

**GENELLEŞTİRİLMİŞ OLASILIK DAĞILIMLARI ÜZERİNE
BİR ÇALIŞMA**

**A STUDY ON THE GENERALIZED PROBABILITY
DISTRIBUTIONS**

SELEN ÇAKMAKYAPAN

DOÇ. DR. GAMZE ÖZEL KADILAR
Tez Danışmanı

Hacettepe Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin
İstatistik Anabilim Dalı için Öngördüğü
DOKTORA TEZİ olarak hazırlanmıştır.

2017

SELEN ÇAKMAKYAPAN'ın hazırladığı "Genelleştirilmiş Dağılımlar Üzerine Bir Çalışma" adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından İSTATİSTİK ANABİLİM DALI'nda DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Hüseyin TATLIDİL

Başkan

Doç. Dr. Gamze ÖZEL KADILAR

Danışman

Doç. Dr. Nihal ATA TUTKUN

Üye

Doç. Dr. Atilla GÖKTAŞ

Üye

Yrd. Doç. Dr. Nevin GÜLER DİNCER

Üye

Bu tez Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından DOKTORA TEZİ olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. Menemşe GÜMÜŞDERELİOĞLU

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

YAYINLAMA VE FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI BEYANI

Enstitü tarafından onaylanan lisansüstü tezimin/raporumun tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı (kağıt) ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda verilen koşullarla kullanıma açma iznini Hacettepe üniversitesine verdiğimi bildiririm. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet haklarım bende kalacak, tezimin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanım hakları bana ait olacaktır.

Tezin kendi orijinal çalışmam olduğunu, başkalarının haklarını ihlal etmediğimi ve tezimin tek yetkili sahibi olduğumu beyan ve taahhüt ederim. Tezimde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanması zorunlu metinlerin yazılı izin alarak kullandığımı ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederim.

- Tezimin/Raporumun tamamı dünya çapında erişime açılabilir ve bir kısmı veya tamamının fotokopisi alınabilir.**

(Bu seçenikle teziniz arama motorlarında indekslenebilecek, daha sonra tezinizin erişim statüsünün değiştirilmesini talep etseniz ve kütüphane bu talebinizi yerine getirirse bile, tezinin arama motorlarının önbelleklerinde kalmaya devam edebilecektir.)

- Tezimin/Raporumun 12.12.2020. tarihine kadar erişime açılmasını ve fotokopi alınmasını (İç Kapak, Özet, İçindekiler ve Kaynakça hariç) istemiyorum.**

(Bu sürenin sonunda uzatma için başvuruda bulunmadığım takdirde, tezimin/raporumun tamamı her yerden erişime açılabilir, kaynak gösterilmek şartıyla bir kısmı ve ya tamamının fotokopisi alınabilir)

- Tezimin/Raporumun tarihine kadar erişime açılmasını istemiyorum, ancak kaynak gösterilmek şartıyla bir kısmı veya tamamının fotokopisinin alınmasını onaylıyorum.**

- Serbest Seçenek/Yazarın Seçimi**

12/12/2017

Selen ÇAKMAKYAPAN

ETİK

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada,

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversitede veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

07/12/2017

Selen ÇAKMAKYAPAN

YAYINLAMA VE FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI BEYANI

Enstitü tarafından onaylanan lisansüstü tezimin/raporumun tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı (kağıt) ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda verilen koşullarla kullanıma açma iznini Hacettepe üniversitesine verdiğimi bildiririm. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet haklarım bende kalacak, tezimin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanım hakları bana ait olacaktır.

Tezin kendi orijinal çalışmam olduğunu, başkalarının haklarını ihlal etmediğimi ve tezimin tek yetkili sahibi olduğumu beyan ve taahhüt ederim. Tezimde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanması zorunlu metinlerin yazılı izin alarak kullandığımı ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederim.

- Tezimin/Raporumun tamamı dünya çapında erişime açılabilir ve bir kısmı veya tamamının fotokopisi alınabilir.**

(Bu seçenekle teziniz arama motorlarında indekslenebilecek, daha sonra tezinizin erişim statüsünün değiştirilmesini talep etmeniz ve kütüphane bu talebinizi yerine getirse bile, tezinin arama motorlarının önbelleklerinde kalmaya devam edebilecektir.)

- Tezimin/Raporumun 12.12.2020. tarihine kadar erişime açılmasını ve fotokopi alınmasını (İç Kapak, Özet, İçindekiler ve Kaynakça hariç) istemiyorum.**

(Bu sürenin sonunda uzatma için başvuruda bulunmadığım takdirde, tezimin/raporumun tamamı her yerden erişime açılabilir, kaynak gösterilmek şartıyla bir kısmı ve ya tamamının fotokopisi alınabilir)

- Tezimin/Raporumun tarihine kadar erişime açılmasını istemiyorum, ancak kaynak gösterilmek şartıyla bir kısmı veya tamamının fotokopisinin alınmasını onaylıyorum.**

- Serbest Seçenek/Yazarın Seçimi**

12/ 12 / 2017

Selen ÇAKMAKYAPAN

ETİK

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada,

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversitede veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

07/12/2017

Selen ÇAKMAKYAPAN

ÖZET

GENELLEŞTİRİLMİŞ OLASILIK DAĞILIMLARI ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Selen ÇAKMAKYAPAN

Doktora, İstatistik Bölümü

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Gamze ÖZEL KADILAR

Aralık 2017, 93 sayfa

Mühendislik, aktüerya, çevre ve tıbbi bilimler, demografi, ekonomi, finans, sigortacılık, biyolojik çalışmalar, yaşam çözümlenmesi ve daha birçok farklı alanda, elde edilen verilerin modellenmesinde çok sayıda klasik dağılımdan faydalanılmaktadır. Ancak, özellikle yaşam çözümlenmesi, finans, sigortacılık gibi bazı alanlarda bu dağılımların veriyi modellemede yetersiz kalabildiği görülmektedir. Bu sorun dağılımların veri modellemede daha esnek olması gerekliliğini ortaya çıkarmıştır. Bu gereklilik, bilinen dağılım ailelerinin genişletilmesiyle, yeni olasılık dağılım aileleri tanımlanması üzerine yapılan çalışmaları arttırmıştır.

Yeni dağılım aileleri tanımlamada üstelleştirme, dönüştürme, parametre ekleme gibi yöntemlerin yanı sıra yaygın olarak “üretici dağılımlar” kullanılmaktadır. Burada üretmenin anlamı; temel alınan farklı her bir G dağılımı için farklı bir F dağılımının elde edilmesidir. Üretici olarak isimlendirilen dağılım, genelleştirilmiş dağılım ailesine adını veren dağılımdır.

Tez çalışmasında, farklı karakterdeki (sağa çarpık, sola çarpık, ağır kuyruklu vs.) veri setlerini modellemede alternatif olacak üç yeni dağılım önerilmiştir. Bu yeni dağılımlar sırasıyla, Kumaraswamy Genelleştirilmiş Dağılım Ailesi, Marshall-Olkin Dağılım Ailesi ve Kumaraswamy Marshall-Olkin Dağılım Ailesi üyesi dağılımlardır. Dağılımların tanımlanmasında üretici dağılım yaklaşımı ve ek olarak parametre ekleme yöntemleri dikkate

alınmıştır. Bu dağılımlar Kumaraswamy Lindley (KL), Marshall- Olkin Rayleigh (MOR) ve Kumaraswamy Marshall- Olkin Log Lojistik (KMOLL) dağılımları olarak adlandırılmıştır. Ayrıca, tez çalışmasının son bölümünde, birçok dağılımı içinde barındıran yeni bir dağılım ailesi; Lindley Genelleştirilmiş Dağılım ailesi elde edilmiştir. Bu ailenin tüm özellikleri incelenmiş ve mevcut dağılım aileleri ile ilişkisi ele alınmıştır.

Anahtar Kelimeler: Genelleştirilmiş Olasılık Dağılımları, Olasılık Dağılım Ailesi, Momentler, Entropi, Güvenirlilik, Bootstrap.

ABSTRACT

A STUDY OF THE GENERALIZED PROBABILITY DISTRIBUTIONS

Selen ÇAKMAKYAPAN

Doctor of Philosophy, Department of Statistics

Supervisor: Ass. Prof. Dr. Gamze ÖZEL KADILAR

December 2017, 93 pages

Numerous classical distributions are used in the modeling of acquired data in engineering, actuarial, environmental and medical sciences, demography, economics, finance, insurance, biological studies, life analysis and many other fields. However, it can be seen that in some areas such as life analysis, finance, insurance, these distributions may be insufficient in the data modeling. This problem has led to the need for distributions to be more flexible in data modeling. This requirement has increased the studies done on defining new probability distribution families by extending the known distribution families.

In defining new distribution families, "generator distributions" are commonly used as well as methods such as exponentialization, transformation, and parameter addition. Here, meaning of the "generating" is to obtain a different F distribution for each different G distribution. The distribution called the generator is the distribution giving the name to the generalized distribution family.

In the thesis study, three new distributions are proposed, which will be an alternative in modeling data sets (right-skewed, left-skewed, heavy-tailed, etc.). These new distributions are Kumaraswamy Generalized Distribution Family, Marshall-Olkin Distribution Family and Kumaraswamy Marshall-Olkin Distribution Family members. The generator distribution approach and additional parameter methods have been taken into consideration in defining the distributions. These distributions are called Kumaraswamy Lindley (KL), Marshall-Olkin Rayleigh (MOR) and Kumaraswamy Marshall-Olkin Log Logistics (KMOLL) distributions.

Moreover, in the last part of the thesis, a new family of distributions, which contains many distributions; The Lindley Generalized Distribution family was obtained. All properties of this family are examined and the relationship with the existing distribution families is considered.

Anahtar Kelimeler: Generalized Probability Distribution, Probability Distribution Family, Moments, Entropy, Reliability, Bootstrap.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam sırasında kıymetli bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana yol gösterici ve destek olan değerli danışman hocam sayın Doç. Dr. Gamze ÖZEL KADILAR baőta olmak üzere, ilgisini ve önerilerini göstermekten kaçınmayan sayın tez izleme kurulu üyeleri Doç. Dr. Nihal ATA TUTKUN ve Doç. Dr. Atilla GÖKTAŞ hocama sonsuz teőekkürlerimi sunarım.

Doktora eğitimim boyunca yardım, bilgi ve tecrübeleri ile bana destek olan Hacettepe Üniversitesi İstatistik bölümündeki tüm hocalarıma teşekkür ederim.

Her koşulda benim yanımda olan, her zorlukta arkamda duran, maddi manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan aileme őimdi ve ömrüm boyunca teőekkürü bir borç bilirim.

Selen akmakyapan

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET.....	i
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	v
İÇİNDEKİLER.....	vi
TABLolar.....	ix
ŞEKİLLER	xi
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	xii
1. GİRİŞ	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR.....	3
3. ÜSTELLEŞTİRİLMİŞ DAĞILIM AİLESİ	11
3.1. Dağılıma İlişkin Fonksiyonlar.....	11
3.2. Momentler	15
3.3. Sıra İstatistikleri	16
3.4. Parametre Tahminleri	16
4. KUMARASWAMY GENELLEŞTİRİLMİŞ DAĞILIM AİLESİ	18
4.1. Kumaraswamy Dağılımı	19
4.2. Lindley Dağılımı	21
4.3. Kumaraswamy-Lindley Dağılımı.....	22
4.3.1. Dağılıma İlişkin Fonksiyonlar	22
4.3.2. Dağılımın ÜD ile İfade edilmesi	24
4.3.3. Momentler	25
4.3.4. Moment Çıkaran Fonksiyon.....	25
4.3.5. Entropi.....	26
4.3.6. Güvenilirlik	27
4.3.7. Sıra İstatistikleri	28
4.3.8. Parametre Tahminleri	29
4.3.9. Benzetim Çalışması.....	30
4.3.10. Uygulama	33
4.3.11. Bootstrap Çalışması.....	36
5. MARSHAL-OLKİN GENELLEŞTİRİLMİŞ DAĞILIM AİLESİ	41
5.1. Rayleigh Dağılımı	42

5.2. Marshall Olkin Rayleigh Dağılımı	43
5.2.1. Dağılıma İlişkin Fonksiyonlar	43
5.2.2. Momentler	45
5.2.3. Moment Çıkaran Fonksiyon	46
5.2.4. Entropi	46
5.2.5. Güvenilirlik	48
5.2.6. Sıra İstatistikleri	48
5.2.7. Parametre Tahminleri	49
5.2.8. Benzetim Çalışması	50
5.2.9. Uygulama	52
5.2.10. Bootstrap Çalışması	54
6. KUMARASWAMY MARSHALL-OLKİN GENELLEŞTİRİLMİŞ DAĞILIM AİLESİ .	56
6.1. Log-Lojistik Dağılımı	57
6.2. Kumaraswamy Marshall Olkin Log-Lojistik Dağılımı	57
6.2.1. Dağılıma İlişkin Fonksiyonlar	58
6.2.2. Momentler	60
6.2.3. Moment Çıkaran Fonksiyon	61
6.2.4. Entropi	61
6.2.5. Güvenilirlik	63
6.2.6. Sıra İstatistikleri	64
6.2.7. Parametre Tahminleri	65
6.2.8. Benzetim Çalışması	66
6.2.9. Uygulama	69
6.2.10. Bootstrap Çalışması	72
7. LINDLEY GENELLEŞTİRİLMİŞ DAĞILIM AİLESİ	74
7.1. Dağılıma İlişkin Fonksiyonlar	74
7.2. LGD Ailesinin ÜD ve KGD Ailesi cinsinden İfade edilmesi	76
7.3. Momentler	77
7.4. Moment Çıkaran Fonksiyon	78
7.5. Entropi	78
7.6. Güvenirlilik	79
7.7. Sıra İstatistikleri	80
7.8. Parametre Tahminleri	80
8. SONUÇ VE TARTIŞMA	82

KAYNAKLAR..... 86

TABLolar

Sayfa

Tablo 4.1 Keyfi parametre değerlerine göre KL dağılımına ilişkin benzetim sonuçları	32
Tablo 4.2 400 mikrometrelik elektron göçü örneklerinin hata zamanları (saat)	33
Tablo 4.3 Karşılaştırılan Dağılımlar ve kısaltmaları	34
Tablo 4.4 Kullanılan dağılımların bilgi kriterleri ile karşılaştırılması.....	35
Tablo 4.5 Cramer-von Misses ve Anderson Darling istatistikleri	35
Tablo 4.6 Bootstrap örneklemesine ilişkin tahmin edilen KL parametrelerinin tanımlayıcı istatistikleri	38
Tablo 4.7 Bootstrap örneklemesine ilişkin KL parametrelerinin yan düzeltmeli tahminleri ..	38
Tablo 4.8 KL parametrelerinin bootstrap-t aralığı.....	39
Tablo 4.9 Bootstrap örneklemesine ilişkin tahmin edilen KL parametrelerin bootstrap yüzdeleri.....	40
Tablo 5.1 Keyfi parametre değerlerine göre MOR dağılımına ilişkin benzetim sonuçları	51
Tablo 5.2 Arıza verisi (saat)	52
Tablo 5.3 Karşılaştırılan dağılımlar ve kısaltmaları	52
Tablo 5.4 Kullanılan dağılımların bilgi kriterleri ile karşılaştırılması.....	52
Tablo 5.5 Cramer-von Misses ve Anderson Darling istatistikleri	53
Tablo 5.6 Bootstrap örneklemesine ilişkin tahmin edilen MOR parametrelerinin tanımlayıcı istatistikleri	54
Tablo 5.7 Bootstrap örneklemesine ilişkin MOR parametrelerinin yan düzeltmeli tahminleri	54
Tablo 5.8. MOR parametrelerinin bootstrap-t aralığı.....	55
Tablo 5.9 Bootstrap örneklemesine ilişkin tahmin edilen MOR parametrelerinin bootstrap yüzdeleri.....	55
Tablo 6.1 Keyfi parametre değerlerine göre KMOLL dağılımına ilişkin benzetim sonuçları	68
Tablo 6.2 Wheaton Nehri taşkın verileri	69
Tablo 6.3 Modellemede kullanılan dağılımlar ve kısaltmaları	70
Tablo 6.4 Kullanılan dağılımların bilgi kriterleri ile karşılaştırılması.....	71
Tablo 6.5 Cramer-von Misses ve Anderson Darling istatistikleri	71
Tablo 6.6 Bootstrap örneklemesine ilişkin tahmin edilen KMOLL parametrelerinin tanımlayıcı istatistikleri	72
Tablo 6.7 Bootstrap örneklemesine ilişkin KMOLL parametrelerinin yan düzeltmeli tahminleri	73

Tablo 6.8 KMOLL parametrelerinin bootstrap-t aralığı.....	73
Tablo 6.9 Bootstrap örneklemesine ilişkin tahmin edilen KMOLL parametrelerin bootstrap yüzdeleri.....	73
Tablo 8.1 KL dağılımı ile ilişkili bazı dağılımlar	82
Tablo 8.2 MOR dağılımı ile ilişkili bazı dağılımlar	83
Tablo 8.3 KMOLL dağılımı ile ilişkili bazı dağılımlar	84

ŞEKİLLER

	<u>Sayfa</u>
Şekil 4.1 KL dağılımına ilişkin df ve oyf grafikleri.....	23
Şekil 4.2 KL dağılımına ilişkin yf ve hf grafikleri.....	24
Şekil 4.3 Veriye ait histogram ve model eğrileri	36
Şekil 5.1 MOR dağılımına ilişkin df ve oyf grafikleri	44
Şekil 5.2 MOR dağılımına ilişkin yf ve hf grafikleri	45
Şekil 5.3 Veriye ait histogram ve model eğrileri	53
Şekil 6.1 KMOLL dağılımına ilişkin df ve oyf grafikleri.....	59
Şekil 6.2 KMOLL dağılımına ilişkin yf ve hf grafikleri.....	60
Şekil 6.3 Veriye ait histogram ve model eğrileri	72

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

\mathcal{J}_R	Rényi Entropi
R	Güvenirlilik
W	Cramer von- Misses İstatistiği
A	Anderson Darling İstatistiği

Kısaltmalar

df	dağılım fonksiyonu
oyf	olasılık yoğunluk fonksiyonu
yf	yaşam fonksiyonu
hf	hazard fonksiyonu
ÜD	Üstelleştirilmiş Dağılım
KGD	Kumaraswamy Genelleştirilmiş Dağılım
MGD	Marshall-Olkin Genelleştirilmiş Dağılım
KMOGD	Kumaraswamy Marshall-Olkin Genelleştirilmiş Dağılım
KL	Kumaraswamy Lindley
MOR	Marshall-Olkin Rayleigh
KMOLL	Kumaraswamy Marshall-Olkin Log-Lojistik
LGD	Lindley Genelleştirilmiş Dağılım
AIC	Akaike Bilgi Kriteri
CAIC	Düzeltilmiş Akaike Bilgi Kriteri
BIC	Bayesci Bilgi Kriteri

1. GİRİŞ

Bir raslantı değişkeni, kesikli ya da sürekli değerleri rasgele olan ve bu değerler için bir olasılık dağılımı tanımlanabilen bir değişkendir. Diğer bir deyişle, bir raslantı değişkeni örneklem uzayındaki ölçülebilir tüm mümkün değerleri göstermektedir. Raslantı değişkenleri, fizik, kimya, mühendislik, biyoloji ve sosyal bilimler gibi alanlarda olasılık hesaplamalarında sıklıkla kullanılmaktadır. Bu nedenle, raslantı değişkenlerinin olasılık dağılımlarının incelenmesi oldukça önemlidir. Bir raslantı değişkeninin olasılık dağılımının yanısıra değişkene ait hazard (risk) dağılımı ve yaşam (survival) fonksiyonu da temel olarak incelenmektedir.

Mühendislik, aktüerya, çevre ve tıbbi bilimler, demografi, ekonomi, finans, sigortacılık, biyoloji ve yaşam çözümlemesi gibi alanlarda elde edilen verilerin modellenmesinde çok sayıda klasik olasılık dağılımından faydalanılmaktadır. Ancak, özellikle yaşam çözümlemesi, finans, sigortacılık gibi alanlarda bu dağılımların verileri yeteri kadar temsil edemediği ve modellemede yetersiz kaldığı durumlarla karşılaşılmaktadır. Bu nedenle, farklı karakteristiğe sahip verileri daha iyi temsil edecek daha esnek dağılımlara ihtiyaç duyulmaktadır. Bu durum, klasik olasılık dağılımlarının genelleştirilerek yeni olasılık dağılımları ve dağılım ailelerinin elde edilmesi üzerine yapılan çalışmaları arttırmıştır.

Genelleştirilmiş (generalized) bir dağılım ailesinin pratikte tercih edilmesine yönelik temel nedenler aşığıdaki gibi sıralanabilir:

- Orijinal ya da temel (baseline) olasılık dağılımına göre daha esnektir,
- Çok farklı karakterdeki verileri modelleyebilir,
- Simetrik bir dağılımı bile çarpık verileri modellemede kullanışlı hale getirir,
- Gerçek verileri modellemede karşılaşılan kalın kuyruklu (heavy-tailed) dağılım ihtiyacını karşılar,
- Simetrik, sola çarpık (left-skewed), sağa çarpık (right-skewed), artan ya da azalan gibi farklı şekillere sahip dağılımların üretilmesini sağlar,
- Her türlü hazard (risk) fonksiyonunu temsil edebilecek dağılımları tanımlama imkanı verir,
- Temel dağılım, genelleştirilmiş dağılımların alt bir dağılımı olduğu için, tüm karakteristik özellikleri özel bir durum olarak saklı kalır.

Bu tez çalışmasında, ikinci bölümde önceki çalışmalara yer verilmiş, üçüncü bölümde Üstelleştirilmiş dağılım ailesi, dördüncü bölümde Kumaraswamy genelleştirilmiş dağılım ailesi, beşinci bölümde Marshall-Olkin genelleştirilmiş dağılım ailesi ve altıncı bölümde Kumaraswamy Marshall-Olkin genelleştirilmiş dağılım ailesi üzerinde çalışılmıştır. Bu dağılım ailelerine üye yeni dağılımlar elde edilmiş ve istatistiksel özellikleri incelenmiştir. Tanımlanan yeni dağılımlara ilişkin benzetim çalışmaları ile uygulamalara yer verilmiş ve bootstrap çalışmaları yapılmıştır. Bunun yanı sıra, yedinci bölümde yeni bir dağılım ailesi önerilmiş özellikleri elde edilmiştir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Literatürde, yeni bir olasılık dağılımı tanımlamada kullanılan birçok yöntem yer almaktadır. Bu yöntemlerden tek değişkenli sürekli dağılımları tanımlamada kullanılan Pearson [1] tarafından geliştirilmiş diferansiyel denklem yöntemi ve Tukey [2]'in geliştirdiği kantil fonksiyonunu yöntemi temel çalışmalar olarak sayılabilir. Bununla beraber son yıllarda yeni ve daha esnek dağılımları üretmek için farklı yöntemler geliştirmeye yönelik çalışmalar devam etmektedir. 1980'lerden sonra geliştirilen yöntemlerin çoğu mevcut iki dağılımın birleştirilmesi ya da mevcut dağılım ailelerine yeni parametrelerin eklenmesine dayanmaktadır [3].

Lai [4] çalışmasında, genelleştirilmiş Weibull dağılımlarını tanımlamak için kullanılan yöntemleri belirtmiştir. Weibull dağılımı da dâhil olmak üzere, tüm dağılımlar için kullanılabilen bu yöntemler kısaca aşağıdaki gibi özetlenmiştir:

- Klasik bir olasılık dağılımına ilişkin hazard fonksiyonuna (hf) bir parametre eklemek,
- Klasik bir olasılık dağılımına sahip raslantı değişkenine dönüşüm (doğrusal, ters, logaritmik, vb.) uygulamak,
- Klasik bir olasılık dağılıma ilişkin dağılım fonksiyonuna ya da olasılık fonksiyonuna yeni bir dağılım ya da olasılık fonksiyonu ifade edecek şekilde dönüşümünü yapmak,
- İki ya da daha fazla dağılımdan gelen değişkenlere yarışan risk yaklaşımı (Competing risk approach) uygulamak,
- Klasik bir dağılımdan gelen iki veya daha fazla değişkeninin karıştırılması (mixing),
- X_i , $i = 1, 2, \dots, N$, aynı dağılımlı ve bağımsız değişkenler ve N birleştirme (compounding) değişkeni olmak üzere, $T = \min(X_1, X_2, \dots, X_N)$ ile ifade edilen birleştirme yöntemi uygulamak,
- Klasik bir dağılıma sahip raslantı değişkeninin dağılım fonksiyonunun, $\psi(\cdot)$ biçimindeki bir olasılık fonksiyonu altındaki değeri ile yine bu değişkenin olasılık fonksiyonunun çarpımına eşit olduğu yöntemi $f(t) = \psi(G(t))g(t)$ uygulamak,

- Klasik bir dağılıma bir kırılma (tilt, frailty) parametresi ekleyerek dağılımı genelleştirmek (Marshall-Olkin genelleştirmesi [5] vb.).

Bu bölümde, ayrıca literatürdeki sürekli raslantı değişkenlerine ait yaygın olarak son zamanlarda tanımlanan genelleştirilmiş dağılım ailelerine ilişkin tanımlayıcı fonksiyonlara ve bu ailelerin üyesi yeni dağılımlara yer verilmiştir.

Gupta vd. [6], bir olasılık dağılımının pozitif değer alan bir parametre yardımıyla kuvvetini alarak üstelleştirilmiş dağılım (ÜD) ailesini (exponentiated family of distributions) tanımlamıştır. Üstelleştirilmiş dağılım ailesi ve özellikleri, birçok dağılımın temelini oluşturduğundan olasılık kuramında önemli bir yere sahiptir.

ÜD ailesine ilişkin dağılım fonksiyonu (df) ve olasılık yoğunluk fonksiyonu (oyf), sırasıyla aşağıdaki eşitliklerdeki gibi tanımlanır:

$$F_{\text{Üstel-G}}(x) = G^a(x), \quad (2.1)$$

$$f_{\text{Üstel-G}}(x) = ag(x)G^{a-1}(x). \quad (2.2)$$

Burada $G(\cdot)$, temel dağılımının df'sini ve $g(\cdot)$ temel dağılımın oyf'sini göstermektedir.

Gupta vd. [6] çalışmasında bu aileye ilişkin özelliklere yer vermiş, Cramer ve Kamps [7] ise, üstelleştirilmiş yaşam fonksiyonlarını temel alan yeni dağılımlar üzerine çalışmıştır.

Eugene vd. [8], çalışmalarında beta dağılımından faydalanarak ve beta genelleştiren dağılım ailesini (beta-generated family of distributions, Beta-G) önermiştir. Literatürde, bu şekilde “genelleştiren dağılım” kullanarak elde edilen aileler kısaca “genelleştiren dağılımın adı-G” biçiminde gösterilmektedir. Beta-G dağılım ailesine ilişkin oyf, $x > 0$, $\alpha > 0$ ve $\beta > 0$ olmak üzere, aşağıda gibi tanımlanır:

$$f_{\text{Beta-G}}(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} [1 - G(x)]^{\beta-1} G^{\alpha-1}(x) g(x). \quad (2.3)$$

Burada $g(\cdot)$, herhangi bilinen bir olasılık oyf'sini, $G(\cdot)$ ise bu dağılıma ilişkin df'yi göstermektedir.

Literatürde, Beta-G dağılım ailesine üye olarak tanımlanan dağılımlar arasında, Eugene vd.'nin beta-normal dağılımı [8], Nadarajah ve Kotz'un beta-Gumbel dağılımı [9], Nadarajah ve Gupta'nın beta-Frechet dağılımı [10], Nadarajah ve Kotz'un beta-üstel dağılımı, Akinsete vd.'nin beta-pareto dağılımı [11], Pescim vd. [12] ile Paranaiba vd. [13]'nin beta genelleştirilmiş yarı normal ve beta Burr XII dağılımları yer almaktadır.

Ayrıca, beta-Nakagami [14], beta-ters Weibull [15], beta-Gompertz [16], beta ters üstel [17] ve beta-Reyleigh [18] dağılımlarında elde edilmiştir.

Dönüştürülmüş (transmuted) dağılım ailesi, Shaw ve Buckley [19] tarafından önerilmiştir. Bu çalışma Bourguignon, Ghosh ve Cordeiro [20] tarafından iki değişkenli ve çok değişkenli dağılımlar için genelleştirilmiştir. Dönüştürülmüş dağılım ailesine ilişkin df ve oyf, $|\lambda| \leq 1$ olmak üzere, sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$F_{T-G}(x) = G(x)[1 + \lambda - \lambda G(x)], \quad (2.4)$$

$$f_{T-G}(x) = g(x)[1 + \lambda - 2\lambda G(x)]. \quad (2.5)$$

Dönüştürülmüş dağılım ailelerinden yararlanarak birçok yeni alt dağılım elde edilmiştir. Dönüştürülmüş-Weibull (Aryal ve Tsokos, [21]), dönüştürülmüş-Rayleigh (Merovci, [22]), dönüştürülmüş-üstelleştirilmiş değiştirilmiş (exponentiated modified) Weibull (Ashour ve Eltehiwy, [23]), dönüştürülmüş-değiştirilmiş Weibull (Khan ve King, [24]), dönüştürülmüş-Lomax (Ashour ve Eltehiwy, [25]), dönüştürülmüş-üstelleştirilmiş Gamma (Hussian, [26]), dönüştürülmüş ters Rayleigh (Ahmad, Ahmad ve Ahmed, [27]), dönüştürülmüş-Pareto (Merovci ve Puka, [28]), dönüştürülmüş-ters Weibull (Khan, King ve Hudson, [29]), dönüştürülmüş-değiştirilmiş ters Weibull (Elbatal, [30]), dönüştürülmüş Gompertz (Abdul-Moniem ve Seham, [31]), dönüştürülmüş-Marshall-Olkin Frechet (Afify, Hamedani, Ghosh ve Mead, [32]) ve dönüştürülmüş-üstel (Owoloko vd., [33]) dağılımları tanımlanmıştır.

Bourguignon vd. [34] çalışmasında genişletilmiş dönüştürülmüş (extended transmuted) dağılım ailesine, özelliklerine ve uygulamasına yer vermiştir.

Corderio vd. [35], üstelleştirilmiş dağılımlar için yeni bir genelleştirme önermiştir. Üstelleştirilmiş genelleştirilmiş dağılım (ÜGD) ailesi olarak bilinen bu aileye ilişkin df ve oyf sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$F_{Gen.Üstel-G}(x) = \left[1 - \{1 - G(x)\}^\alpha \right]^\beta, \quad (2.6)$$

$$f_{Gen.Üstel-G}(x) = \alpha\beta [1 - G(x)]^{\alpha-1} \left\{ 1 - [1 - G(x)]^\alpha \right\}^{\beta-1}. \quad (2.7)$$

Burada $\alpha, \beta > 0$ şekil parametreleri ve $x > 0$ olarak tanımlıdır.

Corderio vd. [35]'e göre, ÜGD ailesi, beta genelleştirilmiş dağılım ailesinden daha esnek bir ailedir. Bu durum, bu ailenin beta fonksiyonu gibi özel fonksiyonları içermemesinden kaynaklanmaktadır.

ÜGD ailesi üyesi dağılımlardan, ÜG-Gumbel, ÜG-üstel, ÜG-Lojistik, ÜG-genelleştirilmiş Pareto ve ÜG-Beta dağılımı, Corderio vd. [35] tarafından tanımlanmıştır. Daha sonra, ÜG-ters (Elbatal ve Muhammed, [36]), ÜG-Gumbel (Andrade, Rodrigues, Bourguignon ve Cordeiro, [37]), ÜG-Weibull (Oguntunde vd. [38]), ÜG-Frechet (Abd-Elfattah, Assar ve Abd-Elghaffar, [39]) ve ÜG-üstel (Oguntunde, Adejumo ve Adepoju [40]) dağılımları önerilmiştir. Bu çalışmalarda dağılımlara ilişkin istatistiksel özellikler elde edilmiş, alt olasılık dağılımları belirtilmiş, özellikle yaşam verileri olmak üzere, farklı alanlarda uygulamaları gerçekleştirilmiştir.

Literatürde Weibull-G ve Weibull-X olarak ifade edilen iki farklı Weibull genelleştirilmiş dağılım ailesi de mevcuttur. Weibull-G'ye ilişkin df ve oyf $\alpha, \beta > 0$ parametreleri ve $x > 0$ olmak üzere, sırasıyla, aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$F_{Weibull-G}(x) = 1 - \exp \left\{ -\alpha \left[\frac{G(x)}{1-G(x)} \right]^\beta \right\}, \quad (2.8)$$

$$f_{Weibull-G}(x) = \alpha \beta g(x) \frac{G^{\beta-1}(x)}{[1-G(x)]^{\beta+1}} \exp \left\{ -\alpha \left[\frac{G(x)}{1-G(x)} \right]^\beta \right\}. \quad (2.9)$$

Burada, dağılım ailesini tanımlarken yapılan dönüşüm bağ (link) fonksiyonu olarak da tanımlanmaktadır. Burada ψ bağ fonksiyonu, $G(x)/[1-G(x)]$ biçimindedir.

Weibull-G dağılım ailesinden yararlanarak, Weibull-Weibull, Weibull-tekdüze (uniform), Weibull-Burr XII, Weibull-normal biçimindeki alt dağılımlar Bourguignon, Silva ve Cordeiro [41] tarafından tanımlanmıştır. Merovci ve Elbatal [42], Weibull-Rayleigh, Oguntunde vd. [43], Weibull-üstel dağılımı önermiştir. Bu dağılımlar birçok dağılımı da alt dağılım olarak içinde barındırabilen, özel parametre değerleriyle bilinen dağılımlara dönüşebilen dağılımlardır.

Weibull-X olarak adlandırılan genelleştirilmiş dağılım ailesine ilişkin df ve oyf, sırasıyla, Alzaatreh vd. [44] tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$F_{Weibull-X}(x) = 1 - \exp \left\{ -\alpha \left[\beta^{-1} \log(1-G(x)) \right]^\alpha \right\}, \quad (2.10)$$

$$f_{Weibull-X}(x) = \frac{\alpha g(x)}{\beta[1-G(x)]} \left[\frac{-\log(1-G(x))}{\beta} \right]^{\alpha-1} \exp \left(- \left[\frac{\log(1-G(x))}{\beta} \right]^{\alpha} \right). \quad (2.11)$$

Burada $\alpha, \beta > 0$ şekil parametreleri ve $x > 0$ 'dır. Bu aile ile Weibull-G ailesi arasındaki fark, dönüşüm fonksiyonlarından kaynaklanmaktadır. Burada ilgili ψ bağ fonksiyonu $-\log[1-G(x)]$ 'e eşittir. İki farklı genelleştirilmiş Weibull dağılım ailesi karşılaştırıldığında Weibull-G ailesinin daha basit bir fonksiyonel yapıya sahip olduğu görülmektedir.

Alzaatreh vd. [44] çalışmasında Weibull-Pareto dağılımını önermiştir. Uygulama çalışmasında kullandığı veriye Weibull-Pareto dağılımının, dönüştürülmüş-Pareto ve Kumaraswamy-Pareto dağılımlarından daha iyi bir uyum sağladığını göstermiştir.

Zografos ve Balakrishnan [45], Stacy'nin genelleştirilmiş gama dağılımından yararlanarak yeni bir dağılım ailesi üzerine çalışmıştır. Stacy'nin genelleştirilmiş gama dağılımı,

$$f(x) = \frac{\gamma x^{\gamma\delta-1} \exp(-x^\gamma)}{\Gamma(\delta)} \quad (2.12)$$

biçimindedir. Burada, $x > 0$ ve $\delta, \gamma > 0$ olarak tanımlıdır. Zografos ve Balakrishnan [45], bu fonksiyondan yola çıkarak, $-\log[1-G(x)]$ bağ fonksiyonunu kullanmıştır.

$\gamma = 1$ için $\gamma(a, b) = \int_0^b t^{a-1} e^{-t} dt / \Gamma(a)$ olmak üzere, aşağıdaki yeni dağılım ailesininin df e

oyf'sini sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlamıştır:

$$F_{Gama.I-G}(x) = \gamma \{ \delta, -\log(1-G(x)) \}, \quad (2.13)$$

$$f_{Gama.I-G}(x) = \frac{g(x)}{\Gamma(\delta)} \{ -\log(1-G(x)) \}^{\delta-1}. \quad (2.14)$$

Ramos, Cordeiro, Marinho, Dias ve Hamadani [46], Zografos-Balakrishnan log-lojistik dağılımını önermiştir. Çalışmalarında dağılımın birçok istatistiksel özelliğini tanımlamanın yanı sıra, göğüs kanseri hastalarına ilişkin bir veri kümesine üzerinden dağılımın uygunluğu farklı dağılımlar da kullanılarak önerilen dağılımla karşılaştırılmıştır.

Bir diğer genelleştirilmiş gama dağılım ailesi, Ristic ve Balakrishnan [47] tarafından tanımlanmıştır. Bu aileye ilişkin oyf, $x > 0, a > 0$ için aşağıdaki gibidir:

$$f_{Gama-II-G}(x) = \frac{g(x)}{\Gamma(a)} \{-\log [G(x)]\}^{a-1}. \quad (2.15)$$

Bu dağılım ailesi üyesi olan gama-üstelleştirilmiş üstel dağılımı, Pogany ve Saboor [48] tarafından önerilmiştir.

Bir başka gama genelleştirilmiş dağılım ailesi ise, Gama-X dağılım ailesidir. Bu aileye ilişkin df ve oyf fonksiyonları sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$F_{Gama-X}(x) = \frac{\gamma\left(\alpha, \frac{-\log[1-G(x)]}{\beta}\right)}{\Gamma(\alpha)}, \quad (2.16)$$

$$f_{Gama-X}(x) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} g(x) (-\log[1-G(x)])^{\alpha-1} [1-G(x)]^{1/\beta-1}. \quad (2.17)$$

Alzaatreh vd. [49], bu ailenin üyesi gama-normal dağılımı çalışmalarında tanımlamış, özelliklerini elde etmiş ve başka dağılımlarla karşılaştırmıştır.

McDonald'ın genelleştirilmiş beta dağılımına ilişkin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir [50], [51]:

$$f(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} G^{\alpha-1}(x) [1-G^c(x)]^{\beta-1} g(x) \quad (2.18)$$

Corderio ve Castro [52], McDonald'ın genelleştirilmiş beta dağılımı ailesinin üyesi olan yeni bir genelleştirilmiş Kumaraswamy dağılımı tanımlamıştır. Corderio vd.'nin [53] çalışmasında ise, McDonald-normal dağılımı tanımlamış ve istatistiksel özelliklerine yer vermiştir.

Tahir, Mansoor, Zubair ve Hamedani [54], McDonald log-lojistik, Roozegar, Tahmasebi ve Jafari [55], McDonald-Gompertz, Roozegar ve Esfandiyari [56] McDonald-quasi Lindley dağılımlarını tanımlamış ve Merovci, Elbatal ve Puka [57], bu dağılımın farklı bir formunu incelemiştir.

Log-gama genelleştirilmiş dağılım ailesi, Amini, MirMostafae ve Ahmadi [58] tarafından önerilmiştir. Bu dağılıma ilişkin oyf'ler $\alpha, \beta > 0$ şekil parametreleri ve $x > 0$ için aşağıdaki gibidir:

$$f_{Log-Gama-G}(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(a)} g(x) \{-\log [G(x)]\}^{a-1} G^{\beta-1}(x), \quad (2.19)$$

$$f_{Log-Gama-G}(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} g(x) \{-\log [1-G(x)]\}^{\alpha-1} [1-G(x)]^{\beta-1}. \quad (2.20)$$

Burada, sırasıyla $-\log [G(x)]$ ve $-\log [1-G(x)]$ dönüşüm fonksiyonları kullanılmıştır. Amini vd. [58], bu dağılım ailesine ilişkin istatistiksel özelliklerinin yanı sıra Bayesci yaklaşım kullandığı bir uygulamaya da yer vermiştir.

Kumaraswamy geliştirilmiş (Kw-G) dağılım ailesi Cordeiro ve Castro [59] tarafından önerilmiştir. Bu aileye ilişkin df ve oyf sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$F_{Kw-G}(x) = 1 - [1 - G^a(x)]^b \quad (2.21)$$

$$f_{Kw-G}(x) = abg(x)G^{a-1}(x)[1 - G^a(x)]^{b-1} \quad (2.22)$$

Literatürde, bu dağılım ailesi üyesi birçok dağılım tanımlanmıştır. Kw-Weibull, Kw-normal, Kw-ters normal, Kw-gamma, ve Kw-Gumbel dağılımları, Cordeiro ve de Castro [59] tarafından elde edilmiştir. Kw-genelleştirilmiş Pareto dağılımı Nadarajah ve Eljabri [60], Kw-ters Weibull dağılımı Shahbaz, Shahbaz ve Butt [61], Kw-Dagum dağılımı, Huang ve Oluyede [62], Kw-üstelleştirilmiş Lomax dağılımı El-Batal ve Kareem [56], [63], Kw-dönüştürülmüş üstelleştirilmiş değiştirilmiş Weibull dağılımı Al-Babtain vd. [64], Kw-güç fonksiyonu (power function) dağılımı Oguntunde vd. [65], Kw-doğrusal üstelleştirilmiş dağılımı Merovci ve Elbatal [66] ve Kw-Gompertz Makeham dağılımı, Chukwu ve Ogunde [67] tarafından önerilmiştir.

Marshall-Olkin geliştirilmiş dağılım ailesi, Marshall ve Olkin [5] tarafından önerilmiştir. Marshall ve Olkin [5] yöntemi, önerdikleri ailede yaşam fonksiyonunu temel alarak, eklenen yeni parametre ile daha esnek bir dağılım elde etmeyi amaçlamıştır. Bu aile aslında bilinen bir olasılık dağılımına ilişkin df ve oyf'nin oransal bir fonksiyonundan oluşmaktadır. Marshall-Olkin geliştirilmiş (MO-G) dağılım ailesine ilişkin oyf ve df, $x > 0$ ve $\gamma > 0$ için, sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$F_{MO-G}(x) = 1 - \frac{\gamma S_G(x)}{[1 - (1 - \gamma)S_G(x)]}, \quad (2.23)$$

$$f_{MO-G}(x) = \frac{\gamma g(x)}{[1 - (1 - \gamma)S_G(x)]^2}. \quad (2.24)$$

MO-G dağılım ailesine üye olan bir çok alt dağılım önerilmiştir. MO-normal dağılımı Garcia, Gomez-Deniz ve Vazquez-Polo [68], MO-geometrik dağılım Gomez-Deniz [69], MO-genişletilmiş Weibull dağılımı Cordeiro ve Lemonte [70], MO-Frechet, Krishna, Jose,

Alice ve Ristic, [71], MO-genişletilmiş tekdüze dağılımı Jose ve Krishna [72], MO- genişletilmiş log-lojistik dağılımı Gui [73], MO- genişletilmiş Burr türü-XII dağılımı Al-Saiari, Baharith ve Mousa [74], MO-üstel Pareto dağılımı El-Nadi, Fatehy ve Ahmed [75], MO-gama dağılımı Ristic vd. [76], MO-genelleştirilmiş kesilmiş gama üstel dağılımı Okorie, Akpanta ve Ohakwe [77] tarafından önerilmiştir.

Bu çalışmaların yanı sıra MO-G dağılım ailesine ilişkin farklı çalışmalar da bulunmaktadır. Economou ve Caroni [78], MO-G dağılım ailesinin oransal olasılık özelliği üzerinde çalışmıştır. Caroni [78], MO- genişletilmiş Weibull dağılımı için eğim parametresine ilişkin hipotez testlerine Monte Carlo benzetim yöntemiyle yaklaşmıştır. Lam ve Leung [80] ile Gupta ve Peng [81] ise, en çok olabilirlik tahminleri üzerine çalışmıştır. Nanda ve Das [82], eğim parametresini incelemiştir. Barreto-Souza vd. [83], MO-G dağılım ailesine ilişkin istatistiksel özelliklerin yer aldığı bir çalışma yapmıştır.

Kumaraswamy Marshall-Olkin genelleştirilmiş (KwMO-G) dağılım ailesi Alizadeh, Tahir, Cordeiro, Mansoor, Zubair ve Hamedani [84] tarafından önerilmiştir. Bu ailede Marshall-Olkin dağılımını temel dağılım olarak kabul edilip, Kumaraswamy dağılımı üretici dağılım olarak kullanılmaktadır. Bu aileye ilişkin df ve oyf, $a > 0$, $b > 0$, $\gamma > 0$ ve $x > 0$ olmak üzere sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$F_{KwMO-G}(x) = 1 - \left\{ 1 - \left(\frac{G(x)}{1 - (1 - \gamma)[1 - G(x)]} \right)^a \right\}^b, \quad (2.25)$$

$$f_{KwMO-G}(x) = \frac{ab\gamma g(x)G^{a-1}(x)}{[1 - (1 - \gamma)(1 - G(x))]^{a+1}} \left\{ 1 - \left[\frac{G(x)}{[1 - (1 - \gamma)(1 - G(x))]} \right]^a \right\}^{b-1}. \quad (2.26)$$

Literatürde yer alan bu ailenin üyesi dağılımlara, KwMO-Lomax, KwMO-Frèchlet ve KwMO-üstel dağılımlar örnek olarak gösterilebilir [84].

3. ÜSTELLEŞTİRİLMİŞ DAĞILIM AİLESİ

Üstelleştirilmiş dağılım ailesi, literatürde “Genelleştirilmiş Dağılım (generated distribution)” olarak da isimlendirilse de, “Üstelleştirilmiş Dağılım (ÜD)” ifadesi daha çok tercih edilmektedir. Yeni tanımlanan genelleştirilmiş dağılım ailelerinin birçoğu ÜD ailesi cinsinden ifade edilebilmektedir. Bu durum, bu aileyi daha önemli bir hale getirmiştir. ÜD yapısında tanımlanabilen her dağılım, bu ailenin karakteristik özelliklerini de taşır. Bu sebeple, bu bölümde yeni tanımlanacak dağılımlara da temel olan ÜD ve özelliklerine yer verilmiştir.

ÜD ailesi Gupta vd. [6] tarafından, yaşam çözümlemesinde kullanılan oransal hazard modellerinden yola çıkarak bir makine parçasının hata zamanlarını modellemede kullanılmak üzere tanımlanmıştır. $F(x) = G^a(x)$ olarak tanımlanan dağılım ailesi, temel alınan bir G dağılımının a pozitif değer alan bir parametre yardımıyla kuvvetinin alınması ile elde edilmektedir. ÜD’da a , pozitif ve tam sayı ise, bu model Lehman alternatifleri adıyla da anılmaktadır [84]. Aslında, ÜD ailesi, Gompertz [85]’in Gompertz uç değer dağılımı için elde ettiği üstelleştirme çalışmasına kadar dayanmaktadır.

3.1. Dağılıma İlişkin Fonksiyonlar

ÜD ailesine ilişkin df ve oyf , G temel dağılım olarak adlandırılmak üzere, aşağıdaki eşitliklerdeki gibi tanımlanır:

$$F_{\text{Üstel-G}}(x) = G^a(x), \quad (3.1)$$

$$f_{\text{Üstel-G}}(x) = aG^{a-1}(x)g(x). \quad (3.2)$$

Burada, g temel dağılıma ilişkin oyf ’yi göstermektedir. Dağılımın yaşam fonksiyonu (yf) ise, $S(x)$ temel dağılımın yf ’si olmak üzere, aşağıdaki gibi elde edilir:

$$S_{\text{Üstel-G}}(x) = I - [I - S(x)]^a, \quad (3.3)$$

$$S_{\text{Üstel-G}}(x) = S^a(x). \quad (3.4)$$

Eşitlik (3.2)’de a parametresi N gibi pozitif bir tamsayıya eşitse, G ’den gelen bağımsız aynı dağılımlı N raslantı değişkeninin en küçüğünün yaşam fonksiyonu elde edilir.

Cramer ve Kamps [7], üstelleştirilmiş yaşam fonksiyonlarını temel alan ardışık k -n yapıdaki modeller üzerine çalışmış ve a parametresini $i = 1, \dots, n$ ile indeksleyerek aşağıdaki eşitliğe ulaşmıştır:

$$F_{\text{Üstel-G}_i}(x) = 1 - [1 - G(x)]^{a_i}, i = 1, \dots, n. \quad (3.5)$$

$t(x) = -\ln S(x)$ ve $t(x)$ sürekli, monoton artan ve türevlenebilen fonksiyon ve ξ parametre vektörü olmak üzere, herhangi bir yf $0 \leq c, d$ ve $c < x < d$ aşağıdaki formda yeniden yazılır.

$$S(x) \equiv S(x, \xi) = e^{-t(x, \xi)} \equiv e^{-t(x)}. \quad (3.6)$$

Eşitlik (3.6), bazı durumlarda doğrudan $G(x)$ yerine kullanılabilir ve Eşitlik (3.6)'daki $S(x)$ her dağılım için geçerlidir. Ayrıca, tanım aralığının $-\infty < x$ olması durumunda bile geçerli olmasına rağmen, bu çalışmada x 'in pozitif tanım aralığına sahip sürekli bir değişken olduğu durum dikkate alınmıştır. x 'in pozitif tanım aralığına sahip bir sürekli değişken olduğu dağılımlara Weibull, Rayleigh, Beta, Pareto I dağılımları örnek verilebilir.

Eşitlik (3.3) ve (3.4)'teki fonksiyonların her ikisi üstelleştirilmiş olsa da aynı değildir. Eşitlik (3.6)'da bu iki fonksiyon yerine yerleştirilirse,

$$S_{\text{Üstel-G}}(x) = 1 - \{1 - e^{-t(x)}\}^a, \quad (3.7)$$

$$S_{\text{Üstel-G}}(x) = e^{-at(x)}. \quad (3.8)$$

elde edilir. Burada, Eşitlik (3.8), $t^*(x) = at(x)$ için, Eşitlik (3.4) ile aynı formdadır.

X raslantı değişkeninin df'si $F_{\text{Üstel-G}}(x) = G^a(x)$ olmak üzere, $Z = -\ln G(x)$ ile Z 'nin üstelleştirilmiş bir dağılım olduğunu görmek kolaydır. Burada Z 'ye ilişkin hf a 'ya eşittir.

Eşitlik (3.7)'ye karşılık gelen df ve oyf, $x > 0$ için, sırasıyla aşağıdaki eşitliklerle de verilebilir:

$$F_{\text{Üstel-G}}(x) = \{1 - e^{-t(x)}\}^a, \quad (3.9)$$

$$f_{\text{Üstel-G}}(x) = at'(x)e^{-t(x)} \{1 - e^{-t(x)}\}^{a-1}. \quad (3.10)$$

Eşitlik (3.1)'de verilen ÜD'ye karşılık gelen hf ise, aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$h_{\text{Üstel-G}}(x) = \frac{f_{\text{Üstel-G}}(x)}{S_{\text{Üstel-G}}(x)} = \frac{aG^{a-1}(x)g(x)}{1 - G^a(x)} = ah(x)r(x). \quad (3.11)$$

Burada Eşitlik (3.11), temel dağılımına ilişkin hf ile $r(\cdot)$ gibi bir fonksiyonunun çarpımından elde edilir ve $r(\cdot)$ fonksiyonu Eşitlik (3.12)'deki gibidir [6], [87]:

$$r(x) = \frac{G^{a-1}(x) - G^a(x)}{1 - G^a(x)}. \quad (3.12)$$

Burada, $r(0)=1$ ve $r(\infty)=\lim_{x\rightarrow\infty}r(x)=\frac{a-1}{a}$ olduğundan, tüm $x\in[0,\infty]$ için,

$\frac{a-1}{a}\leq r(x)\leq 1$ ve $0\leq a[1-r(x)]\leq 1$ tanım aralıkları geçerlidir. a 'nın değerleri dikkate alındığında,

- $0 < a < 1$ ise, $-\infty < r(x) \leq 1 \Rightarrow 1 - r(x) \geq \frac{1}{a} \Rightarrow h_{\nu}(x) \geq h(x)$,
- $a \geq 1$ ise, $\frac{a-1}{a} < r(x) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq a[1-r(x)] \leq 1 \Rightarrow 0 \leq h_{\nu}(x) \leq h(x)$,
- $a > 1$ için $r(\cdot)$ artan, $a < 1$ için $r(\cdot)$ azalan bir fonksiyondur.

Teorem:

- $a > 1$ ve G artan hf'li ise, $F_{\text{Üstel-G}}$ 'de artan hf'ye sahiptir.
- $a > 1$ ve G azalan hf'li ise, $F_{\text{Üstel-G}}$ 'de azalan hf'ye sahiptir [6].

Herhangi bir olasılık dağılımına ait hf için aşağıdaki sonuçlar geçerlidir:

- Tüm x değerleri için, $h'(x) > 0$ koşulu sağlanıyorsa, G artan hf'lidir,
- Tüm x değerleri için, $h'(x) < 0$ koşulu sağlanıyorsa G azalan hf'lidir,
- $y > 0$ varsa, $(0, y)$ aralığındaki tüm x 'ler için, $h'(y) = 0$ için $h'(x) < 0$, ve tüm $x > y$ için $h'(y) > 0$ ise, G küvet (bathtub) şekilli hf'ye sahip bir dağılımdır,
- $y > 0$ varsa, $(0, y)$ aralığındaki tüm x 'ler için, $h'(y) = 0$ için $h'(x) > 0$, ve tüm $x > y$ için $h'(y) < 0$ ise, G yukarı küvet (upside-down bathtub) şeklinde hf'ye sahip bir dağılımdır. [6], [87].

Herhangi bir olasılık dağılımına ilişkin hf'nin yapısını tanımlamak için

$$\eta(x) = \frac{g'(x)}{g(x)},$$

oranı incelenebilir. Buna göre,

Lemma:

- Tüm $x > 0$ için $\eta'(x) > 0$ ise, G artan hf'li dağılım sınıfındandır,
- Tüm $x > 0$ için $\eta'(x) < 0$ ise, G azalan hf'li dağılım sınıfındandır,

c) $x_0 > 0$ ise, tüm $x \in (0, x_0)$, $\eta'(x_0) = 0$ için $\eta'(x) < 0$ ve tüm $x < x_0$ için $\eta'(x) > 0$ 'dır.

Buna göre,

a. $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \infty$ ise, G küvet şekilli hf'li dağılım sınıfındandır,

b. $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$ ise, G artan hf'li dağılım sınıfındandır.

d) $x_0 > 0$ ise, tüm $x \in (0, x_0)$, $\eta'(x_0) = 0$ için $\eta'(x) > 0$ ve tüm $x > x_0$ için $\eta'(x) < 0$ 'dır.

Buna göre,

a. $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$ ise, G üst küvet şekilli hf'li dağılım sınıfındandır,

b. $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \infty$ ise, G azalan hf'li dağılım sınıfındandır.

ÜD'ye ilişkin hf dikkate alınarak yukarıdaki Lemma uygulanacak olursa,

$$f_{\tilde{U}}'(x) = a(a-1)G^{a-2}(x)g^2(x) + aG^{a-1}(x)g'(x) \text{ ve } \eta_{\tilde{U}}'(x) = (1-a)\frac{d^2}{dx^2} \ln G(x) - \frac{d^2}{dx^2} \ln g(x)$$

elde edilir. Böylece, tüm $x > 0$ için,

$$a > 1 \text{ ve } \frac{d^2}{dx^2} \ln G(x) < \frac{1}{(1-a)} \frac{d^2}{dx^2} \ln g(x)$$

ise, $F_{\tilde{U}stel-G}$ artan hf'li dağılım aileleri sınıfındandır. Ayrıca, tüm $x > 0$ için, $a < 1$ ve

$$\frac{d^2}{dx^2} \ln G(x) > \frac{1}{(1-a)} \frac{d^2}{dx^2} \ln g(x)$$

ise, $F_{\tilde{U}stel-G}$ azalan hf'li dağılım aileleri sınıfındandır [87].

Özellikle veri üretme aşamasında çok kullanışlı olan dağılımların kantil fonksiyonu ÜD için aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$Q_{\tilde{U}stel-G}(u) = t^{-1} \left[-\ln(1 - u^{1/a}) \right]. \quad (3.13)$$

Burada $t^{-1}(\cdot)$, $t(\cdot)$ fonksiyonunun tersidir.

Genelleştirilmiş dağılımlara ilişkin incelenen bir diğer istatistiksel özellik, mod değeridir. ÜD'ye ilişkin mod değerinin hesaplanmasında, yukarıda verilen Eşitlik (3.10)'un logaritmasından faydalanılırsa,

$$\ln f_{\tilde{U}stel-G}(x) = \ln a + \ln t'(x) - t(x) + (a-1) \ln \left[1 - e^{-t(x)} \right] \quad (3.14)$$

yazılır. Eşitlik (3.14)'teki logaritma eşitliğinin türevi alınıp, 0'a eşitlenirse dağılıma ilişkin mod değeri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\frac{f'_{\dot{U}_{stel-G}}(x)}{f_{\dot{U}_{stel-G}}(x)} = \frac{t''(x)}{t'(x)} - t'(x) + (a-1) \left[\frac{t'(x)e^{-t(x)}}{1-e^{-t(x)}} \right], \quad (3.15)$$

$$0 = t''(x) [1 - e^{-t(x)}] - [t'(x)]^2 [1 - (a-1)e^{-t(x)}]$$

Böylece, Eşitlik (3.15)'ü sağlayan x değeri, Eşitlik (3.10)'daki oyf 'nin mod değerini verir.

3.2. Momentler

Eşitlik (3.10)'daki df 'ye sahip bir X raslantı değişkenine ilişkin n . dereceden merkezsel olmayan moment aşağıdaki gibidir:

$$E(X^n) = n \sum_{j=1}^v c_j I_j(n) \quad (3.16)$$

Burada

$$v = \begin{cases} a = 1, 2, 3, \dots \\ \infty, a \text{ pozitif ama tamsayı değilse} \end{cases}$$

$$c_j = (-1)^{j-1} a(a-1)\dots(a-j+1) / j!,$$

$$I_j(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} \exp[-ju(x)] dx.$$

biçiminde tanımlanır. Ayrıca momentler, yaşam fonksiyonu cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$E(X^r) = r \int_0^{\infty} x^{r-1} S_{\dot{U}_{stel-G}}(x) \quad (3.17)$$

Burada, Eşitlik (3.7)'den, yaşam fonksiyonu $a = N$ ve pozitif tamsayı ise,

$$S_{\dot{U}_{stel-G}}(x) = \sum_{j=1}^N c_j \exp[-jt(x)]$$

ve a pozitif ancak tamsayı değil ise,

$$S_{\dot{U}_{stel-G}}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \exp[-jt(x)]$$

biçiminde tanımlanır. Burada, $j-1 = i$ için,

$$c_i = (-1)^i a(a-1)(a-2)\dots(a-i) / (i+1)! = a / (i+1)c_i^*,$$

$$c_i^* = (-1)^i (a-1)(a-2)\dots(a-i) / i!$$

ve

$$I_i(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} \exp[-(i+1)t(x)] dx$$

biçimindedir. Buna göre, $E(X^r) = r \sum_{i=0}^{v-1} c_i I_i(r)$ olur. Böylece, n. dereceden momentler için,

$$E(X^n) = na \sum_{i=0}^{v-1} c_i^* / (i+1) I_i(n)$$

eşitliği elde edilir.

3.3. Sıra İstatistikleri

Dağılım fonksiyonu $F_{\text{Üstel-G}}(x) = [1 - e^{-t(x)}]^a$ ve yf'si $S_{\text{Üstel-G}}(x) = 1 - [1 - e^{-t(x)}]^a$ olan ÜD ailesi için sıra istatistikleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} f_{in}(x) &= \frac{1}{B(i, n-i+1)} \left[1 - (1 - e^{-t(x)})^a \right]^{n-i} at'(x) e^{-t(x)} (1 - e^{-t(x)})^{a-1} (1 - e^{-t(x)})^{a(i-1)} \\ &= \sum_{j=0}^{n-i} (-1)^j \binom{n-i}{j} \frac{1}{B(i, n-i+1)} (1 - e^{-t(x)})^{a(j+i)-1} at'(x) e^{-t(x)} \\ &= \sum_{j=0}^{n-i} w_j g_j^*(x) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Burada $w_j = \frac{(-1)^j n!}{(n-i-j)!(i-1)!j!(i+j)!}$, $g_j^* = a(i+j)t'(x)e^{-t(x)}(1 - e^{-t(x)})^{a(i+j)-1}$, dir [88].

3.4. Parametre Tahminleri

G temel dağılımı için parametre vektörü $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_k)$ olmak üzere, ÜD'ye ilişkin parametre vektörü $(k+1)$ boyutlu $\theta = (a, \omega)$ biçimindedir. Dağılım parametrelerin tahmini için en çok olabilirlik yönteminden faydalanılmaktadır. Dağılıma ilişkin olabilirlik fonksiyonu,

$$\begin{aligned} L(\theta, \omega) &\propto \left[\prod_{i=1}^r f(x_i | \theta) S(x_r | \theta) \right]^{n-r} \\ &\propto \left[\prod_{i=1}^r a G^{a-1}(x_i | \omega) g(x_i | \theta) [1 - G^a(x_r | \omega)] \right]^{n-r} \end{aligned} \quad (3.19)$$

olarak tanımlanır. Burada $\underline{x} = (x_1, \dots, x_r)$ ilk r sıralı istatistikleridir. Bu eşitliğin logaritması alınarak olabilirlik fonksiyonun logaritması aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\log L = r \log a + (a-1) \sum_{i=1}^r \log G(x_i | \omega) + \sum_{i=1}^r \log g(x_i | \omega) + (n-r) \log [1 - G^a(x_r | \omega)] \quad (3.20)$$

Eşitlik (3.20)'nin parametrelere göre kısmi türevleri alınarak en çok olabilirlik eşitlikleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\frac{\partial \log L}{\partial a} = \frac{r}{a} + \sum_{i=1}^r \log G(x_i | \omega) - \frac{(n-r)G^a(x_r | \omega) \log G(x_r | \omega)}{1 - G^a(x_r | \omega)} \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \omega_j} = (a-1) + \sum_{i=1}^r \frac{1}{G(x_i | \omega)} \frac{\partial G(x_i | \omega)}{\partial \omega_j} + \sum_{i=1}^r \frac{1}{g(x_i | \omega)} \frac{\partial g(x_i | \omega)}{\partial \omega_j} - \frac{(n-r)aG^{a-1}(x_r | \omega) \partial G(x_r | \omega)}{1 - G^a(x_r | \omega) \partial \omega_j} \quad (3.22)$$

Bu eşitlikler, 0'a eşitlenip çözülerek parametre değerlerine ulaşılmaktadır.

4. KUMARASWAMY GENELLEŞTİRİLMİŞ DAĞILIM AİLESİ

Kumaraswamy genelleştirilmiş dağılım (KGD) ailesi, ÜD ailesinden farklı olarak, “üretici dağılım” yaklaşımıyla tanımlanan bir ailedir. Burada “üretici” kelimesi, temel alınan farklı her bir G dağılımı için, üretici dağılımın özelliğini taşıyan, farklı bir F dağılımının elde edilmesi anlamındadır. Tanımlanan yeni dağılım esnekliğini, temel dağılımdan farklı olarak, eklenen üretici dağılım parametrelerinden alır. Kw-G olarak kısaca gösterilen aile Cordeiro ve Castro [59] tarafından önerilmiştir. Bu dağılım ailesi Kumaraswamy dağılımını üretici dağılım olarak kabul eder ve temel alınan herhangi bir G olasılık dağılımıyla yeni bir Kumaraswamy türü dağılımı üretir. Bu aileye ilişkin df ve oyf sırasıyla aşağıdaki eşitliklerle tanımlanmıştır:

$$F_{Kw-G}(x) = 1 - [1 - G^a(x)]^b, \quad (4.1)$$

$$f_{Kw-G}(x) = abg(x)G^{a-1}(x)[1 - G^a(x)]^{b-1}. \quad (4.2)$$

Ayrıca, Eşitlik (4.2)'deki binom açılımı kullanarak, $w_k = (-1)^k ab \binom{b-1}{k}$ olmak üzere,

oyf'ye ilişkin aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$f_{Kw-G}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k G(x)^{a(k+1)-1} g(x). \quad (4.3)$$

Kw- G dağılımının parametreleri, temel alınan G dağılımının parametreleri ile $a > 0$ ve $b > 0$ şekil parametrelerinden oluşur. Parametre sayısının artmasıyla basıklık ve çarpıklığın değişeceğinden dağılım daha esnek bir hale getirmektedir. Bu esneklik sayesinde, temel dağılımların çarpık veri setlerinin modellenmesinde yetersiz kalması durumunda bile, daha iyi uyum sağlayabilen alternatif bir dağılıma ulaşılmaktadır. Bu dağılıma ilişkin yf ve hf fonksiyonu ise sırasıyla Eşitlik (4.4) ve (4.5)'te verilmiştir:

$$S_{Kw-G}(x) = \{1 - G^a(x)\}^b, \quad (4.4)$$

$$h_{Kw-G}(x) = \frac{abG^{a-1}(x)g(x)}{1 - G^a(x)}. \quad (4.5)$$

Kw-G dağılımı için b bağımsız bileşenlerinin bir a sistemini oluşturduğu ve her bileşenin a bağımsız alt bileşenlerinden oluştuğu düşünülürse, herhangi bir b bileşenin hata vermesiyle beraber, sistemin kendisi de hata verecektir. Diğer taraftan, herhangi bir b bileşenin hata vermesi, tüm a alt bileşenlerinin hata vermesiyle mümkündür. Örneğin, X_{j1}, \dots, X_{ja} , $j = 1, \dots, b$ olmak üzere, j . bileşenin alt bileşenlerinin, $G(x)$ dağılımı

gösteren, yaşam sürelerini ifade etsin. X_j , j bileşene ilişkin yaşam süresini ve X tüm sistemin yaşam süresini ifade etsin. Bu durumda, X 'e ilişkin df, bir sistemin hata verme olasılığı olarak da ifade edilebilir.

Bu bölümde alt başlıklar altında, öncelikle Kumaraswamy dağılımına yer verilmiştir. Daha sonra yeni tanımlanacak dağılıma ilişkin temel dağılım olarak seçilen Lindley dağılımından bahsedilmiş ve tez çalışmasında yeni bir dağılım olarak Kumaraswamy Lindley dağılımı tanımlanmıştır.

4.1. Kumaraswamy Dağılımı

Kumaraswamy dağılımı, Beta dağılımına benzer bir dağılım olmasının yanı sıra, geniş şekil çeşitliliğine sahip olması yüzünden birçok veriyi modellemede kullanılmaktadır. Kantil fonksiyonunun kolaylıkla elde edilebilir olması, özellikle veri üretme ve benzetim çalışmalarında bu dağılımı tercih edilir hale getirmiştir. Kumaraswamy dağılımı, hidroloji alanı üzerine yapılan bir çalışmada, Kumaraswamy [89] tarafından önerilmiştir. Daha sonra, birçok farklı alanda kullanıldığı çalışmalar yapılmıştır. Bu dağılımın son dönemlerde daha çok ilgi görmüş, istatistiksel özellikleri incelenmiş ve dağılımın kullanıldığı birçok yeni çalışma hayata geçirilmiştir [90]-[94].

Jones [94] çalışmasında, bu dağılımı Beta dağılımına alternatif bir dağılım olarak değerlendirmiş ve benzer özelliklerinin yanı sıra, avantajlı özelliklerini belirtmiştir. Beta ve Kumaraswamy dağılımının benzer yanları aşağıda listelenmiştir:

- Her iki dağılım için de tek modlu, küvet şekilli, monoton ve sabit yoğunluklu dağılım şekilleri elde edilebilir ve bu şekiller parametre değerlerine bağlıdır.
- Özel olarak kuvvet fonksiyonu ve tek düze dağılım ile ifade edilebilir.
- Sıra istatistikleri kolay yorumlanabilir.
- Mod ifadesi kapalı forma sahiptir.
- İki dağılım için de x raslantı değişkeninin tanım aralığı $(0,1)$ 'dir.
- Basıklık ve çarpıklığın dağılım parametrelerinin fonksiyonları ile olan ilişkisi benzerdir.
- En çok olasılık tahminleri benzerlik gösterir.
- Benzer ve basit standart limit dağılımlarına sahiptirler.

Öte yandan, Kumaraswamy dağılımının avantajlı yanları ise aşağıdaki gibi sıralanabilir:

- Dağılım fonksiyonu özel bir fonksiyonu içermeyen basit bir yapıya sahiptir.
- Kantil fonksiyonu kolaylıkla elde edilebilir.

- Kantil fonksiyonu yoluyla rasgele değişken üretimi kolaydır.
- L-momentleri fonksiyonel olarak ifade edilebilir.
- Sıra istatistiklerinin momentleri basit şekilde elde edilebilir.

Ayrıca, Kumaraswamy dağılımı, McDonald'ın genelleştirilmiş Beta dağılımının özel bir şeklidir [50]. Son yıllarda, Cordeiro ve Castro [59] bu esnek ve birçok açıdan avantajlı dağılımı kullanarak Kw-G dağılım ailesini tanımlamış ve bu ailenin bir üyesi olan yeni dağılımların önünü açmıştır.

Kumaraswamy dağılımına ilişkin oyf, $\alpha > 0$ ve $\beta > 0$ şekil parametreleri ve c, b sınır parametreleri olmak üzere, Eşitlik (4.6)'da verilmiştir.

$$f_z(z; \alpha, \beta, b, c) = \frac{1}{b-c} \alpha \beta \left(\frac{z-c}{b-c} \right)^{\alpha-1} \left[1 - \left(\frac{z-c}{b-c} \right)^\alpha \right]^{\beta-1}, \quad c < z < b \quad (4.6)$$

Bu dağılım, sınır parametrelerinden dolayı "min-max dağılımı" olarak da adlandırılmaktadır. Burada $X = \frac{z-c}{b-c}$ değişken dönüşümü ile, $b=1$ ve $c=0$ alındığında,

dağılımın yaygın olarak kullanılan hali, standart Kumaraswamy dağılımı, elde edilir. Bu çalışmada, Kumaraswamy dağılımından bahsedilen standart Kumaraswamy dağılım olacak ve bu dağılıma ilişkin özelliklere yer verilecektir.

Kumaraswamy dağılıma ilişkin df ve oyf, sırasıyla, $x \in (0,1)$ ve $\alpha > 0, \beta > 0$ için aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$F(x) = 1 - (1 - x^\alpha)^\beta, \quad (4.7)$$

$$f(x) = \alpha \beta x^{\alpha-1} (1 - x^\alpha)^{\beta-1}. \quad (4.8)$$

Dağılıma ilişkin yf ve hf ise sırasıyla aşağıdaki eşitliklerle verilmiştir:

$$S(x) = 1 - (1 - x^\alpha)^\beta, \quad (4.9)$$

$$h(x) = \frac{\alpha \beta x^{\alpha-1}}{(1 - x^\alpha)}. \quad (4.10)$$

Dağılımın kantil fonksiyonu $F^{-1}(u) = Q(u)$, u tek düze dağılımlı bir raslantı değişkeni ve $0 < u < 1$ olmak üzere, Eşitlik (4.11) ile ifade edilir:

$$Q(u) = \left[1 - (1 - u)^{1/\beta} \right]^{1/\alpha}. \quad (4.11)$$

Kantil fonksiyonunun özel bir değeri olarak, bu dağılıma ilişkin medyan ise aşağıdaki gibidir:

$$med(X) = (1 - 0.5^{1/\beta})^{1/\alpha}. \quad (4.12)$$

4.2. Lindley Dağılımı

Bu bölümde, tez çalışmasının konusu olan Kum-Lindley dağılımını elde etmek için temel dağılım olarak seçilen Lindley dağılımı ele alınmıştır. Bu dağılım, Lindley [95] tarafından önerilmiştir. Ghitany [96], çalışmasında Lindley dağılımına ve özelliklerine ayrıntılı olarak yer vermiştir. Ayrıca üstel dağılımın yetersiz olduğu birçok durumda daha iyi bir model olarak kullanılabileceğini ifade etmiştir. Deniz ve Ojeda [97], Lindley dağılımının kesikli biçimini sigorta verilerini modellemede kullanmıştır. Sankaran [98], Poisson-Lindley karma dağılımını elde etmiştir. Ghitany vd. [99], Adhikari ve Srivastava [100], sırasıyla Poisson-Lindley dağılımının boyut yanlı (size-biased) ve sıfırı-kesilmiş (zero-truncated) biçimlerini önermiştir. Ghitany vd. [101], kesikli Poisson-Lindley dağılımına ilişkin çeşitli parametre tahmin yöntemleri üzerine bir çalışma gerçekleştirmiştir. Bakouch vd. [102], genişletilmiş Lindley dağılımını önermiştir. Mazucheli ve Achcar [103], Lindley dağılımının yaşam süresi verilerinin uygulamaları üzerinde durmuştur. Ghitany vd. [104], iki parametrelilik ağırlıklandırılmış Lindley dağılımını geliştirmiş ve yaşam verilerine uygulanmasını yapmıştır. Son olarak, Zakerzadah ve Dolati [105] ve Elbatal vd. [106] ise, genelleştirilmiş Lindley ve Kumaraswamy Quasi Lindley dağılımlarını elde etmiştir.

Lindley dağılıma ilişkin df , oyf , yf ve hf , $x > 0$ ve $\theta > 0$ için, sırasıyla, aşağıdaki gibidir:

$$L(x) = 1 - e^{-\theta x} \left[1 + \frac{\theta x}{\theta + 1} \right], \quad (4.13)$$

$$l(x) = \frac{\theta^2}{\theta + 1} e^{-\theta x} (1 + x), \quad (4.14)$$

$$S(x) = e^{-\theta x} \left[\frac{\theta x}{\theta + 1} + 1 \right], \quad (4.15)$$

$$h(x) = \frac{\theta^2 (1 + x)}{(\theta + 1 + \theta x)}. \quad (4.16)$$

4.3. Kumaraswamy-Lindley Dağılımı

Bu alt bölümde yeni dağılım olarak Kumaraswamy-Lindley (KL) dağılımı elde edilmiş ve özellikleri incelenmiştir.

4.3.1. Dağılıma İlişkin Fonksiyonlar

Bu dağılıma ilişkin df, $x > 0$ ve $a, b, \theta > 0$ olmak üzere, Eşitlik (4.2)'de Eşitlik (4.14)'ün yerine konması ile aşağıdaki gibi elde edilir:

$$F_{KL}(x) = 1 - \left\{ 1 - \left(1 - e^{-\theta x} \left[1 + \frac{\theta x}{\theta + 1} \right] \right)^a \right\}^b. \quad (4.17)$$

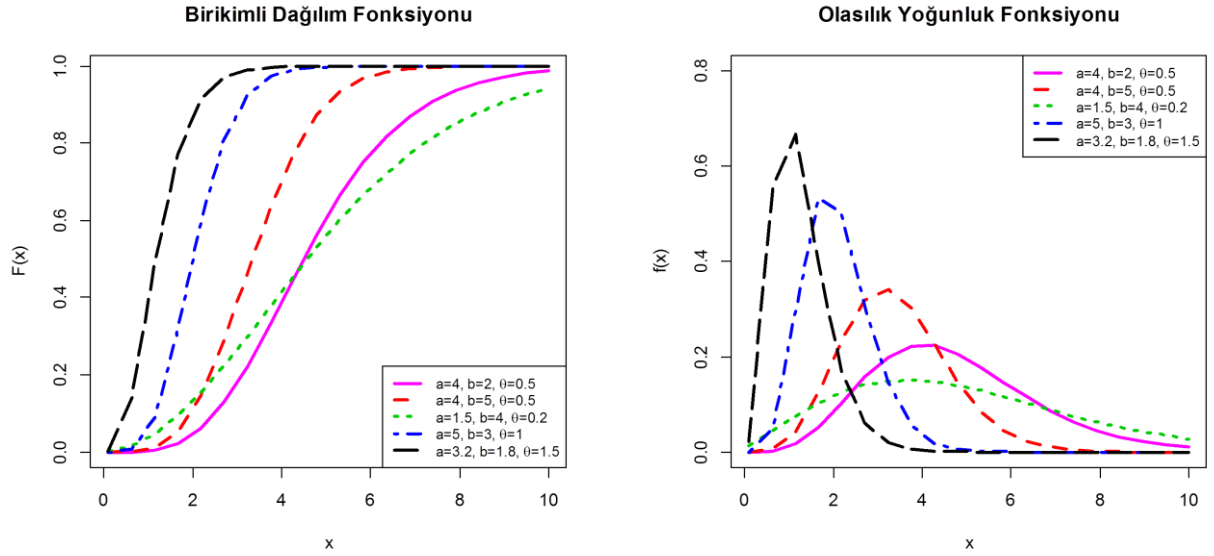
Eşitlik (4.13), Eşitlik (4.14) ve Eşitlik (4.1)'den dağılıma ilişkin oyf aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$f_{KL}(x) = ab \left(\frac{\theta^2}{\theta + 1} (1 + x) e^{-\theta x} \right) \left(1 - e^{-\theta x} \left[1 + \frac{\theta x}{\theta + 1} \right] \right)^{a-1} \left\{ 1 - \left(1 - e^{-\theta x} \left[1 + \frac{\theta x}{\theta + 1} \right] \right)^a \right\}^{b-1}. \quad (4.18)$$

Ayrıca, binom açılımı yardımıyla oyf'nin bir diğer ifadesi, $w_k = (-1)^k ab \binom{b-1}{k}$ olmak üzere, aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$f_{KL}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k \left[1 - e^{-\theta x} \left(1 + \frac{\theta x}{\theta + 1} \right) \right]^{a(k+1)-1} \frac{\theta^2}{\theta + 1} (1 + x) e^{-\theta x}. \quad (4.19)$$

Şekil 4.1'de KL dağılıma ilişkin farklı parametre değerleriyle elde edilen df ve oyf grafikleri gösterilmiştir.



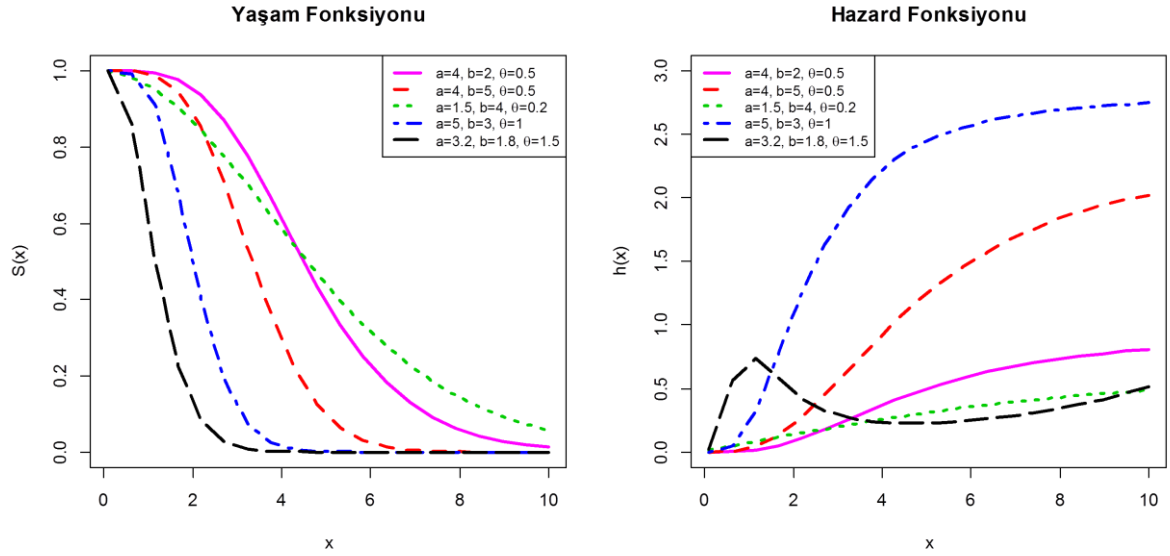
Şekil 4.1 KL dağılımına ilişkin df ve oyf grafikleri

Dağılımları karakterize eden diğer iki fonksiyon da, hazard fonksiyonu ve yaşam fonksiyonudur. KL dağılımına ilişkin bu fonksiyonlar aşağıdaki eşitliklerde sırasıyla tanımlanmıştır:

$$S_{KL}(x) = 1 - F(x) = \left\{ 1 - \left(1 - e^{-\theta x} \left[1 + \frac{\theta x}{\theta + 1} \right] \right)^a \right\}^b, \quad (4.20)$$

$$h_{KL}(x) = \frac{ab[\theta^2 / (\theta + 1)](1 + x)e^{-\theta x} \left(1 - e^{-\theta x} \left[1 + \frac{\theta x}{\theta + 1} \right] \right)^{a-1}}{\left[1 - \left(1 - e^{-\theta x} \left[1 + \frac{\theta x}{\theta + 1} \right] \right)^a \right]}. \quad (4.21)$$

KL dağılımının farklı parametrelere karşılık gelen y_f ve h_f grafikleri ise, Şekil 4.2’de verilmiştir. Özellikle h_f grafiklerinin farklı şekillere sahip olması dağılımın esnekliğinin ve farklı verileri modellemedeki gücünün bir göstergesidir. Şekil 4.2’ye göre, KL dağılımının h_f ’si için artan, azalan ve küvet şeklini alabildiği ve dağılımın bu nedenle oldukça esnek olduğu söylenebilir.



Şekil 4.2 KL dağılımına ilişkin yf ve hf grafikleri

4.3.2. Dağılımın ÜD ile İfade Edilmesi

Nadarajah vd.'nin [106] yaptığı çalışmada, KGD ailesinin ÜD cinsinden ifade edildiğini de göstermiştir. Bu nedenle, KGD üyesi KL dağılımını ÜD ailesi ile ifade etmek mümkündür. Bu sayede, önceki bölümde verilen ÜD ailesine ilişkin tüm özellikler KL dağılımı için de geçerli olacaktır. Temel dağılım Lindley dağılımı olmak üzere, $a > 0$ parametresiyle üstelleştirilmiş-Lindley (ÜL) dağılımına sahip bir raslantı değişkeni $X \sim \text{ÜL}(a, \theta)$ için df ve oyf sırasıyla aşağıdaki eşitliklerle tanımlanmıştır:

$$F_{\text{ÜL}}(x; a, \theta) = \left[1 - e^{-\theta x} \left(1 + \frac{\theta x}{\theta + 1} \right) \right]^a, \quad (4.22)$$

$$f_{\text{ÜL}}(x; a, \theta) = a \frac{\theta^2}{\theta + 1} (1 + x) e^{-\theta x} \left[1 - e^{-\theta x} \left(1 + \frac{\theta x}{\theta + 1} \right) \right]^{a-1}. \quad (4.23)$$

KL dağılımına ilişkin df ve oyf'nin, $x > 0$ ve $a, b, \theta > 0$ olmak üzere, ÜD ile ifadesi aşağıdaki gibi bulunmuştur:

$$F_{\text{KL}}(x) = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \binom{b}{k} (-1)^k F_{\text{ÜL}}(x; ka, \theta)(x), \quad (4.24)$$

$$f_{\text{KL}}(x) = a^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w_k}{(k+1)} f_{\text{ÜL}}(x; a(k+1), \theta)(x). \quad (4.25)$$

Burada $w_k = (-1)^k ab \binom{b-1}{k}$ biçiminde tanımlanmıştır.

4.3.3. Momentler

$X \sim KL(a, b, \theta)$ olmak üzere, X 'in momentlerini elde etmek için $\dot{U}L(a(i+1), \theta)$ dağılımlı Y_i değişkenlerinin momentlerinden faydalanılabilir [59]. Y_i değişkenlerine ilişkin momentler Eşitlik (4.16)'daki gibi olmak üzere, KL dağılımlı X raslantı değişkeninin momentleri aşağıdaki gibidir:

$$E(X^n) = a^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{w_i}{(i+1)} E(Y_i^n). \quad (4.26)$$

Momentler için elde edilen bir diğer eşitlik ise aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$E(X^n) = \sum_{i=0}^{\infty} w_i \tau(n, a(i+1) - 1). \quad (4.27)$$

Burada, $w_i = (-1)^i ab \binom{b-1}{i}$ ve $\tau(n, a) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n L(x)^a l(x) dx$ ya da $Q(x) = L^1(x)$ olmak üzere, $\tau(n, a) = \int_0^1 Q(u)^n u^a du$ integralleri ile ifade edilir.

4.3.4. Moment Çıkaran Fonksiyon

$X \sim KL(a, b, \theta)$ olmak üzere, moment çıkaran fonksiyon,

$$\begin{aligned} M(t) &= ab E \left[\exp(tX) \left[1 - e^{-\theta x} \left(1 + \frac{\theta x}{\theta + 1} \right) \right]^{a-1} \left\{ 1 - \left[1 - e^{-\theta x} \left(1 + \frac{\theta x}{\theta + 1} \right) \right]^a \right\}^{b-1} \right] \\ &= ab \sum_{k=0}^{\infty} \binom{b-1}{k} (-1)^k E \left[\frac{\exp(tX)}{U^{[a(k+1)-1]}} \right] \end{aligned} \quad (4.28)$$

olarak bulunmuştur. Eşitlik (4.28)'te U birim aralıkta uniform dağılan ve X 'ten bağımsız olmayan raslantı değişkenidir.

Moment çıkaran fonksiyonu $\dot{U}L$ dağılımı yardımıyla tanımlamak mümkündür. $Y_i \sim \dot{U}L(a(i+1), \theta)$ için $M_i(t)$ moment çıkaran fonksiyon olmak üzere ,

$$M(t) = a^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{w_i}{(i+1)} M_i(t) \quad (4.29)$$

eşitliği geçerlidir. Bir diğer gösterim,

$$\rho(t, a) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(tX) L^a(x) l(x) dx$$

veya

$$\rho(t, a) = \int_0^1 \exp\{tQ(u)\} u^a du$$

olmak üzere aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$M(t) = \sum_{i=0}^{\infty} w_i \rho(t, a(i+1) - 1). \quad (4.30)$$

4.3.5. Entropi

Dağılım fonksiyonu $F(x)$ olan bir X raslantı değişkeninin entropisi, belirsizlik değişimin bir ölçüsüdür. En çok kullanılan entropi ölçütleri, Shannon [107] ve Rènyi [108] entropi ölçütleridir. Shannon entropisi $E[-\log f(X)]$ ile tanımlanır ve Rènyi entropisinin özel bir halidir.

$X \sim KL(a, b, \theta)$ olmak üzere, X raslantı değişkeninin Shannon entropisi,

$$\begin{aligned} E[-\log f_{KL}(X)] &= -\log(ab) - E[\log l(X)] - (a-1)E[\log L(X)] \\ &\quad - (b-1)E[\log \{1 - L^a(X)\}] \end{aligned} \quad (4.31)$$

biçimindedir. Burada,

$$\begin{aligned} E[\log l(X)] &= a^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w_k}{k+1} E[\log l(Y_k)], \\ E[\log L(X)] &= \frac{b}{a} \int_0^1 \log u (1-u)^{b-1} du = \frac{b}{a} \frac{\partial B(\alpha+1, b)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = -\frac{C + \psi(b+1)}{a}, \\ E[\log \{1 - L^a(X)\}] &= b \int_0^1 \log(u) u^{b-1} du = -\frac{1}{b} \end{aligned}$$

eşitlikleri geçerlidir. Burada, C Euler sabitini ifade etmek üzere, Eşitlik (4.31)'den, Eşitlik (4.32) ya da eş değer olarak Eşitlik (4.33)'e ulaşılır:

$$E[-\log f_{KL}(X)] = -\log(ab) - \sum_{k=0}^{\infty} w_k I_k + \frac{(a-1)C + \psi(b+1)}{a} + \frac{b-1}{b} \quad (4.32)$$

$$E[-\log f_{KL}(X)] = -\log(ab) - a^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w_k}{k+1} E[\log l(Y_k)] + \frac{(a-1)C + \psi(b+1)}{a} + \frac{b-1}{b} \quad (4.33)$$

Belirsizliğin bir diğer ölçütü olan Rènyi entropisi,

$$\mathcal{J}_R(\delta) = \frac{1}{1-\delta} \log \left[\int_{-\infty}^{\infty} f^{\delta}(x) dx \right], \delta > 0, \delta \neq 1 \quad (4.34)$$

biçimindedir. Bu eşilikteki integral ifadesi KL dağılımı için,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{KL}^{\delta}(x) dx = (ab)^{\delta} \int_{-\infty}^{\infty} l^{\delta}(x) L^{(a-1)\delta}(x) \{1 - L^a(x)\}^{(b-1)\delta} dx$$

ya da binom açılımı eşdeğeriyle

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{KL}^{\delta}(x) dx = (ab)^{\delta} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{(b-1)\delta}{j} (-1)^j K(\delta, j)$$

biçiminde bulunmuştur. Burada $K(\delta, j) = \int_0^1 l^{\delta-1}(Q(u)) u^{a(\delta+j)-\delta} du$ olur.

4.3.6. Güvenilirlik

Güvenilirlik ya da dayanıklılık kavramı, bir baskı-direnç modelinde bileşenin ömrü ile ilgilidir. X_1 , bu bileşenin kuvvete olan direncini ifade eden raslantı değişkeni olarak tanımlansın. X_2 ise, bileşenin maruz kaldığı kuvveti ifade eden raslantı değişkeni olsun. Bu durumda, bileşenin ömrü, sahip olduğu direncin maruz kaldığı kuvveti aşım aşmaması ile ilgilidir. Diğer bir deyişle, $X_1 > X_2$ olduğu sürece bir başarı söz konusudur. Aksi takdirde bir hata ile karşılaşılır. Güvenilirlik ise, bu bileşenin dayanma olasılığının bir ölçüsüdür ve $R = P(X_2 < X_1)$ olarak ifade edilir. Güvenilirlik özellikle mühendislik alanında birçok uygulamada kullanılan bir ölçüttür. Bu ölçüt,

$$R = \int_0^{\infty} f_1(x) F_2(x) dx \quad (4.35)$$

biçimindedir. $X_1 \sim KL(a_1, b_1, \theta_1)$ ve $X_2 \sim KL(a_2, b_2, \theta_2)$ iki KL dağılımlı bağımsız değişken olmak üzere, bu değişkenlere ilişkin güvenilirlik ifadesi olan $P(X_2 < X_1)$ olasılığı Eşitlik (4.36)'daki gibi elde edilmiştir:

$$R = 1 - a_1 b_1 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{b_1 - 1}{j} \binom{b_2}{k} \frac{(-1)^{j+k}}{[a_1(j+1) + a_2 k]}. \quad (4.36)$$

4.3.7. Sıra İstatistikleri

$f_{i:n}(x)$, i . sıra istatistiği $X_{i:n}$ ' ye ilişkin yoğunluk fonksiyonu olmak üzere, KL dağılımlı X_1, \dots, X_n , $i = 1, \dots, n$, raslantı değişkenleri için aşağıdaki eşitliğe ulaşılmıştır:

$$f_{i:n}(x) = \frac{f(x)}{B(i, n-i+1)} \sum_{j=0}^{n-i} (-1)^j \binom{n-i}{j} F_{KL}(x)^{i+j-1} \quad (4.37)$$

Cordeiro ve Castro [59], Kw-G ailesine ilişkin sıra istatistiklerini tanımlarken, farklı seri açılımlarını kullanmıştır. Bu açılımlar, KL dağılımının sıra istatistikleri için kullanılarak,

$$q_{r,k} = \sum_{j=0}^{n-i} \frac{(-1)^j \binom{n-i}{j} w_k p_{r,i+j-1}}{B(i, n-i+1)}$$

ve

$$p_{r,u}(a,b) = \sum_{k=0}^u (-1)^k \binom{u}{k} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=r}^{\infty} (-1)^{mr+l} \binom{kb}{m} \binom{ma}{l} \binom{l}{r}$$

olmak üzere, Eşitlik (4.37)'e eş değer olarak Eşitlik (4.38)'e ulaşılır:

$$f_{i:n}(x) = \sum_{r,k=0}^{\infty} q_{r,k} L(x)^{a(k+1)+r-1} l(x). \quad (4.38)$$

Sıra istatistiklerine ilişkin momentler ise, $\tau(n, a) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n L(x)^a l(x) dx$ olmak üzere,

$$E(X_{i:n}^s) = \sum_{r,k=0}^{\infty} q_{r,k} \tau(s, a(k+1)+r-1) \quad (4.39)$$

ve moment çıkaran fonksiyon $\rho(t, a) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(tX) L^a(x) l(x)$ olmak üzere,

$$M_{i:n}(t) = \sum_{r,k=0}^{\infty} q_{r,k} \rho(t, a(k+1)+r-1) \quad (4.40)$$

biçiminde bulunmuştur.

4.3.8. Parametre Tahminleri

Bu alt bölümde KL dağılımına ait en çok olabilirlik parametre tahminleri yapılacaktır. x_1, x_2, \dots, x_n , $KL(a, b, \theta)$ dağılımından rasgele bir örneklem olsun. $KL(a, b, \theta)$ dağılımına ilişkin log-olabilirlik ($\log L$) fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} \log L = n \log a + n \log b + \sum_{j=1}^n \log l(x_j; \theta) + (a-1) \sum_{j=1}^n \log L(x_j; \theta) \\ + (b-1) \sum_{j=1}^n \log \left\{ 1 - L^a(x_j; \theta) \right\}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Bu eşitliliğin her bir parametreye (a, b, θ) göre birinci türevinin alınıp, sıfıra eşitlenmesiyle en çok olabilirlik eşitlikleri aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log L}{\partial a} = \frac{n}{a} + \sum_{j=1}^n \log \left(1 - e^{-\theta x_j} \left[1 + \frac{\theta x_j}{\theta + 1} \right] \right) \\ - (b-1) \sum_{j=1}^n \frac{\left(1 - e^{-\theta x_j} \left[1 + \frac{\theta x_j}{\theta + 1} \right] \right)^a \log \left(1 - e^{-\theta x_j} \left[1 + \frac{\theta x_j}{\theta + 1} \right] \right)}{1 - \left(1 - e^{-\theta x_j} \left[1 + \frac{\theta x_j}{\theta + 1} \right] \right)^a}, \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial b} = \frac{n}{b} + \sum_{j=1}^n \log \left\{ 1 - \left(1 - e^{-\theta x_j} \left[1 + \frac{\theta x_j}{\theta + 1} \right] \right)^a \right\}, \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log L}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^n \frac{(\theta + 1)e^{\theta x_i} \left[\frac{2\theta(x+1) - x_i(1+x_i)\theta^2}{(\theta + 1)e^{\theta x}} - \frac{\theta^2(1+x_i)}{(\theta + 1)^2 e^{\theta x_i}} \right]}{\theta^2(1+x_i)} \\ - (a-1) \sum_{j=1}^n \frac{(\theta + 1)e^{\theta x_i} \theta x_i [x_i(\theta + 1) + \theta + 2]}{\theta + 1 - (\theta + 1 + \theta x_i) (\theta^2 + 2\theta + 1)e^{\theta x_i}} \\ - a(b-1) \frac{\sum_{j=1}^n \left[\frac{\theta + 1 - (\theta + 1 + \theta x_i)}{(\theta + 1)e^{\theta x_i}} \right]^{a-1} \frac{\theta x_i [x_i(\theta + 1) + \theta + 2]}{(\theta^2 + 2\theta + 1)e^{\theta x_i}}}{\left\{ 1 - \left[\frac{\theta + 1 - (\theta + 1 + \theta x_i)}{(\theta + 1)e^{\theta x_i}} \right]^a \right\}} \end{aligned} \quad (4.44)$$

Parametre tahminlerinin güven aralıkları ve hipotez testleri için Fisher bilgi matrisine ihtiyaç duyulduğundan, Fisher bilgi matrisi aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$I = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix}.$$

Fisher bilgi matrisinin elemanları ise, Eşitlik (4.45)-(4.49)'daki gibi elde edilmiştir:

$$I_{11} = \frac{\partial^2 \log L}{\partial a^2} = -\frac{n}{a^2} - n \frac{(\log L(X; \theta))^2 L^a(X; \theta)}{(L^a(X; \theta))^2}, \quad (4.45)$$

$$I_{12} = I_{21} = \frac{\partial^2 \log L}{\partial a \partial b} = -n \frac{\log L(X; \theta) L^a(X; \theta)}{1 - L^a(X; \theta)},$$

$$I_{13} = I_{31} = \frac{\partial^2 \log L}{\partial a \partial \theta} = n \frac{1}{L(X; \theta)} \frac{\partial L(X; \theta)}{\partial \theta} - n(b-1) \frac{L^{a-1}(X; \theta) (a \log L(X; \theta) + 1)}{1 - L^a(X; \theta)} \frac{\partial L(X; \theta)}{\partial \theta} \\ + na \frac{L^{2a-1}(X; \theta) \log L(X; \theta)}{(1 - L^a(X; \theta))^2} \frac{\partial L(X; \theta)}{\partial \theta}, \quad (4.46)$$

$$I_{22} = \frac{\partial^2 \log L}{\partial b^2} = -\frac{n}{b^2}, \quad (4.47)$$

$$I_{23} = I_{32} = \frac{\partial^2 \log L}{\partial b \partial \theta} = n \frac{L^{a-1}(X; \theta)}{1 - L^a(X; \theta)} \frac{\partial L(X; \theta)}{\partial \theta}, \quad (4.48)$$

$$I_{33} = \frac{\partial^2 \log L}{\partial \theta^2} = -n \frac{1}{l^2(X; \theta)} \frac{\partial^2 l(X; \theta)}{\partial \theta^2} - n(a-1) \frac{1}{L^2(X; \theta)} \frac{\partial^2 L(X; \theta)}{\partial \theta^2} \\ + n \frac{1}{l(X; \theta)} \frac{\partial^2 l(X; \theta)}{\partial \theta^2} + n \frac{1}{L(X; \theta)} \frac{\partial^2 L(X; \theta)}{\partial \theta^2} \\ - na(a-1)(b-1) \frac{L^{a-2}(X; \theta)}{1 - L^a(X; \theta)} \frac{\partial^2 L(X; \theta)}{\partial \theta^2} \\ - na^2(b-1) \frac{L^{2(a-1)}(X; \theta)}{\{1 - L^a(X; \theta)\}^2} \frac{\partial^2 L(X; \theta)}{\partial \theta^2} \\ - na(b-1) \frac{L^{a-1}(X; \theta)}{1 - L^a(X; \theta)} \frac{\partial^2 L(X; \theta)}{\partial \theta^2}. \quad (4.49)$$

4.3.9. Benzetim Çalışması

Bu bölümde önerilen yeni dağılıma ilişkin benzetim çalışmasına yer verilmiştir. Bu benzetim çalışmasında en çok olabilirlik yöntemi kullanılarak elde edilen tahminlerin hata kareler ortalama (HKO) ve ortalama mutlak sapma (OMS) değerleri hesaplanarak, tahmin edilen dağılım parametreleri üzerinde değerlendirme yapılmıştır. Benzetim çalışmalarının senaryoları her bir dağılım için seçilen rasgele dört parametre kombinasyonuna ve beş örneklem büyüklüğüne dayanmaktadır. Rasgele seçilen parametre kombinasyonlarında farklı parametre büyüklükleri ve parametreler arasındaki büyüklük sıralamasının gözlemlenebileceği değerler seçilmeye çalışılmıştır.

Örneklem büyüklükleri (n), 30, 50, 200, 500 ve 1000 olarak belirlenmiştir. Bu sayede, farklı örneklem büyüklüklerinin parametre tahminleri üzerindeki etkisi gözlemlenmeye

çalışılmıştır. Çalışmada tekrar sayısının 1000 olması, başka bir pilot çalışma aracılığıyla, yeterli görülmüştür. Veri üretim aşamasında benzetim tekniklerinden ters dönüşüm yöntemi kullanılmıştır. Ters dönüşüm yöntemi dağılımlara ilişkin kantil fonksiyonlarına dayanan bir yöntemdir. X sürekli bir raslantı değişkeni ve F bu raslantı değişkeninin dağılım fonksiyonu olmak üzere, $U \sim U(0,1)$ için $F^{-1}(U) = Q(U)$ raslantı değişkeni ile X aynı dağılımlıdır. $U(0,1)$ tekdüze dağılımdan üretilen U değeri $F^{-1}(U)$ dönüşümü sonucu F dağılım fonksiyonuna sahip dağılımdan üretilmiş olur. Bu yöntem ters dönüşüm yöntemi olarak bilinmektedir.

KL dağılımına ilişkin veri üretim aşamasında kullanılan kantil fonksiyonu aşağıdaki eşitlikte yer almaktadır:

$$Q_{KL}(u) = -W \left[\left\{ \left[1 - (1-u)^{(1/b)} \right]^{(1/a)} - 1 \right\} (\theta + 1) e^{-(\theta+1)} - \theta - 1 \right] / \theta. \quad (4.50)$$

Burada, $W(\cdot)$ Lambert fonksiyonunu ifade etmektedir.

Benzetim çalışmalarının tüm aşamaları R Paket Programı ile gerçekleştirilmiştir. Keyfi olarak verilen parametre değerleriyle KL dağılımından üretilen veri setleri, sonrasında en çok olabilirlik yöntemi ile tahmin edilmiştir. Tahmin sırasında en çok olabilirlik eşitliklerinin çözümlenmesinde CG (conjugate gradient) optimizasyon yöntemine başvurulmuştur. Parametre tahminlerinde kullanılan farklı iteratif yöntemlerin parametre sonuçlarını etkilediği yapılan pilot çalışmada saptanmıştır. Yöntemler arasında en başarılı yöntem CG yöntemi olarak belirlenmiş ve benzetim çalışmasında bu yöntem tercih edilmiştir. Son olarak, gerçek değerler ile tahmin edilen değerler arasındaki farkı ölçebilmek adına HKO ve OMS değerleri hesaplanarak kaydedilmiştir. KL dağılımına ilişkin sonuçlar Tablo 4.1'deki elde edilmiştir.

Tablo 4.1 Keyfi parametre değerlerine göre KL dağılımına ilişkin benzetim sonuçları

n	\hat{a}	\hat{b}	$\hat{\theta}$	HKO			OMS		
	$a = 0.5$	$b = 0.2$	$\theta = 0.3$						
30	0.61096	0.27959	0.27647	0.04046	0.01269	0.00790	0.19913	0.11416	0.10364
50	0.55895	0.23620	0.28098	0.01713	0.00334	0.00241	0.13145	0.05190	0.05354
200	0.52394	0.23498	0.27965	0.00376	0.00605	0.00170	0.06145	0.04657	0.04046
500	0.51033	0.23207	0.27837	0.00103	0.00469	0.00151	0.03146	0.03898	0.03195
1000	0.50376	0.20842	0.29350	0.00042	0.00050	0.00030	0.01865	0.01158	0.01082
	$a = 3.5$	$b = 0.25$	$\theta = 5$						
30	3.61750	0.29453	4.88590	0.29207	0.02312	0.20308	0.50777	0.07347	0.40279
50	3.60730	0.28311	4.89930	0.21327	0.01184	0.20495	0.49935	0.06295	0.42199
200	3.53300	0.25563	4.99890	0.07846	0.00067	0.08194	0.28953	0.02623	0.25874
500	3.50660	0.25403	4.97150	0.01734	0.00020	0.01512	0.12947	0.01370	0.10347
1000	3.50700	0.25232	4.98530	0.01905	0.00012	0.02222	0.13281	0.01133	0.11727
	$a = 5$	$b = 7$	$\theta = 12$						
30	5.61570	7.41750	12.95200	1.26130	3.25490	3.94960	1.17100	2.02740	2.06710
50	5.45190	7.03510	12.88100	0.77812	2.21220	3.15400	0.91127	1.62450	1.68240
200	5.10060	7.08370	12.25900	0.13670	1.35490	1.06490	0.38364	1.33090	1.17910
500	5.00800	7.35590	11.92900	0.05244	1.07900	0.60337	0.26361	1.16030	0.94288
1000	5.04780	6.99760	12.14300	0.03136	0.55616	0.40510	0.20408	0.87245	0.74028
	$a = 10$	$b = 5$	$\theta = 3$						
30	10.31100	5.07510	3.06380	0.90454	0.75492	0.04175	1.05330	0.98723	0.19202
50	10.29400	5.35680	3.01400	0.71955	0.78363	0.01161	0.81810	0.84462	0.10522
200	10.00700	5.01250	3.00350	0.06075	0.05824	0.00155	0.27207	0.26809	0.04345
500	10.03700	5.05730	2.99990	0.07808	0.08356	0.00147	0.29114	0.29265	0.03726
1000	10.01100	5.00780	3.00020	0.01294	0.01291	0.00031	0.12492	0.12521	0.01965

Tablo 4.1'deki sonuçlar incelendiğinde, örneklem büyüklüğünün parametre tahminleri üzerinde etkili olduğu söylenebilir. Genel olarak, örneklem büyüklüğünün artması tahminler üzerindeki hatayı düşürdüğü sonucuna ulaşılmıştır. Ayrıca, 1000 tekrar üzerinden hesaplanan ortalama parametre tahminlerinin gerçek değerler ile oldukça yakın olarak hesaplanabildiği Tablo 4.1'den görülmektedir.

Bu çalışmada esas amaç, kullanılan tahmin yönteminin ve tercih edilen optimizasyon tekniğinin kullanışlı olduğunu ve doğru sonuçlar elde edebildiğini göstermektir. Buradan yola çıkarak, önerilen dağılımın kullanılabilir ve R gibi paket programlar ile parametre tahminlerinin kolayca hesaplanabilir olduğu söylenebilir. Bununla birlikte, bayesci tahmin yöntemleri gibi farklı parametre tahmin yöntemlerinin kullanılmasının ve daha iyi sonuçların elde edilmesinin önü açıktır.

4.3.10. Uygulama

Bu alt bölümde, önerilen KL dağılımının gerçek yaşamda kullanılabileceğini göstermek amacıyla, gerçek bir veri seti üzerinden bir uygulamasına yer verilmiştir. Kullanılan veri seti, 400 mikrometre uzunluğundaki 59 test iletkenine ait hata zamanlardan (saat) oluşmaktadır. Tüm iletken örnekleri belirli bir yüksek sıcaklığa ve akıma maruz bırakılmış ve bu süreçte hata verdikleri zamanlar kaydedilmiştir.

Tablo 4.2 400 mikrometrelik elektron göçü örneklerinin hata zamanları (saat)

6.545	9.289	7.543	6.956	6.492	5.459	8.12	4.706	8.687	2.997
8.591	6.129	11.038	5.381	6.958	4.288	6.522	4.137	7.459	7.495
6.573	6.538	5.589	6.087	5.807	6.725	8.532	9.663	6.369	7.024
8.336	9.218	7.945	6.869	6.352	4.7	6.948	9.254	5.009	7.489
7.398	6.033	10.092	7.496	4.531	7.974	8.799	7.683	7.224	7.365
6.923	5.64	5.434	7.937	6.515	6.476	6.071	10.491	5.923	

Tablo 4.2'deki veriler Schafft'ın [110] ve sonrasında Ristic ve Nadarajah [111] tarafından da kullanılmıştır. Ristic ve Nadarajah [111], çalışmalarında üstelleştirilmiş üstel Poisson (ÜÜP) dağılımını önermiş ve veri setini bu dağılım ile modellemiştir. Bu bölümde, Tablo 4.2'de yer alan hata zamanlarına ilişkin veri seti yeni önerilen KL dağılımı ile modellenmeye çalışılmıştır. Tez çalışmasında, bu ve daha sonraki uygulamalarda, dağılıma ilişkin parametre tahminlerinin elde edilmesi aşamasında iteratif matematiksel yöntemler kullanılmıştır. Bu yöntemlerin uygulanmasında R Paket Programından ve *AdequacyModel* paketinden faydalanılmıştır.

Verinin modellenmesinde, önerilen dağılım KL'nin yanı sıra farklı dağılımlar da dikkate alınmıştır. Ayrıca Ristic ve Nadarajah'ın [111] elde ettiği farklı dağılımlara ilişkin sonuçlara da yer verilmiştir. Bu dağılımlar ve kısaltmaları Tablo 4.3'te yer almaktadır:

Tablo 4.3 Karşılaştırılan dağılımlar ve kısaltmaları

Dağılım	Kısaltma	Kaynak
Kumaraswamy Lindley	KL	Önerilen
Lindley	L	[95]
Weibull	W	-
Üstel	Ü	-
Üstelleştirilmiş Üstel Poisson	ÜÜP	[111]
Üstel Poisson	ÜP	[111]
Üstel Binom	ÜB	[111]
Üstel Geometrik	ÜG	[111]
Üstel Logaritmik	ÜL	[111]
Genelleştirilmiş Üstel Poisson	GÜP	[111]
Poisson Üstel	PÜ	[111]

Dağılımlara ilişkin en çok olabilirlik tahminleri elde edildikten sonra, veriyi en iyi modelleyen dağılıma karar vermek için Akaike Bilgi kriteri (AIC), Düzeltilmiş Akaike Bilgi kriteri (Corrected AIC, CAIC) ve Bayesci Bilgi kriteri (BIC) hesaplanmıştır. Bu kriterlere ilişkin eşitlikler aşağıdaki gibidir:

$$AIC = -2LO + 2p, CAIC = \left(\frac{2n}{n - p - LO} \right) p - 2LO, BIC = -2LO + pln,$$

Burada, LO log-olabilirliği, p modeldeki parametre sayısını ve n örneklem büyüklüğünü göstermektedir.

Tablo 4.4 ve 4.5'te dağılımların veriyi modellemedeki başarısını karşılaştırmak üzere, bilgi kriterlerine ve Cramer-von Misses (W) ve Anderson Darling (A) istatistiklerine yer verilmiştir. AIC değerine bakıldığında en iyi uyum sağlayan modeller KL ve ÜÜP'dir. BIC'e göre yakın olmakla beraber, Weibull dağılımı daha düşük bir değere sahiptir ve bu kritere göre en iyi dağılımdır.

Tablo 4.5'te ise, KL'nin daha iyi bir model olduğuna ilişkin destekler sonuçlar elde edilmiştir. Özellikle Lindley dağılımının KL dağılımının bir alt dağılımı olması sebebiyle karşılaştırılması ve yorumlanması önem taşımaktadır. Lindley dağılımı bu veri setini temsil etmekte yetersiz kalmasına rağmen, Kumaraswamy genelleştirmesiyle elde edilen KL dağılımı gayet iyi bir uyum göstermiştir.

Tablo 4.4 Kullanılan dağılımların bilgi kriterleri ile karşılaştırılması

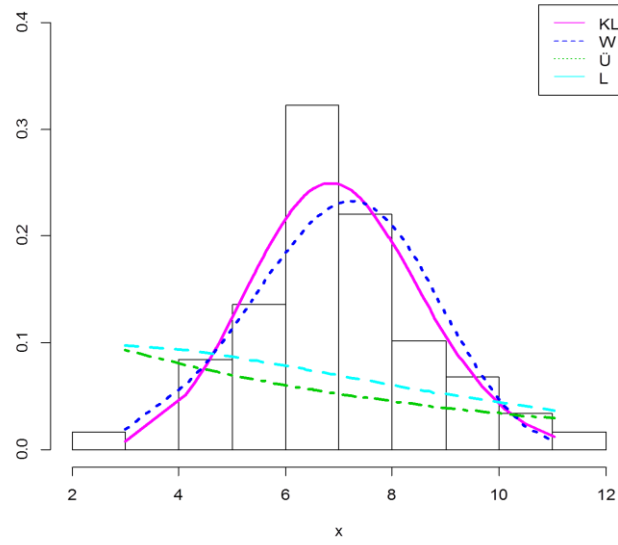
Dağılım	Parametre Tahminleri			AIC	CAIC	BIC
$KL(a, b, \theta)$	7.04235	8.96162	0.30971	228.6246	229.0609	234.8572
$L(\theta)$	0.25719			318.7054	318.7756	320.7830
$W(\alpha, \beta)$	4.698249	7.613126		228.9946	229.2088	233.1496
$\ddot{U}(\alpha)$	6.9800			349.2809	349.3511	351.3585
$\ddot{U}P(\beta, \lambda)^*$	0.1480	1.56×10^{-7}		351.3		355.5
$\ddot{U}G(\beta, \lambda)^*$	0.1433	1×10^{-7}		351.3		355.4
$\ddot{U}L(\beta, \lambda)^*$	0.1727	0.99999		353.5		357.6
$\ddot{U}B(\beta, \lambda)^*$	0.1092	1.04×10^{-6}		355.3		359.4
$P\ddot{U}(\alpha, \lambda)^*$	0.6492	55.7364		233.3		237.4
$G\ddot{U}P(\beta, \lambda, \alpha)^*$	0.0087	77.4455	57.6974	236.6		242.1
$\ddot{U}\ddot{U}P(\beta, \lambda, \alpha)^*$	0.1170	21.1892	9.8556	228.6		234.9

Tablo 4.5 Cramer-von Misses ve Anderson Darling istatistikleri

Dağılım	W	A
$KL(a, b, \theta)$	0.0340	0.1915
$L(\theta)$	0.0389	0.2307
$W(\alpha, \beta)$	0.0822	0.4619
$\ddot{U}(\alpha)$	0.0417	0.2489

Şekil 4.3’de veriyi modellemede kullanılan olasılık dağılımlarına ait eğriler yer almaktadır. Buna göre, veriye ilişkin histograma en uygun modelin KL olduğu görülmektedir.

* Sonuçlar Ristic ve Nadarajah [111] çalışmasından alınmıştır.



Şekil 4.3 Veriye ait histogram ve model eğrileri

4.3.11. Bootstrap Çalışması

Tez çalışmasının bu ve sonraki bootstrap bölümlerinde, uygulama için kullanılan veri setleri üzerinden bootstrap analizler yapılmıştır. Bu analizlerde, veri setinden yerine konularak yeniden örnekleme gerçekleştirilmiştir. Elde edilen her bir örneklem için parametre tahmini yapılarak, gerçek veri setinden elde edilen parametre tahminlerinin doğruluğuna ilişkin sonuçlar elde edilmeye çalışılmıştır. Bu sonuçların öncesinde bu yönteme ilişkin genel bilgiler verilip, gerekli tanımlamalar yapılacaktır.

Yeniden örneklemeyle dayalı tahmin yöntemleri 1940'lı yıllara dayanmaktadır. Bu yöntemlerden biri de Jackknife olarak anılan yöntemdir. Bu yöntemde, her adımda bir eleman dışarda bırakılarak, ilgilenilen hesaplama yapılır. Efron, 1979 yılında Jackknife yöntemden esinlenerek bootstrap yöntemini ortaya atmıştır [112]. Efron, yeniden örnekleme üzerine yapılan çalışmaları özetlemiş ve yeni bir çalışma alanı oluşturmuştur. Yeniden örnekleme fikri karmaşık ve çoğu zaman hatalı benzetim çalışmalarının yerini almış ve Efron'nun sonraki yıllarda yaptığı çalışmayla beraber bilim dünyasında kabul görmüş ve hızla yayılmıştır. İlk olarak 1979'da verilmesine rağmen, yaklaşımın yaygın olarak kullanılması 1990'ları bulmuştur. Yapılan ilk kuramsal çalışmalarda bootstrap yaklaşımının asimptotik olarak tutarlı olduğu gösterilmiş ve gerçek problemlere uygulanmıştır. Bu yaklaşım ile klasik yaklaşımı karşılaştıran çok sayıda benzetim

çalışması yayınlanmış ve bootstrap yaklaşımının uygulamada çok kullanışlı olmasına rağmen bazı kısıtlamalarının olduğu görülmüştür.

Literatürde bootstrap yöntemi birçok farklı amaç için kullanılmıştır. Bunlardan bazıları, tahmin edicilerin yanlılığını belirlemek, güven aralıkları oluşturmak, hipotez testleri ve tahminlerin standart hatalarının tahmini olarak sayılabilir. Parametre tahmininde karşılaşılan en önemli iki problemden biri tahmin edicinin bulunması, bir diğeri de tahmin edicinin uygunluğunun değerlendirilmesidir. Tahmin edicilerin standart sapması her zaman bilinen yollarla elde edilemeyebilir. Bootstrap yöntemi, tahmin edicilerin standart sapmasının bulunmasında kullanılabilen bir yöntemdir.

Tanım: n birimlik bir rasgele örneklem X_1, X_2, \dots, X_n rasgele vektöründen oluşsun. Gerçek değerli tahmin edici $\hat{\omega} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ verilsin ve $\hat{\omega}$ 'nın uygunluğu değerlendirmek için ampirik dağılım fonksiyonu F_n , her $X_i, i=1, \dots, n$ rasgele vektörüne $1/n$ olasılık atayacak şekilde belirlendiğinde, F_n cinsinden tanımlansın. Bu durumda verilen yöntem bir bootstraptır.

Bootstrap yöntemi, parametrik ve parametrik olmayan olmak üzere ikiye ayrılabilir. Parametrik yöntem, bilinen veya kabul edilen bir $F(\hat{\omega})$ dağılımından yeniden örnekleme temel alır. Burada $\hat{\omega}$, ω 'nın tahmin edicisidir. Öte yandan, parametrik olmayan bootstrap yönteminde bilinen bir F dağılımı yoktur. Yeniden örnekleme, deneysel dağılım fonksiyonu \hat{F}_n temel alınarak yapılır. \hat{F}_n 'den yeniden örnekleme, örnek veri setinden yerine koyarak yeniden örnekleme yapmaya eşittir. $\hat{\omega} - \omega$ 'nın bootstrap dağılımı, $\hat{\omega}$ 'ların F_n 'den bağımsız yerine koyarak örnekleme ile rasgele olarak üretilmiş dağılıma karşılık gelir $\hat{\omega}$ 'nın standart hatasının bootstrap tahmini $\hat{\omega} - \omega$ 'nın bootstrap dağılımının standart sapmasıdır. ω^* gerçek dağılım yerine bootstrap örneklemini kullanarak elde edilen $\hat{\omega}$ 'nın değeri olmak üzere, ω^* 'ın dağılımının standart sapması $\hat{\omega}$ 'nın standart hatasının bootstrap tahminini verir [113].

Önceki bölümde, 400 mikrometrelik elektron göçü örneklerinin hata zamanlarına ilişkin veri seti KL dağılımı kullanılarak modellenmişti. Burada ise, bir bootstrap çalışması düzenlenerek tahmin edilen parametre değerlerine ilişkin değerlendirilmeler yapılmaya çalışılmıştır. İlk olarak, 59 adet veri yerine konularak yeniden örnekleme gerçekleştirilmiştir. Bu işlem 1000 kez tekrarlanmıştır. Her bir tekrardan elde edilen veri seti KL dağılımı ile modellenmiş ve dağılıma ilişkin bootstrap parametreleri tahmin

edilmiştir. Burada ilgilenilen kitleye ilişkin ω parametresi KL dağılımının parametrelerine yani a, b ve θ 'ya karşılık gelir. Tablo 4.6'da elde edilen 1000'er adet parametre tahminine ilişkin tanımlayıcı istatistikler verilmiştir. Uygulama kısmında elde edilen parametre değerleri $\hat{a} = 7.0435$, $\hat{b} = 8.96162$, $\hat{\theta} = 0.30971$ olarak tahmin edilmişken, bootstrap tahminleri $\hat{a}^* = 7.0108$, $\hat{b}^* = 8.0042$, $\hat{\theta}^* = 0.31659$ olarak hesaplanmıştır. Değerlerin birbirine oldukça yakın olduğu görülmektedir. Ayrıca, bootstrap tahminlerinin standart sapması, tahmin edicilerin standart hatasının bootstrap tahminini verir. Elde edilen en küçük ve en büyük değerleri ise bootstrap tahminlerine ilişkin aralık hakkında bilgi verir. Bu aralığın çok geniş olması, aykırı tahminlerin olduğuna işaret edebilir. Tablo 4.6'da buna benzer bir sonuç gözükmemektedir.

Tablo 4.6 Bootstrap örneklemesine ilişkin tahmin edilen KL parametrelerinin tanımlayıcı istatistikleri

Parametre	Ortalama	Std Sapma	Min	Q1	Medyan	Max	Q3
\hat{a}^*	7.0108	0.0583	6.9516	6.9979	7.0098	8.7549	7.0206
\hat{b}^*	8.0042	0.0168	7.9836	8.0001	8.0037	8.4970	8.0073
$\hat{\theta}^*$	0.31659	0.00834	0.29104	0.31075	0.31645	0.35093	0.32204

Bootstrap yönteminin kullanım alanlarından bir diğeri de, parametrelerin yan tahminini elde etmektir. Yanı tahmin etmekteki bir amaç yapılan tahminin iyiliğini değerlendirmektir. Bir diğeri amaç ise, yan düzeltmesi yaparak daha iyi tahmin değerini elde etmektir. Bootstrap yan tahmini $\hat{y}n_B = \hat{\omega}^* - \hat{\omega}$ olmak üzere, yan düzeltmeli tahmin $\bar{\omega} = 2\hat{\omega} - \hat{\omega}^*$ eşitliği ile elde edilir. Burada, bootstrap tahminin $\hat{\omega}$ 'dan büyük ya da küçük olması önemlidir. Duruma göre yan düzeltmesi standart sapmayı yükseltebilir [113]. Tablo 4.7'de, KL dağılımına ilişkin parametrenin yan düzeltmeli tahmin değerlerine yer verilmiştir:

Tablo 4.7 Bootstrap örneklemesine ilişkin KL parametrelerinin yan düzeltmeli tahminleri

Parametre	Yan	Yan düzeltmeli tahmin
\hat{a}^*	0.03155	6.97925
\hat{b}^*	0.95742	7.04678
$\hat{\theta}^*$	-0.00688	0.32347

Güven aralıkları bir tahminin ne kadar güvenilir olduğunu göstermesi açısından önemlidir. Bootstrap tekniği ile bootstrap-t aralıkları elde edilebilmektedir. Burada ampirik bir standart normal dağılım oluşturulur ve bu dağılım üzerinden klasikteki yaklaşıma benzer bir yolla güven aralıkları bulunur. Ancak, bu aralıklar etkili gözlemlerden olumsuz etkilenebildiğinden kullanılırken dikkatli olunmalıdır. B yeniden örnekleme sayısını göstermek üzere, aralıkların belirlenmesi için $Z^*(b) = \frac{\hat{\omega}_b^* - \hat{\omega}}{\hat{sh}^*}$ $b = 1, 2, \dots, B$ değerleri

hesaplanır. Bu eşitlikte her bir bootstrap tahmin değerinin klasik değerinden çıkartılıp, bootstrap tahminin standart hatasına bölünmesi (\hat{sh}^*) ile elde edilen B adet Z değeri hesaplanır. Sonrasında, bu değerlerin α . yüzdelik değeri \hat{t}_α belirlenir. Son olarak, bootstrap güven aralığı $\hat{\omega} - \hat{t}_{1-\alpha} \hat{sh} < \omega < \hat{\omega} - \hat{t}_\alpha \hat{sh}$ şeklinde elde edilir [113].

Elektron göçü örneklerinin hata zamanlarına ilişkin bootstrap-t aralıkları ise Tablo 4.8’de verilmiştir. Burada, $B=1000$, $\alpha=5$ olup ve ω yerine KL dağılımının a, b, θ parametreleri gelir. Tablo 4.8 incelendiğinde, uygulama kısmında elde edilen tahmini parametrelerin ikisinin bu aralıklar içerisinde yer aldığı görülmüştür. Yan düzeltmesi yapılan tüm tahminler ise bu aralıklar içinde yer alır. Bu sayede, elde edilen tahminlerin güvenilir olduğu söylenebilir.

Tablo 4.8 KL parametrelerinin bootstrap-t aralığı

Parametre	Alt sınır	Üst sınır
\hat{a}^*	6.97618	7.042445
\hat{b}^*	7.995799	8.014336
$\hat{\theta}^*$	0.303068	0.3300983

Bir diğer güven aralığı ise, bootstrap yüzdelliklerinden elde edilebilir. Bu aralık için alt ve üst sınırlar $[\hat{\omega}_{\%as}, \hat{\omega}_{\%üs}] = [\hat{\omega}_{\alpha}^*, \hat{\omega}_{1-\alpha}^*]$ şeklinde tanımlanır. Bootstrap yüzdellik aralıkları, bootstrap-t aralıklarına göre daha güvenilirdir ve daha karmaşık problemlere uygulanabilir.

Tablo 4.9’da KL parametrelerine ilişkin bootstrap yüzdellikleri yer almaktadır. Sınırların t aralıklarıyla oldukça yakın olduğu görülmektedir. Yine benzer şekilde, yan düzeltmeli parametre değerlerinin bu aralıklar içerisinde yer aldığı açıkça görülmektedir.

Tablo 4.9 Bootstrap örneklemesine ilişkin tahmin edilen KL parametrelerin bootstrap yüzdelikleri

Parametre	Alt sınır	Üst sınır
\hat{a}^*	6.979155	7.035420
\hat{b}^*	7.994064	8.012601
$\hat{\theta}^*$	0.3030817	0.3301120

5. MARSHALL-OLKIN GENELLEŞTİRİLMİŞ DAĞILIM AİLESİ

Tez çalışmasının bu bölümünde Marshall-Olkin Genelleştirilmiş Dağılım (MOGD) ailesi dikkate alınmıştır. Bu aile, önceki bölümde yer verilen KGD ailesinden farklı olarak, yeni dağılım tanımlamak için temel ve üretici dağılım yöntemini kullanmaz. Bu dağılım ailesinde söz konusu olan yöntem, parametre eklemek ve temel dağılıma ilişkin oransal bir fonksiyon kullanmaktır.

Yeni ve daha esnek dağılım aileleri elde etmek için parametre ekleme yöntemi, son yıllarda üzerinde birçok çalışma yapılan, araştırılan bir alandır. Bu çalışmalar arasında sayılabilecek en önemli çalışmalardan biri Marshall ve Olkin [5] tarafından gerçekleştirilmiştir ve MOGD ailesini tanımlamıştır. Bu aile temel dağılıma ilişkin bir oranı ve eğim (tilt) parametresi olarak da bilinen yeni bir parametreyi içeren bir formda tanımlanmıştır. Bu nedenle, oransal (proportional) olasılık ailesi ya da parametrelili aile olarak da bilinmektedir [5]. Temel dağılım, yeni tanımlanan dağılımın özel bir şekli haline geldiğinden, daha esnek bir dağılım elde edilmiş olur. Bu sayede farklı veri setlerini modelleme kabiliyeti artmaktadır. Yeni tanımlanan MOGD ailesi üyesi dağılımlar “Marshall-Olkin-temel alınan dağılım” ya da kısaca MO-GD şeklinde adlandırılmıştır.

$F(x)$, sürekli bir X raslantı değişkenine ilişkin herhangi bir df ve $S_G(x) = 1 - G(x)$ temel alınan olasılık dağılımının yf 'sini göstermek üzere, MO-GD ailesine ilişkin df ve oyf, $x > 0$ için sırasıyla aşağıdaki eşitlikler ile tanımlanır:

$$F_{MO-G}(x) = 1 - \frac{\gamma S_G(x)}{[1 - (1 - \gamma)S_G(x)]}, \quad (5.1)$$

$$f_{MO-G}(x) = \frac{\gamma g(x)}{[1 - (1 - \gamma)S_G(x)]^2}. \quad (5.2)$$

Burada $\gamma > 0$ eklenen yeni parametre yani eğim parametresidir. Özel olarak $\gamma = 1$ alınırsa, yeni dağılım temel dağılıma eşit olur. Marshall ve Olkin [5], bu yöntemin kararlılık özelliğine dikkat çekmiştir. Örneğin, yöntem iki kez uygulanacak olursa yeni bir dağılım elde edilemez. MO-G dağılımına ilişkin yf , Eşitlik (5.3)'te, hf ise, Eşitlik (5.4)'te verilmiştir:

$$S_{MO-G}(x) = \frac{\gamma S_G(x)}{1 - (1 - \gamma)S_G(x)}, \quad (5.3)$$

$$h_{MO-G}(x) = \frac{h_G(x)}{1 - (1 - \gamma)S_G(x)}. \quad (5.4)$$

Eşitlik (5.4)'te, $\gamma > 1$ ise $h(x) \leq h_G(x)$ ve $\gamma \in (0,1)$ ise $h(x) \geq h_G(x)$ olur. Burada, $h_G(x)$ temel dağılıma ilişkin hf 'yi göstermektedir.

Barreto-Souza vd. [83], $|z| < 1$, $k > 0$ ve $\Gamma(\cdot)$ gama fonksiyonu olmak üzere, Eşitlik (5.5)'teki seri açılımından yararlanarak

$$(1-z)^{-k} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+j)}{\Gamma(k)j!} z^j \quad (5.5)$$

MO-G dağılımına ilişkin df $\gamma \in (0,1)$ için Eşitlik (5.6) ile $\gamma > 1$ için Eşitlik (5.7) ile yeniden tanımlamıştır:

$$f_{MO-G}(x) = g(x) \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^j w_{j,k} G^{j-k}(x) \quad (5.6)$$

$$f_{MO-G}(x) = g(x) \sum_{j=0}^{\infty} v_j G^j(x) \quad (5.7)$$

Burada $w_{j,k} = \gamma(j+D)(1-\gamma)^j (-1)^{j-k} \binom{j}{k}$ ve $v_j = \frac{(j+D)(1-1/\gamma)^j}{\gamma}$, dir.

Tez çalışmasının bu bölümünde MOGD ailesi üyesi yeni bir olasılık dağılımı tanımlanmış ve özellikleri incelenmiştir. Bu kapsamda, temel dağılım olarak Rayleigh dağılımı seçilmiştir. Alt başlık olarak öncelikle Rayleigh dağılımı üzerinde durulmuş, sonrasında yeni dağılım önerilmiştir.

5.1. Rayleigh Dağılımı

Weibull dağılımının özel bir şekli olan Rayleigh dağılımının kullanımı oldukça yaygındır. Rüzgar hızı, enerji analizlerinde ve oyf 'nin doğrusal olarak artan başarısızlık oranına sahip olması nedeniyle de yaşam süresi ve güvenilirlik analizlerinde sıklıkla kullanılmaktadır. İlk olarak, akustik üzerine yapılan bir çalışmada Rayleigh [51] tarafından kullanılan bu dağılım, sonrasında birçok farklı bilim ve teknoloji alanında uygulanmıştır. Dyer ve Whisenand [52], dağılımın iletişim mühendisliğindeki önemini vurgulamıştır. Kurban vd. [53], Korukçu [54] rüzgar enerjisi verisini ve Bhattacharya ve Tyagi [55] bazı tıbbi veri setlerini Rayleigh dağılımı ile modellemiştir. Fernandez [56], yaptığı çalışmada bu dağılıma ilişkin parametre tahminlerinde karşılaşılan problemlere yer vermiştir.

Rayleigh dağılımlı bir rastlantı değişkeni için, df , oyf , yf ve karşılık gelen hf , $x > 0$ ve $\sigma > 0$ şekil parametresi olmak üzere, sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$F(x) = 1 - \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right), \quad (5.8)$$

$$f(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right), \quad (5.9)$$

$$S(x) = \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right), \quad (5.10)$$

$$h(x) = \frac{x}{\sigma^2}. \quad (5.11)$$

Literatürde farklı genişletilmiş Rayleigh dağılımlarıyla karşılaşmak mümkündür. Vodà [114] çalışmasında Genelleştirilmiş Rayleigh dağılımını önermiş, istatistiksel özelliklerine yer vermiş ve dağılımın soldan kesilmiş şeklini tanımlamıştır. Vodà [115-116], en çok olabilirlik tahmin edicilerini elde etmiş ve iki bileşenli karma bir dağılım üzerinde durmuştur. Tsai ve Wu [117], Rayleigh dağılımlı yaşam çözümlenmesi verilerinde kesilmiş yaşam testleri için örnekleme planı kabul sorununu araştırmıştır. Gómez ve Gómez [118], kablosuz solma kanalları alanında Rayleigh dağılımının bir genelleştirmesini uygulamıştır. Kesilmiş Rayleigh dağılımı, Merovci [22] tarafından geliştirilmiştir. Cordeiro vd [18], beta genelleştirilmiş Rayleigh ve Ahmad vd [27] kesilmiş ters Rayleigh dağılımlarını tanımlamış, özelliklerine yer vermiştir. Gomes vd. [119], Kumaraswamy genelleştirilmiş Rayleigh dağılımını önermiş, Hussian ve Amin [120] ise, Kumaraswamy ters Rayleigh dağılımını incelemiştir. Asgharzadeh ve Azizpour [121] ise, Rayleigh dağılımının hibrit sensörleme altında bayesci yaklaşımını çalışmıştır.

5.2. Marshall-Olkin Rayleigh Dağılımı

Bu bölümünde, MOGD ailesi üyesi yeni bir dağılım önerilmiştir. Yeni dağılımın türetilmesinde Rayleigh dağılımı kullanılmıştır. Marshall-Olkin Rayleigh dağılımı, kısaca MOR olarak adlandırılmıştır. Bu kısımda MOR dağılımına ilişkin fonksiyonlar, istatistiksel özellikler, benzetim, uygulama ve bootstrap çalışmaları, alt başlıklar halinde incelenecektir.

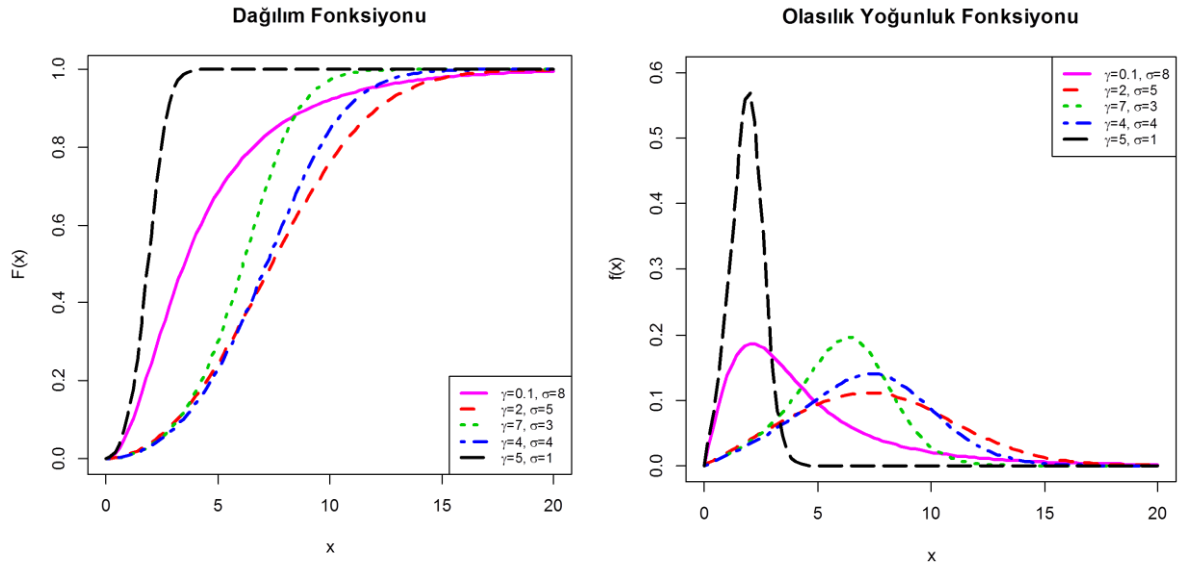
5.2.1. Dağılıma İlişkin Fonksiyonlar

MOR dağılımına ilişkin odf ve df, Eşitlik (5.1) ve (5.2)'de, Eşitlik (5.8) ve (5.9)'un yerine yazılmasıyla, $\sigma, \gamma > 0$ ve $x > 0$ olmak üzere, sırasıyla aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$f_{MOR}(x) = \frac{\gamma x \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)}{\sigma^2 \left[1 - (1 - \gamma) \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\right]^2}, \quad (5.12)$$

$$F_{MOR}(x) = \frac{1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)}{1 - (1 - \gamma) \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)}. \quad (5.13)$$

MOR dağılımı karmaşık olmayan, basit yapısıyla kolay hesaplanabilir ve kullanışlı bir dağılımdır. Bu sebeple yaşam analizi, hidroloji, iktisat bilimi, güvenilirlik analizleri ve Rayleigh dağılımının kullanıldığı her alana uygulanabilir. Şekil 5.1’de, farklı parametre değerleri için MOR dağılımının oyf ve df grafikleri yer almaktadır.



Şekil 5.1. MOR dağılımına ilişkin df ve oyf grafikleri

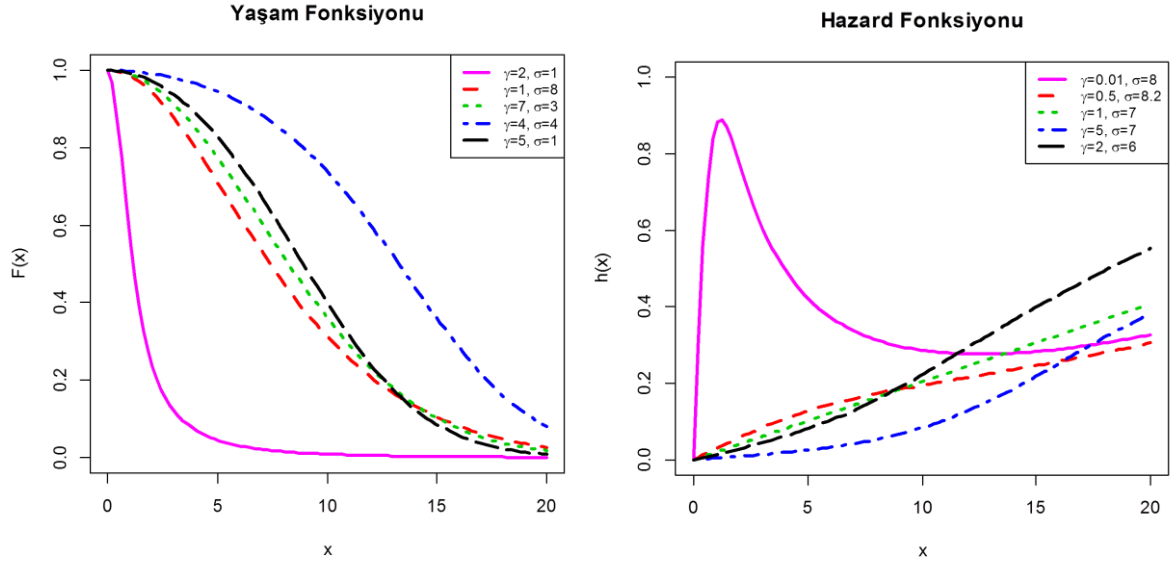
MOR dağılımına ilişkin yf $S_{MOR}(x)$, (5.14) eşitliğindeki gibi elde edilmiştir:

$$S_{MOR}(x) = \frac{\gamma \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)}{1 - (1 - \gamma) \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)}. \quad (5.14)$$

MOR dağılımına ait hf ise, aşağıda tanımlanmıştır:

$$h_{MOR}(x) = \frac{x}{\sigma^2 \left[1 - (1-\gamma) \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \right]} \quad (5.15)$$

Şekil 5.2'de farklı parametre değerleri için MOR dağılımının hf ve yf grafiklerine yer verilmiştir. Grafiklerden de görüleceği gibi, hf oldukça esnektir. Çok farklı şekillere sahip olması, parametre sayısının az olması, basit bir yapıya sahip olması nedeniyle MOR dağılımının cazip dağılım olduğu söylenebilir.



Şekil 5.2 MOR dağılımına ilişkin yf ve hf grafikleri

5.2.2. Momentler

Bir dağılımın birçok önemli özelliği, karakteristiği momentler yardımıyla elde edilebilir. $n = 1, 2, \dots$, olmak üzere, MOR dağılımına ilişkin n . dereceden merkezsel olmayan $E(X^n) = \mu'_n$ momentleri, γ parametresinin değerine göre farklılık gösterir. $\gamma \in (0, 1)$ ise, Eşitlik (5.16) ve $\gamma > 1$ ise, Eşitlik (5.17) ile aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} E(X^n) &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^j w_{j,k} \int_0^{\infty} x^n f(x) F^{j-k}(x) dx = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^j w_{j,k} \int_0^{\infty} \frac{x^{n+1}}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \left(1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \right)^{j-k} dx \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^j \sum_{i=0}^{j-k} w_{j,k} (-1)^i \binom{j-k}{i} (1+i)^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)} 2^{\frac{n+1}{2}} \sigma^{n-2} \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right), \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned}
E(X^n) &= \sum_{j=0}^{\infty} v_j \int_0^{\infty} x^n f(x) F^j(x) dx = \int_0^{\infty} \frac{x^{n+1}}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \left(1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \right)^j dx \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^j v_j (-1)^i \binom{j}{i} (1+i)^{-\binom{n+1}{2}} 2^{\frac{n+1}{2}} \sigma^{n-2} \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right).
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Burada $(1 - e^{-b})^a = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{a}{i} (e^{-b})^i$ şeklinde tanımlanır.

5.2.3. Moment Çıkaran Fonksiyon

X 'in moment çıkaran fonksiyonu $M(t) = E(e^{tx})$, $\gamma \in (0, 1)$ ve $\gamma > 1$ için sırasıyla Eşitlik (5.18) ve (5.19)'da verilmiştir:

$$\begin{aligned}
M(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^j w_{j,k} \int_0^{\infty} e^{tx} f(x) F^{j-k}(x) dx = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^j w_{j,k} \int_0^{\infty} \frac{x}{\sigma^2} e^{tx - \frac{x^2}{2\sigma^2}} \left(1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \right)^{j-k} dx \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^j \sum_{i=0}^{j-k} w_{j,k} (-1)^i \binom{j-k}{i} \frac{1}{1+i} \left\{ 1 + \sigma e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2(1+i)}} \sqrt{\frac{\pi}{2(1+i)}} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{\sigma t}{\sqrt{2(1+i)}}\right) + 1 \right] \right\},
\end{aligned} \tag{5.18}$$

$$\begin{aligned}
M(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} v_j \int_0^{\infty} e^{tx} f(x) F^j(x) dx = \int_0^{\infty} \frac{x}{\sigma^2} e^{tx - \frac{x^2}{2\sigma^2}} \left(1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \right)^j dx \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^j v_j (-1)^i \binom{j}{i} \frac{1}{1+i} \left\{ 1 + \sigma e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2(1+i)}} \sqrt{\frac{\pi}{2(1+i)}} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{\sigma t}{\sqrt{2(1+i)}}\right) + 1 \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Burada $w_{j,k} = \gamma(j+1)(1-\gamma)^j (-1)^{j-k} \binom{j}{k}$ ve $v_j = \frac{(j+1)(1-\gamma)^j}{\gamma}$ dir.

5.2.4. Entropi

Bu alt bölümde, MOR dağılımından gelen X raslantı değişkeninin belirsizliğinin ölçütüne ilişkin Rényi entropisi,

$$\mathcal{J}_R(\delta) = \frac{\delta}{1-\delta} \log \int_0^{\infty} f^\delta(x) dx$$

eşitliğinden yararlanarak elde edilecektir. Burada $f(x)$, MOR dağılımının dağılım fonksiyonunu ve $\delta > 0$ olmak üzere,

$$f^\delta(x) = \frac{\gamma^\delta g^\delta(x)}{\Gamma(2\delta)} \sum_{j=0}^{\infty} (1-\gamma)^j \Gamma(2\delta+j) \frac{[1-G(x)]^j}{j!}$$

eşitliği geçerlidir.

MOR dağılımına ilişkin Rényi entropisi, $\gamma \in (0,1)$ için aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_R(\delta) &= \frac{1}{1-\delta} \log \left(\sum_{j=0}^{\infty} e_j \int_0^{\infty} f^\delta(x) [1-F(x)]^j dx \right) \\ &= \frac{1}{1-\delta} \log \left(\sum_{j=0}^{\infty} e_j \int_0^{\infty} \frac{x^\delta}{\sigma^{2\delta}} \exp\left(-\frac{x^2(\delta+j)}{2\sigma^2}\right) dx \right) \\ &= \frac{1}{1-\delta} \log \left[\sum_{j=0}^{\infty} e_j d_j \right]. \end{aligned} \quad (5.20)$$

$\delta > 1$ ise, $f^\delta(x) = \frac{g^\delta(x)}{\gamma^\delta \Gamma(2\delta)} \sum_{j=0}^{\infty} (1-\gamma)^j \Gamma(2\delta+j) \frac{[G(x)]^j}{j!}$ olur ve $\gamma > 1$ için aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_R(\delta) &= \frac{1}{1-\delta} \log \left(\sum_{j=0}^{\infty} h_j \int_0^{\infty} f^\delta(x) F^j(x) dx \right) \\ &= \frac{1}{1-\delta} \log \left(\sum_{j=0}^{\infty} h_j \int_0^{\infty} \frac{x^\delta}{\sigma^{2\delta}} \exp\left(-\frac{x^2\delta}{2\sigma^2}\right) \left(1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\right)^j dx \right) \\ &= \frac{1}{1-\delta} \log \left[\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^j (-1)^i \binom{j}{i} h_j d_i \right]. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Burada,

$$e_j = \frac{\gamma^\delta (1-\gamma)^j \Gamma(2\delta+j)}{\Gamma(2\delta) j!},$$

$$d_j = \frac{\sigma^{1-\delta}}{(\delta+j)^2} 2^{\frac{\delta-1}{2}} \Gamma\left(1 + \frac{\delta-1}{2}\right)$$

ve

$$h_j = \frac{(\gamma-1)^j \Gamma(2\delta+j)}{\gamma^\delta \Gamma(2\delta) j!}$$

biçiminde tanımlanır.

5.2.5. Güvenilirlik

Güvenilirlik daha öncede tanımlandığı gibi $R = P(X_2 < X_1)$ biçimindedir. $X_1 \sim MOR(\gamma_1, \sigma_1)$, $X_2 \sim MOR(\gamma_2, \sigma_2)$ dağılımlı, bağımsız rasgele değişkenler ve $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ olsun. Bu durumda, güvenilirlik ölçütü R aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
 R = P(X_2 < X_1) &= \int_0^{\infty} f_1(x)F_2(x)dx \\
 &= \int_0^{\infty} \frac{\gamma_1 g(x)}{\{1 - (1 - \gamma_1)[1 - G(x)]\}^2} \frac{\gamma_2 [1 - G(x)]}{1 - (1 - \gamma_2)[1 - G(x)]} dx \\
 &= \gamma_1 \gamma_2 \int_0^1 \frac{u}{[1 - (1 - \gamma_1)u]^2 [1 - (1 - \gamma_2)u]} du \\
 &= \frac{\gamma_1 \gamma_2}{[(1 - \gamma_2) - (1 - \gamma_1)]^2} \int_0^1 \left[\frac{(1 - \gamma_2)}{1 - (1 - \gamma_2)u} - \frac{(1 - \gamma_1)}{1 - (1 - \gamma_1)u} - \frac{(1 - \gamma_2) - (1 - \gamma_1)}{[1 - (1 - \gamma_1)u]^2} \right] du \\
 &= \frac{\gamma_1 \gamma_2}{[\gamma_2 - \gamma_1]^2} \left[-\ln\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right) + \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_1} \right].
 \end{aligned} \tag{5.22}$$

5.2.6. Sıra İstatistikleri

$X_{i:n}$ i . sıra istatistiğini göstermek üzere, MO-G dağılımından gelen X_1, X_2, \dots, X_n rasgele örnekleme için i . sıra istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_{i:n}(x)$, Barreto-Souza vd. [50] çalışmalarındaki yaklaşımla, Eşitlik (5.23)'teki gibi elde edilmiştir:

$$f_{i:n}(x) = \gamma n! g(x) \sum_{l=0}^{n-i} \frac{(-1)^l}{(i-l)!(n-i)!} \frac{G^{l+i-l}(x)}{[1 - (1 - \gamma)(1 - G(x))]^{l+i-l}}. \tag{5.23}$$

Burada g ve G sırasıyla Rayleigh dağılımına ilişkin yf ve df'yi göstermektedir. Eşitlik (5.23)'den, $\gamma \in (0, 1)$ olmak üzere, Eşitlik (5.24) yazılabilir:

$$f_{i:n}(x) = g(x) \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{n-i} \sum_{k=0}^j u_{j,l,k} G^{j+l-k+i-l}(x). \tag{5.24}$$

Burada $u_{j,l,k} = \frac{\gamma n! (-1)^{l+j-k} (1 - \gamma)^j}{(i-1)!(n-i)!} \binom{j}{k} \binom{1+i+j}{j}$, dır. Benzer şekilde $\gamma > 1$ için,

$$f_{i:n}(x) = g(x) \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{n-i} c_{j,l} G^{j+l-k+i-l}(x) \tag{5.25}$$

elde edilir. Burada, $c_{j,i} = \frac{n!(-1)^j(\gamma-1)^j}{\gamma^{1+j+i}(i-1)!(n-i)!} \binom{1+i+j}{j}$ şeklinde tanımlıdır.

5.2.7. Parametre Tahminleri

x_1, x_2, \dots, x_n , γ ve σ parametrelı MOR dağılımindan gelen gözlem değerlerini göstermek üzere, $MOR(\gamma, \sigma)$ için log-olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\log L = n \log \gamma + \sum_{i=1}^n \log x_i - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n \log \left[1 - (1-\gamma) \exp\left(-\frac{x_i^2}{2\sigma^2}\right) \right]. \quad (5.26)$$

Eşitlik (5.26)'ya ilişkin göre kısmi türevler,

$$\frac{\partial \log L}{\partial \gamma} = \frac{n}{\gamma} - \sum_{i=1}^n \frac{2 \exp\left(-\frac{x_i^2}{2\sigma^2}\right)}{\left[1 - (1-\gamma) \exp\left(-\frac{x_i^2}{2\sigma^2}\right) \right]}, \quad (5.27)$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \sigma} = \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{2(1-\gamma)}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2 \exp\left(-\frac{x_i^2}{2\sigma^2}\right)}{\left[1 - (1-\gamma) \exp\left(-\frac{x_i^2}{2\sigma^2}\right) \right]}$$

biçiminde tanımlanmıştır. Buna göre Fisher bilgi matrisi,

$$I = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{bmatrix}$$

olmak üzere, matrisinin elemanları

$$I_{11} = \frac{\partial \log L}{\partial \gamma \partial \gamma} = -\frac{n}{\gamma^2} + 2 \sum_{i=1}^n \frac{e \exp\left(-\frac{x_i^2}{\sigma^2}\right)}{\left(-(1-\gamma) \exp\left(-\frac{x_i^2}{2\sigma^2}\right) + 1 \right)^2}, \quad (5.28)$$

$$I_{22} = \frac{\partial \log L}{\partial \sigma \partial \sigma} = - \sum_{i=1}^n \frac{2(1-\gamma)^2 x_i^4 \exp(-\frac{x_i^2}{\sigma^2})}{\sigma^6 \left(-(1-\gamma) \exp(-\frac{x_i^2}{2\sigma^2}) + 1 \right)^2} - \sum_{i=1}^n \frac{2(1-\gamma) x_i^4 \exp(-\frac{x_i^2}{2\sigma^2})}{\sigma^6 \left(-(1-\gamma) \exp(-\frac{x_i^2}{2\sigma^2}) + 1 \right)} + \sum_{i=1}^n \frac{6(1-\gamma) x_i^2 \exp(-\frac{x_i^2}{2\sigma^2})}{\sigma^4 \left(-(1-\gamma) \exp(-\frac{x_i^2}{2\sigma^2}) + 1 \right)} - \sum_{i=1}^n \frac{3x_i^2}{\sigma^4}, \quad (5.29)$$

$$I_{12} = I_{21} = \frac{\partial \log L}{\partial \gamma \partial \sigma} = - \sum_{i=1}^n \frac{2(1-\gamma) x_i^2 \exp(-\frac{x_i^2}{\sigma^2})}{\sigma^3 \left(-(1-\gamma) \exp(-\frac{x_i^2}{2\sigma^2}) + 1 \right)^2} - \sum_{i=1}^n \frac{2x_i^2 \exp(-\frac{x_i^2}{2\sigma^2})}{\sigma^3 \left(-(1-\gamma) \exp(-\frac{x_i^2}{2\sigma^2}) + 1 \right)} \quad (5.30)$$

biçiminde tanımlanmıştır.

5.2.8. Benzetim Çalışması

Kantil fonksiyonları özellikle basıklık ve çarpıklığın kantiller ile tanımlanabilmesinin yanı sıra, benzetim çalışmalarında veri üretim aşamasında kullanılması sebebiyle istatistikte öneme sahiptir. Tez çalışmasının benzetim bölümlerinde kantil fonksiyonunu temel alan ters dönüşüm yöntemi kullanılmıştır.

$F_{MOR}(x)$, MOR dağılımının df'sini göstermek üzere, $0 < u < 1$ için $F_{MOR}^{-1}(x) = Q_{MOR}(u)$ kantil fonksiyonu Eşitlik (5.31)'deki gibi tanımlanmıştır:

$$Q_{MOR}(u) = \left\{ -2\sigma^2 \left[\ln(1-u) - \ln(1-u+u\gamma) \right] \right\}^{1/2}. \quad (5.31)$$

Ters dönüşüm yöntemiyle MOR dağılımlı rasgele değişkeni üretmek oldukça basittir. U , (0,1) aralığında tekdüze dağılımlı bir değişken olmak üzere, $X \sim \text{MO-Rayleigh}(\gamma, \sigma)$ raslantı değişkeni Eşitlik (5.31) ile elde edilir. Bu eşitlik kullanılarak, keyfi parametre değerleri ile farklı büyüklüklerde veri setleri elde üretilmiştir. Sonrasında veri setleri MOR dağılımı ile modellenmiş, parametre tahminleri elde edilmiştir.

Tüm veri üretim aşaması R Paket Programı kullanarak yapılmış ve parametre tahminlerinde *AdequacyModel* paketi kullanılmıştır. Elde edilen tahmini parametrelerin veri üretiminde kullanılan keyfi parametre değerleriyle olan farkını değerlendirmek ve hatasını inceleyebilmek adına HKO ve OMS değerleri hesaplanmıştır. Hesaplanan değerler Tablo 5.1'de verilmiştir:

Tablo 5.1 Keyfi parametre değerlerine göre MOR dağılımına ilişkin benzetim sonuçları

n	$\hat{\gamma}$	$\hat{\sigma}$	HKO		OMS	
	$\gamma = 0.1$	$\sigma = 0.5$				
30	0.21955	0.41704	0.03489	0.03116	0.14641	0.17654
50	0.16765	0.45851	0.01100	0.01515	0.09241	0.13004
200	0.11652	0.48553	0.00122	0.00533	0.03621	0.07146
500	0.10675	0.49528	0.00039	0.00140	0.02109	0.04245
1000	0.10640	0.49476	0.00038	0.00225	0.02090	0.04443
	$\gamma = 2.5$	$\sigma = 5$				
30	3.31794	4.93636	2.21175	0.23823	1.46719	0.54249
50	3.01818	4.96328	1.24807	0.14378	1.13553	0.42339
200	2.59504	4.99183	0.19160	0.03429	0.48059	0.20940
500	2.55247	4.98763	0.07775	0.06207	0.30941	0.14676
1000	2.52185	4.99895	0.03238	0.00649	0.20094	0.09170
	$\gamma = 7$	$\sigma = 10$				
30	8.14479	10.02726	7.45502	0.49949	3.17642	0.79577
50	7.80224	10.01147	5.52365	0.31117	2.61912	0.63148
200	7.32942	9.98123	1.42896	0.08373	1.33183	0.33224
500	7.20334	9.97916	0.66872	0.03656	0.89682	0.21881
1000	7.04697	9.99931	0.27066	0.01705	0.58834	0.14861
	$\gamma = 15$	$\sigma = 9$				
30	15.11900	9.02110	8.61520	0.20403	3.17760	0.46983
50	15.25267	9.02121	6.12620	0.11393	2.73901	0.35398
200	15.02850	8.96931	1.58330	0.33646	1.37827	0.20144
500	15.13865	8.94253	1.63197	0.49207	1.44446	0.19240
1000	15.01619	8.97896	0.30027	0.16524	0.60023	0.09101

Tablo 5.1'in ilk sütunu, üretilen veri setinin örneklem büyüklüklerini ifade etmektedir. İkinci ve üçüncü sütunlar ise, tahmin edilen parametre değerlerini içermektedir. Bu değerler incelendiğinde, tahmin edilen parametrelerin gerçek değerlerine oldukça yakın olduğu ve örneklem büyüklüğü arttıkça daha da yaklaştığı söylenebilir. Farklı parametre büyüklükleri hata miktarlarını etkilese de, bu etki örnek büyüklüğünün artmasıyla ciddi derecede düşmektedir. Hassas çalışmalarda, tahmin edilen MOR dağılım parametrelerinin tahmininde olabildiğince büyük veri seti üzerinde çalışmak daha sağlıklı sonuçlar doğuracaktır. Öte yandan, kullanılan yöntemin elde edilen benzetim sonuçları çerçevesinde yeterince başarılı olduğunu söylemek mümkündür. Sonuç olarak, MOR dağılımı parametre sayısı az, parametre tahmini kolay ve basit fonksiyonel yapısına sahip kullanışlı bir dağılımdır.

5.2.9. Uygulama

Bu bölümde, MOR dağılımının uygulanabilirliğini göstermek amacıyla, gerçek bir veri setinin üzerinde uygulama gerçekleştirilmiştir. Tablo 5.2’de kullanılan arıza veri seti yer almaktadır [122]. Veri seti, eş zamanlı güvenilirlik testine tabi tutulmuş, aynı özellikli 20 üniteden, test süresi boyunca arıza meydana gelen 14 üniteye ilişkin değerden oluşmaktadır. Bu 14 ünite için arıza sonrası test sona erdirilerek, arıza saatleri aşağıdaki gibi kaydedilmiştir:

Tablo 5.2 Arıza verisi (saat)

260, 420, 550, 630, 720, 800, 900, 970, 1050, 1135, 1220, 1300, 1400, 1490
--

Tablo 5.3’te arıza verisini modellemede kullanılan diğer dağılımların listesi verilmiştir:

Tablo 5.3 Karşılaştırılan dağılımlar ve kısaltmaları

Dağılım	Kısaltma	Kaynak
Marshall-Olkin Rayleigh	MOR	Önerilen
Rayleigh	R	[121]
Ters Rayleigh	IR	[119]
Kesilmiş Rayleigh	TR	[22]
Kumaraswamy-Rayleigh	KR	[119]
Kesilmiş-Ters-Rayleigh	TIR	[27]
Kumaraswamy-Ters-Rayleigh	KIR	[120]

Tablo 5.4, incelendiğinde, AIC kriterlerine göre veriyi en iyi modelleyen dağılım MOR dağılımıdır. CAIC ve BIC kriterlerine göre ise, az farkla en iyi ikinci dağılım olduğu söylenebilir.

Tablo 5.4 Kullanılan dağılımların bilgi kriterleri ile karşılaştırılması

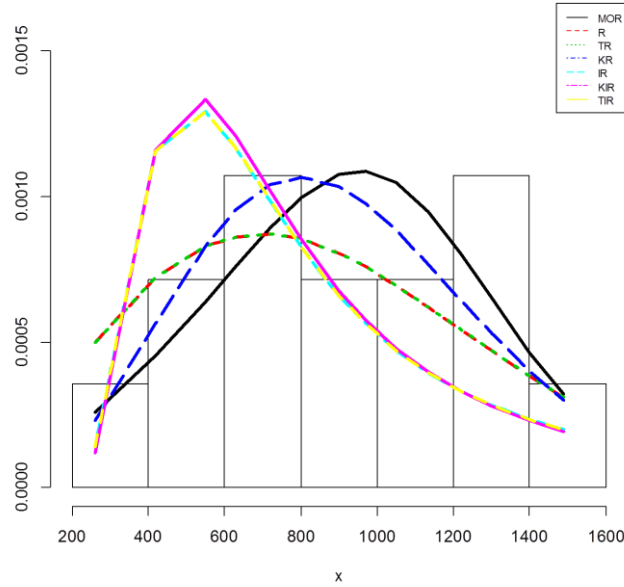
Dağılım	Parametre Tahminleri	AIC	CAIC	BIC
MOR(γ, σ)	4.0247 516.5468	208.2166	209.3075	209.4947
R(σ)	696.9812	208.3814	208.7147	209.0205
TR(σ, λ)	696.9812 1×10^{-10}	210.3814	211.4723	211.6595
KR(a, b, σ)	1.6370 600.0020 0.9994	210.8654	213.2654	212.7825
IR(θ)	389066.7	214.9010	215.2343	215.5400
KIR(α, λ)	1.068613 407182.4	216.8701	217.9610	218.1482
TIR(θ, λ)	389066.2 1×10^{-10}	216.9010	217.9919	218.1791

Tablo 5.5'te ise, dağılımlara ilişkin W ve A istatistiklerine yer verilmiştir. Buna göre en küçük değerlerle, veriyi en iyi modelleye MOR dağılımı olmuştur.

Tablo 5.5 Cramer-von Misses ve Anderson Darling istatistikleri

Dağılım	W	A
MOR(γ, σ)	0.01392043	0.1172192
R(σ)	0.02124438	0.1695305
TR(σ, λ)	0.02124438	0.1695305
KR(a, b, σ)	0.02275150	0.1794724
IR(θ)	0.13718060	0.8923135
KIR(α, λ)	0.13639140	0.8875740
TIR(θ, λ)	0.13718060	0.8923135

Son olarak, veriye ilişkin dağılım eğrilerinin histogramı çizilmiş, görsel olarak da, MOR dağılımının veriyi daha iyi modellediğine karar verilmiştir. Dikkat edilirse, veri iki tepeli olmasına rağmen MOR dağılımı ile iyi bir uyum sağlanabilmiştir. Aslında bu durum az parametrelili ve parametre tahminlerinin kolay elde edilebilir olması yüzünden MOR dağılımını daha tercih edilir bir konuma getirir.



Şekil 5.3 Veriye ait histogram ve model eğrileri

5.2.10. Bootstrap Çalışması

Önceki bölümde, eş zamanlı güvenilirlik testine tabi tutulmuş 20 ünitenin içerisinde arıza vermiş, 14 üniteye ilişkin arıza saatleri MOR dağılımı ile modellenmişti. Bu bölümde ise, elde edilen parametrelerin güvenilirliğine ilişkin değerlendirme yapabilmek adına bootstrap çalışması gerçekleştirilmiştir. Bu amaçla, arıza saatleri veri setinden yerine konularak, 1000 kez yeniden örnekleme yapılmış ve her biri MOR dağılımı ile modellenmiştir. Elde edilen bootstrap tahminleri $\hat{\gamma}^*$ ve $\hat{\sigma}^*$ 'ye ilişkin 1000 örneklemin üzerinden hesaplanan ortalama değer ve tanımlayıcı istatistikler Tablo 5.6'da verilmiştir. Uygulamada elde edilen parametre tahmin değerleri $\hat{\gamma} = 4.0247$ ve $\hat{\sigma} = 516.5468$ iken, Tablo 5.6'dan da görüldüğü gibi, bootstrap tahminleri $\hat{\gamma}^* = 6.6306$ ve $\hat{\sigma}^* = 502.230$ şeklinde bulunmuştur. Burada dikkat çeken $\hat{\gamma}$ parametresine ilişkin bootstrap standart hata tahmininin bir miktar büyük olmasıdır. Örneklem büyüklüğünün yeterince büyük olmaması bu duruma sebep gösterilebilir. Aslında, daha güvenilir parametre tahminlerinin elde edilmesi için daha geniş örneklemlerle çalışmak daha doğru olacaktır.

Tablo 5.6 Bootstrap örneklemesine ilişkin tahmin edilen MOR parametrelerinin tanımlayıcı istatistikleri

Parametre	Ortalama	Std Sapma	Min	Q1	Medyan	Max	Q3
$\hat{\gamma}^*$	6.6306	6.2153	0.4592	2.6783	4.5821	39.4842	8.1446
$\hat{\sigma}^*$	502.230	63.940	327.74	457.76	497.48	743.34	543.93

Tablo 5.7'de yan düzeltmeli bootstrap tahminleri yer almaktadır. Yanın negatif olarak elde edilmesi tahminin standart hatasını arttırıcı faktör olabilmektedir.

Tablo 5.7 Bootstrap örneklemesine ilişkin MOR parametrelerinin yan düzeltmeli tahminleri

Parametre	Yan	Yan düzeltmeli tahmin
$\hat{\gamma}^*$	2.60590	1.41880
$\hat{\sigma}^*$	-14.3168	530.8636

Tablo 5.8'de MOR parametrelerinin bootstrap-t aralığı değerlerine yer verilmiştir:

Tablo 5.8 MOR parametrelerinin bootstrap-t aralığı

Parametre	Alt Sınır	Üst Sınır
$\hat{\gamma}^*$	-11.96901	6.760205
$\hat{\sigma}^*$	417.0412	625.5351

Tablo 5.8 incelendiğinde, elde edilen t aralıklarının $\hat{\gamma}^*$ alt sınır değerinin negatif olduğu görülmektedir. Bu bootstrap t aralıklarının bir dezavantajıdır. Aralık genişliğini koruma özellikleri yoktur. Diğer bir deyişle, γ parametresi esasen 0 ve pozitif değerler için tanımlıdır. Bu durumda, Tablo 5.9’da yer alan bootstrap yüzdelliklerini dikkate almak daha uygun olacaktır. Bu aralıklar incelendiğinde $\hat{\gamma} = 4.0247$ ve $\hat{\sigma} = 516.5468$ tahminlerinin ve yan düzeltmeli tahminlerin bu aralıklar içinde yer aldığı görülür. Bu sayede, uygulamaya ilişkin yapılan modellemenin ve parametre tahminlerinin güvenilir olduğu söylenebilir.

Tablo 5.9 Bootstrap örneklemesine ilişkin tahmin edilen MOR parametrelerinin bootstrap yüzdellikleri

Parametre	Alt Sınır	Üst Sınır
$\hat{\gamma}^*$	1.289195	20.01841
$\hat{\sigma}^*$	407.5585	616.0524

6. KUMARASWAMY MARSHALL-OLKIN GENELLEŞTİRİLMİŞ DAĞILIM AİLESİ

Tez çalışmasının bu bölümünde; daha önceki iki bölümde bahsedilen KGD ve MOGD ailelerinin birleştirilmesiyle elde edilen Kumaraswamy Marshall-Olkin Dağılım (KMOGD) ailesine yer verilmiştir. Burada, birleştirmenin anlamı, MOGD ailesi üyesi herhangi bir dağılımın Kumaraswamy genelleştirmesine tabi tutulmasıyla elde edilen dağılım ailesidir. Çalışmadaki temel dağılım bilinen bir G olasılık dağılımı, üretici dağılım ise Kumaraswamy Marshall-Olkin dağılımıdır. Bu durum, MO- G dağılımını temel dağılım olarak alıp Kumaraswamy genelleştirmesi yapmak ile aynıdır. Bu dağılım, genel ifade ile $KwMO-G$ olarak adlandırılmıştır. $KwMO-G$ dağılımına ilişkin df, oyf, hf ve yf, $a > 0$, $b > 0$, $\gamma > 0$ ve $x > 0$ olmak üzere sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$F_{KwMO-G}(x) = 1 - \left\{ 1 - \left(\frac{G(x)}{1 - (1 - \gamma)[1 - G(x)]} \right)^a \right\}^b \quad (6.1)$$

$$f_{KwMO-G}(x) = \frac{ab\gamma g(x)G^{a-1}(x)}{[1 - (1 - \gamma)(1 - G(x))]^{a+1}} \left\{ 1 - \left[\frac{G(x)}{[1 - (1 - \gamma)(1 - G(x))]} \right]^a \right\}^{b-1}, \quad (6.2)$$

$$h_{KwMO-G}(x) = \frac{ab\gamma g(x)G^{a-1}(x)}{[1 - (1 - \gamma)(1 - G(x))] \left\{ [1 - (1 - \gamma)(1 - G(x))]^a - G^a(x) \right\}}, \quad (6.3)$$

$$S_{KwMO-G}(x) = \left\{ 1 - \left(\frac{G(x)}{1 - (1 - \gamma)[1 - G(x)]} \right)^a \right\}^b. \quad (6.4)$$

Burada $G(\cdot)$, bilinen her hangi bir olasılık dağılım fonksiyonunu ifade ederken, x , G dağılımının tanım kümesi içinde değerler almaktadır. Dikkat edilirse, bu dağılım ailesi KGD ailesinin tüm özelliklerini taşımasının yanı sıra, a ve b parametrelerinin sıfıra eşitlenmesiyle MOGD ailesine dönüştüğü görülebilir.

Tez çalışmasında KMOGD ailesi kapsamında yeni bir olasılık dağılımı tanımlanmış ve özellikleri incelenmiştir. Bu amaçla, temel dağılım olarak log-lojistik dağılımı dikkate alınmıştır. Aşağıda öncelikle log-lojistik dağılımına değinilmiş, sonrasında yeni dağılım ayrıntılarıyla incelenmiştir.

6.1. Log-Lojistik Dağılımı

Fisk dağılımı olarak da bilinen Log-lojistik (LL) dağılımı, son yıllarda yaşam çözümlemesi ve güvenilirlikte yaygın olarak kullanılmaktadır. Lojistik dağılımlı bir raslantı değişkeninin logaritması, LL dağılıma uymaktadır. LL dağılımı, Log-normal dağılıma alternatif bir dağılımdır. Çünkü, log-normal dağılımdakine benzer şekilde hata oran fonksiyonu önce artmakta sonra azalmaktadır. LL dağılımına ilişkin df, oyf, hf ve yf, $x > 0$ olmak üzere, sırasıyla aşağıda verildiği gibidir:

$$G(x) = 1 - \left[1 + \left(\frac{x}{\alpha} \right)^\gamma \right]^{-1}, \quad (6.5)$$

$$g(x) = \frac{\gamma x^{\gamma-1}}{\alpha^\gamma \left[\left(\frac{x}{\alpha} \right)^\gamma + 1 \right]^2}, \quad (6.6)$$

$$h(x) = \frac{\gamma x^{\gamma-1}}{\alpha^\gamma \left[\left(\frac{x}{\alpha} \right)^\gamma + 1 \right]}, \quad (6.7)$$

$$S(x) = \left[1 + \left(\frac{x}{\alpha} \right)^\gamma \right]^{-1}. \quad (6.8)$$

Burada $\alpha > 0$ ölçek parametresi ve $\gamma > 0$ şekil parametresidir.

6.2. Kumaraswamy Marshall-Olkin-Log-Lojistik Dağılımı

Literatürde, LL dağılımı için Gui [123] tarafından bir genelleştirme önerilmiştir. Bu genelleştirmede, MOGD ailesi üyesi olan Marshall-Olkin log-lojistik (MOLL) dağılımını tanımlamış ve üzerinde çalışmıştır. MOLL dağılıma ilişkin df ve oyf, Eşitlik (6.9) ve (6.10)'daki gibidir:

$$F_{\text{MOLL}}(x) = 1 - \frac{\beta \alpha^\gamma}{(x^\gamma + \beta \alpha^\gamma)}, \quad (6.9)$$

$$f_{\text{MOLL}}(x) = \frac{\beta \gamma \alpha^\gamma x^{\gamma-1}}{(x^\gamma + \beta \alpha^\gamma)^2}. \quad (6.10)$$

Burada $x > 0$ ve $\alpha, \beta, \gamma > 0$ olarak tanımlıdır. Özel olarak, MO-G dağılım parametresi β , 1'e eşitlenirse, MOLL dağılımı LL dağılımına dönüşür. Tez çalışmasının bu bölümünde ise, KMOGD ailesi üyesi bir dağılım olarak, LL dağılımı için yeni bir genelleştirme önerilmiştir. Burada tanımlanan yeni dağılım Kumaraswamy Marshall-Olkin-Log-Lojistik

dağılımı olarak adlandırılmış ve kısaca KMOLL ile gösterilmiştir. KMOLL dağılımına ilişkin fonksiyonlar elde edilirken, KMOGD ailesi özelliklerinden yararlanılabildiği gibi, KGD ailesi özellikleri de kullanılabilir. Burada, dikkat edilmesi gereken en önemli nokta, temel alınan dağılımın kullanılan aile özelliklerine göre değişeceğidir. KGD ailesi özellikleri için temel dağılım MOLL dağılımı, diğer durumda LL dağılımıdır.

6.2.1. Dağılıma İlişkin Fonksiyonlar

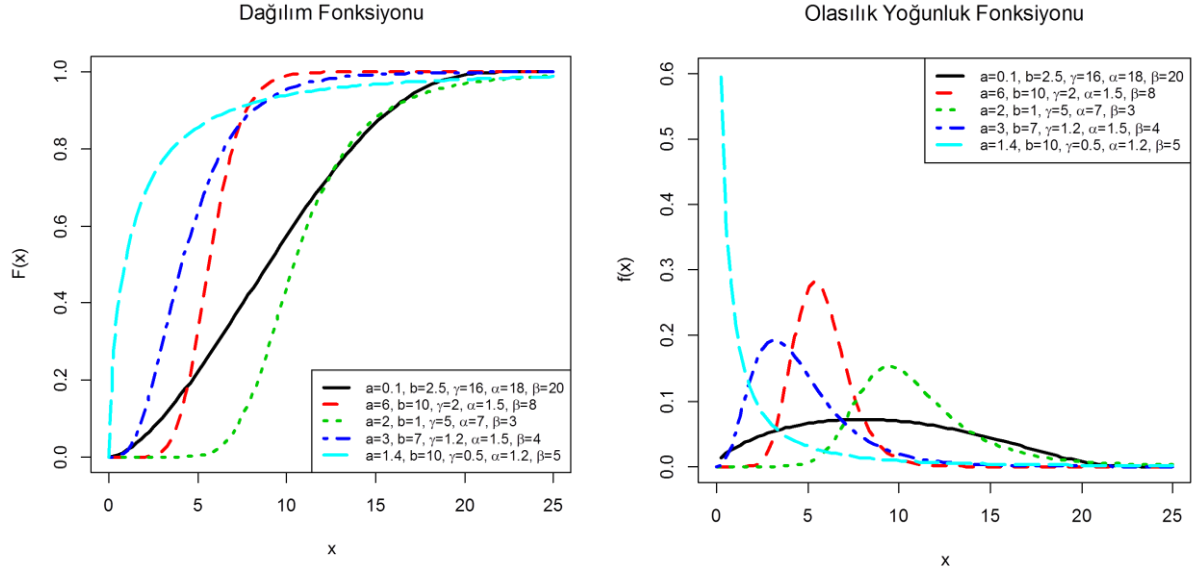
İkinci bölümde yer verilen KGD ailesine ait Eşitlik (5.1) ve Eşitlik (5.2)'de, Eşitlik (6.5) ile Eşitlik (6.6) yerlerine yazılarak KMOLL dağılımına ilişkin df ve oyf elde edilmiştir. Yine Eşitlik (6.1) ve Eşitlik (6.2)'de Eşitlik (6.9) ile Eşitlik (6.10) yerlerine yazılarak aynı eşitlikler aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$F_{KMOLL}(x) = 1 - \left[1 - \left(\frac{x^\gamma}{x^\gamma + \beta\alpha^\gamma} \right)^a \right]^b, \quad (6.11)$$

$$f_{KMOLL}(x) = ab \frac{\beta\gamma\alpha^\gamma x^{\gamma-1}}{(x^\gamma + \beta\alpha^\gamma)^2} \left(\frac{x^\gamma}{x^\gamma + \beta\alpha^\gamma} \right)^{a-1} \left[1 - \left(\frac{x^\gamma}{x^\gamma + \beta\alpha^\gamma} \right)^a \right]^{b-1}. \quad (6.12)$$

Burada $a > 0$, $b > 0$, $\alpha > 0$, $\gamma > 0$ ve $\beta > 0$ 'dir. Dikkat edilirse, β parametresi Marshall-Olkin genelleştirmesinden ve a, b parametreleri Kumaraswamy genelleştirmesinden gelen parametrelerdir.

KMOLL dağılımına ilişkin Eşitlik (6.11) ve Eşitlik (6.12) ile verilen oyf ve df'lerin, farklı parametre değerleri için olası şekillerini görebilmek adına Şekil 6.1'deki grafikler elde edilmiştir:



Şekil 6.1 KMOLL dağılımına ilişkin df ve oyf grafikleri

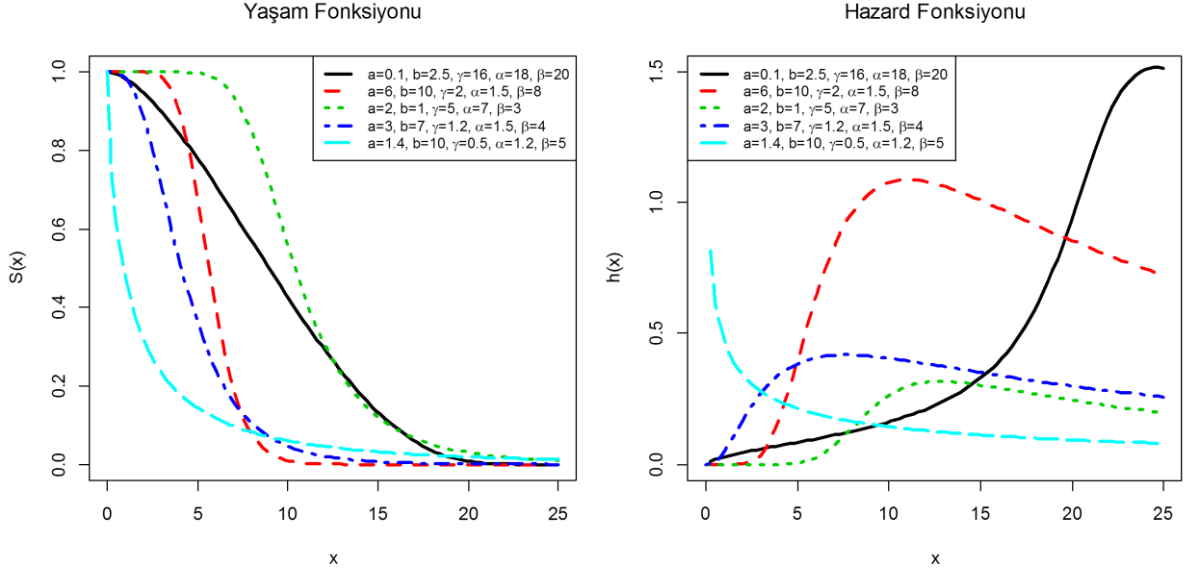
KMOLL dağılımına ilişkin y_f aşağıda verildiği gibidir:

$$S_{KMOLL}(x) = \left[1 - \left(\frac{x^\gamma}{x^\gamma + \beta\alpha^\gamma} \right)^a \right]^b. \quad (6.11)$$

Bir raslantı değişkeninin diğer bir karakteristiği de h_f 'dir. KMOLL dağılımına ilişkin h_f Eşitlik (6.12)'de yer almaktadır:

$$h_{KMOLL}(x) = ab \frac{\beta\gamma\alpha^\gamma x^{\gamma-1}}{(x^\gamma + \beta\alpha^\gamma)^2} \left(\frac{x^\gamma}{x^\gamma + \beta\alpha^\gamma} \right)^{a-1} \left[1 - \left(\frac{x^\gamma}{x^\gamma + \beta\alpha^\gamma} \right)^a \right]^{-1}. \quad (6.12)$$

Özellikle y_f ve h_f 'nin farklı parametre değerlerine karşılık, farklı şekle sahip olmaları bu dağılımın esnek olduğunun bir göstergesidir. Bu sayede farklı yapıdaki verileri modelleme kabiliyetine sahip olacaktır. Şekil 6.2'den de görüleceği gibi h_f artan, azalan, J şekli gibi birçok şekle sahip olabilmektedir.



Şekil 6.2 KMOLL dağılımına ilişkin yf ve hf grafikleri

6.2.2. Momentler

Bir dağılımı karakterize eden birçok özelliğe momentler yardımıyla ulaşılabilir. Bu bölümde KMOLL dağılımına ilişkin momentlere yer verilmiştir. Dağılıma ilişkin n . dereceden merkezsiz olmayan moment,

$$E(X^n) = \sum_{i=0}^{\infty} w_i \int_0^{\infty} x^n f_{MOLL}(x) F_{MOLL}^{a(i+1)-1}(x) dx \quad (6.13)$$

olarak tanımlanmıştır. Burada $w_i = (-1)^i ab \binom{b-1}{i}$ olup ve $f_{MOLL}(\cdot)$ ile $F_{MOLL}(\cdot)$ sırasıyla MOLL dağılımına ilişkin oyf ve df'yi ifade eder. Eşitlik (6.13)'te yer alan integral ifadesinde $0 < u < 1$ için $F_{MOLL}(x) = u$ dönüşümü yapıldığında Eşitlik (6.14) elde edilir.

$$\int_0^{\infty} x^n f_{MOLL}(x) F_{MOLL}^{a(i+1)-1}(x) dx = \int_0^1 Q_{MOLL}^n(u) u^{a(i+1)-1} du \quad (6.14)$$

Burada $Q_{MOLL}(\cdot)$, MOLL dağılımına ilişkin kantil fonksiyonunu göstermektedir. Gerekli işlemler yapıldıktan sonra, sonuç olarak KMOLL dağılımının n . momentine ilişkin eşitlik aşağıdaki gibi elde edilir:

$$E(X^n) = \beta^{n/\gamma} \alpha^n \sum_{i=0}^{\infty} w_i B\left(\frac{n}{\gamma} + a(i+1), 1 - \frac{1}{\lambda}\right). \quad (6.15)$$

Burada $B(\cdot, \cdot)$, beta fonksiyonudur.

6.2.3. Moment Çıkaran Fonksiyon

X 'in moment üreten fonksiyonu $M(t) = E(e^{tx})$ olup aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$M(t) = \sum_{i=0}^{\infty} w_i \int_0^{\infty} e^{tx} f_{MOLL}(x) F_{MOLL}^{a(i+1)-1}(x) dx. \quad (6.16)$$

Eşitlik (6.16)'da integral için kantil dönüşümü yapılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\int_0^{\infty} e^{tx} f_{MOLL}(x) F_{MOLL}^{a(i+1)-1}(x) dx = \int_0^1 e^{tQ_{MOLL}(u)} u^{a(i+1)-1} du.$$

Burada $Q_{MOLL}(\cdot)$, $0 < u < 1$ için MOLL dağılımına ilişkin kantil fonksiyonunu temsil etmektedir. Maclaurin açılımı kullanılarak,

$$e^{tQ_{MOLL}(u)} = \sum_{j=0}^{\infty} \left[t\alpha \left(\frac{\beta u}{1-u} \right)^{1/\gamma} \right]^j / j!$$

eşitliği yazılabilir. Son olarak eşitlikler yerine yazılırsa, moment çıkaran fonksiyon,

$$\begin{aligned} M(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t\alpha)^j \beta^{j/\gamma}}{j!} \int_0^1 u^{j/\gamma + a(i+1)-1} (1-u)^{j/\gamma} du \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} w_i \frac{(t\alpha)^j \beta^{j/\gamma}}{j!} B\left(\frac{j}{\gamma} + a(i+1), 1 - \frac{j}{\gamma}\right) \end{aligned} \quad (6.17)$$

biçiminde elde edilir.

6.2.4. Entropi

Shannon entropisi, çeşitli yoğunluk fonksiyon şekillerinin karşılaştırılmasında ve kuyrukların ağırlık ölçümünde benzer bir rol oynar. Bir X raslantı değişkeninin Shannon entropisi $E[-\log f(x)]$ şeklinde tanımlanır. KMOLL dağılımı için Shannon entropisi aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$\begin{aligned} E[-\log f_{KMOLL}(x)] &= -\log(ab) - E[\log f_{MOLL}(x)] - (a-1)E[\log F_{MOLL}(x)] \\ &\quad - (b-1)E\left\{\log\left[1 - F_{MOLL}^a(x)\right]\right\}. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Aşağıda Eşitlik (6.18)'de yer alan beklenen değer eşitliklerinin karşılıklarına yer verilmiştir:

$$\begin{aligned}
E[\log f_{MOLL}(x)] &= ab \int_0^{\infty} \log [f_{MOLL}(x)] f_{MOLL}(x) F_{MOLL}^{a-1}(x) [1 - F_{MOLL}^a(x)]^{b-1} dx \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} w_k I_k.
\end{aligned} \tag{6.19}$$

Eşitlik (6.19)' da I_k

$$\begin{aligned}
I_k &= \int_0^{\infty} \log [f_{MOLL}(x)] f_{MOLL}(x) F_{MOLL}^{a(k+1)-1}(x) dx \\
&= \int_0^1 \log \{f_{MOLL}[Q_{MOLL}(u)]\} u^{a(k+1)-1} du \\
&= \int_0^1 \log \left[\gamma \alpha^{-1} \beta^{-1/\gamma} u^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} (1-u)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \right] u^{a(k+1)-1} du \\
&= \frac{1}{ak+a} \left(\log \gamma - \log \alpha - \frac{\log \beta}{\gamma} \right) + \log \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1} 2^j}{j(ak+a+1)} {}_1F_2(-j, ak+a, ak+a+1, 2)
\end{aligned}$$

biçiminde tanımlanmıştır. Burada ${}_2F_1$, genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonu ifade edip, $(a)_k = a(a+1)\dots(a+k-1)$ olmak üzere,

$${}_1F_2(-j, ak+a, ak+a+1, 2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{x^k}{k!}$$

biçiminde tanımlanmıştır. Benzer şekilde Eşitlik (6.19)'da yer alan diğer beklenen değer ifadeleri,

$$\begin{aligned}
E[\log(1 - F_{MOLL}^a(x))] &= b \int_0^1 \log u u^{b-1} du = -\frac{1}{b}, \\
E[\log F_{MOLL}(x)] &= \frac{b}{a} \int_0^1 \log u (1-u)^{b-1} du = \frac{b}{a} \frac{\partial B(\alpha+1, b)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \\
&= \frac{-C + \psi(b+1)}{a}
\end{aligned}$$

olarak elde edilmiştir ve burada C , Euler sabitidir [107]. Son olarak, KMOLL dağılımı için elde edilen Shannon entropisi aşağıda gibidir:

$$E[-\log f_{KMOLL}(x)] = -\log(ab) - \sum_{k=0}^{\infty} w_k I_k + (a-1) \frac{C - \psi(b+1)}{a} + \frac{b-1}{b}. \tag{6.20}$$

X raslantı değişkeninin KMOLL dağılımına sahipse, $\gamma > 0$ olmak üzere, Rènyi entropisi için integral eşitliği aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} f^{\delta}(x) dx &= \int_0^{\infty} \left[f_{\text{MOLL}}(x) \sum_{i=0}^{\infty} w_i F_{\text{MOLL}}^{a(i+1)-1}(x) \right]^{\delta} dx \\
&= \int_0^{\infty} f_{\text{MOLL}}^{\delta}(x) F_{\text{MOLL}}^{(a-1)\delta}(x) \left[\sum_{i=0}^{\infty} w_i F_{\text{MOLL}}^{ai}(x) \right]^{\delta} dx \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} c_{\delta,i} \int_0^{\infty} f_{\text{MOLL}}^{\delta}(x) F_{\text{MOLL}}^{(a-1)\delta+ai}(x) dx.
\end{aligned}$$

Burada $w_i = (-1)^i ab \binom{b-1}{i}$ ve $c_{\delta,i} = (iw_0)^{-1} \sum_{m=1}^i [m(\delta+1)-i] w_m c_{\delta,i-m}$ 'dir. Bu ifade için

$F_{\text{MOLL}}(x) = u$ dönüşümü kullanılarak integral ifadesi

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} f_{\text{MOLL}}^{\delta}(x) F_{\text{MOLL}}^{(a-1)\delta+ai}(x) dx &= \int_0^1 u^{ai+\delta a-\delta} f_{\text{MOLL}}^{\delta-1} \mathcal{Q}_{\text{MOLL}}(u) du \\
&= (\gamma \alpha^{-1} \beta^{-1/\gamma})^{\delta-1} \int_0^1 u^{ai+\delta a-\delta + \frac{(\gamma-1)(\delta-1)}{\gamma}} (1-u)^{\frac{(\gamma+1)(\delta-1)}{\gamma}} du \\
&= (\gamma \alpha^{-1} \beta^{-1/\gamma})^{\delta-1} B\left(ai + \delta a - \delta + \frac{(\gamma-1)(\delta-1)}{\gamma} + 1, \frac{(\gamma+1)(\delta-1)}{\gamma} + 1\right)
\end{aligned}$$

olarak elde edilmiştir. Son olarak, KMOLL dağılımlı X raslantı değişkeni için elde edilen Rënyi entropisi Eşitlik (6.21) ile verilmiştir:

$$\mathcal{J}_R(\delta) = \frac{1}{1-\delta} \log \left[(\gamma \alpha^{-1} \beta^{-1/\gamma})^{\delta-1} B\left(ai + \delta a - \delta + \frac{(\gamma-1)(\delta-1)}{\gamma} + 1, \frac{(\gamma+1)(\delta-1)}{\gamma} + 1\right) \right]. \quad (6.21)$$

6.2.5. Güvenilirlik

$X_1 \sim \text{KMOLL}(a_1, b_1, \alpha_1, \gamma_1, \beta_1)$ ve $X_2 \sim \text{KMOLL}(a_2, b_2, \alpha_2, \gamma_2, \beta_2)$ bağımsız raslantı değişkenleri

ele alınsın ve $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha, \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma, \beta_1 = \beta_2 = \beta$ olarak tanımlansın. $f_1(x)$, X_1 'e ait oyf

olmak üzere $f_1(x) = \sum_{i=0}^{\infty} w_i F_{\text{MOLL}}^{a_1(i+1)-1}(x) f_{\text{MOLL}}(x)$ 'dir. $F_2(x)$ ise, X_2 'ye ait df olup

$F_2(x) = 1 - [1 - F_{\text{MOLL}}^{a_2}(x)]^{b_2} = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} s_k F_{\text{MOLL}}^{a_2 k}(x)$ biçimindedir. Burada, $w_i = (-1)^i ab \binom{b-1}{i}$ ve

$s_k = (-1)^k \binom{b_2}{k}$ olarak tanımlanmıştır. Bu ifadeler $R = P(X_2 < X_1)$ eşitliğinde yerine

yazılarak, KMOLL dağılımına ilişkin güvenilirlik Eşitlik (6.22) ile bulunmuştur:

$$R = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{w_i}{a_1(i+1)} - \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w_i s_k}{a_1(i+1) + a_2 k}. \quad (6.22)$$

6.2.6. Sıra İstatistikleri

Bu bölümde, sıra istatistiklerinin elde edilmesinde KGD ailesi özelliklerinden faydalanılmıştır. $X_{i:n}$, $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere, i . sıra istatistiğin oyf'si $f_{i:n}(x)$ olsun. Nadarajah vd. [107], Kum-G dağılımından gelen X_1, X_2, \dots, X_n rasgele örnekleme için $f_{i:n}(x)$ 'yi aşağıdaki gibi tanımlamıştır:

$$f_{i:n}(x) = \frac{f(x)}{B(i, n-i+1)} F(x)^{i-1} [1-F(x)]^{n-i}. \quad (6.23)$$

Eşitlik (6.23)'de binom açılımı kullanılırsa,

$$f_{i:n}(x) = \frac{f(x)}{B(i, n-i+1)} \sum_{j=0}^{n-i} (-1)^j \binom{n-i}{j} F^{i+j-1}(x) \quad (6.24)$$

olur. X_1, X_2, \dots, X_n , KMOLL dağılımından gelen rasgele bir örneklem ise, Eşitlik (6.24)'te yer alan $f(x)$ ve $F(x)$ sırasıyla KMOLL dağılımına ilişkin oyf ve df olur. KMOLL dağılımı MOLL dağılımı ile ifade edilirse, Eşitlik (6.24)'ten Eşitlik (6.25) elde edilir:

$$f_{i:n}(x) = \sum_{r,k=0}^{\infty} q_{r,k} F_{\text{MOLL}}^{a(k+1)+r-1}(x) f_{\text{MOLL}}(x). \quad (6.25)$$

Burada,

$$q_{r,k} = \sum_{j=0}^{n-i} \frac{(-1)^j \binom{n-i}{j} w_k p_{r,i+j-1}}{B(i, n-i+1)}$$

ve

$$p_{r,u}(a,b) = \sum_{k=0}^u (-1)^k \binom{u}{k} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=r}^{\infty} (-1)^{mr+l} \binom{kb}{m} \binom{ma}{l} \binom{l}{r}, \text{dir.}$$

KMOLL sıra istatistikleri için s. dereceden beklenen değer ve moment çıkararak fonksiyonu sırasıyla Eşitlik (6.26) ve (6.27)'de verilmiştir:

$$\begin{aligned} E(X_{i:n}^s) &= \sum_{r,k=0}^{\infty} q_{r,k} \int_0^1 Q_{\text{MOLL}}^s(u) u^{a(k+1)+r-1} du \\ &= \beta^{s/\gamma} \alpha^s B\left(\frac{s}{\gamma} + ak + a + r, \frac{s}{\gamma} + 1\right), \end{aligned} \quad (6.26)$$

$$\begin{aligned}
M_{i:n}(t) &= \sum_{r,k=0}^{\infty} q_{r,k} \int_0^1 e^{tQ_{\text{MOLL}}(u)} u^a du \\
&= \sum_{r,k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} q_{r,k} \frac{t^n \alpha^n \beta^{n/\gamma}}{n!} B\left(\frac{n}{\gamma} + a(k+1) + r, 1 - \frac{n}{\gamma}\right).
\end{aligned} \tag{6.27}$$

6.2.7. Parametre Tahminleri

Bu bölümde, KMOLL dağılımına ilişkin bilinmeyen parametrelerin en çok olabilirlik tahminleri elde edilmiştir. x_1, x_2, \dots, x_n gözlemlerinin a, b, α, γ ve β parametrelili KMOLL dağılımından olduğu varsayalım. Bu durumda en çok olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir:

$$L(a, b, \alpha, \gamma, \beta) = \prod_{i=1}^n ab \frac{\beta \gamma \alpha^\gamma x_i^{\gamma-1}}{(x_i^\gamma + \beta \alpha^\gamma)^2} \left(\frac{x_i^\gamma}{x_i^\gamma + \beta \alpha^\gamma} \right)^{a-1} \left[1 - \left(\frac{x_i^\gamma}{x_i^\gamma + \beta \alpha^\gamma} \right)^a \right]^{b-1}. \tag{6.28}$$

Eşitlik (6.29)'da log-olabilirlik eşitliğine yer verilmiştir:

$$\begin{aligned}
\log L &= \log a + \log b + \log \beta + \log \gamma + \gamma \log \alpha + (\gamma - 1) \sum_{i=1}^n \log x_i - 2 \sum_{i=1}^n \log(x_i^\gamma + \beta \alpha^\gamma) \\
&\quad + (a - 1) \left[\gamma \sum_{i=1}^n \log x_i - \sum_{i=1}^n \log(x_i^\gamma + \beta \alpha^\gamma) \right] + (b - 1) \log \left[1 - \left(\frac{x_i^\gamma}{x_i^\gamma + \beta \alpha^\gamma} \right)^a \right]
\end{aligned} \tag{6.29}$$

Buna göre, parametrelere ilişkin kısmi türevler aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \log L}{\partial a} &= \frac{1}{a} + \left[\gamma \sum_{i=1}^n \log x_i - \sum_{i=1}^n \log(x_i^\gamma + \beta \alpha^\gamma) \right] \\
&\quad - (b - 1) \sum_{i=1}^n \left[1 - \left(\frac{x_i^\gamma}{x_i^\gamma + \beta \alpha^\gamma} \right)^a \right]^{-1} \left(\frac{x_i^\gamma}{x_i^\gamma + \beta \alpha^\gamma} \right)^a \log \left(\frac{x_i^\gamma}{x_i^\gamma + \beta \alpha^\gamma} \right),
\end{aligned} \tag{6.30}$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial b} = \frac{1}{b} + \sum_{i=1}^n \log \left[1 - \left(\frac{x_i^\gamma}{x_i^\gamma + \beta \alpha^\gamma} \right)^a \right], \tag{6.31}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \log L}{\partial \alpha} &= a \beta \gamma (b - 1) \alpha^{\gamma-1} \sum_{i=1}^n x_i^\lambda \left(\frac{x_i^\lambda}{x_i^\lambda + \beta \alpha^\gamma} \right)^{a-1} \left[1 - \left(\frac{x_i^\lambda}{x_i^\lambda + \beta \alpha^\gamma} \right)^a \right]^{-1} (x_i^\lambda + \beta \alpha^\gamma)^{-2} \\
&\quad - \left[\beta \gamma (a - 1) \alpha^{\gamma-1} + 2 \beta \gamma \alpha^{\gamma-1} \right] \sum_{i=1}^n (x_i^\lambda + \beta \alpha^\gamma)^{-1} + \frac{\gamma}{\alpha},
\end{aligned} \tag{6.32}$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \gamma} = \frac{1}{\gamma} + \log \alpha + a(b-1) \sum_{i=1}^n \frac{\beta \log x_i (x_i \alpha)^\gamma - \beta \log \alpha (x_i \alpha)^\gamma}{\left(x_i^{2\gamma} + 2\beta (x_i \alpha)^\gamma + \beta^2 \alpha^{2\gamma} \right) \left[1 - \left(\frac{x_i^\gamma}{x_i^\gamma + \beta \alpha^\gamma} \right)^a \right]} \quad (6.33)$$

$$+ a \sum_{i=1}^n \left[\log x_i - \frac{\beta \alpha^\gamma \log \alpha + x_i^\gamma \log x_i}{x_i^\gamma + \beta \alpha^\gamma} \right] - \sum_{i=1}^n \frac{(\beta \alpha^\gamma \log \alpha + x_i^\gamma \log x_i)}{x_i^\gamma + \beta \alpha^\gamma},$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \beta} = \frac{1}{\beta} + a(b-1) \sum_{i=1}^n \frac{(x_i \alpha)^\gamma \left(\frac{x_i^\gamma}{x_i^\gamma + \beta \alpha^\gamma} \right)^{a-1}}{\left(x_i^\gamma + \beta \alpha^\gamma \right)^2 \left[1 - \left(\frac{x_i^\gamma}{x_i^\gamma + \beta \alpha^\gamma} \right)^a \right]} - (a-1) \alpha^\gamma - 2 \alpha^\gamma \sum_{i=1}^n (x_i^\gamma + \beta \alpha^\gamma)^{-1}. \quad (6.34)$$

Buna göre, $(a, b, \alpha, \gamma, \beta)$ parametrelerinin en çok olabilirlik tahminleri $(\hat{a}, \hat{b}, \hat{\alpha}, \hat{\gamma}, \hat{\beta})$, kısmi türevler 0'a eşitlenip denklem sisteminin çözülmesiyle elde edilir.

6.2.8. Benzetim Çalışması

KMOLL dağılımının parametre sayısının fazla olması en çok olabilirlik tahmin yönteminde eşitliklerin çözülmesinde süre kaybı yaratabilmektedir. Ancak, geliştirilen hazır paket programlar ile parametre tahminlerini elde etmek hem oldukça hızlı, hem de oldukça kolaydır. Bu paket programlardan biri bu tez çalışması uygulamalarında kullanılan R Project programı ve *AdequacyModel* paketidir. Bu paket sayesinde iteratif yöntemler kullanılarak parametre tahminlerine hızlıca ulaşılmıştır. Elde edilen tahminlerin başarısını denetlemek içinse her bölümde olduğu gibi bu bölümde de yine bir benzetim çalışması gerçekleştirilmiştir.

Veri üretim aşamasında kullanılan KMOLL dağılımına ilişkin kantil fonksiyonu $Q_{KMOLL}(u) = F_{KMOLL}^{-1}(x)$, $X \sim KMOLL(a, b, \alpha, \gamma, \beta)$ olmak üzere, Eşitlik (6.28)'deki gibi tanımlanır:

$$Q_{KMOLL}(u) = \alpha \beta^{1/\gamma} \left[\left[1 - (1-u)^{1/b} \right]^{-1/a} - 1 \right]^{-1/\gamma}. \quad (6.28)$$

U , $(0,1)$ aralığında tekdüze dağılımlı bir değişken olmak üzere, $X \sim MO-Rayleigh(\gamma, \sigma)$ raslantı değişkeni Eşitlik (6.28) ile elde edilir.

Bu bölümde, Eşitlik (6.28) kullanılarak, keyfi parametre değerleri ve farklı örneklem büyüklükleri için veri setleri üretilmiştir. Daha sonra, veri setleri KMOLL dağılımı ile modellenmiş, parametre tahminleri elde edilmiştir. Bu süreç 1000'er kez tekrarlanmıştır.

Tekrar sayısı, öncesinde yapılan pilot bir çalışmayla 1000 olarak yeterli görülmüştür. Elde edilen tahmini parametrelerin veri üretiminde kullanılan keyfi parametre değerleriyle olan farkı değerlendirmek ve hatasını inceleyebilmek adına, 1000 tekrar üzerinden elde edilen, HKO ve OMS değerleri hesaplanmıştır. Hesaplanan değerler Tablo 6.1’de verilmiştir.

Tablo 6.1’de görüldüğü gibi, keyfi verilen parametre değerlerinin tahmini örneklem büyüklüğü 30 olduğunda dahi oldukça iyidir. Örneklem büyüklüğü arttığında hata değerleri oldukça azalmıştır. Parametre sayısının fazla olması nedeniyle işlemler zaman alıcı olur ancak bu sorun iteratif yöntemler ve kullanımı kolay yazılımlar ile rahatlıkla çözülebilmektedir. Kolay olmasının yanı sıra bu çözümün oldukça başarılı olduğu elde edilen sonuçlarca da desteklenmiştir.

Tablo 6.1 Keyfi parametre değerlerine göre KMOLL dağılımına ilişkin benzetim sonuçları

n	\hat{a}	\hat{b}	$\hat{\gamma}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	HKO					OMS				
	$a = 0.2$	$b = 0.3$	$\gamma = 0.5$	$\alpha = 0.7$	$\beta = 0.9$										
30	0.45647	0.43289	0.56772	0.81996	1.08654	0.19628	0.40476	0.07754	0.13090	0.29463	0.34909	0.36469	0.30266	0.36620	0.57116
50	0.33824	0.43532	0.55672	0.76653	1.03672	0.06635	0.08391	0.04538	0.07640	0.20011	0.22391	0.24778	0.24418	0.28991	0.46773
200	0.24245	0.28958	0.51212	0.71355	0.93423	0.05251	0.20782	0.01548	0.02315	0.05912	0.09919	0.13016	0.12104	0.16392	0.26050
500	0.20788	0.29157	0.51022	0.69759	0.90142	0.00904	0.02648	0.00728	0.01111	0.02728	0.04850	0.06238	0.07374	0.10828	0.16909
1000	0.21130	0.28612	0.49626	0.71724	0.92992	0.01623	0.05055	0.00659	0.00665	0.01616	0.04062	0.05568	0.05677	0.07776	0.12179
	$a = 3$	$b = 5$	$\gamma = 9$	$\alpha = 2$	$\beta = 7$										
30	3.32148	5.04578	9.33761	2.00240	6.99998	0.57386	0.44779	0.37861	0.00783	0.00001	0.84885	0.72482	0.66850	0.09691	0.00308
50	3.17492	5.03974	9.15106	2.00074	6.99995	0.30642	0.24774	0.16903	0.00514	0.00001	0.56725	0.49231	0.44492	0.07117	0.00231
200	3.06135	5.03972	9.08898	2.00344	7.00000	0.12276	0.12558	0.07090	0.00259	0.00000	0.37731	0.35144	0.26527	0.05212	0.00166
500	3.00051	5.00887	9.01284	2.00035	6.99998	0.01564	0.00853	0.01086	0.00020	0.00000	0.13260	0.09042	0.11492	0.01372	0.00044
1000	3.00960	5.01858	9.03417	2.00159	6.99993	0.02999	0.02885	0.01317	0.00067	0.00000	0.18718	0.17863	0.12688	0.02718	0.00087
	$a = 3.5$	$b = 3$	$\gamma = 5$	$\alpha = 2.5$	$\beta = 4$										
30	3.64354	3.26691	5.75350	2.67467	4.02422	0.93711	1.06676	0.83417	0.11928	0.00219	1.16700	1.21308	0.93442	0.33320	0.04372
50	3.53571	3.18134	5.45207	2.66357	4.02136	0.57887	0.98199	0.56875	0.82024	0.01000	0.89930	0.99548	0.69301	0.29892	0.03816
200	3.54384	3.01076	5.19639	2.53152	4.00435	0.21817	0.24783	0.09809	0.01754	0.00029	0.53923	0.56658	0.33026	0.14233	0.01790
500	3.47904	3.04076	5.06034	2.52083	4.00282	0.08328	0.09469	0.02457	0.00651	0.00011	0.32885	0.35164	0.16767	0.08742	0.01103
1000	3.47833	3.03968	5.02897	2.51407	4.00181	0.04920	0.05637	0.01422	0.00374	0.00006	0.25112	0.26795	0.12997	0.06652	0.00836
	$a = 17$	$b = 20$	$\gamma = 10$	$\alpha = 15$	$\beta = 25$										
30	17.07369	20.03207	10.40155	15.18601	25.00957	0.08231	0.22295	0.95658	0.39287	0.00135	0.23579	0.34212	1.06738	0.70833	0.04182
50	17.05000	20.02739	10.31008	15.16031	25.00891	0.31513	0.94432	0.54658	0.23252	0.00082	0.47842	0.84216	0.81983	0.55061	0.03272
200	17.07760	19.88111	10.05742	15.01722	25.00081	0.16537	0.52347	0.13333	0.06313	0.00023	0.22485	0.37361	0.41584	0.28789	0.01725
500	17.00369	20.00743	10.03228	15.01765	25.00096	0.00156	0.00268	0.04651	0.02296	0.00008	0.04404	0.05794	0.24223	0.16985	0.01018
1000	17.03595	19.94333	10.01766	15.00460	25.00019	0.09129	0.29287	0.02914	0.01317	0.00005	0.15575	0.26936	0.19107	0.12856	0.00772

6.2.9. Uygulama

Bu bölümde KMOLL ve farklı dağılımlar gerçek bir veri seti kullanılarak karşılaştırılmıştır. Bu dağılımlar model seçim kriterleri ile kullanılarak karşılaştırılmış ve veriyi en iyi modelleyen dağılım seçilmiştir. Bu veri seti için veriyi en iyi modelleyen dağılım KMOLL dağılımıdır.

Tablo 6.2’de Kanada, Carcross’ta bulunan Wheaton Nehri’ndeki taşma miktarlarına (m^3/s) ait 1958-1984 yılları arasındaki gözlem değerleri bulunmaktadır. Bu veri seti üzerinde daha önce Akinsete vd. [11], Cordeiro vd. [35], Merovci ve Puka [28], Alshawarbeh vd. [124] ve Bourguignon vd. [125] de çalışmıştır.

Tablo 6.2 Wheaton Nehri taşkın verileri

1.7	2.2	14.4	1.1	0.4	20.6	5.3	0.7	1.9	13	12	9.3
1.4	18.7	8.5	25.5	11.6	14.1	22.1	1.1	2.5	14.4	1.7	37.6
0.6	2.2	39	0.3	15	11	7.3	22.9	1.7	0.1	1.1	0.6
9	1.7	7	20.1	0.4	2.8	14.1	9.9	10.4	10.7	30	3.6
5.6	30.8	13.3	4.2	25.5	3.4	11.9	21.5	27.6	36.4	2.7	64
1.5	2.5	27.4	1	27.1	20.2	16.8	5.3	9.7	27.5	2.5	27

1958-1984 yılları süresince ortalama $12.2 (m^3/s)$ ’lik taşma söz konusu olmuştur. En küçük taşma miktarı $0.10 (m^3/s)$ iken en yüksek taşma $64.00 (m^3/s)$ ’dir. Çarpıklık katsayısının pozitif olması, Wheaton Nehri taşkın miktarlarının sağa çarpık bir dağılım gösterdiğine işaret etmektedir.

Uygulamanın bu aşamasında, veri seti kendisini en iyi temsil edecek olasılık dağılımı ile modellenmeye çalışılmıştır. Bu amaçla, içlerinde KMOLL dağılımının da yer aldığı, 14 farklı dağılım kullanılarak veri modellenmiştir. İlgili dağılımlar, kısaltmaları ve kaynakları Tablo 6.3’te verilmiştir:

Tablo 6.3 Karşılaştırılan dağılımlar ve kısaltmaları

Dağılım	Kısaltma	Kaynak
Kumaraswamy Marshall-Olkin Log-Lojistik	KMOLL	Önerilen
Marshall-Olkin Log-Lojistik	MOLL	[123]
Log-Lojistik	LL	[123]
Üstelleştirilmiş Genelleştirilmiş Gumbel	ÜGG	[35]
Üstelleştirilmiş Gumbel	ÜG	[35], [126]
Lehmann II Gumbel	LIIG	[35]
Gumbel	G	[35]
Dönüştürülmüş Pareto	DP	[28]
Pareto	P	[125]
Beta Pareto	BP	[11], [125]
Kumaraswamy Pareto	KP	[125]
Üstelleştirilmiş Pareto	ÜP	[127], [125]
Cauchy	C	[124]
Beta Cauchy	BC	[124]

Tablo 6.4’de modellere ilişkin en çok olabilirlik yöntemiyle elde edilen parametre tahminleri ve model seçim kriter değerleri yer almaktadır. Tablo 6.4 incelendiğinde, AIC ve CAIC kriterlerine göre en iyi dağılımın KMOLL olduğu görülmektedir. BIC kriterine göre ise KMOLL ve LL dağılımları çok yakındır.

Tablo 6.4 Kullanılan dağılımların bilgi kriterleri ile karşılaştırılması

Dağılımlar	Parametre Tahminleri				AIC	CAIC	BIC	
$KMOLL(a,b,\gamma,\alpha,\beta)$	0.06698	6.753377	12.996759	83.00146	79.00011	512.0195	512.9286	523.4028
$MOLL(\gamma,\alpha,\beta)$	1.212673	3.198365	2.477358			521.6782	522.0311	528.5082
$LL(\gamma,\alpha)$	1.212673	6.758040				519.6782	519.8521	524.2315
$\ddot{U}GG(\alpha,\beta,\mu,\sigma)^*$	0.0988	0.4769	2.6317	1.6639		521.8000	522.4000	530.9000
$\ddot{U}G(\beta,\mu,\sigma)^*$	1.0312	6.7165	8.1893			544.9000	545.2000	551.7000
$LIIG(\alpha,\mu,\sigma)^*$	0.1474	0.5571	1.7214			524.5000	524.8000	531.3000
$G(\mu,\sigma)^*$	6.968289	8.189349				542.8729	543.0468	547.4262
$DP(\alpha,\lambda)^*$	0.349	-0.952				578.4020	578.7550	580.9550
$BP(\alpha,\beta,k,x_{min})^*$	3.1473	85.7508	0.0088	0.1		573.4000	580.3000	573.8000
$KP(\alpha,b,k,x_{min})^*$	2.8553	85.8462	0.0528	0.1		548.4000	555.3000	548.8000
$\ddot{U}P(\alpha,k,x_{min})^*$	2.8797	0.4241	0.1			578.6000	583.2000	578.8000
$P(\alpha,x_{min})^*$	0.2438634	0.1				610.1280	610.3020	610.4050
$BC(\alpha,\beta,\lambda,\theta)^*$	387.6492	1.4589	-2.0467	0.0787		528.9604	529.5574	528.3897
$C(\lambda,\theta)^*$	6.462228	7.071776				580.9417	581.1156	585.4951

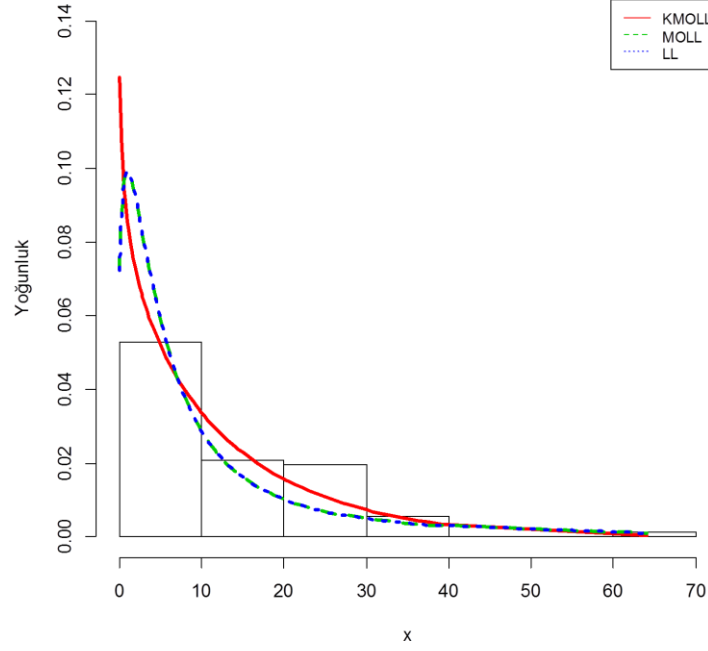
Dağılımların modellemesinde kullanılan diğer iki istatistik W ve A istatistiğidir. Tablo 6.5'te diğer kriterlere göre ilk üç sırada KMOLL, MOLL ve LL dağılımlarına ilişkin A ve W istatistik değerleri yer almaktadır. Tablo 6.5'te en küçük değere sahip olan model KMOLL'dur.

Tablo 6.5 Cramer-von Misses ve Anderson Darling istatistikleri

	W	A
$KMOLL(a,b,\gamma,\alpha,\beta)$	0.1082669	0.6421834
$MOLL(\gamma,\alpha,\beta)$	0.2960627	1.648446
$LL(\gamma,\alpha)$	0.2960627	1.648446

Son olarak veriyi en iyi modelleyen ilk üç dağılıma ilişkin eğri ve histogram Şekil 6.3'te verilmiştir:

* Değerler ilgili kaynaktan alınmıştır.



Şekil 6.3 Veriye ait histogram ve model eğrileri

6.2.10. Bootstrap Çalışması

Bu bölümde uygulama başlığı altında modellenen Wheaton Nehri'ne ait taşma miktarlarına ilişkin 72 veri tekrar ele alınmıştır. Gerçekleştirilen bootstrap çalışması ile elde edilen parametre tahminlerine ilişkin değerlendirme ve hatta gerekliyse yan düzeltmesi yapmak amaçlanmıştır. 1000 adet bootstrap örneklemesinden elde edilen parametre tahmin değerleri ve tanımlayıcı istatistikler Tablo 6.6'da yer almaktadır:

Tablo 6.6 Bootstrap örneklemesine ilişkin tahmin edilen KMOLL parametrelerinin tanımlayıcı istatistikleri

Parametre	Ortalama	Std Sapma	Min	Q1	Medyan	Max	Q3
\hat{a}^*	0.0764496	0.2536	0.0441	0.0562	0.06184	7.9374	0.0712
\hat{b}^*	6.7784952	6.0050	2.9540	5.4310	6.1600	106.1270	6.9610
$\hat{\gamma}^*$	13.096408	2.0210	0.2880	11.8510	13.9530	16.0260	14.4800
$\hat{\alpha}^*$	83.559315	6.6770	12.7240	84.6820	84.9660	87.1740	86.0430
$\hat{\beta}^*$	79.207996	7.1970	0.7770	81.1330	81.1540	81.3660	81.2420

Uygulama kısmında elde edilen $\hat{a}=0.06698$, $\hat{b}=6.753377$, $\hat{\gamma}=12.996759$, $\hat{\alpha}=83.00146$ ve $\hat{\beta}=79.00011$ parametre tahmin değerlerine bakıldığında, bootstrap tahminleri ile oldukça

yakın oldukları görülmektedir. Yan miktarları çok olmamakla beraber, yan değerleri ve yan düzeltmeli tahminler Tablo 6.7’de verilmiştir:

Tablo 6.7 Bootstrap örneklemesine ilişkin KMOLL parametrelerinin yan düzeltmeli tahminleri

Parametre	Yan	Yan düzeltmeli tahmin
\hat{a}^*	0.00947	0.05751
\hat{b}^*	0.025118	6.728259
$\hat{\gamma}^*$	0.099649	12.89711
$\hat{\alpha}^*$	0.557855	82.4436
$\hat{\beta}^*$	0.207886	78.79222

Son olarak tahminlere ilişkin güven aralıkları, bootstrap t-aralıkları ve bootstrap yüzdelikleri olarak Tablo 6.8 ve Tablo 6.9’da elde edilmiştir. Bu aralıklar tahmin edilen parametre değerlerini içeren aralıklardır.

Tablo 6.8 KMOLL parametrelerinin bootstrap-t aralığı

Parametre	Alt Sınır	Üst Sınır
\hat{a}^*	0.04822999	0.082751
\hat{b}^*	4.981635	9.289578
$\hat{\gamma}^*$	11.09623	16.11554
$\hat{\alpha}^*$	79.28179	103.9202
$\hat{\beta}^*$	76.68892	102.8810

Tablo 6.9 Bootstrap örneklemesine ilişkin tahmin edilen KMOLL parametrelerinin bootstrap yüzdelikleri

Parametre	Alt Sınır	Üst Sınır
\hat{a}^*	0.05120906	0.08573001
\hat{b}^*	4.21717643	8.52511930
$\hat{\gamma}^*$	9.87798294	14.8972838
$\hat{\alpha}^*$	62.0827309	86.7211339
$\hat{\beta}^*$	55.1191879	81.3112970

7. LINDLEY GENELLEŞTİRİLMİŞ DAĞILIM AİLESİ

Tez çalışmasının bu bölümünde, birçok dağılımı bünyesinde bulunduran yeni bir dağılım ailesi tanımlanmıştır. KGD ailesine benzer şekilde bu bölümde de, üretici dağılım yaklaşımından faydalanılmıştır. Ailenin tanımlanmasında kullanılan yöntemin ayrıntıları Alzaatreh vd. [3]'nin çalışmasında yer almaktadır. Aslında bu yöntem bir dönüşümü içerisinde barındırır. Bu dönüşüm ise, uygun bir $\psi(\cdot)$ fonksiyonu kullanılarak yapılan dönüşümdür. Burada, üretici dağılım olarak adlandırılan dağılıma $\psi(\cdot)$ dönüşümü yapılır. Lindley Genelleştirilmiş Dağılım (LGD) ailesi tanımlanırken $\psi(G(x)) = -\log[1 - F(x)]$ dönüşümü kullanılmıştır. Aileye ismini veren ve üretici dağılım olarak adı geçen dağılım Lindley dağılımıdır.

Üçüncü bölümde de ele alınan Lindley dağılımı, Lindley [95] tarafından önerilen, özellikle son yıllarda yaşam verileri analizi ve özellikle baskı-kuvvet (stress-strength) güvenilirliği modelleme uygulamalarında kullanılan bir dağılımdır. Bu dağılımın üretici dağılım olarak seçilmesinde, son yıllardaki artan kullanımı ve çekici özellikleri etkili olmuştur. Lindley dağılımı, yaşam süreleri verilerine ilişkin analizlerde yaygın olarak kullanılan Weibull ve üstel dağılıma çok iyi bir alternatiftir [96]. Yapılan çalışmalar, bekleme ve yaşam zamanlarına ilişkin verileri modellemede üstel dağılımdan daha iyi olduğunu göstermiştir [96].

Üstel dağılım için mod her zaman sıfırken, Lindley dağılımında, dağılım parametresinin bir fonksiyonudur ve değişkenlik gösterir. Özellikle hazard fonksiyonunun kuvvet şekli, tek tepeli gibi formları temsil edebilmesi bu dağılımı diğerlerinden üstün kılmaktadır [102]. Bunun yanında üstel dağılıma benzer şekilde $mod(X) < med(X) < E(X)$ ilişkisi geçerlidir. Üstel dağılım sabit hazard fonksiyonuna sahiptir ve bu yaklaşım çoğu veri için uygun bir yaklaşım değildir. Lindley dağılımı ise, hazard ve yaşam fonksiyonlarının yapısı ve esnekliği açısından çekici özelliklere sahiptir.

7.1. Dağılıma İlişkin Fonksiyonlar

LGD ailesine ilişkin df ve oyf, $x > 0$ ve $\theta > 0$ olmak üzere, sırasıyla Eşitlik (7.1) ve Eşitlik (7.2) ile tanımlanmıştır:

$$F_{Lindley-G}(x) = \int_0^{-\log[1-G(x)]} \frac{\theta^2}{1+\theta} (1+t)e^{-\theta} dt = 1 - \left[1 - \frac{\theta}{\theta+1} [\log(1-G(x))] \right] [1-G(x)]^\theta, \quad (7.1)$$

$$f_{Lindley-G}(x) = \frac{\theta^2}{\theta + 1} g(x) [1 - \log(1 - G(x))] [1 - G(x)]^{\theta-1}. \quad (7.2)$$

Burada $G(\cdot)$, herhangi bir olasılık dağılımını ifade etmektedir. Genelleştirilmiş dağılım ailesi sayesinde, temel alınan farklı her bir "G" olasılık dağılımı için yeni bir dağılım elde edilmiş olur ve yeni tanımlanan dağılımın esnekliği üretici dağılım ve eklenen θ parametresi ile sağlanır.

Burada aileye ilişkin df, Lindley dağılımının oyf'sini 0'dan dönüşüm fonksiyonuna integrali alınarak elde edilmiş olur. Lindley dağılımına ilişkin tüm fonksiyonlar (df, oyf, hf, yf) Üçüncü Bölüm'de verilmiştir (Eşitlik (3.13)-(3.16)). Dağılım ailesini tanımlarken seçilen bağ ya da dönüşüm fonksiyonunun seçimi önemlidir. Olasılık dağılımı olma koşullarını sağlayan farklı dönüşüm fonksiyonları da literatürde mevcuttur [3]. Dağılım ailesinin tanımlanabilir olmasından daha ziyade esnek, kullanışlı, kolay elde edilebilir ve karakteristik özelliklerine ulaşılabilir olmasına dikkat edilmesi gereklidir.

Özellikle genelleştirilmiş dağılım ailelerinin matematiksel olarak daha işlevli şekilde tanımlanması karakteristik özelliklerini elde etmede kolaylık sağlar. Dağılım ailesine ilişkin istatistiksel fonksiyonların elde edilmesinde yararlanılan özel seri açılımları aşağıdaki gibidir:

$$(1 - z)^t = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{t}{i} z^i, \quad |z| < 1 \quad (7.3)$$

$$\log(1 - z) = - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^{i+1}}{i+1}, \quad |z| < 1 \quad (7.4)$$

$$\log(1 + z) = - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1} z^{i+1}}{i+1}, \quad |z| < 1 \quad (7.5)$$

Bir diğer kuvvet serisi açılımı ise,

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i u^i \right)^n = \sum_{i=0}^{\infty} c_{n,i} u^i \quad (7.6)$$

biçimindedir. Burada,

$$c_{n,i} = (ia_0)^{-1} \sum_{m=1}^i [m(n+1) - i] a_m c_{n,i-m} \quad i = 1, 2, \dots \text{ ve } c_{n,0} = a_0^n$$

olarak tanımlıdır [128]. Lindley-G dağılımına ilişkin oyf 'nin bir diğer ifadesi Eşitlik (7.3)

ve Eşitlik (7.4) yardımıyla, $w_k = (-1)^k \binom{\theta-1}{k}$ olmak üzere, Eşitlik (7.7) ile verilmiştir:

$$f_{Lindley-G}(x) = \frac{\theta^2}{\theta+1} g(x; \xi) \sum_{k=0}^{\infty} w_k G^k(x) + \frac{\theta^2}{\theta+1} g(x; \xi) \sum_{k,j=0}^{\infty} w_k w_j G^{k+j+1}(x). \quad (7.7)$$

Dağılım ailesini karakterize eden diğer iki fonksiyon hf ve yf ise aşağıdaki eşitliklerdeki gibidir:

$$S_{Lindley-G}(x) = 1 - F(x) = \left[1 - \frac{\theta}{\theta+1} [\log(1 - G(x))] \right] [1 - G(x)]^\theta, \quad (7.8)$$

$$\tau_{Lindley-G}(x) = \theta^2 \frac{g(x) [1 - \log(1 - G(x))]}{[\theta + 1 - \theta \log(1 - G(x))] [1 - G(x)]}. \quad (7.9)$$

Lindley-G dağılımına ilişkin kantil fonksiyonu, $W(.)$ Lambert fonksiyonunu ifade etmek üzere, $0 < u < 1$ için Eşitlik (7.10) ile elde edilir:

$$\begin{aligned} Q_{Lindley-G}(u) &= G^{-1} \left(1 - e^{-L^1(u)} \right) \\ &= G^{-1} \left[1 - \exp \left(\frac{\theta + 1 + W \left[(u-1)(\theta+1) e^{-(\theta+1)} \right]}{\theta} \right) \right] \end{aligned} \quad (7.10)$$

Kantil fonksiyonlarının açık bir şekilde elde ediliyor olması benzetim çalışmalarında ve aşağıdaki gibi tanımlanan Bowley'in çarpıklık (\mathcal{C}), Moors'un basıklık (\mathcal{B}) katsayılarının hesaplanmasında kullanılabilmesini sağlar. Bu katsayılar,

$$\mathcal{C} = \frac{Q(3/4) - 2Q(1/2) + Q(1/4)}{Q(3/4) - Q(1/4)},$$

$$\mathcal{B} = \frac{Q(7/8) - Q(5/8) + Q(3/8) - Q(1/8)}{Q(6/8) - Q(2/8)}.$$

biçiminde hesaplanır.

7.2. LGD Ailesinin ÜD ve KGD Ailesi Cinsinden İfade Edilmesi

Bir dağılım ailesinin başka bir dağılım ailesi cinsinden ifade edilebiliyor olması, aynı zamanda kendi karakteristik özelliklerinin yanı sıra, o ailenin de özelliklerini taşıyabildiği anlamına gelir. Bu açıdan bakıldığında LGD ailesi, önceki bölümlerde ele alınan ÜD ve KGD ailesi cinsinden ifade edilmektedir. Böylece bu ailelerin özellikleri LGD için de

geçerli olacaktır. $\theta > 0$ ve ξ temel alınan G dağılımına ilişkin parametreler olmak üzere, parametresiyle, LGD ailesi üyesi bir dağılıma sahip bir raslantı değişkeni olan $X \sim \text{Lindley-G}(\theta, \xi)$ için df ve oyf, ÜD ve KGD ailesi cinsinden, sırasıyla aşağıdaki eşitliklerle elde edilmiştir.

$$f_{\text{Lindley-G}}(x) = \frac{\theta^2}{\theta+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_{\text{Üstel-G}}(x; (k+1), \xi) z_k}{k+1} + \frac{\theta^2}{\theta+1} \sum_{k,j=0}^{\infty} \frac{f_{\text{Üstel-G}}(x; (k+j+2), \xi) z_k z_j}{k+j+2}, \quad (7.11)$$

$$f_{\text{Lindley-G}}(x; \theta, \xi) = \frac{\theta}{\theta+1} f_{\text{Kw-G}}(1, \theta; \xi) + \frac{\theta^2}{\theta+1} \sum_{j=0}^{\infty} z_j f_{\text{Kw-G}}\left(\frac{j+1}{k+1} + 1, \theta; \xi\right) \left(\frac{j+1}{k+1} + 1\right)^{-1}. \quad (7.12)$$

Burada, $z_k = (-1)^k ab \binom{b-1}{k}$ biçiminde tanımlanmıştır.

7.3. Momentler

LGD ailesine ilişkin n . dereceden merkezsel olmayan momentler ve $n=1,2,\dots$ olmak üzere Eşitlik (7.13)'deki gibi elde edilmiştir.

$$\begin{aligned} E(X^n) &= \int_0^{\infty} x^n f_{\text{Lindley-G}}(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} x^n \frac{g(x)}{1-G(x)} l(-\log[1-G(x)]) dx \\ &= \frac{\theta^2}{\theta+1} \int_0^1 Q^n(u) (1-u)^{\theta-1} [1-\log(1-u)] du \\ &= \frac{\theta^2}{\theta+1} \int_0^1 Q^n(u) \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\theta-1}{k} u^k \right] \left[1 + u \sum_{i=0}^{\infty} \frac{u^i}{i+1} \right] du \\ &= \frac{\theta^2}{\theta+1} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\theta-1}{k} \int_0^1 Q^n(u) u^k du + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{i+1} \binom{\theta-1}{k} \int_0^1 Q^n(u) u^{k+i+1} du \right\} \\ &= \frac{\theta^2}{\theta+1} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\theta-1}{k} I(n, k) + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{i+1} \binom{\theta-1}{k} I(n, k+i+1) \right\} \end{aligned} \quad (7.13)$$

Burada $l(\cdot)$, Lindley dağılıma ilişkin oyf'yi göstermektedir. $G^{-1}(x) = Q(u) = x$ olmak üzere temel alınan dağılımın kantil fonksiyonuna eşittir ve $I(n, k) = \int_0^1 Q^n(u) u^k du$ şeklinde tanımlanmıştır.

7.4. Moment Çıkaran Fonksiyon

Eşitlik (7.1)'deki df 'ye sahip bir X raslantı değişkenine ilişkin moment çıkaran fonksiyon aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\begin{aligned}
 M(t) &= E(e^{tX}) = \int_0^{\infty} e^{tx} f_{Lindley-G}(x) dx \\
 &= \int_0^{\infty} e^{tx} \frac{g(x)}{1-G(x)} l(-\log[1-G(x)]) dx \\
 &= \frac{\theta^2}{\theta+1} \int_0^1 e^{tQ(u)} (1-u)^{\theta-1} [1-\log(1-u)] du \\
 &= \frac{\theta^2}{\theta+1} \int_0^1 e^{tQ(u)} \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\theta-1}{k} u^k \right] \left[1 + u \sum_{i=0}^{\infty} \frac{u^i}{i+1} \right] du \\
 &= \frac{\theta^2}{\theta+1} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\theta-1}{k} \int_0^1 e^{tQ(u)} u^k du + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{i+1} \binom{\theta-1}{k} \int_0^1 e^{tQ(u)} u^{k+i+1} du \right\} \\
 &= \frac{\theta^2}{\theta+1} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\theta-1}{k} I_e(t, k) + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{i+1} \binom{\theta-1}{k} I_e(t, k+i+1) \right\}
 \end{aligned} \tag{7.14}$$

Burada $G^{-1}(x) = Q(u) = x$ ve $I_e(t, k) = \int_0^1 e^{tQ(u)} u^k du$ biçimindedir.

7.5. Entropi

LGD'ye ilişkin entropileri elde etmek için Eşitlik (7.3)-(7.6)'daki açılımlar kullanılmıştır. $\gamma > 0$ ve $\gamma \neq 1$ için tanımlı olan entropi ölçütü $\theta > 0$ olmak üzere, LGD ailesi üyesi bir dağılıma sahip raslantı değişkeni için aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}_R(\gamma) &= \frac{1}{1-\gamma} \log \left[\int_0^{\infty} f_{Lindley-G}^{\gamma}(x) dx \right] \\
 &= \frac{1}{1-\gamma} \log \left[\int_0^{\infty} \frac{\theta^{2\gamma}}{(\theta+1)^{\gamma}} [1-\log(1-G(x))]^{\gamma} [1-G(x)]^{\gamma(0-\gamma)} g^{\gamma}(x) dx \right] \\
 &= \frac{1}{1-\gamma} \log \left[\frac{\gamma \theta^{2\gamma}}{(\theta+1)^{\gamma}} D_{j,k,i} I_{i,k} \right]
 \end{aligned} \tag{7.15}$$

Burada,

$$D_{j,k,i} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\gamma}{j} c_{j,k} (-1)^i \binom{\gamma\theta-\gamma}{i},$$

$$I_{i,k} = \int_0^{\infty} G^{i+k+\gamma}(x) g^{\gamma}(x) dx \text{ ve } c_{j,k} = (ka_0)^{-1} \sum_{m=1}^j [k - m(j+1)] a_m c_{j,k-m}, \quad a_k = (k+1)^{-1}$$

olarak tanımlanmıştır.

$E[-\log f(x)]$ olarak tanımlanan ve $\gamma > 1$ durumunda R nyi entropinin özel durumu olan Shannon entropisi eşitliği, Eşitlik (7.16)'nın beklenen değeri olup aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$-\log f_{Lindley-G}(x) = -\log [1 - \log(1 - G(x))] - (\theta - 1) \log(1 - G(x)) - \log \theta^2 + \log(\theta + 1) - \log(g(x)) \quad (7.16)$$

$$E[-\log f_{Lindley-G}(x)] = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i+1} c_{i+1,k} E[G^{i+j+1}(x)] + (\theta - 1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} E[G^{k+1}(x)] - \log \theta^2 + \log(\theta + 1) - E[\log(g(x))] \quad (7.17)$$

Burada $c_{i+1,k} = (ka_0)^{-1} \sum_{m=1}^k [m(i+2) - k] a_m c_{i+1,k-m}$ ve $a_k = (k+1)^{-1}$ 'dir.

7.6. Güvenirlik

Birbirinden bağımsız X_1, X_2 rasgele değişkenleri için bir olasılık ifadesi olan R güvenirlik fonksiyonu, X_1 'e ilişkin oyf ile X_2 'ye ilişkin df'nin çarpımının tanım aralığında integraline eşittir.

ξ temel dağılıma ilişkin parametre/parametreleri göstermek üzere, $X_1 \sim Lindley - G(\theta_1, \xi)$ ve $X_2 \sim Lindley - G(\theta_2, \xi)$ olmak üzere, ilgili çarpım aşağıdaki gibidir:

$$f_1(x) F_2(x) = \frac{\theta_1^2}{\theta_1 + 1} \left\{ g(x) [1 - G(x)]^{\theta_1 - 1} - g(x) \log [1 - G(x)] [1 - G(x)]^{\theta_1 - 1} \right\} - \frac{\theta_1^2}{\theta_1 + 1} \left\{ g(x) [1 - G(x)]^{\theta_1 + \theta_2 - 2} - \left(\frac{\theta_2}{\theta_2 + 1} - 1 \right) g(x) \log [1 - G(x)] [1 - G(x)]^{\theta_1 + \theta_2 - 2} - \frac{\theta_2}{\theta_2 + 1} g(x) \log [1 - G(x)]^2 [1 - G(x)]^{\theta_1 + \theta_2 - 2} \right\}$$

Bu eşitlik integral ifadesinde yerine yazılarak, LGD ailesine ilişkin güvenirlik fonksiyonu uygun açılımlar kullanılarak, Eşitlik (7.18)'deki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
R &= \int_0^{\infty} f_1(x)F_2(x)dx \\
&= \frac{\theta_1^2}{\theta_1+1} \left\{ \frac{1}{\theta_1} - \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{(i+j+2)(i+1)} \binom{\theta_1-1}{j} \right\} \\
&\quad - \frac{\theta_1^2}{\theta_1+1} \left\{ \frac{1}{\theta_1+\theta_2-2} - \left(\frac{\theta_2}{\theta_2+1} - 1 \right) \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{(i+j+2)(i+1)} \binom{\theta_1+\theta_2-2}{j} \right\} \\
&\quad - \frac{\theta_2}{\theta_2+1} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^i \binom{k}{i} \frac{c_{2,j}}{i+j+3} \left. \right\} \tag{7.18}
\end{aligned}$$

Burada $c_{2,j} = (ja_0)^{-1} \sum_{m=1}^j [3m-j] a_m c_{2,j-m}$ ve $a_j = (j+1)^{-1}$, dir.

7.7. Sıra İstatistikleri

$X_{i:n}$, $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere, i . sıra istatistiğın oyl^{er}si $f_{i:n}(x)$ olsun. LGD ailesine ilişkin $X_{i:n}$ 'nin oyl^{er}si, Eşitlik (6.3)-(6.4) yardımıyla, aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$\begin{aligned}
f_{i:n}(x) &= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} \sum_{j=0}^{n-i} (-1)^j \binom{n-i}{j} \left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{G^{k+1}(x)}{k+1} \right) \sum_{\ell=0}^{\theta-1} (-1)^{\ell} \binom{\theta-1}{\ell} G^{\ell}(x) \frac{\theta^2}{\theta+1} g(x) \\
&\quad \sum_{z=0}^{i+j-1} (-1)^z \binom{i+j-1}{z} \left\{ \left[\sum_{w=0}^{\theta} (-1)^w \binom{\theta}{w} G^w(x) \right]^z \left(1 + \frac{\theta}{\theta+1} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{G^{s+1}(x)}{s+1} \right)^z \right\} \tag{7.19}
\end{aligned}$$

Burada $G(\cdot)$, temel alınan her hangi bir olasılık dağılımının dyl^{er}sini ifade etmektedir.

7.8. Parametre Tahminleri

LGD ailesine ilişkin parametre tahminlerinin elde edilmesi için en çok olabilirlik yöntemi kullanılmıştır. x_1, x_2, \dots, x_n gözlemlerinin θ parametresi ve ek olarak temel alınan herhangi bir dağılımına ilişkin parametre/parametrelerini gösteren ξ parametre vektörüyle Lindley-G dağılımından olduğu varsayılısın. Buna göre, en çok olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki elde edilmiştir:

$$L(\theta; \xi) = \prod_{i=1}^n \left\{ \frac{\theta^2}{\theta+1} \left[1 - \log(1 - G(x_i; \xi)) \right] (1 - G(x_i; \xi))^{\theta-1} g(x_i; \xi) \right\} \tag{7.20}$$

En çok olabilirlik eşitliğinin logaritmasını en büyük yapacak parametre değerleri, parametre tahminlerine ulaştıracaktır. Buna ilişkin en çok olabilirlik eşitlikleri aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$\begin{aligned} \log L = n \left[2 \log \theta - \log (\theta + 1) \right] + \sum_{i=1}^n \log \left[1 - \log (1 - G(x_i; \xi)) \right] \\ + (\theta - 1) \sum_{i=1}^n \log [1 - G(x_i; \xi)] + \sum_{i=1}^n \log [g(x_i; \xi)], \end{aligned} \quad (7.21)$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \theta} = \frac{2n}{\theta} - \frac{n}{\theta + 1} + \sum_{i=1}^n \log [1 - G(x_i; \xi)], \quad (7.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log L}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\left[1 - \log (1 - G(x_i; \xi)) \right] \left[1 - G(x_i; \xi) \right]} \frac{\partial G(x_i; \xi)}{\partial \xi} \\ - (\theta - 1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{\left[1 - G(x_i; \xi) \right]} \frac{\partial G(x_i; \xi)}{\partial \xi}. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Eşitliklerin 0'a eşitlenip çözülmesiyle $\hat{\theta}$ ve $\hat{\xi}$ 'ya ulaşılır. Fisher bilgi matrisi,

$$I = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{bmatrix}$$

olmak üzere, matrisin elemanlarına ilişkin eşitlikler aşağıdaki gibidir:

$$I_{11} = \frac{\partial^2 \log L}{\partial \theta^2} = \frac{-2n}{\theta^2} + \frac{n}{(\theta + 1)^2}, \quad (7.24)$$

$$\begin{aligned} I_{22} = \frac{\partial^2 \log L}{\partial \xi^2} = \sum_{i=1}^n \frac{\log [1 - G(x_i; \xi)]}{\left[1 - \log [1 - G(x_i; \xi)] \right]^2 \left[1 - G(x_i; \xi) \right]^2} \left(\frac{\partial G(x_i; \xi)}{\partial \xi} \right)^2 \\ - (\theta - 1) \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{\left[1 - G(x_i; \xi) \right]^2} \frac{\partial G(x_i; \xi)}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 G(x_i; \xi)}{\partial \xi^2} \right], \end{aligned} \quad (7.25)$$

$$I_{12} = \frac{\partial^2 \log L}{\partial \theta \partial \xi} = - \sum_{i=1}^n \frac{1}{(1 - F(x_i; \xi))} \frac{\partial F(x_i; \xi)}{\partial \xi}. \quad (7.26)$$

8. SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu tez çalışmasında, gerçek hayatta birçok farklı alanda yaygın olarak kullanılan, bilinen olasılık dağılımlarının öneminin vurgulamasının yanı sıra, yetersiz kalabildikleri durumların da olabildiğine dikkat çekilmeye çalışılmıştır. Analizlerde kullanılan çok farklı karakterdeki veri setlerini modellemek ve veriyi en iyi şekilde temsil edecek dağılımları ifade edebilmek önem taşımaktadır. Bu nedenle, bilinen modellere yeni, esnek ve kullanışlı dağılım alternatifleri önermek önem kazanmıştır. Yeni olasılık dağılımların tanımlanması ya da genelleştirilmesi bu ihtiyacı karşılamayı hedeflemektedir.

Çalışmada ÜD, KGD, MOGD ve KMOGD ailesi olmak üzere, dört dağılım ailesine yer verilmiştir. Bu ailelerinin özelliklerinin incelenmesinin yanı sıra, esas olarak literatüre KL, MOR ve KMOLL olmak üzere, üç yeni olasılık dağılımı kazandırılmıştır. Bu yeni dağılımlara ilişkin istatistiksel özellikler ayrıntıları ile ele alınmıştır. Teorik bilgilerin yanı sıra, gerçek veri setlerini modellemede kullanılmıştır. Yine modelleme başarılarını desteklemek amaçlı bootstrap ve benzetim çalışmaları gerçekleştirilmiştir.

Tanımlanan yeni dağılımlar, çok iyi alternatifler olmalarını sağlayacak özelliklere sahiptir. İlk olarak KL dağılımı ele alınırsa, Lindley parametresi θ 'ya ek olarak, a ve b parametrelerine sahiptir. Bu parametreler, dağılımın esneklik kabiliyetini arttırmıştır. Bunun yanı sıra, Lindley dağılımı aslında üstel ve gamma dağılımlarından oluşan bir karma (mixture) dağılımdır. Öyle ki, $f_1(x; \theta)$ θ parametrelili üstel dağılımın oyf 'si ve $f_2(x; 2, \theta)$ parametreleri 2 ve θ olan gamma dağılımının oyf 'sini ifade etmek üzere, $p = \frac{\theta}{\theta+1}$ için Lindley dağılımının oyf 'si aşağıdaki eşitlikle de ifade edilebilir:

$$l(x) = pf_1(x) + (1-p)f_2(x)$$

Bu özellik $a = b = 1$ olmak üzere, KL dağılımı için hala geçerliliğini korumaktadır. Diğer bir deyişle, Lindley dağılımı KL'nin bir alt dağılımıdır. Buna ilişkin ifadeler Tablo 8.1'de verilmiştir:

Tablo 8.1 KL dağılımı ile ilişkili bazı dağılımlar

$X \sim \text{KL}(1,1,\theta) \Rightarrow \text{Lindley}(\theta)$
$X \sim \text{KL}(1,1,\theta) \Rightarrow \text{Karma} [\text{Üstel}(\theta), \text{Gamma}(2, \theta)]$
$X \sim \text{KL}(1,1,\theta) \Rightarrow \text{Yarı-Lindley}(\theta, \theta)$

KL dağılımı artan, azalan, kuvvet tipi, monoton ve sabit yoğunluklu dağılım şekilleri için uygundur. Ayrıca, üstel dağılım ailesinin bir üyesi olarak ifade edilmesi sayesinde bu ailenin tüm özelliklerine de sahiptir. Kantil fonksiyonu kolayca elde edilebilir olduğundan, ters dönüşüm yöntemiyle rasgele değişkenden veri üretimi kolaydır.

Literatüre kazandırılan bir diğer dağılım da MOR dağılımıdır. Bu dağılım, Rayleigh dağılımının σ parametresine ek olarak γ parametresine sahiptir. $\gamma=1$ için, yeniden Rayleigh dağılımı elde edilir. Bu sayede, Rayleigh dağılımı ile Weibull dağılımı arasındaki bilinen geçiş durumu halen geçerliliğini korumaktadır. Ayrıca Marshall-Olkin genelleştirmesinin kararlılık özelliğini taşımaktadır. Bu sayede, yöntem iki kez uygulanacak olsa dahi yeni bir dağılım elde edilemez. MOR dağılımına ilişkin bazı alt dağılımlar Tablo 8.2’de verilmiştir:

Tablo 8.2 MOR dağılımı ile ilişkili bazı dağılımlar

$X \sim \text{MOR}(1, \sigma) \Rightarrow X \sim \text{Rayleigh}(\sigma)$
$X \sim \text{MOR}(1, \sigma) \Rightarrow X \sim \text{Rice}(0, \sigma)$
$X \sim \text{MOR}(1, \sigma) \Rightarrow X \sim \text{Weibull}(2, \sigma / 2)$
$\sqrt{X} \sim \text{MOR}(1, 1 / \sqrt{2\lambda}) \Rightarrow X \sim \text{Üstel}(\lambda)$

MOR dağılımına ilişkin hf grafikleri incelendiğinde, keyfi verilen parametre değerlerine karşılık gelen oldukça farklı şekillerdeki grafikler dikkat çekmektedir. Bu nedenle, artan, azalan ya da kuvvet şeklinde dağılım gösteren veri tipleri için iyi bir alternatiftir. Ayrıca, iki tepeli bir veri seti için gayet iyi bir uyum gösterdiği görülmüştür. Bu dağılımı çekici yapabilecek, en önemli özelliği basit fonksiyel yapısı, az parametre sayısı ve kolay parametre tahminidir. Bunun yanı sıra kantil fonksiyonu da kolayca elde edilebilir ve basit yapısıyla veri üretiminde kullanılabilir.

Son olarak, önerilen dağılım KMOLL dağılımıdır. Bu dağılım aldığı parametre değerleri ile hem KGD ailesi, hem de MOGD ailesinin üyesi olabilme özelliğine sahiptir. Bu sayede, her iki aileye ilişkin özellikleri de içerisinde barındırır. MOLL ve LL dağılımlarının KMOLL dağılımının alt dağılımlarıdır. Bunun yanı sıra, KMOLL’nin başka dağılımlarla olan ilişkisinden de bahsedilebilir. Buna ilişkin, dağılımlar ve parametreleri Tablo 8.3’te verilmiştir:

Tablo 8.3 KMOLL dağılımı ile ilişkili bazı dağılımlar

$X \sim \text{KMOLL}(1,1,\alpha,\gamma,\beta) \Rightarrow X \sim \text{MOLL}(1,1,\alpha,\gamma,\beta)$
$X \sim \text{KMOLL}(1,1,\alpha,\gamma,1) \Rightarrow X \sim \text{LL}(\alpha,\gamma)$
$X \sim \text{KMOLL}(a,1,\alpha,\gamma,\beta) \Rightarrow X \sim \text{Dagum}(a,\gamma,\beta^{1/\gamma}\alpha)$
$X \sim \text{KMOLL}(1,b,\alpha,1,\beta) \Rightarrow X \sim \text{BurrXII}(b,1,\beta\alpha)$
$X \sim \text{KMOLL}(1,b,\alpha,1,\beta) \Rightarrow X \sim \text{ParetoII}(1/b,0,\beta\alpha/b)$
$X \sim \text{KMOLL}(a,1,\alpha,\gamma,\beta) \Rightarrow X \sim \text{Lo max}(1/b,\beta\alpha/b)$

KMOLL dağılımı, önerilen diğer iki dağılımdan farklı olarak, daha fazla parametre sayısına sahiptir. Ancak, bu durum dağılımın tercih edilmesi için dezavantaj değildir. Özellikle, kullanılan paket programlar sayesinde parametre tahminleri oldukça hızlı ve kolay elde edilebilmektedir. Bu durum, benzetim ve bootstrap çalışmalarıyla da açıkça gösterilmiştir. Parametre sayısı çok olmasına rağmen açık bir kantil fonksiyonel yapısına sahiptir. Bu dağılımdan gelen bir raslantı değişkenine ilişkin veri üretimi yapmak oldukça basittir. Eklenen parametreler dağılımın esnekliğini oldukça arttırmıştır.

Son bölümde, birçok farklı dağılım tanımlamaya olanak sağlayacak yeni bir dağılım ailesi olan LGD tanımlanmıştır. Bu ailenin tanımlanmasında üretici dağılım yaklaşımından faydalanılmıştır. Son yıllarda, yaygınlaşan kullanımı, esnekliği ve özellikle fonksiyonlarının çok farklı şekil yapısına sahip olabilmesi sebebiyle, üretici dağılım olarak Lindley dağılımı seçilmiştir. Yeni tanımlanan dağılım ailesinin tanımlanması sonrasında çoğu karakteristik fonksiyonları da elde edilmiştir. Ayrıca, bu dağılım ailesinin ÜD ve KGD ailesi ile olan ilişkisi incelenmiştir. LGD'nin bu aileler cinsinden tanımlanması, onların tercih edilir özelliklerini taşıyabiliyor olduğu anlamına gelmektedir.

Sonuç olarak bu çalışmada, genelleştirilmiş dağılım aileleri incelenmiş, yeni dağılımlar ve bir dağılım ailesi tanımlanmış, bu dağılımların momentler, entropi, güvenilirlik gibi karakteristik özellikleri belirlenmiş ve gerçek hayatta kullanılabilir olduğu gösterilmiştir. Literatüre kazandırılan yeni üç dağılımın ve yeni tanımlanan dağılım ailesine üye birçok dağılımın, farklı alanlarda etkin şekilde kullanılabileceği ve yeni çalışmaların önünü açacağı düşünülmektedir. Ayrıca, bu çalışma yeni dağılım tanımlamada kaynak olmasının yanı sıra, yeni olasılık dağılım ailelerini tanımlamaya ışık tutacak niteliktedir.

Bu çalışmada, kullanılan parametre tahmin yöntemi en çok olabilirlik yöntemidir. Farklı yöntemler ile parametre tahminlerini elde etmek mümkündür ve buna ilişkin çalışmalar da yapılabilir. Ayrıca, dağılımlara ilişkin elde edilen çeşitli karakteristikler, alana göre

çeşitlendirilip, arttırılabilir (Örneğin, ortalama durgunluk zamanı (mean inactivity time), ortalama artık yaşam (mean residual life) fonksiyonu vs.). Bu çalışmada, sürekli verilerin modellenmesinde kullanılacak önerilen bu dağılımların dışında, kesikli değişkenlere ilişkin yapılacak yeni çalışmaların da oldukça dikkat çekici olabileceği düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] Pearson, K., Contributions to the Mathematical Theory of Evolution- II. Skew Variation in Homegenous Material, *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 343–374, **1895**.
- [2] Tukey, J. W., *The practical relationship between the common transformations of percentages of counts and of amounts* ,Technical Report 36, **1960**.
- [3] Alzaatreh, A., Lee, C., and Famoye, F., A new method for generating families of continuous distributions, *Metron*, 71(1), 63–79, **2013**.
- [4] Lai, C. D., Construction of bivariate distributions by a generalised trivariate reduction technique, *Statistics and Probability Letters*, 25(3), 265–270, **1995**.
- [5] Marshall, A. W. and Olkin, I., A new method for adding a parameter to a family of distributions with application to the exponential and Weibull families, *Biometrika*, 641–652, **1997**
- [6] Gupta, R. D. and Kundu. D., Generalized exponential distributions, *Australian and New Zealand Journal of Statistics*. 41(2), 173-188, **1999**.
- [7] Cramer, E. and Udo, K., Sequential order statistics and K-out-of-N systems with sequentially adjusted failure rates, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 48(3), 535–549, **1996**.
- [8] Eugene, N., Lee, C. and Famoye, F., Beta-Normal Distribution and Its Applications, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 31(4), 497–512, **2002**.
- [9] Nadarajah, S. and Kotz S., The beta gumbel distribution, *Mathematical Problems in Engineering*, 4, 323–332, **2004**.
- [10] Nadarajah, S. and Gupta, A., The beta Fréchet distribution, *Far East Journal of Theoretical Statistics*, 14, **2004**.
- [11] Akinsete, A., Famoye, F. and Lee, C., The beta-Pareto distribution, *Statistics (Ber)*, 42, (6), 547–563, **2008**.
- [12] Pescim, R. R., Demétrio, C. G. B., Cordeiro, G. M., Ortega, E. M. M. and Urbano, M. R., The beta generalized half-normal distribution, *Computational Statistics and Data Analysis*, 54, (4), 945–957, **2010**.
- [13] Paranaíba, P. F., Ortega, E. M. M., Cordeiro, G. M. and Pescim, R. R., The beta Burr XII distribution with application to lifetime data, *Computational Statistics and Data Analysis*, 55, (2), 1118–1136, **2011**.
- [14] Shittu, O., Adepoju, K., Shittu, O. I. and Adepoju, K., On the Beta-Nakagami Distribution, *Progress in Applied Mathematics*, 5, 49–58, **2013**.
- [15] Hanook, S., Shahbaz, M., Moshin, M. and Kibra, B. M., A Note On Beta Inverse-Weibull Distribution, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 42, (2), 320–335, **2013**.
- [16] Jafari, A., Tahmasebi, S. and Alizadeh, M., The Beta-Gompertz Distribution, *Revista Colombiana de Estadística*, 1–18, **2014**.

- [17] Singh, B. and Goel, R., The Beta Inverted Exponential Distribution , Properties and Applications, *International Journal, Applied, Science and Mathematics*, 2(5), 132–141, **2015**.
- [18] Cordeiro, G. M., Cristino, C. T., Hashimoto, E. M. and Ortega, E. M. M., Beta Rayleigh, *Statistical Papers*, 54, 133–161, **2013**.
- [19] Shaw, W. and Buckley, I., *The alchemy of probability distributions, beyond gram-charlier expansions and a skew-kurtotic-normal distribution from a rank transmutation map*, Research Report, **2007**.
- [20] Bourguignon, M., Ghosh, I. and Cordeiro, G. M., General results for the transmuted family of distributions and new models, *Journal of Probability and Statistics*, Article ID 7208425, 1-12, **2016**.
- [21] Bourguignon, M., Ghosh, I. and Cordeiro, G. M., Transmuted weibull distribution, a generalisation of the weibull probability distribution, *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 4, 89-102, **2011**.
- [22] Merovci, F., Transmuted rayleigh distribution, *Austrian Journal of Statistics*, 42(1), 21-31, **2013**.
- [23] Ashour, S. K. and Eltehiwy, M. A., Transmuted exponentiated modified weibull distribution, *International Journal of Basic and Applied Sciences*, 2(3), 258-269, **2013**.
- [24] Khan, M. S. and King, R., Transmuted modified weibull distribution, a generalisation of the modified weibull probability distribution, *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 6, 66-88, **2013**.
- [25] Ashour, S. K. and Eltehiwy, M. A., Transmuted lomax distribution, *American Journal of Applied Mathematics and Statistics*, 1(6), 121-127, **2013**.
- [26] Hussian, M. A., Transmuted exponentiated gamma distribution, a generalisation of the exponentiated gamma probability distribution, *Applied Mathematical Sciences*, 8(27), 1297-1310, **2014**.
- [27] Ahmad, A., Ahmad, S. P. and Ahmed, A., Transmuted inverse rayleigh distribution, a generalisation of the inverse rayleigh distribution, *Mathematical Theory and Modelling*, 4(7), 90-98, **2014**.
- [28] Merovci, F. and Puka, L., Transmuted pareto distribution, *ProbStat Forum*, 7, 1-11, **2014**.
- [29] Khan, M. S., King, R. and Hudson, I., Characteristics of the transmuted inverse weibull distribution, *Anziam Journal* 55(EMAC2013), C197-C217, **2014**.
- [30] Elbatal, I., (2013). Transmuted modified inverse weibull distribution, A generalisation of the modified inverse weibull probability distribution, *International Journal of Mathematical Archive*, 4(8), 117-129, **2013**.
- [31] Abdul-Moniem, I. B. and Seham, M., Transmuted gompertz distribution, *Computational and Applied Mathematics Journal*, 1(3), 88-96, **2015**.
- [32] Afify, A. A., Hamedani, G. G., Ghosh, I. and Mead, M. E., The transmuted marshall-olkin frechet distribution, properties and applications, *International Journal of Statistics and Probability*, 4(4), 132-148, **2015**.
- [33] Owoloko, E. A., Oguntunde, P. E. and Adejumo, A. O., Performance rating of the

- transmuted exponential distribution, an analytical approach, *SpringerPlus*, 4(1), 1-15, **2015**.
- [34] Bourguignon, M., Ghosh, I. and Cordeiro, G. M., General results for the transmuted family of distributions and new models, *Journal of Probability and Statistics*, 1-12, **2016**.
- [35] Cordeiro, G. M, Ortega, E. M. and da Cunha, D. C., The exponentiated generalised class of distributions, *Journal of Data Science*, 11, 1-27, **2013**.
- [36] Elbatal, I. and Muhammed, H. Z., Exponentiated generalised inverse weibull distribution, *Applied Mathematical Sciences*, 8(81), 3997-4012, **2014**.
- [37] Andrade, T., Rodrigues, H., Bourguignon, M. and Cordeiro, G.M., The exponentiated generalised gumbel distribution, *Revista Colombia de Estadística*, 38(1), 123-143, **2015**.
- [38] Oguntunde, P. E., Odetunmbi, O. A. and Adejumo, A. O., On the exponentiated generalised weibull distribution, a generalisation of the weibull distribution, *Indian Journal of Science and Technology*, 8(35), 1-7, **2015**.
- [39] Abd-Elfattah, A. M., Assar, S. M. and Abd-Elghaar, H. I., Exponentiated generalised frchet distribution, *International Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 3(5), 39-48, **2016**.
- [40] Oguntunde, P. E. and Adejumo, A. O., Assessing the exhibility of the exponentiated generalised exponential distribution, *Pacific Journal of Science and Technology*, 17(1), 49-57, **2016**.
- [41] Bourguignon, M., Silva, R. B. and G. M. Cordeiro, . The weibull-g family of probability distributions, *Journal of Data Science*, 12, 53-68, **2014**.
- [42] Merovci, F. and Elbatal, I., Weibull rayleigh distribution, theory and applications, *Applied Mathematics and Information Science*, 9(4), 2127-2137, **2015**.
- [43] P. E. Oguntunde, ., Balogun, O. S., Okagbue, H. I. and Bishop, S. A. The weibull-exponential distribution, its properties and applications, *Journal of Applied Sciences*, 15(11), 1305-1311, **2015**.
- [44] Alzaatreh, A., Famoye, F. and Lee, C., Weibull-pareto distribution and its applications, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 42(9), 1673-1691, **2013**.
- [45] Zografos, K. and Balakrishnan, N., On families of beta- and generalised gamma-generated distributions and associated inference, *Statistical Methodology*, 6, 344-362, **2009**.
- [46] Ramos, M. A., G. M. Cordeiro, , Marinho, P. D., Dias, C. B. and Hamadani, G. G. The zografos-balakrishman log-logistic distribution, properties and applications, *Journal of Statistical Theory and Applications*, 12(3), 225-244, **2013**.
- [47] Ristic M. M. and Balakrishnan, N. The gamma-exponentiated exponential distribution, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 82, 1191-1206, **2012**
- [48] Pogany, T. K. and Saboor, A. The gamma exponentiated exponential weibull distribution, *Filomat*, 30(12), 3159-3170, **2016**
- [49] Alzaatreh, A., Famoye, F. and Lee, C. The gamma-normal distribution, properties

- and applications, *Computational Statistics and Data Analysis*, 69, 67-80, **2014**.
- [50] McDonald, J. B. Some generalized functions for the size distribution of income. *Econometrica, Journal of the Econometric Society*, 52(3), 647-663, **1984**.
- [51] McDonald J. B and Xu, Y. J. A., generalization of the beta distribution with applications, *Journal of Econometrics*, 66(1-2), 133-152, **1995**.
- [52] Cordeiro, G. M., Hashimoto, Ortega, E. M. M., M. Pascoa, M. A. R., The McDonald extended distribution, properties and applications, *Advances in Statistical Analysis*, 96, 409, **2012**.
- [53] Cordeiro, G. M., Cintra, R. J., Rego, L. C. and Ortega, E. M. M., The McDonald Normal Distribution, *Pakistan Journal of Statistics and Operation Research*; 8(3), **2012**.
- [54] Tahir, M. H., Mansoor, M., Zubair, M. and Hamedani, G. G., McDonald log-logistic distribution with an application to breast cancer data, *Journal of Statistical Theory and Application*, 13(1), 65-82, **2014**.
- [55] Roozegar, R., Tahmasebi, S. and Jafari, A., The McDonald gompertz distribution, properties and applications, *Statistical Methodology*, Retrieved from, arXiv,1505.01351v1, **2015**.
- [56] Roozegar, R. and Esfandiyari, F., The McDonald quasi lindley distribution and its statistical properties with applications, *Journal of Statistics Applications and Probability*, 4(3), 375-386, **2015**.
- [57] Merovci, F., Elbatal, I. and Puka, L., The McDonald quasi lindley distribution and its applications, *Acta Universitatis Apulensis*, 45, 87-105, **2015**.
- [58] Amini, M., MirMostafae, S. M. T. K. and Ahmadi, J., Log-gamma-generated families of distributions, *Statistics, A Journal of Theoretical and Applied Statistics*, 48(4), 913-932, **2014**.
- [59] Cordeiro, G. M. and de Castro, M., A new family of generalized distributions, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 81(7), 883–898, **2011**.
- [60] Nadarajah, S. and Eljabri, S., The kumaraswamy generalised pareto distribution, *Journal of Data Science*, 11, 739-766, **2013**.
- [61] Shahbaz, M. Q., Shahbaz, S. and Butt, N. S., The kumaraswamy-inverse weibull distribution, *Pakistan Journal of Statistics and Operation Research*, 8(3),479-489, **2012**.
- [62] Huang, S. and Oluyede, B., Exponentiated kumaraswamy-dagum distribution with applications to income life data, *Journal of Statistical Distributions and Applications*, 1(8), **2014**.
- [63] El-Batal, I. and Kareem, A., Statistical properties of kumaraswamy exponentiated lomax distribution, *Journal of Modern Mathematics and Statistics*, 8(1),1-7, 2014.
- [64] Al-Babtain, A., Fattah, A. A., Ahmed, A. N. and Merovci, F., The kumaraswamy-transmuted exponentiated modied weibull distribtion, *Communication in Statistics, Simulation and Computation*, 46(5), 3812-3832, **2017**.
- [65] Oguntunde, P. E. and Adejumo, A. O., The generalised inverted generalised exponential distribution with an application to a censored data, *Journal of Statistics Applications and Probability*, 4(2), 223-230, , **2015**.

- [66] Merovci, F. and Elbatal, I., A new generalisation of the linear exponential distribution, theory and application, *Journal of Statistics Applications and Probability Letters*, 2(1), 1-14, **2015**.
- [67] Chukwu, A. U. and Ogunde, A. A., On kumaraswamy gompertz makeham distribution, *American Journal of Mathematics and Statistics*, 6(3), 122-127, **2016**.
- [68] Garcia, V., Gomez-Deniz, E. and Vazquez-Polo, F., A new skew generalisation of the normal distribution, properties and application, *Communication Statistics and Data Analysis*, 54(8), 2021-2034, **2010**.
- [69] Gomez-Deniz, E., Another generalisation of the geometric distribution, *Test*, 19(2), 399-415, **2010**.
- [70] Cordeiro, G. M. and Lemonte, A. J., On the marshall-olkin extended weibull distribution, *Statistical Papers*, 54(2), 333-353, **2013**.
- [71] Krishna, E., Jose, K., Alice, T. and Ristic, M. M., The marshall-olkin frechet distribution, *Communications in Statistics, Theory and Methods*, 42(22), 4091-4107, **2013**.
- [72] Jose, K. K. and Krishna, E., Marshall-olkin extended uniform distribution, *ProbStat Forum*, 4, 78-88, **2011**.
- [73] Gui, W., Marshall-olkin extended log-logistic distribution and its application in minication processes, *Applied Mathematical Sciences*, 7(80), 3947-3961, **2013**.
- [74] Al-Saiari, A. Y., Baharith, L. A. and Mousa, S. A., Marshall-olkin extended burr type xii distribution, *International Journal of Statistics and Probability*, 3(1), 78-84, **2014**.
- [75] El-Nadi, K. E., Fatehy, L. M. and Ahmed, N. H., Marshall-olkin exponential pareto distribution with application on cancer stem cells, *American Journal of Theoretical and Applied Statistics*, 6(5), 1-7, **2017**.
- [76] Ristic, M. M., Jose, K. K. and Ancy, J., A Marshall--Olkin gamma distribution and minification process, *The Stress and Anxiety Research Society*, 11, 107–117, **2007**.
- [77] Okorie, I. E., Akpanta, A. C. and Ohakwe, J., Marshall-olkin generalised erlang-truncated exponential distribution, properties and applications, *Cogent Mathematics*, 4, 1-19, **2017**.
- [78] Economou, P. and Caroni, C., Parametric proportional odds frailty models, *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 36, (6,) 1295–1307, **2007**.
- [79] Caroni, C., Testing for the Marshall – Olkin extended form of the Weibull distribution, *Statistical Papers*, 51(2), 325–336, **2010**.
- [80] Lam, K. F. and Leung, T. L., Marginal Likelihood Estimation for Proportional Odds Models with Right Censored Data, *Lifetime Data Analysis*, 7(1), 39–54, **2001**.
- [81] Gupta, R. C. and Peng, C., Estimating reliability in proportional odds ratio models, *Computational Statistics and Data Analysis*, 53(4), 1495–1510, **2009**.
- [82] Nanda, A. K. and Das, S., Stochastic orders of the Marshall–Olkin extended distribution, *Statistics and Probability Letters*, 82, 295-302, **2012**.
- [83] Barreto-Souza, W., Lemonte, A. J. and Cordeiro, G. M., General results for the Marshall and Olkin’s family of distributions, *Annals of the Brazilian Academy of*

- Sciences*, 85, 3–21, **2013**.
- [84] Alizadeh, M., Tahir, M. H., Cordeiro, G. M., Mansoor, M., Zubair, M. and Hamedani, G. G., The kumaraswamy marshal-olkin family of distributions, *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, 23, 546–557, **2015**.
- [85] Lehman, E. L., The power of rank tests, *The Annals of Mathematical Statistics*, 23–43, **1953**.
- [86] Gompertz, B., On the Nature of the Function Expressive of the Law of Human Mortality, and on a New Mode of Determining the Value of Life Contingencies, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 115, 513–583, **1825**.
- [87] Glaser, R. E., Bathtub and related failure rate characterization, *Journal of the American Statistical Association*, 75(371), 667–672, **1980**.
- [88] AL-Hussaini, E. K and Ahsanullah, M., *Exponentiated Distributions*, Atlantis Press, **2015**.
- [89] Kumaraswamy, P., A generalized probability density function for double-bounded random processes, *Journal of Hydrology*, 46, (1-2), 79–88, **1980**.
- [90] Garg, M., On Distribution of Order Statistics from Kumaraswamy Distribution, *Kyungpook Mathematical Journal*, 48, 411–417, **2008**.
- [91] Nadarajah, S., On the distribution of Kumaraswamy, *Journal of Hydrology*, 348, (3–4), 568–569, **2008**.
- [92] Mitnik, P. A., The Kumaraswamy Distribution, a Median- Dispersion Re-Parameterization for Regression Modeling and Simulation-Based Estimation, *Statistical Papers*, 54(1), 177–192, **2013**.
- [93] Mitnik, P. A., New Properties of the Kumaraswamy Distribution, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 42(5), 741–755, **2011**.
- [94] Jones, M. C., Kumaraswamy’s distribution, A beta-type distribution with some tractability advantages, *Statistical Methodology*, 6(1), 70–81, **2009**.
- [95] Lindley, D. V., Fiducial Distributions and Bayes’ Theorem, *Journal of the Royal Statistical Society: Series B*, 20, 102–107, **1958**.
- [96] Ghitany, M. E., Atieh, B. and Nadarajah, S., Lindley distribution and its application, *Mathematics and Computers in Simulation*, 78(4), 493–506, **2008**.
- [97] Gómez-Déniz, E. and Calderín-Ojeda, E., The discrete Lindley distribution, properties and applications, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 81(11), 1405–1416, **2011**.
- [98] Sankaran, M., The Discrete Poisson-Lindley Distribution, *Biometrics*, 26(1), 145–149, **2015**.
- [99] Ghitany, M. E., Al-Mutairi, D. K. and Nadarajah, S., Zero-truncated Poisson-Lindley distribution and its application, *Mathematics and Computers in Simulation*, 79(3), 279–287, **2008**.
- [100] Adhikari, T. R. and Srivastava, P. R. S., Poisson - Size - biased Lindley Distribution, 4, (1, 1–6, **2014**.
- [101] Ghitany, M. E and Al-Mutairi, D. K., Estimation methods for the discrete Poisson-Lindley distribution, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 79(1), 1–9, **2009**.

- [102] Bakouch, H. S., AL-Zahrani, B. M., AL-Shomrami, A. A., Marchi, V. A. A. and Louzada, F., An extended Lindley Distribution, *Journal of the Korean Statistical Society*, 41(1), 75–85, **2012**.
- [103] Mazucheli, J. and Achcar, J., The Lindley distribution applied to competing risks lifetime data, *Computer Methods and Programs in Biomedicine*. 104(2), 188–192, **2011**.
- [104] Ghitany, M. E., Alqallaf, F., Al-Mutairi, D. K. and Husain, H., A two-parameter weighted Lindley distribution and its applications to survival data, *Mathematics and Computers in Simulation*., 81(6), 1190–1201, **2011**.
- [105] Zakerzadeh H. and Dolati, A., Generalized lindley distribution, *Journal Of Mathematical Extension*, 3(2), 13–25, **2009**.
- [106] Elbatal, I., Merovci, F. and Elgarhy, M., A new generalized Lindley distribution, *Mathematical Theory and Modeling*, 3(13), 30–47, **2013**.
- [107] Nadarajah, S., Cordeiro, G. M. and Ortega, E. M. M., General results for the Kumaraswamy-G distribution, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 82(7), 951–979, **2012**.
- [108] Shannon, C. E., Prediction and entropy of printed English, *Bell System Technical Journal*, 30, 50–64, **1951**.
- [109] Rényi, A., On measures of entropy and information, *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, Volume 1: Contributions to the Theory of Statistics, University of California Press, Berkeley, California, 547-561, **1961**.
- [110] Schafft, H. A., Staton, T., Mandel, J. and Shott, J. D., Reproducibility of Electromigration Measurements, *IEEE Transactions on Electron Devices*, 34(3), 637-681, **1987**.
- [111] Ristic, M.M and S. Nadarajah, A new lifetime distribution ,*Journal of Statistical Computation and Simulation*, 84(1),135-150, **2014**.
- [112] Efron, B., Bootstrap methods, another look at the jackknife, *Annals of Statistics*, 7, 1–26, **1979**.
- [113] Demirhan, H., Tahmin Yöntemleri 2012-2013 Ders Notları, **2013**.
- [114] Vodă, V. G., Note on the truncated Rayleigh variate, *Revista Colombiana de Matemáticas*, 9, 1–7, **1975**.
- [115] Vodă, V. G., Inferential procedures on a generalized Rayleigh variate I, *Applied Mathematics*, 21(6), 395–412, **1976**.
- [116] Vodă, V. G., Vodă, Inferential procedures on a generalized Rayleigh variate II, *Applied Mathematics*, 21, (6), 413–419, **1976**.
- [117] Tsai, T. and Wu, S., Acceptance sampling based on truncated life tests for generalized Rayleigh distribution, *Journal of Applied Statistics*, 33(6), 595–600, **2006**.
- [118] Gómez-Déniz, E. and Gómez-Déniz, L., A generalisation of the Rayleigh distribution with applications in wireless fading channels, *Wireless Communications Mobile Computing*, 13(1), 85–94, **2011**.
- [119] Gomes, A. E., da-Silva, C. Q., Cordeiro, G. M. and Ortega, E. M. M., A new

- lifetime model, the Kumaraswamy generalized Rayleigh distribution, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 84, 290-309, **2014**.
- [120] Hussian, M. and Amin, E. A., Estimation and prediction for the Kumaraswamy-inverse Rayleigh distribution based on records, *International Journal of Advanced Statistics and Probability*, 2(1), 21–27, **2014**.
- [121] Asgharzadeh, A. and Azizpour, M., Bayesian inference for Rayleigh distribution under hybrid censoring, *International Journal of System Assurance Engineering and Management*, 7(3), 239-249, **2016**.
- [122] Kececioglu D., *Reliability Engineering Handbook*, DEStech Publications, **1991**.
- [123] Gui, W., Marshall-Olkin Extended Log-Logistic Distribution and Its Application in Minification Processes, *Applied Mathematical Sciences*, 7(80), 3947–3961, **2013**.
- [124] Alshawarbeh, C. L. E., F. Famoye, Beta-Cauchy Distribution, Some Properties and Applications, *Journal of Statistical Theory and Applications*, 12(4), 378–391, **2013**.
- [125] Bourguignon, M., Silva, R. B., Zea, L. M. and Cordeiro, G. M., The Kumaraswamy Pareto distribution, *Journal of Statistical Theory and Applications*, 12(2), 129–144, **2013**.
- [126] Nadarajah, S. and Kotz, S., The exponentiated type distributions, *Acta Applicandae Mathematicae*, 92(2), 97–111, **2006**.
- [127] Nadarajah, S., Exponentiated Pareto distributions, *Statistics (Ber)*, 39(3), 255–260, **2005**.
- [128] Gradshteyn, I. S. and Ryzhik, I. M., *Table of Integrals, Series and Products*, 17. Press, Elsevier Academic Press, **2007**.

ÖZGEÇMİŞ

Kimlik Bilgileri

Adı Soyadı : Selen Çakmakyapan
Doğum Yeri : Ankara
Medeni Hali : Bekar
E-posta : selencakmakyapan@hacettepe.edu.tr
Adresi : Büyükçekmece-İstanbul

Eğitim

Lise : Büyükşehir Hüseyin Yıldız Anadolu Lisesi
Lisans : Muğla Üniversitesi/İstatistik Bölümü
Yüksek Lisans : Muğla Üniversitesi/İstatistik Anabilim Dalı

Yabancı Dil Düzeyi

ÜDS-78.75

İş Deneyimi

2010-2011 Sıtkı Koçman Muğla Üniversitesi İstatistik Bölümü
2011-2017 İstanbul Medeniyet Üniversitesi İstatistik Bölümü
2012-2016 Hacettepe Üniversitesi İstatistik Bölümü (35. Madde ile görevlendirme)

Deneyim Alanları

Olasılık Dağılımları, Olasılıksal Süreçler, Benzetim Teknikleri

Tezden Üretilmiş Projeler ve Bütçesi

-

Tezden Üretilmiş Yayınlar

- The Kumaraswamy Marshall-Olkin Log-Logistic Distribution with Application - Journal of Statistical Theory and Applications, 2017, ISSN,1538-7887 (Emerging Sources Citation Index).
- The Lindley Family of Distributions, Properties and Applications -Hacettepe University Bulletin of Natural Sciences and Engineering Series B, Mathematics and Statistics 46(116),1-1 (Science Citation Index).
- A new customer lifetime duration distribution, The Kumaraswamy Lindley Distribution, International Journal of Trade, Economics and Finance 2014, 5, 441-444 (Diğer Index).

Tezden Üretilmiş Tebliğ ve/veya Poster Sunumu ile Katıldığı Toplantılar

- On The Generalized Marshall-Olkin Log-Logistic Distribution - 15. International Symposium On Econometrics Operations Research and Statistics 22-25 Mayıs 2014, Isparta, Türkiye.
- A New Customer Lifetime Duration Distribution, The Kumaraswamy Lindley Distribution, 3rd International Conference on Innovation, Trade and Economics 22-23 Haziran 2014, Moskova, Rusya.
- The Kumaraswamy Lindley Distribution for the Censored Data - International Eurasian Conference On Mathematical Sciences and Applications 25-28 Ağustos 2014, Viyana, Avusturya.
- A New Distribution and Application on the Lifetime Data - 7th International Conference on Computational Statistics and Data Analysis, 20-21 Temmuz 2015, Fransa.



HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS/DOKTORA TEZ ÇALIŞMASI ORJİNALLİK RAPORU

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
İSTATİSTİK ANABİLİM DALI BAŞKANLIĞI'NA

Tarih: 11/12/2017

Tez Başlığı / Konusu: GENELLEŞTİRİLMİŞ OLASILIK DAĞILIMLARI ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Yukarıda başlığı/konusu gösterilen tez çalışmamın a) Kapak sayfası, b) Giriş, c) Ana bölümler d) Sonuç kısımlarından oluşan toplam 94 sayfalık kısmına ilişkin, 11/12/2017 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından Turnitin adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 10 'dur.

Uygulanan filtrelemeler:

- 1- Kaynakça hariç
- 2- Alıntılar dâhil
- 3- 5 kelimedenden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Çalışması Orjinallik Raporu Alınması ve Kullanılması Uygulama Esasları'nı inceledim ve bu Uygulama Esasları'nda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

11.12.2017

Adı Soyadı: Selen ÇAKMAKYAPAN

Öğrenci No: N11242866

Anabilim Dalı: İstatistik

Programı: İstatistik-Doktora

Statüsü: Y.Lisans Doktora Bütünleşik Dr.

DANIŞMAN ONAYI

UYGUNDUR.

Doç. Dr. Gamze ÖZEL KADILAR