LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN BÄCKLUND DÖNÜŞÜMLERİ

BÄCKLUND TRANSFORMATIONS OF NONLINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

NURDAN KAR

DOÇ. DR. ASLI YILDIZ

Tez Danışmanı

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ

Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin

Matematik Anabilim Dalı İçin Öngördüğü

YÜKSEK LİSANS TEZİ

olarak hazırlanmıştır.

2018

NURDAN KAR'ın hazırladığı "**Lineer Olmayan Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Bäcklund Dönüşümleri**" adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **MATEMATİK ANABİLİM DALI**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Mustafa TÜRKYILMAZOĞLU
Başkan ....

Doç. Dr. Aslı YILDIZ
Danışman ....

Doç. Dr. Burcu SİLİNDİR YANTIR
Üye ....

Dr. Öğr. Üyesi Baver OKUTMUŞTUR
Üye ....

Dr. Öğr. Üyesi Ömer ÜNSAL
Üye ....

Bu tez Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. Menemşe GÜMÜŞDERELİOĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

YAYINLAMA VE FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI BEYANI

Enstitü tarafından onaylanan lisansüstü tezimin/raporumun tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı (kağıt) ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda verilen koşullarla kullanıma açma iznini Hacettepe üniversitesine verdiğimi bildiririm. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet haklarım bende kalacak, tezimin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanım hakları bana ait olacaktır.

Tezin kendi orijinal çalışmam olduğunu, başkalarının haklarını ihlal etmediğimi ve tezimin tek yetkili sahibi olduğumu beyan ve taahhüt ederim. Tezimde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanması zorunlu metinlerin yazılı izin alarak kullandığımı ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederim.

☒ **Tezimin/Raporumun tamamı dünya çapında erişime açılabilir ve bir kısmı veya tamamının fotokopisi alınabilir.**
(Bu seçenekle teziniz arama motorlarında indekslenebilecek, daha sonra tezinizin erişim statüsünün değiştirilmesini talep etseniz ve kütüphane bu talebinizi yerine getirse bile, tezinin arama motorlarının önbelleklerinde kalmaya devam edebilecektir.)

☐ **Tezimin/Raporumun .... tarihine kadar erişime açılmasını ve fotokopi alınmasını (İç Kapak, Özet, İçindekiler ve Kaynakça hariç) istemiyorum.**
(Bu sürenin sonunda uzatma için başvuruda bulunmadığım taktirde, tezimin/raporumun tamamı her yerden erişime açılabilir, kaynak gösterilmek şartıyla bir kısmı ve ya tamamının fotokopisi alınabilir)

☐ **Tezimin/Raporumun .... tarihine kadar erişime açılmasını istemiyorum, ancak kaynak gösterilmek şartıyla bir kısmı veya tamamının fotokopisinin alınmasını onaylıyorum.**

☐ **Serbest Seçenek/Yazarın Seçimi**

12 / 06 / 2018

(İmza)

Öğrencinin Adı Soyadı

Nurdan KAR

ETİK

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında,

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

01/06/2018

Nurdan KAR

ÖZET

LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN BÄCKLUND DÖNÜŞÜMLERİ

NURDAN KAR

Yüksek Lisans, Matematik Bölümü

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Aslı YILDIZ

Haziran 2018, 60 sayfa

Bu tezde lineer olmayan denklemlerin Bäcklund dönüşümlerinin nasıl elde edildiği, bu dönüşümlerin kullanılması ile denklemlerin permüte edilebilirlik şartı kullanılarak elde edilen süperpozisyon formülleriyle, denklemlerin bilinen çözümlerinden yeni çözümlerin elde edilebileceği üzerine çalışılmıştır. Özel olarak matematiksel fizikte önemli yere sahip bazı denklemlerin 1-soliton çözümlerinden N-soliton çözümlerine ulaşılabileceğini göstererek, Bäcklund dönüşümlerinin integre edilebilirlik konusundaki yeri vurgulanmıştır. Bu amaçla Bäcklund dönüşümlerinin elde edilmesinde de kullanılan Hirota D-operatörü ve Hirota yöntemi anlatılmıştır. Bu bağlamda Korteweg-de Vries (KdV), Sine-Gordon (SG) ve Boussinesq denklemleri detaylı olarak incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Bäcklund dönüşümü, Permüte edilebilirlik şartı, Hirota metodu, Solitonlar, Korteweg-de Vries denklemi, Sine-Gordon denklemi, Boussinesq denklemi

ABSTRACT

BÄCKLUND TRANSFORMATIONS OF NONLINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

NURDAN KAR

Master of Science, Department of Mathematics

Supervisor: Doç. Dr. Aslı YILDIZ

June 2018, 60 pages

In this thesis, it is studied how the Bäcklund transformations of nonlinear partial differential equations are obtained and deriving new solutions from the known solutions by using these transformations with the superposition formulas obtained via the permutability conditions of the equations. Particularly, for some nonlinear partial differential equations which are well known in mathematical physics, the importance of Bäcklund transformations is emphasized by showing that one can derive N-solitons from 1-soliton solutions. For this purpose, Hirota D-operator and Hirota method that are used to obtain Bäcklund transformations are also explained. Within this context Korteweg-de Vries (KdV), Sine-Gordon (SG) and Boussinesq equations are analyzed in detail.

Keywords: Bäcklund transformation, Permutability condition, Hirota method, Solitons, Korteweg-de Vries equation, Sine-Gordon equation, Boussinesq equation

TEŞEKKÜR

Bu tezin yazım aşamasında bilgi ve deneyimleriyle bana yol gösteren, üzerimde çok büyük emek harcayan, kendisiyle çalışmaktan büyük onur duyduğum çok değerli hocam Doç. Dr. Aslı YILDIZ'a;

varlıklarıyla daima bana güç ve huzur veren, sevgi ve desteklerini hiçbir zaman eksik etmeyen canım annem Zehra KAR ve canım babam Zennur KAR'a;

son olarak zor zamanlarımda yardımıma koşan sevgili kardeşim Zeynep ÖZÇELİK'e

sonsuz teşekkürler...

İçindekiler

Şekil Listesi

1 GİRİŞ

Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemleri analitik çözümlerle incelemek oldukça güçtür. Ancak bu sınıftaki denklemlere uygun yöntemlerle yaklaşıldığında çok çeşitli çözümler elde edilmektedir. Lineer olmayan denklemlerin karakterizasyonu ve çözümlerinin elde edilmesi için birçok yöntem mevcut olsa da hala çözümlerin elde edilmesine ilişkin farklı yaklaşımlar araştırılmaktadır. Bu çözümler arasında bir soliter dalga olan soliton dalga çözümleri fiziksel uygulamaları (fiber optik, Josephson Jonksiyonları, plazmalar, biyolojik sistem dinamikleri vb.) nedeniyle oldukça ilgi çekmektedir. Ayrıca lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin integre edilebilir denklemler sınıfında olup olmadığını test etmek için kullanılan

- S-integre edilebilirlik: Denklemin Cauchy probleminin ters saçılım metodu ile çözülebilmesi,

- C-integre edilebilirlik: Lineer olmayan denklemin uygun bir dönüşümle lineer hale getirilerek çözülebilmesi,

- Denklemin sonsuz sayıda simetri ve korunum yasasına sahip olması,

- Denklemin Painlevé özelliğine sahip olması,

- Denklemin Lax çiftine sahip olması,

kriterlerinin yanında

- Denklemin multi-soliton çözüme sahip olması

olduğundan soliton dalga çözümleri integre edilebilirlik teorisi adına önemlidir.

1834'te İskoç mühendis J. S. Russell'ın, Edinburg-Glasgow kanalındaki bot gezisi sırasında su dalgalarının hareketleri üzerine yaptığı gözlemle soliter dalgaların hikayesi başladı. Bu gezisinde Russell ileri doğru tek başına büyük bir hızla hareket eden, yuvarlak, düzgün bir su öbeğini gözlemledi. Russell bu gözlemiyle ilgili yaptığı deneysel çalışmalarda soliter dalgaların varlığını ve dalganın hızıyla, genliği (*amplitude*) arasında

$$c^2 = g(h + a) \tag{1.1}$$

ilişkisini buldu [1]. Burada c dalganın hızı, g yer çekimi ivmesi, h suyun derinliği ve a dalganın genliğidir.

1862 yılında E. Bour, Gauss-Mainardi-Codazzi sistemini kullanarak sabit negatif eğriliğe sahip yüzeylerle ilgili çalışmalarında, kristal dislokasyon teorisi, elementer tanecik teorisi, nükleer magnetik rezonans, lineer olmayan dalga yayılımlarının mekanik modlarının analizi gibi birçok alanda [2], [3] karşımıza çıkan soliter dalga çözümlerine sahip sine-Gordon denklemini tanıttı.

V. J. Boussinesq, 1871 yılında uzun bir çalışma sürecinin sonunda soliter dalgalar üzerine olan en ünlü çalışmasını yayımladı [4]. Boussinesq 1872 yılında, daha sonra birçok farklı formları [5] da çalışılmış ancak genel olarak uzun dalga öbekleri üzerine sıkıştırılamayan homojen ideal akışkanların rasyonel olmayan davranışlarını tanımlamayla ilişkili olan ve dolayısıyla kıyı ve okyanus mühendisliğinde sıkça kullanılan Boussinesq denklemini literatüre kazandırdı [6].

1895 yılında Korteweg ve öğrencisi de Vries tarafından soliter dalgaların varlığına da kanıt olacak sığ su dalgalarının davranışlarını modelleyen Korteweg-de Vries (KdV) denklemi tanıtıldı [7].

1965'te Zabusky ve Kruskal, $\zeta(x,t) = \zeta(x - vt)$ (v dalganın hızı) ile ifade edilen, çarpışmadan sonra aynı hız ve formda yoluna devam eden, lokalize yani $t \longrightarrow \pm\infty$ iken azalarak bir sabite yaklaşan dalgalar üzerine çalıştı ve bu dalgalara soliton adını verdi [8]. KdV denklemi ve benzer denklemler için genelde 1-soliton çözüm için soliter dalga ifadesi kullanılır. Ancak birden fazla dalga söz konusuysa soliton terimi kullanılır. Mesela su yüzeyindeki soliter dalgalar soliton değildir çünkü buradaki iki soliter dalganın çarpışmasında dalgalarının genliği az oranda değişir ve arkalarında salınımlı bir parça bırakırlar.

Gardner, Greene, Kruskal ve Miura 1967 yılında yaptığı çalışmalar ile KdV denkleminin çözümlerini bulmak adına ters saçılım metodunu (*inverse scattering method*) tanıttı [9]. Bu yöntemle matematiksel fizikte birçok farklı açılımlar yapıldı. Bu yöntem üzerindeki çalışmalar sonucunda 1968'de Lax çifti kavramı literatüre girdi [10].

Hirota 1971 yılında, multi-soliton çarpışmaları için KdV denkleminin çözümlerini Hirota Metodu (*Hirota Direct Method*) adını verdiği yöntemi kullanarak verdi [11]. Bu çalışma sonrasında modifiye KdV (mKdV), sine-Gordon, nonlineer Schrödinger ve Toda latis denklemleri için de bu yöntemi kullanarak bu denklemlerin multi-soliton çözümlerini elde etti [12]- [15].

Soliton teorisi üzerine bütün bu çalışmalar yapılırken daha sonra bu teoride yerini alacak, kökleri diferansiyel geometride barınan Bäcklund dönüşümleri de çalışılmaktaydı. Bäcklund dönüşümleri ilk olarak 1880'lerde L. Bianchi [16] ve A. V. Bäcklund'un [17] tanıttığı sine-Gordon denkleminin çözümleriyle ifade edilebilen aykırı-küresel yüzeylerin (*pseudospherical surface*) dönüşümü ile ilgiliydi. Bu çalışmalar aslında doğrusal bir diferansiyel denklemin çözümlerini kullanarak var olan bir başlangıç yüzeyinden yeni bir aykırı-küresel yüzeyin inşası üzerineydi. Bu tezde Bäcklund dönüşümlerinin diferansiyel geometrideki uygulamaları değil lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler alanındaki, özellikle soliton teorisindeki yeri çalışılacaktır.

Basit olarak ifade etmek gerekirse Bäcklund dönüşümleri genelde ek parametreye bağlı, iki fonksiyonu birbirleriyle ilişkilendiren bir kısmi diferansiyel denklemler sistemidir. İki diferansiyel denklem arasındaki bu ilişkiler sayesinde denklemlerin birinin bilinen bir çözümünden diğerinin çözümüne ulaşılabilir.

Örnek 1.1. Burgers denklemi $P(u) = u_t + uu_x - \alpha u_{xx} = 0$, α sabit, ile $Q(v) = v_t - v_{xx} = 0$ ısı denklemi arasında

$$v_x = -\frac{vu}{2\alpha}, \quad v_t = \frac{u^2 v}{4\alpha} - \frac{vu_x}{2} \tag{1.2}$$

ile verilen denklem çifti, Burgers ve ısı denklemleri arasında bir Bäcklund dönüşümünü ifade eder.

1974'te Hirota [18]'de Bäcklund dönüşümleri ile ters saçılım metodu arasındaki ilişkiyi ortaya koymuştur. Ters saçılım metodu ile çözümlerine ulaşılabilen her lineer olmayan evrim denklemi Bäcklund dönüşümlerine sahiptir [19]. KdV denklemi için saçılım problemi,

$$\psi_{xx} + (\varsigma^2 + u)\psi = 0, \tag{1.3}$$

$$\psi_t = (\alpha(\varsigma) + u_x)\psi + (4\varsigma^2 - 2u)\psi_x = 0 \tag{1.4}$$

ile verilir. Bu ilişkiler aynı zamanda,

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{1.5}$$

ile verilen KdV denklemi ile

$$\psi_t + \psi_{xxx} - \alpha\psi - 6\varsigma^2\psi_x - \frac{3\psi_x\psi_{xxx}}{\psi} = 0 \tag{1.6}$$

denklemi arasında Bäcklund dönüşümleridir. Burada (1.3) ve (1.6) denklemleri u fonksiyonu için çözülüp (1.4)'te yerine yazılarak; KdV denklemi ise bağdaşıklık (*compatibility*) ilişkisi ($\psi_{xxt} = \psi_{txx}$) kullanılarak elde edilir.

Chen 1974 ve 1976 yıllarında yayınlanan çalışmalarında lineer olmayan bir kısmi diferansiyel denklemi başka denklemlere bağlayan bir parametreli Bäcklund dönüşümleri ailesi olduğu gibi denklemin kendisinden kendisine de Bäcklund dönüşümü inşa edilebileceğini gösterdi [20], [21]. 1974'te Ablowitz, Kaup, Newell ve Sagur [22], 1975'te Konno ve Wadati [23], uygun saçılım problemiyle ele alınan bir denklem ile kendisi arasında bir Bäcklund dönüşümü elde edilebileceği üzerine çalışmalar yaptı. O halde Bäcklund dönüşümleri için saçılım problemlerinin yeni çözümlerinin üretilmesinde de yararlı oldukları söylenebilir.

Daha önce de belirttiğimiz üzere lineer olmayan bir kısmi diferansiyel denklemin bir çözümü biliniyorsa Bäcklund dönüşümlerinin integrasyonu ile denklemin yeni bir çözümü elde edilebilir. Ancak permüte edilebilirlik teoremi ile Bäcklund dönüşümlerinin integrasyonundan kaçınılabilir [16], [24], [25]. Bu teorem, 1902 yılında Bianchi tarafından ilk kez sine-Gordon denklemi için elde edildi [26]. Bianchi bu çalışmasında sine-Gordon denkleminin ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 ve ϕ_4 ile verilen dört çözümünün arasında,

$$\tan\left(\frac{\phi_4-\phi_1}{4}\right)=\frac{(a_1+a_2)}{(a_1-a_2)}\left(\frac{\phi_2-\phi_3}{4}\right) \tag{1.7}$$

a_1, a_2 keyfi sabit, ilişkisinin olduğunu söyler. Bu ilişki sine-Gordon denklemi için süperpozisyon formülü olarak adlandırılır. Lamb, 1971 yılında yaptığı çalışmada bu ilişkinin sine-Gordon denkleminin multi-soliton çözümlerini inşa etmede de kullanılabileceğini gösterdi [27].

1973'te Wahlquist ve Estabrook KdV denkleminin [28], 1981'de de Tu Boussinesq denkleminin [29] Bäcklund dönüşümlerini ve süperpozisyon formüllerini verdi. Daha sonraki birçok çalışmada matematiksel fizikteki önemli denklemlerin Bäcklund dönüşümlerinin Hirota yönteminde tanıtılan Hirota D-operatörü yardımıyla da elde edilebileceği gösterildi [30], [31]. Ancak yine de Bäcklund dönüşümlerini inşa etmek için belirli bir sistematik yöntem henüz mevcut olmadığından ve denklemin bir Bäcklund dönüşümü bilinmesine rağmen bulunabilecek farklı dönüşümlerin farklı çözümler üretebilme durumundan dolayı Bäcklund dönüşümü günümüzde aktif bir çalışma alanı olmaya devam etmektedir.

Bu tezde, Bölüm 2'de Hirota metodunu kısaca açıkladık. Yöntemde kullanılan Hirota D-operatörünü tanıttık ve bazı özelliklerini verdik. Bu yöntemle soliton çözümlerine nasıl ulaşılacağını KdV denklemi üzerinden örnekleyerek verdik. Bölüm 3'te Bäcklund dönüşümünün tanımını, bazı basit denklemlerin Bäcklund dönüşümlerini, bu örnekler üzerinden dönüşümleri kullanarak bilinen çözümlerden yeni çözümler elde edilebileceğini ve çözümler arasında inşa edilecek süperpozisyon formülleri için permüte edilebilirlik teoremini verdik. Bölüm 4'ten Bölüm 6'ya kadar önce KdV denkleminin sonrasında Boussinesq ve sine-Gordon denklemlerinin Bäcklund dönüşümlerini bulduk. KdV denklemi üzerinde ayrıntılı bir şekilde durduk. Denklemin Hirota D-operatörlü ve bu operatörü kullanmadan verilen Bäcklund dönüşümlerini çalıştık. Denklemin aşikar çözümünden bu dönüşümleri kullanarak 1-, 2- ve 3-soliton çözümlerine ve bu şekilde sonsuz bir çözüm zincirine ulaşabileceğimizi gösterdik. Bölüm 7'de Hirota D-operatörünü kullanarak Bäcklund dönüşümlerini bulma aşamasında kullandığımız özdeşlikleri kanıtlayarak verdik.

2 Hirota Metodu

Bu bölümde Hirota metodunu ve Hirota D-operatörünün sağladığı bazı özellikleri kısaca anlatacağız [32]-[35]. Bu metodu $F[u] = F(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{tt}, ..., x, t) = 0$ formundaki lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler için uygulayacağız. Bu uygulamada ilk adım olarak denklemi uygun bir dönüşümle bilineer forma dönüştüreceğiz ve daha sonra Hirota D-operatörünü kullanarak denklemin Hirota bilineer formunu elde edeceğiz. Bu form üzerinden Hirota pertürbasyonunu kullanarak denklemin çözümünü elde edeceğiz.

2.1 Hirota D-Operatörü

Tanım 2.1. *S: $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ diferansiyellenebilir fonksiyonların bir uzayı olsun. Hirota D-operatörü $D : S \times S \to S$ olmak üzere,*

$$[D_t^{k_1} D_x^{k_2} ...]F \cdot G = \Big[\Big(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'}\Big)^{k_1}\Big(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'}\Big)^{k_2} ...\Big] F(x, t, ...)G(x^{'}, t^{'}, ...)|_{x'=x, t'=t} \quad (2.1)$$

dir. Burada k_i, $i = 1, 2, ...$ pozitif tamsayılar ve $x, t, ...$ bağımsız değişkenlerdir.

Benzer şekilde, fark denklemleri için de Hirota D-operatörü tanımlanmıştır. Aşağıda Hirota D-operatörünün bazı özellikleri verilecektir. $F[u] = 0$ lineer olmayan kısmi diferansiyel denkleminin bilineer formunu Hirota D-operatörünün bir polinomu halinde yazabiliriz. Bu polinoma $P(D)$ diyelim.

Önerme 2.1. *$P(D)$, diferansiyellenebilir f ve g fonksiyonlarına uygulansın. Bu durumda,*

$$P(D)\{f \cdot g\} = P(-D)\{g \cdot f\} \quad (2.2)$$

dir.

Kanıt. $P(D) = D_x^k$ operatörünü incelememiz yeterli olacaktır. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
P(D)\{f \cdot g\} = D_x^k\{f \cdot g\} &= D_x^{k-1}[f_x g - f g_{x'}]|_{x=x'} \\
&= D_x^{k-2}[f_{xx} g - 2 f_x g_{x'} + f g_{x'x'}]|_{x=x'} \\
&= \vdots \\
&= D_x^{k-n}[f_{nx} g - n f_{(n-1)x} g_{x'} + \cdots + (-1)^n f g_{nx}]|_{x=x'} \\
&= (-1)^k [g_{kx} f - k g_{(k-1)x} f_x + \cdots + (-1)^n g f_{kx}] \\
&= \sum_{n=0}^{k} (-1)^n \binom{k}{n} f_{(k-n)x} g_{kx} \\
&= P(-D)\{g \cdot f\} \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Sonuç 2.1. *Yukarıdaki önermeden aşağıdaki sonuçları elde edebiliriz:*

i) $P(D)\{f_1 \cdot 1\} = P(\partial) f_1$

ii) $P(D)\{1 \cdot f_1\} = P(-\partial) f_1$.

Önerme 2.2. *$P(D)$ polinomu $e^{\theta_1} \cdot e^{\theta_2}$, $\theta_i = m_i x + ... + r_i y + l_i z + \xi_i$, $i = 1,2$ için $m_i, ..., r_i, l_i, \xi_i$ sabit, fonksiyonlarına uygulansın. Bu durumda,*

$$P(D)\{e^{\theta_1} \cdot e^{\theta_2}\} = P(m_1 - m_2, ..., r_1 - r_2, l_1 - l_2) e^{\theta_1 + \theta_2}$$

dir.

Kanıt. $P(D)$ polinomunu, k_i, $i = 1, 2, ..., n$ pozitif tamsayılar ve $x, y, ..., z$ bağımsız değişkenleri için $P(D) = D_x^{k_1} \cdots D_y^{k_{n-1}} D_z^{k_n}$ şeklinde alalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
P(D) e^{\theta_1} \cdot e^{\theta_2} &= [D_x^{k_1} \cdots D_y^{k_{n-1}} D_z^{k_n}] e^{\theta_1} \cdot e^{\theta_2} \\
&= (l_1 - l_2)^{k_n} [D_x^{k_1} \cdots D_y^{k_{n-1}}] e^{\theta_1} \cdot e^{\theta_2} \\
&= (r_1 - r_2)^{k_{n-1}} (l_1 - l_2)^{k_n} [D_x^{k_1} \cdots D_r^{k_{n-2}}] e^{\theta_1} \cdot e^{\theta_2} \\
&= \vdots \\
&= (m_1 - m_2)^{k_1} \cdots (r_1 - r_2)^{k_{n-1}} (l_1 - l_2)^{k_n} e^{\theta_1 + \theta_2} \\
&= P(m_1 - m_2, \cdots, r_1 - r_2, l_1 - l_2) e^{\theta_1 + \theta_2} \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Daha ileriki kısımlarda gösterim olarak kısaca $P(m_i - m_j, \cdots, r_i - r_j, l_i - l_j) = P(p_i - p_j)$, $p_s = (m_s, ...r_s, l_s)$, $s = i, j$ kullanacağız.

Sonuç 2.2. *$P(D)$ polinomu için, $a \neq 0$ bir sabit olmak üzere,*

i) $P(D)\{e^{\theta_1} \cdot e^{\theta_1}\} = P(0, ..., 0) = 0$

ii) $P(D)\{a \cdot a\} = 0.$

Not 2.1. *$P(D)\{f \cdot f\}$ ifadesinde D-operatörü anti-simetrik yani $P(D)\{f \cdot f\} = P(-D)\{f \cdot f\}$ olduğu için $P(D)$ çift bir polinom olmalıdır. Açıkça yazmak gerekirse,*

$$\sum_{i=1}^{n} k_i = \textit{tek sayı ise } D_x^{k_1} D_y^{k_2} ... D_z^{k_n}\{f \cdot f\} = 0.$$

Örnek 2.1. Korteweg-de Vries (KdV) denklemini

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

bilineerleştirmek için $u(x,t) = -2\partial_x^2 \ln f$ dönüşümü kullanılarak denklemin bilineer formu,

$$ff_{xt} - f_x f_t + ff_{xxxx} - 4f_x f_{xxx} + 3f_{xx}^2 = 0, \tag{2.5}$$

denklemin Hirota bilineer formu ise

$$P(D)f \cdot f = (D_t D_x + D_x^4)\{f \cdot f\} = 0 \tag{2.6}$$

şeklinde elde edilir. Burada,

$$D_t D_x\{f \cdot f\} = 2(f_{tx} f - f_x f_t),$$

$$D_x^4\{f \cdot f\} = 2(f_{xxxx} f - 4f_{xxx} f_x + 3f_{xx} f_{xx}).$$

Örnek 2.2. Modifiye KdV (mKdV) denklemini

$$u_t + 24u^2 u_x + u_{xxx} = 0$$

bilineerleştirmek için $u(x,t) = \dfrac{g_x f - g f_x}{g^2 + f^2}$ dönüşümü kullanılarak denklemin bilineer formu,

$$-(g^2+f^2)(g_t f - g f_t + g_{xxx} f - 3g_{xx} f_x + 3g_x f_{xx} - g f_{xxx}) + 6(f g_x - g f_x)(f f_{xx} - f_x^2 + g g_{xx} - g_x^2) = 0 \tag{2.7}$$

ve denklemin Hirota bilineer formu,

$$P_1(D)\{f \cdot f + g \cdot g\} = D_x^2\{f \cdot f + g \cdot g\} = 0$$
$$P_2(D)\{g \cdot f\} = D_x^3\{g \cdot f\} = 0 \tag{2.8}$$

şeklinde elde edilir. Burada,

$$D_x^2\{f \cdot f\} = 2(f_{xx}f - f_x^2),$$

$$D_x^3\{g \cdot f\} = g_{xxx}f - 3g_{xx}f_x + 3g_xf_{xx} - gf_{xxx}.$$

Benzer şekilde $D_x^2\{g \cdot g\}$ yazılabilir.

2.2 Hirota Pertürbasyonu ve Soliton Çözümler

$F[u] = 0$ ile ifade edilen lineer olmayan kısmi diferansiyel denkleminin Hirota bilineer formunu elde ettikten sonra bu tür denklemlerin soliton çözümlerini inşa etmek için pertürbasyon açılımını kullanacağız.

Denklemin Hirota bilineer denklemleri $P(D_x, D_y, ...)f \cdot f = 0$ şeklinde yazılmış olsun. Burada P polinomu çift bir polinomdur. Şimdi $f = f_0 + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 + \epsilon^3 f_3 ...$ olacak şekilde bir pertürbasyon açılımı kullanalım. Burada f_0 herhangi bir sabittir ve ϵ pertürbasyon parametresi ismini alır. Genelliği kaybetmeden $f_0 = 1$ alabiliriz. Hirota yönteminde f_1 fonksiyonu eksponansiyel bir fonksiyon olarak seçilir. Bu durumda diğer f_i fonksiyonları da eksponansiyel fonksiyon olacak ve M-soliton çözümü değerlendirildiğinde $i > M+1$ için $f_i = 0$ olacaktır. Bu sebeple bir denklemin M-solitonu bulunacağı zaman $f_i = 0$, $i \geq M+1$ kabul edilerek başlanabilir. Bu açılımı Hirota bilineer formda yerine yazalım. $P(D)$'nin lineerliğinden,

$$\begin{aligned} P(D)\{f \cdot f\} = P(D)\{1 \cdot 1\} &+ \epsilon P(D)\{1 \cdot f_1 + f_1 \cdot 1\} + \epsilon^2 P(D)\{f_1 \cdot f_1 + 1 \cdot f_2 + f_2 \cdot 1\} \\ &+ \epsilon^3 P(D)\{f_1 \cdot f_2 + f_2 \cdot f_1 + 1 \cdot f_3 + f_3 \cdot 1\} + ... = 0 \end{aligned} \tag{2.9}$$

yazabiliriz. Burada denklemin sağlanabilmesi için ϵ^k, $k = 0, 1, 2, ...$ katsayılarını sıfırlarız.

Yani,

$$\begin{aligned}
\epsilon^0 &: P(D)\{1 \cdot 1\} = 0 \\
\epsilon^1 &: P(D)\{1 \cdot f_1 + f_1 \cdot 1\} = 2P(\partial)f_1 = 0 \\
\epsilon^2 &: P(D)\{f_1 \cdot f_1 + 1 \cdot f_2 + f_2 \cdot 1\} = 0 \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{2.10}$$

şeklinde devam edecektir.

Aşağıdaki teoremlerin kanıtları için kaynak [34] incelenebilir.

Teorem 2.1. *$F[u] = 0$ formundaki lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemin bilineerleştirme dönüşümü $u = T[f(x, t, ..., y)]$ olsun. Bu dönüşümle elde ettiğimiz bilineer denklemi, Hirota bilineer formda $P(D)\{f \cdot f\} = 0$ olarak yazabiliriz. O halde bu denklemin* 1*-soliton çözümü,*

$$u = T[f(x, t, ..., y) = T[1 + e^{\theta_1}] \tag{2.11}$$

$\theta_1 = k_1x + w_1t + ... + l_1y + \xi_1$, $k_1, w_1, ..., l_1$ sabitleri için $P(k_1, w_1, ..., l_1) = P(p_1) = 0$'dır.

Teoremin kanıtını vermeden KdV denklemi üzerinde uygulamasını görelim.

Örnek 2.3. KdV denkleminin 1-soliton çözümünü elde etmek için $f = 1 + \epsilon f_1$ öyle ki $f_1 = e^{\theta_1}$ ve $\theta_1 = k_1x + w_1t + \xi_1$ alalım. Burada $f_j = 0$, $j \geq 2$. f fonksiyonunu (2.9)'da yerine yazalım ve ϵ^m, $m = 0, 1, 2$ terimlerinin katsayılarını sıfırlayalım. ϵ^0'ın katsayısı $P(D)\{1 \cdot 1\} = 0$'dır. ϵ^1'in katsayısından,

$$\begin{aligned}
P(D)\{1 \cdot f_1 + f_1 \cdot 1\} &= P(\partial)e^{\theta_1} + P(-\partial)e^{\theta_1} \\
&= 2P(\partial)e^{\theta_1} \\
&= 2P(p_1)e^{\theta_1} \\
&= 2(\partial_x^4 + \partial_x\partial_t)e^{k_1x+w_1t+\xi_1} \\
&= 2(k_1^4 + k_1w_1)e^{k_1x+w_1t+\xi_1} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{2.12}$$

elde edilir. Burada $k_1^4 + k_1w_1 = 0$ için $w_1 = -k_1^3$ dispersiyon ilişkisi elde edilir. ϵ^2'nin katsayısının ise,

$$\begin{aligned} P(D)\{f_1 \cdot f_1\} &= P(D)e^{\theta_1} \cdot e^{\theta_1} \\ &= P(p_1 - p_1)e^{2\theta_1} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.13}$$

olduğundan sıfırlandığı açıktır.

Sonuç olarak genelliği kaybetmeden $\epsilon = 1$ için $f = 1 + e^{\theta_1}$ yazabiliriz ki bu KdV denkleminin 1-soliton çözümünü,

$$u(x,t) = -\frac{k_1^2}{2\cosh^2(\frac{\theta_1}{2})} = -\frac{k_1^2}{2}\text{sech}^2\Big(\frac{\theta_1}{2}\Big), \quad \theta_1 = k_1 x - k_1^3 t + \xi_1 \tag{2.14}$$

olarak verir.

Teorem 2.2. *$F[u] = 0$ formundaki lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemin bilineerleştirme dönüşümü $u = T[f(x,t,...,y)]$ olsun. Bu dönüşümle elde ettiğimiz bilineer denklemi, Hirota bilineer formda $P(D)\{f \cdot f\} = 0$ olarak yazabiliriz. O halde bu denklemin 2-soliton çözümü,*

$$u = T[f(x,t,...,y) = T[1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + A(1,2)e^{\theta_1+\theta_2}] \tag{2.15}$$

$\theta_1 = k_i x + w_i t + ... + l_i y + \xi_i$, $k_i, w_i, ..., l_i$ sabitleri için $P(k_i, w_i, ..., l_i) = P(p_i) = 0$, $i = 1,2$ ve $A(1,2) = -\dfrac{P(p_1 - p_2)}{P(p_1 + p_2)}$ dir.

Örnek 2.4. KdV denkleminin 2-soliton çözümünü inşa etmek için $f = 1 + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2$ öyle ki $f_1 = e^{\theta_1} + e^{\theta_2}$, $\theta_i = k_i x + w_i t + \xi_i$, $i = 1,2$ olarak alalım. Burada $f_j = 0$, $j \geq 3$. Benzer şekilde f'yi (2.9)'da yerine yazarız ve denklemin 1-soliton çözümünde izlediğimiz adımları uygulayarak $\epsilon = 1$ için,

$$f = 1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + A(1,2)e^{\theta_1+\theta_2} \tag{2.16}$$

olacak şekilde denklemin 2-soliton çözümünü,

$$u(x,t) = -2\frac{k_1^2 e^{\theta_1} + k_2^2 e^{\theta_2} + (k_1-k_2)^2 e^{\theta_1+\theta_2} + A_{12}[(k_1+k_2)^2 e^{\theta_1+\theta_2} + k_1^2 e^{\theta_1+2\theta_2} + k_2^2 e^{2\theta_1+\theta_2}]}{[1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + A_{12}e^{\theta_1+\theta_2}]^2} \tag{2.17}$$

olarak elde ederiz. Burada $\theta_i = k_i x + w_i t + \xi_i$, $P(p_i) = 0$, $i = 1,2$ ve $A(1,2) = \dfrac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2}$'dir.

Sürekli durumda eğer lineer olmayan bir kısmi diferansiyel denklemin Hirota bilineer formu yazılabiliyorsa o denklemin doğrudan 1-soliton ve 2-soliton çözümleri bulunabilir. Ancak denklemin 3-soliton çözüme sahip olabilmesi için ek bir şart sağlaması gerekmektedir. Aşağıdaki teorem lineer olmayan kısmi bir diferansiyel denklem için 3-soliton çözümünün nasıl elde edileceğini söyler.

Teorem 2.3. *$F[u] = 0$ formundaki lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemin bilineerleştirme dönüşümü $u = T[f(x,t,...,y)]$ olsun. Bu dönüşümle elde ettiğimiz denklemi, Hirota bilineer formda $P(D)\{f \cdot f\} = 0$ olarak yazabiliriz. O halde bu denklemin 3-soliton çözüm şartı,*

$$\sum_{\mu_i=\pm 1} P(\mu_1 p_1 + \mu_2 p_2 + \mu_3 p_3) P(\mu_1 p_1 - \mu_2 p_2) P(\mu_2 p_2 - \mu_3 p_3) P(\mu_3 p_3 - \mu_1 p_1) = 0$$

öyle ki $P(p_i) = 0$, $i = 1, 2, 3$. Bu şart altında denklemin 3-soliton çözümü,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= T[f(x,t,...,y)] \\ &= T[1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + e^{\theta_3} + A(1,2)e^{\theta_1+\theta_2} + A(1,3)e^{\theta_1+\theta_3} + A(2,3)e^{\theta_2+\theta_3} + Be^{\theta_1+\theta_2+\theta_3}], \end{aligned} \tag{2.18}$$

$\theta_i = k_i x + w_i t + ... + l_i y + \xi_i$, $i = 1, 2, 3$ olur. Burada $A(i,j) = -\dfrac{P(p_i - p_j)}{P(p_i + p_j)}$, $P(p_i) = 0$, $i = 1, 2, 3$, $i < j$ ve $B = A(1,2)A(1,3)A(2,3)$'dir.

Örnek 2.5. KdV denkleminin 3-soliton çözümünü inşa etmek için $f = 1 + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 + \epsilon^3 f_3$ öyle ki $f_1 = e^{\theta_1+\theta_2+\theta_3}$, $\theta_1 = k_i x + w_i t + ... + l_i y + \xi_i$, $i = 1, 2, 3$. Burada $f_j = 0$, $j \geq 4$. Benzer şekilde f'yi (2.9)'da yerine yazarak $\epsilon = 1$ için denklemin 3-soliton çözümü

$$u(x,t) = -2\partial_x^2 \ln f \tag{2.19}$$

öyle ki

$$f = 1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + e^{\theta_3} + A(1,2)e^{\theta_1+\theta_2} + A(1,3)e^{\theta_1+\theta_3} + A(2,3)e^{\theta_2+\theta_3} + Be^{\theta_1+\theta_2+\theta_3} \tag{2.20}$$

olur.

Hirota, çalışmalarında KdV denkleminin N-soliton çözümlerini elde etmiştir [11], [32]. Bu çalışmalara göre KdV denkleminin N-soliton çözümünün,

$$f(x,t) = 1 + \sum_{m=1}^{N} \sum_{{}_N C_m} A(i_1, ..., i_m) \exp(\theta_{i1} + ... + \theta_{im})$$

$A(i_1, ..., i_m) = \prod_{i<j}^{(m)} A(l, j)$ ve $A(l, j) = \dfrac{(k_l - k_j)^2}{(k_l + k_j)^2}$ olduğu kanıtlanmıştır. Burada ${}_N C_m$ ifadesi N'den gelen m elemanının tüm olası kombinasyonlarının toplamını, (m) terimi ise $l < j$ olmak üzere m elemanının tüm olası kombinasyonlarının çarpımını belirtir.

3 Bäcklund Dönüşümleri

Bäcklund dönüşümleri 1800'lü yıllarda diferansiyel denklemler ile diferansiyel geometri alanları arasındaki ilişkide kullanılmak üzere geliştirilmiştir. Bäcklund dönüşümlerinin kullanıldığı ilk örneklerden biri sine-Gordon denklemidir [16]. Bu bölümde Bäcklund dönüşümlerini örneklerle beraber tanıtacağız.

Tanım 3.1. *x ve t bağımsız değişkenler olmak üzere, u ve v fonksiyonları için iki kısmi diferansiyel denklem,*

$$P[u] = P(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{tt}, ...) = 0, \quad Q[v] = Q(v, v_x, v_t, v_{xx}, v_{tt}, ...) = 0$$

ve u, v ve türevleri arasındaki ilişkiler,

$$R_i(u, u_x, u_t, ..., v, v_x, v_t, ...) = 0, \quad i = 1, 2 \tag{3.1}$$

olsun. Burada P ve Q genel olarak lineer olmayan iki operatördür. Kabul edelim ki (3.1) ilişkisi, $P[u] = 0$ olduğunda v için integre edilebilirse ve elde edilen v fonksiyonu $Q[v] = 0$ denkleminin bir çözümü ise, benzer olarak (3.1) ilişkisi, $Q[v] = 0$ olduğunda u için integre edilebilirse ve elde edilen u fonksiyonu $P[u] = 0$ denkleminin bir çözümü ise (3.1) ilişkisine $P[u] = 0$ ve $Q[v] = 0$ denklemlerinin çözümlerini ilişkilendiren Bäcklund dönüşümüdür, denir. Burada $P = Q$ ise yani u ve v fonksiyonları aynı denklemi sağlıyorsa (3.1) ilişkisine bir auto-Bäcklund dönüşümüdür, denir.

Yukarıdaki tanımda integre edilebilirlik, iki denklemin u ve v çözümleri için birbirleriyle bağdaşık (*compatible*) olmasıdır. Yani $v_x = f(x, t)$ ve $v_t = g(x, t)$ denklemlerini ele alırsak bu denklemler ancak ve ancak $v_{xt} = v_{tx}$ durumunda integre edilebilirdir [36]. Aşağıda vermiş olduğumuz teorem, Bäcklund dönüşümünün en basit örneklerinden biri olan kompleks fonksiyonlar teoresinde karşılaştığımız Cauchy-Riemann denklemlerine ilişkindir.

Teorem 3.1. *Laplace denklemi,*

$$u_{xx} + u_{tt} = 0 \tag{3.2}$$

ile verilsin. O halde denklemin auto-Bäcklund dönüşümü

$$R_1(u_x, v_t) = u_x - v_t = 0, \tag{3.3}$$

$$R_2(u_t, v_x) = u_t + v_x = 0. \tag{3.4}$$

Bu denklem çifti Cauchy-Riemann denklemleri olarak bilinir.

Kanıt. $P[u] = u_{xx} + u_{tt} = 0$ ve $Q[v] = v_{xx} + v_{tt} = 0$ olsun.

i) $v(x,t)$ fonksiyonu $Q[v] = 0$ denkleminin çözümü olsun. (3.3) ve (3.4) ilişkilerinden,

$$\begin{aligned} v_{tx} &= u_{xx} \\ -v_{tx} &= u_{tt} \end{aligned} \tag{3.5}$$

eşitlikleri elde edilir. Burada integre edilebilirlik şartından dolayı $v_{tx} = v_{xt}$'dir. Dolayısıyla,

$$u_{xx} + u_{tt} = 0$$

elde edilir.

ii) $u(x,t)$ fonksiyonu $P[u] = 0$ denkleminin çözümü olsun. (3.3) ve (3.4) ilişkilerinden,

$$\begin{aligned} u_{xt} &= v_{tt} \\ u_{tx} &= -v_{xx} \end{aligned} \tag{3.6}$$

eşitlikleri elde edilir. Burada $u_{tx} = u_{xt}$'dir. Dolayısıyla,

$$v_{xx} + v_{tt} = 0$$

elde edilir. □

Örnek 3.1. $v(x,t) = \frac{1}{2}(x^2 - t^2)$ Laplace denkleminin bir çözümüdür. Şimdi auto-Bäcklund dönüşümlerini kullanalım:

$$u_x = v_t = -t \tag{3.7}$$

$$u_t = -v_x = -x. \tag{3.8}$$

(3.7) denklemini x'e göre integre edersek,

$$u(x,t) = -tx + f(t) \tag{3.9}$$

$f(t)$ keyfi fonksiyon, elde edilir. Burada $u(x,t)$ fonksiyonunun t'ye göre türevini alırsak,

$$u_t = -x + f'(t) = -x$$

buluruz ki bu bize $f(t) = c$ sabitini verir. O halde Laplace denkleminin başka bir çözümü olarak,

$$u(x,t) = -tx + c, \qquad c \text{ sabit}$$

elde etmiş oluruz.

Teorem 3.2. *$u_{xt} - e^u = 0$ ile verilen Liouville denklemi ve $v_{xt} = 0$ ile verilen dalga denklemi arasındaki Bäcklund dönüşümü*

$$R_1(u, u_x, v, v_x) = u_x + v_x - \sqrt{2}e^{\frac{u-v}{2}} = 0 \tag{3.10}$$

$$R_2(u, u_t, v, v_t) = u_t - v_t - \sqrt{2}e^{\frac{u+v}{2}} = 0 \tag{3.11}$$

çifti ile verilir.

Kanıt. $P[u] = u_{xt} - e^u = 0$ ve $Q[v] = v_{xt} = 0$ olsun.
i) (3.10)'da verilen $R_1 = 0$ ilişkisini t'ye göre türevlersek,

$$u_{xt} + v_{xt} = \sqrt{2}\frac{1}{2}(u_t - v_t)e^{\frac{u-v}{2}} \tag{3.12}$$

eşitliğine ulaşılır. (3.12) eşitliğinde $R_2 = 0$ ilişkisi kullanılırsa,

$$u_{xt} + v_{xt} = e^u \tag{3.13}$$

elde edilir.
ii) (3.11) ile verilen $R_2 = 0$ ilişkisini x'e göre türevlersek,

$$u_{tx} - v_{tx} = \sqrt{2}\frac{1}{2}(u_x + v_x)e^{\frac{u+v}{2}} \tag{3.14}$$

eşitliğine ulaşılır. $R_1 = 0$ ilişkisini (3.14)'te yerine yazarsak,

$$u_{tx} - v_{tx} = e^u \tag{3.15}$$

elde edilir. İntegre edilebilirlik şartından $u_{tx} = u_{xt}$ ve $v_{tx} = v_{xt}$'dir. (3.13) ve (3.15) eşitliklerinin toplamından Liouville denklemi,

$$u_{xt} = e^u$$

farkından ise,

$$v_{xt} = 0$$

ile verilen dalga denklemine ulaşılır. □

Örnek 3.2. $Q[v] = v_{xt} = 0$ denklemini alalım. Bu denklemin en genel çözümü,

$$v(x, t) = F(x) + G(t). \tag{3.16}$$

Burada $F(x)$, $G(t) \in C^2$ keyfi fonksiyonlardır. $v(x,t)$ çözümünü (3.10)-(3.11) ile verilen Bäcklund dönüşümlerinde yerine yazarsak,

$$u_x + F'(x) = \sqrt{2}e^{\frac{1}{2}u}e^{-\frac{1}{2}(F+G)} \tag{3.17}$$

$$u_t - G'(t) = \sqrt{2}e^{\frac{1}{2}u}e^{\frac{1}{2}(F+G)} \tag{3.18}$$

elde ederiz. Şimdi $u(x,t) = -2\ln\rho - F(x) + G(t)$, $\rho = \rho(x,t)$ olsun. Öyleyse $u(x,t)$ çözümünü (3.17)'de yerine yazarsak,

$$\rho_x = \frac{-1}{\sqrt{2}}e^{-F} \tag{3.19}$$

ve (3.18) eşitliğinde yerinde yazarsak,

$$\rho_t = \frac{-1}{\sqrt{2}}e^{G} \tag{3.20}$$

elde ederiz. (3.19) ve (3.20)'den yararlanarak,

$$\rho(x,t) = \frac{-1}{\sqrt{2}}\int_{x_0}^{x} e^{-F(\xi)}d\xi - \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{t_0}^{t} e^{G(\zeta)}d\zeta, \qquad x_0, t_0 \text{ sabit}$$

Sonuç olarak,

$$u(x,t) = -2\ln\left[\frac{-1}{\sqrt{2}}\int_{x_0}^{x} e^{-F(\xi)}d\xi - \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{t_0}^{t} e^{G(\zeta)}d\zeta\right] - F(x) + G(t).$$

Burada $F(x)$, $G(t) \in C^2$ keyfi fonksiyonlar olmak üzere Liouville denkleminin bir çözümüne ulaşmış oluruz.

Bazı lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin sonsuz bir çözüm dizisini üretebilmek için lineer olmayan süperpozisyon formüllerini yani denklemlerin bir çözümünü diğer üç çözümüne bağlayan ilişkileri kullanırız [16], [37], [38]. Bu süperpozisyon formülünü elde edebilmek için Bianchi tarafından literatüre kazandırılan permüte edilebilirlik teoreminden yararlanırız [16]. Lineer olmayan denklem sınıfının birçoğu için elde edilmiş olan süperpozisyon formülü, Hirota ve Satsuma tarafından 1978 yılında Hirota D-operatörü kullanılarak Boussinesq, mKdV ve sine-Gordon denklemleri için kanıtlanmıştır [39].

Teorem 3.3. *$F[u] = 0$ bir lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem ve $R_{\lambda_i} = 0$ bu kısmi diferansiyel denklemin auto-Bäcklund dönüşümü olsun. Denklemin bilinen bir u_{n-1} çözümü, iki farklı keyfi parametre λ_n ve λ_{n+1} olmak üzere $R_{\lambda_n}u_{n-1} = u_n$ ve $R_{\lambda_{n+1}}u_{n-1} = \tilde{u}_n$ olacak şekilde yazılabiliyorsa o zaman dördüncü bir u_{n+1} çözümü vardır ve bu çözüm, sırasıyla λ_{n+1} ve λ_n keyfi parametrelerinin uygulanmasıyla yani $R_{\lambda_{n+1}}u_n = u_{n+1}$ ya da $R_{\lambda_n}\tilde{u}_n = u_{n+1}$ ilişkilerinden elde edilir.*

Bu teorem şematik olarak Bianchi diyagramı ile aşağıdaki gibi gösterilmiştir.

$$
\begin{tikzcd}
 & u_n \arrow[dr, "\lambda_{n+1}"] & \\
u_{n-1} \arrow[ur, "\lambda_n"] \arrow[dr, "\lambda_{n+1}"'] & & u_{n+1} \\
 & \tilde{u}_n \arrow[ur, "\lambda_n"'] &
\end{tikzcd}
$$

Şekil 1: Bianchi diyagramı

4 Korteweg-de Vries (KdV) Denklemi

KdV denklemi, sığ su dalgalarının yayılımını tanımlamak için 1895 yılında Korteweg ve de Vries tarafından elde edilmiş

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{4.1}$$

ile verilen önemli bir lineer olmayan dalga denklemidir [7]. Bu başlık altında KdV denkleminin Bäcklund dönüşümleri [43] ve N-soliton çözümlerine ulaşmak adına uygulanan adımları detaylıca çalışacağız [30].

4.1 KdV Denklemi İçin Miura Dönüşümü

Miura dönüşümü ile mKdV denkleminin çözümlerinden KdV denkleminin çözümlerine ulaşılabilmektedir [40], [41]. Miura dönüşümü

$$u = v^2 + v_x \tag{4.2}$$

ile verilir. Burada $v = v(x,t)$

$$v_t - 6v^2 v_x + v_{xxx} = 0 \tag{4.3}$$

ile verilen mKdV denkleminin bir çözümü $u = u(x,t)$ ise (4.1) ile verilen KdV denkleminin çözümüdür. Miura dönüşümünün bu iki denklem arasında sağladığı ilişkiyi aşağıdaki gibi şematize edebiliriz:

$$mKdV(v(x,t)) \xrightarrow{\text{Miura Dönüşümü}} KdV(u(x,t))$$

Şimdi (4.2) dönüşümünü gerekli türevleri alıp (4.1)'de kullanalım. Bu dönüşüm altında KdV denklemi,

$$(2v + \partial_x)(v_t - 6v^2 v_x + v_{xxx}) = 0 \tag{4.4}$$

formunu alır. Görüldüğü üzere (4.4) eşitliğinde denklem (4.3)'e ek olarak $(2v+\partial_x)$ terimi bulunmaktadır. Bu terimden dolayı KdV denkleminin çözümlerinden mKdV denkleminin çözümlerine ulaşılıp ulaşılamayacağı açık değildir. Ancak konu üzerine yapılan çalışmalar incelenebilir [42]. Bu ek terimden dolayı (4.4) ile verilen denklemin bir çözümü (4.3) denkleminin bir çözümüne denk gelmez. Bu yüzden Miura dönüşümüne tek taraflı bir Bäcklund dönüşümü diyebiliriz.

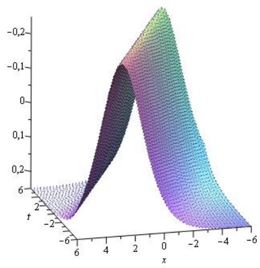
Örnek 4.1. mKdV denkleminin kıvrım (*kink*) tipi soliton çözümü olan $v(x,t) = -2k\tanh[k(x-x_0-2k^2t)]$ fonksiyonu Miura dönüşümünde kullanılarak KdV denkleminin

$$u(x,t) = k^2(2\tanh^2[k(x+x_0+2k^2t)]-1). \tag{4.5}$$

çözümünü bulunabilir. Bu çözüm bir soliton dalga tanımlar. Özel olarak çözüm (4.5)'de $k=\dfrac{1}{2}$ ve $x_0=0$ alalım. Bu durumda,

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\tanh^2\left[\frac{1}{2}\Big(x+\frac{t}{2}\Big)\right]-\frac{1}{4}$$

çözümünü elde ederiz. Çözümün grafiği Şekil 2'de verilmiştir.



Şekil 2: KdV denkleminin soliton çözümü

4.2 KdV Denklemi İçin Bäcklund Dönüşümü

Önceki bölümde (4.2) ile verilen Miura dönüşümü tanıtılmıştı. Bu dönüşüm altında mKdV denkleminin çözümlerinden KdV denkleminin çözümlerine ulaşabildiğimiz kanıtlanmıştı. Ancak Wahlquist ve Estabrook, 1973 yılında daha elverişli bir dönüşümü literatüre kazandırmıştır [28]. Aşağıda Wahlquist ve Estabrook'un bu çalışmasına yer verelim.

KdV denklemi,

$$T=t, \quad X=x-6\lambda t, \quad U=u-\lambda, \qquad \lambda \text{ sabit},$$

ile verilen Galilean dönüşümü altında invaryanttır [43]. Yani bu dönüşüm altında elde edilen,

$$u_t = U_T - 6\lambda U_X, \quad u_x = U_X, \quad u_{xx} = U_{XX}, \quad u_{xxx} = U_{XXX},$$

eşitlikleri, denklem (4.1)'de yerine yazıldığında tekrar KdV denklemi elde edilir. Bu bilgiler doğrultusunda $u \longrightarrow u - \lambda$ alınarak (4.2) eşitliği,

$$u = \lambda + v^2 + v_x \tag{4.6}$$

formunu alır ve benzer şekilde (4.3) denklemi,

$$v_t - 6(v^2 + \lambda)v_x + v_{xxx} = 0 \tag{4.7}$$

haline gelir. Bu denklem için v ve $-v$ fonksiyonları çözüm olduğundan,

$$u_1 = \lambda + v^2 + v_x, \qquad u_2 = \lambda + v^2 - v_x$$

şeklindeki iki fonksiyon tanımlanabilir. Buradan,

$$u_1 - u_2 = 2v_x \quad \text{ve} \quad u_1 + u_2 = 2(\lambda + v^2), \tag{4.8}$$

elde ederiz. Bu aşamada ek bir dönüşüm daha tanımlayalım:

$$u_i = \frac{\partial w_i}{\partial x} \qquad i = 1, 2. \tag{4.9}$$

Bu dönüşümle (4.8)'deki denklemler sırasıyla,

$$w_1 - w_2 = 2v \tag{4.10}$$

ve

$$(w_1 + w_2)_x = 2\lambda + \frac{1}{2}(w_1 - w_2)^2 \tag{4.11}$$

olarak elde edilir ki (4.11) eşitliği Bäcklund dönüşümlerinin x'e göre türev içeren kısmını ifade eder. Benzer şekilde (4.7) denklemi ise (4.8) ve (4.10) eşitlikleri kullanılarak,

$$(w_1 - w_2)_t - 3(w_{1,x}^2 - w_{2,x}^2) + (w_1 - w_2)_{xxx} = 0 \tag{4.12}$$

şeklinde yazılabilir. Bu ise Bäcklund dönüşümlerinin t'ye göre türev içeren kısmını ifade eder. (4.11) ve (4.12) denklemleri, (4.9) dönüşümü altında KdV denklemi için Bäcklund dönüşümünü ifade eder. Şimdi KdV denkleminin Bäcklund dönüşümünü kullanarak denklemin aşikar çözümünden yeni bir çözüm elde edeceğimiz bir örnek verelim.

Örnek 4.2. $w_2(x,t) = 0$ yani $u_2(x,t) = 0$ aşikar çözümünden KdV denkleminin soliton çözümleri elde edilebilir. (4.11) eşitliği, $w_2(x,t) = 0$ aldığımızda,

$$w_{1,x} = 2\lambda + \frac{1}{2}w_1^2 \tag{4.13}$$

haline gelir. Burada denklemi bir kısmi diferansiyel denklem olmasına rağmen tek değişkene bağlı türev içerdiği için adi diferansiyel denklem gibi düşünerek çözebiliriz. $\lambda = -k^2 < 0$ için (4.13) denklemini x'e göre integre edersek,

$$\int \frac{2dw_1}{-4k^2 + w_1^2} = \int dx \ , \qquad w_1^2 \neq 4k^2$$

aşağıdaki çözüm elde edilir;

$$\left|\frac{w_1 - 2k}{w_1 + 2k}\right| = e^{2kx - f(t)}.$$

Burada $f(t)$, t'ye bağlı keyfi bir fonksiyondur. Eğer $\mid w_1 \mid < 2k$ ise,

$$w_1(x,t) = -2k \tanh(kx + f(t)) \tag{4.14}$$

olarak bulunur. $f(t)$ keyfi fonksiyonunu belirlemek için (4.12) denklemi kullanılır. (4.12) denkleminde $w_2(x,t) = 0$ alındığında,

$$w_{1,t} - 3w_{1,x}^2 + w_{1,xxx} = 0 \tag{4.15}$$

eşitliği elde edilir. (4.13) denkleminden bulduğumuz,

$$w_{1,xxx} = w_{1,x}^2 + w_1^2 w_{1,x} \tag{4.16}$$

eşitliğini (4.15) denkleminde kullanırsak,

$$w_{1,t} + 4k^2 w_{1,x} = 0 \tag{4.17}$$

denklemine ulaşırız. Bu aşamada (4.14) çözümü (4.17)'de yerine yazılırsa x_0 keyfi bir sabit olmak üzere,

$$f(t) = -4k^3 t - kx_0$$

fonksiyonu bulunur. Buna bağlı olarak çözüm (4.14),

$$w_1(x,t) = -2k \tanh(k(x - x_0 - 4k^2 t)) \tag{4.18}$$

olur. Bu durumda (4.9)'dan,

$$u_1(x,t) = -2k^2\text{sech}^2(k(x - x_0 - 4k^2t)) \tag{4.19}$$

çözümü elde edilir ki bu KdV denkleminin bir soliton çözümüdür.
Eğer $| w_1 |> 2k$ ise,

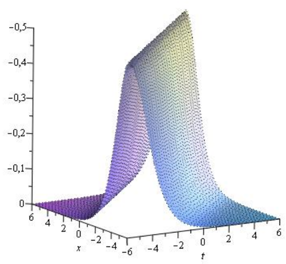
$$w_1(x,t) = -2k\coth(k(x - x_0 - 4k^2t)) \tag{4.20}$$

elde edilir ki bu KdV denklemi için singüler bir çözüm verir.

Örnek 4.3. Özel olarak çözüm (4.19)'da $k = \dfrac{1}{2}$ ve $x_0 = 0$ alalım. Bu durumda,

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2}\text{sech}^2\Big(\frac{x-t}{2}\Big)$$

çözümünü elde ederiz. Çözümün grafiği Şekil 3'te verilmiştir.



Şekil 3: KdV denkleminin 1-soliton çözümü

Aşağıdaki teorem, KdV'nin bilinen bir çözümünden sonsuz bir çözüm dizisi üretilebileceğini söyler.

Teorem 4.1. *w_i, $i = 1, 2$ KdV denkleminin bilinen bir w_0 çözümünden $\lambda_i, i = 1, 2$ Bäcklund parametreli Bäcklund dönüşümlerinin uygulanmasıyla elde edilmiş çözümlerse, yani $w_i = R_{\lambda_i}w_0$, $i = 1, 2$ ise bu durumda*

$$\phi = w_0 + \frac{4(\lambda_2 - \lambda_1)}{w_1 - w_2},$$

öyle ki $\phi = R_{\lambda_1}R_{\lambda_2}w_0 = R_{\lambda_2}R_{\lambda_1}w_0$, denklemin yeni bir çözümüdür.

Kanıt. Daha önce elde ettiğimiz (4.11) eşitliğini aşağıdaki gibi iki ayrı formda yazabiliriz:

$$(w_1 + w_0)_x = 2\lambda_1 + \frac{1}{2}(w_1 - w_0)^2, \tag{4.21}$$

$$(w_2 + w_0)_x = 2\lambda_2 + \frac{1}{2}(w_2 - w_0)^2. \tag{4.22}$$

Aynı şekilde $w_{12} = R_{\lambda_2} w_1$ ve $w_{21} = R_{\lambda_1} w_2$ olacak şekilde iki farklı çözüm inşa edelim:

$$(w_{12} + w_1)_x = 2\lambda_2 + \frac{1}{2}(w_{12} - w_1)^2, \tag{4.23}$$

$$(w_{21} + w_2)_x = 2\lambda_1 + \frac{1}{2}(w_{21} - w_2)^2. \tag{4.24}$$

Burada yaptığımız tanımlamaları aşağıdaki Bianchi diyagramında görebiliriz.

$$\begin{tikzcd}
 & w_1 \arrow[r, "\lambda_2"] & w_{12} \\
w_0 \arrow[ur, "\lambda_1"] \arrow[dr, "\lambda_2"'] & & \\
 & w_2 \arrow[r, "\lambda_1"'] & w_{21}
\end{tikzcd}$$

Şekil 4: KdV denklemi için Bianchi diyagramı

Not ediniz ki yaptığımız bu tanımlamalarla Bianchi'nin permüte edilebilirlik teoreminden,

$$w_{12} = w_{21} \tag{4.25}$$

olur. Yani Bianchi diyagramı,

$$\begin{tikzcd}
 & w_1 \arrow[dr, "\lambda_2"] & \\
w_0 \arrow[ur, "\lambda_1"] \arrow[dr, "\lambda_2"'] & & w_{12} = w_{21} \\
 & w_2 \arrow[ur, "\lambda_1"'] &
\end{tikzcd}$$

Şekil 5: KdV denklemi için komütatif Bianchi diyagramı şeklinde verilir. Bu aşamada (4.21) ve (4.22) denklemlerinin farkından,

$$(w_1 + w_0)_x - (w_2 - w_0)_x = -2(\lambda_2 - \lambda_1) + \frac{1}{2}[(w_1 - w_0)^2 - (w_2 - w_0)^2] \tag{4.26}$$

elde ederiz. (4.23) ve (4.24) denklemlerinin farkından ise,

$$(w_{12} + w_1)_x - (w_{21} - w_2)_x = 2(\lambda_2 - \lambda_1) + \frac{1}{2}[(w_{12} - w_1)^2 - (w_{21} - w_2)^2] \tag{4.27}$$

eşitliğini elde ederiz. Bu iki denklemin farkını aldığımızda ve birkaç düzenleme ile,

$$w_{12} = w_0 + \frac{4(\lambda_2 - \lambda_1)}{w_1 - w_2} \tag{4.28}$$

ilişkisini elde ederiz ki burada dönüşüm (4.9)'dan u_{12} çözümü elde edilir. □

Burada (4.28) ile elde edilen süperpozisyon formülü t'ye göre türev içeren Bäcklund dönüşümünü de sağlar.

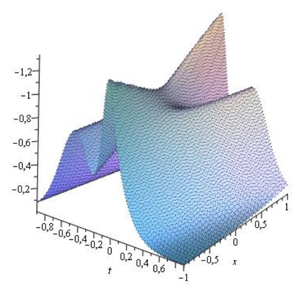
Örnek 4.4. (4.28)'de $\lambda_1 = -1$ ve $\lambda_2 = -\frac{3}{2}$ olacak şekilde $w_0 = 0$, (4.18)'da $k = 1$ ve $x_0 = 0$ için $w_1 = -2\tanh(x - 4t)$, (4.20)'de ise $k = \frac{3}{2}$ ve $x_0 = 0$ için $w_2 = -3\coth(\frac{3}{2}x - \frac{27}{2}t)$ çözümlerini alalım. Buradan,

$$w_{12}(x,t) = \frac{2}{2\tan(x - 4t) - 3\coth(\frac{3}{2}x - \frac{27}{2}t)}$$

olarak elde ederiz. Burada (4.9) dönüşümünü kullanarak,

$$u_{12} = \frac{9\cosh^2(x - 4t) + 4\cosh^2(\frac{3}{2}x - \frac{27}{2}t) - 4}{(2\sinh(x - 4t)\sinh(\frac{3}{2}x - \frac{27}{2}t) - 3\cosh(x - 4t)\cosh(\frac{3}{2}x - \frac{27}{2}t))^2} \tag{4.29}$$

çözümünü elde ederiz ki bu KdV denkleminin 2-soliton çözümdür. Çözümün grafiği Şekil 6'da verilmiştir.



Şekil 6: KdV denkleminin 2-soliton çözümü

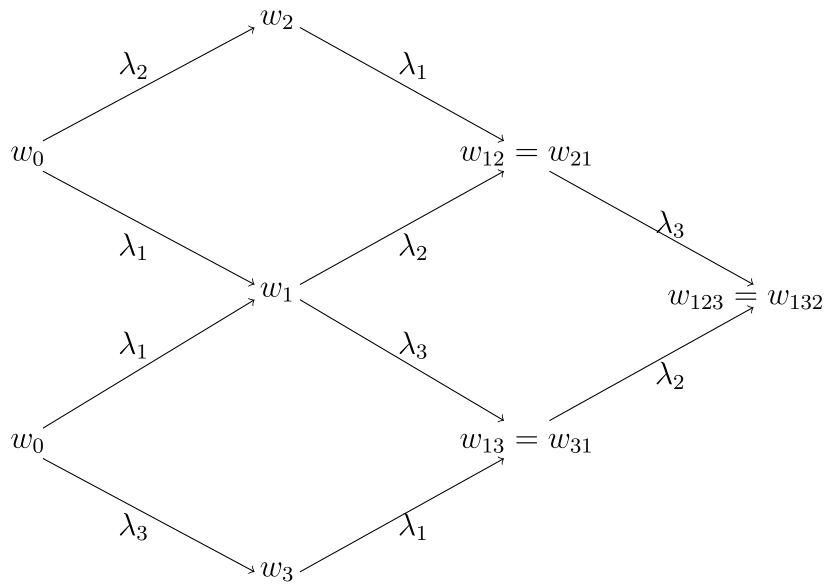
KdV denkleminin 3-soliton çözümünü süperpozisyon formülünden yararlanarak elde etmek istenildiğinde (4.28) eşitliği,

$$w_{123} = w_1 + \frac{4(\lambda_3 - \lambda_2)}{w_{12} - w_{13}} \tag{4.30}$$

formuna genelleştirilebilir. Daha açık olarak,

$$w_{123} = \frac{\lambda_1 w_1 (w_2 - w_3) + \lambda_2 w_2 (w_3 - w_1) + \lambda_3 w_3 (w_1 - w_2)}{\lambda_1 (w_2 - w_3) + \lambda_2 (w_3 - w_1) + \lambda_3 (w_1 - w_2)} \tag{4.31}$$

şeklinde yazılabilir. KdV denkleminin 3-soliton çözümü için permüte edilebilirlik diyagramını aşağıdaki gibi şematize edebiliriz:



Şekil 7: KdV denklemi için 3-soliton çözümünün Bianchi diyagramı

Örnek 4.5. KdV denkleminin $w_0 = 0$, $w_1 = -2\tanh(k_1(x - 4k_1^2 t))$, $w_2 = -2\coth(k_2(x - 4k_2^2 t))$, $w_3 = -2\tanh(k_3(x - 4k_3^2 t))$ çözümleri için 3-soliton çözümünü bulalım. Bu seçimlerle denklemin 2-soliton çözümlerini,

$$w_{12} = \frac{-2(k_1^2 - k_2^2)}{k_1 \tanh(k_1(x - 4k_1^2 t)) - k_2 \coth(k_2(x - 4k_2^2 t))}, \tag{4.32}$$

$$w_{13} = \frac{-2(k_1^2 - k_3^2)}{k_1 \tanh(k_1(x - 4k_1^2 t)) - k_3 \coth(k_3(x - 4k_3^2 t))} \tag{4.33}$$

formunda elde ederiz. (4.30)'dan,

$$w_{123} = \frac{A_1}{B_1} \tag{4.34}$$

öyle ki

$$
\begin{aligned}
A_1 =&2\tanh(4tk_1^3 - xk_1)k_1^3\coth(4tk_2^3 - xk_2)k_2 - 2\tanh(4tk_1^3 - xk_1)k_1\coth(4tk_2^3 - xk_2)k_2^3 \\
&- 2\tanh(4tk_1^3 - xk_1)k_1^3\tanh(4tk_3^3 - xk_3)k_3 + 2\tanh(4tk_1^3 - xk_1)k_1\tanh(4tk_3^3 - xk_3)k_3^3 \\
&+ 2k_2^3\coth(4tk_2^3 - xk_2)\tanh(4tk_3^3 - xk_3)k_3 - 2k_2\coth(4tk_2^3 - xk_2)\tanh(4tk_3^3 - xk_3)k_3^3,
\end{aligned} \tag{4.35}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
B_1 =& - \tanh(4tk_1^3 - xk_1)k_1k_2^2 + \tanh(4tk_1^3 - xk_1)k_1k_3^2 + \coth(4tk_2^3 - xk_2)k_2k_1^2 \\
&- \coth(4tk_2^3 - xk_2)k_2k_3^2 - \tanh(4tk_3^3 - xk_3)k_3k_1^2 + \tanh(4tk_3^3 - xk_3)k_3k_2^2.
\end{aligned} \tag{4.36}
$$

Burada (4.34) için dönüşüm (4.9) kullanılarak u_{123} ile verilen 3-soliton çözüme ulaşılabilir.

Açıkça görülmektedir ki süperpozisyon formülü kullanılarak KdV denklemi için sonsuz bir çözüm zinciri oluşturulabilir.

4.3 KdV Denklemi İçin Bilineer Formdaki Bäcklund Dönüşümü

Bu bölümde Hirota D-operatörünü kullanarak KdV denkleminin bilineer Bäcklund dönüşümünü bulacağız.

Teorem 4.2. *KdV denkleminin*

$$
u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{4.37}
$$

auto-Bäcklund dönüşümü

$$
(D_t - 3\lambda D_x + D_x^3)(f_1 \cdot f_2) = 0, \tag{4.38}
$$

$$
(D_x^2 + \lambda)(f_1 \cdot f_2) = 0, \tag{4.39}
$$

ile verilir. Burada λ keyfi Bäcklund parametresidir.

Kanıt. (4.37) ile verilen KdV denklemi için $u(x,t) = -2\partial_x^2 \ln f$ dönüşümünü kullanarak denklemin Hirota bilineer formunu,

$$
D_x(D_t + D_x^3)\{f \cdot f\} = 0 \tag{4.40}
$$

şeklinde elde ederiz. f_1 ve f_2 fonksiyonları (4.40) denkleminin çözümleri olsun. O halde,

$$D_x(D_t + D_x^3)\{f_1 \cdot f_1\} = 0 \tag{4.41}$$

$$D_x(D_t + D_x^3)\{f_2 \cdot f_2\} = 0 \tag{4.42}$$

olarak yazabiliriz. Bu durumda,

$$f_1^2 D_x(D_t + D_x^3)(f_2 \cdot f_2) - f_2^2 D_x(D_t + D_x^3)(f_1 \cdot f_1) = 0 \tag{4.43}$$

eşitliği de sağlanır. Denklem (4.43)'e $6\lambda D_x[D_x(f_1 \cdot f_2) \cdot f_1 f_2]$ terimini ekleyip çıkarırsak,

$$\begin{aligned} f_1^2 D_x(D_t + D_x^3)(f_2 \cdot f_2) - 6\lambda D_x[\{D_x(f_2 \cdot f_1)\} \cdot (f_1 f_2)] - f_2^2 D_x(D_t + D_x^3)(f_1 \cdot f_1) \\ + 6\lambda D_x[(f_1 f_2) \cdot \{D_x(f_1 \cdot f_2)\}] = 0 \end{aligned}$$

denklemini elde etmiş oluruz. Bu denklemi, bazı özdeşlikler kullanarak Bäcklund dönüşümlerini elde etmek için düzenleyeceğiz. Denklemi daha açık yazarsak,

$$\begin{aligned} f_1^2 D_x D_t(f_2 \cdot f_2) + f_1^2 D_x^4(f_2 \cdot f_2) - 6\lambda D_x[\{D_x(f_2 \cdot f_1)\} \cdot (f_1 f_2)] - f_2^2 D_x D_t(f_1 \cdot f_1) \\ - f_2^2 D_x^4(f_1 \cdot f_1) + 6\lambda D_x[(f_1 f_2) \cdot \{D_x(f_1 \cdot f_2)\}] = 0 \end{aligned}$$

olur. Bu aşamada (7.1) ve (7.6) ile verilen Özdeşlik (1) ve Özdeşlik (2)'yi kullanırsak,

$$\begin{aligned} -2D_x[\{D_t(f_1 \cdot f_2)\} \cdot (f_1 f_2)] - 2D_x[\{D_x^3(f_1 f_2)\} \cdot (f_1 f_2)] - 6D_x[\{D_x^2(f_1 \cdot f_2)\} \cdot \{D_x(f_2 \cdot f_1)\}] \\ - 6\lambda D_x[\{D_x(f_2 \cdot f_1)\} \cdot (f_1 f_2)] + 6\lambda D_x[(f_1 f_2) \cdot \{D_x(f_1 \cdot f_2)\}] = 0 \end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Terimleri düzenlediğimizde,

$$2D_x[\{(D_t - 3\lambda D_x + D_x^3)(f_2 \cdot f_1)\} \cdot (f_1 f_2)] + 6D_x[\{D_x(f_1 \cdot f_2)\} \cdot \{(D_x^2 + \lambda)(f_2 \cdot f_1)\}] = 0 \tag{4.44}$$

denklemine ulaşırız. Bu eşitlik,

$$(D_t - 3\lambda D_x + D_x^3)(f_1 \cdot f_2) = 0 \tag{4.45}$$

$$(D_x^2 + \lambda)(f_1 \cdot f_2) = 0 \tag{4.46}$$

olduğunda sağlanır. Böylece KdV denkleminin auto-Bäcklund dönüşümünü elde etmiş oluruz. □

(4.38)-(4.39) ile verilen Bäcklund dönüşümü Bölüm 4.2'de anlattığımız Wahlquist ve Estabrook tarafından verilen dönüşüme indirgenebilir. Aşağıdaki tanımlamayı yapalım:

$$w_i = -2\frac{\partial}{\partial x} \ln f_i = -2\frac{f_{i,x}}{f_i} \qquad i = 1, 2. \tag{4.47}$$

Şimdi Bäcklund dönüşümlerine geri dönersek, (4.39) denklemini açık olarak yazalım:

$$f_1 f_{2,xx} + f_2 f_{1,xx} - 2f_{1,x} f_{2,x} + \lambda f_1 f_2 = 0$$

Bu denklemi $\frac{1}{2} f_1 f_2$ ifadesine böldükten sonra (4.47) tanımından yararlanarak bazı düzenlemeler yaparız ve daha önce (4.11) ile verdiğimiz Bäcklund dönüşümünün x'e göre türev içeren kısmını elde ederiz. Aynı şekilde (4.38) denkleminin bilineer formu

$$f_1 f_{2,t} - f_2 f_{1,t} - 3\lambda(f_1 f_{2,x} - f_2 f_{1,x}) + f_1 f_{2,xxx} - 3f_{1,x} f_{2,xx} + 3f_{2,x} f_{1,xx} - f_2 f_{1,xxx} = 0.$$

Bu denklemi $f_1 f_2$ ifadesine böleriz ve gelen ifadenin x'e göre türevini alırız. Sonrasında ise (4.47) tanımınından faydalanarak,

$$-\frac{1}{2}(w_2 - w_1)_t + \frac{3}{2}\lambda(w_2 - w_1)_x + \frac{1}{2}(w_1 - w_2)_{xxx} - \frac{3}{4}\{(w_1 - w_2)(w_1 + w_2)_x\}_x + \frac{1}{8}\{(w_1 - w_2)^3\}_x = 0$$

denklemini elde ederiz. Son olarak, (4.11) denkleminden λ için elde ettiğimiz eşitliği kullanırsak daha önce (4.12) ile verdiğimiz eşitliği yani Bäcklund dönüşümünün t değişkenine göre türev içeren kısmını elde etmiş oluruz.

4.4 Bilineer Formdaki Süperpozisyon Formülü

KdV denkleminin Hirota bilineer formu (4.40) için g_0 bir çözüm olsun. Bäcklund dönüşümlerinden biri olan (4.39)'u g_0 ve $-\lambda_1$ Bäcklund parametresi ile kullandığımızda g_1, $-\lambda_2$ Bäcklund parametresi ile kullandığımızda $\hat{g}_1$ çözümlerini elde etmiş olalım. Yani,

$$D_x^2 g_0 \cdot g_1 = \lambda_1 g_0 g_1 \tag{4.48}$$

$$D_x^2 g_0 \cdot \hat{g}_1 = \lambda_2 g_0 \hat{g}_1. \tag{4.49}$$

R_{λ_i}, λ_i, $i = 1, 2$ Bäcklund parametreleri ile verilen Bäcklund dönüşümleri olmak üzere, komütatif bir Bianchi diyagramı oluşturabilmek için $g_2 = R_{\lambda_1} R_{\lambda_2} g_0 = R_{\lambda_2} R_{\lambda_1} g_0$ olacak şekilde bir g_2 fonksiyonunu alalım.

$$
\begin{tikzcd}
 & g_1 \arrow[dr, "\lambda_2"] & \\
g_0 \arrow[ur, "\lambda_1"] \arrow[dr, "\lambda_2"'] & & g_2 \\
 & \hat{g}_1 \arrow[ur, "\lambda_1"'] &
\end{tikzcd}
$$

Şekil 8: KdV denklemi için bilineer formdaki süperpozisyon formülünün komütatif Bianchi diyagramı

Böylece

$$D_x^2 g_1 \cdot g_2 = \lambda_2 g_1 g_2 \tag{4.50}$$

$$D_x^2 \hat{g}_1 \cdot g_2 = \lambda_1 \hat{g}_1 g_2 \tag{4.51}$$

elde edilir. Şimdi (4.48) denklemini $\hat{g}_1 g_2$ ile ve (4.51) denklemini $g_0 g_1$ ile çarparsak,

$$(D_x^2 g_0 \cdot g_1)\hat{g}_1 g_2 = \lambda_1 \hat{g}_1 g_2 g_0 g_1 \tag{4.52}$$

$$(D_x^2 \hat{g}_1 \cdot g_2) g_0 g_1 = \lambda_1 \hat{g}_1 g_2 g_0 g_1 \tag{4.53}$$

olarak elde ederiz. Bu iki denklemin farkından,

$$(D_x^2 g_0 \cdot g_1)\hat{g}_1 g_2 - g_0 g_1 (D_x^2 \hat{g}_1 \cdot g_2) = 0 \tag{4.54}$$

bulunur. Bu eşitliği (7.28) ile verilen Özdeşlik (8)'i kullanarak düzenlersek,

$$D_x[(D_x g_0 \cdot g_2) \cdot \hat{g}_1 g_1 + g_0 g_2 \cdot (D_x \hat{g}_1 \cdot g_1)] = 0 \tag{4.55}$$

şeklinde yazabiliriz. Benzer şekilde (4.49) ve (4.50) denklemlerini kullanalım. (4.49) denklemini $g_1 g_2$ ve (4.50) denklemini ise $g_0 \hat{g}_1$ ile çarpalım. Böylece bu denklemleri,

$$(D_x^2 g_0 \cdot \hat{g}_1) g_1 g_2 = \lambda_2 g_0 \hat{g}_1 g_1 g_2 \tag{4.56}$$

$$(D_x^2 g_1 \cdot g_2) g_0 \hat{g}_1 = \lambda_2 g_0 \hat{g}_1 g_1 g_2 \tag{4.57}$$

olarak elde ederiz ve bu iki denklemin farkları ise bize,

$$(D_x^2 g_0 \cdot \hat{g}_1) g_1 g_2 - g_0 \hat{g}_1 (D_x^2 g_1 \cdot g_2) = 0 \tag{4.58}$$

eşitliğini verir. (7.28) ile verilen Özdeşlik (8) kullanılarak düzenlendiğinde ise,

$$D_x[(D_x g_1 \cdot \hat{g}_1) \cdot g_0 g_2 + g_1 \hat{g}_1 \cdot (D_x g_0 \cdot g_2)] = 0 \tag{4.59}$$

şeklini alır. (4.55) ve (4.59) denklemlerinin toplamından,

$$D_x[g_0g_2 \cdot (D_xg_1 \cdot \hat{g}_1)] = 0 \tag{4.60}$$

ve farkından ise

$$D_x[(D_xg_0 \cdot g_2) \cdot g_1\hat{g}_1] = 0 \tag{4.61}$$

elde edilir. Bu iki eşitlikten c_1, c_2 birer sabit olmak üzere,

$$g_1\hat{g}_1 = c_1D_xg_0 \cdot g_2 \tag{4.62}$$

$$g_0g_2 = c_2D_xg_1 \cdot \hat{g}_1 \tag{4.63}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu iki denklem KdV denkleminin çözümleri olan g_0, g_1, $\hat{g}_1$, g_2 arasında bir süperpozisyon formülü verir. Bu ilişki ise multi-soliton çözümlere genelleştirilebilir. Yani c_3, c_4 sabit olmak üzere,

$$\begin{aligned} g_N\hat{g}_N &= c_3D_xg_{N-1} \cdot g_{N+1} && (4.64) \\ g_{N-1}g_{N+1} &= c_4D_xg_N \cdot \hat{g}_N && (4.65) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. (4.65) için Bianchi diyagramını aşağıdaki gibi çizebiliriz:

$$\begin{tikzcd}
 & g_N \arrow[dr, "\lambda_{N+1}"] & \\
g_{N-1} \arrow[ur, "\lambda_N"] \arrow[dr, "\lambda_{N+1}"'] & & g_{N+1} \\
 & \hat{g}_N \arrow[ur, "\lambda_N"'] &
\end{tikzcd}$$

Şekil 9: KdV denklemi için bilineer formdaki süperpozisyon formülünün genelleştirilmiş komütatif Bianchi diyagramı

Burada,

$g_{N-1} = g_{N-1}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{N-1})$, $\qquad g_N = g_N(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{N-1}, \lambda_N)$

$\hat{g}_N = \hat{g}_N(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{N-1}, \lambda_{N+1})$, $\qquad g_{N+1} = g_{N+1}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N, \lambda_{N+1})$.

4.5 KdV Denkleminin N-Soliton Çözümleri

Bu bölümde, Bölüm (4.3)'te elde ettiğimiz Bäcklund dönüşümlerini KdV denkleminin N-soliton çözümlerini bulmak için kullanacağız.

KdV denklemi $u(x,t) = 0$ aşikar çözümüne sahiptir. Bu durumda $u(x,t) = -2\partial_x^2 \ln g_0$ bilineerleştirme dönüşümünde $g_0 = 1$'i denklem (4.40)'ın bir çözümü olarak seçebiliriz. KdV denklemi için Bäcklund dönüşümleri olan (4.38) ve (4.39)'u $\lambda = -\beta$ Bäcklund parametresi ile kullandığımızda,

$$(D_t + 3\beta D_x + D_x^3)\{1 \cdot g\} = 0 \tag{4.66}$$

$$(D_x^2 - \beta)\{1 \cdot g\} = 0 \tag{4.67}$$

elde ederiz. Denklemi bilineer formda,

$$g_t + 3\beta g_x + g_{xxx} = 0, \tag{4.68}$$

$$g_{xx} - \beta g = 0, \tag{4.69}$$

olarak yazarız ve bu iki denklem g'ye bağlı bir lineer denklem sistemi verir. Denklem (4.69)'dan,

$$g(x,t) = A(t)e^{\sqrt{\beta}x} + B(t)e^{-\sqrt{\beta}x} \tag{4.70}$$

elde ederiz. Bu çözümü denklem (4.68)'de yerine yazdığımızda γ_1 ve γ_2 sabit olmak üzere,

$$g(x,t) = e^{\sqrt{\beta}x - 4\beta\sqrt{\beta}t + \gamma_1} + e^{-\sqrt{\beta}x + 4\beta\sqrt{\beta}t + \gamma_2} \tag{4.71}$$

çözümünü elde ederiz. Burada $\beta = k_1^2$ ve $\gamma_2 = \gamma_1$ alırsak,

$$g(x,t) = e^{k_1(x - 4k_1^2 t) + \gamma_1} + e^{-k_1(x - 4k_1^2 t) - \gamma_1} \tag{4.72}$$

çözümünü elde etmiş oluruz.

Teorem 4.3. *Eğer $g(x,t) = e^{ax+b}h(x,t)$ ise bu durumda*

$$D_x(D_t + D_x^3)\{g \cdot g\} = e^{2(ax+b)}D_x(D_t + D_x^3)\{h \cdot h\} \tag{4.73}$$

eşitliği sağlanır. Yani eğer h fonksiyonu $D_x(D_t + D_x^3)\{h \cdot h\} = 0$ denkleminin çözümüyse g de bu denklemin bir çözümüdür. Burada a ve b, x'ten bağımsız parametrelerdir ancak t'ye bağımlı olabilirler.

Kanıt. Yukarıda (4.73) ile verilen ifadenin doğruluğunu $D_x^2 g \cdot g = 0$ için göstermemiz yeterli olacaktır. $g = e^{ax+b}h$ fonksiyonunu alalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned} D_x^2(e^{ax+b}h \cdot e^{ax+b}h) &= D_x[(e^{ax+b}h)_x(e^{ax+b}h) - (e^{ax+b}h)(e^{ax+b}h)_x] \\ &= a^2 e^{2(ax+b)}[2h_{xx}h - 2h_{xx}^2] \\ &= a^2 e^{2(ax+b)}[D_x^2 h \cdot h]. \end{aligned} \tag{4.74}$$

Bu durumu çift Hirota D-operatörleri için genelleyebiliriz. Dolayısıyla g ve h fonksiyonlarının KdV denkleminin Hirota bilineer formunu sağladığı açıktır. Bununla birlikte $u = -2\partial_x^2 \ln g$ çözümü de değişmez çünkü $g = e^{ax+b}h$ için,

$$\partial_x^2 \ln g = \partial_x^2(\ln e^{ax+b}h) = (\ln e^{ax+b} + \ln h)_{xx} = (ax + b + \ln h)_{xx} = (\ln h)_{xx}.$$

Yani $u = -2\partial_x^2 \ln g = -2\partial_x^2 \ln h$ olur ki bu da bize g ve h'nin KdV denklemi için aynı çözümü ürettiğini gösterir. □

Teorem 4.3'e göre (4.72) çözümünü göz önüne alırsak,

$$g_1 = 1 + e^{2k_1(x-4k_1 t)+\gamma_1} = 1 + e^{\eta_1}, \quad \eta_1 = 2k_1(x - 4k_1^2 t) + 2\gamma_1$$

fonksiyonu da KdV denkleminin bir çözümüdür. Burada g ve g_1 fonksiyonları KdV için aynı çözümü üretir.

$$u = -2\partial_x^2 \ln(1 + e^{\eta_1}) = -2k_1^2 \text{sech}^2\Big(\frac{\eta_1}{2}\Big), \quad \eta_1 = 2k_1(x - 4k_1^2 t) + 2\gamma_1.$$

Bu çözüm KdV denkleminin 1-soliton çözümüdür. Şimdi (4.65) ile verilen süperpozisyon formülünü kullanarak denklemin 2-soliton ve 3-soliton çözümlerini elde edelim. O halde,

$$g_0 = 1, \quad g = e^{\frac{\eta_1}{2}} + e^{\frac{-\eta_1}{2}}, \quad \hat{g} = e^{\frac{\eta_2}{2}} + e^{\frac{-\eta_2}{2}}, \eta_i = 2k_i(x - 4k_i^2 t) + 2\gamma_i, \, i = 1, 2$$

olmak üzere (4.63)'ü kullanarak,

$$g_0 g_2 = c_1 D_x g \cdot \hat{g}, \quad c_1 \text{ sabit}$$

yazarız ve burada bazı düzenlemelerden sonra,

$$g_2 = -c_1(k_1 - k_2)e^{-\frac{\eta_1}{2}-\frac{\eta_2}{2}}\Big\{ - e^{\eta_1+\eta_2} - \frac{(k_1 + k_2)}{(k_1 - k_2)}e^{\eta_1} + \frac{(k_1 + k_2)}{(k_1 - k_2)}e^{\eta_2} + 1\Big\}.$$

Şimdi aşağıdaki şekilde yeni tanımlamalar yapalım:

$$\gamma_1^{(0)} = \ln\Big(\frac{k_1 + k_2}{k_2 - k_1}\Big), \quad \gamma_2^{(0)} = \ln\Big(\frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2}\Big), \quad \overline{\eta}_i = \eta_i + \gamma_i^{(0)}, \quad A_{ij} = \ln\Big(\frac{k_i - k_j}{k_i + k_j}\Big)^2$$

$i,j=1,2 \quad i<j$ ve $A=-c_1(k_1-k_2)e^{-\frac{\eta_1}{2}-\frac{\eta_2}{2}}$. Bu tanımlamalara göre,

$$\begin{aligned} g_2 &= Ae^{-\frac{\overline{\eta}_1}{2}+\frac{\gamma_1^{(0)}}{2}-\frac{\overline{\eta}_2}{2}+\frac{\gamma_2^{(0)}}{2}}\Big\{-e^{\overline{\eta}_1-\gamma_1^{(0)}+\overline{\eta}_2-\gamma_2^{(0)}}-\frac{(k_1+k_2)}{(k_1-k_2)}e^{\overline{\eta}_1-\gamma_1^{(0)}}+\frac{(k_1+k_2)}{(k_1-k_2)}e^{\overline{\eta}_2-\gamma_2^{(0)}}+1\Big\} \\ &= Ae^{-\frac{\overline{\eta}_1}{2}-\frac{\overline{\eta}_2}{2}+\frac{\gamma_1^{(0)}}{2}+\frac{\gamma_2^{(0)}}{2}}\Big\{\frac{(k_1-k_2)^2}{(k_1+k_2)^2}e^{\overline{\eta}_1+\overline{\eta}_2}+e^{\overline{\eta}_1}+e^{\overline{\eta}_2}+1\Big\} \qquad (4.75) \end{aligned}$$

olur. Teorem 4.3'ten,

$$g_2=1+e^{\overline{\eta}_1}+e^{\overline{\eta}_2}+e^{\overline{\eta}_1+\overline{\eta}_2+A_{12}}, \quad A_{12}=\ln\Big(\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\Big)^2$$

ile ifade edilen çözümü elde ederiz. Bu çözüm ise KdV denkleminin 2-soliton çözümüdür. Teorem 3.3'ten yararlanarak KdV denkleminin 3-soliton çözümü için $g=R_{\beta_1}g_0$, $\hat{g}=R_{\beta_2}g_0$, $g_1=R_{\beta_3}g_0$, $g_2=R_{\beta_2}g=R_{\beta_1}\hat{g}$, $\hat{g}_2=R_{\beta_2}g_1$ ve $g_3=R_{\beta_3}g_2=R_{\beta_1}\hat{g}_2$, $\beta_i=k_i^2$, $i=1,2,3$ olmak üzere Bianchi diyagramı aşağıdaki gibi inşa edilebilir.

$$\begin{tikzcd}
 & g \arrow[dr, "\beta_2"] & & \\
g_0 \arrow[ur, "\beta_1"] \arrow[dr, "\beta_2"'] & & g_2 \arrow[dr, "\beta_3"] & \\
 & \hat{g} \arrow[ur, "\beta_1"] \arrow[dr, "\beta_3"] & & g_3 \\
g_0 \arrow[ur, "\beta_2"] \arrow[dr, "\beta_3"'] & & \hat{g}_2 \arrow[ur, "\beta_1"'] & \\
 & g_1 \arrow[ur, "\beta_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

Şekil 10: KdV denkleminin bilineer formla elde 3-soliton çözümü için Bianchi diyagramı

Diyagramdan görülebileceği gibi (4.65) ile verilen süperpozisyon formülünü 3-soliton çözümü elde edebilmek için tekrar uygularsak yani,

$$g_1g_3=c_2D_xg_2\cdot\hat{g}_2, \quad c_2 \text{ sabit}$$

eşitliğinde,

$$g_1=e^{\frac{\eta_1}{2}}+e^{\frac{-\eta_1}{2}}, \quad g_2=Ae^{\frac{-(\eta_1+\eta_2)}{2}}\Big\{1-\Big(\frac{k_1+k_2}{k_1-k_2}\Big)e^{\eta_1}+\Big(\frac{k_1+k_2}{k_1-k_2}\Big)e^{\eta_2}-e^{\eta_1+\eta_2}\Big\},$$

$$\hat{g}_2=Be^{\frac{-(\eta_1+\eta_3)}{2}}\Big\{1-\Big(\frac{k_1+k_3}{k_1-k_3}\Big)e^{\eta_1}+\Big(\frac{k_1+k_3}{k_1-k_3}\Big)e^{\eta_3}-e^{\eta_1+\eta_3}\Big\},$$

öyle ki $A = -c_3(k_1 - k_2)$, $\quad B = -c_4(k_1 - k_3)$, $\quad c_3, c_4$ sabit, çözümlerini yerine yazarsak,

$$g_3 = 1 + e^{\overline{\eta}_1} + e^{\overline{\eta}_2} + e^{\overline{\eta}_3} + e^{\overline{\eta}_1+\overline{\eta}_2+A_{12}} + +e^{\overline{\eta}_1+\overline{\eta}_3+A_{13}} + e^{\overline{\eta}_2+\overline{\eta}_3+A_{23}} + e^{\overline{\eta}_1+\overline{\eta}_2+\overline{\eta}_3+A_{123}},$$

$$A_{ij} = \ln\left(\frac{k_i - k_j}{k_i + k_j}\right)^2, \quad 1 \leq i \neq j \leq 3$$

ile ifade edilen KdV denkleminin 3-soliton çözümünü elde ederiz. Burada $A_{123} = A_{12}A_{13}A_{23}$. Bu şekilde süperpozisyon formülünü kullanarak KdV denkleminin N-soliton çözümlerine ulaşabiliriz.

KdV denkleminin Bäcklund dönüşümleri kullanılarak bulmuş olduğumuz 1-, 2-, 3-soliton çözümlerinin Bölüm 2.2'de Hirota D-operatörü kullanılarak elde edilen soliton çözümlerle aynı formda olduğu görülebilir.

5 Boussinesq Denklemi

Boussinesq denklemi [6], her iki yönde yayılıma sahip sığ su dalgalarını ifade eden

$$u_{tt} - u_{xx} - 3(u^2)_{xx} - u_{xxxx} = 0 \tag{5.1}$$

ile verilen önemli dalga denklemlerindendir. Bu başlık altında Boussinesq denklemi için verilen Bäcklund dönüşümünü kanıtlayacağız [44] ve bu dönüşüm üzerinden bazı özel çözümler elde edeceğiz [30], [31], [45].

5.1 Boussinesq Denklemi İçin Bilineer Formdaki Bäcklund Dönüşümü

Bu bölümde Boussinesq denkleminin bilineer formda Bäcklund dönüşümlerini elde edeceğiz.

Boussinesq denklemi (5.1) için $u(x,t) = 2\partial_x^2 \ln f$ dönüşümü kullanılarak denklemin Hirota bilineer formu,

$$(D_t^2 - D_x^2 - D_x^4)(f \cdot f) = 0 \tag{5.2}$$

şeklinde elde edilir [44].

Teorem 5.1. *Hirota bilineer formu (5.2) ile verilen Boussinesq denkleminin bir Bäcklund dönüşümü aşağıdaki denklem çifti ile verilebilir:*

$$(D_t + aD_x^2)\{f_1 \cdot f_2\} \quad = \quad 0 \tag{5.3}$$

$$(aD_xD_t + D_x + D_x^3)\{f_1 \cdot f_2\} \quad = \quad \lambda f_1 f_2. \tag{5.4}$$

Burada f_1, f_2 fonksiyonları (5.2) denkleminin çözümleri ve λ keyfi bir sabittir.

Kanıt. Denklemin Bäcklund dönüşümlerini bulmak için öncelikle aşağıdaki tanımlamayı yapalım:

$$P(D_t, D_x) := f_2^2(D_t^2 - D_x^2 - D_x^4)(f_1 \cdot f_1) - f_1^2(D_t^2 - D_x^2 - D_x^4)(f_2 \cdot f_2). \tag{5.5}$$

Yukarıdaki ifadede (7.6) ile verilen Özdeşlik (2)'yi ve (7.10) ile verilen Özdeşlik (3)'ü kullanırsak,

$$P = 2[D_t\{(D_tf_1 \cdot f_2) \cdot f_1f_2\} - D_x\{(D_xf_1 \cdot f_2 + D_x^3 f_1 \cdot f_2) \cdot f_1f_2\}$$
$$+ 3D_x\{(D_x^2 f_1 \cdot f_2) \cdot (D_xf_1 \cdot f_2)\}] \tag{5.6}$$

olur. Eğer (5.3) ve (5.4) ilişkilerini sağlayan f_1 ve f_2 fonksiyonlarının, (5.5) ile verilen ifadeyi sıfırladığını gösterirsek yani f_1 ve f_2'nin aynı zamanda Boussinesq denkleminin Hirota bilineer formu olan (5.2) eşitliğini sağladığını kanıtlarsak (5.3) ve (5.4) çiftinin Boussinesq denkleminin Bäcklund dönüşümü olduğunu kanıtlamış oluruz. (5.6) ifadesinde (5.3) ve (5.4) eşitliklerini kullanırsak,

$$\begin{aligned} P =& 2[-aD_x\{(D_xD_tf_1 \cdot f_2) \cdot f_1f_2 + (D_tf_1 \cdot f_2) \cdot (D_xf_1 \cdot f_2)\} \\ & - D_x\{(-aD_xD_tf_1 \cdot f_2 + \lambda f_1f_2) \cdot f_1f_2\} + 3D_x\{(D_x^2f_1 \cdot f_2) \cdot (D_xf_1 \cdot f_2)\}] \end{aligned} \quad (5.7)$$

elde ederiz. Dikkat ediniz ki burada $D_x\{\lambda(f_1f_2) \cdot (f_1f_2)\} = 0$'dır. Diğer sadeleştirmeleri de yaparsak,

$$P = 2\{D_x((-aD_t + 3D_x^2)f_1 \cdot f_2) \cdot (D_xf_1 \cdot f_2)\}. \quad (5.8)$$

Açıkça görülüyor ki bu ifade (5.3) eşitliğinden dolayı $a^2 = -3$ olduğunda sıfırlanır. Yani $a^2 = -3$ için (5.3) ve (5.4) çifti Boussinesq denkleminin Bäcklund dönüşümüdür. □

Literatürde Boussinesq denkleminin farklı Bäcklund dönüşümleriyle karşılaşılabilir. Örneğin Hirota ve Satsuma [45], (5.3) ve (5.4) çiftinin $\lambda = 0$ olduğu halini vermiştir. Cheng [31], Boussinesq denklemi için iki parametreli Bäcklund dönüşümünü vermiştir:

$$\begin{aligned} (D_t - aD_x^2 + \xi D_x)\{f \cdot f'\} &= 0, & (5.9) \\ (-aD_xD_t + D_x^3 + \xi aD_x^2 + D_x - \xi^2D_x - \eta a)\{f \cdot f'\} &= 0. & (5.10) \end{aligned}$$

Tu [29], Hirota D-operatörü kullanılmadan ifade edilmiş iki parametreli Bäcklund dönüşümüne,

$$(w' - w)_t - a(w' + w)_{xx} - a(w' - w)(w' - w)_x + \xi(w' - w)_x = 0 \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} -a(w' + w)_t + a\xi(w' - w)^2 + & 3(w' - w)(w' + w)_x + (w' + w)_{xx} + (w' - w)^3 \\ & + a\xi(w' + w)_x + (w' - w) - \xi^2(w' - w) + \eta a = 0 \end{aligned} \quad (5.12)$$

formunda ulaşmıştır. Buradan denklem (5.1) için Hirota D-operatörsüz süperpozisyon formülü elde edilir. Buna göre (5.11) eşitliğinde $\xi/a \longrightarrow \xi$ kabul edersek,

$$(w' - w)_t = a\Big[(w' + w)_x + \frac{1}{2}(w' - w)^2 - \xi(w' - w)\Big]_x \quad (5.13)$$

bulunur. Buna göre $w_1 = R_{\xi_1} w_0$ ve $w_2 = R_{\xi_2} w_0$ için,

$$(w_1 - w_0)_t = a\Big[(w_1 + w_0)_x + \frac{1}{2}(w_1 - w_0)^2 - \xi_1(w_1 - w_0)\Big]_x,$$
$$(w_2 - w_0)_t = a\Big[(w_2 + w_0)_x + \frac{1}{2}(w_2 - w_0)^2 - \xi_2(w_2 - w_0)\Big]_x. \tag{5.14}$$

Benzer olarak $w_{12} = w_3 = R_{\xi_2}(w_1)$ ve $w_{21} = w_3 = R_{\xi_1}(w_2)$ için,

$$(w_3 - w_1)_t = a\Big[(w_3 + w_1)_x + \frac{1}{2}(w_3 - w_1)^2 - \xi_2(w_3 - w_1)\Big]_x,$$
$$(w_3 - w_2)_t = a\Big[(w_3 + w_2)_x + \frac{1}{2}(w_3 - w_2)^2 - \xi_1(w_3 - w_2)\Big]_x. \tag{5.15}$$

Eşitlik (5.14) ve (5.15)'ten,

$$[2(w_1 - w_2)_x + (w_1^2 - w_2^2) + (w_2 - w_1)(w_0 + w_3) - \xi_1(w_1 + w_2) + \xi_2(w_1 + w_2)$$
$$+ (w_0 + w_3)(\xi_1 - \xi_2)]_x = 0 \tag{5.16}$$

bulunur. Burada (5.16) eşitliği integre edilerek denklemin süperpozisyon formülü,

$$w_3 = -w_0 + \frac{1}{w_2 - w_1 + \xi_1 - \xi_2}[\lambda + 2(w_2 - w_1)_x + (w_2^2 - w_1^2) + (w_2 + w_1)(\xi_1 - \xi_2)]$$

olarak elde edilir. Burada λ integral sabitidir.

Rogers ve Shadwick [30], denklemin soliton çözümlerini elde edebilmek ve soliton çözümleri için lineer olmayan süperpozisyon formülünü türetebilmek için aşağıdaki Bäcklund dönüşümünü

$$(D_t + aD_x^2) f \cdot f' - a\beta f f' = 0 \tag{5.17}$$
$$\{(1 + 3\beta)D_x + D_x^3 + aD_t D_x\} f \cdot f' = 0 \tag{5.18}$$

vermiştir. Yukarıdaki eşitliklerin Boussinesq denkleminin Bäcklund dönüşümü olduğu Teorem 5.1 için yaptığımız şekilde kolayca kanıtlanabilir [30].

5.2 Boussinesq Denklemi İçin Bazı Çözümler

Bu bölümde, Bölüm 5.1'de elde ettiğimiz (5.3) ve (5.4) ile verilen Bäcklund dönüşümlerini Boussinesq denkleminin bilinen çözümlerinden yeni çözümler elde etmek için kullanacağız.

Burada $f = 1$, denklem (5.2)'nin aşikar bir çözümüdür. Bu çözümü (5.3) ve (5.4) ilişkilerinde kullanırsak,

$$(D_t + aD_x^2)\{1 \cdot g\} = 0, \tag{5.19}$$

$$(aD_xD_t + D_x + D_x^3)\{1 \cdot g\} = \lambda g, \qquad a^2 = -3. \tag{5.20}$$

Denklemleri açık halde yazarsak,

$$-g_t + ag_{xx} = 0, \tag{5.21}$$

$$ag_{xt} - g_x - g_{xxx} = \lambda g, \tag{5.22}$$

elde ederiz. Burada bu iki denklem $g(x,t)$ için lineer bir diferansiyel denklem sistemi verir.

Eğer $\lambda = 0$ alırsak, denklem (5.21) ve (5.22)'nin ortak çözümünden,

$$g(x,t) = c_1(t) + c_2(t)\cos\Big(\frac{1}{2}x\Big) + c_3(t)\sin\Big(\frac{1}{2}x\Big). \tag{5.23}$$

Bu çözümü denklem (5.21)'de yerine yazdığımızda,

$$g(x,t) = \alpha_1 + e^{-\frac{a}{4}t}\Big(A\cos\Big(\frac{1}{2}x\Big) + B\sin\Big(\frac{1}{2}x\Big)\Big) \tag{5.24}$$

çözümünü elde ederiz. Burada α_1, A ve B keyfi sabitlerdir. Boussinesq denkleminin bilineerleştirme dönüşümünü, $u(x,t) = 2\partial_x^2 g(x,t)$, kullanırsak denklemin çözümüne,

$$u(x,t) = \frac{-e^{-\frac{a}{4}t}[\alpha_1(A\cos(\frac{1}{2}x) + B\sin(\frac{1}{2}x)) + (A^2+B^2)e^{-\frac{a}{4}t}]}{2[\alpha_1 + e^{-\frac{a}{4}t}(A\cos(\frac{1}{2}x) + B\sin(\frac{1}{2}x))]^2} \tag{5.25}$$

ulaşmış oluruz.

$\lambda \neq 0$ olsun. (5.21) ve (5.22) denklemlerini çözmek

$$4g_{xxx} + g_x + \lambda g = 0, \quad -g_t + ag_{xx} = 0 \tag{5.26}$$

denklemlerini çözmekle eşdeğerdir. Bu iki denklemi çözersek

$$g(x,t) = Ae^{kx+ak^2t} + Be^{lx+al^2t} = Be^{lx+al^2t}\Big(1 + \frac{A}{B}e^{(k-l)x+a(k^2-l^2)t}\Big), \quad 4k^3 + k = 4l^3 + l, \tag{5.27}$$

A ve B keyfi sabit, çözümüne ulaşmış oluruz. Teorem 4.3 ile

$$h(x,t) = 1 + \frac{A}{B}e^{(k-l)x+a(k^2-l^2)t}, \quad 4k^3 + k = 4l^3 + l \tag{5.28}$$

fonksiyonu da (5.2)'nin bir çözümüdür. Boussinesq denkleminin bilineerleştirme dönüşümünü, $u(x,t) = 2\partial_x^2 h(x,t)$, kullanırsak

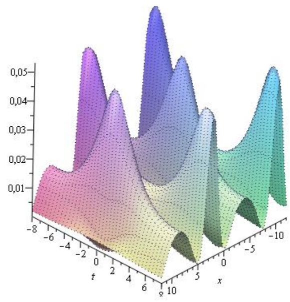
$$u(x,t) = \frac{A(k-l)^2}{2B}\mathrm{sech}^2\Big(\frac{k-l}{2}x + \frac{a}{2}(k^2-l^2)t + \delta\Big), \quad \delta = \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{A}{B}\Big). \tag{5.29}$$

öyle ki $4k^3 + k = 4l^3 + l$, çözümünü elde etmiş oluruz.

Örnek 5.1. Çözüm (5.25)'teki parametreleri $a = -\sqrt{3i}$, $A = 1$, $B = 3$, $\alpha_1 = 10$ seçelim. Bu durumda çözüm $u(x,t)$

$$u(x,t) = \frac{-5e^{\frac{\sqrt{3}}{4}it}(\cos(\frac{1}{2}x) + 3\sin(\frac{1}{2}x) + e^{\frac{\sqrt{3}}{4}it})}{[10 + e^{\frac{\sqrt{3}}{4}it}(\cos(\frac{1}{2}x) + 3\sin(\frac{1}{2}x))]^2}. \tag{5.30}$$

Burada $u(x,t)$ fonksiyonu kompleks değerli bir fonksiyon olduğu için reel düzlemde grafiğini çizemeyiz. O yüzden, $u^\star(x,t)$ fonksiyonu $u(x,t)$'nin eşleniği olmak üzere, $|u(x,t)|^2 = u(x,t)u^\star(x,t)$ fonksiyonunu değerlendiririz. Çözüm (5.30)'a karşılık gelen $|u(x,t)|^2$ fonksiyonunun grafiği Şekil 11'de verilmiştir. Çözümün grafiği periyodik havalandırıcı (*breather*) tip dalgadır.

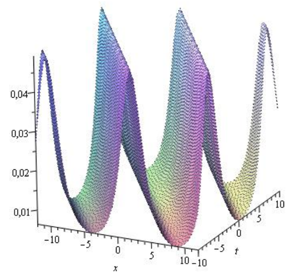


Şekil 11: Boussinesq denkleminin periyodik *breather* tip dalga çözümü

Örnek 5.2. Çözüm (5.29)'daki parametreler; $a = -\sqrt{3i}$, $A = 4$, $B = 1$, $k = \frac{i}{2}$ ve $4k^3 + k = 4l^3 + l$ ilişkisinden $l = 0$ olsun. Bu durumda çözüm $u(x,t)$

$$u(x,t) = \frac{-2e^{i(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{4}t)}}{(1 + 4e^{\frac{1}{2}i(\frac{\sqrt{3}}{2}t + x)})^2} \tag{5.31}$$

olur. Bir önceki örnekte olduğu gibi $u(x,t)$ fonksiyonu kompleks değerli bir fonksiyon olduğu için reel düzlemde grafiğini çizemeyiz. O yüzden, $|u(x,t)|^2 = u(x,t)u^\star(x,t)$ fonksiyonunu değerlendiririz. Çözüm (5.31)'e karşılık gelen $|u(x,t)|^2$ fonksiyonunun grafiği Şekil 12'de verilmiştir. Çözümün grafiği periyodik tip dalgadır.



Şekil 12: Boussinesq denkleminin periyodik dalga çözümü

6 Sine-Gordon Denklemi

Sine-Gordon denklemi [2], kristal dislokasyon teorisi başta olmak üzere elementer tanecik teorisi, nükleer magnetik rezonans, lineer olmayan dalga yayılımlarının mekanik modlarının analizi gibi birçok alanda kullanılan

$$u_{xt} = sinu \tag{6.1}$$

ile verilen önemli dalga denklemlerindendir [2],[3]. Bu başlık altında sine-Gordon denkleminin Bäcklund dönüşümlerini Hirota D-operatörü kullanmadan ve bilineer formda olmak üzere iki ayrı formda inceleyeceğiz [43], [47].

6.1 Sine-Gordon Denklemi İçin Bäcklund Dönüşümü

Bu bölümde sine-Gordon denkleminin Bäcklund dönüşümlerini öncelikle Hirota D-operatörü kullanmadan elde edeceğiz [43]. Süperpozisyon formülüyle denklemin bir çözümünden başka çözümlerine ulaşacağız.

Teorem 6.1. *Sine-Gordon denkleminin $u_{xt} = \sin u$ auto-Bäcklund dönüşümü aşağıdaki gibidir:*

$$R_1(u, u_x, v, v_x) = \frac{1}{2}(u+v)_x - a\sin\left(\frac{u-v}{2}\right) = 0, \tag{6.2}$$

$$R_2(u, u_t, v, v_t) = \frac{1}{2}(u-v)_t - \frac{1}{a}\sin\left(\frac{u+v}{2}\right) = 0. \tag{6.3}$$

Burada a ve $\frac{1}{a}$ sabitleri Bäcklund parametreleridir.

Kanıt. İki farklı $u = u(x,t)$ ve $v = v(x,t)$ çözümü için $u_{xt} = \sin u$ ve $v_{xt} = \sin v$, sine-Gordon denklemleri olsun. Burada denklem (6.2), t'ye göre türevlenirse,

$$\frac{1}{2}(u_{xt} + v_{xt}) = a\frac{1}{2}(u_t - v_t)\cos\left(\frac{u-v}{2}\right)$$

halini alır ve $R_2 = 0$ kullanılırsa,

$$\frac{1}{2}(u_{xt} + v_{xt}) = \sin\left(\frac{u+v}{2}\right)\cos\left(\frac{u-v}{2}\right) \tag{6.4}$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde (6.3) denklemi, x'e göre türevlenirse,

$$\frac{1}{2}(u_{tx} - v_{tx}) = \frac{1}{2a}(u_x + v_x)\cos\left(\frac{u-v}{2}\right)$$

bulunur ve daha sonra $R_1 = 0$ ilişkisi kullanılırsa,

$$\frac{1}{2}(u_{tx} - v_{tx}) = \sin\left(\frac{u-v}{2}\right)\cos\left(\frac{u+v}{2}\right) \tag{6.5}$$

olarak yazılır. Burada integre edilebilirlik şartı gereği $u_{xt} = u_{tx}$ ve $v_{xt} = v_{tx}$ olduğundan denklem (6.4) ve (6.5)'in toplamından, $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$ özdeşliği kullanılarak,

$$u_{xt} = \sin\left(\frac{u-v}{2} + \frac{u+v}{2}\right) = \sin u$$

elde edilir. Denklem (6.4) ve (6.5)'in farkından ise,

$$v_{xt} = \sin\left(\frac{u+v}{2} - \frac{u-v}{2}\right) = \sin v$$

eşitliğine ulaşırız. Yani (6.2) ve (6.3) çifti sine-Gordon denkleminin auto-Bäcklund dönüşümünü ifade eder. □

Şimdi sine-Gordon denkleminin Bäcklund dönüşümünü kullanarak denklemin aşikar çözümünden yeni bir çözüm elde edelim.

Örnek 6.1. $v(x,t) = 0$ aşikar çözümü için sine-Gordon denkleminin başka çözümleri elde edilebilir. Denklemin auto-Bäcklund dönüşümünde $v(x,t) = 0$ çözümünü aldığımızda (6.2) ve (6.3) eşitlikleri sırasıyla,

$$u_x = 2a\sin\left(\frac{u}{2}\right), \tag{6.6}$$

$$u_t = \frac{2}{a}\sin\left(\frac{u}{2}\right), \tag{6.7}$$

formunu alır. Burada (6.6) denklemini tek değişkene bağlı türev içerdiği için adi diferansiyel denklem gibi düşünerek çözebiliriz. Öyleyse,

$$ax = \ln\left|\tan\left(\frac{u}{4}\right)\right| + \frac{f(t)}{2} \tag{6.8}$$

çözümünü elde ederiz. Burada $f(t)$, t'ye bağlı bir keyfi fonksiyondur. Benzer şekilde denklem (6.7) için ise $g(x)$, x'e bağlı keyfi bir fonksiyon olmak üzere,

$$\frac{2t}{a} = 2\ln\left|\tan\left(\frac{u}{4}\right)\right| + g(x) \tag{6.9}$$

çözümüne ulaşılır. Denklem (6.8) ve (6.9)'un ortak değerlendirilmesinden,

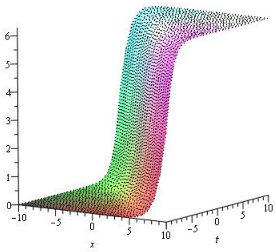
$$u(x,t) = 4\arctan(ce^{ax+\frac{t}{a}}), \qquad c \quad sabit \tag{6.10}$$

bulunur ki bu sine-Gordon denklemi için kıvrım (kink) tipinde dalga ifade eden yeni bir çözümdür.

Örnek 6.2. (6.10) çözümünde $a = 1$ ve $c = 1$ alırsak,

$$u(x, t) = 4 \arctan(e^{x+t})$$

özel çözümünü elde ederiz. Şekil 13'te bu çözümün grafiği verilmiştir.



Şekil 13: Sine-Gordon denkleminin kıvrım (*kink*) tipi çözümü

Aşağıdaki teorem, sine-Gordon denkleminin bilinen bir çözümünden sonsuz bir çözüm dizisi üretilebileceğini söyler [46].

Teorem 6.2. *u_i, $i = 1, 2$ Sine-Gordon denkleminin bilinen bir u_0 çözümünden λ_i, $i = 1, 2$ Bäcklund parametreli Bäcklund dönüşümlerinin uygulanmasıyla elde edilmiş çözümlerse, yani $u_i = R_{\lambda_i} u_0$, $i = 1, 2$ ise bu durumda,*

$$\phi = u_0 + 4 \arctan \left\{ \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \tan \left(\frac{u_1 - u_2}{4} \right) \right\}$$

öyle ki $\phi = R_{\lambda_1} R_{\lambda_2} u_0 = R_{\lambda_2} R_{\lambda_1} u_0$ denklemin yeni bir çözümüdür.

Kanıt. $u_{xt} = \sin u$ sine-Gordon denklemi için $u_0 = u_0(x, t)$ çözümünü ele alalım. Eşitlik (6.2)'yi yeni çözümler elde edebilmek için $u_1 = R_{\lambda_1} u_0$ ve $u_2 = R_{\lambda_2} u_0$ olacak şekilde aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\left(\frac{u_1 + u_0}{2} \right)_x = \lambda_1 \sin \left(\frac{u_1 - u_0}{2} \right), \tag{6.11}$$

$$\left(\frac{u_2 + u_0}{2} \right)_x = \lambda_2 \sin \left(\frac{u_2 - u_0}{2} \right). \tag{6.12}$$

Şimdi $u_{12} = R_{\lambda_2} u_1$ ve $u_{21} = R_{\lambda_1} u_2$ olacak şekilde iki yeni u_{12} ve u_{21} çözümünü inşa edelim:

$$\left(\frac{u_{12} + u_1}{2} \right)_x = \lambda_2 \sin \left(\frac{u_{12} - u_1}{2} \right), \tag{6.13}$$

$$\left(\frac{u_{21}+u_2}{2}\right)_x=\lambda_1\sin\left(\frac{u_{21}-u_2}{2}\right). \tag{6.14}$$

Eğer yukarıda yazmış olduğumuz şekilde bir tanımlama yapılabiliyorsa Teorem 3.3 ile verdiğimiz Bianchi'nin permüte edilebilirlik teoreminden,

$$u_{12}=u_{21}$$

yazabiliriz. Bu aşamada, denklem (6.11) ve (6.12)'nin farkından,

$$\left(\frac{u_1+u_0}{2}\right)_x-\left(\frac{u_2+u_0}{2}\right)_x=\lambda_1\sin\left(\frac{u_1-u_0}{2}\right)-\lambda_2\sin\left(\frac{u_2-u_0}{2}\right) \tag{6.15}$$

bulunur ve benzer olarak denklem (6.13) ve (6.14)'ün farkından ise,

$$\left(\frac{u_{12}+u_1}{2}\right)_x-\left(\frac{u_{21}+u_2}{2}\right)_x=\lambda_2\sin\left(\frac{u_{12}-u_1}{2}\right)-\lambda_1\sin\left(\frac{u_{21}-u_2}{2}\right) \tag{6.16}$$

elde ederiz. Burada denklem (6.15) ve (6.16)'nın farkını aldığımızda,

$$\lambda_2\Big\{\sin\left(\frac{u_2-u_0}{2}\right)+\sin\left(\frac{u_{12}-u_1}{2}\right)\Big\}=\lambda_1\Big\{\sin\left(\frac{u_1-u_0}{2}\right)+\sin\left(\frac{u_{21}-u_2}{2}\right)\Big\} \tag{6.17}$$

olarak bulunur. Burada $u_{12}=u_{21}=\phi$ olmak üzere $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ özdeşliğinden yararlanırsak denklem (6.17)'yi,

$$\lambda_2\sin\left(\frac{\phi-u_0-(u_1-u_2)}{4}\right)=\lambda_1\sin\left(\frac{\phi-u_0+(u_1-u_2)}{4}\right) \tag{6.18}$$

şeklinde elde ederiz. Bu aşamada ise $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\sin\beta\cos\alpha$ özdeşliğini kullanarak,

$$\tan\left(\frac{\phi-u_0}{4}\right)=\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\tan\left(\frac{u_1-u_2}{4}\right) \tag{6.19}$$

elde edilir ve bu bize,

$$\phi=u_0+4\arctan\left\{\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\tan\left(\frac{u_1-u_2}{4}\right)\right\} \tag{6.20}$$

çözümünü verir ki bu sine-Gordon denkleminin yeni bir çözümünü ifade eder. (6.20) ilişkisi sine-Gordon denkleminin bir çözümünü diğer üç çözümüyle ilişkilendiren süperpozisyon formülüdür. □

(6.20) ile verilen süperpozisyon ilişkisi kullanılarak herhangi bir integrasyon işlemi uygulamadan yeni çözümler elde edilebilir.

Not 6.1. *ϕ çözümü sine-Gordon denkleminin t türevini içeren Bäcklund dönüşümünü de sağlar. Yani,*

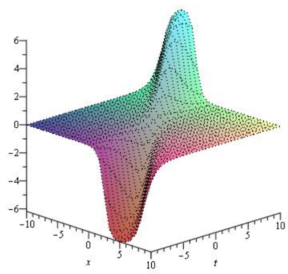
$$\left(\frac{\phi-u_1}{2}\right)_t=\frac{1}{\lambda_2}\sin\left(\frac{\phi+u_1}{2}\right),$$

$$\left(\frac{\phi-u_2}{2}\right)_t=\frac{1}{\lambda_1}\sin\left(\frac{\phi+u_2}{2}\right).$$

Örnek 6.3. $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=2$ olmak üzere (6.20)'de $u_0=0$ ve (6.10) çözümünde ise $c=1$, $a=1$ için $u_1=4\arctan(e^{x+t})$ ve $c=3$, $a=2$ için $u_2=4\arctan(3e^{2x+\frac{t}{2}})$ çözümlerini alalım. Bu durumda ϕ çözümü,

$$\begin{aligned}\phi&=4\arctan\left\{\frac{\tan(\arctan(e^{x+t})-\arctan(3e^{2x+\frac{t}{2}}))}{3}\right\}\\&=4\arctan\left\{\frac{e^{x+t}-3e^{2x+\frac{t}{2}}}{3(1+3e^{3x+\frac{3}{2}t})}\right\}\end{aligned}\tag{6.21}$$

dir. Bu çözümün grafiği Şekil 14'te verilmiştir.



Şekil 14: Sine-Gordon denkleminin kink-antikink etkileşimini ifade eden çözümü

6.2 Sine-Gordon Denklemi İçin Bilineer Formdaki Bäcklund Dönüşümü

Bu bölümde sine-Gordon denkleminin çözümleri için bilineer formdaki Bäcklund dönüşümlerini bulacağız [47].

$$\phi_{XX}-\phi_{TT}=\sin\phi\tag{6.22}$$

formundaki sine-Gordon denklemi için $\phi=4\arctan\dfrac{g}{f}$ dönüşümü uygulanarak denklemin Hirota bilineer formunu,

$$(D_X^2-D_T^2)\{g.f\}=gf\tag{6.23}$$

$$(D_X^2-D_T^2)\{f\cdot f-g\cdot g\}=0\tag{6.24}$$

halinde bir çift olarak elde ederiz. Ancak (6.22) formundaki sine-Gordon denklemi ve elde etmiş olduğumuz bilineer form, denklemin Bäcklund dönüşümlerini bulmak için pek elverişli olmadığından,

$$x = \frac{1}{2}(X + T), \qquad t = \frac{1}{2}(X - T)$$

dönüşümlerini kullanarak, (6.22) denklemini,

$$\phi_{xt} = \sin\phi \tag{6.25}$$

formunda, (6.23) ve (6.24) denklemlerini ise,

$$D_t D_x\{g \cdot f\} = gf \tag{6.26}$$

$$D_t D_x\{f \cdot f - g \cdot g\} = 0 \tag{6.27}$$

olarak yazarız. (6.26) ve (6.27) denklemlerini birleştirerek,

$$D_t D_t(f \cdot f - g \cdot g) + 2iD_t D_x f \cdot g = 2ifg$$

olduğundan tek bir denklem formunda,

$$D_t D_x\{(f + ig) \cdot (f + ig)\} = 2ifg \tag{6.28}$$

yazabiliriz.

Teorem 6.3. *(g, f) ve (g', f'), (6.26)-(6.27) denklemlerinin iki farklı çözüm çifti olsun. Bu durumda bu çözümler aşağıdaki Bäcklund dönüşümleri tarafından tanımlanır:*

$$D_x(f^{'} + ig^{'}) \cdot (f + ig) = -(a/2)(f^{'} - ig^{'})(f - ig) \tag{6.29}$$

$$D_x(f^{'} - ig^{'}) \cdot (f - ig) = -(a/2)(f^{'} + ig^{'})(f + ig) \tag{6.30}$$

$$D_t(f^{'} + ig^{'}) \cdot (f - ig) = -(1/2a)(f^{'} - ig^{'})(f + ig) \tag{6.31}$$

$$D_t(f^{'} - ig^{'}) \cdot (f + ig) = -(1/2a)(f^{'} + ig^{'})(f - ig) \tag{6.32}$$

Burada a keyfi sabittir.

Not ediniz ki Teorem 6.3'te a, f, $f^{'}$, g ve $g^{'}$ reel ise (6.30) ve (6.32) denklemleri gerekli değildir çünkü bu denklemler sırasıyla (6.29) ve (6.31) denklemlerinin kompleks eşlenikleridir.

Kanıt. Şimdi (6.29)-(6.32) denklemleri tarafından tanımlanan g' ve f' fonksiyonlarının denklem (6.28)'i sağladığını gösterelim. Sine-Gordon denkleminin Bäcklund dönüşümlerini bulmak için öncelikle aşağıdaki formu kullanalım:

$$[D_tD_x(f'+ig')\cdot(f'+ig')](f+ig)^2-(f'+ig')^2[D_xD_t(f+ig)(f+ig)]=0. \quad (6.33)$$

(7.19) ile verilen Özdeşlik (5) ve $D_x^m(f\cdot f)=0$, m *teksayı*, özelliğinden de yararlanarak denklem (6.33)'ü düzenlersek,

$$[D_tD_x(f'+ig')\cdot(f'+ig')](f+ig)^2-(f'+ig')[D_xD_t(f+ig)(f+ig)]$$

$$=D_t\{[D_x(f'+ig')\cdot(f+ig)]\cdot(f+ig)(f'+ig')+(f'+ig')(f+ig)\cdot[D_x(f+ig)\cdot(f'+ig')]\}$$

elde ederiz ki bu ifadeyi de denklem (6.29), (7.22) ile verilen Özdeşlik (6) ve $D_x^m(f\cdot g)=(-1)^mD_x^m(g\cdot f)$ özelliğini kullanarak,

$$=-a\{[D_t(f'-ig')\cdot(f+ig)](f'+ig')(f-ig)-(f'-ig')(f+ig)[D_t(f'+ig')\cdot(f'-ig')]\}$$

yazabiliriz. Bu ifadeyi ise (6.31) ve (6.32) denklemlerini göz önüne aldığımızda,

$$=(1/2)(f'+ig')(f-ig)(f'+ig')(f-ig)-(1/2)(f'-ig')(f+ig)(f'-ig')(f+ig)$$

$$=2if'g'(f+ig)^2-(f'+ig')^22ifg$$

formuna indirgeyebiliriz. Böylece g' ve f' fonksiyonlarının denklem (6.28) 'i sağladığını göstermiş olduk. Benzer şekilde g ve f fonksiyonları da (6.28) denklemini sağlayacaktır. □

Şimdi (6.29)-(6.32) Bäcklund dönüşümü denklemlerinin (6.2) ve (6.3) ile verilen Bäcklund dönüşüm çiftine indirgeyebileceğimizi gösterelim. İlk olarak (6.29) ve (6.30) denklemlerini kullanalım. Bu iki denklemin farkını alıp daha sonra (7.25) ile verilen Özdeşlik (7)'yi uygularsak,

$$[D_x(f'+ig')\cdot(f'-ig')](f+ig)(f-ig)-(f'+ig')(f'-ig')[D_x(f+ig)\cdot(f-ig)]$$

$$=-(a/2)[(f'-ig')^2(f-ig)^2-(f'+ig')^2(f+ig)^2]$$

$$=a[((f')^2-(g')^2)(2ifg)+2ig'f'(f^2-g^2)]$$

şeklinde sonuçlandırabiliriz. Bu aşamada eşitliğin her iki tarafını $(f^{'}+ig^{'})(f^{'}-ig^{'})(f+ig)(f-ig)$ ifadesine bölüp daha sonra aşağıda verilmiş olan,

$$\frac{i}{2}\frac{\partial\phi^{'}}{\partial x}=\frac{D_x(f^{'}+ig^{'})\cdot(f^{'}-ig^{'})}{(f^{'}+ig^{'})(f^{'}-ig^{'})}, \tag{6.34}$$

$$\frac{i}{2}\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{D_x(f+ig)\cdot(f-ig)}{(f+ig)(f-ig)}, \tag{6.35}$$

$$\sin\left(\frac{\phi^{'}}{2}\right)=\frac{2g^{'}f^{'}}{(f^{'}+ig^{'})(f^{'}-ig^{'})}, \tag{6.36}$$

$$\cos\left(\frac{\phi^{'}}{2}\right)=\frac{(f^{'})^2-(g^{'})^2}{(f^{'}+ig^{'})(f^{'}-ig^{'})}, \tag{6.37}$$

$$\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)=\frac{2gf}{(f+ig)(f-ig)}, \tag{6.38}$$

$$\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)=\frac{f^2-g^2}{(f+ig)(f-ig)}, \tag{6.39}$$

ilişkilerini kullanırsak denklemin Bäcklund dönüşümlerinden biri olan,

$$\frac{(\phi^{'}_x-\phi_x)}{2}=a\sin\left[\frac{\phi^{'}+\phi}{2}\right] \tag{6.40}$$

eşitliğini elde etmiş oluruz.

Benzer şekilde (6.31) ve (6.32) denklemleri için de yine önce iki denklemin farkını alıp daha sonra (7.25) ile verilen Özdeşlik (7)'yi uygulayarak,

$$[D_t(f^{'}+ig^{'})\cdot(f^{'}-ig^{'})](f+ig)(f-ig)-(f^{'}+ig^{'})(f^{'}-ig^{'})[D_t(f+ig)\cdot(f-ig)]$$

$$=-(1/2a)[(f^{'}-ig^{'})^2(f+ig)^2-(f^{'}+ig^{'})^2(f-ig)^2]$$

elde ederiz ki bu ifade bize Bäcklund dönüşümlerinin bir diğeri olan,

$$\frac{(\phi^{'}_t+\phi_t)}{2}=a^{-1}\sin\left[\frac{\phi^{'}-\phi}{2}\right] \tag{6.41}$$

eşitliğini verir.

7 Özdeşlikler

(1) $f_2f_2D_xD_t(f_1\cdot f_1)-f_1f_1D_xD_t(f_2\cdot f_2)=2D_x[\{D_t(f_1\cdot f_2)\}\cdot(f_1f_2)].$ (7.1)

Özdeşliğin sağlandığını görmek için Hirota D-operatörü tanımından faydalanırız. Bu durumda aşağıdaki açılımları görmek kolaydır.

$$D_xD_t(g\cdot g) = 2(g_{tx}g-g_xg_t) \tag{7.2}$$

$$D_t(g\cdot h) = g_th-gh_t, \tag{7.3}$$

eşitliklerini kullanarak

$$f_2f_2D_xD_t(f_1\cdot f_1)-f_1f_1D_xD_t(f_2\cdot f_2)=2f_2f_2(f_{1,tx}f_1-f_{1,x}f_{1,t}) - f_1f_1(f_{2,tx}f_2-f_{2,x}f_{2,t}), \tag{7.4}$$

elde ederiz ki bu ifade

$$\begin{aligned}&2D_x[D_t(f_1\cdot f_2)\cdot(f_1f_2)]=2D_x\{(f_{1,t}f_2-f_1f_{2,t})\cdot(f_1f_2)\}\\&=2(f_{1,tx}f_2+f_{1,t}f_{2,tx}-f_{1,x}f_{2,t}-f_1f_{2,tx})(f_1f_2)-2(f_{1,t}f_2-f_1f_{2,t})(f_{1,x}f_2+f_1f_{2,x})\end{aligned} \tag{7.5}$$

ile verilen ifadeye eşittir. Böylece Özdeşlik (1) kanıtlanmıştır.

(2) $$\begin{aligned}f_2f_2D_x^4(f_1\cdot f_1)-f_1f_1D_x^4(f_2\cdot f_2) &= 2D_x^3[\{D_x(f_1\cdot f_2)\}\cdot(f_1\cdot f_2)]\\ &= 2D_x[\{D_x^3(f_1f_2)\}\cdot(f_1f_2)]\\ &\quad+6D_x[\{D_x^2(f_1\cdot f_2)\}\cdot\{D_x(f_2\cdot f_1)\}].\end{aligned} \tag{7.6}$$

Hirota D-operatörü tanımını kullanarak bu eşitliğin de sağlandığını göstermek kolay olacaktır. İlk özellikte olduğu gibi öncelikli olarak her terimin ayrı ayrı bilineer formda açılımlarını bulalım. O halde,

$$D_x^4(g\cdot g) = 2(g_{xxxx}g-4g_{xxx}g_x+3g_{xx}^2) \tag{7.7}$$

$$D_x(g\cdot h) = g_xh-gh_x \tag{7.8}$$

olduğundan,

$$f_2f_2D_x^4(f_1\cdot f_1)-f_1f_1D_x^4(f_2\cdot f_2)=2f_2f_2(f_{1,xxxx}f_1-4f_{1,xxx}f_{1,x} + 3f_{1,xx}^2)-2f_1f_1(f_{2,xxxx}f_2-4f_{2,xxx}f_{2,x}+3f_{2,xx}^2)$$

elde ederiz ki bu ifade,

$$2D_x^3[D_x(f_1 \cdot f_2) \cdot (f_1 \cdot f_2)] = 2f_2f_2[f_{1,xxxx}f_1 - 4f_{1,xxx}f_{1,x} + 3f_{1,xx}^2] \\ - 2f_1f_1[f_{2,xxxx}f_2 - 4f_{2,xxx}f_{2,x} + 3f_{2,xx}^2], \quad (7.9)$$

ifadesine eşittir. Böylece Özdeşlik (2) kanıtlanmıştır.

(3) $f_2f_2D_x^2(f_1 \cdot f_1) - f_1f_1D_x^2(f_2 \cdot f_2) = 2D_x[\{D_x(f_1 \cdot f_2)\} \cdot (f_1f_2)]. \quad (7.10)$

Aşağıdaki

$$D_x^2(g \cdot g) = 2(g_{xx}g - g_x^2) \quad (7.11)$$

eşitliği,

$$f_2f_2D_x^2(f_1 \cdot f_1) - f_1f_1D_x^2(f_2 \cdot f_2) = 2f_2f_2(f_{1,xx}f_1 - f_{1,x}^2) - 2f_1f_1(f_{2,xx}f_2 - f_{2,x}^2) \quad (7.12)$$

ifadesini verir. (7.8) eşitliği yardımıyla ise,

$$2D_x[(f_{1,x}f_2 - f_1f_{2,x}) \cdot (f_1f_2)] = 2f_{1,xx}f_{2,x}f_1f_2 - 2f_{1,x}f_{2,xx}f_1f_2 - 2f_{1,x}^2f_{2,x}f_2 + 2f_{2,x}^2f_{1,x}f_1 \quad (7.13)$$

ifadesini elde ederiz. Bu ifade daha önce bulduğumuz (7.12) eşitliğiyle aynı olduğundan Özdeşlik (3) kanıtlanmış olur.

(4) $D_t[\{D_x^2(f_1 \cdot f_2)\} \cdot (f_1f_2)] = D_x[\{D_xD_t(f_1 \cdot f_2)\} \cdot (f_1f_2) + \{D_t(f_1 \cdot f_2)\} \cdot \{D_x(f_1 \cdot f_2)\}]. \quad (7.14)$

Özellikteki her ifadeyi bilineer formda açıp özdeşlikte yerine yazmak bu eşitliğin sağlandığını kanıtlamak için yeterli olacaktır. O halde,

$$D_x^2(g \cdot h) = g_{xx}h - 2g_xh_x + gh_{xx} \quad (7.15)$$

eşitliğinden özdeşliğin sol tarafını açık olarak aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$D_t[\{D_x^2(f_1 \cdot f_2)\} \cdot (f_1f_2)] = f_2^2f_{1,xxt}f_1 - 2f_{1,xt}f_{2,x}f_1f_2 - 2f_{2,xt}f_{1,x}f_1f_2 \\ + f_1^2f_{2,xxt}f_2 - f_{1,xx}f_2^2f_{1,t} - 2f_{1,x}f_{2,x}f_{1,t}f_2 - 2f_{1,x}f_{2,x}f_{2,t}f_1 + f_{2,xx}f_1^2f_{2,t}. \quad (7.16)$$

Buna ek olarak,

$$D_xD_t(f_1 \cdot f_2) = f_{1,xt}f_2 - f_{1,t}f_{2,x} - f_{1,x}f_2t + f_1f_{2,xt} \quad (7.17)$$

açılımı ve (7.3), (7.8) eşitlikleri ile özdeşliğin sağ tarafını,

$$D_x[\{D_xD_t(f_1\cdot f_2)\}\cdot(f_1f_2)+\{D_t(f_1\cdot f_2)\}\cdot\{D_x(f_1\cdot f_2)\}]=f_2^2f_{1,xxt}f_1-2f_{1,xt}f_{2,x}f_1f_2$$
$$-2f_{2,xt}f_{1,x}f_1f_2+f_1^2f_{2,xxt}f_2-f_{1,xx}f_2^2f_{1,t}-2f_{1,x}f_{2,x}f_{1,t}f_2-2f_{1,x}f_{2,x}f_{2,t}f_1+f_{2,xx}f_1^2f_{2,t} \tag{7.18}$$

olarak elde ederiz. (7.16) ve (7.18) ifadelerinin eşitliğinden Özdeşlik (4) kanıtlanmıs olur.

(5) $$D_t[(D_xf_1\cdot f_2)\cdot f_3f_4+f_1f_2(D_xf_3\cdot f_4)]=(D_tD_xf_1\cdot f_4)f_3f_2-f_1f_4(D_tD_xf_3\cdot f_2)$$
$$+(D_tf_1\cdot f_4)(D_xf_3\cdot f_2)-(D_xf_1\cdot f_4)(D_tf_3\cdot f_2). \tag{7.19}$$

Eşitliğin her iki tarafının bilineer formda açılımlarını bulup birbirine eşit olduğunu göstermemiz özelliği kanıtlamak için yeterli olacaktır. O halde eşitliğin sol tarafını,

$$D_t[(D_xf_1\cdot f_2)\cdot f_3f_4+f_1f_2(D_xf_3\cdot f_4)]=D_t[(f_{1,x}f_2-f_1f_{2,x})\cdot f_3f_4+f_1f_2(f_{3,x}f_4-f_3f_{4,x})]$$
$$=f_{1,xt}f_2f_3f_4+f_{1,x}f_{2,t}f_3f_4-f_{1,t}f_{2,x}f_3f_4-f_1f_{2,xt}f_3f_4-f_{1,x}f_2f_{3,t}f_4-f_{1,x}f_2f_3f_{4,t}$$
$$+f_1f_{2,x}f_{3,t}f_4+f_1f_{2,x}f_3f_{4,t}+f_{1,t}f_2f_{3,x}f_4-f_{1,t}f_2f_3f_{4,x}+f_1f_{2,t}f_{3,x}f_4-f_1f_{2,t}f_3f_{4,x}$$
$$-f_1f_2f_{3,xt}f_4-f_1f_2f_{3,x}f_{4,t}+f_1f_2f_{3,t}f_{4,x}+f_1f_2f_3f_{4,xt} \tag{7.20}$$

şeklinde elde ederiz. Sağ tarafını ise,

$$(D_tD_xf_1\cdot f_4)f_3f_2-f_1f_4(D_tD_xf_3\cdot f_2)+(D_tf_1\cdot f_4)(D_xf_3\cdot f_2)-(D_xf_1\cdot f_4)(D_tf_3\cdot f_2)$$
$$=(f_{1,xt}f_4-f_{1,x}f_{4,t}-f_{1,t}f_{4,x}+f_1f_{4,xt})f_3f_2-f_1f_4(f_{3,xt}f_2-f_{3,x}f_{2,t}-f_{3,t}f_{2,x}+f_3f_{2,xt})$$
$$+(f_{1,t}f_4-f_1f_{4,t})(f_{3,x}f_2-f_3f_{2,x})-(f_{1,x}f_4-f_1f_{4,x})(f_{3,t}f_2-f_3f_{2,t})$$
$$=f_{1,xt}f_2f_3f_4+f_{1,x}f_{2,t}f_3f_4-f_{1,t}f_{2,x}f_3f_4-f_1f_{2,xt}f_3f_4-f_{1,x}f_2f_{3,t}f_4-f_{1,x}f_2f_3f_{4,t}$$
$$+f_1f_{2,x}f_{3,t}f_4+f_1f_{2,x}f_3f_{4,t}+f_{1,t}f_2f_{3,x}f_4-f_{1,t}f_2f_3f_{4,x}+f_1f_{2,t}f_{3,x}f_4-f_1f_{2,t}f_3f_{4,x}$$
$$-f_1f_2f_{3,xt}f_4-f_1f_2f_{3,x}f_{4,t}+f_1f_2f_{3,t}f_{4,x}+f_1f_2f_3f_{4,xt} \tag{7.21}$$

olarak elde ederiz. Buradan (7.20) ve (7.21) ifadelerinin birbirine eşit olduğu görülür. Dolayısıyla Özdeşlik (5) kanıtlanmıştır.

(6) $$D_t\{f_1f_2\cdot f_3f_4\}=(D_tf_1\cdot f_4)f_3f_2-f_1f_4(D_tf_3\cdot f_2). \tag{7.22}$$

Eşitliğin her iki tarafındaki ifadelerin bilineer formda açılımlarını elde edip birbirine eşit olduğunu göstermemiz özdeşliğin sağlandığını göstermek için yeterli olacaktır. O halde eşitliğin her iki tarafı,

$$D_t f_1 f_2 \cdot f_3 f_4 = (f_1 f_2)_t f_3 f_4 - f_1 f_2 (f_3 f_4)_t = f_{1,t} f_2 f_3 f_4 + f_1 f_{2,t} f_3 f_4 - f_1 f_2 f_{3,t} f_4 - f_1 f_2 f_3 f_{4,t} \tag{7.23}$$

ve

$$\begin{aligned}(D_t f_1 \cdot f_4) f_3 f_2 - f_1 f_4 (D_t f_3 \cdot f_2) &= (f_{1,t} f_4 - f_1 f_{4,t}) f_3 f_2 - f_1 f_4 (f_{3,t f_2} - f_3 f_{2,t}) \\ &= f_{1,t} f_2 f_3 f_4 + f_1 f_{2,t} f_3 f_4 - f_1 f_2 f_{3,t} f_4 - f_1 f_2 f_3 f_{4,t}\end{aligned} \tag{7.24}$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla Özdeşlik (6) kanıtlanmıştır.

(7) $(D_t f_1 \cdot f_2) f_3 f_4 - f_1 f_2 (D_t f_3 \cdot f_4) = (D_t f_1 \cdot f_3) f_2 f_4 - f_1 f_3 (D_t f_2 \cdot f_4).$ (7.25)

Eşitlikteki her ifadenin bilineer formda açılımlarını yerine yazmak özdeşliği kanıtlamak için yeterli olacaktır. Bu durumda,

$$\begin{aligned}(D_t f_1 \cdot f_2) f_3 f_4 - f_1 f_2 (D_t f_3 \cdot f_4) &= (f_{1,t} f_2 - f_1 f_{2,t}) f_3 f_4 - f_1 f_2 (f_{3,t} f_4 - f_3 f_{4,t}) \\ &= f_{1,t} f_2 f_3 f_4 - f_1 f_{2,t} f_3 f_4 - f_1 f_2 f_{3,t} f_4 + f_1 f_2 f_3 f_{4,t}\end{aligned} \tag{7.26}$$

ve

$$\begin{aligned}(D_t f_1 \cdot f_3) f_2 f_4 - f_1 f_3 (D_t f_2 \cdot f_4) &= (f_{1,t} f_3 - f_1 f_{3,t}) f_2 f_4 - f_1 f_3 (f_{2,t} f_4 - f_2 f_{4,t}) \\ &= f_{1,t} f_2 f_3 f_4 - f_1 f_{2,t} f_3 f_4 - f_1 f_2 f_{3,t} f_4 + f_1 f_2 f_3 f_{4,t}\end{aligned} \tag{7.27}$$

olarak eşitliğin her iki tarafı elde edilir. Buradan (7.26) ve (7.27) ifadelerinin eşitliği açıktır. Dolayısıyla Özdeşlik (7) kanıtlanmıştır.

(8) $(D_x^2 f_1 \cdot f_2) f_3 f_4 - f_1 f_2 (D_x^2 f_3 \cdot f_4) = D_x[(D_x f_1 \cdot f_4) \cdot f_3 f_2 + f_1 f_4 \cdot (D_x f_3 \cdot f_2)].$ (7.28)

Eşitliğin her iki tarafının bilineer formda açılımlarını bulup birbirine eşit olduğunu göstermemiz özdeşliği kanıtlamak için yeterli olacaktır. O halde,

$$\begin{aligned}&(D_x^2 f_1 \cdot f_2) f_3 f_4 - f_1 f_2 (D_x^2 f_3 \cdot f_4) = (f_{1,xx} f_2 - 2 f_{1,x} f_{2,x} + f_1 f_{2,xx}) f_3 f_4 - f_1 f_2 (f_{3,xx} f_4 \\ &- 2 f_{3,x} f_{4,x} + f_3 f_{4,xx}) = f_{1,xx} f_2 f_3 f_4 - 2 f_{1,x} f_{2,x} f_3 f_4 + f_1 f_{2,xx} f_3 f_4 - f_1 f_2 f_{3,xx} f_4 \\ &+ 2 f_1 f_2 f_{3,x} f_{4,x} - f_1 f_2 f_3 f_{4,xx}\end{aligned} \tag{7.29}$$

$$D_x[(D_xf_1\cdot f_4)\cdot f_3f_2+f_1f_4\cdot(D_xf_3\cdot f_2)]=D_x\{(f_{1,x}f_4-f_1f_{4,x})\cdot(f_3f_2)\}$$
$$+D_x\{(f_1f_4)\cdot(f_{3,x}f_2-f_3f_{2,x})\}=f_{1,xx}f_2f_3f_4-2f_{1,x}f_{2,x}f_3f_4+f_1f_{2,xx}f_3f_4-f_1f_2f_{3,xx}f_4$$
$$+2f_1f_2f_{3,x}f_{4,x}-f_1f_2f_3f_{4,xx} \qquad (7.30)$$

elde edilir ki buradan (7.29) ve (7.30) ifadelerinin eşitliği açıktır. Dolayısıyla Özdeşlik (8) kanıtlanmıştır.

8 Sonuç

Bu tezde Bäcklund dönüşümlerinin diferansiyel denklemler ve soliton teorisi alanındaki uygulamaları üzerinde çalıştık. Diferansiyel denklemlerin bilinen çözümlerinden, Bäcklund dönüşümleriyle ilişkilendirildikleri denklemlerin çözümlerinin bu dönüşümler aracılığıyla elde edilebileceğini gördük.

Bianchi permüte edilebilirlik teoremini kullanarak Bäcklund dönüşümleri üzerinden KdV, Boussinesq ve sine-Gordon denklemlerinin, kendi çözümleri arasında yeni çözümler üretecek süperpozisyon formüllerini elde ettik. Bu formülleri kullanarak örnek olarak verilen bu lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin sonsuz dizisini elde edebileceğimizi gördük. Bu sayede Korteweg-de Vries, Boussinesq ve sine-Gordon denklemlerinin aşikar çözümlerinden multi-soliton çözümlerine ulaşabileceğimizi gösterdik.

Aynı zamanda integre edilebilir denklemlerin multi-soliton çözümlerini bulmak için kullanılan Hirota metodunu kısaca anlattık. Bu yöntemde tanımını verdiğimiz Hirota D-operatörünü kullanarak da Bäcklund dönüşümlerini bulabileceğimizi gösterdik. KdV denklemini hem Hirota D-operatörü ile hem de bu operatörü kullanmadan ayrıntılı bir şekilde inceledik.

Kaynaklar

[1] Russell S. J., *Fourteenth meeting of the British association of the advancement of science*, Report on waves, 311-390, eds. John Murray, London, **1844**

[2] Bour E., *Théorie de la déformation des surfaces*, J. Ecole Imperiale Polytechnique, 19, 1-48, **1862**

[3] Frenkel J., Kontorova T., *On theory of plastic deformation and twinning*, Izvestiya Akademii Nauk SSSR, Seriya Fizicheskaya, 1, 137-149, **1939**

[4] Boussinesq J., *Théorie générale des mouvements qui sont propagés dans un canal rectangulaire horizontal*, C. R. Acad. Sc. Paris, 73, 256–260, **1871**

[5] Kirby J.T., *Advances in Coastal Modeling*, V. C. Lakhan (ed), chapter Boussinesq models and applications to nearshore wave propagation, surfzone processes and wave-induced currents, 1–41, Elsevier, **2003**

[6] Boussinesq J., *Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond*, J. Math. Pures Appl., 17, 55–108, **1872**

[7] Korteweg D. J., de Vries G., *On the change form of long waves advancing in rectangular canal and on a new type of long stationary waves*, Philos. Mag. Ser. 5, 39, 422-443, **1895**

[8] Zabusky N. J., Kruskal M. D., *Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states*, Phys. Rev. Lett., 15, 240-243, **1965**

[9] Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal M. D., Miura M. D., *Method for solving the Korteweg-de Vries equation*, Phys. Rev. Lett., 19, 1095-1097, **1967**

[10] Lax P. D., *Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves*, Commun. Pure Appl. Math., 21, 467-490, **1968**

[11] Hirota R., *Exact solution of the Korteweg-de Vries equation for multiple collisions of solitons*, Phys. Rev. Lett., 27, 1192, **1971**

[12] Hirota R., *Exact solution of the modified Korteweg-de Vries equation for multiple collisions of solitons*, J. Phys. Soc. Japan, 33, 1456, **1972**

[13] Hirota R., *Exact solution of the sine-Gordon equation for multiple collisions of solitons*, J. Phys. Soc. Japan, 33, 1459, **1972**

[14] Hirota R., *Exact envelope-soliton solutions of a nonlinear wave equation*, J. Math. Phys., 14, 805-809, **1973**

[15] Hirota R., *Exact N-soliton solution of a nonlinear lumped network equation*, J. Phys. Soc. Japan, 35, 286-288, **1973**

[16] Bianchi L., *Sulla trasformazione di Bäcklund per le superficie pseudesferiche*, Rend. Acad. Naz. Lincei, 1, 3-12, **1892**

[17] Bäcklund A. V., *Zur theorie der partiellen differential gleichungen erster ordnung*, Math. Ann., 17, 285–328, **1880**

[18] Hirota R., *A new form of Bäcklund transformation and its relation to the inverse scattering problem*, Prog. Theor. Phys., 52, 1498 **1974**

[19] Wadati M., Sanuki H., Konno K., *Relationships among inverse method, Bäcklund transformation and an infinite number of conservation Laws*, Prog. Theor. Phys., 53, 419, **1975**

[20] Chen H. H., *General derivation of Bäcklund transformations from inverse scattering problems*, Phys. Rev. Lett., 33, 925-928, **1974**

[21] Chen H. H., *Relation between Bäcklund transformations and inverse scattering problems*, in Bäcklund Transformations, Ed. R. M. Miura, Lecture Notes in Mathematics 515, Springer-Verlag, New York, **1976**

[22] Ablowitz M. J., Kaup D. J., Newell A. J., Segur H., *The inverse scattering transform-Fourier analysis for nonlinear problems*, Stud. Appl. Math., 53, 249-315, **1974**

[23] Wadati M., Konno K., *Simple derivation of Bäcklund transformation from Ricatti form of inverse method*, Prog. Theor. Phys., 53(6), 1652-1656, **1975**

[24] Lamb G. L., *Bäcklund transformations for certain nonlinear evolution equations*, J. Math. Phys., 15, 2157-2165, **1974**

[25] Lamb G. L., *Bäcklund transformations at the turn of the century*, in Bäcklund Transformations, Ed. R. M. Miura, Lecture Notes in Math., 515, Springer, New York, **1976**

[26] Bianchi L., *Lezioni de geometria differenziale*, vol. ii, Pisa, **1902**

[27] Lamb G. L., *Analytical descriptions of ultrashort optical pulse propagation in a resonant medium*, Rev. Mod. Phys., 43, 99-124, **1971**

[28] Wahlquist D., Estabrook F. B., *Bäcklund Transformation for Solution of the Korteveg-de Vries Equation*, Phys. Rev. Lett., 31, **1973**

[29] Tu G., *Bäcklund transformation and conservation laws of Boussinesq equation*, Acta Math. Appl. Sinica 4 (in Chinese) **1981**

[30] Rogers C., Shadwick W. F., *Bäcklund Transformation and Their Applications*, Academic Press, Newyork, **1982**

[31] Xun-Cheng H. *A two-parameter Bäcklund Transformation for the Boussinesq Equation*, J. Phys. A: Math. Gen., 15, **1982**

[32] Hirota R. *The Direct Method in Soliton Theory*, Cambridge Universty Press, Cambridge, **2004**

[33] Hietarinta J. *Introduction to the Hirota Bilinear Method*, arXiv:solv1-int/9708006, **1997**

[34] Pekcan A. *The Hirota Direct Method*, Master's Thesis, Bilkent University, Ankara, **2005**

[35] Goldstein P. P., *Hints on the Hirota Bilinear Method*, Acta Physica Polonica A, 112, **2007**

[36] Ablowitz M. J., Segur H., *Solitons and the Inverse Scattering Transform*, Soc. Ind. App. Math., USA, **1981**

[37] Darboux G., *Sur I'équation aux dérivées partielles des surfaces à courbure constante*, C. R. Acad. Sc., Paris, 97, 946-949, **1883**

[38] Conte R., Musette M., *The Painlevé Handbook*, Springer, **2008**

[39] Hirota R., Satsuma J. *A Simple of Superposition Formula of the Bäcklund Transformation*, J. Phys. Japan, 45, **1978**

[40] Miura R. M., *Korteveg-de Vries Equation and Generalizations. I.A Remarkable Explicit Nonlinear Transformation*, J. Math. Phys., 9, 1202, **1968**

[41] Graham W. G., *Bäcklund Transformation*, City University, UK, **2012**

[42] Gesztezy F., Simon B., *Constructing solutions of the mKdV-equation*, J. Funct. Anal., 89, 53–60, **1990**

[43] Drazin P. G., Johnson R. S., *Solitons: an introduction*, Cambridge University Press, Cambridge, **1996**

[44] Nimmo J. J. C., Freeman N. C., *A method of obtaining the N-soliton solution of the boussinesq equation in terms of a Wronskian*, Phys. Lett., 95A, No:1 **1983**

[45] Hirota R., Satsuma J., *Nonlinear Evolution Equations Generated from the Bäcklund Transformation for the Boussinesq Equation*, Prog. Theor. Phys., 57, **1977**

[46] Fordy A. P., *A Historical Introduction to Solitons and Bäcklund Transformations.* In: Fordy A.P., Wood J.C. (eds) Harmonic Maps and Integrable Systems. Aspects of Mathematics, vol E 23. Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, **1994**

[47] Hirota R. *A New Form of Bäcklund Transformation and Its Relation to the Inverse Scattering Problem*, Prog. Theor. Phys., 52, **1974**

ÖZGEÇMİŞ

Kimlik Bilgileri

Adı Soyadı	:	Nurdan KAR
Doğum Yeri	:	YEŞİLYURT/TOKAT
Medeni Hali	:	Bekar
E-posta	:	nurdankar91@gmail.com

Eğitim

Lise	:	2005-2009	Ömer Seyfettin Anadolu Lisesi
Lisans	:	2009-2014	Uşak Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Yabancı Dil ve Düzeyi

İngilizce, İyi

İş Deneyimi

–

Deneyim Alanları

–

Tezden Üretilmiş Projeler ve Bütçesi

–

Tezden Üretilmiş Yayınlar

–

Tezden Üretilmiş Tebliğ ve/veya Poster Sunumu ile Katıldığı Toplantılar

–

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS/DOKTORA TEZ ÇALIŞMASI ORJİNALLİK RAPORU

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI BAŞKANLIĞI'NA

Tarih: 12/06/2018

Tez Başlığı / Konusu: Lineer Olmayan Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Bäcklund Dönüşümleri

Yukarıda başlığı/konusu gösterilen tez çalışmamın a) Kapak sayfası, b) Giriş, c) Ana bölümler d) Sonuç kısımlarından oluşan toplam ...60... sayfalık kısmına ilişkin, 04./06./2018 tarihinde ~~şahsım~~/tez danışmanım tarafından *Turnitin* adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 11. 'tür.

Uygulanan filtrelemeler:
1- Kaynakça hariç
2- Alıntılar ~~hariç~~/dâhil
3- 5 kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Çalışması Orjinallik Raporu Alınması ve Kullanılması Uygulama Esasları'nı inceledim ve bu Uygulama Esasları'nda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

12/06/2018

Tarih ve İmza

Adı Soyadı: Nurdan KAR
Öğrenci No: N16223096
Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Yüksek Lisans
Statüsü: ☒ Y.Lisans ☐ Doktora ☐ Bütünleşik Dr.

DANIŞMAN ONAYI

UYGUNDUR.

Doç. Dr. Aslı Yıldız
(Unvan, Ad Soyad, İmza)