

GENELLEŞTİRİLMİŞ WEIBULL DAĞILIMLARI

GENERALIZED WEIBULL DISTRIBUTIONS

ALPTUĞ SABRİ AKBAŞ

TEZ DANIŐMANI

DOÇ. DR. GAMZE ÖZEL KADILAR

Hacettepe Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin

İstatistik Anabilim Dalı için Öngördüğü

YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırlanmıştır.

2019

ALPTUĞ SABRİ AKBAŞ'ın hazırladığı "Genelleştirilmiş Weibull Dağılımları" adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından İSTATİSTİK ANABİLİM DALI'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

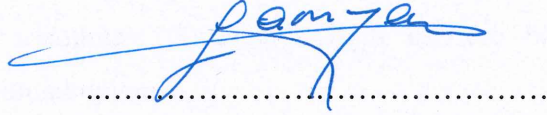
Prof. Dr. Hüseyin TATLIDİL

Başkan



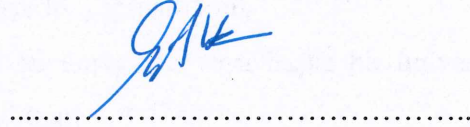
Doç. Dr. Gamze ÖZEL KADILAR

Danışman



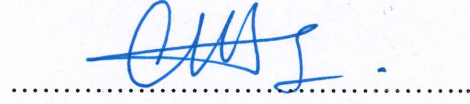
Doç. Dr. Nihal ATA TUTKUN

Üye



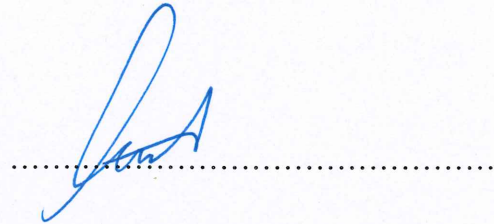
Dr. Öğr. Üyesi Esra POLAT

Üye



Dr. Öğr. Üyesi Emrah ALTUN

Üye



Bu tez Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak / /..... tarihinde onaylanmıştır.

Prof. Dr. Menemşe GÜMÜŞDERELİOĞLU

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada,

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

04 / 09 / 2019

ALPTUĞ SABRİ AKBAŞ



YAYINLANMA FİKRİ MÜLKİYET HAKKLARI BEYANI

Enstitü tarafından onaylanan lisansüstü tezimin/raporumun tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı (kağıt) ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda verilen koşullarla kullanıma açma iznini Hacettepe üniversitesine verdiğimi bildiririm. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet haklarım bende kalacak, tezimin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanım hakları bana ait olacaktır.

Tezin kendi orijinal çalışmam olduğunu, başkalarının haklarını ihlal etmediğimi ve tezimin tek yetkili sahibi olduğumu beyan ve taahhüt ederim. Tezimde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanması zorunlu metinlerin yazılı izin alarak kullandığımı ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederim.

Yükseköğretim Kurulu tarafından yayımlanan "*Lisansüstü Tezlerin Elektronik Ortamda Toplanması, Düzenlenmesi ve Erişime Açılmasına İlişkin Yönerge*" kapsamında tezim aşağıda belirtilen koşullar haricince YÖK Ulusal Tez Merkezi / H. Ü. Kütüphaneleri Açık Erişim Sisteminde erişime açılır.

- Enstitü / Fakülte yönetim kurulu kararı ile tezimin erişime açılması mezuniyet tarihimden itibaren 2 yıl ertelenmiştir.
- Enstitü / Fakülte yönetim kurulu gerekçeli kararı ile tezimin erişime açılması mezuniyet tarihimden itibaren ay ertelenmiştir.
- Tezim ile ilgili gizlilik kararı verilmiştir.

04 / 09 / 2019

(İmza)

ALPTUĞ SABRİ AKBAŞ

ÖZET

GENELLEŞTİRİLMİŞ WEIBULL DAĞILIMLARI

Alptuğ Sabri AKBAŞ

Yüksek Lisans, İstatistik Bölümü

Tez DanıŐmanı: Doç. Dr. Gamze ÖZEL KADILAR

Eylül 2019, 62 sayfa

Weibull dağılımı, bozulma ve yıpranma, erken ölüm gibi hata/başarısızlık sürelerinin modellenmesinde özellikle yaşam çözümlemesinde kullanılan en popüler sürekli dağılımlardan biridir. Günümüzde bu dağılım bir bölgedeki salgın hastalıkların ne kadar süreceğinin tespitinde, belirli bir bölgedeki deprem büyüklüğünün saptanmasında veya rüzgâr hızının hesaplanmasında, sigortacılıkta hasar büyüklüğünün modellenmesinde sıklıkla kullanılmaktadır. Diğer bir deyişle, bu dağılım rastlantı değişkenin pozitif değerler alması durumunda kullanılabilidiğinden dolayı olasılık dağılımları arasında popüler dağılımlardan biri haline gelmiştir.

Weibull dağılımının güvenilirlik ve yaşam çözümlemesinde sıklıkla kullanılmasına rağmen, hazard (tehlike) fonksiyonun banyo küveti veya tek tepeli olması gibi monoton olmayan yapısı nedeniyle bu dağılımın veri modellemede yetersiz kaldığı görülmektedir. Bu durum Weibull dağılımının veri modellemede daha esnek olması gerekliliğini ortaya çıkarmıŐtır. Bu gereklilik, bilinen dağılımların genişletilerek, yeni olasılık dağılımlarının elde edilmesi üzerine yapılan çalışmaları arttırmıştır. Önceki çalışmalar incelendiğinde, üstelleŐtirme, dönüŐtürme (doğrusal, ters, logaritmik), parametre ekleme gibi yöntemler ile yeni Weibull dağılımları elde edilmektedir.

Bu çalışmada, öncelikle literatürdeki Weibull dağılımları üzerinde durulmuştur. Daha sonra, Salman vd. (2019) tarafından önerilen genelleştirilmiş Topp-Leone dağılım

ailesinden yararlanarak yeni bir genelleştirilmiş Weibull dağılımı önerilmiştir. Genelleştirilmiş Topp-Leone Weibull dağılımı adını alan bu dağılıma ilişkin hazard fonksiyonu ve yapısı, moment karakteristikleri, parametre tahmini, entropi ve sıralı istatistiklerine ait fonksiyonlar elde edilmiştir. Önerilen dağılımın literatürdeki dağılımlardan daha esnek olduğu uygulama çalışması ile gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Weibull Dağılımı, Genelleştirilmiş Dağılımlar, Moment, Entropi, Hazard Fonksiyonu.

ABSTRACT

GENERALIZED WEIBULL DISTRIBUTIONS

Alptuğ Sabri AKBAŞ

Master's Degree, Department of Statistics

Supervisor: Doç. Dr. Gamze ÖZEL KADILAR

September 2019, 62 pages

Weibull distributions are one of the most popular continuous distributions used in survival analysis for modeling error / failure times such as deterioration and wear, early death. Nowadays, this distribution is used to determine duration of epidemic diseases in a region, to predict the magnitude of the earthquake or to compute the wind speed in a region, and to model the claim size in insurance. In other words, this distribution has become one of the most popular distributions among distributions, since the random variable can be used if the variable takes positive values.

Although the Weibull distribution is frequently used in reliability and survival analysis, it is seen that this distribution is insufficient in data modeling due to its non-monotonic hazard function shape such as bathtub function or unimodal. This situation revealed that the Weibull distribution should be more flexible in data modeling. This requirement has increased the studies on obtaining new probability distributions by expanding the known distributions. When the previous studies are examined, new Weibull distributions are obtained by methods such as exponentiation, transformation (linear, inverse, logarithmic) and parameter addition.

In this study, Weibull distributions in the literature are introduced at first. Later, a new generalized Weibull distribution was derived using the generalized Topp-Leone distribution family proposed by Salman et al. (2019). Hazard function and structure, moment characteristics, parameter estimation, entropy and order statistics related to this

distribution, which is named as generalized Topp-Leone Weibull distribution, were obtained. The proposed distribution was shown to be more flexible than the distributions in the literature via an application study.

Key Words: Weibull Distribution, Generalized Distributions, Moment, Entropy, Hazard Function.

İÇİNDEKİLER

| | |
|--|------|
| ÖZET | i |
| ABSTRACT | ii |
| ŞEKİLLER DİZİNİ | vii |
| ÇİZELGELER DİZİNİ | viii |
| SİMGELER VE KISALTMALAR | ix |
| 1. GİRİŞ | 1 |
| 2. GENELLEŞTİRİLMİŞ WEIBULL DAĞILIMLARI | 3 |
| 2.1. İki Parametrelili Weibull Dağılımı..... | 6 |
| 2.2. Kesikli Weibull Dağılımları..... | 7 |
| 2.2.1. Birinci Tip Kesikli Weibull Dağılımı..... | 7 |
| 2.2.2. İkinci Tip Kesikli Weibull Dağılımı..... | 8 |
| 2.2.3. Üçüncü Tip Kesikli Weibull Dağılımı..... | 8 |
| 2.2.4. Kesikli Ters Weibull Dağılımı..... | 8 |
| 2.2.5. Kesikli Modifiye Edilmiş Ters Weibull Dağılımı..... | 9 |
| 2.2.6. Kesikli Toplamsal Weibull Dağılımı..... | 9 |
| 2.3. Sürekli Weibull Dağılımları..... | 10 |
| 2.3.1. Birleşik Weibull Dağılımı..... | 11 |
| 2.3.2. Yansıtılmış Weibull Dağılımı..... | 12 |
| 2.3.3. Gama Weibull Dağılımı..... | 13 |
| 2.3.4. Üstelleştirilmiş Weibull Dağılımı..... | 14 |
| 2.3.5. Genelleştirilmiş Weibull Dağılımı..... | 14 |
| 2.3.6. Toplamsal Weibull Dağılımı..... | 15 |
| 3. TOPP-LEONE DAĞILIM AİLESİ | 21 |
| 3.1. Topp-Leone Dağılımı ve Özellikleri..... | 21 |
| 3.2. Genelleştirilmiş Topp-Leone Dağılım Ailesi..... | 22 |
| 3.3. Genelleştirilmiş Topp-Leone Dağılım Ailesine Ait Bazı Dağılımlar..... | 23 |
| 3.3.1. Genelleştirilmiş Topp-Leone Ters Weibull Dağılımı..... | 23 |
| 3.3.2. Genelleştirilmiş Topp-Leone Lomax Dağılımı..... | 23 |
| 3.3.3. Genelleştirilmiş Topp-Leone Üstel Dağılım..... | 24 |
| 3.4. Genelleştirilmiş Topp-Leone Dağılım Ailesine Ait Bazı İstatistiksel Özellikler..... | 26 |
| 3.4.1. Kantil Fonksiyonu..... | 27 |
| 3.5. Genelleştirilmiş Topp-Leone Dağılımına Ait Bazı Matematiksel Açılımlar..... | 27 |
| 3.6. Momentler..... | 28 |
| 3.7. Entropi..... | 29 |

| | |
|---|-----------|
| 3.8. Güvenilirlik Analizi | 30 |
| 3.8.1. Güvenilirlik ve Hazard Fonksiyonları | 30 |
| 3.8.2. Ortalama Kalan Ömür Fonksiyonu | 31 |
| 4. GENELLEŞTİRİLMİŞ TOPP-LEONE WEIBULL DAĞILIMI VE BAZI | |
| ÖZELLİKLERİ | 33 |
| 4.1. Genelleştirilmiş Topp-Leone Weibull Dağılımı..... | 33 |
| 4.2. GTL-W Dağılımının Yaşam ve Hazard Fonksiyonları | 34 |
| 4.3. GTL-W Dağılımının Çarpıklık ve Basıklığının İncelenmesi..... | 35 |
| 4.4. GTL-W Dağılımı İçin Parametre Tahmini..... | 36 |
| 5. UYGULAMA | 37 |
| 6. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME | 40 |
| KAYNAKLAR | 41 |
| ÖZGEÇMİŞ | 45 |

ŞEKİLLER DİZİNİ

| | |
|--|----|
| Şekil 2.1. Banyo küveti biçimindeki hazard fonksiyonu örneği..... | 7 |
| Şekil 3.1 Farklı parametre değerleri için GTL-Ü dağılımına ait olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği..... | 24 |
| Şekil 3.1. GTL-Ü dağılımının farklı parametre değerlerine bağlı olarak hazard Fonksiyonu eğrileri..... | 25 |
| Şekil 4.1. GTL-W dağılımına ait olasılık yoğunluk fonksiyonu grafikleri..... | 34 |
| Şekil 4.2. GTL-W dağılımına ait hazard fonksiyonu rafikleri..... | 35 |
| Şekil 5.1. Rüzgar hızı verisi için en iyi üç dağılım ve veriye ait histogram grafiği..... | 39 |

ÇİZELGELER DİZİNİ

| | |
|--|----|
| Çizelge 2.1. Bazı dağılımların hazard fonksiyonlarının sahip olduğu şekiller..... | 5 |
| Çizelge 4.1. Farklı parametre değerleri ve $\gamma = 1$ için GTL-W dağılımının ortalama, standart sapma, çarpıklık basıklık ölçüleri..... | 36 |
| Çizelge 5.1. Model uyum istatistikleri..... | 38 |
| Çizelge 5.2. Rüzgar hızı verisi için en çok olabilirlik parametre tahmin değerleri..... | 38 |

SİMGELER VE KISALTMALAR

Kısaltmalar

| | |
|--------|--|
| TL | Topp Leone |
| GTL-G | Genelleştirilmiş Topp-Leone Dağılım Ailesi |
| GTL-W | Genelleştirilmiş Topp-Leone Weibull |
| GTL-Ü | Genelleştirilmiş Topp-Leone Üstel |
| GTL-Lx | Genelleştirilmiş Topp-Leone Lomax |
| MW | Modifiye Weibull |

1. GİRİŞ

Weibull dağılımı ilk olarak 1939 yılında, dağılıma ismini veren İsveçli fizikçi, Walodi Weibull tarafından, materyallerin bozulma sürelerinin gösteriminde kullanılmıştır (Weibull, 1939, 1951). Bu dağılım klasik olasılık dağılımları içinde önemli bir yere sahiptir. Weibull dağılımı kalite kontrolü ve güvenilirlik, binaların ekonomik ömrü, sismik risk analizlerinde, meteorolojide hava tahmin modellemelerinde, radar sistemlerinin modelleme alanlarında, rüzgar hızı dağılımını tanımlamada ve birçok alanda kullanılmaktadır (Moss, 2005).

Günümüzde çok geniş bir uygulama alanına sahip olan Weibull dağılımının, kalite kontrol ve güvenilirlik çalışmalarında ilk kez Kao (1958) tarafından savunulmuştur. Kao (1958), radyo lambalarının bozulma sürelerinin gösteriminde, Weibull dağılımından yararlanmıştır. Ayrıca Lieblein ve Zelen (1956) bilyeli yatakların bozulma sürelerinin gösteriminde Weibull dağılımını kullanmıştır. Thompson (1968) bozulma durumunda Weibull dağılımının çok çeşitli uygulamalarını ele almıştır. Berretoni (1964), kimyasal aşınma (korozyon) testleri için Weibull dağılımından yararlanmıştır. Ayrıca elektronik parçalarda, yarı iletken cihazlarda, foto iletken hücrelerde, kondansatörlerde ve çeşitli biyolojik organizmalarda bozulma sürelerinin çözümlenmesinde Weibull dağılımı kullanılmıştır. 1970'li yıllardan itibaren Weibull dağılımı sismik risk analizinde de kullanılmaya başlanmıştır. Hagiwara (1974) ve Rikitake (1975) deprem oluşumu için Weibull dağılımından yararlanmışlardır (Moss, 2005).

Weibull dağılımının belirtilen uygulamalarının yanı sıra 1958'den bu yana Weibull dağılımı monotonik olmayan hazard fonksiyonu elde etmek için birçok araştırmacı tarafından değiştirilmiştir.

Topp-Leone (TL) dağılımı tek parametrelili bir dağılım olup, tanım aralığının 0 ve 1 arasında olması nedeniyle gerçek yaşamdaki uygulamalarda kullanımı sınırlı kalmıştır. Ancak son yıllarda $T - X$ sürekli dağılım ailesinin önerilmesi ve bu sayede yeni geliştirilmiş dağılım ve dağılım ailelerine ulaşılması sayesinde bu dağılım popüler bir dağılım haline gelmiştir. Dağılımın tek parametreye bağlı olması esnek olmaması açısından bir dezavantaj iken, geliştirme sırasında eklenen yeni parametreler nedeniyle en çok olasılık tahmini sırasında az parametre sayısı bir avantaj haline gelmektedir.

Bu çalışmada öncelikle literatürdeki Weibull dağılımları incelenmiştir. Daha sonra yeni bir Weibull türü dağılımın önerilmesi amaçlanmıştır. Bu nedenle öncelikle Salman vd. (2019) tarafından önerilen genelleştirilmiş TL dağılımı ailesi (GTL-G) tanıtılmıştır. İki parametrelili GTL-G dağılım ailesi, literatürde var olan dağılım ailelerine göre daha esnek olup, özellikle yaşam süresinin modellendiği çalışmalarda iyi sonuçlar vermiştir. Bu dağılım artan, azalan, ve banyo küveti (bathtub) biçimindeki hazard fonksiyonlarına sahiptir. Bu çalışmada GTL-G dağılım ailesinden yararlanarak GTL-Weibull (GTL-W) dağılımı önerilmiş ve bazı istatistiksel özellikleri incelenmiştir. Bu dağılıma ilişkin tehlike fonksiyonu ve yapısı, moment karakteristikleri, parametre tahmini, entropi ve sıralı istatistiklere ait fonksiyonlara ulaşılmıştır.

İkinci bölümde literatürde mevcut olan kesikli ve sürekli bazı önemli Weibull dağılımları ve özellikleri hakkında bilgi verilmiştir. Üçüncü bölümde Topp-Leone dağılımı Topp-Leone dağılım ailesi üzerinde durulmuştur. Dördüncü bölümde genelleştirilmiş Topp-Leone Weibull dağılımı elde edilmiş ve bazı temel özellikleri incelenmiştir. Beşinci bölümde rüzgar hızı verilerine uygulanan uygulama çalışması ile Topp-Leone Weibull dağılımının literatürdeki dağılımlardan daha iyi olduğu gösterilmiştir. Altıncı Bölümde sonuç ve tartışmalara yer verilmiştir.

2. GENELLEŞTİRİLMİŞ WEIBULL DAĞILIMLARI

Bir raslantı değişkeni, kesikli ya da sürekli değerleri rasgele alan ve bu değerler için bir olasılık dağılımı tanımlanabilen bir değişkendir. Diğer bir deyişle, bir raslantı değişkeni örneklem uzayındaki ölçülebilir tüm mümkün değerleri göstermektedir. Raslantı değişkenleri, fizik, kimya, mühendislik, biyoloji ve sosyal bilimler gibi alanlarda olasılık hesaplamalarında sıklıkla kullanılmaktadır. Bu nedenle, raslantı değişkenlerinin olasılık dağılımlarının incelenmesi oldukça önemlidir. Bir raslantı değişkeninin olasılık dağılımının yanısıra değişkene ait hazard (risk, tehlike) dağılımı ve yaşam (survival) fonksiyonu da temel olarak incelenmektedir.

Sürekli bir raslantı değişkeni için, $0 \leq F(x) \leq 1$ olmak üzere, dağılım veya birikimli (cumulative) dağılım fonksiyonu,

$$F(x) = P(X < x) = \int_0^x f(u)du$$

biçimindedir.

Birimin yaşam süresinin bir değerden büyük olma olasılığına yaşam fonksiyonu adı verilir. Buna göre, X sürekli raslantı değişkeni bir birimin yaşam süresini, $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonunu göstermek üzere, yaşam fonksiyonu,

$$S(x) = P(X > x) = 1 - F(x) = 1 - \int_0^x f(u)du = \int_x^{\infty} f(u)du$$

olarak tanımlanır.

Bir birimin $X = x$ zamanına kadar yaşaması koşulu altında, $\Delta x \rightarrow 0$ için $[x, x+\Delta x]$ aralığında yaşamının sona ermesi olasılığına hazard (tehlike) fonksiyonu denir. Bireyin ilgilenilen özellik bakımından başarısızlık eğiliminin ölçüsüdür. Sürekli bir raslantı değişkeninin hazard fonksiyonu,

$$h(x) = \frac{f(x)}{F(x)} \quad (2.1)$$

olarak bulunur.

Özellikle yaşam verilerinin modellenmesinde kullanılan hazard fonksiyonu, her zaman noktadaki başarısızlık riskini göstermektedir. Hazard fonksiyonun faydaları aşağıda özetlenmiştir:

- Farklı grupların karşılaştırılması daha açık ve kesin olarak hazard fonksiyonu ile kolaylıkla yapılabilir.
- Hazard fonksiyonunu temel alan modeller, durdurma (censoring) veya birden çok başarısızlık türü varken daha uygundur.
- Hazard tek tür başarısızlık içeren sistemler için özel bir çözümleme biçimidir.

Yaşam çözümlemesi, finans, sigortacılık gibi alanlarda bu dağılımların verileri yeteri kadar temsil edemediği ve modellemede yetersiz kaldığı durumlarla karşılaşmaktadır. Bu nedenle, farklı karakteristiğe sahip verileri daha iyi temsil edecek daha esnek dağılımlara ihtiyaç duyulmaktadır. Bu durum, klasik olasılık dağılımlarının genelleştirilerek yeni olasılık dağılımları ve dağılım ailelerinin elde edilmesi üzerine yapılan çalışmaları arttırmıştır.

Genelleştirilmiş (generalized) bir dağılım ailesinin pratikte tercih edilmesine yönelik temel nedenler aşağıdaki gibi sıralanabilir:

- Orijinal ya da temel (baseline) olasılık dağılımına göre daha esnektir,
- Çok farklı karakterdeki verileri modelleyebilir,
- Simetrik bir dağılımı bile çarpık verileri modellemede kullanışlı hale getirir,
- Gerçek verileri modellemede karşılaşılan ağır kuyruklu (heavy-tailed) dağılım ihtiyacını karşılar,
- Simetrik, sola çarpık (left-skewed), sağa çarpık (right-skewed), artan ya da azalan gibi farklı şekillere sahip dağılımların üretilmesini sağlar,

- Her türlü hazard (risk) fonksiyonunu temsil edebilecek dağılımları tanımlama imkanı verir,
- Temel dağılım, genelleştirilmiş dağılımların alt bir dağılımı olduğu için, tüm karakteristik özellikleri özel bir durum olarak saklı kalır.

Bazı dağılımların hazard fonksiyonlarının sahip olduğu farklı şekil potansiyelleri Çizelge 2.1’de özetlenmiştir:

Çizelge 2.1. Bazı dağılımların hazard fonksiyonlarının sahip olduğu şekiller.

| Dağılım | Tip | | | | | | | | | | |
|--------------------------|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | A | B | C | D | E | F | H | I | J | K | L |
| Üstel | | | + | | | | | | | | |
| Weibull | + | + | + | | | | | | | | |
| Genelleştirilmiş Weibull | + | + | + | + | | + | + | + | + | + | + |
| Üstelleştirilmiş Weibull | + | + | + | + | + | | | | | | |

- Tip A: Azalan (monoton azalan dahil)
- Tip B: Artan (monoton artan dahil)
- Tip C: Sabit
- Tip D: Banyo Küveti
- Tip E: Ters Banyo Küveti (Tek tepeli)
- Tip F: Sağa Çarpık
- Tip G: Sola Çarpık
- Tip H: Tek tepeli $x \rightarrow 0$ için $h(x) > 0$
- Tip J: İki tepeli $x \rightarrow \infty$ için $h(x) > 0$ a
- Tip K: İki tepeli $x \rightarrow \infty$ için $h(x) \rightarrow 0$
- Tip L: İki tepeli $x \rightarrow \infty$ için $h(x) \rightarrow \infty$

Çizelge 2.1’e göre Weibull dağılımının yetersiz kaldığı veri türleri için genelleştirilmiş Weibull dağılımı iyi bir seçenektir. Genelleştirilmiş Weibull dağılımları, klasik biçimleri Weibull dağılımını veren, birçok farklı yöntem ile elde edilebilir. Aşağıda bu yöntemler kısaca özetlenmiştir:

- Weibull veya genelleştirilmiş Weibull dağılımının hazard fonksiyonuna sabit bir değer eklemek,
- Weibull raslantı değişkeninin doğrusal, ters veya logaritmik dönüşümleri ile dönüştürülmesi,
- Weibull dağılımının dağılım fonksiyonunun veya yaşam fonksiyonunun dönüştürülmesi,
- Yarışan risk yaklaşımı (en az iki veya daha fazla Weibull değişkeni),
- İki veya daha fazla Weibull dağılımlı raslantı değişkeninin karışımı ile karma bir Weibull dağılımı elde edilmesi,
- Weibull dağılımlı bir raslantı değişkeninin genelleştirilmiş bir Weibull dağılımına karmalanması,
- N bir raslantı değişkeni ve X_i 'ler aynı dağılımlı bağımsız raslantı değişkenleri olmak üzere, $T = \min(X_1, X_2, \dots, X_N)$ raslantı değişkeninin dağılımının elde edilmesidir.

Bu bölümde öncelikle klasik Weibull dağılımı üzerinde durulacak, daha sonra literatürde yukarıda belirtilen yöntemlerle elde edilmiş genelleştirilmiş Weibull dağılımları tanımlanacaktır.

2.1. İki Parametrelili Weibull Dağılımı

Weibull dağılımı, malzeme bilimi, mühendislik, fizik, kimya, meteoroloji, biyoloji, tıp, eczacılık, ekonomi ve işletme, kalite kontrol, jeoloji ve coğrafya gibi birçok alanda kullanılmıştır. İki parametrelili Weibull dağılımlı bir X raslantı değişkenine ait dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$F(x) = 1 - \exp(-ax^\theta), \quad x > 0 \quad (2.2)$$

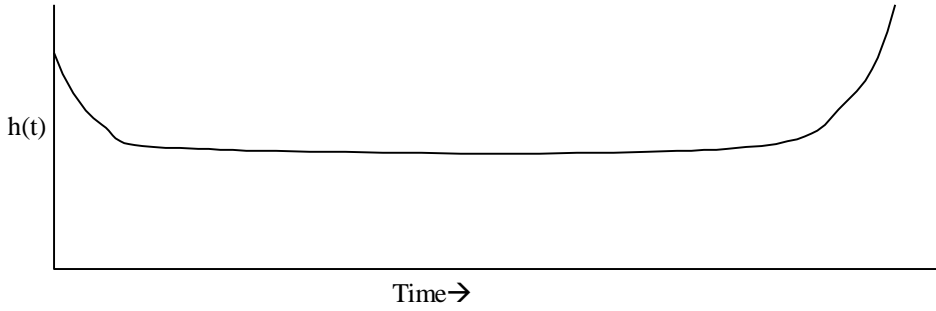
Burada a ve θ sırasıyla dağılımın ölçek ve şekil parametreleridir. Weibull dağılımının dağılım fonksiyonunun x'e göre türevi alınarak olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir:

$$f(x) = a\theta x^{\theta-1} \exp(-ax^\theta), \quad x > 0 \quad (2.3)$$

Bu dağılıma ait hazard fonksiyonu ise aşağıdaki gibidir:

$$h(x) = a\theta x^{\theta-1} \quad (2.4)$$

Burada $\theta > 1$, $\theta < 1$ veya $\theta = 1$ için dağılım sırasıyla artan, azalan ve sabit bir hazarda sahip olur. Ancak bir çok gerçek yaşam uygulamasında özellikle güvenilirlik ve yaşam analizinde hazard fonksiyonu monoton yapıda değil, banyo küveti (Şekil 2.1) veya tek tepeli bir yapıya sahiptir. Bu nedenle, Weibull dağılımının literatürde önerilmiş birçok genellemesi mevcuttur. Bu dağılım ise bu genelleştirmenin temelini oluşturan esas dağılımdır.



Şekil 2.1. Banyo küveti biçimindeki hazard fonksiyon örneği.

2.2. Kesikli Weibull Dağılımları

2.2.1. Birinci Tip Kesikli Weibull Dağılımı

Birinci tip kesikli Weibull dağılımının olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$p(x) = q^{x^\theta} - q^{(x+1)^\theta}$$

Nakagawa ve Osaki (1975) tarafından elde edilen bu dağılım için yaşam fonksiyonu ve hazard fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$S(x) = q^{x^\theta},$$

$$h(x) = 1 - q^{(x+1)^\theta - x^\theta}, \quad x = 0, 1, \dots, \quad 0 < q < 1 \text{ ve } \theta > 0$$

Burada $\theta > 1$, $\theta < 1$ veya $\theta = 1$ için dağılım sırasıyla artan, azalan ve sabit bir hazarda sahip olur.

2.2.2. İkinci Tip Kesikli Weibull Dağılımı

Steina ve Dattero (1984) tarafından önerilen ikinci tip kesikli Weibull dağılımının hazard fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$h(x) = \begin{cases} a\theta x^{\theta-1} & x = 1, 2, \dots, m \text{ için} \\ 0 & x = 0 \text{ için} \end{cases}$$

Burada m tamsayısı aşağıdaki tanımlanmıştır:

$$m = \begin{cases} \text{int} \{ a^{-(\theta-1)^{-1}} \}, & \theta > 1 \\ +\infty & \theta \leq 1 \end{cases}$$

2.2.3. Üçüncü Tip Kesikli Weibull Dağılımı

Padgett ve Spurrier (1985) tarafından önerilen diğer bir kesikli Weibull dağılımına ait hazard fonksiyonu,

$$h(x) = 1 - \exp\{-a(x+1)^\theta\}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

ve olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$p(x) = (1 - \exp\{-a(x+1)^\theta\})e^{-a \sum_{j=1}^x j^\theta}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

Burada $a > 0$ ve $-\infty < \theta < \infty$ olarak tanımlıdır.

2.2.4. Kesikli Ters Weibull Dağılımı

Jazi vd. (2010) tarafından önerilen kesikli ters Weibull dağılımının dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$F(x) = q^{x^a}, \quad x = 1, 2, \dots$$

Olasılık fonksiyonu ise, dağılım fonksiyonundan yararlanarak aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$p(x) = \begin{cases} q & x = 1 \text{ için} \\ q^{x-\theta} - q^{(x-1)-\theta} & x = 2, 3, \dots \text{ için} \end{cases}$$

$0 < q < 1$ ve $\theta > 0$ olarak tanımlıdır.

Hazard fonksiyonu ise aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$h(x) = \frac{q^{x-\theta} - q^{(x-1)-\theta}}{1 - q^{(x-1)-\theta}}, \quad x = 1, 2, \dots$$

2.2.5. Kesikli Modifiye Edilmiş Ters Weibull Dağılımı

Nooghabi vd. (2011) tarafından önerilen bu dağılım, Lai vd. (2003) tarafından önerilmiş sürekli, modifiye edilmiş Weibull dağılımının kesikli biçimidir. Dağılıma ait yaşam fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$S(x) = q^{x^\theta c^x}, x = 0, 1, 2, \dots$$

Dağılımın olasılık fonksiyonu,

$$p(x) = q^{x^\theta c^x} - q^{(x+1)^\theta c^{x+1}}, x = 0, 1, 2, \dots$$

ve hazard fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$h(x) = 1 - q^{(x+1)^\theta c^{x+1}} - x^\theta c^x$$

2.2.6. Kesikli Toplamsal Weibull Dağılımı

Bebington vd. (2012) tarafından elde edilmiş toplamsal (additive) Weibull dağılımına ait olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$p(x) = q_1^{x^s} q_2^{x^y} - q_1^{(x+1)^s} q_2^{(x+1)^y} .$$

Dağılıma ait yaşam fonksiyonu,

$$S(x) = q_1^{x^s} q_2^{x^y}, x = 0, 1, 2, \dots,$$

biçimindedir.

2.3. Sürekli Weibull Dağılımları

Bu bölümde Bölüm 2.1’de tanımlanan iki parametrelili Weibull dağılımı yardımıyla üretilmiş bazı sürekli Weibull dağılımları üzerinde durulacaktır.

2.3.1. Ters Weibull Dağılımı

X raslantı değişkeni Weibull dağılımına sahip olsun Buna göre, $Y = \frac{1}{X}$ dönüşümü ile elde edilen Y raslantı değişkeni ters Weibull dağılımlıdır. Ters Weibull dağılımına ait dağılım, olasılık yoğunluk ve hazard fonksiyonları sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$F(y) = e^{-ay^{-s}}, \quad y > 0,$$

$$f(y) = a\theta y^{-\theta-1} e^{-ay^{-s}}, \quad y > 0,$$

$$h(y) = a\theta y^{-\theta-1}, y > 0.$$

Ters Weibull dağılımının önemli bir genelleştirmesi olan Kumaraswamy ters Weibull dağılımı Shahbaz vd.(2001) tarafından önerilmiştir. Bu dağılıma ait dağılım fonksiyonu,

$$F(y) = 1 - [1 - e^{-ay^{-s}}]^b, \quad y > 0$$

ve olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(y) = ab\theta y^{-\theta-1} e^{-ay^{-s}} [1 - e^{-ay^{-s}}]^{b-1}, \quad y > 0$$

biçimindedir. Burada parametrelerin tanım aralığı $\theta, a, b > 0$ olup, $a = b = 1$ için dağılım ters Weibull dağılımına dönüşür.

2.3.2. Log-Weibull Dağılımı

X raslantı değişkeni α ve β parametreleri ile Weibull dağılımına sahip olsun. Bu durumda, $\frac{Y-a}{b} = \log(aX^\theta)$ dönüşümü ile elde edilen log-Weibull dağılımının dağılım fonksiyonu,

$$F(y) = 1 - \exp\{-e^{((y-a)/b)}\}, \quad -\infty < y < \infty$$

ve olasılık fonksiyonu,

$$f(y) = \frac{1}{b} e^{((y-a)/b)} \exp\{-e^{((y-a)/b)}\}, \quad -\infty < y < \infty$$

biçimindedir (Gumbel, 1958). Burada, $-\infty < \alpha < \infty$ ve $b > 0$ olarak tanımlıdır. Olasılık kuramında özel bir yere sahip olan bu dağılım literatürde I. tip uç değer (extreme value) dağılımı olarak da adlandırılmaktadır. Dağılıma ait hazard fonksiyonu ise aşağıdaki gibidir:

$$h(y) = \frac{1}{b} e^{((y-a)/b)}$$

Bu dağılım doğadaki sel, heyelan, deprem, aşırı sıcaklık, donma olayı gibi birçok olayı büyüklüğünün modellenmesinde kullanılmaktadır.

2.3.3. Birleşik Weibull Dağılımı

Y_1, Y_2, \dots, Y_N aynı Weibull dağılımlı, bağımsız raslantı değişkenleri ve N , kesikli bir raslantı değişkeni olsun. Buna göre, $X = \min(Y_1, Y_2, \dots, Y_N)$ biçiminde tanımlanan X raslantı değişkeninin birleşik (compound) Weibull dağılımına sahip olur. N raslantı değişkeninin kesikli dağılımına bağlı olarak farklı birleşik Weibull dağılımları tanımlanmıştır.

N , p parametrelili geometrik dağılıma sahip bir raslantı değişkeni olsun. Buna göre, $X = \min(Y_1, Y_2, \dots, Y_N)$ olarak tanımlanan X raslantı değişkeni, Weibull-geometrik

dağılımına sahip olur (Barreto-Souza vd. 2011). Weibull-geometrik dağılımına ait olasılık yoğunluk fonksiyonu, dağılım fonksiyonu ve hazard fonksiyonu sırasıyla aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$f(x) = \frac{\alpha\beta^a(1-p)x^{a-1}e^{-(\beta x)^a}}{[1-pe^{-(\beta x)^a}]^a}, \quad x > 0$$

$$F(x) = \frac{1 - e^{-(\beta x)^a}}{1 - pe^{-(\beta x)^a}}, \quad x > 0$$

$$h(x) = \frac{\alpha\beta^a x^{a-1}}{1 - pe^{-(\beta x)^a}}, \quad x > 0$$

N , λ parametrelili Poisson dağılımına sahip bir raslantı değişkeni olsun. Buna göre, $X = \min(Y_1, Y_2, \dots, Y_N)$ olarak tanımlanan X raslantı değişkeni, Weibull-Poisson dağılımına sahip olur (Lu ve Shi, 2012). Weibull-Poisson dağılımına ait olasılık yoğunluk fonksiyonu, dağılım fonksiyonu ve hazard fonksiyonu sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$f(x) = \frac{\alpha\beta\lambda e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}} x^{a-1} e^{-\beta x^a + \lambda e^{-\beta x^a}}, \quad x > 0,$$

$$F(x) = \frac{e^{\lambda e^{-\beta x^a}} - e^{\lambda}}{1 - e^{\lambda}}, \quad x > 0$$

$$h(x) = \frac{\alpha\beta\lambda x^{a-1} e^{-\beta x^a + \lambda e^{-\beta x^a}}}{e^{\lambda e^{-\beta x^a}} - 1}, \quad x > 0.$$

2.3.4. Yansıtılmış Weibull Dağılımı

Yansıtılmış (Reflected) Weibull dağılımı Cohen (1973) tarafından tanımlanmıştır. Yansıtılmış Weibull dağılımının dağılım fonksiyonu,

$$F(y) = e^{-a(-y)^a}, \quad -\infty < y < 0$$

ve olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(y) = a\theta(-y)^{\theta-1}e^{-a(-y)^\theta}, \quad -\infty < y < 0$$

biçimindedir. Burada $\alpha, \theta > 0$ olarak tanımlıdır. Yansıtılmış Weibull dağılımının hazard fonksiyonu ise aşağıdaki gibidir:

$$h(x) = \frac{\alpha\beta\lambda x^{\alpha-1} e^{-\beta x^\alpha + \lambda e^{-\beta x^\alpha}}}{e^{\lambda e^{-\beta x^\alpha}} - 1}, \quad x > 0.$$

2.3.5. Gama Weibull Dağılımı

Stacy (1962) tarafından önerilmiş olan gama Weibull dağılımı, üç parametrelili geliştirilmiş gama dağılımı olarak da adlandırılmaktadır. Bu dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu ve dağılım fonksiyonu sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$f(x) = \frac{\theta a^k}{\Gamma(k)} x^{k\theta-1} e^{-ax^\theta}, \quad x > 0$$

$$F(x) = \frac{\gamma(k, ax^\theta)}{\Gamma(k)}, \quad x > 0.$$

Burada, $\alpha, \theta, k > 0$ ve $\gamma(a, x)$ aşağıda verilen tamamlanmamış (incomplete) gama fonksiyonudur:

$$\gamma(a, x) = \int_0^x t^{a-1} e^{-t} dt.$$

Cordeiro vd. (2011a, 2011b) tarafından önerilmiş dört parametrelili üstelleştirilmiş geliştirilmiş gama fonksiyonuna ait olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$f(x) = \frac{\lambda\beta}{a\Gamma(k)} \left(\frac{x}{a}\right)^{\beta k-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{a}\right)^\beta\right] \left\{\gamma_1\left(k, \left(\frac{x}{a}\right)^\beta\right)\right\}^{\lambda-1}, \quad x > 0.$$

Burada $\alpha, \beta, k, \lambda > 0$ olarak tanımlıdır. $\gamma_1(\alpha, x) = \gamma(\alpha, x) / \Gamma(\alpha)$, gama oranı olarak ifade edilmektedir. Bu dağılım seçilen parametre değerlerine bağlı olarak banyo küveti, monoton artan, monoton azalan ve üstü altta banyo küveti (upside down bathtub) şekilli hazard fonksiyonlarına sahiptir.

2.3.6. Üstelleştirilmiş Weibull Dağılımı

İki parametrelili Weibull dağılımı, Mudholkar ve Srivastava (1993), Mudholkar vd. (1995) ve Mudolkar ve Hutson (1996) tarafından modifiye edilerek üstelleştirilmiş (exponentiated) Weibull dağılımı elde edilmiştir. Bu dağılım olasılık kuramında önemli bir yere sahip olup sel baskını ve motor başarısızlık süreleri gibi birçok veriye iyi uyum göstermiştir.

Üstelleştirilmiş Weibull dağılımının dağılım, olasılık yoğunluk ve hazard fonksiyonları sırasıyla aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$F(x) = (1 - e^{-ax^{\theta}})^{\lambda}, \quad x > 0,$$

$$f(x) = \lambda \alpha \theta x^{\theta-1} e^{-ax^{\theta}} (1 - e^{-ax^{\theta}})^{\lambda-1}, \quad x > 0,$$

$$h(x) = \alpha \theta \lambda x^{\theta-1} e^{-ax^{\theta}} (1 - e^{-ax^{\theta}})^{-1}.$$

Burada $\alpha, \theta, \lambda > 0$ olarak tanımlıdır. α ölçek, θ ve λ ise şekil parametreleridir. $\lambda = 1$ için dağılım Weibull dağılımına dönüşür. $\theta = 2$ için ise, genelleştirilmiş Rayleigh dağılımı elde edilmektedir. $\theta = 1$ olması durumunda genelleştirilmiş üstel dağılım, $\lambda = \theta = 1$ için üstel ve $\lambda = 1, \theta = 2$ için Rayleigh dağılıma ulaşılır.

2.3.7. Genelleştirilmiş Weibull Dağılımı

Mudholkar ve Kollia (1994), Weibull dağılımının kantil fonksiyonuna yeni bir parametre ekleyerek genelleştirilmiş Weibull dağılımını elde etmiştir. Bu dağılımın dağılım fonksiyonu, olasılık yoğunluk fonksiyonu ve hazard fonksiyonu sırasıyla aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$F(x) = 1 - [1 - a\lambda x^\theta]^{1/\lambda}, \quad x > 0,$$

$$f(x) = a\theta x^{\theta-1} [1 - a\lambda x^\theta]^{1/\lambda-1} \quad x > 0,$$

$$h(x) = a\theta x^{\theta-1} [1 - a\lambda x^\theta]^{-1} \quad x > 0.$$

Genelleştirilmiş Weibull dağılımının hazard fonksiyonu parametre değerlerine bağlı olarak aşağıdaki şekillere sahip olur:

- $\theta \geq 1$ ve $\lambda > 0$ için artan,
- $\theta \leq 1$ ve $\lambda \leq 0$ için azalan,
- $\theta < 1$ ve $\lambda > 0$ için banyo küveti,
- $\theta > 1$ ve $\lambda < 0$ için tek modlu.

2.3.8. Toplamsal Weibull Dağılımı

Xie ve Lai (1996) tarafından önerilen toplamsal Weibull dağılımı banyo küveti biçimindeki hazard fonksiyonuna sahiptir. Bu dağılım, Weibull dağılımının iki hazard fonksiyonunun toplanmasıyla elde edilmiştir. Toplamsal Weibull dağılımının olasılık yoğunluk, dağılım ve hazard fonksiyonları sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$f(x) = (a\theta x^{\theta-1} + \beta\gamma x^{\gamma-1}) e^{-ax^\theta - \beta x^\gamma}, \quad x > 0,$$

$$F(x) = 1 - e^{-ax^\theta - \beta x^\gamma}, \quad x > 0,$$

$$h(x) = a\theta x^{\theta-1} + \beta\gamma x^{\gamma-1}, \quad x > 0.$$

Burada $\alpha, \theta, \beta > 0$ ve $\gamma < 1$ olarak tanımlıdır. Bu dağılım, $\alpha = 0$ veya $\beta = 0$ olması durumunda Weibull dağılımına dönüşmektedir.

2.3.9. Modifiye Weibull Dağılımı

Lai vd. (2003) tarafından Weibull dağılımının birikimli hazard fonksiyonu olan αx^θ 'nin $e^{\lambda x}$ ile çarpılması ile önerilmiştir. Dağılıma ait dağılım fonksiyonu,

$$F(x) = 1 - e^{-\beta x^\gamma e^{\lambda x}}, \quad x > 0$$

biçimindedir. Olasılık yoğunluk ve hazard fonksiyonları ise sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$f(x) = \beta(\gamma + \lambda x)x^{\gamma-1}e^{\lambda x}e^{-\beta x e^{\lambda x}}, \quad x > 0,$$

$$h(x) = \beta(\gamma + \lambda x)x^{\gamma-1}e^{\lambda x}, \quad x > 0.$$

$\lambda = 0$ için dağılım Weibull dağılımına, $\gamma = 0$ için dağılım I. tip uç değer dağılıma dönüşmektedir. Modifiye Weibull (MW) dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu azalan, tek tepeli iken hazard fonksiyonu artan ve banyo küveti şekillerine sahiptir.

MW dağılımı, Weibull dağılımının önemli bir genelleştirmesi olup, yaşam süresi dağılımları arasında özel bir yere sahiptir. Bu dağılımın bazı genelleştirilmiş biçimleri arasında genelleştirilmiş MW (Carrasco vd. 2008a,b), beta MW (Silva vd., 2010), Kumaraswamy MW (Cordeiro vd. 2012) yer almaktadır. MW dağılımının parametre tahminleri de üzerinde durulan konular arasındadır. Dağılıma ait en çok olabilirlik ve en küçük kareler tahminleri Ng (2005) ve Jiang vd. (2010) tarafından elde edilmiştir. Ayrıca log-regresyon MW modeli Carrasco vd. (2008 a, b) tarafından önerilmiştir. Preda vd. (2010) tarafından Bayesci tahminlerine ulaşılmıştır. Soliman vd. (2012) tarafından durdurulmuş (censored) veriler için Bayesci tahminleri Markov Zinciri Monte Carlo yöntemi ile elde edilmiştir.

2.3.10. Genelleştirilmiş Güç Weibull Dağılımı

Üç parametrelili bu dağılım Nikulin ve Haghghi (2006) tarafından önerilmiştir. Dağılıma ait dağılım fonksiyonu ve olasılık yoğunluk fonksiyonu sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$F(x) = 1 - \exp \{1 - (1 + ax^\theta)^{1/\lambda}\}, \quad x > 0,$$

$$f(x) = a\theta\lambda^{-1}x^{\theta-1}(1 + ax^\theta)^{1/\lambda-1}\exp \{1 - (1 + ax^\theta)^{1/\lambda}\}, \quad x > 0.$$

Burada $\alpha, \theta, \lambda > 0$ olarak tanımlıdır. $\lambda = 1$ için dağılım Weibull dağılımına dönüşmektedir. Bu dağılıma ait hazard fonksiyonu ise aşağıdaki gibidir:

$$h(x) = a\theta\lambda^{-1}x^{\theta-1}(1 + ax^\theta)^{1/\lambda-1}, \quad x > 0.$$

Parametrelere bağılı olarak hazard fonksiyonunun şekilleri aşağıdaki gibidir:

- $\theta \geq 1$ ve $\theta > \lambda$ için artan
- $\theta \leq 1$ ve $\theta < \lambda$ için azalan
- $0 < \lambda < \theta < 1$ için banyo küveti
- $\lambda > \theta > 1$ için tek tepeli.

2.3.11. Esnek Weibull Dağılımı

Bu dağılım Bebbington vd. (2006) tarafından elde edilen bu dağılıma ait dağılım, olasılık yoğunluk ve hazard fonksiyonu sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$F(x) = 1 - \exp[-e^{ax-\frac{\beta}{x}}], \quad x > 0,$$

$$f(x) = \left(a + \frac{\beta}{x^2}\right) e^{ax-\beta/x} \exp[-e^{ax-\frac{\beta}{x}}], \quad x > 0,$$

$$h(x) = \left(a + \frac{\beta}{x^2}\right) e^{ax-\beta/x}, \quad x > 0.$$

2.3.12. Kumaraswamy Modifiye Weibull Dağılımı

Cordeiro vd. (2012) tarafından önerilen dört parametrelili bu dağılıma ait dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$F(x) = 1 - \{1 - [1 - \exp(-ax^\theta e^{\lambda x})]^a\}^b, \quad x > 0,$$

Hazard fonksiyonu sabit, artan, azalan, tek modlu ve banyo küveti şekillerine sahiptir.

2.4. Dağılım Aileleri

Olasılık kuramında temel bir dağılımın çeşitli yöntemler ile geliştirilmesi ile tek bir dağılım elde edileceği gibi, birden çok dağılımda elde edilebilmektedir. Birden çok dağılım elde edilmesi durumunda bu dağılımların ait olduğu sınıfa “dağılım ailesi (a family of

distributions) adı verilmektedir. Bu bölümde kısaca literatürde var olan bazı dağılım aileleri üzerinde durulacaktır.

2.4.1. Üstelleştirilmiş Dağılım Ailesi

Gupta vd. (1998), bir olasılık dağılımının pozitif değer alan bir parametre yardımıyla kuvvetini alarak üstelleştirilmiş dağılım ailesini (Exp-G, exponentiated family of distributions) tanımlamıştır. Üstelleştirilmiş dağılım ailesi ve özellikleri, birçok dağılımın temelini oluşturduğundan olasılık kuramında önemli bir yere sahiptir. Bu aileye ilişkin dağılım fonksiyonu ve olasılık yoğunluk fonksiyonu, sırasıyla aşağıdaki eşitliklerdeki gibi tanımlanır:

$$F_{\text{Üstel-G}}(x) = G^a(x),$$

$$f_{\text{Üstel-G}}(x) = ag(x)G^{a-1}(x).$$

Burada $G(\cdot)$, temel dağılımının dağılım fonksiyonunu ve $g(\cdot)$ temel dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonunu göstermektedir.

2.4.2. Beta Dağılım Ailesi

Eugene vd. (2002), çalışmalarında beta dağılımından faydalanarak ve beta genelleştiren dağılım ailesini (beta-generated family of distributions, beta-G) önermiştir. Literatürde, bu şekilde “genelleştiren dağılım” kullanarak elde edilen aileler kısaca “genelleştiren dağılımın adı-G” biçiminde gösterilmektedir. Beta-G dağılım ailesine ait olasılık yoğunluk fonksiyonu, $x > 0$, $\alpha > 0$ ve $\beta > 0$ olmak üzere, aşağıda gibi tanımlanır:

$$f_{\text{Beta-G}}(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} G^{\alpha-1}(x) [1 - G(x)]^{\beta-1} g(x).$$

Burada $G(\cdot)$, herhangi bilinen bir olasılık dağılım fonksiyonunu, $g(\cdot)$ ise bu dağılıma ilişkin olasılık yoğunluk fonksiyonunu göstermektedir.

2.4.3. Dönüştürülmüş Dağılım Ailesi

Dönüştürülmüş (transmuted) dağılım ailesi, Shaw ve Buckley (2007) tarafından önerilmiştir. Bu çalışma Bourguignon vd. (2016) tarafından iki değişkenli ve çok değişkenli dağılımlar için genelleştirilmiştir. Dönüştürülmüş dağılım ailesine ilişkin df ve oyf, $|\lambda| \leq 1$ olmak üzere, sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$F_{T-G}(x) = (1 + \lambda)G(x) - \lambda G^2(x),$$

$$f_{T-G}(x) = g(x)[1 + \lambda - 2\lambda G(x)].$$

Dönüştürülmüş dağılım ailelerinden yararlanarak birçok yeni alt dağılım elde edilmiştir. Dönüştürülmüş-Weibull (Aryal ve Tsokos, 2011), dönüştürülmüş-Rayleigh (Merovci, 2013).

2.4.4. Weibull Dağılım Ailesi

Literatürde Weibull-G ve Weibull-X olarak ifade edilen iki farklı Weibull genelleştirilmiş dağılım ailesi de mevcuttur. Weibull-G'ye ilişkin dağılım fonksiyonu ve olasılık yoğunluk fonksiyonu $\alpha, \beta > 0$ parametreleri ve $x > 0$ olmak üzere, sırasıyla, aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$F_{Weibull-G}(x) = 1 - \exp \left\{ -\alpha \left[\frac{G(x)}{1 - G(x)} \right]^\beta \right\},$$

$$f_{Weibull-G}(x) = \alpha \beta g(x) \frac{G^{\beta-1}(x)}{[1 - G(x)]^{\beta+1}} \exp \left\{ -\alpha \left[\frac{G(x)}{1 - G(x)} \right]^\beta \right\}.$$

Burada, dağılım ailesini tanımlarken yapılan dönüşüm bağ (link) fonksiyonu olarak da tanımlanmaktadır. Burada bağ fonksiyonu, $\psi(G(x)) = G(x) / [1 - G(x)]$ biçimindedir.

Weibull-X olarak adlandırılan genelleştirilmiş dağılım ailesine ilişkin dağılım fonksiyonu ve olasılık yoğunluk fonksiyonu, sırasıyla, Alzaatreh vd. (2013) tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$F_{Weibull-X}(x) = 1 - \exp \left\{ -\alpha \left[\frac{\log(1-G(x))}{\beta} \right]^\alpha \right\},$$

$$f_{Weibull-X}(x) = \frac{\alpha g(x)}{\beta [1-G(x)]} \left[\frac{-\log(1-G(x))}{\beta} \right]^{\alpha-1} \exp \left(- \left[\frac{\log(1-G(x))}{\beta} \right]^\alpha \right).$$

Burada $\alpha, \beta > 0$ şekil parametreleri ve $x > 0$ 'dır. Bu aile ile Weibull-G ailesi arasındaki fark, dönüşüm fonksiyonlarından kaynaklanmaktadır. Burada ilgili bağ fonksiyonu $\psi(G(x)) = -\log[1-G(x)]$ 'tir. İki farklı genelleştirilmiş Weibull dağılım ailesi karşılaştırıldığında Weibull-G ailesinin daha basit bir fonksiyonel yapıya sahip olduğu görülmektedir.

2.4.5. Kumaraswamy Dağılım Ailesi

Kumaraswamy genelleştirilmiş (Kw-G) dağılım ailesi Cordeiro ve Castro [59] tarafından önerilmiştir. Bu aileye ilişkin dağılım fonksiyonu ve olasılık yoğunluk fonksiyonu sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$F_{Kw-G}(x) = 1 - [1 - G^a(x)]^b$$

$$f_{Kw-G}(x) = abg(x)G^{a-1}(x)[1 - G^a(x)]^{b-1}$$

Literatürde, bu dağılım ailesi üyesi birçok dağılım tanımlanmıştır. Kw-normal, Kw-Weibull, Kw-gamma, Kw-Gumbel ve Kw-ters normal dağılımları, Cordeiro ve de Castro (2011) tarafından elde edilmiştir.

3. TOPP-LEONE DAĞILIM AİLESİ

3.1. Topp-Leone Dağılımı ve Özellikleri

Gerçek yaşamda banyo küveti biçimindeki hazard fonksiyonları ile sıklıkla karşılaşılmaktadır. Topp ve Leone (1955), banyo küveti biçimindeki hazard fonksiyonuna sahip bir dağılım önermiştir. Topp-Leone (TL) dağılımı olarak adlandırılan tek parametrelili bu dağılım simülasyon çalışmalarında kolaylıkla kullanılabilen kapalı bir kantil fonksiyonuna sahiptir. TL dağılımının dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$Z(t) = (1 - (1 - t)^2)^\alpha, 0 \leq t \leq 1, \quad \alpha > 0. \quad (3.1)$$

TL dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu ise,

$$z(t) = 2\alpha(1 - t)(1 - (1 - t)^2)^{\alpha-1}, 0 \leq t \leq 1, \quad \alpha > 0. \quad (3.2)$$

biçimindedir.

TL dağılımı özellikle son yıllarda literatürdeki birçok araştırma kullanılmıştır. Nadarajah ve Kotz (2003), TL dağılımının momentlerini elde etmiştir. Ghitany vd. (2005) güvenilirlik fonksiyonunu ve stokastik sıralamasını elde etmiştir. Zhou vd. (2006), bu dağılımdan üretilen toplam, çarpım ve oranların dağılımını incelemiştir. Kotz ve Seier (2007) dağılımın parametre değerlerine bağlı olarak basıklığını incelemiştir. Zghoul (2011), TL dağılımının kayıt (record) değerlerini elde etmiştir. Genç (2012) tarafından sıralı istatistiklerinin momentlerine ulaşılmıştır. Genç (2013), TL dağılımının stress-strength modeline ulaşmıştır. Sindhu vd. (2013), kesilmiş (trimmed) örneklemeler için Bayesci tahminleri çıkarsamıştır.

TL dağılımı kullanılarak bazı dağılım aileleri de özellikle son yıllarda tanımlanmıştır. Bunlardan bazıları, Rezaei vd. (2017), tarafından önerilen modifiye edilmiş TL-G dağılım ailesi, Brito vd. (2017) tarafından önerilen odd log-logistic-G family dağılım ailesi ve Yousof (2017) tarafından önerilen transmuted TL-G dağılım ailesidir.

TL dağılımının tek parametresinden dolayı yeterince esnek olmaması, dağılımın tanım aralığının (0,1) aralığında olması nedeniyle gerçek yaşamdaki uygulamalarda bugüne dek yeterince kullanılamamıştır.

3.2. Genelleştirilmiş Topp-Leone Dağılım Ailesi

Bu bölümde, GTL-G dağılım ailesinin dağılım fonksiyonu ve olasılık yoğunluk fonksiyonu tanımlanacaktır. Y raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu $h(y)$ ve dağılım fonksiyonu $H(y)$ olsun. X sürekli raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu olan $r(x)$ ise, $[a, b]$ aralığında tanımlı olsun. Alzaatreh vd. (2013)'ün çalışmasından yola çıkarak yeni bir dağılımın dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$F(y) = \int_a^{G(H(y))} r(x) dx \quad (3.3)$$

Burada, $G(H(y))$ aşağıdaki koşulları sağlamaktadır:

- i. $G(H(y)) \in [a, b]$,
- ii. $G(H(y))$, türevlenebilir ve monoton artandır.
- iii. $y \rightarrow -\infty$ için $G(H(y)) \rightarrow a$ ve $y \rightarrow \infty$ için $G(H(y)) \rightarrow b$ olur.

$G(H(y)) = H(y)^\beta$ olmak üzere, GTL-G dağılım ailesine ait dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$F(y) = \int_a^{H(y)^\beta} 2\alpha(1-t)(1-(1-t)^2)^{\alpha-1} dt = (1-(1-H(y)^\beta)^2)^\alpha. \quad (3.4)$$

Bu dağılım fonksiyonunun türevi alınarak elde edilen GTL-dağılım ailesine ait olasılık yoğunluk fonksiyonu ise aşağıdaki gibidir:

$$f(y) = 2\alpha\beta h(y)H(y)^{\beta-1}(1-H(y)^\beta)[1-(1-H(y)^\beta)^2]^{\alpha-1}, \quad \alpha, \beta > 0, \quad (3.5)$$

Burada $H(y)$ ve $h(y)$ sırasıyla temel dağılımın dağılım ve olasılık yoğunluk fonksiyonlarıdır. Farklı $H(y)$ fonksiyonları için GTL-G ailesine ait birçok yeni dağılım elde edilebilir. Sonraki bölümde Lomax, ters Weibull ve üstel dağılım fonksiyonları kullanılarak elde edilmiş yeni dağılım örnekleri verilecektir.

3.3. Genelleştirilmiş Topp-Leone Dağılım Ailesine Ait Bazı Dağılımlar

3.3.1. Genelleştirilmiş Topp-Leone Ters Weibull Dağılımı

Y raslantı değişkeni dağılım fonksiyonu $H(y) = e^{-y^{-\lambda}}$ ve olasılık yoğunluk fonksiyonu $h(y) = \lambda y^{-(\lambda+1)} e^{-y^{-\lambda}}$ olan ters Weibull dağılımına sahip olsun. Buna göre, genelleştirilmiş Topp-Leone Ters Weibull (GTL-TW) dağılımının dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$F(y) = [1 - (1 - (e^{-yy^{-\lambda}})^{\beta})^2]^{\alpha}$$

Bu fonsiyonun türevi alınarak olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir:

$$f(y) = 2\alpha\beta\lambda y^{-(\lambda+1)} e^{-y^{-\lambda}} (e^{-y^{-\lambda}})^{\beta-1} (1 - (e^{-y^{-\lambda}})^{\beta}) [1 - (1 - (e^{-y^{-\lambda}})^{\beta})^2]^{\alpha-1}$$

3.3.2. Genelleştirilmiş Topp-Leone Lomax Dağılımı

Y raslantı değişkeni Lomax dağılımına sahip olsun. Dağılım fonksiyonu $H(y) = 1 - (1 + \gamma y)^{-\lambda}$ ve olasılık yoğunluk fonksiyonu $h(y) = \lambda \gamma (1 + \gamma y)^{-(\lambda+1)}$ olmak üzere, genelleştirilmiş Topp-Leone Lomax (GTL-Lx) dağılımının dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$F(y) = [1 - (1 - (1 - (1 + \gamma y)^{-\lambda})^{\beta})^2]^{\alpha}$$

Buna göre olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir:

$$f(y) = 2\alpha\beta\lambda \gamma (1 + \gamma y)^{-(\lambda+1)} (1 - (1 + \gamma y)^{-\lambda})^{\beta} (1 - (1 - (1 + \gamma y)^{-\lambda})^{\beta})$$

$$[1 - (1 - (1 - (1 + \gamma y)^{-\lambda})^\beta)^2]^{\alpha-1}$$

3.3.3. Genelleştirilmiş Topp-Leone Üstel Dağılım

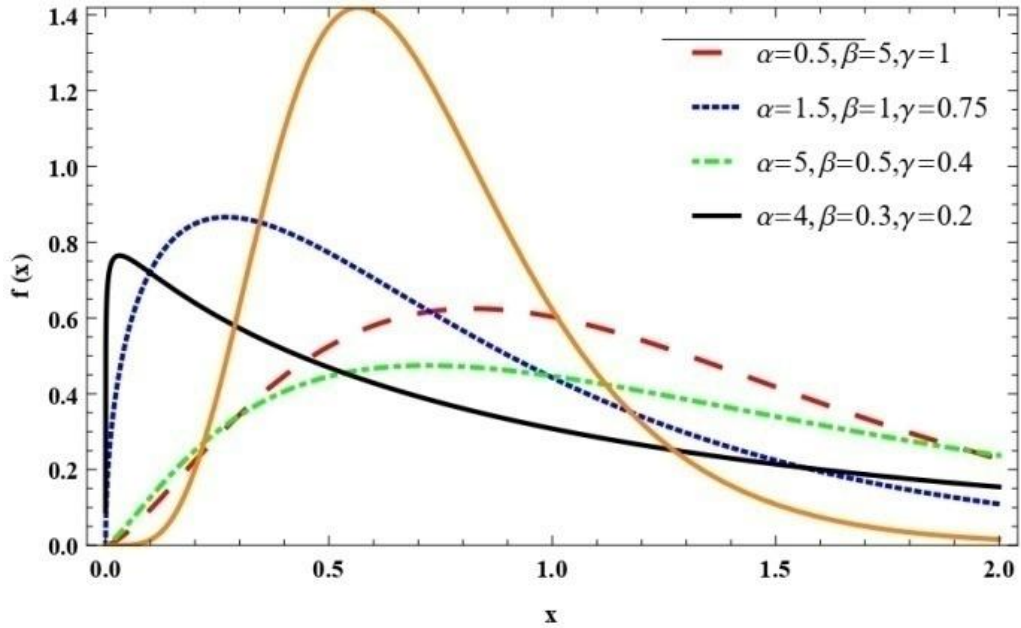
X raslantı değişkeni dağılım fonksiyonu $H(x) = 1 - e^{-\gamma x}$ ve olasılık yoğunluk fonksiyonu $h(x) = \gamma e^{-\gamma x}$ olan üstel dağılıma sahip olsun. Buna göre, genelleştirilmiş Topp-Leone Üstel (GTL-Ü) dağılımına ait dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$F(x) = [1 - (1 - (1 - e^{-\gamma x})^\beta)^2]^\alpha, \quad x > 0, \quad \alpha, \beta, \gamma > 0 \quad (3.6)$$

Buradan GTL-Ü dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonuna aşağıdaki gibi ulaşılır:

$$f(x) = 2\alpha\beta\gamma e^{-\gamma x} (1 - e^{-\gamma x})^{\beta-1} (1 - (1 - e^{-\gamma x})^\beta) [1 - (1 - (1 - e^{-\gamma x})^\beta)^2]^{\alpha-1}. \quad (3.7)$$

GTL-Ü dağılımına ait olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği farklı parametre değerleri dikkate alınarak aşağıdaki gibi çizilmiştir:



Şekil 3.1. Farklı parametre değerleri için GTL-Ü dağılımına ait olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği.

Şekil 3.1 incelendiğinde, simetrik olmayan, sağa çarpık ve basık olasılık yoğunluk fonksiyonu eğrilerine sahip olduğu görülmektedir.

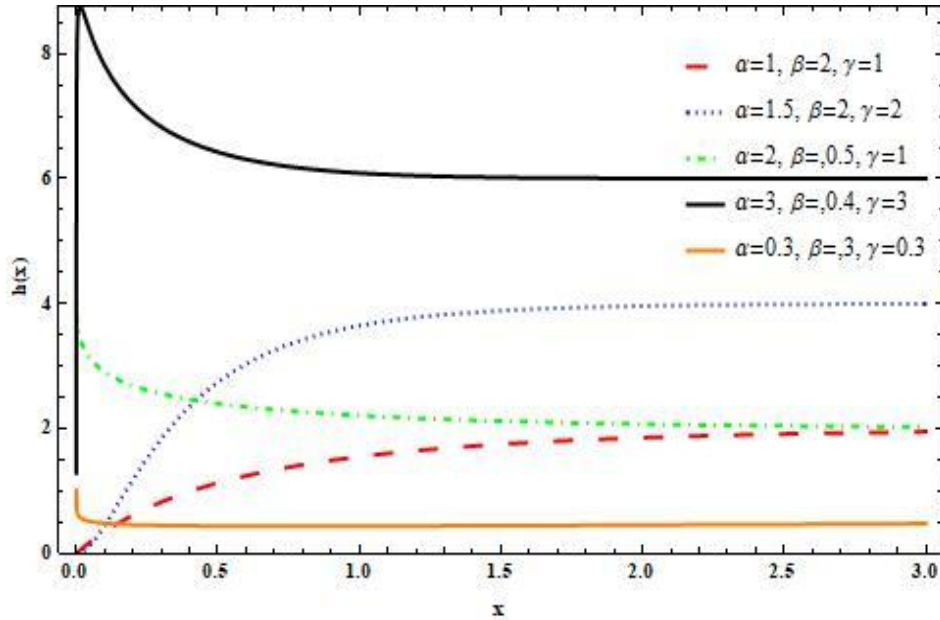
GTL-Ü dağılımına ait kantil fonksiyonu ise dağılım fonksiyonundan yararlanarak aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$Q(x) = -\frac{\log[1 - \{1 - \sqrt{1 - u^{\frac{1}{\beta}}}\}^{\frac{1}{\alpha}}]}{\gamma}$$

GTL-Ü dağılımının hazard fonksiyonu ise aşağıdaki gibidir:

$$h(x) = \frac{2\alpha\beta\gamma e^{-\gamma x} (1 - e^{-\gamma x})^{\beta-1} (1 - (1 - e^{-\gamma x})^{\beta}) [1 - (1 - (1 - e^{-\gamma x})^{\beta})^2]^{\alpha-1}}{1 - [1 - (1 - (1 - e^{-\gamma x})^{\beta})^2]^{\alpha}}$$

GTL-Ü dağılımının esnekliğinin bir kanıtı olarak hazard fonksiyonuna ait hazard fonksiyonu grafikleri Şekil 3.2’de verilmiştir:



Şekil 3.2. GTL-Ü dağılımının farklı parametre değerlerine bağlı olarak hazard fonksiyonu eğrileri.

GTL-Ü dağılımının Şekil 3.2’de verilen hazard fonksiyonu eğrileri incelendiğinde, dağılımın esnek bir yapıya sahip olduğu görülmektedir.

GTL-Ü dağılımına ait olabilirlik fonksiyonu da aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$L = n\text{Log}(2) + n\text{Log}(\alpha) + n\text{Log}(\beta) + n\text{Log}(\gamma) + \sum_{i=1}^n \text{Log}[e^{-x\gamma}] + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \text{Log}[1 - e^{-x\gamma}] \\ + \sum_{i=1}^n \text{Log}[(1 - (1 - e^{-x\gamma})^\beta)] + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \text{Log}[1 - (1 - (1 - e^{-x\gamma})^\beta)^2].$$

Log-olabilirlik fonksiyonunun parametre değerlerine göre türevi alındıktan sonra elde edilen denklemler aşağıda verilmiştir:

$$\frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \log\left(1 - \left(1 - (1 - e^{-(\gamma x)})^\beta\right)^2\right) = 0$$

$$\frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^n \log(1 - e^{-(\gamma x)}) - \sum_{i=1}^n \frac{(1 - e^{\gamma(-x)})^\beta \log(1 - e^{\gamma(-x)})}{1 - (1 - e^{\gamma(-x)})^\beta} \\ + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \frac{2(1 - e^{\gamma(-x)})^\beta (1 - (1 - e^{\gamma(-x)})^\beta) \log(1 - e^{\gamma(-x)})}{1 - (1 - (1 - e^{\gamma(-x)})^\beta)^2} = 0$$

$$\frac{n}{\gamma} - \sum_{i=1}^n \frac{\beta x e^{\gamma(-x)} (1 - e^{\gamma(-x)})^{\beta-1}}{1 - (1 - e^{\gamma(-x)})^\beta} - \sum_{i=1}^n x + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \frac{x e^{\gamma(-x)}}{1 - e^{\gamma(-x)}} \\ (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \frac{2\beta x e^{\gamma(-x)} (1 - e^{\gamma(-x)})^{\beta-1} (1 - (1 - e^{\gamma(-x)})^\beta)}{1 - (1 - (1 - e^{\gamma(-x)})^\beta)^2} = 0$$

Bu denklemlerin çözülmesi ile en çok olabilirlik parametre tahminleri elde edilebilir. GTL-Ü dağılımına paralel olarak GTL-W dağılımında çeşitli özellikleri incelenecektir.

3.4. Genelleştirilmiş Toppp-Leone Dağılım Ailesine Ait Bazı İstatistiksel Özellikler

Bu bölümde GTL-G dağılım ailesine ait istatistiksel özellikler incelenecektir.

3.4.1 Kantil Fonksiyonu

Kantil fonksiyonu bir dağılımdan rasgele sayılarak türeterek simülasyon yapılması açısından önem taşımaktadır. Bazı dağılımların kapalı bir kantil fonksiyonu olmaması simülasyon çalışmalarını güçleştirmektedir. Ancak GTL-G kapalı bir kantil fonksiyonuna sahiptir. Bir dağılıma ait kantil fonksiyonu, dağılım fonksiyonunun tersi alınara aşağıdaki gibi elde edilir:

$$Q_z = H^{-1}\left[\left\{1 - \sqrt{1 - z^{\frac{1}{\beta}}}\right\}^{\frac{1}{\alpha}}\right]. \quad (3.8)$$

Burada z 'nin tek biçimli (uniform) dağılıma sahip olduğu söylenebilir.

3.5. Genelleştirilmiş Topp-Leone Dağılımına Ait Bazı Matematiksel Açılımlar

Bazı durumlarda, genelleştirilmiş dağılımlara ait istatistiksel özellikler, örneğin moment, entropi, güvenilirlik fonksiyonlarının kapalı bir fonksiyon yapısı bulunmamaktadır. Bu problemin çözümü için Gupta vd. (1998) tarafından önerilen üstelleştirilmiş dağılım ailesinin (Exp-G) dağılım fonksiyonu ve olasılık yoğunluk fonksiyonundan yararlanarak bazı açılımlara ulaşılmaktadır. Aşağıda verilen binom açılımı dağılımlara ait bazı eşitliklerin elde edilmesinde kullanılan temel bir açılımdır:

$$(1 + y)^b = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(b+1)}{j!\Gamma(b+1-j)} y^j. \quad (3.9)$$

Bu açılımdan yararlanarak, GTL-G dağılımının dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$F(y) = \sum_{i=0}^{\infty} b_j H(y)^{\beta_j}, \quad (3.10)$$

Burada, $b_j = \sum_{i=0}^{2i+1} (-1)^{i+j} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{i!\Gamma(\alpha+1-i)} \frac{\Gamma(2i+1)}{j!\Gamma(2i+1-j)}$ olarak tanımlıdır. Benzer olarak, GTL-G dağılım ailesinin olasılık yoğunluk fonksiyonu Exp-G dağılımı cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$f(y) = \sum_{i=0}^{\infty} B_i \beta h(y) H(y)^{\beta(j+1)-1}, \quad (3.11)$$

Burada, $B_i = \sum_{j=0}^{2(i+1)} (-1)^{i+j} \frac{2\Gamma(\alpha+1)}{i! \Gamma(\alpha-i)} \frac{2\Gamma(2(i+1))}{j! \Gamma(2(i+1)-j)}$ olarak tanımlıdır. Eşitlik (3.10) ve (3.11), Exp-G dağılım ailesinin dağılım ve olasılık yoğunluk fonksiyonlarının sonlu doğrusal toplamlarının bir toplamıdır.

3.6. Momentler

Momentler, bir dağılımın ortalama, varyans, basıklık ve çarpıklık gibi ölçülerin elde edilmesinde önemli rol oynamaktadır. Sürekli bir Y raslantı değişkenine ait r . merkezsiz olmayan moment aşağıdaki integral eşitliğinden yararlanarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\mu'_r = \int_{-\infty}^{\infty} y^r dF(y).$$

GTL-G dağılımının merkezsiz olmayan momentlerine yukarıda verilen eşitlikten ulaşılamamaktadır. Bu nedenle, GTL-G dağılım ailesine ait r . merkezsiz olmayan momentler Exp-G dağılımına ait açılımdan yararlanarak aşağıdaki açılım yardımıyla bulunur. GTL-G dağılım ailesine ait r . merkezsiz olmayan momentlere ait eşitlik aşağıdaki gibidir:

$$\mu'_r = E(Y^r) = \sum_{i=0}^{\infty} B_i \tau_{r,j}, \quad (3.12)$$

Burada,

$$\tau_{r,j} = \int_{-\infty}^{\infty} y^r \beta h(y) H(y)^{\beta(j+1)-1} dy$$

ve

$$B_i = \sum_{j=0}^{2(i+1)} (-1)^{i+j} \frac{2\Gamma(\alpha+1)}{i! \Gamma(\alpha-i)} \frac{2\Gamma(2(i+1))}{j! \Gamma(2(i+1)-j)}.$$

olarak tanımlıdır.

Merkezsiz olmayan momentlerden yararlanarak, GTL-G dağılımının p. merkezsiz momentleri aşağıdaki eşitlik yardımıyla elde edilebilir:

$$M_p = \sum_{r=0}^p p_r (-\mu'_1)^{p-r} E(Y^r). \quad (3.13)$$

Yaşam analizinde ve güvenilirlikte kullanılan bir dağılımın Bonferroni ve Lorenz eğrileri, ortalama sapma değerinin hesabında yararlanılan s. tamamlanmamış (incomplete) momentler aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\delta(y) = \sum_{i=0}^{\infty} B_j \varphi_{s,j}, \quad (3.14)$$

Burada, $\varphi_{s,j} = \int_{-\infty}^s y^s \beta h(y) H(y)^{\beta(j+1)-1} dy$ olarak tanımlıdır.

3.7. Entropi

Belirsizliğin bir ölçüsü olan entropi değeri dağılımlar içinde olasılık yoğunluk fonksiyonundan yararlanarak elde edilebilmektedir. En temel entropi fonksiyonlarından biri olan Rényi entropisi aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$I_\gamma(Y) = \frac{1}{1-\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)^\gamma dy, \quad \gamma > 0 \text{ ve } \gamma \neq 1. \quad (3.15)$$

GTL-G dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonundan yararlanarak elde edilen $f(y)^\gamma$ eşitliği aşağıdaki gibidir:

$$f(y)^\gamma = 2^\gamma \alpha^\gamma \beta^\gamma h(y)^\gamma H(y)^{\gamma(\beta-1)} (1 - H(y)^\beta)^\gamma [1 - (1 - H(y)^\beta)^2]^{\gamma(\alpha-1)}.$$

Bu eşitlik binom açılımı yardımıyla aşağıdaki biçimde de toplamsal olarak ifade edilebilir:

$$f(y)^\gamma = \sum_{l=0}^{\infty} \pi_{l,k} h(y)^\gamma H(y)^{\beta k + \gamma(\beta-1)},$$

Burada,

$$\pi_{l,k} = \sum_{k=0}^{2l+\gamma} (-1)^{l+k} \frac{\Gamma(\alpha+1)+1}{l! \Gamma(\alpha+1)+1-l} \frac{\Gamma(2l+\gamma+1)}{k! \Gamma(2l+\gamma+1-k)} 2^\gamma \alpha^\gamma \beta^\gamma$$

olarak tanımlıdır. Buradan, GTL-G dağılımına ait Rényi entropisi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$I_\gamma(Y) = \frac{1}{1-\gamma} \log\{\sum_{l=0}^{\infty} \pi_{l,k} \int_{-\infty}^{\infty} h(y)^\gamma H(y)^{\beta k+\gamma(\beta-1)} dy\} \quad (3.16)$$

Rényi entropisine benzeyen q-entropi fonksiyonu $H_q(Y)$, GTL-G dağılımından yararlanarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$h_q(y) = \frac{1}{q-1} \log\{1 - [\sum_{l=0}^{\infty} \pi_{l,k}^* \int_{-\infty}^{\infty} h(y)^q H(y)^{\beta k+q(\beta-1)} dy]\}. \quad (3.17)$$

Burada $q > 0$ ve $q \neq 1$ olmak üzere,

$$\pi_{l,k}^* = \sum_{k=0}^{2l+q} (-1)^{l+k} \frac{\Gamma q(\alpha+1)+1}{l! \Gamma q(\alpha+1)+1-l} \frac{\Gamma(2l+q+1)}{k! \Gamma(2l+q+1-k)} 2^q \alpha^q \beta^q$$

olarak tanımlıdır.

3.8. Güvenilirlik Analizi

Bu bölümde, GTL-G ailesine ait bazı güvenilirlik eşitlikleri tanıtılacaktır.

3.8.1. Güvenilirlik ve Hazard Fonksiyonları

Güvenilirlik fonksiyonu bir olayın olasılığının t zamanından önce gerçekleşmesini ifade etmektedir. Yaşam fonksiyonu kadar popüler olan güvenilirlik fonksiyonu GTL-G dağılımı için aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$R(y) = 1 - (1 - (1 - H(y)^\beta)^2)^\alpha \quad (3.18)$$

GTL-G dağılımına ait hazard fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$h(y) = \frac{2\alpha\beta h(y)H(y)^{\beta-1}(1-H(y)^\beta)[1-(1-H(y)^\beta)^2]^{\alpha-1}}{1-(1-(1-H(y)^\beta)^2)^\alpha} \quad (3.19)$$

3.8.2. Ortalama Kalan Ömür Fonksiyonu

Yaşam analizi veya güvenilir kuramında bir birim veya bireyin kalan ömrüne ait s. moment koşullu beklenen değer yardımıyla aşağıdaki gibi tanımlanır (Rougier, 1998):

$$m_s(t) = E[(Y - t)^s | Y > t], s = 1, 2, \dots,$$

Y raslantı değişkeninin dağılım fonksiyonu yardımıyla bu eşitlik aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$m_s(t) = \frac{1}{R(t)} \int_t^\infty (y - t)^s f(y) dx.$$

GTL-G dağılımı için ortalama kalan ömür fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$m_s(t) = \frac{1}{R(t)} \sum_{r=0}^s s_r (-t)^{s-r} \sum_{i=0}^{\infty} B_j \int_t^\infty y^s \varphi_{n,j} dy.$$

Ortalama kalan ömür (mean residual life) fonksiyonu, $s = 1$ için t yaşındaki bir bireyin veya bir birimin beklenen ek ömür uzunluğudur.

3.9. Parametre Tahmini

n büyüklüğündeki α ve β parametrelili GTL-G dağılım ailesine ait bir kitleden gelen y_1, y_2, \dots, y_n aynı dağılımlı, bağımsız raslantı değişkenlerinin oluşturduğu rasgele örnekleme için log-olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$L = n\text{Log}(2) + n\text{Log}(\alpha) + n\text{Log}(\beta) + n \sum_{i=1}^n \text{Log}[h(y_i)] + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \text{Log}[H(y_i)] \\ + \sum_{i=1}^n \text{Log}[(1 - H(y_i)^\beta)] + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \text{Log}[1 - (1 - H(y_i)^\beta)^2]. \quad (3.20)$$

Buradan, olabilirlik eşitlikleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \log\left(1 - (1 - H(y_i)^\beta)^2\right) \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = \frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^n \log H(y_i)^\beta - \sum_{i=1}^n \frac{H(y_i)^\beta \log H(y_i)^\beta}{1 - H(y_i)^\beta} + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \frac{2H(y_i)^\beta (1 - H(y_i)^\beta) \log H(y_i)^\beta}{1 - (1 - H(y_i)^\beta)^2} \quad (3.22)$$

Bu eşitlikler ancak iteratif yöntemler yardımıyla çözülebilmektedir. Bu amaçla, Newton-Raphson yönteminden yararlanılmıştır. α ve β parametre tahminleri için parametre tahminleri aşağıdaki Fisher bilgi matrisi yardımıyla elde edilmektedir:

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} \sim N \left(\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{J}_{\alpha\alpha} & \hat{J}_{\alpha\beta} \\ \hat{J}_{\beta\alpha} & \hat{J}_{\beta\beta} \end{pmatrix} \right),$$

$$\frac{1}{J} = -E \begin{pmatrix} J_{\alpha\alpha} & J_{\alpha\beta} \\ J_{\beta\alpha} & J_{\beta\beta} \end{pmatrix}.$$

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ TOPP-LEONE WEIBULL DAĞILIMI VE BAZI ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde, Üçüncü bölümde tanıtılan GTL-G dağılım ailesinden yararlanarak, genelleştirilmiş Topp-Leone Weibull (GTL-W) dağılımı elde edilecek ve bazı istatistiksel özellikleri incelenecektir.

4.1. Genelleştirilmiş Topp-Leone Weibull Dağılımı

Asgharzadeh (2018) tarafından önerilen dağılım fonksiyonu,

$$H(y) = 1 - e^{-(\gamma y)^\lambda} \quad (4.1)$$

ve olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$h(y) = \lambda \gamma^\lambda y^{\lambda-1} e^{-(\gamma y)^\lambda} \quad (4.2)$$

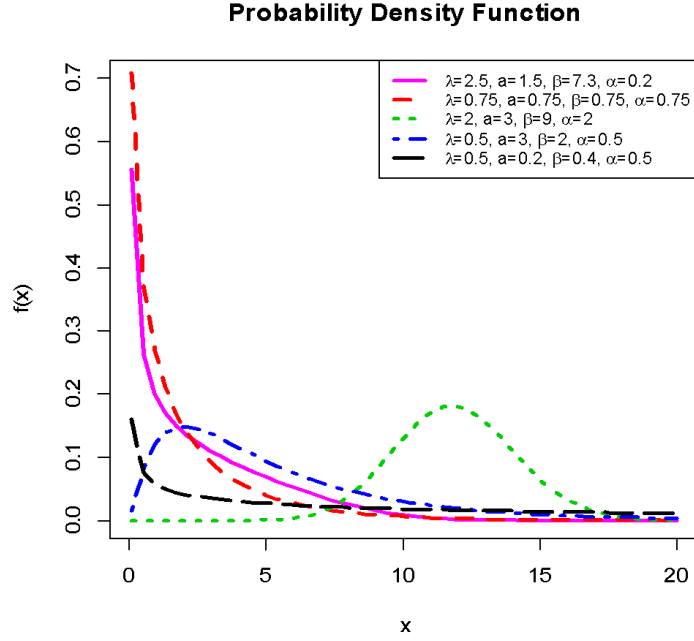
olan Weibull dağılımı temel dağılım olarak alınmıştır. Eşitlik (3.4)'te verilen GTL-G dağılım ailesine ait dağılım fonksiyonunda Eşitlik (4.1) yerine yazılsın. Bu durumda elde edilen GTL-W dağılımına ait dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$F(y) = [1 - (1 - (1 - e^{-(\gamma y)^\lambda})^\beta)^\alpha]^\alpha, \quad y > 0. \quad (4.3)$$

Burada, $\alpha, \beta, \lambda, \gamma > 0$ olarak tanımlıdır. Bu fonksiyonun y 'ye göre türevi alındığında, GTL-W dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$f(y) = 2\alpha\beta\lambda\gamma^\lambda y^{\lambda-1} e^{-(\gamma y)^\lambda} (1 - e^{-(\gamma y)^\lambda})^{\beta-1} (1 - (1 - e^{-(\gamma y)^\lambda})^\beta) [1 - (1 - (1 - e^{-(\gamma y)^\lambda})^\beta)^\alpha]^{-1} \quad (4.4)$$

GTL-W dağılımına ait farklı parametre değerlerine göre elde edilmiş olasılık yoğunluk grafikleri aşağıdaki gibidir:



Şekil 4.1. GTL-W dağılımına ait olasılık yoğunluk fonksiyonu grafikleri.

Şekil 4.1 incelendiğinde, monoton azalan, sağa ve sola çarpık dağılım şekilleri görülmektedir.

4.2. GTL-W Dağılımının Yaşam ve Hazard Fonksiyonları

Eşitlik (4.3)'ten yararlanarak, GTL-W dağılımının yaşam fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

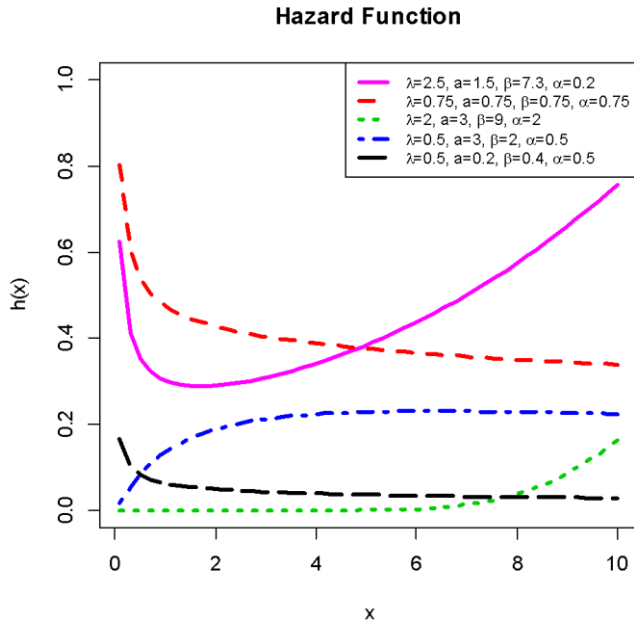
$$S(y) = 1 - [1 - (1 - (1 - e^{-(y\gamma)^\lambda})^\beta)^2]^\alpha \quad (4.4)$$

Hazard fonksiyonu ise,

$$h(y) = \frac{2\alpha\beta\lambda\gamma^\lambda y^{\lambda-1} e^{-(y\gamma)^\lambda} (1 - e^{-(y\gamma)^\lambda})^{\beta-1} (1 - (1 - e^{-(y\gamma)^\lambda})^\beta)}{[1 - (1 - (1 - e^{-(y\gamma)^\lambda})^\beta)^2]^\alpha} \quad (4.5)$$

biçimindedir.

GTL-W dağılımının farklı parametre değerleri için elde edilmiş hazard fonksiyonuna ait grafikleri Şekil 4.2’de verilmiştir:



Şekil 4.2. GTL-W dağılımına ait hazard fonksiyonu grafikleri.

4.3. GTL-W Dağılımının Çarpıklık ve Basıklığının İncelenmesi

GTL-W dağılımına ait kantil fonksiyonu ise Eşitlik (4.3)’teki dağılım fonksiyonundan yararlanarak aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$Q(x) = - \frac{\left[\log \left[1 - \left\{ 1 - \sqrt{1 - u^{\frac{1}{\beta}} \frac{1}{\alpha}} \right\} \right]^{\frac{1}{\lambda}}}{\gamma} \quad (4.6)$$

Galton’ın çarpıklık katsayısı aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$S = \frac{Q(3/4) - 2Q(1/2) + Q(1/4)}{Q(3/4) - Q(1/4)}. \quad (4.7)$$

Benzer şekilde, kantiller yardımıyla Moors’un basıklık katsayısına da aşağıdaki formülle ulaşılabilir:

$$K = \frac{Q(7/8) - Q(5/8) + Q(3/8) - Q(1/8)}{Q(6/8) - Q(2/8)}. \quad (4.8)$$

Burada $Q(\cdot)$ GTL-W dağılımının dağılım fonksiyonunu göstermektedir. Dağılım simetrik ise $S = 0$, sağa (veya sola) çarpık ise, $S > 0$ veya ($S < 0$) olur. K değeri arttıkça, dağılımın kuyruğu ağırlaşmaktadır.

Çizelge 4.1. Farklı parametre değerleri ve $\gamma = 1$ için GTL-W dağılımının ortalama, standart sapma, çarpıklık basıklık ölçüleri.

| α | λ | β | Ortalama | Standart Sapma | Çarpıklık | Basıklık |
|----------|-----------|---------|----------|----------------|-----------|----------|
| 0.5 | 0.5 | 0.5 | 6.1448 | 13.8281 | 3.8137 | 19.1006 |
| | | 1 | 8.2279 | 15.8168 | 3.1727 | 13.7885 |
| | | 1.5 | 9.6717 | 17.0305 | 2.8401 | 11.4209 |
| | | 2 | 10.7912 | 17.9098 | 2.6203 | 10.0025 |
| | | 5 | 14.7077 | 20.8057 | 1.9988 | 6.6081 |
| 2 | 4 | 0.5 | 0.2228 | 0.1825 | 2.4175 | 22.1362 |
| | | 1 | 0.4457 | 0.3650 | 2.4166 | 21.7987 |
| | | 1.5 | 0.6685 | 0.5475 | 2.4150 | 21.4661 |
| | | 2 | 0.8914 | 0.7300 | 2.4130 | 21.1368 |
| | | 5 | 2.2285 | 1.8248 | 2.3895 | 19.2367 |

Çizelge 4.1 incelendiğinde, seçilen parametre değerleri için dağılımın sağa çarpık olduğu görülmektedir. Ayrıca β parametresi değeri arttıkça basıklığın azaldığı sonucuna ulaşılmıştır.

4.4. GTL-W Dağılımı İçin Parametre Tahmini

GTL-W dağılımına ait olabilirlik fonksiyonu da aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$L = n \log(2) + n \log(\alpha) + n \log(\beta) + n \log(\gamma) + n \log(\lambda) + \sum_{i=1}^n \log[e^{-(x_i \gamma)^\lambda}] + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \log[(1 - e^{-(x_i \gamma)^\lambda})^\beta] + \sum_{i=1}^n \log[(1 - (1 - e^{-(x_i \gamma)^\lambda})^\beta)] + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \log[1 - (1 - (1 - e^{-(x_i \gamma)^\lambda})^\beta)^2].$$

Log-olabilirlik fonksiyonunun parametre değerlerine göre türevi alındıktan sonra elde edilen denklemler aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \log \left(1 - \left(1 - \left(1 - e^{-(\gamma x)^\lambda} \right)^\beta \right)^2 \right) &= 0 \\ \frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^n \log \left(1 - e^{-(\gamma x)^\lambda} \right) - \sum_{i=1}^n \frac{\left(1 - e^{\gamma(-x)} \right)^\beta \log \left(1 - e^{\gamma(-x)} \right)}{1 - \left(1 - e^{\gamma(-x)} \right)^\beta} \\ + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \frac{2 \left(1 - e^{\gamma(-x)} \right)^\beta \left(1 - \left(1 - e^{\gamma(-x)} \right)^\beta \right) \log \left(1 - e^{\gamma(-x)} \right)}{1 - \left(1 - \left(1 - e^{\gamma(-x)} \right)^\beta \right)^2} &= 0 \\ \frac{n}{\gamma} - \sum_{i=1}^n \frac{\beta x e^{\gamma(-x)} \left(1 - e^{\gamma(-x)} \right)^{\beta-1}}{1 - \left(1 - e^{\gamma(-x)} \right)^\beta} - \sum_{i=1}^n x + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \frac{x e^{\gamma(-x)}}{1 - e^{\gamma(-x)}} \\ (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \frac{2 \beta x e^{\gamma(-x)} \left(1 - e^{\gamma(-x)} \right)^{\beta-1} \left(1 - \left(1 - e^{\gamma(-x)} \right)^\beta \right)}{1 - \left(1 - \left(1 - e^{\gamma(-x)} \right)^\beta \right)^2} &= 0 \end{aligned}$$

Bu denklemlerin çözülmesi ile en çok olabilirlik parametre tahminleri elde edilebilir.

5. UYGULAMA

Bu bölümde önerilen GTL-W dağılımının literatürdeki dağılımlardan daha iyi sonuçlar verdiği ve daha esnek olduğu gösterilmiştir. Uygulama aşamasında T.C. Meteoroloji Genel Müdürlüğü web sayfasının olan (<http://www.havaizleme.gov.tr/Default.ltr.aspx>'dan) elde edilen Kırklareli (Vize) istasyonuna ait maksimum rüzgar hızı (m/s) verisinden yararlanılmıştır. Veri kümesi 84 gözlem değeri içermektedir. En çok olabilirlik tahmin yönteminden yararlanarak parametre tahminleri elde edilmiştir. GTL-W dağılımının

Çizelge 5.1’de verilen model uyum istatistikleri yardımıyla literatürdeki dağılımlardan veri kümesi için daha uygun olduğu gösterilmiştir:

Çizelge 5.1. Model uyum istatistikleri.

| Dağılım | AIC | DAIC | BIC | HQIC | -Log Olabilirlik |
|---------------------------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|
| GTL-W ($\lambda, a, \alpha, \beta$) | 338.8138 | 339.1138 | 346.1062 | 341.7453 | 166.4069 |
| GTL-Ü (λ, a, β) | 340.4393 | 340.9456 | 350.1626 | 344.348 | 166.2197 |
| Log-Lojistik (α, β) | 341.4075 | 341.5556 | 346.2691 | 343.3618 | 168.7037 |
| Burr (α, β, θ) | 343.1571 | 343.4571 | 350.4495 | 346.0886 | 168.5785 |
| Dagum (α, β, θ) | 343.2533 | 343.5533 | 350.5458 | 346.1848 | 168.6267 |
| Weibull (α, β) | 347.2001 | 347.3483 | 352.0617 | 349.1544 | 171.6001 |
| Lindley (λ) | 396.5762 | 396.6250 | 399.0070 | 397.5533 | 197.2881 |
| Üstel (β) | 428.3656 | 428.4144 | 430.7965 | 429.3428 | 213.1828 |

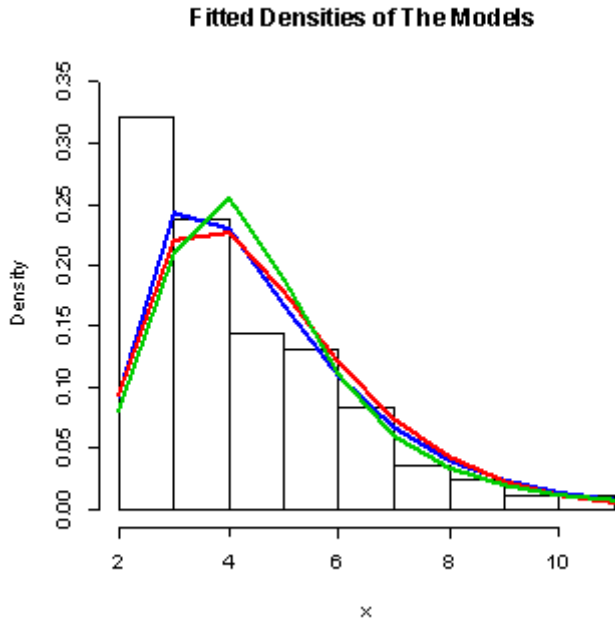
Düzeltilmiş Akaike Bilgi Kriteri(DAIC)
Hannan Quinn Bilgi Kriteri(HQIC)

Çizelge 5.1’e göre, GTL-W dağılımı incelenen dağılımlardan rüzgar hızı verisine daha uygundur. Dağılımlara ait en çok olabilirlik parametre tahminleri aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

Çizelge 5.2. Rüzgar hızı verisi için en çok olabilirlik parametre tahmin değerleri.

| Dağılım | Parametre Tahminleri | Standart Hata |
|---------------------------------------|-------------------------------------|------------------------------------|
| GTL-W ($\lambda, a, \alpha, \beta$) | 0.23342, 30.29890, 1.28209, 0.72957 | 0.03178, 0.10847, 0.02822, 0.02316 |
| GTL-Ü (λ, a, β) | 0.33738, 83.45717, 0.48879 | 0.07098, 25.37264, 0.06876 |
| Log-Lojistik (α, β) | 4.15890, 4.28155 | 0.37331, 0.19764 |
| Burr (α, β, θ) | 3.80423, 1.32733, 4.77772 | 0.74488, 0.79596, 1.17038 |
| Dagum (α, β, θ) | 3.88827, 1.23275, 3.95189 | 0.74371, 0.68391, 0.88199 |
| Weibull (α, β) | 2.54382, 5.25567 | 0.20479, 0.23899 |
| Lindley (λ) | 0.37148 | 0.02920 |
| Üstel (β) | 4.65476 | 0.50788 |

Çizelge 5.1’e göre veriye en uygun üç dağılım GTL-W, GTL-Ü ve Log-Lojistik dağılımlarıdır. Bu dağılımlar ve veriye ait histogram Şekil 5.1’de verilmiştir:



Şekil 5.1. Rüzgar hızı verisi için en iyi üç dağılım ve veriye ait histogram grafiği.

Şekil 5.1'e göre de rüzgar hızı verisi için en iyi dağılımın GTL-W olduğu görülmektedir.

6. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Bu tez çalışmasında, gerçek hayatta birçok farklı alanda yaygın olarak kullanılan, bilinen olasılık dağılımlarının öneminin vurgulanmasının yanı sıra, yetersiz kalabildikleri durumların da olabildiğine dikkat çekilmeye çalışılmıştır. Bu nedenle, bilinen modellere yeni, esnek ve kullanışlı dağılım alternatifleri önermek önem kazanmıştır. Yeni olasılık dağılımların tanımlanması ya da geliştirilmesi bu ihtiyacı karşılamayı hedeflemektedir.

Çalışmada geliştirilmiş Weibull dağılımları ve bazı dağılım aileleri üzerinde durulmuştur. Daha sonra Salman vd. (2019) tarafından önerilen geliştirilmiş Topp-Leone (GTL-G) ve özellikleri üzerinde durulmuştur. GTL-G dağılım ailesi esnek dağılımları alt sınıf olarak içinde barındıran bir ailedir. Çalışmanın sonraki kısmında GTL-Weibull (GTL-W) dağılımı tanımlanarak bazı özellikleri incelenmiştir. GTL-W dağılımına ilişkin hazard fonksiyonu grafikleri incelendiğinde, keyfi verilen parametre değerlerine karşılık gelen oldukça farklı şekillerdeki grafikler dikkat çekmektedir. Bu nedenle, artan, azalan ya da küvet şeklinde dağılım gösteren veri tipleri için iyi bir alternatiftir. Bu dağılımı dezavantajı, fazla parametre sayısıdır. Bununla birlikte, kullanılan paket programlar sayesinde parametre tahminleri oldukça hızlı ve kolay elde edilebilmektedir. Ancak kantil fonksiyonun kolayca elde edilebilir ve basit yapısıyla veri üretiminde kullanılabilmesi bir avantajdır. Bu nedenle, bu dağılımdan gelen bir raslantı değişkenine ilişkin veri üretimi yapmak oldukça basittir. Eklenen parametreler dağılımın esnekliğini oldukça arttırmıştır.

Bu çalışmada, kullanılan parametre tahmin yöntemi en çok olabilirlik yöntemidir. Farklı yöntemler ile parametre tahminlerini elde etmek ve buna ilişkin çalışmalar da yapılabilir. Ayrıca, dağılımlara ilişkin elde edilen çeşitli karakteristikler, alana göre çeşitlendirilip, arttırılabilir (Örneğin, ortalama durgunluk zamanı (mean inactivity time), ortalama artık yaşam (mean residual life) fonksiyonu vs.). Bu çalışmada, sürekli verilerin modellenmesinde kullanılacak önerilen bu dağılımların dışında, kesikli değişkenlere ilişkin yapılacak yeni çalışmaların da oldukça dikkat çekici olabileceği düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

Alzaatreh A., Famoye F, Lee C. Weibull-pareto distribution and its applications, *Communications in Statistics-Theory and Methods* 2013; 42(9): 1673-1691.

Aryal GA, Tsokos CP. Transmuted Weibull distribution: a generalization of the Weibull probability distribution. *Eur J Pure Appl Math* 2011;4:89–102.

Asgharzadeh, M., Nadarajah, S. Shara, F, Weibull Lindley distribution. *REVSTAT-Statistical Journal*, 2018; 16(1): 87-113.

Barreto-Souza W, de Morais AL, Cordeiro GM. The Weibull-geometric distribution. *J Stat Comput Simul* 2011;81:645–57.

Bebbington M, Lai CD, Wellington M, Zitikis R. The discrete additive Weibull distribution: a bathtub shaped hazard for discontinuous failure data. *Reliab Eng Syst Safety* 2012;106:37–44.

Bebbington M, Lai CD, Zitikis R. Useful periods for lifetime distributions with bathtub shaped hazard rate functions. *IEEE Trans Reliab* 2006;55:245–51.

Berrettoni, J. N. (1964) : Practical Applications of the Weibull distribution, *Industrial Quality Control*, 21, 71-79.

Bourguignon M., Ghosh I., Cordeiro G.M. General results for the transmuted family of distributions and new models, *Journal of Probability and Statistics*, 2016; Article ID 7208425.

Brito, E., Cordeiro, G. M., Yousof, H. M., Alizadeh, M. Silva, G.O. The Topp–Leone odd log-logistic family of distributions, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 2017; 87 (15): 3040-3058.

Cohen AC. The reflected Weibull distribution. *Technometrics* 1973;15: 867–73.

Cordeiro GM, Ortega EM, Silva GO. The Kumaraswamy modified Weibull distribution: theory and applications. *J Stat Comput Simul* 2012. <http://dx.doi.org/10.1080/00949655.2012.745125>.

Cordeiro GM, de Castro F, A new family of generalized distributions, *J. Stat. Comput. Simul* 2011; 81(7): 883–898.

Cordeiro GM, Castellares F, Montenegro LC, de Castro M. The beta generalized gamma distribution. *Statistics* 2013. <http://dx.doi.org/10.1080/02331888.2012.658397>.

Eugene N, Lee C, Famoye, F. Beta-normal distribution and its applications, *Commun. Stat. - Theory Methods* 2002; 31, 497–512.

- Genç AI, Estimation of $P(X>Y)$ with Topp–Leone distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation* 2013; 83:326–339.
- Ghitany ME, Al-Hussaini EK, Al-Jarallah RA. Marshall–Olkin extended Weibull distribution and its application to censored data. *J Appl Stat* 2005;32: 1025–34.
- Gumbel EJ. *Statistics of extremes*. New York: Columbia University Press; 1958.
- Hagiwara, Y.(1974) Probability of earthquake occurrence as obtained from a Weibull distribution analysis of crustal strain., *Tectonophysics* ,23, pp. 323-318
- Jazi MA, Lai CD, Alamatsaz MH. A discrete inverse Weibull distribution and estimation of its parameters. *Stat Methodol* 2010;7:121–32.
- Kao, J. H. K., *Computer Methods for estimating Weibull parameters in Reliability Studies*, *Transactions of IRE-Reliability and Quality Control*, 1958; 13: 15-22.
- Kundu D, Gupta RD. Generalized exponential distribution. *Aust N Z J Stat* 1999;41:173–88.
- Lai CD, Xie M, Murthy DNP. A modified Weibull distribution. *IEEE Trans Reliab* 2003;52:33–7.
- Lieblein, J., Zelen, M. (1956) : Statistical Investigation of the Fatigue Life of Deep Groove Ball Bearings, *Journal of Res. Natl. Bur. Std.*, 57, 273-315.
- Lu W, Shi D. A new compounding life distribution: the Weibull–Poisson distribution. *J Appl Stat* 2012;39:21–38.
- Moss, T.R. (2005). *The Reliability Data Handbook*. Professional Engineering Publishing Limited: London and Bury St Edmunds, UK. 287s.
- Mudholkar GS, Srivastava DK. Exponentiated Weibull family for analyzing bathtub failure-rate data. *IEEE Trans Reliab* 1993;42:299–302.
- Mudholkar GS, Srivastava DK, Freimer M. The exponentiated Weibull family: a reanalysis of the bus-motor-failure data. *Technometrics* 1995;37:436–45.
- Mudholkar GS, Hutson AD. The exponentiated Weibull family: some properties and a flood data application. *Commun Stat Theory Methods* 1996;25: 3059–83.
- Mudholkar GS, Kollia GD. Generalized Weibull family: a structural analysis. *Commun Stat Theory Methods* 1994;23:1149–71.
- Nadarajah S, Kotz S. Moments of some J-shaped distributions. *Journal of Applied Statistics*, 2003; 30: 311-317.
- Nakagawa T, Osaki S. The discrete Weibull distribution. *IEEE Trans Reliab*. 1975;24:300–1.

- Nooghabi MS, Borzadaran GRM, Roknabadi AHR. Discrete modified Weibull distribution. *Metron* 2011;69:207–22.
- Padgett WJ, Spurrier JD. On discrete failure models. *IEEE Trans Reliab* 1985;34:253–6.
- Rezaei S., Sadr BB, Alizadeh M, Nadarajah S. Topp-Leone generated family of distributions: Properties and applications, *Communications in Statistics-Theory and Methods* 2017; 46(7): 2893-2909.
- Rikitake, T. (1974) Probability of an earthquake occurrence as estimated from crustal strain, *Tectonophysics*, 23:, pp. 299-312
- Rougier, P., Van Cutsem, E., Bajetta, E., Niederle, N., Possinger, K., Labianca, R., Navarro, M., Morant, R., Bleiberg, H., Wils, J., Awad, L., Herait, P., Jacques, C. Randomised trial of irinotecan versus fluorouracil by continuous infusion after fluorouracil failure in patients with metastatic colorectal cancer, *Lancet*. 1998; 31, 352(9138), 1407-1412.
- Salman A, Özel G, Shahbaz MQ, A new generalized Topp-Leone class of distributions: theory and applications, 2019, *Symmetry*, Basımda.
- Shahbaz MQ, Shahbaz S, Butt NS. The Kumaraswamy-inverse Weibull distribution. *Pak J Stat Oper Res* 2012;8:479–89.
- Shaw W, Buckley I, The alchemy of probability distributions: beyond gram-charlier expansions and a skew-kurtotic-normal distribution from a rank transmutation map. *Research Report*, 2007.
- Sindhu TN, Saleem M, Aslam M. Bayesian estimation for Topp–Leone distribution under trimmed samples. *J Basic Appl Sci Res*. 2013; 3: 347–360.
- Stacy EW. A generalization of the gamma distribution. *Ann Math Stat* 1962;33:1187–92.
- Stein WE, Dattero R. A new discrete Weibull distribution. *IEEE Trans Reliab* 1984;33:196–7.
- Thomposon, J. R. (1968) : Some Shrinkage Techniques for Estimating the Mean, *The Journal of American Statistical Association*, 63, 113-123.
- Topp CW, Leone FC, A family of J-shaped frequency functions. *Journal of the American Statistical Association*; 1955, 50: 209-219.
- Weibull, W. (1939) : The phenomenon of Rupture in Solids, *Ingenior Vetenskaps Akademiens Handlingar*, 153,2.
- Weibull, W. (1951) : A Statistical distribution function of wide Applicability, *Journal of Applied Mechanics*, 18, 293-297.
- Xie M, Lai CD. Reliability analysis using an additive Weibull model with bathtub-shaped failure rate function. *Reliab Eng Syst Safety* 1996;52:87–93.

Yousof, H. M., Afify, A.Z., Alizadeh, M., Butt, N.S., Hamedani, G.G., Mir Masoom A. The Transmuted Exponentiated Generalized-G Family of Distributions, Pakistan Journal of Statistics and Operation Research, 2015; XI(4): 441-464.

Zghoul, A.A (2011), Record values from a family of J-shaped distributions, 71(3), 355-363.

Genç AI, Moments of order statistics of Topp-Leone distribution. Statistical Papers 2012; 53: 117-131.

Zhou M, Yang DW, Wang Y, Nadarajah S. Some J-shaped distributions: Sums, products and ratios. RAMS '06. Annual Reliability and Maintainability Symposium, 2006; 175-181.



HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS/~~DOKTORA~~ TEZ ÇALIŞMASI ORJİNALLİK RAPORU

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
İSTATİSTİK ANABİLİM DALI BAŞKANLIĞI'NA

Tarih: 10/09/2019

Tez Başlığı / Konusu: GENELLEŞTİRİLMİŞ WEIBULL DAĞILIMLARI

Yukarıda başlığı/konusu gösterilen tez çalışmamın a) Kapak sayfası, b) Giriş, c) Ana bölümler d) Sonuç kısımlarından oluşan toplam⁶² sayfalık kısmına ilişkin, ^{04/09/2019} tarihinde ~~gönderim~~/tez danışmanım tarafından Turnitin adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % ⁵ 'tür.

Uygulanan filtrelemeler:

- 1- Kaynakça hariç
- 2- Alıntılar ~~hariç~~/dâhil
- 3- 5 kelimedenden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Çalışması Orjinallik Raporu Alınması ve Kullanılması Uygulama Esasları'nı inceledim ve bu Uygulama Esasları'nda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

Alptuğ Sabri
AKBAŞ
10.09.2019

Tarih ve İmza

Adı Soyadı: Alptuğ Sabri Akbaş
Öğrenci No: N14120456
Anabilim Dalı: İstatistik
Programı: İstatistik
Statüsü: Y.Lisans Doktora Bütünleşik Dr.

DANIŞMAN ONAYI

UYGUNDUR.

Doç. Dr. Gamze Özel Kadılar
(Unvan, Ad Soyad, İmza)

ÖZGEÇMİŞ

KİMLİK BİLGİLERİ

Adı Soyadı: Alptuğ Sabri Akbaş

Doğum Yeri: Nazilli/Aydın

Medeni Hali: Bekar

E-posta: a.sabriakbas@gmail.com

Lisans: Hacettepe Üniversitesi/ İstatistik

Yüksek Lisans: Hacettepe Üniversitesi

Yabancı Dil ve Düzeyi: İngilizce / YDS 2014: 66,25

İş Deneyimi: 2014-

Milli Eğitim Bakanlığına Bağlı Özel Eğitim Kurumları / Matematik-Geometri Öğretmeni

Deneyim Alanları: İstatistik, Matematik, Olasılık, Geometri