YENİ BİR AĞ MERKEZİLİK ÖLÇÜTÜ:
GÖRECELİ KENAR ÖNEMİ METODU

A NEW NETWORK CENTRALITY MEASURE:
RELATIVE EDGE IMPORTANCE METHOD

CEREN SALMAN

PROF. DR. MURAT CANER TESTİK
Tez Danışmanı

Hacettepe Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim – Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin
Endüstri Mühendisliği Anabilim Dalı için Öngördüğü
YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırlanmıştır.

2018

CEREN SALMAN'ın hazırladığı "**Yeni Bir Ağ Merkezilik Ölçütü: Göreceli Kenar Önemi Metodu**" adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **ENDÜSTRİ MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Oktay ÖLMEZ
Başkan ....

Prof. Dr Murat Caner TESTİK
Danışman ....

Yrd. Doç. Dr. Banu Yüksel ÖZKAYA
Üye ....

Yrd. Doç. Dr. Güldal GÜLERYÜZ
Üye ....

Yrd. Doç. Dr. Barbaros YET
Üye ....

Bu tez Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimler Enstitüsü tarafından **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. Menemşe GÜMÜŞDERELİOĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

YAYINLAMA VE FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI BEYANI

Enstitü tarafından onaylanan lisansüstü tezimin/raporumun tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı (kağıt) ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda verilen koşullarla kullanıma açma iznini Hacettepe üniversitesine verdiğimi bildiririm. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet haklarım bende kalacak, tezimin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanım hakları bana ait olacaktır.

Tezin kendi orijinal çalışmam olduğunu, başkalarının haklarını ihlal etmediğimi ve tezimin tek yetkili sahibi olduğumu beyan ve taahhüt ederim. Tezimde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanması zorunlu metinlerin yazılı izin alarak kullandığımı ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederim.

☒ **Tezimin/Raporumun tamamı dünya çapında erişime açılabilir ve bir kısmı veya tamamının fotokopisi alınabilir.**
(Bu seçenekle teziniz arama motorlarında indekslenebilecek, daha sonra tezinizin erişim statüsünün değiştirilmesini talep etseniz ve kütüphane bu talebinizi yerine getirse bile, tezinin arama motorlarının önbelleklerinde kalmaya devam edebilecektir.)

☐ **Tezimin/Raporumun .... tarihine kadar erişime açılmasını ve fotokopi alınmasını (İç Kapak, Özet, İçindekiler ve Kaynakça hariç) istemiyorum.**
(Bu sürenin sonunda uzatma için başvuruda bulunmadığım taktirde, tezimin/raporumun tamamı her yerden erişime açılabilir, kaynak gösterilmek şartıyla bir kısmı ve ya tamamının fotokopisi alınabilir)

☐ **Tezimin/Raporumun .... tarihine kadar erişime açılmasını istemiyorum, ancak kaynak gösterilmek şartıyla bir kısmı veya tamamının fotokopisinin alınmasını onaylıyorum.**

☐ **Serbest Seçenek/Yazarın Seçimi**

28/02/2018

(İmza)

Öğrencinin Adı Soyadı

Ceren SALMAN

ETİK

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında,

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversitede veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı,

beyan ederim.

23.02.2018

CEREN SALMAN

ÖZET

YENİ BİR AĞ MERKEZİLİK ÖLÇÜTÜ:

GÖRECELİ KENAR ÖNEMİ METODU

Ceren SALMAN

Yüksek Lisans, Endüstri Mühendisliği Bölümü

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Murat Caner TESTİK

Şubat 2018, 94 sayfa

Ağlar, fizik, kimya, biyoloji, sosyoloji, mühendislik ve bilgisayar bilimleri de dahil olmak üzere farklı alanlardaki verileri modellemek için kullanılan önemli bir araçtır. Bu alanlarda oluşturulan ağların çoğu, tüm kenarların bir yöne sahip olduğu simetrik olmayan ağlardır. Bu ağlarda genellikle belli bir zaman periyodu içerisinde herhangi iki düğüm arasındaki kenar sayısı birden fazla olabilmektedir.

Karmaşık ağlarda etkili düğümlerin belirlenmesi günümüzde çeşitli alanlarda ihtiyaç duyulan önemli bir konudur. Derece, yakınlık ve arasındalık ölçütleri ağları analiz etmek için yaygın olarak kullanılan en önemli merkezilik ölçütlerindendir. Küresel merkezilik ölçütleri olan yakınlık ve arasındalık, etkili düğümleri daha iyi tanımlayabilmesine rağmen yerel bir işlev gören derece ölçütü nispeten basit ve daha az etkilidir. Ancak bu ölçütlerin hepsi için bazı dezavantajlar ve sınırlamalar bulunmaktadır.

Literatürde en çok kullanılan mevcut merkezilik ölçütlerinin tamamı ağdaki düğümlere odaklanırken kenarlara odaklanılması bu çalışmada önerilen Göreceli Kenar Önemi (GKÖ) Metodunu diğer ölçütlerden ayıran temel özelliktir. Bu özellik kullanılarak, her bir kenar, birbirine bağladığı düğümlerin merkeziliklerine sağladığı katkısı bakımından değerlendirilir ve bu katkı doğrultusunda söz konusu kenarın iki düğüm için göreceli önemi belirlenir. Tüm ağ genelinde her bir kenar için yapılan ikili karşılaştırmalar sayesinde düğümlerin merkeziliği belirlenir.

Çalışmada, önerilen metodun ve diğer mevcut merkezilik ölçütlerinin geçerli kılınması için bir yazılım geliştirilmiştir. Bu yazılım ile literatürde “Freeman’s EIES Data Set” olarak bilinen gerçek bir elektronik bilgi alışveriş sistemi veri seti kullanılarak ağ merkezilik ölçütleri ile karşılaştırma yapılmıştır ve önerilen yöntemin etkinliği, uygulanabilirliği ve diğer ölçütlere kıyasla üstünlükleri gösterilmiştir.

Anahtar kelimeler: Ağ Analizi, Merkezilik Ölçütleri, Merkezi Düğümler, Göreceli Kenar Önemi

ABSTRACT

A NEW NETWORK CENTRALITY MEASURE:

RELATIVE EDGE IMPORTANCE METHOD

Ceren SALMAN

Master of Science, Department of Industrial Engineering

Supervisor: Prof. Dr. Murat Caner TESTİK

February 2018, 94 pages

A network is an important tool for modeling data in different domains including physics, chemistry, biology, sociology, engineering, and computer science. Most of the graphs created in these areas are non-symmetric networks where all edges are directional. Furthermore, in such networks, the number of connections between any two nodes (vertices) can be more than one in a given time period.

Determination of effective nodes in complex networks is a fundamental and practical issue nowadays. Degree, closeness and betweenness measures are the most important centrality measures commonly used to analyze networks. As a local metric, degree is relatively simple and less effective, although global measures such as the measure of closeness and betweenness can better define effective nodes. However, there are still some disadvantages and limitations of all of these measures.

In this study, focusing on the edges is the main feature that distinguishes the proposed Relative Edge Importance Method from the other metrics, while all of the existing centrality measures most commonly used in the literature focus on the nodes in the network. Using this property, each edge is evaluated in terms of the contribution to the centrality of the nodes it connects, and through this contribution, the relative importance of that edge for two nodes is determined. By pairwise comparisons of each edge throughout the entire network, the centrality of nodes are determined

A software is developed for comparisons of network centrality measures and a real electronic information exchange system data set known as "Freeman's EIES Data Set" in the literature is also studied and the results obtained demonstrate the effectiveness, applicability and superiority of the proposed method over the other metrics in the literature.

Key Words: Network Analysis, Centrality Measures, Central Nodes, Relative Edge Importance

TEŞEKKÜR

Sadece bu çalışmamda değil tüm lisansüstü eğitim sürecim boyunca her konuda desteğini esirgemeyen tez danışman hocam Prof. Dr. Murat Caner TESTiK'e,

tüm süreç boyunca sonuna kadar yanımda olan, motivasyonumu hep canlı tutmayı başaran ve destek sağlayan çok değerli nişanlım Halil İbrahim BALCI'ya,

ve hayatımın her noktasında sonsuz destek ve sevgileriyle her zaman yanımda olan aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

ÇİZELGELER

ŞEKİLLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

G = Graf ($G\ (V, E)$)

V = Düğüm kümesi (V={$v_1,\ v_2,\ v_3\ \ldots\ v_n$ })

E = Kenar kümesi (E={$e_1,\ e_2,\ e_3\ \ldots\ e_m$ })

n = Graftaki düğüm sayısı

m = Graftaki düğüm sayısı

$(v_1,\ v_2)$ = Düğüm çifti

C_n= n adet düğümü olan çember graf

W_n= n adet düğümü olan tekerlek graf

Q_k = K uzunluğundaki ikili sayı sistemi ile ifade edilen küp graf

$K_{a,b}$ = Düğüm Sayıları a ve b olan tam iki parçalı graf

H = Düğümlerin jeodezik uzaklık matrisi

d_{ij} = i düğümünden j düğümüne ulaşmak için jeodezik mesafe

$(C_i)^D$ = i düğümünün arasındalık merkeziliği

A = Ağın komşuluk matrisi

a_{ij} = i ve j düğümleri arasındaki komşuluk matrisi elemanı

$(C_i)^C$= i düğümünün yakınlık merkeziliği

L_i= i düğümünün diğer tüm düğümlere ortalama mesafesi

$(C_k)^B$= k düğümünün arasındalık merkeziliği

G_{ij}= i düğümünden j düğümüne jeodezik yolların sayısı

G_{ikj} = i ve j arasında yer alan ve k düğümünden geçen jeodeziklerin sayısı

$(C_i)^E$ = i düğümünün özvektör merkeziliği

w_{ij} = i düğümünden j düğümüne doğrudan giden kenarların toplam sayısı

$T^{i,in}$ = i düğümüne tüm düğümlerden doğrudan gelen kenarların toplam sayısı

$T^{i,out}$ = i düğümünden tüm düğümlere doğrudan giden kenarların toplam sayısı

$P_i^{j,in}$ = i düğümünden j düğümüne doğrudan giden çoklu kenar sayısının ($w_{i,j}$), j düğümüne tüm düğümlerden doğrudan gelen toplam çoklu kenar sayısına ($T^{j,in}$) oranı

$P_j^{i,out} = i$ düğümünden j düğümüne giden kenar sayısının düğümünden j düğümüne doğrudan giden çoklu kenar sayısının ($w_{i,j}$), i düğümünden tüm düğümlere doğrudan giden toplam çoklu kenar sayısına ($T^{i,out}$) oranı

$Poi(\lambda_i) = \lambda_i$ parametresi ile Poisson dağılımı

Kısaltmalar:

GKÖ= Göreceli Kenar Önemi

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Ağlar hakkında genel olarak bahsetmek oldukça zordur. Bunun temel nedeni, ağ analizinin kullanıldığı alanların, araştırmacıların ilgi alanlarına bağlı olarak farklılıklar göstermesi ve ağ teriminin farklı alanlarda farklı şekillerde kullanılmasıdır. Ağ analizinin geçmişi, Freeman (2004) gibi birçok araştırmacı tarafından sosyal bilimler alanına dayandırılıyor olsa da, ağları analiz eden uzmanların sosyal bilimlerin yanı sıra matematik, bilgisayar bilimi, antropoloji, elektrik devreleri, proje planlama, karmaşık sistemler, ulaşım sistemleri, haberleşme ağları, köprü sistemleri, metin analizi, örgüt kuramı, soy ağacı veya olay analizi gibi çeşitli araştırma alanlarından geldikleri görülmektedir.

Ağ analizi, ağ bilimleri ve graf teorisinden ortaya çıkan disiplinlerarası bir araştırmadır. Graf teorisi, doğada hem topolojik hem de kombinatoryal matematiğin bir dalıdır ve bağlamdan esasen özgür olan ve ağ analizi için halihazırda geliştirilmiş güçlü araçlarla kapsamlı bir yapısal modeldir (Krnc, 2015). Ağ analizindeki gelişmeler için birçok kaynakta Hage ve Harary'nin (1983) rolünün büyük olduğundan bahsedilmektedir. Graf kuramı ağ analizinin yapı taşı olarak görülmekle birlikte, Zweig'in (2016) de belirttiği gibi "Genel olarak graf kuramı, farklı graf sınıfları arasındaki ilişkiler ve belirli graf yapıları, graf problemi ve algoritmik çözümü arasındaki ilişki ile ilgilidir." Buna karşılık ağ analizi, belirli bir grafik yapısıyla bu grafik yapısının ilgilenilen karmaşık sistemdeki fonksiyonu arasındaki bağlantıyla ilgilenir. Başka bir ifadeyle ağ analizi, graf teorisinin bazı yaklaşımlarına dayanır; ancak grafik sınıflarının soyut davranışları ile ilgilenmekten ziyade, bir grafiğin yapısı ve işlevi ile temsil ettiği karmaşık sistem arasındaki ilişki ile ilgilenir. Bu tez çalışmasının özellikle 2. bölümünde daha çok matematiksel gösterim üzerinden temel bilgi verildiği için graf terimi, diğer bölümlerde ise daha çok yapısal ve teorik bilgi verildiği için ağ terimi kullanılmaktadır.

Ağlarda bir düğüm; Katz ve arkadaşlarının da (2004) belirttiği gibi kişiler, ekipler, organizasyonlar gibi kavramları temsil ederken, bir kenar düğümler arasındaki bir mesaj, bir telefon görüşmesi gibi iletişimleri temsil eder. Bununla birlikte, ağdaki düğümlerin konumu, bilginin bu ağ içerisinden nasıl aktığını ve ağın yapısını incelemek için oldukça önemlidir. Bir ağın yapısını incelemek için ağ analizinde en çok kullanılan kavramlardan biri merkeziliktir. Merkezilik, bir ağdaki düğümlerin önemini belirleyen göstergeler kümesi olarak tarif edilebilir. Ağların çoğunda bazı kenarlar veya düğümler diğerlerinden daha merkezidir. Bu sezgisel hissiyatı ölçmek için literatürde merkezilik ölçütleri geliştirilmiştir. Bir ağdaki bir düğümün görece "önemi"ni ölçmek için literatürde tanımlanmış birçok yol vardır. Bu yollar farklı motivasyonların çeşitli alanlarda geliştirilen farklı merkezilik ölçütlerini keşfetmeleri ile ortaya çıkmıştır. Bu merkezilik ölçütlerinin en başında derece, arasındalık, yakınlık ve özvektör merkezilik ölçütleri yer almaktadır. Bu ölçütlerin hepsinin bir düğümün merkezi olabilmesi için varsayımı farklı olmakla birlikte merkezilik ölçütlerinin ilki ve en basit olanı Albert ve Barabási (2002)'nin vurguladığı gibi derece merkeziliğidir. Bu ölçüt ağdaki her düğümün diğer düğümlerle bağlantısını gösteren kenarların toplam sayısını belirtir. Derece merkezilik ölçütüne göre bağlantı sayısı en fazla olan düğüm en merkezi düğüm olarak kabul edilir. Merkezilik ölçütlerinden ikincisi yakınlık merkeziliğidir. Ortalama yol uzunluğu olarak da bilinen bu yöntemle bir düğümün diğer düğümlere olan uzaklığı hesaplanır. Yakınlık merkeziliğine göre diğer düğümlere olan ortalama uzaklığı en az olan düğüm en merkezi düğüm olarak kabul edilir. Merkezilik ölçütlerinden üçüncüsü arasındalık olup bu ölçüt, ağdaki düğümler arasındaki en kısa yollara odaklanmaktadır. Arasındalık merkeziliği bir düğümün diğer düğümlerden uzaklığına değil, o düğümün başka iki düğüm arasındaki en kısa yol üzerinde olup olmadığı ile ilgilenir. Bu ölçüte göre de düğümler arasındaki bilgi transferinde köprü görevi gören düğüm en merkezi düğüm olarak kabul edilir. Arasındalık ve yakınlık merkezilik ölçütleri ile ilgili Brandes (2005), Bavelas (1948), Bavelas (1950), Koschützki ve arkadaşları (2005), Proctor ve Loomis (1951) ve Seeley (1949) gibi araştırmacılar ayrıntılı tanımlamalar ve tartışmalar ile konuyu irdelemişlerdir. Özvektör merkeziliğinde ise bir düğümün merkezi olan düğümlerle ilişkili olması durumunda daha merkezi olduğu fikri yatmaktadır (Ruhnau, 2000).

Merkezilik kavramı, Jeong (2001) tarafından kimya, Ahn (2000) tarafından psikoloji, Jackson (2010) tarafından sosyoloji, Lorenzen ve Kristina (2009) tarafından coğrafya, Gomez (2013) tarafından oyun teorisi ve daha birçok araştırmacı tarafından çeşitli alanlarda kullanılmış ve kullanılmaya devam edilmektedir.

Bu tezde, ağdaki merkezi düğümleri tespit eden merkezilik ölçütlerine bir yenisi eklenmiştir. Göreceli Kenar Önemi Metodu olarak adlandırılan bu ölçüt ile diğer ölçütlerin yetersiz kaldığı durumların ortadan kaldırılması amaçlanmıştır. Bu durumlar başta mevcut merkezilik ölçütlerinin yönlü ve çoklu kenarlı ağlardaki uygulama yetersizliği olmak üzere her birinin merkezilik anlayışlarından dolayı sahip olduğu sınırlamalardır. Yukarıda da bahsedildiği gibi literatürdeki mevcut ölçütler, bir düğümün merkezi olabilmesi için sahip olması gereken özellikleri birbirinden farklı şekillerde tanımlamışlardır. Bununla birlikte, yapılan araştırmalarda ve üzerinde çalışılan örneklerde de söz konusu bu ölçütlerin hepsinin belli koşullar altında bazı avantaj ve dezavantajlarının olduğu görülmüştür. Merkezilik hesaplamalarında, ölçütlerinin hem avantajların korunması hem de dezavantajların yok edilmesi motivasyonuyla geliştirilen bu metot ile bir düğümün merkezi olarak tanımlanabilmesi için yeni bir bakış açısı kazandırılmaya çalışılmıştır. Ağdaki her bir yönlü ve çoklu kenar bir düğümden çıkarken başka bir düğüme girmektedir. Dolayısıyla bu kenar ağ içerisindeki iki düğümü de etkilemektedir. Ancak bu etkinin değeri bu düğümler için birbirinden farklıdır. Çünkü her düğüm sahip olduğu tüm kenarlar arasında bu kenara bir kullanım/faydalanma oranı atfeder. Söz konusu kullanım/faydalanma oranı kenarın girdiği düğüm için o düğüme giren tüm kenarlar, çıktığı düğüm için o düğümden çıkan tüm kenarlar arasındaki orana denk gelmektedir. Böylece, kullanım/faydalanma oranlarının karşılaştırılması ile iki düğüm arasında hangisinin daha merkezi olduğu belirlenebilmektedir. Kullanım/faydalanma oranı daha düşük olan düğüm daha merkezidir. Bunun nedeni bir düğümün ne kadar çok bağlantısı varsa bu bağlantıların düğüm için öneminin de o kadar azalmasıdır. Tam tersi düşünüldüğünde ise bir düğümün sahip olduğu sayıca az kenar varsa bu düğüm ağdaki merkeziliğine katkı sağlayan bu kenarlara görece daha çok önem verecektir. Dolayısıyla buradaki kenarların kullanım/fayda oranı yüksek olacaktır. Bu şekilde ağ genelinde yapılacak karşılaştırmalar sayesinde de merkezi düğümler etkili bir şekilde tespit edilebilecektir.

Çalışmanın 2. Bölümünde graf teorisi hakkında bilgi verilmekte ve bir grafı oluşturan bileşenlerden bahsedilerek graf türleri tanıtılmakta, 3. Bölümde karmaşık sistemler ve bileşenleri ile merkezilik ölçütlerinden bahsedilmekte, 4. Bölümde yeni bir merkezilik ölçütü olarak Göreceli Kenar Önemi Metodu açıklanmakta, örneklerle ve diğer ölçütlerle karşılaştırılmakta, 5. Bölümde geliştirilen bir yazılım ile Göreceli Kenar Önemi Metodunun büyük ağlarda da çalışabildiği geçerli kılınmakta, gerçek bir veri seti olan Freeman'ın EIES Veri Seti üzerinde etkinliği ve uygulanabilirliği gösterilmekte ve diğer ölçütlerle karşılaştırılmalı olarak sonuçlar ortaya konmakta, son olarak ise 6. Bölümde elde edilen sonuçlar ortaya konularak yorumlanmakta ve gelecek çalışmalar için öneriler sunulmaktadır.

2. GRAF TEORİSİ

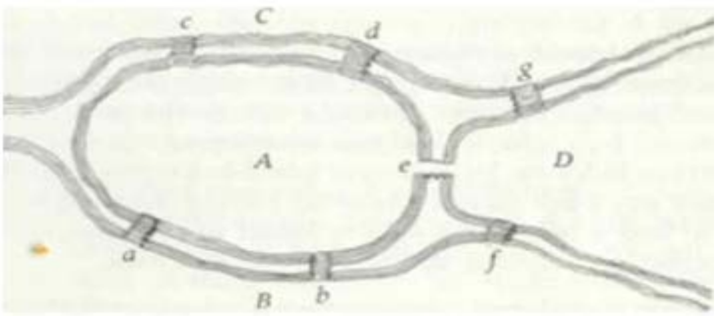
Graf, gerçek hayatta karşılaşılan birçok problemi mantıksal ilişki kurarak göstermeye yarayan bir ağ yapısıdır. Graf teorisi (graph theory), farklı disiplinlerin çalışma alanına girmekte ve bu alanlarda karşılaşılan karmaşık ve geniş kapsamlı problemlerin çözümü için sıklıkla kullanılmaktadır.

Graf teorisi uygulamaları;

- Fizik, kimya, sosyoloji, biyoloji, matematik vb. temel bilim dalları,
- Elektrik ve elektronik mühendisliği,
- Endüstri mühendisliği,
- Bilgisayar mühendisliği veya bilgisayar bilimleri (internet, veri madenciliği görüntü işleme, oyunlar, yapay zeka vb.),
- Ekonomi, yönetim bilimi, iletişim teknolojileri

gibi birçok alanı kapsamaktadır.

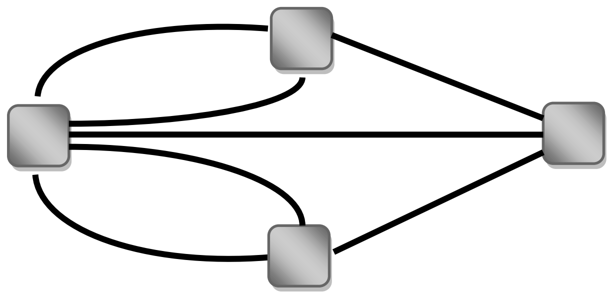
Graf teorisi, gerçek dünya problemlerinin daha hızlı ve etkili bir şekilde çözülmesini yardımcı olur. Bu teorinin ortaya çıkması ve temellenmesi Königsberg Köprüsü problemi ile gerçekleşmiştir. Genel görüşe göre bu problem 1736 yılında Euler tarafından çözüme kavuşturulmuş, daha doğrusu yanlışlığı kanıtlanmış bir problemidir (Bondy ve Murty, 1976). Barnett (2005)'in kullandığı ve bu tez kapsamında Şekil 2.1'de verilen resimde gösterildiği gibi, Prusya'da Königsberg'de Kneiphof adında bir ada bulunmaktadır. A harfi ile temsil edilen bu adayı çevreleyen nehir iki kola ayrılmaktadır. Söz konusu bu kollar üzerinde de a, b, c, d, e, f ve g ile gösterilen yedi adet köprü bulunmaktadır.



Şekil 2.1: Königsberg Köprüsü (Barnett, 2005)

Bu problem Prusya'da yaşayan meraklı halk tarafından ortaya atılmıştır. Kent halkı Şekil 2.1'de görülen her köprüden yalnızca bir kez geçerek bütün şehri dolaşabilir miyiz sorusu üzerinden kendilerine hem bir uğraş hem de bir oyun geliştirmişlerdir. Ancak yıllarca süren uğraşlar sonunda kimse olumlu bir sonuç elde edememiştir.

Sonraki süreçte kent halkının ortaya attığı teori Euler'in dikkatini çekmiştir. Euler kent içinde köprü köprü gezmek yerine bu problemi kâğıt üzerinde ele almayı tercih etmiştir. Böylelikle de Şekil 2.2'de verilen belki de ilk graf denilebilecek şekli çizmiştir.



Şekil 2.2: Königsberg Köprüsünün Gösterimi (ilk graf)

Bu şekil üzerinden çalışmalarını yapan Euler bir süre sonra bu problemin çözümünün mümkün olmayacağına görmüş ve hangi durumlar sağlansaydı mümkün olurdu üzerinde çalışmalar yapmıştır. Bu çalışmalar sonucunda da problemin çözümünü dönemin ünlü matematik ve bilim dergilerinde yayınlatmıştır.

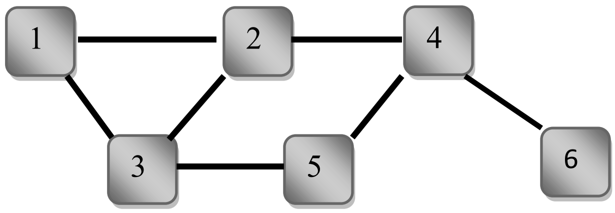
Bu tez çalışmasında odağımız graflar olduğundan graf teorisi hakkında temel bir anlayışa sahip olmak önemlidir. Aşağıda bu konuda temel bilgiler sunulmaktadır. Daha detaylı bilgiye ulaşmak için okuyucular West (2001) ile Balakrishnan ve arkadaşları (2012)'na yönlendirilmektedir.

Graf teorisi, problemleri tanımlamakta ve yapısal olarak ilişkileri belirlemekte oldukça faydalıdır. Kavramsal olarak genellikle G harfi ile gösterilen bir graf, düğüm veya köşe olarak adlandırılan noktalar kümesi (V) ve her biri bu noktaları veya sadece noktanın kendisini birleştiren ve kenar, ayrıt, bağlantı veya hat olarak adlandırılan çizgiler (E) topluluğudur (Golumbic, 2004; Bollobás, 2013). Bu çalışma boyunca noktalar kümesi "düğüm", çizgiler kümesi ise "kenar" olarak adlandırılacaktır. Buna göre, bir graf için aşağıdaki gösterim kullanılacaktır:

$$G = (V, E)$$

Örneğin Şekil 2.3’teki graf incelendiğinde;

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $E = \{(6, 4), (5, 4), (5, 3), (4, 2), (3, 2), (3, 1), (2, 1)\}$



Şekil 2.3: Örnek Graf 1

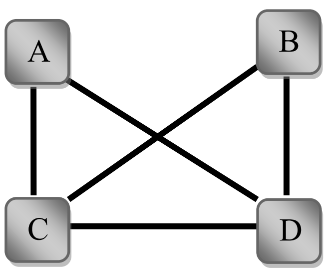
Bir gerçek hayat probleminin graf ile modellenmesi sonrasında graf teorisi kapsamında geliştirilen yöntemler kullanılarak problemler çözülebilmekte ve ardından da tekrar gerçek hayata uygulanabilmektedir. Bu bölümün devamında, literatürde dağınık olarak verilen bir grafı oluşturan elemanlar, bu elemanların özellikleri ve farklı graf türleri ile ilgili bilgiler harmanlanarak ve kategorize edilerek sunulmuştur.

2.1. GRAFIN ELEMANLARI

2.1.1. DÜĞÜMLER

Bir düğüm (vertex, node) *v*, bir grafın bir uç nokta veya bir kesişme noktasıdır. Gerçek hayattaki bir şehir, idari bir bölüm, bir kavşak veya bir ulaşım terminali (istasyonlar, limanlar ve havaalanları) gibi bir konumun soyutlanması olabilmektedir.

Örneğin Şekil 2.4’teki graf incelendiğinde düğüm kümesi = $\{A, B, C, D\}$’dir



Şekil 2.4: Örnek Graf 2

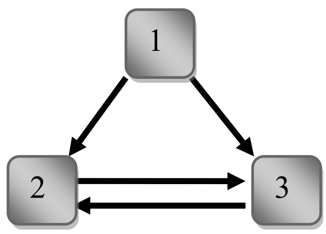
2.1.2. KENARLAR

İki düğüm arasındaki bir bağa kenar (edge) adı verilir. i ve j düğümler olmak üzere kenarlar (i, j) ile gösterilirler. Bir kenar, düğümler arasındaki hareketleri destekleyen bir ulaşım/iletişim altyapısının soyutlanmasıdır.

2.1.2.1. ÖZEL KENARLAR

2.1.2.1.1. YÖNLÜ KENAR

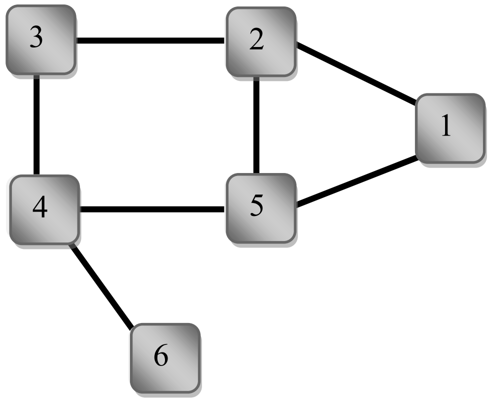
Bir graftaki kenarlar, bağlantının başladığı ve bittiği yeri belirten yön bilgisine sahip ise bu tür graflar yönlü graf (directed graph) olarak adlandırılır. Ok ile gösterilen yönlü kenarlar (directed edges) sıralı düğüm çiftleri ile gösterilir. Bu tür kenarlarda örneğin (a, b) ve (b, a) ile gösterilen kenarlar birbirinden farklıdır. İlk düğüm orijin, ikinci düğüm ise hedef olarak adlandırılır. Örneğin Şekil 2.5'teki kenarlar yönlü olup (1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 2) sıralı düğüm çiftleri ile gösterilirler. Bu örnekten görüleceği üzere (2, 3) ve (3, 2) düğüm çiftleri farklı kenarları işaret etmektedir. Gross ve Yellen (2005), bu örnekteki (2, 3) ve (3, 2) gibi kenarları, yani bir düğüm çifti arasındaki farklı yönlere bakan okları, karşıt yönlü kenarlar (oppositely directed edges) olarak tanımlamıştır.



Şekil 2.5: Yönlü Kenarlı Graf

2.1.2.1.2. YÖNSÜZ KENAR

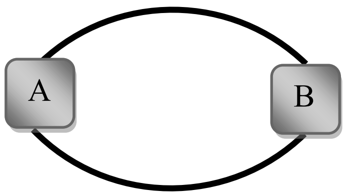
Bir graftaki kenarlar, bağlantının başladığı ve bittiği yeri belirten yön bilgisine sahip değil ise bu tür graflar yönsüz graf (directed graf) olarak adlandırılır. Çizgi ile gösterilen yönsüz kenarlar (undirected edges), sırasız düğüm çiftleri ile ifade edilir. Bu tür kenarlarda (a, b) ile (b, a) aynı kenarı ifade eder. Örneğin Şekil 2.6'daki kenarlar yönsüz olup {(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (4, 6), (1, 5)} sırasız düğüm çiftleri ile ifade edilebilir. Bu örnekten görüleceği üzere (1, 2) ile (2, 1) düğüm çiftleri aynı kenarı işaret etmektedir.



Şekil 2.6: Yönsüz Kenarlı Graf

2.1.2.1.3. PARALEL KENARLAR

Bir düğüm çifti iki veya daha fazla kenar ile bağlanmışsa bu kenarlar paralel kenarlar (parallel edges) olarak adlandırılmıştır. Şekil 2.7'de A ve B düğümleri arasında birden fazla kenar, yani paralel kenarlar bulunmaktadır.

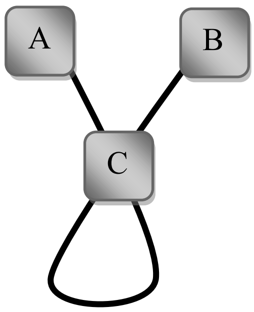


Şekil 2.7: Paralel Kenarlı Graf

Paralel kenarlar, Gross ve Yellen(2004) de kullanıldığı gibi çoğu kaynakta çoklu kenar (multiedge) olarak kullanılmakta olup, iki düğüm arasında birden fazla etkileşimin olduğunu ifade eder.

2.1.2.1.4. DÖNGÜ

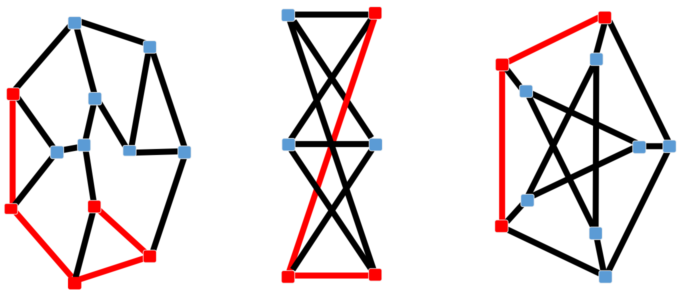
Döngü (self loop), bir grafın aynı düğümle başlayan ve biten bir kenarını ifade etmektedir. Bir grafın döngü içerip içermediği graftaki kenar sayısı ile düğüm sayısının eşit olması ya da kenar sayısının düğüm sayısından fazla olması ile anlaşılabilir. Şekil 2.8'de verilen graf örneğinde C düğümünde döngü vardır. Diğer bir ifadeyle, C düğümünde başlayan ve biten bir kenar söz konusudur.



Şekil 2.8: Döngü içeren Graf

2.1.2.1.5. YOL

Bir yol (path) bir düğümden başka bir düğüme giderken izlenecek kenarlar ile oluşur. Basit bir grafta, kenar sayısının toplamı yol uzunluğuna eşittir. Ağırlıklı bir grafta ise yol üzerindeki kenarların ağırlıklarının toplamı yol uzunluğuna eşittir. Buna göre Şekil 2.9'da kırmızı ile gösterilen kenarlar yolları göstermektedir. d+1 adet düğüm arasındaki d adet ardışık kenar d uzunluğundaki bir yol meydana getirir. Ayrıca, Alba (1973), "Tüm düğüm çiftleri bir yol ile bağlı olduğunda, bu tür graflar bağlı graftır (connected graph)" şeklinde bir tanımlama yapmıştır.

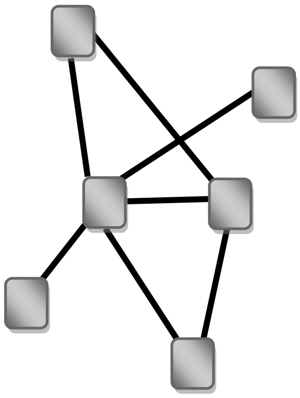


Şekil 2.9: Yol Örnekleri

2.2. GRAF ÇEŞİTLERİ

2.2.1. BASİT GRAF

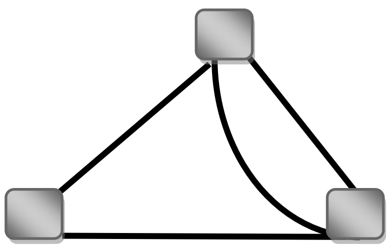
Basit graflarda (simple graph) kenarlar yönsüzdür. Herhangi iki düğüm arasında paralel kenar yoktur ve bu tür graflar döngü içermezler. Basit graflara bir örnek Şekil 2.10'da verilmiştir.



Şekil 2.10: Basit Graf Örneği

2.2.2. ÇOKLU GRAF

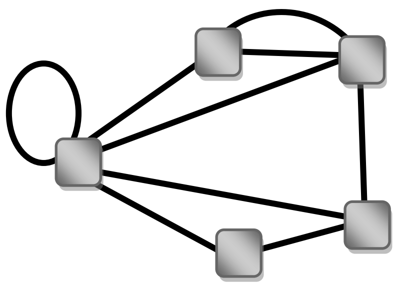
Çoklu graflar (multi graphs), basit grafların yeterli olmadığı durumlarda kullanılır. Bununla birlikte, bu graflar da basit graflar gibi kenarları yönsüz, herhangi iki düğüm arasında paralel kenarı olmayan ve döngü içermeyen graflardır. Örnek vermek gerekirse, bir uçak firmasının uçuşları çoklu graflara ilişkin bir gerçek dünya örneğidir. Basit graflar, çoklu graftır fakat çoklu graflar basit graf değildir. Çoklu graflara bir örnek Şekil 2.11'de verilmiştir.



Şekil 2.11: Çoklu Graf Örneği

2.2.3. PSEUDO GRAF

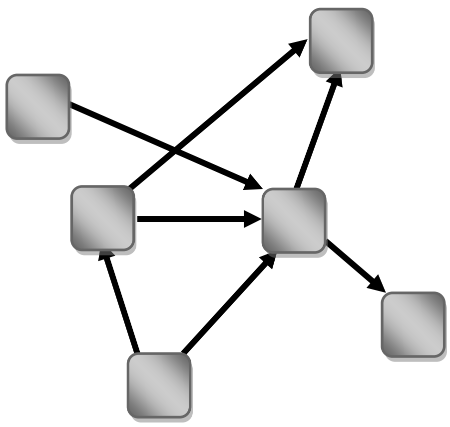
Çoklu grafların yeterli olmadığı durumlarda Pseudo graflar kullanılır. Yönsüz grafların en temel hali olarak bilinir. Bu graflarda kenarlar yönsüzdür ancak iki düğüm arasında paralel kenara ve döngüye izin verilmektedir. Pseudo graflara bir örnek Şekil 2.12'de verilmiştir.



Şekil 2.12: Pseudo Graf Örneği

2.2.4. YÖNLÜ GRAF

Yönlü bir grafta (directed graph) her kenar yönlüdür ve bu kenarlar sıralı düğüm çiftleri ile gösterilirler. Yönlü graflara bir örnek Şekil 2.13'te verilmiştir.

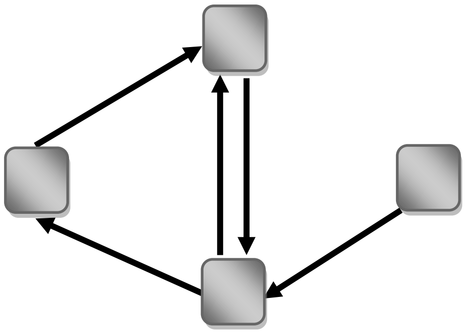


Şekil 2.13: Yönlü Graf Örneği

2.2.5. ÇOKLU YÖNLÜ GRAF

Çoklu Yönlü Graflarda (multidirected graph) iki düğüm arasında birden fazla yönlü kenar olması söz konusudur. Graf çiziminde ters yönde iki ayrı kenar kullanılırsa bunun anlamı iki düğüm arasında farklı yönlerde bağlantı olduğudur.

Bu tür graflar döngü içerebilir. Çoklu yönlü graflara bir örnek Şekil 2.14'de verilmiştir.



Şekil 2.14: Çoklu Yönlü Graf Örneği

Şimdiye kadar bahsedilen basit, çoklu, pseudo, yönlü ve çok yönlü graflar kenarlarının yönlü olup olmaması, çoklu kenar ve döngü içerip içermemesine göre Çizelge 2.1'de verildiği üzere kategorize edilebilir.

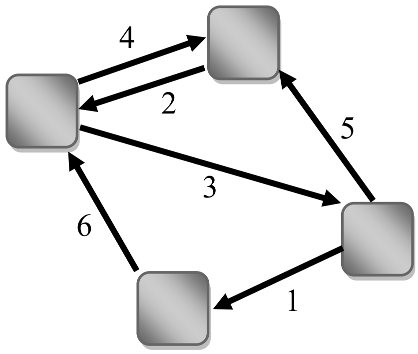
Çizelge2.1: Graf Çeşitleri ve Özellikleri

GRAF TÜRÜ	KENAR TÜRÜ	ÇOKLU KENAR	DÖNGÜ
Basit Graf	Yönsüz Kenarlar	Yok	Yok
Çoklu Graf	Yönsüz Kenarlar	Var	Yok
Pseudo Graf	Yönsüz Kenarlar	Var	Var
Yönlü Graf	Yönlü Kenarlar	Yok	Var
Çoklu Yönlü Graf	Yönlü Kenarlar	Var	Var

2.2.6. AĞIRLIKLI GRAF

Graf kenarlarına ağırlıklar verilebilir. Eğer kenarlar üzerinde ağırlıklar varsa bu tür graflara ağırlıklı/maliyetli graf (weighted graphs) denir. Bu tür graflar her bir kenarına nümerik bir değer verilmiş graflardır. Ağırlıklı graflara bir örnek Şekil 2.15'te verilmiştir. Eğer tüm kenarların ağırlığı 1 veya birbirine eşitse ağırlıklı graf olarak adlandırılmaz; yön bilgisi de yoksa basit graf olarak adlandırılır.

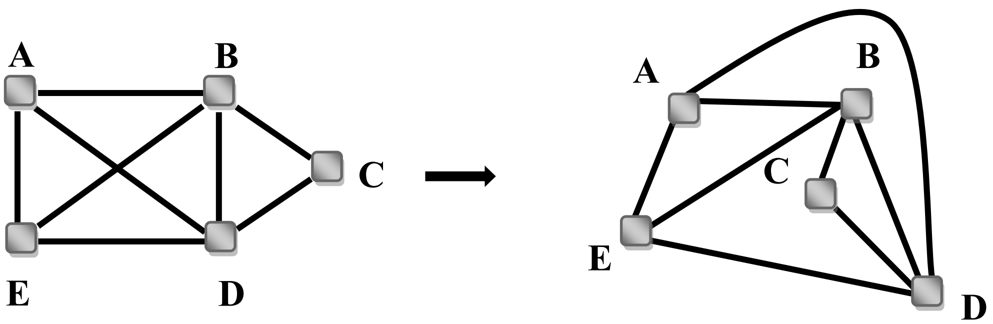
Ağırlık ile kastedilen durumlar uygulamadan uygulamaya değişir. Örneğin şehirlerin düğümleri ifade ettiği bir ağ örneğinde şehirlerarasındaki uzaklık ağırlık olarak ifade edilebilir. Newman (2001) bilim adamlarının birbirlerini ne kadar tanıdıklarından yola çıkarak ağırlıklı bir işbirliği ağı üzerine çalışma yapmıştır. Bu çalışmada, bilim adamlarının tanışıklıkları birlikte yapılan ortak çalışma sayılarına göre incelemiştir.



Şekil 2.15: Ağırlıklı Graf Örneği

2.2.7. DÜZLEMSEL GRAF

Düzlemsel graflar birbirini kesmeyen kenarlar ile çizilebilen graflardır. Bu tür graflara bir örnek Şekil 2.16'da verilmiştir.



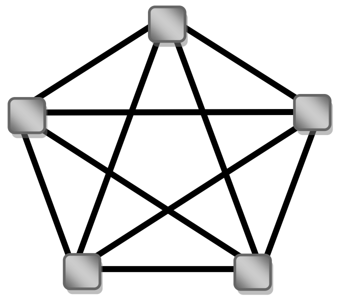
Şekil 2.16: Düzlemsel Graf Örneği

2.2.8. TAM GRAF

Tam graflarda (completed graph) her düğümün diğer tüm düğümlerle arasında bir kenar vardır. Başka bir ifade ile tüm düğümler sahip olabilecek tüm kenarlara sahiptir. Bu tür graflarda bütün düğümlerin dereceleri birbirine eşittir ve bu değer toplam düğüm sayısının bir eksiği kadardır. Örnek vermek gerekirse n adet düğüme sahip bir tam grafın kenar sayısı:

$$\frac{n * (n-1)}{2}$$

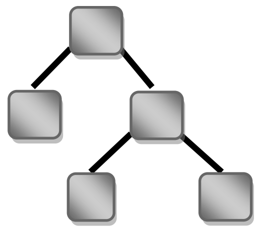
olarak hesaplanır. Tam graflara bir örnek Şekil 2.17'de verilmiştir.



Şekil 2.17: Tam Graf Örneği

2.2.9. AĞAÇ

İçinde devre (circuit) barındırmayan grafa ağaç (tree graph) adı verilir. Ağaç grafa bir kenar eklenmesi mutlaka bir döngünün oluşmasına sebebiyet verecektir. Bununla birlikte ağaç graflardaki kenar sayısı düğüm sayısının bir eksiği kadardır. Bu tür graflara bir örnek Şekil 2.18'de verilmiştir.

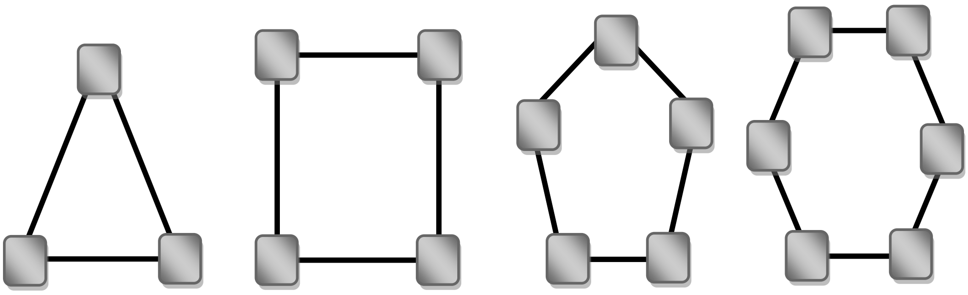


Şekil 2.18: Ağaç Graf Örneği

2.2.10. ÇEMBER GRAF

Çember graflarda (cycle graph) düğüm sayısı $n \geq 3$'tür. Bu tür graflarda (v_1, v_2), (v_2, v_3), ..., (v_{n-1}, v_n), (v_n, v_1) düğüm çiftlerinden oluşan kenarlar bulunmaktadır..

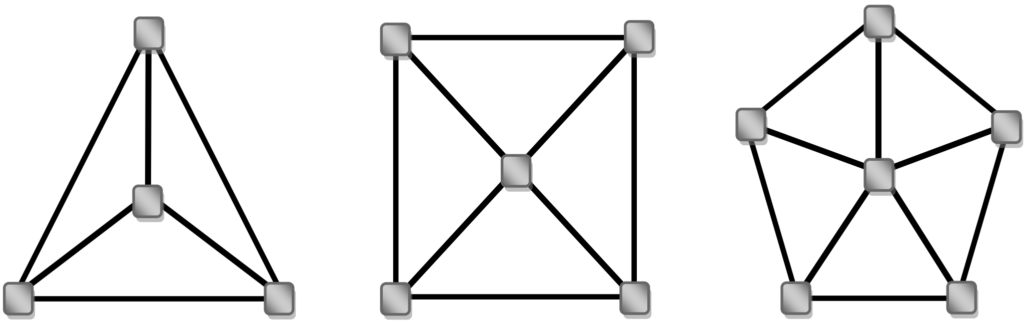
Çember graflar genellikle C_n ile ifade edilir. Bu graflara örnekler Şekil 2.19'da verilmiştir.



Şekil 2.19: Çember Graf Örnekleri

2.2.11. TEKERLEK GRAF

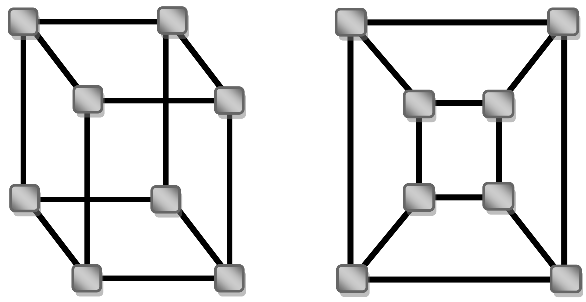
Tekerlek graf (wheel graph), çember grafa ek düğüm eklenerek oluşturulur. Genellikle W_n ile ifade edilir. Eklenen yeni düğüm, diğer bütün düğümlere bağlıdır. Tekerlek graflara bir örnek Şekil 2.20'de verilmiştir.



Şekil 2.20: Tekerlek Graf Örnekleri

2.2.12. KÜP GRAF

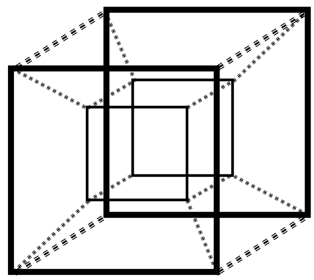
Küp graf genellikle Q_k ile ifade edilir. Küp grafın (k-cube) düğüm noktaları k uzunluğunda ikili sayı sistemi ile gösterilir. Örneğin, k= 1 ise, "0" ve "1", k= 2 ise "00", "01", "10" ve "11" etiketli düğümler kullanılır. Bu etiket değerleri, bir düğümden diğerine geçerken aynı anda sadece bir rakamın değerinin değiştirilmesi ile elde edilir. Küp graflara bir örnek Şekil 2.21'de verilmiştir.



Şekil 2.21: Küp Graf Örneği

2.2.13. HİPERKÜP GRAFLAR

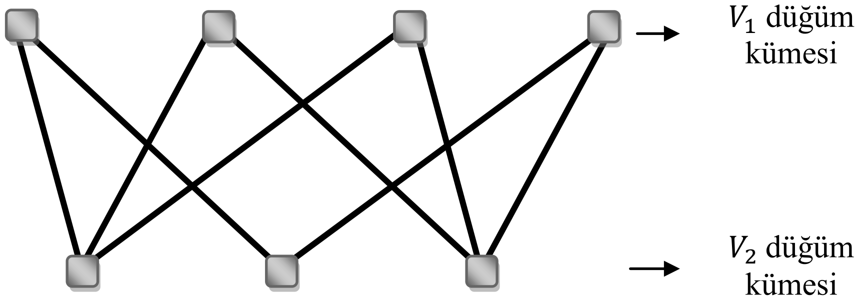
16 düğüm, 32 kenar ve 20 yüzeyden oluşan graftır. Hiperküp graflara bir örnek Şekil 2.22'de verilmiştir.



Şekil 2.22: Hiperküp Graf Örneği

2.2.14. İKİ PARÇALI GRAFLAR

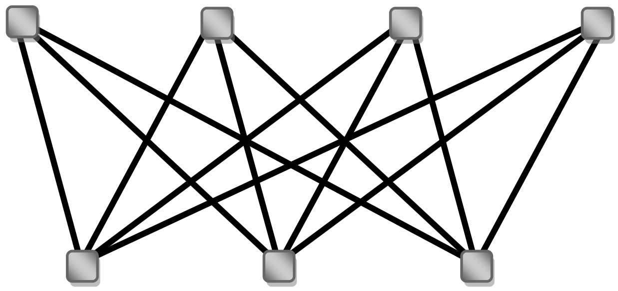
Bir grafı oluşturan düğümler iki ayrı kümeye bölünerek graf ikiye ayrılabilir. Bu ayırma işleminde izlenecek yol; bir kenar ile birbirine bağlanabilecek durumda olan düğümleri aynı küme içerisine yerleştirmemektir. Mevcut kümeler içerisindeki düğümler birbirlerine herhangi bir kenar ile bağlanmamalıdır. İki parçalı graflara (bipartite graph) bir örnek Şekil 2.23'de verilmiştir. Bu örnekte $G\,(V, E)$ grafında 5 adet düğümden oluşan V düğüm kümesi 2 ve 3 adet düğümden oluşan V_1 ve V_2 düğüm kümelerine ayrılmıştır.



Şekil 2.23: İki Parçalı Graf Örneği

2.2.15. TAM İKİ PARÇALI GRAFLAR

İki parçalı grafı oluşturan iki kümeden herhangi birinin her bir düğümü diğer kümenin her bir düğümüne bir kenarla birleştirilmiş ise bu grafa iki parçalı tam graf (complete bipartite graph) denir. İki parçalı tam graflar, a ve b kümelerin eleman sayıları olmak üzere, $K_{a,b}$ şeklinde gösterilir.Tam iki parçalı graflara bir örnek Şekil 2.24'te verilmiştir.



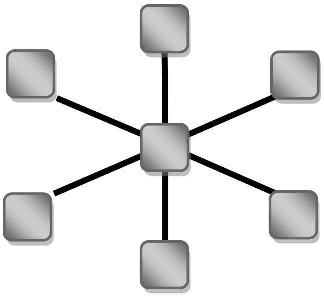
Şekil 2.24: Tam İki Parçalı Graf Örneği

2.2.16. ÖZEL TİP GRAFLAR

2.2.16.1. YILDIZ GRAFLAR

Yıldız topoloji (star topology) olarak da adlandırılan yıldız graflar en yaygın özel tip graflardan biridir. Bu yapılandırmada, her düğüm hub, anahtar veya bilgisayar gibi merkeze bağlanır. Merkezdeki hub veya anahtarda oluşacak problem bütün grafı etkiler. Böylece merkezdeki problem diğerlerine de akseder.

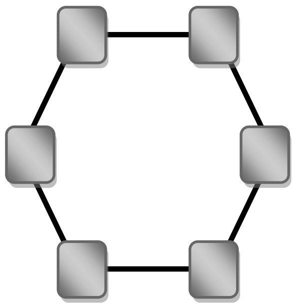
En büyük avantajı bir kenarda oluşan problemin sadece o kenara bağlı düğümü etkilemesidir. Yıldız graflara bir örnek Şekil 2.25’te verilmiştir.



Şekil 2.25: Yıldız Graf Örneği

2.2.16.2. HALKA GRAFLAR

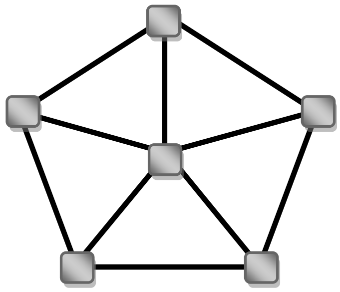
Halka topoloji (ring topology) olarak da adlandırılan halka graf, düğümlerin dairesel bir biçimde birbirine bağlandığı bir yapılandırmadır. Bu grafta her düğüm diğer iki düğüme bağlanmaktadır ve kenarlar üzerinden akan veri tek yönlüdür (saat yönünde ya da saat yönünün tersine). Ayrıca, halka graflarda düğümlerden herhangi birinde oluşan bir hata ya da kenarlardaki bir sorun tüm düğümleri etkilemektedir. Halka graflara bir örnek Şekil 2.26’da verilmiştir.



Şekil 2.26: Halka Graf Örneği

2.2.16.3. HİBRİT GRAFLAR

Hibrit topoloji (hybrid topology) olarak da adlandırılan bu graflar, tek bir büyük graf oluşturmak için kullanılan çoklu grafların kombinasyonudur. İki halka graf birbirine bağlıysa, sonuçtaki graf hibrit graf değildir. Diğer taraftan, halka graf yıldız grafa bağlıysa, ortaya çıkan grafa hibrit graf denir. Bu graf genellikle iki grafın özelliklerini birleştirir ve bu nedenle, tek tek graflara göre daha etkili ve verimli olur. Halka ve yıldız graftan oluşan hibrit graflara bir örnek Şekil 2.27'de verilmiştir.

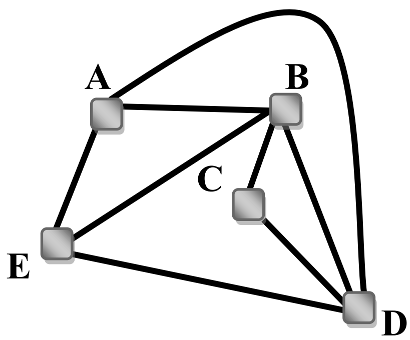


Şekil 2.27: Hibrit Graf Örneği

2.3.GRAFIN/DÜĞÜMÜN DERECESİ

Bir graftaki herhangi bir düğümün derecesi, kendisini diğer düğümlere birleştiren kenarların sayısı kadardır. Bu düğümlerden derecesi en büyük olanı ise, aynı zamanda grafın derecesini belirler. Buna göre, Şekil 2.28'te verilen graf için;

- *C* düğümünün derecesi 2,
- *A* ve *E* düğümlerinin derecesi 3,
- *B* ve *D*'nin derecesi ise 4'dür.
- En büyük derece 4 olduğu için grafın derecesi de 4'dür.



Şekil 2.28: Bir Graf Örneği

Vasudev (2006) sıfır dereceli bir düğümü ayrık düğüm (isolated vertex) olarak adlandırır. Bir düğüm ayrık olarak tanımlanıyorsa bu düğümden başka bir düğüme yol yoktur demektir. Vasudev (2006) derecesi bir olan düğüme uç düğüm (end vertex) demektedir.

El Sıkışma Teoremi:

El sıkışma teoremine (Handshaking Theorem) göre;

- m adet kenarlı ve n adet düğümlü bir graf $G\ (V,E)$'nin düğümlerinin dereceleri toplamı kenar sayısının iki katıdır. Yönsüz bir grafta, herhangi bir v düğümünün derecesi $\delta(v)$ ile gösterilirse;

$$\sum_{i=1}^{n} \delta(v_i) = 2m$$

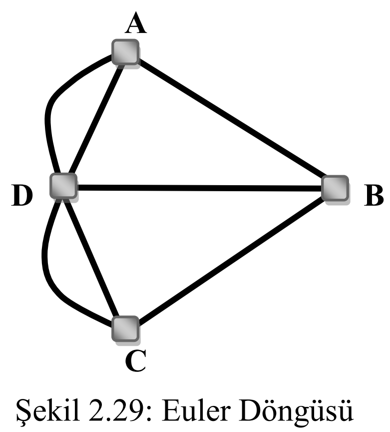
- Yönlü bir grafın iç ve dış derecelerinin toplamı birbirine eşittir ve herhangi bir v düğümün iç derecesi (in degree) $\delta-\ (v)$, dış derecesi (out degree) $\delta+\ (v)$ ile gösterilirse;

$$\sum_{v\in V}(\delta-\ (v)) = \sum_{v\in V}(\delta+\ (v))$$

2.4.ÖZEL DÖNGÜLER

2.4.1. EULER DÖNGÜSÜ

Bir G grafı Euler döngüsüne sahip ise Euler Graf adını alır. G grafı içerisindeki Euler döngüsü basit bir çevrim olup grafın içerisindeki her kenardan sadece bir kez geçilmesine izin verir. Euler Grafında tüm düğümlerin derecesi çifttir. Bu bölümün başında belirtilen Köninsberg Köprü Problemi bir Euler grafı değildir ve çözümü yoktur. Euler döngüsüne bir örnek Şekil 2.29'da verilmiştir.

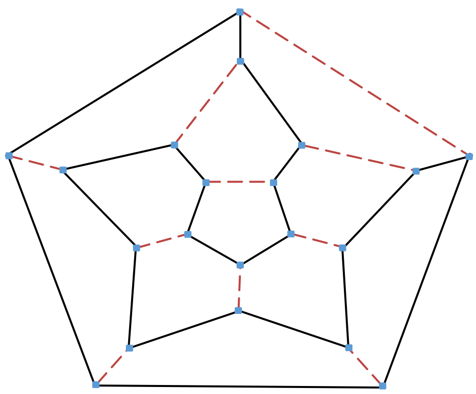


Şekil 2.29: Euler Döngüsü

2.4.2. HAMILTON DÖNGÜSÜ

Hamilton Döngüsü adını William Hamilton'dan almıştır. William Hamilton, 19. yüzyılda yaşamış bir matematikçidir. Bu döngü, bir graftaki her düğümden sadece bir kez geçen ve başladığı noktada biten kenarların oluşturduğu bir döngüdür. Bu döngüde aynı yoldan sadece bir kez geçilmektedir. Hamilton döngüsü içeren graflara Hamilton grafı adı verilmektedir. Hamilton döngüsünün en çok kullanıldığı alanlardan biri, bir satıcının, bir şehirden başlayıp, gideceği her şehirden yalnızca bir kez geçtikten sonra en kısa yoldan başladığı şehre geri dönmesini konu alan Gezgin Satıcı Problemidir. Bu tür problemlerde bir graftaki Hamilton döngülerinden en kısa olanını bulmak amaçlanmaktadır.

Bondy ve Murty'e (1976) göre; "Euler döngüsü içeren graflar basit gerek ve yeter koşullara sahipken, bir asırdan beri üzerinde çalışılan Hamilton döngüsü içeren grafların ise gerek ve yeter koşulları ile ilgili her şey bilinmemektedir" Aslında bu durum graf teorisinin çözülmemiş ve hala açıkta kalan konularından biridir. Hamilton döngüsüne bir örnek Şekil 2.30'da verilmiştir.



Şekil 2.30: Hamilton Döngüsü

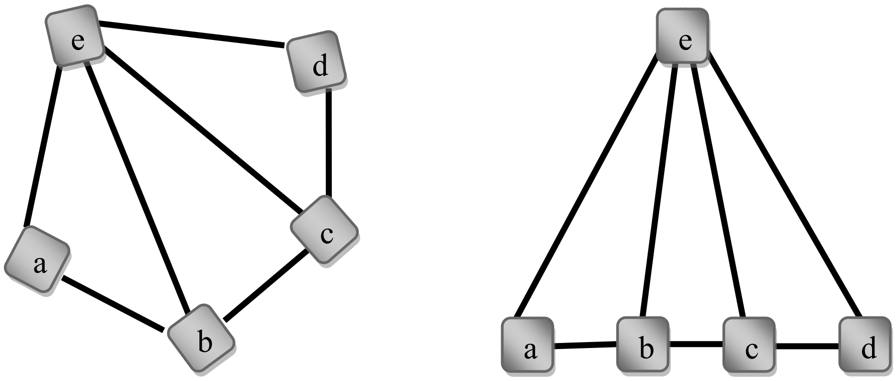
2.5.GRAFLAR VE EŞBİÇİMLİK

İki grafın eşbiçimli (izomorfik) olması için aşağıdaki koşulları sağlaması beklenir:

- Kenar sayıları aynı olmalıdır.
- Düğüm sayıları aynı olmalıdır.
- Düğüm dereceleri aynı olmalıdır.
- Düğümler arasındaki ilişkiyi gösteren matrisler aynı olmalıdır.

- Bu matrislerdeki benzerlik satır ve sütunlardaki yer değişikliği ile de sağlanabilir.

Gabow ve arkadaşları (1986) eşbiçimli graflara ilişkin çeşitli örneklere yer vermişlerdir. Örneğin Şekil 2:31'deki iki graf eşbiçimlidir.



Şekil 2.31: İzomorfik Graflar

2.6. GRAFLARIN MATRİSLER İLE GÖSTERİLMESİ

Çok farklı şekillerdeki matris yapılarıyla grafları göstermek mümkündür. En çok kullanılan matris türleri komşuluk matrisi, ilişki matrisi ve düğüm çifti matrisleridir. Bu çalışmada komşuluk matrisleri kullanılacaktır.

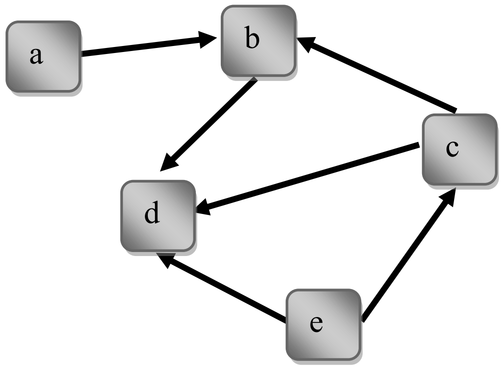
2.6.1. KOMŞULUK MATRİSİ

Komşuluk matrisi (adjacency matrix) nxn boyutlu bir matris olup düğümler arasındaki ilişkileri içerir (Biggs, 1993). Komşuluk matrisindeki her bir 1 rakamı satır ve sütun numaraları ile belirlenmiş olan düğümler arasında bir kenar olduğunu ifade eder. Ağırlıklı ya da paralel grafların komşuluk matrisinde, 1 değerlerinin yerine ağırlıklar ya da iki düğüm arasındaki çoklu kenarın sayısı yazılır. Bu çalışma kapsamında yönlü ve çoklu kenarlar içeren graflar incelendiğinden bu tür graflar için aşağıdaki örnekler verilmiştir.

- Yönlü bir graf için komşuluk matrisi Eşitlik (1)'deki gibi ifade edilsin:

$$M_{i,j} = \begin{cases} 1, & (v_i, v_j) \in E \\ 0, & (v_i, v_j) \notin E \end{cases} \tag{1}$$

Bu eşitlik göz önünde bulundurulduğunda Şekil 2.32'de verilen yönlü grafın komşuluk matrisi Çizelge 2.2'deki gibi olacaktır.



Şekil 2.32: Yönlü Graf Örneği

Çizelge 2.2: Yönlü Graf Örneğine Ait Komşuluk Matrisi

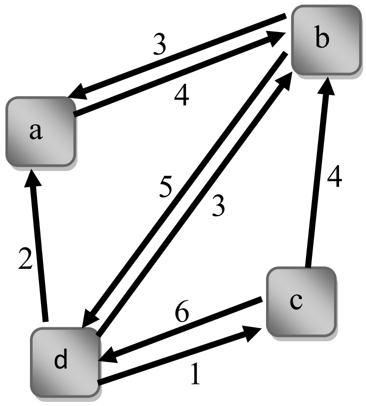
	a	***b***	***c***	***d***	***e***
a	0	1	0	0	0
b	0	0	0	1	0
c	0	1	0	1	0
d	0	0	0	0	0
e	0	0	1	1	0

- Yönlü ve çoklu kenarlı bir graf için komşuluk matrisi Eşitlik (2)'deki gibi ifade edilsin:

$$M_{i,j} = \begin{cases} a, & (v_i, v_j) \in E \\ 0, & (v_i, v_j) \notin E \end{cases} \qquad (2)$$

Burada a, v_i ve v_j düğümleri arasındaki kenar sayısını gösterir.

Bu eşitlik göz önünde bulundurulduğunda Şekil 2.33'de verilen yönlü grafın komşuluk matrisi Çizelge 2.3'teki gibi olacaktır.



Şekil 2.33: Yönlü ve Çoklu Kenarlı Graf Örneği

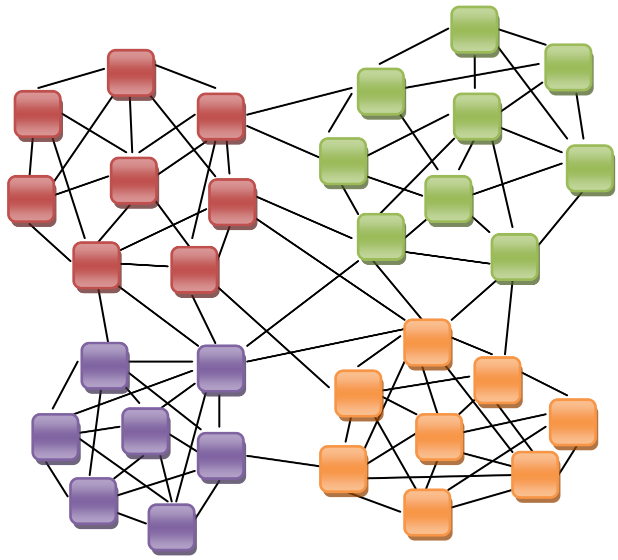
Çizelge 2.3: Yönlü ve Çoklu Kenarlı Graf Örneğine Ait Komşuluk Matrisi

	a	***b***	***c***	***d***
a	0	4	0	0
b	3	0	0	5
c	0	4	0	6
d	2	3	0	1

2.7. DÜĞÜM KÜMELERİ

Graf teorisi ile ilgili diğer bir önemli konu da graflardaki düğüm kümeleri ve düğüm kümelerinin belirlenmesidir. Bir graftaki düğüm kümeleri, gruplar arasındaki kenarların seyrek ve grup içindeki kenarların ise sık olduğu topluluklar olarak tanımlanabilir. Graflardaki düğüm kümelerin gösterimine bir örnek Şekil 2.34'de verilmiştir.

Bir başka tanımı ile düğüm kümesi, çoğunlukla kendi aralarında iletişim halinde olan bireylerin birlikteliğidir. Coscia ve arkadaşları (2011) da düğüm kümelerini çoğunlukla ortak özellikler gösteren ve benzer roller oynayan düğümlerin grupları olarak tanımlamışlardır. Graf içerisindeki düğüm kümeleri bize düğümlerin ortak ilgi alanları, çalışma konuları, eğilimleri, benzerlikleri vb. hakkında bilgi verirler.



Şekil 2.34: Bir Graftaki Düğüm Kümelerinin Gösterimi

Gerçek graflarda graf yapısı homojen değildir. Fortunato (2010) belirli bir alanda yoğunlaşan, bir araya gelen, kümeleşen ve topluluk da olarak adlandırılabilen bu yapıların muhtemelen aynı özelliği gösteren ve/veya benzer rolü bulunan düğüm kümeleri olduklarını söylemiştir.

Düğüm kümelerinin yapısının belirlenmesi, bu kümeler arasındaki örtüşmeler nedeniyle zor bir problemdir. Bu problem Porter ve arkadaşları (2009) tarafından irdelenmiş ve birçok düğüm kümesi tespit yönteminin, nihai olarak "daha yoğun" tanımına ve bu tür belirlemede kullanılan algoritmik buluşsal yöntemlerden türetildiğini ifade etmiştir. Lancichinetti ve Fortunato (2009) farklı bilimsel alanların farklı ihtiyaçları olduğunu ve bu ihtiyaçlara hizmet etmek için çok çeşitli düğüm kümesi tespit yöntemleri geliştirilmiş olmasının şaşırtıcı olmadığını dile getirmişlerdir. Söz konusu bu farklı ihtiyaçlar, düğüm kümelerini bulma algoritmalarını test etmek için farklı gerçek ve bilgisayar tarafından üretilen karşılaştırma graflarının oluşturulmasına yol açmıştır. Örneğin; Danon ve arkadaşları (2005) bir derleme makalesi ile, hesaplama zamanı ve çıktısı açısından mevcut yöntemlerin birkaçının performansını karşılaştırmıştır.

3. KARMAŞIK SİSTEMLERİN AĞ OLARAK MODELLENMESİ VE MERKEZİLİK ÖLÇÜTLERİ

3.1. KARMAŞIK SİSTEMLERİN AĞ OLARAK MODELLENMESİ VE ANALİZİ

Bölüm 2'de bahsedildiği gibi ağlar, graf teorisinden ortaya çıkan ve en temel anlamda düğüm ve kenarlardan oluşan yapısal modellerdir. Karmaşık sistemler ise, merkezi bir planlayıcısı olmadan yoğun etkileşimler ve geri bildirimler ile, kendi kendini örgütleyebilen ve değişen şartlara uyum sağlayabilen sistemlerdir. Aşağıda bu tür sitemlere örnekler verilmiştir;

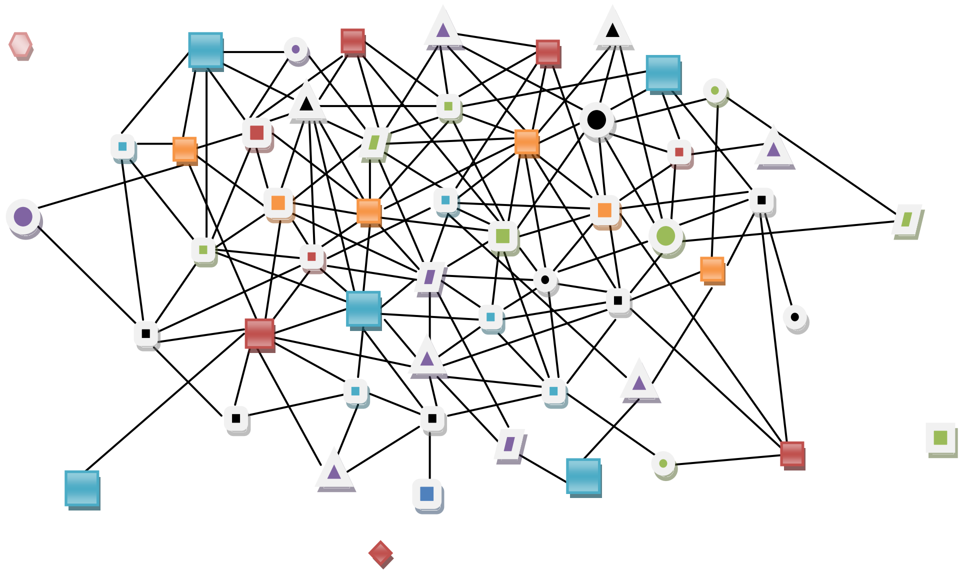
- Ekonomi
- Web
- Hayvan sürüleri
- Moleküller
- Beyin
- Bağışıklık Sistemi
- Sosyal Olaylar
- Organlar

Doğrusal sistemlerde bütün, parçaların toplamıdır. Doğrusal olmayan sistemlerde ise bütün parçalar ve parçalar arasındaki etkileşimin toplamıdır. Karmaşık sistemler, doğrusal olmayan sistemlere bir örnektir ve ağ olarak modellenebilirler.

Ağlar;

- Düğümler ve düğümler arasındaki ilişkilerin bütünüdür.
- Modelledikleri sistemin haritasıdır.
- Sistemin en güçlü ve en zayıf elemanları gibi kritik bilgileri içinde barındırır. Bununla birlikte doğrudan göze çarpmayan ancak sistemi dolaylı olarak etkileyen potansiyel güçler hakkında da bilgi verir.

Ağlar parçalar arasındaki ilişkiyi gösterir. Bir karmaşık sistem, altta yatan ağ ve kendine özgü etkileşim kuralları ile birlikte bütün-parça ilişkisini belirler. Bütün, parçalarda olamayan farklı özellikler gösterebilir. Başka bir ifadeyle, bütün bakış açısı ile parçaların bakış açısı birbirinden farklı olabilir. Şekil 3.1'de düğümler ve bu düğümleri birbirine bağlayan kenarlardan oluşan karmaşık bir ağ yapısı gösterilmektedir.



Şekil 3.1: Karmaşık Bir Ağ Yapısı Örneği

Varlıklar arasındaki ilişkilerin sayısallaştırılıp bilimsel hale getirilmesi de demek olan ağ analizi, önemli olaylar karşısında çeşitli organizasyonların, ya da bu organizasyonların oluşturduğu ağların da ilişkilerini rakama dökmek için kullanılmaktadır.

Ağlar;

- Topluluklar arasındaki güç dinamiklerinin ortaya çıkarılması (Wang ve arkadaşları, 2017),
- Şüpheli terörist ağlarının belirlenmesi (Krebs, 2002),
- Sahtecilik ağlarının tanımlanması (Barson ve arkadaşları, 1996),
- Operatörlerin ürünlerin satışını sağlaması (Macchion, 2015),
- Şirketlerin müşterileriyle iletişim kurmaları ile birlikte ihtiyaç ve beklentiyi anlayıp portföylerini büyütmesi ve elde tutması için oldukça yoğun bir şekilde kullanılmaktadır (Altberg ve arkadaşları, 2017).

Sosyoloji, antropoloji, sosyal psikoloji, iletişim, ekonomi, matematik gibi birçok alanda ağ analizi sıklıkla kullanılmaktadır. Bu analiz, ekonomik ilişkileri ortaya koymak amacıyla kar amacı güden şirketlerin bağlantılarından, her türlü ikili ya da çoklu ilişkinin ortaya çıkarılmasına kadar birçok amaçla kullanılmaktadır.

Sosyal ilişki kurma amacıyla kurulmuş internet sitelerinde de bireylerin diğer bireylerle kurdukları kontakların anlaşılabilmesi için ağ analizleri sıklıkla kullanılmaktadır.

Ağ analizinden;

- Kritik öneme sahip düğümlerin belirlenmesi,
- Malumat ve bilgi akışlarındaki eksik noktaların ve darboğazların belirlenmesi,
- Önemli noktalardaki ve izole haldeki düğümlerin belirlenmesi,
- Düğüm kümeleri arasında bilgi akışının hızlandırılması,
- Resmi ve gayri resmi oluşan kenarların belirlenmesi,
- Hedef kitle analizinin yapılabilmesi,
- Yenileşim ve öğrenmenin geliştirilmesi,
- Stratejilerin düzenlenmesi,
- İstenilen amaca yönelik modellerin oluşturulabilmesi

gibi amaçlarla oldukça yararlanılır.

3.2. DÜĞÜMLERİN AĞ İÇERİSİNDEKİ KONUMLARI

Bir ağdaki düğümlerin konumları aşağıdaki soruların cevabını bulmada bakılacak ilk yerdir. Bu konumların önemi sorulan soruya bağlı olarak değişebilmektedir.

Geometrik merkez

- Ambulansın en kısa sürede ihtiyaç yerine varması için hastanenin kent yerleşim ağı içindeki optimal konumu ne olmalıdır?
- Ulaşım açısından en optimal AVM konumu nedir?

Yayılım merkezi

- Bilginin en hızlı ve güvenli yayılacağı kaynağın iletişim ağındaki optimal konumu nedir?
- Hangi kuruluştan çıkan yenilikler olabildiğince yaygınlaşıp diğerlerine erişir?
- Bilgi kaynaklarından ve akışlarından en çok kim yararlanıyor?

Prestij merkezi

- Kimin toplum içindeki etkisi yüksek?
- En faal üye kim?

Diğer

- Hangi konumlarda risk olasılığı daha yüksek?
- Hangi konumlarda fırsat yakalama daha kolay?

3.3. AĞ ANALİZİNDE TEMEL KAVRAMLAR

Ağ, birbirine bağlı düğümler dizisidir. Düğümler; kişiler, ekipler, organizasyonlar, kavramlar vb. herhangi bir şey olabilir. Yalnızca bir tür düğümden oluşan ağlara homojen, farklı türlerde düğümlerden oluşan ağlara heterojen ağlar denir. Kenarlar düğüm çiftlerini birbirine bağlarken, iki düğüm arasındaki etkileşimin türüne göre yönlü ya da yönsüz olabilir. Ayrıca kenarlar ikili (mevcut veya yok) veya ağırlıklı olabilir. Bütün kenarların ağırlıkları veya değerleri vardır. Kenara 1 değeri atanmışsa bağ var, 0 değeri atanmışsa bağ yok demektir. Ağ analistleri, bir düğüm kümesindeki kenarlarla ilgili veri toplamaya başladığında, onu ilişkisel veri olarak adlandırırlar. Birçok çalışmada ilişkisel verilerin matris formunda veya grafik formunda görülebileceğinden bahsedilmiştir.

Bitişik olmayan düğümler yine de birbirlerine ulaşabilir. Düğüm i'den düğüm j'ye giden bir yol, i ile başlayan ve j ile biten komşu düğümlerin bir dizisidir. Borgatti ve Everett (2006), "yol" terimini hiçbir düğümün birden fazla ziyaret edilmediği bir iz şeklinde tanımlamış, yol uzunluğunu içerdiği kenar sayısı olarak ve iki düğüm arasındaki en kısa yolu da jeodezik olarak ifade etmiştir. İki düğüm arasındaki jeodezi yolunun uzunluğu, aralarındaki jeodezik mesafe olarak bilinir. Düğümlerin her çifti arasındaki jeodezik uzaklıklar, d_{ij}, düğüm i'den düğüm j'ye en kısa yolun uzunluğunu veren bir matris (H) olarak gösterilebilir.

3.4. AĞ MERKEZİLİĞİ

Merkezilik faktörü başta sosyal bilimler alanı olmak üzere pek çok alanda incelenmiştir. Lee (2006), ağ merkeziliğini bir ağda düğümlerin önemini tanımlayan bir kavram olarak tanımlamıştır. Bu kavram bir düğümün diğer düğümlere ne şekilde bağlı olduğunun veya başka bir deyişle bir düğümün diğer düğümler üzerinde sahip olduğu etkisinin bir ölçüsüdür. Ağdaki stratejik konumlarda genellikle en önemli veya en bilinen düğümler bulunur. Bu göreli önemi ölçmek için sosyal bilimlerde farklı merkezilik ölçütleri önerilmiştir. Wasserman ve Faust (1994), bu tür ölçütlerle bir sosyal ağdaki "düğüm konumunun" özelliklerini tanımlamaya ve ölçmeye çalışmıştır.

Merkezilik ölçütlerinin en başında derece, yakınlık, arasındalık ve özvektör merkezilik ölçütleri gibi sıklıkla kullanılan ölçütler gelmektedir. Bu merkezilik ölçütlerinden her birinin en etkili düğümü bulmadaki varsayımı birbirinden farklıdır. Dolayısıyla, her birinin bir ağda herhangi bir düğümü etkili veya merkezi yapan farklı bir anlayışı bulunmaktadır.

Bu anlayışlar kısaca aşağıdaki gibi özetlenebilir.

Derece Merkezilik Ölçütüne göre:

- Kenar sayısı fazla olan düğümler etkilidir.

Yakınlık Merkezilik Ölçütüne göre:

- Bilgiyi en kısa sürede yayabilme yeteneğine sahip düğümler etkilidir.

Arasındalık Merkezilik Ölçütüne göre:

- Bilgi transferinde köprü görevi gören düğümler etkilidir.

Özvektör Merkezilik Ölçütüne göre:

- Kenar sayısı fazla olan düğümlerle ortak kenarı olan düğümler etkilidir.

Bolland (1988), Borgatti ve Everett (2006) ve McCulloh (2009) ağ merkezilik ölçütleri arasındaki ilişkiyi araştıran çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmalarda, eksik veri koşulu altında merkezilik ölçütlerinin korelasyonu incelenmiştir. Rothenberg ve arkadaşları (1995) ile Faust (1997) ağlarda merkezilik ölçütleri ve bu ölçütler arasındaki ilişkiyi inceleyen çalışmalar yapmıştır.

Daha yakın tarihli bir araştırma ise ampirik ağ verilerinde merkezilik ölçütleri arasındaki korelasyonunu araştıran Valente ve arkadaşları (2008) tarafından gerçekleştirilmiştir. Buna göre, merkezilik ölçütleri birbiriyle yüksek oranda uyuşuyorsa aralarındaki farklar önemsiz ve gereksizdir. Düşük bir oranda uyuşma olduğunda ise, her biri ağa farklı bir bakış açısı sunduğundan elde edilen çeşitlilik, yapılan analizi daha da güçlendirmektedir. Bu durum bir düğümün ağ içerisindeki konumunun önemini yansıtan soruların farklılığı olarak yorumlanabilir. Ağ içerisindeki düğümlerin önemi, yöneltilen sorunun amacına göre değişkenlik gösterebilmektedir. Bu çalışma, sosyal ağ analizi üzerine korelasyonun etkilerini ortaya çıkaran önemli bir çalışmadır. Valente ve arkadaşları (2008) aynı zamanda yoğunluk ve yönelimin merkezilik ölçütleri arasındaki ilişkiler üzerindeki etkisini tanımlamaktadır.

3.4.1. MERKEZİLİK ÖLÇÜTLERİ

Ağ analizi, ağı oluşturan varlıkların, varlıklar arasındaki ilişkilerin, ilişki modellerinin ve ilişkiler arasındaki etkileşimin incelendiği yaklaşımlar bütünü olarak tanımlanabilir. İlişki, Wasserman ve Faust (1994) tarafından "sosyal varlıklar arasındaki bağ" olarak tanımlanmış ve ağı oluşturan temel özelliklerden biri olarak kabul edilmiştir. Bireyler, gruplar, organizasyonlar, toplumlar, şehirler, ülkeler, bilgisayarlar, organlar gibi akla gelebilecek her düzeydeki düğüm setlerinden oluşan varlıklar, ağ analizinde düğüm/kenar (vertex/edge) olarak belirtilmektedir. Özellikle sosyal ağlarda, düğümler arasında bir ya da daha fazla türde bağlılığa dayalı kurulan ilişkiler, kenar ya da bağlantı olarak tanımlanır. Örneğin Katz ve arkadaşlarına (2004) göre insanlar arasındaki bağ; arkadaşlık bağı, iş bağı, akrabalık bağı, finansal bağ gibi ilişki türlerine dayalı olarak farklılık gösterebilir.

Ağlardaki düğümler veya düğümler arasında kurulan bağ yapılarının incelenmesinde iki türlü ölçüt kullanılmaktadır. Bunlar; yerel merkezilik ölçütleri ve yerel olmayan merkezilik ölçütleridir. Charles ve Michael'e göre (2010) merkezilik ölçütleri, bir grafiğin bazı bileşenlerinin diğerlerinden daha önemli olduğu fikrini niceleştirmenin bir yoludur. Bazı merkezilik ölçütleri tamamen ağ bileşeni seviyesinde bulunan ve ağın geri kalanına göre değişmeyen verilere dayanmaktadır; bunlara yerel merkezilik ölçütleri denir. Diğer ölçütler ise ağın tümünün yapısına bağlıdır. Bunlara da yerel olmayan (küresel) merkezilik ölçütleri denir.

3.4.1.1. YEREL MERKEZİLİK ÖLÇÜTLERİ

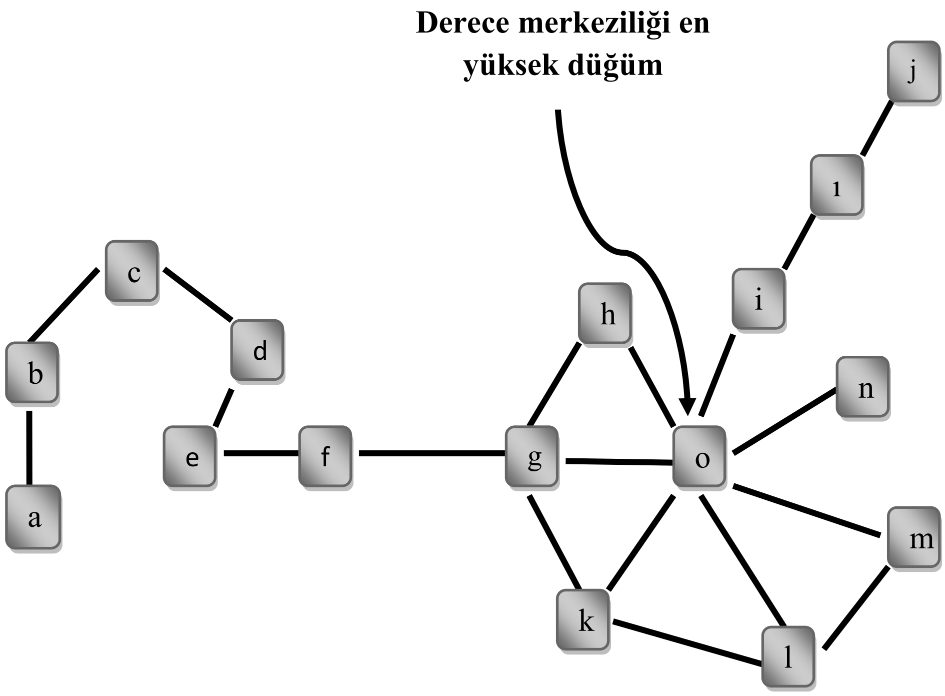
Yerel merkezilik, düğümün bir kenarla bağlandığı diğer düğümler ile ilgilenir. Burada odak noktası derece (yönlü ağlarda iç derece ve dış derece ya da ortalama derece) kavramı olup graf teorisi yardımıyla hesaplanmaktadır.

3.4.1.1.1. DERECE MERKEZİLİK ÖLÇÜTÜ

Derece merkeziliği (degree centrality), bir düğümün yakın çevresine ve komşularına ne ölçüde bağlandığını belirten ölçütlerin en temel olanıdır. Freeman (1979) derece merkeziliğini belirli bir düğümü diğer düğümlere bağlayan kenar sayısı olarak tanımlamıştır. Ayrıca, ağı temsil eden komşuluk matrisindeki her satırın toplamı olarak da ifade edilebilir. Derece merkeziliğinin matematiksel ifadesi Eşitlik (3)'te verilmiştir.

$$(C_i)^D = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \tag{3}$$

Burada, düğümler bir kenar ile bağlıysa, i ve j düğümleri arasındaki komşuluk matrisi elemanı a_{ij}=1, bağlı değilse a_{ij}= 0 değerini alır. Sosyal ağlar örnek olarak ele alınacak olursa, daha fazla sayıda kişi ile iletişim kuran kullanıcılar, daha büyük ölçüde merkezilik değeri elde ederler. Yüksek merkezilik derecesi değerine sahip düğümler, diğer ağ üyeleri tarafından ağda merkezi bir konumda bulunan önemli bir düğüm olarak tanınırlar. Çoğu sosyal ağda, bir bireyin ne kadar çok bağlantısı var ise o kadar önemli ve güçlüdür gibi bir bakış açısı hâkimdir. Hatta derecesi en yüksek olan düğüm, ağın en aktif üyesi olarak da yorumlanabilir. Öte yandan, yüksek derece merkeziliğine sahip olmayan düğümler "dış dünyaya açık değil ve birçok üye ile iletişim kurmaz" olarak tanımlanabilirler. Şekil 3.2'de verilen bir sosyal ağ örneğinde *o* düğümü en yüksek derece merkeziliğine sahip düğümdür.



Şekil 3.2: Derece Merkezilik Ölçütü ile İlgili Bir Sosyal Ağ Örneği

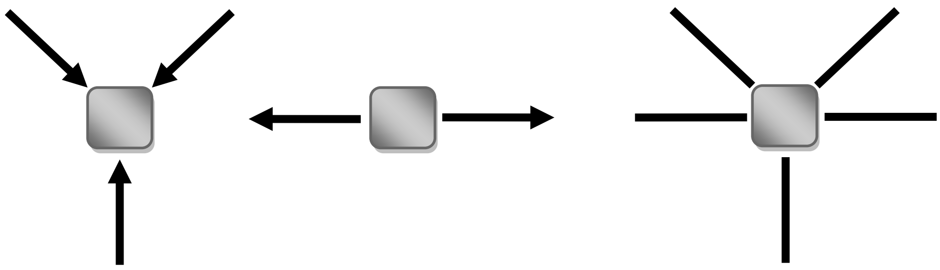
Musiat ve arkadaşları (2009), derece merkeziliğini, derecede prestij olarak değerlendirmişler ve derece için hesaplanan sayının esas alınması ile topluluğun belirli bir üyesine komşu üye sayısının belirlenmesi olarak tanımlamışlardır.

Loosemore (1998)'a göre, yönlü ağlarda kenarlar içten dışa veya dıştan içe doğru olabilmekte ve bir düğümün derecesi iki türlü hesaplanabilmektedir. Bu durumda üç çeşit derece merkezilik ölçütü vardır:

Derece: Düğüme bağlanan toplam kenar sayısıdır. Yönlü bir ağda iç ve dış derece toplamları derece değerini verir.

İç derece: Düğüme ağdaki diğer düğümlerden gelen yönlü kenar sayısını ifade eder. Söz konusu düğümün komşularından bilgi alma derecesidir. İç derece merkeziliği (in degree centrality), bir düğümün ağdaki popülaritesini gösterir.

Dış derece: Düğümden ağdaki diğer düğümlere giden kenar sayısını ifade eder. Söz konusu düğümün komşularına bilgi göndermesinin derecesidir. Dış derece merkeziliği (out degree centrality) bir düğümün ağdaki kontrolünü veya liderliğini belirtir.

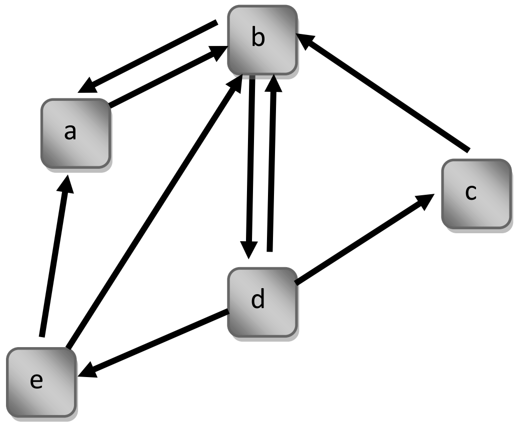


Şekil 3.3: Derece Merkeziliği Türleri

Şekil 3.3'de verilen örneklerde iç derece=3, dış derece=2 ve derece=5 olarak hesaplanır.

Yönlü ağlarda derece ifade edilirken iç-derece ve dış-derece ayrımına gidilmektedir. Ok işaretinin başlangıç ve bitiş noktası derecenin türünü ifade eder. Dorogovtsev ve Mendes (2001) ok işaretinin başlangıcını baş (head), bitiş noktasını kuyruk (tail) olarak adlandırmış ve başların toplam sayısının iç dereceyi, kuyrukların toplam sayısının ise dış dereceyi gösterdiğini ifade etmiştir. Başka bir ifadeyle, iç derece gelen kuyrukların sayısı iken, dış derece giden kuyrukların sayısını temsil etmektedir. Şekil 3.4'deki örneğe ilişkin dereceler Çizelge 3.1'de gösterilmektedir.

Yönlü ağlarda derece yönsüz ağlar ile aynı şekilde gösterilir. Başka bir ifadeyle, derece hesabı yapılırken yönlü oklar göz önünde bulundurmaksızın sanki yönsüz bir ağ hesabı yapılır. Bu durumda da, yönlü ağlar için düşünülmüş iç ve dış derece kavramları önemini yitirmiş olmaktadır. İç ve dış derece hesaplamalarının yapılması durumunda da ikisi arasında büyük farklar olabilmektedir. Bu da hangi derece hesabının en merkezi düğümü işaret ettiği konusunda karmaşaya yol açmaktadır.



Şekil 3.4: Yönlü Ağ Örneği

Çizelge 3.1: Yönlü Ağ Örneğindeki Dereceler

	İç derece	**Dış derece**	**Derece**
a	2	1	3
b	4	2	6
c	1	1	2
d	1	3	4
e	1	2	3

Derece merkeziliği, düğümler arasındaki ilişkilerin yerel görünümü hakkında bilgi sağlar ancak genel ağ yapısını yansıtmaz. Loosemore (1998)'a göre derece sonucu, bilgi tedarikinin bir veya birkaç düğüm tarafından ne derece kontrol edildiğini yansıtır. Ayrıca sosyal ağlarda, derecedeki indeks bir veya birkaç düğümün, tüm ağı kullanarak bilgi tedarikinin odağı olabileceğine işaret etmektedir. Derece merkeziliği bir çeşit popülerlik ölçütüdür. Ancak nicelik ve nitelik arasındaki ayrımı çok iyi yapamamaktadır.

Bir düğümün, ağın içindeki bireysel bağlantılarının özelliklerinin ölçüsü olan yerel merkezilik ölçütleri, ağdaki güçlü ve zayıf bağların tanımlanmasına, ağdaki etkileşimin yoğunluğunun belirlenmesine olanak tanımaktadır. Ancak ağın geneli hakkında bir çıkarım yapmak için ya da ağdaki önemli düğümlerin belirlenmesi için bu ölçütler tek başına yeterli değildir. Bir düğümün komşularının yanı sıra, diğer düğümlerin de hesaba katıldığı ve düğümün ağ içerisindeki genel konumu hakkında bilgi veren ölçütlere ihtiyaç vardır. Bu ölçütler yerel olmayan merkezilik ölçütleri olarak bilinmektedir.

3.4.1.2. YEREL OLMAYAN MERKEZİLİK ÖLÇÜTLERİ

Yerel olmayan merkezilik ölçütleri, ağdaki tüm düğümlerin göreli konumlarını dikkate alarak, düğümün ağın genelindeki pozisyonuna dair bilgi veren ölçütlerdir. Yakınlık merkeziliği, arasındalık merkeziliği ve özvektör merkeziliği yerel olmayan merkezilik ölçütlerindendir.

3.4.1.2.1. YAKINLIK MERKEZİLİK ÖLÇÜTÜ

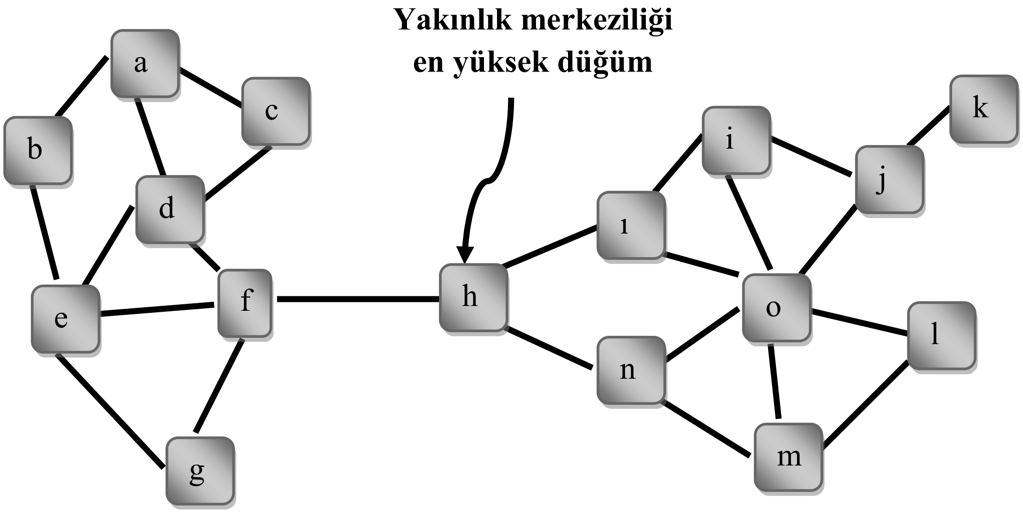
Yakınlık merkeziliği (closeness centrality), mesafe kavramına dayanır. Ölçüt, bir düğümün ağdaki diğer düğümlere ne kadar yakın olduğuna odaklanır. Yakınlık merkeziliği bağımsızlığı veya etkinliği ölçer. Birçok düğüme yakın olan bir düğüm başkaları bilmeden bağımsız olarak hareket etmede güçlük çekebilir. Freeman (1979), bir düğümün bağımsızlığının ağdaki diğer düğümlere yakınlığı ile belirlendiğini savunmuş ve ayrıca bir düğümün yakınlık derecesini diğer tüm düğümlerden uzaklıklarının toplamı olarak tanımlamıştır. Burada bir düğümden diğerine olan uzaklık, bir düğümden diğerine olan en kısa yolun uzunluğu (geçilen kenar sayısı) olarak ifade edilmektedir.

Bilgi akışı söz konusu olduğunda, Borgatti (2005) yüksek yakınlık merkeziliğine sahip düğümlerin, en yeni bilgileri edinmek için iyi konumlandırılmış olduklarını belirtmiştir.

Eşitlik (4)'de gösterilen yakınlık merkeziliği (Freeman, 1979), i düğümünden, ağdaki erişilebilir diğer düğümlere bilginin ne kadar sürede yayılacağının ölçüsü olarak kabul edilebilir.

$$(C_i)^C = (L_i)^{-1} = \frac{n-1}{\sum d_{ij}} \tag{4}$$

Burada, d_{ij}, i'den j'ye ulaşmak için jeodezik mesafeyi belirtir; bu uzaklık, i ve j düğümleri arasındaki en kısa yolun uzunluğu olarak tanımlanır.L_i ise düğüm i'nin diğer tüm düğümlere ortalama mesafesidir. Şekil 3.5'te verilen bir sosyal ağ örneğinde h düğümü en yüksek yakınlık merkeziliğine sahip düğümdür.



Şekil 3.5: Yakınlık Merkezilik Ölçütü ile İlgili Bir Sosyal Ağ Örneği

Wasserman ve Faust (1994)'a göre yakınlık merkeziliği bir düğümün, düğüm kümesindeki tüm diğer düğümlere ne kadar yakın olduğuna odaklanmaktadır. Degenne ve Forse'a (1999) göre ise bu ölçüt, derece merkeziliği gibi sadece komşulara değil, tüm ağ üyelerine yakınlığı sağlayan küresel bir ölçüttür.

Wasserman ve Faust (1994) yönlü bir ağda, iki düğüm arasındaki jeodezik mesafenin, simetrik olmayan bir matris için ayrı olarak hesaplanan iç ve dış yakınlık sonuçları açısından farklılık gösterebileceğinden bahsetmiştir. Buna göre, yönlü ağlarda kenarlar içten dışa veya dıştan içe doğru yönlenebilmekte ve bir düğümün yakınlılık merkeziliği farklı şekillerde hesaplanabilmektedir. Bu durumda üç çeşit yakınlık merkezilik ölçütü vardır:

Yakınlık (Closeness): Geleneksel olarak bağlı ve yönsüz ağlarda hesaplanır; bu durumda iç yakınlık merkeziliği, dış yakınlılık merkeziliğine eşit kabul edilir.

İç yakınlık (In-closeness): Bir düğümün diğer düğümlerden kolayca ulaşılabildiği dereceyi ölçer ve bu en kısa mesafeyi ifade eder. Bu amaçla, söz konusu düğüme doğru gelen kenarlar kullanılır.

Dış yakınlık (Out-closeness): Bir düğümün diğer düğümlere kolayca erişebildiği dereceyi ölçer ve bu en kısa mesafeyi ifade eder. Bu amaçla, söz konusu düğümden diğer düğümlere giden kenarlar kullanılır.

Freeman (1979) yakınlık merkeziliğinin Eşitlik (4)'ten görüleceği üzere ağdaki bileşen sayısına bağlı olduğunu ve dolayısıyla farklı büyüklükteki ağlar arasında karşılaştırmaya uygun olmadığını belirtmiştir. Bu nedenle ağ boyutunun etkisinin ortadan kaldırıldığı bir ölçütün bulunması daha yararlı olacaktır.

3.4.1.2.2. ARASINDALIK MERKEZİLİK ÖLÇÜTÜ

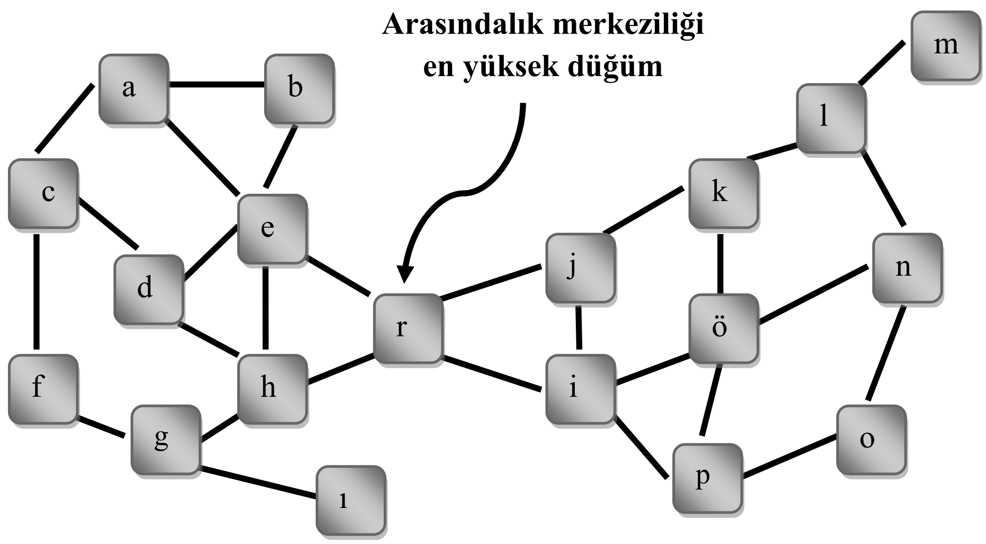
Arasındalık merkeziliği (betweenness centrality), ağdaki diğer düğümlerin arasındaki belirli bir düğümün ne ölçüde arada olduğunu öğrenmekle ilgilenir. Bir başka deyişle, arasındalık merkeziliği, birbirleriyle iletişim kuramayacak olan iki veya daha fazla düğüm kümesi arasında köprü görevi gören düğümlerin ölçütüdür. Freeman (1979), yüksek arasındalık merkeziliğine sahip olan düğümlerin diğer düğümler arasındaki bilgi akışlarını kontrol etmesiyle, düğümlerin ağı kontrol etme potansiyeline sahip olduğunu savunmuştur.

Arasındalık merkezilik ölçütü, merkezilik ölçütleri içerisinde hesaplanması en karmaşık olan ölçüttür. Bu ölçüt, ağdaki tüm düğüm çiftleri arasındaki en kısa yolların bulunması, ardından bu yolların kaçında o düğümün yer aldığının oranlanması ile hesaplanır. Ağ büyüklüğü arttıkça hesaplanması çok maliyetli olabilecek bir ölçüt olduğu için belirli seviyedeki komşulara kadar inilerek de kabaca hesaplanabilir.

Ağdaki herhangi iki düğüm i ve j arasında yer alan k düğümünün arasındalık merkeziliği hesaplanmak istendiğinde, G_{ij}, i düğümünden j düğümüne giden jeodezik yolların sayısı, G_{ikj} de i ve $j$arasında yer alan ve k düğümünden geçen jeodezik yolların sayısı olarak kabul edilir ve k düğümünün arasındalık merkeziliği Eşitlik (5)'de gösterildiği gibi hesaplanır:

$$(C_k)^B = = \sum_i \sum_j \frac{G_{ikj}}{G_{ij}}, i \neq j \neq k \qquad (5)$$

Şekil 3.6'da verilen bir sosyal ağ örneğinde r düğümü en yüksek arasındalık merkeziliğine sahip düğümdür.



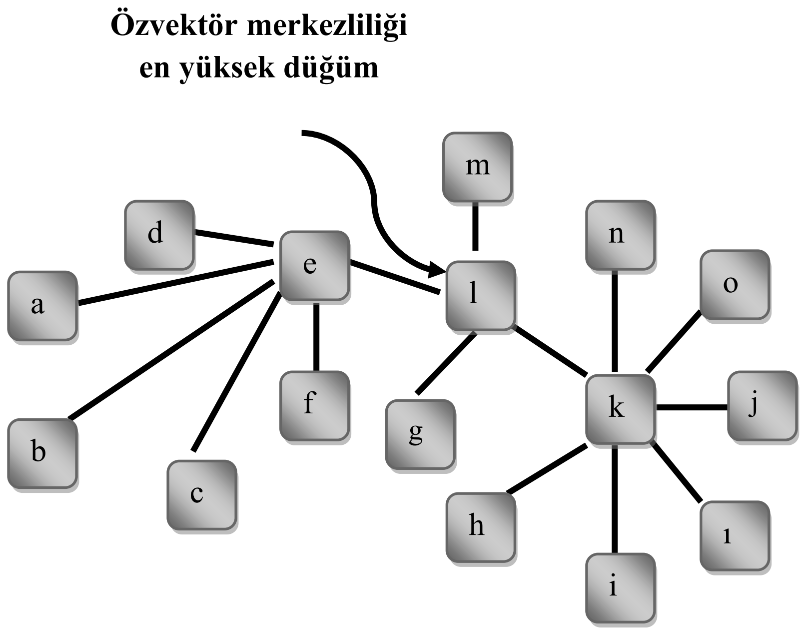
Şekil 3.6: Arasındalık Merkezilik Ölçütü ile İlgili Bir Sosyal Ağ Örneği

Loosemore (1998) böyle düğümlerin, ağdaki açık bilgi akışını sürdürmede kritik konumları nedeniyle güçlü olduklarını ifade etmiştir. Arasındalık derecesi yüksek olan düğümler konumları dolayısıyla, diğer düğümlere göre daha önemli bir konumdadırlar ve ağda olup bitenden daha çok haberdardırlar.

Arasındalık merkeziliği, düğüm çiftlerini birbirine bağlayan jeodezik yolların üzerinde bir düğümün oluşma sıklığı ile formülize edildiğinden, diğer düğümler arasındaki en kısa yolda bulunan herhangi bir düğüm, bir aracı olmak suretiyle bilgi iletimini veya etki değişimini potansiyel olarak kontrol edebilir. Freeman (1979), bu durumu "Bir düğümün kontrol potansiyeli o düğümün merkeziliğini belirler" şeklinde ifade etmiştir.

3.4.1.2.3. ÖZVEKTÖR MERKEZİLİK ÖLÇÜTÜ

Özvektör merkeziliği (eigen vector centrality) sadece bir düğüme ait merkeziliği değil, ayrıca o düğüme bağlı diğer düğümlerin de merkeziliğini hesaplayan, stratejik olarak bağlantılı düğümlerin etki değerlerini gösteren, bir merkezilik ölçütüdür. Özvektör merkezliği düğümün ağdaki öneminin ve etkisinin bir ifadesidir. Merkezilik hesaplanırken dikkate alınan ve düğümün diğer düğümlerle ilişkisini yansıtan kenarların eşit öneme sahip olmadığını gösteren bir ölçüttür. Temelde ağdaki bir düğüm için önemli düğümlere olan bağlantıların etkisinin, diğer sıradan bağlantılardan daha fazla olabileceği düşüncesi savunulur. Bağlantıda olduğu düğümlerin daha merkezi olması, o düğümün de daha merkezi bir konumda olacağını gösterir. Bu ölçüt hesaplanırken komşuların merkezilik derecelerinin toplamı dikkate alınır (Newman, 2008). Şekil 3.7’de verilen bir sosyal ağ örneğinde *l* düğümü en yüksek özvektör merkeziliğine sahip düğümdür.



Şekil 3.7: Özvektör Merkezilik Ölçütü ile İlgili Bir Sosyal Ağ Örneği

Bir düğümün merkezi olan düğümlerle ilişkili olması durumunda düğümün daha merkezi olduğu fikrine dayanarak, Bonacich (1972) bazı düğümlerin merkeziliğinin yalnızca bitişik düğümlerin sayısına değil aynı zamanda onların merkezilik değerlerine bağlı olduğunu dile getirmiştir. Bonacich (1972) aynı zamanda bir bitişiklik matrisinin en büyük öz değerlerin özvektörü olarak tanımladığı özvektör merkeziliğinin güvenilir bir ağ merkezilik ölçütü sağlayabileceğini belirtmiştir.

Bonacich (2007) öz değer merkeziliğini, bir matris denklemi ve bir toplam olarak tanımlar. Bir düğümün merkeziliği, o düğümün bağlı olduğu düğümlerin merkeziliklerinin toplamıyla orantılıdır. Bu durumda özvektör merkeziliği Eşitlik (6)'da gösterildiği şekilde hesaplanabilir:

$$\lambda C = AC$$

$$(C_i)^E = \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(C_j)^E \quad i = 1, 2 \dots, n \tag{6}$$

Matris notasyonunda;

$$C = (C_1, C_2, \dots, C_n)$$

olarak ifade edilir. Burada,Aağınkomşuluk matrisi, λ ise A'nın en büyük özdeğeridir. Ayrıca j düğümleri i düğümünün komşularıdır.

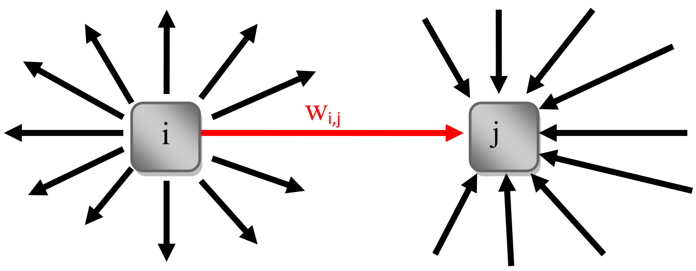
Bu yaklaşımın en önemli uygulaması Google'ın PageRank teknolojisi olarak karşımıza çıkmaktadır. PageRank Türkçede tam karşılığı olmayan bir Google terimidir. "Link Popülerliği Puanı" olarak Türkçeye uyarlandırılmak istense de yaygın olarak kullanılan terim PageRank'dır.

Temel olarak PageRank, aranan kelimeler için bir sitenin değerini ölçmeye yarayan bir altyapıdır. Sitenin aranan kelimelere göre getirilmesi için sitenin puanlaması yapılmış olmalıdır. Bu puanı belirlerken önceki arama motorları sitenin içinde çokça geçen kelimelere ve içeriğe not vermektelerdi. PageRank değeri hesaplanırken ise, Google o sayfaya kaç sitenin yönlendirme yaptığını (başka sitelerin o sayfaya link vermesi) dikkate almaktadır. Google, bunu yaparken eş zamanlı olarak yönlendirme yapan tüm sitelerin de PageRank puanlarını hesaplamaktadır. Örneğin, biri telefon almak istemektedir. Ancak bu konuda bilgi sahibi olmadığı için telefon konusunda güvenilir ve bilgi sahibi arkadaşlarına sorma ihtiyacı hisseder. Arkadaşları da belli adreslere (web sitesi örneği) yönlendirme yapar. Google da bu basit mantığı arama motorunda kullanmak üzere modifiye etmiştir. Eğer güvenilir insanlar (örneğin telefon bilgisine sahip PageRank değeri yüksek web siteleri) bir adrese (web sitesine) yönlendirme yaparsa o adresin PageRank değeri artmaktadır. Google da bu teknolojiden yararlanarak aranan kelimeler için tüm kullanıcılara sayfaları getirirken PageRank puanı en yüksek sayfaları sıralayarak bir sonuç vermektedir.

4. YENİ BİR AĞ MERKEZİLİK ÖLÇÜTÜ: GÖRECELİ KENAR ÖNEMİ METODU

Bölüm 3'de bahsedildiği gibi bir ağ içerisinde yer alan düğümlerden bazıları diğerlerine göre daha merkezidir. Bu durum literatürde sıklıkla kullanılan derece, yakınlık ve arasındalık gibi merkezilik ölçütleriyle vurgulanmıştır. Farklı bir merkezilik bakış açısıyla kullanım/faydalanma oranı değerlendirilmiş, tez kapsamında kenarların da düğümler için göreceli önemleri ele alınmıştır. Herhangi bir düğüm çiftini birbirine bağlayan bir kenarın iki düğüm için aynı öneme sahip olmadığı ve bu kenarın söz konusu düğümlerin merkeziliklerine katkısının birbirinden farklı olduğu durum için çözüm üretilerek literatüre katkı sağlanmıştır. Bir kenar, bağladığı düğümlerden birinin merkeziliği açısından önemli olabilirken; diğer düğümün çok sayıdaki bağlantısından yalnızca bir tanesi olarak bu düğümün merkeziliğine çok da önemli bir katkı sağlamayabilecektir. Diğer bir ifadeyle, yoğun ilişkileri olan aktif bir düğümün başka bir düğümle ilişkisini gösteren yönlü kenarların (çoklu kenarlı olarak kabul edilmektedir) sayısı, ya da bu kenarların söz konusu düğümün merkeziliğine etkisi, daha az aktif bir düğümün o kenara verdiği değer ya da o kenarın ona kazandırdığı merkezilik değerinden daha azdır.

Ana fikir, i düğümünden j düğümüne giden kenar sayısının i düğümünden tüm düğümlere giden toplam kenar sayısına oranı ile, i düğümünden j düğümüne giden kenar sayısının tüm düğümlerden j düğümüne gelen toplam kenar sayısına oranının karşılaştırılmasıdır. Bu karşılaştırma sayesinde söz konusu bir w_{ij} çoklu kenarının (bkz. Şekil 4.1) hangi düğümün merkeziliği için daha kritik olduğu ve hangi düğümün daha merkezi olduğu belirlenebilmektedir.



Şekil 4.1: i düğümünden j düğümüne giden çoklu kenar w_{ij}

Her bir kenar için hesaplamalarla ağdaki birbiriyle bağlantılı her bir düğümün ikili karşılaştırılması (hangisi daha aktif sorusunun cevabı) elde edilmekte ve bu sonuçların birleştirilmesi ile beraber ağdaki tüm düğümler merkeziliklerine göre sıralanabilmektedir. Elde edilen sıralama ağda kullanım/faydalanma oranı yüksek ve düşük olan düğümlerin tespit edilmesi açısından oldukça önemlidir.

Günümüz şartlarında hemen hemen her alanda karmaşık ilişkiler söz konusu olabilmekte ve bunların analizi önem taşıyabilmektedir. Ağların sürekli olarak izlenmesi ile ilişki düzeylerindeki dalgalanmalar tespit edilebilmekte ve amaca yönelik olarak gerek müdahale edilebilmekte, gerekse de önlemler alınabilmektedir.

Çalışma konusu ağlara örnek olarak sosyal ağlar ele alınabilir. Bu tür ağlarda bazı bireyler daha konuşkan olabilirken bazıları ise çoğunlukla dinleyicidir. Konuşkan bireyler diğer bireylere mesajlar gönderir. Dinleyici bireylere de daha çok konuşkan bireylerden mesajlar gelir. Böyle bir ağ incelenmek istenirse, belli bir grubun kendi arasındaki mesaj sayısı ve buna ilave olarak üyelerin aktiflik sırası profili çıkarılabilir. Bu profil ile birlikte ağa daha çok hakim olan ya da ilgisi/etkileşimi daha az olan bireyler belirlenebilir. Normal profilden sapmaya işaret eden durumlar, örneğin belli bir olayın meydana gelmesi ve grup üyelerinin buna kendi arasında konuşarak tepki vermesi ya da tam tersi susmaları ile birlikte etkileşimin azalması izlenebilir. Anormal olarak değerlendirilen böyle durumlar önemli gelişmelerden, tehditlere, bireylerin özel yaşamları ve sağlıklarına kadar birçok şeyin tespit edilmesine olanak verebilecektir. Literatürde en sık kullanılan merkezilik ölçütlerine bakıldığında birçok çalışmada bunların yalnızca en merkezi düğümü bulmaya odaklandığı görülmüştür. Bazı çalışmalarda ise sıralama tablosu verildiği ancak bu tabloların düğümlerin sıralanması amacından ziyade farklı ölçütlerin sonuçlarının karşılaştırılması için oluşturulduğu görülmektedir (Stephenson, 1989). Ağdaki tüm düğümleri merkeziliklerine göre sıraya koymak gibi bir amacı dolayısıyla da böyle bir başarı vaadi olmayan mevcut merkezilik ölçütlerine tez çalışması kapsamında yapılan çalışmalar ve incelenen örnekler ile bu anlamda daha iyi performans gösterdiği söylenebilecek Göreceli Kenar Önemi Metodu ile bir yenilik getirilebileceği düşünülmektedir. Ancak yapılan sıralamanın her çeşit ağda etkin kullanılabileceğinin kanıtlanması için daha çok veriye ihtiyaç duyulmaktadır. Gelecek çalışmalarda buna yoğunlaşılarak gerek mevcut merkezilik ölçütlerinin sıralama yapabilme yeteneklerinin geliştirilmesi gerekse bu özelliğe sahip yeni ölçütler ile ağ merkeziliği konusunun perspektifinin genişletilmesi sağlanabilir. Göreceli Kenar Önemi Metodunun düğümler arasında merkezilik sıralaması yapabilmeye oldukça yatkın bir ölçüt olduğu değerlendirilmektedir. Ancak bu ölçüt için tez kapsamında yapılan çalışmalar başlangıç niteliğindedir. Bu yüzden hem kullanılan hesaplama yöntemlerinin hem de sıralama yapabilme yeteneğinin geliştirilmeye ihtiyacı olduğu aşikardır.

Göreceli Kenar Önemi Metodunun kullanılabileceği, kullanım/faydalanma oranının öne çıktığı çok farklı alanlar mevcuttur. Bu alanlarda günümüzde yaygın olarak karşımıza çıkan yönlü ve çoklu kenarlı ağlar kullanılmaktadır. Örnek verilecek olursa, havayolu trafiği, kargo taşımacılığı, ülkeler arası ticaret, akademik atıflar gibi ağ örnekleri üzerinde yapılan çalışmalarda söz konusu metodun kullanılması ile birlikte ağ içerisinde yer alan düğümlerin kullanım/faydalanma oranı hesaplanabilecektir.

4.1. GÖRECELİ KENAR ÖNEMİ METODUNUN TANIMLANMASI

V'nin n adet düğümden oluşan düğüm kümesini, E'nin ise m adet kenardan oluşan kenar kümesini temsil ettiği bir ağı ele alalım:

$$G(V,E)$$

$$V=\{v_1,\ v_2,\ v_3\ \dots\ v_n\}$$

$$E=\{e_1,\ e_2,\ e_3\ \dots\ e_m\}$$

Bu ağ yönlü ve çok kenarlı olarak modellenmektedir. Her bir düğümün maksimum bağlanabileceği düğüm sayısı $(n-1)$ olup, tüm ağda maksimum $n*(n-1)$ adet yönlü ve çoklu kenar olabilecektir. Ağa ilişkin komşuluk matrisi Çizelge 4.1.'de gösterilmiştir.

Çizelge 4.1: Komşuluk Matrisi

	GELEN						$\boldsymbol{T^{out}}$
	$w_{1,1}$	$w_{1,2}$	…	…	$w_{1,n-1}$	$w_{1,n}$	$\boldsymbol{T^{1,out}}$
	$w_{2,1}$	$w_{2,2}$			$w_{2,n-1}$	$w_{2,n}$	$\boldsymbol{T^{2,out}}$
	…	…	…	…	…	…	**…**
GİDEN	…	…	…	…	…	…	**…**
	$w_{n-1,1}$	$w_{n-1,2}$	…	…	$w_{n-1,n-1}$	$w_{n-1,n}$	$\boldsymbol{T^{n-1,out}}$
	$w_{n,1}$	$w_{n,2}$	…	…	$w_{n,n-1}$	$w_{n,n}$	$\boldsymbol{T^{n,out}}$
$\boldsymbol{T^{in}}$	$\boldsymbol{T^{1,in}}$	$\boldsymbol{T^{2,in}}$	**…**	**…**	$\boldsymbol{T^{n-1,in}}$	$\boldsymbol{T^{n,in}}$	

Burada,

$w_{i,j}$, i düğümünden j düğümüne doğrudan giden kenarların toplam sayısını,

$T^{j,in}$, j düğümüne tüm düğümlerden doğrudan gelen kenarların toplam sayısını,

$T^{i,out}$, i düğümünden tüm düğümlere doğrudan giden kenarların toplam sayısını göstermektedir.

Çalışmada aşağıdaki varsayımlar yapılmıştır:

- $w_{i,i}$' ler 0'dır (self loop free).
- Ağ içerisinde izole düğüm olmadığı kabul edilir.
- İki düğüm arasında bir kenar yoksa bunlar arasında bağlantı/iletişim yoktur ($w_{i,j} = 0$). Eğer iki düğüm arasında bir kenar mevcut ise $w_{i,j} \geq 1$'dir.
- $\frac{w_{i,j}}{T^{j,in}} > \frac{w_{i,j}}{T^{i,out}}$ eşitsizliğinin sağlanması $\frac{w_{j,i}}{T^{i,in}} < \frac{w_{j,i}}{T^{c,out}}$ eşitsizliğinin sağlanmasını gerektirmez.

i düğümünden j düğümüne doğrudan giden çoklu kenar sayısının ($w_{i,j}$), j düğümüne tüm düğümlerden dorudan gelen toplam çoklu kenar sayısına ($T^{j,in}$) oranını $P_i^{j,in}$ ile gösterelim:

$$P_i^{j,in} = \frac{w_{i,j}}{T^{j,in}} \qquad (i \neq j)$$

Bu oran, i düğümü ile kurulan bağlantının j düğümünün tüm bağlantıları içerisinde ne kadar önemli bir bağlantı olduğunun derecesini ifade etmektedir. i düğümünden j düğümüne girdilerin j düğümünün ne kadarlık bir girdi kullanım/faydalanma oranını oluşturduğunu göstermektedir. Söz konusu önem değeri 0 ile 1 arasında değer almakta olup;

- 0'a yaklaşıldıkça i düğümü ile kurulan bağlantının j düğümü için göreceli öneminin düşük,
- 1'e yaklaşıldıkça i düğümü ile kurulan bağlantının j düğümü için göreceli öneminin yüksek

olduğu anlamına gelmektedir.

Benzer şekilde, i düğümünden j düğümüne doğrudan giden çoklu kenar sayısının ($w_{i,j}$), i düğümünden tüm düğümlere doğrudan giden toplam çoklu kenar sayısına ($T^{i,out}$) oranını $P_j^{i,out}$ ile gösterelim:

$$P_j^{i,out} = \frac{w_{i,j}}{T^{i,out}} \qquad (i \neq j)$$

Bu oran, j düğümü ile kurulan bağlantının i düğümünün tüm bağlantıları içerisinde ne kadar önemli bir bağlantı olduğunun derecesini ifade etmektedir. Benzer şekilde, i düğümünden j düğümüne girdilerin i düğümünün ne kadarlık bir çıktı kullanım/faydalanma oranını oluşturduğunu göstermektedir. Söz konusu önem değeri 0 ile 1 arasında değer almakta olup;

- 0'a yaklaşıldıkça j düğümü ile kurulan bağlantının i düğümü için göreceli öneminin düşük,
- 1'e yaklaşıldıkça $j$düğümü ile kurulan bağlantının i düğümü için göreceli öneminin yüksek

olduğu anlamına gelmektedir.

i ve j düğümleri için hesaplanan $P_i^{j,in}$ve $P_j^{i,out}$ değerlerinin kıyaslanması sureti ile $w_{i,j}$ bağlantısının bu düğümler için göreceli önemi aşağıdaki gibi belirlenir:

$$GK\ddot{O}_{i,j} = \begin{cases} i > j, & P_i^{j,in} > P_j^{i,out} \\ i < j, & P_i^{j,in} < P_j^{i,out} \\ i = j, & P_i^{j,in} = P_j^{i,out} \end{cases}$$

Burada,

- $i>j$, i düğümünün j düğümünden daha merkezi,
- $i<j$, j düğümünün i düğümünden daha merkezi,
- $i=j$, i düğümünün j düğümüyle aynı merkezilikte

bir düğüm olduğunu göstermektedir.

Ağ içindeki yönlü her kenara tek tek bakılması sonucunda düğümlerin merkeziliği kıyaslanmış olur ve çıkan bu sonuçlar birlikte değerlendirilerek düğümler göreceli kenar önemlerine göre sıralanır.

İkili karşılaştırmada kullanılan algoritma pseudo kod olarak Çizelge 4.2'de sunulmuştur:

Çizelge 4.2: Pseudo Kod

// PSEUDO KOD
n: Düğüm Sayısı
K: Komşuluk Matrisi
E_in: Herhangi bir $w_{i,j}$ çoklu kenarın j düğümüne göre göreceli önemi matrisi ($P_i^{j,in}$)
E_out: Herhangi bir $w_{i,j}$ çoklu kenarın i düğümüne göre göreceli önemi matrisi ($P_j^{i,out}$)
B: Büyüklük Matrisi
C: Sıralama Dizisi
// $i \neq j$ *olmak üzere aşağıdaki döngü çalıştırılır.*
Her bir i düğümü için

Her bir j düğümü için

// $P_i^{j,in}$ ve $P_j^{i,out}$ değeri hesaplanır.

K'dan $E_{in}(i,j) = P_i^{j,in}$ değerini hesapla

K'dan $E_{out}(i,j) = P_j^{i,out}$ değerini hesapla

Bitir

Bitir

// $i \neq j$ olmak üzere aşağıdaki döngü çalıştırılır.

Her bir i düğümü için

Her bir j düğümü için

// karşılaştırma yapılarak hangi düğümün daha önemli olduğu

// belirlenir.

Eğer $E\_in(i,j)$ büyüktür $E\_out(i,j)$

// i, j den daha önemlidir

$B(i)$ sütununun ilk boş satırına j değerini ekle

Değilse

// j, i den daha önemlidir

$B(j)$ sütununa i değerini ekle

Bitir

Bitir

Bitir

Her bir k düğümü için

//B matrisindeki değerlerle en önemli düğümden başlanarak en önemsiz *//düğüme doğru C matrisinde sıralanır* B matrisindeki en önemli değeri $C(k)$ dizisine ata Bitir

Pseudo Kodun Karmaşıklık Ölçüsü:

“Complexity**”** kavramı kodların karmaşasının ölçülmesi olarak tanımlanmaktadır. Ölçüm yapılırken kod içerisindeki serbest satırlar (basit satırlar da denilir) ve karar yapıları göz önünde bulundurulur. Ne kadar çok karar yapısı varsa, kod karmaşası da o kadar artar. Kod karmaşasının arttığı durumlarda üzerinde çalışılan projenin yönetilmesi güçleşir ve hata ile karşılaşma oranında artış gözlemlenir. Bu nedenle kod karmaşasının minumumda tutulması her zaman için önerilen bir durumdur.

Karmaşıklık ölçümü yapılırken kod içerisindeki her bir satırın karmaşıklığını ifade eden “O” değeri 1 kabul edilir. Bunun yanı sıra, koddaki karmaşıklık için göz önünde bulundurulan öncelikli yapılar döngülerdir. Bu örnekte iç içe iki “için” (for) döngüsü bulunmaktadır. Bu döngülerin her biri de n düğüm sayısına kadar hesap yapmaktadır. Bu iki döngü içerisindeki maliyeti O (1) olan bir satır, içteki döngü dolayısıyla n kez çalıştırılacaktır. Dıştaki döngü de n kez çalıştırılan bu satırı n kez çalıştıracağından söz konusu iç içe döngünün maliyeti O (n^2) olacaktır. Bu bakış açısıyla koddaki satırların maliyeti 2 iç içe döngü ve basit satırların toplamı olacaktır. Buna göre karmaşıklık değeri;

O (n^2+ n^2+ Basit satırların maliyet toplamı) = O (n^2)’dir.

Karmaşıklık değeri hesaplanırken parantez içine yazılan değerlerin üst limiti alındığından yukarıdaki sonuç O (n^2) olarak çıkmıştır. Ayrıca 4.2.2 ve 4.2.3 başlıkları altında verilen ve karşılaşılması muhtemel özel durumların pseudo kodun karmaşıklığını etkilemediği değerlendirilmektedir. Çünkü bu özel durumlarda karmaşıklığı etkilemeyen if-else yapılarından yararlanılmakta ve en fazla iç içe iki for döngüsü kullanılmaktadır.

Diğer ölçütlerin karmaşıklık değerlerine bakıldığında;

- Derece merkezilik ölçütünün karmaşıklık değerinin O (n),
- Arasındalık merkezilik ölçütünün karmaşıklık değerinin O (nm),
- Yakınlık merkezilik ölçütünün karmaşıklık değerinin O (n^3)

olduğu görülmüştür. Burada m kenar sayısını ifade etmektedir. Bu değerler göz önünde bulundurulduğunda önerilen Göreceli Kenar Önemi Metodunun karmaşıklık değerinin derece merkezilik ölçütünün karmaşıklık değerinden büyük, arasındalık ve yakınlık merkezilik ölçütlerinin karmaşıklık değerinden daha küçük olduğu anlaşılmaktadır.

4.1.1. ÖZEL DURUMLARDA MERKEZİ DÜĞÜMLERİN BELİRLENMESİ

Günümüzde pek çok farklı şekilde yapılanmış ağlar görmek mümkündür. Bu ağların bazılarında merkezi düğümlere karar vermek diğerlerine oranla daha zordur. Bu tez kapsamında yönlü ve çoklu kenarlı ağlara odaklanıldığından iki düğüm arasındaki bağlantı durumları 3 farklı şekilde karşımıza çıkabilmektedir:

1. İki düğüm arasında hiç kenar yoktur.
2. İki düğüm arasında yalnızca 1 adet yönlü ve çoklu kenar vardır.
3. İki düğüm arasında 2 adet yönlü ve çoklu kenar vardır.

Bazı ağlarda birbiriyle bağlantı kurmayan düğümler olabilmektedir. İki düğüm arasında hiç kenar yoksa Bölüm 4.1'de bahsedilen ikili karşılaştırmaları direk yapmak mümkün olamamaktadır. Bundan dolayı doğrudan bağlantısı olmayan düğümlerin merkeziliği ortak bağlantı kurdukları düğüm üzerinden değerlendirilir. Bu değerlendirme sırasında ortak düğümle bağlantılı olan tüm kenarlar dikkate alınır. Böylece hem düğümlere gelen hem de düğümlerden çıkan tüm kenarlar hesaba katılmış olur. Bu tür düğümlere sahip ağlarda nasıl hesaplama yapılacağı Bölüm 4.2.2'de verilen bir örnek üzerinden açıklanmıştır. İki düğüm arasında yalnızca 1 adet yönlü ve çoklu kenar varsa bu kenarın söz konusu düğümler için Bölüm 4.1'de bahsedildiği gibi göreceli önemi üzerinden karşılaştırma yapılır. İki düğüm arasında 2 adet yönlü ve çoklu kenar olması durumunda ise her iki kenarın söz konusu iki düğüm için göreceli önemi hesaplanır. Eğer sonuçlar birbirine paralel çıkarsa karşılaştırma tamamlanmış olur. Şayet sonuçlar birbiriyle çelişirse bu durumda her bir düğümün gelen ve giden bağlantıları içerisinde bu kenarın göreceli önemi toplanır ve elde edilen sonuçlar karşılaştırılır. Karşılaştırma sonucunda bu kenara verdiği göreceli önemi küçük çıkan düğüm daha merkezi olarak kabul edilir. . Bu tür ağlarda nasıl hesaplama yapılacağı Bölüm 4.2.3'de verilen bir örnek üzerinden açıklanmıştır.

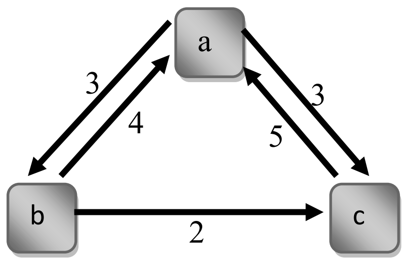
Bir sonraki alt başlıkta, belirli varsayımlar altında örnek ağlar üzerinden önerilen merkezilik ölçütü açıklanmıştır.

4.2. ÖRNEK AĞLAR

Bu tez çalışması kapsamında ele alınan ağlar yönlü ve çok kenarlıdır. Bu ağlarda çoklu kenarları ifade eden okların yanına yazılmış olan rakamlar i ve j düğüm çifti arasındaki yönlü kenar sayısını ($w_{i,j}$) ifade etmektedir.

4.2.1. ÖRNEK AĞ 1

Şekil 4.2'te verilen ağ 3 adet düğümden (a, b, c) ve 5 adet kenardan ($w_{a,b}$, $w_{b,a}$, $w_{a,c}$, $w_{c,a}$, $w_{b,c}$) oluşmaktadır.



Şekil 4.2: Örnek ağ 1

İlk olarak Çizelge 4.3'te verildiği gibi komşuluk matrisi oluşturulur.

Çizelge 4.3: Örnek Ağ 1'e Ait Komşuluk Matrisi

	GELEN			$\boldsymbol{T^{out}}$
GİDEN	$w_{a,a}=0$	$w_{a,b}=3$	$w_{a,c}=3$	$\boldsymbol{T^{a,out}=6}$
	$w_{b,a}=4$	$w_{b,b}=0$	$w_{b,c}=2$	$\boldsymbol{T^{b,out}=6}$
	$w_{c,a}=5$	$w_{c,b}=0$	$w_{c,c}=0$	$\boldsymbol{T^{c,out}=5}$
$\boldsymbol{T^{in}}$	$\boldsymbol{T^{a,in}=9}$	$\boldsymbol{T^{b,in}=3}$	$\boldsymbol{T^{c,in}=5}$	**17**

Bu matristen yararlanılarak her çoklu kenarın bağladığı düğümlerin ikili karşılaştırılmasının yapılması ile hangi düğümün daha merkezi olduğu aşağıdaki gibi belirlenir. Herhangi bir $w_{i,j}$ kenarı için yapılan ikili karşılaştırmalar sonucunda elde edilen $P_i^{j,in}$ ve $P_j^{i,out}$ değerlerinden hangisinin değeri daha küçükse o düğümün kullanım/faydalanma oranının diğer düğümden daha az olduğu kabul edilir. Kullanım/faydalanma oranının az olması söz konusu kenara verilen önemin az olması demektir. Dolayısıyla bir düğümün bağlantılarına verdiği önemin az olması bu düğümün ağ içerisinde diğer düğümlere oranla merkeziliğinin daha yüksek olduğuna işaret eder.

- $w_{a,b}=3;$

	$P_a^{b,in}$	$P_b^{a,out}$	
$w_{a,b}$ bağlantısının *a* ve *b* düğümlerine göre göreceli önemi	$\frac{w_{a,b}=3}{T^{b,in}=3}$	$\frac{w_{a,b}=3}{T^{a,out}=6}$	
Sonuç:	1	0,5	*a>b*

- $w_{b,a}=4;$

	$P_b^{a,in}$	$P_a^{b,out}$	
$w_{b,a}$ bağlantısının *a* ve *b* düğümlerine göre göreceli önemi	$\frac{w_{b,a}=4}{T^{a,in}=9}$	$\frac{w_{b,a}=4}{T^{b,out}=6}$	
Sonuç:	0.445	0.667	*a>b*

▪ $w_{c,a} = 5$;	$P_c^{a,in}$	$P_a^{c,out}$	
$w_{c,a}$ bağlantısının a ve c düğümlerine göre göreceliönemi	$\frac{w_{c,a} = 5}{T^{a,in} = 9}$	$\frac{w_{c,a} = 5}{T^{c,out} = 5}$	
Sonuç:	0.556	1	*a>c*

▪ $w_{a,c} = 3$;	$P_a^{c,in}$	$P_c^{a,out}$	
$w_{a,c}$ bağlantısının a ve c düğümlerine göre göreceli önemi	$\frac{w_{a,c} = 3}{T^{c,in} = 5}$	$\frac{w_{a,c} = 3}{T^{a,out} = 6}$	
Sonuç:	0.6	0.5	*a>c*

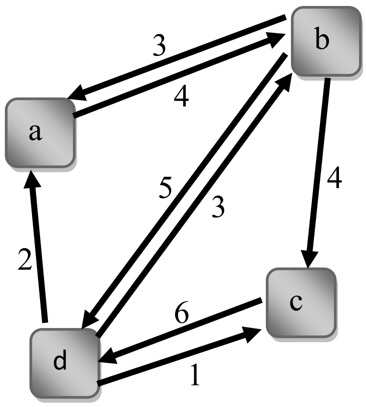
▪ $w_{b,c} = 2$;	$P_b^{c,in}$	$P_c^{b,out}$	
$w_{b,c}$ bağlantısının b ve c düğümlerine göre göreceli önemi	$\frac{w_{b,c} = 2}{T^{c,in} = 5}$	$\frac{w_{b,c} = 2}{T^{b,out} = 6}$	
Sonuç:	0.4	0.333	*b>c*

Merkezilik Sıralaması: *a* > *b* > *c*

İkili karşılaştırma sonuçlarının (*a>c*, *a>b* ve *b>c*) birlikte, eşitsizlik kuralları kullanılarak değerlendirilmesi ile elde edilen merkezilik sıralamasına göre ağdaki en aktif düğüm a düğümüdür. Dolayısıyla bu düğümün diğer düğümlere kıyasla ağda daha merkezi olduğu kabul edilir.

4.2.2. ÖRNEK AĞ 2

Şekil 4.3'te verilen ağ 4 adet düğümden (a, b, c, d) ve 8 adet kenardan ($w_{a,b}$, $w_{b,a}$, $w_{b,c}$, $w_{c,d}$, $w_{d,c}$, $w_{b,d}$, $w_{d,b}$, $w_{d,a}$) oluşmaktadır.



Şekil 4.3: Örnek ağ 2

İlk olarak Çizelge 4.4'de verildiği gibi komşuluk matrisi oluşturulur.

Çizelge 4.4: Örnek Ağ 2'ye Ait Komşuluk Matrisi

	GELEN				$\boldsymbol{T^{out}}$
GİDEN	$w_{a,a} = 0$	$w_{a,b} = 4$	$w_{a,c} = 0$	$w_{a,d} = 0$	$\boldsymbol{T^{a,out} = 4}$
	$w_{b,a} = 3$	$w_{b,b} = 0$	$w_{b,c} = 4$	$w_{b,d} = 5$	$\boldsymbol{T^{b,out} = 12}$
	$w_{c,a} = 0$	$w_{c,b} = 0$	$w_{c,c} = 0$	$w_{c,d} = 6$	$\boldsymbol{T^{c,out} = 6}$
	$w_{d,a} = 2$	$w_{d,b} = 3$	$w_{d,c} = 1$	$W_{d,d}$=0	$\boldsymbol{T^{d,out} = 6}$
$\boldsymbol{T^{in}}$	$\boldsymbol{T^{a,in} = 5}$	$\boldsymbol{T^{b,in} = 7}$	$\boldsymbol{T^{c,in} = 5}$	$\boldsymbol{T^{d,in} = 11}$	**28**

Bu matristen yararlanılarak her bir çoklu kenarın bağladığı düğümlerin ikili karşılaştırılmasının yapılması ile hangi düğümün daha merkezi olduğu aşağıdaki gibi belirlenir:

▪ $w_{b,a}$ = 3;	$P_b^{a,in}$	$P_a^{b,out}$	
$w_{b,a}$ bağlantısının *a* ve *b* düğümlerine göre göreceli önemi	$\frac{w_{b,a}=3}{T^{a,in}=5}$	$\frac{w_{b,a}=3}{T^{b,out}=12}$	
Sonuç:	0.6	0.25	*b>a*

▪ $w_{a,b}$ = 4;	$P_a^{b,in}$	$P_b^{a,out}$	
$w_{a,b}$ bağlantısının *a* ve *b* düğümlerine göre göreceli önemi	$\frac{w_{a,b}=4}{T^{b,in}=7}$	$\frac{w_{a,b}=4}{T^{a,out}=4}$	
Sonuç:	0.571	1	*b>a*

▪ $w_{b,d}$ = 5;	$P_b^{d,in}$	$P_d^{b,out}$	
$w_{b,d}$ bağlantısının *b* ve *d* düğümlerine göre göreceli önemi	$\frac{w_{b,d}=5}{T^{d,in}=11}$	$\frac{w_{b,d}=5}{T^{b,out}=12}$	
Sonuç:	0.455	0.417	*b>d*

▪ $w_{d,b}$ = 3;	$P_d^{b,in}$	$P_b^{d,out}$	
$w_{d,b}$bağlantısının *b* ve *d* düğümlerine göre göreceli önemi	$\frac{w_{d,b}=3}{T^{b,in}=7}$	$\frac{w_{d,b}=3}{T^{d,out}=6}$	
Sonuç:	0.426	0.5	*b>d*

▪ $w_{b,c}$ = 4;	$P_b^{c,in}$	$P_c^{b,out}$	
$w_{b,c}$ bağlantısının *b* ve *c* düğümlerine göre göreceli önemi	$\frac{w_{b,c} = 4}{T^{c,in} = 5}$	$\frac{w_{b,c} = 4}{T^{b,out} = 12}$	
Sonuç:	0.8	0.333	*b>c*

▪ $w_{d,c}$ = 1;	$P_d^{c,in}$	$P_c^{d,out}$	
$w_{d,c}$ bağlantısının *c* ve *d* düğümlerine göre göreceli önemi	$\frac{w_{d,c} = 1}{T^{c,in} = 5}$	$\frac{w_{d,c} = 1}{T^{d,out} = 6}$	
Sonuç:	0.2	0.167	*d>c*

▪ $w_{c,d}$ = 6;	$P_c^{d,in}$	$P_d^{c,out}$	
$w_{c,d}$ bağlantısının *c* ve *d* düğümlerine göre göreceli önemi	$\frac{w_{c,d} = 6}{T^{d,in} = 11}$	$\frac{w_{c,d} = 6}{T^{c,out} = 6}$	
Sonuç:	0.546	1	*d>c*

▪ $w_{d,a}$ = 2;	$P_d^{a,in}$	$P_a^{d,out}$	
$w_{d,a}$ bağlantısının *a* ve *d* düğümlerine göre göreceli önemi	$\frac{w_{d,a} = 2}{T^{a,in} = 5}$	$\frac{w_{d,a} = 2}{T^{d,out} = 6}$	
Sonuç:	0.4	0.333	*d>a*

Bu örnekte a ve$c$düğümlerinin doğrudan bir bağlantısı olmadığı için ikili karşılaştırma yapılamamaktadır. Ancak her iki düğümün de ortak bağlantı kurduğu düğümler vasıtasıyla iki düğüm arasında karşılaştırma yapılabilmektedir. Bu örnekte a ve c düğümlerinin ortak bağlantı kurduğu iki adet düğüm bulunmaktadır. Bunlar b ve d düğümleridir. Bu durumda her iki düğümün de b ve d düğümü ile arasındaki kenarlar dikkate alınır ve aşağıdaki eşitsizliklerin sonucunda çıkan değerlere göre hangisinin daha merkezi olduğuna karar verilir.

Ortak bağlantı kurulan ve söz konusu iki düğüm arasındaki en kısa yollar üzerinde bulunan düğümlerin her biri için (bu örnekte b ve d düğümlerinin ikisi de aynı uzunluktaki yollar üzerindedir, bu nedenle her ikisi de hesaplama yapılırken dikkate alınmıştır.) ilgili kenarların göreceli önem farkına bakılır. Bu örnek için b ve d düğümlerinin a ve c düğümlerine göre daha merkezi oldukları bilinmektedir. Dolayısıyla b ve d düğümleri ile arasındaki önem farklarının mutlak değerinin toplamı daha az olan düğümün (a veya c düğümü) daha merkezi olduğu yani kullanım/faydalanma oranının daha düşük olduğu kabul edilir. Çünkü bu düğüm b ve d düğümlerine merkezilik anlamında daha yakındır. Sonuç olarak, merkezi düğümlerin kenarlara verdiği önemin diğer düğümlere kıyasla daha az olması nedeniyle aşağıdaki eşitsizliklerin sonucunda değeri küçük çıkan düğüm daha merkezi olacaktır. Buna göre:

- a düğümü için;

$$[|\frac{w_{b,a}}{T^{a,in}} - \frac{w_{b,a}}{T^{b,out}}| + |\frac{w_{a,b}}{T^{b,in}} - \frac{w_{a,b}}{T^{a,out}}|]+[|\frac{w_{d,a}}{T^{a,in}} - \frac{w_{d,a}}{T^{d,out}}| +0]$$

$$= [|0,6 - 0,25 | + | 0,571-1|]+ [|0,4-0,333| +0]$$

$$= [0,35+0,429]+0,467$$

$$= 1,246$$

- c düğümü için;

$$[|\frac{w_{b,c}}{T^{c,in}} - \frac{w_{b,c}}{T^{b,out}}|+ 0]+[|\frac{w_{d,c}}{T^{c,in}} - \frac{w_{d,c}}{T^{d,out}}| \quad + |\frac{w_{c,d}}{T^{d,in}} - \frac{w_{c,d}}{T^{c,out}}|]$$

$$= [|0,8-0,333| + \ 0]+[|0,2 - 0,167| + |0,546- 1|]$$

$$= 0,467 + [0,033 + 0,454]$$

$$= \ 0,954$$

Çıkan sonuçlara göre b ve d düğümleri ile kurulan bağlantıların kullanım/faydalanma oranı c düğümü için a düğümüne kıyasla daha düşüktür.

(0,954 < 1,246) Dolayısıyla c düğümü daha merkezi olarak değerlendirilir ($c > a$).

Merkezilik Sıralaması: $\boldsymbol{b > d > c > a}$

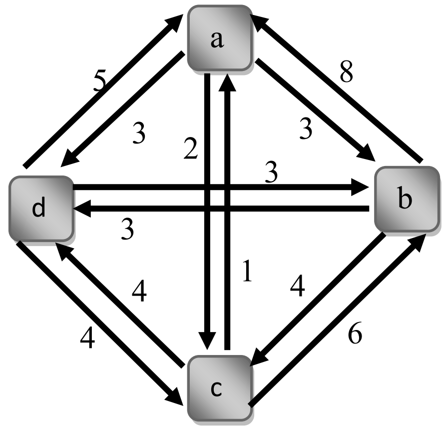
İkili karşılaştırma sonuçlarının (b>a, b>d, b>c, d>c, d>a ve c>a) birlikte, eşitsizlik kuralları kullanılarak değerlendirilmesi ile elde edilen merkezilik sıralamasına göre ağdaki en aktif düğüm b düğümüdür. Dolayısıyla bu düğümün diğer düğümlere kıyasla ağda daha merkezi olduğu kabul edilir.

Bu örnekte a ve c düğümleri arasındaki en kısa yol uzunluğu 2 olup b ve d düğümlerinin ikisi de en kısa yollar üzerinde bulunmaktadır. Bu nedenle hesaplama yapılırken hem b hem de d düğümü dikkate alınmıştır. Ancak a ve c düğümleri arasındaki en kısa yol üzerinde bir düğüm (yalnızca b veya yalnızca d düğümü) bulunmuş olsaydı sadece o düğüm ile aralarındaki farkların karşılaştırılacağı, ya da ikiden daha fazla en kısa yol bulunmuş olsaydı bu en kısa yollar üzerindeki düğümlerin hepsinin dikkate alınacağı göz önünde bulundurulmalıdır.

Bununla birlikte bu örnek için geliştirilen hesaplama yönteminin böyle küçük ağlarda kullanmaya elverişli olsa da büyük ağlarda çok sayıda ortak düğüm bulunması halinde veya ortak bir düğümün olmadığı ancak en az iki düğümle birbirine ulaşabilen düğümler için yapılacak olan karşılaştırmada hesap karmaşasına yol açabileceği, bu nedenle de etkili olamayabileceği değerlendirilmiştir. Üzerinde çalışılan örnekler ve MATLAB programında rasgele oluşturulan ağlarda bu tür bir eksiklik görülmemiş olsa da bu durumun göz önünde bulundurulması önerilmektedir. Bu çalışma kapsamında önerilen merkezilik ölçütü için kullanılan bu tür hesaplamaların başlangıç olarak ele alınması ve geliştirilmesi gelecek çalışmalar için motivasyon kaynağı olabilir.

4.2.3. ÖRNEK AĞ 3

Şekil 4.4'te verilen ağ 4 adet düğümden (a, b, c, d) ve 12 adet kenardan ($w_{a,b}$, $w_{b,a}$, $w_{a,c}$, $w_{c,a}$, $w_{a,d}$, $w_{d,a}$, $w_{b,c}$, $w_{c,b}$, $w_{b,d}$, $w_{d,b}$, $w_{c,d}$, $w_{d,c}$) oluşmaktadır.



Şekil 4.4: Örnek ağ 3

İlk olarak Çizelge 4.5’te verildiği gibi komşuluk matrisi oluşturulur.

Çizelge 4.5: Örnek Ağ 3’e Ait Komşuluk Matrisi

	GELEN				$\boldsymbol{T^{out}}$
GİDEN	$w_{a,a} = 0$	$w_{a,b} = 3$	$w_{a,c} = 2$	$w_{a,d} = 3$	$\boldsymbol{T^{a,out} = 8}$
	$w_{b,a} = 8$	$w_{b,b} = 0$	$w_{b,c} = 4$	$w_{b,d} = 3$	$\boldsymbol{T^{b,out} = 15}$
	$w_{c,a} = 1$	$w_{c,b} = 6$	$w_{c,c} = 0$	$w_{c,d} = 4$	$\boldsymbol{T^{c,out} = 11}$
	$w_{d,a} = 5$	$w_{d,b} = 3$	$w_{d,c} = 4$	$W_{d,d}$=0	$\boldsymbol{T^{d,out} = 12}$
$\boldsymbol{T^{in}}$	$\boldsymbol{T^{a,in} = 14}$	$\boldsymbol{T^{b,in} = 12}$	$\boldsymbol{T^{c,in} = 10}$	$\boldsymbol{T^{d,in} = 10}$	**46**

Bu matristen yararlanılarak her bir çoklu kenarın bağladığı düğümlerin ikili karşılaştırılmasının yapılması ile hangi düğümün daha merkezi olduğu aşağıdaki gibi belirlenir:

▪ $w_{b,a} = 8$;	$P_b^{a,in}$	$P_a^{b,out}$	
$w_{b,a}$ bağlantısının *a* ve *b* düğümlerine göre göreceli önemi	$\dfrac{w_{b,a} = 8}{T^{a,in} = 14}$	$\dfrac{w_{b,a} = 8}{T^{b,out} = 15}$	
Sonuç:	0.571	0.533	*b>a*

$w_{a,b} = 3$;	$P_a^{b,in}$	$P_b^{a,out}$	
$w_{a,b}$ bağlantısının *a* ve *b* düğümlerine göre göreceli önemi	$\frac{w_{a,b} = 3}{T^{b,in} = 12}$	$\frac{w_{a,b} = 3}{T^{a,out} = 8}$	
Sonuç:	0.25	0.375	*b>a*

$w_{b,c} = 4$;	$P_b^{c,in}$	$P_c^{b,out}$	
$w_{b,c}$ bağlantısının *b* ve *c* düğümlerine göre göreceli önemi	$\frac{w_{b,c} = 4}{T^{c,in} = 10}$	$\frac{w_{b,c} = 4}{T^{b,out} = 15}$	
Sonuç:	0.4	0.267	*b>c*

$w_{c,b} = 6$;	$P_c^{b,in}$	$P_b^{c,out}$	
$w_{c,b}$ bağlantısının *b* ve *c* düğümlerine göre göreceli önemi	$\frac{w_{c,b} = 6}{T^{b,in} = 12}$	$\frac{w_{c,b} = 6}{T^{c,out} = 11}$	
Sonuç:	0.5	0.545	*b>c*

$w_{c,d} = 4$;	$P_c^{d,in}$	$P_d^{c,out}$	
$w_{c,d}$ bağlantısının *c* ve *d* düğümlerine göre göreceli önemi	$\frac{w_{c,d} = 4}{T^{d,in} = 10}$	$\frac{w_{c,d} = 4}{T^{c,out} = 11}$	
Sonuç:	0.4	0.364	*c>d*

▪ $w_{d,c} = 4$;	$P_d^{c,in}$	$P_c^{d,out}$	
$w_{d,c}$ bağlantısının *c* ve *d* düğümlerine göre göreceli önemi	$\frac{w_{d,c} = 4}{T^{c,in} = 10}$	$\frac{w_{d,c} = 4}{T^{d,out} = 12}$	
Sonuç:	0.4	0.333	*d>c*

▪ $w_{a,d} = 3$;	$P_a^{d,in}$	$P_d^{a,out}$	
$w_{a,d}$ bağlantısının *a* ve *d* düğümlerine göre göreceli önemi	$\frac{w_{a,d} = 3}{T^{d,in} = 10}$	$\frac{w_{a,d} = 3}{T^{a,out} = 8}$	
Sonuç:	0.3	0.375	*d>a*

▪ $w_{d,a} = 5$;	$P_d^{a,in}$	$P_a^{d,out}$	
$w_{d,a}$ bağlantısının *a* ve *d* düğümlerine göre göreceli önemi	$\frac{w_{d,a} = 5}{T^{a,in} = 14}$	$\frac{w_{d,a} = 5}{T^{d,out} = 12}$	
Sonuç:	0.357	0.417	*a>d*

▪ $w_{c,a} = 1$;	$P_c^{a,in}$	$P_a^{c,out}$	
$w_{c,a}$ bağlantısının *a* ve *c* düğümlerine göre göreceli önemi	$\frac{w_{c,a} = 1}{T^{a,in} = 14}$	$\frac{w_{c,a} = 1}{T^{c,out} = 11}$	
Sonuç:	0.071	0.091	*a>c*

▪ $w_{a,c} = 2$;	$P_a^{c,in}$	$P_c^{a,out}$	
$w_{a,c}$ bağlantısının a ve c düğümlerine göre göreceli önemi	$\frac{w_{a,c} = 2}{T^{c,in} = 10}$	$\frac{w_{a,c} = 2}{T^{a,out} = 8}$	
Sonuç:	0.2	0.25	*c>a*

▪ $w_{b,d} = 3$;	$P_b^{d,in}$	$P_d^{b,out}$	
$w_{b,d}$ bağlantısının b ve d düğümlerine göre göreceli önemi	$\frac{w_{b,d} = 3}{T^{d,in} = 10}$	$\frac{w_{b,d} = 3}{T^{b,out} = 15}$	
Sonuç:	0.3	0.2	*b>d*

▪ $w_{d,b} = 3$	$P_d^{b,in}$	$P_b^{d,out}$	
$w_{d,b}$ bağlantısının b ve d düğümlerine göre göreceli önemi	$\frac{w_{d,b} = 3}{T^{b,in} = 12}$	$\frac{w_{d,b} = 3}{T^{d,out} = 12}$	
Sonuç:	0.25	0.25	*b=d*

Bu örnekte bazı tablolardan çıkan karşılaştırma sonuçlarının birbiriyle çeliştiği gözlenmektedir. Örnek vermek gerekirse c ve d düğümleri arasındaki farklı yönlü iki çoklu kenarın biri için hesaplanan tabloda sonuç $c > d$, diğeri için hesaplanan tabloda sonuç $d > c$ olarak belirlenmiştir.

Diğer bir ifadeyle;

$\frac{w_{c,d}}{T^{d,in}} > \frac{w_{c,d}}{T^{c,out}}$ eşitsizliğinin sonucunda c düğümünün daha yoğun olduğu,

$\frac{w_{d,c}}{T^{c,in}} < \frac{w_{d,c}}{T^{d,out}}$ eşitsizliğinin sonucunda da d düğümünün daha yoğun olduğu

görülmektedir. Aslında iki eşitsizliğin sonuçlarının birbiri ile uyumu çıkması ideal durumdur. Ancak bu örnekte de karşılaşıldığı üzere sonuç her zaman böyle çıkmayabilir. Bu nedenle yukarıda verilen iki eşitsizliğin sonuçlarının birbirinden farklı çıktığı durumda tez kapsamında aşağıdaki gibi bir çözüm önerilmektedir.

Böyle bir durumda ilgili düğümün her iki tablodaki sonuçları ayrı ayrı toplanır ve küçük değere sahip düğüm daha merkezi kabul edilir. Bu şekilde çelişkili sonuçlara sahip diğer ikili kenarlar da dahil olmak üzere yapılan hesaplamalar aşağıda gösterilmiştir.

Örneğimizde c ve d düğümlerinin merkezilik sıralamasındaki çelişkiyi gidermek için c ve d düğümleri arasındaki farklı yönlü her iki çoklu kenarının ($w_{c,d}$ ve $w_{d,c}$), bu düğümlerin tüm gelen ve giden kenarları arasındaki göreceli önemi aşağıdaki gibi belirlenir. Göreceli önemi küçük çıkan taraftaki düğüm daha merkezi kabul edilir. Çünkü bu düğümün söz konusu kenar için kullanım/faydalanma oranı daha azdır.

$$\frac{w_{c,d}}{T^{d,in}} + \frac{w_{d,c}}{T^{d,out}} \ ? \ \frac{w_{c,d}}{T^{c,out}} + \frac{w_{d,c}}{T^{c,in}}$$

$$0.4+0.333 \ ? \ 0.364+0.4$$

$$0.733 < 0.764$$

* d'nin toplam değeri daha küçük olduğu için d>c olarak belirlenir.

Benzer şekilde çelişki yaşanan diğer düğüm çiftleri için de aynı hesaplama yöntemi kullanılarak kullanım/faydalanma oranı açısından merkezilikleri aşağıdaki gibi belirlenir.

- a ve d düğüm çifti için;

$$\frac{w_{a,d}}{T^{d,in}} + \frac{w_{d,a}}{T^{d,out}} \ ? \ \frac{w_{a,d}}{T^{a,out}} + \frac{w_{d,a}}{T^{a,in}}$$

$$0.3+0.417 \ ? \ 0.375+0.357$$

$$0.717 < 0.732$$

* d'nin toplam değeri daha küçük olduğu için d>a olarak belirlenir.

- a ve c düğüm çifti için;

$$\frac{w_{a,c}}{T^{c,in}} + \frac{w_{c,a}}{T^{c,out}} ? \frac{w_{c,a}}{T^{a,in}} + \frac{w_{a,c}}{T^{a,out}}$$

$$0.2+ 0.091 \ ? \ 0.071+0.25$$

$$0.291 < 0.321$$

* c'nin toplam değeri daha küçük olduğu için $c>a$ olarak belirlenir.

- b ve d düğüm çifti için;

$$\frac{w_{b,d}}{T^{d,in}} + \frac{w_{d,b}}{T^{d,out}} ? \frac{w_{b,d}}{T^{b,out}} + \frac{w_{d,b}}{T^{b,in}}$$

$$0.3+0.25 \ ? \ 0.2+0.25$$

$$0.55 > 0.45$$

* b'nin toplam değeri daha küçük olduğu için $b>d$ olarak belirlenir.

Merkezilik Sıralaması: *b > d > c > a*

İkili karşılaştırma sonuçlarının (*b>a, b>d, b>c, d>c, d>a* ve *c>a*) birlikte değerlendirilmesi ile elde edilen merkezilik sıralamasına göre ağdaki en aktif düğüm b düğümüdür. Dolayısıyla bu düğümün diğer düğümlere kıyasla ağda daha önemli olduğu ve ağa ilişkin daha çok bilgiye sahip olduğu kabul edilir.

4.3. DİĞER MERKEZİLİK ÖLÇÜTLERİ İLE KARŞILAŞTIRMA

Bölüm 3.4.1'de bahsedilen derece, yakınlık, arasındalık ve özvektör gibi ölçütlerin hem yönlü hem de çok kenarlı ağlar ile ilgili örnekleri pek bulunmamaktadır. Yapılan çalışmalarda sadece en temel anlamda tanımlamalara yer verilmiştir ve gerçek dünya problemleri üzerindeki uygulamalara değinilmemiştir. Literatürde Ni ve arkadaşları (2011) ile Then ve arkadaşları (2017) tarafından yapılan çalışmalar gibi pek çok örnek çalışma incelendiğinde bu ölçütlerden özellikle derece, yakınlık ve arasındalık ölçütlerine odaklanıldığı, özvektör merkezilik ölçütünün ise onlara kıyasla daha pasif kaldığı görülmüştür. Bunun temel sebebi özvektör merkezilik ölçütünün derece merkezilik ölçütünün farklılaşmış hali gibi düşünülmesidir. Özvektör merkeziliği, derece ölçütünün yerel yapısını kıran ve sadece düğümün kendi kenar sayısı ile değil komşularının da kenar sayısı ile ilgilenen bir ölçüttür. Böyle düşünüldüğünde daha geniş bir kitleye yayıldığı için yerel olmayan merkezilik ölçütleri arasında da yerini almıştır. Ancak ağlar büyüdükçe özvektör merkeziliğinin yerelleşen bir yapısının olması ve dolayısıyla derece metriği ile benzerlikler göstermesi göz önünde bulundurularak bu tez kapsamında yapılan karşılaştırma çalışmalarında değerlendirme dışı bırakılmıştır.

Bu tezde önerilen merkezilik ölçütü hesaplama şekli ile hem kolay, hem de büyük ağlara kolaylıkla adapte edilebilir nitelikte geliştirilmiştir. Yönlü ve çok kenarlı olması da gerçek dünya örnekleri için oldukça elverişlidir. Ayrıca, bazı özel durumlarda merkezilik ölçütleri literatürde geniş bir şekilde yerini almış ve en çok kullanılan derece, yakınlık ve arasındalık gibi ölçütler ile hesaplanamazken, önerilen ölçüt ile hesaplanabilmektedir.

Önerilen Göreceli Kenar Önemi Merkezilik Ölçütünün amacı yönlü ve çok kenarlı bir ağda her bir kenarın bağladığı düğüm çiftinin merkeziliğine katkısını görmektir. Böylelikle ikili karşılaştırma metodu ile tüm düğümler hakkında bilgi sahibi olunabilmektedir.

4.3.1. DERECE MERKEZİLİK ÖLÇÜTÜ İLE KARŞILAŞTIRMA:

Varsayımı; önemli düğümlerin çok sayıda bağlantısının olduğudur.

Derece, düğüm merkezilik ölçütlerinin en basitidir ve komşu düğümlerle kurulan bağlantı sayısı olarak hesaplanır. Yönlü bir ağda bir düğüme gelen bağlantılar ile giden bağlantılar ayrı olarak hesaplanır ve sırasıyla iç ve dış derece olarak adlandırılır.

Barrat ve arkadaşları (2004), Newman (2004) ve Opsahl ve arkadaşları (2010) genel olarak ağırlık derecelerinin toplamını hesaplamış ve düğüm kuvvetini bulmuşlardır. Bir ağ ikili sistemde ağırlıksız olarak ifade ediliyorsa derece her bir bağın ağırlığı 1 kabul edilerek hesaplanır. Ağırlıklı ağlarda, bu iki ölçütün sonuçları farklıdır. Düğüm kuvveti kenarların ağırlıklarını dikkate aldığından, ağırlıklı ağların analiz edilmesi için Barrat ve arkadaşları (2004) ile Opsahl ve arkadaşları (2010) çalışmalarında derece merkezilik ölçütünü kullanmışlardır.

Derece merkeziliği yalnızca düğümlerin etrafındaki yerel yapıyı kullandığından (sadece komşu düğümler ile olan ilişkiler göz önünde bulundurulmaktadır) ağın geneline hakimiyet sağlayamamaktadır. Bu, aslında önemli olarak belirlenen bir düğüm ağ hakkında yeterli bilgiye sahip olmayabilir anlamına gelmektedir. Bununla ilişkili olarak bir e-posta ağı düşünüldüğü zaman bir bireyin sadece belli birkaç kişi ile çok konuşması bireyin derecesini arttırırken bu düğümü ağdaki bilgi akışı açısından önemli bir düğüm yapmaz. Çünkü ağın diğer bireylerinin arasındaki konuşmalara dahil olunmamıştır. Bu tezde önerilen yöntem ile böyle bir yetersizlik söz konusu değildir. Çünkü tüm kenarlarla ilgilenilmekte ve düğümler ağın tümü için ikili karşılaştırma metodu ile önem sırasına sokulabilmektedir.

Çoğu ağ örneğinde görülmüştür ki aynı dereceye sahip düğümler olabilmekte ve bu tür durumlarda merkezi düğümleri belirleme konusunda derece merkeziliği yeterli olamayabilmektedir. Örnek ağ 3'te bu durum görülmektedir:

Çizelge 4.6: Örnek Ağ 3'e Ait Derece Tablosu

	İç Derece	**Dış Derece**	**Derece**
a	8	14	**22**
b	15	12	27
c	11	10	21
d	12	10	**22**

Bu ağ için derece merkezilik sıralaması $b > a, d > c$ şeklinde olmaktadır. Bu sonuç, a düğümü ile d düğümü arasında sıralama yapılamadığını göstermektedir.

Derece merkeziliği ile ilgili bir diğer önemli husus yönlü bir ağda hangi tür derece hesabının kullanılacağının karmaşıklığa yol açmasıdır. Şöyle ki 2. Ağ örneği düşünüldüğünde düğümlerin derece değerleri Çizelge 4.7'da hesaplanmıştır.

Çizelge 4.7: Örnek Ağ 2'ye Ait Derece Tablosu

	İç Derece	**Dış Derece**	**Derece**
a	5	4	9
b	7	12	19
c	5	6	11
d	11	6	17

Bu tabloya göre;

- İç Derece Sıralaması: $d > b > a = c$
- Dış Derece Sıralaması: $b > c = d > a$
- Toplam Derece Sıralaması: $b > d > c > a$

Toplam derece sıralaması bizim önerdiğimiz göreceli kenar önemliliği metodu ile uyumludur ancak bu toplam yönlü okları göz önünde bulundurmaksızın sanki yönsüz bir ağda hesap yapılır gibi davranmaktadır. Böyle yapılması daha karmaşık ağlarda düğüm sıralarında eşitlik gibi sağlıksız durumlara yol açabilmekte ve yönlü ağlarda etkili bir yöntem olmadığı izlenimini uyandırmaktadır. Nitekim yönlü ağlar için düşünülmüş iç derece ve dış derece kavramlarının böyle bir durumda bir önemi kalmamaktadır ve yalnızca kavram olarak yer almaktadır. İç ve dış derece kavramlarının kullanıldığını düşünürsek de ikisi arasında da oldukça bariz farklar olduğu görülmektedir. Biri en önemli düğüm b derken öbürü d demektedir ve bu da hangisinin dikkate alınması gerektiği konusunda kafa karışıklığına neden olmaktadır.

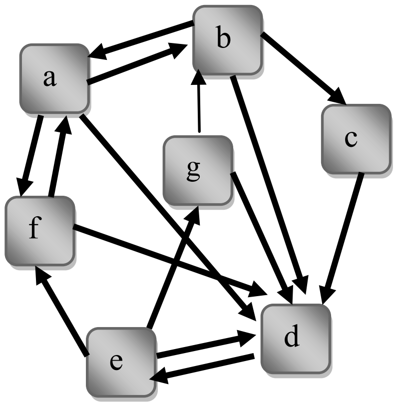
Ayrıca derece merkeziliği gruplar arası bilgi akışına hakimiyet yeteneği açısından da yetersiz kalmaktadır çünkü doğası gereği yerellik yapısına sahip olduğundan derecesi yüksek bir düğüm ancak ve ancak gruplardan birinin üyesi olmak durumundadır. Bu da yine ağın geneli hakkında fikir sahibi olması hususundaki eksikliğin bir göstergesidir. Yine ağdaki herhangi bir düğümden gelen bilgilerin size ulaşması ihtimali bu tezde önerilen metoda, yakınlık ve arasındalık gibi diğer merkezilik ölçütlerine göre daha düşüktür. Çünkü alt grupların olduğu kompleks ağlarda ortada yer alma gibi bir durum derece merkeziliğinde yoktur. Bu da gruplar arası bilgilerin akışından haberdar olmama ile sonuçlanır. Bu yeteneği olmayan bir düğüm ne kadar önemlidir tartışılması gereken bir konudur.

4.3.2. YAKINLIK MERKEZİLİK ÖLÇÜTÜ İLE KARŞILAŞTIRMA:

Varsayımı; önemli düğümlerin diğer düğümlere yakın olduğudur.

Yakınlık tabanlı yaklaşımı benimseyen araştırmacılardan Bavelas'a (1948) göre, ağdaki en merkezi pozisyondaki mesaj minimum sürede tüm ağ boyunca yayılır. Beauchamp (1965), iletişimde optimum verimlilik için yakınlığa bağlı bir örgüt tasarımı kullanılması tavsiyesiyle yakınlık merkeziliğinin önemine dikkat çekmiştir. Hakimi (1965) ve Sabidussi (1966) ise, "minimum maliyet veya zamanla diğer noktalar ile iletişimi sağlayan nokta, ağdaki en merkezi noktadır" tanımını yapmışlardır. Temel olarak zaman ve maliyet verimliliği açısından, bir noktanın merkeziliği, ilişkili olduğu diğer noktalara olan jeodezik uzaklığına bağlıdır. Tam da bu nokta da gerçek dünya örnekleri düşünüldüğü zaman çoğu örnekte artık her düğümün diğerlerine ulaşabilmesinin çok kolay olduğu görülmektedir. Aynı zamanda, her düğüm bir diğer düğüme eşit mesafede konumlanmış olabilmektedir. Bunun en basit gösterimi 3. Ağ örneğinde olduğu gibidir. Ağdaki her düğüm diğer düğümlerle çift yönlü bir ilişkiye sahiptir ve aralarındaki jeodezik uzaklık sadece 1 birimdir. E-posta ağlarında da durum benzerdir. Herkesin birbiriyle yazıştığı durumda önemli düğümün tespit edilmesi mümkün olamamaktadır. Çünkü yakınlık merkezilik ölçütü yalnızca uzaklığı baz almaktadır ve üstelik ağın çok kenarlı durumunu da ihmal ettiği açıktır. Sonuç olarak da ağın normal profilinden e-posta sayısı bakımından sapma gösteren düğümler tespit edilememektedir. Bu durum ağırlıklı ya da çok kenarlı ağlarda bu yöntemin etkili olmadığını göstermektedir.

Yönlü ağlarda yakınlık merkezilik ölçütü ağda birçok bilginin kendisine ulaştığı ancak ondan başka düğümlere bilgi akmadığı durumlarda söz konusu düğümü önemli olarak görmemektedir. Örneğin Şekil 4.5'te verilen örnekte d düğümüne çok sayıda bilgi akarken kendisi yalnızca e düğümüne bilgi aktarmıştır. Böyle bir durumda d düğümü önemsizdir diyemeyiz. Çünkü bu ağ bir işyerindeki e-posta ağı ise d düğümü kendisine bağlı olarak çalışan personellerinden bilgi toplayan bir amir olabilir. O da kendisine gelen bilgileri yalnızca üst yönetime aktarıyor olabilir. Böyle bir durumda ağdaki bilgiye hakim amir pozisyonundaki kişi çok önemli bir role sahiptir. Ancak yakınlık merkeziliği ölçütüne göre bu değerlendirme farklı yapılmaktadır. Bu tez ile önerilen göreceli kenar önemliliği metodunun temelinde sadece konuşkan düğümler değil dinleyici düğümlerde önemlidir düşüncesi yatmaktadır.



Şekil 4.5: Yakınlık Merkezilik ölçütü ile İlgili Bir Ağ Örneği

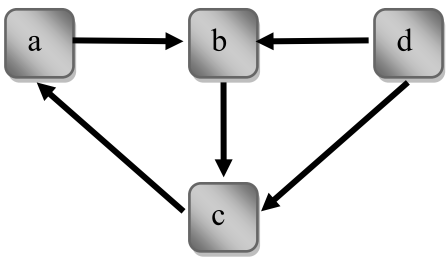
4.3.3. ARASINDALIK MERKEZİLİK ÖLÇÜTÜ İLE KARŞILAŞTIRMA:

Varsayımı; önemli düğümlerin diğer düğümleri birbirine bağladığıdır.

Arasındalık, bireyin diğer bireyler arasında geçiş/köprü konumunda olma düzeyini belirlemeyi amaçlar. Freeman'a (1979) göre arasındalık, bir düğümün diğer düğümler arasındaki işlemlerin bir parçası olma derecesidir.

Yakınlık merkeziliğin de olduğu gibi arasındalık merkeziliği de gerçek dünya örnekleri düşünüldüğü zaman yetersiz kalmaktadır. Çünkü temelinde yatan düşünce herhangi iki düğüm arasında köprü görevi üstlenmektedir ancak artık köprülere gerek yoktur, her düğümün diğerlerine ulaşabilmesi çok kolaydır. Aynı zamanda, her düğüm bir diğer düğüme aracı olmadan ulaşabilmektedir. Bunun en basit gösterimi 3. Ağ örneğinde olduğu gibidir. Ağdaki her düğüm diğer düğümlerle çift yönlü bir ilişkiye sahiptir ve aralarındaki jeodezik uzaklık sadece 1 birimdir. Bu durum, tüm düğümlerin bir başka düğüme ihtiyaç duymadan bağlantı kurmak istedikleri düğüme tek seferde ulaşabileceğini ifade etmektedir. E-posta ağlarında da durum benzerdir. Herkesin birbiriyle yazıştığı durumda önemli düğümün tespit edilmesi mümkün olamamaktadır. Çünkü böyle ağlarda aracıya gerek duyulmadan herkes herkesle iletişime geçebilmektedir. Yine bu yöntemde de ağırlıklı ya da çok kenarlı ağlar ihmal edilmektedir. Bu da yöntemin bu şartlar altında etkili olmadığının ispatıdır.

Arasındalık merkezilik ölçütü ağda birçok bilginin kendisine ulaştığı ve ondan başka düğümlere bilgi aktığı durumlarda söz konusu düğümü önemli olarak görmektedir. Çünkü bu düğüm isterse bu bilgi akışına mani olabilir. Bu durumda iki düğüm arasında konuşulan/iletilen bilgiye de sahiplik söz konusudur. Ancak Şekil 4.6'da verilen örnekteki gibi yönlü ağlarda bir düğümden diğerlerine giden bağlantılar varken ona gelen hiç bağlantı olmayabilir. Şekilden görüleceği üzere d düğümü için böyle bir durum söz konusudur. Arasındalık ölçütüne göre d düğümü önemli bir düğüm değildir. Ancak gerçek dünya örneklerinde böyle bir düğüm, içinde bulunduğu ağ için önemli olabilir. Örnek vermek gerekirse, bu ağ bir işyerindeki e-posta ağı ise d düğümü kendisine bağlı olarak çalışan personellerine bilgi aktaran bir amir olabilir. Böyle bir durumda ağdaki bilgiye hakim amir pozisyonundaki kişi çok önemli bir role sahiptir. Ancak arasındalık ölçütünün merkezilik anlayışına göre bu değerlendirmenin farklı yapıldığı görülmektedir. Bununla birlikte, bu tez ile önerilen göreceli kenar önemliliği metodunun temelinde sadece dinleyici düğümler değil konuşkan düğümlerde önemlidir düşüncesi yatmaktadır.



Şekil 4.6: Arasındalık Merkezilik Ölçütü ile İlgili Bir Ağ Örneği

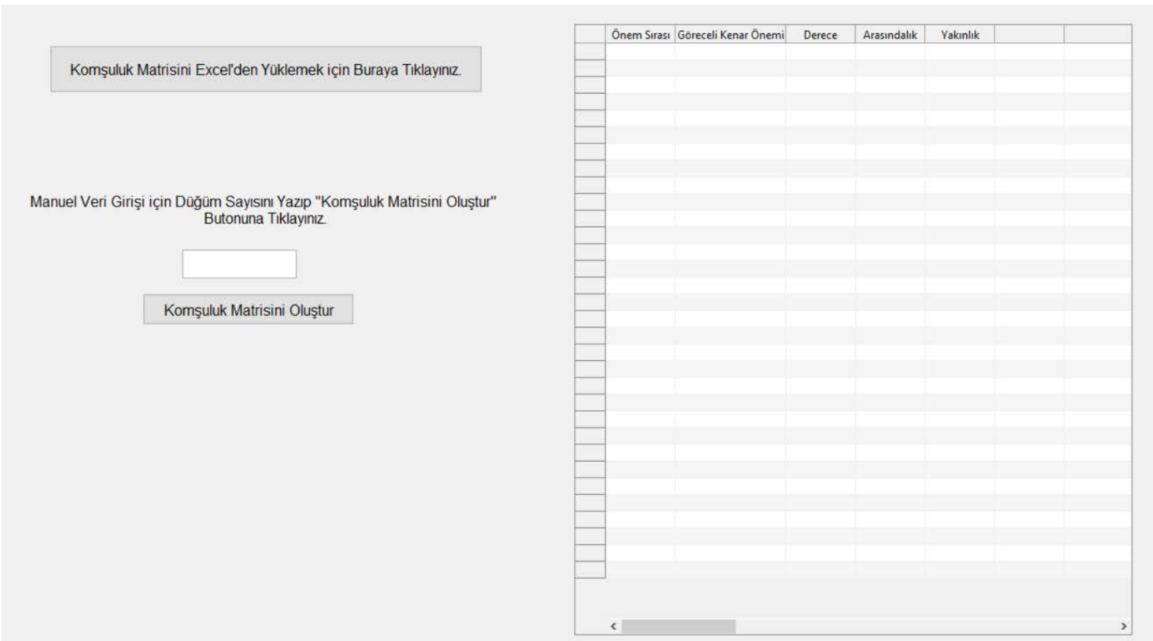
Derece merkeziliğinin hesaplanması diğer ölçütler ve bu tezde önerilen yönteme göre nispeten daha kolaydır. Ancak yine de ağın büyüklüğü arttıkça tüm ölçütlerin hesaplanması için bazı yazılım tabanlı programlara ihtiyaç duyulmaktadır. Yakınlık ve arasındalık yöntemleri tek tek düğümlere odaklanırken önerilen yöntem kenarlara odaklanmaktadır. Bu durumda hesaplanma kolaylıkları arasında pek bir fark yoktur. Göreceli Kenar Önemi Metodunun yönlü ve çok kenarlı her ağda hesaplanabildiği göz önüne alındığında diğer ölçütlere göre oldukça avantajlıdır. Metodun çalışılabilirliğini göstermek amaçlı bir yazılım geliştirme çalışması yapılmış olup Bölüm 5'te ayrıntısı verilmiştir.

5. YAZILIM GELİŞTİRME ÇALIŞMALARI

5.1. BÜYÜK AĞLARDA GÖRECELİ KENAR ÖNEMİ METODUNUN UYGULANMASI

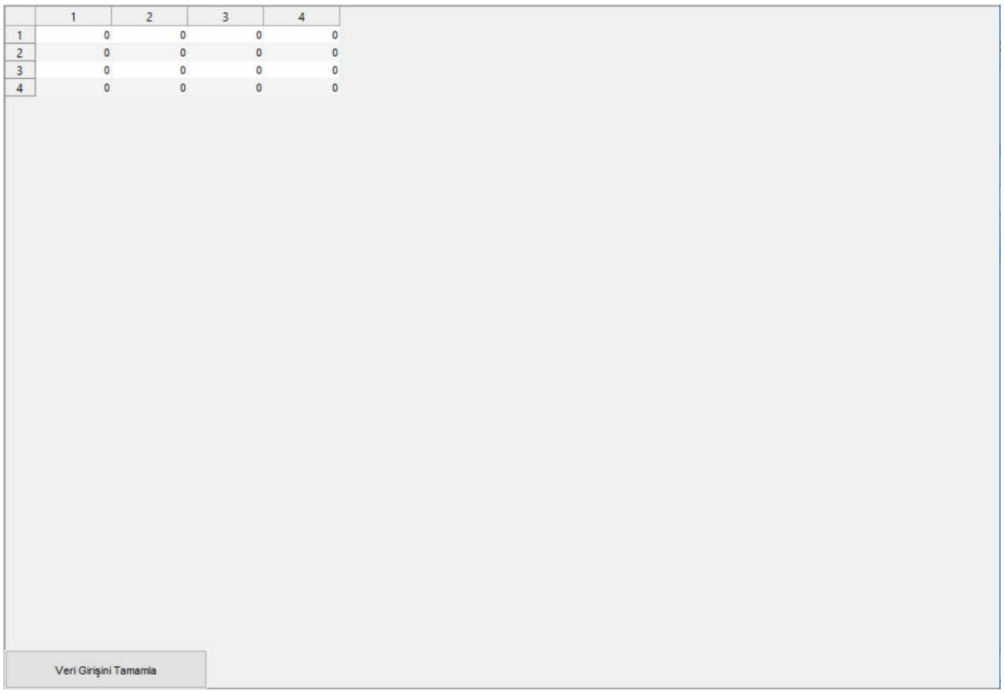
Bu tez kapsamında önerilen ve 4. Bölümde manuel hesap yapılabilecek, nispeten küçük ağlar üzerinde anlatılan Göreceli Kenar Önemi Metodunun büyük ağlarda da aynı performansı sağladığını göstermek amacıyla MATLAB Programında bir yazılım geliştirilmiştir. Bu yazılım ile istenilen büyüklükte bir ağ için giriş yapmaya izin veren bir yapı kurgulanmıştır. Yazılımın kullanımı aşağıdaki şekilde olmaktadır:

- Ağın veri girişine uygun bir şekilde komşuluk matrisi oluşturulur.
- Eğer ağ, küçük (bu göreceli bir ölçüttür, komşuluk matrisini elle girmeyi tercih edebiliyorsanız bu ağ küçük olarak nitelendirilebilir) veya programa manuel matris girişi yapılması tercih ediliyorsa;
  - Program çalıştırıldıktan sonra, matris ekranının istenilen boyutta açılması için Şekil 5.1'de gösterildiği gibi arayüz penceresinde düğüm sayısı girilir.



Şekil 5.1: Veri Girişi için açılan Arayüz Penceresi

  - Açılan boş matrise, tüm değerler tek tek girilip matris doldurulduktan sonra Şekil 5.2'de gösterildiği üzere "Veri Girişini Tamamla" butonuna basılır.

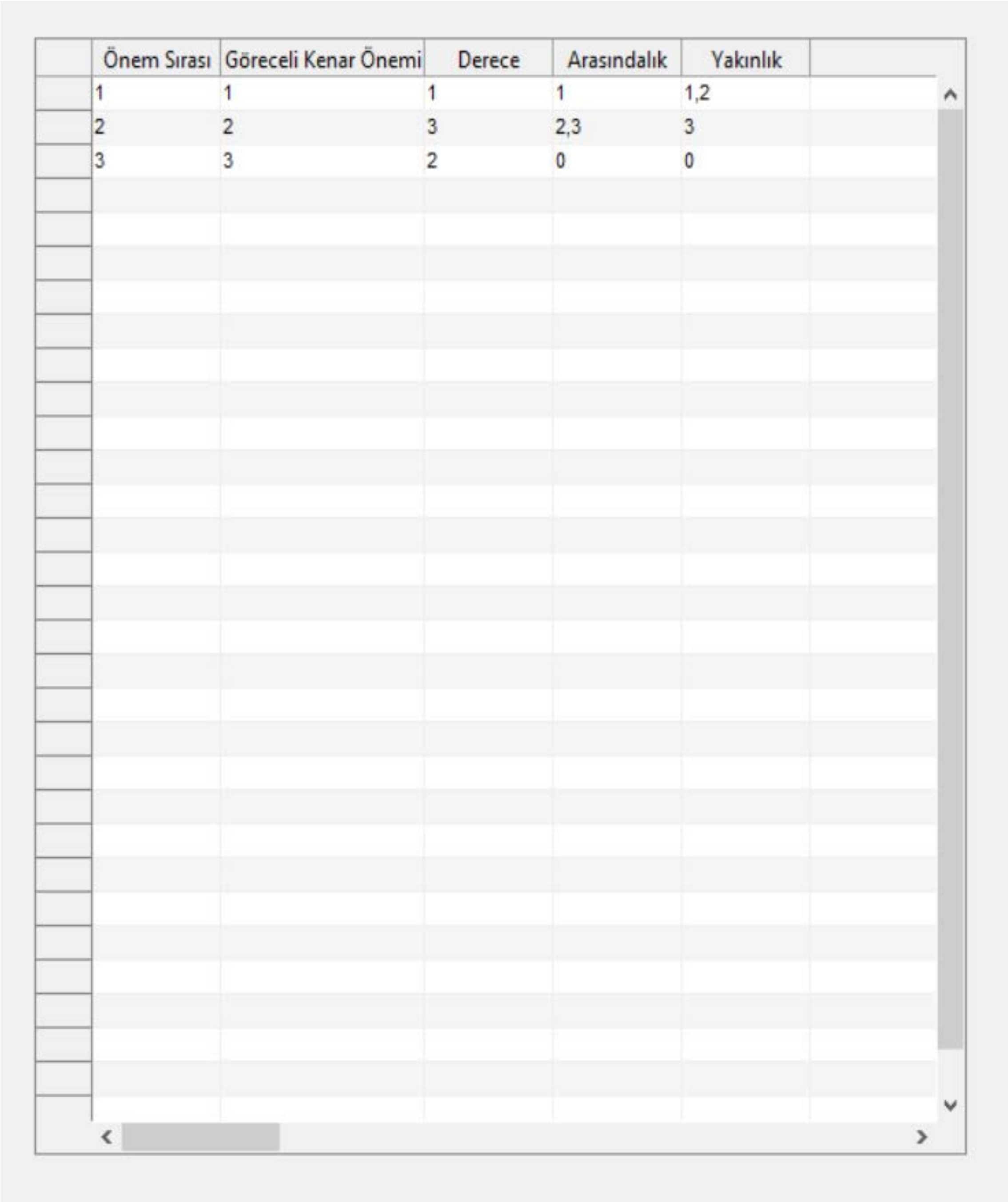


Şekil 5.2: Komşuluk Matrisinin Manuel Giriş Arayüz Penceresi

- Ancak ağ, elle girilemeyecek kadar büyük ise programa bağlı olarak çalışan bir excel dosyasından verilerin çekilmesi suretiyle matris değerleri programa yüklenebilir.
  - Matrisin excelden çekildiği durumlarda ise düğüm sayısını girmeye gerek kalmamaktadır. Şekil 5.1'de"Komşuluk Matrisini Excel'den Yüklemek için Tıklayınız." butonuna basılarak veri girişi sağlanmış olur.

Belirtilen adımlar tamamlandıktan sonra program, hem Göreceli Kenar Metodu hem de derece, yakınlık ve arasındalık gibi diğer ölçütlerin merkezi düğüm sıralarını bir sonuç sayfası olarak sunmaktadır. Bu sayfada tüm metriklerinin sonuçları yan yana sunulmaktadır ancak bunlar arasında bir karşılaştırma yapılmamaktadır. Her biri kendi varsayımı doğrultusunda tespit ettiği merkezi düğümleri göstermektedir.

Bölüm 4'te Örnek Ağlar başlığı altında verilen 3 adet örnek ağ programa yüklenmiş ve sonuçları Şekil 5.3, Şekil 5.4, ve Şekil 5.5'te sunulmuştur.



Önem Sırası	Göreceli Kenar Önemi	Derece	Arasındalık	Yakınlık
1	1	1	1	1,2
2	2	3	2,3	3
3	3	2	0	0

Şekil 5.3: Örnek Ağ 1’e Ait Matlab Sonuçları

Önem Sırası	Göreceli Kenar Önemi	Derece	Arasındalık	Yakınlık
1	2	2	2,4	2,4
2	4	4	1,3	1,3
3	3	3	0	0
4	1	1	0	0

Şekil 5.4: Örnek Ağ 2’ye Ait Matlab Sonuçları

Önem Sırası	Göreceli Kenar Önemi	Derece	Arasındalık	Yakınlık
1	2	2	1,2,3,4	1,2,3,4
2	4	1,4	0	0
3	3	3	0	0
4	1	0	0	0

Şekil 5.5: Örnek Ağ 3'e Ait Matlab Sonuçları

Bu sonuçlardan da görüleceği üzere başta yakınlık ve arasındalık olmak üzere diğer ölçütler etkin bir performans gösterememiştir. Çünkü, verilen ağ örneklerindeki düğümler gerçek dünya örneklerinde olduğu gibi birbirleri ile doğrudan ilişki kurup herhangi bir aracı olmadan bağ kurabilen bir niteliktedir. Durumun böyle olması, yapısı gereği yakınlık ve arasındalık ölçütlerinin geçersiz olmasına sebebiyet vermektedir. Derece metriğinde de durum yakınlık ve arasındalık ölçütlerine benzer olup düğümler arasında bağlantı sayılarının eşit çıkması halinde merkezilik sıralaması yaparken yetersiz kalması şeklinde sonuçlanmıştır. Ağ örnekleri sonuçlarına göre yapılan değerlendirmeler aşağıdaki gibi detaylandırılmıştır:

Örnek Ağ 1 Sonuçlarının Değerlendirilmesi: Sırasıyla 1, 2 ve 3 sayılarına Örnek Ağ 1'deki a, b ve c düğümleri denk gelmektedir. Bu doğrultuda programda da $a > b > c$ sonucunun elde edildiği Şekil 5.3'te verilen sonuç tablosundan görülmektedir.

Bununla birlikte diğer ölçütler üzerinden hesaplanan sonuçlara bakıldığında 4 ölçütün de en merkezi düğüm olarak a düğümünü tespit ettiği ancak arasındalık ve yakınlık ölçütlerinin ikişer düğüm arasında merkezilik sıralaması yapamadığı görülmektedir. Toplamda 3 düğüm arasında 2 düğümün sıralamasının yapılamaması bu tür ağlar için söz konusu ölçütlerin yetersiz kaldığı şeklinde yorumlanmıştır.

Ayrıca bu örnekte derece metriğinin tam bir sıralama yapabildiği ancak en merkezi düğüm dışında b ve c düğümlerinin merkezilik sırasının Göreceli Kenar Önemi Metoduna göre farklılık gösterdiği görülmüştür. Merkezilik ölçütlerinin merkezilik varsayımlarının farklı olması dolayısıyla aynı sonucu vermeleri gerekmediği göz önünde bulundurulmalıdır.

Örnek Ağ 2 Sonuçlarının Değerlendirilmesi: Sırasıyla 1, 2, 3 ve 4 sayılarına Örnek Ağ 2'deki a, b, c ve d düğümleri denk gelmektedir. Bu doğrultuda programda da $b > d > c > a$ sonucunun elde edildiği Şekil 5.4'te verilen sonuç tablosundan görülmektedir.

Bununla birlikte diğer ölçütler üzerinden hesaplanan sonuçlara bakıldığında arasındalık ve yakınlık ölçütlerinin düğümler arasında merkezilik sıralaması yapmada yetersiz kaldığı görülmektedir. Çünkü ağdaki bazı düğümler birbirlerine aynı mesafede ve direk bağlantılıdır. Bu tür durumlarda bu ölçütlerin geçersiz kaldığı 4. Bölümde detaylıca açıklanmıştır. Derece metriğinin ise Göreceli Kenar Önemi metodu gibi düğümler arasında aynı şekilde merkezilik sıralaması yaptığı görülmektedir.

Bu örnekte Göreceli Kenar Önemi Metodunun derece metriği ile aynı sonucu verdiği ve arasındalık ve yakınlık ölçütlerinin merkezi düğümleri tespit etmekte zorlandığı bu tür ağlarda ölçüm yaparak bir alternatif oluşturduğu görülmektedir.

Örnek Ağ 3 Sonuçlarının Değerlendirilmesi: Sırasıyla 1, 2, 3 ve 4 sayılarına Örnek Ağ 3'teki a, b, c ve d düğümleri denk gelmektedir. Bu doğrultuda programda da $b > d > c > a$ sonucunun elde edildiği Şekil 5.5'te verilen sonuç tablosundan görülmektedir. Bununla birlikte diğer ölçütler üzerinden hesaplanan sonuçlara bakıldığında arasındalık ve yakınlık ölçütlerinin hiçbir düğüm arasında merkezilik sıralaması yapamadığı görülmektedir. Bu durumun ağdaki düğüm ilişkilerine bakılınca normal olduğu görülmektedir. Çünkü ağdaki tüm düğümler birbirlerine aynı mesafede ve direk bağlanmaktadır. Böyle durumlarda iki metriğin de geçersiz kaldığı 4. Bölümde detaylıca açıklanmıştır.

Derece metriğinin de Göreceli Kenar Önemi Metodunun tam sıralama yaptığı bu örnekte iki düğüm arasında sıralama yapamadığı görülmektedir. Çünkü bu örnekte a ve d düğümlerinin bağlantı sayıları birbirine eşittir. Bu tür durumlarda derece metriğinin yetersiz kaldığı 4. Bölümde detaylıca açıklanmıştır.

Bu örnekte karşılaştırma yapılan diğer 3 merkezilik ölçütüne oranla Göreceli Kenar Önemi Metodunun üstünlükleri ortaya konulmuştur.

Sonuç olarak; Bölüm 4'te verilen örnekler, geliştirilen yazılım ile de doğrulanmış olup diğer ölçütlerden daha etkili bir merkezi düğüm tespiti yapılabildiği gösterilmiştir. Bu çalışma sayesinde yazılımın da manuel yapılan hesaplarla uyumlu sonuçlar vermesi ile doğru çalıştığı kanıtlanmıştır.

5.2. FREEMAN'IN EIES VERİ SETİ KULLANILARAK GÖRECELİ KENAR ÖNEMİ METODUNUN UYGULANMASI

Göreceli Kenar Önemi Metodunun etkinliğini göstermek için literatürde bilinen ve yaygın olarak kullanılan bir ağ veri seti olan, Freeman'ın EIES veri seti kullanılmıştır. Daha önce Wasserman ve Faust (1994) ve Opsahl ve Panzarasa (2009) tarafından da incelenen bu ağ bir elektronik bilgi alışveriş sistemine aittir. E-posta iletişiminin öncüsü olan bu sistem 48 akademisyen arasındaki iletişimleri göstermektedir. 1978'de toplanan bu iletişim verileri sosyal ağ analizi üzerinde çalışan araştırmacılar için üç farklı ağ ilişkisi içermektedir. İlk iki ağ, araştırmacıların araştırmanın başında ve sonunda aralarındaki ilişkileri gösterirken, üçüncü ağ, isimleri Çizelge 5.1'de verilen 32 araştırmacının arasındaki bir elektronik iletişim aracı üzerinde alınan ve gönderilen mesajların sayısını göstermektedir. Söz konu mesajlaşma matrisi Şekil 5.6'da verilmiştir. Bu mesaj matrisi geliştirilen yazılıma bağlı olarak çalışan bir excel dosyasına aktarılmış ve programa yüklenmiştir.

Orijinal verilerde asal köşegen üzerindeki hücrelerde de değer olduğu görülmüştür. Ancak bu değerler (kişilerin kendilerine attıkları mesajlar) ihmal edilmiş olup Şekil 5.6'da görüleceği üzere 0 olarak alınmıştır.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**	**32**
1	0	488	28	65	20	65	45	346	82	52	177	28	24	49	81	77	77	73	33	31	22	46	31	128	38	89	95	25	388	71	212	185
2	364	0	17	17	15	0	30	20	35	20	22	15	15	15	15	50	25	8	0	15	15	15	15	0	15	15	10	24	89	23	163	39
3	4	5	0	0	0	0	0	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	52	30	0	0	0	2	0	32	21	34	9	0	0	0	0	5	4	2	35	0	0	0	0	12	0	0	12	5	20	4	19	33
5	26	4	4	4	0	4	8	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	0	4	8	4	14	4	0	4	0	4	7	4	4
6	72	23	0	2	0	0	0	16	0	7	15	0	0	0	8	7	6	0	0	0	0	0	0	14	0	0	7	3	34	3	22	0
7	14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0
8	239	82	5	37	3	34	5	0	12	18	164	18	0	0	0	30	53	27	20	4	0	5	4	55	0	9	34	0	146	216	88	288
9	24	25	0	2	0	0	0	8	0	0	15	0	10	0	0	0	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	15	0	10	0	30	44
10	43	15	0	32	0	12	0	14	0	0	25	2	0	0	0	10	10	0	20	15	0	5	20	29	0	4	10	0	47	6	22	19
11	178	36	0	11	0	19	10	172	39	28	0	0	4	0	0	23	15	24	0	0	8	0	0	29	10	11	22	0	46	0	119	34
12	0	5	0	0	0	0	0	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	53	0	5	9
13	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	0
14	12	0	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12	0	0	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	35	0	8	0
15	120	0	0	0	0	4	0	0	0	0	0	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8	0	58	0	32	0
16	58	25	0	10	0	0	0	20	0	5	10	0	0	5	0	0	10	0	0	0	5	0	0	5	0	0	0	0	35	0	10	0
17	63	18	9	7	0	6	0	36	0	5	9	5	0	5	0	5	0	0	0	5	2	0	0	0	0	0	15	0	10	9	15	9
18	58	8	5	4	0	0	0	4	0	5	18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20	0	8	10	48	0
19	5	5	0	25	0	0	0	10	0	0	0	0	0	5	0	0	0	0	0	0	0	0	5	0	0	0	0	0	0	0	10	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0
21	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	0	0	0
22	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	40	0	0	0	0	15	0	0	5
23	5	5	5	0	0	0	0	0	0	19	0	0	0	0	0	0	0	0	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	14	0	5	0
24	89	17	4	14	14	18	8	41	4	19	31	4	4	9	4	14	4	9	4	4	4	58	4	0	18	14	9	4	156	4	56	10
25	32	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	15	0	0	0	0	0	0	0	10	0	23	0	0	0	0	0	9	15	0
26	35	5	0	0	0	0	0	0	0	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	0	13	0
27	50	28	0	13	0	0	0	19	29	5	8	0	33	0	4	0	10	15	0	0	0	0	0	10	0	0	0	3	32	0	13	33
28	9	6	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6
29	559	132	5	24	21	29	0	155	15	98	69	89	37	76	80	63	15	4	9	18	43	108	29	218	0	15	66	0	0	14	91	126
30	39	21	0	6	3	3	0	140	0	7	0	2	0	0	0	0	9	5	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	18	0	20	8
31	82	125	10	22	10	15	18	70	35	23	114	20	16	15	24	30	28	49	30	5	5	15	8	53	25	8	21	8	65	28	0	67
32	239	99	0	27	3	0	0	268	101	18	35	4	0	0	0	0	7	0	0	0	0	14	0	5	0	0	50	6	71	7	107	0

Şekil 5.6: Freeman'ın EIES Veri Seti

Çizelge 5.1: Akademisyen isimleri ve bu isimlere denk gelen sıra numaraları

Sıra Numarası	**Akademisyen İsimleri**
1	Lin Freeman
2	Doug White
3	Ev Rogers
4	Richard Alba
5	Phipps Arabie
6	Carol Barner-Barry
7	Gary Coombs
8	Russ Bernard
9	John Boyd
10	Ron Burt
11	Pat Doreian
12	Claude Fischer
13	Brian Foster
14	Mark Granovetter
15	Maureen Hallinan
16	Paul Holland
17	Jack Hunter
18	Davor Jedlicka
19	Charles Kadushin
20	Ed Laumann
21	Sam Leinhardt
22	Joel Levine
23	Nan Lin
24	Nick Mullins
25	Don Ploch
26	Nick Poushinsky
27	Steve Seidman
28	John Sonquist
29	Barry Wellman
30	Al Wolfe
31	Sue Freeman
32	Lee Sailer

Bu çalışmanın sonuçları Şekil 5.7'de sunulmuştur.

Önem Sırası	Göreceli Kenar Önemi	Derece	Arasındalık	Yakınlık
1	1	1	1	1,24,31
2	2	29	31	2,5,29
3	29	8	29	8
4	31	32	2	10,11
5	24	2	8	4,17
6	8	31	24	32
7	11	11	11	27
8	10	24	10	6
9	32	10	32	30
10	27	27	4	16
11	4	30	27	9,18
12	17	4	6	19,23,25
13	30	15	17	12,14,15
14	5	9	16	26
15	16	16	5	21,22,28
16	15	6	30	3,13
17	14	17	21	7
18	19	18	19	20
19	18	22	14	0
20	9	12	12	0
21	6	14	18	0
22	22	19	23	0
23	3	5	3	0
24	12	25	25	0
25	21	26	22	0
26	26	23	15	0
27	25	13	9	0
28	23	7	28	0
29	20	21	20	0
30	28	3	7,13,26	0
31	7	28	0	0
32	13	20	0	0

Şekil 5.7: Freeman'ın EIES Veri Setine Ait Matlab Sonuçları

Hem Göreceli Kenar Metodu hem de derece, yakınlık ve arasındalık gibi diğer ölçütlerin merkezi düğüm sıralarını sunan bu sonuç sayfasından görüleceği üzere tüm ölçütler en merkezi düğüm olarak “1” no.lu düğümü tespit etmişlerdir. Ancak yakınlık merkeziliği için daha ilk sıradan 1, 24 ve 31 no.lu düğümler ile başlayıp aşağılara inildikçe farklı düğümler arasında da sıralama yapılamayan durumlar olduğu görülmektedir. Benzer durumun arasındalık ölçütü için de 7, 13 ve 26 no.lu düğümler arasında sıralama yapılamaması ile yaşandığı aşikardır. Zaten sıralamanın genel olarak incelenmesi ile önerilen göreceli kenar önemi metodu ve derece merkezilik ölçütüne göre yakınlık ve arasındalık merkezilik ölçütlerinin çok farklı bir sıralamaya sahip olduğu görülmektedir. Bu durum, aslında tüm ölçütlerin merkezilik anlayışlarının farklı olması dolayısıyla beklenen bir durumdur ve 4 ölçütün de bir arada yorumlanmaması gerektiğinin belirgin bir örneğidir. Bu nedenle göreceli kenar önemi metodunun nispeten benzerlik gösterdiği derece metodu ile karşılaştırılması daha uygun bulunmuştur. Bu örnekte derece merkeziliği de tam bir sıralama yapabilmiş ancak göreceli kenar önemi metodu ile merkezi düğüm sırasında farklılıklar yaratmıştır. Aslında ilk 5 üzerinden bir değerlendirme yapıldığında 3 düğümün (1, 2 ve 29 no.lu düğümler) her iki ölçüt için de ilk 5'te olduğu görülmektedir. Bu değerlendirme sonucunda yalnızca 5 düğüm üzerinden %60 uyum olduğu söylenebilir. "Hangisi daha doğru?" sorusu düşünüldüğünde ise derece merkezilik ölçütünün yerel olarak hesaplandığı göz önünde bulundurulmalıdır. Bu bakış açısıyla aslında derece merkeziliğinin ağın tamamına hakimiyet kuramadığı için doğruluk payının daha az olduğu değerlendirilmektedir. Sonuç olarak; bu tez çalışması kapsamında önerilen Göreceli Kenar Önemi Metodunun diğer ölçütlerin etkili çalışmadığı durumlarda, ağdaki tüm kenarların ikili karşılaştırmalarının yapılması dolayısıyla ağın tamamına ilişkin değerlendirme sağlayarak etkin bir merkezilik ölçümü yapabilmektedir.

Tüm düğümlerin tam olarak sıralanmasının önemi göreceli olarak değişir. Kimi görüşe göre bir ağdaki tüm düğümlerin tam bir sıraya sokulması o kadar kritik olmayabilir. Ancak kimi görüşe göre de sıralamanın yapılması özellikle gıda ve sağlık gibi çalışma alanlarında çok kritik olabilir. Her halükarda yani ister sadece en merkezi düğümün bulunması istensin ister tam bir sıralama yapılması istensin başarı sağlandığı için burada genel bir avantaj söz konusudur. Bu avantajı incelenen örneklerde yakalayan bir ölçüt olarak Göreceli Kenar Önemi Metodu, merkezilik ölçütü anlayışına önemli bir özelliğin kazandırılabileceğinin bir göstergesidir. Elbette bu durum yeterli veri ışığında başka bir ifadeyle çeşitli boyutlardaki çok sayıda ağ örneği ile doğrulanmalıdır. Bundan sonra yapılacak olan çalışmalarda, tez kapsamında önerilen yeni merkezilik ölçütünün sıralama yeteneği ile ilgili araştırmaların yapılması merkezilik kavramı için ihtiyaç duyulan her alanda kullanılabilecek faydalı bir özellik kazandıracaktır.

6. SONUÇLAR VE GELECEK ÇALIŞMALAR

Literatürde çok farklı disiplinlerin çalışma alanlarında graf teorisinden yararlanılmıştır. Biyolojiden elektrik-elektroniğe, endüstriden bilgisayar bilimlerine kadar birçok farklı alanda kullanılan graf teorisi temelde bir problemin kenar ve düğümler ile modellenmesi ve bu modelin bir grafik ile gösterilmesi ilkesine dayanmaktadır. Graf teorisinde tanımlı olan bazı özellikler bu modelin çözümüne ve dolayısıyla gerçek problemin çözümüne yardımcı olmaktadırlar. Bu amaçla, graf teorisinden yararlanmak için öncelikle gerçek bir problem graf olarak modellenir, bu model analiz edilir, çözülür ve daha sonra gerçek dünyaya uygulanır.

Düğüm ve kenarlardan oluşan bir ağ yapısı analiz edilmek istendiğinde odaklanılan noktalar çoğunlukla düğümlerin ve kenarların sayısı, türü, niteliği, konumu, etkileşimleri vb.dir. Temel faktör düğüm ve düğümler arası bağlantılar olduğu için ağa en hakim, etkileşim düzeyi en yüksek düğümleri bulmak önemli bir adımdır. Bu adımı yerine getirmek için literatürde merkezilik ölçütleri kullanılmaktadır. En yaygın ve etkin olarak bilinen merkezilik ölçütleri derece, yakınlık ve arasındalık merkeziliğidir. Bu ölçütlerin hepsinin varsayımı birbirinden farklıdır ancak amaçları kendi varsayımları doğrultusunda ağdaki en merkezi düğümleri tespit edebilmektir. Amaçları dışındaki en önemli ortak noktaları ise hepsinin düğüm odaklı çalışmasıdır. Başka bir ifadeyle, bu ölçütlerin oluşumlarının altında yatan temel faktör düğümlerin analiz edilmesidir. Bu tez çalışmasında da bir ağın iki temel faktöründen diğeri olan kenarlar üzerine odaklanılmış ve bu doğrultuda da yeni bir merkezilik ölçütü geliştirilmiştir. Bu yöntem “Göreceli Kenar Önemi Metodu” olarak adlandırılmış olup temelde her bir kenarın bağladığı iki düğüm için farklı oranda önemli olduğu esasına dayanmaktadır. Söz konusu bu göreceli önem düğümlerin merkezilikleri ile doğrudan ilişkilidir.

Tez çalışmasında Göreceli Kenar Önemi Metodunun, derece, yakınlık ve arasındalık gibi diğer merkezilik ölçütleriyle karşılaştırılması yapılmış olup çeşitli ağ örnekleri ile elde edilen sonuçlar gözler önüne serilmiştir. Bu çalışmada özellikle gerçek dünya verilerinde olduğu gibi yönlü ve çok kenarlı ağ tipleri üzerine yoğunlaşılmış ve bu tür ağlarda diğer ölçütlerin etkin bir şekilde çalışmazken önerilen yöntemin başarılı bir şekilde çalıştığı gösterilmiştir. Diğer ölçütlerin bu tür örneklerde yetersiz kalmış olması ile de ağ merkezilik ölçütlerine yapılan çalışma sayesinde gerçekçilik kazandırılmıştır.

Önerilen yöntemin sadece incelenen örneklerdeki gibi küçük ağlarda değil büyük ağlarda da etkin bir şekilde uygulanabilir olduğunu göstermek amacıyla bir yazılım çalışması gerçekleştirilmiştir. Bu çalışma ile veri girişi sağlanan MATLAB Programında hem önerilen Göreceli Kenar Önemi Metodu hem de derece, yakınlık ve arasındalık ölçütlerinin merkezi düğümleri tespit edebilme performansları değerlendirilmiştir. Örnek olarak hem 4. Bölümde hesaplanmış olan ağlar hem de literatürde Freeman's EIES Data Set olarak bilinen ve akademisyenler arasındaki elektronik bilgi alışverişi verilerinden oluşan gerçek bir mesajlaşma ağı kullanılmıştır. Bu örnekler ile tez çalışması kapsamında önerilen yeni merkezilik ölçütü hem geçerli kılınmış hem de diğer ölçütlere olan farklılıkları gözler önüne serilmiştir. Ayrıca, bu yazılım ile arasındalık ve yakınlık ölçütlerinin merkezilik anlayışlarının farklı olmasının çıkan sonuçlara nasıl yansıdığı gözlemlenmiş ve diğer ölçütlerin çoğunlukla yapmada başarısız oldukları, düğümler arasında sıralama yapabilmenin önemi ayrıca tartışılmıştır.

Bu tez çalışmasında önerilen Göreceli Kenar Önemi Metodu ile diğer ölçütlerin merkezilik anlayışlarından dolayı yetersiz kaldığı ağ tipleri için farklı bir bakış açısıyla bir çözüm sunulmaya çalışılmıştır. Bununla birlikte bir ağdaki sadece en merkezi düğümün değil diğer düğümlerin de merkeziliklerine göre sıraya sokulabilmesinin mümkün olabileceği fikri elde edilmiştir. Bu fikrin geliştirilmesi ile birlikte gelecek çalışmalarda ağ merkeziliği için bir ağdaki pasif elemanların tespit edilmesi ve gerekiyorsa uzaklaştırılması ya da bir ağın belli aralıklar ile farklı zamanlarda incelenmesi ve ağdaki her bir düğümün kullanım/faydalanma oranının zamanla uğradığı değişikliklerin izlenmesi, dolayısıyla da ağlarda herhangi bir anomali olması halinde tespit edilmesi mümkün olabilecektir. Ağdaki tüm düğümlerin merkeziliklerine göre sıralanması konusu daha detaylı incelenmesi ve çok sayıda farklı boyuttaki ağlar için doğrulamasının yapılması gereken bir konudur. Ağ merkeziliği konusunda bundan sonra yapılacak çalışmalarda bu amaç doğrultusunda ilerlenebilir ve özellikle sağlık, gıda ve askeri gibi ihtiyaç duyulan kritik alanlarda karşılaşılan ağlarda bu özelliğin geliştirilmesi ile beraber daha yararlı sonuçlar elde edilebilir.

Ayrıca önerilen merkezilik ölçütünün her ağ modeline uygulanmadığı, tez kapsamında da yönlü ve çoklu kenarlı ağlar ile izole düğüme sahip olmayan ağlar ile ilgilenildiği vurgulanmıştır. Çok farklı boyutlarda ve şekillerde karşımıza çıkabilecek ağlar olduğu düşünüldüğünde, önerilen metodun söz konusu şartları sağladığı halde yine de çalışmakta zorlanacağı ağlar olabileceği göz önünde bulundurulmalıdır. Yapılan çalışmada günümüz şartlarında karşılaşılan ağ modellerinde merkezilik kavramının geliştirilmesi amaçlanmıştır. Bu nedenle yeni bir metot geliştirilmiş olup bu metodun iyileştirmeye açık alanlarının ve kapsamının genişletilmesi bundan sonraki çalışmalarda odak noktamız olacaktır.

KAYNAKLAR

[1] Ahn, W. K., Kim, N. S., Lassaline, M. E., & Dennis, M. J. (2000). Causal status as a determinant of feature centrality. Cognitive Psychology, 41(4), 361-416.

[2] Alba, R. D. (1973). A graph-theoretic definition of a sociometric clique. Journal of Mathematical Sociology, 3(1), 113-126.

[3] Albert, R.,& Barabási, A. L. (2002). Statistical mechanics of complex networks. Reviews of modern physics, 74(1), 47.

[4] Altberg, E., Faber, S., Hirson, R., & Van der Linden, S. (2017). *U.S. Patent No. 9,787,728*. Washington, DC: U.S. Patent and Trademark Office.

[5] Balakrishnan, V. K. (1997). Graph theory (Vol. 1). New York: McGraw-Hill.

[6] Barnett, J. H. (2005). Early writings on graph theory: Euler circuits and the Königsberg bridge problem.

[7] Barrat, A., Barthelemy, M., Pastor-Satorras, R., & Vespignani, A. (2004). The architecture of complex weighted networks. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 101(11), 3747-3752.

[8] Barson, P., Field, S., Davey, N., McAskie, G., & Frank, R. (1996). The detection of fraud in mobile phone networks. *Neural Network World*, 6(4), 477-484.

[9] Bavelas, A. (1948). A mathematical model for group structures. Human organization, 7(3), 16-30.

[10] Bavelas, A. (1950). Communication patterns in task-oriented groups. The Journal of the Acoustical Society of America, 22(6), 725-730.

[11] Beauchamp, M. A. (1965). An improved index of centrality. Systems Research and Behavioral Science, 10(2), 161-163.

[12] Biggs, N. (1993). Algebraic graph theory. Cambridge university press.

[13] Bolland, J. M. (1988). Sorting out centrality: An analysis of the performance of four centrality models in real and simulated networks. Social networks, 10(3), 233-253.

[14] Bollobás, B. (2013). Modern graph theory (Vol. 184). Springer Science & Business Media.

[15] Bonacich, P. (1972). Factoring and weighting approaches to status scores and clique identification. Journal of Mathematical Sociology, 2(1), 113-120.

[16] Bonacich, P. (2007). Some unique properties of eigenvector centrality. Social networks, 29(4), 555-564.

[17] Bondy, J. A.,& Murty, U. S. R. (1976). Graph theory with applications (Vol. 290). London: Macmillan.

[18] Borgatti, S. P. (2005). Centrality and network flow. Social networks, 27(1), 55-71.

[19] Borgatti, S. P.,& Everett, M. G. (2006). A graph-theoretic perspective on centrality. Social networks, 28(4), 466-484.

[20] Brandes, U. (2005). Network analysis: methodological foundations (Vol. 3418). Springer Science & Business Media.

[21] Coscia, M., Giannotti, F., & Pedreschi, D. (2011). A classification for community discovery methods in complex networks. Statistical Analysis and Data Mining: The ASA Data Science Journal, 4(5), 512-546.

[22] Danon, L., Diaz-Guilera, A., Duch, J., & Arenas, A. (2005). Comparing community structure identification. Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment, 2005(09), P09008.

[23] Degenne, A.,& Forsé, M. (1999). Introducing social networks. Sage

[24] Dorogovtsev, S. N., Mendes, J. F., & Samukhin, A. N. (2001). Size-dependent degree distribution of a scale-free growing network. Physical Review E, 63(6), 062101.

[25] Faust, K. (1997). Centrality in affiliation networks. Social networks, 19(2), 157-191.

[26] Fortunato, S. (2010). Community detection in graphs. Physics reports, 486(3), 75-174.

[27] Freeman, L. (2004). The development of social network analysis. A Study in the Sociology of Science, 1.

[28] Freeman, L. C. (1979). Centrality in social networks conceptual clarification. Social networks, 1(3), 215-239.

[29] Gabow, H. N., Galil, Z., Spencer, T., & Tarjan, R. E. (1986). Efficient algorithms for finding minimum spanning trees in undirected and directed graphs. Combinatorica, 6(2), 109-122.

[30] Golumbic, M. C. (2004). Algorithmic graph theory and perfect graphs (Vol. 57). Elsevier.

[31] Gomez, D., González-Arangüena, E., Manuel, C., Owen, G., del Pozo, M., & Tejada, J. (2003). Centrality and power in social networks: a game theoretic approach. Mathematical Social Sciences, 46(1), 27-54.

[32] Gross, J. L.,& Yellen, J. (2005). Graph theory and its applications. CRC press.
[33] Gross, J. L.,& Yellen, J. (Eds.). (2004). Handbook of graph theory. CRC press.
[34] Hage, P.,& Harary, F. (1983). Structural Models in Anthropology.
[35] Hakimi, S. L. (1965). Optimum distribution of switching centers in a communication network and some related graph theoretic problems. Operations Research, 13(3), 462-475.
[36] https://tr.wikipedia.org/wiki/PageRank
[37] https://www.stats.ox.ac.uk/~snijders/siena/EIES_data.htm
[38] Jackson, M. O. (2010). Social and economic networks. Princeton university press.
[39] Jeong, H., Mason, S. P., Barabási, A. L., & Oltvai, Z. N. (2001). Lethality and centrality in protein networks. Nature, 411(6833), 41-42.
[40] Katz, N., Lazer, D., Arrow, H., & Contractor, N. (2004). Network theory and small groups. Small group research, 35(3), 307-332.
[41] Koschützki, D., Lehmann, K. A., Peeters, L., Richter, S., Tenfelde-Podehl, D., & Zlotowski, O. (2005). Centrality indices. In Network analysis (pp. 16-61). Springer Berlin Heidelberg.
[42] Krebs, V. E. (2002). Mapping networks of terrorist cells. *Connections*, 24(3), 43-52.
[43] KRNC, M. Centrality Measures of Large Networks.
[44] Lancichinetti, A.,& Fortunato, S. (2009). Community detection algorithms: a comparative analysis. Physical review E, 80(5), 056117.
[45] Lee, C. Y. (2006). Correlations among centrality measures in complex networks. arXiv preprint physics/0605220.
[46] Loosemore, M. (1998). The influence of communication structure upon management efficiency. Construction Management & Economics, 16(6), 661-671.
[47] Lorenzen, M.,& Andersen, K. V. (2009). Centrality and creativity: does Richard Florida's creative class offer new insights into urban hierarchy?. Economic Geography, 85(4), 363-390.
[48] Macchion, L., Moretto, A., Caniato, F., Caridi, M., Danese, P., & Vinelli, A. (2015). Production and supply network strategies within the fashion industry. *International Journal of Production Economics*, 163, 173-188.

[49] McCulloh, I. (2009). Detecting changes in a dynamic social network (Doctoral dissertation, Carnegie Mellon University).

[50] Musiał, K., Kazienko, P., & Bródka, P. (2009, June). User position measures in social networks. In Proceedings of the 3rd Workshop on Social Network Mining and Analysis (p. 6). ACM.

[51] Newman, M. E. (2001). Scientific collaboration networks. II. Shortest paths, weighted networks, and centrality. Physical review E, 64(1), 016132.

[52] Newman, M. E. (2004). Analysis of weighted networks. Physical review E, 70(5), 056131.

[53] Newman, M. E. (2008). The mathematics of networks. The new palgrave encyclopedia of economics, 2(2008), 1-12.

[54] Ni, C., Sugimoto, C., & Jiang, J. (2011). Degree, Closeness, and Betweenness: Application of group centrality measurements to explore macro-disciplinary evolution diachronically. In Proceedings of ISSI (pp. 1-13).

[55] Opsahl, T.,& Panzarasa, P. (2009). Clustering in weighted networks. Social networks, 31(2), 155-163.

[56] Opsahl, T., Agneessens, F., & Skvoretz, J. (2010). Node centrality in weighted networks: Generalizing degree and shortest paths. Social networks, 32(3), 245-251.

[57] Porter, M. A., Onnela, J. P., & Mucha, P. J. (2009). Communities in networks. Notices of the AMS, 56(9), 1082-1097.

[58] Proctor, C. H.,& Loomis, C. P. (1951). Analysis of sociometric data. Research methods in social relations, 2, 561-85.

[59] Rothenberg, R. B., Potterat, J. J., Woodhouse, D. E., Darrow, W. W., Muth, S. Q., & Klovdahl, A. S. (1995). Choosing a centrality measure: epidemiologic correlates in the Colorado Springs study of social networks. Social Networks, 17(3-4), 273-297.

[60] Ruhnau, B. (2000). Eigenvector-centrality—a node-centrality?. Social networks, 22(4), 357-365.

[61] Sabidussi, G. (1966). The centrality index of a graph. Psychoölçüta, 31(4), 581-603.

[62] Seeley, J. R. (1949). The net of reciprocal influence. a problem in treating sociometric data. Canadian Journal of Experimental Psychology, 3, 234.

[63] Stephenson, K.,& Zelen, M. (1989). Rethinking centrality: Methods and examples. Social networks, 11(1), 1-37.

[64] Then, M., Günnemann, S., Kemper, A., & Neumann, T. (2017). Efficient batched distance and centrality computation in unweighted and weighted graphs. Datenbanksysteme für Business, Technologie und Web (BTW 2017).

[65] Valente, T. W., Coronges, K., Lakon, C., & Costenbader, E. (2008). How correlated are network centrality measures?. Connections (Toronto, Ont.), 28(1), 16.

[66] Vasudev, C. (2006). Graph theory with applications. New Age International.

[67] Wang, S., Du, Y., & Deng, Y. (2017). A new measure of identifying influential nodes: Efficiency centrality. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 47, 151-163.

[68] Wasserman, S.,& Faust, K. (1994). Social network analysis: Methods and applications (Vol. 8). Cambridge university press.

[69] West, D. B. (2001). Introduction to graph theory (Vol. 2). Upper Saddle River: Prentice hall.

[70] Zweig, K. A. (2016). Graph Theory, Social Network Analysis, and Network Science. In Network Analysis Literacy (pp. 23-55). Springer Vienna.

ÖZGEÇMİŞ

Kimlik Bilgileri

Adı Soyadı : Ceren SALMAN

Doğum Yeri : Bitlis

Medeni Hali : Bekar

E-Posta : csalman@aselsan.com.tr

Adresi : Demetevler Mahallesi, Sami Efendi Caddesi, İhlas Sitesi No:33/38 Demetevler/ANKARA

Eğitim

Lisans : Gazi Üniversitesi Elektrik-Elektronik Mühendisliği
Gazi Üniversitesi Endüstri Mühendisliği

Yüksek Lisans : Hacettepe Üniversitesi Endüstri Mühendisliği

Doktora : -

Yabancı Dil ve Düzeyi

İngilizce, Advanced

İş Deneyimi

2014 - … : ASELSAN Elektronik San. ve Tic. A.Ş. – Ankara

Deneyim Alanları

Kalite Yönetim Sistemleri, Üretim Kalite Süreçleri

Tezden Üretilmiş Projeler ve Bütçesi : -

Tezden Üretilmiş Yayınlar : -

Tezden Üretilmiş Tebliğ ve/veya Poster Sunumu İle Katıldığı Toplantılar : -

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS/DOKTORA TEZ ÇALIŞMASI ORJİNALLİK RAPORU

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
ENDÜSTRİ MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI BAŞKANLIĞI'NA

Tarih:27/02/2018

Tez Başlığı / Konusu: Yeni Bir Ağ Merkezilik Ölçütü: Göreceli Kenar Önemi Metodu

Yukarıda başlığı/konusu gösterilen tez çalışmamın a) Kapak sayfası, b) Giriş, c) Ana bölümler d) Sonuç kısımlarından oluşan toplam ..77.. sayfalık kısmına ilişkin, 27../02../2018 tarihinde ~~şahsım~~/tez danışmanım tarafından *Turnitin* adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % .9.. 'tür.

Uygulanan filtrelemeler:

1- Kaynakça hariç
2- Alıntılar ~~hariç~~/dâhil
3- 5 kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Çalışması Orjinallik Raporu Alınması ve Kullanılması Uygulama Esasları'nı inceledim ve bu Uygulama Esasları'nda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

Tarih ve İmza
27.02.2018

Adı Soyadı:	Ceren SALMAN
Öğrenci No:	N16120986
Anabilim Dalı:	Endüstri Mühendisliği
Programı:	Lisansüstü
Statüsü:	☑ Y.Lisans ☐ Doktora ☐ Bütünleşik Dr.

DANIŞMAN ONAYI

UYGUNDUR.

Prof. Dr. Murat Caner TESTİK