

**SÜRTÜNMELİ TEMAS KOŞULLARI ALTINDA YANAL  
DERECELE MALZEMELERDE YÜZEY ALTI GERİLME  
DAĞILIMI**

**SUBSURFACE STRESS DISTRIBUTION IN LATERALLY  
GRADED MATERIALS UNDER FRICTIONAL CONTACT  
CONDITIONS**

**MUHARREM GÖRKEM GÜLTEKİN**

**Dr. Öğr. Ü. MEHMET NURULLAH BALCI**

**Tez Danışmanı**

Hacettepe Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin

Makine Mühendisliği Mekanik Anabilim Dalı için Öngördüğü

YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırlanmıştır.

# ÖZET

## SÜRTÜNMELİ TEMAS KOŞULLARI ALTINDA YANAL DERECELİ MALZEMELERDE YÜZEY ALTI GERİLME DAĞILIMI

**Muharrem Görkem GÜLTEKİN**

**Yüksek Lisans, Makine Mühendisliği Bölümü**

**Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Ü. Mehmet Nurullah BALCI**

**Haziran 2024**

Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler (FDM), mekanik özellikleri bir noktadan diğer bir noktaya sürekli değişen, homojen olmayan özel bir malzeme tipidir. Belirli bir hacimsel oranda karıştırılan iki malzeme ile oluşturulan FDM yapılar, kompozit malzemelerin teknolojisinde cevap veremediği durumlara çözüm kaynağı olmuştur.

Mühendislik uygulamalarında parçaların, malzemelerin çoğu zaman kaçınılmaz temasından dolayı ortaya çıkan sürtünme en önemli problemlerden biridir. Aşınma çoğunlukla sürtünmeli yüzeylere uygulanan yüksek gerilmelerden kaynaklanmaktadır.

Yüzey altı gerilmelerin hesaplanması bileşenlerin mekanik tasarımı açısından çok önemlidir çünkü hasarların çoğu yüzey altı gerilmelerin daha yüksek seviyelere ulaştığı bölgelerdeki yorulma ve kırılmadan kaynaklanmaktadır.

Bu çalışmada yanal dereceli malzemeler yüzeyde uzaysal değişim gösteren sürtünme katsayısı içerecek şekilde modellenmiştir, sürtünmeli temas kaynaklı yüzey altı temas gerilme dağılımı sonlu elemanlar programında analizler koşturularak çözülmüştür. Bu çalışmanın temel özgünlüğü yanal derecelendirilmiş malzemelerde yüzey altı gerilme dağılımı sonuçlarının temas bölgesinde uzaysal değişim gösteren sürtünme katsayısı düşünülerek elde edilmesidir. Elde edilmiş sonuçları doğrulamak için daha önce literatürde yer alan benzer çalışmalardan ve analitik sonuçlardan faydalanılmıştır. Sürtünmeli temasa maruz yanal dereceli malzemeler genel amaçlı bir sonlu elemanlar analizi programı olan ANSYS Mechanical APDL (ANSYS Parametric Design Language) kullanılarak modellenmiştir. Yanal yönde derecelendirilmiş malzeme modeli ve yüzeyde uzaysal değişen sürtünme katsayılı temas için parametrik bilgisayar kodları geliştirilmiş olup bu kodlar ANSYS Mechanical APDL içerisinde çalıştırılarak parametrik analizler gerçekleştirilmiştir. Elde edilen sonuçlarda yanal dereceli malzemelerde farklı temas şartları altında (örneğin farklı malzeme heterojenliği, sürtünme katsayısı, sürtünme katsayısının uzaysal değişimi) yüzey altında oluşan gerilim dağılımı incelenmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Yanal yönde derecelendirilmiş malzemeler, Temas mekaniği, Uzaysal değişen sürtünme katsayısı, Yüzey altı gerilmeler, Sonlu elemanlar analizi.

**Danışman:** Dr. Öğr. Ü. Mehmet Nurullah BALCI, Hacettepe Üniversitesi, Makine Mühendisliği Bölümü

# **ABSTRACT**

## **SUBSURFACE STRESS DISTRIBUTION IN LATERALLY GRADED MATERIALS UNDER FRICTIONAL CONTACT CONDITIONS**

**Muharrem Görkem GÜLTEKİN**

**Master of Science, Department of Mechanical Engineering**

**Supervisor: Asst. Prof. Dr. Mehmet Nurullah BALCI**

**June 2024**

Functional graded materials (FGMs) are nonhomogeneous type of material whose mechanical properties vary continuously from one point to another. FGM structures created with two materials mixed at a certain volumetric rate have been the solution source for situations where composite materials can not respond in technology.

In engineering applications, friction is one of the most the important problems that occurs due to the unavoidable contact of materials. The abrasion is mostly due to hig stresses applied to friction surfaces.

Calculation of sub-surface stresses is very important in terms of the mechanical design of the components since most of damage is due to fatigue in areas where sub-surface stresses have reached higher levels.

In this study, laterally graded materials was modeled to include a friction coefficient that varies spatially on the surface then subsurface contact stress distribution caused by friction contact solved by running analyzes in finite element program and considering different loading geometric conditions. The main originality of this study is that the results of subsurface stress distribution in laterally graded materials are obtained by considering the friction coefficient which varies spatially in the contact area. Similar studies and analytical results were used to confirm the results to be obtained in the literature.

The laterally graded materials exposed to friction contact were modeled using ANSYS Mechanical APDL (ANSYS Parametric Design Language) which is a general purpose finite element analysis program. Parametric computer codes were developed for laterally graded material model and spatial changing friction coefficient contact on the surface and parametric analysis carried out by running these codes in ANSYS Mechanical APDL. In the results to be obtained in laterally graded materials under different contact conditions (for example, different material heterogeneity, friction coefficient, spatial variation of coefficient of friction) were examined.

**Keywords:** Laterally Graded Materials, Contact mechanics, Spatially varying friction coefficient, Subsurface stresses, Finite element analysis.

**Advisor:** Asst. Prof. Dr. Mehmet Nurullah BALCI, Hacettepe University, Department of Mechanical Engineering

# İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	xii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	xiii
GİRİŞ.....	1
1.1. Temas Mekaniği ile İlgili Bilgiler.....	1
1.2. Literatür Araştırması.....	2
1.3. Tezin Kapsamı.....	5
2. PROBLEMİN TANIMI VE FORMÜLASYON.....	7
2.1. Problemin İki Boyutta Modellenmesi.....	8
2.2. Formülasyon.....	9
3. SONLU ELEMANLAR ANALİZİ.....	16
3.1. Genel Bilgiler.....	16
3.2. İnterpolasyon Fonksiyonları.....	18
3.3. Denklemler İçin Kullanılan Yaklaşımlar.....	19
3.3.1. Direkt Yaklaşım.....	20
3.3.2. Varyasyonel Yaklaşım (Rayleigh-Ritz Metodu).....	20
3.3.3. Ağırlıklı Kalanlar Yaklaşımı (Galerkin Metodu).....	21
3.3.4. Enerji Dengesi Yaklaşımı.....	23
3.4. Temas Mekaniği İçin Sonlu Elemanlar Analizi.....	24
3.4.1. Penaltı Metodu.....	28
3.4.2. Lagrange Çarpanları Metodu.....	29
3.4.3. Karışık Lagrange Metodu.....	30
3.4.4. Takviyeli Lagrange Metodu.....	31

3.5. Yanal Yönde Değişken Sürtünme Katsayısı .....	33
3.6. Geliştirilen Çözüm Prosedürü .....	36
4. SAYISAL SONUÇLAR .....	40
4.1. Yakınsama Analizi .....	40
4.2. Doğrulama Çalışması .....	45
4.3. Temas Bölgesi Etrafında Yanal Yöndeki Normal ve Kayma Gerilmeleri .....	47
4.4. Parametrik Çalışma Sonuçları .....	51
4.5. Ti-6Al-4V Metal ve ZrO <sub>2</sub> Seramik Fazlar İçin Sayısal Sonuçlar .....	76
5. SONUÇLARIN YORUMLANMASI VE ÖNERİLER.....	82
6. KAYNAKLAR.....	84

## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1 Diş implant örneği.....	7
Şekil 2.2 Yanal derecelendirilmiş malzeme temas probleminin şematik gösterimi .....	8
Şekil 2.3 Sert bir zımba ile sürtünmeli temas altında yanal derecelendirilmiş malzeme olan bir yarı düzlem ve problem tanımı .....	9
Şekil 3.1 1-Boyutlu lineer eleman (2 düğüm noktalı).....	17
Şekil 3.2 1-Boyutlu kuadratik eleman (3 düğüm noktalı).....	17
Şekil 3.3 2-Boyutlu kuadratik eleman (6 düğüm noktalı).....	17
Şekil 3.4 2-Boyutlu kuadratik eleman (8 düğüm noktalı).....	17
Şekil 3.5 İki boyutlu örnek gösterilmiş çözüm bölgesi .....	18
Şekil 3.6 Lineer ve kuadratik elemanların yaklaşımlarının gösterimi .....	18
Şekil 3.7 Lineer şekil fonksiyonları .....	19
Şekil 3.8 Kuadratik şekil fonksiyonları.....	19
Şekil 3.9 Bir diferansiyel denklem için iki boyutlu çözüm alanı .....	22
Şekil 3.10 Temas koşullarının şematik diyagramı .....	25
Şekil 3.11 Temas halindeki iki nesnenin şematik görüntüsü .....	26
Şekil 3.12 Nesnenin iki kenarının a) t ve b) “t + dt” anlarındaki yüzey deformasyonun şematik görüntüsü .....	27
Şekil 3.13 Sürtünme Modeli 1, değişen sürtünme profiline bağlı olarak temas yüzeyindeki sürtünme katsayısı grafiği.....	34
Şekil 3.14 Sürtünme modeli 2, zımba arka ucundan ön ucuna doğru azalan profil grafiği .....	35
Şekil 3.15 Sürtünme modeli 2, zımba ön ucundan arka ucuna doğru artan profil grafiği .....	35
Şekil 3.16 Temas problemini çözmek için geliştirilen algoritmanın akış şeması .....	36
Şekil 3.17 Problem modeli için oluşturulan sonlu elemanlar ağı.....	37
Şekil 3.18 Düz zımba basma bölgesindeki sonlu elemanlar ağının deforme olmuş yapısı .....	37



Şekil 3.19 FDM yarı düzlem için a) sonlu elemanlar ağının yakın plan görüntüsü, b) sonlu elemanlar ağının temas bölgesi etrafında yakın plan görüntüsü, c) sonlu elemanlar ağının zımba arka ucu etrafında yakın plan görüntüsü $\alpha(b-a) = 0, \gamma = 2, \eta_m = 0.3, \eta_p = 0.7$ .....	38
Şekil 3.20 Temas probleminin kuvvet ve deplasman yakınsama grafiği.....	39
Şekil 4.1 Mevcut sonlu elemanlar çözümü ile temas yüzeyinde *Dağ [7] ile a) dikey yönde normal gerilme, b) yatay yönde normal gerilme, c) kayma gerilmesi karşılaştırması $\alpha(b-a) = 0, \gamma = 0, \eta_m = 0.2, \eta_p = 0.2$ .....	45
Şekil 4.2 Mevcut sonlu elemanlar çözümü ile temas yüzeyinde *Güler [10] ile a) dikey yönde normal gerilme, b) kayma gerilmesi karşılaştırması $\alpha(b-a) = 0, \gamma = 0, \eta_m = 0.2, \eta_p = 0.2$ .....	46
Şekil 4.3 FDM yarı düzlemin değişken sürtünme profiline göre temas bölgesinde yanal yöndeki normal gerilme dağılımı, a) $\gamma = 0$ , b) $\gamma = 2$ , c) $\gamma = 4$ ; $\alpha(b-a) = 0, \eta_m = 0.3, \eta_p = 0.7$ .....	47
Şekil 4.4 FDM yarı düzlemin değişken sürtünme profiline göre temas bölgesinde kayma gerilmesi dağılımı, a) $\gamma = 0$ , b) $\gamma = 2$ , c) $\gamma = 4$ ; $\alpha(b-a) = 0, \eta_m = 0.3, \eta_p = 0.7$ .....	48
Şekil 4.5 FDM yarı düzlemin malzeme homojensizliğine göre temas bölgesinde yanal yöndeki normal gerilme ve kayma gerilmesi dağılımı a-b) $\alpha(b-a) = -1$ , c-d) $\alpha(b-a) = 0$ , e-f) $\alpha(b-a) = 1; \gamma = 0, \eta_m = 0.3, \eta_p = 0.7$ .....	49
Şekil 4.6 FDM yarı düzlemin zımba arka ucunda $\alpha(b-a) = -1, \gamma = 1, \eta_m = 0.3, \eta_p = 0.7$ , parametreleri ile temas yüzeyinde meydana gelen a) yanal yönde normal gerilme, b) kayma gerilmesi dağılımı gösterimi .....	50
Şekil 4.7 Değişen sürtünme katsayılarına bağlı olarak temas yüzeyinde (a) dikey yöndeki normal gerilme, (b) yanal yöndeki normal gerilme; $\sigma_{xx0}, sP/(b-a), \sigma_{yy0}, sP/(b-a), \alpha(b-a) = 0, \gamma = 0$ .....	52
Şekil 4.8 Değişen sürtünme katsayılarına bağlı olarak zımba arka ucu yüzey altında derinlik boyunca (a) yanal yöndeki normal gerilme, (b) kayma gerilmesi; $\sigma_{yy0}, xP/(b-a), \sigma_{xy0}, xP/(b-a), \alpha(b-a) = 0, \gamma = 0$ .....	53

- Şekil 4.9 Değişen sürtünme katsayılarına bağlı olarak zımba ortasında yüzey altında derinlik boyunca (a) yanal yöndeki normal gerilme, (b) kayma gerilmesi;  $\sigma_{yy0, xP/(b-a)}$ ,  $\sigma_{xy0, xP/(b-a)}$ ,  $\alpha(b-a) = 0$ ,  $\gamma = 0$  ..... 54
- Şekil 4.10 Değişen sürtünme katsayılarına bağlı olarak zımba ön ucunda yüzey altında derinlik boyunca (a) yanal yöndeki normal gerilme, (b) kayma gerilmesi;  $\sigma_{yy0, xP/(b-a)}$ ,  $\sigma_{xy0, xP/(b-a)}$ ,  $\alpha(b-a) = 0$ ,  $\gamma = 0$  ..... 55
- Şekil 4.11 Değişen sürtünme profiline bağlı olarak temas yüzeyindeki (a) dikey yöndeki normal gerilme, (b) yanal yöndeki normal gerilme;  $\sigma_{yy0, xP/(b-a)}$ ,  $\sigma_{yy0, xP/(b-a)}$ ,  $\alpha(b-a) = 0$ ,  $\eta_m = 0.3$ ,  $\eta_p = 0.7$  ..... 57
- Şekil 4.12 Değişen sürtünme profiline bağlı olarak zımba arka ucu yüzey altında derinlik boyunca (a) yanal yöndeki normal gerilme, (b) kayma gerilmesi;  $\sigma_{yy0, xP/(b-a)}$ ,  $\sigma_{xy0, xP/(b-a)}$ ,  $\alpha(b-a) = 0$ ,  $\eta_m = 0.3$ ,  $\eta_p = 0.7$  ..... 58
- Şekil 4.13 Değişen sürtünme profiline bağlı olarak zımba ortası yüzey altında derinlik boyunca a) yanal yöndeki normal gerilme, b) kayma gerilmesi  $\sigma_{yy0, xP/(b-a)}$ ,  $\sigma_{xy0, xP/(b-a)}$ ,  $\alpha(b-a) = 0$ ,  $\eta_m = 0.3$ ,  $\eta_p = 0.7$  ..... 59
- Şekil 4.14 Değişen sürtünme profiline bağlı olarak zımba ön ucunda yüzey altında derinlik boyunca a) yanal yöndeki normal gerilme, b) kayma gerilmesi  $\sigma_{yy0, xP/(b-a)}$ ,  $\sigma_{xy0, xP/(b-a)}$ ,  $\alpha(b-a) = 0$ ,  $\eta_m = 0.3$ ,  $\eta_p = 0.7$  ..... 60
- Şekil 4.15 Değişen malzeme homojensizliğine bağlı olarak temas yüzeyindeki (a) dikey yöndeki normal gerilme, (b) yanal yöndeki normal gerilme;  $\sigma_{xx0, sP/(b-a)}$ ,  $\sigma_{yy0, xP/(b-a)}$ ,  $\eta_m = 0.3$ ,  $\eta_p = 0.7$ ,  $\gamma = 0$  ..... 62
- Şekil 4.16 Değişen malzeme homojensizliğine bağlı olarak zımba arka ucu yüzey altında derinlik boyunca (a) yanal yöndeki normal gerilme, (b) kayma gerilmesi;  $\sigma_{yy0, xP/(b-a)}$ ,  $\sigma_{xy0, sP/(b-a)}$ ,  $\eta_m = 0.3$ ,  $\eta_p = 0.7$ ,  $\gamma = 0$  ..... 63
- Şekil 4.17 Değişen malzeme homojensizliğine bağlı olarak zımba ortası yüzey altında derinlik boyunca (a) yanal yöndeki normal gerilme, (b) kayma gerilmesi;  $\sigma_{yy0, xP/(b-a)}$ ,  $\sigma_{xy0, sP/(b-a)}$ ,  $\eta_m = 0.3$ ,  $\eta_p = 0.7$ ,  $\gamma = 0$  ..... 64
- Şekil 4.18 Değişen malzeme homojensizliğine bağlı olarak zımba ön ucu yüzey altında derinlik boyunca (a) yanal yöndeki normal gerilme, (b) kayma gerilmesi;  $\sigma_{yy0, xP/(b-a)}$ ,  $\sigma_{xy0, sP/(b-a)}$ ,  $\eta_m = 0.3$ ,  $\eta_p = 0.7$ ,  $\gamma = 0$  ..... 65

Şekil 4.19 Değişen malzeme homojensizliğine bağlı olarak temas yüzeyindeki a) dikey yöndeki normal gerilme b) yanal yöndeki normal gerilme ; $\sigma_{yy0, xP/(b-a)}$ , $\sigma_{xx0, sP/(b-a)}$ $\eta_m = 0.3, \eta_p = 0.7, \gamma = 1$ .....	67
Şekil 4.20 Değişen malzeme homojensizliğine bağlı olarak zımba arka ucu derinlik boyunca a) yanal yöndeki normal gerilme b) kayma gerilmesi $\sigma_{yy0, xP/(b-a)}$ , $\sigma_{xy0, sP/(b-a)}$ , $\eta_m = 0.3, \eta_p = 0.7, \gamma = 1$ .....	68
Şekil 4.21 Değişen malzeme homojensizliğine bağlı olarak zımba ortası yüzey altında derinlik boyunca (a) yanal yöndeki normal gerilme, (b) kayma gerilmesi $\sigma_{yy0, xP/(b-a)}$ , $\sigma_{xy0, sP/(b-a)}$ , $\eta_m = 0.3, \eta_p = 0.7, \gamma = 1$ .....	69
Şekil 4.22 Değişen malzeme homojensizliğine bağlı olarak zımba ön ucunda derinlik boyunca (a) yanal yöndeki normal gerilme, (b) kayma gerilmesi $\sigma_{yy0, xP/(b-a)}$ , $\sigma_{xy0, sP/(b-a)}$ $\eta_m = 0.3, \eta_p = 0.7, \gamma = 1$ .....	70
Şekil 4.23 Değişen malzeme homojensizliğine bağlı olarak temas yüzeyindeki a) dikey yöndeki normal gerilme b) yanal yöndeki normal gerilme ; $\sigma_{yy0, xP/(b-a)}$ , $\sigma_{xx0, sP/(b-a)}$ , $\eta_m = 0.3, \eta_p = 0.7, \gamma = 2$ .....	71
Şekil 4.24 Değişen malzeme homojensizliğine bağlı olarak zımba arka ucu derinlik boyunca a) yanal yöndeki normal gerilme b) kayma gerilmesi; $\sigma_{yy0, xP/(b-a)}$ , $\sigma_{xy0, sP/(b-a)}$ , $\eta_m = 0.3, \eta_p = 0.7, \gamma = 2$ .....	72
Şekil 4.25 Değişen malzeme homojensizliğine bağlı olarak zımba ortası yüzey altında derinlik boyunca (a) yanal yöndeki normal gerilme, (b) kayma gerilmesi $\sigma_{yy0, xP/(b-a)}$ , $\sigma_{xy0, sP/(b-a)}$ $\eta_m = 0.3, \eta_p = 0.7, \gamma = 2$ .....	73
Şekil 4.26 Değişen malzeme homojensizliğine bağlı olarak zımba ön ucunda derinlik boyunca (a) yanal yöndeki normal gerilme, (b) kayma gerilmesi $\sigma_{yy0, xP/(b-a)}$ , $\sigma_{xy0, sP/(b-a)}$ $\eta_m = 0.3, \eta_p = 0.7, \gamma = 2$ .....	74
Şekil 4.27 Ti-6Al-4V ve ZrO <sub>2</sub> malzeme mikroyapısı .....	76
Şekil 4.28 (a) Ti-6Al-4V-ZrO <sub>2</sub> FDM $\alpha_{b-a} = 1$ , (a) Ti-6Al-4V-ZrO <sub>2</sub> FDM $\alpha_{b-a} = -1$ .....	77
Şekil 4.29 Değişen malzeme homojensizliğine bağlı olarak Ti-6Al-4V temas yüzeyindeki a) dikey yöndeki normal gerilme b) yanal yöndeki normal gerilme $\sigma_{yy0, xP/(b-a)}$ , $\sigma_{xx0, sP/(b-a)}$ $\eta_m = 0.3, \eta_p = 0.7, \gamma = 2$ .....	78

Şekil 4.30 Değişen malzeme homojensizliğine bağlı olarak Ti-6Al-4V malzemesinin zımba arka ucu derinlik boyunca a) yanal yöndeki normal gerilme b) kayma gerilmesi;  $\sigma_{yy0, xP/(b-a)}$  ,  $\sigma_{xy0, sP/(b-a)}$  ,  $\eta_m = 0.3$ ,  $\eta_p = 0.7$ ,  $\gamma = 4$  ..... 79

Şekil 4.31 Değişen malzeme homojensizliğine bağlı olarak Ti-6Al-4V malzemesinin zımba ortası yüzey altında derinlik boyunca (a) yanal yöndeki normal gerilme, (b) kayma gerilmesi  $\sigma_{yy0, xP/(b-a)}$  ,  $\sigma_{xy0, sP/(b-a)}$  ,  $\eta_m = 0.3$ ,  $\eta_p = 0.7$ ,  $\gamma = 4$  ..... 80

Şekil 4.32 Değişen malzeme homojensizliğine bağlı olarak Ti-6Al-4V malzemesinin zımba ön ucunda derinlik boyunca (a) yanal yöndeki normal gerilme, (b) kayma gerilmesi  $\sigma_{yy0, xP/(b-a)}$  ,  $\sigma_{xy0, sP/(b-a)}$  ,  $\eta_m = 0.3$ ,  $\eta_p = 0.7$ ,  $\gamma = 4$ ..... 81

## ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4.1 Değişen eleman sayılarına göre temas yüzeyindeki dikey yönde oluşan gerilmeler için hata analizi.....	41
Çizelge 4.2 Değişen eleman sayılarına göre temas yüzeyindeki yanal yönde oluşan gerilmeler için hata analizi.....	42
Çizelge 4.3 Değişen eleman sayılarına göre yüzey altındaki yanal yönde oluşan gerilmeler için hata analizi.....	43
Çizelge 4.4 Değişen eleman sayılarına göre yüzey altındaki kayma yönünde oluşan gerilmeler için hata analizi.....	44
Çizelge 4.5 Farklı $\eta_m$ ve $\eta_p$ değerleri için Q/P oranları, $\alpha(b-a)=0$ , $\gamma=2$ . ....	75
Çizelge 4.6 Farklı $\gamma$ değerleri için Q/P oranları, $\alpha(b-a)=0$ , $\eta_m =0.3$ , $\eta_p =0.7$ .....	75
Çizelge 4.7 Farklı $\alpha(b-a)$ değerleri için Q/P oranları, $\gamma=0$ , $\eta_m =0.3$ , $\eta_p =0.7$ .....	75
Çizelge 4.8 Farklı $\alpha(b-a)$ değerleri için Q/P oranları, $\gamma=1$ , $\eta_m=0.3$ , $\eta_p=0.7$ .....	75
Çizelge 4.9 Ti-6Al-4V ve ZrO <sub>2</sub> malzeme özellikleri.....	76

## SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgelerin ve kısaltmaların açıklamaları aşağıdaki gibi sunulmuştur.

<b>Simgeler</b>	<b>Açıklama</b>
$a, b$	Rijit zımba ucu koordinatları
$P$	Dikey kuvvet
$Q$	Yatay kuvvet
$u, v$	Yer değiştirme bileşenleri
$\nu$	Poisson oranı
$\sigma_{ij}$	Gerilme bileşenleri
$\mu$	Kayma modülü
$\gamma$	Sürtünme profili katsayısı
$\eta$	Sürtünme katsayısı
$\alpha$	Malzeme homojensizlik sabiti
$K$	Kolosov sabiti

### **Kısaltmalar Açıklama**

FDM	Fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme
-----	---------------------------------------

# GİRİŞ

## 1.1. Temas Mekanığı ile İlgili Bilgiler

Temas birden fazla nesnenin fiziksel davranışlarını ve etkileşimlerini düzenleyen temel kavramdır. Bu kavram, temas mekaniğı alanından türetilmiştir; temas mekaniğı, deformasyona uğramış cisimlerin temasındaki mekanik davranışı inceleyen bir fizik dalıdır. Temas kavramı, nesnelerin temasındaki davranışı anladığı ve ön görüde bulunduğu için önem arz etmektedir. Temas kavramını inceleyerek, nesnelerin konfigürasyonlarını doğru bir şekilde yorumlayabilir ve birbirleri ile nasıl etkileşimde bulduklarını anlayabiliriz. Temas kavramı, mühendislik, fizik, biyomekanik ve malzeme bilimi gibi çeşitli alanlarda kritik bir rol oynar, mühendislerin temas ve sürtünme kuvvetlerine dayanabilen yapılar tasarlamalarına yardımcı olur. Malzeme bilimcileri temas halindeki malzemelerin aşınma ve deformasyonunu inceler, nesnelerin fiziksel temasındaki davranışı anlama ve tahmin etme temelini edinirler. Özellikle fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler gibi homojen yapıda olmayan malzemeler için temas mekaniğini anlamak daha karmaşık hale gelmektedir.

Temas mekaniğinde, iki farklı temas arasında ayırım mevcuttur, bunlar: yapışkan ve yapışmayan temaslar. Yapışkan temaslarda, nesnelerin yüzeyleri, birbirine yaklaştıklarında aralarında oluşan Van der Waals kuvvetleri nedeniyle çekme gerilimi yaşar. Bradley Van der Waals modeli, yapışkan temaları incelemek için yaygın olarak kullanılır. Bu model, düşük yükleme koşullarında tahmin edilen temas alanının Hertz Temas Teorisinin öngördüğünden daha büyük olduğunu, yük kaldırıldığında ise temas alanının yeniden oluştuğunu ve temas alanının kuru ve temiz olduğunu gösterir, bu yüzeyler güçlü bir çekme kuvvetine maruz kalır. Öte yandan yapışmaz temaslarda birbirine yük uygulayan nesnelere olmadığı için herhangi bir kuvvet oluşmayacaktır.

Hertz Temas Teorisinin genel prensipleri şu şekildedir: küçük gerinim yaklaşımı kullanılır, yüzeyler bağımsızdır, oluşan temas yüzeyi nesnelerin karakteristik yarıçapından daha küçüktür ve temas yüzeyinde sürtünme olmadığı varsayılır.

Yapışmayan temaslarda, temas yüzeylerinin geometrisine göre temaslar uyuşan ve uyuşmayan temaslar olarak gruplanmaktadır. Herhangi bir deformasyon meydana gelmeden önce iki nesne birbirleriyle birden çok noktada temas ederse uyuşan temaslar denir. Nesnelere başlangıçta birbirleriyle noktasal olarak veya doğrusal bir şekilde temas ederse, uyuşmayan temaslar olarak tanımlanırlar. Uyuşmayan temaslarda, bu durum temas alanlarında yüksek gerilim konsantrasyonlarının oluşumuna yol açar.

## 1.2. Literatür Araştırması

Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler (FDM), malzeme yapısını iyileştirmek, özellikle mukavemeti ve ısıl direnci arttırmak için en az iki farklı malzemenin (seramikler ve metaller gibi) bir araya getirilmesi ile oluşmaktadır. Hacimsel oranların sürekli değişimi ise FDM'leri kompozitlerden ayıran en önemli özelliktir. 1984 yılında, Japonya'da Niino ve arkadaşları [1] tarafından uzay mekiğinde kullanılmak üzere yüksek sıcaklık tarafında ısıya dayanıklı seramiği, düşük sıcaklık tarafında ise termal iletkenliği yüksek olan metali bir arada kullanma fikri ile doğmuştur. Bu fikir ile yüksek ısı akışlarına dayanıklı FDM'ler üretmeyi başarmışlardır. Niino'nun grubunun yanı sıra Takahashi ve arkadaşları [2] ise FDM'lerin termal şok ve yorulma direncini değerlendirmek için bir lazer tekniği geliştirmiştir. Bu keşiflerden sonra FDM'ler mühendislik uygulamalarında yoğun olarak kullanılmaya başlamıştır.

Naebe ve Shirvanimoghaddam [3] FDM'lerin özelliklerinin, fabrikasyon tekniklerinin ve FDM'lerin gelecekteki kullanım potansiyellerinin üzerine araştırmaları mevcuttur. Bu kullanımlarda ortaya çıkan çoğunlukla kırılma ve yorulma sorunlarının çözümleri ile ilgili de birçok araştırma ve inceleme yapılmıştır.

Literatürde FDM'lerin temas gerilimleri ile ilgili birçok çalışma vardır. Temas gerilimlerinin farklı uçlarda nasıl dağıldığı Giannakopoulos ve Suresh [4,5] tarafından incelenmiştir. Giannakopoulos ve Pallot [6] temas gerilimi çözümünde elastisite modülü üzerinde çeşitli varsayımlarda bulunmuştur. Temas mekaniği problemleri için analitik ve hesaplamalı yöntemler ile yapılan literatürde çalışmalar mevcuttur. Dağ [7] sürtünme katsayısının uzaysal



varyasyonunu hesaba katarak yatay yönde derecelendirilmiş malzemelerin temas analizi için yeni bir analitik yöntem çalışmıştır, Arslan [8] sürtünme temasına maruz kalan derecelendirilmiş bir yarı düzlemdeki malzeme üzerindeki eğimli yüzey çatlaklarının kırılma parametrelerini sonlu elemanlar yöntemi ile çalışmıştır.

Dağ, Yıldırım ve Erdoğan [9] homojen ortotropik alt katman ve derecelendirilmiş ortotropik kaplama malzemeleri ara yüzündeki çatlak için analitik ve hesaplamalı yaklaşımlar geliştirmişlerdir. Guler [10] fonksiyonel derecelendirilmiş kaplamalar içeren homojen altkatman ile çeşitli rijit zımba profilleri arasındaki temas problemini analitik olarak modellemiş ve birçok temas parametresine göre gerilme sounçlarını sunmuştur. Guler ve Erdoğan [11] yaptıkları çalışmada homojensizlik sabitleri, sürtünme katsayısı ve çeşitli uzunluk gibi faktörlerin kaplamanın yorulması ve kırılması üzerinde etkisi olabilecek kritik gerilmelerin etkisini incelemek için analitik çözümler elde etmişlerdir. Ayrıca, Güler ve Erdoğan [12] parabolik ve silindirik zımba etkisi altındaki derecelendirilmiş kaplama malzemeleri için temas problemlerini çalışmışlar ve derecelendirilmiş malzeme ile kaplanmış parçanın yorulma ve kırılma davranışına etki edecek kritik stresler üzerinde; homojensizlik katsayısı, sürtünme katsayısı ve geometrik parametrelerin etkilerini incelemişlerdir. Dağ ve arkadaşları [13] temas gerilmelerinin etkisi altındaki fonksiyonel olarak derecelendirilmiş kaplamaların kırılma analizini yapmak için geliştirilmiş bir analitik yöntem sunmaktadır. Ke ve Wang, fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerin iki boyutlu sürtünme temasını araştırmıştır ve kontak mekaniği analizi için malzeme özelliklerini değiştirerek hesaplamalı yöntemler geliştirmişlerdir [14].

Yüzey temas gerilimi ile ilgili çalışmalar olmasına rağmen yüzey altı gerilimle ilgili çok fazla araştırma mevcut değildir. Yüzey altı gerilme dağılımı, malzemedeki meydana gelen yorulma ve kırılma potansiyeli nedeniyle mekanik tasarımda dikkate alınması gereken önemli bir husustur. Çatlama yüksek yüzey altı gerilmelerinin olduğu yerlerde başlar. Bu sorunun öneminden dolayı analitik ve hesaplamalı yöntemler kullanılarak çeşitli çalışmalar yapılmıştır.

Dağ ve Erdoğan [15] yüzey altı gerilim dağılımı hesaplamasını zımba etkisiyle oluşan sürtünmeler için gerçekleştirmiştir. Gerilmelerin meydana geldiği bölgede çatlaklar oluştuğu ve olan çatlakları büyüttüğü sonucuna varılmıştır. Apatay ve arkadaşları [16] ise FDM kaplamalarda rijit zımba etkisiyle oluşan yüzey altı gerilimin hesaplamak için denklem geliştirmiştir. Balcı [17] temas yükünden kaynaklanan yorulma ve kırılma hatalarının mekanik montaj tasarımlarda son derece önemli olduğu için ısı üretimli sürtünmeye maruz kalan fonksiyonel derecelendirilmiş kaplamalar ile homojen bir alt tabakanın yüzey altı gerilimlerini incelemiştir.

Yüzey altı gerilim üzerine yapılan çalışmaların az olması ile beraber, yanal derecelendirilmiş malzemeler üzerine yapılan çalışmaların sayısı da literatürde oldukça azdır. Ganesh ve arkadaşları [18] kırık kemiklerde kullanılan yanal derecelendirilmiş plakaların kemik içinde daha az gerilim yarattığı ve kemiğin iyileşmesine fayda sağladığını ortaya çıkarmışlardır. Dağ, Güler ve arkadaşları [19] yanal derecelendirilmiş FDM'lerde temas mekaniği analizini hem hesaplamalı hem de analitik yöntem ile incelemişler, sürtünme katsayısının ve malzemenin yanal homejensizliğinin yüzey gerilmelerine olan etkisini araştırmışlardır. Benzer şekilde analiz Arslan [20] tarafından yatay derecelendirilmiş malzemelerin kayan sert bir zımba altında sürtünme temas yüzeyi problemi çözülmüştür. Bu araştırma ile temas kaynaklı hasarın oluşma riskinin elastik katmanın yanal derecesinin ayarlanması ile hafifletilebileceği sonucuna varılmıştır. Arslan [21,22] tarafından yanal derecelendirilmiş malzemelerin sürtünmeli temas kaynaklı problemleri üzerine çalışmaları devam etmiştir. Yanal dereceli malzeme ile sert dairesel bir zımba arasında sürtünme teması sonlu elemanlar yöntemi ile Dağ [23] tarafından incelenmiştir.

Sürtünme teması koşulları altında yanal dereceli malzemelerde yüzey altındaki gerilme dağılımında hasar mekaniğinin kullanılması hayati bir rol oynar. Hasar mekaniği malzeme ve yapılarda hasara yol açan, kırıkları ve çatlakları başlatan mekanizmaları inceleyerek malzemelerdeki hasarın davranışını belirlemeyi amaçlar [24]. Derecelendirilmiş malzemelerin sürtünmeli temas koşulları altında karmaşık mekanik davranışı yüzeyin altındaki stres dağılımını anlamak ve tahmin etmekte zorluklar yaratır, yapının bütünlüğünü ve dayanıklılığını değerlendirmek için sürtünmeli temas koşulları altında derecelendirilmiş malzemelerin yüzey altı gerilim dağılımını anlamak önemlidir.

Julia ve Rodriguez-Tembleque ortotropik sürtünme teması ve aşınma koşulları altında 3 boyutlu katılarda yüzey altı gerilimlerini analiz etmek için hesaplamalı bir yöntem geliştirdi [25]. Balcı ve ark. ısı üretimi ile sürtünme temasına maruz kalan homojen izotropik malzemelerde temas gerilmelerini hesaplamak için sonlu elemanlar metodu esaslı iteratif bir hesaplamalı yöntem geliştirdi [26]. Qin ve ark. yuvarlanma teması yorgunluğu nedeniyle yüzey altı çatlaklarının başlamasında gerekli olan gerilimlerin dağılımları için sürtünmenin etkisini analiz etti [27]. Boffy ve Venner, yüzey yüklemesine maruz kalan homojen olmayan malzemelerde yüzey altı gerilimleri belirlemek için Multigrid çözümünü sundular [28]. Khajehtourian ve ark. sert zimbalarla yüklenen yanal derecelendirilmiş malzemelerin temas mekaniğinde tanecik boyutunun dağılımının etkilerini gözlemlemek için sonlu elemanlar yöntemleri geliştirdi [29].

Chidlow ve ark. homojen olmayan malzemenin temas koşulları altında yüzey altı gerilmelerin bulunması için analitik ve iteratif bir çözüm yöntemi geliştirdi [30]. Bu çalışmalar yüzey altı gerilme dağılımının geometri, malzeme parametreleri ve sürtünme katsayısı gibi çeşitli faktörlerden etkilendiğini göstermiştir.

### **1.3. Tezin Kapsamı**

Yüzey altı gerilmelerinin belirlenmesi mekanik tasarımlarda oldukça önemlidir. Temas problemlerinde deformasyon genellikle yüksek yüzey altı gerilmelerin olduğu yerlerde başlar. Bu çalışma sürtünme temasına maruz kalan yanal dereceli malzemelerde sonlu eleman prosedürü önermektedir. Bu sonlu eleman prosedüründe yüzey altında meydana gelen gerilmeler hesaplanmaktadır ve temasın yüzey altı gerilim davranışları incelenmiştir.

Literatürde temas mekaniği, yanal dereceli malzemeleri konu alınan problemlere ilişkin analitik ve numerik çözümlere yönelik bir kısım sonuçlar bulunmaktadır. Ancak uzaysal değişken sürtünmeli temas koşulları altında yanal derecelendirilmiş malzemelerde yüzey altı gerilme dağılımını bulmak için sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak geliştirilen bir yöntem ve hesaplamalı olarak yüzey altı gerilme sonuçlarını sunan çalışmaların literatürde henüz olmadığı görülmüştür. Bu nedenle, özellikle temas yüzeyindeki uzaysal değişken sürtünme katsayısının

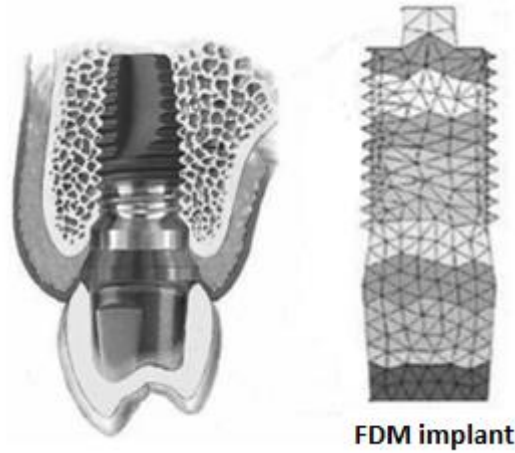
yüzey altı gerilmeler üzerindeki etkisi henüz tam olarak belirli değildir. Değişken malzeme koşulları altında yükleme sonuçlarının sunulması temas mekaniği alanında hem literatür hem de mühendislik uygulamaları için özgün bir katkı sunacaktır.

Bu çalışmada rijit zımba ile uzaysal değişen sürtünme katsayısına sahip yanal derecelendirilmiş malzemelerdeki temas mekaniği problemi ele alınmıştır. ANSYS Mechanical APDL programında yazılan kodlar ile yanal derecelendirilmiş malzeme ile rijit zımba arasındaki sürtünmeli temas problemi modellenmiş olup ve sonlu elemanlar programında yüzey altı gerilmeleri elde edebilmek için parametrik kodlar sonlu elemanlar analizi programında çalıştırılmıştır [31]. Çalışmaya yanal derecelendirilmiş malzemeler üzerindeki sürtünmeli temas problemleri için analitik çözümler araştırılarak başlanmıştır. Burada temas problemini ifade eden analitik denklemler ortaya konulmuştur. Bu analitik denklemler tekil integral denklemlerine bağlı olarak analitik veya sonlu elemanlar analizi yöntemine dayalı olarak hesaplamalı biçimde çözülmüştür. Tekil integral denklemi çözümü teorik olarak daha zor ve zaman alıcı olduğu için sonlu elemanlar analizi yöntemi ile hesaplamalı sonuçlar elde edilmiştir. Bu kapsamda, problem ANSYS Mechanical APDL’de parametrik olarak modellenmiştir ve çözüm için kodlar türetilmiştir. Hesaplamalı olarak elde edilen sonuçlar, yanal derecelendirilmiş malzemedeki sürtünmeli temas için literatürde mevcut olan ve analitik sonuçları bilinen problemler ile kıyaslanmıştır. Böylece geliştirilen yöntemin doğrulaması sağlanmıştır. Parametrik analizler ile yanal derecelendirilmiş malzeme ve zımba arasındaki sürtünme katsayısı, sürtünme katsayısının uzaysal değişimi, yanal derecelendirilmiş malzemenin kayma modülü, malzeme özellikleri ve rijitlik özellikleri gibi parametrelerin yüzey altı gerilmeler üzerindeki etkileri için grafiksel sonuçlar elde edilerek değerlendirilmiştir.

Bu tez çalışması kapsamında elde edilmiş sonuçlar yanal derecelendirilmiş malzemelerinin kullanıldığı sektörlerde malzeme seçimi, tasarım ve optimizasyonu açısından katma değer sağlayacaktır. Birçok farklı parametre için elde edilen sonuçlar ile test ve deney çalışmalarındaki maliyet ve zaman ciddi oranda azalması beklenmektedir. Bu alanda daha önceden yapılmış çalışmalar sınırlı olduğundan hesaplamalı ortamda geliştirilen yöntem ve bu yöntemin sonuçları ile uluslararası/ulusal makale ve konferans yayınlarının çıkması öngörülmektedir.

## 2. PROBLEMİN TANIMI VE FORMÜLASYON

Ortopedik cihazlar ve kaplamalar dahil olmak üzere çeşitli mühendislik uygulamalarında yanal dereceli malzemeler incelenmiştir. Teze konu olan problemin uygulama alanlarında bir tanesi de diş implantlarıdır. Literatürde ortopedik implantlarda malzeme özelliklerinin yatay yönde derecelendirilmesini tavsiye eden çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmalar yanal dereceli malzemelerin mekanik davranışın biyomimetik kriterlerini karşılayabileceğini ve uzun süreli statik yük altında iyi dayanıklılık gösterebileceğini göstermiştir.



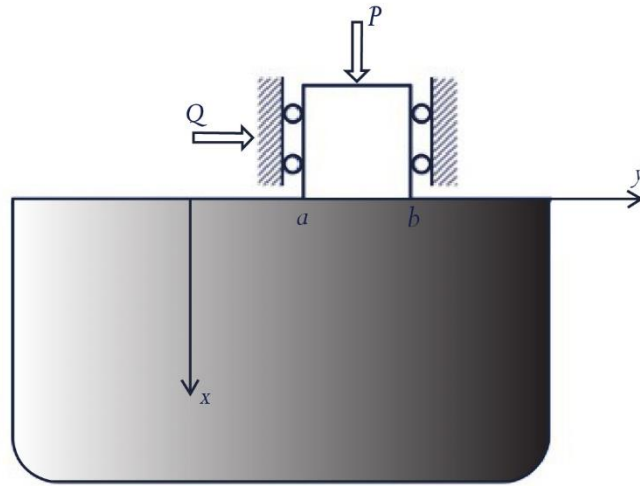
Şekil 2.1 Diş implant örneği

Diş implantları, biyomedikal alanda fonksiyonel olarak derecelendirilmiş malzemelerin (FDM) yaygın uygulamalarından biridir. FDM'ler kapsamlı bir şekilde incelenmiş ve diş restorasyonları da dahil olmak üzere çeşitli biyomedikal uygulamalarda kullanılmıştır. Sola ve arkadaşları özellikle diş implantları için FDM'ler hakkında kapsamlı bir inceleme makalesi yayınlamıştır, bu alandaki önemi ve gelişmeleri vurgulamışlardır. Diş implantları için FDM'ler, dişlerin doğal yapısına benzer ve çevre dokularla daha iyi entegrasyon sağlayan özelliklere sahip olacak şekilde tasarlanmıştır. Bu malzemeler, mukavemet ve tokluk gibi gelişmiş mekanik özelliklerin yanı sıra gelişmiş biyoyumluluk sunar. Diş implantlarında FDM kullanımı daha uzun vadeli başarı oranlarına ve iyileşmiş hasta sonuçlarına yol açacağı savunulmuştur [32].

İhde ve arkadaşları diş implantlarında yanal derecelendirilmiş malzemelerin uygulama alanlarının artırılması için işlevsel olarak FDM'lerin geliştirilmesi gerektiğini savunmuşlardır [33]. Hidroksiapatit/titanyumdan yapılan FDM diş implantlarının, şu anda kullanılan titanyum ve paslanmaz çelik implantlara kıyasla sırasıyla kemikteki maksimum stresi yaklaşık %22 ve %28 azalttığı Hedia ve arkadaşları tarafından bulunmuştur [34]. Ek olarak, diş implant malzemeleri üzerinde tekrarlanabilir homojen ve mikro yüzeyler oluşturmak için ve kimyasal aşındırma için titanyum gibi yanal dereceli malzemelerin kullanımı araştırılmıştır [35]. Yüzey modifikasyon tekniğinin endüstriyel uygulamalar için tekrarlanabilirliği ve üretkenliği artıracağı belirtilmiştir [36]. Diş implantlarında yatay derecelendirilmiş malzemelerin kullanımı implantın canlı kemikle entegrasyonunu arttırmayı, gerilmeleri en aza indirmeyi ve implantın ömrünü uzatmayı amaçlamaktadır [37].

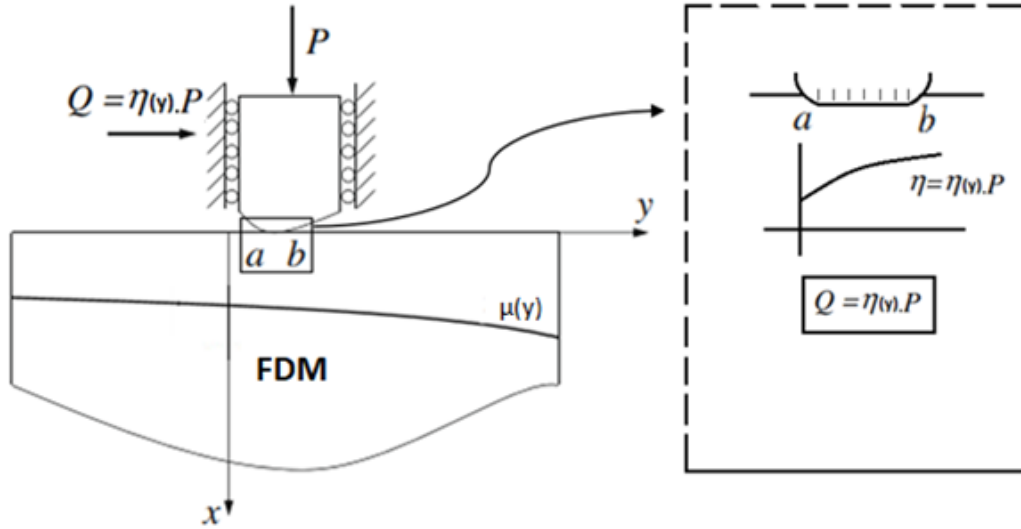
## 2.1. Problemin İki Boyutta Modellenmesi

Bu bölümde rijit bir zımba ile FDM malzeme için temas formülasyonu gösterilmiştir.



Şekil 2.2 Yanal derecelendirilmiş malzeme temas probleminin şematik gösterimi

Bu çalışmada rijit düz geometrili zımba ile uzaysal değişen sürtünme katsayısına sahip yanal derecelendirilmiş malzemelerdeki temas mekaniği problemi ele alınacaktır.



Şekil 2.3 Sert bir zımba ile sürtülmeli temas altında yanal derecelendirilmiş malzeme olan bir yarı düzlem ve problem tanımı

## 2.2. Formülasyon

Şekil 2.2’de bu problemde ele alınan temas problemi gösterilmektedir. Sert bir zımba ile yanal yönde derecelendirilmiş yarı bir düzlem sürtülmeli temas altındadır. Temasın meydana geldiği yüzeyde Coulomb sürtünme yasasının doğruluğu kabul edilmiştir. Temas yüzeyi  $y = a$  ve  $y = b$  aralığındadır.  $P$  birim uzunluğa etki eden dik kuvvet,  $Q$  ise yatay kuvvettir ve  $\eta$ , sürtünme katsayısıdır. Bu çalışmada yanal olarak derecelendirilmiş malzemelerde kayan temas probleminin daha kapsamlı bir analizini yapabilmek için elastik yarı düzlemde düzlem gerilim ve düzlem gerinim durumları varsayılmıştır. Yanal yönde derecelendirilmiş malzemenin kayma modülünün ve sürtünme katsayısının  $y$  eksenini boyunca değiştiği varsayılmıştır. Bu durumda denge denklemleri aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0. \quad (2.2)$$

Hem kayma modülü hem de sürtünme katsayısının yanal koordinat olan  $y$ ’nin fonksiyonları olduğu varsayılır. Matematiksel olarak varsayımlar şu şekildedir:

$$\mu = \mu(y) = \mu_0 \exp(\alpha y), \quad -\infty < y < \infty, \quad (2.3)$$

$$\eta = \eta(y), \quad a < y < b. \quad (2.4)$$

Burada  $\mu_0$ ,  $y=0$ 'da kayma modülünün değerini,  $\alpha$  yanal derecelendirilmiş malzemenin homejensizlik sabitini,  $\eta$  ise sürtünme katsayısını ifade etmektedir.

FDM malzeme için Bünye denklemlerini ifade eden Hooke kanunu aşağıdaki gibi yazılır:

$$\sigma_{xx}(x, y) = \frac{\mu(y)}{K-1} \left\{ (K+1) \frac{\partial u}{\partial x} + (3-K) \frac{\partial v}{\partial y} \right\}, \quad (2.5)$$

$$\sigma_{yy}(x, y) = \frac{\mu(y)}{K-1} \left\{ (K+1) \frac{\partial v}{\partial y} + (3-K) \frac{\partial u}{\partial x} \right\}, \quad (2.6)$$

$$\sigma_{xy}(x, y) = \mu(y) \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right\}. \quad (2.7)$$

$u$  ve  $v$  sırasıyla  $x$  ve  $y$  doğrultularındaki yer değiştirme bileşenleridir. Denge denklemleri temas mekaniği analizi bağlamında kuvvetler ve moment dengesini tanımlayan matematiksel denklemlerdir. Bu denklemler malzemedeki gerilmelerin ve yer değiştirmelerin dağılımını belirlemek için kullanılır.

Poisson oranı  $\nu$ 'nin sabit olduğu ve temas gerilmeleri üzerinde zayıf etkisi olduğu varsayılır (Balcı ve ark. [17], Dağ, Guler ve ark. [19]). Buna bağlı olarak  $K$  Kolosov sabitidir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$K = \begin{cases} 3 - 4\nu, & \text{düzlem gerinim} \\ \frac{3-\nu}{1+\nu}, & \text{düzlem gerilme} \end{cases} \quad (2.8)$$

Analitik çözüm için formülasyonda önce kısmi diferansiyel denklemler elde edilir, gerilme bileşenleri ve yer değiştirmeler bilinmeyen fonksiyonlar cinsinden yazılır.

Bünye denklemleri (2.5), (2.6), (2.7), denge denklemlerinde yerine yazıldığında Navier denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$(K+1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (K-1) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \alpha(K-1) \frac{\partial u}{\partial y} + \alpha(K-1) \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (2.9)$$

$$(K-1) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (K-1) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \alpha(K+1) \frac{\partial v}{\partial y} + \alpha(3-K) \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (2.10)$$



Navier denklemlerinin çözülmesi ile birlikte gerilmeler ve yer değiştirmeler aşağıdaki gibi bilinmeyen bir fonksiyon cinsinden elde edilir:

$$\sigma_{xx}(0, y) = \begin{cases} f(y), & a < y < b \\ 0, & y < a \text{ ve } y > b \end{cases} \quad (2.11)$$

$$\sigma_{xx}(0, y) = \begin{cases} \eta(y) f(y), & a < y < b \\ 0, & y < a \text{ ve } y > b \end{cases} \quad (2.12)$$

Düz zımba profilinde kullanıldığında sistemi ifade eden kısmi diferansiyel denklemin çözümünde yer değiştirme bileşeni için  $u(0, y)$  sınır koşulu:

$$\frac{\partial}{\partial y} u(0, y) = 0, \quad a < y < b. \quad (2.13)$$

şeklinde ifade edilir.  $u$ 'nun  $y$ 'ye göre  $x = 0$ ' da  $a$  ile  $b$  değerleri arasındaki türevinin sıfıra eşit olduğu belirtilir.

Birim uzunluğa etki eden  $P$  normal yük kuvveti ile birim uzunluğa etki eden  $Q$  teğetsel kuvveti için geleneksel temas mekaniği analizlerinde olduğu gibi sabit sürtünme katsayısını esas alan Coulomb Yasası doğrudan yazılamaz bu yüzden  $Q = \eta P$  eşitliği bu problemde geçerli değildir.

Problem içerisindeki sınır şartları aşağıdaki gibi belirtilmiştir:

$$\sigma_{xx}(0, y) = 0, \quad -\infty < y < a, \quad b < y < \infty, \quad (2.14)$$

$$\sigma_{xy}(0, y) = 0, \quad -\infty < y < a, \quad b < y < \infty, \quad (2.15)$$

$$\sigma_{xy}(0, y) = \eta(y)\sigma_{xx}(0, y), \quad a < y < b, \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} u(0, y) = 0, \quad a < y < b. \quad (2.17)$$

Denklem (2.14) - (2.17) ile verilen sınır şartları bilinmeyen fonksiyonların bulunmasında kullanılır.

Yanal derecelendirilmiş malzemelerin temas mekaniği analizi bağlamında Denklem (2.11) ve (2.12)'deki  $f(y)$  bilinmeyen fonksiyonu,  $\sigma_{xx}(0, y)$  ifadesi ise temas gerilmesinin dikey yöndeki normal bileşenini temsil eder.

Belirtilen bilinmeyen  $f(y)$  fonksiyonu, temas gerilmesinin malzeme içindeki yanal eksen olan  $y$ 'ye göre nasıl değiştiğini belirlemede çok önemlidir.  $f(y)$  fonksiyonunu çözerek araştırmacılar temas yüzeyinde  $y$  eksenini boyunca normal gerilme dağılımının nasıl değiştiğini gözlemleyebilirler.

Belirtilen koşullar dışında temas mekaniği probleminin çözümü, orijinden uzaklık  $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$  sonsuza yaklaştıkça tüm alan niceliklerinin sınırlı kalmasını gerektiren bir düzenlilik koşuluna uymalıdır. Bu koşul temas gerilmeleri ve yer değiştirmeleri için elde edilen çözümlerin fiziksel olarak anlamlı olmasını ve temas bölgesinden sonsuz uzaklığa giderken sınırsız davranış sergilememesini sağlar. Bu düzenlilik kısıtlaması ile analiz tanımlanmış alanda geçerli ve uygulanabilir kalır.

$$P = - \int_a^b \sigma_{xx}(0, y) dy, \quad (2.18)$$

$$Q = - \int_a^b \sigma_{xy}(0, y) dy. \quad (2.19)$$

$Q$  ve  $P$  arasındaki ilişki Denklem (2.18) ve (2.19) kullanılarak kurulmalıdır.  $Q$  ve  $P$  ilişkisinin belirlenmesi yanal olarak derecelendirilmiş malzeme ile sert zımba arasındaki kayma teması esnasında sürtünme etkileşimlerinin doğru bir şekilde modellenmesine olanak sağlar. Bu ilişki çözüm metodolojisinin bir parçası olarak türetilir, malzemenin yanal gradyanı boyunca değişen sürtünme özelliklerini açıklar ve kayma koşulları altında temas davranışlarının doğru tahmin edilmesine yardımcı olur.

Fourier dönüşümü mühendislik, fizik gibi çeşitli alanlarda kullanılan bir fonksiyonun içerdiği frekansları belirtilen bir şekle çeviren bir integral dönüşümdür. Temas mekaniği analizinde Navier denklemlerinin çözümünün analitik olarak yapılabilmesi için sonsuz olan ekseninde,  $y$  ekseninde ( $-\infty < y < \infty$ ) Fourier dönüşümü uygulanır. Navier denklemlerine Fourier dönüşümü uygulandıktan sonra yer değiştirmelerin dönüşümlerini içeren genel çözümler elde edilir. Bir sonraki adım, yer değiştirmelerin Ters Fourier dönüşümleri

uygulanarak orijinal yer değiştirme bileşenlerinin  $u(x, y)$  ve  $v(x, y)$  bulunmasıdır. Bu süreç, fiziksel uzayda gerçek yer değiştirme bileşenlerinin türetilmesine izin verir. Yer değiştirme bileşenlerinin elde edilmesi malzemenin kayma teması sırasında nasıl deforme olduğunu ve etkileşime girdiğini anlamak için oldukça önemlidir. Araştırmacılar bu bileşenleri türeterek sistemin davranışını analiz edebilir, gerilme dağılımlarını Denklem (2.5) ve Denklem (2.7) kullanarak elde edebilir ve temas mekaniği analizinde yer alan temas kuvvetlerini belirleyebilir.

Yer değiştirme bileşenleri  $u(x, y)$  ve  $v(x, y)$  Fourier transformları ve üstel terimler içeren integraller olarak ifade edilir. Bu ifadeler  $A_j$  ve  $C_j$  katsayılarını içeren terimlerin toplamlarını temsil eder. Denklemler, yer değiştirme bileşenlerinin  $x$  ve  $y$  fonksiyonları olduğunu gösterir.  $A_j$  ve  $C_j$  katsayıları, Fourier dönüşüm değişkeni olan  $\omega$  fonksiyonları tarafından belirlenir.  $C_j$  için ifadeler  $S$ ,  $j$ ,  $\omega$ ,  $\alpha$ , ve  $\kappa$  ile ilgili terimler içerir ve  $C_j$ , bu katsayılara göre hesaplanır.  $C_j$  ifadeleri kayma modülü, sürtünme katsayısı ve Fourier dönüşümü değişkenini dikkate alan karmaşık hesaplamalar içerir. Bu hesaplamalar temas problemini doğru bir şekilde modellemek için gereklidir. Katsayılar ve değişkenler arasındaki ilişkileri anlamak, tekil integral denklemini çözmek ve kontak mekaniği analizi bağlamında yer değiştirme bileşenleri için anlamlı sonuçlar elde etmek için çok önemlidir.

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{j=1}^2 A_j \exp(S_j x) \right\} \exp(i\omega y) d\omega, \quad (2.20)$$

$$v(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{j=1}^2 C_j A_j \exp(S_j x) \right\} \exp(i\omega y) d\omega. \quad (2.21)$$

Fourier dönüşüm değişkeni  $\omega$ ;  $C_j$ , ( $j = 1, 2$ ) fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$C_j = -\frac{(\kappa + 1)S_j^2 + \omega(\kappa - 1)(i\alpha - \omega)}{2i\omega S_j + \alpha(\kappa - 1)S_j}, j = 1, 2. \quad (2.22)$$

Yüzey altı gerilmeleri ifade etmek için FDM malzemede  $y = 0$  da oluşan normal ve kayma gerilmelerinin  $\sigma_{yy}(x, 0), \sigma_{xy}(0, y)$ ,  $0 < x < d$  aralığında ifadeleri türetilir. Düzgün profilli rijit zımba etkisinde olan yanal yönde derecelendirilmiş FDM malzeme yüzeyden ölçülen belirli bir  $d$  aralığı boyunca yüzey altı gerilme değerleri belirlenir.

Bu gerilmeler aşağıdaki gibi ifade edilir :

$$\sigma_{yy}(x, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \int_a^b k_{13}(x, y, t) f_3(t) dt, \quad (2.23)$$

$$\sigma_{xy}(x, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \int_a^b k_{23}(x, y, t) f_3(t) dt. \quad (2.24)$$

$\sigma_{yy}$  normal gerilme ifadesinde yer alan,

$$k_{13}(x, y, t) = \frac{e^{yx}}{2\pi(\kappa - 1)} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{13}(\omega, x) e^{-i\omega(t-y)} d\omega, \quad (2.25)$$

$$\phi_{13}(\omega, x) = \sum_{j=1}^4 \{S_j(3 - \kappa) + i\omega N_j(\kappa + 1)\} \varphi_j(\omega) e^{S_j x}. \quad (2.26)$$

şeklindedir.  $k_{13}(x, 0, t)$  ifadesi Denklem (2.23) numaralı denklemde yerine koyulduğunda  $0 < x < d$  aralığını  $-1 < r < 1$  şeklinde normalize edilmiş bir hale getirmek için aşağıdaki değişkenler değiştirilerek kullanılır:

$$x = \frac{d}{2} r + \frac{d}{2}, \quad -1 < r < 1, \quad (2.27)$$

$$t = \frac{b-a}{2} s + \frac{b+a}{2}, \quad -1 < s < 1. \quad (2.28)$$

(2.25) numaralı denklemde  $\sigma_{xy}$  kayma gerilmesi ifadesinde yer alan,

$$k_{23}(x, y, t) = \frac{e^{yx}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{23}(\omega, x) e^{-i\omega(t-y)} d\omega, \quad (2.29)$$

$$\phi_{23}(\omega, x) = \sum_{j=1}^4 (i\omega + N_j S_j) \varphi_j(\omega) e^{S_j x}. \quad (2.30)$$

şeklindedir.  $k_{23}(x, 0, t)$  ifadesi Denklem (2.24) numaralı denklemde yerine koyulduğunda  $0 < x < d$  aralığını  $-1 < r < 1$  şeklinde normalize etmek için Denklem (2.27) ve Denklem (2.28) ile verilen değişken değiştirmeleri kullanılır.

Sistemi ifade eden kısmi diferansiyel denklemler verilen sınır koşulları altında analitik olarak çözülebilir. Ancak, çözümleri matematiksel olarak çözmek zaman alıcıdır. Bu yüzden hesaplamalı yaklaşım olan sonlu elemanlar metodu kullanılacaktır.

### 3. SONLU ELEMANLAR ANALİZİ

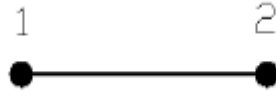
#### 3.1. Genel Bilgiler

Sonlu elemanlar analiz yöntemi çeşitli nedenlerden dolayı sayısal yöntemlerden daha başarılı sonuçlar verebilir. Çeşitli mühendislik uygulamalarındaki sıcaklık ve gerilim alanlarının doğru bir şekilde belirlenmesini sağlar, örneğin termoelastik bir temas problemi çalışmasında temas gerilmelerini ve sıcaklık dağılımlarını sayısal olarak elde etmek için kullanıldığı görülmüştür [38]. Sonlu eleman ağında çok sayıda eleman kullanılarak daha yüksek bir doğruluk seviyesi sağlanır. Temas bölgesinde sonlu elemanlar ağ yapısı kullanılarak gerilmelerin keskin değişimleri yakalanabilir [39]. Ek olarak, sonlu elemanlar yöntemi, fonksiyonel olarak derecelendirilmiş kaplamalar gibi sürekli değişen özelliklere sahip malzemelerin yüzeylerindeki stres alanlarının analiz edilmesinde etkilidir [40]. Genel olarak sonlu elemanlar analiz yöntemi, karmaşık mühendislik problemlerini analiz etmek için kapsamlı ve doğru bir yaklaşım sunar.

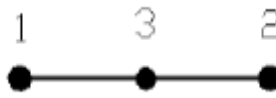
Sonlu elemanlar Topçu ve Taşgetiren [41] 'de açıklandığı gibi belirli özelliklere sahiptir. Karmaşık geometrik özellikler sergileyebilen çözüm alanı, sonlu elemanlar yöntemi ile kolay çözümler yapabilmek için alt geometrik bölgelere ayrılır. Geometrik bölgelerdeki elemanlar içerisindeki belirli düğüm noktalarında sorunu oluşturan sürekli denklemlerin formüle edilmesiyle istenen değerlerin elde edilebileceği anlamına gelir. Bu değerleri belirlemek için yaklaşım fonksiyonları kullanılır. Bu yaklaşım fonksiyonları enterpolasyon teorisine bağlı polinomlardan seçilir. Yaklaşım fonksiyonlarının derecesi düğümlerin sayısına bağlıdır.

Problemin kapsadığı fiziksel alana karşılık gelen çok sayıda alan değişkeni vardır. Sürekli ortamın alt bölgeleri sonlu elemanlara bölündüğünde aynı karakteristik özellikleri sergilediğinden her bir eleman için türetilen denklemler kümesi tüm sistemi kapsayan denklem kümesini elde etmek için birleştirilebilir. Sonlu elemanlar yönteminin diğer sayısal yöntemlerden avantajlı olduğu durumlar mevcuttur. Kullanılan sonlu elemanların boyutları ve şekillerinin değiştirilebilir olması çözüm geometrisinin küçük hatalarla ifade edilmesini sağlar. Problemi oluşturan model sonlu elemana bölündükten sonra her bir eleman için rijitlik matrisi

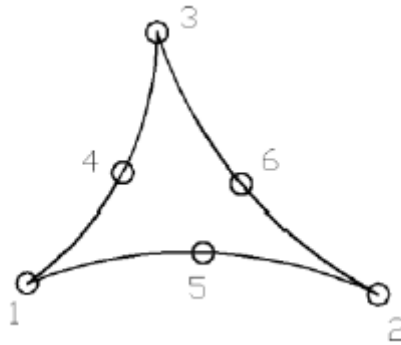
oluşturulur ve daha sonra bu matrisler, tüm problemi temsil etmek için birleştirilir [41]. Sonlu elemanlar yönteminde kullanılan örnek eleman tipleri aşağıdaki gibidir. Şekil 3.1 ve Şekil 3.12 arasındaki tüm görseller Balcı'nın çalışmasından alınmıştır [42].



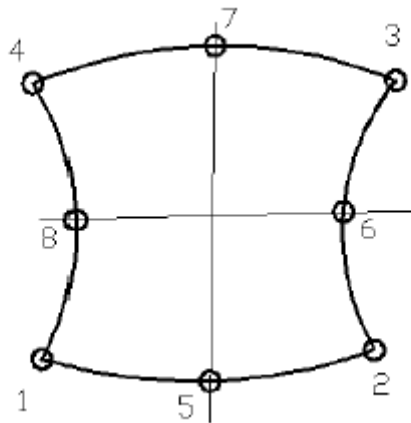
Şekil 3.1 1-Boyutlu lineer eleman (2 düğüm noktalı)



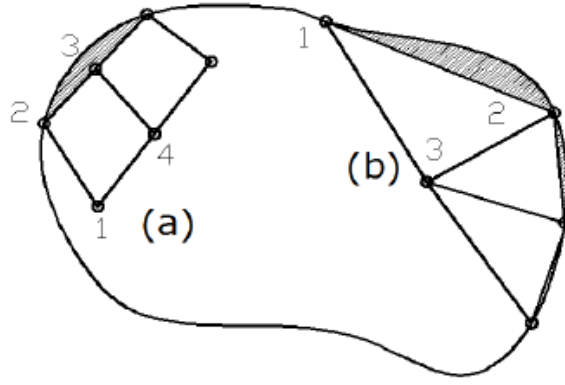
Şekil 3.2 1-Boyutlu kuadratik eleman (3 düğüm noktalı)



Şekil 3.3 2-Boyutlu kuadratik eleman (6 düğüm noktalı)



Şekil 3.4 2-Boyutlu kuadratik eleman (8 düğüm noktalı)

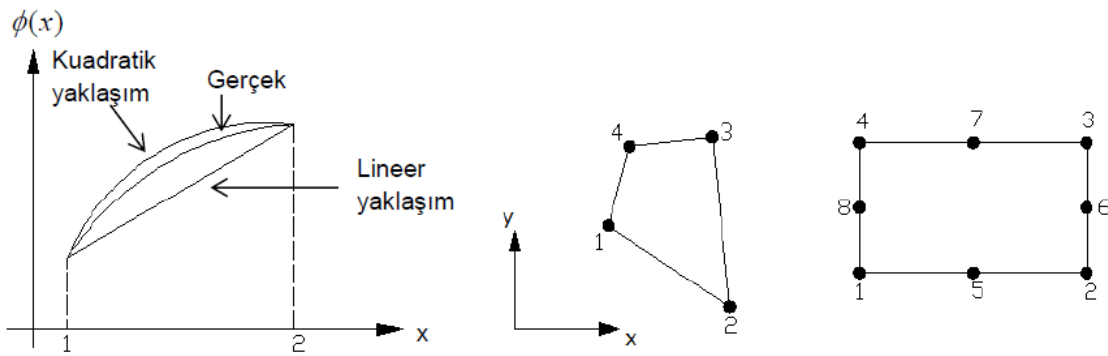


Şekil 3.5 İki boyutlu örnek gösterilmiş çözüm bölgesi

(a) 4 düğüm noktalı lineer eleman (b) 3 düğüm noktalı lineer elemanlar ile oluşturulan ağ yapısıdır. Şekil 3.5' deki taralı olarak işaretlenmiş alanlar lineer elemanların geometriyi tam olarak ifade edememesinden dolayı meydana gelen hatalardır.

### 3.2. İnterpolasyon Fonksiyonları

Şekil fonksiyonları literatürde interpolasyon fonksiyonları olarak da ifade edilir. Aşağıdaki resim lineer ve kuadratik şekil fonksiyonlarını göstermektedir [43].

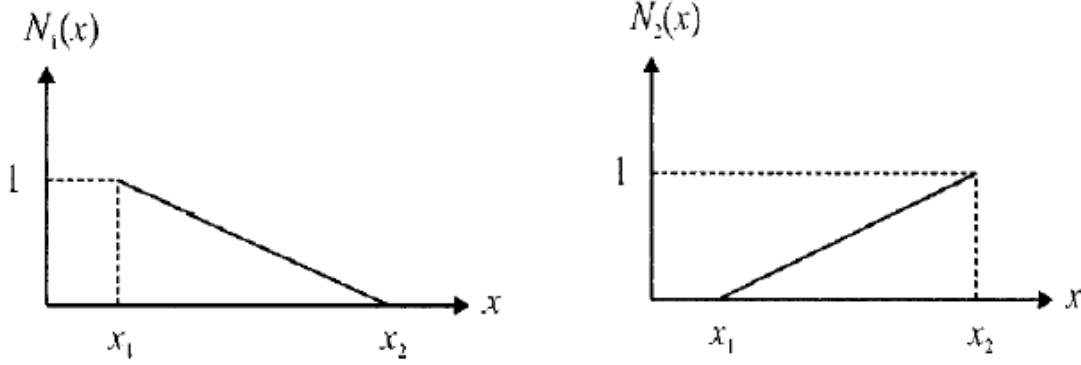


Şekil 3.6 Lineer ve kuadratik elemanların yaklaşımlarının gösterimi

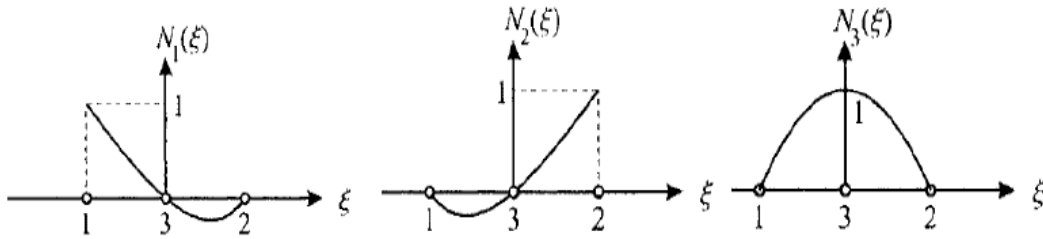
Şekil 3.6' da gerçek olarak ifade edilen sonuca lineer ve kuadratik yaklaşımların gösterimi verilmiştir. Dört düğümlü lineer dörtgen parçası ve sekiz düğümlü lineer dörtgen parçası da



aynı şekilde gösterilmektedir. 4 düğümlü lineer eleman lineer interpolasyon kullanırken 8 düğümlü dörtgen eleman bir kenarında üç düğüm olan kuadratik interpolasyon kullanılmaktadır.



Şekil 3.7 Lineer şekil fonksiyonları



Şekil 3.8 Kuadratik şekil fonksiyonları

### 3.3. Denklemler İçin Kullanılan Yaklaşımlar

Sonlu elemanlar yöntemi özellikle karmaşık geometrilere ve yükleme koşullarında kısmi diferansiyel denklemler olarak ifade edilen problemleri çözmek için kullanılan bir yöntemdir. Yaklaşık bir çözüm elde etmek için her eleman için denklem sisteminin türetilmesi gerekmektedir. Yaklaşık çözüm için denklemleri türeteterek farklı yaklaşımlar kullanılabilir. Bu yaklaşımlar arasında Direkt yaklaşım, Rayleigh-Ritz Metodu (Varyasyonel Yaklaşım), Galerkin Metodu (Ağırlıklı Kalanlar Yaklaşımı) ve Enerji Dengesi Yaklaşımı bulunmaktadır.

### 3.3.1. Direkt Yaklaşım

Direkt yaklaşım genellikle basit yükleme durumlarında tercih edilen bir yöntemdir ve genellikle tek boyutlu problemler için kullanılır. Rayleigh-Ritz Metodu ise bir fonksiyonelin minimize edilmesi prensibine dayanır. Örneğin katı mekaniğinde potansiyel enerji fonksiyonu sık kullanılan bir fonksiyonlardandır. Potansiyel enerji sistemin konumunu belirleyen koordinatlara bağlı olarak integral formülü kullanılarak tanımlanabilir. Bir sistem sınır koşullarını sağlıyorsa denge koşullarını sağlamak için potansiyel enerjisinin minimum olması gerekir. Bir alan değişkenin değeri minimum potansiyel enerji durumunu sağlayan bir dizi denklem çözülerek bulunabilir. Gerinim enerjisi, iç kuvvetin potansiyel temsil eder ve bir nesneye etki eden dış kuvvet ve onun yer değiştirmesi, dış kuvvetin potansiyel enerjisini oluşturur. Bu nedenle toplam potansiyel enerji ifadesi şu şekilde yazılabilir:

$\pi = U + W$  : Toplam potansiyel enerji formülü

$U$  : Gerinim enerjisi (iç kuvvetlerin potansiyel enerjisi)

$W$  : Dış kuvvetlerin potansiyel enerjisi

### 3.3.2. Varyasyonel Yaklaşım (Rayleigh-Ritz Metodu)

Sürekli bir ortamda toplam potansiyel enerji ifadesini kullanarak yaklaşık bir çözüm elde edilebilir. Rayleigh-Ritz yöntemi yer değiştirme alanı tahminini gerçekleştirerek çözümü dikkate alır.

Deplasman alanı tanımlamaları;

$$u = \sum a_i \phi_i(x, y, z), \quad i = 1 \rightarrow l, \quad (3.1)$$

$$v = \sum a_j \phi_j(x, y, z), \quad j = l + 1 \rightarrow m, \quad (3.2)$$

$$w = \sum a_k \phi_k(x, y, z), \quad k = m + 1 \rightarrow n, n > m > 1. \quad (3.3)$$

$\phi$  fonksiyonu polinom fonksiyonu olarak seçilir.  $u, v$  ve  $w$  yer değiştirme alanları belirli sınır koşullarını karşılamalıdır. Gerilme-gerinim ve gerinim-yer değiştirme (deplasman) denklemleri kullanılarak toplam potansiyel enerjinin ifadesi, bağımsız değişken  $r$  olan bir fonksiyon olarak ifade edilebilir.

$$\pi = \pi(a_1, a_2, \dots, a_r). \quad (3.4)$$

Bağımsız değişkenlere göre minimizasyon işlemi;

$$\frac{d\pi}{da_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, r. \quad (3.5)$$

Toplam potansiyel enerji şu şekilde ifade edilebilir:

$$\pi = U + W. \quad (3.6)$$

$U = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\} \{\varepsilon\} dV$  : Malzemenin birim şekil değiştirme enerjisi (iç kuvvetin potansiyel enerjisi)

Sürekli alanda yer değiştirme, kütle kuvveti, yüzey kuvveti ve tekil kuvvetin ifadesi:

$\{u\} = (u, v, w)$  : Yer değiştirme vektörü

$\{f\} = (f_x, f_y, f_z)$  : Kütle kuvveti vektörü

$\{T\} = (T_x, T_y, T_z)$  : Yüzey kuvveti vektörü

$\{P\} = \{P_i\}$  : Tekil kuvvet

$W = - \int_V \{u\}^T \{f\} dV - \int_S \{u\}^T \{T\} ds - \sum_{i=1} \{u_i\}^T \{P_i\}$  : Bir nesneye uygulanan dış kuvvet tarafından üretilen potansiyel enerji formülü

Toplam potansiyel enerji formülü:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\} \{\varepsilon\} dV - \int_V \{u\}^T \{f\} dV - \int_S \{u\}^T \{T\} ds - \sum_{i=1} \{u_i\}^T \{P_i\}, \quad (3.7)$$

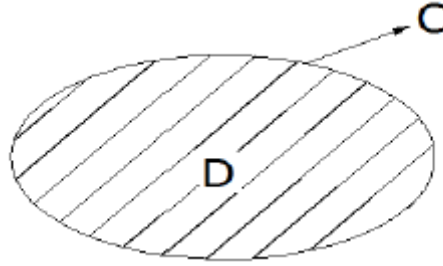
$$\frac{d\pi}{d\{u\}} = 0. \quad (3.8)$$

### 3.3.3. Ağırlıklı Kalanlar Yaklaşımı (Galerkin Metodu)

Bir fonksiyonun farklı değerleri için yaklaşık çözümler ile belirli bir eleman için gerçek çözüm arasındaki farkın, belirli bir ağırlaklandırma fonksiyonuyla çarpılarak en aza indirilmesi

ilkesine dayanır. Varyasyonel yaklaşımın avantajı, fonksiyonların korunamadığı durumlarda uygulanabilmesidir. Çözüm alanı  $D$ ' yi bir termal alan çözümü için iki boyutlu bir ısı iletim denklemi olarak değerlendirirken:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{d^2\phi}{dy^2} = f(x, y). \quad (3.9)$$



Şekil 3.9 Bir diferansiyel denklem için iki boyutlu çözüm alanı

Galerkin metodunda yaklaşık çözüm ifadesi:

$$\phi(x, y) \cong \tilde{\phi}(x, y) = \phi_0(x, y) + \sum_{i=1} a_i \phi_i(x, y). \quad (3.10)$$

$C$  üzerinde;

$\phi(x, y) = g(x, y)$  şeklinde tanımlanmış olsun.

$\phi_i(x, y)$  :  $C$ ' de sınır koşullarını sağlayan özel test fonksiyonları

$a_i$  : İşlem sonucu belirlenen katsayı değeri

$\phi_0(x, y)$ : Düzgün olmayan sınır koşullarını sağlamak için seçilmesi gereken fonksiyon

$\tilde{\phi}(x, y)$  : Yaklaşım çözüm

$L\{\tilde{\phi}(x, y)\} - f(x, y) = R(x, y)$  : Gerçek çözüm ile yaklaşık çözüm farkı

$$\iint_D R(x, y) \cdot \phi_i(x, y) \cdot dx \cdot dy = 0, \quad (3.11)$$

$$\iint_D \left[ \frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{d^2\phi}{dy^2} - f(x, y) \right] \cdot \phi_i(x, y) \cdot dx \cdot dy = 0. \quad (3.12)$$

Diverjans teoremi kullanılarak denklemin hesaplama sonucu:

$$\phi(x, y) = g(x, y) + \sum_{i=1}^n a_i \phi_i(x, y). \quad (3.13)$$

$$\iint_D \left[ \frac{d\phi_j}{dx} \frac{d\phi_i}{dx} + \frac{d\phi_j}{dy} \frac{d\phi_i}{dy} \right] dx dy \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \iint_D f(x, y) \cdot \phi_i + \frac{dg}{dx} \cdot \frac{d\phi_i}{dx} + \frac{dg}{dy} \frac{d\phi_i}{dy} dx dy \quad (3.14)$$

$$\begin{array}{ccc} \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\ \{K_{ij}\} & \{a_i\} & \{f_i\} \quad i,j=1,2,\dots,n \end{array}$$

$\{K_{ij}\} \times \{a_i\} = \{f_i\}$  elde edilir.

### 3.3.4. Enerji Dengesi Yaklaşımı

Bir sistme giren ve çıkan mekanik veya termal enerjinin eşit olması ilkesi sistemin temel prensiplerinden biridir. Bu yaklaşım herhangi bir işlevsel gereksinim olmadan çalışır.  $\delta$ 'u, mekanik alanın sınır koşullarını karşılayan sonsuz küçük bir yer değiştirme değişkeni olarak tanımlanırsa, karşılık gelen gerinim alanı şu şekilde ifade edilebilir.

$$\delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{d\delta u_i}{dx_j} + \frac{d\delta u_j}{dx_i} \right) \quad (3.15)$$

Enerji dengesi ilkesine göre bir cisimde depolanan enerji, o cisme uygulanan bir dış kuvvetin ürettiği enerjiye eşittir. Bu denge şu şekilde ifade edilebilir:

$$\iiint_V \sum_i \sum_j \tau_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \iint_S \sum_i T_i \delta u_i dS \quad (3.16)$$

$$\int_V [\delta \varepsilon]^T \{\tau\} dV = \int_S \{\delta u\}^T \{T\} dS \quad (3.17)$$

Hooke kanunu aşağıdaki gibi yazılabilir:

[C]: Elastisite matrisi

Hooke kanunu matris formunda üç boyutlu ifade edildiğinde elastisite matrisi izotropik malzemeler için 6x6 matristir.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

İki boyutlu düzlemsel gerilim ve düzlemsel gerinim için esneklik (elastisite) şu şekilde yazılır.

$$[C] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$$[C] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Yer değiştirme alanı aşağıdaki gibidir.

$$\{u\} = \begin{bmatrix} u_1(x_i, y_i) \\ u_2(x_i, y_i) \end{bmatrix} = [N(x, y)]\{\delta\} \quad (3.21)$$

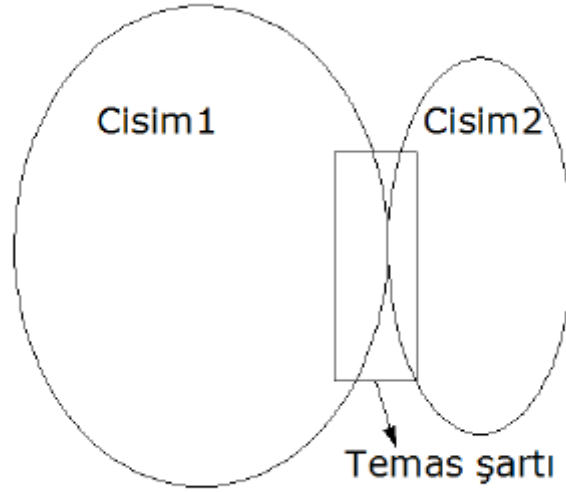
[N(x, y)] : Sonlu elemanlar şekli (interpolasyon) fonksiyon vektörü

{δ} : Düğüm yer-değiştirme vektörü

### 3.4. Temas Mekanığı İçin Sonlu Elemanlar Analizi

Sonlu elemanlar analizinde temas problemlerini çözmek için temel olarak Penaltı Metodu, Lagrangian çarpan yöntemi ve Takviyeli Lagrangian yöntemi kullanılır. Takviyeli Lagrange

metodu, yapılan çözümlerde tercih edilmiştir. Bu metotlar hakkında kısa bilgiler aşağıda sunulmaktadır [44].



Şekil 3.10 Temas koşullarının şematik diyagramı

Sonlu elemanlar analizinde temas ayarlama denklemi aşağıdaki gibidir:

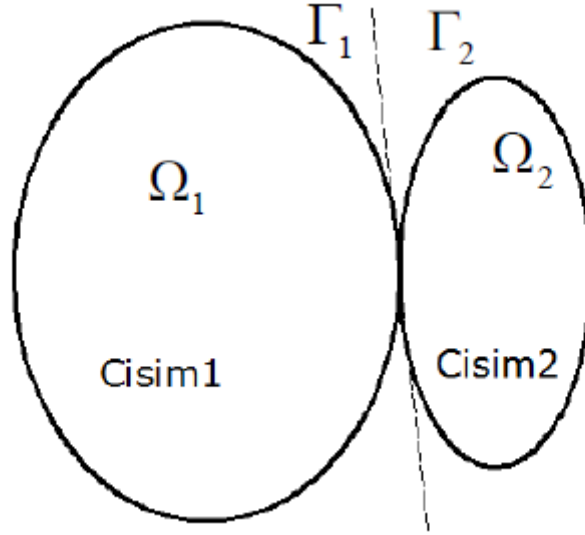
$$[C]\{u\} = \{Q\} \quad (3.22)$$

$[C]$  : Kısıtlamalar (koşul matrisi)

$\{u\}$  : Değişken matris (genellikle yer değiştirme vektörü)

$\{Q\}$  : Sabit matris

Yukarıdaki denklem, mekanik sistemi oluşturan sonlu elemanları aynı anda bir dizi denklemin eklenmesiyle açıklar. Bu denklem setini çözmek için birçok yöntem geliştirilmiş olmasına rağmen araştırmacılar sistem denklem sistemini elde etmek ve çözmek için sistemin potansiyel enerjisini en aza indirme ilkesini kullanmıştır.



Şekil 3.11 Temas halindeki iki nesnenin şematik görüntüsü

Yukarıdaki şekilde  $\Omega_1$  cisim 1'i,  $\Omega_2$  cisim 2'yi,  $\Gamma_1$  ise cisim 1'in temas yüzeyini,  $\Gamma_2$  ise cisim 2'nin temas yüzeyini gösterir.

$$\pi = \int_{\Omega_1 + \Omega_2} \frac{du_i}{dx_j} \cdot \sigma_{ij} \cdot d\Omega - \int_{\Omega_1 + \Omega_2} u_i b_i \cdot d\Omega - \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} u_i t_i d\Gamma, \quad (3.23)$$

$$\pi(u) = \frac{1}{2} \{u\}^T [K] \{u\} - \{u\}^T \{R\}. \quad (3.24)$$

$\{u\}$  : Düğüm yer değiştirme vektörü

$[K]$  : Sistem sertlik matrisi

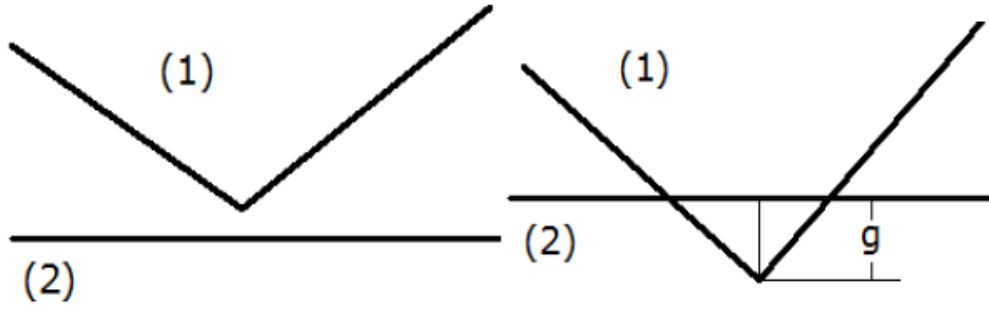
$\{R\}$  : Kuvvet vektörü

Yukarıdaki denkleme kısıtlama ifadesi eklenmelidir böylece  $\Omega_1$  ve  $\Omega_2$  cisimlerinin temas şartı sağlanır. Bu kısıtlama ifadesi, denklemin içinde bir fonksiyon olarak ifade edilmelidir [45].

$$\bar{\pi} = \pi(u) + \pi^{con}(c, u, \dots). \quad (3.25)$$

İki cismin birbirinin sınırları içerisine geçememesi prensibi, denklemin çözülmesi için kullanılabilir. Aşağıdaki şekilde, bu prensip iki cismin kenarları için açıklanmıştır.





Şekil 3.12 Nesnenin iki kenarının a) t ve b) "t + dt" anlarındaki yüzey deformasyonunun şematik görüntüsü

Temas sınır şartlarının denklemi aşağıdaki gibidir.

Temas yüzeyi  $\Gamma^c = \Gamma^1 \cap \Gamma^2$  olarak tanımlanmakta boşluk fonksiyonu

$$g = (x^1 - x^2) \cdot n \geq 0 \text{ durumunu sağlamaktadır.}$$

$\Gamma^c$  : iki nesnenin temas bölgesi yüzeyi

$x^1, x^2$  : Deforme olmuş nesnelerin konumları

$n$  : Nesne (2) yüzey normal vektörü

$g$  : Boşluk fonksiyonu

Boşluk fonksiyonu:

$$g = C\{u\} - Q. \quad (3.26)$$

Eğer  $g$  değeri tam olarak sıfır olduğunda, gerçek bir çözüm elde edilir. Ancak temas analizinde  $g$  değeri belirli bir girinti değerinden dolayı tam olarak 0 değildir. İçerme değeri geçirgenlik değerinin belirli bir toleransta ayarlanmasıyla düzeltilebilir. Temas analizinin dört temel yöntemi aşağıda açıklanmıştır.

### 3.4.1. Penaltı Metodu

Penaltı metodu, temas mekaniği için kullanılan ilk koşullandırma yöntemlerinden bir tanesidir. Bu yöntem 1985 yılında Hallquist ve arkadaşları tarafından temas ve darbe mekaniğinin analizi için geliştirilmiştir [46]. Bir temas durumundaki potansiyel enerjinin genel denklemi şu şekilde ifade edilebilir.

Kısıt fonksiyoneli  $\pi^{con}(c, u, \dots) = \frac{1}{2}g^T \alpha \cdot g$  olarak tanımlanmıştır. Toplam potansiyel enerji denklemi aşağıda verilmiştir.

$$\bar{\pi} = \pi(u) + \frac{1}{2}g^T \alpha \cdot g \quad (3.27)$$

$\alpha$  : Normal temas rijitliği (penaltı numarası olarak adlandırılır.)

$g$  : Normal boşluk vektörü

Şartlandırma boşluk vektörü  $g = 0$  şartını sağlandığında gerçekleşir ve toplam potansiyel enerji  $\bar{\pi}(u) \cong \pi(u)$  olacaktır. Bu nedenle potansiyel enerjiyi minimize etmek gerekir. Bunun için aşağıdaki denklemler uygulanabilir.

$$\bar{\delta\pi} = \left[ \frac{d\pi}{du} \delta u + g^T \alpha \frac{dg}{du} \delta u \right], \quad (3.28)$$

$$\bar{\delta\pi} = \left[ \frac{d\pi}{du} + g^T \alpha \frac{dg}{du} \right] \delta u. \quad (3.29)$$

Denklem minimizasyonu için  $d\bar{\pi} = 0$  şartının sağlanması gerekir. Denklemin ilk terimi rijitlik denklemi olarak adlandırılır.

$$\frac{d\pi}{du} = K\{u\} - R, \quad (3.30)$$

$$\frac{dg}{du} = C, \quad (3.31)$$

$$g^T \alpha \frac{dg}{du} = (C \cdot \{u\} - Q)^T \cdot \alpha \cdot C = C^T \alpha C \{u\} - C^T \alpha Q. \quad (3.32)$$

Potansiyel enerjinin türevi ifadesi

$\overline{\delta\pi} = [K\{u\} - R + C^T \alpha C\{u\} - C^T \alpha Q]. \delta u = 0$  olarak elde edilir.

$$(K - R + C^T \alpha C)\{u\} = R + C^T \alpha Q. \quad (3.33)$$

**K:** Sistemin temas yüzeyinde rijitlik matrisi

$C^T \alpha C$  : Sistem rijitlik matrisine eklenn terimdir. Temas yüzeylerinde iki cismin birbirine geçememezlik ilkesini sisteme eklemiş oluyor.

Penaltı yönteminde, sistem temas sınır şartını uygulamak için ek denklem tanımlamasına ihtiyaç duyulmaz. Çözüme bağlı penaltı sayısı duruma göre değişebilir. Bu sebeple yaklaşık sonuçlar elde edilir.

### 3.4.2. Lagrange Çarpanları Metodu

Lagrangian çarpan yöntemi, temas halindeki iki cismin toplam potansiyel enerjisini en aza indirmek için kullanılır. Bu amaçla, toplam potansiyel genel gösterimine yeni bir değişken eklenir. Yeni terimin yarattığı potansiyel enerjiye ilişkin genel denklem şu şekilde ifade edilir.

$$\bar{\pi}(u, \lambda) = \pi(u) + \lambda^T g, \quad (3.34)$$

$\lambda$  : Lagrange çarpanları vektörü

Sistem  $g = 0$  olduğunda ve bu durumda  $\bar{\pi} = \pi$  şartını sağlamak için, potansiyel enerjinin genel ifadesi  $u$  ve  $\lambda$  değişkenlerine göre en aza indirgenirse aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\delta_u \bar{\pi} = \left[ \frac{d\pi}{du} + \lambda^T \frac{dg}{du} \right] \delta u, \quad (3.35)$$

$$\delta_u \bar{\pi} = g \delta \lambda. \quad (3.36)$$

Penaltı metodunda uygulanan diskretizasyon yöntemi bu kısım için uygulanırsa elde edilecek sistem aşağıdadır.

$$K\{u\} - R + C^T \alpha \lambda = 0, \quad (3.37)$$

$$C\{u\} = Q. \quad (3.38)$$

Matris formunda sistem denklemleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} K & C^T \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \\ Q \end{bmatrix}. \quad (3.39)$$

Lagrange çarpanları yöntemi, sistemi çözmek için ek denklem seti eklenerek kullanıldığında, kısıt denklemleri temas üzerinde kesin bir şekilde yerine getirilir. Ancak Lagrangian çarpan yöntemi kullanıldığında temas yüzeyinde düzgün bir kuvvet dağılımı sağlanamayabilir.

### 3.4.3. Karışık Lagrange Metodu

Karışık Lagrangian yöntemi, klasik Lagrangian yöntemiyle aynı prensibe sahiptir ancak potansiyel enerji ifadesine bir terim eklenerek bunu en aza indirmeye çalışır. Potansiyel enerjinin genel denklemi şu şekilde ifade edilebilir.

$$\bar{\pi}(u, \lambda) = \pi(u) + \lambda^T g - \frac{1}{2} \lambda^T A \lambda, \quad (3.40)$$

$\frac{1}{2} \lambda^T A \lambda$  terimi matrisin köşegeninin sıfıra gitmesini engeller.

Matris A köşegendir.

$A_{ii} = \frac{1}{\alpha_{ii}}$  olup,  $\alpha_{ii}$  terimi kısıtlama ifadesiyle ilişkili penaltı parametresine karşılık gelir.

Bu durumda, u ve  $\lambda$ 'ya bağlı olarak toplam potansiyel enerji kısmi olarak minimize edilmelidir.

$$\delta_u \bar{\pi} = \left[ \frac{d\pi}{du} + \lambda^T \frac{dg}{du} \right] \delta u, \quad (3.41)$$

$$\delta_u \bar{\pi} = [g - A\lambda] \delta \lambda. \quad (3.42)$$

Penaltı yönteminde kullanılan ayrıklaştırma (diskretizasyon) yönteminin bu kısma uygulanması ile aşağıdaki sistem elde edilir.

$$K\{u\} - R + C^T \lambda = 0, \quad (3.43)$$

$$C\{u\} - Q - A\lambda = Q. \quad (3.44)$$

Matris formunda sistem denklemleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} K & C^T \\ C & -A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \\ Q \end{bmatrix}. \quad (3.45)$$

Bu yöntem, sınır koşulu denklemlerinin temas anında tam olarak karşılanmasına izin vermez. Yaklaşık çözüm değeri, penaltı sayısına bağlı olarak doğru sonuca yakınsar. Penaltı terimleri küçük seçilirse, köşegen terimleri sonsuza yaklaşır ve bu durumda yöntem doğru çözüme yakınsamaz. Penaltı parametresi sonsuza yaklaştığında elde edilen çözüm doğru çözümdür.

#### 3.4.4. Takviyeli Lagrange Metodu

Takviyeli Lagrange metodu, 1990'ların başlarında geliştirilmiştir ve Lagrangian yöntemi ve penaltı yöntemlerinin eksiklerinin giderilmesi amaçlanmıştır. Bu yöntem penaltı sayısından bağımsız olarak çalışır ve sisteme herhangi bir ek denkleme eklenmesini gerektirmez. Takviyeli Lagrange yöntemi kullanılarak potansiyel enerji denklemi şu şekilde ifade edilir.

$$\bar{\pi}(u, \lambda) = \pi(u) + \lambda^T g + \frac{1}{2} g^T \alpha g. \quad (3.46)$$

Yukarıdaki denkleme bakıldığında, potansiyel enerji denklemini penaltı metodu ve Lagrange metodlarının birleşimi olarak düşünülebilir. Potansiyel enerji ifadesi,  $g = 0$  koşulunu sağlamak için en aza indirgenmesi gerekir.

$$\delta_u \bar{\pi} = \left[ \frac{d\pi}{du} + \lambda^T \frac{dg}{du} + g^T \alpha \frac{dg}{du} \right] \delta u. \quad (3.47)$$

Penaltı metodunda kullanılan ayrıklaştırma (diskretizasyon) yönteminin bu kısma uygulanması ile aşağıdaki sistem elde edilir.

$$K\{u\} - R + C^T \lambda + C^T \alpha C \{u\} - C^T \alpha Q = 0, \quad (3.48)$$

$$(K + C^T \alpha C)\{u\} = R - C^T (\alpha Q - \lambda). \quad (3.49)$$

Bu denklem sistemi,  $\lambda$  ve  $\{u\}$  terimlerinin aynı anda çözülmesiyle çözülebilir. Bu için, bir iteratif çözüm prosedürü takip edilmelidir. Bu prosedür, Crook (1996) tarafından özetlenmiştir [47].

$\lambda_1$  terimi atanır.

İterasyona başlanır.

$(K + C^T \alpha C)\{u\} = R - C^T (\alpha Q - \lambda)$  denklemi yer değiştirmeler için çözülür.

Penaltı kuvvetleri  $f^c = \Delta \lambda = \Delta g$  formülü kullanılarak hesaplanır.

Yakınsamının kontrolü sağlanır.

Eğer  $|\Delta \lambda| \leq Tolerans$  ise yineleme (iterasyon) sonlandırılır.

Değilse, Lagrangian çarpanı güncellenir.

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k + \Delta \lambda. \quad (3.50)$$

Takviyeli Lagrange yöntemi, temas kuvvetlerinin hesaplanmasında penaltı sertliğini kullanır ve istenen toleransa ulaşıncaya kadar temas geriliminin güncellendiği yinelemeli (iteratif) bir çözüm uygulanır. Ancak, sistem rijitlik matrisinin kötü koşullanmaması nedeniyle çok büyük penaltı değerleri kullanılmaz.

### 3.5. Yanal Yönde Değişken Sürtünme Katsayısı

Bu tez probleminde sonlu elemanlar çözümü yapılırken iki çeşit sürtünme modeli çalışılmıştır. Mevcut sonlu elemanlar çalışmasında Sürtünme Modeli 1 kullanılmıştır, doğrulama çalışması ise Sürtünme Modeli 2' ye göre yapılmıştır.

Sürtünme Modeli 1' de değişken sürtünme katsayısı denklemleri:

$$\eta(y) = \frac{\eta p + \eta m}{2} + \frac{\eta p - \eta m}{\pi} \arctan(\gamma y) \quad (3.51)$$

$$\text{Eğer } \gamma > 0 \quad (3.52)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \eta(y) = \eta p \quad (3.53)$$

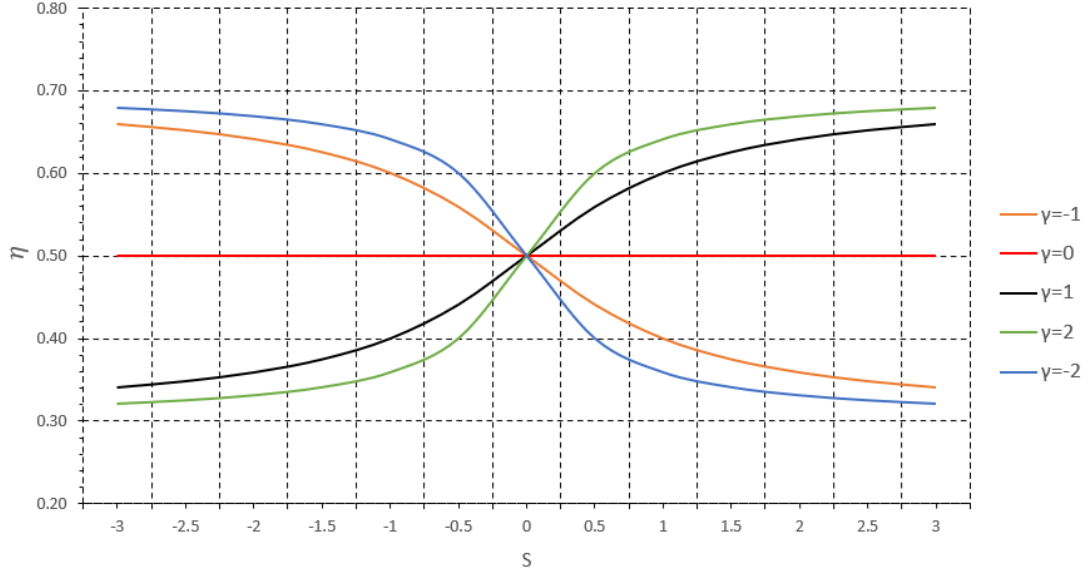
$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \eta(y) = \eta m \quad (3.54)$$

$$y = \frac{b-a}{2}s + \frac{b+a}{2} \quad (3.55)$$

$$\eta(y) = \eta \left( \frac{b-a}{2}s + \frac{b+a}{2} \right) = \hat{\eta}(s) \quad (3.56)$$

$$\hat{\eta}(s) = \frac{\eta p + \eta m}{2} + \frac{\eta p - \eta m}{\pi} \arctan \left( \left( \frac{\gamma(b-a)}{2}s + \frac{\gamma(b+a)}{2} \right) \right) \quad (3.57)$$

şeklindedir. Sürtünme Modeli 1 içerisindeki arctan fonksiyonu sayesinde yarı düzlemin üst yüzeyinde uzak alan sınırlarında dahi sürtünme katsayısı hesaplanarak sonlu elemanlar modeline aktarılmıştır.



Şekil 3.13 Sürtünme Modeli 1, değişen sürtünme profiline bağlı olarak temas yüzeyindeki sürtünme katsayısı grafiği

Sürtünme Modeli 2' de değişken sürtünme katsayısı denklemleri:

$$\eta(y) = \eta_a \exp \left\{ \ln \left( \frac{\eta_b}{\eta_a} \right) \frac{y-a}{b-a} \right\}, a < y < b \quad (3.58)$$

$$y = \frac{b-a}{2} s + \frac{b+a}{2} \quad (3.59)$$

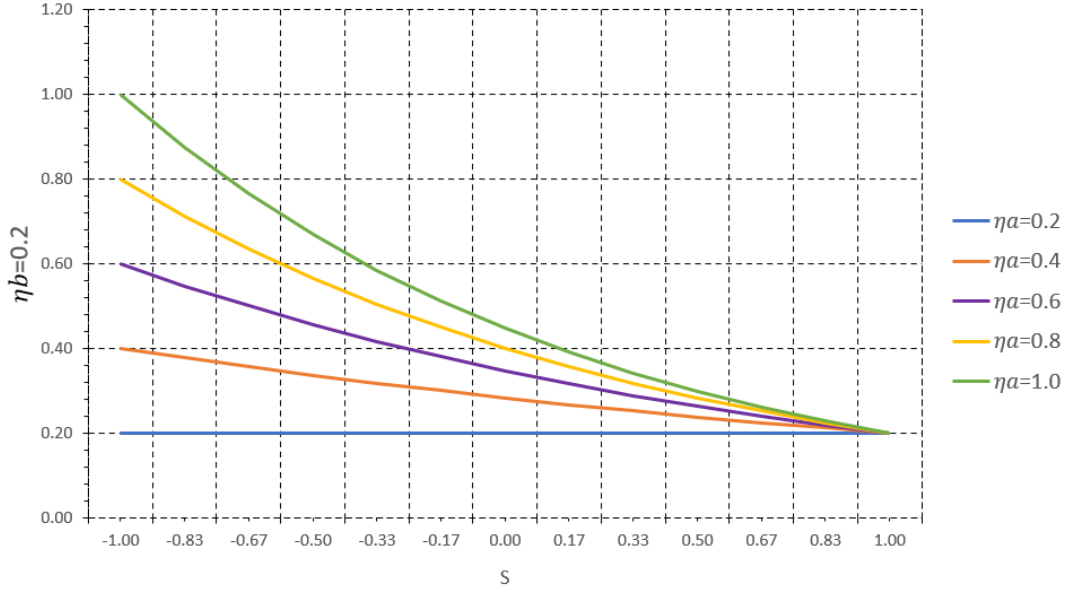
$$\eta(y) = \eta \left( \frac{b-a}{2} s + \frac{b+a}{2} \right) = \hat{\eta}(s) \quad (3.60)$$

$$\hat{\eta}(s) = \eta_a \exp \left\{ \ln \left( \frac{\eta_b}{\eta_a} \right) \frac{\left( y = \frac{b-a}{2} s + \frac{b+a}{2} \right) - a}{b-a} \right\} \quad (3.61)$$

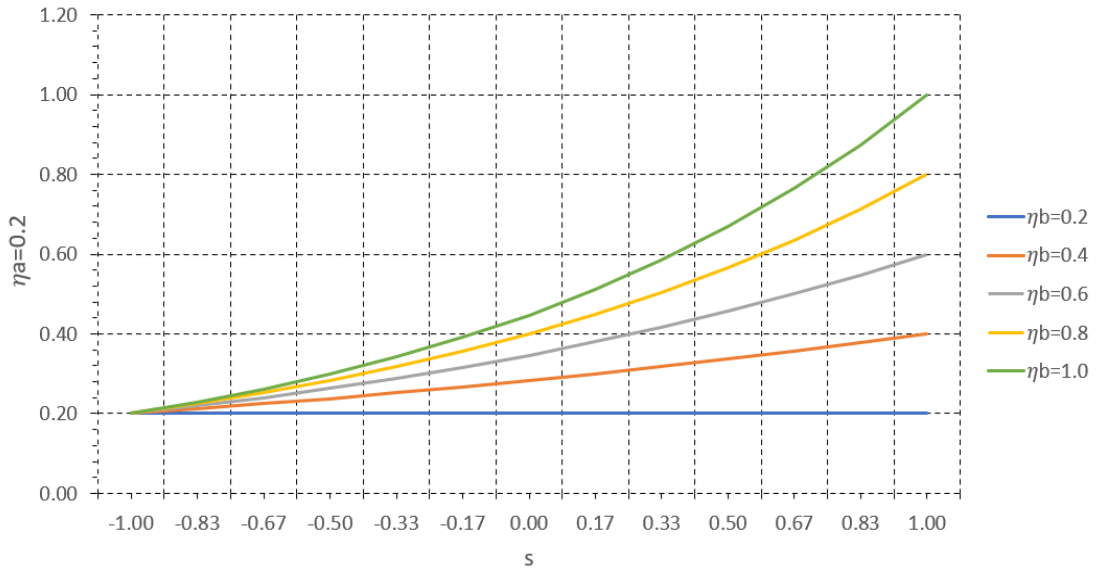
şeklindedir. Sürtünme Modeli 2, Denklem (3.58)' den görüleceği üzere temas bölgesi başlangıcı ve bitişi arasında tanımlıdır. Temas bölgesi dışında kalan yüzeyler için sürtünme katsayısı tanımlaması yoktur. Bu duruma göre Sürtünme Modeli 1 ve Sürtünme Modeli 2 farklılık göstermektedir.



Şekil 3.14 ve Şekil 3.15’ de Sürtünme Modeli 2’ nin zımba ön ucundan arka ucuna doğru sürtünme profilinin nasıl değiştiği grafikler ile gösterilmiştir.



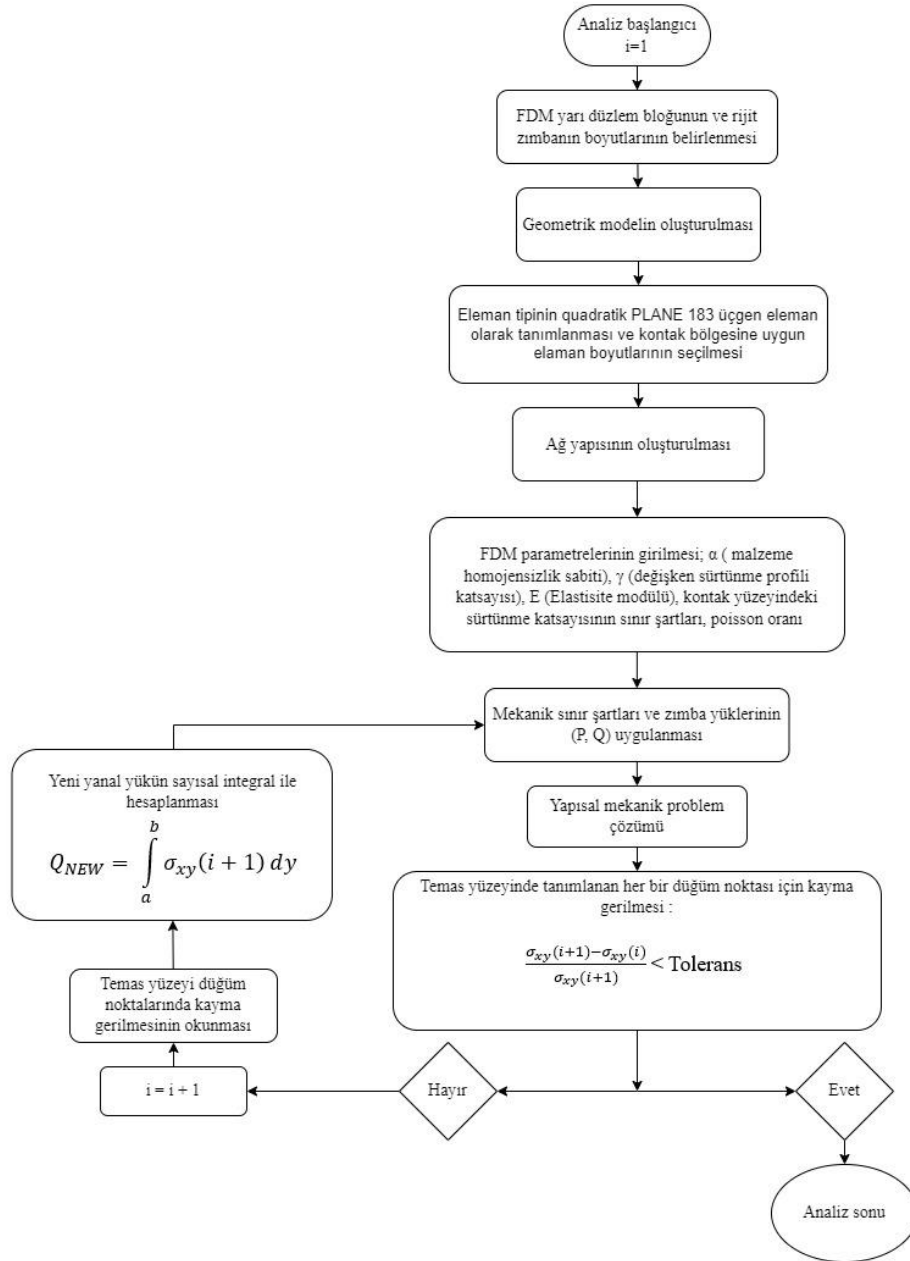
Şekil 3.14 Sürtünme modeli 2, zımba arka ucundan ön ucuna doğru azalan profil grafiği



Şekil 3.15 Sürtünme modeli 2, zımba ön ucundan arka ucuna doğru artan profil grafiği

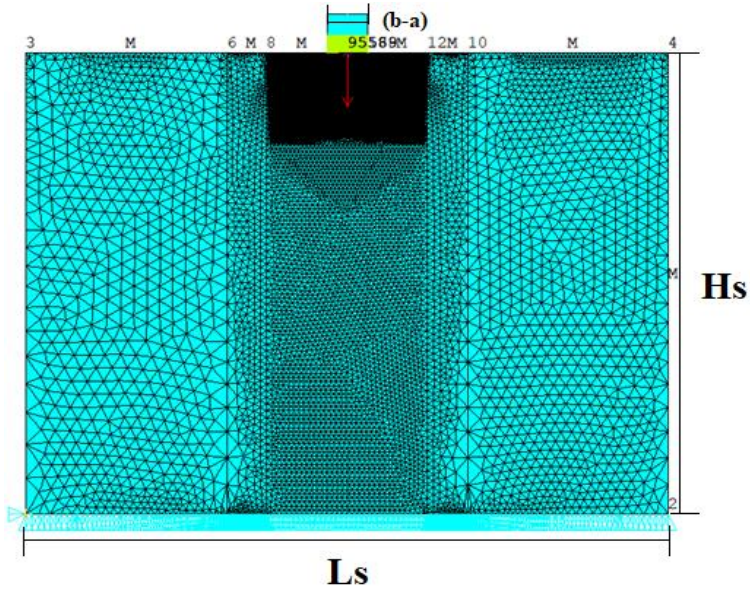
### 3.6. Geliştirilen Çözüm Prosedürü

Yapısal mekanik problem çözümü için ilk olarak sürtülmeli temas modellenmiştir. Daha sonra zımba kuvveti ve malzeme bloğunun sabitlenmesi gibi sınır koşulları girilmiştir. Temas probleminin çözümü için oluşan algoritmanın akış şeması aşağıdaki gibidir.

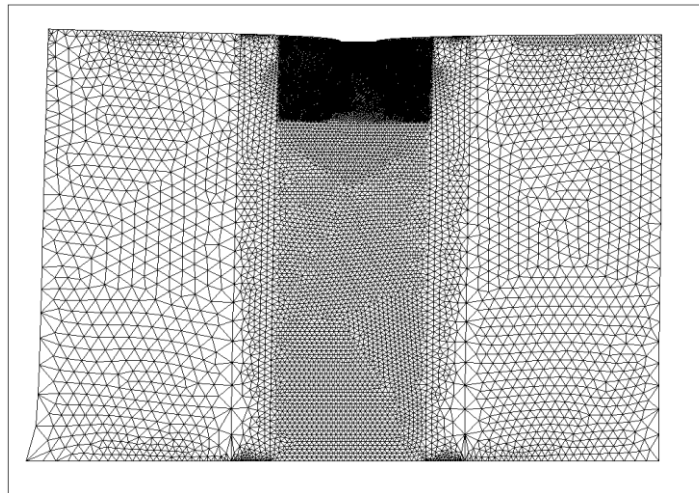


Şekil 3.16 Temas problemini çözmek için geliştirilen algoritmanın akış şeması

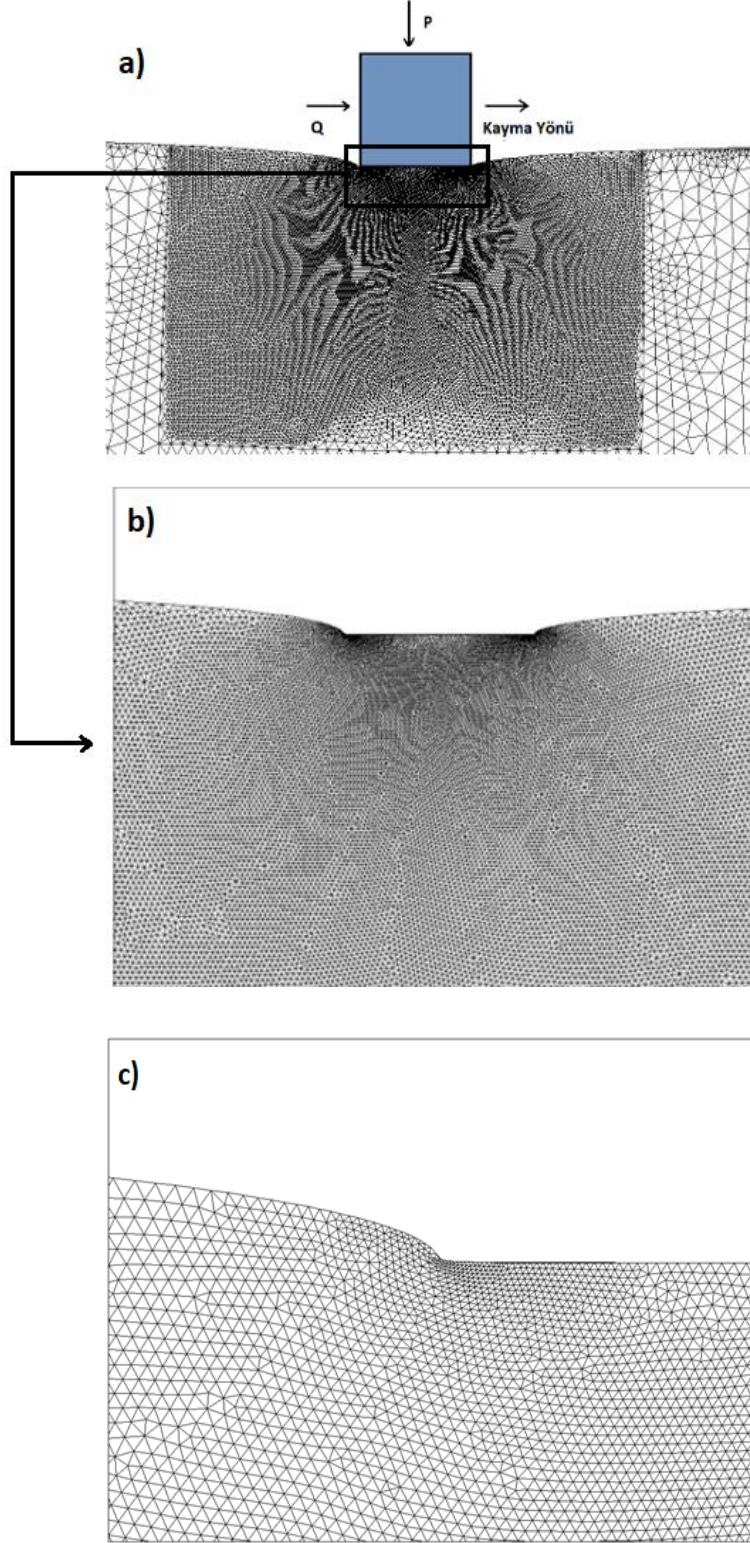
Şekil 3.17’ de problemi oluşturan sonlu elemanlar ağı FDM malzeme ve zımba uzunluklarının şematığı ile beraber gösterilmiştir ve boyut etkisini minimize etmek için  $(b - a)/L_s = 1/160$  ve  $(b - a)/H_s = 1/120$  alınmıştır. Yüzey altı gerilmeler alınırken  $d/(b - a) = 2.4$  alınmıştır. Sonlu eleman ağ yoğunluğu temas bölgesi etrafında arttırılmıştır. Böylece zımba uzunluğuna göre yüzey altına doğru daha uzun bir mesafe boyunca gerilmeler elde edilmiştir. Bu oranın daha artması sonuçlarda büyük farklar oluşturmamaya başlar çünkü uzak sınır koşulları nedeniyle gerilmelerin uzak noktalarda sıfıra yakınsadığı görülmüştür.



Şekil 3.17 Problem modeli için oluşturulan sonlu elemanlar ağı

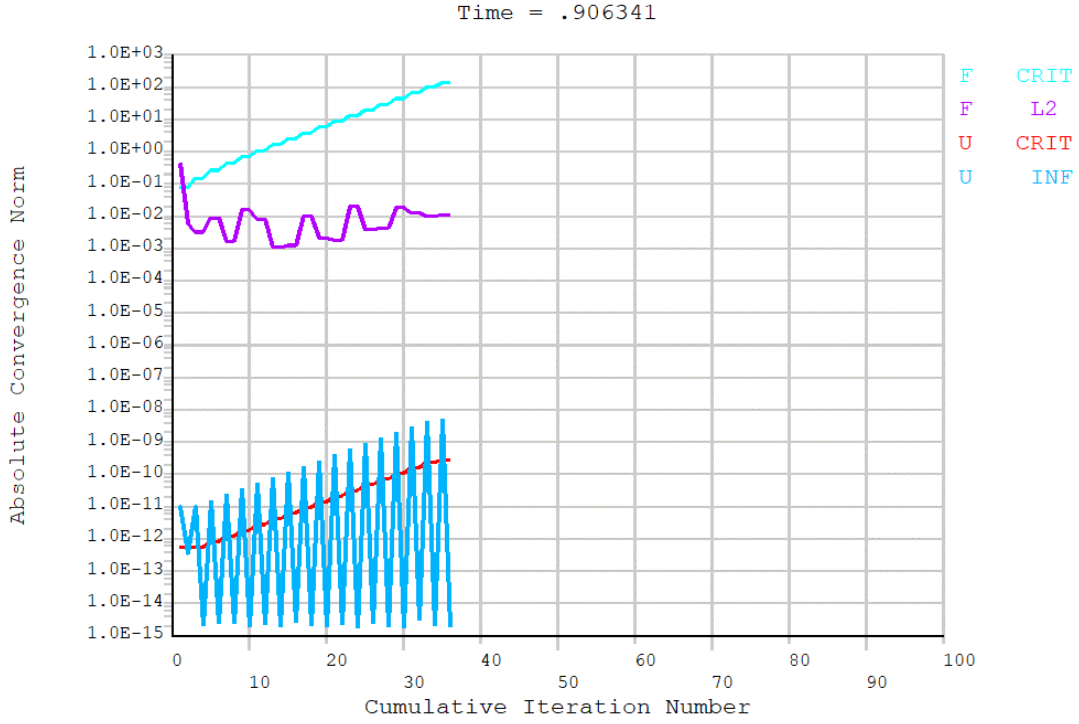


Şekil 3.18 Düz zımba basma bölgesindeki sonlu elemanlar ağının deforme olmuş yapısı



Şekil 3.19 FDM yarı düzlem için a) sonlu elemanlar ağının yakın plan görüntüsü, b) sonlu elemanlar ağının temas bölgesi etrafında yakın plan görüntüsü, c) sonlu elemanlar ağının zımba arka ucu etrafında yakın plan görüntüsü  $\alpha(b-a) = 0$ ,  $\gamma = 2$ ,  $\eta_m = 0.3, \eta_p = 0.7$

Şekil 3.19’ da sonlu elemanlar ağının deforme olmuş şeklini ve sonlu elemanlar ağının büyütülmüş görüntüsü ile zımba arka ucunun etrafındaki yakın plan görüntü sunulmuştur. Takviyeli Lagrange yöntemi ile çözülen temas problemi için yakınsama geçmişinin görüntüsü Şekil 3.20’ de gösterilmiştir. Grafikten de görüleceği üzere temas koşulu elastik probleme lineer olmayan (nonlinear) bir prosedür getirmiş bu yüzden temas problemi çözümü iteratif olarak gerçekleştirilmiştir.



Şekil 3.20 Temas probleminin kuvvet ve deplasman yakınsama grafiği

## 4. SAYISAL SONUÇLAR

Bu bölümde sonuçlar beş alt başlık halinde sunulmuştur. Problem çözümü sonuçlarının doğrulanabilmesi için hem yakınsama analizi hem de karşılaştırma çalışması yapılmıştır. Bölüm 4.1’de yüzey temas ve yüzey altı gerilmeler için yakınsama analizi sonuçları tablolar ile ifade edilmiştir. Bölüm 4.2’de ise temas gerilmeleri literatürde yer alan diğer sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. Bölüm 4.3’de temas bölgesi etrafında farklı parametrelere göre gerilme düzey çizgileri (kontur) gösterilmektedir. Bölüm 4.4’de paramterik çalışma sonuçları yer almaktadır. Bölüm 4.5 ise gerçek bir FDM uygulamasındaki (Ti-6Al-4V + ZrO<sub>2</sub> bileşenler ile imal edilmiş) sonuçları sunmaktadır.

Grafiklerde gösterilen gerilimler, normalize edilmiş konum koordinatı olan  $s'$  ye göre çizilmiştir,  $s$  Denklem (2.27), Denklem (2.28) ve Denklem (3.55), Denklem (3.59) denklemlerinde matematiksel ifade olarak tanımlanmıştır.

### 4.1. Yakınsama Analizi

Sonlu elemanlar analizinde sonuçların doğruluğu öncelikle eleman sayısına bağlıdır. Eleman sayısı arttıkça sonuçlar gerçekçi bir şekilde elde edilir. Gerilim değişiklerinin büyük olduğu bölgelerde eleman sayısının arttırılması sonuçların hassasiyetini arttırır. Aşağıdaki çizelgelerde eleman sayılarına bağlı olarak elde edilen temas yüzeyindeki dikey ve yanal gerilmeler, yüzey altındaki yanal ve kayma gerilmeleri için hata analizi sonuçları gösterilmiştir.

Çizelge 4.1 - Çizelge 4.4’ de hata analizi sonuçları için gerilme değerleri elde edilirken  $\alpha(b-a) = 0$ ,  $\gamma = 2$ ,  $\eta_m = 0.3$ ,  $\eta_p = 0.7$ ,  $\nu = 0.25$  parametreleri kullanılmıştır.

Çizelge 4.1 ve Çizelge 4.2’ de yer alan temas yüzeyi gerilmeleri yakınsama analizlerinde toplam 55608 eleman içeren sonlu elemanlar modeli referans alınarak gerilmeler karşılaştırılmış ve hata hesaplaması yapılmıştır. Temas yüzeyi gerilmelerinde yakınsama görülmüş, hata düzeyi 1.5 % altına düşmüştür.

Çizelge 4.3 ve 4.4' de yer alan yüzey altı gerilmeleri yakınsama analizlerinde toplam 55608 eleman içeren sonlu elemanlar modeli referans alınarak gerilmeler karşılaştırılmış ve hata hesaplaması yapılmıştır. Yüzey altı gerilmelerde yakınsama görülmüş, hata düzeyi 1.6 % altına düşmüştür.

Çizelge 4.1 Değişen eleman sayılarına göre temas yüzeyindeki dikey yönde oluşan gerilmeler için hata analizi,

s	Eleman Sayısı=21670			Eleman Sayısı=31436			Eleman Sayısı= 48836		
	$\sigma_{xx}$	$\frac{\sigma_{xx}}{\sigma_0}$	Hata %	$\sigma_{xx}$	$\frac{\sigma_{xx}}{\sigma_0}$	Hata %	$\sigma_{xx}$	$\frac{\sigma_{xx}}{\sigma_0}$	Hata %
-0.96	-2,955	-2.955	0.72	-2,992	-2.992	0.51	-2,981	-2.981	0.16
-0.9	-1,801	-1.801	1.20	-1,790	-1.790	0.61	-1,786	-1.786	0.39
-0.81	-1,275	-1.275	0.80	-1,271	-1.271	0.43	-1,269	-1.269	0.28
-0.72	-1,048	-1.048	0.62	-1,046	-1.046	0.37	-1,044	-1.044	0.23
-0.6	-886	-0.886	0.51	-885	-0.885	0.31	-884	-0.884	0.18
-0.51	-812	-0.812	0.45	-810	-0.810	0.26	-810	-0.810	0.15
-0.42	-759	-0.759	0.42	-758	-0.758	0.24	-757	-0.757	0.15
-0.3	-710	-0.710	0.38	-709	-0.709	0.22	-708	-0.708	0.13
-0.21	-685	-0.685	0.36	-684	-0.684	0.22	-683	-0.683	0.13
-0.12	-666	-0.666	0.35	-665	-0.665	0.20	-665	-0.665	0.11
-0.09	-661	-0.661	0.35	-660	-0.660	0.20	-660	-0.660	0.11
-0.03	-654	-0.654	0.35	-653	-0.653	0.21	-652	-0.652	0.12
0.00	-650	-0.650	0.33	-650	-0.650	0.20	-649	-0.649	0.12
0.03	-648	-0.648	0.34	-647	-0.647	0.20	-647	-0.647	0.12
0.09	-645	-0.645	0.34	-644	-0.644	0.21	-643	-0.643	0.10
0.12	-644	-0.644	0.34	-643	-0.643	0.20	-643	-0.643	0.11
0.21	-645	-0.645	0.34	-644	-0.644	0.20	-644	-0.644	0.12
0.3	-652	-0.651	0.34	-651	-0.650	0.19	-650	-0.650	0.12
0.42	-671	-0.671	0.36	-670	-0.670	0.21	-670	-0.670	0.12
0.51	-696	-0.696	0.37	-695	-0.695	0.20	-695	-0.695	0.12
0.6	-735	-0.735	0.40	-734	-0.734	0.24	-733	-0.733	0.14
0.72	-822	-0.822	0.45	-821	-0.821	0.26	-820	-0.820	0.16
0.81	-946	-0.946	0.50	-944	-0.944	0.26	-943	-0.943	0.17
0.9	-1,221	-1.221	0.53	-1,220	-1.220	0.39	-1,217	-1.217	0.20
0.96	-1,765	-1.765	1.59	-1,789	-1.789	0.27	-1,783	-1.783	0.60

Çizelge 4.2 Değişen eleman sayılarına göre temas yüzeyindeki yanal yönde oluşan gerilmeler için hata analizi

s	Eleman Sayısı=21670			Eleman Sayısı=31436			Eleman Sayısı= 48836		
	$\sigma_{yy}$	$\frac{\sigma_{yy}}{\sigma_0}$	Hata %	$\sigma_{yy}$	$\frac{\sigma_{yy}}{\sigma_0}$	Hata %	$\sigma_{yy}$	$\frac{\sigma_{yy}}{\sigma_0}$	Hata %
-0.96	-2835	-2.835	2.9	-2887	-2.887	1.1	-2905	-2.905	0.48
-0.9	-1744	-1.744	1.82	-1777	-1.777	0.07	-1779	-1.779	0.16
-0.81	-1235.	-1.235	1.08	-1249	-1.249	0.04	-1250	-1.250	0.13
-0.72	-1004.	-1.004	0.89	-1014	-1.014	0.1	-1014	-1.014	0.12
-0.6	-836	-0.836	0.69	-843	-0.843	0.1	-843	-0.843	0.12
-0.51	-758	-0.758	0.6	-763	-0.763	0.08	-763	-0.763	0.11
-0.42	-703	-0.703	0.52	-707	-0.707	0.1	-707	-0.707	0.1
-0.3	-652	-0.652	0.43	-655	-0.655	0.11	-655	-0.655	0.12
-0.21	-626	-0.626	0.37	-630	-0.630	0.14	-630	-0.630	0.13
-0.12	-610	-0.610	0.31	-612	-0.612	0.14	-612	-0.612	0.11
-0.09	-606	-0.606	0.28	-608	-0.608	0.14	-608	-0.608	0.11
-0.03	-600	-0.600	0.26	-602	-0.602	0.14	-602	-0.602	0.1
0	-598	-0.598	0.24	-600	-0.600	0.15	-600	-0.600	0.12
0.03	-59	-0.597	0.21	-599	-0.599	0.17	-599	-0.599	0.12
0.09	-597	-0.597	0.16	-599	-0.599	0.14	-599	-0.599	0.13
0.12	-598	-0.598	0.15	-600	-0.600	0.16	-600	-0.600	0.11
0.21	-606	-0.606	0.08	-60	-0.608	0.2	-608	-0.608	0.14
0.3	-621	-0.621	0.02	-623	-0.623	0.21	-622	-0.622	0.14
0.42	-655	-0.655	0.11	-656	-0.656	0.23	-655	-0.655	0.16
0.51	-693	-0.693	0.2	-694	-0.694	0.27	-693	-0.693	0.18
0.6	-749	-0.749	0.33	-749	-0.749	0.34	-748	-0.748	0.22
0.72	-871	-0.871	0.52	-870	-0.870	0.43	-868	-0.868	0.27
0.81	-1039	-1.039	0.85	-1036	-1.036	0.56	-1034	-1.034	0.36
0.9	-1417	-1.417	1.44	-1408	-1.408	0.79	-1404.9	-1.404	0.55
0.96	-2287	-2.287	3.58	-2251	-2.251	1.91	-2236.9	-2.236	1.27



Çizelge 4.3 Değişen eleman sayılarına göre yüzey altındaki yanal yönde oluşan gerilmeler için hata analizi

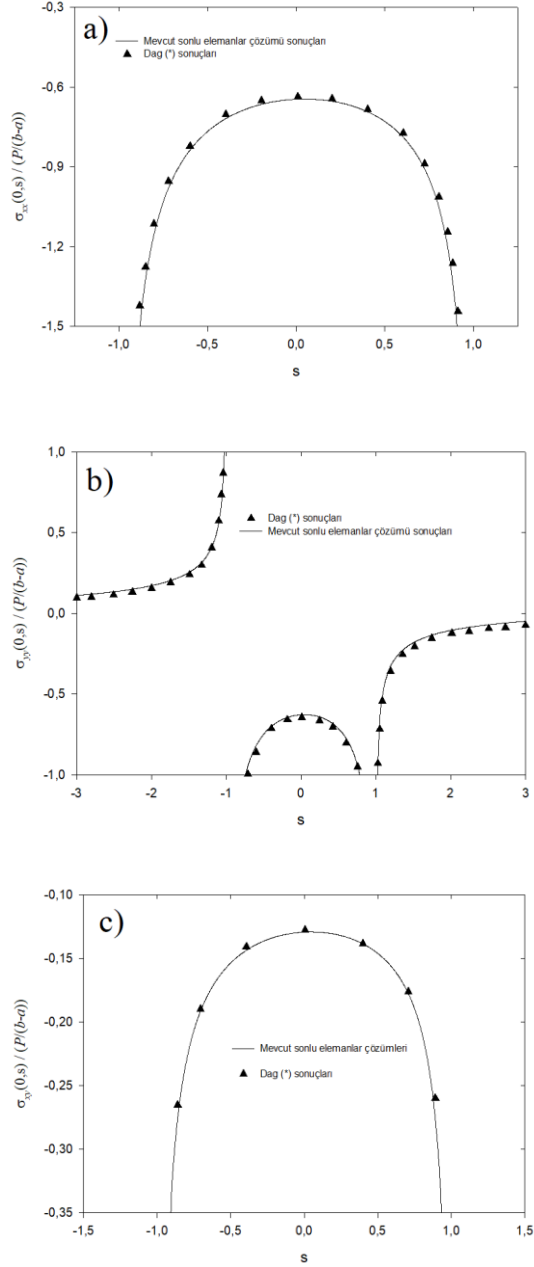
s	Eleman Sayısı=21670			Eleman Sayısı=31436			Eleman Sayısı= 48836		
	$\sigma_{yy}$	$\frac{\sigma_{yy}}{\sigma_0}$	Hata %	$\sigma_{yy}$	$\frac{\sigma_{yy}}{\sigma_0}$	Hata %	$\sigma_{yy}$	$\frac{\sigma_{yy}}{\sigma_0}$	Hata %
-1	-598	-0.598	0.24	-600	-0.600	0.15	-600	-0.600	0.12
-0.9	-558	-0.558	0.36	-560	-0.560	0.07	-560	-0.560	0.07
-0.8	-440	-0.440	0.49	-442	-0.442	0.03	-442	-0.442	0.01
-0.7	-314	-0.314	0.58	-315	-0.315	0.11	-315	-0.315	0.03
-0.6	-212	-0.212	0.62	-213	-0.213	0.15	-213	-0.213	0.07
-0.5	-140	-0.140	0.74	-141	-0.141	0.25	-141	-0.141	0.11
-0.4	-91.4	-0.091	0.88	-92.0	-0.092	0.27	-92.1	-0.0921	0.15
-0.3	-58.7	-0.058	1.01	-59.0	-0.059	0.38	-59.1	-0.0591	0.18
-0.2	-36.3	-0.036	1.26	-36.6	-0.036	0.45	-36.7	-0.0367	0.21
-0.1	-20.8	-0.020	1.53	-21.0	-0.021	0.59	-21.1	-0.0211	0.28
0	-9.88	-0.009	2.72	-10.0	-0.010	1.19	-10.0	-0.0100	0.58
0.1	-1.91	-0.001	9.78	-2.04	-0.002	3.7	-2.09	-0.0020	1.56
0.2	3.99	0.0039	4.53	3.89	0.0038	1.57	3.86	0.00385	0.87
0.3	8.49	0.0084	1.77	8.39	0.0083	0.58	8.37	0.00836	0.26
0.4	11.9	0.0119	0.95	11.8	0.0118	0.35	11.8	0.01185	0.19
0.5	14.6	0.0146	0.69	14.6	0.0146	0.33	14.6	0.01461	0.14
0.6	16.9	0.0169	0.6	16.8	0.0168	0.18	16.8	0.01683	0.09
0.7	18.7	0.0187	0.34	18.6	0.0186	0.14	18.6	0.01865	0.04
0.8	20.2	0.0202	0.27	20.1	0.0201	0.03	20.1	0.02017	0.01
0.9	21.5	0.0215	0.22	21.5	0.0215	0.12	21.4	0.02148	0.02
1	22.7	0.0227	0.37	22.6	0.0226	0.24	22.6	0.02264	0.09

Çizelge 4.4 Değişen eleman sayılarına göre yüzey altındaki kayma yönünde oluşan gerilmeler için hata analizi

s	Eleman Sayısı=21670			Eleman Sayısı=31436			Eleman Sayısı= 48836		
	$\sigma_{xy}$	$\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_0}$	Hata %	$\sigma_{xy}$	$\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_0}$	Hata %	$\sigma_{xy}$	$\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_0}$	Hata %
-1	325	0.325	0.33	324	0.324	0.2	324	0.324	0.11
-0.9	315	0.315	0	316	0.316	0.13	315	0.315	0.09
-0.8	272	0.272	0.32	272	0.272	0.01	273	0.273	0.03
-0.7	217	0.217	0.55	218	0.218	0.1	218	0.218	0
-0.6	167	0.167	0.73	168	0.168	0.16	168	0.168	0.07
-0.5	129	0.129	0.76	129	0.129	0.22	130	0.130	0.09
-0.4	101	0.101	0.86	101	0.101	0.22	101	0.101	0.1
-0.3	81.2	0.081	0.86	81.7	0.081	0.25	81.9	0.081	0.1
-0.2	67.1	0.067	0.88	67.5	0.067	0.25	67.6	0.067	0.1
-0.1	57.0	0.057	0.83	57.3	0.057	0.24	57.4	0.057	0.1
0	49.7	0.049	0.84	50.0	0.050	0.27	50.09	0.050	0.12
0.1	44.4	0.044	0.81	44.6	0.044	0.21	44.74	0.044	0.07
0.2	40.5	0.040	0.76	40.7	0.040	0.19	40.82	0.040	0.09
0.3	37.6	0.037	0.75	37.8	0.037	0.19	37.93	0.037	0.08
0.4	35.5	0.035	0.7	35.7	0.035	0.19	35.80	0.035	0.09
0.5	34.0	0.034	0.7	34.2	0.034	0.18	34.26	0.034	0.07
0.7	32.1	0.032	0.64	32.3	0.032	0.11	32.34	0.032	0.04
0.8	31.5	0.031	0.69	31.7	0.031	0.15	31.81	0.031	0.01
0.9	31.2	0.031	0.67	31.4	0.031	0.17	31.46	0.031	0.03
1	31.0	0.031	0.7	31.2	0.031	0.2	31.25	0.031	0.08

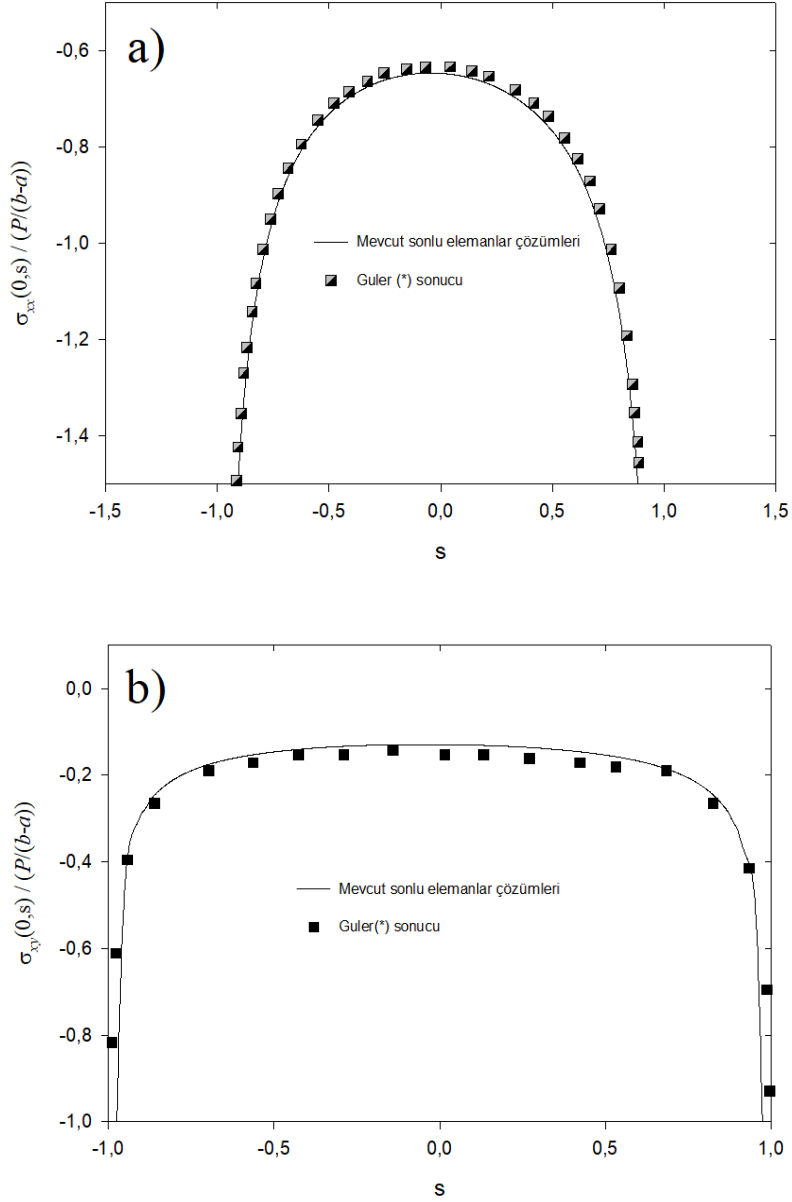
## 4.2. Doğrulama Çalışması

Bu çalışmada yapılan mevcut sonlu elemanlar çözümünde temas yüzeyinde meydana gelen dikey yönde normal gerilme, yatay yönde normal gerilme ve kayma gerilmesi Dağ [7] sonuçları ile karşılaştırılmıştır ve Şekil 4.1’ de gösterilmiştir. Sonuçların çok iyi bir uyum içerisinde olduğu görülmüştür.



Şekil 4.1 Mevcut sonlu elemanlar çözümü ile temas yüzeyinde \*Dağ [7] ile a) dikey yönde normal gerilme, b) yatay yönde normal gerilme, c) kayma gerilmesi karşılaştırması  $\alpha(b-a) = 0, \gamma = 0, \eta_m = 0.2, \eta_p = 0.2$

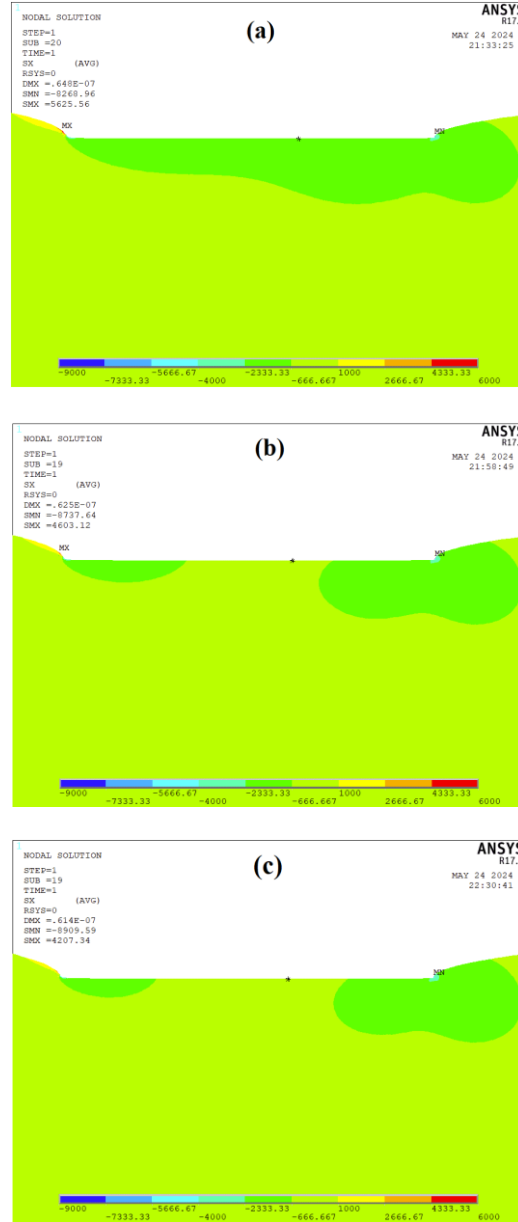
Bu çalışmada yapılan mevcut sonlu elemanlar çözümünde temas yüzeyinde meydana gelen dikey yönde normal gerilme ve kayma gerilmesi Güler [10] sonuçları ile karşılaştırılmıştır ve Şekil 4.2 gösterilmiştir. Sonuçların iyi bir uyum gösterdiği görülmüştür.



Şekil 4.2 Mevcut sonlu elemanlar çözümü ile temas yüzeyinde \*Güler [10] ile a) dikey yönde normal gerilme, b) kayma gerilmesi karşılaştırması  $\alpha(b-a) = 0$ ,  $\gamma = 0$ ,  $\eta_m = 0.2$ ,  $\eta_p = 0.2$ .

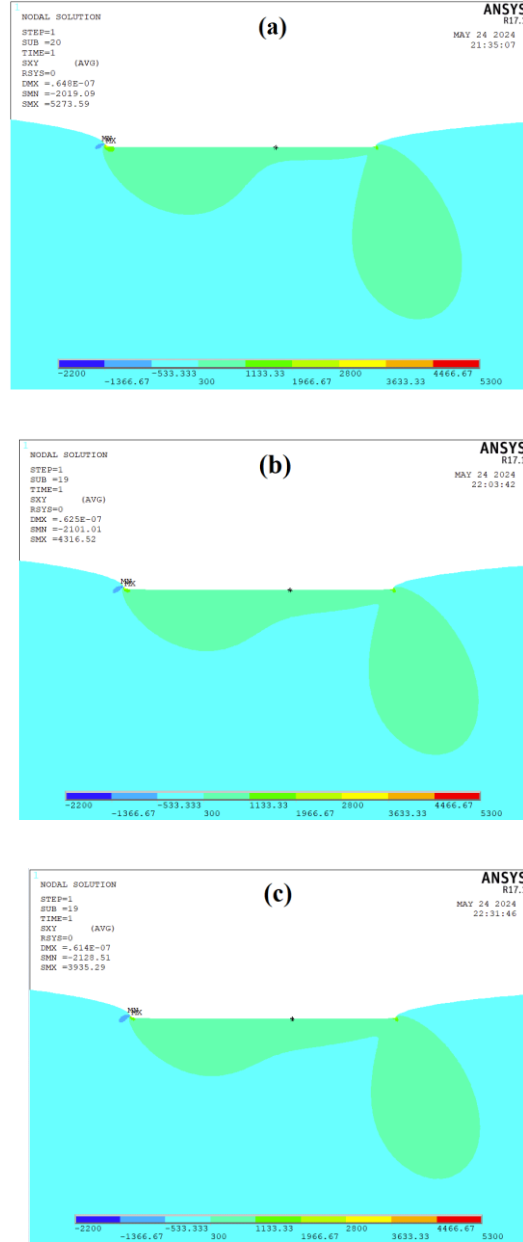
### 4.3. Temas Bölgesi Etrafında Yanal Yöndeki Normal ve Kayma Gerilmeleri

Değişken sürtünme profiline ( $\gamma$ ) göre temas bölgesindeki yanal yönde gerilme dağılımı Şekil 4.3’ de gösterilmiştir.  $\gamma$  değeri arttıkça yanal yöndeki maksimum normal gerilme değerinin azaldığı görülmüştür. Elastik modül zımba orta ekseninde  $E_0 = 100 \text{ GPa}$  seçilmiş, homojensizlik sabitine göre ( $\alpha(b-a)$ ) yanal yönde artan veya azalan değerler almaktadır. Poisson oranı  $\nu = 0.25$  sabit alınmıştır.



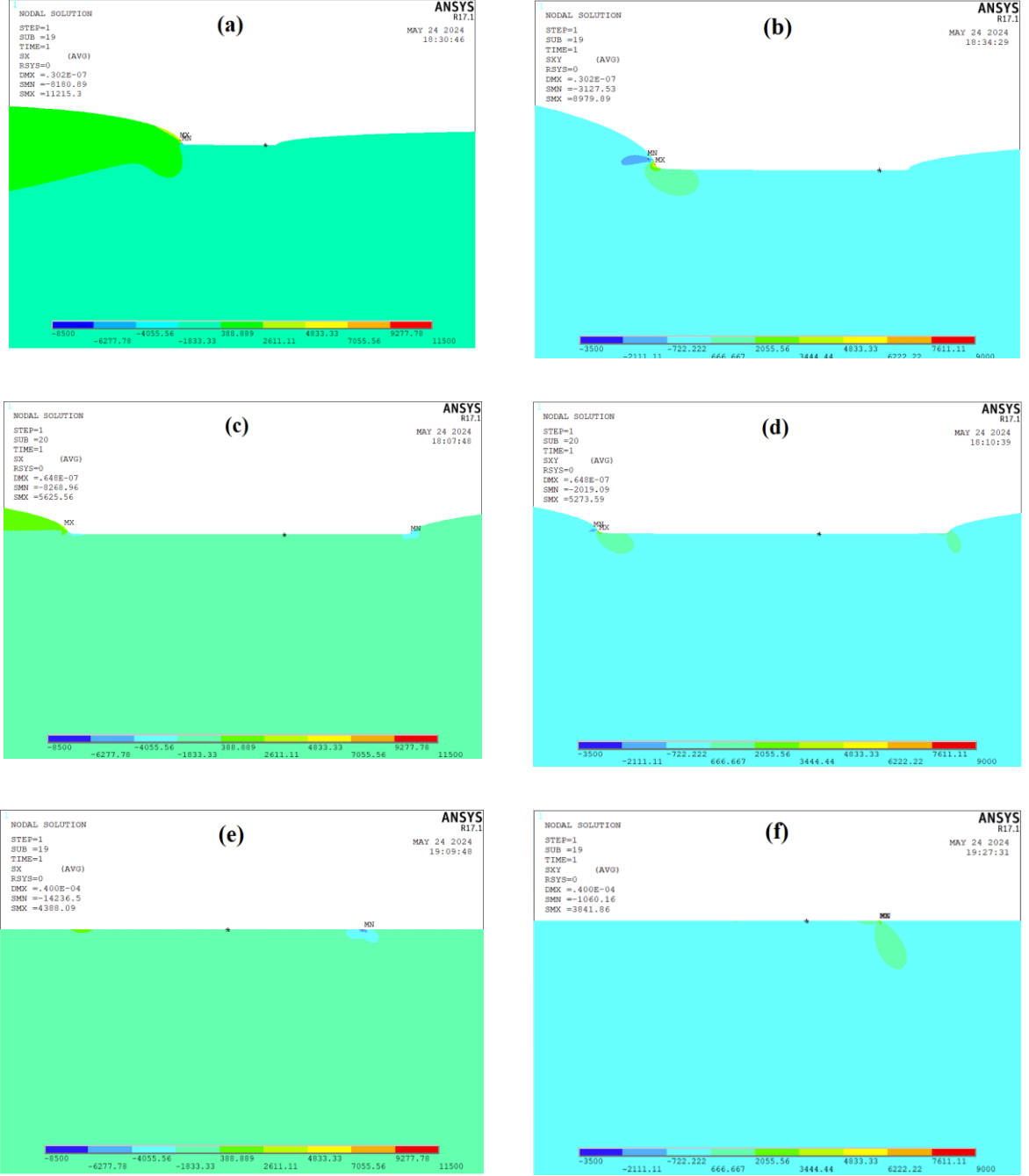
Şekil 4.3 FDM yarı düzlemin değişken sürtünme profiline göre temas bölgesinde yanal yöndeki normal gerilme dağılımı, a)  $\gamma = 0$ , b)  $\gamma = 2$ , c)  $\gamma = 4$ ;  $\alpha(b-a) = 0$ ,  $\eta_m = 0.3$ ,  $\eta_p = 0.7$ .

Değişken sürtünme profiline ( $\gamma$ ) göre temas bölgesindeki kayma gerilmesi dağılımı Şekil 4.4’ de gösterilmiştir.  $\gamma$  değeri arttıkça yanal yöndeki maksimum kayma gerilmesi değerinin azaldığı görülmüştür.



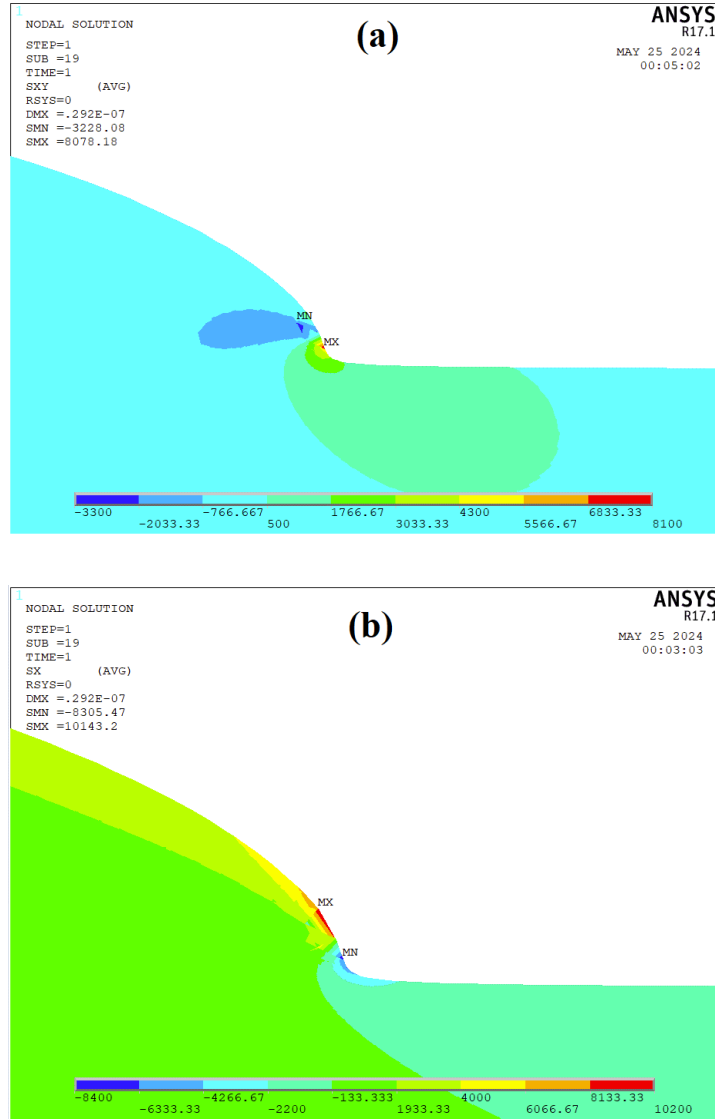
Şekil 4.4 FDM yarı düzlemin değişken sürtünme profiline göre temas bölgesinde kayma gerilmesi dağılımı, a)  $\gamma = 0$ , b)  $\gamma = 2$ , c)  $\gamma = 4$ ;  $\alpha(b-a) = 0$ ,  $\eta_m = 0.3$ ,  $\eta_p = 0.7$ .

Değişken malzeme homejensizlik sabitine ( $\alpha$ ) göre temas bölgesinde yanal yöndeki normal gerilme ve kayma gerilmesi dağılımı Şekil 4.5’ de gösterilmiştir.  $\alpha = -1$ ’ den  $\alpha = 1$ ’ e doğru arttıkça yanal yöndeki maksimum normal gerilme ve maksimum kayma gerilmesi değerleri azalmıştır.



Şekil 4.5 FDM yarı düzlemin malzeme homojensizliğine göre temas bölgesinde yanal yöndeki normal gerilme ve kayma gerilmesi dağılımı a-b)  $\alpha(b-a) = -1$ , c-d)  $\alpha(b-a) = 0$ , e-f)  $\alpha(b-a) = 1$ ;  $\gamma = 0, \eta_m = 0.3, \eta_p = 0.7$ .

Temas gerilmelerinin zımba arka ucu etrafında yüksek olduğu bilinmektedir. Bu nedenle bölgenin detaylı incelenmesi için FDM yarı düzlemin zımba arka ucu etrafında yanal yönde normal gerilme ve kayma gerilmesi dağılımları Şekil 4.6’ da gösterilmiştir. Şekil 4.6’dan da anlaşılacağı üzere zımba arka ucunda yanal normal gerilme ve kayma gerilmesi yüksek çekme seviyesine çıkmaktadır. Bu nedenle zımba arka ucu yüzeyde kırılma için kritik bir öneme sahiptir.



Şekil 4.6 FDM yarı düzlemin zımba arka ucunda  $\alpha(b-a) = -1$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\eta_m = 0.3$ ,  $\eta_p = 0.7$ , parametreleri ile temas yüzeyinde meydana gelen a) yanal yönde normal gerilme, b) kayma gerilmesi dağılımı gösterimi

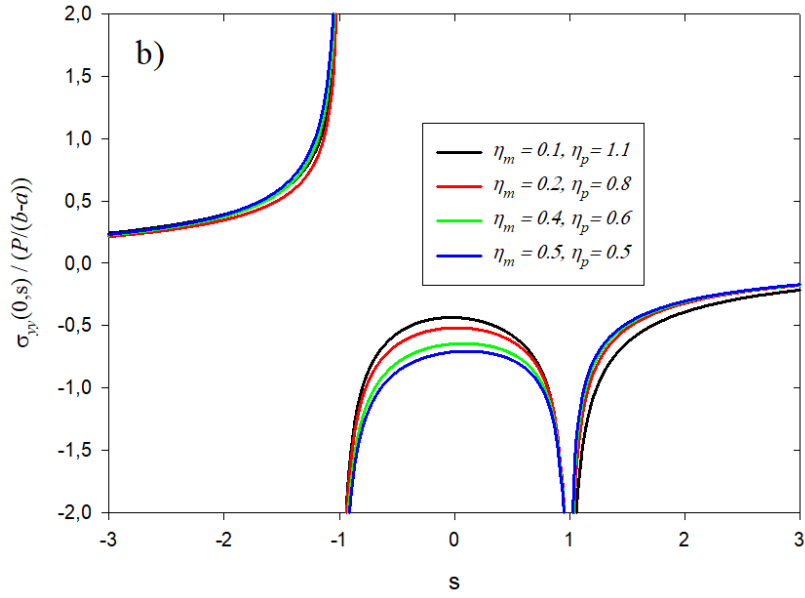
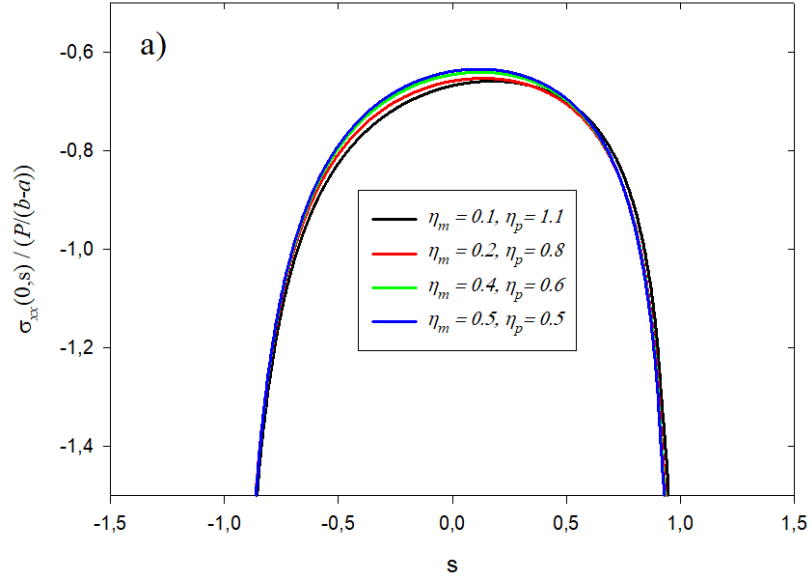


#### 4.4. Parametrik Çalışma Sonuçları

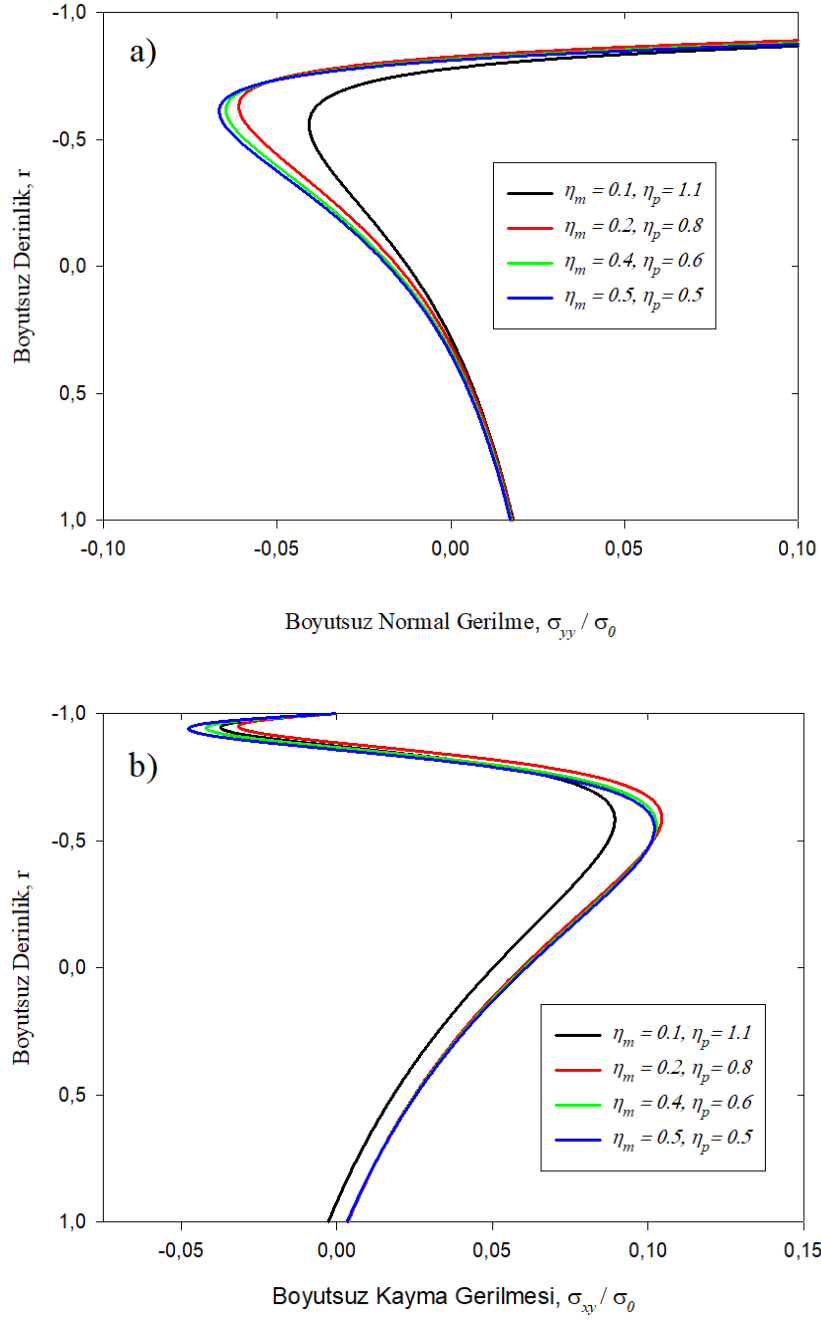
Parametrik çalışma sonuçları üç ana parametrenin hem temas gerilmesine hem de yüzey altı gerilmelere olan etkilerini sunmuştur. Burada belirtilen üç ana parametre aşağıdaki gibi özetlenebilir:

- Uzaysal sürtünme katsayısı sınır değerleri değişimi  $(\eta_m, \eta_p)$ ,
- Uzaysal sürtünme katsayısı profilinin değişimi  $(\gamma)$ ,
- Yanal yöndeki malzeme homojensizliği değişimi  $(\alpha(b - a))$

Şekil 4.7 - 4.10 uzaysal olarak değişen sürtünme katsayısına bağlı olarak temas yüzeyinde ve yüzeyaltında oluşan gerilmeleri göstermektedir. Şekil 4.7(a) ve Şekil 4.7(b) sırasıyla temas yüzeyindeki dikey ve yanal yöndeki normal gerilmeleri sunmaktadır.  $(\eta_m, \eta_p)$  değerleri (0.5-0.5) değerinden (0.1-1.1) değerine doğru giderken dikey yöndeki normal temas gerilmesi basma yönünde artmış, yanal yöndeki normal gerilme temas alanında azalmış, temas ön bölgesinde artmış, temas arka bölgesinde hafifçe azalmıştır. Şekil 4.8(a) ve Şekil 4.8(b) sırasıyla zımba arka ucu yüzeyinden  $(y = a, s = -1)$  altkatmana derinlik yönündeki yanal normal ve kayma gerilmesi sonuçlarını göstermektedir. Yüzey altında  $r = -0.5$  civarında normal gerilme maksimum olmaktadır.  $r = -0.9$  etrafında kayma gerilmesi minimum değerlere inerken ve  $r = -0.5$  etrafında çekme yönünde maksimum olmaktadır.  $(\eta_m, \eta_p)$  değerleri (0.5-0.5) değerinden (0.1-1.1) değerine değişirken yanal yöndeki normal gerilmenin şiddeti azalmaktadır. Benzer şekilde kayma gerilmesinin değeri azalmıştır. Şekil 4.9(a) ve Şekil 4.9(b) zımba ortasından  $(y = (a + b)/2, s = 0)$  altkatmana derinlik yönündeki yanal normal ve kayma gerilmesi sonuçlarını ifade etmektedir. Gerilme davranışları Şekil 4.8'de sunulan davranıştan farklılık göstermiştir. Yanal normal gerilme ve kayma gerilmesi zımbanın hemen alt bölgesinde ( $r=-0.8-0.9$ ) değişen  $(\eta_m, \eta_p)$  değerleri için farklılık göstermekte, derinlik yönünde ilerlerken gerilme değerleri birbirine oldukça yaklaşmaktadır.  $(\eta_m, \eta_p)$  değerleri (0.1-1.1) değerine giderken, normal gerilme azalmakta, kayma gerilmesi ise şiddetlenmektedir. Şekil 4.10(a) ve Şekil 4.10(b) zımba ön ucundan  $(y = b, s = 1)$  altkatmana derinlik yönündeki yanal normal ve kayma gerilmesi sonuçlarını ifade etmektedir. Zımba ön ucunda yanal normal gerilme ve kayma gerilmesi yüzeyde basma durumundadır ve derinlik yönünde ilerlerken sifira yakınsar.  $(\eta_m, \eta_p)$  değişiminin yüzeyaltı gerilmelere olan etkisi çok düşük bulunmuştur.



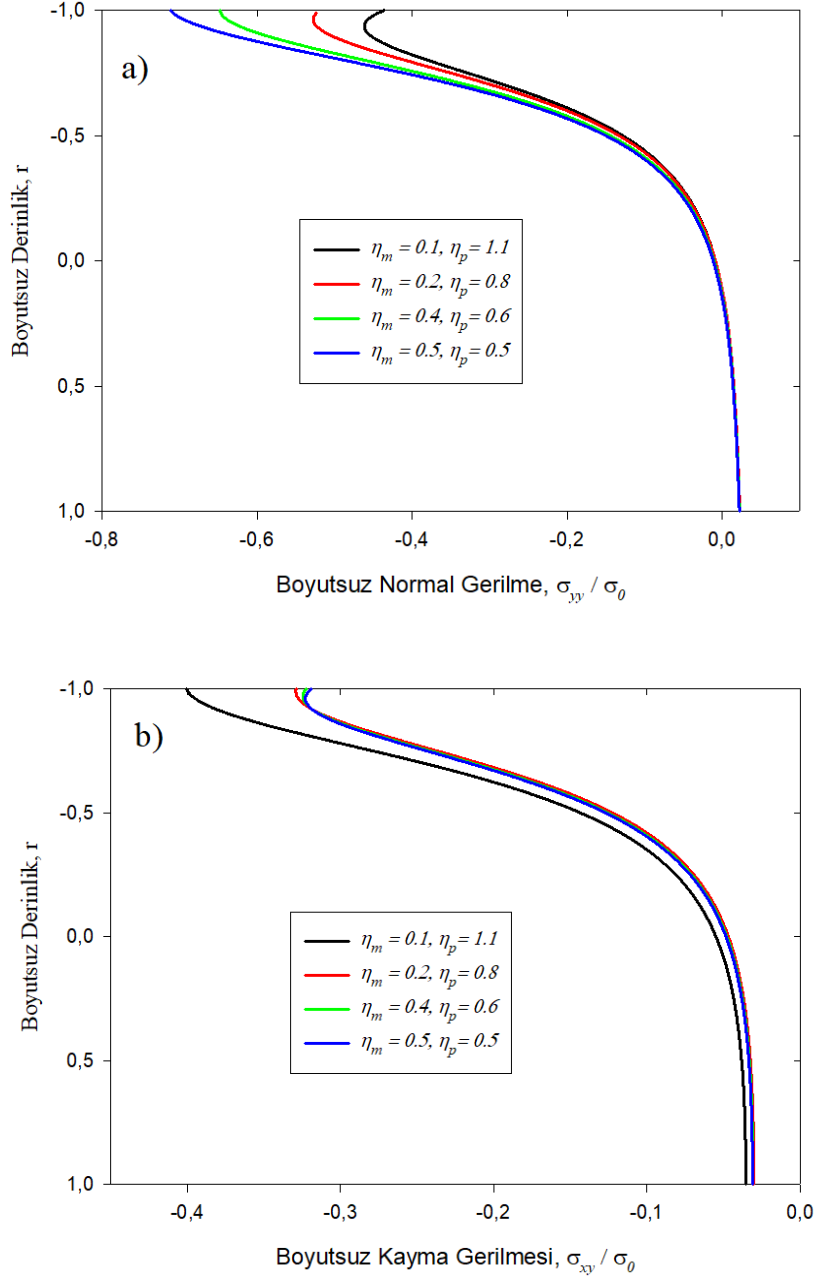
Şekil 4.7 Değişen sürtünme katsayılarına bağlı olarak temas yüzeyinde (a) dikey yöndeki normal gerilme, (b) yanal yöndeki normal gerilme;  $\frac{\sigma_{xx}(0,s)}{P/(b-a)}, \frac{\sigma_{yy}(0,s)}{P/(b-a)}, \alpha(b-a) = 0, \gamma = 0$



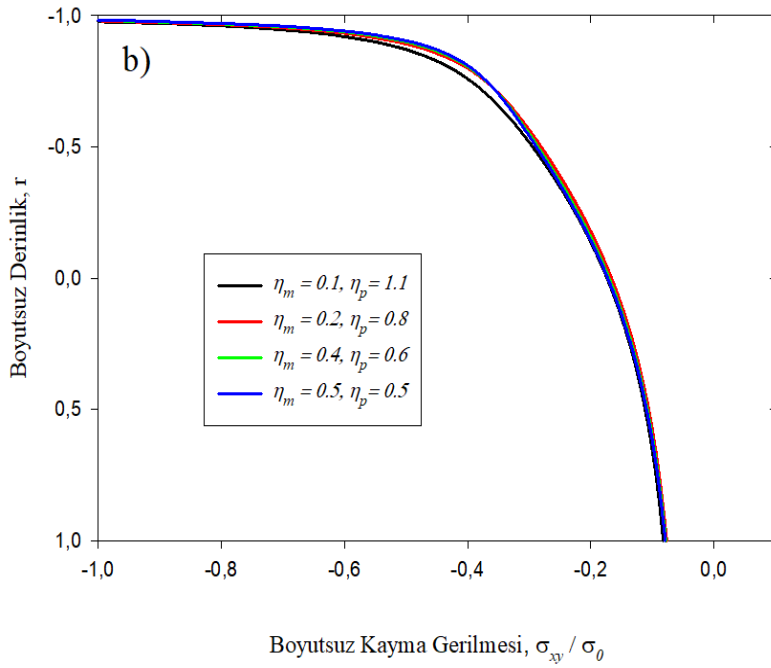
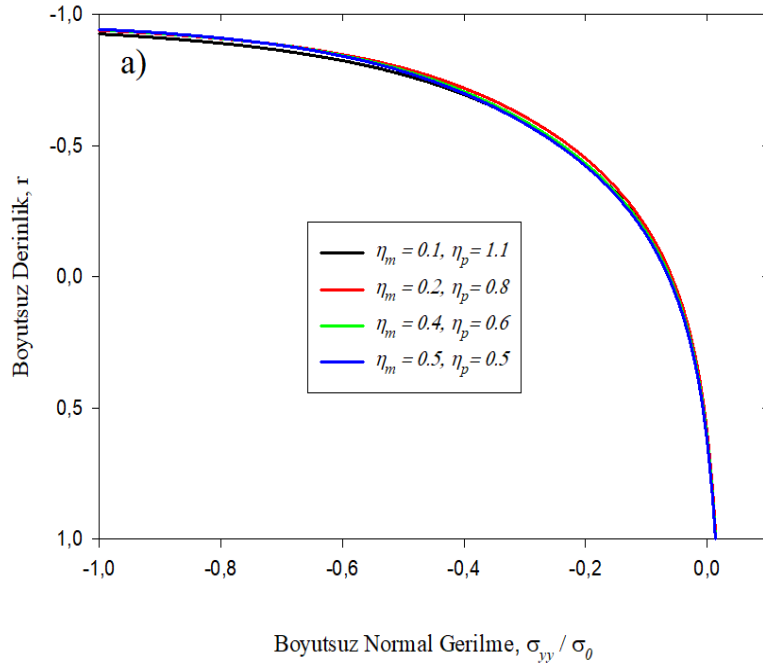
Şekil 4.8 Değişen sürtünme katsayılarına bağlı olarak zımba arka ucu yüzey altında derinlik

boyunca (a) yanal yöndeki normal gerilme, (b) kayma gerilmesi;  $\frac{\sigma_{yy}(0,x)}{P/(b-a)}$ ,

$$\frac{\sigma_{xy}(0,x)}{P/(b-a)}, \alpha(b-a) = 0, \gamma = 0$$



Şekil 4.9 Değişen sürtünme katsayılarına bağlı olarak zımba ortasında yüzey altında derinlik boyunca (a) yanal yöndeki normal gerilme, (b) kayma gerilmesi;  $\frac{\sigma_{yy}(0,s)}{P/(b-a)}, \frac{\sigma_{xy}(0,x)}{P/(b-a)}, \alpha(b-a) = 0, \gamma = 0$

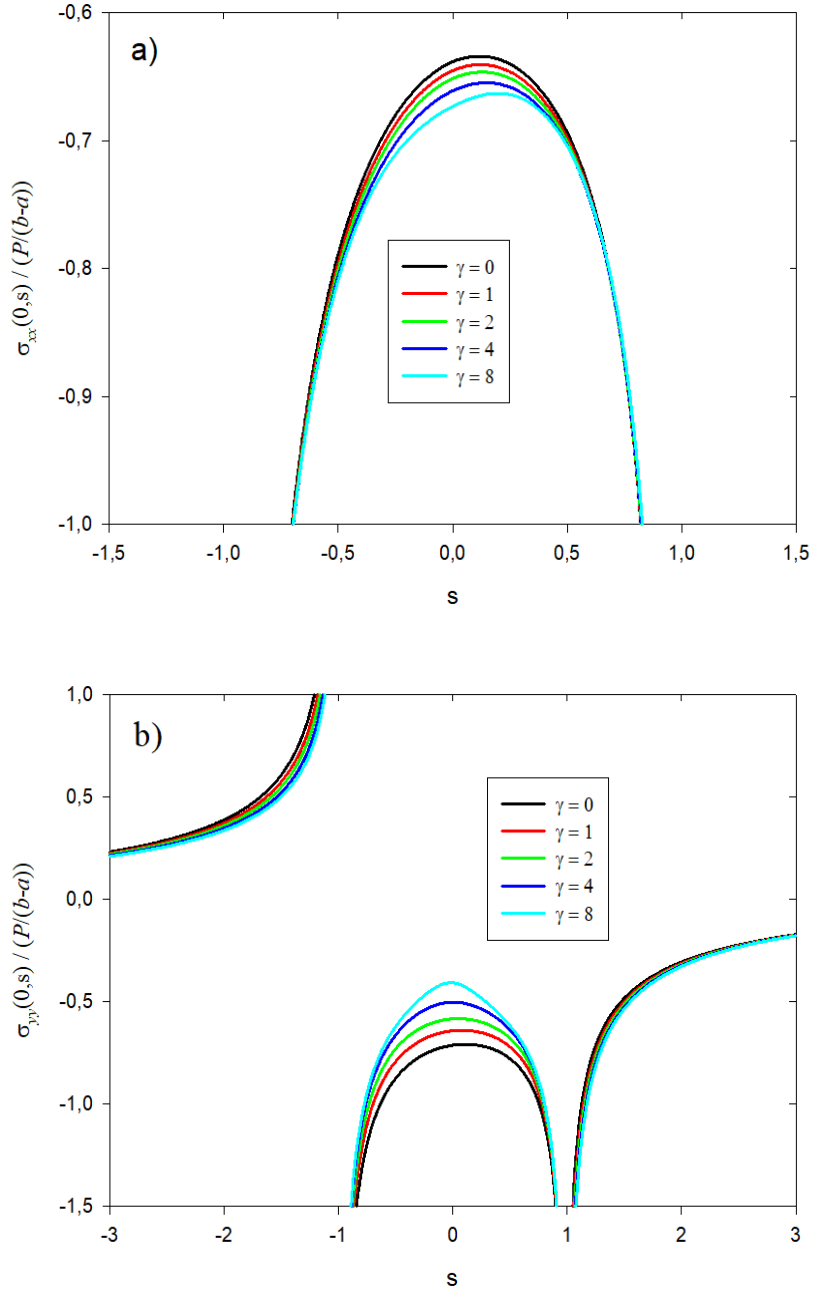


Şekil 4.10 Değişen sürtünme katsayılarına bağlı olarak zımba ön ucunda yüzey altında derinlik

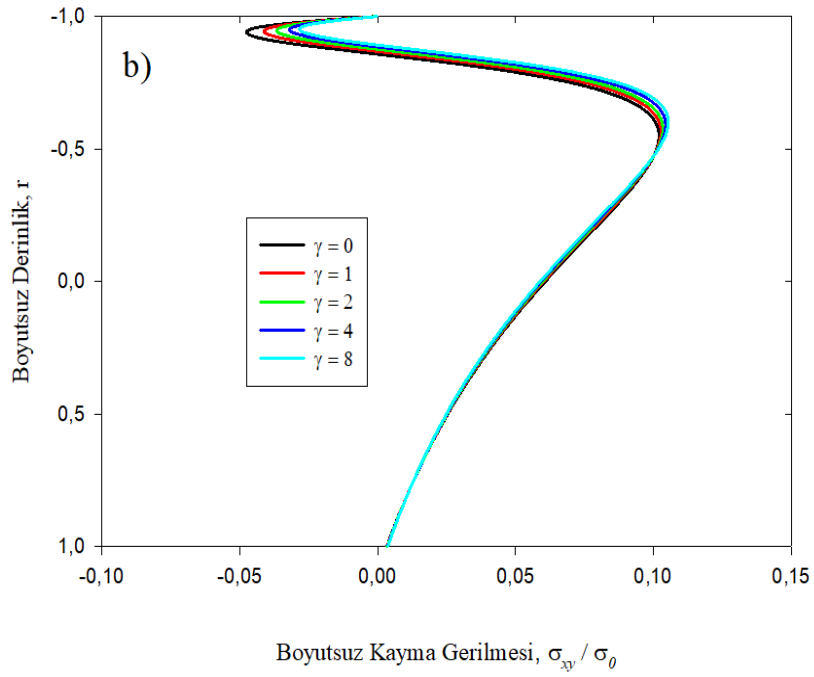
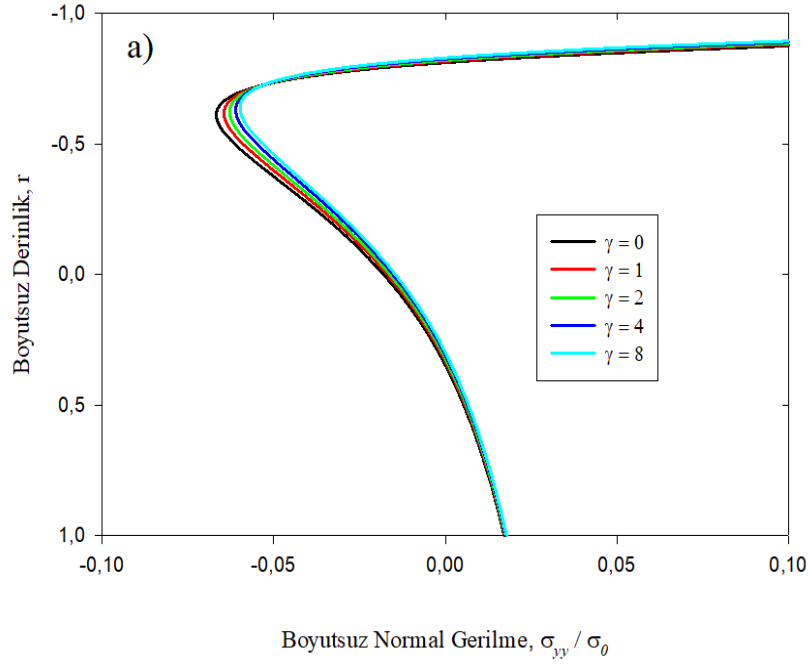
boyunca (a) yanal yöndeki normal gerilme, (b) kayma gerilmesi;  $\frac{\sigma_{yy}(0,x)}{P/(b-a)}$ ,

$$\frac{\sigma_{xy}(0,x)}{P/(b-a)}, \alpha(b-a) = 0, \gamma = 0$$

Şekil 4.11 - 4.14 değişen sürtünme profiline bağlı olarak temas yüzeyinde ve yüzeyaltında oluşan gerilmeleri göstermektedir. Şekil 4.11(a) ve Şekil 4.11(b) sırasıyla temas yüzeyindeki dikey ve yanal yöndeki normal gerilmeleri sunmaktadır. ( $\gamma$ ) değerleri  $\gamma = 0$  değerinden  $\gamma = 8$  değerine doğru artarken dikey yöndeki normal temas gerilmesi azalmıştır, yanal yöndeki normal gerilme temas alanında dikkate değer bir biçimde azalmış, temas ön ve arka bölgesinde hafifçe azalmıştır. Şekil 4.12(a) ve Şekil 4.12(b) sırasıyla zımba arka ucu yüzeyinden ( $y = a, s = -1$ ) altkatmana derinlik yönündeki yanal normal ve kayma gerilmesi sonuçlarını göstermektedir. Yüzey altında  $r = -0.6$  civarında normal gerilme maksimum olmaktadır.  $r = -0.9$  etrafında kayma gerilmesi minimum değerlere inerken ve  $r = -0.6$  etrafında çekme yönünde maksimum olmaktadır. ( $\gamma$ ) değerleri 0 değerinden 8 değerine değişirken yanal yöndeki normal gerilmenin şiddeti azalmaktadır. Benzer şekilde kayma gerilmesinin değeri de azalmıştır. Şekil 4.13(a) ve Şekil 4.13(b) zımba ortasından ( $y = (a + b)/2, s = 0$ ) altkatmana derinlik yönündeki yanal normal ve kayma gerilmesi sonuçlarını ifade etmektedir. Yanal normal gerilme ve kayma gerilmesi zımbanın hemen alt bölgesinde ( $r = -0.8-0.9$ ) değişen ( $\gamma$ ) değerleri için farklılık göstermekte, derinlik yönünde ilerlerken gerilme değerleri birbirine yaklaşmaktadır. ( $\gamma$ ) değerleri 0'dan 8'e doğru giderken, normal gerilme azalmakta, kayma gerilmesi ise basma yönünde hafifçe artmaktadır. Şekil 4.14(a) ve Şekil 4.14(b) zımba ön ucundan ( $y = b, s = 1$ ) altkatmana derinlik yönündeki yanal normal ve kayma gerilmesi sonuçlarını ifade etmektedir. Zımba ön ucunda yanal normal gerilme ve kayma gerilmesi yüzeyde basma durumundadır ve derinlik yönünde ilerlerken sifıra yakınsar. ( $\gamma$ ) değişiminin yüzeyaltı gerilmelere olan etkisi çok düşük bulunmuştur.



Şekil 4.11 Değişen sürtünme profiline bağlı olarak temas yüzeyindeki (a) dikey yöndeki normal gerilme, (b) yanıl yöndeki normal gerilme;  $\frac{\sigma_{yy}(0,x)}{P/(b-a)}, \frac{\sigma_{yy}(0,x)}{P/(b-a)}, \alpha(b-a) = 0, \eta_m = 0.3, \eta_p = 0.7$

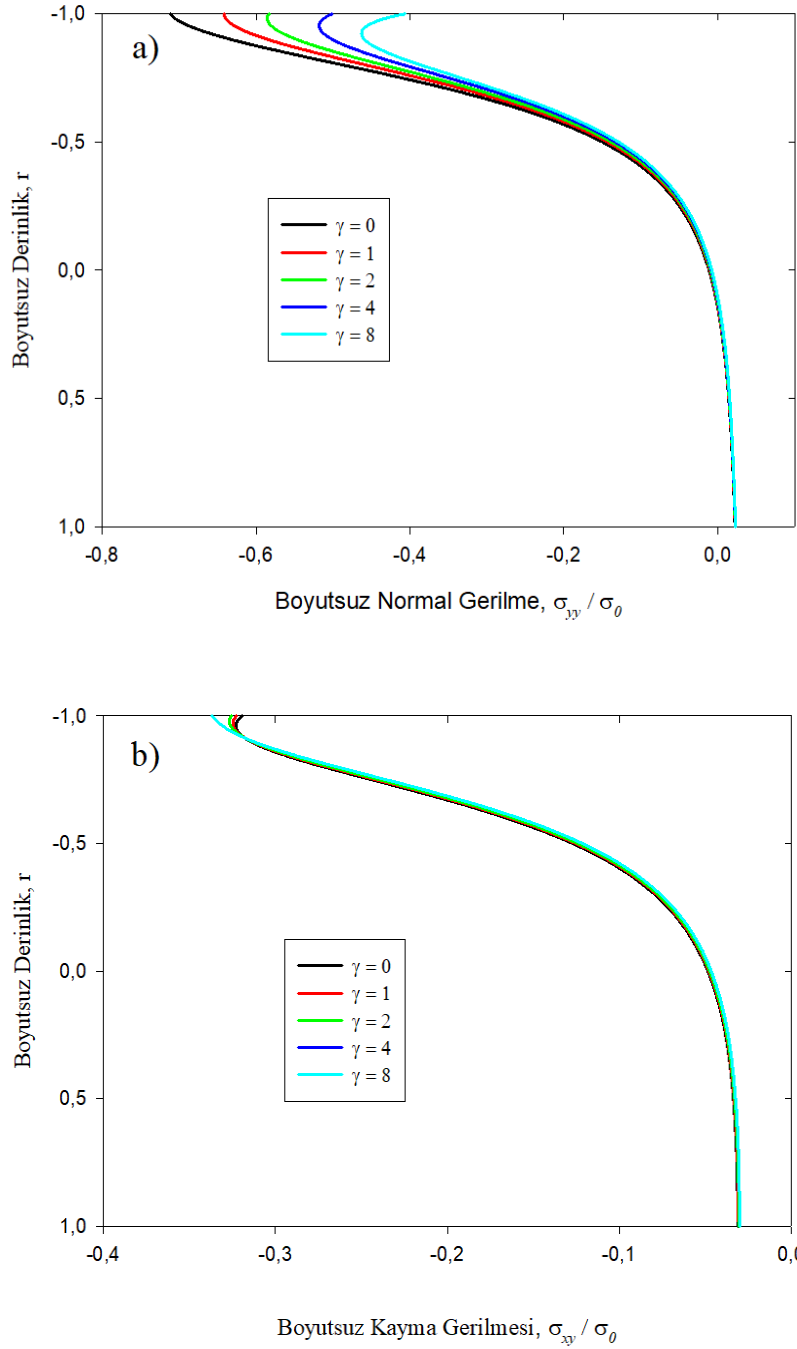


Şekil 4.12 Değişen sürtünme profiline bağlı olarak zımba arka ucu yüzey altında derinlik

boyunca (a) yanıl yöndeki normal gerilme, (b) kayma gerilmesi;  $\frac{\sigma_{yy}(0,x)}{P/(b-a)}$ ,

$$\frac{\sigma_{xy}(0,x)}{P/(b-a)}, \alpha(b-a) = 0, \eta_m = 0.3, \eta_p = 0.7$$

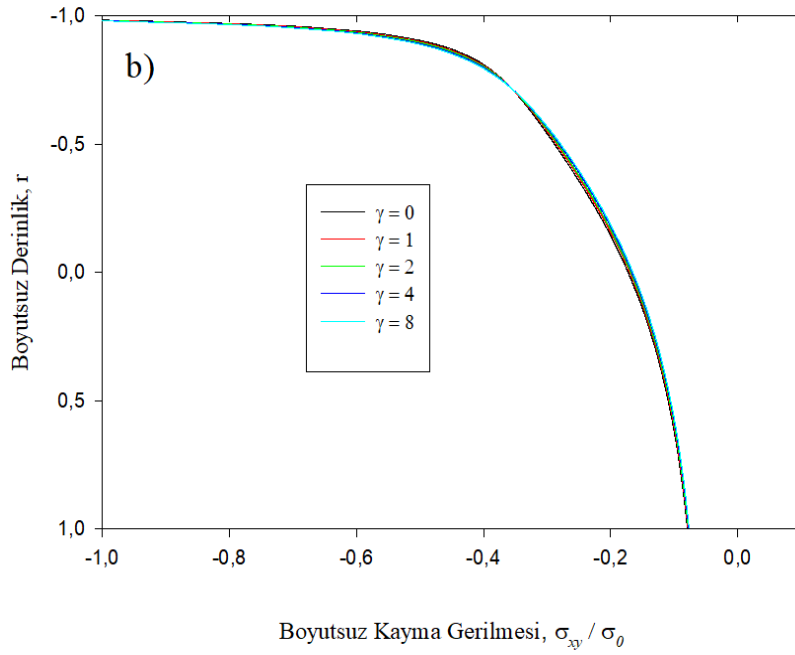
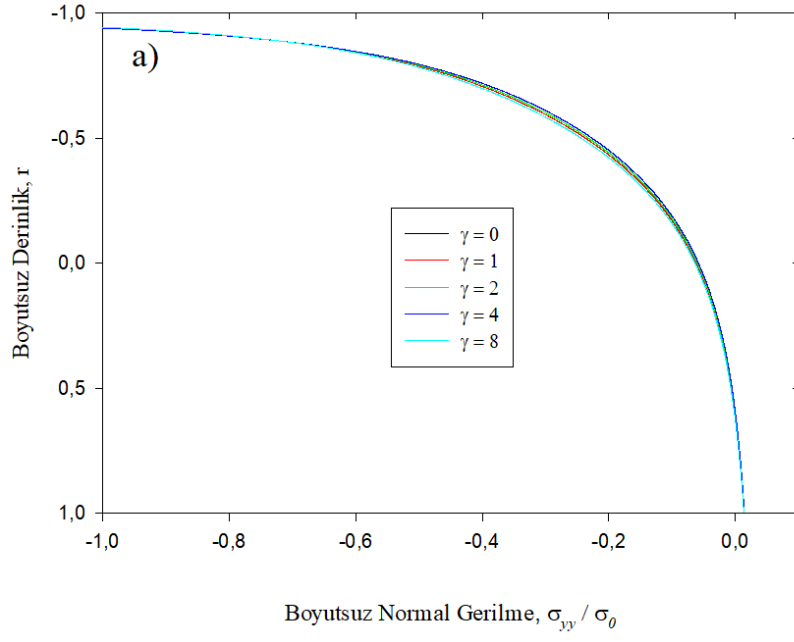




Şekil 4.13 Değişen sürtünme profiline bağlı olarak zımba ortası yüzey altında derinlik boyunca

a) yanal yöndeki normal gerilme, b) kayma gerilmesi  $\frac{\sigma_{yy}(0,x)}{P/(b-a)}$ ,  $\frac{\sigma_{xy}(0,x)}{P/(b-a)}$ ,  $\alpha(b-a) = 0$ ,

$\eta_m = 0.3, \eta_p = 0.7$



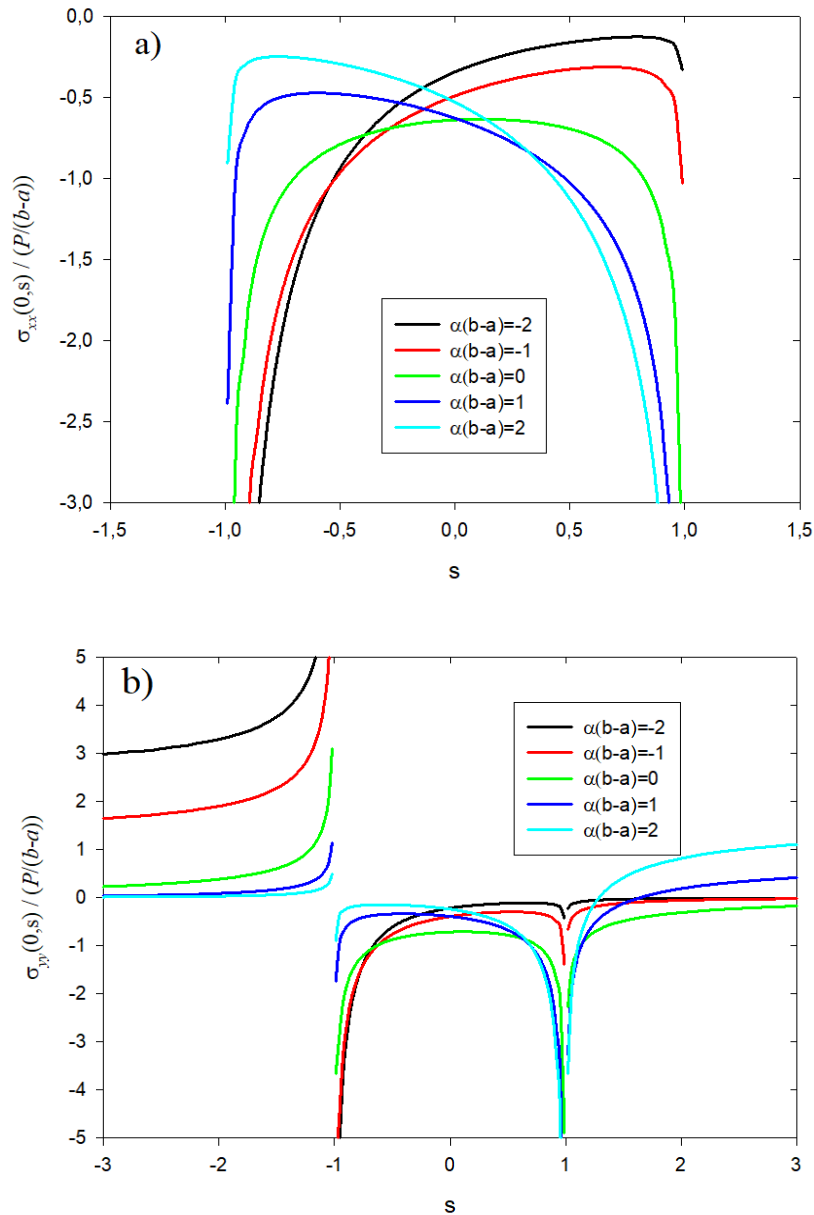
Şekil 4.14 Değişen sürtünme profiline bağlı olarak zımba ön ucunda yüzey altında derinlik boyunca a) yanal yöndeki normal gerilme, b) kayma gerilmesi  $\frac{\sigma_{yy}(0,x)}{P/(b-a)}$ ,  $\frac{\sigma_{xy}(0,x)}{P/(b-a)}$ ,  $\alpha(b-a) = 0$ ,  $\eta_m = 0.3$ ,  $\eta_p = 0.7$

Şekil 4.15(a) ve Şekil 4.15(b) değişen malzeme homojensizliğine göre ( $\alpha(b - a)$ ) temas bölgesinde dikey ve yanal yöndeki normal gerilme sonuçlarını göstermektedir.  $\alpha(b - a) = 0$  değeri homojen altkatmanı ifade etmekte,  $\alpha(b - a) = -1, -2$  değerleri sol taraftan sağ tarafa doğru yumuşayan malzemeyi,  $\alpha(b - a) = 1, 2$  değerleri ise sol taraftan sağ tarafa doğru sertleşen malzemeyi ifade etmektedir. Malzeme homojensizliğinin etkisi yüzeyde sabit sürtünme katsayısı olduğu durumda ( $\gamma = 0$ ) dikkat çekici düzeydedir. Bu nedenle,  $\alpha(b - a)$  parametresinin etkisinin  $\gamma$  parametresine göre daha baskın olduğu sonucuna varılabilir. Soldan sağa yumuşayan malzeme için ( $\alpha(b - a) < 0$ ) zımba ön ucuna doğru eğilirken, soldan sağa sertleşen malzeme için ( $\alpha(b - a) > 0$ ) zımba arka ucuna doğru eğilmektedir. Yanal yöndeki temas gerilmeleri  $\alpha(b - a) = -2$ 'den  $\alpha(b - a) = 0$ 'a doğru artarken yanal gerilmeler temas bölgesinde ve temas bölgesi önünde basma yönünde artmakta,  $\alpha(b - a) = 0$ 'dan  $\alpha(b - a) = 2$ 'ye doğru artarken temas bölgesinde yanal gerilmeler azalmakta, temas bölgesi önünde yanal gerilmeler ise önce azalır sonra çekme yönünde oluşmaktadır. Zımba arka ucunda  $\alpha(b - a) = -2$ 'den  $2$ 'ye doğru artarken yanal normal gerilmenin önemli ölçüde azalarak sıfıra yaklaştığı görülmüştür.

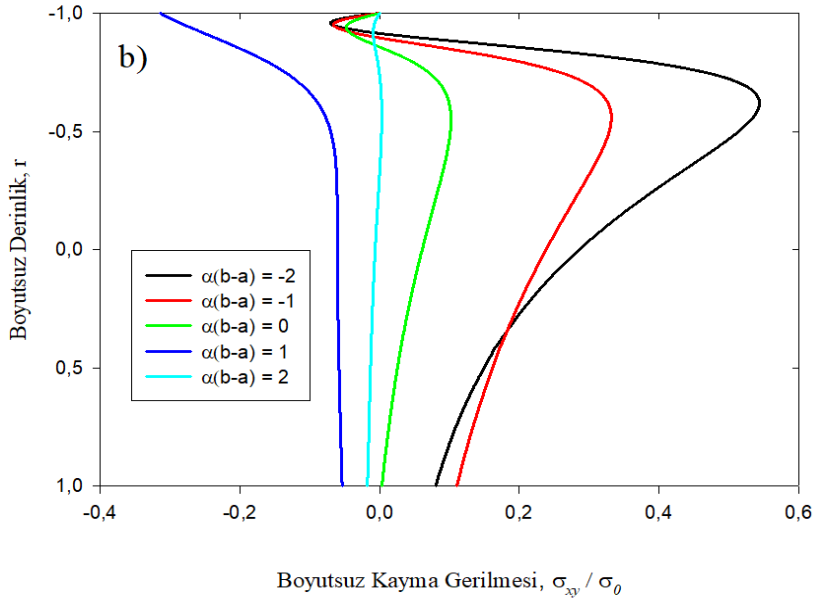
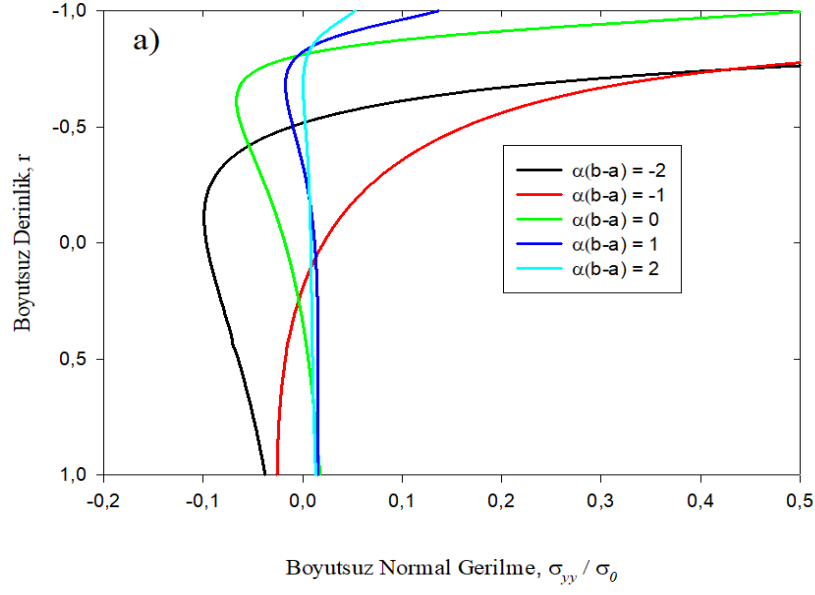
Şekil 4.16(a) ve Şekil 4.16(b) zımba arka ucu yüzeyinden ( $y = a, s = -1$ ) derinlik yönündeki yanal normal ve kayma gerilmelerini gösterir.  $\alpha(b - a) = -2$ 'den  $2$ 'ye doğru artarken zımba arka ucundan derinlik yönüne doğru gerilmelerin şiddetinin azaldığı görülmüş bu durumun Şekil 4.15(b)'de elde edilen ile uyumlu olduğu sonucuna varılmıştır. Kayma gerilmeleri zımba arka ucundan derinlik yönünde oluşturulan yol boyunca  $\alpha(b - a)$ 'nın negatif değerleri için (soldan sağa yumuşayan) pozitif yönde yüksek iken,  $\alpha(b - a)$ 'nın artan ve pozitif değerleri için (soldan sağa sertleşen) öncelikle negatif yönde şiddetlenmiş daha sonra kayma gerilmesi şiddeti azalmıştır.

Şekil 4.17(a) ve Şekil 4.17(b) zımba orta yüzeyinden ( $y = (a + b)/2, s = 0$ ) derinlik yönündeki yanal normal ve kayma gerilmelerini gösterir. Zımba altında yanal yöndeki normal gerilme yüksek basma değerlerinden derinlik yönünde azalmaktadır. Homojen malzeme durumu için yüzeyde maksimum basma gerilmesi görülmüş,  $\alpha(b - a)$ 'nın değişiminin yüzeyaltı gerilmeleri düşürdüğü görülmüştür.  $\alpha(b - a) = 2$  için en düşük gerilme değerleri elde edilmiştir.  $\alpha(b - a) = -2$ 'den  $0$ 'a doğru artarken kayma gerilmesi negatif yönde artmış,  $\alpha(b - a) = 0$ 'dan  $2$ 'ye doğru artarken kayma gerilmesi negatif yönde azalmıştır.

Şekil 4.18(a) ve Şekil 4.18(b) zımba ön ucundan ( $y = b$ ,  $s = 1$ ) derinlik yönündeki yanal normal ve kayma gerilmelerini ifade etmektedir.  $\alpha(b - a) = -2$  ve  $\alpha(b - a) = -1$  için yüzeyde görülen basma gerilmeleri hemen yüzey altında sıfıra doğru yaklaşmakta bu da yüksek gerilme gradyanına sebep olmaktadır. Basma yönündeki en yüksek gerilmeler homojen durumda görülmüş,  $\alpha(b - a) = 0$ 'dan 2'ye doğru artmasıyla bu gerilmeler azalmıştır. Kayma gerilmeleri için de yüzeyde yüksek gerilme gradyanı görülmüştür ve  $\alpha(b - a)$  artarken kayma gerilmeleri negatif yönde giderek artmaktadır.

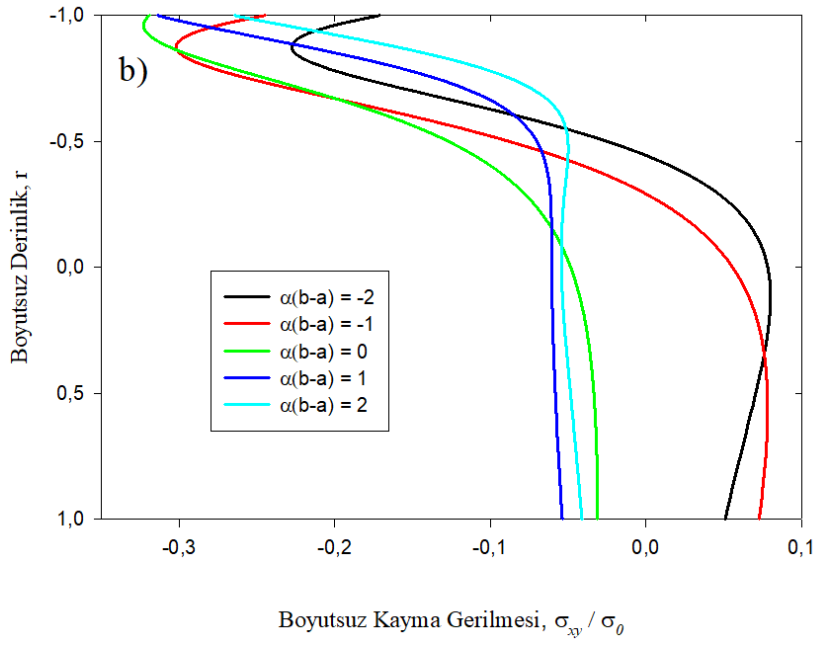
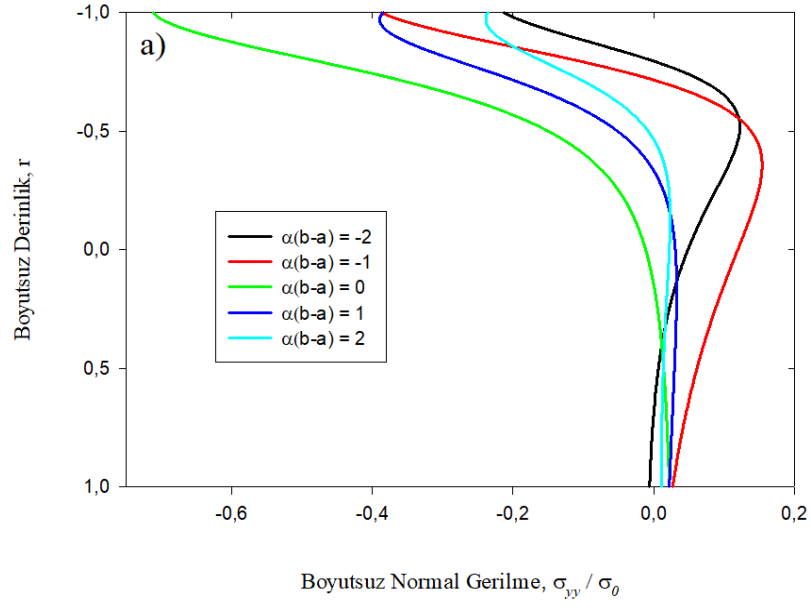


Şekil 4.15 Değişen malzeme homojensizliğine bağlı olarak temas yüzeyindeki (a) dikey yöndeki normal gerilme, (b) yanal yöndeki normal gerilme;  $\frac{\sigma_{xx}(0,s)}{P/(b-a)}$ ,  $\frac{\sigma_{yy}(0,x)}{P/(b-a)}$ ,  $\eta_m = 0.3, \eta_p = 0.7, \gamma = 0$

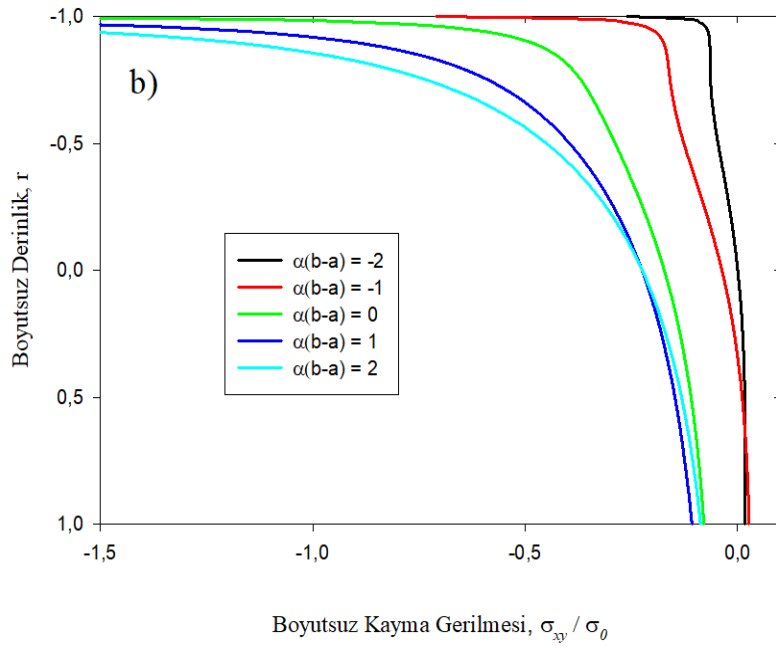
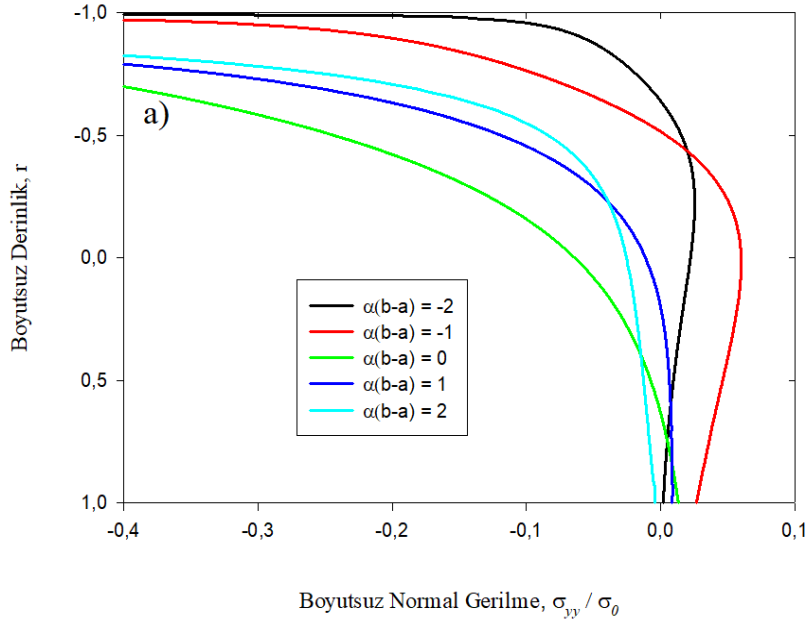


Şekil 4.16 Değişen malzeme homojensizliğine bağlı olarak zımba arka ucu yüzey altında derinlik boyunca (a) yanal yöndeki normal gerilme, (b) kayma gerilmesi;  $\frac{\sigma_{yy}(0,x)}{P/(b-a)}$ ,

$$\frac{\sigma_{xy}(0,s)}{P/(b-a)} \eta_m = 0.3, \eta_p = 0.7, \gamma = 0$$



Şekil 4.17 Değişen malzeme homojensizliğine bağlı olarak zımba ortası yüzey altında derinlik boyunca (a) yanal yöndeki normal gerilme, (b) kayma gerilmesi;  $\frac{\sigma_{yy}(0,x)}{P/(b-a)}$ ,  $\frac{\sigma_{xy}(0,s)}{P/(b-a)}$ ,  $\eta_m = 0.3, \eta_p = 0.7, \gamma = 0$



Şekil 4.18 Değişen malzeme homojensizliğine bağlı olarak zımba ön ucu yüzey altında derinlik

boyunca (a) yanal yöndeki normal gerilme, (b) kayma gerilmesi;  $\frac{\sigma_{yy}(0,x)}{P/(b-a)}$ ,  $\frac{\sigma_{xy}(0,s)}{P/(b-a)}$

$$\eta_m = 0.3, \eta_p = 0.7, \gamma = 0$$

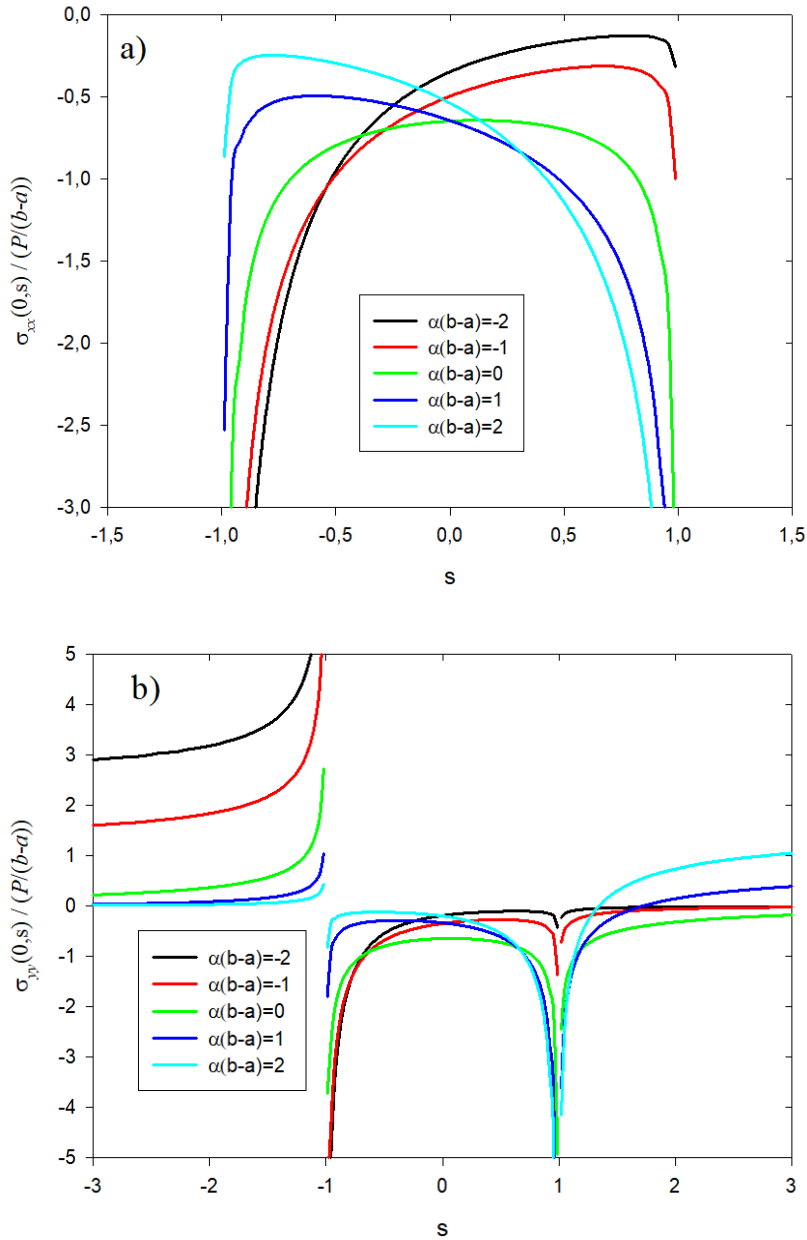
Şekil 4.19(a) ve Şekil 4.19(b)  $\gamma = 1$  için temas yüzeyindeki normal ve kayma gerilmelerini, Şekil 4.23(a) ve Şekil 4.23(b)  $\gamma = 2$  için yüzeydeki normal ve kayma gerilmelerini göstermektedir. Değişen yanal derecelendirme nedeniyle oluşan yüzey gerilmesi sonuçları farklı  $\gamma$  değerleri için birbiri ile benzer dağılımlara sahiptir. Sürtünme profilindeki uzaysal değişim bütün yanal yöndeki derecelendirilmiş malzemelerde aynı etkiyi göstermiştir. Normal gerilme grafikleri incelendiğinde, yanal yöndeki her tür derecelendirme şartında  $\alpha(b - a) = -2, -1, 0, 1, 2$ , dikey yöndeki normal gerilmelerin hafifçe miktarda arttığı gözlenmiştir. Yanal yöndeki normal gerilmeler incelendiğinde, bütün  $\alpha(b - a) = -2, -1, 0, 1, 2$  yanal derecelendirme koşullarında artan  $\gamma$  değerleri için yanal yöndeki normal gerilme temas bölgesinde azalmakta, temas arka bölgesinde yüksek çekme değerlerinden hafifçe azalma eğilimi göstermekte, zımba ön bölgesinde ise basma yönünde hafifçe artmaktadır.

Değişen yanal derecelendirme nedeniyle oluşan zımba arka ucundan derinlik yönündeki yanal yöndeki normal gerilme ve kayma gerilmesi sonuçları farklı  $\gamma$  değerleri için birbiri ile benzer dağılımlara sahiptir. Bu durum Şekil 4.20(a) ve Şekil 4.24(a)'dan görülebilir. Yanal yöndeki normal gerilme değerleri bütün tipte derecelendirilmiş malzemeler için  $\alpha(b - a) = -2, -1, 0, 1, 2$  hafifçe azalmıştır. Kayma gerilmesi ise zımbanın hemen altında  $r = -0.9$  etrafında azalmış,  $r = -0.5$  civarında ise hafifçe artmıştır.  $\alpha(b - a) = 1$  için elde edilen yüzey altı kayma gerilmesi  $\gamma = 0$  durumunda yüzeyde negatif olarak büyük iken,  $\gamma = 1$  ve  $\gamma = 2$  durumlarında sıfıra doğru yaklaştığı görülmüştür.

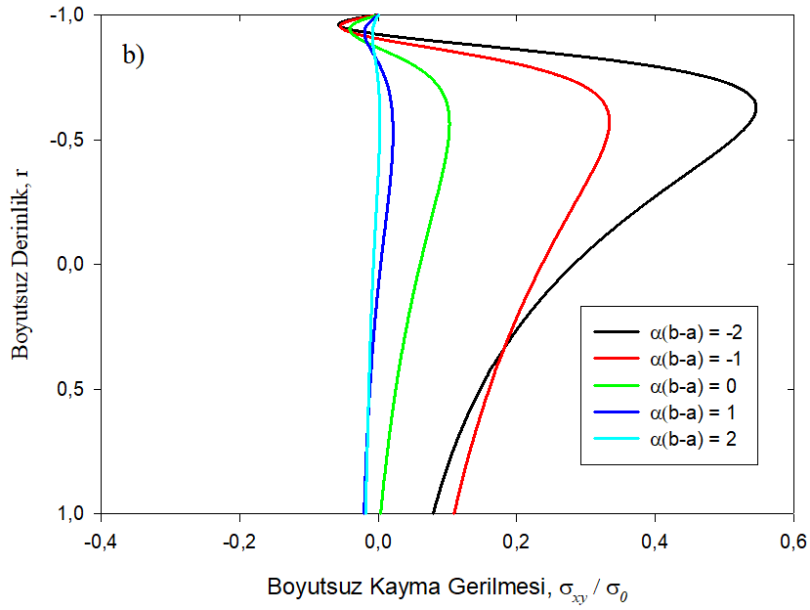
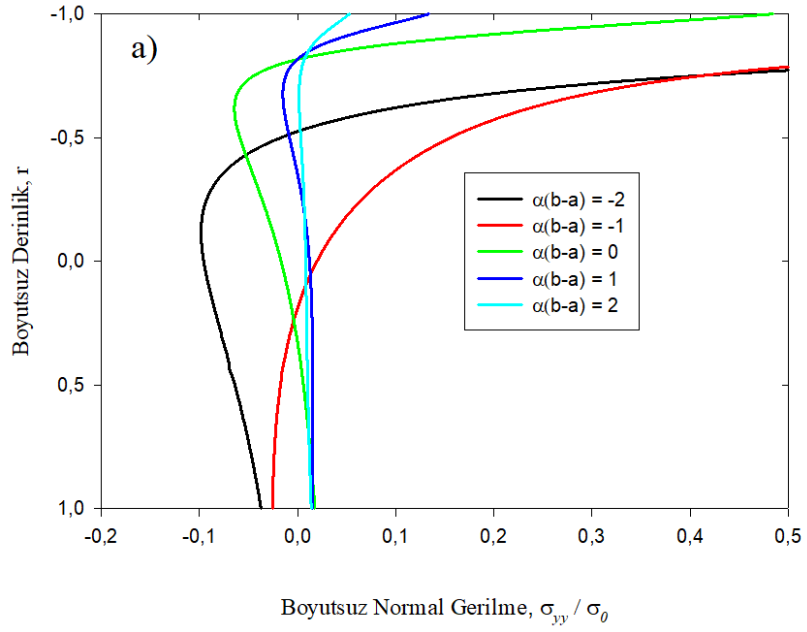
Değişen yanal derecelendirme nedeniyle oluşan zımba orta noktasından derinlik yönündeki yanal yöndeki normal gerilme ve kayma gerilmesi sonuçları farklı  $\gamma$  değerleri için birbiri ile benzer dağılımlara sahiptir. Ancak, değişen sürtünme profilinin etkisi  $\gamma$  yüzey altı gerilmelerde en çok zımbanın altına yakın noktalarda görülmüştür. Bu durum Şekil 4.21(a) - Şekil 4.21(b) ve Şekil 4.25(a) - Şekil 4.25(b)'den görülebilir. Derinlik yönünde zımbadan uzaklaşırken  $\gamma$ 'nın yanal yöndeki normal ve kayma gerilmelerine olan etkisi giderek azalmaktadır. Derecelendirilmiş malzemenin her bir durumu için  $\alpha(b - a) = -2, -1, 0, 1, 2$ , yüzeye yakın noktalardaki basma yönündeki normal gerilmeler önemli ölçüde azalmaktadır. Kayma gerilmelerinde sürtünme profilinin ( $\gamma$ ) değişimi oldukça azdır.  $\gamma$  değişimine göre en yüksek farklılık zımbaya en yakın olan yüzeyaltı pozisyonlarda meydana gelmektedir. Bütün derecelendirilmiş malzeme koşullarında  $\gamma$  artarken, yüzey altı kayma gerilmesi negatif yönde



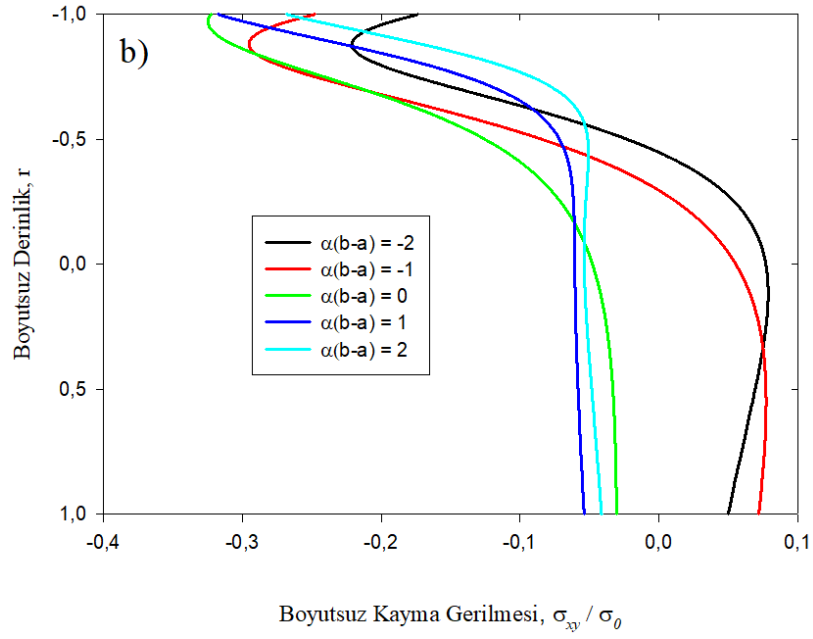
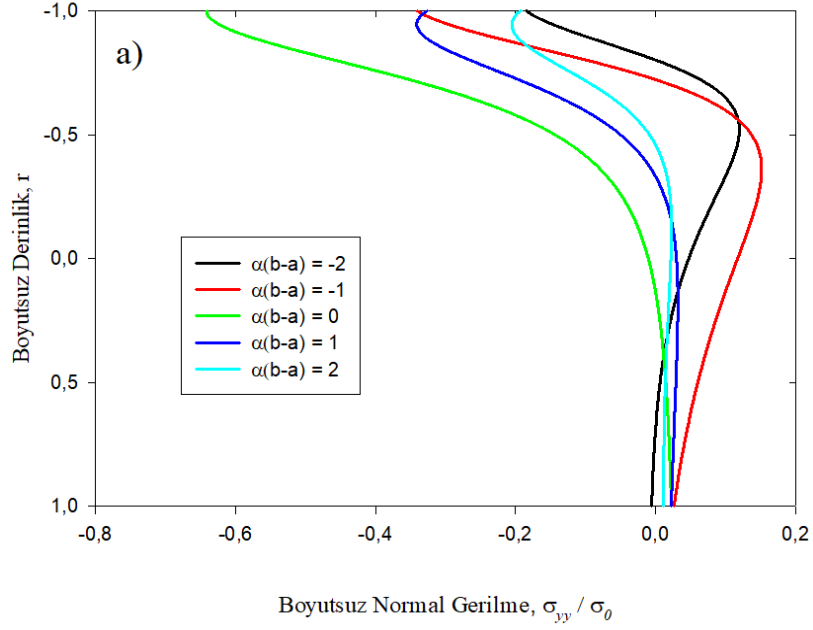
hafifçe artmaktadır. Değişen yanal derecelendirme nedeniyle oluşan zımba ön ucundan derinlik yönündeki yanal yöndeki normal gerilme ve kayma gerilmesi sonuçları farklı  $\gamma$  değerleri için birbiri ile benzer dağılımlara sahiptir. Şekil 4.22(a) - Şekil 4.22(b) ve Şekil 4.26(a) - Şekil 4.26(b) incelendiğinde bu durum görülebilir. Sürtünme profilindeki ( $\gamma$ ) değişimin zımba ön ucundan derinlik yönünde giden yol boyunca yanal yöndeki normal ve kayma gerilmelerine olan etkisi çok az bulunmuştur.



Şekil 4.19 Değişen malzeme homojensizliğine bağlı olarak temas yüzeyindeki a) dikey yöndeki normal gerilme b) yanal yöndeki normal gerilme ;  $\frac{\sigma_{yy}(0,x)}{P/(b-a)}, \frac{\sigma_{xx}(0,s)}{P/(b-a)}$   $\eta_m = 0.3, \eta_p = 0.7, \gamma = 1$



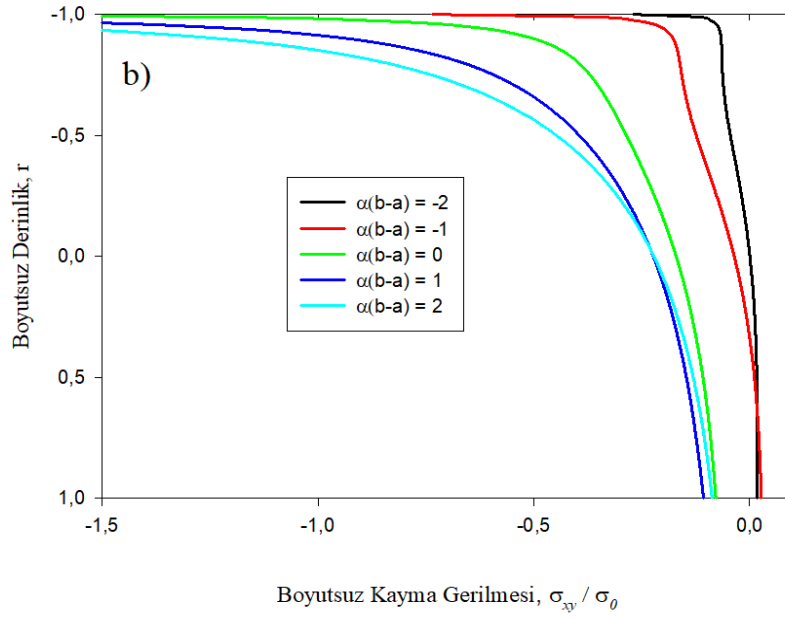
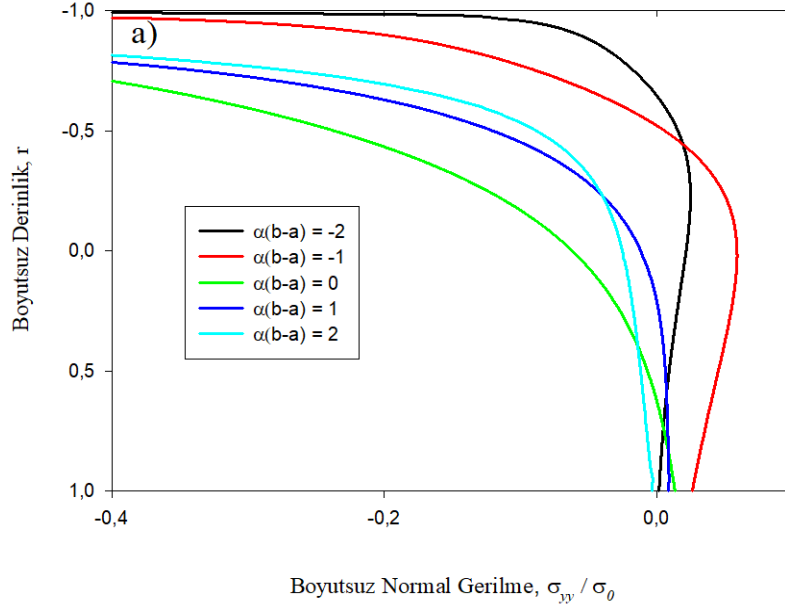
Şekil 4.20 Değişen malzeme homojensizliğine bağlı olarak zımba arka ucu derinlik boyunca a) yanal yöndeki normal gerilme b) kayma gerilmesi  $\frac{\sigma_{yy}(0,x)}{P/(b-a)}$ ,  $\frac{\sigma_{xy}(0,s)}{P/(b-a)}$ ,  $\eta_m = 0,3$ ,  $\eta_p = 0,7$ ,  $\gamma = 1$



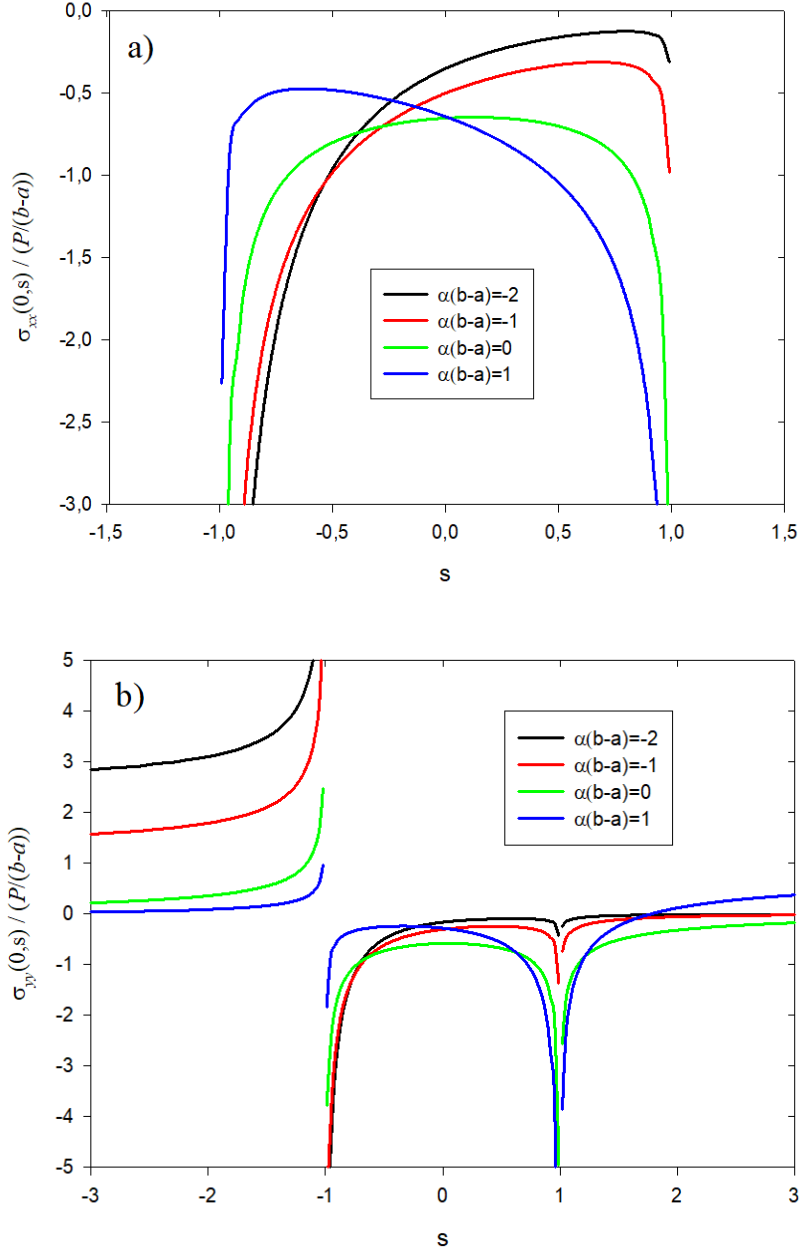
Şekil 4.21 Değişen malzeme homojensizliğine bağlı olarak zimba ortası yüzey altında derinlik

boyunca (a) yanal yöndeki normal gerilme, (b) kayma gerilmesi  $\frac{\sigma_{yy}(0,x)}{P/(b-a)}$ ,  $\frac{\sigma_{xy}(0,s)}{P/(b-a)}$ ,

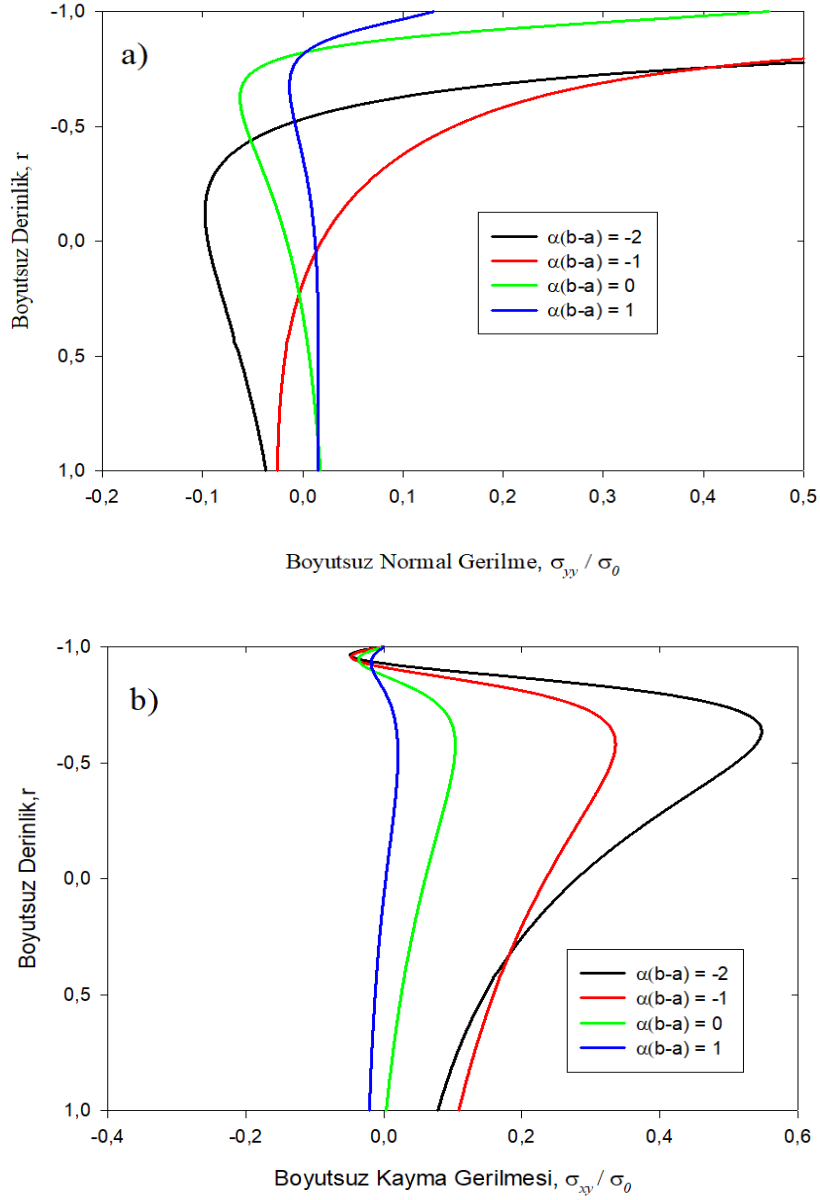
$$\eta_m = 0.3, \eta_p = 0.7, \gamma = 1$$



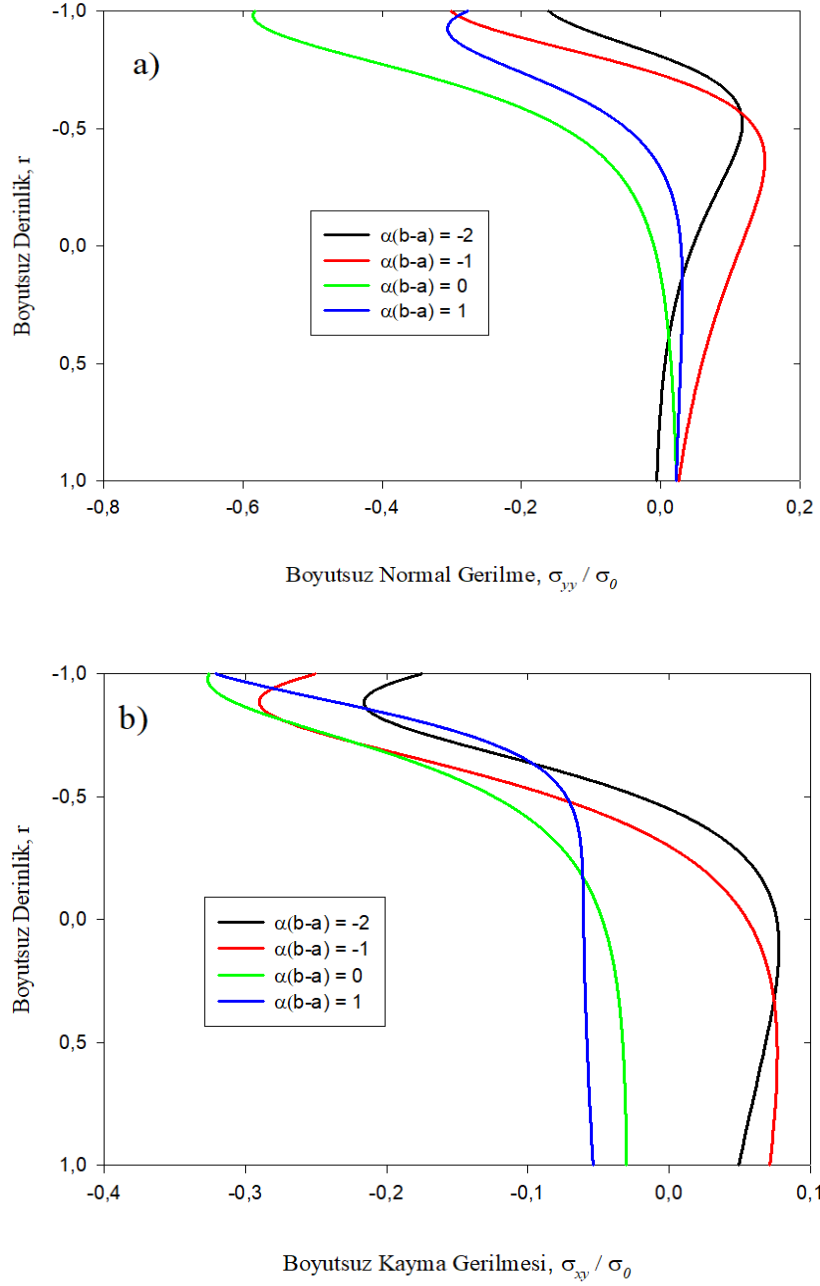
Şekil 4.22 Değişen malzeme homojensizliğine bağlı olarak zımba ön ucunda derinlik boyunca  
 (a) yanal yöndeki normal gerilme, (b) kayma gerilmesi  $\frac{\sigma_{yy}(0,x)}{P/(b-a)}$ ,  $\frac{\sigma_{xy}(0,s)}{P/(b-a)}$   $\eta_m = 0.3, \eta_p = 0.7, \gamma = 1$



Şekil 4.23 Değişen malzeme homojensizliğine bağlı olarak temas yüzeyindeki a) dikey yöndeki normal gerilme b) yanal yöndeki normal gerilme ;  $\frac{\sigma_{yy}(0,x)}{P/(b-a)}, \frac{\sigma_{xx}(0,s)}{P/(b-a)}, \eta_m = 0.3, \eta_p = 0.7, \gamma = 2$



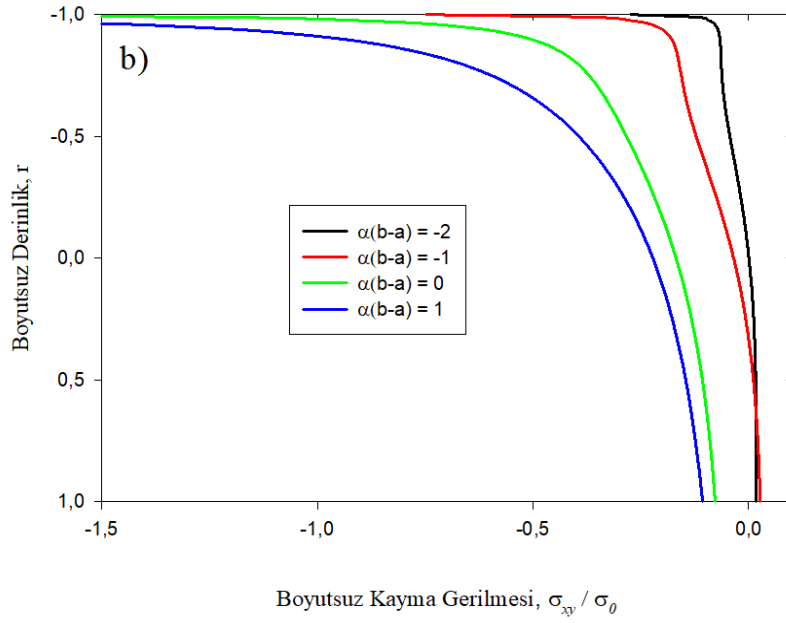
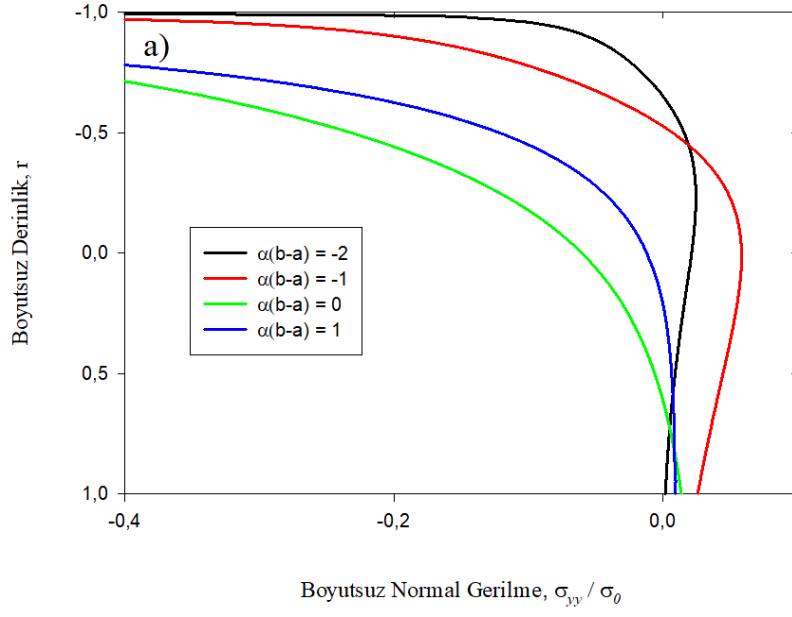
Şekil 4.24 Değişen malzeme homojensizliğine bağlı olarak zımba arka ucu derinlik boyunca a) yanal yöndeki normal gerilme b) kayma gerilmesi;  $\frac{\sigma_{yy}(0,x)}{P/(b-a)}, \frac{\sigma_{xy}(0,s)}{P/(b-a)}, \eta_m = 0.3, \eta_p = 0.7, \gamma = 2$



Şekil 4.25 Değişen malzeme homojensizliğine bağlı olarak zimba ortası yüzey altında derinlik

boyunca (a) yanal yöndeki normal gerilme, (b) kayma gerilmesi  $\frac{\sigma_{yy}(0,x)}{P/(b-a)}$ ,  $\frac{\sigma_{xy}(0,s)}{P/(b-a)}$

$$\eta_m = 0.3, \eta_p = 0.7, \gamma = 2$$



Şekil 4.26 Değişen malzeme homojensizliğine bağlı olarak zımba ön ucunda derinlik boyunca  
 (a) yanal yöndeki normal gerilme, (b) kayma gerilmesi  $\frac{\sigma_{yy}(0,x)}{P/(b-a)}$ ,  $\frac{\sigma_{xy}(0,s)}{P/(b-a)} \eta_m =$   
 $0.3, \eta_p = 0.7, \gamma = 2$



Çizelge 4.5 Farklı  $\eta_m$  ve  $\eta_p$  değerleri için Q/P oranları,  $\alpha(b-a)=0$ ,  $\gamma=2$ .

$\alpha(b-a)=0, \gamma=2$				
$(\eta_m - \eta_p)$				
	0.1-1.1	0.2-0.8	0.4-0.6	0.5-0.5
Q/P	0.56187	0.47802	0.48784	0.49276
Q/Q <sub>ort</sub>	0.9365	0.9560	0.9757	0.9860

Çizelge 4.6 Farklı  $\gamma$  değerleri için Q/P oranları,  $\alpha(b-a)=0$ ,  $\eta_m = 0.3$ ,  $\eta_p = 0.7$ .

$\alpha(b-a)=0, \eta_m = 0.3, \eta_p = 0.7$					
$\gamma$					
	0	1	2	4	8
Q/P	0.49276	0.48711	0.48292	0.47824	0.47459

Çizelge 4.7 Farklı  $\alpha(b-a)$  değerleri için Q/P oranları,  $\gamma=0$ ,  $\eta_m = 0.3$ ,  $\eta_p = 0.7$ .

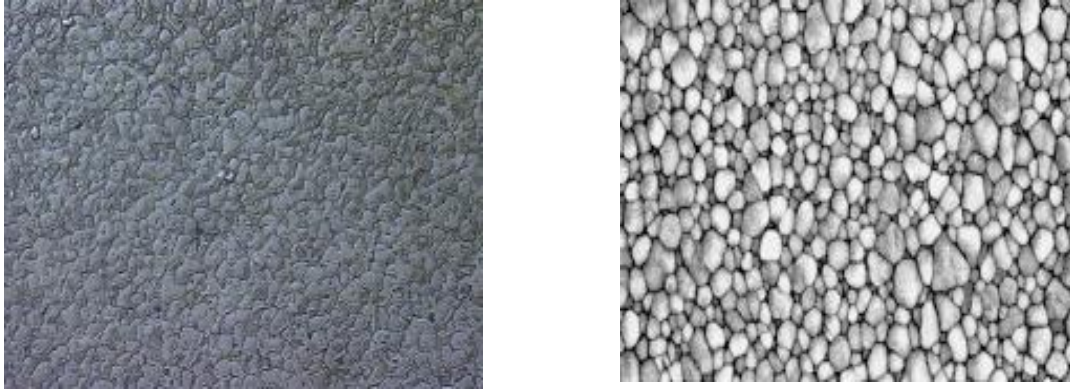
$\gamma=0, \eta_m = 0.3, \eta_p = 0.7$					
$\alpha(b-a)$					
	-2	-1	0	1	2
Q/P	0.49214	0.49219	0.49276	0.49338	0.49338

Çizelge 4.8 Farklı  $\alpha(b-a)$  değerleri için Q/P oranları,  $\gamma=1$ ,  $\eta_m=0.3$ ,  $\eta_p=0.7$ .

$\gamma=1, \eta_m=0.3, \eta_p=0.7$					
$\alpha(b-a)$					
	-2	-1	0	1	2
Q/P	0.45413	0.46392	0.48711	0.51169	0.52270

#### 4.5. Ti-6Al-4V Metal ve ZrO<sub>2</sub> Seramik Fazlar İçin Sayısal Sonuçlar

Ti-6Al-4V alaşımı, mukavemeti yüksek olan bir titanyum malzeme alaşımıdır. Bu alaşım yüksek mukavemetinin yanı sıra hafiftir, şekil verilebilir ve yüksek korozyon direncine sahiptir. Şekil 4.27’de Ti-6Al-4V ve ZrO<sub>2</sub> malzemelerin mikroyapısı gösterilmiştir. Sol taraftaki resim Ti-6Al-4V, sağ taraftaki resim ise ZrO<sub>2</sub> mikroyapısını gösterir [42].



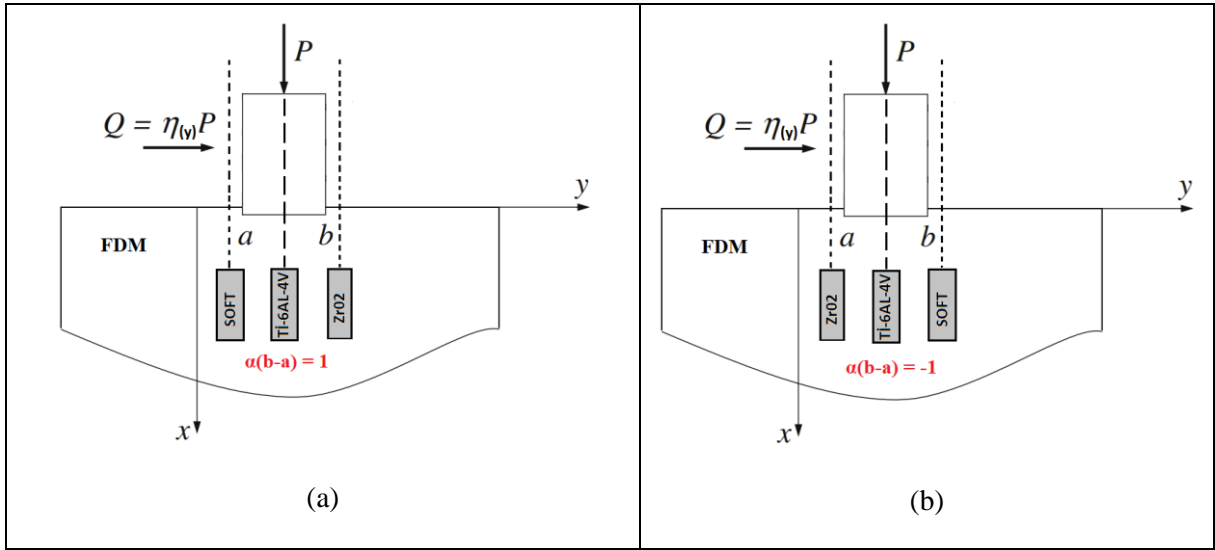
Şekil 4.27 Ti-6Al-4V ve ZrO<sub>2</sub> malzeme mikroyapısı

ZrO<sub>2</sub> seramik bir malzemedir, yüksek sıcaklık ve yüksek aşınma ortamlarında kullanımı uygundur. FDM malzemelerde seramik fazı olarak kullanılabilir.

Çizelge 4.9 Ti-6Al-4V ve ZrO<sub>2</sub> malzeme özellikleri (Choi ve Paulino [48])

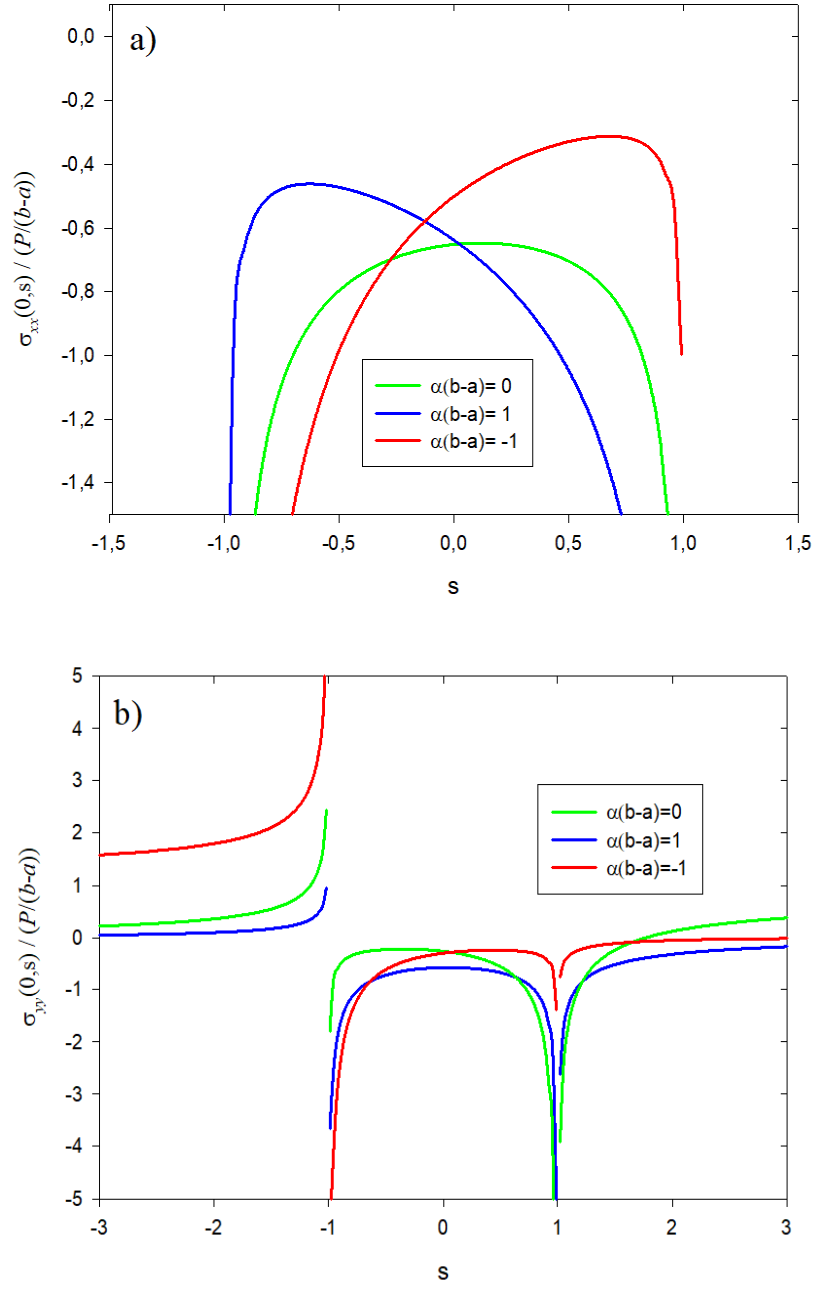
Fiziksel Özellikler	Ti-6Al-4V	Zirkonyum
Elastik Modülü (E)	66.2 Gpa	117 Gpa
Yoğunluk (ğ)	4420 kg/m <sup>3</sup>	5600 kg/m <sup>3</sup>
Poisson oranı (v)	0.321	0.333

Şekil 4.28 yanal yönde fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme (FDM) için Çizelge 4.9’da sunulan Ti-6Al-4V metal alaşım ve ZrO<sub>2</sub> seramik fazları kullanımını simgelemektedir. Şekil 4.28(a) ve Şekil 4.28(b)’de zımba ortasında kullanılan malzeme Ti-6Al-4V alaşımıdır. Ancak,  $\alpha(b - a) = 1$  kullanıldığında zımba ön ucunda ZrO<sub>2</sub> kullanımı,  $\alpha(b - a) = -1$  alındığında ise zımba arka ucunda ZrO<sub>2</sub> kullanımı modellenmektedir. Buna göre ilgili koşullarda zımbanın arka ucu veya zımbanın ön ucu yumuşak malzeme olmaktadır. Böylelikle, yanal yönde derecelendirmenin etkisi daha net bir şekilde gerçek malzeme özellikleri üzerinden de görülebilmektedir.



Şekil 4.28 (a) Ti-6Al-4V-ZrO<sub>2</sub> FDM  $\alpha(b - a) = 1$ , (b) Ti-6Al-4V-ZrO<sub>2</sub> FDM  $\alpha(b - a) = -1$ .

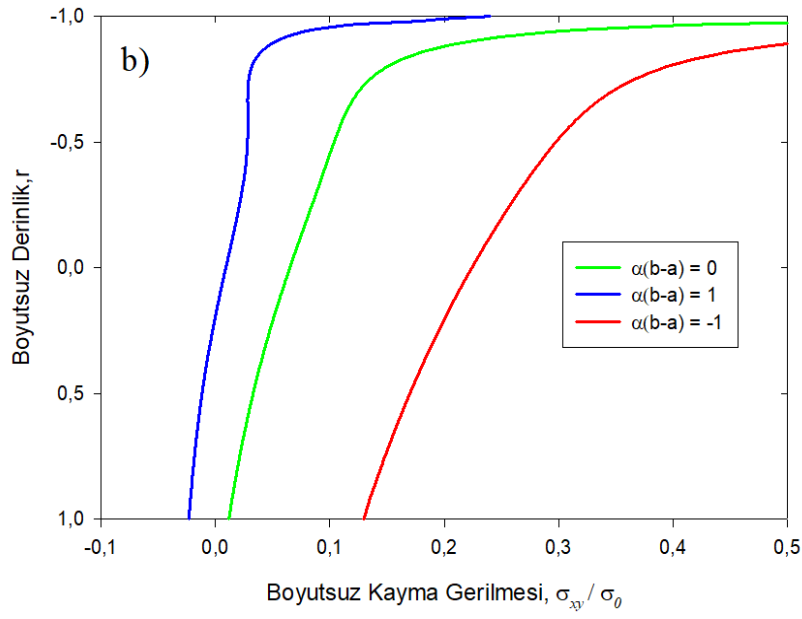
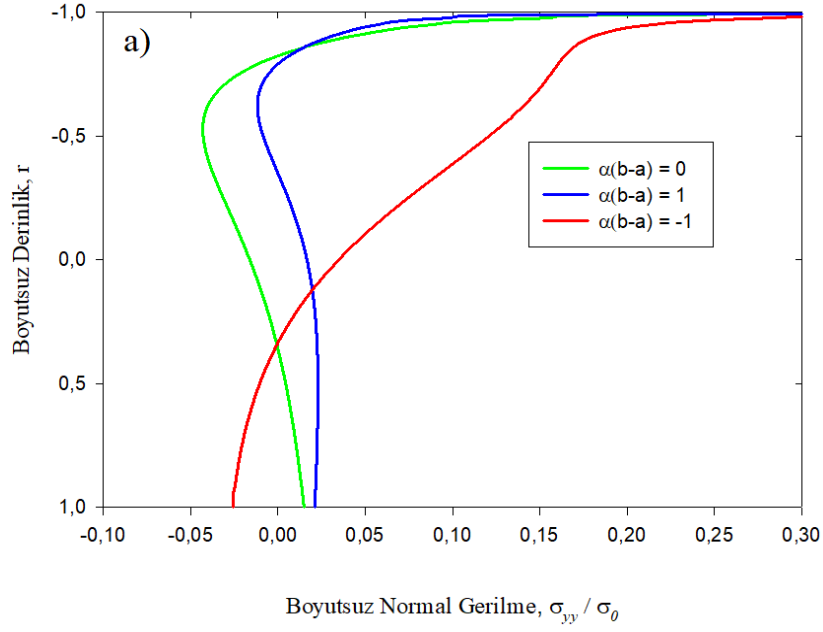
Şekil 4.29-Şekil 4.32 temas yüzeyi ve yüzey altındaki gerilme sonuçlarını Ti-6Al-4V + ZrO<sub>2</sub> FDM malzeme için farklı homojensizlik  $\alpha(b - a)$  parametresine göre sunmaktadır. Şekil 4.29(a) ve Şekil 4.29(b) değişen malzeme homojensizliğine göre ( $\alpha(b - a)$ ) temas bölgesinde dikey ve yanal yöndeki normal gerilme sonuçlarını göstermektedir. Şekil 4.30(a) ve Şekil 4.30(b) sırasıyla zımba arka ucu yüzeyinden ( $y = a, s = -1$ ) altkatmana derinlik yönündeki yanal normal ve kayma gerilmesi sonuçlarını göstermektedir. Şekil 4.31(a) ve Şekil 4.31(b) zımba orta yüzeyinden ( $y = (a + b)/2, s = 0$ ) derinlik yönündeki yanal normal ve kayma gerilmelerini gösterir. Şekil 4.32(a) ve Şekil 4.32(b) zımba ön ucundan ( $y = b, s = 1$ ) derinlik yönündeki yanal normal ve kayma gerilmelerini ifade etmektedir.  $\alpha(b - a) = 0$  değeri Ti-6Al-4V alaşımını ifade etmekte,  $\alpha(b - a) = -1$  değeri sol taraftan sağ tarafa doğru ZrO<sub>2</sub>' den yumuşak malzemeye doğru yanal gradyan yapıyı,  $\alpha(b - a) = 1$  değeri ise sol taraftan sağ tarafa doğru yumuşak malzemedan ZrO<sub>2</sub>' ye doğru gradyan yapıyı ifade etmektedir.



Şekil 4.29 Değişen malzeme homojensizliğine bağlı olarak Ti-6Al-4V temas yüzeyindeki a)

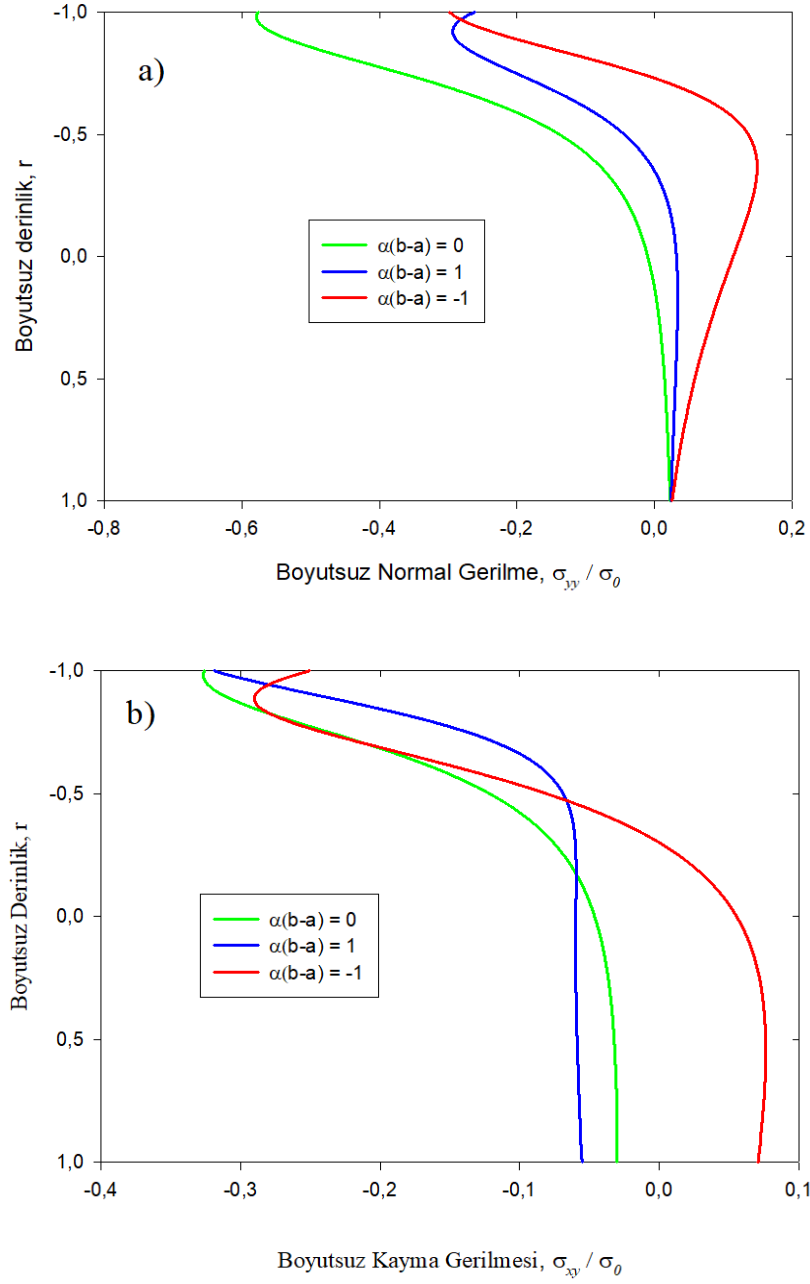
dikey yöndeki normal gerilme b) yanal yöndeki normal gerilme  $\frac{\sigma_{yy}(0,x)}{\frac{P}{b-a}}, \frac{\sigma_{xx}(0,s)}{\frac{P}{b-a}}$

$$\eta_m = 0.3, \eta_p = 0.7, \gamma = 2$$

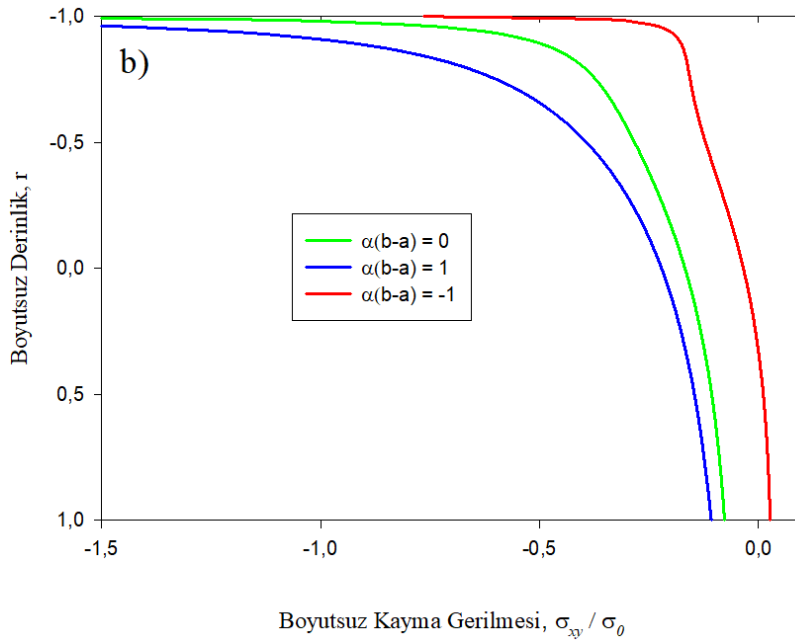
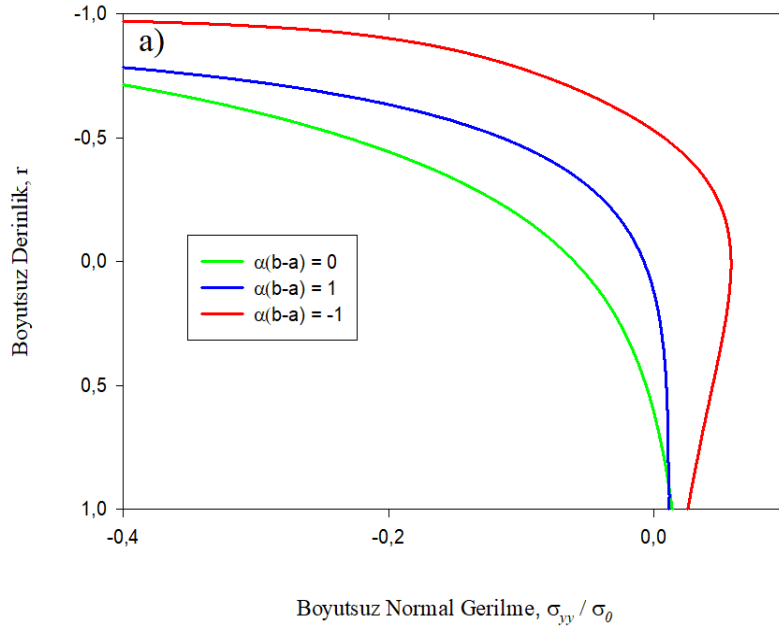


Şekil 4.30 Değişen malzeme homojensizliğine bağlı olarak Ti-6Al-4V malzemesinin zımba arka ucu derinlik boyunca a) yanal yöndeki normal gerilme b) kayma gerilmesi;

$$\frac{\sigma_{yy}(0,x)}{P/(b-a)}, \frac{\sigma_{xy}(0,s)}{P/(b-a)}, \eta_m = 0.3, \eta_p = 0.7, \gamma = 4$$



Şekil 4.31 Değişen malzeme homojensizliğine bağlı olarak Ti-6Al-4V malzemesinin zımba ortası yüzey altında derinlik boyunca (a) yanal yöndeki normal gerilme, (b) kayma gerilmesi  $\frac{\sigma_{yy}(0,x)}{P/(b-a)}$ ,  $\frac{\sigma_{xy}(0,s)}{P/(b-a)}$ ,  $\eta_m = 0.3$ ,  $\eta_p = 0.7$ ,  $\gamma = 4$



Şekil 4.32 Değişen malzeme homojensizliğine bağlı olarak Ti-6Al-4V malzemesinin zımba ön ucunda derinlik boyunca (a) yanal yöndeki normal gerilme, (b) kayma gerilmesi:  $\frac{\sigma_{yy}(0,x)}{P/(b-a)}, \frac{\sigma_{xy}(0,s)}{P/(b-a)}, \eta_m = 0.3, \eta_p = 0.7, \gamma = 4$

## 5. SONUÇLARIN YORUMLANMASI VE ÖNERİLER

Mühendislikte parçaların, malzemelerin kaçınılmaz temasından dolayı ortaya çıkan aşınma çoğunlukla sürtünmeli yüzeylerde meydana gelen yüksek gerilmelerden kaynaklanmaktadır. Bu tez probleminde sürtünmeli ve düzgün bir profile sahip rijit bir zımba etkisinde yanal derecelendirilmiş fonksiyonel derecelendirilmiş yarı düzlemde malzeme ve zımba arasındaki sürtünme katsayısı sınır değerleri değişimi, sürtünme katsayısı profilinin değişimi, yanal yöndeki malzeme homojensizliğinin değişimi gibi bazı parametrelerin FDM temas yüzeyinde ve zımbadan belli bir uzaklıkta yüzey altında oluşan gerilme dağılımları incelenmiştir. Bu çalışmanın temel özgülüğü yanal derecelendirilmiş malzemelerde yüzey altı gerilme dağılımı sonuçlarının temas bölgesinde uzaysal değişim gösteren sürtünme katsayısı düşünülerek elde edilmesidir. Yüzey altı gerilme dağılımı yanal derecelendirilmiş malzemelerin parametrelerinin değişmesi durumunda birbiri ile aynı olmayan gerilme dağılımlarına sebebiyet verebilir. Sürtünmeli temas koşulları altında derecelendirilmiş malzemelerin karmaşık mekanik davranışı yüzey altı gerilme dağılımlarının önemini daha da arttırmaktadır. Bu çalışmada yanal dereceli malzemeler yüzeyde uzaysal değişim gösteren sürtünme katsayısı içerecek şekilde modellenmiştir, sürtünmeli temas kaynaklı yüzey altı temas gerilme dağılımı sonlu elemanlar programında analizler koşturularak iteratif çözüm yöntemi ile çözülmüştür. Çözümde elde edilen parametrik analizler karşılaştırılmıştır, malzeme homejensizliğinin etkisi, sürtünme katsayısı sınır değerleri değişimi etkisi ve uzaysal sürtünme katsayısı profilinin değişimi etkisi sunulmuştur. Temas yüzeyi ve yüzey altındaki gerilmeler incelendiğinde malzeme homojensizliğinin etkisi sürtünme katsayısının sınır değerleri etkisine ve uzaysal değişim gösteren sürtünme profilinin değişimi etkisine göre daha baskın bir etkide olduğu net bir şekilde gözlemlenmiştir. Ancak yanal yönde derecelendirilmiş malzemelerde sürütünmenin de değişimini dikkate almak daha doğru bir modelleme oluşturmayı sağlamaktadır.

Literatürde temas mekaniği, yanal dereceli malzemeleri konu alınan problemlere ilişkin analitik ve numerik çözümlere yönelik bir kısım sonuçlar bulunmaktadır. Ancak uzaysal değişken sürtünmeli temas koşulları altında yanal derecelendirilmiş malzemelerde yüzey altı gerilme dağılımını bulmak için sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak geliştirilen bir yöntem ve hesaplamalı olarak yüzey altı gerilme sonuçlarını sunan çalışmaların literatürde henüz olmadığı yapılan çalışmalar öncesinde görülmüştür. Bu nedenle, özellikle temas yüzeyindeki uzaysal değişen sürtünme katsayısının yüzey altı gerilmeler üzerindeki etkisi yapılan bu çalışma ile



belirlenmiştir. Farklı malzeme ve sürtünme koşulları altında bu çalışmadaki sonuçların sunulması temas mekaniği alanında hem literatür hem de mühendislik uygulamaları için özgün bir katkı sunacaktır. Elde edilen sonuçlar sürtünmeli temas uygulamalarında yanal derecelendirilmiş malzemelerin tasarımları ve performansları için yol gösterici olacaktır.

## 6. KAYNAKLAR

- [1] M. Koizumi, The Concept of FGM, Ceramic Transactions, Functionally Gradient Materials, Vol. 34, 1993, pp. 3-10.
- [2] Y. Itoh, M. Takahashi, H. Takano, Design of Tungsten/Copper Graded Composite for High Heat Flux Components, Fusion Engineering and Design, Volume 31, Issue4, 1996.
- [3] M. Naebe, K. Shirvanimoghaddam, Functionally Graded Materials: A review of fabrication and properties, Applied Materials Today, Volume 5, 2016.
- [4] A. Giannakopoulos, S. Suresh, Indentation of Solids With Gradients in Elastic Properties: Part I.Point Force Solution, International Journal of Solids and Structures, 34, 19, 2357-2392, 1997a.
- [5] A. Giannakopoulos, S. Suresh, Indentation of Solids With Gradients in Elastic Properties: Part II.Axisymetric Indenters, International Journal of Solids and Structures, 34, 19, 2393-2428, 1997b.
- [6] A. Giannakopoulos, P. Pallot, Two Dimensional Contact Analysis of Elastic Graded Materials, Journal of Mech. Phys. Solids, 48, 1597-1631, 2000.
- [7] S. Dag, Consideration of spatial variation of the friction coefficient in contact mechanics analysis of laterally graded materials, ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik 96.1, 121-136, 2016.
- [8] O. Arslan, Inclined surface cracks in a graded half-plane subjected to frictional sliding contact. Journal Of Theoretical And Applied Mechanics 56, 915-925, 2018.
- [9] S. Dag, B. Yildirim, F. Erdogan, Interface crack problems in graded orthotropic media: Analytical and computational approaches, International Journal of Fracture 130, 471–496, 2004.
- [10] M. A. Guler, Contact Mechanics of FGM Coatings, PhD Dissertation, Lehigh University, Betlehem PA, USA, (2001).

- [11] M. A. Guler, F. Erdogan, Contact mechanics of graded coatings, *International Journal of Solids and Structures*, Volume 41, Issue 14, 2004.
- [12] M. A. Guler, F. Erdogan, The frictional sliding contact problems of rigid parabolic and cylindrical stamps on graded coatings, *International Journal of Mechanical Sciences* 49, 161–182, 2007.
- [13] S. Dag, T. Apatay, M. A. Guler, M. Gulgec, A surface crack in a graded coating subjected to sliding frictional contact, *Engineering Fracture Mechanics*, Volume 80, pp. 72-91, 2012.
- [14] L. L. Ke, Y. S. Wang, Two-dimensional sliding frictional contact of functionally graded materials, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 26, 171-188, 2007.
- [15] S. Dag, F. Erdogan, Crack and Contact Problems in Functionally Graded Materials, *Ceramic Transactions*, 114, 739-746, 2000.
- [16] T. Apatay, S. Dağ, M. A. Güler, M. Gülgeç, Subsurface contact stresses in functionally graded coatings loaded by a frictional flat stamp., *Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University*, (2010).
- [17] M. N. Balci, S. Dag, B. Yildirim, Subsurface stresses in graded coatings subjected to frictional contact with heat generation, *Journal of Thermal Stresses*, 40:4, 517-534, 2017.
- [18] V. Ganesh, K. Ramakrishna, D.N. Ghista, Biomechanics of bone-fracture fixation by stiffness-graded plates in comparison with stainless-steel plates, *BioMed Eng OnLine* 4, 46 (2005).
- [19] S. Dag, M. A. Guler, B. Yildirim, A. C. Ozatag, Sliding frictional contact between a rigid punch and a laterally graded elastic medium, *International Journal of Solids and Structures*, Volume 46, Issues 22–23, 2009.
- [20] O. Arslan, Frictional contact problem of an anisotropic laterally graded layer loaded by a sliding rigid stamp. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, (2020), 234(10), 2024-2041.

- [21] O. Arslan, Computational contact mechanics analysis of laterally graded orthotropic half-planes. *World Journal of Engineering*, 14/2, (2017), 145–154.
- [22] O. Arslan, S. Dag, Contact mechanics problem between an orthotropic graded coating and a rigid punch of an arbitrary profile. *International Journal of Mechanical Sciences*, 135, (2018), 541–554.
- [23] S. Dag, M. A. Guler, B. Yildirim, A. C. Ozatag Frictional Hertzian Contact Between a Laterally Graded Elastic Medium and a Rigid Circular Stamp., *ACTA MECHANICA*, 2013, pp. 1773–1789.
- [24] R P. Saji, P. Pantidis, M E. Mobasher, A new unified arc-length method for damage mechanics problems.,\_2023.
- [25] J. M. Julia, L. R. Tembleque, Subsurface stress evolution under orthotropic wear and frictional contact conditions. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2022.
- [26] M.N. Balci, B. Yildirim, S. Dag, Analysis of frictional contacts with heat generation considering temperature dependent properties, *International Journal of Mechanical Sciences*, (2015).
- [27] X. Qin, D. Sun, L. Xie, Analysis of Critical Stress for Subsurface Rolling Contact Fatigue Damage Assessment Under Roll/Slide Contact. *Journal of Failure Analysis and Prevention*, (2014).
- [28] H. Boffy, C. H. Venner, Multigrid Solution of the 3D Elastic Subsurface Stress Field for Heterogeneous Materials in Contact Mechanics., (2014).
- [29] R. Khajehtourian, S. Adibnazari, S. Tashi, The Influence of Grain Size and Grain Size Distribution on Sliding Frictional Contact in Laterally Graded Materials. *Applied Mechanics and Materials*, (2012).
- [30] W. W. F. Chong, S. J. Chidlow, Analysing the effects of sliding, adhesive contact on the deformation and stresses induced within a multilayered elastic solid. *Mechanics of Materials*, 2016.

- [31] ANSYS, Ansys Basic Analysis Procedures Guide, Release 5.4. Canonsburg P.A., USA, ANSYS Inc., 1997.
- [32] A. Sola, D. Bellucci, V. Cannillo, Functionally graded materials for orthopedic applications – an update on design and manufacturing. 34(5), 504–531, 2016.
- [33] Dr. S. Ihde, Dr. F. P. Spahn., Lateral dental implant.,1998.
- [34] H. S. Hedia, N. A. Mahmoud, Design optimization of functionally graded dental implant.. Bio-medical Materials and Engineering, 14(2):133-143, 2004.
- [35] L. Valy, B. Katona, E. Bognár, Chemical Etching of Dental Implant Material. Materials Science Forum, 2015.
- [36] R. M. Pilliar, Dental implants: materials and design.. Journal of The Canadian Dental Association, 1990.
- [37] J. C. Wataha, Materials for endosseous dental implants.. Journal of Oral Rehabilitation, (1996).
- [38] M. N. Balci, Zimba Kayma Hızının Yanal Derecelendirilmiş Bir Alt Katmanın Termoelastik Temas Mekniği Üzerindeki Etkisi, 23. *Ulusal Mekanik Kongresi*, Konya, Teorik ve Uygulamalı Mekanik Türk Milli Komitesi, 2023, s. 429.
- [39] [K. B. Yilmaz](#), I. Comez, M. A. Guler, B. Yildirim, Sliding frictional contact analysis of a monoclinic coating/isotropic substrate system, *Mechanics of Materials*, (2019).
- [40] J. W. Ringsberg, M. Loo-Morrey, B. L. Josefson, A. Kapoor, J. H. Beynon, Prediction of fatigue crack initiation for rolling contact fatigue. 22(3), 2000.
- [41] M. Topçu, S. Taşgetiren, Mühendisler için sonlu elemanlar metodu, PAÜ Mühendislik Fakültesi Matbaası, Ders kitapları Yayın No: 007, Denizli, 1998.
- [42] M. N. Balcı, Isı Üretimi Olan Sürtünmeli Temasların Sıcaklık Bağımlı Özellikler Kullanılarak Analizi, Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi, 2012.

- [43] E. Madenci, I. Guven, *The Finite Element Method and Applications in Engineering Using ANSYS*, Springer Science Business Media, LLC, 2006.
- [44] S. Mohammadi, *Discontinuum Mechanics Using Finite and Discrete Elements*, WIT Press, 285p, 2003.
- [45] O. Zienkiewicz, R. Taylor, *The Finite Element Method*, McGraw Hill, 4th edition, 1994.
- [46] J. Hallquist, G. Goudreau, D. Benson, Sliding interfaces with contact impact in large scale lagrangian computations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 51, 1985.
- [47] A. Crook, *Combined finite/discrete element method.*, Lecture Notes, University of Wales Swansea, 1996.
- [48] Choi, H. J., & Paulino, G. H. Thermoelastic contact mechanics for a flat punch sliding over a graded coating/substrate system with frictional heat generation. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 56(4), 1673-1692, (2008).