ÖĞRENCİLERİN İKİ DEĞİŞKENLİ FONKSİYON KAVRAMINI ANLAMALARININ APOS TEORİSİ İLE ANALİZİ

ANALYSIS OF STUDENTS' UNDERSTANDING OF THE CONCEPT OF TWO VARIABLES FUNCTIONS BY APOS THEORY

Özgün ŞEFİK

Hacettepe Üniversitesi

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı, Matematik Eğitimi Bilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

olarak hazırlanmıştır.

2017

KABUL ve ONAY

Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne,

Özgün ŞEFİK' in hazırladığı "ÖĞRENCİLERİN İKİ DEĞİŞKENLİ FONKSİYON KAVRAMINI ANLAMALARININ APOS TEORİSİ İLE ANALİZİ" başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından **Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı, Matematik Eğitimi Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Başkan	Yrd. Doç. Dr. Hakan ŞANDIR	H.Şn
Üye (Danışman)	Doç. Dr. Şenol DOST	
Üye	Yrd. Doç. Dr. Nazan SEZEN YÜKSEL	

ONAY

Bu tez Hacettepe Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri uyarınca yukarıdaki jüri üyeleri tarafından 15 / 06 / 2017 tarihinde uygun görülmüş ve Enstitü Yönetim Kurulunca ..... / ..... / .... tarihinde kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Ali Ekber ŞAHİN
Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürü

YAYIMLAMA VE FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI BEYANI

Enstitü tarafından onaylanan lisansüstü tezimin/raporumun tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı (kağıt) ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda verilen koşullarla kullanıma açma iznini Hacettepe Üniversitesine verdiğimi bildiririm. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet haklarım bende kalacak, tezimin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanım hakları bana ait olacaktır.

Tezin kendi orijinal çalışmam olduğunu, başkalarının haklarını ihlal etmediğimi ve tezimin tek yetkili sahibi olduğumu beyan ve taahhüt ederim. Tezimde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanılması zorunlu metinlerin yazılı izin alınarak kullandığımı ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederim.

☐ **Tezimin/Raporumun tamamı dünya çapında erişime açılabilir ve bir kısmı veya tamamının fotokopisi alınabilir.**
(Bu seçenekle teziniz arama motorlarında indekslenebilecek, daha sonra tezinizin erişim statüsünün değiştirilmesini talep etseniz ve kütüphane bu talebinizi yerine getirse bile, teziniz arama motorlarının önbelleklerinde kalmaya devam edebilecektir)

☒ **Tezimin/Raporumun 15.06.2017 tarihine kadar erişime açılmasını ve fotokopi alınmasını (İç Kapak, Özet, İçindekiler ve Kaynakça hariç) istemiyorum.**
(Bu sürenin sonunda uzatma için başvuruda bulunmadığım takdirde, tezimin/raporumun tamamı her yerden erişime açılabilir, kaynak gösterilmek şartıyla bir kısmı veya tamamının fotokopisi alınabilir).

☐ **Tezimin/Raporumun .... tarihine kadar erişime açılmasını istemiyorum ancak kaynak gösterilmek şartıyla bir kısmı veya tamamının fotokopisinin alınmasını onaylıyorum.**

☐**Serbest Seçenek/Yazarın Seçimi:** ....
....

15 /06 /2017

Özgün ŞEFİK

ETİK BEYANNAMESİ

Hacettepe Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında,

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversitede veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

Özgün ŞEFİK

TEŞEKKÜR

Tez yazma sürecinin her aşamasında emeği ve desteği olan, sadece tezime değil; akademik gelişimime de en büyük katkıyı veren danışmanım ve değerli hocam Doç. Dr. Şenol DOST' a sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Görüş ve önerileriyle tezime boyut katan hocam Yrd. Doç. Dr. Nazan SEZEN YÜKSEL' e teşekkür ederim. Ayrıca tezimde yer alan jüri üyesi Yrd. Doç. Dr. Hakan ŞANDIR' a değerli önerileri için teşekkürü borç bilirim.

Başta emekli Prof. Dr. Ali BÜLBÜL olmak üzere, üzerimde emeği geçen Ana Bilim Dalı' ndaki tüm hocalarıma teşekkür ederim. Ayrıca tezim üzerinde fikirlerini esirgemeyen, her türlü zorlukta yardımıma koşan oda arkadaşım Arş. Gör. Selin URHAN' a teşekkür ederim.

Sevgili ikiz kardeşlerim Pınar ve Umutcan ŞEFİK' e, canım annem Satı ŞEFİK' e ve babam Osman ŞEFİK' e tüm destekleri için; aslında her şey için ayrı ayrı teşekkür ederim. Her türlü desteğini gördüğüm, bu süreçte beni hiç yalnız bırakmayan Özge GÜLLÜ' ye sonsuz teşekkürler.

ÖĞRENCİLERİN İKİ DEĞİŞKENLİ FONKSİYON KAVRAMINI ANLAMALARININ APOS TEORİSİ İLE ANALİZİ

Özgün ŞEFİK

ÖZ

Bu çalışmada öğrencilerin iki değişkenli fonksiyonları anlamaları APOS teorisi çerçevesinde analiz edilmiştir. Çalışmada nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması kullanılmıştır. Araştırmanın çalışma grubunu bir devlet üniversitesinin Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalı'nda öğrenim gören altı öğrenci oluşturmaktadır. Katılımcılar belirlenirken matematik öğretim programında yer alan Analitik Geometri, Analiz I, II, III ve IV derslerini almış ve bu derslerde başarı sağlamış olmalarına dikkat edilmiştir. Araştırmanın verilerini, İki Değişkenli Fonksiyonlar-Kavramsal Anlama Testi ve bu ölçme aracına öğrencilerin verdiği yazılı yanıtlar ile bu sorulara ilişkin yapılan klinik görüşmelerin ses kayıtları oluşturmaktadır. Elde edilen veriler APOS teorisi bağlamında Trigueros ve Martinez-Planell (2007; 2010) tarafından iki değişkenli fonksiyonlara ilişkin yapılan genetik ayrışım kullanılarak, içerik analizi yöntemiyle analiz edilmiştir.

Araştırma sonuçlarına göre; öğrenciler iki değişkenli fonksiyonlar ile üç boyutlu uzay kavramını bağdaştıramamaktadır. İki değişkenli fonksiyon kavramını nesne haline getiren öğrenci bulunmamaktadır.

Bu sonuçlar ışığında yapılan genetik ayrışımın inceltilmesine ve verilen analiz derslerine ilişkin bazı öneriler sunulmuştur.

Anahtar sözcükler: APOS teorisi, iki değişkenli fonksiyonlar, kavramsal anlama, genetik ayrışım, üç boyutlu uzay.

Danışman: Doç. Dr. Şenol DOST, Hacettepe Üniversitesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı, Matematik Eğitimi Bilim Dalı

ANALYSIS OF STUDENTS' UNDERSTANDING OF THE CONCEPT OF TWO VARIABLES FUNCTIONS BY APOS THEORY

Özgün ŞEFİK

ABSTRACT

In this research, the students' understanding of two variable functions was analyzed within the framework of APOS theory. In the study, the case study of qualitative research methods has been used. The study/research group consists of six students who are studying at the Department of Mathematics and Science Education, Mathematics Education Department of a state university. When participants are determined, it is taken into account that they had taken the courses of Analytical Geometry and Analysis I, II, III and IV in the mathematics curriculum and was successful. The data of the study, Two Variable Functions-Conceptual Comprehension Test and the written answers given by the students through this measurement tool and the voice recordings of the clinical interviews about these questions are constituted. The obtained data has been analyzed with content analysis using genetic decomposition of two variable functions by Trigueros and Martinez-Planell (2007; 2010) in the context of APOS theory.

According to the results of the study; students cannot associate two variable functions with three dimensional space concept. There are no students who bring the concept of two variable functions as object.

In the light of these results, some suggestions has been presented about the given analysis courses and thinning of the genetic decomposition.

Keywords: APOS theory, two variable functions, conceptual understanding, genetic decomposition, three dimensional space.

Advisor: Ph.D. Associate Professor Şenol DOST, Hacettepe University, Department of Mathematics and Science Education, Division of Mathematics Education

İÇİNDEKİLER

KABUL ve ONAY ii
YAYIMLAMA VE FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI BEYANI iii
ETİK BEYANNAMESİ iv
TEŞEKKÜR v
ÖZ vi
ABSTRACT vii
İÇİNDEKİLER viii
TABLOLAR DİZİNİ x
ŞEKİLLER DİZİNİ xi
1. GİRİŞ 1
1.1. Problem Durumu 1
1.2. Araştırmanın Amacı ve Önemi: 4
1.3. Problem Cümlesi: 5
1.3.1. Alt Problemler: 5
1.4. Sayıltılar: 5
1.5. Sınırlılıklar: 5
1.6. Araştırmanın Kuramsal Temeli 6
1.6.1. APOS Teori 6
1.6.2. Genetik Ayrışım 14
2. İLGİLİ ARAŞTIRMALAR 18
2.1. Tezin Çatısını Oluşturan Çalışmalar 22
3. YÖNTEM 24
3.1. Araştırmanın Yöntemi 24
3.2. Çalışma Grubu 24
3.3. Veri Toplama Araçları 26
3.3.1. İki Değişkenli Fonksiyonlar-Kavramsal Anlama Testi 26
3.3.2. Klinik Görüşme 28
3.4. Verilerin İşlenmesi ve Çözümlenmesi 28
3.5. Araştırmanın Akış Şeması 31
3.6. Araştırmanın İç ve Dış Geçerliği 31
3.6.1. Araştırmanın İç Geçerliği 32
3.6.2. Araştırmanın Dış Geçerliği 32
4. BULGULAR VE TARTIŞMA 34
4.1. Uygulamanın Birinci Sorusu 34
4.1.1. Öğrencilerin Birinci Soruya Verdikleri Cevaplar 35
4.1.2. Birinci Sorunun Genel Değerlendirmesi 38
4.2. Uygulamanın İkinci Sorusu 39
4.2.1. Öğrencilerin İkinci Soruya Verdikleri Cevaplar 39
4.2.2. İkinci Sorunun Genel Değerlendirmesi 44
4.3. Uygulamanın Üçüncü Sorusu 45
4.3.1. Öğrencilerin Üçüncü Soruya Verdikleri Cevaplar 45

4.3.2. Üçüncü Sorunun Genel Değerlendirmesi 49
4.4. Uygulamanın Dördüncü Sorusu 50
4.4.1. Öğrencilerin Dördüncü Soruya Verdikleri Cevaplar 51
4.4.2. Dördüncü Sorunun Genel Değerlendirmesi 53
4.5. Uygulamanın Beşinci Sorusu 54
4.5.1. Öğrencilerin Beşinci Soruya Verdikleri Cevaplar 55
4.5.2. Beşinci Sorunun Genel Değerlendirmesi 59
4.6. Uygulamanın Altıncı Sorusu 60
4.6.1. Altıncı Sorunun Genel Değerlendirmesi 61
4.7. Uygulamanın Yedinci Sorusu 61
4.7.1. Yedinci Sorunun Genel Değerlendirmesi 62
4.8. Uygulamanın Sekizinci Sorusu 62
4.8.1. Öğrencilerin Sekizinci Soruya Verdikleri Cevaplar 63
4.8.2. Sekizinci Sorunun Genel Değerlendirmesi 66
4.9. Uygulamanın Dokuzuncu Sorusu 67
4.9.1. Öğrencilerin Dokuzuncu Soruya Verdikleri Cevaplar 68
4.9.2. Dokuzuncu Sorunun Genel Değerlendirmesi 68
4.10. Uygulamanın Onuncu Sorusu 68
4.10.1. Öğrencilerin Onuncu Soruya Verdikleri Cevaplar 68
4.10.2. Onuncu Sorunun Genel Değerlendirmesi 70
4.11. Uygulamanın Onbirinci Sorusu 70
4.11.1. Öğrencilerin Onbirinci Soruya Verdikleri Cevaplar 71
4.11.2. Onbirinci Sorunun Genel Değerlendirmesi 72
5. SONUÇ ve ÖNERİLER 73
KAYNAKÇA 78
EKLER DİZİNİ 83
EK 1. ETİK KOMİSYONU ONAY BİLDİRİMİ 84
EK 2. ORİJİNALLİK RAPORU 85
EK 3. İKİ DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARI KAVRAMSAL ANLAMA SORULARI 87
ÖZGEÇMİŞ 93

TABLOLAR DİZİNİ

Tablo 1.6.1.1. APOS teorideki zihinsel yapılar ve mekanizmalar 10

Tablo 3.2.1. Matematik Eğitimi Programındaki İlgili Dersler ve Öğrenme Çıktıları..25

Tablo 3.2.2. Katılımcıların akademik ortalamaları 26

Tablo 3.3.1. Katılımcıların uygulama ve görüşme süreleri....................................26

Tablo 3.3.1.1. Uygulama sorularının genetik ayrışımdaki karşılıkları 27

Tablo 3.4.1: Kodlamalar ve nedenleri 28

Tablo 4.1.1. Birinci sorunun genetik ayrışımda karşılık gelen basamakları 35

Tablo 4.1.1.1. Öğrencilerin birinci soruya verdikleri yanıtlara ilişkin doğru-yanlış çizelgesi 35

Tablo 4.1.2.1. Öğrencilerin cevaplarının genetik ayrışımdaki karşılıkları...............38

Tablo 4.2.1. İkinci sorunun genetik ayrışımda karşılık gelen basamakları.............39

Tablo 4.2.1.1. Öğrencilerin ikinci soruya verdikleri yanıtlara ilişkin doğru-yanlış çizelgesi 40

Tablo 4.2.2.1. Öğrencilerin cevaplarının genetik ayrışımdaki karşılıkları 44

Tablo 4.3.1. Üçüncü sorunun genetik ayrışımda karşılık gelen basamakları.........45

Tablo 4.3.1.1. Öğrencilerin üçüncü soruya verdikleri yanıtlara ilişkin doğru-yanlış çizelgesi 46

Tablo 4.3.2.1. Öğrencilerin cevaplarının genetik ayrışımdaki karşılıkları...............50

Tablo 4.4.1. Dördüncü sorunun genetik ayrışımda karşılık gelen basamakları 51

Tablo 4.4.1.1. Öğrencilerin dördüncü soruya verdikleri yanıtlara ilişkin doğru-yanlış çizelgesi 51

Tablo 4.4.2.1. Öğrencilerin cevaplarının genetik ayrışımdaki karşılıkları...............54

Tablo 4.5.1.1. Öğrencilerin beşinci soruya verdikleri yanıtlara ilişkin doğru-yanlış çizelgesi 55

Tablo 4.5.2.1. Öğrencilerin cevaplarının genetik ayrışımdaki karşılıkları...............60

Tablo 4.6.1. Öğrencilerin altıncı soruya verdikleri yanıtlara ilişkin doğru-yanlış çizelgesi 61

Tablo 4.7.1. Öğrencilerin yedinci soruya verdikleri yanıtlara ilişkin doğru-yanlış çizelgesi 62

Tablo 4.8.1. Sekizinci sorunun genetik ayrışımda karşılık gelen basamakları.......63

Tablo 4.8.1.1. Öğrencilerin yedinci soruya verdikleri yanıtlara ilişkin doğru-yanlış çizelgesi 64

Tablo 4.8.2.1. Öğrencilerin cevaplarının genetik ayrışımdaki karşılıkları...............67

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.6.1.1. APOS Teorisi 10
Şekil 1.6.2.1. ACE öğretim döngüsü 17
Şekil 3.4.1: 2.c. numaralı sorunun doğru yanıtı 29
Şekil 3.4.2: 2.c. numaralı sorunun kısmen doğru yanıtı 29
Şekil 3.4.3: 2.c. numaralı sorunun yanlış yanıtı 29
Şekil 3.4.4: Öğrencinin 5.b.1. numaralı soruya verdiği yanıt 30
Şekil 3.5.1. Tezin Akış Şeması 31
Şekil 4.1.1. Uygulamanın 1.c. sorusu 34
Şekil 4.1.1.1. Birinci sorunun (b) ve (c) şıkları için Ayşe'nin çözümü 36
Şekil 4.1.1.2. Birinci sorunun (b) şıkkı için Ayşe'nin çizimi 37
Şekil 4.2.1.1. Ayşe'nin 2.c sorusuna verdiği cevap 40
Şekil 4.2.1.2. Ayşe'nin görüşmedeki 2.c. sorusuna ilişkin çizimi 41
Şekil 4.2.1.3. Hüseyin'in 2.c. sorusuna ilişkin çözümü 42
Şekil 4.2.1.4. Hüseyin'in görüşmede 2.c sorusuna ilişkin çizimi 43
Şekil 4.2.1.5. Zehra'nın 2.c sorusuna verdiği cevap 43
Şekil 4.3.1.1. Zehra'nın 3.b. sorusuna ilişkin yanıtı 46
Şekil 4.3.1.2. Zehra'nın 3.b sorusuna ilişkin görüşmedeki çizimi 47
Şekil 4.3.1.3. Ayşe'nin 3.b. sorusuna ilişkin çözümü 48
Şekil 4.3.1.5. Ayşe'nin 3.b sorusuna ilişkin görüşmedeki çizimi 49
Şekil 4.4.1. Uygulamanın dördüncü sorusu 50
Şekil 4.4.1.1. Ayşe'nin 4.b. ve 4.c. sorusuna ilişkin verdiği cevaplar 52
Şekil 4.4.1.2. Ayşe' nin görüşmedeki 4.b. sorusuna ilişkin çizimi 53
Şekil 4.4.2.1. Zehra' nın 4.c sorusuna ilişkin çözümü 53
Şekil 4.4.2.2. Beril'in 4.b. sorusuna ilişkin çözümü 54
Şekil 4.5.1.1. Beril'in 5.a.1. numaralı soruya verdiği yanıt 56
Şekil 4.5.1.2. Beril'in 5.a.2 numaralı soruya verdiği yanıt 57
Şekil 4.5.1.3. Adem' in 5.b.1. ve 5.b.2. numaralı sorulara verdiği yanıt 57
Şekil 4.5.1.4. Zehra' nın 5.b.1. ve 5.b.2. sorularına ilişkin çözümleri 58
Şekil 4.5.1.5. Hüseyin'in 5.b.2. numaralı soruya ilişkin çözümü 59
Şekil 4.6.1. Uygulamanın altıncı sorusu 60
Şekil 4.8.1. Uygulamanın sekizinci sorusu 62
Şekil 4.8.1.1. Ayşe' nin 8.a. ve 8.b. sorularına ilişkin çözümü 64

Şekil 1.6.1.1. APOS Teorisi 10
Şekil 4.8.1.2. Ayşe'nin görüşmede 8.a. numaralı soruya ilişkin çizimi 65
Şekil 4.8.1.3. Hüseyin'in sekizinci soruya ilişkin verdiği cevaplar 65
Şekil 4.8.1.4. Zehra' nın 8.b. numaralı soruya verdiği yanıt..................................66
Şekil 4.10.1.1. Ayşe' nin onuncu soruya verdiği yanıt 69
Şekil 4.10.1.2. Beril' in onuncu soruya verdiği yanıt 69
Şekil 4.10.1.3. Hüseyin'in onuncu soruya verdiği yanıt 69
Şekil 4.10.1.4. Adem' in onuncu soruya verdiği yanıt 70
Şekil 4.11.1.1. Yasin ile onbirinci soruya ilişkin yapılan görüşmede araştırmacının sorduğu soru 71

1. GİRİŞ

Tezin bu bölümü; problem durumu, araştırmanın amacı ve önemi, problem cümlesi, sayıltılar, sınırlılıklar ve tanımlar alt başlıkları altında verilecektir.

1.1. Problem Durumu

Matematik; sayılar, geometrik şekiller, fonksiyonlar, uzaylar gibi soyut kavramları ele alarak; bu kavramların özelliklerini, kavramlar arası ilişkileri sistematik olarak inceleyen bir disiplindir (MEB, 1966). Matematiksel kavramlar bir ihtiyaçtan doğar. Bu sistematik yapıda; bir kavramın önce tanımı ortaya konulur. Daha sonra kavramın aksiyomatik yapısı oluşturulur. Ortaya çıkan problem durumlarına ilişkin teoremler ortaya atılır ve bu teoremler ispatlanır (Nasibov & Kaçar, 2005). Böylelikle matematiksel kavramlar oluşturulur. Matematiğin birçok dalının da ortaya çıkışı bir probleme çözüm getirme çabasından kaynaklanmaktadır (Çekmez, 2013).

Matematik öğretimi; öğrencilerin yaratıcılığını, sezgisel düşünmelerini ve özgün düşünce ile araştırma yapabilme gayreti göstermelerini sağlamaktır (İnan, 2006). Matematik öğretimi, matematiksel kavramları anlama ve kavramlar arası ilişkilerin farkında olma, mantıklı sonuçlara ulaşabilme, karşılaşılan problemlerin çözümünde matematiksel kavramları kullanabilme yeteneklerini geliştirir (Alakoç, 2003). Matematiğin çoğu alanı direkt ya da doğrudan olmayan bir şekilde fonksiyonlarla ilgilidir. Antik çağlardan modern çağa kadar matematikteki en baskın teori olan Euclidien Geometrisinin temel kavramları nokta, doğru ve düzlemdir. Ancak matematiğin gelişimindeki en önemli olay fonksiyon kavramının ortaya çıkmasıdır (Ponte, 1992). 1960'lı yıllarda fonksiyonlar, Bourbaki'nin sıralı ikili tanımıyla beraber küme teorisi çerçevesinde müfredatlarda yerini almıştır (Akkoç, 2006). Fonksiyonlar matematikte birleştirici olmasının yanında, diğer birçok kavramın üst kavramıdır. Ayrıca gerçek hayat problemlerinde karşımıza çıkan ve birçok girdi-çıktı durumunu temsil eden matematiksel bir ilişki olması sebebiyle fonksiyonların öğretimi önem kazanmıştır (NCTM, 1989).

Fonksiyon kavramının ortaya çıkışı ve matematik çalışmalarında kullanılmaya başlanması 17. Yüzyılın sonlarına denk gelmektedir. Çeşitli matematikçiler tarafından tanımlanmaya çalışılsa da ilk olarak fonksiyon kavramını kullanan Alman matematikçi Gottfried Leibniz' dir (Kleiner, 1989).

Cebirsel metotlar kullanılarak eğriler üzerindeki çalışmaların gelişmesiyle beraber, bir değişken üzerindeki bağımlılığın analitik olarak ifade edilmesi giderek önem kazanmıştır. Bu amaç doğrultusunda Leibniz ve Jean Bernoulli tarafından 'fonksiyon' kavramı 1694-1698 yılları arasında ortaya konmuştur (Ponte, 1992).

1716 yılında yayınlanan matematik sözlüğünde (matematics lexicon) fonksiyon terimi kullanılmamıştır. Fakat 2 yıl sonra Jean Bernoulli daha sonra geniş çevrelere yayılacak olan bir makale yayınlayarak, değişken ve sabitlerden farklı bir yolla birleştirilen bir nicelik olarak değişkenin fonksiyonunun tanımını kullanmıştır. Daha sonra Bernoulli' nin bir öğrencisi olan Euler onun bu tanımlamasına ek olarak nicelik yerine analitik ifade söylemini kullanmıştır. Bu gelişmeden sonra fonksiyon kavramı analitik ifade kavramı ile özdeşleşmiştir. Bu formülasyonun kısa süre içinde tutarsızlık gösterdiği anlaşılarak aynı fonksiyonun farklı analitik ifadeleri temsil edebildiği ortaya çıkmıştır. Ayrıca bu formülasyonun fonksiyonlar üzerinde ciddi sınırlamalar getirmektedir. Günümüz terminolojisiyle aslında Euler' in fonksiyon tanımının sürekli fonksiyonların küçük bir ailesi olan analitik fonksiyonları içerdiğini söyleyebiliriz (Ponte, 1992). Bu durumun anlaşılması üzerine Euler farklı tanımlar getirmeye çalışsa da fonksiyon kavramının bütünüyle tanımlanması 18. Yüzyıla denk gelmektedir. Ancak 19. Yüzyılda bugünkü halini alabilmiştir.

Fonksiyonların evrimine bir diğer katkı, vücuttaki ısı akışı ile ilgili çalışan Fourier' den gelmiştir (Kleiner, 1989). Fourier ısıyı zaman ve uzay adlı iki değişkenli bir fonksiyon olarak düşünmüştür. Bu ve bunun gibi gelişmeler de fonksiyonların genelleştirilmesine ve çok değişkenli fonksiyonların ortaya çıkmasına sebep olmuştur. Günümüzde çok değişkenli fonksiyonlar, matematiğin ve uygulamalarının temelini oluşturmaktadır.

Çok değişkenli fonksiyonlar, matematiğin analiz dalında yer alan bir kavramdır. Literatüre bakıldığında matematiğin analiz dalının öğretimine ilişkin Mathematical Association of America [MAA], National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], American Mathematical Society [AMS], National Science Foundation

[NSF] gibi bazı grupların yaptığı çalışmalar yer almaktadır (Ganter, 2001). Bu grupların çalışmalarından çıkan ortak sonuç; geleneksel matematik eğitimi ile analiz öğretiminin etkili olmadığıdır. Burada bahsedilen geleneksel öğretim; dersin tanım, teorem, ispat ve problem çözme çerçevesinde işlenmesidir. National Commission on Excellencein Education (NCEE) komisyonu tarafından sunulan raporda üniversitelerin yürüttüğü analiz öğretimi programlarının gözden geçirilmesi gerektiği yer almaktadır (Denning, 1983). Gleason ve Hallet (1992) analiz derslerinin, belirli kalıplar çerçevesinde işlenmesi ve öğrencilere sunulan problemlerin benzer yapıda olması sebebiyle, yalnızca düşünmeden yapılan cebirsel işlemler haline geldiğini; bu nedenle öğrencilerin bu dersteki kavramların aslında ne anlama geldiklerini bile bilmediklerini ifade etmişlerdir. Fischbein (1982), geleneksel öğretimin matematiksel muhakeme süreçlerini olumsuz etkilediğini söylemiştir. Tall (1992) yaptığı çalışmada, öğrencilerin fonksiyon kavramına ilişkin sınırlı kavram imajına sahip olduğunu gözlemlemiştir. Burada bahsedilen kavram imajı, matematiksel bir kavrama ilişkin bireyin belleğinde kodladığı zihinsel yapı olarak tanımlanmıştır (Tall & Vinner, 1981).

Bir matematiksel kavram, matematikçiler tarafından üzerinde uzlaşma sağlanmış olan soyut nesnenin tanımıdır. Kavrayış ise, bireyin kavramdan anladığıdır (McDonald, Mathews & Strobel, 2000). Kavramsal anlama, kavram ile kavrayışın çakıştığı durumda gerçekleşir. Genel olarak kavramsal anlama; kavramlar arasında ilişki kurabilmeyi, kavramları başka durumlara aktararak problemlerin çözümünde kullanabilmeyi içeren derinlemesine öğrenmedir (Sinan, 2007). Bir kavramın öğrenilme sürecinin ortaya konulması, kavramın öğretilmesi için temel oluşturmaktadır (Kabael, 2011).

Matematiksel kavramların öğretiminde soyutlama, genelleme ve görselleştirme yer almaktadır (Yılmaz, 2011). Öğrenciler soyut kavramları zihinlerinde yapılandırmakta zorluk çekmektedirler. Bunun sebeplerinden biri olarak genelleme ve soyutlamanın doğasının yanlış anlaşılıyor olması söylenebilir (Ferrari, 2003). Genelleme, bir kavramı tanımak ve kavramın alanını genişletmek için teoremlerin formülasyonlarını ortaya çıkaran örneklerin yapılandırılması ile başlayarak, muhakemelerin ve denemelerin tümevarımsal sonucu olup, belli durumlardan ortaya çıkan ve belirli durumlara neden olan süreçtir (Tall, 1991). Soyutlama ise, matematiksel yapılardan zihinsel yapılar; zihinsel yapılardan da matematiksel yapılar oluşturma sürecidir (Sierpinska, 1994). Matematik, gerçek dünyadan soyutlananların betimlenmesi ile ilgilenir ve deneyimlerden kazanılan betimlemelerin birçoğu görsel olarak ortaya çıkmaktadır (Bishop, 1989).

Görselleştirme matematiksel düşünmenin doğuşuyla beraber, matematiksel kavramların arasındaki dönüşümü ve ilişkiyi keşfetmede doğal bir süreçtir (Guzman, 2002). Bilgiler arasında bağlantı kurmak ve betimleme yapabilmek amacıyla imajların, akış şemalarının zihnimizde veya kağıt üzerinde yansıması, kullanımı ve yorumlanması görselleştirme sürecini ve yeteneğini oluşturur (Hershkowitz, 1989). Bir matematiksel kavram üzerine düşünülürken zihinde ilişkiler kurulur. Bunlar o kavramın zihnimizdeki temsilleridir. Buradan hareketle bir matematiksel kavramın görsel temsilini de içeren çok sayıda temsiline sahip olmak, kavramların öğrenilmesinde etkiyi arttıracaktır (Tall, 1991).

APOS teori, matematiksel bir kavramın öğrenilmesinde bireyin oluşturduğu zihinsel yapıları analiz eder ve kavramın öğrenilmesine ilişkin bileşenler ortaya koyar. Dubinsky (1991), APOS teorisinde yer alan bir kavramın genetik ayrışımının, kavramsal anlamanın gerçekleşmesine katkısı olacağını iddia etmektedir. APOS teori, bir kavramı anlamak için gerekli olan bileşenleri ortaya koyabileceği gibi; öğrencilerin bir kavrama ilişkin kavramsal anlamalarının ne düzeyde olduğunu da analiz edebilir (Arnon, Cottrill, Dubinsky, Oktaç, Roa Fuentes, Trigueros & Weller, 2014).

Bu tez çalışmasında, lisans öğrencilerinin iki değişkenli fonksiyon kavramını anlamaları analiz edilmiştir.

1.2. Araştırmanın Amacı ve Önemi:

Bu tez çalışması iki değişkenli fonksiyon kavramının öğrencilerin zihinlerinde nasıl yapılandırdıklarını incelemeyi amaçlamaktadır. Bu bağlamda öğrencilerin iki değişkenli fonksiyon kavramını anlamaları APOS teorisi çerçevesinde analiz edilmiştir. Böylece çalışmanın iki değişkenli fonksiyonların öğretimi için genel bir çerçeve oluşturması beklenmektedir.

Günlük hayatta karşılaşılan problemler her zaman tek bir değişkene bağlı değildir. Örneğin, çalışan bir bireyin iş yerinde yaşadığı bir sorunun tek bir nedeni olmayabilir. Bu sorunları tespit etmek, birden fazla değişkeni göz önünde bulundurarak çözüme ulaşmak gerekmektedir. Yaşadığımız dünyanın üç boyutlu olduğu göz önüne alındığında, matematikte yer alan üç boyutlu uzay kavramının anlaşılması önem teşkil etmektedir. Üç boyutlu uzayların yapılandırılması ve buna bağlı olarak iki değişkenli fonksiyonların değeri ortadadır. Uygulamalı matematikte çoğu problem bu tür fonksiyonları içerir (Trigueros Gaisman & Martinez-Planell, 2007). Matematik eğitimi alanında yapılan çalışmalar, matematiksel kavramlara ilişkin anlamaların gerçekleşebilmesi için görsel ve analitik muhakeme yeteneklerinin uyumlu olması gerektirdiğini göstermektedir (Zazkis, Dubinsky & Dautermann, 1996; Aspinwall & Shaw, 2002).

İki değişkenli fonksiyon kavramı analiz dersi kapsamında verilmektedir. Birçok lisans programında yer alan bu kavrama ilişkin öğrencilerin yaşadıkları zorluklara ve kavramı yapılandırmalarındaki sıkıntılara alan yazında pek rastlanmamaktadır. Bu anlamda tezin alan yazına katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

1.3. Problem Cümlesi:

Bu çalışmanın problem cümlesini "Öğrencilerin iki değişkenli fonksiyon kavramını anlamaları nasıldır?" sorusu oluşturmaktadır.

1.3.1. Alt Problemler:

Araştırmanın alt problemlerini aşağıdaki sorular oluşturmaktadır.

1) Öğrenciler iki değişkenli fonksiyon kavramını nasıl yapılandırmaktadır?

2) Öğrenciler üç boyutlu uzayı nasıl yapılandırmaktadır?

1.4. Sayıltılar:

Çalışmaya katılan öğrencilerin uygulama sorularına ve yapılan görüşmelerde sorulan sorulara içtenlikle cevap verdikleri varsayılmıştır.

1.5. Sınırlılıklar:

Bu tez çalışması;

1) 2016-2017 öğretim yılı,

2) İki değişkenli fonksiyonların kavramsal anlamasına ilişkin uygulama sorularına ve yapılan görüşmelere katılan 6 öğrenciyle sınırlandırılmıştır.

1.6. Araştırmanın Kuramsal Temeli

Bu tezin teorik çerçevesini APOS teorisi oluşturmaktadır. Matematikte yer alan kavramları anlama üzerine oluşturulmuş APOS teorisi, İngilizce olarak Action (Eylem), Process (Süreç), Object (Nesne), Schema (Şema) kelimelerinin baş harflerinden oluşmaktadır. APOS teorisi, matematiksel kavramların nasıl öğrenilebileceğine ilişkin bir teoridir. Jean Piaget'in eserlerinden yola çıkılarak 1980'lerin başında Dubinsky tarafından ortaya atılan bu teori, o zamandan beri geniş çaplı araştırmalara konu olmaktadır.

Bu bölümde I. Arnon, J. Cottrill, E. Dubinsky, A. Oktaç, S. Roa Fuentes, M. Trigueros ve K. Weller (2014) tarafından yazılan "APOS Theory: A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education" adlı kitap referans alınmıştır.

1.6.1. APOS Teorisi

APOS teori bireyin bir matematiksel kavramı öğrenmeye çalışırken zihninde neler olabileceğine ilişkin modeller üstüne odaklanır. Aynı zamanda bu modelleri öğretim materyalleri tasarlamak ve matematiksel problem durumları ile uğraşırken öğrencilerin başarılarını değerlendirmek için kullanır. APOS teorisini; gelişimsel bir bakış açısı olarak (Breidenbach, Dubinsky, Hawks & Nichols, 1992), analitik bir değerlendirme aracı olarak (Dubinsky, Weller & Arnon, 2013) ya da her iki haliyle (Weller, Arnon & Dubinsky, 2011) kullanmak mümkündür.

APOS teori Jean Piaget'in yansıtıcı soyutlama kavramını temel almaktadır. Piaget yansıtıcı soyutlamayı, hem düşüncenin geliştirilmesinde zihinsel yapılar için ana mekanizma hem de bireyin zihninde tüm mantıksal-matematiksel yapıların geliştirildiği zihinsel mekanizma olarak tanımlamıştır. Piaget düşüncenin gelişimi ile ilgili olarak, bilişsel yapıların gelişiminin yansıtıcı soyutlamadan kaynaklandığını belirtmektedir (Piaget, 1985). Yine matematikle ilgili olarak, tüm mantıksal-matematiksel yapıların türetildiği zihinsel mekanizmayı yansıtıcı soyutlama olarak düşünmektedir (Piaget, 1971).

Yansıtıcı soyutlama iki bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm yansıtmayı içerir. Piaget içerik ve bu içerik üzerindeki işlemler olarak adlandırdığı farkındalık ve şüpheci düşünce anlamında ve içerik ile işlemleri düşük bir seviyeden yüksek bir seviyeye taşıma anlamında bir yansıtmadan söz etmektedir. İkinci kısım, bu yüksek seviyedeki içerik ve işlemlerin yeniden yapılandırılması ve yeniden organize edilmesinden oluşur. Bu kısma soyutlama denir. Bu durum, işlemlerin kendi üzerine yeni işlemler uygulanarak içerik haline gelmesine yol açar (Piaget, 1973). Örneğin fonksiyonlar, tanım kümesindeki elemanları görüntü kümesindeki elemanlara dönüştüren işlemler olarak ele alınabilir. Daha yüksek seviyelerde ise bir fonksiyon uzayının elemanları olarak fonksiyonlar içerik haline gelir. Bir başka örnek olarak tam sayılar verilebilir. Tam sayılar başlangıçta bir kümedeki özdeş nesneleri saymak ve sıralamak için bir işlem veya süreç iken; daha yüksek seviyelerde üzerinde aritmetik işlemlerin yapıldığı bir içerik ya da nesne haline gelir (Piaget, 1965). Bu örnekler, APOS teorisinin yaratıcısı Dubinsky'e, yansıtıcı soyutlamanın daha ileri matematiksel kavramlarda zihinsel gelişimi tanımlamak için güçlü bir araç olacağını göstermiştir. Bu nedenle APOS temelli çalışmalar genellikle lisans ve lisansüstü eğitime yönelik yapılmaktadır.

Piaget'e göre, zihinsel veya fiziksel bir nesne hakkındaki bilginin gelişimi hem nesne hem de nesne üzerinde faaliyet gösteren bir özne gerektirir. Buna göre nesne ve birey birbirinden bağımsız düşünülemez. Piaget bu fikri; küçük bir çocuğun yapılandırabildiği en temel kavramlardan, ileri seviye matematiksel çalışmalarına kadar matematiğin çeşitli alanlarında kullanmaktadır. İçerik ve içerik üzerindeki işlemler ile işlemlerin kendi üzerinde uygulanan işlemlerle içerik haline gelmesi üzerine kurulu bu teorik çerçeve, APOS teorisinin temellerini oluşturmaktadır.

Piaget'e göre, bir çocuğun kendi deneyimleri sonucu bir eylemi keşfettiğinde; fiziksel eylem, işlemlerin içselleştirilmesine dönüştürülür ve yansıtıcı soyutlama yapılmış olur. Örneğin, bir toplamanın sonucu sıralamadan bağımsızdır. Buradaki sıradan bağımsızlık özelliği (değişme özelliği) toplama nesnesinin değil, toplama işleminin bir özelliğidir. Piaget, nesnelerin özelliklerinin nesnelerde yer almadığını, aksine bu nesneler üzerinde gerçekleştirilen eylemlerin içerisinde yer aldığını söylemektedir. Yani nesnelerin özellikleri nesnelere olduğu kadar, o nesneyi bilen özneye de bağlıdır. Buna bağlı olarak Dubinsky fiziksel eylemlerin, özne tarafından yürütüldüğünü fakat özne için dışsal olduğunu belirtmiştir. Yani özne eylemlerin yürütücüsü olmasına rağmen, eylem özne için dışarıdan gelen bir uyarıcıdır.

Yukarıdaki toplama örneği için; fiziksel nesnelerden iki küçük küme oluşturularak fiziksel eyleme dönüştürülmesi, birinci kümeyi sayıp daha sonra ikinci kümeyi sayarak bunları birbirine ekleme ve daha sonra önce ikinci kümeyi sayıp daha sonra birinci kümeyi sayarak ekleme ve sonucun aynı olduğunu görme işlemini içerir. Burada nesneler sayılardır. Yani fiziksel nesnelerin kümesi tarafından temsil edilen tam sayılardır. Eylem ise, bu nesneler üzerinde yapılan toplama işlemi ve toplama işleminin değişme özelliğinin görülmesidir.

APOS teoride, Piaget'in "içselleştirilmiş işlemler" olarak söz ettiği şey "süreç" olarak değerlendirilmiştir. "Dönüştürme" ise zihinsel mekanizmalardan "içselleştirme"ye karşılık gelmektedir. Yansıtıcı soyutlamadaki "Fiziksel eylemler" ise "eylem" olarak bireyin zihninde yapılanmaktadır. Daha sonra eylemler içselleştirilerek "süreç" haline gelir. Eylem birey için dışsal iken, süreç içseldir. Piaget'in "sistem" olarak adlandırdığı şey, APOS teoride "şema" olarak karşılık bulmaktadır. Yukarıdaki toplama örneği için sistem değişmeli olma özelliğidir.

APOS teorisinde bir sürecin (içselleştirilmiş işlemler veya fiziksel eylemler) sarmalanarak nasıl nesne (işlemler üzerine daha yüksek seviyede işlemler uygulanması) haline geldiği de Piaget'in yansıtıcı soyutlama kavramından yola çıkarak açıklanır. Örneğin; Piaget'e göre orantı, ilişkiler arasındaki eşitlik veya bağıntılar arası denkliğin özel bir hali olarak tanımlanmıştır. O halde orantı iki nesne arasındaki ilişki ile başlar. Bir a pozitif tamsayısı bir b pozitif tamsayısına bölünürse, $\frac{a}{b}$ olarak gösterilir ve $\frac{a}{b}$ ifadesinin tam kısmı a sayısında kaç tane b sayısı olduğunu söyler. Bu $\frac{a}{b}$ ifadesi a sayısı ile b sayısı arasındaki bir ilişkidir. Benzer olarak c ve d pozitif tamsayıları arasında $\frac{c}{d}$ ilişkisi olsun. Bu iki ilişkinin her biri, a ve b pozitif tamsayıları ve c ve d pozitif tam sayıları arasında uygulanan bir eylemdir. Bu ilişkiler nesneler üzerinde bireyin uyguladığı eylemler olduğundan yansıtıcı soyutlama örneğidir. Buradaki bir başka yansıtıcı soyutlama, bu eylemleri sayısal değerler atanabilen kesirlere dönüştürmedir. Dubinsky'e göre, $\frac{a}{b}$ ve $\frac{c}{d}$ ilişkileri süreçlerdir. Eğer bu ilişkiler arasında bir karşılaştırma yapılıp yeni bir ilişki elde edilirse, bu süreç sarmalanarak nesne haline gelir. Bu son ilişki, orantı kurma eylemidir. Buradaki nesne fiziksel değil, zihinseldir. Bireyin zihninde orantı kavramı sarmalanarak nesne halini almıştır.

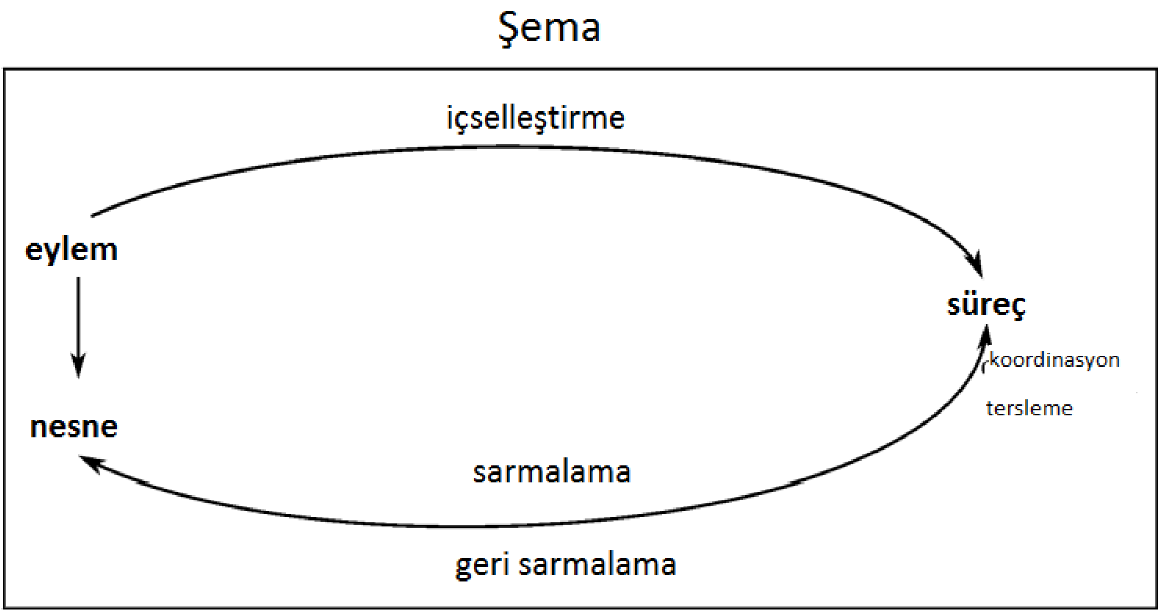
APOS teorisinde yer alan; Şema, şemaların temalaştırılması ve şemaların koordinasyonu kavramları da Piaget'in yansıtıcı soyutlama çalışmalarından doğmuştur. Yedi yaş grubu için pozitif tamsayılar kavramını tanımlamak isteyen Piaget, dizilim ve sınıflama olarak isimlendirdiği iki ana şema üzerinde durmuştur (Piaget, 1965). Dizilim şeması sayıların sıralaması olarak, sınıflama şeması ise kümelerin oluşturulması ve karşılaştırılması olarak açıklanır. Sınıflama şeması, çocuğun -bir parça meyve gibi- bazı nesneleri incelemesine ve nesnelerin özelliklerini göz ardı ederek onları ayrılamaz bir bütün olarak görmesine olanak tanıyan yapıdır. Bu şemanın uygulamasında, çocuk verilen iki kümenin aynı sayıda elemanının olduğunu anlayabilmek için bire bir eşleme şemasını veya birinin diğerinden daha çok/az elemanının olduğunu anlayabilmek için küme kapsama şemasını kullanır. Bu durum çocuğun,

$$\{1\}, \{1+1\}, \{1+1+1\}, \{1+1+1+1\}, \ldots$$

kümelerinin dizisini hayal edebildiği tam sayılarda dizilim şemasının gelişmesine zemin hazırlamaktadır. Bu yapılarla çocuk bu kümeleri "bir, iki, üç, dört…" diye adlandırabilir ve bu kümelerin sıralamasını, "birinci, ikinci, üçüncü, dördüncü…" şeklinde yapabilir. Son olarak bu sınıflama ve dizilim şemaları temalaştırılır ve yeni şemalara koordine edilir. Bu örnekteki koordine etmenin kilit adımı, çocuğun dört elemanlı kümenin sıralamada dördüncü olduğunu fark etmesidir. Koordinasyon sonucu oluşan yeni şema tam sayılar şemasıdır.

APOS teorisindeki koordinasyon kavramı, Piaget'in iki şema üzerindeki işlemlerine karşılık gelmektedir. Koordinasyon kavramı, iki şema arasındaki yapıları içerir. Bunun için öncelikle nesneler arasında koordine etme eylemi uygulanarak şemalar temalaştırılır.

Dubinsky Piaget'in yansıtıcı soyutlama kavramını baz alarak, bilişsel gelişim basamaklarının Eylem ile başladığını ve Eylemlerin içselleştirilerek Sürece dönüştürüldüğünü, Süreçlerin sarmalanarak Nesne haline geldiğini ve Nesneler üzerinde yeni eylemler uygulanabileceğini belirtmiştir. Bu Eylem (Action), Süreç (Process), Nesne (Object) ve Şema (Schema) APOS teorisinin merkezini oluşturmaktadır. Buradaki gelişim doğrusal bir yapı gibi gözükse de, her zaman doğrusal olarak ilerlemez. Şekil 1.6.1.1’ de APOS teorisinin şeması verilmiştir.



Şekil 1.6.1.1. APOS Teorisi

APOS teorisi zihinsel yapılar ve zihinsel mekanizmalar olmak üzere iki ana bileşenden meydana gelir. Zihinsel yapılar, gelişime açık olsa da görece sabit yapılardır (Stenger, Weller, Arnon, Dubinsky & Vidakovic, 2008). Birey zihinsel yapıları matematiksel durumlarda algı oluşturmak için kullanır. Zihinsel mekanizmalar ise bireyin zihninde oluşan yapıyı geliştirebildiği işleyişlerdir. Zihinsel yapılar durağan iken zihinsel mekanizmalar dinamiktir. APOS teori; Eylem, Süreç, Nesne ve Şema zihinsel yapılarından ve içselleştirme, sarmalama, koordinasyon, tersleme, geri sarmalama ve temalaştırma gibi zihinsel mekanizmalardan oluşur. Bireyin matematiksel kavramları zihninde nasıl yapılandırdığını açıklamak için bu zihinsel yapılar ve mekanizmalar çerçevesinde matematiksel kavramın genetik ayrışımı oluşturulur. Aşağıdaki Tablo 1.6.1.1.’de zihinsel yapılar ve mekanizmalar verilmiştir.

Tablo 1.6.1.1. APOS teorideki zihinsel yapılar ve mekanizmalar

Zihinsel Yapılar	Zihinsel Mekanizmalar
	İçselleştirme
Eylem	Sarmalama
Süreç	Koordinasyon
Nesne	Tersleme
Şema	Geri Sarmalama
	Temalaştırma

Matematiksel bilgi yapısı doğrusal bir ilerleyişe sahip olmamasına rağmen, matematiksel kavramların zihinsel yapılarının tanımı APOS temelinde bir hiyerarşi içerir. Aşağıda zihinsel yapılar ve mekanizmalar açıklanmıştır.

Eylemler: Eylem olarak düşünülen bir kavram, var olan nesne ya da nesnelerin dışsal olarak dönüşümüdür. Bir eylem, dönüşümün her bir adımında açıkça düşünülmeye ve dışsal bir uyarıcının rehberliğine ihtiyaç duyar. Her adım bir diğerini izler ve eylemin adımları henüz hayal edilemez ve hiçbir adım atlanmaz. Örneğin, fonksiyon kavramı için fonksiyonun açık ifadesine ihtiyaç duyan, ifadede değeri yerine koymaktan biraz fazlasını yapabilen bir birey fonksiyon kavramını anlamada eylem aşamasındadır (Dubinsky, Weller, McDonald & Brown, 2005). Burada bireyin dışsal bir uyarıcı olarak fonksiyonun açık ifadesine ihtiyaç duyması ve ifadede verilen değerleri adım adım yerine koyması eylem durumunu ortaya koymaktadır.

Kavrama düzeyi eylem basamağında olan bir birey, dışsal uyarıcılara ihtiyaç duyar. Örneğin, iki fonksiyonun bileşkesi kavramı için eylem basamağında olan bir birey iki fonksiyonun da açık ifadesine ihtiyaç duyar ve bileşke işlemini yalnızca verilen değerler için gerçekleştirebilir.

Belirli integral kavramında bir eğrinin altında kalan alanı bulmak için bir takım eylemler gereklidir. Verilen aralığı alt aralıklara bölme, her bir alt aralık için eğrinin altında bir dikdörtgen oluşturma, dikdörtgenin alanını hesaplama, dikdörtgenlerin alanlarının toplamını bulma eylemleri bu duruma örnektir.

Eylem yapısı en ilkel yapı olsa da, APOS teorisinin temelini oluşturmaktadır. Diğer yapıların geliştirilebilmesi için eylem yapısına ihtiyaç vardır. Özellikle eylemler içselleştirilerek süreç yapısının oluşması ve zihinsel nesnelerin oluşması için eylemlerin uygulanması bu teorinin temelinde eylem yapısının olduğunu göstermektedir.

İçselleştirme ve Süreçler: Süreçler zihinde içselleştirme ve koordinasyon zihinsel mekanizmaları kullanılarak yapılanır. Birey eylemleri tekrarlayarak dışsal uyarıcılara dayanmaktan uzaklaşır ve eylemler üzerinde içsel kontrol sağlar. Bu durum adımları atlayabilme ve açıkça her bir adımı düşünmek zorunda olmadan hayal edebilme yeteneğidir. Bu zihinsel değişimi mümkün kılan mekanizma içselleştirmedir. İçselleştirme, kişinin bir eylemden haberdar olmasını, onun üzerinde düşünmesini ve diğer eylemlerle birleştirmesini sağlar (Dubinsky, 1991). Örneğin, fonksiyon kavramını anlamada süreç basamağında olan bir birey, verilen fonksiyon için zihinsel bir süreç oluşturacak, açıkça belirtilmemiş girdileri ve girdilerin çıktılar üreten dönüşümlerini düşünecektir (Dubinsky, Weller, McDonald & Brown, 2005).

Eylem ve süreci birbirinden ayıran en temel özellik; birey eylem için hem fiziksel hem de zihinsel dönüşüm yapmak zorundadır ancak, süreç için her bir adımı kontrol etmeye ihtiyaç duymadan dönüşümü uygulayabilmektedir. Örneğin, belirli integralde bir birey için özel bir bölüntüde Riemann toplamını bulmak bir eylem iken; herhangi bir bölüntü için Riemann toplamını belirleme eylemini içselleştirip, bölüntünün alt aralıklarının sayısı arttıkça Riemann toplamlarını hayal edebilme bir süreçtir.

Sarmalama ve Nesneler: Bireyin bir sürece bir eylem uygulamasına sarmalama denir. Burada dinamik bir yapı olan sürece, eylem uygulanarak, durağan bir yapı elde edilir. Eğer birey bir bütün olarak sürecin farkındaysa, dönüşümlerin bir bütünü etkileyebildiğini ve dönüşümleri yapılandırabildiğini kavrar. Bu durumda birey süreci sarmalayarak, zihinsel nesneye dönüştürür. Fonksiyon kavramını sarmalayarak nesneye dönüştüren birey fonksiyonlar kümesini düşünebilir, bu küme üzerinde aritmetik işlemler tanımlayabilir hatta topolojide fonksiyonları kullanabilir.

Kapalı aralıkta bir fonksiyon için eğrinin altında kalan alan, Riemann toplamlarının limitidir. Bu durum Riemann toplamı sürecine uygulanan bir eylemdir. Bu limitin varlığını belirleyerek veya limit değerini hesaplayarak birey, Riemann toplamı sürecini bir nesneye sarmalar.

Geri Sarmalama, Koordinasyon ve Süreçlerin Terslenmesi: Bir süreç bir nesneye sarmalanırken ihtiyaç halinde geri sarmalanarak sürece dönüş yapılabilir. Diğer bir deyişle, birey nesneyi oluşturduğu sürece geri sarmalama mekanizması ile dönüş yapabilir.

Koordinasyon mekanizması bazı nesnelerin yapılarında zorunludur. İki nesne geri sarmalanarak sürece dönüştürülerek, bu süreçler koordine edilir ve oluşan bu süreç yeni bir nesneye sarmalanabilir. Bu durumun örneği fonksiyonların bileşkesi kavramında görülebilir.

f ve g iki fonksiyon ve fog bu iki fonksiyonun bileşkesi olsun. Burada fog bileşke fonksiyonunu elde edebilmek için, her iki fonksiyon nesnesi sürece geri sarmalanır. fog' nin elemanlarını elde etmek için, bu süreçler g fonksiyonunun sürecine f fonksiyonu uygulanarak koordine edilir. Elde edilen süreç sarmalanarak yeni bir nesne (fog nesnesi) oluşturulur.

Ayrıca bir süreç terslenebilir. Dubinsky (1991) ters fonksiyonu elde edebilmek için fonksiyon sürecinin terslenebilir olduğunu anlatmıştır. Dubinsky'e göre, birey fonksiyon sürecinin tamamını yansıtarak örten olan bir fonksiyon fikri oluşturur. Birey fonksiyon sürecini yansıtarak ve bu süreci tersleyerek birebir olan fonksiyon fikrini düşünebilir. Böylece birebir örten fonksiyon zihinsel olarak yapılanır ve tersleme mekanizması uygulanarak ters fonksiyon elde edilir. Bunun dışında, analiz dersi alan bir öğrenci fonksiyonun türevini alma eylemini içselleştirebilir ve çok sayıda örnekle başarılı şekilde türev alma eylemini gerçekleştirebilir. Eğer bu süreç sarmalanırsa, öğrenci türevi verilmiş bir fonksiyonun ilkelini bulmak için tersleme yapabilir.

Temalaştırma ve Şemalar: Bir şema, dinamizmiyle ve özel matematiksel durumlarda kişinin matematiksel aktiviteleri tarafından belirlenerek sürekli yeniden yapılanmasıyla karakterize edilir. Bir şemanın tutarlılığı, bireyin özel bir matematiksel durumla başa çıkılıp çıkılamayacağını tayin edebilme yeteneği tarafından belirlenir. Şemalar, yapıların tutarlı koleksiyonu olarak yapılandırıldığında ve bu yapılar üzerinde bağlantı kurulduğunda; statik yapıya dönüşebilir veya diğer ilgili nesnelerle ya da şemalarla bağlantı kurarak dinamik bir yapı halinde kullanılabilir. Örneğin vektör uzaylar için bir şema; nesne olarak matrisleri, süreç olarak fonksiyonları ve polinomları içerebilir. Bütün bu yapılar vektör uzayı tanımlayan aksiyomları sağladığı için ortak özelliklere sahiptir. Bu şemanın tutarlılığı, bireyin verilen durumda şemanın geçerli olup olmadığını belirlemek için kullandığı vektör uzay tanımına bağlıdır.

Şema yapısı zihinsel nesneleri temalaştırma mekanizmasıyla oluşturulur. Bu mekanizma bireyin şema yapısına dönüşümler uygulamasına olanak tanır.

Şemalar, bireyin matematiksel kavramlar üzerine inşa ettiği zihinsel yapıların tanımlarını, organizasyonunu ve örneklerini içeren yapılardır.

APOS teori, zihinsel yapılar ve mekanizmaların yapılandırılarak var olan yapıların rol oynayıp yeni yapılar oluşturduğu sarmal bir yaklaşım içerir. Nesneler yapılandırılırken daha yüksek seviye eylemlere ve süreçlere dönüştürülebilir. Bu durum sonsuza kadar sürebilir. Her eylem, süreç veya nesne yeniden yapılandırılabilir. Daha karmaşık eylemlerin içselleştirildiği ve daha zengin süreçlerin sarmalandığı yüksek seviyedeki yeni problem durumlarını deneyimleme sonucunda; daha düşük seviye yapılar kaybolmaz, zenginleştirilmiş kavramın bir parçası olarak kalır (Dubinsky, 1997).

1.6.2. Genetik Ayrışım

Her matematik kavramı için zihinsel yapıların ve mekanizmaların belirlenmesi gerekmektedir. APOS teorisinde bu yapı ve mekanizmaları belirlemek için genetik ayrışım kullanılır. Genetik ayrışım, matematiksel kavramları öğrenmek amacıyla öğrencinin ihtiyaç duyabileceği zihinsel yapılar ve mekanizmaları tanımlamak için varsayımsal bir modeldir. Başlangıcı bir hipotez olarak, kavramın öğretimi ve öğreniminde araştırmacının deneyimlerine, matematiksel bilgisine kavram üzerinde önceki araştırmalara ve kavramın tarihsel gelişimine dayanır. Genetik ayrışım test edilene kadar deneyseldir ve ön genetik ayrışım olarak adlandırılır.

Yeni matematiksel kavramlar sıklıkla var olan bir kavramın dönüşümü olarak meydana gelir. Genetik ayrışım öğrencinin var olan zihinsel nesneler üzerinde yapması gereken eylemlerin tanımlanmasından oluşur. Bu eylemlerin süreçlere nasıl içselleştirildiğine dair açıklamaları barındırır. Bu noktada kavram hala kişinin yaptığı bazı şeyler olarak görülür. Kavramın oluşturulması amacıyla süreçler zihinsel nesnelere sarmalanır. Bir kavramın farklı eylemler, süreçler ve nesnelerden meydana gelmesi çok olasıdır. Genetik ayrışım tüm bu yapıları içerdiği gibi daha geniş bir yapı olan şemayı da içerebilir. Bir nesnenin nasıl temalaştırılarak şema olduğunun açıklaması, genetik ayrışımda yer alabilir. Genetik ayrışım ayrıca öğrencinin beklenen performansları hakkında bilinen herhangi bir şeyi de açıklar, bireyin daha önce yapılandırmış olması gerektiği koşulları da açıklar.

Araştırmacının oluşturduğu ön genetik ayrışım eğitsel sürecin gelişmesine rehberlik edebilir. Eğitim uygulaması yapılır ve derinlemesine görüşmelerden elde edilen veriler toplanır. Verilerin analizinde iki soru gündeme gelir.

- Öğrenciler genetik ayrışımın gerektirdiği zihinsel yapıları oluşturdu mu?
- Matematiksel içerikler öğrenciler tarafından ne kadar öğrenildi?

Bu soruların cevapları genetik ayrışımın revizyonuna yol açabilir. Bu noktada genetik ayrışıma artık ön genetik ayrışım gözüyle bakılmaz. Genetik ayrışımda inceltme olarak adlandırılan ekleme ve düzeltme mümkündür ve her bir inceltme yapının yeni bir revizyonuna yol açar. İdeal döngü, inceltme-revizyon-veri analizi şeklindedir.

Genetik ayrışım öğrenme aktivitelerinin düzenlenmesinde de rol oynar. Bir kavramın genetik ayrışımı eğitime rehberlik eder. Teori ve onun pedagojik kullanımı arasında bir köprü olduğu için, teori pedagojik kullanımı bilgilendirir (Trigueros & Oktaç, 2005). Öğretim döngüsünün ilk kısmı öğrencilerin birlikte çalışmasını içerir. Her bir aktivite öğrenciye özel eylemleri tekrar etme ve onları yansıtma imkanı sunar. Bu sayede eylemi sürece içselleştirmeyi teşvik eder, süreci koordine etme ve tersleme yapmaya yardımcı olur. Sürecin nesneye sarmalanmasını destekler. Araştırmanın odağı, öğrencilerin genetik ayrışım tarafından öngörülen yapıları gerçekleştirip gerçekleştiremedikleri ve yapıların onlara öğrenmek için yardımcı olup olmadığıdır. Elde edilen veriler genetik ayrışımın öngördüğü bilgilerle karşılaştırılır. Bu durum belki inceltmeye yol açar.

Genetik ayrışım oluşturulurken yapılan en yaygın hata, öğretim silsilesinin tanımıyla ya da matematiksel kavramın tanımıyla genetik ayrışımın karıştırılmasıdır. Örneğin, matris kavramının öğrenilmesi için yapılan bir genetik ayrışım şu şekildedir.

1. Öğrenciler matris kavramını tanımlama eylemini yapar.
2. Öğrenciler matrisin boyutunun tanımlama eylemini yapar.
3. İki matrisin toplamı için süreçler
4. Bir matrisi skalerle çarpma süreci

Verilen örnekte öğretmen, matris kavramının öğrenilmesi için ihtiyaç duyulan zihinsel yapıların tanımını önermek yerine ders planı yapmıştır. Bir diğer yaygın hata, öğrenme çıktılarını genetik ayrışım diye sunmaktır. Örneğin,

Eylem: Bilinen bir fonksiyon üzerindeki dönüşümünün özel örneklerini görebilir. İyi bilinen fonksiyonların grafiklerini çizebilir.

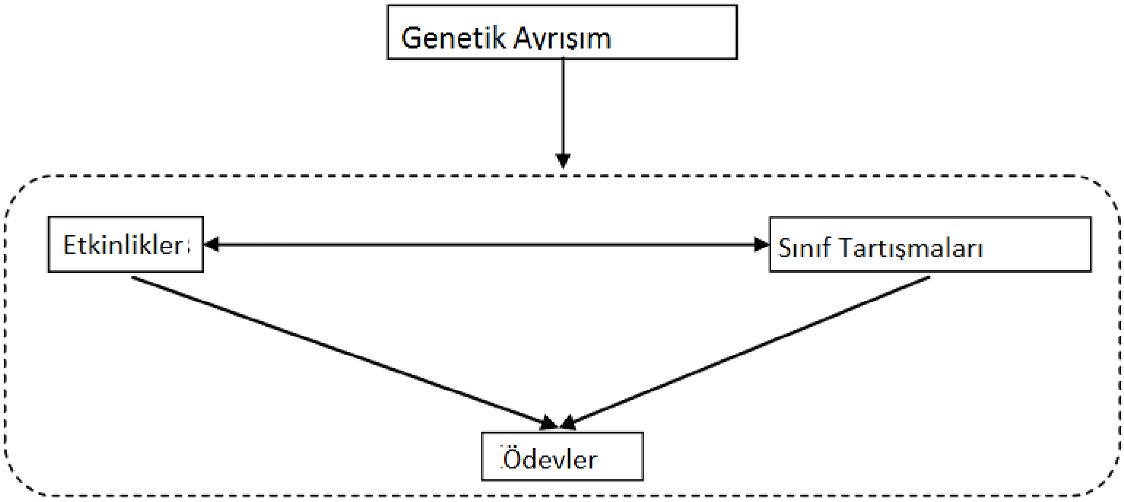
Süreç: Verilen bir fonksiyonun temel dönüşümlerini çizebilir. Verilen bir fonksiyonun dönüşümünü bulabilir. Eğer dönüştürülmüş bir fonksiyon verilmişse asıl fonksiyonu bulabilir.

Nesne: Dönüştürülmüş fonksiyon üzerine işlemler uygulayarak yeni fonksiyonlar elde edebilir. Herhangi bir dönüştürülmüş fonksiyonun grafiğini çizebilir.

Bu örnekteki durumda öğrencinin ihtiyaç duyduğu yapılar belirtilmemiştir. Örneğin bu tanım, adım adım grafiksel dönüşümleri içeren eylemleri belirlemez. Bu eylemlerin öğrencilerin grafiksel dönüşümü tanıması için içselleştirilmesinin nasıl olduğunu açıklamaz. Dönüştürülmüş bir fonksiyonun asıl fonksiyona nasıl terslendiğini belirtmez.

Bir matematiksel kavramın genetik ayrışımı tek olmak zorunda değildir. Bunun yerine öğrencinin zihnindeki yapıları anlamaya çalışan teorik bir modeldir. APOS teori, kavramın yapısallaştırılması için belli bir yörüngeyi tarif etmesine rağmen, farklı öğrencilerin belirli bir genetik ayrışımdan farklı yollar izleyebileceğini kabul eder. Dolayısıyla genetik ayrışımın önemi, öğrencilerin çoğunun bir kavram öğrenmede ihtiyaç duyduğu yapıları tanımlayan genel bir model olarak kullanılmasından kaynaklanmaktadır. Genetik ayrışımın öğretim deneylerinde doğrudan bir kullanımı olmasa da, Apos teori ve onun pedagojik kullanımı arasında köprü kurduğu için önemlidir (Trigueros & Oktaç, 2005).

Pedagojik stratejilerden birisi ACE (Activities-Classroom Discussion-Exercises) öğretim döngüsüdür. Döngünün ilk adımı olan etkinlikler (activities) kısmında öğrenciler işbirliği içinde olarak genetik ayrışım tarafından önerilen zihinsel yapıları kurmak için onlara yardım eden tasarımlardır. İkinci olarak sınıf tartışmaları (classroom discussion) bölümünde küçük gruplar ile eğitici arasında etkinlik bölümünde ortaya çıkan durumlar tartışılır. Döngünün son kısmında tartışmalar sonucunda ortaya çıkan problemler ev ödevi olarak verilir ve böylece öğretim döngüsü tamamlanır (Arnon, Cottrill, Dubinsky, Oktaç, Roa Fuentes, Trigueros & Weller, 2014). ACE öğretim döngüsü ve genetik ayrışım arasındaki ilişki Şekil 1.6.2.1.’ de verilmiştir.



Şekil 1.6.2.1. ACE öğretim döngüsü

2. İLGİLİ ARAŞTIRMALAR

Bu bölümde tez çalışması ile ilişkili ülkemizde ve dünyada yapılan çalışmalar verilecektir. APOS teorisi Dubinsky tarafından ortaya atıldıktan sonra üzerine birçok çalışma yapılmıştır. Ülkemizde de APOS teorisi üzerine yapılan çalışmalar vardır.

Çekmez (2013) yaptığı doktora çalışmasında; dinamik matematik yazılımı kullanımının, öğrencilerin türev kavramının geometrik boyutunu anlamalarına etkisini incelemiştir. Lisans düzeyinde türev kavramıyla ilk kez karşılaşan ilköğretim matematik öğretmeni adayları ile yapılan bu çalışmada bilgisayar destekli öğrenme ortamları oluşturulmuş ve sonuçları incelenmiştir. Öğrencilerin kavramsal anlama seviyeleri APOS teorisi kullanılarak belirlenmiştir. Çalışmada, Asiala ve diğerleri (1997) tarafından türev kavramının anlaşılmasına ilişkin geliştirilen genetik ayrışım kullanılmıştır. Burada APOS teorisi analitik bir değerlendirme aracı olarak kullanılmış ve sonuçta dinamik yazılım kullanılarak öğretim yapılan öğrencilerin türev kavramının geometrik boyutuna ilişkin anlamalarının, geleneksel öğretim yapılan öğrencilere göre daha yüksek olduğu gözlenmiştir.

Bir başka doktora tez çalışmasında Çetin (2009), öğrencilerin limit kavramını anlamalarını APOS teorisi çerçevesinde incelemiştir. Çalışmaya matematik bölümünde analize giriş dersi alan 25 öğrenci katılmıştır. Öğrencilere araştırmacı tarafından geliştirilen öğrenme ortamlarında limit kavramının öğretim deneyi gerçekleştirilmiştir. Öğrenciler beş hafta boyunca, haftada iki saat laboratuvar uygulamalarında kümeler halinde çalışmış daha sonra dört saatlik derslere katılmışlardır. Ders saatlerinden önce, öğrencilerin limit konusunda düşünmesini sağlayacak bilgisayar programlama etkinlikleri kullanılmıştır. Aktiviteler sonucu öğrencilerden elde edilen bulgular, Cottrill ve diğerleri (1996) tarafından yapılan limit kavramının anlamına yönelik genetik ayrışımla karşılaştırılmış ve uyumlu olduğu gözlenmiştir.

Öte yandan ülkemizde APOS teorisinin lisans ve lisansüstü düzeyin dışında, ilk ve orta öğretimde de kullanıldığı çalışmalar vardır. Deniz (2014) yaptığı yüksek lisans çalışmasında, sekizinci sınıf öğrencilerinin eğim kavramını oluşturma süreçlerini APOS teorisi çerçevesinde analiz etmiştir. Gerçekçi matematik eğitimine göre öğretim ortamları düzenlenmiş ve elde edilen sonuçlara göre eğim kavramına ilişkin genetik ayrışım ortaya konulmuştur.

Bir diğer çalışmada Açıl (2015), ortaokul üçüncü sınıf öğrencilerinin denklem kavramına yönelik soyutlama süreçlerini APOS teorik çerçevesinde incelemiştir. Doktora tezi olarak yapılan bu çalışmada, APOS teorisinin öğretim basamağı olan ACE (Activity, Class Discussion, Exercises) döngüsü ile denklem kavramı anlatılmış ve soyutlama süreçleri yenilenmiş Bloom Taksonomisine göre değerlendirilmiştir. Bu çalışmada, APOS teorisinin zihinsel yapılarından (eylem, süreç, nesne, şema) yararlanarak oluşturulan öğrenme ortamı ve geleneksel grubun arasındaki farklar incelenmiştir. Elde edilen sonuçlara göre, ACE döngüsüyle öğretim yapılan grubun, diğer gruba göre denklem kavramına ilişkin soyutlama süreçlerinin daha iyi düzeyde olduğu görülmüştür.

Yurt dışında yapılan APOS teorisi ile ilgili çalışmalara baktığımızda; Weller ve diğerleri (2009) yaptıkları çalışmada, matematik öğretmen adaylarının rasyonel sayılar ve ondalık açılımları konusunda matematiksel performanslarını incelemişlerdir. Öğretim deneyinin APOS teoride yer alan ACE döngüsüne göre yapıldığı bu çalışmada deney grubunun geleneksel gruba göre matematiksel performanslarının daha üst düzeyde olduğu görülmüştür.

Tzirias (2011) öğrencilerin ilişkili oran konusunu anlamalarına ilişkin APOS teorisi çerçevesinde bir genetik ayrışım ortaya koymuştur. Bu çalışmada gruplar, kontrol ve deney grubu olarak ikiye ayrılmış, her grupta iki kişi yer almıştır. Deney grubuna 8 haftalık ACE öğretim döngüsü uygulanarak ilişkili oran konusu ile ilgili iki soruluk veri toplama aracı kullanılmıştır. Öğrencilerden elde edilen verilerin analizi yapılarak, APOS teorisi çerçevesinde genetik ayrışım oluşturulmuştur.

Breidenbach ve diğerlerinin (1992) üniversite öğrencilerin fonksiyon kavramını anlamalarına ilişkin yaptıkları çalışmada, APOS teorisinde yer alan genetik ayrışımı oluşturmak amaçlanmıştır. Öğrencilerin fonksiyon kavramını anlamalarını analiz eden bu çalışma gelişimsel bir bakış açısı sunmaktadır. Hem APOS teorisinde yer alan zihinsel yapıların (özellikle süreç basamağının) oluşturulması hem de fonksiyon kavramının öğrenilmesi ve zihinde yapılandırılmasının geliştirilmesi çalışmanın amacını ortaya koymaktadır. Bu çalışmada ISETL bilgisayar programı kullanılarak öğrencilerin fonksiyon kavramının anlamalarında süreç basamağının oluşturulması amaçlanmıştır. Çalışma sonunda öğrencilerin fonksiyon kavramına ilişkin bir süreç geliştirdiği görülmüştür. Buradaki fonksiyon kavramına ilişkin süreç, öğrencinin açıkça ifadesi verilmeyen girdileri ve girdilerin çıktılar üreten dönüşümlerini düşünmesidir.

Asiala ve diğerleri (1997) türev kavramına ilişkin yaptıkları çalışmada APOS teorik çerçevesine dayanarak bir genetik ayrışım elde etmişlerdir. Bu çalışma üniversitede öğrenim gören 41 öğrenciyle yapılmıştır. Türev kavramını anlamanın ne demek olduğu, bu kavramın bireyin zihninde nasıl yapılandırıldığı araştırılmış ve buna bağlı olarak türev kavramını anlamaya yönelik bir yol haritası olan genetik ayrışım oluşturulmuştur.

Yine lisansüstü matematiksel kavramların APOS teorisine bağlı olarak genetik ayrışımlarının yapıldığı çalışmalar alan yazında yer almaktadır. Cottrill ve diğerlerinin (1996) yaptığı limit kavramına yönelik genetik ayrışım, Roa Fuentes ve Oktaç (2010) tarafından lineer dönüşüm kavramına ilişkin genetik ayrışım, Trigueros ve Oktaç (2005) tarafından yapılan vektör uzay kavramına yönelik genetik ayrışım bunlardan bazılarıdır. Bu kavramların temeli fonksiyonlardır. Fonksiyon kavramı üzerinde yapılan çalışmalar oldukça fazladır.

Bu tez çalışmasında yer alan iki değişkenli fonksiyon kavramına ilişkin Türkiye'de ve dünyada yapılan bazı çalışmalar mevcuttur. Kabael (2011) tek değişkenli fonksiyonların iki değişkenli fonksiyonlara genellenmesini APOS teorisi bağlamında incelemiştir. İlköğretim matematik öğretmeni adayları ile yapılan bu çalışmada tek değişkenli fonksiyonların fonksiyon makinesi kullanılarak iki değişkenli fonksiyonlara genellenmesi amaçlanmıştır. Araştırmanın verilerini tek ve iki değişkenli fonksiyonlara ilişkin hazırlanan ikişer test ve altı öğrenci ile yapılan klinik görüşmeler oluşturmaktadır. Elde edilen veriler APOS teorisi bağlamında analiz edilmiş ve öğrencilerin iki değişkenli fonksiyonları anlamalarının, genel fonksiyon kavramını anlama seviyeleri ile üç boyutlu uzay bilgilerine bağlı olduğu görülmüştür.

Öte yandan Biber (2010) yaptığı doktora çalışmasında ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının tek ve iki değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği ile ilgili kavram bilgisi arasındaki ilişkileri incelemiştir. Yapılan çalışmada, tek ve iki değişkenli reel fonksiyonlarda limit ve süreklilik kavramına ilişkin asgari kazanımlar belirlenmiş ve buna bağlı olarak birer envanter oluşturulmuştur. Bununla beraber öğretmen adaylarının tek değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği ile ilgili kavram bilgileri ile çok değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliğine ilişkin kavram bilgileri kıyaslanarak aralarındaki ilişkiler belirlenmiştir. Çalışmanın sonucunda tek değişkenli fonksiyonlarda süreklilik kavramı limit kavramına göre daha iyi anlaşıldığı gözlenmiştir. Ayrıca iki değişkenli fonksiyonların limitine ve sürekliliğine ilişkin genellemenin öğrenciler tarafından yapılamadığı görülmüştür. Tek değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği kavram bilgisine sahip öğrencilerin iki değişkenli fonksiyonlar için bu kavramların anlamasında başarısız olduğu gözlenmiştir.

Bir diğer çalışmada Baştürk ve Dönmez (2011) matematik öğretmen adaylarının fonksiyonların limiti ve sürekliliği hakkında kavram yanılgılarını incelemişlerdir. 37 öğretmen adayına uygulanan açık ve kapalı uçlu sorulardan oluşan alan bilgisi anketinden elde edilen veriler analiz edilmiş, öğretmen adaylarının limit ve süreklilik kavramları arasındaki ilişkide; bir fonksiyonun bir noktada limiti varsa, o noktada tanımlı ve sürekli olması gerektiği gibi kavram yanılgılarına sahip oldukları gözlenmiştir.

Öte yandan Yerushalmy (1997) iki değişkenli fonksiyonların çoklu temsilleri hakkında bir çalışma yapmıştır. Üniversite öğrencileriyle yapılan bu çalışmada tek değişkenli fonksiyonların iki değişkenli fonksiyonlara genellemesinin karmaşıklığı ortaya konulmuştur. Bu karmaşıklığa hem fonksiyon kavramının hem de bu kavramın temsillerinin sebep olduğu gözlenmiştir. Yerushalmy tek değişkenli fonksiyonların iki değişkenli fonksiyonlara genellenmesinde çoklu temsiller ve temsiller arası ilişkinin üzerinde durmuştur.

Weber ve Thompson (2014) öğrencilerin iki değişkenli fonksiyonlar ve onların grafikleri hakkındaki imajlarını incelemişlerdir. Çalışmada, öğrencilerin tek değişkenli fonksiyonları, iki değişkenli fonksiyonlara ve onların grafiklerine nasıl genelledikleri akıl yürütmeye dayalı kavram analizi ile incelenmiştir. İki öğrenciyle yapılan öğretim deneyinde, öğrencilerin geliştirdikleri şemalara odaklanılmış ve akıl yürütmenin genellemedeki rolü düşünüldüğünde öğrencilerin iki değişkenli fonksiyonların grafiklerinde kavramsal anlamalarının geliştiği gözlemlenmiştir.

Vinner ve Dreyfus (1989) yaptıkları çalışmada öğrencilerin ve öğretmenlerin fonksiyon kavramına ilişkin imajlarının ve tanımının nasıl olduğunu araştırmışlardır. Çalışmada 271 üniversite öğrencisi ve 36 matematik öğretmeni yer almıştır. Çalışmanın sonuçlarına göre tanımların ve fonksiyon kavramı imajlarının çok ilkel düzeyde olduğu görülmüştür.

Hofe (1999) fonksiyonların limiti kavramı ile ilgili yaptığı çalışmada öğrencilerin fonksiyonların grafiksel ve aritmetik temsilleri ve bunların yorumları konusunda sıkıntı yaşadıklarını gözlemlemiştir.

Genel olarak ülkemizde ve dünyada matematik eğitiminde yapılan iki değişkenli fonksiyonlara ilişkin çalışmaların az olduğu görülmektedir.

2.1. Tezin Çatısını Oluşturan Çalışmalar

Bu tez çalışmasında Trigueros ve Martinez-Planell tarafından 2007, 2010 ve 2012 yıllarında, iki değişkenli fonksiyonların kavramsal anlamasına ilişkin yapılan genetik ayrışım göz önüne alınmıştır. Trigueros ve Martinez-Planell (2007, 2010) öncelikle öğrencilerin R^3 uzayını yapılandırmaları gerektiğini düşünmüşlerdir. Bunun için öğrencilerden düzlemde bir noktaya bir yükseklik atamalarını ve daha sonra bunu genelleyerek R^3 şemalarını oluşturmayı amaçlamışlardır. Tek değişkenli fonksiyonların iki değişkenli fonksiyonlara genellenmesini temel alan bu yaklaşım, R^2' den R' ye fonksiyonlar ile R^3 uzay şemalarını oluşturmayı hedeflemektedir.

Daha sonra Martinez-Planell ve Trigueros Gaisman (2012) iki değişkenli fonksiyon kavramına ilişkin tanım kümesi, görüntü kümesi gibi temel genetik ayrışımı oluşturmuşlardır.

Trigueros ve Martinez-Planell tarafından oluşturulan genetik ayrışım aşağıda verilmiştir.

İki değişkenli fonksiyon kavramının anlaşılabilmesi için öğrencinin bildiği varsayılan şemalar aşağıdaki gibidir. ((a)-(e) arası)

(a) Dış dünya materyallerini içeren üç boyutlu uzayların sezilmesi

(b) Kartezyen düzlem (yani; nesne olarak nokta kavramı, 'noktaların bileşenlerinin temsili' eyleminin genellemesi sonucunda oluşan süreçler olarak; fonksiyonlar, eğriler, bölgeler)

(c) Reel sayılar (yani; nesne olarak sayı kavramı, süreç olarak aritmetik ve cebirsel dönüşümler)

(d) Kümeler

(e) Reel değerli fonksiyonlar (yani; süreç olarak fonksiyon, fonksiyonlarla işlemler ve fonksiyonların analitik ve geometrik temsillerinin koordine edilmesi)

İki değişkenli fonksiyonların geometrik boyutuna ve iki değişkenli fonksiyonların anlamalarına ilişkin düzenlenen genetik ayrışım aşağıdaki gibidir.

(1) Üç boyutlu uzay yani R^3 kümesini yapılandırmak amacıyla, kartezyen düzlem, reel sayılar ve uzay şemaları kavramının sezgisi koordine edilmelidir.

(1.a.) R^2 kümesinin elemanlarına (yani düzlemdeki bir noktaya), bir yükseklik atama eylemi

(1.b) Uzaydaki bir noktayı veya üçlüleri temsil etme ve onlar arasındaki dönüşümü yapma eylemleri

(1.c) Bu eylemler bir sürece içselleştirilir. Bu süreç, mümkün olan bütün üçlüleri, onların altkümelerini ve temsillerini göz önüne alır. Bu süreç tek tek sözel, analitik ve tablo olarak ifade edildiği zaman R^3 üç boyutlu uzay olarak temalaştırılabilir.

(2) R^3 uzay şeması fonksiyon ve küme şemalarıyla koordine edilir.

(2.a) R^3 kümesinin analitik veya grafiksel olarak verilen bir altkümesindeki her bir noktaya (yani R^2' nin verilen altkümesinin elemanları) bir ve yalnız bir reel sayı karşılık getirme eylemi.

(2.b) Bu eylem süreçlere içselleştirilir.

(2.b.1) R^2 düzleminin bir altkümesinin her bir elemanına karşılık bir reel sayı getirilerek oluşturulan iki değişkenli fonksiyonu yapılandırma süreci.

(2.b.2) Oluşturulan iki değişkenli fonksiyonun farklı temsilleri ile ilişki kurmak için ihtiyaç duyulan dönüşümün süreci

(2.c) Bu süreç göz önüne alınan herhangi bir iki değişkenli fonksiyona genelleştirilirse (yani R^2 ile R kümelerinin altkümelerinin arasındaki özel bir bağıntı olarak sarmalanırsa) iki değişkenli fonksiyon kavramı bir nesne olarak yapılanır.

3. YÖNTEM

3.1. Araştırmanın Yöntemi

Bu araştırma nitel bir çalışmadır. Çalışmada durum çalışması deseni kullanılmıştır. Durum çalışması Yin'e (2003) göre;

1) Bir olguyu kendi gerçek yaşam çerçevesi içinde yaşayan,

2) Olgu ve içinde bulunduğu içerik arasındaki sınırların kesin hatlarıyla belirgin olmadığı,

3) Birden fazla kanıt veya veri kaynağının mevcut olduğu durumlarda kullanılan, görgül bir araştırma yöntemi, olarak tanımlanır.

Bu tez çalışmasında, öğrencilerin iki değişkenli fonksiyonları anlama durumları ortaya konulmuştur.

3.2. Çalışma Grubu

Çalışmada amaçlı örnekleme yöntemlerinden maksimum çeşitlilik örneklemesi kullanılmıştır. Patton'a (1987) göre, amaçlı örnekleme yönteminin mantığı ve gücü; derinlemesine yapılan araştırmalarda zengin bilgi edinilmesine olanak sağlamasından gelir. Bu sebeple, amaçlı örnekleme yöntemleri çoğu zaman olguların ortaya çıkmasında ve açıklanmasında fayda sağlar. Bu tez çalışmasında iki değişkenli fonksiyonların kavramsal anlamalarının analizini yapabilmek için, birçok veriye ihtiyaç vardır. Katılımcıların zihinlerindeki matematiksel örgünün ortaya çıkarılabilmesi, iki değişkenli fonksiyonların kavramsal anlamasına ilişkin genetik ayrışımdaki basamaklara karşılık getirilebilmesi ve bu basamakların çeşitlendirilebilmesi için tezde amaçlı örnekleme yöntemi kullanılmıştır.

Maksimum çeşitlilik örneklemesindeki amaç, görece küçük bir örneklem ile olabildiğince çok çeşitlilik yaratmaktır (Yıldırım ve Şimşek, 2013). Büyük çeşitlilikten doğan genel yargılar, çekirdek deneyimlerle ve olgunun boyutlarını oluşturan merkezle yakından ilgilidir (Patton, 1987). Bu tezde iki değişkenli fonksiyonlara ilişkin genetik ayrışımın her basamağına dair çıkarımlar yapabilmek ve katılımcılardan elde edilen verilerle genetik ayrışım ile ilgili düzenlemeler yapabilmek için maksimum çeşitlilik esas alınmıştır. Bu sebeple çalışmada amaçlı örnekleme yöntemlerinden maksimum çeşitlilik örneklemesi kullanılmıştır.

Bu tez çalışması Ankara'da bir devlet üniversitesinin Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalı'nda öğrenim gören altı öğrenciyle yapılmıştır. Katılımcılar gönüllülük esasına dayalı olarak seçilmiştir. Katılımcıların belirlenmesinde bazı ön koşullar belirlenmiştir. Katılımcıların öğretim programında yer alan Analitik Geometri, Analiz I, II, III ve IV derslerini almış ve bu derslerde başarı sağlamış olmaları gerekmektedir. Bu önkoşuldaki amaç, iki değişkenli fonksiyon kavramının anlaşılmasının analiz edilebilmesi için ön genetik ayrışımda ve genetik ayrışımda yer alan basamakların bu derslerin öğrenme çıktılarında yer almasıdır. Tablo 3.2.1.'de Matematik Eğitimi lisans programında Analitik Geometri, Analiz I, II, III ve IV derslerinin öğrenme çıktılarından bazıları verilmiştir.

Tablo 3.2.1. Matematik Eğitimi Programındaki İlgili Dersler ve Öğrenme Çıktıları

Dersler	***Öğrenme Çıktıları***
Analitik Geometri	- İki ve üç boyutlu uzayları anlayabilir. - Uzayda doğru ve düzlem ile ilgili bilgi sahibi olur.
Analiz I, II	- Küme kavramını açıklar, kümelerle ilgili işlemler yapar. - Sayı sistemlerini tanır, özelliklerini ifade eder. - Bağıntı ve fonksiyon kavramları arasındaki ilişkileri açıklar, grafiklerini çizer.
Analiz III, IV	- Çok değişkenli fonksiyonlarla çalışabilir. - İlgili kavramları n- boyutlu Analiz problemlerine uygular.

Ayrıca maksimum çeşitliliğin sağlanabilmesi için bu dersleri veren öğretim elemanlarının görüşleri alınarak bir problem hakkındaki düşüncelerini rahatça ifade edebilen, bu düşünceleri temellendirebilen öğrenciler belirlenmiştir. Katılımcıların akademik ortalamaları Tablo 3.2.2.'de verilmiştir.

Tablo 3.2.2. Katılımcıların akademik ortalamaları

Katılımcılar (Rumuz)	Akademik Ortalamalar
Ayşe	3.00 üstü
Beril	2.50-3.00 arası
Adem	2.50-3.00 arası
Hüseyin	2.50-3.00 arası
Zehra	2.50 altı
Yasin	2.50-3.00 arası

3.3. Veri Toplama Araçları

Araştırmanın verilerini, İki Değişkenli Fonksiyonlar-Kavramsal Anlama Testi (Bkz. Ek 2) ve bu ölçme aracına öğrencilerin verdiği yazılı yanıtlar ile bu sorulara ilişkin yapılan klinik görüşmelerin ses kayıtları oluşturmaktadır.

Veri toplama araçlarının çeşitliliği geçerlik ve güvenirliği arttırmaktadır (Fraenkel, Wallen & Hyun, 2012). Ayrıca klinik görüşme, doküman analizi gibi verilerin birbirlerini teyit amaçlı kullanılması, çalışmanın inandırıcılığını olumlu yönde etkilemektedir (Yıldırım & Şimşek, 2013).

Yapılan uygulama ve görüşmede süre sınırı konulmamıştır. Öğrencilerin İki Değişkenli Fonksiyonlar-Kavramsal Anlama Testi'ni uygulama ve bu uygulamaya ilişkin yapılan görüşme süreleri Tablo 3.3.1.' de verilmiştir.

Tablo 3.3.1. Katılımcıların uygulama ve görüşme süreleri

	Ayşe	*Beril*	*Adem*	*Hüseyin*	*Zehra*	*Yasin*
Uygulama Süresi	129 dk	80 dk	118 dk	90 dk	108 dk	120 dk
Görüşme Süresi	66 dk	34 dk	24 dk	29 dk	12 dk	7 dk

3.3.1. İki Değişkenli Fonksiyonlar-Kavramsal Anlama Testi

Araştırmada öğrencilerin iki değişkenli fonksiyonları kavramsal anlamalarını analiz etmek amacıyla, Trigueros ve Martinez-Planell'in (2010) iki değişkenli fonksiyonların geometrik temsili ile ilgili sorduğu sorular ve Martinez-Planell ve Trigueros Gaisman'ın (2012) iki değişkenli fonksiyon kavramının anlaşılması için sorduğu sorulardan ve uzman görüşlerinden yararlanılarak bir ölçme aracı oluşturulmuştur (Ek. 2). Sorular, Trigueros ve Martinez-Planell (2007) tarafından geliştirilen ve yine Trigueros ve Martinez-Planell (2010) tarafından revize edilen iki değişkenli fonksiyonların kavramsal anlamalarının genetik ayrışımına bağlı olarak elde edilmiştir. Tablo 3.3.1.1.' de İki Değişkenli Fonksiyonlar-Kavramsal Anlama Testi'nin, iki değişkenli fonksiyonların kavramsal anlamalarının genetik ayrışımdaki karşılıkları verilmiştir.

Tablo 3.3.1.1. Uygulama sorularının genetik ayrışımdaki karşılıkları

Sorular	Genetik Ayrışımdaki Karşılıklar
1	R^2 kümesinin elemanlarına, bir gerçel sayı getirme eylemi
	Uzayda bir noktayı (üçlüleri) temsil etme eylemi
	Grafik ile verilen bir noktayı üçlüye dönüştürme eylemi
2	R^2 uzayında bir noktayı başka bir noktaya dönüştürme eylemi
	Uzayda iki nokta arasındaki dönüşüm işlemlerini belirleme eylemi
	R^3 uzayında, bir noktaya uygulanan işlemleri genelleyerek geometrik bir nesne oluşturma süreci
3	R^2' nin analitik ifadesi verilen alt kümesinin grafiğini çizme eylemi
	R^2' nin alt kümesinin elemanlarına bir reel sayı karşılık getirme eylemi
	R^2' nin alt kümesinin elemanlarına herhangi bir reel sayı karşılık getirerek üç boyutlu uzayda bir geometrik nesne oluşturma süreci
4	R^3' deki bir nesneyi R^2' de z-ekseni üzerine tersleme
	R^3'deki bir nesneyi R^2' de x-ekseni üzerine tersleme
	R^3'deki bir nesneyi R^2' de y-ekseni üzerine tersleme
5	R^3'ün altkümelerini koordine ederek üç boyutlu uzayın bir nesneye sarmalanması
6	Tablo üzerinde fonksiyonun (x, y) ikililerinden oluşan tanım kümesi elemanlarını belirleme eylemi
	Düzlemde verilen bir noktaya uzayda bir nokta karşılık getirme eylemi
	İki değişkenli fonksiyonların tablo ile verilen görüntü kümesi elemanlarını belirleme eylemi
7	Cebirsel ifadesi verilen iki değişkenli fonksiyonun tanım kümesinin kartezyen düzlem üzerindeki geometrik temsilini çizme eylemi
	Cebirsel ifadesi verilen bir iki değişkenli fonksiyonun tanım kümesine bir değer karşılık getirme eylemini bir sürece içselleştirmesi ve bu eylemi küme şemalarıyla koordine etmesi
8	Geometrik temsili verilen iki değişkenli fonksiyonun tanım kümesini belirleme eylemi
	Grafiği verilen iki değişkenli bir fonksiyonun, tanım kümesine karşılık getirilen yüksekliği belirleme eylemi
	Grafiği verilen iki değişkenli fonksiyonun tanım kümesinin elemanlarına karşılık gelen yüksekliği belirleme eylemini genelleyerek bir sürece içselleştirme
9	Fonksiyon kavramının tanımına ilişkin şemaların koordine edilmesi
10	Tek değişkenli fonksiyon kavramının tanımı genellenerek, iki değişkenli fonksiyonları tanımlama sürecine içselleştirilmesi
11	Tek değişkenli fonksiyon şemalarının R^2 ve R^3 şemalarıyla koordine edilerek iki değişkenli fonksiyon nesnesine sarmalama

3.3.2. Klinik Görüşme

Katılımcılara ölçme aracının uygulanmasının ardından, yazılı dokümanlar detaylı olarak incelenmiş ve katılımcılarla bazı sorular hakkında görüşmeler yapılmıştır. Katılımcıların izni doğrultusunda görüşmeler ses kaydına alınmıştır.

Klinik görüşme, önceden planlanmış ve bir amaç taşıyan, soru ve yanıta dayalı karşılıklı ve etkileşimli iletişim sürecidir (Stewart & Cash, 1985). Klinik görüşmelerde amaç, öğrencinin var olan bilgisini ortaya çıkarmaktır (Steffe & Thompson, 2000). Patton'a (1987) göre ise klinik görüşmelerde, bireyin iç dünyasına girmek ve onun bakış açısını anlamak amaçlanır. Görüşmeler bize, insanların tutumları, değerleri ve ne yaptıklarını düşündükleri hakkında bilgi sağlayabilir (Fraenkel, Wallen & Hyun, 2012).

Bu çalışmada, yazılı dokümanların incelenmesi sonucunda, öğrencilerin iki değişkenli fonksiyon kavramını anlamalarını derinlemesine analiz etmek amacıyla klinik görüşmeye ihtiyaç duyulmuştur. Öğrencinin matematiksel kavrama yönelik anlamasının ve bakış açısının analiz edilebilmesi ve zihninde oluşturduğu matematiksel yapıların ortaya çıkarılabilmesi için yazılı sorulardan elde edilen dokümanlara bağlı olarak öğrencilerin yapamadığı sorular seçilmiş ve öğrencilerle görüşme yapılmıştır. Bu amaç doğrultusunda altı öğrenciyle görüşülmüş, görüşmeler süresince İki Değişkenli Fonksiyonlar-Kavramsal Anlama Testi'nin içerisinden seçilen sorulara öğrencilerin verdikleri yanıtlar hakkında karşılıklı tartışma gerçekleştirilmiştir.

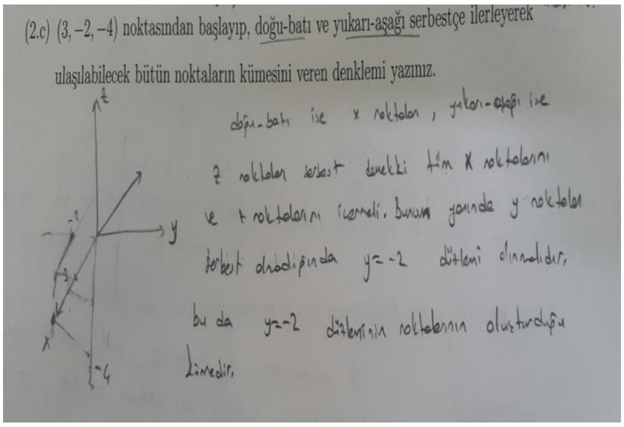
3.4. Verilerin İşlenmesi ve Çözümlenmesi

Uygulama sorularından elde edilen yazılı dokümanlar incelenmiş ve öğrencilerin yanlış veya eksik yaptıkları sorular hakkında klinik görüşme yapabilmek için verdikleri yanıtlar 0, 1, 2 olarak kodlanmıştır. Kodlamalar aşağıdaki tabloya göre yapılmıştır.

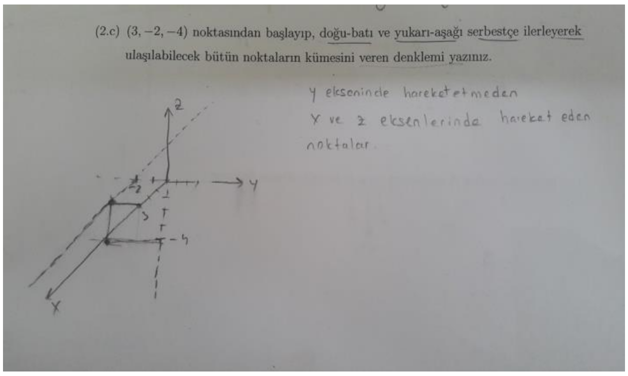
Tablo 3.4.1: Kodlamalar ve nedenleri

0 (Yanlış)	1 (Kısmen Doğru)	2 (Doğru)
Soruyu yanlış yapmak veya hiç yapamamak.	Sorunun gerektirdiği basamaklardan bazılarını yapabilmek, tam sonuca ulaşamamak.	Soruyu eksiksiz olarak doğru yapmak.

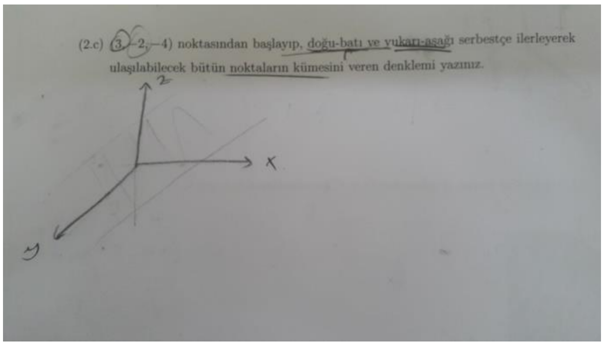
Öğrencilerin uygulamadaki her bir soruya karşılık; verdikleri yanıtlar bu kodlamalar kullanılarak doğru-yanlış çizelgeleri halinde bulgular bölümünde verilmiştir. Şekil 3.4.1., Şekil 3.4.2. ve Şekil 3.4.3.' te öğrencilerin uygulama sorularından 2.c.'ye verdikleri doğru, kısmen doğru ve yanlış yanıtlar verilmiştir.



Şekil 3.4.1: 2.c. numaralı sorunun doğru yanıtı



Şekil 3.4.2: 2.c. numaralı sorunun kısmen doğru yanıtı

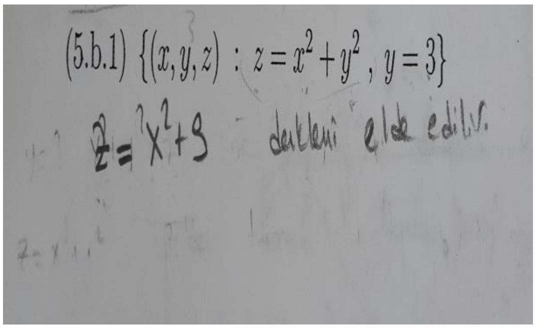


Şekil 3.4.3: 2.c. numaralı sorunun yanlış yanıtı

Şekil 3.4.1'de öğrenci 2.c. numaralı sorudan beklenen süreçleri gerçekleştirmiş ve denklemi "$y = -2$" olarak belirlemiştir. Soruyu doğru yanıtladığı gerekçesiyle doğru-yanlış çizelgesine bu öğrencinin verdiği yanıt "2" olarak kodlanmıştır. Şekil

3.4.2’ye bakıldığında; öğrencinin soruya ilişkin beklenen süreçleri düşünebildiği fakat verilen ifadeyi denkleme dönüştüremediği görülmüştür. Bu öğrencinin cevabı doğru-yanlış çizelgesine “1” olarak kodlanmıştır. Şekil 3.4.3’te ise öğrenci soruya ilişkin hiçbir şey düşünememiş ve çizdiği grafiğin de istenen denklemle ilgisiz olduğu gözlenmektedir. Bu öğrencinin verdiği yanıt çizelgede “0” olarak kodlanmıştır.

Klinik görüşmelerden elde edilen ses kayıtları bilgisayar ortamına aktarılmış ve transkript edilmiştir. Ayrıca görüşmeler kağıt üzerinde tartışılmış ve elde edilen bu dokümanlar araştırmacı tarafından saklanmıştır. Öğrencilerle yanlış veya kısmen doğru olan sorular üzerinde tartışılmıştır. Ek olarak araştırmacı netleştirmek istediği ifadeler için görüşme esnasında spontane olarak sorular sormuş, bu sorulara verilen cevaplar da analiz edilmiştir. Örneğin; 5.b.1 numaralı soru için öğrencinin verdiği yanıt aşağıdaki şekilde verilmiştir.



Şekil 3.4.4: Öğrencinin 5.b.1. numaralı soruya verdiği yanıt

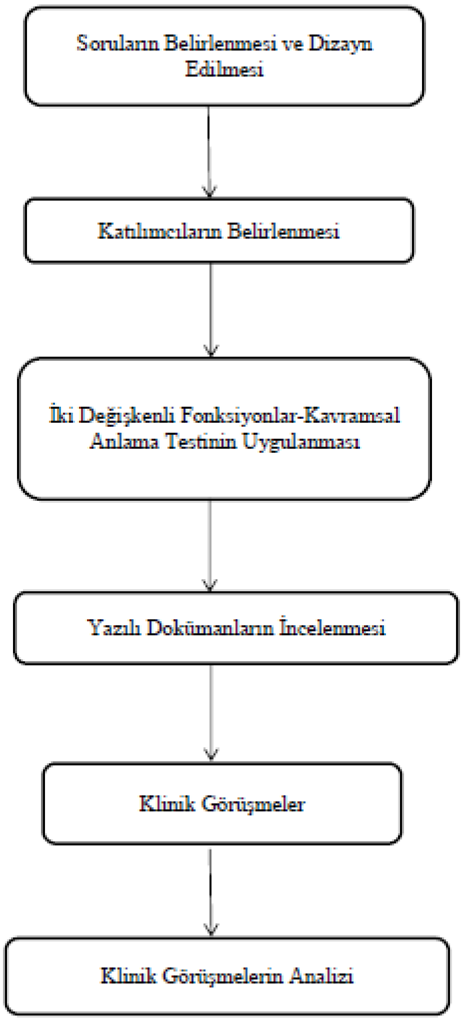
Bu soruda öğrenciden beklenen üç boyutlu uzayda verilen bir kümenin grafiğini çizmesidir. Ancak öğrenci, $y = 3$ noktasını yerine koymasına rağmen grafiği çizmemiştir. Araştırmacı burada öğrencinin $z = x^2 + 9$ parabol denklemini bilip bilmediğini test etmek için; R^2’ de $y = x^2 + 9$ denklemini çizmesini istemiştir. Böylelikle sorunun ön genetik ayrışımda yer alan iki boyutlu düzlem şemalarında olup olmadığı test edilmiştir.

Klinik görüşmelerden elde edilen verileri analiz etmek için, içerik analizi yöntemi kullanılmıştır. İçerik analizi, verilerin kavramsallaştırılması, ortaya çıkan kavramlara göre düzenlenmesi ve buna göre veriyi açıklayan temaların saptanmasını içerir (Yıldırım ve Şimşek, 2013). Bu tez çalışmasında, iki değişkenli fonksiyonlar kavramı için APOS teorisi çerçevesinde Trigueros ve Martinez-Planell

(2007, 2010) tarafından geliştirilen genetik ayrışım göz önüne alınmıştır. Öğrencilerin verdikleri yanıtlar bu teorik çerçeve kapsamında yer alan zihinsel yapılar (eylem, süreç, nesne ve şema) ile zihinsel mekanizmalar (içselleştirme, sarmalama, koordine etme, tersine çevirme, geri çağırma, temalaştırma ve genelleme) temaları altında incelenmiştir.

3.5. Araştırmanın Akış Şeması

Tezin oluşturma süreci ve sunuş sırası aşağıdaki şemada verilmiştir.



Şekil 3.5.1. Tezin Akış Şeması

3.6. Araştırmanın İç ve Dış Geçerliği

Nitel araştırmalarda geçerlik, araştırmada bir olgunun olduğu gibi ve olabildiğince tarafsız şekilde gözlenmesi ile sağlanmaya çalışılır (Kirk & Miller, 1986). Geçerliği sağlayabilmek için kullanılacak stratejileri, iç ve dış geçerlik olarak ikiye ayırmak mümkündür (Yıldırım & Şimşek, 2013).

3.6.1. Araştırmanın İç Geçerliği

İç geçerlik, araştırmada takip edilen sürecin doğruluğu ortaya çıkarmadaki yeterliliğidir (LeCompte ve Goetz, 1982). Nitel araştırmaların doğasına uygunluk açısından Lincoln ve Guba (1985), bu kavramı “inandırıcılık” olarak tanımlamıştır. Bu tez çalışmasında inandırıcılığın sağlanabilmesi için aşağıdaki adımlar gerçekleştirilmiştir.

- Çalışmada veri toplama aracı olarak, görüşme ve uygulama sorularına bağlı olarak yazılı dokümanlar kullanılmıştır. Yazılı dokümanların analizinin katılımcılarla yapılacak görüşmelerle zenginleştirilmesi, araştırmanın inandırıcılığını arttırır (Yıldırım & Şimşek, 2013).
- Katılımcılar maksimum çeşitlilik örneklemesi ile belirlenmiştir. Veri kaynaklarının çeşitliliği ve farklı özelliklere sahip katılımcıların çalışmada yer alması çoklu gerçekliklere ulaşılması açısından önemlidir (Erlandson, Harris, Skipper & Allen, 1993).
- Çalışmanın uygulama soruları, literatür incelemesi sonucunda elde edilmiştir. Ayrıca sorular belirlenirken uzman görüşü alınarak, APOS teorisi içerisinde yer alan konuyla ilgili genetik ayrışım göz önüne alınmıştır. Miles ve Huberman (1994)’a göre, kuramsal çerçeve veri toplamada rehber olmalıdır.

Araştırmacı bu çalışma alanındaki bir uzmanla toplantılar yapmıştır. Uzman kişi çalışma süreçlerini takip etmiş, verilerin analizini gözden geçirmiş ve bu süreçlerin uygunluğu hakkında geri bildirimlerde bulunmuştur. Araştırma konusunda uzmanlaşmış kişilerin araştırmayı çeşitli boyutlarıyla değerlendirmesi inandırıcılık hakkında alınabilecek önlemlerden birisidir (Lincoln & Guba, 1985).

3.6.2. Araştırmanın Dış Geçerliği

Dış geçerlik ise, araştırma sonuçlarının benzer durumlara ve gruplara aktarılabilirliği anlamına gelmektedir (LeCompte & Goetz, 1982). Dış geçerlik yerine Lincoln ve Guba (1985), aktarılabilirlik kavramını kullanmayı tercih etmektedir. Buradaki amaç, nitel araştırmaların benzer durumlara doğrudan genellenemeyeceğini, ancak araştırma sonucu elde edilen deneyimlerin aktarılabileceğini işaret etmektir (Yıldırım & Şimşek, 2013).

Bu çalışmada aktarılabilirliği sağlamak için amaçlı örnekleme yöntemi kullanılmıştır. Araştırma bir devlet üniversitesinin Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Matematik Eğitimi Programında öğrenim gören altı öğrenci ile sınırlıdır. İki değişkenli fonksiyon kavramının anlamasını analiz edebilmek için, katılımcıların bu kavramın genetik ayrışımında yer alan basamakları ile aldıkları bazı derslerin öğrenme çıktılarının örtüşmesi amaçlanmıştır. Araştırmacı çalışmayı bütün evrene genellemeye çalışmamıştır. Ortaya çıkan sonuçların yapılacak diğer çalışmalara aktarılması amaçlanmıştır. Amaçlı örneklemenin aktarılabilirliğe katkısı, hem genele hem özele ait bilgilere ulaşma imkanı sunmasından kaynaklanmaktadır (Yıldırım & Şimşek, 2013).

Bir çalışmanın güvenirliği, çalışmayı yapan araştırmacıyla benzer süreçleri izleyen başka araştırmacıların da benzer sonuçlar elde etmesi durumudur (Yin, 2003). Bu tez çalışmasında araştırmacı dışında bir uzman uygulama sorularından elde edilen yazılı dokümanları incelemiş, kuramsal çerçeve doğrultusunda oluşturulan genetik ayrışımın basamaklarına bağlı olarak analiz etmiştir. Daha sonra sonuçlar araştırmacının analizleri ile karşılaştırılmış ve teyit edilmiştir.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde verilerden elde edilen analizler ortaya konularak, tartışılmıştır. Bulgular her bir uygulama sorusuna öğrencilerin verdiği yanıtları ve yapılan görüşmelerden ortaya çıkanları içermektedir. Her bir öğrencinin verdiği cevaplar bir araya getirilerek, APOS teorisinde yer alan genetik ayrışımda karşılık gelen basamakları oluşturulmuştur.

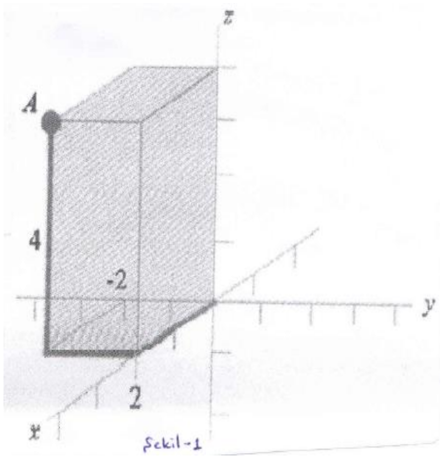
Bulgular bölümü, uygulamada sorulan sorular başlıkları altında incelenmiştir. Bu başlıklar altında; öğrencilerin verdiği yanıtlar, sorunun genel değerlendirmesi alt başlıkları yer almaktadır. Ayrıca öğrencilerin kimliklerinin gizli tutulması amacıyla takma isimler kullanılmıştır. Görüşmelerde araştırmacı "A" harfiyle, öğrenciler "Ö" harfiyle kısaltılmıştır.

4.1. Uygulamanın Birinci Sorusu

(a) Düzlemde $(1, 2)$ noktasına $z = 3$ yüksekliği karşılık getirildiğinde oluşan yeni noktayı, üç boyutlu uzayda gösteriniz.

(b) $(0,-2,2)$ ve $(-3,2,-2)$ noktalarını üç boyutlu uzayda gösteriniz.

(c) Şekil-1'de verilen A noktasının (x,y,z) koordinatlarını bulunuz.



Şekil 4.1.1. Uygulamanın 1.c. sorusu

Uygulamanın bu sorusunda hedeflenen, iki değişkenli fonksiyonları anlama ile ilgili genetik ayrışımda yer alan; R^2 kümesinin elemanlarına bir gerçel sayı karşılık getirme eylemi (a), uzayda bir noktayı temsil etme eylemi (b) ve grafik ile verilen bir noktayı üçlüye dönüştürebilme eylemi (c) basamaklarını analiz etmektir.

Aşağıdaki tabloda, birinci sorunun iki değişkenli fonksiyonların kavramsal anlamasına yönelik yapılan genetik ayrışımda karşılık gelen basamakları verilmiştir.

Tablo 4.1.1. Birinci sorunun genetik ayrışımda karşılık gelen basamakları

Sorular	Soruların genetik ayrışımdaki karşılıkları
1.a.	R^2 kümesinin elemanlarına, bir yükseklik atama eylemi
1.b.	Uzayda bir noktayı (üçlüleri) temsil etme eylemi
1.c.	Grafik ile verilen bir noktayı üçlüye dönüştürme eylemi

İki değişkenli fonksiyonların anlaşılabilmesi için öncelikle, üç boyutlu uzay yani R^3 uzayı yapılandırılmalıdır. Bu nedenle, kartezyen düzlem, gerçel sayılar ve uzay sezgisi şemaları koordine edilmelidir.

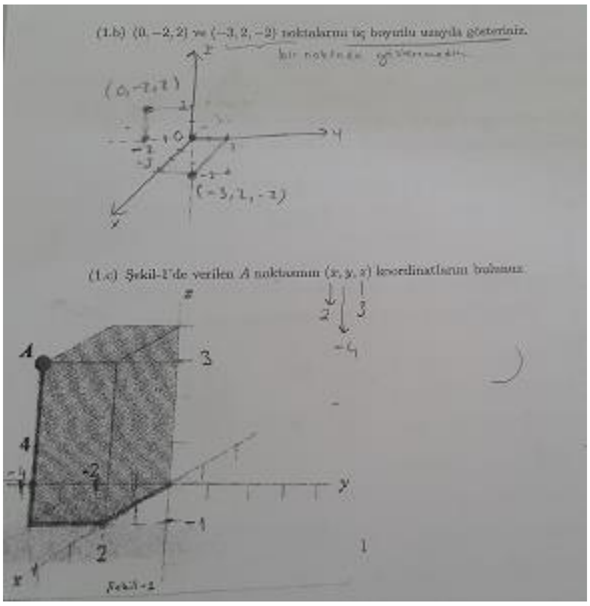
4.1.1. Öğrencilerin Birinci Soruya Verdikleri Cevaplar

Bu alt başlıkta öğrencilerin birinci soruya verdikleri cevaplar, görüşmeler sonucu ortaya çıkanlar değerlendirilmiştir. Aşağıdaki tabloda öğrencilerin birinci soruya verdikleri yanıtlara ilişkin doğru-yanlış çizelgesi verilmiştir.

Tablo 4.1.1.1. Öğrencilerin birinci soruya verdikleri yanıtlara ilişkin doğru-yanlış çizelgesi

	1.a.	1.b.	1.c.
Yasin	2	2	2
Zehra	2	2	2
Hüseyin	2	2	2
Ayşe	2	1	0
Adem	2	2	2
Beril	2	2	2

Katılımcılardan Ayşe, birinci sorunun (a) şıkkını doğru şekilde yaparken (b) ve (c) şıkkında sorun yaşamıştır. Ayşe'nin çözümü aşağıda verilmiştir.



Şekil 4.1.1.1. Birinci sorunun (b) ve (c) şıkları için Ayşe'nin çözümü

Şekil 4.1.1.1' de görüldüğü üzere birinci sorunun (b) şıkkında (-3,2,-2) noktası için Ayşe'nin grafik gösterimi hatalıdır. Bu soru hakkında Ayşe ile yapılan görüşme aşağıdadır.

A: Birinci sorunun b şıkkına bakalım. Ne düşündün? O noktaları üç boyutlu uzayda gösterirken nasıl çiziyorsun?

Ö: Şu noktadan başlayalım. (0,-2,2)' den. Şimdi x-ekseninde 0' a karşılık geliyormuş.

A: Şuraya çizer misin onu (Şekil 4.1.1.2)?

Ö: Çizeyim. Bence orada ben yanlış yapmışım zaten (Şekil 4.1.1.1.' deki çözümünden bahsediyor).

A: Neden öyle düşündün?

Ö: Iıı… Çok havada duruyor, x-ekseninde bir noktayı işaret etmiş ama x'i 0 bunun zaten. x'in 0 olması demek eee… Şu xy-düzleminde ve xz-düzleminde değil noktanın şurada olması demek (Şekil 4.1.1.2. 'de yz yazdığı yeri kastediyor). yz düzleminde olması gerekiyor bu noktanın. Ben burada xz-düzlemine tam şuraya çizmişim (Şekil 4.1.1.2.' deki 2 numaralı noktayı gösteriyor).

A: xz-düzlemi dediğin şey, nasıl bir şey?

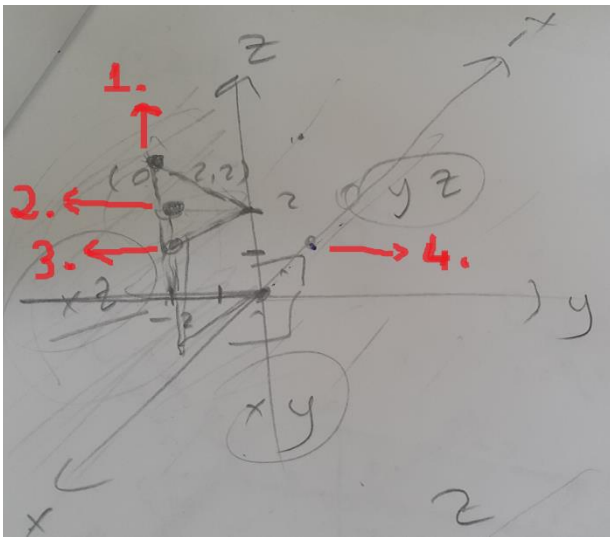
Ö: Yani y'leri 0 kabul eden noktalar için bir küme oluşturduğunu varsayıyorum. x ve z'nin ikisinin değer alıp y'nin 0 olduğu noktalar.

A: Tamam. Peki şu nokta hangi düzlemde (Araştırmacı Şekil 4.1.1.2.'deki 4. noktayı kastediyor)?

Ö: O nokta yz-düzleminde gibi görünüyor. Bu nokta sıkıntının başladığı nokta. Çünkü buradan -x'ler geçiyor ve burada x'in bir değeri var. O genellemem biraz hatalı olabilir. O yüzden evet. Ama yine de şu çizim şurada yanlış geliyor bana, bir yeniden çizeyim (Şekil 4.1.1.1.' deki (b) şıkkının ilk noktasının çiziminden bahsediyor). y'nin -2, z'nin de 2 olduğu yer şurası (Şekil 4.1.1.2.' deki 1. numaralı noktayı çiziyor). Yine bu tarafa gelmemesi ilginç oldu (Şekil 4.1.1.2.' deki yz diye *belirttiği tarafı kastediyor), demek ki doğru düşünmüşüm. O zaman da aynı düşünüyormuşum.*

A: Perspektif olarak düşünürsek, nasıl bir açıyla bakıyor bu?

Ö: Çok arkada kalıyor bu. Böyle biraz arkada kalan bir durum, görüntü var. Önde değil, arkada durmuş. Böyle bir şey olması gerek, evet (Şekil 4.1.1.2.' deki 3. numaralı noktayı çiziyor).



Şekil 4.1.1.2. Birinci sorunun (b) şıkkı için Ayşe'nin çizimi

Ayşe, üç boyutlu uzayda verilen bir noktayı grafikte gösterme eylemini gerçekleştirememiştir. Yapılan görüşmeler sonucunda, Ayşe'nin uzay sezgisi şemalarının eksik olmasının bu duruma sebep olduğu tespit edilmiştir. Düzlemleri ifade ederken teorik olarak doğru yanıtlar veren Ayşe'nin, görsel olarak doğru yerleri işaret edemediği gözlemlenmektedir. Ayrıca yz- düzlemini ifade ederken, y ve z noktalarının negatif olduğu yerleri ihmal ediyor olması; kartezyen düzlem şemalarını, uzay sezgisi şemalarıyla koordine edememesinden kaynaklı olduğunu göstermektedir.

Ayşe, kartezyen düzlem şemaları ile uzay sezgisi şemalarını koordine edemediği için, birinci sorunun (c) şıkkında verilen A noktasının koordinatlarını $(2,-4,3)$ şeklinde belirleyerek yanlış yapmıştır. Birinci sorunun (c) şıkkı için Ayşe ile yapılan görüşme aşağıdadır.

A: Birinci sorunun (c) şıkkı hakkında ne düşünüyorsun?

Ö: A noktası için koordinat sormuşlar. A noktasının x'ini bulmak için aşağıya inip x'in üzerine, yani ben burada 2'yi işaret ettiğini düşündüm. Hala da öyle *düşünüyorum. Şu an tekrar düşündüm. Yine 2 derdim. Zaten en sıradan cevap, z'nin 3 olduğu. Yani bununla ilgili çok ısrarcı olabilirim. Evet, z noktası karşılığının 3 olduğunu düşünüyorum. z'nin yükseklik ifade ettiğini, buradaki yüksekliğin 3 olduğunu düşünüyorum.*

A: Peki.

Ö: Sonra y ile fikrim... Burada -4 dememin sebebi şurayı işaretlendiğini düşünmem (Şekil 4.1.1.1' deki (c) şıkkındaki Şekil-1 hakkında konuşuyor). y-ekseninde buraya -4 demişim ama, buradaki eşit oranlı bölmeye bakarak şurası -1, şuraya -2 siz demişsiniz zaten (Şekil 4.1.1.1.' de yer alan Şekil-1'deki y-ekseninde verilen nokta hakkında konuşuyor). Aslında ben de şuraya -4 yazıp, bu nokta için -4 demişim de (Şekil4.1.1.1.' deki Şekil-1 hakkında, kendisinin y-ekseninde yazdığı -4 noktasından bahsediyor). Yani -3 virgül bilmem ne demek istemediğim için muhtemelen ben onu…

Ayşe'nin perspektif olarak noktayı, kartezyen düzlemde doğru algılayamadığı görülmüştür. Buna bağlı olarak noktanın (x,y,z) koordinatlarını belirlerken, uzay sezgisi şemalarını kartezyen koordinatlar şemalarıyla koordine edememektedir.

4.1.2. Birinci Sorunun Genel Değerlendirmesi

Çalışmaya katılan altı öğrenciden beş tanesi, $R^{2'}$ de bir noktaya bir yükseklik atama eylemini, uzayda bir noktayı kartezyen koordinatlarda gösterebilmeyi ve bu eylemin tam tersi olan grafiksel olarak verilmiş bir noktayı üçlüye dönüştürebilme eylemini yapabilmektedirler. Bu soruda yalnızca Ayşe problem yaşamıştır. Yaşanan problemin uzay sezgisi şemalarının eksik olması ve kartezyen düzlem şemaları ile koordine edilememesi olduğu gözlenmiştir.

Aşağıdaki tablo ile öğrencilerin birinci soruya verdikleri cevaplara göre genetik ayrışımda karşılık gelen basamakları verilmiştir.

Tablo 4.1.2.1. Öğrencilerin Cevaplarının Genetik Ayrışımdaki Karşılıkları

	R^2 kümesinin elemanlarına bir gerçel sayı karşılık getirme eylemi	Uzaydaki bir noktayı temsil etme ve onlar arasındaki dönüşümü yapma eylemi
Yasin	✓	✓
Zehra	✓	✓
Hüseyin	✓	✓
Ayşe	✓	Uzay sezgisi şemaları eksik ve kartezyen düzlem şemaları ile koordine edemiyor.
Adem	✓	✓
Beril	✓	✓

4.2. Uygulamanın İkinci Sorusu

xyz-koordinat sisteminde, **doğu** x ekseninde pozitif tarafı, **batı** x ekseninde negatif tarafı, **kuzey** y ekseninde pozitif tarafı, **güney** y ekseninde negatif tarafı, **yukarı** z ekseninde pozitif tarafı, **aşağı** z ekseninde negatif tarafı belirtsin.

(a) $(2, -1, 3)$ noktasından başlayarak, 4 birim batıya, 3 birim kuzeye ve 2 birim aşağıya gidilirse hangi noktaya ulaşılır?

(b) $(-3, 4, -1)$ noktasından başlayıp, $(2, -2, 2)$ noktasına nasıl ulaşılır?

(c) $(3, -2, -4)$ noktasından başlayıp, doğu-batı ve yukarı-aşağı serbestçe ilerleyerek ulaşılabilecek bütün noktaların kümesini veren denklemi yazınız.

Uygulamanın bu sorusuyla; öğrencilerin R^3 uzayında verilen bir noktaya işlemler uygulayarak noktayı başka bir noktaya dönüştürmesi, verilen iki nokta arasındaki işlemleri belirleyebilmesi ve bu işlemleri genelleyerek uzayda üç boyutlu bir nesne elde edebilmesi beklenmektedir. Aşağıdaki tabloda bu sorunun genetik ayrışımda karşılık gelen basamakları verilmiştir.

Tablo 4.2.1. İkinci sorunun genetik ayrışımda karşılık gelen basamakları

Sorular	Soruların genetik ayrışımdaki karşılıkları
2.a.	R^3 uzayında bir noktayı başka bir noktaya dönüştürme eylemi
2.b.	Uzayda iki nokta arasındaki dönüşüm işlemlerini belirleme eylemi
2.c.	R^3 uzayında bir noktaya uygulanan işlemleri genelleyerek geometrik bir nesne oluşturma süreci

Öğrenciler uzaydaki noktalara işlemler uygulayabilir, onlar arasındaki dönüşüm işlemlerini belirleyebilir ve bu eylemleri geometrik bir nesneye genelleyebilirlerse, uzayda bir işlemin sonucunu görselleştirerek bir dönüşüm gerçekleştirmiş olurlar.

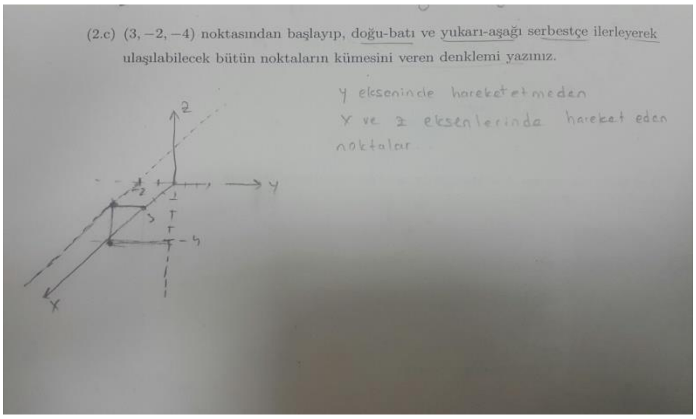
4.2.1. Öğrencilerin İkinci Soruya Verdikleri Cevaplar

Bu alt başlıkta öğrencilerin ikinci soruya verdikleri cevaplar, görüşmeler sonucu ortaya çıkanlar değerlendirilmiştir. Aşağıdaki tabloda öğrencilerin ikinci soruya verdikleri yanıtlara ilişkin doğru-yanlış çizelgesi verilmiştir.

Tablo 4.2.1.1. Öğrencilerin ikinci soruya verdikleri yanıtlara ilişkin doğru-yanlış çizelgesi

	2.a.	2.b.	2.c.
Yasin	2	2	2
Zehra	2	2	1
Hüseyin	2	2	0
Ayşe	2	2	0
Adem	2	2	2
Beril	2	2	2

Katılımcılardan Ayşe, ikinci sorunun (a) ve (b) şıkkını doğru yaparken (c) şıkkında işlemleri genelleyerek bir nesne oluşturma sürecini gerçekleştirememiştir. Ayşe'nin 2.c.' ye verdiği yanıt aşağıdaki Şekil 4.2.1.1.' de verilmiştir.



Şekil 4.2.1.1. Ayşe'nin 2.c sorusuna verdiği cevap

Şekil 4.2.1.1.'de görüldüğü üzere öğrenci verilen $(3, -2, -4)$ noktasına gerekli işlemleri uygulayamamıştır. Bu soruyla ilgili Ayşe'yle yapılan görüşme aşağıda verilmiştir.

A: Evet ne düşünüyorsun bu soru hakkında?

Ö: Bir noktadan başlayıp doğu-batı, yukarı-aşağı serbest ilerleyen noktaların kümesi demiş. doğu-batı dediği sağa sola gidecek.

A: Denklemi yazınız demiş değil mi?

Ö: Ama ben denklemi yazmadım. Ama ben denklemi yazamam. Yazamam heralde.

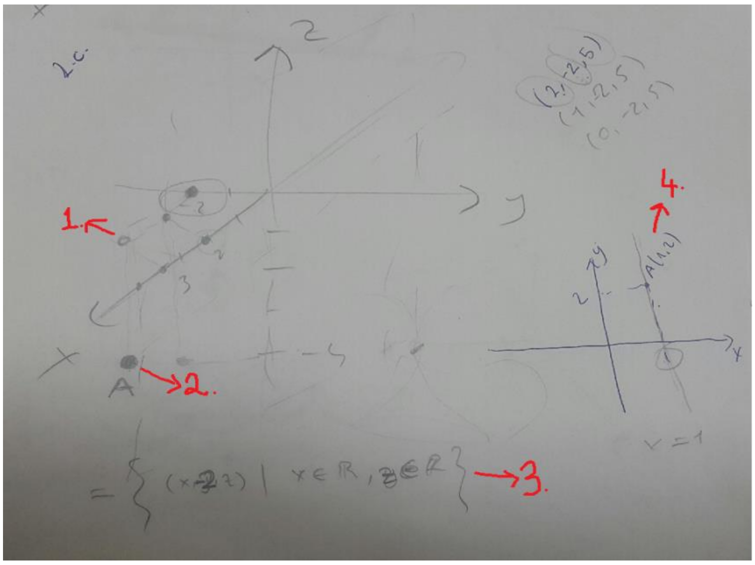
A: Neden? Ne anlıyorsun sorudan?

Ö: Bir daha bakayım. Noktayı önce bulmaya çalışmışım.

A: Hangi nokta senin noktan?

Ö: İlginç bir çizim yapmışım da. Beğenmedim. Ben yanlış mı çizdim? Bir daha çizeyim.

Ayşe boş bir kağıda soruyu yeniden çizmiştir. Aşağıdaki Şekil 4.2.1.2.' de Ayşe'nin çizimi verilmiştir.



Şekil 4.2.1.2. Ayşe'nin görüşmedeki 2.c. sorusuna ilişkin çizimi

Ö: x değişkeni -3 olacakmış. Sonra y'si -2 olacakmış. x ile y'yi şöyle birleştirip (1'deki noktayı işaret ediyor). Şurayı birleştirip -4 yüksekliği vermem lazım. A diyelim bu noktaya. (2'deki noktadan söz ediyor).

A: Bu ifade bir küme belirtiyor mu?

Ö: Evet belirtiyor.

A: Peki bu kümenin noktalarını belirleyebilir misin bana? Mesela birkaç noktasını belirle.

Ö: Aslında belirleyip, şekli bir şeye benzetip onun denklemini ezbere biliyorsam yaparım öbür türlü bir şey yapamam.

A: Mesela $(2,-2{,}5)$. *Bu nokta bu bahsettiği kümeye ait midir?*

Ö: Bence ait. Aslında ilk düşündüğüm şey -2'nin sabit kalması fikriyle hareket ediyorum. y-ekseni ile ilgili bir değişiklik yapmıyorum. O halde hep -2 sabit kalacak ama onun dışındaki bütün X ve Y değerlerini alabilen bir kümeden bahsediyoruz.

A: Evet, peki kümeyi belirlemenin bir yolu yok mu?

Ö: Şöyle bulabiliriz. (3'deki kümeyi yazıyor).

A: Peki bu küme bir şey veriyor mu sana? Bildiğin bir şeye benziyor mu?

Ö: Benzetemedim. 3 boyutlu olduğu için öngöremedim.

A: Peki o zaman 2 boyuta dönelim. (Araştırmacı 4 numaralı düzlemi çiziyor). A noktasını yukarı ve aşağı hareket ettirirsek karşımıza çıkan denklemi ifade edebilir misin?

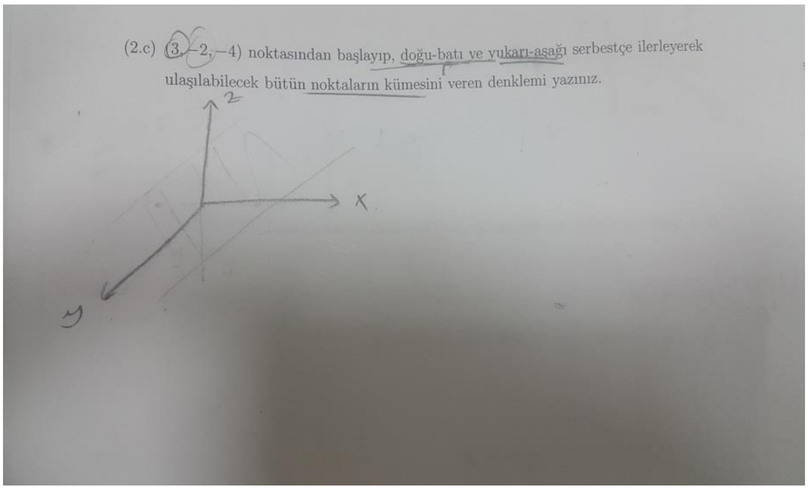
Ö: Burada bir doğru oluyor. $x = 1$ *doğrusu oluşuyor.*

A: Peki buradan hareketle soruya bir uyarlama yapabiliyor musun?

Ö: Yapamıyorum. Gerçekten yapamıyorum.

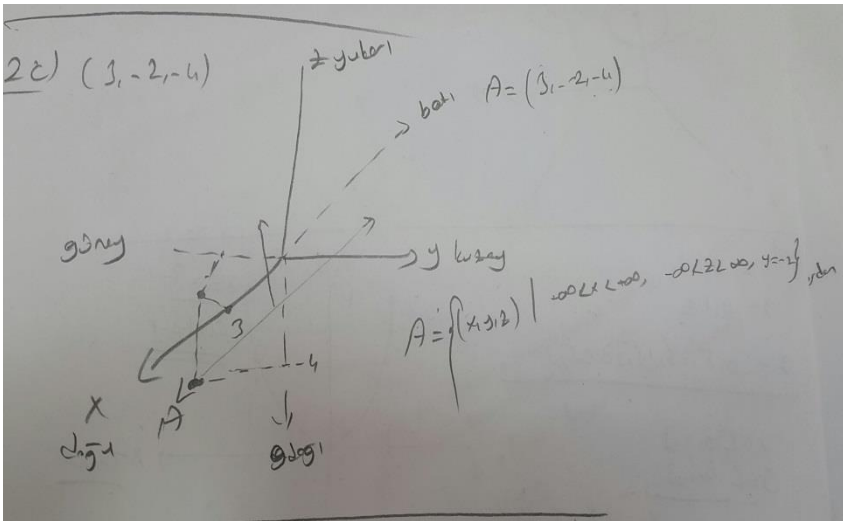
Ayşe ikinci soruda, uzayın noktaları arasında işlemler yapabiliyorken, bu durumu genelleyememiştir. Yapılan görüşme sonucunda, Ayşe verilen ifadenin kümesini yazabilmiş fakat bu durumun bir düzlem olduğunu belirleyememiştir. Araştırmacı iki boyutlu düzleme ilişkin benzer bir soru sormuş ve Ayşe, araştırmacının sorduğu sorunun bir doğru belirttiğini bulmuştur. Ancak üç boyutlu uzaya geçildiğinde bunun bir düzlem olduğunu düşünememiştir.

Bir diğer katılımcı Hüseyin, ikinci sorunun (c) şıkkını yanlış yapmıştır. Hüseyin'in cevabı aşağıdaki Şekil 4.2.1.3.' de verilmiştir.



Şekil 4.2.1.3. Hüseyin'in 2.c. sorusuna ilişkin çözümü

Şekil 4.2.1.3.' te görüldüğü gibi Hüseyin soruya yanıtlayamamıştır. Ayrıca Ayşe'de olduğu gibi Hüseyin de koordinatları soruda verilen yönlere göre değil, kendi zihinlerindeki uzay algısına göre çizmiştir. Daha sonra Hüseyin'le yapılan görüşme sonucunda soruya ilişkin yaptığı çözüm aşağıdaki Şekil 4.2.1.4.' te verilmiştir.



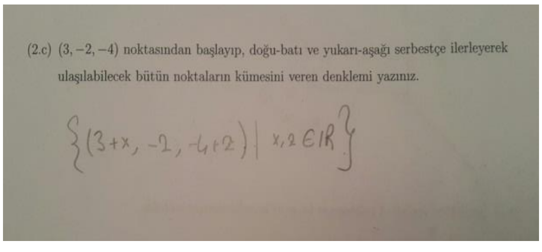
Şekil 4.2.1.4. Hüseyin'in görüşmede 2.c sorusuna ilişkin çizimi

İkinci sorunun (c) şıkkına ilişkin Hüseyin'le yapılan görüşmeler aşağıda verilmiştir.

> *A: Bu soru hakkında ne düşünüyorsun?*
>
> *Ö: Verilen noktayı çizeyim.(Şekil 4.2.1.4' ü çiziyor). x ve z'ler pozitif ve negatif tarafa gidebilecek, y sabit kalacak.*
>
> *A: Peki soruda senden ne istiyor?*
>
> *Ö: Denklemi yazmamızı istiyor. O zaman şu küme olacak (Şekil 4.2.1.4.' teki kümeyi yazıyor).*
>
> *A: Bu küme sana bir şey ifade ediyor mu?*
>
> *Ö: Şekil olarak mı?*
>
> *A: Evet.*
>
> *Ö: Çıkaramadım.*

Ayşe'de olduğu gibi Hüseyin de kümeyi yazmasına rağmen grafiksel temsilini düşünememiştir.

Bir diğer katılımcı Zehra ikinci sorunun (c) şıkkını kısmen doğru yapabilmiştir. Zehra'nın çözümü aşağıdaki Şekil 4.2.1.5.' te verilmiştir.



Şekil 4.2.1.5. Zehra'nın 2.c sorusuna verdiği cevap

Şekil 4.2.1.5’ te görüldüğü gibi Zehra verilen ifadeyi küme haline kısmen getirmeyi başarmıştır. Zehra ile yapılan görüşmeler aşağıda verilmiştir.

A: Bu sorunun ifadesi için yazdığın küme grafik olarak senin için ne ifade ediyor?

Ö: Bir şey ifade etmedi. Ancak küme olarak ifade edebildim.

Görüldüğü üzere Zehra da işlemleri genelleyerek iç boyutlu uzayda geometrik bir nesne oluşturamamıştır.

4.2.2. İkinci Sorunun Genel Değerlendirmesi

Çalışmaya katılan öğrencilerin hepsi üç boyutlu uzayda verilen bir noktaya işlemler uygulayabilmiş, yine verilen iki nokta için; bir noktanın diğer noktaya dönüştürülmesinde gerekli olan işlemleri belirleyebilmiştir. Ancak öğrencilerin yarısı bu eylemleri genelleştirerek bir geometrik nesne oluşturma sürecini gerçekleştirememişlerdir. Ayrıca öğrenciler soruda verilen yönlere göre değil, kendi zihinlerindeki koordinatlara göre çözüm yapmışlardır. Katılımcılardan Ayşe, iki boyutlu uzayda verilen nokta için uygulanan işlemleri genelleştirerek görselleştirme yapabilirken, üç boyutlu uzaya bu durumu aktaramamıştır. Aşağıdaki Tablo 4.2.2.1’ de öğrencilerin ikinci soruya verdikleri cevapların genetik ayrışımda karşılık gelen basamakları verilmiştir.

Tablo 4.2.2.1. Öğrencilerin Cevaplarının Genetik Ayrışımdaki Karşılıkları

	R^3 uzayında bir noktayı başka bir noktaya dönüştürme eylemi	**Uzayda iki nokta arasındaki dönüşüm işlemlerini belirleme eylemi**	**R^3 uzayında bir noktaya uygulanan işlemleri genelleyerek geometrik bir nesne oluşturma süreci**
Yasin	✓	✓	✓
Zehra	✓	✓	Üç boyutlu uzayda verilen ifadeyi görselleştiremiyor.
Hüseyin	✓	✓	Üç boyutlu uzayda verilen ifadeyi görselleştiremiyor.
Ayşe	✓	✓	Üç boyutlu uzayda verilen ifadeyi görselleştiremiyor.
Adem	✓	✓	✓
Beril	✓	✓	✓

4.3. Uygulamanın Üçüncü Sorusu

(a) R^{2}' de $x^2 + y^2 = 1$ denklemini sağlayan noktaların kümesini çiziniz.

(b) R^{2}' de $x^2 + y^2 = 1$ denklemini sağlayan noktalara $z = 3$ yüksekliğini karşılık getirerek oluşan noktalar kümesini R^{3}' te çiziniz.

(c) R^{2}' de $x^2 + y^2 = 1$ denklemini sağlayan noktalara karşılık keyfi bir z yüksekliği atayarak ulaşılabilen bütün noktaların kümesini R^{3}'te çiziniz.

Uygulamanın bu sorusu için öğrenciler kartezyen düzlem, reel sayılar, uzay sezgisi şemalarını koordine etmelidir. Bu soru, R^{2}' nin analitik ifadesi verilen alt kümelerini grafik olarak çizebilme ve bu alt kümenin elemanlarına bir reel sayı karşılık getirebilme eylemleri ile bu eylemleri genelleyerek üç boyutlu uzayda bir geometrik nesne oluşturabilme ve analitik ifadeyi görselleştirebilme sürecini içerir. Aşağıdaki Tablo 4.3.1.' de, üçüncü sorunun iki değişkenli fonksiyonların kavramsal anlamasına yönelik yapılan genetik ayrışımda karşılık gelen basamakları verilmiştir.

Tablo 4.3.1. Üçüncü sorunun genetik ayrışımda karşılık gelen basamakları

Sorular	Soruların genetik ayrışımdaki karşılıkları
3.a.	R^{2}' nin analitik ifadesi verilen alt kümesinin grafiğini çizme eylemi
3.b.	R^{2}' nin alt kümesinin elemanlarına bir reel sayı karşılık getirme eylemi
3.c.	R^{2}' nin alt kümesinin elemanlarına herhangi bir reel sayı karşılık getirerek üç boyutlu uzayda bir geometrik nesne oluşturma süreci

Öğrenciler düzlemdeki bölgelere bir yükseklik karşılık getirerek R^3 uzayında geometrik nesneler oluşturabilir. Böylelikle R^2 düzleminden hareketle, R^3 üç boyutlu uzayını yapılandırabilir.

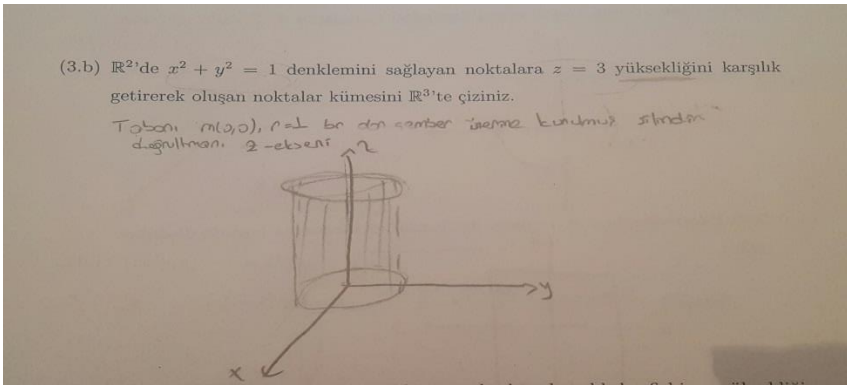
4.3.1. Öğrencilerin Üçüncü Soruya Verdikleri Cevaplar

Bu alt başlıkta öğrencilerin üçüncü soruya verdikleri cevaplar, görüşmeler sonucu ortaya çıkanlar değerlendirilmiştir. Aşağıdaki Tablo 4.3.1.1.'de öğrencilerin üçüncü soruya verdikleri yanıtlara ilişkin doğru-yanlış çizelgesi verilmiştir.

Tablo 4.3.1.1. Öğrencilerin üçüncü soruya verdikleri yanıtlara ilişkin doğru-yanlış çizelgesi

	3.a.	3.b.	3.c.
Yasin	2	2	2
Zehra	2	1	2
Hüseyin	2	2	2
Ayşe	2	0	2
Adem	2	2	2
Beril	2	2	2

Katılımcılardan Zehra üçüncü sorunun (a) ve (c) şıkkını doğru yaparken (b) şıkkını kısmen doğru yapabilmiştir. Zehra'nın üçüncü sorunun (b) şıkkına ilişkin verdiği yanıt aşağıdaki Şekil 4.3.1.1.' de verilmiştir.



Şekil 4.3.1.1. Zehra'nın 3.b. sorusuna ilişkin yanıtı

Görüldüğü gibi Zehra R^{2}' de $x^2 + y^2 = 1$ denklemini çizmiş, bu noktalara $z = 3$ yüksekliğini karşılık getirirken $z = 3$'e kadar olan tüm düzlemleri bu atama işlemine dahil ederek silindir oluşturmuştur. Zehra ile bu soruya ilişkin yapılan görüşmeler aşağıdadır.

A: 3.b. numaralı soruya bakıp ne anladığını ve nasıl çözeceğini ifade etmeni istiyorum senden.

Ö: Yani ben şuna baktığım zaman direkt tabanı çember olan bir silindir belirttiğini düşünüyorum. Denkleme baktığım zaman da z görünmüyor onu düşünerek z-ekseni boyunca yükseltilmesi gerektiğini düşünüyorum. Ama yüksekliğine karşılık gelen deyince de şu an yanlış yaptığımı düşündüm.

A: Peki o zaman nasıl yapman gerekiyor?

Ö: Sağlayan noktalara $z = 3$ yüksekliği karşılık getirerek oluşturulan noktalar kümesine… Şu an yapmaya kalksam ne düşünüyorum… Sanırım z-ekseni boyunca… R^3' e çizdiğim zaman yine bir silindir belirttiğini düşünüyorum.

A: Birinci soruya bakalım. Birinci sorunun a şıkkına bakabilir miyiz? (Araştırmacı uygulamanın ilk sorusundan bahsediyor). Ne yapıyorsun bu soruda?

Ö: Noktayı xy-düzleminde gösterdim. Sonra $z = 3$ yüksekliğine taşıdım. Yani 3 birim z-ekseni yüksekliğinde 3 birim yukarı taşıdım sadece.

A: Ne oldu şeklin?

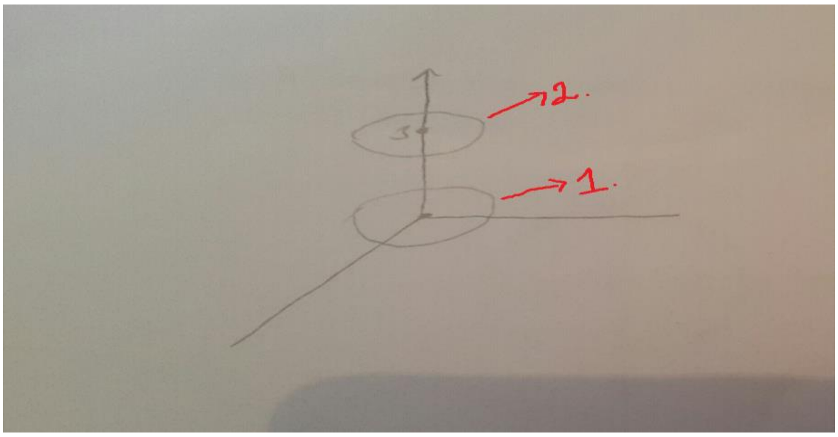
Ö: Yine hala bir tane nokta olduğunu düşünüyorum.

A: Peki tekrar bu soruya dönecek olursak…

Ö: Haa… Ben bunu alacağım (Şekil 4.3.1.2.'deki 1'den bahsediyor). 3 birim yukarı taşıyacağım. Yani şuradaki çember bu diye düşünüyorum şuan ilk soru üzerinden yorumlarsam (Şekil 4.3.1.2.'deki 2'den bahsediyor).

A: Peki birinci soru üzerinden yorumlamadığında ne geliyor aklınla?

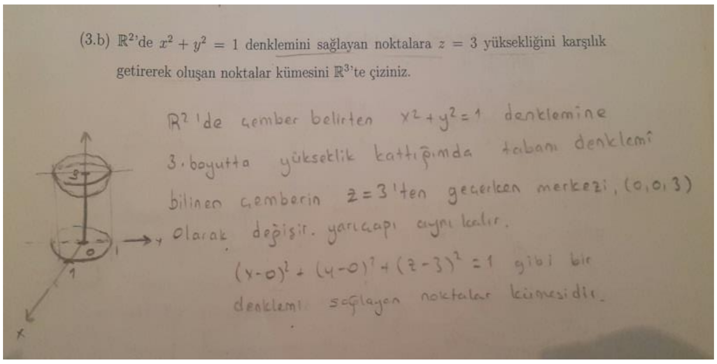
Ö: Yani benim kafamı karıştıran yükseklik diye belirtilmesi. Yükseklik deyince sanki üç boyutlu bir cisim çıkması gerekiyor diye düşünüyorum. Evet… Tamam. Yani şu an biraz daha düşündüğüm zaman, sanırım şu çemberi $z = 3$ noktasına taşırım şu an yapmaya kalksam sanırım.



Şekil 4.3.1.2. Zehra'nın 3.b sorusuna ilişkin görüşmedeki çizimi

Görüldüğü üzere Zehra bu soruda $x^2 + y^2 = 1$ çemberine bir yükseklik karşılık getirememiş, ancak birinci sorudan yola çıkarak bir noktaya bir yükseklik getirme eylemini, düzlemde bir kümeye bir nokta getirme eylemine uyarlayarak soruyu yapabilmiştir. Zehra "yükseklik karşılık getirme" ifadesinden üç boyutlu cisim oluşturması gerektiğini anlamış ve silindir çizmiştir.

Katılımcılardan Ayşe üçüncü sorunun (b) şıkkını yanlış yapmıştır. Şekil 4.3.1.3.'te Ayşe'nin çözümü verilmiştir.



(3.b) $\mathbb{R}^2$'de $x^2 + y^2 = 1$ denklemini sağlayan noktalara $z = 3$ yüksekliğini karşılık getirerek oluşan noktalar kümesini $\mathbb{R}^3$'te çiziniz.

$\mathbb{R}^2$'de çember belirten $x^2+y^2=1$ denklemine 3. boyutta yükseklik kattığımda tabanı denklemi bilinen çemberin $z=3$'ten geçerken merkezi, $(0,0,3)$ olarak değişir. yarıçapı aynı kalır.

$(x-0)^2+(y-0)^2+(z-3)^2=1$ gibi bir denklemi sağlayan noktalar kümesidir.

Şekil 4.3.1.3. Ayşe'nin 3.b. sorusuna ilişkin çözümü

Çözümde görüldüğü gibi, Ayşe $x^2 + y^2 = 1$ denklemine $z = 3$ yüksekliği karşılık getirip küre elde etmiştir. Ayşe ile yapılan görüşmeler aşağıda verilmiştir.

A: Ne düşünüyorsun soru ile ilgili?

Ö: Bir çember denklemi vermiş bana. Bu denklemin $z = 3$ yüksekliği ileR^3'te nasıl görüneceğini soruyor. Bu denklemi sağlayan bu noktaların hepsine $z = 3$ yüksekliği karşılık getirilirse… Buraya geçince işler birazcık sarpa sarıyor.

A: Oluşturulan noktaların kümesi hangisi oluyor?

Ö: Yani… Buradaki noktaların x'i y'si var. Bir de z'si var ki z' si artık 3 biliyorum. Bütün noktalar bu şekilde. x, y ve z'ler 3'ten oluşuyor (Şekil 4.3.1.4'deki çizimi yapıyor ve belirttiği noktaları yazıyor).

A: Nedir peki bu çizdiğin şey?

Ö: Yani… Mantıken burada bir çemberin üç boyuta taşınmış şekli, burada küre var. Hala küre olduğunu düşünüyorum.

A: Küre ne demek?

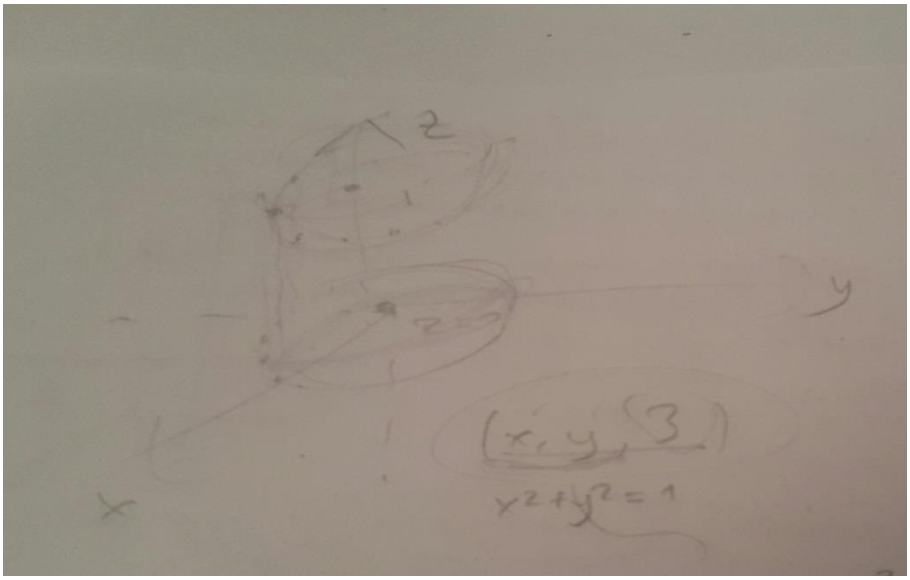
Ö: Küre benim için iki boyuttaki çemberin üç boyuttaki karşılığı. O yüzden burada küre denklemi yazmışım kendimce (Şekil 4.3.1.3.'deki yazdığı denklemden bahsediyor).

A: Üç boyutta çember çizemez miyiz?

Ö: Üç boyut olduğu için düşünüyorum… Çember çizemiyorum.

A: Peki bunu neye dayanarak söylüyorsun?

Ö: Yapamadığım için öyle düşünüyorum. Ben göremediğim için çizdiğim şekilde çember göremediğim için… Bir de çizdiğim şeyin arkası önü var yani.



Şekil 4.3.1.5. Ayşe'nin 3.b sorusuna ilişkin görüşmedeki çizimi

Ayşe ile yapılan görüşme sonucu, Ayşe'nin kartezyen düzlem şemalarıyla uzay sezgisi şemalarını koordine edemediği görülmektedir. Analitik ifadesi verilen bir R^{2}' nin alt kümesinin her bir noktasına karşılık yükseklik getiren Ayşe, oluşan yeni şekli üç boyutlu uzayda düşünememektedir.

4.3.2. Üçüncü Sorunun Genel Değerlendirmesi

Katılımcıların hepsi üçüncü sorunun (a) ve (c) şıkkına ilişkin doğru cevaplar verebilmişlerdir. Araştırmaya katılan öğrenciler R^{2}' nin analitik ifadesi verilen alt kümesinin grafiğini çizme eylemini ve herhangi bir yükseklik değeri için bu kümeyi üç boyutlu uzaya genelleyebilme sürecini gerçekleştirmişlerdir. Yalnızca Zehra ve Ayşe bu sorunun (b) şıkkında sorun yaşamışlardır.

Zehra için bu sorunun R^{2}' deki noktalar kümesine yükseklik atayamama olduğu gözlenmiştir. R^2 üzerindeki noktaya yükseklik atamadan yola çıkıldığında bu sorunun aşıldığı görülmektedir.

Ayşe ise kartezyen düzlem şemasıyla uzay sezgisi şemalarını koordine edemediği için sorunun (b) şıkkına doğru yanıt verememiştir.

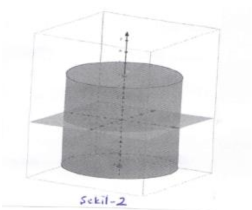
Aşağıdaki Tablo 4.3.2.1' de öğrencilerin ikinci soruya verdikleri cevapların genetik ayrışımda karşılık gelen basamakları verilmiştir.

Tablo 4.3.2.1. Öğrencilerin Cevaplarının Genetik Ayrışımdaki Karşılıkları

	R^2'nin analitik ifadesi verilen alt kümesinin grafiğini çizme eylemi	R^2'nin alt kümesinin elemanlarına bir reel sayı karşılık getirme eylemi	R^2'nin alt kümesinin elemanlarına herhangi bir reel sayı karşılık getirerek üç boyutlu uzayda bir geometrik nesne oluşturma süreci
Yasin	✓	✓	✓
Zehra	✓	✓	✓
Hüseyin	✓	✓	✓
Ayşe	✓	Kartezyen düzlem ve uzay sezgisi şemalarını koordine edemiyor.	✓
Adem	✓	✓	✓
Beril	✓	✓	✓

4.4. Uygulamanın Dördüncü Sorusu

Aşağıdaki şekli düşünelim.



Şekil 4.4.1. Uygulamanın dördüncü sorusu

(a) Şekil-2'deki yüzeyin $z = 1$ yüzeyi üzerindeki noktalarını iki boyutlu düzlemde çiziniz.

(b) Şekil-2'deki yüzeyin $x = 1$ yüzeyi üzerindeki noktalarını iki boyutlu düzlemde çiziniz.

(c) Şekil-2'deki yüzeyin $y = 1$ yüzeyi üzerindeki noktalarını iki boyutlu düzlemde çiziniz.

Uygulamanın bu sorusundan beklenen, öğrencilerin üç boyutlu uzayda verilen bir nesne üzerinde x, y, z düzlemlerine göre kesitler alarak nesnenin iki boyuttaki görünümünü elde etmesidir. Bunun yapılabilmesi için, R^3' deki bir nesneyi R^2' de kartezyen düzlem üzerine terslemek gerekmektedir. Aşağıdaki Tablo 4.4.1.'de dördüncü sorunun genetik ayrışımdaki karşılıkları verilmiştir.

Tablo 4.4.1. Dördüncü sorunun genetik ayrışımda karşılık gelen basamakları

Sorular	Soruların genetik ayrışımdaki karşılıkları
4.a.	R^{3}' deki bir nesneyi R^{2}' de z-ekseni üzerine tersleme
4.b.	R^{3}' deki bir nesneyi R^{2}' de x-ekseni üzerine tersleme
4.c.	R^{3}' deki bir nesneyi R^{2}' de y-ekseni üzerine tersleme

R^3 şemasının oluşturulabilmesi için, R^{2}' den üç boyutlu uzaya genelleme yapılması ile birlikte, üç boyutlu uzaydan R^{2}' ye geri dönülmesi gerekmektedir.

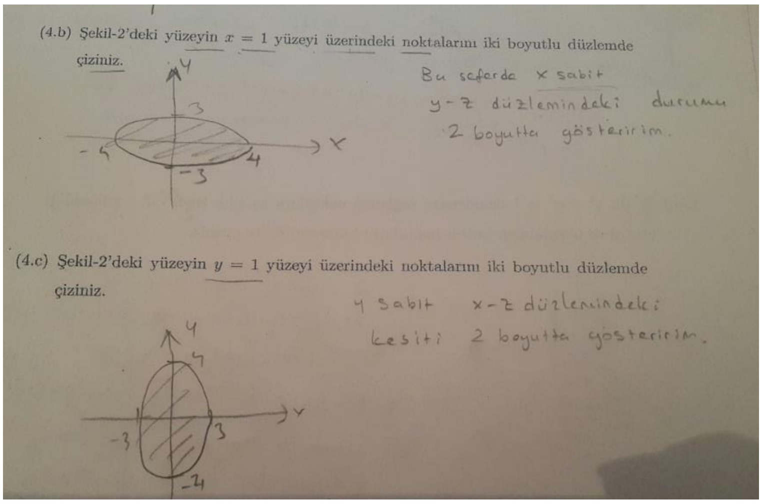
4.4.1. Öğrencilerin Dördüncü Soruya Verdikleri Cevaplar

Öğrencilerin uygulamanın dördüncü sorusuna verdikleri cevaplar incelenmiş ve aşağıdaki tabloda bu soruya ilişkin doğru-yanlış çizelgesi verilmiştir.

Tablo 4.4.1.1. Öğrencilerin dördüncü soruya verdikleri yanıtlara ilişkin doğru-yanlış çizelgesi

	4.a.	4.b.	4.c.
Yasin	2	2	2
Zehra	2	2	2
Hüseyin	2	2	2
Ayşe	2	0	0
Adem	2	2	2
Beril	2	2	2

Doğru-yanlış çizelgesi incelendiğinde, katılımcılardan Ayşe'nin dördüncü sorunun (b) ve (c) şıkkını yanlış yaptığı görülmektedir. Ayşe'nin (b) ve (c) şıklarına ilişkin verdiği cevaplar Şekil 4.4.1.1' de verilmiştir.



Şekil 4.4.1.1. Ayşe'nin 4.b. ve 4.c. sorusuna ilişkin verdiği cevaplar

Görüldüğü üzere Ayşe eksenleri hangi yüzey üzerindeki noktalar alınırsa alınsın, xy-düzlemi olarak almaktadır. Ayrıca Ayşe, yüzeylerin üzerindeki noktaları da eliptik bir şekil olarak belirlemiştir. Ayşe ile bu soru hakkında yapılan görüşme aşağıda verilmiştir.

A: Bu soru sana ne düşündürüyor?

Ö: Sorudan anladığım bu şekilde bir yüzeyin iki boyutlu düzleme taşınması.

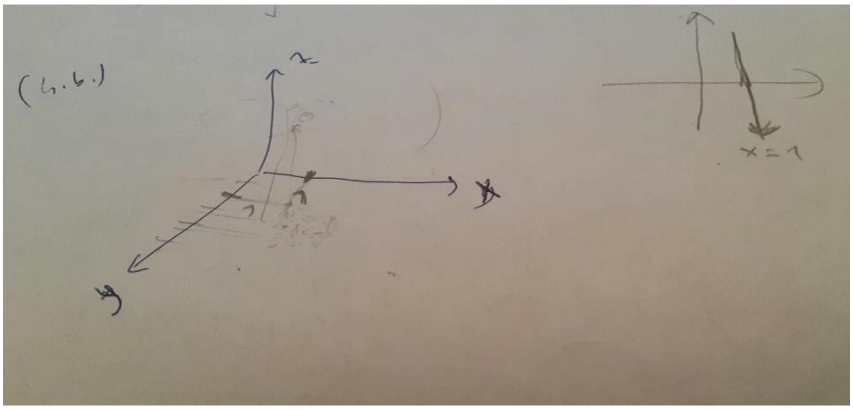
A: Burada x noktası 1 olmak üzere, y'si ve z'si… Şimdi bunu iki boyuta taşıyacağım için sabit olan nokta durup diğerlerinin kesitini almışım burayı öyle çizmişim.

A: Bana $x = 1$ yüzeyini çizer misin?

Ö: x' in 1, y ve z' nin olabileceği bütün her şey olduğunu düşünüyorum da bunu burada nasıl gösterebilirim? Bir sürü bir sürü nokta var (Şekil 4.4.1.2.' yi çiziyor). Aslında burada sanki kağıt gibi düzlemler gibi geliyor.

A: Bu dediğin şeyi çizerek gösterir misin?

Ö: Çizemiyorum. Ama şu algıdayım. Burada bu $x = 1$. x sabit ve y her değeri alabiliyor. Onun oluşturduğu şekli çizmek kolay (Şekil 4.4.1.2' deki çizdiği iki boyutlu doğrudan bahsediyor). Burada $x = 1$. y ve z tüm değerleri alabiliyor. Onların oluşturduğu şekil olacak algısındaydım ama çizemem.



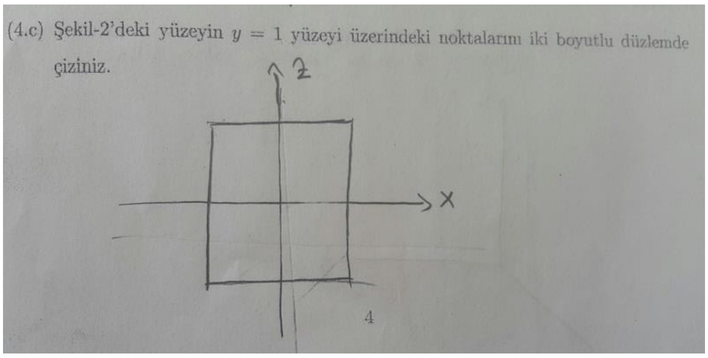
Şekil 4.4.1.2. Ayşe' nin görüşmedeki 4.b. sorusuna ilişkin çizimi

Ayşe ile yapılan görüşmelerden; üç boyut algısı oluşturamadığı, üç boyutlu uzayda düzlem çizemediği ve bir nesnenin kesitini alamadığı belirlenmiştir. Ayşe $x = 1$ düzlemini çizmek istediğinde önce iki boyutta düşünmüş, oradan üç boyutlu uzaya aktarım yapmak istemiştir. Fakat kartezyen düzlemden üç boyutlu uzaya geçiş yapamamıştır. Buna ek olarak, R^3'te bir nesneyi R^2'de bir düzlem üzerine tersleyemediği görülmüştür.

4.4.2. Dördüncü Sorunun Genel Değerlendirmesi

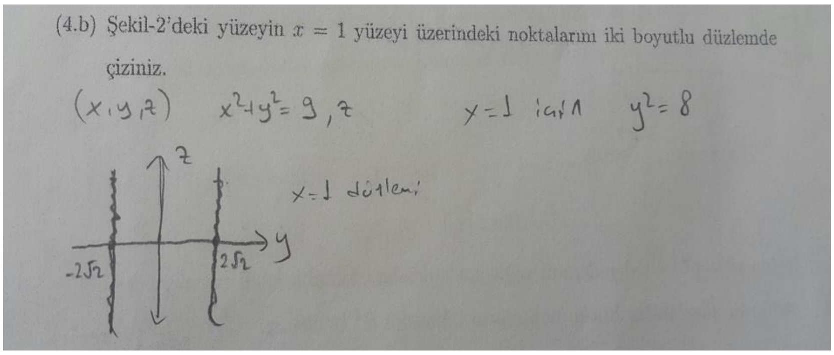
Bu soruda öğrencilerden beş tanesinin R^3' te bir nesneyi R^2' de bir düzlem üzerine tersleyebildiği görülmüştür. Yalnızca katılımcılardan Ayşe $z = 1$ düzlemi dışındaki düzlemler üzerine kesit alamamıştır.

Dördüncü sorunun çözümünde öğrenciler farklı yollar izlemişlerdir. Katılımcılardan Zehra, düzlem üzerine direk kesit alarak şeklin aşağı yukarı nasıl görüneceğini çizmiştir. Zehra'nın çözümü Şekil 4.4.2.1.'de verilmiştir.



Şekil 4.4.2.1. Zehra' nın 4.c sorusuna ilişkin çözümü

Katılımcılardan Beril, R^{3}' teki nesnenin denklemini belirleyerek, verilen düzlemdeki noktayı denklemde yerine koyup soruyu çözmüştür. Beril, üç boyutlu uzayda geometrik olarak verilen bir nesnenin analitik ifadesini yazarak bir dönüşüm yapmış ve düzlemler ile kesit almak için bu analitik ifadede yerine koymuştur. Beril'in yaptığı çözüm aşağıdaki Şekil 4.4.2.2.' de verilmiştir.



Şekil 4.4.2.2. Beril'in 4.b. sorusuna ilişkin çözümü

Aşağıdaki Tablo 4.4.2.1.' de öğrencilerin ikinci soruya verdikleri cevapların genetik ayrışımda karşılık gelen basamakları verilmiştir.

Tablo 4.4.2.1. Öğrencilerin Cevaplarının Genetik Ayrışımdaki Karşılıkları

	R^3'deki bir nesneyi R^2'de z-ekseni üzerine tersleme	R^3'deki bir nesneyi R^2'de x-ekseni üzerine tersleme	R^3'deki bir nesneyi R^2'de y-ekseni üzerine tersleme
Yasin	✓	✓	✓
Zehra	✓	✓	✓
Hüseyin	✓	✓	✓
Ayşe	✓	R^3'de düzlem çizemiyor.	R^3'de düzlem çizemiyor.
Adem	✓	✓	✓
Beril	✓	✓	✓

4.5. Uygulamanın Beşinci Sorusu

Aşağıda verilen kümeleri R^{3}'te çiziniz. Ayrıca verilen kümeleri sözel olarak mümkün olduğunca detaylı bir şekilde tarif ediniz.

(a.1) $\{(x, y, 0) : \; x = 3\}$

(a.2) $\{(x, y, z) : \; x = 3\}$

(b.1) $\{(x, y, z) : \ z = x^2 + y^2, y = 3\}$

(b.2) $\{(x, y, z) : \ z = x^2 + y^2, z = 4\}$

Uygulamanın bu sorusuyla öğrencilerden R^3' ün alt kümelerini koordine ederek verilen analitik ifadeleri geometrik olarak çizmeleri beklenmektedir. Bu sorunun (a.1) şıkkında, öğrenciden verilen üçlüleri $x = 3$ düzlemiyle kesiştirerek uzayda bir doğru oluşturması beklenmektedir. (a.2) şıkkında ise, R^3 uzayının elemanlarını $x = 3$ düzlemi ile kesiştirip uzayda bir düzlem elde edilmelidir. Sorunun (b.1) şıkkında verilen analitik bir ifadenin $y = 3$ düzlemi ile kesilerek düzlemde oluşan parabolün çizilmesi istenmektedir. Son olarak (b.2) şıkkında verilen analitik ifadenin $z = 4$ düzleminde oluşturduğu çemberin çizilmesi beklenmektedir.

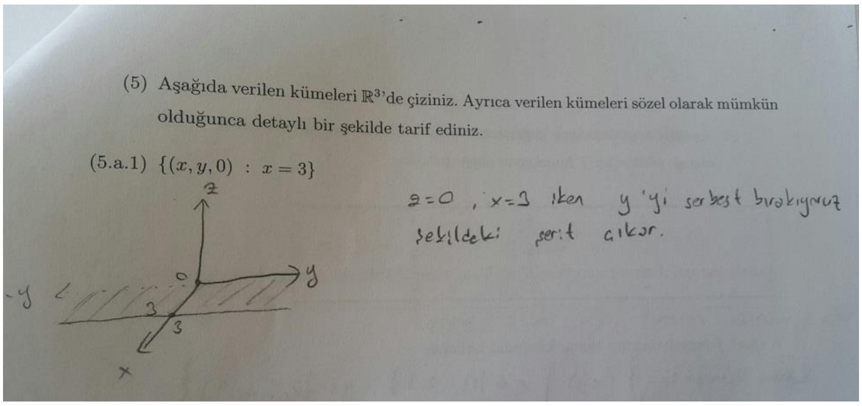
4.5.1. Öğrencilerin Beşinci Soruya Verdikleri Cevaplar

Öğrencilerin dördüncü soruya ilişkin öğrencilerin doğru-yanlış çizelgesi aşağıdaki Tablo 4.5.1.1.' de verilmiştir.

Tablo 4.5.1.1. Öğrencilerin beşinci soruya verdikleri yanıtlara ilişkin doğru-yanlış çizelgesi

	5.a.1	5.a.2	5.b.1.	5.b.2
Yasin	2	2	2	2
Zehra	2	2	1	1
Hüseyin	2	2	2	1
Ayşe	0	0	0	0
Adem	2	2	1	1
Beril	0	0	2	2

Tablo 4.5.1.1. incelendiğinde katılımcılardan Beril'in 5.a.1. ve 5.a.2 numaralı soruları yanlış yaptığı görülmektedir. Beril'in 5.a.1. numaralı soru için çözümü aşağıda verilmiştir.



Şekil 4.5.1.1. Beril'in 5.a.1. numaralı soruya verdiği yanıt

Beril'in çözümüne bakıldığında verilen kümeyi, $x = 0$ ile $x = 3$ arasında bir şerit olarak çizdiği görülmektedir. Beril $z = 0$ ile $x = 0$ doğruları arasında y değerlerinin serbest olduğunu düşünmektedir. Beril ile 5.a.1. sorusuna ilişkin yapılan görüşme aşağıda verilmiştir.

A: Bu soruda ne düşündün?

Ö: R^3'te çiziniz diyor… z=0 ve x=3 iken, y'yi serbest bıraktığımızı söylemişim. Ondan sonra da burada şerit ifade ettiğini belirtmişim.

A: Neden böyle düşündün?

Ö: z zaten sıfır. xy-düzleminde çalışmamız gerektiğini düşündüm. Burada da y'ler serbest olarak gezecek. x' i sabitlemiş zaten 3 olarak. x=3 doğrusunu aldım. y' ler bu aralıkta serbest olarak geziniyor diye düşündüm.

A: Peki çizdiğin şekil o dediğin şeyi mi ifade ediyor?

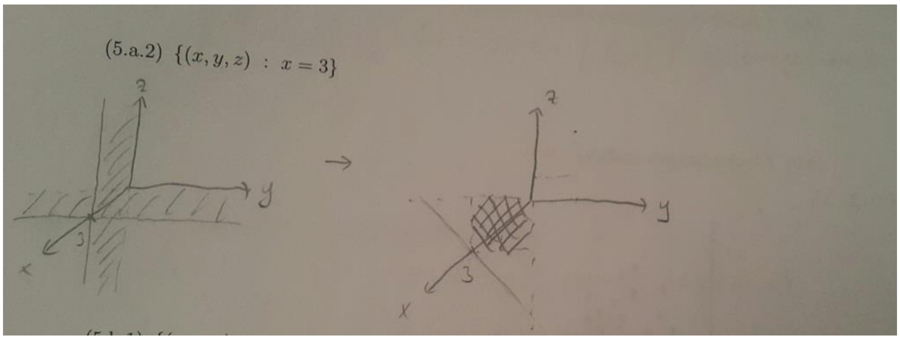
Ö: Bence ediyor.

A: Mesela neden 0 ile 3 arasındaki aralığı düşündün?

Ö: Zaten z=0 olma durumunu şey yaptım. y' nin eksisi artısı bu şeritte zaten. Bu aralıkta gidip geliyor. x' i de 3 olarak sabitlemiş zaten o yüzden yani.

5.a.1. numaralı soruya ilişkin Beril ile yapılan görüşme incelendiğinde; Beril'in üç boyutlu uzayda verilen bir kümeyi geometrik olarak göstermekte sorun yaşadığı gözlenmektedir. Bu durum $z = 0$ düzlemini düşünememesinden ve $x = 3$ düzlemiyle arakesit alamamasından kaynaklanmaktadır.

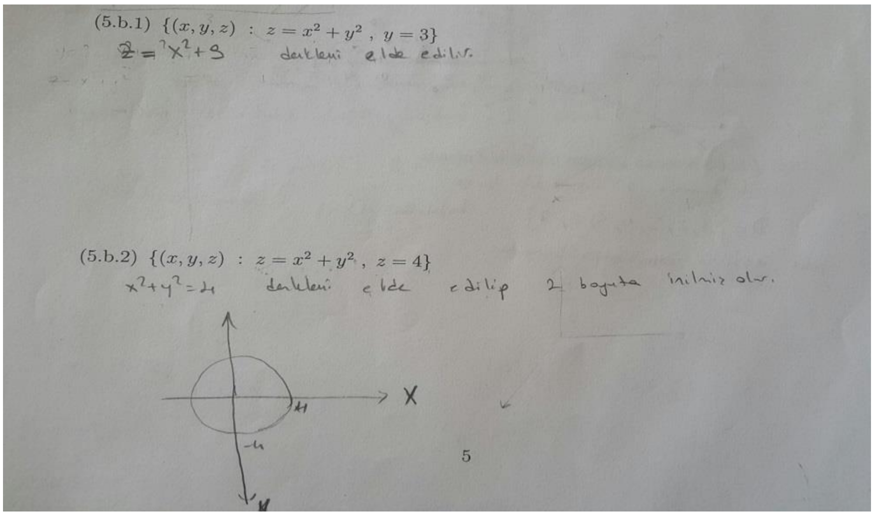
Beril'in 5.a.2. numaralı soruya verdiği yanıt aşağıdaki Şekil 4.5.1.2' de verilmiştir.



Şekil 4.5.1.2. Beril’in 5.a.2 numaralı soruya verdiği yanıt

Beril tıpkı 5.a.1.’deki gibi 5.a.2. numaralı soruda da benzer hatayı yapmıştır. Şekil 4.5.1.1. ve Şekil 4.5.1.2.’ deki çözümlere bakıldığında Beril’in R^3’ ün alt kümelerini koordine edemediği gözlenmektedir.

Öğrencilerden Adem ise 5.b.1. ve 5.b.2. numaralı sorularda kısmen doğru cevap verebilmiştir. Adem’ in bu sorulara ilişkin çözümü aşağıdaki Şekil 4.5.1.3’ de verilmiştir.



Şekil 4.5.1.3. Adem’ in 5.b.1. ve 5.b.2. numaralı sorulara verdiği yanıt

Görüldüğü gibi 5.b.1. numaralı soruda Adem verilen kümeyi çizmemiştir. Ayrıca 5.b.2. numaralı soruda da iki boyuta inerek çizmiştir. Adem ile 5.b.1. numaralı soruya ilişkin yapılan görüşme aşağıda verilmiştir.

A: Bu soruda şekli çizemedin mi?

Ö: Yani neden yapamadığımı hatırlamıyorum ama şuan baktığım zaman $z = x^2 + 9$ *denklemi elde edilir. Bunu çizmeliyim.*

A: Şuraya o zaman çizmeyi deneyelim.

Ö: Evet parabol. Iıı… Parabolse nasıl çizilir? Parabol denklemi çizmeyi bilmiyorum.

A: İki boyutta çizmeyi biliyor musun?

Ö: Evet 2 boyutta şu şekilde çizilir (Parabolü doğru çiziyor).

A: Peki üç boyuta geçince yorumun nedir?

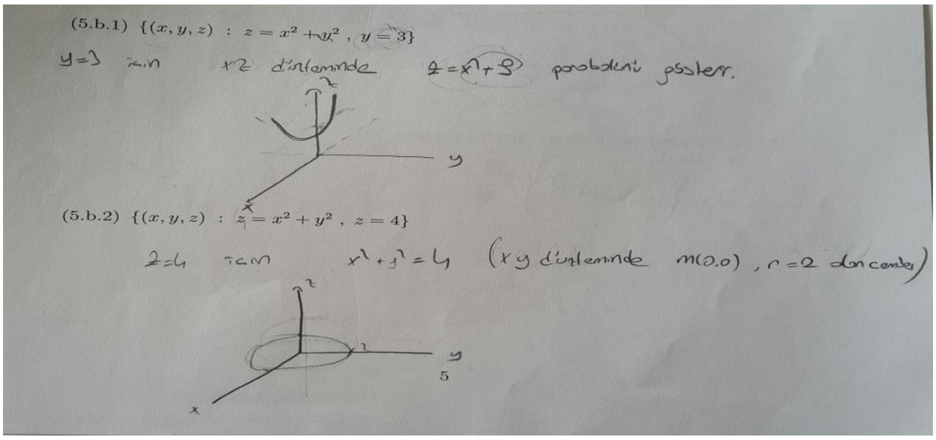
Ö: Yorumum şu şekilde: y'si direkt 3 olacak. Yani y'si başka değer almayacak. x ve z buna göre şekillenecek. Yani $z = x^2 + 9$ çizeceğim. İşte bunu sanki ben 2 boyutlu gibi görüyorum.

A: Bu küme nelerden oluşuyor peki?

Ö: x ve z'lerden oluşuyor ama y'si sabit. Direkt 3. Çizemiyorum.

Adem ile 5.b.1 numaralı soruya ilişkin yapılan görüşmelere göre; Adem'in $y = 3$ ifadesi verildiği andan itibaren soruyu iki boyutta algıladığı gözlenmektedir. Verilen kümenin noktalarının üçlülerden oluştuğunu düşünerek geometrik temsilde noktaların kümesini çizmeyi koordine edemediği görülmektedir. Şekil 4.5.1.3.'e bakıldığında, benzer olarak, Adem 5.b.2. numaralı soruda üçlülerden oluşan küme için $z = 4$ ifadesini göz önüne aldığında iki boyuta geçildiğini düşünmektedir.

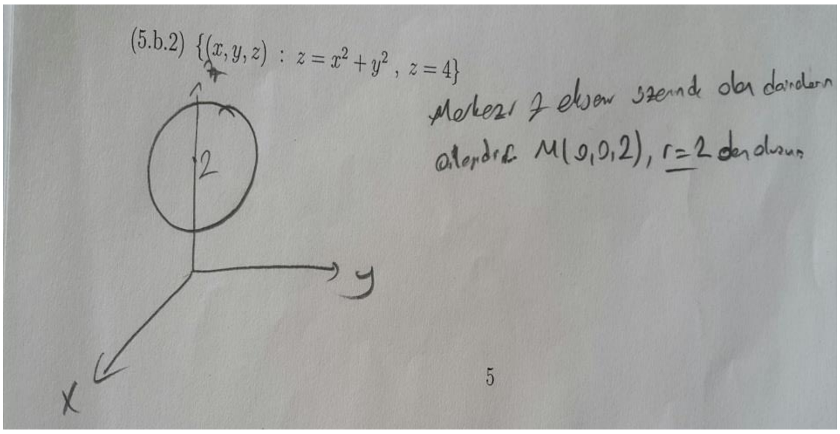
Katılımcılardan Zehra da 5.b.1. ve 5.b.2. numaralı sorularda sorun yaşamıştır. Zehra'nın çözümü aşağıdaki Şekil 4.5.1.4.'te verilmiştir.



Şekil 4.5.1.4. Zehra' nın 5.b.1. ve 5.b.2. sorularına ilişkin çözümleri

Zehra'nın 5.b.1.'de yaptığı çözüme bakıldığı zaman verilen kümede, $y = 3$ noktasını yerine koyarak çizimi yapmış, ancak $y = 3$ düzleminde çizmemiştir. Benzer şekilde 5.b.2. numaralı soruda da $z = 4$ düzlemi üzerinde değil sadece verilen ifadede $z = 4$ noktasını yerine koyarak çizim yapmıştır. Zehra R^3'ün verilen bir alt kümesini koordine edememiş ve geometrik şekli tam olarak çizememiştir.

Katılımcılardan Hüseyin de 5.b.2. numaralı soruda benzer sorunu yaşamıştır. Hüseyin'in çözümü aşağıdaki Şekil 4.5.1.5.' de verilmiştir.



Şekil 4.5.1.5. Hüseyin'in 5.b.2. numaralı soruya ilişkin çözümü

Şekle bakıldığında Hüseyin farklı olarak düzlemi belirlemeye çalışmış ve $z = 2$ olarak belirleyebilmiştir. Verilen kümede $z = 4$ noktasını yerine koyarak çember denklemini elde etmiş ancak yarıçapı 2 olan çemberi çizerken merkezi de $z = 2$ almıştır.

4.5.2. Beşinci Sorunun Genel Değerlendirmesi

Uygulamanın beşinci sorusuna Yasin hariç hiçbir öğrenci doğru cevap verememiştir. Bu soruya doğru yanıt verebilmek için, R^3 uzayının alt kümelerini koordine ederek üç boyutlu uzayı nesne haline getirmek gerekmektedir. Katılımcılardan Ayşe bu sorunun hiçbir şıkkına doğru cevap veremezken, Hüseyin ve Zehra verilen kümenin noktalarını belirlemiş, ancak doğru düzlemde çizememişlerdir. Adem ise kümenin elemanlarının üçlülerden oluşmasına rağmen verilen ifadeyi iki boyutta çizmeye çalışmıştır. Katılımcılardan Beril, kümenin elemanlarını doğru belirlemesine rağmen geometrik gösterime geçince sıkıntı yaşamıştır. Aşağıdaki Tablo 4.5.2.1.' de öğrencilerin soruya verdikleri cevapların genetik ayrışımdaki karşılıkları verilmiştir. Bu soru genetik ayrışımda R^3'ün alt kümelerini koordine etme olarak verilmiştir. Tablo' da verilen "–" işareti sorunun karşılık gelen şıkkına ilişkin öğrencinin R^3' ün alt kümelerini koordine edemediği anlamına gelmektedir.

Tablo 4.5.2.1. Öğrencilerin Cevaplarının Genetik Ayrışımdaki Karşılıkları

	5.a.1	5.a.2	5.b.1	5.b.2
Yasin	✓	✓	✓	✓
Zehra	✓	✓	–	–
Hüseyin	✓	✓	✓	–
Ayşe	–	–	–	–
Adem	✓	✓	–	–
Beril	–	–	✓	✓

Bu soruya kadar olan kısımda öğrencilerin R^3 şemalarını oluşturması beklenmektedir. Beşinci soruya kadar olan soruları yapan öğrencilerin üç boyutlu uzayı nesne haline getirdiği söylenebilir.

4.6. Uygulamanın Altıncı Sorusu

Aşağıdaki tabloda x, y değerlerine karşılık z noktaları getirilerek $z \coloneqq f(x, y)$ olacak şekilde bir f fonksiyonu oluşturuluyor.

$x \backslash y$	2	3	4	5
0	3	1	2	4
1	4	3	2	3
2	6	5	2	2
3	6	7	2	1

Şekil 4.6.1. Uygulamanın altıncı sorusu

(a) f fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

(b) f fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

(c) f fonksiyonunun görüntü kümesini bulunuz.

Uygulamanın bu sorusuyla tablo ile verilen bir iki değişkenli fonksiyonun tanım ve görüntü kümesini belirlemeleri beklenmektedir. Sorunun (a) şıkkı, tablo üzerinde fonksiyonun (x, y) ikililerinden oluşan tanım kümesi elemanlarını belirleme eylemini içermektedir. Sorunun (b) şıkkında ise öğrenciden; düzlemde verilen bir noktaya uzayda bir nokta karşılık getirme eylemini gerçekleştirerek, xy-düzleminde

$(x, y, 0)$ noktalarını belirleyip noktaların tablodaki karşılıklarına göre geometrik temsillerini çizebilmesi beklenir. Sorunun (c) şıkkında da öğrencilerin fonksiyonun tabloda verilen görüntü kümesi elemanlarını belirlemesi gerekmektedir. Aşağıda öğrencilerin altıncı soruya ilişkin verdikleri cevapların doğru-yanlış çizelge tablosu verilmiştir.

Tablo 4.6.1. Öğrencilerin altıncı soruya verdikleri yanıtlara ilişkin doğru-yanlış çizelgesi

	6.a	6.b	6.c
Yasin	2	2	2
Zehra	2	2	2
Hüseyin	2	2	2
Ayşe	2	2	2
Adem	2	2	2
Beril	2	2	2

Görüldüğü üzere öğrenciler bu soruda yanlış yapmamışlardır.

4.6.1. Altıncı Sorunun Genel Değerlendirmesi

Katılımcılar tablo ile verilen iki değişkenli fonksiyonların tanım kümelerini belirleyebilmiş, R^{2}' nin bir noktasına uzayda bir nokta karşılık getirme eylemini gerçekleştirerek bunu sürece içselleştirip, fonksiyonun görüntü kümesini elde etmişlerdir.

4.7. Uygulamanın Yedinci Sorusu

$-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$ koşulu ile verilen her (x, y) noktasını tanım kümesi kabul eden, $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ ile tanımlı bir f fonksiyonu verilsin.

(a) Kartezyen düzlemin bir alt kümesi olan f fonksiyonunun tanım kümesini çiziniz.

(b) f fonksiyonunun görüntü kümesini bulunuz.

Uygulamanın yedinci sorusuyla, öğrencilerin cebirsel olarak verilen iki değişkenli fonksiyonları nasıl yapılandırdıklarının belirlenmesi hedeflenmiştir. Sorunun (a) şıkkında öğrencilerden, cebirsel ifadesi verilen iki değişkenli fonksiyonun tanım kümesinin kartezyen düzlem üzerindeki geometrik temsilini çizmesi beklenmektedir. Öğrencilerin bu soruyu yapabilmeleri için; küme kavramı, tek değişkenli fonksiyon ve üç boyutlu uzay şemalarını koordine edebilmeleri gerekmektedir. Sorunun (b) şıkkı için öğrencilerin cebirsel ifadesi verilen bir iki değişkenli fonksiyonun tanım kümesine bir değer karşılık getirme eylemini bir sürece içselleştirmesi ve bu eylemi küme şemalarıyla koordine etmesi beklenir.

Aşağıdaki Tablo 4.7.1.' de öğrencilerin uygulamanın yedinci sorusuna ilişkin verdikleri yanıtların doğru-yanlış çizelgesi verilmiştir.

Tablo 4.7.1. Öğrencilerin yedinci soruya verdikleri yanıtlara ilişkin doğru-yanlış çizelgesi

	7.a	7.b
Yasin	2	2
Zehra	2	2
Hüseyin	2	2
Ayşe	2	2
Adem	2	2
Beril	2	2

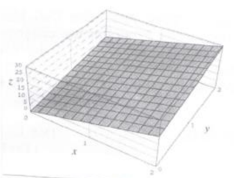
Görüldüğü üzere uygulamaya katılan öğrenciler bu soruya doğru cevap vermişlerdir.

4.7.1. Yedinci Sorunun Genel Değerlendirmesi

Yedinci soruda çalışmaya katılan öğrenciler doğru cevap vermişlerdir. Öğrenciler fonksiyonun cebirsel ifadesi verildiğinde iki değişkenli fonksiyonun tanım kümesini belirleyerek, R^2' nin bir alt kümesini grafiksel olarak temsil edebilmektedir.

4.8.Uygulamanın Sekizinci Sorusu

Aşağıdaki grafikte bir f fonksiyonunun tam grafiği verilmiştir.



Şekil 4.8.1. Uygulamanın sekizinci sorusu

(a) f fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

(b) $f(0,0), f(2,0), f(2,2), f(0,2)$ değerlerini hesaplayınız.

(c) f fonksiyonunun değer kümesini bulunuz.

Uygulamanın sekizinci sorusu, öğrencilerin grafiği verilen iki değişkenli bir fonksiyonu nasıl yapılandırdığını belirlemeyi amaçlamaktadır. Sorunun (a) şıkkı, geometrik temsili verilen bir şeklin sembolik gösterimine dönüştürme eylemini içerir. Sorunun (b) şıkkını yapabilen öğrenciler R^2' de verilen bir noktaya yükseklik atama eylemini gerçekleştirebiliyor demektir. Sorunun (b) şıkkı grafiği verilen bir fonksiyonun tanım kümesinin elemanlarının görüntülerini yine grafikte bulabilmeyi içerir. (c) şıkkında öğrenciden, grafiği verilen bir fonksiyonda R^2' de verilen bir noktaya yükseklik atama eylemini içselleştirerek bir sürece dönüştürmesi beklenmektedir. Aşağıdaki Tablo 4.8.1' de uygulamanın sekizinci sorusuna ilişkin genetik ayrışımdaki karşılıkları verilmiştir.

Tablo 4.8.1. Sekizinci sorunun genetik ayrışımda karşılık gelen basamakları

Sorular	Soruların genetik ayrışımdaki karşılıkları
8.a.	Geometrik temsili verilen iki değişkenli fonksiyonun tanım kümesini belirleme eylemi
8.b.	Grafiği verilen iki değişkenli bir fonksiyonun, tanım kümesine karşılık getirilen yüksekliği belirleme eylemi
8.c.	Grafiği verilen iki değişkenli fonksiyonun tanım kümesinin elemanlarına karşılık gelen yüksekliği belirleme eylemini genelleyerek bir sürece içselleştirme

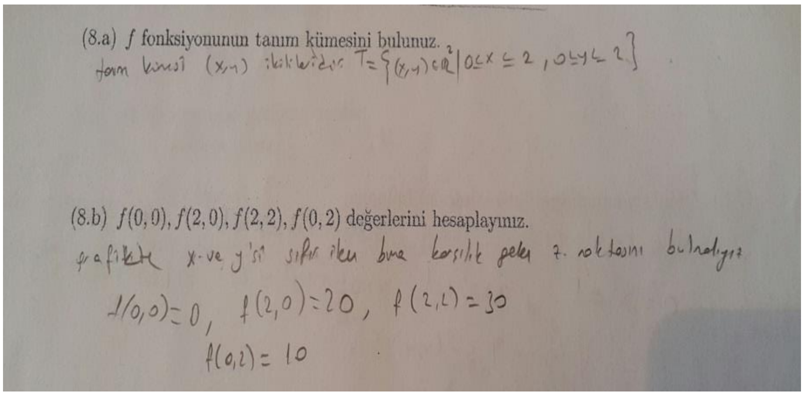
4.8.1. Öğrencilerin Sekizinci Soruya Verdikleri Cevaplar

Aşağıdaki Tablo 4.8.1.1' de öğrencilerin uygulamanın sekizinci sorusuna ilişkin doğru-yanlış çizelgeleri verilmiştir.

Tablo 4.8.1.1. Öğrencilerin yedinci soruya verdikleri yanıtlara ilişkin doğru-yanlış çizelgesi

	8.a	8.b	8.c
Yasin	2	2	2
Zehra	2	1	2
Hüseyin	0	2	0
Ayşe	0	1	2
Adem	2	2	2
Beril	2	2	2

Tablo 4.8.1.1.' e bakıldığı zaman, Ayşe 8.a. numaralı soruyu yanlış yapmış, 8.b. numaralı soruyu da kısmen doğru yapmıştır. Ayşe' nin 8.a. ve 8.b. numaralı sorulara ilişkin çözümü aşağıdaki Şekil 4.8.1.1.' de verilmiştir.



Şekil 4.8.1.1. Ayşe' nin 8.a. ve 8.b. sorularına ilişkin çözümü

Şekil 4.8.1.1.'de görüldüğü gibi Ayşe grafiği verilen fonksiyonun tanım kümesini belirleyememiştir. 8.b. numaralı soruda ise, $f(2,2), f(0,2)$ değerlerini yanlış bulmuştur. Ayşe ile 8.a. numaralı soruya ilişkin yapılan görüşme aşağıda verilmiştir.

A: Soru ne söylüyor bize?

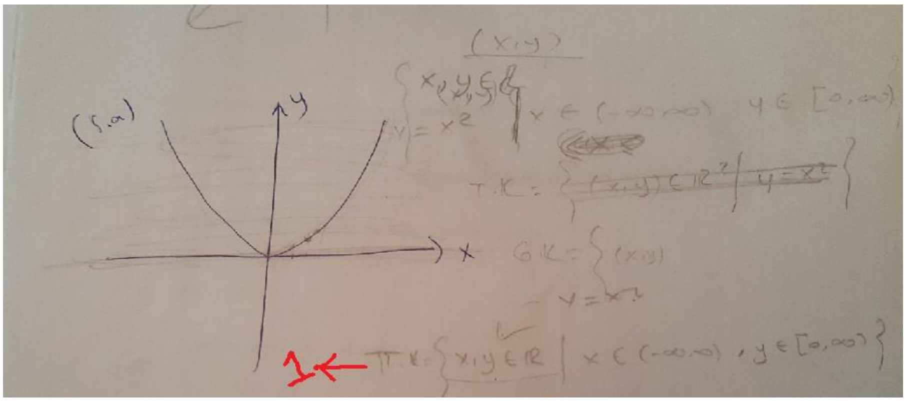
Ö: Grafikte bir fonksiyonun tam grafiği verilmiş. Grafiğe göre tanım kümesini bulmam lazım. Tanım kümesi de x, y, z lerden oluşuyor. Peki bu x, y, z ler nasıl ne aralıklardalar… hani benim buradan gördüğüm şu. X'ler sıfır ile iki arasında. O şekilde tanımlıyorum. Sonra y için de aynı şekilde sıfırla iki arasında. z için de sıfır ile 30 arasında.

A: Tanım kümesinin bu olduğunu düşünüyorsun?

Ö: Hı hı. Evet.

A: Peki ben bir şey sormak istiyorum sana. İki boyutta böyle bir grafik versem bu grafiğin tanım kümesini sorsam ne dersin bana? (Araştırmacı Şekil 4.8.1.2.'teki grafiği çiziyor). Yazabilir misin tanım kümesini?

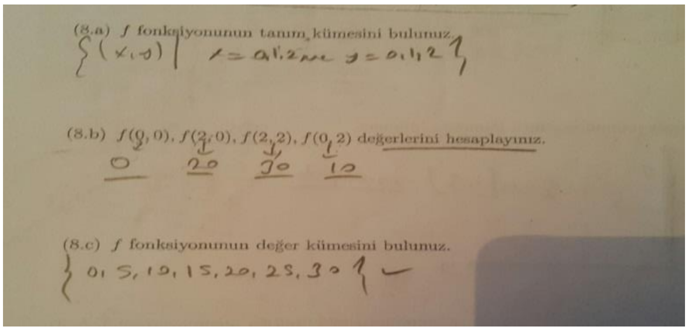
Ö: Tabi şöyle yazayım. Böyle bir şey yazardım (Biraz uğraştıktan sonra Şekil 4.8.1.2.'teki 1 numaralı kümeyi yazıyor).



Şekil 4.8.1.2. Ayşe'nin görüşmede 8.a. numaralı soruya ilişkin çizimi

Ayşe ile yapılan görüşmeler sonucu öğrencinin verilen iki değişkenli fonksiyonun grafiği için tanım kümesi belirlemek yerine uzayda verilen şeklin noktalarını belirlediği görülmektedir. Araştırmacı iki boyutta düşünmesi için öğrenciye tek değişkenli bir fonksiyon grafiği verip, öğrenciden tanım kümesini belirlemesini istemiştir. Ayşe benzer şekilde verilen şeklin noktalarını, yani fonksiyonun grafiğinin kümesini belirlemiştir. Kümenin elemanlarını da sıralı ikililer yerine x, y noktaları olarak gösteren Ayşe'nin küme şemalarının da eksik olduğu görülmektedir.

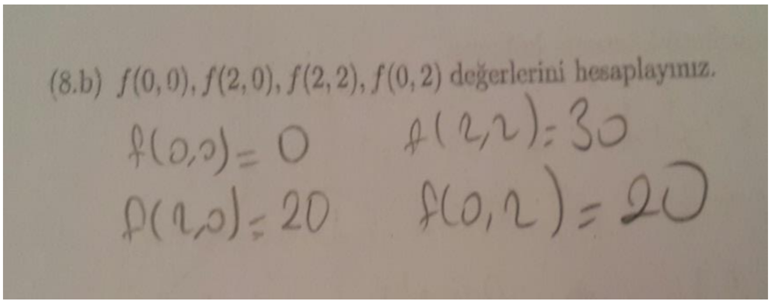
Hüseyin sekizinci sorunun (a) ve (c) şıklarını yanlış yapmıştır. Hüseyin'in sekizinci soruya verdiği yanıtlar Şekil 4.8.1.3.' te verilmiştir.



Şekil 4.8.1.3. Hüseyin'in sekizinci soruya ilişkin verdiği cevaplar

Görüldüğü üzere Hüseyin verilen fonksiyonun tanım kümesinin elemanlarını tam sayılar olarak belirlemiştir. Hüseyin $\mathbb{R}^2$' de verilen noktaları doğru belirleyemediği gibi onlara yükseklik atama eylemini genelleyerek bir sürece içselleştirememiştir.

Katılımcılardan Zehra 8.b. numaralı soruyu kısmen doğru yapmıştır. Zehra'nın bu soruya ilişkin çözümü aşağıda verilmiştir.



Şekil 4.8.1.4. Zehra' nın 8.b. numaralı soruya verdiği yanıt

Ayşe ile benzer olarak Zehra grafiği verilen iki değişkenli fonksiyonun tanım kümesine bir yükseklik karşılık getirme eylemini gerçekleştirememiştir.

4.8.2. Sekizinci Sorunun Genel Değerlendirmesi

Uygulamaya katılan öğrencilerin yarısı uygulamanın sekizinci sorusuna doğru yanıt vermiştir. Katılımcılardan Ayşe, grafiği verilen iki değişkenli fonksiyonun tanım kümesini belirleyememiş verilen fonksiyonun grafiğinin kümesinin elemanlarını tanım kümesi olarak belirtmiştir. Araştırmacı tarafından verilen tek değişkenli fonksiyonun tanım kümesine ilişkin soruda da benzer hatayı yapan Ayşe, fonksiyon şemalarının eksik olduğunu göstermiştir. Ayrıca Ayşe ve Zehra üç boyutlu uzay şemalarını koordine edememiş ve sekizinci sorunun (b) şıkkında da verilen fonksiyonun tanım kümesine karşılık yüksekliklerini belirleyememiştir.

Bir diğer katılımcı Hüseyin, verilen fonksiyonun tanım kümesinin elemanlarını tam sayı olarak belirlemiş ve buna karşılık görüntü kümesini de tam sayılar olarak göstermiştir. Aşağıdaki Tablo 4.8.2.1.'de öğrencilerin sekizinci soruya ilişkin verdikleri cevapların genetik ayrışımdaki karşılıkları verilmiştir.

Tablo 4.8.2.1. Öğrencilerin Cevaplarının Genetik Ayrışımdaki Karşılıkları

	Geometrik temsili verilen iki değişkenli fonksiyonun tanım kümesini belirleme eylemi	Grafiği verilen iki değişkenli bir fonksiyonun, tanım kümesine karşılık getirilen yüksekliği belirleme eylemi	Grafiği verilen iki değişkenli fonksiyonun tanım kümesinin elemanlarına karşılık gelen yüksekliği belirleme eylemini genelleyerek bir sürece içselleştirme
Yasin	✓	✓	✓
Zehra	✓	Üç boyutlu uzay şemalarını koordine edemiyor.	✓
Hüseyin	-	✓	Verilen fonksiyonun tanım kümesini belirleme eylemini yapamıyor.
Ayşe	Fonksiyon şemaları eksik	Üç boyutlu uzay şemalarını koordine edemiyor.	✓
Adem	✓	✓	✓
Beril	✓	✓	✓

4.9. Uygulamanın Dokuzuncu Sorusu

Aşağıda verilenlerin bir fonksiyon belirtip belirtmediğini saptayınız. Cevabınızı gerekçelendiriniz. Eğer fonksiyonsa tanım ve değer kümeleri hakkında ne söylenebilir?

(a) Girdi: kg cinsinden ağırlık ve cm cinsinden uzunluk

(b) Çıktı: ağırlık ve uzunluğa karşılık kişinin ismi

Bugünden başlayarak Hacettepe Üniversitesi Matematik Öğretmenliği öğrencileri kümesinde;

(a) Girdi: Öğrenci numarası ve öğrencinin tam adı

(b) Çıktı: Öğrencinin kg cinsinden ağırlığı

Uygulamanın bu sorusuyla bir bağıntı olarak fonksiyon tanımını kullanarak verilen girdiler ve çıktılara göre ifadenin fonksiyon belirtip belirtmediğinin belirlenmesi beklenmektedir. Burada fonksiyon kavramının tanımına ilişkin şemalar koordine edilmelidir.

4.9.1. Öğrencilerin Dokuzuncu Soruya Verdikleri Cevaplar

Uygulamaya katılan öğrencilerden beş tanesi bu soruya doğru cevap vermişlerdir. Yalnızca katılımcılardan Zehra, soruya cevap verememiştir. Zehra ile bu soruya ilişkin yapılan görüşme aşağıda verilmiştir.

A:Ne anlıyorsun sorudan?

Ö: Şimdi ben fonksiyon olma şartını kendimce bildiğimi düşünüyorum. Öncelikle işte tanım kümesi dediğim kısım. İşte burada girdi olarak ifade ettiğimiz şeyler. Hepsi için bir sonuç çıkması gerekiyor. Yani şuradan girdi olarak verdiğim elemanların hepsinin bir sonucu olması gerekiyor. Açıkta eleman olmaması gerekiyor.

A:Bu bir fonksiyon mudur? Senin kriterlerine göre?

Ö: Yani her girdi için bir çıktı almam gerekiyordu. Kg cinsinden ağırlık, cm cinsinden uzunluk, ağırlıkla yükseklik ve kişinin ismi… Sanırım fonksiyon olduğunu düşünüyorum ben.

A: Neden?

Ö: Yani… İfade edemiyorum şuan ama…

A: Peki şöyle sorayım. Tanım kümesi ne verilen ifadenin?

Ö: Ağırlık ve uzunluk. Yani ben içeriye ağırlık ve uzunluk atmışım. Kişinin ismi çıkıyor.

A: Peki bu bir fonksiyon mudur?

Ö: Yani ben içeriye ağırlık ve uzunluk atıyorsam… Ya fonksiyonun böyle olmasını algılayamıyorum. Bu sistemde anlamıyorum işte. Bağdaştıramıyorum yani.

Zehra ile yapılan görüşmelerden, Zehra'nın fonksiyon tanımını bildiği, fakat fonksiyon kavramına ilişkin şemaları koordine edemediği gözlenmektedir.

4.9.2. Dokuzuncu Sorunun Genel Değerlendirmesi

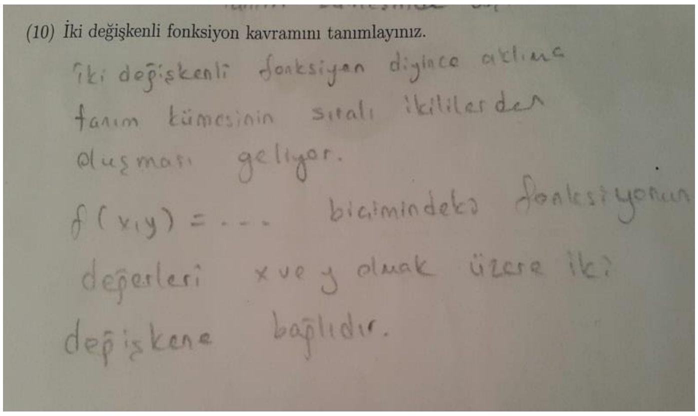
İki değişkenli fonksiyonun günlük hayattan bir karşılığı olan bu soruda katılımcılardan Zehra sorun yaşamıştır. Zehra fonksiyon tanımını bilmesine rağmen uygulamaya dökememiştir. Diğer öğrenciler bu soruda sorun yaşamamışlardır.

4.10. Uygulamanın Onuncu Sorusu

Uygulamanın onuncu sorusunda öğrencilerden iki değişkenli fonksiyon kavramını tanımlamaları istenmiştir. Bu soruyla öğrencilerin tek değişkenli fonksiyon kavramının tanımını genelleyerek iki değişkenli fonksiyonları tanımlama sürecine içselleştirmesi beklenmektedir.

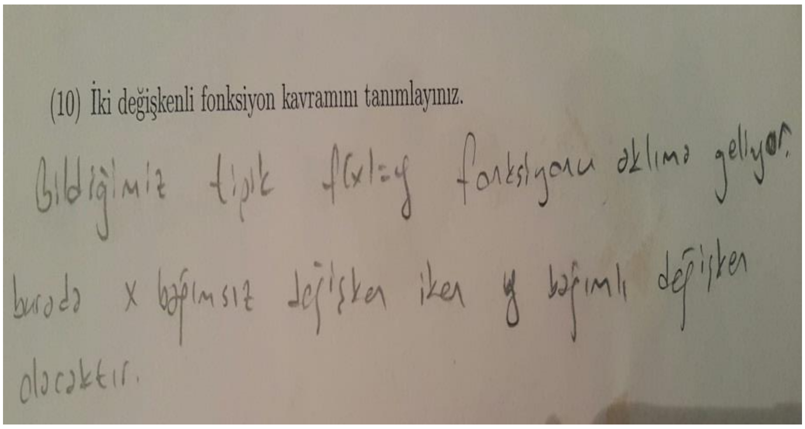
4.10.1. Öğrencilerin Onuncu Soruya Verdikleri Cevaplar

Çalışmaya katılan öğrencilerden dört tanesi uygulamanın onuncu sorusuna doğru cevap verememiştir. Soruya yalnızca Zehra ve Yasin doğru yanıt vermiştir. Soruya doğru cevap veremeyen öğrencilerin tek değişkenli fonksiyonları düşünmedikleri gözlenmektedir. Aşağıda soruya doğru cevap veremeyen öğrencilerin çözümleri verilmiştir.


(10) İki değişkenli fonksiyon kavramını tanımlayınız.

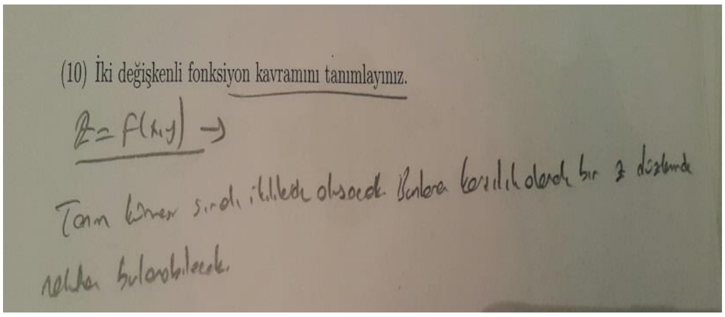
İki değişkenli fonksiyon deyince aklıma tanım kümesinin sıralı ikililerden oluşması geliyor.
$f(x,y) = \dots$ biçimindeki fonksiyonun değerleri x ve y olmak üzere iki değişkene bağlıdır.

Şekil 4.10.1.1. Ayşe' nin onuncu soruya verdiği yanıt


(10) İki değişkenli fonksiyon kavramını tanımlayınız.

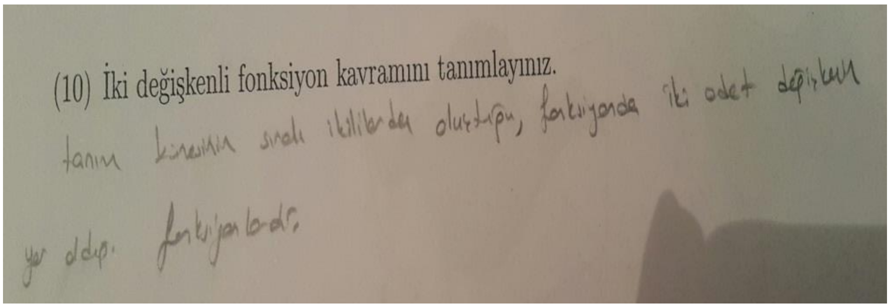
Bildiğimiz tipik $f(x)=y$ fonksiyonu aklıma geliyor. burada x bağımsız değişken iken y bağımlı değişken olacaktır.

Şekil 4.10.1.2. Beril' in onuncu soruya verdiği yanıt


(10) İki değişkenli fonksiyon kavramını tanımlayınız.

$z=f(x,y) \rightarrow$
Tanım kümesi sıralı ikililerden oluşacak. Bunlara karşılık olarak bir z düzleminde noktalar bulunabilecek.

Şekil 4.10.1.3. Hüseyin'in onuncu soruya verdiği yanıt


(10) İki değişkenli fonksiyon kavramını tanımlayınız.
tanım kümesinin sıralı ikililerden oluştuğu, fonksiyonda iki adet değişken
yer aldığı. fonksiyonlardır.

Şekil 4.10.1.4. Adem’ in onuncu soruya verdiği yanıt

Öğrencilerle soruya ilişkin yapılan görüşmelerde, araştırmacı tarafından tek değişkenli fonksiyonların hatırlatılması üzerine, bütün öğrenciler genelleme yaparak iki değişkenli fonksiyonların tanımını yapabilmişlerdir. Buna örnek olarak Beril ile yapılan görüşme aşağıdadır.

A: Formal olarak iki değişkenli fonksiyonun tanımı nedir?

Ö: Ben bunlarda çok iyi değilim.

A: Peki şöyle sorayım. Fonksiyon nedir?

Ö: Fonksiyon, tanım kümesi ve değer kümesi olan, tanım kümesindeki her elemanı değer kümesindeki yalnız bir elemana götüren bağıntı demek.

A: Bunu iki değişkenli reel değerli reel fonksiyonlar için üç boyutlu uzay üzerinde düşünürsen?

Ö:O zaman R^2’den R kümesine giden ve tanım kümesindeki her elemanı bir görüntüye götüren bağıntı olur.

4.10.2. Onuncu Sorunun Genel Değerlendirmesi

Öğrencilerden bu soruda formal tanım yapması beklenirken; Adem, Hüseyin, Beril ve Ayşe uygulamada iki değişkenli fonksiyon tanımını ortaya koyamamışlardır. Ancak yapılan görüşmeler, öğrencilerin tek değişkenli fonksiyonları genelleme yoluyla bir tanım ortaya koymayı düşünmediklerini göstermektedir. Tek değişkenli fonksiyon kavramının formal tanımını bütün katılımcılar yapabilmektedir. Bu öğrenciler araştırmacının hatırlatmasıyla beraber fonksiyon kavramı şemalarını kullanarak iki değişkenli fonksiyonlara genelleyebilmektedirler.

4.11. Uygulamanın Onbirinci Sorusu

Aşağıda denklemi verilen fonksiyonların verilen grafiklerden hangisine ait olduğunu belirleyiniz. Cevabınızı detaylandırınız.

(a) $g(x, y) = \sin(x) + y$

(b) $h(x, y) = \sin(xy)$

Öğrencilerden soruda verilen altı tane grafikten (Ek. 2) uygun olanı belirlemesi beklenmektedir. Öğrencilerin bu soruyu çözebilmesi için tek değişkenli fonksiyon şemalarını R^2 ve R^3 şemalarıyla koordine etmeleri gerekmektedir.

4.11.1. Öğrencilerin Onbirinci Soruya Verdikleri Cevaplar

Uygulamaya katılan hiçbir öğrenci bu soruya doğru yanıt verememiştir. Katılımcılardan Yasin ile yapılan görüşme aşağıda verilmiştir.

A: Soru hakkında ne düşünüyorsun?

Ö: Yani burada sinüs fonksiyonu periyodik olduğu için şey yaptım, dalgalanmanın olacağını düşündüm.

A: Peki bir şey sorabilir miyim? Mesela şöyle bir şeyle karşılaşsan, $sin(5x)$'in grafiği hangisidir? (Araştırmacı Şekil 4.11.1.1.' deki soruyu soruyor).

Ö: Şunu seçerim (doğru seçeneği söylüyor).

A: Neden?

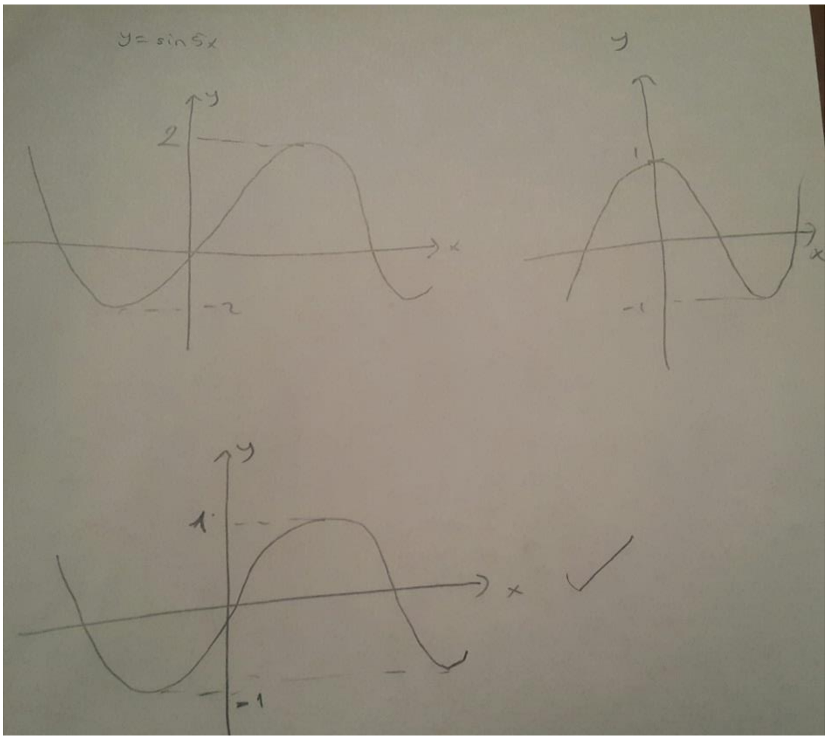
Ö: Sinüs fonksiyonunun aralığı [-1,1] olduğu için.

A: İkinci grafikteki de o aralıkta ama?

Ö: Bu sefer de $x = 0$ noktasını koydum. İkinci grafik sağlamıyor.

A: Peki soruda öyle bir şansın olabilir mi?

Ö: Olamaz gibi. Ben şuan koordinatları oturtamadım buraya da.



Şekil 4.11.1.1. Yasin ile onbirinci soruya ilişkin yapılan görüşmede araştırmacının sorduğu soru

Görüldüğü üzere, Yasin fonksiyon şemaları ile R^2 şemalarını koordine edebiliyorken R^3 şemalarıyla koordine edememektedir. Araştırmacının görüşme esnasında iki boyutlu uzayda sorduğu tek değişkenli fonksiyona ilişkin grafiği öğrenci belirleyebilmiş, fakat üç boyutlu uzaya geçildiğinde benzer düşünceyi burada uygulayamamıştır.

4.11.2. Onbirinci Sorunun Genel Değerlendirmesi

Öğrencilerin hiçbiri bu soruya doğru cevap verememiştir. Uygulamaya katılan öğrenciler tek değişkenli fonksiyon şemalarını R^2 ve R^3 şemalarıyla koordine ederek iki değişkenli fonksiyon nesnesine sarmalayamamışlardır.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Tezin bu bölümünde bulgular ve yorumlardan elde edilen sonuçlar ve buna bağlı olarak geliştirilen önerilere yer verilmiştir.

APOS teorisi çerçevesinde iki değişkenli fonksiyonların kavramsal anlamalarına ilişkin oluşturulan genetik ayrışım, bu kavrama yönelik öğrencilerin zihinsel yapılarını ortaya koymaktadır. Buradan hareketle, araştırmada öğrencilerin iki değişkenli fonksiyonları anlamalarının APOS teorik çerçevesinde incelenebilmesi için, katılımcılara genetik ayrışıma bağlı olarak hazırlanan sorular sorulmuştur.

Uygulamanın üç boyutlu uzay şemaları ve iki değişkenli fonksiyon şemaları olmak üzere iki kısımdan oluştuğu düşünülürse, Trigueros ve Martinez-Planell (2007), Martinez-Planell ve Trigueros Gaisman (2012) tarafından oluşturulan genetik ayrışım çerçevesinde üç boyutlu uzay nesnesini oluşturan Yasin dışında öğrenci bulunmamaktadır.

Katılımcılardan Ayşe, düzlemdeki bir noktaya bir yükseklik atama eylemini gerçekleştirememiş ve $\mathbb{R}^2$' nin alt kümelerine bir yükseklik karşılık getirme eylemini yapamamıştır. Buradan hareketle Ayşe için genetik ayrışımın iki değişkenli fonksiyonlar için ön şemalarda ifade ettiği uzay sezgisi şemalarının eksik olduğu söylenebilir. Ayşe buna bağlı olarak üç boyutlu uzaylarda sorun yaşamıştır. Genel olarak Ayşe' nin üç boyutlu uzay şemalarında eylem aşamasında kaldığı gözlemlenmiştir.

Katılımcılar arasında en yüksek akademik ortalamaya sahip olan Ayşe' dir. Çalışmanın sonuçlarına bakıldığı zaman, öğrencilerin akademik ortalamaları ile iki değişkenli fonksiyon kavramını anlamaları arasında bağlantı yoktur. Bu durum analiz dersi programlarının yeterliğini sorgulatabilir. Katılımcıların seçilmesindeki ön koşul, Analiz ve Analitik Geometri derslerinin almış ve bu derslerde başarılı olmuş olmaktır. Bu derslerin öğrenme çıktılarına bakıldığında, bu derste başarılı olmuş öğrencilerin iki ve üç boyutlu uzayları anlayabilmesi, çok değişkenli fonksiyonlarla çalışabilmesi beklenmektedir. Ancak bu öğrenme çıktılarıyla uyumlu olduğu düşünülen iki değişkenli fonksiyonların zihinsel yapılanmasına ilişkin genetik ayrışımın bu çalışma özelinde ortaya koyduğu sonuçlara bakıldığında ortaya farklı bir durum çıkmaktadır. Burada geleneksel Analiz dersi öğretiminin kavramsal anlama üzerinde etkili olmadığı sonucuna varılabilir. Analiz dersi öğretiminin yeniden gözden geçirilmesi, analiz dersine ilişkin kavramların öğrenciler tarafından anlamasının sağlanması için APOS teorisi çerçevesinde yapılan genetik ayrışıma uygun olarak dizayn edilmesi önerilebilir.

Uygulamaya katılan öğrencilerden Hasan, uzaydaki noktalar arasındaki dönüşümleri genelleyerek üç boyutta bir nesne oluşturma sürecini gerçekleştirememiştir. Hasan, üç boyutlu uzayın alt kümesini grafik olarak hayal edemeyerek düzlemi çizememiştir. Ancak küme başka türlü verildiğinde üç boyutlu uzayda düzlem oluşturabilmiştir. Buradan hareketle Hasan' ın küme şemalarında eksik olduğu söylenebilir. Ayrıca verilen bir ifadenin geometrik dönüşümünü yapmakta zorlandığı da ifade edilebilir. Genel olarak bir noktaya bir yükseklik atama eylemini içselleştirememiş öğrencilerin R^2' nin alt kümelerine uzayda bir nokta atama eylemlerini yapamadığı gözlenmiştir. Buradan hareketle Trigueros ve Martinez-Planell (2007) tarafından üç boyutlu uzay kavramına ilişkin oluşturulan genetik ayrışımın tutarlılık gösterdiği söylenebilir.

Katılımcılardan Zehra, düzlemde verilen bir kümeye yükseklik atama eylemini gerçekleştirememiş fakat bu eylemi genelleyerek uzayda bir nesne oluşturabilmiştir. Bunun nedenlerine bakıldığında, "yükseklik atama" ifadesinin öğrenci tarafından üç boyut kazandırma olarak anlaşıldığı görülmektedir. Buradan hareketle öğrencinin, üç boyutta iki boyutlu nesneleri konumlandırmakta zorluk çektiği söylenebilir.

R^3' te bir şekli R^2 düzlemine tersleme yaparken öğrencilerin farklı metotlar uyguladıkları görülmüştür. Bu metotlardan ilki; uzayda verilen şeklin cebirsel ifadesini oluşturarak, kesit alınacak düzlemi ifadede yerine koyarak düzlemde oluşacak şeklin cebirsel ifadesini oluşturmuşlardır. Daha cebirsel ifadesini düzlemde çizmişlerdir. Burada yapılanın, üç boyutlu uzayda verilen bir şeklin cebirsel dönüşümünü yapma eylemi, elde edilen cebirsel ifadede noktayı yerine koyma eylemi ile birlikte R^2' nin bir alt kümesini geometrik olarak gösterme eylemi oluşturmaktadır. Bu aşamada öğrencilerin R^3 uzayının alt kümelerini koordine etmesi gerekmektedir. Sorunun genetik ayrışımda yer alan basamağı ise öğrenciden R^3 uzayından R^2 uzayına tersleme yapması beklenmektedir. Soruyu bu şekilde düşünen Zehra, tamamen üç boyutlu uzaydaki bir nesneyi tersleyerek bir düzlemdeki görüntüsünü belirlemiştir. Bu açıdan bakıldığında bu iki durumu analiz etmek için farklı türden sorular hazırlanabilir. Genetik ayrışım basamaklarında öğrencilerin $\mathbb{R}^3$ uzayında verilen bir cismi cebirsel ifadeye dönüştürmesi yer alabilir. Bu ifadenin APOS teoride yer alan hangi zihinsel yapıya ait olduğunu belirlemek için çalışmalar yapılabilir.

Genel olarak öğrenciler üç boyutlu uzayın alt kümelerinin koordine edilmesinin gerektiği beşinci soruda zorlanmışlardır. Bu sonuçların Martinez-Planell ve Trigueros Gaisman (2012)' ın yaptıkları çalışmada elde ettiği sonuçlarla uyumlu olduğu görülmüştür. Öğrencilerden Yasin dışında, üç boyutlu uzay kavramına ilişkin süreç aşamasına gelen öğrencilerin dahi bu soruyu çözememesi, genetik ayrışımda üç boyutlu uzay şemaları için ara basamaklar gerektiğini düşündürmektedir. Bu nedenle yapılan genetik ayrışım inceltilebilir. Öğrencilerin bu soruya verdikleri cevaplar incelendiğinde, öğrenciler verilen kümenin noktalarını belirleyebiliyorken; verilen düzlemle arakesit almakta zorluk çekmektedirler. Öğrenciler verilen kümedeki cebirsel ifadeyi grafiksel olarak ifade edebilirken, verilen düzlemi bu cebirsel ifadeyle koordine edememektedir. Bu anlamda üç boyutlu uzaydaki nesnelerle düzlemlerin arakesitlerine dair bir zihinsel yapı oluşturulmalıdır.

İki değişkenli fonksiyon kavramına ilişkin öğrencilerin zihinsel yapıları incelendiğinde, öğrencilerin üç boyutlu uzayla ilişki kurmakta zorlandığı görülmüştür. Bu durumun öğrencilerin cebirsel veya analitik denklemi verilen ifadeyi görselleştirmekte zorlanmalarına sebep olduğu söylenebilir.

Tablo olarak ve cebirsel ifadesi verilen bir iki değişkenli fonksiyonun tanım kümesini belirlemede, tanım kümesinin elemanlarına bir yükseklik karşılık getirme eyleminde, bu eylemi genelleyerek bir görüntü kümesi oluşturma sürecinde sorun yaşamayan öğrenciler, aynı performansı üç boyutlu uzaylarda benzer soruda gösterememiştir. Örneğin Ayşe, düzlemde verilen bir noktaya bir yükseklik karşılık getiremezken, cebirsel ifadesi veya tablo halinde verilmiş olan iki değişkenli fonksiyon için bu eylemleri yapabilmektedir. Bu durum öğrencinin iki değişken fonksiyon kavramıyla üç boyutlu uzayı ilişkilendirememesinden kaynaklanmaktadır. Cebirsel olarak iyi işlemler yapabilen öğrenciler, söz konusu geometrik temsil olunca sorun yaşamaktadırlar Bu sonuç alan yazında geçen birçok çalışmayla benzerlik göstermektedir (Gleason & Hallet, 1992; Berry & Nyman, 2003; Selden, Selden & Mason, 1994; Aspinwall, Shaw & Presmeg, 1997).

Katılımcılardan Zehra, fonksiyon tanımını kullanarak iki değişkenli fonksiyonun tanımına ilişkin günlük hayattan bir uygulama sorusunda zorluk yaşamıştır. Yapılan görüşmelerde Zehra' nın fonksiyonun tanımını bilmesine rağmen fonksiyon kavram şemalarını koordine edemediği ve fonksiyon tanımını ifadeye uyarlayamadığı görülmüştür. Matematiksel kavramları günlük hayatla bağdaştıramama çok temel bir sorundur. Uygulamalı matematiğin önem kazandığı günümüzde, lisans matematiği için kavramların soyut işlemlerle öğretilmesi; tanım, teorem, ispat döngüsünden çıkması gerekmektedir. Zehra örneğinde görüldüğü gibi, bir kavramın tanımını bilmek o kavramın anlamasının gerçekleştiğini göstermemektedir.

İki değişkenli fonksiyonların formal tanımının istendiği soruda öğrenciler tek değişkenli fonksiyonları düşünerek genelleme yoluna gidememişlerdir. Sonuçlar uygulamaya katılan tüm öğrencilerin fonksiyonları bildiğini fakat, iki değişkenli fonksiyonlara genelleyerek bir sürece içselleştiremediğini göstermektedir. Araştırmacının tek değişkenli fonksiyonların tanımından yola çıkılabileceğini hatırlatması üzerine tüm öğrenciler soruyu yanıtlayabilmişlerdir. Bu durum soruyu öğrencilerin iki değişkenli fonksiyon kavramını tanımlayabilmek için dış uyarıcılara ihtiyaç duyduğunu göstermektedir. Buradan hareketle bu soruyu yapamayan öğrencilerin iki değişkenli fonksiyon kavramını bir sürece içselleştiremedikleri söylenebilir.

Son soruda öğrencilerin tek değişkenli fonksiyon şemalarını R^2 ve R^3 şemalarıyla koordine etmeleri beklenmektedir. Ancak soruya hiçbir öğrenci cevap verememiştir. Bu soru daha derin öğrenmeleri gerektirdiğinden ve uygulamaya katılan öğrencilerin iki değişkenli fonksiyon kavramını anlamalarının süreç aşamasından öteye gidememesinden çözülemediği düşünülmektedir. Ancak tüm soruları doğru yanıtlayan Yasin'in bu soruyu yapamaması üzerine öğrenciyle görüşme yapılmıştır. Öğrencinin R^2' de verilen bir fonksiyonun grafiğini belirleyebilmesi üzerine, bu durumu üç boyutlu uzayda iki değişkenli fonksiyona uyarlaması istenmiştir. Ancak bu durum, R^3 uzayından iki boyutlu uzaya tersleme ve tek değişkenli fonksiyon üzerinden düzlemde oluşan şekli belirleyebilme ve tekrar üç boyutlu uzaya genelleme yaparak bir sürece içselleştirme gerektiğinden öğrenci tek değişkenli fonksiyon şemalarını R^2 ve R^3 şemalarıyla koordine edememiştir. Bu nedenle bu sorunun çok zor olduğu düşünülmektedir. Bu aşamaların ayrı ayrı incelenmesi ve genetik ayrışımın ona göre düzenlenmesi gerektiği düşünülmektedir.

KAYNAKÇA

Açıl, E. (2015). *Ortaokul 3. sınıf öğrencilerin denklem kavramına yönelik soyutlama süreçlerinin incelenmesi: APOS teorisi.* (Yayınlanmamış Doktora Tezi). Atatürk Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Akkoç, H. (2006). Fonksiyon kavramının çoklu temsillerinin çağrıştırdığı kavram görüntüleri. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 30,* 1-10.

Alakoç, Z. (2003). Matematik öğretiminde teknolojik modern öğretim yaklaşımları. *The Turkish Online Journal of Educational Technology, 2(1),* 43-49.

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M. & Weller, K. (2014). APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education. New York, Heidelberg, Dordrecht, London: Springer.

Asiala, M., Dubinsky, E., Cottrill, J. & Schwingendorf, E. K. (1997). The Development of Students' Graphical Understanding of the Derivative. *Journal of Mathematical Behavior, 16(4),* 399-431.

Aspinwall, L., Shaw, K. L. and Presmeg, N. C. (1997). Uncontrollable Mental Imagery: Graphical Connections Between a Function and Its Derivative. *Educational Studies in Mathematics, 33,* 301-317.

Aspinwall, L. & Shaw, K. L. (2002). Representations in Calculus: Two Contrasting Cases. *Mathematics Teacher, 95,* 434-439.

Baştürk, S., Dönmez, G. (2011). Matematik öğretmen adaylarının limit ve süreklilik konusuyla ilgili kavram yanılgıları. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi, 5(1),* 225-249.

Berry S. J. and Nyman A. M. (2003). Promoting Students' Graphical Understanding of the Calculus. Journal of Mathematical Behavior, 22, 481–497.

Biber, A. Ç. (2010). *Ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının tek ve iki değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği ile ilgili kavram bilgileri arasındaki ilişkilerin incelenmesi.* (Yayınlanmamış Doktora Tezi). Gazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Bishop, A. J. (1989). Review of research on visualization in mathematics education. *Focus On Learning Problems In Mathematics, 11 (1),* 7-16.

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J. & Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics, 23,* 247-285.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwinngendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process schema. *Journal of mathematical behavior, 15,* 167-192.

Çekmez, E. (2013). *Dinamik matematik yazılımı kullanımının öğrencilerin türev kavramının geometrik boyutuna ilişkin anlamalarına etkisi.* (Yayınlanmamış Doktora Tezi). Karadeniz Teknik Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Çetin, İ. (2009). *Students' understanding of limit concept: An APOS perspective.* (Yayınlanmamış Doktora Tezi). Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara.

Deniz, Ö. (2014). *8. Sınıf öğrencilerinin gerçekçi matematik eğitimi yaklaşımı altında eğim kavramını oluşturma süreçlerinin APOS teorik çerçevesinde incelenmesi.* (Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi). Anadolu Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.

Denning, P. J. (1983). A nation at risk: the imperative for educational reform. *Communications of the ACM, 26(7).* 467-478.

Dubinsky, E. (Eds.) (1991). *Reflective abstraction in advanced mathematical thinking,* Advanced mathematical thinking (pp. 95-123). Dordrecht. The Netherlands: Kluwer.

Dubinsky, E. (1997). Some thoughts on a first course in linear algebra on the college level. In D. Carlson, C. Johnson, D. Lay, D. Porter, A. Watkins, & W. Watkins (Eds.), *Resources for teaching linear algebra (MAA Notes, Vol. 42, pp. 85–106).* Washington, DC: Mathematical Association of America.

Dubinsky, E., Weller, K. & Arnon, I. (2013). Preservice teachers' understanding of the relation between a fraction or integer and its decimal expansion: The case of 0.999… and 1. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 13(3),* 232-258.

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. & Brown, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS analysis: Part 1. *Educational Studies in Mathematics, 58,* 335–359.

Erlandson, D. A., Harris, E. L., Skipper, B., & Allen, S. D. (1993). *Doing naturalistic inquiry: A guide to methods*. Newbury Park, CA: Sage Publications.

Ferrari, P. L. (2003). Abstraction in mathematics. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London B, 358,* 1225-1230.

Fischbein, E. (1982). Intuition and Proof. *For the Learning of Mathematics, 3(2),* 9-18.

Fraenkel, J. R., Wallen, N. E., Hyun, H. H. (2012). *How to design and evaluate research in education (8th edition).* New York: McGraw-Hill Humanities/Social Sciences/Languages.

Ganter, S. L. (2001). *Changing calculus: a report on evaluation efforts and national impact from 1988 to 1998.* Washington, DC: Mathematical Association of America.

Gleason, M. A. and Hallett, H. D. (1992). The calculus consortium based at harvard university. *Focus on Calculus 1*, 1-4.

Guzman, M. (2002). *The role of visualization in the teaching and learning of mathematical analysis.* The Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics, Hersonissos, Crete, Greece.

Hershkowitz, R. (1989). Visualization in geometry: two side of the coin. *Focus on learning Problems in Mathematics. 11(1),* 61-76.

Hofe, R. V. (1999). *Problems with the limit concept - on a case study of a calculus lesson within a computer-based learning environment.* In Fresenborg, E. C., Maier, H., Reiss, K., Toerner, G., and Weigand, H. G., editors, Selected Papers from the Annual Conference of Didactics of Mathematics, 1997.

İnan, C. (2006). Matematik öğretiminde oluşturmacı yaklaşım uygulmasının örnekleri. *Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Dergisi, 6,* 40-50.

Kabael, T. (2011). Tek değişkenli fonksiyonların iki değişkenli fonksiyonlara genellenmesi, fonksiyon makinesi ve APOS. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri, 11(1),* 465-499.

Kirk,J. & Miller, M.L. (1986). *Reliability and validity in qualitative research.* Beverly Hills, Ca.: Sage Publications.

Kleiner, I. (1989). Evolution of the function concept: A brief survey. *The College Mathematics Journal, 20(4),* 282-300.

LeCompte, M. D. & Goetz, J.P.(1982). Problems of reliability and validity in ethnographic research. *Review of Educational Research, 52,* 31-60.

Lincoln, Y.S. & Guba, E. G. (1985). *Naturalistic inquiry,* Beverly Hills: Sage.

Martinez-Planell, R. & Trigueros Gaisman, M. (2012). Students' understanding of the general notion of a function of two variables. *Educational Studies in Mathematics, 81,* 365-384.

McDonald, M., Mathews, D., & Strobel, K. (Eds.) (2000). *Understanding sequences: A tale of two objects.* Research in Collegiate mathematics education IV. CBMS issues in mathematics education (Vol.8, pp. 77-102).

Miles, M. B. & Huberman, A.M. (1994). *Qualitative data analysis: An expanded sourcebook. (2nd Edition).* Calif: SAGE Publications.

Milli Eğitim Bakanlığı (MEB) (1966). *Türk Ansiklopedisi.* Ankara: Milli Eğitim Basımevi

Nasibov, F. ve Kaçar, A. (2005). Matematik ve matematik eğitimi hakkında. *Kastamonu Eğitim Dergisi, 13(2),* 339-346.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* [Çevrim-içi: http://www.mathcurriculumcenter.org/PDFS/CCM/summaries/standards_summary.pdf , Erişim Tarihi: 13 Haziran 2017.]

Patton, M. K. (1987). *How to use qualitative methods in evaluation.* Newbury Park: SAGE publications.

Piaget, J. (1965). *The child's conception of number.* New York: W. W. Norton.

Piaget, J. (1971). *Biology and knowledge.* Chicago: University of Chicago Press.

Piaget, J. (1973). *Comments on mathematical education.* Developments in mathematical education: Proceedings of the second international congress on mathematical education (pp. 79-87). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Piaget, J. (1985). *The equilibration of cognitive structures.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Ponte, J. P. (1992). The history of the concept of function and some educational implications. *Mathematics Educator, 3(2),* 3-8.

Roa-Fuentes, S., & Oktaç, A. (2010). Construccion de una descomposicion genetica: Analisis teorico del concepto transformacion lineal. *Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa, 13(1),* 89–112.

Selden, J., Selden, A. and Mason, A. In J. Kaput and E. Dubinsky, (Eds.) (1994). *Even good calculus students can't solve nonroutine problems.* Research issues in undergraduate mathematics learning: Preliminary analysis and results. (pp. 19-26). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Sierpinska, A. (1994). *Understandings in Mathematics.* London: Falmer.

Sinan, O. (2007). *Fen Bilgisi Öğretmen Adaylarının Proteinler ve Protein Sentezi İle İlgili Kavramsal Anlamaları*. (Yayınlanmamış Doktora Tezi), Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Balıkesir.

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. In R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), (2000). *Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements.* Research design in mathematics and scienc education (pp. 267-307). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Stenger, C., Weller, K., Arnon, I., Dubinsky, E. & Vidakovic, D. (2008). A search for a constructivist approach for understanding the uncountable set P(N). *Revisto latinoamericano de Investigacion en Matematicas Educativas, 11(1),* 93-126.

Stewart, C. J., Cash, W. B. (1985). *Interviewing: Principles and practices (4th edition).* Dubuque, Iowa: W.C. Brown Publishers.

Tall, D. (1991). *Advanced Mathematical Thinking.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Tall, D. (1992). *Students' difficulties in calculus.* Plenary presentation in working group 3, ICME, Quebec, Canada, August 1992.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12,* 151-169.

Trigueros Gaisman, M. & Martinez-Planell, R. (2007). *Visualization and abstraction: Geometric representation of function of two-variables.* Proceedings of the 29th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychlogy of Mathematics Education, Stateline, NV: University of Nevada, Reno.

Trigueros, M., & Martinez-Planell, R. (2010). Geometrical representations in the learning of two-variable functions. *Educational Studies in Mathematics, 73,* 3–19.

Trigueros, M., & Oktac¸, A. (2005). La theorie APOS et l'enseignement de l'Algebre Lineaire. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. *Revue internationale de didactique des mathematiques (Vol. 10, pp. 157–176).* IREM de Strasbourg, Universite Louis Pasteur.

Tzirias, W. (2011). *APOS theory as a framework to study the conceptual stages of related rates problems.* (Dissertation Masters Thesis). Concordia University.

Vinner, S. & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education, 20(4),* 356-366.

Yılmaz, R. (2011). *Matematiksel soyutlama ve genelleme süreçlerinde görselleştirme ve rolü.* (Yayınlanmamış Doktora Tezi). Gazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Weber, E., & Thompson, P. W. (2014). Students' images of two-variable functions and their graphs. *Educational Studies in Mathematics, 87(1),* 67-85.

Weller, K., Arnon, I., & Dubinsky, D. (2009). Pre-service teachers' understanding of the relation between a fraction or integer and its decimal expansion. *Canadian Journal for Science, Mathematics, and Technology Education, 9(1),* 5 – 28.

Weller, K., Arnon, I. & Dubinsky, E. (2011). Preservice teachers' understanding of the relation between a fraction or integer and its decimal expansion: Strength and stability of belief. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 11,* 129-159*.*

Yerushalmy, M. (1997). Designing representations: reasoning about functions of two-variables. *Journal for Research in Mathematics Education, 28,* 431-466.

Yıldırım, A., Şimşek, H. (2013). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri (9. Baskı).* Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Yin, R. K. (2003). *Case Study Research: Design and Methods (3rd edition).* Sage Publications, Thousand Oaks, CA.

Zazkis, R., Dubinsky, E. & Dautermann, J. (1996). Coordinating Visual and Analytic Strategies: A Study of Students' Understanding of the Group D4. *Journal for Research in Mathematics Education, 27,* 435-457.

EKLER DİZİNİ

EK 1. ETİK KOMİSYONU ONAY BİLDİRİMİ

T.C.
HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
Rektörlük

Sayı : 35853172/ 433- 1194

3 ? Mart 2017

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

İlgi: 01.03.2017 tarih ve 575 sayılı yazınız.

Enstitünüz Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı tezli yüksek lisans programı öğrencilerinden **Özgün ŞEFİK**'in **Doç. Dr. Şenol DOST** danışmanlığında yürüttüğü **"Öğrencilerin İki Değişkenli Fonksiyon Kavramını Anlamalarının APOS Teorisi ile Analizi"** başlıklı tez çalışması, Üniversitemiz Senatosu Etik Komisyonunun **14 Mart 2017** tarihinde yapmış olduğu toplantıda incelenmiş olup, etik açıdan uygun bulunmuştur.

Bilgilerinizi ve gereğini rica ederim.

Prof. Dr. Rahime M. NOHUTCU
Rektör a.
Rektör Yardımcısı

Hacettepe Üniversitesi Rektörlük 06100 Sıhhiye-Ankara
Telefon: 0 (312) 305 3001 - 3002 • Faks: 0 (312) 311 9992
E-posta: yazimd@hacettepe.edu.tr • www.hacettepe.edu.tr

Ayrıntılı Bilgi için:
Yazı İşleri Müdürlüğü
0 (312) 305 1008

EK 2. ORİJİNALLİK RAPORU

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS/DOKTORA TEZ ÇALIŞMASI ORİJİNALLİK RAPORU

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ

EĞİTİM BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANA BİLİM / BİLİM DALI BAŞKANLIĞI'NA

Tarih: 15/06/2017

Tez Başlığı : ÖĞRENCİLERİN İKİ DEĞİŞKENLİ FONKSİYON KAVRAMINI ANLAMALARININ APOS TEORİSİ İLE ANALİZİ

Yukarıda başlığı verilen tez çalışmamın tamamı (kapak sayfası, özetler, ana bölümler, kaynakça) aşağıdaki filtreler kullanılarak **Turnitin** adlı intihal programı aracılığı ile kontrol edilmiştir. Kontrol sonucunda aşağıdaki veriler elde edilmiştir.

Rapor Tarihi	Sayfa Sayısı	Karakter Sayısı	Savunma Tarihi	Benzerlik Endeksi	Gönderim Numarası
15/06 /2017	77	120251	15/06 /2017	%4	825179022

Uygulanan filtreler:

1- Kaynakça hariç
2- Alıntılar dâhil
3- 5 kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç

Hacettepe Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Tez Çalışması Orijinallik Raporu Alınması ve Kullanılması Uygulama Esasları'nı inceledim ve çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

15.06.2017

Adı Soyadı: Özgün ŞEFİK

Öğrenci No: N12222654

Anabilim Dalı: Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi

Programı: Matematik Eğitimi

Statüsü: ☒ Y.Lisans ☐ Doktora ☐ Bütünleşik Dr.

DANIŞMAN ONAYI

UYGUNDUR.

Doç. Dr., Şenol DOST

HACETTEPE UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF EDUCATIONAL SCIENCES
THESIS/DISSERTATION ORIGINALITY REPORT

HACETTEPE UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF EDUCATIONAL SCIENCES
TO THE DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND SCIENCE EDUCATION

Date: 15/06/2017

Thesis Title : ANALYSIS OF STUDENTS' UNDERSTANDING OF THE CONCEPT OF TWO VARIABLES FUNCTIONS BY APOS THEORY

The whole thesis that includes the *title page, introduction, main chapters, conclusions and bibliography section* is checked by using **Turnitin** plagiarism detection software take into the consideration requested filtering options. According to the originality report obtained data are as below.

Time Submitted	Page Count	Character Count	Date of Thesis Defence	Similarity Index	Submission ID
15/06 /2017	77	120251	15/06 /2017	%4	825179022

Filtering options applied:
1. Bibliography excluded
2. Quotes included
3. Match size up to 5 words excluded

I declare that I have carefully read Hacettepe University Graduate School of Educational Sciences Guidelines for Obtaining and Using Thesis Originality Reports; that according to the maximum similarity index values specified in the Guidelines, my thesis does not include any form of plagiarism; that in any future detection of possible infringement of the regulations I accept all legal responsibility; and that all the information I have provided is correct to the best of my knowledge.

I respectfully submit this for approval.

Özgün Şefik
15.06.2017

Name Surname: Özgün ŞEFİK

Student No: N12222654

Department: Mathematics and Science Education

Program: Mathematics Education

Status: ☒ Masters ☐ Ph.D. ☐ Integrated Ph.D.

ADVISOR APPROVAL

APPROVED

Ph.D. Şenol DOST

EK 3. İKİ DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARI KAVRAMSAL ANLAMA SORULARI

Sevgili öğrenciler,

Bu çalışmada lisans öğrencilerinin iki değişkenli fonksiyonların kavramsal anlamasının analiz edilmesini hedefleyen bazı sorular bulunmaktadır. Bu sorular yürütmekte olduğum Hacettepe Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Eğitimi Programı Yüksek Lisans tez çalışması kapsamında kullanılacak olup, araştırma dışında kesinlikle kullanılmayacaktır. Sorulara içtenlikle ve samimiyetle vereceğiniz cevaplar ve araştırmama verdiğiniz katkıdan dolayı teşekkür ederim.

Arş. Gör. Özgün ŞEFİK

Doç. Dr. Şenol DOST
(Tez Danışmanı)

AD-SOYAD:

Mail Adresi:

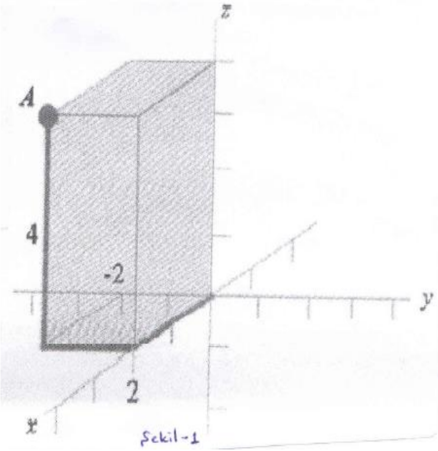
Tel No:

İKİ DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR-KAVRAMSAL ANLAMA

(1.a.) Düzlemde $(1, 2)$ noktasına $z = 3$ yüksekliği karşılık getirildiğinde oluşan yeni noktayı, üç boyutlu uzayda gösteriniz.

(1.b.) $(0,-2,2)$ ve $(-3,2,-2)$ noktalarını üç boyutlu uzayda gösteriniz.

(1.c.) Şekil-1'de verilen A noktasının (x,y,z) koordinatlarını bulunuz.



2) xyz-koordinat sisteminde, **doğu** x ekseninde pozitif tarafı, **batı** x ekseninde negatif tarafı, **kuzey** y ekseninde pozitif tarafı, **güney** y ekseninde negatif tarafı, **yukarı** z ekseninde pozitif tarafı, **aşağı** z ekseninde negatif tarafı belirtsin.

(a) $(2, -1, 3)$ noktasından başlayarak, 4 birim batıya, 3 birim kuzeye ve 2 birim aşağıya gidilirse hangi noktaya ulaşılır?

(b) $(-3, 4, -1)$ noktasından başlayıp, $(2, -2, 2)$ noktasına nasıl ulaşılır?

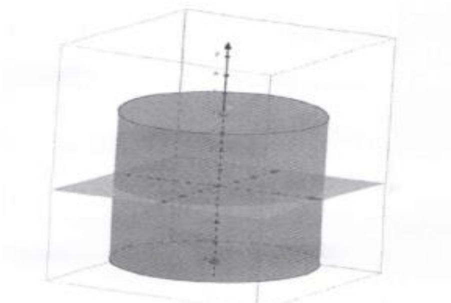
(c) $(3, -2, -4)$ noktasından başlayıp, doğu-batı ve yukarı-aşağı serbestçe ilerleyerek ulaşılabilecek bütün noktaların kümesini veren denklemi yazınız.

(3.a) R^{2}' de $x^2 + y^2 = 1$ denklemini sağlayan noktaların kümesini çiziniz.

(3.b) R^{2}' de $x^2 + y^2 = 1$ denklemini sağlayan noktalara $z = 3$ yüksekliğini karşılık getirerek oluşan noktalar kümesini R^{3}' te çiziniz.

(3.c) R^{2}' de $x^2 + y^2 = 1$ denklemini sağlayan noktalara karşılık keyfi bir z yüksekliği atayarak ulaşılabilen bütün noktaların kümesini R^{3}'te çiziniz.

4) Aşağıdaki şekli düşünelim.



Şekil-2

(a) Şekil-2'deki yüzeyin $z = 1$ yüzeyi üzerindeki noktalarını iki boyutlu düzlemde çiziniz.

(b) Şekil-2'deki yüzeyin $x = 1$ yüzeyi üzerindeki noktalarını iki boyutlu düzlemde çiziniz.

(c) Şekil-2'deki yüzeyin $y = 1$ yüzeyi üzerindeki noktalarını iki boyutlu düzlemde çiziniz.

5) Aşağıda verilen kümeleri R^3'te çiziniz. Ayrıca verilen kümeleri sözel olarak mümkün olduğunca detaylı bir şekilde tarif ediniz.

(a.1) $\{(x, y, 0) : \ x = 3\}$

(a.2) $\{(x, y, z) : \ x = 3\}$

(b.1) $\{(x, y, z) : \ z = x^2 + y^2, y = 3\}$

(b.2) $\{(x, y, z) : \ z = x^2 + y^2, z = 4\}$

6) Aşağıdaki tabloda x, y değerlerine karşılık z noktaları getirilerek $z := f(x, y)$ olacak şekilde bir f fonksiyonu oluşturuluyor.

$x \setminus y$	2	3	4	5
0	3	1	2	4
1	4	3	2	3
2	6	5	2	2
3	6	7	2	1

(a) f fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

(b) f fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

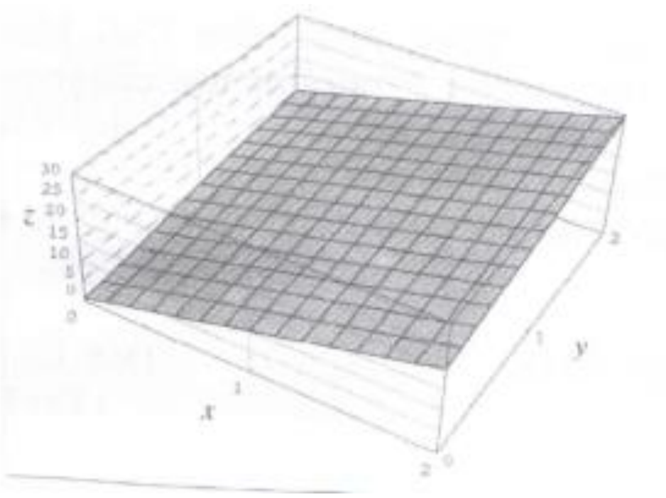
(c) f fonksiyonunun görüntü kümesini bulunuz.

7) $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$ koşulu ile verilen her (x, y) noktasını tanım kümesi kabul eden, $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ ile tanımlı bir f fonksiyonu verilsin.

(a) Kartezyen düzlemin bir alt kümesi olan f fonksiyonunun tanım kümesini çiziniz.

(b) f fonksiyonunun görüntü kümesini bulunuz.

8) Aşağıdaki grafikte bir f fonksiyonunun tam grafiği verilmiştir.



(a) f fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

(b) $f(0,0), f(2,0), f(2,2), f(0,2)$ değerlerini hesaplayınız.

(c) f fonksiyonunun değer kümesini bulunuz.

9) Aşağıda verilenlerin bir fonksiyon belirtip belirtmediğini saptayınız. Cevabınızı gerekçelendiriniz. Eğer fonksiyonsa tanım ve değer kümeleri hakkında ne söylenebilir?

(a) Girdi: kg cinsinden ağırlık ve cm cinsinden uzunluk

(b) Çıktı: ağırlık ve uzunluğa karşılık kişinin ismi

Bugünden başlayarak Hacettepe Üniversitesi Matematik Öğretmenliği öğrencileri kümesinde;

(a) Girdi: Öğrenci numarası ve öğrencinin tam adı

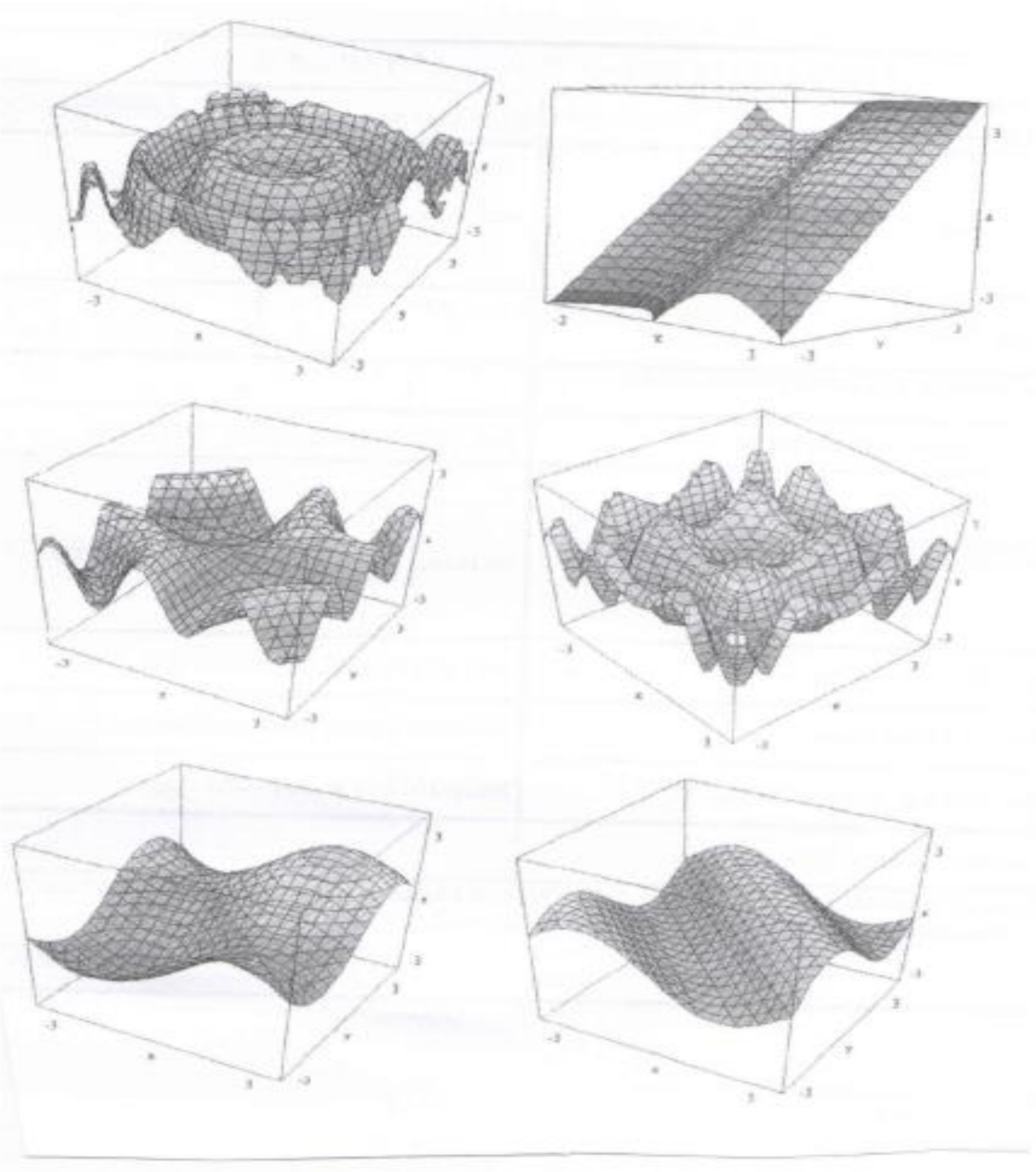
(b) Çıktı: Öğrencinin kg cinsinden ağırlığı

10) İki değişkenli fonksiyon kavramını tanımlayınız.

11) Aşağıda denklemi verilen fonksiyonların verilen grafiklerden hangisine ait olduğunu belirleyiniz. Cevabınızı detaylandırınız.

(a) $g(x, y) = \sin(x) + y$

(b) $h(x, y) = \sin(xy)$



ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı	Özgün ŞEFİK
Doğum Yeri	Ankara
Doğum Tarihi	28.08.1989

Eğitim Durumu

Lise	75. Yıl Anadolu Öğretmen Lisesi, Mersin	Buraya mezuniyet yılı yazılmalıdır.
Lisans	Hacettepe Üniversitesi, OFMA Eğitimi Bölümü, Matematik Eğitimi Ana Bilim Dalı	2013
Yabancı Dil	İngilizce: Okuma (İyi), Yazma (İyi), Konuşma (İyi) Almanca: Okuma (İyi), Yazma (Orta), Konuşma(Orta)	

İş Deneyimi

Çalıştığı Kurumlar	Hacettepe Üniversitesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü (Araştırma Görevlisi)	2014-

Akademik Çalışmalar

Yayınlar (Ulusal, uluslararası makale, bildiri, poster vb gibi.)

Seminer ve Çalıştaylar

Sertifikalar

İletişim

e-Posta Adresi	ozgun.sefik@hacettepe.edu.tr
	ozgunsefik89@gmail.com

Jüri Tarihi	15.06.2017