HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Orta Öğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Ana Bilim Dalı

KANIT YAPMA SÜRECİNİN HABERMAS AKILCI DAVRANIŞ MODELİ İLE ANALİZİ

Selin URHAN

Doktora Tezi

Ankara, 2018

Liderlik, araştırma, inovasyon, kaliteli eğitim ve değişim ile

Daha ileriye... En İyiye...

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Orta Öğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Ana Bilim Dalı

KANIT YAPMA SÜRECİNİN HABERMAS AKILCI DAVRANIŞ MODELİ İLE ANALİZİ

ANALYSIS OF PROOF PROCESS BASED ON HABERMAS RATIONAL BEHAVIOUR CONSTRUCT

Selin URHAN

Doktora Tezi

Ankara, 2018

Kabul ve Onay

Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne,

Selin URHAN'ın hazırladığı "Kanıt Yapma Sürecinin Habermas Akılcı Davranış Modeli ile Analizi" başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından **Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Ana Bilim Dalında Doktora Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Jüri Başkanı	Prof. Dr. Şeref MİRASYEDİOĞLU	İmza
Jüri Üyesi (Danışman)	Prof. Dr. Ali BÜLBÜL	İmza
Jüri Üyesi	Prof. Dr. Behiye UBUZ	İmza
Jüri Üyesi	Prof. Dr. Arif ALTUN	İmza
Jüri Üyesi	Prof. Dr. Necla TURANLI	İmza

Bu tez Hacettepe Üniversitesi Lisansüstü Eğitim, Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri uyarınca yukarıdaki jüri üyeleri tarafından ..... / ..... / .... tarihinde uygun görülmüş ve Enstitü Yönetim Kurulunca ..... / ..... / .... tarihinde kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Ali Ekber ŞAHİN
Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Öz

Habermas akılcı davranış modeli, öğrencilerin kanıt yapma sürecinde yaşadıkları zorlukları belirlemek ve kanıt öğretimini bu zorlukları azaltacak şekilde düzenlemek amacıyla matematik eğitimine adaptasyonu yapılan teorik araçlardan biridir. Habermas'a göre, bir etkinliği/eylemi yapan kişi, amacına ulaşmak için o alanda geçerli kriterleri ve iletişim araçlarını amacına uygun şekilde seçiyor ve kullanıyorsa; o kişiye "akılcı davranıyor" denir. Bu yaklaşıma göre, bir etkinliği yapan kişi için "akılcılık" iç içe geçen üç bileşenden oluşmaktadır: Epistemik akılcılık, teleolojik akılcılık, iletişim akılcılığı. Epistemik akılcılık; ifadelerin içeriği, kullanılması, birbirleri ile ilişkilendirilmesi, ortak öncüllere ve akla uygun muhakeme yollarına göre ifadelerin geçerliğinin bilinçli şekilde sağlanması ile ilgilidir. Teleolojik akılcılık, bir etkinliği gerçekleştirmek ve amaca ulaşmak için uygun araçları bilinçli olarak seçme ve kullanma ile ilgilidir. İletişim akılcılığı ise bir topluluktaki iletişim uygulamaları ile ilgilidir. Bu çalışmanın amacı, üniversite öğrencilerinin kanıt yapma süreçlerini, Habermas akılcı davranış modeline göre analiz etmektir. Öğrencilerin modele göre zayıf ve güçlü oldukları bileşenleri belirlemek; bu yolla kanıt yapma sürecinde yaşadıkları zorlukların nedenlerini ortaya çıkarmak hedeflenmiştir. Birinci sınıfa devam etmekte olan matematik öğretmen adayları ile geometri ve cebir alanında çalışılmıştır. Analizler sırasında, modelde yeni alt bileşenlere ihtiyaç duyulmuş ve epistemik bileşen ile iletişim bileşeni kapsamına yeni alt bileşenler eklenmiştir. Analizlerin sonucunda, Habermas akılcı davranış modelindeki bileşenlerin birbirleri ile güçlü bir etkileşim içinde olduğu; bu etkileşimin geometri ve cebir alanında farklılık gösterdiği görülmüştür. Modeldeki bileşenlerin farklı etkileşimlerinin ve bileşenlerden birinin güçlü ya da zayıf olmasının öğrencilerin kanıt yapma sürecini önemli ölçüde etkilediği belirlenmiştir.

Anahtar sözcükler: kanıt, kanıt yapma süreci, akılcılık, Habermas akılcı davranış modeli

Abstract

Habermas' construct of rational behaviour is one of the means whose adaptation is made with the aim of determining the difficulties learners go through in the process of proof and arranging the proof teaching to reduce these difficulties. According to Habermas, if a person involved in an activity/action chooses and uses the criteria and communication tools available in the field in line with his/her purpose, that person is said to "act rationally". In this approach, "rationality" consists of three integrated components i.e. epistemic, teleological, and communicative rationality. Epistemic rationality is related to the content of statements, their use, their association with one another, and consciously sustaining their validity in accordance with common premises and reasoning processes. Teleological rationality is related to choosing consciously and using the appropriate means to reach the goal. Communicative rationality is related to communicative practices in a community in which members can communicate amongst themselves. The aim of this study is to analyze university students' processes of proofs according to Habermas' construct of rational behaviour. The study aims to determine the components at which students are good and weak and, this way, put forward the reasons behind the difficulties they experience in the process of proofs. In the study, freshmen mathematics teacher candidates were worked with in the fields of geometry and algebra. In the course of the study, new subcomponents in the model were needed and were added to the scopes of epistemic and communicative components. The data analysis showed that the components in Habermas' construct of rational behaviour has a strong interaction between one another, and this interaction showed variety in the fields of geometry and algebra. In addition, it was seen that different interactions of the components in the model and that one component is stronger or weaker than the others substantially affected students' process of proofs.

Keywords: proof, proving process, rationality, Habermas' construct of rational behavior

Teşekkür

Lisans ve yüksek lisans öğrenimim boyunca gelişimime en büyük katkıyı sağlayan, deneyimleri ve fikirleri ile her zaman yolumu aydınlatan, bana her zaman destek olan, araştırmamın her aşamasında ve çalışmamın her kelimesinde büyük emeği olan, çok değerli hocam Sayın Prof. Dr. Ali Bülbül'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Doktora öğrenimim boyunca 2211-E Doğrudan Yurt İçi Doktora Burs Programı kapsamında bana maddi destek veren Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu'na teşekkürlerimi sunarım.

Akademik yaşantımda bulunduğum noktada olmamda büyük emeği olan, deneyimlerini ve farklı bakış açısını her zaman benimle paylaşarak doğru adımlar atmamı sağlayan; desteğini benden hiçbir zaman esirgemeyen ve varlığıyla bana hep güç veren çok kıymetli hocam Prof. Dr. Şenol Dost'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu uzun süreçte değerli fikirleri ve her ihtiyaç duyduğumda verdikleri sonsuz destek ile her zaman yanımda olan çok sevgili ve kıymetli hocalarım Dr. Öğr. Üyesi Meltem Sarı Uzun'a, Dr. Öğr. Üyesi Nazan Sezen Yüksel'e ve Dr. Öğr. Üyesi Yasemin Sağlam Kaya'ya çok teşekkür ederim. Bu zorlu süreçte her zaman desteğini hissettiğim, her yaşadığım zorlukta koşulsuzca yanımda olan ve bu süreci benim için kolay kılan, çok sevgili mesai arkadaşım, dostum, Arş. Gör. Özgün Şefik'e teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımdaki her başarımın asıl sebebi olan, her saniye desteklerini hissettiğim çok değerli aileme; ablam Belgin Güneş'e, annem Hacer Güneş'e, babam Ergin Güneş'e ve sevgili eşim Zeki Onur Urhan'a yaptıkları fedakârlıklar ve verdikleri emekler ile bugünlere gelmemi sağladıkları için teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak değerli jüri üyelerine eleştirileri, görüşleri ve önerileri için teşekkürü bir borç bilirim.

İçindekiler

Tablolar Dizini

Şekiller Dizini

Bölüm 1
Giriş

Son yıllarda matematik eğitiminde karşılaşılan güçlükler mevcut yöntem, teknik ve araçlarla istenilen düzeyde çözülemeyince diğer bilim dallarından (sosyoloji, felsefe, dilbilim) teorik araçlar ve yapılar matematik eğitimi alanına adapte edilmeye başlanmıştır. Bu araçların adaptasyonu ile matematik eğitiminde yaşanan bazı zorlukların aşılacağı düşünülmektedir (Boero, 2006). Habermas akılcı davranış teorisi, matematik eğitiminde öğrencilerin kanıtlama sürecinde yaşadıkları zorlukları belirlemek ve matematik öğretimini bu zorlukları azaltacak şekilde düzenlemek amacıyla adaptasyonu yapılan teorik araçlardan biridir (Boero, 2006; Morselli & Boero, 2011).

Habermas akılcı davranış teorisinin matematik eğitiminde kullanılmaya başlanması, kanıt öğretimi konusunda yapılan çalışmalara dayanmaktadır (Arzarello & Sabena, 2011). Bu çalışmaların çoğu, argümantasyon ve kanıt yapma süreçleri arasındaki ilişkilerin doğasına odaklanmıştır (Douek, 1999; Pedemonte, 2007a; 2007b; 2008; Boero, Douek, Morselli & Pedemonte, 2010). Kanıt yapma, matematikte kesinliği sağlamak için ifadelerin doğruluğunun gösterildiği süreçtir (Mejia-Ramos & Inglis, 2008). Bu süreç, ilköğretimde öğrencilerin karşısına akıl yürütme aktiviteleri olarak, lisede daha sistematik biçimde, yükseköğretimde ise soyut ve aksiyomatik bir yapıda çıkmaktadır (Sarı, 2011). Argümantasyon ise öğrencinin bireysel olarak ya da bir grupla birlikte hipotez ürettiği ya da verilen bir ifadeyi kanıtlamak için kullanılacak yöntemi ve izlenecek yolu belirlemeye yönelik akıl yürüttüğü bir süreçtir (Garuti, Boero & Lemut, 1998). Bu süreçte, öğrenci yapacağı kanıta ilişkin fikirlerini, sezgilerini ve varsayımlarını ortaya koyar (Garuti vd., 1998).

Araştırmacılar kanıt yapma sürecinin özel bir argümantasyon olduğu hipotezine dayanarak, bu iki süreci Toulmin modelini (Toulmin, 1958) kullanarak içerik ve yapı yönünden karşılaştırmakta ve aralarındaki ilişkileri analiz etmektedirler. Bu yolla öğrencilerin kanıt yapma sürecinde yaşadıkları zorlukları belirlemeye ve bu zorlukları azaltacak önlemler almaya çalışmaktadırlar (Mariotti, Bartolini Bussi, Boero, Ferri & Garuti, 1997; Pedemonte, 2001; 2007a; 2007b).

Argümantasyon ve kanıt yapma süreçlerinin içeriklerinin aynı olması, yani argümantasyonda kullanılan bazı ifadelerin, çizimlerin ya da teoremlerin kanıt yapma sürecinde de kullanılması durumu, iki süreç arasında bilişsel bütünlük (cognitive unity) olduğu anlamına gelmektedir (Boero, Garuti, Lemut & Mariotti, 1996; Pedemonte, 2003; 2007a). Bu süreçlerin yapılarının aynı olması, yani süreç boyunca kullanılan ifadeler arasındaki bilişsel bağlantının (abdüktif, dedüktif, indüktif) aynı olması ise iki süreç arasında yapısal bütünlük (structural continuity) olduğunu göstermektedir (Pedemonte 2008).

Boero, Douek, Morselli ve Pedemonte (2010), argümantasyon ve kanıt yapma süreçlerini içerik yönünden analiz ederken Habermas akılcı davranış teorisini de kullanmışlardır. Bu durum, matematik eğitiminde argümantasyon ve kanıt yapma süreçlerinin analizinde yeni bir aracın varlığını ortaya çıkarmıştır.

Problem Durumu

Boero (2006), çalışmasında bir yedinci sınıf öğrencisinin cebir alanından bir soruyu çözme sürecini, Habermas akılcı davranış teorisinin bileşenlerine göre analiz etmiştir. Bu çalışmada aynı zamanda lise matematik öğretmenlerinden öğrencinin çözüm sürecini değerlendirmeleri ve çözümü geçerli bulup bulmadıklarını belirtmeleri istenmiştir. Öğretmenlerden bazıları, öğrencinin cevabını matematiksel açıdan geçerli bulmayarak reddetmiştir. Bu öğretmenler, öğrencinin çözümünün sezgisel seviyede kaldığını ve muhakeme tarzını matematiksel forma dönüştürmesi gerektiğini belirtmiştir. Diğer bazı öğretmenler ise öğrencinin çözümünün cebirsel açıdan eksik olmasına rağmen, düşünme tarzının doğru olması sebebiyle çözümünü geçerli bulmuştur. Boero (2006)'nun çalışmasının ikinci aşamasında, bu kez öğretmenlerden söz konusu soruyu çözmeleri istenmiştir ancak öğretmenlerin problemde verilen durumun cebirsel terimlere dönüşümünü tam olarak yapamadığı ve soruyu çözemediği görülmüştür. Bunun üzerine, bazı öğretmenler fikir değiştirerek öğrencinin çözüm sürecini geçerli saymıştır. Bu durum, öğrencilerin kanıt yapma süreçlerini değerlendirme sürecine farklı bir bakış açısı getirilmesi gerektiğini göstermiştir.

Duval (2002; akt. Pedemonte 2008)'in argümantasyon ve kanıt yapma süreçleri arasındaki bilişsel boşluk ile ilgili sunduğu çerçeve, bu iki süreç arasındaki ilişkileri belirlemek için kullanılmaktadır ancak öğrencilerin kanıt yapma stratejisinin yeterliğini ve öğretmenlerin öğrencilerinin kanıt yapma süreçleri ile ilgili değerlendirmelerini hesaba katmamaktadır. Harel'in kanıt şemaları, öğrencilerin performansını bazı yönleri ile tanımlamak ve değerlendirmek için yararlıdır ancak formel bir kanıt metni ile öğrencinin ürettiği kanıt yapma sürecini karşılaştırmayı sağlamamakta; öğretmenlerin öğrencilerinin performansını değerlendirme süreçlerini açıklayamamaktadır.

Boero (2006), matematiksel kanıt öğretiminin ve öğreniminin geliştirilmesine odaklanmış ve şu iki soruya cevap aramıştır: Varsayım oluşturmada ve oluşturulan varsayımı kanıtlamada öğrencilerin gelişmiş düzeyde bir matematik performansı ortaya koyabilmeleri için nasıl bir eğitsel strateji geliştirilmelidir? Akademisyenler, öğretmenlere bu tip stratejilerle ilgili yapmaları gerekenler konusunda nasıl yardımcı olabilirler? Boero (2006), bu sorulara cevap bulmak için varsayım oluşturma ve kanıt yapma üzerine yapılmış çalışmaları ve sonuçlarını incelemiştir ancak diğer disiplinlerden alınan ve matematiğe adapte edilen araçların kendi çalışmasındaki öğrencinin durumuna benzer karmaşık performansları analiz etmek için yeterli olmadığını belirtmiştir. Bu nedenle Boero (2006)'ya göre, öğrencilerin ürününün ve öğretmenlerin değerlendirmelerinin epistemolojik açıdan tutarlı ve kapsamlı analizi için, yeni bir çerçeveye ihtiyacımız vardır. Bu ihtiyaca yönelik olarak Boero (2006) çalışmasında, Habermas akılcılık teorisini kullanmış ve analizlerini Habermas teorisinin bileşenlerine göre yapmıştır.

Diğer yandan, geometri ve aritmetik konuları itibariyle matematiğin birbirinden farklı iki alanıdır. Geometrinin konusu doğru, düzlem, eğri ve yüzey gibi daha çok sürekli büyüklüklerden oluşurken; aritmetik sayı, işlem, denklem ve benzeri ayrık büyüklükleri konu edinmiştir (Stillwell, 1989). Bu iki alan, tarihi gelişimleri itibariyle de farklı dönemlerde farklı süreçler geçirmişlerdir. Antik Yunan öncesi Babiller döneminde daha çok aritmetik öne çıkarken, eski Mısır uygarlığında geometrinin daha çok geliştiği görülmüştür (Struik, 1987). Antik Yunan döneminde ise matematik neredeyse tümüyle geometriden ibaret düşünülmekteydi. Eflatun (M.Ö. 429-348)'un, Atina'daki akademisinin kapısında "geometri bilmeyen giremez" anlamında bir yazının bulunduğuna işaret eden kaynaklar, bu dönemde matematiğin neredeyse tümüyle geometri olarak kabul edildiğine yönelik iddiayı doğrular niteliktedir (Stillwell, 1989). Diğer yandan Öklid de, temelini geometrinin oluşturduğu "Elementler" adlı 13 ciltlik eserini bu dönemde yazmıştır (Yıldırım, 2011).

Geometri ve aritmetik, tarih boyunca zaman zaman birbiriyle çatışmıştır. Ancak çoğu çatışma dönemlerinden sonra olduğu gibi, geometri ve aritmetik alanı arasındaki çatışmanın sonrasında da, bu iki alan arasında bir uzlaşma ve işbirliği dönemi doğmuştur. Nitekim sayılardan sadece pozitif tam sayıların bilindiği dönemde, dik kenar uzunlukları birer birim olan bir dik üçgenin hipotenüsünün uzunluğunun bir tam sayı ile ifade edilememesinin oluşturduğu hayal kırıklığı ve çatışma, $\sqrt{2}$ gibi, tam sayılardan ve hatta rasyonel sayılardan farklı sayıların varlığının ortaya çıkmasıyla aşılmıştır (Stillwell, 1989).

Diğer yandan, dik kenar uzunlukları a ve b, uzun kenarı da c sayısı ile belirtilen bir dik üçgende sağlandığı bilinen ünlü Pisagor Teoremi ($a^2 + \mathrm{b}^2 = c^2$), sadece bir geometrik özelliği değil; aynı zamanda sayılar arasında sağlanan bir aritmetik özelliği de ifade etmektedir. Bu nedenle, Pisagor Teoremi, matematiğin bu iki alanı arasındaki somut ilişkiyi sağlayan ilk ve en önemli teorem olarak da görülmektedir (Stillwell, 1989).

M.Ö. 3. yüzyılda Öklid'in Elementler adlı ünlü eseri ile başlayan ve 19. yüzyılın ortalarına kadar tekelini sürdüren "Öklid Geometrisi", 19. yüzyılın ortalarından itibaren "Öklid Dışı Geometriler" in de olabileceği kanıtlandıktan sonra da öneminden fazla bir şey kaybetmemiştir (Stillwell, 1989). Günümüzde ise geometri matematiğin diğer alanları ile iç içe geçerek cebirsel geometri, diferensiyel geometri, v.b. değişik adlarla gelişimini sürdürmektedir (Struik, 1987). Matematiğin diğer kolu olan aritmetik ise sayılar, işlemler, denklemler ve bunların gündelik yaşamın değişik alanlardaki uygulamaları ile başlayan serüvenine, bir yandan içeriğine limit kavramının katılmasıyla "analiz"; diğer yandan 19.yy. ortalarına kadar denklemlerin köklerini araştıran, daha sonraları ise soyut yapılar ve soyut işlemleri konu alan "cebir" adı altında devam etmiştir (Struik, 1987; Yıldırım, 2011). Günümüzde matematiğin geometri dışında kalan, sayılar teorisinden analize kadar tüm konuları, geniş anlamda cebir adı altında toplanmış ve matematik, genel olarak, cebir ve geometri adları ile iki alana ayrılmıştır.

Günümüzde matematiğin bu iki alanı çoğu kez iç içe geçse de; öğrenim ve öğretiminde bazı farklılıklar göstermektedir. Elementer geometrinin şekilleri de içine alan problem ve teoremleri çoğu kez farklı düşünme (görsel düşünme) ve akıl yürütmeyi gerektirmektedir. Şekiller bazen işimizi kolaylaştırırken, bazen de yanlış yönlendirebilmektedir. O nedenle alan yazında “şekilsel kavram” (figural concept) adı altında yeni bir kavram ortaya atılmıştır (Fischbein, 1993). Bu durum, matematikte kanıt yapma sürecinin geometri ve cebir alanında farklılaşabileceğini ve öğrencilerin kanıt yapma sürecinde yaşadıkları zorlukların, kanıtın geometri ya da cebir alanında yapılmasına bağlı olarak farklılık gösterebileceğini düşündürmüştür. Argümantasyon ve kanıt yapma süreci arasındaki ilişkilerin analizine yönelik yapılmış çalışmalarda elde edilen sonuçların geometri ve cebir alanında farklılaşmış olması (Pedemonte, 2003; 2007b; 2008) da bu düşüncemizi güçlendirmektedir. Bu bağlamda, matematikte kanıt yapma sürecinin Habermas akılcı davranış teorisi ile analizinin, geometri ve cebir alanında ayrı ayrı yapılmasının önemi ve gerekliliği ortaya çıkmıştır.

Çalışmamız kapsamında, üniversite öğrencilerinin geometri ve cebir alanında matematiksel kanıt yapma süreçlerinin, Habermas akılcı davranış teorisi bileşenlerine göre analiz edilmesi ve elde edilen sonuçların karşılaştırılması hedeflenmektedir. Öğrencilerin kanıt yaparken yaşadıkları zorlukların, geometri ve cebir alanında, Habermas akılcı davranış teorisi bileşenleri bağlamında farklılık göstereceği beklenmektedir. Öğrencilerin kanıt yaparken, Habermas akılcı davranış teorisine göre güçlü ya da zayıf oldukları bileşen(ler)in; süreç boyunca bu bileşen(ler)in diğer bileşenler üzerindeki etkisinin ve dolayısıyla bileşenler arasındaki etkileşimin kanıtın geometri ya da cebir alanında yapılmasına bağlı olarak farklılık göstereceği düşünülmektedir.

Araştırmanın Amacı ve Önemi

Bu çalışmanın amacı, üniversite öğrencilerinin kanıt yapma sürecini geometri ve cebir alanında Habermas akılcı davranış teorisi bileşenlerine göre ayrı ayrı analiz etmek ve elde edilen sonuçları karşılaştırmaktır. Sonuçlar çerçevesinde üniversite öğrencilerinin geometri ve cebir alanında kanıt yapma sürecinde, Habermas akılcı davranış teorisi bağlamında güçlü ya da zayıf oldukları bileşenleri belirlemek ve bu yolla süreçte yaşadıkları zorlukların nedenlerini ortaya çıkarmak hedeflenmiştir.

Çalışmanın, öğrencilerin matematiksel kanıt yapma sürecini farklı yönlerden değerlendirmek açısından yol gösterici olacağı düşünülmektedir. Türkiye'de kanıt öğretimi konularında yapılmış çalışmalar incelendiğinde, Habermas akılcı davranış teorisi ile kanıt yapma sürecine yaklaşımda bulunan bir çalışmanın henüz yapılmadığı görülmektedir. Öğrencilerin kanıt yapma sürecine ve kanıt öğretimine farklı bir bakış açısı getirmek ve bu bağlamda yapılacak analizlere temel oluşturmak açısından çalışmanın önemli ve gerekli olduğu düşünülmektedir.

Araştırma Problemi

Çalışmanın araştırma problemi "Üniversite öğrencilerinin kanıt yapma sürecinde yaşadıkları zorluklar nelerdir?" şeklinde oluşturulmuştur.

Alt problemler. Çalışma boyunca şu alt problemlere cevap aranmıştır:

1. Habermas akılcı davranış teorisine göre, öğrenciler kanıt yapma sürecinde hangi bileşenler yönünden güçlü, hangi bileşenler yönünden zayıftır?
2. Öğrencilerin kanıt yapma süreci, Habermas akılcı davranış teorisine göre analiz edildiğinde, bileşenler arasında nasıl bir etkileşim ortaya çıkmaktadır? Hangi bileşenler birbirini nasıl etkilemektedir?
3. Öğrencilerin kanıt yapma sürecinin Habermas akılcı davranış teorisine göre analiz sonuçları kanıt yapma sürecinin geometri ya da cebir alanından olmasına bağlı olarak farklılık göstermekte midir?

Sayıltılar

Katılımcıların araştırma kapsamında yapılan uygulamalarda ve görüşmelerde gerçek düşüncelerini yansıttıkları varsayılmıştır.

Sınırlılıklar

1. Araştırmanın pilot ve asıl uygulamasında yer alan katılımcılar, uygulamaların ve görüşmelerin yapıldığı devlet üniversitesinde öğrenim gören öğrenciler ile sınırlıdır.
2. Araştırma çerçevesinde gerçekleştirilen pilot çalışmadaki yazılı uygulamalar ve görüşmeler on beş öğrenci; asıl yazılı uygulamalar ve görüşmeler ise yirmi altı öğrenci ile sınırlıdır.

3. Araştırmanın pilot uygulaması 2015-2016 öğretim yılı yaz dönemi; asıl uygulaması ise 2016-2017 öğretim yılı bahar dönemi ile sınırlıdır.
4. Geometri ve cebir alanında elde edilen sonuçlar, bu çalışma çerçevesinde hazırlanan uygulama ve görüşme soruları kapsamında sınırlıdır.

Tanımlar

Argüman. Bir cümlenin ya da bir ifadenin lehine ya da aleyhine sunulan neden ya da nedenlerdir (Douek, 2000). Bunlar sözel ifadeler, sayısal veriler ya da çizimler olabilir. Kuhn (1992, akt. Douek, 2000)'a göre argüman, bir önerinin ya da bir olayın aleyhine ya da lehine ortaya konulan neden ya da nedenlerdir.

Matematik eğitiminde argüman, bir iddianın öne sürülmesi; bu iddianın savunulması ya da çürütülmesi için sunulan neden ya da nedenler olarak kullanılmaktadır (Douek, 1998; Douek, 1999; Douek, 2000; Pedemonte, 2007a; Pedemonte, 2007b). Kanıt yapmanın merkezinde öğrencilerin bireysel olarak ya da grup içinde yaptıkları tartışmalarda ortaya koydukları argümanlar bulunmaktadır.

Argümantasyon. Webster'ın sözlüğünde, bir önermenin aleyhine ya da lehine sunulan, mantıksal açıdan birbiri ile bağlantılı ancak dedüktif olması zorunlu olmayan söylevler olarak tanımlanmaktadır (Douek, 1998). Argümantasyon, bir ya da daha fazla sayıda mantıksal açıdan bağlantılı argüman içeren bir süreç olarak da tanımlanabilir (Douek, 2000). Bu süreç tartışmak, bir şeyi savunmak ya da kanıt yapmak amaçlı yazma ya da konuşma işlevi olarak da tanımlanmaktadır (Douek, 1998).

Argümantasyon, birini bir ifadenin ya da önermenin doğruluğuna ya da yanlışlığına ikna etmek için tüm sözel araçların kullanılmasını gerektirir ve argümantasyonun amacı, birinin bakış açısını savunmak veya reddetmektir (Mariotti, 2006).

Hipotez. Argümantasyonda üretilen iddialar, ortaya konulan düşünceler, anlayışlar ve kavrayışlar hipotez (varsayım) olarak tanımlanmaktadır (Balacheff, 1994; akt. Pedemonte, 2001). Özer ve Arıkan (2002)'a göre, mantıklı görünen ancak doğruluğu henüz kanıtlanmamış bir durumdur. Kanıt yapma ya da problem çözme süreci boyunca argümantasyon, hipotez üretmek için geliştirilmektedir.

Hipotez, kendisini doğrulayan nitelikte bir kanıt üretilmesi durumunda ise geçerli bir ifadeye dönüşmektedir (Pedemonte, 2001).

Matematiksel kanıt yapma ve matematiksel kanıt. Matematiksel kanıt yapma, bir ifadenin doğruluğunu bilinen gerçeklerden, tanımlardan ve önceki teoremlerden ya da sonuçlardan, doğru çıkarımları yaparak ve mantık kuralları uygulayarak gösterme sürecidir. Bu süreç sonucunda ortaya çıkan geçerli argüman ise matematiksel kanıt olarak ifade edilmektedir (Sarı, 2011).

Argümantasyon süreci sonunda üretilen argümanın, matematiksel kanıt olarak kabul edilmesi için kabul edilmiş aksiyomlara ve tanımlara dayanması, mantıksal notasyonun uygun kullanılması ve belli bir kanıt yöntemine uygun şekilde yapılandırılmış ve yazılmış olması gerekir (Tall, 1989; Weber & Alcock, 2009). Pedemonte (2001)'ye göre; argüman, bir matematiksel teori kullanılarak geçerli hale getirildiğinde matematiksel kanıt üretilmiş demektir.

Formel kanıt. Önceden varsayılan ya da doğru olduğu bilinen bir veya daha fazla önermenin zorunlu sonucu olarak gösterilebildiğinde, formel kanıt yapılmış anlamına gelir. A gibi bir önermeyi doğru saydığımızda, B gibi başka bir önermeyi de doğru saymak zorunda olduğumuz gösterilirse, B formel olarak kanıtlanmış demektir (Yıldırım, 2011). Formel kanıt, önermelerin ya da önerme kalıplarının ilişkisine dayanan mantıksal bir çıkarım olup (Yıldırım, 2011); Duval (1991, akt. Douek, 1998)'e göre dedüktif bir yapı gerektirir.

Formel kanıt, formel aksiyomlar üzerine kuruludur ve formel çıkarım kurallarına dayanır. Bu bağlamda düşünüldüğünde sürecin formel kelime dağarcığı ile ifade edilmesi gerekliliği ortaya çıkmaktadır (Hersh, 1993).

Bir teoremin formel kanıtı, o teoremin doğru olduğu anlamına gelmez; yalnızca teoremin dayandığı aksiyom veya aksiyomları doğru sayarsak, teoremi de doğru saymak gerektiği anlamını taşır (Yıldırım, 2011).

Matematiksel teori ve teorem. Matematiksel teori, bir takım terimler ve bu terimlerin birleşmesinden meydana gelen önerme veya önerme biçimlerinden kurulan aksiyomatik bir sistemdir. Terimler ilkel (tanımlanmayan; sezgisel anlamları ile kabul edilen-geometride nokta ve doğru gibi) ve tanımlanan terimler olmak üzere iki gruba ayrılır. Önerme veya önerme biçimleri de ikiye ayrılmaktadır: İlkel (kanıtlanmaksızın kabul edilen) ve kanıtlanan önermeler. İlkel önermelere aksiyom ya da postulat denir. Kanıtlanan önermelere ise teorem denir (Yıldırım, 2011).

Önermelerin doğru kurulması ve teoremlerin kanıtı için kurma kuralları ve çıkarım kuralları kullanılır. Kurma kuralları, kanıt yapma sürecinde cümlelerin uygun şekilde kurulmasını sağlamaya yararken; çıkarım kuralları kanıt yapma sürecinde mantıksal geçerliliğin kontrolünü sağlar (Yıldırım, 2011).

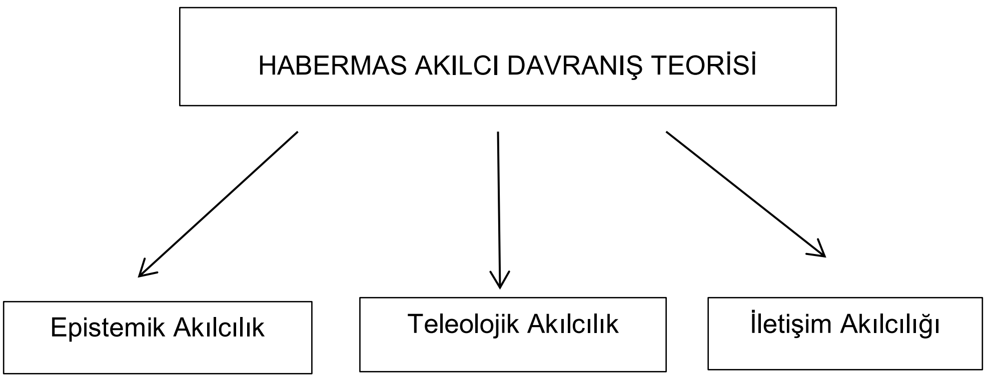
Problem çözme. Polya (1973)'ya göre hemen ulaşılmayan bir sonuç elde etmek amacıyla uygun bir yol aranan süreçtir. Heddens ve Speer (2001), problem çözmeyi, çözüm ya da çözüm metodunun açık olmadığı bir durum için bireyin söz konusu sorunu çözmek ve durumun üstesinden gelmek için geçirdiği süreç olarak tanımlamışlardır.

Bölüm 2

Araştırmanın Kuramsal Temeli ve İlgili Araştırmalar

Habermas Akılcı Davranış Teorisi

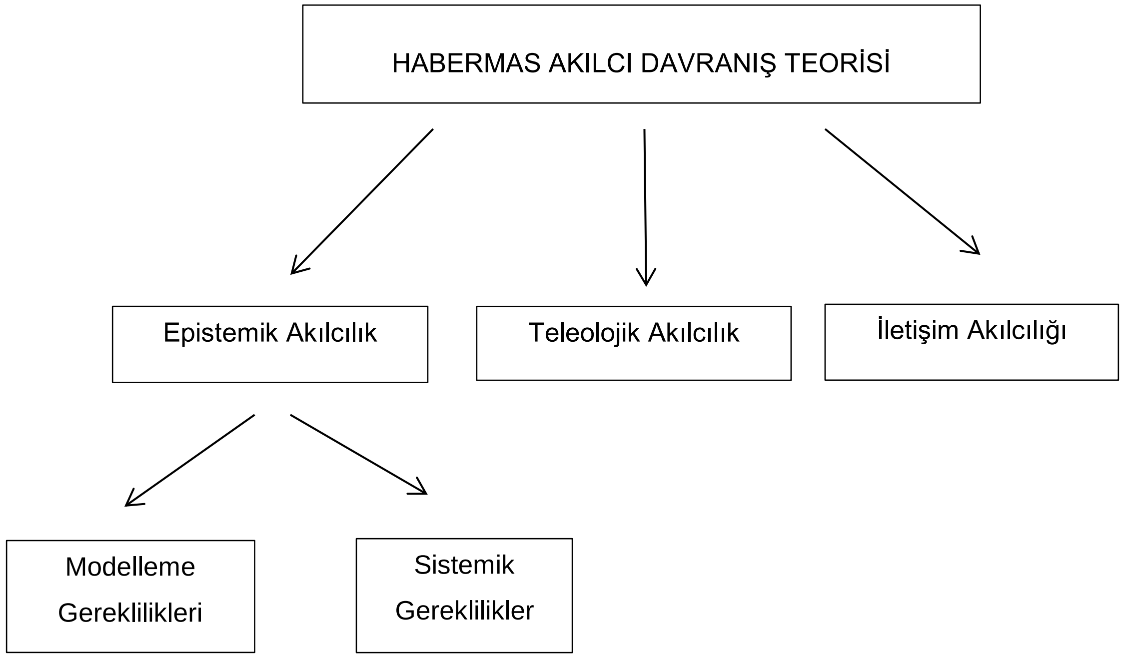
Habermas (akt. Boero, 2006)'a göre, bir etkinliği/eylemi yapan kişi, etkinlik/eylem sürecinde amacına ulaşmak için sadece kendi düşüncesi ile değil, aynı zamanda o işi başarmak için geçerli kriterlerin ve iletişim araçlarının seçimi ve sınırlamalarını da hesaba katarak davranıyorsa o kişiye "akılcı (rational) davranıyor" denir. Bu yaklaşıma göre, bir işi yapan kişi için "akılcılık" iç içe geçen üç bileşenden oluşmaktadır (Şekil 1): Epistemik akılcılık (epistemic rationality), teleolojik akılcılık (teleological rationality), iletişim akılcılığı (communicative rationality).



Şekil 1. Habermas akılcı davranış teorisi

Bu bileşenler, kanıt yapma süreçlerinin analizinde Habermas akılcı davranış teorisini kullanan matematik eğitimi araştırmacıları tarafından bu süreçlerin gerekliliklerine uygun şekilde yorumlanmıştır (Boero & Morselli, 2009; Boero & Planas, 2014; Morselli & Boero, 2011). Epistemik akılcılık; ifadelerin içeriği, kullanılması, birbirleri ile ilişkilendirilmesi, ortak öncüllere ve akla uygun muhakeme yollarına göre ifadelerin geçerliğininin bilinçli şekilde sağlanması ile ilgilidir (Boero & Planas, 2014).

Habermas akılcı davranış teorisi matematik eğitimine adapte edilirken, epistemik akılcılığın alt bileşenleri, Boero ve Morselli (2009) tarafından, *modelleme gereklilikleri (modelling requirements)* ve *sistemik gereklilikler (systemic requirements)* olarak belirlenmiştir. Modelleme gereklilikleri, modellenen durum ve cebirsel modeli arasındaki tutarlılık ve cebirsel dilin doğruluğunun kontrolü ile ilgilidir. Örneğin, kanıt yapma sürecinde bir öğrencinin verilen bir ifadeyi matematiksel olarak modellemesi bu gereklilik kapsamında incelenmektedir. Kanıtı istenen durumu, cebirsel bir ifadeye doğru şekilde dönüştürmesi, verilen bir ifadeye ilişkin doğru denklemi yazması, verilen durumla ilgili grafik ya da şekil çizerek durumu modellemesi, bu bileşenin gereklilikleri arasındadır. Sistemik gereklilikler ise matematiksel dilin ve kuralların kullanımı ile ilgilidir. Öğrencinin kanıt yapma sürecinde kullandığı kuralları doğru şekilde manipüle edebilmesi, işaretler sistemini doğru kullanabilmesi, eşitlikleri ya da eşitsizlikleri doğru şekilde çözebilmesi sistemik gereklilikler kapsamındadır (Morselli & Boero, 2011). Kuralların manipülasyonu, işaretler sisteminin kullanımı, eşitlikleri ya da eşitsizlikleri çözmek için kullanılacak yöntemlerin doğru uygulanması sistemik gereklilikler kapsamındadır. Epistemik akılcılığın alt bileşenlerinin modele eklenmiş hali Şekil 2'de verilmektedir.



Şekil 2. Epistemik akılcılık bileşeninin alt bileşenleri

Teleolojik akılcılık, bir etkinliği/eylemi gerçekleştirmek ve amaca ulaşmak için uygun araçları bilinçli olarak seçme ve kullanma ile ilgilidir (Boero, 2006). Örneğin, kanıt yapma sürecinde bir öğrencinin ifadeyi kanıtlaması için kendisine gereken matematiksel kuralı, yöntemi ya da teoremi belirlemesi, seçmesi ve kullanması ile ilgilidir. Bu bileşene göre, akılcı bir davranış yalnızca doğru sonuca/amaca ulaşmayı değil, sonuca/amaca ulaşma yolunda gerekli ve doğru araçları bilinçli olarak seçmeyi ve uygulamayı da gerektirir. Bu anlamda düşünüldüğünde, teleolojik bileşen problem çözme, varsayım oluşturma, kanıt yapma, modelleme, ters örnek bulma ve genelleme gibi süreçlerde doğru sonuca/amaca ulaşılamasa da; sürecin sonuçlanması için uygun, gerekli ve doğru araçlar seçildiğinde ve uygulandığında sürecin akılcı davranış yönünden güçlü olabileceğini ifade eder. Bu süreçlerde akılcı davranan bir kişi, neyi neden yaptığını ve doğru sonuca nasıl ulaştığını bilir ve açıklayabilir.

Epistemik akılcılık ile teleolojik akılcılık arasındaki farkın anlaşılması oldukça önemlidir. Kanıt yapma sürecinde öğrencinin amacına uygun, söz konusu ifadeyi kanıtlamasını sağlayacak, araçları doğru şekilde seçmesi teleolojik bileşenin gereklilikleri kapsamında yer alırken; öğrencinin kullanmayı tercih ettiği teoremleri ya da matematiksel kuralları doğru uygulaması ve süreçte işlem hatası yapmaması epistemik bileşenin gereklilikleri arasındadır. Bu süreçte öğrenci, geçerli bir kanıt üretmek için gerekli doğru aracı seçemediği halde kullanmayı tercih ettiği yöntemi doğru uyguluyor olabilir. Bu durumun tersi olarak, öğrenci süreçte doğru aracı seçtiği halde; söz konusu aracı yanlış ya da eksik olarak kullanıyor olabilir. Örneğin, Kosinüs teoremininin kullanımını gerektiren bir kanıt yapma sürecinde öğrenci, Kosinüs teoremini kullanması gerektiğini algılar ve bilinçli şekilde bu teoremi kullanma yoluna girerse teleolojik bileşenin gerekliliklerini sağlamış olacaktır. Bu öğrenci, kendisine gereken doğru aracı seçmesine rağmen, süreçte teoremi doğru olarak kullanamazsa ya da işlem hatası yaparsa epistemik bileşenin gerekliliklerini sağlama konusunda eksiklik yaşamış olacaktır. Burada, öğrencinin kanıt yapma sürecinde kullanacağı aracı belirleme konusundaki başarılı tercihi, ürünü (kanıtı) değerlendirilirken göz ardı edilmemesi gereken önemli bir noktadır. Aynı örnek üzerinden düşünmeye devam edersek, öğrenci kanıt yapma sürecinde, gerekenin aksine Kosinüs teoremini kullanmak yerine Sinüs teoremini kullanmayı tercih eder ve süreçte bu teoremin gerekliliği konusunda bilinçli şekilde ısrar ederse öğrenci teleolojik bileşende bir sorun yaşamış olacaktır. Diğer yandan, öğrenci bu tercihinin devamı olarak teoremi süreçte doğru olarak uygulayabilir ve kullanabilir; herhangi bir işlem hatası yapmaz ise epistemik bileşeninin gerekliliklerini sağlamış olacaktır. Elbette ki, öğrenci geçerli bir kanıt yapma süreci ortaya koyamayacaktır ancak öğrencinin süreçte bilgiyi doğru kullanma ve uygulama becerisi göz ardı edilmemelidir. Görülmektedir ki, Habermas akılcı davranış teorisinde epistemik bileşen ve teleolojik bileşen hem ayrı ayrı değerlendirilmesi; hem de etkileşimlerinin incelenmesi gereken iki önemli bileşendir.

İletişim akılcılığı ise üyeleri kendi aralarında iletişim kurabilen bir topluluktaki iletişim uygulamaları ile ilgilidir. İletişim bileşeni üzerinde üç öge önemli rol oynamaktadır: İletişimi kuran kişi, iletişimin içeriği, dinleyiciler. İletişim bileşeni, matematik eğitimi bağlamında düşünüldüğünde, matematikte iletişim standartlarına ve kurallarına uygun ürün (problem çözme, kanıt yapma vb.) ortaya çıkartmayı gerektirmektedir (Boero & Morselli, 2009). Öğrencinin standart notasyonları yerinde ve doğru şekilde kullanması, cebirsel ifadelerin okunmasını ve manipülasyonunu kolaylaştırmak için matematiksel kurallara ve kriterlere uyması iletişim akılcılığı kapsamına girmektedir (Boero & Planas, 2014).

Tüm bu bileşenler çerçevesinde akılcılık, kişinin bir etkinliği/eylemi yaparken kurduğu yazılı ya da sözlü iletişimde kullanacağı araçları bilinçli olarak, amacına uygun şekilde seçmesi; doğru kullanması ve etkinliğin içeriğini bu seçimleriyle iletişim normlarına uyarak aktarabilmesidir (Boero, 2006). Bu tanımda adı geçen etkinlik ile matematik eğitiminde bir öğrencinin problem çözme ya da kanıt yapma süreci kastedilmektedir.

İlgili Araştırmalar

Balacheff (1982, akt. Morselli & Boero, 2009)'e göre, kanıt öğretiminin temel amacı, öğrencilerin kanıtın ne olduğunu anlamasını ve kanıt üretmeyi öğrenmesini sağlamaktır. Matematik eğitiminde kanıtlama iki yönüyle ele alınmalıdır: Süreç ve nesne. Süreç, kanıtı bir ürün olarak elde etmeyi amaçlayan özel bir problem çözme süreci; nesne ise bu süreç sonunda elde edilen ürün yani kanıttır. Son yıllarda, öğrencilerin bu süreçte yaşadıkları zorlukların temel nedeninin belirlenmesi ve ortaya koydukları ürünün (kanıtın) değişik yönlerden yeterliğinin değerlendirilmesi için Habermas akılcı davranış teorisi kullanılmaya başlanmıştır (Boero, 2006; Morselli & Boero, 2009; Arzarello & Sabena, 2011; Boero, Guala & Morselli, 2013).

Boero (2006), Habermas'ın bakış açısından çalışmasında bir yedinci sınıf öğrencisinin kanıt yapma sürecini incelendiğinde, öğrencinin akılcı bir yolda ilerlediğini söyleyebileceğini belirtmiştir. Öğrenci süreçte, muhakemesinin adımlarını oldukça iyi şekilde doğrulayabilmiştir *(epistemik akılcılık),* muhakemesini akılcı bir çizgide geliştirebilmiştir *(teleolojik akılcılık);* öğretmeni ve arkadaşları için hatta bazı matematikçiler için bile kabul edilebilir bir yolla sürecini açıklayabilmiştir *(iletişim akılcılığı).* Öğrencinin iletişim bileşenindeki gücünün, teleolojik ve epistemik akılcılıklarını olumlu etkilediği ve geçerli bir çözüm süreci oluşturmasına katkı sağladığı görülmüştür. Öğrenci eksikleri yönünden değerlendirildiğinde, formel kanıtlama yöntemlerini bilmediği ve matematikçilerin formel iletişim kurallarına uygun ürün ortaya koyamadığı ortaya çıkmıştır. Her ne kadar öğrencinin formel anlamda eksikleri ve yetersizlikleri olsa da; amacına ulaşmak için harcadığı somut çaba değerlendirilmeli ve bu çabanın hakkı verilmelidir.

Morselli ve Boero (2009), matematik bölümünde öğrenim görmekte olan öğrencilerin ve ilköğretim matematik öğretmen adaylarının kanıt yapma süreçlerini Habermas akılcı davranış teorisini kullanarak analiz etmiştir. Çalışma sonucunda epistemik akılcılığın, teleolojik akılcılığı ve iletişim akılcılığını desteklediği görülmüştür. Habermas akılcı davranış teorisinin üç bileşeninin farklı etkileşimlerinin ve bileşenlerden birinin baskın ya da zayıf olmasının, öğrencilerin kanıt yapma ya da problem çözme sürecindeki başarısını etkilediği ortaya çıkmıştır. Morselli ve Boero (2009), bu konuya ilişkin yapılacak daha sonraki çalışmalarda şu sorulara cevap aranmasını önermektedir: Kanıt yaparken iletişim bileşeninin gerekliliklerini sağlayan öğrencilerin epistemik bileşen yönünden de geliştirilmesi mümkün müdür? Kanıt yapma sürecinde iletişim bileşeninde yaşanan eksiklikler, epistemik bileşeni de olumsuz yönde etkileyebilir mi?

Boero ve Morselli (2009), cebirsel dilin kullanımı sırasında öğrencilerin yaşadığı zorlukları belirlemeyi amaçladıkları çalışmalarında Habermas akılcı davranış teorisi ile çalışmışlar ve öğretmenlere cebirsel dilin kullanımını öğrencilerine öğretirken yararlanabilecekleri kullanışlı bir takım uygulamalar sunmayı hedeflemişlerdir. Bu sayede Habermas akılcı davranış teorisinin, öğrencilerin davranışlarını tanımlamada ve yorumlamada nasıl kullanılabileceği, öğretmenlerin eğitsel kararlarını nasıl yönlendirebileceği ve destekleyebileceği araştırılmıştır. Analiz ettikleri örneklerin bazılarında, öğrencilerin bir an önce amaca ulaşma düşüncesi ile acele ettikleri, bu sebeple de teleolojik akılcılığın epistemik akılcılığı engellediği; bazılarında ise epistemik akılcılığın modelleme gerekliliklerindeki bazı eksikliklerin, teleolojik akılcılığı engellediği belirlenmiştir. Öğrencilerle yapılan görüşmelerde, bazı öğrencilerin çözüm süreçlerinde kullandıkları önemli adımları açıklayamadığı ya da doğrulayamadığı görülmüştür. Öğrencilerin sadece gerçeğe yakın bir çözüm elde etmek için bazı adımlarını amaca yönelik olarak değiştirdiği durumlarla da karşılaşılmıştır. Araştırmacılara göre, bu durum teleolojik akılcılıktaki eksikliğin, iletişim akılcılığını da olumsuz etkilemesinin bir sonucudur. Araştırmanın son aşamasında çözümü doğru olan ancak muhakeme adımları için açıklama yapmamış öğrencilere, yanlış yapan öğrencilerin çözümü gösterilerek onlardan yanlış ya da eksik olan yerleri belirlemeleri istenmiştir. Ancak bu öğrenciler, söz konusu çözüm süreçlerinin hangi kısımlarının hatalı olduğunu açıklayamamıştır. Bu durum, öğrencilerin iletişim akılcılığındaki eksiklerinin, teleolojik ve hatta epistemik akılcılıkta eksiklere yol açabileceğini göstermektedir. Kendi modelleri için sözlü bir doğrulama sunabilmiş olan öğrencilere yanlış çözüm süreçlerine ait örnekler gösterildiğinde ise bu öğrencilerin, bazı sonuçların neden yanlış olduğunu açıklayabildiği görülmüştür. Bu sonuç, iletişim akılcılığı ile teleolojik ve epistemik akılcılık arasında bulunan ilişkiyi doğrular niteliktedir.

Boero (2006), Habermas akılcı davranış teorisinin kanıt yapma sürecinin daha detaylı analizlerinde kullanılabilmesi için bazı yönleriyle geliştirilmesi gerektiğini belirtmiştir. Habermas akılcılık teorisinin matematik eğitimine uygun adapte ve entegre edilmesi, öğrencilerin matematiksel aktivitelerinin teleolojik akılcılık ve iletişim akılcılığı gibi sınıfta genellikle önemsenmeyen ancak sadece matematik performanslarının gelişimi için değil aynı zamanda zihinsel gelişimleri için de önemli olan bazı özelliklerine öğretmenlerin dikkatini çekmek için iyi bir araç olarak kullanılabilir. Ayrıca bazı öğrencilerin tatmin edici nitelikte bir çözüm yapamadığı ancak performansının akılcılık yönünden gelişmiş olduğu durumlar olabilir. Öğrencilerin performanslarını bu yönleriyle değerlendirmek için de Habermas akılcılığı iyi bir araç olabilir. Böylece öğrencilerin kanıt yapma süreçlerinde güçlü oldukları bileşenleri belirlemek ve zayıf oldukları bileşenleri geliştirmek mümkün olabilecektir.

Bu bağlamda düşünüldüğünde, Habermas'ın akılcı davranış bileşenlerini daha ayrıntılı bir şekilde incelemenin ve detaylandırmanın, öğrencilerin okullarda varsayım oluşturma ve kanıt yapma süreçlerine yaklaşımlarını geliştirmek ve onların performanslarını daha iyi değerlendirmek açısından faydalı olabileceğini söylemek mümkündür. Bu, birlikte ve birbirini destekleyecek şekilde yapılması önerilen iki yolla gerçekleştirilebilir: Birincisi, ruhuna sadık kalmak koşuluyla Habermas akılcılık teorisinin bazı yönleriyle daha da geliştirilmesi; ikincisi daha önceden matematik eğitiminde geliştirilmiş teorik yapıların Habermas akılcı davranış teorisi çerçevesine uyumlu şekilde entegre edilmesi.

Bölüm 3
Yöntem

Bu araştırma, nitel bir çalışmadır. Üniversite öğrencilerinin matematiksel kanıt yapma süreçleri, Habermas akılcı davranış teorisi bileşenlerine göre analiz edilmiştir. Bu amaçla araştırmada, bir olguyu kendi yaşam çerçevesinde incelemeye fırsat sunan ve birden fazla veri kaynağının mevcut olduğu durumlarda kullanılan durum çalışması (Yin, 2003) yapılmıştır.

Araştırmanın Örneklemi

Çalışma, Ankara'da bir devlet üniversitesinin 2016-2017 Bahar döneminde Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Programı'nda öğrenim görmekte olan birinci sınıf öğrencilerine uygulanmıştır.

Öğrencilerin katılımcı olarak belirlenmesinde öğrenimlerinin ilk yılında olmalarına; güz döneminde aldıkları dersler dışında henüz bir alan dersi almamış olmalarına dikkat edilmiştir. Bunun nedeni, çalışma kapsamında kullanılan geometri ve cebir alanında hazırlanan soruların temel düzeyde kanıt yapmayı gerektirmesi ve öğrencilerin lise matematik bilgilerinin ve lisans düzeyinde verilen Analiz I dersinin içeriğinin sorularda verilen ifadeleri kanıtlamaları için yeterli olmasıdır. Öğrencilerin diğer alan derslerini almalarının kanıt yapma süreçlerini, süreçte kullandıkları bilgileri, teoremleri ve yöntemleri etkileyebileceği düşünüldüğünden yalnızca birinci sınıf düzeyinde olan; yani ilk dönem aldığı güz dönemi alan derslerini yalnız bir kere almış olan ve başka alan dersi almamış olan öğrenciler ile çalışılmıştır. Tablo 1'de öğrencilerin aldıkları Analitik Geometri I, Analiz I ve Soyut Matematik I derslerinin içeriğine yer verilmektedir.

Tablo 1

Öğrencilerin Aldıkları Alan Derslerinin İçeriği

Dersler	İçerik
Analiz I	Kümeler ve sayı sistemleri.
	Bağıntı, fonksiyon ve grafik çizimleri
	Diziler, limit, süreklilik ve ilgili önermeler
	Türev kavramı, türevin cebirsel özellikleri
	Türev alma kuralları ve uygulamaları
	Türevle ilgili önermeler
	L' Hospital kuralı ve uygulamaları
	Grafik Çizimleri
Analitik Geometri I	Vektör Uzayları
	Vektörlerin Özellikleri
	Matris
	Determinant
	Skaler Çarpma, Vektörel Çarpma
	Lineer Denklem Sistemleri
	Kartezyen Koordinat Sistemi
	Doğru Denklemi
	Düzlem Denklemi
Soyut Matematik I	Önermeler, bağlaçlar ve doğruluk tabloları
	Kanıt yöntemleri ve uygulamaları
	Küme işlemleri, küme takımları
	Bağıntılar ve özellikleri

Bu şartlarda belirlenen yirmi beş öğrenciden on altısı kadın; dokuzu erkektir. Araştırmacı, aynı zamanda öğrencilerin devam etmekte olduğu Analiz II dersinin uygulama sorumlusu olduğundan öğrencileri tanımaktadır. Bu sayede, katılımcıların, kendisini ifade edebilen ve çalışma için gönüllü olacağı düşünülen öğrenciler olmasına dikkat etmiştir. Öğrencilerin çalışmaya gönüllü katılımı, çalışmanın sürekliliği ve öğrencilerin çalışmada aktif olması açısından önemlidir. Süreçte kendisini yeterince iyi ifade edemeyen ve uygulamalara düzenli katılım göstermeyen, katılım gösteren ancak verilen ifadeleri kanıtlayamayan ya da değerlendirmeye alınamayacak kadar geçersiz süreçler üreten bir erkek iki kız öğrenci çalışma dışında bırakılmış ve toplamda yirmi iki öğrenci ile süreç tamamlanmıştır.

Veri Toplama Araçları

Öğrencilerin geometri ve cebir alanında kanıt yapma süreçlerini, Habermas akılcı davranış teorisinin bileşenlerine göre inceleyebilmemiz için uygun nitelikte veri sunacağı ve araştırmanın amacına hizmet edeceği düşünülen sorular kullanılmıştır. Soru havuzunun oluşturulması aşamasında soruların güvenirliğini sağlamak için araştırmanın konusu ile ilgili yapılmış önceki çalışmalardan (Boero, 2006; Boero vd., 2010; Boero & Morselli, 2009; Boero & Planas, 2014; Morselli & Boero, 2009; Morselli & Boero, 2011; Pedemonte, 2003; Pedemonte, 2007a; 2007b; Pedemonte, 2011) ve araştırmanın konusuna ve amacına uygun nitelikte sorular içeren çeşitli kitaplardan (Houston, 2009; Nesin, 2010; Stillwell, 1989; Struik, 1987; Terzioğlu, 2013; Velleman, 2006) yararlanılmıştır. Hazırlık aşamasının ardından soruların çalışmanın amacına hizmet edip etmediği konusunda uzman görüşü alınmıştır. Uzman görüşü doğrultusunda bu sorular içerisinden matematiksel yönden ve dil-anlatım açısından en uygun olan dört geometri sorusu ve sekiz cebir sorusu seçilmiştir.

Seçilen soruların matematiksel yeterliği ve anlaşılırlığı konusunda sekiz uzmandan görüş alınmıştır. Bu uzmanlardan dördü matematik alanında; üçü matematik eğitimi alanında ve biri de nitel araştırma yöntemleri alanında uzmandır. Bu sayede soruların geçerliğini arttırmak hedeflenmiştir. Uzmanlardan soruları bireysel olarak çözmeleri ve özellikle geometri sorularında verilen bilgilerin, öğrencinin istenen şekli çizebilmesi için yeterli ve anlaşılır olup olmadığını kontrol etmeleri istenmiştir.

Uzmanlar, “Bir ABC dik üçgeni veriliyor. Bu üçgenin dik kenarlarını çap kabul eden çemberlerin iç kısmında ve hipotenüsü çap kabul eden çemberin dış kısmında kalan hilal biçimindeki yüzeylerin alanları S_1 ve S_2 ile gösterilsin. ABC üçgeninin alanının, S_1 ve S_2 yüzeylerinin alanları toplamına eşit olduğunu kanıtlayınız” şeklinde hazırlanmış geometri sorusunun zor anlaşıldığını düşünmüşler ve bu nedenle öğrencilerin soruda istenen şekli çizmekte zorlanacağını belirtmişlerdir. Sorunun anlaşılırlığını arttırmak amacıyla soruda yapılan açıklamanın genişletilmesini; daha açık ve anlaşılır bir dil kullanılmasını önermişlerdir. Gerekli değişiklikler ve düzeltmeler uzman görüşleri doğrultusunda yapılmış; sorunun son hali uzmanlara tekrar sunulmuş ve yeterince anlaşılır olduğuna dair onayları alınmıştır.

Uzmanlar, "Eşkenar olmayan herhangi bir ABC üçgeni alalım. A köşesine karşılık gelen kenarın uzunluğunu a, B köşesinin karşısındaki uzunluğunu b ve C köşesinin karşısındaki kenarın uzunluğunu da c ile gösterelim. C köşesindeki ACB açısını β ile gösterelim ve 60°< β < 90° olduğunu varsayalım. Bu üçgenin içine tepesi C'de, tabanı AB doğrusu üzerinde ve her iki taban açısı da β'ya eşit olacak şekilde bir CED ikizkenar üçgeni yerleştirelim. BD doğru parçasının uzunluğunu r ve EA doğru parçasının uzunluğunu da s ile gösterelim. Bu durumda $a^2 + b^2 = (r + s)c$ olduğunu kanıtlayınız" şeklinde hazırlanmış soru ile ilgili olarak da düzeltme talep etmişlerdir. Soruda verilen bilgilerle şeklin iki alternatif çiziminin olabileceğini belirten uzmanlar, açıklama eklemek yerine bu soruda üçgenlerin hazır olarak öğrenciye sunulmasını önermişlerdir. Benzerlik konusunda hazırlanmış bu soruda, üçgenlerin hazır olarak verilmesi, öğrencilerin kanıt yapma süreçlerinin analizini etkilemediğinden uzman görüşleri doğrultusunda soruya istenen ekleme yapılmıştır.

Uzmanlar, soruları öğrencilerin kanıt yapma sürecini açığa çıkaracak nitelikte olması yönünden de değerlendirmişlerdir. Bu bağlamda, geometri ve cebir alanında hazırlanmış tüm soruların soru köküne uygun olacak şekilde "… kanıtlayınız", "… olduğunu gösteriniz" gibi ifadelerle bitirilmesi önerilmiştir. Diğer yandan, kanıt yapmaktan ziyade problem çözmeyi gerektiren sorular, uygulama soruları içerisinden çıkarılmıştır. Geometri alanında bu tip bir soruya rastlanmazken; cebir alanında hazırlanmış bir soru (Öyle bir f: IR → [0, 1] sürekli fonksiyonu yazınız ki; f([0,1])={1} ve f(2)=0 olsun) kanıt yapma süreci gerektirmesinden ziyade problem çözme süreci oluşmasına uygun nitelikte olmasından dolayı uygulama soruları arasından çıkartılmıştır. Böylece geometri alanında dört; cebir alanında yedi soru uygulamalara hazır hale getirilmiştir. Hazırlanan soruların güvenirliğini arttırmak amacıyla pilot çalışma yapılmıştır.

Pilot çalışma. Pilot çalışmada, ilgili bölümün 2015-2016 akademik yılı yaz okuluna katılmış olan öğrenciler ile çalışılmıştır. İkisi erkek, on dördü kadın olan on altı öğrenci çalışmaya gönüllü olarak katılmayı kabul etmiştir. Bu öğrencilerden biri önceden belirlenmiş olan uygulama planına uyamadığından çalışma dışında bırakılmış; iki erkek, on üç kadın ile uygulamalar tamamlanmıştır. Katılımcılardan dokuzu ikinci sınıfta; üçü üçüncü sınıfta ve diğer üçü de dördüncü sınıfta olan öğrencilerdir. Öğrencilerin akademik başarıları göz önüne alındığında, ortalaması 1.60 ile 2.00 arasında olan üç öğrenci, 2.00 ile 2.57 arasında olan on iki öğrenci olduğu görülmektedir. Öğrencilerin ortalamalarının birbirine yakın olmasının, aralarındaki olası matematik kültürü farkını ve bu farkın kanıt yapma süreci üzerindeki etkisini azaltabileceği düşünülmüştür.

Pilot çalışma kapsamında yapılan uygulama süreci konusunda uzman görüşü alınmıştır. Uzmanlar, öğrencilerin kanıt yaparken yorulmaları ve dikkat dağınıklığı yaşamaları riskini en aza indirebilmek için geometri ve cebir sorularının yapılarına ve zorluklarına bağlı olarak uygun şekilde gruplandırılmasını ve öğrencilere ayrı oturumlarda uygulanmasını önermiştir. Sorular gruplandırılırken, ifadelerin kanıt yapma sürecinde gerektirdiği düşünme süreci, zorluğu ve süresi yönünden göz önüne alınmıştır. Bu doğrultuda hareket edilerek, geometri soruları uzman görüşü de alınarak ikiye bölünmüş ve ikişer sorudan oluşan uygulamalar ayrı zamanlarda öğrencilere uygulanmıştır. Benzer şekilde cebir soruları da ikiye bölünerek iki ayrı oturumda ikişer soru halinde öğrencilere uygulanmıştır. Öğrencilere her oturum için sınırsız süre verilmiştir.

Pilot çalışma sonuçlarına göre, kanıt yapma süreçlerinin Habermas akılcı davranış teorisine göre analiz sonuçları benzer çıkan sorular asıl uygulamadan çıkarılmıştır. Asıl uygulamada kullanılmasına karar verilen sorular üzerinde gerekli düzenlemeler ve değişiklikler yapılmıştır. Örneğin, “"Her x tam sayısı için x^2, 4 ile bölündüğünde kalan ya 0 ya da 1'dir” ifadesini kanıtlayınız” sorusunun “Ardışık iki çift sayının çarpımının 8 ile bölünebildiğini kanıtlayınız” sorusu ile benzer veriler sunduğu; öğrencilerin ilk soruda verilen ifadeyi kanıtlama sürecine benzer şekilde ikinci soruda verilen ifadeyi de kanıtladıkları görülmüştür. İlk soruda verilen ifadeyi kanıtlayabilen öğrencilerden çoğunun, ikinci soruda verilen ifadeyi de kanıtlayabildiği; ilk soruda verilen ifadeyi kanıtlayamayanların çoğunun ikinci soruda verilen ifadeyi de kanıtlayamadığı dikkat çekmiştir. Bu nedenle ilk soru uygulama soruları arasından çıkartılmış; Habermas akılcı davranış modelinin bileşenleri arasındaki etkileşimin öğrencilerin kanıtlama sürecinde daha net ortaya çıktığı görülen ikinci sorunun esas uygulamada kullanılmasına karar verilmiştir.

“f: IN → IR, $\mathrm{f(x)} = 2^{\mathrm{x}}$ fonksiyonunun bire bir ve örten olup olmadığını inceleyiniz. İnceleme sürecinizi nedenleriyle açıklayınız” sorusu; “$\mathrm{A} = \mathrm{IR} \setminus \{-1\}$

olmak üzere $f: A \rightarrow IR$, $f(a) = \frac{2a}{a+1}$ formülü ile tanımlanmış olsun. f 'nin bire bir olduğunu ancak örten olmadığını kanıtlayınız. Kanıtlama sürecinde kullandığınız adımları nedenleriyle açıklayınız" sorusu ile aynı konu alanına yönelik hazırlanmıştır. Ancak ilk sırada verilen soru, bir fonksiyonun bire bir ve örten olması durumunun araştırılmasının yanı sıra; üstel fonksiyon ve logaritma fonksiyonu ile ilgili bilgilere sahip olmayı da gerektirmektedir. Birden fazla konu alanına ilişkin bilgi gerektiren bu soruda verilen ifade, üstel fonksiyon ve logaritma fonksiyonu ile ilgili yeterli bilgiye sahip olmayan pek çok öğrenci tarafından kanıtlanamamıştır. Bu nedenle, bu sorunun uygulamadan çıkartılmasına; araştırmanın amacına uygun nitelikte veri sunan diğer sorunun uygulamada kalmasına karar verilmiştir.

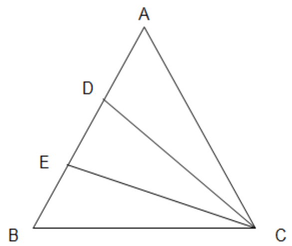
Pilot çalışmada öğrencilere yöneltilen sorular, boş bırakılması ya da soruda verilen ifadeye ilişkin yetersiz düzeyde kanıtlama süreci üretilmesi açısından da değerlendirilmiştir. Cebir alanında yapılan uygulamada pek çok öğrencinin "İki ardışık sayının bölenleri hakkında ne söyleyebilirsiniz? Cevabınızı açıklayınız" sorusunu boş bıraktığı ya da kanıtlama sürecinde yetersiz veri sunduğu görülmüştür. Bu nedenle, bu sorusunun esas uygulamadan çıkarılmasına karar verilmiştir. Yapılan değişiklikler ve düzenlemeler sonucunda geometri alanında dört soru (Ek-A ve Ek-B) ve cebir alanında dört soru (Ek-C ve Ek-Ç) kullanılmasına karar verilmiştir.

Tablo 2'de geometri alanında hazırlanmış dört soruya ve bu soruların amacına ve kapsamına yer verilmektedir.

Tablo 2

Geometri Alanında Hazırlanan Uygulama Soruları

Sorular	Amaç ve Kapsam
Bir düzgün sekizgenin içine bir ABC üçgeni, üçgenin AB kenarı sekizgenin bir kenarı ile çakışık ve C tepe noktası bu kenarın tam karşısındaki kenarın orta noktası olacak biçimde yerleştiriliyor. Buna göre sekizgenin alanının üçgenin alanının 4 katı olduğunu kanıtlayınız. Bulduğunuz sonucun nedenini açıklayınız.	Bu soruda öğrenciden bir düzgün sekizgen çizerek şekil üzerinde ikizkenar dik üçgenler ve dikdörtgenler oluşturması, Pisagor teoremini kullanarak ikizkenar dik üçgenlerin kenarları arasında ilişki kurabilmesi ve bu sayede soruda belirtilen ABC üçgeninin yüksekliğini düzgün sekizgenin bir kenarı cinsinden yazabilmesi ve buradan üçgende ve dikdörtgende alan

	denklemlerini kullanarak sekizgenin alanı ile ABC üçgeninin alanı arasındaki bağıntıyı kanıtlaması istenmektedir.
Bir ABC üçgeni veriliyor. Bu üçgenin her bir kenarı üzerine tümüyle üçgenin dışında kalacak ve bir kenarı üçgenin o kenarına eşit olacak şekilde üç adet kare çiziniz. Bu karelerin boşta kalan köşelerini sırayla birbirleriyle birleştirerek üç adet yeni üçgen oluşturunuz. Elde edilen bu yeni üçgenlerin alanlarının ABC üçgeninin alanına eşit olduğunu kanıtlayınız.	Bu soruda öğrenciden herhangi bir ABC üçgeni çizerek bu üçgenin kenarları üzerine soruda verilen kareleri inşa etmesi, bu karelerin boşta kalan köşelerini uygun şekilde birleştirerek yeni üçgenler oluşturması ve bu üçgenlerin alanı ile ABC üçgeninin alanının eşit olduğunu üçgenlerde benzerlik yöntemi ile ya da Sinüs teoremi ile üçgenlerde alan bulma yöntemini kullanarak kanıtlaması beklenmektedir.
Bir ABC dik üçgeni veriliyor. Bu üçgenin dik kenarlarını çap kabul eden çemberlerin iç kısmında ve hipotenüsü çap kabul eden çemberin dış kısmında kalan hilal biçimindeki yüzeylerin alanları S_1 ve S_2 ile gösterilsin. ABC üçgeninin alanının, S_1 ve S_2 yüzeylerinin alanları toplamına eşit olduğunu kanıtlayınız.	Öğrenciden soruda verilenlere uygun şekli çizmesi, S_1 ve S_2 ile belirtilen alanları şekil üzerinde doğru belirlemesi, Pisagor teoremini kullanarak ABC dik üçgeninin dik kenarları ve hipotenüs uzunluğu arasında doğru bir eşitlik kurması, bu eşitliğe dayalı olarak şekil üzerindeki dairelerin ve daire dilimlerinin alan denklemlerini uygun şekilde yazması ve böylece S_1 ve S_2 alanlarının toplamının ABC dik üçgeninin alanına eşit olduğunu kanıtlaması beklenmektedir.
Şekilde verildiği gibi eşkenar olmayan herhangi bir ABC üçgeni alalım. A köşesine karşılık gelen kenarın uzunluğunu a, B köşesinin karşısındaki kenarın uzunluğunu b ve C köşesinin karşısındaki kenarın uzunluğunu da c ile gösterelim. C köşesindeki ACB açısını β ile gösterelim. 60°< β < 90° olduğunu varsayalım. Bu üçgenin içine tepesi C'de, tabanı AB doğrusu üzerinde ve her iki taban açısı da β'ya eşit olacak şekilde bir CED ikizkenar üçgeni yerleştirelim. BD doğru parçasının uzunluğunu r ve EA doğru parçasının uzunluğunu da s ile gösterelim. Bu durumda $a^2 + b^2 = (r + s)c$ olduğunu kanıtlayınız.	 Soruda yukarıdaki şekil öğrencilere hazır olarak verilmiştir. Üçgenler üzerinde açıların ve kenarların uygun biçimde isimlendirilmesi, benzer üçgenler arasından verilen ifadenin kanıtı için gerekli olanlarının seçilebilmesi ve amaca uygun şekilde kullanılabilmesi, üçgenler arasında benzerlik oranının doğru kurulabilmesi ve böylece soruda verilen ifadenin kanıtlanabilmesi beklenmektedir.

Tablo 3'te cebir alanında hazırlanmış sorulara ve bu soruların amacına ve kapsamına yer verilmektedir.

Tablo 3

Cebir Alanında Hazırlanan Uygulama Soruları

Sorular	Amaç ve Kapsam
Ardışık iki çift sayının çarpımının 8 ile bölünebildiğini kanıtlayınız.	Soruda öğrenciden ardışık iki çift sayıyı cebirsel olarak yazması ve bu ifadeleri çarparak ürettiği yeni cebirsel ifadenin 8 ile bölünebildiğini bu ifadeyi ortak çarpan parantezine alarak yeniden yazma ve düzenleme yoluyla kanıtlaması beklenmektedir.
Her k doğal sayısı için $5^{5k+1} + 4^{5k+2} + 3^{5k}$ sayısının 11'e bölündüğünü kanıtlayınız.	Öğrenciden tümevarım ve modüler aritmetik yöntemini amacına uygun şekilde kullanarak verilen ifadeyi kanıtlaması beklenmektedir.
$A = IR \setminus \{-1\}$ olmak üzere $f: A \to IR$, $f(a) = \frac{2a}{a+1}$ formülü ile tanımlanmış olsun. f'nin bire bir olduğunu ancak örten olmadığını kanıtlayınız. Kanıtlama sürecinde kullandığınız adımları nedenleriyle açıklayınız.	Öğrenciden bir fonksiyonun bire bir ve örten olmasına ilişkin formel tanımları amacına uygun ve doğru kullanarak verilen ifadeleri kanıtlaması beklenmektedir. Öğrenci, verilen fonksiyonun örten olmadığını kanıtlamak için fonksiyonun örten olmasına ilişkin ters örnek verebilir.
$f(x) = \|x-1\| + 1$ fonksiyonunun $x = 1$'de türevlenemediğini kanıtlayınız.	Öğrenciden bir fonksiyonun bir noktada türevlenebilir olmasına ilişkin formel tanımı kullanarak fonksiyonun verilen noktada türevlenemediğini kanıtlaması beklenmektedir.

Kanıt yapma süreci zengin veri çeşitliliği sunan öğrenciler ile yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmış; öğrencilerin izni alınarak bu görüşmelerin video kaydı alınmıştır. Bu süreçte, öğrencilerden ürettikleri yazılı kanıt yapma sürecini açıklamaları istenmiştir. Aynı zamanda, yazılı kanıt yapma sürecinde belirsiz olduğu düşünülen ya da yeterince anlaşılmayan bölümlerin netleştirilmesi için görüşme yapılan öğrenciye açık uçlu sorular sorulmuş; bu bölümlerdeki esas düşünme sürecinin açığa çıkarılması amaçlanmıştır.

Veri Toplama Süreci

Araştırmanın verilerini katılımcıların geometri ve cebir alanında hazırlanan ifadeler için ürettikleri yazılı kanıt yapma süreçleri, görüşme sürecinde elde edilen video kayıtları ve görüşme sırasında kullandıkları çalışma kâğıtları oluşturmaktadır. Nitel araştırmalarda görüşme, gözlem ve doküman analizi gibi farklı yöntemlerle elde edilen verilerin birbirlerini teyit amacıyla kullanılması inandırıcılığı; farklı veri kaynakları, farklı veri toplama araçları ve analiz yöntemleri kullanılarak yapılan çeşitleme de sonuçların geçerliğini ve güvenirliğini arttırmaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2006). Bu araştırmada da yazılı dokümanlarla, görüşmelerle ve ses kayıtlarıyla, farklı veri toplama yöntemlerinden yararlanılarak veri çeşitlemesi yapılmış ve çalışmanın inandırıcılığını arttırmak, geçerlik ve güvenirliği sağlamak amaçlanmıştır.

Çalışma kapsamında yapılan esas uygulamanın veri toplama sürecinin ilk aşamasında sorular (Ek-A, Ek-B, Ek-C ve Ek.-Ç), yirmi beş birinci sınıf öğrencisine uygulanmıştır. Pilot çalışmada olduğu gibi esas uygulamada da, öğrencilerin kanıt yaparken yorulmaları ve dikkat dağınıklığı yaşamaları riskini en aza indirebilmek için geometri uygulamaları ikişer sorudan oluşan iki ayrı oturum; cebir uygulamaları da benzer şekilde ikişer sorudan oluşan iki ayrı oturum şeklinde pilot çalışmada uygulandıkları halleri ile yapılmıştır.

Önceden belirlenen gün ve saatlerde boş ve sessiz bir sınıf ortamında uygulamalar gerçekleştirilmiştir. Planlanan gün ve saatte kendi grubuna katılım sağlayamayan öğrenciler bir sonraki oturuma dâhil edilmiştir. Uygulamalara başlamadan önce araştırmacı, araştırmanın konusu ve amacı hakkında öğrencilere bilgi vermiştir. Öğrenciler ihtiyaç duydukları durumda araştırmacıya soru sormak ve istedikleri zaman uygulamayı bitirmek konusunda serbest bırakılmıştır. Öğrencilerin kanıt yapma sürecinde araştırmacı, öğrencilere müdahale etmemiş, yalnızca öğrenciler soru sorduğunda yönlendirici olmayan ve kanıt yapma sürecini etkilemeyecek cevaplar vermiştir. Uygulama sürecinde araştırmacı öğrencileri gözlemlemiş; öğrencilerin sordukları soruları ve kendisinin verdiği cevapları not etmiştir. Öğrencilerin geometri alanında yapılan her bir uygulamayı 45 dakika ila bir saat kadar süre içerisinde tamamladığı görülürken, cebir alanında hazırlanmış her bir uygulama için yaklaşık 40 dakikaya ihtiyaç duyduğu belirlenmiştir. Uygulamalar dört hafta sürmüştür.

Kanıt yapma süreçleri zengin veri çeşitliliği sunan öğrencilerin verileri üzerinde daha ayrıntılı analizler yapabilmek adına, bu öğrenciler ile bireysel olarak yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Öğrencilerin izni alınarak görüşmelerin video kaydı alınmıştır. Görüşmelerde öğrencilerden kanıt yapma sürecinde kullandıkları adımları nedenleri ile açıklamaları istenmiştir. Öğrencilerin yazılı verilerinin analizinde çelişkili ya da belirsiz olduğu düşünülen bölümlerin daha doğru analiz edilebilmesi adına, görüşme sürecinde öğrencilere bu bölümlerdeki asıl düşünme süreçlerini ortaya çıkaracak nitelikte açık uçlu sorular sorulmuştur. Bu sayede yazılı verilerden elde edilen analiz sonuçlarının netleştirilmesi ve araştırmanın amacına hizmet eden önemli ve dikkat çekici bölümlerin daha detaylı analizinin yapılması hedeflenmiştir. Bu soruların geçerliği konusunda matematik eğitimi alanında ve aynı zamanda Habermas akılcı davranış teorisi konusunda bilgili ve tecrübeli bir uzmandan görüş alınmıştır. Görüşmeler yaklaşık bir ay sürmüştür.

Verilerin Analizi

Öğrencilerin geometri ve cebir alanında ürettikleri yazılı kanıt yapma süreçleri, görüşmelerde elde edilen video kayıtları ve öğrencilerin görüşme sürecinde kullandığı çalışma kâğıtları araştırmanın nitel verilerini oluşturmaktadır.

Nitel araştırmalarda veri analizi betimleme, analiz ve yorumlama süreçleri ile yapılmaktadır. Betimleme, toplanan verilerin araştırma problemine ilişkin hangi sonuçları ortaya çıkardığını anlatma sürecini; analiz ise kavramsal kodlama veya sınıflama yoluyla verilerden anlamlı ilişkilerin ortaya çıkarılması sürecini ifade etmektedir. Diğer yandan yorumlama, verileri değerlendirme ve anlamlandırma sürecini temsil etmektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2006). Bu çalışmada, öğrencilerin yazılı kanıt yapma süreçleri doğrudan alıntılar yapılarak okuyucuya sunulmuş ve böylece betimlenmiştir. Betimlenen süreçler, Habermas akılcı davranış teorisi bileşenlerine göre analiz edilmiş ve bulgular yorumlanmıştır. Bu süreçte, öğrencilerin yazılı kanıt yapma süreçleri, Tablo 4'te Habermas akılcı davranış teorisinin her bir bileşeni için ayrı ayrı verilen ölçütler göz önüne alınarak analiz edilmiştir. Öğrencinin kanıt yapma sürecinde, bir bileşene ilişkin verilen ölçüt ya da ölçütleri sağlaması durumunda bu bileşene ilişkin gereklilikleri sağladığı; ölçütleri tam olarak sağlayamadığı durumda ise söz konusu bileşende sorun yaşadığı şeklinde değerlendirme yapılmıştır.

Tablo 4

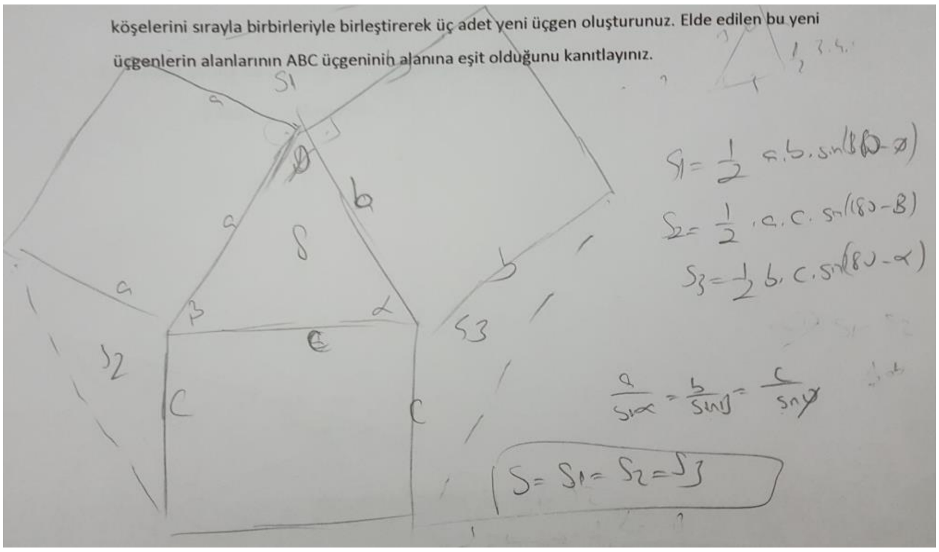
Öğrencilerin Kanıt Yapma Sürecinin Habermas Akılcı Davranış Teorisi Bileşenlerine Göre Analizinde Göz Önüne Alınan Ölçütler

Tema	Ölçüt	Açıklama	Örnek
Epistemik Bileşenin Modelleme Gereklilikleri	Kanıt yapma sürecinde öğrencinin kurduğu denklemin, oluşturduğu fonksiyon ifadesinin ya da cebirsel ifadelerin, çizdiği grafiğin, sayı doğrusunun ya da şeklin, yaptığı tablonun doğru ve geçerli olması. Öğrencinin kanıt yapma sürecinde matematiksel açıdan doğru ve geçerli bir model kullanması, bu modeli okuyucuya ya da dinleyiciye doğru sunması.	Modellenen durum ve bu durumun cebirsel/geometrik modeli arasındaki tutarlılıktır. Kanıtı yapılacak ifadeye ya da çözülecek problem durumuna ilişkin doğru modelin kurulmasıdır. Bu model cebirsel bir denklem, bir fonksiyon ifadesi, grafik, iki ya da üç boyutlu geometrik şekil olabilir.	Öğrencinin ifadenin kanıtını yaparken kullandığı Sinüs teoremini doğru yazabilmesi. Bir fonksiyonun bir noktada türevli olup olmadığını incelerken fonksiyonun bir noktada türevli olmasına ilişkin formel tanımı tam ve doğru yazabilmesi. Bir fonksiyonun belli bir noktada türevli olup olmadığını fonksiyonun grafiğini kullanarak incelemesi; bunu yaparken fonksiyonun grafiğini doğru çizmesi ve grafiğe o noktada çizdiği teğet doğrusunun eğimini fonksiyonun o noktadaki türevi ile doğru ilişkilendirebilmesi.
Epistemik Bileşenin Sistemik Gereklilikleri	Kanıt yapma sürecinde öğrencinin işlem hatası yapmaması, kuralları doğru uygulaması, denklemleri ya da eşitsizlikleri doğru çözmesi	Matematiksel kuralları, teoremleri ve işaretler sistemini doğru kullanmak; eşitlikleri ya da eşitsizlikleri doğru çözebilmek; süreçte işlemsel aktiviteyi doğru yürütübilmektir.	Öğrencinin Sinüs teoremi ile bir üçgenin alanını hesaplarken, bu üçgenin iki kenar uzunluğunu ve bu kenarlar arasında kalan açının Sinüs değerini doğru çarpabilmesi ve bulduğu sonucu 2'ye doğru bölebilmesi.
Teleolojik Bileşen	Öğrencinin kanıt yapma sürecinde kullandığı teoremin, bilginin, matematiksel kuralın ya da tanımın verilen ifadenin kanıtı için işe yarar nitelikte olması; yani öğrencinin seçtiği ve kullandığı araç ile amacına ulaşması.	Kanıt yapmak ve süreci amaca uygun şekilde sonuçlandırmak için uygun, gerekli ve doğru araçların seçilmesini ve uygulanmasını gerektirir.	Sinüs teoreminin kullanılması gereken bir kanıt yapma sürecinde öğrencinin bunu fark edebilmesi ve tüm bildiği teoremler içinden Sinüs teoremini kullanması gerektiğini anlayabilmesi ve bu teoremi süreçte araç olarak kullanmayı seçmesi ve kullanabilmesi.
İletişim Bileşeni	Kanıt yapma sürecinde formel dilin uygun, doğru ve geçerli şekilde kullanımı, sürecin metinsel olarak	Öğrencinin kanıt yapma sürecinde standart notasyonları yerinde ve doğru	Öğrencinin yazılı kanıt yapma sürecinde matematiğin sembolik dilini, notasyonları, işaretler sistemini uygun ve doğru

	okuyucuya anlaşılır bir dille ve neden-sonuç ilişkisi içerecek şekilde sunulması, sürecin dinleyiciye anlaşılır bir dille, matematiksel olarak geçerli ve doğru şekilde anlatılması.	şekilde kullanması, cebirsel ifadelerin okunmasını ve manipülasyonunu kolaylaştırmak için matematiksel kurallara ve kriterlere uymasıdır.	şekilde kullanabilmesi; süreçte yer yer metinsel açıklamalar yaparak okuyucunun süreci daha rahat anlayabilmesini ve takip edebilmesini sağlayabilmesi; ürettiği süreci bir arkadaşına ya da öğretmenine anlaşılır ve doğru bir dille aktarabilmesi, öğrencinin tüm bunları yaparken süreci doğru ve amacına uygun şekilde yürütebilmesi.

Öğrencilerin yazılı kanıt yapma süreçleri Habermas akılcı davranış teorisi bileşenlerine göre analiz edildikten sonra yazılı verilerden elde edilen sonuçların teyid edilmesi ve öğrencilerin kanıt yapma sürecinde yaşadıkları zorlukların daha net ortaya çıkarılması amacıyla yapılan yarı yapılandırılmış görüşme verileri araştırmacı tarafından çözümlenmiştir. Çözümleme sürecinde, öğrencilerin görüşme sürecinde söyledikleri yazıya aktarılmış ve sözlü iletişim yoluyla ortaya koydukları ürün, Habermas akılcı davranış teorisi bileşenlerine göre analiz edilmiştir. Bu süreç yaklaşık bir ay sürmüştür. Öğrencilerin görüşme sürecindeki söylemleri doğrudan alıntılar yoluyla okuyucuya sunulmuş ve elde edilen sonuçlar, yazılı kanıt yapma süreçlerinin analiz sonuçları ile karşılaştırılarak okuyucuya aktarılmıştır.

Öğrencilerin kanıt yapma sürecinin analizine ilişkin açıklayıcı bir örnek sunmak adına tez kapsamında kullanılan “Bir ABC üçgeni veriliyor. Bu üçgenin her bir kenarı üzerine tümüyle üçgenin dışında kalacak ve bir kenarı üçgenin o kenarına eşit olacak şekilde üç adet kare çiziniz. Bu karelerin boşta kalan köşelerini sırayla birbirleriyle birleştirerek üç adet yeni üçgen oluşturunuz. Elde edilen bu yeni üçgenlerin alanlarının ABC üçgeninin alanına eşit olduğunu kanıtlayınız” uygulama sorusu için üretilmiş bir kanıt yapma sürecinin analizinin nasıl yapıldığı aşağıda detaylıca anlatılmaktadır. Şekil 3’te öğrencinin kanıt yapma sürecine yer verilmektedir.



Şekil 3. Öğrencinin kanıt yapma süreci

Öğrenci kanıt yapma sürecinde verilenlere uygun ve doğru şekli çizebilmiş ve şekil üzerinde açılar arasında doğru ve amacına uygun düzenlemeler yapabilmiştir. Bunun yanı sıra, verilen ifadeyi kanıtlamak amacıyla Sinüs teoremini kullanarak şekildeki üçgenlerin alan denklemini/modelini doğru kurabilmiştir. Bu nedenle, öğrenci epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin gerekliliklerini sağlamaktadır. Öğrenci süreçte amacına uygun ve kendisini sonuca götürecek nitelikte bir araç seçtiğinden ve bu aracı doğru kullanabildiğinden teleolojik bileşenin gerekliliklerini de sağlamıştır. S_1, S_2 ve S_3 olarak belirlediği üçgenlerin alanının S ile gösterdiği ortadaki üçgenin alanına eşit olduğunu ifade eden öğrencinin, $S = S_1 = S_2 = S_3$ şeklinde bir sonuca ulaştığı görülmektedir ancak öğrenci S ile belirlediği üçgeninin alan denklemini kurmadan ve bu üçgenlerin arasındaki ilişkiyi açıkça göstermeden bu sonuca ulaşmıştır. Bu durum, öğrencinin iletişim bileşeninin gerekliliklerini sağlayamadığını göstermektedir. Öğrenci, her ne kadar sonuca ulaşmış gibi görünse de, süreçte attığı adımları okuyucuya anlaşılır şekilde sunmamış ve bu sonuca nereden ulaştığını açıklamamıştır. Öğrencinin iletişim bileşeninde yaşadığı sorunun, epistemik bileşendeki bir eksikliğinden kaynaklanıp kaynaklanmadığını belirlemek için öğrenci ile görüşme yapılması gerekmektedir. Aşağıda yapılan görüşmede öğrencinin söylemlerinden bir alıntıya ve bu alıntıda yer alan verilerin analizinin Habermas akılcı davranış teorisi bileşenlerine göre nasıl yapıldığına ilişkin açıklamaya yer verilmektedir.

> Araştırmacı: Bu üçgenlerin alanlarının eşit olduğu sonucuna nereden ulaştınız?

Öğrenci: Ben S'nin alanını yazmamışım… Nerede? Evet, yazmamışım. Şimdi şöyle düşündüm aslında. S'nin alanını da açılarını kullanarak yine Sinüs teoreminden yazsam S_1, S_2 ve S_3 ün alanı ile aynı çıkacak.

Araştırmacı: Tam olarak nasıl olduğunu anlatabilir misiniz?

Öğrenci: $\sin(180-\varphi)=\sin(\varphi)$ olduğundan mesela φ açısını ve b, c kenarlarını kullanarak S'nin alanını yazsam; oradan direk aslında $S = S_1$ çıkıyor. Bu tamamen şu şeyden işte; $\sin(180-\varphi)=\sin(\varphi)$ eşitliğinden. Bunu diğer açılardan ve kenarlardan yapsak yani S'nin alanını diğer açıları kullanarak yazsak, hesaplasak bu sefer de S_2 ve S_3 ile aynı çıkacak. Durum bu… Yani bunların hepsinin alanı S'ye eşit; dolayısıyla da hepsi aslında birbirine eşit. O yüzden ben de onu yazdım.

Araştırmacı: Bu düşündüklerinizi kâğıt üzerine not etmediğinizi görüyorum.

Öğrenci: Evet, ben çok kafadan yapmışım. Bulunca da direk yazmışım. Ama açık diye yani. Herkes anlar diye düşündüm.

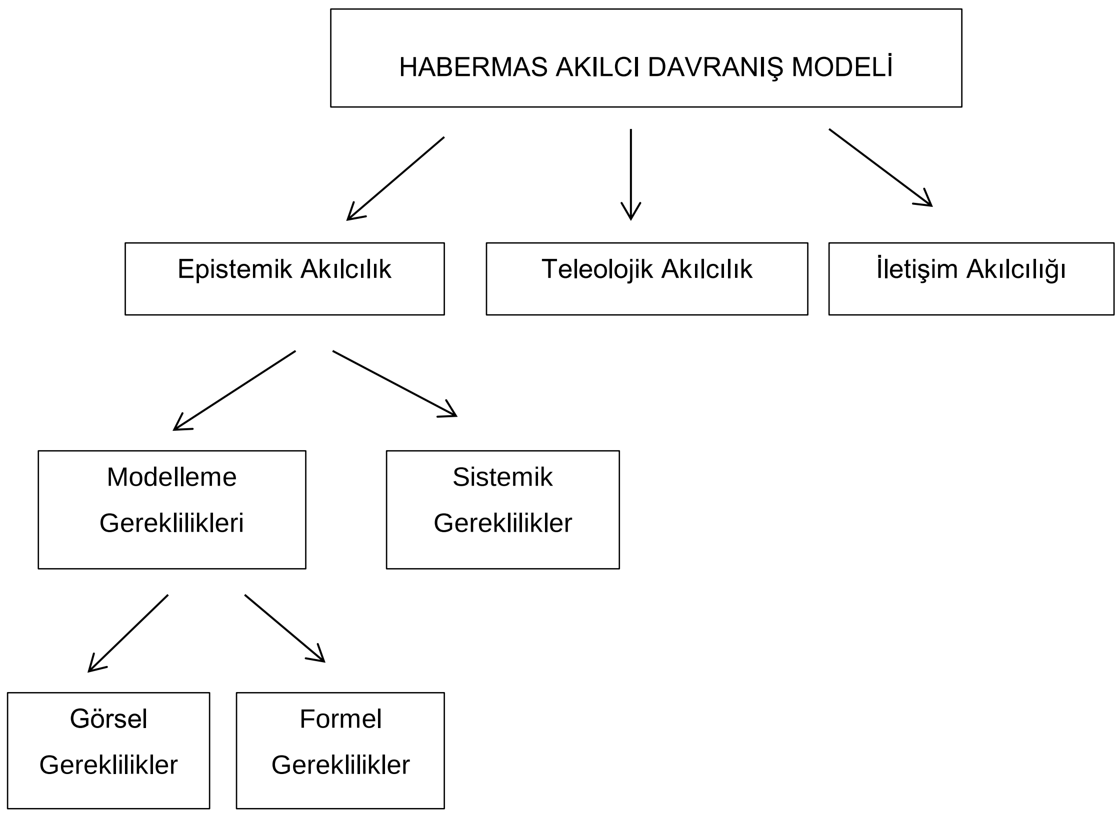
Öğrencinin söylemlerinden süreçte amacına ulaşmak için doğru bilgileri uygun şekilde kullanabildiği görülmektedir. Bu durum, öğrencinin Habermas akılcı davranış teorisine göre epistemik ve teleolojik bileşenin gerekliliklerini sağladığına ilişkin saptamamızı desteklemektedir. Diğer yandan $\sin(180-\varphi)=\sin(\varphi)$ eşitliğini kâğıt üzerine not etmediği ancak aslında bu eşitliği doğru bildiği ve uyguladığı anlaşılmaktadır. Bu bağlamda, öğrencinin "φ açısını ve b, c kenarlarını kullanarak S'nin alanını yazsam; oradan direk aslında $S = S_1$ çıkıyor" söyleminden de anlaşıldığı gibi, sürecin son aşamasında attığı adımları aslında doğru ve bilinçli şekilde zihninde yapılandırdığı ancak bunları kâğıt üzerinde okuyucuya sunmadığı dikkat çekmektedir. Bu durum, öğrencinin epistemik ve teleolojik bileşende sorun yaşamadığını ancak okuyucuya süreci anlaşılır ve açık bir dille adım adım anlatamadığından iletişim bileşeninde sorun yaşadığını göstermektedir.

Yukarıda anlatıldığı şekilde öğrencilerin yazılı kanıt yapma süreçleri ve görüşme verileri Habermas akılcı davranış teorisi bileşenlerine göre analiz edildikten sonra geometri ve cebir alanında elde edilen sonuçlar karşılaştırılmış; öğrencilerin bu alanlarda kanıt yaparken yaşadıkları zorluklar arasındaki benzerlikler ve farklılıklar belirlenmiştir.

Bölüm 4
Bulgular ve Yorumlar

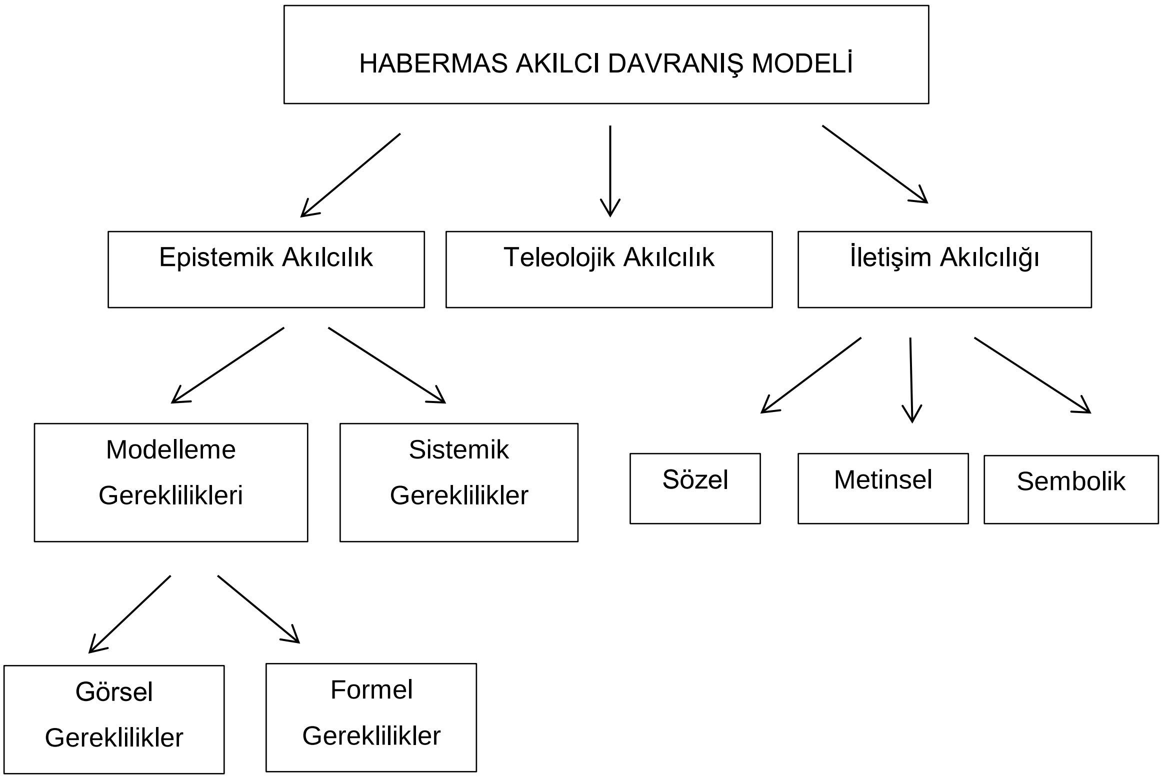
Pilot çalışma ve esas uygulamalar kapsamında yapılan analizlerde, Habermas akılcı davranış teorisinin şimdiye kadar alan yazında karşılaşılmayan yeni alt bileşenlerine ihtiyaç duyulmuştur. Sorularda verilenler çerçevesinde uygun şekli çizmek ve söz konusu şekle ilişkin denklemi yazmak Habermas akılcı davranış teorisinde epistemik bileşenin alt bileşenlerinden modelleme bileşenine karşılık gelmektedir. Diğer yandan, modelleme bileşeni tek başına hem doğru şekli çizme hem de şekle uygun denklemi yazma yeterliğini karşılamakta çok genel kalmaktadır. Ayrıca koşullara uygun şekli çizebilme ve bu şekle uygun denklemi yazabilme becerilerinin birbirleri ile ilişkili ancak birbirinden farklı iki yeterlik olduğu bu çalışmada analiz edilen kanıt yapma süreçlerinde açıkça görülmüştür.

Şekli doğru çizebilen ancak denklemi doğru kuramayan ya da şekli yanlış çizen ancak çizdiği şekle uygun denklemi doğru kurabilen öğrencilerin varlığı, bu görüşümüzü desteklemektedir. Bu nedenle, bu iki yeterliği tek isim altında toplamak ve birbirlerine bağımlı kabul etmek de mümkün değildir. Bu durum, araştırma kapsamında analizleri daha detaylı ve doğru yapmak adına Habermas akılcı davranış teorisini ruhuna sadık kalacak şekilde genişletme ve modele yeni alt bileşenler ekleme ihtiyacını doğurmuştur. Bu ihtiyacı karşılamak için sorularda verilen koşullara uygun şekli çizebilme yeterliği “görsel gereklilik (visual requirement)” adı altında; şekle uygun denklemi kurabilme yeterliği ise “formel gereklilik (formal requirement)” adı altında Habermas modeline epistemik bileşenin alt bileşenlerinden modelleme gereklilikleri içine yerleştirilmiştir (Şekil 4).



Şekil 4. Modelleme gerekliliklerinin yeni alt bileşenleri.

Diğer yandan öğrencilerin yazılı olarak ürettikleri kanıt yapma süreçleri ve görüşme verileri analiz edildiğinde, iletişim bileşeninin de alt bileşenlerinin ortaya çıkabileceği fark edilmiştir. Kanıtlama sürecinde matematiğin sembolik dilini yeterli düzeyde kullanabilen öğrencilerin yanı sıra sembolik dili yeterli düzeyde kullanamayan ancak kanıtlama sürecini görüşme sırasında sözlü olarak açık biçimde anlatabilen öğrenciler olduğu görülmüştür. Bazı öğrencilerin ise formel bir kanıt üretmek yerine attığı adımları metin yazma yoluyla açıklamayı tercih ettiği görülmüştür. Bunun üzerine, öğrencilerin verilen bir ifadenin kanıtını bir başkasına sözlü olarak anlatırken kurduğu iletişimdeki yeterliği *"sözel iletişim"*; kâğıt üzerinde kanıt yapma sürecinde kullandığı adımları kelimelerle yazarak anlatması konusundaki yeterliği *"metinsel iletişim";* süreci sembolik dil ve notasyon kullanarak yapılandırma konusundaki yeterliği ise *"sembolik iletişim"* alt bileşeni adı altında incelenmiştir. Böylece Şekil 5'te verildiği gibi, Habermas akılcı davranış modelinin iletişim bileşeninin üç yeni alt bileşeni oluşturulmuştur.



Şekil 5. İletişim bileşeninin alt bileşenleri.

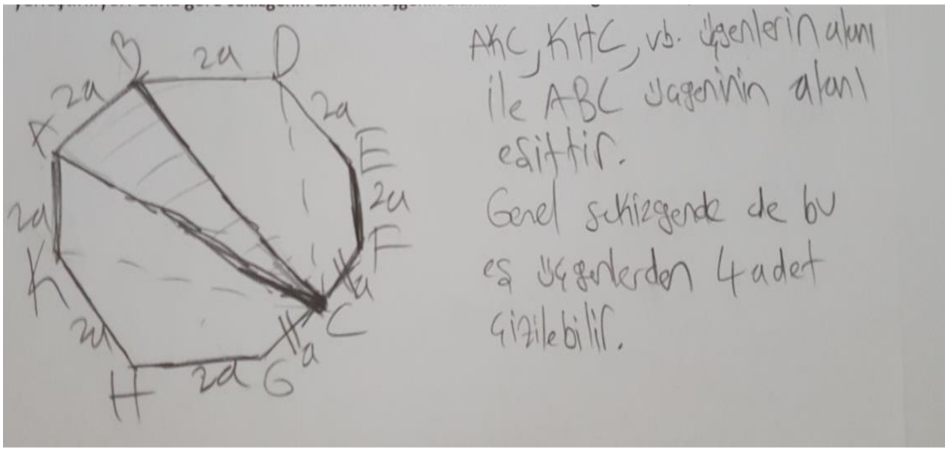
Bu bölümün devamında esas uygulamada geometri alanında öğrencilerin ürettiği kanıt yapma süreçlerinin ve görüşmelerde elde edilen verilerin Habermas akılcı davranış modeli bileşenlerine göre analiz sonuçlarına yer verilecektir.

Geometri Alanında Yapılan Uygulamalarda Elde Edilen Bulgular ve Yorumlar

Sekizgen sorusu. Bu soru öğrencilere aşağıda verilen şekilde sunulmuştur:

“Bir düzgün sekizgenin içine bir ABC üçgeni, üçgenin AB kenarı sekizgenin bir kenarı ile çakışık ve C tepe noktası bu kenarın tam karşısındaki kenarın orta noktası olacak biçimde yerleştiriliyor. Buna göre, sekizgenin alanının üçgenin alanının 4 katı olduğunu kanıtlayınız (Nesin, 2010).”

Bu soru, öğrencinin soruda verilenlere uygun şekli çizmesini ve şekli kullanarak soruda belirtilen ifadeyi kanıtlamasını gerektirmektedir. Öğrencilerden bazılarının soruda özelliği verilen şekli doğru çizdiği, ancak şekil üzerinde gerekli düzenlemeleri doğru şekilde yapamadığı görülmüştür. Bu öğrencilerden birinin şekil üzerindeki hatalı akıl yürütmelerine ve dolayısıyla tamamlayamadığı kanıt yapma sürecine Şekil 6’da yer verilmektedir.



Şekil 6. Epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin görsel gereklilik alt bileşeninde eksiklik.

Öğrenci şekil üzerindeki AKC, KHC ve ABC üçgenlerinin alanlarının eşit olduğunu düşünmektedir ancak ne şekil üzerinde ne de yazdığı açıklama metninde bu iddiasını destekleyen geçerli ve doğru hiçbir matematiksel dayanak sunmamaktadır. Diğer yandan, öğrencinin ortaya koyduğu bu iddiası matematiksel açıdan doğru değildir. Öğrenci şekil üzerinde doğru ve gerekli düzenlemeleri yapamadığından, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin görsel gerekliliklerini sağlayamamıştır. Öğrencinin şekli amacına uygun olacak şekilde doğru ve yeterli düzeyde kullanamaması, söz konusu üçgenlerin alanlarının eşit olduğuna ilişkin yanlış bir iddia ortaya koymasına ve amacına uygun modeli/denklemleri kurgulayamamasına yol açmıştır. Bu bağlamda, öğrencinin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin görsel yeterliği sağlama konusundaki eksikliğinin, formel gereklilikleri sağlama konusunda yeterliğini de olumsuz etkilediğini ve öğrencinin formel yeterlikler konusunda sorun yaşamasına yol açtığı söylenebilir.

Öğrenci, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninde yaşadığı sorunun bir sonucu olarak, soruda verilen ifadenin kanıtı için gerekli ve doğru yolu bulamamıştır. Bu durum, epistemik bileşenin modelleme alt bileşenindeki eksiklerin, Habermas akılcı davranış teorisinin teleolojik bileşeninde de sorunlara yol açabildiğini göstermektedir.

Hem epistemik bileşende hem de teleolojik bileşende eksikleri olan öğrenci, kanıt yapma sürecini tamamlayamamıştır. Öğrencinin süreç boyunca matematiğin formel dilini kullanamadığı, şekil üzerinde ve yazdığı açıklamada amacına uygun şekilde ve yeterli düzeyde sembol ve notasyon kullanımınına yer vermediği dikkat çekmektedir. Bu nedenle, öğrencinin iletişim bileşeninin sembolik iletişim alt bileşeninde eksikleri olduğu düşünülmektedir. Yazdığı metinsel açıklamada da akıl yürütmelerini, attığı adımları ve iddialarını anlaşılır ve yeterli düzeyde aktaramadığı görülen öğrenci, iletişim bileşeninin metinsel iletişim alt bileşeninde de sorun yaşamıştır. Yapılan görüşmede, sözel olarak da kendisini ifade etmekte ve süreçte yaşadığı sorunları belirlemede, eksiklerini görmede ve bunların nedenleri araştırmada ve açıklamada yetersiz kalan öğrencinin sözel iletişim alt bileşeninde de yetersiz olduğu belirlenmiştir. Yapılan görüşmede öğrencinin bu durumunun saptanmasını sağlayan görüşme verilerine yer verilmektedir.

Araştırmacı: Bu soruda neler yaptığınızı bana açıklayabilir misiniz?

Öğrenci: Bir bakmam lazım bir saniye… Hımm, tamam ben burada şu üçgenlerin (AKC ve KHC üçgenlerini gösteriyor) alanlarının ABC üçgeni ile aynı olduğunu düşünmüşüm.

Araştırmacı: Yine öyle olduğunu düşünüyor musunuz?

Öğrenci: Yani, evet… Öyle görünüyor…

Araştırmacı: Öyle görünüyor olmaları bunu söyleyebilmeniz için yeterli mi?

Öğrenci: Yani aksini söylemek mümkün mü? Bir bakayım… Bilmiyorum yüksekliklerini çizsem… Yani tabanları aynı… Yükseklikleri? Yükseklikleri pek aynı görünmüyor… Hımm, sanırım bunların alanları eşit değil… Neden böyle demişim ki? Bilmiyorum…

Araştırmacı: “Genel sekizgende de bu üçgenlerden dört tane çizilebilir” şeklinde bir ifade kullanmışsınız. Burada ne demek istediğinizi bana şekil üzerinde açıklar mısınız?

Öğrenci: Yani işte bu üçgenlerin alanları eşit diye düşünmüşüm ben… Yani öyle düşününce bunlardan burada… Aaaa… Hayır… Bir saniye… Dört tane demişim… Yanlış saymışım (Gülüyor)… Yok, burada bu üçgenlerden çizersek yani işte sanırım yedi tane oluyor… 1, 2, …, 7. Evet, 7 tanelermiş. Olmamış yani şey yapmışım… Yanlış gördüm herhalde…

Araştırmacı: AKC ve KHC üçgenlerinin eş olduğunu söylemişsiniz. Eş olduklarına nasıl karar verdiniz?

Öğrenci: Şimdi bu üçgenlerin tepe açıları eşit… Çünkü aynı noktadan çıkartmışız bu kenarları. Dolayısıyla bu açılar eşit olur. Tepe açıları eşit… Karşılarındaki tabanlar da aynı… 2a… Eşit açıların karşısında eşit kenarlar olunca eş oluyordu üçgenler… Ben bunu düşündüm ve buradan da eş olduklarını anladım…

Araştırmacı: Eş olduklarını söylemeniz için üçgenlerin bir açısının ve o açının karşısındaki kenarın eşit olması yeterli mi?

Öğrenci: Diğer kenarlara ve açılara da bakmam lazım. Bakmamış mıyım ben? Bu kadar mı yazmışım? Şimdi bir baksam? Diğer kenarları da (BC ve CD'yi gösteriyor) bu noktadan (C'yi gösteriyor) çıkıyor diye sanırım eşit aldım ben. Tüm kenarlar eşit olmalı tabi… Bunlar eşit gibi de değil hiç… Yani tabanlar aynı… Tepe açısı da aynı olunca öyle diyesim geliyor. Açı falan olsa belki yorum yapacağım ama hiç açı yok ki… Yani nasıl hesaplayayım ben bu kenarları?

Araştırmacı: Elinizde bu üçgenlerin eş olduklarına dair yeterli veri var mı?

Öğrenci: Yok işte…

Araştırmacı: O zaman sizce ne yapmalıyız?

Öğrenci: Bilmiyorum yani tek aklıma gelen bu üçgenler eş gibi duruyor alanları da eşit olur deyip oradan gitmek…

Araştırmacı: Ama az önce eş olmadıklarına karar vermiştiniz.

Öğrenci: Evet…

Araştırmacı: O zaman galiba buradan devam edemeyeceksiniz…

Öğrenci: Evet… Ama başka ne yapabilirim ki yani?

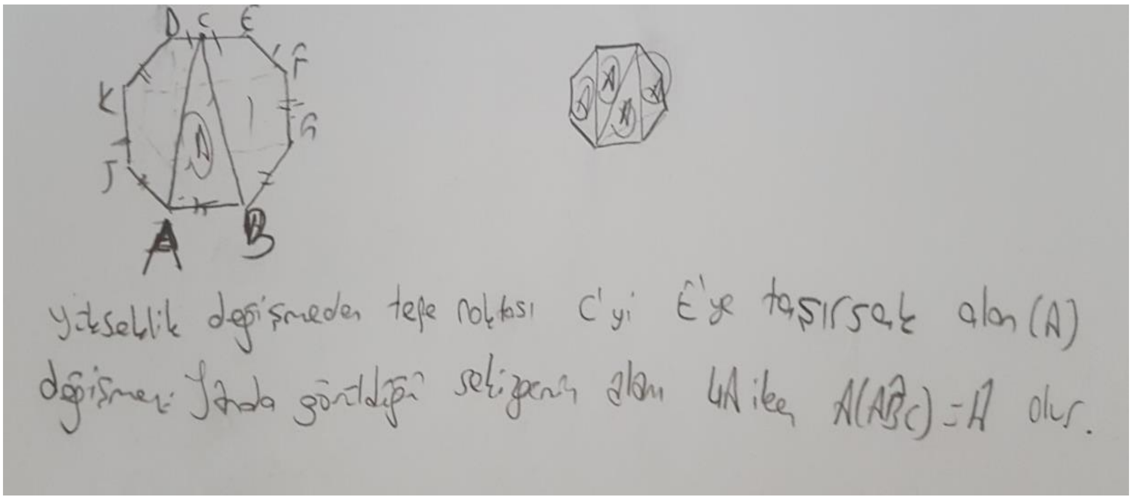
Araştırmacı: Biraz daha düşünseniz, şekil üzerinde belki başka bir yol aklınıza gelir. İsterseniz silip üzerinde temizce çalışabilirsiniz…

Öğrenci: Yani başka ne yapılabilir bilmiyorum ki… Aklıma başka bir şey gelmiyor…

Öğrencinin görüşme sürecindeki aktarımlarından üçgenlerde eşlik kriterini bilmediği görülmektedir. Üstelik sekizgenin bir kenarının orta noktası olan C noktasından sekizgenin köşelerine çizilen doğru parçalarının eşit olduğuna ilişkin yanlış bir iddiası da vardır. Bu durum, öğrencinin şekil üzerinde yanlış ve eksik bilgileri ile akıl yürüttüğünü göstermektedir. Veriler, öğrencinin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin görsel ve formel gerekliliklerinde sorun yaşadığı yönündeki düşüncemizi desteklemektedir. Öğrenci, yanlış bilgileri doğrultusunda amacına ulaşma yolunda yanlış araçlar seçmekte ve kullanmaktadır. Bu durum, epistemik bileşenin modelleme alt bileşenindeki eksiklerin, teleolojik bileşeni olumsuz etkilediği yönündeki görüşü doğrular niteliktedir.

Öğrencinin görüşme sürecinde, yazılı metninde ve şekil üzerinde sunduğu iddialarını dinleyiciyi tatmin edici nitelikte açıklayamaması ve iddialarının yanlışlığını net bir biçimde saptayamaması, iletişim bileşeninin sözel iletişim alt bileşeninde sorun yaşadığını göstermektedir. Öğrenci, şekil üzerinde yaptığı düzenlemelerin ve ürettiği iddiaların yanlış olduğunu ancak araştırmacının yardımı ile anlayabilmiş; geçerli ve doğru adımları atamamış, kanıt yapma süreci için gerekli doğru araçları görüşme sürecinde de bulamamıştır. Bu durumun temelinde öğrencinin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin görsel ve formel gerekliliklerindeki eksikleri olduğu düşünülmektedir.

Benzer bir duruma Şekil 7'de yer verilmektedir. Öğrenci soruda verilen kriterlere uygun bir düzgün sekizgen çizebilmiştir. Sekizgenin DE kenarının orta noktasını C ile göstermiş ve C köşesini E köşesine taşıdığını belirterek bir dik üçgen oluşturmuştur. Benzer şekilde C köşesini D köşesine taşıyarak oluşturduğu üçgenin alanı ile C köşesini E'ye taşıyarak oluşturduğu üçgenin alanının eşit olacağını belirtmiştir. Söz konusu üçgenlerin tabanları sekizgenin bir kenarının yarısı kadar olup eşittir. Üçgenlerin yükseklikleri olan AD ve EB kenarları da düzgün sekizgenin simetrik olmasından dolayı birbirine eşittir. Dolayısıyla öğrencinin ürettiği iddia doğrudur ancak öğrenci iddiasını ortaya koyarken kullandığı verileri süreçte açıklamamıştır. Bu durumu süreç boyunca devam ettiren ve iddalarının gerekçelerini sembolik ya da metinsel yolla ifade etmeyen öğrencinin, iletişim bileşeninin sembolik ve metinsel iletişim alt bileşenlerinde eksikleri olduğu belirlenmiştir.



Şekil 7. Epistemik bileşenin modelleme alt bileşenindeki eksikliğin teleolojik bileşen üzerindeki olumsuz etkisi.

Sürecin devamında öğrencinin soruda verilen ifadeyi kanıtlamak için matematiksel dayanağı olmayan bir iddia ürettiği görülmüştür. Öğrenci, düzgün sekizgen içinde ADE ve CEB üçgenleri ile birlikte AJKD ve EFGB yamuklarının oluştuğunu görmüş ve hiçbir matematiksel gerekçe sunmadan bu yamukların alanının ADE ve CEB üçgenlerinin alanları ile eşit olduğunu iddia etmiştir. Öğrenci bu iddiasını şekil üzerinde hiçbir düzenleme yapmadan ve herhangi bir model/denklem kurmadan yalnızca soruda verilen ifadeye ulaşmaya yönelik olarak üretmiştir. Öğrencinin yalnızca sonuca ulaşmaya yönelik ortaya koyduğu bu iddia aslında doğrudur ancak öğrenci bu iddiasını doğrulayacak ve geçerli hale getirecek verileri bulamamıştır. Bu durum, öğrencinin Habermas akılcı davranış teorisinin teleolojik bileşeninde eksikleri olduğunu göstermektedir. Bu eksikliğin temelinde, öğrencinin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin görsel gerekliliklerinde yaşadığı sorunlar olduğu düşünülmektedir. Öğrencinin yamukların ve üçgenlerin alanını hesaplamak için bu şekillerin tabanını ve yüksekliğini düzgün sekizgen üzerinde uygun semboller kullanarak isimlendirmesi ve bu sembollere dayalı olarak söz konusu şekillerin alan denklemlerini kurması; bu yolla soruda belirtilen üçgenin ve düzgün sekizgenin alanını ilişkilendirmesi beklenmektedir. Sürecin başlangıcında her ne kadar doğru bir adım atmış olsa da; devamında şekil üzerinde gerekli ve doğru düzenlemeleri yapamaması, öğrencinin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin görsel gerekliliklerini sağlayamadığını göstermektedir. Bu durum, öğrencinin amacına ulaşma yolunda gerekli modeli/denklemi de kurgulayamaması şeklinde sonuçlanmıştır. Epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin görsel ve formel gerekliliklerindeki eksiklerin bir sonucu olarak öğrenci, süreçte geçerli bir araç kullanamamış ve Habermas akılcı davranış modeline göre, teleolojik bileşende de sorun yaşamıştır.

Görüşme sırasında öğrenci, iddiasını yalnızca amaca ulaşmaya yönelik ürettiğini doğrulamıştır. Görüşme sürecinde öğrenciye söz konusu iddiasını doğrulamaya yönelik verileri bulması için fırsat verilmiştir ancak öğrenci uygun verileri yine bulamamıştır. Görüşme genelinde öğrencinin dinleyiciyi tatmin edici nitelikte açıklama yapamadığı görülmektedir. Bu durum, öğrencinin iletişim bileşeninin sözel iletişim alt bileşeninde de eksikleri olduğunu göstermektedir.

> Araştırmacı: Verilen ifadeyi nasıl kanıtladığınızı anlatır mısınız?
>
> Öğrenci: Tabii ama önce bir bakmam lazım. Tamam, hatırladım evet… Şimdi zaten şu üçgenler aynı (DAB ve EAB üçgenlerini gösteriyor). Tabanları aynı. Tepe noktası şurada hareket ediyor (DE doğru parçasını gösteriyor). Yanı taban aynı, tepe noktası da aynı doğru üzerinde olunca bunların yükseklikleri de otomatik olarak eşit oluyor. Yani bu üçgenlerin alanları aynı. Oradan gittim. Burada göstermişim zaten. Soruda da benden ne istiyordu? Sekizgenin alanının üçgeninin alanının 4 katı olması. Hımm… Hatırladım, ben bunu bulamadım… Yani aslında yapamadım ama soruda böyle 4 katı deyince böyle yaptım.
>
> Araştırmacı: Ne yaptığınızı biraz daha ayrıntılı açıklayabilir misiniz?
>
> Öğrenci: Yani şöyle. Bu üçgenin alanına A dersem bu sekizgenin alanının 4A olduğunu kanıtlamamı istiyor bu soru benden. Ben de bundan yola çıktım. Yani sekizgenin alanını 4A olarak aldım. Bu üçgenlerin alanları A-A olduğu için burası toplamda 2A oldu. Geriye 2A kaldı. Ee, bu yamuklar da aynı. Yani bu yamuklar da A-A olmalı. Ben de o yüzden böyle yazmışım. Sonra bunu göstermek istedim ama yapamadım.

Öğrencinin verilen ifadeyi kanıtlamak için ifadeyi geçerli kabul ettiğini ve buradan hareket ettiğini görmekteyiz. Öğrenci sekizgenin alanının söz konusu üçgenin alanının 4 katı olabilmesi için yamukların alanının da üçgenin alanı kadar olması gerektiğini fark etmiştir ancak bu düşüncesini doğrular nitelikte bir veri bulamamıştır. Öğrencinin bu söylemleri epistemik bileşenin modelleme alt bileşenininde ve teleolojik bileşende eksikleri olduğuna ilişkin düşüncemizi destekler niteliktedir. Öğrenci de süreci tamamlayamadığının farkındadır ancak epistemik bileşenin modelleme alt bileşenindeki eksiklerinden dolayı ifadenin kanıtına yönelik doğru aracı seçememekte ve bundan dolayı teleolojik bileşen yönünden de sorun yaşamakta ve başarısız olmaktadır.

> Araştırmacı: Yani kanıtlama süreciniz yarım mı kaldı?
>
> Öğrenci: Evet, A-A olması gerektiğini anladım ama gösteremedim.
>
> Araştırmacı: Şimdi tekrar bakınca bir şeyler geliyor mu aklınıza?
>
> Öğrenci: Yani ben yamuğun alanını nasıl hesaplarım bilemiyorum. Şimdi bu yamuğun (EFGB yamuğunu gösteriyor) yüksekliğini çeksem mesela. Bununkini de (AJKD yamuğunu gösteriyor) çeksem mesela. Buralar dik. Ama ben bu yükseklikleri nereden bulayım ki. Bunların aslında şu kısa tabanı sekizgenin bir kenarı kadar. Aa, aslında bu kenarlar da sekizgenin kenarı kadar. Uzun kenarı da üçgenin yüksekliği kadar. Bir ilişki mutlaka var, belli, çok ortakları var ama ben bunu bulamam.
>
> Araştırmacı: İsterseniz alan denklemlerini yazın, size ne gerekiyor alanları hesaplamak için?
>
> Öğrenci: Yani, tamam olur. Üçgenlerinki zaten tamam ama ben sanırım yamuğun alan formülünü hatırlamıyorum.

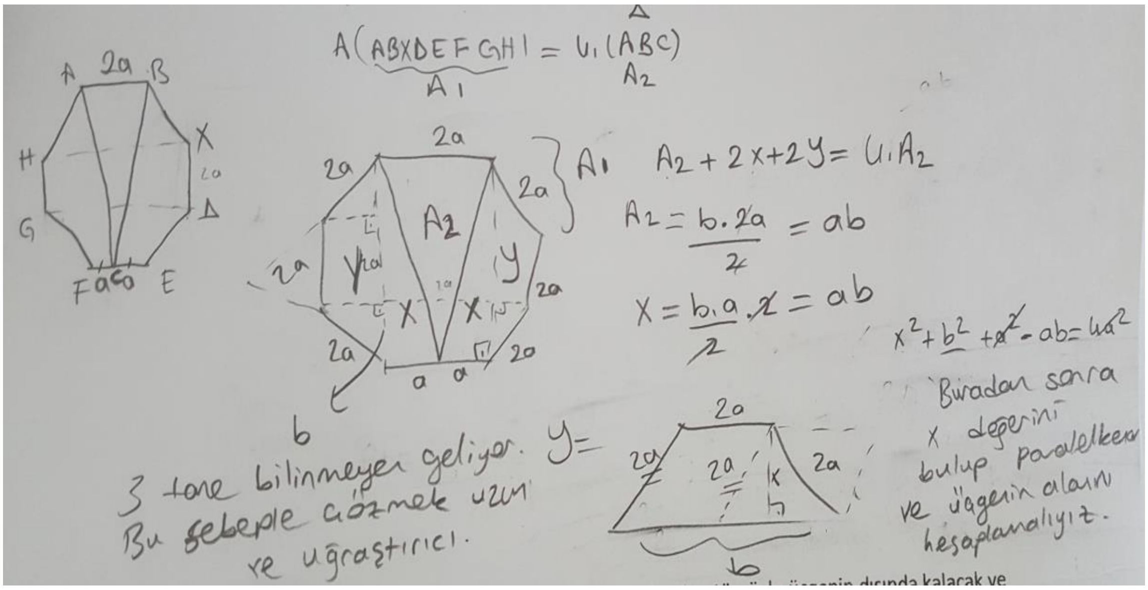
Öğrencinin bu söylemi, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerinde eksikleri olduğuna ilişkin düşüncemizi desteklemektedir. Öğrenci yamuğun alan formülünü bilmediğinden, sürece devam edememektedir; çünkü yamuğun alanını hesaplamak için neye ihtiyaç duyduğu, yani amacına ulaşmak için geçerli ve doğru araçların neler olduğunu, bilmemektedir. Bu durum, öğrencinin epistemik bileşeninin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerindeki eksiklerinin, seçimlerini de olumsuz etkilediğini ve teleolojik bileşen yönünden de sorun yaşamasına neden olduğunu bir kez daha göstermektedir.

> Araştırmacı: Ben yamuğun alan formülünü size versem, yapabilir misiniz?
>
> Öğrenci: Yani, denerim.
>
> Araştırmacı: Alt tabanının ve üst tabanının toplamının yüksekliği ile çarpımının yarısı.

> Öğrenci: Tamam (not ediyor). Anladım. Yani yamukların kısa tabanları sekizgenin bir kenarı kadar. Aslında buradan bir şey çıkabilir. Bir yazayım. Üçgenin alanı yani A; taban çarpı yükseklik bölü 2. Yani taban da sekizgenin bir kenarı kadar olduğundan mesela a desem. a çarpı h bölü 2; üçgenin alanı. Yamuğun alanı da kısa taban artı uzun taban yani kısa taban da sekizgenin bir kenarı kadar olduğuna göre a artı h çarpı. İşte sorun burada. Şimdi ben bu yamuğun yüksekliğini nereden bulacağım. Onu bilemiyorum. Yok, bulamıyorum maalesef.

Öğrenci epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin görsel ve formel gerekliliklerindeki eksiklerinden dolayı süreci tamamlayamamıştır. Yamuğun yüksekliğini bulmak için şekil üzerinde geçerli veri bulamamıştır. Bu durum, öğrencinin şekli amacına uygun şekilde kullanamamasından kaynaklanmakta ve geçerli aracı bulamaması ile sonuçlanmaktadır. Bir kez daha, öğrencinin epistemik bileşeninin modelleme alt bileşenindeki eksiklerinin, teleolojik bileşende sorun yaşamasına neden olduğu ve süreçte bir kez daha başarısız olduğu görülmektedir.

Şekil 8'de kanıt yapma sürecine yer verilen bir diğer öğrenci, düzgün sekizgenin içine soruda verilen kriterlere uygun olarak çizdiği üçgenin alanını A_2 ile göstermiştir. Tabanı sekizgenin bir kenarı kadar olan A_2'nin alanını, yüksekliğine b; sekizgenin bir kenarına $2\mathrm{a}$ diyerek a ve b cinsinden hesaplamıştır. Düzgün sekizgenin A ve F köşelerini; B ve E köşelerini birleştirerek iki dik üçgen daha oluşturmuş ve bu üçgenlerin tabanının sekizgenin bir kenarının yarısı kadar (a) ve yüksekliğinin A_2'nin yüksekliği kadar (b) olduğunu görmüş; alanlarını X ile göstererek X'i de a ve b cinsinden hesaplamıştır. Düzgün sekizgenin geri kalan kısmının iki eş yamuktan oluştuğunu gören öğrenci, düzgün sekizgenin alanının da üç üçgenin ve iki yamuğun alanlarının toplamı şeklinde a ve b cinsinden yazılabileceğini düşünmüş ve bu yolla düzgün sekizgenin alanı ile A_2 arasındaki ilişkiyi kanıtlamayı hedeflemiştir. Bu amaçla, eş yamukların alanını bulmak isteyen öğrenci, kâğıdının sağ alt kısmında görüldüğü gibi yamuklardan birinin içinde paralelkenar ve üçgen oluşturmuş ve buradan yamuğun alanını bulmayı istemiştir. Ancak yamuğun yüksekliğini (x); a ve b cinsinden yazamadığından yamuğun alanını, dolayısıyla düzgün sekizgenin toplam alanını a ve b cinsinden yazamamış ve amacına ulaşamamıştır.



Şekil 8. Teleolojik bileşendeki eksikliğin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gereklilik alt bileşeni üzerindeki olumsuz etkisi.

Öğrencinin düzgün sekizgenin içinde oluşturduğu yamukların alanını hesaplamaya çalıştığı son bölüme kadarki süreci incelendiğinde, soruda verilen koşullara uygun şekli çizebildiği ve şekil üzerinde doğru ve gerekli düzenlemeleri yapabildiği görülmektedir. Bu nedenle, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin görsel gerekliliklerini sağlamaktadır. Bunun yanı sıra, şekil üzerinde oluşturduğu üçgenlerin alanını bulmak amacıyla doğru denklemler/modeller kurmaktadır. Bu bağlamda, öğrencinin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerini sağladığını da söylemek mümkündür. Ancak öğrencinin bu bölüme kadar yaptığı seçimler, kullandığı araçlar, işlemler, şekil üzerindeki çizimleri ve düzenlemeleri doğru olmasına rağmen; yamuğun alanını hesaplamaya çalıştığı son adımında yamuğun yüksekliğini a ve b cinsinden yazma konusunda gerekli ve doğru aracı seçemediği ve dolayısıyla teleolojik bileşenin gerekliliklerini sağlayamadığı görülmektedir. Oysa eğer b'yi a cinsinden yazabilseydi; yamuğun yüksekliğini de a cinsinden yazabilecekti; A_2 yi ve düzgün sekizgenin toplam alanını da a cinsinden ifade edebilecek ve düzgün sekizgenin toplam alanı ile A_2 arasındaki ilişkiyi görebilecekti. Bu durum, öğrencinin kanıtı istenen ifadeye ulaşması yönünde kurması gereken yamuğun alan denklemini ve düzgün sekizgenin toplam alan denklemini kuramamasına ve dolayısıyla verilen ifadenin kanıtını yapma sürecinde amacına uygun denklemi kurmasını ve modeli oluşturmasını gerektiren epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerinde sorun yaşamasına neden olmuştur. Bu ise Habermas akılcı davranış modeline göre, öğrencinin teleolojik bileşendeki eksiklerinin, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerini sağlamasını olumsuz etkileyebildiğini göstermektedir.

Bunun dışında öğrencinin yamuğun yüksekliğini (x) hesaplamaya çalışırken, söz konusu yükseklik ile yamuğun içinde oluşturduğu dik üçgende Pisagor teoremini kullanarak x'i a ve b cinsinden ifade etmeye çalıştığı görülmektedir. Bu amaçla kurduğu denklemde dik kenarlardan biri olarak kullandığı $\frac{b-2a}{2}$ ifadesinin karesinin açılımını yanlış yaptığı dikkat çekmektedir. Öğrencinin söz konusu ifadenin açılımını kâğıda yazarak yapmak yerine zihninden yaptığı görülmektedir. Bu esnada işlem hatası yaptığı ve Habermas akılcı davranış modeline göre sistemik bileşende sorun yaşadığı düşünülmektedir. Bu duruma ilişkin değerlendirmemiz, öğrenci ile yapılan görüşme süreci sonunda netleştirilmiştir.

Öğrencinin kanıt yapma süreci, Habermas akılcı davranış modeline göre, iletişim bileşeninin gereklilikleri yönünden incelendiğinde, öğrencinin şekil üzerinde üçgenlerin, yamukların ve düzgün sekizgenin kenarlarını ve alanını sembolik dil kullanarak ifade edebildiği ve kurduğu denklemlerde sembolik dili doğru ve yeterli düzeyde kullanabildiği görülmüştür. Bu durum, Habermas akılcı davranış modeline göre, öğrencinin sembolik iletişim bileşeninde sorun yaşamadığını göstermektedir. Diğer yandan, öğrenci kanıt yapma sürecinin son adımında yaşadığı sorunu aktardığı açıklaması dışında, attığı adımları okuyucuya metin şeklinde açıklamalarla aktarma ihtiyacı duymamış; süreci daha ziyade matematiğin sembolik dilini kullanarak tamamlamıştır. Öğrencinin kanıt yapma sürecinin daha ayrıntılı analizi ve sözel iletişim bileşeni açısından değerlendirilmesi amacıyla öğrenci ile görüşme yapılmıştır. Görüşmede kanıt yapma sürecinde attığı adımları nedenleri ile birlikte anlaşılır ve açık bir dille araştırmacıya aktarabildiği görülmüştür. Aşağıda kanıt yapma sürecinin son adımında yaşadığı soruna ilişkin olarak söylemlerinden alıntılara yer verilmektedir.

> Öğrenci: Burada yamuğun alanını hesaplamaya çalıştım ama olmadı… x'i yazamadım. Aslında şurada denedim ama bir dakika bir daha bakayım… Evet, ben buradan sonrasını yapamadım. Çünkü yani bu

çok karışık bir denklem. Bence başka bir yolu olmalı ama bulamadım işte başka ne yapabileceğimi.

Öğrencinin söz konusu ifadeyi kanıtlamaya yönelik attığı son adımın geçerli bir yol olmadığının farkında olduğu ancak geçerli ve doğru aracı bulamadığı görülmektedir. Bu durum, Habermas akılcı davranış modeline göre, öğrencinin teleolojik bileşende sorun yaşadığına ilişkin görüşümüzü desteklemektedir.

Araştırmacı: Neden bu yolun işe yaramadığını düşünüyorsunuz?

Öğrenci: Çünkü bu denklem 3 bilinmeyenli. Üç bilinmeyenli denklemi çözemem yani. Buradan ben x'i çeksem bile çok karışık bir şey çıkacak. Oradan devam edemem. Devam etsem, yazsam yamuğun alanını… Oof yok, olmaz. Düzgün sekizgenin alanı çok karışık bir şey çıkar. Asla $4ab$ çıkmaz. O yüzden devam etmedim.

Araştırmacı: Peki, şimdi düşününce aklınıza başka bir yol geliyor mu?

Öğrenci: Yani ben buraya kadar çok emindim aslında çıkacağından. Kesin bir şeyler götürür birbirini geriye x için güzel bir şey bulurum diye düşündüm ama olmadı yani. Bir daha bakayım. Yani, yok benim bu x'i bulmam gerek. Sade bir şey çıkmalı. Oradan da sekizgenin alanını yazacağım ve çıkacak. Yani bu ama nasıl? Bilemiyorum.

Araştırmacı: Peki, şurada yazdığınız denkleme bakabilir miyiz? Bu denklemi nereden ve nasıl kurduğunuzu anlatabilir misiniz?

Öğrenci: Ben şuradaki dik üçgende (kanıt yapma sürecinin sağ alt köşesindeki yamuğun içinde oluşturduğu dik üçgeni gösteriyor) Pisagor teoremi yaptım. Oradan yazdım. x^2 artı bu kenarın (yamuğun içindeki ikizkenar üçgenin tabanının yarısını gösteriyor) karesi eşittir hipotenüsün karesi. Hipotenüs de $2a$; karesi de $4a^2$. Şu kenarı (yamuğun içindeki ikizkenar üçgenin tabanının yarısını gösteriyor) yazmamışım ama ikizkenar üçgende yüksekliği indirince tabanı ikiye böler. Oradan yazdım. Yani şurası (yamuğun alt tabanını gösteriyor) b olunca, şurası da $2a$ (eşkenar dörtgenin alt tabanını gösteriyor), geriye buraya (üçgenin tabanını gösteriyor) $b - 2a$ kalıyor. İkiye bölünce de $\frac{b-2a}{2}$ olmuş. Oradan bulmuşum. Kafadan yapmışım. Yazmamışım ama şimdi yazayım mı?

Araştırmacı: Olur aslında. Çünkü şuradaki açılımı nasıl yaptığınızı soracaktım. Yani bu kenarın $\frac{b-2a}{2}$ nin karesini alınca nasıl bir şey çıktı o kısma bakalım istiyorum.

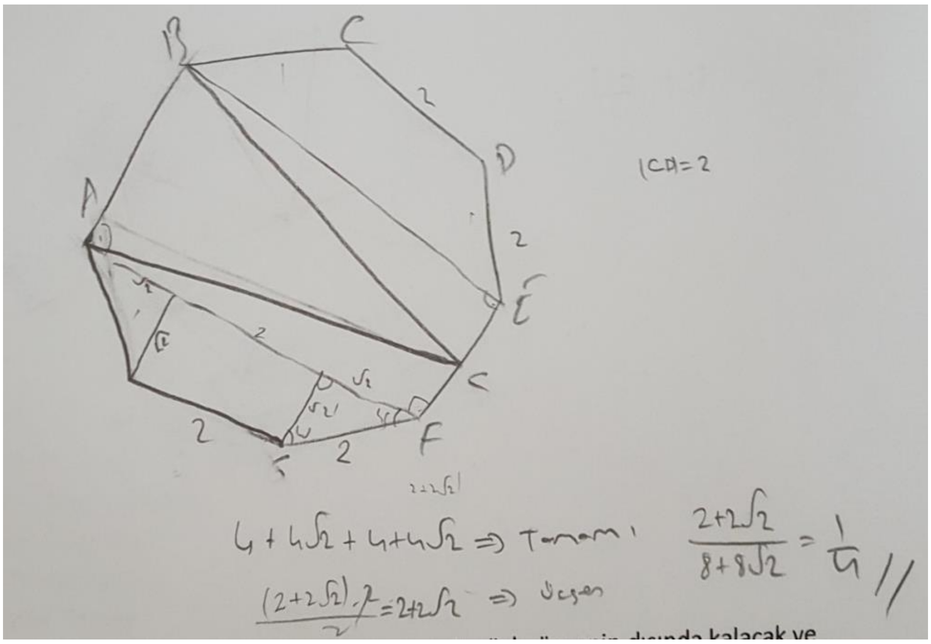
Öğrenci: Tamam. Şimdi açayım şurada. Alayım mı karesini?

Araştırmacı: Evet, lütfen.

Öğrenci: Tamam birincinin karesinden $\frac{b}{2}$ nin karesi artı $2a$'nın karesi ve çarpımlarının 2 katı. Aa, yanlış yapmışım ben burada. Bir daha bakayım. Evet, pardon yanlış yapmışım kâğıtta. Doğrusu şöyle: $\frac{b^2}{4} + a^2$ ve çarpımlarının iki katından $-ab$ oluyor. İşlem hatası yapmışım. Şimdi güzel bir şey çıkar mı acaba? Bir saniye bir daha deneyeyim devamında bir şey geliyor mu diye…

Öğrencinin son adımında bir tam kare ifadenin açılımını yaparken işlem hatası yaptığını fark ettiği ve hatasını düzelttiği dikkat çekmektedir. Bu durum, öğrencinin düzgün sekizgen içinde oluşturduğu yamuğun yüksekliğini (x) bulmak amacıyla Pisagor teoremine dayalı olarak kurduğu denklemde tam kare ifadenin açılımında işlem hatası yaptığına ve dolayısıyla Habermas akılcı davranış modeline göre sistemik bileşende sorun yaşadığına ilişkin saptamamızı desteklemektedir. Öğrenci görüşme sürecinin devamında tam kare ifadeyi bu kez doğru açarak elde ettiği ifaden de geçerli bir sonuca ulaşamamış ve soruda verilen ifadeyi kanıtlayamamıştır çünkü öğrenci yamuğun alt tabanı olan b kenarını a cinsinden yazma yoluna yine gitmemiş ve kanıt için gerekli ve doğru aracı görüşme sürecinde de bulamamıştır. Bu durum, öğrencinin Habermas akılcı davranış modeline göre teleolojik bileşende sorun yaşadığına ilişkin saptamamızı desteklemektedir.

Bazı öğrencilerin Habermas akılcı davranış modeline göre, kanıt yapma sürecinde iletişim bileşeninde sorunlar yaşadığı görülmektedir. Bu duruma ilişkin bir örneğe Şekil 9'da yer verilmektedir. Öğrenci, düzgün sekizgenin bir kenarına 2 cm diyerek soruda verilen ifadeyi kanıtlamaya çalışmaktadır.



Şekil 9. İletişim bileşeninde eksiklik.

Öğrencinin şekil üzerinde gerekli ve doğru düzenlemeler yaptığı, bu bağlamda epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin görsel gerekliliklerini sağladığı söylenebilir. Görsel bileşendeki gücü sayesinde, şekil üzerinde doğru adımlar atmakta ve bu gücünü işlem yapma becerisi ile birleştirerek amacına ulaşmak için şekil üzerinde kendisine gereken kenarları doğru hesaplamaktadır. Bu esnada, öğrencinin amacına uygun araçları doğru olarak seçtiği ve kullandığı görülmektedir. Bu bağlamda, Habermas akılcı davranış modeline göre, teleolojik bileşenin gerekliliklerini sağlamaktadır. Her ne kadar kâğıt üzerine kurduğu denklemleri/modelleri not etmese de, öğrencinin süreci incelendiğinde denklemleri/modelleri zihninde oluşturduğu ve ara işlemleri de zihninden yaparak yalnızca şekil üzerinde ilgili yerlere sonuçları not ettiğini görmekteyiz. Kağıt üzerinde net olarak denklemler/modeller görünmüyor olsa da, zihninde denklemleri/modelleri doğru oluşturduğu anlaşılan öğrencinin, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerini sağladığı söylenebilir. Ancak Habermas akılcı davranış modelinin epistemik ve teleolojik bileşenlerindeki gücünün etkisine kapılan öğrenci, süreçteki hiçbir adımının neden ve sonuçlarını açıklama ihtiyacı hissetmemiştir. Öğrencinin kanıtına bakıldığında, neyi niçin yaptığını ve hangi işlemle hangi sonucu bulduğunu anlamak oldukça zordur. Yaptığı işlemlerin neye ait olduğu ve ne bulduğu anlaşılmadığı gibi, şekil üzerinde kenar uzunluklarına ilişkin bulduğu sonuçların nereden geldiği de belli değildir.

Süreçte attığı adımlara ve elde ettiği sonuçlara ilişkin sembolik ya da metinsel hiçbir açıklama yoktur. Sürecin anlaşılması ancak konuyla ilgili yeterli düzeyde bilgiye ve matematik kültürüne sahip olmakla mümkündür.

Diğer yandan, öğrencinin belirli bir sayısal değer için yapılan kanıtın, genel kanıt olmadığını bilmediği görülmektedir. Öğrenci elde ettiği sonucun yalnızca bir kenarı 2 cm olan bir düzgün sekizgen için geçerli olduğunun farkında değildir ve bulduğu sonucu genelleme yoluna gitme ihtiyacı hissetmemiştir. Matematiksel bir kanıtın nasıl yapılacağını bilmeyen öğrencinin, Habermas akılcı davranış modeline göre, iletişim bileşeninin sembolik alt bileşeninde eksikleri olduğu düşünülmektedir. Yapılan görüşmede, öğrencinin soruda verilen ifadeyi kanıtlamak için sembol kullanımını gerekli görmediği ve bir sayısal değer üzerinden ifadenin doğruluğunu göstermenin yeterli olduğunu düşündüğü görülmektedir. Bu durum, öğrencinin iletişim bileşeninin sembolik iletişim alt bileşeninde sorun yaşadığına dair düşüncemizi desteklemektedir. Aşağıda öğrenci ile yapıdan görüşmeden alıntılara yer verilmektedir.

> Araştırmacı: Bu soruda verilen ifadeyi nasıl kanıtladığınızı anlatır mısınız?
>
> Öğrenci: Bir bakayım, bir dakika… Sekizgenin bir kenarını 2 cm olarak aldım. Evet, çünkü ikiye bölünmesi için. Çünkü burada C noktası orta nokta olması için bu kenarı (EF’yi gösteriyor) ikiye bölmem gerekecek. Tam bölünsün uğraşmayayım hem de küçük sayı olsun büyük sayılarla uğraşmayayım diye 2 olsun dedim. Sonra… BE ve AF dik.
>
> Araştırmacı: Neden?
>
> Öğrenci: Yani dik işte.
>
> Araştırmacı: Dik olmasının nedeni nedir yani?
>
> Öğrenci: Bu şekil (ABEF’yi gösteriyor) tam bir dikdörtgen.
>
> Araştırmacı: Evet ama neden?
>
> Öğrenci: Yani AB, EF’ye paralel ve eşit. AF de BE’ye paralel ve eşit. Öyle olunca dikdörtgen olur diye düşünüyorum.
>
> Araştırmacı: Bu kenarların paralel ve eşit olmaları bu açıların dik olduğunu söylemeniz için yeterli mi? Bu durumda şekil dikdörtgen olmak zorunda mı?

Öğrenci: Yani şeyden oluyor aslında… Şunlar eşit ya (BC, CD ve DE kenarlarını gösteriyor). Şunlar da eşit (sekizgenin diğer üç kenarını gösteriyor). O yüzden yani duruşundan kaynaklı. Mesela altıgende de öyle.

Araştırmacı: Her altıgende ya da her sekizgende bu durum olur mu?

Öğrenci: Hayır, hayır bu düzgün sekizgen olduğundan. Yani hepsinde olmaz, düzgün olanlarda olur.

Öğrencinin amacına yönelik doğru bir iddia ortaya attığı ancak bu iddiasının matematiksel nedenini araştırmacının sorularına verdiği cevaplar dışında açıklamadığı görülmektedir. Bu durum, öğrencinin iletişim bileşeninin sözel iletişim alt bileşeninde eksikleri olduğunu göstermektedir.

Araştırmacı: Peki, sonra ne yaptınız?

Öğrenci: Şurası da 45° oluyor.

Araştırmacı: Neden?

Öğrenci: Çünkü sekizgenin bir iç açısı 135°.

Araştırmacı: Nereden buldunuz?

Öğrenci: Hımm, buraya yazmamışım. Kafamdan yaptım. $\frac{(n-2)\times 180}{n}$ yaptım. Oradan buldum. 135° çıkıyor sonuç yapınca. Burası da 90° olunca geriye 45° kalıyor.

Araştırmacı: Peki, bu formülü her sekizgende iç açı bulmak için kullanabilir miyiz?

Öğrenci: Hayır, sadece düzgün olanlarda kullanabiliriz. Soruda düzgün sekizgen diyor, o yüzden kullanabiliriz.

Öğrenci, söz konusu formülü yalnızca düzgün çokgenlerde iç açı bulmak için kullanabileceğinin farkındadır ancak bunu görüşme sürecinde açıkça ifade etmemekte; yalnızca araştırmacı sorunca açıklama yapmaktadır. Bu durum, öğrencinin iletişim bileşeninin sözel alt bileşeninde eksikleri olduğuna ilişkin düşüncemizi güçlendirmektedir. Öğrenci, iddialarını ve attığı adımları ayrıntıları ile açıklamamakta; detayları dinleyicinin kendisinin anlamasını beklemektedir.

Diğer yandan, öğrencinin bir düzgün sekizgenin iç açısını bulmak amacıyla doğru denklemi/modeli kurabildiğini görüyoruz ancak öğrenci bu denklemi/modeli kâğıdına not etmemiş, zihninde kurmayı ve işlemleri de zihinden yapıp şekil üzerinde not etmeyi tercih etmiştir. Okuyucu açısından sürecin anlaşılmasını zorlaştıran bu durum, öğrencinin iletişim bileşeninin sembolik ve metinsel alt bileşenlerinde sorun yaşadığına dair düşüncemizi desteklemektedir. Diğer yandan, söz konusu denklemi/modeli zihninde kurduğuna ve işlemleri zihninden yaptığına ilişkin öngörümüzün doğru olduğunu görmekteyiz. Bu durum, öğrencinin doğru denklemi/modeli kurması nedeniyle epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerini sağladığına yönelik saptamamızın da doğru olduğunu göstermektedir.

> Araştırmacı: Peki, devam edelim.
>
> Öğrenci: Burada ikizkenar dik üçgen oluştu. Burası (GF kenarını gösteriyor) 2 ise buralar da $\sqrt{2}$ olur.
>
> Araştırmacı: Bunu nereden buldunuz?
>
> Öğrenci: Kural. Yani 90° nin karşısı 2 ise, buralar da $\sqrt{2}$ olur. $\sqrt{2}$ katı 2 çıksın diye.
>
> Araştırmacı: Nereden geliyor bu kural?
>
> Öğrenci: Pisagor teoreminden.
>
> Araştırmacı: Neden göstermediniz?
>
> Öğrenci: Çok uzun olur diye. Gerek yok, zaten görüyorum. Böyle özel durumlar için kurallar var. Bence kısadan yapmak çok daha mantıklı. Yani zaman açısından. 45°-45°-90° ya da 30°-60°-90° üçgenlerinde öyle yapabiliyoruz. Başka açılar olsaydı Pisagor yapardım ama uzun uzun tabi.

Burada öğrencinin iletişim bileşeninin sözel, metinsel ve sembolik alt bileşenlerindeki eksikleri bir kez daha dikkat çekmektedir. Öğrenci bir kuraldan hareketle, matematiksel dayanağını belirtmeden, zihninden yaptığı bir işlemi okuyucunun ve dinleyicinin anlamasını beklemektedir. Pisagor teoremine dayanan kuralı kullanırken yazılı metninde sembolik ya da metinsel bir açıklama yapmamıştır. Bu nedenle, iletişim bileşeninin sembolik ve metinsel alt bileşenlerinde eksikleri olduğu düşünülmektedir. Bunun yanı sıra, görüşme sırasında araştırmacı sormadan, hipotenüsü 2 cm olan dik üçgenin dik kenarlarını Pisagor teoremine dayanarak $\sqrt{2}$ olarak nasıl hesapladığını açıklamamıştır. Bu da, öğrencinin Habermas akılcı davranış modeline göre, iletişim bileşeninin sözel iletişim alt bileşeninde eksikleri olduğuna ilişkin görüşümüzü desteklemektedir.

Araştırmacı: Anladım, sonra?

Öğrenci: Sonra bu büyük üçgenin alanını hesaplamışım. Tabanı 2, yüksekliği de şuradan (AF'yi gösteriyor) toplayarak bulmuşum. Sonra sekizgenin alanını bulmuşum. Toplam alanını.

Araştırmacı: O kısmı biraz açıklayabilir misiniz? Neyin nereden geldiğini.

Öğrenci: Şöyle… Buradaki dik üçgenler aynı… O yüzden burada da $\sqrt{2}$ demişim. Yani üçgenin yüksekliği $2+2\sqrt{2}$ oldu. Ee, tabanı da 2 demiştim. Alanı buradan, şurada hesaplamışım. $2+2\sqrt{2}$ çıktı. Sonra sekizgenin alanını hesaplamışım. Bu üçgen (ABC üçgenini gösteriyor), bu dikdörtgenin (ABEF dikdörtgenini gösteriyor) içinde yarısı kadar zaten. O yüzden üçgeninin alanını 2 ile çarpmışım. Buradaki $4+4\sqrt{2}$ oradan geliyor. Bir de şu yamuklar (BCDE yamuğunu gösteriyor) var. Bu yamuk da şuradakiyle aynı zaten. Bunun alanını bu içindeki iki dik üçgen ve dikdörtgenden bulup 2 ile çarparım. Sonra hepsini toplayınca bu ediyor. Eder mi? Bir bakayım. $\sqrt{2}$ çarpı $\sqrt{2}$, 2; bölü 2; 1. Tamam çarpı 2; 2. Bu dikdörtgen de 2 çarpı $\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$. Toplarsam $2+2\sqrt{2}$; bir de aynısından karşıda var (BCDE yamuğunu gösteriyor). Oradan $4+4\sqrt{2}$. Sonra da oranlamışım zaten oradan tamam 4; yani $\frac{1}{4}$.

Araştırmacı: Bu soruda verilen ifadeyi kanıtlamanı istemişiz. Siz bu ifadeyi kanıtlamış ve genellemiş olduğunuzu düşünüyor musunuz?

Öğrenci: Yani evet, kenarı 2 cm aldım ve doğru çıktı.

Araştırmacı: Peki bu durum, düzgün sekizgenin bir kenarı farklı bir değer aldığında da aynı sonucu bulacağınızı garanti eder mi?

Öğrenci: Yani rastgele bir sayı aldığımda doğru çıkıyorsa bu genel olarak da doğru çıkacağı anlamına gelir.

Araştırmacı: Bu durum sadece bir kenarı 2 cm aldığın için doğru çıkmış olamaz mı?

Öğrenci: Yani, bilmiyorum. Bence olamaz. O kadar tesadüf olur mu (Gülüyor)? Yok, bence rastgele aldığımız bir değer için çıkıyorsa bu öyledir. Yoksa bir sorun çıkardı.

Araştırmacı: Genel olarak ifadeyi kanıtlamak için bir daha genel bir seçim yapsanız sekizgenin bir kenarı için?

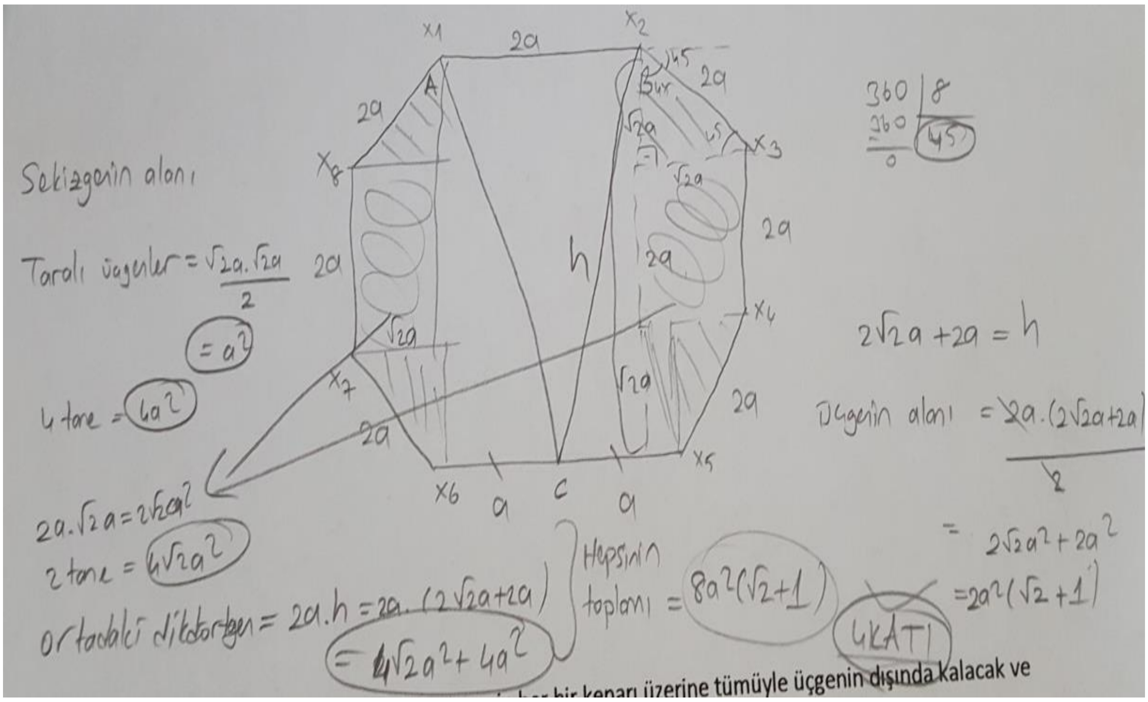
Öğrenci: Yani nasıl?

Araştırmacı: Sembolik olarak sekizgenin kenarını isimlendirseniz?

Öğrenci: Hımmm, anladım. Yani evet sanırım daha doğru olurdu. Kanıt için daha gerekli. Evet ama o zaman çok karışabilirdi. Diğer kenarları yamuğun kenarlarını falan nasıl bulurdum bilemem. Semboller işin içine girdi mi zaten ben biraz karıştırıyorum. Böyle olmaz mı? Yani fark eder mi çok?

Öğrenci soruda verilen ifadeyi düzgün sekizgenin bir kenarına sayısal bir değer atayarak kanıtladığını düşünmektedir. Oysa ki, öğrenciden formel bir yolla ifadeyi doğrulaması ve genellemesi beklenmektedir. Sembolik dili kullanma gereksinimi hissetmeyen ve sayısal değerler üzerinden ifadeyi kanıtladığını düşünen öğrencinin iletişim bileşeninin sembolik alt bileşeninde, kanıt yapma süreci ve gereklilikleri konusunda eksikleri olduğu görülmektedir. Öğrencinin görüşme sürecinde, sözel olarak da, soruda verilen ifadeyi sayısal bir değer üzerinden doğruladığı sürecinin bir kanıt yapma süreci olduğunu savunduğu görülmektedir. Bu durum, öğrencinin sembolik iletişim alt bileşenindeki eksiklerinin, iletişim bileşeninin sözel iletişim alt bileşenini de olumsuz etkilediğini göstermektedir.

Bu durumun aksine, kanıt yapma sürecinde iletişim bileşeni güçlü olan öğrenciler olduğu da görülmüştür. Öğrencilerin iletişim bileşenindeki gücü, diğer bileşenlerini de olumlu etkilemektedir. Bu duruma ilişkin bir örneğe Şekil 10'da yer verilmektedir.



Şekil 10. İletişim bileşeninin diğer bileşenler üzerindeki olumlu etkisi.

Öğrenci soruda verilen kriterlere uygun şekli çizebilmiş ve şekil üzerinde ifadeyi kanıtlamaya yönelik gerekli ve doğru düzenlemeleri yapabilmiştir. Bu bağlamda, öğrencinin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin görsel gerekliliklerini sağladığı söylenebilir. Diğer yandan, düzgün sekizgen içinde oluşturduğu üçgenlerin, dikdörtgenlerin ve yamukların alan denklemini doğru kurmuş; bu sayede, düzgün sekizgenin toplam alan denklemini doğru modelleyebilmiştir. Bu nedenle, öğrencinin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerini sağladığı görülmektedir.

Süreçte öğrencinin işlem hatası yapmadığı ve söz konusu şekillerin alanlarını doğru hesapladığı dikkat çekmektedir. Bu durum, epistemik bileşeninin sistemik alt bileşeninin gerekliliklerini sağladığını göstermektedir. Öğrenci, kanıt yapma sürecinde düzgün sekizgenin bir kenarına $2a$ demiş ve tabanı düzgün sekizgenin bir kenarı; tepe noktası bu tabanın tam karşısındaki kenarın orta noktası olan üçgenin yüksekliğini a cinsinden yazabilmiştir. Düzgün sekizgen içinde oluşturduğu yamukların alanını hesaplamak için yamukların içinde iki dik üçgen ve bir dikdörtgen oluşturmuş; dikdörtgenlerin kısa ve uzun kenar uzunluklarını, dik üçgenlerin dik kenarlarını a cinsinden yazabilmiştir. Bu sayede, yamukların alanını a cinsinden hesaplamayı başaran öğrenci, söz konusu üçgenin ve düzgün sekizgenin alanını karşılaştırabilmiş ve soruda verilen ifadeyi kanıtlayabilmiştir. Tüm bunlar, öğrencinin süreç boyunca amacına ulaşmak için doğru ve gerekli araçları seçebildiğini ve kullanabildiğini göstermektedir. Bu durum, Habermas akılcı davranış modeline göre, teleolojik bileşenin gerekliliklerini sağladığını göstermektedir.

Süreç boyunca öğrencinin matematiğin sembolik dilini doğru ve uygun şekilde kullandığı dikkat çekmektedir. Şekil üzerinde amacına ulaşmak için kullanacağı tüm kenarları düzgün sekizgenin bir kenarı cinsinden yazabilmiş ve tüm kenar uzunluklarına ilişkin elde ettiği sonuçları şekil üzerinde göstermiştir. Okuyucu, öğrencinin çizdiği şekli ve ürettiği kanıt yapma sürecini incelediğinde, attığı adımları hem şekil üzerinden hem de formel kanıttan kolayca ve anlaşılır şekilde takip edebilmektedir. Alanını hesapladığı şekilleri düzgün sekizgenin içinde tarayarak hangi alan denkleminin hangi şekle ait olduğunu açıkça gösteren öğrenci, bu şekillerin alan denklemini adım adım kurmuş; işlemler sırasında yaptığı sadeleştirmeleri okuyucunun açıkça anlayabileceği şekilde sunmuştur. Bu durum, Habermas akılcı davranış modeline göre, öğrencinin iletişim bileşeninin sembolik iletişim alt bileşeninin gerekliliklerini sağladığını göstermektedir. Öğrencinin iletişim bileşeninin sembolik iletişim alt bileşenindeki gücünün, metinsel iletişim alt bileşenini olumsuz etkilediği düşünülmektedir. Kanıt yapma sürecini matematiğin sembolik dilini kullanarak aktarmayı yeterli gören öğrenci, süreçte attığı adımlarla ilgili metinsel bir açıklama yazma gereği duymamıştır.

Görüşme sürecinde öğrencinin kanıt yapma sürecinde attığı adımları nedenleriyle birlikte net biçimde açıklayabildiği görülmüştür. Öğrenciye soruda verilen ifadenin kanıtını yapamayan öğrencilerden birinin ürettiği süreç gösterilmiş ve nerede zorlandığı konusunda yorum yapması istenmiştir. Şekil 8'de sunulan kanıt yapma sürecini inceleyen öğrenci, kanıtı yapan kişinin zorlandığı noktayı doğru tespit edebilmiştir.

> Araştırmacı: Sence bu kanıt yapma sürecinde öğrenci nerede zorlanmış olabilir?
>
> (Öğrenci bir süre kanıtı incelemiş ve sonra cevap vermiştir).
>
> Öğrenci: Yani aslında neredeyse yapıyormuş. Bence kötü değil çok az kalmış bitmesine. Ama işte şuradaki yamuğun yüksekliğini yazarken pes etmiş. Halbuki devam edebilirdi. Yani bu x'i de yazsa bitecekmiş, yazık olmuş (Gülüyor).

Araştırmacı: Sence devam etse ifadeyi kanıtlayabilir miydi?

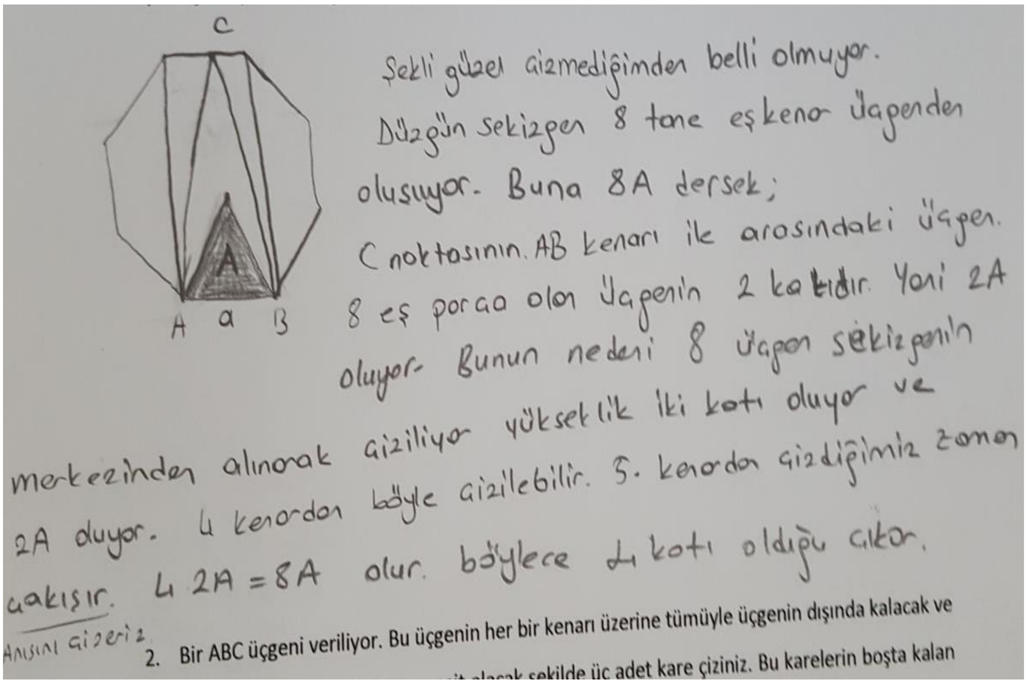
Öğrenci: Yani aslında bir denemek lazım. Biraz uzun sürer o kesin de. Çıkar gibi bence ya. Sonuçta her şey doğru. Üçgenlerin alanlarını doğru bulmuş. Doğru gidiyor yani. Burada yamuğun yüksekliğini de a ve b'li yazabilseydi ki ona da çalışmış. Burada Pisagor teoremini kullanmış. İkizkenar üçgen olduğundan burası, tabi. Bence güzel yapmış. Paralelkenar oluşturmuş. İkizkenar üçgenin yüksekliğinin tabanı ikiye ayırması özelliğini kullanmış. Gerçi göstermemiş ama. Neyse, doğru yapıyor. Ben açıkçası burada x'i yazmaya üşenmiş olduğunu düşünüyorum a ve b cinsinden. Yani devam etse yapabilirdi. Yamuğun alanını bulup oradan düzgün sekizgene geçecekti. Hepsini toplayıp toplam alanı bulacaktı. Yani benim yaptığım gibi ama işte yamuğun yüksekliğinde takılmış.

Araştırmacı: Bu ikizkenar üçgende yüksekliğin tabanı ikiye ayırdığını göstermediğinden bahsettiniz. Bu sizce önemli mi? Yani çok fark eder mi gösterip göstermemesi?

Öğrenci: Yani kendisi açısından pek fark etmiyor belli ki. Çünkü o kısımda bir yanlışı yok, yapmış yani doğru… Ama hani ben bir görme ihtiyacı hissettim. Neden bilmiyorum. Buraya ben olsam kesin tık tık koyardım yani. Çünkü alışkanlık olmuş. Koymazsam sonra unuturum belki ya da ne biliyim sonra bakınca anlamam. Ne yapmışım ki diye düşünürüm. Hani burada da mesela ben bakarken öyle bir anda anlamadım. Kendim düşününce anladım ne yaptığını, o denklemi nereden yazdığını. Koysa hemen daha hızlı anlardım. Daha iyi olurdu yani işte.

Başarıyla tamamladığı kendi kanıt yapma sürecini anlaşılır bir dille açıklayabildiği görülen öğrenci, başarısız bir süreçteki eksik kısmı da doğru tespit edebilmiş ve eksikliğin nedenini açıklayabilmiştir. Bu nedenle, öğrencinin iletişim bileşeninin, sözel iletişim alt bileşeninin gerekliliklerini sağladığı düşünülmektedir. Bunun yanı sıra öğrenci söylemlerinde, kanıtını incelediği kişinin yamuğun alanını hesaplamaya çalışırken, ikizkenar bir üçgende tepe noktasından tabana çizilen yüksekliğin üçgenin tabanını ikiye ayırdığı özelliğini kullandığını ancak bu özelliği kullanırken şekle yansıtmadığını vurgulamaktadır. Bu durumu eleştirdiği dikkat çeken öğrencinin, birinin kanıt yaparken attığı adımları süreçte kullandığı şekle yansıtması gerektiğini düşündüğü ve bunu önemsediği görülmektedir. Bu durum da, öğrencinin Habermas akılcı davranış modeline göre, iletişim bileşenindeki gücünü göstermektedir.

Öğrencilerden bir diğeri, işlem yapmak yerine şekil üzerinde düzgün sekizgen ile söz konusu üçgen arasında görsel açıdan ilişki kurarak bir sonuca varma yoluna gitmiştir. Şekil 11'de bu öğrencinin kanıt yapma sürecine yer verilmektedir.



Şekil 11. İletişim bileşeninin yeni alt bileşenleri yönünden değerlendirilmesi.

Öğrenci, düzgün sekizgenin köşelerinin bir çember üzerinde olduğunu bilmektedir. Bu bilgisini kullanarak, düzgün sekizgenin çevrel çemberinin merkezini işaretlemiş ve içinde tabanı düzgün sekizgenin bir kenarı; tepe noktası çevrel çemberinin merkezi olan sekiz adet eş üçgen oluşturmuştur. Buradan öğrencinin soruda verilenlere uygun şekli çizebildiği ve amacına ulaşma yolunda şekil üzerinde gerekli ve doğru düzenlemeleri yapabildiği söylenebilir. Öğrenci, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin görsel gerekliliklerini sağlamaktadır.

Öğrenci, düzgün sekizgenin içinde, tepe açısı düzgün sekizgenin çevrel çemberinin merkezi ve tabanı düzgün sekizgenin bir kenarı olan üçgenlerden sekiz adet çizilebildiğini; bu nedenle düzgün sekizgenin alanının bu üçgenlerden birinin alanının sekiz katı olacağını belirtmiştir. Diğer yandan, soruda verilen kriterler bağlamında düzgün sekizgen içine çizdiği ABC üçgeninin tabanının düzgün sekizgen içinde oluşturulan sekiz eş üçgenden birinin tabanı ile aynı; yüksekliğinin ise sekiz eş üçgenden birinin yüksekliğinin iki katı olduğunu; bu nedenle ABC üçgeninin alanının, düzgün sekizgen içinde oluşturulan sekiz eş üçgenden birinin alanının iki katı olduğunu not etmiştir. Sekiz eş üçgenden birinin alanını A ile gösteren öğrenci, ABC üçgeninin alanını $2A$; düzgün sekizgenin alanını $8A$ olarak elde etmiş ve sonuca ulaşmıştır. Öğrencinin süreçte amacına uygun ve gerekli araçları doğru seçebildiği ve kullanabildiği görülmektedir. Bu bağlamda, Habermas akılcı davranış modeline göre, teleolojik bileşenin gerekliliklerini sağladığını söylemek mümkündür.

Öğrencinin kağıt üzerinde formel bir denklem not etmediği görülmektedir ancak yaptığı metinsel açıklamada denklemi/modeli zihninde oluşturduğu ve bu denklem/model üzerinden doğru ve geçerli iddialarda bulunduğu görülmektedir. Bu bağlamda, her ne kadar kağıt üzerinde formel bir denklem kurmamış olsa da, öğrencinin doğru ve geçerli zihinsel süreci dikkate alındığında, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerini sağladığı söylenebilir. Ancak öğrencinin kurduğu denklemleri/modelleri kağıt üzerine formel dil kullanarak not etme konusunda kendisini geliştirmesi gerekmektedir. Bu da, öğrencinin matematiğin sembolik dilini kullanma yeterliği ile ilgili olup, Habermas akılcı davranış modeline göre, iletişim bileşeninin sembolik alt bileşeninde eksikleri olduğunu göstermektedir.

Kanıtın bütününde, öğrencinin düşünme sürecini metinsel olarak anlattığı görülmektedir. Yazdığı metinde, düzgün sekizgenin içinde sekiz eş üçgeni nasıl oluşturduğuna ilişkin yeterli açıklama yapmadığı dikkat çekmektedir. Üstelik öğrencinin düzgün sekizgenin içindeki eş üçgenlerden bahsederken “sekiz eşkenar üçgen” ifadesini kullandığı görülmektedir. Bu durumun bilgi eksikliğinden değil, öğrencinin iletişim bileşeninin metinsel iletişim alt bileşenindeki eksiklikten kaynaklandığı düşünülmektedir. Bu saptamamızın öğrenci ile yapılacak görüşme sürecinde netleştirilmesi planlanmaktadır. Diğer yandan, ABC üçgeninin yüksekliğinin, düzgün sekizgen içinde oluşturduğu sekiz eş üçgenden birinin yüksekliğinin iki katı olduğunu iddia etmiştir ancak bu iddiasını destekleyen bir veri sunmamıştır. Metninin son satırlarında yaptığı açıklamalar da okuyucu tarafından anlaşılmamaktadır. Bu bağlamda değerlendirildiğinde, öğrencinin formel kanıt yazma kurallarını içermeyen bir kanıt ortaya koyduğu; düşünme sürecini ve attığı adımları yazı yoluyla aktarmayı tercih ettiği görülmektedir. Öğrenci her ne kadar doğru ve geçerli argümanları kullanmış ve doğru sonuca ulaşmış olsa da; metninde yaptığı açıklama okuyucu için yeterli ve anlaşılır değildir. Bu nedenle, öğrencinin iletişim bileşeninin metinsel iletişim alt bileşeninde sorun yaşadığı düşünülmektedir. Aynı zamanda, öğrencinin iletişim bileşeninin sembolik iletişim alt bileşeni yönünden de kendisini geliştirmesi gerektiği görülmektedir.

Öğrenciyi iletişim bileşeninin sözel iletişim alt bileşeni yönünden değerlendirmek ve metin üzerinde yaptığımız analizi detaylandırmak amacıyla öğrenci ile görüşme yapılmıştır. Aşağıda kanıt yapma sürecini, kâğıt üzerine yazdığı metindeki açıklamasına benzer şekilde aktardığı görülen öğrencinin söylemlerinden bazı alıntılara yer verilmektedir.

> Araştırmacı: Düşündüklerinizi böyle yazıyla anlatmanız güzel. Şimdi de benzer şekilde açıkladığınızı görüyorum. Peki bu açıklama soruda size verilen ifadeyi kanıtladığınızı gösterir mi?
>
> Öğrenci: Yani evet kanıtladım. Tabi biraz basit oldu.
>
> Araştırmacı: Basit derken ne demek istiyorsunuz?
>
> Öğrenci: Yani biz genelde uzun uzun kanıt yaparız derslerde. Bu öyle olmadı. Yani basit çünkü. Hani şey derler ya açıktır (Gülüyor). Açık yani. Başka bir şey yapmaya gerek kalmadı.
>
> Araştırmacı: Anladım. Bu yazdığınız açıklama, formel bir kanıttır diyebilir misiniz?
>
> Öğrenci: Formel derken yani?
>
> Araştırmacı: Yani bu ifadeyi matematiksel olarak kanıtladığınızı ve her zaman geçerli olduğunu göstermiş oldunuz mu?
>
> Öğrenci: Evet, kesinlikle. Yani demek istediğinizi anladım aslında. Yani kanıt yaparken pek açıklama yazılmaz. Matematik konuşur. Semboller. Soyut şeyler. Tabi kanıt deyince o geliyor insanın aklına. Ama gerekse yapardım. Bu böyle yani. Buna kimse itiraz edemez. Yazdığım doğru. Yani kanıtladım.
>
> Araştırmacı: Peki, şurada sekiz eşkenar üçgenden bahsediyorsunuz… Bu kısmı bana açıklayabilir misiniz? Yani bu eşkenar üçgenler nereden çıktı?

Öğrenci: Şöyle, düzgün sekizgenin şöyle çemberin içinde olduğunu düşünürsek… Yani çember içine yerleştirilebildiğini düşünürsek… Şurası merkez olan noktası olsun çemberin. Ben bu merkez noktasını düşündüm yani aldım ve bu noktayı düzgün sekizgenin köşeleri ile birleştirdim. Böylece sekiz tane aynı küçük üçgenden oluştu. Neden aynı? Çünkü bunların tepe açısı aynı. 360 bölü 8 yaparsak eşit çıkıyor hepsi 45'er derece. Tabanları zaten aynı; düzgün sekizgenin bir kenarı kadar; yani hepsi eşit. Diğer iki kenarlar da şu başta söylediğim çemberin yarıçapı. Ee, dolayısıyla bunlar aynı, eş yani.

Araştırmacı: Ben de tam da onu soracaktım. Eşkenar yazmışsınız, şimdi eş dediniz ama… Hangisi doğru?

Öğrenci: Aaa, eşkenar yazmışım. Pardon ya, yanlış yazmışım onu. Yani dikkatsizlikten. Bunlar eşkenar falan olamaz tabi ki. Şimdi söylediğim gibi tepe açıları 45° bir kere. Nasıl olsun?

Öğrencinin eş üçgenleri "eşkenar üçgenler" olarak nitelendirmesine ilişkin yaptığımız değerlendirmenin doğru olduğu görülmektedir. Bu durum, öğrencinin bilgi eksikliğinden ya da yanlış bilgisinden kaynaklanmamaktadır. Öğrenci, kanıt yapma sürecini metin olarak yazarken, dikkatsizlik sonucunda yanlış ifade kullanmaktadır. Bu durum, öğrencinin iletişim bileşeninin metinsel iletişim alt bileşenini olumsuz etkilemiş ve yazı yoluyla okuyucuya yanlış bir ifade aktarmasına neden olmuştur.

Öğrenci kanıt yapma sürecinde attığı adımların nedenlerini metninde vermemiştir ancak görüşmede araştırmacı sorduğunda açıklayabilmiştir. Bu durum, öğrencinin iletişim bileşeninin metinsel iletişim alt bileşeni yönünden eksik olduğuna ilişkin saptamamızı desteklemektedir.

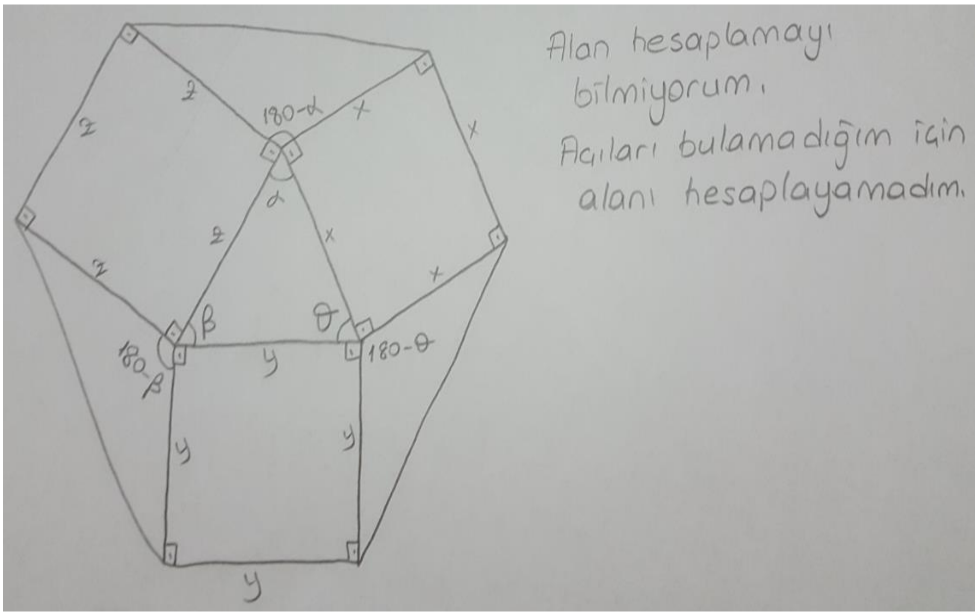
Öğrencinin görüşme sürecinde de soruda verilen ifadeyi matematiğin sembolik dilini kullanarak formel yolla kanıtlama ihtiyacı hissetmediği görülmektedir. Bu durum, öğrencinin iletişim bileşeninin, sembolik iletişim alt bileşeninde eksikleri olduğuna ilişkin saptamamızı desteklemektedir. Bu eksiklik, öğrencinin sözel iletişimi üzerinde etkisini göstermekte ve yazdığı metinde söylediklerinden öteye geçememesine neden olmaktadır.

Düzgün sekizgen sorusu kapsamında analiz edilen örneklerde açıkça görülmektedir ki, öğrencilerin kanıt yaparken düşünme süreçlerini ifade etme şekilleri farklılık göstermektedir. Bazıları kanıt yapma sürecinin tamamını formel dil kullanarak aktarabilirken, bazıları Şekil 11'de kanıt yapma sürecine yer verilen öğrenciye benzer olarak formel dil kullanmak yerine metin yazmayı tercih etmektedir. Diğer yandan, öğrencilerle yapılan görüşmelerde, bazı öğrencilerin kâğıt üzerinde doğru ve geçerli sonuçlar elde etmesine rağmen, görüşmede bu adımlarının nedenlerini açık olarak ve yeterli düzeyde açıklayamadıkları görülmüştür. Bu sonuçlar, öğrencilerin kanıt yapma sürecinde iletişim kurmasının, matematiğin sembolik ve formel dilini kullanma, düşünme sürecini metinsel yolla açıklama, iddialarını sözel yolla aktarma şeklinde üç farklı yolu olduğunu göstermektedir. Bu nedenle, öğrencilerin kanıt yapma sürecini daha detaylı analiz edebilmek adına, Habermas akılcı davranış modelinin iletişim bileşeninin yeni alt bileşenlerine ihtiyaç duyulmuş ve bu bileşenler sembolik, metinsel ve sözel iletişim alt bileşenleri olarak adlandırılmıştır. Analizlerde görüldüğü gibi, sembolik iletişim alt bileşeni öğrencinin matematiğin sembolik ve formel dilini doğru ve yeterli düzeyde kullanabilme yeterliği ile ilgili iken, metinsel iletişim alt bileşeni düşünme ve kanıt yapma sürecini yazı yoluyla aktarabilme yeterliğini ifade etmektedir. Sözel iletişim alt bileşeni ise öğrencinin kanıt yapma sürecini, iddialarını ve attığı adımları nedenleri ve sonuçlarıyla dinleyicinin açık ve kolay anlayabileceği bir dille sözel olarak aktarabilme yeterliği ile ilgilidir.

Kare sorusu. Bu soru öğrencilere şöyle sunulmuştur:

"Bir ABC üçgeni veriliyor. Bu üçgenin her bir kenarı üzerine tümüyle üçgenin dışında kalacak ve bir kenarı üçgenin o kenarına eşit olacak şekilde üç adet kare çiziniz. Bu karelerin boşta kalan köşelerini sırayla birbirleriyle birleştirerek üç adet yeni üçgen oluşturunuz. Elde edilen bu yeni üçgenlerin alanlarının ABC üçgeninin alanına eşit olduğunu kanıtlayınız (Pedemonte, 2001; 2003; 2007a)."

Şekil 12'de kanıtlama sürecine yer verilen öğrenci, soruda verilen kriterlere uygun şekli çizebilmiş ve şekil üzerinde ABC üçgeninin açılarını isimlendirmiş; diğer üçgenlerin tepe açılarını da ABC üçgeninin açılarını 180° ye tamamlayan açılar olarak yazabilmiştir. Bu bağlamda, öğrencinin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin görsel gerekliliklerini sağladığı söylenebilir. Diğer yandan, kâğıdının sağ üst köşesindeki notundan anlaşıldığı gibi, öğrenci bir üçgenin alanını hesaplamayı bilmemektedir. Bu nedenle, soruda verilen ifadenin kanıtı için gereken denklemi/modeli kuramamıştır. Bu durum, öğrencinin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerinde sorun yaşadığını göstermektedir.



Şekil 12. Epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerinde eksiklik.

Öğrenci kâğıdına “alan hesaplamayı bilmiyorum” şeklinde not düşmüştür. Öğrencinin bu notundan, verilen ifadeyi kanıtlamak için kendisine gereken doğru aracı seçip seçemediği anlaşılmamaktadır. Bu nedenle, Habermas akılcı davranış modeline göre, teleolojik bileşenin gerekliliklerini sağlayıp sağlamadığı konusunda değerlendirme yapılamamış; bu kısmın görüşme sürecinde netleştirilmesi planlanmıştır.

Öğrenci işlem yaptığı bir süreç ortaya koyamadığından, kanıt yapma sürecinde işlem yapma konusundaki yeterliği incelenememiş; sistemik bileşenin gerekliliklerini sağlayıp sağlamadığı değerlendirilememiştir. Benzer olarak, sembolik iletişim ve metinsel iletişim gerekliliklerini karşılama konusundaki yeterliği de analiz edilecek veri olmadığından değerlendirmeye alınamamıştır.

Yapılan görüşmede öğrencinin Sinüs teoremini kullanarak üçgenlerin alanını hesaplamak istediği ancak teoremi hatırlayamadığı için süreçte başarısız olduğu anlaşılmıştır. Öğrencinin söylemlerinden verilen ifadenin kanıtını yapmak için kendisine gereken doğru aracı seçebildiği ancak bilgi eksikliğinden aracı kullanamadığı görülmüştür.

Araştırmacı: Evet, burada alan hesaplamayı bilmediğinizi yazmışsınız. Bir üçgenin alanını hesaplamak için farklı yöntemler var aslında. Burada kastettiğiniz hiçbir yöntemi hatırlamadığınız mı?

Öğrenci: Aaa, hayır tabiki. Yani taban çarpı yükseklik bölü 2 de ama yani burada o işe yaramaz. Onu kastetmedim tabi ki (Gülüyor). Onu biliyorum yani o kadar da değil ama bir tane daha yöntem vardı. Onu hatırlayamadım.

Araştırmacı: Nasıl bir yöntemdi? Belki hatırlamaya çalışırsak bazı ayrıntılarını bulabilir miyiz?

Öğrenci: Yani açıyla ilgili bir formüldü. Kenar ve açı ama ben onları hep karıştırırım. Kosinüs ve Sinüs teoremi. Birbirine karıştırıyorum. Burada da öyle oldu. Hatırlayamadım nasıl yapıldığını.

Araştırmacı: Anladım. Aslında kenar ve açıyla ilgili olduğunu doğru hatırlıyorsunuz. Sinüs teoremi ile bir üçgenin alanını şöyle buluyoruz aslında. Üçgenin iki kenarını ve bu iki kenar arasında kalan açının Sinüs'ünü çarpıyoruz ve bulduğumuz sonucu 2'ye bölüyoruz. Bunu şimdi yapmayı deneseniz acaba bir kez de burada? Şimdi ben verince size alan formülünü belki bu kez sorun olmaz.

Öğrenci: Olur tamam. Buraya yazabilir miyim?

Araştırmacı: Evet, tabi ki.

Öğrenci: Tamam. Ben formülü bir not alayım, bir dakika.

Öğrenci, araştırmacının verdiği formülü kullanarak kanıt yapma sürecine başlamıştır. Ancak bu kez de birbirini 180° ye tamamlayan açıların Sinüs değerlerinin eşit olduğuna ilişkin bilgiyi bilmediğinden süreci tamamlayamamıştır.

Öğrenci: Tamam, şimdi benden ne istiyordu bir daha okuyayım. ABC üçgeninin alanı ile şu üçgenlerin (dışarıda oluşturduğu üçgenleri gösteriyor) alanının eşit olduğunu göstereceğim. Tamam, şimdi bu formülden (Sinüs teoremini gösteriyor) önce ABC üçgeninin alanını bir yazayım (üçgenin $\propto$ açısını z ve x kenarlarını kullanarak alan denklemini yazıyor). Şimdi de hangisinden başlasam? Yani fark eder mi? Bence, fark etmez.

Öğrenci bir süre hangi üçgenin alan denklemini yazarak ABC üçgeninin alanı ile karşılaştıracağını düşünmüştür.

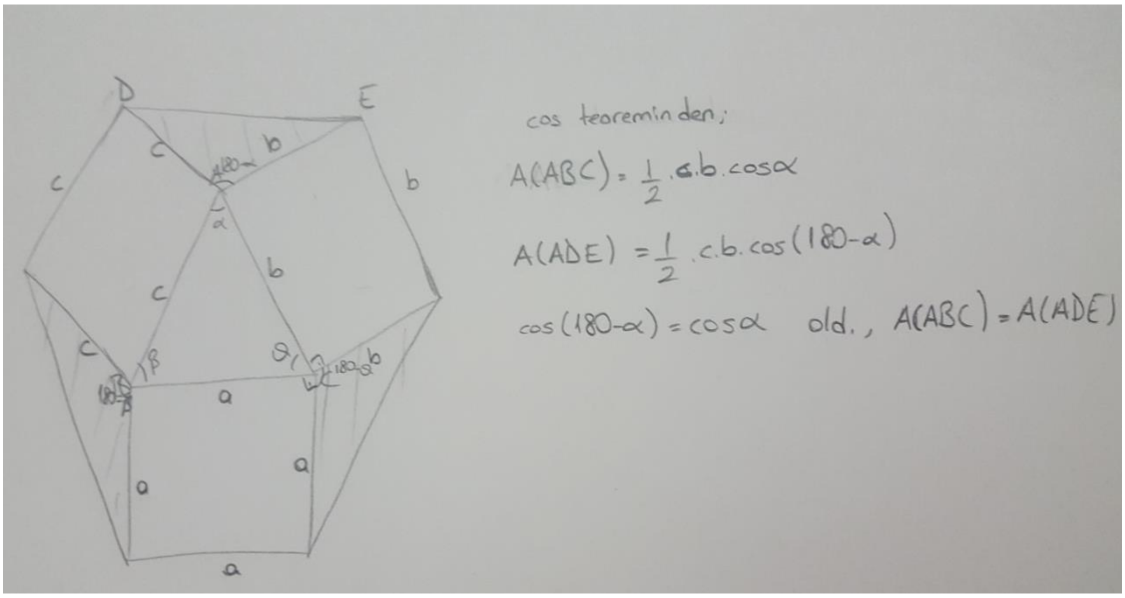
Öğrenci: Ya, sanırım yani büyük bir ihtimal şunun alanını yazsam (tepe açısı $180-\propto$; kenarları z ve x olan üçgeni gösteriyor) çıkacak benzer bir şeyler. Aa (soruda kanıtı istenen ifadeyi tekrar okuyor) işte tamam eşit çıkacak (Gülüyor). Eşittir tabi ama neden diyeceksiniz? Çünkü kenarlar falan aynı ya. Bir tek açı. Yani eşit diyebilir miyim bu açılara? Eşit olsa aslında bitti olay. Ama şu çizgiler tam düz değil ($z+x$ uzunluğundaki kenarları gösteriyor). Eşit diyemem yani.

Araştırmacı: O üçgenin alan denklemini de kurup bir düşünün isterseniz.

Öğrenci: Tamam, yani şeye Sinüs teoremine. Aa, tamam ama işte dediğim gibi kenarlar aynı… $\sin(180-\propto)$ yı bilmiyorum. Bunun için ne derim bilmiyorum. Yani şimdi mantıklı düşünecek olursak bu alanların bir şekilde eşit çıkması gerek. Demek ki bunun ($\sin(180-\propto)$ yı gösteriyor) $\sin(\propto)$ ya eşit çıkması gerek. Yani öyle der bitirirdim ben. Yani şunların neden olduğunu söyleyemem, bilmiyorum çünkü. Ama yani şu Sinüs teoremini bilseydim yapardım buraya kadar ve eşittir der geçerdim.

Öğrencinin verilen ifadenin kanıtı için gereken doğru ve geçerli aracı seçebildiği ancak nasıl kullanacağını bilmediğinden süreci tamamlayamadığı görülmektedir. Sürecin başında doğru ve geçerli aracı kullanmayı tercih etmesi nedeniyle öğrencinin teleolojik bileşen kapsamında incelediğimiz, kanıtı yaparken doğru ve geçerli aracı seçme yeterliğini sağladığı söylenebilir. Ancak sürecin devamında bilgi eksikleri nedeniyle kanıtı yapmak için seçtiği aracı doğru kullanamamıştır. Görüşme verileri de, bu durumun öğrencinin bilgi eksikliklerinden kaynaklandığını desteklemektedir. Bu ise epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gereklilikleri ile ilgilidir. Bu bağlamda, öğrencinin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerinde yaşadığı sorunun, teleolojik bileşen kapsamında incelediğimiz, seçilen aracı doğru kullanma yeterliğini olumsuz etkilediğini göstermektedir.

Bir diğer öğrenci, Şekil 13'te görüldüğü ve görüşme verilerinden de anlaşıldığı gibi, üçgenlerin alan denklemini kurmak için Sinüs teoremini kullanmak istemiş ancak teoremi doğru yazamamıştır. Sinüs teoremi soruda verilen ifadenin kanıtı için doğru ve geçerli bir araçtır. Bu bağlamda, öğrenci aslında amacına uygun araç seçebilmiştir ancak bilgi eksikliğinden dolayı bu aracı doğru kullanamamıştır.



Şekil 13. Epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gereklilik alt bileşeninde eksiklik.

Aynı zamanda, öğrencinin $\cos(\propto) = -\cos(180^0 - \propto)$ eşitliğini bilmediği; $\cos(\propto)$ ve $\cos(180^0 - \propto)$ değerlerinin eşit olduğunu not ettiği de görülmektedir. Bu bilgi eksiklikleri, öğrencinin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerini yerine getiremediğini göstermektedir. Bu durumun, teleolojik bileşenini olumsuz etkilediği söylenebilir. Öğrenci, kanıt yapma sürecinin sonunda soruda verilen ifadeye ulaşmış gibi görünse de, yanlış matematiksel bilgileri ve uygulamaları doğrultusunda bulduğu sonuç geçersizdir.

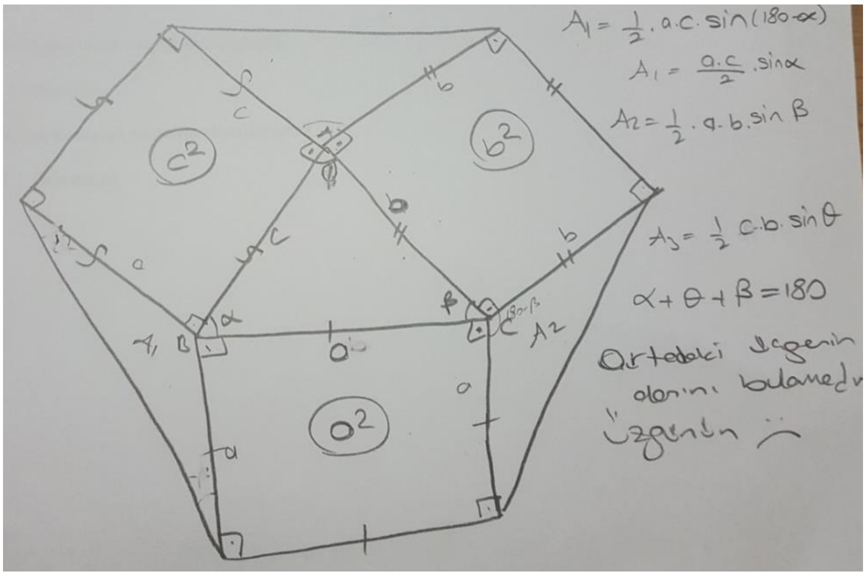
Öğrenci, şekli soruda verilen kriterlere uygun olarak çizebilmiştir. Şekil üzerinde DAE ve BAC açısını, birbirini 180° ye tamamlayan açılar olarak uygun semboller kullanarak isimlendirebilmiştir. Aynı zamanda şekildeki karelerin kenarlarını doğru ve amacına uygun olarak sembollerle ifade edebilmiştir. Bu bağlamda, öğrencinin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin görsel gerekliliklerini sağladığını söylemek mümkündür. Diğer yandan, öğrencinin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerindeki eksikleri, iletişim bileşenini de olumsuz etkilemiştir. Kanıt yapma sürecinde attığı adımlara ilişkin ne formel dille ne de metin yazma yoluyla bir açıklama yapmamıştır. Bu bağlamda, öğrencinin geçersiz kanıt yapma sürecinin, iletişim bileşeninin sembolik ve metinsel alt bileşenleri yönünden yetersiz olduğunu söylemek mümkündür.

Öğrencinin iletişim bileşeninin sözel iletişim alt bileşeni yönünden değerlendirilmesi ve elde edilen analiz sonuçlarının netleştirilmesi amacıyla görüşme yapılmıştır. Aşağıda öğrencinin sürece ilişkin söylemlerine yer verilmektedir.

> Öğrenci: Alan teoremini kullanarak alanları buldum. Üçgenlerin alanlarını. Oradan eşit olduklarını gördüm. Çünkü bu açıların ($\propto$ ve $180^0 - \propto$ açılarını gösteriyor) Kosinüsleri birbirine eşit.
>
> Araştırmacı: Bu alan teoremini hangi amaçla nasıl kullanıyorduk tekrar üzerinden geçebilir miyiz?
>
> Öğrenci: Üçgenin alanını bulmak için. Kenarlarını ve aradaki açının Kosinüsünü çarpıp ikiye bölüyoruz. Böylece üçgenin alanını hesaplıyoruz. Yani taban yükseklik elimizde değilse işe yarar bir yöntem.
>
> Araştırmacı: Bu teoremin adını hatırlıyor musunuz?
>
> Öğrenci: Hayır ama böyle bir şeydi teorem…
>
> Araştırmacı: Burada açıların Kosinüs'lerinin eşit olduğundan bahsettiniz az önce. Bu sonuca nereden vardınız?
>
> Öğrenci: Şöyle denklemde $\cos(\propto)$ ve $\cos(180^0 - \propto)$. Kenarlar zaten aynı. Karelerin kenarlarından. $\frac{1}{2}$ de aynı zaten. Geriye bir tek bunlar kalıyor. Onlar da eşit olduğuna göre bu üçgenlerin alanları eşit.
>
> Araştırmacı: Anladım ama bu açıların Kosinüs değerleri neden eşit?
>
> Öğrenci: Kural.
>
> Araştırmacı: Nereden geliyor bu kural.
>
> Öğrenci: Hatırlayamadım şimdi. Eşit diye kalmış sadece aklımda.

Öğrencinin ifadelerinden Sinüs teoremini ve uygulamasını bilmediği; birbirini 180° ye tamamlayan açıların Kosinüs değerlerinin eşit olduğunu düşündüğü görülmektedir. Bu durum, öğrencinin bilgi eksikliği nedeniyle ifadenin kanıtı için gereken doğru denklemi/modeli kuramamasına neden olmuştur. Bu ise epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerinde sorun yaşadığına ilişkin saptamamızı desteklemektedir. Öğrencinin görüşme boyunca bilgi eksikleri nedeniyle geçersiz açıklamalar yaptığı; hatalı adımlarını ve iddialarını savunduğu görülmektedir. Bu durum, öğrencinin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerinde yaşadığı sorunun iletişim bileşeninin sözel iletişim alt bileşenini olumsuz etkilediğini göstermektedir.

Bir diğer öğrenci, Şekil 14'te verilen kanıt yapma sürecinde, soruda verilen kriterlere uygun olarak şekli çizebilmiştir. Şekil üzerinde yaptığı düzenlemeler, kenar ve açı isimlendirmeleri doğru ve amacına uygundur. Bu durum, öğrencinin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin görsel gerekliliklerini sağladığını göstermektedir.



Şekil 14. Teleolojik bileşende eksiklik.

Bu öğrenci, soruda verilen üçgenlerin alanının eşit olduğunu kanıtlamak için Sinüs teoremini kullanmayı tercih etmiştir. Öğrencinin amacına ulaşmak için doğru ve geçerli bir araç seçtiği ve kullandığı görülmektedir. Bu bağlamda, Habermas akılcı davranış modeline göre, kanıt yapma sürecinin başında teleolojik bileşenin gerekliliklerini sağladığı söylenebilir.

Öğrenci, şekildeki karelerin kenarları üzerine dışarıdan kurduğu üçgenlerin alanını A_1 , A_2 ve A_3 olarak isimlendirmiştir. Bu üçgenlerin alanını bulmak için araç olarak kullandığı Sinüs teoremini doğru bilmekte ve uygulamaktadır. Bu sayede, söz konusu üçgenlerin alanını veren denklemleri doğru kurgulamıştır. $\mathrm{Sin}(180 - \propto) = \sin(\propto)$ eşitliğini de doğru bilmektedir. Bu bilgiyi A_1 alanını hesaplarken de doğru ve amacına uygun şekilde kullanabilmiş ve A_1 alanını $\frac{1}{2} \times a \times c \times \sin(180 - \propto) = \frac{a \times c}{2} \times \sin(\propto)$ olarak yazmıştır. Bu durum, öğrencinin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerini sağladığını göstermektedir.

Öğrencinin elde ettiği bu sonuç, $A_1 = \frac{a \times c}{2} \times \sin(\propto)$, ABC üçgeninin alanına eşittir. Ancak öğrenci, kanıt yapma sürecinin sonuna “Ortadaki üçgenin alanını bulamadım” şeklinde not düşmüş ve ABC üçgeninin alanını bulamadığını ifade etmiştir. Oysaki öğrenci, Sinüs teoremi ile bir üçgenin alanını bulmayı bilmektedir. ABC üçgeninin kenarlarını ve açılarını diğer üçgenlerin kenarları ve açıları ile ilişkili olacak şekilde isimlendirebilmiştir. Dolayısıyla, ABC üçgeninin alanını Sinüs teoremini kullanarak $\frac{a \times c}{2} \times \sin(\propto)$ şeklinde yazabilecek durumdadır. Ancak bunu yapamadığı ve A_1 ile ABC üçgeninin alanı arasındaki eşitliği göremediği dikkat çekmektedir. Öğrenci, kanıt yapma sürecinin bu aşamasında attığı adımlar arasındaki bağlantıyı ve kontrolü kaybetmiş; amacına ulaşma yolunda kendisine gereken doğru aracı ve bu aracın nasıl kullanılacağını bildiği halde gerekli son adımı atamamıştır. Öğrencinin düşünme sürecinde bir boşluk olmuş ve öğrenci, bu boşluğu dolduramayarak kanıtta başarısız olmuştur. Bu durumun temelinde yatan esas nedenin görüşme sürecinde netleştirilmesi planlanmıştır.

Öğrencinin iletişim bileşeninin sözel iletişim alt bileşeni yönünden değerlendirilmesi ve kanıt yapma sürecinin daha detaylı analizi için görüşme yapılmıştır. Aşağıda öğrencinin ABC üçgeninin alanını bulamadığını not ettiği kısma ilişkin söylemlerinden alıntılara yer verilmektedir.

> Araştırmacı: Burada ABC üçgeninin alanını bulamadığınızı yazmışsınız… Neden bulamadınız?
>
> Öğrenci: Evet, bulamadım. Onu da bulsaydım iyiydi.
>
> Araştırmacı: Peki yani ne eksik? Alanı bulmanızı engelleyen nedir?
>
> Öğrenci: Yani kenarlar tamam, açılar da tamam da. Ben bunlarınki gibi (A_1, A_2 ve A_3 alanlarını gösteriyor) bunun denklemini (ABC üçgenini gösteriyor) yazamadım. Çok karışık. Hepsi için ortak bir şey yazmam gerek ki karşılaştırayım. Şimdi mesela A_1 in alanını yazmışım. $\propto$ açısını, a ve c kenarlarını kullanarak. Sonra mesela A_2 yi nasıl aynı tipte yazacağım? a, b, c eşit değil ki… Açılar da eşit değil… Yani burada sinüslerin eşit olduğunu da söyleyemem. Yani ben şimdi nasıl

A_1 ile A_2 nin eşit olduğunu söylerim ki. Bilmiyorum bu açılar arasında bir ilişki bulmam lazım ama göremiyorum.

Araştırmacı: Aslında sizden tam olarak istenen bu üçgenlerin alanını ABC üçgeninin alanı ile karşılaştırmanız. Birbirleri ile değil de her birinin alanını ABC üçgeninin alanı ile karşılaştırsanız.

Öğrenci: Aynı şey. Aynı karışıklığı yaşıyorum. Yani A_1 belli; onu yazdım ondan eminim. Ama işte ABC nin alanını yazınca $\frac{1}{2} \times b \times c \times \sin\phi$ olacak. Aynı olduğunu nasıl söylerim. Haydi şu kenarlar aynı çünkü bunlar aynı karenin kenarları. Ama a, b, c 'nin birbirine eşit olma zorunluluğu yok ki. Onu diyorum.

Araştırmacı: Peki, ABC üçgenin alanını sadece b ve c kenarları ve aralarındaki açıyı kullanarak mı bulabilirsiniz? Başka bir yolla ifade etseniz? Yine sinüs teoremini kullanarak…

Öğrenci: Ama tepe açısı bu olunca. Ben o yüzden ϕ açısını kullanıyorum. Ee, kenarlar da b ve c. Yani… Aslında tabi ben niye şey yaptım ki. İlla ki niye ϕ açısına takıldım ben? Tepe açısı olunca… Ondan herhalde takıldım ona. Evet, tabi ∝'dan; kenarlar da a ve c'den alan yazarsam. Zaten ABC üçgeninin alanı bu çıkıyor ($\frac{1}{2}$ $a \times c \times \sin \propto$). Ee, bu da zaten A_1. Ayy, çok basitmiş ya…

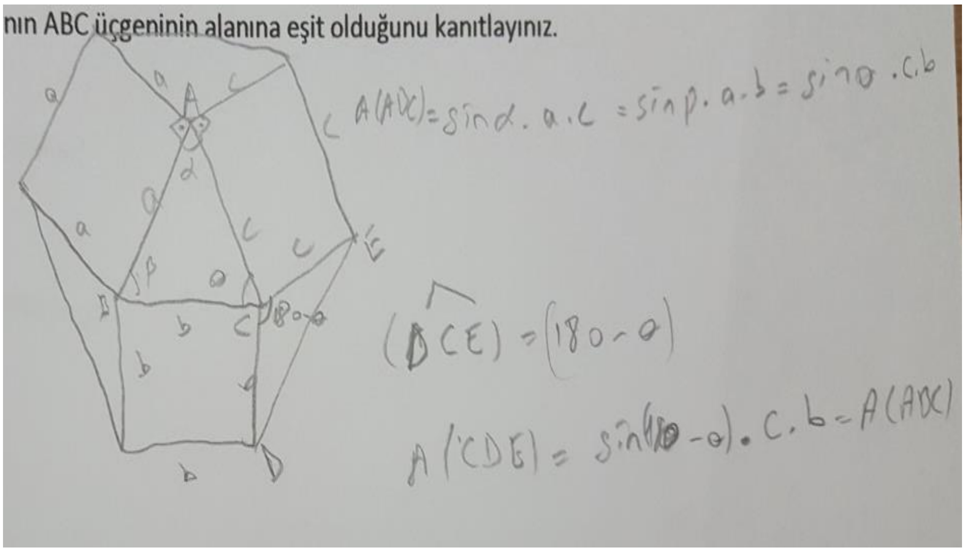
Öğrenci, dışta kalan A_1, A_2, A_3 üçgenlerinin alanlarının ABC üçgeninin alanına eşit olduğunu göstermek yerine, bu üçgenlerin alanının doğrudan birbirine eşit oluğunu göstermeye çalışmaktadır. A_1 için kurduğu alan denklemini, doğrudan A_2 için kurduğu alan denklemi ile karşılaştırmakta ancak kenarlar ve açılar birbirinden farklı olduğundan aralarındaki eşitliği kurmakta zorlanmaktadır. Oysa bu üçgenlerin alan denklemini yazarken kullandığı açıyı, ABC üçgeninin alan denklemini yazarken de kullanabilseydi amacına uygun seçim yapabilmiş olacaktı. Bu durum, amacına uygun seçimi yapamadığını ve dolayısıyla Habermas akılcı davranış modeline göre, teleolojik bileşende sorun yaşadığını göstermektedir. Öğrenci, araştırmacının sorusu üzerine durumu anlayarak süreci geçerli bir yolla tamamlayabilmiştir.

Öğrenciye görüşmede üçgenlerin alan denklemini yazarken kullandığı $\sin(180-\propto) = \sin(\propto)$ eşitliğinin nereden geldiği de sorulmuştur.

> Öğrenci: Bunu ben ezbere biliyorum. Yani bir kural gibi. Nereden geliyordu bu. Yani mesela 60 derece ve 120 dereceyi düşünsem. Onların sinüs'lerinden. Ama öyle de olmaz ya. Hatırlayamadım. Bazı açılımlar vardı. Toplam, fark formülleri falan. Oradan mı acaba geliyor?

Öğrencinin geçerli açıklamayı yapamadığı görülmüştür. Bu aşamada, gerekli ve doğru bir aracı kullandığı ancak bu aracı ezbere bildiği ve uyguladığı görülmektedir. Bu durum, kanıt yapma sürecini olumsuz etkilememektedir ancak iletişim bileşeninde eksikliği olduğunu düşündürmektedir. Kâğıt üzerindeki kanıt yapma sürecinde okuyucuya; görüşme sürecinde de dinleyiciye süreçte kullandığı $\sin(180-\propto)=\sin(\propto)$ matematiksel eşitliğine ilişkin yeterli düzeyde açıklama yapamamıştır. Bu durum, her ne kadar kanıt yapma sürecinde öğrencinin başarısız olmasının temel nedeni olmasa da; Habermas akılcı davranış modeline göre, iletişim bileşeninde sorun yaşadığını düşündürmektedir. Öğrenci, bu eşitliği amacına uygun şekilde kullanmaktadır ancak eşitliğin birim çembere dayandığına ilişkin bilgiye sahip değildir. Bu ise epistemik bileşeninin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerinde sorun yaşadığını ve bu sorunun iletişim bileşenini olumsuz etkilediğini göstermektedir.

Şekil 15'te verilen kanıt yapma sürecinde bir diğer öğrenci, soruda verilen kriterlere uygun şekli çizebilmiş; şekil üzerinde gerekli düzenlemeleri ve değişiklikleri yapabilmiştir. Bu durum, öğrencinin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin görsel gerekliliklerini sağladığını göstermektedir.



Şekil 15. Epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gereklilik alt bileşeninde ve teleolojik bileşende eksiklik.

Diğer yandan, şekildeki üçgenlerin alanını Sinüs teoremini kullanarak karşılaştırmak istediği görülmektedir. Sinüs teoremi, soruda verilen ifadenin kanıtını yapmak için doğru ve geçerli bir araçtır. Bu bağlamda, öğrencinin teleolojik bileşenin gerekliliklerini sağladığını söylemek mümkündür. Ancak Sinüs teoremini kullanarak bir üçgenin alanını hesaplamayı doğru bilmediği görülmektedir. Bu doğrultuda, üçgenlerin alan denklemini yanlış kurguladığı görülen öğrencinin, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerinde sorun yaşadığı düşünülmektedir.

Öğrencinin kanıt yapma sürecini okuyucuya açıklayıcı ve anlaşılır şekilde sunamadığı dikkat çekmektedir. Süreçte ortaya koyduğu iddialarının ardındaki matematiksel gerekçeler konusunda sembolik dille ya da metin yoluyla herhangi bir açıklama yapmamıştır. Özellikle son adımda, ABC ve CDE üçgenlerinin alanlarının eşit olduğu yönündeki iddiasını nasıl oluşturduğu anlaşılmamaktadır. Bu kısım incelendiğinde, Sinüs teoremini kullanarak ABC ve CDE üçgenlerinin alan denklemini oluşturduğu ve buradan elde ettiği denklemleri karşılaştırma yoluna gittiği görülmektedir. Ancak bu aşamada, herhangi bir matematiksel gerekçe sunmadan, doğrudan, bu üçgenlerin alanının eşit olduğunu iddia etmektedir. Bu iddiasını oluştururken $\sin(180-\propto) = \sin\propto$ eşitliğini kullandığı düşünülmektedir ancak kanıt yapma sürecinde bu düşüncemizi destekleyen sembolik dille ya da metin olarak yazılmış bir açıklamaya rastlanmamıştır. Bu durum, kanıt yapma sürecinin anlaşılırlığını olumsuz yönde etkilemektedir.

Habermas akılcı davranış modeline göre, öğrencinin iletişim bileşeninin sembolik ve metinsel iletişim alt bileşenlerinde sorun yaşadığı düşünülmektedir.

Kanıt yapma sürecinin daha detaylı analizi ve öğrencinin iletişim bileşeninin sözel iletişim alt bileşeni yönünden değerlendirilmesi için görüşme yapılmıştır. Aşağıda öğrencinin görüşme sürecindeki söylemlerinden bazı alıntılara yer verilmektedir.

> Araştırmacı: Kanıt yapma sürecinde neler yaptığınızı anlatır mısınız?
>
> Öğrenci: Üçgenlerin alanlarının eşit olduğunu göstermek için Sinüs teoreminden alan formülünden alanları yazdım. Eşit çıktı zaten. Çok uzun sürmedi açıkçası. Bakıyorum pek bir şey de yapmamışım. Doğru mu yapmışım diye bir bakayım. Bu kadar kısa olunca tereddüt ettim şimdi.
>
> (Öğrenci, bir süre kâğıt üzerine yazdıklarını incelemiştir.)
>
> Öğrenci: Evet, dediğim gibi üçgenlerin alanını yazmışım. Önce ABC üçgeninin alanını bulmuşum. Üç açısını da kullanarak.
>
> Araştırmacı: Sinüs teoremini kullanarak nasıl alan hesaplıyoruz?
>
> Öğrenci: Üçgenin iki kenarını alıyoruz. Bu kenarları ve aralarındaki açının Sinüs'ünü çarpıyoruz.

Öğrencinin söylemlerinden de Sinüs teoremi ile bir üçgenin alan formülünü yanlış bildiği ve uyguladığı anlaşılmaktadır. Bu durum, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerinde sorun yaşadığına ilişkin saptamamızı doğrulamaktadır.

> Araştırmacı: Peki, devam edelim. Şu son kısımda CDE üçgeninin alan denklemini yazdığınızı görüyorum. Sonra da bu alanın ABC üçgeninin alanına eşit olduğunu yazmışsınız. Buna nasıl karar verdiniz?
>
> Öğrenci: Yani şimdi CDE'nin alanını b ve c kenarlarını kullanarak yazdım. Aradaki açı da $180° - \mathrm{a}$ açısı. Onun da sinüs'ünü alıyorum. Oradan alan denklemini yazmış oluyorum. $\sin(180° - \mathrm{a}) \times \mathrm{b} \times \mathrm{c}$ oldu. ABC'nin alanı da şurada yazmışım aynı kenarların çarpımı ve aradaki açı da aynı sinüs'lü açı. Oradan yani eşittir demişim.
>
> Araştırmacı: Aradaki açı derken tam olarak hangi açılardan bahsediyorsunuz?

Öğrenci: ABC üçgeninde BCA açısı θ demişim. Öyle deyince, buraya (DCE açısını gösteriyor) $180° - \theta$ kalıyor. Çünkü burası tam açı, şunlar da kare olduğundan buralar 90°, 90°. Oradan oldu DCE açısı $180° - \theta$. Toplamları 180° olan açıların sinüs'leri eşittir. Yanlış mı hatırlıyorum?

Araştırmacı: Yoo, doğru hatırlıyorsunuz. Peki, bu kural nereden geliyor? Neye dayanarak bunu söyleyebiliyoruz?

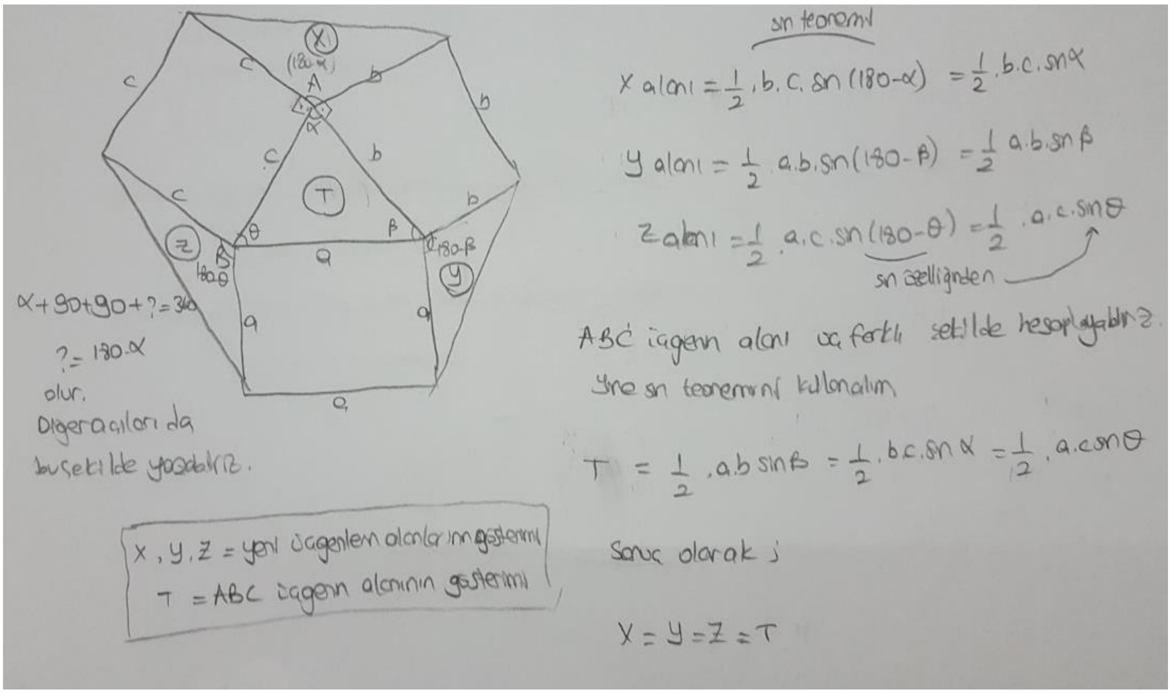
Öğrenci: Hımm, onu pek hatırlamıyorum. Yani benim aklımda öyle kalmış sadece. Birbirini 180° ye tamamlayan açıların sinüs'leri eşittir.

Araştırmacı: Anladım. Oradan nasıl devam ettiniz?

Öğrenci: Orada işte, her iki üçgenin aldığım iki kenar zaten eşit, karelerden dolayı. Yani aynı karenin şeyi kenarı onlar. Aralarındaki açıların da sinüs'leri eşit. Toplamları 180° olduğundan. İşte oradan zaten tıpatıp aynı oluyor zaten denklemler. Yani alanları eşit.

Öğrencinin $\sin(180° - \propto) = \sin \propto$ eşitliğini kullandığı ancak kullandığı bu eşitliğin nereden geldiği sorulduğunda cevap veremediği görülmektedir. Aslında soruda verilen ifadenin kanıtı, doğrudan bu eşitliğin nereden geldiğini bilmesini gerektirmemektedir. Bu eşitliği uygun yerde amacına yönelik kullanması ifadeyi kanıtlaması için yeterlidir. Diğer yandan, Habermas akılcı davranış modeline göre, öğrencinin kanıt yapma sürecinde attığı adımlarını ve iddialarını nedenleri ile okuyucuya ya da dinleyiciye açıklaması beklenmektedir. Bu durum, öğrencinin sunduğu kanıt yapma sürecinin anlaşılırlığı açısından önemli ve gereklidir. Hem kâğıt üzerindeki kanıt yapma süreci hem de görüşme verileri analiz edildiğinde, çözüm sürecinin genelinde ve özellikle son aşamada, bu öğrencinin iletişim bileşeninde sorun yaşadığı değerlendirilmektedir.

Bazı öğrencilerin ise iletişim bileşeninin sembolik ve metinsel iletişim alt bileşeninin gerekliliklerini sağladığı ve bu durumun öğrencileri modeldeki diğer bileşenler yönünden de güçlendirdiği görülmüştür. Şekil 16'da bu durumu yansıtan bir kanıt yapma sürecine yer verilmektedir.



Şekil 16. İletişim bileşeninin diğer bileşenler üzerindeki olumlu etkisi.

Öğrenci soruda verilen kriterlere uygun şekli çizebilmiş ve şekil üzerinde ifadeyi kanıtlamaya yönelik doğru ve gerekli düzenlemeleri yapabilmiştir. ABC üçgeninin kenarları üzerine dışarıdan çizdiği karelerin kenarlarını, ABC üçgeninin kenarları cinsinden isimlendirebilmiştir. Karelerin boşta kalan köşelerini, soruda belirtilen şekilde birleştirerek oluşturduğu üçgenlerin tepe açılarını, ABC üçgeninin açıları cinsinden yazabilmiştir. Bu bağlamda, öğrencinin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin görsel gerekliliklerini sağladığı söylenebilir.

Öğrenci, ABC üçgeninin alanı ile karelerin boşta kalan köşelerini birleştirerek oluşturduğu yeni üçgenlerin alanlarını karşılaştırmak için Sinüs teoremini kullanmış; amacına ulaşmak için doğru ve geçerli bir araç seçebilmiştir. Bu durum, Habermas akılcı davranış modeline göre, teleolojik bileşenin gerekliliklerini sağladığını göstermektedir. Diğer yandan, Sinüs teoremini doğru kullanarak söz konusu üçgenlerin alan denklemini doğru kuran ve kanıt yapma sürecinde doğru modeller oluşturan öğrencinin, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerini de sağladığı görülmektedir.

Genel olarak bakıldığında, matematiğin sembolik dilini doğru ve uygun şekilde kullanmıştır. Bunun yanı sıra, yer yer metin şeklinde açıklamalar yazarak okuyucuya kanıt yaparken attığı adımların nedenlerini sunmuştur. Bu durum, kanıt yapma sürecinin anlaşılırlığını arttırmakta ve okuyucunun süreci daha kolay algılamasını sağlamaktadır. Ancak üçgenlerin alan denklemini yazarken $\sin(180-\propto) = \sin(\propto)$ eşitliğini kullandığı adımlarda, bu eşitliğin nereden geldiği konusunda net bir açıklama yapmadığı dikkat çekmektedir. Bu durum, öğrencinin kanıt yapma sürecini olumsuz etkilemese de söz konusu adımın anlaşılırlığını düşürmektedir. Öğrenciden bu aşamada, birim çember üzerinde birbirini 180° ye tamamlayan açılar çizerek, bu açıların *y* eksenine göre simetrik olması nedeniyle sinüs değerlerinin eşit olduğunu göstermesi beklenmektedir. Ancak öğrencinin "sin özelliğinden" şeklinde bir not düşerek kanıtına devam ettiği görülmektedir. Her ne kadar kanıtının bu aşamasında beklenen açıklamayı yapmamış olsa da; genel anlamda öğrencinin Habermas akılcı davranış modeline göre, iletişim bileşeninin sembolik ve metinsel iletişim alt bileşenleri yönünden güçlü olduğunu söylemek mümkündür.

Öğrencinin kanıt yapma sürecinin detaylı analizi ve iletişim bileşeninin sözel iletişim alt bileşeni yönünden değerlendirilmesi için görüşme yapılmıştır. Görüşmede kanıt yapma sürecini dinleyiciye anlaşılır bir dille aktarabildiği; süreçte attığı adımları nedenleriyle birlikte açıklayabildiği görülmüştür. Aşağıda öğrencinin görüşme sürecindeki söylemlerinden bazı alıntılara yer verilmektedir.

> Araştırmacı: Z'nin alanını bulurken "sin özelliğinden" diye bir not düşmüşsünüz. Burada tam olarak ne demek istediniz?
>
> Öğrenci: Evet, şunu demek istedim. Yani aslında bu tabi bilindik bir şey diye ben fazla açmak istemedim. Çok fazla amacımdan da sapmak istemedim. O yüzden buraya yazmadım ama bu öncelikle bilindik bir kural. Yani bunu hep kullanıyoruz. Analiz derslerimizde mesela özellikle kullandığımız çok oluyor. Lisede gördük önce, üniversitede de kullanmaya devam edince unutmadık. Eğer iki açının toplamı 180 ediyorsa o zaman bu iki açının sinüs'ü eşittir… Kosinüs'ü de eşittir ama eksilisine. Burada Kosinüs'leri bir işime yaramaz ama sinüslerinin eşit olduğunu kullanıyoruz işte. Mesela şu da var: Toplamları 360 ise iki açının o zaman da Kosinüs'leri eşit sinüsleri ters yani eşit ama ters işaretli.
>
> Araştırmacı: Anladım. Peki, bu kural nereden çıkıyor onu biliyor musunuz?
>
> Öğrenci: Birim çemberden açıklayabilirim. Çizerek yapayım. Birim çember şöyle… Yarıçapı 1 olan çember. Şimdi şurada (birim çemberin

> birinci bölgesini gösteriyor) küçük açı alayım yani dar açı… Bunu 180'e tamamlayan açı da şurada olur (birim çemberin ikinci bölgesini gösteriyor). Bunlar simetrik çünkü yatayla yani x ekseni ile yaptıkları açılar eşit. Öyle olunca işte şurada (y ekseninde söz konusu açıların y koordinatlarını işaretliyor) bakın Sinüs'leri eşit. Bu arada tabi x ekseninin Kosinüs ekseni y ekseninin de sinüs ekseni olduğunu ekleyeyim. Görüldüğü gibi, bu açılar simetrik birbirine çakışır yani. y ekseni üzerindeki değerleri de aynı. Buradan anlıyoruz ki, bu açıların sinüsleri eşit.

Burada, öğrencinin kanıt yapma sürecinde $\sin(180-\propto) = \sin(\propto)$ eşitliğinin temeline ilişkin doğru ve geçerli bir açıklama yaptığı görülmektedir. Öğrenci, birbirini 180° ye tamamlayan açıların sinüs değerlerinin eşit olduğunu, kâğıda birim çember çizerek açıklamıştır. Bu sayede, anlatımını güçlendirmiş; dinleyicinin söz konusu durumu net olarak anlamasını sağlamıştır. Bu durum, öğrencinin iletişim bileşeninin sözel iletişim alt bileşenindeki gücünü göstermektedir.

Kare sorusu kapsamında analiz edilen kanıt yapma süreçlerinde öğrencilerin çoğunlukla, soruda verilen kriterlere uygun şekli çizebildiği; şekil üzerinde gerekli ve doğru düzenlemeleri yapabildiği görülmüştür. Diğer yandan, verilen ifadenin kanıtını yapmak için gerekli ve uygun aracı doğru seçebildikleri ancak bu aracı kullanma konusunda sorun yaşadıkları ve ifadenin kanıtı için gereken denklemi/modeli kuramadıkları dikkat çekmektedir. Bu durum, Habermas akılcı davranış modeline göre, kanıt için gerekli aracı doğru seçme ve kullanma ile ilgili olan teleolojik bileşende yaşanan sorunların, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerini olumsuz etkilediğini göstermektedir. Seçilen aracı doğru kullanma konusunda sorun yaşayan öğrenciler, ifadenin kanıtı için gereken doğru denklemleri/modelleri de kurgulayamamıştır. Diğer yandan, öğrencilerin Sinüs teoremini doğru kullanamamalarının nedeni de bilgi eksiklikleri olup, epsitemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerindeki eksikliğe dayanmaktadır. Bu durum, Habermas akılcı davranış modelinde epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gereklilikleri ile teleolojik bileşen arasındaki karşılıklı etkileşimi göstermektedir. Bu öğrencilerin, şekli doğru çizmesine ve şekil üzerinde ifadenin kanıtı için gerekli düzenlemeleri yapmış olmasına rağmen, kanıt için gereken denklemleri/modelleri kurgulayamaması; Habermas akılcı davranış modelinde epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin görsel ve formel gereklilik adı altında iki yeni alt bileşeninin oluşturulması yönündeki ihtiyacımızı desteklemektedir.

Bu soru kapsamında yapılan kanıtlama süreçlerinin analizinde görülmüştür ki, öğrenciler süreçte şekil çizerek ve şekil üzerinde bazı düzenlemeler yaparak görsel modeller oluştururken, aynı zamanda cebirsel ifadeler, bazı matematiksel kurallar ve teoremler kullanarak formel denklemler/modeller de oluşturmaktadırlar. Bu bağlamda düşünüldüğünde, öğrencilerin kanıt yapma sürecinin detaylı ve doğru analizi için süreçte oluşturdukları görsel ve formel modeller açısından yeterlikleri ayrı ayrı değerlendirilmelidir. Bu bağlamda, Habermas akılcı davranış modelinde amaca uygun denklemi/modeli doğru bilgiler kullanarak kurma yeterliğini gerektiren epistemik bileşenin modelleme gerekliliklerinin, görsel ve formel yeni alt bileşenleri ile analizlerde daha işlevsel kullanılabileceği ve bu sayede analizlerin daha derinlemesine yapılmasına fırsat sağlayacağı görülmektedir.

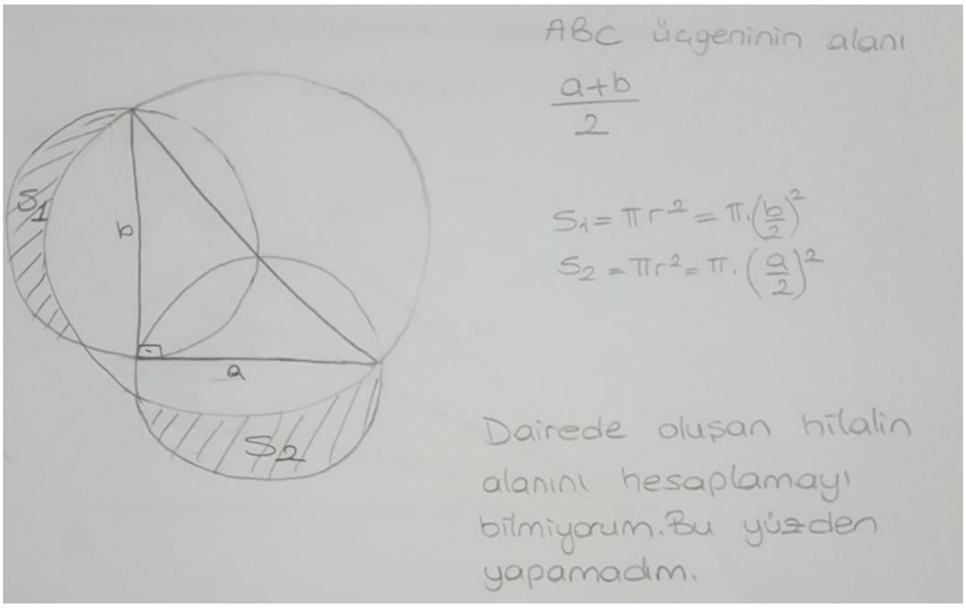
Çemberde yaylar sorusu. Bu soru öğrencilere şu şekilde yöneltilmiştir:

“Bir ABC dik üçgeni veriliyor. Bu üçgenin dik kenarlarını çap kabul eden çemberlerin iç kısmında ve hipotenüsü çap kabul eden çemberin dış kısmında kalan hilal biçimindeki yüzeylerin alanları S_1 ve S_2 ile gösterilsin. ABC üçgeninin alanının S_1 ve S_2 yüzeylerinin alanları toplamına eşit olduğunu kanıtlayınız (Hipokrates von Chios, (M.Ö. 450); akt. Nesin, 2010).”

Öğrencilerden verilen özelliklere uygun şekli çizmesi ve soruda belirtilen alanları belirleyerek bu alanlar arasında ilişki kurması istenmektedir. Soruda verilen özelliklere uygun şeklin çizilmesi, Habermas akılcı davranış modeline göre, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin görsel gereklilikleri kapsamında değerlendirilmektedir. Şekil üzerinde belirlenen bölgelerin alanlarına ilişkin denklemlerin kurulması ise epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gereklilikleri kapsamında; öğrencinin kurduğu denklemi doğru çözmesi ve işlem hatası yapmaması ise epistemik bileşenin sistemik gereklilikleri kapsamında incelenmektedir.

Şekil 17’de epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin görsel gerekliliklerinde eksikleri olan bir öğrencinin kanıt yapma sürecine yer verilmektedir. Öğrencinin şekli çizerken çapı, dik üçgenin hipotenüsü olan çemberi;

ABC üçgeninin dik açısının olduğu köşeden geçecek şekilde çizemediği dikkat çekmektedir. Bu durumun nedeni, bilgi eksikliği olabileceği gibi öğrencinin çizim yaparken özensiz ya da dikkatsiz davranması da olabilir. Söz konusu durumun, görüşme sürecinde netleştirilmesi planlanmaktadır.



Şekil 17. Epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin görsel gerekliliklerinde eksiklik.

Öğrencinin S_1 ve S_2 alanlarını şekil üzerinde doğru belirlediği ancak alan denklemlerini doğru kuramadığı görülmektedir. Bu aşamada, öğrencinin epistemik bileşeninin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerinde sorun yaşadığı dikkat çekmektedir. Sürecin devamında, ABC üçgeninin alan denklemini ve çapı dik üçgeninin hipotenüsünü olan çemberin alan denklemini de doğru yazamamıştır. Kanıt yapma süreci genel olarak değerlendirildiğinde, öğrencinin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin hem görsel hem formel gerekliliklerinde sorun yaşadığı görülmektedir.

Öğrenci, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin hem görsel hem de formel gerekliliklerinde yaşadığı sorunlardan dolayı, amacına uygun seçimler yapamamıştır. Örneğin, öğrenciden *a* ve *b* kenarlarını çap kabul eden yarım çemberlerin alan denklemini yazması beklenmektedir. Buradan yola çıkarak S_1 ve S_2 bölgelerinin alan denklemini, bu yarım çemberlerin S_1 ve S_2 bölgeleri dışında kalan yüzeylerinin alanı cinsinden yazma yoluna gidememiştir. Buradan ABC üçgeninin alanını da yarım çemberlerin S_1 ve S_2 bölgelerinin dışında kalan bölgelerinin alanları ve çapı ABC dik üçgeninin hipotenüsü olan yarım çemberin alanı cinsinden yazamamıştır. Bu durumun, öğrencinin söz konusu şekillerin alanını yazmayı bilmemesinden ve şekli doğru çizememesinden kaynaklandığı düşünülmektedir. Bu bağlamda, öğrencinin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin hem görsel hem de formel gerekliliklerinde yaşadığı sorunların, teleolojik bileşenin gerekliliklerinde de sorun yaşamasına neden olduğu söylenebilir.

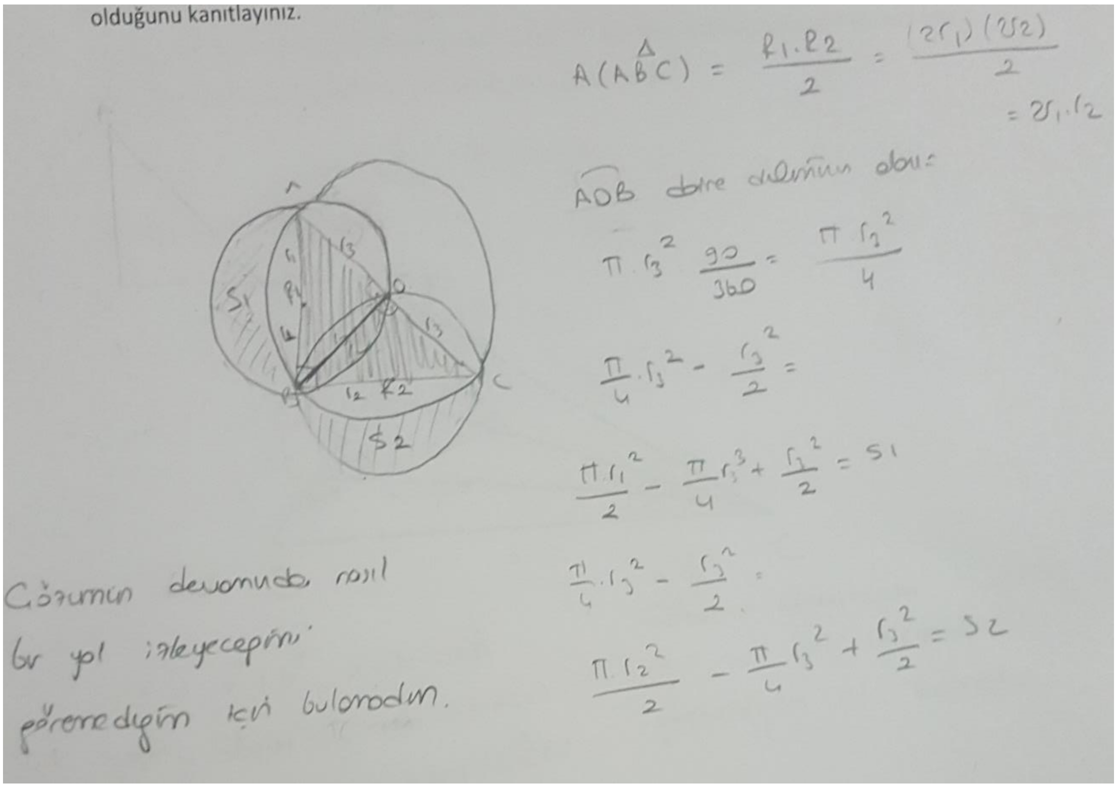
Yapılan görüşmede, öğrencinin çapı, ABC dik üçgeninin hipotenüsü olan çemberi bilgi eksikliğinden çizemediği ve bu durumun süreçte kullanacağı araç seçimini de olumsuz etkilediği görülmüştür.

> Araştırmacı: Bu çemberleri nasıl çizdiğinizi açıklar mısınız?
>
> Öğrenci: Aslında direk çizdim. a kenarı çap olacak. Diğer çemberde de b kenarı çap olacak. Diğerini de çizdim. Hipotenüs çap olsun demiş.
>
> Araştırmacı: Peki, bu hipotenüsü çap kabul eden çemberi çizerken başka herhangi bir şeye dikkat ettiniz mi?
>
> Öğrenci: Bakayım, yani soruda başka bir şey dememiş. Sadece hipotenüsü çap kabul eden diyor. a ve b'yi çap kabul eden çemberlerin içinde bu hipotenüsü çap kabul edenin dışında diyor. Tamam, doğru çizmişim. Başka bir şey yok.

Öğrencinin çapı, ABC dik üçgeninin hipotenüsü olan çemberi çizerken; çapı gören çevre açının dik olması özelliğini göz önüne almadığı dikkat çekmektedir. Bu durum, öğrencinin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin görsel gerekliliklerinde sorun yaşadığına ilişkin görüşümüzü desteklemektedir.

Habermas akılcı davranış modeline göre, öğrencinin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninde yaşadığı sorunların, iletişim bileşenini olumsuz etkilediği görülmektedir. Öğrenci, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninde yaşadığı sorunlardan ötürü kanıt için gerekli aracı seçememiş; gerekli alan denklemlerini kuramamış; sembolik ve metinsel açıklama yönünden eksik bir ürün ortaya koymuştur. Görüşmede şekil üzerinde yaptığı yanlışın ve süreçle ilgili yaşadığı sorunun farkında olmayan öğrenci, neden kanıtı yapamadığını açıklayamamıştır. Bu durum, öğrencinin iletişim bileşeninin tüm alt bileşenlerinin, epistemik bileşeninin modelleme alt bileşeninde yaşadığı sorundan olumsuz etkilendiğini göstermektedir.

Şekil 18'de kanıt yapma sürecine yer verilen bir diğer öğrenci, soruda verilen kriterlere uygun şekli çizebilmiştir ancak şekil üzerinde AOB daire dilimini yanlış oluşturduğu ve buna bağlı olarak bir dizi yanlış denklem kurduğu görülmektedir.



Şekil 18. Epistemik bileşenin modelleme gerekliliklerinin görsel ve formel gereklilik alt bileşenlerinde eksiklikler.

Aslında öğrencinin kanıt yapma sürecinde amacına uygun araçlar seçtiği ve kullandığı görülmektedir. AOB daire diliminin alanını bulması, AOB daire diliminin alanından AOB üçgeninin alanını çıkartarak bulduğu AOB daire dilimindeki boşta kalan alanı, AB çaplı yarım çemberin alanından çıkartarak S_1 in alanını ve benzer şekilde S_2 nin alanını bulması süreç içinde doğru attığı adımlardır. Bu bağlamda, Habermas akılcı davranış modeline göre, teleolojik bileşenin gerekliliklerini sağladığını söylemek mümkündür. Ancak herhangi bir üçgen olduğu halde, ABC üçgeninin yüksekliğini aynı zamanda kenarortay olarak kabul ettiği, bunun sonucu olarak da AOB daire dilimini O merkezli çemberin 90°lik bir dilimi olarak oluşturduğu görülmektedir. Bu durum, öğrencinin şekil üzerinde yanlış düzenlemeler yaptığını ve bu nedenle, Habermas akılcı davranış modeline göre, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin görsel gerekliliklerinde sorun yaşadığını göstermektedir. AOB daire dilimini 90°lik bir dilim olarak alan ve S_1, S_2

bölgelerinin alan denklemlerini bunun üzerine doğru kuran öğrencinin, bu aşamada epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerini çizdiği şekle göre sağladığı görülmektedir. Ancak öğrenci S_1 ve S_2 bölgelerinin toplam alanı ile ABC üçgeninin alanını ilişkilendirecek denklemi kuramamıştır. Bu bağlamda, son aşamada öğrencinin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerinde sorun yaşadığını ve bu nedenle kanıtı tamamlayamadığını söylemek mümkündür.

Öğrencinin kanıt yapma sürecinde sembolik dili yeterli düzeyde kullanabildiği görülmektedir. Alan denklemlerini sembolik dili kullanarak uygun şekilde yazabilmiştir. Bu nedenle, öğrencinin iletişim bileşeninin sembolik iletişim alt bileşeninin gerekliliklerini sağladığı söylenebilir.

Görüşme sürecinde çelişkili açıklama yaptığı görülen öğrencinin, iletişim bileşeninin sözel iletişim alt bileşeninde sorunları olduğu görülmüştür.

> Araştırmacı: Burada AOB açısının 90° olduğunu not etmişsiniz. Bu açının 90° olduğunu nasıl anladınız?
>
> Öğrenci: ABC üçgeninde yüksekliği indirince tabana tam dik olur. Yükseklik sonuçta.
>
> Araştırmacı: Evet doğru ama bu AOB açısının dik olduğunu garanti eder mi?
>
> Öğrenci: Evet, AOB dik olur. O (noktayı kastediyor) şu çemberin (AC çaplı çemberi kastediyor) merkezi. Tam merkeze tepeden yükseklik dik iner.
>
> Araştırmacı: O merkez olunca AO ile OC kenarları eşit oluyor aynı çemberin yarıçapları olduğu için. AOB dik açısı ile bu kenarların eşitliğini ilişkilendirebilir misiniz?
>
> Öğrenci: Tabi burası hem dik hem kenarortay. Aaaa, bir saniye. Aaa, bu dik üçgen değil mi (ABC üçgenini gösteriyor)? Dik üçgenin kenarortayı ayırdığı parçalara eşit oluyordu.
>
> Araştırmacı: Evet, doğru.
>
> Öğrenci: O yüzden OB; AO ve OC kadar olur. Bu muhteşem üçlüydü sanırım. Evet, sanırım. Ama bir dakika ya, bu (OB kenarını gösteriyor), bu çemberin yarıçapıymış (O merkezli çemberi gösteriyor). Eee, tabi

> eşitler yani, buradan da dermişiz zaten; muhteşem üçlüye gerek de yok. Yani, her neyse. Bu açının dik olması normal. Yükseklik ve aynı anda yani aynı zamanda kenarortay olunca OB dik oluyor. Yükseklik aynı zamanda tam O'da AC'yi ikiye ayırıyor. O yüzden dik ve aynı zamanda kenarortay.

Öğrencinin görüşme sürecinde söz konusu aşamaya ilişkin geçerli açıklamalar yapamadığı dikkat çekmektedir. OB'nin hem kenarortay hem de yükseklik olduğunu iddia etmektedir ancak bu iddiasını destekleyecek bir verisi yoktur. Ortaya attığı bir iddianın matematiksel gerekçelerini dinleyiciye sunamayan öğrencinin, iletişim bileşeninin sözel iletişim alt bileşeninde sorun yaşadığı görülmektedir.

Öğrenciye kanıtlama sürecini neden tamamlayamadığı sorulmuştur. S_1 ve S_2 bölgelerinin toplam alan denklemini oluşturamayan ve S_1 ve S_2'nin toplam alanını ABC üçgeninin alanı ile karşılaştırmayan öğrenciden, son aşamada yaşadığı sorunu açıklaması istenmiştir.

> Öğrenci: Ben bilemiyorum, aslında sanırım çok karışık geldiği için çıkmadı. Neden bıraktım bilmiyorum. Şimdi bakınca da karışık geliyor aslında. Devam etsem belki çıkar. Bir deneyebilir miyim?
>
> Araştırmacı: Tabi ki.

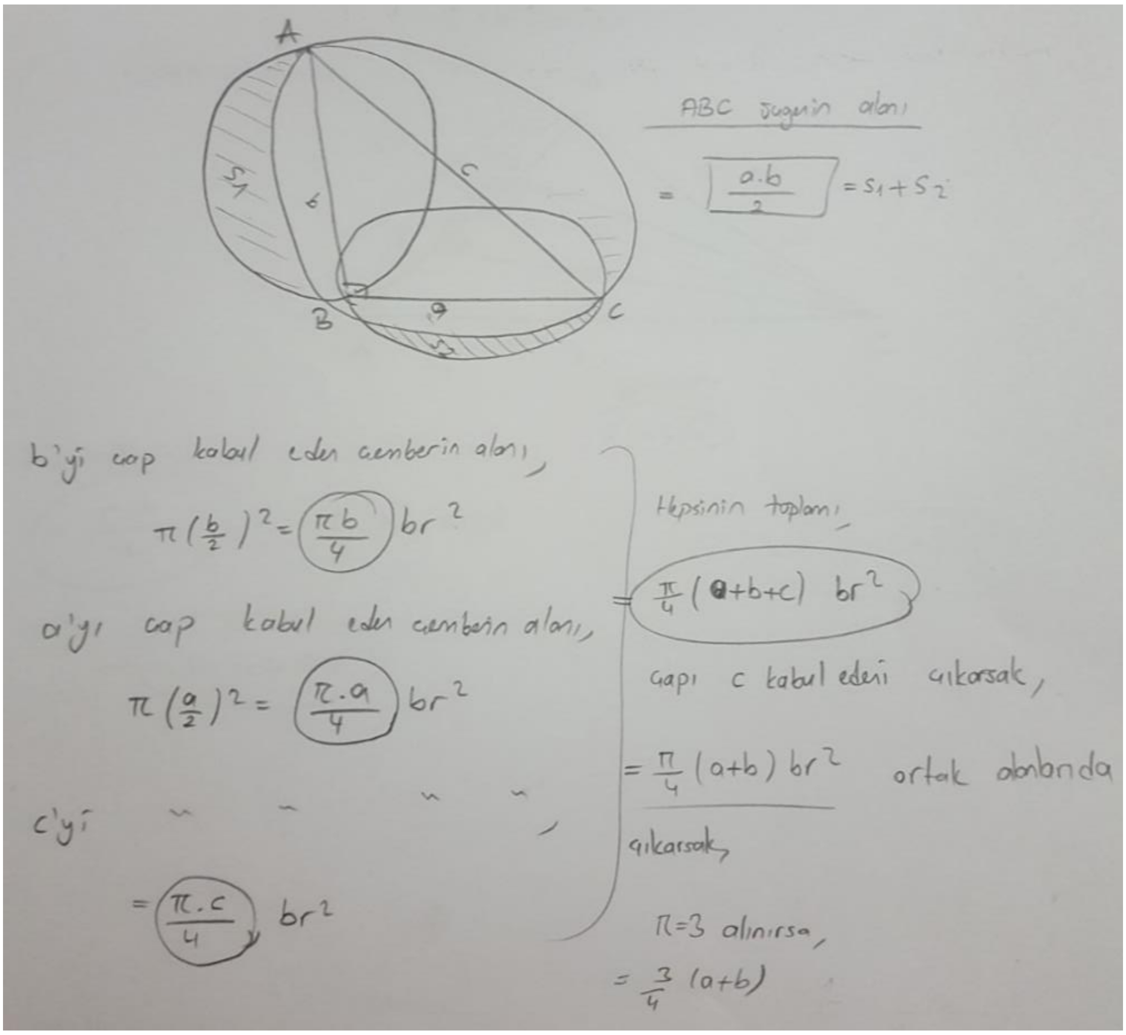
Öğrenci kâğıt üzerinde kaldığı yerden devam ederek S_1 ve S_2 bölgelerinin toplam alan denklemini kurmuştur. Alan denklemini $\frac{\pi\,(r_1^2+r_2^2)}{2}-\frac{\pi r_3^2}{2}+r_3^2$ şeklinde oluşturan öğrenci, bu denklemde ABC üçgeninde Pisagor teoremi yaparak elde ettiği $4r_1^2+4r_2^2=4r_3^2$ eşitliğinden yararalanarak $r_1^2+r_2^2$ ifadesi yerine r_3^2 yazabilmiştir. Buradan, S_1 ve S_2 bölgelerinin toplam alanını veren denklemi r_3^2 şeklinde elde eden öğrenci, bu ifadeyi ABC üçgeninin alanı ile ilişkilendirememiştir. ABC üçgeninin alanını $\frac{2r_1 2r_2}{2}=2r_1r_2$ olarak yazan öğrenci, bu ifade ile r_3^2 arasında bir ilişki kuramamıştır. Aşağıda öğrencinin bu aşamada yaptığı açıklamaya yer verilmektedir.

> Öğrenci: Yani burada kaldım. $2r_1r_2$, bu ABC üçgeninin alanı. Bunu önceden bulmuşum zaten tamam ama bu r_3^2 ne eşit olmak zorunda değil ki. Olmalı mı? Soruyu bir daha okuyayım… Hayır, olmak zorunda değil. Pisagor'dan bu eşitlik gelir mi? Bir de oradan deneyeyim…

Hayır… $4\mathrm{r}_1^2 + 4\mathrm{r}_2^2 = 4\mathrm{r}_3^2$ oluyor. Burada da 4'leri götürsem geriye $\mathrm{r}_1^2 + \mathrm{r}_2^2 = \mathrm{r}_3^2$ kalıyor.

Öğrencinin ABC üçgeninde OB yüksekliğini aynı zamanda kenarortay olarak kabul ettiği ve tüm kanıtını bu varsayımı üzerine kurduğu düşünüldüğünde, r_1 in r_2 ye eşit olduğu ve S_1 ve S_2 bölgelerinin toplam alanının ABC üçgeninin alanına eşit olduğu sonucuna varılmaktadır. Ancak öğrenci, ABC üçgenini bilinçli olarak ikizkenar üçgen seçmediğinden, aslında bu varsayımının farkında olmadığından, OB yüksekliğini bilinçsizce O noktası ile birleştirdiğinden ve kenarortay olarak kabul ettiğinden son aşamada r_1 in r_2 ye eşit olduğunu fark edememiş ve süreci yine tamamlayamamıştır. Bu aşamaya kadar öğrenci, S_1 ve S_2 bölgelerinin toplam alan denklemini doğru kurduğundan Habermas akılcı davranış modeline göre, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerini sağlamıştır. Bu denklemde, $r_1^2 + r_2^2$ ifadesi yerine ABC üçgeninde Pisagor teoremi kullanarak elde ettiği r_3^2 ifadesini yazabilmesi, bu aşamada amacına uygun araç seçebildiğini ve kullanabildiğini göstermektedir. Bu bağlamda, öğrenci teleolojik bileşenin gerekliliklerini sağlayabilmektedir. Ancak son aşamada r_1 in r_2 ye eşit olduğunu göremediğinden, bu eşitliği kullanamamış ve süreci tamamlayamamıştır. Öğrencinin bu son aşamada yaşadığı sorun amacına uygun araç seçememesi ile ilgili olduğundan, teleolojik bileşende sorun yaşadığı görülmektedir. Bu durumun nedeninin ise öğrencinin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin görsel gerekliliklerindeki eksiklik olduğu düşünülmektedir. ABC üçgeninin yüksekliği olan OB kenarını aynı zamanda kenarortay olarak çizdiğinin ve dolayısıyla ABC üçgenini ikizkenar üçgen olarak aldığının farkında olmadığından, epistemik bileşenin modelleme at bileşeninin görsel gereklilikleri ile ilgili sorunu olduğu düşünülmektedir.

Şekil 19'da, bir diğer öğrencinin kanıtlama sürecine yer verilmiştir. Öğrencinin *c* kenarını çap kabul eden çemberi B köşesinden geçecek şekilde çizemediği görülmektedir. Bu durum, öğrencinin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin görsel gerekliliklerini sağlamadığını göstermektedir. Öğrencinin üçgenin ve çemberlerin alan denklemini doğru kurduğu görülmektedir. Ancak çemberlerin alan denklemini yazarken $\pi(\frac{b}{2})^2$ ifadesini $\pi\frac{b}{4}$ olarak yazdığı görülmektedir. Bu durum, öğrencinin işlem hatası yaptığını; dolayısıyla epistemik bileşenin sistemik gerekliliklerini sağlamadığını göstermektedir. Epistemik bileşenin sistemik alt bileşeninde yaşadığı sorun, öğrencinin çember denklemini yanlış kurmasına yol açmıştır. Bu bağlamda, öğrencinin epistemik bileşenin sistemik alt bileşeninde yaşadığı sorunun, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerini olumsuz etkilediğini görmekteyiz.



Şekil 19. Epistemik bileşenin sistemik gerekliliklerindeki eksikliğin teleolojik bileşen üzerindeki olumsuz etkisi.

Öğrencinin S_1 ve S_2 bölgelerinin toplam alanını bulmak için yanlış bir araç kullandığı dikkat çekmektedir. Öğrenci b çaplı, a çaplı ve c çaplı çemberlerin alanlarını toplamış ve sonra bulduğu ifadeden c çaplı çemberin alanını çıkartmıştır. Elde ettiği $\frac{\pi}{4}(a+b)$ ifadesinden ortak alanları çıkartmak istediğini not etmiş ancak sürece devam edememiştir. Burada, öğrencinin π yerine 3 yazarak elde ettiği ifadeyi ABC üçgeninin alanını veren ifadeye benzetmeye çalıştığı görülmektedir. Öğrencinin S_1 ve S_2 bölgelerinin toplam alanını bulmak için seçtiği ve kullandığı yol, soruda verilen ifadenin kanıtı için işe yarar bir yol değildir. Bu bağlamda, öğrencinin teleolojik bileşenin gerekliliklerini sağlamadığı görülmektedir. Öğrencinin teleolojik bileşende yaşadığı sorunun, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin görsel gerekliliklerindeki eksikliğinden kaynaklandığı düşünülmektedir. Öğrenci, S_1 ve S_2 bölgelerinin toplam alanını bulmak için şekli gerektiği biçimde kullanamamış ve şekiller arasında amacına uygun bağlantı kuramamıştır. Şekil üzerinde gerekli ve doğru düzenlemeleri yapamamasının bir sonucu olarak da süreçte amacına ulaşmasını sağlayacak doğru aracı bulamamış ve kullanamamıştır. Bu durum, öğrencinin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin görsel gerekliliklerindeki eksiklerinin, teleolojik bileşenini olumsuz etkilediğini göstermektedir.

Öğrencinin kâğıt üzerindeki kanıt yapma süreci incelendiğinde yer yer bazı metinsel açıklamalar yaptığı görülmektedir. Bu bağlamda, öğrencinin kanıt yaparken metin yazarak bazı açıklamalar yapmayı tercih ettiği dikkat çekmektedir. Sembolik dil kullanımı, epistemik bileşenin sistemik alt bileşeninde yaşadığı sorundan olumsuz etkilenmektedir. Çemberlerin alanını yazarken yaptığı işlem hatası, sembolik dil kullanımında da sorun yaşamasına neden olmuştur.

Öğrenciyi iletişim bileşeninin sözel iletişim alt bileşeni yönünden değerlendirmek ve kanıt yapma sürecinin daha detaylı analizini yapabilmek için görüşme yapılmıştır.

> Araştırmacı: Soruda verilenlere göre şekli çizmişsiniz. Öncelikle çizimi nasıl yaptığınızı anlatır mısınız?
>
> Öğrenci: Yani önce ABC üçgenini çizdim. Sonra da çemberleri. Zor olmadı. Soruya bir bakayım. Hımm, mesela üçgen dik olsun demiş. O yüzden dik çizmişim. Dik kenarlarını çap kabul eden çemberler demiş. Ben a çap olacak şekilde, b çap olacak şekilde falan çizmişim.
>
> Araştırmacı: Peki, hipotenüsü çap kabul eden çemberi nasıl çizdiniz?
>
> Öğrenci: Onu da aynı. Diğerleri gibi.
>
> Araştırmacı: Yani bu çemberi çizerken özellikle dikkatinizi çeken bir şey olmadı mı?
>
> Öğrenci: Şimdi böyle sorduğunuza göre kesin bir şey var (Gülüyor). Daha dikkatli bakayım o zaman. Yani buradaki 90° var. Onu mu diyorsunuz. Hımm, bir şey vardı. Neydi? Bu 90° önemli burada.

Anladım. Ya şöyle tamam bir şey yok. Çapı gören çevre açı. Çemberin yarısını görüyor. O yüzden yarısından 90°. Ee, tamam ama sorun yok ki. Yani bir engel yok çizmeme. Ne demek istediğinizi anlamadım. Neyi kaçırıyorum?

Araştırmacı: Tam da az önce söylediğiniz özelliği göz önüne alarak çiziminizde düzeltmeniz gereken bir yer olup olmadığına bakar mısınız?

Öğrenci: Yani tamam ama.. Kötü mü çizmişim. Şurası biraz dışarda (B köşesini gösteriyor). Onu mu diyorsunuz acaba? Yani bu çok bir şeyi etkilemez ama ya. Yani tabi doğru şimdi de. Yani bu çember tam B'den geçmeli. Neyse, tamam durun düzelteyim ama çok bir şeyi etkilemez bu yani.

Öğrencinin şekli çizerken özensiz davrandığı ve B açısının dik açı olması nedeniyle *c* çaplı çemberin tam B köşesinden geçmesi gerektiğini göz ardı ettiği görülmektedir. Öğrenci, bir çemberde çapı gören çevre açıya ilişkin teoremi zorlukla hatırlamıştır. Bu durum, öğrencinin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin görsel gerekliliklerinde sorun yaşadığına ilişkin düşüncemizi desteklemektedir. Üstelik öğrenci çapı gören çevre açı ile ilgili teoremi hatırlamasına rağmen, teoreme göre şeklini düzeltme konusunda isteksiz davranmıştır. Süreçte hiçbir şeyi değiştirmeyeceğini düşünerek, söz konusu teoremi şeklin çiziminde kullanmayı gereksiz görmektedir. Bu durum, öğrencinin iletişim bileşenindeki eksikliğini göstermektedir. Kanıt yapma sürecinde etkili olmadığını düşündüğü durumda, bir matematiksel gerçeği göz ardı edebileceği ve şeklini ya da diğer adımlarını bu matematiksel gerçeği göz önüne almadan kurabileceği dikkat çeken öğrencinin, genel anlamda iletişim bileşeninde sorun yaşadığı düşünülmektedir.

Araştırmacı: Peki, kanıtlama sürecinizi geldiğiniz yere kadar anlatabilir misiniz?

Öğrenci: Ben aslında S_1 ve S_2 nin toplam alanını bulmaya çalıştım. Bunun için bu çemberlerin alanlarını toplamışım. Sonra… Sonra büyük çemberin alanını çıkartmışım. Oradan aslında… Aslında biraz saçma olmuş Hiç eklemeseymişim. Neyse yani sonuçta şu iki küçük çemberin alanlarının toplamını bulmuş oldum. Ama olmadı tabi. Yani S_1 ve S_2 nin toplam alanı olmadı bu bulduğum. O yüzden de bıraktım.

Araştırmacı: Peki, nasıl bulabilirsiniz S_1 ve S_2 nin toplam alanını? Bir daha düşünseniz.

Öğrenci: Yani buradan bir şekilde bulmam lazım da. Yay gibi bunlar nasıl bulsam bilemedim. Garip bir şey. Bilindik bir şekil olmayınca yapamadım. Şu geriye kalan kısımları yarım çemberlerden çıkarsam, bu kısımlar da bilindik bir şey değil ama. O yüzden bilmiyorum. Burada bırakıyorum.

Araştırmacı: π nin yerine 3 koyduğunuzu görüyorum son aşamada. Bunu neden yaptınız?

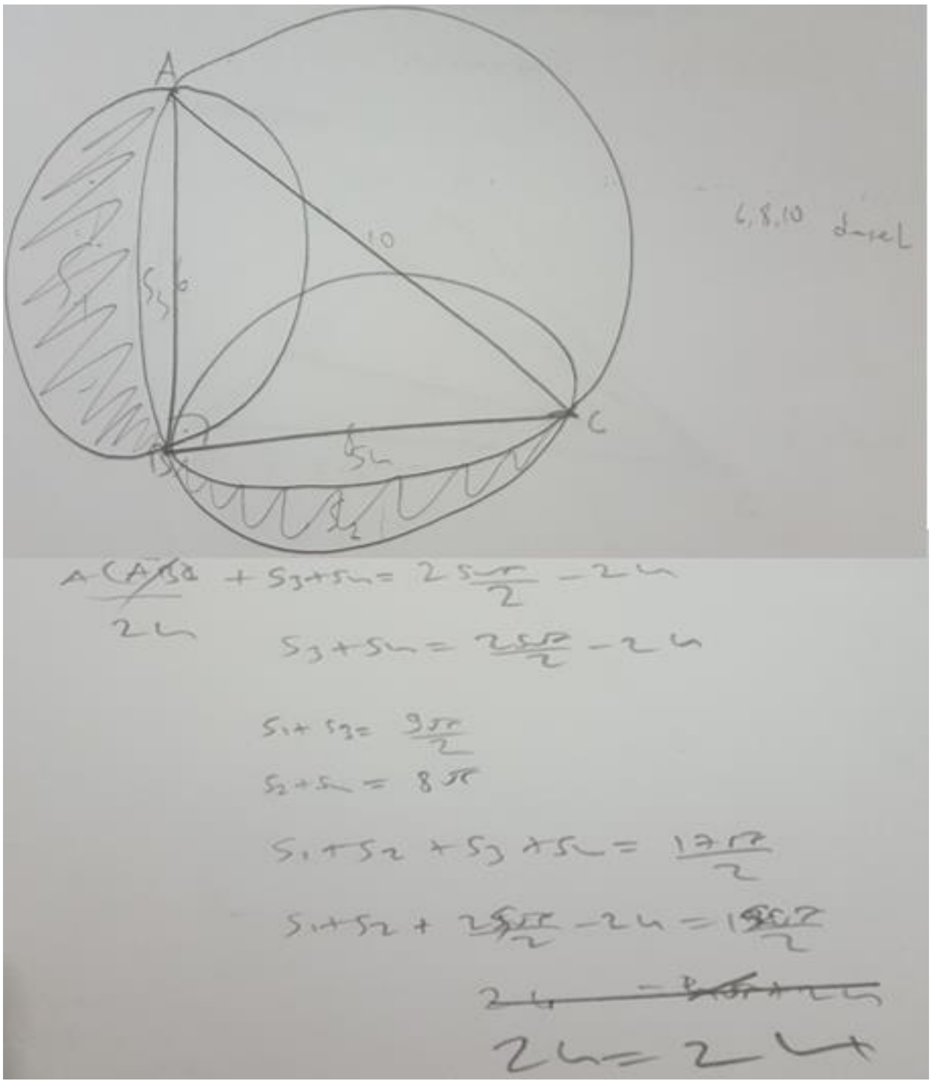
Öğrenci: Ya çünkü şurada bakın üçgenin alanını yazmışım; $\frac{ab}{2}$. Yani hiç π falan yok. Öyle olunca bunda da olmaması gerek diye π yerine 3 koydum. Normalde koymam tabi de çıksın diye işte. Ama olmadı.

Araştırmacı: Sizce neden yapamadınız bu kanıtı? Yani nerede sorun yaşıyorsunuz?

Öğrenci: Ben S_1 ve S_2 nin toplam alanını bulamıyorum. Yani nasıl yapsam onu bilemiyorum. Bir şey denedim işte olmadı mesela. Başka da bir şey yapmak gelmiyor aklıma. Açı yok hiçbir şey yok. Bu yay gibi şeylerin alanını nasıl bulacağımı bilmiyorum. Bildiklerim yani çemberin alanı üçgenin alanı bunlar da bana yetmiyor.

Öğrenci kendisi de, soruda verilen ifadeyi kanıtlamak için gereken aracı doğru seçemediğini açıkça ifade etmiştir. Bu durum, öğrencinin teleolojik bileşenin gerekliliklerinde sorun yaşadığına ilişkin saptamamızı desteklemektedir. Öğrenci, kâğıt üzerinde yaptıklarını açıklayabilmiş ve süreçte yaşadığı sorunu açık bir dille ifade edebilmiştir. Bu durum, öğrencinin sözel iletişimde sorun yaşamadığını; kanıtı yapmak için ihtiyaç duyduğu aracı doğru seçebilmesi durumunda süreci açıklayabileceğine ilişkin bir izlenim oluşturmaktadır. Ancak öğrenci kanıtı yarım bıraktığından öğrencinin sürecin tamamına ilişkin doğru ve yeterli düzeyde bir sözlü açıklama yaptığını söyleyememekteyiz. Bu durum, öğrencinin iletişim bileşenin sözel iletişim alt bileşeni yönünden tam anlamıyla değerlendirilememesine yol açmıştır.

Şekil 20'de görüldüğü gibi, bazı öğrenciler üçgenin kenarlarına sayısal değerler vererek ifadenin doğruluğunu bu sayısal değerler üzerinden göstermeye çalışmıştır. Bu öğrenci, soruda verilen kriterlere uygun şekli çizebilmiş ve şekil üzerinde gerekli ve doğru düzenlemeleri yapabilmiştir. Bu bağlamda, öğrencinin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin görsel gerekliliklerini sağladığını söylemek mümkündür. Öğrenci, ABC dik üçgeninin dik kenarlarını 6 birim ve 8 birim olarak seçmiş ve bu değerler üzerinden S_1 ve S_2 nin toplam alanının, ABC üçgeninin alanına eşit olduğunu göstermeye çalışmıştır. Bu amaçla süreç boyunca doğru ve geçerli araçlar seçmiş ve kullanmıştır. Bu nedenle, Habermas akılcı davranış modeline göre, teleolojik bileşenin gerekliliklerini sağlamaktadır.



Şekil 20. Kanıt yapma sürecinde iletişim bileşeninde eksiklik

Bunun yanı sıra, öğrencinin bir çemberin ve üçgenin alan denklemini doğru yazabildiği ve S_1 ve S_2 nin toplam alanını veren denklemi yaptığı doğru seçimler sonucunda doğru kurabildiği dikkat çekmektedir. Bu bağlamda, öğrencinin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerini sağladığı açıktır. Ancak öğrenci, şekil üzerinde kendisinin oluşturduğu S_3 ve S_4 ile soruda verilen S_1 ve S_2 bölgelerinin toplam alanını hesaplarken işlem hatası yapmıştır. Bu durum, öğrencinin epistemik bileşenin sistemik alt bileşeninde sorun yaşadığını göstermektedir. Öğrenci her ne kadar $24 = 24$ diyerek kanıtı tamamlamış ve amacına ulaşmış gibi görünmeye çalışsa da; aslında son aşamada S_1 ve S_2 nin toplam alanının ABC üçgeninin alanına eşit olduğunu bulamamıştır. Öğrencinin süreçte yaptığı işlem hatası amacına ulaşamamasına ve ifadenin doğruluğunu gösterememesine neden olmuştur. Geçerli sonuca ulaşamamış olmasına rağmen, $24 = 24$ yazarak S_1 ve S_2 nin toplam alanının ABC üçgeninin alanına eşit olduğunu göstermiş gibi davranması, genel anlamda iletişim bileşenindeki eksikliğini göstermektedir.

Bunun yanı sıra her ne kadar süreç boyunca doğru adımlar atmış ve doğru bilgileri amacına uygun şekilde doğru olarak kullanmış olsa da, öğrencinin ortaya koyduğu ürün, formel kanıtın gerektirdikleri yönünden yetersizdir. Öğrenci, bir ifadenin doğruluğunu bazı sayısal değerler kullanarak ya da tek bir örnek durum üzerinden gösteremeyeceğini; genel olarak göstermesi gerektiğini bilmemektedir. Bu nedenle, öğrencinin Habermas akılcı davranış modeline göre, iletişim bileşeninin sembolik iletişim alt bileşeninde eksikleri olduğu düşünülmektedir. Bunun yanı sıra, öğrencinin süreç boyunca attığı adımların nedenini anlatan metinsel bir açıklama yapmadığı da görülmektedir. Bu durum, öğrencinin iletişim bileşeninin metinsel iletişim alt bileşeninde de sorun yaşadığını göstermektedir.

Öğrencinin iletişim bileşeninin sözel iletişim alt bileşeni yönünden değerlendirilmesi ve kanıt yapma sürecinin daha detaylı analizi için görüşme yapılmıştır. Aşağıda öğrencinin söylemlerinden bazı alıntılara yer verilmektedir.

> Araştırmacı: Burada soruda verilen ifadeyi üçgenin dik kenarlarına 6 birim ve 8 birim diyerek kanıtladığınızı görüyorum. Bana bu süreci anlatır mısınız?
>
> Öğrenci: Evet, doğru öyle yaptım. Çıktı yani eşit oldukları.
>
> Araştırmacı: Bir ifadeyi kanıtlamaktan tam olarak ne anlıyorsunuz?
>
> Öğrenci: Doğruluğunu göstermek.
>
> Araştırmacı: Peki, siz burada bu ifadenin doğruluğunu gösterebildiniz mi?
>
> Öğrenci: Evet, 24-24 çıktı.

Araştırmacı: Bu sadece bu üçgen için çıkmış bir sonuç olabilir mi? Tesadüfen doğru çıkmış olabilir mi yani? Örneğin belki başka bir dik üçgen alsaydınız doğru çıkmayabilir miydi?

Öğrenci: Sanmıyorum. Bunun için çıktıysa diğerleri için de çıkar bence.

Araştırmacı: Bunu garanti etmenin bir yolu var mı?

Öğrenci: Yani bence bu dik üçgen için çıktıysa yine çıkar. Bunlar yine sadeleşir. Ha, mesela $\frac{25\pi}{2}$ çıkmaz da başka bir şey çıkar. Mesela bu da $\frac{17\pi}{2}$ çıkmaz da başka bir şey çıkar. Yani aynı şekilde 24-24 çıkmaz da atıyorum 15-15 çıkar ama sonuçta eşitlik çıkar yani.

Araştırmacı: Peki, bunu garanti etmek mümkün mü? Yani genel olarak bu eşitliğin hep böyle çıktığını göstermenin bir yolu var mı?

Öğrenci: Bilmem.

Araştırmacı: Bu kadarı yeterli mi sizce?

Öğrenci: Bence yeterli. Dediğim gibi sadece sadeleşen şeyler farklı olur.

Araştırmacı: Peki, analiz derslerinde, soyut matematikte yaptığınız kanıtları düşünseniz; onların sizin ürettiğiniz süreçten farklı bir yanı var mı?

Öğrenci: Yani, orda tabi daha ağır kanıtlar yapıyoruz. Yani onlarla bu bir değil. Aynı şey değil. Bunda bir örnek verince hemen çıkıverdi. Onlarda genelde örnek vermek gibi bir şansım yok ki. Çok aşırı soyut şeyler onlar.

Araştırmacı: Onlarda örnek verme şansın olsa onları da örnek vererek sayısal bir değer üzerinden kanıtlamayı mı tercih ederdiniz?

Öğrenci: Evet, tabi. Yani böylesi daha kolay. Öbür türlü çok karışık.

Araştırmacı: Öbür türlü derken tam olarak ne demek istiyorsunuz?

Öğrenci: Soyut olduğunda yani. Semboller falan. Çok karışık.

Öğrencinin söylemlerinden, formel kanıtı yalnızca çok karmaşık ve soyut olduğunu düşündüğü ifadeleri kanıtlarken, ifadeye sayısal değerler veremediği durumlarda kullandığı anlaşılmaktadır. Sayısal değer vererek bir ifadenin doğruluğunu göstermenin, o ifadenin doğruluğunu kanıtlamak açısından yeterli olduğunu düşündüğünü görmekteyiz. Bu durum, öğrencinin iletişim bileşeninin sembolik iletişim alt bileşeninde eksikleri olduğu yönündeki saptamamızı desteklemektedir. Aslında öğrenci de ifadeyi sadece dik kenarları 6 birim ve 8 birim olan bir üçgen için kanıtladığını bilmekte; diğer dik üçgenler için ise ifadenin doğru olduğunu varsaymaktadır. Ancak öğrenci, sezgisel olarak yaptığı varsayımların, ifadenin tüm dik üçgenler için doğrulanacağı yönünde kanısını savunmaktadır. Bu durum, yazılı kanıt yapma sürecinde olduğu gibi, görüşme sürecinde de öğrencinin iletişim bileşeninde eksikleri olduğunu göstermektedir. Bu bağlamda, öğrencinin iletişim bileşeninin sözel iletişim alt bileşeninde sorunları olduğu düşünülmektedir.

Görüşmede öğrenciye süreçte yaptığı işlem hatasının farkında olup olmadığı da sorulmuştur.

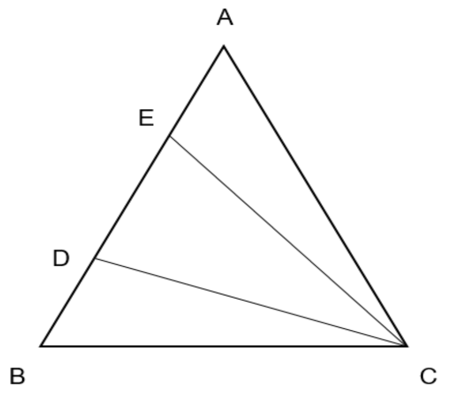
> Araştırmacı: Burada yaptığınız işlemi kontrol edebilir misiniz (S_3 ve S_4 ile soruda verilen S_1 ve S_2 bölgelerinin toplam alanını hesapladığı kısmı gösteriyor)?
>
> Öğrenci: Bakayım… Hımm, aaa, ben burada ne yapmışım. Bir saniye. Şey, burada hata yapmışım. $\frac{25\pi}{2}$ oluyor burası.
>
> Araştırmacı: Devamını da inceler misiniz?
>
> Öğrenci: $\frac{25\pi}{2}$ ler birbirini götürüyor. $24 = 24$ çıkıyor.
>
> Araştırmacı: İşlem hatası yaptığınız durumda bu eşitlik çıkmıyordu sanırım.
>
> Öğrenci: Yok, hayır. Ben hatırladım. İşlem hatası yaptığımı fark etmiştim ben. Sonra kafamdan düzeltmiştim de buraya yazmayı unutmuşum.

Öğrencinin ortaya koyduğu üründe işlem hatası yaptığını fark ettiği ancak bunu düzeltme gereksinimi hissetmediği, yalnızca sonucu yazarak süreci sonlandırdığı anlaşılmaktadır. Bu durum, okuyucunun öğrencinin ürününü incelerken sonucun nereden geldiğini anlayamamasına; kanıtı yapan kişinin sonuca tesadüfen ulaştığını ya da ifadenin doğru olduğunu göstermek için aslında kanıtlayamadığı bir sonucu kâğıdına direk yazdığını düşünmesine yol açabilir. Tüm bunlar, öğrencinin ürününün iletişim yönünden eksik olduğunu göstermektedir. Bu durum, öğrencinin iletişim bileşeninin tüm alt bileşenlerinde genel anlamda sorunu olduğuna ilişkin saptamamızı desteklemektedir.

Bu soru kapsamında öğrencilerin kanıt yapma süreçleri genel anlamda değerlendirildiğinde, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin görsel ve formel gerekliliklerini sağlayan öğrencilerin çoğunluğunun kanıt yapma süreci için gerekli araçları doğru seçebildiği ve kullanabildiği; böylece kanıt yapma sürecini başarıyla tamamladığı görülmüştür. Diğer yandan, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin görsel ya da formel gerekliliklerinde görülen eksikliklerin, öğrencilerin teleolojik bileşenini olumsuz etkilediği görülmüştür. Öğrencinin, soruda verilenlere uygun şekli çizme ve şekle bağlı modeli/denklemi oluşturma aşamalarında yaşadığı zorluklar, kanıt yapma sürecinde kullanacağı aracı ya da araçları doğru ve amacına uygun şekilde seçmesini engellemektedir.

Benzerlik sorusu. Bu soru öğrencilere aşağıda verilen şekilde sunulmuştur:

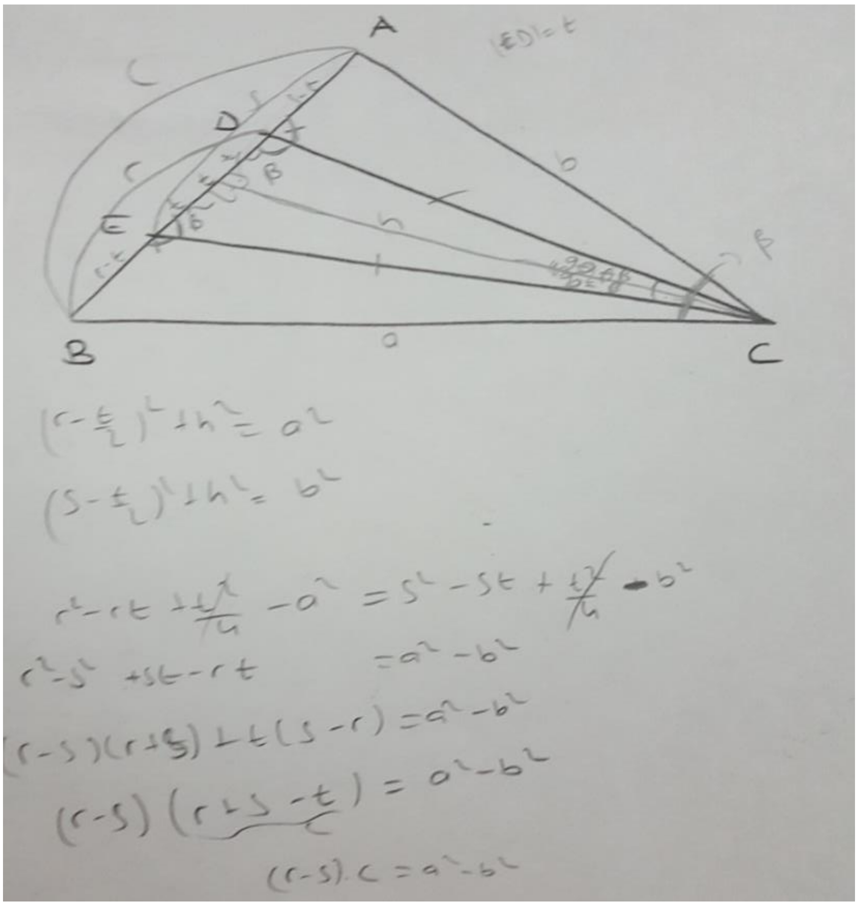
"Şekilde verildiği gibi eşkenar olmayan herhangi bir ABC üçgeni alalım. A köşesine karşılık gelen kenarın uzunluğunu a, B köşesinin karşısındaki kenarın uzunluğunu b ve C köşesinin karşısındaki kenarın uzunluğunu da c ile gösterelim. C köşesindeki ACB açısını β ile gösterelim. 60°< β < 90° olduğunu varsayalım. Bu üçgenin içine tepesi C'de, tabanı AB doğrusu üzerinde ve her iki taban açısı da β'ya eşit olacak şekilde bir CED ikizkenar üçgeni yerleştirelim. BD doğru parçasının uzunluğunu r ve EA doğru parçasının uzunluğunu da s ile gösterelim. Bu durumda $a^2 + b^2 = (r + s)c$ olduğunu kanıtlayınız (Sabit İbn Kurra, akt. Terzioğlu, 2013)".



Şekil 21. Soruda öğrencilere hazır olarak sunulan şekil

Bu soruda öğrencilere Şekil 21'de verilen ABC üçgeni hazır olarak sunulmuştur. Öğrenciden verilen kenarları ve açıları şekil üzerinde göstermesi ve üçgenler arasında benzerlik kurarak söz konusu bağıntıyı elde etmesi beklenmektedir. Öğrencinin soruda verilenleri şekle doğru aktarması ve şekil üzerinde gerekli düzenlemeleri doğru yapması, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin görsel gereklilikleri kapsamında değerlendirilmektedir. Şekilde oluşan benzer üçgenleri belirleyerek benzerlik oranını doğru biçimde yazması ise epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gereklilikleri kapsamında incelenmektedir.

Şekil 22'de, kanıtlama sürecine yer verilen öğrenci, şekli soruda verilen kriterlere uygun çizebilmiş ve şekil üzerinde doğru ve gerekli düzenlemeleri yapabilmiştir. Kenarları soruda verilenlere uygun şekilde isimlendiren öğrenci, CED ikizkenar üçgeninin ED tabanına ait yüksekliğini çizmiş ve ED tabanının eşit iki parçaya ayrıldığını göstermiştir. Bu bağlamda, öğrencinin epsitemik bileşenin modelleme alt bileşeninin görsel gerekliliklerini sağladığını söylemek mümkündür.



Şekil 22. Teleolojik bileşende eksiklik.

Öğrenci, CED ikizkenar üçgeninde C köşesinden ED kenarına indirdiği h yüksekliği ile şekil üzerinde oluşturduğu yeni iki dik üçgende, Pisagor teoremini kullanarak, iki üçgenin ortak kenarı olan h kenarını temsil eden iki ifade yazmıştır. Öğrencinin bu yolu kullanarak süreç boyunca doğru modeller/denklemler kurduğu görülmektedir. Bu bağlamda, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerini sağlamaktadır. Bu modelleri/denklemleri oluştururken ya da bu denklemler ile dört işlem yaparken işlem hatası yapmadığı da görülmektedir. Buradan öğrencinin, epistemik bileşenin sistemik alt bileşeninin gerekliliklerini sağladığı görülmektedir.

Her ne kadar şekle uygun doğru modeller/denklemler yazmış ve bu modelleri/denklemleri kullanarak hatasız işlemler yapmış olsa da; öğrencinin seçtiği yol amacına ulaşması ve soruda verilen ifadenin kanıtını yapması açısından uygun değildir. Verilen ifadenin kanıtı, öğrencinin şekil üzerinde eşit açılara sahip üçgenleri bulmasını ve bu üçgenlerin kenarlarını kullanarak benzerlik oranı kurmasını gerektirmektedir. Öğrencinin amacına uygun aracı doğru seçemediğini ve bu nedenle kanıt yapma sürecinde başarısız olduğunu görmekteyiz. Bu bağlamda öğrenci, Habermas akılcı davranış modeline göre, kanıt yapma sürecinde teleolojik bileşen yönünden sorun yaşamaktadır.

Öğrencinin süreç boyunca matematiğin sembolik dilini yeterli düzeyde kullanabildiği görülmüştür ancak süreci geçerli yoldan tamamlayamaması kanıtının sembolik iletişim alt bileşeni yönünden eksik kalmasına neden olmuştur. Diğer yandan, sürecin kolayca anlaşılması ve takip edilebilmesi açısından okuyucuya metinsel bir açıklama yapmayı tercih etmediği dikkat çekmektedir.

Öğrenciyi iletişim bileşeninin sözel iletişim alt bileşeni yönünden değerlendirmek ve kanıt yapma sürecinin daha detaylı analizini yapmak için görüşme yapılmıştır. Aşağıda öğrencinin görüşme sürecindeki söylemlerinden bazı alıntılara yer verilmektedir.

> Araştırmacı: Kanıt yapma sürecinde neler yaptığınızı anlatır mısınız?
>
> Öğrenci: Ben tabanda oluşturduğum eşit açıları yani aslında ikizkenar üçgeni düşündüm, yani kullandım. Şimdi şunu biliyoruz: Bir ikizkenar üçgende tepeden tabana çektiğimiz yükseklik tabanı ikiye ayırıyor. Bu özelliği kullandım. Sonra bir de şu diklikten işte iki tane dik üçgen var

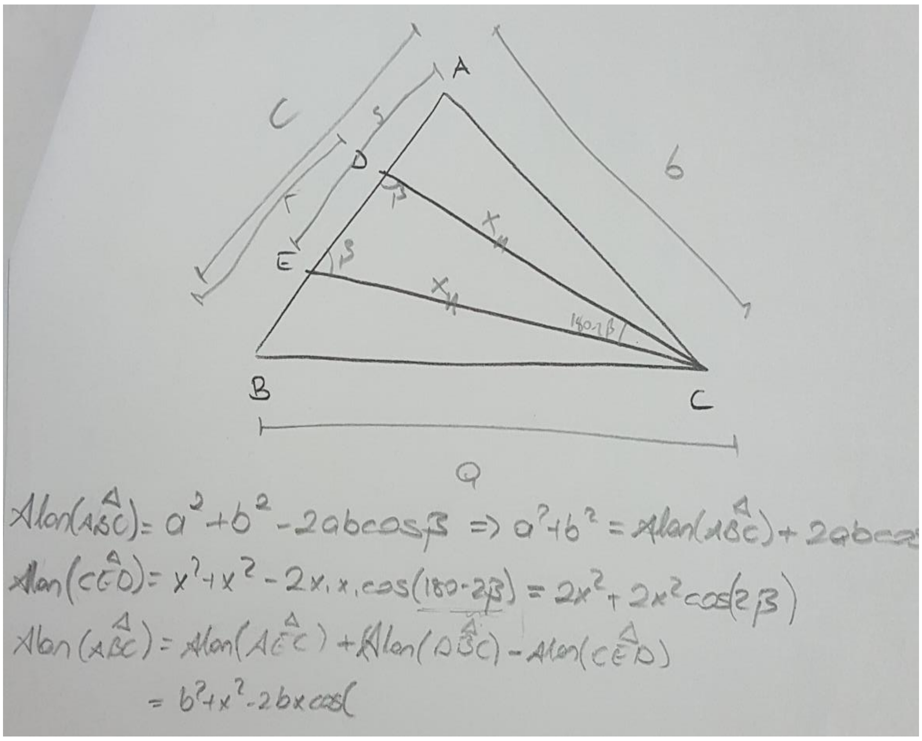
> burada. Bu üçgenlerde Pisagor yaptım. Aslında çok iyi gidiyordu. Niye olmadı anlamadım. Ben işlem hatası falan mı yaptım acaba?

Öğrenci bir süre kanıt yapma sürecini incelemiş ve işlemlerini kontrol etmiştir. Ancak süreçte işlem hatası yapmadığını ve kullandığı yöntem bağlamında doğru ve geçerli bir sonuç bulduğunu görmüştür. Öğrenciye, verilen ifadeyi kanıtlamak için başka bir yol seçmesi ve kullanması önerilmiştir.

> Araştırmacı: Gördüğünüz gibi işlem hatanız yok. Acaba başka bir yoldan yapmayı mı deneseniz? Silip baştan yapmak ister misiniz?
>
> Öğrenci: Yani bilmiyorum. Başka bir yoldan yapmak… Aklıma başka bir şey gelmiyor. Ya bu yöntem çok iyiydi. Nasıl çıkmadı ya?

Öğrencinin izlediği yolun işe yaraması gerektiğine ve geçerliliğine ilişkin inancı, başka bir yol denemesini engellemektedir. Görüşme verilerinin, Habermas akılcı davranış modeline göre, öğrencinin teleolojik bileşende eksikleri olduğuna ilişkin görüşümüzü desteklediği görülmektedir. Diğer yandan, süreçteki eksiğini tamamlayamayan ve kanıt için geçerli aracı görüşme sürecinde de bulamayan öğrencinin iletişim bileşeninin sözel iletişim alt bileşeni yönünden de eksik olduğu belirlenmiştir.

Şekil 23’te, kanıt yapma sürecine yer verilen bir diğer öğrenci, şekli soruda verilen kriterlere uygun çizebildiğinden ve şekil üzerinde amacına uygun gerekli ve doğru düzenlemeleri yapabildiğinden, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin görsel gerekliliklerini sağlamaktadır. Diğer yandan, ifadenin kanıtı için gerekli aracı doğru seçme ve kullanma konusunda sorun yaşadığı görülmektedir.



Şekil 23. Epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerinde ve teleolojik bileşende eksiklik.

Öğrenci, soruda verilen ifadeyi kanıtlamak için üçgenlerin alan denklemlerini yazmıştır ancak amacına ulaşmak için kullanmaya çalıştığı araç, verilen ifadenin kanıtını yapma konusunda işe yarar nitelikte değildir. Buradan, öğrencinin teleolojik bileşenin gerekliliklerini sağlama konusunda sorun yaşadığı görülmektedir. Bu durum, öğrencinin şekli gerektiği gibi kullanamamasından ve şekil üzerinde amacına uygun düzenlemeler yapamamasından kaynaklanıyor olabilir. Bu bağlamda, öğrencinin kanıta devam etme yolunda epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin görsel gerekliliklerindeki eksiklerinin, teleolojik bileşende de sorun yaşamasına neden olduğu düşünülmektedir.

Bunun yanı sıra, öğrencinin bir üçgenin alan denklemini yazma konusunda da sorun yaşadığı dikkat çekmektedir. Üçgenin alan denklemini yazmak için kullanması gereken Sinüs teoremini yanlış bilmekte ve uygulamaktadır. Öğrencinin Sinüs teoremi ile bir üçgenin alanını bulmayı, Kosinüs teoremi ile karıştırdığı görülmektedir. Bu durum, öğrencinin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gereklilikleri açısından sorun yaşadığını göstermektedir. Hatalı bilgisi doğrultusunda oluşturduğu yanlış denklemler bir amaca hizmet edememiş ve süreçte kullanılamamıştır. Bu durumun sonucunda, Şekil 23’te görüldüğü gibi öğrenci, kanıtı yarım bırakmıştır.

Öğrencinin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerindeki ve teleolojik bileşendeki eksikleri, süreci matematiksel dille aktarımına olumsuz yansımıştır. Öğrenci, bu bileşenlerin gerekliliklerini yerine getiremeyerek yaptığı hatalarla geçersiz bir süreç ortaya koymuştur. Bu geçersiz süreç, okuyucu için matematiksel açıdan anlaşılır nitelikte değildir. Her ne kadar öğrenci, gelebildiği yere kadar sembolik dil ve notasyon kullanımında bir hata ya da eksik yapmamış olsa da; süreci yarım bıraktığından iletişim bileşeninin sembolik iletişim alt bileşeni yönünden eksik bulunmaktadır. Bunun yanı sıra öğrencinin süreçte okuyucuya attığı adımları açıklayan ve sürecin anlaşılmasını kolaylaştıran metinsel bir açıklama yapmadığı da görülmektedir.

Kanıt yapma sürecinin daha detaylı analizi için öğrenci ile görüşme yapılmıştır. Aşağıda öğrencinin görüşme sürecindeki söylemlerinden bazı alıntılara yer verilmektedir.

> Araştırmacı: Bu ifadeyi kanıtlamak için nasıl bir yol izlediniz?
>
> Öğrenci: Ben alandan gitmek istedim. Çünkü şekil öyle bir duruyor ki… Alanlardan bir şey çıkarabilirmişim gibi geldi. Yani kenarları isimlendirdim. Soruda söylenmiş zaten. Dediklerini yerine koydum. Kenarları yazdıktan sonra açıyı da vermiş. Onu da koydum. Gördüm ki… Yani bakın bu üçgenlerde kenarlar ve aradaki açı da belli olunca ben bunların alanını bulurum diye düşündüm. ABC üçgeninin alanını bu içindeki küçük üçgenlerin alanı cinsinden yazdım. Doğru mu yazmışım. Bir saniye bakayım. Kontrol ediyorum.

Öğrenci bir süre kâğıdını inceler ve kanıt yapma sürecindeki akışı kontrol eder.

> Öğrenci: Evet, tamam doğru yapmışım. Yani nerde hatam var bilmiyorum. Aslında devam etsem çıkardı belki. Öyle bırakmışım.
>
> Araştırmacı: Bir üçgenin alanını nasıl buluyorduk? Burada kullandığınız yöntemin bir adı var mı?
>
> Öğrenci: Adını hatırlamıyorum. Kosinüs kuralı, aa şey, Kosinüs teoremi. Bir şey daha vardı ama o olmaz. Bu alan buldurur.

Araştırmacı: Anladım. Nasıl buluyorsunuz üçgenin alanını?

Öğrenci: Burada yaptığım gibi. Yani iki kenar ve aradaki açıdan. Formülü uyguladım ezberden.

Araştırmacı: Peki, şurada CED üçgeninin alanını hesaplarken $-2x^2 \cos(180 - 2\beta) = 2x^2 \cos(2\beta)$ gibi bir eşitlik kullandığınızı görüyorum. Bu nereden çıktı?

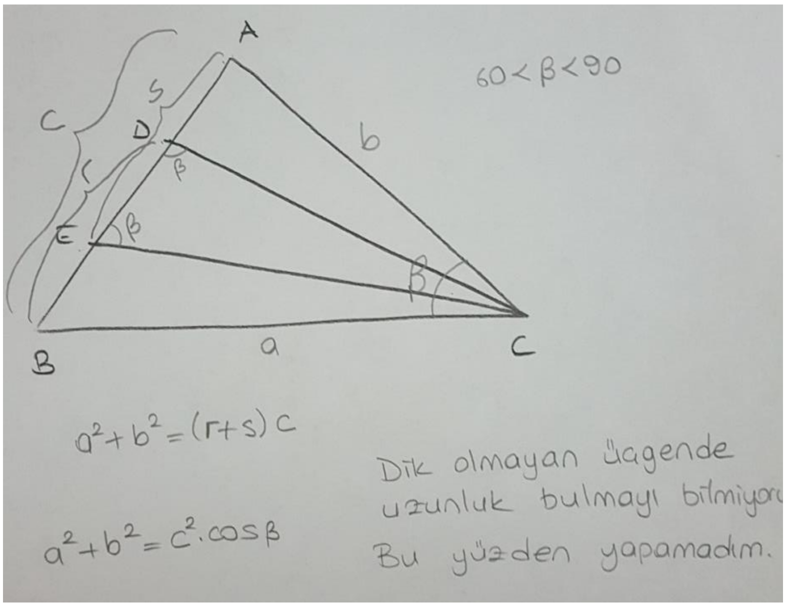
Öğrenci: O da kural. Onu da ezberden yazdım. Birbirini $180°$ ye tamamlayan açıların kosinüsleri ters işaretli.

Araştırmacı: Bu kuralın nereden geldiğini açıklayabilir misiniz?

Öğrenci: Yok, yani bilmiyorum. Nereden geliyor. Ben bu tip şeyleri pek sorgulamam, kullanırım. Yani bulan bulmuş sonuçta. Biz kolayca yapalım diye.

Öğrencinin söylemlerinden, bir üçgeninin alanını bulma konusunda hatalı bilgileri olduğu görülmektedir. Bu bağlamda, öğrencinin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerinde sorun yaşadığına ilişkin saptamamız, görüşme verileri ile desteklenmiştir. Diğer yandan, öğrencinin görüşmede, kanıt yapma sürecinde attığı adımları açıklayamadığı dikkat çekmektedir. Araştırmacı, öğrenciden attığı adımların nedenini sorduğunda; kullandığı teoremi ve $\cos(180 - 2\beta) = -\cos 2\beta$ eşitliğini ezbere bildiğini ve uyguladığını belirtmiştir. Üstelik bu tip durumlarda sorgulamadan, yalnızca ezber bilgileri doğrultusunda hatırladığı teoremleri ve kuralları kullandığını ifade eden öğrencinin, bu teoremlerin ve kuralların nedenini bilmesinin gereksiz olduğunu düşündüğü dikkat çekmektedir. Matematiksel bilgileri kanıtlanmış olmaları halinde ezberleyip kullanmayı tercih ettiği görülen öğrencinin, bu bilgilerin nereden geldiği ve temelinin hangi matematiksel gerçeğe dayandığı konusuyla ilgilenmediği görülmektedir. Dinleyiciye süreci anlaşılır şekilde sunamadığı; attığı adımları nedenleriyle açıklayamadığı dikkat çeken öğrencinin, Habermas akılcı davranış modeline göre, iletişim bileşeninin sözel iletişim alt bileşeninde sorun yaşadığı görülmektedir. Bu durum, öğrencinin Habermas akılcı davranış modeline göre, iletişim bileşeninde genel anlamda eksikleri olduğuna ilişkin görüşümüzü desteklemektedir.

Şekil 24'te, kanıtlama sürecine yer verilen bir diğer öğrenci, şekil üzerine açıları doğru yerleştirebilmiş ve şekli soruda verilen kriterlere uygun olarak tamamlayabilmiştir. Bu bağlamda, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin görsel gerekliliklerini sağladığını söylemek mümkündür. Ancak öğrenci üçgenler arasındaki benzerliği bulma konusunda sorun yaşamış; “dik olmayan üçgende uzunluk bulmayı bilmiyorum” şeklinde bir gerekçe ile süreci sonlandırmıştır. Öğrencinin şekle uygun modeli kuramaması, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerinde sorun yaşadığını göstermektedir.



Şekil 24. Epistemik bileşenin modelleme gerekliliklerinin formel gereklilik alt bileşeninde eksiklik.

Öğrenci dik açılı olmayan üçgenlerde kenar ya da açı bulmak için kullandığımız Sinüs ve Kosinüs teoremlerini kullanarak verilen ifadeyi kanıtlamak istediğini ancak bu teoremleri bilmediği için kanıt yapamadığını belirten bir açıklama yazmıştır. Bu açıklamaya dayanarak, öğrencinin bilgi eksikleri olduğunu ve bu nedenle kanıta başlayamadığını söylemek mümkündür. Bu durum, öğrencinin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerinde eksikleri olduğunu göstermektedir. Diğer yandan, soruda verilen ifadenin kanıtı için bu teoremler uygun araçlar değildir. Bu bağlamda, amaca uygun olmayan bir araç kullanma eğiliminde olan öğrencinin, bu teoremleri uygulamayı bilmesi halinde dahi, kanıt yapma sürecinde başarılı olamayacağını ve amacına ulaşamayacağını söylemek mümkündür. Bu durum, amacına uygun geçerli aracı seçememesinden ve kullanamamasından ötürü, öğrencinin teleolojik bileşenin gerekliliklerinde sorun yaşadığını göstermektedir. Bu durumun, öğrencinin şekli amacına uygun kullanamamasından kaynaklandığı düşünülmektedir. Bu bağlamda, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin görsel gerekliliklerindeki eksiklerin, teleolojik bileşeni olumsuz etkileyebildiği görülmektedir.

Öğrenci, bir kanıt yapma süreci ortaya koyamadığından, Habermas akılcı davranış modeline göre, iletişim bileşeninin sembolik ve metinsel iletişim alt bileşenleri yönünden değerlendirilememiştir. Öğrencinin süreçte yaşadığı sorunun temel nedenini belirlemek adına görüşme yapılmıştır. Aşağıda öğrencinin söylemlerinden bazı alıntılara yer verilmektedir.

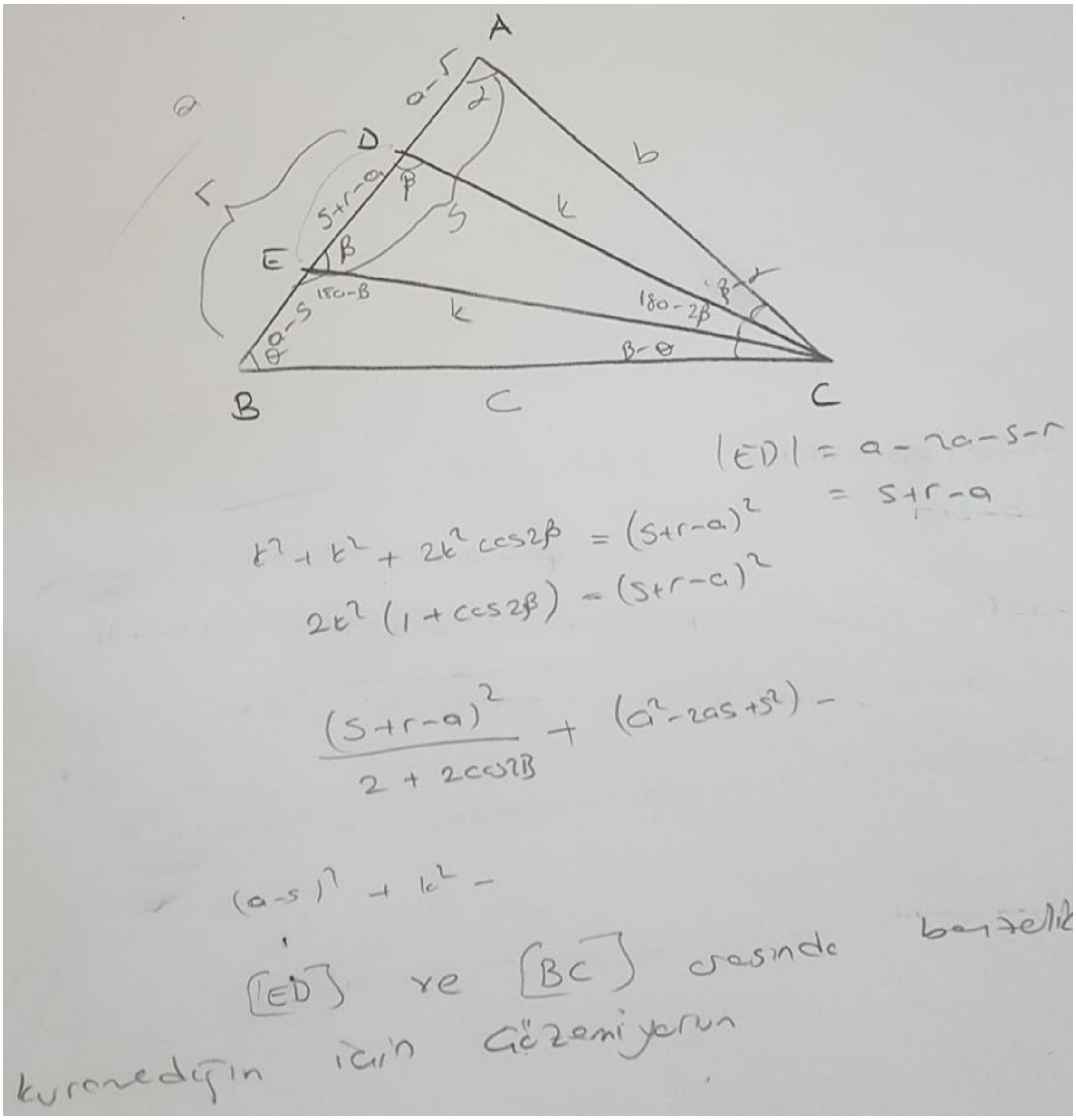
> Araştırmacı: Burada dik açılı olmayan üçgenlerde kenar uzunluğu hesaplayamadığınızı belirtmişsiniz. Tam olarak ne demek istediniz?
>
> Öğrenci: Ben aslında itiraf etmek gerekirse çıktıktan sonra baktım. Sinüs ve Kosinüs teoremleri. Onları hatırlayamadım. Yani isimlerini de unutmuşum, nasıl yapıldıklarını da. O yüzden yapamadım. Ama bilsem yapardım. Bence oradan çıkacak yani.
>
> Araştırmacı: Hangisini kullanacaksınız? Size versem teoremleri tekrar yapmak ister misiniz?
>
> Öğrenci: Olur, tabi.

Araştırmacı, öğrenciye söz konusu teoremleri vermiştir. Ancak öğrenci teoremlerden hangisini kullanacağına karar verememiştir.

> Öğrenci: Uff, böyle de çok karışık. Ben galiba yapamayacağım. Yani şu r, s kısmı çok karışık. Oradan çıkamıyorum işin içinden. Bir de ben bunları kullanmayı baya bir unutmuşum. Hangisini kullansam? Sanki bu (Kosinüs teoremini gösteriyor). Çünkü iki kenar tamam, aradaki açı da olunca. Yine de emin değilim. Bir yazayım belki çıkar.

Öğrenci, kısa bir süre uğraşmış, birkaç deneme yapıp sonra yaptıklarını silerek “Olmadı, yapamıyorum” diyerek süreci bitirmiştir. Yazılı sürecinde olduğu gibi, görüşme sürecinde de geçerli bir kanıt ortaya koyamadığı görülen öğrencinin söylemlerinin, açıklayıcı ve matematiksel olarak anlaşılır olmadığı görülmektedir. Öğrencinin bilgi eksiklerinden dolayı sürece başlayamadığı dikkat çekmektedir. Kanıt için kullanmak istediği araçlar kendisine sunulduğunda da, ne yapacağını bilemediği ve yine kanıta başlayamadığı görülmüştür. Bu durumun, öğrencinin söz konusu teoremleri şekil üzerinde kullanma ve uygulama konusunda yeterli tecrübeye sahip olmamasından kaynaklandığı düşünülmektedir. Öğrenci, şekil ile teoremler arasında bir bağlantı kuramamış ve hiçbir adım atamamıştır. Bu durum, öğrencinin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin hem görsel hem de formel gerekliliklerinde sorun yaşadığını göstermektedir.

Şekil 25'te, kanıtlama sürecine yer verilen öğrenci de verilen ifadeyi kanıtlamak için Kosinüs teoremini kullanmaya çalışmaktadır. Kosinüs teoremi, bu soruda verilen ifadenin kanıtı için amaca uygun bir araç değildir. Bu bağlamda, ifadenin kanıtını yapma yolunda amaca uygun aracı seçme ve kullanma konusunda sorun yaşadığı görülen öğrenci, Habermas akılcı davranış teorisine göre, teleolojik bileşende sorun yaşamaktadır.



Şekil 25. Teleolojik bileşende eksiklik.

Öğrencinin Kosinüs teoremini doğru uyguladığı ve kullandığı; bu sayede doğru modeller/denklemler kurduğu görülmektedir. Bunun yanı sıra, $\cos(180 - 2\beta) = -\cos 2\beta$ eşitliğini doğru bildiği ve Kosinüs teoremini kullanarak yazdığı denklemde bu eşitliği uygun şekilde kullanabildiği görülmektedir. Bu durum, öğrencinin epsitemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerini sağladığını göstermektedir.

Öğrenci, denklemini oluştururken kullandığı $\cos(180 - 2\beta) = -\cos 2\beta$ eşitliğine ilişkin açıklama yapmamış; bu eşitliği doğrudan denklemde kullanma yoluna gitmiştir. Bu bağlamda, genel olarak değerlendirildiğinde öğrencinin iletişim bileşeninde eksikleri olduğunu söylemek mümkündür. Öğrenci, her ne kadar süreçte gelebildiği yere kadar değerlendirildiğinde sembolik dil ve notasyon kullanımı açısından hatası ya da eksiği olmasa da, kanıt yapma sürecini yarım bıraktığından, iletişim bileşeninin sembolik iletişim alt bileşeninin gerekliliklerimi tam anlamıyla sağlayamamıştır. Diğer yandan, süreçte attığı adımların nedenlerini ya da sonuçlarını metin yazma yoluyla açıklama ihtiyacı hissetmemiştir.

Kanıt yapma sürecini daha ayrıntılı analiz etmek adına öğrenci ile görüşme yapılmıştır.

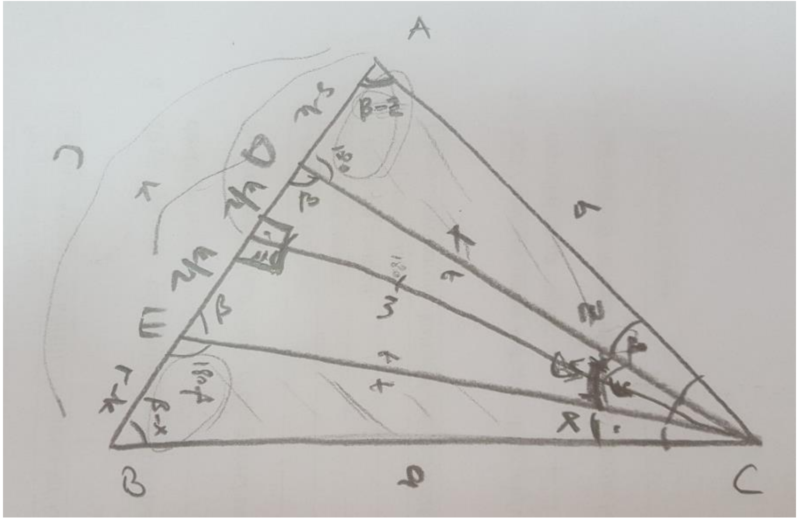
> Araştırmacı: Kanıtı yapmak için hangi yöntemi kullanıyorsunuz?
>
> Öğrenci: Kosinüs teoremi. Buradan çıkar diye düşündüm ama olmadı.
>
> Araştırmacı: Kosinüs teoremi nasıl bir şey? Yani teorem nedir?
>
> Öğrenci: Burada yazdığım gibi. Değil mi? Yani ben böyle hatırlıyorum ama bir bakayım. Değil mi? Kenarların kareleri toplamı, aradaki açının Kosinüs'ü ve bu kenarların çarpımı, sonra 2 katı, tamam bunların toplamı da açının karşısındaki kenarın karesi. Olmuş. Ama devamında sıkıntı oldu.
>
> Araştırmacı: Sıkıntı oldu derken ne demek istiyorsunuz?
>
> Öğrenci: Yani ben buradan bir şeyler birbirini götürür diye bekledim ama olmadı. Burada mesela ben k yı buldum. Sonra şu üçgende (EBC üçgenini gösteriyor) tekrar Kosinüs teoremi yapacaktım ama yok, bu kadar bilinmeyenden bir şey çıkmaz. O yüzden yarım bıraktım. Belki biraz benzer terimler olsaydı. ED yi BC cinsinden yazabilseydim. Ama olmuyor. Başka bir yolu var galiba ama bilmiyorum.

Araştırmacı: Burada Kosinüs teoremini kullanırken $\cos 2\beta$ kullanmışsınız. Aslında şekil üzerinde bu açının, yani kullandığınız kenarlar arasındaki açının $180 - 2\beta$ olduğunu görüyorum. Bu nasıl oldu?

Öğrenci: O açıların kosinüsleri ters işaretli. Yani şey diyorum, $180 - 2\beta$ ve 2β, bu açıların kosinüsü eşit ama ters işaretli. Yani $\cos(180 - 2\beta)$ artıysa, öbürü eksi. Tersi de söylenebilir. O yüzden öyle yazdım. $180 - 2\beta$ çok karışık olacaktı. Sade halini yazarsam bir şey çıkar belki diye öyle yazdım.

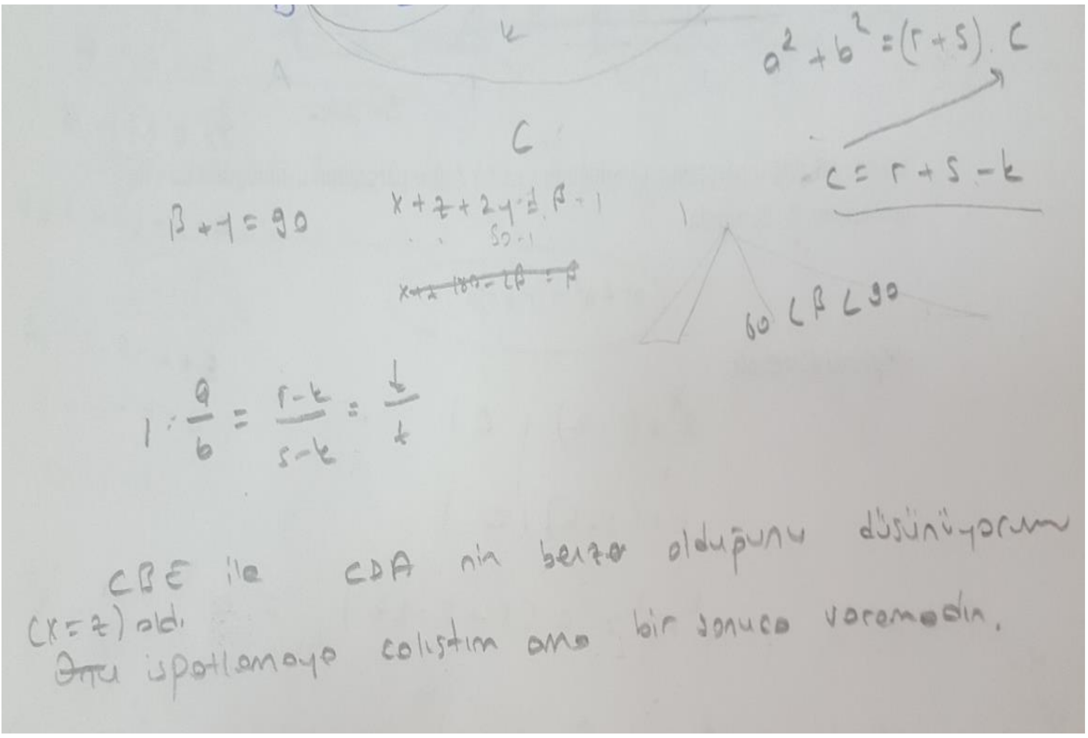
Öğrencinin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerini sağladığına ilişkin görüşümüz, görüşme verileri tarafından desteklenmektedir. Öğrencinin görüşme sürecinde de, kanıtı yapmak için doğru ve geçerli aracı bulamadığı görülmektedir. Bu bağlamda, her ne kadar öğrencinin kullandığı ifadelerin bir kısmı doğru ve geçerli olsa da, genel anlamda geçerli bir kanıt yapma süreci ortaya koyamadığından iletişim bileşeninin sözel iletişim alt bileşeninde de sorun yaşadığı düşünülmektedir.

Bir diğer öğrenci, kanıt yapma sürecinde Şekil 26'da yer verilen şekli çizmiştir. Bu öğrenci, DEC ikizkenar üçgeninde C köşesinden DE tabanına yükseklik çizmiş ve bu yüksekliğin aynı zamanda kenarortay ve açıortay olduğunu şekil üzerinde belirtmiştir. ABC üçgeninin C köşesinde x, y ve z olarak isimlendirdiği üç açıdan x ve z'nin eşit olduğunu; buradan CBE ve CDA üçgenlerinin benzer olduğunu düşündüğü ve kanıtını bu düşüncesi üzerine kurduğu görülmektedir. Ancak soruda verilenler ve bu çerçevede çizilen şekil göz önüne alındığında, x ve z açılarının eşitliğine ilişkin bir sonuca varılamamaktadır. Öğrenci, her ne kadar soruda verilenlere uygun şekli çizmiş ve şekil üzerinde doğru düzenlemeler yapmış gibi görünse de; x ve z açılarının eşit olduğunu düşünmesi, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin görsel gerekliliklerinde sorun yaşadığını göstermektedir. Öğrenci, ürettiği bu hatalı düşüncesinin bir sonucu olarak yanlış üçgenlerin benzerliği üzerinde çalışmış ve kanıt yapma sürecinde başarısız olmuştur.



Şekil 26. Öğrencinin kanıt yapma sürecinde çizdiği şekil.

Şekil 27'de kanıt yapma sürecine yer verilen bu öğrencinin, CBE ve CDA üçgenlerinin eş olduğunu düşündüğü; açıları karşısındaki kenarlar arasında bir orantı kurduğu görülmüştür. Her ne kadar öğrenci, üçgenlerin eş olduğu konusunda yanılıyor olsa da, bu üçgenleri kullanarak kenarlar arasında doğru bir orantı kurmuştur. Bu bağlamda, kendi iddiası doğrultusunda geçerli bir model/denklem oluşturduğu görülmektedir. Bu durumda, öğrencinin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerini sağladığını söylemek mümkündür.



Şekil 27. Öğrencinin kanıt yapma süreci.

Öğrenci her ne kadar soruda verilen ifadeyi kanıtlamak için üçgenler arasında benzerlik kurmak gibi geçerli bir yol seçmiş olsa da, bu yolda başarısız olmuştur. Öğrencinin kanıt yapmak için doğru ve geçerli aracı seçmeyi ve kullanmayı gerektiren teleolojik bileşenin gerekliliklerini sağlayamadığı görülmektedir. Seçtiği aracı doğru kullanamamasının sebebi, epistemik bileşenin modelleme alt bileşenin görsel gerekliliklerindeki eksikleridir. Şekil üzerinde eşit olduğuna ilişkin bir veri olmadığı halde x ve z açılarını eşit kabul eden öğrenci, epsitemik bileşenin modelleme alt bileşeninin görsel gerekliliklerinde yaşadığı bu sorunun bir sonucu olarak kanıtı yapmak için seçtiği aracı (benzer üçgenleri kullanarak kenarlar arasında benzerlik oranı yazmak) doğru kullanamamış ve süreçte başarısız olmuştur. Bu kanıt yapma süreci, Habermas akılcı davranış modelinde epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin görsel gerekliliklerinin, teleolojik bileşen üzerindeki olumsuz etkisini göstermesi yönüyle önemlidir.

Öğrencinin kanıt yapma sürecinde, iletişim bileşeninin sembolik ve metinsel iletişim alt bileşenleri yönünden yeterli düzeyde bir ürün oluşturamadığı dikkat çekmektedir. Epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin görsel gerekliliklerinde yaşadığı sorunun bir sonucu olarak kanıtı yapmak için kullandığı aracı doğru kullanamamış ve süreci yarım bırakmıştır. Bu durum, öğrencinin sembolik dil ve notasyon kullanarak süreci okuyucuya aktarmasını engellemektedir. Gelebildiği yere kadar ve yaptığı seçimler çerçevesinde değerlendirildiğinde, öğrencinin sembolik ve metinsel iletişim alt bileşenleri açısından yetersiz bir süreç ortaya koyduğu görülmektedir. Eşit olduğunu düşündüğü x ve z açılarının eşitliğinin nereden geldiğine ilişkin bir açıklama yapmamıştır. Benzer olduğunu düşündüğü üçgenlerin benzerliğini notasyon kullanarak ifade etmemiş; bu üçgenlerde eşit açıların karşısındaki kenarları kullanarak oluşturduğu orantıyı sembolik dille yazmamıştır. Öğrenci, üzerinde çalıştığı benzer üçgenlere ilişkin ürününün sonunda kısa metinsel bir açıklama yazmıştır ancak bu açıklama sürece devam edemediğini belirtmekten öteye gitmemektedir. Tüm bunlar, öğrencinin iletişim bileşeninin sembolik ve metinsel iletişim alt bileşenlerinde eksikleri olduğunu göstermektedir.

İletişim bileşeninin sözel iletişim alt bileşeni yönünden değerlendirmek için öğrenci ile görüşme yapılmıştır. Aşağıda öğrencinin söylemlerinden bazı alıntılara yer verilmektedir.

Araştırmacı: x ve z açılarının eşit olduğunu belirtmişsiniz. Bu açıların eşit olduğunu nereden anladınız?

Öğrenci: Ben bu üçgenler (CBE ve CDA üçgenlerini gösteriyor) benzer diye düşündüm. Yani öyle görünüyorlar. DEC ikizkenar olduğundan CBE ve CDA da benzer.

Araştırmacı: Üçgenlerin benzer olduğunu matematiksel olarak nasıl anlarız?

Öğrenci: Yani kenarlar eşit olunca. Mesela burada olduğu gibi $t - t\ldots$ Eşit kenarları bunların.

Araştırmacı: Bundan başka bir kriter var mı?

Öğrenci: Açıları da eşit olur. Otomatikman. Kenarlar eşit olunca. Ya aslında tam da hatırlamıyorum. Kafam iyice karıştı şu an. Unutmuşum ben bunları.

Araştırmacı: Peki, burada yani bu üçgenlerde x ve z açılarının eşit olduğuna nasıl karar verdiniz?

Öğrenci: Ben tam olarak bilmiyorum.

Araştırmacı: Peki, şöyle sorayım önce bu üçgenlerin yani benzer olduğunu belirttiğiniz CBE ve CDA üçgenlerinin açılarının eşit olduğunu mu gördünüz yoksa bu üçgenlerin benzer olduğunu düşündüğünüzden bu açıların eşit olduğuna mı karar verdiniz?

Öğrenci: Ben önce benzerler dedim. Benzerlerse açıların da eşit olması gerektiğini düşündüm. D ve E açıları eşit zaten. Bu çok açık $180° - \beta$. Diğerlerine gelince, yok gelemedim diğerlerine. Şöyle yaptım. Madem bunların bir açıları eşit, $180° - \beta$; bir de kenarları ortak. Yani ortak değil de aynı. t kadar… Her ikinde de t kenarı var yani. DEC de ikizkenar olduğundan bence $s - k$ ve $r - k$ aynı yani eşit. Yani bu benim düşündüğüm, benzer olduğunu söylediğim üçgenlerin iki kenarı ve bunların arasındaki açı eşit. Oradan direkt dedim ki, diğer kenar da eşit. Kenar-açı-kenar diyorduk buna. Kriterler vardı. Bu kenar-açı-kenar kriteri. Bunlar eşitse yani dediğim tarzda; işte o zaman bu üçgenler benzer. Yani oradan da dedim ki bunlar madem benzer o zaman açıları da eşit olacak. t lerin karşısındakileri ilk eşitledim. Yani eşitlemedim de eşit diye düşündüm. Sonra bir de diğer kısa kenarların karşısındaki açıları eşit dedim. Oradan da yaptım.

Araştırmacı: Nasıl devam ettiniz?

Öğrenci: İşte artık oradan orantı yazdım. Eşit açıların karşısında eşit kenarlar… Ayy, pardon eşit şeylerde açılarda karşılarındaki kenarların sırasıyla oranı.

Araştırmacı: Peki, sonuca ulaşabildiniz mi? İfadeyi kanıtlayabildiniz mi?

Öğrenci: Bakıyorum, sanırım çıkmamış. Niye ki? Bence başka bir şey var.

Araştırmacı: Tekrar denemek ister misiniz?

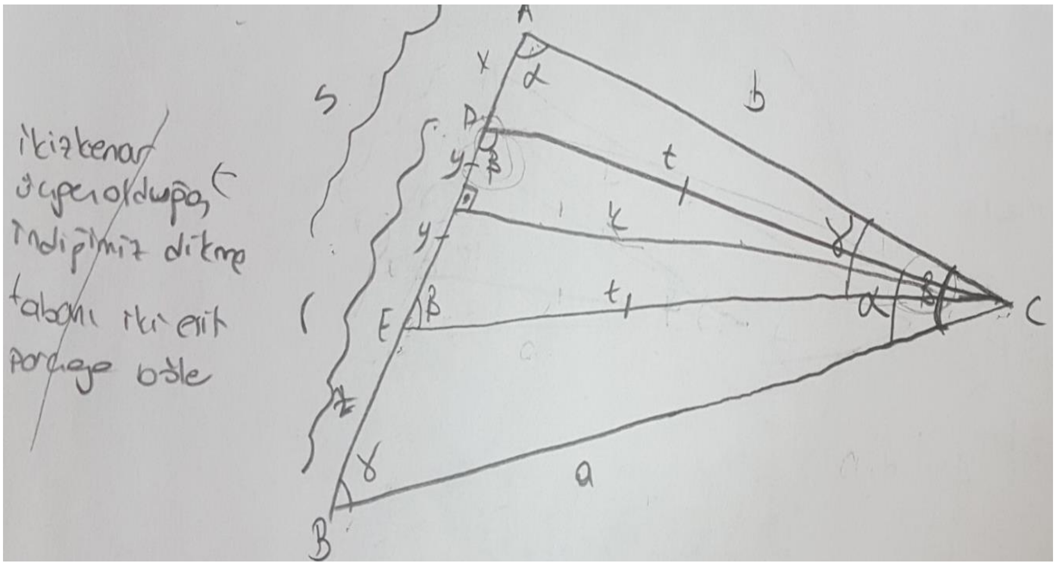
Öğrenci: Yok, yani denerim de… Ne yapacağım ki daha? Bir daha başlasam yine buraya kadar gelirim.

Araştırmacı: Sizce neden kanıtı yapamadınız?

Öğrenci: Başka bir yolu var bence. Benzerlik çok basit kaçıyor böyle bir soru için.

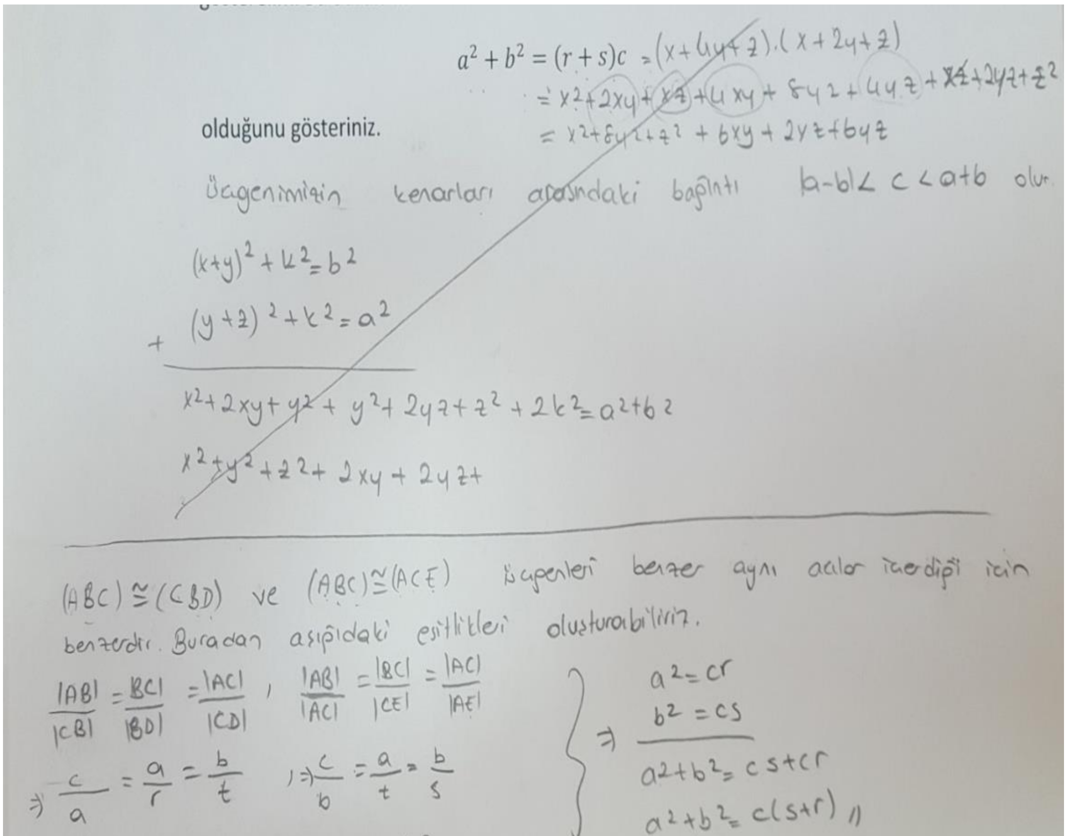
Öğrencinin x ve z açısını neden eşit olarak kabul ettiğini açıklayamadığı görülmektedir. CBE ve CDA üçgenlerinin benzer olduğu iddiası konusunda da dinleyiciye yeterli düzeyde açıklama yapamadığı dikkat çekmektedir. Diğer yandan üçgenlerin benzerliğine ilişkin sunduğu kriterler matematiksel açıdan geçerli değildir. Görüşme sürecinde doğru ve geçerli açıklamalar yapamadığı görülen öğrencinin eşlik ve benzerlik kavramlarını karıştırdığı; iletişim bileşeninin sözel iletişim alt bileşeninde de sorunları olduğu görülmektedir.

Şekil 28'de kanıt yapma sürecine yer verilen başka bir öğrenci, soruda verilen ifadeyi şekil üzerinde oluşturduğu dik üçgenlerde Pisagor teoremi uygulayarak kanıtlamaya çalışmıştır. Öğrencinin DEC ikizkenar üçgeninde C köşesinden ED tabanına yükseklik çizdiği ve bu sayede tabanı iki eşit parçaya ayırdığı; bu yükseklik çizimi ile oluşturduğu iki dik üçgende de Pisagor teoremi kullanarak a^2 ve b^2 yi veren iki denklem yazdığı görülmektedir.



Şekil 28. Öğrencinin kanıt yapma sürecinde çizdiği şekil.

Şekil 29'da görüldüğü gibi, bu yolla soruda verilen ifadeyi kanıtlayamadığını gören öğrenci, başka bir yol denemeye karar vermiş; şekilde benzer üçgenler olduğunu farketmiş ve bu üçgenlerin eşit açıları karşısındaki kenarların oranını yazarak ifadeyi kanıtlayabilmiştir.



Şekil 29. Öğrencinin kanıt yapma süreci.

Öğrenci, soruda verilen kriterlere uygun şekli çizebilmiş ve şekil üzerinde amacına uygun düzenlemeler yapabilmiştir. Üçgenlerin hangi açılarının eşit olduğunu görebilmiş; bu eşit açıları aynı sembolü kullanarak isimlendirmiş ve bu sayede hangi üçgenlerin benzer olduğunu görebilmiştir. Bu durum, öğrencinin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin görsel gerekliliklerini sağladığını göstermektedir. Süreçte amacına uygun aracı seçip kullanabildiğinden, teleolojik bileşenin gerekliliklerini karşıladığı da görülmektedir. Bunun yanı sıra, amacına uygun modeller/denklemler oluşturabilmiş ve bu bağlamda epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerini de sağlayabilmiştir. Bu denklemleri kullanarak yaptığı işlemlerde hata yapmadığı ve matematiksel kurallara ilişkin bir yanlışı olmadığı görülmektedir. Bu durum, öğrencinin epistemik bileşenin sistemik alt bileşeninin gerekliliklerini sağladığını göstermektedir.

İletişim bileşeni açısından da güçlü olduğu görülen öğrencinin, kanıt yapma sürecinde matematiğin sembolik dilini yeterli düzeyde ve doğru şekilde kullanabildiği; notasyon kullanımına özen gösterdiği dikkat çekmektedir. Şekilde üçgenlerin benzerliğini, benzerlik sembolü kullanarak ve üçgenlerin eşit açılarının sırasını gözeterek açıkça yazdığı görülmektedir. Bu üçgenlerin eşit açılarının karşısındaki kenarların oranını sembolik dille yazan ve bu oranlar arasındaki eşitliği net biçimde gösteren öğrencinin, kanıt yapma sürecinin matematiğin sembolik dilini kullanma açısından gelişmiş düzeyde olduğu düşünülmektedir. Bu durum, öğrencinin iletişim bileşeninin sembolik iletişim alt bileşeninin gerekliliklerini sağladığını göstermektedir. Bunun yanı sıra, süreçte yer yer metinsel açıklamalar yaptığı dikkat çeken öğrencinin, bu sayede kanıt yapma sürecini okuyucu için daha anlaşılır ve kolay takip edilebilir hale getirdiği dikkat çekmektedir. Bu bağlamda, öğrencinin iletişim bileşeninin metinsel iletişim alt bileşeni yönünden de yeterli olduğu düşünülmektedir.

Öğrencinin görüşme sürecinde kanıtlama sürecinde attığı adımları açık bir dille ifade edebildiği; ifadeyi kanıtlamak için seçtiği araçları nasıl kullandığını açıklayabildiği görülmüştür. Aşağıda öğrencinin görüşme sürecindeki bazı söylemlerine yer verilmektedir.

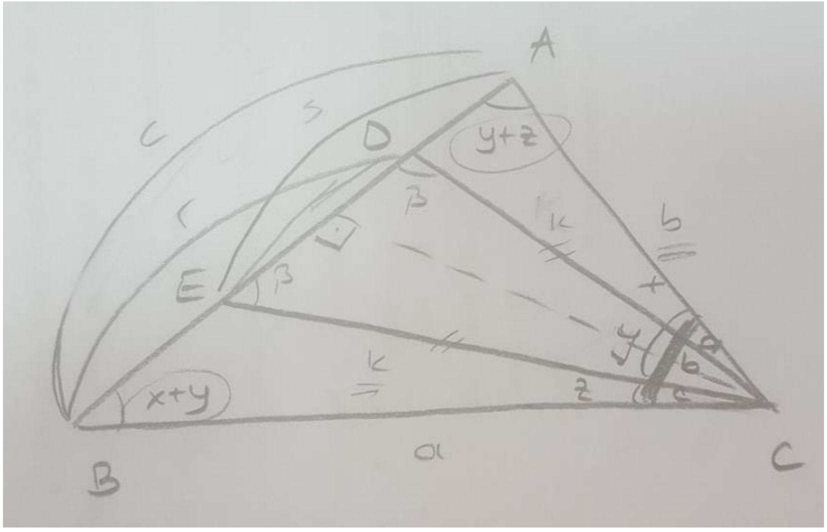
> Araştırmacı: Burada hangi üçgenlerin benzer olduğunu sembolik olarak yazdığınızı görüyorum. Üçgenlerin benzerliğini yazarken dikkat ettiğiniz herhangi bir şey oldu mu?

Öğrenci:Tabi ki, eşit açıları düşünerek ona göre yazdım. Üçgenlerin benzerliğini yazarken hangi açı hangi açıya eşit ise bu açılar o üçgenleri yazarken yani isimlendirirken aynı sırada olmalıdır. Örneğin ben burada ABC üçgeninin CBD üçgenine benzer olduğunu yazmışım. Buradan A açısının C açısına eşit olduğu; B açısının bu üçgenler için çakışık yani çakışık demeyeyim de ortak açı olduğu ve C açısının da D açısına eşit olduğu anlaşılır. Bunun aksi bir sırada öyle kafama göre yazamam. Kenarların oranını da ona göre yazdım.

Görüşme süreci genel olarak değerlendirildiğinde, dinleyiciye anlaşılır ve matematiksel açıdan doğru bilgilerle sözlü açıklamalar yaptığı görülen öğrencinin, iletişim bileşeninin sözel iletişim alt bileşeninin gerekliliklerini sağladığı görülmektedir.

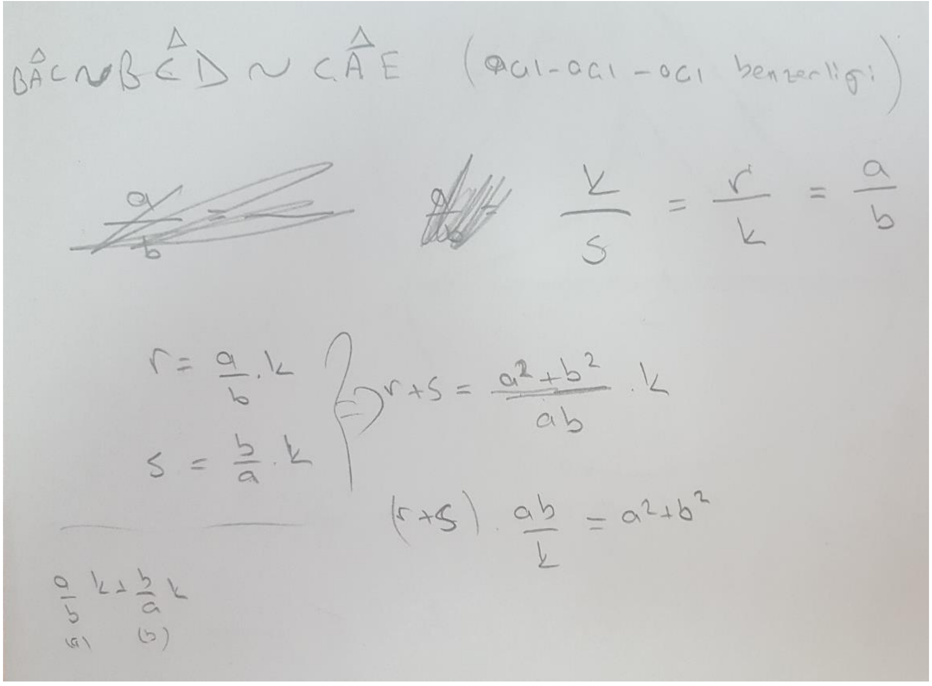
Habermas akılcı davranış modelinin tüm bileşenlerinin gerekliliklerini sağladığı görülen öğrencinin, epistemik bileşenindeki gücünün diğer bileşenlerini olumlu etkilediği düşünülmektedir. Öğrenci şekli amacına uygun biçimde kullanabilme ve şekil üzerinde doğru düzenlemeler yapabilme yeterliğine ve matematiksel açıdan doğru bilgilere sahip olduğundan, süreçte denediği bir yol işe yaramadığında bu yolu değiştirerek yeni girişimlerde bulunabilmekte, seçtiği araçları amacına uygun ve doğru biçimde kullanabilmektedir. Bu bağlamda, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin görsel ve formel gerekliliklerindeki gücünün, teleolojik bileşenini olumlu etkilediği düşünülmektedir. Bunun yanı sıra, öğrencinin sahip olduğu doğru bilgiler ve bu bilgilerin nereden geldiğine hakim olması, iletişim bileşenini de güçlendirmektedir. Bu da, öğrencinin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerindeki gücünün, iletişim bileşeninin tüm alt bileşenlerini olumlu etkilediğini göstermektedir. Öğrencinin süreçte işlem hatası yapmaması ve matematiksel kurallara uyması da, seçtiği aracı doğru ve amacına uygun kullanabilmesini olumlu etkilemektedir. Öğrenci, süreçte bu tip bir hata yapmadığında, güvenle kanıt yapmaya devam etmekte ve süreci sonlandırabilmektedir. Bu durum, epistemik bileşenin sistemik alt bileşeninin gerekliliklerini sağlamanın, teleolojik bileşen ve kanıt yapma sürecinin başarıyla tamamlanması üzerindeki olumlu etkisini göstermektedir.

Şekil 30'da kanıt yapma sürecine yer verilen bir diğer öğrenci, soruda verilen ifadeyi üçgenler arasında benzerlik kurarak kanıtlamak istemiştir. Öğrenci şekil üzerinde bazı üçgenlerin eşit açıları olduğunu görmüş; eşit açıları aynı sembolü kullanarak isimlendirmiş ve buradan benzer üçgenleri belirlemiştir. Soruda verilen kriterlere uygun şekli çizebildiğinden ve şekil üzerinde doğru ve gerekli düzenlemeleri yapabildiğinden epsitemik bileşenin modelleme alt bileşeninin görsel gerekliliklerini sağlamaktadır.



Şekil 30. Öğrencinin kanıt yapma sürecinde çizdiği şekil.

Şekil 31'de bu öğrencinin kanıt yapma sürecine yer verilmektedir. Öğrenci, soruda verilen ifadeyi benzer üçgenlerin kenarları arasında kurduğu orantı üzerinden kanıtlamaya çalışmaktadır. Öğrencinin seçip kullanmaya çalıştığı bu yol, ifadenin kanıtı için işe yarar bir yoldur. Ancak öğrencinin soruda verilen ifadeyi elde etmesini sağlayacak benzer üçgenleri seçip kullanamadığı görülmektedir. Benzer olarak belirlediği üç üçgenden ikisini seçen ve kullanan öğrenci, bu üçgenlerin eşit açıları karşısındaki kenarları kullanarak kurduğu orantıdan soruda kanıtı istenen ifadeyi elde edememiştir. Bu durum, öğrencinin sürecin son aşamasında teleolojik bileşenin gerekliliklerini sağlayamadığını göstermektedir.



Şekil 31. Öğrencinin kanıt yapma süreci.

Öğrencinin benzer üçgenlerin eşit açıları karşısındaki kenarları kullanarak kurduğu orantının ve bu orantıya bağlı olarak oluşturduğu denklemlerin doğru ve geçerli olduğu görülmektedir. Bu bağlamda, öğrenci epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerini sağlamaktadır. Öğrencinin kurduğu denklemler ile işlemler yaparken hata yapmadığı ve matematiksel kurallara uyduğu dikkat çekmektedir. Bu durum, epistemik bileşenin sistemik alt bileşeninin gerekliliklerini sağladığını göstermektedir. Ancak öğrenci, son aşamada doğru ve amacına uygun benzer üçgenleri seçip, bu üçgenlerin eşit kenarları arasında orantı kuramadığından soruda verilen ifadeyi kanıtlayamamıştır.

Öğrenci benzer üçgenleri yazarken, eşit açıların isimlerini her üçgende aynı sırada yazarak benzer üçgenleri sembolik olarak doğru ifade edebilmiştir. Sürece genel olarak bakıldığında, öğrencinin iletişim bileşeninin sembolik iletişim alt bileşeninde yeterli olduğu söylenebilir. Öğrenci, bu süreçte attığı adımlara ilişkin metinsel açıklama yapmayı tercih etmemiştir.

Bu öğrencinin iletişim bileşeninin sözel iletişim alt bileşeni yönünden değerlendirilmesi ve kanıt yapma sürecinin daha detaylı analiz edilmesi için görüşme yapılmıştır. Aşağıda öğrencinin söylemlerinden bazı alıntılara yer verilmektedir.

> Araştırmacı: Burada bazı üçgenler arasında benzerlik kurduğunuzu görüyorum. Neler yaptığınızı biraz anlatabilir misiniz?
>
> Öğrenci: Ben burada yani şekilde benzer üçgenler buldum. Eşit açıları var bu üçgenlerin çünkü. Yani β ları buraya koyunca bir de açıları x, y, z diye isimlendirince eşit açılar olduğunu fark ettim. Eşit açıları olan üçgenler benzerdir dedim. Oradan da kenarları oranladım.
>
> Araştırmacı: Ama sanırım buradan ifadeye ulaşamamışsınız.
>
> Öğrenci: Evet, olmadı. Aslında çok iyi bir yol buldum diye de sevinmiştim.
>
> Araştırmacı: Üç tane benzer üçgen belirlediğinizi görüyorum ama bunlardan ikisiyle çalışmışsınız. Neden diğer üçgenleri kullanmayı düşünmediniz?
>
> Öğrenci: Bir bakmam gerek. Ben bir hatırlayayım şekli de en iyisi iyice bir bakıp.

Öğrenci bir süre şekli incelemiştir.

> Öğrenci: Şimdi evet, dediğiniz doğru. Ben diğerlerinden neden orantı yazmadım inanın bilmiyorum şu an. Bunlardan çıkmayınca moralim bozuldu galiba. Şimdi bir denesem mi? Çıkar mı ki?
>
> Araştırmacı: Tabi, lütfen.

Öğrenci bir süre kâğıt üzerinde çalışmış ve süreç sonunda ifadeyi kanıtlamayı başarmıştır.

> Öğrenci: Evet, dediğiniz gibi yaptım. Hepsini kullandım. Yani hepsini değil de şöyle yaptım. ABC üçgeni ile ACE üçgenini; bir de ABC üçgeni ile CBD üçgeni kullandım. Her iki benzerlikten de orantı yazdım. Oradan geldi zaten. Yani direk gelmedi de. İçler dışlar çarpımı yapınca a^2 ve b^2 geldi. Ayrı ayrı. Onları topladığımda $rc + cs$ buldum. Bunu da c parantezine alınca zaten istenen ifadeyi bulmuş oldum.

Görüşme sürecinde, öğrencinin ortaya koyduğu ilk kanıt yapma sürecinde eksik kalan kısmı düzeltmek için yaptığı yeni denemesinde attığı adımları ayrıntılı ve doğru açıklaması iletişim bileşeninin sözel iletişim alt bileşeni açısından yeterli olduğunu göstermektedir. Öğrencinin görüşme sürecinde yaptığı denemesinde, bu kez süreci başarıyla tamamladığı görülmüştür. Bu öğrencinin kanıt yapma sürecinin ve görüşme verilerinin analizinde, amaca uygun araç seçiminin ve kullanımının önemi görülmüştür. Bu durum, Habermas akılcı davranış modeline göre, teleolojik bileşenin kanıt yapma sürecinin başarıyla tamamlanması açısından modeldeki önemini göstermektedir.

Benzerlik sorusu kapsamında analizi yapılan kanıtlama süreçlerine bakıldığında, öğrencilerin genellikle üçgenler arasında benzerlik kurmak yerine Kosinüs teoremini kullanarak soruda verilen ifadeyi kanıtlamaya çalıştığı görülmüştür. Ancak Kosinüs teoremi, söz konusu ifadenin kanıtı için uygun bir araç değildir. Buradan, öğrencilerin kanıt yapma sürecinde genellikle teleolojik bileşende sorun yaşadığı anlaşılmaktadır. Soruda verilen ifadenin kanıtı için Kosinüs teoremini kullanmayı tercih eden öğrencilerin süreçte başarısız olduğu görülmüştür. Diğer yandan şekildeki üçgenler arasında benzerlik olduğunu gören ve bu yolla ifadeyi kanıtlamayı tercih eden öğrencilerin, genellikle benzer üçgenleri doğru belirleyemediği görülmüştür. Bu durum, bir kez daha, kanıt yaparken amaca uygun araç seçip kullanmanın önemini ve Habermas akılcı davranış modelinde teleolojik bileşenin kanıt yapma sürecindeki rolünü göstermektedir.

Cebir Alanında Yapılan Uygulamalarda Elde Edilen Bulgular ve Yorumlar

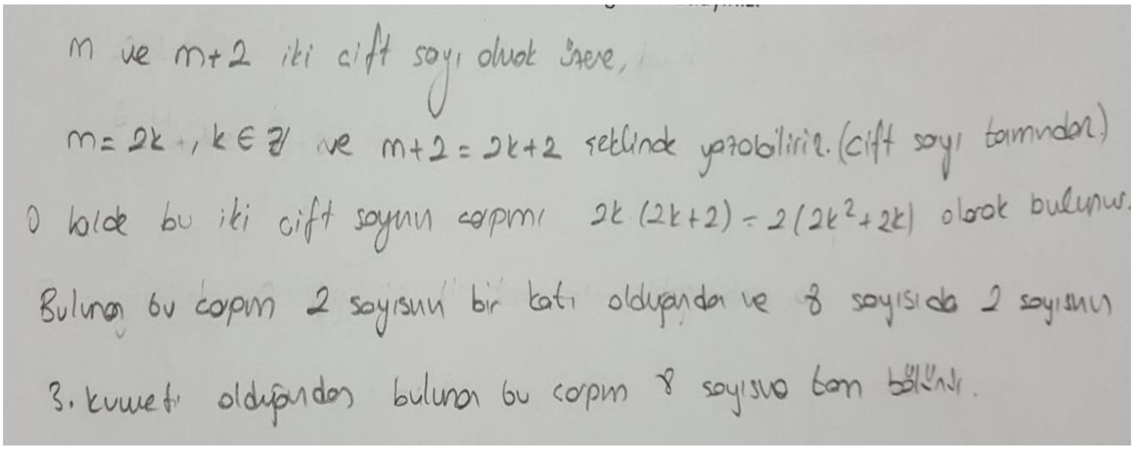
Bu bölümde, öğrencilerin cebir soruları için ürettikleri yazılı kanıt yapma süreçlerinin ve sözlü görüşme verilerinin Habermas akılcı davranış modeline göre analiz sonuçlarına yer verilmektedir.

Çift sayı sorusu. Bu soru öğrencilere aşağıdaki şekilde sorulmuştur:

“Ardışık iki çift sayının çarpımının 8 ile bölünebildiğini kanıtlayınız (Morselli & Boero, 2011)”

Bu soru, öğrencilerin ardışık iki çift sayıyı modellemesini ve bu iki çift sayının çarpımından elde edecekleri ifadenin 8 ile bölünebildiğini göstermelerini gerektirmektedir. Öğrencilerin ardışık iki çift sayıyı cebirsel olarak doğru modellemesi, Habermas akılcı davranış modeline göre, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gereklilikleri kapsamında değerlendirilmektedir. Kurduğu modelleri kullanarak ardışık iki çift sayının çarpımına ilişkin doğru ve geçerli bir ifade elde etmesi, cebirsel ifadelerin doğru çarpılmasını gerektirdiğinden epistemik bileşenin sistemik alt bileşeni kapsamında incelenmektedir. Öğrencilerin elde ettiği çarpım ifadesinde amacına uygun düzenlemeler yaparak ifadenin 8 ile bölünebildiğini göstermesi ise teleolojik bileşenin gereklikleri arasında yer almaktadır. Kanıt yapma sürecinde sembolik dil ve notasyon kullanımı, iletişim bileşeninin sembolik iletişim alt bileşeni; adım adım ilerlerken yaptıklarına ilişkin yazdığı metinler, metinsel iletişim alt bileşeni ve kanıt olarak ortaya konulan ürünü görüşme sürecinde sözlü olarak açıklama yeterliği sözel iletişim alt bileşeni bağlamında değerlendirilmektedir.

Bazı öğrencilerin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerini sağladığı ancak teleolojik bileşendeki eksiklerinden dolayı kanıt yapma sürecinde başarılı olamadığı görülmüştür. Bu duruma ilişkin bir örneğe Şekil 32'de yer verilmektedir.


m ve m+2 iki çift sayı olsak üzere,
$m=2k$, $k \in \mathbb{Z}$ ve $m+2=2k+2$ şeklinde yazabiliriz. (çift sayı tanımından)
O halde bu iki çift sayının çarpımı $2k(2k+2)=2(2k^2+2k)$ olarak bulunur.
Bulunan bu çarpım 2 sayısının bir katı olduğundan ve 8 sayısıda 2 sayısının
3. kuvveti olduğundan bulunan bu çarpım 8 sayısına tam bölünür.

Şekil 32. Öğrencinin kanıt yapma süreci.

Bu öğrenci, ardışık iki çift sayıyı cebirsel olarak doğru biçimde yazabilmiştir. Bu nedenle, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerini sağlamaktadır. Ancak son aşamada

$$2k\ (2k+2) = 2(2k^2+2k)$$

olarak elde ettiği ifadenin 8 ile bölünebildiğini gösterememiştir. Aslında burada öğrenciden bu ifadeyi $2 \times 2k \times (k+1)$ olarak yazması ve buradan $4 \times k \times (k+1)$ ifadesini elde etmesi beklenmektedir. Bu ifadede k çift sayı olduğunda $k+1$ tek sayıyı; k tek sayı olduğunda ise $k+1$ çift sayıyı temsil etmektedir. Her durumda ifadenin 4 dışındaki diğer çarpanlarından biri çift sayı olmaktadır. Bu durum, ifadenin 4 ve 2 çarpanına sahip olduğunu göstermektedir. Böylece ardışık iki çift sayının çarpımının $8'$in katı olduğu kanıtlanabilmektedir. Ancak öğrenci, ifadedeki k ve $2k+2$ çarpanlarını çarpmayı tercih etmiş ve "bu çarpım 2 sayısının bir katı olduğundan ve 8 sayısı da 2 sayısının bir kuvveti olduğundan bulunan bu çarpım 8 sayısına bölünür" şeklinde yanlış ve geçersiz bir sonuç üretmiştir. Bu durum, öğrencinin ardışık iki çift sayının çarpımının 8'in katı olduğunu göstermek için ifadeyi uygun şekilde ortak çarpan parantezine alamadığını; yani amacına ulaşma yolunda uygun aracı seçip kullanamadığını göstermektedir. Bu bağlamda, öğrencinin Habermas akılcı davranış modeline göre, teleolojik bileşenin gerekliliklerini sağlayamadığı görülmektedir.

Öğrenci yaptığı işlemler sırasında matematiksel bir hata yapmamış ve matematiksel kurallara uymuştur. Bu durum, öğrencinin epistemik bileşenin sistemik alt bileşeninin gerekliliklerini sağladığını göstermektedir. Öğrenci, kanıt yapma sürecinde, ardışık çift sayıları cebirin sembolik dilini kullanarak ifade edebilmiş; matematiksel sembolleri uygun ve yerinde kullanabilmiştir. Bunun yanı sıra, son aşamaya kadar süreci anlaşılır bir dille metinsel olarak da aktardığı dikkat çekmektedir. Ancak son aşamada öğrencinin teleolojik bileşende yaşadığı sorunun, iletişim bileşeninin hem sembolik hem de metinsel iletişim alt bileşenini olumsuz etkilediği görülmektedir.

Öğrencinin iletişim bileşeninin sözel iletişim alt bileşeni yönünden yeterliğini değerlendirmek ve kanıt yapma sürecinin daha detaylı analizini yapabilmek için görüşme yapılmıştır. Aşağıda öğrencinin söylemlerinden bazı alıntılara yer verilmektedir.

> Araştırmacı: $2(2\mathrm{k}^2 + 2\mathrm{k})$ ifadesinden sonraki kısımda neler yaptığınızı anlatır mısınız?
>
> Öğrenci: Burada ben bunu 2 parantezine aldım. $2'$yi dışarıda bıraktım. k'yı içeri dağıttım. Bunun 8'in katı olduğunu göstermem lazım. Katı olması ne demek? Bölünebilmesi 8'e demek. Ne yazmışım (son satırda yazdığını okur)? Dediğimden hiçbir şey anlamadım (Gülüyor). Sanırım kafam gitmiş burada. Yani demişim ki bu 2'nin katı… 8 de 2'nin katı. O zaman bu yazdığım da $2(2\mathrm{k}^2 + 2\mathrm{k})$, 2'nin katı gibi garip bir şey yazmışım. 8'in 2'nin küpü olması yani daha doğrusu 2'nin katı olması ile bu benim elde ettiğim şeyin 2'nin bir katı olması arasında nasıl bir alaka var? Kurmuşum ama bence yanlış bir şey düşünmüşüm. Alakası yok. Buradan böyle bir şey söyleyemem.

Araştırmacı: İsterseniz kaldığınız yerden devam ederek bir kez daha deneyebilirsiniz.

Öğrenci: İyi olur çünkü bu olmamış.

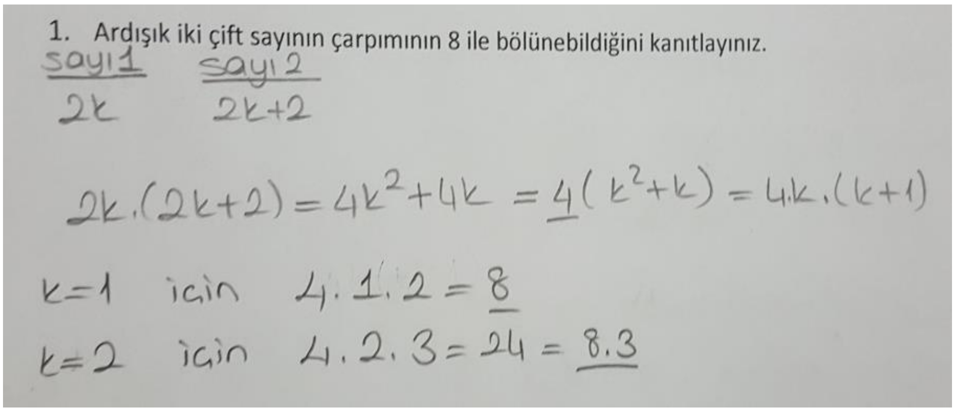
Öğrenci kaldığı yerden devam ederek bu kez ifadeyi $4k$ parantezine alarak yazabilmiştir. Ancak bu kez de elde ettiği $4 \times k \times (k+1)$ ifadesinde k ve $k+1$ ifadelerinden birinin tek sayı olduğu durumda diğerinin çift sayı olacağını düşünememiştir.

Öğrenci: Ya kaldım burada. Bilmiyorum devamını. $4 \times \mathrm{k} \times (\mathrm{k}+1)$ Lütfen bana söyleyin ama bitince bunun nereden çıktığını. Çünkü burada kalmak gerçekten canımı sıktı. Bu ifadenin 8'e bölündüğünü yani katı olduğunu göstermem gerek. 4 çarpanı zaten var. Ama k ya da $\mathrm{k}+1$'den 2 çarpanı gelip gelmeyeceğini bilemem ki. Emin değilim.

Bu öğrencinin bu aşamada kaldığı ve kanıtı tamamlayamadığı görülmüştür. Bu durum, öğrencinin ardışık iki sayıdan birinin çift, diğerinin tek sayı olması gerektiğini bilmemesinden kaynaklanmaktadır. Kurduğu modeli, bu bilgi eksikliği nedeniyle amacına ulaşmak için doğru şekilde kullanamayan öğrencinin, epistemik bileşeninin modelleme alt bileşenin formel gerekliliklerinde yaşadığı sorunun teleolojik bileşenin gerekliliklerini sağlamasını olumsuz etkilediği görülmektedir.

Öğrencinin görüşmede kanıt yaparken attığı adımları anlaşılır bir dille aktarabildiği görülmüştür. Bunun yanı sıra, kâğıt üzerindeki kanıt yapma sürecinde elde ettiği sonucun geçersiz olduğunu kendisi fark etmiş ve bu sonucun neden geçersiz olduğunu açıklayabilmiştir. Ancak son aşamada epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerinde yaşadığı sorun, süreci tamamlayamamasına neden olmuştur. Bu durumun iletişim bileşeninin sözel iletişim alt bileşenini de olumsuz etkilediği söylenebilir.

Bazı öğrenciler, iki ardışık sayıyı k cinsinden yazmış ve bu ardışık sayıların çarpımından elde ettiği ifadede k'ya değerler vererek çarpım ifadesinin 8'e bölünebildiğini göstermeye çalışmıştır. Ancak formel yazım kuralları çerçevesinde düşündüğümüzde, sayısal örnekler üzerinden bir ifadenin doğrulanması o ifadenin genel olarak kanıtlandığını göstermez. Bu duruma ilişkin bir örneğe Şekil 33'te yer verilmektedir.



Şekil 33. Epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerinde eksiklik.

Bu öğrenci, iki ardışık sayıyı cebirsel olarak doğru modelleyebilmiştir. Bu bağlamda, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerini sağlamaktadır. Diğer yandan, ardışık sayılar için yazdığı ifadeleri çarpan ve iki ardışık çift sayının çarpımına ilişkin bir ifade üreten öğrenci, bu ifadeyi $4k$ parantezine alarak yazmış; bu sayede soruda verilen ifadeyi kanıtlayabilmek için uygun ve işe yarar bir araç seçebilmiştir. Bu aşamaya kadar, amacına uygun araçlar seçip kullanabilmesi teleolojik bileşenin gerekliliklerini sağladığını göstermektedir. Son aşamada ise $4k(k+1)$ ifadesinde k'ye sayısal değerler vererek ifadenin aldığı değerleri hesaplayan ve her seferinde elde ettiği sonuçların 8'nin katı olduğunu gören öğrenci, süreci burada sonlandırmıştır. Öğrenci k ya da $k+1$ ifadelerinden birinin tek olması durumunda, diğerinin çift olması gerektiği bilgisine sahip olmadığından süreci tamamlayamamıştır. Bu durum öğrencinin, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerini yerine getiremediğini ve bu nedenle kanıt yapma sürecinde başarısız olduğunu göstermektedir.

Bu öğrenci, yazdığı cebirsel ifadelerle işlem yaparken matematiksel hata yapmamış ve matematiksel kurallara uymuştur. Bu durum, öğrencinin epistemik bileşenin sistemik alt bileşeninin gerekliliklerini sağladığını göstermektedir.

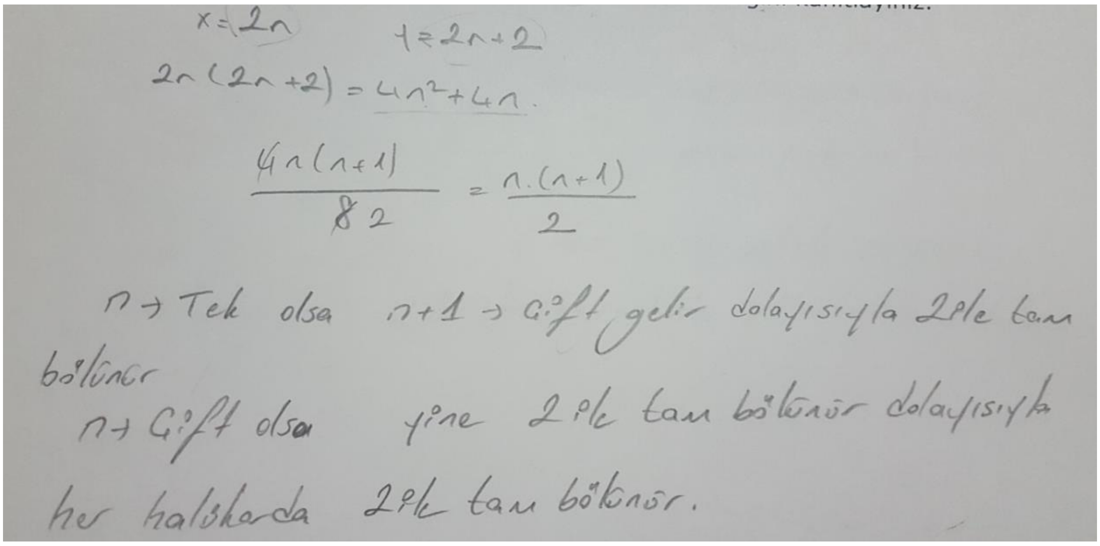
Diğer yandan, öğrencinin son aşamaya kadar cebirin sembolik dilini yeterli düzeyde ve amacına uygun şekilde kullanabildiği görülmektedir. Ancak $4k(k+1)$ ifadesini ürettikten sonra, kanıta formel yoldan devam edememiş; sayısal değerler kullanarak ifadenin 8 ile bölünebildiğini göstermeye çalışmıştır. Bu aşamada, öğrencinin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerinde yaşadığı eksikliğin, iletişim bileşeninin sembolik iletişim alt bileşenini olumsuz etkilediği görülmüştür. Öğrencinin sürecin genelinde metinsel bir açıklama yapmaya gerek duymadığı da dikkat çekmektedir.

Öğrencinin iletişim bileşeninin sözel iletişim alt bileşeni yönünden yeterliğini değerlendirmek ve kanıt yapma sürecinin detaylı analizini yapabilmek için görüşme yapılmıştır. Aşağıda bu öğrencinin görüşme sürecindeki söylemlerinden bazı alıntılara yer verilmektedir.

> Araştırmacı: $4\mathrm{k}(\mathrm{k}+1)$ ifadesinde k'ya değerler verdiğinizi görüyorum. Bu aşamadan itibaren neler yaptığınızı açıklayabilir misiniz?
>
> Öğrenci: Ben k'ya değerler vererek ifadenin sonuçlarını görmek istedim. İki değer verdim her ikisinde de sonuç 8'in katı çıktı.
>
> Araştırmacı: Süreci burada sonlandırmışsınız. Buradan kanıtınızın bittiğini anlayabilir miyiz?
>
> Öğrenci: Yani çok örnek vermemişim ama bu böyle devam eder. k, 3 olduğunda, 4 olduğunda, vesaire. Bu böyle devam edecek. Her seferinde sonuç 8'in katı olacak.
>
> Araştırmacı: Bunu garanti etmenin bir yolu var mı?
>
> Öğrenci: Hımm, yani bu ikisinde öyle çıkınca yani 8'in katı çıkınca ben devam etmeye pek gerek görmedim.
>
> Araştırmacı: Her k için bu ifadenin sonucunun 8'in katı olduğunu nasıl gösterebiliriz?
>
> Öğrenci: Yani ben evet direk öyle kanıtlayamamışım aslında. Ne demek istediğinizi anlıyorum. Bunu göstermemi bekliyorsunuz sanırım terimsel bir şekilde. Yani cebir diliyle.
>
> Araştırmacı: Evet, aynen.
>
> Öğrenci: Ama ben buradan devam edemiyorum. k ve $\mathrm{k}+1$ gibi çok sade basit iki terim var elimde. Bunları daha fazla parçalayamıyorum.

Öğrencinin görüşme sürecinde ifadeyi kanıtlayamadığını ve süreci sezgisel bir düzeyde bıraktığını anladığını görmekteyiz. Epistemik bileşendeki eksikliğinin bir yansıması olarak iki ardışık çift sayının çarpımından elde ettiği ifadenin $8'$in katı olduğunu gösterememesi, öğrencinin iletişim bileşenini genel anlamda etkilemektedir. Öğrenci süreci sezgisel düzeyde bıraktığından ve kanıtı tamamlayamadığından okuyucuya ve dinleyiciye yeterli düzeyde açıklamalar yapamamaktadır. Bu durum, öğrencinin iletişim bileşeninin sembolik ve metinsel iletişim alt bileşeninde olduğu gibi sözel iletişim alt bileşeninde de sorun yaşamasına yol açmıştır.

Bu durumun aksine, kanıt yapma sürecini benzer şekilde yapılandıran ve son aşamada elde ettiği ifade üzerinden amacına uygun şekilde akıl yürütebilen öğrencilerin olduğu da görülmüştür.

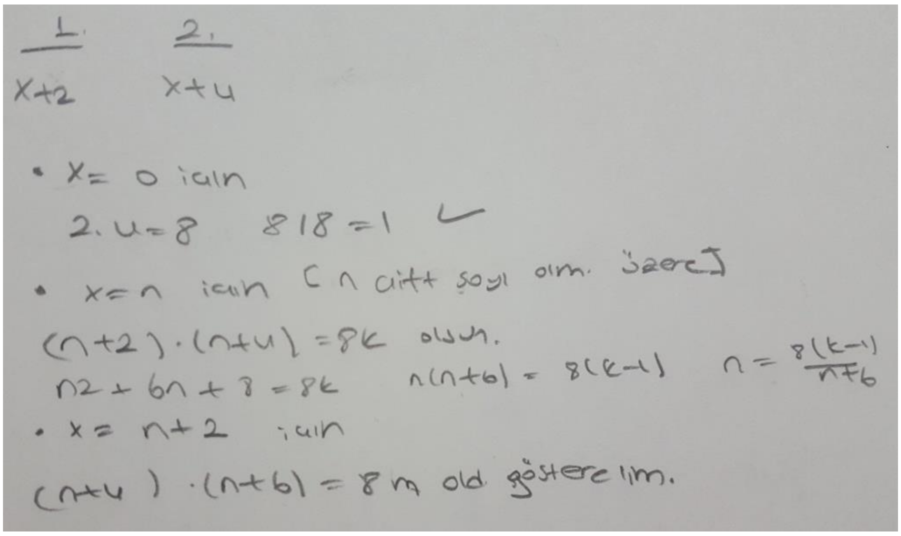


Şekil 34. Öğrencinin kanıt yapma süreci.

Şekil 34'te kanıt yapma sürecine yer verilen öğrenci, bu soruda verilen ifadeyi kanıtlamak için doğru modeller/denklemler kurabilmiştir. Bu anlamda, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerini sağlamaktadır. Süreçte işlem hatası yapmadığı ve matematiksel kurallara uygun adımlar attığı görülmektedir. Bu durum, epistemik bileşenin sistemik alt bileşeninin gerekliliklerini sağladığını göstermektedir. Öğrenci, bu süreçte soruda verilen ifadeyi kanıtlamak için kendisine gereken doğru ve geçerli araçları seçebilmiş ve kullanabilmiştir. Son aşamada elde ettiği $\frac{n(n+1)}{2}$ ifadesinde n ve $n+1$ ifadelerinden birinin tek sayı olması durumunda diğerinin çift sayı olması gerektiğini görmüş; bu nedenle $n(n+1)$ ifadesinin 2 ile tam bölünebildiğini belirtmiştir. Kanıt yapma sürecinde doğru ve geçerli araçlar seçebilen ve kullanabilen öğrenci, amacına ulaşmış ve soruda verilen ifadeyi kanıtlayabilmiştir. Bu bağlamda Habermas akılcı davranış modeline göre, teleolojik bileşenin gerekliliklerini sağlayabilmiştir.

Öğrencinin süreçte cebirin sembolik dilini yeterli düzeyde kullanabildiği görülmüştür. Bu durum, öğrencinin iletişim bileşeninin sembolik iletişim alt bileşeninin gerekliliklerini sağlayabildiğini göstermektedir. Özellikle son aşamada öğrencinin düşüncelerini yazı diliyle net ve doğru biçimde açıklayabildiği görülmektedir. Bu durum, öğrencinin iletişim bileşeninin metinsel iletişim alt bileşeni açısından da yeterli olduğunu göstermektedir. Görüşme sürecinde dinleyiciye, kanıt yapma sürecini açıklayıcı ve doğru bir dille aktarabildiği görülen öğrencinin, iletişim bileşeninin sözel iletişim alt bileşeninin gerekliliklerini de sağlayabildiği belirlenmiştir. Öğrencinin Habermas akılcı davranış modeline göre, epistemik ve teleolojik bileşendeki gücünün, iletişim bileşeninin tüm alt bileşenlerini olumlu etkilediği görülmüştür.

Öğrencilerden bazıları ifadeyi tümevarım yöntemini kullanarak kanıtlamayı tercih etmiştir. Bu öğrencilerden birinin kanıt yapma sürecine Şekil 35’te yer verilmektedir.



Şekil 35. Teleolojik bileşende eksiklik.

Öğrenci ardışık iki çift sayıyı $x+2$ ve $x+4$ olarak modellemiştir. Ancak x’in herhangi bir sayı olması durumunda, $x+2$ ve $x+4$ ifadeleri çift sayı temsil etmez. Öğrenci ardışık iki çift sayıyı doğru modelleyemediğinden, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerini sağlayamamıştır.

Öğrencinin işlemlerde matematiksel hata yapmadığı ve kurallara uyduğu görülmektedir. Bu durum, epistemik bileşenin sistemik alt bileşeninin gerekliliklerini sağladığını göstermektedir.

Öğrenci, soruda verilen ifadeyi tümevarım yöntemini kullanarak kanıtlamak istemiştir ancak tümevarımın aşamalarını yanlış uygulamaktadır. İkinci aşamada, her n doğal sayısı için ifadeyi doğru kabul etmesi gerekirken, n sayısını çift sayı olarak seçtiği ve son adımda da $n+2$ için ifadenin doğruluğunu göstermeye çalıştığı görülmektedir. Kanıt yapma sürecinde tümevarım yöntemini kullanmayı tercih eden öğrenci, her ne kadar amacına uygun ve doğru bir araç seçmiş olsa da; tümevarımı doğru kullanamadığından teleolojik bileşenin gerekliliklerini sağlayamamıştır.

Öğrenciyi iletişim bileşeninin sözel iletişim alt bileşeni yönünden değerlendirmek için görüşme yapılmıştır.

> Araştırmacı: Bu süreçte neler yaptığınızı açıklayabilir misiniz?
>
> Öğrenci: Tümevarım yapıyorum. Ama sonunda tıkanmıştım.
>
> Araştırmacı: Neden? Nasıl bir sorun yaşadınız?
>
> Öğrenci: Önce ben bu ardışık sayıları yazdım. Çift sayı olmaları için x çift olması şartıyla $\mathrm{x}+2$ ve $\mathrm{x}+4$ olarak bu iki sayıyı oluşturdum.
>
> Araştırmacı: Bunu süreçte belirtmemişsiniz sanırım, yani x'in çift sayı olduğunu.
>
> Öğrenci: Evet, yani onu aklımdan düşündüm.
>
> Araştırmacı: Bunu daha güzel yazmanız mümkün müydü? Yani cebirsel olarak? Sembolik olarak?
>
> Öğrenci: Yani yanına x çift olmak üzere diye ekleyebilirdim. Başka nasıl yazardım bilmiyorum.

Bu aşamada, öğrencinin ardışık iki çift sayıyı modellerken, x çift sayı olmak üzere, $x+2$ ve $x+4$ ifadelerini oluşturduğu görülmektedir. Ancak öğrenci, x'in çift sayıyı temsil ettiğini kant yapma sürecinde not etmemiştir. Sürece genel olarak bakıldığında, sembolik dil ve notasyon kullanımında yetersiz kaldığı ve dolayısıyla öğrencinin iletişim bileşeninin sembolik iletişim alt bileşeninin gerekliliklerini karşılayamadığı görülmektedir. Diğer yandan, öğrencinin ardışık iki çift sayıyı cebirsel olarak doğru biçimde modelleyememiştir. Bu durum, öğrencinin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerini sağlayamadığına ilişkin görüşümüzü desteklemektedir.

Öğrenci: Sonra x'e 0 verdim. Yerine koydum sayılarda. 2 çarpı 4'ten 8 buldum. Bu zaten 8'in tam 1 katı. x, 0 için ifade doğru yani. O yüzden ikinci aşamaya geçtim. İkinci aşamada x'e n dedim. n çift olmalı, çift sayılar çıksın diye. Buradan bir ifade buldum açınca; yani çarpıp dağıtınca. $n^2+6n+8n$ buldum ve bunun 8'e bölünebildiğini kabul ettim. Son aşamada $n+2$ için baktım. Buraya yazmamışım ama ben bunları aklımdan açtım. 8'e bölünebilir bir ifade bulamadım.

Araştırmacı: Kâğıt üzerinde açık açık yazarak denemek ister misiniz? Belki kaçırdığınız bir şeyler vardır…

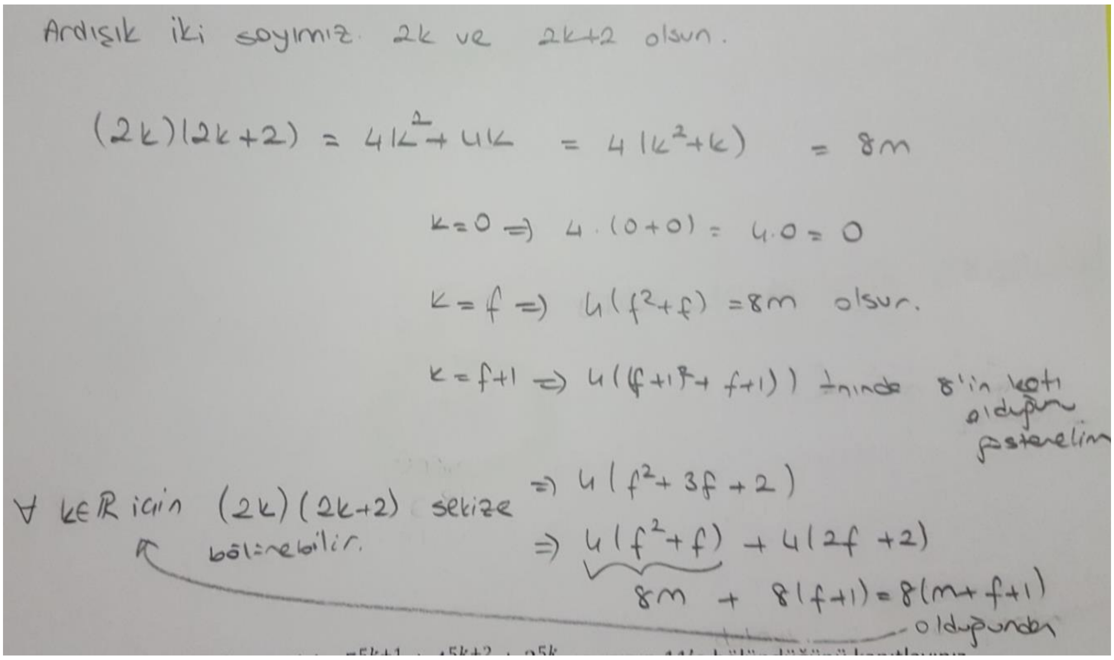
Öğrenci: Olur tekrar yapayım burayı.

Öğrenci son aşamada oluşturduğu ifadeyi açmış ve $n^2+10n+24$ bulmuştur. Ancak bu ifadeyi uygun ve doğru şekilde düzenleyememiş ve ifadenin 8'in katı olduğunu yine gösterememiştir. Öğrenci bu kez de ifadedeki n'nin çift sayı olduğu gerçeğini gözden kaçırmaktadır. Bu durum, öğrencinin bir kez daha teleolojik bileşende sorun yaşadığını göstermektedir.

Öğrenci: Yani ben buradan bir şey göremiyorum. $n^2+10n+24$… 24 tamam 8'in katı… Ama n^2+10n… Bunlarda 8 yok. n parantezine alsam $n+10$ geliyor. Bu da 8'in katı diyemem. Hiç bilmiyorum. Aaa, şeyi kullansam. Şu biraz önce şey yaptığımı … n^2+6n+8; bu 8'in katı aslında… Çünkü biraz önce öyle kabul ettim. Bağlantı kurabilirim. Aslında şey yazsam. Burada ilk kısım zaten 8' in katı geriye $4n+16$ kalıyor… 16 da 8'in katı ama $4n$ değil. Off, yok yapamadım.

Öğrencinin görüşme sürecinde attığı adımları ayrıntılı olarak aktarabildiği görülmektedir. Ancak öğrencinin tümevarım yöntemini yanlış uygulaması ve süreci tamamlayamaması, dinleyiciye doğru ve geçerli bir kanıt yapma süreci sunmasını engellemiştir. Bu nedenle, iletişim bileşeninin sözel iletişim alt bileşeni yönünden yetersiz bulunmuştur. Diğer yandan yalnızca kâğıda bakıldığında sürecin net şekilde anlaşılmaması, öğrencinin görüşme sürecindeki açıklamalarını kâğıt üzerine yazılı olarak yapmamasından kaynaklanmaktadır. Bu durum, öğrencinin iletişim bileşeninin metinsel iletişim alt bileşeni yönünden de eksiklikleri olduğunu ve bu durumun ortaya koyduğu ürünü anlaşılırlık yönünden olumsuz etkilediğini göstermektedir. Öğrencinin tümevarımı doğru kullanamadığından doğru adımları atamadığı ve kanıtı tamamlayamadığı düşünüldüğünde; epistemik ve teleolojik bileşendeki eksikliklerinin, iletişim bileşeninin tüm alt bileşenlerini olumsuz etkilediği sonucuna varılmaktadır.

Soruda verilen ifadeyi kanıtlamak için tümevarım yöntemini kullanmayı tercih eden öğrencilerin çoğu süreçte başarılı olmuştur. Bu duruma örnek bir kanıt yapma sürecine Şekil 36'da yer verilmektedir.

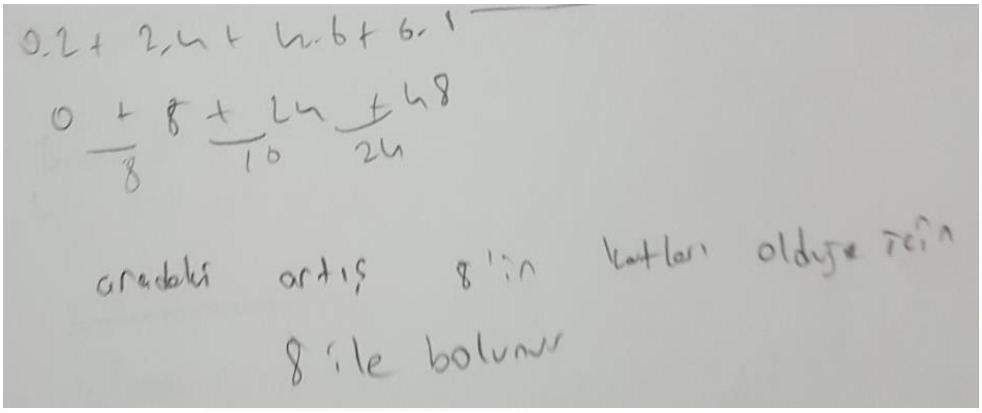


Şekil 36. Öğrencinin kanıt yapma süreci.

Öğrenci süreçte doğru modeller/denklemler kurabilmiştir. Bu nedenle, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerini sağlamaktadır. Süreçte işlem hatası yapmadığı ve matematiksel kurallara uyduğu görülmüştür. Bu durum, öğrencinin epistemik bileşenin sistemik alt bileşeninin gerekliliklerini sağladığını göstermektedir. Bunun yanı sıra, öğrencinin tümevarım yöntemini kullanmayı tercih ederek kanıt yapma sürecinde amacına uygun bir araç seçtiği ve kullandığı görülmektedir. Soruda verilen ifadenin kanıtını yapmaya yönelik doğru ve gerekli aracı seçebilen ve bu aracı doğru kullanabilen öğrencinin, teleolojik bileşenin gerekliliklerini sağladığını göstermektedir.

Öğrencinin süreçte cebirin sembolik dilini yeterli düzeyde kullanabildiği ve formel kanıt yapma kurallarına uygun bir ürün ortaya koyabildiği görülmüştür. Bu durum, öğrencinin iletişim bileşeninin sembolik iletişim alt bileşeninin gerekliliklerini sağladığını göstermektedir. Öğrenci süreçte attığı adımları yazı diliyle açıklama ihtiyacı hissetmemiştir. Bu durum, kanıt yapma sürecinin iletişim bileşeninin metinsel iletişim alt bileşeni yönünden yetersiz olduğunu göstermektedir ancak sürecin akıcılığını ve geçerliğini olumsuz etkilememiştir. Sürecin cebirin sembolik dilinin kullanımı yönünden güçlü olması, formel bir kanıt yapma süreci niteliğini ön plana çıkarmakta ve okuyucu için matematiksel anlamda anlaşılır ve geçerli bir ürün olmasını sağlamaktadır. Diğer yandan, öğrenci kâğıt üzerinde oluşturduğu kanıt yapma sürecini görüşme sürecinde doğru ve matematiksel açıdan geçerli bir dille dinleyiciye aktarabilmiş; attığı adımları nedenleriyle açıklayabilmiştir. Bu durum, öğrencinin iletişim bileşeninin sözel iletişim alt bileşeninin gerekliliklerini de sağladığını göstermektedir. Öğrencinin Habermas akılcı davranış modeline göre, epistemik ve teleolojik bileşendeki gücü, iletişim bileşeninin sembolik ve sözel iletişim alt bileşenlerinde de güçlü olmasını sağlamıştır.

Bazı öğrencilerin argümantasyon sürecinde kaldığı ve kanıt yapma sürecine geçemediği görülmüştür. Buna ilişkin örnek bir duruma Şekil 37'de yer verilmektedir.



Şekil 37. Argümantasyon süreci.

Görüldüğü gibi öğrenci, amacına ulaşmak için bir model/denklem ortaya koyamamıştır. Bu nedenle, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerini karşılayamamıştır. Formel bir kanıt süreci ortaya koyamadığından, kanıtı yapmak için seçtiği ve kullandığı aracı doğruluğu ve geçerliği yönünden değerlendirmek de mümkün olmamıştır. Bu nedenle, öğrencinin ürünü teleolojik bileşen yönünden de gereklilikleri sağlamamaktadır.

Öğrencinin argümantasyon sürecinden cebirsel kanıta geçiş yapamamasının, epistemik ve teleolojik bileşenlerdeki sorunlardan kaynaklandığı düşünülmektedir. Bu durumun nedeninin görüşme verilerine göre netleştirilmesi planlanmıştır.

Araştırmacı: Bu süreçte neler yaptığınızı açıklayabilir misiniz?

Öğrenci: Ardışık çift sayılar aldım. Çarptım ve her seferinde 8'in katı çıktı.

Araştırmacı: Soruda sizden ifadeyi kanıtlamanız istenmiş. İfadeyi kanıtladığınızı düşünüyor musunuz?

Öğrenci: Evet, çünkü aradaki artış hep 8'in katı. Yani şöyle ben aslında bir sayı dizisi oluşturdum bu ardışık çift sayıların çarpım sonucundan ve çok açık görülüyor. Bu dizinin terimleri hep 8'in katları olarak artıyor… Ee, ilk terim ikinci terim zaten 8'in katı. Bir de üzerine eğer 8'in katı olan sayılar eklersek yine hep 8'in katı olan sayılar buluruz. 8'in katı olan bir şeye yine 8'in katı olan bir şey ekledik çünkü.

Öğrenci her ne kadar formel bir kanıt ortaya koyamamış olsa da, düşünme sürecini anlaşılır ve geçerli bir anlatımla dinleyiciye aktarabilmektedir. Öğrenci, eğer formel bir kanıt ortaya koyabilseydi, bu süreci de açık ve anlaşılır bir dille aktarabilecekti. Bu bağlamda, öğrencinin iletişim bileşeninin sözel iletişim alt bileşeninin, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerindeki ve teleolojik bileşendeki sorunlardan olumsuz etkilendiği görülmektedir.

Araştırmacı: Peki, ifadeyi genel olarak cebirsel ifadeler kullanarak doğrulamak konusunda ne düşünüyorsunuz?

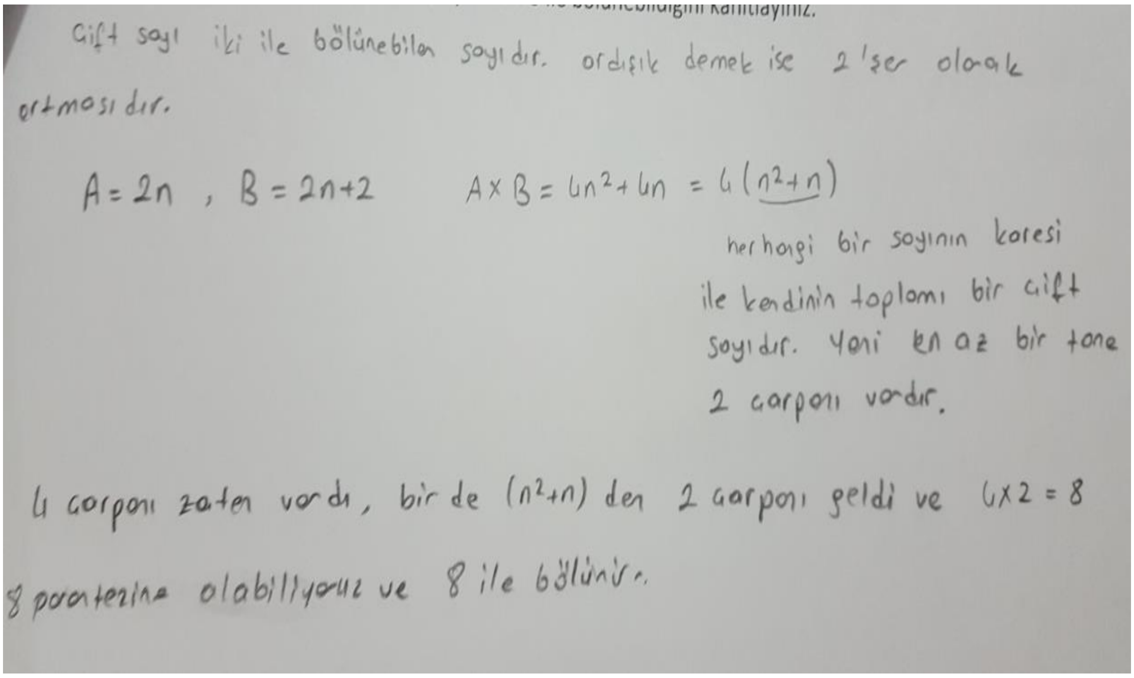
Öğrenci: Yani nasıl? Sayılar vermek yerine x falan diyerek mi?

Araştırmacı: Evet.

Öğrenci: Yani bence gerek yok. Bu kadarı yeterli. Çok açık görünüyor. Bu düşündüğümü daha güzel yazabilirim yani açıklayabilirim ama x falan deyip de yapmak gereksiz bence.

Öğrencinin ürettiği süreci yeterli gördüğünden formel kanıta geçiş yapmadığı görülmektedir. Aslında düşünme süreci doğru ve geçerlidir. Ancak ortaya koyduğu ürün, formel yazım kuralları açısından yetersizdir. Diğer yandan, öğrenci bu durumu önemsememekte; aksine cebirsel kanıt yapmayı, durum bu kadar açıkken, gereksiz görmektedir. Bu bağlamda, öğrencinin argümantasyon süreci düzeyinde bir ürün ortaya koyması ve cebirsel kanıta geçiş yapmaya ihtiyaç duymamasının, epistemik, teleolojik ve iletişim bileşenindeki sorunlarından kaynaklandığı düşünülmektedir.

Diğer bazı öğrencilerin cebirsel kanıt yapmayıp, düşüncelerini ağırlıklı olarak yazı diliyle aktardığı görülmüştür. Şekil 38'de bu duruma örnek olan bir kanıtlama sürecine yer verilmiştir.



Şekil 38. İletişim bileşeninin sembolik iletişim alt bileşeninde eksiklik.

Bu öğrencinin ardışık çift sayıları modellemesi doğrudur. Bu bağlamda epistemik bileşenin modelleme alt bileşenin formel gerekliliklerini sağlamaktadır. Bunun yanı sıra kurduğu modellerle/denklemlerle işlem yaparken hata yapmamış ve matematiksel kurallara uymuştur. Buradan epistemik bileşenin sistemik alt bileşeninin gerekliliklerini de sağladığı söylenebilir.

Öğrencinin $4\,(n^2+n)$ ifadesini elde ettikten sonra cebirsel kanıta devam etmek yerine düşüncelerini metin yazarak açıkladığı görülmektedir. Bu nedenle, öğrencinin son aşamada iletişim bileşenin sembolik iletişim alt bileşeninin gerekliliklerini sağlayamadığı görülmektedir. Diğer yandan, metninde bir çift sayı ile karesinin toplamının her zaman çift sayı olacağını belirttiği ancak bunun nedenini açıklamadığı görülmektedir. Bu durum, öğrencinin iletişim bileşeninin metinsel iletişim alt bileşeninde eksikliği olduğunu göstermektedir. Bu sorunun öğrencinin bilgi eksikliğine dayanıp dayanmadığı görüşme sürecinde netleştirilmiştir.

> Öğrenci: Yani ben geri kalan kısım çok açık diye şey yapmadım. Bir daha n'ye başka bir harf atayacaktım. Yapardım, yani zor değil ama

uzatmak istemedim. Zaten görünüyor. O yüzden açıklamayı tercih ettim.

Araştırmacı: Peki, burada $4\,(\mathrm{n}^2 + \mathrm{n})$ ifadesinin 8'in katı olduğunu nasıl anladınız?

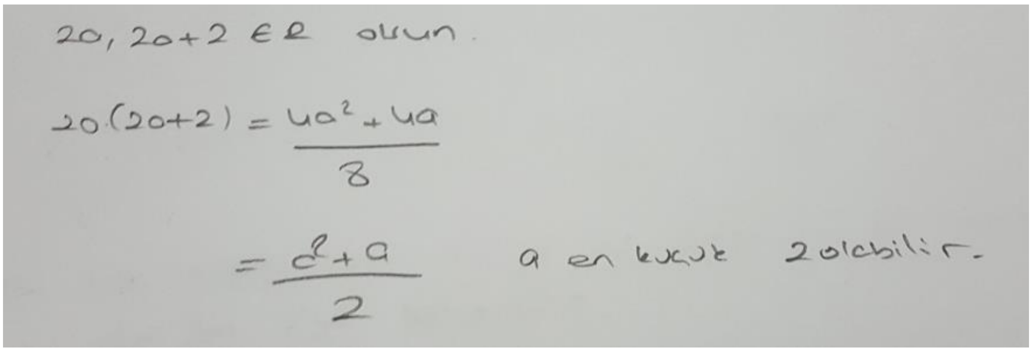
Öğrenci: Çünkü ifadede 4 çarpanı zaten var… Bir sayının karesi ile kendisinin toplamı da hep çifttir. Çünkü $\mathrm{n}^2 + \mathrm{n} = \mathrm{n}(\mathrm{n} + 1)$ olarak yazılabilir. Bu da, bir sayı ile bir fazlasının çarpımı demek. n sayısı çift ise zaten oluyor; değilse de n'den hemen sonraki sayı çift olmak zorunda. Dolayısıyla her türlü bu ifadede bir de 2 çarpanı var. Buradan ifade 8'in katı oluyor.

Araştırmacı: Peki, bir ifadeyi kanıtlamanız istendiğinde sembolik dil kullanımının bir önemi var mıdır?

Öğrenci: Tabi, aslında. Daha matematiksel olur. Yani matematik deyince hele de kanıt deyince direk soyut sembolik şeyler geliyor insanın aklına. Bakan da inceleyen de yani öyle şeyler görmek istiyor sanırım. Öyle yapsam daha iyi olabilirdi.

Öğrenci, yapılan görüşmede düşünme sürecini açık bir dille aktarabilmiştir. Öğrenci aslında $4n^2 + n$ ifadesini $4n(n + 1)$ olarak yazabileceğini ve buradan da ardışık sayılardan birinin tek olması durumunda diğerinin çift olması gerektiğini bildiği görülmüştür. Kanıta cebirsel olarak da devam edebileceğini ancak sürecin devamını çok açık görebildiğinden süreci uzatmak istemediğini, bu yüzden metin yazarak kanıtı tamamladığını belirtmiştir. Öğrencinin yazdığı metin, son aşamadaki karar sürecini açıklaması yönünden eksik iken, sözlü iletişiminin bu noktada açıklayıcı olduğu görülmektedir.

Bir başka öğrencinin ortaya koyduğu üründe, iki ardışık çift sayıyı doğru modellediği, böylece epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerini sağladığı görülmektedir. Öğrencinin $2a$ ve $2a + 2$ olarak modellediği ardışık çift sayıları çarparak ürettiği denklem de doğru ve geçerlidir. Öğrenci bu ifadeyi 8 ile doğru şekilde sadeleştirebilmiş ve $\frac{a^2+a}{2}$ ifadesini elde etmiştir. Bu süreçte işlem hatası yapmadığı ve matematiksel kurallara uyduğu görülmektedir. Bu durum, öğrencinin epistemik bileşenin sistemik alt bileşeninin gerekliliklerini sağladığını göstermektedir. Şekil 39'da öğrencinin kanıt yapma sürecine yer verilmektedir.



Şekil 39. Teleolojik bileşende ve iletişim bileşeninde eksiklik.

Öğrenci, son aşamada elde ettiği $\frac{a^2+a}{2}$ ifadesinin sonucunun tam sayı çıktığını geçerli bir yoldan gösterememiş ve kanıtı tamamlayamamıştır. Bu aşamada kâğıdına "a en küçük 2 olabilir" şeklinde bir açıklama not ettiği görülmektedir. a ve $a+1$ ile temsil edilen sayılardan birinin çift sayı olması gerektiğini göremeyen ve bunu süreçte kullanamayan öğrencinin, son adımda kanıt için ihtiyaç duyduğu doğru aracı seçemediği ve kullanamadığı görülmektedir. Bu durum, öğrencinin son aşamada teleolojik bileşenin gerekliliklerini sağlayamadığını göstermektedir.

Öğrenci ile yapılan görüşmede sürece neden devam edemediği netleştirilmeye çalışılmıştır. Aşağıda öğrencinin söylemlerinden bazı alıntılara yer verilmektedir.

> Araştırmacı: Son kısımda $\frac{\mathrm{a}^2+\mathrm{a}}{2}$ ifadesini bulduktan sonra kısa bir açıklama yapıp süreci bitirdiğinizi görüyorum. Burada tam olarak ne demek istediniz acaba?
>
> Öğrenci: Ben burada $\frac{\mathrm{a}^2+\mathrm{a}}{2}$ buldum, sonra devam edemedim aslında. Yani yukarının yani pay kısmının 2'nin katı olduğunu göstermekti planım ama yapamadım. Çünkü $\mathrm{a}^2+\mathrm{a}$ ifadesi 2'nin katı gibi durmuyor. Yani 2'nin katı da; yoksa soru çıkmaz. Hani bunu gösterebileceğim, 2 parantezine direkt alabileceğim bir ifade değil. Öyle olunca ben de değer verdim. İlk aklıma gelen sayı 2 oldu. Onu koydum yerine.
>
> Araştırmacı: Neden 2 koydunuz?
>
> Öğrenci: Çünkü a çift sayı. Ben öyle oluşturdum. Yani ardışık çift sayıları yazarken onu kullandım.
>
> Araştırmacı: Ardışık çift sayıları $2\mathrm{a}$ ve $2\mathrm{a}+2$ diye yazmışsınız.

Öğrenci: Aslında a her şey olabilir. Çünkü ben $2\mathrm{a}$ demişim. Öbürüne de $2\mathrm{a}+2$ demişim. Yani bunları çift olsunlar diye 2'nin katı olarak yazmışım. Bir daha "a çift olmak zorunda" gibi bir şey diyemem. O zaman şimdi bir daha düşünsem. a her şey olabilir. $\mathrm{a}+1$ de her şey olabilir bu durumda. Bu bana yardımcı olmuyor ki. Sonuçta ben bu kısmı (payı gösteriyor) 2 parantezine alamıyorum. Yani a çift olmak zorunda olsaydı işte o zaman a, 2'nin katı diye yani çift olduğundan ben bu ifade de 2'nin katı derdim. Ama şimdi içinden çıkılmaz bir duruma geldim.

Öğrenci, görüşme sürecinde $\frac{a^2+a}{2}$ ifadesinin sonucunun bir tam sayı olduğunu ve dolayısıyla ardışık iki çift sayının çarpımının 8 ile bölünebildiğini kanıtlayamamıştır. Kanıt için gerekli ve doğru aracı bulamadığından ve kullanamadığından süreci tamamlayamayan öğrencinin teleolojik bileşende eksikleri olduğuna ilişkin görüşümüz desteklenmektedir. Bu durumun temelinde, öğrencinin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerindeki sorunların olduğu düşünülmektedir. Görüşme sürecinde dinleyiciye doğru ve geçerli açıklamalar yapamayan öğrencinin iletişim bileşeninin sözel iletişim alt bileşeninin, epistemik ve teleolojik bileşende yaşadığı sorunlardan olumsuz etkilendiği görülmektedir.

Bu öğrencinin kanıt yapma sürecinin son aşamasında amacına ulaşmak için gerekli ve doğru aracı seçememesi, iletişim bileşeninin sembolik iletişim alt bileşenini de olumsuz etkilemiştir. Öğrencinin son aşamaya kadar cebirin sembolik dilini kullanma konusunda sorun yaşamadığı görülse de, $\frac{a^2+a}{2}$ ifadesini elde ettikten sonra amacına ulaşmak için gerekli ve doğru aracı seçemediğinden süreci tamamlayamadığı ve okuyucuya bir bütün halinde geçerli bir süreç sunamadığı görülmüştür. Sürecin yarım kalması, öğrencinin iletişim bileşeninin sembolik iletişim alt bileşenini de olumsuz etkilemiştir. Süreçte attığı adımların nedenlerini ve sonuçlarını yazı diliyle açıklamayı tercih etmediği de görülen öğrencinin, iletişim bileşeninin metinsel iletişim alt bileşeni yönünden de eksikleri olduğu düşünülmektedir. Epistemik ve teleolojik bileşende yaşadığı sorun, kanıtı tamamlayamamasına; okuyucuya ve dinleyiciye süreci bir bütün olarak sunamamasına ve bu nedenle iletişim bileşeninin tüm alt bileşenlerinde sorun yaşamasına neden olmuştur.

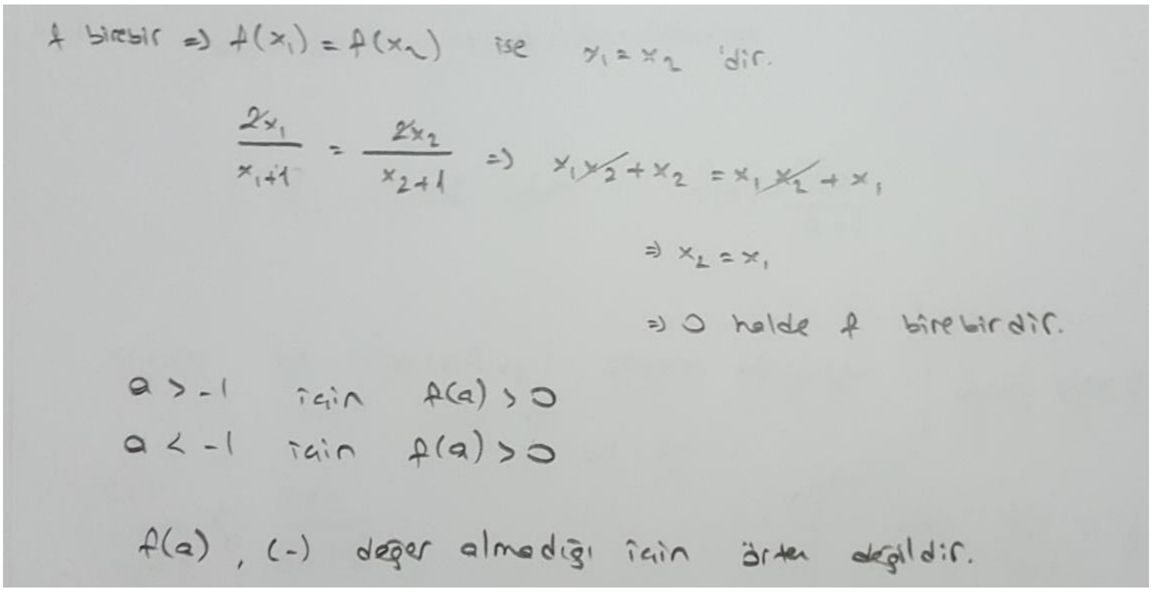
Bu soru kapsamında analiz edilen kanıt yapma süreçleri incelendiğinde, genellikle öğrencilerin ardışık iki çift sayıyı cebirsel olarak yazabildiği ve bu sayıların cebirsel temsillerinin çarpımından doğru bir denklem ortaya çıkarabildiği görülmüştür. Bu durum, öğrencilerin genelde epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerinde sorun yaşamadığını göstermektedir.

Öğrencilerin süreçte en çok sorun yaşadıkları bileşen, teleolojik bileşen olmuştur. Özellikle kanıtın son aşamasında, ardışık iki çift sayının çarpımına ilişkin cebirsel ifadeyi ürettikten sonra bu ifadenin 8'in katı olduğunu göstermek için kendilerine gereken doğru aracı seçemedikleri ve kullanamadıkları görülmüştür. Öğrenciler genellikle bu aşamada kanıta sembolik dille devam etmeyi bırakıp, metinsel açıklama yapma yoluna gitmişler ya da elde ettikleri ifadede bilinmeyene bazı değerler vererek örnekler üzerinden ifadenin doğruluğunu göstermeye çalışmışlardır. Diğer yandan, bu aşamaya geldiğinde hiçbir geçerli adım atamayan ve süreci burada bırakan öğrenciler de olmuştur. Öğrencilerin teleolojik bileşende yaşadığı bu sorun, iletişim bileşeninin tüm alt bileşenlerini de olumsuz etkilemiştir. Bu durum, Habermas akılcı davranış modeline göre, kanıt yapma sürecinin başarıyla tamamlanması konusunda teleolojik bileşenin rolünü ve önemini göstermektedir. Öğrencilerin teleolojik bileşende yaşadıkları bu sorun temelde, ardışık iki sayıdan birinin tek olması durumunda diğerinin çift olması gerektiğini bilmemelerine dayanmaktadır. Bu durum, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliklerinde yaşanan sorunun, teleolojik bileşeni olumsuz etkilediğini ve sürecin iletişim bileşeni yönünden eksik kalmasına yol açtığı görülmektedir.

Bire bir ve örten fonksiyon sorusu. Bu soru öğrencilere şöyle sorulmuştur:

“$A = IR \setminus \{-1\}$ olmak üzere $f: A \to IR$, $f(a) = \frac{2a}{a+1}$ olsun. f'nin bire bir olduğunu ancak örten olmadığını kanıtlayınız. Kanıtlama sürecinde kullandığınız adımları nedenleriyle açıklayınız (Houston, 2009; Velleman, 2006).”

Bazı öğrencilerin bir fonksiyonun bire bir olmasına ilişkin formel tanımı doğru bildiği ve kanıtlama sürecinde bu tanımı doğru şekilde kullandığı ancak bir fonksiyonun örten olmasına ilişkin tanımı doğru bilmediği ve bu nedenle kanıtlama sürecinin bu kısmında başarısız olduğu görülmektedir. Bu öğrencilerden birinin kanıt yapma sürecine Şekil 40'ta yer verilmektedir.


f birebir $\Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ ise $x_1 = x_2$ 'dir.

$$\frac{2x_1}{x_1+1} = \frac{2x_2}{x_2+1} \Rightarrow x_1\cancel{x_2} + x_2 = x_1\cancel{x_2} + x_1$$

$\Rightarrow x_2 = x_1$

$\Rightarrow$ O halde f birebirdir.

$a > -1$ için $f(a) > 0$

$a < -1$ için $f(a) > 0$

$f(a)$, $(-)$ değer almadığı için örten değildir.

Şekil 40. Epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerindeki eksiklik.

Öğrenci kanıt yapma sürecinin ilk bölümünde soruda verilen fonksiyonun bire bir olduğunu formel tanımını kullanarak kanıtlamaya çalışmaktadır. Formel tanım kullanmak, soruda verilen ifadenin kanıtı için doğru ve geçerli bir araçtır. Öğrencinin formel tanımı doğru bilmesi, tanımı amacına uygun ve doğru şekilde kullanabilmesini sağlamıştır. Bu durum, teleolojik bileşenin gerekliliklerini sağladığını göstermektedir. Diğer yandan, formel tanımı doğru bilmesi, epistemik bileşenin modelleme alt bileşenin formel gerekliliklerini sağladığını göstermektedir. Bu bağlamda, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerindeki gücün, teleolojik bileşeni olumlu etkilediği söylenebilir. Sürecin bu aşamasında işlem hatası yapmayan ve matematiksel kurallara uygun hareket eden öğrenci, epistemik bileşenin sistemik alt bileşeninin gerekliliklerini de sağlamaktadır. Öğrencinin kanıt yapma sürecinin bu bölümü, iletişim bileşeninin sembolik iletişim alt bileşeni yönünden değerlendirildiğinde, cebirin sembolik dilini ve notasyonları kullanma konusunda eksikleri olduğu görülmektedir. Diğer yandan, süreci metinsel olarak açıklama ihtiyacı duymamıştır.

Sürecin ikinci bölümünde öğrenci, fonksiyonun tanım kümesini $a > -1$ ve $a < -1$ olarak ele almış; bu değerler için negatif değer almadığını iddia etmiş ve bu nedenle fonksiyonun örten olmadığı sonucuna varmıştır. Öğrenci, fonksiyonun örtenliğini kanıtlamak için doğru ve geçerli bir yol seçememiş ve kullanamamıştır. Bu durum, öğrencinin teleolojik bileşenin gerekliliklerini sağlayamadığını göstermektedir. Bu ise öğrencinin bilgi eksikliğinden kaynaklanmakta olup; epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerindeki eksiklerin teleolojik bileşenini olumsuz etkilediğini göstermektedir. Epistemik ve teleolojik bileşendeki sorunlar, öğrencinin iletişim bileşenini de olumsuz etkilemiş; süreci okuyucuya sembolik dille ya da metinsel açıklamalarla doğru ve geçerli yoldan aktarmasını engellemiştir. Bu bağlamda, öğrencinin iletişim bileşeninin sembolik iletişim ve metinsel iletişim alt bileşenlerinde sorun yaşadığı görülmektedir.

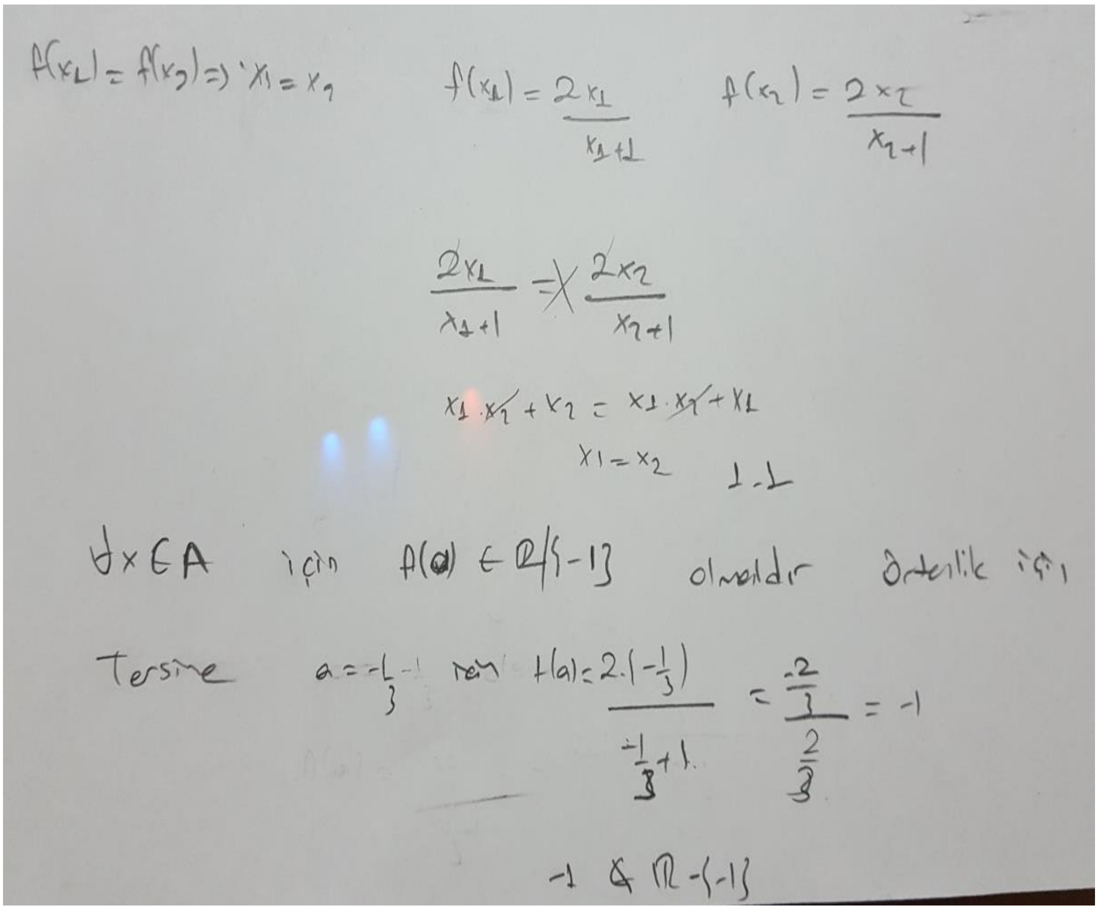
Görüşme sürecinde öğrencinin bir fonksiyonun örten olmasına ilişkin formel tanımı bilmediği ve bu nedenle süreçte kullanamadığı görülmüştür.

> Öğrenci: Ben aslında bire birlik gibi yapacaktım ama tanımı hatırlayamadım ki. Yani işte değer kümesinde açık kalmayacak. Değer kümesindeki her değeri alacak. Aksini kanıtlarsam yani almadığı bir değer bulursam değer kümesinde, ters örnek vermiş olurum diye düşündüm. Bu kesirli fonksiyonlarda da hep bir sorun çıkar illa ki. Ya payda ya pay sorun yaratır.
>
> Araştırmacı: Peki, siz bu fonksiyonun örten olmadığına nasıl karar verdiniz? Nasıl bir yol izlediniz?
>
> Öğrenci: Yani ben işte tanımdan gidecektim. Genel olarak gösterecektim ama hatırlayamadım. O yüzden biraz kötü oldu böyle ama aslında güzel de oldu. Ters örnek buldum. Fonksiyon negatif değer alamıyor, hep pozitif. Ama soruda fonksiyonun değer kümesi tüm her şey, reel sayılar. O yüzden değer kümesi tamamen dolmadı, o zaman bu fonksiyon da örten değil diye düşündüm.
>
> Araştırmacı: Peki, fonksiyonun negatif değer almadığını nasıl anladınız?
>
> Öğrenci: Denedim. Yani -1'den büyük değerler koydum. Sonra küçük değerler koydum. Hep pozitif çıkıyor.
>
> Araştırmacı: Denemek yerine pozitif çıktığını genel olarak kanıtlama şansınız var mı? Çünkü belki arada atladığınız bir şeyler vardır.
>
> Öğrenci: Yani aslında ya alabilir de bir saniye. $\mathrm{a} = -1/2$ olsa, pay negatif, aa payda pozitif. Ahh, yanlış yapmışım. Bu fonksiyon negatif

> olabiliyor. Niye böyle oldu ki? Ben bilmiyorum ya. Belki de örten ama nasıl kanıtlarım bilmiyorum.

Bir fonksiyonun örten olmasına ilişkin formel tanımı bilmediğinden, tanımı kullanamayan öğrenci, geçerli bir kanıt üretmeyi başaramamıştır. Bu durumun temelinde öğrencinin örtenliğin formel tanımına ilişkin bilgi eksiklikleri vardır. Bu da, öğrencinin epistemik bileşeninin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerinde sorun yaşadığını göstermektedir. Öğrenci, örtenliğe ilişkin formel kanıtı bilmediğinden, fonksiyonun değer kümesinde açıkta eleman kalıp kalmadığını kontrol etmeye ve fonksiyonun değer kümesinde almadığı değeri deneme yanılma yöntemiyle bulmaya çalışmaktadır. Kanıt için kendisine gereken doğru aracı seçemediğinden ve kullanamadığından teleolojik bileşenin gerekliliklerini sağlayamamıştır. Bu bağlamda, görüşme verileri, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerindeki sorunların, teleolojik bileşeni olumsuz etkilediğine ilişkin görüşümüzü desteklemektedir. Bu durum, öğrencinin kanıt yapma sürecine ilişkin sözlü açıklamalarını da olumsuz etkilemiştir. Epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerindeki sorun ve bunun bir sonucu olarak teleolojik bileşende yaşanan sorun, öğrencinin iletişim bileşeninin sözel iletişim alt bileşeninde de sorun yaşamasına neden olmuştur.

Başka bir öğrenci, soruda verilen fonksiyonun bire bir olduğunu kanıtlamada sorun yaşamazken, örten olduğunu kanıtlamak için geçersiz bir yol kullanmıştır. Tanım kümesinin $IR\backslash\{-1\}$ olması nedeniyle, fonksiyonun örten olmadığını iddia eden öğrencinin kanıt yapma sürecine Şekil 41'de yer verilmektedir.



Şekil 41. Epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerinde sorun.

Kanıtın, öğrencinin fonksiyonun örten olmadığını göstermeye çalıştığı ikinci kısmında, kâğıt üzerindeki verileri yeteri kadar anlaşılamadığından, görüşmeye ihtiyaç duyulmuş ve sözlü görüşme verilerine dayanarak sürecin analizi yapılmıştır. Aşağıda bu öğrencinin söylemlerinden bazı alıntılara yer verilmektedir.

> Öğrenci: Şimdi bu fonksiyonun tanım kümesi $\mathrm{IR}\backslash\{-1\}$ olunca, değer kümesinin de $\mathrm{IR}\backslash\{-1\}$ olması gerek.
>
> Araştırmacı: Neden?
>
> Öğrenci: Örten olabilmesi için.
>
> Araştırmacı: Soruda verilenleri göz önüne aldığınızda fonksiyonun tanım kümesi nedir?
>
> Öğrenci: A diye verilmiş. Sonra da $\mathrm{A} = \mathrm{IR}\backslash\{-1\}$ olarak tanımlanmış. Yani $\mathrm{IR}\backslash\{-1\}$.
>
> Araştırmacı: Peki, değer kümesi?

Öğrenci: O da IR.

Araştırmacı: Peki, buna göre, ne yaptınız fonksiyonun örten olduğunu göstermek için?

Öğrenci: Değer kümesi IR ama yani şöyle görüntü kümesi $\mathrm{IR}\backslash\{-1\}$ olmalı fonksiyonun örten olması için. Yani tanım kümesi $\mathrm{IR}\backslash\{-1\}$ olduğundan görüntülerinden oluşan kümesinin de $\mathrm{IR}\backslash\{-1\}$ olması gerek. Ama $\mathrm{a} = \frac{-1}{3}$ için fonksiyon -1 değerini alıyor. Burada onu gösterdim. Ama -1, $\mathrm{IR}\backslash\{-1\}$ kümesinde değil. Bu durumda değer kümesinde yani IR ‘de tanım kümesiyle eşleşen ama görüntü kümesinde olmayan bir eleman olduğu anlaşıldı. O zaman fonksiyon örten olamaz.

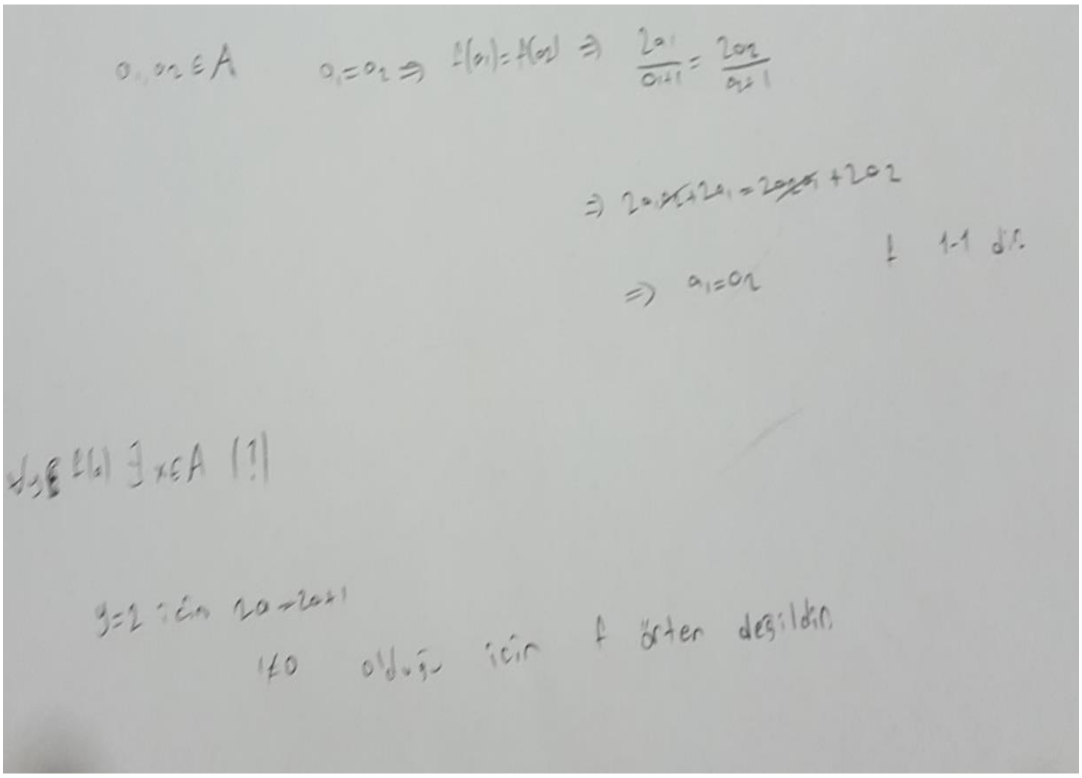
Araştırmacı: Örtenliği bana tanımlamanızı istesem ne dersiniz?

Öğrenci: Yani tanım kümesi ile görüntü kümesinin aynı olması. Böylece tanım kümesinde eşlenmemiş eleman kalmayacak ve görüntü kümesi ile soruda verilen fonksiyon için verilen değer kümesinin aynı olması. Burada mesela görüntü kümesi $\mathrm{IR}\backslash\{-1\}$ olmalı tanım kümesi öyle olduğu için. Ama bu küme soruda verilen değer kümesi ile IR ile aynı değil. IR daha geniş. -1 de içeriyor ve fonksiyon da bu değeri alıyor. Ama görüntü $\mathrm{IR}\backslash\{-1\}$. Bu durum da -1 görüntü kümesinin dışında değer kümesinin içinde kalıyor ve fonksiyon örten olamıyor.

Öğrenci, örten fonksiyonun tanım kümesi ile görüntü kümesinin aynı olması gerektiğini düşünmektedir. Bu bağlamda, fonksiyonun değer kümesinin $IR\backslash\{-1\}$ olması gerektiğini iddia eden öğrenci, fonksiyonun soruda verilen cebirsel ifadesini kullanarak $IR\backslash\{-1\}$ kümesinde olmayan -1 değerini aslında alabildiğini göstermiştir. Öğrenci, bir fonksiyonun değer kümesinin neyi temsil ettiğini ve örten olması için sağlaması gereken şartı yanlış bilmektedir. Tüm bu yanlış bilgiler, öğrencinin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerinde sorun yaşadığını göstermektedir. Bu sorun, fonksiyonun örten olduğunu kanıtlamak için öğrencinin yanlış bir yol tercih etmesine neden olmuştur. Bu durum, öğrencinin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerindeki sorunların, teleolojik bileşenini olumsuz etkilediğini göstermektedir.

Öğrencinin yanlış bilgileri üzerine kurduğu kanıt yapma süreci, iletişim bileşeninin hem sembolik hem de metinsel iletişim alt bileşenleri açısından da sorunludur. Süreci doğru ve geçerli bir şekilde sunamadığından ve tamamlayamadığından iletişim bileşeninin bu alt bileşenlerinde yeterli bulunmamıştır. Görüşme sürecinde geçersiz açıklamalar yapan ve yazılı kanıt yapma sürecindeki yanlış adımlarını devam ettiren öğrencinin, iletişim bileşeninin sözel iletişim alt bileşeninde de sorun yaşadığı görülmektedir. Bu sorunlar, öğrencinin epistemik bileşenin modelleme alt bileşenin formel gerekliliklerinde ve bunun bir sonucu olarak teleolojik bileşende yaşadığı sorunlara dayanmaktadır.

Öğrencilerden biri, bir fonksiyonun bire bir olmasına ilişkin formel tanımı yanlış yazmış ancak süreç içerisinde tanımı doğru kullanabilmiştir. Bu öğrencinin kanıt yapma sürecine Şekil 42'de yer verilmektedir.



Şekil 42. Öğrencinin kanıt yapma süreci.

Görüşmede öğrencinin aslında bire bir fonksiyon kavramını ve formel tanımını bildiği ve süreçteki adımları bilinçli şekilde attığı görülmüştür.

> Araştırmacı: Bir fonksiyonun bire bir olması ne demek, bana açıklayabilir misiniz?
>
> Öğrenci: Yani değer kümesinde bir elemana yalnız ve yalnız bir eleman gidebilir tanım kümesinden.

Araştırmacı: Peki, bu soruda fonksiyonun bire bir olduğunu nasıl gösterdiniz?

Öğrenci: Tanım kümesinden iki eleman seçtim; bunlara a_1 ve a_2 dedim. Bunların görüntüleri eşit ise yani değer kümesinde aldıkları eşleştikleri değer aynı ise o zaman bunlar da aynı olmak zorunda. Yani $\mathrm{a}_1 = \mathrm{a}_2$ olmak zorunda. Fonksiyonda a_1 ve a_2 yi yerine koydum. İşlem yapınca yani içler dışlar çarpımı ve sadeleştirmeler yapınca $\mathrm{a}_1 = \mathrm{a}_2$ oldu. Böylece bire bir olduğunu göstermiş oldum.

Araştırmacı: Burada $\mathrm{a}_1 = \mathrm{a}_2$ ise $\mathrm{f}(\mathrm{a}_1) = \mathrm{f}(\mathrm{a}_2)$ yazmışsınız. Burada ne demek istediniz.

Öğrenci: Aslında o biraz ters olmuş. Yani $\mathrm{f}(\mathrm{a}_1) = \mathrm{f}(\mathrm{a}_2)$ aldığımda $\mathrm{a}_1 = \mathrm{a}_2$ oluyor. Onu gösterdim. Ters yazmışım. Yani yanlış yazmışım ama aslında doğru düşündüm ve doğru yaptım, değil mi? Bir daha bakayım, evet evet. $\mathrm{f}(\mathrm{a}_1) = \mathrm{f}(\mathrm{a}_2)$ deyip oradan $\mathrm{a}_1 = \mathrm{a}_2$ olduğunu göstermişim.

Araştırmacı: Tam olarak neyi göstermiş oldunuz?

Öğrenci: Değer kümesinde aynı görüntünün tanım kümesinde de aynı elemanla eşleştiğini. Yani daha doğrusu şey işte, değer kümesindeki bir elemana tanım kümesinden yalnız ve yalnız bir eleman gidebilir.

Görüşme sürecinde, öğrencinin aslında bire bir fonksiyon kavramını doğru bildiği; formel tanımını bilinçsizce yanlış yazdığı görülmüştür. Öğrenci, uygulama sürecinde adımlarını doğru atmış ve başta yanlış yazdığı formel tanımı, bu kez doğru yazarak uygulamıştır. Görüşmede de belirttiği gibi, aslında doğru bildiği formel tanımı dikkatsizlikle yanlış yazmıştır. Bu durum, öğrencinin iletişim bileşeninin sembolik iletişim alt bileşeninde sorun yaşadığını göstermektedir ancak sürecin akışını olumsuz etkilememiştir. Öğrencinin formel tanımı kullanarak oluşturduğu süreçte, kanıt için gerekli aracı doğru seçmesi ve kullanması, teleolojik bileşenin gerekliliklerini sağladığını göstermektedir. Bire bir fonksiyon kavramının formel tanımından yola çıkarak kurduğu model/denklem de doğru ve geçerlidir. Bu durum, öğrencinin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerini sağladığını göstermektedir. Öğrenci süreçte işlem hatası yapmamış ve matematiksel kurallara uygun hareket etmiştir. Bu da, öğrencinin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin sistemik gerekliliklerini sağladığını göstermektedir. Öğrenci, düşünme sürecini ve attığı adımları metinsel yolla açıklama ihtiyacı hissetmemiştir.

Öğrencinin verilen fonksiyonun örten olmadığını gösterdiği ikinci bölümde, fonksiyonun değer kümesinden $y = 2$ değerinin tanım kümesinden hiçbir eleman ile eşleşemediğini göstermiş ve buradan fonksiyonun örten olmadığını belirtmiştir. Öğrenci soruda verilen fonksiyonun örten olmadığını, bir fonksiyonun örten olması için sağlaması gereken şarta ters örnek bularak göstermeyi tercih etmiştir. Amacına uygun bir araç seçtiğinden ve bu aracı doğru ve amacına uygun şekilde kullanabildiğinden teleolojik bileşenin gerekliliklerini sağlayabilmiştir. Ancak öğrenci, örten fonksiyona ilişkin formel tanımı yazamadığından ve modeli/denklemi formel yoldan kuramadığından, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerini sağlayamamıştır. Süreçte cebirin sembolik dilini amacına uygun ve doğru şekilde kullanamadığı da görülen öğrenci, iletişim bileşeninin sembolik iletişim alt bileşeninin gerekliliklerini de sağlayamamıştır. Öğrenci süreçte attığı adımlara ilişkin metinsel açıklamalar yapma gereği de duymamıştır.

Öğrenciyi iletişim bileşeninin sözel iletişim alt bileşeni yönünden değerlendirmek için görüşme yapılmıştır. Aşağıda öğrencinin söylemlerinden bazı alıntılara yer verilmektedir.

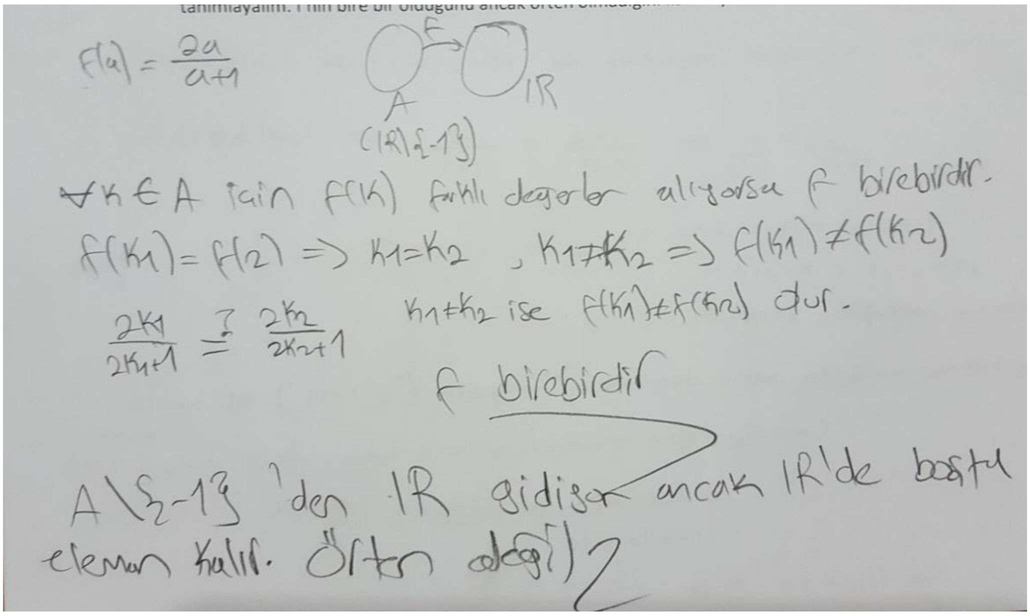
> Öğrenci: Şunu biliyorum; örten olması için değer kümesindeki her eleman tanım kümesinden en az bir eleman ile eşleşmiş olacak. İlk başta da onu yazdım zaten… Değer kümesindeki her eleman için tanım kümesinden en az bir eleman olacak. Ama burada yaptığım gibi $\mathrm{y} = 2$ değeri için bu olmuyor. Yani 2, değer kümesinde açıkta kalmış. Bu nedenle fonksiyon örten değil.
>
> Araştırmacı: Peki, $\mathrm{y} = 2$ için uygun bir x değeri bulamayacağınızı nasıl anladınız? Yani niye direkt bu değeri denediniz?
>
> Öğrenci: Yani $\mathrm{f(a)} = \frac{2\mathrm{a}}{\mathrm{a}+1}$ olduğu için 2'yi denemek istedim. Yani şöyle $\frac{2\mathrm{a}}{\mathrm{a}+1} = 2$ olduğunda 2a'lar birbirini götürdüğü için… Pay kısmında 2a olması dikkatimi çekti. Eşitliğin diğer tarafında da olunca 2a'lar birbirini götürecek, oradan da sonuca ulaşırım diye düşünüp direkt 2'yi denedim. Öylede oldu.

Araştırmacı: Peki, deneme yapmasak. Yani fonksiyonun örten olmadığını cebirsel yoldan kanıtlasanız?

Öğrenci: Ama ters örnek bulmak diye bir şey var. Yani bu da bir kanıt ve gösterdim yani. Bence daha fazlasına gerek yok.

Öğrencinin cebirsel yoldan ifadenin doğruluğunu göstermeye gerek duymadığı görülmektedir. Diğer yandan attığı adımları nedenleri ve sonuçları ile açıklayabildiği ve amacına ulaşabildiği görülen öğrencinin, görüşme sürecinde kullandığı açık ve anlaşılır ifadeler, iletişim bileşeninin sözel iletişim alt bileşeninde sorun yaşamadığını göstermektedir.

Şekil 43'te kanıtlama sürecine yer verilen bir diğer öğrenci, bire bir fonksiyonun formel tanımını bilmektedir ancak tanımı kullanırken gerekli işlemsel dönüşümleri yapamadığından süreci tamamlayamamıştır.



Şekil 43. Epistemik bileşenin sistemik alt bileşeninde eksiklik.

Öğrenci, her ne kadar fonksiyonun bire bir olması ile ilgili kağıdına not ettiği ilk cümleyi iyi ifade edememiş olsa da, sürecin devamında bir fonksiyonun bire bir olması ile ilgili formel tanımdan yola çıkarak doğru modeli kurabilmiştir. Bu bağlamda bu öğrencinin, iletişim bileşeninin metinsel iletişim alt bileşeninde sorun yaşadığı ancak epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerini sağlayabildiği görülmektedir. Sürecin devamında öğrenci amacına ulaşmak için kurduğu modelde, içler dışlar çarpımı yaparak ifadeyi düzenleyememiş ve k_1, k_2

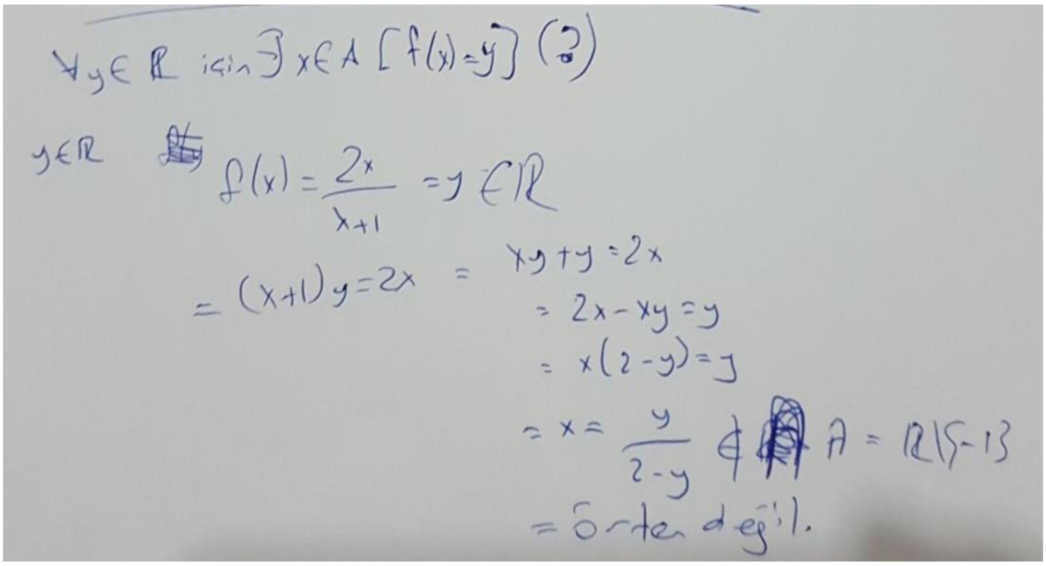
arasındaki eşitliği bulamamıştır. Bu durum, öğrencinin epistemik bileşenin sistemik alt bileşeninde sorun yaşadığını göstermektedir.

Öğrenciyi iletişim bileşeninin sözel iletişim alt bileşeni yönünden değerlendirmek için görüşme yapılmıştır.

> Araştırmacı: Fonksiyonun bire bir olduğunu nasıl gösterdiniz?
>
> Öğrenci: Ben aslında formülünden yapmak istedim ama işin içinden çıkamadım. Yani bu görüntüleri elemanlarını eşit alınca içlerinin de eşit olduğunu göstermek istiyorum ama nasıl yapacağımı bilemedim. İfade karışık geldi bana.
>
> Araştırmacı: İfadeyi biraz düzenlemek için ne yapılabilir. k_1, k_2 nin eşit olduğunu göstermek için nasıl toparlarsınız? Her iki tarafta kesir var eşitlikte.
>
> Öğrenci: Bunları sadeleştirsem ama olmaz. Aralarında artı ya da eksi varken yapamam. Bilemiyorum. İfade karışık geliyor bana.

Görüşme boyunca yaşadığı sorunu çözemeyen öğrenci, iletişim bileşeninin sözel iletişim alt bileşeninin gerekliliklerini sağlayamamıştır. Görüşme verileri, öğrencinin işlem yapma konusunda sorun yaşadığına ve epistemik bileşenin sistemik alt bileşeninin gerekliliklerini sağlayamadığına ilişkin görüşümüzü desteklemektedir. Öğrencinin fonksiyonun örten olmadığını kanıtlamasının istendiği ikinci bölümde analiz için yeterli veri sunmadığı görülmektedir.

Bazı öğrencilerin amaca ulaşma yolunda doğru araçları bulamadıklarında acele ettikleri ve bu durumun teleolojik bileşende sorunları beraberinde getirdiği görülmüştür. Bu duruma ilişkin bir örneğe Şekil 44'te yer verilmektedir. Öğrencinin kanıt yapma sürecinde, fonksiyonun örten olmadığını gösterdiği ikinci bölüme yer verilmektedir.



Şekil 44. Teleolojik bileşende eksiklik.

Öğrenci fonksiyonun örten olmadığını göstermek için formel tanımdan yola çıkmıştır. Bir fonksiyonun örten olmasına ilişkin formel tanımı doğru bilen öğrenci, kanıt için gerekli modeli/denklemi doğru kurabilmiştir. Bu bağlamda, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerini sağlamaktadır. Süreçte amacına uygun araçları da doğru seçebilmiş ve kullanabilmiştir ancak son adımda fonksiyonun örten olmadığını göstermek ve kanıtı tamamlamak için gereken aracı bulamadığı görülmektedir. Bu aşamada öğrenci, her ne kadar doğru sonuca ulaşmış gibi görünse de amacına ulaşmak için doğru ve geçerli aracı seçemediğinden ve kullanamadığından bu aşamada teleolojik bileşenin gerekliliklerini sağlayamamış ve kanıtı tamamlayamamıştır. Her ne kadar öğrenci, süreç boyunca cebirsel dili amacına ve kurallara uygun şekilde kullanabilmiş olsa da; son aşamada teleolojik bileşende yaşadığı sorun, iletişim bileşeninin sembolik iletişim alt bileşeninde de yetersiz kalmasına neden olmuştur. Diğer yandan, öğrencinin süreçte attığı adımları metin yazarak açıklama ihtiyacı duymadığı da görülmektedir.

> Araştırmacı: Son adımda fonksiyonun örten olmadığını nasıl anladınız?
>
> Öğrenci: Fonksiyonun örten olmadığını göstermem gerek. Örten olmaması demek değer kümesinde açıkta eleman kalması demek. Ben de onu göstermek istedim. Değer kümesindeki bir elemanı y ile gösterdim. y'lerin eşleştiği x değerlerini görmek istedim. Aslında burada x'i yalnız bırakınca da tanım kümesindeki bir elemanı yalnız

bırakmış oldum. Tanım kümesi de $\mathrm{IR} \backslash \{-1\}$. Demek ki öyle bir y var ki; onun eşleştiği x bu aralıkta değil dedim.

Araştırmacı: Peki, şu an bunu gösterebilmiş oldunuz mu?

Öğrenci: Bilmiyorum, sanırım gösteremedim. Ama devamında ne yapsak bilemedim. Yani buradan daha fazla ilerleyemem. O yüzden mutlaka böyle bir x değeri var deyip geçtim. Değer kümesinde açıkta eleman kalır demiş oldum.

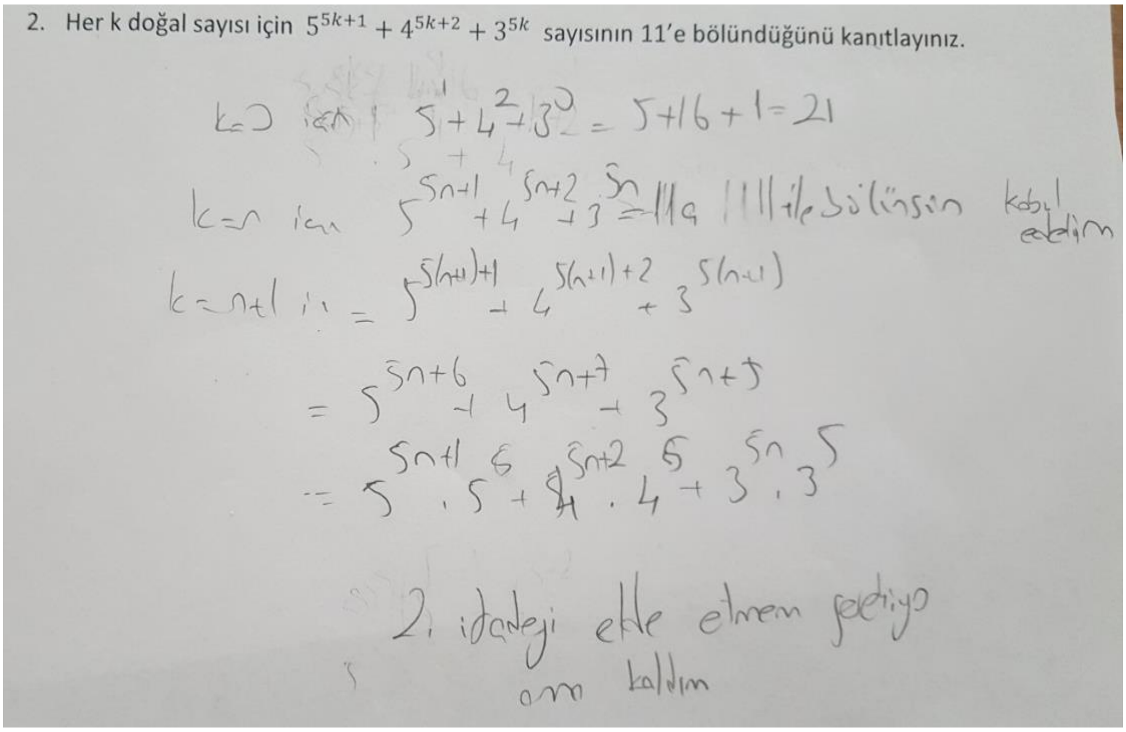
Öğrenci son adımda yalnızca amacına ulaşmış görünmek için elde ettiği sonucu, ifadenin kanıtına uygun olacak şekilde yorumlamıştır. Bu durum, son adımda öğrencinin gerçek amacına ulaşamadığını ve ulaşmak için gerekli ve doğru aracı seçemediğini ve kullanamadığını göstermiştir. Bu durum, öğrencinin teleolojik bileşende sorun yaşadığına ilişkin görüşümüzü desteklemektedir. Bu sorun, öğrencinin kanıt yapma sürecini tamamlayamamasına ve bu nedenle görüşme sürecinde yaptığı açıklamaların yetersiz olmasına neden olduğundan, iletişim bileşeninin sözel iletişim alt bileşenini de olumsuz etkilemiştir.

Bu soru kapsamında analiz edilen kanıt yapma süreçlerinde, formel tanımları kullanarak ifadeyi kanıtlamaya çalışan öğrencilerin çoğunun, bu tanımları yanlış bildiği görülmüştür. Bir fonksiyonun bire bir ya da örten olmasına ilişkin formel tanımlar, bu öğrencilerin kanıt yapma sürecinde kullandığı araçlardır. Söz konusu araç, soruda verilen ifadenin kanıtı için uygundur ancak öğrenciler formel tanımları yanlış bildiklerinden seçtikleri aracı da yanlış kullanmışlardır. Bu durum, öğrencilerin teleolojik bileşenin gerekliliklerini sağlayamadığını göstermektedir. Öğrencilerin formel tanımları yanlış kullanmalarının nedeni, bu tanımları yanlış bilmeleridir. Bir konuya ya da kavrama ilişkin yanlış bilgiye ya da bilgi eksikliğine sahip olmak, Habermas akılcı davranış modeline göre, epistemik bileşenin modelleme at bileşenin formel gereklilikleri kapsamında incelenmektedir. Bu durum, öğrencilerin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerindeki eksikliklerinin, teleolojik bileşende sorun yaşamalarına neden olduğunu göstermektedir. Formel tanımları yanlış bilmek, öğrencilerin iletişim bileşeninin tüm alt bileşenlerini de olumsuz etkilemiştir. Diğer yandan, öğrencilerin bu soruda verilen ifadenin kanıt yapma sürecinde genellikle sembolik dil kullandığı, yazı dili ile açıklama yapmadığı görülmüştür.

11 ile bölünebilme sorusu. Bu soru öğrencilere aşağıdaki gibi sorulmuştur:

“Her k doğal sayısı için $5^{5k+1}+4^{5k+2}+3^{5k}$ sayısının 11 ile bölünebildiğini kanıtlayınız (Nesin, 2010)”.

Öğrencilerden bazılarının tümevarım yöntemini kullanarak verilen ifadeyi kanıtlamaya çalıştığı ancak bu öğrencilerin süreçte başarısız olduğu görülmüştür. Bu duruma ilişkin bir örneğe Şekil 45’te yer verilmektedir.


2. Her k doğal sayısı için $5^{5k+1}+4^{5k+2}+3^{5k}$ sayısının 11’e bölündüğünü kanıtlayınız.

k=0 için $5^1+4^2+3^0 = 5+16+1=21$

k=n için $5^{5n+1}+4^{5n+2}+3^{5n}=11a$ 11 ile bölünsün kabul edelim

k=n+1 için $= 5^{5(n+1)+1}+4^{5(n+1)+2}+3^{5(n+1)}$

$= 5^{5n+6}+4^{5n+7}+3^{5n+5}$

$= 5^{5n+1}.5^5+4^{5n+2}.4^5+3^{5n}.3^5$

2. ifadeyi elde etmem gerekiyo ama kaldım

Şekil 45. Teleolojik bileşende eksiklik.

Öğrenci her ne kadar tümevarımın ilk aşamasında $k=0$ için yaptığı hesaplamada işlem hatası yaparak sonucu yanlış bulmuş olsa da, bu durumun öğrencinin bilgi ya da işlem becerisi eksikliğinden değil; dikkatsizliğinden kaynaklandığı düşünülmektedir. Sürecin devamında, $k=n$ için ifadenin doğru olduğunu kabul eden ve $k=n+1$ için de ifadenin doğru olduğunu göstermek isteyen öğrencinin, tümevarım ile kanıt yapmayı doğru bildiği görülmektedir. Diğer yandan, tümevarımın her aşamasında doğru ve geçerli denklemleri kurabildiği görülen öğrenci, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerini de sağlamaktadır. Ancak son adımda $k=n+1$ için oluşturduğu ifadede, $k=n$ için yazdığı ve 11 ile bölünebildiğini kabul ettiği ifadeyi bulmak ve buradan kanıta devam etmek isteyen öğrencinin kâğıda “2. İfadeyi elde etmem gerekiyor ama kaldım" şeklinde yazdığı not, bu aşamada amacına uygun aracı seçemediğini göstermektedir. Bu ise öğrencinin kanıt yapma sürecinin son adımında, teleolojik bileşenin gerekliliklerini sağlayamadığı anlamına gelmektedir.

Her ne kadar süreçte cebirin sembolik dilini ve notasyonları kullanmada hata yapmasa da, son adımda süreci tamamlayamaması, okuyucuya geçerli bir kanıt sunmasını engellemiştir. Bu durum, öğrencinin iletişim bileşeninin sembolik iletişim alt bileşeninin gerekliliklerinde sorun yaşamasına neden olmuştur.

Öğrencinin iletişim bileşeninin sözel iletişim alt bileşeni yönünden değerlendirilmesi ve kanıtının daha detaylı analizi için görüşme yapılmıştır.

> Araştırmacı: İlk adımda ne yaptığınızı açıklayabilir misiniz?
>
> Öğrenci: $k = 0$ için sonucu hesapladım. Aaa, ama bir saniye 22. Pardon.
>
> Araştırmacı: Ama 21 olarak yazmışsınız buraya.
>
> Öğrenci: Evet, ya yanlış yazmışım. Yani yanlış toplamışım.
>
> Araştırmacı: Tümevarımın ilk adımında ne yapıyoruz bana açıklayabilir misiniz?
>
> Öğrenci: k yerine 0 koyup, çıkan değerin 11 ile bölünebildiğini gösteriyoruz. Yani bu soru için. Ha, pardon genel olarak mı sordunuz?
>
> Araştırmacı: Yani genel olarak tümevarımı nasıl yapıyoruz, bana açıklayabilirseniz sevinirim.
>
> Öğrenci: Bana verilen şeyin doğru olduğunu önce $k = 0$ için gösteriyorum. Oradan da 0 için doğruysa devam ediyorum. Sonrasında n için de doğru olsun diyorum. $n + 1$ için de doğru olduğunu gösterirsem oluyor yani kanıtlamış oluyorum. Ama benimki çıkmadı. Yani buradan devam edemedim (son satırını gösteriyor).
>
> Araştırmacı: Nasıl bir sorun yaşadınız?
>
> Öğrenci: Yani bir şeylerin parantezine alırım, ortak bir şey gelir ya da bir şeyler birbirinin katı falan olur diye ummuştum aslında olmadı ama nedense. Aslında hep bu son şeyde buraya kadar gelince bu son ifade bir üsttekinin bir şeyi çıkar yani bir katı. Yani onun cinsinden bir şey çıkar. Oradan da n için doğru kabul ettiğimden yani 11'e bölünür diye aldığımdan $n + 1$ de otomatik bölünür der bitiririm diye düşünmüştüm.

Ama ben buradan devam edemedim. Yani nasıl yapabilirim bilmiyorum.

Araştırmacı: Başka bir yol kullansanız?

Öğrenci: Ya aslında modüler aritmetik de yapıyorduk böyle sorularda ama en sevmediğim konudur. O yüzden hiç hatırlamıyorum onu diye tümevarım istemiştim ama bunun da devamı gelmedi maalesef.

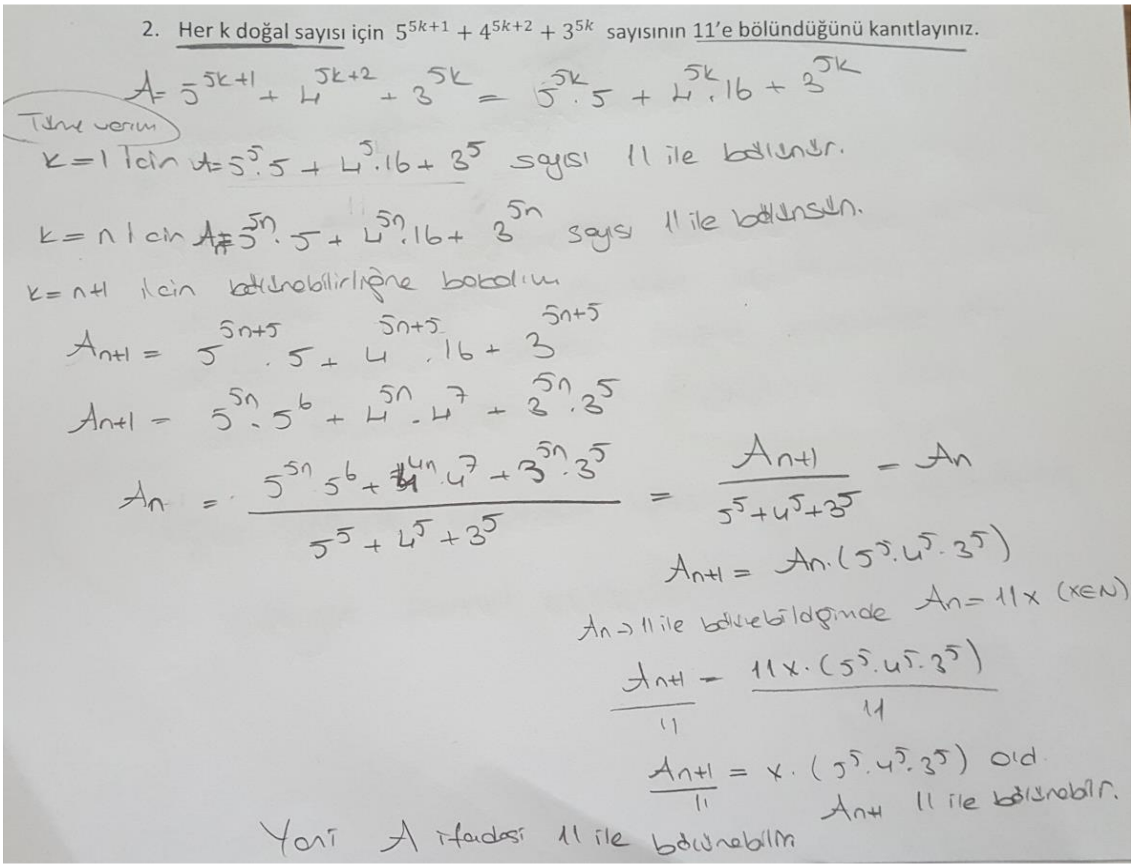
Araştırmacı: Peki, bu kaldığınız yerden devam etmeyi deneseniz? Yani belki biraz işlem yapsanız istediğiniz ifadeyi bulabilir misiniz?

Öğrenci: Ama buradan daha nasıl devam edilir hiç bilmiyorum. Yani bunu ancak $5^{5n+1}5^5 + 4^{5n+2}4^5 + 3^{5n}3^5$ şeklinde yazabildim. Tamam içinde benim $k = n$ için bulduğum şey de var ama öyle bir duruyor ki. Mesela 5^{5n+1}in yanında 5^5 varken ben onu nasıl ayırayım da yazayım. Ya da 4^{4n+2} nin yanında 4^5 varken… Olmaz yani.

Görüşme verileri değerlendirildiğinde, öğrencinin tümevarım yöntemini uygulamayı bildiği görülmektedir. Öğrencinin süreci tamamlayamamasının nedeni, kendisinin de belirttiği gibi, son adımda ürettiği ifadenin 11 ile bölünebildiğini gösterememesidir. Öğrencinin söylemlerinden, bu aşamada devam etmesini sağlayacak doğru adımı atamadığı anlaşılmaktadır. Öğrenci, matematiksel kuralları dikkate alarak ve herhangi bir işlem hatası yapmadan sürece devam etme kaygısıyla hareket etmektedir. Süreçte sıkışan ve bu durumdan kurtulmasını sağlayacak bir yol bulamayan öğrencinin teleolojik bileşende yaşadığı sorunun görüşme sürecinde de devam ettiği görülmüştür.

Öğrenci görüşme sürecinde her ne kadar gelebildiği yere kadar doğru ve geçerli ifadeler ile süreci aktarmış olsa da, dinleyiciye yarım kalmış bir ürün sunduğundan iletişim bileşeninin sözel iletişim alt bileşeninin gerekliliklerini tam olarak sağlayamamıştır. Bu durum, teleolojik bileşendeki eksikliklerin, öğrencinin kanıt yapma sürecini tamamlamasını ve dolayısıyla sözlü olarak ürününü sunması ile ilgili olan iletişim bileşeninin sözel iletişim alt bileşenini olumsuz etkilediğini göstermektedir.

Tümevarım yöntemi ile kanıt yapmaya çalışan öğrencilerden birçoğunun, son aşamada dört işlem kurallarına uymayarak geçersiz bir ürün ortaya koyduğu görülmüştür. Bu öğrencilerden birinin kanıt yapma sürecine Şekil 46’da yer verilmektedir.



Şekil 46. Epistemik bileşenin sistemik alt bileşeninde eksiklik.

Öğrenci tümevarım yöntemi ile kanıt yapmayı bilmektedir. Sürecin başında ifadenin kanıtı için geçerli bir araç seçtiğinden ve bu aracı doğru kullanabildiğinden, teleolojik bileşenin gerekliliklerini sağlamaktadır. Son aşamada $k = n + 1$ için oluşturduğu ifade de dâhil olmak üzere, öğrencinin doğru denklemler/modeller kurabildiği görülmektedir. Ancak son aşamada oluşturduğu denklemi sadeleştirirken, dört işlem kurallarına aykırı bir sadeleştirme yaptığı dikkat çekmektedir. Öğrencinin bu hatası, epistemik bileşenin sistemik alt bileşeninin gerekliliklerini sağlayamadığını göstermektedir. Bu durumun bir sonucu olarak, öğrenci son aşamada,

$$\frac{A_{n+1}}{5^5 + 4^5 + 3^5} = A_n$$

şeklinde geçersiz bir model/denklem oluşturmuştur. Epistemik bileşenin sistemik alt bileşenindeki eksikliklerin, modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerini olumsuz etkilemiş ve süreci tamamlayamamasına neden olmuştur.

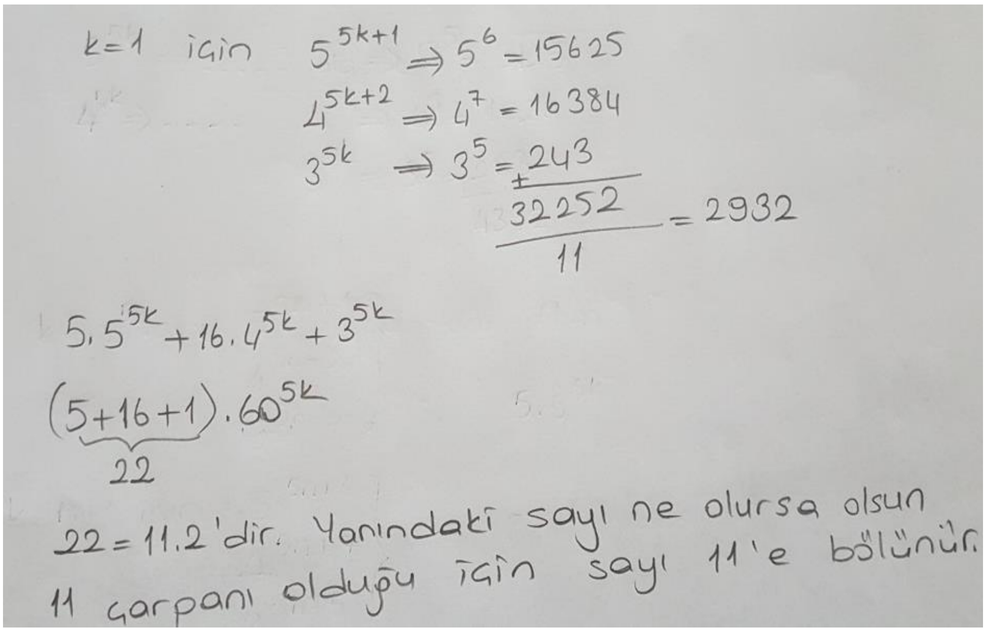
Öğrencinin epistemik bileşende yaşadığı bu sorunlar, iletişim bileşenini de olumsuz etkilemiştir. Her ne kadar sembolik dil ve notasyon kullanımında bir hatası olmasa da, son aşamada yaptığı sadeleştirme hatası, süreci okuyucuya yanlış sunmasına neden olmaktadır. Bunun yanı sıra, öğrencinin, süreçte attığı adımların daha anlaşılır ve kolay takip edilebilir olmasını sağlayacak nitelikte yazılı açıklamalara yer vermediği de görülmektedir. Tüm bunlar, öğrencinin kanıt yapma sürecinin, iletişim bileşeninin sembolik ve metinsel iletişim alt bileşeni yönünden yetersiz olduğunu göstermektedir.

Öğrencinin iletişim bileşeninin sözel iletişim alt bileşeni yönünden değerlendirilmesi için görüşme yapılmıştır. Bu sayede yazılı olarak sunduğu kanıt yapma sürecinin de daha detaylı analizinin yapılması amaçlanmıştır.

> Araştırmacı: Son adımda $\mathrm{k}=\mathrm{n}+1$ için bulduğunuz ifadenin 11 ile bölünebildiğini nasıl gösterdiniz?
>
> Öğrenci: Ben onun 11'in katı olduğunu gösterdim.
>
> Araştırmacı: Nasıl yaptınız bunu, açıklar mısınız?
>
> Öğrenci: Şimdi ben zaten $\mathrm{k}=\mathrm{n}+1$ için $5^{5\mathrm{n}}5^6+4^{5\mathrm{n}}4^7+3^{5\mathrm{n}}3^5$ buldum. Ee, bunu da $5^5+4^5+3^5$ e bölersem, tam da $\mathrm{k}=\mathrm{n}$ için yazdığım şu şeyi buluyorum ($\mathrm{A_n}$ için yazdığı ifadeyi gösteriyor). Sonra, şey, evet, tamam yapmışım. Şurada sadeleştirme var yani, bölme derken. Neyse, oradan ben bunları sadeleştirince $\mathrm{k}=\mathrm{n}$ için yazdığım şey çıktı zaten. Ee, zaten ben bunu ($\mathrm{A_n}$ için yazdığı ifadeyi gösteriyor) 11'le bölünebilir diye almıştım, yani öyle kabul etmiştim. O yüzden bunu $11\mathrm{x}$ gibi bir şey olarak yazdım, hani 11'in katı diye. Burada da içler dışlar çarpımı yaparsam $\mathrm{A_{n+1}}$'i $\mathrm{A_n}\times(5^5+4^5+3^5)$ olarak buldum. Ee, burada $\mathrm{A_n}$ 11'in katı yani $11\mathrm{x}$ olduğundan yerine yazarsam $\mathrm{A_{n+1}}$ in direkt 11'e bölünebildiğini göstermiş oluyorum. Buradan, çok güzel oldu, çıktı.
>
> Araştırmacı: Sadeleştirmeyi nasıl yaptınız $\mathrm{A_{n+1}}$ ifadesini $5^5+4^5+3^5$ 'e bölerken?
>
> Öğrenci: Orada 5^6 ile 5^5 sadeleşiyor, 5 kalıyor. Benzer şekilde diğerleri de. Yani 4^7 ile 4^5 sadeleşir. Yani bölünür demek istiyorum. 4^2 olur. Bölme yaparken üstleri çıkarıyorum ya, oradan geliyor. 3^5 ile 3^5 de direkt gidiyor, yani birbirlerini götürüyorlar.

Öğrencinin söylemleri, epistemik bileşenin sistemik alt bileşeninde sorun yaşadığına ilişkin görüşümüzü desteklemektedir. Öğrenci, yazdığı ifadeler arasında sadeleştirme yaparken matematiksel kurallara aykırı bir işlem yaptığının farkında değildir. Hatasını görüşme sürecinde de devam ettiren ve bu kez de dinleyiciye sözel olarak geçersiz bir ürün sunan öğrencinin, iletişim bileşeninin sözel iletişim alt bileşeninin gerekliliklerini sağlayamadığı görülmektedir.

İfadeyi tümevarım yöntemi ile kanıtlamak isteyen bir diğer öğrencinin, tümevarım yöntemini uygulamayı bilmediği görülmektedir. Öğrencinin kanıt yapma sürecine Şekil 47'de yer verilmektedir.



Şekil 47. Teleolojik bileşende ve epistemik bileşenin sistemik alt bileşeninde eksiklik.

Öğrenci $k = 1$ için ifadenin doğru olduğunu göstermiştir. $k = n$ için oluşturacağı ifadenin 11 ile bölünebildiğini kabul etmesi ve $k = n + 1$ için oluşturacağı ifadenin de 11 ile bölünebildiğini göstermesi beklenen öğrenci, beklenilenin aksine, $k = n$ için yazdığı ifadenin 11 ile bölünebildiğini göstermeyi hedeflemiş ve süreci burada sonlandırmıştır. Tümevarım yöntemini nasıl uygulayacağını bilmediği görülen öğrencinin, teleolojik bileşende sorun yaşadığı ve geçersiz bir süreç ürettiği görülmektedir.

Öğrencinin $k = n$ için yazdığı ifadenin 11 ile bölünebildiğini kanıtlamaya çalışırken, matematiksel kurallara aykırı işlemler yaptığı da dikkat çekmektedir. Amacına ulaştığını ve $k = n$ için yazdığı ifadenin 11 ile bölünebildiğini gösterdiğini düşünen öğrenci, aslında yaptığı matematiksel hatalar sonucunda geçersiz bir sonuca ulaşmıştır. Bu durum, öğrencinin epistemik bileşenin sistemik alt bileşeninde de sorunları olduğunu göstermektedir.

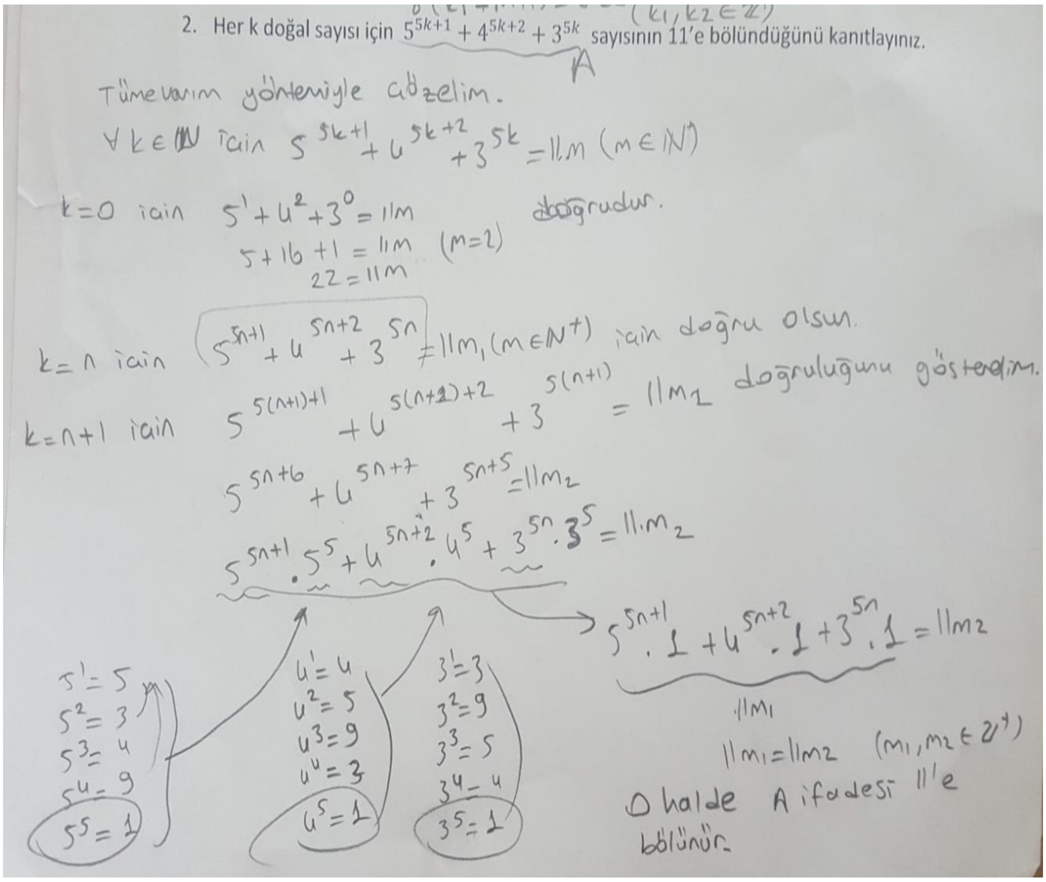
Öğrencinin hem tümevarım yöntemini doğru uygulayamamasından kaynaklanan teleolojik bileşendeki eksiklikleri, hem de süreçte yaptığı matematiksel hatalar sonucunda epistemik bileşenin sistemik alt bileşeninde yaşadığı sorunlar nedeniyle geçersiz bir ürün ortaya koyduğu görülmektedir. Bu durum, iletişim bileşeninin sembolik iletişim alt bileşenini olumsuz etkilemektedir.

Görüşme sürecinde de hatasının farkına varamayan ve eksiklerini devam ettirdiği görülen öğrencinin, iletişim bileşeninin sözel iletişim alt bileşeninde de sorun yaşadığı görülmüştür.

> Araştırmacı: Burada kanıt yaparken nasıl bir yol izlediniz?
>
> Öğrenci: Böyle şeylerde yani her doğal sayı için doğru olduğunu göstermemiz istendiğinde tümevarım yapıyorduk, ben de onu yaptım.
>
> Araştırmacı: İlk adımınızda tam olarak ne yaptınız?
>
> Öğrenci: Önce $\mathrm{k}, 1$ iken sonucun ne olduğuna baktım.
>
> Araştırmacı: Buradaki amacınız ne tam olarak?
>
> Öğrenci: Yani böyle başlanıyor tümevarıma. Önce $\mathrm{k}, 1$ iken doğru olduğunu göstereceğim. Yani daha doğrusu 1 için 11 ile bölünüp bölünemediğine baktım. Hesapladım kaç çıktığını ve evet bölünüyor. Sonra da genel olarak doğru olup olmadığına bakmam gerek. Yani yöntem öyle. Tümevarımda öyle yapıyoruz.
>
> Araştırmacı: Anladım, yani 2932 bulduktan sonra genel olarak ifadenin doğruluğunu göstermeye çalıştığınız aşama mı başlıyor?
>
> Öğrenci: Evet.
>
> Araştırmacı: Bu aşamada ne yaptığınızı anlatabilir misiniz?
>
> Öğrenci: Önce parçaladım. $5^{5\mathrm{k}+1}$ i $5^{5\mathrm{k}} \times 5$ olarak yazdım. Diğerlerini de aynı şekilde parçaladım. Sonra toparladım. Yani katsayılarını topladım. Üstler de aynı olduğu için bunları ($5^{5\mathrm{k}}, 4^{5\mathrm{k}}, 3^{5\mathrm{k}}$ üslü sayılarını gösteriyor) çarptım. Çünkü üslü sayılarda üsler aynı olduğunda çarpma yapabiliriz, yani tabanları çarpabiliriz. Sonra buradan zaten 22 çarpanı geldi. 22 de 11'in katı olduğu için oradan bulmuş oldum. Yani evet, ifade genel olarak 11'e bölünür.

Öğrencinin tümevarım ile kanıt yapmayı bilmediği ve bu nedenle kanıt yapmak için seçtiği aracı doğru kullanamadığı görülmüştür. Bu bağlamda, görüşme verileri öğrencinin teleolojik bileşende sorun yaşadığına ilişkin saptamamızı desteklemektedir. Bunun yanı sıra, öğrenci üslü sayılarda işlem yapma konusuna ilişkin matematiksel kuralları bilmemekte ve dolayısıyla uygulayamamaktadır. Görüşme sürecinde yaptığı işlem hatalarını fark etmeyen, aksine yaptığı işlemlerin doğru olduğunu düşünerek süreci açıklayan öğrencinin, üslü sayılarla işlem yapmayla ilgili temel bilgi eksiklikleri olduğu görülmüştür. Bu durum, öğrencinin epistemik bileşenin sistemik alt bileşeninde sorun yaşadığına ilişkin saptamamızı desteklemektedir. Bu durum, iletişim bileşeninin sözel iletişim alt bileşenini de olumsuz etkilemiş; öğrencinin, bu kez de sözlü olarak, ifadenin kanıtı ile ilgili geçersiz açıklamalar yapmasına neden olmuştur.

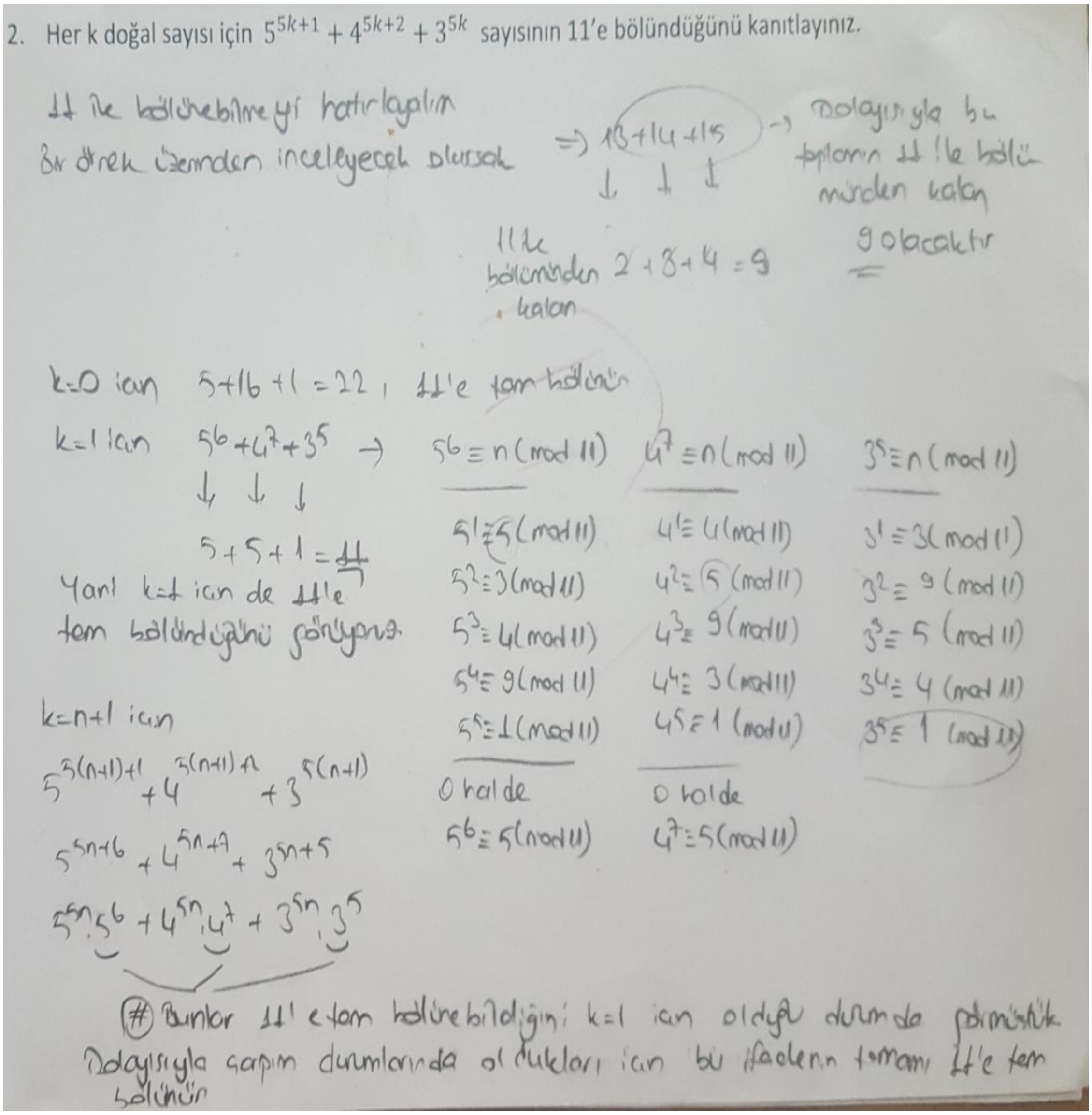
Öğrencilerden biri, ifadenin kanıtına tümevarım yöntemi ile başlamış ancak son aşamada elde ettiği ifadenin 11 ile bölünebildiğini göstermek için modüler aritmetik yöntemine geçiş yapmıştır. Bu öğrencinin kanıt yapma sürecine Şekil 48'de yer verilmektedir.



Şekil 48. Öğrencinin kanıt yapma süreci.

Öğrencinin bir ifadeyi kanıtlamak için tümevarım yöntemini doğru kullanabildiği görülmektedir. Kanıtının son aşamasında elde ettiği ifadenin 11 ile bölünebildiğini göstermek için kullandığı modüler aritmetik yöntemini de süreçte doğru uygulayabilmiştir. Bu durum, öğrencinin amacına ulaşmasını sağlayacak araçları doğru seçebildiğini ve kullanabildiğini; bu bağlamda teleolojik bileşenin gerekliliklerini sağlayabildiğini göstermektedir. Diğer yandan, öğrenci hem tümevarımı hem de modüler aritmetiği kullanırken doğru ve geçerli modeller/denklemler kurabilmiştir. Bu da, öğrencinin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerini sağlayabildiğini göstermektedir. Görüşme sürecinde, öğrencinin epistemik ve teleolojik bileşendeki gücü, iletişim bileşeninin sözel iletişim alt bileşenini olumlu etkilemiş; süreci bir bütün olarak dinleyiciye doğru ve geçerli ifadeler kullanarak aktarabildiği görülmüştür. Diğer yandan, özellikle modüler aritmetik yöntemini kullandığı aşamada öğrencinin sembolik dil ve notasyon kullanımına özen göstermediği görülmektedir. Bu bağlamda, iletişim bileşeninin sembolik iletişim alt bileşeninde sorun yaşadığı düşünülmektedir.

Bir diğer öğrenci, benzer şekilde, soruda verilen ifadeyi kanıtlamak için tümevarımı ve modüler aritmetik yöntemini birlikte kullanmıştır. Öğrencinin kanıt yapma sürecine Şekil 49'da yer verilmektedir.



2. Her k doğal sayısı için $5^{5k+1} + 4^{5k+2} + 3^{5k}$ sayısının 11'e bölündüğünü kanıtlayınız.

11 ile bölünebilmeyi hatırlayalım
Bir örnek üzerinden inceleyecek olursak $\Rightarrow 13+14+15$ → Dolayısıyla bu toplamın 11 ile bölümünden kalan 9 olacaktır

11 ile bölümünden kalan $2+3+4=9$

$k=0$ için $5+16+1=22$, 11'e tam bölünür

$k=1$ için $5^6+4^7+3^5$ → $5^6 \equiv n \pmod{11}$ $\quad 4^7 \equiv n \pmod{11}$ $\quad 3^5 \equiv n \pmod{11}$

$5+5+1=11$

Yani $k=1$ için de 11'e tam bölündüğünü görüyoruz.

$5^1 \equiv 5 \pmod{11}$	$4^1 \equiv 4 \pmod{11}$	$3^1 \equiv 3 \pmod{11}$
$5^2 \equiv 3 \pmod{11}$	$4^2 \equiv 5 \pmod{11}$	$3^2 \equiv 9 \pmod{11}$
$5^3 \equiv 4 \pmod{11}$	$4^3 \equiv 9 \pmod{11}$	$3^3 \equiv 5 \pmod{11}$
$5^4 \equiv 9 \pmod{11}$	$4^4 \equiv 3 \pmod{11}$	$3^4 \equiv 4 \pmod{11}$
$5^5 \equiv 1 \pmod{11}$	$4^5 \equiv 1 \pmod{11}$	$3^5 \equiv 1 \pmod{11}$
O halde $5^6 \equiv 5 \pmod{11}$	O halde $4^7 \equiv 5 \pmod{11}$	

$k=n+1$ için

$5^{5(n+1)+1} + 4^{5(n+1)+2} + 3^{5(n+1)}$

$5^{5n+6} + 4^{5n+7} + 3^{5n+5}$

$5^{5n}.5^6 + 4^{5n}.4^7 + 3^{5n}.3^5$

(#) Bunlar 11'e tam bölünebildiğini $k=1$ için olduğu durumda görmüştük. Dolayısıyla çarpım durumlarında oldukları için bu ifadenin tamamı 11'e tam bölünür

Şekil 49. Öğrencinin kanıt yapma süreci.

Öğrenci, kanıta tümevarım yöntemi ile başlamış ve $k = 0$ için ifadenin 11 ile tam bölünebildiğini göstermiştir. Bunun ardından, $k = 1$ için oluşturduğu ifadenin 11 ile bölünebildiğini göstermek istemiş; bu amaçla modüler aritmetik yöntemini kullanmayı tercih etmiştir. Bu aşamada öğrencinin doğru ve amacına uygun bir araç seçebildiği ve bu aracı doğru kullanabildiği görülmektedir. Öğrenci sürece $k = n + 1$ için devam etmiş ve elde ettiği ifadenin 11 ile bölünebildiğini göstermeye çalışmıştır. Ancak tümevarım yöntemine göre, bu aşamada $k = n$ için ifadenin doğru olduğunun gösterilmesi beklenmektedir. Bu durum, öğrencinin tümevarım yöntemini kullanmayı bilmediğini göstermektedir. Bu bağlamda, öğrencinin bu aşamada teleolojik bileşende sorun yaşadığı görülmektedir.

Diğer yandan, bu aşamada $5^{5n+6} + 4^{5n+7} + 3^{5n+5} = 5^{5n}5^6 + 4^{5n}4^7 + 3^{5n}3^5$ şeklinde geçerli ve doğru bir dönüşüm yapmıştır. Burada 5^6, 4^7 ve 3^5 terimlerinin toplamı 11'in katı olduğundan, $5^{5n}5^6 + 4^{5n}4^7 + 3^{5n}3^5$ ifadesinin de 11'in tam katı olduğunu düşünmüştür. Bu durum, matematiksel kurallara aykırı olduğundan, öğrencinin epistemik bileşenin sistemik alt bileşeninde sorun yaşadığını göstermektedir.

Öğrencinin kanıt yapma sürecine bakıldığında, her aşamada ürettiği modellerin/denklemlerin doğru ve geçerli olduğu görülmüştür. Bu durum, her ne kadar teleolojik bileşende ve epistemik bileşenin sistemik alt bileşeninde sorun yaşamış olsa da, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerini sağladığını göstermektedir. İletişim bileşeninin sembolik iletişim alt bileşeni, öğrencinin geçersiz bir sonuç üretmesinden olumsuz etkilenmiştir. Öğrencinin kanıt yapma sürecinde yer yer yazılı açıklamalar yaptığı görülmektedir. Ancak sürecin son aşamasında yazdığı metinsel açıklamada geçersiz ifadeler kullanması, iletişim bileşeninin metinsel iletişim alt bileşenin gerekliklerini sağlayamadığını göstermektedir.

Görüşme sürecinde öğrenciye ilk olarak tümevarım yöntemini uygularken atladığı aşama sorulmuştur. Aşağıda öğrencinin söylemlerine yer verilmektedir.

> Araştırmacı: Kanıt yapma sürecinizi anlatabilir misiniz?
>
> Öğrenci: Ben tümevarımla kanıtlamak istedim ama modüler aritmetik de kullandım. Bu üslü sayıların mod11 e göre kaça eşit olduğunu hesapladım, oradan da toplamlarını budum.
>
> Araştırmacı: Tümevarım yöntemini nasıl kullandığınızı anlatabilir misiniz?
>
> Öğrenci: $\mathrm{k} = 0$ için önce gösterdim.
>
> Araştırmacı: Neyi?
>
> Öğrenci: Bu toplamın 11'e bölünebildiğini. Sonra $\mathrm{k} = 1$ için sonra da ne yaptım… Burada biraz modüler aritmetik yaptım dediğim gibi. $\mathrm{k} = 1$ için karışık bir şey çıktı çünkü. Sonra da işte $\mathrm{k} = \mathrm{n} + 1$ için.
>
> Araştırmacı: Buradaki n ne ifade ediyor?
>
> Öğrenci: Her doğal sayıyı yani herhangi bir doğal sayıyı.

Araştırmacı: $\mathrm{n}+1$'in özel bir anlamı var mı?

Öğrenci: Ben açıkçası nasıl yaptığımızı tam da hatırlayamadım. O yüzden sorularınıza net cevap veremeyeceğim. Çok aşamalı bir şeydi tümevarım. Unuttum aradaki şeyleri, basamakları.

Görüşme verileri öğrencinin tümevarım yöntemini kullanmayı bilmediğini ve bu nedenle teleolojik bileşende sorun yaşadığına ilişkin saptamamızı desteklemektedir. Öğrenci görüşme sürecinin devamında son aşamada yaptığı hatayı fark etmiştir.

Araştırmacı: Son aşamada $5^{5\mathrm{n}+6}+4^{5\mathrm{n}+7}+3^{5\mathrm{n}+5}=5^{5\mathrm{n}}5^{6}+4^{5\mathrm{n}}4^{7}+3^{5\mathrm{n}}3^{5}$ eşitliğini yazmışsınız. Sonra buradan sonuca nasıl ulaştınız?

Öğrenci: Burada her terimin çarpıldığı şeye baktım. Bunlar benim $\mathrm{k}=1$ için bulduğum şeyler. Ben bunların toplamının 11 ile bölünebildiğini bulmuştum zaten. Oradan da direk bu da bölünebilir demişim ama bunu direk diyemem galiba ya. Peki ama nasıl göstersem? Bir kez daha bakabilir miyim? Çünkü tam da anlayamadım nereden böyle bir şey dediğimi…

Araştırmacı: Tabii ki.

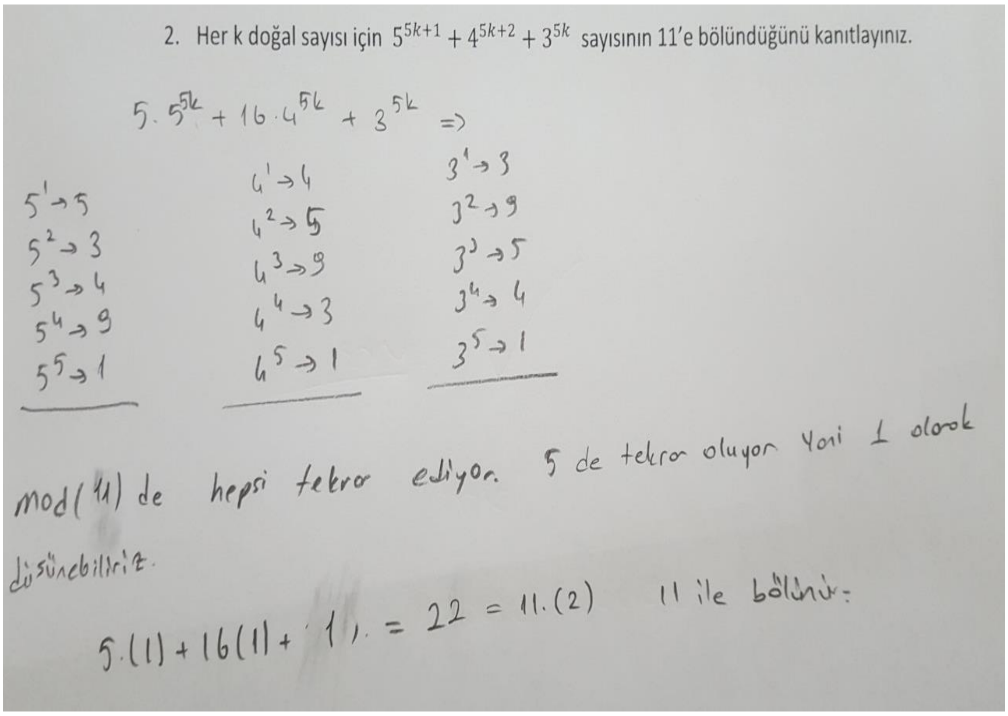
Öğrenci, bu aşamada modüler aritmetik yöntemine geçiş yaparak ifadenin 11'in katı olduğunu gösterebilmiştir.

Araştırmacı: Şimdi bana kanıt yapma sürecinizi baştan sona anlatabilir misiniz? Tam olarak ne yapmış oldunuz?

Öğrenci: Bu verilen şeyin önce $\mathrm{k}=0$ için doğru olduğunu; sonra $\mathrm{k}=1$ için doğru olduğunu sonra da $\mathrm{n}+1$ için doğru olduğunu göstermiş oldum. Tabi bu nasıl bir şey oldu böyle anlamadım. Bir sürü şey yaptım hepsi birbirinden kopuk kopuk. Ben tümevarım yöntemini unuttum. Arada bir şeyler daha vardı. Onları yapmayınca olmuyor sanırım… Böyle garip bir şey oldu ne desem bilemedim. Hem birçok şeyi gösterdim hem de hiçbir şey.

Öğrencinin tümevarım yöntemini doğru kullanamadığından teleolojik bileşende yaşadığı sorun, süreci geçerli yoldan yürütmesini engellemektedir. Görüşme sürecinde yaşadığı sorunu çözemeyen ve tümevarım yöntemini doğru kullanmayı başaramayan öğrencinin iletişim bileşeninin sözel iletişim alt bileşeninde de sorun yaşadığı görülmektedir.

Öğrencilerin bir kısmı ifadenin kanıtını, modüler aritmetik yöntemi kullanarak yapmaya çalışmıştır. Bu öğrencilerin tümünün süreçte başarılı olduğu görülmüştür. Şekil 50’de bu duruma örnek bir kanıt yapma sürecine yer verilmektedir.



Şekil 50. Modüler aritmetik yöntemi ile kanıt yapma süreci.

Bu öğrenci, ifadeyi kanıtlamak için amacına uygun bir araç seçmiş ve bu aracı doğru kullanarak geçerli bir sonuca ulaşmıştır. Bu bağlamda, öğrencinin teleolojik bileşenin gerekliliklerini sağladığı görülmektedir. Süreçte 5’in, 4’ün ve 3’ün kuvvetlerinin 11 ile bölümünden kalanı hesaplamış ve kalanı 1 veren kuvvet değerlerini kullanarak ifadeyi kanıtlamıştır. Öğrencinin modüler aritmetik yöntemini kullanarak geçerli ve doğru modeller kurduğu görülmektedir. Bu bağlamda, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerini sağlamaktadır. Süreçte işlem hatası yapmamıştır. Bu durum, epistemik bileşenin sistemik alt bileşeninin gerekliliklerini sağladığını göstermektedir.

İletişim bileşeni yönünden değerlendirildiğinde, sembolik dil ve notasyon kullanımına özen göstermediği görülmektedir. Modüler aritmetik yöntemini uygularken kullanması gereken sembollere ve gösterimlere dikkat etmemiştir. Bu bağlamda, iletişim bileşeninin sembolik iletişim alt bileşeninde sorunları olduğu görülmektedir. Bunun yanı sıra, okuyucunun süreci kolay algılaması ve takip edebilmesi için metinsel açıklamalara yeterli düzeyde yer vermediği de görülmektedir.

Görüşme sürecinde öğrencinin attığı adımları anlaşılır bir dille açıklayabildiği görülmüştür. Aşağıda öğrencinin söylemlerinden bazı alıntılara yer verilmektedir.

> Araştırmacı: İfadeyi kanıtlarken neler yaptığınızı açıklayabilir misiniz?
>
> Öğrenci: 5'in üstlerini aldım. Her seferinde 11'e böldüm ve kalanı hesapladım. 11 ile bölümünden kalan ne zaman 1 olur diye baktım. 5^5 için kalan 1 çıktı. Diğerleri için de aynı şeyi yaptım. 4^5 ve 3^5 için de aynı şey oldu. Bunların da 11 ile bölümünden kalan 1 oldu.
>
> Araştırmacı: Bu süreçte hesaplamaları kendiniz mi yaptınız, yoksa hesap makinesi mi kullandınız?
>
> Öğrenci: Yok kendim yaptım. Ama yani üstlerini hesaplayarak uzun uzun değil tabi. Mesela şöyle; 5'in zaten 1. kuvveti kendisi; yani 5. 5'in 11'le bölümünden kalan da yine 5. Bunu yazdım. Sonra 5'in 2. kuvveti 25; 25'in 11 ile bölümünden kalan 3. Bunu da yazdım. Sonrasında artık kuvvet hesaplamayı bıraktım. Kalanları çarparak devam ettim. Yani mesela 5'in 3. kuvvetinden kalanı bulmak için birinci ve ikinci kuvvetinden kalanları çarptım; 15 çıktı; 15'i 11'e böldüm ve 4 çıktı, bunun gibi… Hepsini böyle yaptım.
>
> Araştırmacı: Peki, bu durumun temeli neye dayanıyor, biliyor musunuz?
>
> Öğrenci: Modüler aritmetik… Yani şöyle 5^3 demek; 5^2 ile 5^1'in çarpımı demek. Çarpanların 11 ile bölümünden kalanları biliyorum. Bu kalanları çarparsam ve 11 ile bölümünden kalanı bulursam, 5^3'ün 11 ile bölümünden kalanın da bulmuş olurum. Yani bunu yaptım da anlatınca karışık oldu biraz ama aslında gösterebilirim.

Öğrenci sürecin devamında kâğıda not almaya başlamış ve aynı zamanda düşünme sürecini sözel olarak açıklamıştır.

> Öğrenci: Yani şöyle diyelim mesela $a = 11k + t$ olsun. Yani a dediğim şey 11'e bölünüyor kalan da t oluyor. Bir de şöyle bir şey olsun. $b = 11z + y$ Bu da aynı şekilde yani 11'e bölümünden kalan y gibi bir şey olsun. Şimdi bunların çarpımına bakalım. $a \times b = (11k + t)(11z + y) = 121kz + 11ky + 11zt + yt$ oluyor. Buradaki ilk terim zaten 11'in katı ve bakın diğerleri de öyle… Sadece son terim yani yt diye

> gösterdiğim terimin 11 ile bölünüp bölünmediği kesin değil. yt de tam da bakın bu a ve b sayılarının 11 ile bölümünden kalanların çarpımı. Yani aslında bunların kendilerinin 11'e bölümünden kalanların çarpımına baksam, yani o çarpımın 11 ile bölümünden kalanı hesaplasam oluyor.

Öğrencinin düşünme sürecini net ve açıklayıcı bir dille dinleyiciye aktarabildiği görülmektedir. Bu durum, öğrencinin iletişim bileşeninin sözel iletişim alt bileşeninde güçlü olduğunu göstermektedir. Öğrencinin teleolojik ve epistemik bileşendeki gücü, iletişim bileşeninin sözel iletişim alt bileşenini olumlu etkilemiştir.

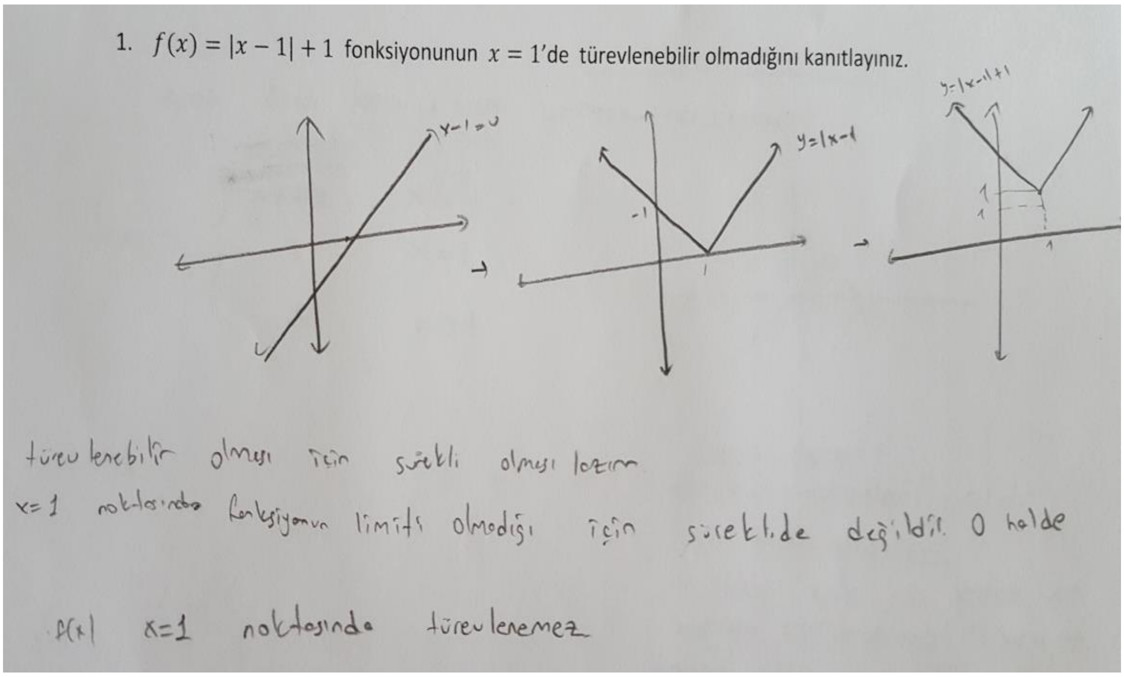
Analiz sonuçlarına göre, öğrencilerin birçoğu soruda verilen ifadenin kanıtı için tümevarım yöntemini kullanmak istemiş ancak tümevarımın son adımında amaçlarına ulaşma konusunda sorun yaşamışlardır. Bu durum, öğrencilerin teleolojik bileşen bağlamında sorun yaşadığını göstermektedir. Bu öğrencilerden yalnızca son aşamada modüler aritmetiğe geçebilenlerin kanıt yapma sürecinde başarılı olabildiği görülmüştür. Bu aşamada bazı öğrencilerin amaçlarına ulaşmak için matematiksel kurallara aykırı işlemler yaptığı görülmüştür. Bu durumun temel nedeni, dikkatsizlik değil; öğrencilerin üslü sayılarla işlem yapma konusundaki temel bilgi eksiklikleridir. Bu da, öğrencilerin epistemik bileşenin sistemik alt bileşeni yönünden eksikleri olduğunu göstermektedir. Öğrencilerin bu eksikleri, son aşamada geçersiz denklemler kurmalarına da yol açtığından, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerinde de sorun yaşamalarına neden olmuştur. Bu durum, öğrencilerin iletişim bileşeninin tüm alt bileşenlerini de olumsuz etkilemiştir.

Modüler aritmetik yöntemiyle kanıt yapmayı tercih eden öğrencilerin tümü başarılı olmuştur. Bu öğrenciler, ifadenin kanıtı için uygun bir araç seçebilmiş ve bu aracı doğru kullanabilmiştir. Sürecin tamamında gerekli ve amaçlarına uygun adım atabildiklerinden teleolojik bileşenin gerekliliklerini sağlayabilmişlerdir. Süreçte kurdukları modeller/denklemler de doğru ve geçerlidir. Bu durum, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerini de sağlayabildiklerini göstermektedir. Ancak bu öğrenciler, süreci okuyucuya aktarırken modüler aritmetiğe özgü sembolik dil ve notasyon kullanımı konusunda özensiz davranmışlar ve iletişim bileşeninin sembolik iletişim alt bileşeninin gerekliliklerini sağlama konusunda yetersiz kalmışlardır.

Türevlenebilme sorusu. Bu soru, öğrencilere aşağıdaki şekilde sorulmuştur:

"$f(x) = |x - 1| + 1$ fonksiyonunun $x = 1$'de türevlenemediğini kanıtlayınız (Houston, 2009; Velleman, 2006)."

Öğrencilerin genellikle soruda verilen fonksiyonun türevlenebilirliğini incelemek için süreklilik kavramından faydalanmaya çalıştığı görülmüştür. Şekil 51'de bu duruma örnek bir kanıt yapma sürecine yer verilmektedir.



Şekil 51. Epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerinde eksiklik.

Öğrenci, soruda verilen fonksiyonun grafiğini doğru olarak çizebilmiştir. Bu bağlamda, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin görsel gerekliliklerini sağlamaktadır. Verilen fonksiyonun $x = 1$ noktasında sürekli olmadığından türevli de olamayacağını göstermek istemiş ve $x = 1$ noktasında limiti olmadığından sürekli de olamayacağını belirtmiştir. Öğrencinin amacına ulaşmak ve fonksiyonun $x = 1$ noktasında türevli olmadığını kanıtlamak için seçtiği ve kullanmaya çalıştığı araç amacına uygun değildir. Bu durumun temelinde de, öğrencinin limit, süreklilik ve türev kavramlarına ilişkin yanlış bilgileri yatmaktadır. Bu bağlamda, öğrencinin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerinde sorun yaşadığı; bu durumun teleolojik bileşenini ve kanıt yapma sürecini olumsuz etkilediği görülmektedir.

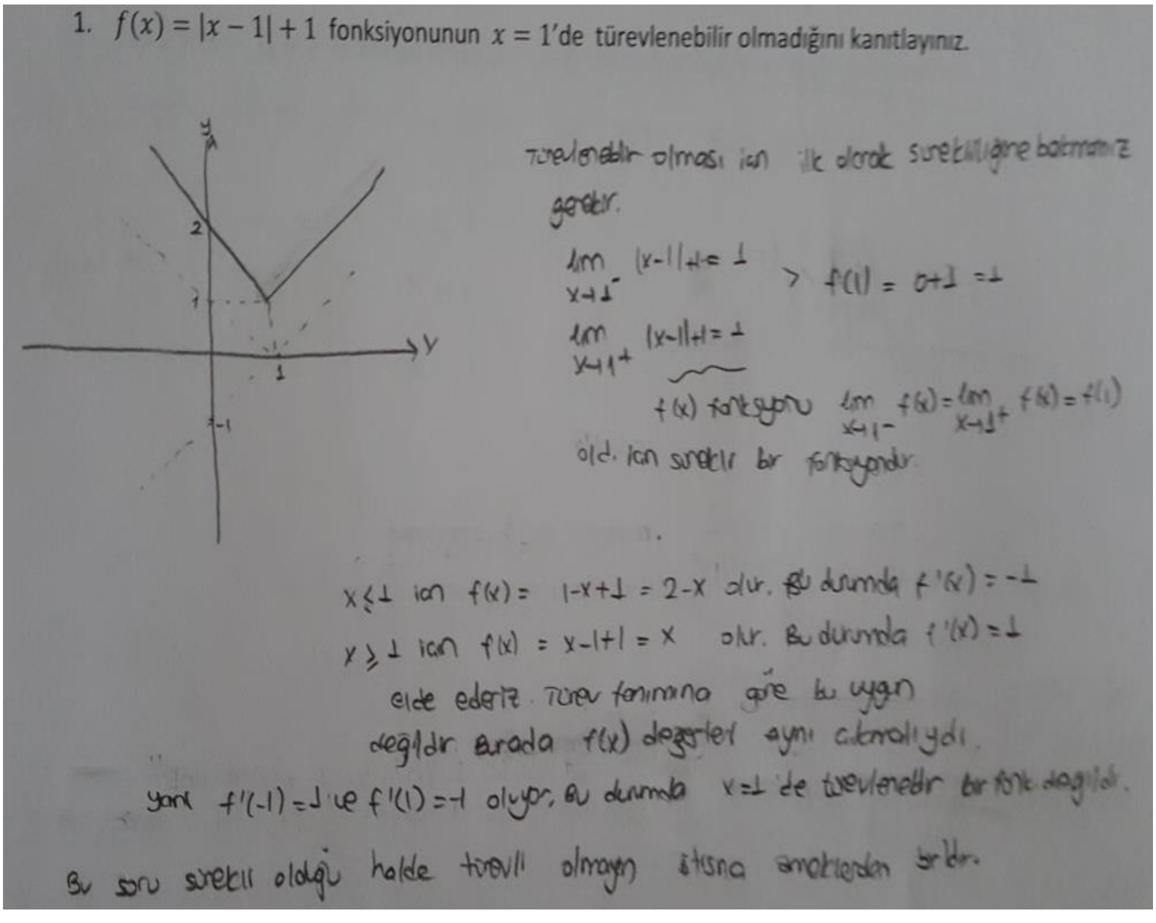
Öğrenci süreklilik ve türevlenebilirlik kavramlarına ilişkin fomel tanımları bilmediğinden kanıtını şekil üzerinden ve metinsel açıklamalar yaparak oluşturmaya çalışmıştır. Bu durum, öğrencinin ortaya koyduğu ürünün cebirin sembolik dilinin kullanımı açısından eksik olduğunu göstermektedir. Bu durumun temelinde, öğrencinin konu ile ilgili hatalı bilgileri yer almaktadır. Bu durum, öğrencinin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerinde yaşadığı sorunun, iletişim bileşeninin sembolik iletişim alt bileşenini de olumsuz etkilediğini göstermektedir. Öğrenci yazdığı metinsel açıklamalarda da hatalı bilgileri nedeniyle, geçerli ifadeler kullanamamıştır. Bu durum, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerindeki sorunların, iletişim bileşeninin metinsel iletişim alt bileşenini de olumsuz etkilediğini göstermektedir.

Öğrenciyi iletişim bileşeninin sözel iletişim alt bileşeni yönünden değerlendirmek için görüşme yapılmıştır.

> Araştırmacı: Kanıt yapma sürecinizi anlatabilir misiniz?
>
> Öğrenci: Önce grafik çizdim. Çünkü süreklilikle ilgili oradan anlarım sürekli olup olmadığını dedim. Oradan da türeve geçtim.
>
> Araştırmacı: Bir fonksiyonun grafiği ile sürekliliği arasında nasıl bir ilişki var?
>
> Öğrenci: Kırık olduğu yerde sürekli değil. Tıpkı burada olduğu gibi. Tam da 1'de yani $x = 1$ iken fonksiyon grafiği kırılıyor.
>
> Araştırmacı: Grafiğin bu durumu sürekli olmadığını nasıl gösteriyor?
>
> Öğrenci: Grafik burada kırıldığından fonksiyonun bu noktada limiti yok. Limit yoksa bu noktada sürekli de değil. Sürekli değilse zaten türevli hiç değil.
>
> Araştırmacı: Peki, neden?
>
> Öğrenci: Yani nedenini açıklayamam ama böyle. Böyle gördük yani. Limit yoksa sürekli değil, sürekli değilse türevli de değil. O yüzden bu fonksiyon sürekli değil, sürekli değilse türevli de değil.
>
> Araştırmacı: Peki, sürekli olsa türevlidir diyebilir miydiniz?
>
> Öğrenci: Yani, evet. Açıkçası çok emin değilim. Yani ama sürekli olması gerek. Sürekli olmazsa türevli de olamaz. Ondan eminim.

Öğrencinin görüşme sürecinde ezber bilgileri üzerinden hareket ettiği; formel tanımları bilmediğinden ürettiği iddialarına ilişkin doğru ve geçerli nedenler sunamadığı görülmüştür. Bu durum, öğrencinin iletişim bileşeninin sözel iletişim alt bileşeninin gerekliliklerini sağlayamadığını göstermektedir. Öğrencinin temel bilgi hataları bağlamında epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerinde yaşadığı sorunlar, diğer tüm bileşenlerini olduğu gibi, iletişim bileşeninin sözel iletişim alt bileşenini de olumsuz etkilemiştir.

Bazı öğrencilerin, verilen fonksiyonun $x = 1$ noktasında türevlenemediğini, fonksiyonun bu noktadaki sağdan ve soldan türev alarak ve bu değerlerin farklı çıktığını göstererek kanıtlamak istediği görülmüştür. Şekil 52'de bu yolla kanıt yapmayı tercih eden bir öğrencinin sürecine yer verilmektedir.



Şekil 52. Öğrencinin kanıt yapma süreci.

Öğrenci, verilen fonksiyonun grafiğini doğru çizebilmiş ve epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin görsel gerekliliklerini sağlayabilmiştir. Bunun ardından, fonksiyonun $x = 1$ noktasında sürekli olup olmadığını belirlemek istemiştir. "Türevli olması için ilk olarak sürekliliğe bakmamız gerekir" şeklinde bir not düşen öğrencinin, bir fonksiyonun bir noktada türevlenebilmesi için öncelikle o noktada sürekli olması gerektiğini bildiği görülmektedir. Fonksiyonun sürekli olduğunu formel tanımını kullanarak doğru ve geçerli yoldan gösterebilen öğrencinin bu aşamada doğru bilgileri kullandığından, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerini; fonksiyonun sürekli olduğunu formel tanımını kullanarak doğru ve geçerli bir yoldan gösterebildiğinden de teleolojik bileşenin gerekliliklerini sağlayabildiği görülmektedir.

Fonksiyonun sürekli olduğunu gösteren öğrenci, $x = 1$ noktasında türevlenemediğini göstermek için fonksiyonun $x \geq 1$ ve $x \leq 1$ değerleri için $f(x)$'i cebirsel olarak yazdığı görülmektedir. Bu cebirsel ifadelerin türevini alan ve farklı sonuçlar bulan öğrencinin, henüz fonksiyonun $x = 1$ noktasında türevlenip türevlenemediğini bilmeden fonksiyonun türevini aldığı görülmektedir. Öğrenci amacına ulaşmak için doğru ve geçerli bir yol tercih etmemiştir. Bu durum, öğrencinin bu aşamada teleolojik bileşenin gerekliliklerini sağlayamadığını göstermektedir. Bu ise öğrencinin türev kavramının formel tanımını bilmemesinden ve uygulayamamasından kaynaklanmaktadır. Bu bağlamda, öğrencinin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerindeki eksikliklerin, teleolojik bileşenini olumsuz etkilediği görülmektedir.

Öğrenci, sürecin sonunda "Bu soru sürekli olduğu halde türevli olmayan istisna örneklerden biridir" şeklinde bir not düşmüştür. Öğrencinin bu notu ve süreç içerisinde attığı adımlar için yer yer not ettiği diğer metinsel açıklamaları doğru olsa da, kanıt yapma sürecini doğru ve geçerli bir yoldan sunamadığından iletişim bileşeninin metinsel iletişim alt bileşeninde de yetersiz bulunmuştur. Bu durum, öğrencinin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerindeki ve teleolojik bileşendeki eksikliklerinin, iletişim bileşeninin metinsel iletişim alt bileşenini olumsuz etkilediğini göstermektedir. Benzer şekilde, öğrencinin süreci geçerli bir yoldan tamamlayamaması iletişim bileşeninin sembolik iletişim alt bileşenini de olumsuz etkilemiştir.

Öğrencinin iletişim bileşeninin sözel iletişim alt bileşeni yönünden değerlendirilmesi için görüşme yapılmıştır.

Araştırmacı: Öncelikle fonksiyonun sürekli olduğunu göstermişsiniz.

Öğrenci: Evet, çünkü türevli olması için sürekli olması şart. Yani daha doğrusu şöyle. Şimdi ben burada bunun $x = 1$'de türevlenemediğini göstereceğim. Bunu göstermek için önce sürekli olmadığını göstermek istedim. Çünkü sürekli değilse türevli de değildir. Böyle bir teorem var. Sürekli değilse türevli hiç değil. Oradan yapacaktım ama olmadı. Fonksiyon sürekliymiş. Sürekli olunca da garantisi yok yani. Türevli olabilir de olmayabilir de. Hatta bu değil işte. Türevli olmadığını göstermek istiyoruz.

Araştırmacı: Sonra ne yaptınız?

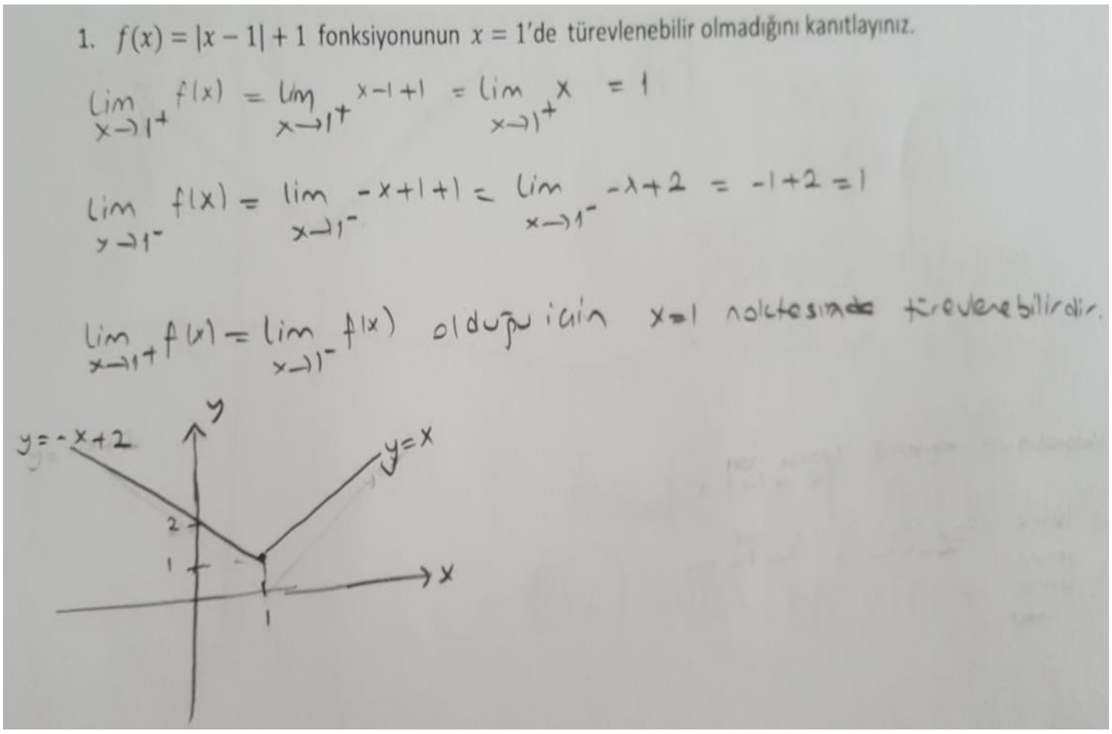
Öğrenci: İşte, türevli olmadığını göstermek için başka bir yol denedim. Normalde bu türevli olsa sağdan soldan türev alınca aynı çıkması lazım. Ben de bir bakayım dedim. Çünkü aynı çıkmazsa olmaz. Yani türevli olmaz. Dedim ki hani eğer bulursam yani farklı bulursam sağdan soldan türevleri, oradan türevli değilmiş işte derim dedim. Ve gerçekten de öyle çıktı yani. Mutlak değer fonksiyonu çünkü. Yani negatif olunca içi pozitif çıksın diye ifadeyi işaret olarak ters çevirdim, öyle yazdım. İçi pozitif ise zaten direk öyle çıkar. Sonuçta yani işte sağdan soldan türevler farklı. Bu da demektir ki bu fonksiyon $x = 1$ noktasında türevli değil.

Araştırmacı: Peki, "fonksiyonun türevli olmadığını göstermek için sağdan soldan türev alınca aynı çıkması lazım" dediniz. Bu duruma bir göz attınız ve anladığım kadarıyla fonksiyonun bu noktada türevli olup olmadığını henüz araştırdığınız bir fonksiyonun bu noktada sağdan ve soldan türevini hesapladınız. Bu yaklaşımınızı tekrar gözden geçirebilir misiniz? Yani henüz türevli olup olmadığını araştırdığınız bir fonksiyonun sağdan soldan türevini almış olmanız fonksiyonun türevli olup olmadığını araştırdığınız bu süreçte sorun yaratır mı?

Öğrenci: Hımm, yani bence şöyle. Eğer türevli olsaydı sorun çıkmayacaktı. Yani sağdan soldan türev de eşit çıkacaktı. Ama demek ki türevli değilmiş ki; burada da sonuçlar farklı çıktı. Yani sağdan ve soldan türev alınca sonuçlar farklı çıktı. Yani türevli olmadığını göstermek için türevini alıp bakabilirim. Önemli olan sonuç. Zaten türevli olmadığında burada olduğu gibi hata veriyor. Yani sağdan soldan türev sonuçları farklı çıkıyor. Aslında çift taraflı düşünebilirim. Türevli olmadığında fonksiyonun sağdan soldan türevinin sonuçları farklı. Sağdan soldan türev sonuçları farklı olduğunda da o noktada türev yok.

Öğrenci, görüşmede kanıtı yaparken attığı adımları nedenleriyle birlikte dinleyiciye doğru ifadelerle sunamadığından, iletişim bileşeninin sözel iletişim alt bileşeninin gerekliliklerini sağlayamamıştır. Bu durumun asıl nedeninin öğrencinin bir fonksiyonun bir noktadaki türevine ilişkin yanlış bilgileri olduğu görülmektedir. Bu bağlamda, öğrencinin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerindeki sorunlarının, iletişim bileşeninin sözel iletişim alt bileşenini de olumsuz etkilediği görülmektedir.

Öğrencilerden bazıları, fonksiyonun $x \to 1^+$ ve $x \to 1^-$ iken limitini almış ve limit değerlerinin eşit çıkması üzerine fonksiyonun $x = 1$ noktasında türevlenebilir olduğunu belirtmiştir. Şekil 53'te bu öğrencilerden birinin kanıt yapma sürecine yer verilmiştir.


1. $f(x) = |x - 1| + 1$ fonksiyonunun $x = 1$'de türevlenebilir olmadığını kanıtlayınız.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x-1+1 = \lim_{x\to 1^+} x = 1$$

$$\lim_{y\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} -x+1+1 = \lim_{x\to 1^-} -x+2 = -1+2 = 1$$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x)$ olduğu için $x=1$ noktasında türevlenebilirdir.

Şekil 53. Epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerinde eksiklik.

Öğrencinin verilen fonksiyonun grafiğini doğru çizdiği dikkat çekmektedir. Her ne kadar öğrenci bu grafiği sonuca ulaşmak için kullanmamış olsa da, doğru bir çizim yaptığından epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin görsel gerekliliklerini sağlamaktadır. Öğrencinin bir fonksiyonun bir noktaya sağdan ve soldan yaklaşırken aldığı limit değerini hesaplamada sorun yaşamadığı görülmektedir. Bu sırada yaptığı işlemlerde herhangi bir matematiksel hata olmadığından ve kurallara uyduğundan, epistemik bileşenin sistemik alt bileşeninin gerekliliklerini sağlamaktadır. Ancak öğrenci, fonksiyonun $x = 1$ noktasına sağdan ve soldan yaklaşırken aldığı limit değerleri eşit çıktığından türevli olduğunu söylemektedir. Bu bağlamda, öğrencinin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerinde sorun yaşadığı görülmektedir. Öğrencinin bu sorunu, kanıt için amacına uygun olmayan ve geçersiz bir araç seçmesine ve kullanmasına yol açmıştır. Burada, öğrencinin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerinde yaşadığı sorunun, teleolojik bileşenini olumsuz etkilediği görülmektedir. Bu durumun sonucu olarak, öğrenci geçerli bir kanıt yapma süreci sunamamıştır.

Öğrenci süreci doğru yoldan yürütemediğinden ve kanıtını tamamlayamadığından iletişim bileşeninin sembolik iletişim alt bileşeninin gerekliliklerini sağlayamamıştır. Bunun yanı sıra, süreçte attığı adımları, okuyucuya metinsel açıklamalarla sunmayı tercih etmediği de dikkat çekmektedir.

Öğrenciyi iletişim bileşeninin sözel iletişim alt bileşeni yönünden değerlendirmek için görüşme yapılmıştır.

> Araştırmacı: Kanıt yapma sürecinizi anlatabilir misiniz?
>
> Öğrenci: 1'e sağdan soldan yaklaştım ve limitleri hesapladım. Mutlak değer fonksiyonu olduğu için tabi ifadeler sağda solda farklı çıktı. Ama 1'i yerine koyunca sonuçta aynı sonuç çıktı. Hatta ben önce aynı şey çıkmayacak sandım. Çünkü mutlak değer sorularında hep bir şey çıkar, garip bir şey yani. Neyse bunda çıkmadı. Sağdan soldan limitler aynı oldu yani.
>
> Araştırmacı: Bu size neyi göstermiş oldu?
>
> Öğrenci: Türevli olduğunu.
>
> Araştırmacı: Ama soruda türevlenemediğini gösteriniz diyor.
>
> Öğrenci: Aaa, ben onu fark etmedim. Aaa, değil mi yani? Demiştim zaten. Mutlak değer sorularında hep aksi çıkar. Ama nasıl göstereceğim?
>
> Araştırmacı: Tekrar denemek ister misiniz?

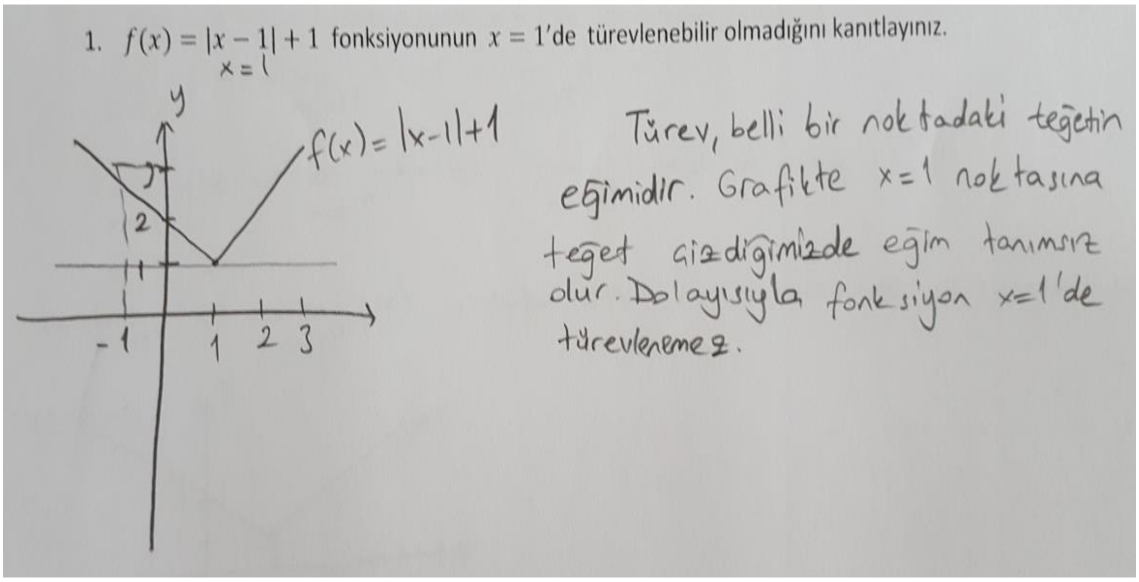
Öğrenci: Yani bilmiyorum ki ama nasıl yapacağımı bence türevli. Yani sağdan soldan limitler aynı. Bir dakika. Bu başka bir şey miydi? Süreklilik miydi? Kafam karıştı. Yani bir kaynağa ihtiyacım var. Ne demekti bunlar, tam hatırlayamadım şimdi. O yüzden devam edemiyorum, kafam karıştı.

Araştırmacı: Tam olarak kafanızı karıştıran şey ne?

Öğrenci: Tanımlarını unuttum bunların. Süreklilik ve türev. Bunlar birbirine çok yakın şeyler zaten. Ben de karıştırıyorum. Önce konuya çalışmam yani bir bakmam lazım. Hatırlarsam yaparım.

Öğrenciye süreklilik ve türevlenebilirlik kavramlarına ilişkin tanımlar verilmiştir ancak öğrencinin yine de bu tanımları, amacına uygun şekilde kullanamadığı ve kanıtı geçerli bir yoldan tamamlayamadığı görülmüştür. Bu durum, öğrencinin konuya bilgi açısından yeterince hâkim olmamasından kaynaklanmaktadır. Konuyla ilgili eksik ve hatalı bilgileri, süreçte amacına uygun aracı seçmesine yine engel olmuştur. Bu ise öğrencinin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerinde yaşadığı sorunun, teleolojik bileşenini olumsuz etkilediğine ilişkin görüşümüzü desteklemektedir. Epistemik bileşenin modelleme alt bileşenin formel gerekliliklerindeki ve teleolojik bileşendeki bu sorunlar, öğrencinin iletişim bileşeninin sözel iletişim alt bileşenini de olumsuz etkilemiş; ortaya koyduğu ürünü görüşme sürecinde dinleyiciye geçersiz ifadeler kullanarak aktarmasına yol açmıştır.

Bazı öğrenciler, verilen fonksiyonun grafiğini çizerek fonksiyonun $x = 1$ noktasında türevlenemediğini geometrik açıdan incelemeye çalışmıştır. Bu öğrencilerden birinin kanıt yapma sürecine Şekil 54'te yer verilmektedir.



Şekil 54. Epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin görsel ve formel gerekliliklerindeki eksiklik.

Bu öğrenci, fonksiyonun grafiğini doğru çizebilmiştir. Grafiği kullanarak fonksiyonun $x = 1$ noktasında türevli olmadığını, bu noktada fonksiyona çizdiği teğet doğrusunun eğiminden yola çıkarak göstermeye çalışmıştır. Bu aşamada, öğrencinin fonksiyonun grafiğine $x = 1$ noktasında, x eksenine paralel bir doğru çizdiği ve bu doğrunun bu noktada teğet olduğunu ifade etiği görülmektedir. Bu teğetin eğiminin tanımsız olduğunu iddia ederek fonksiyonun bu noktada türevlenemediğini belirtmektedir. Ancak öğrencinin, fonksiyonun grafiğine $x = 1$ noktasında çizdiği yatay doğrunun eğimi tanımsız değil, 0'dır. Bu durum, öğrencinin yatay bir doğrunun eğimine ilişkin yanlış bilgiye sahip olduğunu göstermektedir. Diğer yandan, öğrenci fonksiyonun grafiğine $x = 1$ noktasında değen farklı eğime sahip birden fazla sayıda doğru çizilebileceğini göremediğinden, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin hem formel ve hem de görsel gerekliliklerinde sorun yaşamaktadır. Bu durum, öğrencinin kanıtı yapmak için seçtiği aracı, yani fonksiyonun grafiğini, doğru ve amacına uygun şekilde kullanamamasına yol açmıştır. Bu da, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel ve görsel gerekliliklerindeki sorunların, teleolojik bileşeni olumsuz etkilediğini göstermektedir. Bu durum, öğrencinin süreçte başarısız olmasına yol açmıştır.

Öğrencinin süreçte cebirin sembolik dilini kullanmadığı ve kanıtını formel yoldan yürütmediği dikkat çekmektedir. Bu durum, sürecin iletişim bileşeninin sembolik iletişim alt bileşeni yönünden eksik olduğunu göstermektedir. Diğer yandan, öğrencinin düşünme sürecini aktarmaya çalıştığı metin de matematiksel açıdan geçerli ve doğru değildir. Bu da, öğrencinin iletişim bileşeninin metinsel iletişim alt bileşeni yönünden sorun yaşadığını göstermektedir.

Öğrencinin iletişim bileşeninin sözel iletişim alt bileşeni yönünden değerlendirilmesi için görüşme yapılmıştır.

> Araştırmacı: Süreçte çizdiğiniz grafikten yararlandınız mı?
>
> Öğrenci: Evet, hatta direkt şekilden yaptım ben.
>
> Araştırmacı: Yazdıklarınızı bana biraz daha ayrıntılı şekilde açıklayabilir misiniz?
>
> Öğrenci: Grafik zaten kırık çıktı. Kırık oldu mu orada bir sorun var zaten. Ben de bunu bildiğimden buradan gitmek istedim. Başka bir şey yapmaya ihtiyaç hissetmedim.
>
> Araştırmacı: Peki, nasıl gösterdiniz fonksiyonun bu noktada türevli olmadığını?
>
> Öğrenci: Kırıklığın olduğu yer zaten $x = 1$ noktası. Buradan teğeti çizdim. Teğet tam yatay olur bu noktada.
>
> Araştırmacı: Neden?
>
> Öğrenci: Çünkü sivri nokta. Yani grafiğin en sivrildiği yer. Parabolün tepe noktası gibi yani. Başka da çizemem, direkt yatay doğru çizilir teğet olarak. Yoksa yani başka çizsem şöyle eğik bir şey çizsem mesela fonksiyonun grafiğini kesme riski var. Ee, o zaman da teğet olmaz yani. O yüzden bir tek bunu çizebilirim. Bunun da eğimi tanımsız.
>
> Araştırmacı: Nereden anladınız?
>
> Öğrenci: Yatay olduğundan. Yatay doğruların eğimi tanımsız olur.
>
> Araştırmacı: Bunu göstermeniz mümkün mü?
>
> Öğrenci: Eğimin tanımsız olduğunu mu?
>
> Araştırmacı: Evet.
>
> Öğrenci: Yani tam olarak bilmiyorum nasıl gösteririm ama aklımda kalmış yani biliyorum; yatay doğruların eğimi tanımsız olur.

Araştırmacı: Eğimin tanımsız olması sizin için tam olarak ne ifade ediyor?

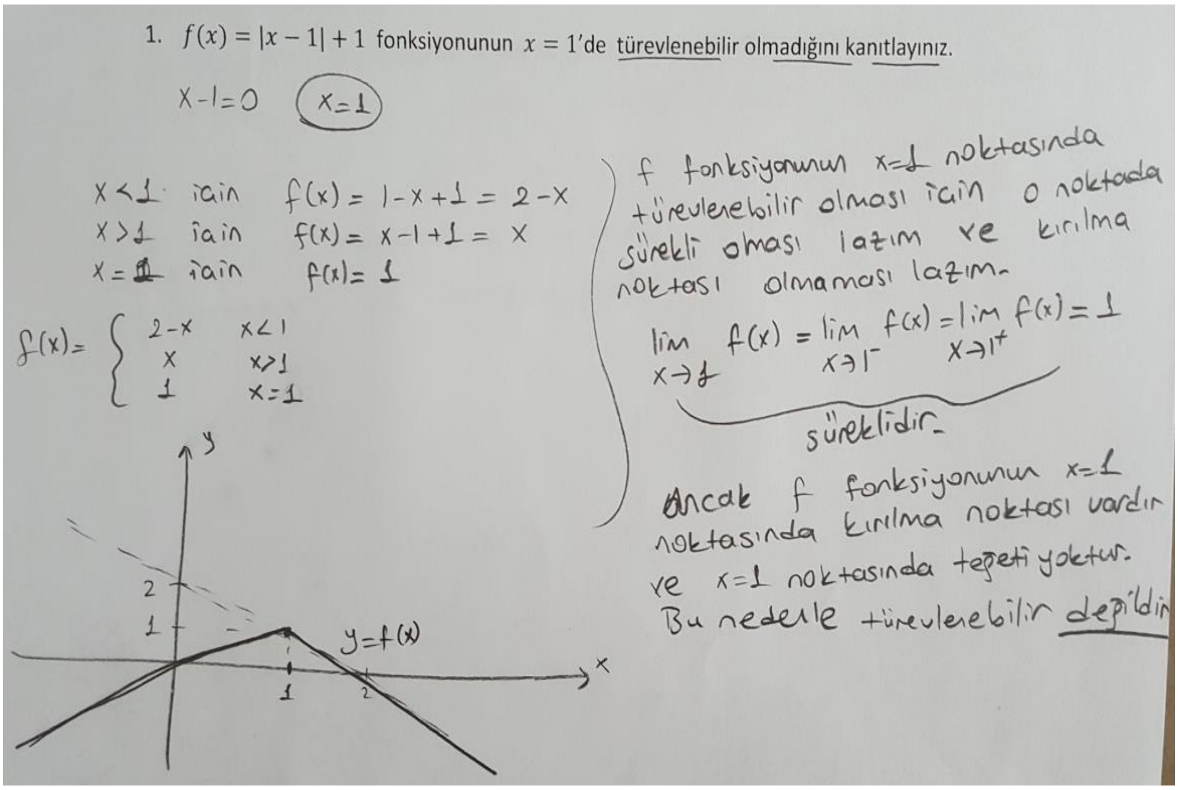
Öğrenci: Yani eğikliği, aslında doğrunun eğik duruşunun bir ölçüsü yani. Bu da tam yatay durduğundan tanımsız.

Araştırmacı: Sonra ne yaptınız?

Öğrenci: Türevin geometrik yorumundan yaptım aslında. Bir noktadaki türev o noktadaki teğetin eğimine eşit direkt olarak. Grafikten anladım ki $\mathrm{x} = 1$'de bu fonksiyonun grafiği kırılıyor. O zaman, bu noktada teğet yatay çizilir. Yatay doğrunun da eğimi tanımsız olduğundan yani bir eğim bulamadığımdan bu noktada türev de yoktur dedim.

Öğrencinin bir fonksiyonun bir noktadaki türevinin, fonksiyonun grafiğine o noktada çizilen teğetin eğimine eşit olduğunu bildiği görülmektedir. Ancak sonrasında yanlış ve ezbere bilgileri üzerine sürecini yapılandırmaya çalıştığı dikkat çekmektedir. Görüşme verileri, öğrencinin başlangıçta kanıtı yapmak için seçtiği aracı, yani fonksiyonun bir noktada türevlenebilmesini o noktada çizilen teğetin eğimi üzerinden belirleme yöntemini, yanlış bilgileri nedeniyle amacına uygun şekilde kullanamadığını bir kez daha göstermektedir. Bu durum, öğrencinin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin görsel ve formel gerekliliklerinde yaşadığı sorunların, teleolojik bileşenini olumsuz etkilediğine ilişkin görüşümüzü desteklemektedir. Attığı adımların nedenini matematiksel olarak doğru ve geçerli ifadelerle açıklayamayan ve kanıt yapma sürecindeki hatalarını devam ettiren öğrencinin, iletişim bileşeninin sözel iletişim alt bileşeninin gerekliliklerini sağlayamadığı görülmüştür. Bu ise hatalı ve ezbere bilgilerinden ve bu doğrultuda süreçte yanlış ve geçersiz araçlar seçmesinden kaynaklanmaktadır. Bu durum, epistemik ve teleolojik bileşende yaşanan sorunların, öğrencinin iletişim bileşeninin sözel iletişim alt bileşenini de olumsuz etkilediğini göstermektedir.

Fonksiyonun grafiğini çizen ve grafiğe $x = 1$ noktasında çizilen teğetler üzerinden bu noktada türevlenemediğini göstermek isteyen öğrencilerden bazılarının, grafiği yanlış çizdiği görülmüştür. Şekil 55'te bu duruma örnek bir kanıt yapma sürecine yer verilmektedir.



Şekil 55. Epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin görsel ve formel gerekliliklerinde eksiklik.

Öğrenci fonksiyonun grafiğini yanlış çizdiğinden epistemik bileşenin modelleme alt bileşenin görsel gerekliliklerini sağlayamamıştır. Sonrasında fonksiyonun $x = 1$ noktasında türevli olabilmesi için sürekli olması gerektiğini belirten öğrenci, fonksiyonun bu noktadaki sürekliliğini incelemiştir. $x < 1,\ x > 1$ ve $x = 1$ için fonksiyonun cebirsel ifadelerini yazmış ve bu ifadeleri göz önüne alarak $x, 1$'e sağdan ve soldan yaklaşırken fonksiyonunun limit değerini hesaplamış ancak bu ortak limit değerinin, fonksiyonun o noktadaki değerine eşit olduğunu gösterme ihtiyacı duymadan fonksiyonun bu noktada sürekli olduğu sonucuna varmıştır. Fonksiyonun $x = 1$ noktasında türevlenemediğini göstermeye çalışan öğrenci, bu noktanın grafikte kırılma noktası olduğunu belirtmiş ve fonksiyonun grafiğine bu noktada teğet çizilemediğini ifade etmiştir. Ancak öğrencinin bu iddiası kanıt için yeterli değildir. Bu durum, öğrencinin kanıtını cebirin sembolik dilini kullanarak formel yoldan yapamadığını ve dolayısıyla iletişim bileşenin sembolik iletişim alt bileşeninde sorun yaşadığını göstermektedir. Bu durumun temelinde, öğrencinin bir fonksiyonun türevlenebilmesi ile ilgili formel tanımı bilmemesi yatmaktadır. Bu ise öğrencinin epistemik bileşende yaşadığı sorunun, iletişim bileşeninin sembolik iletişim alt bileşenini olumsuz etkilediğini göstermektedir.

Öğrencinin iletişim bileşeninin sözel iletişim alt bileşeni yönünden yeterliğini değerlendirmek için görüşme yapılmıştır.

> Araştırmacı: Fonksiyonun grafiğini nasıl çizdiğinizi açıklayabilir misiniz?
>
> Öğrenci: Önce mutlak değer fonksiyonu olduğu için bu, kritik noktasını belirledim. Kritik nokta 1.
>
> Araştırmacı: Nereden anladınız?
>
> Öğrenci: Mutlak değer içindeki ifadeyi 0'a eşitledim, oradan buldum. Sonra x, 1'den küçükken, 1 iken ve 1'den büyükken inceledim. Yani dışarı çıkardım mutlak değer içindeki şeyi. Ona göre farklı farklı şeyler buldum. Sonra her özel aralıkta o parçanın grafiğini çizdim.
>
> Araştırmacı: Her özel aralık ve parça derken tam olarak ne demek istediniz? Süreçte yaptığınız şeyi tekrar yaparak anlatabilir misiniz?
>
> Öğrenci: Yani dedim ki, mesela $x < 1$ için $2 - x$ bulmuşum ya. İşte $x < 1$ iken bu doğrunun grafiğini çizdim ama $x < 1$ iken sadece; yani 1'den büyük olduğu kısmını sildim.
>
> Araştırmacı: Peki, doğru grafiğini nasıl çizdiniz?
>
> Öğrenci: Eksenleri kestiği noktaları buldum. İşaretleyip birleştirdim ama bir saniye ben yanlış yapmışım. Ama ya… Pardon ben şaşırmışım. Gitmişim bunu $x > 1$ için çizmişim. Tabi olmamış, gerisi gitti. Bir saniye düzelteyim.

Öğrenci fonksiyonun grafiğini bu kez doğru çizebilmiştir. Hatasını anlaması ve düzeltmesi bu kez, öğrencinin epistemik bileşeninin modelleme alt bileşeninin görsel gerekliliklerini sağladığını göstermektedir.

> Araştırmacı: Sonra ne yaptınız?
>
> Öğrenci: Sürekliliğine baktım.
>
> Araştırmacı: Neden?
>
> Öğrenci: Çünkü sürekli değilse türevli de olamaz. Oradan kanıtlamış olurum direkt diye düşündüm ama fonksiyon sürekli.
>
> Araştırmacı: Nereden anladınız?

Öğrenci: 1'in sağında ve solunda limitini aldım fonksiyonun. Aynı çıktı. Limiti var ve hatta bu noktayı yerine koyunca fonksiyonda bu noktadaki limitiyle aynı sonuç çıkıyor. Dolayısıyla sürekli.

Araştırmacı: Yani sürekli olduğunu göstermek için tam olarak ne yapmış oldunuz?

Öğrenci: Bu noktadaki limitinin bu noktada aldığı değere eşit olduğunu gösterdim.

Araştırmacı: Burada limit değerini bulup bıraktığınızı, direkt sürekli olduğunu yazdığınızı görüyorum.

Öğrenci: Evet ya unutmuşum ama bakın şurada $f(1) = 1$ bulmuşum. Yani bulmuşum da yazmamışım.

Öğrencinin bir fonksiyonun bir noktadaki sürekliliği ve türevlenebilirliği arasındaki ilişkiyi ve bir fonksiyonun bir noktadaki sürekliliğinin tanımını doğru bildiği görülmektedir. Buraya kadar öğrencinin epistemik bileşenin modelleme alt bileşenin formel gerekliliklerini sağladığı görülmektedir. Sürekliliğin formel tanımını doğru bilmesine rağmen cebirsel dille tam yazamaması, iletişim bileşeninin sembolik iletişim alt bileşeninde sorunları olduğuna ilişkin düşüncemizi desteklemektedir. Ancak öğrenci henüz amacına uygun bir araç seçememiştir. Süreklilik üzerinden gitmesi, öğrenciyi istenen ifadenin kanıtını yapmasına yardımcı olmamıştır.

Araştırmacı: Peki, sonra ne yaptınız?

Öğrenci: Bu olmayınca yani buradan çıkmayınca ben de teğetten gitmeye karar verdim. Bu nokta fonksiyonun kırılma noktası.

Araştırmacı: Bu ne demek?

Öğrenci: Yani tam düz doğru değil. Doğru normal giderken birden burada yön değiştiriyor gibi bir şey diyebilirim. Böyle olunca da bu noktada teğet çizilemez.

Araştırmacı: Nereden anladınız?

Öğrenci: Yani açıkçası öyle kalmış aklımda. Teğet çizilir aslında çizilir de. Mesela şöyle yatay bir doğru çizerim buradan. Niye çizmeyeyim ama mesela şöyle de çizerim, böyle de çizerim. Bunların hepsi bu noktada teğet. Sorun şu ki, bu kadar farklı teğet bu kadar da farklı eğim demek. Bu da demek ki, bu noktada türev değeri teğetin eğimi olduğuna göre, birçok türev değeri çıkıyormuş gibi oluyor. Ee, bu da mümkün değil. Bu noktada tek türev değeri olması gerek ama birçok farklı değer çıkıyor. O yüzden de türevlenemez.

Araştırmacı: Peki, bu bulduğunuz sonucu türevin formel tanımını kullanarak göstermeniz mümkün mü?

Öğrenci: Böyle olmaz mı? Yani doğru değil mi?

Araştırmacı: Yanlış demek istemedim, sadece bulduğunuz sonucu formel yoldan cebirsel notasyonlar kullanarak kanıtlamanız mümkün mü diye sormak istedim.

Öğrenci: Yani açıkçası tanımını o şekilde hatırlamıyorum. Ama türev teğetin eğimi olduğu için bence bu şekilde göstermem yeterli ya.

Görüşme sürecinde kâğıt üzerindeki eksiklerini ve hatalarını düzelten; dinleyiciye süreci doğru ifadelerle aktarabilen öğrencinin, iletişim bileşeninin sözel iletişim alt bileşenin gerekliliklerini sağladığı görülmektedir. Diğer yandan türevin formel tanımını bilmediği görülen öğrencinin kanıtı cebirsel dille yapamadığı ve bulduğu sonucu formel yoldan doğrulayamadığı dikkat çekmektedir. Bu durum, öğrencinin iletişim bileşeninin sembolik iletişim alt bileşeninde sorun yaşadığına ilişkin saptamamızı desteklemektedir. Bu durumun temelinde öğrencinin bilgi eksikliği yattığından, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerinde yaşanan bu sorunun, iletişim bileşeninin sembolik iletişim alt bileşeninde sorun yaşamasına neden olduğu görülmüştür.

Bu soru kapsamında incelenen kanıt yapma süreçlerinde, öğrencilerden bazılarının fonksiyonun $x = 1$ noktasında türevlenemediğini fonksiyonun grafiği üzerinden doğrulamaya çalıştığı görülmüştür. Ancak bu öğrencilerden çoğu, fonksiyonun belli bir noktadaki türevinin geometrik yorumunu yanlış yapmış ve geçersiz bir kanıt yapma süreci üretmiştir. Bu durum, öğrencilerin bir fonksiyonun grafiğine belli bir noktada teğet doğrusu çizme ve bu teğet doğrusunun eğimini bulma gibi konulardaki bilgi eksikliklerinden kaynaklanmaktadır. Her ne kadar fonksiyonun $x = 1$ noktasında türevlenemediğini göstermek için fonksiyonun grafiğini çizmek ve türeve geometrik açıdan yaklaşmak fonksiyonun bu noktada türevlenemediğini kanıtlamak açısından doğru ve geçerli bir araç olsa da, öğrenciler bilgi eksikliklerinden dolayı bu aracı amaçlarına uygun ve doğru şekilde kullanamamışlardır. Öğrencilerin konuya ilişkin bilgi eksiklikleri, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerinde sorun yaşadıklarını göstermektedir. Bu sorun, kanıt yapma sürecinde seçtikleri aracı kullanamamalarına neden olmuş ve teleolojik bileşenin gerekliliklerini sağlayamamalarına yol açmıştır.

Soruda verilen ifadeyi süreklilik kavramından yola çıkarak kanıtlamaya çalışan öğrenciler de olmuştur. Ancak bu kez de bu öğrencilerden birçoğunun limit, süreklilik ve türev kavramlarına ilişkin yanlış bilgilere sahip olduğu görülmüştür. Öğrenciler bu kavramların formel tanımını yazma ve bu tanımları kanıt yapma sürecinde ilişkilendirerek kullanma konusunda sorun yaşamıştır. Bu durum, öğrencilerin bu kavramlara ilişkin bilgi eksiklikleri ile ilgili olup, öğrencilerin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerinde sorun yaşadıklarını göstermektedir. Tanımları bilmedikleri için bu kavramlar arasında doğru ilişkiler kuramayan ve amacına ulaşamayan öğrencilerin, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerindeki eksikliklerinin teleolojik bileşenlerini olumsuz etkilediği görülmüştür. Epistemik ve teleolojik bileşende yaşanan sorunlar, öğrencilerin iletişim bileşeninin tüm alt bileşenlerini de olumsuz etkilemiş, süreci okuyucuya ve dinleyiciye geçerli yoldan aktaramamalarına neden olmuştur.

Bölüm 5

Sonuç, Tartışma ve Öneriler

Bu çalışmanın amacı, üniversite öğrencilerinin kanıt yapma süreçlerini Habermas akılcı davranış modeli bileşenlerine göre analiz etmek, modele göre zayıf ve güçlü oldukları bileşenleri belirlemek ve bu yolla öğrencilerin kanıt yapma sürecinde yaşadıkları zorlukları ortaya çıkarmaktır. Matematikte geometri ve cebirin farklı yapıda iki alan olması ve kanıt yapma sürecinin analizine yönelik Toulmin modeli ile yapılan çalışmalarda elde edilen sonuçların geometri ve cebir alanında farklılaşmış olması (Pedemonte, 2003; 2007b; 2008); kanıt yapma sürecinin Habermas akılcı davranış modeli ile yapılacak analiz sonuçlarının da geometri ve cebir alanında farklılaşacağını düşündürmüştür. Bu nedenle geometri ve cebir alanında kanıt yapma süreçleri ayrı ayrı analiz edilmiş ve elde edilen sonuçlar kaşılaştırılmıştır. Çalışmada birinci sınıfa devam etmekte olan ortaöğretim matematik öğretmen adayları ile çalışılmıştır.

Kanıt yapma süreçlerinin analizi sırasında Habermas akılcı davranış modelinde yer alan epistemik bileşenin modelleme alt bileşeni kapsamına yeni alt bileşenlerin eklenmesine ihtiyaç duyulmuştur. Özellikle geometri alanında yapılan analizlerde şekli doğru çizebilen ancak denklemi doğru kuramayan ya da şekli yanlış çizen ancak çizdiği şekle uygun denklemi doğru kurabilen öğrenciler olduğu görülmüşür. Bu bağlamda, soruda verilen koşullara uygun şekli çizebilme yeterliliği “görsel gereklilik (visual requirement)”; şekle uygun denklemi yazabilme yeterliliği ise “formel (biçimsel) gereklilik (formal requirement)” adı altında, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin iki yeni alt bileşeni olarak modele eklenmiştir.

Diğer yandan hem geometri hem de cebir alanında yapılan analizler sırasında, iletişim bileşeninin de yeni alt bileşenlerinin ortaya çıkabileceği fark edilmiştir. Bazı öğrencilerin kanıt yapma sürecinde matematiğin sembolik dilini doğru ve amacına uygun şekilde kullanabildiği görülmüştür. Bazılarının ise kanıt yaparken geçirdiği düşünme sürecini açıklayıcı metin yazarak aktardığı saptanmıştır. Diğer yandan, görüşme sırasında kanıt yapma sürecini tamamlayamamış olsa da, gelebildiği yere kadar ürününü açık ve anlaşılır biçimde dinleyiciye aktarabilen öğrencilerin de olduğu belirlenmiştir. Buradan yola çıkarak, öğrencinin kanıt yapma sürecinde kullandığı adımları metin yazarak aktarması konusundaki yeterliği “metinsel iletişim”; matematiksel dil ve notasyon kullanımı konusundaki yeterliği “sembolik iletişim” ve görüşme sürecinde kanıtını bir başkasına aktarırken kurduğu sözel iletişimdeki yeterliği “sözel iletişim” alt bileşeni olarak Habermas akılcı davranış modelinde iletişim bileşeni kapsamına eklenmiştir.

Bu bölümün devamında, öğrencilerin geometri alanında kanıt yapma süreçlerinin analizinde elde edilen sonuçlara yer verilecektir.

Geometri Alanında Elde Edilen Sonuçlar

Düzgün sekizgen sorusu kapsamında analiz edilen örneklerde, bazı öğrencilerin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin görsel gerekliliklerindeki eksikliklerinden dolayı süreci tamamlayamadığı görülmüştür. Soruda verilen kriterlere göre şekli doğru çizemeyen bu öğrenciler, şekli amacına uygun kullanamamış ve kanıt için gerekli aracı bulamamıştır. Bu durum, bu öğrencilerin epistemik bileşeninin modelleme alt bileşeninin görsel gerekliliklerindeki eksikliklerinin, teleolojik bileşende sorun yaşamalarına neden olduğunu göstermiştir. Bazı öğrenciler ise şekli doğru çizebilmiş ancak bilgi eksikliklerinden dolayı şekildeki yamuğun alan denklemini ve düzgün sekizgenin toplam alan denklemini doğru kuramamıştır. Bu durum, öğrencilerin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerinde sorun yaşamasına neden olmuştur. Bilgi eksiklikleri, öğrencilerin teleolojik bileşende de sorun yaşamalarına; alan denklemlerini kurmak için gerekli araçları doğru seçememelerine neden olmuştur.

Düzgün sekizgen sorusu kapsamında analiz edilen kanıt yapma süreçleri, Habermas akılcı davranış modeline yeni alt bileşenlerin eklenmesine ihtiyaç duyulduğunu göstermesi yönünden önemlidir. Görüldüğü gibi, öğrencilerden bazıları soruda verilen kriterlere uygun şekli çizebilmekte ve şekil üzerinde amacına uygun düzenlemeleri yapabilmektedir. Ancak bu öğrenciler her ne kadar şekli doğru çizebilmiş olsa da; son aşamada amacına uygun doğru aracı seçemediğinden, yamuğun alan denklemini kuramamış; dolayısıyla sekizgenin toplam alan denklemini oluşturamamış ve amacına ulaşamamıştır. Bu durum, verilen koşullara uygun şekli çizebilmenin ve bu şekle uygun denklemi yazabilmenin birbiri ile ilişkili ama birbirinden farklı iki yeterlik alanı olduğunu göstermektedir. Daha ayrıntılı analiz yapmak adına, öğrencilerin soruda verilen kriterlere uygun şekli çizebilmesi ve şekil üzerinde uygun düzenlemeler yapabilmesi epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin görsel gereklilikleri kapsamında; şekle uygun denklemi yazabilmesi ise formel gereklilikleri kapsamında analiz edilmiştir.

Diğer yandan bu soru kapsamında analiz edilen kanıt yapma süreçlerinde, öğrencilerin düşünme süreçlerini ifade etme şekillerinin farklılık gösterdiği açık olarak görülmüştür. Bazıları kanıt yapma sürecinin tamamını formel dil kullanarak aktarırken, bazıları formel dil kullanmak yerine metin yazarak süreci aktarmayı tercih etmiştir. Diğer yandan, öğrencilerle yapılan görüşmelerde, bazı öğrencilerin kâğıt üzerinde doğru sonuçlar elde etmesine rağmen, görüşmede bu adımlarının nedenlerini açık olarak ve yeterli düzeyde açıklayamadıkları görülmüştür. Aksine kanıt yapma sürecinde attığı adımları formel dil kullanarak ya da metin yazma yoluyla açıklama ihtiyacı hissetmeyen ancak görüşme sürecinde kanıt yapma sürecini dinleyiciye açık ve anlaşılır bir dille açıklayabilen öğrenciler olduğu da görülmüştür. Bu sonuçlar, öğrencilerin kanıt yapma sürecinde iletişim kurmasının, matematiğin sembolik ve formel dilini kullanma, düşünme sürecini metinsel yolla açıklama, iddialarını sözel yolla aktarma şeklinde üç farklı yolu olduğunu ve bu bağlamda Habermas akılcı davranış modelinin iletişim bileşeninin sembolik, metinsel ve sözel iletişim alt bileşenleri olmak üzere yeni alt bileşenlerine ihtiyaç duyulduğunu göstermektedir. Bu bağlamda yapılan analizlerde, epistemik ve teleolojik bileşende yaşanan sorunların, öğrencilerin süreci tamamlayamamasına ve okuyucuya ya da dinleyiciye geçerli bir süreç aktaramamasına yol açtığı; dolayısıyla da iletişim bileşeninin tüm alt bileşenlerini olumsuz etkilediği görülmüştür.

Kare sorusu kapsamında analiz edilen kanıt yapma süreçlerinde öğrencilerin çoğunlukla, soruda verilen kriterlere uygun şekli çizebildiği; şekil üzerinde gerekli ve doğru düzenlemeleri yapabildiği görülmüştür. Diğer yandan, verilen ifadenin kanıtını yapmak için gerekli ve uygun aracı doğru seçebildikleri ancak bu aracı kullanma konusunda sorun yaşadıkları ve ifadenin kanıtı için gereken denklemi/modeli kuramadıkları dikkat çekmiştir. Bu durum, Habermas akılcı davranış modeline göre, kanıt için gerekli aracı doğru seçme ve kullanma ile ilgili olan teleolojik bileşende yaşanan sorunların, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerini olumsuz etkilediğini göstermiştir. Diğer yandan, öğrencilerin kanıtı yapmak için seçtikleri aracı kullanma konusunda yaşadıkları sorunun temelinde konu ile ilgili bilgi eksiklikleri yatmaktadır. Bu durum, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerinde yaşanan sorunların da, teleolojik bileşeni olumsuz etkilediğini göstermektedir. Bu ise Habermas akılcı davranış modelinde, epistemik ve teleolojik bileşeninin karşılıklı ve güçlü bir etkileşim halinde olduğu anlamına gelmektedir. Diğer yandan, bu öğrencilerin şekli doğru çizmesine ve şekil üzerinde ifadenin kanıtı için gerekli düzenlemeleri yapmış olmasına rağmen kanıt için gereken denklemleri/modelleri kuramaması; kanıt yapma süreçlerinin Habermas akılcı davranış modeli ile yapılan analizlerinde, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin, görsel ve formel gereklilikleri şeklinde ikiye ayrılması gerektiğine yönelik düşüncemizi desteklemiştir.

Çemberde yaylar sorusu kapsamında öğrencilerin kanıt yapma süreçleri genel anlamda değerlendirildiğinde, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin görsel ve formel gerekliliklerini sağlayan öğrencilerin çoğunluğunun, kanıt yapma süreci için gerekli araçları doğru seçebildiği ve kullanabildiği ve böylece teleolojik bileşenin gerekliliklerini sağlayabildiği görülmüştür. Diğer yandan, bazı öğrencilerin bir üçgeninin ya da yarım çemberin alanını yazmak gibi temel bilgi eksiklikleri olduğu görülmüştür. Bu eksiklikler, öğrencilerin daha üst düzey alan denklemleri oluşturmasına engel olmuş ve epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerinde sorun yaşamalarına yol açmıştır. Bazı öğrenciler ise şekli çizme ve amacına uygun kullanma konusunda sorun yaşamıştır. Bu öğrencilerin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin görsel gerekliliklerinde yaşadıkları sorun, epistemik bileşeninin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerini ve teleolojik bileşeni olumsuz etkilemiştir.

Diğer yandan, epistemik bileşenin sistemik alt bileşeninde yaşanan sorunlar, bazı öğrencilerin çember denklemini yanlış kurmasına yol açmıştır. Bu öğrencilerin epistemik bileşenin sistemik alt bileşeninde yaşadığı sorunun, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerini olumsuz etkilediği görülmüştür. Bazı öğrencilerin ise sayısal değerler kullanarak bu soruda verilen ifadenin doğruluğunu göstermeye çalıştığı görülmüştür. Bu durum, bu öğrencilerin iletişim bileşeninin sembolik iletişim alt bileşeninde eksiklikleri olduğunu göstermiş ve formel kanıt yapma kurallarına uygun olmayan bir süreç ortaya koymalarına neden olmuştur. Bu durum, öğrencilerin formel yoldan kanıt yapmalarını sağlayacak tarzda araçlar seçmelerini ve bu araçları sahip oldukları bilgiler çerçevesinde doğru kullanmalarını engellemiştir. Buradan, öğrencilerin iletişim bileşeninin sembolik iletişim alt bileşeninde yaşadığı sorunların, epistemik ve teleolojik bileşenlerini olumsuz etkileyebileceği görülmüştür.

Benzerlik sorusu kapsamında analizi yapılan kanıt yapma süreçlerine bakıldığında, öğrencilerin genellikle üçgenler arasında benzerlik kurmak yerine Kosinüs teoremini kullanarak soruda verilen ifadeyi kanıtlamaya çalıştığı görülmüştür. Ancak Kosinüs teoremi, söz konusu ifadenin kanıtı için uygun bir araç değildir. Buradan, öğrencilerin kanıt yapma sürecinde genellikle teleolojik bileşende sorun yaşadığı anlaşılmaktadır. Diğer yandan şekildeki üçgenler arasında benzerlik olduğunu gören ve bu yolla ifadeyi kanıtlamayı tercih eden öğrencilerin çoğunun benzer üçgenleri doğru belirleyemediği görülmüştür. Bu durum, kanıt yapma sürecinde başarılı olma konusunda öğrencinin amacına uygun araç seçmesinin ve kullanmasının önemini göstermektedir. Bu ise Habermas akılcı davranış modeli ile kanıt yapma süreçlerinin analizinde teleolojik bileşenin yeri ve önemini ifade etmektedir. Bu öğrencilerin kanıt için geçerli bir araç seçmelerine rağmen bu aracı kullanamamalarının nedeninin, epistemik bileşenin modelleme alt bileşenin görsel gerekliliklerindeki eksiklikleri olduğu belirlenmiştir. Soruda eşit olduğuna ilişkin bir veri olmadığı halde, bazı açıları eşit kabul etmeleri ve benzer üçgenleri yanlış belirlemeleri, şekli doğru ve amaçlarına uygun kullanamamalarından kaynaklanmaktadır. Bu ise öğrencilerin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin görsel gerekliliklerinde sorun yaşadığını ve bu sorunun bir sonucu olarak kanıtı yapmak için seçtikleri aracı doğru kullanamadıklarını göstermektedir. Bu bağlamda, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin görsel gerekliliklerinin, teleolojik bileşeni olumsuz etkilediği görülmektedir.

Bazı öğrencilerin benzer üçgenleri doğru belirleyemediği ve bunun bir sonucu olarak benzerlik oranını yanlış kurduğu ve sembolik dille yanlış yazdığı; bazılarının ise benzer üçgenleri doğru belirlemiş olmasına rağmen üçgenlerin benzerliğini notasyon kullanarak ifade edemediği ve bu üçgenlerde eşit açıların karşısındaki kenarları kullanarak oluşturdukları orantıyı sembolik dille yazamadığı görülmüştür. İlk durum öğrencilerin yanlış araç seçmesi ve kullanması ile ilgili olan teleolojik bileşende yaşadıkları sorundan kaynaklanırken; ikinci durum öğrencilerin sembolik dili ve notasyonları kullanma konusundaki bilgi eksiklerinden kaynaklanmaktadır. Bu durum, çemberde yaylar sorusu kapsamında, öğrencilerin epistemik ve teleolojik bileşende yaşadığı sorunların, iletişim bileşeninin sembolik iletişim alt bileşenini olumsuz etkilediğini göstermektedir. Bazı öğrenciler ise sürece ilişkin metinsel açıklama yazmayı tercih etmiştir ancak bu açıklamalar öğrencilerin epistemik ve teleolojik bileşende yaşadığı sorunlardan olumsuz etkilendiğinden ve dolayısıyla geçerli olmadığından; öğrencilerin iletişim bileşeninin metinsel iletişim alt bileşeninde de sorun yaşamasına neden olmuştur.

Diğer yandan, öğrencilerin epistemik bileşendeki gücünün, diğer bileşenlerini olumlu etkilediği de görülmüştür. Öğrenci şekli amacına uygun biçimde kullanabilme ve şekil üzerinde doğru düzenlemeler yapabilme yeterliğine ve matematiksel açıdan doğru bilgilere sahip olduğunda, süreçte denediği bir yol işe yaramadığında bu yolu değiştirerek yeni girişimlerde bulunabilmekte, seçtiği araçları amacına uygun ve doğru biçimde kullanabilmektedir. Bu bağlamda, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin görsel ve formel gerekliliklerindeki gücünün, teleolojik bileşenini olumlu etkilediği düşünülmektedir. Bunun yanı sıra, öğrencinin sahip olduğu doğru bilgiler ve bu bilgilerin nereden geldiğine hakim olması, iletişim bileşenini de güçlendirmektedir. Bu da, öğrencinin epistemik bileşendeki gücünün, iletişim bileşeninin tüm alt bileşenlerini olumlu etkilediğini göstermektedir.

Bu bölümün devamında, öğrencilerin cebir alanında kanıt yapma süreçlerinin analiz sonuçlarına yer verilecek ve bu sonuçlar alan yazında yer alan diğer çalışma sonuçları ile karşılaştırılacaktır.

Cebir Alanında Elde Edilen Sonuçlar

Çift sayı sorusu kapsamında analiz edilen kanıt yapma süreçleri incelendiğinde, öğrencilerin ardışık iki çift sayıyı cebirsel olarak yazabildiği ve bu sayıların cebirsel temsillerinin çarpımını doğru yapabildiği görülmüştür. Bu durum, öğrencilerin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerinde sorun yaşamadığını göstermiştir. Ancak kanıtın son aşamasında, ardışık iki çift sayının çarpımına ilişkin cebirsel ifadeyi elde ettikten sonra bu ifadenin 8'in katı olduğunu göstermek için doğru aracı seçemedikleri ve kullanamadıkları görülmüştür. Bu durum, öğrencilerin teleolojik bileşende sorun yaşadığını ve bu nedenle, kanıt yapma sürecinde başarısız olduğunu göstermiştir. Öğrenciler genellikle bu aşamada kanıta sembolik dille devam etmeyi bırakıp, metinsel açıklama yapma yoluna gitmişler ya da elde ettikleri cebirsel ifadeye sayısal değerler vererek ifadenin doğruluğunu göstermeye çalışmışlardır. Öğrencilerin bu aşamada teleolojik bileşende yaşadığı sorun, iletişim bileşeninin tüm alt bileşenlerini de olumsuz etkilemiştir. Boero & Morselli (2009) de, Habermas akılcı davranış modeli ile öğrencilerin cebir alanında problem çözme süreçlerini analiz ettikleri çalışmalarında, benzer bir sonuçla karşılaşmışlardır. Bazı öğrencilerin yalnızca sonuca ulaşmak için süreçteki bazı adımlarını amaçlarına uyacak şekilde değiştirdiklerini; hem yazılı kanıt yapma sürecinde hem de görüşme sürecinde muhakeme adımlarını açıklayamadıklarını ve doğrulayamadıklarını görmüşlerdir. Araştırmacılara göre, bu durum, bu çalışmada elde edilen sonuçlara paralel olarak, teleolojik bileşendeki eksikliklerin iletişim bileşenini olumsuz etkilediğini göstermektedir. Diğer yandan Boero (2006), yedinci sınıf öğrencisi ile yaptığı bir çalışmasında, öğrencinin cebir alanından bir soru için ürettiği problem çözme sürecini, Habermas akılcı davranış teorisinin bileşenlerine göre analiz etmiş ve öğrencinin iletişim bileşenindeki gücünün, teleolojik ve epistemik bileşenlerini olumlu etkilediğini ve bu sayede geçerli bir çözüm süreci oluşturmasına katkı sağladığını görmüştür.

Bire bir ve örten fonksiyon sorusu kapsamında analiz edilen kanıt yapma süreçlerinde, formel tanımları kullanarak ifadeyi kanıtlamaya çalışan öğrencilerin çoğunun, bu tanımları yanlış bildiği görülmüştür. Bir fonksiyonun bire bir ya da örten olmasına ilişkin formel tanımlar, bu öğrencilerin kanıt yapma sürecinde kullandığı araçlardır. Söz konusu araç, soruda verilen ifadenin kanıtı için uygundur ancak öğrenciler formel tanımları yanlış bildiklerinden seçtikleri aracı da yanlış kullanmışlardır. Bu durum, öğrencilerin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerindeki eksikliklerinin, teleolojik bileşende sorun yaşamalarına neden olduğunu göstermektedir. Benzer şekilde Boero ve Morselli (2009) de, epistemik bileşenin modelleme alt bileşenindeki eksikliklerin, teleolojik bileşende sorunlara yol açtığını bulmuşlardır. Bir diğer çalışmalarında ise epistemik akılcılığın teleolojik akılcılığı desteklediği bir durumla karşılaşmışlar ve epistemik akılcılığın gücünün teleolojik akılcılığı olumlu etkilediğini görmüşlerdir

(Morselli ve Boero, 2009). Bu durum, Habermas akılcı davranış modelinde, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin, teleolojik bileşen üzerinde önemli bir etkisi olduğunu göstermektedir.

Bu soru kapsamında yapılan analizlerde, formel tanımları yanlış bilmek, öğrencilerin iletişim bileşeninin tüm alt bileşenlerini de olumsuz etkilemiştir. Bu durum, öğrencilerin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerindeki eksikliklerinin, iletişim bileşeninin gerekliliklerini genel olarak sağlamalarını olumsuz etkilediğini göstermiştir. Benzer şekilde Morselli & Boero (2009), matematik bölümü öğrencileri ve ilköğretim matematik öğretmen adayları ile yaptıkları çalışmalarında, argümantasyon ve kanıt yapma süreçlerini Habermas akılcı davranış modelini kullanarak analiz etmişler ve epistemik bileşen ile iletişim bileşeni arasında güçlü bir etkileşim olduğunu görmüşlerdir.

Bir fonksiyonun bire bir ve örten olmasına ilişkin tanımları doğru bilen ancak süreçte bu tanımları kullanamayan öğrencilerin olduğu da görülmüştür. Bu öğrenciler, tanımı süreçte amaçlarına uygun şekilde kullanma konusunda sorun yaşamışlar ve dolayısıyla teleolojik bileşenin gerekliliklerini sağlayamadıkları için süreçte başarısız olmuşlardır. Bu durumun temelinde, öğrencilerin epistemik bileşenin sistemik alt bileşeninde yaşadığı sorunların olduğu değerlendirilmiştir. Bazı öğrencilerin ise soruda verilen ifadenin kanıtı için uygun aracı seçtiği ve kullandığı; dolayısıyla teleolojik bileşenin gerekliliklerini sağladığı; aynı zamanda doğru modeller/denklemler kurarak epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerini sağladığı ancak son aşamada bir an önce sonuca ulaşma düşüncesi ile acele ettiği, bu nedenle de kanıt yapma sürecinin son aşamasında geçersiz bir adım attığı görülmüştür. Analizi yapılan bu kanıt yapma süreçlerinde, son aşamada, teleolojik bileşende yaşanan sorunun, epistemik bileşeni de olumsuz etkilediği ve epistemik bileşendeki kontrolün yitirilmesine neden olduğu düşünülmektedir. Bu sonuç, Boero ve Morselli (2009)'nin çalışma sonuçları ile paralellik göstermektedir. Bu araştırmacılar, öğrencilerin bir an önce sonuca ulaşma düşüncesi ile acele ettikleri durumlarla karşılaşmışlardır. Bu öğrencilerin, çözüm için kendilerine gereken doğru aracı seçme ve kullanma konusunda sorun yaşadığını; bu durumun öğrencilerin süreçte doğru model/denklem kurmasını ve geçerli yoldan sonuca ulaşmasını engellediğini görmüşlerdir. Boero ve Morselli (2009), çalışmamızda elde edilen sonuca benzer şekilde, bu durumu teleolojik bileşende yaşanan sorunların epistemik bileşeni olumsuz etkilediği şeklinde yorumlamışlardır.

11 ile bölünebilme sorusu kapsamında yapılan analizlerde, tümevarım yöntemiyle kanıt yapmak isteyen öğrencilerin başarısız olduğu görülmüştür. Öğrenciler, tümevarımın son adımında elde ettikleri ifadeyi amaçlarına uygun şekilde kullanma konusunda sorun yaşamışlar ve teleolojik bileşenin gerekliliklerini sağlayamamışlardır. Bu aşamada bazı öğrencilerin amaçlarına ulaşmak için matematiksel kurallara aykırı işlemler yaptığı da görülmüştür. Bu durumun temel nedeni, dikkatsizlik değil; öğrencilerin üslü sayılarla işlem yapma konusundaki temel bilgi eksiklikleridir. Bu da, öğrencilerin epistemik bileşenin sistemik alt bileşeni yönünden sorunları olduğunu göstermektedir. Öğrencilerin bu sorunları, son aşamada geçersiz denklemler kurmalarına da yol açtığından, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerinde sorun yaşamalarına neden olmuştur. Bu durum, öğrencilerin iletişim bileşeninin tüm alt bileşenlerini de olumsuz etkilemiştir. Modüler aritmetik yöntemiyle kanıt yapmayı tercih eden öğrencilerin tümü başarılı olmuştur. Bu öğrenciler, ifadenin kanıtı için uygun bir araç seçebilmiş ve bu aracı doğru kullanabilmiştir. Sürecin tamamında gerekli ve amaçlarına uygun adım atabildiklerinden teleolojik bileşenin gerekliliklerini sağlayabilmişlerdir. Öğrencilerin teleolojik bileşendeki güçleri, epistemik bileşendeki güçlerinden beslenmektedir. Benzer şekilde Morselli & Boero (2009) da çalışmalarında epistemik bileşenin, teleolojik bileşeni desteklediğini görmüşlerdir.

Diğer yandan, öğrencilerin süreçte doğru modeller/denklemler kurması ve bu denklemleri doğru çözmesi, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerini ve sistemik alt bileşeninin gerekliliklerini sağlayabildiklerini göstermektedir. Ancak özellikle modüler aritmetik yöntemi ile kanıt yapmayı tercih eden öğrencilerin, süreçte başarılı olmalarına rağmen, süreci okuyucuya aktarırken modüler aritmetiğe özgü sembolik dil ve notasyon kullanımı konusunda özensiz davrandıkları görülmüştür. Bu durum, öğrencilerin iletişim bileşeninin sembolik iletişim alt bileşeninin gerekliliklerini sağlayamadıklarını göstermiştir. Buradan, bazı kanıt yapma süreçlerinde, öğrencilerin epistemik ve teleolojik bileşen yönünden güçlü olmalarına rağmen, bu bileşenlerdeki güçlerini iletişim bileşenine yansıtamadıkları görülmüştür.

Türevlenebilme sorusu kapsamında incelenen kanıt yapma süreçlerinde, öğrencilerden bazılarının fonksiyonun $x = 1$ noktasında türevlenemediğini fonksiyonun grafiği üzerinden doğrulamaya çalıştığı görülmüştür. Ancak bu öğrencilerden çoğu, fonksiyonun belli bir noktadaki türevinin geometrik yorumunu yanlış yapmış ve geçersiz bir kanıt yapma süreci üretmiştir. Bu durum, öğrencilerin bir fonksiyonun grafiğine belli bir noktada teğet çizme ve bu teğet doğrusunun eğimini bulma gibi konulardaki bilgi eksikliklerinden kaynaklanmaktadır. Öğrenciler bilgi eksikliklerinden dolayı seçtikleri aracı süreçte amaçlarına uygun ve doğru şekilde kullanamamış ve dolayısıyla teleolojik bileşenin gerekliliklerini sağlayamamışlardır. Bu durum, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerinde yaşanan sorunun, kanıt yapma sürecinde seçtikleri aracı kullanamamalarına ve dolayısıyla teleolojik bileşenin gerekliliklerini sağlayamamalarına yol açtığını göstermektedir.

Soruda verilen ifadeyi süreklilik kavramından yola çıkarak kanıtlamaya çalışan öğrenciler de olmuştur. Ancak bu kez de, bu öğrencilerden birçoğunun limit, süreklilik ve türev kavramlarına ilişkin yanlış bilgilere sahip olduğu görülmüştür. Bu durum, bir kez daha, öğrencilerin epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerinde sorun yaşadıklarını göstermektedir. Tanımları bilmedikleri için bu kavramlar arasında doğru ilişkiler kuramayan ve amacına ulaşamayan öğrencilerin, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerindeki eksikliklerinin, teleolojik bileşenlerini de olumsuz etkilediği görülmüştür. Bu sonuç, Boero ve Morselli (2009)'nin çalışmalarında elde ettikleri sonuç ile paralellik göstermektedir. Boero ve Morselli (2009), epistemik bileşenin modelleme alt bileşenindeki eksikliklerin, teleolojik bileşende eksikliklere yol açtığını bulmuşlardır. Epistemik ve teleolojik bileşende yaşanan sorunlar, öğrencilerin iletişim bileşeninin tüm alt bileşenlerini de olumsuz etkilemiş, süreci okuyucuya ve dinleyiciye geçerli yoldan aktaramamalarına neden olmuştur. Bu da, Boero ve Morselli (2009)'nin çalışma sonuçları ile paralellik göstermektedir. Boero & Morselli (2009), bazı öğrencilerin amaçlarına uygun araç seçemediklerini; ne olursa olsun bir sonuç elde etme gayretine girdiklerini görmüşler ve bu öğrencilerin teleolojik bileşendeki eksikliklerinin, iletişim bileşenini olumsuz etkilediğini ifade etmişlerdir.

Geometri ve Cebir Alanında Elde Edilen Sonuçların Karşılaştırılması

Geometri alanında kanıt yapma süreçlerinde, öğrencilerin zaman zaman belli bir matematiksel dayanağı olmayan iddialar ürettiği görülmüştür. Bu öğrencilerin bir an önce amaca ulaşma kaygısıyla hareket ettiği ve bu nedenle herhangi bir üçgenin özel bir üçgen (ikizkenar, eşkenar ya da dik) olduğunu, bir üçgenin tepe noktasından indirilen yüksekliğin tabanı iki eş parçaya ayırdığını, herhangi bir açının yalnızca görüntüsü itibariyle dik açı olduğunu düşündüğü dikkat çekmektedir. Öğrencilerin bu iddiaları, bilgi eksikliğinden ya da hatalı bilgiden kaynaklanıyor ise epistemik bileşende sorun; kanıt yapma sürecinde yanlış ve geçersiz araç seçmesinden kaynaklanıyor ise teleolojik bileşende sorun olarak değerlendirilmiştir. Öğrencilerin ürettiği geçersiz iddialar, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerini olumsuz etkilemekte ve geçersiz modeller/denklemler üretmelerine neden olmaktadır. Bu durum ile cebir alanında kanıt yapma süreçlerinin analizinde pek karşılaşılmamıştır. Bu durumun, geometri alanında kanıt yaparken kullanılan aracın, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin görsel gereklilikleri ile cebir alanındakine kıyasla daha güçlü bir ilişki içinde olmasından kaynaklandığı düşünülmektedir. Bu ise Fischbein (1983)'ın geometride şeklin önemini vurgulayarak yeni bir kavram olarak ortaya attığı şekilsel kavram (figural concept) ile yakından ilişkilidir. Geometri, cebirden farklı olarak görsel düşünmeyi ve akıl yürütmeyi gerektirdiğinden, verilen ifadeye uygun şekli çizmek ve şekil üzerinde gerekli ve doğru düzenlemeler yapabilmek, geometri alanında kanıt yapma sürecini bütünüyle etkilemektedir.

Geometri alanı ile kıyaslandığında, cebir alanındaki kanıt yapma süreçlerinde iletişim bileşeninin sembolik iletişim alt bileşeninin gerekliliklerini sağlamanın, süreci başarı ile tamamlanma açısından daha büyük önem taşıdığı görülmüştür. Geometri alanında sembolik iletişim alt bileşenindeki eksiklikler, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin formel gerekliliklerini ya da teleolojik bileşeni genellikle olumsuz etkilemezken; cebir alanında kanıt yapma sürecinde bu bileşenlerin iletişim bileşeninin sembolik iletişim alt bileşeninden çoğunlukla olumsuz etkilendiği görülmüştür. Bu bağlamda, cebir alanında yapılan kanıt yapma süreçlerinde, bazı öğrencilerin sembolik iletişim alt bileşenindeki eksikliklerden dolayı, epistemik ve teleolojik bileşende sorun yaşadığı ve bunun bir sonucu olarak süreçte başarısız olduğu görülürken; geometri alanında böyle bir duruma pek rastlanmamıştır. Bu durumun, cebirin doğası gereği matematiğin sembolik dili ile iç içe olmasından kaynaklandığı düşünülmektedir.

Geometri alanında hazırlanmış sorularda verilen ifadeler için öğrencilerin ürettiği kanıt yapma süreçlerinin analizinde, argümantasyon sürecinin belirgin şekilde ortaya çıkmadığı görülmüştür. Öğrenciler düşünme ve iddia üretme süreçlerini ayrıntılı aktarmak yerine, düşünceleri doğrultusunda doğrudan kanıt yapma sürecine geçmişlerdir. Cebir alanında hazırlanmış sorularda ise verilen ifadenin kanıtını yapma sürecinin hemen öncesinde, argümantasyon sürecinin belirgin şekilde ortaya çıktığı görülmüştür. Bu durumun tersine, geometri alanında yapılan bazı çalışmalarda, öğrencilerin problem çözme sürecinden hemen önce argümantasyon süreci geçirdiği belirgin şekilde gözlenebilmiştir (Mariotti, Bartolini Bussi, Boero, Ferri & Garuti, 1997; Pedemonte, 2001; 2003; 2007a; 2007b; 2008). Ancak bu çalışmalarda kullanılan sorular problem çözme niteliğinde hazırlanmıştır ve argüman üretmeye fırsat verir niteliktedir. Bunun yanı sıra söz konusu araştırmalarda, öğrenciler grup çalışması yapmışlar ve grup arkadaşları ile tartışarak problemleri çözmüşlerdir. Bu çalışmada ise sorular kanıtı istenen ifadeler şeklinde hazırlanmıştır; yani kanıtı istenen iddialar öğrencilere soruda hazır verilmiştir. Bu bağlamda, sorularda argümanın öğrencilere hazır olarak sunulduğunu söylemek mümkündür. Bunun yanı sıra bu çalışma kapsamında, öğrenciler bireysel olarak kanıt yapmışlardır. Dolayısıyla ortaya çıkan bu farklı sonucun, geometri ve cebir alanlarının farklılığından değil; soruların problem çözme ya da kanıt yapma niteliğinde olmasından ve öğrencilerin bireysel ya da grup halinde çalışmasından kaynaklandığı düşünülmektedir.

Genel olarak analiz sonuçlarına bakıldığında, Habermas akılcı davranış modelindeki bileşenlerin birbirleri ile güçlü bir etkileşim halinde olduğu görülmüştür. Kanıt yapma süreci bazı bileşenler yönünden güçlü olan öğrencilerin, bu bileşenlerdeki gücünün diğer bileşenleri olumlu etkilediği ve kanıt yapma sürecini kolaylaştırdığı görülmüştür. Modeldeki üç bileşeninin farklı etkileşimlerinin ve bileşenlerden birinin güçlü ya da zayıf olmasının öğrencilerin kanıt yapma süreçlerini önemli ölçüde etkilediği görülmektedir. Bu sonuca paralel olarak, Morselli & Boero (2009) da, Habermas akılcı davranış modelindeki üç bileşenin farklı etkileşimlerinin ve bileşenlerden birinin baskın ya da zayıf olmasının öğrencilerin kanıttaki ya da problem çözme sürecindeki başarısını etkilediğini görmüşlerdir. Bu bağlamda, öğrencilerin kanıt yapma süreçlerini analiz etme ve süreçte yaşadıkları zorlukları belirleme konusunda, Habermas akılcı davranış modelinin önemli bir araç olduğu görülmektedir.

Öneriler

Öğretmenlere, öğrencilerinin problem çözme ve kanıt yapma süreçlerini değerlendirme konusunda Habermas akılcı davranış modelini kullanmaları önerilmektedir. Varsayım oluşturma, problem çözme ve kanıt yapma gibi süreçlerin, Habermas akılcı davranış modeline göre değerlendirilmesi, öğrencilerin doğru sonuca ulaşamadığı ya da tam anlamıyla geçerli bir çözüm ya da kanıt sunamadığı durumlarda bile, güçlü oldukları yönlerini belirlemeye fırsat sunar. Bunun yanı sıra, öğrencilerin verilen ifadeyi kanıtladığı ya da problemi geçerli bir yoldan çözdüğü ancak süreci dinleyiciye matematiğin sembolik dilini kullanarak, yazılı veya sözlü yoldan yeterli şekilde aktaramadığı durumlarda da, öğrencilerin performanslarını zayıf olan yönleriyle değerlendirmeyi sağlar. Bu bağlamda, öğretmenlerin Habermas akılcı davranış modelini bilmesi, öğrencilerin bu süreçlerdeki zayıf ve güçlü yönlerini belirlemeleri ve öğretim sürecini zayıf yönlerini geliştirmeye yönelik tasarlamaları açısından önemlidir.

Matematiğin farklı alanlarında ve konularında, Habermas akılcı davranış modelindeki bileşenler arasındaki etkileşimin nasıl ortaya çıktığının araştırılması önerilmektedir. Bu araştırmalarda, öğrencilerin kanıt yapma ya da problem çözme sürecinde, Habermas akılcı davranış modeli bileşenleri yönünden güçlü yanlarının, zayıf yanlarını geliştirme yönünde nasıl kullanılabileceği konusunda önemli sonuçlara ulaşılabilir. Bu yönde yapılacak çalışmalarda, ihtiyaç durumunda ruhuna sadık kalmak koşuluyla, modele eklemeler yapılabilir. Bu sayede, Habermas akılcı davranış modelinin geliştirilmesi ve daha ayrıntılı analizlerde kullanılması mümkün olacabilecektir.

Öğrencilerin problem çözme ve kanıt yapma süreçlerinin yanı sıra argümantasyon süreçleri de Habermas akılcı davranış modeline göre analiz edilebilir. Ancak argümantasyon sürecinin Habermas akılcı davranış modeline göre analizi sırasında, modelin bileşenlerinin gerekliliklerinde bazı değişikliklere ihtiyaç duyulacağı düşünülmektedir. Örneğin, argümantasyon sürecinde epistemik bileşenin modelleme alt bileşeninin gereklilikleri, kanıt yapma sürecinde beklenen gerekliliklerden farklılık gösterebilir. Öğrencinin örnekler üzerinden hareket ederek ya da denemeler yaparak argümantasyon süreci sonunda ortaya koyduğu iddia, öğrencinin bu süreç sonunda oluşturduğu modeldir. Ortaya konulan iddia, kanıt yapma sürecinde olduğu gibi, formel bir denklem ya da modeli değil; bir sonraki aşamada doğruluğu kanıtlanacak bir argümanı temsil edecektir. Bu bağlamda, argümantasyon sürecinin Habermas akılcı davranış modeli ile analizlerinde epsitemik bileşenin modelleme alt bileşeninin gerekliliğinin, öğrencinin süreçte geçerli bir iddia üretmesi olarak belirlenmesi önerilmektedir. Diğer yandan, argümantasyon sürecinde öğrencinin kullandığı kelimeler, prensipler, veriler, çizimler, deneme ve yanılmalar onun geçerli bir iddia üretmesini sağlıyor ise öğrenci argümantasyon sürecindeki amacına ulaşmış ve geçerli bir argüman üretmiş olacaktır. Öğrencinin amacına uygun bir argüman üretmek için doğru ve gerekli veriler kullanmasının ve doğru adımlar atmasının, argümantasyon sürecinde teleolojik bileşenin gereklilikleri olarak belirlenmesi önerilmektedir.

Habermas akılcı davranış modelinin bileşenlerinin argümantasyon süreci analizlerinde, epistemik bileşenin modelleme alt bileşeni ve teleolojik bileşen yönünden farklılaşması, argümantasyon sürecinin bittiği ve kanıt yapma sürecinin başladığı anın belirlenebilmesi açısından yararlı olacaktır. Eğer öğrenci bir ifadeyi kanıtlama sürecinde, verilen ifadede bilinmeyene uygun değerler vererek denemeler yapıyor ve örnekler üzerinden hareket ederek bir iddia üretiyorsa henüz argümantasyon aşamasındadır. Ancak ürettiği iddiaya uygun bir denklem ya da benzeri bir model kurmuş ve modeli doğrulamaya çalışıyor ise kanıt yapma sürecine geçmiş demektir. Üretilen bir iddiadan formel bir modele geçilmesi, öğrencinin argümantasyon sürecinden kanıt yapma sürecine geçtiğini gösterecektir. Diğer yandan, teleolojik bileşenin gereklilikleri yönünden bakıldığında, öğrenci süreçte amacına ulaşmak için örnek verme, yerine koyma, deneme-yanılma gibi yöntemler kullanıyor ise henüz bir iddia ortaya koymaya çalıştığı argümantasyon aşamasındadır. Ancak öğrencinin amacına ulaşmak için kullandığı bu yöntemler, süreç içinde yerini doğruluğu önceden kanıtlanmış ve matematiksel geçerliği olan teorem, matematik kural ya da prensip gibi bazı araçlara bırakmış ise bu durum, argümantasyon sürecinin sonlandığı ve öğrencinin kanıt yapma sürecine geçtiği anlamına gelmektedir.

Kaynaklar

Arzarello, F., & Sabena, C. (2011). Meta-cognitive unity in indirect proofs. *Proceedings of the 7th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 7).* Rzeszów, Poland.

Boero, P. (2006). Habermas' theory of rationality as a comprehensive frame for conjecturing and proving in school. *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2,* 185-192.

Boero, P., Douek, N., Morselli, F., & Pedemonte, B. (2010). Argumentation and proof: A contribution to theoretical perspectives and their classroom implementation. *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Belo Horizonte, Brazil.

Boero, P., Garuti, R., Lemut, E., & Mariotti, M. A. (1996). Challenging the traditional school approach to theorems: A hypothesis about the cognitive unity of theorems. *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Valencia, Spain.

Boero, P., Guala, E., & Morselli, F. (2013). Crossing the borders between mathematical domains: A contribution to frame the choice of suitable tasks in teacher education. *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2,* 97-104.

Boero P., & Morselli, F. (2009). The use of algebraic language in mathematical modelling and proving in the perspektive of Habermas' theory of rationality. *Proceedings of the 6th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 6).* Lyon, France.

Boero, P., & Planas, N. (2014). Habermas' construct of rational behaviour in mathematics education: New advances and research questions. *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vancouver. Canada.

Douek, N. (1998). Some remarks about argumentation and mathematical proof and their educational implications. *European Research in Mathematics Education, 1,* 125-139.

Douek, N. (1999). Argumentative aspects of proving: Analysis of some undergraduate mathematics students' performances. *Proceedings of the 23th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2,* 273-280.

Douek, N. (2000). Comparing argumentation and proof in a mathematics education perspective. *Ninth International Congress on Mathematical Education (ICME-9).* Tokyo/Makuhari, Japan.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics, 24,* 139-162.

Garuti, R., Boero, P., & Lemut, E. (1998). Cognitive unity of theorems and difficulty of proof. *Proceedings of the 22th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *2,* 345-352.

Heddens, J. W., & Speer, W. R. (2001). *Today's mathematics concepts and classroom methods.* New York: John Wiley & Sons.

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics, 24*(4), 389-399.

Houston, K. (2009). *How to think like a mathematician.* Cambridge University Press.

Mariotti, M. A., Bartolini Bussi M. G., Boero, P., Ferri F., & Garuti, R. (1997). Approaching geometry theorems in contexts: From history and epistemology to cognition. *Proceedings of the 21th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1,* 180-195.

Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. In En Á. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education. Past, present and future* (pp. 173-204). Rotterdam, Los Países Bajos, Sense Publishers.

Mejia-Ramos, J. P., & Inglis, M. (2008). What are the argumentative activities associated with proof? *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 28*(2), 67-72.

Morselli, F., & Boero, P. (2009). Proving as a rational behaviour: Habermas' construct of rationality as a comprehensive frame for research on the teaching and learning of proof. *Proceedings of the 6th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 6).* Lyon, France.

Morselli, F., & Boero, P. (2011). Using Habermas' theory of rationality to gain insight into student's understanding of algebraic language. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization*. *Advances in mathematics education* (pp. 453-481). Berlin Heidelberg.

Nesin, A. (2010). *Matematik ve sanat.* Nesin Yayıncılık, İstanbul.

Özer, Ö., & Arıkan, A. (2002). Lise matematik derslerinde öğrencilerin ispat yapabilme düzeyleri. *V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi,* 1083-1089.

Pedemonte, B. (2001). Some cognitive aspects of the relationships between argumentation and proof in mathematics. *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4,* 33-40.

Pedemonte, B. (2003). What kind of proof can be constructed following an abductive argumentation? *European Research in Mathematics Education III*. Bellaria, Italia.

Pedemonte, B. (2007a). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies In Mathematics, 66,* 23-41.

Pedemonte, B. (2007b). Structural relationships between argumentation and proof in solving open problems in algebra. *Proceedings of the 5th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education/European Research in Mathematics Education (CERME 5),* 643-653.

Pedemonte, B. (2008). Argumentation and algebraic proof. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 40,* 385-400.

Polya, G. (1973). *How to solve it: A new aspect of mathematical method.* Princeton, N.J. : Princeton University Press.

Sarı, M. (2011). *Üniversite öğrencilerinin matematiksel kanıt ile ilgili güçlükleri ve kanıt öğretimi*. Doktora tezi, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Stillwell, J. (1989). *Mathematics and its history.* Springer-Verlag, New York.

Struik, D. J. (1987). *A concise history of mathematics.* Courier Corporation.

Tall, D. (1989). The nature of mathematical proof. *Mathematics Teaching, 127,* 28-32.

Terzioğlu, T. (2013). *Bir analizcinin defterinden seçtikleri.* Nesin Yayıncılık A.Ş., İstanbul.

Toulmin, S. (1958). *The uses of argument.* UK: Cambridge University Press.

Velleman, D. J. (2006). *How to prove it: A structured approach.* Cambridge University Press, New York.

Weber, K., & Alcock, L. (2009). Proof in advanced mathematics classes: Semantic and syntactic reasoning in the representation system of proof. In D. A. Stylianou, M. L. Blanton & E. J. Knuth (Eds.), *Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective* (pp. 323-338). New York/Washington, DC: Routledge/National Council of Teachers of Mathematics.

Yıldırım, C. (2011). *Matematiksel düşünme (7. Basım).* Remzi Kitapevi, İstanbul.

Yıldırım, A., & Şimşek, H. (2006). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri.* Seçkin Yayıncılık, Ankara.

Yin, R. K. (2003). *Case study research: Design and methods (3rd Edition).* Sage Publications, Thousand Oaks, CA.

EK-A: Geometri Alanında Yapılan Uygulamanın 1. Oturumu

a) Adınız ve Soyadınız:

b) Sınıfınız:

1. Bir düzgün sekizgenin içine bir ABC üçgeni, üçgenin AB kenarı sekizgenin bir kenarı ile çakışık ve C tepe noktası bu kenarın tam karşısındaki kenarın orta noktası olacak biçimde yerleştiriliyor. Buna göre sekizgenin alanının üçgenin alanının 4 katı olduğunu kanıtlayınız. Bulduğunuz sonucun nedenini açıklayınız.

2. Bir ABC üçgeni veriliyor. Bu üçgenin her bir kenarı üzerine tümüyle üçgenin dışında kalacak ve bir kenarı üçgenin o kenarına eşit olacak şekilde üç adet kare çiziniz. Bu karelerin boşta kalan köşelerini sırayla birbirleriyle birleştirerek üç adet yeni üçgen oluşturunuz. Elde edilen bu yeni üçgenlerin alanlarının ABC üçgeninin alanına eşit olduğunu kanıtlayınız.

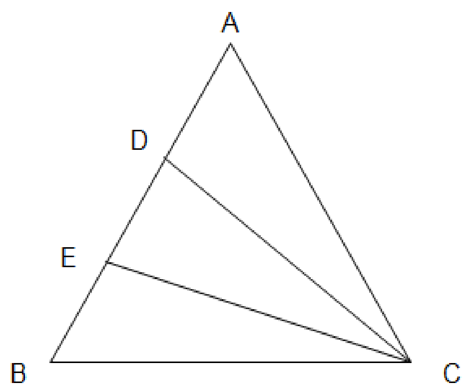
EK-B: Geometri Alanında Yapılan Uygulamanın 2. Oturumu

a) Adınız ve Soyadınız:

b) Sınıfınız:

1. Bir ABC dik üçgeni veriliyor. Bu üçgenin dik kenarlarını çap kabul eden çemberlerin iç kısmında ve hipotenüsü çap kabul eden çemberin dış kısmında kalan hilal biçimindeki yüzeylerin alanları S_1 ve S_2 ile gösterilsin. ABC üçgeninin alanının, S_1 ve S_2 yüzeylerinin alanları toplamına eşit olduğunu kanıtlayınız.

2. Şekilde verildiği gibi eşkenar olmayan herhangi bir ABC üçgeni alalım. A köşesine karşılık gelen kenarın uzunluğunu a, B köşesinin karşısındaki kenarın uzunluğunu b ve C köşesinin karşısındaki kenarın uzunluğunu da c ile gösterelim. C köşesindeki ACB açısını β ile gösterelim. 60°< β < 90° olduğunu varsayalım. Bu üçgenin içine tepesi C'de, tabanı AB doğrusu üzerinde ve her iki taban açısı da β'ya eşit olacak şekilde bir CED ikizkenar üçgeni yerleştirelim. BD doğru parçasının uzunluğunu r ve EA doğru parçasının uzunluğunu da s ile gösterelim. Bu durumda $a^2 + b^2 = (r + s)c$ olduğunu kanıtlayınız.



EK-C: Cebir Alanında Yapılan Uygulamanın 1. Oturumu

a) Adınız ve Soyadınız:

b) Sınıfınız:

1. Ardışık iki çift sayının çarpımının 8 ile bölünebildiğini kanıtlayınız.

2. Her k doğal sayısı için $5^{5k+1} + 4^{5k+2} + 3^{5k}$ sayısının 11'e bölündüğünü kanıtlayınız.

EK-Ç: Cebir Alanında Yapılan Uygulamanın 2. Oturumu

a) Adınız ve Soyadınız:

b) Sınıfınız:

1. $A = IR \setminus \{-1\}$ olmak üzere $f: A \to IR$, $f(a) = \frac{2a}{a+1}$ formülü ile tanımlanmış olsun. f'nin bire bir olduğunu ancak örten olmadığını kanıtlayınız. Kanıtlama sürecinde kullandığınız adımları nedenleriyle açıklayınız.

2. $f(x) = |x-1| + 1$ fonksiyonunun $x = 1$'de türevlenemediğini kanıtlayınız.

EK-D: Etik Komisyonu Onay Bildirimi

T.C.
HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
Rektörlük

Sayı : 35853172/ 433- 354

27 Ocak 20..

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

İlgi: 09.01.2017 tarih ve 52 sayılı yazınız.

Enstitünüz Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı doktora programı öğrencilerinden **Arş. Gör. Selin URHAN**'ın **Prof. Dr. Ali BÜLBÜL** danışmanlığında yürüttüğü **"Argümantasyon ve Kanıt Süreçlerinin Habermas Akılcı Davranış Teorisi ile Analizi"** başlıklı tez çalışması, Üniversitemiz Senatosu Etik Komisyonunun **17 Ocak 2017** tarihinde yapmış olduğu toplantıda incelenmiş olup, etik açıdan uygun bulunmuştur.

Bilgilerinizi ve gereğini rica ederim.

Prof. Dr. Rahime M. NOHUTCU
Rektör a.
Rektör Yardımcısı

EK-E: Etik Beyanı

Hacettepe Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında,

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı bütün bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin bütününü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversitede veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

04/07/2018

Selin URHAN

EK-F: Doktora Tez Çalışması Orijinallik Raporu

03/07/2018

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
Eğitim Bilimleri Enstitüsü
Orta Öğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Ana Bilim Dalı Başkanlığına,

Tez Başlığı: Kanıt Yapma Sürecinin Habermas Akılcı Davranış Modeli ile Analizi

Yukarıda başlığı verilen tez çalışmamın tamamı (kapak sayfası, özetler, ana bölümler, kaynakça) aşağıdaki filtreler kullanılarak **Turnitin** adlı intihal programı aracılığı ile kontrol edilmiştir. Kontrol sonucunda aşağıdaki veriler elde edilmiştir:

Rapor Tarihi	Sayfa Sayısı	Karakter Sayısı	Savunma Tarihi	Benzerlik Oranı	Gönderim Numarası
03/07/2018	191	314120	06/06/2018	%2	980156488

Uygulanan filtreler:
1. Kaynaklar hariç
2. Alıntılar dâhil
3. 5 kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç

Hacettepe Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Tez Çalışması Orijinallik Raporu Alınması ve Kullanılması Uygulama Esasları'nı inceledim ve çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan eder, gereğini saygılarımla arz ederim.

Ad Soyadı: Selin URHAN
Öğrenci No.: N12240707
Ana Bilim Dalı: Orta Öğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi
Programı: Orta Öğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi-Doktora
Statüsü: ☐ Y.Lisans ☒ Doktora ☐ Bütünleşik Dr.

DANIŞMAN ONAYI

UYGUNDUR.
Prof. Dr. Ali BÜLBÜL

EK-G: Dissertation Originality Report

03/07/2018

HACETTEPE UNIVERSITY

Graduate School Of Educational Sciences

To The Department Of Secondary Science and Mathematics Education

Thesis Title : Analysis Of Proof Process Based On Habermas Rational Behaviour Construct

The whole thesis that includes the *title page*, *introduction*, *main chapters*, *conclusions and bibliography section* is checked by using **Turnitin** plagiarism detection software take into the consideration requested filtering options. According to the originality report obtained data are as below.

Time Submitted	Page Count	Character Count	Date of Thesis Defense	Similarity Index	Submission ID
03/07/2018	191	314120	06/06/2018	%2	980158488

Filtering options applied:

1. Bibliography excluded
2. Quotes included
3. Match size up to 5 words excluded

I declare that I have carefully read Hacettepe University Graduate School of Educational Sciences Guidelines for Obtaining and Using Thesis Originality Reports; that according to the maximum similarity index values specified in the Guidelines, my thesis does not include any form of plagiarism; that in any future detection of possible infringement of the regulations I accept all legal responsibility; and that all the information I have provided is correct to the best of my knowledge.

I respectfully submit this for approval.

Name Lastname: Selin URHAN

Student No.: N12240707

Department: Secondary Science and Mathematics Education

Program: Secondary Science and Mathematics Education-Ph.D.

Status: ☐ Masters ☒ Ph.D. ☐ Integrated Ph.D.

ADVISOR APPROVAL

APPROVED

Prof. Dr. Ali BÜLBÜL

EK-H: Yayımlama ve Fikrî Mülkiyet Hakları Beyanı

Enstitü tarafından onaylanan lisansüstü tezimin/raporumun tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı (kâğıt) ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda verilen koşullarla kullanıma açma iznini Hacettepe Üniversitesine verdiğimi bildiririm. Bu izinle Üniversite'ye verilen kullanım hakları dışındaki bütün fikrî mülkiyet haklarım bende kalacak, tezimin tamamının veya bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanım hakları bana ait olacaktır.

Tezin kendi orijinal çalışmam olduğunu, başkalarının haklarını ihlal etmediğimi ve tezimin tek yetkili sahibi olduğumu beyan ve taahhüt ederim. Tezimde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanılması zorunlu metinleri yazılı izin alarak kullandığımı ve istenildiğinde suretlerini Üniversite'ye teslim etmeyi taahhüt ederim.

☐ **Tezimin/Raporumun tamamı dünya çapında erişime açılabilir ve bir kısmı veya tamamının fotokopisi alınabilir.**

(Bu seçenekle teziniz arama motorlarında indekslenebilecek, daha sonra tezinizin erişim statüsünün değiştirilmesini talep etseniz ve kütüphane bu talebinizi yerine getirse bile, teziniz arama motorlarının ön belleklerinde kalmaya devam edebilecektir)

☒ **Tezimin/Raporumun 06/06/2021 tarihine kadar erişime açılmasını ve fotokopi alınmasını (İç Kapak, Özet, İçindekiler ve Kaynakça hariç) istemiyorum.**

(Bu sürenin sonunda uzatma için başvuruda bulunmadığım takdirde, tezimin/raporumun tamamı her yerden erişime açılabilir, kaynak gösterilmek şartıyla bir kısmı veya tamamının fotokopisi alınabilir).

☐ **Tezimin/Raporumun .... tarihine kadar erişime açılmasını istemiyorum ancak kaynak gösterilmek şartıyla bir kısmı veya tamamının fotokopisinin alınmasını onaylıyorum.**

☐ **Serbest Seçenek/Yazarın Seçimi:**

....

....

....

...

04/07/2018

Selin URHAN