

**GÜÇLÜ İKİLİ LİNEER OLMAYAN SCHRÖDİNGER
SİSTEMİ İÇİN YAPI KORUYAN SAYISAL BİR YÖNTEM**

**A STRUCTURE PRESERVING NUMERICAL METHOD FOR
STRONGLY COUPLED NONLINEAR SCHRÖDİNGER
SYSTEM**

RIDVAN FATİH ÖRS

PROF. DR. CANAN KÖROĞLU

Danışman

PROF. DR. AYHAN AYDIN

Eş Danışman

Hacettepe Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim - Öğretim Sınav Yönetmeliğinin

Matematik Anabilim Dalı için Öngördüğü

YÜKSEK LİSANS TEZİ

olarak hazırlanmıştır.

2024

ABSTRACT

A STRUCTURE PRESERVING NUMERICAL METHOD FOR STRONGLY COUPLED NONLINEAR SCHRÖDINGER SYSTEM

Rıdvan Fatih ÖRS

Master of Science, Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Canan KÖROĞLU

2nd Supervisor: Prof. Dr. Ayhan AYDIN

April 2024, 73 pages

In this thesis, a new structure-preserving numerical method for strongly coupled nonlinear Schrödinger equation (SCNLS) is presented. It is shown that the proposed new method conserves the discrete mass and energy. Numerical results are given to show the efficiency and effectiveness of the method and compared with the existing results in the literature. Numerical results show that the proposed method preserves both the mass and energy structure of the SCNLS equation up to the machine error therefore have a better long-time behaviour.

Keywords: Strongly Coupled Nonlinear Schrödinger Equation, Mass Conservation, Energy Conservation, Convergence, Stability

ÖZET

GÜÇLÜ İKİLİ LİNEER OLMAYAN SCHRÖDİNGER SİSTEMİ İÇİN YAPI KORUYAN SAYISAL BİR YÖNTEM

Rıdvan Fatih ÖRS

Yüksek Lisans, Matematik

Danışman: Prof. Dr. Canan KÖROĞLU

Eş Danışman: Prof. Dr. Ayhan AYDIN

Nisan 2024, 73 sayfa

Bu tezde, güçlü ikili lineer olmayan Schrödinger denklemi (SCNLS) için yapı koruyan yeni bir sayısal yöntem sunulmuştur. Önerilen yeni yöntemin kütle ve enerjiyi sayısal olarak koruduğu gösterilmiştir. Yöntemin verimliliğini ve etkinliğini göstermek için sayısal sonuçlar verilmiş ve literatürde var olan sonuçlar ile kıyaslanmıştır. Sayısal sonuçlar, makine hatasını da hesaba katarak, önerilen yöntemin SCNLS denkleminin hem kütle hem de enerji yapısını koruduğu, dolayısıyla uzun vadede daha başarılı olduğunu göstermektedir.

Anahtar Kelimeler: Güçlü lineer olmayan Schrödinger denklemi, Kütle Korunumu, Enerji Korunumu, Yakınsaklık, Kararlılık

İçindekiler

	<u>Page</u>
ABSTRACT	i
ÖZET	ii
İÇİNDEKİLER	iii
TABLolar	iv
GRAfİKLER	v
KISALTMALAR	vii
1. GİRİŞ	1
2. İKİLİ LİNEER OLMAYAN SCHRÖDİNGER SİSTEMİ	10
2.1. Giriş	10
2.2. İkili Lineer Olmayan Schrödinger Sistemi için Kütle ve Enerji Korunumu	14
2.3. İkili Lineer Olmayan Schrödinger Sistemi için Yüksek Mertebeden Korunumlu Sonlu Fark Tasarısı	16
2.4. Çözümün Varlığı	21
2.5. Yakınsaklık ve Çözülebilirlik	23
2.6. Sayısal Örnekler	28
3. GÜÇLÜ İKİLİ LİNEER OLMAYAN SCHRÖDİNGER SİSTEMİ	37
3.1. Giriş	37
3.2. Güçlü İkili Lineer Olmayan Schrödinger Sistemi için Kütle ve Enerji Korunumu	37
3.3. Güçlü İkili Lineer Olmayan Schrödinger Sistemi için Korunumlu Sonlu Fark Tasarısı	40
3.4. Güçlü İkili Lineer Olmayan Schrödinger Sistemi için Yapı Koruyan Yeni Bir Sonlu Fark Tasarısı	46
3.5. Sayısal Örnekler	49
4. SONUÇ	57

TABLÖLAR

	<u>Page</u>
Tablo 2.1 Tek soliton çözümü için Q_1^n, Q_2^n ve E^n değerleri. $h = 0.25, \tau = h^2 \dots$	29
Tablo 3.1 İki soliton çözümü için Q^n ve E^n değerleri. $h = 0.2, \tau = 0.04 \dots$	51

GRAFİKLER

	<u>Page</u>
Şekil 2.1	Tek soliton çözümü için solitonların hareketleri. $h = 0.25, \tau = h^2$ 30
Şekil 2.2	Tek soliton çözümü için Kütle ve Enerji grafikleri. $h = 0.25, \tau = h^2$. 31
Şekil 2.3	Tek soliton çözümü için Kütle ve Enerji bağıl hata grafikleri. $h =$ $0.25, \tau = h^2$ 31
Şekil 2.4	İki solitonun ayrı ayrı ilerlemesi. $\nu = 1, \beta = 0$ 32
Şekil 2.5	İki solitonun birlikte ilerlemesi. $\nu = 1, \beta = 0$ 32
Şekil 2.6	İki soliton çözümü için Kütle ve Enerji grafikleri. $\nu = 1, \beta = 0$ 33
Şekil 2.7	İki solitonun ayrı ayrı ilerlemesi. $\nu = \frac{3}{2}, \beta = \frac{1}{2}$ 33
Şekil 2.8	İki solitonun birlikte ilerlemesi. $\nu = \frac{3}{2}, \beta = \frac{1}{2}$ 34
Şekil 2.9	İki soliton çözümü için Kütle ve Enerji grafikleri. $\nu = \frac{3}{2}, \beta = \frac{1}{2}$ 34
Şekil 2.10	İki solitonun ayrı ayrı ilerlemesi. $\nu = 1.05, \beta = \frac{2}{3}$ 35
Şekil 2.11	İki solitonun birlikte ilerlemesi. $\nu = 1.05, \beta = \frac{2}{3}$ 35
Şekil 2.12	İki soliton çözümü için Kütle ve Enerji grafikleri. $\nu = 1.05, \beta = \frac{2}{3}$ 36
Şekil 3.1	İki soliton için Kütle ve Enerji grafikleri. $h = 0.125, \tau = 0.1$ 50
Şekil 3.2	İki soliton için Kütle ve Enerji bağıl hata grafikleri . $h = 0.125,$ $\tau = 0.1$ 50
Şekil 3.3	İki soliton için Kütle ve Enerji grafikleri. $h = 0.2, \tau = 0.04$ 51
Şekil 3.4	İki solitonun ilerlemesi. $h = 0.125, \tau = 0.1$ 52
Şekil 3.5	İki solitonun elastik çarpışması. $h = 0.125, \tau = 0.1$ 52
Şekil 3.6	İki solitonun elastik çarpışması için Kütle ve Enerji grafikleri. $h =$ $0.125, \tau = 0.1$ 53
Şekil 3.7	İki solitonun ilerlemesi $h = 0.125, \tau = 0.1$ 53
Şekil 3.8	Solitonların sıkışması $h = 0.125, \tau = 0.1$ 54
Şekil 3.9	İki solitonun sıkışması için Kütle ve Enerji grafikleri. $h = 0.125,$ $\tau = 0.1$ 54
Şekil 3.10	İki solitonun ilerlemesi $h = 0.125, \tau = 0.1$ 55

Şekil 3.11	İki solitonun füzyonu. $h = 0.125, \tau = 0.1$	55
Şekil 3.12	İki solitonun füzyonu için Kütle ve Enerji grafikleri. $h = 0.125, \tau = 0.1$	56

KISALTMALAR

NLSE	:	Lineer Olmayan Schrödinger Denklemi
CNLSE	:	İkili Lineer Olmayan Schrödinger Denklemi
SCNLSE	:	Güçlü İkili Lineer Olmayan Schrödinger Denklemi
T-CNLSE	:	Üçlü Lineer Olmayan Schrödinger Denklemi
PDE	:	Kısmi Diferensiyel Denklem
N-CNLSE	:	N-tane İkili Lineer Olmayan Schrödinger Denklemi
AVF	:	Ortalama Vektör Alanı

1. GİRİŞ

Lineer olmayan Schrödinger (NLS) denklemi, lineer olmayan optik [1], sismoloji [2], plazma fiziği [3], elektrik hatlarındaki lineer olmayan dalga etkileşimleri [4], manyetize olmaya dirençli demir zincirler [5], DNA molekül yapıları [6], dalga yayılımları [7], lineer olmayan dalgaların etkileşimleri [8, 9] gibi farklı alanlarda karşımıza çıkan matematiksel fiziğin önemli denklemlerinden biridir. $\psi = \psi(x, t)$ kompleks değerli fonksiyon, α ve β reel sabitler olmak üzere NLS denklemi

$$i\psi_t + \beta\psi_{xx} + \alpha|\psi|^2\psi = 0 \quad (1)$$

ile verilebilir. NLS denklemi (1) tekli dalga yayılımları için kullanılabilir ancak ikili sistemler incelenirken, k ve β reel sabitler olmak üzere ikili lineer olmayan Schrödinger (CNLS) denklemi

$$iu_t + ku_{xx} + (|u|^2 + \beta|v|^2)u = 0 \quad (2)$$

$$iv_t + kv_{xx} + (|v|^2 + \beta|u|^2)v = 0 \quad (3)$$

Güçlü ikili lineer olmayan Schrödinger (SCNLS) denklemi

$$i\psi_t + \beta\psi_{xx} + [\alpha_1|\psi|^2 + (\alpha_1 + 2\alpha_2)|\phi|^2]\psi + \gamma\psi + \Gamma\phi = 0, \quad (4)$$

$$i\phi_t + \beta\phi_{xx} + [\alpha_1|\phi|^2 + (\alpha_1 + 2\alpha_2)|\psi|^2]\phi + \gamma\phi + \Gamma\psi = 0. \quad (5)$$

olarak karşımıza çıkmaktadır. (4) – (5) denklem sisteminde Γ optik fiberin bükülmesinden ve eliptik deformasyonundan kaynaklanan etkileri ifade etmek için kullanılmaktadır. Aynı zamanda lineer çift kırılma [10] veya dalga yayılım sabiti [11] olarak da adlandırılır. (2) – (3) denklem sistemiyle kıyaslandığında, (4) – (5) denklem sistemine eklenen $\gamma\psi$ ve $\Gamma\phi$ terimleri ikili dalga etkileşimini daha güçlü hale getirmektedir. α_1 çift kırılımlı ortamda kendi kendine odaklanan sinyalleri ifade eder [12]. Sistemdeki grubun dağılım hızını β gösterirken, $(\alpha_1 + 2\alpha_2)$ katsayısı (4) – (5) sisteminin integrallenebilirliğini [12] ve γ ise çift kırılımların sabit ortam potansiyelini göstermektedir [13]. Burada γ ve Γ incelenen fiziksel

olayları daha anlaşılabilir hale getirmek için kullanılmaktadır. İkili sistem olmasından dolayı oluşan fazladan yayılım Γ ile ifade edilirken, yayılım parametresi γ ile gösterilmektedir. (4) – (5) denklem sisteminde $\Gamma = 0$ iken sisteme Gross-Pitaevskii ya da Manakov tipi eşitlik olarak adlandırılır [14].

$$i\psi_t + \beta\psi_{xx} + [\alpha_1|\psi|^2 + (\alpha_1 + 2\alpha_2)|\phi|^2]\psi + \gamma\psi = 0, \quad (6)$$

$$i\phi_t + \beta\phi_{xx} + [\alpha_1|\phi|^2 + (\alpha_1 + 2\alpha_2)|\psi|^2]\phi + \gamma\phi = 0. \quad (7)$$

Genel olarak soliton çözümlere sahip sistemlerin incelenmesi, hem fiziksel uygulamalar hem de soliton yayılımının anlaşılması açısından büyük önem taşımaktadır. Bu sistemlerin karmaşık dinamikleri sebebiyle analitik çözümlerini bulmak kolay olmadığından dolayı sistemin sayısal çözümlerine ihtiyaç duyulmaktadır. T. Wang ve ark. [14], güçlü ikili lineer olmayan Schrödinger sisteminin çoklu simplektik formülasyonunu inceleyerek, soliton çarpışmaları ve korunumlu şemalar da dahil olmak üzere karmaşık dinamiklerine ilişkin sonuçlar vermiştir. [14] makalelerinde koşulsuz kararlı ve ikinci mertebeden yakınsak bir tasarı ortaya koyulmuş ve [15] de sunulan ayırık enerji metodu ile ispatlanmıştır. Başka bir çalışmalarında [16], CNLS sistemleri için simplektik bir fark şemasını da ortaya koymuşlardır. Bu makalede, önerilen sayısal çözümlerin yakınsaması ve kararlılığı gösterilmiştir. Ek olarak, simplektik tasarımın çözümü için iteratif bir algoritma sunulmuştur. [17] makalesinde, korunumlu olan CNLS sistemlerin, korunumlu olmayan sistemlerden daha üstün olduğu ve daha iyi nümerik sonuçlar verdiği gösterilmiştir. Bununla birlikte, korunumlu şemalarda ikili sistemlerdeki cebirsel işlemlerin çok olması ve paralel hesaplama çok uygun olmamalarından dolayı ikili olmayan şemaların daha iyi sonuçlar verdiği de ortaya koyulmuştur. [18–20] çalışmalarında CNLS sistemi için başlangıç-sınır problemleri için lineer şemalar sunulmuş ve sonuçların yakınsaklığı Von Neumann yöntemiyle ispatlanmıştır. [21] çalışmasında, CNLS sistemlerini çözmek için korunumlu iki basamaklı lineer olmayan kapalı yöntem ve üç adımlı lineer sonlu fark tasarısı ortaya koyulmuş ve bu tasarıların sayısal analizi yapılmıştır. Bu yöntemlerin ikinci mertebeden yakınsak olduğu ve koşulsuz kararlı olduğu gösterilmiş ve kütle korunumunu sağladığı ispatlanmıştır [15]. Yuyu He ve ark. [22], CNLS için yapı koruyan dördüncü dereceden

bir sonlu fark şeması önermişlerdir. Bu çalışmada ayrık enerji metodu kullanılarak, önerilen yöntemin ayrık kütle ve enerji korunumunu sağladığı, sayısal yöntemin varlığı ve tekliği, zamana göre ikinci basamaktan uzaya göre ise dördüncü basamaktan yakınsak olduğu ispatlanmıştır. Aynı çalışmada teorik sonuçları desteklemek için sayısal sonuçlar verilmiştir. Bu tez çalışmasında, SCNLS denklemleri (4) – (5) için literatürde daha önceden çalışılmamış bir yüksek basamaktan yeni bir sonlu fark tasarısı önerilmiştir. Yeni tasarımın SCNLS denkleminin kütle ve enerjisini koruduğu ispatlanmıştır. Teknik sonuçları destekleyen sayısal sonuçlar verilmiştir.

Sürekli problemin $x_l \leq x \leq x_r$ ve $0 < t \leq T$ aralıklarında verildiği bir durumda, sonlu fark tasarısı için aşağıdaki tanımlardan yararlanılacaktır.

J ve N herhangi pozitif iki tam sayı, $h = (x_r - x_l)/J$ ve $\tau = T/N$ olmak üzere (x_j, t_n) noktası $t_n = n\tau$ ve $x_j = x_l + jh$ olacak şekilde, $u_j^n \approx u(x_j, t_n)$ ve $v_j^n \approx v(x_j, t_n)$ olsun.

$$\mathbb{Z}_h^0 = \{u = (u_j) | u_0 = u_J = 0, \quad j = 0, 1, \dots, J\}$$

$$\mathbb{Z}_h^{0+} = \{u = (u_j) | u_{-1} = u_0 = u_J = u_{J+1} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, J, J+1\}$$

ile sırasıyla ayrık, kompleks fonksiyonlar uzayı ve bu uzayın genişlemesini gösterelim. Her $u^n, v^n \in \mathbb{Z}_h^0$ fonksiyonları için aşağıdaki fark operatörlerini, ayrık iç çarpımını, L^p -normunu ve maksimum normlarını tanımlayalım.

$$\begin{aligned} (u_j^n)_x &= \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h}, & (u_j^n)_{\bar{x}} &= \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h}, \\ (u_j^n)_{\hat{x}} &= \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h}, & (u_j^n)_t &= \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau}, \\ u_j^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{u_j^{n+1} + u_j^n}{2}, & \langle u^n, v^n \rangle &= h \sum_{j=1}^{J-1} u_j^n \bar{v}_j^n, \\ \|u^n\|_p &= \sqrt[p]{h \sum_{j=1}^{J-1} |u_j^n|^p} & & 1 < p < +\infty, \\ \|u^n\|_\infty &= \max_{1 \leq j \leq J-1} |u_j^n|. & & \end{aligned} \tag{8}$$

Sonlu fark tasarısının ayırık korunum özellikleri, varlık, teklik ve yakınsaklığını incelemeye yardımcı olacak bazı durumlar aşağıda verilmiştir.

Lemma 1.1: $u^n, v^n \in \mathbb{Z}_h^{0+}$ olacak şekilde aşağıdaki eşitlik ve eşitsizlikler sağlanır.

1. $Re\langle u_{x\bar{x}}^n, v^n \rangle = -Re\langle u_x^n, v_x^n \rangle = Re\langle u^n, v_{x\bar{x}}^n \rangle$
2. $Re\langle u_{\hat{x}\hat{x}}^n, v^n \rangle = -Re\langle u_{\hat{x}}^n, v_{\hat{x}}^n \rangle = Re\langle u^n, v_{\hat{x}\hat{x}}^n \rangle$
3. $Re\langle u_{x\bar{x}}^n, u^n \rangle = -\|u_x^n\|^2$
4. $Re\langle u_{\hat{x}\hat{x}}^n, u^n \rangle = -\|u_{\hat{x}}^n\|^2$
5. $\|u_{\hat{x}}^n\|^2 \leq \|u_x^n\|^2$
6. $Im\langle u_{x\bar{x}}^n, u^n \rangle = 0, \quad Im\langle u_{\hat{x}\hat{x}}^n, u^n \rangle = 0, \quad Im\langle |v^n|u^n, u^n \rangle = 0$

İspat:

1. $u^n = a^n + ib^n$ ve $v^n = c^n + id^n$ alınıp iç çarpım yapıldığında,

$$\begin{aligned}
Re\langle u_{x\bar{x}}^n, v^n \rangle + Re\langle u_x^n, v_x^n \rangle &= Re\left\{ h \sum_{j=1}^{J-1} (a_j^n + ib_j^n)_{x\bar{x}} (c_j^n - id_j^n) \right\} \\
&\quad + Re\left\{ h \sum_{j=1}^{J-1} (a_j^n + ib_j^n)_x (c_j^n - id_j^n)_x \right\} \\
&= Re\left\{ h \sum_{j=1}^{J-1} \left((a_j^n)_{x\bar{x}} c_j^n + (b_j^n)_{x\bar{x}} d_j^n + i((b_j^n)_{x\bar{x}} c_j^n - (a_j^n)_{x\bar{x}} d_j^n) \right) \right\} \\
&\quad + Re\left\{ h \sum_{j=1}^{J-1} (a_j^n + ib_j^n)_x (c_j^n - id_j^n)_x \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonlu fark operatörleri tanımlarından

$$\begin{aligned}
Re\langle u_{x\bar{x}}^n, v^n \rangle + Re\langle u_x^n, v_x^n \rangle &= Re\left\{ h \sum_{j=1}^{J-1} \left(\frac{(a_j^n)_x - (a_{j-1}^n)_x}{h} (c_j^n) + \frac{(b_j^n)_x - (b_{j-1}^n)_x}{h} (d_j^n) \right) \right. \\
&\quad \left. + i \left((b_j^n)_{x\bar{x}} c_j^n - (a_j^n)_{x\bar{x}} d_j^n \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$+Re\left\{h\sum_{j=1}^{J-1}(a_j^n + ib_j^n)_x(c_j^n - id_j^n)_x\right\}$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned} Re\langle u_{x\bar{x}}^n, v^n \rangle + Re\langle u_x^n, v_x^n \rangle &= Re\left\{-h\sum_{j=1}^{J-1}(a_j^n)_x(c_j^n)_x - h\sum_{j=1}^{J-1}(b_j^n)_x(d_j^n)_x\right\} \\ &+ Re\left\{h\sum_{j=1}^{J-1}(a_j^n)_x(c_j^n)_x + (b_j^n)_x(d_j^n)_x\right\} \\ &+ i\left\{(b_j^n)_x(c_j^n)_x - (a_j^n)_x(d_j^n)_x\right\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $Re\langle u_{x\bar{x}}^n, v^n \rangle = -Re\langle u_x^n, v_x^n \rangle$ olduğu görülür. Benzer şekilde $Re\langle u^n, v_{x\bar{x}}^n \rangle = -Re\langle u_x^n, v_x^n \rangle$ olduğu gösterilebilir.

2. Sonlu fark operatörü tanımlarını dikkate alarak reel kısım alındığında

$$\begin{aligned} Re\langle u_{\hat{x}\hat{x}}^n, v^n \rangle + Re\langle u_{\hat{x}}^n, v_{\hat{x}}^n \rangle &= Re\left\{h\sum_{j=1}^{J-1}(a_j^n + ib_j^n)_{\hat{x}\hat{x}}(c_j^n - id_j^n)\right\} \\ &+ Re\left\{h\sum_{j=1}^{J-1}(a_j^n + ib_j^n)_{\hat{x}}(c_j^n - id_j^n)_{\hat{x}}\right\} \\ &= Re\left\{h\sum_{j=1}^{J-1}\left((a_j^n)_{\hat{x}\hat{x}}c_j^n + (b_j^n)_{\hat{x}\hat{x}}d_j^n\right.\right. \\ &\quad \left.\left.+ i\left((b_j^n)_{\hat{x}\hat{x}}c_j^n - (a_j^n)_{\hat{x}\hat{x}}d_j^n\right)\right)\right\} \\ &+ Re\left\{h\sum_{j=1}^{J-1}(a_j^n + ib_j^n)_{\hat{x}}(c_j^n - id_j^n)_{\hat{x}}\right\} \\ &= Re\left\{h\sum_{j=1}^{J-1}(a_j^n)_{\hat{x}\hat{x}}c_j^n + (b_j^n)_{\hat{x}\hat{x}}d_j^n\right\} \\ &+ Re\left\{h\sum_{j=1}^{J-1}(a_j^n + ib_j^n)_{\hat{x}}(c_j^n - id_j^n)_{\hat{x}}\right\} \end{aligned}$$

yazılabilir. Sonlu fark operatörleri tanımlarından

$$\begin{aligned}
Re\langle u_{\hat{x}\hat{x}}^n, v^n \rangle + Re\langle u_{\hat{x}}^n, v_{\hat{x}}^n \rangle &= Re\left\{ h \sum_{j=1}^{J-1} \left(\frac{(a_{j+1}^n)_{\hat{x}} - (a_{j-1}^n)_{\hat{x}}}{2h} c_j^n + \frac{(b_{j+1}^n)_{\hat{x}} - (b_{j-1}^n)_{\hat{x}}}{2h} d_j^n \right) \right\} \\
&\quad + Re\left\{ h \sum_{j=1}^{J-1} (a_j^n + ib_j^n)_{\hat{x}} (c_j^n - id_j^n)_{\hat{x}} \right\} \\
&= Re\left\{ \frac{h}{2h} \left(\sum_{j=1}^{J-1} (a_{j+1}^n)_{\hat{x}} c_j^n - \sum_{j=1}^{J-1} (a_{j-1}^n)_{\hat{x}} c_j^n \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{j=1}^{J-1} (b_{j+1}^n)_{\hat{x}} d_j^n - \sum_{j=1}^{J-1} (b_{j-1}^n)_{\hat{x}} d_j^n \right) \right\} \\
&\quad + Re\left\{ h \sum_{j=1}^{J-1} (a_j^n + ib_j^n)_{\hat{x}} (c_j^n - id_j^n)_{\hat{x}} \right\}
\end{aligned}$$

bulunur. Sınır değerleri kullanılarak gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned}
Re\langle u_{\hat{x}\hat{x}}^n, v^n \rangle + Re\langle u_{\hat{x}}^n, v_{\hat{x}}^n \rangle &= Re\left\{ h \sum_{j=1}^{J-1} \left((a_j^n)_{\hat{x}} \frac{c_{j-1}^n - c_{j+1}^n}{2h} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + h \sum_{j=1}^{J-1} \left((b_j^n)_{\hat{x}} \frac{d_{j-1}^n - d_{j+1}^n}{2h} \right) \right\} \\
&\quad + Re\left\{ h \sum_{j=1}^{J-1} (a_j^n + ib_j^n)_{\hat{x}} (c_j^n - id_j^n)_{\hat{x}} \right\}
\end{aligned}$$

yazılabilir. $u^n, v^n \in \mathbb{Z}_h^{0+}$ ve sonlu fark operatörleri tanımlarından

$$\begin{aligned}
Re\langle u_{\hat{x}\hat{x}}^n, v^n \rangle + Re\langle u_{\hat{x}}^n, v_{\hat{x}}^n \rangle &= Re\left\{ -h \sum_{j=1}^{J-1} (a_j^n)_{\hat{x}} (c_j^n)_{\hat{x}} - h \sum_{j=1}^{J-1} (b_j^n)_{\hat{x}} (d_j^n)_{\hat{x}} \right\} \\
&\quad + Re\left\{ h \sum_{j=1}^{J-1} (a_j^n)_{\hat{x}} (c_j^n)_{\hat{x}} + (b_j^n)_{\hat{x}} (d_j^n)_{\hat{x}} + i(bc - ad)_{\hat{x}} \right\} = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $Re\langle u_{\hat{x}\hat{x}}^n, v^n \rangle = -Re\langle u_{\hat{x}}^n, v_{\hat{x}}^n \rangle$ olduğu görülür. Benzer şekilde $Re\langle u^n, v_{\hat{x}\hat{x}}^n \rangle = -Re\langle u_{\hat{x}}^n, v_{\hat{x}}^n \rangle$ olduğu gösterilebilir.

3. Sonlu fark operatörleri tanımları ve homojen sınır koşullarından

$$\begin{aligned}
Re\langle u_{x\bar{x}}^n, u^n \rangle + \|u_x^n\|^2 &= Re\left\{ h \sum_{j=1}^{J-1} (a_j^n + ib_j^n)_{x\bar{x}} (a_j^n - ib_j^n) \right\} + \|u_x^n\|^2 \\
&= Re\left\{ h \sum_{j=1}^{J-1} \left((a_j^n)_{x\bar{x}} a_j^n + (b_j^n)_{x\bar{x}} b_j^n \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + i \left((b_j^n)_{x\bar{x}} a_j^n - (a_j^n)_{x\bar{x}} b_j^n \right) \right) \right\} + \|u_x^n\|^2 \\
&= Re\left\{ h \sum_{j=1}^{J-1} \left(\frac{(a_j^n)_x - (a_{j-1}^n)_x}{h} a_j^n + \frac{(b_j^n)_x - (b_{j-1}^n)_x}{h} b_j^n \right) \right\} \\
&\quad + \|u_x^n\|^2 \\
&= Re\left\{ \sum_{j=1}^{J-1} (a_j^n)_x a_j^n - \sum_{j=1}^{J-1} (a_{j-1}^n)_x a_j^n + \sum_{j=1}^{J-1} (b_j^n)_x b_j^n \right. \\
&\quad \left. - \sum_{j=1}^{J-1} (b_{j-1}^n)_x b_j^n \right\} + \|u_x^n\|^2 \\
&= Re\left\{ \sum_{j=1}^{J-1} (a_j^n)_x a_j^n - \sum_{j=0}^{J-2} (a_j^n)_x a_{j+1}^n + \sum_{j=1}^{J-1} (b_j^n)_x b_j^n \right. \\
&\quad \left. - \sum_{j=0}^{J-2} (b_j^n)_x b_{j+1}^n \right\} + \|u_x^n\|^2 \\
&= Re\left\{ \sum_{j=1}^{J-1} (a_j^n)_x (a_j^n - a_{j+1}^n) + \sum_{j=1}^{J-1} (b_j^n)_x (b_j^n - b_{j+1}^n) \right\} \\
&\quad + \|u_x^n\|^2 \\
&= Re\left\{ -h \sum_{j=1}^{J-1} (a_j^n)_x^2 - h \sum_{j=1}^{J-1} (b_j^n)_x^2 \right\} + h \sum_{j=1}^{J-1} (a_j^n)_x^2 + h \sum_{j=1}^{J-1} (b_j^n)_x^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece $Re\langle u_{x\bar{x}}^n, u^n \rangle = -\|u_x^n\|^2$ olduğu görülür.

4. Sonlu fark operatörleri tanımlarından

$$\begin{aligned}
Re\langle u_{\hat{x}\hat{x}}^n, u^n \rangle + \|u_{\hat{x}}^n\|^2 &= Re\left\{ h \sum_{j=1}^{J-1} \left(a_j^n + ib_j^n \right)_{\hat{x}\hat{x}} \left(a_j^n - ib_j^n \right) \right\} + \|u_{\hat{x}}^n\|^2 \\
&= Re\left\{ h \sum_{j=1}^{J-1} \left(\left(a_j^n \right)_{\hat{x}\hat{x}} a_j^n + \left(b_j^n \right)_{\hat{x}\hat{x}} b_j^n \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + i \left(\left(b_j^n \right)_{\hat{x}\hat{x}} a_j^n - \left(a_j^n \right)_{\hat{x}\hat{x}} b_j^n \right) \right) \right\} + \|u_{\hat{x}}^n\|^2
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
Re\langle u_{\hat{x}\hat{x}}^n, u^n \rangle + \|u_{\hat{x}}^n\|^2 &= Re\left\{ h \sum_{j=1}^{J-1} \left(\frac{\left(a_{j+1}^n \right)_{\hat{x}} - \left(a_{j-1}^n \right)_{\hat{x}}}{2h} a_j^n + \frac{\left(b_{j+1}^n \right)_{\hat{x}} - \left(b_{j-1}^n \right)_{\hat{x}}}{2h} b_j^n \right) \right\} \\
&\quad + \|u_{\hat{x}}^n\|^2 \\
&= Re\left\{ \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^{J-1} \left(a_{j+1}^n \right)_{\hat{x}} a_j^n - \sum_{j=1}^{J-1} \left(a_{j-1}^n \right)_{\hat{x}} a_j^n \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{j=1}^{J-1} \left(b_{j+1}^n \right)_{\hat{x}} b_j^n - \sum_{j=1}^{J-1} \left(b_{j-1}^n \right)_{\hat{x}} b_j^n \right] \right\} + \|u_{\hat{x}}^n\|^2
\end{aligned}$$

yazılabilir. Homojen sınır koşulları kullanılarak gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned}
Re\langle u_{\hat{x}\hat{x}}^n, u^n \rangle + \|u_{\hat{x}}^n\|^2 &= Re\left\{ -h \sum_{j=1}^{J-1} \left(a_j^n \right)_{\hat{x}} \frac{a_{j+1}^n - a_{j-1}^n}{2h} - h \sum_{j=1}^{J-1} \left(b_j^n \right)_{\hat{x}} \frac{b_{j+1}^n - b_{j-1}^n}{2h} \right\} \\
&\quad + \|u_{\hat{x}}^n\|^2 \\
&= Re\left\{ -h \sum_{j=1}^{J-1} \left(\left(a_j^n \right)_{\hat{x}} \right)^2 - h \sum_{j=1}^{J-1} \left(\left(b_j^n \right)_{\hat{x}} \right)^2 \right\} \\
&\quad + h \sum_{j=1}^{J-1} \left(\left(a_j^n \right)_{\hat{x}} \right)^2 + h \sum_{j=1}^{J-1} \left(\left(b_j^n \right)_{\hat{x}} \right)^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece $Re\langle u_{\hat{x}\hat{x}}^n, u^n \rangle = -\|u_{\hat{x}}^n\|^2$ olduğu görülür.

5. Norm tanımı kullanılarak eşitsizliğin sağlandığı gösterilebilir.

6. $u_j^n = a_j^n + b_j^n$ olsun.

$$\begin{aligned}
Im\langle u_{x\bar{x}}^n, u^n \rangle &= Im\left\{h \sum_{j=1}^{J-1} (a_j^n + ib_j^n)_{x\bar{x}} (a_j^n - b_j^n)\right\} \\
&= Im\left\{h \sum_{j=1}^{J-1} \left[((a_j^n)_{x\bar{x}} a_j^n + (b_j^n)_{x\bar{x}} b_j^n) + i((b_j^n)_{x\bar{x}} a_j^n - (a_j^n)_{x\bar{x}} b_j^n) \right]\right\} \\
&= Im\left\{h \sum_{j=1}^{J-1} \left[\frac{(a_j^n)_x - (a_{j-1}^n)_x}{h} a_j^n + \frac{(b_j^n)_x - (b_{j-1}^n)_x}{h} b_j^n \right] \right. \\
&\quad \left. + h \sum_{j=1}^{J-1} \left[i \left(\frac{(b_j^n)_x - (b_{j-1}^n)_x}{h} a_j^n + \frac{(a_j^n)_x - (a_{j-1}^n)_x}{h} b_j^n \right) \right]\right\} \\
&= Im\left\{ \sum_{j=1}^{J-1} (a_j^n)_x a_j^n - \sum_{j=1}^{J-1} (a_{j-1}^n)_x a_j^n + \sum_{j=1}^{J-1} (b_j^n)_x b_j^n - \sum_{j=1}^{J-1} (b_{j-1}^n)_x b_j^n \right\} \\
&\quad + i \left(\sum_{j=1}^{J-1} \left((b_j^n)_x - (b_{j-1}^n)_x \right) a_j^n - \left((a_j^n)_x - (a_{j-1}^n)_x \right) b_j^n \right) \\
&= Im\left\{ \sum_{j=1}^{J-1} (a_j^n)_x a_j^n - \sum_{j=0}^{J-2} (a_j^n)_x a_{j+1}^n + \sum_{j=1}^{J-1} (b_j^n)_x b_j^n - \sum_{j=0}^{J-2} (b_j^n)_x b_{j+1}^n \right\} \\
&\quad + i \left(\sum_{j=1}^{J-1} (b_j^n)_x a_j^n - \sum_{j=0}^{J-2} (b_j^n)_x a_{j+1}^n + \sum_{j=1}^{J-1} (a_j^n)_x b_j^n - \sum_{j=0}^{J-2} (a_j^n)_x b_{j+1}^n \right) \\
&= Im\left\{ -h \sum_{j=1}^{J-1} \left[(a_j^n)_x (a_j^n)_x + (b_j^n)_x (b_j^n)_x \right] \right. \\
&\quad \left. - i \left[h \sum_{j=1}^{J-1} (b_j^n)_x \frac{a_{j+1}^n - a_j^n}{h} - h \sum_{j=1}^{J-1} (a_j^n)_x \frac{b_{j+1}^n - b_j^n}{h} \right] \right\} = 0
\end{aligned}$$

bulunur. O halde $Im\langle u_{x\bar{x}}^n, u^n \rangle = 0$ bulunmuş olur. Benzer şekilde $Im\langle u_{\hat{x}\hat{x}}^n, u^n \rangle = 0$ ve $Im\langle |v^n| u^n, u^n \rangle = 0$ olduğu gösterilebilir.

2. İKİLİ LINEER OLMAYAN SCHRÖDİNGER SİSTEMİ

2.1. Giriş

İkili lineer olmayan Schrödinger (CNLS) denklemi bir çok fiziksel modelin uygulanması için kullanılan bir denklemdir. Optik fiberlerde lineer olmayan sinyal yayılımı 30 yılı aşkın bir süredir incelenmektedir. Solitonların yüksek hızlı bilgi iletim sistemlerinde kullanılması fikri ilk olarak 1973 yılında ortaya atılmış ve 1989 yılında kitap olarak yayınlanmıştır [23]. Akışkanlar dinamiği [24] ve lineer olmayan optikte [25] zamanla değişen dalga paketleri NLS ile incelenirken, birden fazla grup olduğunda CNLS denklemleri ile incelenmektedir. Denklem optik fiberde lineer çift kırılımların modellenmesinde de karşımıza çıkmaktadır [19]. CNLS denkleminin literatürde bilinen gerçek çözümü yoktur, bu nedenle, denklemin model oluşturduğu fiziksel olayı anlamak için soliton çözümleri kullanılarak sayısal sonuçlara ihtiyaç vardır.

Bu bölümde, He ve arkadaşlarının [22], ikili lineer olmayan Schrödinger (CNLS) denkleminin sayısal çözümü için yaptıkları çalışmanın bir özeti verilecektir. Denklem kütle ve enerji korunumları bulunarak, bu özellikleri koruyan, önerilmiş bir sonlu fark tasarısının analizi yapılacaktır. Sonlu fark tasarısının ayrık kütle ve ayrık enerjiyi koruduğu ispat edilecektir ve önerilen sonlu fark tasarısının çözümünün varlığı gösterilecektir. Daha sonra yöntemin çözülebilirliği, kararlılığı ve yakınsaklığı incelenecektir. Teorik sonuçlar sayısal sonuçlar ile desteklenecek, bir soliton ve iki solitonlu çözümlerin ilerleyen dalga simülasyonları yapılacaktır. Sayısal yöntemin kütle ve enerjiyi koruduğu tablolar ve grafiklerle gösterilerek, yöntemin etkinliği ortaya koyulacaktır. Literatürde, ikili lineer olmayan Schrödinger sistemi ile ilgili yapılmış bir çok çalışma bulunmaktadır. Sun ve arkadaşlarının çalışmasında [26], denklemin çoklu simplektik yapısına bağlı olarak çoklu simplektik bir sonlu fark tasarısı verilmiştir. İkili Schrödinger denkleminin simplektik yapısından faydalanarak yeni bir altı noktalı yöntem önerilmiş ve yöntemin, denklemin kütesini koruduğu gösterilmiştir [27]. Bir başka çalışmada ikili Schrödinger denkleminin

sayısal çözümünü için $O(h^4 + \tau^2)$ mertebeden bir sonlu fark tasarısı önerilmiş ve çözümün koşulsuz kararlı olduğu gösterilmiştir [19]. İsmail ve ark. [28], bir sonlu elemanlar tasarısı türetmişlerdir. Önerilen yöntemin etkinliğini göstermek için sayısal sonuçlar verilmiştir. Çalışmalarında önerilen tasarısı, ikinci dereceden ve koşulsuz olarak kararlıdır. İki solitonun ve üç solitonun nasıl etkileşime girdiği grafiklerle gösterilmiştir. Başka bir çalışmada [29], x değişkeni dördüncü mertebeden merkezi fark formülleri kullanılarak ayrıştırılmıştır. Ortaya çıkan adi diferansiyel sistemini çözmek için dördüncü dereceden Runge-Kutta yöntemi kullanılmıştır. Hem Neumann hem de periyodik sınır koşulları altında sayısal sonuçlar elde edilmiştir. Son olarak, önerilen yöntemin doğruluğu, kütle ve enerji korunumu incelenmiştir. Sunulan yöntemin etkinliğini göstermek için sayısal sonuçlar literatürdeki sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. Todorov ve arkadaşlarının çalışmasında [30], CNLS denkleminin sayısal çözümü için Crank-Nicolson yöntemi önerilmiştir. Çözümler hem Neumann hem de periyodik sınır koşulları altında incelenmiştir. Lineer olmayan ayrık Schrödinger denklemleri, ışığa duyarlı optik kristallerde gözlemlenen iki boyutlu ayrık optik solitonların davranışlarını açıklamak için de kullanılmaktadır. Huang ve arkadaşlarının çalışmasında [31], periyodik ayrık CNLS tasarıları için çözümlerin ön koşullarını belirlemek için genel bir yöntem bulunmaya çalışılmıştır. Uzak mesafelerde elektromanyetik sinyal yayılımında CNLS denklemleri kullanılmıştır. Sonlu fark yöntemiyle çözülmeye çalışılan bu denklemler lineer olmayan dalga sistemlerine uygulanmıştır [32]. Reichel ve Leble'nin çalışmalarında [33], Euler ve Crank-Nicolson sonlu fark yöntemleri kullanılarak, soliton sinyalinin başlangıç enerjisine bağlı olarak uygun zaman adımının nasıl hesaplanacağı gösterilmiştir. Çalışmanın devamında ikili lineer olmayan Schrödinger denklemleri için sayısal çözümü incelenmiş, kararlılık ve yakınsama ispatı yapılmıştır. Farklı grup hızına sahip iki sinyalin değişimi sunulmuştur. Soliton çarpışmalarını simüle etmek için kullanılan CNLS denklemlerinin çözümü için simplektik ve çoklu simplektik yöntemler de kullanılmıştır [27]. Periyodik sınır koşulları altında simplektik ve çoklu simplektik tasarıların hesaplama zamanları karşılaştırılmış ve yüksek mertebeden tasarılar sunulmuştur [34]. Sayısal dağılım ilişkileri analiz edilmiş, elastik ve elastik olmayan soliton çarpışmaları için kütle ve enerji korunduğu sayısal sonuçlar ile gösterilmiştir [35]. Optik iletişim [36] ve kuantum mekanikleri [37] konularında uygulamaları olan en önemli

matematiksel modellerden birisi N-CNLS denklemleridir. Aydın'ın çalışmasında [38], çoklu simplektik formda olan N-CNLS denklemlerinden yararlanarak T-CNLS için yeni bir çoklu simplektik tasarı sunulmuştur. Bu çalışmada yazar, yeni bir periyodik dalga çözümü bulmuş ve çözümün kararlılığı analiz edilmiştir. Sayısal sonuçları ile periyodik dalgaların önerilen tasarı kullanılarak doğru bir şekilde simüle edildiği gösterilmiş, kütle ve enerjinin korunumu sayısal olarak incelenmiştir. CNLS sistemi için lineer olmayan dolaylı iki seviyeli bir sonlu fark tasarısı ortaya koyulmuş ve ardından aynı sistem için lineer üç seviyeli bir fark tasarısı sunulmuştur. Lineer tasarımın ikinci dereceden yakınsaklığı ve koşulsuz kararlı olduğu gösterilmiştir [16, 21]. Aydın ve ark. çalışmalarında [39] Korteweg–de Vries denkleminin sayısal çözümü için bir ayırma yöntemi kullanılmıştır. Chen çalışmasında [40], lineer ve lineer olmayan ayırma yöntemleri çoklu simplektik CNLS denklemlerine uygulanmıştır. Sınırsız alanlardaki CNLS denklemleri için ise operatör bölme yöntemi ile sınırsız alanları sonlu alanlarla sınırlamak için yapay sınırlar eklenmiş ve orijinal problem lineer ve lineer olmayan alt problemlere ayrılmıştır [41]. Sunulan yöntemin etkinliğini göstermek için sayısal örnekler verilmiş ve farklı yöntemler arasında hesaplama verimliliği açısından bazı karşılaştırmalar yapılmıştır. Adi ve kısmi türevli denklemleri çözmek için Taylor serilerini farklı şekilde alan diferansiyel dönüşüm metodu NLS denklemleri için denenmiş ve hesaplama kolaylığı ortaya konulmuştur [42]. Bu çalışmada sunulan yöntem diğer yöntemlerin hesaplama zorluklarını azaltmaktadır. Öte yandan sonuçlar oldukça güvenilirdir. Borhanifar ve Abazari [43], bu yöntemi CNLS için uyarlamıştır. Ayrık L_∞ normunda sonlu fark çözümü için Brouwer sabit nokta teoremi uygulanmış, çözümün tekliği gösterilmiştir. Fark çözümünün kütle ve enerjiyi korumasından yararlanarak, sonlu fark çözümünün ayrık L_∞ normunda sınırlı olduğu gösterilmiş, ikinci dereceden yakınsadığı kanıtlanmıştır [44]. Hu ve Zhang çalışmalarında [45], CNLS denklemleri için kütle ve enerjiyi koruyan kompakt fark tasarısı incelenmiştir. Bu çalışmada önerilen tasarı ile çözümlerin varlığı, tekliği, yakınsaklığı ve kararlılığı gösterilmiştir. Bu çalışmanın literatürdeki diğer çalışmalarından farkı daha büyük zaman adımlarına izin vermesidir. Wang'ın makalesinde ise L_∞ normunda kompakt fark yaklaşımını bir vektör formuna dönüştüren yöntem sunulmuştur [46]. Bu yöntem ızgara oranı üzerinde herhangi bir kısıtlama olmaksızın, $O(h^4 + \tau^2)$ derecesinde yakınsama elde etmek için kullanılmıştır. CNLS denklemlerinde hesaplama

kolaylığı sağlayan yüksek mertebeli kompakt (HOC) yöntemler sunulmuş [47] ve başka bir çalışmada ayırma yöntemi ile beraber kullanılmıştır [48]. HOC yöntemi kullanılarak periyodik ve homojen sınırlara sahip olmayan denklemler, daha az hesaplama ile yüksek doğrulukla çözülebilmektedir [49]. CNLS denkleminin HOC yöntem ile periyodik sınır koşullarında da kütle ve enerjiyi koruduğu gösterilmiştir [50]. Kong ve arkadaşları bu çalışmalarında tasarılarının yakınsak ve çözülebilir olduğunu göstermekle beraber, yüksek dereceden kompakt olan yöntemin kompakt olmayan yöntemlere göre hesaplama maliyeti ve doğruluk açısından daha verimli olduğunu göstermiştir. Yüksek frekanslı dalgaları ifade etmek için etkili yollarından birisi yüksek dereceden fark metodu olduğundan, Chen ve arkadaşları [51], kompakt yakınsak bir fark tasarısı önermiştir. Önerilen tasarımın maksimum normda $O(\tau^2 + h^4)$ derecesinde kararlı ve yakınsak olduğu ispat edilmiştir. Wang'ın makalesinde [52], CNLS denklemleri için lineerleştirilmiş kütle ve enerji koruyan bir fark tasarısı önerilmiş, yakınsalık ispatlanmıştır. CNLS denklemlerinin sayısal çözümü için uygulanan kapalı sayısal yöntemler genellikle kararlıdır. Ancak bu yöntemde her bir adımda lineer olmayan denklem sistemi çözülmektedir. Açık yöntemlerin uygulaması daha kolay olsa da onlarda da zaman adımı sınırlaması vardır. Bu nedenlerden dolayı çoğunlukla Crank-Nicolson yöntemi gibi yarı-kapalı yöntemler tercih edilmektedir. Bu yöntemde her bir adımda lineer denklemler kullanılması hesaplamayı kolaylaştırmaktadır. Sun ve arkadaşlarının çalışmasında [53], zaman adımı üzerinde herhangi bir sınırlama olmaksızın lineerleştirilmiş Crank-Nicolson yöntemi ile tasarılarının L^2 hata tahminleri sunulmaktadır. Önerilen tasarı, Galerkin sonlu eleman yöntemlerine genişletilmesini kolaylaştıran klasik enerji tahmini yöntemi üzerine kurulmuştur. Çalışmada hem iki hem de üç boyutlu modeller için sayısal örnekler incelenmiştir. Kong ve arkadaşlarının çalışmasında [54], üçlü lineer olmayan Schrödinger (T-CNLS) denklemleri için yüksek dereceden kompakt bir tasarı önerilmiş ve enerji koruduğu ispat edilmiştir. Barletti ve arkadaşları [55], enerji koruyan Hamilton sınır değer yöntemleri (HBVM) olarak isimlendirilen Runge-Kutta metodlarını kullanarak Hamilton kısmi türevli denklemlerinin çözümünü geliştirmişlerdir. Önerilen yöntem, NLS denklemlerini çözmek için kullanmış ve enerji koruyan tasarımın sayısal çözümler için daha güvenilir olduğu ortaya koyulmuştur. Bu tezde detaylı olarak incelenecek olan He ve arkadaşlarının çalışması [22] ise CNLS denkleminin sayısal çözümü için uzayda

dördüncü mertebeden ve zamanda ikinci mertebeden yakınsak, kütle ve enerjiyi koruyan bir sonlu fark tasarısıdır.

2.2. İkili Lineer Olmayan Schrödinger Sistemi için Kütle ve Enerji Korunumu

Bu bölümde, $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ kompleks değerli fonksiyonlar, k ve β reel sabitler olmak üzere CNLS denklemi

$$iu_t + ku_{xx} + (|u|^2 + \beta|v|^2)u = 0, \quad x_l \leq x \leq x_r, \quad 0 < t \leq T, \quad (9)$$

$$iv_t + kv_{xx} + (|v|^2 + \beta|u|^2)v = 0, \quad x_l \leq x \leq x_r, \quad 0 < t \leq T, \quad (10)$$

ele alınacaktır. $u_0(x)$ ve $v_0(x)$ düzgün fonksiyonlar olmak üzere başlangıç koşulları,

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad x_l \leq x \leq x_r, \quad (11)$$

ve sınır koşulları olarak homogen sınır koşulları

$$u(x_l, t) = u(x_r, t) = 0, \quad v(x_l, t) = v(x_r, t) = 0 \quad 0 \leq t \leq T. \quad (12)$$

kullanılacaktır. $\beta = 0$ olduğunda (9) – (10) sistemi (1) eşitliği ile verilen iki ayrı NLS denkleme dönüşür. $k = \beta = 1$ alındığında (8) – (9) sistemine Manakov denklemleri denir. Bu durumlar için (9) – (10) denklem sistemi integrallenebilirdir [56]. (9) – (10) denklem sisteminin kütle ve enerji olarak adlandırılan iki tane korunum özelliği vardır. Şimdi bu korunum özelliklerinin nasıl gösterileceğini ortaya koyacağız.

Teorem 2.2.1: $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ (9) – (10) sisteminin çözümleri olsunlar. (9) – (12) sistemi için her $t > 0$ olmak üzere

$$Q_1(t) = \int_{x_l}^{x_r} |u|^2 dx = \int_{x_l}^{x_r} |u_0|^2 dx = Q_1(0) \quad (13)$$

$$Q_2(t) = \int_{x_l}^{x_r} |v|^2 dx = \int_{x_l}^{x_r} |v_0|^2 dx = Q_2(0) \quad (14)$$

$$\begin{aligned} E(t) &= \int_{x_l}^{x_r} \left[\frac{k}{2} (|u_x|^2 + |v_x|^2) - \frac{1}{4} (|u|^4 + |v|^4) - \frac{\beta}{2} |u|^2 |v|^2 \right] dx \\ &= \int_{x_l}^{x_r} \left[\frac{k}{2} (|(u_0)_x|^2 + |(v_0)_x|^2) - \frac{1}{4} (|u_0|^4 + |v_0|^4) - \frac{\beta}{2} |u_0|^2 |v_0|^2 \right] dx = E(0) \end{aligned} \quad (15)$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat: (I) (9) denkleminin her iki tarafını $\bar{u}(x, t)$ ile çarpıp, çıkan sonucun x 'e göre x_l 'den x_r 'ye integrali alındığında

$$i \int_{x_l}^{x_r} u_t \bar{u} dx + k \int_{x_l}^{x_r} u_{xx} \bar{u} dx + \int_{x_l}^{x_r} (|u|^2 + \beta |v|^2) |u|^2 dx \quad (16)$$

elde edilir. Homojen sınır şartı (12) yardımıyla

$$\begin{aligned} \int_{x_l}^{x_r} u_{xx} \bar{u} dx &= u_x \bar{u}_x \Big|_{x_l}^{x_r} - \int_{x_l}^{x_r} u_x \bar{u}_x dx \\ &= - \int_{x_l}^{x_r} |u_x|^2 dx \end{aligned}$$

bulunur. (16) eşitliğinin sanal kısmı dikkate alındığında

$$Re\{u_t \bar{u}\} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} |u|^2 \right)$$

olduğundan

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_l}^{x_r} \frac{1}{2} |u|^2 dx = 0$$

elde edilir. Böylece $Q_1(t) = Q_1(0)$ olduğu gösterilmiş olur. Benzer şekilde (10) denkleminin her iki tarafı $\bar{v}(x, t)$ ile çarpılıp, çıkan sonucun x 'e göre x_l 'den x_r 'ye integrali alınırsa,

homojen sınır şartı yardımıyla

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_l}^{x_r} \frac{1}{2} |v|^2 dx = 0$$

olduğu görülebilir.

(II) (9) ve (10) denklemleri sırasıyla $-u_t$ ve $-v_t$ ile çarpılıp, çıkan sonucun x 'e göre x_l 'den x_r 'ye integrali alınır

$$-i \int_{x_l}^{x_r} |u_t|^2 dx - k \int_{x_l}^{x_r} u_{xx} \bar{u}_t dx - \int_{x_l}^{x_r} \left(|u|^2 + \beta |v|^2 \right) u \bar{u}_t dx = 0 \quad (17)$$

$$-i \int_{x_l}^{x_r} |v_t|^2 dx - k \int_{x_l}^{x_r} v_{xx} \bar{v}_t dx - \int_{x_l}^{x_r} \left(|v|^2 + \beta |u|^2 \right) v \bar{v}_t dx = 0 \quad (18)$$

elde edilir. Homojen sınır şartları kullanılarak

$$\begin{aligned} \int_{x_l}^{x_r} u_{xx} \bar{u}_t dx &= - \int_{x_l}^{x_r} u_x \bar{u}_{xt} dx \\ \int_{x_l}^{x_r} v_{xx} \bar{v}_t dx &= - \int_{x_l}^{x_r} v_x \bar{v}_{xt} dx \end{aligned}$$

yazılabilir. (17)ve (18) eşitlikleri taraf tarafa toplanıp reel kısımları dikkate alındığında

$$E(t) = E(0)$$

olduğu görülür.

2.3. İkili Lineer Olmayan Schrödinger Sistemi için Yüksek Mertebeden Korunumlu Sonlu Fark Tasarısı

ψ düzgün bir fonksiyon olmak üzere, Taylor serisi açılımından

$$\frac{4}{3}(\psi_j)_{x\bar{x}} - \frac{1}{3}(\psi_j)_{\hat{x}\hat{x}} = \frac{d^2\psi}{dx^2} + O(h^4) \quad (19)$$

olduğu görülebilir. 1. bölümde yer alan (8) numaralı notasyonlara bağlı olarak, He ve ark. [22] (9) – (10) denklemlerinin sayısal çözümü için aşağıdaki sonlu fark tasarısını önermişlerdir.

$$i(u_j^n)_t + \frac{4k}{3}(u_j^{n+\frac{1}{2}})_{x\bar{x}} - \frac{k}{3}(u_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}\hat{x}} + \frac{1}{2} \left[|u_j^{n+1}|^2 + |u_j^n|^2 + \beta (|v_j^{n+1}|^2 + |v_j^n|^2) \right] u_j^{n+\frac{1}{2}} = 0, \quad (20)$$

$$i(v_j^n)_t + \frac{4k}{3}(v_j^{n+\frac{1}{2}})_{x\bar{x}} - \frac{k}{3}(v_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}\hat{x}} + \frac{1}{2} \left[|v_j^{n+1}|^2 + |v_j^n|^2 + \beta (|u_j^{n+1}|^2 + |u_j^n|^2) \right] v_j^{n+\frac{1}{2}} = 0, \quad (21)$$

$$u_j^0 = u_0(x_j), \quad v_j^0 = v_0(x_j), \quad -1 \leq j \leq J+1, \quad (22)$$

$$u^n \in \mathbb{Z}_h^{0+}, \quad v^n \in \mathbb{Z}_h^{0+}, \quad 1 \leq n \leq N-1. \quad (23)$$

Şimdi, bu sonlu fark tasarısının varlığı, tekliği ve ayrık korunum özellikleri gibi özelliklerinin incelemesi yapılacaktır.

Teorem 2.3.1 (Yuyu He ve ark.) [22]: (20) – (23) sonlu fark tasarısı

$$Q_1^n = Q_1^{n-1} = \dots = Q_1^0, \quad n = 0, 1, \dots, N \quad (24)$$

$$Q_2^n = Q_2^{n-1} = \dots = Q_2^0, \quad n = 0, 1, \dots, N \quad (25)$$

$$E^n = E^{n-1} = \dots = E^0, \quad n = 0, 1, \dots, N \quad (26)$$

kütle ve enerji korunumuna sahiptir. Burada $Q_1^n = \|u^n\|^2$, $Q_2^n = \|v^n\|^2$ ayrık kütleleri ve

$$E^n = \frac{k}{3} (\|u_x^n\|^2 + \|v_x^n\|^2) - \frac{k}{6} (\|u_{\hat{x}}^n\|^2 + \|v_{\hat{x}}^n\|^2) - \frac{h}{4} \sum_{j=1}^{J-1} (|u_j^n|^4 + |v_j^n|^4 + 2\beta |u_j^n|^2 |v_j^n|^2) \quad (27)$$

ayrık enerjiyi göstermektedir.

İspat: (I) $u^{n+1} + u^n$ ile (20) denkleminin iç çarpımı hesaplanıp sanal kısımlar dikkate alındığında

$$\frac{1}{\tau} [\|u^{n+1}\|^2 - \|u^n\|^2] = 0 \quad (28)$$

elde edilir. Buradan $Q_1^{n+1} = Q_1^n$ olduğu görülür. Benzer şekilde $v^{n+1} + v^n$ ile (21) denkleminin iç çarpımı hesaplanıp sanal kısmı dikkate alındığında

$$\frac{1}{\tau} [\|v^{n+1}\|^2 - \|v^n\|^2] = 0 \quad (29)$$

elde edilir. Buradan $Q_2^{n+1} = Q_2^n$ olduğu görülür. O halde $Q_1^n = \|u^n\|^2$ ve $Q_2^n = \|v^n\|^2$ olduğu görülür.

(II) Ayrık enerji korunumu için $u^{n+1} - u^n$ ile (20) denkleminin iç çarpımı hesaplanıp reel kısmı dikkate alındığında

$$\begin{aligned} & -\frac{2k}{3} (\|u_x^{n+1}\|^2 - \|u_x^n\|^2) + \frac{k}{6} (\|u_{\hat{x}}^{n+1}\|^2 - \|u_{\hat{x}}^n\|^2) \\ & + \frac{h}{4} \sum_{j=1}^{J-1} \left[|u_j^{n+1}|^4 - |u_j^n|^4 + \beta(|v_j^{n+1}|^2 + |v_j^n|^2)(|u_j^{n+1}|^2 - |u_j^n|^2) \right] = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

elde edilir. Benzer şekilde $v^{n+1} - v^n$ ile (21) denkleminin iç çarpımı hesaplanıp, reel kısım dikkate alındığında

$$\begin{aligned} & -\frac{2k}{3} (\|v_x^{n+1}\|^2 - \|v_x^n\|^2) + \frac{k}{6} (\|v_{\hat{x}}^{n+1}\|^2 - \|v_{\hat{x}}^n\|^2) \\ & + \frac{h}{4} \sum_{j=1}^{J-1} \left[|v_j^{n+1}|^4 - |v_j^n|^4 + \beta(|u_j^{n+1}|^2 + |u_j^n|^2)(|v_j^{n+1}|^2 - |v_j^n|^2) \right] = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

bulunur. (30) ve (31) numaralı eşitlikler taraf tarafa toplandığında

$$\begin{aligned} & \frac{2k}{3} (\|u_x^{n+1}\|^2 + \|v_x^{n+1}\|^2) - \frac{k}{6} (\|u_{\hat{x}}^{n+1}\|^2 + \|v_{\hat{x}}^{n+1}\|^2) \\ & - \frac{h}{4} \sum_{j=1}^{J-1} \left[|u_j^{n+1}|^4 - |v_j^{n+1}|^4 + 2\beta(|u_j^{n+1}|^2 |v_j^{n+1}|^2) \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{2k}{3} (\|u_x^n\|^2 + \|v_x^n\|^2) - \frac{k}{6} (\|u_x^n\|^2 + \|v_x^n\|^2) - \frac{h}{4} \sum_{j=1}^{J-1} \left[|u_j^n|^4 - |v_j^n|^4 + 2\beta(|u_j^n|^2|v_j^n|^2) \right]$$

elde edilir. Buradan $E^{n+1} = E^n$ olduğu görülür. Böylece $E^n = E^{n-1} = \dots = E^0$ olduğu gösterilmiş olur.

Lemma 2.3.1 (Zhou ve ark.) [15]: Herhangi $u^n \in Z_h^0$ ayrık fonksiyonu için, $p \geq 2$, $\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{p}$ ve C , p ve h den bağımsız bir sabit olmak üzere

$$\|u^n\|_p \leq C (\|u_x^n\|^\alpha \|u^n\|^{1-\alpha} + \|u^n\|) \quad (32)$$

eşitsizliği vardır.

Lemma 2.3.2 (Zhou ve ark.) [15]: Herhangi $x \geq 0$, $y \geq 0$ ve $p \geq 1$ olmak üzere

$$(x + y)^p \leq 2^{p-1} (x^p + y^p) \quad (33)$$

eşitsizliği vardır. Özel olarak, $p = 4$ için yukarıdaki eşitsizlikler

$$\|u^n\|_4 \leq C (\|u_x^n\|^{\frac{1}{4}} \|u^n\|^{\frac{3}{4}} + \|u^n\|) \quad (34)$$

$$\|v^n\|_4 \leq C (\|v_x^n\|^{\frac{1}{4}} \|v^n\|^{\frac{3}{4}} + \|v^n\|) \quad (35)$$

$$(\|u_x^n\|^{\frac{1}{4}} \|u^n\|^{\frac{3}{4}} + \|u^n\|) \leq 2^3 (\|u_x^n\| \|u^n\|^3 + \|u^n\|^4) \quad (36)$$

Lemma 2.3.3 (Ayrık Sobolev Eşitsizliği) [50]: Herhangi $u^n \in Z_h^0$ ayrık fonksiyonu için,

$$\|u^n\|_\infty \leq C_1 \|u^n\| + C_2 \|u_x^n\| \quad (37)$$

eşitsizliğini sağlayan C_1 ve C_2 pozitif sabitleri vardır.

Lemma 2.3.4 (Young eşitsizliği):

$p, q > 1$ olmak üzere $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ eşitliğini sağlayan her p, q ve her a, b için

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

eşitsizliği sağlanır.

Örneğin, $|u_j^n|^2|v_j^n|^2$ için Young eşitsizliği

$$|u_j^n|^2|v_j^n|^2 \leq \frac{|u_j^n|^4 + |v_j^n|^4}{2} \quad (38)$$

olarak yazılabilir. Benzer şekilde, $\|u_x^n\| \|u^n\|^3$ ifadesi, Young eşitsizliğinden yararlanılarak

$$\|u_x^n\| \|u^n\|^3 \leq \epsilon \frac{\|u_x^n\|^2}{2} + \frac{\|u^n\|^6}{2\epsilon} \quad (39)$$

şeklinde de yazılabilir.

Teorem 2.3.2: (20) – (23) sonlu fark tasarısı

$$\begin{aligned} \|u^n\| &\leq C, & \|u_x^n\| &\leq C, & \|u^n\|_\infty &\leq C \\ \|v^n\| &\leq C, & \|v_x^n\| &\leq C, & \|v^n\|_\infty &\leq C \end{aligned}$$

eşitsizliklerini sağlar.

İspat: Ayırık kütle korunumları (24) ve (25) yardımıyla $\|u^n\| \leq C$ ve $\|v^n\| \leq C$ olduğu görülmektedir. Lemma 1.1.1 deki $\|u_{\hat{x}}\|^2 \leq \|u_x\|^2$ eşitsizliğinden

$$\frac{k}{3} (\|u_x^n\|^2 + \|v_x^n\|^2) \leq \frac{2k}{3} (\|u_x^n\|^2 + \|v_x^n\|^2) - \frac{k}{6} (\|u_{\hat{x}}^n\|^2 + \|v_{\hat{x}}^n\|^2)$$

şeklinde yazılabilir. Ayırık enerji korunumu (27) denkleminde yararlanılarak

$$\frac{2k}{3} (\|u_x^n\|^2 + \|v_x^n\|^2) - \frac{k}{6} (\|u_{\hat{x}}^n\|^2 + \|v_{\hat{x}}^n\|^2) = \frac{h}{4} \sum_{j=1}^{J-1} (|u_j^n|^4 + |v_j^n|^4 + 2\beta |u_j^n|^2 |v_j^n|^2) + E^0$$

olarak düzenlenebilir. Kütle korunumundan $\|u^n\| = \|u^0\|$ ve $\|v^n\| = \|v^0\|$ olduğundan,

$\epsilon = \frac{k}{4(1+\beta)C^4}$ olmak üzere (34) – (36) ve (39) eşitsizliklerinden yararlanılarak

$$\frac{h}{4} \sum_{j=1}^{J-1} \left(|u_j^n|^4 + |v_j^n|^4 + 2\beta |u_j^n|^2 |v_j^n|^2 \right) \leq \frac{k}{4} (\|u_x^n\|^2 + \|v_x^n\|^2) + \frac{4(1+\beta)C^8}{k} (\|u^0\|^6 + \|v^0\|^6) \\ + 2(1+\beta)C^4 (\|u^0\|^4 + \|v^0\|^4)$$

elde edilir. O halde $\frac{k}{2} (\|u_x^n\|^2 + \|v_x^n\|^2)$ ifadesi

$$\|u_x^n\|^2 + \|v_x^n\|^2 \leq \frac{16(1+\beta)C^8}{k^2} (\|u^0\|^6 + \|v^0\|^6) \\ + \frac{8(1+\beta)C^4}{k} (\|u^0\|^4 + \|v^0\|^4) + \frac{4}{k} E^0$$

şeklinde yazılabilir. Eşitsizliğin sağ tarafındaki tüm ifadeler sabit olduğundan

$$\|u_x^n\| \leq C, \quad \|v_x^n\| \leq C$$

olduğu görülür. Böylece ayrık Sobolev eşitsizliği (37)'den

$$\|u^n\|_\infty \leq C, \quad \|v^n\|_\infty \leq C \quad \text{dir.}$$

Uyarı : Teorem 2.3.2 (20) – (23) sonlu fark tasarısının koşulsuz kararlı olduğunu gösterir [21].

2.4. Çözümün Varlığı

(20) – (23) sonlu fark denklemlerinin nümerik çözümünün varlığını göstermek için sabit nokta Brouwer teoremi kullanılacaktır.

Lemma 2.4.1: $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sonlu boyutlu Hilbert Uzayı ve F bu uzayda sürekli bir fonksiyon olsun.

$$\exists \lambda > 0, \quad \forall \chi \in H, \quad \|\chi\| = \lambda, \quad \text{Re}\langle F(\chi), \chi \rangle \geq 0$$

ise

$$F(\chi^*) = 0 \quad \text{ve} \quad \|\chi^*\| \leq \lambda$$

olacak şekilde $\chi^* \in H$ vardır.

Teorem 2.4.1: (20) – (23) sonlu fark denklemlerinin çözümleri vardır.

İspat: $u^{n+1} = 2u^{n+\frac{1}{2}} - u^n$ olarak yazılabileceğinden (20) denklemi

$$2(W_1 - u^n) - \frac{4ik\tau}{3}(W_1)_{x\bar{x}} + \frac{ik\tau}{3}(W_1)_{\hat{x}\hat{x}} - \frac{i\tau}{2}[|2W_1 - u^n|^2 + |u^n|^2 + \beta(|2W_2 - v^n|^2 + |v^n|^2)]W_1 = 0$$

şeklinde yazılabilir. Benzer şekilde $v^{n+1} = 2v^{n+\frac{1}{2}} - v^n$ olduğundan (21) denklemi

$$2(W_2 - v^n) - \frac{4ik\tau}{3}(W_2)_{x\bar{x}} + \frac{ik\tau}{3}(W_2)_{\hat{x}\hat{x}} - \frac{i\tau}{2}[|2W_2 - v^n|^2 + |v^n|^2 + \beta(|2W_1 - u^n|^2 + |u^n|^2)]W_2 = 0$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\mathbb{Z}_{\Delta h} = \{W = (W_1, W_2) \mid W_1, W_2 \in \mathbb{Z}_h^{0+}\}$ ve

$$\langle W, W' \rangle = \langle (W_1, W_2), (W'_1, W'_2) \rangle = \langle W_1, W'_1 \rangle + \langle W_2, W'_2 \rangle, \quad (40)$$

$$\|W\|^2 = \|W_1\|^2 + \|W_2\|^2 \quad (41)$$

olsun. $\mathbb{Z}_{\Delta h}$ üzerinde tanımlı $F = (F_1, F_2)$ fonksiyonu

$$F_1(W_1) = 2(W_1 - u^n) - \frac{4ik\tau}{3}(W_1)_{x\bar{x}} + \frac{ik\tau}{3}(W_1)_{\hat{x}\hat{x}} - \frac{i\tau}{2}[|2W_1 - u^n|^2 + |u^n|^2 + \beta(|2W_2 - v^n|^2 + |v^n|^2)]W_1 \quad (42)$$

$$F_2(W_2) = 2(W_2 - v^n) - \frac{4ik\tau}{3}(W_2)_{x\bar{x}} + \frac{ik\tau}{3}(W_2)_{\hat{x}\hat{x}} - \frac{i\tau}{2}[|2W_2 - v^n|^2 + |v^n|^2 + \beta(|2W_1 - u^n|^2 + |u^n|^2)]W_2 \quad (43)$$

olarak tanımlansın. (40) eşitliğinden

$$Re\langle F(W), W \rangle = Re\langle F_1(W_1), W_1 \rangle + Re\langle F_2(W_2), W_2 \rangle$$

olarak yazılabilir. $W = (W_1, W_2)$ ile (42) ve (43) eşitliğinin, iç çarpımı hesaplanıp, reel kısımlar dikkate alınarak taraf tarafa toplandığında,

$$\begin{aligned}
Re\langle F(W), W \rangle &= Re\langle F_1(W_1), W_1 \rangle + Re\langle F_2(W_2), W_2 \rangle \\
&\geq 2\|W_1\|^2 - (\|u^n\|^2 + \|W_1\|^2) + 2\|W_2\|^2 - (\|v^n\|^2 + \|W_2\|^2) \\
&= \|W_1\|^2 + \|W_2\|^2 - (\|u^n\|^2 + \|v^n\|^2) \\
&= \|W\|^2 - (\|u^n\|^2 + \|v^n\|^2)
\end{aligned}$$

olduğu görülür. O halde $\|W\|^2 = (\|u^n\|^2 + \|v^n\|^2) + 1$ olmak üzere $W \in \mathbb{Z}_{\Delta h}$ için $Re\langle F(W), W \rangle > 0$ dır.

$(u^{n+1}, v^{n+1}) = 2(W_1^*, W_2^*) - (u^n, v^n)$ olsun.

$$\begin{aligned}
u^{n+1} = 2W_1^* - u^n &\Rightarrow W_1^* = \frac{u^{n+1} + u^n}{2} \\
v^{n+1} = 2W_2^* - v^n &\Rightarrow W_2^* = \frac{v^{n+1} + v^n}{2}
\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Böylece (20) – (23) sistemi için, Lemma 2.4.1 den $F(W^*) = 0$ olacak şekilde, $W^* = (u^{n+1}, v^{n+1}) \in \mathbb{Z}_{\Delta h}$ çözümü vardır.

2.5. Yakınsaklık ve Çözülebilirlik

Lemma 2.5.1 (Ayrık Gronwall eşitsizliği) [57]: A, B negatif olmayan sabitler olmak üzere $\{G^n\}_{n=0}^\infty$ negatif olmayan dizisinin

$$G^0 \leq A, \quad G^n \leq A + B\tau \sum_{i=0}^{n-1} G^i$$

eşitsizliklerini sağladığını kabul edelim. Böylece G

$$G^n \leq Ae^{Bn\tau}$$

eşitsizliğini sağlar.

Lemma 2.5.2 (Sun ve ark.) [44]: Herhangi $U^n, V^n, u^n, v^n \in \mathbb{Z}_h^0$ ayırık, karmaşık fonksiyonları için

$$||U^n|^2 V^n - |u^n|^2 v^n| \leq (\max\{|U^n|, |V^n|, |u^n|, |v^n|\})^2 (2|U^n - u^n| + |V^n - v^n|)$$

eşitsizliği sağlar.

Teorem 2.5.1: u_0, v_0 için $1 \leq j \leq J - 1$, $0 \leq n \leq N - 1$ olmak üzere (20) – (23) sonlu fark tasarısının çözümleri (9) – (12) sisteminin çözümlerine $\|\cdot\|_\infty$ normunda $O(\tau^2 + h^4)$ derecesinde yakınsar.

İspat: $u_j^n = u(x_j, t_n)$ ve $v_j^n = v(x_j, t_n)$ (9) – (12) sisteminin çözümleri ve U_j^n ve V_j^n (20) – (23) sonlu fark tasarısının çözümleri olsun. $e_j^n = U_j^n - u_j^n$, $f_j^n = V_j^n - v_j^n$ için

$$(g_1)_j^n = \frac{1}{2} \left\{ [|U_j^{n+1}|^2 + |U_j^n|^2 + \beta(|V_j^{n+1}|^2 + |V_j^n|^2)] U_j^{n+\frac{1}{2}} - [|u_j^{n+1}|^2 + |u_j^n|^2 + \beta(|v_j^{n+1}|^2 + |v_j^n|^2)] u_j^{n+\frac{1}{2}} \right\}$$

$$(g_2)_j^n = \frac{1}{2} \left\{ [|V_j^{n+1}|^2 + |V_j^n|^2 + \beta(|U_j^{n+1}|^2 + |U_j^n|^2)] V_j^{n+\frac{1}{2}} - [|v_j^{n+1}|^2 + |v_j^n|^2 + \beta(|u_j^{n+1}|^2 + |u_j^n|^2)] v_j^{n+\frac{1}{2}} \right\}$$

olmak üzere

$$i(e_j^n)_t + \frac{4k}{3}(e_j^{n+\frac{1}{2}})_{x\bar{x}} - \frac{k}{3}(e_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}\hat{x}} + (g_1)_j^n = r_j^n \quad (44)$$

$$i(f_j^n)_t + \frac{4k}{3}(f_j^{n+\frac{1}{2}})_{x\bar{x}} - \frac{k}{3}(f_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}\hat{x}} + (g_2)_j^n = s_j^n \quad (45)$$

hata denklemleri elde edilir.

(44) denkleminde $(x_j, t_{n+\frac{1}{2}})$ etrafında Taylor seri açılımına göre $|r_j^n| \leq C(\tau^2 + h^4)$ ve benzer şekilde (45) denklemin için $|s_j^n| \leq C(\tau^2 + h^4)$ yakınsaklık oranları hesaplanır.

$e^{n+1} + e^n$ ile (44) denkleminin iç çarpımı hesaplanarak sanal kısım dikkate alındığında

$$\frac{1}{\tau} (\|e_j^{n+1}\|^2 - \|e_j^n\|^2) + \text{Im}\langle (g_1)_j^n, e^{n+1} + e^n \rangle = \text{Im}\langle r_j^n, e^{n+1} + e^n \rangle \quad (46)$$

elde edilir. Benzer şekilde $f^{n+1} + f^n$ ile (45) denkleminin iç çarpımı hesaplanarak sanal kısım dikkate alındığında

$$\frac{1}{7} (\|f_j^{n+1}\|^2 - \|f_j^n\|^2) + \text{Im}\langle (g_2)_j^n, f^{n+1} + f^n \rangle = \text{Im}\langle s^n, f^{n+1} + f^n \rangle \quad (47)$$

elde edilir. Üçgen eşitsizliği ve Lemma 2.5.2 den

$$\begin{aligned} |(g_1)_j^n| &\leq \frac{1}{2} \left[\left(\left| |U_j^{n+1}|^2 U_j^{n+\frac{1}{2}} - |u_j^{n+1}|^2 u_j^{n+\frac{1}{2}} \right| + \left| |U_j^n|^2 U_j^{n+\frac{1}{2}} - |u_j^n|^2 u_j^{n+\frac{1}{2}} \right| \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta}{2} \left(\left| |V_j^{n+1}|^2 U_j^{n+\frac{1}{2}} - |v_j^{n+1}|^2 u_j^{n+\frac{1}{2}} \right| + \left| |V_j^n|^2 U_j^{n+\frac{1}{2}} - |v_j^n|^2 u_j^{n+\frac{1}{2}} \right| \right) \right] \\ &\leq \frac{1}{2} \left[\left(\max \left\{ |U_j^{n+1}|, |U_j^{n+\frac{1}{2}}|, |u_j^{n+1}|, |u_j^{n+\frac{1}{2}}| \right\} \right)^2 (2|e_j^{n+1}| + |e_j^{n+\frac{1}{2}}|) \right. \\ &\quad \left. \left(\max \left\{ |U_j^n|, |U_j^{n+\frac{1}{2}}|, |u_j^n|, |u_j^{n+\frac{1}{2}}| \right\} \right)^2 (2|e_j^n| + |e_j^{n+\frac{1}{2}}|) \right] \\ &\quad + \frac{\beta}{2} \left[\left(\max \left\{ |V_j^{n+1}|, |V_j^{n+\frac{1}{2}}|, |v_j^{n+1}|, |v_j^{n+\frac{1}{2}}| \right\} \right)^2 (2|f_j^{n+1}| + |e_j^{n+\frac{1}{2}}|) \right. \\ &\quad \left. \left(\max \left\{ |V_j^n|, |V_j^{n+\frac{1}{2}}|, |v_j^n|, |v_j^{n+\frac{1}{2}}| \right\} \right)^2 (2|f_j^n| + |e_j^{n+\frac{1}{2}}|) \right] \end{aligned}$$

yazılabilir. O halde C bir sabit olmak üzere

$$\|(g_1)^n\|^2 \leq C \left(\|e^{n+1}\|^2 + \|e^n\|^2 + \|f^{n+1}\|^2 + \|f^n\|^2 \right)$$

olarak yazılabilir. Böylece

$$\begin{aligned} |\text{Im}\langle (g_1)^n, e^{n+1} + e^n \rangle| &\leq C (\|(g_1)^n\|^2 + \|e^{n+1}\|^2 + \|e^n\|^2) \\ &\leq C (\|e^{n+1}\|^2 + \|e^n\|^2 + \|f^{n+1}\|^2 + \|f^n\|^2) \end{aligned} \quad (48)$$

elde edilir. Benzer şekilde C bir sabit olmak üzere

$$\|(g_2)^n\|^2 \leq C \left(\|f^{n+1}\|^2 + \|f^n\|^2 + \|e^{n+1}\|^2 + \|e^n\|^2 \right)$$

ve

$$\begin{aligned} |Im\langle (g_2)^n, f^{n+1} + f^n \rangle| &\leq C(\|(g_2)^n\|^2 + \|f^{n+1}\|^2 + \|f^n\|^2) \\ &\leq C(\|e^{n+1}\|^2 + \|e^n\|^2 + \|f^{n+1}\|^2 + \|f^n\|^2) \end{aligned} \quad (49)$$

ifade edilebilir. Cauchy–Schwarz ve Young eşitsizliklerinden

$$Im\langle r^n, e^{n+1} + e^n \rangle \leq \|r^n\|^2 + \frac{1}{2}\|e^{n+1}\|^2 + \frac{1}{2}\|e^n\|^2 \quad (50)$$

$$Im\langle s^n, f^{n+1} + f^n \rangle \leq \|s^n\|^2 + \frac{1}{2}\|f^{n+1}\|^2 + \frac{1}{2}\|f^n\|^2 \quad (51)$$

olduğu dikkate alınarak (48) – (51) denklemlerindeki ifadeler (46) ve (47) denklemlerinde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} (\|e^{n+1}\|^2 + \|f^{n+1}\|^2) - (\|e^n\|^2 + \|f^n\|^2) &\leq C\tau(\|e^{n+1}\|^2 + \|e^n\|^2 + \|f^{n+1}\|^2 + \|f^n\|^2) \\ &\quad + \tau(\|r^n\|^2 + \|s^n\|^2) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik

$n = 0$ için

$$\begin{aligned} (\|e^1\|^2 + \|f^1\|^2) - (\|e^0\|^2 + \|f^0\|^2) &\leq C\tau(\|e^1\|^2 + \|e^0\|^2 + \|f^1\|^2 + \|f^0\|^2) \\ &\quad + \tau(\|r^0\|^2 + \|s^0\|^2) \end{aligned}$$

$n = 1$ için

$$\begin{aligned} (\|e^2\|^2 + \|f^2\|^2) - (\|e^1\|^2 + \|f^1\|^2) &\leq C\tau(\|e^2\|^2 + \|e^1\|^2 + \|f^2\|^2 + \|f^1\|^2) \\ &\quad + \tau(\|r^1\|^2 + \|s^1\|^2) \end{aligned}$$

⋮

$n = n - 2$ için

$$\begin{aligned} (\|e^{n-1}\|^2 + \|f^{n-1}\|^2) - (\|e^{n-2}\|^2 + \|f^{n-2}\|^2) &\leq C\tau(\|e^{n-1}\|^2 + \|e^{n-2}\|^2 \\ &\quad + \|f^{n-1}\|^2 + \|f^{n-2}\|^2) + \tau(\|r^{n-2}\|^2 + \|s^{n-2}\|^2) \end{aligned}$$

$n = n - 1$ için

$$\begin{aligned} (\|e^n\|^2 + \|f^n\|^2) - (\|e^{n-1}\|^2 + \|f^{n-1}\|^2) &\leq C\tau(\|e^n\|^2 + \|e^{n-1}\|^2 \\ &\quad + \|f^n\|^2 + \|f^{n-1}\|^2) + \tau(\|r^{n-1}\|^2 + \|s^{n-1}\|^2) \end{aligned}$$

şeklinde her n için yazılabilir. Elde edilen bu eşitsizlikler taraf tarafa toplandığında

$$\begin{aligned} (\|e^n\|^2 + \|f^n\|^2) - (\|e^0\|^2 + \|f^0\|^2) &\leq C\tau \sum_{l=0}^{n-1} (\|e^l\|^2 + \|f^l\|^2) \\ &\quad + C\tau(\|e^n\|^2 + \|f^n\|^2) \\ &\quad + \tau \sum_{l=0}^{n-1} (\|r^l\|^2 + \|s^l\|^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1 - C\tau)(\|e^n\|^2 + \|f^n\|^2) &\leq \|e^0\|^2 + \|f^0\|^2 + C\tau \sum_{l=0}^{n-1} (\|e^l\|^2 + \|f^l\|^2) \\ &\quad + \tau \sum_{l=0}^{n-1} (\|r^l\|^2 + \|s^l\|^2) \end{aligned}$$

şeklinde düzenlenebilir. Burada

$$\begin{aligned} \tau \sum_{l=0}^{n-1} (\|r^l\|^2 + \|s^l\|^2) &\leq \tau n \max\{\|r^l\|^2, \|s^l\|^2\} \\ &\leq CT(\tau^2 + h^4)^2 \end{aligned}$$

eşitsizliği dikkate alındığında, $1 - C\tau > \frac{1}{2}$ olacak şekilde τ yeterince küçük ise

$$\|e^n\|^2 + \|f^n\|^2 \leq C\tau \sum_{l=0}^{n-1} (\|e^l\|^2 + \|f^l\|^2) + C(\tau^2 + h^4)^2$$

yazılabilir. Lemma 2.5.1 den

$$\begin{aligned} \|e^n\|^2 + \|f^n\|^2 &\leq C(\tau^2 + h^4)^2 e^{CT} \\ &\leq C(\tau^2 + h^4)^2 \end{aligned}$$

bulunur. O halde $\|e^n\|^2 \leq C(\tau^2 + h^4)^2$ ve $\|f^n\|^2 \leq C(\tau^2 + h^4)^2$ olduğu görülür.

2.6. Sayısal Örnekler

CNLS denkleminin çözümü için çok sayıda çalışma yapılmıştır. Zhang ve ark. [58] CNLS için korunumlu bir sonlu fark tasarısı sunmuştur. Li ve Vu-Quoc [17], nümerik çözümlerin başarısının, denklemin kütle ve enerji gibi özelliklerinin korunumlu olması ile ilişkilendirilebileceğini ortaya koymuştur. Korunumlu sonlu fark tasarıları farklı çalışmalarda lineer olmayan denklemlerde [59–63] ve başka çalışmalarda simplektik tasarılarla kullanılmış [64–67], sayısal sonuçların oldukça iyi olduğu sunulmuştur. [26, 68] çalışmalarında soliton çarpışmalarının simüle edildiği çoklu simplektik yöntem ortaya koyulmuştur. [18–20] çalışmalarında CNLS denkleminin başlangıç sınır koşulları için lineer tasarılar ortaya koyulmuştur.

Örnek 1: Tek Soliton

$k = \frac{1}{2}$ ve α, ν değeri bilinen sabitler olmak üzere (9) – (10) sisteminin soliton çözümleri

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sqrt{\frac{2\alpha}{1+\beta}} \operatorname{sech}(\sqrt{2\alpha}(x - \nu t)) \exp(i\nu x - i(\frac{\nu^2}{2} - \alpha)t) \\ v(x, t) &= -\sqrt{\frac{2\alpha}{1+\beta}} \operatorname{sech}(\sqrt{2\alpha}(x - \nu t)) \exp(i\nu x - i(\frac{\nu^2}{2} - \alpha)t) \end{aligned}$$

şeklindedir.

Bu çözümlerden yararlanarak , başlangıç koşulları

$$u_0(x) = \sqrt{\frac{2\alpha}{1+\beta}} \operatorname{sech}(\sqrt{2\alpha}x) \exp(i\nu x)$$

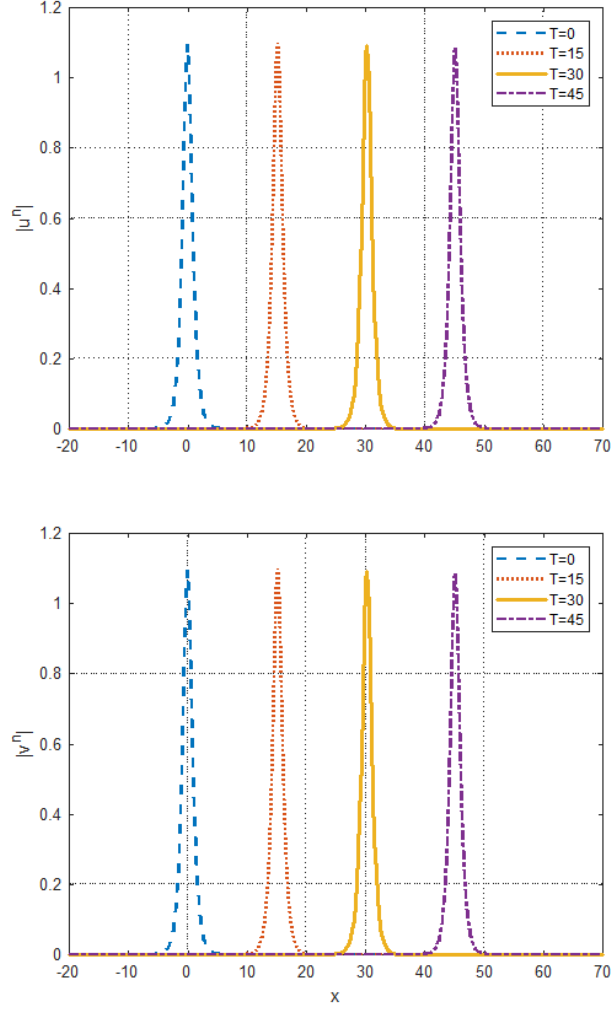
$$v_0(x) = -\sqrt{\frac{2\alpha}{1+\beta}} \operatorname{sech}(\sqrt{2\alpha}x) \exp(i\nu x)$$

ele alalım. Bu örnekte parametreler $x_l = -20$, $x_r = 70$, $\alpha = 1$, $\nu = 1$, $\beta = \frac{2}{3}$ olarak seçilmiştir. Bu parametreler için farklı zamanlardaki ayrık kütle Q_1^n (24), Q_2^n (25) ve ayrık enerji E^n (27) değerleri Tablo 2.1’de listelenmiştir. Bu değerler bize (20) – (23) sonlu fark tasarısının ayrık kütle ve ayrık enerjiyi tam olarak koruduğunu göstermektedir. Tablo 2.1 değerleri Teorem 2.3.1’i desteklemektedir.

T	Q_1^n	Q_2^n	E^n
0	1.697056274990299	1.697056274990299	0.281091622315605
15	1.697056274990297	1.697056274990297	0.281091617013017
30	1.697056274990299	1.697056274990300	0.281091289264162
45	1.697056274990299	1.697056274990299	0.281091065429061

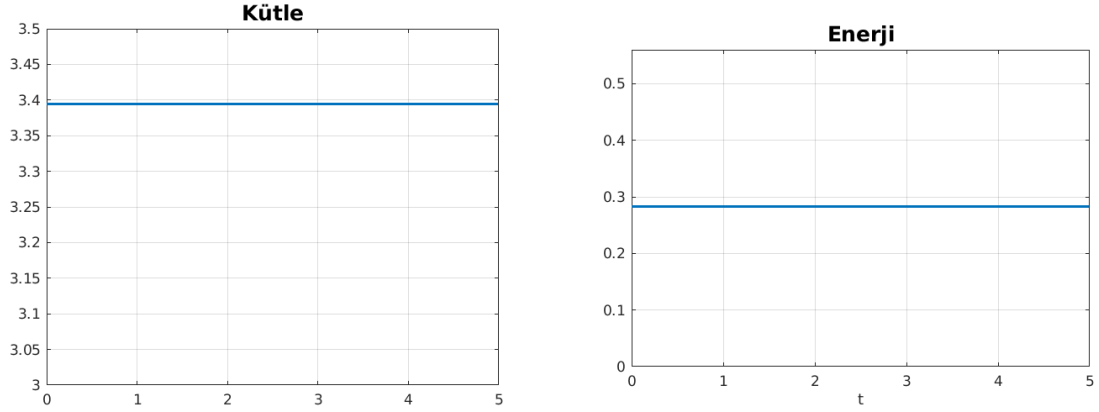
Tablo 2.1 Tek soliton çözümü için Q_1^n , Q_2^n ve E^n değerleri. $h = 0.25$, $\tau = h^2$

Soliton çözümler Şekil 2.1’ de gösterilmiştir. Şekilden de görüleceği üzere soliton dalgaları boylarında ve genliklerinde herhangi bir değişim olmadan sağa doğru ilerlemektedir. Bu durum bize (20) – (23) sonlu fark tasarısının tek soliton ilerlemesini çok iyi simüle ettiğini göstermektedir.

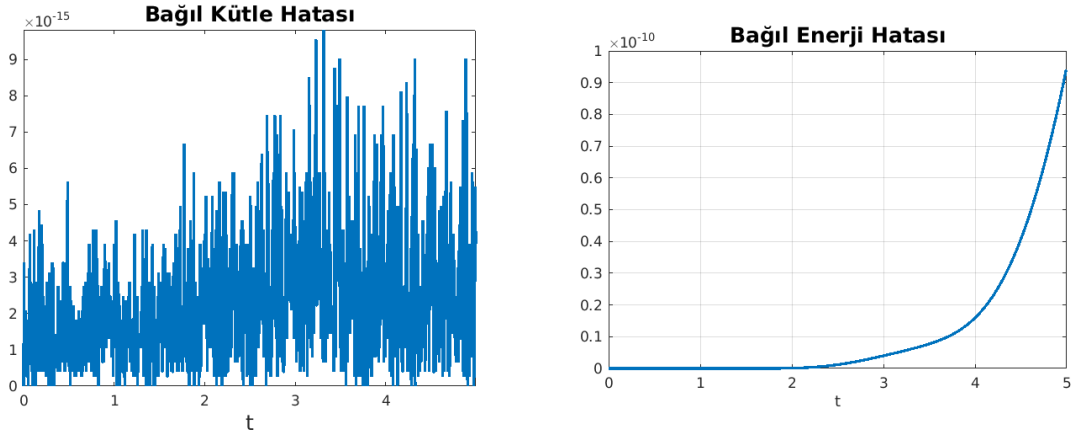


Şekil 2.1 Tek soliton çözümü için solitonların hareketleri. $h = 0.25, \tau = h^2$

Şekil 2.2, $0 \leq t \leq 5$ aralığında ayırık kütle korunumları Q_1^n (24) ve Q_2^n (25) toplamını, yani $Q_1^n + Q_2^n$, ve ayırık enerji korunumu E^n (26) grafiklerini göstermektedir. Bunlara ait bağıl hatalar Şekil 2.3 te verilmiştir. Kütle ve enerji korunumundaki bağıl hataların sırasıyla 10^{-15} ve 10^{-10} civarında çıkması, sayısal sonuçların teorik sonuçları doğruladığını göstermektedir.



Şekil 2.2 Tek soliton çözümü için Kütle ve Enerji grafikleri. $h = 0.25, \tau = h^2$



Şekil 2.3 Tek soliton çözümü için Kütle ve Enerji bağıl hata grafikleri. $h = 0.25, \tau = h^2$

Örnek 2: İki Solitonun Çarpışması

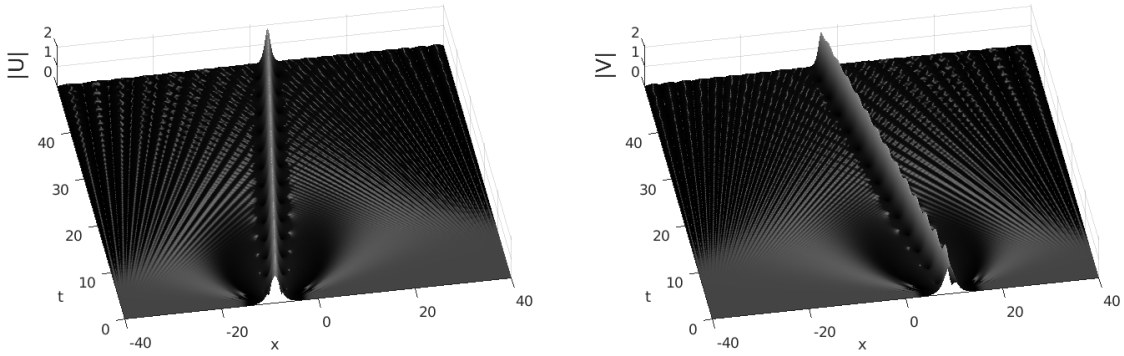
(9) – (10) denkleminde $k = 1$ ve (11) başlangıç koşullarını aşağıdaki gibi alalım

$$u_0(x) = \sqrt{2}r_1 \operatorname{sech}(r_1 x + \frac{x_1}{2}) \exp(i\nu_1 x), \quad (52)$$

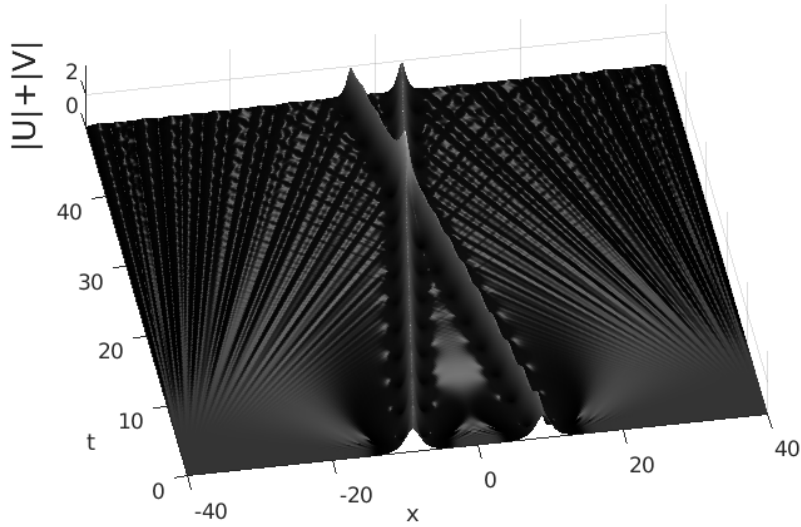
$$v_0(x) = \sqrt{2}r_2 \operatorname{sech}(r_2 x + \frac{x_2}{2}) \exp(i\nu_2 x). \quad (53)$$

Bu örnekte parametreler $x_l = -40, x_r = 40, h = 0.125$ ve $\tau = h^2$ alınıp üç farklı durum incelenecektir.

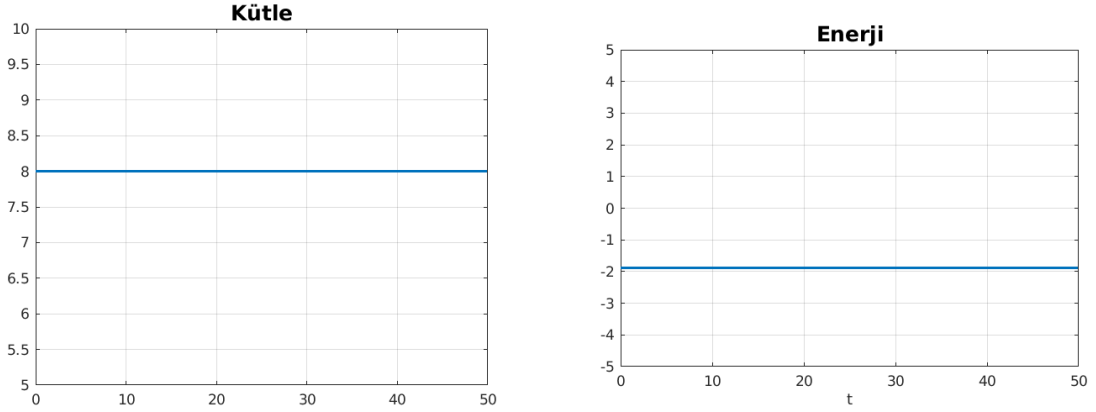
1. Durum (Elastik Çarpışma): (52) – (53) başlangıç koşulundaki parametreler $r_1 = r_2 = 1$, $x_1 = -x_2 = 18$, $\nu_1 = -\nu_2 = \frac{\nu}{4}$, $\nu = 1$ ve $\beta = 0$ olsun. Şekil 2.4, $0 \leq t \leq 50$ aralığında iki solitonun ilerlemesini göstermektedir. Şekilden de görüleceği üzere solitonlar yönlerinde herhangi bir değişiklik olmadan ilerlemektedir. Her iki solitonun birlikte ilerlemesi Şekil 2.5'te verilmiştir. Şekil 2.5'te görüldüğü gibi solitonlar birbirine yaklaşmakta ve yaklaşık $t = 30$ anında birbiriyle çarpışmaktadır. Bu durum bize çarpışmanın elastik olduğunu yani solitonların birbirinin içinden geçerek ilerlemeye devam ettiğini göstermektedir.



Şekil 2.4 İki solitonun ayrı ayrı ilerlemesi. $\nu = 1, \beta = 0$



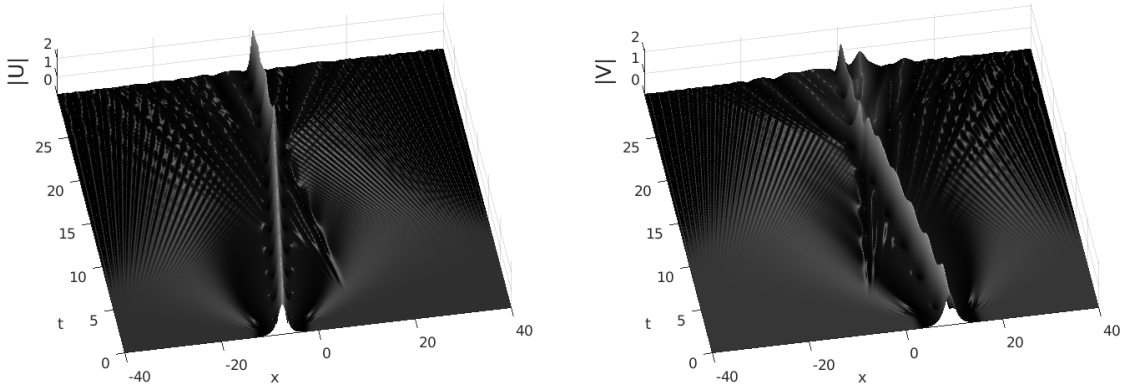
Şekil 2.5 İki solitonun birlikte ilerlemesi. $\nu = 1, \beta = 0$



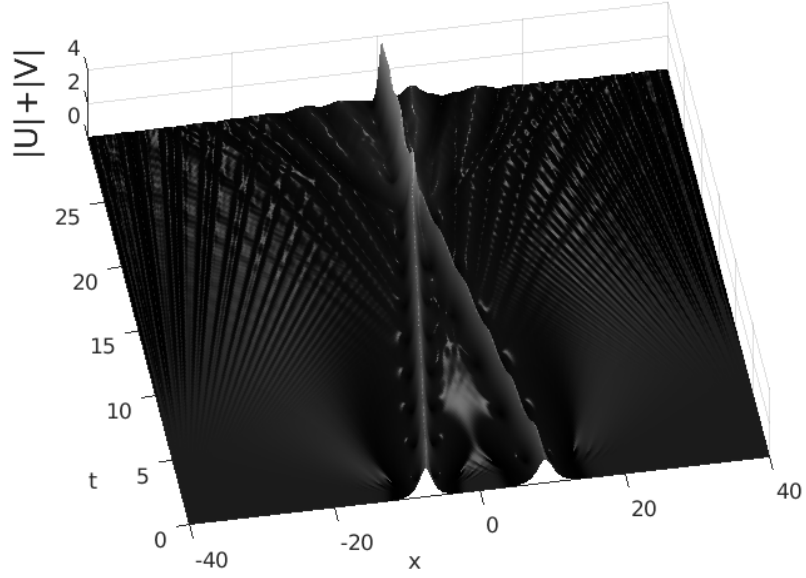
Şekil 2.6 İki soliton çözümü için Kütle ve Enerji grafikleri. $\nu = 1, \beta = 0$

Şekil 2.6 bu çarpışmaya ait kütle ve enerji grafiklerini göstermektedir. Şekilden de görüleceği gibi kütle ve enerji tam olarak korunmaktadır.

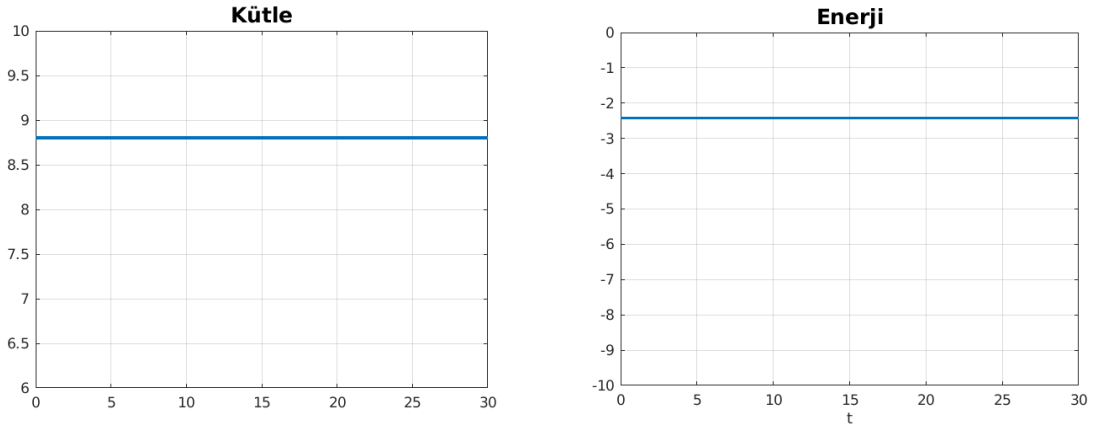
2. Durum (Füzyon): (52) – (53) başlangıç koşulundaki parametreler $r_1 = 1.2, r_2 = 1, x_1 = -x_2 = 18, \nu_1 = -\nu_2 = \frac{\nu}{4}, \nu = \frac{3}{2}$ ve $\beta = \frac{1}{2}$ olsun. Şekil 2.7, $0 \leq t \leq 30$ aralığında iki solitonun ilerlemesini göstermektedir. Şekil 2.8’te görüldüğü gibi solitonlar birbirine yaklaşmakta ve yaklaşık $t = 25$ anında birbiriyle çarpışmakta ve çarpışma anından sonra birleşmekte ve tek soliton olarak ilerlemektedir.



Şekil 2.7 İki solitonun ayrı ayrı ilerlemesi. $\nu = \frac{3}{2}, \beta = \frac{1}{2}$



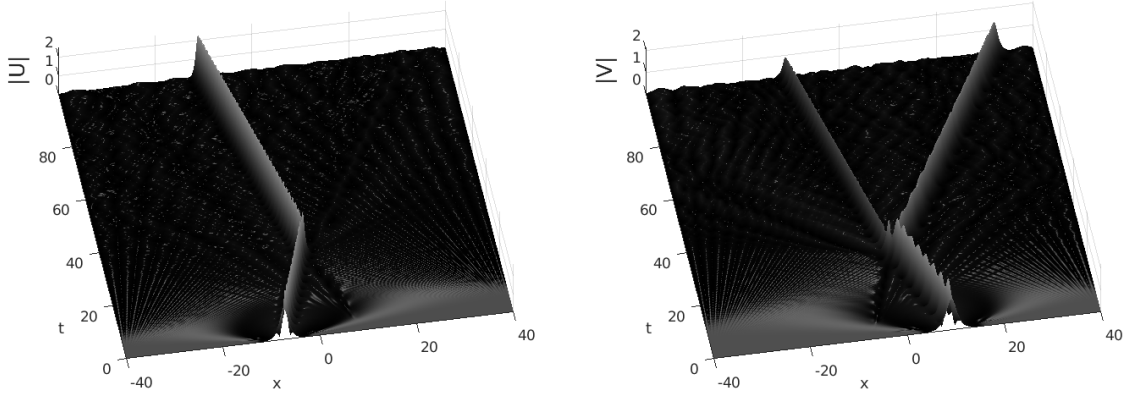
Şekil 2.8 İki solitonun birlikte ilerlemesi. $\nu = \frac{3}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$



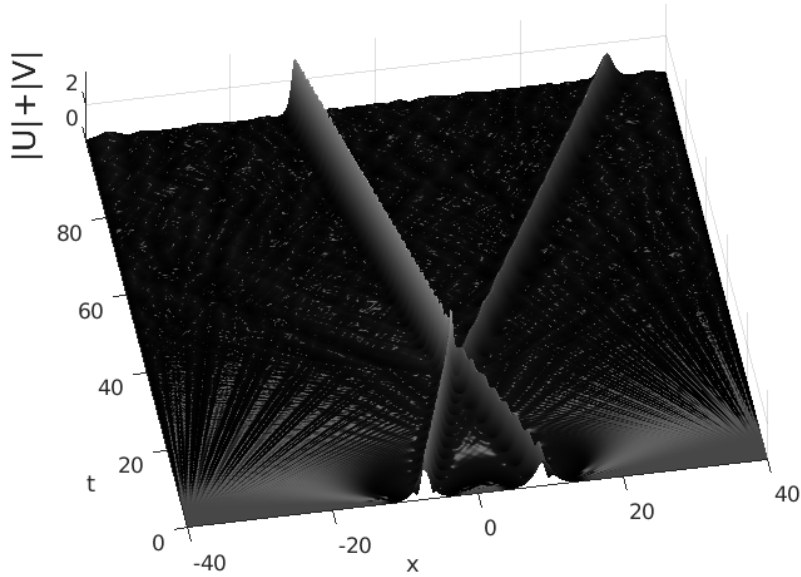
Şekil 2.9 İki soliton çözümü için Kütle ve Enerji grafikleri. $\nu = \frac{3}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$

Şekil 2.9, bu çarpışmaya ait kütle ve enerji grafiklerini göstermektedir. Şekilden de görüleceği gibi kütle ve enerji tam olarak korunmaktadır.

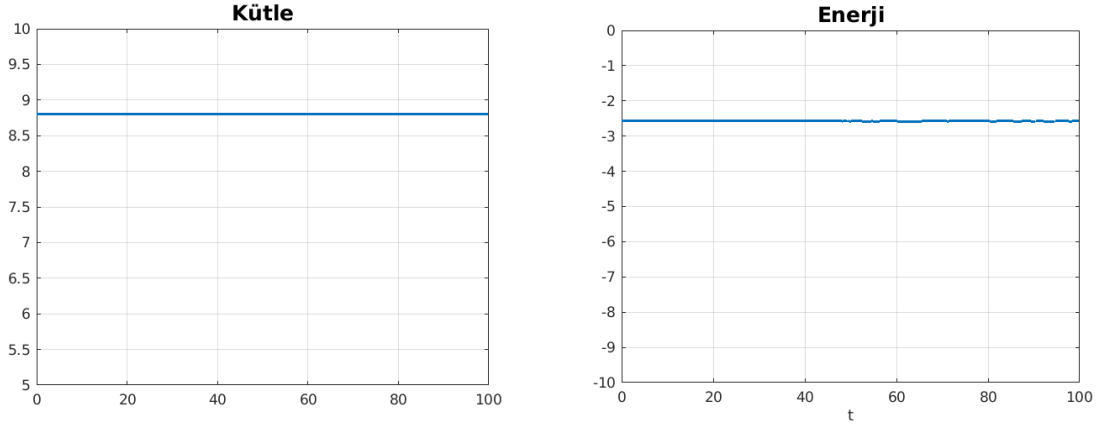
3. Durum (Yansıma): (52) – (53) başlangıç koşulundaki parametreler $r_1 = 1.2, r_2 = 1, x_1 = -x_2 = 18, \nu_1 = -\nu_2 = \frac{\nu}{4}, \nu = 1.05$ ve $\beta = \frac{2}{3}$ olsun. Şekil 2.10, $0 \leq t \leq 100$ aralığında iki solitonun ilerlemesini göstermektedir. Şekil 2.11, her iki solitonun birlikte çarpışma anını göstermektedir. Şekilden de görüleceği üzere solitonlar çarpışma anından sonra yansımaktadır.



Şekil 2.10 İki solitonun ayrı ayrı ilerlemesi. $\nu = 1.05, \beta = \frac{2}{3}$



Şekil 2.11 İki solitonun birlikte ilerlemesi. $\nu = 1.05, \beta = \frac{2}{3}$



Şekil 2.12 İki soliton çözümü için Kütle ve Enerji grafikleri. $\nu = 1.05$, $\beta = \frac{2}{3}$

Şekil 2.12 bu çarpışmaya ait kütle ve enerji grafiklerini göstermektedir. Şekilden de görüleceği gibi bu durum için de kütle ve enerji tam olarak korunmaktadır.

3. GÜÇLÜ İKİLİ LINEER OLMAYAN SCHRÖDİNGER SİSTEMİ

3.1. Giriş

Güçlü ikili lineer olmayan Schrödinger (SCNLS) denklemi matematiksel fizik, lineer olmayan optik, biyolojik yapılar ve mekanik alanındaki bir çok olayı ifade etmek için kullanılmıştır. CNLS denklemleri '*zayıf ikili*' olarak adlandırılırken, Γ sabitini içeren terimler eklenerek '*güçlü ikili*' denklem elde edilmiştir [56]. Aynı çalışmada Sonnier ve Christov [56], güçlü ikili lineer olmayan Schrödinger (SCNLS) denklemi için yakınsak bir tasarı sunmuştur. Bu bölümde, SCNLS sisteminin sayısal çözümü için ilk olarak literatürde yapılmış enerji ve kütle koruyan bir sonlu fark tasarısı incelenecek ve ardından literatürde daha önceden çalışılmamış yeni bir sonlu fark tasarısı önerilecektir.

3.2. Güçlü İkili Lineer Olmayan Schrödinger Sistemi için Kütle ve Enerji Korunumu

Bu bölümde, $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ kompleks değerli fonksiyonlar, $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \gamma$ ve Γ reel sabitler, $x_l \leq x \leq x_r, 0 \leq t \leq T$ olmak üzere güçlü ikili lineer olmayan Schrödinger (SCNLS) denklemi

$$iu_t + \beta u_{xx} + [\alpha_1 |u|^2 + (\alpha_1 + 2\alpha_2) |v|^2] u + \gamma u + \Gamma v = 0 \quad (54)$$

$$iv_t + \beta v_{xx} + [\alpha_1 |v|^2 + (\alpha_1 + 2\alpha_2) |u|^2] v + \gamma v + \Gamma u = 0 \quad (55)$$

ele alınacaktır. Başlangıç koşulları

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x) \quad (56)$$

ve homojen sınır koşulları

$$u(x_l, t) = u(x_r, t) = 0, \quad v(x_l, t) = v(x_r, t) = 0 \quad (57)$$

olacak şekilde tanımlanmaktadır. (54) – (57) denkleminin $\alpha_1 > 0$ için *sech* tipinde çözümleri, $\alpha_1 < 0$ için *tanh* tipinde çözümleri vardır. Literatürde çoğunlukla *sech* tipinde çözümler göz önünde bulundurulmuştur. $\Gamma = 0$ iken (54) – (57) denkleminin Gross–Pitaevskii denkleminin, $\alpha_2 = 0$ iken ise Manakov denkleminin dönüşümüne [69]. SCNLS denkleminin $(\alpha_1 + 2\alpha_2)$ katsayısı integrallenebilmeyi tanımlamaktadır [70]. $\gamma = \Gamma = \alpha_2 = 0$ iken analitik çözümünün olduğu gösterilmiştir [56]. SCNLS denkleminin son yıllarda farklı korunumlu tasarılar ile incelenmiştir. Sonnier ve Christov korunumlu Crank-Nicolson yöntemi kullanmış ve $\gamma = \alpha_2 = 0$ olarak elastik ve elastik olmayan soliton çarpışmalarını incelemiştir [56]. Todorov aynı yöntemi kullanarak, aritmetik işlemler ile hesaplama kolaylığı sağlamıştır [30]. Bu her iki makalede de x değişkenine göre ikinci mertebeden yakınsaklık gösterilmiştir. T sabit bir pozitif sayı, $t \in [0, T]$ olmak üzere, $-x_l$ ve x_r yeterince büyük alınırsa başlangıç-sınır değer probleminin, asimptotik başlangıç-sınır değer problemine yakınsayacağı bilindiğinden, Wang ve ark. [14], $\gamma = 0$ ve homojen Dirichlet başlangıç sınır koşullarını alarak güçlü ikili lineer olmayan Schrödinger (SCNLS) denklemini incelemiştir. Başka bir çalışmada, (54) – (55) denkleminin ikinci mertebeden yakınsak çoklu simplektik Preismann tasarısı sunulmuş, tasarımın kütle ve enerji özelliklerini koruduğu gösterilmiştir [71]. Aydın ve Karasözen makalelerinde [69], ikinci mertebeden yakınsak Lobatto IIIA–IIIB yöntemi ile SCNLS denkleminin Preissmann yöntemi kadar etkili bir tasarım sunmuşlardır. Akkoyunlu çalışmasında [72], yapı koruyan bir ortalama vektör alanı (AVF) yöntemini SCNLS denkleminin uygulaması ve Lobatto IIIA–IIIB yöntemi ile karşılaştırmıştır. Sayısal sonuçlar, AVF yönteminin Lobatto IIIA–IIIB yöntemine göre, global kütle ve enerjiyi koruma konusunda daha başarılı olduğunu ortaya koymuştur.

Teorem 3.2.1: $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ (54) – (57) sisteminin çözümleri olsunlar. (54) – (57) sistemi

$$Q(t) = \int_{x_l}^{x_r} (|u|^2 + |v|^2) dx = Q(0) \quad (58)$$

$$E(t) = \int_{x_l}^{x_r} \left[-\beta(u_x^2 + v_x^2) + \frac{\alpha_1}{2}(|u|^4 + |v|^4) + (\alpha_1 + 2\alpha_2)(|u|^2|v|^2) + \gamma(|u|^2 + |v|^2) + 2\Gamma Re\{\bar{u}v\} \right] dx = E(0) \quad (59)$$

eşitliklerini sağlar.

İspat: (I) (54) denkleminin her iki tarafı $\bar{u}(x, t)$ ile çarpılıp, çıkan sonucun x 'e göre x_l 'den x_r 'ye integrali alındığında

$$i \int_{x_l}^{x_r} u_t \bar{u} dx + \beta \int_{x_l}^{x_r} u_{xx} \bar{u} dx + \int_{x_l}^{x_r} \left[\alpha_1 |u|^2 + (\alpha_1 + 2\alpha_2) |v|^2 \right] u \bar{u} dx + \gamma \int_{x_l}^{x_r} u \bar{u} dx + \Gamma \int_{x_l}^{x_r} v \bar{u} dx = 0 \quad (60)$$

elde edilir. Homojen sınır şartı (57) yardımıyla

$$\int_{x_l}^{x_r} u_{xx} \bar{u} dx = - \int_{x_l}^{x_r} |u_x|^2 dx \quad (61)$$

bulunur. Benzer şekilde (55) denkleminin her iki tarafı $\bar{v}(x, t)$ ile çarpılıp, çıkan sonucun x 'e göre x_l 'den x_r 'ye integrali alınırsa, homojen sınır şartı yardımıyla

$$\int_{x_l}^{x_r} v_{xx} \bar{v} dx = - \int_{x_l}^{x_r} |v_x|^2 dx \quad (62)$$

bulunur. (61) ve (62) denklemleri taraf tarafa toplanırsa

$$Im\{v\bar{u} + u\bar{v}\} = 0 \quad (63)$$

ve

$$Re\{u_t \bar{u} + v_t \bar{v}\} = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{2} (|u|^2 + |v|^2) \right\} \quad (64)$$

olduğundan, çıkan sonucun sanal kısmı alındığında

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_l}^{x_r} \frac{1}{2} (|u|^2 + |v|^2) dx = 0 \quad (65)$$

elde edilir. Böylece $Q(t) = Q(0)$ olduğu gösterilmiş olur.

(II) (54) ve (55) denklemleri sırasıyla $-u_t$ ve $-v_t$ ile çarpılıp, çıkan sonucun x' e göre x_l 'den x_r 'ye integrali alınırsa

$$\begin{aligned} -i \int_{x_l}^{x_r} |u_t|^2 dx - \beta \int_{x_l}^{x_r} u_{xx} \bar{u}_t dx - \int_{x_l}^{x_r} \left[\alpha_1 |u|^2 + (\alpha_1 + 2\alpha_2) |v|^2 \right] u \bar{u}_t dx \\ - \gamma \int_{x_l}^{x_r} u \bar{u}_t - \Gamma \int_{x_l}^{x_r} v \bar{u}_t dx = 0 \end{aligned} \quad (66)$$

$$\begin{aligned} -i \int_{x_l}^{x_r} |v_t|^2 dx - \beta \int_{x_l}^{x_r} v_{xx} \bar{v}_t dx - \int_{x_l}^{x_r} \left[\alpha_1 |v|^2 + (\alpha_1 + 2\alpha_2) |u|^2 \right] v \bar{v}_t dx \\ - \gamma \int_{x_l}^{x_r} v \bar{v}_t - \Gamma \int_{x_l}^{x_r} u \bar{v}_t dx = 0 \end{aligned} \quad (67)$$

elde edilir. Homojen sınır şartları kullanılarak

$$\begin{aligned} \int_{x_l}^{x_r} u_{xx} \bar{u}_t dx &= - \int_{x_l}^{x_r} u_x \bar{u}_{xt} dx \\ \int_{x_l}^{x_r} v_{xx} \bar{v}_t dx &= - \int_{x_l}^{x_r} v_x \bar{v}_{xt} dx \end{aligned}$$

yazılabilir. (66)ve (67) eşitlikleri taraf tarafa toplanıp reel kısımları alındığında

$$E(t) = E(0) \quad (68)$$

olduğu görülür.

3.3. Güçlü İkili Lineer Olmayan Schrödinger Sistemi için Korunumlu Sonlu Fark Tasarısı

J ve N herhangi pozitif iki tam sayı, $h = (x_r - x_l)/J$ ve $\tau = \frac{T}{N}$ olmak üzere (x_j, t_n) noktası $t_n = n\tau$, $x_j = jh$ ve $w = w_j^n$ olacak şekilde, $u_j^n \approx u(x_j, t_n)$ ve $v_j^n \approx v(x_j, t_n)$

olsun.

$$\Omega_0^{J+1} = \{w = (w_0, w_1, \dots, w_J), w_0 = w_J = 0\}$$

kompleks, ayrık fonksiyonlar uzayını gösterelim. Her $U^n, V^n \in \Omega_0^{J+1}$ fonksiyonları için aşağıdaki fark operatörlerini, ayrık iç çarpımını, normu ve maksimum normlarını tanımlayalım.

$$\begin{aligned} (w_j^n)_x &= \frac{w_{j+1}^n - w_j^n}{h}, & (w_j^n)_{\bar{x}} &= \frac{w_j^n - w_{j-1}^n}{h} \\ (w_j^n)_t &= \frac{w_j^{n+1} - w_j^n}{\tau}, & (w_j^n)_{\bar{t}} &= \frac{w_j^n - w_j^{n-1}}{\tau} \\ (w_j^n)_{\hat{t}} &= \frac{1}{2}((w_j^n)_t + (w_j^n)_{\bar{t}}), & \langle u^n, w^n \rangle &= h \sum_{j=1}^{J-1} u_j^n \overline{w_j^n} \\ \|w^n\|^2 &= \langle w^n, w^n \rangle, & \|w_x^n\|^2 &= h \sum_{j=1}^{J-1} |(w_j^n)_x|^2 \\ \|w^n\|_4^4 &= h \sum_{j=1}^{J-1} |w_j^n|^4, & \|u^n\|_\infty &= \max_{1 \leq j \leq J-1} |u_j^n| \end{aligned}$$

Yukarıdaki notasyonlara bağlı olarak, Wang ve ark. [14], (54) – (57) denklemlerinin sayısal çözümü için aşağıdaki sonlu fark tasarısını önermiştir.

$$\begin{aligned} i(U_j^n)_{\hat{t}} + \frac{\beta}{2}(U_j^{n+1} + U_j^{n-1})_{\bar{x}\bar{x}} + \frac{1}{2} \left[\alpha_1 |U_j^n|^2 + (\alpha_1 + 2\alpha_2) |V_j^n|^2 \right] (U_j^{n+1} + U_j^{n-1}) \\ + \frac{\gamma}{2}(U_j^{n+1} + U_j^{n-1}) + \Gamma V_j^n = 0, \quad 1 \leq j \leq J-1, \quad 0 \leq n \leq N-1, \end{aligned} \quad (69)$$

$$\begin{aligned} i(V_j^n)_{\hat{t}} + \frac{\beta}{2}(V_j^{n+1} + V_j^{n-1})_{\bar{x}\bar{x}} + \frac{1}{2} \left[\alpha_1 |V_j^n|^2 + (\alpha_1 + 2\alpha_2) |U_j^n|^2 \right] (V_j^{n+1} + V_j^{n-1}) \\ + \frac{\gamma}{2}(V_j^{n+1} + V_j^{n-1}) + \Gamma U_j^n = 0, \quad 1 \leq j \leq J-1, \quad 0 \leq n \leq N-1, \end{aligned} \quad (70)$$

$$U_j^0 = u_0(x_j), \quad V_j^0 = v_0(x_j), \quad 1 \leq j \leq J-1, \quad (71)$$

$$U_0^n = U_J^n = 0, \quad V_0^n = V_J^n = 0, \quad 0 \leq n \leq N-1. \quad (72)$$

Şimdi, bu sonlu fark tasarısının ayrık kütle ve enerji korunum özellikleri incelenecektir.

Teorem 3.3.1 (Wang ve ark. [14]) (69) – (72) sonlu fark tasarısı $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ için

$$\begin{aligned}
Q^n &= \frac{1}{2} (\|U^{n+1}\|^2 + \|U^n\|^2 + \|V^{n+1}\|^2 + \|V^n\|^2) \\
&\quad + \tau \Gamma \text{Im} \left\{ h \sum_{j=1}^{J-1} (V_j^n \overline{U_j^{n+1}} + U_j^n \overline{V_j^{n+1}}) \right\} \\
&= Q^{n-1} = \dots = Q^0
\end{aligned} \tag{73}$$

$$\begin{aligned}
E^n &= -\frac{\beta}{4} (\|U_x^{n+1}\|^2 + \|U_x^n\|^2 + \|V_x^{n+1}\|^2 + \|V_x^n\|^2) \\
&\quad + \frac{\alpha_1}{4} h \sum_{j=1}^{J-1} (|U_j^n|^2 |U_j^{n+1}|^2 + |V_j^n|^2 |V_j^{n+1}|^2) \\
&\quad + \left(\frac{\alpha_1 + 2\alpha_2}{4} \right) h \sum_{j=1}^{J-1} (|U_j^n|^2 |U_j^{n+1}|^2 + |V_j^n|^2 |V_j^{n+1}|^2) \\
&\quad + \frac{\gamma}{4} (\|U^{n+1}\|^2 + \|U^n\|^2 + \|V^{n+1}\|^2 + \|V^n\|^2) \\
&\quad + \frac{\Gamma}{2} \text{Re} \left\{ h \sum_{j=1}^{J-1} (V_j^n \overline{U_j^{n+1}} + U_j^n \overline{V_j^{n+1}}) \right\} \\
&= E^{n-1} = \dots = E^0
\end{aligned} \tag{74}$$

kütle ve enerji korunumuna sahiptir.

İspat: (I) $U^{n+1} + U^{n-1}$ ile (69) denkleminin iç çarpımı hesaplandığında

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\tau} \left[\|U^{n+1}\|^2 - \|U^{n-1}\|^2 \right] - \frac{\beta}{2h^2} \|(U^{n+1} + U^{n-1})_x\|^2 + \frac{c}{2} \|(U^{n+1} + U^{n-1})\|^2 \\
+ h\Gamma \sum_{j=1}^{J-1} (V_j^n \overline{U_j^{n+1}} + V_j^n \overline{U_j^{n-1}}) + \frac{\gamma}{2} \|(U^{n+1} + U^{n-1})\|^2 = 0
\end{aligned}$$

bulunur ve bu ifadenin sanal kısmı dikkate alındığında

$$\frac{1}{2} \left[\|U^{n+1}\|^2 - \|U^{n-1}\|^2 \right] + \tau \Gamma \text{Im} \left\{ h \sum_{j=1}^{J-1} (V_j^n \overline{U_j^{n+1}} - V_j^n \overline{U_j^{n-1}}) \right\} = 0 \tag{75}$$

elde edilir. (75) denkleminin $\|U^n\|^2$ eklenip çıkartıldığında

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[\|U^{n+1}\|^2 + \|U^n\|^2 \right] + \tau \Gamma \text{Im} \left\{ h \sum_{j=1}^{J-1} (V_j^n \overline{U_j^{n+1}}) \right\} \\ - \frac{1}{2} \left[\|U^n\|^2 + \|U^{n-1}\|^2 \right] + \tau \Gamma \text{Im} \left\{ h \sum_{j=1}^{J-1} (U_j^{n-1} \overline{V_j^n}) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (76)$$

elde edilir. Benzer şekilde $V^{n+1} + V^{n-1}$ ile (70) denkleminin iç çarpımı hesaplanıp sanal kısım dikkate alındığında

$$\frac{1}{2} \left[\|V^{n+1}\|^2 - \|V^{n-1}\|^2 \right] + \tau \Gamma \text{Im} \left\{ h \sum_{j=1}^{J-1} (U_j^n \overline{V_j^{n+1}} - U_j^n \overline{V_j^{n-1}}) \right\} = 0 \quad (77)$$

elde edilir. (77) denkleminin $\|V^n\|^2$ eklenip çıkartıldığında

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[\|V^{n+1}\|^2 + \|V^n\|^2 \right] + \tau \Gamma \text{Im} \left\{ h \sum_{j=1}^{J-1} (U_j^n \overline{V_j^{n+1}}) \right\} \\ - \frac{1}{2} \left[\|V^n\|^2 + \|V^{n-1}\|^2 \right] + \tau \Gamma \text{Im} \left\{ h \sum_{j=1}^{J-1} (V_j^{n-1} \overline{U_j^n}) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (78)$$

elde edilir. (76) ve (78) denklemleri taraf tarafa toplandığında

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{2} (\|U^{n+1}\|^2 + \|U^n\|^2 + \|V^{n+1}\|^2 + \|V^n\|^2) + \tau \Gamma \text{Im} \left\{ h \sum_{j=1}^{J-1} (V_j^n \overline{U_j^{n+1}} + U_j^n \overline{V_j^{n+1}}) \right\} \right] \\ = \left[\frac{1}{2} (\|U^n\|^2 + \|U^{n-1}\|^2 + \|V^n\|^2 + \|V^{n-1}\|^2) + \tau \Gamma \text{Im} \left\{ h \sum_{j=1}^{J-1} (V_j^{n-1} \overline{U_j^n} + U_j^{n-1} \overline{V_j^n}) \right\} \right] \end{aligned} \quad (79)$$

elde edilir. Dikkat edilecek olursa (73) eşitliğindeki $\tau \Gamma \text{Im} \left\{ h \sum_{j=1}^{J-1} (V_j^n \overline{U_j^{n+1}} + U_j^n \overline{V_j^{n+1}}) \right\}$ terimi $\tau \rightarrow 0$ iken sıfıra doğru yaklaşım yapacağından $Q^n = Q^{n-1} = \dots = Q^0$ olduğu görülür.

(II) Enerji korunumunu göstermek için $(U^{n+1} - U^{n-1})/2$ ile (69) denkleminin iç çarpımı hesaplanıp reel kısım dikkate alındığında

$$\begin{aligned}
& -\frac{\beta}{4}(\|U_x^{n+1}\|^2 - \|U_x^{n-1}\|^2) + \frac{\alpha_1}{4}h \sum_{j=1}^{J-1} (|U_j^n|^2|U_j^{n+1}|^2 - |U_j^n|^2|U_j^{n-1}|^2) \\
& + \frac{\alpha_1 + 2\alpha_2}{4}h \sum_{j=1}^{J-1} |V_j^n|^2(|U_j^{n+1}|^2 - |U_j^{n-1}|^2) \\
& + \frac{\gamma}{4}(\|U^{n+1}\|^2 - \|U^{n-1}\|^2) \\
& + \frac{\Gamma}{2}Re\{h \sum_{j=1}^{J-1} (V_j^n \overline{U_j^{n+1}} - V_j^n \overline{U_j^{n-1}})\} = 0 \quad (80)
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde $(V^{n+1} - V^{n-1})/2$ ile (70) denkleminin iç çarpımı hesaplanıp reel kısım dikkate alındığında

$$\begin{aligned}
& -\frac{\beta}{4}(\|V_x^{n+1}\|^2 - \|V_x^{n-1}\|^2) + \frac{\alpha_1}{4}h \sum_{j=1}^{J-1} (|V_j^n|^2|V_j^{n+1}|^2 - |V_j^n|^2|V_j^{n-1}|^2) \\
& + \frac{\alpha_1 + 2\alpha_2}{4}h \sum_{j=1}^{J-1} |U_j^n|^2(|V_j^{n+1}|^2 - |V_j^{n-1}|^2) \\
& + \frac{\gamma}{4}(\|V^{n+1}\|^2 - \|V^{n-1}\|^2) \\
& + \frac{\Gamma}{2}Re\{h \sum_{j=1}^{J-1} (U_j^n \overline{V_j^{n+1}} - U_j^n \overline{V_j^{n-1}})\} = 0 \quad (81)
\end{aligned}$$

elde edilir. (80) ve (81) denklemleri taraf tarafa toplandığında

$$\begin{aligned}
& -\frac{\beta}{4}(\|U_x^{n+1}\|^2 + \|V_x^{n+1}\|^2) + \frac{\alpha_1}{4}h \sum_{j=1}^{J-1} (|U_j^n|^2|U_j^{n+1}|^2 + |V_j^n|^2|V_j^{n+1}|^2) \\
& + \frac{\alpha_1 + 2\alpha_2}{4}h \sum_{j=1}^{J-1} (|V_j^n|^2|U_j^{n+1}|^2 + |U_j^n|^2|V_j^{n+1}|^2) \\
& + \frac{\gamma}{4}(\|U^{n+1}\|^2 + \|V^{n+1}\|^2) \\
& + \frac{\Gamma}{2}Re\{h \sum_{j=1}^{J-1} (V_j^n \overline{U_j^{n+1}} + U_j^n \overline{V_j^{n+1}})\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\beta}{4}(\|U_x^{n-1}\|^2 + \|V_x^{n-1}\|^2) + \frac{\alpha_1}{4}h \sum_{j=1}^{J-1} (|U_j^n|^2|U_j^{n-1}|^2 + |V_j^n|^2|V_j^{n-1}|^2) \\
&\quad + \frac{\alpha_1 + 2\alpha_2}{4}h \sum_{j=1}^{J-1} (|V_j^n|^2|U_j^{n-1}|^2 + |U_j^n|^2|V_j^{n-1}|^2) \\
&\quad + \frac{\gamma}{4}(\|U^{n-1}\|^2 + \|V^{n-1}\|^2) \\
&\quad + \frac{\Gamma}{2}Re\{h \sum_{j=1}^{J-1} (V_j^n \overline{U_j^{n-1}} + U_j^n \overline{V_j^{n-1}})\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafına $\|U_x^n\|^2 + \|V_x^n\|^2$ ve $\|U^n\|^2 + \|V^n\|^2$ eklendiğinde

$$\begin{aligned}
&-\frac{\beta}{4}(\|U_x^{n+1}\|^2 + \|V_x^{n+1}\|^2 + \|U_x^n\|^2 + \|V_x^n\|^2) + \frac{\alpha_1}{4}h \sum_{j=1}^{J-1} (|U_j^n|^2|U_j^{n+1}|^2 + |V_j^n|^2|V_j^{n+1}|^2) \\
&\quad + \frac{\alpha_1 + 2\alpha_2}{4}h \sum_{j=1}^{J-1} (|V_j^n|^2|U_j^{n+1}|^2 + |U_j^n|^2|V_j^{n+1}|^2) \\
&\quad + \frac{\gamma}{4}(\|U^{n+1}\|^2 + \|V^{n+1}\|^2 + \|U^n\|^2 + \|V^n\|^2) \\
&\quad + \frac{\Gamma}{2}Re\{h \sum_{j=1}^{J-1} (V_j^n \overline{U_j^{n+1}} + U_j^n \overline{V_j^{n+1}})\} \\
&= -\frac{\beta}{4}(\|U_x^n\|^2 + \|V_x^n\|^2 + \|U_x^{n-1}\|^2 + \|V_x^{n-1}\|^2) + \frac{\alpha_1}{4}h \sum_{j=1}^{J-1} (|U_j^n|^2|U_j^{n-1}|^2 + |V_j^n|^2|V_j^{n-1}|^2) \\
&\quad + \frac{\alpha_1 + 2\alpha_2}{4}h \sum_{j=1}^{J-1} (|V_j^n|^2|U_j^{n-1}|^2 + |U_j^n|^2|V_j^{n-1}|^2) \\
&\quad + \frac{\gamma}{4}(\|U^n\|^2 + \|V^n\|^2 + \|U^{n-1}\|^2 + \|V^{n-1}\|^2) \\
&\quad + \frac{\Gamma}{2}Re\{h \sum_{j=1}^{J-1} (V_j^n \overline{U_j^{n-1}} + U_j^n \overline{V_j^{n-1}})\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $E^{n+1} = E^n$ olduğu görülür. Böylece $E^n = E^{n-1} = \dots = E^0$ olduğu gösterilmiş olur.

Sonnier ve Christov [56] çalışmalarında SCNLS denkleminin (54)–(55) sayısal çözümü için lineer olmayan iki adımlı

$$\begin{aligned}
i \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\tau} &= \frac{\beta}{2h^2} [U_{j-1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} + U_{j+1}^{n+1} + U_{j-1}^n - 2U_j^n + U_{j+1}^n] + \frac{V_j^{n+1} + V_j^n}{4} \\
&\times \left[\alpha_1 (|U_j^{n+1}|^2 + |U_j^n|^2) + (\alpha_1 + 2\alpha_2) (|V_j^{n+1}|^2 + |V_j^n|^2) \right] \\
&+ \frac{\gamma}{2} (U_j^{n+1} + U_j^n) + \frac{\Gamma}{2} (V_j^{n+1} + V_j^n), \tag{82}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i \frac{V_j^{n+1} - V_j^n}{\tau} &= \frac{\beta}{2h^2} [V_{j-1}^{n+1} - 2V_j^{n+1} + V_{j+1}^{n+1} + V_{j-1}^n - 2V_j^n + V_{j+1}^n] + \frac{U_j^{n+1} + U_j^n}{4} \\
&\times \left[\alpha_1 (|V_j^{n+1}|^2 + |V_j^n|^2) + (\alpha_1 + 2\alpha_2) (|U_j^{n+1}|^2 + |U_j^n|^2) \right] \\
&+ \frac{\gamma}{2} (V_j^{n+1} + V_j^n) + \frac{\Gamma}{2} (U_j^{n+1} + U_j^n). \tag{83}
\end{aligned}$$

yöntemini önermişlerdir. Ayrıca bu yöntemin sırasıyla ayrık kütle ve enerjisi

$$\begin{aligned}
M^n &= \sum_{j=1}^N (|\psi_j^n|^2 + |\phi_j^n|^2) = C, \\
E^n &= \sum_{j=1}^N \left[-\frac{\beta}{2h^2} (|\psi_{j+1}^n|^2 - |\psi_j^n|^2 + |\phi_{j+1}^n|^2 - |\phi_j^n|^2) + \frac{\alpha_1}{4} (|\psi_j^n|^4 + |\phi_j^n|^4) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\alpha_2}{2} (|\psi_j^n|^2 |\phi_j^n|^2) + \gamma (|\psi_j^n|^2 + |\phi_j^n|^2) + 2\Gamma \operatorname{Re}\{\overline{\phi_j^n} \psi_j^n\} \right] = C
\end{aligned}$$

olmak üzere ayrık kütle ve enerjiiyi koruduğu gösterilmiştir.

3.4. Güçlü İkili Lineer Olmayan Schrödinger Sistemi için Yapı Koruyan Yeni Bir Sonlu Fark Tasarısı

Bu bölümde SCNLS denkleminin sayısal çözümü için literatürde daha önceden çalışılmamış yeni bir sonlu fark tasarısı önerilecektir. Bu tez çalışmasında (54) – (57) denklemlerinin sayısal çözümü için aşağıdaki sonlu fark tasarısını önermekteyiz.

$$i(u_j^n)_t + \frac{4k}{3}(u_j^{n+\frac{1}{2}})_{x\bar{x}} - \frac{k}{3}(u_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}\hat{x}} + \frac{1}{2} \left[|u_j^{n+1}|^2 + |u_j^n|^2 + \beta (|v_j^{n+1}|^2 + |v_j^n|^2) \right] u_j^{n+\frac{1}{2}} + \gamma u_j^{n+\frac{1}{2}} + \Gamma v_j^{n+\frac{1}{2}} = 0 \quad (84)$$

$$i(v_j^n)_t + \frac{4k}{3}(v_j^{n+\frac{1}{2}})_{x\bar{x}} - \frac{k}{3}(v_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}\hat{x}} + \frac{1}{2} \left[|v_j^{n+1}|^2 + |v_j^n|^2 + \beta (|u_j^{n+1}|^2 + |u_j^n|^2) \right] v_j^{n+\frac{1}{2}} + \gamma v_j^{n+\frac{1}{2}} + \Gamma u_j^{n+\frac{1}{2}} = 0 \quad (85)$$

$$u_j^0 = u_0(x_j), \quad v_j^0 = v_0(x_j), \quad 1 \leq j \leq J-1, \quad (86)$$

$$u^n \in \mathbb{Z}_h^{0+}, \quad v^n \in \mathbb{Z}_h^{0+}, \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad (87)$$

Şimdi, bu sonlu fark tasarısının ayrık kütle ve enerji korunum özelliklerinin incelemesi yapılacaktır.

Teorem 3.4.1: (84) – (87) sonlu fark tasarısı $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ için

$$\begin{aligned} Q^n &= \|u^n\|^2 + \|v^n\|^2 \\ &= Q^{n-1} = \dots = Q^0 \end{aligned} \quad (88)$$

kütle korunumuna ve

$$\begin{aligned} E^n &= \frac{2k}{3} (\|u_x^n\|^2 + \|v_x^n\|^2) - \frac{k}{6} (\|u_{\hat{x}}^n\|^2 + \|v_{\hat{x}}^n\|^2) \\ &\quad - \frac{h}{4} \sum_{j=1}^{J-1} \left[|u_j^n|^4 + |v_j^n|^4 + 2\beta (|u_j^n|^2 |v_j^n|^2) \right] \\ &\quad - \frac{\gamma}{2} (\|u^n\|^2 + \|v^n\|^2) - \Gamma \operatorname{Re} \left\{ h \sum_{j=1}^{J-1} (v_j^n \overline{u_j^n}) \right\} \\ &= E^{n-1} = \dots = E^0 \end{aligned} \quad (89)$$

enerji korunumuna sahiptir.

İspat: (I) $u^{n+1} + u^n$ ile (84) denkleminin iç çarpımı hesaplanıp sanal kısmı dikkate alındığında

$$\frac{1}{\tau} [\|u^{n+1}\|^2 - \|u^n\|^2] + Im\{h\Gamma \sum_{j=1}^{J-1} (v_j^{n+1} + v_j^n) \overline{(u_j^{n+1} + u_j^n)}\} = 0 \quad (90)$$

elde edilir. Benzer şekilde $v^{n+1} + v^n$ ile (85) denkleminin iç çarpımı hesaplanıp sanal kısım dikkate alındığında

$$\frac{1}{\tau} [\|v^{n+1}\|^2 - \|v^n\|^2] + Im\{h\Gamma \sum_{j=1}^{J-1} (u_j^{n+1} + u_j^n) \overline{(v_j^{n+1} + v_j^n)}\} = 0 \quad (91)$$

elde edilir. (90) - (91) denklemleri taraf tarafa toplandığında ve $Im(v^n \overline{u^n}) = -Im(u^n \overline{v^n})$ olduğundan

$$\begin{aligned} & \left[(\|u^{n+1}\|^2 + \|v^{n+1}\|^2) + \tau\Gamma Im\{h \sum_{j=1}^{J-1} (u_j^n \overline{v_j^{n+1}} + v_j^n \overline{u_j^{n+1}})\} \right] \\ & - \left[(\|u^n\|^2 + \|v^n\|^2) - \tau\Gamma Im\{h \sum_{j=1}^{J-1} (u_j^{n+1} \overline{v_j^n} + v_j^{n+1} \overline{u_j^n})\} \right] = 0 \end{aligned} \quad (92)$$

elde edilir. Bu durumda

$$(\|u^{n+1}\|^2 + \|v^{n+1}\|^2) - (\|u^n\|^2 + \|v^n\|^2) = 0 \quad (93)$$

yani $Q^n = Q^{n-1} = \dots = Q^0$ olduğu görülür.

(II) Enerji korunumunu göstermek için $u^{n+1} - u^n$ ile (84) denkleminin iç çarpımı hesaplanıp reel kısım dikkate alındığında

$$\begin{aligned} & \frac{2k}{3} (\|u_x^{n+1}\|^2 - \|u_x^n\|^2) - \frac{k}{6} (\|u_{\hat{x}}^{n+1}\|^2 - \|u_{\hat{x}}^n\|^2) \\ & + \frac{h}{4} \sum_{j=1}^{J-1} \left[|u_j^{n+1}|^4 - |u_j^n|^4 + \beta(|v_j^{n+1}|^2 + |v_j^n|^2)(|u_j^{n+1}|^2 - |u_j^n|^2) \right] \\ & + \frac{\gamma}{2} (\|u^{n+1}\|^2 - \|u^n\|^2) + \frac{\Gamma}{2} Re\{h \sum_{j=1}^{J-1} (v_j^{n+1} + v_j^n) \overline{(u_j^{n+1} - u_j^n)}\} = 0 \end{aligned} \quad (94)$$

elde edilir. Benzer şekilde (85) denkleminde aynı işlemler uygulandığında,

$$\begin{aligned}
& \frac{2k}{3} (\|v_x^{n+1}\|^2 - \|v_x^n\|^2) - \frac{k}{6} (\|v_{\hat{x}}^{n+1}\|^2 - \|v_{\hat{x}}^n\|^2) \\
& + \frac{h}{4} \sum_{j=1}^{J-1} \left[|v_j^{n+1}|^4 - |v_j^n|^4 + \beta(|u_j^{n+1}|^2 + |u_j^n|^2)(|v_j^{n+1}|^2 - |v_j^n|^2) \right] \\
& + \frac{\gamma}{2} (\|v^{n+1}\|^2 - \|v^n\|^2) + \frac{\Gamma}{2} \operatorname{Re} \left\{ h \sum_{j=1}^{J-1} (u_j^{n+1} + u_j^n) \overline{(v_j^{n+1} - v_j^n)} \right\} = 0 \quad (95)
\end{aligned}$$

elde edilir. (94) ve (95) eşitlikleri taraf tarafa toplandığında,

$$\begin{aligned}
& \frac{2k}{3} (\|u_x^{n+1}\|^2 + \|v_x^{n+1}\|^2) - \frac{k}{6} (\|u_{\hat{x}}^{n+1}\|^2 + \|v_{\hat{x}}^{n+1}\|^2) \\
& - \frac{h}{4} \sum_{j=1}^{J-1} \left[|u_j^{n+1}|^4 + |v_j^{n+1}|^4 + 2\beta(|u_j^{n+1}|^2 |v_j^{n+1}|^2) \right] \\
& - \frac{\gamma}{2} (\|u^{n+1}\|^2 + \|v^{n+1}\|^2) - \Gamma \operatorname{Re} \left\{ h \sum_{j=1}^{J-1} (v_j^{n+1} \overline{u_j^{n+1}}) \right\} \\
& = \frac{2k}{3} (\|u_x^n\|^2 + \|v_x^n\|^2) - \frac{k}{6} (\|u_{\hat{x}}^n\|^2 + \|v_{\hat{x}}^n\|^2) \\
& - \frac{h}{4} \sum_{j=1}^{J-1} \left[|u_j^n|^4 + |v_j^n|^4 + 2\beta(|u_j^n|^2 |v_j^n|^2) \right] \\
& - \frac{\gamma}{2} (\|u^n\|^2 + \|v^n\|^2) - \Gamma \operatorname{Re} \left\{ h \sum_{j=1}^{J-1} (v_j^n \overline{u_j^n}) \right\} \quad (96)
\end{aligned}$$

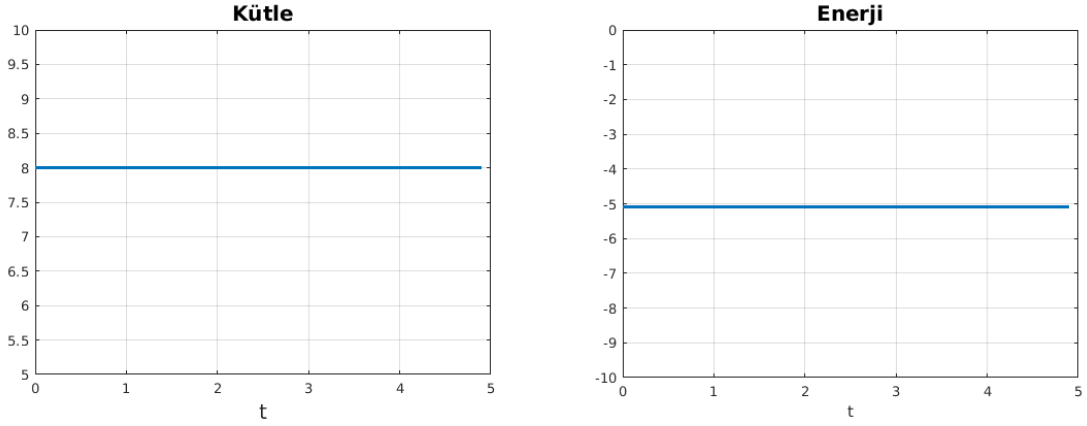
elde edilir. Buradan $E^{n+1} = E^n$ olduğu görülür. Böylece $E^n = E^{n-1} = \dots = E^0$ olduğu gösterilmiş olur.

3.5. Sayısal Örnekler

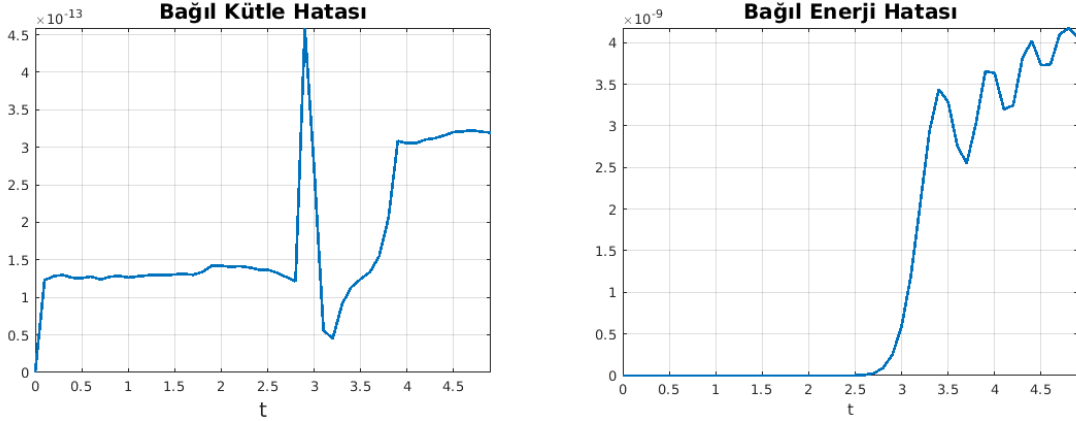
Örnek 3: (84) – (85) sisteminin çözümleri U^n ve V^n olsun. Başlangıç koşulları olarak

$$\begin{aligned}
u_0(x) &= \sqrt{2}r_1 \operatorname{sech}(r_1 x + \frac{1}{2}D_0) \exp^{iV_0 x/4} \\
v_0(x) &= \sqrt{2}r_2 \operatorname{sech}(r_2 x - \frac{1}{2}D_0) \exp^{-iV_0 x/4}
\end{aligned}$$

alınacaktır. Bu örnekte parametreler $x_l = -30, x_r = 30, \beta = 1, D_0 = 25, V_0 = 1, r_1 = r_2 = 1, \gamma = 1, \Gamma = 1$ olarak seçilmiştir. Şekil 3.1 $h = 0.125$ ve $\tau = 0.1$ için kütle ve enerji korunumu grafiklerini göstermektedir. Kütle ve enerji korunumundaki bağıl kütle ve bağıl enerji hataları Şekil 3.2’de verilmiştir. Bu değerler bize (84)–(87) sonlu fark tasarısının ayrık kütle ve ayrık enerjiyi tam olarak koruduğunu göstermektedir. Tablo 3.1 değerleri Teorem 3.4.1’i desteklemektedir.



Şekil 3.1 İki soliton için Kütle ve Enerji grafikleri. $h = 0.125, \tau = 0.1$

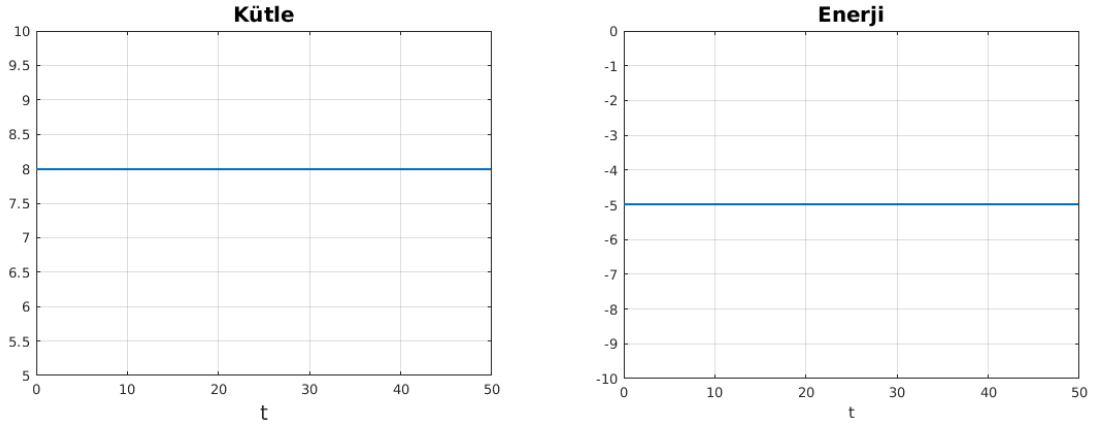


Şekil 3.2 İki soliton için Kütle ve Enerji bağıl hata grafikleri . $h = 0.125, \tau = 0.1$

Bu hesaplamalar daha geniş zaman aralığında yapıldığında da kütle ve enerji korunum özelliklerinin sağlandığı görülmektedir. Şekil 3.3’de $0 \leq t \leq 50$ aralığında $h = 0.2$ ve $\tau = 0.04$ için kütle ve enerji korunumu grafikleri gösterilmektedir. Bu parametreler için ayrık kütle (88) ve ayrık enerji (89) değerleri Tablo 3.1’de listelenmiştir.

T	Q^n	E^n
0	7.999999999999957	-5.083468035471824
10	7.999999999998488	-5.083468038817759
20	7.999999999998062	-5.083469182993205
30	7.999999999996069	-5.101654253884667
40	7.999999999995336	-5.083507002320395

Tablo 3.1 İki soliton çözümü için Q^n ve E^n değerleri. $h = 0.2, \tau = 0.04$



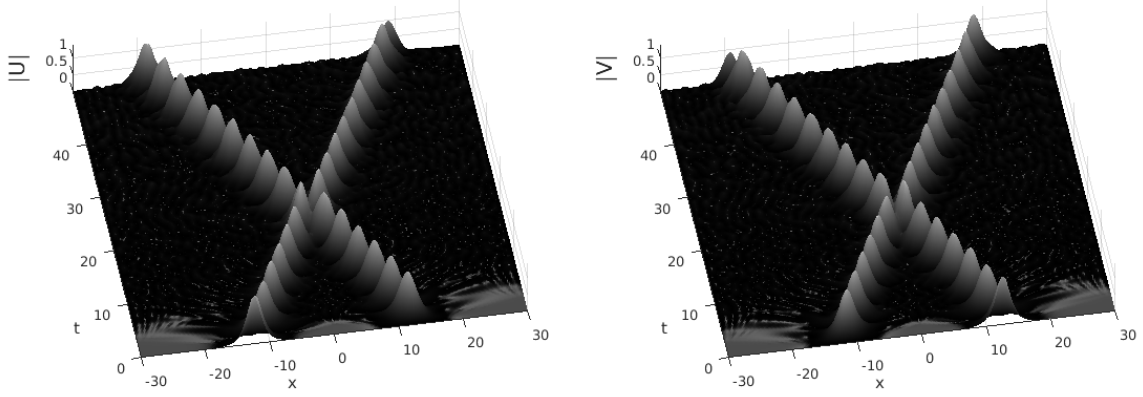
Şekil 3.3 İki soliton için Kütle ve Enerji grafikleri. $h = 0.2, \tau = 0.04$

Örnek 4 (Elastik Çarpışma): Bu örnekte başlangıç koşulları

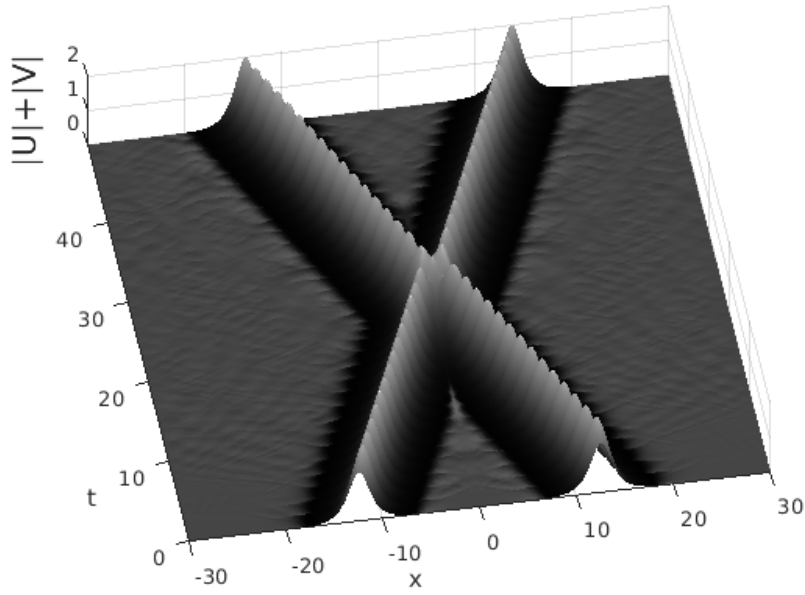
$$u_0(x) = \sqrt{2}r_1 \operatorname{sech}\left(r_1x + \frac{1}{2}D_0\right) \exp^{iV_0x/4}$$

$$v_0(x) = \sqrt{2}r_2 \operatorname{sech}\left(r_2x - \frac{1}{2}D_0\right) \exp^{-iV_0x/4}$$

parametreler ise $\beta = \frac{2}{3}, D_0 = 25, V_0 = 1, r_1 = r_2 = 1, x_l = -30, x_r = 30, \gamma = 1, \Gamma = 1$ olarak seçilecektir.

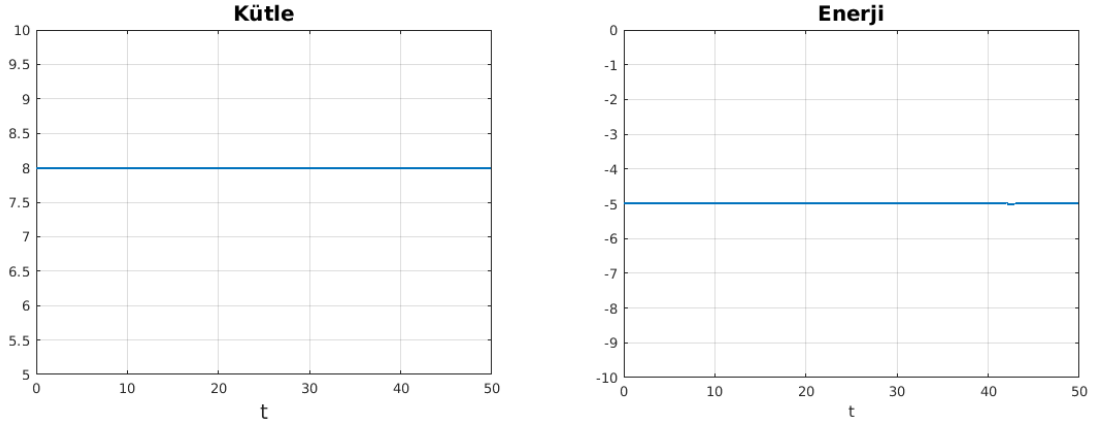


Şekil 3.4 İki solitonun ilerlemesi. $h = 0.125, \tau = 0.1$



Şekil 3.5 İki solitonun elastik çarpışması. $h = 0.125, \tau = 0.1$

Şekil 3.5’de önerilen yöntemin (84) – (87) soliton dalgalarının hareketlerini değerlendirmek için oldukça güvenilir olduğu görülmektedir. Her iki dalganın da şekil ve yönlerini değiştirmeden aynı doğrultuda ilerlediği görülmektedir. Bu durum bize çarpışmanın elastik olduğunu göstermektedir. Bu sonuçlara ait enerji ve kütle korunumları Şekil 3.6’de verilmiştir.



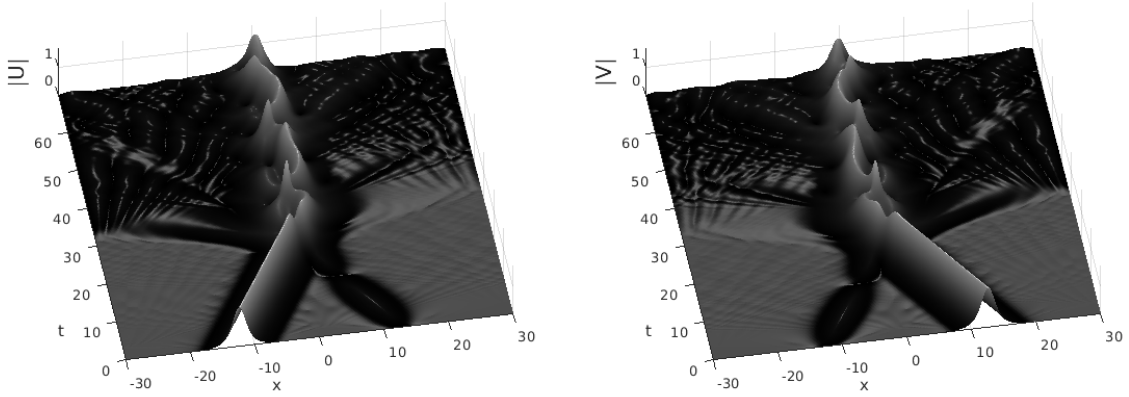
Şekil 3.6 İki solitonun elastik çarpışması için Kütle ve Enerji grafikleri. $h = 0.125$, $\tau = 0.1$

Örnek 5 (Solitonların Sıkışması (Trapped)): Bu örnekte başlangıç koşulları

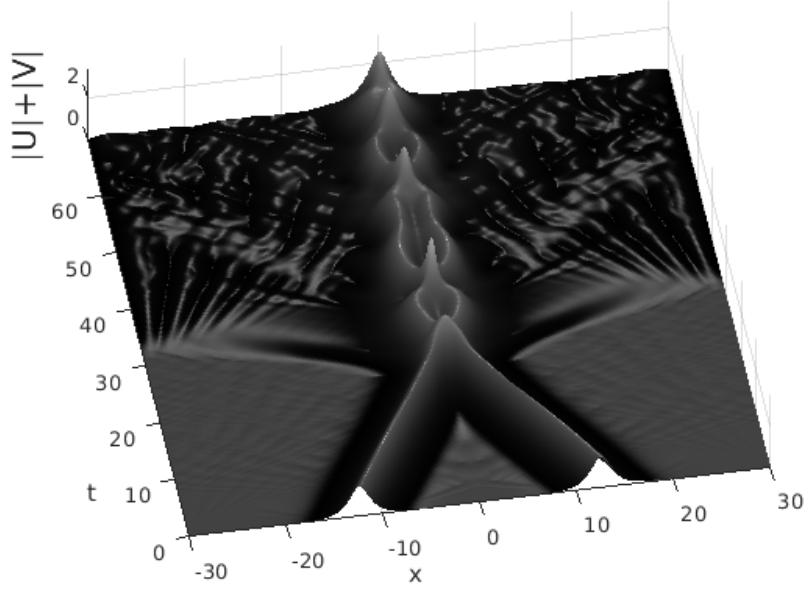
$$u_0(x) = \sqrt{2}r_1 \operatorname{sech}(r_1x + \frac{1}{2}D_0) \exp^{iV_0x/4}$$

$$v_0(x) = \sqrt{2}r_2 \operatorname{sech}(r_2x - \frac{1}{2}D_0) \exp^{-iV_0x/4}$$

parametreler ise $\beta = \frac{2}{3}$, $D_0 = 25$, $V_0 = 1$, $r_1 = r_2 = 1$, $x_l = -30$, $x_r = 30$, $\gamma = 1$, $\Gamma = 0.0175$ olarak seçilecektir.

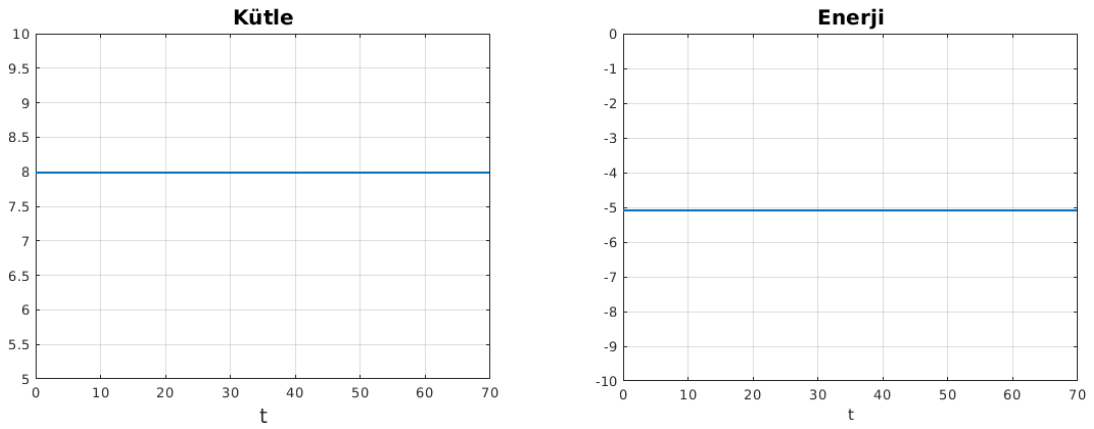


Şekil 3.7 İki solitonun ilerlemesi $h = 0.125$, $\tau = 0.1$



Şekil 3.8 Solitonların sıkışması $h = 0.125$, $\tau = 0.1$

Şekil 3.8’de önerilen yöntemin (84) – (87) soliton dalgalarının hareketlerini değerlendirmek için oldukça güvenilir olduğu görülmektedir. Her iki dalganın da çarpıştıktan sonra sıkıştıkları görülmektedir. Bu durum bize çarpışmanın elastik olmadığını göstermektedir. Bu sonuçlara ait enerji ve kütle korunumları Şekil 3.9’de verilmiştir.



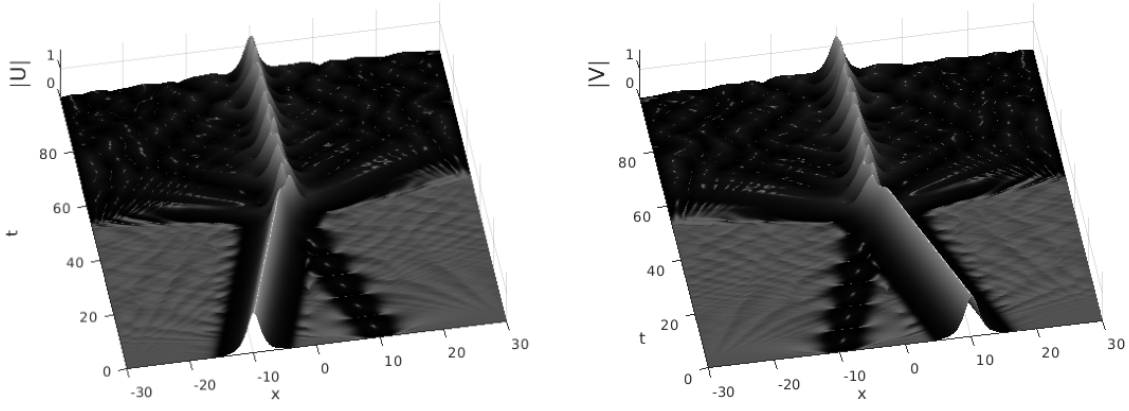
Şekil 3.9 İki solitonun sıkışması için Kütle ve Enerji grafikleri. $h = 0.125$, $\tau = 0.1$

Örnek 6 (Solitonların Kaynaşması (Füzyon)): Bu örnekte başlangıç koşulları

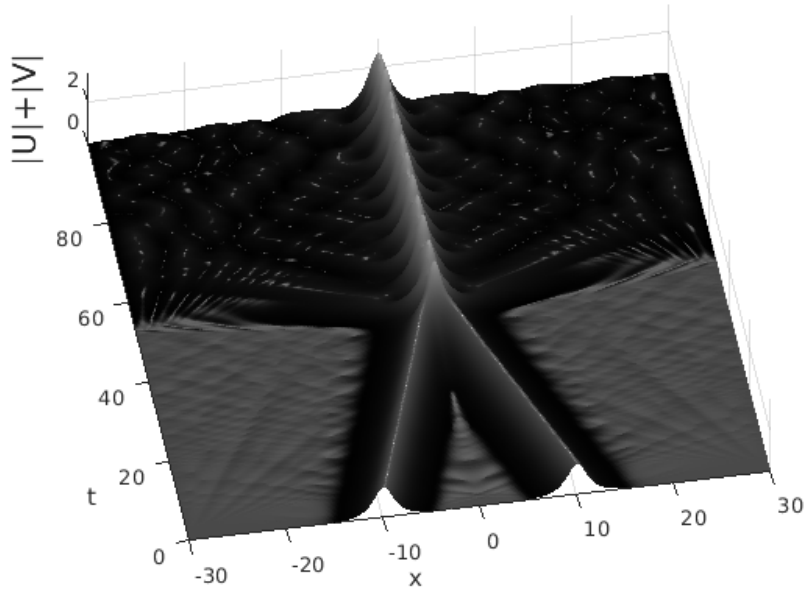
$$u_0(x) = \sqrt{2}r_1 \operatorname{sech}(r_1x + \frac{1}{2}D_0) \exp^{iV_0x/4}$$

$$v_0(x) = \sqrt{2}r_2 \operatorname{sech}(r_2x - \frac{1}{2}D_0) \exp^{-iV_0x/4}$$

parametreler ise $\beta = \frac{1}{3}$, $D_0 = 20$, $V_0 = 0.4$, $r_1 = r_2 = 1$, $x_l = -30$, $x_r = 30$, $\gamma = 1$, $\Gamma = 0.0175$ olarak seçilecektir.

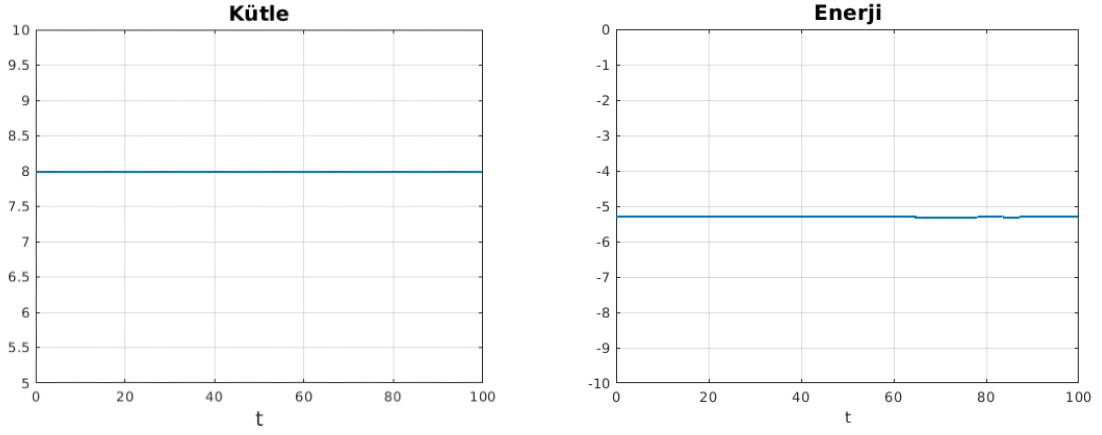


Şekil 3.10 İki solitonun ilerlemesi $h = 0.125$, $\tau = 0.1$



Şekil 3.11 İki solitonun füzyonu. $h = 0.125$, $\tau = 0.1$

Şekil 3.11’de önerilen yöntemin (84)–(87) soliton dalgalarının hareketlerini değerlendirmek için oldukça güvenilir olduğu görülmektedir. İki dalganın çarpıştıktan sonra kaynaşarak birlikte ilerlediği görülmektedir. Bu durum bize çarpışmanın elastik olmadığını göstermektedir. Bu sonuçlara ait enerji ve kütle korunumları Şekil 3.12’de verilmiştir.



Şekil 3.12 İki solitonun füzyonu için Kütle ve Enerji grafikleri. $h = 0.125$, $\tau = 0.1$

4. SONUÇ

Bu tez çalışmasında ikili lineer olmayan Schrödinger (CNLS) sistemi için literatürde yapılmış yüksek mertebeden doğruluklu, yapı koruyan sonlu fark tasarısı incelenmiştir. CNLS sisteminin kütle ve enerji olmak üzere iki korunum özelliği ispatlanmıştır. İlgili sonlu fark tasarısının ayırık kütle ve ayırık enerjiyi de koruduğunun ispatı yapılmıştır. Bu sonlu fark tasarısının çözümünün varlığı, tekliği ve yakınsaklığı incelenmiştir. CNLS sistemi ile ilgili teorik sonuçları (kütle ve enerji korunumu) desteklemek için sayısal örnekler verilmiştir. Sayısal örnekler, elastik çarpışma, füzyon ve soliton yansımasının çok başarılı şekilde simule ettiğini göstermiştir. Bu çalışmadan yola çıkarak güçlü ikili lineer olmayan Schrödinger (SCNLS) sistemi için yüksek mertebeden doğruluklu, yapı koruyan yeni bir sonlu fark tasarısı önerilmiştir. SCNLS sisteminin kütle ve enerji korunumu ispatlanmıştır. Yeni önerilen sonlu fark tasarısının ayırık kütle ve ayırık enerjiyi tam olarak koruduğu ispatlanmıştır. SCNLS sistemi ile ilgili teorik sonuçları desteklemek için sayısal örnekler verilmiştir. Sayısal örnekler, önerilen yöntemin ayırık kütle ve ayırık enerjiyi tam olarak koruduğunu ve uzun zaman aralığında SCNLS sisteminin soliton çözümlerini simule etmede çok başarılı olduğunu göstermektedir.

KAYNAKÇA

- [1] S Leble and B Reichel. Coupled nonlinear schrödinger equations in optic fibers theory: from general to solitonic aspects. *The European Physical Journal Special Topics*, 173(1):5–55, **2009**.
- [2] Newell AC Benney DJ. The propagation of nonlinear wave envelopes. *Journal of Mathematics and Physics*, 46:133–139, **1967**.
- [3] Masahito Ohta. Stability of solitary waves for coupled nonlinear schrödinger equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 26(5):933–939, **1996**.
- [4] T Kofane, B Michaux, and M Remoissenet. Theoretical and experimental studies of diatomic lattice solitons using an electrical transmission line. *Journal of Physics C: Solid State Physics*, 21(8):1395, **1988**.
- [5] M Remoissenet. Partially integrable nonlinear equations and their physical applications, **1990**.
- [6] Aleksandr Sergeevich Davydov. Solitons in molecular systems. *Physica scripta*, 20(3-4):387, **1979**.
- [7] Alan Jeffrey. Nonlinear wave motion. (*No Title*), **1989**.
- [8] Yoshinori Inoue. Nonlinear interaction of dispersive waves with equal group velocity. *Journal of the Physical Society of Japan*, 43(1):243–249, **1977**.
- [9] Yuri S Kivshar and Boris A Malomed. Solitons in a system of coupled korteweg-de vries equations. *Wave Motion*, 11(3):261–269, **1989**.
- [10] Yijiang Chen and Javid Atai. Polarization instabilities in birefringent fibers: A comparison between continuous waves and solitons. *Physical Review E*, 52(3):3102, **1995**.

- [11] Herbert G Winful. Self-induced polarization changes in birefringent optical fibers. *Applied Physics Letters*, 47(3):213–215, **1985**.
- [12] Curtis R Menyuk. Pulse propagation in an elliptically birefringent kerr medium. *IEEE journal of quantum electronics*, 25(12):2674–2682, **1989**.
- [13] Yijiang Chen. Stability criterion of coupled soliton states. *Physical Review E*, 57(3):3542, **1998**.
- [14] Tingchun Wang, Tao Nie, Luming Zhang, and Fangqi Chen. Numerical simulation of a nonlinearly coupled schrödinger system: A linearly uncoupled finite difference scheme. *Mathematics and Computers in Simulation*, 79(3):607–621, **2008**.
- [15] Yulin Zhou. *Applications of discrete functional analysis to the finite difference method*. International Academic Publishers, **1991**.
- [16] Tingchun Wang, Tao Nie, and Luming Zhang. Analysis of a symplectic difference scheme for a coupled nonlinear schrödinger system. *Journal of computational and applied mathematics*, 231(2):745–759, **2009**.
- [17] Shaofan Li and Loc Vu-Quoc. Finite difference calculus invariant structure of a class of algorithms for the nonlinear klein–gordon equation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 32(6):1839–1875, **1995**.
- [18] MS Ismail and Thiab R Taha. Numerical simulation of coupled nonlinear schrödinger equation. *Mathematics and Computers in Simulation*, 56(6):547–562, **2001**.
- [19] MS Ismail and SZ Alamri. Highly accurate finite difference method for coupled nonlinear schrödinger equation. *International Journal of Computer Mathematics*, 81(3):333–351, **2004**.

- [20] MS Ismail and Thiab R Taha. A linearly implicit conservative scheme for the coupled nonlinear schrödinger equation. *Mathematics and Computers in Simulation*, 74(4-5):302–311, **2007**.
- [21] Tingchun Wang, Boling Guo, and Luming Zhang. New conservative difference schemes for a coupled nonlinear schrödinger system. *Applied Mathematics and Computation*, 217(4):1604–1619, **2010**.
- [22] Yuyu He, Xiaofeng Wang, Weizhong Dai, and Yaqing Deng. A new high-order accurate conservative finite difference scheme for the coupled nonlinear schrödinger equations. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **2021**.
- [23] A. Hasegawa. *Introduction*, pages 1–5. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, **1989**. ISBN 978-3-540-70748-6. doi:10.1007/BFb0108678.
- [24] Benkui Tan and John P Boyd. Stability and long time evolution of the periodic solutions to the two coupled nonlinear schrödinger equations. *Chaos, Solitons & Fractals*, 12(4):721–734, **2001**.
- [25] Sergei V Manakov. On the theory of two-dimensional stationary self-focusing of electromagnetic waves. *Soviet Physics-JETP*, 38(2):248–253, **1974**.
- [26] Jian-Qiang Sun and Meng-Zhao Qin. Multi-symplectic methods for the coupled 1d nonlinear schrödinger system. *Computer Physics Communications*, 155(3):221–235, **2003**.
- [27] Jian-Qiang Sun, Xiao-Yan Gu, and Zhong-Qi Ma. Numerical study of the soliton waves of the coupled nonlinear schrödinger system. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 196(3-4):311–328, **2004**.
- [28] MS Ismail. Numerical solution of coupled nonlinear schrödinger equation by galerkin method. *Mathematics and Computers in Simulation*, 78(4):532–547, **2008**.

- [29] MS Ismail. A fourth-order explicit schemes for the coupled nonlinear schrödinger equation. *Applied Mathematics and Computation*, 196(1):273–284, **2008**.
- [30] MD Todorov and CI Christov. Conservative numerical scheme in complex arithmetic for coupled nonlinear schrödinger equations. In *Conference Publications*, volume 2007, pages 982–992. Conference Publications, **2007**.
- [31] Meihua Huang and Zhan Zhou. Ground state solutions of the periodic discrete coupled nonlinear schrödinger equations. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 38(8):1682–1695, **2015**.
- [32] Mark J Ablowitz and Ziad H Musslimani. Discrete vector spatial solitons in a nonlinear waveguide array. *Physical Review E*, 65(5):056618, **2002**.
- [33] Bartosz Reichel and Sergey Leble. On convergence and stability of a numerical scheme of coupled nonlinear schrödinger equations. *Computers & Mathematics with Applications*, 55(4):745–759, **2008**.
- [34] Ayhan Aydın and Bülent Karasözen. Symplectic and multi-symplectic methods for coupled nonlinear schrödinger equations with periodic solutions. *Computer Physics Communications*, 177(7):566–583, **2007**.
- [35] Ayhan Aydın and Bülent Karasözen. Multi-symplectic integration of coupled non-linear schrödinger system with soliton solutions. *International Journal of Computer Mathematics*, 86(5):864–882, **2009**.
- [36] Yuri S Kivshar and Govind P Agrawal. *Optical solitons: from fibers to photonic crystals*. Academic press, **2003**.
- [37] MS El Naschie. Deterministic quantum mechanics versus classical mechanical indeterminism. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 8(1):5–10, **2007**.

- [38] Ayhan Aydın. Multisymplectic integration of n-coupled nonlinear schrödinger equation with destabilized periodic wave solutions. *Chaos, Solitons Fractals*, 41(2):735–751, **2009**.
- [39] Ayhan Aydın and Bülent Karasözen. Multisymplectic schemes for the complex modified korteweg-de vries equation. In *AIP Conference Proceedings*, volume 1048, pages 60–63. American Institute of Physics, **2008**.
- [40] Yaming Chen, Huajun Zhu, and Songhe Song. Multi-symplectic splitting method for the coupled nonlinear schrödinger equation. *Computer Physics Communications*, 181(7):1231–1241, **2010**.
- [41] Shenggao Zhou and Xiaoliang Cheng. Numerical solution to coupled nonlinear schrödinger equations on unbounded domains. *Mathematics and Computers in Simulation*, 80(12):2362–2373, **2010**.
- [42] A Borhanifar and Reza Abazari. Exact solutions for non-linear schrödinger equations by differential transformation method. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 35:37–51, **2011**.
- [43] A Borhanifar and Reza Abazari. Numerical study of nonlinear schrödinger and coupled schrödinger equations by differential transformation method. *Optics Communications*, 283(10):2026–2031, **2010**.
- [44] Zhi-zhong Sun and Dan-dan Zhao. On the l convergence of a difference scheme for coupled nonlinear schrödinger equations. *Computers & Mathematics with Applications*, 59(10):3286–3300, **2010**.
- [45] Xiuling Hu and Luming Zhang. Conservative compact difference schemes for the coupled nonlinear schrödinger system. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 30(3):749–772, **2014**.
- [46] Tingchun Wang. Optimal point-wise error estimate of a compact finite difference scheme for the coupled nonlinear schrödinger equations. *Journal of Computational Mathematics*, pages 58–74, **2014**.

- [47] Yiping Fu. Compact fourth-order finite difference schemes for helmholtz equation with high wave numbers. *Journal of Computational Mathematics*, pages 98–111, **2008**.
- [48] André D Bandrauk and Hai Shen. Exponential split operator methods for solving coupled time-dependent schrödinger equations. *The Journal of chemical physics*, 99(2):1185–1193, **1993**.
- [49] Yuanping Ma, Linghua Kong, Jialin Hong, and Ying Cao. High-order compact splitting multisymplectic method for the coupled nonlinear schrödinger equations. *Computers & Mathematics with Applications*, 61(2):319–333, **2011**.
- [50] Linghua Kong, Jialin Hong, Lihai Ji, and Pengfei Zhu. Compact and efficient conservative schemes for coupled nonlinear s chrödinger equations. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 31(6):1814–1843, **2015**.
- [51] Juan Chen and Lu-ming Zhang. Numerical approximation of solution for the coupled nonlinear schrödinger equations. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series*, 33(2):435–450, **2017**.
- [52] Tingchun Wang. Maximum norm error bound of a linearized difference scheme for a coupled nonlinear schrödinger equations. *Journal of computational and applied mathematics*, 235(14):4237–4250, **2011**.
- [53] Weiwei Sun and Jilu Wang. Optimal error analysis of crank–nicolson schemes for a coupled nonlinear schrödinger system in 3d. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 317:685–699, **2017**.
- [54] Linghua Kong, Ping Wei, Yuqi Hong, Peng Zhang, and Ping Wang. Efficient energy-preserving scheme of the three-coupled nonlinear schrödinger equation. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 42(9):3222–3235, **2019**.
- [55] Luigi Barletti, Luigi Brugnano, G Frasca Caccia, and Felice Iavernaro. Energy-conserving methods for the nonlinear schrödinger equation. *Applied Mathematics and Computation*, 318:3–18, **2018**.

- [56] WJ Sonnier and CI Christov. Strong coupling of schrödinger equations: Conservative scheme approach. *Mathematics and Computers in Simulation*, 69(5-6):514–525, **2005**.
- [57] J Cui, Z Sun, and H Wu. A high accurate and conservative difference scheme for the solution of nonlinear schrödinger equation. *Numer Math J Chin Univ*, 37(1):31–52, **2015**.
- [58] Zhang Fei, Víctor M Pérez-García, and Luis Vázquez. Numerical simulation of nonlinear schrödinger systems: a new conservative scheme. *Applied Mathematics and Computation*, 71(2-3):165–177, **1995**.
- [59] Takayasu Matsuo. Dissipative/conservative galerkin method using discrete partial derivatives for nonlinear evolution equations. *Journal of computational and applied mathematics*, 218(2):506–521, **2008**.
- [60] Qian Shun Chang, Bo Ling Guo, and Hong Jiang. Finite difference method for generalized zakharov equations. *Mathematics of Computation*, 64(210):537–553, **1995**.
- [61] Luming Zhang and Qianshun Chang. A conservative numerical scheme for a class of nonlinear schrödinger equation with wave operator. *Applied mathematics and computation*, 145(2-3):603–612, **2003**.
- [62] Daisuke Furihata. Finite-difference schemes for nonlinear wave equation that inherit energy conservation property. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 134(1-2):37–57, **2001**.
- [63] Takayasu Matsuo. New conservative schemes with discrete variational derivatives for nonlinear wave equations. *Journal of computational and applied mathematics*, 203(1):32–56, **2007**.
- [64] Brian E Moore and Sebastian Reich. Multi-symplectic integration methods for hamiltonian pdes. *Future Generation Computer Systems*, 19(3):395–402, **2003**.

- [65] AL Islas and CM Schober. On the preservation of phase space structure under multisymplectic discretization. *Journal of Computational Physics*, 197(2):585–609, **2004**.
- [66] Mengzhao Qin and Wenjie Zhu. Construction of symplectic schemes for wave equations via hyperbolic functions $\sinh(x)$, $\cosh(x)$ and $\tanh(x)$. *Computers & Mathematics with Applications*, 26(8):1–11, **1993**.
- [67] Yi-fa Tang. Symplectic computation of hamiltonian systems (i). *Journal of Computational Mathematics*, pages 267–276, **2002**.
- [68] Jian-qing SUN, Xiao-yan Gu, and Zhong-qi Ma. Multisymplectic difference schemes for coupled nonlinear schrödinger system. *Chinese Journal of Computational Physics*, 21(4):321, **2004**.
- [69] Ayhan Aydın and Bülent Karasözen. Lobatto iii_a–iii_b discretization of the strongly coupled nonlinear schrödinger equation. *Journal of computational and applied mathematics*, 235(16):4770–4779, **2011**.
- [70] Jiaxiang Cai. Multisymplectic schemes for strongly coupled schrödinger system. *Applied mathematics and computation*, 216(8):2417–2429, **2010**.
- [71] Tingchun Wang, Luming Zhang, and Fangqi Chen. Numerical analysis of a multi-symplectic scheme for a strongly coupled schrödinger system. *Applied mathematics and computation*, 203(1):413–431, **2008**.
- [72] Canan Akkoyunlu. Energy preserving integration of the strongly coupled nonlinear schrodinger equation. **2015**.