BAĞIMLI ÇOKLU HAYAT ANÜİTELERİNDE UZUN ÖMÜRLÜLÜK RİSKİNİN STOKASTİK ANALİZİ

STOCHASTIC ANALYSIS OF LONGEVITY RISK IN DEPENDENT MULTIPLE LIFE ANNUITIES

ÖZER BAKAR

Dr. Öğr. Üyesi MURAT BÜYÜKYAZICI
Tez Danışmanı

Hacettepe Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin
Aktüerya Bilimleri Anabilim Dalı için Öngördüğü
YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırlanmıştır.

2018

ÖZER BAKAR'ın hazırladığı **"Bağımlı Çoklu Hayat Anüitelerinde Uzun Ömürlülük Riskinin Stokastik Analizi"** adlı çalışma aşağıdaki jüri tarafından **AKTÜERYA BİLİMLERİ ANABİLİM DALI**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Cenap ERDEMİR
Başkan ....

Dr. Öğr. Üyesi Murat BÜYÜKYAZICI
Danışman ....

Prof. Dr. Meral SUCU
Üye ....

Doç. Dr. Könül BAYRAMOĞLU KAVLAK
Üye ....

Dr. Öğr. Üyesi Yasemin GENÇTÜRK
Üye ....

Bu tez Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. Menemşe GÜMÜŞDERELİOĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

YAYINLAMA VE FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI BEYANI

Enstitü tarafından onaylanan lisansüstü tezimin/raporumun tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı (kağıt) ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda verilen koşullarla kullanıma açma iznini Hacettepe Üniversitesi'ne verdiğimi bildiririm. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet haklarım bende kalacak, tezimin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanım hakları bana ait olacaktır.

Tezin kendi orijinal çalışmam olduğunu, başkalarının haklarını ihlal etmediğimi ve tezimin tek yetkili sahibi olduğumu beyan ve taahhüt ederim. Tezimde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanması zorunlu metinlerin yazılı izin alarak kullandığımı ve istenildiğinde Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederim.

- ✓ **Tezimin/Raporumun tamamı dünya çapında erişime açılabilir ve bir kısmı veya tamamının fotokopisi alınabilir.**
  (Bu seçenekle teziniz arama motorlarında indekslenebilecek, daha sonra tezinizin erişim statüsünün değiştirilmesini talep etseniz ve kütüphane bu talebinizi yerine getirse bile, teziniz arama motorlarının önbelleklerinde kalmaya devam edebilecektir.)

- **Tezimin/Raporumun .... tarihine kadar erişime açılmasını ve fotokopi alınmasını (İÇ Kapak, Özet, İçindekiler ve Kaynakça hariç) istemiyorum.**
  (Bu sürenin sonunda uzatma için başvuruda bulunmadığım taktirde, tezimin/raporumun tamamı her yerden erişime açılabilir, kaynak gösterilmek şartıyla bir kısmı veya tamamının fotokopisi alınabilir.)
- **Tezimin/Raporumun .... tarihine kadar erişime açılmasını istemiyorum, ancak kaynak gösterilmek şartıyla bir kısmı veya tamamının fotokopisi alınabilir onaylıyorum.**
- **Serbest Seçenek/Yazarın Seçimi**

07 / 06 / 2018

ÖZER BAKAR

ETİK

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında,

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversitede veya başka üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

07/06/2018

ÖZER BAKAR

ÖZET

BAĞIMLI ÇOKLU HAYAT ANÜİTELERİNDE UZUN ÖMÜRLÜLÜK RİSKİNİN STOKASTİK ANALİZİ

Özer BAKAR
Yüksek Lisans, Aktüerya Bilimleri Bölümü
Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Murat BÜYÜKYAZICI
Haziran 2018, 49 sayfa

Anüite ürünleri, uzun dönemlilik doğası gereği tahmin edilmesi gereken karmaşık değişkenlere sahiptirler. Bu değişkenlerden biri anüitenin net tek primi hesaplanırken kullanılan faiz oranıdır. Faiz oranının deterministik kabul edilmesi uzun dönem gerçekliğini yansıtmayabilir ve bunun sonucunda yanlış hesaplamalar yapılabilir. Özellikle anüite ürünlerinde faiz oranının bir rastlantı değişkeni olması durumu daha gerçekçi hesaplamaların yapılmasını sağlayacaktır.

Hesaplamalar için gerekli bir diğer parametre ise bireylerin yaşam olasılığıdır. Her geçen yıl teknolojinin gelişmesi, sağlık hizmetlerindeki olanaklar ve sağlık hizmetlerine erişimdeki artış, ekonomik ve demografik faktörler ile bu olguyu destekleyebilecek birçok faktör, beklenen gelecek yaşam süresinin artmasına neden olmaktadır. Beklenen gelecek yaşam süresindeki bu artış uzun ömürlülük riski olarak tanımlanır. Sigorta şirketleri anüite ürünlerinin hesaplamalarını yaparken hayat tablolarından elde edilen yaşam olasılıklarını kullanırlar. Bu yaşam olasılıkları statik olup her yaş için sabit bir değere sahiptir,

yani uzun ömürlülük riskini içermezler. Şirketler doğru hesaplamalar yapabilmek adına modellemelerinde bu parametrelerin belirsizliği nedeniyle zorluklar yaşamaktadırlar. Uzun ömürlülük riskini göz ardı eden modeller prim veya rezerv hesaplamalarında hatalara sebep olabilir. Bu hatalar nedeniyle de sigorta şirketinin zarar etmesi bile söz konusu olabilecektir.

Genel olarak çoklu hayata ilişkin ürünlerde yapılan hesaplamalar, bireylerin gelecek gelecek yaşam sürelerinin bağımsızlığı varsayımı altındadır. Hesaplamalarda bu varsayım kolaylık sağlasa da gerçeği yansıtmayabilir. Kopula bağımlılık modelleri bireyler arasındaki ilişkiyi açıklamada sık kullanılan bir yöntemdir. Bu çalışmada eşler arasında gelecek yaşam sürelerinin bağımlılığı varsayımı Frank kopula fonksiyonu yardımıyla incelenmiştir.

Bu çalışmada anüitenin net tek priminin hesaplanmasında kullanılacak iki temel değişkenden faiz oranı için AR(1) modeli kullanılmıştır. Türkiye İstatistik Kurumu'ndan (TUİK) elde edilen 2005-2018 yılı arasındaki devlet iç borçlanma senetleri (DİBS), dolar ve hisse senedinin yıllık reel getirileri incelenmiştir. Bu getiriler belli oranlarla ağırlıklandırılarak düşük ve yüksek riskli reel getiri oran serileri elde edilmiştir. Daha sonra bu reel getiriler kullanılarak AR(1) modeli oluşturulmuş ve gelecek yıllara ilişkin reel getiri oranları tahmin edilmiştir. Diğer temel değişken olan yaşam olasılığı için ise 2017 yılında "*Türkiye Sigortalı ve Anüitant Hayat Tablolarının Oluşturulması ve Projeksiyonları*" projesi ile oluşturulan anüitant uzun ömürlülük riskini içeren dinamik hayat tablolarından yaşlara ve yıllara göre değişen yaşam olasılıkları kullanılmıştır.

Çoklu hayat anüitelerinde birleşik yaşam ve son yaşayan anüitelerinin net tek primleri, dinamik ve statik yaşam olasılıkları ile eşlerin gelecek yaşam süreleri arasında bağımsızlık ve bağımlılık varsayımları altında hesaplanmıştır. Monte Carlo benzetim yöntemi yardımıyla hesaplanan bu değerler karşılaştırılmış ve sonuçlar yorumlanmıştır. Bulunan sonuçlara göre gelecek gelecek yaşam sürelerinin bağımlılığı durumunda birleşik tam hayat anüitesinin net tek primi bağımsızlık durumuna göre daha yüksek iken, son yaşayan anüitesinin bağımlılık durumunda net tek primi bağımsızlık durumuna göre daha düşük sonuçlar vermektedir. Bunun nedeni eşler arasında pozitif bağımlılık kabul edildiğinde bireylerden birinin yaşaması durumu, diğerinin yaşam olasılığını arttırırken, eşlerden biri öldüğünde diğer eşin yaşam olasılığını düşürmesidir. Faiz oranının stokastik olması durumunda ise net tek primlerin daha yüksek sonuçlar verdiği görülmüştür. Uzun ömürlülük riskini içeren tablolarla yapılan anüite hesaplamalarında ise net tek primler uzun ömürlülük riskini içermeyen tablolara göre hesaplanan net tek primlerden daha yüksektir.

Anahtar Kelimeler: Uzun Ömürlülük Riski, Monte-Carlo Benzetimi, Çoklu Hayat Anüiteleri, Stokastik Getiri Oranı, Stokastik Ölümlülük, Otoregresif Süreç, Kopula Bağımlılık.

ABSTRACT

STOCHASTIC ANALYSIS OF LONGEVITY RISK IN DEPENDENT MULTIPLE LIFE ANNUITIES

Özer BAKAR

Master of Science, Department of Actuarial Sciences

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Murat BÜYÜKYAZICI

June 2018, 49 pages

Annuity products have complex variables that need to be predicted because of its long-term nature. One of these variables is the interest rate that used when calculating the net single premium of the annuity. The acceptance of the interest rate as deterministic may not reflect the long-term reality, which may result in miscalculation. Especially when the interest rate is taken as a random variable in the annuity products, more realistic calculations will be made.

Another parameter that is necessary for the calculations is the life probability of the individuals. Every year, the development of the technology, the opportunities in health services and the increase in access to health services, economic and demographic factors and many factors that can support this phenomenon cause the expected life time to increase. This increase in life expectancy is defined as the risk of longevity. Insurance companies use the life probabilities obtained from life tables when calculating annuity products. These life probabilities are static and have a constant value for all ages, ie they do not contain the

risk of longevity. In order to make accurate calculations, companies are experiencing difficulties in modelling due to the uncertainty of these parameters. Models that ignore the risk of longevity will cause miscalculations, which can lead to errors in premium or reserve calculations and even cause the insurance company to lose money.

In general, calculations made on products related to multiple lifes are based on the assumption that lifetimes are independent. In calculations, this assumption may be useful, but it may not reflect reality. Copula dependency models are a commonly used method of describing relationships between individuals. In this study, the assumption of dependency of life time between spouses was examined with the help of the Frank copula function.

In this study, the AR (1) model was used for the interest rate which is one of the two basic variables that used in calculating the net single premium of the annuity. For the years between 2005-2018, government debt securities, dolar and stocks annual real returns were examined which was obtained from Turkey Statistical Institute (TUIK). These returns are weighted with certain ratios, yielding low and high risk return rate ratios. Then, AR (1) model was created by using these real returns and the real rates of return for the coming years were estimated. For life probabilities of individuals which is the other basic variable, the life probabilities that vary according to age and years obtained from the dynamic life table which is generated from the project made in Turkey called "Creating the Insured and Anüitant Life Tables and Projections".

The net single premiums of joint life and last surviving annuities in multiple life annuities have been calculated under the assumptions of independence and dependence between spouses future life times with dynamic and static life probabilities. These values calculated with Monte Carlo simulation method and results are compared. According to the results, in case of dependence of life time, the net single premium of the joint life whole annuity is higher than that of independence, whereas the survivorship whole annuity gives lower results under dependency than the net single premium in independence case. The reason is when positive dependence is accepted among the spouses, the possibility of life increases if the other spouse is alive, while the possibility of life decreases if the other spouse is dead. If the interest rate is stochastic, the net single premiums show higher results. In annuity calculations made with tables that includes the risk of longevity, the net single premiums are higher than the net single premiums calculated according to the table without the risk of longevity.

Keywords: Longevity risk, Monte-Carlo Simulation, Multiple Life Annuities, Stochastic Return, Stochastic Mortality, Autoregressive Model, Copula Dependency

TEŞEKKÜR

Tez aşamamın başlangıcından bitimine kadar en büyük rolü oynayan, bu tezin her satırında emeği olan, her zor anımda desteğiyle hakkını ödeyemeyeceğim tez danışmanım Sayın Dr. Öğr. Üyesi Murat BÜYÜKYAZICI'ya,

Her daim desteğini hissettiğim, öğrencisi olmaktan gurur duyduğum hocam Sayın Prof. Dr. Meral SUCU'ya,

Her zaman içtenliği, güler yüzü ve samimiyetiyle bu mesleği bende mutlulukla yapma isteği uyandıran değerli hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Yasemin GENÇTÜRK'e,

Tez jürimde yer alan, değerli katkı ve önerileriyle beni aydınlatan hocalarım Sayın Prof. Dr. Cenap ERDEMİR ve Sayın Doç. Dr. Könül BAYRAMOĞLU KAVLAK'a,

Üniversiteye başladığım günden beri mutluluğumu ve mutsuzluğumu paylaştığım, hayatımı daha kolay yaşanır hale getiren ve meslek hayatımda da örnek aldığım Arş. Gör. Dr. Kahraman İPEKDAL'a ve Arş. Gör. Cihan ALAN'a,

Meslektaşım, Dumlupınar Üniversitesi'nde aynı koridordan çok bir kaderi paylaştığım, arkadaşlığıyla da her zaman desteğini gördüğüm Arş. Gör. Murat KIRKAĞAÇ ve tanıştığımız günden beri her konuştuğumuzda mutluluk duyduğum, yüzünden gülücükler eksik olmayan Öğr. Gör. Şenay KIRKAĞAÇ'a,

Kalbimin en derinlerinden teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİLLER

ÇİZELGELER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

δ	Stokastik Getiri Oranı
ε	Bağımsız ve Aynı Dağılıma Sahip Rastlantı Değişkeni
μ	Ortalama Reel Getiri Oranı
Φ	Ortalamaya Dönüş Hızı
σ	Kısa Dönem Reel Getiri Oranının Oynaklığı
∝	Bağımlılık Parametresi
ω	Yaşanan Son Yaş

Kısaltmalar

NTP	Net Tek Prim
AR	Otoregresif (Autoregressive)
MA	Hareketli Ortalama (Moving Average)
ARCH	Otoregresif Koşullu Değişen Varyans
TUİK	Türkiye İstatistik Kurumu
TÜFE	Tüketici Fiyat Endeksi
DİBS	Devlet İç Borçlanma Senetleri
ARIMA	Otoregresif Hareketli Ortalama (Autoregressive Moving Average
BD	Bugünkü Değer
Std. Sp.	Standart Sapma
Ort.	Ortalama

1. GİRİŞ

1.1. Giriş

Sigortacılık, rastgele gelişebilecek olayların finansal etkilerini koruma ihtiyacından doğmuştur. Sigortalı, üzerinde taşıdığı riski prim olarak adlandırılan belirli bir bedel karşılığında sigortacıya devreder. Sigortacı da sigortalıdan aldığı prim karşılığı üstlendiği rastgele olay gerçekleştiğinde, sigortalıya tazminat ödemekle yükümlüdür. Bu rastgele olayın gerçekleşmesi, sigortacılık biliminde tehlike olarak adlandırılır. Hayat sigortalarında tehlike; bireylerin yakınlarının ölümü ile karşı karşıya kaldıkları finansal tehlikedir. Bu tehlike birçok nedenden ötürü tek bir ödeme şeklinde değil, lehtarın yaşama koşuluna bağlı olarak düzenli ödemeler şeklinde de yapılabilir.

Belirli aralıklarla yapılan ödemeler dizisi anlamında olan anüite, ödemelerinde yaşam koşulu arandığında hayat anüitesi adını alır. Hayat anüitesi ürünlerinde ödemeler sigortalı bir bireyin yaşaması durumunda hemen veya belirli bir süre sonra başlayabilmekte, belirli bir dönem veya ömür boyu sürebilmektedir. Hayat anüitesinde ödemeler belirli bir dönem sürüyorsa dönemsel anüite, ölüm gerçekleşene kadar sürüyor ise de tam anüite adını alır.

Ödemelerin rastgelelik içermediği, sabit, artan veya azalan biçimde olduğu ve eşit zaman aralıkları ile yapıldığı serilere kesin anüite denir. Hayat anüitesinde ise ödemeler hayat sigortalarının tersine yaşam koşuluna bağlıdır. Tazminat ödemeleri, hayat anüitesine konu olan bireyin yaşaması durumunda yapılmaktadır [1]. Anüitant adını alan lehtar, bu ödemelere yaşama koşuluna bağlı olarak sahip olur ya da farklı bir ürün çatısı altında yaşama koşuluna bağlı olarak ödeme yapar. Bir diğer deyişle hayat anüitesi vefat durumunda tazminat ödenen hayat sigortası ürünlerinin primi periyodik biçimde yaşam koşuluna bağlı olarak ödendiğinde bu ödeme dizisi de bir hayat anüitesi olmaktadır [2].

Birden fazla bireye yaşam koşuluna bağlı olarak yapılacak ödemelere çoklu hayat anüitesi denir. Bu anüiteler ilk ölümün gerçekleşmesiyle sona eren birleşik (joint) yaşam ve son ölümün gerçekleşmesiyle sona eren son yaşayan (last survivor) hayat anüitesi olarak adlandırılır. Aktüeryal yazında ilk ölüm durumunda çoklu hayat anüitesi bileşik yaşam, son ölüm durumunda çoklu hayat anüitesi ise son hayatta kalan anüitesi olarak da adlandırılmaktadır. İlk ölüm durumu, bireylerden birinin hayatını kaybettiği ilk anı, son ölüm durumu ise bireylerin hayatta hiçbirinin kalmadığı anı ifade eder.

Anüite ürünlerinin aktüeryal analizi yapılırken en önemli iki bileşen paranın zaman değeri ve ölümlülüktür. Gelecekte yapılacak prim ve tazminat ödemeleri için deterministik faiz oranının kullanılması, faiz oranının uzun dönemde sergileyeceği rastsal hareketlerin yakalanamamasına neden olur.

Aynı doğrultuda deterministik ölüm modellerinde, gelecekte ölüm hızının değişmeyeceği varsayılır ve aynı yaştaki tüm bireylerin ölümlülüklerinin aynı olduğu düşünülür. Farklı yaşlardaki ölümlülük ve gelecekteki ölüm hızı dikkate alınmadığı için gözlemlenen ölümlülüklerde farklılıkların meydana gelmesi, stokastik ölümlülük modellerinin ortaya çıkmasını sağlamıştır [3].

Anüite piyasasının gelişmesinde bireylerin emeklilik dönemlerindeki refah seviyelerini koruma isteği önemli bir rol oynar. Sigorta ve emeklilik şirketleri, kişilerin bu dönemdeki gelir kaybını önleme isteğine karşılık verebilmek için uygun ürünler tasarlamaktadırlar. Bir anüite ürününün ölümlülük ve yatırım riskine karşı önlem alıp daha doğru hesaplamalar yapmaları, şirketler açısından oldukça önemlidir [4].

Anüite ürünlerinin hesaplamaları yapılırken, poliçedeki süre kapsamında birikimin bireye yaşadığı sürece düzenli olarak paylaştırılması ve öldükten sonra geriye kalmayacak şekilde ayarlanması gerekir. Yaşam durumundaki belirsizlik nedeniyle bu hesaplamayı yapmak bir hayli zordur. Bu zorluklardan bazıları,

- Tek bir prim ödemesi yoksa emeklilik öncesi prim ödeme süresinin emeklilik sonrası dönemden daha kısa olması,
- Bireyden alınan primlerin emeklilik süresince yapılacak ödemeleri karşılayamaması,
- Ürünü alan bireylerin beklenenden daha uzun yaşaması

şeklinde olabilir [5].

Wadsworth'ün [5] çalışmasında belirtilen en önemli risklerden biri de aynı zamanda sigorta şirketlerinin anüite ürünleri hazırlarken karşılaştıkları uzun ömürlülük riskidir. Uzun ömürlülük, bireylerin beklenen gelecek yaşam süresindeki artış olarak tanımlanır. En basit anlamda beklenen gelecek yaşam süresindeki artış, emeklilik döneminde daha fazla süre geçirmeye yol açar. Şirketlerin, uzun ömürlülüğün dâhil edilmediği ölüm oranları kullanılarak yaptıkları prim hesaplamaları ise önemli kayıplara yol açabilmektedir.

Sigorta ve emeklilik şirketleri uzun ömürlülük riskinden fazla maliyetli olan reasürans anlaşmaları yardımıyla korunmaktadırlar fakat yüksek maliyet, bu anlaşmaları belirli limitlerle yapma zorunluluğu getirmektedir. Uzun ömürlülük türev ürünleri daha az maliyetli ve daha efektif bir yöntem olarak kullanılmaktadır [6]. Bir uzun ömürlülük menkul kıymeti sayesinde bireylerin daha uzun yaşamaları durumunda sigortacı daha fazla kupon ödemesi alarak bu riski reasürans anlaşmalarından daha iyi yönetebilmektedir [7]. Uzun ömürlülükten korunma yöntemlerinden bir diğeri ise dinamik ölümlülük oranlarını kullanarak uzun ömürlülüğü modele dâhil etmektir. Bu sayede yıllar itibari ile uzun ömürlülük riskini içeren ölüm oranları ile daha doğru prim hesaplamaları yapılabilir.

Kelime anlamı olarak kopula, Latince "bağ" veya "bağlamak" anlamına gelen "copula" kelimesinden gelmektedir. İki şeyi birbirine bağlayan anlamı taşıyan kopula, evrensel dilde literatürde yer alır [8].

Özellikle bugünkü değer hesaplamalarında önemli etkiye sahip olan bağımlılık kavramı, bireylerden birinin yaşaması veya ölmesi durumunda diğerinin yaşam olasılığını etkiler [9].

Bu tezde çoklu yaşam durumu, evli çiftleri kapsayan iki kişi ile sınırlandırılmış ve çiftlerin yaşam durumları kopula bağımlılık modeli ile incelenmiştir. Çalışmanın birinci bölümünde çoklu hayat anüitelerinde bireylerin yaşamlarının bağımlılığı, stokastik faiz oranı ve uzun ömürlülük riski ile ilgili geçmişteki çalışmalar incelenmiştir. İkinci bölümde modele dâhil edilecek stokastik faiz oranı, kopula bağımlılık modeli ve uzun ömürlülük riski ile uzun ömürlülük riskini içeren dinamik hayat tablosu anlatılmıştır. Üçüncü bölümde çoklu hayat anüitelerinde birleşik ve son yaşayan durumunda bireylerin yaşam fonksiyonları açıklanmış ve gelecek yaşam sürelerinin bağımsızlığı ve bağımlılığı durumunda çoklu hayat anüitelerinin net tek primleri (NTP) anlatılmıştır. Dördüncü ve son bölümde ise Monte Carlo benzetim yöntemi ile gelecek yaşam sürelerinin bağımlı ve bağımsız olduğu durumlarda tam hayat anüitelerinin stokastik ve deterministik net tek primleri hesaplanmıştır. Ayrıca uzun ömürlülüğün etkisini sınamak adına, hayat tablosunun dinamik özelliğinden vazgeçilerek hesaplamalar yapılmış ve sonuçlar karşılaştırılmıştır.

1.2. Önceki Çalışmalar

Olasılıklı ödeme dizileri olarak tanımlanan hayat anüiteleri çalışmaları hayatlar üzerindeki belirsizlik var olduğundan beri süregelmektedir. İlk çalışmalar yalnızca bir kişinin yaşamını merkeze almış ve bu bağlamda gelişmişken, birden fazla yaşamı konu eden çoklu hayat anüitelerinde çiftlere ilişkin çalışmalar 20. yüzyılın ortalarına kadar gitmektedir.

Geleneksel olarak, çoklu hayat ürünlerinde birleşik yaşam olasılıkları, çiftlerin gelecek yaşam sürelerinin bağımsızlığı varsayımı altında hesaplanmaktadır. Bu varsayım altında birleşik yaşam olasılığı, bireylerin ayrı ayrı yaşam olasılıklarının bir bileşeni olarak düşünülür. Dolayısıyla bu olasılık tek bir yaşam olasılığına indirgenmiş olur [10].

Olasılık teorisi kapsamında “Copula” terim olarak ilk defa Sklar [11] tarafından kullanılmıştır. Değişkenler arasındaki ilişkilerin anlaşılması ve analiz edilmesi konularında sağladıkları kolaylık nedeniyle kopula dağılımları, son zamanlarda yoğun ilgi görmeye ve birçok alanda yaygın olarak kullanılmaya başlanmıştır.

Çoklu hayat ürünlerine ilişkin hesaplamalarda eşlerin aynı riske maruz kalma olasılığı, “kırık kalp sendromu” gibi eşlerden birinin öldüğünde diğer eşin ölüm oranının artması gibi etkenler, bağımlı modellerin ortaya çıkmasına neden olmuştur. Parkes vd. [12] ve Ward [13] kırık kalp sendromu kavramını kullanan ilk çalışmalardandır. Göreceli olarak daha yeni bir çalışma Jagger ve Sutton’a [14] aittir. Jagger ve Sutton [14] oransal tehlike adını verdikleri zamana göre değişen ölüm olasılıklarını eşlerden birinin ölümü üzerine uygulamışlardır. Bu tip bir model ayrıca Hougaard vd. [15] tarafından ikizler üzerine uygulanmıştır.

Bağımlılık ile ilgili çalışmaların öncülerinden Parkes vd. [12] evli çiftler üzerindeki çalışmasında eşlerden biri öldükten sonra diğerinin ölüm olasılığının arttığını göstermiştir. Gelecek gelecek yaşam sürelerinin rastlantı değişkeni olduğu bağımlı modelleri açıklayan literatürdeki bilinen ilk detaylı çalışma Bowers [1] olmuştur. Bu kitapta birleşik ve son yaşayan durumlarında bağımlılığı ayrıntılı bir şekilde açıklanmaktadır.

Bağımlı yaşama ilişkin klasik modellerden biri de “ortak etki” (common shock) modelidir. Bu modeller bireylerin yaşama durumlarını dış kaynaklı bir olayın etkilediğini varsayar. Bu dış kaynaklı olay, bir kaza, deprem, sel gibi katastrofik bir olay veya bulaşıcı hastalık olabilir. Bu modele ilişkin ilk öncü çalışma Marshall ve Olkin’e [16] aittir.

Frees vd. [10] çoklu hayat anüitelerinin net tek primlerini kopula fonksiyonu kullanarak hesaplamışlardır. En çok olabilirlik yöntemi ile parametrelerin tahmin edildiği çalışmada bağımlılık varsayımı altında hesaplanan anüite net tek priminin bağımsızlık varsayımı altında hesaplanan net tek prime göre %5 daha düşük olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Bağımlılığın maksimum ve minimum değerlerini ölçmek, olasılıksal sınır çizerek mümkün olabilir. Bilim dünyasında bu sınırlar Frechet [17] ve Hoefding [18] çalışmalarına dayanmaktadır. Frechet alt ve üst sınırlarını aktüeryal yazında ilk defa Carrie ve Chan [19] tarafından, bağımlılığın etkisini ölçmek adına çoklu hayat anüitelerinin net tek primlerini hesaplamada kullanılmıştır.

Shemyakin ve Youn [20] birleşik ve son yaşayan anüitesi için net tek primi gelecek yaşam sürelerinin bağımlılığı altında incelemiş ve kopula ailelerinin sonuçlarını karşılaştırmıştır. Shi ve Frees [21] ve Jong [22] da kopula metodunu hasarlar arasındaki bağımlılığı ölçmek için kullanmış ve rezerv miktarlarını hesaplamıştır.

Bu tezde bağımlılık modeli olarak, parametre tahmini ve hesaplama kolaylığı açısından Frank kopulası kullanılmıştır.

Hayat anüitelerinin değerlemesinin yapılmasında en önemli parametrelerden biri paranın zaman değeridir. Paranın bir dönem boyunca kullanım maliyeti olarak tanımlanan faiz, anüite ürünlerinin bugünkü değer ve birikimli değer gibi hesaplamalarında kullanılır. Faiz oranı, hesaplamalarda deterministik ve stokastik olarak ele alınabilir. Deterministik yaklaşımda faiz oranının sabit olduğu varsayılır. Fakat anüite gibi uzun dönemler içeren ürünlerde sabit faiz oranı kullanılması pek de gerçekçi bir yaklaşım sayılmaz ve özellikle faiz oranlarının oynaklığının fazla olduğu ülkelerde olması gereken değerlerden uzak hesaplamalar yapılma riski vardır. Bu riski azaltan stokastik yaklaşımda ise faiz oranı değişkendir ve olasılıksal bir sürece bağlıdır. Faiz oranının stokastik yapısı, birçok kez araştırmacıların çalışmalarına konu olmuştur. Stokastik yapı, faiz oranının incelenmek istenen dönemler boyunca bir rastlantı değişkeni olması anlamına gelir. Faiz oranının rastlantı değişkeni olduğu çalışmalar literatürde sıklıkla yer alır, stokastik faiz oranının kullanımı ancak 1970'li yıllara kadar gitmektedir.

Hickman'e [23] göre faiz oranı ve sonucunda oluşan risk, iş hayatının bir gerçeğidir. Bunun ışığında profesyoneller faiz oranının davranışını sıklıkla ve uzun bir süredir incelemişlerdir.

Faiz oranının rastlantı değişkeni olduğu çalışmaların öncülerinden Boyle [24], dönemler arası faiz oranının birbirinden bağımsız ve lognormal dağıldığını varsaymış ve anüitenin bugünkü ve birikimli değerini hesaplamıştır. Waters [25], Panjer ve Bellhouse [26], Bellhouse ve Panjer [27] de benzer modeli kullanarak anüite fonksiyonun momentlerini hesaplamışlardır. Dhaene [28] ise otoregresif hareketli ortalama (ARIMA) sürecini faiz oranı için kullanarak, bugünkü değer fonksiyonlarının momentlerini hesaplamıştır.

Frees [29] faiz oranı için hareketli ortalama (MA) modelini kullanarak solvency değerlemesi için kullanmıştır. Beekman ve Fuelling [30] sürekli hayat anüitelerinin ortalama ve standart sapmasını Ornstein-Uhlenbeck süreci ile modellemiş ve stokastik faiz ve ölümlülük kullanarak olasılıksal rezervleri hesaplamıştır. Beekman ve Fuelling [31] çalışmasında ise Weiner sürecinden yararlanarak gelecekte yapılacak ödemelerin bugünkü değerini ve varyansını hesaplamışlardır.

Lai ve Frees [32] doğrusal ARIMA modeli ile literatürde daha yeni bir model olan doğrusal olmayan ARCH (Otoregresif Koşullu Değişen Varyans) modelini kullanarak anlık faiz oranını modellemiştir. Bu modelin temel avantajı, oynaklığın kümelenmesinin hassaslığını yakalayabilme yeteneğidir. Bunun anlamı, büyük değişiklikler yine büyük değişikliklerce takip edilir, küçük değişiklikler ise yine küçük değişikliklerle devam eder.

Parker [33], gelecekteki ödemelerin bugünkü değerinin momentlerini hesaplamak için Ornstein-Ohlenbeck sürecinden yararlanarak iki farklı yöntem kullanmıştır. Birincisi bireysel hasarı temel alırken ikincisi yıllık toplam nakit akışını temel almaktadır. Parker [33] varyansı iki bölümde incelemiş ve toplam riski sigorta ve yatırım riski olarak değerlendirmiştir. Marceau ve Gaillardetz [34] ise stokastik faiz oranını

AR(1) modeli ile tahmin ederek ileriye dönük rezervleri hesaplamada kullanmıştır.

Hoedemakers vd. [35] hayat anüitelerinde ileriye dönük kaybın dağılımı için bir yaklaşım öne sürmüştür. Homojen hayat anüitelerinin bugünkü değerini Brownian hareketli modeli temel alarak stokastik faiz oranı ile hesaplamıştır.

Satıcı ve Erdemir [36] tam ve dönemsel hayat sigortalarında aktüeryal bugünkü değeri faiz oranının bağımsız rastlantı değişkeni olduğu durumda hesaplamışlardır. Reel faiz oranı üzerinden uygun dağılıma karar verilmiş ve CSO 1980 erkek hayat tablosu kullanılarak stokastik ve deterministik bugünkü değerler karşılaştırılmış, stokastik varsayım altında hesaplanan bugünkü değerlerin daha büyük olduğunu ortaya koymuşlardır.

Lysenko [37], Nolde ve Parker [38] ise AR(1) modelini kullanarak nakit akışını hesaplamış, belirli bir değerleme tarihinde gelecekte ödenecek hasarlardan, değerleme tarihine kadarki kazancın farkı olarak tanımlanan artığın stokastik faiz oranı ve ölümlülük ile incelemişlerdir.

Chen vd. [39] yine AR(1) modelini anlık faiz oranı ve kopula bağımlılık fonksiyonlarını da ölümlülük için kullanıp son yaşayan hayat sigortası için artığın stokastik bugünkü değerini hesaplamışlardır.

Bu tez çalışmasında faiz oranının modellenmesinde literatürde sıklıkla rastlanan koşullu AR(1) modeli kullanılmıştır.

Bireyler sigorta şirketlerine risklerini devrettiklerinde, sigorta şirketleri bireylere ilişkin bütünsel ölümlülük riski ile karşı karşıya kalır. Genel kanı, reasürörler aracılığıyla bu riskten korunmak mümkün olsa da bütünsel ölümlülük riski sistematiktir, risk havuzunda değerlendirilemez ve dağıtılamaz [40]. Daha iyi bir korunma yöntemi olan uzun ömürlülüğün menkul kıymetleştirilmesi fikri ile uzun ömürlülük bonosuna sahip olan bir şirket daha fazla kupon ödemesi alarak hasarlarını dengeleyebilir [7].

Ölümlülük projeksiyonlarına ilişkin en temel çalışmalardan biri Lee-Carter [41] modelidir. Birçok modelin gelişmesine ışık tutan bu modelde Amerika için yaşam beklentisinin önce tarihsel bir trende sahip olduğu daha sonra ise zaman içerisinde yavaşladığı gözlemlenmiştir. Lee-Carter modeli, yaş gruplarına ilişkin yaşa bağlı bir parametreye ek olarak yıl içi ölümlülüğün değişmesine izin veren bir parametre ile dinamik ölüm oranları kullanarak başarılı sonuçlara basit bir çözüm yolu sunmaktadır.

Oeppen ve Vaupel [42] literatüre yaşam beklentisinin her çeyrek yılda arttığını öne süren bir kavram katmışlardır. Oeppen ve Vaupel [42] bu çalışmasında ülkeler arası maksimum yaşam beklentisinin 150 yıldır giderek arttığını göstermişlerdir. Bongaarts [43] Lee-Carter modelini temel alarak basit bir ölümlülük projeksiyonu modeli geliştirmiş ve yaşam beklentisinin arttığını göstermiştir. Vallin ve Mesle [44] yaşam beklentisinin sağlık ve sosyal gelişme ile birlikte arttığını fakat artış hızının yavaşlayıp artışın üç ayda bir değil, dört ayda bir olduğunu göstermişlerdir. Bunun nedeninin yaşa bağlı patolojik ve kırılgan hastalıklar olduğudur.

Ronald Lee’nin de dâhil olduğu Li vd. [45] çalışmalarında Lee-Carter modelinin genişletilmiş bir versiyonunun ileriki yaşlarda ölümlülük oranlarını düşürdüğü ve Lee-Carter modelinde uzun ömürlülük yavaşlamasını azalttığını göstermişlerdir.

Antolin ve Mosher [46], aktüeryal kullanımlarda hayat tablolarının yetersizliğinden yola çıkarak ülkeler bazında emeklilik sistemleri için kullanılan hayat tablolarını incelemişlerdir. Bu amaçla Lee Carter ölümlülük modelindeki gibi logaritmik ölümlülük oranları ile bu hayat tablolarına ait değerler karşılaştırılarak anüitelere ilişkin net tek prim hesaplamaları yapılmış ve hayat tablolarından elde edilen değerlerle hesaplanan net tek primlerin daha düşük olduğu görülmüştür.

Blake vd. [47] türev ürünlerinin kullanım alanlarını incelemiş ve uzun ömürlülük bonosunu fiyatlandırmıştır. Dus vd. [48] geç kalınmış anüite satın alımında yüksek ödemeler beklerken, ileriki yaşlarda ölüm oranlarının artması ile daha fazla kesinti sebebiyle bu beklentinin düştüğünü göstermişlerdir. Milevsky ve Young [49] hayat anüitelerinin optimal zamanlamasına ilişkin bir model sunmuşlardır.

Coughlan vd. [50], Cairns vd. [51] ve Cairns [52] temel riski açıklayarak korunma enstrümanları ve korunma oranları oluşturarak bir iskelet model sunmuşlardır. Bu çalışmalardaki farklılık ise Cairns vd. [51] çalışmasının benzetim temelli bir yaklaşım sunmasıdır.

Aktüeryal araştırmalarda gelecekteki ölüm oranlarının kestirimi karmaşık bir istatistiksel yaklaşım gerektirir [53]. Fakat bu kestirim geçmiş veriyi kullandığı için gelecekteki ölümlülüğün dinamik eğilimini yakalayamayabilir. Bu probleme çözüm olarak geliştirilen, dinamik ölüm olasılıklarını içeren, 2017 yılında "*Türkiye Sigortalı ve Anüitant Hayat Tablolarının Oluşturulması ve Projeksiyonları*" [54] projesi ile elde edilen her yıl için değişen yaşam olasılıkları hesaplanmıştır. Bu tezde bu proje sonucunda elde edilen hayat tablosundaki dinamik yaşam olasılıkları kullanılarak çoklu hayat anüitelerinin net tek primleri hesaplanmıştır.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde çoklu hayat anüitelerinin net tek primlerinin hesaplamalarında kullanılacak parametrelere ilişkin bilgiler verilecektir. Hesaplamalarda ihtiyaç duyulacak stokastik faiz oranı için koşullu AR(1) modeli, eşlerin bağımlı gelecek gelecek yaşam süreleri için Frank kopula modeli [55] ve uzun ömürlülük riski için de 2017 yılında hazırlanan *"Türkiye Sigortalı ve Anüitant Hayat Tablolarının Oluşturulması ve Projeksiyonları"* [54] projesiyle elde edilen dinamik hayat tablosu kullanılacaktır.

2.1. Stokastik Faiz Oranı Modeli

Finansal zaman serileri varlık değerlemenin teorisi ve uygulamasıyla ilgilenir. Zaman serileri belirsizlik öğelerini içerir. Finansal zaman serileri diğer zaman serilerinden şu özellikleri ile ayrılır; varlık değişiminin çeşitli tanımları vardır ve getiri serileri için bu değişim fark edilebilen türden değildir. Belirsizlik, istatistiksel yöntem ve teorilerin eklenmesiyle finansal zaman serileri açıklığa kavuşur.

Özellikle anüite gibi uzun dönem içeren ürünlerde sabit bir faiz oranı yerine stokastik bir sürece bağlı olan ve bir rastlantı değişkeni olarak kabul edilen bir faiz oranının kullanılması, daha gerçekçi hesaplamaların yapılmasını sağlayacaktır.

Modellemede kullanılacak stokastik faiz oranı seçimi kolay olmayıp, yatırımın stratejisine doğrudan bağlıdır. Örneğin tüm yatırımlar risk içermeyen sabit getirili tahvillere yatırılmış olsaydı, Cox-Ingersoll-Ross [56] çalışmalarında olduğu gibi negatif değerlerin oluşmadığı bir model seçilebilirdi [33].

Bu tezde stokastik faiz oranı modeli, Bellhouse and Panjer [27] ve Marceau ve Gaillerdetz [34] tarafından da kullanılan koşullu AR(1) süreci dâhilinde incelenmiştir. Nolde ve Parker [38] ve Chen vd. [39] AR(1) modelini hayat sigortası artığını hesaplamada kullanmışlardır. Faiz oranı bu tezde reel getiriler olarak kabul edildiği için faiz oranı bundan sonra reel getiri oranı olarak anılacaktır. δ, reel getiri oranını göstermek üzere koşullu AR(1) süreci,

$$\delta_{k} - \mu = \Phi(\delta_{k-1} - \mu) + \varepsilon_k$$

şeklinde ifade edilir. Burada,

ε_k : bağımsız ve aynı dağılıma sahip rastlantı değişkeni,
μ : ortalama reel getiri oranı,
Φ : ortalamaya dönüş hızı,
σ : kısa dönem reel getiri oranının oynaklığını gösterir.

Bu modelde $|\Phi|<1$ olması, sürecin durağan olduğu anlamına gelir. ε_k, ak gürültü süreci $\{\varepsilon_k$; k=1, 2, ...$\}$ ile gösterilen bir stokastik süreçtir ve aşağıdaki koşulları sağlıyorsa pür rastsal süreç adını alır:

$$E[\varepsilon_k] = 0$$
$$\mathrm{Var}(\varepsilon_k) = \sigma^2$$
$$\mathrm{Cov}(\varepsilon_k, \varepsilon_{k+1}) = 0, \quad k \neq 0$$

Yukarıdaki koşullara ek olarak $\{\varepsilon_k\}$ süreci ortalaması 0 ve varyansı σ^2 olan bir normal dağılıma uyuyorsa bu süreç Normal (Gaussian) pür rastsal süreç adını alır ve $\varepsilon_k \sim$ GW N(0, σ^2) ile gösterilir.

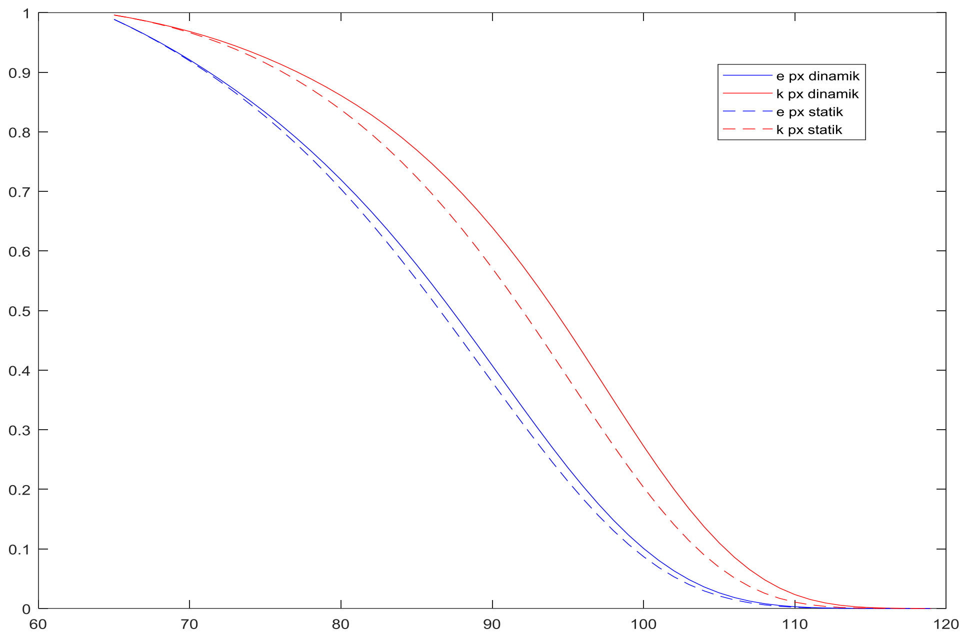
2.2. Uzun Ömürlülük Riski

Aktüeryal hesaplamalarda fiyatlama, rezerv veya uzun döneme ilişkin herhangi bir ürünün değerlemesinde kuşkusuz en etkili parametrelerden biri ölümlülüktür. Literatürde ölümlülüğe ilişkin birçok model kullanılmış ve halen kullanılmaktadır. Gelecekteki ölümlülüğü hesaplama işi rastgelelik içerir ve hangi model kullanılırsa kullanılsın, öngörülen sistematik sapmalar var olacaktır. Bunun sonucunda bu, bir model veya parametre riski olup havuzda değerlendirilemeyeceği açık bir risktir. Bu risk her yaşta açığa çıkabilir, yüksek yaşlarda ortaya çıkması durumunda ise genellikle uzun ömürlülük riski anlamına gelir [53].

Uzun ömürlülük riski en temel anlamda bireylerin beklenen gelecek yaşam sürelerinin artması anlamına gelmektedir. Bunun sonucunda ise özellikle anüite ürünlerinde veya emeklilik dönemine ilişkin ödemelerde sigortacı için maliyetin artması demektir [57].

Uzun ömürlülük riski uzun dönem ölümlülük oranlarının belirsizliği ve bireyin uzun dönem yaşama olasılığı üzerindeki etkisi olarak ele alınmalıdır. Uzun ömürlülük riski altında gelecekteki yaşam olasılıkları beklenenden daha fazla olacaktır [51].

Her yıl ve yaş için değişen ölüm olasılıkları, dinamik ölüm olasılıkları anlamına gelir ve beklenen gelecek yaşam süresindeki artışı yansıtır. Şekil 2.1.'de bu değişim gösterilmiştir.



Şekil 2.1. Birikimli Yaşam Olasılıkları

Şekil 2.1.'de 65 yaşındaki bir erkek ve 65 yaşındaki bir kadın için uzun ömürlülük riskinin dâhil edildiği tablodan alınan yaşam olasılıkları ile yıllara göre değişmeyen yaşam olasılıkları yani, uzun ömürlülük riski göz ardı edilen yaşam olasılıklarının birikimli değerleri gösterilmektedir. Bu olasılık, 65 yaşındaki bir erkek ve kadının ilgilenilen yaşa ulaşabilme olasılığını gösterir. Uzun ömürlülük riskinin dâhil edildiği yaşam olasılıkları dinamik, dâhil edilmediği yaşam olasılıkları ise statik olarak ifade edilecektir. Şekil 2.1.'den görüleceği üzere hem erkek hem de kadın için dinamik yaşam olasılıklarının oluşturduğu birikimli yaşam olasılıkları, statik yaşam olasılıkları kullanılarak hesaplanan birikimli yaşam olasılıklarından daha yüksektir. Hem erkek hem de kadın için bu tezde kullanılan hayat tablosunda yıllar itibariyle yaşama olasılıkları daha yüksektir. Bu da beklenen gelecek yaşam süresinin arttığı anlamına gelir. Şekil 2.1.'den elde edilen bir diğer bilgi ise 65 yaşında bir kadının birikimli yaşama olasılıklarının 65 yaşında bir erkeğe göre daha yüksek seyrettiğidir.

2.3. Kopula Bağımlılık Modeli

Yakın geçmişe kadar aktüerler çoklu yaşamlara ilişkin sigorta ürünlerinin değerlemelerini yaparken, geleneksel yöntemleri kullanarak bireyler arasında gelecek yaşam süreleri açısından bağımsızlığın varlığını kabul etmişlerdir. Son yıllarda ise çalışmalar, bu bağımsızlığın gerçeği yansıtmayacağını göstermiş ve eşler arasında gelecek yaşam sürelerinin bağımlılığını çeşitli modellerle açıklamışlardır.

Bağımlılık ortak bir kaza, genetik hastalık veya yaşam stili ile ortaya çıkar. Birlikte yaşayan evli bir çiftin bir otomobil ya da uçak kazasında birlikte ölme şansının, gelecek yaşam sürelerinin bağımsızlığı varsayımı altında hesaplanan ölüm şansından daha fazla olması beklenir [58]. Aktüeryal literatürde bireylerin yaşamlarının bağımlılığını inceleyen modellerin arasında en fazla kopula modellerine rastlanmaktadır. Nelsen [59] kopula modellerinin temelinin, çoklu birleşik dağılım fonksiyonunun marjinal dağılımların bir fonksiyonu olarak ifade edilmesi olduğunu söyler. Kopulalar rastlantı değişkenlerinin bağımlılık yapısına ilişkin tüm bilgiyi barındırır. Korelasyon sadece doğrusal bağlantıyı incelerken, kopulalar doğrusal olmayan bağımlılığı da yakalayabilir [60].

Kopula modelleri rastgele değişkenler arasında bağımlılığı modellemek için son yıllarda popüler hale gelmiştir. Kopula modellerinin uygulandığı alanlar finansal varlıkların getirilerinden sağlık bilimlerinde organ yetmezliğine, güvenilirlik çalışmalarından sigortacılıkta ölüm oranlarına kadar uzanır [20].

Kopula fonksiyonların en önemli özelliği hem rastgele değişkenler arasındaki korelasyonu koruyabilme hem de rastgele değişkenlere ait farklı dağılım özelliklerini bünyesinde taşıyabilmesidir. Bu özellik de rastgele değişkenlerin marjinal dağılımlarının belirlenmesi konusunda araştırmacılara büyük bir kolaylık sağlamaktadır.

Tanım kümesi I^2 → I olan iki değişkenli C kopulası aşağıdaki özellikleri taşıyan bir fonksiyondur [62]:

1. I tanım kümesindeki her u,v için,
   $C(u,0)=0=C(0,v)$
   $C(u,1)=u$ ve $C(1,v)=v$;
2. I tanım kümesindeki her u_1, u_2, v_1, v_2 için $u_1 \leq u_2$ ve $v_1 \leq v_2$ iken,
   $C(u_2,v_2) - C(u_2,v_1) - C(u_1,v_2) + C(u_1,v_1) \geq 0$

Sklar [11] teoremi, literatürde birçok çalışmaya konu olmuştur. Sklar'ın bu teoremi, çoklu dağılım fonksiyonları ve onların marjinalleri arasındaki ilişkinin temelini oluşturur. Sklar teoremine geçmeden önce dağılım fonksiyonlarının özelliklerinden bahsetmek gerekir. F dağılım fonksiyonu olmak üzere,

1. F azalmayan bir fonksiyon,
2. $F(-\infty) = 0$ ve $F(-\infty) = 1$'dir.

H birleşik dağılım fonksiyonu olmak üzere,

1. H artan bir fonksiyon,
2. $H(x,-\infty) = H(-\infty,y) = 0$ ve $H(-\infty,\infty) = 1$'dir [62].

Teorem 2.1. Sklar Teoremi

Sklar [11] teoremine göre; *F ve G marjinal dağılımlara sahip bir H birleşik dağılım fonksiyonu olması durumunda, her x,y için bir C kopulası vardır ve H birleşik dağılım fonksiyonu,*

$$H(x,y) = C(F(x), G(y)) \qquad (2.1)$$

şeklindedir. Eğer F ve G marjinal dağılım fonksiyonları sürekli dağılıma sahipse, C kopulası tek (eşsiz) olmaktadır. Buradan ters dağılım *fonksiyonu yardımıyla, $F(x)=u$ ve $G(y)= v$, $(0\leq u\leq 1$ ve $0\leq v\leq 1)$ iken kopula fonksiyonu,*

$$C(u,v)=H(F^{-1}(u),\ G^{-1}(v))$$

olarak ifade edilir.

Yaşam analizinde marjinal dağılım fonksiyonlarının yerine marjinal yaşam fonksiyonlarını kullanılır. Bir bireyin yaşama olasılığını gösteren fonksiyon, yani yaşam fonksiyonu, F dağılım fonksiyonunu göstermek üzere,

$$\overline{F}(x) = P(X>x) = 1 - F(x)$$

şeklinde ifade edilir. Birleşik yaşam fonksiyonu ise,

$$\overline{H}(x,y)= P(X>x, Y>y)$$

şeklindedir. Sklar teoremine göre x ve y marjinallerinin kopulası C olmak üzere,

$$\begin{aligned}\overline{H}(x,y) &= 1 - F(x) - G(y) + H(x,y)\\ &= \overline{F}(x) + \overline{G}(y)-1+ C(\overline{F}(x),\overline{G}(y))\\ &= \overline{F}(x) + \overline{G}(y)-1+ C(1-\overline{F}(x),1-\overline{G}(y))\end{aligned}$$

şeklini alır. Bu fonksiyon tanım aralığı $I^2 \rightarrow I$ olan ve $\hat{C}$ ile ifade edilen bir fonksiyon ile tanımlanırsa:

$$\hat{C}(u,v) = u + v - 1 + C(1-u,1-v) \quad (2.2)$$

ile ifade edilir. Birleşik dağılım fonksiyonu da yaşam kopulası ile,

$$\overline{H}(x,y) = \hat{C}(\overline{F}(x),\overline{G}(y))$$

ifade edilir [62].

Schweizer ve Sklar [63], marjinalleri tekdüze [0,1] ve $H(x,y)= \Phi^{-1}\{\Phi(x) + \Phi(y)\}$ formunda tanımlanabilen $H(x,y)$ dağılım fonksiyonuna Arşimedyan Kopulalar olarak adlandırmışlardır [64]. Eliptik kopulalar ise çok değişkenli dağılımlardan elde edilen kopulalardır. Arşimedyan kopulalar kolay hesaplama yöntemleri açısından çok fazla tercih edilebilir konumda olmuşlardır. Birleşik dağılım fonksiyonu C kopulası ile ifade edilen iki tekdüze dağılıma sahip rastlantı değişkeninin yaşam kopulası,

$$P[U>u,V>v] = 1\text{-}u\text{-}v + C(u,v) = \hat{C}(1\text{-}u,1\text{-}v)$$

ile ifade edilir [62].

Gelecek yaşam sürelerinin modellenmesinde matematiksel açıdan işlevselliği nedeniyle aktüeryal literatürde de sık kullanılan Arşimedyan ailesinden iki değişkenli Frank kopulasının ∝ bağımlılık parametresi ile kopula fonksiyonu,

$$C(u,v)= \ln\left(1 + \frac{(e^{\propto u}-1)(e^{\propto v}-1)}{e^{\propto}-1}\right)/\propto$$

olarak tanımlanır [65]. Burada ∝ parametresi (-∞<∝<∞) bağımlılığın gücünü gösterir. Bu tezde bağımlılık varsayımı altında hesaplanan net tek primlerde Frank kopulasından yararlanılmıştır. Yaşam kopulası ile çoklu yaşam durumlarındaki birleşik olasılıklar ilerleyen Bölüm 3’te anlatılacaktır.

3. ÇOKLU HAYAT ANÜİTELERİ

İki veya daha fazla bireyin aynı poliçede sigorta kapsamına alındığı ürünler, çoklu hayat ürünleri adını alır. Uygulamada genellikle iki kişi olarak geliştirilen bu ürünler, eşleri kapsar nitelikte sunulmaktadır. Kişiye yönelik ürünler gibi çoklu hayat ürünleri de dönemsel, tam hayat, kar paylı vb. biçimde tasarlanabilir.

Çoklu hayat anüitelerini analiz edebilmek için, bireylerin yaşam durumlarını anlayabilmek gerekir. Bu durumlar, eşlerden ikisinin de yaşıyor olması, eşlerden birinin yaşıyor olması ve eşlerden her ikisinin de yaşamıyor olması durumudur. Eşler, bu durumların her birini göz önüne alarak refah seviyelerini en üst düzeye çıkarmaya çalışacaktır. Her iki çoklu hayat anüitesi ürününde de çiftlerin gelir akışlarını kontrol etme isteği vardır [66].

İki kişiyi kapsayan çoklu hayat anüitesi ürünleri birinci ve ikinci ölüm şeklinde iki farklı çeşitte ortaya çıkabilir. Bunlar,

1. İki kişiden birinin ölümüne kadar süren ödemeler dizisi,
2. İki kişiden biri ölse de yaşayan diğer kişinin ölümüne kadar süren ödemeler dizisi.

Birinci durumda hayat anüitesi, birleşik hayat anüitesi adını alır. Birleşik hayat anüitesinde ödemeler iki kişiden birinin ölümüne kadar yapılmaktadır. İkinci durumda hayat anüitesi ise son yaşayan anüitesi adını almaktadır. Son yaşayan anüitesinde ödemeler iki kişiden hayatta hiçbiri kalmayana kadar devam eder.

3.1. Çoklu Yaşam Durumu

Kronolojik yaşın önem kazandığı sigortacılık ve emeklilik işlemleri özel bir fonksiyona ihtiyaç duyar. Bu ihtiyaç da ancak yaşın bir fonksiyonun oluşturulmasıyla karşılanabilir. Özel bir rastlantı değişkeni olan gelecek yaşam süresinin fonksiyonu yaşam modeli olarak adlandırılır.

Yaşayan bir bireyin başlangıç zamanı ile ölümü (başarısızlığı) arasında geçen zamana "gelecek yaşam süresi" ya da "başarısızlık süresi" adı verilir ve genellikle "T" ile gösterilir. Her bir bireye ait gelecek yaşam süresi T rastgele değişkeni tanımı gereği sürekli ve pozitif bir değere sahiptir. Herhangi bir birey için başarısızlık ancak bir kez oluşabilir [67]. Sosyolojiden ekonometriye birçok alanda farklı anlamlara gelebilen başarısızlık süresine bir kişinin hastalığa yakalanması, ölmesi, bir projenin tamamlanma süresi, bir makinenin bozulması gibi kavramlar örnek oluşturabilir.

Bir birey için belirli bir yaş x ile ifade edilsin. Bu yaştaki bir kişi için ölüm x yaşından büyük herhangi bir yaşta meydana gelebilir. Bu belirli yaştan ölüme kadar geçen süre yani başarısızlık süresi veya gelecek gelecek yaşam süresi T_x ile gösterilir. Bu bireye ait bir rastlantı değişkeni olan ölüm yaşının $\mathrm{x} + T_x$ olması anlamına gelir. Rastlantı değişkeni T_x'in dağılım fonksiyonu F_x ya da $F_x(t)$ ile gösterilir ve

$F_x = \mathrm{P}(T_x \leq \mathrm{t})$

şeklinde ifade edilir. Burada F_x ya da $F_x(t)$, x yaşındaki bir kişinin $\mathrm{x} + \mathrm{t}$ yaşına ulaşamama olasılığının dağılımını gösterir.

Özellikle anüite ürünlerinde ölümden çok yaşam durumuyla ilgilenilir. "x" yaşındaki bir bireyin $\mathrm{x} + \mathrm{t}$ yaşına kadar yaşama olasılığını bir fonksiyon halinde ifade etmek gerekirse, bu yaşam fonksiyonu adını alacaktır. Başarısızlık süresi yani gelecek yaşam süresi ile ilgilenilen bireyin, t anında hala yaşıyor olması olasılığı, başarısızlık süresinin t den büyük olması olasılığı ile aynıdır. S_x ya da $S_x(t)$ ile ifade edilen ve başarısızlık süresinin olasılık dağılımı olan yaşam fonksiyonu;

$S_x = 1\text{-}\,F_x = P(T_x > t)$

ile gösterilir.

Yaşam fonksiyonunun iki önemli özelliği vardır. Birincisi, 0 anındaki bir birey için yaşam fonksiyonu 1 değerini, ω (yaşanan son yaş) anındaki bir birey için ise yaşam fonksiyonu 0 değerini alır. Bir diğeri ise, yaşam fonksiyonu 0≤x≤ω arasında sürekli ve azalan bir fonksiyondur.

T_0, bir bireyin doğumdan sonraki gelecek gelecek yaşam süresini ifade eder. Bu bireyin x yaşına gelmeden ölme olasılığı $P(T_0 \leq x)$ ile gösterilir. "x" yaşına ulaştığında ise artık gelecek gelecek yaşam süresi T_x ile ifade edilecek ve ölüm yaşı $x+T_x$ olmuş olacaktır. Eğer bu bireyin t yıl içinde ölmesi olasılığı ile ilgilenilecekse $P(T_x \leq t)$ ifadesine ihtiyaç duyulur. Bu ifadeler 0 yaşındaki bu bireyin x yaşına ulaştıktan sonra t yıl içinde ölmesi olasılığı ile aynı anlama gelir ve şu ifade ile gösterilir;

$P(T_x \leq t) = P\,(T_0 \leq x + t \mid T_0 > x)$

Özellikle dönemsel anüite ürünlerinin hesaplamalarında ihtiyaç duyulan bu olasılık önemli bir ifadedir. Temel olasılık teorisinde koşullu olasılık,

$P(A \mid B) = P(A \cap B)/P(B)$

ile tanımlanır. Bu bağlamda x yaşındaki bir bireyin t yıl içinde ölmesi olasılığı,

$P(T_x \leq t) = P(x < T_0 \leq x+t)/P(T_0 > x)$

eşitliğine dönüşür. Dağılım fonksiyonu,

$F_x(t) = [F_0(x+t) - F_0(x)]/\,S_o(x)$

olarak gösterilebilir. Burada,

$S_x(t) = 1 - F_x(t)$ eşitliğini de kullanarak,

$S_x(t) = S_0(x+t)/\,S_0(x)$

eşitliğine ulaşılır. Bu eşitlik doğumdan x yaşına kadar ve x yaşından x+t yaşına ulaşma olasılıklarını yorumlamamıza imkân verir. Aktüeryal kullanımlarda yaşam fonksiyonunun ifadesi,

$S_x(t) = {}_t p_x$ ile gösterilir.

x yaşındaki bir kişinin t yıl içinde ölmesi olasılığı ise,

$1 - S_x(t) = {}_t q_x$

ile gösterilir. Deterministik yaklaşımda x bir tamsayı olarak ele alınır ve yukarıdaki ifade x yaşındaki bir kişinin t yıl içinde ölmesi olasılığını ifade eder.

Bu ifadeler hayat sigortalarında ve hayat anüitelerinde tek bir birey için ele alınan poliçelerin hesaplamalarında kullanılır. Aynı zamanda da çoklu hayat durumlarında da kullanılabilirler. İlk olarak çoklu hayat durumları bireylerin yaşamlarının bağımsızlığı varsayımında incelenmiştir.

Gelecek gelecek yaşam süreleri T_x ve T_y rastlantı değişkenleri olarak tanımlanan iki kişi ele alınacak olursa, bu iki kişinin birleşik dağılım fonksiyonu,

$F_{xy}(s,t) = \mathrm{P}(T_x \leq \mathrm{s},\ T_y \leq t)$

şeklinde ifade edilir. Yaşam fonksiyonu ise,

$S_{xy}(s,t) = \mathrm{P}(T_x > \mathrm{s},\ T_y > t)$

biçimindedir [68]. Bu tezde çoklu yaşam durumu iki bireyin yaşamları ile sınırlandırılmıştır.

3.2. Gelecek Yaşam Sürelerinin Bağımsızlığı Durumunda Çoklu Hayat Anüiteleri

Bu bölümde öncelikle çoklu yaşam durumuna ilişkin anüite ürünlerinde bireyler arası gelecek yaşam süreleri arasında bağımsızlık varsayımı ele alınacaktır. Çoklu hayat anüitelerinden birleşik tam hayat ve son yaşayan tam hayat anüitelerine ilişkin birleşik yaşam fonksiyonu ele alınacak ve birleşik yaşam olasılığına değinilecektir. Çoklu yaşamlar bu tezde iki birey ile sınırlandırılmıştır.

3.2.1. Birleşik Yaşam Durumunda Çoklu Hayat Anüitesi

İki bireyin gelecek gelecek yaşam sürelerinin tanımlandığı birleşik yaşam fonksiyonunda ilk ölüm, iki bireyin gelecek yaşam sürelerinden küçük olana aittir. Bu bağlamda ilk ölüm durumunda çoklu hayat gelecek gelecek yaşam süresi rastlantı değişkeni,

$T_{xy} = \min(T_x, T_y)$

olacaktır. İlk ölümün gerçekleşmesi durumunda birleşik yaşam fonksiyonu,

S_{xy} =1- $F_{xy} = P(T_{xy} > t)$

ile ifade edilir [1]. İlk ölümün gerçekleşme zamanı ile ilgilenmek aynı zamanda her iki bireyin aynı anda yaşamama olasılıkları ile ilgilenmek anlamına gelir. Yaşam ve ölüm olasılıklarının toplamının 1 olduğu gerçeği ışığında öncelikle iki kişinin t anında halen yaşıyor olma olasılığı,

$${}_t p_{xy} = \mathrm{P}(T_x > \mathrm{t},\ T_y > \mathrm{t})$$

ile gösterilir. İki bireyin yaşamlarının bağımsızlığı varsayım altında bu eşitlik,

$${}_t p_{xy} = \mathrm{P}(T_x > \mathrm{t})\ \mathrm{P}(T_y > \mathrm{t}) = {}_t p_x\ {}_t p_y$$

şeklinde yazılabilir. Buradan ilk ölümün t yıl içinde gerçekleşme olasılığı ise,

$${}_t q_{xy} = 1 - {}_t p_{xy} = \mathrm{P}(T_{xy} \le \mathrm{t}) = \mathrm{P}(\min(T_x, T_y) \le \mathrm{t}) = 1 - ({}_t p_x\ {}_t p_y) \tag{3.1}$$

(3.1) eşitliği, tek bireyler için ölüm olasılıklarından yararlanarak,

$${}_t q_{xy} = 1 - [(1 - {}_t q_x)\ (1 - {}_t q_y)] = {}_t q_x + {}_t q_y - {}_t q_x\ {}_t q_y \tag{3.2}$$

eşitliği şeklinde yazılır.

Anüiteler ödeme dönemleri ve ödeme zamanlarına göre çeşitlilik gösterebilirler. Ödeme dönemleri en temel anlamda belirli bir süre sonra sona eren dönemsel anüite ve ölüm anına kadar devam eden tam hayat anüitesi şeklindedir. Ödeme zamanına göre anüiteler ise dönem başı ve dönem sonu olarak ikiye ayrılır. Bunlara ek olarak anüitelerin hesaplamalarında kullanılan faiz oranı deterministik ya da stokastik olabilir. Zaman içerisinde değişmeyen faiz oranı deterministik faiz oranıdır ve i aşağıdaki formülde deterministik olmak üzere birleşik tam hayat anüitesinin bugünkü değeri,

$$a_{xy} = \sum_{t=1}^{\Delta_\omega} (1+i)^{-t}\ {}_t p_{xy}$$

olarak hesaplanır. Bu tezde deterministik faiz oranı ile birlikte stokastik, yani bir rastlantı değişkeni olan faiz oranı da kullanılmıştır. Bu bağlamda ödemeleri her dönem sonunda yapılan ve her iki bireyin de yaşamasına bağlı olan birleşik tam hayat anüitesinin bugünkü değeri,

$$a_{xy}=\frac{{}_{1}p_{xy}}{(1+i_1)}+\frac{{}_{2}p_{xy}}{(1+i_1)(1+i_2)}+\ldots+\frac{{}_{\Delta_\omega}p_{xy}}{(1+i_1)(1+i_2)\ldots(1+i_{\Delta_\omega})}$$

şeklinde hesaplanır. Burada $\Delta_\omega = \min(\mathrm{T}_x, \mathrm{T}_y)$ olarak ifade edilir. Bu ödeme dizisinde x ve y yaşındaki bireylerin sonraki yaşlara ulaşması durumunda ödemeler yapılmaktadır. Buradaki formülde bireylerin anüite ürününü aldıkları yaştan ödemenin yapıldığı yıldaki yaşa ulaşma olasılıkları kullanılır. Aynı zamanda birleşik tam hayat anüitesi,

$$a_{xy}=\frac{{}_{1}p_{xy}}{(1+i_1)}+\frac{{}_{1}p_{xy}\ {}_{1}p_{x+1:y+1}}{(1+i_1)(1+i_2)}+\ldots+\frac{{}_{\Delta_\omega-1}p_{xy}\ {}_{1}p_{x+\Delta_\omega-1:y+\Delta_\omega-1}}{(1+i_1)(1+i_2)\ldots(1+i_{\Delta_\omega})} \qquad (3.3)$$

biçiminde de yazılabilir. Buradaki formülde ise bireylerin bir sonraki yaşa ulaştıktan sonra yine bir yıl yaşama olasılıkları kullanılarak hesaplama yapılır. Çoklu hayat anüitesinin net tek primini hesaplarken bu formülden yararlanmak benzetim modelinde kolaylık sağlayacağı için hesaplamalar (3.3) eşitliğinden yararlanılarak yapılmıştır.

3.2.2. Son Yaşayan Durumunda Çoklu Hayat Anüitesi

Son yaşayan durumundaki çoklu hayat anüitesinde ise, ödemeler bireylerden yaşayan en son kişinin ölümüne kadar devam eder. İki bireyin gelecek gelecek yaşam sürelerinin tanımlandığı birleşik yaşam fonksiyonunda son ölümün gerçekleşmesi, iki bireyin gelecek yaşam sürelerinden büyük olanına aittir. Bu bağlamda son ölüm durumunda çoklu hayat gelecek gelecek yaşam süresi rastlantı değişkeni,

$$T_{\overline{xy}} = \max(T_x, T_y)$$

şeklinde gösterilir. Son ölümün gerçekleşmesi durumunda birleşik yaşam fonksiyonu,

$$S_{\overline{xy}} = 1 - F_{\overline{xy}} = P(T_{\overline{xy}} > t)$$

şeklinde ifade edilir [68]. Öncelikle iki bireyden son ölümün t yıl içinde ölme olasılığı, bireylerin t yıl içinde ayrı ayrı ölme olasılıklarının çarpımıdır,

$$ {}_t q_{\overline{xy}} = {}_t q_x \; {}_t q_y $$

şeklinde yazılabilir. Son ölümün gerçekleşme zamanı ile ilgilenmek, yaşam ve ölüm olasılıklarının toplamının 1 olduğu gerçeği ışığında her iki bireyin aynı anda yaşamaması ile ilgilenmek anlamına da gelir. Bu durumda birleşik ölüm olasılığından, yaşam olasılığına geçiş,

$$ 1 - {}_t q_{\overline{xy}} = {}_t p_{\overline{xy}} $$

şeklinde olmuş olur. Bireylerden en az birinin t yıl boyunca yaşamış olma olasılığı,

$$ \mathrm{P}(T_{xy} \geq \mathrm{t}) = \mathrm{P}(\max(T_x, T_y) \geq \mathrm{t}) = 1 - {}_t q_{\overline{xy}} \qquad (3.4) $$

olarak elde edilir. (3.4) eşitliğinin de yardımıyla,

$$ {}_t p_{\overline{xy}} = 1 - [(1 - {}_t p_x)(1 - {}_t p_y)] = {}_t p_x + {}_t p_y - {}_t p_x \; {}_t p_y \qquad (3.5) $$

ifadesine ulaşılır [69]. Son ölüm gerçekleşene kadar yapılacak ödemeler herhangi bir bireyin öldükten sonra, yaşayan bireyin ölümüne kadar süren ödemeleri ifade eder. Öncelikle deterministik faiz oranı ile son yaşayan tam hayat anüitesinin net tek primi,

$$ a_{\overline{xy}} = \sum_{t=1}^{\Delta_\omega} (1+i)^{-t} \; {}_t p_{\overline{xy}} $$

biçimindedir. Stokastik faiz oranı kullanılması durumunda ise son yaşayan tam hayat anüitesi,

$$ a_{\overline{xy}} = \frac{{}_1 p_{\overline{xy}}}{(1+i_1)} + \frac{{}_2 p_{\overline{xy}}}{(1+i_1)(1+i_2)} + \ldots + \frac{{}_{\Delta_\omega} p_{\overline{xy}}}{(1+i_1)(1+i_2)\ldots(1+i_{\Delta_\omega})} $$

formülü ile hesaplanır. Burada $\Delta_\omega = \max(\mathrm{T}_x, \mathrm{T}_y)$ biçimine dönüşecektir. (3.3) eşitliğinde olduğu gibi birleşik tam hayat anüitesinin bir diğer formülü,

$$a_{\overline{xy}}=\frac{{}_1p_{\overline{xy}}}{(1+i_1)}+\frac{{}_1p_{\overline{xy}}\ {}_1p_{\overline{x+1:y+1}}}{(1+i_1)(1+i_2)}+\ldots+\frac{{}_{\Delta_\omega-1}p_{\overline{xy}}\ {}_1p_{\overline{x+\Delta_\omega-1:y+\Delta_\omega-1}}}{(1+i_1)(1+i_2)\ldots(1+i_{\Delta_\omega})} \tag{3.6}$$

şeklinde de yazılabilir. Son yaşayan tam hayat anüitesinin net tek primini hesaplamak için benzetim modelinde (3.6) eşitliğinden yararlanılmıştır.

3.3. Gelecek Yaşam Sürelerinin Bağımlılığı Durumunda Çoklu Hayat Anüiteleri

Şimdiye kadar anlatılan hesaplamalar iki bireyin rastlantı değişkeni olan gelecek gelecek yaşam sürelerinin bağımsızlığı varsayımı altındadır. Fakat gerçek yaşamda ortak sosyal hayatı paylaşan bireylerin yaşamlarının bağımsız olmaları durumu çok güçtür. Bu bölümde Frank kopula fonksiyonu ile bağımlı birleşik yaşam olasılıkları anlatılacaktır.

3.3.1. Birleşik Hayat Anüitesinin Kopula Fonksiyonu Yardımıyla Hesaplanması

Birleşik hayat anüitesinde bireylerden her ikisinin de t yıl yaşama olasılığı ${}_tp_{xy}$ olarak tanımlanır. Bu ifade P[U>u,V>v] olasılığı ile tanımlanır. Yaşam sürelerinin bağımlılığı durumunda ise aynı olasılık tanımına sahip yaşam kopulası (2.2) eşitliğinde,

$$\hat{C}(u,v) = u + v - 1 + C(1-u, 1-v)$$

olarak gösterilmiştir. Burada yaşam olasılıkları ile bu fonksiyon.

$${}_tp_{xy} = {}_tp_x + {}_tp_y - 1 + C({}_tq_x, {}_tq_y)$$

halini alır [70]. Bu eşitlik birleşik hayat anüitesinin net tek primi hesaplanırken bağımlılık durumunda kullanılacak çiftlerden her ikisinin t yıl yaşama olasılığını ifade eder.

3.3.2. Son Yaşayan Anüitesinin Kopula Fonksiyonu Yardımıyla Hesaplanması

Son yaşayan durumunda bireylerden en az birinin hayatta olma olasılığı olan ${}_tp_{\overline{xy}} = 1 - {}_tq_{\overline{xy}}$ ile ifade edilir. Yaşam sürelerinin bağımlılığı durumunda ise burada ihtiyacımız olan birleşik dağılım fonksiyonu (2.1) eşitliğinden,

$$H(x,y) = C(F(x), G(y))$$

olarak elde edilmiştir. Ölüm olasılıkları cinsinden bu fonksiyon,

$${}_t p_{\overline{xy}} = 1 - C({}_t q_x , {}_t q_y)$$

şeklinde ifade edilir [70]. Bu eşitlik son yaşayan anüitesinin net tek primi hesaplanırken bağımlılık durumunda kullanılacak çiftlerden en az birinin t yıl yaşama olasılığını ifade eder.

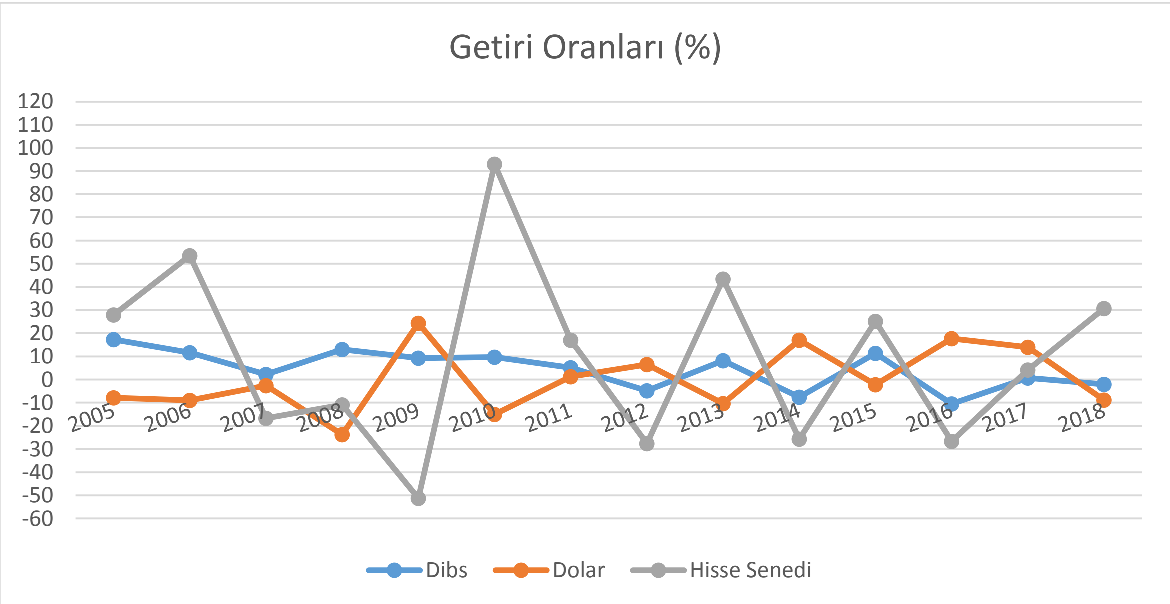
4. BENZETİM YÖNTEMİ İLE ÇOKLU HAYAT ANÜİTELERİNİN NET TEK PRİMİNİN HESAPLANMASI

Bu bölümde Monte Carlo benzetim yöntemi kullanılarak, çoklu hayat anüitelerinden birleşik hayat ve son yaşayan anüitelerinin aktüeryal net tek primleri, stokastik reel getiri oranı ve uzun ömürlülük riskinin dâhil edilerek hazırlandığı hayat anüitant tablosu yardımıyla, gelecek yaşam sürelerinin bağımsızlığı ve bağımlılığı durumu dâhilinde hesaplanmıştır. Matlab R2017 programı ile hesaplanan değerler, benzetim 1 milyon kez tekrarlanarak elde edilmiştir.

4.1. Hesaplamalarda Kullanılacak Parametreler

4.1.1. Getiri Oranı Modeli

Öncelikle hesaplamalarda kullanılacak stokastik faiz oranı modeli için parametreler AR(1) modeli ile tahmin edilecektir. Hesaplamaların Türkiye verisine uygun olabilmesi adına geçmiş yıllara ait faiz oranı için TUİK'ten elde edilen reel getiri oranları kullanılmıştır. Burada reel getiri oranı olarak 2005-2018 yılları arasında devlet iç borçlanma senetlerinin (DİBS), dolar ve hisse senetlerinin reel getirileri kullanılmıştır. Şekil 4.1.'de reel getiri oranlarının değişimi gösterilmiştir.



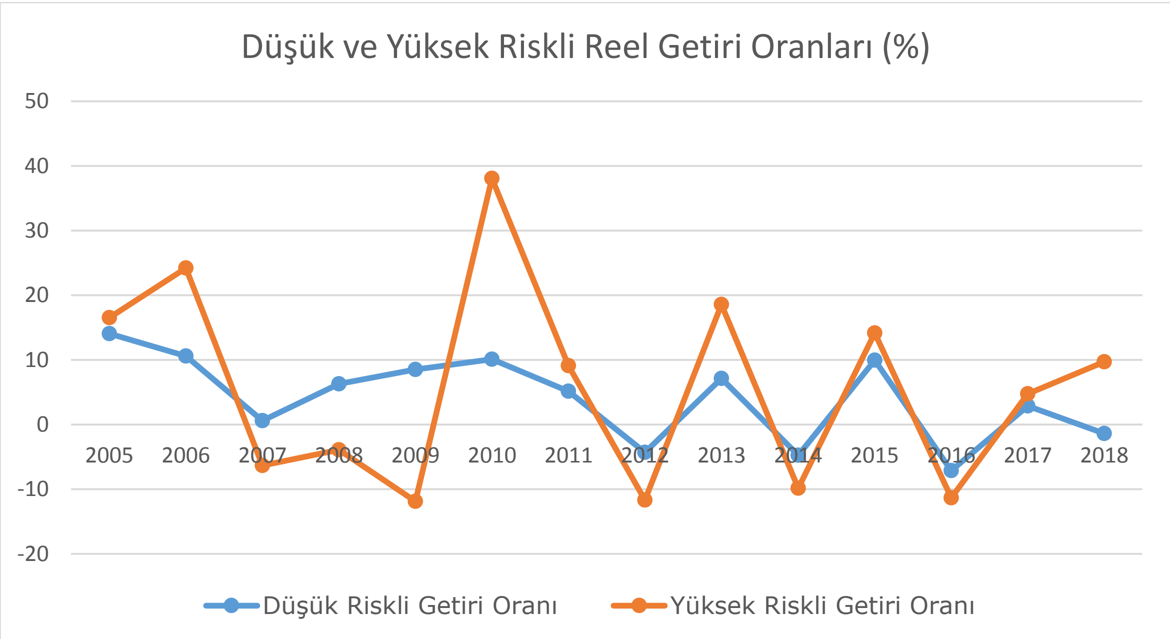
Şekil 4.1. Reel Getiri Oranları

Stokastik reel getiri oranları modellenirken Çizelge 4.1.'de verilen oranlar kullanılarak düşük riskli ve yüksek riskli yatırım portföyleri oluşturulmuştur. Daha sonra tüm hesaplamalar, düşük riskli getiri oranı ve yüksek riskli getiri oranı için iki farklı şekilde sunulmuştur. Bu oranların belirlenmesine Hazine Müsteşarlığı'nın 2015 yılında yayınlamış olduğu Türkiye'de Sigortacılık ve Bireysel Emeklilik Faaliyetleri Hakkında Raporu incelenerek yaklaşık olarak karar verilmiştir.

Çizelge 4.1. Varlıkların Portföylere Dağılım Oranı

Portföyler	*DİBS*	*Dolar*	*Hisse Senedi*
Düşük Riskli	0,80	0,15	0,05
Yüksek Riskli	0,4	0,2	0,4

Çizelge 4.1.'de verilen oranlar ile hesaplanan düşük riskli ve yüksek riskli reel getiri oranları Şekil 4.2.'de gösterilmiştir. Şekil 4.2.'de görüleceği üzere, düşük riskli reel getiri oranlarında oynaklık, yüksek riskli getiri oranlarına göre daha düşüktür.



Şekil 4.2. Düşük ve Yüksek Riskli Reel Getiri Oranları

Daha sonra AR(1) modeline uyduğu varsayılan bu veri seti, gelecekteki getiri oranlarını tahmin etmede kullanılmıştır. Düşük ve yüksek riskli reel getiri oranlarının AR(1) modeli ile tahmin edilen parametreleri Çizelge 4.2.'de verilmiştir.

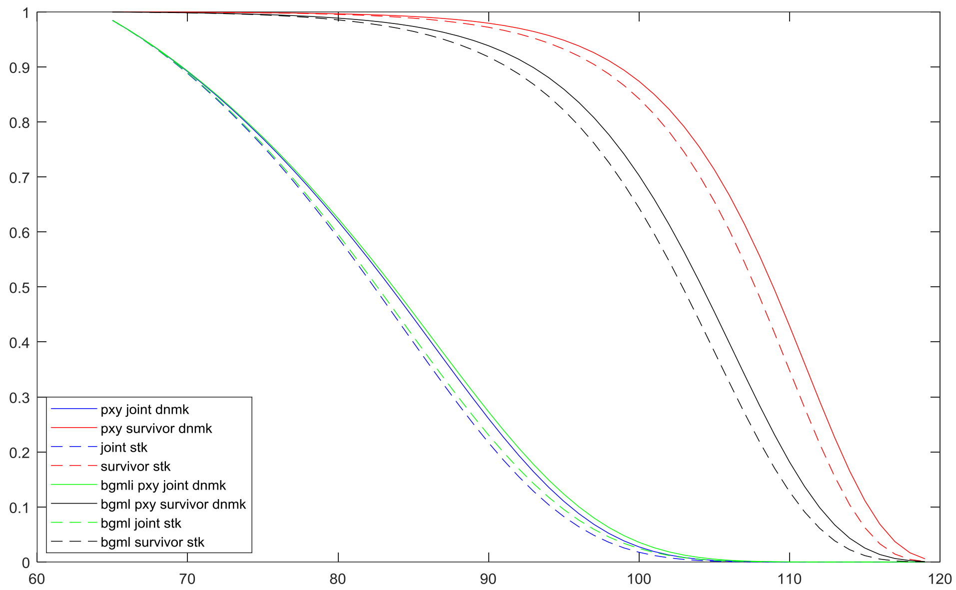
Çizelge 4.2. Düşük ve Yüksek Riskli Reel Getiriler İçin AR(1) Modelinin Parametreleri

Parametreler	*Düşük Riskli Portföy*	*Yüksek Riskli Portföy*
μ	0,040128	0,066541
Φ	-0,001455	0,002988
σ	0,063793	0,151281

AR(1) modelinin parametreleri benzetim modeline dâhil edilerek her dönem için, bir önceki reel getiriye bağlı olarak bir reel getiri üretilmiştir. Üretilen bu getiri oranları o benzetim için tüm ürünlerde kullanılmıştır. Benzetim algoritması her benzetim için farklı reel getiri serisi üretmek üzerine kurulmuştur. Deterministik reel getiri oranları, düşük riskli ve yüksek riskli portföylerin AR(1) modeli ile tahmin edilen ortalamaları olarak kabul edilmiştir.

4.1.2. Uzun Ömürlülük Modeli

Çoklu hayat anüiteleri için net tek primler hesaplanırken bir diğer ihtiyaç duyulan parametre yaşam olasılıklarıdır. Uzun ömürlülük riskini içeren dinamik hayat tablolarından elde edilen ölüm oranları, hayatta kalma oranlarına dönüştürülerek hesaplamalarda kullanılmıştır. Ayrıca hayat tablosundan bireylerin yaşlar itibariyle yaşama olasılıkları her geçen yıl değişmeden kullanılarak uzun ömürlülük riskini içermeyen hayat anüitelerinin net tek primleri de hesaplanarak karşılaştırma yapılmıştır. Uzun ömürlülük riskini içeren hayat tablosundan alınan yaşam olasılıkları bundan böyle dinamik, yine bu hayat tablosundan alınan fakat yıllara ve yaşlara göre değişmeyen yaşam olasılıkları ise statik olarak adlandırılacaktır. *"Türkiye Sigortalı ve Anüitant Hayat Tablolarının Oluşturulması ve Projeksiyonları"* projesi ile elde edilen hayat tablosunda ölüm olasılıkları 2035 yılına kadar tahmin edilmiştir. Bu tezde ilerleyen yıllar için ölüm olasılıkları 2035 yılı için geçerli olan ölüm olasılıkları olarak kabul edilmiştir. Statik durum için ise, her yıla göre değişmeyen, tablonun 2018 yılı için hazırlanan sütunundaki olasılıklar kullanılmıştır. Değişken durumlar için elde edilen statik ve dinamik çoklu yaşam olasılıklarının birikimli değerleri Şekil 4.3.'te gösterilmiştir.



Şekil 4.3. Birikimli Çoklu Yaşam Olasılıkları

Şekil 4.3.'te birleşik yaşam ve son yaşayan durumundaki çoklu yaşam olasılıklarının birikimli durumu gösterilmiştir. Burada erkek ve kadın için başlangıç yaşı 65, son yaşanan yaş ise 120'dir. Uzun ömürlülüğün yaşam olasılıkları üzerindeki arttırıcı etkisi, statik yaşam olasılıklarının hem birleşik hem de son yaşayan durumunda daha az olmasıyla açıkça görülebilir. Bağımlılık varsayımı ise iki anüite çeşidini farklı etkilemektedir. Birleşik yaşam durumu için bağımlı yaşam olasılığı bağımsız yaşam olasılığından daha büyük seyretmektedir. Bunun nedeni pozitif bağımlılık durumunda bireylerin yaşaması durumu, birlikte yaşam olasılığını arttırır. Son yaşayan durumunda ise bu tam tersi bir sonuç verir. Son yaşayan durumunda bağımlı yaşam olasılığı bağımsız yaşam olasılığından daha küçük seyretmektedir. Bunun nedeni ise pozitif bağımlılık durumunda bireylerden birinin ölmesi durumu, bireylerden diğerinin yaşam olasılığını düşürmekte ve bu ihtimal birlikte yaşam olasılığını azaltmaktadır.

4.1.3. Kopula Bağımlılık Modeli

Çoklu yaşam anüitelerinin net tek primlerinin hesaplamasında Frank Kopula bağımlılık modeli sürece dâhil edilerek incelenmiştir. Kopula fonksiyonlarında yaşam veya dağılım fonksiyonları kullanılabilmektedir. Bu tezde Frank Kopula için dağılım fonksiyonu modele dâhil edilerek bağımlı durumda anüitelerin net tek primleri hesaplanacak ve bağımlılığın olmadığı durum ile karşılaştırılacaktır. Bağımlılık modelinin alfa parametresi için literatürde sık kullanılan veri setine ait parametre kullanılacaktır. Bu parametre için Frees vd.'nin [10] çalışmasından yararlanılmıştır. Frank kopula için bağımlılığı ifade eden alfa parametresi: 3,367 olarak alınmıştır. Bu ifade eşler arasında pozitif bağımlılık olduğunu ifade eder.

Özetle; ilk olarak uzun ömürlülük riski açısından çoklu hayat anüitelerinden birleşik hayat ve son yaşayan anüitesi için gelecek gelecek yaşam sürelerinin bağımlı ve bağımsız olduğu net tek primler hesaplanacaktır. Bağımlılık ve bağımsızlık varsayımları altında ise stokastik ve deterministik getiri oranları kullanılarak net tek primler hesaplanacak ve karşılaştırılacaktır. Bu sayede bağımlılık ve bağımsızlık durumunda hesaplanan net tek primler için hem kendi arasında hem de karşılıklı karşılaştırma yapılabilecektir.

Son bölümde de dinamik ve statik durumda hesaplanan net tek primler aynı ürün için karşılaştırılacak ve böylelikle hesaplanan net tek primler arasında uzun ömürlülüğün etkisi görülebilecektir.

4.2. Uzun Ömürlülük Riski ile Hesaplanan Net Tek Primler

Bu bölümde eş oldukları varsayılan 65 yaşında bir erkek ve 65 yaşında bir kadın için deterministik ve stokastik yaşam olasılıkları ile ödemeleri 1 birim ve dönem sonu yapılan çoklu tam hayat anüitelerinin net tek primleri uzun ömürlülük riski dâhilinde hesaplanmıştır. Bu net tek primler gelecek gelecek yaşam sürelerinin bağımsızlığı ve bağımlılığı varsayım altında hesaplanarak karşılaştırılmıştır.

4.2.1. Birleşik Tam Hayat Anüitesi için Net Tek Primler

Öncelikle birleşik yaşam tam hayat anüitesinin dinamik durumdaki net tek primleri Çizelge 4.3.'de gösterilmiştir.

Çizelge 4.3. Birleşik Tam Hayat Anüitesinin Uzun Ömürlülük Riski Altında Net Tek Primi

NTP	*Bağımsız Durum*				*Bağımlı Durum*			
	Düşük Riskli	Yüksek Riskli	Düşük Ort. Getiri	Yüksek Ort. Getiri	Düşük Riskli	Yüksek Riskli	Düşük Ort. Getiri	Yüksek Ort. Getiri
BD	12,4903	11,5924	12,0301	9,5489	12,6058	11,6898	12,1366	9,6098
Std.Sp	5,6158	6,8775	4,8643	3,3931	5,6744	6,9434	4,9088	3,4081

Birleşik tam hayat anüitesinin gelecek gelecek yaşam sürelerinin bağımsızlığı durumunda stokastik getiri oranlarından düşük riskli getiri oranları ile hesaplanan net tek prim 12,4903 iken, yüksek riskli getiri oranları ile hesaplanan net tek prim 11,5924 olarak bulunmuştur. Getiri oranının deterministik olması durumunda ise düşük riskli ortalama getiri ile hesaplanan net tek prim 12,0301 iken, yüksek riskli ortalama getiri ile hesaplanan net tek prim 9,5489'dur. Gelecek gelecek yaşam sürelerinin bağımlılığı varsayımı altında ise anüitenin net tek primi stokastik getiri oranları düşük riskli durumda 12,6058 iken yüksek riskli durumda 11,6898 olarak hesaplanmıştır. Deterministik getiri oranlarından düşük riskli ortalama getiri ile hesaplanan net tek prim 12,1366 iken, yüksek riskli ortalama getiri oranı ile hesaplanan net tek prim 9,6098 olarak bulunmuştur.

Anüitelerin hesaplanması, ödemelerin gerçekleşmesi durumunda, ödemenin gerçekleştiği dönemlerdeki getiri oranları kullanılarak iskonto edilmesi şeklindedir. Getiri oranının artması da bu bağlamda anüitenin net tek priminin azalmasına yol açar. Yüksek riskli portföyün ortalama getiri oranının daha yüksek olması, anüitenin net tek priminin daha düşük olması ile sonuçlanır. Çizelge 4.3.'de görüldüğü üzere, hangi getiri oranları kullanılırsa kullanılsın bağımlılık varsayımı altında hesaplanan net tek primler, bağımsızlık varsayımı altında hesaplanan net tek primlerden yüksek çıkmıştır. Bunun nedeni, pozitif bağımlılık durumunda bireylerden biri yaşadıkça diğerinin yaşam olasılığı da artmaktadır. Buna ek olarak stokastik getiri oranları kullanılarak elde edilen net tek primler, deterministik getiri oranları kullanılarak elde edilen net tek primlerden yüksek çıkmıştır. Getiri oranlarının değişkenliği gerçeği göz önüne alınmadığında, şirketler anüitenin net tek primlerini eksik hesaplama riskiyle karşı karşıya kalabilirler.

4.2.2. Son Yaşayan Tam Hayat Anüitesi için Net Tek Primler

Son yaşayan tam hayat anüitesinin dinamik durumdaki net tek primleri Çizelge 4.4.'te gösterilmiştir.

Çizelge 4.4. Son Yaşayan Tam Hayat Anüitesinin Uzun Ömürlülük Riski Altında Net Tek Primi

NTP	*Bağımsız Durum*				*Bağımlı Durum*			
	Düşük Riskli	Yüksek Riskli	Düşük Ort. Getiri	Yüksek Ort. Getiri	Düşük Riskli	Yüksek Riskli	Düşük Ort. Getiri	Yüksek Ort. Getiri
BD	21,4877	18,9656	20,1813	13,9829	20,3199	18,0912	19,1694	13,5765
Std.Sp	4,6927	9,7207	1,5815	0,7052	4,6428	9,1130	2,1194	1,0479

Dinamik yaşam olasılıkları ile son yaşayan tam hayat anüitesinin gelecek gelecek yaşam sürelerinin bağımsızlığı durumunda stokastik getiri oranlarından düşük riskli getiri oranları ile hesaplanan net tek prim 21,4877 iken, yüksek riskli getiri oranları ile hesaplanan net tek prim ise 18,9656 olarak bulunmuştur. Getiri oranının deterministik olması durumunda ise düşük riskli ortalama getiri ile net tek prim 20,1813 iken, yüksek riskli ortalama getiri ile hesaplanan net tek prim 13,9829'dur. Gelecek gelecek yaşam sürelerinin bağımlılığı varsayımı altında ise anüitenin net tek primi stokastik getiri oranları düşük riskli durumda 20,3199 iken yüksek riskli durumda 18,0912 olarak hesaplanmıştır. Deterministik getiri oranlarından düşük riskli ortalama getiri ile hesaplanan net tek prim 19,1694 iken, yüksek riskli ortalama getiri oranı ile hesaplanan net tek prim 13,5765 olarak bulunmuştur.

Çizelge 4.4.'de görüldüğü üzere, hangi getiri oranları kullanılırsa kullanılsın bağımlılık varsayımı altında hesaplanan net tek primler, bağımsızlık varsayımı altında hesaplanan net tek primlerden düşük bulunmuştur. Bunun nedeni, pozitif bağımlılık durumunda bireylerden biri öldüğünde diğerinin yaşam olasılığının da azalmasıdır. Stokastik getiri oranları ile hesaplanan net tek primler, deterministik getiri oranları ile hesaplanan net tek primlerden daha yüksektir. Son yaşayan durumunda tam hayat anüitesinin net tek primleri de stokastik getiri oranı kullanıldığında daha düşük sonuçlar vermiştir. Özellikle bu fark getiri oranlarından yüksek riskli portföy kullanıldığında daha belirgin bir hal alır.

4.3. Uzun Ömürlülük Riski Olmadan Hesaplanan Net Tek Primler

Bu bölümde eş oldukları varsayılan 65 yaşında bir erkek ve 65 yaşında bir kadın için deterministik ve stokastik yaşam olasılıkları ile ödemeleri 1 birim ve dönem sonu yapılan çoklu tam hayat anüitelerinin net tek primleri uzun ömürlülük riski olmadan hesaplanmıştır. Bu net tek primler gelecek gelecek yaşam sürelerinin bağımsızlığı ve bağımlılığı varsayım altında hesaplanarak karşılaştırılmıştır.

4.3.1. Birleşik Tam Hayat Anüitesi için Net Tek Primler

Öncelikle birleşik yaşam tam hayat anüitesinin statik durumdaki net tek primleri Çizelge 4.5.'de gösterilmiştir.

Çizelge 4.5. Birleşik Tam Hayat Anüitesinin Uzun Ömürlülük Riski Olmadan Net Tek Primi

NTP	*Bağımsız Durum*				*Bağımlı Durum*			
	Düşük Riskli	Yüksek Riskli	Düşük Ort. Getiri	Yüksek Ort. Getiri	Düşük Riskli	Yüksek Riskli	Düşük Ort. Getiri	Yüksek Ort. Getiri
BD	12,1087	11,2588	11,6773	9,3387	12,2254	11,3646	11,7831	9,3980
Std.Sp	5,4533	6,6202	4,7444	3,3371	5,5341	6,7368	4,8060	3,3650

Birleşik tam hayat anüitesinin gelecek gelecek yaşam sürelerinin bağımsızlığı durumunda stokastik getiri oranlarından düşük riskli getiri oranları ile hesaplanan net tek prim 12,1087 iken, yüksek riskli getiri oranları ile hesaplanan net tek prim 11,2588 olarak bulunmuştur. Getiri oranının deterministik olması durumunda ise düşük riskli ortalama getiri ile net tek prim 11,6773 iken, yüksek riskli ortalama getiri ile hesaplanan net tek prim 9,3387'dir. Gelecek gelecek yaşam sürelerinin bağımlılığı varsayımı altında ise anüitenin net tek primi stokastik getiri oranları düşük riskli durumda 12,2254 iken yüksek riskli durumda 11,3646 olarak hesaplanmıştır. Deterministik getiri oranlarından düşük riskli ortalama getiri ile hesaplanan net tek prim 11,7831 iken, yüksek riskli getiri oranı ile hesaplanan net tek prim 9,3980 olarak bulunmuştur.

Çizelge 4.5.'e göre statik durum dâhilinde bağımsızlık varsayımı altında da bağımlılık varsayım altında da getiri oranları arttıkça net tek prim değerinin düşeceği açıktır. Stokastik getiri oranları ile hesaplanan net tek primlerin, deterministik getiri oranları ile hesaplanan net tek primlerden daha yüksek olduğu açıktır. Uzun ömürlülük riski olmasa dahi bağımlılık durumunda birlikte yaşam olasılığı artacağı için, anüite değerleri daha yüksek bulunmuştur.

4.3.2. Son Yaşayan Tam Hayat Anüitesi için Net Tek Primler

Son yaşayan tam hayat anüitesinin statik durumdaki net tek primleri Çizelge 4.6.'da gösterilmiştir.

Çizelge 4.6. Son Yaşayan Tam Hayat Anüitesinin Uzun Ömürlülük Riski Olmadan Net Tek Primi

NTP	*Bağımsız Durum*				*Bağımlı Durum*			
	Düşük Riskli	Yüksek Riskli	Düşük Ort. Getiri	Yüksek Ort. Getiri	Düşük Riskli	Yüksek Riskli	Düşük Ort. Getiri	Yüksek Ort. Getiri
BD	21,1986	18,7558	19,9348	13,8911	19,9535	17,8103	18,8482	13,4400
Std.Sp	4,6501	9,5561	1,6799	0,7636	4,6287	8,9152	2,2487	1,1324

Çizelge 4.6.'ya göre statik yaşam olasılıkları ile son yaşayan tam hayat anüitesinin gelecek gelecek yaşam sürelerinin bağımsızlığı durumunda stokastik getiri oranlarından düşük riskli getiri oranları ile hesaplanan net tek prim 21,1986 iken, yüksek riskli getiri oranları ile hesaplanan net tek prim 18,7558 olarak bulunmuştur. Getiri oranının deterministik olması durumunda ise düşük riskli ortalama getiri ile net tek prim 19,9348 iken, yüksek riskli ortalama getiri ile hesaplanan net tek prim 13,8911'dir. Gelecek gelecek yaşam sürelerinin bağımlılığı varsayımı altında ise anüitenin net tek primi stokastik getiri oranları düşük riskli durumda 19,9535 iken yüksek riskli durumda 17,8103 olarak hesaplanmıştır. Deterministik getiri oranlarından düşük riskli ortalama getiri ile hesaplanan net tek prim 18,8482 iken, yüksek riskli getiri oranı ile hesaplanan net tek prim 13,44 olarak bulunmuştur. Diğer çoklu yaşam anüitelerinde olduğu gibi getiri oranı arttıkça anüite net tek priminin değeri düşmektedir. Bağımlılık durumunda ise bireylerden biri öldüğünde diğer bireyin yaşam olasılığı düşeceğinden anüitenin net tek primi düşmektedir.

Bölüm 4.4.'te ise uzun ömürlülüğün etkisini ölçmek için birleşik ve son yaşayan anüitelerinin dinamik ve statik durumlarda hesaplanan net tek primler karşılaştırılacaktır.

4.4. Uzun Ömürlülük Riskinin Net Tek Primlere Etkisi

Bu bölümde uzun ömürlülük riskinin anüitelerin net tek primlerinde nasıl bir etki yarattığını görmek adına birleşik ve son yaşayan anüiteleri için stokastik ve deterministik getiri oranları ile gelecek gelecek yaşam sürelerinin bağımsızlığı ve bağımlılığı varsayımı altında hesaplanan net tek primler karşılaştırılacak ve yorumlanacaktır. Karşılaştırmada dinamik durum için hesaplanan net tek primin statik durumda hesaplanan net tek prime oranı kullanılacaktır.

4.4.1. Uzun Ömürlülük Riskinin Birleşik Tam Hayat Anüitesinin Net Tek Primlerine Etkisi

Çizelge 4.7. birleşik tam hayat anüitesinin statik ve dinamik durumda hesaplanan net tek primleri ve oranlarını göstermektedir.

Çizelge 4.7. Birleşik Tam Hayat Anüitesinin Statik ve Dinamik Durumda Hesaplanan Net Tek Primleri

			Dinamik		*Statik*		*Oran (BD)(%)*
			BD	*Std.Sp.*	*BD*	*Std.Sp.*	
BAĞIMSIZ	*Stokastik*	*Düşük*	12,4903	5,6158	12,1087	5,4533	3,1515
		Yüksek	11,5924	6,8775	11,2588	6,6202	2,9630
	Deterministik	*Düşük*	12,0301	4,8643	11,6773	4,7444	3,0212
		Yüksek	9,5489	3,3931	9,3387	3,3371	2,2508
BAĞIMLI	*Stokastik*	*Düşük*	12,6058	5,6744	12,2254	5,5341	3,1116
		Yüksek	11,6898	6,9434	11,3646	6,7368	2,8615
	Deterministik	*Düşük*	12,1366	4,9088	11,7831	4,806	3,0001
		Yüksek	9,6098	3,4081	9,398	3,365	2,2537

Çizelge 4.7.'de görüldüğü üzere dinamik durumda hesaplanan net tek primler birleşik tam hayat anüitesi için statik durumda hesaplanan net tek primlere göre daha yüksek bulunmuştur. Dinamik durumda ölüm olasılıklarının yıllara göre azalması söz konusu olduğunda, bu sonuç beklenen bir durum olmaktadır.

Uzun ömürlülüğün etkisini ölçmek adına yapılan oranlamanın sonuçlarına göre birleşik yaşam tam hayat anüitesinde etkinin %2-%3 civarlarında olduğu söylenebilir. Bunun anlamı birleşik hayat tam anüitesinde uzun ömürlülük riski, anüitenin net tek primlerini bu oranlar dâhilinde arttırdığıdır. Stokastik getiri oranları ile yapılan hesaplamalarda NTP oranlarının daha yüksek olduğu görülür. Bağımlılık varsayımı ise bağımsızlık varsayımına göre daha düşük sonuçlar vermiştir.

4.4.2. Uzun Ömürlülük Riskinin Son Yaşayan Tam Hayat Anüitesinin Net Tek Primlerine Etkisi

Çizelge 4.8. de son yaşayan tam hayat anüitesinin statik ve dinamik durumda hesaplanan net tek primleri ve oranlarını göstermektedir.

Çizelge 4.8. Son Yaşayan Tam Hayat Anüitesinin Statik ve Dinamik Durumda Hesaplanan Net Tek Primleri

			Dinamik		*Statik*		*Oran (BD)(%)*
			BD	*Std.Sp.*	*BD*	*Std.Sp.*	
BAĞIMSIZ	*Stokastik*	*Düşük*	21,4877	4,6927	21,1986	4,6501	1,3638
		Yüksek	18,9656	9,7207	18,7558	9,5561	1,1186
	Deterministik	*Düşük*	20,1813	1,5815	19,9348	1,6799	1,2365
		Yüksek	13,9829	0,7052	13,8911	0,7636	0,6609
BAĞIMLI	*Stokastik*	*Düşük*	20,3199	4,6428	19,9535	4,6287	1,8363
		Yüksek	18,0912	9,113	17,8103	8,9152	1,5772
	Deterministik	*Düşük*	19,1694	2,1194	18,8482	2,2487	1,7041
		Yüksek	13,5765	1,0479	13,44	1,1324	1,0156

Çizelge 4.8.'de görüldüğü üzere dinamik durumda hesaplanan net tek primler son yaşayan tam hayat anüitesi için statik durumda hesaplanan net tek primlere göre daha yüksek bulunmuştur. Dinamik durumda ölüm olasılıklarının yıllara göre azalması nedeniyle bu sonuç beklenen bir durum olmaktadır.

Uzun ömürlülüğün etkisini ölçmek adına yapılan oranlamanın sonuçlarına göre son yaşayan tam hayat anüitesinde etkinin ise %1 civarlarında olduğu söylenebilir. Stokastik getiri oranları ile yapılan hesaplamalarda bu oranların daha yüksek olduğu görülür. Bağımlılık varsayımı ise bağımsızlık varsayımına göre daha düşük sonuçlar vermiştir.

Son yaşayan tam hayat anüitesinde uzun ömürlülüğün etkisi birleşik tam hayat anüitesine göre daha düşüktür. Bunun nedeni birleşik yaşam durumunda bireylerden biri öldüğünde ödemelerin bitmesi ile son ödemenin yapılacağı zamanın son yaşayan anüitesine göre daha kısa olmasıdır. Ödeme süresi uzadıkça uzun ömürlülüğün etkisi azalmıştır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada çoklu hayat anüitelerinden birleşik yaşam ve son yaşayan anüiteleri için net tek primler hesaplanmıştır. Getiri oranları ve uzun ömürlülük riski için Türkiye'ye özgü yaklaşım kullanılırken, Frank kopula fonksiyonu ile hesaplanan bağımlı yaşam olasılıkları için pozitif bağımlılık parametresi Frees vd.'nin [10] çalışmasından alınmıştır.

Net tek primler hesaplanırken getiri oranları için farklı durumlar göz önüne alınmıştır. Bu durumlardan biri getiri oranlarının stokastik ve deterministik olması durumudur. Stokastik getiri oranları koşullu AR(1) süreci ile modellenmiştir. Öncelikle TUİK'ten alınan DİBS, dolar ve hisse senetlerinin reel getirileri belirli oranlar yardımıyla ağırlıklandırılarak düşük riskli ve yüksek riskli portföyler elde edilmiştir. Elde edilen düşük riskli ve yüksek riskli reel getiri oranları serilerinin koşullu AR(1) süreci ile parametreleri tahmin edilmiştir. Düşük riskli ve yüksek riskli portföylerin ortalama reel getiri oranları, deterministik getiri oranı olarak kullanılmıştır. Reel getirilerin stokastik olması durumunda hesaplanan net tek primlerin, deterministik olması durumunda hesaplanan net tek primlerden daha yüksek olduğu görülmüştür. Getiri oranının tüm dönemler boyunca değişmeyeceği varsayımı, anüitelerin net tek primi hesaplamasında eksik sonuçlar verme riskini taşır.

Bu çalışmada gelecek gelecek yaşam sürelerinin bağımlılığı ve bağımsızlığı durumları da incelenmiştir. Frank kopula fonksiyonu yardımıyla hesaplanan bağımlı durumlarda çoklu hayat anüiteleri farklı sonuçlar vermektedir. Pozitif bağımlılık içeren birleşik tam hayat durumunda bireylerin birinin yaşaması diğer bireyin yaşam olasılığını uzatmaktadır. Son yaşayan durumunda ise bireylerden biri öldüğünde diğer bireyin yaşama olasılığı azalır. Gelecek gelecek yaşam sürelerinin bağımlılığı durumunda birleşik tam hayat anüitesinin net tek primi bağımsızlık durumuna göre daha yüksek iken, son yaşayan anüitesinin bağımlılık durumunda net tek primi bağımsızlık durumuna göre daha düşük sonuçlar verir.

Bu tezdeki model yukarıda sayılan özelliklerinin yanında uzun ömürlülük riski dâhilinde de incelenmiştir. Bu tezde kullanılan uzun ömürlülük riski göz önüne alınarak hazırlanan *"Türkiye Sigortalı ve Anüitant Hayat Tablolarının Oluşturulması ve Projeksiyonları"* projesinden elde edilen hayat tablosundaki ölüm olasılıkları her yaşa ve yıllara göre özeldir ve değişkenlik gösterir. Beklenen gelecek yaşam süresinin arttığı düşüncesi ile ölüm oranlarının her geçen yıl azalacağı sonucu öngörülür. Bu yaşam olasılıkları ile hesaplanan tam hayat anüitelerinin net tek primlerinin, uzun ömürlülük riskini içermeyen yaşam olasılıkları ile hesaplanan net tek primlere göre daha yüksek sonuçlar verdiği görülmüştür. Dinamik yaşam olasılıklarının birleşik hayat ve son yaşayan anüitesi üzerindeki etkisi farklı olmuştur. Ödeme dönemi daha uzun olan son yaşayan anüitesinde bu etki %1 civarında iken, birleşik hayat anüitesinde bu etki %2-%3 civarındadır. Bu oranlar düşük gibi görünse de, örneğin son yaşayan anüitesi için %2-%3 oranında eksik alınacak primin planlanan kar üzerindeki olumsuz etkisi daha büyük bir orana karşılık gelecektir. Anüitelerin net tek primlerinin yanında hesaplanan standart sapmalar özellikle stokastik faiz oranı kullanıldığında sigorta şirketleri açısından net tek primlerin daha sağlıklı yorumlanmasını sağlayacaktır.

Sigorta şirketlerinin özellikle uzun dönem hesaplamalarında kullandığı varsayımlar ve parametreler gerçeğe yakın olmalıdır. Gerçeklikten uzak varsayımlar hatalı/eksik fiyatlandırmaya, gereğinden fazla/az rezerv tutmaya neden olabilecektir. Anüitelerin net tek primini hesaplamada kullanılan parametreler ve varsayımların etkisinin ölçüldüğü bu çalışmanın sigorta şirketlerine yararlı olacağına inanılmaktadır.

KAYNAKLAR

[1] Bowers, N. L., Gerber, H. U., Hickman, J. C., Jones, D. A. and Nesbitt, C. J., *Actuarial Mathematics*, The Society of Actuaries, New York, **1997**.

[2] Gerber, H. U., *Life İnsurance Mathematics*, Springer Science & Business Media, **1997**.

[3] Koissi, M. C., & Shapiro, A. F., The Lee-Carter Model Under The Condition Of Variables Age-Specific Parameters. In *43rd Actuarial Research Conference*, **2008**.

[4] Yamaç, S., *Yatırım ve Ölümlülük Riskleri Açısından Annüite Ürünleri*, Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, **2006**.

[5] Wadsworth, M., Findlater, A. and Boardman, T., Reinventing Annuities, *The Staple Inn Actuarial Society*, London, 3p., 6-10, **2001**. http://www. sias. org. uk/siaspapers/listofpapers/view_paper.

[6] Blake, D., Dowd, K., & Cairns, A. J., Longevity Risk And The Grim Reaper's Toxic Tail: The Survivor Fan Charts, *Insurance: Mathematics and Economics*, *42*(3), 1062-1066, **2008**.

[7] Denuit, M., Devolder, P., Goderniaux, A., Securitization Of Longevity Risk: Pricing Survivor Bonds With Wang Transform İn The Lee_Carter Framework, Journal of Risk and Insurance 74 (1), pp 87-113, **2007**.

[8] Çiçekdağı, C., Kopula Üzerine, *Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Felsefe Dergisi*, 26, 131-141, **2016**.

[9] Denuit, M., and Cornet, A., Premium Calculation With Dependent Time-Until-Death Random Variables: The Widow's Pension, *Journal of Actuarial Practice*, 7, 147-180, **1999**.

[10] Frees, E.W., Carriere, J. F., and Valdez E., Annuity Valuation With Dependent Mortality, *The Journal of Risk and Insurance*, 63(2), 229-261, **1996**.

[11] Sklar, A., Fonctions de repartition a n dimensions et leurs marges. *Public Instution of Statistical University*, 8, 229-231, **1959**.

[12] Parkes, C. M., Benjamin B. and Fitzgerald R. G., Broken Heart: A Statistical Study of Increased Mortality Among Widowers, *British Medical Journal*, 1(5646), 740-743, **1969**.

[13] Ward, A., Mortality of Bereavement, *British Medical Journal*, 1(6011), 700-702, **1976**.

[14] Jagger, C. and Sutton, C.J., Death After Marital Bereavement-is The Risk Increased?, *Statistics in Medicine*, 10(3), 395-404, **1991**.

[15] Hougaard, P., Harvald, B., & Holm, N. V., Measuring The Similarities Between The Lifetimes of Adult Danish Twins Born Between 1881–1930. *Journal of the American Statistical Association*, *87*(417), 17-24, **1992**.

[16] Marshall, A.W., Olkin, I., A multivariate exponential distribution. Journal of the American Statistical Association , 62, 30–44, **1967**.

[17] Fréchet, M., Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont données. *Ann. Univ. Lyon, 3^e serie, Sciences, Sect. A*, *14*, 53-77, **1951**.

[18] Höffding, W., Masstabinvariante korrelationstheorie. *Schriften des Mathematischen Instituts und Instituts fur Angewandte Mathematik der Universitat Berlin*, *5*, 181-233, **1940**.

[19] Carriere, J.F. and Chan, L.K., The Bounds of bivariate distributions that limit the value of last survivor annuities, *Transactions of the Society of Actuaries*, 38, 51-74, **1986**.

[20] Shemyakin, E. A. and Youn, H., Copula models of joint last survivor analysis, *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, *22*(2), 211-224., **2006**.

[21] Shi, P. and Frees, E. W., Dependent loss reserving using copulas, *Journal of the International Actuarial Association*, 41, 449–486, **2011**.

[22] De Jong, P., Modeling dependence between loss triangles. *North American Actuarial Journal*, *16*(1), 74-86, **2012**.

[23] Hickman, J.C., Why Not Random Interest?, *The Actuary*, 19(2), 1-4, **1985**.

[24] Boyle, P. P., Rates of Return As Random Variables, *The Journal of Risk and Insurance*, 43, 693—711, **1976**.

[25] Waters, H.R., The Moments and Distributions of Actuarial Functions, *Journal of the Institute of Actuaries*, 105, 61-75, **1978**.

[26] Panjer, H.H., and Bellhouse, D.R., Stochastic Modelling of Interest Rates with Applications to Life Contingencies, *Journal of Risk and Insurance*, 47, 91-110, **1980**.

[27] Bellhouse, D.R., and Panjer, H.H., Stochastic Modelling of Interest Rates with Applications to Life Contingencies--Part II, *Journal of Risk and Insurance*, 48, 628-37, **1981**.

[28] Dhaene, J., Stochastic Interest Rates and Autoregressive Integrated Moving Average Processes, *ASTIN Bulletin*,19, 131-38, **1989**.

[29] Frees, E. W., Stochastic life contingencies with solvency considerations. In *Proceedings di 2nd Conference in Actuarial Science and Finance on Samos, Karlovassi (Grecia),* **1990***. http://www. stat. ucl. ac. be/Samos2002/proceedSibillo. pdf*.

[30] Beekman, J. A., & Fuelling, C. P., Interest and mortality randomness in some annuities. *Insurance: Mathematics and Economics*, *9*(2-3), 185-196, **1990**.

[31] Beekman, J. A. Fuelling CP., Extra Randomness in Certain Annuity Models. *Insurance: Mathematics and Economics*, *10*, 275-287, **1991**.

[32] Lai, S. W., & Frees, E. W., Examining changes in reserves using stochastic interest models. *Journal of Risk and Insurance*, 535-574, **1995**.

[33] Parker, G., Stochastic analysis of the interaction between investment and insurance risks, *North American actuarial journal*, *1*(2), 55-84, **1997**.

[34] Marceau, E., & Gaillardetz, P., On life insurance reserves in a stochastic mortality and interest rates environment. *Insurance: Mathematics and Economics*, *25*(3), 261-280, **1999**.

[35] Hoedemakers, T., Darkiewicz, G., & Goovaerts, M., Approximations for life annuity contracts in a stochastic financial environment. *Insurance: Mathematics and economics*, *37*(2), 239-269, **2005**.

[36] Satıcı, E., & Erdemir, C., Faiz oranının rastlantı değişkeni olması durumunda tam hayat ve dönem sigortaları, *İstatistikçiler Dergisi: İstatistik ve Aktüerya*, *2*(1), 1-8, **2009**.

[37] Lysenko, N., *Stochastic analysis of life insurance surplus*, Doctoral Dissertation, Simon Fraser University Department of Statistics and Actuarial Science, Burnaby, **2006**.

[38] Nolde, N., & Parker, G., Stochastic analysis of life insurance surplus. *Insurance: Mathematics and Economics*, *56*, 1-13, **2014**.

[39] Chen, L., Lin, L., Lu, Y., & Parker, G., Analysis of survivorship life insurance portfolios with stochastic rates of return. *Insurance: Mathematics and Economics*, *75*, 16-31, **2017**.

[40] Arık, A., Sucu, M., Uzun ömürlülük bonolarını fiyatlandırma: Uç değer kuramı ve kübik risk fiyatlandırma modeli. *İstatistikçiler Dergisi: İstatistik ve Aktüerya*, *4*(2), 69-85, **2011**.

[41] Lee, R.D. and Carter, L.R., Modelling and forecasting U.S. mortality, *Journal of the American Statistical Association*, 419, 659-675, **1992**.

[42] Oeppen, J., and Vaupel, J. W., Broken limits to life expectancy, *Science*, 296, 1029-1031, **2002**.

[43] Bongaarts, J., Long-range trends in adult mortality: Models and projection methods. *Demography*, *42*(1), 23-49, **2005**.

[44] Vallin, J., and Meslé F.,Espérance de vie: peut-on gagner trois mois par an indéfiniment. *Population & Sociétés*, *473*, **2010**.

[45] Li, N., Lee, R., Gerland, P., Extending the Lee-carter method to model the rotation of age patterns of mortality decline for long-term projections, *Demography,* 50(6), 2037–2051, **2013**.

[46] Antolin, P. and Mosher, J., Mortality Assumptions and Longevity Risk, *Working Party on Private Pensions*, **2014**.

[47] Blake, D., Boardman, T. and Cairns, A., Sharing longevity risk: Why governments should issue longevity bonds. *North American Actuarial Journal*, 18(1), 258–277, **2014**.

[48] Dus, I., Maurer, R. and Mitchell, O. S., *Betting on death and capital markets in retirement: a shortfall risk analysis of life annuities*, National Bureau of Economic Research Working Paper No. 11271, **2005**.

[49] Milevsky, M. A., Promislow, S. D. and Young, V. R., Killing the law of large numbers: Mortality risk premiums and the sharpe ratio. *Journal of Risk and Insurance*, *73*(4), 673-686, **2006**.

[50] Coughlan, G. D., Khalaf-Allah, M., Ye, Y., Kumar, S., Cairns, A. J., Blake, D. and Dowd, K., Longevity hedging 101: A framework for longevity basis risk analysis and hedge effectiveness, *North American Actuarial Journal*, *15*(2), 150-176, **2011**.

[51] Cairns, A. J., Dowd, K., Blake, D. and Coughlan, G. D., Longevity hedge effectiveness: A decomposition, *Quantitative Finance*, *14*(2), 217-235, **2014**.

[52] Cairns, A. J., *Modeling and Management of Longevity Risk,* Pension Research Council Working Paper, No:2013-19, **2013**.

[53] Pitacco, E., Denuit, M., Haberman, S. And Olivieri, A., *Modelling longevity dynamics for pensions and annuity business*. Oxford University Press, **2009**.

[54] M. Sucu, M. Büyükyazıcı, Y. Gençtürk, vd., “Türkiye Sigortalı ve Anüitant Hayat Tablolarının Oluşturulması ve Projeksiyonları”, Ankara, **2017**.

[55] Frank, M. J., On the simultaneous associativity of F(x, y) and x+y− F(x, y), *Aequationes mathematicae*, *19*(1), 194-226, **1979**.

[56] Cox, J. C., Ingersoll Jr, J. E. and Ross, S. A., An intertemporal general equilibrium model of asset prices. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 363-384, **1985**.

[57] Jones, G., Longevity risk and reinsurance. *Society of Actuaries Reinsurance News*, (76), **2013**.

[58] Lee, I., Lee, H., & Kim, H. T., Analysis of reserves in multiple life insurance using copula, *Communications for Statistical Applications and Methods*, *21*(1), 23-43, **2014**.

[59] Nelsen, R. B., An introduction to copulas, Lecture Notes in Statistics, 139, **1999**.

[60] Rodriguez, J. C., Measuring financial contagion: A copula approach. *Journal of empirical finance*, *14*(3), 401-423, **2007**.

[61] Frees, E. W., & Valdez, E. A., Understanding relationships using copulas, *North American actuarial journal*, *2*(1), 1-25, **1998**.

[62] Nelsen, R.B., *An Introduction to Copulas*, Springer, NewYork, 2006.

[63] Schweizer, B. and Sklar, A., *Probabilistic Metric Spaces*, Amsterdam: North-Holland, **1983**.

[64] Genest, C., Frank’s family of bivariate distributions, *Biometrika*, 74, 549-555, **1987**.

[65] Nelsen, R. B., Properties of a one-parameter family of bivariate distributions with specified marginals. *Communications in statistics-Theory and methods*, *15*(11), 3277-3285, **1986**.

[66] Brown, J. R., & Poterba, J. M., *Joint life annuities and annuity demand by married couples*, National Bureau of Economic Research Working Paper No w7199, **1999**.

[67] Johnson, R.E. and Johnson, N., *Survival Models and Data Analysis*, Jhon Willey and Sons, New york, **1980**.

[68] Cunningham, R. J., Herzog, T. N. and London, R. L., *Models for quantifying risk*. ACTEX publications, Winsted, **2012**.

[69] Dickson, D. C., Hardy, M. R., Hardy, M., & Waters, H. R., *Actuarial mathematics for life contingent risks*. Cambridge University Press, **2013**.

[70] Elliott, C., *Multiple-Life Theory*, **2008**. http://www.scribd.com/doc/48882333/000453534r.

ÖZGEÇMİŞ

Kimlik Bilgileri

Adı Soyadı : Özer BAKAR

Doğum Yeri : Zonguldak

Medeni Hali : Bekar

E-posta : ozer.bakar@dpu.edu.tr

Adresi : Dumlupınar Üniversitesi, Uygulamalı Bilimler Yüksekokulu, Merkez/Kütahya

Eğitim

Lise : Oktay-Olcay Yurtbay Anadolu Lisesi, Çaycuma / Zonguldak

Lisans : Hacettepe Üniversitesi, Aktüerya Bilimleri Bölümü

Yüksek Lisans : Hacettepe Üniversitesi, Aktüerya Bilimleri Bölümü

Yabancı Dil ve Düzeyi

İngilizce;

YDS: 83,75/100

YÖKDİL: 90/100

TOEFL: 85/120

Almanca;

A2 Seviye Sertifikası (Wimbledon Dil Akademisi)

İş Deneyimi

Dumlupınar Üniversitesi, Sigortacılık ve Risk Yönetimi Bölümü, 2010-…

Deneyim Alanları

Tezden Üretilmiş Projeler ve Bütçesi

Tezden Üretilmiş Yayınlar

Tezden Üretilmiş Tebliğ ve/veya Poster Sunumu ile Katıldığı Toplantılar

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS/DOKTORA TEZ ÇALIŞMASI ORJİNALLİK RAPORU

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
AKTÜERYA BİLİMLERİ ANABİLİM DALI BAŞKANLIĞI'NA

Tarih: 13 / 06 / 2018

Tez Başlığı / Konusu: "Bağımlı Çoklu Hayat Anüitelerinde Uzun Ömürlülük Riskinin Stokastik Analizi"

Yukarıda başlığı gösterilen tez çalışmamın a) Kapak sayfası, b) Giriş, c) Ana bölümler d) Sonuç kısımlarından oluşan toplam 42 sayfalık kısmına ilişkin, 13/06/2018 tarihinde ~~şahsım~~/tez danışmanım tarafından *Turnitin* adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 5 'dir.

Uygulanan filtrelemeler:

1- Kaynakça hariç
2- Alıntılar hariç/~~dâhil~~
3- 5 kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Çalışması Orjinallik Raporu Alınması ve Kullanılması Uygulama Esasları'nı inceledim ve bu Uygulama Esasları'nda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

13.06.2018
Tarih ve İmza

Adı Soyadı:	Özer Bakar
Öğrenci No:	N10122703
Anabilim Dalı:	Aktüerya Bilimleri
Programı:	Aktüerya Bilimleri
Statüsü:	☑ Y.Lisans ☐ Doktora ☐ Bütünleşik Dr.

DANIŞMAN ONAYI

UYGUNDUR.

Dr. Öğr. Üyesi Murat Büyükyazıcı
(Unvan, Ad Soyad, İmza)