

**SERBEST VEYA YÜZEY GRUBUNUN TEMSİL
UZAYLARI VE REIDEMEİSTER TORSİYON**

**REPRESENTATION VARIETIES OF FREE OR
SURFACE GROUP AND REIDEMEİSTER TORSION**

FATİH HEZENCİ

PROF. DR. YAŞAR SÖZEN

Tez Danışmanı

Hacettepe Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim - Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin
Matematik Anabilim Dalı için Öngördüğü
DOKTORA TEZİ olarak hazırlanmıştır.

2019

Fatih HEZENCİ'nin hazırladığı “Serbest veya Yüzey Grubunun Temsil Uzayları ve Reidemeister Torsiyon“ adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından MATEMATİK ANABİLİM DALI'nda DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Nedim DEĞİRMENCİ
Başkan



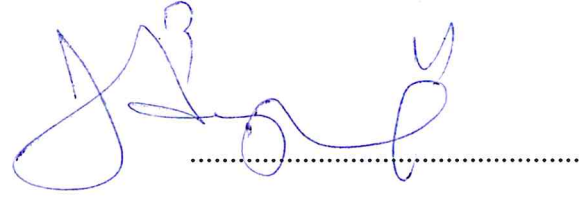
Prof. Dr. Yaşar SÖZEN
Danışman



Prof. Dr. Adnan TERCAN
Üye



Prof. Dr. Cenap ÖZEL
Üye



Dr. Öğr. Üyesi İzzettin DEMİR
Üye



Bu tez Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından DOKTORA TEZİ olarak .../.../..... tarihinde onaylanmıştır.

Prof. Dr. Menemşe GÜMÜŞDERELİOĞLU

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversitede veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

27/05/2019



FATİH HEZENCİ

YAYIMLAMA VE FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI BEYANI

Enstitü tarafından onaylanan lisansüstü tezimin tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı (kağıt) ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda verilen koşullarla kullanıma açma iznini Hacettepe Üniversitesine verdiğimi bildiririm. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet haklarım bende kalacak, tezimin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanım hakları bana ait olacaktır.

Tezin kendi orijinal çalışmam olduğunu, başkalarının haklarını ihlal etmediğimi ve tezimin tek yetkili sahibi olduğumu beyan ve taahhüt ederim. Tezimde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanması zorunlu metinlerin yazılı izin alarak kullandığımı ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederim.

Yükseköğretim Kurulu tarafından yayınlanan *“Lisansüstü Tezlerin Elektronik Ortamda Toplanması, Düzenlenmesi ve Erişime Açılmasına İlişkin Yönerge”* kapsamında tezim aşağıda belirtilen koşullar haricince YÖK Ulusal Tez Merkezi/H.Ü. Kütüphaneleri Açık Erişim Sisteminde erişime açılır.

- Enstitü / Fakülte yönetim kurulu kararı ile tezimin erişime açılması mezuniyet tarihimden itibaren 2 yıl ertelenmiştir.
- Enstitü / Fakülte yönetim kurulu gerekçeli kararı ile tezimin erişime açılması mezuniyet tarihimden itibaren ay ertelenmiştir.
- Tezim ile ilgili gizlilik kararı verilmiştir.

27/05/2019



FATİH HEZENCİ

ÖZET

SERBEST VEYA YÜZEY GRUBUNUN TEMSİL UZAYLARI VE REIDEMEİSTER TORSİYON

Fatih HEZENCİ

Doktora, Matematik Bölümü

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Yaşar SÖZEN

Mayıs 2019, 97 sayfa

Bu tezde, topolojik bir değişmez olan ayrıca matematiğin birçok dalı ve teorik fizikte uygulamaları bulunan Reidemeister torsiyon ile cebirsel topolojik bir enstrüman olan simplektik zincir kompleks kavramı birlikte düşünülerek serbest ve yüzey grupları için çeşitli G -değerli temsil uzayları incelenmiştir. Σ cinsi en az 2 olan kapalı yönlendirilebilir bir yüzeyi ve G Lie grubu ise $GL(n, \mathbb{C})$, $SL(n, \mathbb{C})$, $O(2n+1, \mathbb{C})$, $O(2n, \mathbb{C})$, $Sp(2n, \mathbb{C})$, $SO^*(2n)$, $U(n)$, $U(p, q)$, $O(p, q)$ matris gruplarından birini veya G_2, F_4, E_6 İstisnai gruplarından birini gösterebilir. Σ yüzeyinin $\pi_1(\Sigma)$ temel grubundan G Lie grubuna giden $\rho : \pi_1(\Sigma) \rightarrow G$ homomorfizmaları için Reidemeister torsiyon kavramının iyi tanımlı olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, simplektik zincir kompleks metodu kullanılarak bu tip temsillerin Reidemeister torsiyonu G Lie grubu için Atiyah-Bott-Goldman simplektik formu cinsinden ifade edilmiştir. Bununla birlikte, elde edilen sonuçlar sınırı en az 2 olan kapalı yönlendirilebilir yüzeylerden oluşan kompakt 3-manifoldların temsil uzaylarına uygulanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Reidemeister Torsiyon, Temsil Uzayları, Atiyah-Bott-Goldman Simplektik Form, Jeodezik Laminasyon, Thurston Simplektik Form.

ABSTRACT

REPRESENTATION VARIETIES OF FREE OR SURFACE GROUP AND REIDEMEISTER TORSION

Fatih HEZENÇİ

Doctor of Philosophy, Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Yaşar SÖZEN

2019 May, 97 pages

In this thesis, by using the algebraic topological instrument symplectic chain complex and the topological invariant Reidemeister torsion, which has also many applications in several branches of mathematics and theoretical physics, several G -valued representation varieties for free and surface groups are investigated. Let Σ be a closed orientable surface of genus at least 2 and let G denote one of the matrix groups $GL(n, \mathbb{C})$, $SL(n, \mathbb{C})$, $O(2n+1, \mathbb{C})$, $O(2n, \mathbb{C})$, $Sp(2n, \mathbb{C})$, $SO^*(2n)$, $U(n)$, $U(p, q)$, $O(p, q)$ or one of the exceptional groups G_2, F_4, E_6 . It is proved that for homomorphisms $\rho : \pi_1(\Sigma) \rightarrow G$ from fundamental group $\pi_1(\Sigma)$ to Lie group G , the concept of Reidemeister torsion is well defined. Moreover, by using symplectic complex method, the Reidemeister torsion of such representations is expressed in terms of the well-known Atiyah-Bott-Goldman symplectic form for the Lie group G . In addition, the obtained results are applied to the representation varieties of the compact 3-manifolds with boundary consisting of closed orientable surfaces with genus at least 2.

Keywords: Reidemeister Torsion, Representation Varieties, Atiyah-Bott-Goldman Symplectic Form, Geodesic Lamination, Thurston's Symplectic Form.

TEŞEKKÜR

Bu çalıőmanın ortaya çıkmasında ve ötesinde, benden destek ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen, üzerimde çok büyük emek harcayan, öğrencisi olmaktan büyük onur duyduğum, değerli hocam ve tez danışmanım Prof. Dr. Yaşar SÖZEN'e sonsuz teőekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bu çalıőmanın gerçekleşmesinde gerek tez izleme komitesi ve gerekse tez jürisi olarak destek ve önerilerinden dolayı görev almıő tüm hocalarıma teşekkür ederim.

"2228-B Yüksek Lisans Öğrencileri için Doktora Burs Programı" desteğinden dolayı Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK)'na doktora programım süresince sağladığı destekten dolayı teşekkür ederim.

Son olarak bu süreç boyunca her türlü sıkıntıyı, zorluğu ve sevinci benimle yaőayan eşime ve desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen anneme, babama ve kardeőlerime sonsuz teőekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
ŞEKİLLER	v
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR	7
2.1. Cebirsel Topolojideki ve Manifold Teorisindeki Temel Tanımlar	7
3. REİDEMEİSTER TORSİYON VE SİMPLEKTİK ZİNCİR KOMPLEKS	12
3.1. Zincir Kompleks için Reidemeister Torsiyon	12
3.2. Simplektik Zincir Kompleks	15
4. TEMSİLİN REİDEMEİSTER TORSİYONU	18
5. REİDEMEİSTER TORSİYONUN İYİ TANIMLILIĞI VE SONUÇLARI	22
5.1. G -değerli Temsiller için Reidemeister Torsiyonun İyi Tanımlılığı	22
5.2. G -değerli Temsil Uzayları için Reidemeister Torsiyon Formülü	46
6. UYGULAMALAR	57
6.1. Serbest veya Yüzey Grubunun İyi Temsilleri	57
6.2. Schottky Temsili ve Thurston Simplektik Formu	65
KAYNAKLAR	84
EKLER	88
Ek 1. G_2 İstisnai Grubu için Matlab Programı	88
Ek 2. F_4 İstisnai Grubu için Matlab Programı	90
Ek 3. E_6 İstisnai Grubu için Matlab Programı	92
ÖZGEÇMİŞ	96

ŞEKİLLER

Şekil 6.1. Üç kapalı yapraklı jeodezik laminasyon.....	65
Şekil 6.2. Dokuz yapraklı maksimal jeodezik laminasyon	65
Şekil 6.3. λ laminasyonunun yapraklarını kesen k ve k' yayları	66
Şekil 6.4. Φ tren-yolu tarafından taşınan jeodezik laminasyon.....	67

1. GİRİŞ

Bu tez çalışmasında geometrik öneme sahip olması ve düşük boyut topoloji/geometri de-ğeri her geçen gün artarak devam etmesi sebebiyle serbest ve yüzey grupları için G -değerli temsil uzayları ele alınmıştır. Burada G Lie grubu, genel lineer grup $GL(n, \mathbb{C})$, özel lineer grup $SL(n, \mathbb{C})$, ortogonal grup $O(2n+1, \mathbb{C})$, $O(2n, \mathbb{C})$, simplektik grup $Sp(2n, \mathbb{C})$, $SO^*(2n)$, üniter grup $U(n)$, $U(p, q)$, $O(p, q)$ matris gruplarından birini veya G_2, F_4, E_6 İstisnai gruplarından birini göstermektedir. Bu tip temsiller için Reidemeister torsiyon for-müllerinin geliştirilmesi amaçlanmıştır. Bununla birlikte elde edilen formüllerin sınırı en az 2 olan kompakt yönlendirilebilir 3-manifoldlara uygulanması hedeflenmiştir. Bu tezde geliştiren teknikler yukarıda adı geçen konulardaki birçok temel problemde kullanılabilir. Özellikle de Reidemeister torsiyon ile simplektik zincir kompleks metodu birlikte kullanılarak uzmanlarınca çok iyi bilinen yüzey veya kompakt 3-manifold üzerindeki geometrik yapıların büyüklüğünü anlama gibi geometrik öneme sahip problemlere [1] potansiyel uygulamaları olması öngörülmektedir.

Reidemeister torsiyon, 1935 yılında K. Reidemeister tarafından [2] makalesinde tanıtılmıştır. K. Reidemeister bu makalesinde Reidemeister torsiyon yardımıyla 3-boyutlu lens uzaylarını parçalı lineer denk (PL-equivalence) olarak sınıflandırmıştır. W. Franz ise [3] makalesinde Reidemeister torsiyon kavramını genelleştirerek daha yüksek boyutlu lens uzaylarını sınıflandırmıştır. G. de Rham tarafından 1964 yılında, Reidemeister ve Franz'ın sonuçlarını eğriliği sabit (+1) olan uzaylara genişletilmiştir. 1969 yılındaki [4] makalesinde R.C. Kirby ve L.C. Siebenmann, Reidemeister torsiyonun manifoldlar için topolojik korunmasını ispatlamışlardır. Reidemeister torsiyonun simplisyal kompleksler için topolojik korunması ise 1973 yılında T.A. Chapman tarafından [5, 6] çalışmalarında gösterilmiştir. Dolayısıyla K. Reidemeister ve W. Franz tarafından yapılan lens uzaylarının sınıflandırmasının aslında topolojik olduğu anlaşılmıştır. J. Milnor [7] makalesinde Reidemeister torsiyon yardımıyla homeomorfik ama kombinatorik olarak farklı iki sonlu simplisyal kompleks oluşturarak Hauptvermutung sanısının doğru olmadığını ispatlamıştır. Ayrıca J. Milnor [8, 9] makalelerinde Alexander polinomu ile Reidemeister torsiyonun eşitliğini elde etmiştir. Bundan sonra Reidemeister torsiyonun topolojik değişmez olarak düğüm ve link teoride birçok faydalı uygulaması olmuştur.

Topolojik bir değişmez olan Reidemeister torsiyon, matematiğin birçok dalı (Topoloji [2, 3, 7], Diferansiyel Geometri [10–12], Temsil Uzayları [1, 13, 14], Dügüm Teorisi [15–17], Chern-Simons Teori [18], 3–boyutlu Seiberg-Witten Teori [19], Cebirsel K-Teori [9], Dinamik Sistemler [20–22]) ve teorik fizikte [1, 18, 23] pekçok uygulamaları yer almaktadır.

Konumuzdan uzaklaşmadan, yukarıda ifade edilen uygulamaların birkaçından kısaca bahsedelim. Önceki paragraflarda ifade edildiği gibi Reidemeister torsiyon kavramı kullanılarak lens uzayları topolojik olarak sınıflandırılmıştır [2, 3, 5, 6]. [12] makalesinde ise kompakt Riemann manifold üzerindeki düz (flat) demet katsayılı formların de Rham kompleksine karşılık gelen bir analitik torsiyon tanımlamışlardır. Ayrıca bu makalede tanımlanan torsiyon ile manifoldun temel grubunun üzerindeki evrensel örtüsü etkisi ve düz demete karşılık gelen temsil sayesinde elde edilen Reidemeister torsiyon kavramlarının aynı olduğu sanısı sunulmuştur. J. Cheeger [10] ve W. Müller [11] ise bu sanıyı birbirinden bağımsız olarak göstermişlerdir. E. Witten analitik torsiyonu kullanarak değişmeli-olmayan Chern-Simons ayar alan teorisini incelemiştir [18]. 1996 yılındaki [19] nolu kaynakta Reidemeister torsiyon ve 3–boyutlu Seiberg-Witten değişmezinin çakıştığı ispatlanmıştır.

Reidemeister torsiyon birçok yönden Euler karakteristiğine řu şekilde benzemektedir. Bilindiği üzere klasik Poincare-Hopf teoremi sayesinde Euler karakteristiği pürüzsüz vektör alanlarının durgun noktalarını saymaktadır. D. Fried ise [21] çalışmasında Reidemeister torsiyonun pürüzsüz manifold üzerinde hiçbir yerde sıfır olmayan Morse-Smale vektör alanlarının kapalı yörüngelerini saydığını göstermiştir. M. Hutchings ve Y. Lee ise [22] makalesinde Fried’in sonucunu genelleştirmiştir. A. Schwarz [23] çalışmasında bir manifold üzerinde bir kuantum alan teorisi kurmuş ve böylece ayrışım fonksiyonunun, analitik torsiyonun bir kuvveti olacak şekilde yazılabileceğini ispatlamıştır.

Reidemeister torsiyonun, bir manifoldun temel grubunun temsilleri için bir sayısal değişmez olduğu bilinmektedir ve ayrıca çeşitli temsil uzayları için Reidemeister torsiyon formülleri hesaplanmıştır [9, 24, 25]. D. Johnson şimdiye kadar hiç yayınlamamış olduğu notlarında 3–manifoldların temel grubundan $SL(2, \mathbb{C})$ Lie grubuna giden indirgenemez temsiller için Reidemeister torsiyon çalışmıştır. T. Kitano ise [15] makalesinde D. Johnson’nın bu elde ettiği sonuçlardan yararlanarak Seifert-lifli manifoldların $SL(2, \mathbb{C})$ indirgenemez temsilleri

için bir Reidemeister torsiyon formülü geliştirmiştir.

E. Witten, reel simplektik zincir kompleks kavramını ilk olarak 1991 yılında tanıtmıştır [1]. Ayrıca aynı makalede, bu cebirsel topolojik enstrüman ve Reidemeister torsiyon kavramları birleştirilerek çeşitli $\text{Rep}(\Sigma, G)$ temsil uzaylarının hacimleri hesaplanmıştır. Burada Σ yüzey, G kompakt Lie grup olmak üzere $\text{Rep}(\Sigma, G)$ uzayı yüzeyin temel grubundan G 'ye giden homomorfizmaların eşlenik sınıflarını göstermektedir.

Simplektik zincir kompleks kavramı yardımıyla Reidemeister torsiyon konusu hakkında bu zamana kadar çok kapsamlı çalışmalar yapılmadığını literatüre baktığımızda açık bir şekilde görmekteyiz. Bu konunun henüz çok iyi araştırılmamış olmasından dolayı tezimizin literatürde önemli bir yere sahip olacağını öngörmekteyiz. Tez çalışmamız kapsamında incelediğimiz problemleri ifade etmeden önce simplektik zincir kompleks metodu yardımıyla Reidemeister torsiyonlar ile ilgili kaynaklardan kısaca bahsedeceğiz. J. Dubois [16, 17] makalelerinde, reel simplektik zincir kavramı ile temsillerin deformasyon teorisini birlikte kullanmıştır. Bununla birlikte, $\text{Reg}(K)$ temsil uzayı üzerinde bir hacim elemanı bulmuş ve bu hacim elemanın Reidemeister torsiyonla ilgisini ispatlamıştır. Burada K , 3–boyutlu kürenin içinde bir düğüm, M bu düğümün küredeki tümleyeni ve G ise M 'nin temel grubunu göstermek üzere, $\text{Reg}(K)$ temsil uzayı $\text{SU}(2)$ değerli G 'nin düzgün (regular) temsillerini işaret etmektedir. J. Dubois [26] nolu makalesinde ise bu hacim elemanının bir Conway küresi boyunca mutasyon (mutation) altında korunduğunu açıklamıştır.

Σ kapalı yönlendirilebilir cinsi en az 2 olan yüzeyi olsun. Σ yüzeyinin Teichmüller uzayı $\text{Teich}(\Sigma)$, yüzey üzerindeki kompleks yapıların deformasyon sınıfları olarak tanımlanır. Uniformizasyon Teoremi sayesinde bahsedilen uzay, yüzey üzerindeki eğriliği (-1) olan Riemann metriklerinin deformasyon sınıfları olarak algılanacağı gibi holonomy fonksiyonu yardımıyla $\text{Rep}(\Sigma, \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$ içinde açık olan ve yüzeyin temel grubundan $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ grubuna giden bire bir, ayrık homomorfizmalar olarak da düşünülebilir.

Bilindiği gibi $\text{Teich}(\Sigma)$ uzayı üzerinde Weil-Petersson 2-formu [27], $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ için Atiyah-Bott-Goldman (ABG) simplektik formu [28] ile yüzey üzerinde bir L maksimal jeodezik laminasyon yardımıyla tanımlanan Thurston simplektik formu [29] bulunmaktadır. W. Gold-

man [28] çalışmasında Weil-Petersson 2-formu ile $PSL(2, \mathbb{R})$ için ABG-simplektik formunun sabit bir katının çakıştığını 1984 yılında ispatlamıştır. [30] makalesinde benzer bir ilişkinin Thurston jeodezik laminasyon teorisini kullanarak $PSL(2, \mathbb{R})$ için ABG-simplektik formu ve Thurston simplektik formu arasında olduğunu gösterilmiştir. Ayrıca 2008 yılındaki [31] çalışmasında reel simplektik zincir kavramı yardımıyla $Teich(\Sigma) \subset Rep(\Sigma, PSL(2, \mathbb{R}))$ temsillerinin Reidemeister torsiyonunu $PSL(2, \mathbb{R})$ için ABG-simplektik form cinsinden ifade eden bir formül elde edilmiş ve bunun sonucunda bu tip temsillerin Reidemeister torsiyonu Thurston simplektik form cinsinden ifade edilebileceği gösterilmiştir. Literatüre baktığımızda, daha çok yüzeyin temel grubundan $SU(2)$, $PSL(2, \mathbb{R})$ veya $PSL(2, \mathbb{C})$ Lie gruplarına giden temsiller için Reidemeister torsiyon tanımlanmış ve bu konu üzerinde çalışmaların olduğu görülmektedir. Bununla birlikte 2012 yılındaki [32] makalesinde $PSL(n, \mathbb{R})$, $n \geq 3$ değerli Hitchin temsilleri için Reidemeister torsiyon kavramının iyi tanımlı olduğu gösterilmiştir. Bununla birlikte bu temsillerin Reidemeister torsiyonun $PSL(n, \mathbb{R})$ için ABG-simplektik formu cinsinden de ifade edilebileceği gösterilmiştir. Yukarıdaki paragraflarda da ifade edildiği üzere bu tip temsil uzayları, topoloji, geometri ve cebirsel geometri ile olan ilişki ve uygulamalarından dolayı günümüzde popüler araştırma konularından biridir. 2014 yılındaki [14] çalışmasında ise 3–boyutlu hiperbolik manifoldların topoloji ve geometrisini anlamada çok faydalı enstrümanlardan olan pileli-yüzeyler (pleated surface) ile Reidemeister torsiyon ve kompleksleştirilmiş Thurston simplektik form arasındaki ilişki ispatlanmıştır. Ayrıca aynı makalede çember üzerinde lifli 3–manifoldlara ilginç bir şekilde uygulanabileceği gösterilmiştir.

Bu uygulamalara ek olarak [33] makalesinde simplektik zincir kompleks metodu sayesinde kompleks ışınal uzayların Reidemeister torsiyonunu Fubini-Study form cinsinden ifade eden ilginç bir formül ispatlanmıştır. Ayrıca 2011 yılındaki [34] çalışmasında Riemann yüzeylerinin Reidemeister torsiyonunu yüzeyin periyod matrisi cinsinden ifade edilebileceği gösterilmiştir. [13] makalesinde ise kapalı manifoldların Reidemeister torsiyonu manifoldun reel veya kompleks katsayılı homolojileri üzerindeki kesişim formları cinsinden ifade edilmiştir. Literatüre baktığımızda, çarpım manifoldların Reidemeister torsiyonunun yeteri kadar incelenmediğini gözlemleyebiliriz. 1965 yılındaki [35] makalesinde Kwun ve Szczarba, tam ve tam olmayan genel zincir komplekslerinden oluşan tensor zincirinin Reidemeister torsiyon formülü hesaplamışlardır. 2012 yılındaki [36] çalışmasında ise yönlendirilebilir kapalı

manifoldlardan oluşan çarpım manifoldunun Reidemeister torsiyonunu hesaplayan ilginç bir formül ispatlanmış ve elde edilen bu formülü Riemann yüzeyleri, Grassman manifoldlar ve kompleks ışınsal uzaylara uygulanmıştır. 2018 yılındaki [41] makalesinde ise İstisnai gruplar olan G_2, F_4 ve E_6 değerli temsiller için Reidemeister torsiyonun iyi tanımlı olduğu Matlab programı (Ek 1., Ek 2., Ek 3.) kullanarak gösterilmiştir. Bununla birlikte bu tip temsillerin Reidemeister torsiyonunun $\text{Rep}(\Sigma, G)$ için ABG-simplektik formu cinsinden ifade edilebileceği gösterilmiş ve G -değerli Hitchin temsillerine uygulanmıştır.

Altı bölümden oluşan bu tez çalışmasının birinci bölümü giriş kısmıdır. Bu kısımda Reidemeister torsiyonla ilgili literatür verilmiştir. İkinci bölümünde tezde sıkça kullanılacak olan temel tanımlar özellikle de cebirsel topolojideki ve manifold teorisindeki temel kavramlardan bahsedilmiştir. Burada genel bir zincir kompleks, homoloji grubu, Zig-Zag Lemma, manifold, simetrik bilinear form, Lie grup, Matris grupları, Lie cebir ve killing form tanımı verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Reidemeister torsiyon ve simplektik zincir kompleks ele alınmıştır. Burada zincir kompleks için Reidemeister torsiyon tanımı ve temel teoremleri verildikten sonra cebirsel topolojik enstrüman olan simplektik zincir kompleks kavramı ile ilgili tanımlar ve teoremler verilmiştir. Dördüncü bölümde ise bir temsilin Reidemeister torsiyon tanımı açıklanmıştır.

Beşinci bölümde, Σ cinsi en az 2 olan kapalı yönlendirilebilir bir yüzeyi ve G Lie grubu ise $GL(n, \mathbb{C}), SL(n, \mathbb{C}), O(2n+1, \mathbb{C}), O(2n, \mathbb{C}), Sp(2n, \mathbb{C}), SO^*(2n), U(n), U(p, q), O(p, q)$ matris gruplarından birini veya G_2, F_4, E_6 İstisnai gruplarından birini göstermek üzere Σ yüzeyinin $\pi_1(\Sigma)$ temel grubundan G Lie grubuna giden $\rho : \pi_1(\Sigma) \rightarrow G$ homomorfizmaları için Reidemeister torsiyon kavramının iyi tanımlı olduğu gösterilmiştir. Ayrıca bu tip temsillerin Reidemeister torsiyonu, G Lie grubu için ABG-simplektik formu cinsinden ifade edilmiştir. Son bölümde ise elde edilen sonuçlar, sınırı cinsi en az 2 olan kapalı yönlendirilebilir yüzeylerden oluşan kompakt 3-manifoldların temsil uzaylarına uygulanmıştır. Burada elde edilen sonuçlar serbest veya yüzey grubunun iyi temsillerine ve Schottky temsillerine uygulanmıştır. Ayrıca, elde edilen bu sonuçlar Thurston simplektik formu cinsinden de ifade edilmiştir.

Böylece bu tez çalışmasında, görünürde birbiriyle ilişkisi aşıkâr olmayan bu kavramların rahatlıkla etkin ve verimli bir şekilde kullanılabilceği gösterilmiş, literatürde ifade edilen eksikliğinin bir nebze olsun giderilmesi hedeflenmiştir.

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

2.1. Cebirsel Topolojideki ve Manifold Teorisindeki Temel Tanımlar

Bu kısımda, ileri bölümlere temel oluşturacak bazı temel kavramlar verilecektir. İlk olarak cebirsel topolojideki temel tanımlardan bahsedelim ve daha sonra ise manifold teorisinden birkaç temel kavram verelim.

Tanım 2.1.1. $p \geq 0$ tamsayısı olmak üzere C_p bir abelyan grup olsun ve $\partial_p : C_p \rightarrow C_{p-1}$ ise bir homomorfizma olsun. Eğer her p için $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$ olması durumunda $C_* = (C_*, \partial_*)$ dizisine bir *zincir kompleks* adı verilir. Burada ∂_p homomorfizmasına bir sınır operatörü denir ve her $p > n$ için $C_p = 0$ ise C_* *uzunluğu n olan zincir kompleks* olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.2. $C_* = (C_*, \partial_*)$ zincir kompleks olmak üzere $Z_p(C_*)$, $B_p(C_*)$ ve $H_p(C_*)$ sırasıyla ∂_p homomorfizmasının çekirdeğini $\ker \partial_p$, ∂_{p+1} homomorfizmasının görüntüsünü $\text{Im} \partial_{p+1}$ ve p .inci homoloji grubunu $Z_p(C_*)/B_p(C_*)$ göstermektedir.

Tanım 2.1.3. (C_*, ∂_*) uzunluğu n olan bir zincir kompleks olarak kabul edelim. Eğer her p için $Z_p(C_*) = B_p(C_*)$ eşitliği sağlanıyor ise C_* *tam* olarak adlandırılır. $n = 2$ olması durumunda C_* *kısa-tam*, $n > 2$ olması durumunda ise C_* *uzun-tam* denir.

Lemma 2.1.4. $A_* = (A_*, \partial_*^A)$, $C_* = (C_*, \partial_*^C)$ ve $D_* = (D_*, \partial_*^D)$ zincir kompleksleri olsun. Ayrıca $f : A_* \rightarrow D_*$ ve $g : D_* \rightarrow C_*$ zincir fonksiyonlarını gösterebiliriz. Bu durumda

$$0 \longrightarrow A_* \xrightarrow{f} D_* \xrightarrow{g} C_* \longrightarrow 0$$

kısa-tam dizisinden, her p için $\delta_p : H_{p+1}(C_) \rightarrow H_p(A_*)$ homomorfizması ve aşağıdaki uzun*

tam dizi elde edilir:

$$\begin{array}{c}
 \vdots \\
 \downarrow \\
 H_{p+1}(A_*) \xrightarrow{f_{p+1}} H_{p+1}(D_*) \xrightarrow{g_{p+1}} H_{p+1}(C_*) \\
 \downarrow \\
 H_p(A_*) \xrightarrow{f_p} H_p(D_*) \xrightarrow{g_p} H_p(C_*) \\
 \downarrow \\
 H_{p-1}(A_*) \xrightarrow{f_{p-1}} H_{p-1}(D_*) \xrightarrow{g_{p-1}} H_{p-1}(C_*) \\
 \downarrow \\
 \vdots
 \end{array}$$

Lemma 2.1.4, Zig-Zag Lemma olarak bilinmektedir.

Şimdi de manifold teorisinden birkaç temel kavram verelim.

Tanım 2.1.5. M topolojik uzayı eğer sayılabilir tabana sahip, Hausdorff ve ayrıca lokal olarak her bir noktasının komşuluğu \mathbb{R}^n 'deki bir noktanın komşuluğuna homeomorfik ise M topolojik uzayına n -boyutlu manifold denir.

Tanım 2.1.6. Bir G Lie grubu, grup özelliklerini sağlayan sonlu boyutlu düzgün bir manifoldtur öyle ki grup işlemleri (çarpım ve tersi)

$$(x, y) \longmapsto x^{-1} \cdot y$$

düzgün dönüşümlerdir.

Tez boyunca kullanacağımız matris gruplarını hatırlatarak devam edelim. \mathbb{F} reel veya kompleks cismi göstermek üzere

$$GL(n, \mathbb{F}) = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{F}) \mid \det A \neq 0\}$$

Lie grubuna *genel lineer grup* denir.

$$\mathrm{SL}(n, \mathbb{F}) = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{F}) \mid \det A = 1\}$$

Lie grubuna *özel lineer grup* denir.

$$\mathrm{O}(2n+1, \mathbb{F}) = \{A \in M_{2n+1 \times 2n+1}(\mathbb{F}) \mid A^t J A = J\}$$

Lie grubu *tek-boyutlu ortogonal grup* olarak adlandırılır. Burada $J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & I_n & 0 \end{bmatrix}$ ve I_n ise $n \times n$ kare matrisini göstermektedir.

Çift-boyutlu ortogonal grup ise aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\mathrm{O}(2n, \mathbb{F}) = \{A \in M_{2n \times 2n}(\mathbb{F}) \mid A^t J A = J\}.$$

Burada $J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}$ ve I_n ise $n \times n$ kare matrisidir.

$\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{F})$ grubuna *simplektik grup* denir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{F}) = \{A \in M_{2n \times 2n}(\mathbb{F}) \mid A^t J A = J\}.$$

Burada $J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$ ve I_n ise $n \times n$ kare matrisini işaret etmektedir.

$\mathrm{SO}(2n, \mathbb{C})$ özel ortogonal grubunun bir alt grubu olan $\mathrm{SO}^*(2n)$ ise aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\mathrm{SO}^*(2n) = \{A \in \mathrm{SO}(2n, \mathbb{C}) \mid -\bar{J}A = A\}.$$

Burada $SO(2n, \mathbb{C}) = \{A \in O(2n, \mathbb{C}) \mid \det A = 1\}$, $J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$ ve I_n ise $n \times n$ kare matrisidir.

$$U(n) = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{C}) \mid A^*A = I_n\}$$

Lie grubuna *üniter grup* denir. Burada $*$ eşlenik transpozu ve I_n ise $n \times n$ kare matrisi işaret etmektedir.

$U(p, q)$ ve $O(p, q)$ aşağıdaki gibi gösterilir:

$$U(p, q) = \{A \in M_{(p+q) \times (p+q)}(\mathbb{C}) \mid A^*JA = J\},$$

$$O(p, q) = \{A \in M_{(p+q) \times (p+q)}(\mathbb{R}) \mid A^tJA = J\}.$$

Burada $J = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{bmatrix}$ ve $*$ eşlenik transpozudur.

Tanım 2.1.7. V , bir \mathbb{F} reel \mathbb{R} cismi veya kompleks \mathbb{C} cismi üzerinde n boyutlu bir vektör uzayı olsun.

$$B : V \times V \longrightarrow \mathbb{F}$$

fonksiyonu eğer

- $B(x, y) = B(y, x), \quad \forall x, y \in V,$
- $B(x + y, z) = B(x, z) + B(y, z), \quad \forall x, y, z \in V,$
- $B(\lambda x, y) = \lambda B(x, y), \quad \forall \lambda \in \mathbb{F}, \quad \forall x, y \in V$

koşullarını sağlıyor ise B 'ye V vektör uzayı üzerinde bir *simetrik bilinear form* denir. Ayrıca her $y \in V$ vektörlerini ele aldığımızda $B(x, y) = 0$ olması için $x = 0$ olmasını gerektiriyor ise bu durumda B *bozulmamış (dejenere olmayan) form* olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.8. V, \mathbb{F} reel veya kompleks cismi üzerinde sonlu boyutlu bir vektör uzayı olsun. V üzerinde eğer

- Bilineerlik: $\lambda [x, y] = [\lambda x, y] = [x, \lambda y], \forall \lambda \in \mathbb{F}$ ve $x, y \in V$,
- Ters simetrik: $[x, y] = -[y, x], x, y \in V$,
- Jacobi özdeşliği: $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0, x, y, z \in V$

özelliklerini sağlayacak şekilde bir

$$[\cdot, \cdot] : V \times V \longrightarrow V$$

Lie braketini olarak adlandırılan dönüşüm tanımlı ise V 'ye bir *Lie cebiri* denir.

Tanım 2.1.9. \mathcal{G} sonlu boyutlu bir kompleks Lie cebiri olsun. Her $x \in \mathcal{G}$ için

$$\begin{aligned} ad_x : \mathcal{G} &\longrightarrow \mathcal{G} \\ y &\longmapsto [x, y] \end{aligned}$$

olarak tanımlanan lineer dönüşümünü gösterebilirsin. Bu durumda,

$$\begin{aligned} B : \mathcal{G} \times \mathcal{G} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) &\longmapsto Tr(ad_x \circ ad_y) \end{aligned}$$

olarak tanımlanan simetrik B bilinear formuna \mathcal{G} üzerindeki *Killing form* denir.

3. REIDEMEİSTER TORSİYON VE SİMPLEKTİK ZİNCİR KOMPLEKS

Bu bölümde topolojik bir değişmez olan Reidemeister torsiyon ve temel teoremleri verilecektir. Bu konularda daha detaylı bilgi sahibi olmak için [13, 24, 25] kaynaklarına bakınız. Ayrıca, cebirsel topolojik enstrüman olan simplektik zincir kompleks kavramı ile ilgili gerekli tanımlar verilecektir. Bu konuda daha detaylı bilgi sahibi olmak için [1] ve [31] makalelerine bakınız.

3.1. Zincir Kompleks için Reidemeister Torsiyon

Reel sayılar üzerindeki sonlu boyutlu vektör uzaylarının bir zincir kompleksini göz önüne alalım:

$$C_* = \left(0 \longrightarrow C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \longrightarrow 0 \right).$$

Burada $p = 0, \dots, n$ olmak üzere

$$\begin{cases} Z_p(C_*) = \ker \{ \partial_p : C_p \rightarrow C_{p-1} \}, \\ B_p(C_*) = \text{Im} \{ \partial_{p+1} : C_{p+1} \rightarrow C_p \} \end{cases}$$

ve C_* zincir kompleksinin p .inci homoloji grubu aşağıdaki gibi olur:

$$H_p(C_*) = Z_p(C_*) / B_p(C_*).$$

$B_p(C_*)$ ve $H_p(C_*)$ uzaylarının tabanlarını sırasıyla $\mathbf{b}_p = \{b_p^1, \dots, b_p^{m_p}\}$ ve $\mathbf{h}_p = \{h_p^1, \dots, h_p^{n_p}\}$ kabul edelim. C_p uzayı için kısa-tam diziler aşağıdaki gibidir:

$$0 \longrightarrow Z_p(C_*) \xrightarrow{\iota} C_p \xrightarrow{\partial_p} B_{p-1}(C_*) \longrightarrow 0, \quad (3.1)$$

$$0 \longrightarrow B_p(C_*) \xrightarrow{\iota} Z_p(C_*) \xrightarrow{\varphi_p} H_p(C_*) \longrightarrow 0. \quad (3.2)$$

Burada ι birim dönüşümü ve φ_p doğal örten dönüşümü işaret etmektedir. (3.1) kısa-tam dizisi 1. İzomorfizma Teoremi'nin bir sonucundan elde edilir. (3.2) kısa-tam dizisi ise $H_p(C_*)$ uzayının tanımından elde edilen bir sonuçtur.

$\ell_p : H_p(C_*) \rightarrow Z_p(C_*)$ lineer dönüşümü, (3.2) kısa-tam dizisindeki $\varphi_p : Z_p(C_*) \rightarrow H_p(C_*)$ dönüşümünün kısmı olarak düşünüldüğünde

$$Z_p(C_*) = B_p(C_*) \sqcup \ell_p(H_p(C_*))$$

eşitliği sağlanır. Böylece $Z_p(C_*)$ uzayı $\mathbf{b}_p \sqcup \ell_p(\mathbf{h}_p)$ olan yeni bir tabana sahip olur. Bununla birlikte $s_p : B_{p-1}(C_*) \rightarrow C_p$ lineer dönüşümü, (3.1) kısa-tam dizisindeki $\partial_p : C_p \rightarrow B_{p-1}(C_*)$ dönüşümünün bir kısmı olsun. Bu durumda

$$C_p = Z_p(C_*) \sqcup s_p(B_{p-1}(C_*))$$

eşitliğine ulaşılır. Böylece C_p uzayı

$$\mathbf{b}_p \sqcup \ell_p(\mathbf{h}_p) \sqcup s_p(\mathbf{b}_{p-1})$$

tabanına sahiptir. Burada \sqcup ayrık birleşimi göstermektedir.

Tanım 3.1.1. C_* uzunluğu n olan sonlu boyutlu vektör uzaylarının zincir kompleksi olsun. $p = 0, \dots, n$ olmak üzere $C_p, B_p(C_*)$ ve $H_p(C_*)$ uzaylarının tabanları sırasıyla $\mathbf{c}_p, \mathbf{b}_p$ ve \mathbf{h}_p olsun. Aşağıda verilen alterne çarpıma

$$\mathbb{T}(C_*, \{\mathbf{c}_p\}_0^n, \{\mathbf{h}_p\}_0^n) = \prod_{p=0}^n [\mathbf{b}_p \sqcup \ell_p(\mathbf{h}_p) \sqcup s_p(\mathbf{b}_{p-1}), \mathbf{c}_p]^{(-1)^{(p+1)}}$$

C_* zincir kompleksinin $\{\mathbf{c}_p\}_{p=0}^n, \{\mathbf{h}_p\}_{p=0}^n$ tabanlarındaki *Reidemeister torsiyonu* denir. Burada C_p kompleksi \mathbf{e}_p ve \mathbf{f}_p tabanlarına sahip olsun. Bu durumda $\mathbf{T}_{\mathbf{e}_p}^{\mathbf{f}_p}$, \mathbf{e}_p tabanından \mathbf{f}_p ye giden değişim-taban-matrisinin determinanı $[\mathbf{e}_p, \mathbf{f}_p]$ olarak ifade edilir.

Reidemeister torsiyonun \mathbf{b}_p tabanından, s_p ve ℓ_p kısımlarından bağımsız olduğunu J. Milnor [9] makalesinde ispatlamıştır. $p = 0, \dots, n$ için C_p ve $H_p(C_*)$ uzaylarının başka birer tabanları sırasıyla \mathbf{c}'_p ve \mathbf{h}'_p olduğunu kabul edelim. Bu durumda J. Milnor'un aynı makalesindeki sonucuna göre değişim-taban-matrisinin formülü aşağıdaki gibidir:

$$\mathbb{T}\left(C_*, \{\mathbf{c}'_p\}_0^n, \{\mathbf{h}'_p\}_0^n\right) = \prod_{p=0}^n \left(\frac{[\mathbf{c}'_p, \mathbf{c}_p]}{[\mathbf{h}'_p, \mathbf{h}_p]} \right)^{(-1)^p} \mathbb{T}\left(C_*, \{\mathbf{c}_p\}_0^n, \{\mathbf{h}_p\}_0^n\right). \quad (3.3)$$

Zincir komplekslerin bir kısa-tam dizisi aşağıdaki gibi olsun:

$$0 \longrightarrow A_* \xrightarrow{i} B_* \xrightarrow{j} D_* \longrightarrow 0. \quad (3.4)$$

Zig-Zag Lemma kullanılarak uzunluğu $3n + 2$ olan uzun-tam dizi aşağıdaki gibi olur:

$$\begin{array}{ccccccc} C_* : & \cdots & \longrightarrow & H_{p+1}(A_*) & \xrightarrow{i_{p+1}} & H_{p+1}(B_*) & \xrightarrow{j_{p+1}} & H_{p+1}(D_*) \\ & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & H_p(A_*) & \xrightarrow{i_p} & H_p(B_*) & \xrightarrow{j_p} & H_p(D_*) \\ & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & H_{p-1}(A_*) & \xrightarrow{i_{p-1}} & H_{p-1}(B_*) & \xrightarrow{j_{p-1}} & H_{p-1}(D_*) \\ & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array} \quad (3.5)$$

Burada $C_{3p} = H_p(D_*)$, $C_{3p+1} = H_p(A_*)$ ve $C_{3p+2} = H_p(B_*)$ 'dir. Ayrıca \mathbf{h}_p^D , \mathbf{h}_p^A , ve \mathbf{h}_p^B sırasıyla C_{3p} , C_{3p+1} ve C_{3p+2} için tabanlardır. J. Milnor [9] makalesinde, (3.4) kısa-tam dizisindeki zincir komplekslerin Reidemeister torsiyonunun alterne çarpımı ile (3.5) uzun-tam dizisindeki zincir kompleksinin Reidemeister torsiyonuna eşit olduğunu göstermiştir. Daha açık şekilde ifade etmek için aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1.2. [9] $A_p, B_p, D_p, H_p(A_*), H_p(B_*)$ ve $H_p(D_*)$ uzaylarının tabanları sırasıyla $\mathbf{c}_p^A, \mathbf{c}_p^B, \mathbf{c}_p^D, \mathbf{h}_p^A, \mathbf{h}_p^B$ ve \mathbf{h}_p^D olduğunu kabul edelim. Bu durumda eğer $\mathbf{c}_p^A, \mathbf{c}_p^B$ ve \mathbf{c}_p^D tabanları

uyumlu, diğer bir ifade ile $\left[\mathbf{c}_p^B, \mathbf{c}_p^A \oplus \widetilde{\mathbf{c}}_p^D \right] = \pm 1$ ve $\pi \left(\widetilde{\mathbf{c}}_p^D \right) = \mathbf{c}_p^D$ ise aşağıdaki formül sağlanır:

$$\begin{aligned} \mathbb{T} \left(B_*, \{ \mathbf{c}_p^B \}_0^n, \{ \mathbf{h}_p^B \}_0^n \right) &= \mathbb{T} \left(A_*, \{ \mathbf{c}_p^A \}_0^n, \{ \mathbf{h}_p^A \}_0^n \right) \mathbb{T} \left(D_*, \{ \mathbf{c}_p^D \}_0^n, \{ \mathbf{h}_p^D \}_0^n \right) \\ &\times \mathbb{T} \left(C_*, \{ \mathbf{c}_{3p} \}_0^{3n+2}, \{ 0 \}_0^{3n+2} \right). \end{aligned}$$

Teorem 3.1.2, Reidemeister torsiyon hesaplamalarında kullanılan temel bir sonuçtur ve bu teoremin sonucu olarak aşağıdaki lemma elde edilir.

Lemma 3.1.3. [13] A_* ve D_* vektör uzaylarının zincir kompleksi olsun. \mathbf{c}_p^A , \mathbf{c}_p^D , \mathbf{h}_p^A ve \mathbf{h}_p^D sırasıyla A_p , D_p , $H_p(A_*)$ ve $H_p(D_*)$ uzaylarının tabanlarını gösterebilir. Bu durumda,

$$\mathbb{T} \left(A_* \oplus D_*, \{ \mathbf{c}_p^A \sqcup \mathbf{c}_p^D \}_0^n, \{ \mathbf{h}_p^A \sqcup \mathbf{h}_p^D \}_0^n \right) = \mathbb{T} \left(A_*, \{ \mathbf{c}_p^A \}_0^n, \{ \mathbf{h}_p^A \}_0^n \right) \mathbb{T} \left(D_*, \{ \mathbf{c}_p^D \}_0^n, \{ \mathbf{h}_p^D \}_0^n \right)$$

eşitliği elde edilir.

3.2. Simplektik Zincir Kompleks

Tanım 3.2.1. \mathbb{F} , reel veya kompleks cismi göstermek üzere, aşağıdaki verilen özellikleri sağlayan $(C_*, \partial_*, \{ \omega_{*,q-*} \})$ zincir kompleksine \mathbb{F} -simplektik zincir kompleks denir:

1. $p = 0, \dots, q$ için $q \equiv 2 \pmod{4}$,
2. $\omega_{p,q-p} : C_p \times C_{q-p} \rightarrow \mathbb{F}$ ∂ -uyumlu, ters-simetrik ve bozulmamış bilineer dönüşümler vardır. Daha açık bir ifade ile,

$$\begin{cases} \omega_{p,q-p}(\partial_{p+1}a, b) = (-1)^{p+1} \omega_{p+1,q-(p+1)}(a, \partial_{q-p}b), \\ \omega_{p,q-p}(a, b) = (-1)^{p(q-p)} \omega_{q-p,p}(b, a). \end{cases}$$

Burada $q \equiv 2 \pmod{4}$ olması sebebiyle q çift sayı ve $q/2$ tek sayı olur. Böylece

$$\omega_{p,q-p}(a, b) = (-1)^{p(q-p)} \omega_{q-p,p}(b, a)$$

elde edilir. Buna ek olarak, $p = 0, \dots, q/2$ olmak üzere

$$\omega_{p,q-p} : C_p \times C_{q-p} \longrightarrow \mathbb{F}$$

ters-simetrik bozulmamış bilineer dönüşümlerin ∂ -uyumlu olmasından dolayı bu dönüşümler homolojilere genişletilebilir. Daha fazla bilgi için [1] makalesine bakınız.

Tanım 3.2.2. C_* uzunluğu q olan \mathbb{F} -simplektik zincir kompleks olduğunu kabul edelim. C_p ve C_{q-p} uzaylarının tabanları sırasıyla \mathbf{c}_p ve \mathbf{c}_{q-p} olsun. Eğer $\omega_{p,q-p}$ bilineer dönüşümünün \mathbf{c}_p ve \mathbf{c}_{q-p} tabanlarındaki matrisi aşağıdaki gibi ise:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{I}_{k \times k} \quad , \quad p \neq q/2; \\ \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0}_{l \times l} & \mathbf{I}_{l \times l} \\ \hline -\mathbf{I}_{l \times l} & \mathbf{0}_{l \times l} \end{array} \right]_{2l \times 2l} \quad , \quad p = q/2 \end{array} \right.$$

bu tabanlara ω -uyumlu denir. Burada $\mathbf{I}_{k \times k}$, $k \times k$ birim matrisidir. k ise C_p ve C_{q-p} uzaylarının boyutlarına, $2l$ 'de $C_{q/2}$ uzayının boyutuna eşittir.

Teorem 3.2.3. [31] $p = 0, \dots, q$ için $(C_*, \partial_*, \{\omega_{*,q-*}\})$ ω -uyumlu \mathbf{c}_p tabanları olan bir \mathbb{R} -simplektik zincir kompleks ve \mathbf{h}_p ise $H_p(C_*)$ uzayının tabanı olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\mathbb{T}(C_*, \{\mathbf{c}_p\}_0^q, \{\mathbf{h}_p\}_0^q) = \prod_{p=0}^{(q/2)-1} \Delta(\mathbf{h}_p, \mathbf{h}_{q-p})^{(-1)^p} \sqrt{\Delta(\mathbf{h}_{q/2}, \mathbf{h}_{q/2})}^{(-1)^{q/2}}.$$

Burada $\Delta(\mathbf{h}_p, \mathbf{h}_{q-p})$, bozulmamış

$$[\omega_{p,q-p}] : H_p(C_*) \times H_{q-p}(C_*) \longrightarrow \mathbb{R}$$

eşlemedeki \mathbf{h}_p ve \mathbf{h}_{q-p} tabanlarına karşılık gelen matrisin determinantıdır.

Teorem 3.2.4. [14] $p = 0, \dots, q$ olmak üzere $(C_*, \partial_*, \{\omega_{*,q-*}\})$ ω -uyumlu \mathbf{c}_p tabanları olan bir \mathbb{C} -simplektik zincir kompleks ve \mathbf{h}_p ise $H_p(C_*)$ uzayının tabanıdır. Bu durumda aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$|\mathbb{T}(C_*, \{\mathbf{c}_p\}_0^q, \{\mathbf{h}_p\}_0^q)| = \prod_{p=0}^{(q/2)-1} |\Delta(\mathbf{h}_p, \mathbf{h}_{q-p})|^{(-1)^p} \sqrt{|\Delta(\mathbf{h}_{q/2}, \mathbf{h}_{q/2})|}^{(-1)^{q/2}}.$$

Burada $\Delta(\mathbf{h}_p, \mathbf{h}_{q-p})$, bozulmamış

$$[\omega_{p,q-p}] : H_p(C_*) \times H_{q-p}(C_*) \longrightarrow \mathbb{C}$$

eşlemedeki \mathbf{h}_p ve \mathbf{h}_{q-p} tabanlarına karşılık gelen matrisin determinantını göstermektedir.

Teorem 3.2.3 ve Teorem 3.2.4'ün uygulamaları ile ilgili daha ayrıntılı bilgiye [13, 33, 34, 41] kaynaklarından ulaşılabilir.

4. TEMSİLİN REİDEMEİSTER TORSİYONU

Bu bölümde, Σ cinsi $g \geq 2$ olan kapalı yönlendirilebilir bir yüzeyi ve $\tilde{\Sigma}$ ise Σ 'nın evrensel örtüsünü göstereceğiz. Lie cebiri \mathcal{G} olan serbest veya yüzey grupları için G Lie grubu, aşağıdaki matris grupları olsun:

$$GL(n, \mathbb{C}), SL(n, \mathbb{C}), O(2n+1, \mathbb{C}), O(2n, \mathbb{C}), Sp(2n, \mathbb{C}), SO^*(2n), U(n), U(p, q), O(p, q).$$

Yüzeyin temel grubundan G Lie grubuna giden bir homomorfizmayı

$$\rho : \pi_1(\Sigma) \longrightarrow G$$

ile gösterelim. $E_\rho = \tilde{\Sigma} \times \mathcal{G} / \sim$ ise ρ ile bağlantılı Σ yüzeyi üzerindeki eşlenik demet (adjoint bundle) olsun. Burada

$$(x_2, t_2) = (\gamma \bullet x_1, \gamma \bullet t_1)$$

eşitliği sağlanacak şekilde bir $(x_1, t_1), (x_2, t_2) \in \tilde{\Sigma} \times \mathcal{G}$ ve $\gamma \in \pi_1(\Sigma)$ var ise

$$(x_1, t_1) \sim (x_2, t_2).$$

Burada γ 'nın ilk parçadaki etkisi örtü fonksiyonu (deck transformation) etkisi ve ikinci parçadaki etkisi ise eşlenik etkisidir (adjoint action). Daha açık ifade etmek gerekirse

$$\begin{cases} \gamma \bullet x_1 = \gamma(x_1), \\ \gamma \bullet t_1 = \text{Ad}_{\rho(\gamma)}(t_1) = \rho(\gamma)t_1\rho(\gamma)^{-1}. \end{cases}$$

K, Σ yüzeyi üzerindeki bir hücre-parçalanışı ve \tilde{K} ise K parçalanışının $\tilde{\Sigma}$ evrensel örtüsüne kaldırılışı (lifting) olsun.

$$\mathbb{Z}[\pi_1(\Sigma)] = \left\{ \sum_{k=1}^d n_k \gamma_k \mid n_k \in \mathbb{Z}, \gamma_k \in \pi_1(\Sigma), d \in \mathbb{N} \right\}$$

integral grup halkası tanımından yola çıkarak ve örtü fonksiyonu etkisi ile eşlenik etkisi göz önüne alındığında $C_*(\tilde{K}; \mathbb{Z})$ uzayının sağ- $\mathbb{Z}[\pi_1(\Sigma)]$ -modülü ve \mathcal{G} ise sol- $\mathbb{Z}[\pi_1(\Sigma)]$ -modülü olur. Daha açık bir ifade ile, $\sigma \in C_*(\tilde{\Sigma}; \mathbb{Z})$, $\gamma \in \pi_1(\Sigma)$ ve $t \in \mathcal{G}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} C_*(\tilde{K}; \mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}[\pi_1(\Sigma)] &\longrightarrow C_*(\tilde{K}; \mathbb{Z}) \\ \left(\sigma, \sum_{k=1}^d n_k \gamma_k \right) &\longmapsto \sum_{k=1}^d n_k \sigma \cdot \gamma_k = \sum_{k=1}^d n_k \gamma_k^{-1} \bullet \sigma, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}[\pi_1(\Sigma)] \times \mathcal{G} &\longrightarrow \mathcal{G} \\ (\gamma, t) &\longmapsto \gamma \bullet t = \text{Ad}_{\rho(\gamma)}(t) = \rho(\gamma) t \rho(\gamma)^{-1}. \end{aligned}$$

Burada γ^{-1} örtü fonksiyonu sayesinde etkir.

Tensör ilişkisi $\sigma \bullet \gamma \otimes t = \sigma \otimes \gamma \bullet t$ yardımıyla aşağıdaki eşitlikler kolayca elde edilebilir:

$$\begin{cases} \gamma^{-1} \bullet \sigma \otimes t = \sigma \otimes \gamma \bullet t, \\ \sigma' \otimes t = \gamma \bullet \sigma' \otimes \gamma \bullet t. \end{cases}$$

Burada $\sigma' = \gamma^{-1} \bullet \sigma$ demektir. Böylece

$$C_*(K; \mathcal{G}_{\text{Ad}_\rho}) := C_*(\tilde{K}; \mathbb{Z}) \otimes \mathcal{G} / \sim$$

olarak tanımlanır. Burada $\sigma \otimes t$ 'nin denklik sınıfı $\{\gamma \bullet \sigma \otimes \gamma \bullet t; \gamma \in \pi_1(\Sigma)\}$ yörüngesi içerisindeki bütün elemanları göstermektedir.

Bu durumda aşağıdaki zincir kompleks elde edilir:

$$0 \longrightarrow C_2 \left(K; \mathcal{G}_{\text{Ad}_\rho} \right) \xrightarrow{\partial_2 \otimes \text{id}} C_1 \left(K; \mathcal{G}_{\text{Ad}_\rho} \right) \xrightarrow{\partial_1 \otimes \text{id}} C_0 \left(K; \mathcal{G}_{\text{Ad}_\rho} \right) \longrightarrow 0. \quad (4.1)$$

Burada ∂_p olağan sınır operatörüdür ve $H_* \left(K; \mathcal{G}_{\text{Ad}_\rho} \right)$, $H^* \left(K; \mathcal{G}_{\text{Ad}_\rho} \right)$ uzayları sırasıyla (4.1) eşzincir kompleksininin homoloji ve kohomolojini göstermektedir. Ayrıca $C^* \left(K; \mathcal{G}_{\text{Ad}_\rho} \right)$, $C_* \left(\tilde{K}; \mathbb{Z} \right)$ uzayından \mathcal{G} Lie cebirine giden $\mathbb{Z}[\pi_1(\Sigma)]$ -modül homomorfizmalarının kümesidir. Daha fazla bilgi için [24] makalesine bakınız.

$\rho, \rho' : \pi_1(\Sigma) \rightarrow G$ homomorfizmaları eşlenik ise bir $A \in G$ için

$$\rho'(\cdot) = A\rho(\cdot)A^{-1}$$

eşitliği sağlanır. Bu durumda $C_* \left(K; \mathcal{G}_{\text{Ad}_\rho} \right)$ ve $C_* \left(K; \mathcal{G}_{\text{Ad}_{\rho'}} \right)$ izomorfiktir. Aynı sebeple, $C^* \left(K; \mathcal{G}_{\text{Ad}_\rho} \right)$ ve $C^* \left(K; \mathcal{G}_{\text{Ad}_{\rho'}} \right)$ uygun eşzincirler de izomorfiktir. Bilindiği gibi $H_* \left(K; \mathcal{G}_{\text{Ad}_\rho} \right)$ homolojileri Σ yüzeyinin K hücre-parçalanışından bağımsızdır. Bu konu hakkındaki ispat için örneğin [31] nolu makalede bulunan Lemma 1.2.1'e bakınız.

(4.1) zincir kompleksini göz önüne alalım. $C_p \left(K; \mathbb{Z} \right)$ uzayının tabanı aşağıdaki gibi olsun:

$$\left\{ e_1^p, \dots, e_{m_p}^p \right\}.$$

Burada m_p , $C_p(K)$ uzayının boyutuna eşittir. Eğer $j = 1, \dots, m_p$ için e_j^p tabanının \tilde{e}_j^p kaldırılışı göz önüne alınırsa $C_p \left(\tilde{K}; \mathbb{Z} \right)$ uzayının bir

$$c_p = \left\{ \tilde{e}_1^p, \dots, \tilde{e}_{m_p}^p \right\}$$

$\mathbb{Z}[\pi_1(\Sigma)]$ -tabanı elde edilir. Yarı-basit \mathcal{G} Lie cebirinin bir B -ortonormal tabanını

$$\mathcal{A} = \{v_k\}_{k=1}^{\dim \mathcal{G}}$$

olarak kabul edelim. Daha açık bir ifadeyle, B Killing formunun bu tabandaki matrisi bir $\overbrace{\text{Diyag}(1, \dots, 1)}^{\dim \mathcal{G} \text{ tane}}$ diyagonal matristir. Bu durumda, $C_p(K; \mathcal{G}_{\text{Ad}_\rho})$ uzayının bir \mathbb{C} -tabanı

$$\mathbf{c}_p = c_p \otimes_\rho \mathcal{A}$$

elde edilir ve bu tabana $C_p(K; \mathcal{G}_{\text{Ad}_\rho})$ uzayı için bir *geometrik taban* adı verilir.

Tanım 4.0.1. $p = 0, 1, 2$ için $\mathbf{c}_p = c_p \otimes_\rho \mathcal{A}$, (4.1) zincir kompleksindeki $C_p(K; \mathcal{G}_{\text{Ad}_\rho})$ uzayının bir geometrik tabanı ve \mathbf{h}_p ise $H_p(\Sigma; \mathcal{G}_{\text{Ad}_\rho})$ homoloji grubunun bir tabanı olsun. Bu durumda

$$\mathbb{T} \left(C_* \left(K; \mathcal{G}_{\text{Ad}_\rho} \right), \left\{ c_p \otimes_\rho \mathcal{A} \right\}_{p=0}^2, \left\{ \mathbf{h}_p \right\}_{p=0}^2 \right)$$

K , Ad_ρ ve $\left\{ \mathbf{h}_p \right\}_{p=0}^2$ üçlüsünün *Reidemeister torsiyonu* olarak adlandırılır.

5. REIDEMEİSTER TORSİYONUN İYİ TANIMLILIĞI VE SONUÇLARI

Bu bölümde G -değerli temsillerin Reidemeister torsiyonunun iyi tanımlı olduğunu ispatlanmış ve simplektik zincir kompleksi sayesinde bu tip temsiller için Reidemeister torsiyon formülü üretilmiştir. Şimdi Tanım 4.0.1’de verilen Reidemeister torsiyonun, \mathcal{A} tabanından, ρ eşlenik sınıfından, \tilde{e}_j^p kaldırılışlarından ve hücre-parçalanışından bağımsız olduğunu aşağıda vereceğimiz sonuçlarda açıklayacağız. Bu konu ile ilgili daha ayrıntılı bilgi için [31] makalesindeki Lemma 1.4.2’e ve Lemma 2.0.5’e bakınız.

5.1. G -değerli Temsiller için Reidemeister Torsiyonun İyi Tanımlılığı

Teorem 5.1.1. $p = 0, 1, 2$ olmak üzere $\Sigma, K, \rho, \mathbf{c}_p = c_p \otimes_{\rho} \mathcal{A}$ ve \mathbf{h}_p yukarıdaki gibi olsun. Bu durumda

$$\mathbb{T} \left(C_* \left(K; \mathcal{G}_{\text{Ad}_p} \right), \{c_p \otimes_{\rho} \mathcal{A}\}_{p=0}^2, \{\mathbf{h}_p\}_{p=0}^2 \right)$$

Reidemeister torsiyonu \mathcal{A} tabanından, ρ eşlenik sınıfından, \tilde{e}_j^p kaldırılışlarından ve K hücre-parçalanışından bağımsızdır.

İspat. İlk olarak Reidemeister torsiyonun \mathcal{A} tabanından bağımsız olduğunu ispatlayalım. \mathcal{G} Lie cebirinin bir B -ortonormal tabanı \mathcal{A}' olsun. Bu durumda Reidemeister torsiyonun

$$\mathbb{T} \left(C_*, \{\mathbf{c}'_p\}_0^2, \{\mathbf{h}'_p\}_0^2 \right) = \prod_{p=0}^2 \left(\frac{[\mathbf{c}'_p, \mathbf{c}'_p]}{[\mathbf{h}'_p, \mathbf{h}'_p]} \right)^{(-1)^p} \mathbb{T} \left(C_*, \{\mathbf{c}_p\}_0^2, \{\mathbf{h}_p\}_0^2 \right)$$

değişim-taban-formülünden aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\frac{\mathbb{T} \left(C_* \left(K; \mathcal{G}_{\text{Ad}_p} \right), \{\mathbf{c}'_p\}_{p=0}^2, \{\mathbf{h}_p\}_{p=0}^2 \right)}{\mathbb{T} \left(C_* \left(K; \mathcal{G}_{\text{Ad}_p} \right), \{\mathbf{c}_p\}_{p=0}^2, \{\mathbf{h}_p\}_{p=0}^2 \right)} = \det(T)^{-\chi(\Sigma)}.$$

Burada

$$\prod_{p=0}^2 \left(\frac{[c_p \otimes_{\rho} \mathcal{A}', c_p \otimes_{\rho} \mathcal{A}]}{[\mathbf{h}'_p, \mathbf{h}_p]} \right)^{(-1)^p} = \prod_{p=0}^2 [\mathcal{A}', \mathcal{A}]^{\#c_p(-1)^p} = [\mathcal{A}', \mathcal{A}]^{\sum_{p=0}^2 \#c_p(-1)^p} = \det(T)^{-\chi(\Sigma)}.$$

Ayrıca, \mathbf{c}'_p geometrik tabanı $c_p \otimes_{\rho} \mathcal{A}'$ tabanına eşittir ve T ise \mathcal{A}' tabanından \mathcal{A} tabanına giden değişim-taban-matrisini göstermektedir. \mathcal{A} ve \mathcal{A}' tabanları B -ortonormal taban olduğundan dolayı

$$\det T = \pm 1$$

olur. Bununla birlikte Σ yüzeyinin Euler-karakteristik etkisinden

$$\chi(\Sigma) = -2(g-1)$$

çift sayı olduğunu bilinmektedir. Böylece Reidemeister torsiyonun B -ortonormal \mathcal{A} tabanından bağımsız olduğunu elde edilmiş olur.

Eşlenik temsiller için bükümlü zincirler ve eşzincirler izomorfik olduğundan, Reidemeister torsiyon ρ eşlenik sınıfından bağımsızdır.

Şimdi Reidemeister torsiyonun \tilde{e}_j^p kaldırılışlarından bağımsız olduğunu ispatlayalım. $\gamma \in \pi_1(\Sigma)$ bir sabit olmak üzere $\{e_1^p, \dots, e_{m_p}^p\}$ tabanı için

$$\mathbf{c}'_p = \left\{ \tilde{e}_1^p \cdot \gamma, \tilde{e}_2^p, \dots, \tilde{e}_{m_p}^p \right\}$$

kaldırılışını düşünelim. Burada e_1^p için farklı bir kaldırılış alınmıştır. Bu durumda

$$\tilde{e}_1^p \cdot \gamma \otimes t = \tilde{e}_1^p \otimes Ad_{\rho(\gamma)}(t)$$

eşitliğine tensör çarpım özelliğinden faydalanarak ulaşılır. Burada γ sol taraftan örtü fonksiyonu (deck transformation) ile etkir ve $Ad_{\rho(\gamma)} : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ ise $\rho(\gamma) \in G$ ile konjugasyon kullanılarak elde edilen bir eşlenik lineer dönüşümdür. (3.3) değişim-taban-formülü yardımıyla aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\frac{\mathbb{T} \left(C_* \left(K; \mathcal{G}_{Ad_\rho} \right), \{ \mathbf{c}'_p \}_{p=0}^2, \{ \mathbf{h}_p \}_{p=0}^2 \right)}{\mathbb{T} \left(C_* \left(K; \mathcal{G}_{Ad_\rho} \right), \{ \mathbf{c}_p \}_{p=0}^2, \{ \mathbf{h}_p \}_{p=0}^2 \right)} = \det(T). \quad (5.1)$$

Burada \mathbf{c}_p ve \mathbf{c}'_p sırasıyla $c_p \otimes_\rho \mathcal{A}$ ve $c'_p \otimes_\rho \mathcal{A}$ geometrik tabanlarına eşittir. T ise \mathcal{A} tabanına karşılık gelen $Ad_{\rho(\gamma)} : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ lineer dönüşümünün matrisini göstermektedir. $\det T = 1$ olduğunu göstererek, Reidemeister torsiyonun \tilde{e}_j^p kaldırılışlarından bağımsız olduğu sonucu elde edilecektir. $Ad_{\rho(\gamma)}$ lineer dönüşümündeki determinantın tabandan bağımsız olduğunu göstermek için $\mathcal{G} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}), \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}), \mathfrak{o}(2n+1, \mathbb{C}), \mathfrak{o}(2n, \mathbb{C}), \mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C}), \mathfrak{so}^*(2n), \mathfrak{u}(n), \mathfrak{u}(p, q), \mathfrak{o}(p, q)$ Lie cebirlerinin aşağıda sırasıyla verilen \mathcal{B} tabanlarını ele alalım:

$$\mathcal{B}_{\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})} = \{ E_{k,l}, 1 \leq k, l \leq n \},$$

$$\mathcal{B}_{\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})} = \begin{cases} E_{k,l}, & 1 \leq k < l \leq n, \\ E_{k,l}, & 1 \leq l < k \leq n, \\ E_{k,k} - E_{k+1,k+1}, & 1 \leq k \leq n-1, \end{cases}$$

$$\mathcal{B}_{\mathfrak{o}(2n+1, \mathbb{C})} = \begin{cases} E_{k,k} - E_{n+k,n+k}, & 2 \leq k \leq n+1, \\ E_{1,n+k+1} - E_{k+1,1}, & 1 \leq k \leq n, \\ E_{1,k+1} - E_{n+k+1,1}, & 1 \leq k \leq n, \\ E_{k+1,l+1} - E_{n+l+1,n+k+1}, & 1 \leq k \neq l \leq n, \\ E_{k+1,n+l+1} - E_{l+1,n+k+1}, & 1 \leq k < l \leq n, \\ E_{n+k+1,l+1} - E_{n+l+1,k+1}, & 1 \leq l < k \leq n, \end{cases}$$

$$\mathcal{B}_{\mathfrak{o}(2n, \mathbb{C})} = \begin{cases} E_{k,l} - E_{n+l,n+k}, & 1 \leq k, l \leq n, \\ E_{k,n+l} - E_{l,n+k}, & 1 \leq k < l \leq n, \\ E_{n+k,l} - E_{n+l,k}, & 1 \leq k < l \leq n, \end{cases}$$

$$\mathcal{B}_{\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C})} = \begin{cases} E_{k,k} - E_{n+k, n+k}, & 1 \leq k \leq n, \\ E_{k,l} - E_{n+k, n+l}, & 1 \leq k \neq l \leq n, \\ E_{k, n+l} + E_{l, n+k}, & 1 \leq k \leq l \leq n, \\ E_{n+l, k} + E_{n+k, l}, & 1 \leq k \leq l \leq n, \end{cases}$$

$$\mathcal{B}_{\mathfrak{so}^*(2n)} = \begin{cases} E_{k,l} - E_{n+l, n+k}, & \sqrt{-1} (E_{k,l} - E_{n+l, n+k}), & 1 \leq k < l \leq n, \\ E_{l,k} - E_{n+k, n+l}, & \sqrt{-1} (E_{l,k} - E_{n+k, n+l}), & 1 \leq k < l \leq n, \\ E_{k, n+l} - E_{l, n+k}, & \sqrt{-1} (E_{k, n+l} - E_{l, n+k}), & 1 \leq k < l \leq n, \\ E_{n+k, l} - E_{n+l, k}, & \sqrt{-1} (E_{n+k, l} - E_{n+l, k}), & 1 \leq k < l \leq n, \end{cases}$$

$$\mathcal{B}_{\mathfrak{u}(n)} = \begin{cases} \sqrt{-1} E_{k,k}, & 1 \leq k \leq n, \\ E_{k,l} - E_{l,k}, & 1 \leq k < l \leq n, \\ \sqrt{-1} (E_{k,l} + E_{l,k}), & 1 \leq k < l \leq n, \end{cases}$$

$$\mathcal{B}_{\mathfrak{u}(p,q)} = \begin{cases} \frac{1}{2} (E_{k,l} - E_{l,k}), & \frac{\sqrt{-1}}{2} (E_{k,l} + E_{l,k}), & 1 \leq k < l \leq p, \\ \frac{1}{2} (E_{k,l} + E_{l,k}), & \frac{\sqrt{-1}}{2} (E_{k,l} - E_{l,k}), & 1 \leq k \leq p, p+1 \leq l \leq p+q, \\ \frac{1}{2} (E_{k,l} - E_{l,k}), & \frac{\sqrt{-1}}{2} (E_{k,l} + E_{l,k}), & p+1 \leq k < l \leq p+q, \\ \sqrt{-1} E_{k,k}, & & 1 \leq k \leq p+q, \end{cases}$$

$$\mathcal{B}_{\mathfrak{o}(p,q)} = \begin{cases} \frac{1}{2} (E_{k,l} - E_{l,k}), & 1 \leq k < l \leq p, \\ \frac{1}{2} (E_{k,l} + E_{l,k}), & 1 \leq k \leq p, p+1 \leq l \leq p+q, \\ \frac{1}{2} (E_{k,l} - E_{l,k}), & p+1 \leq k < l \leq p+q. \end{cases}$$

Burada

$$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) = M_{n \times n}(\mathbb{C}),$$

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid \text{Tr}(A) = 0\},$$

$$\mathfrak{o}(2n+1, \mathbb{C}) = \{A \in \mathfrak{gl}(2n+1, \mathbb{C}) \mid JA + A^t J = 0\}, \quad J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & I_n & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathfrak{o}(2n, \mathbb{C}) = \{A \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{C}) \mid JA + A^t J = 0\}, J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C}) = \{A \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{C}) \mid A^t J + JA = 0\}, J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathfrak{so}^*(2n) = \{X \in \mathfrak{so}(2n, \mathbb{C}) \mid -J\bar{X}J = X\}, J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathfrak{u}(n) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid A^* + A = 0\},$$

$$\mathfrak{u}(p, q) = \{X \in \mathfrak{gl}(p+q, \mathbb{C}) \mid X^* J + JX = 0\}, J = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{bmatrix},$$

$$\mathfrak{o}(p, q) = \{X \in \mathfrak{gl}(p+q, \mathbb{R}) \mid X^t J + JX = 0\}, J = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{bmatrix}$$

ve * eşlenik transpozu, I_n ise $n \times n$ kare matrisini göstermektedir.

İlk olarak, Lie cebiri

$$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) = M_{n \times n}(\mathbb{C})$$

olan $G = GL(n, \mathbb{C})$ genel lineer grubunu ele alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} Ad_{\rho(\gamma)} : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) &\longrightarrow \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \\ t &\longmapsto \rho(\gamma)t\rho(\gamma)^{-1}. \end{aligned}$$

Bir $Q \in G$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$Q\rho(\gamma)Q^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = D, \quad \rho(\gamma) = Q^{-1}DQ.$$

Burada $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \rho(\gamma) \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$ 'nin özdeğerleridir.

$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ Lie cebirinin

$$\mathcal{B}_{\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})} = \{E_{k,l}, 1 \leq k, l \leq n\}$$

tabanını ele alalım. Bu durumda

$$Ad_{\rho(\gamma)}(E_{k,l}) = Ad_{Q^{-1}DQ}(E_{k,l}) = Ad_{Q^{-1}} \circ Ad_D \circ Ad_Q(E_{k,l}) = (Ad_Q)^{-1} \circ Ad_D \circ Ad_Q(E_{k,l}).$$

$$\mathcal{B}'_{\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})} = \{Ad_{Q^{-1}}(E_{k,l}), 1 \leq k, l \leq n\}$$

aynı zamanda $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ 'nin bir tabanıdır ve buradan aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$\begin{aligned} Ad_{\rho(\gamma)}(Ad_{Q^{-1}}(E_{k,l})) &= \left((Ad_Q)^{-1} \circ Ad_D \circ Ad_Q \right) (Ad_{Q^{-1}}(E_{k,l})) \\ &= (Ad_Q)^{-1} \circ Ad_D(E_{k,l}) = \frac{\lambda_k}{\lambda_l} Ad_{Q^{-1}}(E_{k,l}). \end{aligned}$$

Bu durumda $\mathcal{B}'_{\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})}$ tabanındaki lineer $Ad_{\rho(\gamma)}$ dönüşümünün matrisi aşağıdaki gibidir:

$$\text{Diyag} \left(\begin{array}{l} \frac{\lambda_k}{\lambda_l}, \quad k \leq l; \\ \frac{\lambda_k}{\lambda_l}, \quad k > l \end{array} \right).$$

Dolayısıyla $\mathcal{B}_{\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})}$ tabanına karşılık gelen lineer $Ad_{\rho(\gamma)} : \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ dönüşümünün matrisindeki determinantın $\det T = 1$ olduğunu elde edilir. Böylece Reidemeister torsiyon \tilde{e}_j^{ρ} kaldırılışlarından bağımsız olduğu sonucuna varılır.

$$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) = \{A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \mid Tr(A) = 0\}$$

Lie cebirine sahip $G = SL(n,\mathbb{C})$ özel lineer grubunu ele alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} Ad_{\rho(\gamma)} : \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) \\ t &\longmapsto \rho(\gamma)t\rho(\gamma)^{-1}. \end{aligned}$$

Bir $Q \in GL(n,\mathbb{C})$ için aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$Q\rho(\gamma)Q^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = D, \quad \rho(\gamma) = Q^{-1}DQ.$$

Burada $\rho(\gamma) \in SL(n,\mathbb{C})$ 'nin özdeğerleri $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 'dir.

$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ Lie cebirinin

$$\mathcal{B}_{\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})} = \begin{cases} E_{k,l}, & 1 \leq k < l \leq n, \\ E_{k,l}, & 1 \leq l < k \leq n, \\ E_{k,k} - E_{k+1,k+1}, & 1 \leq k \leq n-1 \end{cases}$$

tabanını ele alalım. Bu durumda

$$Ad_{\rho(\gamma)}(E_{i,j}) = Ad_{Q^{-1}DQ}(E_{i,j}) = Ad_{Q^{-1}} \circ Ad_D \circ Ad_Q(E_{i,j}) = (Ad_Q)^{-1} \circ Ad_D \circ Ad_Q(E_{i,j}).$$

$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ 'nin başka bir tabanı aşağıdaki gibidir:

$$\mathcal{B}'_{\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})} = \begin{cases} Ad_{Q^{-1}}(E_{k,l}), & 1 \leq k < l \leq n, \\ Ad_{Q^{-1}}(E_{k,l}), & 1 \leq l < k \leq n, \\ Ad_{Q^{-1}}(E_{k,k}) - Ad_{Q^{-1}}(E_{k+1,k+1}), & 1 \leq k \leq n-1. \end{cases}$$

Buradan aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$\begin{cases} Ad_{\rho(\gamma)}(Ad_{Q^{-1}}(E_{k,l})) = \frac{\lambda_k}{\lambda_l} Ad_{Q^{-1}}(E_{k,l}), \\ Ad_{\rho(\gamma)}(Ad_{Q^{-1}}(E_{k,k} - E_{k+1,k+1})) = Ad_{Q^{-1}}(E_{k,k} - E_{k+1,k+1}). \end{cases}$$

Böylece $\mathcal{B}'_{\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})}$ tabanındaki lineer $Ad_{\rho(\gamma)}$ dönüşümünün matrisi aşağıdaki gibi olur:

$$\text{Diyag} \begin{pmatrix} \frac{\lambda_k}{\lambda_l}, & 1 \leq k < l \leq n; \\ \frac{\lambda_k}{\lambda_l}, & 1 \leq l < k \leq n; \\ 1, \dots, 1, & 1 \leq k \leq n-1 \end{pmatrix}.$$

Bu durumda $\mathcal{B}_{\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})}$ tabanına karşılık gelen $Ad_{\rho(\gamma)} : \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ lineer dönüşümünün matrisindeki determinantın $\det T = 1$ olduğunu elde edilir. Dolayısıyla Reidemeister torsiyon \tilde{e}_j^p kaldırılışlarından bağımsızdır.

$$\mathfrak{o}(2n+1, \mathbb{C}) = \{A \in \mathfrak{gl}(2n+1, \mathbb{C}) \mid JA + A^t J = 0\}, \quad J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & I_n & 0 \end{bmatrix}$$

Lie cebiri olan $G = \mathfrak{O}(2n+1, \mathbb{C})$ ortogonal grubunu göz önüne alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} Ad_{\rho(\gamma)} : \mathfrak{o}(2n+1, \mathbb{C}) &\longrightarrow \mathfrak{o}(2n+1, \mathbb{C}) \\ t &\longmapsto \rho(\gamma)t\rho(\gamma)^{-1}. \end{aligned}$$

Bir $Q \in GL(2n+1, \mathbb{C})$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$Q\rho(\gamma)Q^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_{2n+1} \end{bmatrix} = D, \quad \rho(\gamma) = Q^{-1}DQ.$$

Burada $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n+1}, \rho(\gamma) \in O(2n+1, \mathbb{C})$ 'nin özdeğerleridir. Biliyoruz ki

$$O(2n+1, \mathbb{C}) = \{A \in M_{2n+1 \times 2n+1}(\mathbb{C}) \mid A^t J A = J\}.$$

Bir $v = [v_1, \dots, v_{2n+1}] \neq 0$ için $Av = \lambda v$ eşitliği vardır ve aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$\begin{cases} JAv = \lambda Jv, \\ \overbrace{A^t J A v}^J = \lambda A^t J v, \\ A^t(Jv) = \frac{1}{\lambda} Jv. \end{cases}$$

Böylece $1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}$ özdeğerlerini elde ederiz.

$\mathfrak{o}(2n+1, \mathbb{C})$ Lie cebirinin

$$\mathcal{B}_{\mathfrak{o}(2n+1, \mathbb{C})} = \begin{cases} E_{k,k} - E_{n+k, n+k}, & 2 \leq k \leq n+1, \\ E_{1, n+k+1} - E_{k+1, 1}, & 1 \leq k \leq n, \\ E_{1, k+1} - E_{n+k+1, 1}, & 1 \leq k \leq n, \\ E_{k+1, l+1} - E_{n+l+1, n+k+1}, & 1 \leq k \neq l \leq n, \\ E_{k+1, n+l+1} - E_{l+1, n+k+1}, & 1 \leq k < l \leq n, \\ E_{n+k+1, l+1} - E_{n+l+1, k+1}, & 1 \leq l < k \leq n \end{cases}$$

tabanını göz önüne alalım. Bu durumda

$$Ad_{\rho(\gamma)}(E_{i,j}) = Ad_{Q^{-1}DQ}(E_{i,j}) = Ad_{Q^{-1}} \circ Ad_D \circ Ad_Q(E_{i,j}) = (Ad_Q)^{-1} \circ Ad_D \circ Ad_Q(E_{i,j}).$$

$\mathfrak{o}(2n+1, \mathbb{C})$ 'nin başka bir tabanı aşağıdaki gibidir:

$$\mathcal{B}'_{\mathfrak{o}(2n+1, \mathbb{C})} = \begin{cases} Ad_{Q^{-1}}(E_{k,k}) - Ad_{Q^{-1}}(E_{n+k,n+k}), & 2 \leq k \leq n+1, \\ Ad_{Q^{-1}}(E_{1,n+k+1}) - Ad_{Q^{-1}}(E_{k+1,1}), & 1 \leq k \leq n, \\ Ad_{Q^{-1}}(E_{1,k+1}) - Ad_{Q^{-1}}(E_{n+k+1,1}), & 1 \leq k \leq n, \\ Ad_{Q^{-1}}(E_{k+1,l+1}) - Ad_{Q^{-1}}(E_{n+l+1,n+k+1}), & 1 \leq k \neq l \leq n, \\ Ad_{Q^{-1}}(E_{k+1,n+l+1}) - Ad_{Q^{-1}}(E_{l+1,n+k+1}), & 1 \leq k < l \leq n, \\ Ad_{Q^{-1}}(E_{n+k+1,l+1}) - Ad_{Q^{-1}}(E_{n+l+1,k+1}), & 1 \leq l < k \leq n. \end{cases}$$

Buradan aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$\left\{ \begin{array}{l} Ad_{\rho(\gamma)}(Ad_{Q^{-1}}(E_{k,k} - E_{n+k,n+k})) = Ad_{Q^{-1}}(E_{k,k} - E_{n+k,n+k}), \\ Ad_{\rho(\gamma)}(Ad_{Q^{-1}}(E_{1,n+k+1} - E_{k+1,1})) = \lambda_{k+1} Ad_{Q^{-1}}(E_{1,n+k+1} - E_{k+1,1}), \\ Ad_{\rho(\gamma)}(Ad_{Q^{-1}}(E_{1,k+1} - E_{n+k+1,1})) = \frac{1}{\lambda_{k+1}} Ad_{Q^{-1}}(E_{1,k+1} - E_{n+k+1,1}), \\ Ad_{\rho(\gamma)}(Ad_{Q^{-1}}(E_{k+1,l+1} - E_{n+l+1,n+k+1})) = \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_{l+1}} Ad_{Q^{-1}}(E_{k+1,l+1} - E_{n+l+1,n+k+1}), \\ Ad_{\rho(\gamma)}(Ad_{Q^{-1}}(E_{k+1,n+l+1} - E_{l+1,n+k+1})) = \lambda_{k+1} \lambda_{l+1} Ad_{Q^{-1}}(E_{k+1,n+l+1} - E_{l+1,n+k+1}), \\ Ad_{\rho(\gamma)}(Ad_{Q^{-1}}(E_{n+k+1,l+1} - E_{n+l+1,k+1})) = \frac{1}{\lambda_{k+1} \lambda_{l+1}} Ad_{Q^{-1}}(E_{n+k+1,l+1} - E_{n+l+1,k+1}). \end{array} \right.$$

Lineer $Ad_{\rho(\gamma)}$ dönüşümünün $\mathcal{B}'_{\mathfrak{o}(2n+1, \mathbb{C})}$ tabanındaki matrisi aşağıdaki gibidir:

$$\text{Diyag} \begin{pmatrix} 1, \dots, 1, & 2 \leq k \leq n+1; \\ \lambda_{k+1}, & 1 \leq k \leq n; \\ \frac{1}{\lambda_{k+1}}, & 1 \leq k \leq n; \\ \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_{l+1}}, & 1 \leq k \neq l \leq n; \\ \lambda_{k+1} \lambda_{l+1}, & 1 \leq k < l \leq n; \\ \frac{1}{\lambda_{k+1} \lambda_{l+1}}, & 1 \leq l < k \leq n \end{pmatrix}.$$

Bu durumda $\mathcal{B}_{\mathfrak{o}(2n+1, \mathbb{C})}$ tabanına karşılık gelen $Ad_{\rho(\gamma)} : \mathfrak{o}(2n+1, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{o}(2n+1, \mathbb{C})$ lineer dönüşümünün matrisindeki determinantın $\det T = 1$ olduğunu elde ederiz. Böylece Reide-meister torsiyon \tilde{e}_j^{ρ} kaldırılışlarından bağımsızdır.

$$\mathfrak{o}(2n, \mathbb{C}) = \{A \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{C}) \mid JA + A^t J = 0\}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}$$

Lie cebirine sahip $G = O(2n, \mathbb{C})$ ortogonal grubunu ele alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} Ad_{\rho(\gamma)} : \mathfrak{o}(2n, \mathbb{C}) &\longrightarrow \mathfrak{o}(2n, \mathbb{C}) \\ t &\longmapsto \rho(\gamma)t\rho(\gamma)^{-1}. \end{aligned}$$

Bir $Q \in GL(2n, \mathbb{C})$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$Q\rho(\gamma)Q^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_{2n} \end{bmatrix} = D, \quad \rho(\gamma) = Q^{-1}DQ.$$

Burada $\rho(\gamma) \in O(2n, \mathbb{C})$ 'nin özdeğerleri $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}$ 'dir. Ortogonal grubun

$$O(2n, \mathbb{C}) = \{A \in M_{2n \times 2n}(\mathbb{C}) \mid A^t J A = J\}$$

olarak tanımlandığını biliyoruz. Bir $v = [v_1, \dots, v_{2n}] \neq 0$ için $Av = \lambda v$ eşitliği vardır ve aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$\begin{cases} JAv = \lambda Jv, \\ \overbrace{A^t J A v}^J = \lambda A^t J v, \\ A^t (Jv) = \frac{1}{\lambda} Jv. \end{cases}$$

Dolayısıyla $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}$ özdeğerlerini elde ederiz.

$\mathfrak{o}(2n, \mathbb{C})$ Lie cebirinin

$$\mathcal{B}_{\mathfrak{o}(2n, \mathbb{C})} = \begin{cases} E_{k,l} - E_{n+l, n+k}, & 1 \leq k, l \leq n, \\ E_{k, n+l} - E_{l, n+k}, & 1 \leq k < l \leq n, \\ E_{n+k, l} - E_{n+l, k}, & 1 \leq k < l \leq n \end{cases}$$

tabanını ele alalım. Aşağıdaki eşitliklerin sağlandığını biliyoruz:

$$Ad_{\rho(\gamma)}(E_{i,j}) = Ad_{Q^{-1}DQ}(E_{i,j}) = Ad_{Q^{-1}} \circ Ad_D \circ Ad_Q(E_{i,j}) = (Ad_Q)^{-1} \circ Ad_D \circ Ad_Q(E_{i,j}).$$

$\mathfrak{o}(2n, \mathbb{C})$ 'nin başka bir tabanı aşağıdaki gibi olur:

$$\mathcal{B}'_{\mathfrak{o}(2n, \mathbb{C})} = \begin{cases} Ad_{Q^{-1}}(E_{k,l}) - Ad_{Q^{-1}}(E_{n+l, n+k}), & 1 \leq k, l \leq n, \\ Ad_{Q^{-1}}(E_{k, n+l}) - Ad_{Q^{-1}}(E_{l, n+k}), & 1 \leq k < l \leq n, \\ Ad_{Q^{-1}}(E_{n+k, l}) - Ad_{Q^{-1}}(E_{n+l, k}), & 1 \leq k < l \leq n. \end{cases}$$

Buradan aşağıdaki eşitlikler vardır:

$$\left\{ \begin{array}{l} Ad_{\rho(\gamma)}(Ad_{Q^{-1}}(E_{k,l} - E_{n+l,n+k})) = \frac{\lambda_k}{\lambda_l} Ad_{Q^{-1}}(E_{k,l} - E_{n+l,n+k}), \\ Ad_{\rho(\gamma)}(Ad_{Q^{-1}}(E_{k,n+l} - E_{l,n+k})) = \lambda_k \lambda_l Ad_{Q^{-1}}(E_{k,n+l} - E_{l,n+k}), \\ Ad_{\rho(\gamma)}(Ad_{Q^{-1}}(E_{n+k,l} - E_{n+l,k})) = \frac{1}{\lambda_k \lambda_l} Ad_{Q^{-1}}(E_{n+k,l} - E_{n+l,k}). \end{array} \right.$$

$\mathcal{B}'_{\mathfrak{o}(2n,\mathbb{C})}$ tabanındaki lineer $Ad_{\rho(\gamma)}$ dönüşümünün matrisi aşağıdaki gibidir:

$$\text{Diyag} \begin{pmatrix} \frac{\lambda_k}{\lambda_l}, & 1 \leq k, l \leq n; \\ \lambda_k \lambda_l, & 1 \leq k < l \leq n; \\ \frac{1}{\lambda_k \lambda_l}, & 1 \leq k < l \leq n \end{pmatrix}.$$

$\mathcal{B}_{\mathfrak{o}(2n,\mathbb{C})}$ tabanına karşılık gelen $Ad_{\rho(\gamma)} : \mathfrak{o}(2n,\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{o}(2n,\mathbb{C})$ lineer dönüşümünün matrisindeki determinantın $\det T = 1$ olduğunu elde ederiz. Bu durumda Reidemeister torsiyonun \tilde{e}_j^p kaldırılışlarından bağımsız olduğu elde edilir.

$$\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C}) = \{A \in \mathfrak{gl}(2n,\mathbb{C}) \mid A^t J + JA = 0\}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$$

Lie cebiri olan $G = \text{Sp}(2n,\mathbb{C})$ simplektik grubunu göz önüne alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} Ad_{\rho(\gamma)} : \mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C}) \\ t &\longmapsto \rho(\gamma)t\rho(\gamma)^{-1}. \end{aligned}$$

Bir $Q \in \text{GL}(2n, \mathbb{C})$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$Q\rho(\gamma)Q^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_{2n} \end{bmatrix} = D, \rho(\gamma) = Q^{-1}DQ.$$

Burada $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}, \rho(\gamma) \in \text{Sp}(2n, \mathbb{C})$ 'nin özdeğerleridir. Biliyoruz ki

$$\text{Sp}(2n, \mathbb{C}) = \{A \in \text{GL}(2n, \mathbb{C}) \mid A^t J A = J\}.$$

Bir $v = [v_1, \dots, v_{2n}] \neq 0$ için $Av = \lambda v$ eşitliği vardır ve aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$\begin{cases} A^t \underbrace{J Av}_{\lambda w} = \underbrace{J v}_w, \\ \lambda A^t w = w, \\ A^t w = \frac{1}{\lambda} w. \end{cases}$$

Böylece $i = 1, \dots, n$ olmak üzere $\lambda_{n+i} = \lambda_i^{-1}$.

$\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C})$ Lie cebirinin

$$\mathcal{B}_{\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C})} = \begin{cases} E_{k,k} - E_{n+k, n+k}, & 1 \leq k \leq n, \\ E_{k,l} - E_{n+l, n+k}, & 1 \leq k \neq l \leq n, \\ E_{k, n+l} + E_{l, n+k}, & 1 \leq k \leq l \leq n, \\ E_{n+l, k} + E_{n+k, l}, & 1 \leq k \leq l \leq n \end{cases}$$

tabanını ele alalım. Aşağıdaki eşitliklerin sağlandığını biliyoruz:

$$Ad_{\rho(\gamma)}(E_{i,j}) = Ad_{Q^{-1}DQ}(E_{i,j}) = (Ad_Q)^{-1} \circ Ad_D \circ Ad_Q(E_{i,j}).$$

$\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C})$ 'nin tabanını aşağıdaki gibi ele alalım:

$$\mathcal{B}'_{\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C})} = \begin{cases} Ad_{Q^{-1}}(E_{k,k}) - Ad_{Q^{-1}}(E_{n+k, n+k}), & 1 \leq k \leq n, \\ Ad_{Q^{-1}}(E_{k,l}) - Ad_{Q^{-1}}(E_{n+l, n+k}), & 1 \leq k \neq l \leq n, \\ Ad_{Q^{-1}}(E_{k, n+l}) + Ad_{Q^{-1}}(E_{l, n+k}), & 1 \leq k \leq l \leq n, \\ Ad_{Q^{-1}}(E_{n+l, k}) + Ad_{Q^{-1}}(E_{n+k, l}), & 1 \leq k \leq l \leq n. \end{cases}$$

Buradan aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$\begin{cases} Ad_{\rho(\gamma)}(Ad_{Q^{-1}}(E_{k,k} - E_{n+k, n+k})) = Ad_{Q^{-1}}(E_{k,k} - E_{n+k, n+k}), \\ Ad_{\rho(\gamma)}(Ad_{Q^{-1}}(E_{k,l} - E_{n+l, n+k})) = \frac{\lambda_k}{\lambda_l} Ad_{Q^{-1}}(E_{k,l} - E_{n+l, n+k}), \\ Ad_{\rho(\gamma)}(Ad_{Q^{-1}}(E_{k, n+l} + E_{l, n+k})) = \lambda_k \lambda_l Ad_{Q^{-1}}(E_{k, n+l} + E_{l, n+k}), \\ Ad_{\rho(\gamma)}(Ad_{Q^{-1}}(E_{n+l, k} + E_{n+k, l})) = \frac{1}{\lambda_k \lambda_l} Ad_{Q^{-1}}(E_{n+l, k} + E_{n+k, l}). \end{cases}$$

Bu durumda $\mathcal{B}'_{\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C})}$ tabanındaki $Ad_{\rho(\gamma)}$ lineer dönüşümünün matrisi aşağıdaki gibi olur:

$$\text{Diyag} \begin{pmatrix} 1, \dots, 1, & 1 \leq k \leq n; \\ \frac{\lambda_k}{\lambda_l}, & 1 \leq k \neq l \leq n; \\ \lambda_k \lambda_l, & 1 \leq k \leq l \leq n; \\ \frac{1}{\lambda_k \lambda_l}, & 1 \leq k \leq l \leq n \end{pmatrix}.$$

$\mathcal{B}_{\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C})}$ tabanına karşılık gelen $Ad_{\rho(\gamma)} : \mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C})$ lineer dönüşümünün matrisindeki determinantın $\det T = 1$ olduğunu elde ederiz. Dolayısıyla Reidemeister torsiyon \tilde{e}_j^p kaldırılışlarından bağımsızdır.

$$\mathfrak{so}^*(2n) = \{X \in \mathfrak{so}(2n, \mathbb{C}) \mid -J\bar{X}J = X\}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$$

Lie cebiri olan $G = \text{SO}^*(2n, \mathbb{C})$ Lie grubunu ele alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} \text{Ad}_{\rho(\gamma)} : \mathfrak{so}^*(2n, \mathbb{C}) &\longrightarrow \mathfrak{so}^*(2n, \mathbb{C}) \\ t &\longmapsto \rho(\gamma)t\rho(\gamma)^{-1}. \end{aligned}$$

Bir $Q \in \text{GL}(2n, \mathbb{C})$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$Q\rho(\gamma)Q^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_{2n} \end{bmatrix} = D, \quad \rho(\gamma) = Q^{-1}DQ.$$

Burada $\rho(\gamma) \in \text{SO}^*(2n, \mathbb{C})$ 'nin özdeğerleri $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}$ 'dir. Bir $v = [v_1, \dots, v_{2n}] \neq 0$ için $Av = \lambda v$ eşitliği vardır ve $i = 1, \dots, n$ olmak üzere $\lambda_{n+i} = \lambda_i^{-1}$.

$\mathfrak{so}^*(2n, \mathbb{C})$ Lie cebirinin

$$\mathcal{B}_{\mathfrak{so}^*(2n)} = \begin{cases} E_{k,l} - E_{n+l,n+k}, & \sqrt{-1}(E_{k,l} - E_{n+l,n+k}), & 1 \leq k < l \leq n, \\ E_{l,k} - E_{n+k,n+l}, & \sqrt{-1}(E_{l,k} - E_{n+k,n+l}), & 1 \leq k < l \leq n, \\ E_{k,n+l} - E_{l,n+k}, & \sqrt{-1}(E_{k,n+l} - E_{l,n+k}), & 1 \leq k < l \leq n, \\ E_{n+k,l} - E_{n+l,k}, & \sqrt{-1}(E_{n+k,l} - E_{n+l,k}), & 1 \leq k < l \leq n \end{cases}$$

tabanını ele alalım ve aşağıdaki eşitliklerin sağlandığını biliyoruz:

$$\text{Ad}_{\rho(\gamma)}(E_{i,j}) = \text{Ad}_{Q^{-1}DQ}(E_{i,j}) = (\text{Ad}_Q)^{-1} \circ \text{Ad}_D \circ \text{Ad}_Q(E_{i,j}).$$

$\mathfrak{so}^*(2n, \mathbb{C})$ 'nin başka bir tabanı aşağıdaki gibidir:

$$\mathcal{B}'_{\mathfrak{so}^*(2n)} = \begin{cases} \text{Ad}_{Q^{-1}}(E_{k,l} - E_{n+l,n+k}), & \sqrt{-1}\text{Ad}_{Q^{-1}}(E_{k,l} - E_{n+l,n+k}), & 1 \leq k < l \leq n, \\ \text{Ad}_{Q^{-1}}(E_{l,k} - E_{n+k,n+l}), & \sqrt{-1}\text{Ad}_{Q^{-1}}(E_{l,k} - E_{n+k,n+l}), & 1 \leq k < l \leq n, \\ \text{Ad}_{Q^{-1}}(E_{k,n+l} - E_{l,n+k}), & \sqrt{-1}\text{Ad}_{Q^{-1}}(E_{k,n+l} - E_{l,n+k}), & 1 \leq k < l \leq n, \\ \text{Ad}_{Q^{-1}}(E_{n+k,l} - E_{n+l,k}), & \sqrt{-1}\text{Ad}_{Q^{-1}}(E_{n+k,l} - E_{n+l,k}), & 1 \leq k < l \leq n. \end{cases}$$

Buradan aşağıdaki eşitlikler vardır:

$$\left\{ \begin{array}{l} Ad_{\rho(\gamma)}(Ad_{Q^{-1}}(E_{k,l} - E_{n+l,n+k})) = \frac{\lambda_k}{\lambda_l} Ad_{Q^{-1}}(E_{k,l} - E_{n+l,n+k}), \\ Ad_{\rho(\gamma)}(Ad_{Q^{-1}}(E_{l,k} - E_{n+k,n+l})) = \frac{\lambda_l}{\lambda_k} Ad_{Q^{-1}}(E_{l,k} - E_{n+k,n+l}), \\ Ad_{\rho(\gamma)}(Ad_{Q^{-1}}(E_{k,n+l} - E_{l,n+k})) = \lambda_k \lambda_l Ad_{Q^{-1}}(E_{k,n+l} - E_{l,n+k}), \\ Ad_{\rho(\gamma)}(Ad_{Q^{-1}}(E_{n+k,l} - E_{n+l,k})) = \frac{1}{\lambda_k \lambda_l} Ad_{Q^{-1}}(E_{n+k,l} - E_{n+l,k}). \end{array} \right.$$

Lineer $Ad_{\rho(\gamma)}$ dönüşümünün $\mathcal{B}'_{\mathfrak{so}^*(2n,\mathbb{C})}$ tabanındaki matrisi aşağıdaki gibidir:

$$\text{Diyag} \begin{pmatrix} \frac{\lambda_k}{\lambda_l}, & 1 \leq k < l \leq n; \\ \frac{\lambda_l}{\lambda_k}, & 1 \leq k < l \leq n; \\ \lambda_k \lambda_l, & 1 \leq k < l \leq n; \\ \frac{1}{\lambda_k \lambda_l}, & 1 \leq k < l \leq n \end{pmatrix}.$$

Bu durumda $\mathcal{B}_{\mathfrak{so}^*(2n,\mathbb{C})}$ tabanına karşılık gelen $Ad_{\rho(\gamma)} : \mathfrak{so}^*(2n,\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{so}^*(2n,\mathbb{C})$ lineer dönüşümünün matrisindeki determinantın $\det T = 1$ olduğunu elde edilir. Dolayısıyla Reide-meister torsiyon $\tilde{e}_j^{\mathcal{P}}$ kaldırılışlarından bağımsızdır.

$$\mathfrak{u}(n) = \{A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \mid A^* + A = 0\},$$

Lie cebirine sahip $G = U(n)$ üniter grubunu ele alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} Ad_{\rho(\gamma)} : \mathfrak{u}(n,\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathfrak{u}(n,\mathbb{C}) \\ t &\longmapsto \rho(\gamma)t\rho(\gamma)^{-1}. \end{aligned}$$

Bir $Q \in GL(n, \mathbb{C})$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$Q\rho(\gamma)Q^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = D, \quad \rho(\gamma) = Q^{-1}DQ.$$

Burada $\rho(\gamma) \in U(n)$ 'nin özdeğerleri $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 'dir. Üniter grubun

$$U(n) = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{C}) \mid A^*A = I_n\}$$

olarak tanımlandığını biliyoruz. Bir $v = [v_1, \dots, v_n] \neq 0$ için $Av = \lambda v$ eşitliği vardır ve aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$\left\{ \begin{array}{l} \overbrace{A^*Av}^{I_n} = \lambda A^*v, \\ v = \lambda A^*v, \\ \frac{1}{\lambda}v = A^*v, \\ \frac{1}{\lambda}v = A^T v. \end{array} \right.$$

Dolayısıyla $\frac{1}{\lambda}$, A^T matrisinin bir özdeğerleridir ve buradan $\frac{1}{\lambda}$, \bar{A} matrisinin bir özdeğeridir.

Bu durumda

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle Av, Av \rangle = \langle \lambda v, \lambda v \rangle = \lambda \bar{\lambda} \langle v, v \rangle, \\ \langle Av, Av \rangle = \langle v, A^*Av \rangle = \langle v, v \rangle, \\ \lambda \bar{\lambda} = 1, \quad |\lambda| = 1, \quad \lambda = e^{i\theta}, \quad \theta = \theta(\lambda) \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

Böylece A üniter matrisinin özdeğerleri $e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}$ olur.

$u(n)$ Lie cebirinin

$$\mathcal{B}_{u(n)} = \begin{cases} \sqrt{-1}E_{k,k}, & 1 \leq k \leq n, \\ E_{k,l} - E_{l,k}, & 1 \leq k < l \leq n, \\ \sqrt{-1}(E_{k,l} + E_{l,k}), & 1 \leq k < l \leq n \end{cases}$$

tabanını ele alalım. Bu durumda

$$Ad_{\rho(\gamma)}(E_{i,j}) = Ad_{Q^{-1}DQ}(E_{i,j}) = (Ad_Q)^{-1} \circ Ad_D \circ Ad_Q(E_{i,j}).$$

$u(n)$ 'nin başka bir tabanı aşağıdaki gibidir:

$$\mathcal{B}'_{u(n)} = \begin{cases} \sqrt{-1}Ad_{Q^{-1}}(E_{k,k}), & 1 \leq k \leq n, \\ Ad_{Q^{-1}}(E_{k,l}) - Ad_{Q^{-1}}(E_{l,k}), & 1 \leq k < l \leq n, \\ \sqrt{-1}(Ad_{Q^{-1}}(E_{k,l}) + Ad_{Q^{-1}}(E_{l,k})), & 1 \leq k < l \leq n. \end{cases}$$

Buradan aşağıdaki eşitlikler vardır:

$$\left\{ \begin{array}{l} Ad_{\rho(\gamma)}(Ad_{Q^{-1}}(E_{k,k})) = Ad_{Q^{-1}}(E_{k,k}), \\ Ad_{\rho(\gamma)}(Ad_{Q^{-1}}(E_{k,l}) - Ad_{Q^{-1}}(E_{l,k})) = e^{i(\theta_k - \theta_l)}Ad_{Q^{-1}}(E_{k,l}) - e^{i(\theta_l - \theta_k)}Ad_{Q^{-1}}(E_{l,k}) \\ \quad = \cos(\theta_k - \theta_l)Ad_{Q^{-1}}(E_{k,l} - E_{l,k}) + i \sin(\theta_k - \theta_l)Ad_{Q^{-1}}(E_{k,l} + E_{l,k}), \\ Ad_{\rho(\gamma)}(iAd_{Q^{-1}}(E_{k,l}) + iAd_{Q^{-1}}(E_{l,k})) = i(e^{i(\theta_k - \theta_l)}Ad_{Q^{-1}}(E_{k,l}) + e^{i(\theta_l - \theta_k)}Ad_{Q^{-1}}(E_{l,k})) \\ \quad = -\sin(\theta_k - \theta_l)Ad_{Q^{-1}}(E_{k,l} - E_{l,k}) + i \cos(\theta_k - \theta_l)Ad_{Q^{-1}}(E_{k,l} + E_{l,k}). \end{array} \right.$$

$\mathcal{B}'_{u(n)}$ tabanındaki lineer $Ad_{\rho(\gamma)}$ dönüşümünün matrisi aşağıdaki gibidir:

$$\text{Diyag} \left(\begin{array}{l} 1, \dots, 1, \quad 1 \leq k \leq n; \\ \left[\begin{array}{cc} \cos(\theta_k - \theta_l) & -\sin(\theta_k - \theta_l) \\ \sin(\theta_k - \theta_l) & \cos(\theta_k - \theta_l) \end{array} \right], \quad 1 \leq k < l \leq n \end{array} \right).$$

$\mathcal{B}_{\mathfrak{u}(n)}$ tabanına karşılık gelen $Ad_{\rho(\gamma)} : \mathfrak{u}(n) \rightarrow \mathfrak{u}(n)$ lineer dönüşümünün matrisindeki determinantın $\det T = 1$ olduğunu elde ederiz. Böylece Reidemeister torsiyon \tilde{e}_j^{ρ} kaldırılışlarından bağımsızdır.

$$\mathfrak{u}(p, q) = \{X \in \mathfrak{gl}(p+q, \mathbb{C}) \mid X^*J + JX = 0\}, J = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{bmatrix}$$

Lie cebiri olan $G = U(p, q)$ Lie grubunu ele alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} Ad_{\rho(\gamma)} : \mathfrak{u}(p, q) &\longrightarrow \mathfrak{u}(p, q) \\ t &\longmapsto \rho(\gamma)t\rho(\gamma)^{-1}. \end{aligned}$$

Bir $Q \in GL(p+q, \mathbb{C})$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$Q\rho(\gamma)Q^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_{p+q} \end{bmatrix} = D, \rho(\gamma) = Q^{-1}DQ.$$

Burada $\rho(\gamma) \in U(p, q)$ 'nin özdeğerleri $\lambda_1, \dots, \lambda_{p+q}$ 'dir. Biliyoruz ki

$$U(p, q) = \{A \in M_{(p+q) \times (p+q)}(\mathbb{C}) \mid A^*JA = J\}.$$

Bir $v = [v_1, \dots, v_{p+q}] \neq 0$ için $Av = \lambda v$ eşitliği vardır ve aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$\begin{cases} JAv = \lambda Jv, \\ \overbrace{A^*JA}^J v = \lambda A^*Jv, \\ A^*(Jv) = \frac{1}{\lambda} Jv. \end{cases}$$

Böylece $\frac{1}{\lambda}$, A^* matrisinin bir özdeğerleridir ve buradan $\frac{1}{\lambda}$, A matrisinin bir özdeğeridir ve aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$\begin{cases} \langle Av, v \rangle = \langle v, A^*v \rangle, \\ \langle Av, v \rangle = \langle v, \bar{\lambda}v \rangle = \langle v, A^*v \rangle, \\ \lambda\bar{\lambda} = 1, |\lambda| = 1, \lambda = e^{i\theta}, \theta = \theta(\lambda) \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Bu durumda A matrisinin özdeğerleri $e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}$ olur.

$u(p, q)$ Lie cebirinin

$$\mathcal{B}_{u(p,q)} = \begin{cases} \frac{1}{2}(E_{k,l} - E_{l,k}), \frac{\sqrt{-1}}{2}(E_{k,l} + E_{l,k}), & 1 \leq k < l \leq p, \\ \frac{1}{2}(E_{k,l} + E_{l,k}), \frac{\sqrt{-1}}{2}(E_{k,l} - E_{l,k}), & 1 \leq k \leq p, p+1 \leq l \leq p+q, \\ \frac{1}{2}(E_{k,l} - E_{l,k}), \frac{\sqrt{-1}}{2}(E_{k,l} + E_{l,k}), & p+1 \leq k < l \leq p+q, \\ \sqrt{-1}E_{k,k}, & 1 \leq k \leq p+q \end{cases}$$

tabanını ele alalım. Aşağıdaki eşitliğin sağlandığını biliyoruz:

$$Ad_{\rho(\gamma)}(E_{i,j}) = (Ad_Q)^{-1} \circ Ad_D \circ Ad_Q(E_{i,j}).$$

$u(p, q)$ 'nin başka bir tabanını aşağıdaki gibi ele alalım:

$$\mathcal{B}'_{u(p,q)} = \begin{cases} \frac{1}{2}Ad_{Q^{-1}}(E_{k,l} - E_{l,k}), \frac{\sqrt{-1}}{2}Ad_{Q^{-1}}(E_{k,l} + E_{l,k}), & 1 \leq k < l \leq p, \\ \frac{1}{2}Ad_{Q^{-1}}(E_{k,l} + E_{l,k}), \frac{\sqrt{-1}}{2}Ad_{Q^{-1}}(E_{k,l} - E_{l,k}), & 1 \leq k \leq p, p+1 \leq l \leq p+q, \\ \frac{1}{2}Ad_{Q^{-1}}(E_{k,l} - E_{l,k}), \frac{\sqrt{-1}}{2}Ad_{Q^{-1}}(E_{k,l} + E_{l,k}), & p+1 \leq k < l \leq p+q, \\ \sqrt{-1}Ad_{Q^{-1}}(E_{k,k}), & 1 \leq k \leq p+q. \end{cases}$$

Buradan aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 Ad_{\rho(\gamma)} \left(Ad_{Q^{-1}} \left(\frac{E_{k,l} - E_{l,k}}{2} \right) \right) = e^{i(\theta_k - \theta_l)} Ad_{Q^{-1}} \left(\frac{E_{k,l}}{2} \right) - e^{i(\theta_l - \theta_k)} Ad_{Q^{-1}} \left(\frac{E_{l,k}}{2} \right) \\
 \quad = \cos(\theta_k - \theta_l) Ad_{Q^{-1}} \left(\frac{E_{k,l} - E_{l,k}}{2} \right) + i \sin(\theta_k - \theta_l) Ad_{Q^{-1}} \left(\frac{E_{k,l} + E_{l,k}}{2} \right), \\
 \\
 Ad_{\rho(\gamma)} \left(i Ad_{Q^{-1}} \left(\frac{E_{k,l} + E_{l,k}}{2} \right) \right) = i \left(e^{i(\theta_k - \theta_l)} Ad_{Q^{-1}} \left(\frac{E_{k,l}}{2} \right) + e^{i(\theta_l - \theta_k)} Ad_{Q^{-1}} \left(\frac{E_{l,k}}{2} \right) \right) \\
 \quad = -\sin(\theta_k - \theta_l) Ad_{Q^{-1}} \left(\frac{E_{k,l} - E_{l,k}}{2} \right) + i \cos(\theta_k - \theta_l) Ad_{Q^{-1}} \left(\frac{E_{k,l} + E_{l,k}}{2} \right), \\
 \\
 Ad_{\rho(\gamma)} \left(Ad_{Q^{-1}} \left(\frac{E_{k,l} + E_{l,k}}{2} \right) \right) = e^{i(\theta_k - \theta_l)} Ad_{Q^{-1}} \left(\frac{E_{k,l}}{2} \right) + e^{i(\theta_l - \theta_k)} Ad_{Q^{-1}} \left(\frac{E_{l,k}}{2} \right) \\
 \quad = \cos(\theta_k - \theta_l) Ad_{Q^{-1}} \left(\frac{E_{k,l} + E_{l,k}}{2} \right) - i \sin(\theta_k - \theta_l) Ad_{Q^{-1}} \left(\frac{E_{k,l} - E_{l,k}}{2} \right), \\
 \\
 Ad_{\rho(\gamma)} \left(i Ad_{Q^{-1}} \left(\frac{E_{k,l} - E_{l,k}}{2} \right) \right) = i \left(e^{i(\theta_k - \theta_l)} Ad_{Q^{-1}} \left(\frac{E_{k,l}}{2} \right) - e^{i(\theta_l - \theta_k)} Ad_{Q^{-1}} \left(\frac{E_{l,k}}{2} \right) \right) \\
 \quad = \sin(\theta_k - \theta_l) Ad_{Q^{-1}} \left(\frac{E_{k,l} + E_{l,k}}{2} \right) + i \cos(\theta_k - \theta_l) Ad_{Q^{-1}} \left(\frac{E_{k,l} - E_{l,k}}{2} \right), \\
 \\
 Ad_{\rho(\gamma)} \left(Ad_{Q^{-1}} \left(E_{k,k} \right) \right) = Ad_{Q^{-1}} \left(E_{k,k} \right).
 \end{array} \right.$$

Lineer $Ad_{\rho(\gamma)}$ dönüşümünün $\mathcal{B}'_{u(p,q)}$ tabanındaki matrisi aşağıdaki gibidir:

$$\text{Diyag} \left(\begin{array}{l}
 \left[\begin{array}{cc} \cos(\theta_k - \theta_l) & -\sin(\theta_k - \theta_l) \\ \sin(\theta_k - \theta_l) & \cos(\theta_k - \theta_l) \end{array} \right], \quad 1 \leq k < l \leq p; \\
 \\
 \left[\begin{array}{cc} \cos(\theta_k - \theta_l) & \sin(\theta_k - \theta_l) \\ -\sin(\theta_k - \theta_l) & \cos(\theta_k - \theta_l) \end{array} \right], \quad \begin{array}{l} 1 \leq k \leq p, \\ p+1 \leq l \leq p+q; \end{array} \\
 \\
 \left[\begin{array}{cc} \cos(\theta_k - \theta_l) & -\sin(\theta_k - \theta_l) \\ \sin(\theta_k - \theta_l) & \cos(\theta_k - \theta_l) \end{array} \right], \quad p+1 \leq k < l \leq p+q; \\
 \\
 1, \dots, 1, \quad 1 \leq k \leq p+q
 \end{array} \right).$$

Bu durumda $\mathcal{B}_{\mathfrak{u}(p,q)}$ tabanına karşılık gelen $Ad_{\rho(\gamma)} : \mathfrak{u}(p,q) \rightarrow \mathfrak{u}(p,q)$ lineer dönüşümünün matrisindeki determinantın $\det T = 1$ olduğunu elde ederiz. Dolayısıyla Reidemeister torsiyonun \tilde{e}_j^p kaldırılışlarından bağımsız olduğu elde edilir.

$$\mathfrak{o}(p,q) = \{X \in \mathfrak{gl}(p+q, \mathbb{R}) \mid X^t J + JX = 0\}, \quad J = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{bmatrix}$$

Lie cebirine sahip $G = O(p,q)$ Lie grubunu ele alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} Ad_{\rho(\gamma)} : \mathfrak{o}(p,q) &\longrightarrow \mathfrak{o}(p,q) \\ t &\longmapsto \rho(\gamma)t\rho(\gamma)^{-1}. \end{aligned}$$

Bir $Q \in GL(p+q, \mathbb{C})$ için aşağıdaki eşitlikler vardır:

$$Q\rho(\gamma)Q^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_{p+q} \end{bmatrix} = D, \quad \rho(\gamma) = Q^{-1}DQ.$$

Burada $\rho(\gamma) \in O(p+q)$ 'nin özdeğerleri $\lambda_1, \dots, \lambda_{p+q}$ 'dir.

$\mathfrak{o}(p,q)$ Lie cebirinin

$$\mathcal{B}_{\mathfrak{o}(p,q)} = \begin{cases} \frac{1}{2}(E_{k,l} - E_{l,k}), & 1 \leq k < l \leq p, \\ \frac{1}{2}(E_{k,l} + E_{l,k}), & 1 \leq k \leq p, p+1 \leq l \leq p+q, \\ \frac{1}{2}(E_{k,l} - E_{l,k}), & p+1 \leq k < l \leq p+q. \end{cases}$$

tabanını ele alalım. Aşağıdaki eşitliklerin sağlandığını biliyoruz:

$$Ad_{\rho(\gamma)}(E_{i,j}) = (Ad_Q)^{-1} \circ Ad_D \circ Ad_Q(E_{i,j}).$$

$\mathfrak{o}(p, q)$ 'nin başka bir tabanı aşağıdaki gibidir:

$$\mathcal{B}'_{\mathfrak{o}(p,q)} = \begin{cases} \frac{1}{2}Ad_{Q^{-1}}(E_{k,l} - E_{l,k}), & 1 \leq k < l \leq p, \\ \frac{1}{2}Ad_{Q^{-1}}(E_{k,l} + E_{l,k}), & 1 \leq k \leq p, p+1 \leq l \leq p+q, \\ \frac{1}{2}Ad_{Q^{-1}}(E_{k,l} - E_{l,k}), & p+1 \leq k < l \leq p+q. \end{cases}$$

Buradan aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$\left\{ \begin{aligned} & Ad_{\rho(\gamma)}\left(\frac{1}{2}Ad_{Q^{-1}}(E_{k,l} + E_{l,k})\right) = \frac{1}{2}\frac{\lambda_k}{\lambda_l}Ad_{Q^{-1}}(E_{k,l}) + \frac{1}{2}\frac{\lambda_l}{\lambda_k}Ad_{Q^{-1}}(E_{l,k}) \\ & = \frac{\mu_{kl}}{2}Ad_{Q^{-1}}(u_{kl} + v_{kl}) + \frac{1}{2\mu_{kl}}Ad_{Q^{-1}}(u_{kl} - v_{kl}) = \frac{\mu_{kl} + \frac{1}{\mu_{kl}}}{2}Ad_{Q^{-1}}(u_{kl}) + \frac{\mu_{kl} - \frac{1}{\mu_{kl}}}{2}Ad_{Q^{-1}}(v_{kl}) \\ & = \cosh(\ln \mu_{kl})Ad_{Q^{-1}}(u_{kl}) + \sinh(\ln \mu_{kl})Ad_{Q^{-1}}(v_{kl}), \\ & Ad_{\rho(\gamma)}\left(\frac{1}{2}Ad_{Q^{-1}}(E_{k,l} - E_{l,k})\right) = \frac{1}{2}\frac{\lambda_k}{\lambda_l}Ad_{Q^{-1}}(E_{k,l}) - \frac{1}{2}\frac{\lambda_l}{\lambda_k}Ad_{Q^{-1}}(E_{l,k}) \\ & = \frac{\mu_{kl}}{2}Ad_{Q^{-1}}(u_{kl} + v_{kl}) - \frac{1}{2\mu_{kl}}Ad_{Q^{-1}}(u_{kl} - v_{kl}) = \frac{\mu_{kl} - \frac{1}{\mu_{kl}}}{2}Ad_{Q^{-1}}(u_{kl}) + \frac{\mu_{kl} + \frac{1}{\mu_{kl}}}{2}Ad_{Q^{-1}}(v_{kl}) \\ & = \sinh(\ln \mu_{kl})Ad_{Q^{-1}}(u_{kl}) + \cosh(\ln \mu_{kl})Ad_{Q^{-1}}(v_{kl}). \end{aligned} \right.$$

Burada aşağıdaki eşitlikler kullanılmıştır:

$$\begin{cases} u_{kl} = \frac{E_{k,l} + E_{l,k}}{2}, & v_{kl} = \frac{E_{k,l} - E_{l,k}}{2}, \\ E_{k,l} = u_{kl} + v_{kl}, & E_{l,k} = u_{kl} - v_{kl}, \\ \frac{\lambda_k}{\lambda_l} = \mu_{kl}, & \frac{\lambda_l}{\lambda_k} = \frac{1}{\mu_{kl}}. \end{cases}$$

$\mathcal{B}'_{\mathfrak{o}(p,q)}$ tabanındaki lineer $Ad_{\rho(\gamma)}$ dönüşümünün matrisi aşağıdaki gibidir:

$$\text{Diyag} \left(\begin{array}{l} \left[\begin{array}{cc} \cosh(\ln \mu_{kl}) & \sinh(\ln \mu_{kl}) \\ \sinh(\ln \mu_{kl}) & \cosh(\ln \mu_{kl}) \end{array} \right], & \begin{array}{l} 1 \leq k \leq p, p+1 \leq l \leq p+q, \\ 1 \leq k < l \leq p; \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} \cosh(\ln \mu_{kl}) & \sinh(\ln \mu_{kl}) \\ \sinh(\ln \mu_{kl}) & \cosh(\ln \mu_{kl}) \end{array} \right], & \begin{array}{l} 1 \leq k \leq p, p+1 \leq l \leq p+q, \\ p+1 \leq k < l \leq p+q \end{array} \end{array} \right).$$

Böylece $\mathcal{B}_{\mathfrak{o}(p,q)}$ tabanına karşılık gelen $Ad_{\rho(\gamma)} : \mathfrak{o}(p,q) \rightarrow \mathfrak{o}(p,q)$ lineer dönüşümünün matrisindeki determinantın $\det T = 1$ olduğunu elde ederiz. Reidemeister torsiyonun \tilde{e}_j^p kaldırılışlarından bağımsızdır.

Bu durumda \mathcal{G} Lie cebirinin yukarıda verilen tabanlardaki lineer $Ad_{\rho(\gamma)} : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ dönüşümünün matrisindeki determinantın 1 olduğunu elde ederiz. Böylece Reidemeister torsiyon \tilde{e}_j^p kaldırılışlarından bağımsız olduğu sonucuna varılır. ■

Bu tip temsil uzayları için Reidemeister torsiyonun iyi tanımlı olduğunu Teorem 5.1.1'de ispatlanmıştır. Bundan sonraki kısımlarda $\mathbb{T} \left(C_* \left(K; \mathcal{G}_{Ad_\rho} \right), \{c_p \otimes_\rho \mathcal{A}\}_{p=0}^2, \{\mathbf{h}_p\}_{p=0}^2 \right)$ yerine $\mathbb{T} \left(\Sigma, \{\mathbf{h}_p\}_{p=0}^2 \right)$ gösterimi kullanılacaktır. Bununla birlikte

$$G = G_1 \times \cdots \times G_d$$

olmak üzere $\rho : \pi_1(\Sigma) \rightarrow G$ homomorfizması ve G_i yukarıda verdiğimiz listedeki bir Lie grup için Teorem 5.1.1'i kullanarak bu tip temsil uzayları için Reidemeister torsiyonun iyi tanımlı olduğunu söyleyebiliriz.

5.2. G -değerli Temsil Uzayları için Reidemeister Torsiyon Formülü

Aşağıdaki sonuçlarda, simplektik zincir kompleksi sayesinde bu tip temsil uzayları için Reidemeister torsiyon formülleri hesaplanacaktır. Öncelikle Kronecker eşlemesini, \smile_B kap çarpımını ve Poincare dualiteyi hatırlayalım. $\Sigma, K, G, \mathcal{G}, \rho$ ve $\mathbf{c}_p = c_p \otimes_\rho \mathcal{A}$ yukarıdaki gibi kabul edeceğiz.

Tanım 5.2.1. $i = 0, 1, 2$ için

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : C^i(K; \mathcal{G}_{\text{Ad}_\rho}) \times C_i(K; \mathcal{G}_{\text{Ad}_\rho}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

Kronecker eşlemesi

$$\langle \theta, \sigma \otimes_\rho t \rangle = B(t, \theta(\sigma))$$

olarak tanımlanır. Burada B, G Lie grubu için Killing formdur.

Kronecker eşlemesinin iyi tanımlılığı B 'nin konjügasyon altındaki değişmezliğinden kaynaklandığını söyleyebiliriz. Ayrıca, bu eşleme

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H^i(\Sigma; \mathcal{G}_{\text{Ad}_\rho}) \times H_i(\Sigma; \mathcal{G}_{\text{Ad}_\rho}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

şeklinde genişletilebilir.

$$\cup : C^i(K; \mathcal{G}_{\text{Ad}_\rho}) \times C^j(K; \mathcal{G}_{\text{Ad}_\rho}) \longrightarrow C^{i+j}(\tilde{\Sigma}; \mathbb{C})$$

kap çarpımı

$$(\theta_i \cup \theta_j)(\sigma_{i+j}) = B(\theta_i((\sigma_{i+j})_{\text{ön}}), \theta_j((\sigma_{i+j})_{\text{arka}}))$$

olarak tanımlanır. Burada $\sigma_{i+j} \in C_{i+j}(\tilde{K}; \mathbb{Z})$ ve \tilde{K} ise K parçalanışının $\tilde{\Sigma}$ evrensel örtüsüne kaldırılışıdır (lifting). Ayrıca burada $\theta_i : C_i(\tilde{K}; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{G}$ ve $\theta_j : C_j(\tilde{K}; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{G}$ ise $\mathbb{Z}[\pi_1(\Sigma)]$ -modül homomorfizmalarını göstermektedir.

\cup kap çarpımının iyi tanımlılığı \mathcal{G} Lie cebirinin bozulmamış $B : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{C}$ Killing formu sayesinde. Bununla birlikte $\theta_i \cup \theta_j$ ise $\pi_1(\Sigma)$ temel grubu etkisi altında bir değişmezdir. Böylece aşağıdaki kap çarpımı elde edilir:

$$\smile_B : C^i(K; \mathcal{G}_{\text{Ad}_\rho}) \times C^j(K; \mathcal{G}_{\text{Ad}_\rho}) \longrightarrow C^{i+j}(K; \mathbb{C}).$$

Bu kap çarpımı bükümlü kohomolojilere genişletilebilir:

$$\smile_B : H^i(\Sigma; \mathcal{G}_{\text{Ad}_\rho}) \times H^j(\Sigma; \mathcal{G}_{\text{Ad}_\rho}) \longrightarrow H^{i+j}(\Sigma; \mathbb{C}).$$

Burada $[\theta_i] \smile_B [\theta_j] = [\theta_i \smile_B \theta_j]$ eşitliği vardır.

Eğer lokal aşıkarlaştırmaları düşünürsek $\theta_i = \alpha_i \otimes t_1$ ve $\theta_j = \alpha_j \otimes t_2$ eşitliklerini elde ederiz. Burada $\alpha_i \in H^i(\Sigma)$, $\alpha_j \in H^j(\Sigma)$ ve $t_1, t_2 \in \mathcal{G}$ 'dir. Böylece $\theta_i \smile_B \theta_j = \alpha_i \wedge \alpha_j B(t_1, t_2)$ eşitliği sağlanır.

K hücre-parçalanışına karşılık gelen Σ yüzeyinin dual hücre-parçalanışı K' olsun. Reidemeister torsiyon altbölüm (subdivision) altında değişmez olduğundan $\sigma \in K$ ve $\sigma' \in K'$ hücreleri en çok bir kez karşılaşacağını düşünmek genelliği bozmaz. Ayrıca her bir hücrenin çapı, Σ birebirlik (injectivity) yarıçapının yarısına veya daha küçük çapa sahiptir. $C_i(\tilde{K}; \mathbb{Z})$ uzayının c_i tabanına karşılık gelen $C_i(\tilde{K}'; \mathbb{Z})$ uzayının tabanını c'_i ile gösterelim ve $C_i(K'; \mathcal{G}_{\text{Ad}_\rho})$ uzayının tabanı $\mathbf{c}'_i = c'_i \otimes_\rho \mathcal{A}$ olsun.

K ve K' hücre-parçalanışlarının kaldırılışları sırasıyla \tilde{K} ve \tilde{K}' olsun. $i = 0, 1, 2$ olmak üzere

$$(\cdot, \cdot)_{i, 2-i} : C_i(K; \mathcal{G}_{\text{Ad}_\rho}) \times C_{2-i}(K'; \mathcal{G}_{\text{Ad}_\rho}) \longrightarrow \mathbb{C} \quad (5.2)$$

kesişim formu aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$(\sigma_1 \otimes t_1, \sigma_2 \otimes t_2)_{i, 2-i} = \sum_{\gamma \in \pi_1(\Sigma)} \sigma_1 \cdot (\gamma \bullet \sigma_2) B(t_1, \gamma \bullet t_2).$$

Burada γ 'nın σ_2 'deki etkisi örtü fonksiyonu (deck transformation) etkisi ve t_2 'deki etkisi ise eşlenik etkisidir (adjoint action). “.” kesişim eşleme sayısını (intersection number pairing) göstermektedir.

σ_1 , σ_2 ve $\pi_1(\Sigma)$ temel grubunun $\tilde{\Sigma}$ evrensel örtüsü üzerindeki etkisi kompakt olması toplamının sonlu bir kümenin üzerinde olduğunu gösterir. Kesişim eşleme sayısı ters-simetrik olmasından ve B conjugasyon altında değişmez olmasından dolayı $(\cdot, \cdot)_{i,2-i}$ kesişim formunda ters-simetriktir. Bununla birlikte kesişim eşleme sayısının aynı özelliğinden dolayı $(\cdot, \cdot)_{i,2-i}$ kesişim formu ∂ -uyumlu olur.

(5.2) kesişim formunun bükümlü homolojilere doğal genişlemesinden ve bükümlü homolojilerinde hücre-parçalanışından bağımsız olması özelliğinden aşağıdaki ters-simetrik bozulmamış form elde edilir:

$$[\cdot, \cdot]_{i,2-i} : H_i(\Sigma; \mathcal{G}_{Ad\rho}) \times H_{2-i}(\Sigma; \mathcal{G}_{Ad\rho}) \longrightarrow \mathbb{C}. \quad (5.3)$$

$i = 0, 1, 2$ için (5.3) kesişim formlarının ve Kronecker eşlemesinin izomorfizmaları birleştirilirse aşağıdaki Poincare dualite izomorfizmaları elde edilir:

$$PD : H_i(\Sigma; \mathcal{G}_{Ad\rho}) \cong H_{2-i}(\Sigma; \mathcal{G}_{Ad\rho})^* \cong H^{2-i}(\Sigma; \mathcal{G}_{Ad\rho}).$$

Bu durumda $i = 0, 1, 2$ olmak üzere aşağıdaki değişmeli diyagram vardır:

$$\begin{array}{ccc} H^{2-i}(\Sigma; \mathcal{G}_{Ad\rho}) \times H^i(\Sigma; \mathcal{G}_{Ad\rho}) & \xrightarrow{\simeq_B} & H^2(\Sigma; \mathbb{C}) \\ \uparrow PD & & \uparrow \\ H_i(\Sigma; \mathcal{G}_{Ad\rho}) \times H_{2-i}(\Sigma; \mathcal{G}_{Ad\rho}) & \xrightarrow{[\cdot, \cdot]_{i,2-i}} & \mathbb{C}. \end{array} \quad (5.4)$$

Burada $\mathbb{C} \rightarrow H^2(\Sigma; \mathbb{C})$ izomorfizması $1 \in \mathbb{C}$ 'i, $H^2(\Sigma; \mathbb{C})$ temel üreticine gönderir ve bu izomorfizmanın tersi Σ üzerindeki integrasyondur.

Değişmeli (5.4) diyagramını kullanılarak aşağıdaki eşleme elde edilir:

$$\Omega_{i,2-i} : H^i(\Sigma; \mathcal{G}_{\text{Ad}\rho}) \times H^{2-i}(\Sigma; \mathcal{G}_{\text{Ad}\rho}) \xrightarrow{\sim_B} H^2(\Sigma; \mathbb{C}) \xrightarrow{\int_\Sigma} \mathbb{C}.$$

Burada $\Omega_{1,1}$, $\text{Rep}(\Sigma, G)$ üzerindeki G Lie grubunun Atiyah-Bott-Goldman simplektik formu olarak adlandırılır.

Önerme 5.2.2. $\Sigma, K, K', G, \mathcal{G}, \rho$ ve $\mathfrak{c}_\rho = \mathfrak{c}_\rho \otimes_\rho \mathcal{A}$ yukarıdaki gibi ise

$$D_* = C_*\left(K; \mathcal{G}_{\text{Ad}\rho}\right) \oplus C_*\left(K'; \mathcal{G}_{\text{Ad}\rho}\right)$$

ω -uyumlu tabanları olan bir \mathbb{C} -simplektik zincir kompleksidir.

İspat. Daha önce de belirttiğimiz üzere $(\cdot, \cdot)_{i,2-i} : C_i\left(K; \mathcal{G}_{\text{Ad}\rho}\right) \times C_{2-i}\left(K'; \mathcal{G}_{\text{Ad}\rho}\right) \rightarrow \mathbb{C}$ kesişim formu

$$(\sigma_1 \otimes t_1, \sigma_2 \otimes t_2)_{i,2-i} = \sum_{\gamma \in \pi_1(\Sigma)} \sigma_1 \cdot (\gamma \bullet \sigma_2) B(t_1, \gamma \bullet t_2)$$

şeklinde tanımlandığını biliyoruz. Burada γ 'nın σ_2 'deki etkisi örtü fonksiyonu etkisi ve t_2 'deki etkisi ise $\rho(\gamma)$ 'nın eşlenik etkisidir. “.” kesişim sayısı eşlemesini göstermektedir. Ayrıca B ise \mathcal{G} Lie cebirinin Killing formudur. Bununla birlikte

$$\omega_{i,2-i} : D_i \times D_{2-i} \longrightarrow \mathbb{C}$$

formu, (5.2) formunun $C_i\left(K; \mathcal{G}_{\text{Ad}\rho}\right) \times C_{2-i}\left(K; \mathcal{G}_{\text{Ad}\rho}\right)$ ve $C_i\left(K'; \mathcal{G}_{\text{Ad}\rho}\right) \times C_{2-i}\left(K'; \mathcal{G}_{\text{Ad}\rho}\right)$ üzerinde sıfır olarak genişletilmesinden elde edilen bir bilinear dönüşüm olarak kabul edelim. Aslında bu $(\cdot, \cdot)_{i,2-i}$ kesişim formu bilinear, ters-simetrik ve ∂ -uyumlu olduğu için $\omega_{i,2-i}$ ile aynı özelliklere sahip olur. Dolayısıyla D_* bir \mathbb{C} -simplektik zincir kompleks olacaktır.

$C_i(\tilde{K}; \mathbb{Z})$ 'nin c_i tabanına karşılık gelen $C_i(\tilde{K}'; \mathbb{Z})$ uzayının c'_i tabanı kullanılarak D_* simplektik zincir kompleksinin ω -uyumlu tabana sahip olduğunu elde ederiz. Bu durumu daha ayrıntılı açıklamak gerekirse, K hücre-parçalanışının i -boyutlu hücreleri için

$$\{e_1^i, \dots, e_{m_i}^i\}$$

bir taban ise K' hücre-parçalanışının $(2-i)$ -boyutlu hücreleri için

$$\{(e_1^i)', \dots, (e_{m_i}^i)'\}$$

karşılık gelen tabanı gerer. K ve K' hücre-parçalanışındaki hücreler bir kereden fazla karşılaşmaz. Bu durumda e_j^i tabanı $(e_j^i)'$ tabanı ile tam olarak bir kere karşılaşır, diğer $(e_k^i)'$ tabanı ile karşılaşmaz. Böylece $\{e_1^i, \dots, e_{m_i}^i\}$ tabanının $\{\widetilde{e}_1^i, \dots, \widetilde{e}_{m_i}^i\}$ kaldırılışlarını sabitletiğimizde

$$\{\widetilde{(e_1^i)'}, \dots, \widetilde{(e_{m_i}^i)'}\}$$

karşılık gelen dualde de sabitlenmiş olacaktır. Bu durumda aşağıda verilen eşitlikler sağlanır:

$$\left(\widetilde{(e_\alpha^i)} \otimes x, \widetilde{(e_\beta^i)'} \otimes y \right)_{i, 2-i} = B(x, y) \widetilde{(e_\alpha^i)} \cdot \widetilde{(e_\beta^i)'} = B(x, y) \delta_{\alpha\beta}.$$

$\mathcal{A} = \{a_\beta\}_{\beta=1}^{\dim \mathcal{G}}$ bir \mathcal{G} Lie cebirinin B -ortonormal tabanı olduğunu biliyoruz. $i = 0, 1, 2$ olmak üzere $C_i(K; \mathcal{G}_{\text{Ad}_\rho})$ ve $C_{2-i}(K'; \mathcal{G}_{\text{Ad}_\rho})$ uzaylarının tabanları sırasıyla $\{\widetilde{e_\alpha^i} \otimes a_\beta\}_{\alpha, \beta}$ ve $\{\widetilde{(e_\alpha^i)'} \otimes b_\beta\}_{\alpha, \beta}$ olsun. Burada $b_\beta = B(a_\beta, a_\beta) a_\beta$ 'dir. $C_i(K; \mathcal{G}_{\text{Ad}_\rho}) \oplus C_i(K'; \mathcal{G}_{\text{Ad}_\rho})$ uzayı için bu tabanlar kullanılırsa D_* simplektik zincir kompleksinin ω -uyumlu tabanları elde edilir. Böylece Önerme 5.2.2'nin ispatı tamamlanmış olur. ■

Aşağıdaki teoremden, Σ yüzeyinin $\pi_1(\Sigma)$ temel grubundan yukarıda ele aldığımız G Lie grubuna giden $\rho : \pi_1(\Sigma) \rightarrow G$ temsillerini düşüneceğiz ve bu tip temsiller için bir Reidemeister torsion formülü kuracağız.

Teorem 5.2.3. Σ , K , K' ve ρ yukarıdaki gibi olsun. $i = 0, 1, 2$ olmak üzere \mathbf{c}_i ve \mathbf{c}'_i sırasıyla $C_i(K; \mathcal{G}_{\text{Ad}_\rho})$ ve $C_i(K'; \mathcal{G}_{\text{Ad}_\rho})$ uzaylarına karşılık gelen geometrik tabanlar olsun. Bu durumda $i = 0, 1, 2$ için $H_i(\Sigma; \mathcal{G}_{\text{Ad}_\rho})$ uzayının bir tabanı \mathbf{h}_i ise aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

(i)

$$\left| \mathbb{T}(\Sigma, \{\mathbf{h}_i\}_{i=0}^2) \right| = \frac{|\Delta(\mathbf{h}_0, \mathbf{h}_2)|}{\sqrt{|\Delta(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_1)|}},$$

(ii)

$$\left| \mathbb{T}(\Sigma, \{\mathbf{h}_i\}_{i=0}^2) \right| = \frac{\sqrt{|\delta(\mathbf{h}^1, \mathbf{h}^1)|}}{|\delta(\mathbf{h}^2, \mathbf{h}^0)|}.$$

Burada $\Delta(\mathbf{h}_i, \mathbf{h}_{2-i})$,

$$[\cdot, \cdot]_{i, 2-i} : H_i(\Sigma; \mathcal{G}_{\text{Ad}_\rho}) \times H_{2-i}(\Sigma; \mathcal{G}_{\text{Ad}_\rho}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

kesişim eşlemedeki \mathbf{h}_i ve \mathbf{h}_{2-i} tabanlarına karşılık gelen matrisin determinantıdır. Ayrıca $\delta(\mathbf{h}^{2-i}, \mathbf{h}^i)$ ise

$$\Omega_{i, 2-i} : H^i(\Sigma; \mathcal{G}_{\text{Ad}_\rho}) \times H^{2-i}(\Sigma; \mathcal{G}_{\text{Ad}_\rho}) \xrightarrow{\sim_B} H^2(\Sigma; \mathbb{C}) \xrightarrow{\int_\Sigma} \mathbb{C}$$

eşlemedeki \mathbf{h}^i ve \mathbf{h}^{2-i} tabanlarına karşılık gelen matrisin determinantını göstermektedir. Son olarak \mathbf{h}_i , $H_i(\Sigma; \mathcal{G}_{\text{Ad}_\rho})$ uzayının bir tabanıdır ve \mathbf{h}^i ise \mathbf{h}_i tabanına karşılık gelen $H^i(\Sigma; \mathcal{G}_{\text{Ad}_\rho})$ uzayının Poincare dual tabanıdır.

İspat. Önerme 5.2.2 yardımıyla

$$D_* = C_*(K; \mathcal{G}_{\text{Ad}_\rho}) \oplus C_*(K'; \mathcal{G}_{\text{Ad}_\rho})$$

zincir kompleksinin \mathbf{c}_i ve \mathbf{c}'_i geometrik tabanlarına sahip ω -uyumlu bir \mathbb{C} -simplektik zincir kompleks olduğunu biliyoruz. Bu durumda

$$\omega_{i, 2-i} : D_i \times D_{2-i} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$C_i(K; \mathcal{G}_{\text{Ad}_\rho}) \oplus C_i(K'; \mathcal{G}_{\text{Ad}_\rho}) \times C_{2-i}(K; \mathcal{G}_{\text{Ad}_\rho}) \oplus C_{2-i}(K'; \mathcal{G}_{\text{Ad}_\rho}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

bilineer dönüşümü vardır. Dolayısıyla Teorem 3.2.4 kullanılarak aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\left| \mathbb{T} \left(D_*, \{ \mathbf{c}_i \oplus \mathbf{c}'_i \}_{i=0}^2, \{ \mathbf{h}_i \oplus \mathbf{h}'_i \}_{i=0}^2 \right) \right| = |\Delta(\mathbf{h}_0 \oplus \mathbf{h}_0, \mathbf{h}_2 \oplus \mathbf{h}_2)| \sqrt{|\Delta(\mathbf{h}_1 \oplus \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_1 \oplus \mathbf{h}_1)|}^{(-1)}. \quad (5.5)$$

Burada $\Delta(\mathbf{h}_0 \oplus \mathbf{h}_0, \mathbf{h}_2 \oplus \mathbf{h}_2)$ aşağıdaki verilen eşitliği göstermektedir:

$$\det \left[\begin{array}{c|c} 0 & [\cdot, \cdot]_{0,2} \\ \hline [\cdot, \cdot]_{0,2} & 0 \\ \mathbf{h}_0 \text{ ve } \mathbf{h}_2 \text{ tabanlarında} & \mathbf{h}_0 \text{ ve } \mathbf{h}_2 \text{ tabanlarında} \end{array} \right] = -\Delta(\mathbf{h}_0, \mathbf{h}_2)^2. \quad (5.6)$$

Ayrıca, bozulmamış

$$[\cdot, \cdot]_{0,2} : H_0(\Sigma; \mathcal{G}_{\text{Ad}_\rho}) \times H_2(\Sigma; \mathcal{G}_{\text{Ad}_\rho}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

formu

$$(\cdot, \cdot)_{0,2} : C_0(K; \mathcal{G}_{\text{Ad}_\rho}) \times C_2(K'; \mathcal{G}_{\text{Ad}_\rho}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

kesişim formunun bir genişletilmesini göstermektedir.

Benzer şekilde $\Delta(\mathbf{h}_1 \oplus \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_1 \oplus \mathbf{h}_1)$ aşağıdaki verilen eşitliği göstermektedir:

$$\det \left[\begin{array}{c|c} 0 & [\cdot, \cdot]_{1,1} \\ \hline -[\cdot, \cdot]_{1,1} & 0 \\ \mathbf{h}_1 \text{ tabanında} & \mathbf{h}_1 \text{ tabanında} \end{array} \right] = \Delta(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_1)^2. \quad (5.7)$$

Aynı şekilde biliyoruz ki ters-simetrik bozulmamış

$$[\cdot, \cdot]_{1,1} : H_1(\Sigma; \mathcal{G}_{\text{Ad}_\rho}) \times H_1(\Sigma; \mathcal{G}_{\text{Ad}_\rho}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

formu

$$(\cdot, \cdot)_{1,1} : C_1(K; \mathcal{G}_{\text{Ad}_\rho}) \times C_1(K'; \mathcal{G}_{\text{Ad}_\rho}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

kesişim formunun bir genişletilmesidir.

$[\cdot, \cdot]_{1,1}$ formunun ters-simetrik özelliğiyle birlikte (5.6) ve (5.7) eşitliklerini göz önüne alındığında (5.5) eşitliği aşağıdaki gibi olur:

$$\left| \mathbb{T} \left(D_*, \{\mathbf{c}_i \oplus \mathbf{c}'_i\}_{i=0}^2, \{\mathbf{h}_i \oplus \mathbf{h}_i\}_{i=0}^2 \right) \right| = \frac{|\Delta(\mathbf{h}_0, \mathbf{h}_2)|^2}{|\Delta(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_1)|}. \quad (5.8)$$

Bununla birlikte Lemma 3.1.3 kullanılarak aşağıdaki eşitliğin sağlandığını biliyoruz:

$$\mathbb{T} \left(D_*, \{\mathbf{c}_i \oplus \mathbf{c}'_i\}_{i=0}^2, \{\mathbf{h}_i \oplus \mathbf{h}_i\}_{i=0}^2 \right) = \mathbb{T}^2 \left(C_* \left(K; \mathcal{G}_{\text{Ad}_\rho} \right), \{\mathbf{c}_i\}_{i=0}^2, \{\mathbf{h}_i\}_{i=0}^2 \right). \quad (5.9)$$

Son olarak (5.8) ve (5.9) eşitlikleri kullanılırsa aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\left| \mathbb{T} \left(\Sigma, \{\mathbf{h}_i\}_{i=0}^2 \right) \right| = |\Delta(\mathbf{h}_0, \mathbf{h}_2)| \cdot \sqrt{|\Delta(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_1)|}^{(-1)}.$$

Böylece (i)'nin ispatı gösterilmiş oldu.

Aşağıdaki değişmeli diyagramı düşünelim:

$$\begin{array}{ccc} H^{2-i}(\Sigma; \mathcal{G}_{\text{Ad}_\rho}) \times H^i(\Sigma; \mathcal{G}_{\text{Ad}_\rho}) & \xrightarrow{\sim_B} & H^2(\Sigma; \mathbb{C}) \\ \uparrow \text{PD} & & \uparrow \\ H_i(\Sigma; \mathcal{G}_{\text{Ad}_\rho}) \times H_{2-i}(\Sigma; \mathcal{G}_{\text{Ad}_\rho}) & \xrightarrow{[\cdot, \cdot]_{i, 2-i}} & \mathbb{C} \end{array}$$

Bu değişmeli diyagram sayesinde $\delta(\mathbf{h}^{2-i}, \mathbf{h}^i) \cdot \Delta(\mathbf{h}_i, \mathbf{h}_{2-i}) = 1$ eşitliğine ulaşılır ve bu eşitlik sayesinde (ii) ispatlanmıştır. ■

Ayrıca, $H_0(\Sigma; \mathcal{G}_{\text{Ad}_p})$ ve dolayısıyla $H_2(\Sigma; \mathcal{G}_{\text{Ad}_p})$ sıfır olması durumunda Theorem 5.2.3'e göre aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$|\mathbb{T}(\Sigma, \{0, \mathbf{h}_1, 0\})| = \frac{1}{\sqrt{|\Delta(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_1)|}} = \sqrt{|\delta(\mathbf{h}^1, \mathbf{h}^1)|}.$$

Burada $0 = 1.0$ konvensiyon kullanılır ve dolayısıyla $\Delta(0, 0) = 1$ elde edilir.

Not 5.2.4. W. Gu ve R. Arenas, G_2 İstisnai grubunu incelemişlerdir [37]. R.L. Bryant'ın [38] çalışmasında yer alan G_2 İstisnai grubunun \mathcal{G}_2 Lie cebirindeki görüşünü dikkate alınarak ve orada geliştirdikleri geometrik düşünceler kullanılarak, W. Gu ve R. Arenas \mathcal{G}_2 Lie cebiri için aşağıda verilen tabanı ele aldılar:

$$\left\{ \begin{array}{ll} X_1 = E_{2,3} - E_{3,2} + E_{5,4} - E_{4,5}, & Y_1 = E_{4,5} - E_{5,4} + E_{6,7} - E_{7,6}, \\ X_2 = E_{3,1} - E_{1,3} + E_{6,4} - E_{4,6}, & Y_2 = E_{4,6} - E_{6,4} + E_{7,5} - E_{5,7}, \\ X_3 = E_{1,2} - E_{2,1} + E_{7,4} - E_{4,7}, & Y_3 = E_{4,7} - E_{7,4} + E_{5,6} - E_{6,5}, \\ X_4 = E_{2,6} - E_{6,2} + E_{5,1} - E_{1,5}, & Y_4 = E_{3,7} - E_{7,3} + E_{6,2} - E_{2,6}, \\ X_5 = E_{1,4} - E_{4,1} + E_{2,7} - E_{7,2}, & Y_5 = E_{2,7} - E_{7,2} + E_{3,6} - E_{6,3}, \\ X_6 = E_{7,1} - E_{1,7} + E_{2,4} - E_{4,2}, & Y_6 = E_{1,7} - E_{7,1} + E_{3,5} - E_{5,3}, \\ X_7 = E_{6,1} - E_{1,6} + E_{5,2} - E_{2,5}, & Y_7 = E_{2,5} - E_{5,2} + E_{4,3} - E_{3,4}. \end{array} \right.$$

Bununla birlikte, $\{\exp(X_i), \exp(Y_i) : i = 1, \dots, 7\}$ 'lerin G_2 İstisnai grubunu gerdiğini de ispatladılar. $E_{i,j}$ burada ij -girdileri 1 ve diğer yerlerde sıfır olan 7×7 kare matrislerdir. Konu hakkında ayrıntılı bilgi için okuyucuya [37] nolu kaynakta bulunan 5. Bölüme bakılması önerilmektedir.

F. Bernardoni ve arkadaşları, F_4 İstisnai grubunu araştırmışlardır [39] ve \mathcal{F}_4 Lie cebirini üs olarak (exponentiating) $\{\exp(c_i) : i = 1, \dots, 52\}$ 'lerin F_4 İstisnai grubunu gerdiğini ispatlamışlardır. Burada $\{c_i : i = 1, \dots, 52\}$, \mathcal{F}_4 Lie cebirinin tabanıdır [39, Sayfa 912]. Benzer

şekilde, F. Bernardoni ve arkadaşları [40] makalesinde ise \mathcal{F}_4 'ün $\{c_i : i = 1, \dots, 52\}$ tabanına $\{c_i : i = 53, \dots, 78\}$ taban elemanlarını ekleyerek Lie cebiri \mathcal{E}_6 olan E_6 İstisnai grubunun $\{c_i : i = 1, \dots, 52, 53, \dots, 78\}$ tabanını elde etmişlerdir. Bununla birlikte $\{\exp(c_i) : i = 1, \dots, 52, 53, \dots, 78\}$ 'in E_6 İstisnai grubunu gerdiğini göstermişlerdir. Bu konu hakkında detaylı bilgi sahibi olmak için [40] makalesine bakınız.

Şimdi ise yukarıda bahsedilen $\mathcal{G} \in \{\mathcal{G}_2, \mathcal{F}_4, \mathcal{E}_6\}$ Lie cebirine karşılık gelen $\{b_i\}$ taban elemanlarını düşünelim. Bu durumda \mathcal{G} Lie cebirinin yukarıda verilen tabanlara karşılık gelen lineer $Ad_{\exp(b_i)} : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ dönüşümünün matrisindeki determinantın 1 olduğu Matlab programı (Ek 1., Ek 2., Ek 3.) kullanarak gösterilmiştir [41]. Dolayısıyla Reidemeister torsiyon \tilde{e}_j^p kaldırılışlarından bağımsız olduğu sonucuna varılmıştır.

Böylece \mathcal{G}_2 , \mathcal{F}_4 ve \mathcal{E}_6 değerli temsil uzayları için Reidemeister torsiyonun iyi tanımlı olduğunu [41, Theorem IV.1]'de ispatlanmıştır. Bununla birlikte Teorem 5.2.3'de elde edilen sonuçların bu tip temsil uzayları içinde sağlandığı gösterilmiştir [41, Theorem IV.3].

6. UYGULAMALAR

Bu bölümde, Teorem 5.2.3’de elde edilen sonuçlarımızı serbest veya yüzey grubunun iyi temsillerine ve Schottky temsillerine uygulayacağız. Bu konu hakkında detaylı bilgi için okuyucuya [42] makalesi önerilmektedir.

6.1. Serbest veya Yüzey Grubunun İyi Temsilleri

Γ sonlu üreteçli bir grubu ve G ise kompleks redüktif (reductive) cebirsel bir grubu gösterebiliriz. Örneğin; klasik matris grubu, $GL(n, \mathbb{C})$, $SL(n, \mathbb{C})$, $O(n, \mathbb{C})$, $Sp(n, \mathbb{C})$. Eğer $\rho(\Gamma)$, G grubunun herhangi bir parabolik alt grubunu içermez ise, $\rho : \Gamma \rightarrow G$ temsili indirgenemez olarak adlandırılır.

$\text{Hom}(\Gamma, G)$, Γ grubundan G grubuna giden tüm homomorfizmaların kümesini gösterebiliriz ve $\text{Hom}^{ind}(\Gamma, G)$ ise Γ ’nin indirgenemez G -temsillerinin kümesi olsun. $\text{Hom}^{ind}(\Gamma, G)$ uzayı $\text{Hom}(\Gamma, G)$ ’nin bir Zariski açık alt kümesidir [42, Önerme 27]. $\text{Hom}^{ind}(\Gamma, G)$ kümesi G konjugasyonu altında etkiyen değişmezdir. $\text{Hom}^{ind}(\Gamma, G)$ kümesindeki her yörünge kapalıdır [42, Teorem 30] ve kategorik bir bölümdeki her bir denklik sınıfı bir tek kapalı yörünge içerir. Bu durumda

$$\text{Hom}^{ind}(\Gamma, G) // G$$

kategorik bölümü küme-teorik (set-theoretic) bölüm ile çakışır. Bunu $\chi^{ind}(\Gamma, G)$ ile gösterebiliriz.

Γ bir serbest veya yüzey grup, G ise $GL(n, \mathbb{C})$ veya $SL(n, \mathbb{C})$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\chi^{ind}(\Gamma, G)$ bir düzgün manifoldtur [42, Önerme 49]. Eğer görüntüsünün stabilizatörü G ’nin merkezi ile çakışır ise indirgenemez $\rho : \Gamma \rightarrow G$ temsili iyi olarak adlandırılır. Bu tür homomorfizmaların kümesi $\text{Hom}(\Gamma, G)$ ’nin Zariski açık bir alt kümesidir [42, Önerme 33].

$$\chi^{iyi}(\Gamma, G) = \text{Hom}^{iyi}(\Gamma, G) / G$$

olması durumunda $\chi^{iyi}(\Gamma, G)$, $\chi^{ind}(\Gamma, G)$ uzayının açık bir altkümesidir ve Γ serbest ve yüzey grupları için bir düzgün manifoldtur [42, Sonuç 50].

Σ_g cinsi $g \geq 2$ olan kapalı yönlendirilebilir bir yüzey olsun ve Γ ise Σ_g yüzeyinin $\pi_1(\Sigma_g)$ temel grubunu gösterebilir. Bu durumda $\rho : \Gamma \rightarrow G$ indirgenemez ise $i = 0, 2$ için

$$H_i(\Sigma_g; \mathcal{G}_{Ad\rho}) = H^i(\Sigma_g; \mathcal{G}_{Ad\rho}) = 0$$

olur [28].

Bunlar birleştirilir ve Teorem 5.2.3 uygulanır ise aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 6.1.1. Σ_g cinsi $g \geq 2$ olan kapalı yönlendirilebilir bir yüzey, G kompleks redüktif cebirsel bir grup ve Γ ise Σ_g yüzeyinin $\pi_1(\Sigma_g)$ temel grubu olsun. Bu durumda $\rho \in \chi^{iyi}(\Gamma, G)$ için aşağıdaki verilen eşitlikler sağlanır:

$$|\mathbb{T}(\Sigma_g, \{\mathbf{h}_1\})| = \frac{1}{\sqrt{|\Delta(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_1)|}} = \sqrt{|\delta(\mathbf{h}^1, \mathbf{h}^1)|}.$$

Burada $\Delta(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_1)$,

$$[\cdot, \cdot]_{1,1} : H_1(\Sigma_g; \mathcal{G}_{Ad\rho}) \times H_1(\Sigma_g; \mathcal{G}_{Ad\rho}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

kesişim eşleminin \mathbf{h}_1 tabanına karşılık gelen matrisin determinanı, $\delta(\mathbf{h}^1, \mathbf{h}^1)$ ise

$$\Omega_{1,1} : H^1(\Sigma_g; \mathcal{G}_{Ad\rho}) \times H^1(\Sigma_g; \mathcal{G}_{Ad\rho}) \xrightarrow{\sim_B} H^2(\Sigma_g; \mathbb{C}) \xrightarrow{\int_{\Sigma_g}} \mathbb{C}$$

Atiyah-Bott-Goldman simplektik formunun \mathbf{h}^1 tabanına karşılık gelen matrisin determinantıdır. Ayrıca \mathbf{h}_1 , $H_1(\Sigma_g; \mathcal{G}_{Ad\rho})$ uzayının bir tabanıdır ve \mathbf{h}^1 ise \mathbf{h}_1 tabanına karşılık gelen $H^1(\Sigma_g; \mathcal{G}_{Ad\rho})$ uzayının Poincare dual tabanıdır.

H_g , $g \geq 2$ olan kulplu-cisim (handlebody) ve Σ_g ise H_g kulplu-cisminin sınır yüzeyi olsun. M , H_g manifoldunun ikiye katlanmışını (double) ve G ise Lie cebiri \mathcal{G} olan redüktif bir Lie grubunu gösterebilirsin.

$$\rho : \pi_1(H_g) \longrightarrow G,$$

bir homomorfizma öyle ki $\rho \circ r : \pi_1(\Sigma_g) \rightarrow G$ iyi bir homomorfizma olsun. Burada $r : \pi_1(\Sigma_g) \rightarrow \pi_1(H_g)$ homomorfizması $\partial H_g \hookrightarrow H_g$ gömmesi (embedding) ile elde edilen homomorfizmadır. Ayrıca $\rho : \pi_1(H_g) \rightarrow G$ bir iyi temsildir [42, Not 65]. Aşağıdaki zincir komplekslerin kısa-tam dizisini göz önüne alalım:

$$0 \longrightarrow C_*\left(\Sigma_g; \mathcal{G}_{Ad\rho_{or}}\right) \longrightarrow C_*\left(H_g; \mathcal{G}_{Ad\rho}\right) \oplus C_*\left(H_g; \mathcal{G}_{Ad\rho}\right) \longrightarrow C_*\left(M; \mathcal{G}_{Ad\rho}\right) \longrightarrow 0. \quad (6.1)$$

(6.1) dizisine karşılık gelen \mathcal{H}_* Mayer-Vietoris uzun-tam dizisi ise aşağıdaki gibi olur:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow H_3\left(\Sigma_g; \mathcal{G}_{Ad\rho_{or}}\right) & \rightarrow & H_3\left(H_g; \mathcal{G}_{Ad\rho}\right) \oplus H_3\left(H_g; \mathcal{G}_{Ad\rho}\right) & \rightarrow & H_3\left(M; \mathcal{G}_{Ad\rho}\right) & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & H_2\left(\Sigma_g; \mathcal{G}_{Ad\rho_{or}}\right) & \rightarrow & H_2\left(H_g; \mathcal{G}_{Ad\rho}\right) \oplus H_2\left(H_g; \mathcal{G}_{Ad\rho}\right) & \rightarrow & H_2\left(M; \mathcal{G}_{Ad\rho}\right) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & H_1\left(\Sigma_g; \mathcal{G}_{Ad\rho_{or}}\right) & \rightarrow & H_1\left(H_g; \mathcal{G}_{Ad\rho}\right) \oplus H_1\left(H_g; \mathcal{G}_{Ad\rho}\right) & \rightarrow & H_1\left(M; \mathcal{G}_{Ad\rho}\right) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & H_0\left(\Sigma_g; \mathcal{G}_{Ad\rho_{or}}\right) & \rightarrow & H_0\left(H_g; \mathcal{G}_{Ad\rho}\right) \oplus H_0\left(H_g; \mathcal{G}_{Ad\rho}\right) & \rightarrow & H_0\left(M; \mathcal{G}_{Ad\rho}\right) \rightarrow 0. \end{array} \quad (6.2)$$

Teorem 6.1.2. Σ_g , H_g , M , G , \mathcal{G} , ρ ve r yukarıdaki gibi olsun. (6.1) kısa-tam dizisini ve karşılık gelen (6.2) Mayer-Vietoris uzun-tam dizisini göz önüne alalım. $i = 0, 1, 2, 3$ için $\mathbf{h}_i^{H_g}$, $H_i\left(H_g; \mathcal{G}_{Ad\rho}\right)$ uzayının tabanı olsun. Bu durumda $j = 0, 1, 2, 3$ ve $k = 0, 1, 2$ olmak üzere $H_j\left(M; \mathcal{G}_{Ad\rho}\right)$ ve $H_k\left(\Sigma_g; \mathcal{G}_{Ad\rho_{or}}\right)$ uzaylarının sırasıyla tabanları \mathbf{h}_j^M ve $\mathbf{h}_k^{\Sigma_g}$ vardır öyle ki bu

tabanlara karşılık gelen (6.2) uzun-tam dizisinin Reidemeister torsiyonu 1 olur ve aşağıdaki formül geçerlidir:

$$\left| \mathbb{T} \left(\mathbf{H}_g, \left\{ \mathbf{h}_i^{\mathbf{H}_g} \right\}_0^3 \right) \right| = \sqrt{\left| \mathbb{T} \left(\Sigma_g, \left\{ \mathbf{h}_k^{\Sigma_g} \right\}_0^2 \right) \right|}.$$

İspat. Biliyoruz ki $\rho \circ r$ iyi olduğundan dolayı $H_0 \left(\Sigma_g; \mathcal{G}_{Ad_{\rho \circ r}} \right)$ ve $H_2 \left(\Sigma_g; \mathcal{G}_{Ad_{\rho \circ r}} \right)$ sıfırlanır. Böylelikle (6.2) uzun-tam dizisini aşağıdakiler gibi yazabiliriz:

$$0 \longrightarrow H_3 \left(\mathbf{H}_g; \mathcal{G}_{Ad_\rho} \right) \oplus H_3 \left(\mathbf{H}_g; \mathcal{G}_{Ad_\rho} \right) \longrightarrow H_3 \left(\mathbf{M}; \mathcal{G}_{Ad_\rho} \right) \longrightarrow 0, \quad (6.3)$$

$$0 \longrightarrow H_2 \left(\mathbf{H}_g; \mathcal{G}_{Ad_\rho} \right) \oplus H_2 \left(\mathbf{H}_g; \mathcal{G}_{Ad_\rho} \right) \longrightarrow H_2 \left(\mathbf{M}; \mathcal{G}_{Ad_\rho} \right) \quad (6.4)$$

$$H_1 \left(\Sigma_g; \mathcal{G}_{Ad_{\rho \circ r}} \right) \rightarrow H_1 \left(\mathbf{H}_g; \mathcal{G}_{Ad_\rho} \right) \oplus H_1 \left(\mathbf{H}_g; \mathcal{G}_{Ad_\rho} \right) \rightarrow H_1 \left(\mathbf{M}; \mathcal{G}_{Ad_\rho} \right) \rightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow H_0 \left(\mathbf{H}_g; \mathcal{G}_{Ad_\rho} \right) \oplus H_0 \left(\mathbf{H}_g; \mathcal{G}_{Ad_\rho} \right) \longrightarrow H_0 \left(\mathbf{M}; \mathcal{G}_{Ad_\rho} \right) \longrightarrow 0. \quad (6.5)$$

$j = 0, 3$ için $H_j \left(\mathbf{M}; \mathcal{G}_{Ad_\rho} \right)$ uzayının tabanı, (6.3) ile (6.5) kısa-tam dizilerinden elde edilen izomorfizmalar ve $H_i \left(\mathbf{H}_g; \mathcal{G}_{Ad_\rho} \right)$ uzayının $\mathbf{h}_i^{\mathbf{H}_g}$ tabanı kullanarak elde edilen taban düşünülme-
mektedir.

Poincare dualiteyi ve (6.4) dizisinin tamlığını kullandığımızda

$$2\dim H_2 \left(\mathbf{H}_g; \mathcal{G}_{Ad_\rho} \right) = 2\dim H_1 \left(\mathbf{H}_g; \mathcal{G}_{Ad_\rho} \right) - \dim H_1 \left(\Sigma_g; \mathcal{G}_{Ad_{\rho \circ r}} \right)$$

eşitliğine ulaşırız. Bununla birlikte [42] nolu kaynakta bulunan Teorem 61'den

$$H_2 \left(\mathbf{H}_g; \mathcal{G}_{Ad_\rho} \right) = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla (6.4) dizisi aşağıdaki hale gelir:

$$\begin{array}{ccc}
0 \longrightarrow H_2(\mathbf{M}; \mathcal{G}_{Ad_p}) & \longrightarrow & H_1(\Sigma_g; \mathcal{G}_{Ad_{por}}) \\
& & \downarrow \\
H_1(\mathbf{H}_g; \mathcal{G}_{Ad_p}) \oplus H_1(\mathbf{H}_g; \mathcal{G}_{Ad_p}) & \longrightarrow & H_1(\mathbf{M}; \mathcal{G}_{Ad_p}) \longrightarrow 0.
\end{array} \tag{6.6}$$

(6.6) kısa-tam dizisini daha basit olarak ifade etmek gerekirse, U , V , W ve T sırasıyla $H_2(\mathbf{M}; \mathcal{G}_{Ad_p})$, $H_1(\Sigma_g; \mathcal{G}_{Ad_{por}})$, $H_1(\mathbf{H}_g; \mathcal{G}_{Ad_p}) \oplus H_1(\mathbf{H}_g; \mathcal{G}_{Ad_p})$ ve $H_1(\mathbf{M}; \mathcal{G}_{Ad_p})$ gösterebiliriz. Bu durumda (6.6) kısa-tam dizisi aşağıdaki gibi yazılır:

$$0 \longrightarrow U \xrightarrow{\alpha} V \xrightarrow{\beta} W \xrightarrow{\gamma} T \longrightarrow 0. \tag{6.7}$$

W vektör uzayının tabanını

$$\{w_1, \dots, w_d\}$$

olarak gösterelim. T uzayının tabanını

$$\mathbf{h}_1^M = \{\gamma(w_1), \dots, \gamma(w_d)\} = \{\gamma(w_{i_1}), \dots, \gamma(w_{i_k})\}$$

olarak düşünelim. U uzayının herhangi bir \mathbf{h}_2^M tabanını ele alalım. (3.1) ve (3.2) kısa-tam dizileri kullanılırsa (6.7) dizisi bize aşağıdaki kısa-tam diziyi verir:

$$0 \longrightarrow B_p \hookrightarrow C_p \twoheadrightarrow B_{p-1} \longrightarrow 0.$$

Burada $p = 0, 1, 2$ 'dir.

$p = 0$ için aşağıdaki kısa-tam dizi yazılır:

$$0 \longrightarrow B_0 \hookrightarrow T \twoheadrightarrow B_{-1} \longrightarrow 0.$$

Burada

$$\begin{cases} B_0 = \text{Im}\gamma = T, \\ B_{-1} = 0. \end{cases}$$

T uzayının \mathbf{h}_1^M tabanını B_0 üzerindeki taban olarak ele alalım. Bu durumda T uzayının tabanları için değişim-taban-matrisinin determinanı

$$[\mathbf{h}_1^M \sqcup s(\{0\}), \mathbf{h}_1^M] = 1$$

olur.

Benzer şekilde (6.7) kısa-tam dizisi aşağıdaki gibi yazılır:

$$0 \longrightarrow B_1 \hookrightarrow W \xrightarrow{\gamma} B_0 \longrightarrow 0.$$

Burada

$$\begin{cases} B_1 = \text{Im}\beta, \\ B_0 = \text{Im}\gamma = T \end{cases}$$

eşit olacaktır. $\gamma: W \rightarrow B_0$ dönüşümünün kısmı $s: B_0 \rightarrow W$ olarak

$$W/\text{Ker}\gamma \cong \text{Im}\gamma$$

izomorfizmasının tersini ele alalım. B_1 uzayının tabanı $\{w_{i_j}; i_j \in \{1, \dots, d\} \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_k\}\}$ olarak düşünöldüğünde W 'nin tabanları için değişim-taban-matrisinin determinanı

$$[\{w_{i_j}; i_j \in \{1, \dots, d\} \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_k\}\} \sqcup s(\mathbf{h}_1^M), \{w_1, \dots, w_d\}] = 1$$

olur.

Son olarak aynı şekilde $p = 2$ için aşağıdaki kısa-tam dizi elde edilir:

$$0 \longrightarrow B_2 \hookrightarrow V \xrightarrow{\beta} B_1 \longrightarrow 0.$$

Burada

$$\begin{cases} B_2 = \text{Im}\alpha, \\ B_1 = \text{Im}\beta. \end{cases}$$

B_2 uzayının tabanını $\alpha(\mathbf{h}_2^M)$ olarak ele alalım. Önceki adımda elde edilen B_1 uzayının tabanını kullanalım. $\beta : V \rightarrow B_1$ dönüşümünün kısmı $s : B_1 \rightarrow V$ olarak

$$V/\ker\beta \cong \text{Im}\beta$$

izomorfizmasının tersini ele alalım. Bunlar birlikte düşünüldüğünde V uzayı için bir taban elde ederiz. V uzayının elde edilen bu tabanını $\mathbf{h}_1^{\Sigma_g}$ tabanı olarak düşünelim. Bu durumda, V uzayının tabanları için değişim-taban-matrisinin determinanı

$$\left[\alpha(\mathbf{h}_2^M) \sqcup s(\{w_{i_j}; i_j \in \{1, \dots, d\} \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_k\}\}), \mathbf{h}_1^{\Sigma_g} \right] = 1$$

olur.

Dolayısıyla, Teorem 3.1.2 ve Lemma 3.1.3 kullanılırsa aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\mathbb{T}\left(\mathbf{H}_g, \left\{ \mathbf{h}_i^{\mathbf{H}_g} \right\}_0^3\right)^2 = \mathbb{T}\left(\Sigma_g, \left\{ \mathbf{h}_k^{\Sigma_g} \right\}_0^2\right) \mathbb{T}\left(\mathbf{M}, \left\{ \mathbf{h}_j^{\mathbf{M}} \right\}_0^3\right). \quad (6.8)$$

[14] nolu kaynakta bulunan Önerme 2.11 ve Not 4.6 kullanılarak aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\left| \mathbb{T}\left(\mathbf{M}, \left\{ \mathbf{h}_j^{\mathbf{M}} \right\}_0^3\right) \right| = 1. \quad (6.9)$$

(6.8) ve (6.9) denklemleri bize Teorem 6.1.2'nin ispatını tamamlar. ■

Sonuç 6.1.3. $\Sigma_g, H_g, M, G, \mathcal{G}, \rho, r, \mathbf{h}_i^{H_g}, \mathbf{h}_j^M$ ve $\mathbf{h}_k^{\Sigma_g}$ Teorem 6.1.2'deki gibi kabul edelim. Bu durumda Teorem 5.2.3 ve Teorem 6.1.2 birlikte ele alınırsa aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

(i)

$$\left| \mathbb{T} \left(H_g, \left\{ \mathbf{h}_i^{H_g} \right\}_0^3 \right) \right| = \sqrt{\left| \mathbb{T} \left(\Sigma_g, \left\{ \mathbf{h}_j^{\Sigma_g} \right\}_0^2 \right) \right|} = \frac{1}{\sqrt[4]{\left| \Delta \left(\mathbf{h}_1^{\Sigma_g}, \mathbf{h}_1^{\Sigma_g} \right) \right|}},$$

(ii)

$$\left| \mathbb{T} \left(H_g, \left\{ \mathbf{h}_i^{H_g} \right\}_0^3 \right) \right| = \sqrt{\left| \mathbb{T} \left(\Sigma_g, \left\{ \mathbf{h}_j^{\Sigma_g} \right\}_0^2 \right) \right|} = \sqrt[4]{|\delta(\mathbf{h}^1, \mathbf{h}^1)|}.$$

Burada $\Delta \left(\mathbf{h}_1^{\Sigma_g}, \mathbf{h}_1^{\Sigma_g} \right)$,

$$[\cdot, \cdot]_{1,1} : H_1 \left(\Sigma_g; \mathcal{G}_{\text{Ad}\rho_{\text{or}}} \right) \times H_1 \left(\Sigma_g; \mathcal{G}_{\text{Ad}\rho_{\text{or}}} \right) \longrightarrow \mathbb{C}$$

kesişim eşleminin $\mathbf{h}_1^{\Sigma_g}$ tabanına karşılık gelen matrisin determinanı, $\delta(\mathbf{h}^1, \mathbf{h}^1)$ ise

$$\Omega_{1,1} : H^1 \left(\Sigma_g; \mathcal{G}_{\text{Ad}\rho_{\text{or}}} \right) \times H^1 \left(\Sigma_g; \mathcal{G}_{\text{Ad}\rho_{\text{or}}} \right) \xrightarrow{\sim_B} H^2 \left(\Sigma_g; \mathbb{C} \right) \xrightarrow{\int_{\Sigma_g}} \mathbb{C}$$

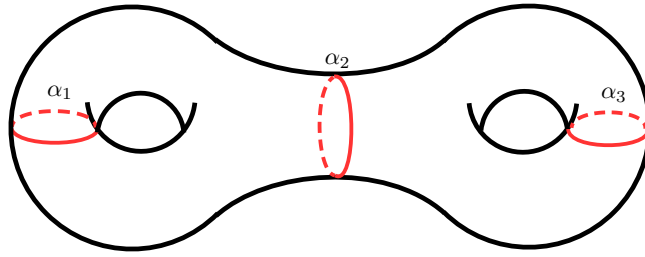
Atiyah-Bott-Goldman simplektik formunun \mathbf{h}^1 tabanına karşılık gelen matrisin determinanıdır. Ayrıca $\mathbf{h}_1^{\Sigma_g}, H_1 \left(\Sigma_g; \mathcal{G}_{\text{Ad}\rho_{\text{or}}} \right)$ uzayının bir tabanıdır ve \mathbf{h}^1 ise $\mathbf{h}_1^{\Sigma_g}$ tabanına karşılık gelen $H^1 \left(\Sigma_g; \mathcal{G}_{\text{Ad}\rho_{\text{or}}} \right)$ uzayının Poincare dual tabanıdır.

Aşağıdaki altbölümde Teorem 6.1.2'nin uygulamalarının birkaçından bahsedelim.

6.2. Schottky Temsili ve Thurston Simplektik Formu

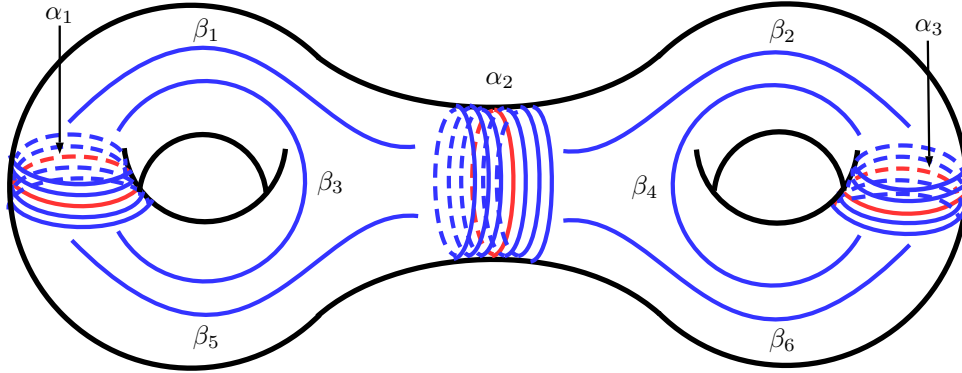
Uygulamamıza başlamadan önce Thurston simplektik form kavramından bahsedelim. Bu konuda daha kapsamlı bilgi sahibi olmak için [29] makalesine bakınız.

Σ_g cinsi $g \geq 2$ olan kapalı yönlendirilebilir bir yüzey olsun. Eğer $\lambda \subset \Sigma_g$ kapalı ve ayrıca λ 'nın *yaprakları* (leaves) olarak adlandırılan ve öz-kesişim noktası olmayan ayrık tam jeodeziklerden oluşuyor ise λ 'ya bir *jeodezik laminasyon* denir (Şekil 6.1). Bu kavramın aslında topolojik bir nesne olduğu iyi bilinmektedir.



Şekil 6.1. Üç kapalı yapraklı jeodezik laminasyon

Eğer $\Sigma_g - \lambda$ sonlu tane ideal üçgenden (köşeleri sonsuzda olan üçgenlerden) oluşuyor ise λ jeodezik laminasyonu *maksimal* olarak adlandırılır (Şekil 6.2).



Şekil 6.2. Dokuz yapraklı maksimal jeodezik laminasyon

λ bir jeodezik laminasyon ve G bir abel grup olsun. λ için G -değerli *kesen eşdöngü* (transverse cocycle), λ 'yı kesen yayların (transverse arcs) kümesinden G abel grubuna giden bir fonksiyondur. Ayrıca σ sonlu toplamsal ve λ 'yı kesen yayların homotopisi altında değişmezdir. Daha açık bir ifade ile, λ 'nın k yayını kesen yapraklarını ayrık iç kısımlarla k_1 ve k_2

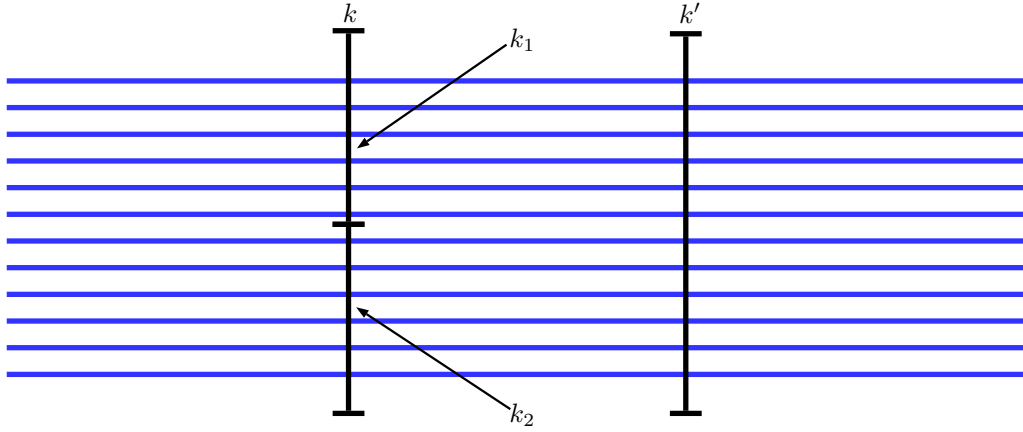
olarak iki alt yaya ayrıştırıldığında

$$\sigma(k) = \sigma(k_1) + \sigma(k_2)$$

eşitliğine ulaşılır. Benzer şekilde k kesen yayının şekli λ jeodezik laminasyonunun kesen yaprakları vasıtasıyla k' olarak deforme olduğu durumda

$$\sigma(k) = \sigma(k')$$

eşitliği elde edilir (Şekil 6.3).



Şekil 6.3. λ laminasyonunun yapraklarını kesen k ve k' yayları

λ için G -değerli kesen eşdöngü grubunu

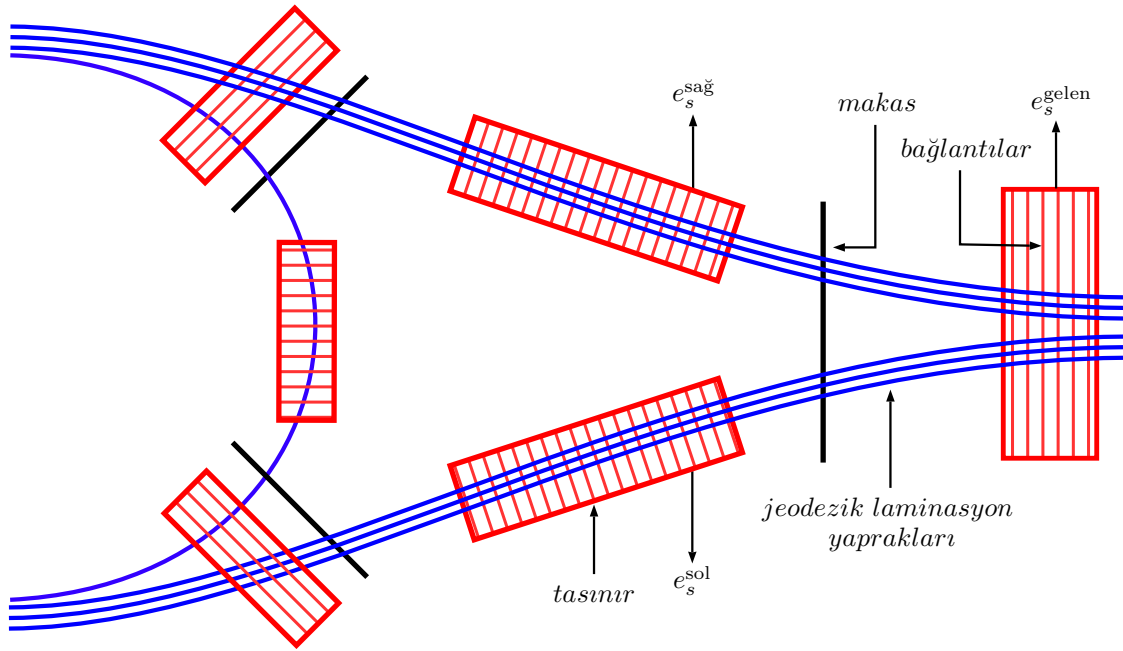
$$\mathcal{H}(\lambda; G)$$

olarak gösterelim. Eğer λ bir maksimal jeodezik laminasyon ve $G = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ olmak üzere $\mathcal{H}(\lambda; G) \cong G^{6g-6}$ izomorfizması vardır [49]. Örneğin λ laminasyonunu taşıyan bir $\Phi \subset \Sigma_g$ kalın tren-yolunu (fattened train-track) kullanılarak $\mathcal{H}(\lambda; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{6g-6}$ izomorfizması elde edilir.

Bir $\Phi \subset \Sigma_g$ tren-yolu, kenar (edge) olarak adlandırılan sonlu tane ‘uzun’ e_1, \dots, e_n dikdörtgenlerden oluşur. Bu uzun kenarlar sadece kısa ayrıtlarda yer alan (muhtemelen bir noktaya

indirgenmiş) yaylar boyunca karşılaşırlar. Φ , ‘kısa’ ayrıtlara paralel olan yaylar ile yapraklanır (foliated). Ayrıca bir dikdörtgenin ‘kısa’ ayrıtındaki her bir nokta başka bir dikdörtgende de bulunur. Tüm dikdörtgenlerin kısa ayrıtlarının birleşiminin tüm bileşeni bir yay almakla birlikte çember değildir. $\Sigma_g - \Phi$ ’nin $\overline{\Sigma_g - \Phi}$ kapanışında en az 3 dikdörtgenin bulunduğu noktalara karşılık gelen belirli bir ‘sivri uçlar’ (spikes) vardır. Ayrıca, $\overline{\Sigma_g - \Phi}$ ’in hiçbir bileşeni 0, 1 veya 2 sivri ucu olan bir disk veya sivri ucu olmayan bir halka olmamalıdır.

Φ tren-yolunun kenarlarının kısa ayrıtlarını kullanarak ve bu ayrıtlara paralel yaylar yardımıyla Φ ’nin yapraklanmasını sağladık. Bu yapraklanmadaki her bir kenarın kısa ayrıtına paralel olan yaylara Φ ’nin *bağlantıları* (ties) denir. Birkaç kenarın karşılaştığı sonlu tane bağlantılara Φ ’nin *makasları* (switches) denir. Eğer bir bağlantı makaslı değilse, o zaman bir *genel* bağlantı olarak adlandırılır. Eğer λ tamamen Φ ’nin içinde yer alırsa ve λ ’nın yaprakları Φ ’nin bağlantılarını keser ise, bu durumda λ , Φ tarafından *taşınır* (carried) denir (Şekil 6.4). Bir tren-yolunun inşası ile ilgili daha kapsamlı bilgiye [50, 51] kitaplarından ulaşabilirsiniz.



Şekil 6.4. Φ tren-yolu tarafından taşınan jeodezik laminasyon

$\Phi \subset \Sigma_g$ bir tren-yolu olsun. Φ ’nin kenarlarındaki reel-değerli bir fonksiyon eğer *makas ilişkisini* (switch relation) sağlar ise Φ için bir *kenar ağırlık sistemi* (edge weight system) adı verilir. Daha açık bir ifade edecek olursak Φ ’nin her bir s makası için e_1, \dots, e_p , s ’nin bir

tarafına komşu kenarları ve e_{p+1}, \dots, e_{p+q} ise diğer tarafına komşu kenarları olarak kabul edelim. Bu durumda

$$\sum_{i=1}^p a(e_i) = \sum_{j=p+1}^{p+q} a(e_j)$$

eşitliği vardır. Φ için tüm kenar ağırlık sistemlerinin reel vektör uzayını $\mathcal{W}(\Phi; \mathbb{R})$ ile gösterelim.

λ , Φ tren-yolu ile taşınan bir jeodezik laminasyon olsun. Eşdöngü grubundan kenar ağırlık sistemine giden $\mathcal{H}(\lambda; \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{W}(\Phi; \mathbb{R})$ ve $a_\sigma(e) = \sigma(k_e)$ olarak tanımlanan birebir dönüşümü göz önüne alalım. Burada k_e , e 'nin bir bağlantısıdır. λ maksimal laminasyon olduğu durumda ise bir

$$\mathcal{H}(\lambda; \mathbb{R}) \cong \mathcal{W}(\Phi; \mathbb{R})$$

izomorfizması vardır [49].

s , Φ tren-yolunun bir makası olmak üzere e_s^{gelen} makasın bir tarafındaki kenarı ve e_s^{sol} , $e_s^{\text{sağ}}$ makasın diğer tarafındaki kenarları gösterebiliriz. Burada Σ_g yüzeyinin yönlendirme ve e_s^{gelen} gelen kenarından görüldüğü düşünülerek e_s^{sol} sola doğru dallanan ve $e_s^{\text{sağ}}$ ise sağa doğru dallanan kenardır. Bu durumda $\mathcal{W}(\Phi)$ üzerindeki bilineer ters-simetrik

$$\omega_{\text{Thurston}} : \mathcal{W}(\Phi; \mathbb{R}) \times \mathcal{W}(\Phi; \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

Thurston simplektik formu aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\omega_{\text{Thurston}}(a, b) = \frac{1}{2} \sum_s \det \begin{bmatrix} a(e_s^{\text{sol}}) & a(e_s^{\text{sağ}}) \\ b(e_s^{\text{sol}}) & b(e_s^{\text{sağ}}) \end{bmatrix}.$$

Burada toplam, Φ tren-yolunun tüm makasları üzerindedir. $\mathcal{H}(\lambda; \mathbb{R}) \cong \mathcal{W}(\Phi; \mathbb{R})$ izomorfizması sayesinde

$$\omega_{\text{Thurston}} : \mathcal{H}(\lambda; \mathbb{R}) \times \mathcal{H}(\lambda; \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

Thurston simplektik formu elde edilir. Ayrıca ω_{Thurston} bir cebirsel kesişme sayısıdır ve Φ 'den bağımsızdır [29, 51].

Σ_g yüzeyinin $\text{Teich}(\Sigma_g)$ Teichmüller uzayı, Σ_g üzerindeki kompleks yapılarındaki izotop sınıflarının uzayıdır. Uniformizasyon Teoremi sayesinde, Sabit Gauss eğriliği (-1) olan Riemann metriklerinin izotop sınıflarının uzayıdır. Bu uzay ayrıca, $\pi_1(\Sigma_g)$ temel grubundan $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ giden tüm ayrık birebir (faithful) homomorfizmaların konjugasyon sınıflarının uzayı ile tanımlanır. Bir λ maksimal jeodezik laminasyon ve her $m \in \text{Teich}(\Sigma_g)$ hiperbolik metriğe karşılık gelen $\sigma_m \in \mathcal{H}(\lambda; \mathbb{R})$ kesme eşdöngüsü (shearing cocycle) yardımıyla F. Bonahon [29] makalesinde $\text{Teich}(\Sigma_g)$ uzayını $\mathcal{H}(\lambda; \mathbb{R})$ uzayında açık bir koni olan $\mathcal{C}(\lambda)$ olarak gömmüştür. Eğer k , λ 'ı kesen bir yay ise $\sigma_m(k)$ kesme eşdöngüsü, k 'nin uç noktalarını içeren $\Sigma_g - \lambda$ bileşenlerine karşılık gelen $\mathbb{H}^2 / \rho_m(\pi_1(\Sigma_g))$ 'deki iki ideal üçgen arasındaki 'sola kaymayı' ölçer. Burada $\rho_m : \pi_1(\Sigma_g) \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{R})$, m ile ilişkili ayrık birebir (faithful) temsildir.

Bir $\rho : \pi_1(\Sigma_g) \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ homomorfizmasını düşünecek olursak aşağıdaki değişmeli diyagram sağlanır:

$$\begin{array}{ccc} H^1(\Sigma_g; \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\text{Ad}_\rho}) \times H^1(\Sigma_g; \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\text{Ad}_\rho}) & \xrightarrow{\simeq_B} & H^2(\Sigma_g; \mathbb{C}) \\ \uparrow \text{PD} & & \uparrow \\ H_1(\Sigma_g; \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\text{Ad}_\rho}) \times H_1(\Sigma_g; \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\text{Ad}_\rho}) & \xrightarrow{[\cdot, \cdot]_{1,1}} & \mathbb{C}. \end{array} \quad (6.10)$$

Burada $\mathbb{C} \rightarrow H^2(\Sigma_g; \mathbb{C})$ izomorfizması $1 \in \mathbb{C}$ 'i, $H^2(\Sigma_g; \mathbb{C})$ 'nin temel üreticisine gönderir ve bu izomorfizmanın tersi Σ_g üzerindeki integrasyondur.

PSL(2, ℂ) üzerindeki

$$\omega_{\text{PSL}(2, \mathbb{C})} : H^1\left(\Sigma_g; \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\text{Ad}_\rho}\right) \times H^1\left(\Sigma_g; \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\text{Ad}_\rho}\right) \xrightarrow{\sim B} H^2(\Sigma_g; \mathbb{C}) \xrightarrow{\int_{\Sigma_g}} \mathbb{C}$$

formuna Atiyah-Bott-Goldman simplektik form adı verilir [28]. $\omega_{\text{PSL}(2, \mathbb{C})}$ ise Σ_g yüzeyinin Teich(Σ_g) Teichmüller uzayının üzerindeki

$$\omega_{\text{Goldman}} : H^1\left(\Sigma_g; \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})_{\text{Ad}_\rho}\right) \times H^1\left(\Sigma_g; \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})_{\text{Ad}_\rho}\right) \xrightarrow{\sim B_{\mathbb{R}}} H^2(\Sigma_g; \mathbb{R}) \xrightarrow{\int_{\Sigma_g}} \mathbb{R}$$

Goldman simplektik formuyla ilgili olduğu bilinmektedir.

Burada $B_{\mathbb{R}}$ determinanı 1 olan reel elemanlı 2×2 kare matrisler grubunun kümesi olan $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ 'nin Killing formunu göstermektedir. Bu durumu daha detaylı açıklamak gerekirse, $z_1, z_2 \in H^1\left(\Sigma_g; \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\text{Ad}_\rho}\right)$ olsun. Bu durumda

$$z_i = \alpha_i \otimes t_i = \alpha_i \otimes u_i + \sqrt{-1} \alpha_i \otimes v_i$$

eşitlikleri elde edilir. Burada $i = 1, 2$ için $\alpha_i \in H^1(\Sigma_g)$, $t_i = u_i + \sqrt{-1} v_i$ ve $u_i, v_i \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Dolayısıyla, aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$B(t_1, t_2) = B_{\mathbb{R}}(u_1, u_2) - B_{\mathbb{R}}(v_1, v_2) + \sqrt{-1} B_{\mathbb{R}}(u_1, v_2) + \sqrt{-1} B_{\mathbb{R}}(v_1, u_2). \quad (6.11)$$

(6.11) denklemini sayesinde aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\begin{aligned} \omega_{\text{PSL}(2, \mathbb{C})}(z_1, z_2) &= \omega_{\text{Goldman}}(\alpha_1 \otimes u_1, \alpha_2 \otimes u_2) - \omega_{\text{Goldman}}(\alpha_1 \otimes v_1, \alpha_2 \otimes v_2) \\ &\quad + \sqrt{-1} \omega_{\text{Goldman}}(\alpha_1 \otimes u_1, \alpha_2 \otimes v_2) + \sqrt{-1} \omega_{\text{Goldman}}(\alpha_1 \otimes v_1, \alpha_2 \otimes u_2). \end{aligned}$$

Bozulmamış ters-simetrik

$$\omega_{\Gamma} : \mathcal{H}(\lambda; \mathbb{C}) \times \mathcal{H}(\lambda; \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

formu aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned} \omega_{\Gamma}(\sigma_1 + \sqrt{-1} \sigma_2, \sigma'_1 + \sqrt{-1} \sigma'_2) &= \omega_{\text{Thurston}}(\sigma_1, \sigma'_1) - \omega_{\text{Thurston}}(\sigma_2, \sigma'_2) \\ &+ \sqrt{-1} \omega_{\text{Thurston}}(\sigma_2, \sigma'_1) + \sqrt{-1} \omega_{\text{Thurston}}(\sigma_1, \sigma'_2). \end{aligned}$$

F. Bonahon'un [29] makalesindeki reel-analitik parametre ile elde edilen $T_{\rho} \text{Teich}(\Sigma_g) \cong \mathcal{H}(\lambda; \mathbb{R})$ izomorfizması ele alındığında

$$\omega_{\text{Goldman}} = 2\omega_{\text{Thurston}}$$

eşitliğine ulaşılır [52]. ω_{Thurston} Thurston simplektik formunun kompleksleştirilmesini düşündüğümüzde

$$\omega_{\text{PSL}(2, \mathbb{C})} = 2\omega_{\Gamma}. \quad (6.12)$$

eşitliği elde edilmiştir [14]. Bu konuda daha kapsamlı bilgiye [14] makalesinden edilebilir.

F_g cinsi $g \geq 2$ olan ve $X = \{x_1, \dots, x_g\}$ tarafından üretilen bir serbest grup olsun. F_g serbest grubundan $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ Lie grubuna giden homomorfizmaların kümesini $\text{Hom}(F_g, \text{PSL}(2, \mathbb{C}))$ ile gösterelim. Bununla birlikte

$$\rho \mapsto (\rho(x_1), \dots, \rho(x_g))$$

dönüşümünü göz önüne alacak olursak $\text{Hom}(F_g, \text{PSL}(2, \mathbb{C}))$ ile $\text{PSL}(2, \mathbb{C})^g$ özdeşleştirilir.

$$\chi(F_g, \text{PSL}(2, \mathbb{C}))$$

$\text{Hom}(F_g, \text{PSL}(2, \mathbb{C})) // \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ 'nin bölümünü gösterebilirsin. Bu durumda $\chi(F_g, \text{PSL}(2, \mathbb{C}))$ bir cebirsel varyete (variety) yapısına sahiptir ve $\text{Hom}(F_g, \text{PSL}(2, \mathbb{C})) / \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ teorik bölümden sadece indirgenebilir noktalarda farklıdır. Bilindiği gibi indirgenebilir noktaların görüntüleri $\widehat{\mathbb{C}}$ üzerinde bir noktayı sabitler [43,44]. $\mathcal{D}(F_g, \text{PSL}(2, \mathbb{C}))$ ve $\mathcal{E}(F_g, \text{PSL}(2, \mathbb{C}))$ sırasıyla tüm ayrık, birebir temsiller ve $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ 'de yoğun görüntüye sahip temsiller kümesidir. $\mathcal{E}(F_g, \text{PSL}(2, \mathbb{C}))$ açıktır ve boş değildir ve $\mathcal{D}(F_g, \text{PSL}(2, \mathbb{C}))$ ise kapalıdır. Ayrıca bu kümenin $\chi(F_g, \text{PSL}(2, \mathbb{C}))$ 'deki tümleyeninin hacmi sıfırdır [45,46].

$i = 1, \dots, g$ olmak üzere A_i ve B_i $\partial\mathbb{H}^3$ 'de $2g$ ayrık kapalı (topolojik) diskler ve $\gamma_1, \dots, \gamma_g \in \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ ise $\widehat{\mathbb{C}}$ Riemann küresinin Möbiüs dönüşümleri olarak kabul edelim. Burada $\gamma_i(A_i), B_i$ 'nin tümleyeninin kapamışdır.

$$\{\gamma_1, \dots, \gamma_g\}$$

kümesi *Schottky grup* olarak adlandırılan mertebesi g olan bir serbest ayrık grubu üretir. $x_i \mapsto \gamma_i$ tarafından elde edilen ρ temsili

$$\mathcal{D}(F_g, \text{PSL}(2, \mathbb{C}))$$

içinde kalır.

$$\mathcal{S}(F_g, \text{PSL}(2, \mathbb{C}))$$

Schottky temsillerinin kümesi olsun. $\mathcal{S}(F_g, \text{PSL}(2, \mathbb{C}))$ bu durumda $\mathcal{D}(F_g, \text{PSL}(2, \mathbb{C}))$ 'nin içinde yer alır [47].

Y. Minsky, $\mathcal{X}(\mathbb{F}_g, \text{PSL}(2, \mathbb{C}))$ uzayının açık bir

$$\mathcal{M}(\mathbb{F}_g, \text{PSL}(2, \mathbb{C}))$$

altkümesinin varlığını ispatlamıştır [48]. $\mathcal{S}(\mathbb{F}_g, \text{PSL}(2, \mathbb{C}))$ uzayından büyük olan bu açık küme üzerinde $\text{Out}(\mathbb{F}_g)$ düzgün süreksiz etkir.

Teorem 5.2.3 ve Teorem 6.1.2’de kullanılan argümanlar ile ayrıca (6.10) değişmeli diyagram ve (6.12) denklemi ile yukarıda elde edilen sonuçlar birlikte ele alındığında aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 6.2.1. \mathbb{F}_g sınırı Σ_g ve cinsi $g \geq 2$ olan H_g kulplu-cismin (handlebody) $\pi_1(H_g)$ temel grubunu ve M ise H_g ’nin ikiye katlanmışını (double) gösterebilir. $\lambda \subset \Sigma_g$ sabit bir maksimal jeodezik laminasyon ve $\rho \in \mathcal{M}(\mathbb{F}_g, \text{PSL}(2, \mathbb{C}))$ olarak kabul edelim. $i = 0, 1, 2, 3$ için $\mathbf{h}_i^{\mathbb{F}_g}$ ise $H_i(\mathbb{F}_g; \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\text{Ad}_\rho})$ uzayının bir tabanı olsun. Bu durumda $j = 0, 1, 2, 3$, $k = 0, 1, 2$ olmak üzere $H_j(M; \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\text{Ad}_\rho})$ ve $H_k(\Sigma_g; \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\text{Ad}_\rho})$ uzaylarının sırasıyla \mathbf{h}_j^M ve $\mathbf{h}_k^{\Sigma_g}$ olacak şekilde tabanları vardır öyle ki verilen tabanlara karşılık gelen (6.2) uzun-tam dizisinin Reidemeister torsiyonu 1’dir. Bununla birlikte aşağıdaki formüller sağlanır:

(i)

$$\left| \mathbb{T}(\mathbb{F}_g, \{\mathbf{h}_i^{\mathbb{F}_g}\}_0^3) \right| = \sqrt{\left| \mathbb{T}(\Sigma_g, \{\mathbf{h}_k^{\Sigma_g}\}_0^2) \right|} = \frac{\sqrt{\left| \Delta(\mathbf{h}_0^{\Sigma_g}, \mathbf{h}_2^{\Sigma_g}) \right|}}{\sqrt[4]{\left| \Delta(\mathbf{h}_1^{\Sigma_g}, \mathbf{h}_1^{\Sigma_g}) \right|}},$$

(ii)

$$\left| \mathbb{T}(\mathbb{F}_g, \{\mathbf{h}_i^{\mathbb{F}_g}\}_0^3) \right| = \sqrt{\left| \mathbb{T}(\Sigma_g, \{\mathbf{h}_k^{\Sigma_g}\}_0^2) \right|} = \frac{\sqrt[4]{|\delta(\mathbf{h}^1, \mathbf{h}^1)|}}{\sqrt{|\delta(\mathbf{h}^0, \mathbf{h}^2)|}},$$

(iii)

$$\left| \mathbb{T}(\mathbb{F}_g, \{\mathbf{h}_i^{\mathbb{F}_g}\}_0^3) \right| = \sqrt{\left| \mathbb{T}(\Sigma_g, \{0, \mathfrak{h} \oplus \sqrt{-1} \mathfrak{h}, 0\}) \right|} = 2^{\frac{1}{4}} \chi(\Sigma_g; \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})) \sqrt[4]{|\Omega_{\mathbb{T}}|}.$$

Burada $\Delta \left(\mathbf{h}_k^{\Sigma_g}, \mathbf{h}_{2-k}^{\Sigma_g} \right)$,

$$[\cdot, \cdot]_{k, 2-k} : H_k \left(\Sigma_g; \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{Ad_{\rho_{or}}} \right) \times H_{2-k} \left(\Sigma_g; \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{Ad_{\rho_{or}}} \right) \longrightarrow \mathbb{C}$$

kesişim eşlemesinin $\mathbf{h}_k^{\Sigma_g}$ ve $\mathbf{h}_{2-k}^{\Sigma_g}$ tabanlarındaki matrisin determinantını, $\delta \left(\mathbf{h}^k, \mathbf{h}^{2-k} \right)$

$$\Omega_{k, 2-k} : H^k \left(\Sigma_g; \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{Ad_{\rho_{or}}} \right) \times H^{2-k} \left(\Sigma_g; \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{Ad_{\rho_{or}}} \right) \xrightarrow{\sim_B} H^2 \left(\Sigma_g; \mathbb{C} \right) \xrightarrow{\int_{\Sigma_g}} \mathbb{C}$$

eşlemesinin \mathbf{h}^k ve \mathbf{h}^{2-k} tabanlarına karşılık gelen matrisin determinantını ve $\Omega_{\mathbb{T}}$ ise

$$\omega_{\mathbb{T}} : \mathcal{H}(\lambda; \mathbb{C}) \times \mathcal{H}(\lambda; \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

kompleks Thurston simplektik formunun $\mathfrak{h} \oplus \sqrt{-1} \mathfrak{h}$ tabanındaki matrisin determinantıdır. Ayrıca $\mathbf{h}_k^{\Sigma_g}$, $H_k \left(\Sigma_g; \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{Ad_{\rho_{or}}} \right)$ uzayının bir tabanıdır ve \mathbf{h}^k ise $\mathbf{h}_k^{\Sigma_g}$ tabanına karşılık gelen $H^k \left(\Sigma_g; \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{Ad_{\rho_{or}}} \right)$ uzayının Poincare dual tabanını göstermektedir. Son olarak, $\chi \left(\Sigma_g; \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \right) = \chi \left(\Sigma_g \right) \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, \mathfrak{h} ise reel analitik $\text{Teich}(\Sigma_g) \hookrightarrow \mathcal{H}(\lambda; \mathbb{R})$ gömmesinden elde edilen izomorfizma yardımıyla ve $H^1 \left(\Sigma_g; \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{Ad_{\rho_{or}}} \right)$ uzayının \mathbf{h}^1 tabanına karşılık gelen $\mathcal{H}(\lambda; \mathbb{R})$ kesen eşdöngü grubunun tabanıdır [29]. $r : \pi_1(\Sigma_g) \rightarrow \pi_1(F_g)$ burada $\Sigma_g \hookrightarrow F_g$ gömmesi ile elde edilen homomorfizmadır.

H , sınırı $\partial H = \Sigma_{g_1} \cup \dots \cup \Sigma_{g_\ell}$ cinsi en az 2 olan ℓ tane kapalı yüzeylerden oluşan kompakt bir hiperbolik 3-manifold olsun. G ise Lie cebiri \mathcal{G} olan redüktif bir Lie grup olsun.

$$\rho : \pi_1(H) \longrightarrow G$$

bir homomorfizma öyle ki $i = 1, \dots, \ell$ için $\rho \circ r_i : \pi_1(\Sigma_{g_i}) \rightarrow G$ bir iyi homomorfizma olsun.

Burada $r_i : \pi_1(\Sigma_{g_i}) \rightarrow \pi_1(\mathbf{H})$ homomorfizması $\Sigma_{g_i} \hookrightarrow \mathbf{H}$ gömmesi ile elde edilen homomorfizmadır. Aşağıdaki zincir komplekslerin kısa-tam dizisini ele alalım:

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{\ell} C_* \left(\Sigma_{g_i}; \mathcal{G}_{Ad\rho_{r_i}} \right) \longrightarrow C_* \left(\mathbf{H}; \mathcal{G}_{Ad\rho} \right) \oplus C_* \left(\mathbf{H}; \mathcal{G}_{Ad\rho} \right) \longrightarrow C_* \left(\mathbf{M}; \mathcal{G}_{Ad\rho} \right) \longrightarrow 0. \quad (6.13)$$

(6.13) dizisine karşılık gelen \mathcal{H}_* Mayer-Vietoris uzun-tam dizisi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{array}{c} 0 \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{\ell} H_3 \left(\Sigma_{g_i}; \mathcal{G}_{Ad\rho_{r_i}} \right) \rightarrow H_3 \left(\mathbf{H}; \mathcal{G}_{Ad\rho} \right) \oplus H_3 \left(\mathbf{H}; \mathcal{G}_{Ad\rho} \right) \rightarrow H_3 \left(\mathbf{M}; \mathcal{G}_{Ad\rho} \right) \\ \downarrow \\ \bigoplus_{i=1}^{\ell} H_2 \left(\Sigma_{g_i}; \mathcal{G}_{Ad\rho_{r_i}} \right) \rightarrow H_2 \left(\mathbf{H}; \mathcal{G}_{Ad\rho} \right) \oplus H_2 \left(\mathbf{H}; \mathcal{G}_{Ad\rho} \right) \rightarrow H_2 \left(\mathbf{M}; \mathcal{G}_{Ad\rho} \right) \\ \downarrow \\ \bigoplus_{i=1}^{\ell} H_1 \left(\Sigma_{g_i}; \mathcal{G}_{Ad\rho_{r_i}} \right) \rightarrow H_1 \left(\mathbf{H}; \mathcal{G}_{Ad\rho} \right) \oplus H_1 \left(\mathbf{H}; \mathcal{G}_{Ad\rho} \right) \rightarrow H_1 \left(\mathbf{M}; \mathcal{G}_{Ad\rho} \right) \\ \downarrow \\ \bigoplus_{i=1}^{\ell} H_0 \left(\Sigma_{g_i}; \mathcal{G}_{Ad\rho_{r_i}} \right) \rightarrow H_0 \left(\mathbf{H}; \mathcal{G}_{Ad\rho} \right) \oplus H_0 \left(\mathbf{H}; \mathcal{G}_{Ad\rho} \right) \rightarrow H_0 \left(\mathbf{M}; \mathcal{G}_{Ad\rho} \right) \rightarrow 0. \end{array} \quad (6.14)$$

Teorem 6.1.2’de kullandığımız argümanlardan faydalanarak aşağıdaki teoremi yazabiliriz:

Teorem 6.2.2. Σ_{g_i} , \mathbf{H} , \mathbf{M} , G , \mathcal{G} , ρ ve r_i yukarıdaki gibi kabul edelim. (6.13) kısa-tam dizisini ve (6.14) Mayer-Vietoris uzun-tam dizisini ele alalım. $k = 0, 1, 2, 3$ için $H_k \left(\mathbf{H}; \mathcal{G}_{Ad\rho} \right)$ uzayının tabanı $\mathbf{h}_k^{\mathbf{H}}$ olsun. Bu durumda $i = 1, \dots, \ell$, $k = 0, 1, 2, 3$ ve $j = 0, 1, 2$ olmak üzere $H_k \left(\mathbf{M}; \mathcal{G}_{Ad\rho} \right)$ ve $H_j \left(\Sigma_{g_i}; \mathcal{G}_{Ad\rho_{r_i}} \right)$ uzaylarının sırasıyla $\mathbf{h}_k^{\mathbf{M}}$ ve $\mathbf{h}_j^{\Sigma_{g_i}}$ tabanları vardır öyle ki bu tabanlardaki (6.14) uzun-tam dizisinin Reidemeister torsiyonu 1 olur. Bununla birlikte aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\left| \mathbb{T} \left(\mathbf{H}, \{ \mathbf{h}_k^{\mathbf{H}} \}_0^3 \right) \right| = \prod_{i=1}^{\ell} \sqrt{ \left| \mathbb{T} \left(\Sigma_{g_i}, \{ \mathbf{h}_j^{\Sigma_{g_i}} \}_0^2 \right) \right| }.$$

İspat. $\rho \circ r_i$ 'nin iyi olabilmesi için

$$H_j \left(\Sigma_{g_i}; \mathcal{G}_{Ad_{\rho \circ r_i}} \right) = 0$$

olması gerektiğini biliyoruz. Burada $i = 1, \dots, \ell$ ve $j = 0, 2$ 'dir. Dolayısıyla (6.14) uzun-tam dizisini aşağıdakiler gibi yazabiliriz:

$$0 \longrightarrow H_3 \left(\mathbf{H}; \mathcal{G}_{Ad_\rho} \right) \oplus H_3 \left(\mathbf{H}; \mathcal{G}_{Ad_\rho} \right) \longrightarrow H_3 \left(\mathbf{M}; \mathcal{G}_{Ad_\rho} \right) \longrightarrow 0, \quad (6.15)$$

$$\begin{array}{c} 0 \longrightarrow H_2 \left(\mathbf{H}; \mathcal{G}_{Ad_\rho} \right) \oplus H_2 \left(\mathbf{H}; \mathcal{G}_{Ad_\rho} \right) \longrightarrow H_2 \left(\mathbf{M}; \mathcal{G}_{Ad_\rho} \right) \\ \downarrow \hspace{15em} \downarrow \\ \bigoplus_{i=1}^{\ell} H_1 \left(\Sigma_{g_i}; \mathcal{G}_{Ad_{\rho \circ r_i}} \right) \longrightarrow H_1 \left(\mathbf{H}; \mathcal{G}_{Ad_\rho} \right) \oplus H_1 \left(\mathbf{H}; \mathcal{G}_{Ad_\rho} \right) \longrightarrow H_1 \left(\mathbf{M}; \mathcal{G}_{Ad_\rho} \right) \longrightarrow 0, \end{array} \quad (6.16)$$

$$0 \longrightarrow H_0 \left(\mathbf{H}; \mathcal{G}_{Ad_\rho} \right) \oplus H_0 \left(\mathbf{H}; \mathcal{G}_{Ad_\rho} \right) \longrightarrow H_0 \left(\mathbf{M}; \mathcal{G}_{Ad_\rho} \right) \longrightarrow 0. \quad (6.17)$$

$k = 0, 3$ için $H_k \left(\mathbf{M}; \mathcal{G}_{Ad_\rho} \right)$ uzayının tabanı, (6.15) ile (6.17) kısa-tam dizilerinden elde edilen izomorfizmalar ve $H_k \left(\mathbf{H}; \mathcal{G}_{Ad_\rho} \right)$ uzayının $\mathbf{h}_k^{\mathbf{H}}$ tabanı kullanarak elde edilen taban düşünülmektedir.

(6.16) dizisi daha açık bir ifade ile U, V, W, T ve S sırasıyla $H_2 \left(\mathbf{H}; \mathcal{G}_{Ad_\rho} \right) \oplus H_2 \left(\mathbf{H}; \mathcal{G}_{Ad_\rho} \right)$, $H_2 \left(\mathbf{M}; \mathcal{G}_{Ad_\rho} \right)$, $\bigoplus_{i=1}^{\ell} H_1 \left(\Sigma_{g_i}; \mathcal{G}_{Ad_{\rho \circ r_i}} \right)$, $H_1 \left(\mathbf{H}; \mathcal{G}_{Ad_\rho} \right) \oplus H_1 \left(\mathbf{H}; \mathcal{G}_{Ad_\rho} \right)$ ve $H_1 \left(\mathbf{M}; \mathcal{G}_{Ad_\rho} \right)$ olsun. Böylece (6.16) uzun-tam dizi aşağıdaki gibi olacaktır:

$$0 \longrightarrow U \xrightarrow{\partial_4=f} V \xrightarrow{\partial_3=g} W \xrightarrow{\partial_2=h} T \xrightarrow{\partial_1=\alpha} S \longrightarrow 0. \quad (6.18)$$

(3.1) ve (3.2) kısa-tam dizileri sayesinde (6.18) uzun-tam dizisini aşağıdaki gibi ele alalım:

$$0 \longrightarrow B_p \hookrightarrow C_p \twoheadrightarrow B_{p-1} \longrightarrow 0.$$

Burada $p = 0, 1, 2, 3, 4$ 'dür.

(6.18) uzun-tam dizisinden aşağıdaki kısa-tam dizi yazılabilir:

$$0 \longrightarrow B_0 \hookrightarrow S \twoheadrightarrow B_{-1} \longrightarrow 0.$$

Burada

$$\begin{cases} B_0 = \text{Im}\partial_1 = \text{Im}\alpha = S, \\ B_{-1} = 0. \end{cases}$$

S uzayının β_S tabanını $\alpha(\beta_T)$ olarak kabul edelim. β_T burada $H_1(\mathbf{H}; \mathcal{G}_{Ad\rho}) \oplus H_1(\mathbf{H}; \mathcal{G}_{Ad\rho})$ uzayının $\mathbf{h}_1^{\mathbf{H}}$ ile elde edilen bir tabandır. S uzayının $\alpha(\beta_T)$ tabanını B_0 uzayının tabanı olarak ele aldığımızda S uzayının tabanları için değişim-taban-matrisinin determinanı

$$[\alpha(\beta_T) \sqcup_{s_0}(\{0\}), \alpha(\beta_T)] = 1$$

olur.

$p = 1$ için aşağıdaki kısa-tam dizi elde edilir:

$$0 \longrightarrow B_1 \hookrightarrow T \xrightarrow{\alpha} B_0 \longrightarrow 0.$$

Burada

$$\begin{cases} B_1 = \text{Im}\partial_2 = \text{Im}h = \ker\alpha, \\ B_0 = \text{Im}\alpha \end{cases}$$

eşit olur. $\alpha : T \twoheadrightarrow B_0$ dönüşümünün kısmı $s_1 : B_0 \rightarrow T$ olarak

$$T/B_1 \cong B_0$$

izomorfizmasının tersini düşünelim. B_1 uzayının $\beta_{B_1} = \beta_T \setminus s_1(\alpha(\beta_T))$ tabanını göz önüne aldığımızda T uzayının tabanları için değişim-taban-matrisinin determinanı

$$[\{\beta_T \setminus s_1(\alpha(\beta_T))\} \sqcup_{s_1(\alpha(\beta_T))}, \{\beta_T\}] = 1$$

olduğu sonucuna ulaşırız.

$p = 2$ için aşağıdaki kısa-tam dizi yazılabilir:

$$0 \longrightarrow B_2 \hookrightarrow W \xrightarrow{h} B_1 \longrightarrow 0.$$

Burada

$$\begin{cases} B_2 = \text{Im} \partial_3 = \text{Im} g = \ker h, \\ B_1 = \text{Im} h. \end{cases}$$

β_{B_2} ise B_2 uzayının keyfi bir tabanı olsun. Önceki adımdan elde edilen B_1 uzayının tabanını ele alalım. Ayrıca $h : W \twoheadrightarrow B_1$ dönüşümünün kısmı $s_2 : B_1 \rightarrow W$ olarak

$$W/B_2 \cong B_1$$

izomorfizmasının tersini göz önüne alalım. Bu durumda W için bir taban elde ederiz. Bu tabanı β_W ile gösterelim. Elde edilen bu tabanı $\beta_{B_2} \sqcup_{s_2(\beta_{B_1})}$ olarak düşünelim. Bu durumda W uzayının tabanları için değişim-taban-matrisinin determinanı

$$[\{\beta_{B_2}\} \sqcup_{s_2(\beta_{B_1})}, \{\beta_{B_1}\}] = 1$$

olur.

$p = 3$ için aşağıdaki kısa-tam dizi elde edilir:

$$0 \longrightarrow B_3 \hookrightarrow V \xrightarrow{g} B_2 \longrightarrow 0.$$

Burada

$$\begin{cases} B_3 = \text{Im}\partial_4 = \text{Im}f = \text{ker}g, \\ B_2 = \text{Im}g \end{cases}$$

eşit olacaktır. B_3 uzayının tabanını $\beta_{B_3} = f(\beta_U)$ olarak ele alalım. Önceki adımdan elde edilen B_2 uzayının tabanını düşünelim. $g : V \rightarrow B_2$ dönüşümünün kısmı $s_3 : B_2 \rightarrow V$ olarak

$$V/B_3 \cong B_2$$

izomorfizmasının tersi ele alınırsa V uzayı için bir taban bulunur. V uzayının \mathbf{h}_2^M tabanını seçtiğimizde V uzayının tabanları için değişim-taban-matrisinin determinanı

$$[\{\beta_{B_3}\} \sqcup s_3(\beta_{B_2}), \{\beta_{B_2}\}] = 1$$

olur.

Son olarak, $p = 4$ için aşağıdaki kısa-tam dizi yazılabilir:

$$0 \longrightarrow B_4 \hookrightarrow U \xrightarrow{f} B_3 \longrightarrow 0.$$

Burada

$$\begin{cases} B_4 = \text{Im}\partial_5 = \text{ker}f = 0, \\ B_3 = \text{Im}f. \end{cases}$$

Önceki adımdan elde edilen B_3 uzayının tabanını göz önüne alalım. Ayrıca $f : U \rightarrow B_3$ dönüşümünün kısmı $s_4 : B_3 \rightarrow U$ olarak

$$U/B_4 \cong B_3$$

izomorfizmasının tersi düşünüldüğünde U uzayı için bir taban elde edilir. Dolayısıyla U uzayının tabanları için değişim-taban-matrisinin determinanı

$$[\{0\} \sqcup s_4(\beta_{B_3}), \{\beta_{B_3}\}] = 1$$

olur.

Sonuç olarak, \mathcal{H}_* dizisinin bu tabanlardaki Reidemeister torsiyonunun 1'e eşit olduğu elde edilmiştir.

Teorem 3.1.2 ve Lemma 3.1.3 sayesinde aşağıdaki formül geçerlidir:

$$\mathbb{T} \left(\mathbf{H}, \left\{ \mathbf{h}_k^{\mathbf{H}_g} \right\}_0^3 \right)^2 = \prod_{i=1}^{\ell} \mathbb{T} \left(\Sigma_{g_i}, \left\{ \mathbf{h}_j^{\Sigma_{g_i}} \right\}_0^2 \right) \mathbb{T} \left(\mathbf{M}, \left\{ \mathbf{h}_i^{\mathbf{M}} \right\}_0^3 \right).$$

[14] nolu kaynakta bulunan Önerme 2.11 ve Not 4.6 kullanılırsa aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\left| \mathbb{T} \left(\mathbf{M}, \left\{ \mathbf{h}_i^{\mathbf{M}} \right\}_0^3 \right) \right| = 1.$$

Böylece Teorem 6.2.2'nin ispatı bitmiş olur. ■

Sonuç 6.2.3. $\Sigma_{g_i}, \mathbf{H}, \mathbf{M}, G, \mathcal{G}, \rho, r_i, \mathbf{h}_k^{\mathbf{H}}, \mathbf{h}_k^{\mathbf{M}}$ ve $\mathbf{h}_j^{\Sigma_{g_i}}$ *Theorem 6.2.2'deki gibi olsun. Bu durumda Teorem 5.2.3 ve Teorem 6.2.2 birlikte ele alınırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilir:*

(i)

$$\left| \mathbb{T} \left(\mathbf{H}, \left\{ \mathbf{h}_k^{\mathbf{H}} \right\}_0^3 \right) \right| = \prod_{i=1}^{\ell} \sqrt{\left| \mathbb{T} \left(\Sigma_{g_i}, \left\{ \mathbf{h}_j^{\Sigma_{g_i}} \right\}_0^2 \right) \right|} = \prod_{i=1}^{\ell} \frac{1}{\sqrt[4]{\left| \Delta \left(\mathbf{h}_1^{\Sigma_{g_i}}, \mathbf{h}_1^{\Sigma_{g_i}} \right) \right|}},$$

(ii)

$$\left| \mathbb{T} \left(\mathbf{H}, \{ \mathbf{h}_k^{\mathbf{H}} \}_0^3 \right) \right| = \prod_{i=1}^{\ell} \sqrt{ \left| \mathbb{T} \left(\Sigma_{g_i}, \{ \mathbf{h}_j^{\Sigma_{g_i}} \}_0^2 \right) \right| } = \prod_{i=1}^{\ell} \sqrt{ |\delta(\mathbf{h}^{1,i}, \mathbf{h}^{1,i})| }.$$

$j = 0, 1, 2$ olmak üzere $\mathbf{h}^{j,i}$ burada $H_j \left(\Sigma_{g_i}, \mathcal{G}_{Ad_{\rho_{ori}}} \right)$ uzayının $\mathbf{h}_j^{\Sigma_{g_i}}$ tabanına karşılık gelen $H^j \left(\Sigma_{g_i}, \mathcal{G}_{Ad_{\rho_{ori}}} \right)$ uzayının Poincare dual tabanıdır.

\mathbf{H} kompakt yönlendirilebilir bir 3–manifoldu için tam hiperbolik yapı olan

$$\text{Hol} : \pi_1(\mathbf{H}) \longrightarrow \text{Isom}^+ \mathbb{H}^3 \cong \text{PSL}(2, \mathbb{C})$$

holonomi temsilinin

$$\widetilde{\text{Hol}} : \pi_1(\mathbf{H}) \longrightarrow \text{SL}(2, \mathbb{C})$$

temsiline kaldırılabilceği iyi bilinmektedir [53, 54]. Ayrıca, kaldırılışların (lifts) ve dönme (spin) yapılarının \mathbf{H} üzerinde bire bir uygunluk olduğu bilinmektedir. Kaldırılışlardan birini ele aldığımızda ve $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ 'nin sonlu boyutlu bir V temsilini oluşturduğumuzda, bir

$$\rho : \pi_1(\mathbf{H}) \longrightarrow \text{SL}(V)$$

temsilini elde ederiz. Her pozitif n tamsayısı için, boyutu n olan $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ 'nin indirgenemez tek bir V_n temsili vardır. Daha açık bir ifade ile, standart $V_2 = \mathbb{C}^2$ temsilinin $(n-1)$ -th simetrik kuvvetidir. V_n ve yukarıdakiler göz önüne alındığında

$$\rho_n : \pi_1(\mathbf{H}) \longrightarrow \text{SL}(n, \mathbb{C})$$

elde edilir. \mathbf{H} , sınırı $\partial\mathbf{H} = \Sigma_{g_1} \cup \dots \cup \Sigma_{g_\ell}$ cinsi en az 2 olan ℓ tane kapalı yüzeylerden oluşan kompakt elementer olmayan bir hiperbolik 3–manifold olsun. Burada \mathbf{H} 'nin holonomisinin $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ 'de indirgenemez bir temsili olması durumunda \mathbf{H} bir elementer olmayandır.

P. Menal-Ferrer ve J. Porti'nin [54] nolu makalesinde bulunan Teorem 0.1 sayesinde $\partial H \subset H$ kapsaması

$$H^1 \left(H; \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})_{Ad\rho_n} \right) \hookrightarrow H^1 \left(\partial H; \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})_{Ad\rho_n} \right)$$

bir gömmesine, birebir fonksiyona (injection) neden olur. Burada ayrıca

$$\dim H^1 \left(H; \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})_{Ad\rho_n} \right) = \frac{1}{2} \dim H^1 \left(\partial H; \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})_{Ad\rho_n} \right)$$

eşitliği sağlanacağından

$$H^2 \left(H; \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})_{Ad\rho_n} \right) \cong H^2 \left(\partial H; \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})_{Ad\rho_n} \right)$$

izomorfizması vardır.

Σ_{g_i} , H , ρ_n yukarıdaki gibi olsun ve M , r_i ise Teorem 6.2.2'deki gibi kabul edelim. (6.13) kısa-tam dizisini ve (6.14) Mayer-Vietoris uzun-tam dizisini ele alalım. $k = 0, 1, 2, 3$ olmak üzere \mathbf{h}_k^H ise $H_k \left(H; \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})_{Ad\rho_n} \right)$ uzayının bir tabanı olsun. Bu durumda Theorem 6.2.2 sayesinde $i = 1, \dots, \ell$, $k = 0, 1, 2, 3$ ve $j = 0, 1, 2$ için \mathbf{h}_k^H ve $\mathbf{h}_j^{\Sigma_{g_i}}$ sırasıyla $H_k \left(H; \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})_{Ad\rho_n} \right)$ ve $H_j \left(\Sigma_{g_i}; \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})_{Ad\rho_n} \right)$ uzaylarının tabanları olur öyle ki bu tabanlardaki (6.14) dizisinin Reidemeister torsiyonu 1'e eşittir. Bunlar birleştirilir ve Sonuç 6.2.3 uygulanır ise aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 6.2.4. Σ_{g_i} , H , ρ_n , r_i , \mathbf{h}_k^H ve $\mathbf{h}_j^{\Sigma_{g_i}}$ yukarıdaki gibi kabul edelim. Bu durumda aşağıdaki formüller sağlanır:

(i)

$$\left| \mathbb{T} \left(H, \{ \mathbf{h}_k^H \}_0^3 \right) \right| = \prod_{i=1}^{\ell} \sqrt{\left| \mathbb{T} \left(\Sigma_{g_i}, \{ \mathbf{h}_j^{\Sigma_{g_i}} \}_0^2 \right) \right|} = \prod_{i=1}^{\ell} \frac{\sqrt{\left| \Delta \left(\mathbf{h}_0^{\Sigma_{g_i}}, \mathbf{h}_2^{\Sigma_{g_i}} \right) \right|}}{\sqrt[4]{\left| \Delta \left(\mathbf{h}_1^{\Sigma_{g_i}}, \mathbf{h}_1^{\Sigma_{g_i}} \right) \right|}},$$

(ii)

$$\left| \mathbb{T} \left(\mathbf{H}, \{\mathbf{h}_k^{\mathbf{H}}\}_0^3 \right) \right| = \prod_{i=1}^{\ell} \sqrt{\left| \mathbb{T} \left(\Sigma_{g_i}, \{\mathbf{h}_j^{\Sigma_{g_i}}\}_0^2 \right) \right|} = \prod_{i=1}^{\ell} \frac{\sqrt[4]{|\delta(\mathbf{h}^{1,i}, \mathbf{h}^{1,i})|}}{\sqrt{|\delta(\mathbf{h}^{0,i}, \mathbf{h}^{2,i})|}}.$$

$n = 2$ durumunu ve $i = 1, \dots, \ell$ için $\lambda_i \subset \Sigma_{g_i}$ bir maksimal jeodezik laminasyon sabitleyelim. Eğer $\rho_2 : \pi_1(\mathbf{H}) \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ öyle ki $\rho_2 \circ r_i \in \mathrm{Teich}(\Sigma_{g_i})$, $i = 1, \dots, \ell$ ise bu durumda Teorem 6.2.1'deki (iii) eşitliğini uygulayarak ve oradaki notasyonu kullanarak aşağıdaki formül elde edilir:

(iii)

$$\left| \mathbb{T} \left(\mathbf{H}, \{\mathbf{h}_k^{\mathbf{H}}\}_0^3 \right) \right| = \prod_{i=1}^{\ell} \sqrt{\left| \mathbb{T} \left(\Sigma_{g_i}, \{0, \mathfrak{h}^i \oplus \sqrt{-1} \mathfrak{h}^i, 0\} \right) \right|} = 2^{\frac{1}{4} \sum_{i=1}^{\ell} \chi(\Sigma_{g_i}; \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))} \prod_{i=1}^{\ell} \sqrt[4]{|\Omega_{\Gamma, i}|}.$$

Burada $\Delta \left(\mathbf{h}_j^{\Sigma_{g_i}}, \mathbf{h}_{2-j}^{\Sigma_{g_i}} \right)$,

$$[\cdot, \cdot]_{j, 2-j} : H_j \left(\Sigma_{g_i}; \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\mathrm{Ad}_{\rho_2 \circ r_i}} \right) \times H_{2-j} \left(\Sigma_{g_i}; \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\mathrm{Ad}_{\rho_2 \circ r_i}} \right) \longrightarrow \mathbb{C}$$

kesişim eşlemesinin $\mathbf{h}_j^{\Sigma_{g_i}}$ ve $\mathbf{h}_{2-j}^{\Sigma_{g_i}}$ tabanlarındaki matrisinin determinantını, $\delta \left(\mathbf{h}^{j,i}, \mathbf{h}^{(2-j),i} \right)$

$$\Omega_{j, 2-j} : H^j \left(\Sigma_{g_i}; \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\mathrm{Ad}_{\rho_2 \circ r_i}} \right) \times H^{2-j} \left(\Sigma_{g_i}; \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\mathrm{Ad}_{\rho_2 \circ r_i}} \right) \xrightarrow{\sim_B} H^2(\Sigma_{g_i}; \mathbb{C}) \xrightarrow{f_{\Sigma}} \mathbb{C}$$

eşlemesinin $\mathbf{h}^{j,i}$ ve $\mathbf{h}^{(2-j),i}$ tabanlarına karşılık gelen matrisin determinantını ve $\Omega_{\Gamma, i}$ ise

$$\omega_{\Gamma} : \mathcal{H}(\lambda_i; \mathbb{C}) \times \mathcal{H}(\lambda_i; \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

kompleks Thurston simplektik formunun $\mathfrak{h}^i \oplus \sqrt{-1} \mathfrak{h}^i$ tabanındaki matrisin determinantını göstermektedir. Ayrıca $\mathbf{h}_j^{\Sigma_{g_i}}$, $H_j \left(\Sigma_{g_i}; \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\mathrm{Ad}_{\rho_2 \circ r_i}} \right)$ uzayının bir tabanını ve $\mathbf{h}^{j,i}$ ise $\mathbf{h}_j^{\Sigma_{g_i}}$ tabanına karşılık gelen $H^j \left(\Sigma_{g_i}; \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\mathrm{Ad}_{\rho_2 \circ r_i}} \right)$ uzayının Poincare dual tabanını göstermektedir. Son olarak, \mathfrak{h}^i reel analitik $\mathrm{Teich}(\Sigma_{g_i}) \hookrightarrow \mathcal{H}(\lambda_i; \mathbb{R})$ gömmesi ile edilen izomorfizma yardımıyla ve $H^1 \left(\Sigma_{g_i}; \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\mathrm{Ad}_{\rho_2 \circ r_i}} \right)$ uzayının $\mathbf{h}^{1,i}$ tabanına karşılık gelen $\mathcal{H}(\lambda_i; \mathbb{R})$ kesen eşdöngü grubunun tabanıdır [29]. $r_i : \pi_1(\Sigma_{g_i}) \rightarrow \pi_1(\mathbf{H})$ burada $\Sigma_{g_i} \hookrightarrow \mathbf{H}$ gömmesi ile elde edilen homomorfizmadır.

KAYNAKLAR

- [1] E. Witten, On quantum gauge theories in two dimension, *Comm. Math. Phys.*, 141 (1) (1991) 153-209.
- [2] K. Reidemeister, Homotopieringe und linsenraume, *Abh. Math. Semin. Univ. Hambg.*, 11 (1935) 102-109.
- [3] W. Franz, Uber die Torsion einer Uberdeckung, *J. Reine Angew. Math.*, 173 (1935) 245-254.
- [4] R.C. Kirby, L.C. Siebenmann, On triangulation of manifolds and Hauptvermutung, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 75 (1969) 742-749.
- [5] T.A. Chapman, Hilbert cube manifolds and the invariance of Whitehead torsion, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 79 (1973) 52-56.
- [6] T.A. Chapman, Topological invariance of Whitehead torsion, *Amer. J. Math.*, 96 (1974) 488-497.
- [7] J. Milnor, Two complexes which are homeomorphic but combinatorially distinct, *Ann. of Math.*, 74 (3) (1961) 575-590.
- [8] J. Milnor, A duality theorem for Reidemeister torsion, *Ann. of Math.*, 76 (1) (1962) 137-147.
- [9] J. Milnor, Whitehead torsion, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 72 (3) (1966) 358-426.
- [10] J. Cheeger, Analytic torsion and the heat equation, *Ann. of Math.*, 109 (2) (1979) 259-321.
- [11] W. Muller, Analytic torsion and R-torsion of Riemannian manifolds, *Adv. Math.*, 28 (3) (1978) 233-305.
- [12] D. Ray, I. Singer, R-torsion and the Laplacian of Riemannian manifolds, *Adv. Math.*, 7 (2) (1971) 145-210.
- [13] Y. Sozen, Symplectic chain complex and Reidemeister torsion of compact manifolds, *Math. Scand.*, 111 (1) (2012) 65-91.

- [14] Y. Sozen, A note on Reidemeister torsion and pleated surfaces, *J. Knot Theory Ramifications*, 23 (3) (2014) 1-32.
- [15] T. Kitano, Reidemeister torsion of Seifert-fibered spaces for $SL(2;C)$ representations, *Tokyo J. Math.*, 17 (1994) 59-74.
- [16] J. Dubois, Non abelian Reidemeister torsion and volume form on the $SU(2)$ -presentation space of knot groups, *Ann. Inst. Fourier*, 55 (2005) 1685-1734.
- [17] J. Dubois, A volume form on the $SU(2)$ -representation space of knot groups, *Algebr. Geom. Topol.*, 6 (2006) 373-404.
- [18] E. Witten, Quantum field theory and the Jones polynomials, *Comm. Math. Phys.*, 121 (3) (1989) 351-399.
- [19] G. Meng, C.H. Taubes, $SW = \text{Milnor torsion}$, *Math. Res. Lett.*, 3 (5) (1996) 661-674.
- [20] J. Milnor, *Conference on the Topology of Manifolds*, American Mathematical Society, Prindle, Weber & Schmidt, Boston, Mass, 115-133, 1967.
- [21] D. Fried, Homological identities for closed orbits, *Invent. Math.*, 71 (1983) 419-442.
- [22] M. Hutchings, Y. Lee, Circle valued Morse theory and Reidemeister torsion, *Geom. Topol.*, 3 (1999) 369-396.
- [23] A. Schwarz, The partition function of degenerate quadratic functional and Ray-Singer torsion, *Lett. Math. Phys.*, 2 (3) (1978) 247-252.
- [24] J. Porti, Torsion de Reidemeister pour les Varieties Hyperboliques, *Mem. Amer. Math. Soc.*, 128 (612) (1997) 1.
- [25] V. Turaev, *Torsions of 3-Dimensional Manifolds*, *Progr. Math.*, Vol. 208, Birkhauser Verlag, Basel, 2002.
- [26] J. Dubois, Behavior of the $SU(2)$ -Reidemeister Torsion Form By Mutation, <http://arxiv.org/abs/1203.4672v2>, (Erişim Tarihi: 1 Eylül 2013).
- [27] A. Weil, Modules des surfaces de Riemann, *Séminaire Bourbaki*, 168 (1958) 413-419.
- [28] W.M. Goldman, The symplectic nature of fundamental groups of surfaces, *Adv. Math.*, 54 (2) (1984) 200-225.

- [29] F. Bonahon, Shearing hyperbolic surfaces, bending pleated surfaces and Thurston's symplectic form, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.*, 5 (1996) 233-297.
- [30] Y. Sozen, F. Bonahon, The Weil-Petersson and Thurston symplectic forms, *Duke Math. J.*, 108 (2001) 581-597.
- [31] Y. Sozen, On Reidemeister torsion of a symplectic complex, *Osaka J. Math.*, 45 (1) (2008) 1-39.
- [32] Y. Sozen, On a volume element of Hitchin component, *Fund. Math.*, 217 (2012) 249-264.
- [33] Y. Sozen, On Fubini-Study form and Reidemeister torsion, *Topology Appl.*, 156 (5) (2009) 951-955.
- [34] Y. Sozen, A note on Reidemeister torsion and period matrix of Riemann surfaces, *Math. Slovaca*, 61 (1) (2011) 29-38.
- [35] K.W. Kwun, R.H. Szczarba, Product and Sum Theorems for Whitehead Torsion, *Ann. of Math.*, 82 (1) (1965) 183-190.
- [36] C. Özel, Y. Sözen, Reidemeister torsion of product manifolds and quantum entanglement of pure states with Schmidt rank, *Balkan J. Geom. Appl.*, 17 (2) (2012) 66-76.
- [37] R. Arenas, Constructing a matrix representation of the Lie group G_2 , Senior thesis, Harvey Mudd College, Department of Mathematics, 2005.
- [38] R.L. Bryant, Metrics with exceptional holonomy, *Ann. Math.* 126 (1987) 525–576.
- [39] F. Bernardoni, S.L. Cacciatori, B.L. Cerchiai, A. Scotti, Mapping the geometry of the F_4 group, *Adv. Theor. Math. Phys.* 12 (2008) 889–944.
- [40] F. Bernardoni, S.L. Cacciatori, B.L. Cerchiai, A. Scotti, Mapping the geometry of the E_6 group, *J. Math. Phys.* 49 (2008) 012107.
- [41] F. Hezenci, Y. Sözen, A note on exceptional groups and Reidemeister torsion, *J. Math. Phys.*, 59 (2018) 081704.
- [42] A.S. Sikora, Character varieties, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 364 (10) (2012) 5173–5208.

- [43] M. Kapovich, Hyperbolic manifolds and discrete groups, Progr. Math., Vol. 183, Birkhauser Boston Inc., Boston, MA, **2010**.
- [44] J.W. Morgan, P.B. Shalen, Valuations, Trees, and Degenerations of Hyperbolic Structures, I, Ann. of Math., 120 (3) (**1984**) 401-476.
- [45] E. Breuillard, T. Gelander, On dense free subgroups of Lie groups, J. Algebra, 261 (2) (**2003**) 448-467.
- [46] E. Breuillard, T. Gelander, J. Souto, P. Storm, Dense embeddings of surface groups, Geom. Topol., 10 (**2006**) 1373-1389.
- [47] D. Sullivan, On the ergodic theory at infinity of an arbitrary discrete group of hyperbolic motions, Riemann Surfaces and Related Topics: Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference, Ann. of Math., Vol. 97, Princeton, **1981**.
- [48] Y. Minsky, On Dynamics of $\text{Out}(F_n)$ on $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$ Characters, Israel J. Math., 193 (**2013**) 47–70.
- [49] F. Bonahon, Transverse Hölder distributions for geodesic laminations, Topology, 36 (**1997**) 103-122.
- [50] R.D. Canary, D.B.A. Epstein, P. Green, Notes on notes of Thurston, in Analytical and Geometric Aspects of Hyperbolic Space, D.B.A. Epstein (Eds), Cambridge University Press, Cambridge, 3–92, **1987**.
- [51] R.C. Penner, J.L. Harer, Combinatorics of Train Tracks, Ann. of Math. Stud., Vol.125, Princeton University Press, Princeton, **1992**.
- [52] Y. Sözen, F. Bonahon, The Weil-Petersson and Thurston symplectic forms, Duke Math. J., 108 (**2001**) 581-597.
- [53] M. Culler, Lifting representations to covering groups, Adv. in Math., 59 (1) (**1986**) 64–70.
- [54] P. Menal-Ferrer, J. Porti, Twisted cohomology for hyperbolic three manifolds, Osaka J. Math., 49 (3) (**2012**) 741-769.

EKLER

Ek 1. G_2 İstisnai Grubu için Matlab Programı

Bu ekte, [37] nolu kaynakta da bulunduğu gibi Lie cebiri \mathcal{G}_2 olan G_2 İstisnai grubunun $\{X_i, Y_i : i = 1 \dots, 7\}$ tabanı ele alındı. Aşağıdaki Matlab programı, \mathcal{G}_2 Lie cebirinin bu verilen tabana karşılık gelen $Ad_{\exp(X_1)} : \mathcal{G}_2 \rightarrow \mathcal{G}_2$ dönüşümündeki matrisin determinantını hesaplar.

```
X1=zeros(7); X1(2,3)=1; X1(3,2)=-1; X1(5,4)=1; X1(4,5)=-1;
Y1=zeros(7); Y1(4,5)=1; Y1(5,4)=-1; Y1(6,7)=1; Y1(7,6)=-1;
X2=zeros(7); X2(3,1)=1; X2(1,3)=-1; X2(6,4)=1; X2(4,6)=-1;
Y2=zeros(7); Y2(4,6)=1; Y2(6,4)=-1; Y2(7,5)=1; Y2(5,7)=-1;
X3=zeros(7); X3(1,2)=1; X3(2,1)=-1; X3(7,4)=1; X3(4,7)=-1;
Y3=zeros(7); Y3(4,7)=1; Y3(7,4)=-1; Y3(5,6)=1; Y3(6,5)=-1;
X4=zeros(7); X4(2,6)=1; X4(6,2)=-1; X4(5,1)=1; X4(1,5)=-1;
Y4=zeros(7); Y4(3,7)=1; Y4(7,3)=-1; Y4(6,2)=1; Y4(2,6)=-1;
X5=zeros(7); X5(1,4)=1; X5(4,1)=-1; X5(2,7)=1; X5(7,2)=-1;
Y5=zeros(7); Y5(2,7)=1; Y5(7,2)=-1; Y5(3,6)=1; Y5(6,3)=-1;
X6=zeros(7); X6(7,1)=1; X6(1,7)=-1; X6(2,4)=1; X6(4,2)=-1;
Y6=zeros(7); Y6(1,7)=1; Y6(7,1)=-1; Y6(3,5)=1; Y6(5,3)=-1;
X7=zeros(7); X7(6,1)=1; X7(1,6)=-1; X7(5,2)=1; X7(2,5)=-1;
Y7=zeros(7); Y7(2,5)=1; Y7(5,2)=-1; Y7(4,3)=1; Y7(3,4)=-1;
```

```
syms x
```

```
M1=x*X1;
```

```
A1=simplify(expm(M1));
```

```
B1=simplify(inv(A1));
```

```
C=[X1,Y1,X2,Y2,X3,Y3,X4,Y4,X5,Y5,X6,Y6,X7,Y7];
```

```
for i=0:13
```

```
K=C(:,7*i+1:7*i+7);
```

```
T1=simplify(B1*K*A1);
```

```
T1
```

```
end
```

```
%%%%%%%%%
```

symsx

g2_X1=sym(zeros(14));

g2_X1(1,1)=1; g2_X1(2,2)=1; g2_X1(3,3)=cos(x);
g2_X1(5,3)=sin(x); g2_X1(6,3)=sin(x); g2_X1(4,4)=cos(x);
g2_X1(6,4)=-sin(x); g2_X1(5,5)=cos(x); g2_X1(3,5)=-sin(x);
g2_X1(4,5)=-sin(x); g2_X1(6,6)=cos(x); g2_X1(4,6)=sin(x);
g2_X1(7,7)=cos(x); g2_X1(9,7)=-sin(x); g2_X1(10,7)=sin(x);
g2_X1(8,8)=cos(x); g2_X1(10,8)=-sin(x); g2_X1(9,9)=cos(x);
g2_X1(7,9)=sin(x); g2_X1(8,9)=sin(x); g2_X1(10,10)=cos(x);
g2_X1(8,10)=sin(x); g2_X1(11,11)=(cos(x))^2; g2_X1(12,11)=-(sin(x))^2;
g2_X1(14,11)=-sin(2*x)/2; g2_X1(12,12)=(cos(x))^2; g2_X1(11,12)=-(sin(x))^2;
g2_X1(14,12)=-sin(2*x)/2; g2_X1(13,13)=1; g2_X1(11,13)=-sin(2*x)/2;
g2_X1(12,13)=-sin(2*x)/2; g2_X1(14,13)=(sin(x))^2; g2_X1(14,14)=cos(2*x);
g2_X1(11,14)=sin(2*x); g2_X1(12,14)=sin(2*x);

simplify(det(g2_X1))

ans=

1

Ek 2. F_4 İstisnai Grubu için Matlab Programı

Bu ekde, \mathcal{F}_4 Lie cebirinin $\{c_i : i = 1, \dots, 52\}$ tabanı ele alındı [39]. Aşağıdaki Matlab programında ise, \mathcal{F}_4 Lie cebirinin bu verilen tabana karşılık gelen $Ad_{\exp(c_1)} : \mathcal{F}_4 \rightarrow \mathcal{F}_4$ lineer dönüşümdeki matrisin determinantı hesaplanmıştır.

```
syms x
M1=x*c1;
A1=simplify(expm(M1));
B1=simplify(inv(A1));
C=[c1,c2,c3,c4,c5,c6,c7,c8,c9,c10,c11,c12,c13,c14,c15,c16,c17,c18,c19,
c20,c21,c22,c23,c24,c25,c26,c27,c28,c29,c30,c31,c32,c33,c34,c35,c36,
c37,c38,c39,c40,c41,c42,c43,c44,c45,c46,c47,c48,c49,c50,c51,c52];

for i=0:51
K=C(:,27*i+1:27*i+27);
T1=simplify(B1*K*A1);
T1;
end

%%%%%%%%%
```

symsx

```
f4_c1=sym(zeros(52)); f4_c1(1,1)=1; f4_c1(2,2)=cos(x);
f4_c1(3,2)=sin(x); f4_c1(3,3)=cos(x); f4_c1(2,3)=-sin(x);
f4_c1(4,4)=cos(x); f4_c1(5,4)=sin(x); f4_c1(5,5)=cos(x);
f4_c1(4,5)=-sin(x); f4_c1(6,6)=1; f4_c1(7,7)=cos(x);
f4_c1(8,7)=sin(x); f4_c1(8,8)=cos(x); f4_c1(7,8)=-sin(x);
f4_c1(9,9)=1; f4_c1(10,10)=1; f4_c1(11,11)=cos(x);
f4_c1(12,11)=sin(x); f4_c1(12,12)=cos(x); f4_c1(11,12)=-sin(x);
f4_c1(13,13)=1; f4_c1(14,14)=1; f4_c1(15,15)=1;
f4_c1(16,16)=cos(x); f4_c1(17,16)=sin(x); f4_c1(17,17)=cos(x);
f4_c1(16,17)=-sin(x); f4_c1(18,18)=1; f4_c1(19,19)=1;
f4_c1(20,20)=1; f4_c1(21,21)=1; f4_c1(22,22)=cos(x/2);
f4_c1(23,22)=sin(x/2); f4_c1(23,23)=cos(x/2); f4_c1(22,23)=-sin(x/2);
f4_c1(24,24)=cos(x/2); f4_c1(26,24)=-sin(x/2); f4_c1(25,25)=cos(x/2);
f4_c1(29,25)=-sin(x/2); f4_c1(26,26)=cos(x/2); f4_c1(24,26)=sin(x/2);
f4_c1(27,27)=cos(x/2); f4_c1(28,27)=-sin(x/2); f4_c1(28,28)=cos(x/2);
f4_c1(27,28)=sin(x/2); f4_c1(29,29)=cos(x/2); f4_c1(25,29)=sin(x/2);
f4_c1(30,30)=cos(x); f4_c1(31,30)=sin(x); f4_c1(31,31)=cos(x);
f4_c1(30,31)=-sin(x); f4_c1(32,32)=1; f4_c1(33,33)=1;
f4_c1(34,34)=1; f4_c1(35,35)=1; f4_c1(36,36)=1;
f4_c1(37,37)=cos(x/2); f4_c1(38,37)=sin(x/2); f4_c1(38,38)=cos(x/2);
f4_c1(37,38)=-sin(x/2); f4_c1(39,39)=cos(x/2); f4_c1(41,39)=-sin(x/2);
f4_c1(40,40)=cos(x/2); f4_c1(44,40)=-sin(x/2); f4_c1(41,41)=cos(x/2);
f4_c1(39,41)=sin(x/2); f4_c1(42,42)=cos(x/2); f4_c1(43,42)=-sin(x/2);
f4_c1(43,43)=cos(x/2); f4_c1(42,43)=sin(x/2); f4_c1(44,44)=cos(x/2);
f4_c1(40,44)=sin(x/2); f4_c1(45,45)=cos(x/2); f4_c1(46,45)=sin(x/2);
f4_c1(46,46)=cos(x/2); f4_c1(45,46)=-sin(x/2); f4_c1(47,47)=1;
f4_c1(48,48)=1; f4_c1(49,49)=1; f4_c1(50,50)=1;
f4_c1(51,51)=1; f4_c1(52,52)=1;
simplify(det(f4_c1))
```

ans=

1

Ek 3. E_6 İstisnai Grubu için Matlab Programı

Bu ekde, \mathcal{E}_6 Lie cebirinin $\{c_i : i = 1, \dots, 52, 53, \dots, 78\}$ tabanı ele alındı [40]. Burada [39] nolu kaynakta verilen \mathcal{F}_4 Lie cebirinin $\{c_i : i = 1, \dots, 52\}$ tabanı düşünülmüştür. Aşağıdaki Matlab programı, \mathcal{E}_6 Lie cebirinin verilen bu tabana karşılık gelen $Ad_{\exp(c_{60})} : \mathcal{E}_6 \rightarrow \mathcal{E}_6$ lineer dönüşümündeki matrisin determinanı hesaplar.

```
syms x
M1=x*c60;
A1=simplify(expm(M1));
B1=simplify(inv(A1));
C=[c1,c2,c3,c4,c5,c6,c7,c8,c9,c10,c11,c12,c13,c14,c15,c16,c17,c18,c19,
c20,c21,c22,c23,c24,c25,c26,c27,c28,c29,c30,c31,c32,c33,c34,c35,c36,
c37,c38,c39,c40,c41,c42,c43,c44,c45,c46,c47,c48,c49,c50,c51,c52,c53,
c54,c55,c56,c57,c58,c59,c60,c61,c62,c63,c64,c65,c66,c67,c68,c69,c70,
c71,c72,c73,c74,c75,c76,c77,c78];

for i=0:77
K=C(:,27*i+1:27*i+27);
T1=simplify(B1*K*A1);
simplify(T1)
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

symsx

e6_c60=sym(zeros(78)); e6_c60(1,1)=(3+cos(x))/4; e6_c60(9,1)=(1-cos(x))/4;
e6_c60(21,1)=(-1+cos(x))/4; e6_c60(33,1)=(1-cos(x))/4; e6_c60(59,1)=sin(x)/2;
e6_c60(2,2)=(3+cos(x))/4; e6_c60(8,2)=(-1+cos(x))/4; e6_c60(14,2)=(1-cos(x))/4;
e6_c60(36,2)=(-1+cos(x))/4; e6_c60(61,2)=-sin(x)/2; e6_c60(3,3)=(3+cos(x))/4;
e6_c60(7,3)=(1-cos(x))/4; e6_c60(19,3)=(-1+cos(x))/4; e6_c60(35,3)=(-1+cos(x))/4;
e6_c60(57,3)=sin(x)/2; e6_c60(4,4)=(3+cos(x))/4; e6_c60(13,4)=(-1+cos(x))/4;
e6_c60(20,4)=(-1+cos(x))/4; e6_c60(31,4)=(-1+cos(x))/4; e6_c60(58,4)=sin(x)/2;
e6_c60(5,5)=(3+cos(x))/4; e6_c60(15,5)=(-1+cos(x))/4; e6_c60(18,5)=(1-cos(x))/4;
e6_c60(30,5)=(1-cos(x))/4; e6_c60(56,5)=-sin(x)/2; e6_c60(6,6)=(3+cos(x))/4;
e6_c60(11,6)=(1-cos(x))/4; e6_c60(17,6)=(-1+cos(x))/4; e6_c60(34,6)=(1-cos(x))/4;
e6_c60(55,6)=sin(x)/2; e6_c60(7,7)=(3+cos(x))/4; e6_c60(3,7)=(1-cos(x))/4;
e6_c60(19,7)=(1-cos(x))/4; e6_c60(35,7)=(1-cos(x))/4; e6_c60(57,7)=-sin(x)/2;
e6_c60(8,8)=(3+cos(x))/4; e6_c60(2,8)=(-1+cos(x))/4; e6_c60(14,8)=(1-cos(x))/4;
e6_c60(36,8)=(-1+cos(x))/4; e6_c60(61,8)=-sin(x)/2; e6_c60(9,9)=(3+cos(x))/4;
e6_c60(1,9)=(1-cos(x))/4; e6_c60(21,9)=(1-cos(x))/4; e6_c60(33,9)=(-1+cos(x))/4;
e6_c60(59,9)=-sin(x)/2; e6_c60(10,10)=(3+cos(x))/4; e6_c60(12,10)=(-1+cos(x))/4;
e6_c60(16,10)=(-1+cos(x))/4; e6_c60(32,10)=(1-cos(x))/4; e6_c60(54,10)=-sin(x)/2;
e6_c60(11,11)=(3+cos(x))/4; e6_c60(6,11)=(1-cos(x))/4; e6_c60(17,11)=(1-cos(x))/4;
e6_c60(34,11)=(-1+cos(x))/4; e6_c60(55,11)=-sin(x)/2; e6_c60(12,12)=(3+cos(x))/4;
e6_c60(10,12)=(-1+cos(x))/4; e6_c60(16,12)=(-1+cos(x))/4; e6_c60(32,12)=(1-cos(x))/4;
e6_c60(54,12)=-sin(x)/2; e6_c60(13,13)=(3+cos(x))/4; e6_c60(4,13)=(-1+cos(x))/4;
e6_c60(20,13)=(-1+cos(x))/4; e6_c60(31,13)=(-1+cos(x))/4; e6_c60(58,13)=sin(x)/2;
e6_c60(14,14)=(3+cos(x))/4; e6_c60(2,14)=(1-cos(x))/4; e6_c60(8,14)=(1-cos(x))/4;
e6_c60(36,14)=(1-cos(x))/4; e6_c60(61,14)=sin(x)/2; e6_c60(15,15)=(3+cos(x))/4;
e6_c60(5,15)=(-1+cos(x))/4; e6_c60(18,15)=(1-cos(x))/4; e6_c60(30,15)=(1-cos(x))/4;
e6_c60(56,15)=-sin(x)/2; e6_c60(16,16)=(3+cos(x))/4; e6_c60(10,16)=(-1+cos(x))/4;
e6_c60(12,16)=(-1+cos(x))/4; e6_c60(32,16)=(1-cos(x))/4; e6_c60(54,16)=-sin(x)/2;
e6_c60(17,17)=(3+cos(x))/4; e6_c60(6,17)=(-1+cos(x))/4; e6_c60(11,17)=(1-cos(x))/4;
e6_c60(34,17)=(1-cos(x))/4; e6_c60(55,17)=sin(x)/2; e6_c60(18,18)=(3+cos(x))/4;

$e6_c60(5,18)=(1-\cos(x))/4$; $e6_c60(15,18)=(1-\cos(x))/4$; $e6_c60(30,18)=(-1+\cos(x))/4$;
 $e6_c60(56,18)=\sin(x)/2$; $e6_c60(19,19)=(3+\cos(x))/4$; $e6_c60(3,19)=(-1+\cos(x))/4$;
 $e6_c60(7,19)=(1-\cos(x))/4$; $e6_c60(35,19)=(-1+\cos(x))/4$; $e6_c60(57,19)=\sin(x)/2$;
 $e6_c60(20,20)=(3+\cos(x))/4$; $e6_c60(4,20)=(-1+\cos(x))/4$; $e6_c60(13,20)=(-1+\cos(x))/4$;
 $e6_c60(31,20)=(-1+\cos(x))/4$; $e6_c60(58,20)=\sin(x)/2$; $e6_c60(21,21)=(3+\cos(x))/4$;
 $e6_c60(1,21)=(-1+\cos(x))/4$; $e6_c60(9,21)=(1-\cos(x))/4$; $e6_c60(33,21)=(1-\cos(x))/4$;
 $e6_c60(59,21)=\sin(x)/2$; $e6_c60(22,22)=1$; $e6_c60(23,23)=1$;
 $e6_c60(24,24)=\cos(x)$; $e6_c60(53,24)=\sin(x)/2$; $e6_c60(70,24)=-\sin(x)*\sqrt{3}/2$;
 $e6_c60(25,25)=1$; $e6_c60(26,26)=1$; $e6_c60(27,27)=1$;
 $e6_c60(28,28)=1$; $e6_c60(29,29)=1$; $e6_c60(30,30)=(3+\cos(x))/4$;
 $e6_c60(5,30)=(1-\cos(x))/4$; $e6_c60(15,30)=(1-\cos(x))/4$; $e6_c60(18,30)=(-1+\cos(x))/4$;
 $e6_c60(56,30)=\sin(x)/2$; $e6_c60(31,31)=(3+\cos(x))/4$; $e6_c60(4,31)=(-1+\cos(x))/4$;
 $e6_c60(13,31)=(-1+\cos(x))/4$; $e6_c60(20,31)=(-1+\cos(x))/4$; $e6_c60(58,31)=\sin(x)/2$;
 $e6_c60(32,32)=(3+\cos(x))/4$; $e6_c60(10,32)=(1-\cos(x))/4$; $e6_c60(12,32)=(1-\cos(x))/4$;
 $e6_c60(16,32)=(1-\cos(x))/4$; $e6_c60(54,32)=\sin(x)/2$; $e6_c60(33,33)=(3+\cos(x))/4$;
 $e6_c60(1,33)=(1-\cos(x))/4$; $e6_c60(9,33)=(-1+\cos(x))/4$; $e6_c60(21,33)=(1-\cos(x))/4$;
 $e6_c60(59,33)=-\sin(x)/2$; $e6_c60(34,34)=(3+\cos(x))/4$; $e6_c60(6,34)=(1-\cos(x))/4$;
 $e6_c60(11,34)=(-1+\cos(x))/4$; $e6_c60(17,34)=(1-\cos(x))/4$; $e6_c60(55,34)=-\sin(x)/2$;
 $e6_c60(35,35)=(3+\cos(x))/4$; $e6_c60(3,35)=(-1+\cos(x))/4$; $e6_c60(7,35)=(1-\cos(x))/4$;
 $e6_c60(19,35)=(-1+\cos(x))/4$; $e6_c60(57,35)=\sin(x)/2$; $e6_c60(36,36)=(3+\cos(x))/4$;
 $e6_c60(2,36)=(-1+\cos(x))/4$; $e6_c60(8,36)=(-1+\cos(x))/4$; $e6_c60(14,36)=(1-\cos(x))/4$;
 $e6_c60(61,36)=-\sin(x)/2$; $e6_c60(37,37)=\cos(x/2)$; $e6_c60(77,37)=\sin(x/2)$;
 $e6_c60(38,38)=\cos(x/2)$; $e6_c60(76,38)=\sin(x/2)$; $e6_c60(39,39)=\cos(x/2)$;
 $e6_c60(78,39)=-\sin(x/2)$; $e6_c60(40,40)=\cos(x/2)$; $e6_c60(75,40)=\sin(x/2)$;
 $e6_c60(41,41)=\cos(x/2)$; $e6_c60(74,41)=-\sin(x/2)$; $e6_c60(42,42)=\cos(x/2)$;
 $e6_c60(72,42)=-\sin(x/2)$; $e6_c60(43,43)=\cos(x/2)$; $e6_c60(71,43)=-\sin(x/2)$;
 $e6_c60(44,44)=\cos(x/2)$; $e6_c60(73,44)=\sin(x/2)$; $e6_c60(45,45)=\cos(x/2)$;
 $e6_c60(68,45)=-\sin(x/2)$; $e6_c60(46,46)=\cos(x/2)$; $e6_c60(67,46)=-\sin(x/2)$;
 $e6_c60(47,47)=\cos(x/2)$; $e6_c60(69,47)=\sin(x/2)$; $e6_c60(48,48)=\cos(x/2)$;
 $e6_c60(66,48)=-\sin(x/2)$; $e6_c60(49,49)=\cos(x/2)$; $e6_c60(65,49)=\sin(x/2)$;

$e6_c60(50,50)=\cos(x/2)$; $e6_c60(63,50)=\sin(x/2)$; $e6_c60(51,51)=\cos(x/2)$;
 $e6_c60(62,51)=\sin(x/2)$; $e6_c60(52,52)=\cos(x/2)$; $e6_c60(53,53)=(3+\cos(x))/4$;
 $e6_c60(64,52)=-\sin(x/2)$; $e6_c60(24,53)=-\sin(x/2)$; $e6_c60(70,53)=(1-\cos(x))*(\sqrt{3}/4)$;
 $e6_c60(54,54)=\cos(x)$; $e6_c60(10,54)=\sin(x/2)$; $e6_c60(12,54)=\sin(x/2)$;
 $e6_c60(16,54)=\sin(x/2)$; $e6_c60(32,54)=-\sin(x/2)$; $e6_c60(55,55)=\cos(x)$;
 $e6_c60(6,55)=-\sin(x/2)$; $e6_c60(11,55)=\sin(x/2)$; $e6_c60(17,55)=-\sin(x/2)$;
 $e6_c60(34,55)=\sin(x/2)$; $e6_c60(56,56)=\cos(x)$; $e6_c60(5,56)=\sin(x/2)$;
 $e6_c60(15,56)=\sin(x/2)$; $e6_c60(18,56)=-\sin(x/2)$; $e6_c60(30,56)=-\sin(x/2)$;
 $e6_c60(57,57)=\cos(x)$; $e6_c60(3,57)=-\sin(x/2)$; $e6_c60(7,57)=\sin(x/2)$;
 $e6_c60(19,57)=-\sin(x/2)$; $e6_c60(35,57)=-\sin(x/2)$; $e6_c60(58,58)=\cos(x)$;
 $e6_c60(4,58)=-\sin(x/2)$; $e6_c60(13,58)=-\sin(x/2)$; $e6_c60(20,58)=-\sin(x/2)$;
 $e6_c60(31,58)=-\sin(x/2)$; $e6_c60(59,59)=\cos(x)$; $e6_c60(1,59)=-\sin(x/2)$;
 $e6_c60(9,59)=\sin(x/2)$; $e6_c60(21,59)=-\sin(x/2)$; $e6_c60(33,59)=\sin(x/2)$;
 $e6_c60(60,60)=1$; $e6_c60(61,61)=\cos(x)$; $e6_c60(2,61)=\sin(x/2)$;
 $e6_c60(8,61)=\sin(x/2)$; $e6_c60(14,61)=-\sin(x/2)$; $e6_c60(36,61)=\sin(x/2)$;
 $e6_c60(62,62)=\cos(x/2)$; $e6_c60(51,62)=-\sin(x/2)$; $e6_c60(63,63)=\cos(x/2)$;
 $e6_c60(50,63)=-\sin(x/2)$; $e6_c60(64,64)=\cos(x/2)$; $e6_c60(52,64)=\sin(x/2)$;
 $e6_c60(65,65)=\cos(x/2)$; $e6_c60(49,65)=-\sin(x/2)$; $e6_c60(66,66)=\cos(x/2)$;
 $e6_c60(48,66)=\sin(x/2)$; $e6_c60(67,67)=\cos(x/2)$; $e6_c60(46,67)=\sin(x/2)$;
 $e6_c60(68,68)=\cos(x/2)$; $e6_c60(45,68)=\sin(x/2)$; $e6_c60(70,70)=(1+3*\cos(x))/4$;
 $e6_c60(47,69)=-\sin(x/2)$; $e6_c60(69,69)=\cos(x/2)$; $e6_c60(53,70)=(1-\cos(x))*(\sqrt{3}/4)$;
 $e6_c60(43,71)=\sin(x/2)$; $e6_c60(71,71)=\cos(x/2)$; $e6_c60(24,70)=\sin(x)*\sqrt{3}/2$;
 $e6_c60(72,72)=\cos(x/2)$; $e6_c60(42,72)=\sin(x/2)$; $e6_c60(73,73)=\cos(x/2)$;
 $e6_c60(44,73)=-\sin(x/2)$; $e6_c60(74,74)=\cos(x/2)$; $e6_c60(41,74)=\sin(x/2)$;
 $e6_c60(75,75)=\cos(x/2)$; $e6_c60(40,75)=-\sin(x/2)$; $e6_c60(76,76)=\cos(x/2)$;
 $e6_c60(38,76)=-\sin(x/2)$; $e6_c60(77,77)=\cos(x/2)$; $e6_c60(37,77)=-\sin(x/2)$;
 $e6_c60(78,78)=\cos(x/2)$; $e6_c60(39,78)=\sin(x/2)$;

simplify(det(e6_c60))

ans=

1

ÖZGEÇMİŞ

Kimlik Bilgileri

Adı Soyadı : Fatih Hezenci
Doğum Yeri : Nevşehir
Medeni Hali : Evli
E-posta : fatihhezenci@duzce.edu.tr
Adresi : Düzce Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü
81620 Merkez Düzce TÜRKİYE

Eğitim

Lisans : 2006 - 2007, Fatih Üniversitesi,
Yabancı Diller Yüksek Okulu, İngilizce Hazırlık
2007 - 2011, Fatih Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi,
Matematik Bölümü
Yüksek Lisans : 2011 - 2013, Fatih Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi,
Matematik Bölümü
Doktora : 2013 - 2019, Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi
Matematik Bölümü

Yabancı Dil

İngilizce

İş Deneyimi

2013 - 2017, Hacettepe Üniversitesi, Matematik Bölümü, Araştırma Görevlisi
2018 - ..., Düzce Üniversitesi, Matematik Bölümü, Araştırma Görevlisi

Deneyim Alanları

Araştırma Görevlisi

Tezden Üretilmiş Projeler

-

Tezden Üretilmiş Yayınlar

1. F. Hezenci and Y. Sozen, A note on exceptional groups and Reidemeister torsion, *Journal of Mathematical Physics*, 59, 081704 (2018).

Tezden Üretilmiş Tebliğ ve/veya Poster Sunumu ile Katıldığı Toplantılar

1. “*Representation Varieties of Free or Surface Group and Reidemeister Torsion*”, International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME-2017), May 2017, Şanlıurfa, TURKEY.
2. “*Exceptional groups and Reidemeister torsion*”, International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling (ICAAMM-2018), June 2018, İstanbul, TURKEY.



HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
~~YÜKSEK LİSANS/DOKTORA TEZ ÇALIŞMASI ORJİNALLİK RAPORU~~

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI BAŞKANLIĞI'NA

Tarih: 27/05/2019

Tez Başlığı / Konusu: Serbest veya Yüzey Grubunun Temsil Uzayları ve Reidemeister Torsiyon

Yukarıda başlığı/konusu gösterilen tez çalışmamın a) Kapak sayfası, b) Giriş, c) Ana bölümler d) Sonuç kısımlarından oluşan toplam 96 sayfalık kısmına ilişkin, 27/05/2019 tarihinde tez danışmanım tarafından *Turnitin* adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 9 'dur.

Uygulanan filtrelemeler:

- 1- Kaynakça hariç
- 2- Alıntılar hariç
- 3- 5 kelimedenden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Çalışması Orjinallik Raporu Alınması ve Kullanılması Uygulama Esasları'nı inceledim ve bu Uygulama Esasları'nda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

27.05.2019

Tarih ve İmza

Adı Soyadı: Fatih HEZENCİ
Öğrenci No: N13142792
Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Matematik-Doktora
Statüsü: Y.Lisans Doktora Bütünleşik Dr.

DANIŞMAN ONAYI

UYGUNDUR.

Prof. Dr. Yaşar SÖZEN
(Unvan, Ad Soyad, İmza)