HEDEF PROGRAMLAMA VE EN KÜÇÜK KAR FARKI YAKLAŞIMLARI İLE OPTİMAL REASÜRANS

OPTIMAL REINSURANCE WITH GOAL PROGRAMMING AND MINIMUM PROFIT DIFFERENCE APPROACHES

BETÜL ZEHRA KARAGÜL

Dr. Öğr. Üyesi MURAT BÜYÜKYAZICI

Tez Danışmanı

Hacettepe Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin

Aktüerya Bilimleri Anabilim Dalı İçin Öngördüğü

DOKTORA TEZİ

olarak hazırlanmıştır.

2019

BETÜL ZEHRA KARAGÜL'ün hazırladığı **"HEDEF PROGRAMLAMA VE EN KÜÇÜK KAR FARKI YAKLAŞIMLARI İLE OPTİMAL REASÜRANS"** adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **AKTÜERYA BİLİMLERİ ANABİLİM DALI**'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Cenap ERDEMİR
Başkan ....

Dr. Öğr. Üyesi Murat BÜYÜKYAZICI
Danışman ....

Prof Dr. Yaşar SÖZEN
Üye ....

Prof. Dr. Meral SUCU
Üye ....

Doç. Dr. H. Hasan ÖRKCÜ
Üye ....

Bu tez Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından **DOKTORA TEZİ** olarak ...... / ..... /....... tarihinde onaylanmıştır.

Prof. Dr. Menemşe GÜMÜŞDERELİOĞLU

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

27/6/2019

Betül Zehra Karagül

YAYIMLAMA VE FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI BEYANI

Enstitü tarafından onaylanan lisansüstü tezimin/raporumun tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı (kağıt) ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda verilen koşullarla kullanıma açma iznini Hacettepe Üniversitesine verdiğimi bildiririm. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet haklarım bende kalacak, tezimin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanım hakları bana ait olacaktır.

Tezin kendi orijinal çalışmam olduğunu, başkalarının haklarını ihlal etmediğimi ve tezimin tek yetkili sahibi olduğumu beyan ve taahhüt ederim. Tezimde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanması zorunlu metinlerin yazılı izin alarak kullandığımı ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederim.

Yükseköğretim Kurulu tarafından yayınlanan ***"Lisansüstü Tezlerin Elektronik Ortamda Toplanması, Düzenlenmesi ve Erişime Açılmasına İlişkin Yönerge"*** kapsamında tezim aşağıda belirtilen koşullar haricince YÖK Ulusal Tez Merkezi/H.Ü. Kütüphaneleri Açık Erişim Sisteminde erişime açılır.

- ☐ Enstitü / Fakülte yönetim kurulu kararı ile tezimin erişime açılması mezuniyet tarihimden itibaren 2 yıl ertelenmiştir.
- ☐ Enstitü / Fakülte yönetim kurulu gerekçeli kararı ile tezimin erişime açılması mezuniyet tarihimden itibaren .... ay ertelenmiştir.
- ☐ Tezim ile ilgili gizlilik kararı verilmiştir.

27/6/2019

Betül Zehra KARAGÜL

ÖZET

HEDEF PROGRAMLAMA VE EN KÜÇÜK KAR FARKI YAKLAŞIMLARI İLE OPTİMAL REASÜRANS

Betül Zehra KARAGÜL

Doktora, Aktüerya Bilimleri Bölümü

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Murat BÜYÜKYAZICI

Haziran 2019, 124 sayfa

Bu çalışmanın amacı aktüeryal literatürde oldukça önemli bir yere sahip olan optimal reasürans çalışmalarına hem sigortacıyı hem de reasürörü birlikte dikkate alan bir bakış açısıyla katkıda bulunmaktır. Bu amaç doğrultusunda ilk olarak "sigortacı ve reasürörün karları arasındaki farkın mutlak değerinin riske maruz değeri"ni minimize eden analitik modelin çözümü elde edilmiştir. İkinci olarak ise hedef programlama yardımıyla her iki tarafı dikkate alan çok hedefli/kısıtlı modeller ile literatüre katkıda bulunulmuştur.

Literatür incelemesinde optimal reasürans çalışmaları 4 ana başlık altında ele alınmıştır; sigortacı açısından, reasürör açısından, sigortacı ve reasürör açısından ve çok ölçütlü optimal reasüransı inceleyen çalışmalar. Reasürans optimizasyonu yapılması için bilinmesi gereken reasürans ile ilgili temel bilgiler, reasürans türleri, prim ilkeleri ve risk ölçümleri verilmiştir.

Optimal saklama payı hesaplanırken bir reasürans sözleşmesinin tarafları olarak hem sigorta şirketinin hem de reasürör şirketin hesaba katılması gerekliliğini kanıtlamak için öncelikle literatürde yer alan ve durumu sadece sigortacı bakış

açısıyla ele alan bir optimal reasürans çalışması incelenmiştir. Ardından bu tezin öncül çalışması olan ve sigortacı ile reasürans bakış açısıyla optimal reasüransı benzetim yoluyla hesaplayan model yöntem ve sonuçlarıyla ele alınmıştır. Bu modelde hasar sayılarının poisson dağılım gösterdiği hasar tutarlarının ise üstel, lognormal ve Pareto dağıldığı varsayılmıştır. Hem hasar fazlası reasürans anlaşması hem de toplam hasar fazlası reasürans anlaşması için sonuçlar ayrı ayrı elde edilmiştir. Prim ilkesi olarak da hem standart sapma hem de beklenen değer prim ilkesi kulanılmıştır. Sonuçlar bu iki çalışma açısından çizelge ve şekiller yardımıyla karşılaştırılmıştır.

Tezin birinci amacı olan literatüre sigortacıyı ve reasürörü birlikte hesaba katan bir bakış açısıyla durumu ele alarak katkıda bulunmak için "sigortacı ve reasürörün karları arasındaki farkın mutlak değerinin riske maruz değeri" risk ölçümü ile optimal saklama payını bulmayı amaçlayan analitik model kurulmuş ve çözümü elde edilmiştir. Bu analitik çözümün sonuçları her iki tarafı ve gerçek dünya örneklerini göz önünde bulundurarak ve sayısal örnekler yardımıyla; tezin öncül çalışması olan ve optimal saklama payını aynı risk ölçümü ile benzetim yoluyla elde edilen modelin sonuçları ile ve sadece sigortacıyı hesaba katarak optimal saklama payı hesaplayan optimal reasürans çalışmasının sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Bu model için toplam hasar fazlası reasürans anlaşması ile hasarların üstel ve Pareto dağıldığı ve hem sigortacının hem de reasürörün primlerinin beklenen değer prim ilkesiyle hesaplandığı varsayılmıştır.

Tezin ikinci amacı olan literatüre hedef programlama yardımıyla çok hedefli/kısıtlı modeller ile durumu ele alarak katkıda bulunmak için öncelikle hedef programlama yönteminin genel tanımı, terimleri ve çeşitleri özet bir biçimde anlatılmıştır. Uygulama için ise 11 farklı çok hedefli/kısıtlı optimal reasürans modeli kurulmuş ve hedef programlama yardımıyla çözümleri araştırılmıştır. Modellerde yer alan kısıtlar şunlardır; sigortacının karı ile reasürörün karı arasındaki farkın mutlak değerinin riske maruz değeri, sigortacının karının standart sapması ile reasüörün karının standart sapması arasındaki farkın mutlak değeri, sigortacının fayda fonksiyonu (üstel ve logaritmik fayda fonksiyonları kullanılarak), sigortacının beklenen karı, reasürörün beklenen karı, sigortacının beklenen faydası, reasürörün beklenen faydası, sigortacının toplam maliyetinin riske maruz değeri, reasürörün toplam maliyetinin riske maruz değeri.

Modellerin hedef programlama ile matematiksel gösterimleri verilmiş, toplam hasar fazlası reasürans anlaşması kullanılarak elde edilen optimal saklama payı seviyeleri ve sapma değişkenleri çizelgeler halinde sunulmuştur. Çizelgeler hem beklenen değer hem de standart sapma prim ilkesi için ve hasarların Pareto, üstel ve lognormal dağıldığı varsayımları ile oluşturulmuştur. Modellerin kendi arasında karşılaştırmaları yapılmıştır. Ayrıca farklı prim yükleme katsayısı ve farklı başlangıç sermayeleri ile sonuçların nasıl değiştiği de çizelgeler ile gösterilmiştir.

Çalışmanın sonucunda tezin amacı doğrultusunda yapılan bu çalışmalar sigortacı ve reasürör bakış açısıyla yorumlanmış, literatüre katkıları ve yenilikleri açısından incelenmiştir. Tek taraflı optimal reasürans çalışmaları ile her iki tarafı hesaba katan optimal reasürans çalışmaları arasındaki fark bu çalışmaların gerçek dünyaya uygunluğu ve her iki taraf için kabul edilebilirliği açısından ortaya konulmuştur. Ayrıca çok amaçlı reasürans çalışmasının sonuçları ve hedef programlama yönteminin bu çalışmanın çözümünde kullanılmasının avantajları da açıklanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Hedef programlama, hasar fazlası, toplam hasar fazlası, optimal saklama payı, karlar arasındaki farkın minimize edilmesi, çok amaçlı optimal reasürans.

ABSTRACT

OPTIMAL REINSURANCE WITH GOAL PROGRAMMING AND MINIMUM PROFIT DIFFERENCE APPROACHES

Betül Zehra KARAGÜL

Doctor of Philosophy, Department of Actuarial Science

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Murat BÜYÜKYAZICI

June 2019, 124 pages

The aim of this study is to contribute to the optimal reinsurance studies, which have a considerable role in the actuarial literature, by considering the situation from a perspective that takes into account the insurer and the reinsurer together. For this purpose, firstly, the solution of the analytical model which minimizes “the VaR of the absolute value of the difference between the profits of the insurer and the reinsurer” is obtained. Secondly, the models which both taking into account both sides and multi objective / constrained, are examined by using goal programming.

In the literature review, optimal reinsurance studies are discussed under 4 main headings; studies on optimal reinsurance for insurer, studies on optimal reinsurance for reinsurer, studies on optimal reinsurance for insurer and reinsurer, studies on optimal reinsurance with multiple criteria. In addition, basic information about reinsurance, types of reinsurance, principles of premiums and risk measurements are given.

In order to illustrate the necessity of taking into account both the insurer and the reinsurer company as the parties of a reinsurance contract when calculating the

optimal retention, this thesis examines a prior study of optimal reinsurance which only considers the insurer’s point of view. Subsequently discussed is a model which determines the optimal retention from both points of view of insurer and reinsurer with the corresponding simulations used to justify this model. This forms the preliminary work this thesis builds upon. This model assumes that the claim numbers are Poisson distributed and the claim sizes are exponential, lognormal and Pareto distributed. The results are obtained separately for both the stop-loss and the excess-of-loss reinsurance. As the premium principle, both standard deviation premium principle and expected value premium principle are used. The results are compared with the tables and figures for these two studies.

This thesis seeks to contribute to the existing literature by taking into account both the insurer and the reinsurer. An analytical model is set up and makes use of “the VaR of the absolute value of the difference between the profits of the insurer and the reinsurer” as a risk measure, the solution of which is obtained and presented in this thesis. The results of this analytical model are compared with the results of the preliminary work of this thesis and with the optimal reinsurance study which is examined in this thesis and has only considered the insurer point of view by considering the real world examples and using the numerical examples. We assume the aggregate loss is exponential and Pareto distributed and the premiums of both the insurer and the reinsurer are calculated using the expected value premium principle with stop-loss reinsurance.

The second aim of this thesis, is to contribute to the literature by addressing multi objective/constrained models using goal programming. First a general definition of the goal programming method used, subsequently the terminology and the variants of goal programming are summarized. For this application, 11 different multi objective/constrainted optimal reinsurance models have been constructed and their solutions have been investigated making use of goal programming. The constraints in the models are as follows: the value at risk of the absolute value of the difference between the insurer's profit and the reinsurer's profit; the absolute value of the difference between the standard deviation of insurer’s expected profit; the standard deviation of reinsurer’s expected profit; the expected utility function of

insurer (with exponential utility and logaritmic utility); the expected utility function of reinsurer; the expected profit of reinsurer; the expected profit of insurer; the value at risk of the total cost of insurer; the value at risk of the total cost of reinsurer.

Mathematical representations of the models are given by using the goal programming model and optimal retention levels and deviation variables are obtained using the stop-loss reinsurance are presented in the tables. The tables are prepared for both the expected value and the standard deviation premium principle and assumptions that the losses are distributed by Pareto, exponential and lognormal distributions. Comparisons between the models are made. In addition, how the results change with different premium loading coefficients and different initial wealth is shown in the tables.

As a result of this study, these models are interpreted from the joint perspective of insurer and reinsurer and examined in terms of their contributions and innovations to the literature. The difference between unilateral optimal reinsurance studies and optimal reinsurance studies taking both sides into account is demonstrated in terms of their real-world suitability and acceptability for both sides. In addition, the results of the multi objective reinsurance study and the advantages of using goal programming method in the solution of this study are also revealed.

Keywords: Goal programming, stop-loss, excess-of-loss, optimal retention, minimizing the difference between profits, multi objective optimal reinsurance.

TEŞEKKÜR

Akademik hayatım boyunca daima yanımda olan, bu çalışmanın her aşamasında değerli katkı ve önerileriyle yol gösteren ve karşılaşılan güçlüklerin aşılmasında yardımcı olan danışmanım Sayın Dr. Öğr. Üyesi Murat BÜYÜKYAZICI'ya,

değerli katkıları için bölüm başkanımız Sayın Prof. Dr. Meral SUCU'ya,

tez jürimde yer alan ve kıymetli görüşleri ile çalışmama katkıda bulunan Sayın Prof. Dr. Cenap ERDEMİR'e,

tez izleme komitemde yer alan ve süreç boyunca önerileri ve yardımlarıyla çalışmama katkıda bulunan Sayın Prof. Dr. Yaşar SÖZEN'e ve Sayın Doç. Dr. H. Hasan ÖRKCÜ'ye,

tez araştırmaları için 6 ay boyunca Kanada Montreal Üniversitesi'nde bulunduğum sürede bana bilgileriyle yol gösteren Doç Dr. Manuel MORALES'e,

tez kapsamındaki çalışmalarımı 2211-E Doğrudan Yurt İçi Doktora Burs Programı ve 2214-A Yurt Dışı Doktora Sırası Araştırma Burs Programı ile destekleyen Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK)'na,

akademik çalışmalarım için beni her zaman desteklemiş olan kıymetli arkadaşım Dr. Demet ERDÖNMEZ'e, değerli dostluklarıyla yanımda olan Müge YELDAN'a, N. Selvi YILDIRIM'a, M.Asım ÖZALP'e ve İsmail GÜR'e,

hayatımın her anında bir an olsun sevgisini, emeğini ve desteğini esirgememiş olan, varlıkları sayesinde kendimi çok şanslı addettiğim canım annem Tülin, babam İsmail ve kardeşim Ekrem'e,

bana olan desteğiyle kendimi asla yalnız hissetmeme izin vermeyen, sevgisiyle huzur veren kıymetli eşim, hayat ortağım ve meslektaşım Samet GENÇGÖNÜL'e,

en içten teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÇİZELGELER

ŞEKİLLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

VaR	Riske Maruz Değer (Value at Risk)
CTE	Koşullu Kuyruk Beklentisi (Conditional Tail Expectation)
CVaR	Koşullu Riske Maruz Değer (Conditional Value at Risk)
TvaR	Kuyruk Riske Maruz Değer (Tail Value at Risk)
TCE	Kuyruk Koşullu Beklentisi (Tail Conditional Expectation)
ES	Beklenen Açık (Expected Shortfall)
MCDM	Çok Ölçütlü Karar Verme (Multi-Criteria Decision-Making)
MADM	Çok Nitelikli Karar Verme (Multiple attribute decision making)
MODM	Çok Amaçlı Karar Verme (Multiple objective decision making)
DA	Karar Analizi (Decision Analysis)
SODM	Tek Amaçlı Karar Verme (Single-Objective Decision-Making)
DSS	Karar Destek Sistemleri (Decision Support Systems)
LP	Doğrusal Programlama (Lineer Programming)
IP	Tamsayılı Programlama (Integer Programming)
XL	Hasar Fazlası Reasürans (Excess of Loss Reinsurance)

1. GİRİŞ

Reasürans sigorta şirketinin riskini reasürör şirkete transfer etmesini sağlayan etkili bir risk yönetim aracıdır. İşleyiş sigortacının üzerindeki riski belirli bir prim karşılığında reasürör şirkete devretmesi şeklindedir. Reasürans anlaşması yapmaya karar veren sigorta şirketi, devredeceği reasürans primi ile üstleneceği risk arasında dengeli bir karar vermek zorundadır. Transfer etmek istediği risk miktarı arttıkça ödemesi gereken prim de artacaktır. Bir başka deyişle saklama payı yani sigortacının üzerinde kalan kısım küçükse, üstlenilen risk az ve buna karşılık ödenecek reasürans primi fazla olacaktır. Diğer taraftan saklama payı büyükse üstlenilen risk fazla ancak reasürans primi de düşük olacaktır. Bu durumda ortaya optimal reasürans problemi çıkar.

Bu tez kapsamında literatürde yer alan optimal reasürans çalışmaları incelenmiş ve bu çalışmalar sigortacı açısından, reasürör açısından, her iki taraf açısından ve çok ölçütlü optimal reasüransı hesaplayan çalışmalar olmak üzere dört gruba ayrılmıştır. Tezde ayrıca çok hedefli optimal reasürans çalışması da yapılmıştır ve hedef programlama yöntemi kullanılmıştır. Bu sebeple hedef programlama ile ilgili literatüre de yer verilmiştir.

1.1. Optimal Reasürans ile ilgili çalışmalar

Literatürde seçilen prim ilkesine, reasürans sözleşme türlerine ve optimizasyon kriterine bağlı olarak reasürans optimizasyonu yapan diğer bir deyişle optimal saklama payını bulmayı hedefleyen pek çok çalışma yer almaktadır. Bu çalışmaların çoğu sadece sigortacı açısından durumu değerlendirmekte ve genellikle prim gelir fonksiyonunun doğrusal ve hasar şiddetinin de bağımsız aynı şekilde dağılması klasik varsayımları altında iflas olasılığını en küçüklemeyi hedeflemektedir. İflas olasılığı dışında, beklenen fayda, üstlenilen riskin varyansı, Riske Maruz Değer (Value at Risk, VaR) ve Koşullu Riske Maruz Değer (Conditional Tail Expectation, CTE veya CVaR) gibi diğer risk ölçümlerini kullanan çalışmalar da vardır. Reasürör şirket açısından durumu değerlendiren ve optimal saklama payını bulmayı hedefleyen makaleler de mevcuttur.

Bir reasürans sözleşmesinde iki taraf yer almaktadır. Durumu tek taraflı incelemek, bulunan optimal saklama payının sigortacının menfaatlerinin korunacağı ancak reasürans şirketinin kabul edemeyeceği bir değer olmasına neden olur. Yapılan yeni çalışmalar içerisinde hem sigortacı açısından hem de reasürör açısından optimal saklama payını bulmayı amaçlayan çalışmalar yer almaktadır.

Yukarıda bahsedilen ve optimal saklama payını sadece sigortacı açısından, sadece reasürör açısından ve her iki taraf açısından inceleyen çalışmalar çoğunlukla bir bazen de iki farklı risk ölçümü için bu hesaplamaları yapmaktadır. Literatürde Çok Nitelikli Karar Verme (Multiple Attribute Decision Making- MADM) yardımıyla ikiden fazla risk ölçümünü modele dahil ederek çok ölçütlü reasürans optimizasyonu yapan çalışmalar sayıca diğer çalışmalardan azdır. Ancak bu çalışmalar son yıllarda yapılmıştır ve yenileri literatüre eklenmektedir. Bu çalışmaların amacı optimizasyon sonucunu tek bir risk ölçüm fonksiyonuna dayandırmamak ve farklı amaçları bir arada optimize etmeye çalışmaktır.

Aktüerya için önemini ve popülerliğini koruyan ve yıllardır çalışılmaya devam eden optimal saklama payını bulmaya yönelik sayısız çalışmaya ulaşılabilir. Teze katkı sağlayan ve literatürde yer alan “reasürans optimizasyonu” çalışmaları sigortacı açısından, reasürör açısından, her iki taraf açısından optimal saklama payını bulan çalışmalar ve çok ölçütlü reasürans optimizasyonu çalışmaları şeklinde dört grup altında incelenmiştir.

1.1.1. Sigortacı Açısından Optimal Reasüransı İnceleyen Çalışmalar

Borch [1], toplam hasar fazlası reasürans anlaşmasının beklenen değer prim ilkesi altında üstlenilen riskin varyansını en aza indirdiğini kanıtlamıştır. Arrow [2] aynı toplam hasar fazlası reasürans anlaşmasının sigortacının nihai servetinin beklenen faydasını maksimize ettiğini göstermiştir. Ayrıca, başka kriterleri ve prim ilkelerini de dikkate alan araştırmalar da yapılmıştır. Örneğin, Denuit ve Vermandele [3], optimalite kriteri olarak toplam hasar fazlası reasürans anlaşması için üstlenilen hasarı minimize etmeyi seçmişler ve sigortacı için en uygun reasürans kapsamına ilişkin sonuçları elde etmişlerdir. Kaluszka [4] sigortacının toplam hasar tutarı payının ortalaması ve varyansına dayalı prim ilkeleri altında üstlenilen hasarın varyansını minimize etmiştir. Taksar ve Markussen [5], sigortacının iflas olasılığını en aza indirgeyen optimal reasüransı belirlemek için stokastik optimal kontrol teorisini kullanmıştır. He, Hou ve Liang [6], borç ödeme kabiliyeti kısıtlamaları çerçevesinde bölüşmeli reasürans poliçesi ile sigorta şirketinin temettü dağıtımının beklenen bugünkü değerini maksimize etmekle ilgilenmişlerdir. Centeno ve Guerra [7], sigortacının üstlenilen riskin düzeltme katsayısını maksimize edilmesi durumunda optimum reasüransın ne olacağını araştırmışlardır. Hipp ve Taksar [8], artık sürecin sürekli bir yayılım/ difüzyon süreci olduğu modellerde iflas olasılıklarının en aza indirgenmesi ile ilgilenmişlerdir. Ayrıca, artık sürecinin klasik bir Lundberg süreci ile modellendiği, yani hasar süreçlerinin birleşik süreç olduğu durumlar üzerinde durmuşlardır.

Gajek ve Zagrodny [9] üstlenilen hasarın kesikli varyansı ve mutlak sapma gibi daha genel risk ölçümlerini incelemişlerdir. Balbas, A., Balbas, B. ve Heras [10] ayrıca sapma ölçümleri, beklentiyle sınırlandırılmış risk ölçümleri ve tutarlı risk ölçümleri de dahil olmak üzere genel risk ölçümlerinin geniş bir ailesini ele almışlardır. Öte yandan Zeng [11], rezervi bireysel hasarın büyüklüğüne kıyasla daha geniş olan bir sigorta şirketi için hedefe ulaşmanın beklenen süresini minimize etme problemiyle uğraşmıştır.

Cai ve Tan [12] Riske Maruz Değer (VaR) ve Koşullu Riske Maruz Değer (CTE) gibi diğer iyi bilinen finansal risk ölçümlerini kullanarak beklenen değer prim ilkesi altında toplam hasar fazlası reasürans anlaşması için optimal saklama payını hesaplamıştır. Ayrıca çözümü zor olan optimal saklama paylarının varlığı için gerekli ve yeterli koşulları ortaya koymuşlardır. Bu çalışmaya göre eğer optimal çözüm varsa hem VaR hem de CTE optimizasyonu aynı sonucu vermektedir. Akabinde Cai, Tan, Weng ve Zhang [13], bu sonuçları, tüm konveks artan reasürans stratejileri arasında toplam hasar fazlası reasürans anlaşmasının optimal anlaşma olduğunu göstererek genellemiştir. Cheung [14] geometrik yaklaşım yardımıyla optimal reasürans modellerini yeniden değerlendirmiştir, ayrıca bu problemleri çözmek için daha basit ve şeffaf bir yaklaşım sunmuş, Cai vd.’nin sonuçlarını genelleştirmiştir. Beklenen prim ilkesinin Wang'ın prim ilkesi ile değiştirilmesi durumunda VaR minimizasyon probleminin çözülmesi ile geometrik yaklaşımın faydalı olduğu ispatlanmıştır.

Tan, Chengguo ve Zhang [15], Cai ve Tan'ın [12] sonuçlarını iki yönde genişletmiştir. Birincisi, reasürans sözleşmesi çeşitlerine getirilen genişlemedir ve toplam hasar fazlası reasürans anlaşmasına ek olarak kotpar reasürans anlaşması da çalışmışlardır. İkincisi ise, bu iki sözleşme türü için diğer prim ilkelerini kullanarak optimalite incelemesidir. Makalenin ana sonuçları, genel prim ilkesi altında optimal kotpar reasürans anlaşması ve optimal toplam hasar fazlası reasürans anlaşmasının varlığı için teoremler içermektedir. 17 prim ilkesi için, optimum saklama payı koşullarını etkin bir şekilde analiz etmişlerdir. Sonuç olarak, "*Toplam hasar fazlası reasürans anlaşması için optimizasyon sorununun karmaşıklığı nedeniyle, optimal reasürans mevcutsa da, analitik olarak tespit edemediğimiz birkaç prim ilkesi var*." ifadesini kullanmışlardır. Bu prim ilkelerinden biri standart sapma ilkesidir.

Dedu ve Ciumara [16] da Cai ve Tan'ın [12] çalışmasını genişletmiş ve toplam hasar fazlası reasürans anlaşması için sınırlı optimal reasürans problemini, VaR ve CTE risk ölçümlerini minimize ederek çalışmışlardır.

Chi ve Tan [17] reasürans prim ilkesinin üç temel aksiyomu (dağılımın değişmezliği, risk yükleme ve toplam hasar fazlasında sırasal devamlılığı korumak) sağladığı varsayımıyla VaR ve CVaR'ı minimize etmeyi amaçlayan optimal reasürans modelini önermiştir. Trufin vd. [18] sonsuz zamanlı iflas sürecinin azami açığının riske maruz değerini ölçümleyen VaR-tipli bir risk ölçümü tanımlamışlardır.

De Finetti [19] belirli bir beklenen kar kısıtı altında sigortacının karının varyansını minimum yapan optimal reasürans seviyesini hesaplamıştır ve saklama payının yükleme faktörüyle doğru orantılı ancak riskin varyansıyla ters orantılı olduğunu belirtmiştir. Buhlman [20] bu yaklaşımı geliştirmiştir. Dickson ve Waters [21] De Finetti'nin yaklaşımında varyans kriteri yerine iflas olasılığını kullanmışlardır. Bu çalışmada bir hayat dışı sigorta şirketinde hem kesikli hem de sürekli zaman için sonlu zaman iflas olasılığını minimize eden optimal reasürans seviyesini bulmayı hedeflemişlerdir.

Dickson ve Waters daha sonra 2006 yılında iflas olasılığını en aza indirgeyen dinamik bir reasürans stratejisi üzerinde çalışmışlardır [22]. Bellman optimalite ilkesini kullanarak kesikli ve sürekli zaman için sonlu zaman iflas olasılığı formülü geliştirmişlerdir.

Kaluszka [23] kesikli toplam hasar fazlası reasüransı için ortalama-varyans ilkesi, genelleştirilmiş sıfır fayda ilkesi, ekonomik ilke, Esscher ilkesi gibi farklı prim ilkelerine dayalı olarak iflas olasılığını minimize eden optimal reasürans problemine çözüm getirmektedir.

Nie vd. [24] alt bariyer modelinde reasürans düzenlemesi için optimal reasürans hesaplaması yaklaşımı geliştirmişlerdir. Bu yaklaşımda reasürörün ödemeleri belirli bir seviye altında sınırlandırılmıştır ve sigortacının fazlası, sıfır ile bu belirlenmiş değer arasına düştüğünde reasürans şirketi sermaye enjeksiyonu olarak adlandırılan ekstra bir ödeme yapmaktadır. Bu çalışmada başlangıç fazlası (initial surplus) ve belirlenmiş reasürans seviyesi çiftlerinden optimal olanı nihai iflas olasılığını minumum edecek biçimde belirlenmektedir. Centeno ve Simoes [25] optimal reasüransın en son gelişmelerine ilişkin bir çalışma yapmışlardır.

Assa [26] riskin bir bozulma riski ölçümü (distortion risk measure) ile ölçüldüğü ve primin bozulma riski primiyle (distortion risk premium) hesaplandığı durum için optimum reasürans problemini incelemiştir. Öncelikle sedan şirket, reasürör ve sosyal planlayıcı açısından en uygun reasürans tasarımının aynı şekilde nasıl formüle edilebileceğini göstermiş ve ardından da marjinal tazminat fonksiyonlarını devreye sokarak en uygun reasürans sözleşmesini karakterize etmiştir. Bu çalışmada optimal poliçede, ilgili marjinal tazminat fonksiyonunun yalnızca sıfır ve bir değerini aldığı gösterilmiştir. Büyükyazıcı [27] belirli bir risk seviyesi altında en büyük kar ve belirli bir ortalama getiri için muhtemel en küçük risk seviyesini etkin sınır ile belirlemiştir.

Düzenleyici otoriteler, sigorta şirketlerine sıkı risk yönetimi politikaları uygulayarak risklerini kontrol etmelerini talep etmektedir. Bernard ve Tian [28] düzenleyicinin risk ölçüt kısıtlamalarına tabi bir sigorta şirketinin en iyi risk yönetim stratejisinin ne olabileceğini incelemiştir. Bu amaçla öncelikle farklı kuyruk risk ölçümleri altında optimum reasürans sözleşmelerini tasarlamışlar ve düzenleyicilerin gereksinimlerinin sigortacılar ve reasürörlerin risk paylaşma şekilleri üzerindeki etkisini analiz etmişlerdir. Sonuçlar, gereksinimlerin VaR veya CTE risk ölçümlerine dayalı olması durumunda olumsuz teşviklerin olabileceğini belirtmektedir. Sonuç olarak da alternatif bir risk transfer mekanizması önermişlerdir.

1.1.2. Reasürör Açısından Optimal Reasüransı İnceleyen Çalışmalar

Optimal reasürans konusunda yapılan birçok çalışmada, reasürörün riski dikkate alınmamıştır. Bununla birlikte, gerçek dünyada sigorta piyasalarında sigortacının verebileceği teminat miktarı için bir sınırlandırma vardır aksi halde sigortalının çok büyük hasarla karşı karşıya kalması durumunda sigorta şirketi de ağır bir mali yük altında kalır. Lu vd. [29] çalışmasında reasürörün maruz kaldığı risk için kısıtlamalar sunulduğunda VaR ve TVaR risk ölçümlerinin her ikisi için de optimizasyon kriterleri altında optimal reasürans problemi yeniden gözden geçirilmiştir. Sırasıyla Cummins ile Mahul [30] ve Zhou vd. [31] tarafından sunulan iki tip kısıt ele alınmıştır. İki katmanlı reasüransın her zaman, hem VaR hem de TVaR risk ölçümleri altında ve her iki kısıtlama altındaki optimal reasürans politikası olduğu görülmüştür. Bu durum, iki katmanlı reasürans politikasının daha sağlam olduğunu göstermektedir. Ayrıca, devredilen riskin optimal seviyesi; güven seviyesi, güvenlik yüklemesi ve tolerans seviyesi ile bunların arasındaki ilişkiye bağlıdır.

Zhuang vd. [32], sigortalı, sigortacı ve reasürör olmak üzere üç taraf arasında optimal bir sigorta ve reasürans tasarım problemini incelemektedir. Tarafların tercihlerinin, çift yönlü faydalara denk olan bozulma (distortion) riski ölçümleri ile verildiğini varsaymışlardır. Sigorta şirketinin çift yönlü faydasını en üst düzeye çıkararak ve optimal sigorta ve reasürans sözleşmelerini birlikte çözerek, bir katman sigortasının (layer insurance) optimal olduğunu ve her bir katmanın üç temsilciden biri tarafından karşılandığını tespit etmiştir. Reasüransın daha fazla sigortayı teşvik ettiğini ve ekonomik refahı iyileştirdiğini göstermişlerdir. Ayrıca, sigorta şirketinin poliçe sahibinden maksimum kabul edilebilir sigorta primini tahsil etmesi, sigortacı açısından en uygun seçenektir. Bu çalışmada optimal sigorta/reasürans modellerinin diğer üç çeşidi de dikkate alınmaktadır. İlk ikisi, sigorta şirketinin tüm risklerini reasüröre devretmesini önlemek için reasürans primi üzerinde bir sınırlama getirmektedir. Sigortacı daha yüksek riski üstlenmek zorunda olsa da, optimal çözüm yine bir katman sigortasıdır. Son olarak, poliçe sahibinin bir sigortacı, bir reasürör veya her ikisi ile riskini teminat altına almasına izin vererek oluşan rekabetin etkisi incelenmiştir. Reasürörden gelen rekabet, sigorta şirketinin poliçe sahibine yükleyebileceği fiyatı düşürür, ancak optimal tazminatlar temel model ile aynı kalır. Ancak, reasürör bu optimal çözümde poliçe sahibiyle ticaret yapamaz.

Huang ve Yu [33] reasürans fiyatlamasında, reasürörün belirlemesi gereken optimal güvenlik yüklemesini araştırmışlardır. Bu açıdan özgün bir çalışmadır. Öncelikle sigorta şirketinin, Cai vd.nin çalışmasında [13] elde edilen sonuçları izleyerek reasürans sözleşmesinin şeklini seçeceği varsayılmaktadır. Daha sonra, beklenen karı en üst düzeye çıkarmak, karın faydasını en üst düzeye çıkarmak ve reasürörün toplam kaybının riske maruz değerini en aza indirgemek gibi, reasürörün bakış açısından farklı optimizasyon kriterleri incelenir. Pozitif tam bağımlılık (comonotonicity) kavramını uygulayarak, reasürörün bilinmeyen bağımlılık yapısına sahip iki riskle karşı karşıya kaldığı problem de çözülmüştür. Sigorta edilen hasarlar zero-modified üstel olarak dağıtıldığında kapalı form çözümleri elde edilmiştir. Sonuçlar sayısal örneklerle desteklenmiştir.

1.1.3. Sigortacı ve Reasürör Açısından Optimal Reasüransı İnceleyen Çalışmalar

Kısım 1.1.1.'de verilen örneklerin hepsinde optimal saklama payı hesaplanırken durum sadece sigortacı tarafından ele alınmıştır. Ancak bir reasürans sözleşmesinde iki taraf yer almaktadır. Borch [34], bu durumu şu şekilde ifade eder; "*Bu hususlar bize, bir reasürans sözleşmesinin iki tarafı olduğunu ve bu tarafların çelişkili menfaatleri olduğunu hatırlatmalıdır. Optimal sözleşme daha sonra bu menfaatler arasında makul bir uzlaşma olarak görülmelidir. Bana göre en doğrusu, her iki taraf açısından da farklı şekillerde optimal olduğu söylenen sözleşmelerin incelenmesidir*." Borch'un açıklamasından da anlaşılabileceği üzere; durumun tek taraflı incelenmesi bulunan optimal saklama payının, sigortacı açısından kullanılabilir olmasına rağmen reasürans şirketinin kabul edemeyeceği bir değer olmasına neden olabilir. Son zamanlarda aktüerya alanında, hem sigortacı hem de reasürör açısından optimal saklama payını bulmayı amaçlayan çalışmalara yer verildiği görülmektedir. Bu çalışmalar, risk ölçümü olarak genellikle birleşik yaşam olasılığını ele almaktadır.

Ignatov vd. [35] reasürör ve sigorta şirketinin birleşik yaşam olasılığını maksimize eden optimal saklama payını bulmayı amaçlamışlardır. Sigortacının yaşam olasılığı altında beklenen kar için bir formül geliştirmişlerdir. Kaishev ve Dimitrova [36] bireysel hasar tutarlarının, sürekli bağımlı rasgele değişkenler ile bir birleşik dağılım tarafından modellendiği bir hasar fazlası reasürans anlaşması için birleşik yaşam optimal reasürans modeli genellemişlerdir.

Cai vd. [37] bir reasürans anlaşmasının iki tarafı olduğunu, bu tarafların çelişkili menfaatleri olduğunu ve mevcut optimal reasürans anlaşmalarının çoğunun sadece bir tarafın çıkarlarını göz önüne aldığını belirtmişlerdir. Çalışmalarında birleşik yaşam olasılığını ve birleşik karlılık olasılığını amaç fonksiyonu olarak ele almış, kotpar ve toplam hasar fazlası reasürans anlaşma türleri için optimal saklama paylarını hesaplamışlardır. Bunu yaparken öncelikle beklenen değer prim ilkesi altında kotpar ve toplam hasar fazlası reasürans anlaşma türlerinde optimal reasürans saklama payının varlığı için gerekli ve yeterli koşulları sağlamışlardır. Ardından genel reasürans prim ilkesi çerçevesinde, geniş bir reasürans poliçe sınıfı için optimal reasürans anlaşmalarının varlığının yeterli koşulları elde edilmiştir. Bu koşullar, sonraki çalışmalarda isteyenlerin farklı prim ilkeleri ile farklı formlarda optimal reasürans anlaşmaları tasarlamasını mümkün kılmaktadır. Çalışmanın uygulama kısmında, varyans prim ilkesine göre optimal kotpar reasürans anlaşması ve beklenen değer prim ilkesine göre optimal sınırlı toplam hasar fazlası (limited stop-loss) anlaşması tasarlanmıştır.

Castaner vd. [38] çalışmasında, birleşik yaşam olasılığını maksimize edecek biçimde, toplam başlangıç rezervin sigortacı ve reasürör arasında optimal bölüşümü ele alınmıştır. Castaner ve Claramunt [39], sigortacının ve reasürörün müşterek bakış açısından, bir dönemdeki optimal toplam hasar fazlası reasürans analizine katkıda bulunmuştur.

Golubin [40] sigortacı ve reasürörün beklenen faydanın ağırlıklı ortalamasını maksimize ederek Pareto-optimal reasürans poliçesi tasarlamıştır. Bu çalışmada hem sigortacının hem de reasürörün riskten kaçındıkları varsayılmıştır ve prim sigortacının riskinin aktüeryal bugünkü değerinin bir fonksiyonu olarak tasarlanmıştır. Çalışmada iki farklı model ele alınmıştır. Birinci modelde makul poliçeler belirli bir prim ile kısıtlanmıştır. İkinci modelde ise prim kısıtlaması yapılmamıştır. Dolayısıyla primler şirketler tarafından seçilen poliçelerin aktüeryal değeri ile değişmektedir. Her iki durum için de Pareto-optimal poliçe tanımlaması yapılmıştır. Bu poliçeler için ilgili optimallik denklikleri klasik risk değişim modelindeki sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Dimitrova ve Kaishev [41], birleşik yaşam olasılığına dayalı saklama payı seviyeleri ve sınırlama düzeylerini belirlemek için verimli bir etkin sınır tipi yaklaşımı ortaya koymuştur. Bu çalışmada, sınırlama ve saklama payı seviyesi ile hasar fazlası reasüransını optimal hale getirmeye çalışan problem ele alınmıştır. Risk modeli için bazı göreceli genel varsayımlar altında, belirli risk ve performans ölçümlerinin birleştirilmesiyle problemin çözülebileceği gösterilmiştir. Bu risk modelinde prim gelirleri negatif olmayan azalmayan bir fonksiyon ile modellenmektedir. Hasarların meydana gelişleri Poisson süreci ile ve hasar tutarları ise sürekli birleşik dağılım ile modellenmiştir. Performans ölçütü olarak sigortacı ve reasürörün x'e kadar birleşik yaşamları verildiğinde, x anındaki sigortacı ve reasürörün doğrudan beklenen karları kullanılmıştır. Bu ölçütün sayısal değerlendirmesi için açık ifadeler elde edilmiştir. Doğrudan sigortacının ve reasürörün x sınırlı zaman ufkuna kadar birleşik hayatta kalma ihtimali bir risk ölçümü olarak kullanılmıştır. Hem bağımlı hem de bağımsız hasar şiddeti için uygun hasar tutarları dağılımları ile çeşitli örnekler kurularak, optimalite problemleri tanımlanıp çözümleri sayısal olarak elde edilmiştir.

1.1.4. Çok Ölçütlü Optimal Reasüransı İnceleyen Çalışmalar

Samson ve Thomas'ın [42] çalışmalarında sınırlı ölçüt kullanan karar analizi modelleri, hem reasüransın yapılandırılmasında reasürör açısından hem de en uygun reasürans ürününü değerlendirmek ve seçmek için sigortacı açısından kapsamlı bir şekilde tartışılmıştır. Araştırmacılar tarafından yalnızca son yıllarda her iki tarafın da faydasına olacak biçimde çalışmalar yapılmıştır. Çok ölçütlü karar verme analzilerindeki bu gelişmelerin ışığında, reasürans araştırmaları alanında da yenilikler yapılmıştır.

İlk kez Karageyik ve Dickson [43], rekabet ölçütleri altında optimal reasürans seviyelerini seçme problemi ile Çok Nitelikli Karar Verme'nin (MADM) kullanılmasını önermişlerdir. Bu çalışmada girdi alternatiflerini seçerken, bir kısıtlama olarak iflas olasılığı kullanılmıştır. Bu kısıtlama ile sigorta şirketinin iflas olasılığının % 1'den büyük olmaması istenmiştir. Hasar dağılımı dönüştürülmüş gama süreciyle modellenmiş ve reasürans sözleşmesi türleri için bölüşmeli reasürans ve toplam hasar fazlası reasürans kullanılmıştır. Çalışmada aynı zamanda tek ölçütlü karar verme ile karşılaştırma da yer almaktadır. Çalışmanın sonucunda MADM'nin optimal reasüransın bulunması konusunda son derece faydalı olduğu sonucuna varılmıştır.

Karageyik ve Şahin [44] , Karageyik ve Dickson'ın [43] çalışmasını VaR'ı hesaba katarak ve hasar fazlası reasürans anlaşmasını ele alarak geliştirmişlerdir. Anahtar ölçüm kriterleri olarak; beklenen kar, beklenen açık, sonlu zaman iflas olasılığı ve riskin varyansı ele alınmıştır. Farklı MADM tekniklerini karşılaştırarak ölçümler arasındaki korelasyonun yeterince düşük olduğu reasürans durumunda, farklı MADM tekniklerinin benzer optimal saklama payı seviyesini üreteceği sonucuna varmışlardır.

Wang ve Poh'un [45] 2017 yılında yayımlanan çalışmalarında, sigorta şirketi ve reasürör şirketi dikkate alan reasürans karar alma süreci ele alınmıştır. Makale, reasürans tasarımını ve seçim sürecini modellemek için bir karar akışı önermektedir. Bölüşmeli reasürans veya hasar fazlası reasürans hakkında yapılmış mevcut literatürün aksine, her iki tarafın çıkarlarına daha iyi hitap eden ve her iki sözleşme türünün kombinasyonu olan bölüşmeli-hasar fazlası reasürans anlaşmasına odaklanılmıştır. Reasürans seçimini modellerken MADM kullanılmıştır. Öncelikle, reasürans alternatiflerinin tasarlanmasında Çok Amaçlı Karar Verme (Multiple objective decision making, MODM) modeli uygulanmaktadır. Daha sonra MADM, sigorta şirketlerine en uygun reasürans sözleşmesini seçmede yardımcı olmak için kullanılmıştır.

1.2. Hedef Programlama ile ilgili Çalışmalar

Yöneylem araştırması tekniklerinden olan doğrusal programlama ve tamsayılı programlama gibi matematiksel programlama teknikleri tek bir amaca sahip problemlere çözüm aramaktadır. Tek amaçlı olma durumu bu tekniklerin kullanımını sınırlandırmaktadır. Gerçek hayatta karşılaşılan problemlerin çoğunda, tek bir amaç değil pek çok amaç sağlanmaya çalışılmaktadır. Bu tip problemlerin çözümünde karar vericiler Hedef programlama (Goal Programming) gibi çok amaçlı problemlere çözüm arayan tekniklerden yararlanırlar. Hedef programlamanın çok amaca çözüm arama özelliğinin yanı sıra diğer bir özelliği de bu amaçların aynı yönlü olmasına gerek olmamasıdır. Aynı model içerisinde bazı amaçlar minimize edilmeye çalışılırken bazı amaçlar da maksimize edilmeye çalışılabilir. Ayrıca yöntemin bir diğer avantajı da modelde aynı birimle ölçeklendirilmeyen amaçların/hedeflerin da yer alabiliyor oluşudur. Biri para birimi (TL) ile ölçeklendirilen diğeri ise zaman (saat) ile ölçeklendirilen iki farklı hedef modelde yer alabilir.

Tipik karar verme durumunda, yönetim tarafından seçilen hedefler, diğer hedeflerin pahasına başarıya ulaşabilir. Bu hedefler arasında bir önem sırası oluşturmak gereklidir. Bu sayede daha önemli hedeflere ulaştıktan sonra daha az önemli hedeflere ulaşılmaya çalışılır. Tüm hedeflere birden ulaşmak her zaman mümkün olmadığından, hedef programlama mümkün olduğu kadar çok sayıda hedefe ulaşmaya çalışacaktır.

Hedef programlama çeşitli hedefler içeren karar problemlerini bir arada ele alabilir. İlk kez 1952 yılında Charnes ve Cooper [46] tarafından önerilmiştir ve 1961 yılında yine aynı yazarlar tarafından tanıtılmıştır [47]. 1948 yılında G. B. Dantzig'in [48] kullanmış olduğu etkileşimli çözüm algoritmasının da doğrusal hedef programlama ile ilgili problemlerin çözümünde kullanılan algoritmaların çoğu için temel teşkil ettiği düşünülmektedir. Ancak bugün bilinen doğrusal hedef programlamanın kendine özgü yapısını tam olarak temsil etmemektedir. 1961 yılına dek hedef programlama çok amaçlı doğrusal programlama modellerine çözüm arayan bir teknik olarak kullanılmamış, fakat 1961 yılında Charnes ve Cooper [47] tarafından bu amaca uygun kullanılmıştır ve 1976 yılında ise Ignizio [49] tarafından geliştirilmiştir.

O zamandan beri, tarım planlaması [50], zaman çizelgelemesi [51], turizm [52], bitki besin yönetimi [53], sağlık planlaması [54], mühendislik [55], ulaşım sorunları [56] gibi birçok alanda hedef programlama teknikleri uygulanmıştır.

Bankaların; fonların etkin kullanımını sağlamak, riskleri en aza indirmek ve etkin bir aktif-pasif yönetimi için güvenliği sağlamak gibi çeşitli hedefleri analiz etmek için stratejiler yaratması gerekmektedir. Literatürde, bankacılık ve finans kurumları alanında hedef programlamanın uygulandığı birçok örnek bulunmaktadır [57-62].
İş ortamındaki hızlı değişiklikler sigorta kuruluşlarını hedeflerini yeniden incelemeye zorlamıştır ve hedef programlama, bu kurumlar için bir yönetim karar verme aracı olarak kullanılmıştır [63]. Ayrıca, varlıkların optimum tahsisi [64], sermaye bütçelemesi [65], sigorta acenteliği yönetimi [66] ve emeklilik fon yönetimi [67] için de hedef programlama kullanılmıştır. Hedef programlama, çok nesnel problemleri modellemek ve birçok farklı konuya uygulanmak için iyi bilinen ve yararlı bulunan bir teknik olmakla birlikte, son yıllarda aktüerya/sigorta alanında yayınlanmış nispeten az sayıda literatür de bulunmaktadır. Bunlardan biri Heras ve arkadaşlarının 2004 yılında yayımlanan “An Applicatıon of Linear Programming to Bonus Malus System Design” isimli çalışmasıdır [68]. Bu çalışmada Bonus Malus prim skalası dizaynı için hedef programlama yöntemi kullanılmıştır.

1.3. Motivasyon ve Tezin Yapısı

Bu tez çalışmasında öncelikli olarak hem sigortacının menfaatlerini hem de reasürör şirketin menfaatlerini göz önünde bulunduran optimal saklama payının araştırılması amaçlanmıştır. Böylece çalışmanın, tek tarafı hesaba katarak optimal reasüransı hesaplayan çalışmaların sonuçlarına göre gerçek hayata daha uygun, sözleşmenin her iki tarafının da kabul edebileceği makul sonuçlar veren bir çalışma olması hedeflenmiştir. Bu amaçla risk ölçümü olarak sigortacının ve reasürörün karları arasındaki farkın mutlak değerinin riske maruz değerini veren fonksiyon kullanılmıştır. Bu risk ölçümü yardımıyla her iki tarafın da elde edeceği kar miktarını birbirine yakın tutan, böylelikle bir tarafın haksız zenginleşmesini önleyen bir model kurulmuştur. Amaç fonksiyonu, karlar arasındaki farkın mutlak değerinin riske maruz değerini minimize etmeye çalışmaktadır. Bu fonksiyonu minimize eden saklama payı seviyesi, modelin optimal saklama payı seviyesidir.

Modelin analitik olarak çözümü bulunmuştur. Tezin öncül çalışması olan bu modelin [69] benzetim çözümü de incelenmiştir. Hasar sayılarının poisson dağılım gösterdiği, hasar tutarlarının ise üstel, lognormal ve Pareto dağıldığı varsayılmıştır.

Benzetim optimizasyonunda; 1.000.000 tekrar ile MATLAB yardımıyla optimal saklama payı bulunmuştur. Hem hasar fazlası reasürans anlaşması hem de toplam hasar fazlası reasürans anlaşması için sonuçlar ayrı ayrı elde edilmiştir. Prim ilkesi olarak da; hem standart sapma hem de beklenen değer prim ilkesi kulanılmıştır. %95 ve %99 güven seviyeleri için 0,20 ve 0,30 prim yükleme katsayılarıyla sonuçlar elde edilmiş ve karşılaştırılmıştır. Ayrıca karlar arasındaki farkın mutlak değerinin koşullu riske maruz değerini (CTE) minimize eden optimal saklama payı seviyesi de benzetim yardımıyla elde edilmiştir. Tek tarafı hesaba katan (sadece sigorta şirketi açısından) optimal saklama payı da benzetim ile elde edilmiştir. Bu amaçla sigortacının toplam maliyetinin riske maruz değeri (VaR) ve koşullu riske maruz değeri (CTE) minimize edilmiş ve bulunan optimal saklama payı seviyeleri ile hem sigortacıyı hem de reasürörü hesaba katarak elde edilen saklama payı seviyeleri karşılaştırılmıştır. Elde edilen tüm sonuçlar;

- Aynı ortalama ile farklı standart sapmalar için Pareto, lognormal ve üstel dağılım açısından,
- Toplam hasar fazlası reasürans anlaşması için hem sigortacı hem de iki taraf açısından,
- Hasar fazlası reasürans anlaşması için hem sigortacı hem de iki taraf açısından,
- Beklenen değer prim ilkesi ve standart sapma prim ilkesi için sigortacı açısından,
- Beklenen değer prim ilkesi ve standart sapma prim ilkesi için her iki taraf açısından
- VaR seviyeleri için lognormal, Pareto ve üstel dağılım için açısından,
- Lognormal, Pareto ve üstel dağılım için sigortacı ve reasürörün ortalama karları ve güven aralıkları açısından,

şekiller ve çizelgeler yardımıyla karşılaştırılmış ve yorumlanmıştır.

Toplam hasar fazlası reasürans anlaşması için, sigortacının karı ile reasürörün karı arasındaki farkın mutlak değerinin riske maruz değerini minimize eden modelin analitik çözümü elde edilmiştir. Hasarların üstel ve Pareto dağıldığı varsayılmıştır. Sayısal örnekler yardımıyla elde edilen sonuçlar, sadece sigortacı açısından durumu ele alan “sigortacının toplam maliyetinin riske maruz değerini minimize eden” optimal reasürans çalışması ile karşılaştırılmıştır.

Çalışmanın diğer bir amacı da çok hedefli reasürans optimizasyonu literatürüne katkıda bulunmaktır. Bu katkıyı yaparken kurulacak olan model içerisinde birbiriyle çelişen hedeflerin/kısıtların olması ve hedeflerin öncelikleri ile ağırlıklarına karar verici tarafından müdahale edilebilir olması göz önünde bulundurulmuştur. Bu nedenle, çok hedefli kurulacak olan bu modelin çözümü için hem bu niteliklere sahip olan hem de hedeflerin çıktılarının aynı birim cinsinden ifade ediliyor olmasına gerek olmayan çok hedefli karar verme yöntemlerinden birisi olan hedef programlamadan yararlanılmıştır. Modelin içerisinde yer alan hedefler/kısıtlar hem sigortacının hem de reasürörün yararına olabilir ya da sadece birisi açısından durumu ele alan hedefler olabilir.

Bu amaçla çalışmada 11 farklı Model kurulmuştur. Kurulan modeller farklı kısıtlara sahiptir ve sonuçları birbiriyle karşılaştırılmıştır. İlk 7 Model için varsayımlar şu şekildedir: Hasar sayılarının Poisson, tutarlarının ise; üstel, lognormal ve Pareto dağıldığı varsayılmıştır. Aynı beklenen değer, farklı standart sapmalarla benzetim yapılmıştır. Beklenen değer prim ilkesi ve standart sapma prim ilkesi kullanılmıştır. Yineleme sayısı bazı modeller için 700.000, bazıları için ise 300.000’dir. Kurulan ilk model analitik ve benzetim çözümü de yapılan, karlar arasındaki farkın mutlak değerinin riske maruz değerini minimize etmeye çalışan modeldir. Bu modelin hedef programlama yardımıyla çözümü elde edilmiş ve sonuçları benzetim modeli sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Modellerde yer alan kısıtlar şunlardır:

- Sigortacının karı ile reasürörün karı arasındaki farkın mutlak değerinin riske maruz değeri

- Sigortacının karının standart sapması ile reasüörün karının standart sapması arasındaki farkın mutlak değeri
- Sigortacının fayda fonksiyonu (üstel fayda fonksiyonu ve logaritmik fayda fonksiyonu ile)

Kısıtların ikişerli ve üçerli kombinasyonları ve öncelik sıralaması farkı ile elde edilen sonuçlar da birbiriyle karşılaştırılmıştır.

Son 4 model ise çok amaçlı optimal reasüransın sigortacı ya da reasürör açısından ve her iki bakış açısıyla çalışılması sonucunda elde edilen optimal saklama paylarının birbiriyle kıyaslanması amacıyla kurulmuştur (Model 8, 9, 10 ve Model 11). Bu modeler için sonuçlar, hasarların lognormal dağıldığı (1000 ortalama ve 1000 standart sapma ile), sigorta primi ve reasürans priminin beklenen değer prim ilkesi ile hesaplandığı toplam hasar fazlası reasürans anlaşması ile elde edilmiştir. Yineleme sayısı tüm modeller için 300.000'dir Modellerde yer alan kısıtlar şunlardır:

- Sigortacının beklenen karı
- Reasürörün beklenen karı
- Sigortacının beklenen faydası
- Reasürörün beklenen faydası
- Sigortacının toplam maliyetinin riske maruz değeri
- Reasürörün toplam maliyetinin riske maruz değeri

Yapılan bu çalışmalar özetlendiğinde tezin kattığı değerler ve yenilikler üç madde halinde sıralanabilir:

1) "Sigortacı ve reasürörün karları arasındaki farkın mutlak değerinin riske maruz değeri" risk ölçümü ile optimal saklama payının analitik çözümünün elde edilmesi,
2) Bu analitik çözümün sonuçlarının;
   a) tezin öncül çalışması olan ve aynı risk ölçümü ile benzetim yoluyla elde edilen modelin sonuçları ile,
   b) sadece sigortacıyı hesaba katarak optimal saklama payı hesaplayan optimal reasürans çalışmasının sonuçları ile

karşılaştırılması ve karışılaştırma sonuçlarının her iki tarafı ve gerçek dünya örneklerini göz önünde bulundurarak yorumlanması,

3) Daha önce optimal reasürans için aktüerya literatüründe hiç kullanılmamış olan hedef programlama ile çok hedefli optimal reasürans çalışmasının yapılması. Bu çalışmanın farklı hedefler/kısıtlar içeren modeller kurularak bu modellerin de birbiriyle karşılaştırmasının yapılmasıdır.

Tezin organizasyonu şu şekildedir:

İkinci Bölümde öncelikle, reasürans kavramına genel bakış başlığı altında reasüransın temel işleyişi ve ilkeleri anlatılmıştır. Ardından reasürans türleri genel olarak ihtiyari ve trete reasürans ana başlığında ikiye ayrılıp bölüşmeli ve bölüşmesiz reasürans olarak alt başlıklar altında incelenmiştir. Optimal reasürans çalışmalarının temel varsayımlarından birisi olan prim ilkesi varsayımı için farklı prim ilkeleri açıklanmıştır. Son olarak, prim ilkesinin yanı sıra optimal reasüransın diğer bir karakteristik varsayımı olan risk ölçümleri içerisinden çalışmalarda en çok kullanılan risk ölçümleri sıralanmış ve tezde kullanılan risk ölçümleri olan VaR, CTE ve beklenen fayda risk ölçümleri açıklanmıştır.

Üçüncü Bölümde sigortacı bakış açısıyla optimal reasürans çalışması incelenmiştir. Bu bölümde Cai ve Tan'ın [12] çalışmasından yararlanılmıştır. Toplam hasar fazlası reasürans anlaşması için beklenen değer prim ilkesi altında sigortacının toplam maliyetini minimize eden optimal saklama payının elde edilmiş ve varsayımları irdelenmiştir.

Dördüncü Bölümde sigortacı ve reasürans bakış açısıyla optimal reasürans çalışmasına yer verilmiştir. Bu bölümde tek tarafı dikkate alarak optimal saklama payı hesaplayan çalışmaların bakış açısına karşıt olarak her iki tarafı da dikkate alan optimal saklama payı çalışmasını sunmak, sonuçları karşılaştırmak ve objektif bir bakış açısıyla yorumlamak amaçlanmıştır. Literatürde yer alan sigortacı ve reasürör şirketlerini birlikte dikkate alan optimal reasürans çalışmalarının çoğu, birlikte yaşam fonksiyonlarını risk ölçümü olarak ele almaktadır. Ancak bu bölümde, risk ölçümü olarak, yukarıda da bahsedilen karlar arasındaki farkın mutlak değerinin riske maruz değeri risk ölçümü ele alınmıştır. Dördüncü Bölüm, iki temel kısımdan oluşmaktadır. Birincisi bu risk ölçümünü kullanan modelin benzetim optimizasyonu ve sonuçları ikincisi ise modelin analitik çözümü ve sonuçlarıdır.

Beşinci Bölümde çok hedefli ve çok nitelikli karar verme yöntemleri arasındaki temel farklar ortaya konarak çok hedefli karar verme yöntemlerinden birisi olan hedef programlama yönteminin genel tanımı, terimleri, çeşitleri özet bir biçimde anlatılmıştır.

Altıncı Bölümde çok hedefli optimal reasürans modelleri inşa edilmiş ve hedef programlama yardımıyla çözümleri araştırılmıştır. Modellerin hedef programlama modeli ile matematiksel gösterimleri verilmiş, elde edilen optimal saklama payı seviyeleri ve sapma değişkenleri çizelgeler halinde sunulmuştur. Çizelgeler, hem beklenen değer hem de standart sapma prim ilkesi için ve hasarların Pareto, üstel ve lognormal dağıldığı varsayımları ile oluşturulmuştur. Modellerin kendi arasında karşılaştırmaları yapılmıştır. Ayrıca farklı prim yükleme katsayısı ve farklı başlangıç sermayeleri ile sonuçların nasıl değiştiği de çizelgeler ile gösterilmiştir.

Yedinci ve son bölümde sonuçlar ve önerilen çalışmalara yer verilmiştir. Bu bölüm tezde yapılan tüm çalışmaların yorumlanması, literatüre katkısının incelenmesi ve tezin genel bir değerlendirmesi niteliğindedir. Tek taraflı optimal reasürans çalışmaları ile her iki tarafı hesaba katan optimal reasürans çalışmaları arasındaki farkın sayısal olarak ortaya konduğu ve sonucunun değerlendirildiği bölümdür. Ayrıca çok hedefli reasürans çalışmasının sonuçları ve hedef programlama yönteminin bu çalışmanın çözümünde kullanılmasının avantajları da ortaya konmuştur. Literatürde yer alan çok nitelikli karar verme optimal reasürans çalışmalarıyla arasındaki farklar da açıklanmıştır. Yedinci bölüm tezin devamında yapılması planlanan çalışmalar ve literatüre katkıda bulunmak isteyen okuyucular için öneriler ile son bulmaktadır.

2. REASÜRANS: GENEL BAKIŞ

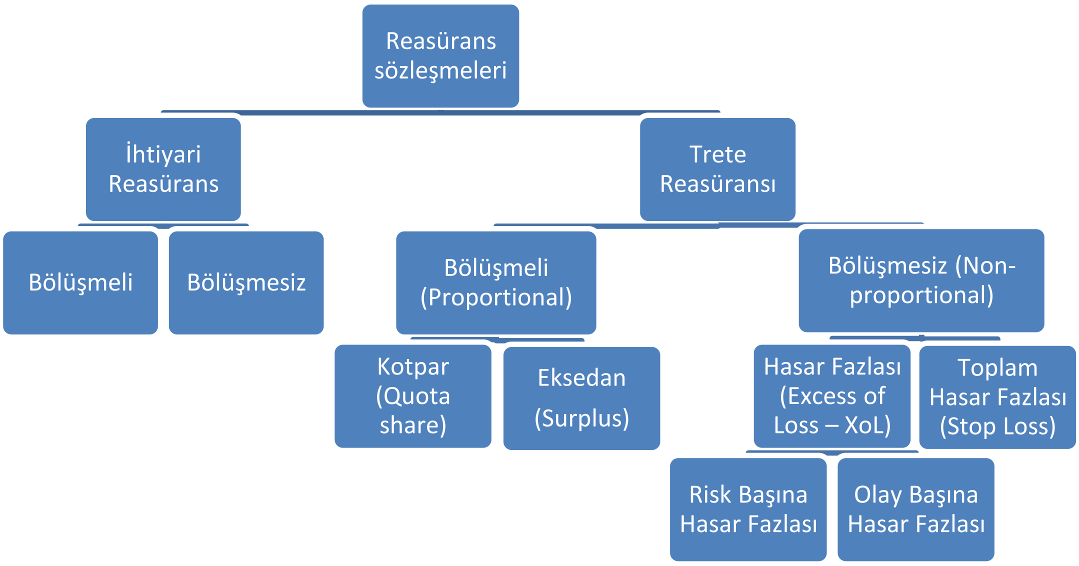
Hayat dışı sigorta şirketleri genellikle portföylerini tehdit eden ve sonuç olarak genel performanslarını ve sermayelerini etkileyebilecek beklenmedik hasarlarla karşılaşırlar. Örneğin, öngörülemeyen bir felaket aynı portföyde birden fazla riski etkileyerek büyük bir toplam kayba yol açabilir veya sıklıkla oluşan küçük hasarlar beklenenden çok daha büyük bir genel kayba neden olabilir. Sonuç olarak, istikrarlı sonuçların elde edilmesinin en etkili yolu çeşitlendirme yapmaktır. Bununla birlikte, sigortacılar yaptıkları işin doğası gereği, sahip oldukları riskleri azami ölçüde çeşitlendirmek için gerekli kesin bilgiye sahip değillerdir. Ancak tahmini değerlere ve olasılıklara sahiplerdir. Bu duruma reasürans ile geçerli bir çözüm önerilmektedir.

"Sigortacılar için sigorta" olarak tanımlanan reasürans, risk azaltma aracı olarak kullanılabilen bir risk paylaşım şeklidir. Yazılı bir reasürans sözleşmesi ile reasürör şirket, sigorta şirketinin (sedan) üstlendiği riskin bir bölümünü reasürans primi karşılığında devralır. Dolayısıyla dünya çapında ve farklı iş kollarında faaliyet gösteren sigorta şirketleri, sermayenin daha etkin bir şekilde kullanılmasını sağlamak için reasüransı kullanabilirler. Reasüransa başvuran sigortacının iş kabul kapasitesi ve esnekliği artar, böylece sigorta şirketi daha fazla sayıda riskin üstesinden gelme, pazardaki konumunu iyileştirme ve potansiyel olarak daha iyi çeşitlendirilmiş portföyleri alma şansını elde eder.

2.1. Reasürans Türleri

Reasürans sözleşmeleri sigorta şirketlerinin farklı ve gelişen ihtiyaçları doğrultusunda çeşitlenmiştir. Genel olarak reasürans anlaşmaları; tek ve önemli büyüklükte risklere karşı koruma sağlayan ve devredilmesi zorunlu olmayan riskleri için yapılan İhtiyari Reasürans ve tüm portföyleri kapsayan başlangıçta saptanan koşullar çerçevesinde reasürörün sedana belirli bir süre için otomatik teminat sağladığı Trete (otomatik) Reasürans olarak iki gruba ayrılır. İhtiyari Reasürans türünde reasürans Trete Reasüransının aksine, her riziko için sedan ile reasürör arasında ayrı ayrı varılacak anlaşmaya uygun olarak yapılır. Taleplerin ne kadar sürede karşılanabileceğine göre, Kısa Kuyruklu Reasürans veya Uzun Kuyruk Reasüransı arasında seçim yapmak da mümkündür.

Konut sigortası gibi bazı sigorta kollarında hasarlar genellikle kısa bir süre içinde çözülür: Bu durumlarda Kısa Kuyruk Reasüransı önerilmektedir. Bazı sigorta kollarında ise sigorta ettirenin teminat altındaki hasarı ödenmeden yıllar geçebilir bu durumda Uzun Kuyruklu Reasürans daha uygundur. Ayrıca, sedan, aracı olmaksızın Doğrudan Reasürans veya broker aracılığıyla Aracı Reasüransı satın almayı tercih edebilir [70].



Şekil 2.1. Reasürans sözleşmesi türleri

Şekil 2.1.'de reasürans sözleşmesi türleri verilmiştir. Literatürde çalışılan reasürans anlaşması türleri Trete Reasürans türleridir. Temel olarak bölüşmeli reasürans ve bölüşmesiz reasürans olarak ikiye ayrılır.

A) Bölüşmeli Reasürans (Proportional Reinsurance)

Bölüşmeli reasürans anlaşmasında sigorta şirketi daha önceden belirlenmiş bir orana göre üzerindeki riski reasürörle paylaşmak ve alınan primlerin de belirli bir yüzdesini reasüröre vermekle yükümlüdür.

- Kotpar (Quata share) Reasürans

Kotpar reasürans anlaşması, sedanın sözleşme kapsamında, tüm poliçelerinin sabit bir oranını reasüröre devrettiği anlaşmadır. Sedanın üzerinde kalmasını kabul ettiği net risk miktarına saklama payı/ konservasyon denir. Bu anlaşma türünde sedan sabit bir yüzdeyi üzerinde tutar ve aşan kota payı ise reasüröre kalır. Reasürör sigortalı ile sedan arasında yapılan anlaşma gereği tüm koşulları kabul eder. Genellikle reasürörün karşılaşabileceği potansiyel hasarı belirleyecek şekilde mutlak bir kotpar limiti için anlaşma yapılır ancak riskin kotparı bu limiti aşarsa oluşan risk ile kotpar limiti arasında yeni bir oran hesaplanır ve benzer biçimde prim de yeniden düzenlenir. Şayet risklerin hiç biri kotpar seviyesini geçmezse tüm portföyün kabul edilen oranı direk paylaşılır. Yeniden düzenleme yapmanın amacı, potansiyel zararlarını azaltarak sigortacının ödeme gücünü artırmaktır.

- Eksedan (Surplus) Reasürans

Eksedan anlaşmalarında sedanın üzerinde kalan risk önceden belirlenmiş sabit bir tutardır ve meydana gelen hasar bu tutarın altında ise tamamını sigorta şirketi karşılar. Ancak oluşan hasar bu limiti aşarsa, aşan kısım orantısal olarak tekrar sigortalanır. Bu oran tüm yükümlülüğün büyüklüğüne göre değişebilir. Örneğin daha küçük risklerde genelde limiti aşan kısmın tamamı reasürör tarafından karşılanırken daha büyük risklerde belirli bir oran üzerinden paylaşım yapılır. Bu durumda sigorta şirketi anlaşmada üzerinde kalan riske ilave olarak ek bir ödeme daha yapar. Bu tür bir reasürans anlaşması, her bir riskin alıkonulmuş ve reasüre edilen kısmının bireysel olarak tanımlanmasını gerektirir. Eksedan primi, daha sonra genel portföy üzerinden hesaplanabilir. Eksedan reasürans doğrudan portföyün tamamına uygulanamadığı için yönetilmesi daha zordur. Öte yandan içerisindeki uç noktaları ortadan kaldırdığı için portföyün homojenliğini geliştirmeye yardımcı olur.

B) Bölüşmesiz Reasürans (Non-Proportional Reinsurance)

Hasarın muafiyet olarak adlandırılan belirli bir limite kadar olan bir bölümünün sigorta şirketi tarafından üstlenildiği reasürans anlaşmasıdır. Bu tip reasürans anlaşmalarında belirli limiti aşan kısım, anlaşmada belirtilen şartlara göre reasürans şirketi tarafından karşılanmaktadır. Pratikte oldukça yaygın olarak kullanılmaktadır. Sigortanın koşulları sigortacı ile reasürör arasında doğrudan kabul edilir: Bunlar sigorta şirketi ile poliçe hamili arasındaki orijinal şartlara bağlı değildir. Bölüşmesiz reasürans ikiye ayrılır: Hasar fazlası reasürans ve toplam hasar fazlası reasürans.

- Hasar Fazlası reasürans (Excess of Loss Reinsurance, XL)

Sigortacının üstlendiği işlerde önceden belirlenen bir tutarı geçen kısmı reasürans şirketine o işten elde ettiği prim karşılığında devrettiği reasürans türüdür. Hasar teriminin tanımı üzerine inşa edilmiştir. Her hasarın oluşum ve tutar olarak farklılıklara sahip olduğu ve belirsizlik içerdiği bilinmektedir. Sigortacı her bir büyük risk için de tek tek tüm küçük riskler için de kendini korumaya almak isteyecektir. Bu açıdan düşünüldüğünde üç farklı hasar fazlası reasürans tipi söz konusudur: hasar başına XL, olay başına XL ve katastrof XL. Hasar başına XL açısından düşünüldüğünde her risk tek başına kabul edilir ve bu duruma özel tasarlanmış bir teminat/koruma gerektirir. Her bir riskin teminatı uygun şekilde belirlenen saklama payı, katmanlar ve eğer gerekliyse teminatsız üst seviye ile ortaya konur. Bir olayın, risk başına birden fazla eşzamanlı olarak tetiklenmesi durumunda, her biri ayrı ayrı hesaba katılacak eşit sayıda kayıpla sonuçlanacaktır.

Hem sigortacı hem de reasürör, tek bir zarar olayından etkilenebilecek toplam birleşik riskleri hesaba katmalıdır. Bu amaca yönelik olarak, olay başına XL dikkate alınması önerilir. Risklerin sayısından bağımsız olarak sadece bir kümülatif risk ele alınır ve poliçedeki belirli kurallar doğrultusunda sigortalanır. Her bir “olay başına” yapısının özel ihtiyaçlarına daha iyi uyup uymadığını doğru bir şekilde tahmin etmek sigorta şirketinin sorumluluğundadır: yaygın inanışa rağmen, benzer bir teminat her zaman daha yüksek katkıları garanti etmez. Risklerin ayrılmasının zor veya imkânsız olduğu durumlarda, her olay başına bir reasüransın göz önünde bulundurulması yaygın bir fikirdir.

Üçüncü bir seçenek ise katastrof XL’dir. Olay başına koruması gibi hasar birikimlerine özel bir koruma sağlar. Risk başına XL yerine bir alternatif olarak bilinçli olarak onu tamamlayacak şekilde tasarlanmıştır. Aslında, sadece bir bireysel riski etkileyen bir hasar ile tetiklenmeyecek şekilde tasarlanmıştır. Hasar olayının çeşitli riskleri içerdiği, birikimin gerçek bir katastrof oluşturduğu durumda bu reasürans türü kullanılır. Aksi taktirde teminat risk başına olacak şekilde sınırlandırılır.

- Toplam Hasar Fazlası Reasürans (Stop Loss Reinsurance)

Bazen Bütünsel Hasar Fazlası Reasüransı olarak da adlandırılan bu reasürans türü bir yıl boyunca oluşan her tür hasar olayına karşı koruma sağladığı için en kapsamlı korumayı sunar. Çünkü tek tek hasarlar için değil bütün hasarların toplamı belirli bir limiti aştığında reasürans şirket tazminata ortak olmaktadır dolayısıyla bu limiti aşan büyük-küçük tüm hasarlar teminat limiti içindedir. Aynı oluşum yılı içerisinde işlerini etkileyebilecek çeşitli hasarlara karşı ek bir koruma isteyen sigortacılar için etkili bir çözüm sunar.

2.2. Prim İlkeleri

Daha önce de belirtildiği üzere yazılan risklerin bir kısmının reasürans şirket tarafından üstlenilmesi karşılığında reasürör sigortacıya bir masraf yüklemektedir. Bu masraf Prim İlkeleri olarak adlandırılan özel kurallar ile belirlenmektedir. Prim hesaplama ilkesi Negatif olmayan rasgele değişken $X \in x$ bir negatif olmayan gerçek sayı $N \in \mathbb{R}_+$ olan π'ye bağlı bir fonksiyondur. Prim ilkesi, reasüröre aktarılan hasarın miktarına bağlı olduğundan $\pi\left(f\left(x\right)\right)$ ile de ifade edilmektedir.

Tüm optimal reasürans modellerinin hangi prim ilkesinin kendisi için en etkin olduğunu belirtmesi istenir. Genellikle bu seçim prim ilkelerinin sahip olması gereken bazı özelliklere dayanmaktadır. Ayrıca, kabul edilebilir prim ilkelerine ilişkin varsayımlar, bir modelin sağlamlığının ölçütlerinden birini oluşturmaktadır. Kabul edilebilir prim ilkesinin sayısı arttıkça, modelin güçlülüğü de artar.

Bu durum Chi ve Tan'ın Beklenen Değer ilkesine göre hesaplanan primin varsayımlarını hafifletmelerine neden olmuştur [71]. Chi ve Tan'ın 2013 [17] yılındaki çalışmalarında ise model belirli bir prim ilkesine değil, daha geniş bir sete dayandırılmıştır. Bu set, aşağıdaki üç özelliği karşılayan her prim ilkesinden oluşmaktadır.

1. *Dağılımın değişmezliği*: herhangi bir $X \in x$ için $\pi\left(X\right)$ yalnızca $F_x\left(X\right)$'in kümülatif dağılım fonksiyonuna bağlıdır. Bağımsızlık olarak da bilinen bu

özellik primin hasarın nedenine değil sadece parasal değerine ve oluşma olasılığına bağlı olduğunu gösterir.

2. *Risk-Yükleme*: Tüm $X \in x$ için $\pi(X) \geq E[x]$'tir. Negatif olmayan yükleme olarak da adlandırılır. Reasürör yalnızca riskin beklenen değerini değil aynı zamanda içerdiği belirsizliği de göz önünde bulundurması gerekir aksi halde para kaybeder.
3. *Hasar fazlası sıralaması koruması (Stop-loss ordering preserving)*: $X,Y \in x$ için hasar fazlası sıralamasında eğer X Y'den küçükse $\pi(X) \leq \pi(Y)$ olur ($X \leq_{sl} Y$ şeklinde gösterilir)

Yukarıdaki aksiyomları karşılayan en yaygın olan 8 prim ilkesi aşağıda sunulmuştur: bunlar modelin sağlamlığını kanıtlayarak modeli desteklemektedirler.

1. Net Prim İlkesi: $\pi(X) = E[X]$
2. Beklenen Değer Prim İlkesi: $\pi(X) = (1+\theta)E[X]$, bazı $\theta > 0$ için
3. Üstel Prim İlkesi : $\pi(X) = (1/\alpha)\ln E\left[e^{\alpha x}\right]$, bazı $\alpha > 0$ için
4. Orantısal Tehlikeler (Proportional Hazards) Prim İlkesi: $\pi(X) = \int_0^\infty \left[S_x(t)\right]^c dt$ bazı $0 < c < 1$ için
5. Denk Fayda (Sıfır Fayda) İlkesi: $u(w) = E\left[u\left(w - X + \pi(X)\right)\right]$ w başlangıç varlığını göstermek üzere u varlığın artan konkav fayda fonksiyonu.
6. Wang'ın Prim İlkesi: $\pi(X) = \int_0^c g\left[S_x(t)\right]dt$ g artan konkav bir fonksiyondur $g:[0,1] \rightarrow [0,1]$
7. İsviçre Prim İlkesi: $E\left[u(X - pH)\right] = u\left((1-p)H\right)$, bazı $p \in [0,1]$ ve bazı artan konvex u fonksiyonu için eşitliği çözen $\pi(X)$.
8. Hollanda Prim İlkesi: $\pi(X) = E[X] + \theta E\left[\left(X - \alpha E[x]\right)_+\right]$, $\alpha \geq 1$ ve $0 < \theta \leq 1$

Yukarıdaki tüm ilkeler sigortacılar ve reasürörler tarafından kullanılabilir: ilk durumda, prim X üzerinden hesaplanır; ikincisinde, $f(X)$ üzerinden hesaplanır. Çalışmalarda en çok kullanılan prim ilkesi beklenen değer prim ilkesi olmuştur. Beklenen değer prim ilkesi X'teki dalgalanmaları yansıtmadığı için eleştirilmiş ve bunun sonucu olarak da standart sapma ve varyans prim ilkeleri ortaya konulmuştur. Bu prim ilkeleri de literatürde oldukça sık kullanılmaktadır.

9. Standart Sapma Prim İlkesi: $\pi(X)=E[X]+\theta\sqrt{Var[X]}$, $\theta>0$
10. Varyans Prim İlkesi: $\pi(X)=E[X]+\theta Var[X]$, $\theta>0$

2.3. Risk Ölçümleri

Prim ilkesinin yanı sıra, optimal reasüransın diğer bir karakteristik varsayımı risk ölçümüdür.

Aşağıda sigortacı aşısından optimal reasürans hesaplayan çalışmalarda kullanılan bazı risk ölçümleri verilmiştir:

- iflas olasılığı,
- beklenen fayda,
- üstlenilen riskin varyansı,
- riske maruz değer (VaR) ,
- koşullu riske maruz değer (CTE veya CVaR),
- üstlenilen hasar,
- sigorta şirketinin temettü dağıtımının beklenen bugünkü değeri,
- sigortacının üstlenilen riskinin düzeltme katsayısı,
- üstlenilen hasarın kesikli varyansı ve mutlak sapması,
- hedefe ulaşmanın beklenen süresi,
- sonsuz zamanlı iflas sürecinin azami açığının riske maruz değerini ölçümleyen VaR-tipli bir risk ölçümü,
- sigortacının karının varyansı,
- alt bariyer modelinde nihai iflas olasılığı.

Aşağıda sigortacı ve reasürör aşısından optimal reasürans hesaplayan çalışmalarda kullanılan bazı risk ölçümleri verilmiştir:

- reasürör ve sigorta şirketinin birleşik yaşam olasılığı,

- birleşik yaşam olasılığı ve birleşik karlılık olasılığı,
- sigortacının maliyeti ile reasürörün maliyetinin VaR risk ölçümlerinin konveks kombinasyonu ,
- sigortacının hasarı ve reasürörün hasarının riske maruz değerlerinin konveks kombinasyonu (İki farklı kısıt altında inceleniyor. Kısıt 1. her iki taraf da kendi hasarlarının VaR'larında bir limit belirler, Kısıt 2. sigortacı hasarı VaR için bir limite sahipken reasürör reasürans sözleşmesi satmaktan elde edeceği kar için hedef koyar).

Optimal saklama payının bulunması amacıyla bu risk ölçümlerinden bazıları minimize edilirken (örneğin iflas olasılığı) bazıları ise maksimize edilir (örneğin beklenen fayda).

2.4. Riske Maruz Değer Risk Ölçümü

Riske Maruz Değer hem bankacılık hem de sigorta sektörleri için kullanılan bir risk ölçümüdür ve sermaye gereksinimleri için önemli olduğu kadar düzenlemelerinde de önemli bir rol oynamaktadır. Bu bağlamda VaR tanımı:

Negatif olmayan bir X rasgele değişkeninin $0<\alpha<1$ için $1-\alpha$ güven seviyesinde Riske Maruz Değeri

$$VaR_X(\alpha) = \inf\{x : P(X > x) \le \alpha\}$$

olarak gösterilir. Daha basit bir ifadeyle riske maruz değer X değişkeninin $1-\alpha$. çeyrekliğidir ve $1-\alpha$ güven seviyesinde en fazla ne kadar kaybın olabileceğini gösterir.

Denuit ve arkadaşlarının çalışması VaR'ın bilinen hasar dağılımları için oldukça kullanışlı bir özelliğini ortaya koymuştur. X rasgele değişkeninin birikimli dağılım fonksiyonunun $0<p<1$ için tersi $F_x^{-1}(p)$ olmak üzere $VaR_\alpha(X) = F_X^{-1}(1-\alpha)$ şeklinde ifade edilebilir. VaR'ın tanımından da yararlanarak $p=1-\alpha$ olasılığı ile X üzerinden elde edilen değer tam olarak $VaR_\alpha(X)$'dır ve aynı zamanda X'in

$VaR_\alpha(X)$'den daha küçük bir değer alması olasılığı $p=1-\alpha$'dır denir. Denk biçimde $0<p<1$ iken riske maruz değer yaşam fonksiyonun tersine eşittir $VaR_\alpha(X)=S_X^{-1}(\alpha)$. X'in $VaR_\alpha(X)$'den daha büyük bir değer alması olasılığı $p=\alpha$'dır. $\alpha \geq S_X(0)$ iken $VaR_\alpha(X)=0$'dır dolayısıyla $0<\alpha<S_X(0)$ olacak şekilde α seçilir. Buradan çıkarılacak sonuç α'nın sigortacının risk kabul etme seviyesi olduğudur. VaR kantil fonksiyonların temel özelliklerine sahiptir ve bu kullanımı için oldukça kolaylıklar sağlar: artan ve soldan sürekli bir fonksiyondur. Herhangi bir artan ve soldan sürekli g fonksiyonu için $VaR_\alpha(g(X))=g(VaR_\alpha(X))$ şeklindedir.

Ayrıca

1. Herhangi bir c sabiti için

$$VaR_\alpha(X+c)=VaR_\alpha(X)+c$$

2. Her hangi bir komonotonik (pozitif tam bağımlı) X ve Y değişkenleri için

$$VaR_\alpha(X+Y)=VaR_\alpha(X)+VaR_\alpha(Y)$$

şeklindedir. Komonotoniklik (pozitif tam bağımlılık) kavramı aşağıdaki tanımlar dizisiyle açıklanabilir.

Tanım 1 İki değişkenli rasgele (X,Y) vektörü komonotonik bir desteğe/dayanağa sahipse komonotonik olarak adlandırılabilir.

Tanım 2 eğer $P((X,Y)\in A)=1$ ifadesi doğruysa $A\subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ herhangi bir altkümesi (X,Y)'nin desteğidir denir.

Tanım 3 A 'daki her bir iki değişkenli rasgele vektörler sıralı bileşenler ise $A\subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ seti komonotoniktir denir.

3. Her hangi bir $X\leq Y$ rasgele değişkenleri için

$$VaR_\alpha(X)\leq VaR_\alpha(Y)$$

olur. VaR alt toplanabilirlik özelliğini her zaman göstermez ve bu duruma dikkat edilmelidir $VaR_\alpha(X+Y)\leq VaR_\alpha(X)+VaR_\alpha(Y)$. Bu risk ölçümünün en çok tartışılan olumsuz tarafı budur; tutarlı bir risk ölçümü değildir.

Tutarlı bir risk ölçümü genellikle daha geçerlidir, çünkü sapmasızlık, pozitif homojenlik, alt toplanabilirlik ve monotonluk özelliklerine sahiptir. Ancak VaR'ın, tutarlılık eksikliği, ciddi bir sınırlama teşkil etmemektedir.

2.5. Koşullu Riske Maruz Değer Risk Ölçümü

VaR risk ölçümü en kötü durumun $1-\alpha$ olasılık ile tanımlandığı durumda 'en kötü durum' kaybını değerlendirir. VaR risk ölçümünün problemlerinden biri $1-\alpha$ en kötü durum olayının gerçekleşmesi halinde hasarın ne olacağını hesaba katmamasıdır. Çeyrekliği geçen hasar dağılımı risk ölçümünü etkilememektedir. Koşullu kuyruk beklentisi (Conditional Tail Expectation-CTE) VaR risk ölçümündeki bazı eksikliklere değinmek amacıyla kullanılmaktadır. Literatürde bazı araştırmacılar tarafından yakın zamanlarda önerildiği için bazı farklı isimlerle kullanılmaktadır. Bunlardan bazıları; Kuyruk Riske Maruz Değer (Tail Value at Risk veya Tail-VaR), Kuyruk Koşullu Beklentisi (Tail Conditional Expectation - TCE) ve Beklenen Açık'tır (Expected Shortfall). VaR risk ölçümünde olduğu gibi CTE de α güven seviyesi ile ifade edilir, 0 ≤ α ≤ 1. α genellikle 90%, 95% veya 99% olarak seçilir diğer bir deyişle hasarın hasar dağılımının en kötü kısmı olan ($1-\alpha$) aralığına denk geldiği bilindiğinde beklenen kayıp CTE kadardır. α güvenlik seviyesinde CTE $CTE_\alpha(X)$ ile ifade edilir;

$$CTE_\alpha(X) = E\left[X \middle| X > x_\alpha\right] .$$

α sürekli ise $CTE_\alpha(X) = E\left[X \middle| X > VaR_\alpha(X)\right]$ olur.

2.6. Beklenen Fayda

Bir diğer risk ölçümü beklenen faydadır (expected utility). Beklenen fayda teorisi iktisatta, belirsizlik altında insan davranışını açıklamak için kullanılır. Karar vericinin riskli veya belirsiz durumlarda seçenekler arasında karşılaştırma yapabilmesi için o seçeneklerin beklenen faydalarını sayısal olarak karşılaştırması temeline dayanmaktadır. Bu süreçte çıktıların fayda olarak değerleri ilgili olasılıkları ile çarpılmaktadır. Bireysel kullanıcılar için tartışılabilir nitelikte olmasına rağmen, Beklenen Fayda teorisi özellikle basitliği ve matematiksel kolaylığı nedeniyle genellemeler için oldukça elverişli bir modeldir.[72]

Beklenen Fayda teorisi İlk olarak St. Petersburg paradoksu olarak bilinen problemi çözmek amacıyla Daniel Bernoulli (1738) [73] tarafından geliştirilmiştir. St. Petersburg paradoksu bir yazı tura oyunudur. Bu oyunu oynamak için oyuncu ‘P’ fiyatını ödeyecektir ve oyun tura gelene dek devam edecektir. İlk atışta tura gelirse oyuncu 2 $, ikinci atışta tura gelirse 4 $, üçüncü atışta tura gelirse 8 $ kazanacaktır. Dolayısıyla n deneme sonunda tura geldiğinde kazanç da 2^n $ olacaktır. N. denemede tura gelme olasılığı da $(1/2)^n$ olduğu için oyunun beklenen kazancı $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{1}{2}\right)^n = \infty$ olacaktır. Beklenen kazancı sonsuz olan bir oyun için oyuncunun çok büyük bir ‘P’ fiyatını bile kabul etmesi beklenirken buna razı olmaması bir paradoks oluşturur. Bernoulli bu paradoksu açıklamak için beklenen fayda teorisini ortaya koymuştur. Bu teoriyle insanların beklenen parasal değerlerini değil beklenen faydalarını maksimize etmeye çalıştıklarını açıklar ve bireylerin beklenen fayda fonksiyonları birbirinden farklıdır. Azalan marjinal fayda kanunu gereği kişilerin varlığındaki her birim artış elde ettikleri faydayı doğrusal olarak değil azalan şekilde artırmaktadır. Bernoulli çalışmasında faydanın nasıl ölçüleceğine açıklık getirmemiştir. Ancak von Neumann ve Morgenstern [74] bu teoriyi iktisatta kullanılabilir bir temel paradigma haline getirmiştir. Bu paradigmaya göre yatırımcı rasyonel bir karar vericidir ve beklenen fayda fonksiyonu sayesinde riskli durumlar altında seçenekler arasında en fazla beklenen faydayı sağlayanı seçer.

Fayda fonksiyonları faydayı **varlığın** bir fonksiyonu şeklinde ölçerler. Bu fonksiyonlar tüm $x > 0$ değerleri için iki defa türevlenebilen ve $U^{'}(x) > 0$ eşitsizliğini sağlayan fonksiyonlardır. Fayda fonksiyonunun biçimi bireysel tercihlere göre değişebilmektedir. Eğer karar verici riskten kaçınıyorsa fayda fonksiyonunun biçimi konkavdır, eğer karar verici risk alabiliyorsa fayda fonksiyonu konvekstir ancak karar verici riske karşı nötr ise fayda foksiyonu beklenen varlığın doğrusal fonksiyonu biçiminde olacaktır.

Üstel fayda fonksiyonu, logaritmik fayda fonksiyonu, karesel fayda fonksiyonu ve kesirli güç fayda fonksiyonu literatürde en sık kullanılan dört fayda fonksiyonudur [75].

U sigortacının varlığını ifade etmek üzere başlangıç sermayesi (u_0) ve net prim (c) toplamından sigortacının toplam maliyetinin çıkarılması ile bulunur.

$$U = u_0 + c - T_I$$

Sigortacının t zamanı sonundaki varlığı da $U(t) = u_0 + c - T_I(t)$ ile ifade edilir.

Net prim sigortacının sigortalılardan aldığı prim ile reasürans primi arasındaki farktır.

$$c = (1+\theta)E(S_I) - (1+\xi)E(S_R)$$

Tezde kullanılan modellerde sigortalıdan alınan prim ile reasürans primi için yükleme katsayısı eşit alınmıştır. Bu nedenle net prim daha kısa bir ifadeyle aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$c = (1+\theta)\big(E(S_I) - E(S_R)\big)$$

2.6.1. Üstel Fayda Fonksiyonu

Üstel fayda fonksiyonu $u(x) = 1 - e^{-\beta x}$ $\beta > 0$ şeklindedir. β fayda fonksiyonu parametresidir. Sigortacının varlığının beklenen faydası üstel fayda fonksiyonu yardımıyla

$$\begin{aligned}
E_U = E\left[u(U)\right] &= E\left[u(u_0 + c - T_I)\right] \\
&= E\left[1 - \exp(-\beta(u_0 + c - T_I))\right] \\
&= 1 - \left[E\left[\exp(-\beta u_0)\right]E\left[\exp(-\beta c)\right]E\left[\exp(\beta T_I)\right]\right]
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Literatürde en çok tercih edilen fayda fonksiyonu üstel fayda fonksiyonudur. Sebebi üstel fayda fonksiyonu çıktılarının sigortacının başlangıç sermayesi /varlığından bağımsız olmasıdır.

2.6.2. Karesel Fayda Fonksiyonu

Karesel fayda fonksiyonu $u(x) = x - \beta x^2$ x<1/(2β), β>0 şeklindedir. β fayda fonksiyonu parametresidir. $u^{'}(x) > 0$ koşulunun sağlanabilmesi için x<1/(2β), koşulunun sağlanması gerekmektedir ve bu oldukça kısıtlayıcı olabilir. Ayrıca rasgele değişkenin $(-\infty, \infty)$ aralığında olduğu problemler için kullanılamaz. Sigortacının varlığının beklenen faydası karesel fayda fonksiyonu yardımıyla

$$
\begin{aligned}
E_U &= E\left[u(U)\right] = E\left[u(u_0 + c - T_l)\right] \\
&= E\left[(-\beta(u_0 + c - T_l) - \beta(-\beta(u_0 + c - T_l)^2\right]
\end{aligned}
$$

olarak bulunur.

2.6.3. Logaritmik Fayda Fonksiyonu

Logaritmik fayda fonksiyonu $u(x) = \beta \log x$ $x > 0$, β>0 şeklindedir. β fayda fonksiyonu parametresidir. Bu fayda fonksiyonu x'in sadece pozitif değerleri için tanımlıdır dolayısıyla çıktının negatif varlığa neden olabileceği durumlarda kullanılmaz. Riskten kaçınan karar vericilerin kullanabileceği bir fayda fonksiyonudur çünkü birinci türev sıfırdan büyük ikinci türev ise sıfırdan küçüktür. Sigortacının varlığının beklenen faydası logaritmik fayda fonksiyonu yardımıyla

$$
\begin{aligned}
E_U &= E\left[u(U)\right] = E\left[u(u_0 + c - T_l)\right] \\
&= E\left[\beta \log(u_0 + c - T_l)\right]
\end{aligned}
$$

olarak bulunur.

2.6.4. Kesirli Güç Fayda Fonksiyonu

Kesirli güç fayda fonksiyonu $u(x) = x^{\beta}$ $x > 0$, 0<$\beta < 1$ şeklindedir. β fayda fonksiyonu parametresidir. Bu fayda fonksiyonu x'in sadece pozitif değerleri için tanımlıdır dolayısıyla tıpkı logaritmik fayda fonksiyonunda olduğu gibi çıktının negatif varlığa neden olabileceği durumlarda kullanılmaz. Sigortacının varlığının beklenen faydası kesirli güç fayda fonksiyonu yardımıyla

$$
\begin{aligned}
E_U &= E\left[u(U)\right] = E\left[u(u_0 + c - T_I)\right] \\
&= E\left[(u_0 + c - T_I)^{\beta}\right]
\end{aligned}
$$

olarak bulunur.

3. SİGORTACI BAKIŞ AÇISIYLA OPTİMAL REASÜRANS

Tezin bu bölümünde Cai ve Tan'ın [12] çalışmasında kullandıkları yaklaşım üzerinden sadece sigortacıyı ele alan optimal reasürans çalışması işlenmiştir. Model notasyonu ve gerekli varsayımlar şu şekildedir:

X bir sigortacı ve ya bir sigorta portföyü için (toplamsal) hasarı ifade eder. $F_X(x) = \Pr\{X \le x\}$ kümülatif dağılım fonksiyonuyla, $S_X(x) = \Pr\{X > x\}$ yaşam fonksiyonuyla ve $E[X] > 0$ ortalamayla X'in negatif olmayan rasgele bir değişken olduğu varsayılır. Toplam hasar fazlası reasürans anlaşması altında sırasıyla X_I ve X_R sigortacının ve reasürör şirketin rasgele hasar değişkenlerini göstermektedir. X'e bağlı X_I ve X_R eşitlikleri Eş.3.1 ve Eş. 3.2 deki gibidir.

$$X_I = \begin{cases} X, & \mathrm{X \le d} \\ d, & X > d \end{cases} = X \wedge d \tag{3.1}$$

$$X_R = \begin{cases} 0, & X \le d \\ X - d, & X > d \end{cases} = (X - d)_+ \tag{3.2}$$

Eşitliklerde $d > 0$ saklama payıdır, $X \wedge d = \min\{x, d\}$ ve $(X - d)_+ = \max\{(X - d), 0\}$ 'dır. Toplam hasar fazlası reasürans anlaşmasına göre reasürör hasarın X'i aşan kısmını ödeyecektir. Bu durum saklama payını aşan riskleri reasürör şirketin devralması sonucu sigortacının maksimum hasar sorumluluğunu saklama payı seviyesinde tutarak büyük hasarlara karşı korunmasını sağlar.

Reasürans primi beklenen değer prim ilkesi yardımıyla hesaplanmaktadır $\pi_R(d) = (1+\theta)E[X_R]$, $\theta > 0$ güvenlik yüklemesidir ve reasürör hasarının beklenen değeri $E[X_R] = E[(X - d)_+] = E[x] - E[(X \wedge d)] = \int_d^{\infty} S_X(x)dx$ net toplam hasar fazlası primidir [74, 75]. Doğal olarak $\pi_R(d)$ d'nin azalan bir fonksiyonudur. T_I ile sigortacının toplam riskini ve ya toplam maliyetini (kaybı) ifade edilmektedir.

Üzerinde kalan hasar ve reasürör şirkete yaptığı prim ödemesinin toplamından oluşur $T_I = X_I + \pi_R(d)$. Sigortacının hasarını paylaşması karşılığında elde ettiği primden de vazgeçmesi gerekecektir ve optimal saklama payının hesaplanması gerekliliğini ortaya koyan bu takas durumudur. Saklama payı küçüldükçe sigortacının üstünde kalan risk de küçülecek ancak bunun karşılığında reasüröre vermesi gereken prim büyüyecektir. Diğer yandan sigortacı reasürans prim maliyetini düşürmeyi planlarsa, üstlendiği potansiyel risk büyümüş olacaktır.

Modelde piyasa risklerini, portföy optimizasyonunu, sermaye yeterliliğini vb ölçmek için bankacılık ve sigorta sektörlerinde yaygın olarak kullanılan VaR ve CTE risk ölçümleri kullanılmıştır [76-79] . Bölüm 2'deki gösterimiyle de $0 < \alpha < 1$ için $1-\alpha$ güven seviyesinde $VaR_X(\alpha) = \inf\{x : P(X > x) \leq \alpha\} = \inf\{x : P(X \leq x) \geq 1-\alpha\}$ şeklindedir.

Her hangi bir $x < VaR_X(\alpha), \Pr\{X > x\} > \alpha$ için $\Pr\{X > VaR_X(\alpha)\} \leq \alpha$ olur. Eğer X $[0,\infty)$ üzerinde birebir ve sürekli bir dağılım fonksiyonuna sahipse, $VaR_\alpha(X)$ aşağıdaki her iki eşitliğin de tek çözümüdür.

$$\Pr\{X > VaR_X(\alpha)\} = \alpha$$

$$\Pr\{X \leq VaR_X(\alpha)\} = 1-\alpha$$

Aynı zamanda S_X^{-1} ve F_X^{-1} sırasıyla S_X ve F_X 'in ters fonksiyonları olmak üzere $VaR_X(\alpha) = S_X^{-1}(\alpha) = F_X^{-1}(1-\alpha)$ olur.

VaR risk ölçümü sade olmanın avantajına sahiptir. Bir riske karşılık gelen VaR biliniyorsa, o zaman riskin böyle bir değeri aşma olasılığının α'dan büyük olmayacağı garanti edilebilir. Bu bağlamda, α parametresi risk toleransı olasılığı olarak yorumlanabilir. Pratikte, α genellikle % 5'ten az küçük bir değer olarak seçilmektedir. Bu ölçümün olumsuz tarafı, bu eşiğin ötesindeki risk için açığın şiddeti hakkında hiçbir bilgi vermemesidir. Ayrıca, bazı araştırmacılar tutarlı bir risk ölçümünün önemini savunmakta ve ikinci bölümde de açıklandığı üzere VaR alt toplanabilirlik özelliğini her zaman sağlamadığı için tutarlılığın aksiyomatik özelliklerini karşılamada yetersiz olabilmektedir. Bu sebeple diğer bir risk ölçümü olan CTE de kullanılmıştır ve aralarındaki ilişki aşağıdaki gibidir [80, 81].

$CTE_X(\alpha) = E\left[X \middle| X > VaR_X(\alpha)\right]$ veya $CTE_X(\alpha) = E\left[X \middle| X \geq VaR_X(\alpha)\right]$ olur. X'in sürekli olması durumunda eşitlikler özdeştir. Her iki eşitlik için de $CTE_X(\alpha) \geq VaR_X(\alpha)$ sağlanır. Belirli bir risk tolerans olasılığı için risk VaR değerine eşit veya daha büyük olduğunda hasarın beklenen büyüklüğünü belirlemede CTE daha caziptir. Daha da önemlisi risklerin sürekli olduğunu söyleyen uygun koşullar altında CTE tutarlı bir risk ölçümüdür. Sigotacının hasarı X_I ve toplam riski T_I için VaR değerleri Eş. (3.3) ve Eş. (3.4)'de CTE değerleri ise Eş. (3.5) ve Eş. (3.6)'da verilmiştir.

$$VaR_{X_I}(d,\alpha) = \inf\left\{x : \Pr\left\{X_I > x\right\} \leq \alpha\right\} \tag{3.3}$$

$$VaR_{T_I}(d,\alpha) = \inf\left\{x : \Pr\left\{T_I > x\right\} \leq \alpha\right\} \tag{3.4}$$

$$CTE_{X_I}(d,\alpha) = E\left[X_I \middle| X_I \geq VaR_{X_I}(d,\alpha)\right] \tag{3.5}$$

$$CTE_{T_I}(d,\alpha) = E\left[T_I \middle| T_I \geq VaR_{T_I}(d,\alpha)\right] \tag{3.6}$$

Yukarıdaki fonksiyonlarda girdi olarak d'nin dahil edildiğine ve X_I ve T_I için CTE hesaplarken sadece $d > 0$ değerleri ele alındığından $CTE_X(\alpha) = E\left[X \middle| X \geq VaR_X(\alpha)\right]$ eşitliğinden yararlanıldığına dikkat edilmelidir. d 'nin bazı değerleri için $CTE_X(\alpha) = E\left[X \middle| X > VaR_X(\alpha)\right]$ uygun olmamaktadır. Sigortacı bakış açısıyla tedbirli bir risk yönetimi açısından T_I ile ilişkili risk ölçümünün olabildiğince küçük olması beklenir. Bu durumda optimal saklama payının belirlenmesi için aşağıdaki iki optimizasyon kriteri hesaplanmalıdır. Bunlardan birincisi Var optimizasyonu diğeri ise CTE optimizasyonudur. Her iki optimizasyon kriteri de minimize edilmeye çalışılmaktadır.

$$VaR_{T_I}(d^*,\alpha) = \min_{d>0}\left\{VaR_T(d\ ,\alpha)\right\}$$

$$CTE_{T_I}(\tilde{d},\alpha) = \min_{d>0}\left\{CTE_{T_I}(d,\alpha)\right\}$$

Bu optimizasyonlar bireysel ve kollektif risk modelleri üzerinde yapılmıştır. Bireysel bir risk modeli için toplamsal hasar $X = X_1 + ... + X_n$ şeklindedir. X_j $j = 1,...,n$ için j alt portföyündeki hasarı veya j olayını ifade etmektedir. Kollektif risk modeli ise $X = \sum_{j=1}^{N} X_j$ ile ifade edilir bu eşitlikte N hasar sayısını X_j ise ($j = 1,2,...$ için) j inci hasarın şiddetidir. Hem bireysel hem de kollektif model için geçerli olan bazı varsayımlar vardır; X $(0,\infty)$ aralığında birebir ve sürekli bir dağılım fonksiyonundan gelmektedir, 0 noktasında muhtemel bir sıçrama (jump) söz konusudur ve $0 < x < S_X(0)$ aralığında $S_X^{-1}(x)$ vardır. $S_X(0) \leq x \leq 1$ için $S_X^{-1}(0) = \infty$ ve $S_X^{-1}(x) = 0$'dır. Ayrıca $0 < \alpha < S_X(0)$ koşulu uygulanır, aksi halde $\alpha \geq S_X(0)$ durumunda $VaR_X(\alpha) = 0$ ve $VaR_{X_I}(d,\alpha) = 0$ olur. X'in dağılım fonksiyonu 0 noktasında sürekliyse $S_X(0) = 1$ olacağı da unutulmamalıdır. Bu varsayımlar ışığında VaR optimizasyonu yapıldığında optimal çözüme aşağıdaki adımlar ile ulaşılmaktadır.

Adım 1. Sigortacının üzerine aldığı hasarın yaşam fonksiyonu ve VaR fonksiyonu

$$S_{X_I}(x) = \begin{cases} S_X(x), & 0 \leq \mathrm{x} < \mathrm{d}, \\ 0, & \mathrm{x} \geq \mathrm{d} \end{cases}$$

- $0 < \alpha \leq S_X(d)$ ise veya buna denk bir biçimde $0 < d \leq S_X^{-1}(\alpha)$ ise $VaR_{X_I}(d,\alpha) = d$
- $\alpha > S_X(d)$ ise veya buna denk bir biçimde $d > S_X^{-1}(\alpha)$ ise $VaR_{X_I}(d,\alpha) = S_X^{-1}(\alpha)$ olur.

Buradan da sigortacının üzerine aldığı hasarın riske maruz değeri;

$$VaR_{X_I}(d,\alpha) = \begin{cases} d, & 0 < \alpha \leq S_X(d) \\ S_X^{-1}(\alpha), & \alpha > S_X(d) \end{cases}$$

olarak bulunur.

Adım 2. $T_I = X_I + \pi_R(d)$ eşitliği kullanılarak toplam riskin riske maruz değeri ile sigortacının üzerinde kalan riskin riske maruz değeri arasındaki ilişki $VaR_{T_I}(d,\alpha) = VaR_{X_I}(d,\alpha) + \pi_R(d)$ şeklindedir.

$VaR_{X_I}(d,\alpha)$ d'nin artan bir fonksiyonu iken, $\pi_R(d)$ d'nin azalan bir fonksiyonudur. $VaR_{X_I}(d,\alpha)$ özelliklerinden yola çıkarak tüm $d > 0$ ve $0 < \alpha < S_x(0)$ için aşağıdaki önerme sunulmaktadır.

$$VaR_{T_I}(d,\alpha) = \begin{cases} d + \pi_R(d) & 0 < \mathrm{d} < \mathrm{S}_{\mathrm{X}}^{-1}(\alpha) \\ S_X^{-1}(\alpha) + \pi_R(d), & \mathrm{d} > \mathrm{S}_{\mathrm{X}}^{-1}(\alpha). \end{cases} \tag{3.7}$$

X_I'nın VaR'ında olduğu gibi T_I'nin VaR'ı da verilen bir $d > 0$ değeri için tüm $\alpha \in (0, S_X(d)]$ aynıdır. Optimal sonuç için gerekli ve yeterli koşullar Teorem 3.1'deki gibidir [12],

Teorem 3.1.

- optimal saklama payı $d^* > 0$ sadece ve sadece

$$\alpha < \theta^* < S_X(0) \tag{3.8}$$

ve

$$S_X^{-1}(\alpha) \geq S_X^{-1}(\theta^*) + \pi_R(S_X^{-1}(\theta^*)) \tag{3.9}$$

koşulları sağlandığında vardır.

- Eğer optimal saklama payı varsa bu optimal saklama payı

$$d^* = S_X^{-1}(\theta^*) \tag{3.10}$$

şeklindedir. Eşitlikte $\theta^* = \dfrac{1}{1+\theta}$.

T_I'nin riske maruz değeri

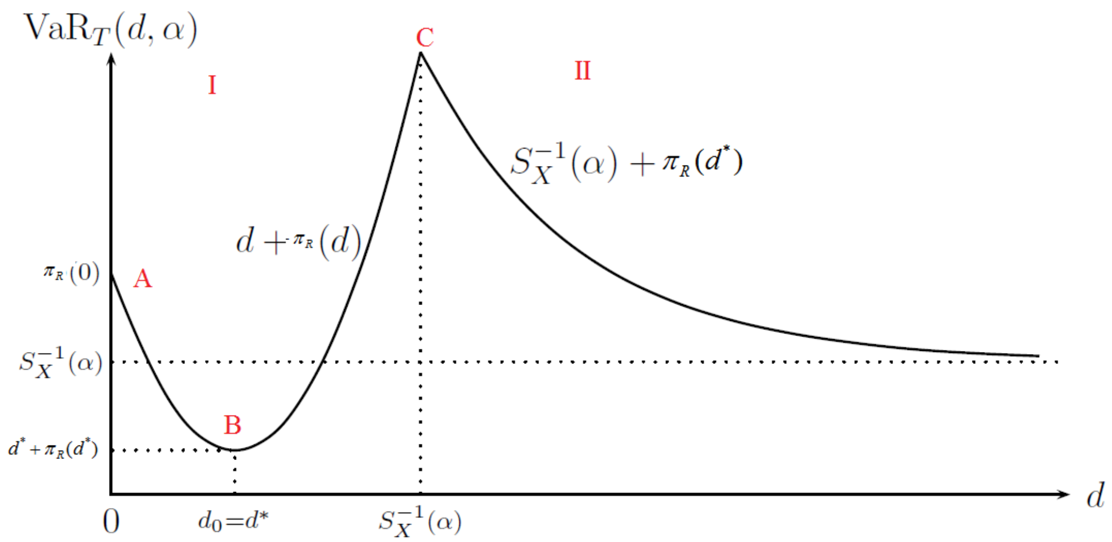
$$VaR_T(d^*,\alpha) = d^* + \pi_R(d^*) \tag{3.11}$$

şeklindedir.

İspat 3.1.

Eş. (3.7)'den $VaR_{T_l}(d^*,\alpha)$ $d\in(0,\infty)$ iken sürekli ve $d\in(S_X^{-1}(\alpha),\infty)$ iken $d\to\infty$ iken $S_X^{-1}(\alpha)$ limitiyle azalan olduğu gözlemlenir. Ayrıca $\theta^* < S_X(0)$ iken $d+\pi_R(d)$ fonksiyonu $d\in(0,d_0)$ için azalan $d\in(d_0,\infty)$ için artan bir fonksiyondur. Burada $d_0 = S_X^{-1}(\theta^*) > 0$ değerini alır ve $d+\pi_R(d)$ fonksiyonu d_0 noktasında minimum değerini alarak $d_0+\pi_R(d_0)$ olur. Sonuç olarak Eş. (3.8) ve Eş. (3.9) sağlanıyorsa $0 < d_0 < S_X^{-1}(\alpha)$ olur ve minimum değer olan $d_0+\pi_R(d_0)$ değeri $d\in(0,\infty)$ iken $VaR_{T_l}(d^*,\alpha)$'nın global minimum değeri olur. Böylelikle $d_0 > 0$ optimal saklama payıdır Şekil 3.1'de riske maruz değer grafiği üzerinde net bir şekilde gösterilmiştir [12].

Eğer optimal saklama payı var ise yukarıdaki kanıt ile $d^* = d_0$'dır ve $(0,\infty)$ aralığında VaR $d_0+\pi_R(d_0)$ olur ve böylece Eş. (3.10) ve Eş. (3.11) sağlanmış olur.



Şekil 3.1. Optimal saklama payı varlığında $VaR_T(d\ ,\alpha)$[12]

Bu sonuçlardan şu yorumlar elde edilir;

- Eş. (3.8) ve Eş. (3.9) kolayca elde edilebilir, optimal saklama payı anlaşılabilir ve kolay hesaplanabilirdir,

- eğer optimal saklama payı var ise, varsayılan hasar dağılımına ve yükleme faktörüne bağlıdır,
- aşağıdaki gibi bir α^* kritik değeri tanımlanırsa $\theta^* < S_X(0)$ eşitsizliğini sağlayan tüm $\alpha \in (0,\alpha^*)$ değerleri için optimal çözüm vardır.

  $\alpha^* = \min\left[\theta^*, S_X\left(S_X^{-1}(\theta^*) + \pi_R(S_X^{-1}(\theta^*))\right)\right]$

  α^* eşik risk tolerans olasılığı olarak yorumlanabilir ve bu değerin ötesinde optimal çözüm bulunamaz dolayısıyla sigortacı için de riskini reasüre etmek anlamlı olmaz. Pratikte α oldukça küçük bir değer olarak seçilmektedir ki bu da iflas/ödeme gücünü yitirme olasılığını düşük tutar ve sigortacı ile reasürör şirket arasında optimal reasüransın varlığından söz edilebilir.
- Eğer optimal çözüm varsa hem optimal saklama payı hem de VaR α'dan bağımsızdır. Bu sonuç risk yönetimi açısından önemlidir. α^* eşik risk tolerans olasılığı altında seçilen tüm α değerleri için, ister % 5 ister %10 olsun sigortacı aynı optimal saklama payı ile riskini reasure eder.

Optimal saklama payı ve minimum VaR Eş. (3.10) ve Eş. (3.11)'deki gibi verildiğinde ve

$$\begin{aligned}
S_X^{-1}(\alpha) &\geq (1+\theta)\int_0^{S_X^{-1}(\theta^*)} S_X(x)d_x + (1+\theta)\pi\left(S_X^{-1}(\theta^*)\right) \\
&\geq (1+\theta)S_X^{-1}(\theta^*)S_X\left(S_X^{-1}(\theta^*)\right) + (1+\theta)\pi\left(S_X^{-1}(\theta^*)\right) \\
&= S_X^{-1}(\theta^*) + (1+\theta)\pi\left(S_X^{-1}(\theta^*)\right)
\end{aligned}$$

$$S_X^{-1}(\alpha) \geq (1+\theta)E\left[X\right] \tag{3.12}$$

hem Eş.(3.8) hem de Eş. (3.12) sağlandığında optimal saklama payı $d^* > 0$ vardır.

Uygulama (üstel dağılım için): X'in üstel dağıldığı varsayımıyla $\pi_R(d) = (1+\theta)E[X_R]$ olur ve $E[X_R] = E[X-d]_+ = E[X] - E[X \wedge d]$ şeklindedir. λ parametresiyle üstel dağılım için $E[X] = \lambda$ $E[X \wedge d] = \lambda(1\text{-}e^{-d/\lambda})$ $\pi_R(d) = (1+\theta)\left(\lambda - \lambda(1-e^{-d/\lambda})\right)$ olur, dolaysıyla optimal saklama payı;

$$VaR_T(d) = d + \pi_R(d) = d + (1+\theta)\left(\lambda - \lambda(1-e^{-d/\lambda})\right)$$

$$\frac{dVaR_T(d)}{d_d} = 1 - e^{-d/\lambda}\left(1+\theta\right) = 0$$

$$d^* = -\lambda \ln\left(\frac{1}{1+\theta}\right) = S_X^{-1}(\theta^*) \qquad \theta^* = \left(\frac{1}{1+\theta}\right)$$

olarak bulunur.

Sayısal örnek: $\alpha = 0{,}1$ ve $\theta = 0{,}2$ iken $E[X] = 1000$ ile üstel dağılım için $S_X(x) = e^{-0{,}001x}$, $x \geq 0$ ve $S_X^{-1}(x) = -1000\log x$, $0 < x < 1$, $S_X(0) = 1$ şeklindedir ve hem Eş. (3.2) hem de Eş. (3.6) sağlanmaktadır çünkü $\theta^* = 0{,}83 > \alpha = 0{,}1$ ve $S_X^{-1}(\alpha) = -1000\log\alpha = 2303{,}59 > \left(1+\theta\right)E\left[X\right] = 1200$ olur. Optimal saklama payı vardır ve $d^* = S_X^{-1}(\theta^*) = 1000\log(1+\theta) = 182.32$ olarak bulunur. Bu örnek için α^* eşik risk tolerans olasılığı 0,307'dir ve tüm $\alpha \in (0,\ 0{,}307)$ için optimal saklama payı vardır ve 182,32'ye eşittir.

Uygulama (pareto dağılım için): X 'in (ρ,γ) parametreleriyle pareto dağıldığı varsayımıyla aşağıdaki eşitlikler kullanılarak optimal saklama payı bulunur. Hasar dağılımının beklenen değeri, sigorta şirketinin beklenen hasar değeri ve reasürör şirketin beklenen hasar değeri sırasıyla Eş. (3.13), Eş. (3.14) ve Eş. (3.15)'teki gibidir.

$$E[X] = \frac{\rho}{\gamma - 1} \tag{3.13}$$

$$\mathrm{E}[\mathrm{X} \wedge \mathrm{d}] = \frac{\rho}{\gamma-1}\left[1 - \left(\frac{\rho}{d+\rho}\right)^{\gamma-1}\right] \quad \gamma \neq 1 \tag{3.14}$$

$$\mathrm{E}[\mathrm{X\text{-}d}]_+ = \mathrm{E}[\mathrm{X}] - \mathrm{E}[\mathrm{X} \wedge \mathrm{d}] = \frac{\rho}{\gamma-1}\left(\frac{\rho}{d+\rho}\right)^{\gamma-1} \tag{3.15}$$

Eş. (3.13), (3.14) ve (3.15)'den reasürans primi ve VaR_{T_l} elde edilir.

$$\pi_R(d)=\frac{(1+\theta)\rho^{\gamma}}{(\alpha-1)(d+\rho)^{\gamma-1}}$$

$$VaR_T(d)=d+\pi_R(d)=\frac{(1+\theta)\rho^{\gamma}}{(\alpha-1)(d+\rho)^{\gamma-1}}+d$$

Optimal saklama payı $\theta^*=\left(\frac{1}{1+\theta}\right)$ dönüşümü ile bulunur.

$$\frac{dVaR_T(d)}{d_d}=1-(1+\rho)\theta^{\gamma}(d+\theta)^{-\gamma}=0$$

$$d^*=\theta\left(\frac{1}{1+\rho}\right)^{-1/\alpha}-\theta=S_X^{-1}(\theta^*)\qquad \theta^*=\left(\frac{1}{1+\theta}\right)$$

Sayısal örnek: $\alpha=0{,}1$ ve $\theta=0{,}2$ iken hasarlar $S_X(x)=\left(\frac{2000}{x+2000}\right)^3$ ile pareto dağılımlıdır. $S_X^{-1}(x)=2000x^{-1/3}-2000,\ 0<x<1$ olur ve $\theta^*=0{,}83>\alpha=0{,}1$ ve $S_X^{-1}(\alpha)=2000\alpha^{-1/3}-2000=2308{,}87>(1+\theta)E[X]=1200$ ve $S_x(0)=1$ dolayısıyla hem Eş.(3.8) ve Eş. (3.12) sağlanmaktadır. Gerekli koşullar sağlandığı için optimal saklama payı vardır ve $d^*=S_X^{-1}(\theta^*)=2000(1+\theta)^{1/3}-2000=125{,}32$ olarak bulunur. Bu örnek için α^* eşik risk tolerans olasılığı 0.247'dir ve tüm $\alpha\in(0,\ 0{,}247)$ için optimal saklama payı vardır ve 125,32'ye eşittir.

Yukarıdaki her iki örnekte de parametreler eşit seçilerek riskin aynı ortalamaya sahip olması sağlanmıştır. Pareto dağılım ağır kuyruklu bir dağılım olduğu için daha büyük hasar gelmesi olasılığı daha fazladır bu sebeple optimal saklama payı sigorta şirketi açısından düşünüldüğünde üstel dağılımın optimal saklama payından daha küçüktür [12].

VaR optimizasyonu için kullanılan varsayımlarla modelin CTE optimizasyonu yapıldığında optimal çözümüne aşağıdaki eşitliklerle ulaşılmaktadır [12].

$$
\begin{aligned}
CTE_T(d,\alpha) &= E\left[X_I + \pi_R(d) \middle| X_I + \pi_R(d) \geq VaR_T(d,\alpha)\right] \\
&= E\left[X_I \middle| X_I \geq VaR_{X_I}(d,\alpha)\right] + \pi_R(d) \\
&= CTE_{X_I}(d,\alpha) + \pi_R(d)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
CTE_T(d,\alpha) &= E\left[VaR_{X_I}(d,\alpha) + X_I - VaR_{X_I}(d,\alpha) \middle| X_I \geq VaR_{X_I}(d,\alpha)\right] \\
&= VaR_{X_I}(d,\alpha) + \frac{\int^{\infty} VaR_{X_I}(d,\alpha) S_{X_I}(x)dx}{\Pr\left\{X_I \geq VaR_{X_I}(d,\alpha\right\}}
\end{aligned}
$$

$$0 < VaR_{X_I}(d,\alpha) \leq d$$

$$
\begin{aligned}
\int^{\infty} VaR_{X_I}(d,\alpha) S_{X_I}(x)dx &= \int_{VaR_{X_I}(d,\alpha)}^{d} S_X(x)dx \\
&= \begin{cases} 0, & 0 < d < S_X^{-1}(\alpha) \\ \int_{S_X^{-1}(\alpha)}^{d} S_X(x)dx & d > S_X^{-1}(\alpha) \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Pr\left\{X_I \geq VaR_{X_I}(d,\alpha)\right\} &= \Pr\left\{X_I = VaR_{X_I}(d,\alpha)\right\} + S_{X_I}\left(VaR_{X_I}(d,\alpha)\right) \\
&= \begin{cases} \Pr\left\{X_I = d\right\} + S_{X_I}(d), & 0 < d < S_X^{-1}(\alpha) \\ \Pr\left\{X_I = S_X^{-1}(\alpha)\right\} + S_{X_I}(S_X^{-1}(\alpha)), & d > S_X^{-1}(\alpha) \end{cases} \\
&= \begin{cases} \Pr\left\{X \geq d\right\}, & 0 < d < S_X^{-1}(\alpha) \\ S_X(S_X^{-1}(\alpha)) = \alpha, & d > S_X^{-1}(\alpha) \end{cases}
\end{aligned}
$$

Eşitlikler birleştirildiğinde,

Her $d > 0$ ve $0 < \alpha < S_X(0)$ için

$$
CTE_T(d,\alpha) = \begin{cases} d + \pi_R(d), & 0<d \leq S_X^{-1}(\alpha) \\ S_X^{-1}(\alpha) + \pi_R(d) + \dfrac{1}{\alpha}\int_{S_X^{-1}(\alpha)}^{d} S_X(x)dx, & d > S_X^{-1}(\alpha) \end{cases}
$$

elde edilir. VaR'da olduğu gibi $d > 0$ verildiğinde tüm $\alpha \in (0, S_X(d))$ için $CTE_T(d,\alpha)$ değerleri aynıdır.

$0 < d \leq S_X^{-1}(d,\alpha)$ olduğunda $VaR_{X_I}(d,\alpha) = d$ ve $VaR_T(d,\alpha) = d + \pi_R(d)$'dir. Ancak $0 \leq X_I \leq d$ ve $0 \leq T \leq d + \pi_R(d)$ olduğu için $X_I > VaR_{X_I}(d,\alpha)$ ve $T > VaR_T(d,\alpha)$ eşitsizlikleri sağlanmaz. Bu sebeple daha önce de belirtildiği gibi $CTE_X(\alpha) = E\left[X \mid X > VaR_X(\alpha)\right]$ yerine $CTE_X(\alpha) = E\left[X \mid X \geq VaR_X(\alpha)\right]$ kullanılmaktadır.

4. SİGORTACI ve REASÜRÖR BAKIŞ AÇISIYLA OPTİMAL REASÜRANS

Bu bölümde Bölüm 3'te verilen ve sadece sigortacı açısından optimal reasürans hesaplayan model yerine hem sigortacıyı hem de reasürörü dikkate alan bir model kurulması ve optimal reasüransın bu model üzerinden analitik olarak çözümünün elde edilmesi amaçlanmıştır. İlk olarak benzetim ile sonuçları elde edilen ve tezin öncül çalışması olan [69], her iki tarafı hesaba katan model incelenmiştir. Bu çalışmada benzetim için MATLAB yardımıyla optmizasyon uygulaması yapılmış ve sonuçlar şekiller ve çizelgeler yardımıyla açıklanmıştır. Çalışmanın amacı hem sigortacının karını hem de reasürörün karını göz önünde bulundurmak, saklama payını hesaplarken tek tarafın hesaba katıldığı durumlardaki yanlıştan kaçınmak ve uygulamada (gerçek dünyada) kullanılabilir sonuçlar bulmaktır. Bunu başarabilmek için hem sigortacıyı hem reasürans şirketini göz önünde bulunduran ve amaç fonksiyonu bu ikisinin kar farklarının mutlak değerini minimize etmek olan model kurulmuştur.

4.1. Benzetim optimizasyonu

Çoğu gerçek dünya sistemleri o kadar karmaşıktır ki, performans ölçüm değerlerini hesaplamak ve analitik olarak en uygun çözümleri bulmak son derece zordur ve bazen imkansızdır. Bu nedenle, karmaşık sistemlerin değerlendirilmesinde ve performans ölçümlerinin optimize edilmesinde bilgisayar benzetimi sıklıkla kullanılmaktadır. Öncelikle modelin benzetim ile elde edilen optimizasyon sonuçları irdelenmiştir. Verilen bir amaç fonksiyonunu minimize eden optimizasyon probleminin genel gösterimi aşağıdadır,

$$\min_{\rho \in \mathrm{P}} \left(J(\rho) \right)$$

Burada $\rho \in \mathrm{P}$ girdi değişkeni, $J(\rho)$ amaç fonksiyonu, P ise kısıt kümesidir. J'nin en yaygın biçimi $J(\rho) = E\left[L(\rho,\varepsilon)\right]$ şeklindedir. Burada ε sistemin benzetimi sonucu stokastik etkilerini ifade ederken $L(\rho,\varepsilon)$ benzetimin çıktısından elde edilen örneklem performans tahminidir. Bölüm 3'te toplam hasar fazlası reasürans anlaşmasına ilişkin tanımlanan sırasıyla X_I ve X_R sigortacının ve reasürör şirketin rasgele hasar değişkenleri hasar fazlası reasürans anlaşması için de tanımlanmış ve $X_I = \sum_{i=1}^{N} \min\{x,d\}$, $X_R = \sum_{i=1}^{N} \max\{0, x-d\}$ elde edilmiştir. $T_I = X_I + \pi_R(d)$, sigortacının toplam maliyetini ve $\pi_I = (1+\theta)E(X_I)$ sigorta şirketinin primini ve $\pi_R = (1+\theta)E(X_R)$ reasürans şirketinin primini ifade ederken $S_I = \pi_I - T_I$ sigortacının karını ve $S_R = \pi_R - X_R$ reasürörün karını gösteren eşitliklerdir. Sigortacı ve reasürör şirketin karlarının farklarının mutlak değer fonksiyonu, $ABS_{Diff} = |S_I - S_R|$ şeklindedir [69]. Benzetim optimizasyonu modelinde, ABS_{Diff} fonksiyonunun (sigortacı ve reasürörün karları arasındaki farkın mutlak değeri) VaR değerini minimize eden d^* optimal saklama payı seviyesinin bulunması amaçlanmaktadır. Bu durumda optimizasyon problemi;

$$\min_{d \in [0,\infty)} \left(E\left[VaR_{ABS_{Diff}}(d,\alpha,\varepsilon) \right] \right)$$

şeklindedir. ε benzetim sonucunda sistemin stokastik etkilerini ifade eder. d^* verilen $1-\alpha$ güven seviyesinde VaR'ı minimize eden optimal saklama payı seviyesidir. Benzetim 1.000.000 tekrar ile MATLAB yardımıyla yapılmıştır. İki farklı α ve θ çifti seçilmiştir; $\alpha = 0{,}10,\ \theta = 0{,}20$ ve $\alpha = 0{,}05,\ \theta = 0{,}30$. Böylece %95 ve %99 güven seviyelerinde ve 0,20 ve 0,30 prim yükleme katsayılarıyla sonuçlar elde edilmiştir. Bu çalışmada oluşturulan modelde bir hayat dışı sigorta şirketinin karı ele alınmıştır ve toplam hasar negatif olmayan rasgele X değişkeni ile ifade edilmektedir. X'in ortalama 1000 ile lognormal, Pareto ve üstel dağıldığı varsayılmaktadır. Standart sapma ise 500, 1000, 1500 ve 2000 olmak üzere dört farklı değer için incelenmiştir. Bu istatistikleri sağlayan lognormal ve Pareto dağılım için dağılım parametreleri Çizelge 4.1'de verilmiştir.

Çizelge 4.1. Lognormal ve Pareto dağılım için dağılım parametreleri

σ	Lognormal		Pareto		
	ortalama	stdsap	biçim	ölçek	yer
500	6,7962	0,4724	0,3090	213,52	690,99
1000	6,5612	0,8325	0,4142	242,64	585,78
1500	6,3184	1,0856	0,4541	247,89	545,83
2000	6,1030	1,2686	0,4721	249,22	527,86

4.2. Benzetim sonuçları

Öncelikle $\alpha = 0{,}10,\ \theta = 0{,}20$ çifti için ve toplam hasar fazlası reasürans anlaşması için elde edilen sonuçlar Çizelge 4.2.'de sunulmuştur [69]. Çizelge 4.2. farklı standart sapma değerleri, prim ilkeleri ve dağılımlar için her iki tarafın da bakış açısıyla elde edilen optimal saklama payı değerlerini vermektedir. Her iki prim ilkesi için de standart sapma değerleri arttıkça optimal saklama payı değerleri azalmaktadır. Aynı prim ilkeleri için lognormal dağılım en küçük d^* değerini ve üstel dağılım ise en büyük d^* değerini vermektedir.

Çizelge 4.2. Toplam hasar fazlası reasüransı için her iki taraf açısından d^*

Standart sapma		500	1000	1500	2000
Pareto	Bek.De.	1049,80	995,94	952,06	928,00
	St.Sap.	950,75	844,00	818,00	750,75
Lognormal	Bek.De.	965,00	950,00	780,00	692,15
	St.Sap.	979,92	864,03	756.00	628,00
Üstel	Bek.De.	-	1004,00	-	-
	St.Sap.	-	964,00	-	-

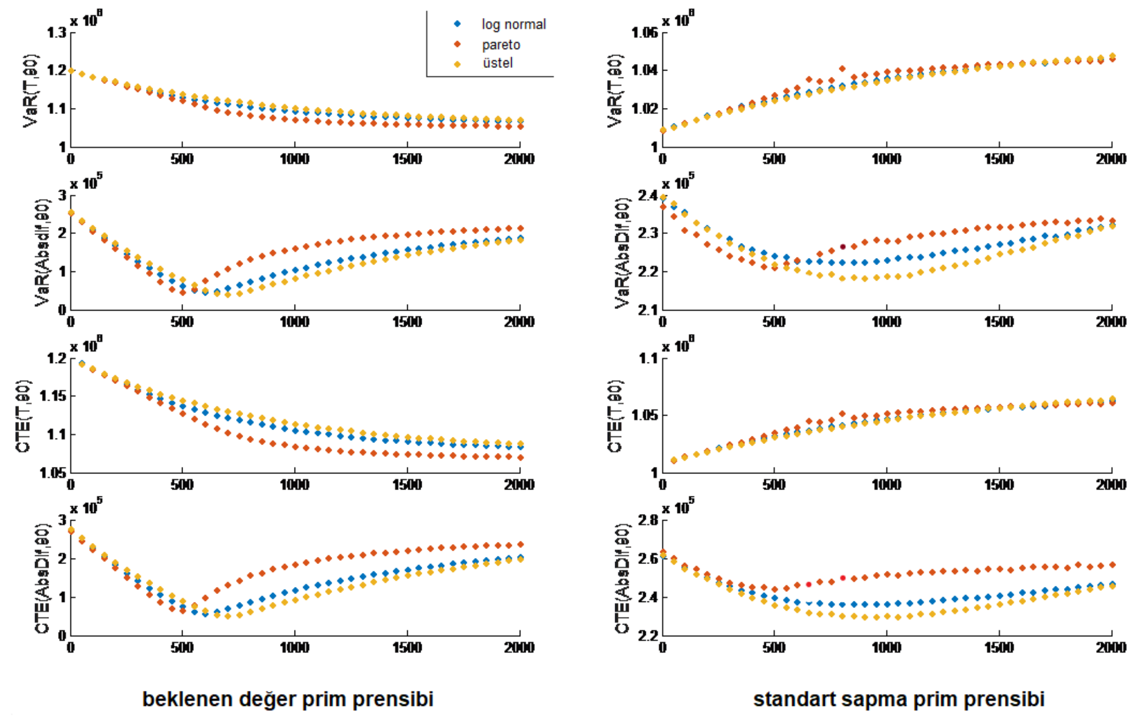
Çizelge 4.3. farklı standart sapma değerleri, prim ilkeleri ve dağılımlar için sadece sigortacı bakış açısıyla elde edilen optimal sakalma payı değrlerini vermektedir [69].

Çizelge 4.3. Toplam hasar fazlası reasüransı için sigortacı açısından d^*

Standart sapma		500	1000	1500	2000
Pareto	Bek.De.	735,25	636,75	587,93	564,00
	St.Sap.	512,00	404,00	532,00	488,00
Lognormal	Bek. De.	572,50	308,25	182,00	115,98
	St.Sap.	243,81	12,50	51,5	1,99
Üstel	Bek.De.	-	196,00	-	-
	St.Sap.	-	4,00	-	-

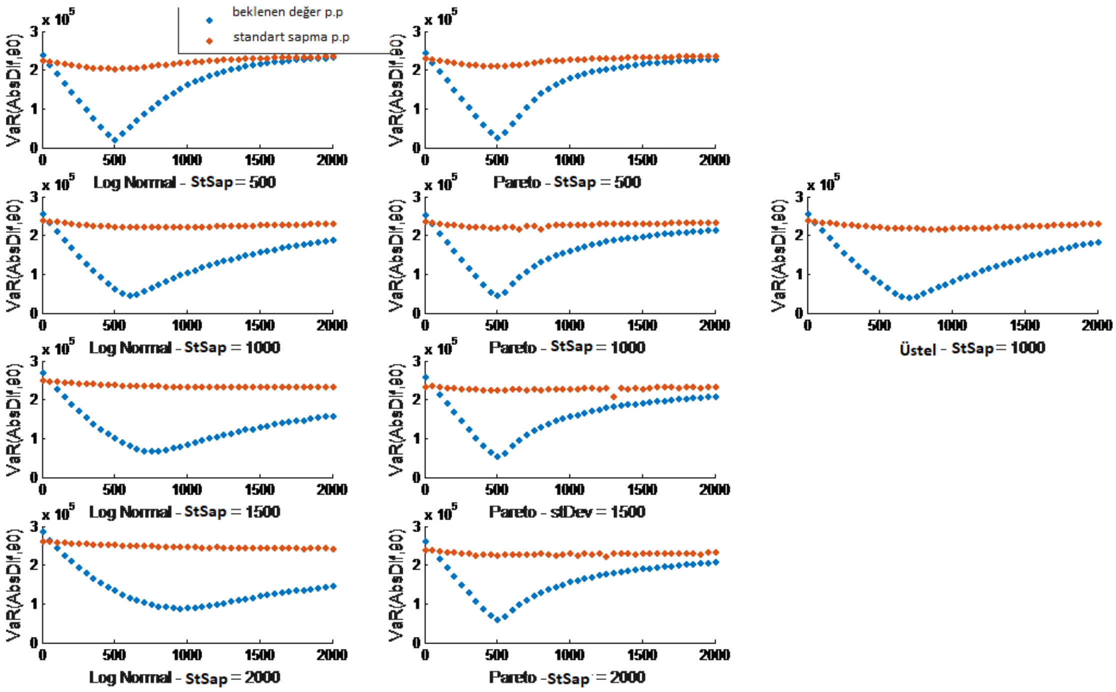
Sigortacı açısından standart sapmalar arttıkça optimal saklama payı değrlerinin azaldığı görülmektedir. Bu durum standart sapma prim ilkesiyle çalışan modelde daha net olarak görülmektedir. Sigortacı karını arttırmayı istemekte ve dolayısıyla da toplam maliyetleri azlatmayı hedeflemektedir. Bu durumda daha düşük optimal saklama payı değerleri elde edilmektedir. Gerçek dünyada bu durum reasürör tarafından kabul edilebilir bir sonuç doğurmamaktadır. Her iki tarafı da dikkate alan model ise her iki taraf için de daha kabul edilebilir optimal saklama payı değerleri sunmaktadır. Çizelge 4.2. ve Çizelge 4.3.'de elde edilen değerler stokastik optimizasyon ile elde edilmiş yaklaşık sonuçlardır.

Hasar fazlası reasürans anlaşması için de aynı parametrelerle benzetim çalışması yapılmıştır. Şekil 4.1.'de hem sigortacı hem de reasürör bakış açısıyla elde edilen sonuçlar beklenen değer ve standart sapma prim ilkelerine göre ve CTE ve VaR risk ölçümüne göre karşılaştırılmaktadır [69].



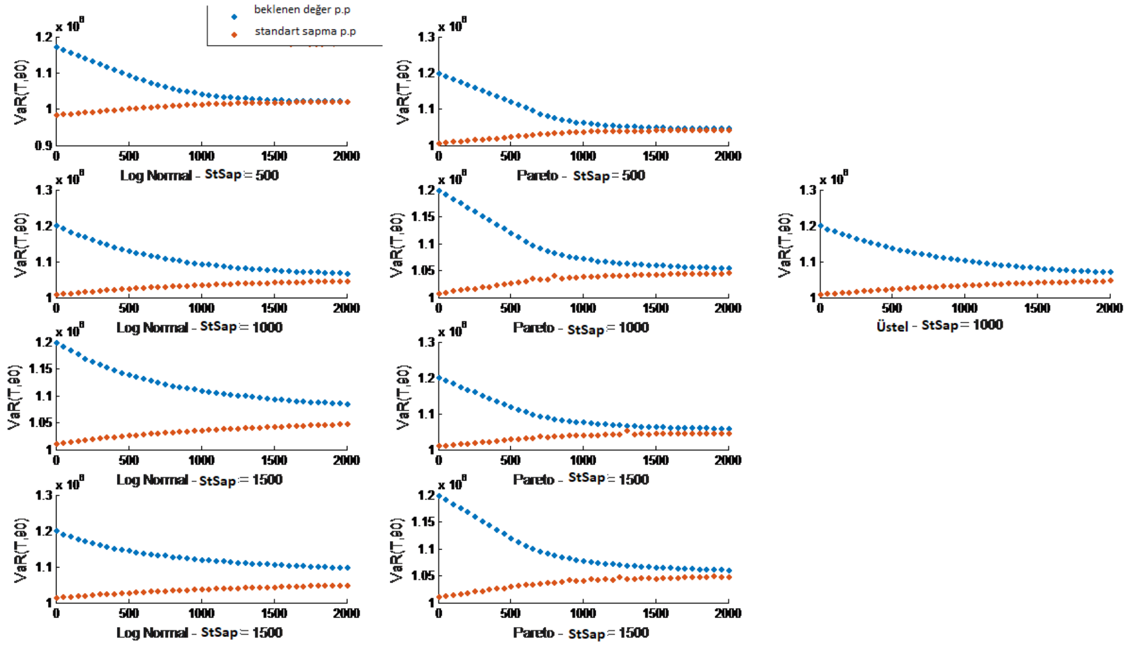
Şekil 4.1. Dağılımların hasar fazlası reasürans açısından karşılaştırılması [69].

Şekil 4.1.'deki tüm grafiklerde x ekseninde 0'dan 2000'e saklama payları y ekseninde ise VaR ve CTE değerleri vardır. T sigortacı açısından toplam maliyeti AbsDif ise hem sigortacı hem de reasürör açısından kar farklarının mutlak değerini ifade etmektedir. Sol taraftaki grafikler beklenen değer prim ilkesine göre dağılımlar arasındaki farklılıkları, sağ taraftakiler ise standart sapma prim ilkesine göre dağılımlar arasındaki farklılıkları göstermektedir. Sigortacı açısından incelendiğinde, üstel dağılım en yüksek VaR ve CTE değerlerini vermektedir. Optimal saklama payını geçtikten sonra ise her iki taraf açısından yapılan değerlendirme de pareto dağılım en yüksek değerleri vermektedir. Sigortacı bakış açısından incelendiğinde saklama payı arttıkça VaR ve CTE değerleri azalmaktadır.



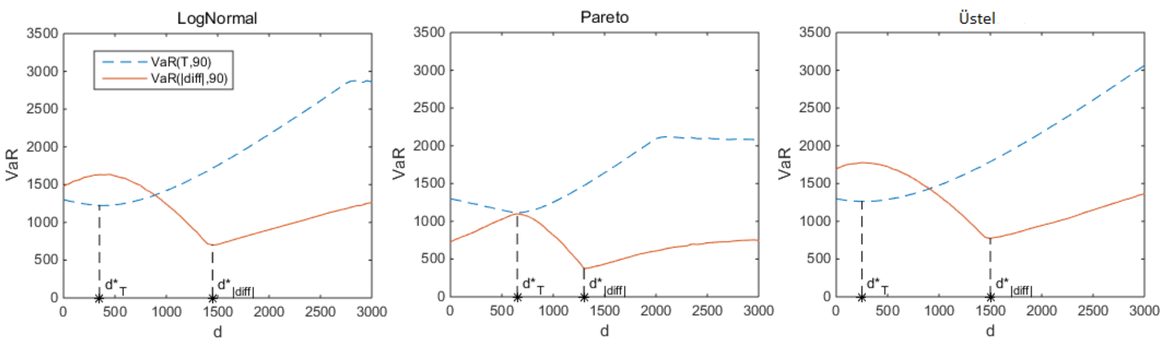
Şekil 4.2. Hasar fazlası reasürans anlaşmasında prim ilkelerinin her iki taraf açısından karşılaştırılması [69].

Her iki taraf bakış açısıyla prim ilkelerinin karşılaştırılması Şekil 4.2.'de verilmiştir. Tüm dağılımlar ve standart sapmalar için beklenen değer prim ilkesi kullanıldığında 500 ile 1000 arasında ancak 500'e daha yakın bir optimal saklama payı elde edilmektedir. Diğer taraftan standart sapma prim ilkesiyle de bir optimal saklama payı seviyesi elde dilmesine rağmen bu durum grafiklerde çok net bir biçimde görülememektedir. Paralele yakın bir gidişat izlemektedir. Standart sapma prim ilkesinde saklama payı değiştikçe VaR değerlerinde çok büyük farklılıklar olmamaktadır.



Şekil 4.3. Hasar fazlası reasürans anlaşmasında prim ilkelerinin sigortacı açısından karşılaştırılması [69].

Şekil 4.3.'de sigortacı bakış açısıyla prim ilkelerinin karşılaştırılması verilmiştir. Şayet sigortacı reasürans primini hesaplarken standart sapma prim ilkesini kullanırsa optimum saklama payına başlangıçta hızlı bir şekilde ulaşmaktadır. Bu değer yaklaşık olarak sıfırdır. Bu durum sigortacının toplam hasarının riske maruz değerini minimize ederek optimal saklama payı hesaplayan modelin, bu amacı gerçekleştirmek için sigortacının riskten kaçınması sonucu tüm riskini transfer etmek istediğini göstermektedir. Beklenen değer prim ilkesi altında ise standart sapma değerinin ortalama değere (1000) yaklaştığı yerde saklama payının da neredeyse optimal seviyeye yaklaştığı görülmektedir. Standart sapma değerinin artan değerleri için ise optimum seviye ileriye kaymaktadır.



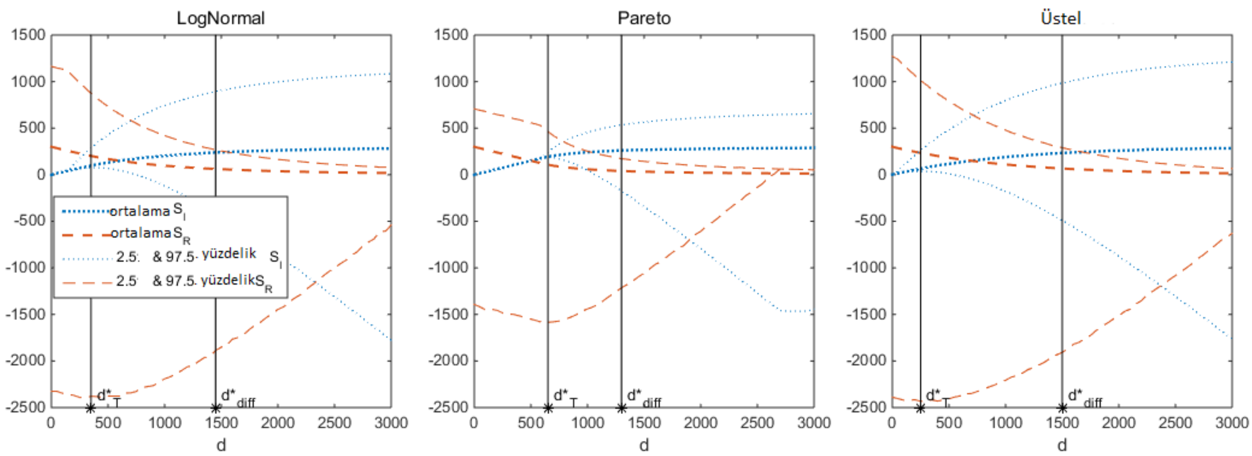
Şekil 4.4. Lognormal, Pareto ve üstel dağılım için VaR seviyeleri karşılaştırması.

Şekil 4.2. ve Şekil 4.3. için $\alpha = 0,05,\ \theta = 0,30$ ve toplam hasar fazlası reasürans anlaşması, beklenen değer prim ilkesini kullanılmıştır. Dağılımların üçü için de beklenen değer ve standart sapma 1000'e eşittir. Şekil 4.4.'de hem sigortacı açısından hem de reasürör açısından VaR risk ölçümüne dayalı olan amaç fonksiyonları (VaR_T ve $VaR_{|Diff|}$) ve bu fonksiyonları minimum yapan optimal saklama payları seviyeleri (d_T^* ve $d_{|diff|}^*$) verilmiştir. VaR_T fonksiyonu $VaR_{|Diff|}$ fonksiyonunun maksimuma ulaştığı yerlerde minimum değerleri almıştır. Dolayısıyla sadece sigortacı açısından değerlendirme yapıldığında en tercih edilir pozisyon her iki taraf dikkate alındığında en zararlı pozisyondur.

Çizelge 4.4. her üç dağılım için de elde edilen optimal saklama paylarının sayısal değerlerini göstermektedir. d_T^* ve $d_{|diff|}^*$ aralarındaki fark bu çizelgeden da açıkça görülmektedir. Her iki tarafın da lehine davrandığımızda hesaplanan optimal saklama payı tek tarafın avantajı göz önünde bulundurularak hesaplanandan oldukça yüksektir. En büyük fark ise üstel dağılım içindir.

Çizelge 4.4. Lognormal, Pareto ve üstel dağılım için optimal saklama payı seviyeleri [69].

Dağılım	d_T^*	$d_{\|diff\|}^*$
Lognormal	372	1453
Pareto	644	1308
Üstel	244	1476



Şekil 4.5. Sigortacı ve reasürörün ortalama karları ve güven aralıkları [69].

Şekil 4.5.'de karşılaştırma karlar açısından yapılmıştır. Sigortacı ve reasüröre ait ortalama karlar ve güven aralıkları verilmiştir. Güven aralıkları açısından karşılaştırma yapıldığında sigortacıya ait güven aralıklarının çok dar ve reasüröre ait güven aralıklarının çok geniş olduğu görülmektedir. Bu durumda reasürör için risk daha yüksektir. $d^*_{|diff|}$ seviyesinde güven aralıkları birbirine daha yakındır bu da her iki tarafı hesaba katan optimal saklama payının ortalama kar seviyesi için riski azalttığını göstermektedir. Her üç dağılım için de saklama payı d^*_T'den $d^*_{|diff|}$'e doğru değiştikçe sigortacının ortalama karı artmakta ve reasürörün ortalama karı ise azalmaktadır. Azalış küçük ve kabul edilebilirdir çünkü güven aralıkları ve risk azalmaktadır.

4.3. Analitik Model

Bölüm 3'te kullanılan gösterimler ve temel varsayımlar bu bölümde de geçerlidir. X sigortacı için toplamsal hasarı ifade eder. $F_X(x) = \Pr\{X \le x\}$ birikimli dağılım fonksiyonuyla, $S_X(x) = \Pr\{X > x\}$ yaşam fonksiyonuyla ve $E[X] > 0$ ortalamayla X'in negatif olmayan rasgele bir değişken olduğu varsayılır. Toplam hasar fazlası reasürans anlaşmasına göre sırasıyla X_I ve X_R sigortacının ve reasürör şirketin rasgele hasar değişkenlerini göstermektedir. $d > 0$ saklama payı ile, $X \wedge d = \min\{x, d\}$ ve $(X-d)_+ = \max\{(X-d), 0\}$'dir. Reasürans primi analitik model için beklenen değer prim ilkesi yardımıyla hesaplanmaktadır $\pi_R(d) = (1+\theta)E[X_R]$, $\theta > 0$ güvenlik yüklemesidir. Sigortacının toplam kaybı üzerinde kalan hasar ve reasürör şirkete yaptığı prim ödemesinin toplamından oluşur $T_I = X_I + \pi_R(d)$. $S_I = \pi_I - T_I$ sigortacının karını ve $S_R = \pi_R - X_R$ reasürörün karını gösteren eşitliklerdir. Sigortacı ve reasürör şirketin farklarının mutlak değer fonksiyonu $ABS_{Diff} = |S_I - S_R|$ şeklindedir. Mutlak değer fonksiyonun özelliği gereği Eş. (4.1) ve Eş. (4.2) birbirine denktir.

$$\begin{aligned} |S_I - S_R| &= \left|(1+\theta)E(X) - \pi_R - X_I - \pi_R + X_R\right| \\ &= \left|(1+\theta)E(X) - 2\pi_R - X_I + X_R\right| \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\left|S_R - S_I\right| = \left|-(1+\theta)E(X) + 2\pi_R + X_I - X_R\right| \tag{4.2}$$

Önce sigorta şirketi ile reasürans şirketinin karları arasındaki mutlak farkı minimize eden analitik modelin çözümünü X hasar değişkeninin <u>üstel dağıldığı</u> varsayımıyla elde edilmiştir. Hasar dağılımının beklenen değeri ve reasürör şirketin beklenen hasar değeri sırasıyla Eş. (4.3) ve Eş. (4.4)'deki gibidir.

$$E\left[X\right] = \lambda \tag{4.3}$$

$$E\left[X-d\right]_+ = E\left[X\right] - E\left[X \wedge d\right] = \lambda - \lambda\left(1-e^{-d/\theta}\right) \tag{4.4}$$

Bu eşitlikler yardımıyla mutlak fark fonksiyonu

$\left|S_I - S_R\right| = \left|\theta(1+\rho)\left(1-2e^{-d/\theta}\right) + X_R - X_I\right|$ olarak bulunur. Toplam hasar fazlası reasürans anlaşması için 3. bölümde verilen eşitlikler de kullanılarak ve hasarların saklama payı d'nin altında ve eşit ya da üzerinde değerler alması sonucu mutlak değer fonksiyonunun farklı şekilde ifade edilmesi dolayısıyla

- hasarların saklama payının altında ya da saklama payına eşit değer alması durumunda,

$$ABS_{DIF} = \left|S_I - S_R\right| = \left|\theta(1+\rho)\left(1-2e^{-d/\theta}\right) - X\right| \qquad X \le d \text{ için}$$

- hasarların saklama payının üstünde değer alması durumunda,

$$ABS_{DIF} = \left|S_I - S_R\right| = \left|\theta(1+\rho)\left(1-2e^{-d/\theta}\right) + X - 2d\right| \qquad X > d \text{ için}$$

şeklinde hesaplanır.

Mutlak değer fark fonksiyonunun riske maruz değer fonksiyonu,

$VaR_{ABS_{DIF}}\left(d^*,\alpha\right) = \min\limits_{d>0}\left\{VaR_{ABS_{DIF}}\left(d,\alpha\right)\right\}$ şeklindedir. X'in aldığı değere göre ve X'in üstel dağıldığı varsayımıyla

i)

Eşitliğin çözümü için $X \le d$ değerlerini aldığında,

$$VaR_{ABS_{DIF}}\left(d^*,\alpha\right) = \min\left\{VaR\left|\lambda(1+\theta)\left(1-2e^{-d/\lambda}\right) - X\right|\right\}$$

Mutlak değer fonksiyonun içerisinin işareti X ve d'nin aldığı değerlere göre hem pozitif hem de negatif olabilmektedir. Pozitif olduğu durumda;

$$VaR_{ABS_{DIF}}\left(d^{*},\alpha\right)=\min\left\{VaR\left(\lambda\left(1+\theta\right)\left(1-2e^{-d/\lambda}\right)-X\right)\right\}$$

eşitlik VaR'ın özelliklerinden yararlanılarak

$$VaR_{ABS_{DIF}}\left(d^{*},\alpha\right)=\min\left\{VaR\left(\lambda\left(1+\theta\right)\left(1-2e^{-d/\lambda}\right)\right)-VaR(X)\right\}$$

$$VaR_{ABS_{DIF}}\left(d^{*},\alpha\right)=\min\left\{\lambda\left(1+\theta\right)\left(1-2e^{-d/\lambda}\right)-d\right\}$$

$$\frac{dVaR_{ABS_{DIF}}\left(d^{*},\alpha\right)}{d_d}=0$$

$$d^{*}=-\lambda\ln\left(\frac{1}{2\left(1+\theta\right)}\right)=S_X^{-1}(\theta^{A})\qquad \theta^{A}=\left(\frac{1}{2(1+\theta)}\right)$$

olur. Aynı sonuç mutlak değer fonksiyonun içinin negatif işaretli olması durumunda da elde edilmektedir.

ii)

Eşitliğin çözümü için $X>d$ değerlerini aldığında,

$$VaR_{ABS_{DIF}}\left(d^{*},\alpha\right)=\min\left\{\left|\lambda\left(1+\theta\right)\left(1-2e^{-d/\lambda}\right)-2d+X\right|\right\}$$

olur. Mutlak değer fonksiyonun içinin işareti X ve d'nin aldığı değerlere göre hem pozitif hem de negatif olabilmektedir. Pozitif olduğu durumda;

$$VaR_{ABS_{DIF}}\left(d^{*},\alpha\right)=\min\left\{\left(\lambda\left(1+\theta\right)\left(1-2e^{-d/\lambda}\right)-2d+X\right)\right\}$$

$$VaR_{ABS_{DIF}}\left(d^{*},\alpha\right)=\min\left\{\lambda\left(1+\theta\right)\left(1-2e^{-d/\lambda}\right)-2d-\lambda\ln(\alpha)\right\}$$

$$\frac{dVaR_{ABS_{DIF}}\left(d^{*},\alpha\right)}{d_d}=0$$

$$d^{*}=-\lambda\ln\left(\frac{1}{\left(1+\theta\right)}\right)=S_X^{-1}(\theta^{B})\qquad \theta^{B}=\left(\frac{1}{1+\theta}\right)$$

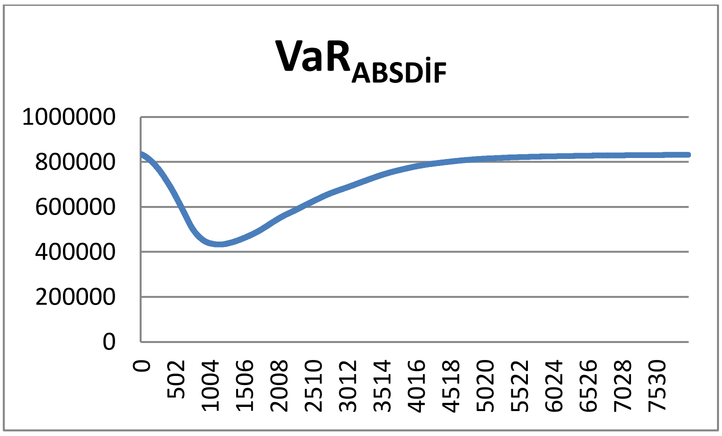
şeklinde hesaplanır.

Hasarların aldığı tüm değerler için optimal saklama payı seviyesi

$d^* = -\lambda \ln\left(\frac{1}{2(1+\theta)}\right) + -\lambda \ln\left(\frac{1}{(1+\theta)}\right)$ olarak bulunur. Aynı sonuçlar $|S_R - S_I|$ için de elde edilmiştir.

Mutlak değer fonksiyonları için işaret ve kritik değer incelemesi yapılmıştır. Mutlak değerin içerisindeki fonksiyonun negatif işaretli olması durumunda ve pozitif işaretli olması durumunda türev sonucu aynı çıkmaktadır.

Sayısal örnek: $\alpha = 0{,}1$ ve $\theta = 0{,}2$ iken E[X]=1000 ile hasar üstel dağıldığı varsayımıyla sigortacının karı ile reasürörün karı arasındaki farkın mutlak değerinin riske maruz değerini minimum yapan optimal saklama payı değeri 1057,78 olarak bulunur ($X \leq d$ için 875,46 ve $X > d$ için 182,32).



Şekil 4.6. Üstel dağılım için $VaR_{ABSDİF}$ grafiği

Şekil 4.6.'da x ekseninde saklama payı değerleri ve y ekseninde ise hedef fonksiyon olan mutlak değer fonksiyonunun riske maruz değerleri yer almaktadır. Şekil benzetim yardımıyla elde edilmiştir ve optimal saklama payına d*=1057 de ulaşılmıştır. Analitik çözüm ile benzetim sonucu eşleşmektedir. Riske maruz değerini hesaba katmadan sadece $ABS_{DİF}$ fonksiyonunun aldığı değerler üzerinden de optimum saklama payı değeri hesaplanmak istenirse benzetim yardımıyla elde edilen sonuçlar Çizelge 4.5.'de verilmiştir. Farklı saklama payı seviyelerine karşılık gelen ortalama hasar ve mutlak fark fonksiyonunun aldığı değerler aşağıdaki gibidir. Sadece $ABS_{DİF}$ fonksiyonunu minimize eden fonksiyon için de optimal seviye yukarıda bulunan seviyeye oldukça yakındır.

Çizelge 4.5. Üstel dağılım için saklama payı (d) değerlerine karşılık gelen ortalama hasar ve ortalama mutlak fark değerleri

d	Ortalama mutlak fark
500	611,3942
600	555,6773
800	450,2348
900	423,2977
1000	410,0630
1040	407,3860
1057	405,5623
1150	406,8917
1170	407,2066
1200	407,6560
1300	416,5014
2000	526,4561
2500	609,0264

Sigorta şirketi ile reasürans şirketinin karları arasındaki mutlak farkı minimize eden analitik modelin çözümünü X hasar değişkeninin pareto dağıldığı varsayımıyla da elde edilmiştir. Hasar dağılımının beklenen değeri, sigorta şirketinin beklenen hasar değeri ve reasürör şirketin beklenen hasar değeri sırasıyla Eş. (4.5), Eş. (4.6) ve Eş. (4.7)'deki gibidir.

$$E[X] = \frac{\rho}{\gamma - 1} \tag{4.5}$$

$$E[X \wedge d] = \frac{\rho}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{\rho}{d + \rho}\right)^{\gamma - 1}\right] \quad \gamma \neq 1 \tag{4.6}$$

$$E[X\text{-}d]_+ = E[X] - E[X \wedge d] = \frac{\rho}{\gamma - 1}\left(\frac{\rho}{d + \rho}\right)^{\gamma - 1} \tag{4.7}$$

Yukarıdaki eşitlikleri Eş. (4.1)'de yerine konulursa mutlak fark;

$$|S_I - S_R| = \left| \frac{(1+\theta)\rho}{\gamma - 1}\left[1 - 2\left(\frac{\rho}{d + \rho}\right)^{\gamma - 1}\right] + X_R - X_I \right|$$ olarak elde edilir.

$$X_I = \begin{cases} X, & X \leq d \\ d, & X > d \end{cases} = X \wedge d$$

$$X_R = \begin{cases} 0, & X \le d \\ X-d, & X > d \end{cases} = (X-d)_+$$

ABS_{DIF} fonksiyonu;

- hasarların saklama payının altında ya da saklama payına eşit değer alması durumunda

$$ABS_{DIF} = |S_I - S_R| = \left| \frac{(1+\theta)\rho}{\gamma-1}\left[1-2\left(\frac{\rho}{d+\rho}\right)^{\gamma-1}\right] - X \right| \qquad X \le d$$

- hasarların saklama payının üzerinde değer alması durumunda

$$ABS_{DIF} = |S_I - S_R| = \left| \frac{(1+\theta)\rho}{\gamma-1}\left[1-2\left(\frac{\rho}{d+\rho}\right)^{\gamma-1}\right] + X - 2d \right| \qquad X > d$$

şeklinde hesaplanır.

Mutlak fark fonksiyonun riske maruz değerini minimize eden optimal saklama payını ifade eden eşitlik aşağıda verilmiştir.

$$VaR_{ABS_{DIF}}\left(d^*,\alpha\right) = \min_{d>0}\left\{VaR_{ABS_{DIF}}\left(d,\alpha\right)\right\}$$

i)

Eşitliğin çözümü için $X \le d$ değerlerini aldığında

$$VaR_{ABS_{DIF}}\left(d^*,\alpha\right) = \min\left\{VaR\left| \frac{(1+\theta)\rho}{\gamma-1}\left[1-2\left(\frac{\rho}{d+\rho}\right)^{\gamma-1}\right] - X \right|\right\}$$

$0<\theta<1,\ \rho>0,\ \gamma>0,\ d\ge X$ için mutlak değer içerisindeki ifade eğer $0.5 < \left(\frac{\rho}{d+\rho}\right)^{\gamma-1}$ olursa negatif değer almaktadır. Buna bağlı olarak,

$$VaR_{ABS_{DIF}}\left(d^*,\alpha\right)=\min\left\{VaR-\left(\frac{(1+\theta)\rho}{\gamma-1}\left[1-2\left(\frac{\rho}{d+\rho}\right)^{\gamma-1}\right]-X\right)\right\}$$

$$=\min\left\{VaR\left(X-\frac{(1+\theta)\rho}{\gamma-1}\left[1-2\left(\frac{\rho}{d+\rho}\right)^{\gamma-1}\right]\right)\right\}$$

$$=\min\left\{VaR\left(X-\frac{(1+\theta)\rho}{\gamma-1}+2\left(\frac{\rho}{d+\rho}\right)^{\gamma-1}\frac{(1+\theta)\rho}{\gamma-1}\right)\right\}$$

Bölüm 2'de anlatılan riske maruz değer risk ölçümünün özelliklerinden yararlanarak

$$VaR_{ABS_{DIF}}\left(d^*,\alpha\right)=\min\left\{VaR(X)+VaR\left(-\frac{(1+\theta)\rho}{\gamma-1}\right)+VaR\left(2\left(\frac{\rho}{d+\rho}\right)^{\gamma-1}\frac{(1+\theta)\rho}{\gamma-1}\right)\right\}$$

$$\frac{dVaR_{ABS_{DIF}}\left(d^*,\alpha\right)}{d_d}=0$$

$$d^*=\rho\left(\frac{1}{2(1+\theta)}\right)^{-1/\gamma}-\rho=S_X^{-1}(\theta^*)\qquad \theta^*=\left(\frac{1}{2(1+\theta)}\right)$$

$0.5\geq\left(\dfrac{\rho}{d+\rho}\right)^{\gamma-1}$ olursa pozitif değer almaktadır. Buna bağlı olarak da sonuç değişmemektedir.

$$VaR_{ABS_{DIF}}\left(d^*,\alpha\right)=\min\left\{VaR\left(\frac{(1+\theta)\rho}{\gamma-1}\left[1-2\left(\frac{\rho}{d+\rho}\right)^{\gamma-1}\right]-X\right)\right\}$$

$$=\min\left\{VaR\left(\frac{(1+\theta)\rho}{\gamma-1}\left[1-2\left(\frac{\rho}{d+\rho}\right)^{\gamma-1}\right]-X\right)\right\}$$

$$\frac{dVaR_{ABS_{DIF}}\left(d^*,\alpha\right)}{d_d}=0$$

$$d^*=\rho\left(\frac{1}{2(1+\theta)}\right)^{-1/\gamma}-\rho=S_X^{-1}(\theta^*)\qquad \theta^*=\left(\frac{1}{2(1+\theta)}\right)$$

ii)

$X > d$ için mutlak değer içerisindeki ifade hem $0.5 \geq \left(\dfrac{\rho}{d+\rho}\right)^{\gamma-1}$ ya da $0.5 < \left(\dfrac{\rho}{d+\rho}\right)^{\gamma-1}$ olmasına hem de X rasgele değişkeninin ve d saklama payının alacağı değere göre pozitif ya da negatif değer almaktadır. Her iki durumda da riske maruz değeri minimum yapan optimal d saklama payı aynı değeri almaktadır. Aşağıdaki eşitliklerde mutlak değer fonksiyonunun içerisinin pozitif işaretli olduğu durum için çözüm gösterilmiştir.

$$VaR_{ABS_{DIF}}\left(d^*,\alpha\right) = \min\left\{VaR\left|\frac{(1+\theta)\rho}{\gamma-1}\left[1-2\left(\frac{\rho}{d+\rho}\right)^{\gamma-1}\right]-2d+X\right|\right\}$$

$$= \min\left\{VaR\left(\frac{(1+\theta)\rho}{\gamma-1}\left[1-2\left(\frac{\rho}{d+\rho}\right)^{\gamma-1}\right]-2d+X\right)\right\}$$

$$= \min\left\{\frac{(1+\theta)\rho}{\gamma-1}\left[1-2\left(\frac{\rho}{d+\rho}\right)^{\gamma-1}\right]-2d+\rho\left[(1-\alpha)^{-1/\gamma}-1\right]\right\}$$

$$\frac{dVaR_{ABS_{DIF}}\left(d^*,\alpha\right)}{d_d} = 0$$

$$d^* = \rho\left(\frac{1}{(1+\theta)}\right)^{-1/\gamma} - \rho = S_X^{-1}(\theta^*) \qquad \theta^* = \left(\frac{1}{1+\theta}\right)$$

X'in tanımlı olduğu tüm aralık için optimal saklama payı;

$$d^* = \rho\left(\frac{1}{2(1+\theta)}\right)^{-1/\gamma} - \rho + -\rho\left(\frac{1}{(1+\theta)}\right)^{-1/\gamma} - \rho$$

olarak bulunur.

$\left|S_R - S_I\right|$ için de aynı sonuçlar elde edilmiştir.

Mutlak değer fonksiyonları için işaret ve kritik değer incelemesi yapılmıştır. Mutlak değerin içerisindeki fonksiyonun negatif işaretli olması durumunda ve pozitif işaretli olması durumunda türev sonucu aynı çıkmaktadır. Buna bağlı olarak optimal saklama payının pareto dağılımlı olan X'in yaşam fonksiyonunun özel bir ifadesi olduğu bulunmuştur.

Sayısal örnek : $\alpha = 0{,}1$ ve $\theta = 0{,}2$ iken $S_X(x) = \left(\dfrac{2000}{x+2000}\right)^3$ ile hasarın pareto dağıldığı varsayımıyla sigortacının karı ile reasürörün karı arasıdaki farkın mutlak değerinin riske maruz değerini minimum yapan optimal saklama payı değeri 803,04 olarak bulunur ($X \le d$ için 677,73 ve $X > d$ için 125,31).

4.4. Analitik Model Sonuçları ve Karşılaştırma

Sonuçları özetlemek ve genelleştirmek istersek sırasıyla üstel dağılım ve pareto dağılım için elde edilen eşitlikler şu şekildedir;

Hasarlar üstel dağıldığında,

$$d^* = -\lambda \ln\left(\frac{1}{2(1+\theta)}\right) = S_X^{-1}(\theta^A) \qquad \theta^A = \left(\frac{1}{2(1+\theta)}\right) \qquad X \le d$$

$$d^* = -\lambda \ln\left(\frac{1}{(1+\theta)}\right) = S_X^{-1}(\theta^B) \qquad \theta^B = \left(\frac{1}{1+\theta}\right) \qquad X > d$$

$$d^* = S_X^{-1}(\theta^A) + S_X^{-1}(\theta^B) = -\lambda \ln\left(\frac{1}{2(1+\theta)}\right) + -\lambda \ln\left(\frac{1}{(1+\theta)}\right) \qquad X > 0$$

Hasarlar pareto dağıldığında,

$$d^* = \rho\left(\frac{1}{2(1+\theta)}\right)^{-1/\gamma} - \rho = S_X^{-1}(\theta^A) \qquad \theta^A = \left(\frac{1}{2(1+\theta)}\right) \qquad X \le d$$

$$d^* = \rho\left(\frac{1}{(1+\theta)}\right)^{-1/\gamma} - \rho = S_X^{-1}(\theta^B) \qquad \theta^B = \left(\frac{1}{1+\theta}\right) \qquad X > d$$

$$d^{*} = \rho\left(\frac{1}{2(1+\theta)}\right)^{-1/\gamma} - \rho + -\rho\left(\frac{1}{(1+\theta)}\right)^{-1/\gamma} - \rho \qquad X > 0$$

Her iki dağılım için de optimal saklama payı vardır, elde edilmiştir ve hasar dağılımlarının yaşam fonksiyonlarının özel bir gösterimi şeklinde ifade edilebilmektedir. Her iki dağılımda da $X \leq d$ için $\theta^{A} = \left(\frac{1}{2(1+\theta)}\right)$ ve $X > d$ için $\theta^{B} = \left(\frac{1}{1+\theta}\right)$ dönüşümü uygulanmaktadır.

Sonuçlar sadece sigortacı açısından optimal saklama payı seviyesi hesaplayan ve Bölüm 3'te anlatılan analitik model ile karşılaştırıldığında şu yorumlar yapılabilir; her iki modelde de optimal saklama payı vardır ve hasar dağılımının yaşam fonksiyonu ile elde edilebilmektedir. Çizelge 4.6. bu iki analitik modelde kullanılan aynı varsayımlara sahip sayısal örneklerden elde edilen optimal saklama payı seviyelerini üstel ve Pareto dağılım için göstermektedir.

Üstel dağılım için varsayımlar: $\alpha = 0{,}1$ ve $\theta = 0{,}2$ iken E[X]=1000 ile hasar üstel dağılmaktadır.

Pareto dağılım için varsayımlar: $\alpha = 0{,}1$ ve $\theta = 0{,}2$ iken $S_X(x) = \left(\frac{2000}{x+2000}\right)^{3}$ ile hasar pareto dağılmaktadır.

$d_T^{''}$: 3. Bölümde anlatılan sadece sigortacıyı hesaba katan *analitik* model ile elde edilen optimal saklama payı.

$d_{|diff|}^{''}$: Sigortacı ile reasürans şirket arasındaki karın mutlak farkının riske maruz değerini minimize eden *analitik* model ile elde edilen optimal saklama payı.

Çizelge 4.6. Pareto ve Üstel Dağılım için optimal saklama payı seviyeleri

Dağılım	$d_T^{''}$	$d_{\|diff\|}^{''}$
Pareto	125,32	803,04
Üstel	182,32	1057,78

Çizelge 4.6 incelendiğinde analitik modeller açısından karşılaştırma yapıldığında sigortacının zararının riske maruz değerini minimize eden modelin hesapladığı optimal saklama payı seviyelerinin her iki dağılım için de sigortacı ile reasürans şirket arasındaki karın mutlak farkının riske maruz değerini minimize eden modelin hesapladığı optimal saklama payı seviyelerinden oldukça düşük olduğunu görüyoruz. Bunun nedeni sigorta şirketinin kendi maliyetini küçültecek şekilde optimal saklama payı seviyesi belirlerken hasarın büyük bir kısmını reasürör şirkete devrediyor olmasıdır. Bu durum benzetim modeliyle elde edilen optimal saklama paylarının karşılaştırılmasında da görülmüştür. Kullanılan parametreler farklıdır ancak genel yorum aynıdır. Benzetim modeli için de (Çizelge 4.4.) analitik model için de (Çizelge 4.5.) söylenebilecek ortak yorum her iki tarafı hesaba katan model ile hesaplanan optimal saklama payının reasürör şirket tarafından daha kabul edilebilir olduğu ve sadece sigortacıyı hesaba katan modelin hesapladığı optimal saklama payından daha büyük olduğudur. Ayrıca hem analiitk hem de benzetim modellerinde hasarların üstel dağıldığı durumdaki d_T ve $d_{|diff|}$ optimal saklama payları arasındaki farkın hasarların pareto dağıldığı durumdaki optimal saklama payları arasındaki farktan daha büyük olduğu görülmektedir. Bunun nedeni pareto dağılımın ağır kuyruklu bir dağılım olmasıdır.

5. HEDEF PROGRAMLAMA

5.1. Giriş

Günümüz iş koşullarında kar maksimizasyonu veya maliyet minimizasyonu bir firmanın tek başına hedefi olmamaktadır. Toplam karın maksimizasyonu genellikle başarılmaya çalışılan hedeflerden sadece birisidir. Bunun dışında piyasa payını büyütmek, tam istihdamı sağlamak, kaliteli yönetim ve diğer pek çok ekonomik olan ve olmayan hedefler ve amaçlar söz konusudur. Bir sigorta ya da reasürans şirketi için de aynı durum söz konusu olacaktır.

Zhou ve Poh [84] karar analizi (Decision Analysis, DA) yöntemlerini üç ana gruba ayırmışlardır; Tek amaçlı karar karar verme (Single-Objective Decision-Making, SODM), Karar destek sistemleri (Decision Support Systems, DSS), ve çok ölçütlü karar verme (Multi-Criteria Decision-Making, MCDM).Çok kriterli karar verme ve ya diğer bir deyişle çok ölçütlü karar verme, hem niceliksel hem de niteliksel faktörleri içeren karmaşık bir karar verme (DM) aracı olarak kabul edilir. Son yıllarda, mümkün olan en iyi seçeneklerin seçilmesi için çeşitli MCDM teknikleri ve yaklaşımları önerilmiştir. Çok ölçütlü karar verme optimizasyon için birden fazla ölçüt içerir (ölçütler çelişkili olabilir).

Çok ölçütlü karar verme sürecinin işleyişine ilişkin bazı aşamalar aşağıdaki gibidir [85];

- Çok ölçütlü problemlerin ve buna yönelik hedeflerin net bir biçimde belirlenmesi,
- Belirlenen hedefler ya da ulaşılmak istenen amaçlar için alternatiflerin hazırlanması,
- Alternatiflerin değerlendirilmesi için performans göstergeleri ve ölçütlerin saptanması,
- Saptanan ölçütlerin sonuçlandırılması,
- Karar matrisinin alternatifler ve belirlenen ölçütlere göre hazırlanması,
- Nitel veya nicel ölçüt oranların paylarının ortaya konması,
- Alternatiflerin sıralanarak sonuçlar için diğer etkenlerle karşılaştırılması,

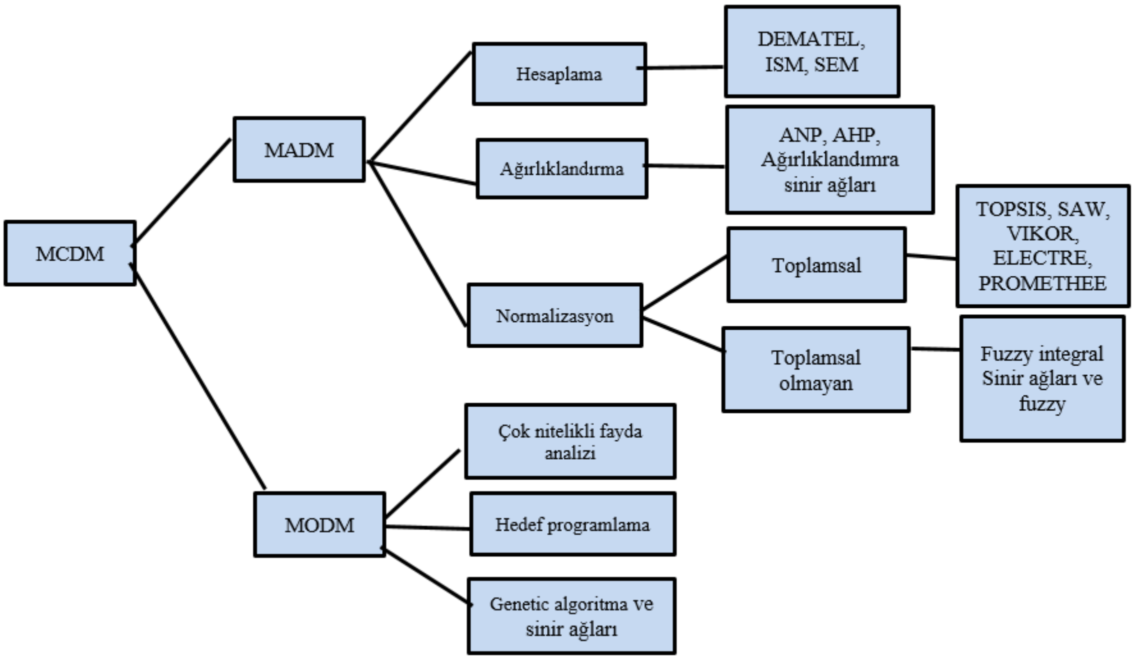
- Karar alıcının karşılaştırma yaparak çok ölçütlü karar verme sonucu için verileri elde etmesi.

MCDM iki ana kategoriye ayrılmıştır: çok nitelikli karar verme (MADM) ve çok amaçlı karar verme (MODM). Çizelge 5.1.'de ikisi arasındaki farklılıklar özet halinde verilmiştir [86]. Çok nitelikli karar verme, sonuçların ölçütler bazında verilen alternatiflerden seçilmesi gereken TOPSIS (Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution), AHP (Analytic Hierarchy Process) gibi nitel analizler yoluyla yapılmaktadır. Çok amaçlı karar verme ise matematiksel bir modeli olan ve sonucun karar değişkeni temelinde seçileceği nicel analizler yoluyla yapılmaktadır.

Çizelge 5.1..MODM ve MADM yaklaşımlarının karşılaştırılması

Öğeler	MODM	MADM
Konu	Kaynağın niteliği	Değerlendirme/Seçim
Kararın niteliği	Sürekli	Kesikli
Alternatifler	Önceden tanımlanmamış	Önceden tanımlanmış
Kriterlerin tanımlanması	Hedeflerle	Niteliklerle
Hedeflerin tanımanması	Dolaysız	Dolaylı olarak
Niteliklerin tanımlanması	Dolaylı olarak	Dolaysız
Kısıtların tanımlanması	Dolaysız	Dolaylı olarak
Alternatiflerin tanımlanması	Dolaylı olarak	Dolaysız
Alternatiflerin sayısı	Sınırsız (Büyük)	Sınırlı (Küçük)
Karar vericinin kontolü	Önemli	Sınırlı
Karar modelleme paradigması	Süreç odaklı	Çıktı odaklı
Problemin çözümü	Optimizasyon problemi	Sıralama

MODM yönteminin özellikleri MADM ile karşılaştırıldığında karar vericiye tanıdığı yetki, kararın niteliğinin sürekli olması, ölçütlerinin karar vericinin belirlediği hedefler olması sınırsız sayıda alternatifle çalışması ve problemin çözümünü belirli alternatifler arasından yapmaktansa optimizasyon problemi çözümü şeklinde yapması nedeniyle MODM yöntemlerinden birisi olan Hedef Progamlama çoklu hedeflerin yer aldığı bir optimal reasürans probleminin çözümü için uygundur. Şekil 5.1.'de MADM ve MODM yöntemlerine ait modeller özelliklerine göre sınıflandırılarak verilmiştir.



Şekil 5.1. MCDM sınıflandırılması

Hedef programlamanın görece kolay fomüle edilebiliyor oluşu ve akademisyenlerin doğrusal programlama yöntem bilimine aşinalıkları nedeniyle hedef programlama hızla çok ölçütlü karar verme (MCDM) alanındaki en popüler tekniklerden biri haline gelmiştir. Hedef Programlama sonsuz sayıda alternatif arasından seçim yapabilen pratik bir programlama yöntemidir. Avantajlarından biri, büyük ölçekli problemleri çözme kapasitesine sahip olmasıdır. Hedef programlama doğrusal programlamanın genelleştirilmiş bir biçimi olarak görünse de, aynı zamanda çok ölçütlü bir karar verme tekniğidir. Bu nedenle, hedef programlamanın kullanıcıları, eğer 'etkili' modeller oluşturmak isterse, çok ölçütlü karar vermenin teorilerinden, yöntemlerinden ve tuzaklarından haberdar olmalıdırlar.

Doğrusal programlama (lineer programming, LP) ve tamsayılı programlama (integer programming, IP) gibi matematiksel programlama teknikleri karar vericinin tek bir amacının bulunduğu durumlarda kullanılan matematiksel programlama teknikleridir. Ayrıca, karar vericinin hedefini açıklayan amaç fonksiyonunun birim açısından tek bir boyutta ölçeklendirilmesi gerektiği bilinmektedir. Tüm hedefler aynı birim ile ölçülmedikçe doğrusal programlamanın çok amaçlı problemlere uygulanması söz konusu olamaz. Farklı birimlerle ölçülmüş farklı hedeflerin olması durumunda, bir anlamda doğrusal programlamanın uzantısı sayılabilecek hedef programlama (goal programming) kullanılabilir [87].

Tipik karar verme durumunda, yönetim tarafından seçilen hedefler diğer hedeflerden ödün verilerek başarıya ulaşabilir. Bu hedefler arasında önem sırası oluşturmak gerekmektedir. Böylelikle az önemli hedefler daha önemli hedeflerin başarıya ulaşması sonrasında elde edilmeye çalışılabilir. Her zaman her hedefi başarıya ulaştırmak mümkün olmadığından, hedef programlama yeterli sayıda çoklu hedefi mümkün olduğunca başarmaya çalışır. Bu durum elbetteki tek bir amaç için en iyi muhtemel çıktıyı vermeye çalışan doğrusal programlamadan farklıdır. Hedef programlamanın amacı için "optimizasyon yapılamayabilir ancak hedeflere muhtemel en yakın noktaya varılabilir" denebilir. Bu ifade doğrusal programlama ile hedef programlamanın birbirinden farkını belirtmektedir.

Doğrusal programlama ile hedef programlamanın aralarındaki asıl fark hedef fonksiyonudur. Hedef fonksiyonunu doğrudan minimize ya da maksimize etmeye çalışmak yerine, hedef programlamada belirlenen kısıtlar altında hedeflerden sapmalar minimize etmeye çalışılır. Bu sapmalar pozitif de olabilir negatif de olabilir ve gerçek değişkenler olmak zorunda olmayıp sapma değişkeni olarak adlandırılanırlar ve hedef fonksiyonunda yer alan değişkenlerdir. Hedef fonksiyonunda bu sapma değişkenlerinin toplamı minimize edilmektedir.

Sapma değişkenleri hedef programlamada genellikle d_i^+ ve d_i^- simgesiyle gösterilir. Sapma değişkenleri negatif değerli olmazlar ve bir hedefin hem üstünde hem altında bir anda olunamayacağından, bunlardan birinin değeri de daima 0 olur. Hedef kısıtlayıcılarına bağlı olarak sapma değişkenleri istenen veya istenmeyen değişken olarak da adlandırılabilir. Hedef kısıtlayıcı ≥ yönde ise d_i^+ istenen değişken, d_i^- ise istenmeyen sapma değişkenidir. Hedef kısıtlayıcısı ≤ yönde ise d_i^- istenen ve d_i^+ istenmeyen sapma değişkenidir. Hedef kısıtlayıcısı = ise d_i^- ve d_i^+ her ikisi de istenmeyen sapma değişkenleridir [88].

Optimizasyon düşüncesine dayanan çok amaçlı programlama modellerinde, birbiri ile çelişen amaçları kısıtlayıcı kümesine göre eşanlı olarak doyuran bir çözüm vektörünün belirlenmesi amaçlanır. Hedef programlama modelinde ise karar vericinin doyurucu bulduğu bir çözüm belirlenmeye çalışılır. Bu nedenle, hedef programlama modelinin optimizasyon düşüncesinden daha çok bir doyum düşüncesine dayandığı söylenebilir [89].

5.2. Hedef Programlama Terimleri

Aşağıda hedef programlama modellerinde kullanılan tanım ve kavramlar kısaca yer almaktadır.

Karar değişkenleri: Kontrol değişkeni olarak da bilinen ve karar vericinin kontrolünde olan, problemin matematiksel olarak ifade edilebilmesi için kullanılan genellikle $j = 1,2,...,J$ için x_j ile ifade edilen değişkenlerdir.

Sağ taraf/yan değerleri: Üzerine çıkılmaya, altına inilmeye ya da tam olarak elde edilmeye çalışılan, kısıtlayıcılardaki eşitlik ve ya eşitsizliklerin sağında yer alan b_i ile ifade edilen kaynak miktarlarıdır.

Teknoloji katsayıları: a_{ij} ile gösterilirler ve x_j karar değişkeninin oluşumunda b_i kaynak miktarının (sağ taraf/yan değeri) birim başına kullanımını ifade eden sayısal değerlerdir.

Hedef/Amaç: Seçilen bir hedef kısıtında sağ taraf/yan değerinden sapmayı minimize etme isteğidir.

Hedef Kısıtları: Modellenen problemdeki ilgili kaynakları veya sağ taraftaki hedefleri ifade eden bir dizi kısıtlamadır.

Önem derecesini gösteren öncelik düzeyi faktörleri: k=1,2,…,K ve K modeldeki hedef sayısını göstermek üzere P_k ile gösterilen ve modeldeki hedeflerin önem sırasını ifade eden sıralama sistemidir. P_1 en önemli hedefi P_2 ikinci en önemli hedefi ifade eder ve bu P_K 'ya doğru devam eder. Hedeflere bu önem sıralamasına göre ulaşılmaya çalışılır.

Ağırlıklar: hedefler arasında öncelik belirlenebileceği gibi ağırlıklandırma da yapılabilir. Hatta bazen hem ağırlıklandırma hem de önceliklendirme yapılabilmektedir. Ancak genelde önceliklendirme yapılan modellerde ağırlıklar eşit kabul edilmektedir. Ağırlıklar k=1,2,…,K ve K modeldeki hedef sayısını göstermek üzere w_k ile gösterilmektedir.

Sapma Değişkenleri: hedef kısıtının sağ taraf değerlerinden pozitif ve ya negatif sapma miktarını gösteren değişkenlerdir. i=1,2,…,İ ve İ modeldeki hedef kısıtı sayısını göstermek üzere d_i^- ve d_i^+ ile ifade edilirler.

Hedef programlamanın temel felsefesi olarak sayılan 4 farklı kavram şu şekildedir:

Tatmin edici/yeterli: hedef programlama yöntemlerinin, tek bir hedefi optimize etmek yerine, olabildiğince çok hedefi tam olarak karşılayan bir çözüm aradığı anlamına gelen bir kavram. Bu kavram optimizasyon kavramına sunulan bir alternatiftir. Tatmin etme ile hedef programlama arasındaki bağlantı açıktır. Tüm hedef programlama modelleri, ulaşılması gereken bir dizi hedef değeri içerir. Bu hedeflere olabildiğince yakından ulaşmak, hedef programın temel amacıdır. Bu nedenle tatmin etme, haklı olarak, hedef programlama felsefesinin temelini oluşturan ana düşünce olarak düşünülebilir. Bu durum hedef programlama kullanıcılarının hedeflerine mümkün olduğunca ulaşabilen bir çözümün onları tatmin ettiğini ve sonucun yeterli bir çözüm olduğunu gösterir.

Optimizasyon: Karar verme bağlamında optimizasyon yapmak, muhtemel kararlar arasından bazı ölçümlerin en iyi değerlerini veren kararı bulma anlamına gelmektedir. Çoklu hedeflerin varlığında optimizasyon teorisi ise İtalyan ekonomist Vilfredo Pareto'nun çalışmasında yer alan bir kavramın karar alma alanına adapte edilmesiyle ortaya çıkmıştır. Pareto [90], toplum içerisindeki bir bireyi, başka bir bireyi daha fakir yapmadan daha zengin hale getiremenin mümkün olmadığı durumda, o toplumun optimal seviyede olduğunu ifade etmiştir. “Pareto optimal” kavramı buradan ortaya çıkmıştır. Hedef programlama da optimizasyon unsurlarını içermektedir. Bu bağlamda dikkat edilmesi gereken üç durum vardır:

1) Eğer hedeflerin sağ yan değerleri optimal seviyeye (ideal seviye) çok yakın bir biçimde belirlendiyse hedef programlama içerisinde baskın olan *tatmin edici* olma felsefesi *optimal* olma felsefesiyle yer değiştirir.
2) Eğer Pareto optimallik tespiti ve iyileştirmesi gerçekleşirse, hedef programlama tatmin edici ve optimizasyon felsefelerin bir karışımına sahip olur.
3) Eğer hedefler iki taraflı ise diğer bir deyişle "daha iyi" veya "daha az iyi" durumundan ziyade belirli bir değer en uygun ise, o zaman tatmin edici ve optimizasyon felsefeleri bu hedefler için çakışan felsefeler olarak düşünülebilir.

Sıralama: bu temel felsefe öncelikli hedef programlama (lexicographic) çeşidi için önemlidir. Hedeflerden istenmeyen sapmaların minimize edilmesi bir sıraya konmaktadır ve karar verici tarafından bu sıralamanın bilindiği ya da tahmin edildiği varsayılır. Gerçek örnekler söz konusu olduğunda böyle doğal bir sıralamanın kendiliğinden oluşmayacağı ya da var olmadığı açıktır. Böyle bir durumda karar verici açısından da sıralama yapmak yerine hedefler arasında bir denge oluşturacak biçimde araştırma yapmak daha önemliyse öncelikli hedef programlama yerine bir başka hedef programlama çeşidinden yararlanabilir. Romero vd. [91] çalışmasına göre sıralama felsefesiyle hedef programlamada kullanılan diğer felsefeler arasında temel bir uyumsuzluk yoktur.

Dengeleme: Birçok hedef programlama probleminde, hedeflerin başarılması arasındaki dengeye bakılmadan sadece hedeflerin ortalama başarı seviyesi amaçlanmaktadır. Bu durum yetersiz sonuçlara sebep olur. Örneğin Çizelge 5.2.'de hedef seviyeden olumsuz sapmaların istenmediği basit bir iki hedefli program için iki çözüm gösterilmektedir.

Çizelge 5.2. Dengeleme problemi

	Hedef 1 Amaç	Hedef 1 Başarıldı	Hedef 2 Amaç	Hedef 2 Başarıldı
Çözüm 1	**100**	90	**100**	90
Çözüm 2	**100**	100	**100**	80

Bu örnekte iki çözüm aynı ortalama başarı seviyesine sahiptir ancak hedefler arasında farklı denge seviyeleri vardır. Açıkçası, hedeflerin başarısının dengelenmesi karar verici için önemliyse, çözüm 1 yerine çözüm 2'yi tercih edeceklerdir. Ancak problemin çözümünde sadece başarının ortalama seviyesi hesaba katılıyorsa çözüm 1 ve çözüm 2 arasında karar verici açısından herhangi bir fark yoktur. Hedef programlama modellerinde genellemenin dâhil olması gerektiği halde göz ardı edilmesi, zayıf hedefler tarafından dengesiz ve dolayısıyla uygun olmayan çözümlerin üretilmesine neden olmaktadır.

5.3. Hedef Programlama Çeşitleri

Hedef programlama modelleri gerek yapısal özellikleri gerekse model varsayımlarındaki değişiklikler nedeniyle çeşitli şekilde sınıflandırılabilir.

a) Doğrusal hedef programlama:

Amaç fonksiyonu ve kısıtlayıcıların doğrusal olarak incelendiği Hedef Programlama çeşididir.

b) Doğrusal olmayan hedef programlama:

Uygulamalarda modelde yer alması gereken fonksiyonların yapısı her zaman doğrusal olmayabilir. Böyle bir durumda optimizasyon problemlerinde doğrusal olmayan yapıda amaç fonksiyonu veya kısıtlayıcılarla karşılaşılabilir. Bu tip yapıları modellemek için doğrusal olmayan teknikler geliştirilmiştir. Bu modeller tek amaçlı da olmayabilir. Birden fazla amacı olan ve doğrusal olmayan yapıda modeller için geliştirilen tekniklerden birisi de doğrusal olmayan hedef programlama tekniğidir. Amaç fonksiyonu ve ya kısıtlayıcı fonksiyonlardan biri ya da bir kaçı doğrusal olmayabilir. Charnes ve Cooper [47] doğrusal olmayan durumların ortaya çıkabildiğini ve göz ardı edildiğini ifade etmişlerdir. İlk kez 1976 yılından Ignizio [49] doğrusal olmayan hedef programlama modelini kullanmıştır. Doğrusal olmayan hedef programlama modelinde çözüm algoritması doğrusal modele göre daha karmaşıktır ve bu sebeple kullanımı daha sınırlıdır. Genellikle mühendislik, mimarlık, finans, muhasebe, üretim planlaması, kalite kontrol gibi alanlarda kullanılmaktadır. Doğrusal olmayan hedef programlama modelinin genelleştirilmiş gösterimi şu şekildedir;

Min : $Z = \sum_{k=1}^{P} P_k \sum_{i=L+1}^{M} \left(w_{ik}^{-} d_i^{-} + w_{ik}^{+} d_i^{+} \right)$

$R_i(x) = b_i$ $\quad i = 1,...,L$ için

$g_{i-L}(x) + d_i^{-} - d_i^{+} = t_{i-L}$ $\quad i = L+1,...,M$ için

$d_i^{-}, d_i^{+} \geq 0$ $\quad i = 1,...,M$ için

Bu gösterimlerde

d_i^{+} i. hedeften pozitif sapma değişkenini,

d_i^{-} i. hedeften negatif sapma değişkenini,

L modeldeki gerçek kısıtların sayısını,

M-L modeldeki hedef kısıtlarının sayısını,

P_k k. önceliği,P $P_{k-1} > P_k$,

w_{ik}^{-} P_k önceliğindeki d_i^{-} sapma değişkeninin ağırlığını,

w_{ik}^{+} P_k önceliğindeki d_i^{+} sapma değişkeninin ağırlığınu,

Z amaç fonksiyonunu,

t_i i. hedef olan g_i hedefinin varılmak istenen seviyesi, sağ taraf/yan değerlerini,

b_i i. kısıtın sağ taraf kısıtını

ifade etmektedir.

Doğrusal olmayan hedef programlama modellerinin çözüm teknikleri:

- ✓ Simpleks yaklaşım: Bu yaklaşımın kullanılması için üç temel yaklaşımın kullanılması gerekmektedir.

1. MAP yaklaşımı (yaklaşıklaştırma programlaması)

Bu yaklaşım ilk kez R.E. Griffith ve R.A. Stewart [92] tarafından tek amaçlı doğrusal olmayan programlama problemlerini çözmek için geliştirilmiştir ve doğrusal olmayan hedef programlama problemlerinin çözümünde de etkin bir şekilde kullanılmaktadır Ignizo [49]. Eş. (5.1)'de ifade edilen doğrusal olmayan programlama problemlerinin çözümünde kullanılmaktadır.

Min: z

$$f_i\left(x\right) \quad \text{i=1,...,m}$$
$$0 \le x_j \le u_j \quad j = 1,...,n \tag{5.1}$$

Eşitliklerde yer alan z ve f_i fonksiyonları doğrusal olmayan yapıya sahip diferansiyellenebilir fonksiyonlar ve u_j değerleri de modelde tanımlanan karar değişkenleri için üst sınır değerleridir. MAP yaklaşımı, Taylor serisi açılımını kullanır ve algoritmanın aşamaları şu şekildedir [92]:

1. Adım: Öncelikle karar modeli matematiksel olarak oluşturulur.

2. Adım: Uygun bir başlangıç çözüm noktası seçilir.

3. Adım: Bu başlangıç çözüm noktası yakınında Taylor serisi açılımı yardımı ile küçük bir bölge ya da komşuluk tanımlanır.

4. Adım: Doğrusal olmayan modelin doğrusal yaklaşımı elde edilir.

5.Adım: 2. Adımda tanımlanan komşulukta modelin doğrusal yaklaşımının optimizasyonu, ilgili simpleks algoritması yardımıyla elde edilir.

6. Adım: 5. Adımın sonucu iyi yönde bir çözümse 3. Adım'a geri dönülür, hiçbir gelişme göstermeyen bir durum ise işlem durdurulur ve doğrusal yaklaşım daha küçük bir komşulukta incelenir.

2. Ayrılabilir (separable) programlama yaklaşımı

Bu yaklaşımın kullanılabilmesi için amaç fonksiyonu ve kısıtlayıcıların ayrılabilir yapıda olması gerekmektedir. Ayrılabilir fonksiyonlar, her biri yalnızca bir değişken içeren fonksiyonların toplamı şeklinde açıklanabilen fonksiyonlardır. Doğrusal yapıda olmayan ve ayrılabilir fonksiyonların çözümü onların parçalı doğrusal fonksiyonlara yakınsaklaştırılıp doğrusal bir yapıya dönüştürülerek düzeltilmiş (modified) simpleks algoritmasının elde edilmesiyle mümkündür. Bu teknik geniş bir aralıkta tanımlanan herhangi bir doğrusal olmayan fonksiyonun tanımlı olduğu aralığın alt aralıklara bölünmesi ve daha sonra her bir alt aralıktaki kısmi doğrusal fonksiyonların elde edilmesi temeline dayanır [93].

Dolayısıyla ayrılabilir programlama yaklaşımı ayrılabilir fonksiyonlar olarak açıklanabilen bazı doğrusal olmayan fonksiyonları bulunduran yapılara uygulanabilmektedir. Ayrılabilir doğrusal olmayan programlama modelinin genel gösterimi şu şekildedir;

Min : $F(x) = F(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{M} f_i(x_i)$

$\sum_{j=1}^{n} g_{ij}(x_j) = b_i$ i=1,....,m için; $x_j \geq 0$ j=1,..,n için. Eşitliklerde f_i ve g_i'ler konvekstir. Konvekslik parçalı doğrusal fonksiyonların yakınsaklaştırılan doğrusal olmayan programlama modelinin global bir optimal çözümü olduğunu ifade eder.

Ayrılabilir doğrusal olmayan hedef programlama modelinin genel gösterimi ise şu şekildedir;

Min : $Z = \sum_{k=1}^{P} P_k \sum_{i=L+1}^{M} \left(w_{ik}^{-} d_i^{-} + w_{ik}^{+} d_i^{+} \right)$

$R_i\left(x_j\right) = b_i \qquad i = 1,...,L$ için

$g_{i-L}(x_j) + d_i^{-} - d_i^{+} = t_{i-L} \qquad i = L+1,...,M$ için

$d_i^{-}, d_i^{+} \geq 0 \qquad i = 1,...,M$ için

R_i ve g_{i-L} ayrılabilir fonksiyonların bir kümesidir. Bu yöntem sınırlandırılmış hedef programlama modelleri için de kullanılabilir. Dolayısıyla ayrılabilir doğrusal olmayan hedef programlama modellerinde her bir karar değişkeni x_i bir alt sınır (a_j) ve bir üst sınır (b_j) ile sınırlandırılabilir. Bu durumda formülasyon aşağıdaki gibi genellenir;

Min : $Z = \sum_{k=1}^{P} P_k \sum_{i=L+1}^{M} \left(w_{ik}^{-} d_i^{-} + w_{ik}^{+} d_i^{+} \right)$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=0}^{v_j}\alpha_{jr}R_{ij}\left(x_j\right)=b_i \qquad i=1,...,L \text{ için}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=0}^{v_j}\alpha_{jr}g_{i-L}(x_j)+d_i^- - d_i^+ = t_{i-L} \qquad i=L+1,...,M \text{ için}$$

Denklemlerde

(i) $X_J = \sum_{r=0}^{v_j}\alpha_{jr}x_{jr}$ ’dir ve

(ii) en fazla iki komşu α_{jr} pozitiftir. Bu koşul ayrılabilir programlamada “sınırlı temel giriş kuralı” olarak bilinir. Bu kural, nihai çözümün her zaman parçalı doğrusal yaklaşımda bulunacağını garanti eder. Ayrılabilir doğrusal olmayan hedef programlama modelinin çözümü, geleneksel ayrılabilir programlamanın değiştirilmiş bir versiyonudur. Bu versiyonda xj'nin üst sınırları “sınırlı temel giriş kuralı” ile bulunmaktadır.

Ayrılabilir doğrusal olmayan programlama yöntemi genellikle x_j karar değişkeni için gerekli olan v_j kırılma noktalarının sayısını belirlerken sabit bir tanım aralığı kullanır ancak grid noktasının önceden sabitlenmeyeceği, ihtiyaç doğrultusunda üretilmesi gerekliliği Wolfe’un çalışmasında anlatılmıştır [94]. Ayrılabilir doğrusal olmayan programlama yöntemi, sadece ayrılabilir fonksiyonlar olarak ifade edilebilen bazı doğrusal olmayan elemanlar içeren ancak büyük ölçüde doğrusal olan uygulamalarla sınırlıdır.

3. Karesel (Quadratic) programlama yaklaşımı

Kareli programlama yaklaşımı, karesel olan veya karesel yapıdaki modellere dönüştürülebilen doğrusal olmayan hedef programlama modellerini çözmek için kullanılan bir tekniktir. Kareli hedef programlama modeli, karesel yapıda olan kısıtlayıcılar ve/veya amaç fonksiyonlarında karesel yapıda olan sapma değişkenleri içeren bir yapıya sahiptir.

✓ Doğrudan arama yaklaşımı

Doğrudan arama yaklaşımı doğruların birbirine yakınsaması konusunda hiçbir garantisi olmamasına rağmen optimizasyon problemlerinin çözümünde sıkça kullanılan bir yaklaşımdır. Çünkü bu yaklaşımın algoritmasının basit bir arama mantığı vardır. Box'ın [95] kullandığı karmaşık arama yöntemi, tek hedefli kısıtlanmış optimizasyon problemlerini çözmek için kullanılan doğrudan arama yöntemlerinden biridir. Monarchi [96], doğrusal olmayan hedef programlama sorunlarını çözmede kullanımını göstermek için Box'ın Karmaşık arama yöntemini geliştirmiştir.

Doğrudan arama yaklaşımında;

- Uyarlanmış Desen (Modified Pattern) arama yaklaşımı ve
- Uyarlanmış Desen/Gradient (Modified Pattern/gradient) arama yaklaşımı

olmak üzere iki farklı yöntem vardır.

✓ Gradient tabanlı yaklaşımı

Herhangi bir karar probleminde belirsizlik ortamında karar verme sorunu ile karşı karşıya kalınabilir. Bu belirsizlik durumu, bazen ihmal edilerek modelin deterministik bir yapıda olduğu varsayılmaktadır ancak çıktılar olasılıksal dağılımlar tarafından tanımlanmış risk ölçümleri ile elde ediliyor olabilir. Bu problemlerde deterministik bir yapı söz konusu değildir. Gradient tabanlı yaklaşım, bu tür deterministik olmayan yapıların çözümünde kullanılır.

Gradient yaklaşımlar, amaç fonksiyonlarının ve kısıtlayıcıların hareket ve araştırma yönünü tanımlamak için bu fonksiyonların birinci dereceden kısmi türevlerini alarak işlem yapmaktadır. Gradient tabanlı metotların optimal çözüme yakınsama oranı, genellikle diğer metotların yakınsama oranından daha hızlıdır. Bununla birlikte diferansiyeli alınmayan fonksiyonları bulunduran problemler için gradient metotların kullanımı uygun değildir.

Lee ve Olson [97], şans kısıtlı doğrusal olmayan hedef programlama modelleri için bir gradient algoritması geliştirmişlerdir. Bu algoritma, doğrusal yapıda olmayan fonksiyonların sürekli ve diferansiyeli alınabilir olmasını ve optimal bir noktayı bulmak için çözüm uzayının konveks olmasını gerektirir.

- ✓ Etkileşimli yaklaşım

Etkileşimli diğer adıyla interaktif yaklaşımın diğer yaklaşımlara göre bazı durumlarda üstün olduğu düşünülmektedir Bu üstünlük karar vericinin çözüm sürecinde önemli bir rolünün olması ve daha iyi bir çözümün kabul edilmesine izin vermesinden kaynaklanır. Etkileşimli hedef programlama yöntemlerinden iki tanesi;

- Weistroffer's yöntemi [98]
- Masud ve Hwang yöntemi [99]

Birinci yöntem Weistroffer tarafından doğrusal olmayan çok amaçlı karar verme problemlerinin çözümü için geliştirilmiş etkileşimli bir hedef programlama yöntemidir. Geliştirilen bu yöntem, kısıtlı çok amaçlı problemin kısıtsız tek amaçlı alt problemlerinin bir serisi şeklinde dönüştürülmesi temeline dayanır. Burada her bir alt problem,

i. Yapısal kısıtların sağ taraf sabitinden sapma miktarlarını,
ii. Hedef kısıtlarının erişim düzeylerinden sapmaların kareli toplamını minimize etmek için

oluşturulur. İkinci yöntemde Masud ve Hwang , Etkileşimli Hedef Programlama yaklaşımını, karar vericinin, hedef uzayının araştırılmasında tercihlerinin kademeli bir şekilde eklemesine dayanan bir yöntem olarak tanımlamaktadır. Şöyle ki her yinelemede karar vericiyle etkileşime geçilerek kendisine mevcut çözüm üzerine takas ya da tercih hakkı verilmektedir. Karar verici, her yinelemede sunulan çözümlere dayanan bir öğrenme süreci ile "en iyi uzlaşma" çözümüne ulaşılana kadar istenen hedefleri ekleyebilir ya da var olanları değiştirebilir. Yöntemin matematiksel yakınsama kanıtı konusunda eksiklikleri olmasına rağmen eğer karar verici her iterasyonda (yinelemede) gerekli bilgiyi sağlarken rasyonel ve tutarlı olursa yöntem göreceli olarak birkaç yinelemeyle sona ermektedir.

c) Karar değişkenlerinin özelliklerine göre hedef programlama

Karar değişkenlerinin yapısal özelliklerine göre hedef programlama 3 şekilde incelenebilir.

- ✓ Sürekli değerler alabilen hedef programlama:

Karar değişkenlerinin değerleri pozitif olma koşulu altında her değeri alabilir.

- ✓ Tam sayılı hedef programlama:

Modelde yer alan karar değişkenlerinin değerleri sadece sıfırdan büyük olmak üzere tam sayılı değerler alabilir.

- ✓ 0-1 hedef programlama:

Modeldeki karar değişkenleri sadece sıfır ve bir değerlerini alabilir. Diğer bir adı ikili (binary) hedef programlamadır. Tipik uygulama alanları kapsama ağacı algoritması, atama, lojistik, ağ akışı vb.dir [100].

d) Katsayıların özelliklerine göre hedef programlama

- ✓ Deterministik hedef programlama:

Kısıtlayıcılarda yer alan teknolojik katsayıların kesin olarak belirlendiği durumdur.

- ✓ Stokastik hedef programlama:

Kısıtlayıcılarda yer alan teknolojik katsayıların olasılık olarak belirlendiği durumdur.

- ✓ Belirsiz (bulanık=fuzzy) hedef programlama:

Kısıtlayıcı fonksiyonlarda karar değişkenlerinin katsayılarının kesin olarak ifade edilmediği durumdaki hedef programlama modelidir. Karar verici, amacına yönelik birçok hedefler belirler. Ancak belirlenen bu hedeflere aynı anda ulaşılması çoğu zaman imkânsız olup, hedeflerden sapmaların olması kaçınılmazdır. Bu doğrultuda karar verici amaçlarına yönelik hedeflerinde kesinlik yerine, aşağı-yukarı, yaklaşık olarak hedeflere ulaşılması da karar vericiyi memnun eder. Bulanıklığı ifade eden "aşağı-yukarı", "yaklaşık olarak" kelimelerini içeren problemlerin çözümünde, bulanık küme teorisini kullanmak oldukça uygundur. Karar vericinin hedeflerinin bulanık olması, bulanık bir ortamda karar verme problemi olarak adlandırılır. İlk kez Narasimhan [101] bulanık hedef programlama yöntemini önermiştir. Ignizio [49], Hannan [102], Chen [103], Tiwari, R.N., S. Dharmar ve J.R. Rao [104], Yang vd. [105] bulanık hedef programlama ile ilgili problemlerin formülasyonu, karar vericinin belirsizlik şeklindeki hedeflerine göre göreceli önem derecesi ve bunlara ait bulanık hedeflerin bulanık önceliklerine dair çalışmalar yapmışlar ve bunlara ait çözüm önerileri geliştirmişlerdir. Hedef programlama modelindeki kısıtlarda yer alan “=”, “≤” ve “≥” eşitlik/eşitsizlikler bulanık hedef programlamada “$\underset{\sim}{=}$”, “$\underset{\sim}{<}$” ve “$\underset{\sim}{>}$” şeklinde gösterilir. Bulanık hedef programlama modellerinin çözüm teknikleri:

Hedefler arasında tercih önceliği olmayan bulanık hedef programları modellerinin çözümü için;

- ❖ Üçgensel Üyelik Fonksiyonlarıyla Narasimhan Yaklaşımı,
- ❖ Üçgensel Üyelik Fonksiyonlarıyla Hannan Yaklaşımı,
- ❖ Üçgensel Üyelik Fonksiyonlarıyla Yang, Ignizio, Kim Yaklaşımı,

kullanılmaktadır. Hedeflerin farklı öncelikli bulanık hedef programlama modellerinin çözümü için ise

- ❖ Üçgensel Üyelik Fonksiyonlarıyla Tiwari, Dharmar ve Rao Yaklaşımı,
- ❖ Üçgensel Üyelik Fonksiyonlarıyla Chen Yaklaşımı

kullanılmaktadır.

e) Amaç fonksiyonunun durumuna göre hedef programlama:

- ✓ Öncelikli hedef programlama (Preemptive veya Lexicographic):

Hedef programlamanın karar vericinin hedeflerini kendine göre belirlediği önem derecesine göre ifade etmesi durumu. Literatürde en sık kullanılan programlama türüdür.

$$\min z = \sum_{i=1}^{n} P_i \left(d_i^+ + d_i^- \right) \quad \sum_{j=1}^{m} \left(a_{ij} x_j + d_i^+ - d_i^+ \right) = b_i \,,\ x_j, d_i^+, d_i^- \geq 0 \text{ olmak üzere}$$

Amaç fonksiyonu minimize edilmeye çalışılır. Bu modelde amaç fonksiyonundaki her bir sapma değişkeninin önceliği P_i ile gösterilmektedir ve P_1 en önemli hedef iken P_2 ikinci sıradaki en önemli hedeftir ve bu şekilde devam eder.

Öncelikli hedef programlamaya örnek olarak Türkiye sigorta sektörünün finansal ve teknik analizi hedef programlama ile modellenmiştir [106]. Hazine Müsteşarlığının 2011 ile 2015 yılları arasında yayınlamış olduğu Sigortacılık ve Bireysel Emeklilik Faaliyet Raporlarında yer alan Türkiye hayat dışı sigorta şirketlerine ait veriler kullanılmıştır. Tüm sektörün finansal performansının değerlendirmesi için 5 farklı finansal rasyo değerlendirilmiştir ve model parametreleri Çizelge 5.3'deki gibidir.

Çizelge 5.3. Finansal Rasyolar

Finansal Rasyolar (Hedef)			**Yıllar**			**Öncelik**
	2011	**2012**	**2013**	**2014**	**2015**	
Aktif karlılığı	0,4	-3,38	4,19	3,36	-1,46	P_1
Likidite oranı	67,57	68,61	77,21	81,92	76,06	P_2
Sermaye yeterlilik rasyosu	128,46	107,63	125,01	136,4	106,2	P_3
Özsermaye/teknik karşılık	59,73	47,9	52,51	52,23	38,75	P_4
Prim/özsermaye*	246,68	285,24	251,38	232,09	285,65	P_5

*sermaye yeterliliği yönetmeliğine göre hesaplanan mevcut özsermaye.

Karar değişkenleri; x_i'ler, i = 1,…, 5 için 2011'den 2015'e kadar yıllar için sırasıyla finansal oranların performansıdır. Sigorta sektörünün hedefi, son 5 yılın ortalama finansal oran değerlerini aşmaktır.

Toplam sapmayı minimize et=$P_1\,(d_1^-)+P_2(d_2^-)+P_3(d_3^-)+P_4(d_4^-)+P_5(d_5^-)$ (amaç fonksiyonu)

$0.4x_1-3.38x_2+4.198x_3+3.36x_4-1.46x_5-d_1^+ + d_1^- =0,622$ (aktif karlılığı kısıtı)

$67.57x_1+68.61x_2+77.21x_3 +81.92x_4+76.06x_5-d_2^+ +d_2^-= 74,274$ (likitide oranı kısıtı)

$128.46x_1+107.63x_2+125.01x_3+136.4x_4+106.2x_5-d_3^+ +d_3^-=120,74$ (Sermaye yeterlilik r. k.)

$59.73x_1+47.9x_2+52.51x_3+52.23x_4+38.75x_5-d_4^+ +d_4^-=50,22$ (Özsermaye/teknik karşılık k.)

$246.68x_1+285.24x_2+251.38x_3+232.09x_4+285.65x_5-d_5^+ +d_5^-= 260,208$ (Prim/özsermaye k.)

$x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,d_1^+ , d_1^- , d_2^+ +d_2^-,d_3^+ ,d_3^-,d_4^+ ,d_4^-,-d_5^+ +d_5^-\geq 0$ (negatif olmama k.)

Hedeflerden sapmalardan hangisi istenmiyorsa amaç fonksiyonuna o dahil edilmektedir. İlk kısıt için örnek verilirse,

d_1^- =aktif karlılık hedefinin altında kalan değer,

d_1^+ = aktif karlılık hedefinin üstüne çıkan değer,

şeklindedir ve hedefin altında kalınması istenmemekte ancak üstüne çıkılması ise sıkıntı olmamaktadır bu durumda d_1^- amaç fonksiyonunda yer almaktadır. Amaç fonksiyonunda yer alan sapmalar sıfır değerini alırsa hedefe ulaşılmış olur örneğin d_1^-=0 (P_1 hedef başarıya ulaştı), d_2^-=0 (P_2 hedef başarıya ulaştı). Model için LINGO yazılımı ile elde edilen sonuçlar aşağıdaki gibidir.

Çizelge 5.4 . Finansal Rasyolar için Sonuçlar

Hedef önceliği	**Hedeflerin başarısı**	d_i^-	d_i^+
P_1	Tamamen ulaşıldı	0	0
P_2	Tamamen ulaşıldı	0	30,79735
P_3	Tamamen ulaşıldı	0	79,01530
P_4	Tamamen ulaşıldı	0	42,65615
P_5	Tamamen ulaşıldı	0	123,3794

Çizelge 5.4. birinci öncelikten beşinci önceliğe kadar tüm hedeflerin gerçekleştiğini ve tüm negatif sapmaların (d_1^-, d_2^-, d_3^-, d_4^-) sıfıra eşit olduğunu göstermektedir.

- ✓ Ağırlıklandırılmış hedef programlama (Archimedian):

Bu yöntemde hedeflerden olacak istenmeyen her sapmaya belirli bir ağırlık verilmelidir. Bu ağırlıklar her sapmanın görece önemini gösterir. Modelde tek bir amaç fonksiyonu, problemin hedeflerini temsil eden fonksiyonların ağırlıklandırılmış toplamı haline getirilir. Bu yaklaşım özellikle sapmaların boyutları birbirlerinden farklı olduğunda önem kazanır. Bu yaklaşımın belli başlı iki zorluğu vardır. Birincisi hedeflerin ağırlıklandırılmasının zor olması, ikincisi ağırlıkların hem hedeflerin görece önemlerini hem de sapmalar arasındaki boyut ilişkisini açıklamasıdır.

- ✓ Minmax hedef programlama:

Chebyshev (fuzzy) amaç programlama olarak adlandırılan tip, yukarıdaki iki amaç programlama tipine benzer, istenmeyen bir sapma değişkenin minimizasyonu ile ilgilidir. Hedef programlamanın bu tipinde maksimum sapmanın minimizasyonu gerçekleştirilir. Modelde hedefler ayrı ayrı gösterilir ve öncelik sıralaması yapılmaksızın geleneksel simpleks algoritması kullanılarak çözüm yapılır. Modelin amaç fonksiyonu sadece maksimum sapmanın minimizasyonunu belirleyen uzaklık parametresinden oluşur. Bu yöntem ilk kez Flavell tarafından 1976 yılında önerilmiştir [106].

- ✓ Öncelikli olmayan hedef programlama:

Hedef programlama modelinde karar verici için hedefler arasında hedeflere erişim yönünden herhangi bir önem farkı yok ise hedeflere model içerisinde tanımlanan sırada ulaşılmaya çalışılmaktadır.

6. HEDEF PROGRAMLAMA İLE OPTİMAL REASÜRANS

Tezin bu bölümünde çok amaçlı optimal reasürans çalışılmıştır. İkiden fazla hedef (kısıt) içeren modelleri temel alan optimal reasürans çalışmaları literatürde oldukça azdır ve son yıllarda yapılmıştır. Bu çalışmalardan tezin birinci bölümünde bahsedilmiştir.

Bu bölümde ilk önce karşılaştırma yapabilmek ve modelin doğru sonuçlar verdiğini kanıtlamak amacıyla, 4. Bölümde analitik ve benzetim çalışması yapılmış olan modelin hedef programlama çözümüyle başlanmıştır. Ardından modele yeni hedefler eklenmiş ve farklı senaryolar altında eklenen bu yeni hedefler doğrultusunda elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Modellere eklenen hedefler (kısıtlar) ,

- sadece sigortacıyı dikkate alan hedefler olduğunda çok hedefli/amaçlı durumu sigortacı açısından ele alan hedef programlama modelleri,
- sadece reasürörü dikkate alan hedefler olduğunda çok hedefli/amaçlı durumu reasürör açısından ele alan hedef programlama modelleri,
- her iki tarafı da dikkate alan hedefler olduğunda çok hedefli/amaçlı durumu hem sigortacı hem de reasürör açısından ele alan hedef programlama modelleri

elde edilir. Tek bir modelin içerisine dahil edilen hedefler her iki tarafı da dikkate alan hedefler (kısıtlar) olduğunda bu kısıtlara verilen ağırlıklandırmalar ya da öncelikler değiştirilerek model her iki tarafı da dikkate alan ancak durumu öncelikle sigortacı bakış açısıyla ele alan ya da öncelikle reasürör bakış açısıyla ele alan model haline dönüşebilir. Bu durum hedef programlama modelinin karar vericiye tanıdığı esneklik ve modele sınırsız sayıda alternatif ekleme özelliğinin avantajıdır. Karar vericinin model üzerindeki kontrolü ve önemi büyüktür. Modelde fazla sayıda kısıt yer alabilir. Hedef programlamanın amaç fonksiyonunda tüm bu hedeflerden sapmaların toplamı yer alacaktır. Çok ölçütlü diğer modellerden farklı olarak çıktılar arasında herhangi bir sıralama ya da ölçeklendirme yapmaya gerek olmadan modelin kısıtlarını sağlayacak şekilde amaç fonksiyonunu minimize edecektir. Bu da hedef programlama ile elde edilen sonuçların modelin “optimal çözümü” olmasını sağlar.

Bu çalışmada çok amaçlı optimal reasürans çalışmasını hedef programlama ile çözebilmek için 11 farklı model oluşturulmuştur ve modellerde kullanılan kısıtlar;

Model 1 için:

Kısıt: Sigortacının karı ile reasürans şirketin karının mutlak farkının riske maruz değeri.

Model 2 için:

Kısıt: Sigortacının ve reasürörün karlarının standart sapmaları arasındaki mutlak fark.

Model 3 için:

Kısıt 1: Sigortacının karı ile reasürans şirketin karının mutlak farkının riske maruz değeri ve

Kısıt 2: Sigortacının ve reasürörün karlarının standart sapmaları arasındaki mutlak fark.

Model 4 için:

Kısıt 1: Sigortacının beklenen faydası (üstel fayda fonksiyonu ile)

Model 5 için:

Kısıt 1: Sigortacının beklenen faydası (logaritmik fayda fonksiyonu ile)

Model 6 için:

Kısıt 1: Sigortacının karı ile reasürans şirketin karının mutlak farkının riske maruz değeri ve

Kısıt 2: Sigortacının ve reasürörün karlarının standart sapmaları arasındaki mutlak fark ve

Kısıt 3 :Sigortacının beklenen faydası (üstel fayda fonksiyonu ile)

Model 7 için:

Kısıt 1: Sigortacının karı ile reasürans şirketin karının mutlak farkının riske maruz değeri ve

Kısıt 2: Sigortacının ve reasürörün karlarının standart sapmaları arasındaki mutlak fark ve

Kısıt 3: Sigortacının beklenen faydası (logaritmik fayda fonksiyonu ile)

Model 8 için:

Kısıt 1: Sigortacının beklenen karı

Kısıt 2: sigortacının beklenen faydası (üstel fayda fonksiyonu ile)

Kısıt 3: Sigortacının toplam maliyetinin riske maruz değeri

Model 9 için:

Kısıt 1: Reasürörün beklenen karı

Kısıt 2: Reasürörün beklenen faydası (üstel fayda fonksiyonu ile)

Kısıt 3: Reasürörün toplam maliyetinin riske maruz değeri

Model 10 için:

Kısıt 1: Sigortacının beklenen karı

Kısıt 2: Sigortacının beklenen faydası (üstel fayda fonksiyonu ile)

Kısıt 3: Reasürörün beklenen karı

Model 11 için:

Kısıt 1: Reasürörün beklenen karı

Kısıt 2: Reasürörün beklenen faydası (üstel fayda fonksiyonu ile)

Kısıt 3: Sigortacının beklenen karı

şeklindedir. Modeller içerisinde 1., 2., 4. ve 5. modeller tek kısıtlı modellerdir. Bu modellerin inşa edilmesinin nedeni modele daha fazla sayıda kısıt eklendiğinde elde edilen sonuçların tek kısıtla elde edilen sonuçlarla karşılaştırılabilmesidir. Bu şekilde optimal saklama payındaki değişiklikler kademeli olarak incelenmiştir.

Model 1

Birinci modelde tek bir kısıt vardır. Bu kısıt 4. Bölümde analitik olarak ve benzetim yardımıyla çözümü bulunan modelin amaç fonksiyonudur. Sigorta ve reasürör şirketin karları arasındaki farkın mutlak değerinin riske maruz değerini α güvenlik seviyesinde veren fonksiyon kısıt fonksiyonudur ve sağ taraf/yan değeri “0” olarak seçilmiştir.

$$VaR_{ABS_{DIF}}\left(d^*,\alpha\right) = \min_{d>0}\left\{VaR_{ABS_{DIF}}\left(d,\alpha\right)\right\}$$

$$T_I = X_I + \pi_R(d)$$

$$S_I = \pi_I - T$$

$$S_R = \pi_R - X_R$$

$$ABS_{Dif} = \left|S_I - S_R\right| = \left|S_R - S_I\right|$$

$VaR\{|S_I - S_R|\} \leq sağyan1$

Modelin hedef programlama modeli ile matematiksel gösterimi aşağıda verilmiştir. Eşitsizlik biçimindeki kısıt, sapma değişkenleri yardımıyla eşitliğe dönüştürülmektedir. Böylece istenmeyen değişken amaç fonksiyonunda yerini alır ve minimize edilmeye çalışılır. Amaç fonksiyonu, kısıt fonksiyonu ve işaret kısıtı sırasıyla;

Amaç/Hedef fonksiyonu: Min z= d_1^+

Kısıt 1: $VaR\{|S_I - S_R|\} + d_1^- - d_1^+ = sağyan1$

İşaret kısıtı: $d_1^-, d_1^+ \geq 0$

$$d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+ \leq 1000$$

$$500 < d^* \leq 5000$$

şeklindedir. Modelde kısıt 1'i sağlayan optimal saklama payı bulunacaktır. Dolayısıyla hedef fonksiyonuna ulaşmaya çalışan model için 3 farklı hedef kısıtı vardır;

d^* optimal saklama payı,

d_1^- negatif sapma değişkeni,

d_1^+ pozitif sapma değişkeni.

Modelin MATLAB ile çözümü için kullanılan kullanıcı arayüzü aşağıdaki gibidir. Öncelikle Reasüransın tipi, hasarın dağılımı, dağılımın parametreleri ve kullanılan prim ilkesi kullanıcı tarafından belirlenmektedir.

```
Reasürans tipini belirleyin:
    Hasar Fazlası  ----- > 1
    Toplam hasar fazlası ----- > 2
Dagilimi belirleyin:
      Log Normal  ----- > 1
      Pareto ----- > 2
      Üstel ----- > 3
Dagilimin standart sapmasını belirleyin:
```

```
Std.Sp. =  500  ----- > 1
Std. Sp. = 1000  ----- > 2
Std.Sp. = 1500  ----- > 3
Std. Sp. = 2000  ----- > 4
Prim ilkesini belirleyin:
    Beklenen değer prim ilkesi----- > 1
    Standart sapma prim ilkesi ----- > 2
Sağyandeğeri girin:
    Model1 sağyan -----> 0
```

Model 1 lognormal dağılım, toplam hasar fazlası reasürans anlaşması, beklenen değer prim ilkesi, $\theta = 0{,}3$ ve $\alpha = 0{,}05$, hasar tutarı için 1000 standart sapma ve 1000 beklenen değer, hasar sayısı için Poisson ve 1000 beklenen değer için 300.000 iterasyon ile çalıştırıldığında sonuçlar:

Sigortacının karının ortalama değeri: 236,5989

Reasürörün karının ortalama değeri: 62,1587

$mean(S_I) - mean(S_R) + d_1^- - d_1^+ = 173{,}412$

d^* optimal saklama payı= **1453,5**	(hedef programlama modeli ile benzetim modeli aynı sonuçları verdi)
d_1^- negatif sapma değişkeni=**0**	
d_1^+ pozitif sapma değişkeni=**698**	(modelde istenmeyen, amaç fonksiyonunda minimize edilmeye çalışılan değişken)

olarak bulunur. Yukarıda elde edilen optimal saklama payı değeri, aynı varsayımlarla benzetim ile çözülen sigorta şirketinin karı ile reasürör şirketin karı arasındaki mutlak farkın riske maruz değerini minimize eden modelin sonucunda elde edilen optimal saklama payına eşit çıkmıştır (Çizelge 4.4.).

Hedef programlama modelini lognormal, Pareto ve üstel dağılım için E(X)= 1000 beklenen hasar değeri ve farklı standart sapma değerleri için çalıştırılarak hem beklenen değer prim ilkesi için hem de standart sapma prim ilkesi için elde edilen sonuçlar Çizelge 6.1.'de verilmiştir.

Çizelge 6.1. Model 1 için optimal saklama payı değerleri

Beklenen Değer Prim İlkesi					**Standart Sapma Prim ilkesi**				
	Standart Sapma					Standart Sapma			
Dağılımlar	500	1000	1500	2000	**Dağılımlar**	500	1000	1500	2000
Lognormal	1148,2	**1453,5**	1424,4	X	Lognormal	1142,9	1070,8	X	X
Pareto	1217	1307,9	1297,4	1285,1	Pareto	1149,5	870,9	788,43	X
Üstel		1464,5			Üstel		1150,1		

Model 2

İkinci modelde farklı bir kısıt ile çalışılmıştır. Sigortacının ve reasürörün karlarının standart sapmaları arasındaki mutlak farkın minimize edilmesi amaçlanmıştır. Modelin hedef programlama ile matematiksel gösterimi şu şekildedir;

Amaç/Hedef fonksiyonu: Min z= d_1^+

Kısıt 1: $\left|\sigma(S_I)-\sigma(S_R)\right| + d_1^- - d_1^+ = sağyan1$

İşaret kısıtı: $d_1^-, d_1^+ \geq 0$

$d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+ \leq 1000$

$500 < d^* \leq 5000$

Model 1'de verilen adımlar izlenerek Model 2 lognormal dağılım, toplam hasar fazlası reasürans anlaşması, beklenen değer prim ilkesi, $\theta = 0{,}3$ ve $\alpha = 0{,}05$, 1000 standart sapma ve 1000 beklenen değer için 300.000 iterasyon ile çalıştırıldığında sonuçlar;

Sigortacının karının ortalama değeri: 265,0729

Reasürörün karının ortalama değeri: 35,2099

Sigortacının karının standart sapması: 596,6664

Reasürörün karının standart sapması: 596,6517

$\left|std(S_I)-std(S_R)\right| + d_1^- - d_1^+ = 0{,}0147$

d^* optimal saklama payı= **2079,8** (karların standart sapmaları arasındaki fark minimize edilmeye çalışıldığında optimal saklama payı arttı)

d_1^- negatif sapma değişkeni=**0** **(hedefe tam ulaşıldı)**

d_1^+ pozitif sapma değişkeni=**0** (modelde istenmeyen, amaç fonksiyonunda minimize edilmeye çalışılan değişken)

Model 2'yi lognormal, Pareto ve üstel dağılım için E(X)= 1000 beklenen değer ve farklı standart sapma değerleri için çalıştırarak hem beklenen değer prim ilkesi için hem de standart sapma prim ilkesi için elde edilen sonuçlar Çizelge 6.2.'de verilmiştir.

Çizelge 6.2. Model 2 için optimal saklama payı değerleri

Beklenen Değer Prim İlkesi					**Standart Sapma Prim ilkesi**				
	Standart Sapma					Standart Sapma			
Dağılımlar	500	1000	1500	2000	**Dağılımlar**	500	1000	1500	2000
Lognormal	1252,2	**2079,8**	3508,3	5000	Lognormal	1256,8	2086,3	3598,9	5000
Pareto	1912,7	5000	5000	5000	Pareto	2383,1	5000	5000	5000
Üstel		1682			Üstel		1688,8		

Beklenen değer her üç dağılım için de 1000 olarak alındığından modelin çözümü aşamasında optimal saklama paylarının üst seviyesi 5000 olarak belirlenmiştir. Bunun sebebi ortalama hasarın 1000 olduğu bir poliçe ya da portföy için 5000'den daha yüksek saklama payı tutmanın zaten hiç reasürans anlaşması yapılmamasına neredeyse eş değer bir sonuç vereceği görüşüdür. Bu sebeple optimal saklama payı değerleri standart sapmalar arttıkça en fazla 5000 değerini alabilmişlerdir. Bununla birlikte standart sapma arttıkça, saklama payı değeri de artmıştır. Bu durum model 2'den oldukça farklı bir sonuç göstermektedir. Her iki tarafın karlarının sapmaları arasındaki farkı minimize etmek dolayısıyla bu sapmaların değerlerini birbirine yaklaştırmak için sigorta şirketi, hasarın standart sapması arttıkça, yani riski büyüdükçe daha fazla sorumluluğu üzerine almaya çalışmaktadır. Bu kısıt sigorta şirketinin aleyhine ve reasürör şirketin lehine sonuçlar doğurabilir.

θ’daki değişimlerin Modeller üzerindeki etkisi

Model varsayımlarında 0,3 olarak belirlenen θ parametresi (prim yükleme katsayısı) değiştirilerek sonuçlar Model 1 ve 2 için sırasıyla Çizelge 6.3. ve Çizelge 6.4’de verilmiştir.

Çizelge 6.3. Model 1 için farklı prim yükleme katsayılarının optimal saklama payı değerlerine etkisi

MODEL 1									
$\theta = 0{,}1$									
Beklenen Değer Prim İlkesi					**Standart Sapma Prim ilkesi**				
	Standart Sapma					Standart Sapma			
Dağılımlar	500	1000	1500	2000	**Dağılımlar**	500	1000	1500	2000
Lognormal	1163	1315,6	1361,4	X	Lognormal	1168,6	1207,0	X	X
Pareto	1178,9	1183,0	1177,6	1238,5	Pareto	1118,2	1058,1	1002	953,71
Üstel		1354,0			Üstel		1,2615		
$\theta = 0{,}2$									
Beklenen Değer Prim İlkesi					**Standart Sapma Prim ilkesi**				
	Standart Sapma					Standart Sapma			
Dağılımlar	500	1000	1500	2000	**Dağılımlar**	500	1000	1500	2000
Lognormal	1159,9	1374,9	1393,8	X	Lognormal	1175,9	1139,0	X	X
Pareto	1214,9	1247,4	1237,6	1238,5	Pareto	1142,1	969,5375	768,7644	X
Üstel		1407,9			Üstel		1215,9		
$\theta = 0{,}3$									
Beklenen Değer Prim İlkesi					**Standart Sapma Prim ilkesi**				
	Standart Sapma					Standart Sapma			
Dağılımlar	500	1000	1500	2000	**Dağılımlar**	500	1000	1500	2000
Lognormal	1148,2	**1453,5**	1424,4	X	Lognormal	1142,9	1070,8	X	X
Pareto	1217	1307,9	1297,4	1285,1	Pareto	1142,5	870,9	768,43	X
Üstel		1464,5			Üstel		1150,1		

Üstel dağılım ve pareto dağılım için beklenen değer prim ilkesi kullanıldığında θ değeri arttıkça optimal saklama payı da artmaktadır. Ancak reasürans primleri standart sapma prim ilkesi ile hesaplandığında θ değeri arttıkça optimal saklama payı azalmaktadır. Aynı durum Lognormal dağılım için de söz konusudur ancak standart sapma 500 için aynı şey söylenemez.

Çizelge 6.4. Model 2 için farklı prim yükleme katsayılarının optimal saklama payı değerlerine etkisi

MODEL 2									
$\theta = 0{,}1$									
Beklenen Değer Prim İlkesi					**Standart Sapma Prim ilkesi**				
	Standart Sapma					Standart Sapma			
Dağılımlar	500	1000	1500	2000	**Dağılımlar**	500	1000	1500	2000
Lognormal	1253	2076,4	3547,1	5000	Lognormal	1254	2089	3736,7	5000
Pareto	2040,9	4643,1	5000	5000	Pareto	1931,5	34059	5000	5000
Üstel		1670,7			Üstel		1678,8		
$\theta = 0{,}2$									
Beklenen Değer Prim İlkesi					**Standart Sapma Prim ilkesi**				
	Standart Sapma					Standart Sapma			
Dağılımlar	500	1000	1500	2000	**Dağılımlar**	500	1000	1500	2000
Lognormal	1256,8	2056,5	3535,5	5000	Lognormal	1285,5	2130,1	3736,2	5000
Pareto	1936,3	4035,4	X	X	Pareto	1811,4	2100,7	5000	5000
Üstel		1677,6			Üstel		1668,4		
$\theta = 0{,}3$									
Beklenen Değer Prim İlkesi					**Standart Sapma Prim ilkesi**				
	Standart Sapma					Standart Sapma			
Dağılımlar	500	1000	1500	2000	**Dağılımlar**	500	1000	1500	2000
Lognormal	1252,2	**2079,8**	3508,3	5000	Lognormal	1256,8	2086,3	3598,9	5000
Pareto	1912,7	5000	5000	5000	Pareto	2383,1	5000	5000	5000
Üstel		1682			Üstel		1688,8		

Sigorta şirketinin ve reasürans şirketinin karlarının standart sapmaları arasındaki farkın mutlak değerini minimize etmeye çalışan Model 2'de prim yükleme katsayısına bağlı olarak optimal saklama payı değerlerinde düzenli bir atış ya da azalış gözlenmemiştir. Optimum saklama payına konulan 5000 üst sınır ve sapma değişkenlerine konulan 1000 üst sınır model sonuçlarına etki etmektedir. Özellikle standart sapma büyüdükçe optimum saklama payı üst sınır olan 5000 değerini almakta veya hesaplanamamaktadır.

<u>Model 3</u>

Model 1 ve Model 2 de yer alan her iki kısıt da modele dahil edilerek Model 3 oluşturulmuştur. Modelin hedef programlama ile matematiksel gösterimi şu şekildedir;

Amaç/Hedef fonksiyonu: Min z= $P_1(d_1^+) + P_2(d_2^+)$

Kısıt 1: $VaR\{|S_I - S_R|\} + d_1^- - d_1^+ = sağyan1$

Kısıt 2: $|\sigma(S_I) - \sigma(S_R)| + d_2^- - d_2^+ = sağyan2$

İşaret kısıtı: $d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+ \geq 0$

$d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+ \leq 1000$

$500 < d^* \leq 5000$

Model 3 Preemptive veya Lexicographic yöntem olarak da bilinen öncelikli yöntemle çözülmüştür. Birinci öncelik kısıt 1'de ikinci öncelik ise kısıt 2'dedir. Model 3 lognormal dağılım, toplam hasar fazlası reasürans anlaşması, $\theta = 0{,}3$ ve $\alpha = 0{,}05$, beklenen değer prim ilkesi, 1000 standart sapma ve 1000 beklenen değer için 300.000 iterasyon ile çalıştırıldığında sonuçlar;

d^*	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+
1459,6	721,9	0	242,6	0

Sigortacının karının ortalama değeri: 248,6597

Reasürörün karının ortalama değeri: 56,0280

Sigortacının karının standart sapması: 472,5813

Reasürörün karının standart sapması: 682,8856

$VaR\{|S_I - S_R|\} + d_1^- - d_1^+ = -721{,}9$

$|std(S_I) - std(S_R)| + d_2^- - d_2^+ = -32{,}2956$

d^* optimal saklama payı= **1459,6** (optimal saklama payı Model 1'de ve Model 2'de bulunan optimal saklama payları arasında kaldı)

d_1^- negatif sapma değişkeni=**721,9**

d_1^+ pozitif sapma değişkeni=**0** (modelde istenmeyen, amaç fonksiyonunda minimize edilmeye çalışılan değişken)

d_2^- negatif sapma değişkeni=**242,6**

d_2^+ pozitif sapma değişkeni=**0** (modelde istenmeyen, amaç fonksiyonunda minimize edilmeye çalışılan değişken)

Model 3 hedef programlama modelini lognormal, Pareto ve üstel dağılım için E(X)= 1000 beklenen değer ve farklı standart sapma değerleri ve $\theta = 0{,}3$ ve $\alpha = 0{,}05$ değerleri ile çalıştırılarak hem beklenen değer prim ilkesi hem de standart sapma prim ilkesi için elde edilen sonuçlar Çizelge 6.5'de verilmiştir.

Çizelge 6.5. Model 3 için optimal saklama payı değerleri - I

Beklenen Değer Prim İlkesi					**Standart Sapma Prim ilkesi**				
	Standart Sapma					Standart Sapma			
Dağılımlar	500	1000	1500	2000	**Dağılımlar**	500	1000	1500	2000
Lognormal	1251,0	**1459,6**	1527,9	X	Lognormal	1238,6	1239,7	1342,7	1295
Pareto	1989,3	3880,6	5000	5000	Pareto	1198,0	1218,3	1284,3	1309,5
Üstel		1649,6			Üstel		1494,5		

Model 3'ün hedef programlama ile çözümü yapılırken de optimal saklama paylarının üst seviyesi 5000 olarak belirlenmiştir. Bu nedenle değerler 5000 üzerine çıkamamaktadır. Ancak Model 3'te hem Model 2'de yer alan hem de Model 1'de yer alan kısıtlar beraber sağlanmaya çalışıldığından standart sapmalar arttığında optimal saklama payları arasındaki fark aniden büyümemektedir. En fazla sıçrama pareto dağılımda olmuştur. X'lerin yer aldığı hücreler için model sonuç elde edememiştir.

Model 3 aynı zamanda birinci önceliğin kısıt 2'de, ikinci önceliğin ise kısıt 1'de olduğu durum için de çözülmüştür. Bu durumda

Amaç/Hedef fonksiyonu: Min z= $P_1(d_2^+) + P_2(d_1^+)$

olarak değişir. Yeni sonuçlar Çizelge 6.6.'da verilmiştir.

Çizelge 6.6. Model 3 için optimal saklama payı değerleri – II

Beklenen Değer Prim İlkesi					**Standart Sapma Prim ilkesi**				
	Standart Sapma					Standart Sapma			
Dağılımlar	500	1000	1500	2000	**Dağılımlar**	500	1000	1500	2000
Lognormal	1253,1	**1536,3**	1572,7	X	Lognormal	1258,7	1514	X	X
Pareto	1945,9	5000	4997,7	5000	Pareto	1198,0	1218,3	1284,3	1309,5
Üstel		1660			Üstel		1518,2		

3 modelin karşılaştırılması

Model 1, Model 2 ve Model 3 için karşılaştırma lognormal dağılım üzerinden ve hasarın 1000 ortalama ve 1000 sapma ile dağıldığı varsayımıyla yapılmıştır. Model 1 için bu varsayımlara göre elde edilen optimal saklama payı seviyesi 1453,5, Model 2 için 2079,8 Model 3 için ise kısıt 1 ve 2'nin önceliklerinin sıralamalarının değişimiyle sırasıyla 1459,6 ve 1536,3 olarak elde edilmiştir. Genel itibariyle en düşük saklama payları Model 1'dedir. Model 1 her iki tarafın karları arasındaki farkın mutlak değerinin riske maruz değerini minimize etmeye çalışmakta, yani her iki tarafın da birbirine yakın karlar elde etmesini amaçlamaktadır. Model 2 ise her iki tarafın karlarının standart sapmalarını yakınlaştırmayı amaçlamaktadır ve optimal saklama payı bu modelde daha yüksektir. Çünkü saklama payı büyüdükçe sigortacının ödeyeceği büyük hasar riski artmakta reasürörün riski ise azalmaktadır. Model 3 ise her iki kısıtı birden sağlamaya çalışan modeldir ve optimal saklama payı seviyeleri diğer iki modelin optimal saklama payı seviyeleri arasında değerler almaktadır. Kısıtların öncelikleri değiştiğinde sonuçlar da değişmektedir. Bazı değerler için ufak bir artış olmakta, ancak bir kısmında da aynı kalmaktadır. Birinci öncelik sigorta şirketinin karının standart sapması ile reasürör şirketin karının standart sapmasının mutlak farkı olan Kısıt 2'ye verildiğinde optimal saklama payı beklendiği gibi artmıştır.

Model 4

Dördüncü modelde farklı bir kısıt ile çalışılmıştır. Sigortacının beklenen faydasının maksimize edilmesi amaçlanmıştır. Üstel fayda fonksiyonundan yararlanılmıştır. Modelin hedef programlama ile matematiksel gösterimi şu şekildedir;

Amaç/Hedef fonksiyonu: Min z= d_1^-

Kısıt 1: $E\left[1-\exp(-\beta(u_0+c-T_I))\right]+d_1^- - d_1^+ = sağyan1$

İşaret kısıtı: $d_1^-, d_1^+ \geq 0$

$d_1^-, d_1^+ \leq 1000$

$500 < d^* \leq 5000$

Yukarıdaki adımlar izlenerek Model 4 lognormal dağılım, toplam hasar fazlası reasürans anlaşması, beklenen değer prim ilkesi, $\beta = 0{,}001$, $\theta = 0{,}30$, $\alpha = 0{,}05$, u_0= 0 başlangıç sermayesi, 1000 standart sapma ve 1000 beklenen değer için 700.000 iterasyon ile çalıştırıldığında sonuçlar;

$$E\left[1-\exp(-\beta(u_0 + c - T_l))\right] + d_1^- - d_1^+ = sağyan1$$

d^* optimal saklama payı= **2023,6** (üstel fayda fonksiyonu ile sigorta şirketinin faydası maksimize edilmeye çalışıldığında optimal saklama payı)

d_1^- negatif sapma değişkeni=**0** (modelde istenmeyen, amaç fonksiyonunda minimize edilmeye çalışılan değişken)

d_1^+ pozitif sapma değişkeni=**0,1**

Model 4 için hedef programlama modelini lognormal, Pareto ve üstel dağılım için E(X)= 1000 beklenen değer ve farklı standart sapma değerleri için çalıştırarak hem beklenen değer prim ilkesi için hem de standart sapma prim ilkesi için elde edilen sonuçlar farklı β değerleri için Çizelge 6.7'de verilmiştir. Modelde başlangıç sermayesinin "0" kabul edilmesinin sebebi diğer modellerde de başlangıç sermayesinden bağımsız olarak hesap yapılmasıdır. Modeller arasında karşılaştırılma yapılabilmesi için bu gereklidir. Ayrıca başlangıç sermayesinden bağımsız olarak optimal saklama payı bulunması amaçlanmıştır. Üstel fayda fonksiyonu çıktıları sigortacının başlangıç sermayesi /varlığından bağımsızdır.

Çizelge 6.7. Model 4 için optimal saklama payı değerleri

MODEL 4									
$\beta = 0{,}001$									
Beklenen Değer Prim İlkesi					**Standart Sapma Prim ilkesi**				
	Standart Sapma					Standart Sapma			
Dağılımlar	500	1000	1500	2000	**Dağılımlar**	500	1000	1500	2000
Lognormal	1034,8	2023,6	2525,0	3372,3	Lognormal	1336,7	2334,8	2103,0	3416,0
Pareto	870,36	1045,8	3057,3	269,8,8	Pareto	863,69	2166,3	2131,8	2117,6
Üstel		2082,4			Üstel		2443,3		
$\beta = 0{,}005$									
Beklenen Değer Prim İlkesi					**Standart Sapma Prim ilkesi**				
	Standart Sapma					Standart Sapma			
Dağılımlar	500	1000	1500	2000	**Dağılımlar**	500	1000	1500	2000
Lognormal	1247,6	1130,6	1021,3	1190,3	Lognormal	1269,0	1104,0	1587,3	807,5
Pareto	1564,7	1205,2	1088,8	1076,6	Pareto	1175,1	1089,4	1045,2	1538,5
Üstel		1177,5			Üstel		1415,9		
$\beta = 0{,}01$									
Beklenen Değer Prim İlkesi					**Standart Sapma Prim ilkesi**				
	Standart Sapma					Standart Sapma			
Dağılımlar	500	1000	1500	2000	**Dağılımlar**	500	1000	1500	2000
Lognormal	1246,3	1130,0	1019,7	1165,8	Lognormal	1127,5	959,4	794,2	662,0
Pareto	1566,7	1211,3	1090,0	1076,4	Pareto	1030,7	1099,2	900,9	894,9
Üstel		1176,1			Üstel		1023,9		
$\beta = 0{,}05$									
Beklenen Değer Prim İlkesi					**Standart Sapma Prim ilkesi**				
	Standart Sapma					Standart Sapma			
Dağılımlar	500	1000	1500	2000	**Dağılımlar**	500	1000	1500	2000
Lognormal	1133,9	1000,79	1012,9	759	Lognormal	1021,3	854,0	684,0	557,04
Pareto	1242,3	990,74	963,32	949,41	Pareto	917,3	837,9	801,05	784,82
Üstel		1491,2			Üstel		914,53		
$\beta = 0{,}1$									
Beklenen Değer Prim İlkesi					**Standart Sapma Prim ilkesi**				
	Standart Sapma					Standart Sapma			
Dağılımlar	500	1000	1500	2000	**Dağılımlar**	500	1000	1500	2000
Lognormal	1038,0	912,78	773,77	657,51	Lognormal	1008,4	839,54	673,66	544,95
Pareto	939,48	880,3	852,3	838,8	Pareto	905,0	826,25	791,16	772,44
Üstel		962,0			Üstel		906,23		

$\beta = 0{,}001$ iken beklenen değer prim ilkesi varsayımında standart sapma değerleri arttıkça hem üstel hem de pareto dağılım için optimal saklama payı seviyeleri de artmaktadır. Diğer β değerleri için ise yani β arttığında bu durum tersine dönmüş ve artan standart sapmalar karşısında optimal saklama payı azalmıştır. Bu bağlamda $\beta = 0{,}001$ kritik bir değer teşkil etmektedir ve $\beta = 0{,}005$ ve sonrası için şöyle bir genelleme yapılabilmektedir; β değeri arttıkça optimal saklama payı seviyeleri düşmektedir.

Model 5

Beşinci modelde sigortacının beklenen faydasının maksimize edilmesi amacıyla logaritmik fayda fonksiyonundan yararlanılmıştır. Modelin hedef programlama ile matematiksel gösterimi şu şekildedir;

Amaç/Hedef fonksiyonu: Min z= d_1^-

Kısıt 1: $E\left[\beta \log(u_0 + c - T_l)\right] + d_1^- - d_1^+ = sağyan1$

İşaret kısıtı: $d_1^-, d_1^+ \geq 0$

$d_1^-, d_1^+ \leq 1000$

$500 < d^* \leq 5000$

Yukarıdaki adımlar izlenerek Model 5 lognormal dağılım, toplam hasar fazlası reasürans anlaşması, beklenen değer prim ilkesi, $\beta = 0{,}001$, $\theta = 0{,}30$, "2000" başlangıç sermayesi, 1000 standart sapma ve 1000 beklenen değer için 700.000 iterasyon ile çalıştırıldığında sonuçlar;

$$E\left[\beta \log(u_0 + c - T_l)\right] + d_1^- - d_1^+ = sağyan1$$

d^* optimal saklama payı= **3161,1** (üstel fayda fonksiyonu ile sigorta şirketinin faydası maksimize edilmeye çalışıldığında optimal saklama payı)

d_1^- negatif sapma değişkeni=**0** **(**modelde istenmeyen, amaç fonksiyonunda minimize edilmeye çalışılan değişken)

d_1^+ pozitif sapma değişkeni=**0,01**

Başlangıç sermayesi üstel fayda fonksiyonunda olduğu gibi ‘0’ olarak seçilmemiştir çünkü logaritmik fayda fonksiyonu $u(x) = \beta \log x \quad x > 0$, β>0 x’in sadece pozitif değerleri için tanımlıdır. Bu sebeple başlangıç sermayesi $u_0 + c - T_l$ fonksiyon değerini negatife düşürmeyecek şekilde ‘2000’ olarak belirlenmiştir. Hem net prim hem de sigortacının maliyeti saklama payı seviyesine göre değişmektedir ve modelde saklama payının optimal değerini elde etmek asıl amaç olduğu için saklama payı seviyesi sabit değildir. Bu nedenle model için belirlenen aralıkta değerler alabilecek olan tüm saklama payı değerleri karşısında fonksiyon değerinin pozitif olması göz önüne alınmıştır.

Model 5 için hedef programlama modelini lognormal, Pareto ve üstel dağılım için E(X)= 1000 beklenen değer ve farklı standart sapma değerleri için çalıştırarak hem beklenen değer prim ilkesi için hem de standart sapma prim ilkesi için elde edilen sonuçlar farklı başlangıç sermayeleri için sırasıyla Çizelge 6.8’de verilmiştir.

Çizelge 6.8. Model 5 için farklı başlangıç sermayeleriyle optimal saklama payı değerleri

MODEL 5 $\beta = 0{,}001$									
u_0=2000									
Beklenen Değer Prim İlkesi					**Standart Sapma Prim ilkesi**				
	Standart Sapma					Standart Sapma			
Dağılımlar	500	1000	1500	2000	**Dağılımlar**	500	1000	1500	2000
Lognormal	3294,2	3161,1	2227,9	1051,6	Lognormal	3269,5	2754,5	2252,3	1514,7
Pareto	3247,5	3205,3	3151,6	3125,9	Pareto	3147,0	2759,3	2571,4	2321,0
Üstel		3193,0			Üstel		3002,7		
u_0=2500									
Beklenen Değer Prim İlkesi					**Standart Sapma Prim ilkesi**				
	Standart Sapma					Standart Sapma			
Dağılımlar	500	1000	1500	2000	**Dağılımlar**	500	1000	1500	2000
Lognormal	3760,1	3568,6	3423,6	2860,1	Lognormal	3778,4	3376,9	2889,4	2283,6
Pareto	3464,9	3715,9	3668,6	3637,2	Pareto	3604,5	3109,6	3007,5	2968,7
Üstel		3495,0			Üstel		3264,5		
u_0=3000									
Beklenen Değer Prim İlkesi					**Standart Sapma Prim ilkesi**				
	Standart Sapma					Standart Sapma			
Dağılımlar	500	1000	1500	2000	**Dağılımlar**	500	1000	1500	2000
Lognormal	4299,3	4229,5	4060,8	3880,2	Lognormal	4288,8	4032,6	3434,7	2934,5
Pareto	4080,9	3977,2	4200,2	4185,4	Pareto	4163,2	3907,3	3495,3	2766,9
Üstel		4263,5			Üstel		4163,8		

$\beta = 0{,}001$ ile Model 5'te başlangıç sermayesi arttıkça çizelgede yer alan tüm tablolar için yukarıdan aşağıya doğru) beklenen değer prim ilkesi ve standart sapma prim ilkesi altında tüm dağılımlar için optimal saklama payı değerleri de artmaktadır. Başlangıç sermayesi artan şirketin risk kabul edebilirliği de artmaktadır. Ancak sapmalar arttıkça yani risk arttıkça (çizelgede yer alan tüm tablolar için soldan sağa doğru) optimal saklama payı seviyeleri küçülmektedir. Bu doğal ve beklenen bir sonuçtur çünkü Model 5 sigortacı açısından fayda fonksiyonunu kısıt olarak değerlendirmektedir.

Model 6

Model 3'teki kısıtlara Model 4'teki kısıt eklenerek 3 kısıtlı Model 6 oluşturulmuştur. Böylece karlar arasındaki farkın mutlak değerinin riske maruz değerini ve karların standart sapmaları arasındaki farkın mutlak değerini minimize ederken sigortacının beklenen faydasını üstel fayda fonksiyonu yardımıyla maksimize eden optimal saklama payı modelinin çözümü hedef programlama ile elde edilmeye çalışılmaktadır.

Amaç/Hedef fonksiyonu: min z= $P_1(d_1^+) + P_2(d_2^+) + P_3\left(d_3^-\right)$

Kısıt 1: $VaR\left\{\left|S_I - S_R\right|\right\} + d_1^- - d_1^+ = sağyan1$

Kısıt 2: $\left|\sigma(S_I) - \sigma(S_R)\right| + d_2^- - d_2^+ = sağyan2$

Kısıt 3: $E\left[1 - \exp(-\beta(u_0 + c - T_I))\right] + d_3^- - d_3^+ = sağyan3$

İşaret kısıtı: $d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+, d_3^-, d_3^+ \geq 0$

$d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+, d_3^-, d_3^+ \leq 1000$

$500 < d^* \leq 5000$

Birinci öncelik kısıt 1'de ikinci öncelik ise kısıt 2'te ve üçüncü öncelik ise kısıt 3'tedir. Model 6 lognormal dağılım, toplam hasar fazlası reasürans anlaşması, $\theta = 0{,}3$ ve $\alpha = 0{,}05$, beklenen değer prim ilkesi, 0 başlangıç sermayesi, $\beta = 0{,}001$, 1000 standart sapma ve 1000 beklenen değer için 300.000 iterasyon ile çalıştırıldığında sonuçlar;

d^* optimal saklama payı= **1643,0** (optimal saklama payı Model 1'de ve Model 2'de bulunan optimal saklama payları arasında kaldı)

d_1^- negatif sapma değişkeni=**765,5**

d_1^+ pozitif sapma değişkeni=**0** (modelde istenmeyen, amaç fonksiyonunda minimize edilmeye çalışılan değişken)

d_2^- negatif sapma değişkeni=**185,6**

d_2^+ pozitif sapma değişkeni=**0** (modelde istenmeyen, amaç fonksiyonunda minimize edilmeye çalışılan değişken)

d_3^- negatif sapma değişkeni=**0** (modelde istenmeyen, amaç fonksiyonunda minimize edilmeye çalışılan değişken)

d_3^+ pozitif sapma değişkeni=**896,0**

Çizelge 6.9. Model 6 için farklı başlangıç sermayeleriyle optimal saklama payı değerleri

MODEL 6 $\beta = 0{,}001$									
u_0=0									
Beklenen Değer Prim İlkesi					**Standart Sapma Prim ilkesi**				
	Standart Sapma					Standart Sapma			
Dağılımlar	500	1000	1500	2000	**Dağılımlar**	500	1000	1500	2000
Lognormal	1255,4	1643,0	1531,5	X	Lognormal	1252,0	1575,3	X	X
Pareto	1905,4	4178,0	5000	5000	Pareto	1189,4	X	1326,5	X
Üstel		1654,5			Üstel		1557,6		
u_0=1000									
Beklenen Değer Prim İlkesi					**Standart Sapma Prim ilkesi**				
	Standart Sapma					Standart Sapma			
Dağılımlar	500	1000	1500	2000	**Dağılımlar**	500	1000	1500	2000
Lognormal	1251,2	1648,6	1583,0	X	Lognormal	1251,2	1648,6	1583,0	X
Pareto	1913,2	5000	5000	5000	Pareto	1913,2	5000	5000	5000
Üstel		1661,2			Üstel		1646,7		
u_0=2000									
Beklenen Değer Prim İlkesi					**Standart Sapma Prim ilkesi**				
	Standart Sapma					Standart Sapma			
Dağılımlar	500	1000	1500	2000	**Dağılımlar**	500	1000	1500	2000
Lognormal	1250,1	1608,9	1534,9	X	Lognormal	1250,1	1608,9	1534,9	X
Pareto	1850,9	4263,4	5000	5000	Pareto	1850,9	4263,4	5000	5000
Üstel		1664,5			Üstel		1664,5		
u_0=3000									
Beklenen Değer Prim İlkesi					**Standart Sapma Prim ilkesi**				
	Standart Sapma					Standart Sapma			
Dağılımlar	500	1000	1500	2000	**Dağılımlar**	500	1000	1500	2000
Lognormal	1249,9	1646,7	1522,1	X	Lognormal	1249,9	1646,7	1522,1	X
Pareto	1915,9	3788,0	5000	5000	Pareto	1915,9	3788,0	5000	5000
Üstel		1669,6			Üstel		1669,6		

Üç kısıtı birden sağlamaya çalışan Model 6 için beklenen fayda kısıtı en son öneme sahip olduğu için başlangıç sermayelerindeki değişimin sonuçları kayda değer bir şekilde etkilemediği görülmektedir. Lognormal dağılım için standart sapmanın artışı optimal saklama payı seviyesinde önemli bir değişiklik oluşturmazken Pareto dağılımda standart sapmadaki değişim optimal saklama payında oldukça etkili olmuştur. Standart sapma arttıkça optimal saklama payının da arttığı görülmektedir. Optimal saklama payı için üst sınır 5000 olarak belirlendiği için değerler 5000 üzerine çıkamamıştır. Sapma değişkenleri için konulan sınırlarla, standart sapmanın 2000 olduğu bazı durumlarda model sonuç elde edememiş ve üç kısıtı birden sağlayamamıştır. Bu durum çizelgede ‘X’ ile gösterilmektedir.

Model 7

Model 7'de Model 6'da yer alan 3 kısıt bulunmaktadır ancak sigortacının beklenen faydasını üstel fayda fonksiyonu yerine logaritmik fayda fonksiyonu yardımıyla maksimize eden optimal saklama payı modelinin çözümü hedef programlama ile elde edilmeye çalışılmaktadır.

Amaç/Hedef fonksiyonu: Min z= $P_1(d_1^+) + P_2(d_2^+) + P_3\left(d_3^-\right)$

Kısıt 1: $VaR\left\{\left|S_I - S_R\right|\right\} + d_1^- - d_1^+ = sağyan1$

Kısıt 2: $\left|\sigma(S_I) - \sigma(S_R)\right| + d_2^- - d_2^+ = sağyan2$

Kısıt 3: $E\left[\beta \log(u_0 + c - T_I)\right] + d_3^- - d_3^+ = sağyan3$

İşaret kısıtı: $d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+, d_3^-, d_3^+ \geq 0$

$$d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+, d_3^-, d_3^+ \leq 1000$$

$$500 < d^* \leq 5000$$

Birinci öncelik kısıt 1'de ikinci öncelik ise kısıt 2'te ve üçüncü öncelik ise kısıt 3'tedir. Model 7 lognormal dağılım, toplam hasar fazlası reasürans anlaşması, $\theta = 0{,}3$ ve $\alpha = 0{,}05$, beklenen değer prim ilkesi, 1000 başlangıç sermayesi, $\beta = 0{,}001$, 1000 standart sapma ve 1000 beklenen değer için 300.000 iterasyon ile çalıştırıldığında sonuçlar;

d^* optimal saklama payı= **1541,3** (optimal saklama payı Model 1'de ve Model 2'de bulunan optimal saklama payları arasında kaldı)

d_1^- negatif sapma değişkeni= **725,4**

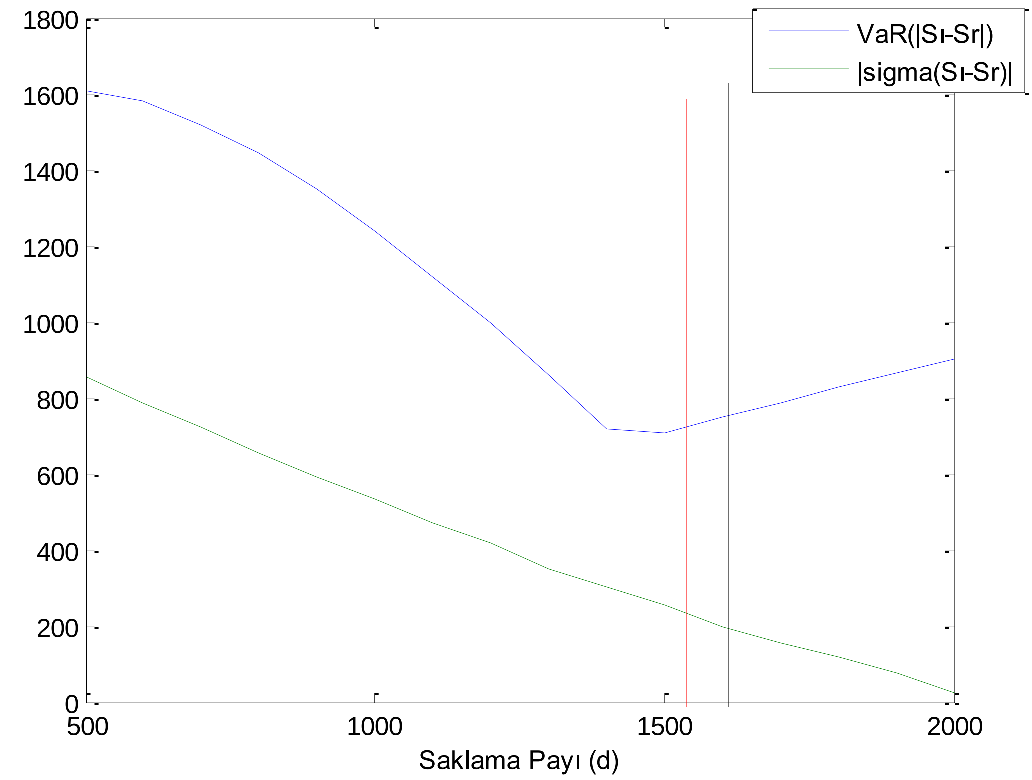
d_1^+ pozitif sapma değişkeni=**0** (modelde istenmeyen, amaç fonksiyonunda minimize edilmeye çalışılan değişken)

d_2^- negatif sapma değişkeni= **234,6**

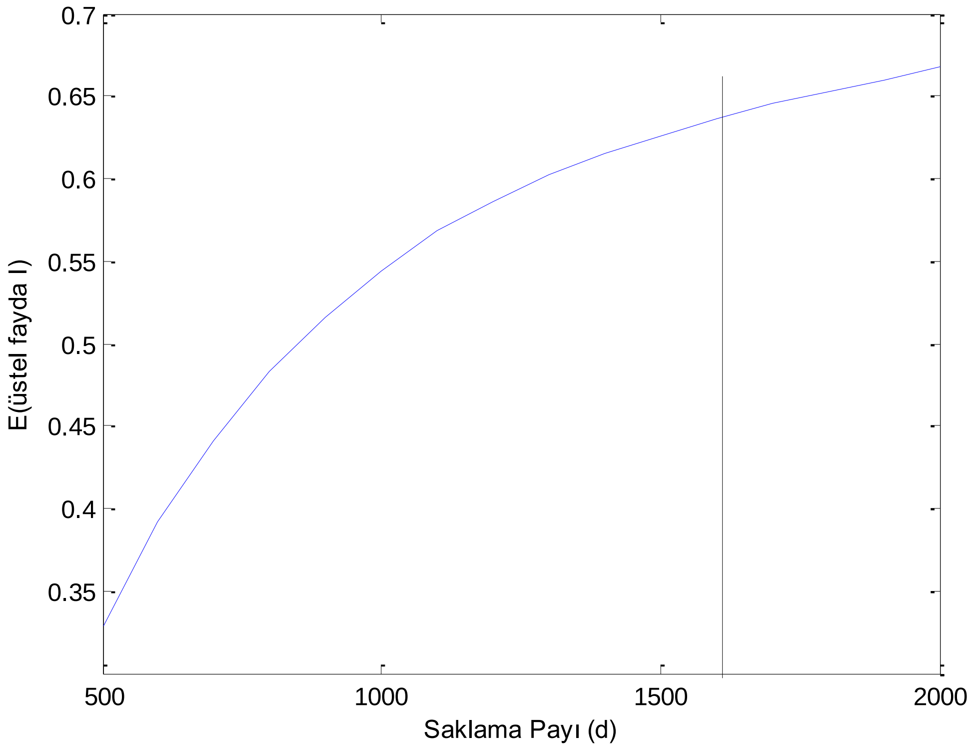
d_2^+ pozitif sapma değişkeni=**0** (modelde istenmeyen, amaç fonksiyonunda minimize edilmeye çalışılan değişken)

d_3^- negatif sapma değişkeni=**0** (modelde istenmeyen, amaç fonksiyonunda minimize edilmeye çalışılan değişken)

d_3^+ pozitif sapma değişkeni= **1000,0**

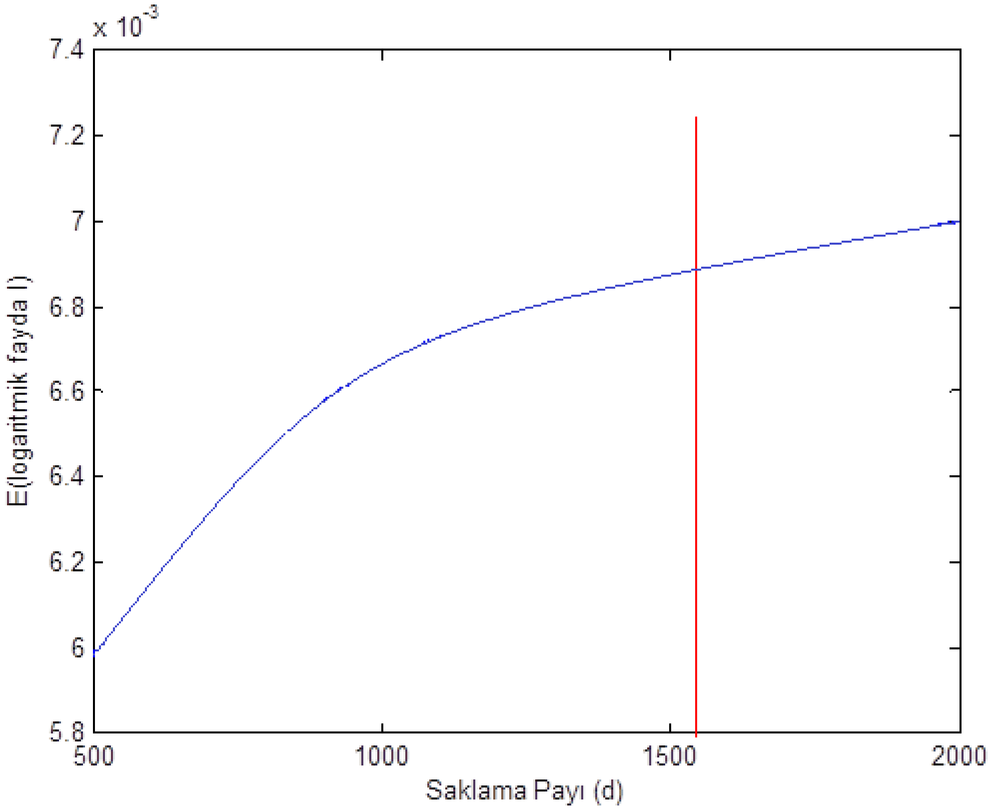


Şekil 6. 1. Model 6 ve 7 için farklı saklama payı değerleri için kısıt 1 ve kısıt 2 değerleri



Şekil 6. 2. Model 6 için saklama payı değiştikçe sigortacının beklenen faydası

Şekil 6.1.'de Kısıt 1, $VaR\{|S_I - S_R|\}$ fonksiyonunun Bölüm 4'te de gösterildiği üzere 1500'den önce (1453) optimal noktasına vardığı görülmektedir. Ancak Model 6 aynı zamanda kısıt 2'yi de minimize etmeye ve kısıt 3'ü de maksimize etmeye çalışmaktadır. Kısıt 3, (şekil 6.2) sigorta şirketinin üstel fayda fonksiyonu ile farklı saklama payı değerleri için giderek artan bir grafik göstermektedir. Her 3 kısıtı da sağlamaya çalışan ve önceliği 1. Kısıt olan model d^*=**1643,0** noktasında optimal değerine ulaşmaktadır. Siyah çizgi Model 6 için kırmızı çizgi ise Model 7 için optimal saklama payı seviyesini göstermektedir.



Şekil 6.3 . Model 7 için saklama payı değiştikçe sigortacının beklenen faydası

Model 7 için kısıt 1 ve kısıt 2 Model 6 ile aynıdır ve grafikleri Şekil 6.2.'deki gibidir. Yalnızca sigorta şirketinin faydası logaritmik fayda fonksiyonu ile ifade edildiği için Kısıt 3'ün grafiği değişmiştir ve Şekil 6.3'te verilmiştir. Kırmızı çizgi optimal saklama payı seviyesini d^*=**1541,3** göstermektedir.

Çizelge 6.10. Model 7 için farklı başlangıç sermayeleriyle optimal saklama payı değerleri

MODEL 7 $\beta = 0{,}001$									
u_0=1000									
Beklenen Değer Prim İlkesi					**Standart Sapma Prim ilkesi**				
	Standart Sapma					Standart Sapma			
Dağılımlar	500	1000	1500	2000	**Dağılımlar**	500	1000	1500	2000
Lognormal	1250,4	1541,3	1485,8	X	Lognormal	1254,4	1440,1	X	X
Pareto	1920,9	1450,7	1350,8	1292,0	Pareto	1172,2	1246,1	1265,9	1181,8
Üstel		1675,9			Üstel		1426,5		
u_0=1500									
Beklenen Değer Prim İlkesi					**Standart Sapma Prim ilkesi**				
	Standart Sapma					Standart Sapma			
Dağılımlar	500	1000	1500	2000	**Dağılımlar**	500	1000	1500	2000
Lognormal	1249,9	1556,5	1435,9	X	Lognormal	1258,0	1540,6	X	X
Pareto	1925,9	1474,2	1325,8	1504,5	Pareto	1202,2	1253,1	1269,9	1193,3
Üstel		1672,7			Üstel		1427,5		
u_0=3000									
Beklenen Değer Prim İlkesi					**Standart Sapma Prim ilkesi**				
	Standart Sapma					Standart Sapma			
Dağılımlar	500	1000	1500	2000	**Dağılımlar**	500	1000	1500	2000
Lognormal	1253,8	1593,6	1529,0	X	Lognormal	1245,5	1551,5	X	X
Pareto	1926,8	4157,1	4192,1	1291,3	Pareto	1181,9	X	1250,2	X
Üstel					Üstel		1532,2		

Çalışmanın devamında çok amaçlı optimal reasürans çalışmalarının sigortacı açısından ya da reasürör açısından çalışılması ve her iki bakış açısıyla çalışılması sonucunda elde edilen optimal saklama paylarının birbiriyle kıyaslanması için 4 model daha oluşturulmuştur. Bu modeller aynı varsayımlar altında hedef programlama yardımıyla ve öncelikli hedef programlama tekniğiyle çözülmüştür. Modellerin kısıtları ve varsayımları aşağıda verilmiştir.

Model 8, Model 9, Model 10 ve Model 11 sırasıyla;

- sigortacının bakış açısıyla çok amaçlı/kısıtlı optimal reasürans modeli,
- reasürörün bakış açısıyla çok amaçlı/kısıtlı optimal reasürans modeli,
- sigortacının menfaatlerini öncelik olarak alırken reasürörü de hesaba katan çok amaçlı/kısıtlı optimal reasürans modeli,
- reasürörün menfaatlerini öncelik olarak alırken sigortacıyı de hesaba katan çok amaçlı/kısıtlı optimal reasürans modeli,

olarak kurulmuştur. Hedef programlama modeli ile çözüme ulaşılmıştır. Amaç çok amaçlı karar verme yöntemini kullanarak farklı bakış açılarıyla elde edilen optimal saklama payı seviyeleri arasında kıyaslama ve durum değerlendirmesi yapmaktır. Bu sebeplerle modellere dahil edilen kısıtlar Çizelge 6.11.'de verilmiştir.

Çizelge 6.11. Model 8, 9, 10 ve 11 için kısıtlar

	Kısıt 1	**Kısıt 2**	**Kısıt 3**
Model 8	Sigortacının beklenen karı	Sigortacının beklenen faydası	Sigortacının toplam maliyetinin riske maruz değeri
Model 9	Reasürörün beklenen karı	Reasürörün beklenen faydası	Reasürörün toplam maliyetinin riske maruz değeri
Model 10	Sigortacının beklenen karı	Sigortacının beklenen faydası	Reasürörün beklenen karı
Model 11	Reasürörün beklenen karı	Reasürörün beklenen faydası	Sigortacının beklenen karı

Optimal saklama payı değeri araştırılırken kar ve fayda kısıtları maksimize edilmeye çalışılırken maliyet kısıtı minimize edilmeye çalışılmaktadır.

Model 10 ve Model 11 için üçüncü kısıtlar sırasıyla "reasürörün toplam maliyetinin riske maruz değeri" ve "sigortacının toplam maliyetinin riske maruz değeri" olacak şekilde değiştirilerek alternatif sonuçlara da bakılmıştır.

Model 8,9,10 ve 11 için varsayımlar şu şekildedir;

- Birinci öncelik kısıt 1'de ikinci öncelik ise kısıt 2'te ve üçüncü öncelik ise kısıt 3'tedir.
- Hasarlar lognormal dağılım ile dağılmaktadır.
- Toplam hasar fazlası reasürans anlaşması kullanılmıştır.
- Prim yükleme katsayısı $\theta = 0{,}3$ ve güvenlik seviyesi $\alpha = 0{,}05$ olarak alınmıştır.
- Sigortacının ve reasürörün aldığı primler için beklenen değer prim ilkesi kullanılmıştır.
- Başlangıç sermayesi 1000'dir.
- $\beta = 0{,}001$ ile üstel fayda fonksiyonu kullanılmıştır.
- Tüm modeler 1000 standart sapma ve 1000 beklenen değer için 300.000 iterasyon ile çalıştırılmıştır.

Model 8

Model 8 durumu sadece sigortacı bakış açısıyla ele alan modeldir. Sigortacının karını ve faydasını (üstel fayda fonksiyonu yardımıyla) maksimize etmeye çalışırken sigortacının toplam maliyetinin riske maruz değerini de minimize etmeye çalışmaktadır.

Amaç/Hedef fonksiyonu: Min z= $P_1(d_1^-)+P_2(d_2^-)+P_3\left(d_3^+\right)$

Kısıt 1: $E[S_I]+d_1^- - d_1^+ = sağyan1$

Kısıt 2: $E\left[1-\exp(-\beta(u_0+c-T_I))\right]+d_2^- - d_2^+ = sağyan2$

Kısıt 3: $VaR(T_I)+d_3^- - d_3^+ = sağyan3$

İşaret kısıtı: $d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+, d_3^-, d_3^+ \geq 0$

$d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+, d_3^-, d_3^+ \leq 2000$

$500 < d^* \leq 2000$

Sonuçlar:

d^*	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+
2000	0	2000	0	2000	2000	0

Sadece sigortacıyı hesaba katan ve hem beklenen karını ve faydasını maksimum hem de toplam maliyeti minimum yapmak isteyen Model 8 belirlenen sınırlar dahilinde alabileceği en yüksek saklama payını (optimum saklama payı 2000) alacak şekilde sonuçlanmıştır. Öncelik 1. ve 2. kısıtta iken beklenen kar ve faydasını maksimize etmek ön planda olmuştur.

Model 9

Model 9 durumu sadece reasürör bakış açısıyla ele alan modeldir. Reasürörün karını ve faydasını (üstel fayda fonksiyonu yardımıyla) maksimize etmeye çalışırken toplam maliyetinin riske maruz değerini de minimize etmeye çalışmaktadır.

Amaç/Hedef fonksiyonu: Min $z = P_1(d_1^-) + P_2(d_2^-) + P_3\left(d_3^+\right)$

Kısıt 1: $E[S_R] + d_1^- - d_1^+ = sağyan1$

Kısıt 2: $E\left[1 - \exp(-\beta(u_0 + c - T_R))\right] + d_2^- - d_2^+ = sağyan2$

Kısıt 3: $VaR(T_R) + d_3^- - d_3^+ = sağyan3$

İşaret kısıtı: $d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+, d_3^-, d_3^+ \geq 0$

$d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+, d_3^-, d_3^+ \leq 2000$

$500 < d^* \leq 2000$

Sonuçlar:

d^*	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+
500	0	0	0	2000	1921	0

Sadece reasürörü hesaba katan ve hem beklenen karını ve faydasını maksimum hem de toplam maliyeti minimum yapmak isteyen Model 9 belirlenen sınırlar dahilinde reasürans şirketinin karşı tarafa sağlayabileceği en düşük reasürans korumasını (optimum saklama payı 500) verecek şekilde sonuçlanmıştır.

Model 10

Model 10 durumu öncelikli olarak sigortacı bakış açısıyla ele alan ancak reasürörü de hesaba katan modeldir. Sigortacının beklenen karını ve faydasını (üstel fayda fonksiyonu yardımıyla) maksimize etmeye çalışırken reasürörün beklenen karını da maksimize etmeye çalışmaktadır (A). İkinci bir seçenek olarak da kısıt 3 “reasürörün toplam maliyetinin riske maruz değeri” olacak şekilde değiştirilmiştir ve bu değer modelde minimize edilmeye çalışılmaktadır.

Amaç/Hedef fonksiyonu: Min $z = P_1(d_1^-) + P_2(d_2^-) + P_3\left(d_3^-\right)$

Kısıt 1: $E[S_I] + d_1^- - d_1^+ = sağyan1$

Kısıt 2: $E\left[1 - \exp(-\beta(u_0 + c - T_I))\right] + d_2^- - d_2^+ = sağyan2$

Kısıt 3 (A): $E[S_R] + d_3^- - d_3^+ = sağyan3$

İşaret kısıtı: $d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+, d_3^-, d_3^+ \geq 0$

$d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+, d_3^-, d_3^+ \leq 500$

$500 < d^* \leq 2000$

Sonuçlar (A):

d^*	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+
1621,7	0	500	0	500	0	500

$E[S_I] = 245{,}57$

$E[S_R] = 53{,}32$

$E\left[1 - \exp(-\beta(u_0 + c - T_I))\right] = 0{,}375$

Hem sigortacıyı hem de reasürörü hesaba katan sigortacının beklenen karını ve faydasını maksimum yapmaya çalışırken reasürörün de beklenen karını maksimize etmeye çalışan Model 10(A) belirlenen sınırlar dahilinde optimum saklama payını 1621,7 olarak bulmuştur.

Amaç/Hedef fonksiyonu: Min z= $P_1(d_1^-) + P_2(d_2^-) + P_3\left(d_3^+\right)$

Kısıt 1: $E[S_I] + d_1^- - d_1^+ = sağyan1$

Kısıt 2: $E\left[1 - \exp(-\beta(u_0 + c - T_I))\right] + d_2^- - d_2^+ = sağyan2$

Kısıt 3 (B): $VaR(T_R) + d_3^- - d_3^+ = sağyan3$

İşaret kısıtı: $d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+, d_3^-, d_3^+ \geq 0$

$d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+, d_3^-, d_3^+ \leq 500$

$500 < d^* \leq 2000$

Sonuçlar (B):

d^*	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+
2000	0	2000	0	256	2000	0

Hem sigortacıyı hem de reasürörü hesaba katan sigortacının beklenen karını ve faydasını maksimum yapmaya çalışırken reasürörün de beklenen maliyetinin riske maruz değerini minimize etmeye çalışan Model 10(B) belirlenen sınırlar dahilinde alabileceği en yüksek değeri alarak Model 8'e benzer şekilde sonuçlanmıştır. Bunun nedeni önceliğin Model 8'de olduğu gibi beklenen karın ve faydanın maksimize edilmesi kısıtlarında olması yani sigortacı açısından risk almayı seven kar ve fayda odaklı bir model olmasıdır. Diğer bir nedeni ise 3. Kısıtın da ilk 2 kısıtla paralel yönde olmasıdır. Risk almak istemeyen reasürör saklama payının büyük olmasını tercih edecektir.

Model 11

Model 11 durumu öncelikli olarak reasürör bakış açısıyla ele alan ancak reasürörün de hesaba katan modeldir. Reasürörün karını ve faydasını (üstel fayda fonksiyonu yardımıyla) maksimize etmeye çalışırken sigortacının toplam maliyetinin riske maruz değerini de minimize etmeye çalışmaktadır.

Amaç/Hedef fonksiyonu: Min z= $P_1(d_1^-) + P_2(d_2^-) + P_3\left(d_3^-\right)$

Kısıt 1: $E[S_R] + d_1^- - d_1^+ = sağyan1$

Kısıt 2: $E\left[1 - \exp(-\beta(u_0 + c - T_R))\right] + d_2^- - d_2^+ = sağyan2$

Kısıt 3 (A): $E[S_I] + d_3^- - d_3^+ = sağyan3$

İşaret kısıtı: $d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+, d_3^-, d_3^+ \geq 0$

$d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+, d_3^-, d_3^+ \leq 500$

$500 < d^* \leq 2000$

Sonuçlar (A):

d^*	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+
1445,9	0	500	0	500	0	500

$E[S_I] = 236{,}08$

$E[S_R] = 62{,}49$

$E\left[1 - \exp(-\beta(u_0 + c - T_R))\right] = 0{,}7352$

Hem sigortacıyı hem de reasürörü hesaba katan reasürörün beklenen karını ve faydasını maksimum yapmaya çalışırken sigortacının da beklenen karını maksimize etmeye çalışan Model 11(A) belirlenen sınırlar dahilinde sigortacı ve reasürör şirketin karları arasındaki mutlak farkın riske maruz değerini minimize eden Model 1'e oldukça yakın bir sonuç elde etmiş ve optimum saklama payını 1445.9 olarak bulmuştur. Öncelik reasürörün beklenen karı olduğu için Model 10 ile karşılaştırıldığında $E[S_R]$ daha yüksek $E[S_I]$ daha düşük olacak bir optimal saklama payı elde edilmiştir.

Amaç/Hedef fonksiyonu: Min z= $P_1(d_1^-)+P_2(d_2^-)+P_3\left(d_3^+\right)$

Kısıt 1: $E[S_R]+d_1^- - d_1^+ = sağyan1$

Kısıt 2: $E\left[1-\exp(-\beta(u_0+c-T_R))\right]+d_2^- - d_2^+ = sağyan2$

Kısıt 3 (B): $VaR(T_I)+d_3^- - d_3^+ = sağyan3$

İşaret kısıtı: $d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+, d_3^-, d_3^+ \geq 0$

$$d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+, d_3^-, d_3^+ \leq 2000$$

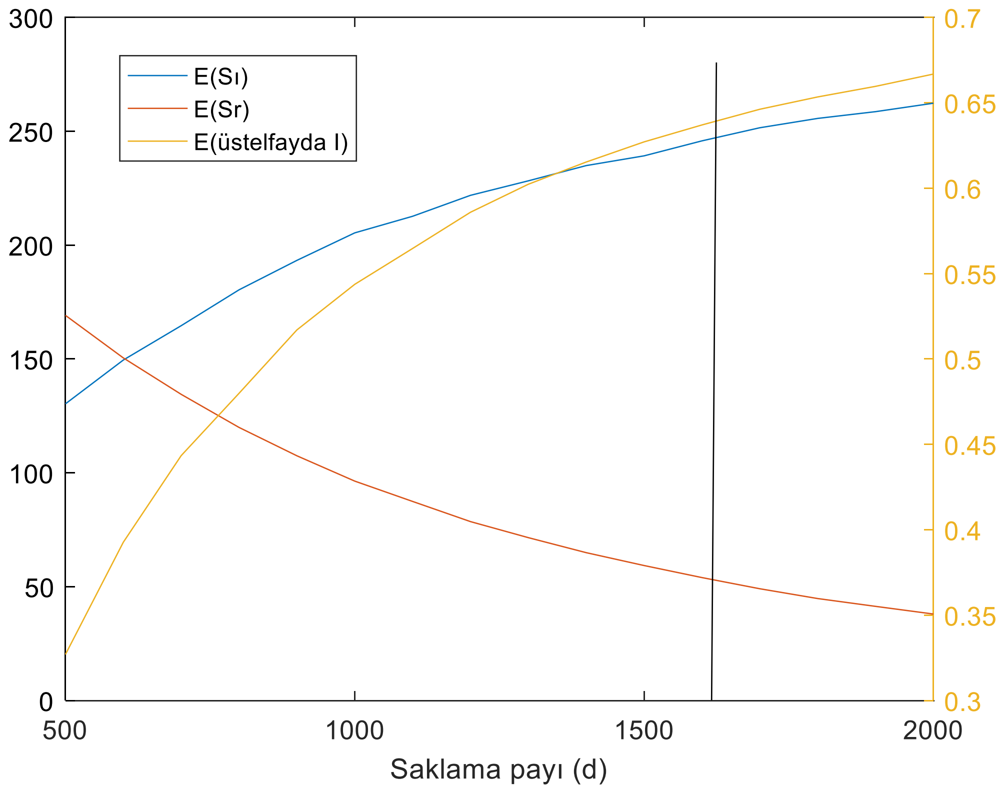
$$500 < d^* \leq 2000$$

Sonuçlar (B):

d^*	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+
500	0	500	0	500	500	0

Hem sigortacıyı hem de reasürörü hesaba katan reasürörün beklenen karını ve faydasını maksimum yapmaya çalışırken sigortacının da beklenen maliyetinin riske maruz değerini minimize etmeye çalışan Model 11(B) belirlenen sınırlar dahilinde alabileceği en düşük optimal saklama payını (500) alarak Model 9 la benzer biçimde sonuçlanmıştır. Bunun sebebi model her iki tarafı da hesaba katıyor olsa da reasürör açısından risk almayı seven kar ve fayda odaklı sigortacı açısından ise risk almaktan kaçınan bir model olmasıdır. Kısıtlar birbiriyle çakışan değil paralel ilerleyen ve aynı amaca hizmet eden kısıtlar olmuştur.

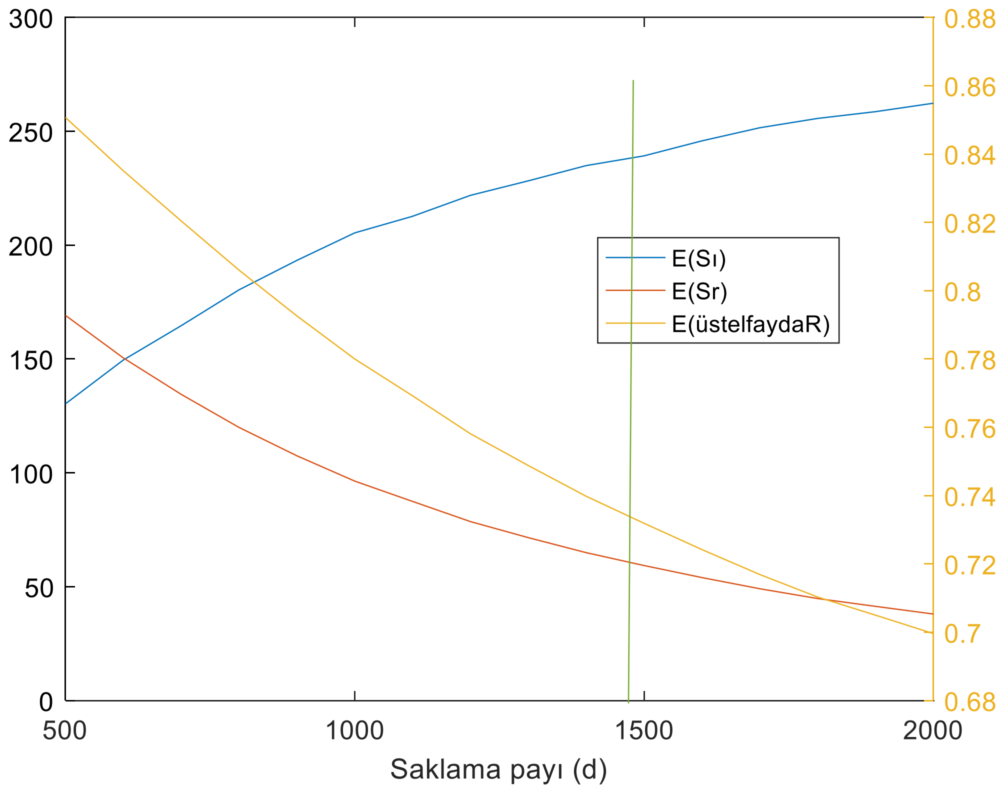
Model 10 (A) ve Model 11(A) için elde edilen sonuçlar aşağıdaki şekiller yardımıyla özetlenmiştir.



Şekil 6.4 . Model 10 (A) için saklama payı değiştikçe kısıtlar

Şekil 6.4. Şekil 4.5.'te verilen sigortacı ve reasürörün karları arasındaki farkın riske maruz değerini minimize etmeye çalışan benzetim modelinin grafikleri ile karşılaştırıldığında hasarların lognormal dağıldığı durumun grafiğine oldukça benzemektedir.

Model 10 (A)'nın birinci önceliği sigortacının beklenen karı ve ikinci önceliği de sigortacının beklenen faydası olsa da bir yandan da reasürörün beklenen karını maksimize etmeye çalışmaktadır. Dolayısıyla her iki tarafı da göz önünde bulundurarak dengeye ulaşır. Sigortacının beklenen faydasının seçilen minimum saklama payı seviyesi olan 500 için aldığı değer (en düşük değeri) 0,3276, seçilen maksimum saklama payı seviyesi olan 2000 için aldığı değer (en yüksek değeri) de 0,6670'dir. Siyah çizgi Model 10 için optimum saklama payı seviyesini göstermektedir.



Şekil 6.5 . Model 11(A) için saklama payı değiştikçe kısıtlar

Model 11 (A)'nın birinci önceliği reasürörün beklenen karı ve ikinci önceliği de reasürörün beklenen faydası olsa da bir yandan da sigortacının beklenen karını maksimize etmeye çalışmaktadır. Dolayısıyla her iki tarafı da göz önünde bulundurarak dengeye ulaşır. Reasürans şirketinin beklenen üstel faydasının seçilen minimum saklama payı seviyesi olan 500 için aldığı değer (en yüksek değeri) 0,85, seçilen maksimum saklama payı seviyesi olan 2000 için aldığı değer (en düşük değeri) de 0,70'dir. Yeşil çizgi Model 11 (A) için optimum saklama payı seviyesini göstermektedir.

7. SONUÇLAR VE ÖNERİLEN ÇALIŞMALAR

7.1. Sonuçlar

Tez kapsamında aktüeryal çalışmalar arasında önemli bir yeri olan ve son yıllarda yoğun bir biçimde ele alınan optimal reasürans konusu üzerinde durulmuş ve literatüre katkı sağlanması amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda optimal reasürans çalışmaları 4 ana başlık altında incelenmiştir; sigortacı açısından optimal reasüransı inceleyen çalışmalar, reasürör açısından optimal reasüransı inceleyen çalışmalar, sigortacı ve reasürör açısından optimal reasüransı inceleyen çalışmalar, çok ölçütlü optimal reasüransı inceleyen çalışmalar. Reasüransla ilgili temel tanım, kavram ve bilgiler verildikten sonra çalışmada kullanılan risk ölçümlerine değinilmiştir. Sigortacının toplam kaybının riske maruz değerini minimize etmeye çalışan analitik model sigortacı bakış açısıyla optimal reasürans çalışması başlığı altında incelenmiştir.

Tezde yapılanlar üç madde ile özetlenip sonuçları açısından incelenirse;

1) Tezin öncül çalışması olan benzetim çalışması incelenmiştir. Bu çalışmada daha önce literatürde kullanılmamış bir risk ölçümü olan “sigortacı ve reasürörün karları arasındaki farkın mutlak değerinin riske maruz değeri” ve “koşullu riske maruz değeri” risk ölçümü ile sigortacı ve reasürör bakış açısıyla optimal reasürans çalışılmıştır. Bu çalışmada optimal saklama payı MATLAB yardımıyla benzetim yoluyla elde edilmiştir. Sonuçlar hem toplam hasar fazlası reasürans anlaşması ile hem de hasar fazlası reasürans anlaşması ile hasar dağılımlarının lognormal, Pareto ve üstel dağıldığı varsayımıyla, farklı standart sapmalar altında, beklenen değer prim ilkesi ve standart sapma prim ilkesi ayrı ayrı kullanılarak elde edilmiştir. Sonuçlar şekiller ve çizelgeler yardımıyla sadece sigortacı açısından (Sigortacının toplam kaybının riske maruz değerini minimize etmeye çalışan benzetim modeli) ve her iki taraf açısından özetlenmiş ve karşılaştırılmıştır. Karşılaştırmaların ayrıntılı yorumları Bölüm 4’te yapılmıştır. Temel değerlendirme ise şu şekildedir sadece sigortacının menfaatlerini hesaba katarak elde edilen optimal reasürans seviyeleri ile her iki tarafı da hesaba

katarak elde edilen optimal reasürans seviyeleri arasında kullanılan tüm dağılımlar, prim ilkeleri ve reasürans anlaşmaları açısından büyük farklar oluşmaktadır. Yapılan çalışmanın gerçek hayatta da kullanılabilirliğinin olması için hesaplanan optimal saklama payının bir reasürans anlaşmasının tarafları olan sigortacı ve reasürör şirketin her ikisi tarafından da kabul edilebilir makul değerler olması gerekir. Bir diğer sonuç ise varsayılan prim ilkesinin ve hasar modellerinin optimal saklama payı seviyesi üzerinde etkisi olduğudur.

2) Benzetim ile elde edilen "sigortacı ve reasürörün karları arasındaki farkın mutlak değerinin riske maruz değeri" risk ölçümü ile optimal saklama payı elde eden modelin analitik çözümü toplam hasar fazlası reasürans anlaşması ile beklenen değer prim ilkesini kullanılarak ve hasarların Pareto ve üstel dağıldığı varsayımıyla elde edilmiştir. Optimal saklama payı her iki dağılım için de hasarın yaşam fonksiyonunun bir gösterimi şeklinde elde edilmiştir. Sayısal örnekler yardımıyla sonuçlar benzetim modelinin sonuçları ile ve durumu sadece sigortacı açısından ele alan Bölüm 3'te anlatılan "sigortacının toplam kaybının riske maruz değerini minimize etmeye çalışan" analitik model sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Benzetim modeli ile elde edilmiş olan yaklaşık sonuçlar ile analitik model ile elde edilmiş olan sonuçlar birbiriyle uyumlu olduğu görülmüştür.

3) Literatürde çok nitelikli optimal reasürans çalışması son 5 yıl içerisinde yer almıştır. Ancak tezde daha önce literatürde hiç çalışılmamış olan çok amaçlı optimal reasürans çalışması yapılmıştır. Bu çalışma için hedef programlama yöntemi kullanılmıştır.

   Bu amaçla öncelikle çok nitelikli karar verme ve çok amaçlı karar verme yöntemleri arasındaki farklar ve bu yöntemlere dahil olan modellere değinilmiştir. Ardından bir çok amaçlı karar verme yöntemi olan hedef programlama ile ilgili terimler çizelgesi, hedef programlama çeşitleri ve çözüm yöntemleri kısaca anlatılmıştır.

Farklı kısıtlar içeren 11 farklı hedef programlama modeli inşa edilmiştir. Tüm modellerin matematiksel gösterimi, sonuçları ve varsayımları verilmiştir. Benzer varsayımlar altında elde edilen sonuçlar açısından kıyaslama yapılmıştır. Aşağıda bu kıyaslamalar lognormal dağılım ve 1000 standart sapma varsayımı altında yapılmıştır.

Model 1 hedef programlamanın optimal saklama payı çalışması için doğru sonuç verip vermediğinin anlaşılması açısından tek kısıtla ve analitik model ile benzetim modelinde kullanılan risk ölçümü ile yani sigortacının ve reasürörün karları arasındaki mutlak farkın riske maruz değerinin minimum edilmesi kısıtıyla kurulmuştur. Sonuçlar aynı varsayımlar altında benzetim ile elde edilen optimal saklama payına eşit çıkmıştır (**$d^{*=}$1453,5**). Model 1 için farklı prim yükleme katsayılarının optimal saklama payı değerlerine etkisi de incelenmiştir.

Model 2 de tek kısıtlı bir modeldir. Sigortacının ve reasürörün karlarının standart sapmaları arasındaki mutlak fark minimize edilmiştir. Model sonucunda hedefe tam olarak ulaşılmıştır (**d^*=2079,8**).

Model 3 Model 1 ve 2 deki kısıtları içermektedir. Öncelikli yöntem ile çözülmüştür. Elde dilen optimal saklama payı (**d^*=1459,6**) Model 1 ve Model 2’de elde edilen optimal saklama payı seviyeleri arasındadır. Bu beklenen bir sonuçtur. Pozitif ve negatif sapma değişkenlerinin değerleri de çizelge yardımıyla gösterilmiştir. Model 3’te kısıtların önceliği yer değiştirerek öncelikli hedef programlama ile çözüm elde edildiğinde optimal saklama payı seviyesi bir miktar (**d^*=1536,3**) değişmektedir.

Model 4 sigortacının faydasının üstel fayda fonksiyonu ile maksimize edildiği (**d^*=2023,0**) ve Model 5 de sigortacının faydasının logaritmik fayda fonksiyonu ile maksimize edildiği (**d^*=3161,1**) modeldir. İkisi de tek kısıt içermektedir. Söz konusu sigortacının beklenen faydası olduğunda optimal saklama payı seviyeleri artmıştır. Her iki modelde de başlangıç sermayesi ‘0’ kabul edilmiştir.

Model 6 Model 3'teki kısıtlara Model 4'teki kısıtın eklenmesi ile elde edilmiştir. Model 7 ise Model 3'teki kısıtlara Model 5'teki kısıtın eklenmesi ile elde edilmiştir. Her ikisi de 3 kısıtlı hedef programlama modelidir. Model 6 için optimal saklama payı **d^*=1643,0** Model 7 için ise **d^*=1541,3** olarak elde edilmiştir. Model 3'e beklenen faydanın maksimize edilmesi kısıtının eklenmesi optimal saklama payı seviyelerini beklendiği gibi arttırmıştır ancak modelde öncelik sırasıyla kısıt 1, kısıt 2 ve kısıt 3'te olduğu için artışlar Model 4 ve Model 5'te olduğu kadar fazla değildir.

Model 8, 9, 10 ve 11 çok amaçlı optimal reasürans çalışmalarının sadece sigortacı açısından, sadece reasürör açısından ve her iki bakış açısıyla çalışılması sonucunda elde edilen optimal saklama paylarının birbiriyle kıyaslanması amacıyla oluşturulmuştur. Bu modeller aynı varsayımlar altında hedef programlama yardımıyla ve öncelikli hedef programlama tekniğiyle çözülmüştür. Modellerin karşılaştırılması birbiri ile yapılmıştır.

Durumu sırasıyla sadece sigortacı ve sadece reasürör açısından ele alan Model 8 ve Model 9 çok hedefli modeller olsa bile sapma değişkenleri için verilen (kullanıcının belirlediği) sınırlar dahilinde sırasıyla en yüksek (**d^*=2000**) ve en düşük (**d^*=500**) saklama payı değerleri ile sonuçlanmaktadır. Model 8 için birinci öncelik sigortacının beklenen karını maksimize etmek Model 9 için ise birinci öncelik reasürörün beklenen karını maksimize etmektir.

Her iki tarafı da hesaba katan Model 10 (**d^*=1621,7**) ve Model 11 (**d^*=1445,9)** için ise optimal saklama payı seviyeleri daha makul ve her iki tarafın da kabul edebileceği seviyelerdedir.

Model 8, 9, 10 ve 11 durumu sadece sigortacı ve sadece reasürör açısından ele alan optimal reasürans çalışmalarının durumu her iki taraf açısından ele alan çalışmalarla ne kadar farklı sonuçlar elde edeceğinin hedef programlama yöntemiyle aynı varsayımlar altında göstermektedir.

7.2. Önerilen Çalışmalar

Çalışma farklı prim ilkeleri ve reasürans anlaşmaları ile genişletilerek yeni sonuçlar elde edilebilir. Tezde karşılaştırma riske maruz değer risk ölçümü kullanan ve durumu sadece sigortacı açısından inceleyen model ile yapılmıştır. Literatürde yer alan pek çok farklı optimal reasürans çalışmaları ile de karşılaştırma yapılabilir.

Hedef programlama yöntemi model sonuçları arasında kıyaslama ve ya seçim yapmaya gerek olmayan bir yöntemdir. Model içerisindeki tüm hedeflerden istenmeyen sapmaların toplamını minimize ederek optimal sonucu elde etmeye çalışır. Bu yönüyle diğer çok ölçütlü karar verme modellerinden farklıdır. Aktüerya alanında hedef programlama ile optimal reasürans ilk kez kullanılmıştır. Tezde oluşturulan, sunulan ve çözümü elde edilen 11 Model farklı bakış açıları ve kısıtlar dahil edilerek geliştirilebilir. Sigorta ve reasürans şirketlerinin finansal gerçekleri ve beklentileri doğrultusunda sağ yan değerleri (ve ya hedeflerden sapmalar) belirlenebilir. Hedef programlama kullanıcıya/karar vericiye bu yönden özgürlük sağlamaktadır ve bu da yöntemi kullanışlı kılmaktadır.

Ayrıca hedef programlama modelleri öncelikli yöntem ile çözülmüştür. Ağırlıklandırmaya gerek duyulmamıştır çünkü gerçek hayatta da hedeflere bir ağırlık belirlenmesi ve verilmesi zordur ancak önceliklerden söz edilmesi daha yaygındır. Karar verici dilerse ağırlıklandırma ve ya hem ağırlıklandırma hem de sıralama yöntemlerinden birini de tercih edebilir.

KAYNAKLAR

[1] K. Borch, An attempt to determine the optimum amount of stop-loss reinsurance, Transactions of the 16th International Congress of Actuaries, 597-610., **1960**.

[2] K.J. Arrow, Uncertainty and the welfare economics of medical care. Am. Econ. Rev, 53, 941–973, **1963**.

[3] M. Denuit, and C. Vermandele, Optimal reinsurance and stop-loss order, Insurance: Math-ematics and Economics22 , 229-233, **1998**.

[4] M. Kaluszka, Optimal reinsurance under mean-variance premium principles, Insurance: Mathematics and Economics 28 , 61-67, **2001**.

[5] M. Taksar, and C. Markussen, Optimal dynamic reinsurance policies for large insurance portfolios,Finance and Stochastic 7 , 97-121, **2003**.

[6] L. He, P. Hou, and Z. Liang, Optimal control of the insurance company with proportional reinsurance policy under solvency constraints, Insurance: Mathematics and Economics 43, 474-479, **2008**.

[7] M. L. Centeno, and M. Guerra, The optimal reinsurance strategy - the individual claim case, Insurance: Mathematics and Economics 46 , 450-460, **2010**.

[8] C. Hipp, and M. Taksar, Optimal non-proportional reinsurance control, Insurance: Mathematics and Economics 47 , 246-254, **2010**.

[9] L. Gajek, and D. Zagrodny, Optimal reinsurance under general risk measures, Insurance: Mathematics and Economics 34 , 227-240**, 2004**.

[10] A. Balbas, B. Balbas, and A. Heras, Optimal reinsurance with general risk measures, In- surance: Mathematics and Economics 44 374-384, **2009.**

[11] X. Zeng, Optimal reinsurance with a rescuing procedure, Insurance: Mathematics and Economics, 46 ,397-405, **2010**.

[12] J. Cai, and Tan, S. K. Optimal retention for a stop-loss reinsurance under the VaR and CTE risk measures, Astin Bulletin, 37 (1), 93-112, **2007**.

[13] J. Cai, S. K. Tan, C. Weng, and Y. Zhang, Optimal reinsurance under VaR and CTE risk measures, Insurance: Mathematics and Economics43, 185-196, **2008**.

[14] K.C. Cheung, Optimal reinsurance revisited—A geometric approach. Astin Bull., 40, 221–239, **2010**.

[15] K. S. Tan, W. Chengguo, and Y. Zhang, VaR and CTE criteria for optimal quota-share and stop-loss reinsurance, North American Actuarial Journal13 (4), 459-482, **2009**.

[16] S. Dedu, R. Ciumara, Restricted Optimal Retention In Stop-Loss Reinsurance Under VaR And CTE Risk Measures, Proceedings Of The Romanian Academy, Series A, Volume 11, Number 3, Pp. 213–217, **2010**.

[17] Y. Chi, K.S. Tan, Optimal reinsurance with general premium principles. Insur. Math. Econ. , 52, 180–189, **2013**.

[18] J. Trufin, H. Albrecher, M. Denuit, Properties of a Risk Measure Derived from Ruin Theory. Geneva Risk Insur. Rev, 36, 174–188, **2011**.

[19] B. De Finetti, II Problema Dei Pieni; Giornale Istituto Italiano Degli Attuari: Rome, Italy, Volume 11, pp. 1–88, **1940**.

[20] H. Buhlmann, Mathematical Methods in Risk Theory; Grundlehren der Mathematischen Wissenschaft: A Series of Comprehensive Studies in Mathematics; Springer: Heidelberg, Germany, **1970**.

[21] D.C.M. Dickson, H.R. Waters, Relative reinsurance retention levels. ASTIN Bull, 27, 207–227, **1997**.

[22] D.C.M. Dickson, H.R. Waters, Optimal dynamic reinsurance. ASTIN Bull., 36, 415–432, **2006**.

[23] M. Kaluszka, Truncated stop loss as optimal reinsurance agreement in one-period models. ASTIN Bull, 35, 337–349, **2005**.

[24] C. Nie, D.C.M. Dickson, S. Li, Minimizing the ruin probability through capital injections. Ann. Actuar. Sci., 5, 195–209., **2011**.

[25] M.L. Centeno, O. Simoes, Optimal reinsurance. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas Fsicas y Naturales Serie A-Matematicas. RACSAM, 103, 387–405, **2009.**

[26] H. Assa, On optimal reinsurance policy with distortion risk measures and premiums, Insur.: Math. Econ., 61, 70–75, **2015**.

[27] M. Büyükyazıcı, Optimal retention for profit maximizing under VaR levels constraints, Journal of Statisticians: Statistics and Actuarial Sciences,10,49-58, **2017**.

[28] C. Bernard, W. Tian, Optimal reinsurance arrangements under tail risk measures. J. Risk Insur., 76, 709–725, **2009**.

[29] Z. Lu, L. Meng, Y. Wang, Optimal reinsurance under VaR and TVaR risk measures in thepresence of reinsurer's risk limit , Insurance: Mathematics and Economics 68 , 92-100, **2016**.

[30] J. Cummins, & O. Mahul, The Demand for Insurance With an Upper Limit on Coverage. Journal of Risk & Insurance. 71. 253-264. 10.1111/j.0022-4367.2004.00088.x, **2004**.

[31] C. Zhou, & W. Wu, & C. Wu, Optimal insurance in the presence of insurer's loss limit. Insurance: Mathematics and Economics. 46. 300-307. 10.1016/j.insmatheco.2009.11.002, **2010**.

[32] S. Zhuang, T. Boonen, K. Tan, Optimal insurance in the presence of reinsurance. Scandinavian Actuarial journal 6, 535-554, **2017**.

[33] F. Huang, & H. Yu, Optimal reinsurance: A reinsurer's perspective. Annals of Actuarial Science, 12(1), 147-184. doi:10.1017/S1748499517000161, **2018**.

[34] K. Borch, The optimal reinsurance treaty. Astin Bull., 5, 293–297., **1969**.

[35] Z.G. Ignatov, V.K. Kaishev, R.S. Krachunov, Optimal retention levels, given the joint survival of cedent and reinsurer. Scand. Actuar. J., 6, 401–430, **2004**.

[36] V.K. Kaishev, S.D. Dimitrina, Excess of loss reinsurance under joint survival optimality. Insur. Math. Econ., 39, 376–389, **2006**.

[37] J. Cai, Y. Fang, Z. Li, and G. E. Willmot, Optimal reciprocal reinsurance treaties under the joint survival probability and the joint profitable probability, J. Risk Insur 80 (1), 145-168, **2013**.

[38] A. Castaner, M. M. Claramunt, and C. Lef`evre, Survival probabilities in bivariate risk models, with application to reinsurance, Insur. Math. Econ. 53 (3), 632-642, **2013**.

[39] A. Castaner, M. M. Claramunt, Optimal stop-loss reinsurance: a dependence analysis, XREAP2014-04 http://ssrn.com/abstract=2423536 , **2014**.

[40] A. Golubin, Pareto-optimal insurance policies in the models with a premium based on the actuarial value. J. Risk Insur., 73, 469–487, **2006**.

[41] D.S. Dimitrova, V.K. Kaishev, Optimal joint survival reinsurance: An efficient frontier approach. Insur.: Math. Econ., 47, 27–35, **2010**.

[42] D. Samson, and T. Howard, Decision analysis models in reinsurance. European Journal of Operational Research 19: 201–11, **1985**.

[43] B. B. Karageyik, and D. David, Optimal reinsurance under multiple attribute decision making. Annals of Actuarial Science 10: 65–86., **2016**.

[44] B. B. Karageyik, and Ş. Şule, Determination of the Optimal Retention Level Based on Different Measures. Journal of Risk and Financial Management 10: 4. , **2017**.

[45] J. X. W. Shirley and L. P. Kim Intelligent Decision Support in Proportional–Stop-Loss Reinsurance Using Multiple Attribute Decision-Making (MADM)

Journal of Risk and Financial Management, 10(4), 22; doi:10.3390/jrfm10040022., **2017**.

[46] A. Charnes, and W.W. Cooper, “Chance constraints and normal deviates,” Journal of the American Statistical Association , vol. 57, pp. 134-148,**1952**.

[47] A. Charnes, and W.W. Cooper, Management Models and Industrial Applications of Linear Programming, vol. 1 & 2, New York: Wiley, **1961**.

[48] G. B. Dantzig, "Linear Programming," in Problems for the Numerical Analysis of the Future, Proceedings of the Symposium on Modern Calculating Machinery and Numerical Methods, UCLA , July 29-31, **1948**.

[49] J.P. Ignizio, Goal programming and extensions, Lexington Books Co., London, **1976**.

[50] N. Hassan, H.H. Mohamed Hamzah, & S.M. Md Zain, A goal programming approach for rubber production in Malaysia. American-Eurasian Journal of Sustainable Agriculture, 7(2), 50–53., **2013**.

[51] D. Todovic, D. Makajic-Nikolic, M. Kostic-Stankovic and M. Martic, Police officer scheduling using goal programming, Policing: An International Journal of Police Strategies and Management, Vol. 38, 295-313., **2015**.

[52] N. Hassan and B.A. Halim, Mathematical modelling approach to the management of recreational tourism activities at Wetland Putrajaya. Sains Malaysiana, 41 (9), 1155-1161., **2012**.

[53] N. Hassan and S. Sahrin, A mathematical model of nutrient management for pineapple cultivation in Malaysia. Advances in Environmental Biology, 6(5), 1868–1872. 560, **2012**.

[54] F. Ataollahi, M. A. Bahrami, M. Abesi, and F. Mobasheri, A goal programming model for reallocation of hospitals' inpatient beds, Middle-East Journal of Scientific Research, 18 (11), 1537-1543. , **2013**.

[55] M. M. Wiecek, V.Y. Blouin, M.G. Fadel, A. Engau, B.J. Hunt and V.Singh, Multi-scenario multi-objective optimization with applications in engineering design, In: Multiple objective programming and goal programming: theoretical results and practical applications, Barichard, V., Ehrgott, M., Gandibleux, X., T’Kindt, V., (eds). Volume 618, Lecture Notes in Economics and Mathematical System. Springer Verlag, Berlin., **2008**.

[56] S. M. Kommerce, G. R. Babu, M. Madhubala, Goal Programming Model for Transportation Problems, IJCSIT International Journal of Computer Science and Information Technology, Vol. 4, No. 1, pp. 43-48., **2011**.

[57] W. L. Smorts, M. L. Spruill, Goal Programming and Working Capital Management, Financial Management, 67-74., **1974**.

[58] K. Kosmidou, & Zopounidis, A multiobjective methodology for bank asset liability management, financial engineering, e-Commerce and supply chain (pp. 139-150). Kluwer Academic Publishers. , **2002**.

[59] A. Ajibola, A. O. John, and L.T., Lezaasi, Financial Statement Management, Liability Reduction and Asset Accumulation: An Application of Goal Programming Model to a Nigerian Bank, International Journal of Financial Research Vol. 4, No. 4; **2013**.

[60] N. Hassan and L.L. Loon, Goal programming with utility function for funding allocation of a university library, Applied Mathematical Sciences, 6(110),5487–5493., **2012**.

[61] M.C. Agarana, S.A. Bishop and O.A. Odetunmibi, Optimization of banks loan portfolio management using goal programming technique, International Journal of Research in Applied, Natural, Social Sciences, Vol. 2(8), 43-52. , **2014**.

[62] M. Mehri and B. Jamshidinavid, Designing a mathematical model of asset and liability management using goal programming (Case Study: Eghtesad-e- Novin Bank), GMP Review, Vol. 18(3), 186-195., **2015**.

[63] D.R. Klock and S.M. Lee, A Note on Decision Models for Insurers, Journal of Risk and Insurance 41, no. 3: 537-43., **1974**.

[64] M. Drandell, A Resource Association Model for Insurance Management Utilizing Goal Programming, Journal of Risk and Insurance 44, vol. 2: 311-15., **1977**.

[65] K.D. Lawrence, and G.R. Reeves, A Zero-One Goal Programming Model for Capital Budgeting in a Property and Liability Insurance Company, Computers and Operations Research 9, no. 4: 303-9. , **1982**.

[66] J.M. Gleason, and C.C. Lilly, A Goal Programming Model for Insurance Agency Management, Decision Sciences 8, no. l : 180-90., **1977**.

[67] D. O'leary, and J. O'leary, A Multiple Goal Approach to the Choice of Pension Fund Management, Advances in Mathematical Programming and Financial Planning, ed. K.D. Lawrence, J.B. Guerard, Jr., and G.R. Reeves. Greenwich, Conn.: Jal Press, Inc., 2, : 187-95., **1987**.

[68] A. Heras, J.A. Gil, P. García-Pineda, J.L. Vilar, An Application of Linear Programming to Bonus Malus System Design, Astin Bulletin, Volume 34-2,pp.435-456., **2004**.

[69] M. Büyükyazıcı, B. Z. Karagül, Optimal reinsurance minimizing the absolute value of the difference between the profit of the insurer and the profit of the reinsurer, The 19th International Congress on Insurance : Mathematics Economics , 24-26 Haziran, Liverpool, **2015.**

[70] M. Eves, A. Fritsch, et al., Non-proportional Reinsurance, In: IAA Risk Book. International Actuarial Association, Sept. **2015**. Chap. 6

[71] Y. Chi and K. S. Tan., Optimal Reinsurance under VaR and CVaR Risk Measures: A Simplified Approach., In: ASTIN Bulletin 41.2, pp. 487–509., **2011**.

[72] P. J. H., Shoemaker, The expected utility model: Its variants, purposes, evidence and limitations. Journal of Economic Literature, 20(2), 529-563, **1982**.

[73] D. Bernoulli, Specimen theoariae novae de mensura sortis. Commentarri Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Tomus V, 175-192., **1738** (Translated by Louise Sommer as ``Expositions of a New Theory on the Measurement of Risk.'' Econometrica. vol.22, no.1:.23-36, Jan. 1954.)

[74] J. Von Neumann, and O. Morgenstern, Theory of Games and Economic Behavior (Second Ed.). New Jersey: Princeton University Press., **1947**.

[75] D.C.M. Dickson, Insurance Risk and Ruin. Cambridge University Press, Cambridge., **2005**.

[76] J. Cai, Stop-loss premium. Encyclopedia of Actuarial Science. John Wiley & Sons, Chichester, Volume 3, 1615–1619, **2004**.

[77] S.A. Klugman, H.H. Panjer and G.E. Willmot, Loss Models: From Data to Decisions. Second Edition. John and Wiley & Sons, New York., **2004**.

[78] P. Jorion, Value at Risk: The Benchmark for Controlling Market Risk. Second edition, McGraw-Hill., **2000**.

[79] P. Krokhmal, J. Palmquist, and S. Uryasev, Portfolio Optimization with Conditional Value-At-Risk Objective and Constraints. The Journal of Risk 4(2), 11–27, **2002**.

[80] J. Cai, and H. Li, Conditional tail expectations for multivariate phase type distributions. Journal of Applied Probability 42, 810–825., **2005a**.

[81] J. Cai, and K.S. Tan, CTE and capital allocation under the skew elliptical distributions, working paper, **2005**.

[82] P. Artzner, F. Delbaen, J. Eber and D. Heath. Coherence measures of risk, Mathematical Finance 9, 203–228, **1999**.

[83] J. L. Wirch, and M. R. Hardy, A synthesis of risk measures for capital adequacy. Insurance: Mathematics and Economics 25, 337–347., 1999.

[84] P. A. Zhou, B. W. Poh, Decision analysis in energy and environmental modeling: An update. Energy, 31, 2604–2622, **2006**.

[85] A. Öztel, "Çok Kriterli Karar Verme Yöntemi Seçiminde Yeni Bir Yaklaşım", (Yayınlanmamış Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, **2016**), s.3.

[86] A. Karami, Utilization and Comparison of Multi Attribute Decision Making Techniques to Rank Bayesian Network Options, Yüksek Lisans Tezi, University of Skövde, **2011.**

[87] N. Cinemre, Doğrusal Programlama, Evrim Yayınevi, Eylül **2011.**

[88] A. Öztürk, YöneylemAraştırması, Ekin Yayınevi, 12.Baskı, **2009**.

[89] M. M. Özkan, Bulanık Hedef Programlama. Bursa: Ekin Kitabevi, **2003**.

[90] V. Pareto, Cours d'Economie Politique, Rauge, Lausanne, **1896**.

[91] C. Romero, M. Tamiz, and D. Jones, Goal Programming, Compromise Programming and Reference Point Method Formulations: Linkages and Utility Interpretations. The Journal of the Operational Research Society, 49(9), 986-991. doi:10.2307/3010172, **1998**.

[92] R. Griffith and R. Stewart, A nonlinear programming technique for the optimization of continuous processing systems. Mgmt Sci. 7, 379-392 **1961**.

[93] G. Reklaitis, A. Ravindran and K. Ragsdell, Engineering Optimization: Methods and Applications. Wiley, New York, **1983**

[94] P. Wolfe, Methods of nonlinear programming. In Recent Aduances in Mathematical Programming (Edited by R. Graves and P. Wolfe), McGraw-Hill, New York, **1963**.

[95] J. Box, Anew method of constrained optimization and a comparison with other methods. Computer J. 8,42-52 , **1965**.

[96] D. Monarchi, Nonlinear goal programming: formulation and example. Management science report series, report No. 75-12, Graduate School of Business Administration, The University of Colorado, **1975**.

[97] S. Lee and D. Olson, A gradient algorithm for chance constrained nonlinear goal programming. Europ. J. Opl Res. 22, 359-369, **1985.**

[98] H. Weistroffer. An interactive goal programming method for nonlinear multiple-criteria decision-making problems. Computers Ops Res. 10, 31 l-320, **1983**.

[99] A. Masud and C. Hwang, Interactive sequential goal programming. J. Op[Res. 32, 391-400, **1981**.

[100] M. Ehrgott and X. Gandibleux, Multiple Criteria Optimization: State of the Art Annotated Bibliographic Surveys, International Series in Operations Research and Management Science: Volume 52.Kluwer's, ISBN 1-4020-7128-0, **2002.**

[101] R. Narasimhan, Goal programming in a fuzzy environment Decision Sciences, 11, **1980,** pp. 325-336A. Masud and C. Hwang, Interactive sequential goal programming. J. Op[Res. 32, 391-400, **1981**.

[102] E.L. Hannan, On Fuzzy Goal Programming., Decision Sciences, 12 (3), 522-531, **1981**.

[103] L. H. Chen, and F.C. Tsai, Fuzzy Goal Programming with Different Importance and Priorities., European Journal of Operational Research, 133, 548-556, **2001**.

[104] R.N. Tiwari, S. Dharmar and J.R. Rao, Fuzzy Goal Programming – An Additive Model., Fuzzy Sets and Systems, 24, 27-34, **1987**.

[105] T. Yang, J.P. Ignizio, & H.-J. Kim, Fuzzy Programming with Nonlinear Membership Functions: Piecewise Linear Approximation., Fuzzy Stes and Systems, 11, 39-53., **1991**.

[106] B.Z., Karagül, Financial and Technical Analysis of Insurance Sector with Goal Programming Model, Sigma J Eng & Nat Sci 36 (2), 553-561, **2018**.

[107] R.B. Flavell, A new goal programming formulation. Omega, the international journal of management science 4, 731–732, **1976**.

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
~~YÜKSEK LİSANS~~/DOKTORA TEZ ÇALIŞMASI ORJİNALLİK RAPORU

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
AKTÜERYA BİLİMLERİ ANABİLİM DALI BAŞKANLIĞI'NA

Tarih: 8/7/19

Tez Başlığı / Konusu: HEDEF PROGRAMLAMA VE EN KÜÇÜK KAR FARKI YAKLAŞIMLARI İLE OPTİMAL REASÜRANS

Yukarıda başlığı/konusu gösterilen tez çalışmamın a) Kapak sayfası, b) Giriş, c) Ana bölümler d) Sonuç kısımlarından oluşan toplam 114 sayfalık kısmına ilişkin, 08/07/19 tarihinde ~~şahsım~~/tez danışmanım tarafından *Turnitin* adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 10 'tür.

Uygulanan filtrelemeler:

1- Kaynakça hariç
2- Alıntılar hariç/~~dâhil~~
3- 5 kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Çalışması Orjinallik Raporu Alınması ve Kullanılması Uygulama Esasları'nı inceledim ve bu Uygulama Esasları'nda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

Tarih ve İmza
08/07/2019

Adı Soyadı:	BETÜL ZEHRA KARAGÜL
Öğrenci No:	N12244039
Anabilim Dalı:	AKTÜERYA BİLİMLERİ
Programı:	AKTÜERYA BİLİMLERİ
Statüsü:	☐ Y.Lisans ☑ Doktora ☐ Bütünleşik Dr.

DANIŞMAN ONAYI

UYGUNDUR.

Dr. Öğr. Üyesi Murat Büyükyazıcı

(Unvan, Ad Soyad, İmza)

ÖZGEÇMİŞ

Kimlik Bilgileri

Adı Soyadı : Betül Zehra KARAGÜL

Doğum Yeri : Ankara

Medeni Hali : Evli

E-posta : betul.zehra@hacettepe.edu.tr

Adresi : Hacettepe Üniversitesi Aktüerya Bilimleri Bölümü / Ankara

Eğitim

Lise : 2001-2005 Ayşe Melahat Erkin Anadolu Lisesi

Lisans : 2005-2010 Hacettepe Üniversitesi Aktüerya Bilimleri Bölümü

Yan Dal : 2007-2010 Hacettepe Üniversitesi İktisat Bölümü

Yüksek Lisans : 2010-2013 Hacettepe Üniversitesi Aktüerya Bilimleri Bölümü

Doktora : 2013-2019 Hacettepe Üniversitesi Aktüerya Bilimleri Bölümü

Yabancı Dil ve Düzeyi

İngilizce, İleri

Almanca, Başlangıç

İspanyolca, Başlangıç

İş Deneyimi

2011-… : Araştırma Görevlisi, Hacettepe Üniversitesi, Aktüerya Bilimleri Bölümü

Deneyim Alanları

Aktüerya Bilimleri