DİÇATILARA GENELLEŞTİRİLMİŞ BAZI TOPOLOJİK KAVRAMLAR

SOME TOPOLOGICAL PROPERTIES GENERALIZED TO DIFRAMES

ESRA KORKMAZ

PROF. DR. RIZA ERTÜRK
Tez Danışmanı

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
Lisansüstü Eğitim–Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin
Matematik Anabilim Dalı için Öngördüğü
DOKTORA TEZİ olarak hazırlanmıştır.

2018

ESRA KORKMAZ'ın hazırladığı "**Diçatılara Genelleştirilmiş Bazı Topolojik Kavramlar**" adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **MATEMATİK ANABİLİM DALI**'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. A. Haydar EŞ
Başkan ....

Prof. Dr. Rıza ERTÜRK
Danışman ....

Prof. Dr. Çetin VURAL
Üye ....

Prof. Dr. Şenol DOST
Üye ....

Doç. Dr. Filiz YILDIZ
Üye ....

Bu tez Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından **DOKTORA TEZİ** olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. Menemşe GÜMÜŞDERELİOĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

YAYINLAMA VE FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI BEYANI

Enstitü tarafından onaylanan lisansüstü tezimin/raporumun tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı (kağıt) ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda verilen koşullarla kullanıma açma iznini Hacettepe üniversitesine verdiğimi bildiririm. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet haklarım bende kalacak, tezimin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanım hakları bana ait olacaktır.

Tezin kendi orijinal çalışmam olduğunu, başkalarının haklarını ihlal etmediğimi ve tezimin tek yetkili sahibi olduğumu beyan ve taahhüt ederim. Tezimde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanması zorunlu metinlerin yazılı izin alarak kullandığımı ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederim.

☒ **Tezimin/Raporumun tamamı dünya çapında erişime açılabilir ve bir kısmı veya tamamının fotokopisi alınabilir.**
(Bu seçenekle teziniz arama motorlarında indekslenebilecek, daha sonra tezinizin erişim statüsünün değiştirilmesini talep etseniz ve kütüphane bu talebinizi yerine getirse bile, tezinin arama motorlarının önbelleklerinde kalmaya devam edebilecektir.)

☐ **Tezimin/Raporumun .... tarihine kadar erişime açılmasını ve fotokopi alınmasını (İç Kapak, Özet, İçindekiler ve Kaynakça hariç) istemiyorum.**
(Bu sürenin sonunda uzatma için başvuruda bulunmadığım takdirde, tezimin/raporumun tamamı her yerden erişime açılabilir, kaynak gösterilmek şartıyla bir kısmı ve ya tamamının fotokopisi alınabilir)

☐ **Tezimin/Raporumun .... tarihine kadar erişime açılmasını istemiyorum, ancak kaynak gösterilmek şartıyla bir kısmı veya tamamının fotokopisinin alınmasını onaylıyorum.**

☐ **Serbest Seçenek/Yazarın Seçimi**

23 / 05 / 2018

EsraK.

Esra KORKMAZ

ETİK

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında,

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

23/05/2018

EsraK.

ESRA KORKMAZ

ÖZET

DİÇATILARA GENELLEŞTİRİLMİŞ BAZI TOPOLOJİK KAVRAMLAR

ESRA KORKMAZ

Doktora, Matematik Bölümü

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Rıza ERTÜRK

Mayıs 2018, 80 sayfa

Bu tezin amacı, ditopolojik doku uzaylarının bir genelleştirmesi olarak diçatı kavramını tanımlamak ve bu yapı üzerinde, ayırma aksiyomları ve kompaktlık gibi topolojik özellikleri çalışmaktır. Bu çalışma altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tez konusuna kısa bir giriş yapılmıştır.

İkinci bölümde, tezde kullanılacak olan ve çatı teorisi ile ditopolojik doku uzayları konu edinen bazı temel bilgilere yer verilmiştir.

Üçüncü kısım koçatı teorisi üzerine yapılan çalışmalara ayrılmıştır. Burada, çatı teorisine dual olarak bazı yeni tanımlar ve özellikler sunulmuştur.

Dördüncü kısımda, diçatıların kategorisi oluşturulmuştur. Bunun için önce, doku uzayların kategorisi olan **drTex**'in morfizmaları ile çatıların kategorisi olan **Frm**'nin morfizmaları arasındaki ilişkiler incelenmiş, daha sonra ise **Frm**'nin dolu bir alt kategorisi olan **frTex** elde edilmiştir. Elde edilen bu bağlantıdan yararlanılarak diçatıların ve diçatı homomorfizmalarının kategorisi olan **diFrm** inşa edilmiştir. Bu kısımda ayrıca diçatılarda taban, alt taban ve altdilokal kavramları da tanımlanmıştır.

Beşinci bölümde, diçatılarda ayırma aksiyomları incelenmiştir. Özel olarak, bu aksiyomlar için bazı karakterizasyonlar verilmiş ve aralarındaki ilişkiler incelenmiştir.

Son bölümde, diçatılarda kompaktlık ve dengelilik kavramları araştırılmıştır. Bu bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda, bu özelliklerin kalıtsal olup olmadığı ve belli koşulları sağlayan morfizmalar altında korunup korunmadığı soruları tartışılmıştır. Dengelilik, bir diçatının, çatı ve koçatı kısımlarını birbirine bağlayan bir özellik olduğundan, ayırma aksiyomları ve kompaktlığı ilişkilendiren topolojik özelliklerin diçatılardaki karşılıkları oluşturulurken, kompaktlık yerine dengelilik kullanılmıştır. Burada aynı zamanda Alexander alt taban teoreminin bir genelleştirmesine yer verilmiştir. İkinci kısımda, diçatılarda yerel dengelilik ve yerel kompaktlık kavramları tanımlanmıştır. Bu kavramların ikili topolojik uzaylardaki karşılıkları, nokta-tabanlı bir yapı olan komşulukları kullanırken, burada yapılan tanımlarda belirli özelliklere sahip ikili bağıntılardan yararlanılmıştır. Son olarak, bu lokal özelliklerin bazı özel koşulları sağlayan morfizmalar altındaki görüntüleri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Çatı, Koçatı, Altkolokal, Diçatı, Regüler, Kompakt, Dengeli, Yerel dengeli.

ABSTRACT

SOME TOPOLOGICAL PROPERTIES GENERALIZED TO DIFRAMES

ESRA KORKMAZ

Doctor of Philosophy, Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Rıza ERTÜRK

May 2018, 80 pages

The aim of this thesis is to define the notion of diframe as a generalization of ditopological texture spaces and to study the topological concepts such as separation axioms and compactness in diframe setting. This work consists of six chapters. In the first chapter, we give a brief introduction.

In the second chapter, we present some necessary preliminaries including frame theory and ditopological texture spaces.

Chapter three is devoted to the study of coframes. We provide some new definitions and properties dual to those in frame theory.

In chapter four, we establish the category of diframes. We first provide a link between morphisms of the category **drTex** of texture spaces and the category frames (**Frm**) and then obtain a full subcategory **frTex** of **Frm**. This connection allows us to construct the category **diFrm** of diframes and diframe homomorphisms. In this chapher, we also give the definitions of base, subbase and subdilocale of a diframe.

In chapter five, we study separation axioms in diframes. In particular, we provide alternative characterizations of these axioms and investigate the connections between them.

The final chapter deals with the compactness and stability in diframes. This chapter is divided into two section. In the first section, we discuss the questions of whether these properties are hereditary, and whether they are preserved by any reasonable kind of homomorphisms. Since stability is a property relating the frame and the coframe parts of a diframe, we replace compactness by stability to obtain diframe versions of topological results relating separation axioms and compactness. We also give a generalization of Alexander's subbase theorem. In the second section, we introduce two main concepts, that of locally compactness and locally stability in diframes. These concepts are defined in terms of suitable binary relations whereas their bitopological versions use the notion of neighbourhood which is a point-based structure. We also show that locally compactness and locally stability are preserved by morphism satisfying appropriate conditions.

Keywords: Frame, Coframe, Subcolocale, Diframe, Regular, Compact, Stable, Locally stable.

TEŞEKKÜR

Bu tezin oluşmasında çok büyük katkı sağlayan, vaktini ve hatta manevi desteğini hiçbir zaman esirgemeden bilgi, tecrübe ve önerileriyle yol gösterip yönlendiren çok değerli hocam Prof. Dr. Rıza ERTÜRK'e;

2015 yılında aramızdan ayrılan, saygıyla andığımız değerli hocamız Prof. Dr. L. M. Brown'a;

tez izleme komitesinde bulunan hocalarım, Prof. Dr. Çetin VURAL, Prof. Dr. Şenol DOST ve Doç. Dr. Filiz YILDIZ'a;

varlıklarıyla bana güç veren, sevgi ve desteklerini hiç eksik etmeyen aileme ve özellikle kardeşlerim Kübra ve Deniz SAVCIÖZEN'e;

umutsuzluğa kapıldığım her anımda bana destek olan, tüm samimiyet ve anlayışıyla benimle her duyguyu paylaşan, zor zamanlarımda yardımıma koşan sevgili eşim Mustafa KORKMAZ'a

doktora süresince vermiş olduğu burs ile maddi destek sağlayan Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK)'na;

sonsuz teşekkürler...

.

İçindekiler

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathcal{P}(X)$	X'in kuvvet kümesi
$x \vee y$	x ve y'nin en küçük üst sınırı
$x \wedge y$	x ve y'nin en büyük alt sınırı
$\bigvee A$	A kümesinin en küçük üst sınırı
$\bigwedge A$	A kümesinin en büyük alt sınırı
$\Omega(X)$	X uzayının açık kümeler ailesi
$\mathcal{C}(X)$	X uzayının kapalı kümeler ailesi
$\Omega_{\text{reg}}(X)$	X uzayının regüler açık kümelerinin ailesi
x^*	x'in yarı (pseudo) tümleyeni
f^*	f dönüşümünün sol adjointi
f_*	f dönüşümünün sağ adjointi
(L_e, L_{fr}, L_{cf})	Diçatı
$Sl(L)$	L çatısının tüm altlokallerinin ailesi
$Scl(M)$	M koçatısının tüm altkolokallerinin ailesi
$\mathfrak{c}(a)$	kapalı altlokal
$\mathfrak{o}(a)$	açık altlokal
$\mathfrak{c}_{\mathcal{C}}(a)$	kapalı altkolokal
$\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}(a)$	açık altkolokal
v_S	S altlokaline karşılık gelen nükleus
t_S	S altkolokaline karşılık gelen konükleus
P_s	p-küme
Q_s	q-küme
$(S, \mathcal{S})$	doku uzayı
$(\mathbb{I}, \mathcal{J})$	birim aralık dokusu
$\overline{P}_{(s,t)}$	çarpım dokusunun p-kümesi
$\overline{Q}_{(s,t)}$	çarpım dokusunun q-kümesi
(r, R)	Dibağıntı
$(r, R)^{\leftarrow}$	(r,R) dibağıntısının tersi
$r^{\rightarrow}A$	r bağıntısının A-kesiti
$r^{\leftarrow}A$	r bağıntısının A-önkesiti

$R^{\rightarrow}A$	R kobağıntısının A-kesiti
$R^{\leftarrow}A$	R kobağıntısının A-önkesiti
(f, F)	Difonksiyon
(τ, κ)	Ditopoloji
[a]	a'nın kapanışı
$]a[$	a'nın içi
Top	Topolojik uzaylar kategorisi
Frm	Çatılar ve çatı homomorfizmaları kategorisi
Loc	Lokaller ve lokalik dönüşümler kategorisi
drTex	Doku uzayları ve dibağıntılar kategorisi
dfDitop	Ditopolojik doku uzayları kategorisi
diH	Hutton uzayları kategorisi
coFrm	Koçatılar ve koçatı homomorfizmaları kategorisi
coLoc	Kolokaller ve kolokalik dönüşümler kategorisi
frTex	Doku uzayları ve fr-bağıntılar kategorisi
frcoTex	Doku uzayları ve fr-kobağıntılar kategorisi
diFrm	Diçatılar kategorisi
diLoc	Dilokaller kategorisi

1 GİRİŞ

Bu tez çalışmasının amacı, tam ve tamamen dağılımlı bir latisin özel bir hali olan dokular üzerinde tanımlı ditopolojik doku uzaylarının bir genelleştirmesi olarak, tam bir latis üzerinde tanımlı çatı ve dual çatı kullanılmak suretiyle, literatüre yeni bir kavram olarak diçatıları tanıtmak, bu yapı üzerinde ayırma aksiyomları, kompaktlık gibi topolojik kavramları tanımlamak ve bu kavramlar arasındaki ilişkileri incelemektir.

Doku uzayları L. M. Brown tarafından, R. Ertürk'ün latis değerli topolojilerin ikili topolojik uzaylar yardımıyla temsil edilmesi üzerine yaptığı çalışmaların [14, 15] bir genişlemesi olarak ortaya konulmuştur. En kaba tanımıyla dokulanma, verilen bir S kümesinin kuvvet kümesi olan $\mathcal{P}(S)$'nin, kapsama bağıntısına göre tam, tamamen dağılımlı bir latis yapısına sahip ve genelde kümesel tümleyen işlemi altında kapalı olması gerekmeyen bir alt ailesidir. Bilindiği gibi klasik topolojide ve fuzzy topolojide yapılan tanımlar açık küme kavramını temel almakta, kapalı kümeler ise yardımcı olarak kullanılmaktadır. Bu anlayış klasik ikili topolojide ve fuzzy ikili topolojide de devam ettirilmiştir. Fakat kümesel tümleyen işleminin varlığı sayesinde, bu iki kavram birbirinden kolayca elde edilebilir. Tümleyenin olmadığı matematiksel yapılarda ise açık ve kapalı küme kavramlarını aynı bir yapı içinde kullanmayı amaçlayan bir topolojik yapı üzerinde çalışmak avantajlı olacaktır. Bu amaçla, bir $\mathcal{S}$ dokulanması üzerinde, birbiriyle ilişkili olması gerekmeyen, sırasıyla, topolojideki kapalı ve açık küme aksiyomlarını sağlayan $\kappa \subseteq \mathcal{S}$ ve $\tau \subseteq \mathcal{S}$ alt ailelerinden oluşan (τ, κ) çifti tanımlanmış ve bu ikili bir ditopoloji olarak adlandırılmıştır.

Bir X kümesinin alt kümelerinden oluşan τ ve τ^* ailelerinin her ikisi de topolojideki açık küme aksiyomlarını sağlamak üzere, tanımlı bir (X, τ, τ^*) ikili topolojik uzayı için κ, τ^* topolojisinin tümleyeni olarak seçilirse, $\mathcal{P}(X)$ dokulanması üzerinde bir (τ, κ) ditopolojisi elde edilebilir. O halde ditopolojik doku uzayları, ikili topolojik uzayların, özel olarak klasik topolojik uzayların ve fuzzy topolojik uzayların bir genelleştirmesi olarak düşünülebilir. Bu nedenle topolojik, fuzzy topolojik ve ikili topolojik uzaylar teorisinde çalışılmış olan ayırma aksiyomları, kompaktlık, bağlantılık ve düzgünlük gibi kavramlar ve bazı özellikleri çeşitli araştırmacılar tarafından, ditopolojik doku uzaylarına genelleştirilmiş, genelleştirilen bu yapı içerisindeki kavram ve özelliklerden hangilerinin topolojideki kavramlara paralel olarak geliştiği, hangilerinin oluşturulan bu genel yapıya uygun bir şekilde taşınacağı sorularına cevap aranmıştır.

Ditopolojik doku uzayları teorisi hakkında daha ayrıntılı bilgiye [6, 7, 8, 9, 10] kaynaklarından ulaşılabilir.

Diğer taraftan, bu tezde tanıtılacak diçatı yapısı içerisinde çatı (frame) teorisini de barındırdığı için, nokta-bağımsız topolojilerin temeli olan çatı ve lokal kavramlarından da söz edilmesi gerekmektedir. 1914 yılında Hausdorff tarafından yapılan tanımdan bu yana, bir topolojik uzayın, açık kümeler latisine sahip bir yapı olduğu bilinmektedir. Stone [32, 33, 34] tarafından 1930'lu yılların ortalarında yapılan ve Boole cebirlerinin topolojik olarak temsilini konu alan çalışmalar sonrasında topolojik uzaylar ile latis teori arasındaki ilişkiler daha çok kullanılmaya başlanmıştır. Wallmann [36], Menger [23], McKinsey ve Tarski [22] tarafından yapılan çalışmalarda da açık kümeler arasındaki ilişkiler incelenmiş ve latis teoriye ait yaklaşımlar kullanılmıştır. Daha sonra, Ehresmann'in seminerlerinde [3, 13, 25] çatı (frame) kavramı tanımlanmıştır. En genel tanımıyla bir çatı, sonlu infimum işleminin keyfi supremum üzerine dağıldığı bir tam latistir. Kolayca görülebileceği gibi, bir X uzayının açık kümeler latisi, $\Omega(X)$, bir çatıdır. Fakat her L çatısı için $L \cong \Omega(X)$ olacak şekilde bir X uzayının olması gerekmez. Bu nedenle, çatılar teorisinin topolojik uzaylar teorisinden daha genel olduğu söylenebilir. 1972 yılında Isbell [18] çatılar kategorisinin duali olan kategoriyi lokaller kategorisi olarak adlandırmış ve günümüzde genelleşmiş topolojik uzaylar olarak kabul edilen lokaller üzerine çalışmalar yapmıştır. Lokaller (çatılar), topolojik uzaylar teorisine cebirsel bir bakış açısı sunar. Daha da önemlisi, seçme aksiyomunun geçerli olmadığı matematiksel yapılarda topolojik kavramların çalışılmasına olanak sunar. Örneğin, klasik topolojide, kompakt uzayların çarpımlarının da kompakt olduğunu ifade eden Tychonoff teoremi gibi önemli teoremlerin, lokal teori içerisinde seçme aksiyomundan bağımsız olarak kanıtlanması ve bu teori içerisinde tanımlanan çarpımların klasik topolojiden daha iyi özellikler sağlaması (örneğin, parakompakt lokallerin çarpımının parakompakt olması) gibi avantajları olduğu bilinmektedir [20]. Bunun yanı sıra Stone-$\breve{C}$ech kompaktlaştırma ve düzgün bir lokalin tamlaştırılması gibi topolojik oluşumlar seçme aksiyomundan bağımsız ve yapılandırıcı (constructive) ispat tekniği kullanılarak oluşturulabilir [2]. Ayrıca değişmeli olmayan lokal teori, yani "quantale" teori, değişmeli olmayan halkalar, C^*-cebirleri, kuantum mantık ve hatta topolojik kavramları temel alan teorik bilgisayar bilimleri gibi alanlarda kullanılabilmektedir [31, 11, 35]. Topos teoride, yine seçme aksiyomundan bağımsız yapılarla çalışılabileceği için, lokallerin kullanılması daha uygun olmaktadır.

Bunların yanı sıra, Banaschewski, Brümmer ve Hardie [1] ikili topolojik uzayların bir genelleştirmesi olarak ikili çatı (biframe) kavramını tanımlamışlar ve bazı topolojik kavram ve özellikleri bu uzaylara genelleştirmişlerdir. Çatı ve lokal teorisi için daha kapsamlı bilgiye [19, 26] kaynaklarından ulaşılabilir.

Topoloji teorisinde yukarıda verilen gelişim süreçlerinden sonra, biz de klasik fuzzy topoloji ile klasik ikili topolojilerin bir genelleştirmesi olarak verilen ditopolojiler ile, çeşitli teorilerde uygulama alanları bulunan çatı ve ikili çatılardan daha genel bir yapı olarak diçatıları ve bu genel yapı içerisindeki bazı topolojik kavram ve özellikleri araştırmak istiyoruz.

Altı bölümden oluşan bu çalışmanın ikinci bölümünde tezde kullanılacak olan temel kavram ve özellikler ele alınmıştır.

Üçüncü bölümde, çatı teoresinde elde edilen bazı tanım, kavram ve teoremlerin duali olarak, koçatılar üzerinde bazı yapılar oluşturulmuş ve bunların özellikleri incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, tezin konusunu oluşturan diçatılar kategorisinin elde edilişine yer verilmiştir. Diçatılar, içerisinde hem çatı hem de koçatıları barındıran yapılardır. Bunun için öncelikle doku uzayları ve dibağıntıların kategorisi olan **drTex** ile çatılar ve çatı homomorfizmalarının kategorisi olan **Frm** arasında bir ilişki kurmak amaçlanmıştır. Dual olarak, **drTex** ile koçatılar ve koçatı homomorfizmalarının kategorisi olan **coFrm** arasındaki ilişkiler de ortaya konulmuş ve sonuç olarak diçatı morfizmaları elde edilmiştir. Bu bölümde ayrıca diçatılarda taban, alt taban ve altdilokal yapıları da oluşturulmuştur.

Beşinci bölümde, diçatılarda ayırma aksiyomları tanımlanmış ve bu aksiyomlar için denk karakterizasyonlar elde edilmiştir. Ayrıca, bu aksiyomların kalıtsal özellikte olup olmadığı incelenmiş ve hangi koşulları sağlayan morfizmalar altında korunduğu gibi sorular araştırılmıştır.

Altıncı bölümün ilk kısmında diçatılarda kompaktlık ve dengelilik kavramlarına yer verilmiştir. Burada dengelilik, diçatı içerisinde bulunan iki dual yapı olan çatı ve koçatıyı birbiriyle ilişkilendiren bir özellik olacaktır. Bu nedenle, her kompakt Hausdorff uzayın normal olması gibi, klasik topolojide ayırma aksiyomları ve kompaktlığı birbirine bağlayan özellikleri elde etmek için dengelilik kullanılacaktır. Bu kısımda yine, tanımlanan özelliklerin kalıtsallığı ve morfizmalar altındaki görüntüleri incelenmiş ve ayrıca Alexander alt taban teoreminin diçatılara bir genelleştirmesi verilmiştir. İkinci kısımda ise, ditopolojik doku uzayları teorisinde karşılıkları olmayan, yerel kompaktlık ve yerel dengelilik kavramları verilmiştir. Burada, Kopperman [21] tarafından yapılan tanımlar temel alınmıştır. Fakat ikili topolojik uzaylarda verilmiş olan tanımlar nokta-bağımlı bir yapı olan komşuluk kavramına dayalı olduğundan, bu kavramların genelleştirilmesi yapılırken bazı özel ikili bağıntılar kullanılmıştır. Ayrıca bu sayede, yine bağıntılar yoluyla tanımlanmış olan regülerlik ve tamamen regülerlik aksiyomları ile aralarındaki ilişkileri incelemek daha kolay olmuştur.

2 ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, ilerideki bölümlerde kullanılacak olan bazı tanımlar, teoremler, sonuçlar ve gösterimler verilecektir.

2.1 Çatılar ve Lokaller

Bu kısımda latis ve çatı teorisi hakkında bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiş; çatıların topolojik uzaylarla olan ilişkilerine kısaca değinilmiştir. Ayrıca ilerideki bölümlerde kullanılacak olan bazı özel bağıntı türlerinden bahsedilmiştir. Latis teorisi için [16]; çatı teorisi için ise [26] kaynağı temel alınmıştır.

Tanım 2.1.1. $(L, \leq)$ bir kısmi sıralı küme olsun.

(1) Her $a, b \in L$ için $a \wedge b \in L$ ise, L'ye bir $\wedge$- *yarı latis ($\wedge$- semilattice)*; $a \vee b \in L$ ise L'ye bir $\vee$- *yarı latis ($\vee$- semilattice)* denir.

(2) Her $a, b \in L$ için $a \vee b \in L$ ve $a \wedge b \in L$ ise L'ye bir *latis* denir.

(3) L'nin boştan farklı her altkümesinin bir supremumu ve infimumu varsa $(L, \leq)$'ye bir *tam latis* denir.

Önerme 2.1.2. *L bir kısmi sıralı küme olsun. Eğer L keyfi supremum (ya da keyfi infimum) altında kapalı ise, bir tam latistir.*

Tanım 2.1.3. **(1)** L bir latis olmak üzere, her $a \in L$ için $0 \leq a$ koşulunu sağlayan $0 \in L$ elemanına L'nin *en küçük elemanı* denir. Dual olarak, her $a \in L$ için $a \leq 1$ koşulunu sağlayan $1 \in L$ elemanına L'nin *en büyük elemanı* denir.

(2) L latisinin en küçük ve en büyük elemanı varsa L'ye *sınırlı latis* denir.

Tanım 2.1.4. **(1)** L en küçük elemana sahip bir $\wedge$- yarı latis ve $a \in L$ olsun. Bu durumda, $b \wedge a = 0$ koşulunu sağlayan en büyük b elemanına a'nın *yarı tümleyeni (pseudocomplement)* denir ve a^* ile gösterilir.

(2) L sınırlı bir latis ve $a \in L$ olsun. Bu durumda, $b \wedge a = 0$ ve $b \vee a = 1$ koşullarını sağlayan b elemanına a'nın *tümleyeni (complement)* denir.

Tanım 2.1.5. $(L, \leq)$ bir latis olsun.

(1) Her $a, b, c \in L$ için $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ ya da denk olarak $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ koşulu sağlanıyorsa L'ye bir *dağılımlı latis* denir.

(2) J ve $K(j)$ birer indeks kümesi ve $M = \{f : J \to K(j) \mid f(j) \in K(j)\}$ olsun. Eğer her $\{x_{j,k} : j \in J, k \in K(j)\} \subseteq L$ ailesi için

$$\bigwedge_{j \in J} \bigvee_{k \in K(j)} x_{j,k} = \bigvee_{f \in M} \bigwedge_{j \in J} x_{j,f(j)}$$

eşitliği sağlanıyorsa L'ye *tamamen dağılımlı latis* denir.

Notlar 2.1.6. **(1)** L bir $\wedge$- yarı latis ve $a \in L$ olmak üzere, eğer a^* varsa tektir.

(2) Herhangi bir L sınırlı latisinde tümleyen tek olarak belirli olmak zorunda değildir, fakat eğer L sınırlı, dağılımlı bir latis ise her tümleyen bir yarı tümleyendir ve böylece tümleyen tektir.

Tanım 2.1.7. $(L, \leq)$ bir latis ve $p \neq 0$, $p \in L$ olsun.

(1) Eğer $p = a \vee b$ olacak şekildeki her $a, b \in L$ için $p = a$ ya da $p = b$ oluyorsa p'ye bir $\vee$-*indirgenemez eleman* ya da bir *molekül* denir.

(2) Eğer $p \leq a \vee b$ olacak şekildeki her $a, b \in L$ için $p \leq a$ ya da $p \leq b$ oluyorsa p'ye bir *ko-asal eleman* denir.

Önerme 2.1.8. $(L, \leq)$ *dağılımlı bir latis ve* $p \in L$ *olsun. Bu durumda, p'nin ko-asal olması için gerek ve yeter koşul p'nin bir* $\vee$*-indirgenemez eleman olmasıdır.*

Tanım 2.1.9. L dağılımlı bir latis olsun. Eğer her $a \in L$ elemanının bir tümleyeni varsa L'ye bir *Boole cebiri* denir.

Tanım 2.1.10. L bir Boole cebiri olsun.

(1) $x \in L$, $x > 0$ olmak üzere, $0 < y \leq x$ olan her $y \in L$ için $y = x$ oluyorsa x'e bir *atom* denir.

(2) L'nin her elemanı atomların supremumu biçiminde ifade edilebiliyorsa L'ye bir *atomik Boole cebiri* denir.

Tanım 2.1.11. $(L, \leq)$ ve $(M, \leq)$ kısmi sıralı kümeler ve $f : L \to M$, $g : M \to L$ monoton dönüşümler olsun. Eğer her $x \in L$ ve $y \in M$ için

$$f(x) \leq y \Leftrightarrow x \leq g(y)$$

özelliği sağlanıyorsa *f ve g Galois adjointtir* ya da (f, g) bir *adjoint çiftidir* denir. Burada f dönüşümü *g'nin sol adjointi*, g dönüşümü ise *f'nin sağ adjointi* olarak adlandırılır. Kısaca, $f = g^*$ ya da $g = f_*$ olarak gösterilir.

Verilen her f dönüşümünün bir sağ ya da sol adjointi olması gerekmez. Fakat eğer sağ ya da sol adjoint varsa tektir.

Önerme 2.1.12. **(1)** *$(L, \leq)$ ve $(M, \leq)$ birer tam latis olsun. $f : L \to M$ keyfi supremumu koruyan bir dönüşüm ise, $g : M \to L$, $g(y) = \bigvee\{x \in L : f(x) \leq y\}$ biçiminde tanımlanan g dönüşümü f'nin sağ adjointidir. Dual olarak, $g : M \to L$ keyfi infimumu koruyan bir dönüşüm olmak üzere,*
$f : L \to M$, $f(x) = \bigwedge\{y \in M : x \leq g(y)\}$ biçiminde tanımlanan f dönüşümü g'nin sol adjointidir.

(2) *Sağ Galois adjointler keyfi infimumu, sol Galois adjointler ise keyfi supremumu korur.*

Önerme 2.1.13. *$f : L \to M$, $g : M \to L$ birer dönüşüm ve (f, g) bir adjoint çifti olsun. Bu durumda aşağıdakiler geçerlidir:*

(1) *g dönüşümünün bire-bir olması için gerek ve yeter koşul f'nin örten olmasıdır. Benzer şekilde, f'nin bire-bir olması için gerek ve yeter koşul g'nin örten olmasıdır.*

(2) *f örten ise $fg = 1_M$; f bire-bir ise $gf = 1_L$'dir.*

Tanım 2.1.14. $(L, \leq)$ bir tam latis olsun.

(1) Eğer her $b \in L$ ve her $A \subseteq L$ için

$$b \wedge \left(\bigvee A\right) = \bigvee\{b \wedge a : a \in A\}$$

özelliği sağlanıyorsa L'ye bir *çatı (frame)* denir.

(2) Eğer her $b \in L$ ve her $A \subseteq L$ için

$$b \vee \big(\bigwedge A\big) = \bigwedge \{b \vee a : a \in A\}$$

özelliği sağlanıyorsa L'ye bir *koçatı (coframe)* denir.

Örnekler 2.1.15. **(1)** X bir topolojik uzay ve $\Omega(X)$ bu uzaydaki tüm açık kümelerin ailesi olmak üzere, $(\Omega(X), \subseteq)$ bir tam latistir. Burada keyfi supremum birleşim ile, sonlu infimum ise kesişim ile çakışır. Ayrıca, her $i \in I$ için $U_i \in \Omega(X)$ ve $V \in \Omega(X)$ olmak üzere,

$$V \wedge \big(\bigcup_{i \in I} U_i\big) = \bigcup_{i \in I} (V \wedge U_i)$$

keyfi dağılma özelliği sağlanır. Böylece $(\Omega(X), \subseteq)$ bir çatıdır. Benzer şekilde, X'in tüm kapalı kümelerinin ailesi, $(\mathcal{C}(X), \subseteq)$, bir koçatıdır. Burada, beklenildiği gibi, keyfi infimum ve sonlu supremum işlemleri, sırasıyla, kesişim ve birleşim işlemleriyle çakışır.

(2) Boş kümenin açık kümeler latisi, $L = \{0 = 1\}$ çatısı ile temsil edilir ve **O** ile gösterilir.

(3) Her tam, tamamen dağılımlı latis, bir çatı ve bir koçatıdır. Fakat bu ifadenin tersi her zaman doğru olmayabilir. Örneğin, X bir topolojik uzay ve

$$\Omega_{\text{reg}}(X) = \{A \in \Omega(X) : (\overline{A})^{\circ} = A\}$$

X'in regüler (yani, kapanışının içi kendisine eşit olan) açık kümelerinin ailesi olmak üzere, $\Omega_{\text{reg}}(X)$ bir tam Boole cebiridir fakat tamamen dağılımlı değildir [16]. Burada, $\bigvee_{i \in I} A_i = \big(\overline{\bigcup_{i \in I} A_i}\big)^{\circ}$ ve $\bigwedge_{i \in I} A_i = \big(\bigcap_{i \in I} A_i\big)^{\circ}$ 'dir. Ayrıca, $A \in \Omega_{\text{reg}}(X)$ olmak üzere, A'nın tümleyeni $A^* = (X - A)^{\circ}$ biçiminde tanımlıdır.

Tanım 2.1.16. L bir çatı (sırasıyla, koçatı) olmak üzere, keyfi supremum (sırasıyla, infimum) ve sonlu infimum (sırasıyla, supremum) altında kapalı bir $S \subseteq L$ altkümesine bir *altçatı (sırasıyla, altkoçatı)* denir.

Tanım 2.1.17. $(L, \leq)$ sınırlı bir latis olsun.

(1) Eğer her $a, b, c \in L$ için

$$c \leq a \to b \Leftrightarrow c \wedge a \leq b$$

koşulunu sağlayan bir $\rightarrow: L \times L \longrightarrow L$ ikili işlemi varsa L'ye bir *Heyting cebiri* denir.

(2) Eğer her $a, b, c \in L$ için

$$a \leftarrow b \leq c \Leftrightarrow a \leq b \vee c$$

koşulunu sağlayan bir $\leftarrow: L \times L \longrightarrow L$ ikili işlemi varsa L'ye bir *koHeyting cebiri* denir.

Heyting ve koHeyting cebirlerinin tanımlarına ve bazı özelliklerine [30] kaynağında yer verilmiştir. Burada, $a \rightarrow b$ ve $a \leftarrow b$ elemanları, sırasıyla, *a'nın b'ye göre yarı-tümleyeni* ve *a ile b'nın yarı-farkı (pseudo-difference)* olarak adlandırılmıştır.

Önerme 2.1.18. *L bir çatı ve $a, b \in L$ olmak üzere, $a \rightarrow b = \bigvee\{x \in L : x \wedge a \leq b\}$ ikili işlemi ile L bir tam Heyting cebiridir. Tersine her tam Heyting cebiri bir çatıdır.*

Önerme 2.1.19. **(1)** *(de Morgan'ın birinci yasası) L bir Heyting cebiri olsun. Bu durumda $\{a_i : i \in I\} \subseteq L$ olmak üzere, $\bigvee_{i \in I} a_i$ varsa $(\bigvee_{i \in I} a_i)^* = \bigwedge_{i \in I} a_i{}^*$ sağlanır.*

(2) *(de Morgan'ın ikinci yasası) L bir koHeyting cebiri ve $\{a_i : i \in I\} \subseteq L$ olmak üzere, $\bigwedge_{i \in I} a_i$ varsa $(\bigwedge_{i \in I} a_i)^* = \bigvee_{i \in I} a_i{}^*$ sağlanır.*

Tanım 2.1.20. **(1)** L ve M birer latis ve $f : L \rightarrow M$ bir dönüşüm olsun. Her $a, b \in L$ için

$$f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b) \text{ ve } f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$$

özellikleri sağlanıyorsa f'ye bir *latis homomorfizması* denir.

(2) L ve M birer çatı olmak üzere, $f : L \rightarrow M$ latis homomorfizması keyfi supremum işlemini koruyorsa f'ye L'den M'ye bir *çatı homomorfizması* denir.

Not 2.1.21. $f : L \rightarrow M$ bir çatı homomorfizması olmak üzere, $\bigvee \emptyset = 0$ ve $\bigwedge \emptyset = 1$ olduğundan $f(0) = 0$ ve $f(1) = 1$'dir.

Nesneleri çatılar, morfizmaları çatı homomorfizmaları olan kategori **Frm** ile gösterilir. X ve Y birer topolojik uzay ve $f : X \rightarrow Y$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere, $\Omega(f) = f^{-1} : \Omega(Y) \rightarrow \Omega(X)$ bir çatı homomorfizması ve böylece Ω: **Top** $\rightarrow$ **Frm**, $X \mapsto \Omega(X)$, $f \mapsto \Omega(f)$ kontravaryant bir funktordur. Bu nedenle **Frm** kategorisinin dual kategorisi, $\mathbf{Frm^{op}}$, “genelleştirilmiş topolojik uzaylar” olarak kabul edilir. Bu dual kategori “lokaller kategorisi” olarak adlandırılır ve **Loc** ile gösterilir.

Çatı homomorfizmaları keyfi supremum işlemini korudukları için birer sağ adjointleri vardır. O halde, L ve M birer çatı olmak üzere **Loc** kategorisinin morfizmaları aşağıdaki koşulları sağlayan $f : L \to M$ dönüşümleridir:

(i) f dönüşümü keyfi infimum işlemini korur,

(ii) f'nin sol adjointi olan $f^* : M \to L$ dönüşümü sonlu infimum işlemini korur.

Lokaller kategorisinin morfizmaları “lokalik dönüşümler” olarak adlandırılır. Yukarıdaki bilgiler yardımıyla, $Lc(X) = \Omega(X)$, $Lc(f) = \Omega(f)_*$ biçiminde tanımlanan Lc:**Top**$\to$ **Loc** kovaryant bir funktordur.

L bir çatı olmak üzere eğer $L \cong \Omega(X)$ olacak şekilde bir X topolojik uzayı varsa L'ye *uzaysal (spatial)* çatı denir. Örneğin, her tamamen dağılımlı latis bir uzaysal çatıdır. Diğer taraftan, verilen her L çatısı uzaysal olmak zorunda değildir. Buna örnek olarak ise atomik olmayan tam Boole cebirleri verilebilir. Dolayısıyla, gerçekten de lokaller kategorisinin topolojik uzaylar kategorisinden daha genel olduğu söylenebilir.

Şimdi, lokaller kategorisinin alt nesneleri olan altlokalleri inceleyelim. Bunun için önce bazı kategorik kavramları hatırlayalım:

$\mathcal{C}$ bir kategori olsun. A ve B bu kategorinin nesneleri ve $f : A \to B$ bir morfizma olmak üzere, $fg = fh$ olacak şekilde her $g, h : C \to A$ için $g = h$ oluyorsa f'ye bir *monomorfizma* denir.

$f : A \to B$ bir morfizma olmak üzere, $gf = hf$ biçimindeki her $g, h : B \to C$ için $g = h$ oluyorsa f'ye bir *epimorfizma* denir.

$m : A \to B$ bir monomorfizma olsun. Eğer $m = m'e$ olacak şekildeki her $e : A \to C$ epimorfizması için, e bir izomorfizma oluyorsa m'ye bir *ekstrem monomorfizma* denir.

Top kategorisinde bir morfizmanın ekstrem monomorfizma olması için gerek ve yeter koşul o morfizmanın bir gömme dönüşümü olmasıdır [24]. Bu kategorinin alt nesneleri olan altuzaylar gömme dönüşümleri ile ilişkili olduğundan, altlokaller tanımlanırken **Loc** kategorisinin ekstrem monomorfizmalarına ihtiyaç duyulmaktadır.

Önerme 2.1.22. *L ve M birer lokal olmak üzere $f : L \to M$ morfizmasının bir ekstrem monomorfizma olması için gerek ve yeter koşul f'nin bire-bir lokalik dönüşüm olmasıdır.*

Bu önerme yardımıyla, $S \subseteq L$ olmak üzere altlokaller,

- $j : S \to L$ gömme dönüşümü bir lokalik dönüşüm ve
- $S \subseteq L$, L'den indirgenen sıralama ile bir lokal

olacak şekilde tanımlanabilir.

Tanım 2.1.23. L bir lokal olmak üzere aşağıdaki koşulları sağlayan bir $S \subseteq L$ kümesine bir *altlokal* denir.

(S1) S kümesi keyfi infimum işlemi altında kapalıdır,

(S2) Her $s \in S$ ve $x \in L$ için $x \to s \in S$'dir.

L bir lokal olmak üzere, L'nin tüm altlokallerinin ailesi $Sl(L)$ ile gösterilir. Ayrıca $(Sl(L), \subseteq)$ bir koçatıdır ve böylece Önerme 2.1.19'dan her $i \in I$ için $S_i \in Sl(L)$ olmak üzere $(\bigwedge_{i \in I} S_i)^* = \bigvee_{i \in I} {S_i}^*$ eşitliği sağlanır.

$(Sl(L), \subseteq)$ koçatısında her elemanın bir tümleyeninin olması gerekmez. Şimdi bu koçatının, tümleyene sahip iki özel elemanından bahsedelim.

$a \in L$ olmak üzere $\mathfrak{o}(a) = \{a \to x : x \in L\}$ ve $\mathfrak{c}(a) = \uparrow a = \{x \in L : a \leq x\}$ altkümeleri birer altlokaldir ve sırasıyla *açık* ve *kapalı altlokaller* olarak adlandırılırlar. Her $a \in L$ için $\mathfrak{o}(a)$ ve $\mathfrak{c}(a)$ altlokalleri $Sl(L)$ latisinde birbirinin tümleyenidir.

Önerme 2.1.24. $a \leq b \Leftrightarrow \mathfrak{c}(b) \subseteq \mathfrak{c}(a) \Leftrightarrow \mathfrak{o}(b) \supseteq \mathfrak{o}(a)$.

Önerme 2.1.25. *L bir lokal olmak üzere aşağıdakiler sağlanır:*

(1) $\bigcap_{i \in J} \mathfrak{c}(a_i) = \mathfrak{c}(\bigvee_{i \in J} a_i)$

(2) $\mathfrak{c}(a) \vee \mathfrak{c}(b) = \mathfrak{c}(a \wedge b)$

(3) $\bigvee_{i \in J} \mathfrak{o}(a_i) = \mathfrak{o}(\bigvee_{i \in J} a_i)$

(4) $\mathfrak{o}(a) \cap \mathfrak{o}(b) = \mathfrak{o}(a \wedge b)$

Şimdi altlokallerin diğer bir karakterizasyonundan bahsedelim:

Tanım 2.1.26. L bir lokal olmak üzere, aşağıdaki koşulları sağlayan $v : L \to L$ dönüşümüne bir *nükleus* denir.

(N1) Her $a \in L$ için $a \leq v(a)$'dir.

(N2) v monoton bir dönüşümdür, yani her $a, b \in L$ için $a \leq b \Rightarrow v(a) \leq v(b)$'dir.

(N3) Her $a \in L$ için $v(v(a)) = v(a)$'dir.

(N4) Her $a, b \in L$ için $v(a \wedge b) = v(a) \wedge v(b)$'dir.

Önerme 2.1.27. *L bir lokal ve $S \subseteq L$ bir altlokal olsun. Bu durumda $v_S : L \to L$, $v_S(a) = j^*(a) = \bigwedge\{s \in S : a \leq s\}$ dönüşümü bir nükleusdur. Tersine, $v : L \to L$ bir nükleus ise $v(L)$ bir altlokaldir. Dolayısıyla, L'nin altlokalleri ile L üzerinde tanımlı nükleuslar arasında bire-bir eşleme vardır.*

Önerme 2.1.28. *[28] L bir çatı, $L' \subseteq L$ bir altçatı ve $S \subseteq L$ bir altlokal olsun. Bu durumda $v_S(L')$, S'nin bir altçatısıdır.*

Uyarı 2.1.29. **(1)** $S \subseteq L$ bir altlokal ve $\{a_i : i \in I\} \subseteq S$ olsun. Bu durumda $\bigvee^S$, S'deki supremum işlemini göstermek üzere, $\bigvee_{i\in I}^S a_i = v_S(\bigvee_{i\in I} a_i)$ biçiminde tanımlıdır.

(2) L bir çatı olmak üzere, sonlu supremum işlemi altında kapalı bir $S \subseteq L$ altlokaline *düz (flat)* altlokal denir. Bir S altlokalinin düz olması ile ona karşılık gelen v_S nükleusunun (S'deki) sonlu supremum işlemini koruması birbirine denktir [19].

Önerme 2.1.30. **(1)** *$S_1, S_2 \subseteq L$ altlokaller ve $S_1 \subseteq S_2$ ise $v_{S_2} \leq v_{S_1}$'dir.*

(2) *$S \cap \mathfrak{c}(a) = \mathfrak{c}_S(v_S(a))$.*

(3) *$S \cap \mathfrak{o}(a) = \mathfrak{o}_S(v_S(a))$.*

(Burada $\mathfrak{c}_S(v_S(a))$ ve $\mathfrak{o}_S(v_S(a))$, sırasıyla, S'deki kapalı ve açık altlokalleri göstermektedir.)

Bu kısımda son olarak, bazı özel bağıntıların ve bu bağıntılara sahip bazı latislerin tanımlarını vermek istiyoruz.

Tanım 2.1.31. [16] L bir tam latis olmak üzere, aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $\prec: L \times L \longrightarrow L$ bağıntısına *yardımcı (auxiliary) bağıntı* denir.

(A1) Her $a \in L$ için $0 \prec a$.

(A2) $a \prec b$ ise $a \leq b$.

(A3) $a \leq b \prec c \leq d$ ise $a \prec d$.

(A4) $a \prec c$ ve $b \prec c$ ise $a \vee b \prec c$.

Tanım 2.1.32. [4] L bir tam Boole cebiri ve $\prec: L \times L \longrightarrow L$ aşağıdaki özellikleri sağlayan bir bağıntı olmak üzere, $(L, \prec)$ ikilisine bir *de Vries cebiri* denir.

(V1) $1 \prec 1$.

(V2) $a \prec b$ ise $a \leq b$.

(V3) $a \leq b \prec c \leq d$ ise $a \prec d$.

(V4) $a \prec b$ ise $a \prec c \prec b$ olacak şekilde bir $c \in L$ vardır.

(V5) $a \prec b$ ve $a \prec c$ ise $a \prec b \wedge c$.

(V6) $a \prec b$ ise $b^* \prec a^*$.

(V7) $a \neq 0$ ise $b \prec a$ olacak şekilde bir $b \neq 0$ vardır.

Tanım 2.1.33. [4] L bir çatı olmak üzere, aşağıdaki özellikleri sağlayan $\prec: L \times L \longrightarrow L$ ikili bağıntısına bir *yakınlık bağıntısı (proximity)*, $(L, \prec)$ ikilisine ise bir *yakınlık çatısı (proximity frame)* denir.

(P1) $0 \prec 0$ ve $1 \prec 1$.

(P2) $a \prec b$ ise $a \leq b$.

(P3) $a \leq b \prec c \leq d$ ise $a \prec d$.

(P4) $a \prec b$ ise $a \prec c \prec b$ olacak şekilde bir $c \in L$ vardır.

(P5) $a \prec b$ ve $a \prec c$ ise $a \prec b \wedge c$.

(P6) $a \prec c$ ve $b \prec c$ ise $a \vee b \prec c$.

(P7) Her $a \in L$, $a = \bigvee\{b \in L : b \prec a\}$ biçiminde ifade edilebilir.

Şimdi de, [17] çalışmasında tanımlanan ve diçatılarda bazı ayırma aksiyomlarının karakterizasyonunda kullanılacak olan Urysohn bağıntı kavramından bahsedelim.

Tanım 2.1.34. [17] $(L, \leq)$ kısmi sıralı bir küme olmak üzere, $\lhd : L \times L \longrightarrow L$ bağıntısı aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bu bağıntıya bir *Urysohn bağıntı* denir.

(U1) $a \lhd b$ ise $a \leq b$.

(U2) $a \leq b \lhd c \leq d$ ise $a \lhd d$.

(U3) $a \lhd b$ ise $a \lhd c \lhd b$ olacak şekilde bir $c \in L$ vardır, yani $\lhd$ bağıntısı interpolasyon özelliğine sahiptir.

Tanım 2.1.35. L bir latis ve $\lhd : L \times L \longrightarrow L$ bir Urysohn bağıntı olmak üzere $(L, \lhd)$ ikilisine ise bir *Urysohn latis* denir.

Örnekler 2.1.36. **(1)** Her de Vries cebiri ve her yakınlık çatısı bir Urysohn latistir.

(2) X bir normal topolojik uzay olmak üzere, $\Omega(X)$ üzerinde "$U \lhd V \Leftrightarrow \overline{U} \subseteq V$" bağıntısını tanımlayalım. Bu durumda $(\Omega(X), \lhd)$ bir Urysohn latistir. Tanımlanan bağıntının (U1) ve (U2) özelliklerini sağladığı açıktır. (U3) özelliğinin sağlandığını göstermek için, $U \lhd V$ olacak şekilde $U, V \in \Omega(X)$ alalım. X uzayı normal olduğundan $\overline{U} \subseteq W \subseteq \overline{W} \subseteq V$ olacak şekilde bir $W \in \Omega(X)$ vardır ve böylece $U \lhd W \lhd V$ elde edilir.

2.2 Ditopolojik Doku Uzayları

Bu kısımda doku uzayları ve ditopolojik doku uzayları hakkında bazı temel tanım ve sonuçlara özet olarak değinilmiştir. Konu hakkında detaylı bilgi için okuyucuya [6, 7, 8, 9, 10] kaynakları önerilmektedir.

Tanım 2.2.1. $\mathbb{L}$ tam, tamamen dağılımlı bir latis ve $' : \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ aşağıdaki özellikleri sağlayan bir dönüşüm olmak üzere $(\mathbb{L}, ')$ ikilisine bir *Hutton cebiri* denir.

(1) Her $a \in \mathbb{L}$ için $(a')' = a$.

(2) Her $a, b \in \mathbb{L}$ için $a \leq b$ ise $b' \leq a'$ dir.

Tanım 2.2.2. S boştan farklı bir küme olmak üzere, aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(S)$ ailesine S'nin bir *dokulanması* denir.

(1) $(\mathcal{S}, \subseteq)$ en küçük elemanı $\emptyset$ ve en büyük elemanı S olan sınırlı, tam ve tamamen dağılımlı bir latistir. Ayrıca keyfi infimum işlemi arakesit ile, sonlu supremum işlemi ise birleşim ile çakışır.

(2) $\mathcal{S}$, S'nin noktalarını ayırır. Diğer bir deyişle her $s_1, s_2 \in S$, $s_1 \neq s_2$ için $s_1 \in A$, $s_2 \notin A$ ya da $s_2 \in A$, $s_1 \notin A$ olacak şekilde bir $A \in \mathcal{S}$ vardır.

Bu durumda $(S, \mathcal{S})$ ikilisi bir *doku uzayı* ya da kısaca bir *doku* olarak adlandırılır.

Her dokulanma tamamen dağılımlı bir latis olduğundan hem bir çatı hem de bir koçatıdır. Genel olarak, doku uzayları küme tümleyen işlemi altında kapalı değildir fakat $\mathcal{S}$ üzerinde aşağıdaki gibi bir tümleyen işlemi tanımlanabilir.

Tanım 2.2.3. $\sigma : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ aşağıdaki koşulları sağlayan bir fonksiyon olsun.

(1) Her $A \in \mathcal{S}$ için $\sigma(\sigma(A)) = A$.

(2) Her $A, B \in \mathcal{S}$ için $A \subseteq B \Rightarrow \sigma(B) \subseteq \sigma(A)$.

Bu durumda σ, $\mathcal{S}$ üzerinde bir *tümleyen* işlemi, $(S, \mathcal{S}, \sigma)$ ise bir *tümleyenli doku uzayı* olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.4. **(1)** $(S, \mathcal{S})$ bir doku uzayı ve $s \in S$ olmak üzere $P_s = \bigcap\{A \in \mathcal{S} : s \in A\}$ kümesi bir *nokta küme (point set)* ya da kısaca *p-küme* olarak adlandırılır.

(2) $(S, \mathcal{S})$ bir doku uzayı ve $s \in S$ olmak üzere

$$Q_s = \bigvee\{A \in \mathcal{S} : s \notin A\} = \bigvee\{P_u : u \in S, s \notin P_u\}$$

kümesi bir *q-küme* olarak adlandırılır.

Açıkça her $s \in S$ için P_s, $\mathcal{S}$ latisinin bir molekülüdür. $\mathcal{S}$ tamamen dağılımlı olduğundan [16, Teorem I.3.15] gereği, $\mathcal{S}$'nin her elemanı moleküllerin supremumu biçiminde ifade edilebilir ve böylece her $A \in \mathcal{S}$ için

$$A = \bigvee_{s \in A} P_s = \bigcup_{s \in A} P_s$$

sağlanır.

Örnekler 2.2.5. **(1)** $(X, \mathcal{P}(X))$ bir doku uzayıdır. Her $x \in X$ için $P_x = \{x\}$ ve $Q_x = X - \{x\}$ olduğu kolayca görülebilir. Ayrıca, $\pi_X : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$, $\pi_X(Y) = X - Y$ fonksiyonu $\mathcal{P}(X)$ üzerinde bir tümleyendir. $(X, \mathcal{P}(X), \pi_X(Y))$ *tümleyenli ayrık doku* olarak adlandırılır.

(2) $\mathbb{I} = [0, 1]$ olmak üzere $\mathcal{J} = \{[0, r), [0, r] : r \in \mathbb{I}\}$ bir dokudur. $(\mathbb{I}, \mathcal{J})$ doku uzayında, $r \in \mathbb{I}$ için $P_r = [0, r]$ ve $Q_r = [0, r)$'dir. Ayrıca, $\iota[0, r] = [0, 1-r)$, $\iota[0, r) = [0, 1-r]$ biçiminde tanımlanan $\iota : \mathcal{J} \to \mathcal{J}$ fonksiyonu $(\mathbb{I}, \mathcal{J})$ üzerinde bir tümleyendir. $(\mathbb{I}, \mathcal{J}, \iota)$ *birim aralık dokusu* olarak adlandırılır.

(3) $L = (0, 1]$ ve $\mathcal{L} = \{(0, r] : r \in [0, 1]\}$ olmak üzere $(L, \mathcal{L})$ bir doku uzayıdır. Ayrıca, $r \in L$ için $P_r = (0, r] = Q_r$'dir ve $\lambda : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, $\lambda((0, r]) = (0, 1 - r]$ fonksiyonu $\mathcal{L}$ üzerinde bir tümleyendir.

(4) $S = \{a, b, c\}$ olmak üzere $\mathcal{S} = \{\emptyset, \{b\}, \{b, c\}, \{a, b\}, S\}$ bir dokulanmadır. Burada, $P_a = \{a, b\}$, $P_b = \{b\}$, $P_c = \{b, c\}$ ve $Q_a = \{b, c\}$, $Q_b = \emptyset$, $Q_c = \{a, b\}$ olduğu açıktır. $(S, \mathcal{S})$ tümleyenli olmayan doku uzayına bir örnektir.

(5) $\mathbb{L}$ bir Hutton cebiri ve L, $\mathbb{L}$'nin moleküllerinin kümesi olsun. Her $a \in \mathbb{L}$ için $\varphi(a) = \{m \in L : m \leq a\}$, $\mathcal{L} = \{\varphi(a) : a \in \mathbb{L}\}$ ve $\lambda(\varphi(a)) = \varphi(a')$ biçiminde tanımlanmak üzere $(L, \mathcal{L}, \lambda)$ bir tümleyenli dokudur.

Teorem 2.2.6. *Bir $(S, \mathcal{S})$ doku uzayında aşağıdakiler özellikler sağlanır.*

(1) *Her $s \in S$, $A \in \mathcal{S}$ için $s \notin A \Rightarrow A \subseteq Q_s$.*

(2) *Her $A, B \in \mathcal{S}$ için $A \not\subseteq B$ ise $A \not\subseteq Q_s$ ve $P_s \not\subseteq B$ olacak şekilde bir $s \in S$ vardır.*

(3) *Her $A \in \mathcal{S}$ için $A = \bigcap\{Q_s : P_s \not\subseteq A\}$.*

(4) *Her $A \in \mathcal{S}$ için $A = \bigvee\{P_s : A \not\subseteq Q_s\}$.*

Doku uzaylarında bağıntı ve fonksiyonlardan bahsetmeden önce, bu yapılar için bir temel teşkil eden ve kartezyen çarpım kavramının doku uzaylarındaki karşılıkları olan çarpım dokularını hatırlayalım.

$(S_j, \mathcal{S}_j)$ $(j \in J)$ doku uzayları ve $S = \prod_{j \in J} S_j$ çarpım kümesi olsun. Her $k \in J$ için $A_k \in \mathcal{S}_k$

$$Y_j = \begin{cases} A_j & j = k \quad ise \\ S_j & j \neq k \quad ise \end{cases}$$

olmak üzere, $E(k, A_k) = \prod_{j \in J} Y_i$ verilsin. Bu durumda,

$$\mathcal{E} = \Big\{ \bigcup_{j \in J_1} E(j, A_j) \ : \ J_1 \subseteq J, \ A_j \in \mathcal{S}_j, \forall j \in J_1 \Big\}$$

kümesinin elemanlarının keyfi kesişimleri alınarak elde edilen $\mathcal{S}$ ailesi, altküme olma bağıntısı ile bir dokulanmadır. Burada supremum ve infimum, sırasıyla,

$$\bigwedge_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$$

ve

$$\bigvee_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha = \bigcap\{A \in \mathcal{S} : \bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \subseteq A\} = \bigcap\{B \in \mathcal{E} : \bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \subseteq B\}$$

biçiminde tanımlıdır.

Tanım 2.2.7. $(S_j, \mathcal{S}_j)$ $(j \in J)$ doku uzayları için, yukarıdaki gibi tanımlanan $(S, \mathcal{S})$, $(S_j, \mathcal{S}_j)$ doku uzaylarının *çarpım dokusu* olarak adlandırılır ve $\mathcal{S} = \otimes_{j\in J} S_j$ olarak gösterilir.

$\mathcal{P}(S)\otimes\mathcal{T}$ çarpım dokusunun p-küme ve q-kümeleri, sırasıyla, $\overline{P}_{(s,t)}$ ve $\overline{Q}_{(s,t)}$; $\mathcal{P}(T)\otimes\mathcal{S}$ çarpım dokusunun p-küme ve q-kümeleri ise, sırasıyla, $\overline{P}_{(t,s)}$ ve $\overline{Q}_{(t,s)}$ biçiminde gösterilir.

Önerme 2.2.8. $(S \times T, \mathcal{P}(S) \otimes \mathcal{T})$ *doku uzayında,*

$$\overline{P}_{(s,t)} \not\subseteq \overline{Q}_{(s',t')} \Leftrightarrow s = s' \text{ ve } P_t \not\subseteq Q_{t'}$$

özelliği sağlanır.

Tanım 2.2.9. $(S, \mathcal{S})$ ve $(T, \mathcal{T})$ birer doku uzayı olsun.

(1) Aşağıdaki koşulları sağlayan $r \in \mathcal{P}(S) \otimes \mathcal{T}$'ye $(S, \mathcal{S})$'den $(T, \mathcal{T})$'ye bir *bağıntıdır* denir.

(R1) $r \not\subseteq \overline{Q}_{(s,t)}, P_{s'} \not\subseteq Q_s \Rightarrow r \not\subseteq \overline{Q}_{(s',t)}$.

(R2) $r \not\subseteq \overline{Q}_{(s,t)}$ ise $P_s \not\subseteq Q_{s'}$ ve $r \not\subseteq \overline{Q}_{(s',t)}$ olacak şekilde bir $s' \in S$ vardır.

(2) Aşağıdaki koşulları sağlayan $R \in \mathcal{P}(S)\otimes\mathcal{T}$'ye $(S, \mathcal{S})$'den $(T, \mathcal{T})$'ye bir *kobağıntıdır* denir.

(CR1) $\overline{P}_{(s,t)} \not\subseteq R, P_s \not\subseteq Q_{s'} \Rightarrow \overline{P}_{(s',t)} \not\subseteq R$.

(CR2) $\overline{P}_{(s,t)} \not\subseteq R$ ise $P_{s'} \not\subseteq Q_s$ ve $\overline{P}_{(s',t)} \not\subseteq R$ olacak şekilde bir $s' \in S$ vardır.

(3) $r \in \mathcal{P}(S)\otimes\mathcal{T}$ bir bağıntı ve $R \in \mathcal{P}(S)\otimes\mathcal{T}$ bir kobağıntı olmak üzere, (r, R) ikilisine $\mathcal{S}$'den $\mathcal{T}$'ye bir *dibağıntı* denir.

Örnek 2.2.10. $(S, \mathcal{S})$ bir doku uzayı olmak üzere, $i_S = \bigvee\{\overline{P}_{(s,s)} : s \in S\}$ ve $I_S = \bigcap\{\overline{Q}_{(s,s)} : s \in S\}$, sırasıyla, *birim bağıntı* ve *birim kobağıntı* olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.11. $(r, R) : (S_1, \mathcal{S}_1) \to (S_2, \mathcal{S}_2)$ ve $(q, Q) : (S_2, \mathcal{S}_2) \to (S_3, \mathcal{S}_3)$ birer dibağıntı olsun. Bu durumda,

$$q \circ r = \bigvee \{\overline{P}_{(s,u)} : \exists t \in T; r \not\subseteq \overline{Q}_{(s,t)}, q \not\subseteq \overline{Q}_{(t,u)}\}$$

ve

$$Q \circ R = \bigcap \{\overline{Q}_{(s,u)} : \exists t \in T; \overline{P}_{(s,t)} \not\subseteq R, \overline{P}_{(t,u)} \not\subseteq Q\}$$

olmak üzere, (r, R) ve (q, Q) dibağıntılarının *bileşkesi* $(q, Q) \circ (r, R) = (q \circ r, Q \circ R)$ biçiminde tanımlıdır.

Önerme 2.2.12. *$(S, \mathcal{S})$ ve $(T, \mathcal{T})$ birer doku uzayı olsun.*

(1) *$r : (S, \mathcal{S}) \to (T, \mathcal{T})$ bir bağıntı olmak üzere*

$$r^{\leftarrow} = \bigcap \{\overline{Q}_{(t,s)} : r \not\subseteq \overline{Q}_{(s,t)}\}$$

$\mathcal{T}$'den $\mathcal{S}$'ye bir kobağıntıdır.

(2) *$R : (S, \mathcal{S}) \to (T, \mathcal{T})$ bir kobağıntı olmak üzere*

$$R^{\leftarrow} = \bigvee \{\overline{P}_{(t,s)} : \overline{P}_{(s,t)} \not\subseteq R\}$$

$\mathcal{T}$'den $\mathcal{S}$'ye bir bağıntıdır.

Tanım 2.2.13. **(1)** Yukarıdaki önermede tanımlanan $r^{\leftarrow}$ kobağıntısına *r'nin tersi*; $R^{\leftarrow}$ bağıntısına ise *R'nin tersi* denir.

(2) $(r, R) : (S, \mathcal{S}) \to (T, \mathcal{T})$ bir dibağıntı olmak üzere $(r, R)^{\leftarrow} = (R^{\leftarrow}, r^{\leftarrow})$ dibağıntısına *(r, R)'nin tersi* denir.

Önerme 2.2.14. **(1)** *$(r, R) : (S_1, \mathcal{S}_1) \to (S_2, \mathcal{S}_2)$ ve $(q, Q) : (S_2, \mathcal{S}_2) \to (S_3, \mathcal{S}_3)$ birer dibağıntı olsun. Bu durumda, $[(q, Q) \circ (r, R)]^{\leftarrow} = (r, R)^{\leftarrow} \circ (q, Q)^{\leftarrow}$ olur.*

(2) *(i, I), $(S, \mathcal{S})$ üzerinde birim dibağıntı olmak üzere, $i^{\leftarrow} = I$ ve $I^{\leftarrow} = i$'dir.*

Önerme 2.2.15. *$(r, R) : (S, \mathcal{S}) \to (T, \mathcal{T})$ bir dibağıntı olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır:*

(1) *Her $s \in S$, $t \in T$ için $r \not\subseteq \overline{Q}_{(s,t)} \Leftrightarrow \overline{P}_{(t,s)} \not\subseteq r^{\leftarrow}$.*

(2) *Her $s \in S$, $t \in T$ için $\overline{P}_{(s,t)} \not\subseteq R \Leftrightarrow R^{\leftarrow} \not\subseteq \overline{Q}_{(t,s)}$.*

Nesneleri doku uzayları ve morfizmaları dibağıntılar olan kategori **drTex** ile gösterilir [12]. $\mathbf{drTex^{op}}$ dual kategorisi için $\mathfrak{I}$: **drTex**→ $\mathbf{drTex^{op}}$,

$$\mathfrak{I}((S,\mathcal{S}) \xrightarrow{(r,R)} (T,\mathcal{T})) = (T,\mathcal{T}) \xrightarrow{(r,R)^{\leftarrow}} (S,\mathcal{S})$$

bir funktordur. Ayrıca, $\mathfrak{I}\mathfrak{G} = 1_{\mathbf{drTex^{op}}}$ ve $\mathfrak{G}\mathfrak{I} = 1_{\mathbf{drTex}}$ olacak şekilde bir $\mathfrak{G}$:$\mathbf{drTex^{op}} \to$ **drTex** funktoru tanımlanabilir ve böylece $\mathfrak{I}$ bir izomorfizmadır. Yani, **drTex** ve $\mathbf{drTex^{op}}$ kategorileri izomorfiktir.

Not 2.2.16. [38] $\varphi \in \mathcal{P}(S\times T) = \mathcal{P}(S)\otimes\mathcal{P}(T)$ bir noktasal bağıntı olsun. Bu durumda, $\varphi^{-1} = \{(t,s) : (s,t) \in \varphi\}$ bu bağıntının tersi ve $'$ kümesel tümleyen işlemi olmak üzere, $\varphi^{\leftarrow} = (\varphi^{-1})' = (\varphi')^{-1}$ dir.

Tanım 2.2.17. $(r,R) : (S,\mathcal{S}) \to (T,\mathcal{T})$ bir dibağıntı olsun.

(1) $A \subseteq S$ olmak üzere

$$r^{\rightarrow}A = \bigcap\{Q_t : \forall s, r \not\subseteq \overline{Q}_{(s,t)} \Rightarrow A \subseteq Q_s\} \in \mathcal{T}$$

kümesine *r'nin A-kesiti* denir.

(2) $B \subseteq T$ olmak üzere $R^{\leftarrow}$ bağıntısının B-kesiti $(R^{\leftarrow})^{\rightarrow}B \in \mathcal{S}$'ye R kobağıntısının *B-önkesiti* denir ve kısaca $R^{\leftarrow}B$ ile gösterilir.

(3) $A \subseteq S$ olmak üzere

$$R^{\rightarrow}A = \bigvee\{P_t : \forall s, \overline{P}_{(s,t)} \not\subseteq R \Rightarrow P_s \subseteq A\} \in \mathcal{T}$$

kümesine *R'nin A-kesiti* denir.

(4) $B \subseteq T$ olmak üzere $r^{\leftarrow}$ kobağıntısının B-kesiti, $(r^{\leftarrow})^{\rightarrow}B \in \mathcal{S}$'ye r bağıntısının *B-önkesiti* denir ve kısaca $r^{\leftarrow}B$ ile gösterilir.

Önerme 2.2.18. *(r,R), (r_1,R_1) ve (r_2,R_2), $\mathcal{S}$'den $\mathcal{T}$'ye birer dibağıntı olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır.*

(1) $r \not\subseteq \overline{Q}_{(s,t)} \Leftrightarrow r^{\rightarrow}P_s \not\subseteq Q_t$.

(2) $\overline{P}_{(s,t)} \not\subseteq R \Leftrightarrow P_t \not\subseteq R^{\rightarrow}Q_s$.

(3) $A_1 \subseteq A_2$ *ve* $r_1 \subseteq r_2 \Leftrightarrow {r_1}^{\rightarrow}A_1 \subseteq {r_2}^{\rightarrow}A_2$.

(4) $A_1 \subseteq A_2$ *ve* $R_1 \subseteq R_2 \Leftrightarrow {R_1}^{\to} A_1 \subseteq {R_2}^{\to} A_2$.

Teorem 2.2.19. $(r, R) : (S, \mathcal{S}) \to (T, \mathcal{T})$ *bir dibağıntı olmak üzere* $(r^{\to}, (r^{\leftarrow})^{\to})$ *ve* $((R^{\leftarrow})^{\to}, R^{\to})$ *birer adjoint çiftidir.*

Sonuç 2.2.20. $(r, R) : (S, \mathcal{S}) \to (T, \mathcal{T})$ *bir dibağıntı ve* J *bir indeks kümesi olmak üzere, her* $A_j \in \mathcal{S}$ *için*

$$r^{\to}(\bigvee_{j \in J} A_j) = \bigvee_{j \in J} r^{\to} A_j \textit{ ve } R^{\to}(\bigcap_{j \in J} A_j) = \bigcap_{j \in J} R^{\to} A_j \textit{ 'dir.}$$

Tanım 2.2.21. (f, F), $(S, \mathcal{S})$'den $(T, \mathcal{T})$'ye bir dibağıntı olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa (f, F)'ye bir *difonksiyon* denir.

(DF1) $P_s \not\subseteq Q_{s'}$ olacak şekilde her $s, s' \in S$ için $f \not\subseteq \overline{Q}_{(s,t)}$ ve $\overline{P}_{(s',t)} \not\subseteq F$ olacak şekilde bir $t \in T$ vardır.

(DF2) $t, t' \in T$ ve $s \in S$ için $f \not\subseteq \overline{Q}_{(s,t)}$ ve $\overline{P}_{(s,t')} \not\subseteq F$ ise $P_{t'} \not\subseteq Q_t$'dir.

Tanım 2.2.22. $(f, F) : (S, \mathcal{S}) \to (T, \mathcal{T})$ bir difonksiyon olsun. Bu durumda, $A \in \mathcal{S}$ ve $B \in \mathcal{T}$ olmak üzere

(1) f bağıntısının A-kesitine, A'nın (f, F) altındaki *görüntüsü*,

(2) F kobağıntısının A-kesitine, A'nın (f, F) altındaki *kogörüntüsü*,

(3) f bağıntısının B-önkesitine, B'nin (f, F) altındaki *ters görüntüsü*,

(4) F kobağıntısının B-önkesitine, B'nin (f, F) altındaki *ters kogörüntüsü* denir.

Önerme 2.2.23. $(f, F) : (S, \mathcal{S}) \to (T, \mathcal{T})$ *bir dibağıntı olsun. Bu durumda,* (f, F)*'nin bir difonksiyon olması için gerek ve yeter koşul her* $B \in \mathcal{T}$ *için* $F^{\leftarrow} B = f^{\leftarrow} B$ *olmasıdır.*

Şimdi, topolojik, ikili topolojik ve belirtisiz topolojik uzayların bir genelleştirmesi olarak tanımlanmış olan ditopolojik doku uzaylarının tanımını verelim.

Tanım 2.2.24. $(S, \mathcal{S})$ bir doku uzayı, $\tau, \kappa \subseteq \mathcal{S}$ aşağıdaki özellikleri sağlayan alt aileler olmak üzere (τ, κ) ikilisine $\mathcal{S}$ üzerinde bir *ditopoloji* ve $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$'ye bir *ditopolojik doku uzayı* denir.

($\mathbf{T_1}$) $S, \emptyset \in \tau$,

($\mathbf{T_2}$) $G_1, G_2 \in \tau \Rightarrow G_1 \cap G_2 \in \tau$,

($\mathbf{T_3}$) $G_i \in \tau, i \in I \Rightarrow \bigvee_{i \in I} G_i \in \tau$.

($\mathbf{CT_1}$) $S, \emptyset \in \kappa$,

($\mathbf{CT_2}$) $K_1, K_2 \in \kappa \Rightarrow K_1 \cup K_2 \in \kappa$,

($\mathbf{CT_3}$) $K_i \in \kappa, i \in I \Rightarrow \bigcap_{i \in I} K_i \in \kappa$.

Burada τ bir *topoloji*, τ'nun elemanları *açık kümeler*; κ bir *kotopoloji*, κ'nın elemanları ise *kapalı kümeler* olarak adlandırılır.

Bir ditopolojik uzayda kapalı ve açık kümeler arasında bir ilişki olmak zorunda değildir. $(S, \mathcal{S}, \sigma)$ tümleyenli bir doku uzayı olmak üzere $\kappa = \sigma(\tau)$ koşulu sağlanıyorsa (τ, κ) ikilisine $(S, \mathcal{S}, \sigma)$ üzerinde *tümleyenli ditopoloji* denir.

Örnekler 2.2.25. **(1)** $(S, \mathcal{S})$ bir doku uzayı olsun. $\tau = \mathcal{S} = \kappa$ olmak üzere (τ, κ) bir ditopolojidir ve *ayrık ditopoloji* olarak adlandırılır.

(2) $(L, \mathcal{L}, \lambda)$, $(\mathbb{L}, ')$ Hutton cebirine karşılık gelen doku uzayı ve $(\mathbb{L}, T)$ bir belirtisiz topolojik uzay olsun. $T' = \{a' : a \in T\}$, $\tau = \varphi(T)$ ve $\kappa = \varphi(T')$ olmak üzere (τ, κ), $(L, \mathcal{L}, \lambda)$ üzerinde bir tümleyenli ditopolojidir.

(3) $(\mathbb{I}, \mathcal{J})$ birim aralık dokusu, $\tau_{\mathbb{I}} = \{[0, r) : 0 \leq r \leq 1\} \cup \{\mathbb{I}\}$ ve $\kappa_{\mathbb{I}} = \{[0, r] : 0 \leq r \leq 1\} \cup \{\emptyset\}$ olmak üzere $(\mathbb{I}, \mathcal{J}, \tau_{\mathbb{I}}, \kappa_{\mathbb{I}})$ bir ditopolojik doku uzayıdır ve $(\tau_{\mathbb{I}}, \kappa_{\mathbb{I}})$, birim aralık dokusu üzerindeki *doğal ditopoloji* olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.26. $(f, F) : (S_1, \mathcal{S}_1, \tau_1, \kappa_1) \to (S_2, \mathcal{S}_2, \tau_2, \kappa_2)$ bir difonksiyon olsun.

(1) Her $G \in \tau_2$ için $F^{\leftarrow}G \in \tau_1$ ise (f, F) difonksiyonuna *süreklidir*,

(2) Her $K \in \kappa_2$ için $f^{\leftarrow}K \in \kappa_1$ ise (f, F) difonksiyonuna *kosüreklidir*,

(3) (f, F) hem sürekli hem de kosürekli ise, (f, F) difonksiyonuna *ikili süreklidir* denir.

Not 2.2.27. **(1)** Nesneleri ditopolojik doku uzayları ve morfizmaları ikili sürekli difonksiyonlar olan kategori **dfDitop** ile gösterilir.

(2) L tam, tamamen dağılımlı bir latis ve (τ,κ), L üzerinde bir ditopoloji olmak üzere (L,τ,κ) üçlüsü bir Hutton uzayı olarak adlandırılır. Nesneleri Hutton uzayları, morfizmaları keyfi infimum ile keyfi supremum işlemlerini koruyan ve $\varphi[\tau_1] \subseteq \tau_2$, $\varphi[\kappa_1] \subseteq \kappa_2$ koşullarını sağlayan $\varphi : (L_1,\tau_1,\kappa_1) \to (L_2,\tau_2,\kappa_2)$ dönüşümleri olan kategori **diH** ile gösterilir.

Genelleştirilmiş ditopolojik uzaylar olarak ortaya konulacak olan diçatılarda ayırma aksiyomlarını tanımlayabilmek için öncelikle, ditopolojik doku uzaylarında ayırma aksiyomlarını hatırlatmak gereklidir.

Tanım 2.2.28. $(S,\mathcal{S},\tau,\kappa)$ bir ditopolojik doku uzayı ve $A \in \mathcal{S}$ olmak üzere, $[A] = \bigcap\{K \in \kappa : A \subseteq K\}$ kümesine *A'nın kapanışı*, $]A[= \bigvee\{G \in \tau : G \subseteq A\}$ kümesine ise *A'nın içi* denir.

Tanım 2.2.29. $(S,\mathcal{S},\tau,\kappa)$ bir ditopolojik doku uzayı olsun.

(2) Her $A \in \mathcal{S}$ için $A = \bigcap_{j\in J}\bigvee_{i\in I_j} C_i^j$ olacak şekilde $C_i^j \in \tau \cup \kappa$ varsa bu uzaya T_0,

(2) Her $G \in \tau$ için $G \not\subseteq Q_s \Rightarrow [P_s] \subseteq G$ oluyorsa bu uzaya R_0,

(3) $G \not\subseteq Q_s$ ve $P_t \not\subseteq G$ koşullarını sağlayan her $G \in \tau$ için $H \not\subseteq Q_s$ ve $P_t \not\subseteq [H]$ olacak şekilde bir $H \in \tau$ varsa bu uzaya R_1,

(4) $G \not\subseteq Q_s$ olacak şekildeki her $G \in \tau$ için $H \not\subseteq Q_s$ ve $[H] \subseteq G$ koşullarını sağlayan bir $H \in \tau$ varsa bu uzaya *regüler*,

(5) $G \not\subseteq Q_s$ olacak şekildeki her $G \in \tau$ için $P_s \subseteq f^{\leftarrow}P_0$ ve $F^{\leftarrow}Q_1 \subseteq G$ koşullarını sağlayan bir $(f,F) : (S,\mathcal{S},\tau,\kappa) \to (\mathbb{I},\mathcal{J},\tau_{\mathbb{I}},\kappa_{\mathbb{I}})$ ikili sürekli difonksiyonu varsa bu uzaya *tamamen regüler*,

(6) $F \subseteq G$ olan her $F \in \kappa$ ve $G \in \tau$ için $F \subseteq H \subseteq K \subseteq G$ olacak şekilde bir $H \in \tau$ ve bir $K \in \kappa$ varsa bu uzaya *normal* denir.

Tanım 2.2.30. $(S,\mathcal{S},\tau,\kappa)$ bir ditopolojik doku uzayı olsun.

(1) Her $F \in \kappa$ için $P_s \not\subseteq F \Rightarrow F \subseteq]Q_s[$ oluyorsa bu uzaya *ko-*R_0,

(2) $P_s \not\subseteq F$ ve $F \not\subseteq Q_t$ koşullarını sağlayan her $F \in \kappa$ için $P_s \not\subseteq K$ ve $]K[\not\subseteq Q_t$ olacak şekilde bir $K \in \kappa$ varsa bu uzaya *ko-*R_1,

(3) $P_s \not\subseteq F$ olacak şekildeki her $F \in \kappa$ için $P_s \not\subseteq K$ ve $F \subseteq]K[$ koşullarını sağlayan bir $K \in \kappa$ varsa bu uzaya *ko-regüler*,

(4) $P_s \not\subseteq K$ olacak şekildeki her $K \in \kappa$ için $K \subseteq f^{\leftarrow}P_0$ ve $F^{\leftarrow}Q_1 \subseteq Q_s$ koşullarını sağlayan bir $(f, F) : (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa) \to (\mathbb{I}, \mathcal{J}, \tau_{\mathbb{I}}, \kappa_{\mathbb{I}})$ ikili sürekli difonksiyonu varsa bu uzaya *tamamen ko-regüler* denir.

Tanım 2.2.31. $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayı,

(1) R_0 (sırasıyla, R_1, regüler, tamamen regüler) ve T_0 ise T_1 (sırasıyla, T_2, T_3, $T_{3\frac{1}{2}}$),

(2) *ko*-R_0 (sırasıyla, *ko*-R_1, ko-regüler, tamamen ko-regüler) ve T_0 ise *ko*-T_1 (sırasıyla, *ko*-T_2, *ko*-T_3, *ko*-$T_{3\frac{1}{2}}$),

(3) normal ve T_1 (sırasıyla, *ko*-T_1) ise T_4 (sırasıyla, *ko*-T_4) olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.32. $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ bir ditopolojik doku uzayı ve $\mathcal{P}$, ditopolojik uzayların bir özelliği olmak üzere, $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ uzayı $\mathcal{P}$ ve *ko*-$\mathcal{P}$ ise bu uzay *bi*-$\mathcal{P}$'dir denir.

Not 2.2.33. $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ bir ditopolojik doku uzayı olmak üzere, "$(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ uzayı $\mathcal{P}$'dir $\Leftrightarrow$ $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ uzayı *ko*-$\mathcal{P}$'dir" özelliği sağlanıyorsa $\mathcal{P}$ özelliği kendi kendine dualdir denir. Normallik ve T_0 özellikleri kendi kendine dual olduklarından ko-normal ve ko-T_0 kavramları, sırasıyla, normal ve T_0 ile çakışır.

Bu bölümde son olarak, ditopolojik doku uzaylarında (ko-) kompaktlık ve (ko-) dengelilikten bahsedelim. Kopperman'ın [21] çalışmasında vermiş olduğu tanımlar temel alınarak, kompaktlık ve dengelilik kavramları Brown ve Diker [10] tarafından ditopolojik doku uzaylarına genelleştirilmiştir. Daha sonra, Brown ve Gohar [5] tarafından bu kavramların morfizmalar altındaki görüntüleri, Mrowka karakterizasyonu ve Tychonoff çarpım teoremlerinin ditopolojik uzaylara genelleştirilmesi gibi konular çalışılmıştır.

Tanım 2.2.34. $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ bir ditopolojik doku uzayı ve $A \in \mathcal{S}$ olsun. Bu durumda $A \subseteq \bigvee_{i \in I} H_i$ koşulunu sağlayan $\{H_i \in \tau : i \in I\}$ ailesine *A'nın bir açık örtüsü* denir. Dual olarak, $\bigcap_{i \in I} K_i \subseteq A$ koşulunu sağlayan $\{K_i \in \kappa : i \in I\}$ ailesine *A'nın bir kapalı ko-örtüsü* denir.

Tanım 2.2.35. $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ bir ditopolojik doku uzayı olsun.

(1) Eğer $A \in \mathcal{S}$'nın her $\mathcal{H}$ açık örtüsü için $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} H_i$ olacak şekilde sonlu bir $\{H_i : i = 1 \ldots n\} \subseteq \mathcal{H}$ alt ailesi varsa A kümesi *kompakttır* denir. Özel olarak, $S \in \mathcal{S}$ kompakt ise, $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ uzayı *kompakttır* denir.

(2) Eğer $A \in \mathcal{S}$'nın her $\mathcal{F}$ kapalı ko-örtüsü için $\bigcap_{i=1}^{n} F_i \subseteq A$ olacak şekilde sonlu bir $\{F_i : i = 1 \ldots n\} \subseteq \mathcal{F}$ alt ailesi varsa A kümesi *ko-kompakttır* denir. Özel olarak, $\emptyset \in \mathcal{S}$ ko-kompakt ise, $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ uzayı *ko-kompakttır* denir.

(3) Eğer her $S \neq F \in \kappa$ kompakt ise $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ uzayına *dengelidir* denir.

(4) Eğer her $\emptyset \neq G \in \tau$ ko-kompakt ise $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ uzayına *ko-dengelidir* denir.

Örnek 2.2.36. $(\mathbb{I}, \mathcal{J}, \tau_{\mathbb{I}}, \kappa_{\mathbb{I}})$ ditopolojik doku uzayı bi-kompakt ve bi-dengelidir.

3 KOÇATI TEORİSİ

3.1 Koçatılar ve Kolokaller

Bilindiği gibi, ditopolojik doku uzayları teorisi, dual kavramları aynı çatı altında inceleme olanağı sunar. Biz de çatı ve koçatı kavramlarını aynı yapı içerisinde incelemek istiyoruz. Dolayısıyla öncelikle, çatı kavramına paralel olarak koçatı teorisinin incelenmesi gerekmektedir. Bu bölümde koçatılar üzerinde bazı yapılar oluşturulacak ve bunlarla ilgili tanım ve teoremlere yer verilecektir. Bunun için ilk olarak koçatılar ve koHeyting cebirleri arasındaki ilişki sunulacaktır.

M bir tam koHeyting cebiri olsun ve $b^{\leftarrow}, \vee_b : M \to M$ dönüşümleri $b^{\leftarrow}(a) = a \leftarrow b$, $\vee_b(a) = b \vee a$ biçiminde tanımlansın. Bu durumda,

$$b^{\leftarrow}(a) = a \leftarrow b \leq c \Leftrightarrow a \leq b \vee c = \vee_b(c)$$

sağlandığından, her $b \in M$ için $(b^{\leftarrow}, \vee_b)$ bir adjoint çiftidir. Ayrıca, $\vee_b$ dönüşümü bir sağ adjoint olduğu için keyfi infimum işlemini korur ve böylece

$$\vee_b(\bigwedge_{i \in J} a_i) = b \vee (\bigwedge_{i \in J} a_i) = \bigwedge_{i \in J}(b \vee a_i) = \bigwedge_{i \in J} \vee_b(a_i)$$

sağlanır, yani M bir koçatıdır. Tersine, M bir koçatı olmak üzere, $b^{\leftarrow}$ bir koHeyting işlemidir. Böylece her tam koHeyting cebiri bir koçatı, ve her koçatı bir tam koHeyting cebiridir.

Örnek 3.1.1. Her tam Boole cebiri $x \to y = x^* \vee y$ ve $x \leftarrow y = x \wedge y^*$ ikili işlemleri ile hem bir tam Heyting cebiri (dolayısıyla bir çatı) hem de bir tam koHeyting cebiri (dolayısıyla bir koçatı) dir.

Aşağıda verilecek olan özelliklerden (cH1), (cH2) ve (cH6), [30] kaynağında; (cH3), (cH7), (cH8) ve (cH13) ise [26] kaynağında kanıtları verilmeden ifade edilmiştir. Burada ise bu özellikler kanıtları ile birlikte verilmiştir. Diğerleri ise, Heyting cebirlerinin [26] kaynağında verilen özelliklerinin dualleri olarak elde edilmiştir.

Bilindiği gibi her koHeyting cebirinin bir tam latis olması gerekmez. Bu nedenle (cH3) ve (cH10) özelliklerinin yalnızca, ifadelerinde yer alan keyfi infimum ve supremumların var olması durumunda sağlanacaklarına dikkat edilmelidir.

Önerme 3.1.2. *M bir koHeyting cebiri olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır:*

(cH1) $a \leq b \Leftrightarrow a \leftarrow b = 0$. *Özel olarak* $a \leftarrow a = 0$.

(cH2) $a \leftarrow b \leq a$.

(cH3) $(\bigvee_{i \in J} a_i) \leftarrow b = \bigvee_{i \in J}(a_i \leftarrow b)$.

(cH4) $b \leftarrow a = (a \vee b) \leftarrow a$

(cH5) $a \leq b \Rightarrow a \leftarrow c \leq b \leftarrow c$.

(cH6) $a \leftarrow 0 = a$.

(cH7) $(b \leftarrow a) \vee a = a \vee b$.

(cH8) $a \vee b = a \vee c \Leftrightarrow b \leftarrow a = c \leftarrow a$.

(cH9) $a \leq b \Rightarrow c \leftarrow b \leq c \leftarrow a$.

(cH10) $x \leftarrow \bigwedge_{i \in J} a_i = \bigvee_{i \in J}(x \leftarrow a_i)$.

(cH11) $a = (a \wedge b) \vee (a \leftarrow b)$.

(cH12) $(b \leftarrow a) \leftarrow a = b \leftarrow a$.

(cH13) $c \leftarrow (a \vee b) = (c \leftarrow b) \leftarrow a$.

Kanıt:

(cH1) $a \leftarrow b = 0 \Leftrightarrow a \leftarrow b \leq 0 \Leftrightarrow a \leq b \vee 0 \Leftrightarrow a \leq b$.

(cH2) $a \leq b \vee a$ olduğundan $a \leftarrow b \leq a$'dir.

(cH3) $b^{\leftarrow} : M \to M$, $b^{\leftarrow}(a) = a \leftarrow b$ dönüşümü bir sol adjoint olduğundan keyfi supremum işlemini korur. Böylece $b^{\leftarrow}(\bigvee_{i \in J} a_i) = \bigvee_{i \in J} b^{\leftarrow}(a_i)$ sağlanır ve dolayısıyla $(\bigvee_{i \in J} a_i) \leftarrow b = \bigvee_{i \in J}(a_i \leftarrow b)$ elde edilir.

(cH4) Sırasıyla (cH3) ve (cH1) kullanılırsa,

$$(a \vee b) \leftarrow a = (a \leftarrow a) \vee (b \leftarrow a) = 0 \vee (b \leftarrow a) = (b \leftarrow a)$$

elde edilir.

(cH5) $a \leq b$ ve $x \in M$ olsun. $b \leftarrow c \leq x \Rightarrow a \leq b \leq c \vee x \Rightarrow a \leftarrow c \leq x$ olduğundan istenilen gerektirme sağlanır.

(cH6) Öncelikle $a \leftarrow 0 \leq a \leftarrow 0$ olduğundan $a \leq 0 \vee (a \leftarrow 0) = a \leftarrow 0$ sağlanır. Diğer taraftan $a \leq 0 \vee a$ ve böylece $a \leftarrow 0 \leq a$'dır.

(cH7) $b \leftarrow a \leq b \leftarrow a$ olduğundan $b \leq (b \leftarrow a) \vee a$'dır. Böylece $a \vee b \leq a \vee (b \leftarrow a)$ elde edilir. Diğer taraftan $b \leftarrow a \leq b$ olduğundan $(b \leftarrow a) \vee a \leq a \vee b$'dir.

(cH8) $(\Rightarrow)$ $a \vee b = a \vee c$ ve $x \in M$ olsun. Sırasıyla (cH7) ve (cH4) kullanılırsa, $c \leftarrow a \leq x$ $\Rightarrow a \vee c = (c \leftarrow a) \vee a \leq x \vee a \Rightarrow a \vee b \leq x \vee a \Rightarrow (b \leftarrow a) = (a \vee b) \leftarrow a \leq x$ elde edilir. Yani her $x \in M$ için $c \leftarrow a \leq x \Rightarrow b \leftarrow a \leq x$ ve böylece $b \leftarrow a \leq c \leftarrow a$'dir. Diğer eşitsizlik de benzer şekilde gösterilebilir.

$(\Leftarrow)$ Tersini göstermek için $b \leftarrow a = c \leftarrow a$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $b \leftarrow a \leq c \leftarrow a$ olduğundan (cH7)'den $b \leq a \vee (c \leftarrow a) = a \vee c$ ve böylece $a \vee b \leq a \vee c$'dir. Benzer şekilde $a \vee c \leq a \vee b$ olduğu da gösterilebilir.

(cH9) $a \leq b$ ve $x \in M$ olmak üzere, $c \leftarrow a \leq x \Rightarrow c \leq a \vee x \leq b \vee x \Rightarrow c \leftarrow b \leq x$ ve böylece $c \leftarrow b \leq c \leftarrow a$'dır.

(cH10) Her $i \in J$ için $\bigwedge_{i \in J} a_i \leq a_i$ ve böylece (cH9)'dan $x \leftarrow a_i \leq x \leftarrow \bigwedge_{i \in J} a_i$ dir. O halde $\bigvee_{i \in J} (x \leftarrow a_i) \leq x \leftarrow \bigwedge_{i \in J} a_i$'dir.

Tersi için $y \in M$ ve $\bigvee_{i \in J} (x \leftarrow a_i) \leq y$ olsun. Buradan, $(\forall i \in J,\ x \leftarrow a_i \leq y) \Rightarrow$ $(\forall i \in J,\ x \leftarrow y \leq a_i) \Rightarrow (x \leftarrow y \leq \bigwedge_{i \in J} a_i) \Rightarrow (x \leftarrow \bigwedge_{i \in J} a_i \leq y)$ elde edilir. Böylece $x \leftarrow \bigwedge_{i \in J} a_i \leq \bigvee_{i \in J} (x \leftarrow a_i)$ eşitsizliği sağlanmış olur.

(cH11) (cH2)'den $(a \wedge b) \vee (a \leftarrow b) \leq a$ olduğu açıktır. Diğer taraftan, sırasıyla, dağılma özelliği ve (cH7) kullanılarak

$$(a \wedge b) \vee (a \leftarrow b) = (a \vee (a \leftarrow b)) \wedge (b \vee (a \leftarrow b)) \geq a \wedge (a \vee b) \geq a$$

elde edilir.

(cH12) Öncelikle (cH2)'den $b \leftarrow a \leq b$ ve böylece (cH5)'den $(b \leftarrow a) \leftarrow a \leq b \leftarrow a$'dir. Diğer taraftan, $b \leftarrow a \leq b \leftarrow a$ eşitsizliği ve (cH7) kullanılarak $b \leq a \vee (b \leftarrow a) =$ $a \vee ((b \leftarrow a) \leftarrow a)$ elde edilir. Böylece, $b \leftarrow a \leq (b \leftarrow a) \leftarrow a$'dir.

(cH13) Her $x \in M$ için $(c \leftarrow b) \leftarrow a \leq x \Leftrightarrow c \leftarrow b \leq a \vee x \Leftrightarrow c \leq (a \vee b) \vee x \Leftrightarrow$ $c \leftarrow (a \vee b) \leq x$ olduğundan $c \leftarrow (a \vee b) = (c \leftarrow b) \leftarrow a$'dir. ■

Tanım 3.1.3. [27] M_1 ve M_2 birer koçatı, $f : M_1 \to M_2$ bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu keyfi infimum ve sonlu supremum işlemlerini koruyorsa f'ye bir *koçatı homomorfizması* denir.

Nesneleri koçatılar, morfizmaları koçatı homomorfizmaları olan kategori **coFrm**; **coFrm** kategorisinin dual kategorisi olan kolokaller kategorisi ise **coLoc** ile gösterilecektir. Koçatı homomorfizmaları keyfi infimum işlemini korudukları için bir sol adjointleri vardır. O halde **coLoc** kategorisinin morfizmaları koçatı homomorfizmalarının sol adjointleri olarak tanımlanabilir.

Tanım 3.1.4. M_1 ve M_2 birer koçatı ve $f : M_1 \to M_2$ bir fonksiyon olsun. Eğer f aşağıdaki koşulları sağlıyorsa f'ye bir *kolokalik dönüşüm* denir.

(1) f dönüşümü keyfi supremum işlemini korur,

(2) f'nin sağ adjointi olan $f_* : M_2 \to M_1$ dönüşümü sonlu supremum işlemini korur.

Şimdi **coLoc** kategorisinin alt nesneleri olan altkolokalleri tanımlayalım ve bu yapıların belli özelliklere sahip iç (kernel) operatörleri yardımı ile karakterize edilebileceğini gösterelim.

Tanım 3.1.5. M bir kolokal olmak üzere aşağıdaki koşulları sağlayan bir $S \subseteq M$ kümesine bir *altkolokal* denir.

(cS1) Her $L \subseteq S$ için $\bigvee L \in S$,

(cS2) Her $s \in S$ ve $x \in M$ için $s \leftarrow x \in S$'dir.

Önerme 3.1.6. *M bir kolokal (koçatı) ve $S \subseteq M$ olsun. S'nin bir altkolokal olabilmesi için gerek ve yeter koşul S'nin M'den indirgenen sıralama ile bir kolokal olması ve $i_c : S \to M$ gömme dönüşümünün bir kolokalik dönüşüm olmasıdır.*

Kanıt: ($\Rightarrow$) M bir kolokal ve $S \subseteq M$ bir altkolokal olsun. Bu durumda Önerme 2.1.2 ve (cS1)'den S bir tam latistir. Ayrıca daha önce değinildiği gibi, $b \in S$ olmak üzere, $b^{\leftarrow}(s) = s \leftarrow b$ ve $\vee_b(s) = b \vee s$ biçiminde tanımlanan $b^{\leftarrow}, \vee_b : S \to S$ dönüşümleri için $(b^{\leftarrow}, \vee_b)$ bir adjoint çifti olduğundan koçatı dağılma özelliği sağlanır, yani S bir koçatıdır.

Şimdi, $i_c : S \to M$ gömme dönüşümünün bir kolokalik dönüşüm olduğunu yani, $k = (i_c)_* : M \to S$ fonksiyonunun bir koçatı homomorfizması olduğunu gösterelim.

Öncelikle k bir sağ adjoint olduğundan keyfi infimum işlemini korur. Ayrıca, her $x \in M$ için $k(x) \leq k(x)$ olduğundan $i_c(k(x)) \leq x$ yani, $k(x) \leq x$ ve böylece $k(0) = 0$'dır. Son olarak, $x, y \in M$ olmak üzere her $s \in S$ için $s \leq k(x) \vee k(y) \Leftrightarrow s \leftarrow k(y) \leq k(x) \Leftrightarrow i_c(s \leftarrow k(y)) = s \leftarrow k(y) \leq x \Leftrightarrow s \leftarrow x \leq k(y) \Leftrightarrow i_c(s \leftarrow x) = s \leftarrow x \leq y \Leftrightarrow i_c(s) = s \leq x \vee y \Leftrightarrow s \leq k(x \vee y)$ olduğundan $k(x) \vee k(y) = k(x \vee y)$'dir. Böylece k fonksiyonu sonlu supremum işlemini de korur.

($\Leftarrow$) **(cS1)** $S \subseteq M$ bir kolokal olduğundan tam latis olduğu açıktır.

(cS2) $s \in S$ ve $x \in M$ olsun. $k = (i_c)_* : M \to S$, i_c kolokalik dönüşümüne karşılık gelen koçatı homomorfizması ve $\leftarrow_s$, S koçatısının koHeyting işlemi olmak üzere, her $y \in M$ için $s \leftarrow x \leq y \Leftrightarrow s \leq x \vee y \Leftrightarrow s \leq k(x \vee y) = k(x) \vee k(y) \Leftrightarrow s \leftarrow_s k(x) \leq k(y)$ $\Leftrightarrow s \leftarrow_s k(x) \leq y$ ve böylece $(s \leftarrow x) = (s \leftarrow_s k(x)) \in S$'dir. ∎

Önerme 3.1.7. *M bir kolokal ve $Scl(M)$, M'nin tüm altkolokallerinin ailesi olsun. Bu durumda $(Scl(M), \subseteq)$ bir koçatıdır.*

Kanıt: $(Scl(M), \subseteq)$ kısmi sıralı kümesinde her $\{S_i \in Scl(M) : i \in J\}$ ailesi için $\bigcap_{i \in J} S_i \in Scl(M)$ olduğundan $\bigwedge_{i \in J} S_i = \bigcap_{i \in J} S_i$'dir. Şimdi,

$$\bigvee_{i \in J} S_i = \Big\{ \bigvee N : N \subseteq \bigcup_{i \in J} S_i \Big\}$$

biçiminde tanımlı olduğunu gösterelim:

$T = \Big\{ \bigvee N : N \subseteq \bigcup_{i \in J} S_i \Big\}$ olsun. Öncelikle her $s_i \in S_i$ için $N = \{s_i\}$ olarak seçilirse, her $i \in J$ için $S_i \subseteq T$ elde edilir ve böylece T, $\{S_i : i \in I\}$ kümesinin bir üst sınırıdır. $S \in Scl(M)$, $\{S_i : i \in I\}$'nin diğer bir üst sınırı olmak üzere, $\bigvee N \in T$ ise $N \subseteq \bigcup_{i \in J} S_i \subseteq S$ dir. Buradan, $\bigvee N \in S$ ve böylece $T \subseteq S$ elde edilir. O halde $T = \bigvee_{i \in J} S_i$ olur. Böylece $Scl(M)$ bir tam latistir.

Son olarak, her $T, S_i \in Scl(M)$ için $T \vee (\bigcap_{i \in J} S_i) = \bigcap_{i \in J}(S_i \vee T)$ olduğunu gösterelim:

($\subseteq$:) Her $i \in J$ için $\bigcap_{i \in J} S_i \subseteq S_i \vee T$ olduğundan, her $i \in J$ için $T \vee (\bigcap_{i \in J} S_i) \subseteq S_i \vee T$ dir. Böylece $T \vee (\bigcap_{i \in J} S_i) \subseteq \bigcap_{i \in J}(S_i \vee T)$ elde edilir.

($\supseteq$:) Her $i \in J$ için $x \in S_i \vee T$ olsun. Bu durumda her $i \in J$ için $x = s_i \vee t_i$ olacak şekilde $s_i \in S_i$ ve $t_i \in T$ vardır. Buradan,

$$x = \bigvee_{i \in J}(s_i \vee t_i) = (\bigvee_{i \in J} s_i) \vee (\bigvee_{i \in J} t_i) \geq (\bigvee_{i \in J} t_i) \vee s_i \geq t_i \vee s_i = x$$

elde edilir. Yani, her $i \neq j$ için $x = (\bigvee_{i\in J} t_i) \vee s_i = (\bigvee_{i\in J} t_i) \vee s_j$ ve böylece Önerme 3.1.2 (cH8)'den her $i \neq j$ için $s_i \leftarrow (\bigvee_{i\in J} t_i) = s_j \leftarrow (\bigvee_{i\in J} t_i)$'dir. O halde $s = s_i \leftarrow (\bigvee_{i\in J} t_i)$ olmak üzere Önerme 3.1.2 (cH7)'den

$$x = (\bigvee_{i\in J} t_i) \vee s_i = (\bigvee_{i\in J} t_i) \vee (s_i \leftarrow (\bigvee_{i\in J} t_i)) = (\bigvee_{i\in J} t_i) \vee s \in T \vee (\bigcap_{i\in J} S_i)$$

elde edilir. ■

Not 3.1.8. Her $S \in Scl(M)$ için (cS1)'den $\bigvee \emptyset = 0 \in S$'dir. Böylece $(Scl(M), \subseteq)$ latisinin en küçük elemanı $0_{Scl(M)} = \{0\}$ ve en büyük elemanı $1_{Scl(M)} = M$'dir.

Şimdi de "genelleştirilmiş kapalı altuzaylar" olarak düşünülebilecek olan kapalı altkolokalleri tanımlayalım. $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $F \in \mathcal{C}(X)$ olmak üzere $K \subseteq F$ kümesinin $\mathcal{T}_F$-kapalı olması ile $\mathcal{T}$-kapalı olması denktir ve böylece F'nin tüm kapalı altkümelerinin ailesi,

$$\mathcal{C}(F) = \{K \subseteq F : K \text{ kümesi } \mathcal{T}_F\text{-kapalıdır}\} = \{K \subseteq F : K \in \mathcal{C}(X)\} = \downarrow F$$

dir. O halde eğer $\mathfrak{c}_{\mathcal{C}}(a) = \downarrow a \subseteq M$ kümesi bir altkolokal oluyorsa, kapalı altuzayların bu şekilde temsil edilebileceği çıkarımını yapabiliriz.

Önerme 3.1.9. *M bir kolokal ve $a \in M$ olmak üzere $\mathfrak{c}_{\mathcal{C}}(a) = \downarrow a \subseteq M$ bir altkolokaldir.*

Kanıt: (cS1) Her $i \in I$ için $a_i \in \mathfrak{c}_{\mathcal{C}}(a) = \downarrow a$ olsun. Bu durumda, her $i \in I$ için $a_i \leq a$ olduğundan $\bigvee_{i\in I} a_i \leq a$ ve böylece $\bigvee_{i\in I} a_i \in \mathfrak{c}_{\mathcal{C}}(a)$'dir. O halde $\mathfrak{c}_{\mathcal{C}}(a)$ kümesi keyfi supremum altında kapalıdır.
(cS2) $s \in \downarrow a$ ve $x \in M$ olmak üzere, $s \leq a \vee x$ sağlandığından $s \leftarrow x \leq a$ yani, $s \leftarrow x \in \downarrow a$'dir. ■

Tanım 3.1.10. M bir kolokal, $a \in M$ olmak üzere $\mathfrak{c}_{\mathcal{C}}(a) = \downarrow a$ kümesine bir *kapalı altkolokal*, $\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}(a) = \{x \leftarrow a : x \in M\}$ kümesine ise bir *açık altkolokal* denir.

Yukarıda verilen açık altkolokal tanımında $y = x \leftarrow a$ olarak seçilirse, Önerme 3.1.2 (cH12) yardımıyla, daha kullanışlı olan $\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}(a) = \{y \in M : y \leftarrow a = y\}$ tanımı elde edilebilir.

Altuzaylardan farklı olarak $Scl(M)$ latisinde her altkolokalin bir tümleyeninin olması gerekmez. Fakat bu durum açık ve kapalı altkolokaller için geçerli değildir.

Önerme 3.1.11. *M bir kolokal ve $a \in M$ olsun. Bu durumda $\mathfrak{c}_{\mathcal{C}}(a)$ ve $\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}(a)$ elemanları $Scl(M)$ latisinde birbirinin tümleyenidir.*

Kanıt: $x \in \mathfrak{c}_{\mathcal{C}}(a) \cap \mathfrak{o}_{\mathcal{C}}(a)$ olsun. Bu durumda, $x \in \mathfrak{c}_{\mathcal{C}}(a)$ olduğundan $x \leq a$'dir ve ek olarak $x \in \mathfrak{o}_{\mathcal{C}}(a)$ olduğundan $y \leftarrow a = x \leq a$ olacak şekilde bir $y \in M$ vardır. Buradan $y \leq a$ ve böylece Önerme 3.1.2 (cH1)'den $x = y \leftarrow a = 0$ elde edilir. O halde $\mathfrak{c}_{\mathcal{C}}(a) \cap \mathfrak{o}_{\mathcal{C}}(a) = \{0\}$'dir.

Şimdi $x \in M$ alalım. Önerme 3.1.2 (cH11)'den $x = (x \wedge a) \vee (x \leftarrow a)$ eşitliği sağlanır ve böylece altkolokallerin supremumu tanımından $x \in \mathfrak{c}_{\mathcal{C}}(a) \vee \mathfrak{o}_{\mathcal{C}}(a)$ elde edilir. O halde $\mathfrak{c}_{\mathcal{C}}(a) \vee \mathfrak{o}_{\mathcal{C}}(a) = M$'dir. ∎

Sonuç 3.1.12. $a \leq b \Leftrightarrow \mathfrak{c}_{\mathcal{C}}(a) \subseteq \mathfrak{c}_{\mathcal{C}}(b) \Leftrightarrow \mathfrak{o}_{\mathcal{C}}(b) \subseteq \mathfrak{o}_{\mathcal{C}}(a)$.

Önerme 3.1.13. *M bir kolokal olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır:*

(1) $\bigcap_{i \in J} \mathfrak{c}_{\mathcal{C}}(a_i) = \mathfrak{c}_{\mathcal{C}}(\bigwedge_{i \in J} a_i)$

(2) $\mathfrak{c}_{\mathcal{C}}(a) \vee \mathfrak{c}_{\mathcal{C}}(b) = \mathfrak{c}_{\mathcal{C}}(a \vee b)$

(3) $\bigvee_{i \in J} \mathfrak{o}_{\mathcal{C}}(a_i) = \mathfrak{o}_{\mathcal{C}}(\bigwedge_{i \in J} a_i)$

(4) $\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}(a) \cap \mathfrak{o}_{\mathcal{C}}(b) = \mathfrak{o}_{\mathcal{C}}(a \vee b)$

Kanıt: (1) $x \in M$ ve her $i \in J$ için $a_i \in M$ olmak üzere, $x \in \bigcap_{i \in J} \mathfrak{c}_{\mathcal{C}}(a_i) \Leftrightarrow$ $x \in \mathfrak{c}_{\mathcal{C}}(a_i)$ $(\forall i \in J) \Leftrightarrow x \leq a_i$ $(\forall i \in J) \Leftrightarrow x \leq \bigwedge_{i \in J} a_i \Leftrightarrow x \in \mathfrak{c}_{\mathcal{C}}(\bigwedge_{i \in J} a_i)$ olduğundan istenilen eşitlik elde edilir.

(2) Altkolokallerin supremumu tanımından,

$$\mathfrak{c}_{\mathcal{C}}(a) \vee \mathfrak{c}_{\mathcal{C}}(b) = \left\{ \bigvee N : N \subseteq \mathfrak{c}_{\mathcal{C}}(a) \cup \mathfrak{c}_{\mathcal{C}}(b) \right\} = \{x \vee y : x \leq a, y \leq b\}$$

olduğu açıktır. Şimdi $A = \{x \vee y : x \leq a, y \leq b\} = \mathfrak{c}_{\mathcal{C}}(a \vee b)$ olduğunu gösterelim. Öncelikle, $z = x \vee y \in A$ ise $z \leq a \vee b$ olduğundan $z \in \mathfrak{c}_{\mathcal{C}}(a \vee b)$'dir. Diğer taraftan, $z \in \mathfrak{c}_{\mathcal{C}}(a \vee b)$ ise $z \leq a \vee b$ olup böylece $z = z \wedge (a \vee b) = (z \wedge a) \vee (z \wedge b) \in A$ elde edilir.

(3) Her $i \in J$ için $\bigwedge_{i \in J} a_i \leq a_i$ olduğundan $\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}(a_i) \subseteq \mathfrak{o}_{\mathcal{C}}(\bigwedge_{i \in J} a_i)$ ve böylece $\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}(\bigwedge_{i \in J} a_i)$, $\mathcal{A} = \{\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}(a_i) : i \in J\}$ kümesi için bir üst sınırdır. Şimdi $S \subseteq M$ altkolokali $\mathcal{A}$ için herhangi bir üst sınır ve $y \in \mathfrak{o}_{\mathcal{C}}(\bigwedge_{i \in J} a_i)$ olsun. Bu durumda $y = x \leftarrow \bigwedge_{i \in J} a_i = \bigvee_{i \in J}(x \leftarrow a_i)$ olacak şekilde bir $x \in M$ vardır. Her $i \in J$ için $x \leftarrow a_i \in \mathfrak{o}_{\mathcal{C}}(a_i) \subseteq S$ ve S keyfi supremum işlemi altında kapalı olduğundan $y \in S$ elde edilir. Böylece $\bigvee \mathcal{A} =$

$\bigvee_{i\in J} \mathfrak{o}_{\mathcal{C}}(a_i) = \mathfrak{o}_{\mathcal{C}}(\bigwedge_{i\in J} a_i)$'dir.

(4) ($\supseteq$:) Sonuç 3.1.12 kullanılarak kolayca gösterilebilir.

($\subseteq$:) $k \in \mathfrak{o}_{\mathcal{C}}(a) \cap \mathfrak{o}_{\mathcal{C}}(b)$ alalım. Bu durumda açık altkolokal tanımı gereği $k = x \leftarrow a = y \leftarrow b$ olacak şekilde $x, y \in M$ vardır. Buradan $k = x \leftarrow a = (x \leftarrow a) \leftarrow a = k \leftarrow a$ ve $k = y \leftarrow b = (y \leftarrow b) \leftarrow b = k \leftarrow b$'dir. Böylece Önerme 3.1.2 (cH13) kullanılarak $k \leftarrow (a \vee b) = (k \leftarrow b) \leftarrow a = (k \leftarrow a) \leftarrow a = k \leftarrow a = k$ elde edilir ki, bu $k \in \mathfrak{o}_{\mathcal{C}}(a \vee b)$ olduğu anlamına gelir. ∎

Not 3.1.14. $Scl(M)$ bir koçatı olduğundan, bir önceki önermede verilen (3) ve (4) özellikleri, Önerme 2.1.19 kullanılarak, sırasıyla, (1) ve (2) özelliklerinden de kolayca elde edilebilir.

Altlokallerde olduğu gibi, altkolokaller için de farklı karakterizasyonlar yapmak mümkündür. Bu karakterizasyonların biri de, altlokallerin nükleus tanımından yola çıkarak tanımlanacak olan konükleus dönüşümleri kullanılarak elde edilecektir.

Tanım 3.1.15. M bir kolokal olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan $t : M \to M$ fonksiyonuna bir *konükleus* denir.

(cN1) Her $a \in M$ için $t(a) \leq a$'dir.

(cN2) Her $a, b \in M$ için $a \leq b$ ise $t(a) \leq t(b)$'dir.

(cN3) t eşgüçlüdür yani her $a \in M$ için $t(t(a)) = t(a)$'dir.

(cN4) Her $a, b \in M$ için $t(a \vee b) = t(a) \vee t(b)$'dir.

Önerme 3.1.16. *M bir kolokal ve $S \subseteq M$ bir altkolokal olmak üzere $t_S : M \to M$, $t_S(a) = (i_c)_*(a) = \bigvee\{s \in S : s \leq a\}$ bir konükleustur. Tersine, $t : M \to M$ bir konükleus olmak üzere $S_t = t(M)$ bir altkolokaldir. Dolayısıyla, M'nin altkolokalleri ile M üzerinde tanımlı konükleuslar arasında bire-bir eşleme vardır.*

Kanıt: Öncelikle verilen $S \subseteq M$ altkolokali için yukarıdaki gibi tanımlanmış olan t_S fonksiyonunun bir konükleus olduğunu gösterelim:

(cN1) ve (cN2) özellikleri t_S'nin tanımından kolaylıkla görülebilir.

(cN3) $s \in S$ için $s \leq a$ ise $s = t_S(s) \leq t_S(a)$ olduğundan

$$\bigvee\{s \in S : s \leq a\} \leq \bigvee\{s \in S : s \leq t_S(a)\}$$

yani, $t_S(a) \leq t_S(t_S(a))$'dir. Eşitsizliğin diğer yönü (cN1)'den açıktır.

(cN4) Bu özelliği göstermeden önce $t_S(b) \leftarrow t_S(a) = t_S(b) \leftarrow a$ eşitliğinin sağlandığını görelim:

Öncelikle, (cN1) ve Önerme 3.1.2 (cH9)'dan $t_S(b) \leftarrow a \leq t_S(b) \leftarrow t_S(a)$'dir. Diğer taraftan, $t_S(b) \leftarrow a \leq t_S(b) \leftarrow a$ olduğundan $t_S(b) \leq a \vee (t_S(b) \leftarrow a)$ ve böylece $t_S(b) \leftarrow (t_S(b) \leftarrow a) \leq a$'dir. Eğer eşitsizliğin iki tarafına t_S dönüşümü uygulanırsa, $t_S(b) \leftarrow (t_S(b) \leftarrow a) \in S$ olduğundan

$$t_S(t_S(b) \leftarrow (t_S(b) \leftarrow a)) = t_S(b) \leftarrow (t_S(b) \leftarrow a) \leq t_S(a) \qquad (*)$$

ve böylece $t_S(b) \leftarrow t_S(a) \leq t_S(b) \leftarrow a$ elde edilir. Sonuç olarak istenilen eşitlik elde edilmiş olur.

Şimdi, $a, b \leq a \vee b$ olduğundan (cN2)'den $t_S(a) \vee t_S(b) \leq t_S(a \vee b)$ olduğu açıktır. Diğer taraftan (cN1)'den $t_S(a \vee b) \leq a \vee b$ ve böylece $t_S(a \vee b) \leftarrow a \leq b$'dir. Ayrıca (cS2)'den $t_S(a \vee b) \leftarrow a \in S$ olur. Dolayısıyla (*) eşitliği kullanılarak,

$$t_S(a \vee b) \leftarrow t_S(a) = t_S(a \vee b) \leftarrow a = t_S(t_S(a \vee b) \leftarrow a) \leq t_S(b)$$

ve böylece $t_S(a \vee b) \leq t_S(a) \vee t_S(b)$ elde edilir.

Önermenin ters yönü için $t : M \to M$ bir konükleus olmak üzere $t(M)$'nin bir altkolokal olduğunu gösterelim. Bunun için $\{y_i \in M : i \in J\} \subseteq t(M)$ verilsin. Bu durumda her $i \in J$ için $t(x_i) = y_i$ olacak şekilde bir $x_i \in M$ vardır. Sırasıyla (cN3), (cN2) ve (cN1) kullanılırsa, $\bigvee_{i \in J} y_i = \bigvee_{i \in J} t(x_i) = \bigvee_{i \in J} t(t(x_i)) = \bigvee_{i \in J} t(y_i) \leq t(\bigvee_{i \in J} y_i) \leq \bigvee_{i \in J} y_i$ ve böylece $t(\bigvee_{i \in J} y_i) = \bigvee_{i \in J} y_i$ elde edilir. O halde $\bigvee_{i \in J} y_i \in t(M)$'dir ve böylece $t(M)$ keyfi supremum altında kapalıdır.

(cS2)'yi göstermek için $t(a) \in t(M)$ ve $x \in M$ verilsin. Bu durumda, konükleus tanımından ve Önerme 3.1.2 (cH7)'den,

$$t(t(a) \leftarrow x) \vee x \geq t(t(a) \leftarrow x) \vee t(x) = t((t(a) \leftarrow x) \vee x) = t(t(a) \vee x) \geq t(t(a)) = t(a)$$

ve böylece $t(a) \leftarrow x \leq t(t(a) \leftarrow x)$'dir. Şimdi $t(t(a) \leftarrow x) \leq t(a) \leftarrow x$ olduğu da göz önüne alınırsa, $t(a) \leftarrow x = t(t(a) \leftarrow x) \in t(M)$ elde edilir.

Son olarak $S_{t_S} = S$ ve $t_{S_t} = t$ olduğunu gösterelim: Öncelikle t_S'nin eşgüçlü olması kullanılırsa,

$$x \in S_{t_S} \Leftrightarrow x \in t_S(M) \Leftrightarrow t_S(x) = x \Leftrightarrow x \in S$$

elde edilir ve böylece $S_{t_S} = S$'dir. Diğer taraftan

$$t_{S_t}(a) = \bigvee\{b \in S_t : b \leq a\} = \bigvee\{b \in t(M) : b \leq a\} = \bigvee\{t(c) \in t(M) : t(c) \leq a\}$$

sağlanır. $t(a) \leq a$ olduğundan $t(a) \leq t_{S_t}(a)$'dir. Ayrıca, $t(c) \leq a$ ise $t(t(c)) = t(c) \leq t(a)$ olduğundan $t_{S_t}(a) \leq t(a)$'dir. Dolayısıyla, $t_{S_t} = t$ elde edilir.

O halde, M'nin altkolokalleri ile M üzerinde tanımlı konükleuslar arasında bire-bir eşleme olduğu söylenebilir. ■

Uyarı 3.1.17. $S \subseteq M$ bir altkolokal ve $A = \{a_i : i \in I\} \subseteq S$ olsun. Bu durumda $\bigwedge^S$, S'deki infimum işlemini göstermek üzere, $\bigwedge^S_{i\in I} a_i = t_S(\bigwedge_{i\in I} a_i)$ biçiminde tanımlıdır: Öncelikle her $i \in I$ için $\bigwedge_{i\in I} a_i \leq a_i$ olduğundan $t_S(\bigwedge_{i\in I} a_i) \leq t_S(a_i)$'dir ve böylece $t_S(\bigwedge_{i\in I} a_i)$, A için bir alt sınırdır. Şimdi $b \in S$, A için herhangi bir alt sınır olmak üzere, her $i \in I$ için $b \leq a_i$ olduğundan $b \leq \bigwedge_{i\in I} a_i$ ve böylece $t_S(b) = b \leq t_S(\bigwedge_{i\in I} a_i)$ elde edilir.

Önerme 3.1.18. *M_1 ve M_2 birer koçatı ve $f : M_1 \to M_2$ bir koçatı homomorfizması olsun. Bu durumda $f(M_1)$ kümesi, M_2'nin bir altkoçatısıdır.*

Kanıt: $\{b_i : i \in I\} \subseteq f(M_1)$ verilsin. Bu durumda her $i \in I$ için $f(a_i) = b_i$ olacak şekilde bir $a_i \in M_1$ vardır ve f bir koçatı homomorfizması olduğundan

$$\bigwedge_{i\in I} b_i = \bigwedge_{i\in I} f(a_i) = f(\bigwedge_{i\in I} a_i) \in f(M_1)$$

sağlanır. Böylece $f(M_1)$ kümesi keyfi infimum altında kapalıdır.

Diğer taraftan, $f(M_1)$ sonlu supremum altında kapalıdır ve $f(0) = 0 \in f(M_1)$, $f(1) = 1 \in f(M_1)$'dir. O halde $f(M_1)$, M_2'nin bir altkoçatısıdır. ■

Önerme 3.1.19. *M bir koçatı, $M' \subseteq M$ bir altkoçatı ve $S \subseteq M$ bir altkolokal olsun. Bu durumda $t_S(M')$, S'nin bir altkoçatısıdır.*

Kanıt: $M' \subseteq M$ bir altkoçatı ve $S \subseteq M$ bir altkolokal olsun. Bu durumda $i : M' \to M$ içerme dönüşümü olmak üzere, $M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{t_S} S$ bir koçatı homomorfizmasıdır. Böylece, Önerme 3.1.18'den $t_S(M')$, S'nin bir altkoçatısıdır. ■

Tanım 3.1.20. M bir koçatı ve $S \subseteq M$ bir altkolokal olmak üzere, eğer S sonlu infimum işlemi altında kapalı ise S'ye bir *ko-düz (co-flat)* altkolokal denir.

$S \subseteq M$ bir altkolokal olmak üzere, t_S konükleusunun $i_c : S \to M$ gömme dönüşümüne karşılık gelen koçatı homomorfizması olduğu biliniyor. O halde t_S'nin, L'deki keyfi infimum işlemini koruduğu söylenebilir. Fakat t_S, genel olarak, S'deki infimum işlemini korumaz.

Önerme 3.1.21. *M bir kolokal ve $S \subseteq M$ bir altkolokal olsun. Bu durumda S'nin ko-düz olması için gerek ve yeter koşul ona karşılık gelen t_S konükleusunun (S'deki) sonlu infimum işlemini korumasıdır.*

Kanıt: $(\Rightarrow)$ $S \subseteq M$ ko-düz olsun. Bu durumda S ve L'deki sonlu infimum işlemleri çakıştığından açıktır.

$(\Leftarrow)$ t_S, S'deki sonlu infimum işlemini koruyan bir konükleus olsun. I sonlu indis kümesi için $\{a_i : i \in I\} \subseteq S$ olmak üzere, $\bigwedge_{i\in I}^{S} a_i = \bigwedge_{i\in I}^{S} t_S(a_i) = t_S(\bigwedge_{i\in I}^{S} a_i) \in S$ sağlanır ve böylece S ko-düz bir altkolokaldir. ■

Önerme 3.1.22. *M bir altkolokal ve $a \in M$ olsun. Bu durumda $\mathfrak{c}_{\mathcal{C}}(a)$ kapalı altkolokaline karşılık gelen konükleus $t_{\mathfrak{c}_{\mathcal{C}}(a)}(x) = a \wedge x$, ve $\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}(a)$ açık altkolokaline karşılık gelen konükleus $t_{\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}(a)}(y) = y \leftarrow a$ biçimindedir.*

Kanıt: M bir altkolokal ve $a \in M$ olmak üzere,

$$t_{\mathfrak{c}_{\mathcal{C}}(a)}(x) = \bigvee\{s \in \mathfrak{c}_{\mathcal{C}}(a) : s \leq x\} = a \wedge x$$

olduğu açıktır. Şimdi, $t_{\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}(a)}(y) = y \leftarrow a$ olduğunu gösterelim: Öncelikle,

$$t_{\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}(a)}(y) = \bigvee\{s \in \mathfrak{o}_{\mathcal{C}}(a) : s \leq y\} = \bigvee\{x \leftarrow a : x \leftarrow a \leq y, x \in M\}$$

eşitlikleri tanımlardan açıktır. Şimdi, Önerme 3.1.2 (cH2)'den, $y \leftarrow a \leq y$ olduğundan $y \leftarrow a \leq t_{\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}(a)}(y)$ elde edilir. Diğer taraftan, $x \leftarrow a \leq y$ ise, sırasıyla, Önerme 3.1.2 (cH12) ve (cH5) kullanılırsa $x \leftarrow a = (x \leftarrow a) \leftarrow a \leq y \leftarrow a$ elde edilir ve böylece $t_{\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}(a)}(y) \leq y \leftarrow a$'dir. O halde istenilen eşitlik sağlanmış olur.

Önerme 3.1.23. *M bir kolokal ve $S \subseteq M$ bir altkolokal olsun. Bu durumda $(\mathfrak{c}_{\mathcal{C}})_S(.)$ ve $(\mathfrak{o}_{\mathcal{C}})_S(.)$, sırasıyla, S'deki kapalı ve açık altkolokalleri göstermek üzere aşağıdakiler sağlanır:*

(1) *$S_1, S_2 \subseteq M$ altkolokaller ve $S_1 \subseteq S_2$ ise $t_{S_1} \leq t_{S_2}$'dir.*

(2) *$S \cap \mathfrak{c}_{\mathcal{C}}(a) = (\mathfrak{c}_{\mathcal{C}})_S(t_S(a))$.*

(3) $S \cap \mathfrak{o}_{\mathcal{C}}(a) = (\mathfrak{o}_{\mathcal{C}})_S(t_S(a))$.

Kanıt: **(1)** $S_1 \subseteq S_2$ ise, keyfi $a \in M$ için

$$t_{S_1}(a) = \bigvee\{s \in S_1 : s \leq a\} \leq \bigvee\{s \in S_2 : s \leq a\} = t_{S_2}(a)$$

elde edilir ve böylece $t_{S_1} \leq t_{S_2}$'dir.

(2) $t_S(a) = \bigvee\{s \in S : s \leq a\} = \bigvee(\mathfrak{c}_{\mathcal{C}}(a) \cap S) \in S$ eşitliğini göz önüne alarak

$$x \in S \text{ ve } x \leq a \;\Leftrightarrow\; x \in S \text{ ve } x \leq t_S(a)$$

olduğunu gösterelim: $x \in S$ ve $x \leq a$ ise $x \in \mathfrak{c}_{\mathcal{C}}(a) \cap S$'dir. O halde $t_S(a)$ bu kümenin supremumu olduğundan $x \leq t_S(a)$ sağlanır. Diğer gerektirme (cN1) özelliğinden açıktır. O halde bu denklik kullanılarak,

$x \in (\mathfrak{c}_{\mathcal{C}})_S(t_S(a)) \Leftrightarrow x \in S$ ve $x \leq t_S(a) \Leftrightarrow x \in S$ ve $x \leq a \Leftrightarrow x \in (\mathfrak{c}_{\mathcal{C}})_S(a) = S \cap \mathfrak{c}_{\mathcal{C}}(a)$ elde edilir.

(3) Önerme 3.1.11 gereği açık ve kapalı altkolokaller birbirinin tümleyeni olduğundan, (2)'den kolayca elde edilir.

4 DİÇATILAR VE DİLOKALLER

4.1 Doku Uzaylarından Diçatılara Geçiş

Bu bölümde doku uzayları ve (ko)çatıların morfizmaları arasındaki ilişkiler incelenecektir. Bu ilişki, ditopolojik doku uzayları teorisinden diçatılar teorisine geçilmesinin nedenlerini görmek bakımından önemlidir. Bunun için $(S, \mathcal{S})$ ve $(T, \mathcal{T})$ doku uzaylarını ve $(r, R) : (S, \mathcal{S}) \to (T, \mathcal{T})$ dibağıntısını ele alalım. Öncelikle [7, Sonuç 2.12]'den, $A \in \mathcal{S}$ için, $\varphi_r(A) = r^{\to}A$ ve $\psi_R(A) = R^{\to}A$ biçiminde tanımlı φ_r ve ψ_R dönüşümlerinin, sırasıyla, keyfi supremum ve keyfi infimum işlemini korudukları biliniyor. Burada ilk olarak, φ keyfi supremumu ve ψ keyfi infimumu koruyan birer dönüşüm olmak üzere, (φ, ψ) ikilisi ile (r, R) dibağıntısı arasında bire-bir eşlemenin var olduğu gösterilecektir. Bu eşlemenin mümkün olduğu [29] nolu kaynakta bulunan Önerme 2.2'nin özel bir hali olarak, aşağıda verilen önerme ile görülebilir.

Teorem 4.1.1. $(S, \mathcal{S})$ *ve* $(T, \mathcal{T})$ *doku uzayları olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:*

(1) $r : (S, \mathcal{S}) \to (T, \mathcal{T})$ *bir bağıntı olmak üzere* $\varphi_r : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$, $\varphi_r(A) = r^{\to}A$ *dönüşümü keyfi supremum işlemini korur.*

Tersine, $\varphi : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ *keyfi supremum işlemini koruyan bir dönüşüm olmak üzere* $r_\varphi \in \mathcal{P}(S) \otimes \mathcal{T}$,

$r_\varphi = \bigvee\{\overline{P}_{(s,t)} : \exists u \in S, \exists v \in T; P_s \not\subseteq Q_u, P_v \not\subseteq Q_t \text{ ve } \varphi(B) \subseteq Q_v \Rightarrow B \subseteq Q_u, \forall B \in \mathcal{S}\}$

$(S, \mathcal{S})$*'den* $(T, \mathcal{T})$*'ye bir bağıntıdır. Ayrıca* $\varphi_{r_\varphi} = \varphi$ *ve* $r_{\varphi_r} = r$*'dir.*

(2) $R : (S, \mathcal{S}) \to (T, \mathcal{T})$ *bir kobağıntı olmak üzere* $\psi_R : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$, $\psi_R(A) = R^{\to}A$ *dönüşümü keyfi infimum işlemini korur.*

Tersine, $\psi : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ *keyfi infimum işlemini koruyan bir dönüşüm olmak üzere* $R_\psi \in \mathcal{P}(S) \otimes \mathcal{T}$,

$R_\psi = \bigcap\{\overline{Q}_{(s,t)} : \exists u \in S, \exists v \in T; P_u \not\subseteq Q_s, P_t \not\subseteq Q_v \text{ ve } P_v \subseteq \psi(B) \Rightarrow P_u \subseteq B, \forall B \in \mathcal{S}\}$

$(S, \mathcal{S})$*'den* $(T, \mathcal{T})$*'ye bir kobağıntıdır. Ayrıca,* $\psi_{R_\psi} = \psi$ *ve* $R_{\psi_R} = R$*'dir.*

Kanıt: (2) $R : (S, \mathcal{S}) \to (T, \mathcal{T})$ bir kobağıntı olmak üzere, [7, Sonuç 2.12]'den, $A \in \mathcal{S}$ için $\psi_R(A) = R^{\to}A$ biçiminde tanımlı ψ_R dönüşümünün keyfi infimum işlemini koruduğu biliniyor.

Tersi için, $\psi : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ dönüşümünün keyfi infimum işlemini koruduğunu kabul edelim ve öncelikle R_ψ'nin bir kobağıntı olduğunu gösterelim:

(CR1) $\overline{P}_{(s,t)} \not\subseteq R_\psi$, $P_s \not\subseteq Q_{s'}$ ve iddianın aksine $\overline{P}_{(s',t)} \subseteq R_\psi$ olduğunu kabul edelim. $\overline{P}_{(s,t)} \not\subseteq R_\psi$ ise $\overline{P}_{(s,t)} \not\subseteq \overline{Q}_{(s,t')}$ olacak şekilde bir $t' \in T$ vardır ve ayrıca $P_u \not\subseteq Q_s$, $P_{t'} \not\subseteq Q_v$ ve "$\forall B \in \mathcal{S}, P_v \subseteq \psi(B) \Rightarrow P_u \subseteq B$" koşullarını sağlayan birer $u \in S$, $v \in T$ bulunabilir.

$\overline{P}_{(s,t)} \not\subseteq \overline{Q}_{(s,t')}$ ise Önerme 2.2.8 gereği $P_t \not\subseteq Q_{t'}$ ve buradan $\overline{P}_{(s',t)} \not\subseteq \overline{Q}_{(s',t')}$'dir.

Şimdi, $P_s \not\subseteq Q_{s'}$ ve $P_{t'} \not\subseteq Q_v$ olduğu biliniyor. Diğer taraftan, keyfi $B \in \mathcal{S}$ için $P_v \subseteq \psi(B)$ ise $P_u \subseteq B$ olduğundan ve ayrıca $P_u \not\subseteq Q_s$ olduğu bilindiğinden $B \not\subseteq Q_s$ ve böylece Teorem 2.2.6 (1)'den $P_s \subseteq B$ elde edilir. O halde,

$$\overline{Q}_{(s',t')} \in \{\overline{Q}_{(s,t)} : \exists u \in S, \exists v \in T; P_u \not\subseteq Q_s, P_t \not\subseteq Q_v \text{ ve } P_v \subseteq \psi(B) \Rightarrow P_u \subseteq B, \forall B \in \mathcal{S}\}$$

olur ve buradan $\overline{P}_{(s',t)} \subseteq R_\psi \subseteq \overline{Q}_{(s',t')}$, yani $P_t \subseteq Q_{t'}$ dir. Bu durumda $\overline{P}_{(s,t)} \subseteq \overline{Q}_{(s,t')}$ çelişkisi bulunur.

(CR2) $\overline{P}_{(s,t)} \not\subseteq R_\psi$ ise $\overline{P}_{(s,t)} \not\subseteq \overline{Q}_{(s,t')}$ olacak şekilde bir $t' \in T$ vardır ve ayrıca $P_u \not\subseteq Q_s$, $P_{t'} \not\subseteq Q_v$ ve "$\forall B \in \mathcal{S}, P_v \subseteq \psi(B) \Rightarrow P_u \subseteq B$" koşullarını sağlayan birer $u \in S$, $v \in T$ bulunabilir. $P_u \not\subseteq Q_s$ olduğundan $P_u \not\subseteq Q_{s'}$ ve $P_{s'} \not\subseteq Q_s$ olacak şekilde bir $s' \in S$ vardır. Şimdi $\overline{P}_{(s',t)} \not\subseteq R_\psi$ olduğunu gösterelim:

$\overline{P}_{(s,t)} \not\subseteq \overline{Q}_{(s,t')}$ olduğundan $P_t \not\subseteq Q_{t'}$ ve böylece $\overline{P}_{(s',t)} \not\subseteq \overline{Q}_{(s',t')}$'dir. Ayrıca, $P_u \not\subseteq Q_{s'}$, $P_{t'} \not\subseteq Q_v$ ve "$\forall B \in \mathcal{S}, P_v \subseteq \psi(B) \Rightarrow P_u \subseteq B$" koşulları sağlandığından $R_\psi \subseteq \overline{Q}_{(s',t')}$'dir. Bu durumda, $\overline{P}_{(s',t)} \not\subseteq R_\psi$ elde edilir.

Şimdi $\psi_{R_\psi} = \psi$ eşitliğinin sağlandığını gösterelim:

$(\subseteq :)$ $\psi_{R_\psi}(A) \not\subseteq \psi(A)$ olacak şekilde bir $A \in \mathcal{S}$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, $\psi_{R_\psi}(A) \not\subseteq Q_t$ ve $P_t \not\subseteq \psi(A)$ olacak şekilde bir $t \in T$ vardır. Diğer taraftan,

$$\psi_{R_\psi}(A) = R_\psi{}^{\to}(A) = \bigvee\{P_t : \forall s, \overline{P}_{(s,t)} \not\subseteq R_\psi \Rightarrow P_s \subseteq A\} \not\subseteq Q_t$$

olduğundan $P_{t'} \not\subseteq Q_t$ ve her $s \in S$ için

$$\overline{P}_{(s,t')} \not\subseteq R_\psi \Rightarrow P_s \subseteq A \tag{1}$$

koşullarını sağlayan bir $t' \in T$ vardır. $P_{t'} \not\subseteq Q_t$ olduğundan $P_{t'} \not\subseteq Q_v$ ve $P_v \not\subseteq Q_t$ olacak şekilde bir $v \in T$, ayrıca $P_{t'} \not\subseteq Q_v$'den de $P_{t'} \not\subseteq Q_{v'}$ ve $P_{v'} \not\subseteq Q_v$ olacak şekilde bir $v' \in T$ vardır.

Diğer yandan, $B_0 = \bigwedge\{B \in \mathcal{S} : P_v \subseteq \psi(B)\}$ kümesi alınırsa, ψ dönüşümü keyfi infimum işlemini koruduğundan

$$\psi(B_0) = \psi(\bigwedge\{B \in \mathcal{S} : P_v \subseteq \psi(B)\}) = \bigwedge\{\psi(B) \in \mathcal{T} : P_v \subseteq \psi(B)\}$$

elde edilir. Ayrıca $P_v \nsubseteq Q_t$ olduğu bilindiğinden $P_t \subseteq P_v \subseteq \psi(B_0)$'dir. $P_t \subseteq \psi(B_0)$ ve $P_t \nsubseteq \psi(A)$ olduğundan $\psi(B_0) \nsubseteq \psi(A)$ sağlanır. Bu durumda, ψ sıra koruyan bir dönüşüm olduğundan $B_0 \nsubseteq A$ olur ve böylece $B_0 \nsubseteq Q_s$ ve $P_s \nsubseteq A$ olacak şekilde bir $s \in S$ bulunabilir. Üstelik, $P_s \nsubseteq A$ olduğundan ise $P_s \nsubseteq Q_u$ ve $P_u \nsubseteq A$ olacak şekilde bir $u \in S$ vardır.

Yukarıda elde edilenler göz önüne alınırsa $P_{(u,t')} \nsubseteq Q_{(u,v')}$, $P_s \nsubseteq Q_u$, $P_{v'} \nsubseteq Q_v$ ve keyfi $B \in \mathcal{S}$ için "$P_v \subseteq \psi(B) \Rightarrow P_s \subseteq B_0 \subseteq B$" koşullarının sağlandığı görülebilir. Bu durumda $P_{(u,t')} \nsubseteq R_\psi$ ve böylece (1) koşulu gereği $P_u \subseteq A$ elde edilir ki, bu bir çelişkidir.

$(\supseteq :)$ $\psi(A) \nsubseteq \psi_{R_\psi}(A)$ olacak şekilde bir $A \in \mathcal{S}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $\psi(A) \nsubseteq Q_t$ ve $P_t \nsubseteq \psi_{R_\psi}(A) = R_\psi{}^{\rightarrow}(A) = \bigvee\{P_t : \forall s, \overline{P}_{(s,t)} \nsubseteq R_\psi \Rightarrow P_s \subseteq A\}$ olacak şekilde bir $t \in T$ vardır. O halde, $\overline{P}_{(s',t)} \nsubseteq R_\psi$ ve $P_{s'} \nsubseteq A$ olacak şekilde bir $s' \in S$ bulunabilir. $\overline{P}_{(s',t)} \nsubseteq R_\psi$ olduğundan $\overline{P}_{(s',t)} \nsubseteq \overline{Q}_{(s',t')}$ olacak şekilde bir $t' \in T$ vardır ve ayrıca $P_u \nsubseteq Q_{s'}$, $P_{t'} \nsubseteq Q_v$ ve

$$\forall B \in \mathcal{S}, P_v \subseteq \psi(B) \Rightarrow P_u \subseteq B \qquad (2)$$

koşullarını sağlayan bir $u \in S$, $v \in T$ bulunabilir. $\overline{P}_{(s',t)} \nsubseteq \overline{Q}_{(s',t')}$ ise $P_t \nsubseteq Q_{t'}$'dir. Diğer taraftan, $\psi(A) \nsubseteq Q_t$ olduğu bilindiğinden $P_t \subseteq \psi(A)$'dir. O halde $\psi(A) \nsubseteq Q_{t'}$ ve böylece $P_{t'} \subseteq \psi(A)$ elde edilir. Ayrıca, $P_{t'} \nsubseteq Q_v$ ve $P_{t'} \subseteq \psi(A)$ olduğundan $\psi(A) \nsubseteq Q_v$ ve böylece $P_v \subseteq \psi(A)$'dir. Bu durumda, (2) koşulu gereği $P_u \subseteq A$ olmalıdır. Şimdi, $P_{s'} \nsubseteq A$ ve $P_u \subseteq A$ olduğundan $P_{s'} \nsubseteq P_u$ elde edilir. Fakat $P_u \nsubseteq Q_{s'}$ olduğu bilindiğinden $P_{s'} \subseteq P_u$ olmalıdır. O halde bu iki durum bir çelişki verir ve dolayısıyla her $A \in \mathcal{S}$ için $\psi(A) \subseteq \psi_{R_\psi}(A)$ olmalıdır.

Son olarak, $R_{\psi_R} = R$ eşitliğinin sağlandığını gösterelim:

$\psi_{R_\psi} = \psi$'nin sağlandığı yani her $A \in \mathcal{S}$ için $R_\psi{}^{\rightarrow}(A) = \psi(A)$ olduğu biliniyor. Burada ψ yerine ψ_R konulursa, her $A \in \mathcal{S}$ için $R_{\psi_R}{}^{\rightarrow}(A) = \psi_R(A) = R^{\rightarrow}(A)$ olur. Böylece Önerme 2.2.18 (4)'den $R_{\psi_R} = R$ olduğu sonucu elde edilir. ■

Sonuç 4.1.2. *$\varphi, \psi : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$, φ keyfi supremumu ve ψ keyfi infimumu koruyan birer dönüşüm olmak üzere,* ***drTex*** *kategorisinin morfizmaları ile (φ, ψ) fonksiyon çifti* *arasında bire-bir bir eşleme vardır; dolayısıyla* ***drTex*** *kategorisinin morfizmaları yerine* (φ, ψ) *ikilisi kullanılabilir.*

Şimdi $\mathbf{drTex^{op}}$ kategorisinin morfizmalarının keyfi infimum ve keyfi supremumu koruyan dönüşümlerle nasıl temsil edilebileceğini inceleyelim. (r, R) dibağıntısı **drTex** kategorisinin bir morfizması olmak üzere, buna karşılık gelen $\mathbf{drTex^{op}}$ morfizması $(r, R)^{\leftarrow} = (R^{\leftarrow}, r^{\leftarrow})$ biçimindedir. Dolayısıyla, $B \in \mathcal{T}$ için $\varphi_{R^{\leftarrow}}(B) = (R^{\leftarrow})^{\rightarrow}B = R^{\leftarrow}B$ ve $\psi_{r^{\leftarrow}}(B) = (r^{\leftarrow})^{\rightarrow}B = r^{\leftarrow}B$ olduğundan $(\varphi_{R^{\leftarrow}}, \psi_{r^{\leftarrow}})$ çiftini ele almamız gerekir. (r, R) dibağıntısı ile (φ_r, ψ_R) çifti arasında bire-bir eşleme olduğu da göz önünde bulundurularak aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.1.3. $(r, R) : (S, \mathcal{S}) \to (T, \mathcal{T})$ *bir dibağıntı olsun. Bu durumda aşağıdakiler geçerlidir:*

(1) $\varphi_{R^{\leftarrow}} : \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ *bir sol adjointtir ve her* $B \in \mathcal{T}$ *için*

$$(\psi_R)^*(B) = R^{\leftarrow}B = \bigcap\{A \in \mathcal{S} : B \subseteq \psi_R(A)\}$$

eşitliği sağlanır.

(2) $\psi_{r^{\leftarrow}} : \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ *bir sağ adjointtir ve her* $B \in \mathcal{T}$ *için*

$$(\varphi_r)_*(B) = r^{\leftarrow}B = \bigvee\{A \in \mathcal{S} : \varphi_r(A) \subseteq B\}$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt: (1) Öncelikle Teorem 2.2.19 gereği $((R^{\leftarrow})^{\rightarrow}, R^{\rightarrow}) = (\varphi_{R^{\leftarrow}}, \psi_R)$ bir adjoint çifti olduğundan $(\psi_R)^* = \varphi_{R^{\leftarrow}}$'dir. Ayrıca, Önerme 2.1.12'den ψ_R dönüşümünün sol adjointi

$$(\psi_R)^*(B) = \bigcap\{A \in \mathcal{S} : B \subseteq \psi_R(A)\}$$

biçiminde tanımlıdır ve böylece istenilen eşitlik elde edilmiş olur.
(2) Benzer şekilde, $(r^{\rightarrow}, (r^{\leftarrow})^{\rightarrow}) = (\varphi_r, \psi_{r^{\leftarrow}})$ bir adjoint çifti ve φ_r dönüşümünün sağ adjointi

$$(\varphi_r)_*(B) = \bigvee\{A \in \mathcal{S} : \varphi_r(A) \subseteq B\}$$

biçiminde tanımlı olduğundan istenilen sonuç elde edilir. ■

Sonuç 4.1.4. $(\psi_R)^*, (\varphi_r)_* : \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ *yukarıda elde edilen dönüşümler olmak üzere,* $\mathbf{drTex^{op}}$ *kategorisinin morfizmaları olarak* $((\psi_R)^*, (\varphi_r)_*)$ *ikilisi alınabilir.*

Çatı homomorfizmalarının keyfi supremum ve sonlu infimum işlemlerini; koçatı homomorfizmalarının ise, keyfi infimum ve sonlu supremum işlemlerini koruyan dönüşümler olduğu biliniyor. Amacımız, içerisinde çatı ve koçatı kavramlarını bulunduran bir yapı elde etmek olduğundan bu koşullara sahip dönüşümlere ihtiyacımız olacaktır. Bunun için φ ve ψ dönüşümlerinin hangi koşullar altında istenilen özelliklere sahip olacaklarını inceleyelim.

Teorem 4.1.5. *$(S, \mathcal{S})$, $(T, \mathcal{T})$ doku uzaylar ve (r, R), $(S, \mathcal{S})$'den $(T, \mathcal{T})$'ye bir dibağıntı olsun.*

(1) *Aşağıdakiler denktir:*

(a) *φ_r dönüşümü sonlu infimum (kesişim) işlemini korur.*

(b) *$P_t \not\subseteq Q_{t'}$, $r \not\subseteq \overline{Q}_{(s_1,t)}$ ve $r \not\subseteq \overline{Q}_{(s_2,t)}$ olacak şekilde her $t, t' \in T$, $s_1, s_2 \in S$ için $r \not\subseteq \overline{Q}_{(s,t')}$ ve $(P_{s_1} \cap P_{s_2}) \not\subseteq Q_s$ koşullarını sağlayan bir $s \in S$ vardır.*

(2) *Aşağıdakiler denktir:*

(a) *ψ_R dönüşümü sonlu supremum (birleşim) işlemini korur.*

(b) *$P_t \not\subseteq Q_{t'}$, $\overline{P}_{(s_1,t)} \not\subseteq R$ ve $\overline{P}_{(s_2,t)} \not\subseteq R$ olacak şekilde her $t, t' \in T$, $s_1, s_2 \in S$ için $\overline{P}_{(s,t')} \not\subseteq R$ ve $P_s \not\subseteq (Q_{s_1} \cup Q_{s_2})$ koşullarını sağlayan bir $s \in S$ vardır.*

Kanıt: **(1)** (**a**) $\Rightarrow$ (**b**) $P_t \not\subseteq Q_{t'}$, $r \not\subseteq \overline{Q}_{(s_1,t)}$ ve $r \not\subseteq \overline{Q}_{(s_2,t)}$ olacak şekilde $t, t' \in T$, $s_1, s_2 \in S$ verilsin. Bu durumda, Önerme 2.2.18 (1)'den $r^{\to}P_{s_1} \not\subseteq Q_t$ ve $r^{\to}P_{s_2} \not\subseteq Q_t$ olur. Buradan $P_t \subseteq r^{\to}P_{s_1} \cap r^{\to}P_{s_2}$ ve böylece $(r^{\to}P_{s_1} \cap r^{\to}P_{s_2}) \not\subseteq Q_{t'}$ elde edilir. Ayrıca varsayım gereği,

$$r^{\to}P_{s_1} \cap r^{\to}P_{s_2} = \varphi_r(P_{s_1}) \cap \varphi_r(P_{s_2}) = \varphi_r(P_{s_1} \cap P_{s_2}) = r^{\to}(P_{s_1} \cap P_{s_2})$$

sağlanır. $r^{\to}(P_{s_1} \cap P_{s_2}) \not\subseteq Q_{t'}$ olduğundan, kesit tanımı kullanılarak, $r \not\subseteq \overline{Q}_{(s,t')}$ ve $(P_{s_1} \cap P_{s_2}) \not\subseteq Q_s$ olacak şekilde bir $s \in S$ elde edilir.
(**b**) $\Rightarrow$ (**a**) $A, B \in \mathcal{S}$ verilsin. Önerme 2.2.18 (3)'den $r^{\to}(A \cap B) \subseteq (r^{\to}A) \cap (r^{\to}B)$ olduğu açıktır. Diğer kapsamayı göstermek için, tersine $(r^{\to}A) \cap (r^{\to}B) \not\subseteq r^{\to}(A \cap B)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, Teorem 2.2.6 (2)'den $(r^{\to}A) \cap (r^{\to}B) \not\subseteq Q_t$ ve $P_t \not\subseteq r^{\to}(A \cap B)$ olacak şekilde bir $t \in T$ vardır. Şimdi $P_t \not\subseteq r^{\to}(A \cap B)$ olduğundan, kesit tanımından, $P_t \not\subseteq Q_{t'}$ ve her $z \in S$ için

$$r \not\subseteq \overline{Q}_{(z,t')} \Rightarrow A \cap B \subseteq Q_z \tag{*}$$

olacak şekilde bir $t' \in T$ vardır. Diğer taraftan, $r^{\to}A \nsubseteq Q_t$ ve $r^{\to}B \nsubseteq Q_t$ olduğundan, yine kesit tanımı kullanılarak, $r \nsubseteq \overline{Q}_{(s_1,t)}, A \nsubseteq Q_{s_1}$ ve $r \nsubseteq \overline{Q}_{(s_2,t)}, B \nsubseteq Q_{s_2}$ olacak şekilde $s_1, s_2 \in S$ elde edilir. Böylece, varsayımda belirtilen koşullar geçerli olduğundan, $r \nsubseteq \overline{Q}_{(s,t')}$ ve $(P_{s_1} \cap P_{s_2}) \nsubseteq Q_s$ özelliklerini sağlayan bir $s \in S$ vardır. Ayrıca,

$$A \nsubseteq Q_{s_1}, B \nsubseteq Q_{s_2} \;\Rightarrow\; P_{s_1} \subseteq A, P_{s_2} \subseteq B \Rightarrow\; P_{s_1} \cap P_{s_2} \subseteq A \cap B$$

sağlanır. Buradan, $(P_{s_1} \cap P_{s_2}) \nsubseteq Q_s$ gerçeği ile $(A \cap B) \nsubseteq Q_s$ elde edilir. Fakat $r \nsubseteq \overline{Q}_{(s,t')}$ olması, (*) gereği $A \cap B \subseteq Q_s$ çelişkisi elde edilir.

(2) Kanıt, (1) ile benzer şekilde yapılabilir. ■

Tanım 4.1.6. Teorem 4.1.5 (1)'in denk koşullarından birini sağlayan bağıntıya *fr-bağıntı*; (2)'nin denk koşullarından birini sağlayan kobağıntıya *fr-kobağıntı* denir. r bir fr-bağıntı, R bir fr-kobağıntı olmak üzere (r, R) ikilisine bir *fr-dibağıntı* denir.

Sonuç 4.1.7. *(r, R) ve (q, Q) birer fr-dibağıntı olmak üzere, $r \circ q$ bir fr-bağıntı, $R \circ Q$ bir fr-kobağıntı ve $(r, R) \circ (q, Q) = (r \circ q, R \circ Q)$ bir fr-dibağıntıdır.*

Kanıt: Sonlu supremum (sırasıyla, keşisim) işlemini koruyan dönüşümlerin bileşkeleri de sonlu supremum (sırasıyla, keşisim) işlemini koruduğu için açıktır. ■

Nesneleri doku uzayları ve morfizmaları fr-bağıntılar (sırasıyla, fr-kobağıntılar) olan kategori **frTex** (sırasıyla, **frcoTex**) ile gösterilsin. Açıkça, **frTex** (sırasıyla, **frcoTex**) kategorisi **Frm** (sırasıyla, **coFrm**) kategorisinin dolu bir alt kategorisidir.

Önerme 4.1.8. *Her difonksiyonun tersi bir fr-dibağıntıdır.*

Kanıt: (f, F) bir difonksiyon ve $(r, R) = (f, F)^{\leftarrow}$ olmak üzere Önerme 2.2.23'den

$$r^{\to}A = (F^{\leftarrow})^{\to}A = F^{\leftarrow}A = f^{\leftarrow}A = (f^{\leftarrow})^{\to}A = R^{\to}A$$

elde edilir. O halde $\varphi_r = \psi_R$ keyfi supremum ve keyfi arakesit işlemlerini korur ve böylece (r, R) bir fr-dibağıntıdır. ■

Uyarı 4.1.9. Her fr-dibağıntının tersi bir fr-dibağıntı olmak zorunda değildir. Örneğin (f, F), fr-dibağıntı olmayan bir difonksiyon olsun. Bu durumda Önerme 4.1.8'de gösterildiği gibi $(r, R) = (f, F)^{\leftarrow}$ bir fr-dibağıntıdır. Fakat $(r, R)^{\leftarrow} = (f, F)$ olduğundan, varsayım gereği, $(r, R)^{\leftarrow}$ bir fr-dibağıntı değildir. Dolayısıyla **drTex** ve $\mathbf{drTex^{op}}$ kategorileri arasında bir izomorfizma olan $\mathfrak{I}$: **drTex**$\to$ $\mathbf{drTex^{op}}$,

$$\mathfrak{I}((S, \mathcal{S}) \xrightarrow{(r,R)} (T, \mathcal{T})) = (T, \mathcal{T}) \xrightarrow{(r,R)^{\leftarrow}} (S, \mathcal{S}),$$

funktoru **frTex** ve **frTex$^{\mathbf{op}}$** kategorileri arasında bir izomorfizma olamaz.

Nesneleri ditopolojik doku uzayları, morfizmaları $\varphi_r(\tau_S) \subseteq \tau_T$ ve $\psi_R(\kappa_S) \subseteq \kappa_T$ koşullarını sağlayan $(\varphi_r, \psi_R) : (S, \mathcal{S}, \tau_S, \kappa_S) \to (T, \mathcal{T}, \tau_T, \kappa_T)$ fr-dibağıntılar olan kategoriyi **frDitop** ile gösterelim.

Uyarı 4.1.10. $\mathfrak{F}$: **dfDitop** $\to$ **frDitop**,

$$\mathfrak{F}((S, \mathcal{S}, \tau_S, \kappa_S) \xrightarrow{(f,F)} (T, \mathcal{T}, \tau_T, \kappa_T)) = (T, \mathcal{T}, \tau_T, \kappa_T) \xrightarrow{(f,F)^{\leftarrow} = (F^{\leftarrow}, f^{\leftarrow})} (S, \mathcal{S}, \tau_S, \kappa_S)$$

kontravaryant bir funktordur: Öncelikle, Önerme 4.1.8'den $\mathfrak{F}((f, F)) = (f, F)^{\leftarrow}$ bir fr-dibağıntıdır ve (f, F) ikili sürekli olduğundan $F^{\leftarrow}(\tau_T) \subseteq \tau_S$ ve $f^{\leftarrow}(\kappa_T) \subseteq \kappa_S$ koşulları sağlanır. Ayrıca, Önerme 2.2.14 (2)'den $\mathfrak{F}(1_{(S,\mathcal{S},\tau_S,\kappa_S)}) = (i_S, I_S)^{\leftarrow} = (i_S, I_S) = 1_{\mathfrak{F}(S,\mathcal{S},\tau_S,\kappa_S)}$ olduğu açıktır.

Son olarak, (f_1, F_1) ve (f_2, F_2) birer **dfDitop** morfizması olmak üzere, Önerme 2.2.14 (1)'den, $\mathfrak{F}((f_1, F_2) \circ (f_2, F_2)) = ((f_1, F_1) \circ (f_2, F_2))^{\leftarrow} = (f_2, F_2)^{\leftarrow} \circ (f_1, F_1)^{\leftarrow} = \mathfrak{F}((f_2, F_2)) \circ \mathfrak{F}((f_1, F_1))$ sağlanır.

Ditopolojiler, tamamen dağılımlılık özelliğine sahip bir latis olan $\mathcal{S}$ dokulanması üzerinde tanımlanmaktadır. Burada latisin tamamen dağılımlılık özelliği yerine, çatı ve koçatı dağılma özellikleri kullanılarak elde edilen daha geniş bir latis sınıfı üzerinde bir yapı oluşturulacaktır.

Tanım 4.1.11. L_e latisi aynı anda hem bir çatı hem de bir koçatı olsun. $L_{fr} \subseteq L_e$ keyfi supremum ve sonlu infimum, $L_{cf} \subseteq L_e$ ise keyfi infimum ve sonlu supremum altında kapalı bir altküme olmak üzere $L = (L_e, L_{fr}, L_{cf})$ üçlüsüne bir *diçatı* denir.

Yukarıdaki tanımdan L_{fr}'nin bir çatı, L_{cf}'nin ise bir koçatı olduğu kolayca görülebilir.

Örnekler 4.1.12. **(1)** X bir topolojik uzay olmak üzere, $(\mathcal{P}(X), \Omega(X), \mathcal{C}(X))$ bir diçatıdır.

(2) $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ bir ditopolojik doku uzayı olmak üzere $(\mathcal{S}, \tau, \kappa)$ bir diçatıdır.

(3) $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesini standart topoloji ile ele alalım ve $L_e = \Omega_{\text{reg}}(\mathbb{R})$ olarak belirleyelim. Örnekler 2.1.15 (3)'den L_e bir tam Boole cebiri ve böylece hem bir çatı hem de bir koçatıdır.

(a) $L_{cf} = \Omega_{\text{reg}}(\mathbb{R})$ ve $L_{fr} = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ olsun. Bu durumda, $\bigvee_{n\in\mathbb{N}}(-\infty, a - \frac{1}{n}) = (-\infty, a) \in L_{fr}$ olduğundan L_{fr} keyfi supremum altında kapalıdır. L_{fr}'nin sonlu infimum altında kapalı olduğu tanımdan açıktır. Bu durumda, $L = (L_e, L_{fr}, L_{cf})$ bir diçatıdır.

(b) $L_{fr} = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ ve $L_{cf} = \{(a, \infty) : a, b \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ olarak tanımlansın.

$$\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \Big(a - \frac{1}{n}, \infty\Big) = \Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (a - \frac{1}{n}, \infty)\Big)^{\circ} = [a, \infty)^{\circ} = (a, \infty) \in L_{cf}$$

olduğundan L_{cf} keyfi infimum altında kapalıdır. Tanımdan, L_{cf}'nin sonlu supremum altında kapalı olduğu açıktır. O halde, $L = (L_e, L_{fr}, L_{cf})$ bir diçatıdır.

Şimdi topolojik yapıların önemli kavramlarından olan taban ve alt tabanların diçatı teorisindeki karşılıkları verilecektir.

Tanım 4.1.13. $L = (L_e, L_{fr}, L_{cf})$ bir diçatı olsun.

(1) $\beta \subseteq L_{fr}$ olmak üzere, eğer her $a \in L_{fr}$ için $a = \bigvee \beta_a$ olacak şekilde bir $\beta_a \subseteq \beta$ varsa β kümesine L diçatısının bir *tabanı* denir.

(2) $\beta \subseteq L_{cf}$ olmak üzere, eğer her $k \in L_{cf}$ için $k = \bigwedge \beta_k$ olacak şekilde bir $\beta_k \subseteq \beta$ varsa β kümesine L diçatısının bir *kotabanı* denir.

Klasik yapıya paralel olarak, taban ve kotaban ile ilgili aşağıdaki karakterizasyonlar geçerlidir.

Önerme 4.1.14. *L_e hem bir çatı hem de bir koçatı ve $\beta \subseteq L_e$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler geçerlidir.*

(1) *β kümesinin bir $L = (L_e, L_{fr}, L_{cf})$ diçatısının tabanı olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki özelliklerin sağlanmasıdır:*

(β_1) $\bigvee \beta = 1$

(β_2) Her $b_1, b_2 \in \beta$ için $b_1 \wedge b_2 = \bigvee \beta_a$ olacak şekilde bir $\beta_a \subseteq \beta$ vardır.

(2) *β kümesinin bir $L = (L_e, L_{fr}, L_{cf})$ diçatısının kotabanı olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki özelliklerin sağlanmasıdır:*

($c\beta_1$) $\bigwedge \beta = 0$

($c\beta_2$) Her $b_1, b_2 \in \beta$ için $b_1 \vee b_2 = \bigwedge \beta_k$ olacak şekilde bir $\beta_k \subseteq \beta$ vardır.

Kanıt: (1) ($\Rightarrow$) Taban tanımından kolayca elde edilebilir.

($\Leftarrow$) L_e hem bir çatı hem de bir koçatı olsun ve $\beta \subseteq L_e$ kümesi yukarıdaki β_1 ve β_2 özelliklerini sağlasın. Bu durumda, $L_{fr} = \{\bigvee A : A \subseteq \beta\} \subseteq L_e$ kümesinin keyfi supremum işlemi altında kapalı olduğu açıktır. Ayrıca, L_{fr} sonlu infimum işlemi altında da kapalıdır. Gerçekten $\bigvee A$, $\bigvee B \in L_{fr}$ olmak üzere, L_e bir çatı olduğundan

$$\big(\bigvee A\big) \wedge \big(\bigvee B\big) = \bigvee_{a \in A} \big(a \wedge \big(\bigvee B\big)\big) = \bigvee_{a \in A} \bigvee_{b \in B} (a \wedge b)$$

sağlanır. Burada $a, b \in \beta$ olduğundan (b)'ye göre $a \wedge b = \bigvee \beta_a$ olacak şekilde bir $\beta_a \subseteq \beta$ vardır. Böylece, $\big(\bigvee A\big) \wedge \big(\bigvee B\big) \in L_{fr}$ elde edilir.

Bu durumda, $L = (L_e, L_{fr}, L_e)$ bir diçatıdır ve β kümesinin bu diçatı için bir taban olduğu tanımlardan açıktır.

(2) (1)'in duali olarak kolayca elde edilebilir.

Önerme 4.1.15. *$L = (L_e, L_{fr}, L_{cf})$ bir diçatı olsun.*

(1) *β, L'nin bir tabanı ise, $a \nleq x$ olan her $a \in L_{fr}$ ve $x \in L_e$ için $b \leq a$ ve $b \nleq x$ olacak şekilde bir $b \in \beta$ vardır.*

(2) *β, L'nin bir kotabanı ise, $x \nleq k$ olan her $k \in L_{cf}$ ve $x \in L_e$ için $k \leq b$ ve $x \nleq b$ olacak şekilde bir $b \in \beta$ vardır.*

Kanıt: (1) $a \in L_{fr}$ ve $x \in L_e$ için $a \nleq x$ olsun. Bu durumda β, L'nin bir tabanı olduğundan $a = \bigvee \beta_a$ olacak şekilde bir $\beta_a \subseteq \beta$ vardır. $\bigvee \beta_a \nleq x$ olduğundan $b \nleq x$ olacak şekilde bir $b \in \beta_a$ vardır ve açıkça $b \leq a$'dir.

(2) (1) ile benzer şekilde kanıtlanabilir. ■

Tanım 4.1.16. $L = (L_e, L_{fr}, L_{cf})$ bir diçatı ve $\delta \subseteq L_{fr}$ (sırasıyla, $\delta \subseteq L_{cf}$) olsun. Eğer δ'nın elemanlarının sonlu infimumlarından (sırasıyla, supremumlarından) oluşan küme, L için bir taban (sırasıyla, kotaban) oluyorsa δ'ya L'nin bir *alt tabanı* (sırasıyla, *alt kotabanı*) denir.

Tanım 4.1.17. $L = (L_e, L_{fr}, L_{cf})$ ve $M = (M_e, M_{fr}, M_{cf})$ birer diçatı olmak üzere aşağıdaki özellikleri sağlayan $(\varphi, \psi) : L \to M$ dönüşüm çiftine bir *diçatı homomorfizması* denir:

(1) $\varphi : L_e \to M_e$ keyfi supremum, sonlu infimum işlemlerini korur ve $\varphi(L_{fr}) \subseteq M_{fr}$'dir.

(2) $\psi : L_e \to M_e$ keyfi infimum ve sonlu supremum işlemlerini korur ve $\psi(L_{cf}) \subseteq M_{cf}$'dir.

Örnek 4.1.18. X ve Y birer topolojik uzay, $f : X \to Y$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$(f^{-1}, f^{-1}) : (\mathcal{P}(Y), \Omega(Y), \mathcal{C}(Y)) \to (\mathcal{P}(X), \Omega(X), \mathcal{C}(X))$$

bir diçatı homomorfizmasıdır.

Nesneleri diçatılar, morfizmaları diçatı homomorfizmaları olan kategori **diFrm** ile gösterilecektir. Bu kategorinin duali ise **diLoc** ile gösterilecek ve dilokaller kategorisi olarak adlandırılacaktır.

Uyarı 4.1.19. $L = (L_e, L_{fr}, L_{cf})$ ve $M = (M_e, M_{fr}, M_{cf})$ birer diçatı olmak üzere, **diLoc** kategorisinin morfizmaları aşağıdaki koşulları sağlayan $(f, g) : L \to M$ dönüşüm çiftleridir:

(i) f dönüşümü keyfi supremum işlemini korur,

(ii) f'nin sağ adjointi olan $f_* : M_e \to L_e$ dönüşümü sonlu supremum işlemini korur,

(iii) $f_*(M_{cf}) \subseteq L_{cf}$'dir,

(iv) g dönüşümü keyfi infimum işlemini korur,

(v) g'nin sol adjointi olan $g^* : M_e \to L_e$ dönüşümü sonlu infimum işlemini korur,

(vi) $g^*(M_{fr}) \subseteq L_{fr}$'dir.

Burada, f'nin bir kolokalik dönüşüm, g'nin bir kolokalik dönüşüm, (g^*, f_*)'nin ise bir diçatı homomorfizması olduğu açıktır.

Nesneleri diçatılar, morfizmaları ise $\varphi = \psi$ koşulunu sağlayan diçatı homomorfizmaları olan kategori **hdiFrm** ile gösterilecektir. Açıkça **diH**, **hdiFrm**'nin dolu bir alt kategorisidir. Ayrıca **hdiFrm** kategorisi **diFrm**'nin dolu olmayan bir alt kategorisidir.

Şimdi **diFrm** ve **diLoc** kategorilerinin **dfDitop** ve **diH** kategorileri ile ilişkilerini inceleyelim:

$(S_i, \mathcal{S}_i, \tau_i, \kappa_i)$ $(i = 1, 2)$ ditopolojik doku uzayları olmak üzere Önerme 4.1.8'i kullanarak $\mathfrak{E}$:**dfDitop** $\to$ **diLoc**,

$$\mathfrak{E}((S_1, \mathcal{S}_1, \tau_1, \kappa_1) \xrightarrow{(f,F)} (S_2, \mathcal{S}_2, \tau_2, \kappa_2) = (\mathcal{S}_1, \tau_1, \kappa_1) \xrightarrow{(\varphi_f, \psi_F)} (\mathcal{S}_2, \tau_2, \kappa_2)$$

funktorunu elde ederiz. Burada $(\mathcal{S}_1, \tau_1, \kappa_1) \xrightarrow{(\varphi_f, \psi_F)} (\mathcal{S}_2, \tau_2, \kappa_2)$,

$$(\mathcal{S}_2, \tau_2, \kappa_2) \xrightarrow{(\varphi_{F^{\leftarrow}}, \psi_{f^{\leftarrow}}) = ((\psi_F)^*, (\varphi_f)_*)} (\mathcal{S}_1, \tau_1, \kappa_1)$$

diFrm morfizmasına karşılık gelen **diLoc** morfizmasıdır.

(L_i, τ_i, κ_i) $(i = 1, 2)$ Hutton uzayları ve $\varphi : (L_1, \tau_1, \kappa_1) \to (L_2, \tau_2, \kappa_2)$ bir **diH** morfizması olsun. Bu durumda $\mathfrak{H}$: **diH**$\to$ **diFrm**,

$$\mathfrak{H}((L_1, \tau_1, \kappa_1) \xrightarrow{\varphi} (L_2, \tau_2, \kappa_2)) = (L_1, \tau_1, \kappa_1) \xrightarrow{(\varphi, \varphi)} (L_2, \tau_2, \kappa_2).$$

funktorunu elde ederiz.

Tanım 4.1.20. $L = (L_e, L_{fr}, L_{cf})$, $M = (M_e, M_{fr}, M_{cf})$ birer diçatı ve $(\varphi, \psi) : L \to M$ bir diçatı homomorfizması olsun.

(1) Eğer φ ve ψ dönüşümleri örten ise (φ, ψ) homomorfizması *örtendir*,

(2) Eğer φ ve ψ dönüşümleri bire-bir ise (φ, ψ) homomorfizması *bire-birdir* denir.

Tanım 4.1.21. (L_e, L_{fr}, L_{cf}), (M_e, M_{fr}, M_{cf}) birer diçatı, $(\varphi, \psi) : L \to M$ bir diçatı homomorfizması olsun.

(1) Eğer her $a \in M_{fr}$ için $\psi^*(a) \in L_{fr}$ oluyorsa (φ, ψ) homomorfizması *açıktır*,

(2) Eğer her $a \in M_{fr}$ için $\varphi_*(a) \in L_{fr}$ oluyorsa (φ, ψ) homomorfizması *ko-açıktır*,

(3) Eğer her $k \in M_{cf}$ için $\psi^*(k) \in L_{cf}$ oluyorsa (φ, ψ) homomorfizması *kapalıdır*,

(4) Eğer her $k \in M_{cf}$ için $\varphi_*(k) \in L_{cf}$ oluyorsa (φ, ψ) homomorfizması *ko-kapalıdır* denir.

Önerme 4.1.22. *L ve M birer diçatı ve $(\varphi, \psi) : L \to M$ bire-bir ve örten bir diçatı homomorfizması olsun.*

(1) *Eğer (φ, ψ) açık (sırasıyla, ko-açık) ise, her $b \in M_{fr}$ için $\psi(a) = b$ (sırasıyla, $\varphi(a) = b$) olacak şekilde bir $a \in L_{fr}$ vardır.*

(2) *Eğer (φ, ψ) kapalı (sırasıyla, ko-kapalı) ise, her $k \in M_{cf}$ için $\psi(f) = k$ (sırasıyla, $\varphi(f) = k$) olacak şekilde bir $f \in L_{cf}$ vardır.*

Kanıt: **(1)** $(\varphi, \psi) : L_e \to M_e$ homomorfizması açık ve $b \in M_{fr}$ olsun. Öncelikle ψ örten olduğundan $\psi(a) = b$ olacak şekilde bir $a \in L_e$ vardır. Önerme 2.1.13'den $\psi^* \psi = 1_{L_e}$ olduğundan $\psi^* \psi(a) = a = \psi^*(b)$'dir ve bu durumda, (φ, ψ) açık olduğundan, $a = \psi^*(b) \in L_{fr}$ elde edilir.

Diğer durumlar da benzer şekilde kanıtlanabilir. ■

Uyarı 4.1.23. Eğer φ dönüşümü bire-bir ve örten ise Önerme 2.1.13'den $\varphi_* \varphi = 1_{L_e}$ ve $\varphi \varphi_* = 1_{M_e}$'dir. Dolayısıyla φ_* dönüşümü φ'nin tersi yani, $\varphi^{-1} = \varphi_*$'dir. Benzer şekilde, ψ bire-bir ve örten ise $\psi^{-1} = \psi^*$ olur. O halde, $(\varphi, \varphi) = \varphi : L \to M$ bire-bir örten bir **hdiFrm** morfizması ise $\varphi^* = \varphi_*$'dir. Bu nedenle, açık ve ko-açık ile kapalı ve ko-kapalı tanımları çakışır.

Tanım 4.1.24. $L = (L_e, L_{fr}, L_{cf})$, $M = (M_e, M_{fr}, M_{cf})$ birer diçatı olmak üzere, açık, kapalı, bire-bir ve örten bir $(\varphi, \varphi) = \varphi : (L_e, L_{fr}, L_{cf}) \to (M_e, M_{fr}, M_{cf})$ **hdiFrm** morfizmasına ***hdiFrm*** *izomorfizması* denir.

Tanım 4.1.25. $L = (L_e, L_{fr}, L_{cf})$ bir diçatı olsun. Bu durumda, $a \in L_e$ olmak üzere, $[a] = \bigwedge\{c \in L_{cf} : a \leq c\} \in L_{cf}$ ve $]a[= \bigvee\{b \in L_{fr} : b \leq a\} \in L_{fr}$ elemanları, sırasıyla, *a'nın kapanışı* ve *a'nın içi* olarak adlandırılır.

Tanım 4.1.26. $L = (L_e, L_{fr}, L_{cf})$ bir diçatı olsun. $S_e \subseteq L_e$ hem bir altlokal hem de bir altkolokal, $S_{fr} = v_{S_e}(L_{fr}) \subseteq S_e$ ve $S_{cf} = t_{S_e}(L_{cf}) \subseteq S_e$ olmak üzere $S = (S_e, S_{fr}, S_{cf})$ üçlüsü bir *altdilokal* olarak adlandırılır.

Uyarı 4.1.27. $L = (L_e, L_{fr}, L_{cf})$ diçatı olmak üzere, $S_e \subseteq L_e$ düz (flat) bir altlokal ve ko-düz (co-flat) bir altkolokaldir.

Önerme 4.1.28. *$S = (S_e, S_{fr}, S_{cf})$ bir diçatıdır.*

Kanıt: $S = (S_e, S_{fr}, S_{cf})$ bir altdilokal olsun. Bu durumda, $L_{fr} \subseteq L_e$ olduğundan $v_{S_e}(L_{fr}) \subseteq v_{S_e}(L_e) = S_e$ sağlanır. Ayrıca, Önerme 2.1.28'den $v_{S_e}(L_{fr})$, S_e'nin bir altçatısıdır yani, keyfi supremum ve sonlu infimum altında kapalıdır. Benzer şekilde, $L_{cf} \subseteq L_e$ kapsaması ve Önerme 3.1.19 kullanılarak, $t_{S_e}(L_{cf}) \subseteq S_e$ olduğu ve $t_{S_e}(L_{cf})$'nin keyfi infimum ve sonlu supremum altında kapalı olduğu görülebilir. ■

5 DİÇATILARDA AYIRMA AKSİYOMLARI

5.1 Diçatılara Genelleştirilmiş Bazı Ayırma Aksiyomları

Bu kısımda diçatılarda bazı ayırma aksiyomları tanımlanacak, bu ayırma aksiyomları ile ilgili çeşitli karakterizasyonlar ve özellikler üzerinde durulacaktır.

Tanım 5.1.1. $L = (L_e, L_{fr}, L_{cf})$ bir diçatı olsun.

(1) Her $a \in L_e$ için $a = \bigvee_{j \in J} \bigwedge_{i \in I} c_i^j$ olacak şekilde $c_i^j \in L_{fr} \cup L_{cf}$ varsa L diçatısına T_0 denir.

(2) Her $a \in L_e$ için $a = \bigwedge_{j \in J} \bigvee_{i \in I} c_i^j$ olacak şekilde $c_i^j \in L_{fr} \cup L_{cf}$ varsa L diçatısına *ko*-T_0 denir.

Not 5.1.2. **(1)** Ditopolojik doku uzaylarında kendi kendine dual olan T_0 aksiyomu, diçatılarda bu özelliğe sahip değildir. Eğer L_e tamamen dağılımlı ise T_0 ve *ko*-T_0 aksiyomları denktir.

(2) $U \subseteq L$ olmak üzere, eğer $V \subseteq L$, L'nin U'yu içeren, keyfi supremum ve keyfi infimum altında kapalı en küçük altkümesi ise *U kümesi V'yi üretir* denir ve $V =< U >$ biçiminde gösterilir.

(3) $L = (L_e, L_{fr}, L_{cf})$ bir diçatı olmak üzere L_e'nin $L_{fr} \cup L_{cf}$ tarafından üretilmesi gerekmez. $L_e = \mathcal{P}(X)$, $L_{fr} = L_{cf} = \{\emptyset, X\}$ diçatısı bu duruma bir örnek olarak gösterilebilir. Fakat L diçatısı T_0 ya da *ko*-T_0 ise, $L_e =< L_{fr} \cup L_{cf} >$ olduğu tanımlardan kolayca gösterilebilir.

Tanım 5.1.3. $L = (L_e, L_{fr}, L_{cf})$ bir diçatı ve $\mathcal{P}$ diçatıların bir özelliği olsun. Eğer L, $\mathcal{P}$ ve *ko*-$\mathcal{P}$ özelliklerini sağlıyorsa, L diçatısı bi-$\mathcal{P}$'dir denir.

Tanım 5.1.4. $L = (L_e, L_{fr}, L_{cf})$ bir diçatı olsun.

(1) Eğer L_{fr}'nin her elemanı L_{cf}'nin elemanlarının keyfi supremumu biçiminde ifade edilebiliyorsa, yani her $a \in L_{fr}$ için $a = \bigvee_{i \in I} k_i$ olacak şekilde $k_i \in L_{cf}$ varsa, L diçatısına R_0 denir.

(2) R_0 ve T_0 diçatılara T_1 denir.

(3) Eğer L_{cf}'nin her elemanı L_{fr}'nin elemanlarının keyfi infimumu biçiminde ifade edilebiliyorsa, yani her $k \in L_{cf}$ için $k = \bigwedge_{i \in I} a_i$ olacak şekilde $a_i \in L_{fr}$ varsa, L diçatısına *ko*-R_0 denir.

(4) *ko*-R_0 ve *ko*-T_0 diçatılara *ko*-T_1 denir.

Örnek 5.1.5. Örnekler 4.1.12 (3)(a)'da verilen $L = (L_e, L_{fr}, L_{cf})$ diçatısını ele alalım. Her $a \in \mathbb{R}$ için $(-\infty, a) = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} (a - n, a)$ olduğundan L diçatısı R_0'dır. Fakat açıktır ki, $(a, b) \in L_{cf}$ sınırlı aralıkları $(-\infty, a) \in L_{fr}$ elemanlarının keyfi infimumu biçiminde ifade edilemez. Dolayısıyla L diçatısı *ko*-R_0 değildir.

$L = (L_e, L_{fr}, L_{cf})$ bir diçatı olmak üzere, L_e hem bir çatı hem de bir koçatı olduğundan, L_e'nin altlokallerinin ve altkolokallerinin varlığından söz etmek mümkündür. Şimdi bu yapıları kullanarak R_0 ve *ko*-R_0 aksiyomlarının farklı karakterizasyonlarını verelim.

Önerme 5.1.6. *$L = (L_e, L_{fr}, L_{cf})$ bir diçatı olsun.*

(1) *Aşağıdaki ifadeler denktir:*

(*a*) *L diçatısı R_0'dır.*

(*b*) *L_{fr}'nin elemanlarına karşılık gelen her açık altlokal, L_{cf}'nin elemanlarına karşılık gelen açık altlokallerin supremumu biçiminde yazılabilir, yani her $a \in L_{fr}$ için*

$$\mathfrak{o}(a) = \bigvee \{\mathfrak{o}(k) : k \in L_{cf} \text{ ve } k \leq a\}$$

olur.

(*c*) *L_{fr}'nin elemanlarına karşılık gelen her kapalı altlokal, L_{cf}'nin elemanlarına karşılık gelen kapalı altlokallerin arakesiti biçiminde ifade edilebilir, yani her $a \in L_{fr}$ için*

$$\mathfrak{c}(a) = \bigcap \{\mathfrak{c}(k) : k \in L_{cf} \text{ ve } k \leq a\}$$

olur.

(*d*) *$x, y \in L_e$ ve $a \in L_{fr}$ olmak üzere aşağıdaki özellik sağlanır:*

$$a \nleq y \to x \Rightarrow \exists k \in L_{cf}, (k \leq a); y \nleq k \to x.$$

(2) *Aşağıdaki ifadeler denktir:*

(a) *L diçatısı ko-R_0'dır.*

(b) *L_{cf}'nin elemanlarına karşılık gelen her açık altkolokal, L_{fr}'nin elemanlarına karşılık gelen açık altkolokallerin supremumu biçiminde yazılabilir, yani her $k \in L_{cf}$ için*

$$\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}(k) = \bigvee\{\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}(a) : a \in L_{fr} \text{ ve } k \leq a\}$$

olur.

(c) *L_{cf}'nin elemanlarına karşılık gelen her kapalı altkolokal, L_{fr}'nin elemanlarına karşılık gelen kapalı altkolokallerin arakesiti biçiminde yazılabilir, yani her $k \in L_{cf}$ için*

$$\mathfrak{c}_{\mathcal{C}}(k) = \bigcap\{\mathfrak{c}_{\mathcal{C}}(a) : a \in L_{fr} \text{ ve } k \leq a\}$$

olur.

(d) *$x, y \in L_e$ ve $k \in L_{cf}$ olmak üzere aşağıdaki özellik sağlanır:*

$$x \leftarrow y \nleq k \Rightarrow \exists a \in L_{fr}, (k \leq a); x \leftarrow a \nleq y$$

Kanıt: (2) (**a**) $\Leftrightarrow$ (**b**) $\bigvee_{i \in I} \mathfrak{o}_{\mathcal{C}}(a_i) = \mathfrak{o}_{\mathcal{C}}(\bigwedge_{i \in I} a_i)$ eşitliği sağlandığından, *ko*-R_0 tanımından kolayca elde edilebilir.

(**a**) $\Leftrightarrow$ (**c**) $\bigcap_{i \in I} \mathfrak{c}_{\mathcal{C}}(a_i) = \mathfrak{c}_{\mathcal{C}}(\bigwedge_{i \in I} a_i)$ eşitliği ve *ko*-R_0 tanımı kullanılarak elde edilebilir.

(**b**) $\Rightarrow$ (**d**) $x, y \in L_e$ ve $k \in L_{cf}$ için $x \leftarrow y \nleq k$ olsun. Bu durumda Sonuç 3.1.12'den $\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}(k) \nsubseteq \mathfrak{o}_{\mathcal{C}}(x \leftarrow y)$ ve (b)'den de

$$\bigvee\{\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}(a) : a \in L_{fr} \text{ ve } k \leq a\} \nsubseteq \mathfrak{o}_{\mathcal{C}}(x \leftarrow y)$$

bulunur. Böylece $k \leq a$ ve $\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}(a) \nsubseteq \mathfrak{o}_{\mathcal{C}}(x \leftarrow y)$ olacak şekilde bir $a \in L_{fr}$ vardır. Yine Sonuç 3.1.12 uygulanarak $x \leftarrow y \nleq a$ ve $k \leq a$ elde edilir. O halde, koHeyting işleminin özelliği kullanılarak, $k \leq a$ ve $x \leftarrow a \nleq y$ olacak şekilde bir $a \in L_{fr}$ bulunmuş olur.

(**d**) $\Rightarrow$ (**b**) (d) koşulu sağlansın yani $x, y \in L_e$ ve $k \in L_{cf}$ olmak üzere, $k \leq a$ ve $x \leftarrow a \leq y$ biçimindeki her $a \in L_{fr}$ için $x \leftarrow y \leq k$ olsun. Fakat $L = (L_e, L_{fr}, L_{cf})$ diçatısının (b) koşulunu sağlamadığını yani,

$$\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}(k) \neq \bigvee\{\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}(a) : a \in L_{fr} \text{ ve } k \leq a\}$$

olacak şekilde bir $k \in L_{cf}$ olduğunu varsayalım. Ancak $k \leq a$ olan her $a \in L_{fr}$ için $\bigvee \mathfrak{o}_{\mathcal{C}}(a) \subseteq \mathfrak{o}_{\mathcal{C}}(k)$ olduğu bilindiğinden, $\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}(k) \nsubseteq \bigvee\{\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}(a) : a \in L_{fr} \text{ ve } k \leq a\}$ olur. Bu durumda, $z \in \mathfrak{o}_{\mathcal{C}}(k)$ ve $z \notin \bigvee\{\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}(a) : a \in L_{fr} \text{ ve } k \leq a\}$ olacak şekilde bir $z \in L_e$ vardır. Böylece, $z \leftarrow k = z$ ve $k \leq a$ koşulunu sağlayan her $a \in L_{fr}$ için $z \notin \mathfrak{o}_{\mathcal{C}}(a)$ elde edilir ki, bu $z \leftarrow k = z$ ve $z \leftarrow a \neq z$ yani, $z \leftarrow k \neq z \leftarrow a$ demektir. Ancak $k \leq a$ olan her $a \in L_{fr}$ için $z \leftarrow a \leq z \leftarrow k$ olduğu bilindiğinden $z \leftarrow k \nleq z \leftarrow a$'dir. Buradan da $z \leftarrow a \leq t$ ve $z \leftarrow k \nleq t$ olacak şekilde bir $t \in L_e$ var olur. Dolayısıyla bu $z, t \in L_e$ çifti için $z \leftarrow a \leq t$ fakat $z \leftarrow t \nleq k$ olur ki bu bir çelişkidir.

(1)'in kanıtı (2)'nin duali olarak yapılabilir. ■

Tanım 5.1.7. $L = (L_e, L_{fr}, L_{cf})$ bir diçatı olsun.

(1) Eğer her $a \in L_{fr}$ için

$$a = \bigvee_{j \in J} \bigwedge_{i \in I} c_i^j = \bigvee_{j \in J} \bigwedge_{i \in I} [c_i^j]$$

olacak şekilde $c_i^j \in L_{fr}$ varsa L diçatısına R_1 denir.

(2) R_1 ve T_0 diçatılara T_2 denir.

(3) Eğer her $k \in L_{cf}$ için

$$k = \bigwedge_{j \in J} \bigvee_{i \in I} f_i^j = \bigwedge_{j \in J} \bigvee_{i \in I}]f_i^j[$$

olacak şekilde $f_i^j \in L_{cf}$ varsa L diçatısına ko-R_1 denir.

(4) ko-R_1 ve *ko*-T_0 diçatılara ko-T_2 denir.

Önerme 5.1.8. **(1)** *Her R_1 (sırasıyla, T_2) diçatı R_0 (sırasıyla, T_1)'dır.*

(2) *Her ko-R_1 (sırasıyla, ko-T_2) diçatı ko-R_0 (sırasıyla, ko-T_1)'dır.*

Kanıt: **(1)** $L = (L_e, L_{fr}, L_{cf})$ diçatısı R_1 olsun ve $a \in L_{fr}$ verilsin. Bu durumda, $a = \bigvee_{j \in J} \bigwedge_{i \in I} [c_i^j]$ ve her $j \in J$ için $\bigwedge_{i \in I} [c_i^j] \in L_{cf}$ olduğundan L diçatısı R_0'dır. ■

Şimdi, ikili topolojik uzaylarda regülerlik tanımından yola çıkarak diçatılarda regülerlik aksiyomunu vermek için özel bir bağıntı tanımlayalım. Bilindiği gibi, $(X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*)$ bir ikili topolojik uzay olmak üzere, her $G \in \mathcal{T}$ ve $x \in G$ için $x \in H \subseteq F \subseteq G$ olacak şekilde bir $\mathcal{T}$-açık $H \subseteq X$ ve $\mathcal{T}^*$-kapalı $F \subseteq X$ kümesi bulunabiliyorsa, bu uzaya regülerdir denir. Diğer bir ifadeyle, her $G \in \mathcal{T}$ kümesi

$$G = \bigcup\{H \in \mathcal{T} : \exists F \ \mathcal{T}^*\text{-kapalı}\, ; H \subseteq F \subseteq G\}$$

biçiminde ifade edilebiliyorsa, $(X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*)$ regülerdir denir. Denk olarak her $F \subseteq X$, $\mathcal{T}^*$-kapalı kümesi

$$F = \bigcap \{K \ \mathcal{T}^*\text{-kapalı} : \exists G \in \mathcal{T}; F \subseteq G \subseteq K\}$$

biçiminde yazılabiliyorsa $(X, \mathcal{T}^*, \mathcal{T})$ uzayı regülerdir.

Yukarıda verilenlerden yola çıkılarak, X bir topolojik uzay olmak üzere, $\mathcal{P}(X)$ kuvvet kümesi üzerinde $\prec_{fr}$ ve $\prec_{cf}$ bağıntıları aşağıdaki gibi tanımlansın:
$H, G \in \Omega(X)$ olmak üzere,

$$H \prec_{fr} G \Leftrightarrow \exists F \in \mathcal{C}(X); H \subseteq F \subseteq G.$$

$F, K \in \mathcal{C}(X)$ olmak üzere,

$$F \prec_{cf} K \Leftrightarrow \exists G \in \Omega(X); F \subseteq G \subseteq K.$$

Şimdi, bu bağıntıları diçatılara genelleştirelim. $L = (L_e, L_{fr}, L_{cf})$ bir diçatı, $a, b \in L_{fr}$ ve $f, k \in L_{cf}$ olmak üzere,

$$a \prec_{fr} b \Leftrightarrow \exists c \in L_{cf}; a \leq c \leq b,$$

$$f \prec_{cf} k \Leftrightarrow \exists a \in L_{fr}; f \leq a \leq k$$

bağıntılarını tanımlayalım.

Önerme 5.1.9. *$L = (L_e, L_{fr}, L_{cf})$ bir diçatı olmak üzere, $\prec_{fr}$ ve $\prec_{cf}$ bağıntıları aşağıdaki özellikleri sağlar.*

(1) *Her $a \in L_{fr}$ için $0 \prec_{fr} a \prec_{fr} 1$, ve her $k \in L_{cf}$ için $0 \prec_{cf} k \prec_{cf} 1$'dir.*

(2) *$a \prec_{fr} b$ ise $a \leq b$, ve $f \prec_{cf} k$ ise $f \leq k$'dir.*

(3) *$a \leq b \prec_{fr} c \leq d$ ise $a \prec_{fr} d$ ve $f \leq c \prec_{cf} d \leq k$ ise $f \prec_{cf} k$'dir.*

(4) *$a_i \prec_{fr} b_i$ $(i = 1, 2)$ ise $a_1 \vee a_2 \prec_{fr} b_1 \vee b_2$ ve $a_1 \wedge a_2 \prec_{fr} b_1 \wedge b_2$'dir. Benzer şekilde, $f_i \prec_{cf} k_i$ $(i = 1, 2)$ ise $f_1 \vee f_2 \prec_{cf} k_1 \vee k_2$ ve $f_1 \wedge f_2 \prec_{cf} k_1 \wedge k_2$'dir.*

Kanıt: Tanımlardan kolayca elde edilebilir.

Tanım 5.1.10. $L = (L_e, L_{fr}, L_{cf})$ bir diçatı olsun.

(1) Eğer her $a \in L_{fr}$ için

$$a = \bigvee\{x \in L_{fr} : x \prec_{fr} a\}$$

biçiminde ifade edilebiliyorsa L diçatısına *regüler* denir.

(2) Regüler ve T_0 diçatılara T_3 denir.

(3) Eğer her $k \in L_{cf}$ için

$$k = \bigwedge\{x \in L_{cf} : k \prec_{cf} x\}$$

biçiminde ifade edilebiliyorsa L diçatısına *ko-regüler* denir.

(4) ko-regüler ve *ko*-T_0 diçatılara *ko*-T_3 denir.

Önerme 5.1.9'dan, $\prec_{fr}$ ve $\prec_{cf}$ bağıntılarının L_e üzerinde birer yardımcı (auxiliary) bağıntı oldukları görülebilir. Regülerlik ve ko-regülerlik aksiyomlarının bu bağıntılar yardımıyla tanımlanmış olması, latis teoride yardımcı bağıntılar kullanılarak elde edilmiş yapılarla ilişki kurmaya imkan sağlaması açısından önemlidir.

Örnek 5.1.11. $\mathbb{I} = [0,1]$ birim aralık, $L_e = \{[0,r], [0,r) : 0 \leq r \leq 1\}$, $L_{fr} = \{[0,r) : 0 \leq r \leq 1\} \cup \{\mathbb{I}\}$ ve $L_{cf} = \{[0,r] : 0 \leq r \leq 1\} \cup \{\emptyset\}$ olsun. Öncelikle $[0,r), [0,s) \in L_{fr}$ olmak üzere, "$[0,r) \prec_{fr} [0,s) \Leftrightarrow r < s$" olduğu kolayca gösterilebilir. O halde her $[0,r) \in L_{fr}$ elemanı, $[0,r) = \bigvee\{[0, r - \frac{1}{n}) : [0, r - \frac{1}{n}) \prec_{fr} [0,r)\}$ biçiminde ifade edilebildiği için $L = (L_e, L_{fr}, L_{cf})$ diçatısı regülerdir. Benzer şekilde, her $[0,r] \in L_{cf}$ elemanı, $[0,r] = \bigwedge\{[0, r + \frac{1}{n}] : [0,r] \prec_{cf} [0, r + \frac{1}{n}]\}$ biçiminde ifade edilebilir ve böylece $L = (L_e, L_{fr}, L_{cf})$ diçatısı ko-regülerdir.

Önerme 5.1.12. **(1)** *Her regüler ve ko-R_0 diçatı ko-R_1'dir.*

(2) *Her ko-regüler ve R_0 diçatı R_1'dir.*

Kanıt: **(1)** L regüler ko-R_0 bir diçatı ve $k \in L_{cf}$ olsun. Öncelikle L ko-R_0 olduğundan $k = \bigwedge_{i \in I} a_i$ olacak şekilde $a_i \in L_{fr}$ vardır. Şimdi L'nin regüler oluşu kullanılırsa her $i \in I$ için $a_i = \bigvee_{j \in J}\{b_{ij} \in L_{fr} : \exists f_{ij} \in L_{cf}; b_{ij} \leq f_{ij} \leq a_i\}$ biçiminde ifade edilebilir. Buradan,

$$k \leq \bigwedge_{i \in I} \bigvee_{j \in J} b_{ij} \leq \bigwedge_{i \in I} \bigvee_{j \in J}]f_{ij}[\leq \bigwedge_{i \in I} \bigvee_{j \in J} f_{ij} \leq \bigwedge_{i \in I} a_i \leq k$$

yani, $k = \bigwedge_{i \in I} \bigvee_{j \in J} f_{ij} = \bigwedge_{i \in I} \bigvee_{j \in J}]f_{ij}[$ elde edilir. Böylece L diçatısı ko-R_1'dir.

(2) (1)'in duali olarak kolayca kanıtlanabilir. ■

Aşağıdaki önermenin ispatı tanımlar kullanılarak kolayca gösterilebileceği için verilmeyecektir.

Önerme 5.1.13. *$L = (L_e, L_{fr}, L_{cf})$ diçatısı R_0 (sırasıyla, R_1, regüler), L'_{cf} bir koçatı ve $L_{cf} \subseteq L'_{cf}$ ise $L' = (L_e, L_{fr}, L'_{cf})$ diçatısı da R_0 (sırasıyla, R_1, regüler) dır. Dual olarak, $L = (L_e, L_{fr}, L_{cf})$ diçatısı ko-R_0 (sırasıyla, ko-R_1, ko-regüler), L'_{fr} bir çatı ve $L_{fr} \subseteq L'_{fr}$ ise $L' = (L_e, L'_{fr}, L_{cf})$ diçatısı da ko-R_0 (sırasıyla, ko-R_1, ko-regüler) dir.*

Önerme 5.1.14. **(1)** *Her regüler (sırasıyla, T_3) diçatı R_1 (sırasıyla, T_2)'dir.*

(2) *Her ko-regüler (sırasıyla, ko-T_3) diçatı ko-R_1 (sırasıyla, ko-T_2)'dir.*

Kanıt: **(1)** L regüler bir diçatı olsun ve $a \in L_{fr}$ verilsin. Bu durumda tanımdan $a = \bigvee_{i \in I}\{c_i \in L_{fr} : c_i \prec_{fr} a\}$ biçiminde ifade edilebilir. Eğer $c_i \prec_{fr} a$ ise $c_i \leq k_i \leq a$ olacak şekilde bir $k_i \in L_{cf}$ olduğu biliniyor. Şimdi, $J = \{j\}$ ve her $i \in I$ için $c_i^j = c_i$ olarak seçilirse

$$a = \bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J} c_i^j \leq \bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J} [c_i^j] \leq \bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J} k_i^j \leq a$$

yani $a = \bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J} c_i^j = \bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J} [c_i^j]$ elde edilir ve böylece L diçatısı R_1'dir.

(2) (1)'in duali olarak kolayca elde edilebilir. ■

Diçatılarda tamamen regülerlik aksiyomu da, regülerlik tanımında olduğu gibi, bir bağıntı yardımı ile verilecektir. Şimdi, $D = \{k/2^n : k, n \in \mathbb{N}, k = 0, \ldots 2^n\}$ diyadik rasyonel sayıların bir kümesi, $L = (L_e, L_{fr}, L_{cf})$ bir diçatı olsun. $a, b \in L_{fr}$ olmak üzere $\prec\!\!\prec_{fr}: L_e \times L_e \to L_e$ bağıntısı aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$a \prec\!\!\prec_{fr} b \quad \Leftrightarrow \quad a_0 = a,\ a_1 = b,\ \text{ve } q < r \text{ için } a_q \prec_{fr} a_r$$
$$\text{olacak şekilde } a_q, a_r \in L_{fr}\ (r, q \in D) \text{ vardır.}$$

Diğer taraftan, $k, f \in L_{cf}$ olmak üzere $\prec\!\!\prec_{cf}: L_e \times L_e \to L_e$ bağıntısı da aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$k \prec\!\!\prec_{cf} f \quad \Leftrightarrow \quad k_0 = k,\ k_1 = f,\ \text{ve } q < r \text{ için } k_q \prec_{cf} k_r$$
$$\text{olacak şekilde } k_q, k_r \in L_{cf}\ (r, q \in D) \text{ vardır.}$$

Önerme 5.1.15. *$L = (L_e, L_{fr}, L_{cf})$ bir diçatı olmak üzere, $\prec\!\!\prec_{fr}$ ve $\prec\!\!\prec_{cf}$ bağıntıları aşağıdaki özellikleri sağlar.*

(1) *Her $a \in L_{fr}$ için $0 \prec\!\!\prec_{fr} a \prec\!\!\prec_{fr} 1$, ve her $k \in L_{cf}$ için $0 \prec\!\!\prec_{cf} k \prec\!\!\prec_{fr} 1$'dir.*

(2) *$a \prec\!\!\prec_{fr} b$ ise $a \leq b$, ve $f \prec\!\!\prec_{cf} k$ ise $f \leq k$'dir.*

(3) *$a \leq b \prec\!\!\prec_{fr} c \leq d$ ise $a \prec\!\!\prec_{fr} d$, ve $f \leq c \prec\!\!\prec_{cf} d \leq k$ ise $f \prec\!\!\prec_{cf} k$'dir.*

(4) *$a_i \prec\!\!\prec_{fr} b_i$ $(i = 1, 2)$ ise $a_1 \vee a_2 \prec\!\!\prec_{fr} b_1 \vee b_2$ ve $a_1 \wedge a_2 \prec\!\!\prec_{fr} b_1 \wedge b_2$'dir. Benzer şekilde, $f_i \prec\!\!\prec_{cf} k_i$ $(i = 1, 2)$ ise $f_1 \vee f_2 \prec\!\!\prec_{cf} k_1 \vee k_2$ ve $f_1 \wedge f_2 \prec\!\!\prec_{cf} k_1 \wedge k_2$'dir.*

(5) *$a \prec\!\!\prec_{fr} b$ ise $a \prec\!\!\prec_{fr} c \prec\!\!\prec_{fr} b$ olacak şekilde bir $c \in L_{fr}$ vardır. Benzer şekilde $f \prec\!\!\prec_{cf} k$ ise $f \prec\!\!\prec_{cf} c \prec\!\!\prec_{cf} k$ olacak şekilde bir $c \in L_{cf}$ vardır.*

(6) *$\prec : L_e \times L_e \to L_e$ aşağıdaki özellikleri sağlayan bir bağıntı olsun.*
(i) *$\prec \subseteq \prec_{fr}$,*
(ii) *$a \prec b$ ise $a \prec c \prec b$ olacak şekilde bir $c \in L_e$ vardır.*
Bu durumda $\prec \subseteq \prec\!\!\prec_{fr}$'dir, yani $\prec\!\!\prec_{fr}$ bağıntısı $\prec_{fr}$ tarafından kapsanan ve interpolasyon özelliğini sağlayan en geniş bağıntıdır. Dual olarak, $\prec\!\!\prec_{cf}$ bağıntısı $\prec_{cf}$ tarafından kapsanan ve interpolasyon özelliğini sağlayan en geniş bağıntıdır.

Kanıt: (1)-(4) özellikleri tanımların açık bir sonucu olduğundan, yalnızca (5) ve (6)'nın kanıtları verilecektir.

(5) $a \prec\!\!\prec_{fr} b$ ise $a_0 = a$, $a_1 = b$ ve $q < r$ için $a_q \prec_{fr} a_r$ olacak şekilde $a_q, a_r \in L_{fr}$ $(r, q \in D)$ olduğu biliniyor. Şimdi $c = a_{\frac{1}{2}}$ olarak seçilsin. Bu durumda $x_0 = a$, $x_1 = c$, $x_{\frac{k}{2^n}} = a_{\frac{k}{2^{n+1}}}$ seçilerek oluşturulan dizi, $q < r$ için $x_q \prec_{fr} x_r$ koşulunu sağlar. Böylece $a \prec\!\!\prec_{fr} c$'dir. Benzer şekilde, $y_0 = c$, $y_1 = b$ ve $q < r$ için $y_q \prec_{fr} y_r$ olacak şekilde $y_q, y_r \in L_{fr}$ $(r, q \in D)$ elde edilebilir ve dolayısıyla $c \prec\!\!\prec_{fr} b$'dir.

(6) $\prec$, L_e üzerinde, (i) ve (ii) özelliklerini sağlayan bir bağıntı olsun. $a, b \in L_e$ olmak üzere $a \prec b$ ise (ii)'den tümevarım ile $a_0 = a$, $a_1 = b$ ve $q < r$ için $a_q \prec a_r$ olacak şekilde $a_q, a_r \in L_{fr}$ $(r, q \in D)$ elde edilebilir. Diğer taraftan $a_q \prec a_r$ ise (i)'den $a_q \prec_{fr} a_r$ olur ve böylece $a \prec\!\!\prec_{fr} b$'dir. ■

Tanım 5.1.16. $L = (L_e, L_{fr}, L_{cf})$ bir diçatı olsun.

(1) Eğer her $a \in L_{fr}$ için

$$a = \bigvee \{x \in L_{fr} : x \prec\!\!\prec_{fr} a\}$$

biçiminde ifade edilebiliyorsa, L diçatısına *tamamen regüler* denir.

(2) Tamamen regüler ve T_0 diçatılara $T_{3\frac{1}{2}}$ denir.

(3) Eğer her $k \in L_{cf}$ için

$$k = \bigwedge \{x \in L_{cf} : k \prec\!\!\prec_{cf} x\}$$

biçiminde ifade edilebiliyorsa L diçatısına *tamamen ko-regüler* denir.

(4) Tamamen ko-regüler ve *ko*-T_0 diçatılara *ko*-$T_{3\frac{1}{2}}$ denir.

Ditopolojik doku uzayları teorisinde tamamen (ko-) regülerlik, $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayından doğal ditopolojiye giden ikili sürekli difonksiyonlar yardımıyla tanımlanmıştır. Diçatı teorisinde ise, doğal ditopolojiye karşılık gelen bir diçatı elde etme, tamamen (ko-) regülerliği diçatı homomorfizmaları kullanarak karakterize etme ve yukarıda elde edilen tanımla aralarındaki ilişkiyi inceleme gibi konular açık soru olarak bırakılmıştır.

Önerme 5.1.17. **(1)** *Her tamamen regüler (sırasıyla, $T_{3\frac{1}{2}}$) diçatı regüler (sırasıyla, T_3)'dir.*

(2) *Her tamamen ko-regüler (sırasıyla, ko-$T_{3\frac{1}{2}}$) diçatı ko-regüler (sırasıyla, ko-T_3)'dir.*

Kanıt: $L = (L_e, L_{fr}, L_{cf})$ bir diçatı olsun. Her $a, b \in L_{fr}$ için "$a \prec\!\!\prec_{fr} b \Rightarrow a \prec_{fr} b$" ve her $k, f \in L_{cf}$ için "$k \prec\!\!\prec_{cf} f \Rightarrow k \prec_{cf} f$" olduğu bağıntıların tanımlarından kolayca görülebilir, bu nedenle önermenin kanıtı açıktır. ■

Şimdi, tamamen regülerlik ve tamamen ko-regülerlik aksiyomlarının, L_e üzerinde tanımlı ve belli özelliklere sahip Urysohn bağıntılar yardımıyla karakterize edilebileceğini gösterelim.

Önerme 5.1.18. **(1)** *$L = (L_e, L_{fr}, L_{cf})$ diçatısının tamamen regüler olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $\lhd : L_e \times L_e \to L_e$ Urysohn bağıntısının olmasıdır.*

(i) *Eğer $a \lhd b$ ise $[a] \leq]b[$'dir.*

(ii) *Her $a \in L_{fr}$ için $a = \bigvee \{x \in L_{fr} : x \lhd a\}$'dir.*

(2) *$L = (L_e, L_{fr}, L_{cf})$ diçatısının tamamen ko-regüler olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $\lhd : L_e \times L_e \to L_e$ Urysohn bağıntısının olmasıdır.*

(i) *Eğer $a \lhd b$ ise $[a] \leq]b[$'dir.*

(ii) *Her $c \in L_{cf}$ için $c = \bigwedge \{x \in L_{cf} : c \lhd x\}$'dir.*

Kanıt: (1) ($\Rightarrow$) $L = (L_e, L_{fr}, L_{cf})$ tamamen regüler bir diçatı olsun. Bu durumda $\prec\!\!\prec_{fr}$ bağıntısının (i) ve (ii) koşullarını sağlayan bir Urysohn bağıntısı olduğunu gösterelim. Öncelikle, Önerme 5.1.15'den, $\prec\!\!\prec_{fr}$'nin bir Urysohn bağıntısı olduğu açıktır.
(i) $a \prec\!\!\prec_{fr} b$ olsun. Bu durumda $\prec\!\!\prec_{fr}$ ve $\prec_{fr}$ bağıntılarının tanımları sırasıyla uygulanırsa $q, r \in D$, $q < r$ olmak üzere

$$a \leq \ldots a_q \leq c_q \leq a_r \leq \ldots \leq b$$

olacak şekilde $a_q, a_r \in L_{fr}$ ve $c_q \in L_{cf}$ elde edilir. Buradan,

$$[a] \leq \ldots \leq [a_q] \leq [c_q] = c_q \leq a_r \leq \ldots \leq b =]b[$$

olur ve böylece $[a] \leq]b['$dir.
(ii) Tamamen regülerlik tanımından açıktır.

($\Leftarrow$) $\lhd$, L_e üzerinde (i) ve (ii) koşullarını sağlayan bir Urysohn bağıntısı olsun ve $x, a \in L_{fr}$ için $x \lhd a$ verilsin. Şimdi $(U3)$ özelliğini kullanarak diyadik rasyonel sayılar ile indislenmiş $y_q \in L_e$ elemanlarından oluşan bir dizi inşa edelim: $x = y_0$ ve $a = y_1$ olmak üzere, $y_0 \lhd y_{\frac{1}{2}} \lhd y_1$ olacak şekilde $y_{\frac{1}{2}} \in L_e$ vardır. Yine interpolasyon özelliği kullanılarak $y_0 \lhd y_{\frac{1}{4}} \lhd y_{\frac{1}{2}}$ olacak şekilde bir $y_{\frac{1}{4}} \in L_e$ ve $y_{\frac{1}{2}} \lhd y_{\frac{3}{4}} \lhd y_1$ olacak şekilde bir $y_{\frac{3}{4}} \in L_e$ elde edilebilir. Bu şekilde devam ederek, tümevarımla, $q, r \in D$, $q < r$ olmak üzere

$$x \lhd \ldots y_q \lhd y_r \ldots \lhd a$$

olacak şekilde $y_q, y_r \in L_e$ elde edilir. Ayrıca (i)'den $]y_q[\leq [y_q] \leq]y_r[$ sağlanır. Buradan,

$$x \prec_{fr} \ldots \prec_{fr}]y_q[\prec_{fr}]y_r[\prec_{fr} \ldots \prec_{fr} a$$

ve böylece $x \prec\!\!\prec_{fr} a$'dir. O halde her $a \in L_{fr}$ için

$$a = \bigvee\{x \in L_{fr} : x \lhd a\} \leq \bigvee\{x \in L_{fr} : x \prec\!\!\prec_{fr} a\} \leq a$$

olur ve böylece L tamamen regülerdir.

(2) (1) ile benzer şekilde kanıtlanabilir. ■

Tanım 5.1.19. $L = (L_e, L_{fr}, L_{cf})$ bir diçatı olsun.

(1) Eğer $c \leq a$ özelliğini sağlayan her $c \in L_{cf}$ ve $a \in L_{fr}$ için $c \leq b \leq [b] \leq a$ olacak şekilde bir $b \in L_{fr}$ varsa L diçatısına *normal*,

(2) Normal ve T_1 diçatılara T_4,

(3) Normal ve *ko*-T_1 diçatılara *ko*-T_4 denir.

Uyarı 5.1.20. Diçatılarda normal olma özelliği kendi kendine dualdir. Bu nedenle, normalliğe denk olarak "$c \leq a$ olan her $c \in L_{cf}$ ve $a \in L_{fr}$ için $c \leq]k[\leq k \leq a$ olacak şekilde bir $k \in L_{cf}$ vardır" tanımı da kullanılabilir.

Önerme 5.1.21. *$L = (L_e, L_{fr}, L_{cf})$ bir diçatı ve $\lhd$, L_e üzerinde "$a \lhd b \Leftrightarrow [a] \leq]b[$" koşulunu sağlayan bir ikili bağıntı olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:*

(a) *$L = (L_e, L_{fr}, L_{cf})$ diçatısı normaldir.*

(b) *$\lhd$ bir Urysohn bağıntısıdır.*

Kanıt: (**a**) $\Rightarrow$ (**b**) $L = (L_e, L_{fr}, L_{cf})$ normal bir çatı olsun. Önermede tanımlanan $\lhd$ bağıntısının $(U1) - (U3)$ koşullarını sağladığını gösterelim:
(U1) $a \lhd b$ ise $a \leq [a] \leq]b[\leq b$ böylece $a \leq b$'dir.
(U2) $a \leq b \lhd c \leq d$ ise $[a] \leq [b] \leq]c[\leq]d[$ ve dolayısıyla $a \lhd d$'dir.
(U3) $a \lhd b$ ise $[a] \leq]b[$ dir. Bu durumda, L'nin normalliğinden, $[a] \leq c \leq [c] \leq]b[$ olacak şekilde bir $c \in L_{fr}$ vardır ve böylece $a \lhd c \lhd b$ elde edilir.

(**b**) $\Rightarrow$ (**a**) $\lhd$, L_e üzerinde bir Urysohn bağıntısı olsun ve $c \leq a$ olacak şekilde bir $c \in L_{cf}$ ve $a \in L_{fr}$ verilsin. Burada $[c] = c \leq a =]a[$ olduğundan $c \lhd a$'dır ve (U3)'den, $c \lhd b \lhd a$ olacak şekilde bir $b \in L_e$ vardır. Buradan, $c \leq [c] \leq]b[\leq b \leq [b] \leq]a[\leq a$ ve böylece $d =]b[\in L_{fr}$ için $c \leq d \leq [d] \leq a$'dir. ■

Örnek 5.1.22. Her normal diçatının regüler olması gerekmez. Örneğin, Örnekler 4.1.12 (3)(b)'de verilen L diçatısı normaldir. Gerçekten de, $C \in L_{cf}$ ve $A \in L_{fr}$ için $C \subseteq A$ ise; **(i)** $C = A = \emptyset$, **(ii)** $C = A = \mathbb{R}$, **(iii)** $C \neq \mathbb{R}$, $A = \mathbb{R}$ durumlarından biri geçerli olmalıdır. (i)'de $B = \emptyset$, (ii) ve (iii)'de ise $B = \mathbb{R}$ seçilirse $C \subseteq B \subseteq [B] \subseteq A$ elde edilir. Fakat tanımlardan kolayca gösterileceği gibi L regüler değildir.

Önerme 5.1.23. **(1)** *Her normal ve R_0 diçatı regülerdir.*

(2) *Her normal ve ko-R_0 diçatı ko-regülerdir.*

Kanıt: **(1)** $L = (L_e, L_{fr}, L_{cf})$ normal, R_0 bir diçatı, $a \in L_{fr}$ ve $c = \bigvee\{b \in L_{fr} : b \prec_{fr} a\}$ olsun. Burada, $c \leq a$ eşitsizliği açıktır. Diğer taraftan, L diçatısı R_0 olduğundan, Önerme 5.1.6'dan

$$\mathfrak{o}(a) = \bigvee\{\mathfrak{o}(k) : k \in L_{cf} \text{ ve } k \leq a\}$$

olduğu biliniyor. O halde $a \leq c$ olduğunu göstermek için Önerme 2.1.24'den $\mathfrak{o}(a) \subseteq \mathfrak{o}(c)$ yani, $k \leq a$ olan her $k \in L_{cf}$ için $\mathfrak{o}(k) \subseteq \mathfrak{o}(c)$ olduğunu göstermek yeterlidir. Öyleyse $k \leq a$ olacak şekilde $k \in L_{cf}$ verilsin. L normal bir diçatı olduğundan $k \leq b \leq [b] \leq a$ olacak şekilde bir $b \in L_{fr}$ vardır ve böylece $b \prec_{fr} a$ ve $k \leq b$'dir. Buradan, $k \leq b \leq c$ olduğundan Önerme 2.1.24 kullanılarak $\mathfrak{o}(k) \subseteq \mathfrak{o}(c)$ elde edilir. ■

Önerme 5.1.24. **(1)** *Her normal ve R_0 diçatı tamamen regülerdir.*

(2) *Her normal ve ko-R_0 diçatı tamamen ko-regülerdir.*

Kanıt: **(1)** $L = (L_e, L_{fr}, L_{cf})$ normal R_0 bir diçatı ve $a \in L_{fr}$ olsun. Önerme 5.1.23'den L regüler olduğundan

$$a = \bigvee\{x \in L_{fr} : x \prec_{fr} a\}$$

biçiminde ifade edilebilir. Bu nedenle tamamen regülerlik için, yukarıdaki koşullar altında $\prec_{fr}$ ve $\prec\!\!\prec_{fr}$ bağıntılarının çakıştığını göstermek yeterlidir. Bunun için ise, $\prec_{fr}$ bağıntısının interpolasyon özelliğini sağladığı gösterilirse, Önerme 5.1.15'den $\prec_{fr} = \prec\!\!\prec_{fr}$ elde edilir. O halde, $a, b \in L_{fr}$, $a \prec_{fr} b$ verilsin. Bu durumda bağıntının tanımından $a \leq k \leq b$ olacak şekilde bir $k \in L_{cf}$ ve böylece normallikten, $a \leq k \leq d \leq [d] \leq b$ olacak şekilde bir $d \in L_{fr}$ vardır. Buradan $a \prec_{fr} d \prec_{fr} b$ elde edilir ki, bu $\prec_{fr}$ bağıntısının interpolasyon özelliğini sağladığı anlamına gelir.

(2) de benzer şekilde kanıtlanabilir. ■

Ayırma aksiyomları arasında şimdiye kadar elde edilen ilişkiler aşağıdaki gibi özetlenebilir:

Sonuç 5.1.25. *Bir diçatıda aşağıdaki gerektirmeler sağlanır:*

$$\textit{normal ve } R_0 \Rightarrow \textit{tamamen regüler} \Rightarrow \textit{regüler} \Rightarrow R_1 \Rightarrow R_0.$$

$$\textit{normal ve ko-}R_0 \Rightarrow \textit{tamamen ko-regüler} \Rightarrow \textit{ko-regüler} \Rightarrow \textit{ko-}R_1 \Rightarrow \textit{ko-}R_0.$$

$$(\textit{ko-})T_4 \Rightarrow (\textit{ko-})T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow (\textit{ko-})T_3 \Rightarrow (\textit{ko-})T_2 \Rightarrow (\textit{ko-})T_1 \Rightarrow (\textit{ko-})T_0.$$

Şimdi, $\mathcal{P}$ aksiyomunu sağlayan diçatıların, hangi özelliklere sahip dönüşümler altında görüntülerinin de $\mathcal{P}$ aksiyomunu sağladığını inceleyelim.

Önerme 5.1.26. *$L = (L_e, L_{fr}, L_{cf})$, $M = (M_e, M_{fr}, M_{cf})$ birer diçatı ve $\varphi : L \to M$ bir **hdiFrm** izomorfizması olsun. Bu durumda, L diçatısının bi-R_0 (sırasıyla, bi-R_1, bi-regüler, tamamen bi-regüler, normal) olması için gerek ve yeter koşul M diçatısının bi-R_0 (sırasıyla, bi-R_1, bi-regüler, tamamen bi-regüler, normal) olmasıdır.*

Kanıt: Önermenin yalnızca bi-regülerlik ve normallik kısımları kanıtlanacaktır. Diğer aksiyomların kanıtları da benzer şekilde yapılabilir.

L diçatısı regüler ve $b \in M_{fr}$ olsun. Bu durumda, φ bire-bir, örten ve açık olduğundan $\varphi(a) = b$ olacak şekilde bir $a \in L_{fr}$ vardır ve regülerlikten $a = \bigvee\{x \in L_{fr} : x \prec_{fr} a\}$ biçiminde ifade edilebilir. Ayrıca, $x \prec_{fr} a$ ise $x \leq c \leq a$ olacak şekilde bir $c \in L_{cf}$ vardır. Buradan, $\varphi(x) \leq \varphi(c) \leq \varphi(a)$ ve $\varphi(c) \in M_{cf}$ olduğundan $\varphi(x) \prec_{fr} \varphi(a)$'dir. O halde,

$$b = \varphi(a) = \varphi(\bigvee\{x \in L_{fr} : x \prec_{fr} a\}) \leq \bigvee\{\varphi(x) \in M_{fr} : \varphi(x) \prec_{fr} \varphi(a)\} \leq b$$

elde edilir ve böylece M regülerdir.

Tersine, M diçatısı regüler ve $a \in L_{fr}$ olsun. Bu durumda, $\varphi(a) \in M_{fr}$'dir ve M regüler olduğundan

$$\varphi(a) = \bigvee\{y \in M_{fr} : y \prec_{fr} \varphi(a)\}$$

biçiminde ifade edilebilir. Şimdi, $y \prec_{fr} \varphi(a)$ ise $y \leq k \leq \varphi(a)$ olacak şekilde bir $k \in M_{cf}$ vardır ve φ^* sıra koruyan bir dönüşüm olduğundan $\varphi^*(y) \leq \varphi^*(k) \leq \varphi^*\varphi(a)$'dir. Burada, φ bire-bir olduğundan Önerme 2.1.13'den φ^* örten ve $\varphi^*\varphi(a) = a$'dir. Ayrıca, φ açık olduğundan $\varphi^*(y) \in L_{fr}$ ve φ kapalı olduğundan $\varphi^*(k) \in L_{cf}$'dir. O halde,

$$a = \varphi^*\varphi(a) = \varphi^*(\bigvee\{y \in M_{fr} : y \prec_{fr} \varphi(a)\}) = \bigvee\{\varphi^*(y) \in L_{fr} : \varphi^*(y) \prec_{fr} a\}$$

elde edilir ve böylece L regülerdir.

Şimdi, L diçatısı ko-regüler ve $k \in M_{cf}$ olsun. Bu durumda, φ bire-bir, örten ve kapalı olduğundan $\varphi(f) = k$ olacak şekilde bir $f \in L_{cf}$ vardır ve L ko-regüler olduğundan $f = \bigwedge\{x \in L_{cf} : f \prec_{cf} x\}$ biçiminde ifade edilebilir. Buradan,

$$k = \varphi(f) = \varphi(\bigwedge\{x \in L_{cf} : f \prec_{cf} x\}) = \bigwedge\{\varphi(x) \in L_{cf} : k \prec_{cf} \varphi(x)\}$$

elde edilir ve böylece M ko-regülerdir.

Tersine, M diçatısı ko-regüler ve $f \in L_{cf}$ olsun. Bu durumda, $\varphi(f) \in M_{cf}$'dir ve M ko-regüler olduğundan

$$\varphi(f) = \bigwedge\{x \in M_{cf} : \varphi(f) \prec_{cf} x\}$$

biçiminde ifade edilebilir. Şimdi, $\varphi(f) \prec_{cf} x$ ise $\varphi(f) \leq a \leq x$ olacak şekilde bir $a \in L_{fr}$ vardır ve φ^* sıra korur olduğundan $\varphi^*\varphi(f) \leq \varphi^*(a) \leq \varphi^*(x)$'dir. Burada, φ bire-bir olduğundan Önerme 2.1.13'den $\varphi^*\varphi(f) = f$'dir. Ayrıca, φ açık olduğundan $\varphi^*(a) \in L_{fr}$ ve φ kapalı olduğundan $\varphi^*(x) \in L_{cf}$'dir. O halde,

$$f = \varphi^*\varphi(f) = \varphi^*(\bigwedge\{x \in M_{cf} : \varphi(f) \prec_{cf} x\}) = \bigwedge\{\varphi^*(x) \in L_{cf} : f \prec_{cf} \varphi^*(x)\}$$

elde edilir ve böylece L ko-regülerdir.

Şimdi de, L normal ve $x \in M_{cf}$, $y \in M_{fr}$ için $x \leq y$ olsun. Bu durumda Önerme 4.1.22 gereği $\varphi(c) = x$ olacak şekilde bir $c \in L_{cf}$ ve $\varphi(a) = y$ olacak şekilde bir $a \in L_{fr}$ vardır. $\varphi(c) \leq \varphi(a)$ ve φ^* sıra koruyan bir dönüşüm olduğundan $\varphi^*\varphi(c) \leq \varphi^*\varphi(a)$ yani, $c \leq a$ elde edilir. Buradan, L'nin normalliğinin bir sonucu olarak $c \leq b \leq [b] \leq a$ olacak şekilde bir $b \in L_{fr}$ bulunabilir. Bu durumda, $\varphi([b]) \in M_{cf}$ olduğundan

$$\varphi(c) \leq \varphi(b) \leq [\varphi(b)] \leq \varphi([b]) \leq \varphi(a)$$

sağlanır ve böylece M normaldir.

Tersine, M normal ve $c \in L_{cf}$, $a \in L_{fr}$ için $c \leq a$ olsun. Buradan, $\varphi(c) \leq \varphi(a)$ olduğundan, normallikten $\varphi(c) \leq z \leq [z] \leq \varphi(a)$ olacak şekilde bir $z \in M_{fr}$ bulunabilir. Ayrıca $\varphi(b) = z$ olacak şekilde bir $b \in L_{fr}$ vardır. Böylece, eşitsizliğe φ^* dönüşümü uygulanarak $c \leq b \leq \varphi^*([\varphi(b)]) \leq a$ bulunur. Burada Önerme 4.1.22 kullanılırsa, $\varphi(d) = [\varphi(b)]$ olacak şekilde bir $d \in L_{cf}$ elde edilebilir. Sonuç olarak, $c \leq b \leq \varphi^*(\varphi(d)) \leq a$ ve böylece $c \leq b \leq [b] \leq d \leq a$ sağlanır. Dolayısıyla L normaldir. ■

6 DİÇATILARDA KOMPAKTLIK VE YEREL KOMPAKTLIK

6.1 Kompaktlık ve Dengelilik

Bu kısımda diçatılarda (ko-) kompaktlık ve (ko-) dengelilik kavramları tanımlanacak, bu kavramların ayırma aksiyomları ile ilişkileri, kalıtsal özellik olup olmadıkları ve belli özelliklere sahip morfizmalar altındaki görüntüleri gibi konulara yer verilecektir. Burada sunulacak olan tanımlar [10]'da, ve dolayısıyla [21]'de, verilen tanımları temel almaktadır.

Tanım 6.1.1. $L = (L_e, L_{fr}, L_{cf})$ bir diçatı ve $a \in L_e$ olsun.

(1) $G \subseteq L_{fr}$ olmak üzere, $a \leq \bigvee G$ ise G'ye *a'nın bir örtüsü* denir.

(2) $K \subseteq L_{cf}$ olmak üzere, $\bigwedge K \leq a$ ise K'ye *a'nın bir ko-örtüsü* denir.

Tanım 6.1.2. $L = (L_e, L_{fr}, L_{cf})$ bir diçatı ve $a \in L_e$ olsun.

(1) Eğer a'nın her G örtüsü için $a \leq \bigvee H$ olacak şekilde sonlu bir $H \subseteq G$ kümesi varsa, a elemanına *kompakttır* denir.

(2) Eğer a'nın her K ko-örtüsü için $\bigwedge F \leq a$ olacak şekilde sonlu bir $F \subseteq K$ kümesi varsa, a elemanına *ko-kompakttır* denir.

(3) Eğer $1 \in L_e$ kompakt ise, L diçatısı kompakttır denir.

(4) Eğer $0 \in L_e$ ko-kompakt ise, L diçatısı ko-kompakttır denir.

Uyarılar 6.1.3. **(1)** Yukarıdaki tanımlarda "sonlu örtü" yerine "sayılabilir örtü" ifadesi kullanılarak, Lindelöf ve ko-Lindelöf eleman, Lindelöf diçatı ve ko-Lindelöf diçatı tanımları elde edilebilir.

(2) Her (ko-) kompakt diçatının (ko-) Lindelöf olduğu tanımlardan kolayca görülebilir. Fakat, tersi genelde doğru değildir. Gerçekten de, X sayılabilir bir küme, $L_e = L_{fr} = \mathcal{P}(X)$ ve $L_{cf} = \{X, \emptyset\}$ olmak üzere $L = (L_e, L_{fr}, L_{cf})$ diçatısı Lindelöftür, fakat kompakt değildir. Benzer şekilde, $L_e = L_{cf} = \mathcal{P}(X)$ ve $L_{fr} = \{X, \emptyset\}$ olmak üzere, $L = (L_e, L_{fr}, L_{cf})$ diçatısı ko-Lindelöftür, fakat ko-kompakt değildir.

Önerme 6.1.4. **(1)** *Kompakt bir diçatının her altdilokali de kompakttır.*

(2) *Ko-kompakt bir diçatının her altdilokali de ko-kompakttır.*

Kanıt: **(1)** $L = (L_e, L_{fr}, L_{cf})$ bir diçatı ve $S = (S_e, S_{fr}, S_{cf})$, L'nin bir altdilokali olmak üzere $S_e \subseteq L_e$ keyfi supremum altında kapalı ve $1_{S_e} = 1_{L_e}$ olduğundan kolayca gösterilebilir. ∎

Önerme 6.1.5. *L ve M birer diçatı ve $(\varphi, \psi) : L \to M$ bire-bir, örten bir diçatı homomorfizması olsun.*

(1) *(φ, ψ) ko-açık ise, L'nin kompakt olması için gerek ve yeter koşul M'nin kompakt olmasıdır.*

(2) *(φ, ψ) kapalı ise, L'nin ko-kompakt olması için gerek ve yeter koşul M'nin ko-kompakt olmasıdır.*

Kanıt: **(1)** $(\Rightarrow)$ L diçatısı kompakt ve $B \subseteq M_{fr}$, 1_{M_e}'in bir örtüsü olsun. $(\varphi, \psi) : L \to M$ bire-bir, örten ve ko-açık olduğundan, Önerme 4.1.22'den, her $b_i \in B$ için $\varphi(a_i) = b_i$ olacak şekilde bir $a_i \in L_{fr}$ vardır. Şimdi

$$\varphi(1_{L_e}) = 1_{M_e} = \bigvee_{i \in I} b_i = \bigvee_{i \in I} \varphi(a_i) = \varphi(\bigvee_{i \in I} a_i)$$

ve φ bire-bir olduğundan $1_{L_e} = \bigvee_{i \in I} a_i$'dir. Bu durumda, L diçatısı kompakt olduğundan $1_{L_e} = \bigvee_{k=1}^{n} a_{i_k}$ olacak şekilde $i_1, \ldots, i_n \in I$ vardır. Buradan

$$1_{M_e} = \varphi(1_{L_e}) = \varphi(\bigvee_{k=1}^{n} a_{i_k}) = \bigvee_{k=1}^{n} \varphi(a_{i_k}) = \bigvee_{k=1}^{n} b_{i_k}$$

elde edilir ve böylece M kompakttır.

$(\Leftarrow)$ M kompakt ve $A = \{a_i : i \in I\} \subseteq L_{fr}$, 1_{L_e}'in bir örtüsü, yani $1_{L_e} = \bigvee_{i \in I} a_i$ olsun. φ keyfi supremumu koruduğundan, $1_{M_e} = \varphi(1_{L_e}) = \varphi(\bigvee_{i \in I} a_i) = \bigvee_{i \in I} \varphi(a_i)$, yani $1_{M_e} = \bigvee_{i \in I} \varphi(a_i)$'dir. O halde, M kompakt olduğundan,

$$1_{M_e} = \varphi(1_{L_e}) = \bigvee_{k=1}^{n} \varphi(a_{i_k}) = \varphi(\bigvee_{k=1}^{n} a_{i_k})$$

olacak şekilde sonlu bir $\{a_{i_k} : k = 1, \ldots, n\} \subseteq A$ vardır. Şimdi φ'nin bire-bir oluşu kullanılarak $1_{L_e} = \bigvee_{k=1}^{n} a_{i_k}$ elde edilir ve böylece L kompakttır. ∎

Klasik topolojide, Alexander alt taban teoremi sayesinde, kompaktlık kavramının, alt taban elemanlarından oluşan örtüler yardımı ile karakterize edilebileceği biliniyor. Şimdi bu teoremin diçatılara bir genelleşmesini verelim.

Teorem 6.1.6. *$L = (L_e, L_{fr}, L_{cf})$ bir diçatı ve δ, L'nin bir alt tabanı (sırasıyla, alt kotabanı) olsun. Bu durumda L'nin kompakt (sırasıyla ko-kompakt) olması için gerek ve yeter koşul L'nin her $A \subseteq \delta$ örtüsü (sırasıyla, ko-örtüsü) için sonlu bir $B \subseteq A$ örtüsünün olmasıdır.*

Kanıt: Teoremin kanıtı [5, Teorem 2.14] ile benzer şekilde yapılabileceği için tüm detaylara yer verilmeyecektir.

($\Rightarrow$) Kompaktlığın tanımından açıktır.

($\Leftarrow$) $A \subseteq L_{fr}$, hiçbir sonlu altkümesi $1 \in L_e$ elemanını örtmeyen bir küme olsun. Eğer A'nın da $1 \in L_e$'i örtmediği gösterilirse, L'nin kompakt olduğu sonucuna ulaşılabilir. Bunun için G ailesi,

$$G = \{B \subseteq L_{fr} : A \subseteq B \text{ ve B'nin hiçbir sonlu altkümesi 1'i örtmez}\}$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda, $(G, \subseteq)$ kısmi sıralı bir kümedir ve Zorn yardımcı teoreminden bir H maksimal elemanına sahiptir. Ayrıca H, aşağıda verilen özellikleri sağlar:

(1) $a \notin H$ olan her $a \in L_{fr}$ için $a \vee (\bigvee_{i=1}^{n} a_i) = 1$ olacak şekilde $\{a_i : 1 \leq i \leq n\} \subseteq H$ vardır.

(2) Her $\{a_i : a_i \notin H, 1 \leq i \leq n\} \subseteq L_{fr}$ için $\bigwedge_{i=1}^{n} a_i \notin H$'dir.

(3) Her $C = \{a_i : 1 \leq i \leq n\} \subseteq L_{fr}$ kümesi ve $\bigwedge_{i=1}^{n} a_i \leq b$ olan her $b \in H$ için $a_j \in H$ olacak şekilde bir $a_j \in C$ vardır.

Burada (1) ve (2) özellikleri sadece (3)'ün ispatı için kullanılmaktadır. Şimdi, (3)'ü kullanarak $\bigvee H = \bigvee(\delta \cap H)$ olduğunu gösterelim: $\bigvee(\delta \cap H) \leq \bigvee H$ olduğu açıktır. Eşitsizliğin diğer kısmı için, tersine $\bigvee H \nleq \bigvee(\delta \cap H)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $\bigvee(\delta \cap H) \leq x$ ve $\bigvee H \nleq x$ olacak şekilde bir $x \in L_e$ vardır. $\bigvee H \nleq x$ olduğundan $a \nleq x$ olacak biçimde bir $a \in H$ vardır ve δ, L'nin bir alt tabanı olduğundan Önerme 4.1.15 (1)'den $\bigwedge_{i=1}^{n} b_i \leq a$ ve $\bigwedge_{i=1}^{n} b_i \nleq x$ olacak şekilde $b_i \in \delta$ bulunabilir. Burada (3) özelliği kullanılırsa, bir $b_j \in (\delta \cap H)$ elde edilir. Böylece, $\bigwedge_{i=1}^{n} b_i \leq b_j \leq \bigvee(\delta \cap H) \leq x$ bulunur ki, bu bir çelişkidir. O halde $\bigvee H \leq \bigvee(\delta \cap H)$ olmalıdır ve dolayısıyla istenilen eşitlik sağlanmış olur.

Şimdi eğer H, 1'in bir örtüsü ise $1 = \bigvee H = \bigvee(\delta \cap H)$ elde edilir. O halde varsayımdan $(\delta \cap H) \subseteq \delta$ örtüsü için sonlu bir $B \subseteq \delta \cap H$ örtüsü vardır. Fakat bu durum,

H'nin hiçbir sonlu altkümesinin 1'i örtmediği gerçeği ile çelişir. O halde H, ve böylece A, 1'in bir örtüsü değildir. ■

Tanımlardan kolayca görülebildiği gibi, kompaktlık yalnızca L_{fr}'nin, ko-kompaktlık ise yalnızca L_{cf}'nin elemanları ile ilişkilidir. O halde, L_{fr} ve L_{cf} arasında bir bağlantı kuracak olan kavramlara ihtiyaç vardır.

Tanım 6.1.7. $L = (L_e, L_{fr}, L_{cf})$ bir diçatı olsun.

(1) Eğer her $1 \neq k \in L_{cf}$ elemanı kompakt ise L diçatısı *dengelidir* denir.

(2) Eğer her $0 \neq a \in L_{fr}$ elemanı ko-kompakt ise L diçatısı *ko-dengelidir* denir.

Örnekler 6.1.8. Örnekler 4.1.12 (3) (a)'da verilen $L = (L_e, L_{fr}, L_{cf})$ diçatısını ele alalım.

(1) L kompakt değildir, çünkü $\mathbb{R}$'nin $\{(-\infty, a+n) : n \in \mathbb{N}\}$ örtüsünün hiçbir sonlu alt kümesi $\mathbb{R}$'yi örtmez. Ayrıca, L diçatısı ko-kompakt da değildir. Gerçekten, $0_{L_e} = \emptyset$'nin $\{(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ ko-örtüsü iddiamızı kanıtlar.

(2) L ko-dengeli değildir. Gerçekten, verilen herhangi bir $(-\infty, b) \in L_{fr}$ için

$$\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} (a, b + \frac{1}{n}) = \Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (a, b + \frac{1}{n})\Big)^{\circ} = (a, b]^{\circ} = (a, b) \subseteq (-\infty, b)$$

sağlanır, fakat $\bigwedge F \subseteq (-\infty, b)$ olacak şekilde sonlu bir $F \subseteq \{(a, b + \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ bulunamaz. Böylece $(-\infty, b) \in L_{fr}$ ko-kompakt değildir. Ayrıca, L diçatısı dengeli de değildir. Bu durum, verilen herhangi bir $(a, b) \in L_{cf}$ elemanı için $\{(-\infty, b - \frac{1}{n}) \in L_{fr} : n \in \mathbb{N}\}$ örtüsü seçilerek kolayca görülebilir.

Aşağıdaki örnekten, kompaktlık ve dengeliliğin birbirini gerektirmeyen iki kavram olduğu sonucu çıkarılabilir.

Örnekler 6.1.9. **(1)** $L_e = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $L_{fr} = \Omega(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}$ üzerindeki sayılabilir tümleyenler topolojisinin açık kümeler latisi ve $L_{cf} = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ olmak üzere, $L = (L_e, L_{fr}, L_{cf})$ diçatısı dengeli, fakat kompakt olmayan bir diçatıdır.

(2) $\mathbb{I}$ birim aralığını $\mathbb{R}$'den indirgenen standart topoloji ile ele alalım. Bu durumda, $L_{fr} = \Omega(\mathbb{I})$ ve $L_{cf} = \{\emptyset, [0, \frac{1}{2}), \mathbb{I}\}$ olmak üzere $L = (\mathcal{P}(\mathbb{I}), L_{fr}, L_{cf})$ diçatısı kompakttır. Fakat, $[0, \frac{1}{2}) \in L_{cf}$ elemanı ve bu elemanın $\big\{[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}) : n \geq 2, n \in \mathbb{N}\big\}$ örtüsü seçilerek L'nin dengeli olmadığı gösterilebilir.

Önerme 6.1.10. *$L = (L_e, L_{fr}, L_{cf})$ ko-R_0, dengeli bir diçatı ve $L' = (L_e, L_{fr}, L'_{cf})$ regüler ise $L_{cf} \subseteq L'_{cf}$'dir. Dual olarak, $L = (L_e, L_{fr}, L_{cf})$ R_0, ko-dengeli bir diçatı ve $L' = (L_e, L'_{fr}, L_{cf})$ ko-regüler ise $L_{fr} \subseteq L'_{fr}$ dir.*

Kanıt: $k \in L_{cf}$ olsun. $k = 1$ durumu açık olduğundan $k \neq 1$ olduğunu kabul edelim. Öncelikle L ko-R_0 olduğundan $k = \bigwedge_{i\in I} a_i$ olacak şekilde $a_i \in L_{fr}$ vardır. Ayrıca, L' regüler olduğundan her $i \in I$ için $a_i = \bigvee_{j\in J}\{x_{ij} \in L_{fr} : x_{ij} \prec_{fr} a_i\}$ biçiminde yazılabilir. Eğer $x_{ij} \prec_{fr} a_i$ ise tanım gereği $x_{ij} \leq k_{ij} \leq a_i$ olacak şekilde $k_{ij} \in L'_{cf}$ olduğu biliniyor. Buradan her $i \in I$ için $k \leq \bigvee_{j\in J} x_{ij}$ elde edilir. L dengeli olduğundan $k \leq \bigvee_{j\in J_0} x_{ij} \leq \bigvee_{j\in J_0} k_{ij}$ olacak şekilde sonlu bir $J_0 \subseteq J$ kümesi vardır. O halde,

$$k \leq \bigwedge_{i\in I} \bigvee_{j\in J_0} k_{ij} \leq \bigwedge_{i\in I} a_i \leq k$$

ve böylece $k = \bigwedge_{i\in I} \bigvee_{j\in J_0} k_{ij} \in L'_{cf}$ dir.

Önermenin dual kısmı da benzer şekilde kanıtlanabilir. ■

Yukarıdaki önermenin ikili topolojik uzaylardaki versiyonu [21]'de verilmiştir. Sözü edilen çalışmada sunulan önermedeki R_1 koşulu yerine burada, daha kuvvetli bir özellik olan regülerliğe ihtiyaç vardır. Bunun sebebi ise, ikili topolojik uzaylardan daha genel olan diçatılarda, L_e'nin tamamen dağılımlılık özelliğine sahip olmamasıdır.

Önerme 6.1.11. *$L = (L_e, L_{fr}, L_{cf})$ bir diçatı ve $S = (S_e, S_{fr}, S_{cf})$, L'nin bir altdilokali olsun. Bu durumda L (ko-)dengeli ise S de (ko-)dengelidir.*

Kanıt: L ve S diçatılarında supremum işlemleri çakıştığı için, tanımdan kolayca gösterilebilir. ■

Önerme 6.1.12. *Her dengeli ve regüler diçatı normaldir. Dual olarak, her ko-dengeli ve ko-regüler diçatı normaldir.*

Kanıt: $L = (L_e, L_{fr}, L_{cf})$ dengeli ve regüler bir diçatı olsun ve $c \leq a$ olacak şekilde $c \in L_{cf}$, $a \in L_{fr}$ verilsin. $a = 1$ ise $b = 1$ için $c \leq b \leq [b] \leq a$ elde edilir. Şimdi, $a \neq 1$ olduğunu kabul edelim. L regüler olduğundan $c \leq a = \bigvee_{i\in I}\{x_i \in L_{fr} : x_i \prec_{fr} a\}$'dir. L dengeli ve $c \neq 1$ olduğundan c kompakt ve böylece $c \leq \bigvee_{i=1}^{n}\{x_i \in L_{fr} : x_i \prec_{fr} a\}$'dir. Eğer $x_i \prec_{fr} a$ ise $x_i \leq k_i \leq a$ olacak şekilde bir $k_i \in L_{cf}$ vardır. Şimdi eğer $b = \bigvee_{i=1}^{n}]k_i[$ olarak tanımlanırsa,

$$c \leq \bigvee_{i=1}^{n} x_i \leq b \text{ ve } [b] = [\bigvee_{i=1}^{n}]k_i[] \leq [\bigvee_{i=1}^{n} k_i] \leq \bigvee_{i=1}^{n} k_i \leq a$$

elde edilir ve böylece L normaldir. Diğer iddia da benzer şekilde kanıtlanabilir. ■

Önerme 6.1.13. **(1)** *Her R_1 ve ko-dengeli diçatı regülerdir.*

(2) *Her ko-R_1 ve dengeli diçatı ko-regülerdir.*

Kanıt: **(1)** $L = (L_e, L_{fr}, L_{cf})$ diçatısı R_1 ve ko-dengeli olsun ve $a \in L_{fr}$ verilsin. $a = 0$ ise sonuç açıktır. O halde $a \neq 0$ olduğunu varsayalım. L diçatısı R_1 olduğundan, $c_i^j \in L_{fr}$ olmak üzere, $a = \bigvee_{i\in I} \bigwedge_{j\in J} c_i^j = \bigvee_{i\in I} \bigwedge_{j\in J} [c_i^j]$ biçiminde ifade edilebilir. Buradan, her $i \in I$ için $\bigwedge_{j\in J} [c_i^j] \leq a$ ve L ko-dengeli olduğundan $\bigwedge_{j\in J_0} [c_i^j] \leq a$ olacak şekilde sonlu bir $J_0 \subseteq J$ indis kümesi vardır. Şimdi, her $i \in I$ için $x_i = \bigwedge_{j\in J_0} c_i^j$ olarak seçilirse, $x_i \leq \bigwedge_{j\in J_0} [c_i^j] \leq a$ ve $\bigwedge_{j\in J_0} [c_i^j] \in L_{cf}$ olduğundan her $i \in I$ için $x_i \prec_{fr} a$ elde edilir. Bu durumda

$$\bigvee_{i\in I} \bigwedge_{j\in J_0} c_i^j \leq a \leq \bigvee_{i\in I} \bigwedge_{j\in J} c_i^j \leq \bigvee_{i\in I} \bigwedge_{j\in J_0} c_i^j$$

olduğundan $a = \bigvee_{i\in I} \{x_i \in L_{fr} : x_i \prec_{fr} a\}$ ve böylece L regülerdir.

(2) de benzer şekilde kanıtlanabilir. ■

Şimdi, elde edilen son iki önerme birlikte düşünülerek aşağıdaki sonuç elde edilebilir.

Sonuç 6.1.14. **(1)** *Her R_1 bi-dengeli diçatı normaldir.*

(2) *Her ko-R_1 bi-dengeli diçatı normaldir.*

Kanıt: **(2)** $L = (L_e, L_{fr}, L_{cf})$ ko-R_1 ve dengeli ise Önerme 6.1.13'den ko-regüler ve böylece Önerme 6.1.12'den normaldir. ■

Bu kısımda son olarak, dengeli ve ko-dengeli olma özelliklerinin belirli koşulları sağlayan dönüşümler altında korunup korunmadığını inceleyelim.

Önerme 6.1.15. *L ve M birer diçatı ve $(\varphi, \psi) : L \to M$ bire-bir, örten bir diçatı homomorfizması olsun.*

(1) *(φ, ψ) ko-açık ve ko-kapalı olmak üzere, L dengeli ise M de dengelidir.*

(2) *(φ, ψ) açık ve kapalı olmak üzere, L ko-dengeli ise M de ko-dengelidir.*

Kanıt: **(1)** L dengeli bir diçatı, $1_{M_e} \neq k \in M_{cf}$ ve $\{b_i : i \in I\} \subseteq M_{fr}$ kümesi k'nın bir örtüsü olsun. (φ, ψ) homomorfizması bire-bir, örten, ko-açık ve ko-kapalı olduğundan, Önerme 4.1.22'den $\varphi(f) = k$ olacak şekilde bir $1_{L_e} \neq f \in L_{cf}$ ve her $i \in I$ için $\varphi(a_i) = b_i$ olacak şekilde $a_i \in L_{fr}$ vardır. O halde

$$k = \varphi(f) \leq \bigvee_{i\in I} b_i = \bigvee_{i\in I} \varphi(a_i) = \varphi(\bigvee_{i\in I} a_i)$$

sağlanır. φ_* sıra koruyan bir dönüşüm olduğundan $\varphi_*\varphi(f) \leq \varphi_*\varphi(\bigvee_{i\in I} a_i)$ ve böylece Önerme 2.1.13'den $f \leq \bigvee_{i\in I} a_i$'dir. L dengeli olduğundan f kompakttır, bu durumda $f \leq \bigvee_{i\in I_0} a_i$ olacak şekilde sonlu bir $I_0 \subseteq I$ indis kümesi vardır. Buradan,

$$k = \varphi(f) \leq \varphi(\bigvee_{i\in I_0} a_i) = \bigvee_{i\in I_0} \varphi(a_i) = \bigvee_{i\in I_0} b_i$$

elde edilir ve böylece M dengelidir.

Önerme 6.1.16. *L ve M birer diçatı olsun. M dengeli (sırasıyla, ko-dengeli) bir diçatı ve $\varphi : L \to M$ bire-bir **hdiFrm** morfizması ise L de dengeli (sırasıyla, ko-dengeli)dir.*

Kanıt: M dengeli bir çatı, $1_{L_e} \neq f \in L_{cf}$ ve $\{a_i \in L_{fr} : i \in I\}$, f'nin bir örtüsü olsun. Bu durumda, $f \leq \bigvee_{i\in I} a_i$ olduğundan $\varphi(f) \leq \varphi(\bigvee_{i\in I} a_i) = \bigvee_{i\in I} \varphi(a_i)$'dir. Şimdi, $1_{M_e} \neq \varphi(f) \in M_{cf}$, her $i \in I$ için $\varphi(a_i) \in M_{fr}$ ve M dengeli bir diçatı olduğundan $\varphi(f) \leq \bigvee_{k=1}^{n} \varphi(a_{i_k}) = \varphi(\bigvee_{k=1}^{n} a_{i_k})$'dir. O halde, φ bire-bir olduğundan, eşitliğin her iki tarafına φ_* dönüşümü uygulanarak istenilen sonuç elde edilebilir. ■

6.2 Yerel Kompaktlık ve Yerel Dengelilik

Bu kısımda, diçatılarda yerel kompaktlık ve yerel dengelilik tanımları verilecek ve ayrıca bunların ayırma aksiyomları ile ilişkileri, kalıtsal özellik olup olmadıkları ve belirli özelliklere sahip morfizmalar altındaki görüntüleri incelenecektir. Bu kavramların ditopolojik doku uzayları teorisinde bir karşılıkları yoktur. Burada yapılacak olan tanımlar, Kopperman [21] tarafından verilen yerel kompaktlık ve yerel dengeliliğin bir genelleştirmesi olarak düşünülebilir. Daha önce de bahsedildiği gibi, ikili topolojik uzaylardaki versiyonları komşuluklar yardımı ile tanımlanan, ve bu nedenle nokta-bağımlı olan bu kavramların genelleştirmeleri yapılırken ikili bağıntılardan yararlanılacaktır. O halde, öncelikle L_e üzerinde aşağıdaki bağıntıları tanımlayalım. Bunun için, $x, y \in L_e$ olsun.

- $x \ll_c y \Leftrightarrow x \leq k \leq y$ olacak şekilde kompakt bir $k \in L_e$ vardır.
- $x \ll_{cc} y \Leftrightarrow x \leq a \leq y$ olacak şekilde ko-kompakt bir $a \in L_e$ vardır.
- $x \ll_s y \Leftrightarrow x \leq k \leq y$ olacak şekilde kompakt bir $k \in L_{cf}$ vardır.
- $x \ll_{cs} y \Leftrightarrow x \leq a \leq y$ olacak şekilde ko-kompakt bir $a \in L_{fr}$ vardır.

Uyarılar 6.2.1. **(1)** L'nin kompakt (sırasıyla, ko-kompakt) olması ile $1 \ll_c 1$ (sırasıyla, $0 \ll_{cc} 0$) olması; bir $x \in L_e$ elemanının kompakt (sırasıyla, ko-kompakt) olması ile $x \ll_c x$ (sırasıyla, $x \ll_{cc} x$) olması birbirine denktir.

(2) Tanımların doğal bir sonucu olarak, $x, y \in L_e$ için "$x \ll_s y \Rightarrow x \ll_c y$" (sırasıyla, "$x \ll_{cs} y \Rightarrow x \ll_{cc} y$") ve $x, y \in L_{fr}$ için "$x \ll_s y \Rightarrow x \prec_{fr} y$" (sırasıyla, "$x \ll_{cs} y \Rightarrow x \ll_{cf} y$") gerektirmeleri sağlanır.

Tanım 6.2.2. $L = (L_e, L_{fr}, L_{cf})$ bir diçatı olsun.

(1) Eğer her $a \in L_{fr}$,

$$a = \bigvee\{x \in L_{fr} : x \ll_c a\}$$

biçiminde ifade edilebiliyorsa L diçatısı *yerel kompakttır*,

(2) Eğer her $k \in L_{cf}$,

$$k = \bigwedge\{x \in L_{cf} : k \ll_{cc} x\}$$

biçiminde ifade edilebiliyorsa L diçatısı *yerel ko-kompakttır*,

(3) Eğer her $a \in L_{fr}$,

$$a = \bigvee\{x \in L_{fr} : x \ll_s a\}$$

biçiminde ifade edilebiliyorsa L diçatısı *yerel dengelidir*,

(4) Eğer her $k \in L_{cf}$,

$$k = \bigwedge\{x \in L_{cf} : k \ll_{cs} x\}$$

biçiminde ifade edilebiliyorsa L diçatısı *yerel ko-dengelidir* denir.

Şimdi, bu kavramların ayırma aksiyomları ile ilişkilerini inceleyelim. İkili topolojik uzaylarda her regüler ve dengeli uzayın yerel dengeli olduğu biliniyor. Diçatılarda ise, bu varsayımlara ek olarak kompaktlığa da ihtiyaç duyulmaktadır.

Önerme 6.2.3. *Her (ko-)regüler, (ko-)dengeli, (ko-)kompakt diçatı yerel (ko-)dengelidir.*

Kanıt: $L = (L_e, L_{fr}, L_{cf})$ regüler, dengeli, kompakt bir diçatı olsun ve $a \in L_{fr}$ verilsin. $a = 1$ ise, L kompakt ve böylece $1 \ll_s 1$ olduğundan durum açıktır. Şimdi, $a \neq 1$ olduğunu kabul edelim. L regüler olduğundan, $a = \bigvee\{x \in L_{fr} : x \prec_{fr} a\}$ biçiminde ifade edilebilir. Ayrıca, eğer $x \prec_{fr} a$ ise $x \leq k \leq a$ olacak şekilde bir $k \in L_{cf}$ vardır. Şimdi L dengeli, $k \neq 1$ olduğundan k kompakttır ve böylece $x \ll_s a$ sağlanır. O halde,

$$a \leq \bigvee\{x \in L_{fr} : x \prec_{fr} a\} \leq \bigvee\{x \in L_{fr} : x \ll_s a\} \leq a$$

yani $a = \{x \in L_{fr} : x \ll_s a\}$'dir. Bu durumda, L diçatısı yerel dengelidir. ∎

Klasik yapıda regüler ve yerel kompakt bir ikili topolojik uzayın yerel dengeli olması gerekmez. Fakat aşağıdaki önerme, her regüler yerel kompakt diçatının yerel dengeli olduğunu göstermektedir.

Önerme 6.2.4. *$L = (L_e, L_{fr}, L_{cf})$ bir diçatı olsun.*

(1) *L'nin yerel dengeli olması için gerek ve yeter koşul regüler ve yerel kompakt olmasıdır.*

(2) *L'nin yerel ko-dengeli olması için gerek ve yeter koşul ko-regüler ve yerel ko-kompakt olmasıdır.*

Kanıt: (1) $(\Rightarrow)$ L yerel dengeli ise, Uyarılar 6.2.1(2)'den L'nin regüler ve yerel kompakt olduğu açıktır.

$(\Leftarrow)$ L regüler, yerel kompakt bir diçatı ve $a \in L_{fr}$ olsun. L yerel kompakt olduğundan $a = \bigvee\{x \in L_{fr} : x \ll_c a\}$ biçiminde ifade edilebilir. Eğer $x \ll_c a$ ise, tanımdan, $x \leq k \leq a$ olacak şekilde kompakt bir $k \in L_e$ vardır. Şimdi, $[k] \leq a$ olduğunu ve $[k] \in L_{cf}$'nin kompakt olduğunu gösterelim:

L diçatısı regüler olduğundan $k \leq a = \bigvee_{i\in I}\{x_i \in L_{fr} : x_i \prec_{fr} a\}$'dir. Eğer $x_i \prec_{fr} a$ ise $x_i \leq f_i \leq a$ olacak şekilde $f_i \in L_{cf}$ vardır. O halde, k kompakt olduğundan, $k \leq \bigvee_{k=1}^{n} x_{i_k} \leq \bigvee_{k=1}^{n} f_{i_k} \leq a$ ve böylece

$$[k] \leq [\bigvee_{k=1}^{n} f_{i_k}] = \bigvee_{k=1}^{n} [f_{i_k}] = \bigvee_{k=1}^{n} f_{i_k} \leq a$$

elde edilir.

Şimdi, $[k]$'nın kompakt olduğunu göstermek için keyfi bir $\{a_i \in L_{fr} : i \in I\}$ örtüsünü alalım. L regüler olduğundan, her $i \in I$ için $a_i = \bigvee_{j\in J}\{x_{ij} \in L_{fr} : x_{ij} \prec_{fr} a_i\}$ biçiminde ifade edilebilir. Eğer $x_{ij} \prec_{fr} a_i$ ise $x_{ij} \leq f_{ij} \leq a_i$ olacak şekilde $f_{ij} \in L_{cf}$ vardır. Diğer taraftan $k \leq [k] \leq \bigvee_{i\in I} a_i = \bigvee_{i\in I}\bigvee_{j\in J} x_{ij}$ ve k kompakt olduğundan $k \leq \bigvee_{i\in I_0} a_i = \bigvee_{i\in I_0}\bigvee_{j\in J_0} x_{ij}$ olacak şekilde sonlu $I_0 \subseteq I$ ve $J_0 \subseteq J$ indis kümeleri vardır. Şimdi, eşitliğe kapanış işlemi uygulanırsa,

$$[k] \leq \bigvee_{i\in I_0}\bigvee_{j\in J_0} [x_{ij}] \leq \bigvee_{i\in I_0}\bigvee_{j\in J_0} f_{ij} \leq \bigvee_{i\in I_0} a_i$$

elde edilir ve böylece [k] kompakttır.

O halde, L diçatısının regüler olması durumunda, k kompakt elemanı için $x \leq k \leq a$ ise $x \leq [k] \leq a$ eşitsizliğinin sağlandığı ve $[k] \in L_{cf}$ elemanının kompakt olduğu sonucu elde edilir. Böylece

$$a = \bigvee\{x \in L_{fr} : x \ll_c a\} = \bigvee\{x \in L_{fr} : x \ll_s a\}$$

sağlanır ve L yerel dengelidir.

(2) de benzer şekilde elde edilebilir. ■

Önerme 6.2.5. *Her yerel (ko-)dengeli diçatı tamamen (ko-)regülerdir.*

Kanıt: L yerel dengeli bir çatı olsun. L_e üzerinde aşağıdaki bağıntıyı tanımlayalım:

$$a \lhd b \Leftrightarrow [a] \leq k \leq]b[\text{ olacak şekilde kompakt bir } k \in L_e \text{ vardır.}$$

Şimdi, $\lhd$ bağıntısının Önerme 5.1.18'deki özellikleri sağlayan bir Urysohn bağıntısı olduğu gösterilirse, L'nin tamamen regüler olduğu sonucu elde edilir. Bunun için öncelikle, $\lhd$'nin bir Urysohn bağıntısı olduğunu görelim:

$(U1)$-$(U2)$: Bağıntının tanımından açıktır.

$(U3)$: $a \lhd b$ ise $[a] \leq k \leq]b[$ olacak şekilde kompakt bir $k \in L_e$ vardır ve ayrıca L yerel dengeli olduğundan $]b[= \bigvee_{i \in I}\{c_i \in L_{fr} : c_i \ll_s]b[\}$ biçiminde ifade edilebilir. Buradan, k kompakt olduğundan, $k \leq \bigvee_{j=1}^{n} c_{i_j}$'dir. Diğer taraftan, $c_{i_j} \ll_s]b[$ ise $c_{i_j} \leq k_{i_j} \leq]b[$ olacak şekilde kompakt bir $k_{i_j} \in L_{cf}$ vardır. Şimdi, $d = \bigvee_{j=1}^{n} [c_{i_j}]$ olarak seçilirse,

$$[a] \leq k \leq \bigvee_{j=1}^{n} c_{i_j} \leq] \bigvee_{j=1}^{n} c_{i_j} [\leq] \bigvee_{j=1}^{n} [c_{i_j}] [=]d[$$

ve böylece $a \lhd d$'dir. Ayrıca

$$[d] = d = \bigvee_{j=1}^{n} [c_{i_j}] \leq [\bigvee_{j=1}^{n} k_{i_j}] = \bigvee_{j=1}^{n} k_{i_j} \leq]b[$$

ve her j için k_{i_j} kompakt olduğundan $\bigvee_{j=1}^{n} k_{i_j}$ kompakttır. Böylece, $d \lhd b$'dir.

Son olarak, Önerme 5.1.18 (1)(i) özelliğinin sağlandığı açık olduğundan, (ii)'nin sağlandığını gösterelim: Bunun için, $a \in L_{fr}$ ise, L yerel dengeli olduğundan $a = \bigvee\{x \in L_{fr} : x \ll_s a\}$ biçiminde yazılabilir. Eğer $x \ll_s a$ ise $x \leq k \leq a$ olacak şekilde kompakt bir $k \in L_{cf}$ vardır ve böylece $[x] \leq k \leq a =]a[$'dir. O halde,

$$a = \bigvee\{x \in L_{fr} : x \ll_s a\} \leq \bigvee\{x \in L_{fr} : x \lhd a\} \leq a$$

yani, $a = \bigvee\{x \in L_{fr} : x \lhd a\}$ sağlanır ve böylece L tamamen regülerdir. ■

Aşağıdaki önerme yerel (ko-) kompaktlığın kalıtsal bir özellik olduğunu göstermektedir.

Önerme 6.2.6. *Yerel (ko-) kompakt bir diçatının her altdilokali yerel (ko-) kompakttır.*

Kanıt: $L = (L_e, L_{fr}, L_{cf})$ yerel kompakt bir diçatı ve $S = (S_e, S_{fr}, S_{cf})$, L'nin bir altdilokali olsun. $a \in S_{fr}$ alınırsa, L yerel kompakt olduğundan, $a = \bigvee\{x \in L_{fr} : x \ll_c a\}$ biçiminde yazılabilir. Eğer $x \ll_c a$ ise $x \leq k \leq a$ olacak şekilde kompakt bir $k \in L_e$ vardır ve v_{S_e} monoton bir dönüşüm olduğundan $v_{S_e}(x) \leq v_{S_e}(k) \leq v_{S_e}(a) = a$ sağlanır. Bu durumda, eğer $v_{S_e}(k) \in S_e$'nin kompakt olduğu gösterilirse,

$$a = \bigvee\{v_{S_e}(x) \in S_{fr} : v_{S_e}(x) \ll_c a\}$$

elde edilir ve böylece kanıt tamamlanmış olur.

Şimdi, $\{b_i \in S_{fr} : i \in I\}$ kümesi $v_{S_e}(k)$'nin bir örtüsü olmak üzere, $k \leq v_{S_e}(k) \leq \bigvee_{i \in I} b_i$ ve k kompakt olduğundan $k \leq \bigvee_{k=1}^{n} b_{i_k}$'dir. Eşitsizliğin her iki tarafına v_{S_e} dönüşümü uygulanır ve S_e'nin düz bir altlokal olması kullanılırsa,

$$v_{S_e}(k) \leq v_{S_e}(\bigvee_{k=1}^{n} b_{i_k}) = \bigvee_{k=1}^{n} v_{S_e}(b_{i_k}) = \bigvee_{k=1}^{n} b_{i_k}$$

elde edilir ve böylece $v_{S_e}(k)$ kompakttır. ■

Bu kısımda son olarak, yerel dengelilik ve yerel kompaktlığın diçatı homomorfizmaları altında korunup korunmadığını inceleyelim:

Önerme 6.2.7. *$L = (L_e, L_{fr}, L_{cf})$, $M = (M_e, M_{fr}, M_{cf})$ birer diçatı ve $(\varphi, \psi) : L \to M$ bire-bir, örten bir diçatı homomorfizması olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.*

(1) *(φ, ψ) ko-açık ise L'nin yerel kompakt olması için gerek ve yeter koşul M'nin yerel kompakt olmasıdır.*

(2) *(φ, ψ) kapalı ise L'nin yerel ko-kompakt olması için gerek ve yeter koşul M'nin yerel ko-kompakt olmasıdır.*

Kanıt: (1) $(\Rightarrow)$ L yerel kompakt bir diçatı ve $b \in M_{fr}$ olsun. (φ, ψ) bire-bir, örten ve ko-açık bir homomorfizma olduğundan $\varphi(a) = b$ olacak şekilde bir $a \in L_{fr}$ vardır. L yerel kompakt olduğundan $a = \bigvee\{x \in L_{fr} : x \ll_c a\}$ biçiminde yazılabilir. Eğer $x \ll_c a$ ise $x \leq k \leq a$ olacak şekilde kompakt bir $k \in L_e$ vardır ve φ sıra koruyan bir dönüşüm olduğundan $\varphi(x) \leq \varphi(k) \leq \varphi(a) = b$'dir. Şimdi eğer $\varphi(k)$'nin kompakt olduğu gösterilirse,

$$b = \varphi(a) = \bigvee \{\varphi(x) \in M_{fr} : \varphi(x) \ll_c b\}$$

olur ve böylece kanıt tamamlanır. Bunun için $\varphi(k)$'nin bir $\{b_i \in M_{fr} : i \in I\}$ örtüsü verilsin. Önerme 4.1.22'den her $i \in I$ için $\varphi(a_i) = b_i$ olacak şekilde $a_i \in L_{fr}$ vardır ve böylece $\varphi(k) \leq \bigvee_{i \in I} b_i = \bigvee_{i \in I} \varphi(a_i) = \varphi(\bigvee_{i \in I} a_i)$ sağlanır. Eşitliğin iki tarafına φ_* dönüşümü uygulanırsa, $\varphi_* \varphi = 1_{L_e}$ olduğundan $k \leq \bigvee_{i \in I} a_i$ elde edilir ve ayrıca k kompakt olduğundan $k \leq \bigvee_{k=1}^{n} a_{i_k}$'dir. Buradan,

$$\varphi(k) \leq \varphi(\bigvee_{k=1}^{n} a_{i_k}) = \bigvee_{k=1}^{n} \varphi(a_{i_k}) = \bigvee_{k=1}^{n} b_{i_k}$$

olur ve böylece $\varphi(k)$ kompakttır.

($\Leftarrow$) M yerel kompakt bir diçatı olsun ve $a \in L_{fr}$ verilsin. $\varphi(a) \in M_{fr}$ olduğundan $\varphi(a) = \bigvee\{y \in M_{fr} : y \ll_c \varphi(a)\}$ biçiminde ifade edilebilir. $y \in M_{fr}$ için $\varphi(x) = y$ olacak şekilde bir $x \in L_{fr}$ vardır. Şimdi, $\varphi(x) \ll_c \varphi(a)$ ise $\varphi(x) \leq k \leq \varphi(a)$ eşitsizliği sağlanacak şekilde kompakt bir $k \in M_e$ vardır. Buradan, $x \leq \varphi_*(k) \leq a$ ve $\varphi_*(k)$ kompakt olduğundan $a = \bigvee\{x \in L_{fr} : x \ll_c a\}$ elde edilir. Bu nedenle, L yerel kompakttır. ■

Önerme 6.2.8. *L ve M birer diçatı olsun. $(\varphi, \psi) : L \to M$ bire-bir, örten bir diçatı homomorfizması ise aşağıdakiler geçerlidir.*

(1) *M yerel dengeli olmak üzere, (φ, ψ) ko-açık ve ko-kapalı ise L yerel dengelidir.*

(2) *M yerel ko-dengeli olmak üzere, (φ, ψ) açık ve kapalı ise L yerel ko-dengelidir.*

Kanıt: (2) M yerel ko-dengeli bir diçatı olsun. L'nin yerel ko-dengeli olduğunu göstermek için keyfi bir $f \in L_{cf}$ alalım. Bu durumda, $\psi(f) \in M_{cf}$'dir ve ayrıca
$\psi(f) = \bigwedge\{y \in M_{cf} : \psi(f) \ll_{cs} y\}$ biçiminde ifade edilebilir. (φ, ψ) bire-bir, örten ve kapalı olduğundan $\psi(x) = y$ olacak şekilde bir $x \in L_{cf}$ vardır. Şimdi, $\psi(f) \ll_{cs} \psi(x)$ ise $\psi(f) \leq b \leq \psi(x)$ eşitsizliğini sağlayan ko-kompakt bir $b \in M_{fr}$ ve ayrıca, Önerme 4.1.22'den $\psi(a) = b$ olacak şekilde bir $a \in L_{fr}$ vardır. Daha önceki ispatlarda olduğu gibi, b'nin ko-kompaktlığından yararlanılarak, a'nın da ko-kompakt olduğu kolayca gösterilebilir. O halde, $\psi^* \psi = 1_{L_e}$ kullanılarak $f = \bigwedge\{x \in L_{cf} : f \ll_{cs} x\}$ elde edilir ve böylece L yerel ko-dengelidir. ■

Önerme 6.2.9. *$L = (L_e, L_{fr}, L_{cf})$ ve $M = (M_e, M_{fr}, M_{cf})$ birer diçatı olsun. L yerel dengeli (sırasıyla, yerel ko-dengeli) bir diçatı ve $\varphi : L \to M$ bire-bir, örten, açık (sırasıyla, kapalı) bir* ***hdiFrm*** *morfizması ise M diçatısı yerel dengeli (sırasıyla, yerel ko-dengeli) dir.*

Kanıt: L yerel ko-dengeli ve $k \in M_{cf}$ olsun. φ dönüşümü kapalı olduğundan $\varphi(f) = k$ olacak şekilde bir $f \in L_{cf}$ vardır, ve varsayımdan $f = \bigwedge\{x \in L_{cf} : f \ll_{cs} x\}$ biçiminde ifade edilebilir. Eğer $f \ll_{cs} x$ ise $f \leq a \leq x$ olacak şekilde ko-kompakt bir $a \in L_{fr}$ vardır ve ayrıca $\varphi(f) \leq \varphi(a) \leq \varphi(x)$ sağlanır. Burada, $\varphi(a) \in M_{fr}$'nin ko-kompakt olduğu kolayca gösterilebilir. O halde, $k = \bigwedge\{\varphi(x) \in M_{cf} : k \ll_{cs} \varphi(x)\}$ olarak yazılabilir, ve böylece M yerel ko-dengelidir. ■

Kaynaklar

[1] Banaschewski, B., Brümmer G.C.L., Hardie K.A., Biframes and bispaces, *Quaestiones Mathematicae*, 6 (1-3), 13-25, **1983**.

[2] Banaschewski, B., Mulvey, C. J., Stone-Čech compactification of locales I, *Houston Journal of Mathematics*, 6, 301-312, **1980**.

[3] Bénabou, J., Treillis locaux et paratopologies, *Séminaire Ehresmann. Topologie et géométrie différentielle*, 1, 1-27, **1958**.

[4] Bezhanishvili, G., Harding J., Proximity frames and regularization, *Applied Categorical Structures*, 22 (1), 43-78, **2014**.

[5] Brown, L. M., Gohar, M. M., Compactness in ditopological texture spaces, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 38 (1), 21-43, **2009**.

[6] Brown, L. M., Ertürk, R., Fuzzy sets as texture spaces, I. Representation theorems, *Fuzzy Sets and Systems*, 110 (2), 227-236, **2000**.

[7] Brown, L. M., Ertürk, R., Dost Ş., Ditopological texture spaces and fuzzy topology I: Basic concepts, *Fuzzy Sets and Systems*, 147 (2), 171-199, **2004**.

[8] Brown, L. M., Ertürk, R., Dost Ş., Ditopological texture spaces and fuzzy topology II: Topological Consideration, *Fuzzy Sets and Systems*, 147 (2), 201-231, **2004**.

[9] Brown, L. M., Ertürk, R., Dost Ş., Ditopological texture spaces and fuzzy topology. III. Separation axioms, *Fuzzy Sets and Systems*, 157 (14), 1886-1912, **2006**.

[10] Brown, L. M., Diker, M., Ditopological texture spaces and intuitionistic sets, *Fuzzy sets and systems*, 98, 217-224, **1998**.

[11] Coecke, B., Moore, D., Wilce, A., *Current Research in Operational Quantum Logic: Algebras, Categories, Languages*, Springer Science & Business Media, **2013**.

[12] Diker M., Categories of Direlations and Rough Set Approximation Operators, *Theoretical Computer Science* 488, 46-65, **2013**.

[13] Ehresmann, C., Gattungen von lokalen Strukturen, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 60, 49-77, **1958**.

[14] Ertürk, R., *Fuzzy topology and bitopological spaces*, Doktora Tezi, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, **1992**.

[15] Ertürk, R., Separation axioms in fuzzy topology characterized by bitopologies, *Fuzzy sets and systems*, 58, 206-209, **1993**.

[16] Gierz, G., Hofmann, K.H., Keimel, K., Lawson, J.D., Mislove, M.W., Scott, D.S., *A Compendium of Continuous Lattices*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, **1980**.

[17] Good, C., Kopperman, R., Yıldız, F., Interpolating functions, *Topology and its Applications*, 158 (4), 582-593, **2011**.

[18] Isbell, J.R., Atomless parts of spaces, *Mathematica Scandinavica*, 31, 5-32, **1972**.

[19] Johnstone, P.T., *Stone Spaces*, Cambridge University Press, **1986**.

[20] Johnstone, P.T., Tychonoff's theorem without the axiom of choice, *Fundamenta Mathematicae*, 113, 21-35, **1981**.

[21] Kopperman, R., Asymmetry and duality in topology, *Topology and its Applications* 66 (1), 1-39, **1995**.

[22] McKinsey, J.C.C., Tarski, A., The algebra of topology, *The Annals of Mathematics*, 45, 141-191, **1944**.

[23] Menger, K., Topology without points, *Rice Institute Pamphlet*, 27, 80-107, **1940**.

[24] Morita, K. J., Nagata, I., *Topics in General Topology*, Elsevier Science, **1989**.

[25] Papert, D., Papert, S., Sur les treillis des ouverts et paratopologies , *Séminaire Ehresmann. Topologie et géométrie différentielle*, 1, 1-9, **1958**.

[26] Picado, J., Pultr, A., *Frames and Locales: Topology without points*, Birkhäuser/Springer Basel AG, **2012**.

[27] Picado, J., Pultr, A., A Boolean extension of a frame and a representation of discontinuity, *Quaestiones Mathematicae* 40 (8), 1111-1125, **2017**.

[28] Picado, J., Pultr, A., (Sub)fit biframes and non-symmetric nearness, *Topology and its Applications* 168, 66-81, **2014**.

[29] Özçağ, S., Brown, L. M., Krsteska, B., Di-uniformities and Hutton uniformities, *Fuzzy Sets and Systems*, 195, 58-74, **2012**.

[30] Rasiowa H., Sikorski, R., *The Mathematics of Metamathematics*, Monografie Matematyczne, Tom 41 Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, **1963**.

[31] Rosenthal, K.I., *Quantales and Their Applications*, Pitman Research Notes in Mathematics Series 234, Longman, **1990**.

[32] Stone, M. H., Boolean algebras and their applications to topology, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 20 (3), 197-202, **1934**.

[33] Stone, M. H., The theory of representations for Boolean algebras, *Transactions of the American Mathematical Society*, 40, 37-111, **1936**.

[34] Stone, M. H., Topological representation of distributive lattices and Brouwerian logics, *Časopis pro pšstování matematiky a fysiky*, 67 (1), 1-25, **1937**.

[35] Vickers, S., Constructive points of powerlocales, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 122 (2), 207-222, **1997**.

[36] Wallman, H., Lattices and topological spaces, *The Annals of Mathematics*, 39, 112-126, **1938**.

[37] Yıldız, F., Brown, L.M., Extended real dicompactness and an application to Hutton spaces, *Fuzzy Sets and Systems*, 227, 74-95, **2013**.

[38] Yıldız, G., *Doku Uzaylarında Ditopolojik Uzaylar*, Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, **2005**.

ÖZGEÇMİŞ

Kimlik Bilgileri

Adı Soyadı	:	Esra KORKMAZ
Doğum Yeri	:	Sinop
Medeni Hali	:	Evli
E-posta	:	esrakaratas@hacettepe.edu.tr
Adresi	:	Öncebeci Mah. Samur Sokak. No:16 Çankaya/ANKARA

Eğitim

Lisans	:	2005-2006 Hacettepe Üniversitesi, Yabancı Diller Yüksek Okulu, İngilizce Hazırlık
		2006-2010 Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü
Yüksek Lisans	:	2010-2013 Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Yabancı Dil ve Düzeyi

İngilizce, İleri Seviye

İtalyanca, Başlangıç Seviyesi

İş Deneyimi

2012- Araştırma görevlisi, Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Deneyim Alanları

–

Tezden Üretilmiş Projeler ve Bütçesi

–

Tezden Üretilmiş Yayınlar

–

Tezden Üretilmiş Tebliğ ve/veya Poster Sunumu ile Katıldığı Toplantılar

1- *"Some separation axioms in diframes"*, 3nd International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications (IECMSA-2014), August 25-28, 2014, Wien, AUSTRIA.

2- *"Diframes: A generalization of ditopological spaces"*, 3rd Workshop of Association for Turkish Women in Maths, May 27-29, 2016, İzmir, TURKEY.

3- *"The structure of generalized ditopological spaces"*, International Conference on Topology and its Applications (ICTA 2016), September 18-22, 2016, Ohrid, MACEDONİA.

4- *"Nokta bağımsız topolojiye bir bakış: Diframe ve Dilokaller"*, Prof. Dr. L. Michael Brown Anısına Topoloji Çalıştayı I, 9 Aralık 2016, Hacettepe Üniversitesi, Ankara, TÜRKİYE.

5- *"Ditopolojik doku uzaylarının nokta-bağımsız bir genelleştirmesi"*, 13. Ankara Matematik Günleri, 27-28 Nisan 2018, TOBB ETÜ, Ankara, TÜRKİYE.

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS/DOKTORA TEZ ÇALIŞMASI ORJİNALLİK RAPORU

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI BAŞKANLIĞI'NA

Tarih: 23/05/2018

Tez Başlığı / Konusu: Diçatılara Genelleştirilmiş Bazı Topolojik Kavramlar

Yukarıda başlığı/konusu gösterilen tez çalışmamın a) Kapak sayfası, b) Giriş, c) Ana bölümler d) Sonuç kısımlarından oluşan toplam 79 sayfalık kısmına ilişkin, 23/05/2018 tarihinde tez danışmanım tarafından *Turnitin* adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 6 'dır.

Uygulanan filtrelemeler:

1- Kaynakça hariç
2- Alıntılar hariç/~~dâhil~~
3- 5 kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Çalışması Orjinallik Raporu Alınması ve Kullanılması Uygulama Esasları'nı inceledim ve bu Uygulama Esasları'nda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

Esrak.
23/05/2018
Tarih ve İmza

Adı Soyadı: Esra KORKMAZ
Öğrenci No: N12240417
Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Matematik-Doktora
Statüsü: ☐ Y.Lisans ☒ Doktora ☐ Bütünleşik Dr.

DANIŞMAN ONAYI

UYGUNDUR.

Prof. Dr. Rıza ERTÜRK
(Unvan, Ad Soyad, İmza)