tahmin edicisinin hata kareler ortalaması,

$$HKO(\hat{\pi}_{Öneri1}) \cong \frac{E(\hat{\lambda}_{01}-\lambda)^2}{h^2}$$

$$HKO(\hat{\pi}_{Öneri1}) \cong \frac{\lambda^2}{h^2}E\left[e_0-\alpha e_1-\alpha e_0 e_1+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}e_1^2\right]^2 \tag{4.20}$$

şeklindedir.

Beklenen değerde kare alınıp, 2.dereceden sonraki e'li terimler ihmal edilirse hata kareler ortalaması,

$$HKO(\hat{\pi}_{Öneri1}) \cong \frac{\lambda^2}{h^2}E\left[e_0^2+\alpha^2 e_1^2-2\alpha e_0 e_1\right] \tag{4.21}$$

olarak elde edilir.

Eşitlik (4.21)'de; Eşitlik (4.13), Eşitlik (4.14) ve Eşitlik (4.15) yerine konulursa, $\hat{\pi}_{Öneri1}$ tahmin edicisinin hata kareler ortalaması,

$$
\begin{aligned}
HKO\left(\hat{\pi}_{Öneri1}\right) &\cong \frac{(1-f)\lambda^2}{nh^2}\left[C_\lambda^2 + \alpha^2 C_u^2 - 2\alpha\rho_{\lambda u} C_\lambda C_u\right] \\
&\cong \frac{(1-f)\lambda^2}{nh^2}\left[C_\lambda^2 + \alpha C_u^2\left(\alpha - 2\rho_{\lambda u}\frac{C_\lambda}{C_u}\right)\right] \\
HKO\left(\hat{\pi}_{Öneri1}\right) &\cong \frac{(1-f)\lambda^2}{nh^2}\left[C_\lambda^2 + \alpha C_u^2(\alpha - 2K_{\lambda u})\right]
\end{aligned}
\tag{4.22}
$$

olarak elde edilir. Burada $K_{\lambda u} = \rho_{\lambda u}\dfrac{C_\lambda}{C_u}$ 'dir.

Önerilen tahmin edicide, α değerinin optimum değerinin bulunmasıyla hata kareler ortalamasının minimum değeri bulunabilir. Bu minimum değer, hata kareler ortalamasının optimum değeri bulunmak istenen değere göre türevinin alınıp sıfıra eşitlenmesiyle bulunur.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\left[HKO\left(\hat{\pi}_{Öneri1}\right)\right]}{\partial\alpha} &= \frac{\partial\left[\frac{(1-f)\lambda^2}{nh^2}\left[C_\lambda^2 + \alpha C_u^2(\alpha - 2K_{\lambda u})\right]\right]}{\partial\alpha} = 0 \\
\frac{\partial\left[HKO\left(\hat{\pi}_{Öneri1}\right)\right]}{\partial\alpha} &= 2\alpha C_u^2 - 2K_{\lambda u}C_u^2 = 0
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

Eşitlik (4.23)'ten,

$$
\alpha = K_{\lambda u} \tag{4.24}
$$

olarak bulunur.

α değeri, Eşitlik (4.22)'de yerine konulursa $\hat{\pi}_{Öneri1}$ tahmin edicisinin hata kareler ortalaması,

$$
\begin{aligned}
HKO_{min}\left(\hat{\pi}_{Öneri1}\right) &\cong \frac{(1-f)\lambda^2}{nh^2}\left(C_\lambda^2 - K^2_{\lambda u}C_u^2\right) \\
HKO_{min}\left(\hat{\pi}_{Öneri1}\right) &\cong \frac{(1-f)\sigma_\lambda^2}{nh^2}\left(1 - \rho^2_{\lambda u}\right)
\end{aligned}
\tag{4.25}
$$

olarak elde edilir. Eşitlik(4.25)'teki $\rho^2_{\lambda u}$ X değişkeni için uygulanacak farklı λ ve U yanıt değişkenleri için farklı eşitliklere sahip olacaktır.

Bölüm 3.2.1'de olduğu gibi bu yanıt dağılımı için de farklı modeller uygulanabilir. Uygulanabilecek 3 model aşağıda verilmiştir.

Model 1

Model 1 için λ ve U yanıt değişkenleri için kullanılacak kartlar:

$$(\lambda, U) \Rightarrow \begin{cases} (\pi, X), & \text{P olasılığı ile} \\ (1-\pi, X), & \text{1-P olasılığı ile} \end{cases} \qquad (4.26)$$

şeklindedir. Eşitlik (4.26)'da verilen yanıt dağılımında λ yanıt değişkeni için P oranındaki kartlarda "Vergi kaçakçılığı yaptım (π)" ifadesi, (1-P) oranındaki kartlarda "Vergi kaçakçılığı yapmadım $(1-\pi)$" ifadesi bulunsun. π hassas değişkenin oran tahmininde kullanılacak X yardımcı değişkeni "Evin büyüklüğü (m^2)" olsun. U yanıt değişkeni için ise her iki karttaki ifade aynı ve "Evinizin büyüklüğünü (m^2) yazınız" olsun. Yani R düzeninde doğrudan yanıt alma tekniği uygulansın. Dolayısıyla tüm cevaplayıcılardan X yardımcı değişkeni için doğrudan cevaplar alınır. Bu durumda yardımcı değişken için R=X olacaktır. Bu açıklamalar doğrultusunda önerilen genelleştirilmiş modeldeki kullanılacak eşitlikler aşağıda verilmiştir.

λ yanıt değişkeni için matematiksel ifade,

$$\begin{aligned} \lambda &= P\pi + (1-P)(1-\pi) \\ \lambda &= P\pi + 1 - \pi - P + P\pi \\ \lambda &= (2P-1)\pi + 1 - P \end{aligned} \qquad (4.27)$$

şeklindedir. Eşitlik (4.27)'den π ifadesi çekilirse,

$$\pi = \frac{\lambda - c}{h} = \frac{\lambda - (1-P)}{(2P-1)} \tag{4.28}$$

elde edilir. Dolayısıyla Eşitlik (4.28)'den c=(1-P) ve h=(2P-1)'dir.

U yanıt değişkeni için matematiksel ifade,

$$\begin{aligned} U &= PX + (1-P)X \\ U &= X \end{aligned} \tag{4.29}$$

şeklindedir.

Eşitlik (4.27) ve Eşitlik (4.29) kullanılarak bu model için ortalama, varyans ve kovaryans eşitlikleri elde edilir.

λ yanıt değişkeni için oran eşitliği Eşitlik (4.27)'de verildiği gibidir.

U yanıt değişkeni için ortalama eşitliği,

$$\begin{aligned} E(U) &= E(X) \\ \mu_u &= \mu_x \end{aligned} \tag{4.30}$$

şeklindedir.

λ yanıt değişkeni için varyans eşitliği,

$$\sigma_\lambda^2 = (2P-1)^2 \sigma_\pi^2 \tag{4.31}$$

şeklindedir.

U yanıt değişkeni için varyans eşitliği,

$$\begin{aligned} \sigma_u^2 &= PE(X^2) + (1-P)E(X^2) - \mu_u^2 \\ &= PE(X^2) + (1-P)E(X^2) - \mu_x^2 \\ &= E(X^2) - \mu_x^2 \\ \sigma_u^2 &= \sigma_x^2 \end{aligned} \tag{4.32}$$

olarak bulunur.

λ ve U modelleri arasındaki kovaryans eşitliği,

$$
\begin{aligned}
\sigma_{\lambda u} &= E(\lambda U) - E(\lambda)E(U) \\
&= E\left[\{(2P-1)\pi + (1-P)\}X\right] - \{(2P-1)\pi + (1-P)\}\mu_x \\
&= (2P-1)\{E(\pi X) - E(\pi)E(X)\} \\
\sigma_{\lambda u} &= (2P-1)\sigma_{\pi x}
\end{aligned}
\tag{4.33}
$$

şeklindedir.

Eşitlik (4.25)'te verilen hata kareler ortalamasında Eşitlik (4.31), Eşitlik (4.32) ve Eşitlik (4.33) yerine konularak Eşitlik (4.26) ile verilen yanıt dağılımı ile oluşturulan model için hata kareler ortalaması,

$$
\begin{aligned}
HKO_{min}(\hat{\pi}_{Öneri1}) &\cong \frac{(1-f)\sigma^2_{\lambda}}{nh^2}(1-\rho^2_{\lambda u}) \\
&\cong \frac{(1-f)\sigma^2_{\lambda}}{nh^2}\left(1-\frac{\sigma^2_{\lambda u}}{\sigma^2_{\lambda}\sigma^2_{u}}\right), \quad h=(2P-1) \\
&\cong \frac{(1-f)(2P-1)^2\sigma^2_{\pi}}{n(2P-1)^2}\left(1-\frac{(2P-1)^2\sigma^2_{\pi x}}{(2P-1)^2\sigma^2_{\pi}\sigma^2_{x}}\right) \\
HKO_{min}(\hat{\pi}_{Öneri1}) &\cong \frac{(1-f)\sigma^2_{\pi}}{n}(1-\rho^2_{\pi x})
\end{aligned}
\tag{4.34}
$$

olarak elde edilir.

Model 2

Model 2 için λ ve U yanıt değişkenleri için kullanılacak kartlar:

$$
(\lambda, U) \Longrightarrow
\begin{cases}
(\pi, X), & P \text{ olasılığı ile} \\
(1-\pi, X+T), & 1\text{-}P \text{ olasılığı ile}
\end{cases}
\tag{4.35}
$$

şeklindedir. Eşitlik (4.35)'te verilen yanıt dağılımında λ yanıt değişkeni için P oranındaki kartlarda "Uyuşturucu kullanıyorum (π)" ifadesi, (1-P) oranındaki kartlarda

“Uyuşturucu kullanmıyorum $(1-\pi)$” ifadesi bulunsun. π hassas değişkenin oran tahmininde kullanılacak X yardımcı değişkeni “günlük alkol tüketimi (ml)” olsun. U yanıt değişkeni için ise P oranındaki kartlarda “Günlük alkol tüketiminizi yazınız (ml)” ifadesi olsun. (1-P) oranındaki kartlarda “Günlük alkol tüketiminizi kart destesinden çektiğiniz rakamla toplayıp yanıtınızı yazınız (ml) ”olsun. Yani R düzeninde toplama tekniği uygulansın. Bu durumda yardımcı değişken için R=X+T olacaktır. Bu açıklamalar doğrultusunda önerilen genelleştirilmiş modeldeki kullanılacak eşitlikler aşağıda verilmiştir.

λ yanıt değişkeni için oran eşitliği Eşitlik (4.27)’de verildiği gibidir. Varyans eşitliği ise Eşitlik (4.31)’de verildiği gibidir. Dolayısıyla, Model 1’de verildiği gibi c=(1-P) ve h=(2P-1)’dir.

U yanıt değişkeni için matematiksel ifade,

$$\begin{aligned} U &= PX + (1-P)(X+T) \\ U &= X + (1-P)T \end{aligned} \qquad (4.36)$$

şeklindedir.

U yanıt değişkeni için ortalama eşitliği,

$$\begin{aligned} E(U) &= E(X) + (1-P)E(T) \\ \mu_u &= \mu_x + (1-P)\mu_t \end{aligned} \qquad (4.37)$$

şeklindedir.

U yanıt değişkeni için varyans eşitliği,

$$\begin{aligned} \sigma_u^2 &= E(U^2) - [E(U)]^2 \\ &= E(X^2) + (1-P)E(T^2) + 2P(1-P)E(XT) - [\mu_x + (1-P)\mu_t]^2 \\ &= (\sigma_x^2 + \mu_x^2) + (1-P)(\sigma_t^2 + \mu_t^2) - \mu_x^2 - (1-P)^2\mu_t^2 - 2(1-P)\mu_x\mu_t \\ &= \sigma_x^2 + (1-P)(\sigma_t^2 + P\mu_t^2) \end{aligned}$$

$$\sigma_u^2 = \sigma_x^2 + (1-P)\mu_T^2 (\sigma_T^2 + P \qquad (4.38)$$

olarak bulunur.

λ ve U modelleri arasındaki kovaryans eşitliği,

$$
\begin{aligned}
\sigma_{\lambda u} &= E(\lambda U) - E(\lambda)E(U) \\
&= E\left[\{(2P-1)\pi + 1 - P\}X + (1-P)T\right] \\
&\quad - \left[\{(2P-1)\pi + 1 - P\}\mu_x + (1-P)\mu_t)\right] \\
&= (2P-1)\left[E(\pi X) - \pi\mu_x\right] + (2P-1)(1-P)\pi\mu_t + (1-P)\mu_t \\
&\quad + (1-P)\mu_t - (2P-1)(1-P)\pi\mu_t - (1-P)\mu_t - (1-P)^2\mu_t \\
\sigma_{\lambda u} &= (2P-1)\sigma_{\pi x} + P(1-P)\mu_t
\end{aligned}
\tag{4.39}
$$

şeklinde bulunur.

Eşitlik (4.25)'te verilen hata kareler ortalamasında Eşitlik (4.31), Eşitlik (4.38) ve Eşitlik (4.39) yerine konularak Eşitlik (4.35) ile verilen yanıt dağılımı ile oluşturulan model için hata kareler ortalaması,

$$
\begin{aligned}
HKO_{min}(T_{Öneri1}) &\cong \frac{(1-f)\sigma_\lambda^2}{nh^2}(1-\rho^2_{\lambda u}) \\
&\cong \frac{(1-f)\sigma_\lambda^2}{nh^2}\left(1 - \frac{\sigma_{\lambda u}^2}{\sigma_\lambda^2\sigma_u^2}\right), \quad h = (2P-1) \\
HKO_{min}(T_{Öneri1}) &\cong \frac{(1-f)(2P-1)^2\sigma_\pi^2}{n(2P-1)^2}\left(1 - \frac{\left[(2P-1)\sigma_{\pi x} - P(1-P)\mu_t\right]^2}{(2P-1)^2\sigma_\pi^2\left[\sigma_x^2 + (1-P)\mu_t^2(\sigma_t^2 + P)\right]}\right)
\end{aligned}
\tag{4.40}
$$

olarak elde edilir.

Model 3

Model 3 için λ ve U yanıt değişkenleri için kullanılacak kartlar:

$$
(\lambda, U) \Longrightarrow
\begin{cases}
(\pi, X), & \text{P olasılığı ile} \\
((1-\pi), XT), & \text{1-P olasılığı ile}
\end{cases}
\tag{4.41}
$$

şeklindedir. Eşitlik (4.41)'de verilen yanıt dağılımında λ yanıt değişkeni için P oranındaki kartlarda "Uyuşturucu kullanıyorum (π)" ifadesi, (1-P) oranındaki kartlarda "Uyuşturucu kullanmıyorum $(1-\pi)$" ifadesi bulunsun. π hassas değişkenin oran tahmininde kullanılacak X yardımcı değişkeni "günlük alkol tüketimi (ml)" olsun. U yanıt değişkeni için ise P oranındaki kartlarda "Günlük alkol tüketiminizi yazınız (ml)" ifadesi olsun. (1-P) oranındaki kartlarda "Günlük alkol tüketiminizi kart destesinden çektiğiniz rakamla çarpıp yanıtınızı yazınız (ml) "olsun. Yani R düzeninde çarpma tekniği uygulansın. Bu durumda yardımcı değişken için R=XT olacaktır. Bu açıklamalar doğrultusunda önerilen genelleştirilmiş modeldeki kullanılacak eşitlikler aşağıda verilmiştir.

λ yanıt değişkeni için oran eşitliği Eşitlik (4.27)'de verildiği gibidir. Varyans eşitliği ise Eşitlik (4.31)'de verildiği gibidir. Dolayısıyla, Model 1'de verildiği gibi c=(1-P) ve h=(2P-1)'dir.

U yanıt değişkeni için matematiksel ifade,

$$\begin{aligned} U &= PX + (1-P)(XT) \\ U &= X\left[P + (1-P)T\right] \end{aligned} \tag{4.42}$$

şeklindedir.

U yanıt değişkeni için ortalama eşitliği,

$$\begin{aligned} E(U) &= E(X)E\left[P + (1-P)T\right] \\ \mu_u &= \mu_x\left[P + (1-P)\mu_t\right] \end{aligned} \tag{4.43}$$

şeklindedir.

U yanıt değişkeni için varyans eşitliği,

$$\sigma_u^2 = E\left\{X^2\left[P+(1-P)T^2\right]\right\}-\mu_u^2$$
$$= P\left(\sigma_x^2+\mu_x^2\right)+(1-P)\left[\left(\sigma_x^2+\mu_x^2\right)\left(\sigma_t^2+\mu_t^2\right)-\mu_x^2\mu_t^2+\mu_x^2\mu_t^2\right]-\mu_u^2$$
$$= \left(\sigma_x^2+\mu_x^2\right)\left[P+(1-P)\left(\sigma_t^2+\mu_t^2\right)\right]-\mu_u^2$$
$$\sigma_u^2 = \mu_x^2\left(1+C_x^2\right)\left[P+(1-P)\mu_t^2\left(1+C_t^2\right)\right]-\mu_u^2 \tag{4.44}$$

olarak bulunur.

λ ve U yanıt değişkenleri arasındaki kovaryans eşitliği,

$$\begin{aligned}\sigma_{\lambda u} &= E(\lambda U)-E(\lambda)E(U)\\ &= E\left[\left((P-1)\pi+1-P\right)X\left(P+(1-P)T\right)\right]\\ &\quad-\left((P-1)\pi+1-P\right)\mu_x\left(P+(1-P)\mu_t\right)\\ \sigma_{\lambda u} &= (P-1)\sigma_{\pi x}+P(1-P)\mu_t\mu_x\end{aligned} \tag{4.45}$$

şeklinde bulunur.

Eşitlik (4.25)’te verilen hata kareler ortalamasında Eşitlik (4.31), Eşitlik (4.44) ve Eşitlik (4.45) yerine konularak Eşitlik (4.41) ile verilen yanıt dağılımı ile oluşturulan model için hata kareler ortalaması,

$$\begin{aligned}HKO_{min}\left(\tau_{Öneri1}\right) &\cong \frac{(1-f)\sigma_\lambda^2}{nh^2}\left(1-\rho^2_{\lambda u}\right)\\ &\cong \frac{(1-f)\sigma_\lambda^2}{nh^2}\left(1-\frac{\sigma_{\lambda u}^2}{\sigma_\lambda^2\sigma_u^2}\right),\quad h=(P-1)\\ &\cong \frac{(1-f)(P-1)^2\sigma_\pi^2}{n(P-1)^2}\left(1-\frac{\left[(P-1)\sigma_{\pi x}+P(1-P)\mu_t\mu_x\right]^2}{(P-1)^2\sigma_\pi^2\left\{\mu_x^2\left(1+C_x^2\right)\left[P+(1-P)\mu_t^2\left(1+C_t^2\right)\right]-\mu_u^2\right\}}\right)\end{aligned} \tag{4.46}$$

olarak elde edilir.

Yukarıda verilen rastgeleleştirilmiş yanıt modelleri dışında birçok model bu tahmin edici için uygulanabilir. Uygulanabilecek bazı rastgeleleştirilmiş modeller Çizelge 4.1’de gösterilmiştir. Çizelge 4.1’in R sütunu X yardımcı değişkeni için uygulanabilecek düzenleri göstermektedir. Oran ve ortalama sütunu her bir model için λ yanıt değişkeni için oran eşitliğini, U yanıt değişkeni için ise ortalama eşitliğini göstermektedir. Hata Kareler Ortalaması sütunu ise her model için bulunan hata kareler ortalaması eşitliklerini göstermektedir.

Çizelge 4.1. $\hat{\pi}_{Öneri1}$ tahmin edicisi için bazı özel rastgele yanıt modelleri için gerekli eşitlikler

Model	R	Oran, Ortalama	Hata Kareler Ortalaması
1	X	$\lambda = (2P-1)\pi + 1 - P$ $\mu_u = \mu_x$	$HKO_{min}(\hat{\pi}_{Öneri1}) \cong \frac{(1-f)\sigma_\pi^2}{n}(1-\rho^2_{\pi x})$
2	X+T	$\lambda = (2P-1)\pi + 1 - P$ $\mu_u = \mu_x + (1-P)\mu_t$	$HKO_{min}(\hat{\pi}_{Öneri1}) \cong \frac{(1-f)(2P-1)^2\sigma_\pi^2}{n(2P-1)^2}\left(1-\frac{\{(2P-1)\sigma_{\pi x} - P(1-P)\mu_t\}^2}{(2P-1)^2\sigma_\pi^2\sigma_x^2 + (1-P)\mu_t^2(\sigma_t^2 + P\mu_t^2)}\right)$
3	XT	$\lambda = (2P-1)\pi + 1 - P$ $\mu_u = [P + (1-P)\mu_t]\mu_x$	$HKO_{min}(\hat{\pi}_{Öneri1}) \cong \frac{(1-f)(2P-1)^2\sigma_\pi^2}{n(2P-1)^2}\left[1-\frac{\{(2P-1)\sigma_{\pi x} + P(1-P)\mu_t\mu_x\}^2}{(2P-1)^2\sigma_\pi^2\left[\mu_x^2(1+C_x^2)\{P + (1-P)\mu_t^2(1+C_t^2)\} - \mu_u^2\right]}\right]$

4.1.2. Oran Tahmini için Önerilen Tek Yardımcı Değişkenin Kullanıldığı Oransal Tahmin Edici için Sayısal Örnek

N=100 hanelik bir bölgede vergi kaçakçılığı ile ilgili bir çalışma yapılsın. Hassas değişken vergi kaçakçılığı olsun. Hassas değişkenin tahmininde kullanılacak yardımcı değişken ise kişilerin oturduğu evin büyüklüğü (m^2) olsun. n=10 hane yerine konulmadan basit rastgele örnekleme ile seçilsin. Hane reislerine P=0,20 olduğu RYM uygulansın. Bu durumda kişilerin %20'si yardımcı değişkene doğrudan cevap verirken, geriye kalan kişilerin %80'i R düzeni kullanarak cevaplarını verir. R düzeninde uygulanacak farklı tekniklere göre çeşitli modeller oluşturulabilir. Çizelge 4.1' de verilen modeller için sayısal çalışma aşağıda verilmiştir.

Model 1 için Sayısal Örnek

Model 1 için vergi kaçakçılığı yapanların oran tahmini ve bu tahminin hata kareler ortalaması tahmini Çizelge 4.2'de verilen veriler yardımıyla bulunabilir.

Çizelge 4.2. Oran tahmini için önerilen tek yardımcı değişkenin kullanıldığı oransal tahmin edici için model 1 örneği

Hane Reisleri	Gerçek Yanıtlar λ_i	x_i	Seçilen Karttaki İfade*	Verilen Yanıtlar $\hat{\lambda}_i$	$u_i=x_i$	Yanıt Dağılımı
1	Evet	80	1	Evet	80	(1, 80)
2	Evet	0	2	Hayır	70	(0, 70)
3	Hayır	120	1	Evet	120	(1, 120)
4	Hayır	180	2	Evet	180	(1, 180)
5	Hayır	150	2	Evet	150	(1, 150)
6	Hayır	100	2	Evet	100	(1, 100)
7	Hayır	90	2	Evet	90	(1, 90)
8	Evet	120	2	Hayır	120	(0, 120)
9	Evet	0	2	Hayır	80	(0, 80)
10	Hayır	100	2	Evet	100	(1, 100)
Ortalama				0,70	109	
Varyans				0,23	1187,78	
Değişim Katsayısı				0,69	0,32	

***1**: “Vergi kaçakçılığı yaptım,eviniz kaç m^2’dir” **2:** “Vergi kaçakçılığı yapmadım, eviniz kaç m^2’dir”

Çizelge 4.2.’de “Gerçek Yanıtlar” sütununda gerçekte bu yanıtlar çalışmada bilinmemesine rağmen bu örnek için kişilerin gerçek yanıtlarının bilindiğini varsayalım. Seçilen kart sütununda 10 kişi için oluşturulan kartlar yer almaktadır. P=0,20 olduğu için kartların 10*0,20=2’sinde “Vergi kaçakçılığı yaptım, eviniz kaç m^2’dir?”ifadesi bulunur. Bu kartı seçen kişiler doğrudan yanıt vereceklerdir. Kartların 10*0,80=8’inde “Vergi kaçakçılığı yapmadım, eviniz kaç m^2’dir?” ifadesi bulunur. R düzeninde doğrudan yanıt alma tekniğin uygulandığı varsayımı altında bu kartı seçen kişiler vergi kaçakçılığı ile ilgili ifadeye uygun yanıtı vererek(evet ya da hayır), eviniz kaç m^2’dir? sorusu için gerçek yanıtlarını direkt verirler. Çizelge 4.2’de 1. kişinin seçtiği karttaki ifade “Vergi kaçakçılığı yaptım, eviniz kaç m^2’dir?”şeklindedir. Kişi gerçekte vergi kaçakçılığı yapmıştır ve evinin büyüklüğü 80 m^2’dir. Dolayısıyla kişinin verdiği yanıt “Evet, 80” olacaktır. 2.kişinin seçtiği karttaki ifade “Vergi kaçakçılığı yapmadım, eviniz kaç m^2’dir?” şeklindedir. Kişi gerçekte vergi kaçakçılığı yapmıştır ve evinin büyüklüğü 70 m^2’dir. Dolayısıyla kişinin verdiği yanıt “Hayır, 70” olacaktır. Vergi kaçakçılığı yapıp yapmama ile ilgili değişkende hayır diyenler “0”, evet diyenler “1” olarak kodlanırsa bu örnek için oluşacak yanıt dağılımı $(1,80),(0,70),(1,120),(1,180),(1,150),(1,100),(1,90),(0,120),(0,80),(1,100)$ şeklindedir.

Kişilerin verdiği yanıtlar kullanılarak kişilerin vergi kaçakçılığı oranı tahmin edilebilir.

Model 1 için Çizelge 4.2.’deki verilere ait bazı bilgiler aşağıda özetlenmiştir.

$\hat{\lambda} = \frac{n_1}{n} = \frac{7}{10} = 0{,}70$, $\bar{u} = \bar{x} = 109$, $\hat{\sigma}^2_{\lambda} = 0{,}23$, $\hat{C}_{\lambda} = 0{,}69$, $\hat{\sigma}^2_{u} = 1187{,}78$, $\hat{C}_u = 0{,}32$,

$r_{\lambda u} = 0{,}38$, c=(1-0,20)=0,80,h=(2P-1)=(2*0,20-1)=-0,60,

$$\hat{\alpha} = K_{\lambda u} = r_{\lambda u}\frac{\hat{C}_{\lambda}}{\hat{C}_u} = 0{,}38 * \frac{0{,}69}{0{,}32} = 0{,}83,$$

O bölgedeki evlerin $\mu_u = \mu_x = 100\,m^2$ olduğu biliniyor.

Eşitlik (4.7)'den vergi kaçakçılığı yapanların oran tahmini,

$$\hat{\pi}_{Öneri1} = \frac{\hat{\lambda}\left(\frac{\mu_u}{\bar{u}}\right)^{\alpha} - c}{h} = \frac{0{,}70 * \left(\frac{100}{109}\right)^{0{,}83} - 0{,}80}{-0{,}60} = 0{,}25$$

olarak hesaplanır.

Eşitlik (4.25)'ten vergi kaçakçılığı yapanların oran tahmininin hata kareler ortalaması tahmini,

$$H\hat{K}O_{min}(\hat{\pi}_{Öneri1}) \cong \frac{(1-f)\hat{\sigma}^2_{\lambda}}{nh^2}(1-r^2_{\lambda u}) = \frac{(1-0{,}10)0{,}23}{10(-0{,}60)^2}(1-0{,}38^2) = 0{,}05$$

olarak hesaplanır.

Model 2 için Sayısal Örnek

Model 2 için vergi kaçakçılığı yapanların oran tahmini ve bu tahminin hata kareler ortalaması tahmini Çizelge 4.3'te verilen veriler yardımıyla bulunabilir. R düzeninde toplamsal teknik uygulanır. Toplamsal teknik uygulayabilmek için X yardımcı değişkeni için T rastgele değişkeni türetilir. T rastgele değişkeni Uniform (10, 50) dağılımından türetilsin. Uniform dağılımının ortalaması $\mu_t = \frac{10+50}{2} = 30$ ve varyansı

$\sigma^2_t = \frac{(50-10)^2}{12} = 133{,}33$'tür.

Çizelge 4.3. Oran Tahmini için Önerilen Tek Yardımcı Değişkenin Kullanıldığı Oransal

Tahmin Edici için Model 2 Örneği

Hane Reisleri	Gerçek Yanıtlar λ_i	X_i	Seçilen Karttaki İfade*	Rastgele Sayılar Destesinden Seçilen Sayı Ti	Verilen Yanıtlar $\hat{\lambda}_i$	$U_i=X_i+T_i$	Yanıt Dağılımı
1	Evet	80	1	36	Evet (1)	80	(1, 80)
2	Evet	70	2	46	Hayır (0)	70+46	(0, 116)
3	Hayır	120	1	49	Evet (1)	120	(1, 120)
4	Hayır	180	2	46	Evet (1)	180+46	(1, 226)
5	Hayır	150	2	45	Evet (1)	150+45	(1, 195)
6	Hayır	100	2	50	Evet (1)	100+50	(1, 150)
7	Hayır	90	2	15	Evet (1)	90+15	(1, 105)
8	Evet	120	2	30	Hayır (0)	120+30	(0, 150)
9	Evet	80	2	20	Hayır (0)	80+20	(0, 100)
10	Hayır	100	2	17	Evet (1)	100+17	(1, 117)
Ortalama				35,4	0,70	135,9	
Varyans				13,89	0,23	2042,54	
Değişim Katsayısı				0,39	0,69	0,33	

*****1: “Vergi kaçakçılığı yaptım, Eviniz kaç m^{2}’dir?”
2**:** “Vergi kaçakçılığı yapmadım, Eviniz kaç m^{2}’dir?”,R düzenini kullanınız”

Çizelge 4.3.’te “Gerçek Yanıtlar” sütununda gerçekte bu yanıtlar çalışmada bilinmemesine rağmen bu örnek için kişilerin gerçek yanıtlarının bilindiğini varsayalım. Seçilen kart sütununda 10 kişi için oluşturulan kartlar yer almaktadır. P=0,20 olduğu için kartların 10*0,20=2’sinde “Vergi kaçakçılığı yaptım, Eviniz kaç m^{2}’dir?” ifadesi bulunur. Bu kartı seçen kişiler doğrudan yanıt vereceklerdir. Kartların 10*0,80=8’inde “Vergi kaçakçılığı yapmadım, Eviniz kaç m^{2}’dir,R düzenini kullanınız” ifadesi bulunur. R düzeninde toplamsal tekniğin uygulandığı varsayımı altında bu kartı seçen kişiler vergi kaçakçılığı ile ilgili ifadeye uygun yanıtı vererek(evet ya da hayır), eviniz kaç m^{2}’dir? sorusu için gerçek yanıtları ile kart destesinden çektikleri sayıyı toplayarak yanıt verirler. Çizelge 4.1’de 1. kişinin seçtiği karttaki ifade “Vergi kaçakçılığı yaptım, Eviniz kaç m^{2}’dir” şeklindedir. Kişi gerçekte vergi kaçakçılığı yapmıştır ve evinin büyüklüğü 80 m^{2}’dir. Dolayısıyla kişinin verdiği yanıt “Evet, 80” olacaktır. 2.kişinin seçtiği karttaki ifade “Vergi kaçakçılığı yapmadım, Eviniz kaç m^{2}’dir,R düzenini kullanınız” şeklindedir. Kişi gerçekte vergi kaçakçılığı yapmıştır ve evinin büyüklüğü 70 m^{2}’dir. Kişinin rastgele sayılar destesinden seçtiği kart ise 46’dır. Dolayısıyla kişinin verdiği yanıt “Hayır, 70+46=116” olacaktır. Vergi kaçakçılığı yapıp yapmama ile ilgili değişkende hayır diyenler “0”, evet diyenler “1” olarak kodlanırsa bu örnek için oluşacak yanıt dağılımı { (1, 80), (0, 116), (1, 120), (1, 246), (1, 195), (1, 150), (1, 105), (0 ,150), (0, 100), (0, 117) } şeklindedir. Kişilerin verdiği yanıtlar kullanılarak kişilerin vergi kaçakçılığı oranı tahmin edilebilir.

Model 2 için Çizelge 4.3'teki verilere ait bazı bilgiler aşağıda özetlenmiştir.

$\hat{\lambda} = \frac{n_1}{n} = \frac{7}{10} = 0{,}70$, $\quad \bar{u} = 135{,}9$, $\quad \hat{\sigma}^2_{\lambda} = 0{,}23$, $\quad \hat{C}_{\lambda} = 0{,}69$, $\hat{\sigma}^2_{u} = 2042{,}54$, $\quad \hat{C}_{u} = 0{,}33$,

$r_{\lambda u} = 0{,}38$,c=(1-0,20)=0,80,h=(2P-1)=(2*0,20-1)=-0,60,

$\mu_u = \mu_x + (1-P) * \mu_t = 100 + 0{,}80 * 30 = 124$,

$$\hat{\alpha} = K_{\lambda u} = r_{\lambda u}\frac{\hat{C}_{\lambda}}{\hat{C}_{u}} = 0{,}38 * \frac{0{,}69}{0{,}33} = 0{,}79 .$$

Eşitlik (4.7)'den vergi kaçakçılığı yapanların oran tahmini,

$$\hat{\pi}_{Öneri1} = \frac{\hat{\lambda}\left(\frac{\mu_u}{\bar{u}}\right)^{\alpha} - c}{h} = \frac{0{,}70 * \left(\frac{124}{135{,}9}\right)^{0{,}79} - 0{,}80}{-0{,}60} = 0{,}25$$

olarak hesaplanır.

Eşitlik (4.25)'ten vergi kaçakçılığı yapanların oran tahmininin hata kareler ortalaması tahmini,

$$H\hat{K}O_{min}\left(\hat{\pi}_{Öneri1}\right) \cong \frac{(1-f)\hat{\sigma}^2_{\lambda}}{nh^2}\left(1-r^2_{\lambda u}\right) = \frac{(1-0{,}10)0{,}23}{10(-0{,}60)^2}\left(1-0{,}38^2\right) = 0{,}049$$

olarak hesaplanır.

Model 3 için Sayısal Örnek

Model 3 için vergi kaçakçılığı yapanların oran tahmini ve bu tahminin hata kareler ortalaması tahmini Çizelge 4.4'te verilen veriler yardımıyla bulunabilir. R düzeninde çarpımsal teknik uygulanır. Çarpımsal teknik uygulayabilmek için X yardımcı değişkeni için T rastgele değişkeni türetilir. T rastgele değişkeni Uniform (2, 5) dağılımından türetilsin. Uniform dağılımının ortalaması $\mu_t = \frac{10+50}{2} = 30$ ve varyansı

$\sigma_t^2 = \frac{(50-10)^2}{12} = 133{,}33$'tür.

Çizelge 4.4'te 1. kişinin seçtiği karttaki ifade "Vergi kaçakçılığı yaptım, Eviniz kaç m^2'dir?" şeklindedir. Kişi gerçekte vergi kaçakçılığı yapmıştır ve evinin büyüklüğü 80 m^2'dir. Dolayısıyla kişinin verdiği yanıt "Evet, 80" olacaktır. 2.kişinin seçtiği karttaki ifade "Vergi kaçakçılığı yapmadım, Eviniz kaç m^2'dir,R düzenini kullanınız" şeklindedir. Kişi gerçekte vergi kaçakçılığı yapmıştır ve evinin büyüklüğü 70 m^2'dir. Kişinin rastgele sayılar destesinden seçtiği kart ise 3'tür. Dolayısıyla kişinin verdiği yanıt "Hayır, 70*3=210" olacaktır. Vergi kaçakçılığı yapıp yapmama ile ilgili değişkende hayır diyenler "0", evet diyenler "1" olarak kodlanırsa bu örnek için oluşacak yanıt dağılımı {(1, 80), (0, 210), (1, 120), (1, 900), (1, 300), (1, 300), (1, 360), (0, 600), (0, 160), (1, 300) } şeklindedir.

Çizelge 4.4. Oran tahmini için önerilen tek yardımcı değişkenin kullanıldığı oransal tahmin edici için model 3 örneği

Hane Reisleri	Gerçek Yanıtlar		Seçilen Karttaki İfade*	Rastgele Sayılar Destesinden Seçilen Sayı Ti	Verilen Yanıtlar		Yanıt Dağılımı
	λ_i	X_i			$\hat{\lambda}_i$	U_i=Xi*Ti	
1	Evet	80	1	2	Evet (1)	80	(1, 80)
2	Evet	70	2	3	Hayır (0)	70*3	(0, 210)
3	Hayır	120	1	4	Evet (1)	120	(1, 120)
4	Hayır	180	2	5	Evet (1)	180*5	(1, 900)
5	Hayır	150	2	2	Evet (1)	150*2	(1, 300)
6	Hayır	100	2	3	Evet (1)	100*3	(1, 300)
7	Hayır	90	2	4	Evet (1)	90*4	(1, 360)
8	Evet	120	2	5	Hayır (0)	120*5	(0, 600)
9	Evet	80	2	2	Hayır (0)	80*2	(0, 160)
10	Hayır	100	2	3	Evet (1)	100*3	(1, 300)
Ortalama				35,4	0,70	333	
Varyans				13,89	0,23	61245,56	
Değişim Katsayısı				0,39	0,69	0,74	

***1**: "Vergi kaçakçılığı yaptım, Eviniz kaç m^2'dir?", 2**:** "Vergi kaçakçılığı yapmadım, Eviniz kaç m^2'dir, R düzenini kullanınız"

Kişilerin verdiği yanıtlar kullanılarak kişilerin vergi kaçakçılığı oranı tahmin edilebilir.

Model 3 için Çizelge 4.4’teki verilere ait bazı bilgiler aşağıda özetlenmiştir.

$$\hat{\lambda}=\frac{n_1}{n}=\frac{7}{10}=0{,}70\,,\quad \bar{u}=296\,,\quad \hat{\sigma}^2_{\lambda}=0{,}23\,,\quad \hat{C}_{\lambda}=0{,}69\,,\hat{\sigma}^2_{u}=61245{,}56\,,\quad \hat{C}_{u}=0{,}74\,,$$

$r_{\lambda u}=0{,}03$,c=(1-0,20)=0,80,h=(2P-1)=(2*0,20-1)=-0,60,

$$\mu_u=\left[P+(1-P)\mu_t\right]\mu_x=\left[0{,}20+0{,}80*3{,}5\right]150=450\,,\ \hat{\alpha}=K_{\lambda u}=r_{\lambda u}\frac{\hat{C}_{\lambda}}{\hat{C}_{u}}=0{,}24*\frac{0{,}69}{0{,}95}=0{,}17\,.$$

Eşitlik (4.7)’den vergi kaçakçılığı yapanların oran tahmini,

$$\hat{\pi}_{Öneri1}=\frac{\hat{\lambda}\left(\dfrac{\mu_u}{\bar{u}}\right)^{\alpha}-c}{h}=\frac{0{,}70*\left(\dfrac{450}{333}\right)^{0{,}03}-0{,}80}{-0{,}60}=0{,}16$$

olarak hesaplanır.

Eşitlik (4.25)’ten vergi kaçakçılığı yapanların oran tahmininin hata kareler ortalaması tahmini,

$$H\hat{K}O_{min}\left(\hat{\pi}_{Öneri1}\right)\cong\frac{(1-f)\hat{\sigma}^2_{\lambda}}{nh^2}\left(1-r^2{}_{\lambda u}\right)=\frac{(1-0{,}10)0{,}23}{10(-0{,}60)^2}\left(1-0{,}02^2\right)=0{,}058$$

olarak hesaplanır.

4.1.3. Oran Tahmini için Önerilen İki Yardımcı Değişkenin Kullanıldığı Oransal Tahmin Edici

Zaizai [39]’un önerdiği rastgeleleştirilmiş yanıt modelinden yararlanarak oran tahmini için RYM’de yeni bir tahmin edici ailesi önerilmiştir. Oran tahmininde bu modelde iki tane hassas olmayan yardımcı değişken kullanılmıştır. Örneğin tahmin edilmek istenen değişken kişinin aile içi şiddete uğrayıp uğramadığı, yardımcı değişkenler ise o haneye giren günlük alkol miktarı (ml) ve eşinin eğitim-öğretim süresi olabilir.

Önerilen tahmin edici ailesi için yanıt değişkeni dağılımı

$$(\lambda, U, V) \Rightarrow \begin{cases} (\pi, X, M), & P \text{ olasılığı ile} \\ (\pi_S, R, L), & 1-P \text{ olasılığı ile} \end{cases} \qquad (4.47)$$

şeklinde gösterilebilir. Eşitlik (4.47)'de verilen dağılımda λ, hassas nitel değişken üzerindeki yanıt değişkenini ifade etmektedir. U ve V ise X ve M yardımcı değişkenler üzerindeki yanıt değişkenlerini ifade etmektedir. Modelde, X ve M hassas olmayan, fakat hassas değişken ile ilişkili olan kitle ortalamaları bilinen (μ_x, μ_m) yardımcı değişkenlerdir. λ yanıt değişkeni için Bölüm 2.1'de verilen oran tahmini için geliştirilmiş rastgeleleştirilmiş yanıt modelleri kullanılır. U ve V yanıt değişkenleri için ise Bölüm 2.2'de verilen ortalama tahmini için geliştirilmiş rastgeleleştirilmiş yanıt modelleri kullanılır. Bu modellerde doğrudan yanıt tekniği ve toplamsal ya da çarpımsal teknikler kullanılarak π hassas değişken ve X ve M yardımcı değişken bilgileri elde edilir.

Eşitlik (4.47)'de verilen dağılım için P ve (1-P) oranlarında iki deste kart hazırlanır. Kartların üzerinde λ, U ve V yanıt değişkenleri için üç ayrı ifade yer almaktadır. λ yanıt değişkeni ile ilgili ifade belli bir hassas davranışa sahip olup olmamakla ilgilidir. λ yanıt değişkeni için P oranındaki kartların üzerinde "A hassas davranışa sahibim" ifadesi yazılıdır. (1-P) oranındaki kartların üzerinde farklı ifadeler yer alabilir. Örneğin "A hassas davranışa sahip değilim" ifadesi ya da "S hassas davranışa sahibim" ifadesi yazılı olan bir kart kullanılabilir. Burada S hassas olmayan bir nitel değişkendir. (1-P) oranındaki kartların üzerinde yazan ifadeye göre önerilen tahmin edicideki c ve h değerleri farklı olacaktır. U yanıt değişkeni için P oranındaki kartların üzerinde “X_i değerini yazınız” ifadesi yazılıdır, (1-P) oranındaki kartların üzerinde ise farklı ifadeler yer alabilir. Örneğin “Xi değeri ile verilen kart destesinden çektiğiniz sayıyı toplayarak (çarparak) yanıtınızı veriniz”. (1-P) oranındaki kartlardaki farklı ifadeleri uygulayabilmek için R düzeni kullanılır. R düzeni, X değişkeni üzerinde uygulanacak değişik rastgele teknikleri ifade etmektedir. V yanıt değişkeni için P oranındaki kartların üzerinde “M_i değerini yazınız” ifadesi yazılıdır, (1-P) oranındaki kartların üzerinde ise farklı ifadeler yer alabilir. Örneğin “Mi değeri ile verilen kart destesinden çektiğiniz sayıyı toplayarak (çarparak) yanıtınızı veriniz”. (1-P) oranındaki kartlardaki farklı ifadeleri uygulayabilmek için L düzeni kullanılır. L düzeni, M değişkeni üzerinde uygulanacak değişik rastgele teknikleri ifade etmektedir. Bu rastgele tekniklerde T, ortalaması μ_t ve varyansı σ_t^2 olan rastgele değişken ve K, ortalaması μ_k ve varyansı σ_k^2 olan rastgele değişken kullanılır. Sonuç olarak P oranındaki kartların üzerinde “A hassas davranışa sahibim, X_i ve M_i değerini yazınız” ifadesi bulunur. Yani P oranındaki cevaplayıcı “A hassas davranışa sahibim” sorusuna evet ya da hayır yanıtını verip X ve M yardımcı değişkenleri ile ilgili sorulara direkt yanıt verecektir. (1-P) oranındaki kartların üzerinde ise “A hassas davranışa sahip değilim, X_i ve M_i soruları için ilgili düzenleri kullanınız” ifadesi bulunur. Yani,

(1-P) oranındaki cevaplayıcı “A hassas davranışa sahip değilim” sorusuna evet ya da hayır yanıtını verdikten sonra X ve M sorusunun cevabı için R ve L tekniklerini kullanacaktır. Bu açıklamalara göre her bir cevaplayıcı için yanıt dağılımı $(z_1,u_1,v_1),(z_2,u_2,v_2),...,(z_n,u_n,v_n)$ şeklinde olacaktır. Örneğin aile içi şiddet ile ilgili bir araştırmada hassas soru kişinin aile içi şiddete maruz kalıp kalmadığı olsun. Yardımcı değişkenler ise o haneye giren günlük alkol miktarı (ml) ve eşinin eğitim-öğretim süresi olsun.

P oranındaki kartlarda “aile içi şiddete maruz kaldım, haneye giren günlük alkol miktarı (ml) ne kadardır?, eşinizin eğitim-süresi kaç yıldır?” ifadesi yazılı olacaktır. (1-P) oranındaki kartlarda “aile içi şiddete maruz kalmadım, haneye giren günlük alkol miktarı (ml) ne kadardır? Lütfen R düzenini kullanınız, eşinizin eğitim-öğretim süresi kaç yıldır? Lütfen L düzenini kullanınız” ifadesi yazılır. R düzeninde toplamsal bir teknik uygulanacak ise kişi kendi cevabı ile T rastgele dağılımdan türetilen seçtiği karttaki sayıyı toplayıp cevabını verecektir. Aynı şekilde L düzeninde toplamsal bir teknik uygulanacak ise kişi kendi cevabı ile K rastgele dağılımdan türetilen seçtiği karttaki sayıyı toplayıp cevabını verecektir.

Eşitlik (4.47)’deki yanıt dağılımından yararlanarak λ kitle oranı için önerilen tahmin edici ailesi,

$$\hat{\pi}_{\text{Öneri 2}} = \frac{\hat{\lambda}_{o2} - c}{h} \tag{4.48}$$

olarak tanımlanır. Burada,

$$\hat{\lambda}_{o2} = \hat{\lambda}\left(\frac{\mu_U}{\bar{u}}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{a\mu_V + b}{a\bar{v} + b}\right)^{\alpha_2} \tag{4.49}$$

$\mu_V = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} v_i$: V yardımcı değişkenin kitle ortalaması,

$\bar{v} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} v_i$: V yardımcı değişkenin örneklem ortalaması’dır. (4.50)

α_1, α_2 sabit katsayılar, $a\,(\neq 0)$ ve b v rastgele düzenine ait parametrelerdir. Bu parametreler standart sapma (σ_v), değişim katsayısı (C_v), çarpıklık katsayısı $\beta_1(v)$, basıklık katsayısı $\beta_2(v)$, korelasyon katsayısı (ρ_{uv}) olabilir. $\bar{u}$ ve $\bar{v}$ görüşülen kişilerin ilgili değişkenlere verdiği yanıtların ortalamasıdır.

$\hat{\pi}_{Öneri2}$ tahmin edicisinin hata kareler ortalaması,

$$HKO(\hat{\pi}_{Öneri2}) = \frac{HKO(\hat{\lambda}_{o2})}{h^2} \tag{4.51}$$

şeklinde yazılır.

$\hat{\lambda}_{o2}$ oransal tahmin edicisinin hata kareler ortalamasını elde etmek için aynı şekilde fark yönteminden yararlanılır. Tahmin ediciye eklenen ikinci yardımcı değişken V için yeni bir fark terimi tanımlanır.

İkinci değişken için fark terimi:

$$e_2 = \frac{\bar{v} - \mu_v}{\mu_v} \quad \rightarrow \quad \bar{v} = \mu_v (1 + e_2) \tag{4.52}$$

şeklinde tanımlanır. İkinci değişken V için beklenen değer,

$$E(e_2) = 0 \tag{4.53}$$

şeklindedir.

Fark teriminin karesinin beklenen değeri,

$$E(e_2^2) = E\left(\frac{\bar{v} - \mu_v}{\mu_v}\right)^2 = \frac{(1-f)}{n}\frac{\sigma_v^2}{\mu_v^2} = \frac{(1-f)}{n}C_v^2 \tag{4.54}$$

şeklindedir. İkinci değişken V'nin hassas değişken ve birinci yardımcı değişken ile arasındaki kovaryans eşitlikleri,

$$E(e_0e_2) = E\left(\frac{\hat{\lambda}-\lambda}{\lambda}\right)\left(\frac{\bar{v}-\mu_v}{\mu_v}\right) = \frac{(1-f)}{n}\frac{\sigma_{\lambda v}}{\lambda\mu_v} = \frac{(1-f)}{n}\rho_{\lambda v}C_\lambda C_v \tag{4.55}$$

$$E(e_1e_2) = E\left(\frac{\bar{u}-\mu_u}{\mu_u}\right)\left(\frac{\bar{v}-\mu_v}{\mu_v}\right) = \frac{(1-f)}{n}\frac{\sigma_{uv}}{\mu_u\mu_v} = \frac{(1-f)}{n}\rho_{uv}C_uC_v \tag{4.56}$$

şeklindedir.

$\hat{\lambda}_{o2}$ tahmin edicisi, Eşitlik (4.8) ve Eşitlik (4.52)'deki e'li terimler cinsinden yazılarak yeniden ifade edilirse,

$$\hat{\lambda}_{o2} = \lambda(1+e_0)\left(\frac{\mu_u}{\mu_u(1+e_1)}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{a\mu_v+b}{a\mu_v(1+e_2)+b}\right)^{\alpha_2}$$

$$\hat{\lambda}_{o2} = \lambda(1+e_0)(1+e_1)^{-\alpha_1}\left(\frac{a\mu_v(1+e_2)+b}{a\mu_v+b}\right)^{-\alpha_2} \tag{4.57}$$

olarak bulunur. $\varphi = \frac{a\mu_v}{a\mu_v+b}$ olmak üzere $\hat{\lambda}_{o2}$ tahmin edicisi,

$$\hat{\lambda}_{o2} = \lambda(1+e_0)(1+e_1)^{-\alpha_1}(1+\varphi e_2)^{-\alpha_2} \tag{4.58}$$

olarak ifade edilir. Bu eşitlikteki $(1+\varphi e_2)^{-\alpha_2}$ ifadeleri, Eşitlik (4.18)'den yararlanarak açılırsa ve 2.dereceden sonraki e'li terimler ihmal edilirse,

$$(1+\varphi e_2)^{-\alpha_2} \cong 1-\alpha_2\varphi e_2 + \frac{\alpha_2(\alpha_2-1)}{2}\varphi e_2^2 \tag{4.59}$$

olarak bulunur.

Eşitlik (4.58)'de, Eşitlik (4.59) yerine konulup çarpımlar yapılırsa ve 2.dereceden e'li terimler ihmal edilirse,

$$\hat{\lambda}_o \cong \lambda \Big[1 + e_0 - \alpha_1 e_1 - \varphi\alpha_2 e_2 - \alpha_1 e_0 e_1 - \varphi\alpha_2 e_0 e_2 + \alpha_1 \frac{(\alpha_1+1)}{2} e_1^2 + \frac{\varphi^2}{2}\alpha_2(\alpha_2+1) e_2^2\Big] \tag{4.60}$$

olarak elde edilir.

$\hat{\pi}_{Öneri2}$ tahmin edicisinin hata kareler ortalaması,

$$HKO(\hat{\pi}_{Öneri2}) = \frac{E(\hat{\lambda}_{o2} - \lambda)^2}{h^2}$$

$$HKO(\hat{\pi}_{Öneri2}) \cong \frac{\lambda^2}{h^2} E\Big[e_0 - \alpha_1 e_1 - \varphi\alpha_2 e_2 - \alpha_1 e_0 e_1 - \varphi\alpha_2 e_0 e_2 + \alpha_1 \frac{(\alpha_1+1)}{2} e_1^2 + \frac{\varphi^2}{2}\alpha_2(\alpha_2+1) e_2^2\Big]^2 \tag{4.61}$$

şeklindedir. Beklenen değerde kare alınıp, 2.dereceden sonraki e'li terimler ihmal edilirse hata kareler ortalaması,

$$HKO(\hat{\pi}_{Öneri2}) \cong \frac{\lambda^2}{h^2} E\left[e_0^2 + \alpha_1^2 e_1^2 + \varphi^2\alpha_2^2 e_2^2 - 2\alpha_1 e_0 e_1 - 2\varphi\alpha_2 e_0 e_2 + 2\alpha_1\alpha_2\varphi e_1 e_2\right] \tag{4.62}$$

olarak bulunur. Eşitlik (4.62)'de, Eşitlik (4.13), Eşitlik (4.14), Eşitlik (4.15), Eşitlik (4.54), Eşitlik (4.55) ve Eşitlik (4.56) yerine konulursa, $\hat{\pi}_{Öneri2}$ tahmin edicisinin hata kareler ortalaması,

$$HKO(t_{Öneri2}) \cong \left(\frac{1-f}{nh^2}\right)\lambda^2 \left[C_\lambda^2 + \alpha_1^2 C_u^2 + \alpha_2^2 \varphi^2 C_v^2 - 2\alpha_1 \rho_{\lambda u} C_\lambda C_u - 2\alpha_2 \varphi \rho_{\lambda v} C_\lambda C_v \right.$$
$$\left. + 2\alpha_1 \alpha_2 \varphi \rho_{uv} C_u C_v \right]$$

$$= \left(\frac{1-f}{nh^2}\right)\lambda^2 \left[C_\lambda^2 + \alpha_1 C_u^2 \left(\alpha_1 - 2\rho_{\lambda u}\frac{C_\lambda}{C_u}\right) + \alpha_2 \varphi C_v^2 \left(\alpha_2 \varphi - 2\rho_{\lambda v}\frac{C_\lambda}{C_v}\right)\right.$$
$$\left. + 2\alpha_1 \alpha_2 \varphi C_v^2 \left(\rho_{uv}\frac{C_u}{C_v}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{1-f}{nh^2}\right)\lambda^2 \left[C_\lambda^2 + \alpha_1 C_u^2 (\alpha_1 - 2K_{\lambda u}) + \alpha_2 \varphi C_v^2 (\alpha_2 \varphi - 2K_{\lambda v}) \right.$$
$$\left. + 2\alpha_1 \alpha_2 \varphi C_v^2 K_{uv} \right] \tag{4.63}$$

olarak bulunur. Burada $K_{\lambda u} = \rho_{\lambda u}\frac{C_\lambda}{C_u}$, $K_{\lambda v} = \rho_{\lambda v}\frac{C_\lambda}{C_v}$, $K_{uv} = \rho_{uv}\frac{C_u}{C_v}$’dir.

Önerilen tahmin edicide tanımlanan α_1 ve α_2 katsayılarının optimum değerinin bulunmasıyla varyansının minimum değeri bulunabilir. Bu minimum değer, hata kareler ortalamasının optimumu bulunmak istenen değere göre türevinin alınıp sıfıra eşitlenmesiyle bulunur. Buradan α_1 ve α_2’nin optimum değerleri bulunur.

Buna göre,

$$\alpha_1 = \frac{(K_{\lambda u} - K_{\lambda v} K_{vu})}{(1 - K_{uv} K_{vu})} \tag{4.64}$$

$$\alpha_2 = \frac{K_{\lambda v} - K_{\lambda u} K_{uv}}{\varphi (1 - K_{uv} K_{vu})} \tag{4.65}$$

olarak elde edilir.

Eşitlik (4.64) ve Eşitlik (4.65) Eşitlik (4.63)’te yerine konulursa hata kareler ortalamasıının minimum değeri,

$$
\begin{aligned}
HKO\left(\hat{\pi}_{Öneri2}\right) &\cong \left(\frac{1-f}{nh^2}\right)\sigma_\lambda^2\left(1-\frac{\rho_{\lambda u}^2+\rho_{\lambda v}^2-2\rho_{\lambda u}\rho_{\lambda v}\rho_{uv}}{1-\rho_{uv}^2}\right)\\
HKO\left(\hat{\pi}_{Öneri2}\right) &\cong \left(\frac{1-f}{nh^2}\right)\sigma_\lambda^2\left(1-R_{\lambda u.v}^2\right)
\end{aligned}
\tag{4.66}
$$

olarak elde edilir. Burada, $R_{\lambda u.v}^2=\dfrac{\rho_{\lambda u}^2+\rho_{\lambda v}^2-2\rho_{\lambda u}\rho_{\lambda v}\rho_{uv}}{1-\rho_{uv}^2}$’dir.

$\alpha_1,\alpha_2,a(\neq 0)$ ve b yerine uygun değerler konularak çeşitli oransal ve çarpımsal tahmin ediciler elde edilebilir.

Eşitlik(4.66)’daki varyans ve korelasyon formülleri uygulanan rastgeleleştirilmiş yanıt modeline göre farklı eşitliklere sahip olacaktır. Bölüm 4.4.1’de olduğu gibi bu yanıt dağılımı için de farklı modeller uygulanabilir. Uygulanabilecek 4 model aşağıda verilmiştir.

Model 1

Model 1 için λ, U ve V yanıt değişkenleri için kullanılacak kartlar:

$$
(\lambda, U, V) \Rightarrow
\begin{cases}
(\pi, X, M), & P \text{ olasılığı ile}\\
\left((1-\pi), X, M\right), & 1\text{-}P \text{ olasılığı ile}
\end{cases}
\tag{4.67}
$$

Eşitlik (4.67)’de verilen yanıt dağılımında λ yanıt değişkeni için P oranındaki kartlarda “Aile içi şiddete maruz kaldım (π)” ifadesi, (1-P) oranındaki kartlarda “Aile içi şiddete maruz kalmadım $(1-\pi)$” ifadesi bulunsun. π hassas değişkenin oran tahmininde kullanılacak X birinci yardımcı değişkeni “haneye giren günlük alkol miktarı (ml)” olsun. U yanıt değişkeni için ise her iki karttaki ifade aynı ve “haneye giren günlük alkol miktarı (ml) ne kadardır?” olsun. Yani R düzeninde doğrudan yanıt alma tekniği uygulansın. Dolayısıyla tüm cevaplayıcılardan X yardımcı değişkeni için doğrudan cevaplar alınır. Bu durumda yardımcı değişken için R=X olacaktır. π hassas değişkenin oran tahmininde kullanılacak M ikinci yardımcı değişkeni “eşin eğitim- öğretim süresi” olsun. V yanıt değişkeni için ise her iki karttaki ifade aynı ve “eşinizin eğitim-öğretim süresi kaç yıldır?” olsun. Yani L düzeninde doğrudan yanıt alma tekniği uygulansın. Dolayısıyla tüm cevaplayıcılardan M yardımcı değişkeni için doğrudan cevaplar alınır. Bu durumda ikinci yardımcı değişken için L=M olacaktır. Bu açıklamalar doğrultusunda önerilen genelleştirilmiş modeldeki kullanılacak eşitlikler aşağıda verilmiştir.

λ yanıt değişkeni için oran eşitliği Eşitlik (4.27)’de, varyans eşitliği (4.31)’de verildiği gibidir. U yanıt değişkeni için ortalama eşitliği (4.30)’da, varyans eşitliği Eşitlik (4.32)’de verildiği gibidir.

Aynı şekilde V yanıt değişkeni için matematiksel eşitlik,

$$V = PM + (1-P)L \tag{4.68}$$

şeklindedir.

Eşitlik (4.68) kullanılarak V yanıt değişkeni için ortalama eşitliği,

$$\begin{aligned} E(V) &= PE(M) + (1-P)E(L) \\ E(V) &= PE(M) + (1-P)E(M) \\ \mu_v &= \mu_m \end{aligned} \tag{4.69}$$

şeklindedir.

V yanıt değişkeni için varyans eşitliği,

$$\begin{aligned} \sigma_v^2 &= PE(M^2) + (1-P)E(L^2) - \mu_l^2 \\ &= PE(M^2) + (1-P)E(M^2) - \mu_m^2 \\ &= E(M^2) - \mu_m^2 \\ \sigma_v^2 &= \sigma_m^2 \end{aligned} \tag{4.70}$$

olarak bulunur.

λ ve U yanıt değişkenleri arasındaki kovaryans eşitliği Eşitlik (4.33)'te verildiği gibidir. Yani $\sigma_{\lambda u} = (2P-1)\sigma_{\pi x}$'dir. Benzer şekilde λ ve V yanıt değişkenleri arasındaki kovaryans eşitliği,

$$\sigma_{\lambda v} = (2P-1)\sigma_{\pi m} \tag{4.71}$$

şeklindedir.

U ve V yanıt değişkenleri arasındaki kovaryans eşitliği,

$$\begin{aligned} \sigma_{uv} &= E(UV) - E(U)E(V) \\ &= E(XM) - E(X)E(M) \\ \sigma_{uv} &= \sigma_{xm} \end{aligned} \tag{4.72}$$

Eşitlik (4.66)'da verilen hata kareler ortalamasında Eşitlik (4.31), Eşitlik (4.32), Eşitlik (4.33), Eşitlik (4.71) ve Eşitlik (4.72) yerine konularak Eşitlik (4.67) ile verilen yanıt dağılımı ile oluşturulan model için hata kareler ortalaması bulunur.

Eşitlik (4.67)'de kullanılacak ifadeler

$$\rho^2_{\lambda u} = \frac{\sigma^2_{\lambda u}}{\sigma^2_{\lambda}\sigma^2_{u}} = \frac{(2P-1)^2\sigma^2_{\pi x}}{(2P-1)^2\sigma^2_{\pi}\sigma^2_{x}} = \rho^2_{\pi x} \tag{4.73}$$

$$\rho^2_{\lambda v} = \frac{\sigma^2_{\lambda v}}{\sigma^2_{\lambda}\sigma^2_{v}} = \frac{(2P-1)^2\sigma^2_{\pi m}}{(2P-1)^2\sigma^2_{\pi}\sigma^2_{m}} = \rho^2_{\pi m} \tag{4.74}$$

$$\rho^2_{uv} = \frac{\sigma^2_{uv}}{\sigma^2_{u}\sigma^2_{v}} = \frac{\sigma^2_{xm}}{\sigma^2_{x}\sigma^2_{m}} = \rho^2_{xm} \tag{4.75}$$

şeklindedir. O halde Model 1 için $\hat{\pi}_{\text{Öneri2}}$ tahmin edicisi için hata kareler ortalaması,

$$HKO(\hat{\pi}_{\text{Öneri 2}}) \cong \left(\frac{1-f}{n}\right)\frac{(2P-1)^2\sigma^2_{\pi x}}{(2P-1)^2}\left(1-\frac{\rho^2_{\pi x}+\rho^2_{\pi M}-2\rho_{\pi x}\rho_{\pi m}\rho_{xm}}{1-\rho^2_{xm}}\right)$$

$$HKO\left(\hat{\pi}_{\text{Öneri 2}}\right) \cong \left(\frac{1-f}{n}\right)\sigma^2_{\pi x}\left(1-\frac{\rho^2_{\pi x}+\rho^2_{\pi m}-2\rho_{\pi x}\rho_{\pi m}\rho_{xm}}{1-\rho^2_{xm}}\right) \tag{4.76}$$

olarak elde edilir.

Model 2

Model 2 için, U ve V yanıt değişkenleri için kullanılacak kartlar:

$$(\lambda, U, V) \Longrightarrow \begin{cases} (\pi, X, M), & P \text{ olasılığı ile} \\ (1-\pi, X+T, M), & 1-P \text{ olasılığı ile} \end{cases} \tag{4.77}$$

Eşitlik (4.77)'de verilen yanıt dağılımında λ yanıt değişkeni için P oranındaki kartlarda "Aile içi şiddete maruz kaldım (π)" ifadesi, (1-P) oranındaki kartlarda "Aile içi şiddete maruz kalmadım $(1-\pi)$" ifadesi bulunsun. π hassas değişkenin oran tahmininde kullanılacak X birinci yardımcı değişkeni "haneye giren günlük alkol miktarı (ml)" olsun. U yanıt değişkeni için P oranındaki kartlarda "haneye giren günlük alkol miktarı (ml) ne kadardır?" ifadesi olsun. (1-P) oranındaki kartlarda "haneye giren günlük alkol miktarını (ml) kart destesinden çektiğiniz rakamla toplayıp yanıtınızı yazınız "olsun. Yani R düzeninde toplama tekniği uygulansın. Bu durumda yardımcı değişken için R=X+T olacaktır. V yanıt değişkeni için ise her iki karttaki ifade aynı ve "eşinizin eğitim-öğretim süresi kaç yıldır?" olsun. Yani L düzeninde doğrudan yanıt alma tekniği uygulansın. Dolayısıyla tüm cevaplayıcılardan M yardımcı değişkeni için doğrudan cevaplar alınır. Bu durumda ikinci yardımcı değişken için L=M olacaktır. Bu açıklamalar doğrultusunda önerilen genelleştirilmiş modeldeki kullanılacak eşitlikler aşağıda verilmiştir.

λ yanıt değişkeni için oran eşitliği Eşitlik (4.27)'de, varyans eşitliği (4.31)'de verildiği gibidir. U yanıt değişkeni için ortalama eşitliği (4.37)'den $\mu_u = \mu_x + (1-P)\mu_t$'dir. U yanıt değişkeni için varyans eşitliği Eşitlik (4.38)'den $\sigma_u^2 = \sigma_x^2 + (1-P)\mu_t^2 \left(\sigma_t^2 + P\right)$'dir. V yanıt değişkeni için ortalama eşitliği Eşitlik (4.69)'dan $\mu_v = \mu_m$'dir ve varyans eşitliği Eşitlik (4.70)'den $\sigma_v^2 = \sigma_m^2$'dir.

λ ve U yanıt değişkenleri arasındaki kovaryans eşitliği Eşitlik (4.39)'dan $\sigma_{\lambda u} = (P-1)\sigma_{\pi x} + P(1-P)\mu_t$'dir. λ ve V yanıt değişkenleri arasındaki kovaryans eşitliği Eşitlik (4.71)'den $\sigma_{\lambda v} = (P-1)\sigma_{\pi m}$'dir.

U ve V yanıt değişkenleri arasındaki kovaryans eşitliği Eşitlik (3.39)'dan,

$$\sigma_{uv} = \sigma_{xm} \tag{4.78}$$

şeklindedir.

Eşitlik (4.66)'da verilen hata kareler ortalamasında Eşitlik (4.31), Eşitlik (4.38), Eşitlik (4.39), Eşitlik (4.70), Eşitlik (4.71) ve Eşitlik (4.78) yerine konularak Eşitlik (4.67) ile verilen yanıt dağılımı ile oluşturulan model için hata kareler ortalaması bulunur.

Eşitlik (4.66)'da kullanılacak ifadeler:

$$\rho_{\lambda u}^2 = \frac{\sigma_{\lambda u}^2}{\sigma_\lambda^2 \sigma_u^2} = \frac{\left[(P-1)\sigma_{\pi x} + P(1-P)\mu_t\right]^2}{(P-1)^2\sigma_\pi^2\left[\sigma_x^2 + (1-P)\mu_t^2\left(\sigma_t^2 + P\right)\right]} \tag{4.79}$$

$$\rho_{\lambda v}^2 = \frac{\sigma_{\lambda v}^2}{\sigma_\lambda^2 \sigma_v^2} = \frac{(P-1)^2\sigma_{\pi m}^2}{(P-1)^2\sigma_\pi^2\sigma_m^2} = \rho_{\pi m}^2 \tag{4.80}$$

$$\rho_{uv}^2 = \frac{\sigma_{uv}^2}{\sigma_u^2 \sigma_v^2} = \frac{\sigma_{xm}^2}{\sigma_x^2\sigma_m^2} = \rho_{xm}^2 \tag{4.81}$$

şeklindedir. O halde Eşitlik (4.66)'da Eşitlik (4.31), Eşitlik (4.79), Eşitlik (4.80) ve Eşitlik (4.81) konularak Model 2 için $\hat{\pi}_{Öneri2}$ tahmin edicisi için hata kareler ortalaması elde edilir.

Model 3

Model 3 için, U ve V yanıt değişkenleri için kullanılacak kartlar:

$$(\lambda, U, V) \Rightarrow \begin{cases} (\pi, X, M), & P \text{ olasılığı ile} \\ \left((1-\pi), X+T, M+K\right), & 1-P \text{ olasılığı ile} \end{cases} \tag{4.82}$$

Eşitlik (4.82)'de verilen yanıt dağılımında λ yanıt değişkeni için P oranındaki kartlarda "Aile içi şiddete maruz kaldım (π)" ifadesi, (1-P) oranındaki kartlarda "Aile içi şiddete maruz kalmadım $(1-\pi)$" ifadesi bulunsun. π hassas değişkenin oran tahmininde kullanılacak X birinci yardımcı değişkeni "haneye giren günlük alkol miktarı (ml)" olsun. U yanıt değişkeni için P oranındaki kartlarda "aylık alkol harcamanız ortalama ne kadardır?" ifadesi olsun. (1-P) oranındaki kartlarda "haneye giren günlük alkol miktarı (ml) kart destesinden çektiğiniz rakamla toplayıp yanıtınızı yazınız (ml) "olsun. Yani R düzeninde toplama tekniği uygulansın. Bu durumda yardımcı değişken için R=X+T olacaktır. V yanıt değişkeni için P oranındaki kartlarda "eşinizin eğitim-öğretim süresi kaç yıldır?" ifadesi olsun. (1-P) oranındaki kartlarda "eşinizin eğitim-öğretim süresini kart destesinden çektiğiniz rakamla toplayıp yanıtınızı yazınız(ml) "olsun. Yani L düzeninde toplama tekniği uygulansın. Bu durumda yardımcı değişken için L=M+K olacaktır. Bu açıklamalar doğrultusunda önerilen genelleştirilmiş modeldeki kullanılacak eşitlikler aşağıda verilmiştir.

λ yanıt değişkeni için oran eşitliği Eşitlik (4.27)'de, varyans eşitliği (4.31)'de verildiği gibidir. U yanıt değişkeni için ortalama eşitliği (4.37)'den $\mu_u = \mu_x + (1-P)\mu_t$'dir. U yanıt değişkeni için varyans eşitliği Eşitlik (4.38)'den $\sigma_u^2 = \sigma_x^2 + (1-P)\mu_t^2 \left(\sigma_t^2 + P\right)$'dir.

Benzer şekilde V yanıt değişkeni için ortalama eşitliği,

$$\mu_v = \mu_m + (1-P)\mu_k \tag{4.83}$$

şeklindedir.

V yanıt değişkeni için varyans eşitliği,

$$\sigma_v^2 = \sigma_m^2 + (1-P)\mu_k^2 \left(\sigma_k^2 + P\right) \tag{4.84}$$

şeklindedir.

λ ve U yanıt değişkenleri arasındaki kovaryans eşitliği Eşitlik (4.39)'dan $\sigma_{\lambda u} = (2P-1)\sigma_{\pi x} + P(1-P)\mu_t$'dir. Benzer şekilde λ ve V yanıt değişkenleri arasındaki kovaryans eşitliği,

$$\sigma_{\lambda v} = (2P-1)\sigma_{\pi m} + P(1-P)\mu_k \tag{4.85}$$

şeklindedir.

U ve V yanıt değişkenleri arasındaki kovaryans eşitliği Eşitlik (3.52)'den,

$$\sigma_{UV} = \sigma_{XM} + P(1-P)\mu_T\mu_K \tag{4.86}$$

şeklindedir.

Eşitlik (4.66)'da verilen hata kareler ortalamasında Eşitlik (4.31), Eşitlik (4.38), Eşitlik (4.39), Eşitlik (4.84), Eşitlik (4.85) ve Eşitlik (4.86) yerine konularak Eşitlik (4.82) ile verilen yanıt dağılımı ile oluşturulan model için hata kareler ortalaması bulunur.

Eşitlik (4.66)'da kullanılacak ifadeler

$$\rho^2_{\lambda u}=\frac{\sigma^2_{\lambda u}}{\sigma^2_\lambda \sigma^2_u}=\frac{\left[(2P-1)\sigma_{\pi x}+P(1-P)\mu_t\right]^2}{(2P-1)^2\sigma^2_\pi\left[\sigma^2_x+(1-P)\mu^2_t\left(\sigma^2_t+P\right)\right]} \tag{4.87}$$

$$\rho^2_{\lambda v}=\frac{\sigma^2_{\lambda v}}{\sigma^2_\lambda \sigma^2_v}=\frac{(2P-1)^2\sigma^2_{\pi m}}{(2P-1)^2\sigma^2_\pi\left[(2P-1)\sigma_{\pi m}+P(1-P)\mu_k\right]^2} \tag{4.88}$$

$$\rho^2_{uv}=\frac{\sigma^2_{uv}}{\sigma^2_u \sigma^2_v}=\frac{\left[\sigma_{xm}+P(1-P)\mu_t\mu_k\right]^2}{\left[\sigma^2_x+(1-P)\mu^2_t\left(\sigma^2_t+P\right)\right]\left[\sigma^2_m+(1-P)\mu^2_k\left(\sigma^2_k+P\right)\right]} \tag{4.89}$$

şeklindedir. O halde Eşitlik (4.66)'da Eşitlik (4.31), Eşitlik (4.87), Eşitlik (4.88) ve Eşitlik (4.89) konularak Model 3 için $\hat{\pi}_{Öneri2}$ tahmin edicisi için hata kareler ortalaması elde edilir.

Model 4

Model 4 için λ, U ve V yanıt değişkenleri için kullanılacak kartlar:

$$(\lambda, U, V) \Rightarrow \begin{cases} (\pi, X, M), & P \text{ olasılığı ile} \\ (1-\pi, XT, MK), & 1\text{-}P \text{ olasılığı ile} \end{cases} \tag{4.90}$$

şeklindedir. Eşitlik (4.90)'da verilen yanıt dağılımında λ yanıt değişkeni için P oranındaki kartlarda "Aile içi şiddete maruz kaldım (π)" ifadesi, (1-P) oranındaki kartlarda "Aile içi şiddete maruz kalmadım $(1-\pi)$" ifadesi bulunsun. U yanıt değişkeni için P oranındaki kartlarda "haneye giren günlük alkol miktarı(ml) ne kadardır?" ifadesi olsun. (1-P) oranındaki kartlarda "haneye giren günlük alkol miktarını(ml) kart destesinden çektiğiniz rakamla çarpıp yanıtınızı yazınız" olsun. Yani R düzeninde çarpma tekniği uygulansın. Bu durumda yardımcı değişken için R=XT olacaktır. V yanıt değişkeni için P oranındaki kartlarda "eşinizin eğitim-öğretim süresi kaç yıldır?" ifadesi olsun. (1-P) oranındaki kartlarda "eşinizin eğitim-öğretim süresini kart destesinden çektiğiniz rakamla çarpıp yanıtınızı yazınız" olsun. Yani L düzeninde toplama tekniği uygulansın. Bu durumda yardımcı değişken için L=MK olacaktır. Bu açıklamalar doğrultusunda önerilen genelleştirilmiş modeldeki kullanılacak eşitlikler aşağıda verilmiştir.

λ yanıt değişkeni için oran eşitliği Eşitlik (4.27)'de, varyans eşitliği (4.31)'de verildiği gibidir. U yanıt değişkeni için ortalama eşitliği (4.43)'ten $\mu_u = \mu_x P + (1-P)\mu_t$'dir. U yanıt değişkeni için varyans eşitliği Eşitlik (4.44)'den $\sigma_u^2 = \mu_x^2 (1+C_x^2) P + (1-P)\mu_t^2 (1+C_t^2) - \mu_u^2$'dir.

Benzer şekilde V yanıt değişkeni için ortalama eşitliği,

$$\mu_v = \mu_m P + (1-P)\mu_k \tag{4.91}$$

şeklindedir.

V yanıt değişkeni için varyans eşitliği,

$$\sigma_v^2 = \mu_m^2 (1+C_m^2) P + (1-P)\mu_k^2 (1+C_k^2) - \mu_v^2 \tag{4.92}$$

şeklindedir.

λ ve U yanıt değişkenleri arasındaki kovaryans eşitliği Eşitlik (4.45)'den $\sigma_{\lambda u} = (2P-1)\sigma_{\pi x} + P(1-P)\mu_t\mu_x$'dir. Benzer şekilde λ ve V yanıt değişkenleri arasındaki kovaryans eşitliği,

$$\sigma_{\lambda v} = (2P-1)\sigma_{\pi m} + P(1-P)\mu_k\mu_m \tag{4.93}$$

şeklindedir.

U ve V yanıt değişkenleri arasındaki kovaryans eşitliği Eşitlik (3.58)'den,

$$\sigma_{uv} = \sigma_{xm}\left[P + (1-P)\mu_t\mu_k\right] + P(1-P)\mu_x\mu_m(1-\mu_t)(1-\mu_k) \qquad (4.94)$$

şeklindedir.

Eşitlik (4.66)'da verilen hata kareler ortalamasında Eşitlik (4.31), Eşitlik (4.44), Eşitlik (4.45), Eşitlik (4.92), Eşitlik (4.93) ve Eşitlik (4.94) yerine konularak Eşitlik (4.90) ile verilen yanıt dağılımı ile oluşturulan model için hata kareler ortalaması bulunur.
Eşitlik (4.66)'da kullanılacak ifadeler,

$$\rho_{\lambda u}^2 = \frac{\sigma_{\lambda u}^2}{\sigma_\lambda^2\sigma_u^2} = \frac{\left[(P-1)\sigma_{\pi x} + P(1-P)\mu_t\mu_x\right]^2}{(P-1)^2\sigma_\pi^2\left\{\left[\mu_x^2(1+C_x^2)P + (1-P)\mu_t^2(1+C_t^2)\right] - \mu_u^2\right\}} \qquad (4.95)$$

$$\rho_{\lambda v}^2 = \frac{\sigma_{\lambda v}^2}{\sigma_\lambda^2\sigma_v^2} = \frac{\left[(P-1)\sigma_{\pi m} + P(1-P)\mu_k\mu_m\right]^2}{(P-1)^2\sigma_\pi^2\left\{\left[\mu_m^2(1+C_m^2)P + (1-P)\mu_k^2(1+C_k^2)\right] - \mu_v^2\right\}} \qquad (4.96)$$

$$\rho_{uv}^2 = \frac{\sigma_{uv}^2}{\sigma_u^2\sigma_v^2} = \frac{\left\{\sigma_{xm}\left[P + (1-P)\mu_t\mu_k\right] + P(1-P)\mu_x\mu_m(1-\mu_t)(1-\mu_k)\right\}^2}{\left\{\left[\mu_x^2(1+C_x^2)P + (1-P)\mu_t^2(1+C_t^2)\right] - \mu_u^2\right\}\left\{\left[\mu_m^2(1+C_m^2)P + (1-P)\mu_k^2(1+C_k^2)\right] - \mu_v^2\right\}} \qquad (4.97)$$

şeklindedir. O halde Eşitlik (4.66)'da Eşitlik (4.31), Eşitlik (4.95), Eşitlik (4.96) ve Eşitlik (4.97) konularak Model 4 için $\hat{\pi}_{\text{Öneri2}}$ tahmin edicisi için hata kareler ortalaması elde edilir.

Çizelge 4.5. $\hat{\pi}_{Öneri2}$ tahmin edici ailesi için bazı özel rastgele yanıt modelleri

M	R	L	Oran, Ortalama	$HKO\left(\hat{\pi}_{Öneri2}\right) \cong \left(\frac{1-f}{nh^2}\right)\sigma_\lambda^2\left(1-\frac{\rho_{\lambda u}^2+\rho_{\lambda v}^2-2\rho_{\lambda u}\rho_{\lambda v}\rho_{uv}}{1-\rho_{uv}^2}\right)$ **formülünde kullanılacak varyans ve korelasyon eşitlikleri**
1	X	M	$\lambda=(2P-1)\pi+1-P$ $\mu_u=\mu_x$ $\mu_v=\mu_m$	$\sigma_v^2=\sigma_m^2$ $\rho_{\lambda u}=\rho_{\pi x}$ $\rho_{\lambda v}=\rho_{\pi m}$ $\rho_{uv}=\rho_{xm}$
2	X+T	M	$\lambda=(2P-1)\pi+1-P$ $\mu_u=\mu_x+(1-P)\mu_t$ $\mu_v=\mu_m$	$\sigma_v^2=\sigma_m^2$ $\rho_{\lambda u}=\frac{(2P-1)\sigma_{\pi x}+P(1-P)\mu_t}{(2P-1)\sigma_\pi\sqrt{\sigma_x^2+(1-P)\mu_t^2\left(C_t^2+P\right)}}$ $\rho_{\lambda v}=\rho_{\pi m}$ $\rho_{uv}=\rho_{xm}$
3	X+T	M+K	$\lambda=(2P-1)\pi+1-P$ $\mu_u=\mu_X+(1-P)\mu_T$ $\mu_v=\mu_M+(1-P)\mu_K$	$\sigma_v^2=\sigma_m^2+(1-P)\mu_k^2\left(C_k^2+P\right)$ $\rho_{\lambda u}=\frac{(2P-1)\sigma_{\pi x}+P(1-P)\mu_t}{(2P-1)\sigma_\pi\sqrt{\sigma_x^2+(1-P)\mu_t^2\left(C_t^2+P\right)}}$ $\rho_{\lambda v}=\frac{(2P-1)\sigma_{\pi m}}{(2P-1)\sigma_\pi\left((2P-1)\sigma_{\pi m}+P(1-P)\mu_k\right)}$ $\rho_{uv}=\frac{\sigma_{xm}+P(1-P)\mu_t\mu_k}{\sqrt{\left[\sigma_x^2+(1-P)\mu_t^2\left(C_t^2+P\right)\right]\left[\sigma_m^2+(1-P)\mu_k^2\left(C_k^2+P\right)\right]}}$
4	XT	MK	$\lambda=(2P-1)\pi+1-P$ $\mu_u=\mu_X\left[P+(1-P)\mu_T\right]$ $\mu_v=\mu_M\left[P+(1-P)\mu_K\right]$	$\sigma_v^2=\mu_m^2\left(1+C_m^2\right)\left[P+(1-P)\mu_k^2\left(1+C_k^2\right)\right]-\mu_v^2$ $\rho_{\lambda u}=\frac{(2P-1)\sigma_{\pi x}+P(1-P)\mu_t\mu_x}{(2P-1)\sigma_\pi\sqrt{\mu_x^2\left(1+C_x^2\right)\left[P+(1-P)\mu_t^2\left(1+C_t^2\right)\right]-\mu_u^2}}$ $\rho_{\lambda v}=\frac{(2P-1)\sigma_{\pi m}+P(1-P)\mu_k\mu_m}{(2P-1)\sigma_\pi\sqrt{\mu_m^2\left(1+C_m^2\right)\left[P+(1-P)\mu_k^2\left(1+C_k^2\right)\right]-\mu_v^2}}$ $\rho_{uv}=\frac{\sigma_{xm}\left[P+(1-P)\mu_t\mu_k\right]+P(1-P)\mu_x\mu_m(1-\mu_t)(1-\mu_k)}{\sqrt{\left[\mu_x^2\left(1+C_x^2\right)\left[P+(1-P)\mu_t^2\left(1+C_t^2\right)\right]-\mu_u^2\right]\left[\mu_m^2\left(1+C_m^2\right)\left[P+(1-P)\mu_k^2\left(1+C_k^2\right)\right]-\mu_v^2\right]}}$

Çizelge 4.5'in M sütunu uygulanabilecek bazı model isimlerini, R sütunu X yardımcı değişkeni için uygulanabilecek düzenleri göstermektedir. Oran ve ortalama sütunu her bir model için λ yanıt değişkeni için oran eşitliğini, U ve V yanıt değişkenleri için ise ortalama eşitliklerini göstermektedir. HKO formülünde kullanılacak varyans ve korelasyon eşitlikleri sütunu ise her model için bulunan varyans ve korelasyon eşitliklerini göstermektedir.

4.1.4. Oran Tahmini için Önerilen İki Yardımcı Değişkenin Kullanıldığı Oransal Tahmin Edici için Sayısal Örnek

N=100 hanelik küçük bir yerleşim yerinde aile içi şiddet ile ilgili bir çalışma yapılsın. Hassas değişken aile içi şiddet olsun. Hassas değişkenin tahmininde kullanılacak yardımcı değişkenler ise o haneye giren günlük alkol miktarı(ml) ve eşinin eğitim-öğretim süresi olsun. n=10 hane yerine konulmadan basit rastgele örnekleme ile seçilsin. Kişilere P=0,20 olduğu RYM uygulansın. Bu durumda kişilerin %20'si yardımcı değişkenlere doğrudan cevap verirken, geriye kalan kişilerin %80'i R ve L düzenlerini kullanarak cevaplarını verir. R düzeninde uygulanacak farklı tekniklere göre çeşitli modeller oluşturulabilir. Çizelge 4.5'te verilen modeller için sayısal çalışma aşağıda verilmiştir.

Model 1 için Sayısal Örnek

Model 1 için aile içi şiddete maruz kalanların oran tahmini ve bu tahminin hata kareler ortalaması tahmini Çizelge 4.6'da verilen veriler yardımıyla bulunabilir.

Çizelge 4.6. Oran tahmini için önerilen iki yardımcı değişkenin kullanıldığı oransal tahmin edici için model 1 örneği

Kişiler	Gerçek Yanıtlar			Seçilen Karttaki İfade*	Verilen Yanıtlar			Yanıt Dağılımı
	λ_i	X_i	M_i		$\hat{\lambda}_i$	U_i=Xi	V_i=Mi	$(\hat{\lambda}_i, U_i, V_i)$
1	Evet	70	5	2	Hayır (0)	70	5	(0, 70, 5)
2	Evet	100	8	1	Evet (1)	100	8	(1, 100, 8)
3	Hayır	100	8	2	Evet (1)	100	8	(1, 100, 8)
4	Hayır	150	11	2	Evet (1)	150	11	(1, 150, 11)
5	Hayır	200	15	2	Evet (1)	200	15	(1,200, 15)
6	Evet	50	11	2	Hayır (0)	50	11	(0, 50, 11)
7	Hayır	30	5	1	Hayır (0)	30	5	(0, 30, 5)
8	Evet	100	15	2	Hayır (0)	100	15	(0, 100, 15)
9	Evet	0	8	2	Hayır (0)	0	8	(0, 0, 8)
10	Hayır	0	17	2	Evet (1)	0	17	(1, 0, 17)
Ortalama					0,50	80	10,3	
Varyans					0,28	4088,88	18,01	
Değişim Katsayısı					1,05	0,79	0,41	

*1: "Aile içi şiddete maruz kaldım, haneye giren günlük alkol miktarı(ml) ne kadardır?, eşinizin eğitim-süresi kaç yıldır?"
2: "Aile içi şiddete maruz kalmadım, haneye giren günlük alkol miktarı(ml) ne kadardır?, eşinizin eğitim-süresi kaç yıldır?"

Çizelge 4.6.'da "Gerçek Yanıtlar" sütununda gerçekte bu yanıtlar çalışmada bilinmemesine rağmen bu örnek için kişilerin gerçek yanıtlarının bilindiğini varsayalım. Seçilen kart sütununda 10 kişi için oluşturulan kartlar yer almaktadır. P=0,20 olduğu için kartların 10*0,20=2'sinde "Aile içi şiddete maruz kaldım, haneye giren günlük alkol miktarı (ml) ne kadardır?, eşinizin eğitim-süresi kaç yıldır?" ifadesi bulunur. Bu kartı seçen kişiler doğrudan yanıt vereceklerdir. Kartların 10*0,80=8'inde "Aile içi şiddete maruz kalmadım, haneye giren günlük alkol miktarı (ml) ne kadardır?, eşinizin eğitim-süresi kaç yıldır?" ifadesi bulunur. R ve L düzenlerinde doğrudan yanıt alma tekniğin uygulandığı varsayımı altında bu kartı seçen kişiler aile içi şiddet ile ilgili ifadeye uygun yanıtı vererek(evet ya da hayır), "haneye giren günlük alkol miktarı (ml) ne kadardır?" ve "eşinizin eğitim-süresi kaç yıldır?" soruları için gerçek yanıtları direkt verirler. Çizelge 4.6'da 1. kişinin seçtiği karttaki ifade "Aile içi şiddete maruz kalmadım, haneye giren günlük alkol miktarı (ml) ne kadardır?, eşinizin eğitim-süresi kaç yıldır?" şeklindedir. Kişi gerçekte aile içi şiddete maruz kalmıştır, haneye giren günlük alkol miktarı 70 ml'dir ve kişinin eşinin eğitim-öğretim süresi 5 yıldır. Dolayısıyla kişinin verdiği yanıt "Hayır, 70, 5" olacaktır. 2. kişinin seçtiği karttaki ifade "Aile içi şiddete maruz kaldım, haneye giren günlük alkol miktarı (ml) ne kadardır?, eşinizin eğitim-süresi kaç yıldır?" şeklindedir. Kişi gerçekte aile içi şiddete maruz kalmıştır, haneye giren günlük alkol miktarı 100 ml'dir ve kişinin eşinin eğitim-öğretim süresi 8 yıldır. Dolayısıyla kişinin verdiği yanıt "Evet, 100, 8" olacaktır. Bu örnek için oluşacak yanıt dağılımı { (0, 70, 5), (1, 100, 8), (1, 100, 8), (1, 150, 11), (1,200, 15), (0, 50, 11), (0, 30, 5), (0, 100, 15), (0, 0, 8), (1, 0, 17) } şeklindedir.

Kişilerin verdiği yanıtlar kullanılarak kişilerin aile şiddetine maruz kalma oranı tahmin edilebilir.

Model 1 için Çizelge 4.6.'daki verilere ait bazı bilgiler aşağıda özetlenmiştir.

$$\hat{\lambda} = \frac{n_1}{n} = \frac{5}{10} = 0{,}50,\ \bar{u} = \bar{x} = 80,\ \bar{v} = \bar{m} = 10{,}3,\ \hat{\sigma}_\lambda^2 = 0{,}28,\ \hat{C}_\lambda = 1{,}05,\ \hat{\sigma}_u^2 = 4088{,}88,$$

$$\hat{C}_u = 0{,}79,\ \hat{C}_v = 0{,}41,\ r_{\lambda u} = 0{,}49,\ r_{\lambda v} = 0{,}37,\ r_{uv} = 0{,}23,$$

c=(1-0,20)=0,80, h=(2P-1)=(2*0,20-1)=-0,60, $\varphi = \frac{\mu_v}{\mu_v + 1} = \frac{8}{8+1} = 0{,}89$ ($\mu_m = 8$ olduğu biliniyor, a=b=1 olarak alınmıştır)

$$K_{\lambda u} = r_{\lambda u}\frac{\hat{C}_{\lambda}}{\hat{C}_{u}} = 0{,}49 * \frac{1{,}05}{0{,}79} = 0{,}65\ ,$$

$$K_{\lambda v} = r_{\lambda v}\frac{\hat{C}_{\lambda}}{\hat{C}_{v}} = 0{,}37 * \frac{1{,}05}{0{,}41} = 0{,}95\ ,$$

$$K_{uv} = r_{uv}\frac{\hat{C}_{u}}{\hat{C}_{v}} = 0{,}23 * \frac{0{,}79}{0{,}41} = 0{,}45\ ,$$

$$K_{vu} = r_{uv}\frac{\hat{C}_{v}}{\hat{C}_{u}} = 0{,}23 * \frac{0{,}41}{0{,}79} = 0{,}12\ .$$

Buna göre,

$$\alpha_1 = \frac{(K_{\lambda u} - K_{\lambda v}K_{vu})}{(1 - K_{uv}K_{vu})} = \frac{(0{,}65 - 0{,}95 * 0{,}12)}{(1 - 0{,}45 * 0{,}12)} = 0{,}57$$

$$\alpha_2 = \frac{K_{\lambda v} - K_{\lambda u}K_{uv}}{\varphi(1 - K_{uv}K_{vu})} = \frac{0{,}95 - 0{,}65 * 0{,}45}{0{,}89(1 - 0{,}45 * 0{,}12)} = 0{,}79$$

Eşitlik (4.48)'den aile içi şiddete maruz kalanların oran tahmini,

$$\hat{\pi}_{\text{Öneri 2}} = \frac{\hat{\lambda}\left(\frac{\mu_U}{\bar{u}}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{a\mu_V + b}{a\bar{v} + b}\right)^{\alpha_2} - c}{h} = \frac{0{,}50 * \left(\frac{50}{80}\right)^{0{,}57}\left(\frac{8+1}{10{,}3+1}\right)^{0{,}79} - 0{,}80}{-0{,}60} = 0{,}80$$

olarak hesaplanır.

Eşitlik (4.66)'dan aile içi şiddete maruz kalanların oran tahmininin hata kareler ortalaması tahmini,

$$\begin{aligned} H\hat{K}O(\hat{\pi}_{\text{Öneri2}}) &\cong \left(\frac{1-f}{nh^2}\right)\hat{\sigma}^2_{\lambda}\left(1 - \frac{r^2_{\lambda u} + r^2_{\lambda v} - 2r_{\lambda u}r_{\lambda v}r_{uv}}{1 - r^2_{uv}}\right) \\ &\cong \left(\frac{1-0{,}10}{10(-0{,}60)^2}\right)0{,}28\left(1 - \frac{(0{,}49)^2 + (0{,}37)^2 - 2 * 0{,}49 * 0{,}37 * 0{,}23}{1 - (0{,}23)^2}\right) \\ &\cong 0{,}0267 \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Model 2 için Sayısal Örnek

R düzeninde toplamsal teknik uygulandığı düşünülsün. Toplamsal teknik uygulayabilmek için X yardımcı değişkeni için T rastgele değişkeni türetilir. T rastgele değişkeni Uniform (10, 50) dağılımından türetilsin. T rastgele değişkenin ortalaması $\mu_t = \dfrac{10+50}{2} = 30$, varyansı $\sigma_t^2 = \dfrac{(50-10)^2}{12} = 133{,}33$'tür.

Çizelge 4.7.'de P=0,20 olduğu için kartların 10*0,20=2'sinde "Aile içi şiddete maruz kaldım, haneye giren günlük alkol miktarı (ml) ne kadardır?, eşinizin eğitim-süresi kaç yıldır?" ifadesi bulunur. Bu kartı seçen kişiler doğrudan yanıt vereceklerdir. Kartların 10*0,80=8'inde "Aile içi şiddete maruz kalmadım, haneye giren günlük alkol miktarı (ml) ne kadardır? Lütfen R düzenini kullanınız, eşinizin eğitim-öğretim süresi kaç yıldır?" ifadesi bulunur. Model 2'nin Model 1'den farkı 1.yardımcı değişken X'in yanıtlarının kısmi toplamsal teknikle alınmasıdır. Buna göre Model 2 için yanıt dağılımı { (0, 85, 5), (1, 100, 8), (1, 125, 8), (1, 200, 11), (1,210, 15), (0, 70, 11), (0, 30, 5), (0, 110, 15), (0, 20, 8), (1, 40, 17) } şeklinde olacaktır.

Çizelge 4.7. Oran tahmini için önerilen iki yardımcı değişkenin kullanıldığı oransal tahmin edici için model 2 örneği

Kişiler	Gerçek Yanıtlar			Seçilen Karttaki İfade*	(Rastgele sayılar destesinden seçilen sayılar)		Verilen Yanıtlar			Yanıt Dağılımı
	λ_i	X_i	M_i		$(\hat{\lambda}_i, U_i, V_i)$	K_i	$\hat{\lambda}_i$	$U_i=X_i+T_i$	$V_i=M_i$	$(\hat{\lambda}_i, U_i, V_i)$
1	Evet	70	5	2	15	3	Hayır (0)	70+15	5	(0, 85, 5)
2	Evet	100	8	1	50	5	Evet (1)	100	8	(1, 100, 8)
3	Hayır	100	8	2	25	5	Evet (1)	100+25	8	(1, 125, 8)
4	Hayır	150	11	2	50	3	Evet (1)	150+50	11	(1,210, 15)
5	Hayır	200	15	2	10	7	Evet (1)	200+10	15	(1,210, 15)
6	Evet	50	11	2	20	6	Hayır (0)	50+20	11	(0, 70, 11)
7	Hayır	30	5	1	30	5	Hayır (0)	30	5	(0, 30, 5)
8	Evet	100	15	2	10	8	Hayır (0)	100+10	15	(0, 110, 15)
9	Evet	0	8	2	20	5	Hayır (0)	0+20	8	(0, 20, 8)
10	Hayır	0	17	2	40	3	Evet (1)	0+40	17	(1, 40, 17)
Ortalama					27	5	0,50	99	10,3	
Varyans					228,88	2,88	0,28	4315,56	18,01	
Değişim Katsayısı					0,56	0,33	1,05	0,66	0,41	

*1: "Aile içi şiddete maruz kaldım, eve giren aylık alkol miktarı(ml) ne kadardır?, eşinizin eğitim-süresi kaç yıldır?"
2: "Aile içi şiddete maruz kalmadım, eve giren aylık alkol miktarı(ml) ne kadardır? Lütfen R düzenini kullanınız, eşinizin eğitim-öğretim süresi kaç yıldır?"

Kişilerin verdiği yanıtlar kullanılarak kişilerin aile şiddetine maruz kalma oranı tahmin edilebilir.

Model 2 için Çizelge 4.7.'deki verilere ait bazı bilgiler aşağıda özetlenmiştir.

$$\hat{\lambda}=\frac{n_1}{n}=\frac{5}{10}=0{,}50\,,\ \bar{u}=99\,,\ \bar{v}=\bar{m}=10{,}3\,,\hat{\sigma}^2_{\lambda}=0{,}28\,,\hat{C}_{\lambda}=1{,}05\,,\hat{\sigma}^2_{u}=4315{,}56\,,$$

$$\hat{C}_u=0{,}66\,,\hat{C}_v=0{,}41\,,\ r_{\lambda u}=0{,}58\,,\ r_{\lambda v}=0{,}37\,,r_{uv}=0{,}17\,,$$

c=(1-0,20)=0,80,h=(2P-1)=(2*0,20-1)=-0,60, $\varphi=\dfrac{\mu_v}{\mu_v+1}=\dfrac{8}{8+1}=0{,}89\,,$

$\mu_u=\mu_x+(1-P)\mu_t=50+0{,}80*30=74$ ($\mu_x=50$ olduğu biliniyor)

$$K_{\lambda u}=r_{\lambda u}\frac{\hat{C}_{\lambda}}{\hat{C}_u}=0{,}58*\frac{1{,}05}{0{,}66}=0{,}92\,,$$

$$K_{\lambda v}=r_{\lambda v}\frac{\hat{C}_{\lambda}}{\hat{C}_v}=0{,}37*\frac{1{,}05}{0{,}41}=0{,}95\,,$$

$$K_{uv}=r_{uv}\frac{\hat{C}_u}{\hat{C}_v}=0{,}17*\frac{0{,}66}{0{,}41}=0{,}27\,,$$

$$K_{vu}=r_{vu}\frac{\hat{C}_v}{\hat{C}_u}=0{,}17*\frac{0{,}41}{0{,}66}=0{,}11\,.$$

Buna göre,

$$\alpha_1=\frac{(K_{\lambda u}-K_{\lambda v}K_{vu})}{(1-K_{uv}K_{vu})}=\frac{(0{,}92-0{,}95*0{,}11)}{(1-0{,}27*0{,}11)}=0{,}84$$

$$\alpha_2=\frac{K_{\lambda v}-K_{\lambda u}K_{uv}}{\varphi(1-K_{uv}K_{vu})}=\frac{0{,}95-0{,}92*0{,}27}{0{,}89(1-0{,}27*0{,}11)}=0{,}81$$

Eşitlik (4.48)'den aile içi şiddete maruz kalanların oran tahmini,

$$\hat{\pi}_{\text{Öneri2}} = \frac{\hat{\lambda}\left(\frac{\mu_U}{\bar{u}}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{a\mu_V + b}{a\bar{v} + b}\right)^{\alpha_2} - c}{h} = \frac{0{,}50 * \left(\frac{74}{99}\right)^{0{,}84}\left(\frac{8+1}{10{,}3+1}\right)^{0{,}81} - 0{,}80}{-0{,}60} = 0{,}79$$

olarak hesaplanır.

Eşitlik (4.66)'dan aile içi şiddete maruz kalanların oran tahmininin hata kareler ortalaması tahmini,

$$H\hat{K}O\left(\hat{\pi}_{\text{Öneri2}}\right) \cong \left(\frac{1-f}{nh^2}\right)\hat{\sigma}_\lambda^2\left(1 - \frac{r_{\lambda u}^2 + r_{\lambda v}^2 - 2r_{\lambda u}r_{\lambda v}r_{uv}}{1 - r_{uv}^2}\right)$$

$$\cong \left(\frac{1-0{,}10}{10\left(-0{,}60\right)^2}\right)0{,}28\left(1 - \frac{\left(0{,}58\right)^2 + \left(0{,}37\right)^2 - 2 * 0{,}58 * 0{,}37 * 0{,}17}{1 - \left(0{,}17\right)^2}\right)$$

$$\cong 0{,}0285$$

olarak hesaplanır.

Model 3 için Sayısal Örnek

R ve L düzeninde toplamsal teknik uygulandığı düşünülsün. Toplamsal teknik uygulayabilmek için X yardımcı değişkeni için T rastgele değişkeni türetilir. T rastgele değişkeni Uniform (10, 50) dağılımından türetilsin. M yardımcı değişkeni için K rastgele değişkeni türetilir. K rastgele değişkeni Uniform (3, 10) dağılımından türetilsin. T rastgele değişkenin ortalaması $\mu_t = \frac{10+50}{2} = 30$, varyansı $\sigma_t^2 = \frac{\left(50-10\right)^2}{12} = 133{,}33$'tür. K rastgele değişkenin ortalaması $\mu_k = \frac{3+10}{2} = 6{,}5$, varyansı $\sigma_k^2 = \frac{\left(10-3\right)^2}{12} = 4{,}08$'dir.

Çizelge 4.8. Oran tahmini için önerilen iki yardımcı değişkenin kullanıldığı oransal tahmin edici için model 3 örneği

Kişiler	Gerçek Yanıtlar			Seçilen Karttaki İfade*	(Rastgele sayılar destesinden seçilen sayılar)		Verilen Yanıtlar			Yanıt Dağılımı
	λ_i	X_i	M_i		T_i	K_i	$\hat{\lambda}_i$	$U_i=X_i+T_i$	$V_i=M_i+K_i$	$(\hat{\lambda}_i, U_i, V_i)$
1	Evet	70	5	2	15	3	Hayır (0)	70+15	5+3	(0, 85, 8),
2	Evet	100	8	1	50	5	Evet (1)	100	8	(1, 100, 5),
3	Hayır	100	8	2	25	5	Evet (1)	100+25	8+5	(1,125, 13)
4	Hayır	150	11	2	50	3	Evet (1)	150+50	11+3	(1,200, 14)
5	Hayır	200	15	2	10	7	Evet (1)	200+10	15+7	(1,210,22)
6	Evet	50	11	2	20	6	Hayır (0)	50+20	11+6	(0, 70, 17)
7	Hayır	30	5	1	30	5	Hayır (0)	30	5	(0, 30, 5)
8	Evet	100	15	2	10	8	Hayır (0)	100+10	15+8	(0,110,23)
9	Evet	0	8	2	20	5	Hayır (0)	0+20	8+5	(0, 20, 13)
10	Hayır	0	17	2	40	3	Evet (1)	0+40	17+3	(1, 40, 20)
Ortalama					27	5	0,50	99	14,3	
Varyans					228,88	2,88	0,28	4315,56	38,23	
Değişim Katsayısı					0,56	0,33	1,05	0,66	0,43	

*1: "Aile içi şiddete maruz kaldım, eve giren aylık alkol miktarı(ml) ne kadardır?, eşinizin eğitim-süresi kaç yıldır?"
2: "Aile içi şiddete maruz kalmadım, eve giren aylık alkol miktarı(ml) ne kadardır? Lütfen R düzenini kullanınız, eşinizin eğitim-öğretim süresi kaç yıldır? Lütfen L düzenini kullanınız"

Çizelge 4.8.'de P=0,20 olduğu için kartların 10*0,20=2'sinde "Aile içi şiddete maruz kaldım, haneye giren günlük alkol miktarı (ml) ne kadardır?, eşinizin eğitim-süresi kaç yıldır?" ifadesi bulunur. Bu kartı seçen kişiler doğrudan yanıt vereceklerdir. Kartların 10*0,80=8'inde "Aile içi şiddete maruz kalmadım, haneye giren günlük alkol miktarı (ml) ne kadardır? Lütfen R düzenini kullanınız, eşinizin eğitim-öğretim süresi kaç yıldır? Lütfen L düzenini kullanınız" ifadesi bulunur. Model 3'ün Model 1'den farkı birinci yardımcı değişken X'in ve ikinci yardımcı değişken M'nin yanıtlarının kısmi toplamsal teknikle alınmasıdır. Buna göre Model 3 için yanıt dağılımı yanıt dağılımı { (0, 85, 8), (1, 100, 5), (1, 125, 13), (1, 200, 14), (1,210, 22), (0, 70, 17), (0, 30, 5), (0, 110, 23), (0, 20, 13), (1, 40, 20) } şeklinde olacaktır.

Kişilerin verdiği yanıtlar kullanılarak kişilerin aile şiddetine maruz kalma oranı tahmin edilebilir.

Model 3 için Çizelge 4.8.'deki verilere ait bazı bilgiler aşağıda özetlenmiştir.

$$\hat{\lambda} = \frac{n_1}{n} = \frac{5}{10} = 0{,}50\ ,\ \bar{u} = 99\ ,\ \bar{v} = 14{,}3\ ,\hat{\sigma}^2_{\lambda} = 0{,}28\ ,\hat{C}_{\lambda} = 1{,}05\ ,\hat{\sigma}^2_{u} = 4315{,}56\ ,\hat{C}_{u} = 0{,}66\ ,$$

$$\hat{\sigma}^2_{v} = 38{,}23\ ,\ \hat{C}_{v} = 0{,}43\ ,\ r_{\lambda u} = 0{,}58\ ,\ r_{\lambda v} = 0{,}19\ ,r_{uv} = 0{,}36\ ,$$

c=(1-0,20)=0,80,h=(2P-1)=(2*0,20-1)=-0,60, $\varphi = \frac{\mu_v}{\mu_v + 1} = \frac{14{,}3}{14{,}3 + 1} = 0{,}93$,

$$\mu_u = \mu_x + (1 - P)\mu_t = 50 + 0{,}80 * 30 = 74\ ,$$

$$\mu_v = \mu_m + (1 - P)\mu_k = 8 + 0{,}80 * 6{,}5 = 14{,}3\ ,$$

$$K_{\lambda u} = r_{\lambda u}\frac{\hat{C}_{\lambda}}{\hat{C}_{u}} = 0{,}58 * \frac{1{,}05}{0{,}66} = 0{,}92\ ,$$

$$K_{\lambda v} = r_{\lambda v}\frac{\hat{C}_{\lambda}}{\hat{C}_{v}} = 0{,}19 * \frac{1{,}05}{0{,}43} = 0{,}45\ ,$$

$$K_{uv} = r_{uv}\frac{\hat{C}_{u}}{\hat{C}_{v}} = 0{,}36 * \frac{0{,}66}{0{,}43} = 0{,}55\ ,$$

$$K_{vu} = r_{vu}\frac{\hat{C}_{v}}{\hat{C}_{u}} = 0{,}36 * \frac{0{,}43}{0{,}66} = 0{,}23\ .$$

Buna göre,

$$\alpha_1 = \frac{(K_{\lambda u} - K_{\lambda v}K_{vu})}{(1 - K_{uv}K_{vu})} = \frac{(0{,}92 - 0{,}45 * 0{,}23)}{(1 - 0{,}55 * 0{,}23)} = 0{,}93$$

$$\alpha_2 = \frac{K_{\lambda v} - K_{\lambda u}K_{uv}}{\varphi(1 - K_{uv}K_{vu})} = \frac{0{,}45 - 0{,}92 * 0{,}55}{0{,}93(1 - 0{,}55 * 0{,}23)} = -0{,}05$$

Eşitlik (4.48)'den aile içi şiddete maruz kalanların oran tahmini,

$$\hat{\pi}_{\text{Öneri 2}} = \frac{\hat{\lambda}\left(\frac{\mu_U}{\bar{u}}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{a\mu_V + b}{a\bar{v} + b}\right)^{\alpha_2} - c}{h} = \frac{0{,}50 * \left(\frac{74}{99}\right)^{0{,}93}\left(\frac{13{,}2 + 1}{14{,}3 + 1}\right)^{-0{,}05} - 0{,}80}{-0{,}60} = 0{,}70$$

olarak hesaplanır.

Eşitlik (4.66)'dan aile içi şiddete maruz kalanların oran tahmininin hata kareler ortalaması tahmini,

$$
\begin{aligned}
H\hat{K}O(\hat{\pi}_{Öneri2}) &\cong \left(\frac{1-f}{nh^2}\right)\hat{\sigma}_{\lambda}^2\left(1-\frac{r_{\lambda u}^2+r_{\lambda v}^2-2r_{\lambda u}r_{\lambda v}r_{uv}}{1-r_{uv}^2}\right)\\
&=\left(\frac{1-0{,}10}{10(1-0{,}60)^2}\right)0{,}28\left(1-\frac{(0{,}58)^2+(0{,}19)^2-2*0{,}58*0{,}19*0{,}36}{1-(0{,}36)^2}\right)\\
&=0{,}0262
\end{aligned}
$$

olarak hesaplanır.

Model 4 için Sayısal Örnek

R ve L düzeninde çarpımsal teknik uygulandığı düşünülsün. Çarpımsal teknik için T ve K rastgele değişkenleri Uniform (2, 5) dağılımından türetilsin. T ve K rastgele değişkenlerin ortalamaları $\mu_t = \mu_k = \frac{2+5}{2} = 3{,}5$, varyansları $\sigma_t^2 = \frac{(5-2)^2}{12} = 0{,}75$'tir.

Çizelge 4.9. Oran tahmini için önerilen iki yardımcı değişkenin kullanıldığı oransal tahmin edici için model 4 örneği

Kişiler	Gerçek Yanıtlar			Seçilen Karttaki İfade*	(Rastgele sayılar destesinden seçilen sayılar)		Verilen Yanıtlar			Yanıt Dağılımı
	λ_i	x_i	M_i		T_i	K_i	$\hat{\lambda}_i$	$U_i=X_i*T_i$	$V_i=M_i*K_i$	$(\hat{\lambda}_i, U_i, V_i)$
1	Evet	70	5	2	2	2	Hayır (0)	70*2	5*2	(0,140, 10)
2	Evet	100	8	1	3	3	Evet (1)	100	8	(1, 100, 8)
3	Hayır	100	8	2	4	4	Evet (1)	100*4	8*4	(1,400, 32)
4	Hayır	150	11	2	5	5	Evet (1)	150*5	11*5	(1,750, 55)
5	Hayır	200	15	2	2	2	Evet (1)	200*2	15*2	(1,400, 30)
6	Evet	50	11	2	3	3	Hayır (0)	50*3	11*3	(0,150, 33)
7	Hayır	30	5	1	4	4	Hayır (0)	30	5	(0, 30, 5)
8	Evet	100	15	2	5	5	Hayır (0)	100*5	15*5	(0,500,75)
9	Evet	0	8	2	2	2	Hayır (0)	0*2	8*2	(0, 0, 16)
10	Hayır	0	17	2	3	3	Evet (1)	0*3	17*3	(1, 0, 51)
Ortalama					3,3	3,3	0,50	247	31,5	
Varyans					1,34	1,34	0,28	63934,44	531,83	
Değ. Kat.					0,35	0,35	1,05	1,02	0,73	

*1: "Aile içi şiddete maruz kaldım, eve giren aylık alkol miktarı(ml) ne kadardır?, eşinizin eğitim-süresi kaç yıldır?"
2: "Aile içi şiddete maruz kalmadım, eve giren aylık alkol miktarı(ml) ne kadardır? Lütfen R düzenini kullanınız, eşinizin eğitim-öğretim süresi kaç yıldır? Lütfen L düzenini kullanınız"

Model 4'ün Model 3'ten farkı birinci yardımcı değişken X'in ve ikinci yardımcı değişken M'nin yanıtlarının çarpımsal teknikle alınmasıdır. Buna göre Model 4 için yanıt dağılımı yanıt dağılımı { (0, 140, 10), (1, 100, 8), (1, 400, 32), (1, 750, 55), (1,400, 30), (0, 150, 33), (0, 30, 5), (0, 500, 75), (0, 0, 16), (1, 0, 51) } şeklinde olacaktır.

Kişilerin verdiği yanıtlar kullanılarak kişilerin aile şiddetine maruz kalma oranı tahmin edilebilir.

Model 4 için Çizelge 4.9.'daki verilere ait bazı bilgiler aşağıda özetlenmiştir.

$$\hat{\lambda} = \frac{n_1}{n} = \frac{5}{10} = 0{,}50\ ,\ \bar{u} = 99\ ,\ \bar{v} = 14{,}3\ ,\hat{\sigma}_\lambda^2 = 0{,}28\ ,\hat{C}_\lambda = 1{,}05\ ,\hat{\sigma}_u^2 = 63934{,}44\ ,\hat{C}_u = 1{,}02\ ,$$

$$\hat{C}_v = 0{,}73\ ,\ r_{\lambda u} = 0{,}35\ ,\ r_{\lambda v} = 0{,}17\ ,r_{uv} = 0{,}63\ ,$$

c=(1-0,20)=0,80,h=(2P-1)=(2*0,20-1)=-0,60,

$$\mu_u = \mu_x\{P + (1-P)\mu_t\}\mu_x = \{0{,}20 + 0{,}80 * 3{,}5\} * 50 = 150\ ,$$

$$\mu_v = \{P + (1-P)\mu_k\}\mu_m = \{0{,}20 + 0{,}80 * 3{,}5\} * 8 = 24\ ,$$

$$\varphi = \frac{\mu_v}{\mu_v + 1} = \frac{24}{24+1} = 0{,}96 \text{ (a=b=1 olarak alınmıştır),}$$

$$K_{\lambda u} = r_{\lambda u}\frac{\hat{C}_\lambda}{\hat{C}_u} = 0{,}35 * \frac{1{,}05}{1{,}02} = 0{,}09\ ,$$

$$K_{\lambda v} = r_{\lambda v}\frac{\hat{C}_\lambda}{\hat{C}_v} = 0{,}17 * \frac{1{,}05}{0{,}73} = 0{,}06\ ,$$

$$K_{uv} = r_{uv}\frac{\hat{C}_u}{\hat{C}_v} = 0{,}63 * \frac{1{,}02}{0{,}73} = 0{,}88\ ,$$

$$K_{vu} = r_{vu}\frac{\hat{C}_v}{\hat{C}_u} = 0{,}63 * \frac{0{,}73}{1{,}02} = 0{,}45\ .$$

Buna göre,

$$\alpha_1 = \frac{(K_{\lambda u} - K_{\lambda v}K_{vu})}{(1 - K_{uv}K_{vu})} = \frac{(0{,}09 - 0{,}06 * 0{,}45)}{(1 - 0{,}88 * 0{,}45)} = 0{,}11$$

$$\alpha_2 = \frac{K_{\lambda v} - K_{\lambda u}K_{uv}}{\varphi(1 - K_{uv}K_{vu})} = \frac{0{,}06 - 0{,}09 * 0{,}88}{0{,}93(1 - 0{,}88 * 0{,}45)} = -0{,}03$$

Eşitlik (4.48)'den aile içi şiddete maruz kalanların oran tahmini,

$$\hat{\pi}_{\text{Öneri2}} = \frac{\hat{\lambda}\left(\frac{\mu_U}{\bar{u}}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{a\mu_V + b}{a\bar{v} + b}\right)^{\alpha_2} - c}{h} = \frac{0{,}50 * \left(\frac{150}{247}\right)^{0{,}11}\left(\frac{24 + 1}{31{,}5 + 1}\right)^{-0{,}03} - 0{,}80}{-0{,}60} = 0{,}56$$

olarak hesaplanır.

Eşitlik (4.66)'dan aile içi şiddete maruz kalanların oran tahmininin hata kareler ortalaması tahmini,

$$\begin{aligned}
H\hat{K}O(\hat{\pi}_{\text{Öneri2}}) &\cong \left(\frac{1-f}{nh^2}\right)\hat{\sigma}_{\lambda}^2\left(1 - \frac{r_{\lambda u}^2 + r_{\lambda v}^2 - 2r_{\lambda u}r_{\lambda v}r_{uv}}{1 - r_{uv}^2}\right) \\
&= \left(\frac{1 - 0{,}10}{10(-0{,}60)^2}\right)0{,}28\left(1 - \frac{(0{,}35)^2 + (0{,}17)^2 - 2 * 0{,}35 * 0{,}17 * 0{,}63}{1 - (0{,}63)^2}\right) \\
&= 0{,}0342
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

4.1.5. Oran Tahmini için Önerilen İki Yardımcı Değişkenin Kullanıldığı Regresyon Tahmin Edicisi

Diana ve Perri [5]'in önerdiği rastgeleleştirilmiş yanıt modelinden yararlanarak oran tahmini için RYM'de yeni bir tahmin edici ailesi önerilmiştir. Ortalama tahmininde bu modelde iki hassas olmayan yardımcı değişken kullanılmıştır.

Diana ve Perri [5] RYM tahmin edicisi,

$$\hat{\pi}_{DP} = \frac{\hat{\lambda}_d - c}{h} \tag{4.98}$$

şeklinde verilmiştir. Burada, c ve h sabit değerlerdir.

$\hat{\lambda}_d = \hat{\lambda} - b(\bar{x} - \mu_x)$: λ'nın regresyon tahmin edicisidir. (4.99)

Diana ve Perri [5] oransal RYM tahmin edicisinin minimum varyansı,

$$Var(\hat{\pi}_{DP})_{min} = \frac{(1-f)\sigma_\lambda^2}{nh^2}(1-\rho_{\lambda x}^2) \tag{4.100}$$

şeklindedir.

Önerilen tahmin edici ailesi için yanıt değişkeni dağılımı bölüm 4.1.2'de Eşitlik (4.67)'de verildiği gibidir.

Aynı yanıt modelinden yararlanarak π kitle oranı için önerilen tahmin edici ailesi,

$$\hat{\pi}_{Öneri\ 3} = \frac{\hat{\lambda}_R - c}{h} \tag{4.101}$$

olarak tanımlanır. Burada,

$$\hat{\lambda}_R = \hat{\lambda} + b_1(\mu_u - \bar{u}) + b_2(\mu_v - \bar{v}) \tag{4.102}$$

şeklindedir. Burada b_1 ve b_2 sabit katsayılardır. $\bar{u}$ ve $\bar{v}$ yansız tahmin edicilerdir.

$\hat{\pi}_{Öneri3}$ tahmin edicisinin beklenen değeri,

$$\begin{aligned} E(\hat{\pi}_{Öneri3}) &= \frac{\hat{\lambda}_R - c}{h} \\ E(\hat{\pi}_{Öneri3}) &= \frac{E\left[\hat{\lambda} + b_1(\mu_u - \bar{u}) + b_2(\mu_v - \bar{v})\right] - c}{h} \\ E(\hat{\pi}_{Öneri3}) &= \frac{\lambda - c}{h} = \pi \end{aligned} \tag{4.103}$$

şeklindedir. Dolayısıyla $\hat{\pi}_{Öneri3}$ tahmin edicisi yansız bir tahmin edicidir.

$\hat{\pi}_{Öneri3}$ tahmin edicisinin varyansı,

$$V(\hat{\pi}_{Öneri3}) = \frac{V(\hat{\lambda}_R)}{h^2} \tag{4.104}$$

şeklinde yazılır.

$\hat{\lambda}_R$ regresyon tahmin edicisinin varyansını elde etmek için aynı şekilde fark yönteminden yararlanılır.

$\hat{\lambda}_R$, Eşitlik (4.10), Eşitlik (4.11) ve Eşitlik(4.52)'deki e'li terimler cinsinden yazılarak yeniden ifade edilirse,

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_R &= \lambda(1+e_0) + b_1[\mu_u - \mu_u(1+e_1)] + b_2[\mu_v - \mu_v(1+e_2)] \\ \hat{\lambda}_R &= \lambda(1+e_0) - b_1\mu_u e_1 - b_2\mu_v e_2 \end{aligned} \tag{4.105}$$

olarak bulunur.

$\hat{\pi}_{Öneri3}$ tahmin edicisinin varyansı,

$$\begin{aligned} V(\hat{\pi}_{Öneri3}) &= \frac{E(\hat{\lambda}_R - \lambda)^2}{h^2} \\ &= \frac{1}{h^2}E(\lambda e_0 - b_1\mu_u e_1 - b_2\mu_v e_2)^2 \end{aligned} \tag{4.106}$$

şeklindedir. Beklenen değerde kare alınırsa varyans,

$$\begin{aligned} V(\hat{\pi}_{Öneri3}) &= \frac{1}{h^2}E(\lambda^2 e_0^2 + b_1^2\mu_u^2 e_1^2 + b_2^2\mu_v^2 e_2^2 - 2\lambda b_1\mu_u e_0 e_1 - 2\lambda b_2\mu_v e_0 e_2 \\ &\quad + 2b_1 b_2\mu_u\mu_v e_1 e_2) \\ &= \frac{(1-f)}{nh^2}(\lambda^2 C_\lambda^2 + b_1^2\sigma_u^2 + b_2^2\sigma_v^2 - 2b_1\sigma_{\lambda u} - 2b_2\sigma_{\lambda v} + 2b_1 b_2\sigma_{uv}) \end{aligned} \tag{4.107}$$

olarak bulunur.

Önerilen tahmin edicide tanımlanan b_1 ve b_2 katsayılarının optimum değerinin bulunmasıyla varyansının minimum değeri bulunabilir. Bu minimum değer, varyansının optimumu bulunmak istenen değere göre türevinin alınıp sıfıra eşitlenmesiyle bulunur. Buradan b_1 ve b_2'nin optimum değerleri bulunur.

Buna göre,

$$\frac{\partial\left[HKO\left(\tau_{Öneri3}\right)\right]}{\partial b_1}=\frac{\partial\left[\frac{(1-f)}{nh^2}\left(C_\lambda^2+b_1^2\sigma_u^2+b_2^2\sigma_v^2-2b_1\sigma_{\lambda u}-2b_2\sigma_{\lambda v}+2b_1b_2\sigma_{uv}\right)\right]}{\partial b_1}=0 \qquad (4.108)$$

$$=2b_1\sigma_u^2-2\sigma_{\lambda u}+2b_2\sigma_{uv}=0$$

$$\frac{\partial\left[HKO\left(\tau_{Öneri3}\right)\right]}{\partial b_2}=\frac{\partial\left[\frac{(1-f)}{nh^2}\left(C_\lambda^2+b_1^2\sigma_u^2+b_2^2\sigma_v^2-2b_1\sigma_{\lambda u}-2b_2\sigma_{\lambda v}+2b_1b_2\sigma_{uv}\right)\right]}{\partial b_2}=0 \qquad (4.109)$$

$$=2b_2\sigma_v^2-2\sigma_{\lambda v}+2b_1\sigma_{uv}=0$$

eşitlikleri elde edilir. Eşitlik (4.108) ve Eşitlik (4.109) eşanlı çözülürse,

$$b_1=\frac{\left(K_{\lambda u}-K_{\lambda v}K_{vu}\right)}{\left(1-K_{uv}K_{vu}\right)} \qquad (4.110)$$

$$b_2=\frac{K_{\lambda v}-K_{\lambda u}K_{uv}}{\left(1-K_{uv}K_{vu}\right)} \qquad (4.111)$$

olarak elde edilir.

Eşitlik (4.110) ve Eşitlik (4.111) Eşitlik (4.107)'de yerine konulursa varyansının minimum değeri,

$$
\begin{aligned}
V\left(\hat{\pi}_{\text{Öneri3}}\right) &= \frac{(1-f)}{nh^2}\Bigg[\lambda^2 C_\lambda^2 + \left\{\frac{(K_{\lambda u} - K_{\lambda v}K_{vu})}{(1-K_{uv}K_{vu})}\right\}^2 \sigma_u^2 + \left\{\frac{K_{\lambda v} - K_{\lambda u}K_{uv}}{(1-K_{uv}K_{vu})}\right\}^2 \sigma_v^2 \\
&\quad - 2\left\{\frac{(K_{\lambda u} - K_{\lambda v}K_{vu})}{(1-K_{uv}K_{vu})}\right\}\sigma_{\lambda u} - 2\left\{\frac{K_{\lambda v} - K_{\lambda u}K_{uv}}{(1-K_{uv}K_{vu})}\right\}\sigma_{\lambda v} \\
&\quad + 2\left\{\frac{(K_{\lambda u} - K_{\lambda v}K_{vu})}{(1-K_{uv}K_{vu})}\right\}\left\{\frac{K_{\lambda v} - K_{\lambda u}K_{uv}}{(1-K_{uv}K_{vu})}\right\}\sigma_{uv}\Bigg] \\
&= \frac{(1-f)}{nh^2}\Bigg[\lambda^2 C_\lambda^2 - 2\frac{1}{(1-\rho_{uv}^2)}\left\{(K_{\lambda u} - K_{\lambda v}K_{vu})\sigma_{\lambda u} - (K_{\lambda v} - K_{\lambda u}K_{uv})\sigma_{\lambda v}\right\} \\
&\quad + \frac{1}{(1-\rho_{uv}^2)^2}\Big\{(K_{\lambda u} - K_{\lambda v}K_{vu})^2\sigma_u^2 + (K_{\lambda v} - K_{\lambda u}K_{uv})^2\sigma_v^2 \\
&\quad + 2(K_{\lambda u} - K_{\lambda v}K_{vu})(K_{\lambda v} - K_{\lambda u}K_{uv})\sigma_{uv}\Big\}\Bigg] \\
&= \frac{(1-f)}{nh^2}\Bigg[\lambda^2 C_\lambda^2 - 2\frac{1}{(1-\rho_{uv}^2)}\left\{(\rho_{\lambda u} - \rho_{\lambda v}\rho_{uv})\left(\frac{C_\lambda}{C_u}\right)\rho_{\lambda u}\sigma_\lambda\sigma_u - (\rho_{\lambda v} - \rho_{\lambda u}\rho_{uv})\left(\frac{C_\lambda}{C_v}\right)\rho_{\lambda v}\sigma_\lambda\sigma_v\right\} \\
&\quad + \frac{1}{(1-\rho_{uv}^2)^2}\Bigg\{(\rho_{\lambda u} - \rho_{\lambda v}\rho_{uv})^2\frac{C_\lambda^2}{C_u^2}\sigma_u^2 + (\rho_{\lambda v} - \rho_{\lambda u}\rho_{uv})^2\frac{C_\lambda^2}{C_v^2}\sigma_v^2 \\
&\quad + 2(\rho_{\lambda u} - \rho_{\lambda v}\rho_{uv})(\rho_{\lambda v} - \rho_{\lambda u}\rho_{uv})\rho_{uv}\sigma_u\sigma_v\Bigg\}\Bigg] \\
&= \frac{(1-f)\sigma_\lambda^2}{nh^2}\left(1 - \frac{\rho_{\lambda u}^2 + \rho_{\lambda v}^2 - 2\rho_{\lambda u}\rho_{\lambda v}\rho_{uv}}{1-\rho_{uv}^2}\right) \\
V_{min}\left(\hat{\pi}_{\text{Öneri3}}\right) &= \frac{(1-f)\sigma_\lambda^2}{nh^2}\left(1 - R_{\lambda u.v}^2\right)
\end{aligned}
\tag{4.112}
$$

olarak elde edilir. Burada, $R_{\lambda u.v}^2 = \dfrac{\rho_{\lambda u}^2 + \rho_{\lambda v}^2 - 2\rho_{\lambda u}\rho_{\lambda v}\rho_{uv}}{1-\rho_{uv}^2}$'dir.

Görüldüğü üzere $\hat{\pi}_{\text{Öneri3}}$ tahmin edicisiyle Bölüm 4.2'de önerilen $\hat{\pi}_{\text{Öneri2}}$ tahmin edicisinin minimum varyansları aynıdır. $\hat{\pi}_{\text{Öneri2}}$ tahmin edicisinde ikinci yardımcı değişkene ait bazı kitle parametrelerinin (σ_v, C_v, $\beta_1(v)$, $\beta_2(v)$, ρ_{uv}) bilinmesi durumunda $\hat{\pi}_{\text{Öneri2}}$ tahmin edicisinin kullanılması önerilir.

Eşitlik (4.112)'deki varyans ve korelasyon formülleri uygulanan rastgeleleştirilmiş yanıt modeline göre farklı eşitliklere sahip olacaktır. Bölüm 4.1.3'te verilen Çizelge 4.5'teki eşitlikler bu tahmin edici için de kullanılabilir.

4.1.6. Oran Tahmini için Önerilen Tahmin Edicilerin Karşılaştırılması

Bu bölümde Bölüm 4.1.'de önerilen tek yardımcı değişkenin kullanıldığı tahmin edici ile Bölüm 3.1'de verilen literatürdeki tahmin ediciler karşılaştırılacaktır.

Önerilen 1. tahmin edici $\hat{\pi}_{Öneri1}$, yardımcı değişken bilgisinin kullanılmadığı Warner [37]'nin önerdiği tahmin ediciyle karşılaştırılırsa:

$$\begin{gathered} V(\hat{\pi}_W) > V_{min}(\hat{\pi}_{Öneri1}) \\ \frac{(1-f)}{nh^2}\sigma_\lambda^2 > \frac{(1-f)}{nh^2}\sigma_\lambda^2(1-\rho_{\lambda u}^2) \\ \rho_{\lambda u}^2 > 0 \end{gathered} \tag{4.113}$$

koşulu elde edilir.

Eşitlik(4.113)'te elde edilen $\rho_{\lambda u}^2 > 0$ koşul altında önerilen $\hat{\pi}_{Öneri1}$, Warner [37]'nin önerdiği tahmin ediciden daha duyarlıdır. Bu koşul her zaman sağlandığı için önerilen tahmin edici $\hat{\pi}_{Öneri1}$, Warner [37]'nin önerdiği tahmin edicisinden daha duyarlıdır.

Önerilen tahmin edici $\hat{\pi}_{Öneri1}$ ile Zaizai [39]'un önerdiği oransal tahmin edicisi 1.model altında karşılaştırılırsa:

$$\begin{gathered} Var(\hat{\pi}_Z) > HKO_{min}(\hat{\pi}_{Öneri1}) \\ \frac{(1-f)}{nh^2}\sigma_\lambda^2\left(1-2\rho_{\lambda x}\frac{C_x}{C_\lambda}+\frac{C_x^2}{C_\lambda^2}\right) > \frac{(1-f)}{nh^2}\sigma_\lambda^2(1-\rho_{\lambda x}^2) \\ \left(\rho_{\lambda x}-\frac{C_x}{C_\lambda}\right)^2 > 0 \end{gathered} \tag{4.114}$$

koşulu elde edilir.

Eşitlik(4.114)'de elde edilen $\left(\rho_{\lambda x}-\frac{C_x}{C_\lambda}\right)^2 > 0$ koşulu altında önerilen tahmin edici $\hat{\pi}_{Öneri1}$ Zaizai [39]'un önerdiği oransal tahmin edicisinden daha duyarlıdır.

O halde,

$$\rho_{\lambda x} \neq \frac{C_x}{C_\lambda} \qquad (4.115)$$

eşitsizliğinin sağlandığı her durum için önerilen tahmin edici $\hat{\pi}_{Öneri1}$ Zaizai [39]'un önerdiği oransal tahmin edicisinden daha etkindir.

4.2. Ortalama Tahmini için Önerilen Tahmin Ediciler

Bu bölümde RYM'lerde ortalama tahmini için önerdiğimiz yeni tahmin ediciler verilecektir. Ortalama tahmini için RYM modellerini genelleyerek tez kapsamında yardımcı değişken bilgisinin kullanıldığı 3 yeni tahmin edici önerilmiştir

4.2.1. Ortalama Tahmini için Önerilen Tek Yardımcı Değişkenin Kullanıldığı Oransal Tahmin Edici

Sousa v.d. [33]'ün önerdiği rastgeleleştirilmiş yanıt modelinden yararlanarak ortalama tahmini için Srivastava [34] tahmin edicisini kullanarak yeni bir rastgeleleştirilmiş tahmin edici önerilmiştir.

Önerilen tahmin edici ailesi için yanıt değişkeni dağılımı,

$$(Z, U) \Rightarrow \begin{cases} (Y, X), & P \text{ olasılığı ile} \\ (S, R), & 1\text{-}P \text{ olasılığı ile} \end{cases} \qquad (4.116)$$

şeklinde gösterilir. Eşitlik (4.116) ile verilen dağılımda Y ortalaması μ_y ve varyansı σ_y^2 ile gösterilen hassas değişken, X hassas olmayan, fakat hassas değişken ile ilişkili olan kitle ortalaması bilinen (μ_x) yardımcı değişkendir. Z, hassas değişken Y üzerindeki yanıt değişkenini ifade etmektedir. Y üzerindeki yanıt değişkeni için kullanılan düzen S ile ifade edilmektedir. U ise yardımcı değişken X üzerindeki yanıt değişkenini ifade etmektedir. X üzerindeki yanıt değişkeni için kullanılan düzen ise R ile ifade edilmektedir. Bu teknik uygulanırken P oranındaki cevaplayıcı X ve Y sorularına doğrudan yanıt verecektir. Geriye kalan (1-P) oranındaki cevaplayıcıya S ve R düzenleri uygulanacaktır. S ve R düzenlerinde doğrudan yanıt alma tekniğinin yanı sıra Bölüm 2'de verilen toplamsal ve çarpımsal teknikler de kullanılabilir. Bu teknikler uygulanırken Z yanıt değişkeni için ortalaması μ_w ve varyansı σ_w^2 olan W rastgele değişkeni türetilir. U yanıt değişkeni için ise ortalaması μ_t ve varyansı σ_t^2 olan T rastgele değişkeni türetilir. Burada rastgele düzende türetilen değişkenler ile hassas değişken ve hassas olmayan değişkenler birbirinden bağımsızdır. Eşitlik (4.116)'da verilen dağılım için P ve (1-P) oranlarında iki deste kart hazırlanır. Kartların üzerinde Z ve U yanıt değişkenleri için iki ayrı ifade yer almaktadır. Z yanıt değişkeni için P oranındaki kartların üzerinde "Y değerinizi yazınız" ifadesi yazılıdır. (1-P) oranındaki kartların üzerinde farklı ifadeler yer alabilir. Örneğin "Y değerinizi verilen kart destesinden çektiğiniz sayıyı toplayarak yanıtınızı veriniz" ifadesi ya da "Y değerinizi verilen kart destesinden çektiğiniz sayıyı çarparak yanıtınızı veriniz" ifadesi yazılı olan bir kart kullanılabilir. U yanıt değişkeni için P oranındaki kartların üzerinde "X değerini yazınız" ifadesi yazılıdır, (1-P) oranındaki kartların üzerinde ise farklı ifadeler yer alabilir. Örneğin "X değeriniz ile verilen kart destesinden çektiğiniz sayıyı toplayarak (çarparak) yanıtınızı veriniz". (1-P) oranındaki kartlardaki farklı ifadeleri uygulayabilmek için R düzeni kullanılır. R düzeni, X değişkeni üzerinde uygulanacak değişik rastgele teknikleri ifade etmektedir. Bu rastgele tekniklerde T, ortalaması μ_T ve varyansı σ_T^2 olan rastgele değişken kullanılır. Sonuç olarak P oranındaki kartların üzerinde "Y ve X değerinizi yazınız" ifadesi bulunur. (1-P) oranındaki kartların üzerinde ise "Y değeri için S düzenini kullanınız, X değeri için R düzenini kullanınız" ifadesi bulunur. Bu açıklamalara göre her bir cevaplayıcı için yanıt dağılımı $(z_1,u_1),(z_2,u_2),...,(z_n,u_n)$ şeklinde olacaktır.

Örneğin gelir ile ilgili bir araştırmada hassas soru kişinin aylık geliri olsun. Yardımcı değişken ise kişinin oturduğu evin kirası olsun. P oranındaki kartlarda "Aylık geliriniz ne kadardır?, Oturduğunuz evin kirası ne kadardır?" ifadesi yazılı olacaktır. (1-P) oranındaki kartlarda "Aylık gelirinizin cevabını S düzenini kullanarak veriniz, oturduğunuz evinizin kirasını R düzenini kullanarak cevap veriniz" ifadesi yazılır. S düzeninde toplamsal bir teknik uygulanacak ise kişi kendi cevabı ile W rastgele dağılımdan türetilen seçtiği karttaki sayıyı toplayıp cevabını verecektir. R düzeninde toplamsal bir teknik uygulanacak ise kişi kendi cevabı ile T rastgele dağılımdan türetilen seçtiği karttaki sayıyı toplayıp cevabını verecektir.

Eşitlik (4.116)'da verilen yanıt dağılımından yararlanarak Y kitle ortalaması için önerilen oransal tahmin edici:

$$\hat{\mu}_{Öneri1} = \frac{\bar{z}_{R1} - c}{h}, \qquad (h \neq 0) \tag{4.117}$$

şeklinde verilmiştir. Burada, c ve h sabit değerler, $\bar{z}_{R1} = \bar{z}\left(\frac{\mu_u}{\bar{u}}\right)^{\alpha}$'dır ve α sabit bir katsayıdır.

$\hat{\mu}_{Öneri1}$ tahmin edicisinin hata kareler ortalamasını elde etmek için fark yönteminden yararlanılır.

Klasik basit oransal tahmini için fark yönteminde,

$$e_0 = \frac{\bar{z} - \mu_z}{\mu_z} \quad \rightarrow \quad \bar{z} = \mu_z(1 + e_0),$$

$$e_1 = \frac{\bar{u} - \mu_u}{\mu_u} \quad \rightarrow \quad \bar{u} = \mu_u(1 + e_1) \tag{4.118}$$

şeklinde değerler tanımlanır. Tahmin edicideki değişken sayısı kadar fark terimleri tanımlanır.

Bu değişkenlerin beklenen değerleri $E(e_i)$, karelerinin beklenen değerleri $E(e_i^2)$ ve kovaryansları $E(e_i e_j)(i \neq j)$ aşağıdaki şekildedir:

$$E(e_0) = E(e_1) = 0 \tag{4.119}$$

$$E(e_0^2) = E\left(\frac{\bar{z}-\mu_z}{\mu_z}\right)^2 = \left(\frac{1-f}{n}\right)\frac{\sigma_z^2}{\mu_z^2} = \left(\frac{1-f}{n}\right)C_z^2$$

$$E(e_1^2) = E\left(\frac{\bar{u}-\mu_u}{\mu_u}\right)^2 = \left(\frac{1-f}{n}\right)\frac{\sigma_u^2}{\mu_u^2} = \left(\frac{1-f}{n}\right)C_u^2 \tag{4.120}$$

$$E(e_0 e_1) = E\left(\frac{\bar{z}-\mu_z}{\mu_z}\right)\left(\frac{\bar{u}-\mu_u}{\mu_u}\right) = \left(\frac{1-f}{n}\right)\frac{\sigma_{zu}}{\mu_z\mu_u} = \left(\frac{1-f}{n}\right)\rho_{zu}C_zC_u \tag{4.121}$$

Burada $\left(\frac{1-f}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{N}\right)$'dir.

$\bar{z}_{R1}$ eşitliği Eşitlik (4.119)'daki e'li terimler cinsinden yazılarak yeniden ifade edilirse,

$$\bar{z}_{R1} = \mu_z(1+e_0)\left\{\frac{\mu_u}{\mu_u(1+e_1)}\right\}^{\alpha}$$

$$\bar{z}_{R1} = \mu_z(1+e_0)(1+e_1)^{-\alpha} \tag{4.122}$$

şeklinde elde edilir.

Eşitlik (4.18), Eşitlik (4.122)'de yerine konulup çarpımlar yapılırsa ve 2.dereceden e'li terimler ihmal edilirse,

$$\bar{z}_{R1} \cong \mu_z(1+e_0)\left(1-\alpha e_1+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}e_1^2\right)$$

$$\bar{z}_{R1} \cong \mu_z\left[1+e_0-\alpha e_1-\alpha e_0 e_1+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}e_1^2\right] \tag{4.123}$$

olarak elde edilir.

$\bar{z}_{R1}$ tahmin edicisinin hata kareler ortalaması,

$$HKO(\bar{t}_{Öneri1}) = \frac{E(\bar{z}_{R1}-\mu_z)^2}{h^2}$$

$$HKO\left(\hat{\mu}_{Öneri1}\right) \cong \frac{\mu_z^2}{h^2} E\left[e_0 - \alpha e_1 - \alpha e_0 e_1 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} e_1^2\right]^2 \tag{4.124}$$

şeklindedir.

Beklenen değerde kare alınıp, 2.dereceden sonraki e’li terimler ihmal edilirse hata kareler ortalaması,

$$HKO\left(\hat{\mu}_{Öneri1}\right) \cong \frac{\mu_z^2}{h^2} E\left[e_0^2 + \alpha^2 e_1^2 - 2\alpha e_0 e_1\right] \tag{4.125}$$

olarak elde edilir.

Eşitlik (4.125)’te; Eşitlik (4.120) ve Eşitlik (4.121) yerine konulursa, $\hat{\mu}_{Öneri1}$ tahmin edicisinin hata kareler ortalaması,

$$\begin{aligned} HKO\left(\hat{\mu}_{Öneri1}\right) &\cong \frac{(1-f)\mu_z^2}{nh^2}\left[C_z^2 + \alpha^2 C_x^2 - 2\alpha\rho_{zx} C_z C_u\right] \\ &= \frac{(1-f)\mu_z^2}{nh^2}\left[C_z^2 + \alpha C_u^2\left(\alpha - 2\rho_{zu}\frac{C_z}{C_u}\right)\right] \\ &= \frac{(1-f)\mu_z^2}{nh^2}\left[C_z^2 + \alpha C_u^2(\alpha - 2K_{zu})\right] \end{aligned} \tag{4.126}$$

olarak elde edilir. Burada $K_{zu} = \rho_{zu}\frac{C_z}{C_u}$ ’dir.

Önerilen tahmin edicide, α değerinin optimum değerinin bulunmasıyla hata kareler ortalamasının minimum değeri bulunabilir. Bu minimum değer, HKO’sunun optimum değeri bulunmak istenen değere göre türevinin alınıp sıfıra eşitlenmesiyle bulunur.

$$\frac{\partial\left[HKO\left(\hat{\mu}_{Öneri1}\right)\right]}{\partial\alpha}=\frac{\partial\left[\frac{(1-f)\mu_z^2}{nh^2}\left(C_z^2+\alpha C_u^2(\alpha-2K_{zu})\right)\right]}{\partial\alpha}=0 \qquad (4.127)$$

$$\frac{\partial\left[HKO\left(\hat{\mu}_{Öneri1}\right)\right]}{\partial\alpha}=2\alpha C_u^2-2K_{zu}C_u^2=0$$

Eşitlik (4.127)'den,

$$\alpha=K_{zu} \qquad (4.128)$$

olarak bulunur.

α değeri, Eşitlik (4.127)'de yerine konulursa $\hat{\mu}_{Öneri1}$ tahmin edicisinin hata kareler ortalaması,

$$HKO_{min}\left(\hat{\mu}_{Öneri1}\right)=\frac{(1-f)\mu_z^2}{nh^2}\left[C_z^2-K^2{}_{zu}C_u^2\right]$$

$$HKO_{min}\left(\hat{\mu}_{Öneri1}\right)=\frac{(1-f)\sigma_z^2}{nh^2}\left[1-\rho^2{}_{zu}\right] \qquad (4.129)$$

olarak elde edilir. Eşitlik (4.129)'daki $\sigma^2{}_z$ ve $\rho^2{}_{zu}$ formülleri uygulanan rastgeleleştirilmiş yanıt modeline göre farklı eşitliklere sahip olacaktır.

Bölüm 3.2.1'de olduğu gibi bu yanıt dağılımı için de farklı modeller uygulanabilir. Uygulanabilecek 4 model için eşitlikler Bölüm 3.2.1'de verilen eşitlikler ile aynıdır.

Bu tahmin edici için oluşturulan bazı modeller ve eşitlikler Çizelge 4.10'da gösterilmiştir. Çizelge 4.10'un M sütunu uygulanabilecek bazı modellerin numaralandırmasını, S sütunu Y hassas değişkeni için uygulanabilecek düzenleri, R sütunu X yardımcı değişkeni için uygulanabilecek düzenleri göstermektedir. Ortalama sütunu her bir modelde Z ve U yanıt değişkenleri için ortalama eşitliklerini, c ve h değerlerini göstermektedir. HKO formülünde kullanılacak varyans ve korelasyon eşitlikleri sütunu ise her model için bulunan varyans ve korelasyon eşitliklerini göstermektedir.

Çizelge 4.10. $\hat{\mu}_{Öneri1}$ tahmin edici ailesi için bazı özel rastgele yanıt modelleri

M	S	R	Ortalama	$HKO_{min}\left(\hat{\mu}_{Öneri\,1}\right) \cong \frac{(1-f)\sigma_z^2}{nh^2}\left[1-\rho^2_{zu}\right]$ **formülünde kullanılacak varyans ve korelasyon eşitlikleri**
1	Y+W	X	$\mu_z = \mu_y + (1-P)\mu_w$ $\mu_u = \mu_x$ $c = (1-P)\mu_w,\ h = 1$	$\sigma_z^2 = \sigma_y^2 + (1-P)\mu_w^2\left(C_w^2 + P\right)$ $\rho^2_{zu} = \frac{\sigma^2_{yx}}{\left[\sigma_y^2 + (1-P)\mu_w^2\left(C_w^2 + P\right)\right]\sigma_x^2}$
2	YW	X	$\mu_z = \left[P + (1-P)\mu_w\right]\mu_y$ $\mu_u = \mu_x$ $c = 0, h = \left[P + (1-P)\mu_w\right]$	$\sigma_z^2 = \mu_y^2\left(1 + C_y^2\right)\left[P + (1-P)\mu_w^2\left(1 + C_w^2\right)\right] - \mu_z^2$ $\rho^2_{zu} = \frac{\sigma^2_{yx}\left[P + (1-P)\mu_w\right]^2}{\left[\mu_y^2\left(1 + C_y^2\right)\left(P + (1-P)\mu_w^2\left(1 + C_w^2\right)\right) - \mu_z^2\right]\sigma_x^2}$
3	Y+W	X+T	$\mu_z = \mu_y + (1-P)\mu_w$ $\mu_u = \mu_x + (1-P)\mu_t$ $c = (1-p)\mu_w,\ h = 1$	$\sigma_z^2 = \sigma_y^2 + (1-P)\mu_w^2\left(C_w^2 + P\right)$ $\rho^2_{zu} = \frac{\left(\sigma_{xy} + P(1-P)\mu_w\mu_t\right)^2}{\left[\sigma_y^2 + (1-P)\mu_w^2\left(C_w^2 + P\right)\right]\left[\sigma_x^2 + (1-P)\mu_t^2\left(C_t^2 + P\right)\right]}$
4	YW	XT	$\mu_z = \left[P + (1-P)\mu_w\right]\mu_y$ $\mu_u = \left[P + (1-P)\mu_t\right]\mu_x$ $c = 0, h = \left[P + (1-P)\mu_w\right]$	$\sigma_z^2 = \mu_y^2\left(1 + C_y^2\right)\left[P + (1-P)\mu_w^2\left(1 + C_w^2\right)\right] - \mu_z^2$ $\rho^2_{zu} = \frac{\left\{\sigma_{xy}\left[P + (1-P)\mu_t\mu_w\right] + P(1-P)\mu_y\mu_x(1-\mu_w)(1-\mu_t)\right\}^2}{\left[\mu_y^2\left(1 + C_y^2\right)\left(P + (1-P)\mu_w^2\left(1 + C_w^2\right)\right) - \mu_z^2\right]\left[\mu_x^2\left(1 + C_x^2\right)\left(P + (1-P)\mu_t^2\left(1 + C_t^2\right)\right) - \mu_v^2\right]}$

4.2.2. Ortalama tahmini için Önerilen Tek Yardımcı Değişkenin Kullanıldığı Oransal Tahmin Edici için Sayısal Örnek

N=100 kişilik bir bölgede kişilerin aylık gelirleri ile ilgili bir çalışma yapılsın. Hassas değişken kişilerin aylık geliri olsun. Hassas değişkenin tahmininde kullanılacak yardımcı değişken ise kişilerin oturduğu evin aylık kirası olsun. n=10 kişi yerine konulmadan basit rastgele örnekleme ile seçilsin. Kişilere P=0,20 olduğu RYM uygulansın. Bu durumda kişilerin %20'si hassas değişken ve yardımcı değişkene doğrudan cevap verecektir. Geriye kalan kişilerin %80'i S ve R düzenlerini kullanarak cevaplarını verecektir. S ve R düzenlerinde uygulanacak farklı tekniklere göre çeşitli modeller oluşturulabilir. Çizelge 4.10' da verilen modeller için sayısal çalışma aşağıda verilmiştir.

Model 1 için Sayısal Örnek

Model 1 için kişilerin ortalama aylık gelir tahmini ve bu tahminin hata kareler ortalaması tahmini Çizelge 4.11'de verilen veriler yardımıyla bulunabilir. S düzeninde toplamsal teknik uygulanır. Toplamsal teknik uygulayabilmek için Y hassas değişkeni için W rastgele değişkeni türetilir. W rastgele değişkeni Uniform (500, 1000) dağılımından türetilsin. W rastgele değişkenin ortalaması $\mu_w = \frac{500+1500}{2} = 750$ ve varyansı $\sigma_w^2 = \frac{(1000-500)^2}{12} = 20833{,}33$'tür.

Çizelge 4.11'de "Gerçek Yanıtlar" sütununda gerçekte bu yanıtlar çalışmada bilinmemesine rağmen bu örnek için kişilerin gerçek yanıtlarının bilindiğini varsayalım. Seçilen karttaki ifade sütununda 10 kişi için oluşturulan kartlar yer almaktadır. P=0,20 olduğu için kartların 10*0,20=2'sinde "Aylık geliriniz ne kadardır?, oturduğunuz evin kirası ne kadardır?" ifadesi bulunur. Bu kartı seçen kişiler sorulara doğrudan yanıt vereceklerdir. Kartların 10*0,80=8'inde kartlarda "Aylık gelirinizin cevabını S düzenini kullanarak veriniz, oturduğunuz evin kirası ne kadardır?" ifadesi bulunur. Çizelge 4.11'de 1. kişinin seçtiği karttaki ifade "Aylık geliriniz ne kadardır?, oturduğunuz evin kirası ne kadardır?" şeklindedir. Kişinin gerçekte aylık geliri 1500 TL'dir ve oturduğu evin aylık kirası 0 TL'dir. Yani kişi kira ödemiyor. Dolayısıyla kişinin vereceği yanıt "1500, 0" olacaktır. 2.kişinin seçtiği karttaki ifade "Aylık gelirinizin cevabını S düzenini kullanarak veriniz, oturduğunuz evin kirası ne kadardır?" şeklindedir. Kişinin gerçekte aylık geliri 2000 TL'dir ve oturduğu evin aylık kirası 500 TL'dir. Kişinin S düzeninde rastgele sayılar destesinden seçtiği sayı 500'dür. Kişi yardımcı değişken için yanıtını doğrudan verecektir. Dolayısıyla kişinin vereceği yanıt "2000+500, 500" olacaktır.

Diğer cevaplayıcılar için de rastgeleleştirilmiş yanıt modeli benzer şekilde uygulanırsa tüm örneklem için yanıt dağılımı { (1500, 0), (2500, 500), (2000, 600), (3300, 550), (2000, 0), (2000, 300), (3500, 700), (3300, 800), (4500, 1000), (5500, 500) } şeklinde olacaktır.

Çizelge 4.11. Ortalama tahmini için önerilen tek yardımcı değişkenin kullanıldığı oransal tahmin edici için model 1 örneği

Kişiler	Gerçek Yanıtlar		Seçilen Karttaki İfade*	Rastgele Sayılar Destesinden Seçilen Sayı(W)	Verilen Yanıtlar		Yanıt Dağılımı
	Y_i	X_i			$Z_i=Y_i+W_i$	$U_i=X_i$	(Z_i, U_i)
1	1500	0	1	1000	1500	0	(1500, 0)
2	2000	500	2	500	2000+500	500	(2500, 500)
3	2000	600	1	700	2000	600	(2000, 600)
4	2500	550	2	800	2500+800	550	(3300, 550)
5	1500	0	2	500	1500+500	0	(2000, 0)
6	1000	300	2	1000	1000+1000	300	(2000, 300)
7	3000	700	2	500	3000+500	700	(3500, 700)
8	2500	800	2	800	2500+800	800	(3300, 800)
9	3500	1000	2	1000	3500+1000	1000	(4500, 1000)
10	5000	500	2	500	5000+500	500	(5500, 500)
Ortalama					3010	495	
Varyans					1603222	103583	
Değişim Katsayısı					0,42	0,65	

*****1: "Aylık geliriniz ne kadardır?, Oturduğunuz evin kirası ne kadardır?"
2**:** "Aylık gelirinizin cevabını S düzenini kullanarak veriniz, oturduğunuz evinizin kirası ne kadardır"

Kişilerin verdiği yanıtlar kullanılarak kişilerin ortalama aylık gelirleri tahmin edilebilir.

Model 1 için Çizelge 4.11'deki verilere ait bazı bilgiler aşağıda özetlenmiştir.

$$\bar{z} = 3010\,,\quad \bar{u} = \bar{x} = 495\,,\quad \hat{\sigma}_z^2 = 1603222\,,\quad \hat{C}_z = 0{,}42\,,\quad \hat{C}_u = 0{,}65\,,\quad r_{zu} = 0{,}63\,,$$

$$c = (1-P)\mu_w = 0{,}80 * 750 = 600\,,\quad h=1,\quad \hat{\alpha} = K_{zu} = r_{zu}\frac{\hat{C}_z}{\hat{C}_u} = 0{,}63 * \frac{0{,}42}{0{,}65} = 0{,}41\,,\quad \mu_x = 500$$

olduğu biliniyor.

Eşitlik (4.117)'den ortalama aylık gelir tahmini ,

$$\hat{\mu}_{Öneri1} = \frac{\bar{z}\left(\frac{\mu_u}{\bar{u}}\right)^{\alpha} - c}{h} = \frac{3010 * \left(\frac{500}{495}\right)^{0{,}41} - 600}{1} = 2422{,}38$$

olarak hesaplanır.

Eşitlik (4.129)'dan ortalama aylık gelir tahmininin hata kareler ortalaması tahmini,

$$H\hat{K}O_{min}(\hat{\mu}_{Öneri1}) \cong \frac{(1-f)\hat{\sigma}_z^2}{nh^2}(1-r^2_{zu}) = \frac{(1-0{,}10)1603222}{10}\left[1-(0{,}63)^2\right] = 87273{,}85$$

olarak hesaplanır.

Model 2 için Sayısal Örnek

Model 2 için kişilerin ortalama aylık gelir tahmini ve bu tahminin hata kareler ortalaması tahmini Çizelge 4.12'de verilen veriler yardımıyla bulunabilir. S düzeninde çarpımsal teknik uygulanır. Çarpımsal teknik uygulayabilmek için Y hassas değişkeni için W rastgele değişkeni türetilir. W rastgele değişkeni Uniform (2, 5) dağılımından türetilsin. W rastgele değişkeninin ortalaması $\mu_w = \frac{2+5}{2} = 3{,}5$ ve varyansı

$\sigma_w^2 = \frac{(5-2)^2}{12} = 0{,}75$ 'tir.

Model 2'nin Model 1'den tek farkı Y hassas değişkeni için S düzeninde çarpımsal tekniğin uygulanmasıdır. Buna göre tüm örneklem için yanıt dağılımı { (1500, 0), (6000, 500), (2000, 600), (12500, 550), (3000, 0), (3000, 300), (12000, 700), (12500, 800), (7000, 1000), (15000, 500) } şeklinde olacaktır.

Çizelge 4.12. Ortalama tahmini için önerilen tek yardımcı değişkenin kullanıldığı oransal tahmin edici için model 2 örneği

Kişiler	Gerçek Yanıtlar		Seçilen Karttaki İfade*	Rastgele Sayılar Destesinden Seçilen Sayı	Verilen Yanıtlar		Yanıt Dağılımı
	Y_i	X_i		W_i	$Z_i = Y_i * W_i$	$U_i = X_i$	(Z_i, U_i)
1	1500	0	1	2	1500	0	(1500, 0)
2	2000	500	2	3	2000*3	500	(6000, 500)
3	2000	600	1	4	2000	600	(2000, 600)
4	2500	550	2	5	2500*5	550	(12500, 550)
5	1500	0	2	2	1500*2	0	(3000, 0)
6	1000	300	2	3	1000*3	300	(3000, 300)
7	3000	700	2	4	3000*4	700	(12000, 700)
8	2500	800	2	5	2500*5	800	(12500, 800)
9	3500	1000	2	2	3500*2	1000	(7000, 1000)
10	5000	500	2	3	5000*3	500	(15000, 500)
Ortalama					7450	495	
Varyans					26191667	103583	
Değişim Katsayısı					0,69	0,65	

*****1: "Aylık geliriniz ne kadardır?, oturduğunuz evin kirası ne kadardır?"
2**:** "Aylık gelirinizin cevabını S düzenini kullanarak veriniz, oturduğunuz evin kirası ne kadardır?"

Kişilerin verdiği yanıtlar kullanılarak kişilerin ortalama aylık gelirleri tahmin edilebilir.

Model 2 için Çizelge 4.12'deki verilere ait bazı bilgiler aşağıda özetlenmiştir.

$\bar{z} = 7450$, $\bar{u} = \bar{x} = 520$, $\hat{\sigma}_z^2 = 26191667$, $\hat{C}_z = 0,69$, $\hat{C}_u = 0,65$,

$r_{zu} = 0,54$, $c = 0$, $h = \left[P + (1-P)\mu_w\right] = 0,20 + 0,80 * 3,5 = 3$, $\mu_u = \mu_x = 500$,

$\hat{\alpha} = K_{zu} = r_{zu}\dfrac{\hat{C}_z}{\hat{C}_u} = 0,54 * \dfrac{0,69}{0,65} = 0,57$.

Eşitlik (4.117)'den ortalama aylık gelir tahmini,

$$\hat{\mu}_{Öneri1} = \frac{\bar{z}\left(\frac{\mu_u}{\bar{u}}\right)^{\alpha} - c}{h} = \frac{7450 * \left(\frac{500}{495}\right)^{0,57}}{3} = 2497,58$$

olarak hesaplanır.

Eşitlik (4.129)'dan ortalama aylık gelir tahmininin hata kareler ortalaması tahmini,

$$HKO_{min}\left(\hat{\mu}_{Öneri1}\right) \cong \frac{(1-f)\hat{\sigma}_z^2}{nh^2}\left(1 - r^2_{zu}\right) = \frac{(1-0,10)26191667}{10 * 3^2}\left[1 - (0,54)^2\right] = 185685,3$$

olarak hesaplanır.

Model 3 için Sayısal Örnek

Model 3 için kişilerin ortalama aylık gelir tahmini ve bu tahminin hata kareler ortalaması tahmini Çizelge 4.13'te verilen veriler yardımıyla bulunabilir. S ve R düzeninde toplamsal teknik uygulanır. Toplamsal teknik uygulayabilmek için Y hassas değişkeni için W rastgele değişkeni türetilir. W rastgele değişkeni Uniform (500, 1000) dağılımından türetilsin. Uniform dağılımının ortalaması $\mu_w = \dfrac{500 + 1500}{2} = 750$ ve varyansı $\sigma_w^2 = \dfrac{(1000 - 500)^2}{12} = 20833,33$'tür. X hassas değişkeni için T rastgele değişkeni türetilir. T rastgele değişkeni Uniform (100, 200) dağılımından türetilsin. Uniform dağılımının ortalaması $\mu_t = \dfrac{100 + 200}{2} = 150$ ve varyansı $\sigma_t^2 = \dfrac{(200 - 100)^2}{12} = 833,33$'tür.

Çizelge 4.13. Ortalama tahmini için önerilen tek yardımcı değişkenin kullanıldığı oransal tahmin edici için model 3 örneği

Kişiler	Gerçek Yanıtlar		Seçilen Karttaki İfade*	Rastgele Sayılar Destesinden Seçilen Sayı		Verilen Yanıtlar		Yanıt Dağılımı
	Y_i	X_i		W_i	T_i	$Z_i=Y_i+W_i$	$U_i=X_i+T_i$	(Z_i, U_i)
1	1500	0	1	1000	100	1500	0	(1500, 0)
2	2000	500	2	500	150	2000+500	500+150	(2500, 650)
3	2000	600	1	700	150	2000	600	(2000, 600)
4	2500	550	2	800	200	2500+800	550+200	(3300, 750)
5	1500	0	2	500	170	1500+500	0+170	(2000, 170)
6	1000	300	2	1000	150	1000+1000	300+150	(2000, 450)
7	3000	700	2	500	180	3000+500	700+180	(3500, 880)
8	2500	800	2	800	200	2500+800	800+200	(3300, 1000)
9	3500	1000	2	1000	100	3500+1000	1000+100	(4500, 1100)
10	5000	500	2	500	150	5000+500	500+150	(5500, 650)
Ortalama						3010	650	
Varyans						1603222	127311	
Değişim Katsayısı						0,42	0,54	

***1**: “Aylık geliriniz ne kadardır?, Oturduğunuz evin kirası ne kadardır?”
2**:** “Aylık gelirinizin cevabını S düzenini kullanarak veriniz, oturduğunuz evinizin kirasını R düzenini kullanarak cevap veriniz”

Model 3’te Y hassas değişkeni için S düzeninde ve X yardımcı değişken için R düzeninde kısmi toplamsal teknik uygulanır. Buna göre tüm örneklem için yanıt dağılımı { (1500, 0), (2500, 650), (2000, 600), (3300, 750), (2000, 170), (2000, 450), (3500, 880), (3300, 1000), (4500, 1100), (5500, 650) } şeklinde olacaktır.

Kişilerin verdiği yanıtlar kullanılarak kişilerin ortalama aylık gelirleri tahmin edilebilir.

Model 3 için Çizelge 4.13’teki verilere ait bazı bilgiler aşağıda özetlenmiştir.

$\bar{z} = 3010$, $\bar{u} = 650$, $\hat{\sigma}_z^2 = 1603222$, $\hat{C}_z = 0{,}42$, $\hat{C}_u = 0{,}54$, $r_{zu} = 0{,}80$,

$c = (1-P)\mu_w = 0{,}80 * 750 = 600$,h=1, $\hat{\alpha} = K_{zu} = r_{zu}\dfrac{\hat{C}_z}{\hat{C}_u} = 0{,}80 * \dfrac{0{,}42}{0{,}54} = 0{,}61$,

$\mu_u = \mu_x + (1-P)\mu_t = 500 + 0{,}80 * 150 = 620$

Eşitlik (4.117)’den ortalama aylık gelir tahmini ,

$$\hat{\mu}_{Öneri1} = \frac{\bar{z}\left(\dfrac{\mu_u}{\bar{u}}\right)^{\alpha} - c}{h} = \frac{3010 * \left(\dfrac{620}{650}\right)^{0,61} - 600}{1} = 2324{,}48$$

olarak hesaplanır.

Eşitlik (4.129)'dan ortalama aylık gelir tahmininin hata kareler ortalaması tahmini,

$$\hat{HKO}_{min}\left(\bar{y}_{Öneri1}\right) \cong \frac{(1-f)\sigma_z^2}{nh^2}\left(1-r^2_{zu}\right) = \frac{(1-0{,}10)160322}{10}\left(1-(0{,}80)^2\right) = 51821$$

olarak hesaplanır.

Model 4 için Sayısal Örnek

Model 4 için kişilerin ortalama aylık gelir tahmini ve bu tahminin hata kareler ortalaması tahmini Çizelge 4.14'te verilen veriler yardımıyla bulunabilir. S ve R düzenlerinde çarpımsal teknik uygulanır. W ve T rastgele değişkenleri Uniform (2, 5) dağılımından türetilsin. W ve T rastgele değişkenlerinin ortalamaları $\mu_w = \mu_t = \frac{2+5}{2} = 3{,}5$ ve varyansları $\sigma_w^2 = \sigma_t^2 = \frac{(5-2)^2}{12} = 0{,}75$'tir.

Çizelge 4.14. Ortalama tahmini için önerilen tek yardımcı değişkenin kullanıldığı oransal tahmin edici için model 4 örneği

Kişiler	Gerçek Yanıtlar		Seçilen Karttaki İfade*	Rastgele Sayılar Destesinden Seçilen Sayı		Verilen Yanıtlar		Yanıt Dağılımı
	Y_i	X_i		W_i	Ti	$Z_i=Y_i*W_i$	$U_i=X_i*T_i$	(Z_i, U_i)
1	1500	0	1	2	2	1500	0	(1500, 0)
2	2000	500	2	3	3	2000*3	500*3	(6000, 1500)
3	2000	600	1	4	4	2000	600	(2000, 600)
4	2500	550	2	5	5	2500*5	550*5	(12500, 1750)
5	1500	0	2	2	2	1500*2	0*2	(3000, 0)
6	1000	300	2	3	3	1000*3	300*3	(3000, 900)
7	3000	700	2	4	4	3000*4	700*4	(12000,2800)
8	2500	800	2	5	5	2500*5	800*5	(12500, 4000)
9	3500	1000	2	2	2	3500*2	1000*2	(7000, 2000)
10	5000	500	2	3	3	5000*3	500*3	(15000, 1500)
Ortalama						7450	1680	
Varyans						26191667	1740111	
Değişim Katsayısı						0,69	0,79	

*****1: "Aylık geliriniz ne kadardır?, Oturduğunuz evin kirası ne kadardır?"
2**:** "Aylık gelirinizin cevabını S düzenini kullanarak veriniz, oturduğunuz evinizin kirasını R düzenini kullanarak cevap veriniz"

Model 4'te Y hassas değişkeni için S düzeninde ve X yardımcı değişken için R düzeninde kısmi çarpımsal teknik uygulanır. Buna göre tüm örneklem için yanıt dağılımı { (1500, 0), (6000, 1500), (2000, 600), (12500, 1750), (3000, 0), (3000, 900), (12000, 2800), (12500, 4000), (7000, 2000), (15000, 1500) } şeklinde olacaktır.

Kişilerin verdiği yanıtlar kullanılarak kişilerin ortalama aylık gelirleri tahmin edilebilir.

Model 4 için Çizelge 4.14'teki verilere ait bazı bilgiler aşağıda özetlenmiştir.

$$\bar{z} = 7450\ ,\ \ \bar{u} = 1680\ ,\ \hat{\sigma}_z^2 = 1603222\ ,\ \hat{C}_z = 0{,}42\ ,\ \hat{C}_u = 0{,}79\ ,$$

$$r_{zu} = 0{,}88\ , c = 0\ , h = \left[P + (1-P)\mu_w\right] = 0{,}20 + 0{,}80 * 3{,}5 = 3\ ,$$

$$\mu_u = \left[(0{,}20 + 0{,}80 * 3{,}5)500\right] = 1500\ , \hat{\alpha} = K_{zu} = r_{zu}\frac{\hat{C}_z}{\hat{C}_u} = 0{,}88 * \frac{0{,}69}{0{,}79} = 1{,}005\ .$$

Eşitlik (4.117)'den ortalama aylık gelir tahmini,

$$\hat{\mu}_{\text{Öneri 1}} = \frac{\bar{z}\left(\frac{\mu_u}{\bar{u}}\right)^{\alpha} - c}{h} = \frac{7450 * \left(\frac{1500}{1680}\right)^{1{,}005}}{3} = 2216$$

olarak hesaplanır.

Eşitlik (4.129)'dan ortalama aylık gelir tahmininin hata kareler ortalaması tahmini,

$$\hat{HKO}_{min}\left(\hat{\mu}_{\text{Öneri1}}\right) \cong \frac{(1-f)\hat{\sigma}_z^2}{nh^2}\left(1 - r^2_{zu}\right) = \frac{(1-0{,}10)26191667}{10 * 3^2}\left(1 - (0{,}88)^2\right) = 59112{,}37$$

olarak hesaplanır.

4.2.3. Ortalama tahmini için Önerilen İki Yardımcı Değişkenin Kullanıldığı Oransal Tahmin Edici

Sousa v.d. [33]'ün önerdiği rastgeleleştirilmiş yanıt modelinden yararlanarak ortalama tahmini için RYM'de yeni bir tahmin edici ailesi önerilmiştir. Ortalama tahmininde bu modelde iki tane hassas olmayan yardımcı değişken kullanılmıştır. Örneğin tahmin edilmek istenen değişken kişinin aylık geliri, yardımcı değişkenler ise kişinin aylık kira gideri ve kişinin bakmakla yükümlü olduğu kişi sayısı olabilir.

Önerilen tahmin edici ailesi için yanıt değişkeni dağılımı,

$$
(Z, U, V) \Rightarrow \begin{cases} (Y, X, M), & P \text{ olasılığı ile} \\ (S, R, L), & 1\text{-}P \text{ olasılığı ile} \end{cases} \qquad (4.130)
$$

şeklinde gösterilir. Eşitlik (4.130) ile verilen dağılımda Y ortalaması μ_y ve varyansı σ_y^2 olan hassas değişken, X ve M hassas olmayan, fakat hassas değişken ile ilişkili olan kitle ortalamaları bilinen (μ_x, μ_m) yardımcı değişkenlerdir. Z, hassas değişken Y üzerindeki yanıt değişkenini ifade etmektedir. Y üzerindeki yanıt değişkeni için kullanılan düzen S ile ifade edilmektedir. U ise birinci yardımcı değişken X üzerindeki yanıt değişkenini ifade etmektedir. X üzerindeki yanıt değişkeni için kullanılan düzen ise R ile ifade edilmektedir. V ise ikinci yardımcı değişken M üzerindeki yanıt değişkenini ifade etmektedir. M üzerindeki yanıt değişkeni için kullanılan düzen ise L ile ifade edilmektedir. Bu teknik uygulanırken P oranındaki cevaplayıcı Y, X ve M sorularına doğrudan yanıt verecektir. Geriye kalan (1-P) oranındaki cevaplayıcıya S, R ve L düzenleri uygulanacaktır. S, R ve L düzenlerinde doğrudan yanıt alma tekniğinin yanı sıra Bölüm 2'de verilen toplamsal ve çarpımsal teknikler de kullanılabilir. Bu teknikler uygulanırken Z yanıt değişkeni için ortalaması μ_w ve varyansı σ_w^2 olan W rastgele değişkeni türetilir. U yanıt değişkeni için ise ortalaması μ_t ve varyansı σ_t^2 olan T rastgele değişkeni türetilir. V yanıt değişkeni için ise ortalaması μ_k ve varyansı σ_k^2 olan K rastgele değişkeni türetilir. Burada rastgele düzende türetilen değişkenler ile hassas değişken ve hassas olmayan değişkenler birbirinden bağımsızdır. Eşitlik (4.130)'da verilen dağılım için P ve (1-P) oranlarında iki deste kart hazırlanır. Kartların üzerinde Z, U ve V yanıt değişkenleri için üç ayrı ifade yer almaktadır. Z yanıt değişkeni için P oranındaki kartların üzerinde "Y değerinizi yazınız" ifadesi yazılıdır. (1-P) oranındaki kartların üzerinde farklı ifadeler yer alabilir. Örneğin "Y değerinizi verilen kart destesinden çektiğiniz sayıyı toplayarak yanıtınızı veriniz" ifadesi ya da "Y değerinizi verilen kart destesinden çektiğiniz sayıyı çarparak yanıtınızı veriniz" ifadesi yazılı olan bir kart kullanılabilir. U yanıt değişkeni için P oranındaki kartların üzerinde "X değerini yazınız" ifadesi yazılıdır, (1-P) oranındaki kartların üzerinde ise farklı ifadeler yer alabilir. Örneğin "X değeriniz ile verilen kart destesinden çektiğiniz sayıyı toplayarak (çarparak) yanıtınızı veriniz". (1-P) oranındaki kartlardaki farklı ifadeleri uygulayabilmek için R düzeni kullanılır. V yanıt değişkeni için P oranındaki kartların üzerinde "M değerinizi yazınız" ifadesi yazılıdır, (1-P) oranındaki kartların üzerinde ise farklı ifadeler yer alabilir. Örneğin "M değeriniz ile verilen kart destesinden çektiğiniz sayıyı toplayarak (çarparak) yanıtınızı veriniz". (1-P) oranındaki kartlardaki farklı ifadeleri uygulayabilmek için L düzeni kullanılır. Sonuç olarak P oranındaki kartların üzerinde "Y, X ve M değerinizi yazınız" ifadesi bulunur. (1-P) oranındaki kartların üzerinde ise "Y değeri için S düzenini kullanınız, X değeri için R düzenini kullanınız, M değeri için L düzenini kullanınız" ifadesi bulunur. S,R ve L düzenlerinin farklı kullanımları Çizelge 4.15'te verilmiştir. Bu açıklamalara göre her bir cevaplayıcı için yanıt dağılımı $(z_1, u_1, v_1), (z_2, u_2, v_2), ..., (z_n, u_n, v_n)$ şeklinde olacaktır.

Eşitlik (4.130)'da verilen yanıt değişkeninden yararlanarak Z kitle ortalaması için önerilen tahmin edici ailesi,

$$\hat{\mu}_{\text{Öneri2}} = \frac{\bar{z}_{R2} - c}{h}, \qquad (h \neq 0) \qquad (4.131)$$

şeklindedir.

Burada $\bar{z}_{R2} = \bar{z}\left(\frac{\mu_U}{\bar{u}}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{a\mu_V + b}{a\bar{v} + b}\right)^{\alpha_2}$ 'dir.

α_1, α_2 sabit katsayılar, $a(\neq 0)$ ve b v rastgele düzenine ait parametrelerdir. Bu parametreler $\sigma_V, C_V, \beta_1(v), \beta_2(v), \rho_{uv}$ olabilir. $\bar{u}$ ve $\bar{v}$ görüşülen kişilerin ilgili değişkenlere verdiği yanıtların ortalamasıdır.

$\bar{z}_{R2}$ tahmin edicisi, Eşitlik (4.52) ve Eşitlik (4.112)'deki e'li terimler cinsinden yazılarak yeniden ifade edilirse,

$$\bar{z}_{R2} = \bar{Z}(1 + e_0)\left(\frac{\mu_U}{\mu_U(1 + e_1)}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{a\mu_V + b}{a\mu_V(1 + e_2) + b}\right)^{\alpha_2}$$

$$\bar{z}_{R2} = \mu_Z(1 + e_0)(1 + e_1)^{-\alpha_1}\left(\frac{a\mu_V(1 + e_2) + b}{a\mu_V + b}\right)^{-\alpha_2} \qquad (4.132)$$

olarak bulunur. $\varphi = \frac{a\mu_V}{a\mu_V + b}$ olmak üzere $\bar{z}_{R2}$ tahmin edicisi,

$$\bar{z}_{R2} = \mu_Z(1 + e_0)(1 + e_1)^{-\alpha_1}(1 + \varphi e_2)^{-\alpha_2} \qquad (4.133)$$

olarak ifade edilir.

Eşitlik (4.133)'de, Eşitlik (4.18) ve Eşitlik (4.59) yerine konulup çarpımlar yapılırsa ve 2.dereceden e'li terimler ihmal edilirse,

$$\begin{aligned}\bar{z}_{R2} = \mu_Z\Big[&1 + e_0 - \alpha_1 e_1 - \varphi\alpha_2 e_2 - \alpha_1 e_0 e_1 - \varphi\alpha_2 e_0 e_2 \\ &+ \alpha_1\frac{(\alpha_1 + 1)}{2}e_1^2 + \frac{\varphi^2}{2}\alpha_2(\alpha_2 + 1)e_2^2\Big]\end{aligned} \qquad (4.134)$$

olarak elde edilir.

$\hat{\mu}_{Öneri2}$ tahmin edicisinin hata kareler ortalaması,

$$\mathrm{HKO}\left(\hat{\mu}_{Öneri2}\right) \cong \frac{E\left(\hat{t}_{R2}-\mu_z\right)^2}{h^2}$$

$$\mathrm{HKO}\left(\hat{\mu}_{Öneri2}\right) \cong \frac{\mu_z^2}{h^2} E\Bigg[e_0 - \alpha_1 e_1 - \varphi\alpha_2 e_2 - \alpha_1 e_0 e_1 - \varphi\alpha_2 e_0 e_2 + \alpha_1 \frac{\left(\alpha_1+1\right)}{2} e_1^2 + \frac{\varphi^2}{2}\alpha_2\left(\alpha_2+1\right) e_2^2\Bigg]^2 \tag{4.135}$$

şeklindedir.

Beklenen değerde kare alınıp, 2.dereceden sonraki e'li terimler ihmal edilirse hata kareler ortalaması,

$$\mathrm{HKO}\left(\hat{\mu}_{Öneri2}\right) \cong \frac{\mu_z^2}{h^2} E\left[e_0^2 + \alpha_1^2 e_1^2 + \varphi^2\alpha_2^2 e_2^2 - 2\alpha_1 e_0 e_1 - 2\varphi\alpha_2 e_0 e_2 + 2\alpha_1\alpha_2\varphi e_1 e_2\right] \tag{4.136}$$

olarak bulunur. Eşitlik (4.136)'da, Eşitlik (4.13), Eşitlik (4.14), Eşitlik (4.15), Eşitlik (4.54), Eşitlik (4.55) ve Eşitlik (4.56) yerine konulursa, $\hat{\mu}_{Öneri2}$ tahmin edicisinin hata kareler ortalaması,

$$\mathrm{HKO}\left(\hat{\mu}_{Öneri\,2}\right) \cong \frac{(1-f)\mu_z^2}{nh^2}\Big[C_z^2 + \alpha_1^2 C_u^2 + \alpha_2^2\varphi^2 C_v^2 - 2\alpha_1\rho_{zu} C_z C_u - 2\alpha_2\varphi\rho_{zv} C_z C_v + 2\alpha_1\alpha_2\varphi\rho_{uv} C_u C_v\Big]$$

$$= \frac{(1-f)\mu_z^2}{nh^2}\left[C_z^2 + \alpha_1 C_u^2\left(\alpha_1 - 2\rho_{zu}\frac{C_z}{C_u}\right) + \alpha_2\varphi C_v^2\left(\alpha_2\varphi - 2\rho_{zv}\frac{C_z}{C_v}\right) + 2\alpha_1\alpha_2\varphi C_v^2\rho_{uv}\frac{C_u}{C_v}\right]$$

$$= \frac{(1-f)\bar{Y}_z^2}{nh^2}\Big[C_z^2 + \alpha_1 C_u^2(\alpha_1 - 2K_{zu}) + \alpha_2\varphi C_v^2(\alpha_2\varphi - 2K_{zv}) + 2\alpha_1\alpha_2\varphi C_v^2 K_{uv}\Big] \qquad (4.137)$$

olarak bulunur. Burada $K_{zu} = \rho_{zu}\frac{C_z}{C_u}$, $K_{zv} = \rho_{zv}\frac{C_z}{C_v}$, $K_{uv} = \rho_{uv}\frac{C_u}{C_v}$'dir.

Önerilen tahmin edicide tanımlanan α_1 ve α_2 katsayılarının optimum değerinin bulunmasıyla hata kareler ortalamasının minimum değeri bulunabilir. Bu minimum değer, HKO'sının optimumu bulunmak istenen değere göre türevinin alınıp sıfıra eşitlenmesiyle bulunur. Buradan α_1 ve α_2'nin optimum değerleri bulunur.

Buna göre,

$$\frac{\partial\left[HKO(\ )_{\text{Öneri2}}\right]}{\partial b_1} = \frac{\partial\left[\frac{(1-f)\bar{Y}_z^2}{nh^2}\Big[C_z^2 + \alpha_1 C_u^2(\alpha_1 - 2K_{zu}) + \alpha_2\varphi C_v^2(\alpha_2\varphi - 2K_{zv}) + 2\alpha_1\alpha_2\varphi C_v^2 K_{uv}\Big]\right]}{\partial b_1} = 0 \qquad (4.138)$$

$$= 2\alpha_1 C_u^2 - 2K_{zu}C_u^2 + 2\alpha_2\varphi C_v^2 K_{uv} = 0$$

$$= \frac{\partial\left[\frac{(1-f)\bar{Y}_z^2}{nh^2}\Big[C_z^2 + \alpha_1 C_u^2(\alpha_1 - 2K_{zu}) + \alpha_2\varphi C_v^2(\alpha_2\varphi - 2K_{zv}) + 2\alpha_1\alpha_2\varphi C_v^2 K_{uv}\Big]\right]}{\partial b_1} = 0 \qquad (4.139)$$

$$= 2\alpha_2\varphi^2 C_v^2 - 2K_{zv}\varphi C_v^2 + 2\alpha_1\varphi C_v^2 K_{uv} = 0$$

eşitlikleri elde edilir. Eşitlik (4.138) ve Eşitlik (4.139) eşanlı çözülürse,

$$\alpha_1 = \frac{(K_{zu} - K_{zv}K_{vu})}{(1 - K_{uv}K_{vu})} \qquad (4.140)$$

$$\alpha_2 = \frac{K_{zv} - K_{zu}K_{uv}}{\varphi(1 - K_{uv}K_{vu})} \qquad (4.141)$$

olarak elde edilir.

Eşitlik (4.140) ve Eşitlik (4.141), Eşitlik (4.137)'de yerine konulursa hata kareler ortalamasının minimum değeri,

$$
\begin{aligned}
HKO\left(\bar{y}_{\text{Öneri2}}\right) \cong \frac{(1-f)\mu_z^2}{nh^2}\Bigg[& C_z^2 + \frac{(K_{zu}-K_{zv}K_{vu})}{(1-\rho_{uv}^2)}\left(\frac{(K_{zu}-K_{zv}K_{vu})}{(1-\rho_{uv}^2)} - 2K_{zu}\right)C_u^2 \\
& + \frac{K_{zv}-K_{zu}K_{uv}}{(1-\rho_{uv}^2)}\left(\frac{K_{zv}-K_{zu}K_{uv}}{(1-\rho_{uv}^2)} - 2K_{zv}\right)C_v^2 \\
& + 2\frac{(K_{zu}-K_{zv}K_{vu})(K_{zv}-K_{zu}K_{uv})C_v^2K_{uv}}{(1-\rho_{uv}^2)}\Bigg] \\
= \frac{(1-f)\mu_z^2}{nh^2}\Bigg[& C_z^2 + \frac{(K_{zu}-K_{zv}K_{vu})^2}{(1-\rho_{uv}^2)^2} - 2\frac{(K_{zu}-K_{zv}K_{vu})C_u^2}{(1-\rho_{uv}^2)} \\
& + \frac{(K_{zv}-K_{zu}K_{uv})^2}{(1-\rho_{uv}^2)^2} - 2\frac{K_{zv}(K_{zv}-K_{zu}K_{uv})C_v^2}{(1-\rho_{uv}^2)} \\
& + 2\frac{(K_{zu}-K_{zv}K_{vu})(K_{zv}-K_{zu}K_{uv})C_v^2K_{uv}}{(1-\rho_{uv}^2)}\Bigg] \\
= \frac{(1-f)\sigma_z^2}{nh^2}\Bigg[& 1-\frac{\rho_{zu}^2+\rho_{zv}^2-2\rho_{zu}\rho_{zv}\rho_{uv}}{1-\rho_{uv}^2}\Bigg] \\
HKO_{min}\left(\bar{y}_{\text{Öneri2}}\right) \cong \frac{(1-f)\sigma_z^2}{nh^2} & \left(1-R_{zu.v}^2\right)
\end{aligned}
\tag{4.142}
$$

olarak elde edilir. Burada, $R_{zu.v}^2 = \dfrac{\rho_{zu}^2+\rho_{zv}^2-2\rho_{zu}\rho_{zv}\rho_{uv}}{1-\rho_{uv}^2}$'dir.

$\alpha_1, \alpha_2, a(\neq 0)$ ve b yerine uygun değerler konularak çeşitli oransal ve çarpımsal tahmin ediciler elde edilebilir.

Eşitlik(4.142)'deki varyans ve korelasyon formülleri uygulanan rastgeleleştirilmiş yanıt modeline göre farklı eşitliklere sahip olacaktır. Bölüm 3.2.1'de olduğu gibi bu yanıt dağılımı için de farklı modeller uygulanabilir. Uygulanabilecek 5 model için eşitlikler Bölüm 3.2.1'de ve Bölüm 4.1.2'de verilen eşitlikler ile benzerdir.

Bu tahmin edici için oluşturulan bazı modeller ve eşitlikler Çizelge 4.15'te gösterilmiştir. Çizelge 4.15'in S sütunu Y hassas değişkeni için uygulanabilecek düzenleri, R sütunu X yardımcı değişkeni için uygulanabilecek düzenleri, L sütunu M yardımcı değişkeni için uygulanabilecek düzenleri göstermektedir. Ortalama sütunu her bir modelde Z, U ve V yanıt değişkenleri için ortalama eşitliklerini, c ve h değerlerini göstermektedir. HKO formülünde kullanılacak varyans ve korelasyon eşitlikleri sütunu ise her model için bulunan varyans ve korelasyon eşitliklerini göstermektedir.

Çizelge 4.15. $\hat{\mu}_{Öneri2}$ Tahmin edici ailesi için bazı özel rastgele yanıt modelleri

	S	R	L	Ortalama	$HKO_{min}(\hat{\mu}_{Öneri2}) \cong \frac{(1-f)\sigma_z^2}{nh^2}\left[1-\frac{\rho_{zu}^2+\rho_{zv}^2-2\rho_{zu}\rho_{zv}\rho_{uv}}{1-\rho_{uv}^2}\right]$ formülünde kullanılacak varyans ve korelasyon eşitlikleri
M1	Y+W	X	M	$\mu_z=\mu_y+(1-p)\mu_w$ $\mu_u=\mu_x$ $\mu_v=\mu_m$ $c=(1-P)\mu_w\,,\ h=1$	$\sigma_z^2=\sigma_y^2+(1-P)\mu_w^2(C_w^2+P)$ $\rho_{zu}=\frac{\sigma_{yx}}{\sigma_x\sqrt{\sigma_y^2+(1-P)\mu_w^2\left(C_w^2+P\right)}}$ $\rho_{zv}=\frac{\sigma_{YM}}{\sigma_m\sqrt{\sigma_y^2+(1-P)\mu_w^2\left(C_w^2+P\right)}}$ $\rho_{uv}=\frac{\sigma_{xm}}{\sigma_x\sigma_m}=\rho_{xm}$
M2	YW	X	M	$\mu_z=[P+(1-p)\mu_w]\mu_y$ $\mu_u=\mu_x$ $\mu_v=\mu_m$ $c=0, h=[P+(1-P)\mu_w]\mu_y$	$\sigma_z^2=\mu_y^2\left(1+C_y^2\right)\left[P+(1-P)\mu_w^2\left(1+C_w^2\right)\right]-\mu_z^2$ $\rho_{zu}=\frac{\sigma_{yx}[P+(1-P)\mu_w]}{\sigma_x\sqrt{\mu_y^2\left(1+C_y^2\right)\left[P+(1-P)\mu_w^2\left(1+C_w^2\right)\right]-\mu_z^2}}$ $\rho_{zv}=\frac{\sigma_{YM}[P+(1-P)\mu_w]}{\sigma_m\sqrt{\mu_y^2\left(1+C_y^2\right)\left[P+(1-P)\mu_w^2\left(1+C_w^2\right)\right]-\mu_z^2}}$ $\rho_{uv}=\frac{\sigma_{xm}}{\sigma_x\sigma_m}=\rho_{xm}$
M3	Y+W	X+T	M+K	$\mu_z=\mu_y+(1-p)\mu_w$ $\mu_u=\mu_x+(1-p)\mu_t$ $\mu_v=\mu_m+(1-p)\mu_k$ $c=(1-P)\mu_w\,,\ h=1$	$\sigma_z^2=\sigma_y^2+(1-P)\mu_w^2\left(C_w^2+P\right)$ $\rho_{zu}=\frac{\sigma_{xy}+P(1-P)\mu_w\mu_t}{\sqrt{\left\{\sigma_y^2+(1-P)\mu_w^2\left(C_w^2+P\right)\right\}\left\{\sigma_x^2+(1-P)\mu_t^2\left(C_t^2+P\right)\right\}}}$ $\rho_{zv}=\frac{\sigma_{my}+P(1-P)\mu_w\mu_k}{\sqrt{\left\{\sigma_y^2+(1-P)\mu_w^2\left(C_w^2+P\right)\right\}\left\{\sigma_m^2+(1-P)\mu_k^2\left(C_k^2+P\right)\right\}}}$ $\rho_{uv}=\frac{\sigma_{xm}+P(1-P)\mu_t\mu_k}{\sqrt{\left\{\sigma_x^2+(1-P)\mu_t^2\left(C_t^2+P\right)\right\}\left\{\sigma_m^2+(1-P)\mu_k^2\left(C_k^2+P\right)\right\}}}$

Çizelge 4.15.Devam. $\hat{\mu}_{\text{Öneri2}}$ Tahmin edici ailesi için bazı özel rastgele yanıt modelleri

M4	YW	XT	MK	$\mu_z = \left[p + (1-p)\mu_w\right]\mu_y$ $\mu_u = \left[p + (1-p)\mu_t\right]\mu_x$ $\mu_v = \left[p + (1-p)\mu_k\right]\mu_m$ $c = 0, h = \left[P + (1-P)\mu_w\right]$	$\sigma_z^2 = \mu_y^2\left(1 + C_y^2\right)\left[P + (1-P)\mu_w^2\left(1 + C_w^2\right)\right] - \mu_z^2$ $\rho_{zu} = \dfrac{\sigma_{yx}\left[P + (1-P)\mu_t\mu_w\right] + P(1-P)\mu_y\mu_x(1-\mu_w)(1-\mu_t)}{\sqrt{\left\{\mu_y^2\left(1+C_y^2\right)\left[P + (1-P)\mu_w^2\left(1+C_w^2\right)\right] - \mu_z^2\right\}\left\{\mu_x^2\left(1+C_x^2\right)\left[P + (1-P)\mu_t^2\left(1+C_t^2\right)\right] - \mu_u^2\right\}}}$ $\rho_{zv} = \dfrac{\sigma_{my}\left[P + (1-P)\mu_k\mu_w\right] + P(1-P)\mu_y\mu_m(1-\mu_w)(1-\mu_k)}{\sqrt{\left\{\mu_y^2\left(1+C_y^2\right)\left[P + (1-P)\mu_w^2\left(1+C_w^2\right)\right] - \mu_z^2\right\}\left\{\mu_m^2\left(1+C_m^2\right)\left[P + (1-P)\mu_k^2\left(1+C_k^2\right)\right] - \mu_v^2\right\}}}$ $\rho_{uv} = \dfrac{\sigma_{xm}\left[P + (1-P))\mu_k\mu_t\right] + P(1-P))\mu_x\mu_m(1-\mu_t)(1-\mu_k)}{\sqrt{\left\{\mu_x^2\left(1+C_x^2\right)\left[P + (1-P)\mu_t^2\left(1+C_t^2\right)\right] - \mu_u^2\right\}\left\{\mu_m^2\left(1+C_m^2\right)\left[P + (1-P)\mu_k^2\left(1+C_k^2\right)\right] - \mu_v^2\right\}}}$
M5	Y+W	X+T	M	$\mu_z = \mu_y + (1-p)\mu_w$ $\mu_u = \mu_x + (1-p)\mu_t$ $\mu_v = \mu_m$ $c = (1-P)\mu_w,\ h = 1$	$\sigma_z^2 = \sigma_y^2 + (1-P)\mu_w^2\left(C_w^2 + p\right)$ $\rho_{zu} = \dfrac{\sigma_{xy} + P(1-P)\mu_w\mu_t}{\sqrt{\left\{\sigma_y^2 + (1-P)\mu_w^2\left(C_w^2 + P\right)\right\}\left\{\sigma_x^2 + (1-P)\mu_t^2\left(C_t^2 + P\right)\right\}}}$ $\rho_{zv} = \dfrac{\sigma_{ym}}{\sigma_m\sqrt{\left\{\sigma_y^2 + (1-P)\mu_w^2\left(C_w^2 + P\right)\right\}}}$ $\rho_{uv} = \dfrac{\sigma_{xm}}{\sigma_m\sqrt{\left\{\sigma_x^2 + (1-P)\mu_t^2\left(C_t^2 + P\right)\right\}}}$

4.2.4. Ortalama Tahmini için Önerilen İki Yardımcı Değişkenin Kullanıldığı Oransal Tahmin Edici için Sayısal Örnek

N=100 kişilik bir bölgede kişilerin aylık gelirleri ile ilgili bir çalışma yapılsın. Hassas değişken kişinin aylık geliri olsun. Hassas değişkenin tahmininde kullanılacak yardımcı değişkenler ise kişinin oturduğu evin aylık kirası ve kişinin bakmakla yükümlü olduğu kişi sayısı olsun. n=10 kişi yerine konulmadan basit rastgele örnekleme seçilsin. Kişilere P=0,20 olduğu RYM uygulansın. Bu durumda kişilerin %20'si hassas değişken ve yardımcı değişkenlere doğrudan cevap verecektir. Geriye kalan kişilerin %80'i S, R ve L düzenlerini kullanarak cevaplarını verecektir. S, R ve L düzenlerinde uygulanacak farklı tekniklere göre çeşitli modeller oluşturulabilir. Çizelge 4.15' te verilen modeller için sayısal çalışma aşağıda verilmiştir.

Model 1 için Sayısal Örnek

Model 1 için kişilerin ortalama aylık gelir tahmini ve bu tahminin hata kareler ortalaması tahmini Çizelge 4.16'da verilen veriler yardımıyla bulunabilir. S düzeninde toplamsal teknik uygulanır. Toplamsal teknik uygulayabilmek için Y hassas değişkeni için W rastgele değişkeni türetilir. W rastgele değişkeni Uniform (500, 1000) dağılımından türetilsin. Uniform dağılımının ortalaması $\mu_w = \frac{500+1500}{2} = 750$ ve varyansı $\sigma_w^2 = \frac{(1000-500)^2}{12} = 20833{,}33$'tür.

Çizelge 4.16. Ortalama Tahmini için Önerilen İki Yardımcı Değişkenin Kullanıldığı Oransal Tahmin Edici için Model 1 Örneği

Kişiler	Gerçek Yanıtlar			Seçilen Karttaki İfade	Rastgele Sayılar Destesinden Seçilen Sayı	Verilen Yanıtlar		
	Y_i	X_i	M_i		W_i	Zi=Yi+Wi	$U_{i=} X_i$	$V_{i=} M_i$
1	1500	0	1	1	1000	1500	0	1
2	2000	500	2	2	500	2000+500	500	2
3	2000	600	2	1	700	2000	600	2
4	2500	550	3	2	800	2500+800	550	3
5	1500	0	2	2	500	1500+500	0	2
6	1000	300	2	2	1000	1000+1000	300	2
7	3000	700	4	2	500	3000+500	700	4
8	2500	800	3	2	800	2500+800	800	3
9	3500	1000	3	2	1000	3500+1000	1000	3
10	5000	500	4	2	500	5000+500	500	4
Ortalama						3010	495	2,6
Varyans						1603222	103583	0,93
Değişim Katsayısı						0,42	0,65	0,37

*1: "Aylık geliriniz ne kadardır?, oturduğunuz evin kirası ne kadardır?, bakmakla yükümlü olduğunuz kişi sayısı kaçtır? "
2: "Aylık gelirinizin cevabını S düzenini kullanarak veriniz, oturduğunuz evin kirası ne kadardır?, bakmakla yükümlü olduğunuz kişi sayısı kaçtır? "

Çizelge 4.16'da "Gerçek Yanıtlar" sütununda gerçekte bu yanıtlar çalışmada bilinmemesine rağmen bu örnek için kişilerin gerçek yanıtlarının bilindiğini varsayalım. Seçilen kart sütununda 10 kişi için oluşturulan kartlar yer almaktadır. P=0,20 olduğu için kartların 10*0,20=2'sinde "Aylık geliriniz ne kadardır?, oturduğunuz evin kirası ne kadardır?, bakmakla yükümlü olduğunuz kişi sayısı kaçtır?" ifadesi bulunur. Bu kartı seçen kişiler üç soruya da doğrudan yanıt vereceklerdir. Kartların 10*0,80=8'inde "Aylık gelirinizin cevabını S düzenini kullanarak veriniz, oturduğunuz evin kirası ne kadardır?, bakmakla yükümlü olduğunuz kişi sayısı kaçtır?" ifadesi bulunur. Bu kartı seçen kişiler aylık gelir sorusu için gerçek cevapları ile S düzeninde türetilen kart destesinden seçtikleri sayıyı toplayarak yanıtlarını verirler. "Oturduğunuz evin kirası ne kadardır?" ve "bakmakla yükümlü olduğunuz kişi sayısı kaçtır?" sorularına doğrudan yanıt verirler. Çizelge 4.16'da 1. kişinin seçtiği karttaki ifade "Aylık geliriniz ne kadardır?, oturduğunuz evin kirası ne kadardır?, " şeklindedir. Kişinin gerçekte aylık geliri 1500 TL'dir, oturduğu evin aylık kirası 0 TL'dir ve bakmakla yükümlü olduğu bir kişi vardır. Dolayısıyla kişinin vereceği yanıt "1500, 0, 1" olacaktır. 2.kişinin seçtiği karttaki ifade "Aylık gelirinizin cevabını S düzenini kullanarak veriniz, oturduğunuz evin kirası ne kadardır?, yükümlü olduğunuz kişi sayısı kaçtır?" şeklindedir. Kişinin gerçekte aylık geliri 2000 TL'dir, oturduğu evin aylık kirası 500 TL'dir ve bakmakla yükümlü olduğu iki kişi vardır. Kişinin rastgele sayılar destesinden S düzeninden seçtiği sayı 500'dür. Kişi yardımcı değişkenler için yanıtını doğrudan verecektir. Dolayısıyla kişinin vereceği yanıt "2000+500, 500, 2" olacaktır. Diğer cevaplayıcılar için de rastgeleleştirilmiş yanıt modeli benzer şekilde uygulanırsa tüm örneklem için yanıt dağılımı { (1500, 0, 1), (2500, 500, 2), (2000, 600, 2), (3300, 550, 3), (2000, 0, 2), (2000, 300, 2), (3500, 700, 4), (3300, 800, 3), (4500, 1000, 3), (5500, 500, 4) } şeklinde olacaktır.

Kişilerin verdiği yanıtlar kullanılarak kişilerin ortalama aylık geliri edilebilir.

Model 1 için Çizelge 4.16'daki verilere ait bazı bilgiler aşağıda özetlenmiştir. $\bar{z} = 3010$, $\bar{u} = \bar{x} = 520$, $\bar{v} = \bar{m} = 2,6$, $\hat{\sigma}_z^2 = 1603222$, $\hat{C}_z = 0,42$, $\hat{C}_u = 0,65$, $\hat{C}_v = 0,37$, $r_{zu} = 0,63$, $r_{zv} = 0,87$, $r_{uv} = 0,64$,

$c = (1-P)\mu_w = 0,80 * 750 = 600$, h=1, $\mu_x = 500$ ve $\mu_m = 2$ olduğu biliniyor.

$$\varphi = \frac{\mu_v}{\mu_v + 1} = \frac{2}{2+1} = 0,67 \text{ (a=b=1 olarak alınmıştır)}$$

$$K_{zu} = r_{zu}\frac{\hat{C}_z}{\hat{C}_u} = 0,63 * \frac{0,42}{0,65} = 0,51,$$

$$K_{zv} = r_{zv}\frac{\hat{C}_z}{\hat{C}_v} = 0,87 * \frac{0,42}{0,37} = 0,98,$$

$$K_{uv} = r_{uv}\frac{\hat{C}_u}{\hat{C}_v} = 0{,}64 * \frac{0{,}65}{0{,}37} = 1{,}12\ ,$$

$$K_{vu} = r_{uv}\frac{\hat{C}_v}{\hat{C}_u} = 0{,}64 * \frac{0{,}37}{0{,}65} = 0{,}37\ .$$

Buna göre,

$$\alpha_1 = \frac{(K_{zu} - K_{zv}K_{vu})}{(1 - K_{uv}K_{vu})} = \frac{(0{,}51 - 0{,}98 * 0{,}37)}{(1 - 1{,}12 * 0{,}37)} = 0{,}25$$

$$\alpha_2 = \frac{K_{zv} - K_{zu}K_{uv}}{\varphi(1 - K_{uv}K_{vu})} = \frac{0{,}98 - 0{,}51 * 1{,}12}{0{,}89(1 - 1{,}12 * 0{,}37)} = 0{,}78$$

Eşitlik (4.131)’den kişilerin ortalama aylık gelir tahmini,

$$\hat{\mu}_{\text{Öneri2}} = \frac{\bar{z}\left(\frac{\mu_U}{\bar{u}}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{a\mu_V + b}{a\bar{v} + b}\right)^{\alpha_2} - c}{h} = \frac{3010 * \left(\frac{500}{495}\right)^{0{,}25}\left(\frac{2 + 1}{2{,}6 + 1}\right)^{0{,}78} - 600}{1} = 2017{,}56$$

olarak hesaplanır.

Eşitlik (4.142)’den kişilerin ortalama aylık gelir tahmininin hata kareler ortalaması tahmini,

$$\begin{aligned} H\hat{K}O(\hat{\mu}_{\text{Öneri2}}) &\cong \left(\frac{1 - f}{nh^2}\right)\hat{\sigma}_z^2\left(1 - \frac{r_{zu}^2 + r_{zv}^2 - 2r_{zu}r_{zv}r_{uv}}{1 - r_{uv}^2}\right) \\ &= \frac{(1 - 0{,}10)(603222)}{10(1)^2}\left(1 - \frac{(0{,}63)^2 + (0{,}87)^2 - 2 * 0{,}63 * 0{,}87 * 0{,}64}{1 - (0{,}64)^2}\right) \\ &= 33767 \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Model 2 için Sayısal Örnek

Model 2 için kişilerin ortalama aylık gelir tahmini ve bu tahminin hata kareler ortalaması tahmini Çizelge 4.17'de verilen veriler yardımıyla bulunabilir. S düzeninde çarpımsal teknik uygulanır. Çarpımsal teknik uygulayabilmek için Y hassas değişkeni için W rastgele değişkeni türetilir. W rastgele değişkeni Uniform (2, 5) dağılımından türetilsin. Uniform dağılımının ortalaması $\mu_w = \frac{2+5}{2} = 3{,}5$ ve varyansı $\sigma_w^2 = \frac{(5-2)^2}{12} = 0{,}75$'tir.

Model 2'nin Model 1'den tek farkı Y hassas değişkeni için S düzeninde kısmi çarpımsal tekniğin uygulanmasıdır. Buna göre tüm örneklem için yanıt dağılımı

{ (1500, 0, 1), (6000, 500, 2), (2000, 600, 2), (12500, 550, 3), (3000, 0, 2), (3000, 300, 2), (12000, 700, 4), (12500, 800, 3), (7000, 1000, 3), (15000, 500, 4) } şeklinde olacaktır.

Çizelge 4.17. Ortalama Tahmini için Önerilen İki Yardımcı Değişkenin Kullanıldığı Oransal Tahmin Edici için Model 2 Örneği

Kişiler	Gerçek Yanıtlar			Seçilen Karttaki İfade	Rastgele Sayılar Destesinden Seçilen Sayı	Verilen Yanıtlar		
	Y_i	X_i	M_i		W_i	$Z_i = Y_i * W_i$	$U_i = X_i$	$V_i = M_i$
1	1500	0	1	1	2	1500	0	1
2	2000	500	2	2	3	2000*3	500	2
3	2000	600	2	1	4	2000	600	2
4	2500	550	3	2	5	2500*5	550	3
5	1500	0	2	2	2	1500*2	0	2
6	1000	300	2	2	3	1000*3	300	2
7	3000	700	4	2	4	3000*4	700	4
8	2500	800	3	2	5	2500*5	800	3
9	3500	1000	3	2	2	3500*2	1000	3
10	5000	500	4	2	3	5000*3	500	4
Ortalama						7450	495	2,6
Varyans						26191667	103583	0,93
Değişim Katsayısı						0,69	0,65	0,37

*****1: "Aylık geliriniz ne kadardır?, oturduğunuz evin kirası ne kadardır?, bakmakla yükümlü olduğunuz kişi sayısı kaçtır? "

2: "Aylık gelirinizin cevabını S düzenini kullanarak veriniz, oturduğunuz evin kirası ne kadardır?, bakmakla yükümlü olduğunuz kişi sayısı kaçtır? "

Kişilerin verdiği yanıtlar kullanılarak kişilerin ortalama aylık geliri tahmin edilebilir.

Model 2 için Çizelge 4.17'deki verilere ait bazı bilgiler aşağıda özetlenmiştir.

$\bar{z} = 7450$, $\bar{u} = \bar{x} = 495$, $\bar{v} = \overline{m} = 2{,}6$, $\hat{\sigma}_z^2 = 26191667$, $\hat{C}_z = 0{,}69$, $\hat{C}_u = 0{,}65$,

$\hat{C}_v = 0{,}37$, $r_{zu} = 0{,}54$, $r_{zv} = 0{,}89$, $r_{uv} = 0{,}64$,

$c = 0$, $h = \left[P + (1-P)\mu_w\right] = 0{,}20 + 0{,}80 * 3{,}5 = 3$, $\mu_x = 500$ ve $\mu_m = 2$ olduğu biliniyor.

$$\varphi = \frac{\mu_v}{\mu_v + 1} = \frac{2}{2+1} = 0{,}67 \text{ (a=b=1 olarak alınmıştır)}$$

$$K_{zu} = r_{zu}\frac{\hat{C}_z}{\hat{C}_u} = 0{,}54 * \frac{0{,}69}{0{,}65} = 0{,}57 \text{ ,}$$

$$K_{zv} = r_{zv}\frac{\hat{C}_z}{\hat{C}_v} = 0{,}89 * \frac{0{,}69}{0{,}37} = 1{,}65 \text{ ,}$$

$$K_{uv} = r_{uv}\frac{\hat{C}_u}{\hat{C}_v} = 0{,}64 * \frac{0{,}65}{0{,}37} = 1{,}12 \text{ ,}$$

$$K_{vu} = r_{uv}\frac{\hat{C}_v}{\hat{C}_u} = 0{,}64 * \frac{0{,}37}{0{,}65} = 0{,}37 \text{ .}$$

Buna göre,

$$\alpha_1 = \frac{(K_{zu} - K_{zv}K_{vu})}{(1 - K_{uv}K_{vu})} = \frac{(0{,}57 - 1{,}65 * 0{,}37)}{(1 - 1{,}12 * 0{,}37)} = -0{,}07$$

$$\alpha_2 = \frac{K_{zv} - K_{zu}K_{uv}}{\varphi(1 - K_{uv}K_{vu})} = \frac{1{,}65 - 0{,}57 * 1{,}12}{0{,}67(1 - 1{,}12 * 0{,}37)} = 2{,}58$$

Eşitlik (4.131)'den kişilerin ortalama aylık gelir tahmini,

$$\hat{\mu}_{\text{Öneri2}} = \frac{\bar{z}\left(\frac{\mu_U}{\bar{u}}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{a\mu_V + b}{a\bar{v} + b}\right)^{\alpha_2} - c}{h} = \frac{7450 * \left(\frac{500}{495}\right)^{-0{,}07}\left(\frac{2+1}{2{,}6+1}\right)^{2{,}58}}{3} = 2482{,}24$$

olarak hesaplanır.

Eşitlik (4.142)’den kişilerin ortalama aylık gelir tahmininin hata kareler ortalaması tahmini,

$$
\begin{aligned}
H\hat{K}O\left(\mu_{Öneri2}\right) &\cong \left(\frac{1-f}{nh^2}\right)\hat{\sigma}_z^2\left(1-\frac{r_{zu}^2+r_{zv}^2-2r_{zu}r_{zv}r_{uv}}{1-r_{uv}^2}\right)\\
&=\frac{(1-0{,}10)(603222)}{10(3)^2}\left(1-\frac{(0{,}54)^2+(0{,}89)^2-2*0{,}54*0{,}89*0{,}64}{1-(0{,}64)^2}\right)\\
&=54063
\end{aligned}
$$

olarak hesaplanır.

Model 3 için Sayısal Örnek

S, R ve L düzeninde toplamsal teknik uygulandığı düşünülsün. Toplamsal teknik uygulayabilmek için X yardımcı değişkeni için T rastgele değişkeni türetilir. T rastgele değişkeni Uniform (100, 200) dağılımından türetilsin. M yardımcı değişkeni için K rastgele değişkeni türetilir. K rastgele değişkeni Uniform (2, 5) dağılımından türetilsin. T rastgele değişkenin ortalaması $\mu_t=\frac{100+200}{2}=150$, varyansı $\sigma_t^2=\frac{(200-100)^2}{12}=833{,}33$’tür. K rastgele değişkenin ortalaması $\mu_k=\frac{2+5}{2}=3{,}5$, varyansı $\sigma_k^2=\frac{(5-2)^2}{12}=0{,}75$’dir.

Model 3’te Y hassas değişkeni için S düzeninde, X yardımcı değişken için R düzeninde ve M yardımcı değişkeni için L düzeninde toplamsal teknik uygulanır. Buna göre tüm örneklem için yanıt dağılımı { (1500, 0, 1), (2500, 650), (2000, 600), (3300, 750), (2000, 170), (2000, 450), (3500, 880), (3300, 1000), (4500, 1100), (5500, 900) } şeklinde olacaktır.

Çizelge 4.18. Ortalama tahmini için önerilen iki yardımcı değişkenin kullanıldığı oransal tahmin edici için model 3 örneği

Kişiler	Gerçek Yanıtlar			Seçilen Karttaki İfade	Rastgele Sayılar Destesinden Seçilen Sayı			Verilen Yanıtlar		
	Y_i	X_i	M_i		W_i	T_i	K_i	$Z_{i=}$ Y_i+W_i	$U_{i=}$ X_{i+} T_i	$V_{i=}$ M_i+ K_i
1	1500	0	1	1	1000	100	1	1500	0	1
2	2000	500	2	2	500	150	2	2000+500	500+150	2+2
3	2000	600	2	1	700	150	3	2000	600	2
4	2500	550	3	2	800	200	1	2500+800	550+200	3+1
5	1500	0	2	2	500	170	2	1500+500	0+170	2+2
6	1000	300	2	2	1000	150	3	1000+1000	300+150	2+3
7	3000	700	4	2	500	180	4	3000+500	700+180	4+4
8	2500	800	3	2	800	200	1	2500+800	800+200	3+1
9	3500	1000	3	2	1000	100	2	3500+1000	1000+100	3+2
10	5000	500	4	2	500	150	1	5000+500	500+150	4+1
Ortalama								3010	650	4,2
Varyans								1603222	127311	3,51
Değişim Katsayısı								0,42	0,54	0,45

*****1: "Aylık geliriniz ne kadardır?, oturduğunuz evin kirası ne kadardır?, bakmakla yükümlü olduğunuz kişi sayısı kaçtır? "

2: "Aylık gelirinizin cevabını S düzenini kullanarak veriniz, oturduğunuz evin kirasını R düzenini kullanarak veriniz, bakmakla yükümlü olduğunuz kişi sayısını L düzenini kullanarak veriniz "

Kişilerin verdiği yanıtlar kullanılarak kişilerin ortalama aylık gelirleri tahmin edilebilir.

Model 3 için Çizelge 4.18.'deki verilere ait bazı bilgiler aşağıda özetlenmiştir.

$\bar{z} = 3010$, $\bar{u} = \bar{x} = 520$, $\bar{v} = \bar{m} = 2{,}6$, $\hat{\sigma}_z^2 = 1603222$, $\hat{C}_z = 0{,}42$, $\hat{C}_u = 0{,}54$, $\hat{C}_v = 0{,}45$,

$r_{zu} = 0{,}80$, $r_{zv} = 0{,}54$, $r_{uv} = 0{,}58$,

$c = (1-P)\mu_w = 0{,}80 * 750 = 600$, h=1, $\mu_x = 500$ ve $\mu_m = 2$ olduğu biliniyor.

$$\mu_u = \mu_x + (1-P)\mu_t = 500 + 0{,}80 * 150 = 620$$

$$\mu_v = \mu_m + (1-P)\mu_k + = 2 + 0{,}80 * 3{,}5 = 4{,}8$$

$$\varphi = \frac{\mu_v}{\mu_v + 1} = \frac{4{,}8}{4{,}8 + 1} = 0{,}83 \text{ (a=b=1 olarak alınmıştır)}$$

$$K_{zu} = r_{zu} \frac{\hat{C}_z}{\hat{C}_u} = 0{,}80 * \frac{0{,}42}{0{,}54} = 0{,}61,$$

$$K_{zv} = r_{zv}\frac{\hat{C}_z}{\hat{C}_v} = 0,54 * \frac{0,42}{0,45} = 0,51,$$

$$K_{uv} = r_{uv}\frac{\hat{C}_u}{\hat{C}_v} = 0,58 * \frac{0,54}{0,45} = 0,71,$$

$$K_{vu} = r_{uv}\frac{\hat{C}_v}{\hat{C}_u} = 0,58 * \frac{0,45}{0,54} = 0,47.$$

Buna göre,

$$\alpha_1 = \frac{(K_{zu} - K_{zv}K_{vu})}{(1 - K_{uv}K_{vu})} = \frac{(0,61 - 0,51 * 0,47)}{(1 - 0,71 * 0,47)} = 0,56$$

$$\alpha_2 = \frac{K_{zv} - K_{zu}K_{uv}}{\varphi(1 - K_{uv}K_{vu})} = \frac{0,51 - 0,61 * 0,71}{0,83(1 - 0,71 * 0,47)} = 0,13$$

Eşitlik (4.131)'den kişilerin ortalama aylık gelir tahmini,

$$\hat{\mu}_{\text{Öneri 2}} = \frac{\bar{\bar{z}}\left(\frac{\mu_U}{\bar{u}}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{a\mu_V + b}{a\bar{v} + b}\right)^{\alpha_2} - c}{h} = \frac{3010 * \left(\frac{620}{650}\right)^{0,56}\left(\frac{4,8 + 1}{4,2 + 1}\right)^{0,13} - 600}{1} = 2372,64$$

olarak hesaplanır.

Eşitlik (4.142)'den kişilerin ortalama aylık gelir tahmininin hata kareler ortalaması tahmini,

$$\begin{aligned} H\hat{K}O(\hat{\mu}_{\text{Öneri2}}) &\cong \left(\frac{1-f}{nh^2}\right)\hat{\sigma}_z^2\left(1 - \frac{r_{zu}^2 + r_{zv}^2 - 2r_{zu}r_{zv}r_{uv}}{1 - r_{uv}^2}\right) \\ &= \frac{(1 - 0,10)(603222)}{10(1)^2}\left(1 - \frac{(0,80)^2 + (0,54)^2 - 2 * 0,80 * 0,54 * 0,58}{1 - (0,58)^2}\right) \\ &= 50573 \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Model 4 için Sayısal Örnek

S, R ve L düzeninde çarpımsal teknik uygulandığı düşünülsün. Çarpımsal teknik için W, T ve K rastgele değişkenleri Uniform (2, 5) dağılımından türetilsin. W, T ve K rastgele değişkenlerin ortalamaları $\mu_w = \mu_t = \mu_k = \frac{2+5}{2} = 3{,}5$, varyansları $\sigma_w^2 = \sigma_t^2 = \sigma_k^2 = \frac{(5-2)^2}{12} = 0{,}75$'tir.

Çizelge 4.19. Ortalama tahmini için önerilen iki yardımcı değişkenin kullanıldığı oransal tahmin edici için model 4 örneği

Kişiler	Gerçek Yanıtlar			Seçilen Karttaki İfade	Rastgele Sayılar Destesinden Seçilen Sayı			Verilen Yanıtlar		
	Y_i	X_i	M_i		W_i	T_i	K_i	$Z_i = Y_i*W_i$	$U_i = X_i*T_i$	$V_i = M_i*K_i$
1	1500	0	1	1	2	2	2	1500	0	1
2	2000	500	2	2	3	3	3	2000*3	500*3	2*2
3	2000	600	2	1	4	4	4	2000	600	2
4	2500	550	3	2	5	5	5	2500*5	550*5	3*5
5	1500	0	2	2	2	2	2	1500*2	0*2	2*2
6	1000	300	2	2	3	3	3	1000*3	300*3	2*3
7	3000	700	4	2	4	4	4	3000*4	700*4	4*4
8	2500	800	3	2	5	5	5	2500*5	800*5	3*5
9	3500	1000	3	2	2	2	2	3500*2	1000*2	3*2
10	5000	500	4	2	3	3	3	5000*3	500*3	4*3
Ortalama								7450	1680	8,3
Varyans								26191667	1740111	32,23
Değişim Katsayısı								0,69	0,79	0,68

*****1: "Aylık geliriniz ne kadardır?, oturduğunuz evin kirası ne kadardır?, bakmakla yükümlü olduğunuz kişi sayısı kaçtır? "
2: "Aylık gelirinizin cevabını S düzenini kullanarak veriniz, oturduğunuz evin kirasını R düzenini kullanarak veriniz, bakmakla yükümlü olduğunuz kişi sayısını L düzenini kullanarak veriniz "

Model 4'te Y hassas değişkeni için S düzeninde, X yardımcı değişken için R düzeninde ve M yardımcı değişkeni için L düzeninde çarpımsal teknik uygulanır. Buna göre tüm örneklem için yanıt dağılımı { (1500, 0, 1), (6000, 1500, 4), (2000, 600, 2), (12500, 1750, 3), (3000, 0, 4), (3000, 900, 6), (12000, 2800, 16), (12500, 4000, 3), (7000, 2000, 6), (15000, 1500, 4) } şeklinde olacaktır.
Kişilerin verdiği yanıtlar kullanılarak kişilerin ortalama aylık gelirleri tahmin edilebilir.

Model 4 için Çizelge 4.19'daki verilere ait bazı bilgiler aşağıda özetlenmiştir.

$\bar{z} = 7450$, $\bar{u} = 1680$, $\bar{v} = 8{,}3$, $\hat{\sigma}_z^2 = 26191667$, $\hat{C}_z = 0{,}69$, $\hat{C}_u = 0{,}79$, $\hat{C}_v = 0{,}68$,

$r_{zu} = 0{,}88$, $r_{zv} = 0{,}93$, $r_{uv} = 0{,}91$,

$c = 0$, $h = [P + (1-P)\mu_w] = 0{,}20 + 0{,}80 * 3{,}5 = 3$, $\mu_x = 500$ ve $\mu_m = 2$ olduğu biliniyor.

$$\mu_u = (0{,}20 + 0{,}80 * 3{,}5)500 = 1500\ ,\ \mu_v = (0{,}20 + 0{,}80 * 3{,}5)2 = 6\ ,$$

$$\varphi = \frac{\mu_v}{\mu_v + 1} = \frac{6}{6+1} = 0{,}86 \text{ (a=b=1 olarak alınmıştır)}$$

$$K_{zu} = r_{zu}\frac{\hat{C}_z}{\hat{C}_u} = 0{,}88 * \frac{0{,}69}{0{,}79} = 0{,}77\ ,$$

$$K_{zv} = r_{zv}\frac{\hat{C}_z}{\hat{C}_v} = 0{,}93 * \frac{0{,}69}{0{,}68} = 0{,}93\ ,$$

$$K_{uv} = r_{uv}\frac{\hat{C}_u}{\hat{C}_v} = 0{,}91 * \frac{0{,}79}{0{,}68} = 1{,}04\ ,$$

$$K_{vu} = r_{uv}\frac{\hat{C}_v}{\hat{C}_u} = 0{,}91 * \frac{0{,}68}{0{,}79} = 0{,}79\ .$$

Buna göre,

$$\alpha_1 = \frac{(K_{zu} - K_{zv}K_{vu})}{(1 - K_{uv}K_{vu})} = \frac{(0{,}77 - 0{,}93 * 0{,}79)}{(1 - 1{,}04 * 0{,}79)} = 0{,}19$$

$$\alpha_2 = \frac{K_{zv} - K_{zu}K_{uv}}{\varphi(1 - K_{uv}K_{vu})} = \frac{0{,}93 - 0{,}77 * 1{,}04}{0{,}86(1 - 1{,}04 * 0{,}79)} = 0{,}85$$

Eşitlik (4.131)'den kişilerin ortalama aylık gelir tahmini,

$$\hat{\mu}_{Öneri2} = \frac{\bar{z}\left(\frac{\mu_u}{\bar{u}}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{a\mu_V + b}{a\bar{v} + b}\right)^{\alpha_2} - c}{h} = \frac{7450 * \left(\frac{1500}{1680}\right)^{0{,}19}\left(\frac{6+1}{8{,}3+1}\right)^{0{,}85}}{3} = 789{,}15$$

olarak hesaplanır.

Eşitlik (4.142)'den kişilerin ortalama aylık gelir tahmininin hata kareler ortalaması tahmini,

$$H\hat{K}O\left(\,\right)_{\text{Öneri2}} \cong \left(\frac{1-f}{nh^2}\right)\hat{\sigma}_z^2\left(1-\frac{r_{zu}^2+r_{zv}^2-2r_{zu}r_{zv}r_{uv}}{1-r_{uv}^2}\right)$$

$$=\frac{(-0{,}10)(6191667)}{10(3)^2}\left(1-\frac{(0{,}88)^2+(0{,}93)^2-2*0{,}88*0{,}93*0{,}91}{1-(0{,}91)^2}\right)$$

$$=19312$$

olarak hesaplanır.

Model 5 için Sayısal Örnek

Y hassas değişken ve X yardımcı değişken için S ve R düzenlerinde toplamsal tekniğin uygulandığı, M yardımcı değişken için doğrudan yanıt alma tekniğinin uygulandığı düşünülsün.

Çizelge 4.20. Ortalama tahmini için önerilen iki yardımcı değişkenin kullanıldığı oransal tahmin edici için model 5 örneği

Kişiler	Gerçek Yanıtlar			Seçilen Karttaki İfade	Rastgele Sayılar Destesinden Seçilen Sayı		Verilen Yanıtlar		
	Y_i	X_i	M_i		W_i	T_i	$Z_{i=}\ Y_i+W_i$	$U_{i=}\ X_{i+}\ T_i$	$V_{i=}\ M_i$
1	1500	0	1	1	1000	100	1500	0	1
2	2000	500	2	2	500	150	2000+500	500+150	2
3	2000	600	2	1	700	150	2000	600	2
4	2500	550	3	2	800	200	2500+800	550+200	3
5	1500	0	2	2	500	170	1500+500	0+170	2
6	1000	300	2	2	1000	150	1000+1000	300+150	2
7	3000	700	4	2	500	180	3000+500	700+180	4
8	2500	800	3	2	800	200	2500+800	800+200	3
9	3500	1000	3	2	1000	100	3500+1000	1000+100	3
10	5000	500	4	2	500	150	5000+500	500+150	4
Ortalama							3010	650	2,6
Varyans							1603222	127311	0,93
Değişim Katsayısı							0,42	0,54	0,37

*****1: "Aylık geliriniz ne kadardır?, oturduğunuz evin kirası ne kadardır?, bakmakla yükümlü olduğunuz kişi sayısı kaçtır? "
2: "Aylık gelirinizin cevabını S düzenini kullanarak veriniz, oturduğunuz evin kirasını R düzenini kullanarak veriniz, bakmakla yükümlü olduğunuz kişi sayısını kaçtır? "

Model 5'te Y hassas değişkeni için S düzeninde, X yardımcı değişken için R düzeninde toplamsal teknik uygulanır ve M yardımcı değişkeni için doğrudan yanıt alma tekniği uygulanır. Buna göre tüm örneklem için yanıt dağılımı { (1500, 0, 1), (2500, 650, 2), (2000, 600, 2), (3300, 750, 3), (2000, 170, 2), (2000, 450, 2), (3500, 880, 4), (3300, 1000, 3), (4500, 1100, 3), (5500, 900, 4) } şeklinde olacaktır.

Kişilerin verdiği yanıtlar kullanılarak kişilerin ortalama aylık gelirleri tahmin edilebilir.

Model 5 için Çizelge 4.20’deki verilere ait bazı bilgiler aşağıda özetlenmiştir. $\bar{z} = 3010$, $\bar{u} = 650$, $\bar{v} = \overline{m} = 2{,}6$, $\hat{\sigma}_z^2 = 1603222$, $\hat{C}_z = 0{,}42$, $\hat{C}_u = 0{,}54$, $\hat{C}_v = 0{,}37$,

$r_{zu} = 0{,}80$, $r_{zv} = 0{,}87$, $r_{uv} = 0{,}81$,

$c = (1-P)\mu_w = 0{,}80 * 750 = 600$, h=1, $\mu_x = 500$ ve $\mu_m = 2$ olduğu biliniyor.

$$\mu_u = \mu_x + (1-P)\mu_t = 500 + 0{,}80 * 150 = 620$$

$$\mu_v = \mu_m = 2$$

$$\varphi = \frac{\mu_v}{\mu_v + 1} = \frac{2}{2+1} = 0{,}67 \text{ (a=b=1 olarak alınmıştır)}$$

$$K_{zu} = r_{zu}\frac{\hat{C}_z}{\hat{C}_u} = 0{,}80 * \frac{0{,}42}{0{,}54} = 0{,}61,$$

$$K_{zv} = r_{zv}\frac{\hat{C}_z}{\hat{C}_v} = 0{,}87 * \frac{0{,}42}{0{,}37} = 0{,}98,$$

$$K_{uv} = r_{uv}\frac{\hat{C}_u}{\hat{C}_v} = 0{,}81 * \frac{0{,}54}{0{,}37} = 1{,}20,$$

$$K_{vu} = r_{uv}\frac{\hat{C}_v}{\hat{C}_u} = 0{,}58 * \frac{0{,}45}{0{,}54} = 0{,}55.$$

Buna göre,

$$\alpha_1 = \frac{(K_{zu} - K_{zv}K_{vu})}{(1 - K_{uv}K_{vu})} = \frac{(0{,}61 - 0{,}98 * 0{,}55)}{(1 - 1{,}20 * 0{,}55)} = 0{,}22$$

$$\alpha_2 = \frac{K_{zv} - K_{zu}K_{uv}}{\varphi(1 - K_{uv}K_{vu})} = \frac{0{,}98 - 0{,}61 * 1{,}20}{0{,}67(1 - 1{,}20 * 0{,}55)} = 1{,}07$$

Eşitlik (4.131)'den kişilerin ortalama aylık gelir tahmini,

$$\hat{\mu}_{\text{Öneri 2}} = \frac{\bar{z}\left(\frac{\mu_u}{\bar{u}}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{a\mu_V + b}{a\bar{v} + b}\right)^{\alpha_2} - c}{h} = \frac{3010 * \left(\frac{620}{650}\right)^{0,22}\left(\frac{2+1}{2,6+1}\right)^{1,07} - 600}{1} = 1850,56$$

olarak hesaplanır.

Eşitlik (4.142)'den kişilerin ortalama aylık gelir tahmininin hata kareler ortalaması tahmini,

$$\hat{HKO}\left(\hat{\mu}_{\text{Öneri2}}\right) \cong \left(\frac{1-f}{nh^2}\right)\hat{\sigma}_z^2\left(1 - \frac{r_{zu}^2 + r_{zv}^2 - 2r_{zu}r_{zv}r_{uv}}{1 - r_{uv}^2}\right)$$

$$= \frac{(1-0,10)(603222)}{10(1)^2}\left(1 - \frac{(0,80)^2 + (0,87)^2 - 2 * 0,80 * 0,87 * 0,81}{1 - (0,81)^2}\right)$$

$$= 31811$$

olarak hesaplanır.

4.2.5. Ortalama tahmini için Önerilen İki Yardımcı Değişkenin Kullanıldığı Regresyon Tahmin Edicisi

Diana ve Perri [5]'in önerdiği rastgeleleştirilmiş yanıt modelinden yararlanarakortalama tahmini için RYM'de yeni bir tahmin edici ailesi önerilmiştir. Ortalama tahmininde bu modelde iki tane hassas olmayan yardımcı değişken kullanılmıştır. Örneğin tahmin edilmek istenen değişken kişinin geliri, yardımcı değişkenler ise kişinin aylık gıda gideri ve eğitim-öğretim süresi olabilir.

Önerilen tahmin edici ailesi için yanıt değişkeni dağılımı bölüm 4.2.3'te verildiği gibidir.

Eşitlik (4.130)'daki yanıt dağılımından yararlanarak Z kitle ortalaması için önerilen tahmin edici ailesi,

$$\hat{\mu}_{Öneri3} = \frac{\bar{z}_{R3} - c}{h} \tag{4.143}$$

olarak tanımlanır. Burada,

$$\bar{z}_{R3} = \bar{z} + b_1(\mu_u - \bar{u}) + b_2(\mu_v - \bar{v}) \tag{4.144}$$

şeklindedir. Burada b_1 ve b_2 sabit katsayılardır.

$\hat{\mu}_{Öneri3}$ tahmin edicisinin beklenen değeri,

$$E(\hat{\mu}_{Öneri3}) = \frac{\bar{z}_{R3} - c}{h}$$

$$E(\hat{\mu}_{Öneri3}) = \frac{E[\bar{z} + b_1(\mu_U - \bar{u}) + b_2(\mu_V - \bar{v})] - c}{h}$$

$$E(\hat{\mu}_{Öneri3}) = \frac{\mu_z - c}{h}$$

$$= \mu_y \tag{4.145}$$

şeklindedir. Dolayısıyla $\hat{\mu}_{Öneri3}$ tahmin edicisi yansız bir tahmin edicidir.

$\hat{\mu}_{Öneri3}$ tahmin edicisinin varyansı,

$$V(\hat{\mu}_{Öneri3}) = \frac{V(\bar{z}_{R3})}{h^2} \tag{4.146}$$

olarak yazılır.

$\bar{z}_{R3}$ regresyon tahmin edicisinin varyansını elde etmek için fark yönteminden yararlanılır.

$\bar{z}_{R3}$, e'li terimler cinsinden yazılarak yeniden ifade edilirse,

$$\begin{aligned} \bar{z}_{R3} &= \bar{z}(1+e_0) + b_1\left(\mu_u - \mu_u(1+e_1)\right) + b_2\left(\mu_v - \mu_v(1+e_2)\right) \\ \bar{z}_{R3} &= \bar{z}(1+e_0) - b_1\mu_u e_1 - b_2\mu_v e_2 \end{aligned} \tag{4.147}$$

şeklinde yazılır.

$\hat{\mu}_{Öneri3}$ tahmin edicisinin varyansı,

$$\begin{aligned} V(\hat{\mu}_{Öneri3}) &= \frac{E(\bar{z}_R - \bar{z})^2}{h^2} \\ &= \frac{1}{h^2} E(\bar{z} e_0 - b_1\mu_u e_1 - b_2\mu_v e_2)^2 \end{aligned} \tag{4.148}$$

şeklindedir. Beklenen değerde kare alınırsa varyans,

$$\begin{aligned} V(\hat{\mu}_{Öneri3}) &= \frac{1}{h^2} E\left(\bar{z}^2 e_0^2 + b_1^2\mu_u^2 e_1^2 + b_2^2\mu_v^2 e_2^2 - 2b_1\mu_z\mu_u e_0 e_1 - 2b_2\mu_z\mu_v e_0 e_2 \right. \\ &\quad \left. + 2b_1 b_2 \mu_u \mu_v e_1 e_2\right) \\ &= \frac{(1-f)}{nh^2}\left(\mu_z^2 C_z^2 + b_1^2\sigma_u^2 + b_2^2\sigma_v^2 - 2b_1\sigma_{zu} - 2b_2\sigma_{zv} + 2b_1 b_2 \sigma_{uv}\right) \end{aligned} \tag{4.149}$$

olarak bulunur.

Önerilen tahmin edicide tanımlanan b_1 ve b_2 katsayılarının optimum değerinin bulunmasıyla varyansının minimum değeri bulunabilir. Bu minimum değer, varyansının optimumu bulunmak istenen değere göre türevinin alınıp sıfıra eşitlenmesiyle bulunur. Buradan b_1 ve b_2'nin optimum değerleri bulunur.

Buna göre,

$$\frac{\partial \left[HKO(\cdot)_{\text{Öneri3}} \right]}{\partial b_1} = \frac{\partial \left[\frac{(1-f)}{nh^2} \left(\mu_z^2 C_z^2 + b_1^2 \sigma_u^2 + b_2^2 \sigma_v^2 - 2b_1 \sigma_{zu} - 2b_2 \sigma_{zv} + 2b_1 b_2 \sigma_{uv} \right) \right]}{\partial b_1} = 0 \tag{4.150}$$

$$= 2b_1 \sigma_u^2 - 2\sigma_{zu} + 2b_2 \sigma_{uv} = 0$$

$$\frac{\partial \left[HKO(\cdot)_{\text{Öneri3}} \right]}{\partial b_2} = \frac{\partial \left[\frac{(1-f)}{nh^2} \left(\mu_z^2 C_z^2 + b_1^2 \sigma_u^2 + b_2^2 \sigma_v^2 - 2b_1 \sigma_{zu} - 2b_2 \sigma_{zv} + 2b_1 b_2 \sigma_{uv} \right) \right]}{\partial b_2} = 0 \tag{4.151}$$

$$= 2b_2 \sigma_v^2 - 2\sigma_{zv} + 2b_1 \sigma_{uv} = 0$$

eşitlikleri elde edilir.

Eşitlik (4.150) ve Eşitlik (4.151) eşanlı çözülürse

$$b_1 = \frac{K_{zu} - K_{zv} K_{vu}}{1 - K_{uv} K_{vu}} \tag{4.152}$$

$$b_2 = \frac{K_{zv} - K_{zu} K_{uv}}{1 - K_{uv} K_{vu}} \tag{4.153}$$

olarak elde edilir. Burada $K_{zu} = \rho_{zu} \frac{C_z}{C_u}$, $K_{zv} = \rho_{zv} \frac{C_z}{C_v}$, $K_{uv} = \rho_{uv} \frac{C_u}{C_v}$ 'dir.

Eşitlik (4.152) ve Eşitlik (4.153) Eşitlik (4.149)'da yerine konulursa varyansının minimum değeri,

$$
\begin{aligned}
V(t_{Öneri3}) &= \frac{(1-f)}{nh^2}\Bigg[\mu_z^2C_z^2+\left\{\frac{(K_{zu}-K_{zv}K_{vu})}{(1-K_{uv}K_{vu})}\right\}^2\sigma_u^2+\left\{\frac{K_{zv}-K_{zu}K_{uv}}{(1-K_{uv}K_{vu})}\right\}^2\sigma_v^2 \\
&\quad -2\left\{\frac{(K_{zu}-K_{zv}K_{vu})}{(1-K_{uv}K_{vu})}\right\}\sigma_{zu}-2\left\{\frac{K_{zv}-K_{zu}K_{uv}}{(1-K_{uv}K_{vu})}\right\}\sigma_z \\
&\quad +2\left\{\frac{(K_{zu}-K_{zv}K_{vu})}{(1-K_{uv}K_{vu})}\right\}\left\{\frac{K_{zv}-K_{zu}K_{uv}}{(1-K_{uv}K_{vu})}\right\}\sigma_{uv}\Bigg] \\
&= \frac{(1-f)}{nh^2}\Bigg[\mu_z^2C_z^2-2\frac{1}{(1-\rho_{uv}^2)}\{(K_{zu}-K_{zv}K_{vu})\sigma_{zu}-(K_{zv}-K_{zu}K_{uv})\sigma_{zv}\} \\
&\quad +\frac{1}{(1-\rho_{uv}^2)^2}\{(K_{zu}-K_{zv}K_{vu})^2\sigma_u^2+(K_{zv}-K_{zu}K_{uv})^2\sigma_v^2 \\
&\quad +2(K_{zu}-K_{zv}K_{vu})(K_{zv}-K_{zu}K_{uv})\sigma_{uv}\}\Bigg] \\
&= \frac{(1-f)}{nh^2}\Bigg[\mu_z^2C_z^2-2\frac{1}{(1-\rho_{uv}^2)}\left\{(\rho_{zu}-\rho_{zv}\rho_{uv})\frac{C_z}{C_u}\rho_{zu}\sigma_z\sigma_u-(\rho_{zv}-\rho_{zu}\rho_{uv})\frac{C_z}{C_v}\rho_{zv}\sigma_z\sigma_v\right\} \\
&\quad +\frac{1}{(1-\rho_{uv}^2)^2}\left\{(\rho_{zu}-\rho_{zv}\rho_{uv})^2\frac{C_z^2}{C_u^2}\sigma_u^2+(\rho_{zv}-\rho_{zu}\rho_{uv})^2\frac{C_z^2}{C_v^2}\sigma_v^2\right. \\
&\quad \left.+2(\rho_{zu}-\rho_{zv}\rho_{uv})(\rho_{zv}-\rho_{zu}\rho_{uv})\rho_{uv}\sigma_u\sigma_v\right\}\Bigg] \\
&= \frac{(1-f)S_z^2}{nh^2}\left(1-\frac{\rho_{zu}^2+\rho_{zv}^2-2\rho_{zu}\rho_{zv}\rho_{uv}}{1-\rho_{uv}^2}\right) \\
&= \frac{(1-f)S_z^2}{nh^2}(1-R_{zu.v}^2) \qquad (4.154)
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir. Burada, $R_{zu.v}^2=\dfrac{\rho_{zu}^2+\rho_{zv}^2-2\rho_{zu}\rho_{zv}\rho_{uv}}{1-\rho_{uv}^2}$'dir.

Eşitlik (4.154)'teki varyans ve korelasyon formülleri uygulanan rastgeleleştirilmiş yanıt modeline göre farklı eşitliklere sahip olacaktır. Aynı şekilde bu tahmin edici birçok modele uygulanabilir. Uygulanabilecek bazı rastgeleleştirilmiş modeller Çizelge 4.4'te gösterilmiştir.

4.2.6. Ortalama Tahmini için Önerilen Tahmin Edicilerin Karşılaştırılması

Bu bölümde Bölüm 4.2.'de önerilen tahmin ediciler ile Bölüm 3.2'de verilen literatürdeki tahmin ediciler karşılaştırılacaktır.

Önerilen tahmin edici $\hat{\mu}_{Öneri1}$ yardımcı değişken bilgisinin kullanılmadığı Warner [38]'in önerdiği tahmin ediciyle karşılaştırılırsa:

$$\begin{gathered} Var\left(\hat{\mu}_{w1}\right) > HKO_{min}\left(\hat{\mu}_{Öneri1}\right) \\ \left(\frac{1-f}{n}\right)\sigma_z^2 > \left(\frac{1-f}{n}\right)\mu_z^2\left(1-\rho_{zu}^2\right) \\ \rho_{zu}^2 > 0 \end{gathered} \tag{4.155}$$

koşulu elde edilir.

Eşitlik (4.155)'de elde edilen $\rho_{zu}^2 > 0$ koşulu altında önerilen tahmin edici $\hat{\mu}_{Öneri1}$, Warner [38]'in önerdiği tahmin edicisinden daha duyarlıdır. Bu koşul her zaman sağlandığı için önerilen tahmin edici $\hat{\mu}_{Öneri1}$, Warner [38]'in önerdiği tahmin edicisinden daha duyarlıdır.

Önerilen tahmin edici $\hat{\mu}_{Öneri1}$, Sousa [33]'ün önerdiği oransal tahmin edicisiyle 1.model altında karşılaştırılırsa:

$$\begin{gathered} HKO\left(\hat{\mu}_{SR}\right) > HKO_{min}\left(\hat{\mu}_{Öneri1}\right) \\ \left(\frac{1-f}{n}\right)\mu_z^2\left(C_z^2 + C_x^2 - 2\rho_{zx}C_xC_z\right) > \left(\frac{1-f}{n}\right)\mu_z^2\left(1-\rho_{zx}^2\right) \\ \left(C_x - \rho_{zx}C_z\right)^2 > 0 \end{gathered} \tag{4.156}$$

koşulu elde edilir.

$(C_x - \rho_{zx} C_z)^2 > 0$ koşulu altında önerilen tahmin edici $\hat{\mu}_{Öneri1}$, Sousa [33]'ün önerdiği oransal tahmin edicisinden daha etkindir. Bu koşul $C_x \neq \rho_{zx} C_z$ olduğu her durumda sağlanır.

Önerilen tahmin edici $\hat{\mu}_{Öneri1}$, Gupta v.d. [21]'in önerdiği regresyon-oransal tahmin edicisiyle 1.model altında karşılaştırılırsa:

$$
\begin{gathered}
HKO(\hat{\mu}_{RR}) > HKO_{min}(\hat{\mu}_{Öneri1}) \\
\left(\frac{1-f}{n}\right)\mu_z^2 \left[C_z^2 (1-\rho_{zx}^2) + C_x^2\right] > \left(\frac{1-f}{n}\right)\sigma_z^2 (1-\rho_{zx}^2) \\
C_x^2 > 0
\end{gathered}
\tag{4.157}
$$

koşulu elde edilir.

Eşitlik(4.157)'den elde edilen $C_x^2 > 0$ koşulu altında önerilen tahmin edici $\hat{\mu}_{Öneri1}$, Gupta v.d. [21]'in önerdiği oransal-regresyon tahmin edicisinden daha etkindir. Bu koşul her zaman sağlanacağı için önerilen tahmin edici ailesi Gupta v.d. [21]'in önerdiği oransal-regresyon tahmin edicisinden daha etkindir.

Önerilen 2. oransal tahmin edici $\hat{\mu}_{Öneri2}$ Diana ve Perri [6] tahmin edici ailesi ile karşılaştırılırsa,

$$
\begin{gathered}
Var(\hat{\mu}_{DP})_{min} > HKO_{min}(\hat{\mu}_{Öneri2}) \\
\left(\frac{1-f}{n}\right)\sigma_z^2 (1-\rho_{zu}^2) > \left(\frac{1-f}{n}\right)\sigma_z^2 \left[1 - \frac{\rho_{zu}^2 + \rho_{zv}^2 - 2\rho_{zu}\rho_{zv}\rho_{uv}}{1-\rho_{uv}^2}\right] \\
(\rho_{zv} - \rho_{zu}\rho_{uv})^2 > 0
\end{gathered}
\tag{4.158}
$$

koşulu elde edilir.

Eşitlik(4.158)'den elde edilen $\left(\rho_{zv} - \rho_{zu}\rho_{uv}\right)^2 > 0$ koşulu altında önerilen 2. Oransal tahmin edici $\hat{\mu}_{\text{Öneri2}}$, Diana ve Perri [6] tahmin edici ailesinden daha duyarlıdır. Bu koşul her zaman sağlanacağı için önerilen tahmin edici ailesi Diana ve Perri [6] tahmin edici ailesinden daha duyarlıdır.

5.SİMÜLASYON ÇALIŞMASI

Bu bölümde hassas bir değişkenin ortalama tahmini için R programında bir simülasyon çalışması gerçekleştirilmiştir. Simülasyon çalışmasında hassas değişkenin ortalama tahmini için literatürde olan tahmin ediciler ile tezde önerilen tahmin ediciler karşılaştırılmıştır. Çalışma için R programında N=1000 büyüklüğünde çok değişkenli normal dağılımdan faydalanarak 3 farklı kitle türetilmiştir. Yardımcı değişken bilgisinin kullanıldığı tahmin edicilerde değişkenler arasındaki ilişki önemli olduğu için kitleler değişkenler arasındaki ilişkilerin derecesine göre türetilmiştir. Y, X ve M R programında çoklu normal dağılımından varyans-kovaryans matrisi oluşturularak türetilmiştir. Y, X ve M değişkenlerinin ortalamaları (5, 5, 5) olarak ve varyansları (9, 4, 4) olarak belirlenmiştir. Y hassas değişkeni için S rastgele düzeninde kullanılacak olan W rastgele düzen değişkeni $N(0;0{,}30^2)$ dağılımından, X yardımcı değişkeni için R rastgele düzeninde kullanılacak olan T rastgele düzen değişkeni ve M yardımcı değişkeni için L rastgele düzeninde kullanılacak olan K rastgele düzen değişkeni $N(0;0{,}20^2)$ dağılımından türetilmiştir. Simülasyon çalışmasında dağılımlar türetilirken Diana ve Perri [9] ve Singh v.d. [21]'in simülasyon çalışmasında kullandıkları dağılımlardan faydalanılmıştır. S, R ve L rastgele düzenlerinde toplamsal ve çarpımsal yöntemlerin kullanımına göre çeşitli modeller oluşturulabilir. Bu Simülasyon çalışmasında 5 farklı model ele alınmıştır. Birinci kitle için ilişki katsayıları $\rho_{yx} = 0.30,\ \rho_{ym} = 0{,}25, \rho_{xm} = 0{,}20$, ikinci kitle için ilişki katsayıları $\rho_{yx} = 0{,}58, \rho_{ym} = 0{,}52, \rho_{xm} = 0{,}30$, üçüncü kitle için ilişki katsayıları $\rho_{yx} = 0{,}87, \rho_{ym} = 0{,}70,\ \rho_{xm} = 0{,}50$'dir. Çalışmada 1000 tekrar yapılarak n=50, 100, 200, 300 örneklem büyüklükleri için ve aynı zamanda P=0,20, 0,50, 0,80 değerleri için hesaplamalar yapılmıştır. Çalışmada Bölüm 3.2 ve Bölüm 4.2'de verilen her tahmin edici için değişen parametre ve modellere göre teorik hata kareler ortalaması ve deneysel hata kareler ortalamaları hesaplatılmıştır. Çalışmada kullanılan deneysel hata kareler ortalaması formülü:

$$HKO(t) = \frac{1}{1000}\sum_{i=1}^{1000}(t - \mu_y)^2$$

şeklindedir. Simülasyon sonuçları her bir ilişki katsayısı ve model için ayrı ayrı verilmiştir. Sonuçlar Çizelge 5.1-Çizelge 5.20 arasındadır. Tahmin edicilerin karşılaştırılmasında tahmin edicilerin teorik ve deneysel hata kareler ortalaması kullanılmıştır.

Çizelge 5.1. Değişkenler arasındaki ilişki düşük düzeyde iken model 1 (Z=Y+W, U=X, V=M) için simülasyon sonuçları ($\rho_{yx} = 0.30, \rho_{ym} = 0,25,\ \rho_{xm} = 0,20$)

N=1000	Tahmin Ediciler	n=50		n=100		n=200		n=300	
P=0.20		Teorik HKO	Deneysel HKO	Teorik HKO	Deneysel HKO	Teorik HKO	Deneysel HKO	Teorik HKO	Deneysel HKO
	$\hat{\mu}_{DP}$	0,152204	0,148366	0,072096	0,069851	0,032043	0,032249	0,018692	0,019473
	$\hat{\mu}_{SR}$	0,16661	0,156524	0,07892	0,074245	0,035076	0,035035	0,020461	0,021515
	$\hat{\mu}_{RR}$	0,222692	0,212273	0,105486	0,102491	0,046882	0,046798	0,027348	0,028912
	$\hat{\mu}_{GRR}$	0,151262	0,150648	0,071885	0,069976	0,032001	0,032304	0,018677	0,019551
	$\hat{\mu}_{Öneri1}$	0,152204	0,14821	0,072096	0,069801	0,032043	0,032241	0,018692	0,019473
	$\hat{\mu}_{Öneri2}$	0,146615	0,147041	0,069449	0,069630	0,030866	0,031733	0,018005	0,019202
	$\hat{\mu}_{Öneri3}$	0,146615	0,147549	0,069449	0,069556	0,030866	0,031779	0,018005	0,019229
P=0.50									
	$\hat{\mu}_{DP}$	0,149693	0,146509	0,070907	0,069234	0,031514	0,031794	0,018383	0,019363
	$\hat{\mu}_{SR}$	0,164715	0,155339	0,078023	0,073925	0,034677	0,034817	0,020228	0,021512
	$\hat{\mu}_{RR}$	0,22039	0,210120	0,104395	0,101870	0,046398	0,046583	0,027065	0,028863
	$\hat{\mu}_{GRR}$	0,148785	0,148817	0,070703	0,069359	0,031474	0,031848	0,018370	0,019438
	$\hat{\mu}_{Öneri1}$	0,149693	0,146358	0,070907	0,069187	0,031514	0,031785	0,018383	0,019364
	$\hat{\mu}_{Öneri2}$	0,144349	0,145266	0,068376	0,069034	0,030389	0,031272	0,017727	0,019103
	$\hat{\mu}_{Öneri3}$	0,144349	0,145717	0,068376	0,068980	0,030389	0,031323	0,017727	0,019128
P=0.80									
	$\hat{\mu}_{DP}$	0,148177	0,144763	0,070189	0,067712	0,031195	0,031398	0,018197	0,019134
	$\hat{\mu}_{SR}$	0,163816	0,154568	0,077597	0,072661	0,034488	0,034574	0,020118	0,021341
	$\hat{\mu}_{RR}$	0,218768	0,208719	0,103627	0,100439	0,046056	0,046225	0,026866	0,028585
	$\hat{\mu}_{GRR}$	0,147286	0,147008	0,069989	0,067848	0,031156	0,031453	0,018184	0,019214
	$\hat{\mu}_{Öneri1}$	0,148177	0,144615	0,070189	0,067668	0,031195	0,03139	0,018197	0,019135
	$\hat{\mu}_{Öneri2}$	0,143131	0,143530	0,067799	0,067630	0,030133	0,030975	0,017577	0,018906
	$\hat{\mu}_{Öneri3}$	0,143131	0,144005	0,067799	0,067583	0,030133	0,031028	0,017577	0,018932

Çizelge 5.2. Değişkenler arasındaki ilişki düşük düzeyde iken model 2 (Z=YW, U=X, V=M) için simülasyon sonuçları ($\rho_{yx} = 0.30, \rho_{ym} = 0,25, \rho_{xm} = 0,20$)

N=1000	Tahmin Ediciler	n=50		n=100		n=200		n=300	
P=0.20		**Teorik HKO**	**Deneysel HKO**	**Teorik HKO**	**Deneysel HKO**	**Teorik HKO**	**Deneysel HKO**	**Teorik HKO**	**Deneysel HKO**
	$\hat{\mu}_{DP}$	3,560869	2,609530	1,686728	1,598496	0,749657	1,04401	0,4373	0,833712
	$\hat{\mu}_{SR}$	3,562811	2,558477	1,687648	1,600915	0,750066	1,040874	0,437538	0,831218
	$\hat{\mu}_{RR}$	3,648803	2,787157	1,728380	1,662557	0,768169	1,068463	0,448099	0,842179
	$\hat{\mu}_{GRR}$	3,188546	2,251703	1,598449	1,301705	0,731710	0,869079	0,431133	0,725991
	$\hat{\mu}_{Öneri1}$	3,560869	2,612012	1,686728	1,600239	0,749657	1,044522	0,437300	0,833841
	$\hat{\mu}_{Öneri2}$	3,534426	2,648065	1,674202	1,588558	0,744090	1,036891	0,434052	0,832232
	$\hat{\mu}_{Öneri3}$	3,534426	2,53048	1,674202	1,161014	0,744090	1,534270	0,434052	0,830940
P=0.50									
	$\hat{\mu}_{DP}$	0,834412	0,450826	0,395248	0,267328	0,175666	0,134626	0,102472	0,090913
	$\hat{\mu}_{SR}$	0,844911	0,440821	0,400221	0,267725	0,177876	0,135844	0,103761	0,091788
	$\hat{\mu}_{RR}$	0,90746	0,539600	0,429849	0,309064	0,191044	0,153218	0,111442	0,101558
	$\hat{\mu}_{GRR}$	0,807804	0,426264	0,389185	0,244023	0,174459	0,122647	0,102060	0,084064
	$\hat{\mu}_{Öneri1}$	0,834412	0,450260	0,395248	0,267033	0,175666	0,134505	0,102472	0,090841
	$\hat{\mu}_{Öneri2}$	0,824087	0,450144	0,390357	0,268431	0,173492	0,133072	0,101204	0,090809
	$\hat{\mu}_{Öneri3}$	0,824087	0,423553	0,390357	0,275779	0,173492	0,146804	0,101204	0,090155
P=0.80									
	$\hat{\mu}_{DP}$	0,313001	0,208304	0,148264	0,103198	0,065895	0,047809	0,038439	0,029188
	$\hat{\mu}_{SR}$	0,327945	0,212655	0,155342	0,106687	0,069041	0,051056	0,040274	0,031222
	$\hat{\mu}_{RR}$	0,383187	0,270571	0,18151	0,135934	0,080671	0,063611	0,047058	0,039094
	$\hat{\mu}_{GRR}$	0,309027	0,209276	0,147368	0,101165	0,065718	0,046571	0,038378	0,028655
	$\hat{\mu}_{Öneri1}$	0,313001	0,208082	0,148264	0,103081	0,065895	0,047765	0,038439	0,029170
	$\hat{\mu}_{Öneri2}$	0,308313	0,205008	0,146043	0,103503	0,064908	0,047468	0,037863	0,028988
	$\hat{\mu}_{Öneri3}$	0,308313	0,203210	0,146043	0,106180	0,064908	0,048207	0,037863	0,028538

Çizelge 5.3. Değişkenler arasındaki ilişki düşük düzeyde iken model 3 (Z=Y+W, U=X+T, V=M+K) için simülasyon sonuçları ($\rho_{yx} = 0.30, \rho_{ym} = 0,25, \rho_{xm} = 0,20$)

N=1000	Tahmin Ediciler	n=50		n=100		n=200		n=300	
P=0.20		**Teorik HKO**	**Deneysel HKO**	**Teorik HKO**	**Deneysel HKO**	**Teorik HKO**	**Deneysel HKO**	**Teorik HKO**	**Deneysel HKO**
	$\hat{\mu}_{DP}$	0,150711	0,147893	0,071389	0,069422	0,031729	0,031923	0,018508	0,019284
	$\hat{\mu}_{SR}$	0,165177	0,156451	0,078242	0,073585	0,034774	0,034674	0,020285	0,021335
	$\hat{\mu}_{RR}$	0,224038	0,215651	0,106123	0,102963	0,047166	0,046982	0,027513	0,029037
	$\hat{\mu}_{GRR}$	0,149787	0,149699	0,071182	0,069221	0,031688	0,031971	0,018494	0,019366
	$\hat{\mu}_{Öneri1}$	0,150711	0,147251	0,071389	0,069044	0,031729	0,031893	0,018508	0,019283
	$\hat{\mu}_{Öneri2}$	0,145321	0,146154	0,068836	0,068915	0,030594	0,031380	0,017846	0,019022
	$\hat{\mu}_{Öneri3}$	0,145321	0,146637	0,068836	0,068869	0,030594	0,031458	0,017846	0,019061
P=0.50									
	$\hat{\mu}_{DP}$	0,1489	0,146353	0,070532	0,068893	0,031347	0,031656	0,018286	0,019267
	$\hat{\mu}_{SR}$	0,164064	0,15499	0,077714	0,073142	0,03454	0,034710	0,020148	0,021415
	$\hat{\mu}_{RR}$	0,221373	0,211821	0,104861	0,101466	0,046605	0,046892	0,027186	0,028953
	$\hat{\mu}_{GRR}$	0,148001	0,148198	0,070330	0,068712	0,031307	0,031702	0,018272	0,019345
	$\hat{\mu}_{Öneri1}$	0,1489	0,145736	0,070532	0,068537	0,031347	0,031628	0,018286	0,019266
	$\hat{\mu}_{Öneri2}$	0,143626	0,144957	0,068033	0,068394	0,030237	0,031126	0,017638	0,019008
	$\hat{\mu}_{Öneri3}$	0,143626	0,145359	0,068033	0,068345	0,030237	0,031197	0,017638	0,019041
P=0.80									
	$\hat{\mu}_{DP}$	0,147782	0,144913	0,070002	0,067642	0,031112	0,031321	0,018149	0,019139
	$\hat{\mu}_{SR}$	0,163554	0,154476	0,077473	0,072127	0,034432	0,034435	0,020086	0,021384
	$\hat{\mu}_{RR}$	0,219405	0,209323	0,103928	0,099807	0,046190	0,046121	0,026944	0,028758
	$\hat{\mu}_{GRR}$	0,146895	0,146821	0,069802	0,067505	0,031073	0,031370	0,018135	0,019224
	$\hat{\mu}_{Öneri1}$	0,147782	0,144385	0,070002	0,06732	0,031112	0,031297	0,018149	0,019140
	$\hat{\mu}_{Öneri2}$	0,142651	0,143467	0,067571	0,067227	0,030032	0,030885	0,017518	0,018926
	$\hat{\mu}_{Öneri3}$	0,142651	0,143994	0,067571	0,067201	0,030032	0,030958	0,017518	0,018963

Çizelge 5.4. Değişkenler arasındaki ilişki düşük düzeyde iken model 4 (Z=YW, U=XT, V=MK) için simülasyon sonuçları ($\rho_{yx} = 0.30, \rho_{ym} = 0,25, \rho_{xm} = 0,20$)

N=1000	Tahmin Ediciler	n=50		n=100		n=200		n=300	
P=0.20		Teorik HKO	Deneysel HKO	Teorik HKO	Deneysel HKO	Teorik HKO	Deneysel HKO	Teorik HKO	Deneysel HKO
	$\hat{\mu}_{DP}$	2,034015	2,602827	0,963481	1,475623	0,428214	0,865926	0,249791	0,688868
	$\hat{\mu}_{SR}$	2,856378	3,340711	1,353021	1,614424	0,601343	0,875106	0,350783	0,676352
	$\hat{\mu}_{RR}$	4,994027	5,468303	2,365592	2,268719	1,051374	1,049270	0,613302	0,735212
	$\hat{\mu}_{GRR}$	1,894513	2,213420	0,932686	1,271616	0,422180	0,767330	0,247744	0,628358
	$\hat{\mu}_{Öneri1}$	2,034015	2,530340	0,963481	1,457416	0,428214	0,860573	0,249791	0,685845
	$\hat{\mu}_{Öneri2}$	1,855784	2,356265	0,879055	1,328742	0,390691	0,798768	0,227903	0,626338
	$\hat{\mu}_{Öneri3}$	1,855784	2,445030	0,879055	1,367049	0,390691	0,815405	0,227903	0,641647
P=0.50									
	$\hat{\mu}_{DP}$	0,437961	0,447614	0,207455	0,242626	0,092202	0,121044	0,053785	0,081120
	$\hat{\mu}_{SR}$	0,500271	0,483865	0,23697	0,253042	0,105320	0,125656	0,061437	0,083283
	$\hat{\mu}_{RR}$	1,078889	0,801331	0,511053	0,373248	0,227135	0,186456	0,132495	0,117867
	$\hat{\mu}_{GRR}$	0,43035	0,434712	0,205755	0,230938	0,091867	0,115951	0,053671	0,078249
	$\hat{\mu}_{Öneri1}$	0,437961	0,445295	0,207455	0,241815	0,092202	0,120783	0,053785	0,081007
	$\hat{\mu}_{Öneri2}$	0,408682	0,433269	0,193586	0,253610	0,086038	0,128995	0,050189	0,088388
	$\hat{\mu}_{Öneri3}$	0,408682	0,430574	0,193586	0,251553	0,086038	0,128145	0,050189	0,087749
P=0.80									
	$\hat{\mu}_{DP}$	0,215268	0,213007	0,101969	0,102307	0,04532	0,050082	0,026436	0,031065
	$\hat{\mu}_{SR}$	0,215616	0,233727	0,102134	0,111380	0,045393	0,054853	0,026479	0,034251
	$\hat{\mu}_{RR}$	0,417666	0,373626	0,197842	0,179045	0,087930	0,085977	0,051292	0,054293
	$\hat{\mu}_{GRR}$	0,213371	0,211330	0,101543	0,099840	0,045235	0,048956	0,026408	0,030509
	$\hat{\mu}_{Öneri1}$	0,215268	0,212454	0,101969	0,102078	0,045320	0,050008	0,026436	0,031028
	$\hat{\mu}_{Öneri2}$	0,200913	0,203165	0,095169	0,099371	0,042298	0,048443	0,024674	0,029506
	$\hat{\mu}_{Öneri3}$	0,200913	0,203164	0,095169	0,098904	0,042298	0,048218	0,024674	0,029414

Çizelge 5.5. Değişkenler arasındaki ilişki düşük düzeyde iken model 5 (Z=Y+W, U=X+T, V=M) için simülasyon sonuçları ($\rho_{yx} = 0.30, \rho_{ym} = 0{,}25,\ \rho_{xm} = 0{,}20$)

N=1000	Tahmin Ediciler	n=50		n=100		n=200		n=300	
P=0.20		Teorik HKO	Deneysel HKO	Teorik HKO	Deneysel HKO	Teorik HKO	Deneysel HKO	Teorik HKO	Deneysel HKO
	$\hat{\mu}_{DP}$	0,150711	0,147419	0,071389	0,069097	0,031729	0,0319	0,018508	0,019283
	$\hat{\mu}_{SR}$	0,165177	0,156403	0,078242	0,073556	0,034774	0,034663	0,020285	0,021336
	$\hat{\mu}_{RR}$	0,224038	0,215651	0,106123	0,102963	0,047166	0,046982	0,027513	0,029037
	$\hat{\mu}_{GRR}$	0,149787	0,149699	0,071182	0,069221	0,031688	0,031971	0,018494	0,019366
	$\hat{\mu}_{Öneri1}$	0,150711	0,147251	0,071389	0,069044	0,031729	0,031893	0,018508	0,019283
	$\hat{\mu}_{Öneri2}$	0,145443	0,146397	0,068894	0,068983	0,030620	0,031408	0,017861	0,019043
	$\hat{\mu}_{Öneri3}$	0,145443	0,146901	0,068894	0,068908	0,030620	0,031475	0,017861	0,019076
P=0.50									
	$\hat{\mu}_{DP}$	0,1489	0,145893	0,070532	0,068585	0,031347	0,031636	0,018286	0,019265
	$\hat{\mu}_{SR}$	0,164064	0,155000	0,077714	0,073149	0,03454	0,034712	0,020148	0,021415
	$\hat{\mu}_{RR}$	0,221373	0,211821	0,104861	0,101466	0,046605	0,046892	0,027186	0,028953
	$\hat{\mu}_{GRR}$	0,148001	0,148198	0,07033	0,068712	0,031307	0,031702	0,018272	0,019345
	$\hat{\mu}_{Öneri1}$	0,1489	0,145736	0,070532	0,068537	0,031347	0,031628	0,018286	0,019266
	$\hat{\mu}_{Öneri2}$	0,143756	0,144889	0,068095	0,068485	0,030264	0,031135	0,017654	0,019028
	$\hat{\mu}_{Öneri3}$	0,143756	0,145357	0,068095	0,068425	0,030264	0,031202	0,017654	0,019060
P=0.80									
	$\hat{\mu}_{DP}$	0,147782	0,144534	0,070002	0,067365	0,031112	0,031304	0,018149	0,019139
	$\hat{\mu}_{SR}$	0,163554	0,154476	0,077473	0,072127	0,034432	0,034435	0,020086	0,021384
	$\hat{\mu}_{RR}$	0,219405	0,209323	0,103928	0,099807	0,046190	0,046121	0,026944	0,028758
	$\hat{\mu}_{GRR}$	0,146895	0,146821	0,069802	0,067505	0,031073	0,031370	0,018135	0,019224
	$\hat{\mu}_{Öneri1}$	0,147782	0,144385	0,070002	0,06732	0,031112	0,031297	0,018149	0,019140
	$\hat{\mu}_{Öneri2}$	0,142788	0,143407	0,067636	0,067297	0,030061	0,030898	0,017535	0,018918
	$\hat{\mu}_{Öneri3}$	0,142788	0,143939	0,067636	0,067248	0,030061	0,030964	0,017535	0,018950

Hassas değişken ile yardımcı değişkenler arasındaki ilişki düşük düzeyde ($\rho_{yx} = 0.30$, $\rho_{ym} = 0,25$, $\rho_{xm} = 0,20$) iken modellerin sonuçları

Hassas değişken ile yardımcı değişkenler arasındaki ilişki düşük düzeyde olduğunda literatürde önerilen tahmin ediciler ile bu çalışmada önerilen tahmin ediciler arasında çok büyük farklılık görülmemektedir. Hassas değişken ile yardımcı değişkenler arasındaki ilişki düşük düzeyde iken her bir model için yorumlar aşağıda verilmiştir.

Model 1'de hassas değişken Y için yanıtlar kısmi toplamsal teknikle alınırken, diğer iki yardımcı değişken X ve M için yanıtlar doğrudan alınır. Toplamsal modelde P oranı yükseldikçe tahmin edicilerin hata kareler ortalamasında azalma görülmektedir. Aynı şekilde örneklem büyüklüğü arttıkça tahmin edicilerin HKO'ları da düşmektedir. Bu toplamsal model için en etkin sonuçları önerilen tahmin ediciler $\hat{\mu}_{\text{Öneri2}}$ ve $\hat{\mu}_{\text{Öneri3}}$ verirken, en az etkin sonucu Gupta v.d. [21]'nin diğer tahmin edicisi $\hat{\mu}_{RR}$ vermektedir.

Model 2'de hassas değişken Y için yanıtlar kısmi çarpımsal teknikle alınırken, diğer iki yardımcı değişken X ve M için yanıtlar doğrudan alınır. Çarpımsal modelde tahmin edicilerin etkinlikleri toplamsal modele göre daha düşüktür. Model 2'de diğer modellere göre teorik ve deneysel HKO'larında biraz uzaklaşmalar görülmektedir. Bu modelde P oranı yükseldikçe tahmin edicilerin hata kareler ortalamasında toplamsal modele oranla daha fazla bir azalış görülmektedir. Aynı şekilde örneklem büyüklüğü arttıkça tahmin edicilerin HKO'ları da düşmektedir. Bu çarpımsal model için en etkin sonucu Gupta v.d. [21] tahmin edicisi $\hat{\mu}_{GRR}$, en az etkin sonucu ise yine Gupta v.d. [21]'nin diğer tahmin edicisi $\hat{\mu}_{RR}$ vermektedir. P oranı arttıkça önerdiğimiz tahmin ediciler $\hat{\mu}_{\text{Öneri2}}$ ve $\hat{\mu}_{\text{Öneri3}}$'ün diğer tahmin edicilere göre HKO'larının da azaldığı görülmektedir. P=0,50 ve P=0,80 iken önerdiğimiz tahmin ediciler $\hat{\mu}_{\text{Öneri2}}$ ve $\hat{\mu}_{\text{Öneri3}}$'ün diğer tahmin edicilere göre daha etkin olduğu görülmektedir. Aynı zamanda örneklem büyüklüğü arttıkça da önerdiğimiz tahmin ediciler $\hat{\mu}_{\text{Öneri2}}$ ve $\hat{\mu}_{\text{Öneri3}}$'ün diğer tahmin edicilere göre HKO'larının da azaldığı görülmektedir.

Model 3'te hassas değişken Y, iki yardımcı değişken X ve M için yanıtlar kısmi toplamsal teknikle alınır. Bu toplamsal modelde de P oranı yükseldikçe tahmin edicilerin hata kareler ortalamasında azalma görülmektedir. Aynı şekilde örneklem büyüklüğü arttıkça tahmin edicilerin HKO'ları da düşmektedir. Bu toplamsal model için en etkin sonuçları önerilen tahmin ediciler $\hat{\mu}_{Öneri2}$ ve $\hat{\mu}_{Öneri3}$ verirken, en az etkin sonucu Gupta v.d. [21]'nin tahmin edicisi $\hat{\mu}_{RR}$ vermektedir.

Model 4'te hassas değişken Y, iki yardımcı değişken X ve M için yanıtlar kısmi çarpımsal teknikle alınır. Çarpımsal modelde tahmin edicilerin etkinlikleri toplamsal modele göre daha düşüktür. P oranı yükseldikçe tahmin edicilerin HKO'larında toplamsal modele oranla daha fazla bir azalış görülmektedir. Aynı şekilde örneklem büyüklüğü arttıkça tahmin edicilerin HKO'ları da düşmektedir. Bu çarpımsal model için en etkin sonuçları teorik önerilen tahmin ediciler $\hat{\mu}_{Öneri2}$ ve $\hat{\mu}_{Öneri3}$ verirken, en az etkin sonucu Gupta v.d. [21]'nin diğer tahmin edicisi $\hat{\mu}_{RR}$ vermektedir. Aynı şekilde P oranı arttıkça önerdiğimiz tahmin ediciler $\hat{\mu}_{Öneri2}$ ve $\hat{\mu}_{Öneri3}$'ün diğer tahmin edicilere göre HKO'larının da azaldığı bu modelde de görülmektedir. P=0,50 ve P=0,80 iken önerdiğimiz tahmin ediciler $\hat{\mu}_{Öneri2}$ ve $\hat{\mu}_{Öneri3}$'ün diğer tahmin edicilere göre daha etkin olduğu görülmektedir. Aynı zamanda örneklem büyüklüğü arttıkça da önerdiğimiz tahmin ediciler $\hat{\mu}_{Öneri2}$ ve $\hat{\mu}_{Öneri3}$'ün diğer tahmin edicilere göre HKO'larının azaldığı görülmektedir.

Model 5'te hassas değişken Y, iki yardımcı değişken X ve M için yanıtlar kısmi toplamsal teknikle alınır. Bu toplamsal modelde de P oranı yükseldikçe tahmin edicilerin HKO'larında azalma görülmektedir. Aynı şekilde örneklem büyüklüğü arttıkça tahmin edicilerin HKO'ları da düşmektedir. Bu toplamsal model için en etkin sonuçları önerilen tahmin ediciler $\hat{\mu}_{Öneri2}$ ve $\hat{\mu}_{Öneri3}$ verirken, en az etkin sonucu Gupta v.d. [21]'nin tahmin edicisi $\hat{\mu}_{RR}$ vermektedir.

Çizelge 5.6. Değişkenler arasındaki ilişki orta düzeyde iken model 1 (Z=Y+W, U=X, V=M) için simülasyon sonuçları ($\rho_{yx} = 0{,}58, \rho_{ym} = 0{,}52$ $\rho_{xm} = 0{,}30$)

N=1000	**Tahmin Ediciler**	**n=50**		**n=100**		**n=200**		**n=300**	
P=0.20		**Teorik HKO**	**Deneysel HKO**	**Teorik HKO**	**Deneysel HKO**	**Teorik HKO**	**Deneysel HKO**	**Teorik HKO**	**Deneysel HKO**
	$\hat{\mu}_{DP}$	0,113555	0,109858	0,053789	0,047728	0,023906	0,023274	0,013945	0,013631
	$\hat{\mu}_{SR}$	0,115221	0,111702	0,054578	0,048902	0,024257	0,023652	0,01415	0,013735
	$\hat{\mu}_{RR}$	0,192641	0,196312	0,091251	0,087447	0,040556	0,041907	0,023658	0,023513
	$\hat{\mu}_{GRR}$	0,113029	0,110586	0,053671	0,047599	0,023883	0,023246	0,013937	0,013632
	$\hat{\mu}_{Öneri1}$	0,113555	0,109499	0,053789	0,047657	0,023906	0,023256	0,013945	0,013627
	$\hat{\mu}_{Öneri2}$	0,089823	0,087332	0,042548	0,038031	0,018910	0,018721	0,011031	0,011197
	$\hat{\mu}_{Öneri3}$	0,089823	0,086870	0,042548	0,037886	0,018910	0,018686	0,011031	0,011197
P=0.50									
	$\hat{\mu}_{DP}$	0,112416	0,107862	0,05325	0,046916	0,023666	0,022942	0,013805	0,013417
	$\hat{\mu}_{SR}$	0,114242	0,110014	0,054114	0,048122	0,024051	0,023338	0,01403	0,013542
	$\hat{\mu}_{RR}$	0,191228	0,194085	0,090581	0,086514	0,040258	0,041218	0,023484	0,023228
	$\hat{\mu}_{GRR}$	0,111898	0,108573	0,053133	0,046794	0,023644	0,022915	0,013798	0,013419
	$\hat{\mu}_{Öneri1}$	0,112416	0,107514	0,053250	0,046848	0,023666	0,022925	0,013805	0,013413
	$\hat{\mu}_{Öneri2}$	0,089095	0,086124	0,042203	0,037416	0,018757	0,018482	0,010941	0,011029
	$\hat{\mu}_{Öneri3}$	0,089095	0,086010	0,042203	0,037342	0,018757	0,018406	0,010941	0,011039
P=0.80									
	$\hat{\mu}_{DP}$	0,111096	0,105906	0,052624	0,046492	0,023389	0,022706	0,013643	0,013253
	$\hat{\mu}_{SR}$	0,113179	0,108285	0,053611	0,047716	0,023827	0,023164	0,013899	0,013419
	$\hat{\mu}_{RR}$	0,189973	0,191958	0,089987	0,085745	0,039994	0,041005	0,023330	0,023137
	$\hat{\mu}_{GRR}$	0,110591	0,106587	0,052511	0,046364	0,023366	0,022675	0,013636	0,013252
	$\hat{\mu}_{Öneri1}$	0,111096	0,105567	0,052624	0,046425	0,023389	0,022688	0,013643	0,013249
	$\hat{\mu}_{Öneri2}$	0,088250	0,085042	0,041803	0,037397	0,018579	0,018299	0,010838	0,010952
	$\hat{\mu}_{Öneri3}$	0,088250	0,084905	0,041803	0,037304	0,018579	0,018314	0,010838	0,010937

Çizelge 5.7. Değişkenler arasındaki ilişki orta düzeyde iken model 2 (Z=YW, U=X, V=M) için simülasyon sonuçları ($\rho_{yx} = 0{,}58, \rho_{ym} = 0{,}52$ $\rho_{xm} = 0{,}30$)

N=1000	**Tahmin Ediciler**	**n=50**		**n=100**		**n=200**		**n=300**	
P=0.20		**Teorik HKO**	**Deneysel HKO**	**Teorik HKO**	**Deneysel HKO**	**Teorik HKO**	**Deneysel HKO**	**Teorik HKO**	**Deneysel HKO**
	$\hat{\mu}_{DP}$	3,106915	2,172877	1,471697	1,393703	0,654087	0,918847	0,381551	0,793931
	$\hat{\mu}_{SR}$	3,107343	2,163763	1,471899	1,39593	0,654178	0,919184	0,381604	0,796422
	$\hat{\mu}_{RR}$	3,211910	2,377218	1,521431	1,482995	0,676192	0,965269	0,394445	0,812019
	$\hat{\mu}_{GRR}$	2,834960	1,960211	1,407834	1,135316	0,641172	0,768166	0,377121	0,699315
	$\hat{\mu}_{Öneri1}$	3,106915	2,179426	1,471697	1,396180	0,654087	0,919902	0,381551	0,794446
	$\hat{\mu}_{Öneri2}$	3,042551	2,188866	1,441208	1,353042	0,640537	0,906959	0,373647	0,783524
	$\hat{\mu}_{Öneri3}$	3,042551	2,502580	1,441208	1,178067	0,640537	0,852105	0,373647	0,724938
P=0.50									
	$\hat{\mu}_{DP}$	0,764763	0,398284	0,362256	0,208687	0,161003	0,110342	0,093918	0,081794
	$\hat{\mu}_{SR}$	0,766332	0,397605	0,362999	0,207105	0,161333	0,110602	0,094111	0,082015
	$\hat{\mu}_{RR}$	0,847834	0,526849	0,401606	0,258924	0,178491	0,132797	0,104120	0,093958
	$\hat{\mu}_{GRR}$	0,742600	0,388256	0,357215	0,188004	0,160000	0,099893	0,093576	0,075658
	$\hat{\mu}_{Öneri1}$	0,764763	0,398598	0,362256	0,208584	0,161003	0,110324	0,093918	0,081776
	$\hat{\mu}_{Öneri2}$	0,732077	0,378593	0,346774	0,198271	0,154122	0,105353	0,089904	0,078255
	$\hat{\mu}_{Öneri3}$	0,732077	0,578587	0,346774	0,265441	0,154122	0,12491	0,089904	0,087898
P=0.80									
	$\hat{\mu}_{DP}$	0,260596	0,172867	0,12344	0,076440	0,054862	0,038303	0,032003	0,023127
	$\hat{\mu}_{SR}$	0,262841	0,171448	0,124504	0,077596	0,055335	0,038619	0,032279	0,023431
	$\hat{\mu}_{RR}$	0,340442	0,265278	0,161262	0,117322	0,071672	0,057328	0,041809	0,033926
	$\hat{\mu}_{GRR}$	0,257868	0,174586	0,122826	0,074378	0,054741	0,037342	0,031962	0,022584
	$\hat{\mu}_{Öneri1}$	0,260596	0,172432	0,12344	0,076342	0,054862	0,038271	0,032003	0,023113
	$\hat{\mu}_{Öneri2}$	0,237603	0,150866	0,112549	0,065708	0,050022	0,033012	0,029179	0,020656
	$\hat{\mu}_{Öneri3}$	0,237603	0,160638	0,112549	0,069341	0,050022	0,034077	0,029179	0,021398

Çizelge 5.8. Değişkenler arasındaki ilişki orta düzeyde iken model 3 (Z=Y+W, U=X+T, V=M+K) için simülasyon sonuçları ($\rho_{yx} = 0{,}58, \rho_{ym} = 0{,}52\ \rho_{xm} = 0{,}30$)

N=1000	**Tahmin Ediciler**	**n=50**		**n=100**		**n=200**		**n=300**	
P=0.20		**Teorik HKO**	**Deneysel HKO**	**Teorik HKO**	**Deneysel HKO**	**Teorik HKO**	**Deneysel HKO**	**Teorik HKO**	**Deneysel HKO**
	$\hat{\mu}_{DP}$	0,113205	0,11003	0,053623	0,048135	0,023833	0,023255	0,013902	0,013519
	$\hat{\mu}_{SR}$	0,115162	0,112149	0,054550	0,049182	0,024245	0,023715	0,014143	0,013670
	$\hat{\mu}_{RR}$	0,194646	0,199192	0,092201	0,088402	0,040978	0,042040	0,023904	0,023548
	$\hat{\mu}_{GRR}$	0,112682	0,110215	0,053506	0,047481	0,023809	0,023171	0,013894	0,013509
	$\hat{\mu}_{Öneri1}$	0,113205	0,109175	0,053623	0,047519	0,023833	0,023169	0,013902	0,013496
	$\hat{\mu}_{Öneri2}$	0,088545	0,087508	0,042527	0,03805	0,018901	0,018730	0,011026	0,011110
	$\hat{\mu}_{Öneri3}$	0,088545	0,085576	0,042527	0,037772	0,018901	0,018491	0,011026	0,011114
P=0.50									
	$\hat{\mu}_{DP}$	0,112004	0,108088	0,053054	0,047515	0,023580	0,023054	0,013755	0,013303
	$\hat{\mu}_{SR}$	0,114005	0,110057	0,054002	0,048423	0,024001	0,023485	0,014001	0,013422
	$\hat{\mu}_{RR}$	0,192433	0,195424	0,091152	0,087431	0,040512	0,041629	0,023632	0,023151
	$\hat{\mu}_{GRR}$	0,111490	0,108260	0,052939	0,046873	0,023557	0,022962	0,013747	0,013283
	$\hat{\mu}_{Öneri1}$	0,112004	0,107206	0,053054	0,046907	0,023580	0,022964	0,013755	0,013273
	$\hat{\mu}_{Öneri2}$	0,088532	0,086010	0,041936	0,037406	0,018638	0,018588	0,010872	0,010957
	$\hat{\mu}_{Öneri3}$	0,088532	0,085566	0,041936	0,037419	0,018638	0,018198	0,010872	0,011008
P=0.80									
	$\hat{\mu}_{DP}$	0,110744	0,10655	0,052458	0,047113	0,023315	0,022735	0,0136	0,013207
	$\hat{\mu}_{SR}$	0,112917	0,108592	0,053487	0,047861	0,023772	0,023129	0,013867	0,013337
	$\hat{\mu}_{RR}$	0,190587	0,192967	0,090278	0,086297	0,040124	0,040954	0,023405	0,022990
	$\hat{\mu}_{GRR}$	0,110242	0,106803	0,052345	0,046517	0,023292	0,022640	0,013593	0,013194
	$\hat{\mu}_{Öneri1}$	0,110744	0,105765	0,052458	0,046544	0,023315	0,022643	0,013600	0,013184
	$\hat{\mu}_{Öneri2}$	0,087901	0,085190	0,041637	0,037409	0,018505	0,018280	0,010795	0,010956
	$\hat{\mu}_{Öneri3}$	0,087901	0,084582	0,041637	0,037298	0,018505	0,018315	0,010795	0,010889

Çizelge 5.9. Değişkenler arasındaki ilişki orta düzeyde iken model 4 (Z=YW, U=XT, V=MK) için simülasyon sonuçları ($\rho_{yx} = 0{,}58, \rho_{ym} = 0{,}52\ \rho_{xm} = 0{,}30$)

N=1000	Tahmin Ediciler	n=50		n=100		n=200		n=300	
P=0.20		Teorik HKO	Deneysel HKO	Teorik HKO	Deneysel HKO	Teorik HKO	Deneysel HKO	Teorik HKO	Deneysel HKO
	$\hat{\mu}_{DP}$	1,639618	2,217419	0,776661	1,337632	0,345183	0,846361	0,201357	0,707263
	$\hat{\mu}_{SR}$	2,431502	2,956898	1,151764	1,616396	0,511895	0,927585	0,298606	0,730346
	$\hat{\mu}_{RR}$	5,042049	5,220076	2,388339	2,497741	1,061484	1,235667	0,619199	0,873860
	$\hat{\mu}_{GRR}$	1,552135	1,839513	0,757607	1,119910	0,341473	0,748768	0,200100	0,648362
	$\hat{\mu}_{Öneri1}$	1,639618	2,144153	0,776661	1,314029	0,345183	0,839137	0,201357	0,703001
	$\hat{\mu}_{Öneri2}$	1,427260	1,958402	0,676402	1,165194	0,300476	0,733674	0,175278	0,631640
	$\hat{\mu}_{Öneri3}$	1,427260	1,850613	0,676402	1,145936	0,300476	0,778879	0,175278	0,670408
P=0.50									
	$\hat{\mu}_{DP}$	0,331456	0,344311	0,157005	0,168672	0,06978	0,080513	0,040705	0,050485
	$\hat{\mu}_{SR}$	0,416378	0,357243	0,197232	0,173039	0,087659	0,079966	0,051134	0,048783
	$\hat{\mu}_{RR}$	1,038642	0,647291	0,491988	0,305170	0,218661	0,139831	0,127553	0,079041
	$\hat{\mu}_{GRR}$	0,327119	0,340494	0,156040	0,163432	0,069590	0,078231	0,040641	0,049068
	$\hat{\mu}_{Öneri1}$	0,331456	0,341664	0,157005	0,167921	0,069780	0,080335	0,040705	0,050380
	$\hat{\mu}_{Öneri2}$	0,275394	0,306659	0,130450	0,148496	0,057978	0,075798	0,033820	0,051385
	$\hat{\mu}_{Öneri3}$	0,275394	0,299721	0,130450	0,145392	0,057978	0,076390	0,033820	0,056557
P=0.80									
	$\hat{\mu}_{DP}$	0,15454	0,162439	0,073203	0,072814	0,032535	0,034617	0,018979	0,020783
	$\hat{\mu}_{SR}$	0,155129	0,168368	0,073482	0,074672	0,032659	0,035269	0,019051	0,021149
	$\hat{\mu}_{RR}$	0,378508	0,307780	0,179293	0,136176	0,079686	0,062301	0,046483	0,036973
	$\hat{\mu}_{GRR}$	0,153571	0,162575	0,072986	0,071841	0,032492	0,034218	0,018964	0,020559
	$\hat{\mu}_{Öneri1}$	0,154540	0,16184	0,073203	0,072648	0,032535	0,034578	0,018979	0,020764
	$\hat{\mu}_{Öneri2}$	0,129825	0,137376	0,061496	0,060076	0,027332	0,029583	0,015943	0,018522
	$\hat{\mu}_{Öneri3}$	0,129825	0,125537	0,061496	0,057797	0,027332	0,030165	0,015943	0,018601

Çizelge 5.10. Değişkenler arasındaki ilişki orta düzeyde iken model 5 (Z=Y+W, U=X+T, V=M) için simülasyon sonuçları ($\rho_{yx} = 0{,}58, \rho_{ym} = 0{,}52\ \rho_{xm} = 0{,}30$)

N=1000	**Tahmin Ediciler**	**n=50**		**n=100**		**n=200**		**n=300**	
P=0.20		**Teorik HKO**	**Deneysel HKO**	**Teorik HKO**	**Deneysel HKO**	**Teorik HKO**	**Deneysel HKO**	**Teorik HKO**	**Deneysel HKO**
	$\hat{\mu}_{DP}$	0,113205	0,109536	0,053623	0,047591	0,023833	0,023185	0,013902	0,013499
	$\hat{\mu}_{SR}$	0,115162	0,111855	0,05455	0,048953	0,024245	0,023608	0,014143	0,013612
	$\hat{\mu}_{RR}$	0,194646	0,199192	0,092201	0,088402	0,040978	0,042040	0,023904	0,023548
	$\hat{\mu}_{GRR}$	0,112682	0,110215	0,053506	0,047481	0,023809	0,023171	0,013894	0,013509
	$\hat{\mu}_{Öneri1}$	0,113205	0,109175	0,053623	0,047519	0,023833	0,023169	0,013902	0,013496
	$\hat{\mu}_{Öneri2}$	0,088676	0,087530	0,042005	0,038013	0,018669	0,018708	0,010890	0,011155
	$\hat{\mu}_{Öneri3}$	0,088676	0,086091	0,042005	0,037794	0,018669	0,018581	0,010890	0,011134
P=0.50									
	$\hat{\mu}_{DP}$	0,112004	0,107551	0,053054	0,046976	0,02358	0,022981	0,013755	0,013277
	$\hat{\mu}_{SR}$	0,114005	0,109939	0,054002	0,04833	0,024001	0,023441	0,014001	0,013400
	$\hat{\mu}_{RR}$	0,192433	0,195424	0,091152	0,087431	0,040512	0,041629	0,023632	0,023151
	$\hat{\mu}_{GRR}$	0,111490	0,108260	0,052939	0,046873	0,023557	0,022962	0,013747	0,013283
	$\hat{\mu}_{Öneri1}$	0,112004	0,107206	0,053054	0,046907	0,02358	0,022964	0,013755	0,013273
	$\hat{\mu}_{Öneri2}$	0,088657	0,086093	0,041996	0,037465	0,018665	0,018541	0,010888	0,010976
	$\hat{\mu}_{Öneri3}$	0,088657	0,085769	0,041996	0,037289	0,018665	0,018280	0,010888	0,011030
P=0.80									
	$\hat{\mu}_{DP}$	0,110744	0,106105	0,052458	0,04661	0,023315	0,022660	0,013600	0,013188
	$\hat{\mu}_{SR}$	0,112917	0,108592	0,053487	0,047861	0,023772	0,023129	0,013867	0,013337
	$\hat{\mu}_{RR}$	0,190587	0,192967	0,090278	0,086297	0,040124	0,040954	0,023405	0,022990
	$\hat{\mu}_{GRR}$	0,110242	0,106803	0,052345	0,046517	0,023292	0,022640	0,013593	0,013194
	$\hat{\mu}_{Öneri1}$	0,110744	0,105765	0,052458	0,046544	0,023315	0,022643	0,013600	0,013184
	$\hat{\mu}_{Öneri2}$	0,088112	0,085199	0,041737	0,037448	0,018550	0,018298	0,010821	0,010937
	$\hat{\mu}_{Öneri3}$	0,088112	0,084651	0,041737	0,037242	0,018550	0,018290	0,010821	0,010925

Hassas değişken ile yardımcı değişkenler arasındaki ilişki orta düzeyde ($\rho_{yx} = 0,58$, $\rho_{ym} = 0,52$, $\rho_{xm} = 0,30$) iken Modellerin sonuçları

Hassas değişken ile yardımcı değişkenler arasındaki ilişki orta düzeyde olduğunda literatürde önerilen tahmin ediciler ile bu çalışmada önerilen tahmin edicilerin hata kareler ortalamalarındaki arasındaki farklılık düşük düzeyde olan ilişkili duruma göre biraz daha net görülmektedir. Değişkenler arasındaki ilişkinin artmasıyla tahmin edicilerin hata kareler ortalamasında azalma olduğu görülmektedir. Değişkenler arasındaki ilişki düzeyinin artmasıyla çarpımsal modellerde de daha etkin sonuçlar alındığı görülmüştür. Hassas değişken ile yardımcı değişkenler arasındaki ilişki orta düzeyde iken her bir model için yorumlar aşağıda verilmiştir.

Model 1'de P oranı yükseldikçe tahmin edicilerin HKO'larında azalma görülmektedir. Aynı şekilde örneklem büyüklüğü arttıkça tahmin edicilerin HKO'ları da düşmektedir. Bu toplamsal model için en etkin sonuçları önerilen tahmin ediciler $\hat{\mu}_{Öneri2}$ ve $\hat{\mu}_{Öneri3}$ verirken, en az etkin sonucu Gupta v.d. [21]'nin tahmin edicisi $\hat{\mu}_{RR}$ vermektedir.

Model 2 çarpımsal bir modeldir ve çarpımsal modelde tahmin edicilerin etkinlikleri toplamsal modele göre daha düşüktür. Model 2'de diğer modellere göre teorik ve deneysel HKO'larında biraz uzaklaşmalar görülmektedir. Bu modelde P oranı yükseldikçe tahmin edicilerin HKO'larında toplamsal modele oranla daha fazla bir azalış görülmektedir. Aynı şekilde örneklem büyüklüğü arttıkça tahmin edicilerin HKO'ları da düşmektedir. Bu çarpımsal model için en etkin sonucu Gupta v.d. [21] tahmin edicisi $\hat{\mu}_{GRR}$, en az etkin sonucu ise yine Gupta v.d. [21]'nin diğer tahmin edicisi $\hat{\mu}_{RR}$ vermektedir. P oranı arttıkça önerdiğimizin tahmin ediciler $\hat{\mu}_{Öneri2}$ ve $\hat{\mu}_{Öneri3}$'ün diğer tahmin edicilere göre HKO'larının azaldığı görülmektedir. P=0,50 ve P=0,80 iken önerdiğimiz tahmin ediciler $\hat{\mu}_{Öneri2}$ ve $\hat{\mu}_{Öneri3}$'ün diğer tahmin edicilere göre daha etkin olduğu görülmektedir. Aynı zamanda örneklem büyüklüğü arttıkça da önerdiğimiz tahmin ediciler $\hat{\mu}_{Öneri2}$ ve $\hat{\mu}_{Öneri3}$'ün diğer tahmin edicilere göre HKO'larının azaldığı görülmektedir.

Model 3'te P oranı yükseldikçe tahmin edicilerin HKO'larında azalma görülmektedir. Aynı şekilde örneklem büyüklüğü arttıkça tahmin edicilerin HKO'ları da düşmektedir.

Bu toplamsal model için en etkin sonuçları önerilen tahmin ediciler $\hat{\mu}_{Öneri2}$ ve $\hat{\mu}_{Öneri3}$ verirken, en az etkin sonucu Gupta v.d. [21]'nin tahmin edicisi $\hat{\mu}_{RR}$ vermektedir.

Model 4'te P oranı yükseldikçe tahmin edicilerin HKO'larında toplamsal modele oranla daha fazla bir azalış görülmektedir. Aynı şekilde örneklem büyüklüğü arttıkça tahmin edicilerin HKO'ları da düşmektedir. Bu çarpımsal model için en etkin sonucu Gupta v.d. [21] tahmin edicisi $\hat{\mu}_{GRR}$, en az etkin sonucu ise yine Gupta v.d. [21]'nin diğer tahmin edicisi $\hat{\mu}_{RR}$ vermektedir. P oranı arttıkça önerdiğimizin tahmin ediciler $\hat{\mu}_{Öneri2}$ ve $\hat{\mu}_{Öneri3}$'ün diğer tahmin edicilere göre HKO'larının azaldığı görülmektedir. P=0,50 ve P=0,80 iken önerdiğimiz tahmin ediciler $\hat{\mu}_{Öneri2}$ ve $\hat{\mu}_{Öneri3}$'ün diğer tahmin edicilere göre daha etkin olduğu görülmektedir. Aynı zamanda örneklem büyüklüğü arttıkça da önerdiğimiz tahmin ediciler $\hat{\mu}_{Öneri2}$ ve $\hat{\mu}_{Öneri3}$'ün diğer tahmin edicilere göre HKO'larının azaldığı görülmektedir.

Model 5'te hassas değişken Y, iki yardımcı değişken X ve M için yanıtlar kısmi toplamsal teknikle alınır. Bu toplamsal modelde de P oranı yükseldikçe tahmin edicilerin HKO'larında azalma görülmektedir. Aynı şekilde örneklem büyüklüğü arttıkça tahmin edicilerin HKO'ları da düşmektedir. Bu toplamsal model için en etkin sonuçları önerilen tahmin ediciler $\hat{\mu}_{Öneri2}$ ve $\hat{\mu}_{Öneri3}$ verirken, en az etkin sonucu Gupta v.d. [21]'nin tahmin edicisi $\hat{\mu}_{RR}$ vermektedir.

Çizelge 5.11. Değişkenler arasındaki ilişki yüksek düzeyde iken model 1 (Z=Y+W, U=X, V=M) için simülasyon sonuçları ($\rho_{yx} = 0{,}87, \rho_{ym} = 0{,}70, \rho_{xm} = 0{,}50$)

N=1000	Tahmin Ediciler	n=50		n=100		n=200		n=300	
P=0.20		Teorik HKO	Deneysel HKO	Teorik HKO	Deneysel HKO	Teorik HKO	Deneysel HKO	Teorik HKO	Deneysel HKO
	$\hat{\mu}_{DP}$	0,033371	0,03343	0,015807	0,016146	0,007026	0,006854	0,004098	0,004264
	$\hat{\mu}_{SR}$	0,043416	0,043539	0,020566	0,021007	0,00914	0,008578	0,005332	0,005441
	$\hat{\mu}_{RR}$	0,108555	0,109194	0,051421	0,053582	0,022854	0,024389	0,013331	0,014447
	$\hat{\mu}_{GRR}$	0,033326	0,033461	0,015797	0,016072	0,007024	0,006854	0,004098	0,004257
	$\hat{\mu}_{Öneri1}$	0,033371	0,033279	0,015807	0,016089	0,007026	0,006855	0,004098	0,004262
	$\hat{\mu}_{Öneri2}$	0,005055	0,005527	0,002394	0,002533	0,001064	0,001064	0,000621	0,000670
	$\hat{\mu}_{Öneri3}$	0,005055	0,005964	0,002394	0,002660	0,001064	0,001093	0,000621	0,000674
P=0.50									
	$\hat{\mu}_{DP}$	0,032801	0,032609	0,015537	0,015829	0,006905	0,006782	0,004028	0,004195
	$\hat{\mu}_{SR}$	0,042246	0,042084	0,020011	0,020414	0,008894	0,00845	0,005188	0,005314
	$\hat{\mu}_{RR}$	0,107834	0,10846	0,051079	0,053194	0,022702	0,024145	0,013243	0,014314
	$\hat{\mu}_{GRR}$	0,032757	0,032615	0,015528	0,015758	0,006904	0,006782	0,004028	0,004189
	$\hat{\mu}_{Öneri1}$	0,032801	0,032445	0,015537	0,015775	0,006905	0,006783	0,004028	0,004193
	$\hat{\mu}_{Öneri2}$	0,004795	0,005244	0,002271	0,002369	0,001009	0,001008	0,000589	0,000641
	$\hat{\mu}_{Öneri3}$	0,004795	0,005634	0,002271	0,002498	0,001009	0,001033	0,000589	0,000646
P=0.80									
	$\hat{\mu}_{DP}$	0,032574	0,032153	0,01543	0,015262	0,006858	0,006721	0,00400	0,004129
	$\hat{\mu}_{SR}$	0,041494	0,040973	0,019655	0,019569	0,008736	0,008247	0,005096	0,005158
	$\hat{\mu}_{RR}$	0,107473	0,108172	0,050908	0,052523	0,022626	0,024120	0,013198	0,014300
	$\hat{\mu}_{GRR}$	0,032531	0,032159	0,015420	0,015186	0,006856	0,006721	0,004000	0,004123
	$\hat{\mu}_{Öneri1}$	0,032574	0,031998	0,015430	0,015208	0,006858	0,006722	0,004000	0,004128
	$\hat{\mu}_{Öneri2}$	0,004820	0,005170	0,002283	0,002266	0,001015	0,000992	0,000592	0,000625
	$\hat{\mu}_{Öneri3}$	0,004820	0,005543	0,002283	0,002383	0,001015	0,00102	0,000592	0,000628

Çizelge 5.12. Değişkenler arasındaki ilişki yüksek düzeyde iken model 2 (Z=YW, U=X, V=M) için simülasyon sonuçları ($\rho_{yx} = 0{,}87, \rho_{ym} = 0{,}70, \rho_{xm} = 0{,}50$)

N=1000	**Tahmin Ediciler**	**n=50**		**n=100**		**n=200**		**n=300**	
P=0.20		**Teorik HKO**	**Deneysel HKO**	**Teorik HKO**	**Deneysel HKO**	**Teorik HKO**	**Deneysel HKO**	**Teorik HKO**	**Deneysel HKO**
	$\hat{\mu}_{DP}$	2,892099	2,004246	1,369942	1,340125	0,608863	0,945655	0,35517	0,863866
	$\hat{\mu}_{SR}$	2,927677	2,009146	1,386794	1,376038	0,616353	0,955126	0,359539	0,868669
	$\hat{\mu}_{RR}$	2,991919	2,192723	1,417225	1,394884	0,629878	0,976187	0,367429	0,884881
	$\hat{\mu}_{GRR}$	2,657125	1,810069	1,314949	1,096015	0,597761	0,801744	0,351364	0,771490
	$\hat{\mu}_{Öneri1}$	2,892099	2,035712	1,369942	1,350993	0,608863	0,949894	0,355170	0,866242
	$\hat{\mu}_{Öneri2}$	2,847312	2,043776	1,348727	1,311002	0,599434	0,937528	0,349670	0,854258
	$\hat{\mu}_{Öneri3}$	2,847312	2,095279	1,348727	1,295528	0,599434	1,727090	0,349670	1,308543
P=0.50									
	$\hat{\mu}_{DP}$	0,672915	0,304832	0,318749	0,178989	0,141666	0,101718	0,082639	0,081392
	$\hat{\mu}_{SR}$	0,685078	0,311345	0,324511	0,18359	0,144227	0,104354	0,084132	0,082243
	$\hat{\mu}_{RR}$	0,752036	0,416602	0,356228	0,223796	0,158323	0,122179	0,092355	0,095246
	$\hat{\mu}_{GRR}$	0,655889	0,300142	0,314883	0,163947	0,140898	0,092967	0,082377	0,075949
	$\hat{\mu}_{Öneri1}$	0,672915	0,308589	0,318749	0,180496	0,141666	0,102253	0,082639	0,081690
	$\hat{\mu}_{Öneri2}$	0,639000	0,284945	0,302684	0,167220	0,134526	0,095883	0,078474	0,077046
	$\hat{\mu}_{Öneri3}$	0,639000	0,529735	0,302684	0,264491	0,134526	0,135025	0,078474	0,101499
P=0.80									
	$\hat{\mu}_{DP}$	0,184793	0,092312	0,087533	0,045665	0,038904	0,02303	0,022694	0,015121
	$\hat{\mu}_{SR}$	0,193178	0,100122	0,091505	0,050387	0,040669	0,024615	0,023724	0,015977
	$\hat{\mu}_{RR}$	0,260546	0,171915	0,123416	0,084748	0,054852	0,041317	0,031997	0,026568
	$\hat{\mu}_{GRR}$	0,183427	0,095526	0,087226	0,045060	0,038843	0,022579	0,022673	0,014818
	$\hat{\mu}_{Öneri1}$	0,184793	0,09296	0,087533	0,045916	0,038904	0,023132	0,022694	0,015177
	$\hat{\mu}_{Öneri2}$	0,157670	0,063156	0,074686	0,031204	0,033194	0,016857	0,019363	0,011448
	$\hat{\mu}_{Öneri3}$	0,157670	0,072588	0,074686	0,037277	0,033194	0,019133	0,019363	0,013047

Çizelge 5.13. Değişkenler arasındaki ilişki yüksek düzeyde iken model 3 (Z=Y+W, U=X+T, V=M+K) için simülasyon sonuçları ($\rho_{yx} = 0{,}87, \rho_{ym} = 0{,}70,\ \rho_{xm} = 0{,}50$)

N=1000	**Tahmin Ediciler**	**n=50**		**n=100**		**n=200**		**n=300**	
P=0.20		**Teorik HKO**	**Deneysel HKO**	**Teorik HKO**	**Deneysel HKO**	**Teorik HKO**	**Deneysel HKO**	**Teorik HKO**	**Deneysel HKO**
	$\hat{\mu}_{DP}$	0,034066	0,035229	0,016136	0,01666	0,007172	0,007073	0,004184	0,004307
	$\hat{\mu}_{SR}$	0,043075	0,043449	0,020404	0,020908	0,009068	0,008615	0,00529	0,005383
	$\hat{\mu}_{RR}$	0,111671	0,114687	0,052897	0,054889	0,02351	0,024942	0,013714	0,014673
	$\hat{\mu}_{GRR}$	0,034019	0,034778	0,016126	0,016373	0,00717	0,007066	0,004183	0,004289
	$\hat{\mu}_{Öneri1}$	0,034066	0,034587	0,016136	0,016383	0,007172	0,007062	0,004184	0,004291
	$\hat{\mu}_{Öneri2}$	0,006544	0,007115	0,003100	0,003161	0,001378	0,001374	0,000804	0,000843
	$\hat{\mu}_{Öneri3}$	0,006544	0,007523	0,003100	0,003275	0,001378	0,001403	0,000804	0,000846
P=0.50									
	$\hat{\mu}_{DP}$	0,033243	0,033908	0,015747	0,016315	0,006999	0,006987	0,004083	0,004166
	$\hat{\mu}_{SR}$	0,042029	0,042131	0,019908	0,020361	0,008848	0,008512	0,005161	0,005208
	$\hat{\mu}_{RR}$	0,109851	0,112089	0,052034	0,054351	0,023126	0,024625	0,01349	0,014449
	$\hat{\mu}_{GRR}$	0,033198	0,033430	0,015737	0,016035	0,006997	0,006975	0,004082	0,004146
	$\hat{\mu}_{Öneri1}$	0,033243	0,033264	0,015747	0,016059	0,006999	0,006979	0,004083	0,004152
	$\hat{\mu}_{Öneri2}$	0,005790	0,006163	0,002742	0,002722	0,001219	0,001229	0,000711	0,000716
	$\hat{\mu}_{Öneri3}$	0,005790	0,006519	0,002742	0,002846	0,001219	0,001256	0,000711	0,000720
P=0.80									
	$\hat{\mu}_{DP}$	0,032634	0,032987	0,015458	0,015688	0,00687	0,006761	0,004008	0,004083
	$\hat{\mu}_{SR}$	0,041200	0,041138	0,019516	0,019617	0,008674	0,008242	0,00506	0,005101
	$\hat{\mu}_{RR}$	0,108528	0,109129	0,051408	0,053094	0,022848	0,024138	0,013328	0,014144
	$\hat{\mu}_{GRR}$	0,032591	0,032580	0,015449	0,015422	0,006868	0,006755	0,004007	0,004067
	$\hat{\mu}_{Öneri1}$	0,032634	0,032395	0,015458	0,015432	0,006870	0,006752	0,004008	0,004069
	$\hat{\mu}_{Öneri2}$	0,005215	0,005469	0,002470	0,002394	0,001098	0,001065	0,00064	0,000666
	$\hat{\mu}_{Öneri3}$	0,005215	0,00582	0,002470	0,002506	0,001098	0,00109	0,00064	0,000668

Çizelge 5.14. Değişkenler arasındaki ilişki yüksek düzeyde iken model 4 (Z=YW, U=XT, V=MK) için simülasyon sonuçları ($\rho_{yx} = 0{,}87, \rho_{ym} = 0{,}70, \rho_{xm} = 0{,}50$)

N=1000	Tahmin Ediciler	n=50		n=100		n=200		n=300	
P=0.20		Teorik HKO	Deneysel HKO	Teorik HKO	Deneysel HKO	Teorik HKO	Deneysel HKO	Teorik HKO	Deneysel HKO
	$\hat{\mu}_{DP}$	1,332488	1,760546	0,631179	1,17139	0,280524	0,766421	0,163639	0,666975
	$\hat{\mu}_{SR}$	2,289182	2,100826	1,08435	1,287946	0,481933	0,779165	0,281128	0,645943
	$\hat{\mu}_{RR}$	4,720249	3,421448	2,235908	1,867956	0,993737	0,952431	0,57968	0,680180
	$\hat{\mu}_{GRR}$	1,274746	1,486824	0,618663	1,001689	0,278093	0,687747	0,162816	0,618489
	$\hat{\mu}_{Öneri1}$	1,332488	1,717324	0,631179	1,154163	0,280524	0,760292	0,163639	0,663185
	$\hat{\mu}_{Öneri2}$	1,163475	1,567896	0,551120	1,040300	0,244942	0,685943	0,142883	0,614375
	$\hat{\mu}_{Öneri3}$	1,163475	1,655966	0,551120	1,067049	0,244942	0,711652	0,142883	0,643140
P=0.50									
	$\hat{\mu}_{DP}$	0,215012	0,216552	0,101848	0,120344	0,045266	0,060828	0,026405	0,040757
	$\hat{\mu}_{SR}$	0,352252	0,217646	0,166856	0,116465	0,074158	0,058152	0,043259	0,038821
	$\hat{\mu}_{RR}$	0,908382	0,379916	0,430286	0,191993	0,191238	0,089325	0,111556	0,048766
	$\hat{\mu}_{GRR}$	0,213201	0,210453	0,101446	0,116098	0,045187	0,058792	0,026378	0,039555
	$\hat{\mu}_{Öneri1}$	0,215012	0,214737	0,101848	0,119791	0,045266	0,060662	0,026405	0,040684
	$\hat{\mu}_{Öneri2}$	0,179510	0,182157	0,085031	0,102752	0,037791	0,056121	0,022045	0,041446
	$\hat{\mu}_{Öneri3}$	0,179510	0,188775	0,085031	0,107672	0,037791	0,058729	0,022045	0,043419
P=0.80									
	$\hat{\mu}_{DP}$	0,069377	0,072151	0,032863	0,036394	0,014606	0,015562	0,008520	0,009512
	$\hat{\mu}_{SR}$	0,085279	0,075813	0,040395	0,037388	0,017953	0,016112	0,010473	0,009893
	$\hat{\mu}_{RR}$	0,290076	0,135416	0,137404	0,070094	0,061069	0,031066	0,035623	0,018684
	$\hat{\mu}_{GRR}$	0,069182	0,071697	0,032819	0,036137	0,014597	0,015472	0,008517	0,009466
	$\hat{\mu}_{Öneri1}$	0,069377	0,071614	0,032863	0,036277	0,014606	0,015543	0,008520	0,009507
	$\hat{\mu}_{Öneri2}$	0,050838	0,046862	0,024081	0,021649	0,010703	0,010198	0,006243	0,006490
	$\hat{\mu}_{Öneri3}$	0,050838	0,047732	0,024081	0,022307	0,010703	0,010456	0,006243	0,006637

Çizelge 5.15. Değişkenler arasındaki ilişki yüksek düzeyde iken model 5 (Z=Y+W, U=X+T, V=M) için simülasyon sonuçları ($\rho_{yx} = 0{,}87, \rho_{ym} = 0{,}70, \rho_{xm} = 0{,}50$)

N=1000	Tahmin Ediciler	n=50		n=100		n=200		n=300	
P=0.20		Teorik HKO	Deneysel HKO	Teorik HKO	Deneysel HKO	Teorik HKO	Deneysel HKO	Teorik HKO	Deneysel HKO
	$\hat{\mu}_{DP}$	0,034066	0,034735	0,016136	0,016455	0,007172	0,007069	0,004184	0,004296
	$\hat{\mu}_{SR}$	0,043075	0,043451	0,020404	0,020849	0,009068	0,008596	0,005290	0,005360
	$\hat{\mu}_{RR}$	0,111671	0,114687	0,052897	0,054889	0,023510	0,024942	0,013714	0,014673
	$\hat{\mu}_{GRR}$	0,034019	0,034778	0,016126	0,016373	0,007170	0,007066	0,004183	0,004289
	$\hat{\mu}_{Öneri1}$	0,034066	0,034587	0,016136	0,016383	0,007172	0,007062	0,004184	0,004291
	$\hat{\mu}_{Öneri2}$	0,005997	0,006535	0,002841	0,002879	0,001262	0,001239	0,000736	0,000763
	$\hat{\mu}_{Öneri3}$	0,005997	0,006953	0,002841	0,002998	0,001262	0,001265	0,000736	0,000764
P=0.50									
	$\hat{\mu}_{DP}$	0,033243	0,033390	0,015747	0,016115	0,006999	0,00698	0,004083	0,004153
	$\hat{\mu}_{SR}$	0,042029	0,042129	0,019908	0,020372	0,008848	0,008516	0,005161	0,005212
	$\hat{\mu}_{RR}$	0,109851	0,112089	0,052034	0,054351	0,023126	0,024625	0,013490	0,014449
	$\hat{\mu}_{GRR}$	0,033198	0,033430	0,015737	0,016035	0,006997	0,006975	0,004082	0,004146
	$\hat{\mu}_{Öneri1}$	0,033243	0,033264	0,015747	0,016059	0,006999	0,006979	0,004083	0,004152
	$\hat{\mu}_{Öneri2}$	0,00541	0,005827	0,002563	0,002572	0,001139	0,001143	0,000664	0,000673
	$\hat{\mu}_{Öneri3}$	0,00541	0,006191	0,002563	0,002698	0,001139	0,001168	0,000664	0,000676
P=0.80									
	$\hat{\mu}_{DP}$	0,032634	0,032552	0,015458	0,015500	0,00687	0,006757	0,004008	0,004073
	$\hat{\mu}_{SR}$	0,0412	0,041138	0,019516	0,019617	0,008674	0,008242	0,00506	0,005101
	$\hat{\mu}_{RR}$	0,108528	0,109129	0,051408	0,053094	0,022848	0,024138	0,013328	0,014144
	$\hat{\mu}_{GRR}$	0,032591	0,032580	0,015449	0,015422	0,006868	0,006755	0,004007	0,004067
	$\hat{\mu}_{Öneri1}$	0,032634	0,032395	0,015458	0,015432	0,006870	0,006752	0,004008	0,004069
	$\hat{\mu}_{Öneri2}$	0,005031	0,005380	0,002383	0,002357	0,001059	0,001033	0,000618	0,000640
	$\hat{\mu}_{Öneri3}$	0,005031	0,005728	0,002383	0,002471	0,001059	0,001059	0,000618	0,000642

Hassas değişken ile yardımcı değişkenler arasındaki ilişki yüksek düzeyde ($\rho_{yx}=0{,}87$, $\rho_{ym}=0{,}70$, $\rho_{xm}=0{,}50$) iken Modellerin sonuçları

Hassas değişken ile yardımcı değişkenler arasındaki ilişki yüksek düzeyde olduğunda literatürde önerilen tahmin edicilerin hata kareler ortalamaları ile bu çalışmada önerilen tahmin edicilerin hata kareler ortalamalar arasındaki farklılık oldukça artmaktadır. Bu çalışmada önerilen tahmin edicilerin yüksek ilişkili değişkenler kullanıldığında literatürdeki diğer tahmin edicilere göre oldukça duyarlı olduğu görülmektedir. Değişkenler arasındaki ilişkinin artmasıyla tahmin edicilerin hata kareler ortalamasında azalma olduğu görülmektedir. Değişkenler arasındaki ilişki düzeyinin artmasıyla çarpımsal modellerde de daha etkin sonuçlar alındığı görülmüştür. Hassas değişken ile yardımcı değişkenler arasındaki ilişki yüksek düzeyde iken her bir model için yorumlar aşağıda verilmiştir.

Model 1'de P oranı yükseldikçe tahmin edicilerin HKO'larında azalma görülmektedir. Aynı şekilde örneklem büyüklüğü arttıkça tahmin edicilerin HKO'ları da düşmektedir. Bu toplamsal model için en etkin sonuçları önerilen tahmin ediciler $\hat{\mu}_{Öneri2}$ ve $\hat{\mu}_{Öneri3}$ verirken, en az etkin sonucu Gupta v.d. [21]'nin diğer tahmin edicisi $\hat{\mu}_{RR}$ vermektedir. Değişkenler arasındaki ilişki yüksek düzeyde olduğunda Model 1'de önerilen tahmin ediciler $\hat{\mu}_{Öneri2}$ ve $\hat{\mu}_{Öneri3}$'ün diğer tahmin edicilere göre çok daha etkin olduğu görülmektedir.

Model 2'de diğer modellere göre teorik ve deneysel HKO'larında biraz uzaklaşmalar görülmektedir. Bu modelde P oranı yükseldikçe tahmin edicilerin HKO'larında toplamsal modele oranla daha fazla bir azalış görülmektedir. Aynı şekilde örneklem büyüklüğü arttıkça tahmin edicilerin HKO'ları da düşmektedir Bu çarpımsal model için en etkin sonucu Gupta v.d. [21] tahmin edicisi $\hat{\mu}_{GRR}$, en az etkin sonucu ise yine Gupta v.d. [21]'nin diğer tahmin edicisi $\hat{\mu}_{RR}$ vermektedir. P oranı arttıkça önerdiğimizin tahmin ediciler $\hat{\mu}_{Öneri2}$ ve $\hat{\mu}_{Öneri3}$'ün diğer tahmin edicilere göre HKO'larının azaldığı görülmektedir. P=0,50 ve P=0,80 iken önerdiğimiz tahmin ediciler $\hat{\mu}_{Öneri2}$ ve $\hat{\mu}_{Öneri3}$'ün diğer tahmin edicilere göre daha etkin olduğu görülmektedir. Aynı zamanda örneklem büyüklüğü arttıkça da önerdiğimiz tahmin ediciler $\hat{\mu}_{Öneri2}$ ve $\hat{\mu}_{Öneri3}$'ün diğer tahmin edicilere göre HKO'larının azaldığı görülmektedir.

Model 3'te P oranı yükseldikçe tahmin edicilerin HKO'larında azalma görülmektedir. Aynı şekilde örneklem büyüklüğü arttıkça tahmin edicilerin HKO'ları da düşmektedir. Bu toplamsal model için en etkin sonuçları önerilen tahmin ediciler $\hat{\mu}_{Öneri2}$ ve $\hat{\mu}_{Öneri3}$ verirken, en az etkin sonucu Gupta v.d. [21]'nin tahmin edicisi $\hat{\mu}_{RR}$ vermektedir. Değişkenler arasındaki ilişki yüksek düzeyde olduğunda Model 3'te önerilen tahmin ediciler $\hat{\mu}_{Öneri2}$ ve $\hat{\mu}_{Öneri3}$'ün diğer tahmin edicilere göre çok daha etkin olduğu görülmektedir.

Model 4'te tahmin edicilerin etkinlikleri toplamsal modele göre daha düşüktür. P oranı yükseldikçe tahmin edicilerin HKO'larında toplamsal modele oranla daha fazla bir azalış görülmektedir. Aynı şekilde örneklem büyüklüğü arttıkça tahmin edicilerin HKO'ları da düşmektedir Bu çarpımsal model için en etkin sonuçları Gupta v.d. [21]'nin tahmin edicisi $\hat{\mu}_{GRR}$, en az etkin sonucu Gupta v.d. [21]'nin diğer tahmin edicisi $\hat{\mu}_{RR}$ vermektedir. P=0,50 ve P=0,80 iken önerdiğimiz tahmin ediciler $\hat{\mu}_{Öneri2}$ ve $\hat{\mu}_{Öneri3}$'ün Gupta v.d. [21]'nin tahmin edicisi $\hat{\mu}_{GRR}$'ye göre daha etkin olduğu görülmektedir. Model 4'te Gupta v.d. [21]'nin tahmin edicisi $\hat{\mu}_{RR}$'nin HKO'su diğer çarpımsal model 2'ye göre artarken, diğer tahmin edicilerin HKO'ları da azalmaktadır.

Model 5'te P oranı yükseldikçe tahmin edicilerin HKO'larında azalma görülmektedir. Aynı şekilde örneklem büyüklüğü arttıkça tahmin edicilerin HKO'ları da düşmektedir. Bu toplamsal model için en etkin sonuçları önerilen tahmin ediciler $\hat{\mu}_{Öneri2}$ ve $\hat{\mu}_{Öneri3}$ verirken, en az etkin sonucu Gupta v.d. [21]'nin tahmin edicisi $\hat{\mu}_{RR}$ vermektedir. Değişkenler arasındaki ilişki yüksek düzeyde olduğunda Model 5'te önerilen tahmin ediciler $\hat{\mu}_{Öneri2}$ ve $\hat{\mu}_{Öneri3}$'ün diğer tahmin edicilere göre çok daha etkin olduğu görülmektedir.

6.SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu çalışmada toplamsal, çarpımsal ve seçimli rastgeleleştirilmiş yanıt modellerinde önerilen çeşitli tahmin ediciler tanıtılmıştır. Yardımcı değişken bilgisinin kullanıldığı tahmin edicilerden faydalanarak hem oran hem de ortalama tahmini için çeşitli RYM'lerde oransal ve regresyon tahmin edicileri önerilmiştir. Önerilen tahmin edici $\hat{\mu}_{Öneri1}$, yardımcı değişken bilgisinin kullanılmadığı Warner [38]'in önerdiği tahmin ediciyle karşılaştırıldığında her zaman daha etkin olduğu görülmüştür. Ayrıca önerilen tahmin edici $\hat{\mu}_{Öneri1}$, Sousa v.d. [33]'ün önerdiği oransal tahmin edicisiyle karşılaştırıldığında her zaman daha etkin olduğu görülmüştür. Yine önerilen tahmin edici $\hat{\mu}_{Öneri1}$, Gupta v.d. [21]'in önerdiği regresyon-oransal tahmin edicisi $\hat{\mu}_{RR}$ ile karşılaştırıldığında her zaman daha etkin olduğu görülmüştür. Önerilen İki yardımcı değişkenin kullanıldığı oransal tahmin edici $\hat{\mu}_{Öneri2}$, Diana ve Perri [6] tahmin edici ailesi ile karşılaştırıldığında yine önerilen tahmin edicinin her zaman daha etkin olduğu görülmüştür.

Önerilen tahmin ediciler ile literatürdeki var olan tahmin edicileri etkinlik bakımından karşılaştırılmak amacıyla bir simülasyon çalışması yapılmıştır. Simülasyon sonuçları incelendiğinde teorik olarak da etkin bulunan tahmin edicilerin deneysel olarak da etkin olduğu görülmektedir. Ayrıca teorik olarak bulunan hata kareler ortalamasının deneysel sonuçlara çok yakın çıkması teoriksel çıkarsamanın doğruluğunu kanıtlamaktadır.

Tahmin ediciler ayrı ayrı incelendiğinde tüm parametre değerlerinde tezde önerilen tahmin edicilerin genelde etkin olduğu görülmektedir. Özellikle iki yardımcı değişkenin kullanıldığı tahmin edicilerin diğer tahmin edicilere göre çok daha etkin olduğu gözlemlenmiştir. Literatürdeki yardımcı değişkenin bilgisinin kullanıldığı tahmin ediciler içerisinde daha az etkin sonuçları veren tahmin edici ise Gupta v.d. [21]'in önerdiği oransal-regresyon tahmin edicisi $\hat{\mu}_{RR}$'dir.

Değişkenler arasındaki ilişki miktarı arttıkça önerilen tahmin edicilerin etkinliklerinin arttığı görülmektedir. Bu da yardımcı değişken bilgisinin kullanıldığı tahmin ediciler için beklendik bir sonuçtur. Düşük ilişki düzeyinde tahmin ediciler incelenirse sonuçların birbirine çok yakın olduğu görülmektedir. Değişkenler arasındaki ilişkinin derecesi yükseldikçe tezde önerilen tahmin edicilerin literatürde olan tahmin edicilere göre çok daha etkin olduğu simülasyon sonuçlarından görülmektedir.

Örneklem büyüklüğünün etkisinin modeller ve tahminler üzerinde etkisinin görülmesi açısından n=50, 100, 200 ve 300 örneklem büyüklükleriyle çalışılmıştır. Örneklem büyüklüğünün artmasıyla tahmin edicilerin hatalarının azaldığı yani etkinliklerinin arttığı söylenebilir. Özellikle çarpımsal modellerde örneklem büyüklüğünün artmasıyla önemli bir etki olmakta, tahmin edicilerin etkinlikleri artmaktadır.

Simülasyon çalışmasına dahil edilen bir diğer parametre ise kişilerin doğrudan soruları yanıtlama oranını gösteren P oranıdır. Çizelgeler incelendiğinde P oranı arttıkça tahmin edicilerin hatalarının da azaldığı görülmektedir. Özellikle çarpımsal modellerde P oranının değişimi tahminlerin hatalarında önemli bir fark yaratmaktadır. Çarpımsal modellerde P oranı ne kadar yüksekse hata oranı da aynı şekilde azalmaktadır. Aynı etki toplamsal modellerde görülmemektedir. P oranının yükselmesi toplamsal modellerde çok etki göstermemektedir. Bu sonuca göre toplamsal tekniğin rastgeleleştirilmiş yanıt modellerinde daha etkin olduğu sonucuna varılabilir.

Modeller incelendiğinde toplamsal modellerin çarpımsal modellere göre daha iyi sonuç verdiği görülmektedir. Özellikle küçük örneklemlerde çarpımsal modellerin toplamsal modellere göre daha az etkin sonuçlar verdiği görülmektedir. Değişkenlerin yüksek ilişkili olduğu durumda en etkin modelin 1. model olduğu görülmektedir. Yani hassas değişken bilgisinin alınmasında toplamsal tekniğinin kullanıldığı, diğer yardımcı değişkenler için doğrudan yanıt alma tekniğinin kullanıldığı model en iyi modeldir.

Simülasyon çalışması sonucunda toplamsal modellerin her parametre değerinde iyi sonuçlar verdiği, çarpımsal modellerin de daha az etkin sonuçlar verdiği görülmüştür. Çarpımsal modellerin en çok etkilendiği parametreler P değeri ve örneklem büyüklüğüdür. Çarpımsal model uygulanmak isteniyorsa yüksek P oranı ve büyük örneklemlerle çalışılmalıdır.

Çalışma sonucunda yardımcı değişken bilgisinin kullanımının tahminlerin etkinliklerinde artış sağladığı görülmektedir. Rastgeleleştirilmiş yanıt modellerinde tek değişkenden ziyade iki ve daha çok değişken kullanılarak tahminlerin etkinliklerinin artırılması sağlanabilir. Ayrıca rastgeleleştirilmiş yanıt modellerinde yardımcı değişken bilgisinin kullanıldığı tahmin ediciler genelde basit rastgele örnekleme yönteminde uygulanmıştır. Tez kapsamında verilen tahmin edicilerin tabakalı rastgele örnekleme gibi diğer örnekleme yöntemlerinde uygulanması faydalı olacaktır.

KAYNAKLAR

[1] Bar-Lev S.K., Bobovitch E., Boukai B., *A note on randomized response models for quantitative data,* Metrika 60:255–260, **2004.**

[2] Chaudhuri, A., Mukerjee, R., *Randomized response: theory and techniques*. Marcel Dekker, Inc,New York, 1988.

[3] Cingi, H., Örnekleme Kuramı, 3.Baskı, Bizim Büro Basımevi,Ankara,**2009.**

[4] Cingi, H., Kadilar C., *Advances in Sampling Theory- Ratio Method of Estimation*, Bentham Science yayımevi,ebook,121, **2009.**

[5] Diana, G., Perri, P.F., "Estimating a Sensitive Proportion Through Randomized Response Procedures Based on Auxiliary Information", Stat.Papers, 50, 661- 672, **2009.**

[6] Diana, G., Perri, P.F., A Class of Estimators for Quantitative a Sensitive Data, Stat.Papers, 1, 273, **2009.**

[7] Diana G., Perri P.F., New Scrambled Response Models For Estimating The Mean of A Sensitive Quantitative Character, *Journal Of Applied Statistics*, 37, 11, 1875-1890, **2010.**

[8] Diana G., Perri P.F., Selected Scrambled Response Models, In: *Procedings of 45th Scientific Meeting Of The Italian Statistical Society*, Padova, 16-18 Giugno, **2010.**

[9] Diana G., Perri P.F., A class of Estimators for Quantitative Sensitive Data, *Statistical Papers*, ISSN: 0932-5026, DOI: 10.1007/S00362-009-0273, **2011.**

[10] Eichhorn, B. H. and Hayre, L. S. , Scrambled Randomized Response Methods for Obtaining Sensitive Quantitative Data, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 7, 307-316, **1983.**

[11] Eriksson, S.A., A new model for randomized response, *International Statistical Review*, 41:101–113, **1973**.

[12] Gjesvang, C.R., Singh,S., An improved Randomized Response Model:Estimation of Mean, *Journal of Applied Statistics*,36-12,1361-1367, **2009.**

[13] Greenberg, B.G., Abul-Ela, A.L., Simmons W.R. and Horvitz D.G., Unrelated Question Randomized Response model, *Journal of the American Statistical Association*, 64:326, 520-539, **1969.**

[14] Greenberg BG, Kuebler RR, Abernathy JR, Horvitz DG, Application of the randomized response technique in obtaining quantitative data. Journal of American Statistical Association, 66:243–250, **1971.**

[15] Grewal I.S., Bansal M.L., Sidhu S.S., Population mean corresponding to Horvitz- Thompson's estimator for multi-characteristics using randomized response technique. *Model Assisted Statistical Applications*, 1:215–220, **2005-2006.**

[16] Gupta S., Gupta B., Singh S., Estimation of sensitivity level of personal interview survey questions". *J. Stat Plan Inference* 100:239–247, **2002.**

[17] Gupta, S.N. and Shabbir, J., Sensitivity estimation for personal interview survey questions, *Statistica,* 64, 643-653, **2004**.

[18] Gupta, S. N., Thornton, B., Shabbir, J. and Singhal, S., A comparison of multiplicative and additive optional RRT models, *Journal of Statistical Theory and Applications*, 5 (3), 226-239, **2006.**

[19] Gupta, S. N. and Shabbir,J. , On the Estimation of Population Mean and Sensitivity in a Two-stage Optional Randomized Response Model, *Journal of Indian Society of Agricultural Statistics*, 61, 164-168, **2007.**

[20] Gupta S., Shabbir J., Sousa R. and Sehra S., Mean and sensitivity estimation in optional randomized response models, *Communications in Statistics*, 140, 2870-2874, **2010.**

[21] Gupta S., Shabbir J., Sousa R. and CORTE-REAL P. , Estimation of the Mean of a Sensitive Variable in the Presence of Auxiliary Information, *Communications in Statistics*, 41, 2394-2404, **2012.**

[22] Horvitz, Daniel G., B.V. Shah, and Walt R. Simmons, The Unrelated Question Randomized Response Model." Pp. 65-72 in *Proceedings of the Social Statistics Section*. Washington, DC: American Statistical Association, **1967.**

[23] Huang, C.H., Estimation for sensitive characteristics using optional randomizedresponse technique, *Quality and Quantity*, 42: 679-686, **2008**.

[24] Hussain Z., Shabbir, J., "Improved Estimation Procedures for the Mean of Sensitive Variable using Randomized Response Model", Pak.J.Statist.,25(2), 205-220, **2009.**

[25] Mangat, N.S. and Singh, R. , An Alternative randomized response model, *Biometrika*, 77, 439-442- **1990.**

[26] Özgül, N., *İki Safhalı Örnekleme Yönteminde Ortalama Tahmin Edicileri*, Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, **2007**.

[27] Pollock K.H., Bek Y., A comparison of three randomized response models for quantitative data. Journal of American Statistical Assocciation, 71:884–886, **1976**.

[28] Ryu J.-B, Kim J.-M, Heo T-Y & Park C. G. ,On stratified Randomized Response Sampling, *Model Assisted Statistics and Application,* 1(1): 31-36, **2005.**

[29] Saha, A., A simple randomized response technique in complex surveys, *Metron LXV*.,59-66, **2007.**

[30] Sehra, Supriti, M.A., *Two-Stage Optional Randomized Response Models*, Master of Art Dissertation, The University Of North Carolina, Greensboro,U.S.A., **2008.**

[31] Singh, H.P., Mathur, N., Modified Optional Randomized Response Sampling, Journal of the Indian Society of Agricultural Statistics, 56(2), 199-206, **2003.**

[32] Singhal, S., *Circumventing social desirability response bias and gender bias in personal interview surveys*, Master's Thesis, University of Southern Maine, **2004.**

[33] Sousa, R., Shabbir, J. Real, P. C. and Gupta, S. , *Ratio estimation of the mean of a sensitive variable in the presence of auxiliary information*, Journal of Statistical Theory and Practice, 4(3), 495-507, **2010.**

[34] Srivastava, S.K., A Two Phase Sampling Estimator in Sample Surveys, Austrilian Journal of Statistics, 12, 23-27, **1970.**

[35] Thompson, E.R., Phua, F.T.T., Reliability Among Senior Managers of the Marlowe-Crowne Short-Form Social Desirability Scale, *Journal of Business and Psychology*, 19(4), 541-554**, 2005.**

[36] Thornton, B. and Gupta, S. N., Comparative Validation of a Partial (versus Full) Randomized Response Technique: Attempting to Control for Social Desirability Response Bias to Sensitive Questions*, Individual Differences Research*, 2, 214- 224, **2004.**

[37] Warner, S.L., Randomized response: A survey technique for eliminating evasive answer bias. *Journal of the American Statistical Association*, 60, 63-69, **1965.**

[38] Warner, S.L., The Linear Randomized Response Model, *Journal of the American Statistical Association,* 66:336, 884-888, **1971.**

[39] Zaizai, Y., Ratio method of estimation of population proportion using randomized response technique. *Model Assisted Statistical Application*, 1, 125-130, **2006.**

ÖZGEÇMİŞ

Kimlik Bilgileri

Adı Soyadı : Nilgün ÖZGÜL

Doğum Yeri : Ankara

Medeni Hali : Bekar

E-posta : nozgul@hacettepe.edu.tr

Adresi : Hacettepe Üniversitesi, İstatistik Bölümü, 06800 Beytepe, ANKARA.

Eğitim

Lise : Kurtuluş Anadolu Lisesi

Lisans : Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi, İstatistik Bölümü

Yüksek Lisans : Hacettepe Üniversitesi, F.B.E., İstatistik A.D.

Doktora : Hacettepe Üniversitesi, F.B.E., İstatistik A.D.

Yabancı Dil ve Düzeyi

Kamu Personeli Yabancı Dil Bilgisi Seviye Tespit Sınavı (KPDS)- 84 Puan

İş Deneyimi

2004- … : Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi, İstatistik Bölümü- Araştırma Görevlisi

Deneyim Alanları

-

Tezden Üretilmiş Projeler ve Bütçesi

-

Tezden Üretilmiş Yayınlar

-

Tezden Üretilmiş Tebliğ ve/veya Poster Sunumu ile Katıldığı Toplantılar

Özgül,N., Çıngı,H.,” An Application of Randomized Response Techniques” 5th Annual International Conference on Mathematics & Statistics,Athens, Greece, June 2011.

Özgül,N., Çıngı,H., ”Randomized Response Sampling for Quantitative Data”, 5th International Conference On Apllied Statistics, Bucharest, Romania,November 2010.