ÇATILAR ÜZERİNDEKİ BAZI TOPOLOJİK ÖZELLİKLER

SOME TOPOLOGICAL PROPERTIES ON FRAMES

Can BALIKÇI

Prof. Dr. Rıza ERTÜRK

Tez Danışmanı

Hacettepe Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin

Matematik Anabilim Dalı için Öngördüğü

YÜKSEK LİSANS TEZİ

olarak hazırlanmıştır.

ÖZET

ÇATILAR ÜZERİNDEKİ BAZI TOPOLOJİK ÖZELLİKLER

Can BALIKÇI

Yüksek Lisans, Matematik Bölümü

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Rıza ERTÜRK

Ocak 2024 ve 93 Sayfa

Bu tezin amacı, latis kavramının özel bir hali olan çatı kavramını tanımlamak ve bu yapı üzerinde, ayırma aksiyomları ve kompaktlık gibi topolojik özellikleri çalışmaktır.

Bu çalışma altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tez konusuna kısa bir giriş yapılmıştır.

İkinci bölümde latis teorinin temeli olan kısmi sıralı kümelere ve bu kümeler üzerindeki bazı özel yapılara değinilmiştir. Bunun yanı sıra latis kavramına değinilmiş ve ayrıca kategori teori ile ilgili bazı temel tanım ve kavramlara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, çatı ve lokal kavramları ile bu kavramlar üzerine kurulan bazı yapılar incelenmiştir. Diğer taraftan alt lokal kavramına ve ayrıca lokalik dönüşümlerin yapılarına yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde topolojik uzaylar teorisinde bulunmayan altfitlik ve fitlik aksiyomları tanıtılmıştır. Bunun yanı sıra Hausdorff aksiyomunun lokal teorideki versiyonları verilmiştir. Bu bölümde ayrıca tüm bu aksiyomlar arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Beşinci bölümde kompaktlık kavramı tanıtılmış ve ayırma aksiyomları ile kompaktlık arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Ayrıca kompaktlaştırma kavramının nokta-bağımsız bir karşılığına yer verilmiştir.

Altıncı bölümde değerleme dönüşümü ve bu dönüşüm yardımıyla elde edilen metrik tanıtılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Latis, Çatı, Lokal, Alt lokal, Lokalik dönüşüm, Kompakt, Kısmi sıralı küme, Kategori teori, Altfit, Fit, Hausdorff, Değerleme

ABSTRACT

SOME TOPOLOGICAL PROPERTIES ON FRAMES

Can BALIKÇI

Master of Sciences, Departmant of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Rıza ERTÜRK

January 2024, 93 pages

The aim of this thesis is to explore the concept of frame, which is a special kind of a lattice, and to examine their topological properties, such as separation axioms and compactness.

The study consists of six chapters. The first chapter provides a brief introduction to the thesis.

In the second chapter, partially ordered sets, the basis of lattice theory, are discussed, as well as some special structures based on them. In addition, the concept of lattice is introduced and some basic definitions and concepts related to category theory are given.

The third chapter examines the concepts of frame and locale and some structures derived from these concepts. Furthermore, the concept of sublocales and the structures of localic mappings are discussed.

In the fourth chapter, the concepts of subfitness and fitness, which do not exist in the theory of topological spaces, are introduced. Moreover, local theory versions of the Hausdorff axiom are presented. This section also analyses the relations between all these axioms.

The fifth chapter introduces the concept of compactness and explores its relations with separation axioms. Additionally, it presents a point-free counterpart to compactification.

The final chapter introduces the valuation map and the metric derived from this map.

Key Words: Lattice, Frame, Locale, Sublocale, Localic Mapping, Compact, Partially Ordered Set, Category Theory, Subfit, Fit, Hausdorff, Valuation.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın oluşmasında değerli bilgilerini payşalaşan, vaktini ve desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, akademik hayatım boyunca her zaman örnek alacağım saygıdeğer hocam Prof. Dr. Rıza ERTÜRK'e;

lisansüstü eğitimime başlama sürecimde beni destekleyen ve bana inanan çok değerli hocam Prof. Dr. Şenol DOST'a;

tezin birçok aşamasında yardımlarını esirgemeyen çok değerli hocam Dr. Öğr. Üyesi Esra KORKMAZ'a;

tez savunma sınavı jürisinde bulunan hocalarım; Prof. Dr. Ali Haydar EŞ, Prof. Dr. Alev Kanıbir CAMGÖZ, Prof. Dr. Filiz YILDIZ'a

Sonsuz Teşekkürler…

Can BALIKÇI

Ocak 2024, Ankara

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathcal{P}$(X)	X’ in kuvvet kümesi
x ∨ y	x ve y’ nin en küçük üst sınırı
x ∧ y	x ve y’ nin en büyük alt sınırı
PxQ	P ve Q kümelerinin çarpım kümesi
$\mathcal{S}\ell$(L)	L çatısının tüm altlokallerinin ailesi
$\mathcal{C}$(L)	L’ nin denklik çatısı
Ω(X)	X uzayının açık kümeler ailesi
f*	f dönüşümünün sağ adjointi
f*	f dönüşümünün sol adjointi
x′	x’ in tümleyeni
x*	x’ in yarı tümleyeni
b:a	Göreceli yarı tümleyen
↓x	x ve x’den küçük elemanların kümesi
↑x	x ve x’den büyük elemanların kümesi
$\mathcal{U}$(x)	x noktasının açık komşuluklar ailesi
⋁A	A kümesinin en küçük üst sınırı
⋀A	A kümesinin en büyük alt sınırı
Sp(L)	L’ nin ürettiği spectrum uzayı
ν	Nüclei dönüşümü

ν_S	S alt lokaline karşılık gelen nükleus
O(a)	Açık altlokal
C(a)	Kapalı altlokal
C_S(a)	S altlokaldeki kapalı altlokal
O_S(a)	S altlokaldeki açık altlokal
Top	Topolojik uzaylar kategorisi
Frm	Çatılar ve çatı homomorfizmaları kategorisi
Loc	Lokaller ve lokalik dönüşümler kategorisi
$\mathbf{SLat_1}$	Yarılatisler ve yarılatis homomorfizmaları kategori

1.GİRİŞ

Bu tez çalışmasının amacı, bir tam latisin özel birer hali olarak tanımlanan çatı (frame) ve ko-çatı (co-frame) yapıları üzerinde kompaktlık, ayırma aksiyomları gibi bazı topolojik özellikleri, latisler üzerinde tanımlanan gerçel değerli fonksiyonlar yardımıyla elde edilen değerleme (valuation) dönüşümlerini ve bu dönüşümler kullanılarak elde edilen metrikleri ele alan bir derleme çalışması ortaya koymaktır.

20. yüzyılın başlarında topolojide "açık küme" kavramının ortaya konulmasından bu yana [20], açık kümelerin oluşturduğu latis yapısı birçok araştırmaya konu olmuştur. 1930'lu yılların ortasında Marshall Stone [2, 3], Boole cebirleri üzerine yaptığı çalışmalarda latis teori ve topoloji arasında bir köprü niteliği taşıyan Stone Temsil Teoremi'ni ortaya koymuştur. Bu teorem, her Boole cebirinin, tamamen bağlantısız kompakt Hausdorff bir uzayın kapalı-açık kümelerinin oluşturduğu Boole cebirine izomorfik olduğunu ifade etmektedir. Tüm bu gelişmeler, topolojinin yalnızca geometri ile değil cebirle de doğrudan bir ilişki içerisinde olabileceği ve cebirsel yapılar kullanılarak ilginç uzaylar elde edilebileceği gibi sonuçlar ortaya koysa da sistematik bir genelleştirmenin yapılması yüzyılın ortalarını bulmuştur.

Ehresmann ve Bénabou [21], 1957 yılında sonlu infimumların keyfi supremumlar üzerine dağıldığı ve 'lokal latisler' olarak adlandırdıkları özel bir latis türünün, topolojik uzayların latis teoriye bir genelleştirilmesi olarak görülebileceğini iddia etmişlerdir. Dowker ve Papert'in çalışmalarından sonra, bu genel yapı için lokal latisler yerine çatı (frame) ismi kullanılmaya başlanmıştır. Kolayca görüleceği gibi, her topolojik uzayın açık kümeler ailesi bir çatıdır; fakat aksine verilen her L çatısına izomorf olacak şekilde bir topolojik uzay bulunması gerekmez. Bu durum, çatılar teorisinin topolojik uzaylar teorisinden daha genel olduğunun açık bir göstergesidir.

Isbell [9], 70'li yılların başında çatılar kategorisinin duali olan lokaller kategorisini tanımlamıştır. Topolojik uzaylar kategorisi ile bire-bir ilişki içerisinde olması sebebiyle, günümüzde genelleşmiş topolojik uzaylar olarak kabul gören lokaller üzerine yaptığı çalışmalar, topos teoriden fonksiyonel analize [25], halka teorisinden [26], kuantum mantığa [27] uzanan birçok farklı alana katkı sağlamıştır. Lokal teori, Tychonoff teoremi gibi seçme aksiyomuna bağlı olan teoremlerin, bu aksiyomdan bağımsız ispatlarının elde edilmesine olanak tanır. Bunun yanı sıra, yapılandırıcı (constructive) ispatlar içermesi sebebiyle yalnızca teoriyi zenginleştirmekle kalmaz, aynı zamanda topolojik kavramların bilgisayar bilimleri gibi uygulamalı alanlarda temsil edilebilmesine olanak sağlar.

Altı bölümden oluşan bu çalışmanın birinci bölümü giriş bölümü olup, tez hakkındaki genel bilgileri ve önceki çalışmaları içermektedir. İkinci bölümünde tezde kullanılacak olan temel kavram ve özellikler ele alınmıştır.

Üçüncü bölümün ilk iki kesiminde, Heyting cebirleri ve sober uzaylara yer verilmiştir. Ayrıca, çatı ve lokal kavramları ile bir L çatısından cebirsel yollarla elde edilen Spektrum uzayları tanıtılmıştır. Bu uzaylar yardımıyla elde edilen bazı özel funktorlar ve topolojik uzaylar kategorisi ile çatılar kategorisi arasındaki ilişkiler incelenmiştir. İkinci kesimde; Boole cebirlerinin bazı özelliklerine yer verilmiştir. Üçüncü kesimde, ilk olarak alt lokal kavramı verilmiş ve çatıların denkliği tanıtılmıştır. Ayrıca, açık ve kapalı alt lokal kavramı ile nüklei işlemine yer verilmiş ve bu kavramların birbirleriyle olan ilişkisine değinilmiştir. Son kesimde ise lokalik dönüşümlerin yapıları incelenmiştir.

Dördüncü bölümün ilk kesiminde, altfit ve fit kavramlarına yer verilmiştir. Ayrıca $\mathrm{T_D}$, ve $\mathrm{T_1}$ aksiyomları ile altfit ve fit özellikleri arasındaki ilişkiler incelenmiştir. İkinci kesimde, I-Hausdorff, DS-Hausdorff, regülerlik ve tamamen regülerlik aksiyomları verilmiş ve bunların ilk kesimde verilen ayırma aksiyomları ile ilişkilerine değinilmiştir.

Beşinci bölümde, kompaktlık ve kompaktlaştırma kavramları tanıtılmış ve ayrıca kompaktlık ile ayırma aksiyomları arasındaki ilişkilere yer verilmiştir.

Altıncı bölümde, reel değerli bir dönüşüm olan değerleme dönüşümü verilmiş ve bu dönüşüm yardımıyla elde edilen metrik ve özellikleri tanıtılmıştır.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, tezde kullanılacak olan bazı tanımlar, teoremler ve sonuçlar verilecektir.

2.1. Kısmi Sıralı kümeler; Zincirler

Bu kesimde, kısmi sıralı küme, bazı özel kısmi sıralı kümeler ve kısmi sıralı kümelerin bazı özellikleri verilecektir. Bu kesimde [13] nolu kaynak temel alınmıştır.

2.1.1.Tanım: Bir X kümesi üzerinde tanımlı "$\leq$" bağıntısı $\forall x, y, z \in X$ için aşağıdaki koşulları sağlıyorsa X kümesine bir kısmi sıralı küme denir.

(P1) $\forall x$ için $x \leq x$,

(P2) $x \leq y$ ve $y \leq x$ ise $x = y$,

(P3) $x \leq y$ ve $y \leq z$ ise $x \leq z$.

2.1.1.Örnek: Bir I kümesinin tüm alt kümelerinin ailesi olan $\mathcal{P}(I)$, alt küme olma bağıntısı ile bir kısmi sıralı kümedir.

2.1.2.Tanım: Kısmi sıralı bir P kümesinde, $\forall x \in P$ için $a \leq x$ olacak şekilde bir $a \in P$ varsa bu a' ya P' nin en küçük elemanı denir.

En küçük eleman varsa tektir. Gerçekten $a \in P$ ve $b \in P$ en küçük elemanlar ise tanım gereği $a \leq b$ ve $b \leq a$ olacağı için $a = b$ elde edilir. P'nin en küçük elemanı 0 ile gösterilir. Bu elemanın dualine ise en büyük eleman denir ve 1 ile gösterilir. En küçük ve en büyük elemanlar (varsa) P'nin evrensel sınırları olarak adlandırılır.

2.1.3.Tanım: Bir P kısmi sıralı kümesinde, $\forall x, y \in P$ için $x \leq y$ ya da $y \leq x$ oluyorsa, bu kısmi sıralı P kümesine bir tam sıralı küme veya bir zincirdir denir.

2.1.2.Örnek: $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi verilsin. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için $x \leq y$ bağıntısı, standart sıralama olarak tanımlanırsa, $\mathbb{R}$ bu bağıntıya göre bir zincirdir.

2.1.1.Önerme: S, P kısmi sıralı kümesinin bir alt kümesi olsun. S, P deki kapsama bağıntısı ile kendi içinde bir kısmi sıralı kümedir. Ayrıca herhangi bir zincirin alt kümesi de bir zincirdir.

2.1.4.Tanım: Bir X kısmi sıralı kümesinin duali, X kısmi sıralı kümesindeki elemanlar üzerindeki ters kısmi sıralama bağıntısı ile elde edilir ve $\breve{X}$ ile gösterilir.

2.1.5.Tanım: Q, P birer kısmi sıralı küme olmak üzere F: P → Q fonksiyonu eğer aşağıdaki

(1) $\forall x, y \in P$ için $x \leq y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$,

(2) $\forall x, y \in P$ için $x \leq y \Rightarrow F(x) \geq F(y)$,

koşulları sağlıyorsa bu fonksiyona sırasıyla azalmayandır ve artmayandır denir.

Bir azalmayan fonksiyonun tersi var ve azalmayan ise bu fonksiyona bir izomorfizma denir. Sonuç olarak P ile Q kısmi sıralı kümeleri arasında tanımlı bir fonksiyonun izomorfizma olabilmesi için bire-bir, örten ve azalmayan olması ve ayrıca

(1′) $\forall x, y \in P$ için $F(x) \leq F(y) \Rightarrow x \leq y$ koşulunu sağlaması gerekir.

Benzer şekilde, bir artmayan fonksiyonun tersi var ve artmayan ise bu fonksiyona bir dual izomorfizma denir. Diğer bir deyişle, P ile Q kısmi sıralı kümeleri arasında tanımlı bir fonksiyonun dual izomorfizma olabilmesi için bire-bir, örten ve artmayan olması ve ayrıca

(2′) $\forall x, y \in P$ için $F(x) \leq F(y) \Rightarrow x \geq y$

koşulunu sağlaması gerekir.

2.1.6.Tanım: Bir P kısmi sıralı kümesinde $a, b \in P$ için "a kapsar b", $a > b$ ve $a > x > b$ olacak şekilde bir $x \in P$ olmaması ile ifade edilecektir.

2.2. Latisler

Bu kesimde, latis kavramı ile ilgili bazı tanımlar, özellikler ve sonuçlar verilecektir. Bu kesimde [6, 7, 13] nolu kaynaklar temel alınmıştır.

2.2.1.Tanım: Kısmi sıralı bir P kümesi ve $A \subseteq P$ verilsin. A'nın üst sınırlar kümesinin (varsa) en küçük elemanına A'nın supremumu denir ve sup(A) ile gösterilir. Bu kavramın duali olarak, A'nın alt sınırlar kümesinin (varsa) en büyük elemanına A'nın infimumu denir ve inf(A) ile gösterilir. Ters simetri özelliği gereği, sup(A) ve inf(A) varsa tektir.

2.2.2.Tanım: P bir kısmi sıralı küme olmak üzere, $\forall x, y \in P$ için $\sup\{x, y\}$ ve $\inf\{x, y\}$ varsa, P bir latistir denir. Bir P latisindeki $\forall x, y \in P$ için $\sup\{x, y\} = x \vee y$ ve $\inf\{x, y\} = x \wedge y$ biçiminde gösterilir.

Bir L latisinin keyfi $\forall$A alt kümesi için sup(A) $\in$ L ve inf(A) $\in$ L oluyorsa L'ye tam latis denir. A = L ise A kümesi en küçük eleman 0'ı ve en büyük eleman 1'i içerir. (L, $\leq$) bir latis olmak üzere, bu latisin duali olan (L, $\geq$) de bir latistir.

Her latis tam olmak zorunda değildir. Örneğin L = ($\mathbb{R}, \leq$) bir tam latis olmasına rağmen ($\mathbb{Q}, \leq$) üzerindeki bilinen sıralama bağıntısı ile bir tam latis değildir: Çünkü A = $\{x \in (\sqrt{2}, \sqrt{3}) : x \in \mathbb{Q}\}$ alt kümesi düşünülürse, sup(A) $\notin$ L ve inf(A) $\notin$ L dir.

2.2.3.Tanım: A, P latisinin bir alt kümesi olsun. P latisindeki $\vee$ ve $\wedge$ işlemleri altında "$\forall a, b \in A \Rightarrow a \vee b \in A$ ve $a \wedge b \in A$" koşulu sağlanıyorsa A'ya, P latisinin bir alt latisi denir. Her alt latis, alt latisi olduğu P latisinin $\vee$ ve $\wedge$ işlemleriyle bir latistir. Boş küme ve bir elemanlı alt kümeler birer alt latistir.

2.2.4.Tanım: P ve Q birer kısmi sıralı küme olmak üzere, bu iki kümenin çarpımı PxQ = $\{(x, y) \mid x \in P, y \in Q\}$ biçiminde tanımlıdır. PxQ kümesi üzerindeki sıralama; $x_1, x_2 \in P$ ve $y_1, y_2 \in Q$ olmak üzere,

$(x_1, y_1) \leq_{PxQ} (x_2, y_2) \Rightarrow x_1 \leq_P x_2$ ve $y_1 \leq_Q y_2$ biçimindedir.

2.2.1.Önerme: L, M birer latis olmak üzere LxM, yukarıda belirtilen sıralamaya göre bir latistir.

Kanıt: $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in$ LxM ise $\forall i = 1, 2$ için $(x_1 \vee x_2, y_1 \vee y_2) \geq (x_i, y_i)$ dir. Dolayısıyla $(x_1 \vee x_2, y_1 \vee y_2)$, $\forall(x_i, y_i)$ için bir üst sınırdır ve bu üst sınır diğer bütün üst sınırlardan küçüktür: Gerçekten (u, v), $\forall(x_i, y_i)$ için bir üst sınır ise

$u \geq x_i$, $v \geq y_i \Rightarrow u \geq x_1 \vee x_2$ ve $v \geq y_1 \vee y_2 \Rightarrow (u, v) \geq (x_1 \vee x_2, y_1 \vee y_2)$

olur. Böylece $(x_1 \vee x_2, y_1 \vee y_2)$ bir en küçük üst sınırdır. Benzer şekilde $(x_1 \wedge x_2, y_1 \wedge y_2)$'nin de bir en büyük alt sınır olduğu görülebilir. Dolayısıyla LxM bir latistir.

2.2.2.Önerme: Bir P kısmi sıralı kümesinde $\vee$, $\wedge$ işlemleri için, atıfta bulunulan ifadeler var olma koşulu altında, aşağıdakiler sağlanır:

(L1) $x \wedge x = x$, $x \vee x = x$, (Yansıma)

(L2) $x \wedge y = y \wedge x$, $x \vee y = y \vee x$, (Değişme)

(L3) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$, $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$, (Birleşme)

(L4) $x \wedge (x \vee y) = x \vee (x \wedge y) = x$ (Emme).

Ayrıca $x \leq y$ ifadesi, $x \wedge y = y$ ve $x \vee y = x$ ifadelerinin herbirine denktir ve bu ifade tutarlılık olarak adlandırılır.

Gerçekten yansıma ve değişme özellikleri açıktır. Birleşim özelliği sağlanır, çünkü $x \wedge (y \wedge z)$, $(x \wedge y) \wedge z$ ifadeleri $\{x, y, z\}$ kümesinin en büyük alt sınırına denktir, benzer olarak, $x \vee (y \vee z)$, $(x \vee y) \vee z$ ifadeleri $\{x, y, z\}$ kümesinin en küçük üst sınırına denktir. Emme özelliğine bakılırsa;

$x \geq y \Rightarrow\ x \wedge (x \vee y) = x \wedge x = x,\ x \vee (x \wedge y) = x \vee y = x,$

$y \geq x \Rightarrow\ x \wedge (x \vee y) = x \wedge y = x,\ x \vee (x \wedge y) = x \wedge x = x$ dir. Her iki durumda da (L4) gerçekleşir.

2.2.3.Önerme: L, üzerinde iki adet ikili işlem bulunduran bir sistem olsun. Bu durumda L‘ nin (L1) – (L4) koşularını sağlaması için gerek ve yeter koşul L’nin bir latis olmasıdır.

Kanıt: ($\Leftarrow$): 2.2.2.Önermede kanıtlandı.

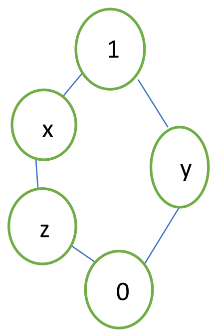
($\Rightarrow$): L, “$x \wedge y = y \Leftrightarrow x \vee y = x \vee (x \wedge y) = x$” sistemi ile donatılsın ve “$x \geq y \Rightarrow x \wedge y = y$” olarak tanımlansın. Öncelikle, L1’ den yansıma özelliği sağlanır. Diğer taraftan, $x \geq y$ ve $y \geq x$ ise $y = x \wedge y = y \wedge x = x \Rightarrow x = y$ olduğundan ters simetri vardır. Ayrıca, $x \geq y$ ve $y \geq z$ ise $x \wedge z = x \wedge (y \wedge z) = x \wedge y = y \wedge z = z \Rightarrow x \geq z$ olduğundan geçişme özelliği de sağlanır. Böylece L sistemi bir kısmi sıralı kümedir.

Şimdi $x \wedge y$ ve $x \vee y$ nin x ve y için, sırasıyla, en büyük alt sınır ve en küçük üst sınır olduğu gösterilecektir:

$x \wedge (x \wedge y) = (x \wedge x) \wedge y = x \wedge y \Rightarrow x \geq x \wedge y$ dir. Benzer olarak $y \geq x \wedge y$ denilebilir. O halde $x \wedge y$ ifadesi, x ve y için bir alt sınırdır. En büyük alt sınır olduğunu göstermek için $x \geq z$ ve $y \geq z$ olacak şekilde bir z alınırsa, $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z) = x \wedge z = z \Rightarrow x \wedge y \geq z$ olur. O halde $x \wedge y$ ifadesi x ve y nin en büyük alt sınırıdır. Duali olarak $x \vee y$ ifadesinin de x ve y için en küçük üst sınır olduğu gösterilebilir. Dolayısıyla L sistemi bir latistir.

Birçok latiste $\wedge$, $\vee$ işlemleri, dağılma özelliğine sahip çarpma ve toplama işlemlerine benzemektedir. Dolayısıyla bu tip latislerde dağılma çift taraflıdır, fakat aşağıdaki örnekte olduğu gibi, bu durum her latis için geçerli değildir.

2.2.1.Örnek: Aşağıda verilen L diyagramında,



$x \wedge (y \vee z) = x \wedge 1 = x$, $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = 0 \vee z = z$ olup, dağılma özelliği sağlanmaz.

2.2.4.Önerme: P, 0 ve 1'i bulunduran bir kısmi sıralı küme olsun. Bu durumda $\forall x \in P$ için

$0 \wedge x = 0$, $0 \vee x = x$, $1 \vee x = 1$, $1 \wedge x = x$ dir.

2.2.5.Önerme: Herhangi bir P latisinde $\vee$ ve $\wedge$ işlemleri azalmayandır, yani $y \le z$ olacak şekilde $x, y, z \in P$ ler için

$y \le z \Rightarrow x \wedge y \le x \wedge z$ ve $x \vee y \le x \vee z$ dir.

2.2.6.Önerme: Herhangi bir P latisinde $\forall x, y, z \in P$ için aşağıdaki eşitsizlikler geçerlidir:

(3) $x \wedge (y \vee z) \ge (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$,

(3′) $x \vee (y \wedge z) \le (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

2.2.7.Önerme: Herhangi bir P latisi, $x \le z$ olacak şekilde $x, y, z \in P$ ler için

$x \le z \Rightarrow x \vee (y \wedge z) \le (x \vee y) \wedge z$ eşitsizliği sağlanır.

Kanıt: $x \le z$ olacak şekilde $x, y, z \in P$ alınsın. Bu durumda $x \le x \vee y$ olduğu açıktır ve $\wedge$'in azalmayan özelliği gereği, $x \wedge z = x \le (x \vee y) \wedge z$ olur. Benzer şekilde $y \wedge z \le y \le x \vee y$ ve $y \wedge z \le z$ olup $y \wedge z \le (x \vee y) \wedge z$ elde edilir. Böylece yine $\wedge$'in azalmayan özelliği gereği, $x \vee (y \wedge z) \le (x \vee y) \wedge z$ dir.

2.2.5.Tanım: Tek bir ikili işleme sahip bir sistem yansıma, değişme ve birleşme özelliğini sağlıyorsa bu sisteme bir yarılatis denir.

2.2.1.Sonuç: Bir P kısmi sıralı kümesinde, herhangi iki elemanın $\wedge$' i varsa P kısmi sıralı kümesine "$\wedge$" işlemine göre bir yarılatis denir ve aynı zamanda bu yarı latislere $\wedge$- yarılatis de denir. Aynı durum $\vee$ işlemi için geçerliyse bu yarılatise $\vee$- yarılatis adı verilir.

2.2.8.Önerme: Bir latiste aşağıdaki dağılma özellikleri denktir:

(L5) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$,

(L5′) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Herhangi bir latiste (L5) ve (L5′) dağılma özellikleri ayrı ayrı sağlanmak zorunda değildir.

2.2.9.Önerme: Bir P latisinin dağılımlı olması için gerek ve yeter koşul (L5) veya (L5′) özelliklerinden birinin sağlanmasıdır.

Herhangi bir dağılımlı latisin, dualinin ve her alt latisinin de dağılımlı olduğu bilinmektedir.

2.2.6.Tanım: L dağılımlı bir latis olsun

(1) Eğer $p \neq 1$ için $x_1 \wedge x_2 \leq p$ iken $x_1 \leq p$ veya $x_2 \leq p$ ise p' ye bir asal (ya da $\wedge$- indirgenemez) eleman denir. Denk olarak $x_1 \wedge x_2 = p$ iken $x_1 \leq p$ ya da $x_2 \leq p$ oluyorsa, p' ye bir asal eleman denir.

(2) Eğer $x_1 \wedge x_2 = 0$ iken $x_1 \leq p$ ya da $x_2 \leq p$ oluyorsa, p' ye bir yarı asal eleman denir.

(3) $\forall a \in L$ ve $x_1, x_2, x_3, ..., x_n \in L$ için $x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n \leq a$ iken $x_i \leq p$ olacak şekilde bir i bulunabilirse, p' ye bir a-yarı asal eleman denir. Açıkça $\forall$a-yarı asal eleman, yarı asaldır.

2.2.10.Önerme: Her zincir bir dağılımlı latistir.

2.2.11.Önerme: Dağılımlı bir P latisinde, eğer $c \wedge x = c \wedge y$ ve $c \vee x = c \vee y$ ise $x = y$ dir.

Kanıt: P dağılımlı bir latis olmak üzere ve $c \wedge x = c \wedge y$ ve $c \vee x = c \vee y$ olacak şekilde $x, y, c \in P$ verilsin. Bu durumda, $x = x \wedge (c \vee x) = x \wedge (c \vee y) = (c \wedge x) \vee (x \wedge y) = (c \wedge y) \vee (x \wedge y) = (c \vee x) \wedge y = (c \vee y) \wedge y = y$ ve böylece $x = y$ olur.

2.2.7.Tanım: Bir P latisi,

(L6) $x \leq z \Rightarrow x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$

özelliğini sağlıyorsa P latisine modüler dir denir.

Her latis modüler olmak zorunda değildir. Örneğin 2.2.1.Örnek ele alınırsa,

$z \leq x$ iken $z \vee (y \wedge x) = z \vee 0 = z$, $(z \vee y) \wedge x = 1 \wedge x = x$ olduğundan L latisi modüler değildir.

2.2.12.Önerme: Herhangi bir dağılımlı P latisi modülerdir.

Kanıt: P dağılımlı bir latis olsun ve $x \leq z$ olacak şekilde $x, y, z \in P$ verilsin.

$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) = (x \vee y) \wedge z$ olup, P latisi modüler olur.

2.2.8.Tanım: L bir latis ve $0, 1 \in L$ olsun. $x \in L$ için $x \vee y = 1$ ve $x \wedge y = 0$ olacak şekilde bir $y \in L$ varsa, y' ye x' in tümleyeni denir ve $y = x'$ ile gösterilir. Eğer L latisinin bütün elemanlarının bir tümleyeni varsa L'ye bir tümleyenli latis denir. Eğer bir latisin bütün kapalı alt aralıkları tümleyenli ise bu latise göreceli tümleyenli (relatively complemented) latis denir. 2.2.11.Önerme'de görüldü ki, bir latisin [a, b] aralığında $\forall c$ elemanının yalnız bir tane tümleyeni vardır.

2.2.13.Önerme: Herhangi bir M tümleyenli modüler latisi, göreceli tümleyenlidir.

Kanıt: M bir tümleyenli modüler latis olsun. M' de herhangi bir $0 \leq x \leq b$ aralığı için, $x \wedge (x' \wedge b) = (x \wedge x') \wedge b = 0 \wedge b = 0$ ve $x \vee (x' \wedge b) = (x \vee x') \wedge b = 1 \wedge b = b$'dir. Bu nedenle [0, b] aralığı, bir tümleyenli modüler alt latistir. Benzer olarak herhangi bir [a, b] aralığı da tümleyenli modüler alt latis olur, yani M göreceli tümleyenlidir.

2.2.9.Tanım: Tümleyenli, dağılımlı latislere Boolean latisi denir.

2.2.14.Önerme: Herhangi bir Boolean latisinde, $\forall x$ elemanının yalnız bir tane x' tümleyeni vardır ve

(L7) $x \wedge x' = 0, x \vee x' = 1$,

(L8) $(x')' = x$,

(L9) $(x \wedge y)' = x' \vee y', (x \vee y)' = x' \wedge y'$ koşulları sağlanır.

Kanıt: Bir P Boolean latisi verilsin ve bir $x \in P$ alınsın. Öncelikle tümleyen tanımı gereği (L7) sağlanır. Değişme özelliği gereği, $x \wedge x' = x' \wedge x$, $x \vee x' = x' \vee x$ olduğundan $(x')' = x$ dır ve (L8) sağlanır. Ardından $(x \wedge y) \wedge (x' \vee y') = (x \wedge y \wedge x') \vee (x \wedge y \wedge y') = 0 \vee 0 = 0$ ve $(x \wedge y) \vee (x' \vee y') = (x \vee x' \vee y') \wedge (y \vee x' \vee y') = 1 \wedge 1 = 1$ dir. Dolayısıyla $(x \wedge y)' = x' \vee y'$ olur. Benzer şekilde $(x \vee y)' = x' \wedge y'$ olduğu da gösterilebilir. Sonuç olarak (L9) sağlanır.

2.2.10.Tanım: B bir Boolean latisi olmak üzere, $(B, \wedge, \vee, ')$ bir cebirdir ve Boolean cebiri olarak adlandırılır.

2.2.15.Önerme: P bir latis olsun. "Eğer P, Emme (L4) özelliğini sağlıyorsa Yansıma (L1) özelliğini de sağlar.

Kanıt: P bir latis ve $x, y \in P$ olmak üzere,

$x \wedge x = x \wedge [x \vee (x \wedge y)] = x \wedge (x \vee p) = x, \qquad (x \wedge y = p)$

$x \vee x = x \vee [x \wedge (x \vee y)] = x \vee (x \wedge t) = x. \qquad (x \vee y = t)$

(L2) – (L4)' deki geri kalan 6 ifade birbirinden bağımsızdır.

2.2.2.Örnek: $\mathbb{Z}^+$ latisi, pozitif tam sayılar üzerinde, $x \vee y = \text{maks}\{x, y\}$ ve $x \wedge y = 1$ olarak tanımlanırsa, (L2) – (L4)' deki $x \wedge (x \vee y) = x$ ifadesi hariç diğer 5 ifade sağlanmaktadır.

2.2.3.Örnek: $\mathbb{Z}^+$ latisi, pozitif tam sayılar üzerinde, $x \vee y = \text{maks}\{x, y\}$ ve $x \wedge y = x$ olarak tanımlanırsa, (L2) – (L4)' deki $x \wedge y = y \wedge x$ ifadesi hariç diğer 5 ifade sağlanmaktadır.

2.2.2.Sonuç: Bir latiste, (L2) – (L4) koşulları, L1' i gerektirir fakat (L2) – (L4)' deki 6 ifade birbirini gerektirmez. (L2) – (L4)' deki koşullardan bazıları atılarak latis kavramının farklı genelleştirmeleri elde edilebilir. Bunların en önemlisi yarılatislerdir. Hatırlanacağı üzere yarılatis, bir S kümesi üzerindeki yansıma, birleşme ve değişme koşullarını sağlayan tek bir ikili işlem ile tanımlanmıştır.

2.2.16.Önerme: L sonlu bir $\wedge$- yarılatis ve $1 \in L$ ise L bir latistir.

Kanıt: L sonlu bir $\wedge$- yarılatis ve $1 \in L$ olsun. $\forall a, b \in L$ için, $U = U(a, b)$ kümesi hem a' nın hem de b' nin bütün üst sınırlarından oluşsun. Açıkça $1 \in U$ dır. Ayrıca, $x \in U$ ve $y \in U$ ise $x \wedge y \in U$ dır. Gerçekten tanım gereği, $(x \geq a$ ve $y \geq a \Rightarrow x \wedge y \geq a)$ ve $(x \geq b$ ve $y \geq b \Rightarrow x \wedge y \geq b) \Rightarrow x \wedge y \in U$ dır.

Şimdi U kümesinde bir zincir oluşturmak için $x_0 = 1$ olarak seçelim. Eğer x_n en küçük eleman değilse $y \geq x_n$ olmayacak bir $y \in U$ vardır. $x_{n+1} = x_n \wedge y$ olarak tanımlanırsa $x_{n+1} \leq x_n$ olur. Bütün elemanlar benzer şekilde tanımlanırsa bir $x_0 > x_1 > x_2 > .... > x_n$ zinciri oluşur. Bu zincir U'nın içindedir ve kabul gereği sonludur. O halde zincirin son elemanı $x_n \in U$ dır. Dolayısıyla x_n, U kümesinin en küçük elemanıdır ve tanımı gereği $x_n = a \vee b$ dir ve böylece L bir latis olur.

Latisler üzerinde dört farklı homomorfizma tanımlanabilir ve her bir homomorfizmanın önemli uygulama alanları vardır. Şimdi bu morfizmalar incelenecektir.

2.2.11.Tanım: L, M birer latis olmak üzere $Q: L \rightarrow M$ dönüşümüne, $\forall x, y \in L$ için

(4) $Q(x \vee y) = Q(x) \vee Q(y)$ ise $\vee$- homomorfizması,

(4′) $Q(x \wedge y) = Q(x) \wedge Q(y)$ ise $\wedge$- homomorfizması denir.

Eğer (4) ve (4′) koşullarının her ikisi de sağlanıyorsa bu Q' ya bir homomorfizma veya bir latis homormorfizması denir. $Q: L \to M$ homomorfizması; örten ise Q' ya bir epimorfizma, bire-bir ise Q' ya bir monomorfizma, bire-bir ve örten ise Q' ya bir izomorfizma, $L = M$ ise Q' ya bir endomorfizma, $L = M$ ve Q bir izomorfizma ise Q' ya bir otomorfizma denir.

Ayrıca $Q: L \to M$ dönüşümü keyfi supremumları ve keyfi infimumları koruyorsa, Q' ya tam latis homomorfizması denir.

2.2.17.Önerme: $\vee$- yarılatisler ($\wedge$- yarılatisler) arasındaki her $\vee$- morfizması ($\wedge$- morfizması), azalmayan' dır.

Kanıt: L, M birer $\vee$- yarılatis ve $Q: L \to M$ bir $\vee$- morfizma olmak üzere ve $x \leq y$ olacak şekilde $x, y \in L$ alınsın. $x \leq y \Rightarrow x \vee y = y$ olduğu biliniyor. Q, $\vee$- morfizma olduğundan; $Q(x) \vee Q(y) = Q(x \vee y) = Q(y) \Rightarrow Q(x) \leq Q(y)$ olur ve böylece Q azalmayandır. Benzer olarak $\wedge$- yarılatisler arasındaki $\wedge$- morfizmasının da azalmayan olduğu gösterilebilir.

2.2.12.Tanım: X bir küme ve $(X, \leq)$ kısmi sıralama bağıntısı verilsin. $\forall x \in X$ için

$\downarrow x = \{y: y \leq x\}$, $\uparrow x = \{y: y \geq x\}$, $\downarrow M = \bigcup\{\downarrow x: x \in M\}$, $\uparrow M = \bigcup\{\uparrow x: x \in M\}$ dir.

Eğer $\downarrow M = M$ ise M' ye aşağı küme (lower-set), $\uparrow M = M$ ise M' ye yukarı küme (upper-set) denir.

2.2.13.Tanım: Bir L latisinin (ya da $\vee$- yarılatisinin) boş olmayan J alt kümesi,

(5) $0 \in J$,

(6) $\forall a \in J$, $x \in L$ için $x \leq a \Rightarrow x \in J$,

(7) $\forall a \in J$, $b \in J$ için $(a \vee b) \in J$

koşullarını sağlıyor ise J kümesine bir ideal denir.

Bir latisin dualine bir dual ideal ($\wedge$- ideal ya da bir süzgeç) adı verilir.

2.2.4.Örnek: Bir E kümesinin bütün alt kümelerinden oluşan $\mathcal{P}(E)$ kuvvet kümesi, doğal kapsama bağıntısı ile hem bir ideal hem de bir dual idealdir ve kümelerin süzgeci olarak adlandırılır.

2.2.18.Önerme: Her ideal bir aşağı kümedir.

2.2.14.Tanım: L bir latis ve $a \in L$ olmak üzere, $L(a) = \{x: x \leq a\}$ kümesi, L içinde bir idealdir ve bu ideale temel (esas) ideal denir.

2.2.19.Önerme: Sonlu bir latiste boştan farklı her ideal temel idealdir.

2.2.15.Tanım: Cebirsel bir A sistemi üzerinde tanımlı bir Q denklik bağıntısına kongrüans (congruence) bağıntısı denir.

Eğer A cebirsel sistemi, bir $\vee$- yarılatis ise, "$\forall x \in A$ için, $a \equiv b \bmod(Q) \Rightarrow a \vee x = b \vee x$" (*) anlamındadır.

2.2.20.Önerme: J, $\vee$- yarılatis ve S' de bir ideal olsun. O halde

"$a \equiv b \bmod(J) \Leftrightarrow a \vee d = b \vee d$ olacak şekilde bir $d \in J$ vardır" (**) bağıntısı S üzerinde bir kongrüans bağıntısıdır.

Kanıt: Öncelikle (**) ifadesinin denklik bağıntısı olduğu açıktır ve bu ifade $\vee$ işlemi ile kongrüans bağıntısıdır. Çünkü;

$a \vee d = b \vee d \Rightarrow (a \vee c) \vee d = (b \vee c) \vee d$ dır. Buradan

$a \equiv b \bmod(J) \Rightarrow (a \vee c) \equiv (b \vee c) \bmod(J)$ olduğundan bu bağıntı $\vee$ işlemi ile bir kongrüans bağıntısıdır.

2.2.16.Tanım: L bir latis olmak üzere,

(a) L latisinin bir P ideali, "$a \wedge b \in P \Rightarrow a \in P$ veya $b \in P$" koşulunu sağlıyor ise P' ye asal idealdir denir.

(b) $P \subset L$ şeklindeki ideallere öz (proper) ideal denir. Benzer şekilde $S \subset L$ şeklindeki süzgeçlere öz (proper) süzgeç denir.

(c) J bir öz ideal olmak üzere, $J \subseteq A \subseteq L$ şeklindeki $\forall A$ ideali için $A = J$ ya da $A = L$ ise J idealine maksimal ideal denir.

2.2.21.Önerme: Boş olmayan bir A Boolean latisinde, P bir ideal olsun. Bu durumda, P asaldır ancak ve ancak P maksimaldir.

Kanıt: ($\Rightarrow$): P, A'nın bir asal ideali olsun. O halde $\forall a \in P$ için $a \wedge a' = 0$ olduğundan $a' \notin P$ dir. Buradan anlaşılıyor ki, P asal ideal olduğundan, P, bu latisteki elemanların kendilerini veya tümleyenlerini içerir. Şimdi $J \supset P$ olacak şekilde bir J öz ideali alınsın. Bu durumda P' deki en az bir a elemanı için $a, a' \in J$ olmak zorundadır ve ideal tanımı gereği, $a \vee a' = 1 \in J$ dir. Böylece ideal tanımı gereği $J = A$ bulunur ve buradan P maksimal ideal olur.

($\Leftarrow$): M, A'da bir maksimal ideal olsun ve $(x \wedge y) \in M$, $x \notin M$ olacak şekilde $x, y \in A$ alınsın. $x \vee M \supset M$ dir ve M maksimal ideal olduğundan $x \vee M = A$ dır. Ayrıca $1 \in A$ olduğundan bu durumda $x \vee z = 1$ olacak şekilde bir $z \in M$ vardır. Buradan $y = y \wedge 1 = y \wedge (x \vee z) = (y \wedge x) \vee (y \wedge z) \in M \vee M = M$ dir. Dolayısıyla $y \in M$ olup, M asal idealdir.

Şimdi latislerde dağılımlılık ve modülerlik kavramları daha detaylı olarak incelenecektir.

2.2.22.Önerme: L bir modüler latis, x ve y karşılaştırılabilir elemanlar olmak üzere; $x = y$ olması için gerek ve yeter koşul $\forall a \in L$ için $a \wedge x = a \wedge y$ ve $a \vee x = a \vee y$ olmasıdır.

Kanıt: L bir modüler latis, x ile y karşılaştırılabilir olmak üzere, $a \wedge x = a \wedge y$, $a \vee x = a \vee y$ olacak şekilde $x, y \in L$ alınsın. Eğer $x \geq y$ ve aksine $x \neq y$ ise $x > y$ dir. Burada $\{a, x, y\}$ 2.2.1.Örnek' te verildiği gibi modüler olmayan bir latistir, ki bu bir çelişkidir. İspatın diğer yönü duallik kullanılarak kolayca gösterilebilir.

2.2.23.Önerme: Bir L latisinin dağılımlı olması için gerek ve yeter koşul, $\forall a, x, y \in L$ için "$(a \wedge x = a \wedge y$ ve $a \vee x = a \vee y) \Rightarrow x = y$" koşulunun sağlanmasıdır.

Bir Boolean B latisi, tümleyensel dağılımlı bir latis olarak tanımlandı. Tanım gereği böyle bir latiste $1 \in B$ ve $0 \in B$ olmak zorundadır.

2.2.24.Önerme: Bir L latisi verilsin. L'deki her elemanın, tek bir tersi var ve (L9) koşulunu sağlıyor ise, L bir Boolean latistir.

Kanıt: L latisi önermedeki koşulları sağlasın. İlk olarak $a \in L$ alınsın. Böylece $(a')' = a$ olduğu bilinmektedir. L latisinin dağılımlı olduğunu göstermek için öncelikle

(8) "$b \geq a \Rightarrow (b \wedge a') \vee a = b$" ifadesinin doğru olduğu gösterilecektir. $b \geq a$ olsun ve $c = b \wedge a'$ olarak tanımlansın. Şimdi $c \leq a'$ olduğundan $c \wedge a \leq a' \wedge a = 0$ dır ve dolayısıyla $c \wedge a = 0$ olur. Diğer taraftan, $0 = (b' \vee a) \wedge (b \wedge a') = [(b' \vee a) \wedge a'] \wedge b$ sağlanır. Burada $(b' \vee a) \wedge a' = (b \wedge a')' \wedge a' = ((b \wedge a') \vee a)' = (c \vee a)'$ olduğundan $0 = (c \vee a)' \wedge b$ olur. Ayrıca $c \vee a = (b \wedge a') \vee a \leq b \vee a = b$ dir. Böylece $(c \vee a)' \vee b \geq b \wedge b = 1$ elde edilir. Sonuç olarak $(c \vee a)' \wedge b = 0$ ve $(c \vee a)' \vee b = 1$ olduğundan b, $(c \vee a)'$ elemanının tümleyenidir. O halde $b = (b')' = ((c \vee a)')' = c \vee a = (b \wedge a') \vee a$ olmalıdır.

Şimdi 2.2.23.Önermeyi kullanarak L latisinin dağılımlı olduğunu gösterelim. Öncelikle keyfi $x, y \in L$ için $a = x \wedge y$, $b = x \vee y$, $e = a' \vee (x \wedge a')$ olarak tanımlansın. İlk olarak $y = a \vee y = b \wedge y$ olduğu açıktır. Ayrıca (L4), (8) ve (8)'nin duali kullanılarak aşağıdakiler elde edilebilir.

$e \vee y = b' \vee (x \wedge a') \vee a \vee y = b' \vee [(x \wedge a') \vee a] \vee y = b' \vee x \vee y = b' \vee b = 1$
$e \wedge y = b' \wedge (x \wedge a') \wedge b \wedge y = ([(x \wedge a') \vee b] \wedge b) \wedge y = x \wedge a' \wedge y = a' \wedge a = 0$ dır. $(x \wedge a' \wedge b' = 0 \Rightarrow x \wedge a' \leq b)$. O halde y, e'nin tümleyenidir ve tanım gereği tektir. Benzer şekilde x'in, e'nin tümleyeni olduğu gösterilebilir ve böylece varsayım gereği $x = y$ dir. Sonuç olarak $e \vee y = e \vee x$ ve $e \wedge y = e \wedge x \Rightarrow x = y$ olduğundan 2.2.23.Önerme gereği, L dağılımlı bir latistir. Ayrıca L aynı zamanda tümleyenli bir latis olduğundan, bir Boolean latisi de olur.

2.2.17.Tanım: Bir L latisi, $\forall a, b \in L$ için $a \wedge x \leq b$ olan bütün x'lerin en büyüğü, "b:a" elemanını da içeriyorsa, L latisine ko-Heyting (Brouwerian) latisi denir. Ayrıca b:a' ya göreceli yarı tümleyen eleman denir.

Herhangi bir B Boolean cebirinde $a \wedge x = 0$ eşitliğini sağlayan x'lerin en büyüğü a' dır. Genel olarak $a \wedge x \leq b \Leftrightarrow a \wedge x \wedge b' = 0$ dır. O halde $(a \wedge b') \wedge x = 0$ ya da $x \leq (a \wedge b')' = b \vee a'$ olur. Böylece a ve b elemanı verildiğinde $a \wedge c \leq b$ olan en büyük c elemanı $c = b \vee a'$ dır.

2.2.25.Önerme: Herhangi bir ko-Heyting latisi dağılımlıdır.

Bir dağılımlı tam latisin, bütün açık alt kümelerinden oluşan topolojik uzay aynı zamanda bir ko-Heyting latisidir, fakat bir dağılımlı tam latisin, bütün kapalı alt kümelerinden oluşan topolojik uzay latisi ko-Heyting değildir: Çünkü F kapalı bir küme olmak üzere $F \wedge x = \emptyset$ şartını sağlayan en büyük kapalı küme yoktur. Böylece her dağılımlı latis, ko-Heyting değildir.

2.2.18.Tanım: L bir latis ve $0 \in L$ olmak üzere 0:a elemanına a' nın yarı tümleyeni denir ve a^* ile gösterilir.

2.2.26.Önerme: Dağılımlı latislerde, her tümleyen bir yarı tümleyendir.

Kanıt: Tümleyen ve yarı tümleyen tanımları kullanılarak kolayca görülebilir.

2.2.19.Tanım: L bir latis ve $C \subseteq L$ alt kümesi verilsin. Eğer $\forall x \in L$, C'nin elemanlarının supremumu olarak ifade edilebiliyorsa C' ye bir tabandır denir.

Şimdi kategori teoriyle ilgili bazı tanım ve özelliklerden bahsedilecektir.

2.2.20.Tanım: Bir $\mathcal{C}$ sistemi verilsin. $\mathcal{C}$ sisteminin,

Objeler sınıfı: $\mathcal{C}$' nin tüm elemanlarından oluşan sınıfa, objeler sınıfı denir ve obj$\mathcal{C}$ ile gösterilir.

Morfizmalar sınıfı: obj$\mathcal{C}$' den alınacak $\forall$A, B çifti için A ile B arasında belirli yapıları koruyan dönüşümlere morfizma denir. Ayrıca A'dan B'ye giden tüm morfizmalar sınıfı $Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$ ile gösterilir ve morfizmalar aşağıdaki özelliklere sahiptir;

$f \in Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$, $g \in Mor_{\mathcal{C}}(B, C)$ morfizma çifti için (g o f) bileşke işlemi vardır ve bileşke işlemi birleşme özelliğini sağlar, yani $f \in Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$, $g \in Mor_{\mathcal{C}}(B, C)$, $h \in Mor_{\mathcal{C}}(C, D)$ olmak üzere h o (g o f) = (h o g) o f 'dir.

$\forall A \in obj\mathcal{C}$, $\forall f \in Mor_{\mathcal{C}}(B, A)$ ve $\forall g \in Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$ için 1_A o f = f ve g o 1_A = g olacak şekilde A' dan A' ya, 1_A ile göstereceğimiz birim morfizma vardır.

Yukarıda verilen özelliklere sahip iki sınıfı varsa, $\mathcal{C}$ sistemine bir kategori denir.

2.2.5.Örnek: Top olarak isimlendirilen topolojik uzaylar kategorisi, objeler sınıfı bütün topolojik uzaylar, morfizmalar sınıfı bu topolojik uzaylar arasındaki sürekli fonksiyonlar olan bir kategoridir.

2.2.21.Tanım: Bir $\mathcal{C}$ kategorisi verilsin ve $A, B \in \mathcal{C}$ nesneleri için $f: A \rightarrow B$, $\mathcal{C}$' de bir morfizma olsun. Eğer $\mathcal{C}$ kategorisinde f o g = f o h koşulunu sağlayan $\forall$g, h morfizma çifti için g = h ise f morfizmasına bir monomorfizma denir. Dual olarak, g o f = h o f koşulunu sağlayan $\forall$g, h morfizma çifti için g = h ise f morfizmasına bir epimorfizma denir.

2.2.22.Tanım: Bir $\mathcal{C}$ kategorisi ve bu kategoride bir m monomorfizması verilsin. m = m o e şartını sağlayan her e epimorfizması, bir izomorfizma oluyorsa m morfizmasına bir ekstremal monomorfizma denir. Dual olarak,

$\mathcal{C}$ kategorisinde bir e epimorfizması verilsin. e = m o e şartını sağlayan her m monomorfizması, bir izomorfizma oluyorsa e epimorfizmasına ekstremal epimorfizma denir.

f bir $\mathcal{C}$ kategorisinde ekstremal monomorfizmadır ancak ve ancak f, $\mathcal{C}^{op}$ kategorisinde ekstremal epimorfizmadır.

2.2.23.Tanım: $\mathcal{A}$ ile $\mathcal{D}$ birer kategori olarak verilsin. $\mathcal{A}$'daki $\forall$A nesnesini, $\mathscr{B}$' deki F(A) nesnesine götüren ve $A, A' \in obj\mathcal{A}$ için $\forall(f: A \rightarrow A') \in Mor_{\mathcal{A}}(A, A')$ morfizmasını $(F(f): F(A) \rightarrow F(A')) \in Mor_{\mathcal{D}}(F(A), F(A'))$ morfizmasına götüren, $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{D}$ dönüşümüne bir funktor denir ve aşağıdaki özellikleri sağlar:

$F(1_A) = 1_{F(A)}$ ve g o f tanımlı ise F(g o f) = F(g) o F(f) dir.

2.2.24.Tanım: $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ kategorileri ve F: $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funktoru verirsin. Eğer $\forall$f: A → B morfizması için F(f): F(A) → F(B) ise F'ye kovaryant funktor, F(f): F(B) → F(A) ise F'ye kontravaryant funktor denir.

2.2.25.Tanım: $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ birer kategori ve F, G: $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ iki funktor olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikleri sağlayan bir n: F → G dönüşümüne doğal dönüşüm denir.

(i) $\forall$A ∈ obj$\mathcal{C}$ için n(A): F(A) → G(B) bir morfizmadır,

(ii) Bir f: A → A′ morfizması için,

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "n"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(A') \arrow[r, "n(A')"] & G(A') \end{tikzcd}$$

diyagramı $\mathcal{D}$ 'de değişmelidir. Eğer n(A) bir izomorfizma ise n'ye bir doğal denklik denir. Ve F ≅ G ile gösterilir.

2.2.26.Tanım: $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ kategorileri ve L: $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ve R: $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funktorları verilsin. Eğer $\varepsilon_{A,B}$: $\mathcal{D}$(L(A), B) ≅ $\mathcal{C}$(A, R(B)) şeklinde bir doğal denklik var ise L ve R funktorlarına adjointtir denir ve L, R'nin sağ adjointi, R'de L'nin sol adjointi olarak adlandırılır, yani $\varepsilon_{A,B}$ tersinir bir dönüşümdür ve $\forall$f: A′ → A, $\forall$g: B → B′ için aşağıdaki diyagram değişmelidir.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}(L(A), B) \arrow[r, "\varepsilon_{A,B}"] \arrow[d, "\mathcal{D}(L(f), g)"'] & \mathcal{C}(A, R(B)) \arrow[d, "\mathcal{C}(f, R(g))"] \\ \mathcal{D}(L(A'), B') \arrow[r, "\varepsilon_{A',B'}"] & \mathcal{C}(A', R(B')) \end{tikzcd}$$

Daha açık ifade edilmek istenirse, her bir ϕ: L(A) → B için

R(g). $\varepsilon_{A,B}$(ϕ).f = $\varepsilon_{A',B'}$(g. ϕ.L(f)) dır. .... (ε)

$((A' \xrightarrow{f} A) \xrightarrow{\varepsilon_{A,B}} (R(B) \xrightarrow{R(g)} R(B'))$ ve

$L(A') \xrightarrow{L(f)} (L(A) \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{g} B') \xrightarrow{\varepsilon_{A',B'}} (B' \to R(B')))$ dır. ε'nın tersi $\overline{\varepsilon}$ şeklinde ifade edilirse, φ: A → R(B) olmak üzere,

g.$\overline{\varepsilon}_{A,B}$(φ).L(f) = $\overline{\varepsilon}_{A',B'}$(R(g), φ,f) ....($\overline{\varepsilon}$)

$$((L(A') \xrightarrow{L(f)} L(A) \xrightarrow{\overline{\varepsilon}_{A,B}} (B \xrightarrow{g} B') \text{ ve}$$

$$(A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{\varphi} R(B) \xrightarrow{R(g)} R(B')) \xrightarrow{\varepsilon_{A',B'}} (L(A') \to B')) \text{ dır.}$$

2.2.27.Tanım: 2.2.26.Tanım'daki gibi bir doğal denklik ile bir adjankşın verilsin.

$\sigma_B = \overline{\varepsilon}_{R(B),B}(id_{R(B)})$: $LR(B) \to B$, ... (σ)

$\lambda_A = \varepsilon_{A,L(A)}(id_{L(A)})$: $A \to RL(A)$ .... (λ) olarak tanımlanırlar. Verilen bu morfizma sistemleri, aşağıdaki doğal dönüşümleri oluşturur.

$\sigma = (\sigma_B)_B : LR \to Id_{\mathcal{D}}$ ve $\lambda = (\lambda_A)_A : Id_{\mathcal{C}} \to RL$ ve aşağıdaki diyagramlar değişmelidir.

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "L_\lambda"] \arrow[dr, "id"'] & LRL \arrow[d, "\sigma_L"] \\ & L \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} R \arrow[r, "\lambda_R"] \arrow[dr, "id"'] & RLR \arrow[d, "R_\sigma"] \\ & R \end{tikzcd}$$

$\sigma = (\sigma_B)_B : LR \to Id_{\mathcal{D}}$ ve $\lambda = (\lambda_A)_A : Id_{\mathcal{C}} \to RL$ doğal dönüşümlerine adjankşının birimleri denir.

3. ÇATI VE LOKAL TEORİSİ

Bu bölümde çatı, lokal, açık-kapalı alt lokal kavramları ve bu kavramların topolojik uzaylarla olan ilişkileri incelenecektir. Tez boyunca tüm topolojik uzayların T_0 olduğu kabul edilecektir.

3.1. Heyting Cebirleri ve Sober Uzaylar

Bu kesimde, Heyting cebirleri ve sober uzaylar ile ilgili tanımlar ve bazı özellikler verilecektir. Konu hakkında daha detaylı bilgiye [1, 4, 5, 6, 11, 14] nolu kaynaklardan ulaşılabilir.

Burada ilk olarak, çatı ve lokal tanımları için gerekli olan bazı kavramlardan bahsedilecektir. Ayrıca sober uzaylar ayırma aksiyomları kesiminde detaylı olarak incelenecektir.

3.1.1.Notasyon: Tez boyunca bir X uzayının tüm açık kümelerinden oluşan ve birleşim ve kesişim işlemleri ile bir latis olan aile $\Omega(X)$ ile gösterilecektir.

3.1.1.Tanım: $(L, \leq)$, $(M, \leq)$ birer kısmi sıralı küme ve $f: L \to M$, $g: M \to L$ monoton dönüşümler olsun. Eğer $\forall x \in L$ ve $\forall y \in M$ için "$f(x) \leq y \Leftrightarrow x \leq g(y)$" özelliği sağlanıyorsa f ve g' ye, bir

Galois adjoint veya (f, g) ikilisine, bir adjoint çiftidir denir. Buradaki f, g' nin bir sol adjointi ve g, f' nin bir sağ adjointi olarak adlandırılır. Ayrıca bir f dönüşümünün sağ adjointi f_*, sol adjointi ise f^* şeklinde gösterilir. Ek olarak sağ (sol) adjoint varsa, bunlar tektir.

3.1.1.Önerme: $(L, \leq)$, $(M, \leq)$ birer kısmi sıralı küme ve $f: L \to M$, $g: M \to L$ birer monoton dönüşüm olsun. Bu durumda (f, g)'nin bir adjoint çifti olması için gerek ve yeter koşul $\forall x \in L$, $\forall y \in M$ için $(f \circ g)(y) \leq y$ ve $x \leq (g \circ f)(x)$ eşitsizliklerinin sağlanmasıdır.

Kanıt: (⇒): $f: L \to M$, $g: M \to L$ monoton dönüşümleri adjoint olsun. Burada $\forall y \in M$ için $g(y) \in L$ ve $g(y) \leq g(y)$ olduğundan, adjointlik gereği $(f \circ g)(y) \leq y$'dir. Benzer şekilde $\forall x \in L$ için $f(x) \in M$, $f(x) \leq f(x)$ g sol adjoint olduğundan $x \leq (g \circ f)(x)$'dir.

(⇐): $f: L \to M$, $g: M \to L$ birer monoton dönüşüm olsun ve $\forall x \in L$, $\forall y \in M$ için $(f \circ g)(y) \leq y$ ve $x \leq (g \circ f)(x)$ koşulları sağlansın. Eğer $f(x) \leq y$ ise g'nin monotonluğu ve $x \leq (g \circ f)(x)$ varsayımı kullanılarak $x \leq g(f(x)) \leq g(y)$ elde edilir. Diğer eşitsizlik de benzer şekilde gösterilebilir.

3.1.2.Önerme: $f: L \to M$, $g: M \to L$ monoton dönüşümleri bir adjoint çifti ise $f \circ g \circ f = f$ ve $g \circ f \circ g = g$ eşitlikleri sağlanır.

Kanıt: 3.1.1.Önermenin kanıtına benzer şekilde ispatlanabilir.

3.1.3.Önerme: Sol Galois adjointler supremumu, sağ Galois adjointler ise infimumu korur.

Kanıt: $f: M \to L$ ve $g: L \to M$ olmak üzere (f, g) bir adjoint çifti olsun. Şimdi sol adjointlerin supremumu koruduğu gösterilecektir: Eğer $s = \sup M$ ise f(s), f(M) için bir üst sınırdır. Şimdi f(M) için keyfi bir y üst sınırı alınırsa, $\forall m \in M$ için $f(m) \leq y$ olur. Buradan adjoint tanımı yardımıyla $m \leq g(y)$ elde edilir ve bu nedenle g(y), M'nin bir üst sınırıdır. O halde $s \leq g(y)$ ve böylece tanım gereği $f(s) \leq y$'dir. Sonuç olarak $f(s) = \sup(f(M))$ eşitliği sağlanır, yani f dönüşümü supremumu korur. Benzer olarak sağ adjointlerin infimumu koruduğu gösterilebilir.

3.1.4.Önerme: L, M tam latisleri verilsin. $f: L \to M$ monoton dönüşümünün sol adjoint olması için gerek ve yeter koşul f'nin keyfi supremumları korumasıdır.

Kanıt: (⇒): Bir önceki önermeden açıktır.

(⇐): $f: L \to M$ monoton dönüşümü supremumu korusun ve $g: M \to L$ dönüşümü, $g(y) = \sup\{x: f(x) \leq y\}$ olarak tanımlansın. Eğer $f(x) \leq y$ ise g(y)'nin tanımı gereği $x \leq g(y)$ olduğu açıktır. Eğer $x \leq g(y) = \sup\{x: f(x) \leq y\}$ ise f supremumu koruduğundan $f(x) \leq \sup\{f(x): f(x) \leq y\} \leq y$ ve $f(x) \leq y$ dir. Böylece f, g'nin sol adjointidir.

3.1.2.Tanım: L, 0' ı bulunduran bir $\wedge$- yarılatis ve L üzerinde "$c \leq a \longrightarrow b \iff c \wedge a \leq b$" koşulunu sağlayan bir "$\longrightarrow$" ikili işlemi tanımlansın. Bu durumda L'ye bir Heyting yarılatis, "$\longrightarrow$" işlemine ise bir Heyting işlemi denir. L ayrıca sınırlı bir latis ise bir Heyting cebiri olarak adlandırılır. Özel olarak b = 0 alınırsa, L'nin $a^* = a \longrightarrow 0$ elemanı ile bir yarı tümleyenli latis olduğu görülebilir.

$g(x) = a \rightarrow x$ ve $f(x) = a \wedge x$ olmak üzere, f ve g dönüşümleri monotondur. Gerçekten $b_1 \leq b_2$ ise $a \longrightarrow b_1 \leq a \longrightarrow b_1 \Rightarrow (a \longrightarrow b_1) \wedge a \leq b_1 \leq b_2 \Rightarrow (a \longrightarrow b_1) \wedge a \leq b_2 \Rightarrow (a \longrightarrow b_1) \leq (a \longrightarrow b_2)$ dir. $b_1 \leq b_2$ iken $a \wedge b_1 \leq a \wedge b_2$ olduğu açıktır. Ayrıca "$c \leq a \longrightarrow b \Leftrightarrow c \wedge a \leq b$" ifadesinden (f, g) bir adjoint çiftidir.

3.1.1.Sonuç: H, bir Heyting latisi ve $a, b_i \in H$ olmak üzere,

$a \longrightarrow \bigwedge_{i\in J} b_i = \bigwedge_{i\in J} (a \longrightarrow b_i)$ ………………($\wedge$- distr)

özelliği sağlanır. Bu durum, bir sağ adjoint olan $g(x) = a \rightarrow x$ dönüşümünün keyfi infimum işlemini korumasının açık bir sonucudur.

3.1.5.Önerme: Heyting latisindeki Heyting işlemi $\longrightarrow$, ilk değişkenin sırasını tersine çevirir, yani L bir Heyting latisi olmak üzere, $x \leq y$ ise $\forall a \in L$ için $y \longrightarrow a \leq x \longrightarrow a$ dır.

Kanıt: L Heyting latisi olsun ve $x \leq y$ olacak şekilde keyfi $x, y \in L$ verilsin. Şimdi $z \leq y \longrightarrow a$ olacak şekilde $\forall z \in L$ için $z \wedge y \leq a$'dir. Diğer taraftan, $x \leq y$ olduğu için $z \wedge x \leq z \wedge y \leq a$'dir. Buradan $z \leq x \longrightarrow a$ olur ve dolayısıyla $y \longrightarrow a \leq x \longrightarrow a$ elde edilir.

3.1.2.Sonuç: Galois adjankşın formülünde $\wedge$ işleminin değişme özelliği kullanılarak

$a \leq b \longrightarrow c \Leftrightarrow a \wedge b \leq c \Leftrightarrow b \wedge a \leq c \Leftrightarrow b \leq a \longrightarrow c$

gerektirmeleri elde edilebilir.

3.1.6.Önerme: L bir Heyting latisi olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır:

(H1) $1 \in L$ dir ve $\forall a \in L$ için $1 \longrightarrow a = a$,

(H2) $a \leq b \Leftrightarrow a \longrightarrow b = 1$,

(H3) $a \leq b \longrightarrow a$,

(H4) $a \longrightarrow b = a \longrightarrow (a \wedge b)$,

(H5) $a \wedge (a \longrightarrow b) = a \wedge b$,

(H6) $a \wedge b = a \wedge c \Leftrightarrow a \longrightarrow b = a \longrightarrow c$,

(H7) $(a \wedge b) \longrightarrow c = a \longrightarrow (b \longrightarrow c)$ ve $a \longrightarrow (b \longrightarrow c) = b \longrightarrow (a \longrightarrow c)$,

(H8) $a = (a \vee b) \wedge (b \longrightarrow a)$,

(H9) $a \leq (a \longrightarrow b) \longrightarrow b$,

(H10) $((a \longrightarrow b) \longrightarrow b) \longrightarrow b = a \longrightarrow b$.

Kanıt:(H1) Keyfi bir $x \in L$ seçilsin. $\forall a \in L$ için, $a \wedge x \leq x \Leftrightarrow a \leq x \longrightarrow x$ dir. Buradan $x \longrightarrow x = 1$ ve böylece $1 \in L$' dir. Diğer taraftan $\forall y \in L$ için, $y \leq 1 \longrightarrow a \Leftrightarrow y = y \wedge 1 \leq a$ olduğundan $a = 1 \longrightarrow a$' dır.

(H2) Keyfi $a, b \in L$ için "$a \leq b \Leftrightarrow a = 1 \wedge a \leq b \Leftrightarrow 1 \leq a \longrightarrow b$" gerektirmeleri sağlanır ve böylece $a \longrightarrow b = 1$ elde edilir.

(H3) Keyfi $a, b \in L$ alınsın. $a \wedge b \leq a \Rightarrow a \leq b \longrightarrow a$ olur.

(H4) Keyfi $a, b \in L$ alınsın. $a \longrightarrow \bigwedge_{i \in J} b_i = \bigwedge_{i \in J} (a \longrightarrow b_i)$ eşitliği kullanılırsa $a \longrightarrow a \wedge b = (a \longrightarrow a) \wedge (a \longrightarrow b) = 1 \wedge (a \longrightarrow b) = (a \longrightarrow b)$ elde edilir.

(H5) Keyfi $a, b \in L$ için $a \longrightarrow b \leq a \longrightarrow b \Rightarrow (a \longrightarrow b) \wedge a \leq b \Rightarrow (a \longrightarrow b) \wedge a \leq a \wedge b$ sağlanır. Diğer taraftan (H3) özelliği kullanılarak, $b \leq a \longrightarrow b \Rightarrow a \wedge b \leq (a \longrightarrow b) \wedge a$ elde edilir. O halde $a \wedge (a \longrightarrow b) = a \wedge b$ 'dir.

(H6) $a \wedge b = a \wedge c$ olacak şekilde $a, b, c \in L$ verilsin. Buradan $\forall y \in L$ için, $y \leq a \longrightarrow b \Leftrightarrow a \wedge y \leq (a \longrightarrow b) \wedge a = a \wedge b = a \wedge c \Leftrightarrow y \leq a \longrightarrow (a \wedge c) = a \longrightarrow c \Leftrightarrow y \leq a \longrightarrow c$ dir. Böylece $a \longrightarrow b = a \longrightarrow c$ bulunur. Şimdi $a \longrightarrow b = a \longrightarrow c$ olacak şekilde $a, b, c \in L$ verilsin. $a \longrightarrow b \leq a \longrightarrow c \Leftrightarrow a \wedge (a \longrightarrow b) = a \wedge b \leq c \Leftrightarrow a \wedge b \leq a \wedge c$ dir. Benzer şekilde $a \wedge c \leq a \wedge b$ olduğu gösterilebilir. Böylece $a \wedge b = a \wedge c$ elde edilir.

(H7) Keyfi $a, b, c \in L$ verilsin. $x \leq (a \wedge b) \longrightarrow c \Leftrightarrow x \wedge a \wedge b \leq c \Leftrightarrow x \wedge a \leq b \longrightarrow c \Leftrightarrow x \leq a \longrightarrow (b \longrightarrow c)$ dir. O halde $\wedge$ işleminin değişme özelliği gereği, $(a \wedge b) \longrightarrow c = (b \wedge a) \longrightarrow c \Rightarrow a \longrightarrow (b \longrightarrow c) = b \longrightarrow (a \longrightarrow c)$ bulunur.

(H8) Keyfi $a, b \in L$ alınsın. $a \leq a \vee b$ ve (H3) gereği $a \leq b \longrightarrow a$ olduğundan $a \leq (a \vee b) \wedge (b \longrightarrow a)$ elde edilir. Diğer yönü göstermek için (H3) kullanılarak, $(a \vee b) \wedge (b \longrightarrow a) = (a \wedge (b \longrightarrow a)) \vee (b \wedge (b \longrightarrow a)) \leq a \vee a = a$ elde edilir.

(H9) Verilen keyfi $a, b \in L$ elemanları için, $a \wedge (a \longrightarrow b) \leq b \Rightarrow a \leq (a \longrightarrow b) \longrightarrow b$ dir.

(H10) Keyfi $a, b \in L$ verilsin, (H9) gereği, $a \leq (a \longrightarrow b) \longrightarrow b \Rightarrow ((a \longrightarrow b) \longrightarrow b) \longrightarrow b \leq a \longrightarrow b$ bulunur. Diğer yön için, (H9)'da a yerine $a \longrightarrow b$ yazılırsa, $a \longrightarrow b \leq ((a \longrightarrow b) \longrightarrow b) \longrightarrow b$ elde edilir. Böylece $((a \longrightarrow b) \longrightarrow b) \longrightarrow b = a \longrightarrow b$ bulunur.

3.1.7.Önerme: L bir Heyting latisi ve I bir indis kümesi olmak üzere, $\forall a_i, b \in L$ için

$\bigvee_{i\in I} a_i \longrightarrow b = \bigwedge_{i\in J} (a_i \longrightarrow b)$ eşitliği sağlanır.

Kanıt: $\forall i \in I$ için $a_i \leq \bigvee_{i\in I} a_i$ olduğundan $b \in L$ için $\bigvee_{i\in I} a_i \longrightarrow b \leq a_i \longrightarrow b$ dir. Böylece $\forall i \in I$ için $\bigvee_{i\in I} a_i \longrightarrow b \leq \bigwedge_{i\in J} (a_i \longrightarrow b)$ olur. Diğer yön için, $z \leq a_i \longrightarrow b$ şartını sağlayan $\forall z \in L$ için $z \leq a_i \longrightarrow b \Rightarrow a_i \leq z \longrightarrow b \Rightarrow \bigvee_{i\in I} a_i \leq z \longrightarrow b \Rightarrow z \leq \bigvee_{i\in I} a_i \longrightarrow b$ dir. O halde $\bigwedge_{i\in J} (a_i \longrightarrow b) \leq a_i \longrightarrow b \leq \bigvee_{i\in I} a_i \longrightarrow b$ olur ve böylece $\bigvee_{i\in I} a_i \longrightarrow b = \bigwedge_{i\in J} (a_i \longrightarrow b)$ elde edilir.

3.1.8.Önerme: Her Heyting cebiri dağılımlı bir latistir.

Kanıt: 3.1.1.Tanım ve 3.1.3.Önerme kullanılarak kolayca görülebilir.

3.1.9.Önerme: Her Boolean cebiri bir Heyting cebiridir.

Kanıt: 2.2.26.Önerme'den dağılımlı latislerde, her tümleyenin bir yarı tümleyen olduğu biliniyor. Şimdi $c \leq a \longrightarrow b \Leftrightarrow c \wedge a \leq b$ olduğunu gösterelim. Öncelikle $a \longrightarrow b = a^* \vee b$ olarak tanımlansın ve $c \leq a \longrightarrow b$ olsun. $c \wedge a \leq (a^* \vee b) \wedge a = (a^* \wedge a) \vee (b \wedge a) = (b \wedge a) \leq b \Rightarrow c \wedge a \leq b$ dir. Diğer taraftan, $c \wedge a \leq b$ olsun. Buradan $c = c \wedge (a \vee a^*) = (c \wedge a) \vee (c \wedge a^*) \leq b \vee a^* = a \longrightarrow b \Rightarrow c \leq a \longrightarrow b$ dir. O halde $c \leq a \longrightarrow b \Leftrightarrow c \wedge a \leq b$ dır.

3.1.3.Tanım: Herhangi bir $\Omega(X)$ latisinde, $X \setminus \overline{\{x\}}$ formundaki elemanlar "$U \cap V \subseteq X \setminus \overline{\{x\}} \Rightarrow U \subseteq X \setminus \overline{\{x\}}$ veya $V \subseteq X \setminus \overline{\{x\}}$" özelliğine sahiptir ve bu özellikteki elemanlar, $\wedge$- indirgenemez açık kümeler olarak adlandırılır.

Eğer $\Omega(X)$'de $X \setminus \overline{\{x\}}$'den farklı $\wedge$- indirgenemez açık küme yoksa, X uzayına sober uzayı denir, diğer bir deyişle, her $\wedge$- indirgenemez $U \in \Omega(X)$ kümesi için $U = X \setminus \overline{\{x\}}$ olacak şekilde bir x varsa, X uzayı sober uzaydır denir.

3.1.4.Tanım: L bir latis ve F bir öz süzgeç olsun. Eğer "$(a_1 \vee a_2) \in F \Rightarrow a_1 \in F$ veya $a_2 \in F$" koşulu sağlanıyorsa F' ye asal süzgeç denir. Ayrıca $\forall\{a_i \in L: i \in J\}$ ailesi için "$\bigvee_{i\in J} a_i \in F \Rightarrow \exists i \in J$ için $a_i \in L$" gerektirmesi sağlanıyorsa F' ye tamamen asal süzgeç denir.

Bir $x \in X$ noktasının açık kümelerinden oluşan $\mathcal{U}(x) = \{U \in \Omega(X): x \in U\}$ ailesi $\Omega(X)$ latisinde bir tamamen asal süzgeçtir.

3.1.10.Önerme: X uzayının sober olması için gerek ve yeter koşul $\Omega(X)$' deki tamamen asal süzgeçler ile $\mathcal{U}(x)$ süzgeçleri arasında bir bire-bir ilişki olmasıdır.

Kanıt:($\Rightarrow$): X uzayı sober, $\mathcal{F}$ ailesi $\Omega(X)$' de bir tamamen asal süzgeç olsun. Öncelikle $W = \cup\{U \in \Omega(X): U \notin \mathcal{F}\}$ olarak tanımlanan W kümesinin $\wedge$- indirgenemez olduğu gösterilecektir: İlk olarak tamamen asallık özelliğinden $W \notin \mathcal{F}$ dir. O halde $X \in \mathcal{F}$ olduğundan $W \neq X$ dir. Şimdi $(V_1 \cap V_2) \subset W$ olacak şekilde V_1, V_2 alınsın. Tanım gereği V_1 ve V_2 aynı anda $\mathcal{F}$'nin elemanı olamaz. Genelliği bozmadan $V_1 \notin \mathcal{F}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $V_1 \subseteq W$ ve böylece W, $\wedge$- indirgenemezdir. O halde, X sober olduğundan $W = X \setminus \overline{\{x\}}$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır. Sonuç olarak

$U \notin \mathcal{F} \Leftrightarrow U \subseteq W = X \setminus \overline{\{x\}} \Leftrightarrow x \notin U \Leftrightarrow U \notin \mathcal{U}(x)$ ve böylece $\mathcal{U}(x) = \mathcal{F}$ dir.

($\Leftarrow$): Bir X uzayındaki tamamen asal süzgeçler ile $\mathcal{U}(x)$ süzgeçleri arasında bir bire-bir ilişki olsun fakat aksine X uzayı sober olmasın. O halde $\forall x \in X$ için $X \setminus \overline{\{x\}}$'den farklı olan açık ve $\wedge$- indirgenemez bir W kümesi vardır. Şimdi $\mathcal{F} = \{U \in \Omega(X): U \nsubseteq W\}$ biçiminde tanımlanan ailenin $\Omega(X)$'de tamamen asal bir süzgeç olduğu gösterilecektir: Bunun için $\cup_{i\in J}U_i \in \mathcal{F}$ olacak şekilde $\{U_i \in \Omega(X): i \in J\}$ ailesi alınsın. Öncelikle tanımdan $\cup_{i\in J}U_i \nsubseteq W$ dir ve böylece $U_i \nsubseteq W$ olacak şekilde bir $i \in J$ vardır. Dolayısıyla $U_i \in \mathcal{F}$ olup $\mathcal{F}$ tamamen asal süzgeçtir. Fakat $\mathcal{F} = \mathcal{U}(x)$ olacak şekilde bir $x \in X$ yoktur. Çünkü, bu eşitliği sağlayan bir $x \in X$ olsaydı $(U \nsubseteq W \Leftrightarrow x \in U \Leftrightarrow U \nsubseteq X \setminus \overline{\{x\}}) \Rightarrow W = X \setminus \overline{\{x\}}$ çelişkisi elde edilirdi. Böylece X sober uzaydır.

3.1.3.Sonuç: L tam latisi, sober bir X uzayının açık kümeler latisine izomorf olsun. Bu durumda X uzayı, ($\{F$: F, L'de tamamen asal süzgeç$\}$, $\tau_L = \{\tilde{a} : a \in L\}$) uzayına homeomorftur. Burada $\tilde{a} = \{F: a \in F\}$ biçiminde tanımlıdır. O halde her X sober uzayı, bir latis ve tamamen latis teoriye ait olan kavramlar yardımıyla yeniden inşa edilebilir.

Şimdi bu sonuç daha detaylı bir şekilde incelenirse:

X uzayı sober ve $L \cong \Omega(X)$ olsun. Öncelikle 3.1.10 Önerme'den $\Omega(X)$' deki tüm tamamen asal süzgeçler $\mathcal{U}(x)$ formundadır. O halde $\{F$: F, L'de tamamen asal süzgeç$\} = \{\mathcal{U}(x): x \in X\}$ olur. Diğer taraftan, bir $a = U \in L \cong \Omega(X)$ alınırsa, $\widetilde{U} = \{\mathcal{U}(x): U \in \mathcal{U}(x)\}$ için $\tau_L = \{\widetilde{U}: U \in \mathcal{U}(x)\}$

olur. Ayrıca $x \in U \Leftrightarrow U \in \mathcal{U}(x)$ olduğundan $\widetilde{U} = \{\mathcal{U}(x) : x \in U\}$ olarak da ifade edilebilir. Sonuç olarak X uzayı ile 3.1.3.Sonuç'ta tanımlanan uzay arasında bir homeomorfizma tanımlanabilir.

3.1.11.Önerme: L, M birer tam latis ve $h: L \to M$, "$h(0) = 0$, $h(1) = 1$, $h(a \wedge b) = h(a) \wedge h(b)$, $h(\bigvee_{i \in J} a_i) = \bigvee_{i \in J} h(a_i)$" koşullarını sağlayan bir dönüşüm olsun. Bu durumda M' deki her F tamamen asal süzgeci için $h^{-1}(F)$, L' de bir tamamen asal süzgeçtir.

3.1.12.Önerme: Y bir sober uzay ve X keyfi bir topolojik uzay olsun. Bu durumda $f: X \to Y$ sürekli dönüşümleri ile 3.1.11.Önermenin koşullarını sağlayan $h: \Omega(Y) \to \Omega(X)$ dönüşümleri arasında $\Omega(f) = h$, $h(U) = \Omega(f)(U) = f^{-1}(U)$ olacak biçimde tanımlı bir bire-bir ilişki vardır.

Kanıt: $\Omega(f)$ dönüşümünün 3.1.11.Önermede verilen koşulları sağladığı açıktır. Şimdi bu koşulları sağlayan bir $h: \Omega(Y) \to \Omega(X)$ dönüşümü verilsin. Keyfi bir $x \in X$ için tamamen asal $\mathcal{U}(x)$ süzgecini ele alınsın. 3.1.11.Önerme gereği $h^{-1}(\mathcal{U}(x))$, $\Omega(Y)$'de tamamen asal bir süzgeçtir ve bu nedenle $h^{-1}(\mathcal{U}(x)) = \mathcal{U}(y)$ olacak şekilde bir $y \in Y$ vardır. Tüm uzaylar T_0 kabul edildiğinden bu $y \in Y$ tektir. Sonuç olarak keyfi bir $x \in X$ için bir ve yalnız bir y olduğundan iyi tanımlı bir $f(x) = y$ dönüşümü elde edilmiş olur. Ayrıca, $x \in h(V) \Leftrightarrow V \in h^{-1}(\mathcal{U}(x)) = \mathcal{U}(f(x)) \Leftrightarrow f(x) \in V \Leftrightarrow x \in f^{-1}(V)$ gerektirmeleri sağlandığından f süreklidir.

3.2. Çatılar ve Lokaller

Bu kesimde çatı ve lokal kavramları, bu kavramlara ilişkin bazı özellikler ve onlar yardımıyla inşa edilen yapılardan bahsedilecektir. Çatı ve lokal teorisi için [1, 2, 4, 6, 15, 21] nolu kaynaklar temel alınmıştır.

3.2.1.Tanım: L bir tam latis olmak üzere, $\forall A \subseteq L$ ve $\forall b \in L$ için

$(\bigvee A) \wedge b = \bigvee\{a \wedge b : a \in A\}$ özelliği sağlanıyorsa L' ye bir çatı (frame) denir. L ve M birer çatı olmak üzere keyfi supremum ve sonlu infimum işlemlerini koruyan $h: L \to M$ dönüşümüne bir çatı homomorfizması denir. Ayrıca, nesneleri çatılar, morfizmaları ise çatı homomorfizmaları olan kategori "**Frm**" ile gösterilir.

Boş kümenin açık kümelerinden oluşan latiste $0 = 1$ olduğundan, bu latis tek elemanlıdır $\mathbf{0} = \{0 = 1\}$ biçimindedir. Ayrıca tek nokta kümesi üzerinde tanımlı uzayın açık kümelerinin latisi, iki elemanlı bir Boolean cebiridir ve $\mathbf{2} = \{0 < 1\}$ biçiminde gösterilir.

3.2.2.Tanım: L bir tam latis olmak üzere, $\forall A \subseteq L$ ve $\forall b \in L$ için

$b \vee (\bigwedge A) = \bigwedge\{a \vee b : a \in A\}$ koşulu sağlanıyorsa L' ye bir ko-çatı denir.

L ve M birer ko-çatı olmak üzere keyfi infimum ve sonlu supremum işlemlerini koruyan $h: L \to M$ dönüşümüne bir ko-çatı homomorfizması denir.

3.2.3.Tanım: X, Y birer topolojik uzay ve $f: X \to Y$ bir sürekli dönüşüm olmak üzere, $\Omega(f): \Omega(Y) \to \Omega(X)$ dönüşümü bir çatı homomorfizması ve böylece Ω: **Top** → **Frm** bir kontravaryant funktordur.

3.2.4.Tanım: L bir çatı olmak üzere $L \cong \Omega(X)$ olacak şekilde bir X uzayı varsa, L' ye uzaysal çatı denir.

3.2.1.Sonuç: Çatıların dağılma özelliği yardımıyla $f(x) = x \wedge b$ dönüşümlerinin keyfi supremumları koruduğu görülebilir. O halde 3.1.4.Önerme gereği f bir sol Galois adjoint olur ve bu nedenle f'ye karşılık gelen bir sağ Galois adjoint vardır. Ona karşılık gelen $g(x) = b \longrightarrow x$ dönüşümü L' de bir Heyting işlemi üretir. Dolayısıyla her çatı bir tam Heyting cebiridir.

3.2.5.Tanım: L çatısı aynı zamanda bir Boolean cebiri ise L' ye bir Boolean çatısı denir. Boolean çatıları arasındaki çatı homomorfizmaları tam Boolean homomorfizmaları olarak adlandırılır.

Şimdiye kadar verilen bilgilerden, çatı teorisinin topolojik uzaylar teorisinden daha genel bir yapı olduğu açıkça görülebilir. Bu nedenle çatılar, topolojik uzayların noktadan bağımsız genelleştirmeleri olarak kabul edilebilir. Fakat Ω: **Top** → **Frm** funktoru kontravaryant bir funktor olduğundan, daha ideal bir genelleştirme elde etmek için **Frm** kategorisinin duali olan lokaller kategorisini tanımlama fikri ortaya konulmuştur. Şimdi, lokaller kategorisi ve bu kategorinin bazı özellikleri incelenecektir.

3.2.6.Tanım: Frm kategorisinin duali, **Frm**^{op} = **Loc** ile gösterilecektir. Çatı homomorfizmaları keyfi supremumları koruduğu için tek olarak tanımlanmış sağ adjointleri vardır. O halde **Loc** kategorisinin morfizmaları aşağıdaki özellikleri sağlayan $f: L \to M$ dönüşümleridir:

(1) Keyfi infimumları korur.

(2) f' nin sol adjointi olan $f^*: M \to L$ dönüşümü, sonlu $\wedge$ işlemini korur.

Loc kategorisinin morfizmalarına lokalik dönüşümler denir. Böylece **Loc**, nesneleri çatılar, morfizmaları ise lokalik dönüşümler olan kategoridir. Şimdi lokalik dönüşümlerin bazı özellikleri incelenecektir.

3.2.1.Önerme: f^*, $f: L \rightarrow M$ 'nin sol adjointi olsun. Bu durumda,

(a) $f^*(1) = 1 \Leftrightarrow f[L \setminus \{1\}] \subseteq M \setminus \{1\}$,

(b) f^* sonlu $\wedge$ işlemini korur $\Leftrightarrow f(f^*(a) \longrightarrow b) = a \longrightarrow f(b)$ dir.

Kanıt: (a) ($\Rightarrow$): $f^*(1) = 1$ olsun. f^*, f'nin sol adjointi olduğundan $1 = f^*(1) \leq x \Leftrightarrow 1 \leq f(x)$ gerektirmesi sağlanır. Şimdi $y \in f[L \setminus \{1\}]$ alınsın. Buradan $\exists x \in L \setminus \{1\}$ için $f(x) = y$ dir. Böylece $1 = f^*(1) \nleq x \Leftrightarrow 1 \nleq f(x) = y$ olduğundan $f(x) = y \in M \setminus \{1\}$ olur. Dolayısıyla $f[L \setminus \{1\}] \subseteq M \setminus \{1\}$ ifadesi sağlanır.

($\Leftarrow$): $f[L \setminus \{1\}] \subseteq M \setminus \{1\}$ sağlansın. f^*, f'nin sol adjointi olduğundan 3.1.1.Önerme gereği $1 \leq f(f^*(1))$ dir. Şimdi istenenin aksine $f^*(1) \neq 1$ olsun. O halde $f^*(1) \in L \setminus \{1\}$ ve dolayısıyla $f(f^*(1)) \in f[L \setminus \{1\}] \subseteq M \setminus \{1\}$ dir. Bu durumda $f(f^*(1)) \in M \setminus \{1\}$ çelişkisi elde edilir. Sonuç olarak $f^*(1) = 1$ dir.

(b) ($\Rightarrow$): f^* sonlu $\wedge$ işlemini korusun. O halde $x \leq f(f^*(a) \longrightarrow b) \Leftrightarrow f^*(x) \leq f^*(a) \longrightarrow b \Leftrightarrow f^*(x \wedge a) = (f^*(x) \wedge f^*(a)) \leq b \Leftrightarrow (x \wedge a) \leq f(b) \Leftrightarrow x \leq a \longrightarrow f(b)$ sağlanır. Dolayısıyla $f(f^*(a) \longrightarrow b) = a \longrightarrow f(b)$ elde edilir.

($\Leftarrow$): $f(f^*(a) \longrightarrow b) = a \longrightarrow f(b)$ ifadesi sağlansın. Şimdi $f^*(a \wedge b) \leq x \Leftrightarrow a \wedge b \leq f(x) \Leftrightarrow a \leq b \longrightarrow f(x) = f(f^*(b) \longrightarrow x) \Leftrightarrow f^*(a) \leq f^*(b) \longrightarrow x \Leftrightarrow f^*(a) \wedge f^*(b) \leq x$ sağlandığından $f^*(a \wedge b) = f^*(a) \wedge f^*(b)$ olur, yani f^* sonlu $\wedge$ işlemini korur.

3.2.7.Tanım: $Lc(X) = \Omega(X)$, $Lc(f) = \Omega(f)_*$ biçiminde tanımlanan Lc: **Top** $\rightarrow$ **Loc** kovaryant bir funktordur. Bu durumda, $Lc(f)(U) = Y \setminus \overline{f(X \setminus U)}$ olarak tanımlanırsa, $f^{-1}(B) \subseteq A \Leftrightarrow B \subseteq Y \setminus f(X \setminus A)$ gerektirmesi kullanılarak, Lc(f)'in $\Omega(f) = f^{-1}$'in sağ Galois adjointi olduğu görülebilir. Lc(f)(U) tanımında $\overline{f(X \setminus U)}$ kapanış işleminin kullanılmasının amacı $Lc(f)(U) \in \Omega(Y)$ koşulunu sağlamaktır. Şimdi yukarıdaki ifadeler daha anlaşılabilir bir hale getirilecektir:

$x \in X$ için $\tilde{x} = X \setminus \overline{\{x\}}$ olarak tanımlanırsa, $\tilde{x} \in Lc(X)$ olur ve $Lc(f)(\tilde{x}) = \widetilde{f(x)}$ dir. Gerçekten

$Lc(f)(\tilde{x}) = Y \setminus \overline{f(X \setminus (X \setminus \overline{\{x\}})} = Y \setminus \overline{f(\overline{\{x\}})} = Y \setminus \overline{\{f(x)\}} = \widetilde{f(x)}$ dır.

Şimdi $f^{-1}(B) \subseteq A \Leftrightarrow B \subseteq Lc(f)(A) = Y \setminus \overline{f(X \setminus A)}$ ifadesinin doğru olduğu gösterilecektir.

($\Rightarrow$): $f^{-1}(B) \subseteq A$ olsun. Öncelikle $f^{-1}: \Omega(Y) \to \Omega(X)$ olup A ve B açık kümelerdir. Ardından bir $b \in B$ için $b \notin Y \setminus \overline{f(X \setminus A)}$ olsun. Böylece $b \in \overline{f(X \setminus A)}$ ve $B \cap \overline{f(X \setminus A)} \neq \emptyset$ dir. O halde $\exists y \in B \cap \overline{f(X \setminus A)}$ ve $\exists x \in X \setminus A$ için $f(x) = y$ dır. $f^{-1}(B) \subseteq A$ ve $x \notin A$ olduğundan $x \notin f^{-1}(B)$ olur. Bu durumda $f(x) = y \notin B$ çelişkisi elde edilir.

($\Leftarrow$): $B \subseteq Y \setminus \overline{f(X \setminus A)}$ olsun ve bir $x \in f^{-1}(B)$ alınsın. Bu durumda $\exists y \in B$ için $y = f(x) \in B$ dir. Kabul gereği $y \in Y \setminus \overline{f(X \setminus A)}$ olup $y \notin \overline{f(X \setminus A)}$ dır. Kapanış tanımı gereği $y \notin f(X \setminus A)$ elde edilir. O halde $f^{-1}(y) = x \notin (X \setminus A)$ ve böylece $x \in A$'dir.

Şimdi çatı ve lokallerde nokta kavramı, bu kavramın farklı karakterizasyonları ve bunlar yardımıyla elde edilen bazı topolojik yapılar verilecektir.

3.2.8.Tanım: Bir L çatısı veya lokalinde bir nokta, L'nin tamamen asal bir süzgecidir.

Bir çatıda noktaların tamamen asal süzgeçler olarak tanımlanması fikrinin kaynağı sober uzaylardır. Sober uzaylar kategorisi ile çatılar kategorisinin nesneleri ve morfizmaları arasında bir bire-bir bir ilişki vardır. Ayrıca $\mathcal{F}$ tamamen asal bir süzgeç olmak üzere $x \leftrightarrow \mathcal{U}(x) \leftrightarrow \mathcal{F}$ ilişkisi var olduğundan, çatının noktaları denildiğinde tamamen asal süzgeçler akla gelecektir.

(P1) L çatısında (lokalinde) bir nokta bir tamamen asal süzgeçtir.

Şimdi de çatılarda nokta kavramının diğer bir karakterizasyonunu elde edilecektir: X bir sober uzay olsun. Öncelikle $x \in X$ noktaları ile $f: \{0\} \to X$, $f(0) = x$ sürekli fonksiyonları arasında bir bire-bir bir eşleşme vardır. Diğer taraftan bir tek nokta uzayından X uzayına tanımlı her sürekli fonksiyon ile $\Omega(f) = \Omega(X) \to \mathbf{2}$ çatı homomorfizmaları arasında da benzer bir ilişki mevcuttur. Bu bilgiler ışığında aşağıdaki nokta karakterizasyonu elde edilir.

(P2) L çatısında (lokalinde) bir nokta $h: L \to \mathbf{2}$ bir çatı homomorfizmasıdır. Diğer yandan, P bir tek nokta lokali olmak üzere, L lokalinde bir nokta bir $P \to L$ lokalik dönüşümü ile temsil edilebilir.

3.2.9.Tanım: Bir L latisinde $F \subseteq L$ tamamen asal süzgeci için $p_F = \bigvee\{x: x \notin F\}$ şeklinde tanımlanır.

3.2.2.Önerme: $p_F = \bigvee\{x: x \notin F\}$ elemanı $\wedge$- indirgenemezdir.

Kanıt: Bir L latisi ve $F \subseteq L$ tamamen asal süzgeci verilsin. İlk olarak tamamen asallıktan $p_F \notin F$ ve böylece $p_F \neq 1$dir. Ayrıca $(a \wedge b) \leq p_F$ ise a ile b'nin her ikisi birden F'nin elemanı olamaz çünkü aksi halde $(a \wedge b) \in F$ ve $(a \wedge b) \leq p_F$ olduğundan $p_F \in F$ olurdu. Genelliği bozmadan $a \notin F$ olsun. Bu durumda $a \leq p_F$ olup p_F $\wedge$- indirgenemezdir.

3.2.10.Tanım: L bir latis ve $p \in L$ bir $\wedge$- indirgenemez eleman olmak üzere $F_p = \{x: x \nleq p\}$ biçiminde tanımlanır.

3.2.3.Önerme: $F_p = \{x: x \nleq p\}$ bir tamamen asal süzgeçtir.

Kanıt: İlk olarak F_p' nin süzgeç olduğunu gösterelim: Öncelikle $1 \in F_p$ olduğu açıktır. $x, y \in F_p \Rightarrow x \nleq p$ ve $y \nleq p \Rightarrow (x \wedge y) \nleq p \Rightarrow (x \wedge y) \in F_p$ dir. Ayrıca ($x \in F_p$ ve $x \leq y$) $\Rightarrow$ ($x \nleq p$ ve $x \leq y$) $\Rightarrow y \nleq p \Rightarrow y \in F_p$ sağlanır. Böylece F_p süzgeçtir. Şimdi F_p' nin tamamen asal olduğunu gösterelim: $1 \nleq p$ olduğundan $1 \in F_p$ olup $F_p \neq \emptyset$ dır. Ayrıca $0 \leq p$ ve böylece $0 \notin F_p$ olduğundan F_p bir öz süzgeçtir. Bu durumda $\bigvee_{i\in I} x_i \in F_p \Rightarrow \bigvee_{i\in I} x_i \nleq p \Rightarrow (\exists i \in I,\ x_i \nleq p) \Rightarrow$ ($\exists i \in I$ için $x_i \in F_p$) elde edilir ve F_p tamamen asal bir süzgeçtir.

3.2.4.Önerme: $p_{F_p} = \bigvee\{x: x \notin F_p\} = \bigvee\{x: x \leq p\} = p$ ve $x \in F_{p_F} \Leftrightarrow x \nleq p_F = \bigvee\{x: x \notin F\} \Leftrightarrow$ $x \in F$ sağlanır.

Yukarıdaki önerme yardımıyla çatılarda nokta kavramının aşağıdaki karakterizasyonu elde edilebilir.

(P3) L çatısında (lokalinde) bir nokta bir $\wedge$- indirgenemez eleman olarak temsil edilebilir.

3.2.5.Önerme: Lokalik dönüşümler $\wedge$- indirgenemez elemanları, $\wedge$- indirgenemez elemanlara götürür. Bunun bir sonucu olarak lokalik bir dönüşüm noktaları noktalara götürür.

Kanıt: Bir $f: L \to M$ lokalik dönüşümü verilsin. Öncelikle $f(a) = 1$ ise $a = 1$ dir. Gerçekten f lokalik dönüşümünün bir sağ adjoint olduğu ve f^* çatı homomorfizmasının en büyük elemanı koruduğu gerçekleri kullanılırsa $1 \leq f(a) \Rightarrow 1 = f^*(1) \leq a \Rightarrow a = 1$ elde edilir. Şimdi $a \in L$, $\wedge$- indirgenemez bir eleman olsun ve $x \wedge y \leq f(a)$ olacak şekilde $x, y \in M$ verilsin. Buradan $f^*(x) \wedge f^*(y) = f^*(x \wedge y) \leq a$ olup a, $\wedge$- indirgenemez olduğundan $f^*(x) \leq a$ veya $f^*(y) \leq a$ olacaktır. Böylece $x \leq f(a)$ veya $y \leq f(a)$ elde edilir, yani f(a), M' de $\wedge$- indirgenemezdir.

Şimdi çatı ve lokaldeki farklı nokta temsillerini kullanarak bir topolojik uzay inşa edilecektir.

3.2.11.Tanım: L bir lokal olmak üzere, $a \in L$ için $\Sigma_a = \{F$, L'de tamamen asal süzgeç: $a \in F\}$ olarak tanımlanır.

3.2.6.Önerme: Bir L lokali için $\Sigma_0 = \emptyset$ ve Σ_1 = {L'deki bütün tamamen asal süzgeçler}'dir. Ayrıca $\Sigma_{a \wedge b} = \Sigma_a \cap \Sigma_b$ ve $\Sigma_{\vee_{i\in J} a_i} = \cup_{i\in J} \Sigma_{a_i}$ sağlanır.

Kanıt: $\Sigma_0 = \emptyset$ ve Σ_1= {L'deki bütün tamamen asal süzgeçler} ifadeleri açıktır. İlk olarak $\Sigma_{a \wedge b} = \Sigma_a \cap \Sigma_b$ ifadesi gösterilecektir: F bir süzgeç olduğundan $F \in \Sigma_{a \wedge b} \Leftrightarrow (a \wedge b \in F \Leftrightarrow a \in F$ ve $b \in F) \Leftrightarrow F \in \Sigma_a \cap \Sigma_b$ elde edilir. Diğer taraftan, $F \in \Sigma_{\vee_{i\in J} a_i} \Leftrightarrow \vee_{i\in J} a_i \in F \Leftrightarrow (\exists i \in J$ için $a_i \in F) \Leftrightarrow F \in \Sigma_{a_i} \Leftrightarrow F \in \cup_{i\in J} \Sigma_{a_i}$ dır.

Yukarıdaki önermeden, bir L lokalinde Σ_a = {F, L'de tamamen asal süzgeç: $a \in F$} elemanlarının açık küme aksiyomlarını sağladığı sonucu elde edilebilir.

3.2.2.Sonuç: Sp(L) = ({L'deki bütün tamamen asal süzgeçler}, $\{\Sigma_a : a \in L\}$) uzayı bir topolojik uzaydır ve bu uzaya L'nin spektrumu denir.

Şimdi spektrum kavramı kullanılarak yeni bir funktor tanımlanacaktır.

3.2.12.Tanım: $f: L \to M$ lokalik dönüşümü verilsin. Bu durumda Sp funktoru $Sp(f): Sp(L) \to Sp(M)$, $Sp(f)(F) = (f^*)^{-1}(F)$ olarak tanımlanır.

Burada f^*dönüşümü bir çatı homomorfizması olduğundan 3.1.11.Önerme gereği $(f^*)^{-1}(F)$ tamamen asal süzgeçtir. Dolayısıyla Sp(f) dönüşümü iyi tanımlıdır.

3.2.7.Önerme: $(Sp(f))^{-1}(\Sigma_a) = \Sigma_{f^*(a)}$ eşitliği sağlanır ve bu nedenle Sp(f) dönüşümü süreklidir.

Kanıt: $(Sp(f))^{-1}(\Sigma_a) = \{F: Sp(f)(F) = (f^*)^{-1}(F) \in \Sigma_a\} = \{F: a \in (f^*)^{-1}(F)\} = \{F: f^*(a) \in F\} = \Sigma_{f^*(a)}$ dir.

3.2.8.Önerme: $Sp(id_L) = id_{Sp(L)}$ ve $Sp(g \text{ o } f) = Sp(g) \text{ o } Sp(f)$ ifadeleri sağlanır.

Kanıt: İlk eşitlik kolayca gösterilebilir. İkinci eşitliği göstermek için $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ dönüşümleri alınsın. Buradan $Sp(L) \xrightarrow{Sp(f)} Sp(M) \xrightarrow{Sp(g)} Sp(N)$ ve $Sp(g \text{ o } f): Sp(L) \to Sp(N)$ dir. Öncelikle $x \leq (g \text{ o } f)(y) = g(f(y)) \Leftrightarrow g^*(x) \leq f(y) \Leftrightarrow f^*(g^*(x)) = (f^* \text{o } g^*)(x) \leq y$ olduğundan $(g \text{ o } f)^* = f^* \text{o } g^*$ dir. O halde,

$$Sp(g \text{ o } f)(F) = ((g \text{ o } f)^*)^{-1}(F) = (f^* \text{ o } g^*)^{-1}(F) = ((g^*)^{-1} \text{ o } (f^*)^{-1})(F) = (Sp(g) \text{ o } Sp(f))(F)$$

elde edilir.

3.2.3.Sonuç: L, M birer lokal ve $f: L \to M$ bir lokalik dönüşüm olsun. Bu durumda Sp: **Loc** $\to$ **Top** bir funktordur.

Bir lokaldeki noktalar, (P3) koşulunda verildiği gibi, $\wedge$- indirgenemez elemanlar biçiminde temsil edilirse spektrum uzayının farklı bir karakterizasyonu elde edilebilir.

3.2.13.Tanım: L bir lokal olsun. $a \in L$ ve p $\wedge$- indirgenemez eleman olmak üzere $\Sigma_a' = \{p: a \not\leq p\}$ şeklinde tanımlanır.

Σ_a ve Σ_a' kümelerinin ilişkisine bakılırsa, $F_p \in \Sigma_a \Leftrightarrow a \in F_p \Leftrightarrow a \not\leq p \Leftrightarrow p \in \Sigma_a'$ sağlandığı görülebilir. Böylece Σ_a' kümelerinin de açık küme aksiyomlarını sağladığı açıktır.

3.2.4.Sonuç: $Sp'(L) = (\{$L'deki bütün $\wedge$- indirgenemez elemanlar$\}, \{\Sigma_a': a \in L\})$ uzayı bir topolojik uzaydır.

Şimdi de Sp(f) funktoruna karşılık gelen $Sp'(f)$ funktoru elde edilecektir;

3.2.5.Önerme yardımıyla $f: L \to M$ lokalik dönüşümü için $Sp'(f)(q) = f(q)$ olacak şekilde, $Sp'(f): Sp'(L) \to Sp'(M)$ tanımlanır. Şimdi de bu tanımın Sp(f) ile ilişkisi incelenecektir; Öncelikle $q \in Sp'(L)$ için, $q \in Sp'(L) \Leftrightarrow F_q \in Sp(L)$ olduğu açıktır. O halde $Sp(f)(F_q) = (f^*)^{-1}(F_q) = \{a: f^*(a) \in F_q\} = \{a: f^*(a) \not\leq q\} = \{a: a \not\leq f(q)\}$ olduğundan $Sp(f)(F_q)$'ya karşılık gelen nokta $p_{Sp(f)(F_q)} = p_{\{a:\, a \not\leq f(q)\}} = \bigvee\{a: a \notin \{a: a \not\leq f(q)\}\} = \bigvee\{a: a \leq f(q)\} = f(q)$ dır.

3.2.5.Sonuç: $\Phi_L: L \to Lc(Sp(L))$, $\Phi_L(a) = \Sigma_a$ dönüşümü bir çatı homomorfizmasıdır.

Kanıt: Bu durum 3.2.11.Tanım ve 3.2.6 Önerme'den açıktır.

Şimdi ϕ_L çatı homomorfizmasının sağ Galois adjointi olan $\sigma_L = (\Phi_L)_*: Lc(Sp(L)) \to L$ lokalik dönüşümü incelenecektir.

3.2.9.Önerme: $(\sigma_L)_L$ sistemi, bir $LcSp \to Id$ bir doğal dönüşümü üretir. o

Kanıt: $f: L \to M$ bir lokalik dönüşüm olmak üzere, aşağıdaki diyagramın değişmeli olduğu, yani $\sigma_M \circ LcSp(f) = f \circ \sigma_L$ ifadesinin sağlandığı gösterilecektir. Bu durumda bir $a \in M$ verilsin.

$$\begin{tikzcd}
Lc(Sp(L)) \arrow[r, "\sigma_L"] \arrow[d, "LcSp(f)"'] & L \arrow[d, "f"] \\
LcSp(M) \arrow[r, "\sigma_M"] & M
\end{tikzcd}$$

$(\sigma_M \circ LcSp(f))^*(a) = ((LcSp(f))^* \circ \sigma_M{}^*)(a) = (LcSp(f))^* \circ \Phi_L)(a) = (LcSp(f))^*(\Sigma_a) = \Omega(Sp(f))(\Sigma_a) = Sp(f)^{-1}(\Sigma_a) = \{F: Sp(f)(F) \in \Sigma_a\} = \{F: a \in Sp(f)(F) = (f^*)^{-1}(F)\} = \{F: f^*(a) \in F\} = \Sigma_{f^*(a)} = \Phi_L(f^*(a)) = (\sigma_L)^* \circ (f^*(a)) = ((\sigma_L)^* \circ f^*)(a) = (f \circ \sigma_L)^*(a)$ dır. Böylece istenilen eşitlik elde edilmiş olur.

3.2.10.Önerme: Her σ_L dönüşümü bire-birdir.

Kanıt: 3.1.2.Önerme'den $\Phi_L \circ \sigma_L \circ \Phi_L = \Phi_L$ve Öncelikle $\Phi_L: L \to Lc(Sp(L))$ dönüşümü örten olduğundan $\Phi_L \circ \sigma_L = Id$ elde edilir. O halde $\Phi_L \circ \sigma_L$ bire-bir olduğundan σ_L de bire-birdir.

3.2.14.Tanım: Bir X uzayı için λ_X dönüşümü; $\lambda_X: X \to Sp(Lc(X))$, $\lambda_X(x) = \mathcal{U}(x) = \{U : x \in U\}$ şeklinde tanımlanır.

3.2.11.Önerme: Bir X uzayı için λ_X, bir sürekli dönüşümdür ve **Top** kategorisinin bir morfizmasıdır.

Kanıt: X bir topolojik uzay olmak üzere, Sp(Lc(X))'deki açık kümeler, U açık kümesi için Σ_U şeklindedir. Şimdi $U \in \Omega(X)$ için $(\lambda_X{}^{-1})(\Sigma_U) = \{x: \lambda_X(x) \in \Sigma_U\} = \{x: \mathcal{U}(x) \in \Sigma_U\} = \{x: U \in \mathcal{U}(x)\} = \{x: x \in U\} = U$ olur. Böylece λ_X dönüşümü süreklidir.

3.2.12.Önerme: Bir X uzayı için $(\lambda_X)_X$ sistemi, bir $Id \to SpLc$ doğal dönüşümü üretir.

Kanıt: Verilen bir $f: X \to Y$ sürekli fonksiyonu için aşağıdaki diyagramın değişmeli olduğu, yani $SpLc(f) \circ \lambda_X = \lambda_Y \circ f$ ifadesinin sağlandığı gösterilecektir. Bu durumda $x \in X$ verilsin.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\lambda_X"] \arrow[d, "f"'] & SpLc(X) \arrow[d, "LcSp(f)"] \\
Y \arrow[r, "\lambda_Y"] & SpLc(Y)
\end{tikzcd}$$

$SpLc(f) \circ \lambda_X(x) = SpLc(f)(\mathcal{U}(x)) = ((Lc(f))^*)^{-1}(\mathcal{U}(x)) = (\Omega(f))^{-1}(\mathcal{U}(x)) = \{U \in \Omega(Y): \Omega(f)\, U) \in \mathcal{U}(x))\} = \{U \in \Omega(Y): f^{-1}(U) \in \mathcal{U}(x)\} = \{U \in \Omega(Y): x \in f^{-1}(U)\} = \{U \in \Omega(Y): f(x) \in U\} = \mathcal{U}(f(x)) = \lambda_Y(f(x)) = (\lambda_Y \circ f)(x)$ dir.

3.2.13.Önerme: Lc ve Sp funktorları adjointtir. Burada Lc bir sol adjoint, Sp ise bir sağ adjointtir. Ayrıca adjankşının birimleri $\lambda: Id \to SpLc$ ve $\sigma: LcSp \to Id$ doğal dönüşümleridir.

Kanıt: Lc ve Sp'nin adjoint olduğunu göstermek için aşağıdaki diyagramların değişmeli olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\begin{tikzcd} Lc \arrow[r, "Lc\lambda"] \arrow[dr, "id_{Lc}"'] & LcSpLc \arrow[d, "\sigma Lc"] \\ & Lc \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Sp \arrow[r, "\lambda Sp"] \arrow[dr, "id_{Sp}"'] & SpLcSp \arrow[d, "Sp\sigma"] \\ & Sp \end{tikzcd}$$

Öncelikle burada σ_L: $Lc(Sp(L)) \rightarrow L$, $(Sp\sigma)_L = Sp\sigma_L$: $Sp(Lc(Sp(L))) \rightarrow Sp(L)$, λ_X: $X \rightarrow Sp(Lc(X))$ ve $(\lambda Sp)_L = \lambda_{Sp(L)}$: $SpL \rightarrow Sp(Lc(SpL))$ olduğu açıktır.

Sp(L)'deki bir F noktası için,

$(Sp(\sigma_L) \text{ o } \lambda_{Sp(L)})(F) = Sp(\sigma_L)(\mathcal{U}(F)) = (\sigma_L^*)^{-1}(\mathcal{U}(F)) = (\phi_L)^{-1}(\mathcal{U}(F)) = \{U\text{: } \Phi_L(U) \in \mathcal{U}(F)\} =$

$\{U\text{: } \Sigma_U \in \mathcal{U}(F)\} = \{U\text{: } F \in \Sigma_U\} = \{U\text{: } U \in F\} = F$ olduğundan $(Sp\sigma) \text{ o } \lambda Sp = id_{Sp}$ elde edilir. Diğer taraftan, $(\sigma_{Lc(X)} \text{ o } Lc(\lambda_X))^*(U) = (Lc(\lambda_X)^* \text{ o } (\sigma_{Lc(X)})^*)(U) = (Lc(\lambda_X)^* \text{ o } (\phi_{Lc(X)})(U) =$ $(Lc(\lambda_X)^*(\Sigma_U) = \Omega(\lambda_X)(\Sigma_U) = (\lambda_X)^{-1}(\Sigma_U) = \{x\text{: } \lambda_X(x) = \mathcal{U}(x) \in \Sigma_U\} = \{x\text{: } U \in \mathcal{U}(x)\} =$ $\{x\text{: } x \in U\} = U$ olur ve böylece $\sigma Lc \text{ o } Lc\lambda = id_{Lc}$ elde edilir. Sonuç olarak Lc ve Sp adjointtir.

3.2.6.Sonuç: $\sigma_{Lc(X)}$: $Lc(Sp(Lc(X))) \rightarrow Lc(X)$ lokalik dönüşümü bir izomorfizmadır.

Kanıt: 3.2.10.Önerme'den bire-birlik açıktır. Diğer taraftan $\sigma_{Lc(X)} \text{ o } Lc(\lambda_X) = id_{Lc}$ olduğundan $\sigma_{Lc(X)}$ örten ve böylece bir izomorfizmadır.

3.2.15.Tanım: $\wedge$- indirgenemez elemanlar yardımıyla elde edilen spektrum uzayı $Sp'(L)$ uzayında, $x \in X$ için $\lambda_X(x) = X \setminus \overline{\{x\}}$ ve $a \in Lc(Sp(X))$ için $(\sigma_X)^*(a) = \Sigma_a' = \{p\text{: } a \nleq p\}$ dir. Gerçekten $Sp'(Lc(X))$ uzayının noktaları Lc(X)' in $\wedge$- indirgenemez elemanları olan $X \setminus \overline{\{x\}}$ biçimindedir.

3.2.14.Önerme: Bir L lokalinde aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) L uzaysaldır,

(2) σ_L: $Lc(Sp(L)) \rightarrow L$ bir tam latis izomorfizmasıdır,

(3) σ_L^*: $L \rightarrow Lc(Sp(L))$ bir tam latis izomorfizmasıdır,

(4) σ_L örtendir,

(5) σ_L bire-bir dir.

Kanıt: (1) ⇒ (2) L uzaysal olsun. O halde bir h: L → Lc(X) = Ω(X) izormorfizması vardır. Bu durumda 3.2.6.Sonuç'tan $\sigma_L = h^{-1} \circ \sigma_{Lc(X)} \circ LcSp(h)$ bir izomorfizmadır.

(2) ⇒ (1) σ_L: Lc(Sp(L)) → L bir tam latis izomorfizması olsun. Bu durumda Lc(Sp(L)) = Ω(Sp(L)) ≅ L olduğundan, L uzaysaldır.

(2) ⇒ (4) ve **(3) ⇒ (5)** açıktır. 3.2.5.Sonuç'a göre (4) ve (5) koşulları (2), (3), (4), (5)' ten her birini gerektirir. Çünkü σ_L ve σ_L^* monoton dönüşümlerdir ve (4) veya (5) varsa σ_L ve σ_L^* dönüşümlerinin birbirlerinin tersi olduğu elde edilir ve böylece bu dönüşümler tam latis homomorfizmalarıdır.

3.2.7.Sonuç: Böylece bir L lokalinin uzaysal olup olmadığı sorusu, kendi spektrum uzaylarına izomorf olup olmadıkları sorusuna indirgenir. Eğer L, kendi spektrum uzayına izomorf değilse, herhangi bir topolojik uzaya izomorf olamaz.

3.2.8.Sonuç: ∧-indirgenemez elemanlar açısından spektrum uzayının tekrar formüle edilebilmesi düşünülürse, 3.2.14.Önerme'deki (5) ⟺ (1) denkliğinden yararlanılarak,

$\Sigma_a' = \{p: a \nleq p\} \neq \Sigma_b' = \{p: b \nleq p\} \Rightarrow a \neq b$ ifadesi elde edilir.

3.2.15.Önerme: Bir L lokalinin uzaysal olması için gerek ve yeter koşul ∀a ∈ L için,

$a = \bigwedge\{p: a \leq p$ ve p ∧- indirgenemezdir$\}$ olmasıdır.

Kanıt: (⇒): Bir uzaysal L lokali verilsin ve a ∈ L alınsın. 3.2.14.Önerme (5) gereği $b \nleq a \Rightarrow \Sigma_b' \nleq \Sigma_a'$ dir. Eğer $b \nleq a$ ise $p \in (\Sigma_b' \setminus \Sigma_a')$ olacak şekilde bir ∧- indirgenemez p elemanı vardır. Buradan $p \leq a$ ve $b \nleq p$ ve böylece $a = \bigwedge\{p: a \leq p$ ve p ∧- indirgenemezdir$\}$ elde edilir.

(⇐): Bir L lokali verilsin ve ∀a ∈ L elemanı, ∧- indirgenemez elemanların infimumu olarak yazılabilsin. Keyfi bir a ∈ L için $a = \bigwedge\{p: a \leq p$, p ∧- indirgenemezdir$\}$ biçiminde olduğundan, $b \nleq a$ ise $a \leq p$ ve $b \nleq p$ olacak şekilde bir p elemanı vardır. Buradan $p \in (\Sigma_b' \setminus \Sigma_a')$ ve böylece $\Sigma_b' \nleq \Sigma_a'$ dır. O halde 3.2.8.Sonuç gereği, L lokali uzaysaldır.

3.2.16.Tanım: Bir L lokalinde, $a > 0$ ve $0 < x \leq a$ koşulunu sağlayan ∀x ∈ L için x = a oluyorsa a' ya bir atom denir. Dual olarak, $a < 1$ ve $a \leq x < 1$ koşulunu sağlayan ∀x ∈ L için x = a oluyorsa a' ya bir ko-atom denir.

3.2.9.Sonuç: Bir Boolean cebirinde a' nın bir atom olması için gerek ve yeter koşul a' nın tümleyeni olan a' elemanının bir ko-atom olmasıdır.

3.2.17.Tanım: Bir Boolean cebirindeki tüm elemanlar atomların supremumu olarak ifade edilebiliyorsa, bu Boolean cebirine atomiktir denir.

3.2.16.Önerme: Bir B Boolean cebirinde aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) B atomiktir,

(2) B'deki her eleman, ko-atomların infimumu olarak ifade edilebilir,

(3) B, bir X uzayının bütün alt kümelerinden oluşan $\mathcal{P}(X)$ Boolean cebirine izomorftur.

Kanıt: (1) ⇔ (2): 3.2.9.Sonuç ve De-Morgan kuralları kullanılarak kolayca gösterilebilir.

(1) ⇔ (3) B bir atomik Boolean cebiri ve X, B'deki bütün atomların kümesi olsun. Bir $b \in B$ için $A(b) = \{x \in X : x \leq b\}$ olarak tanımlansın. Şimdi $\varphi : B \to \mathcal{P}(X)$, $\varphi(b) = A(b)$ dönüşümünün bir izomorfizma olduğunu gösterelim. İlk olarak bire-bir özelliği için $\varphi(a) = \varphi(b)$ olacak şekilde $a, b \in B$ verilsin. Eğer $x \in X$ ve $x \leq a = \bigvee A(a)$ ise $0 \neq x = x \wedge \bigvee A(a) = \bigvee\{x \wedge y : y \in A(a)\} = \bigvee\{x \wedge y : y \in A(b)\}$ dir. O halde $\exists y \in A(b)$ için $0 < x \leq x \wedge y \leq y$ olur. O halde B atomik olduğundan $x = y$ elde edilir, yani keyfi bir $y \in A(b)$ için $x = y$ olduğundan $x \leq b$ olur ve böylece $a = b$ elde edilir.

Şimdi Y dönüşümünün örten olduğunun gösterilmesi için keyfi olarak bir $C \in \mathcal{P}(X)$ alınsın ve $b = \bigvee C$ için $\varphi(b) = C$ olduğu kabul edilsin. Eğer $c \in C$ ise $c \leq \bigvee C$ olduğundan $c \in A(b) = \varphi(b)$ dir. Diğer taraftan, $x \in \varphi(b) = A(b)$ ise $x \leq \bigvee C = \bigvee_{i \in I} c_i$ dir. Buradan $0 < x \wedge c_i \leq x \wedge \bigvee_{i \in I} c_i = x$ ve x bir atom olduğundan $x \wedge c_i = x$ dir. O halde $0 < x \leq c_i$ ve c_i' ler atom olduğundan $x = c_i \in C$ elde edilir.

3.2.17.Önerme: Bir Boolean cebirindeki her $\wedge$- indirgenemez eleman ko-atomdur.

Kanıt: B bir Boolean cebiri, $p \in B$ bir $\wedge$- indirgenemez eleman ve bir $x \in B$ için $p < x$ olsun. Şimdi y, x'in tümleyeni olmak üzere, $0 = x \wedge y \leq p$ ve p $\wedge$- indirgenemez olduğundan $y \leq p$ dir. O halde $y \leq x$ ve böylece $x = x \vee y = 1$ elde edilir.

3.2.10.Sonuç: 3.2.15.Önerme'den bir uzaysal Boolean lokalindeki her elemanın ko-atomların infimumu olarak ifade edilebileceği görülebilir. O halde 3.2.16 Önerme'den bir Boolean lokali atomik ise, ya da bir X uzayının alt kümelerinden oluşan $\mathcal{P}(X)$ Boolean cebirine izomorf ise, bu lokalin uzaysal olduğu açıktır. O halde uzaysal Boolean lokalleri aslında ayrık uzaylara karşılık gelir.

Atomik olmayan tam Boolean cebirleri, uzaysal olmayan lokallere örnektir. Örneğin $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi üzerinde $U = \mathrm{int}\overline{U}$ olacak şekilde tüm U açık kümelerinden oluşan bir B Boolean cebiri ele alınsın. $\forall U$ açık kümesi ve $x \in U$ için $x \in (c, d) \subseteq U$ ve $\mathrm{int}\overline{(c, d)} = (c, d)$ olacak şekilde $c, d \in \mathbb{R}$ vardır. Bu nedenle B'nin atomlarının kümesi boş küme ve böylece $Sp(B) = \emptyset$ dir.

3.2.18.Önerme: Her L lokali için Sp(L) soberdir.

Kanıt: Bir L lokali verilsin. İlk olarak Sp(L) uzayı T_0 dır. Gerçekten $F \neq G$ olacak şekilde $F, G \in Sp(L)$ alınırsa, genelliği bozmadan $a \in F \setminus G$ olacak şekilde bir a elemanı vardır. Böylece $F \in \Sigma_a$ ve $G \notin \Sigma_a$ olur. Şimdi Sp(L)'nin sober olduğunu göstermek için, Sp(L)'den alınan keyfi bir $\mathcal{F}$ tamamen asal süzgeci için $\mathcal{F} = \mathcal{U}(F)$ olacak şekilde bir $F \in Sp(L)$'nin var olduğu gösterilecektir: Öncelikle $F = \{a: \Sigma_a \in \mathcal{F}\}$ biçiminde tanımlanan F kümesi tamamen asal süzgeçtir: Gerçekten $a, b \in F \Rightarrow \Sigma_a \in \mathcal{F}$ ve $\Sigma_b \in \mathcal{F} \Rightarrow \Sigma_{a \wedge b} \in \mathcal{F} \Rightarrow a \wedge b \in F$ dir. Ayrıca $a \in F$, $a \leq b \Rightarrow (a \wedge b = b) \Rightarrow (\Sigma_{a \wedge b} = \Sigma_b \Rightarrow \Sigma_a \subseteq \Sigma_b) \Rightarrow \Sigma_a \in \mathcal{F} \Rightarrow \Sigma_b \in \mathcal{F} \Rightarrow b \in F$ olur. Son olarak, $\bigvee_{i \in I} a_i \in F \Rightarrow \Sigma_{\bigvee_{i \in I} a_i} \in \mathcal{F} \Rightarrow \Sigma_{\bigvee_{i \in I} a_i} = \bigcup \Sigma_{a_i} \in \mathcal{F} \Rightarrow \exists i \in I$ için $\Sigma_{a_i} \in \mathcal{F} \Rightarrow a_i \in F$ elde edilir. Diğer taraftan $\Sigma_a \in \mathcal{F} \Leftrightarrow a \in F$ ve $F \in \Sigma_a \Leftrightarrow \Sigma_a \in \mathcal{U}(F)$ olduğundan $\mathcal{F} = \mathcal{U}(F)$ elde edilir ve böylece Sp(L) soberdir.

3.2.19.Önerme: Bir X uzayı verildiğinde aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(1) X sober uzaydır,

(2) $\lambda_X: X \rightarrow SpLc(X)$ dönüşümü bire-bir ve örtendir,

(3) $\lambda_X: X \rightarrow SpLc(X)$ dönüşümü bir homeomorfizmadır.

Kanıt: (1) ⇒ (2) X bir sober uzayı olsun. O halde $\Omega(X)$'deki tamamen asal süzgeçler, tam olarak $\mathcal{U}(x)$ süzgeçleridir. Böylece $\lambda_X: X \rightarrow SpLc(X)$ dönüşümü için $\lambda_X(x) = \mathcal{U}(x)$ olup, λ_X dönüşümü bire-bir ve örtendir.

(2) ⇒ (3) $\lambda_X: X \rightarrow SpLc(X)$ dönüşümü bire-bir ve örten olsun. 3.2.11.Önerme'ye göre λ_X dönüşümü süreklidir. Şimdi λ_X dönüşümünün açık olduğu gösterilecektir: Bunun için X'de keyfi bir U açık kümesi verilsin. $\lambda_X(U) = \{\mathcal{U}(x): x \in U\} = \{\mathcal{U}(x): U \in \mathcal{U}(x)\} = \{F$ tamamen asal süzgeç: $U \in F\} = \Sigma_U$ olduğundan λ_X dönüşümü açıktır. O halde λ_X bir homeomorfizmadır.

(3) ⇒ (1) λ_X: X → SpLc(X) dönüşümü bir homeomorfizma olsun. 3.2.18.Önerme gereği SpLc(X) soberdir. Sober olma bir topolojik özellik olduğundan X uzayı da soberdir.

3.2.20.Önerme: Frm kategorisindeki monomorfizmalar, tam olarak bire-bir çatı homomorfizmalarıdır.

Kanıt: (⇐): h, **Frm** kategorisinde bir bire-bir çatı homomorfizması olsun. Bu durumda, **Frm**'deki ∀f, g morfizmalar çifti için h(f(x)) = h(g(x)) ⇒ f(x) = g(x) olduğu açıktır. Böylece h bir monomorfizmadır.

(⇒): h: L → M, **Frm** kategorisinde bir monomorfizma olsun fakat tersine bire-bir olmasın. O halde h(a) = h(b) iken a ≠ b olacak şekilde a, b ∈ L vardır. Şimdi üç elemanlı **3** = {0 < c < 1} çatısı için f(0) = g(0) = 0 , f(1) = g(1) = 1, f(c) = a, g(c) = b olacak şekilde tanımlanan f, g: 3 → L dönüşümleri birer çatı homomorfizmasıdır. Burada f ≠ g iken h o f = h o g olur, ki bu h'nin monomorfizma olması ile bir çelişkidir. O halde h bir bire-bir çatı homomorfizması olmalıdır.

3.2.21.Önerme: L, M birer çatı olmak üzere f: L → M çatı homomorfizması verilsin. Bu durumda f(L), M'nin bir alt çatısı, yani M'nin, keyfi supremum ve sonlu infimumu altında kapalı ve özel olarak 0_M ve 1_M elemanlarını içeren bir alt kümesidir. Aynı şekilde j: f(L) → M bir gömme dönüşümü olmak üzere, f = j o g dir ve g: L → f(L), g(x) = f(x) dönüşümü bir çatı homomorfizmasıdır.

Kanıt: Bir f: L → M çatı homomorfizması verilsin. İlk olarak f(L)'nin, M'nin bir alt çatısı olduğu gösterilecektir: I bir indis kümesi olmak üzere ∀i ∈ I için y_i ∈ f(L)'ler verilsin. O halde ∀i ∈ I için $f(x_i) = y_i$ olacak şekilde x_i ∈ L vardır. Buradan $\bigvee_{i\in I} y_i = \bigvee_{i\in I} f(x_i) = f(\bigvee_{i\in I} x_i) \in f(L)$ dir. Sonuç olarak f(L) keyfi supremum altında kapalıdır. Ayrıca $y_1, y_2 \in f(L)$ için, $f(x_1) = y_1$ ve $f(x_2) = y_2$ olacak şekilde $x_1, x_2 \in L$ vardır. Bu durumda, $y_1 \wedge y_2 = f(x_1) \wedge f(x_2) = f(x_1 \wedge x_2) \in f(L)$ elde edilir ve böylece f(L) sonlu infimum altında kapalıdır. Ayrıca f(0) = 0 ve f(1) = 1 olduğundan $1_M, 0_M \in f(L)$ dir.

3.2.22.Önerme: Frm kategorisindeki ekstremal epimorfizmalar, tam olarak örten çatı homomorfizmalarıdır.

Kanıt: (⇐): f: L → M dönüşümü **Frm** kategorisinde örten bir çatı homomorfizması ise, f bir epimorfizmadır: Bunun için h o f = g o f olacak şekilde h, g: M → L çatı homomorfizmaları verilsin ve tersine h ≠ g olsun. O halde h(m) ≠ g(m) olacak şekilde bir m ∈ M vardır. Ayrıca f örten olduğundan $f(t) = m$ olacak şekilde $t \in L$ bulunabilir. Bu durumda $h(f(t)) \neq g(f(t))$ çelişkisi elde edilir. O halde $h = g$ olup, f bir epimorfizmadır.

Şimdi $f = m \circ g$ olacak şekilde bir $m: N \to M$ monomorfizması verilsin 3.2.20.Önerme gereği m bire-birdir ve $f = m \circ g$ örten olduğundan m dönüşümü de örtendir. O halde m bir izomorfizma ve böylece f bir ekstremal epimorfizmadır.

($\Rightarrow$): $f: L \to M$ örten olmasın. O halde 3.2.21.Önerme gereği $f = j \circ g$ olacak şekilde bir $g: L \to f(L)$ ve izomorfizma olmayan bir j monomorfizması vardır. O halde tanım gereği f bir ekstremal epimorfizma olamaz.

3.2.23.Önerme: Loc kategorisindeki ekstremal monomorfizmalar, tam olarak bire-bir lokalik dönüşümlerdir.

Kanıt: Lokalik dönüşümlerin, çatı homomorfizmalarının sağ adjointi olduğu bilinmektedir. Diğer taraftan, f, g adjoint çifti için $f \circ g \circ f = f$ ve $g \circ f \circ g = g$ olduğundan, f örten ise $f \circ g = id$ ve g bire-bir olmalıdır. Eğer g bire-bir ise, $f \circ g = id$ ve böylece f örtendir. Sonuç olarak aşağıdaki gerektirmeler doğrudur:

g bire-bir bir lokalik dönüşümdür $\Leftrightarrow$ $f = g^*$ bir örten çatı homomorfizmasıdır $\Leftrightarrow$ f bir ekstremal epimorfizmadır $\Leftrightarrow$ g bir ekstremal monomorfizmadır.

3.3. Alt Lokaller

Burada alt lokaller, açık alt lokaller, kapalı alt lokaller ve bu kavramların üstüne kurulan yapılar verilecektir. Bu kesimde [1, 4, 6, 12, 15] nolu kaynaklar temel alınmıştır.

3.3.1.Tanım: L bir lokal olmak üzere $S \subseteq L$ alt kümesi için

(S1) S, bütün $\bigwedge$' ler altında kapalıdır,

(S2) $\forall s \in S$ ve $\forall x \in L$ için $x \longrightarrow s \in S$ koşulları sağlanıyor ise S alt kümesine bir alt lokal denir. L bir lokal olmak üzere $1 = \bigwedge\emptyset$ olduğundan $\forall S \subseteq L$ alt lokali boştan farklıdır. Ayrıca en küçük alt lokal $\{1\}$ dir ve bu alt lokal **0** ile gösterilir. Bu alt lokal boş alt uzay görevi görür, bu nedenle boş olmayan en küçük alt lokalde 1'den farklı en az bir eleman bulunmak zorundadır.

3.3.1.Önerme: Bir L lokali verilsin. Bu durumda $S \subseteq L$ alt kümesinin bir alt lokal olması için gerek ve yeter koşul S'nin indirgenmiş sıralama ile bir lokal ve $j: S \to L$ gömme dönüşümünün bir lokalik dönüşüm olmasıdır.

Kanıt: (⇒): Bir L lokali verilsin ve $S \subseteq L$ bir alt lokal olsun. (S1) gereği S bir tam latistir: Gerçekten bir posetin tam latis olabilmesi için her alt kümesinin supremumu veya infimumunun olması yeterlidir. Ayrıca (S2) gereği S, Heyting işlemi altında kapalıdır. Böylece her $f(x) = x \wedge a$ dönüşümünün bir sağ adjointi $j: S \to S$, $j(x) = (a \to x)$ vardır ve ayrıca çatı tanımındaki keyfi dağılma özelliği sağlanır. Gerçekten $f(x) = x \wedge a$ bir sol adjoint olduğundan keyfi supremumu korur ve böylece $f(\bigvee_{i\in I} x_i) = \bigvee_{i\in I} f(x_i)$, yani $(\bigvee x_i) \wedge a = \bigvee(x_i \wedge a)$ elde edilir. Böylece S bir lokaldir.

Ayrıca, (S1) özelliğinden j dönüşümünün $\wedge$'leri koruduğu açıktır. Çünkü $\forall i \in I$, $s_i \in S$ için $\bigwedge s_i \in S$ ve böylece $j(\bigwedge s_i) = \bigwedge s_i = \bigwedge j(s_i)$ elde edilir. Şimdi S bir tam latis ve j $\wedge$' leri koruduğundan j sağ adjointtir. O halde j' nin bir $h: L \to S$ sol adjointi vardır ve $\forall x \in L$, $\forall s \in S$ için $h(x) \leq s \Leftrightarrow x \leq j(s) = s$ dir. Burada h bir sol adjoint olduğundan supremum işlemini koruduğu açıktır. Şimdi h'nin bir çatı homomorfizması olduğu gösterilmek istensin. Öncelikle $h(a) \wedge h(b) = h(a \wedge b)$ eşitliğini kontrol etmek için, $h(a) \wedge h(b) \leq s \in S$ olacak şekilde $a, b \in L$ verilsin. Buradan, $h(a) \wedge h(b) \leq s \Leftrightarrow h(a) \leq h(b) \longrightarrow s \Leftrightarrow a \leq j(h(b) \longrightarrow s) = h(b) \longrightarrow s \Leftrightarrow a \wedge h(b) \leq s \Leftrightarrow h(b) \leq a \longrightarrow s \Leftrightarrow b \leq j(a \longrightarrow s) = a \longrightarrow s \Leftrightarrow a \wedge b \leq s = j(s) \Leftrightarrow h(a \wedge b) \leq s$ elde edilir ve böylece istenilen gösterilmiş olur. Diğer taraftan $h(x) \leq h(x) \in S$ olduğundan $\forall x$ için $x \leq j(h(x)) = h(x)$ olur. Burada $x = 1$ seçilirse $1 \leq h(1)$ yani $h(1) = 1$ bulunur. Son olarak $h(0) = h(\bigvee\emptyset) = \bigvee h(\emptyset) = \bigvee\emptyset = 0$ dır. Böylece h bir çatı homomorfizması ve dolayısıyla j bir lokalik dönüşümdür.

(⇐): Bir L lokali verilsin ve $S \subseteq L$ indirgenmiş sıralama ile bir lokal ve $j: S \to L$ bir lokalik dönüşüm olsun. İlk olarak S tam latistir ve j dönüşümü bütün $\wedge$' leri korur. Böylece (S1) sağlanır. Ayrıca S, "$\xrightarrow{S}$" işlemi ile birlikte bir Heyting cebiridir. Gerçekten 3.2.1.Sonuç gereği her çatı ve dolayısıyla her lokal bir Heyting cebiridir. Burada j bir lokalik dönüşüm olduğundan, j'nin sol adjointi olan bir h çatı homomorfizması vardır. O halde herhangi $x, a \in L$, $s \in S$ için,

$$x \leq h(a) \xrightarrow{S} s \Leftrightarrow h(x) \leq j(h(a) \xrightarrow{S} s) = h(a) \xrightarrow{S} s \Leftrightarrow h(x) \wedge h(a) = h(x \wedge a) \leq s \Leftrightarrow$$

$x \wedge a \leq j(s) = s \Leftrightarrow x \leq a \longrightarrow s$ dir. Böylece $h(a) \xrightarrow{S} s = a \longrightarrow s$ olur, yani $\forall a \in L$ için $a \longrightarrow s \in S$ dir.

3.3.1.Sonuç: L bir lokal olmak üzere $S \subseteq L$ alt lokalin kendisi de bir lokaldir. S, L' deki $\wedge$ işlemi altında kapalı olduğu için S'deki Heyting işlemi ile L' deki Heyting işlemi çakışır.

L bir lokal olmak üzere $S \subseteq L$ alt lokalindeki $\wedge$ ve Heyting işlemlerinin aksine, $\vee$ işlemi L'deki ile çakışmak zorunda değildir. Bu iki supremum işlemi arasındaki ilişki 3.3.9.Önerme'de verilecektir.

3.3.2.Önerme: L bir lokal ve I herhangi bir indis kümesi olmak üzere $S_i \subseteq L$ alt lokalleri verilsin. Bu durumda $\bigcap_{i\in I} S_i$ de bir alt lokaldir.

Kanıt: L bir lokal ve I sonlu bir indis kümesi olsun. $S_i \subseteq L$ alt lokalleri için, $a, b \in \bigcap_{i\in I} S_i$ ise $\forall i \in I$ için $a \wedge b \in S_i$ olup $a \wedge b \in \bigcap_{i\in I} S_i$ dir. Böylece (S1) sağlanır. Benzer şekilde (S2) koşulunun sağlandığı da gösterilebilir.

3.3.2.Sonuç: 3.3.2.Önerme'nin sonucu olarak, bir L lokalinin bütün alt lokallerinden oluşan $\mathcal{S}\ell(L)$ sistemi bir tam latistir.

3.3.2.Tanım: L bir lokal ve I bir indis kümesi olmak üzere $S_i \subseteq L$ alt lokalleri verilsin. Alt lokallerin supremumu $\bigvee_{i\in I} S_i = \{\bigwedge A : A \subseteq \bigcup_{i\in I} S_i\}$ biçiminde tanımlıdır.

Gerçekten, $T = \{\bigwedge A : A \subseteq \bigcup_{i\in I} S_i\}$ olsun. Öncelikle T'nin keyfi infimum altında kapalı olduğu açıktır. Ayrıca keyfi $x \in L$ için 3.1.1.Sonuç gereği $x \longrightarrow \bigwedge A = \bigwedge\{x \longrightarrow a : a \in A\}$ elde edilir ve $\forall (x \longrightarrow a) \in \bigcup_{i\in I} S_i$ olduğundan $x \longrightarrow \bigwedge A = \bigwedge\{x \longrightarrow a : a \in A\} \in T$ dir. O halde T bir alt lokaldir. Diğer taraftan T'nin $\bigvee_{i\in I} S_i$ kümesinin bir üst sınırı olduğu açıktır. $\forall i$ için $S_i \subseteq Z$ olacak şekilde bir Z alt lokali verilsin. Buradan $A \subseteq \bigcup_{i\in I} S_i \subseteq Z$ ve $\bigwedge A \subseteq Z$ dir. Dolayısıyla $T \subseteq Z$ bulunur.

3.3.3.Önerme: L bir lokal olmak üzere $(\mathcal{S}\ell(L), \subseteq)$ bir ko-çatıdır. Böylece $\mathcal{S}\ell(L)^{op} = (\mathcal{S}\ell(L), \supseteq)$ bir çatıdır.

Kanıt: Öncelikle $(\bigcap_{i\in I} A_i) \vee B \subseteq \bigcap_{i\in I} (A_i \vee B)$ kapsaması açıktır. Diğer kapsama için, $x \in \bigcap_{i\in I} (A_i \vee B)$ alınsın. Bu durumda, $\forall i \in I$ için $x = a_i \wedge b_i$ olacak şekilde $a_i \in A$ ve $b_i \in B$ vardır. Şimdi $b = \bigwedge_{i\in I} b_i$ olarak tanımlanırsa, $x = (\bigwedge_{i\in I} a_i) \wedge (\bigwedge_{i\in I} b_i) = (\bigwedge_{i\in I} a_i) \wedge b \leq a_i \wedge b \leq a_i \wedge b_i \leq x$ olur. Buradan $\forall i \in I$ için $x = a_i \wedge b$ olduğundan (H6) gereği, $\forall i, j \in I$ için $b \longrightarrow a_i = b \longrightarrow a_j$ elde edilir. Şimdi $a = b \longrightarrow a_i$ olmak üzere, (H5) gereği, $x = b \wedge a_i = b \wedge (b \longrightarrow a_i)$ olur. O halde $x = b \wedge a_i = b \wedge (b \longrightarrow a_i) = b \wedge a \in B \vee \bigcap_{i\in I} A_i$ dir. Sonuç olarak $\mathcal{S}\ell(L)$ bir ko-çatıdır.

3.3.4.Önerme: L ve M birer lokal ve $f: L \to M$ bir lokalik dönüşüm olsun. Bu durumda $\forall S \subseteq L$ alt lokali için f(S), M' nin bir alt lokaldir.

Kanıt: $f: L \to M$ lokalik dönüşümü bir sağ adjoint olduğundan keyfi infimum işlemini korur ve böylece (S1) koşulu sağlanmış olur. Ayrıca f' nin bir $f^*: M \to L$ sol adjointi vardır ve f^* sonlu infimumları korur. O halde 3.2.1.Önerme (b) özelliği gereği, $s \in S$ ve $y \in M$ için

$y \longrightarrow f(s) = f(f^*(y) \longrightarrow s) \in f(S)$ olur. Çünkü S bir alt lokal olduğundan $f^*(y) \longrightarrow s \in S$ ve dolayısıyla $f(f^*(y) \longrightarrow s) \in f(S)$ dir. Böylece $f(S) \subseteq M$ bir alt lokaldir.

3.3.3.Tanım: L ve M birer lokal olmak üzere, $f[-]: \mathcal{S\ell}(L) \to \mathcal{S\ell}(M)$ dönüşümüne görüntü dönüşümü denir.

3.3.5.Önerme: L ve M birer lokal, $f: L \to M$ bir lokalik dönüşüm ve $T \subseteq M$ bir alt lokal olsun. Bu durumda $f^{-1}(T)$ keyfi infimum altında kapalıdır.

Kanıt: İlk olarak 3.2.5.Önerme gereği $f(1) = 1$ olduğundan $f^{-1}(\bigwedge\emptyset) = f^{-1}(1) = 1 = \bigwedge f^{-1}(\emptyset)$ dir. Ayrıca, I indis kümesi ve $x_i \in f^{-1}(T)$ olmak üzere, $f(x_i) \in T$ ve dolayısıyla $f(\bigwedge_{i\in I} x_i) = \bigwedge_{i\in I} f(x_i) \in T$ dir. O halde $\bigwedge_{i\in I} x_i \in f^{-1}(T)$ elde edilir.

Yukarıda verilen $f^{-1}(T) \subseteq L$ keyfi infimum işlemi altında kapalı olsa bile bir alt lokal olmak zorunda değildir. Çünkü (S2) koşulu her zaman sağlanmayabilir. Fakat yine de $f^{-1}(T)$ yardımıyla üretilen bir alt lokal tanımlamak mümkündür.

3.3.4.Tanım: L bir lokal ve $A \subseteq L$ keyfi infimum altında kapalı bir küme olsun. Bu durumda, A tarafından kapsanan ve keyfi infimum işlemi altında kapalı olan en büyük alt lokal A_{sloc} biçiminde gösterilecektir.

A_{sloc} alt lokalinin varlığından söz etmek mümkündür, çünkü $\bigwedge\emptyset = \{1\} \subseteq A'$ dir ve ayrıca $\forall i \in I$ için $S_i \subseteq A$ ise supremum tanımı gereği $\bigvee_{i\in I} S_i \subseteq A$ sağlanır.

3.3.5.Tanım: L ve M birer lokal, $f: L \to M$ bir lokalik dönüşüm ve $T \subseteq M$ bir alt lokal olsun. Bu durumda $f_{-1}(T) = (f^{-1}(T))_{sloc}$ kümesi L'nin bir alt lokalidir ve bu alt lokale, T'nin f altındaki ön görüntüsü denir.

3.3.6.Önerme: L ve M birer lokal ve $f: L \to M$ bir lokalik dönüşüm olsun. Her f dönüşümü için $f_{-1}[\,-\,]$ ön görüntü dönüşümü, $f[-]: \mathcal{S\ell}(L) \to \mathcal{S\ell}(M)$ görüntü dönüşümünün bir Galois sağ adjointidir.

Kanıt: $f: L \to M$ bir lokalik dönüşümü olsun. $f(S) \subseteq T$ şeklindeki $\forall S \in \mathcal{S\ell}(L)$ ve $\forall T \in \mathcal{S\ell}(M)$ için $S \subseteq f^{-1}(T)$ olur. O halde $S \subseteq L$ bir alt lokal olduğundan $S \subseteq f_{-1}(T)$ dir. Diğer taraftan $S \subseteq f_{-1}(T)$ şeklindeki $\forall S \in \mathcal{S\ell}(L)$ ve $\forall T \in \mathcal{S\ell}(M)$ için $S \subseteq f^{-1}(T)$ olur ve böylece $f(S) \subseteq T$ elde edilir. O halde $f(S) \subseteq T \Leftrightarrow S \subseteq f_{-1}(T)$ sağlanır.

Loc kategorisindeki ekstremal monomorfizmalar ile **Frm** kategorisindeki ekstremal epimorfizmaların birbirinin adjointi olması gerçeği ve 3.2.22.Önerme yardımıyla, alt lokallerin

$g: L \to M$ örten çatı homomorfizması ile de temsil edilebileceği sonucuna ulaşılabilir. Bu homomorfizmaya alt lokal homomorfizma denir.

Alt lokal homomorfizmalar ile alt lokaller arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir:

S, L'nin bir alt lokali ve $j_S: S \to L$ olmak üzere, $j_S^*: L \to S$ bir alt lokal homomorfizmasıdır. Tersine $h: L \to M$ bir alt lokal homomorfizması olmak üzere $h_*[M]$ bir alt lokaldir.

3.3.6.Tanım: Bir $g: L \to M$ alt lokal homomorfizması olmak üzere $E_g = \{(x, y): g(x) = g(y)\}$ bir çatı denkliği (frame congruence) olur. Tersine E bir çatı denkliği, L/E bu denklik ile tanımlanan bölüm çatısı ve $Ex = \{y: (y, x) \in E\}$ kümesi x'in denklik sınıfı olmak üzere, $g: L \to L/E$, $g(x) = Ex$ bir alt lokal homomorfizmasıdır.

3.3.1.Uyarı: Çatı denkliği latisinin doğal alt küme sıralaması ile alt lokaller ailesi üzerindeki sıralama birbirinin dualidir. Böylece 3.3.3.Önerme gereği çatı denkliği latisi bir çatıdır. Bu latis L'nin denklik çatısı olarak adlandırılır ve $\mathcal{C}(L)$ ile gösterilir.

3.3.7.Tanım: L bir lokal olsun. Bu durumda,

(N1) $\forall a \in L$ için $a \leq \nu(a)$,

(N2) $a \leq b \Rightarrow \nu(a) \leq \nu(b)$,

(N3) $\forall a \in L$ için $\nu(\nu(a)) = \nu(a)$,

(N4) $\forall a, b \in L$ için $\nu(a \wedge b) = \nu(a) \wedge \nu(b)$

koşullarını sağlayan $\nu: L \to L$ dönüşümüne bir nükleus (nucleus) denir. Buna göre nükleus dönüşümleri, alt lokal homomorfizmalar ve çatı denklikleri arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir

$\nu \to E_\nu = \{(x, y): \nu(x) = \nu(y)\}$,

$E \to \nu_E$ ($\nu_E: L \to L$, $\nu_E(x) = \bigvee Ex$),

$\nu \to h_\nu$ ($h_\nu: L \to \nu(L)$ kısıtlanmış dönüşüm)

$h \to \nu_h = (\nu_h: L \to L, \nu_h(x) = h_*h(x))$.

Şimdi nükleus dönüşümleri ve alt lokaller arasında aşağıdaki tanımdaki gibi bir bire-bir ilişki vardır.

3.3.8.Tanım: L bir lokal ve $S \subseteq L$ alt lokal olmak üzere $\nu_S(a) = j_S^*(a) = \bigwedge\{s \in S: a \leq s\}$ biçiminde tanımlanır. Diğer taraftan, bir ν: $L \rightarrow L$ nükleus dönüşümü için $S_\nu = \nu(L)$ şeklinde tanımlanır.

3.3.7.Önerme: L bir lokal olsun. Bu durumda,

a) $\forall a, b \in L$ için $\nu(a \longrightarrow \nu(b)) = a \longrightarrow \nu(b)$,

b) $\forall a, b \in L$ için $b \longrightarrow \nu(a) = \nu(b) \longrightarrow \nu(a)$ dir.

Kanıt: a) L bir lokal ve $a, b \in L$ olsun. Bu durumda, $\nu(a \longrightarrow \nu(b)) \wedge a \leq \nu(a \longrightarrow \nu(b)) \wedge \nu(a) = \nu((a \longrightarrow \nu(b)) \wedge a) = \nu(a \wedge \nu(b)) \leq \nu(\nu(b)) = \nu(b) \Rightarrow \nu(a \longrightarrow \nu(b)) \wedge a \leq \nu(b) \Rightarrow \nu(a \longrightarrow \nu(b)) \leq a \longrightarrow \nu(b)$ olur. Diğer taraftan (N1) gereği $a \longrightarrow \nu(b) \leq \nu(a \longrightarrow \nu(b))$ dir. Böylece $\nu(a \longrightarrow \nu(b)) = a \longrightarrow \nu(b)$ bulunur.

b) Keyfi $a, b \in L$ için, $b \longrightarrow \nu(a) \leq b \longrightarrow \nu(a)$ ise $(b \longrightarrow \nu(a)) \wedge b \leq \nu(a)$ dır. Buradan (N2), (N3) ve (N4) gereği $\nu((b \longrightarrow \nu(a)) \wedge b) = \nu(b \longrightarrow \nu(a)) \wedge \nu(b) \leq \nu(\nu(a)) = \nu(a)$ ve böylece $\nu(b \longrightarrow \nu(a)) \leq \nu(b) \longrightarrow \nu(a)$ olur. O halde $b \longrightarrow \nu(a) \leq \nu(b \longrightarrow \nu(a)) \leq \nu(b) \longrightarrow \nu(a)$ olup $b \longrightarrow \nu(a) \leq \nu(b) \longrightarrow \nu(a)$ elde edilir. Diğer taraftan 3.1.5.Önerme gereği, $b \leq \nu(b) \Rightarrow \nu(b) \longrightarrow \nu(a) \leq b \longrightarrow \nu(a)$ bulunur. Böylece $b \longrightarrow \nu(a) = \nu(b) \longrightarrow \nu(a)$ sağlanır.

3.3.8.Önerme: L bir lokal olmak üzere, $S \rightarrow \nu_S$ ve $\nu \rightarrow S_\nu$ dönüşümleri, L'nin alt lokalleri ile L üzerinde tanımlı nükleus dönüşümleri arasında bire-bir eşleme oluşturur.

Kanıt: ν: $L \rightarrow L$ bir nükleus dönşümü olsun ve $a_i = \nu(b_i) \in \nu(L)$ $(i \in I)$ verilsin. Öncelikle $\nu(\bigwedge a_i) \leq \bigwedge\nu(a_i) = \bigwedge\nu(\nu(b_i)) = \bigwedge\nu(b_i) = \bigwedge a_i$ dir. Ayrıca (N1) gereği $\bigwedge a_i \leq \nu(\bigwedge a_i)$ olduğundan $\nu(\bigwedge a_i) = \bigwedge a_i \in \nu(L)$ elde edilir. Diğer taraftan $a \in L$ ve $s = \nu(b) \in \nu(L)$ ise $a \longrightarrow s = a \longrightarrow \nu(b) = \nu(a \longrightarrow \nu(b)) \in \nu(L)$ olur. Böylece $\nu(L)$ bir alt lokaldir.

Şimdi S bir alt lokal olsun. Bu durumda, ν_S' nin (N1), (N2), (N3) koşullarını ve $\nu_S(a) \wedge \nu_S(b) \geq \nu_S(a \wedge b)$ eşitliğini sağladığı açıktır. Eşitliğin diğer tarafı için, öncelikle $a \wedge b \leq \nu_S(a \wedge b) \Rightarrow a \leq b \longrightarrow \nu_S(a \wedge b)$ olur. O halde (S2) gereği $b \longrightarrow \nu_S(a \wedge b) \in S$ ve ν_S tanımı gereği $\nu_S(a) \leq b \longrightarrow \nu_S(a \wedge b)$ elde edilir. Ayrıca $\nu_S(a) \leq b \longrightarrow \nu_S(a \wedge b) \Rightarrow \nu_S(a) \wedge b \leq \nu_S(a \wedge b) \Rightarrow b \leq \nu_S(a) \longrightarrow \nu_S(a \wedge b)$ gerektirmeleri sağlanır. Burada yine (S2) ve ν_S tanımı kullanılırsa,

$\nu_S(b) \leq \nu_S(a) \longrightarrow \nu_S(a \wedge b)$, yani $\nu_S(b) \wedge \nu_S(a) \leq \nu_S(a \wedge b)$ elde edilir. O halde (N4) özelliği de sağlanır ve böylece ν_S bir nükleus dönüşümü olur.

Diğer taraftan, (S1)'den $\nu_S(a) \in S$ ve ayrıca $s \in S$ için $\nu_S(s) = s$ olduğundan $\nu_S(L) = S$ sağlanır.

Son olarak $a \leq \nu(a)$ ve ayrıca "$a \leq \nu(b)$ ise $\nu(a) \leq \nu(\nu(b)) = \nu(b)$" özellikleri kullanılırsa, $\nu_{S_\nu}(a) = \bigwedge\{\nu(b): a \leq \nu(b), b \in L\} = \nu(a)$ elde edilir. O halde $\nu_{S_\nu} = \nu$ dir ve böylece alt lokaller ile nükleus dönüşümleri arasında bire-bir ilişki vardır.

3.3.3.Sonuç: Bir S alt lokaline karşılık gelen E_S denkliği,

$a \, E_S \, b \Leftrightarrow \forall s \in S \; (a \leq s \Leftrightarrow b \leq s) \Leftrightarrow \nu_S(a) = \nu_S(b)$ şeklinde tanımlıdır.

3.3.9.Önerme: Bir L lokali ve bir $S \subseteq L$ alt lokali verilsin. Bu durumda $a_i \in S$ için S alt lokalindeki supremum işlemi $\coprod_{i\in I} a_i = \nu_S(\bigvee_{i\in I} a_i)$ dir.

Kanıt: Öncelikle $\nu_S(\bigvee_{i\in I} a_i) \in S$ ve ayrıca $\forall i \in I$ için $a_i \leq \nu_S(a_i) \leq \nu_S(\bigvee_{i\in I} a_i)$'dir. Diğer taraftan, $\forall i \in I$ için $a_i \leq b$ olacak şekilde bir $b \in S$ varsa $\bigvee_{i\in I} a_i \leq b$ ve böylece $\nu_S(\bigvee_{i\in I} a_i) \leq \nu_S(b) = b$ elde edilir.

Bilindiği gibi $\Omega(X)$ çatısı, bir X uzayının tüm açık alt kümelerinden oluşur. Bu nedenle bir L lokalinde $a \in L$ elemanı ile "genelleştirilmiş açık alt uzaylar" arasında bir ilişki olması beklenir.

3.3.9.Tanım: X bir topolojik uzay ve $U \subseteq X$ bir açık alt küme olmak üzere,

$\Omega(U) = \downarrow U = \{V \subseteq U$: V, U alt uzayında açıktır$\}$

bir çatıdır. Bu çatı, açık alt uzayların bir genelleştirilmesi olarak düşünülebilir. Bu nedenle bir L lokalinin açık alt lokallerinin $a \in L$ için $\downarrow a \subseteq L$ biçiminde olması beklenir. Fakat $\downarrow a$ alt kümesi bir alt lokal olmak zorunda değildir, çünkü (S2) koşulu her zaman sağlanmaz.

Şimdi $\hat{a}: L \rightarrow \downarrow a$, $\hat{a}(x) = a \wedge x$ alt lokal homomorfizması ele alınsın. Burada $\hat{a}$ alt lokal homomorfizmasının bir çatı homomorfizması olduğu açıktır. Genelleştirilmiş açık alt uzaylar olarak ele alınabilecek olan bir açık alt lokal tanımlanabilmesi için lokalik dönüşümlerden yararlanılması gerekir. Bunun için $\hat{a}$' nın sağ adjointi olan f dönüşümünü ele alalım. Öncelikle $\hat{a}(x) = a \wedge x \leq y \Leftrightarrow x \leq f(y)$ dir. Buradan Heyting işlemi yardımıyla $x \leq a \longrightarrow y \Leftrightarrow x \leq f(y)$ ve böylece $f(y) = a \longrightarrow y$ elde edilir. Sonuç olarak $a \in L$ elemanına karşılık gelen açık alt lokal, $\downarrow a$ kümesinin f altındaki görüntüsü olan $O(a) = \{a \longrightarrow x: x \in L\}$ kümesi ile belirlenir. Ayrıca (H4) gereği $a \longrightarrow (a \wedge x) = a \longrightarrow x$ olduğundan, O(a) formülündeki $x \in L$ ifadesi ile $x \leq a$ ifadesi yer değiştirilebilir.

3.3.10.Önerme: L bir lokal ve $a \in L$ olmak üzere, O(a) bir alt lokaldir.

Kanıt: I bir indis kümesi olmak üzere $\forall i \in I$ için $b_i \in O(a)$ verilsin. O halde $\forall i \in I$ için $b_i = a \longrightarrow x_i$ olacak şekilde $x_i \in L$ vardır. Buradan, 3.1.1.Sonuç yardımıyla $\bigwedge_{i\in I} b_i = \bigwedge_{i\in I} (a \longrightarrow x_i) = a \longrightarrow \bigwedge_{i\in I} x_i$ elde edilir. O halde, $\bigwedge_{i\in I} x_i \in L$ olduğundan $\bigwedge_{i\in I} b_i \in O(a)$ elde edilir.

Şimdi $(a \longrightarrow x) \in O(a)$ verilsin ve $y \in L$ olsun. (H7) gereği $y \longrightarrow (a \longrightarrow x) = a \longrightarrow (y \longrightarrow x)$ ve ayrıca $(y \longrightarrow x) \in L$ olduğundan $(a \longrightarrow (y \longrightarrow x)) \in O(a)$ elde edilir.

3.3.4.Sonuç: (H7) gereği, $a \longrightarrow x = a \longrightarrow (a \longrightarrow x)$ olduğundan $O(a) = \{x \in L: a \longrightarrow x = x\}$ biçiminde de ifade edebilir ve bu temsil daha kullanışlıdır.

3.3.10.Tanım: L bir lokal ve $a \in L$ olsun. Bu durumda O(a) açık alt lokalin tümleyeni $C(a) = \uparrow a$ şeklindedir.

3.3.11.Önerme: C(a) bir alt lokaldir ve O(a) ile C(a) alt lokalleri, $\mathcal{S}\ell(L)$' de birbirinin tümleyenidir.

Kanıt: Öncelikle C(a)'nın bir alt lokal olduğu açıktır. $y \in (O(a) \cap C(a))$ ise $y \in O(a)$ olduğundan $y = a \longrightarrow x$ olacak şekilde bir $x \in L$ vardır ve ayrıca $y \in C(a)$ olduğundan $a \leq y$ dir. Buradan $(a \leq y = a \longrightarrow x) \Rightarrow (a \leq a \longrightarrow x) \Rightarrow (a \wedge a \leq x) \Rightarrow (a \leq x)$ elde edilir. O halde (H2) gereği, $y = a \longrightarrow x = 1$ ve böylece $O(a) \cap C(a) = \{1\} = \mathbf{0}$ elde edilir.

Diğer taraftan keyfi bir $x \in L$ için (H8) gereği, $x = (x \vee a) \wedge (a \longrightarrow x)$ olduğundan $x \in O(a) \vee C(a)$ dir. O halde $O(a) \vee C(a) = L$ olur ve böylece O(a) ile C(a) birbirinin tümleyenidir.

3.3.12.Önerme: L bir lokal ve $a, b \in L$ olmak üzere, $a \leq b \Leftrightarrow C(b) \subseteq C(a) \Leftrightarrow O(a) \subseteq O(b)$ dir.

Kanıt: İlk denklik açıktır, ikinci denklik 3.3.11.Önerme kullanılarak kolayca gösterilir.

3.3.13.Önerme: L bir lokal ve $a, b \in L$ olmak üzere,

(a) $O(a) \cap O(b) = O(a \wedge b)$, $\bigvee_{i\in I} O(a_i) = O(\bigvee_{i\in I} a_i)$.

(b) $C(a) \vee C(b) = C(a \wedge b)$, $\bigcap_{i\in I} C(a_i) = C(\bigvee_{i\in I} a_i)$ eşitlikleri sağlanır.

Kanıt: (b) $(x \in \bigcap_{i\in I} C(a_i)) \Leftrightarrow (\forall i \in I;\, x \geq a_i) \Leftrightarrow (x \geq \bigvee_{i\in I} a_i) \Leftrightarrow (x \in C(\bigvee_{i\in I} a_i))$ dır. Diğer taraftan $C(a) \vee C(b) = \{x \wedge y \colon x \geq a,\, y \geq b\} = C(a \wedge b)$ olur.

(a) $O(a)$ ve $C(a)$ birbirlerinin tümleyeni olduğundan (b)'de elde edilen $C(a) \vee C(b) = C(a \wedge b)$ ifadesinden tümleyenleri alma yoluyla $O(a) \cap O(b) = O(a \wedge b)$ ifadesi elde edilir. Benzer şekilde $\bigcap_{i\in I} C(a_i) = C(\bigvee_{i\in I} a_i)$ ifadesinin tümleyeni de $\bigvee_{i\in I} O(a_i) = O(\bigvee_{i\in I} a_i)$ olarak bulunur.

3.3.14.Önerme: L bir lokal, $S \subseteq L$ bir alt lokal ve ν_S nükleus dönüşümü olsun. Bu durumda, $C_S(a)$, S'nin bir kapalı alt lokalini göstermek üzere, $C_S(a) = C(a) \cap S$ ve $C(a) \cap S = C_S(\nu_S)(a)$ dir. Benzer şekilde $O_S(a)$, S'nin bir açık alt lokalini göstermek üzere $O_S(a) = O(a) \cap S$ ve $O(a) \cap S = O_S(\nu_S)(a)$ dir.

Kanıt: $C_S(a) = \{x \in S \colon x \geq a\}$, S'nin bir kapalı alt lokali olmak üzere $C_S(a) = \uparrow a \cap S = C(a) \cap S$ olduğu açıktır. Diğer taraftan $C(a)$, L' de keyfi bir kapalı alt lokal olsun ve $a' = \bigwedge(C(a) \cap S)$ olarak tanımlansın. Öncelikle (S1) gereği $a' \in S$'dir. Ayrıca $x \in S$ ve $x \geq a' \Leftrightarrow x \in S$ ve $x \geq a$ dır ve böylece "$x \in C_S(a') \Leftrightarrow x \in C(a) \cap S$" elde edilir. Son olarak $a' = \bigwedge(\uparrow a \cap S) = \bigwedge\{s \in S \colon a \leq s\} = \nu_S(a)$ olduğundan $C(a) \cap S = C_S(\nu_S)(a)$ elde edilir.

Açık alt lokaller ile ilgili olan eşitlikler, $O(a)$ ve $O_S(a)$' nın tümleyenlerinin, sırasıyla, $C(a)$ ve $C_S(a)$ olduğu gerçeğinden elde edilebilir.

3.3.15.Önerme: Kapalı (sırasıyla, açık) alt lokallerin lokalik dönüşümler altındaki ön görüntüleri de kapalı (sırasıyla, açık) dır. Ayrıca $f_{-1}[C(a)] = f^{-1}[C(a)] = C(f^*(a))$ ve $f_{-1}[O(a)] = O(f^*(a))$ eşitlikleri sağlanır.

Kanıt: $f^*(a) \leq x \Leftrightarrow a \leq f(x)$ olduğundan $x \in C(f^*(a)) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(\uparrow a)$ sağlanır. Böylece $C(f^*(a)) = f^{-1}(C(a))$ elde edilir. Ayrıca $C(f^*(a))$ kapalı bir alt lokal olduğundan $C(f^*(a)) = f_{-1}[C(a)]$ dir.

Diğer taraftan 3.2.1.Önerme (b) gereği, $f(f^*(a) \longrightarrow b) = a \longrightarrow f(b)$ olduğundan $O(f^*(a)) \subseteq f^{-1}(O(a))$ dir. Şimdi $f^{-1}(O(a)) \subseteq O(f^*(a))$ kapsamasının gösterilmesi için, $S \subseteq f^{-1}(O(a))$ olacak şekilde bir S alt lokali alınsın. Eğer $s \in S$ ise herhangi bir $x \longrightarrow s \in S$ ve böylece varsayımdan $f(x \longrightarrow s) \in O(a)$ dır. Şimdi 3.2.1.Önerme (b) ve (H7) gereği, $f(x \longrightarrow s) = a \longrightarrow f(x \longrightarrow s) = f(f^*(a) \longrightarrow (x \longrightarrow s)) = f((f^*(a) \wedge x) \longrightarrow s)$ olur. Özel olarak $x = f^*(a) \longrightarrow s$ için $f((f^*(a) \wedge (f^*(a) \longrightarrow s)) \longrightarrow s) = f(f^*(a) \longrightarrow s) \longrightarrow s) = f(f^*(a) \wedge s) \longrightarrow s) = f(1) = 1$ dir. Şimdi (H3) gereği, $s \leq f^*(a) \longrightarrow s$ ve ayrıca $((f^*(a) \longrightarrow s) \longrightarrow s) = 1$ olduğundan (H2) gereği, $f^*(a) \longrightarrow s \leq s$ dir. O halde $f^*(a) \longrightarrow s = s \in O(f^*(a))$ bulunur. Sonuç olarak $f^{-1}(O(a)) = O(f^*(a))$ olup $f^{-1}(O(a))$ açık bir alt lokaldir. Böylece $f_{-1}[O(a)] = O(f^*(a))$ elde edilir.

3.3.16.Önerme: C(a), O(a) alt lokallerine karşılık gelen nükleus dönüşümleri, sırasıyla, $\nu_{C(a)} = a \vee x$ ve $\nu_{O(a)} = a \longrightarrow x$ biçimindedir. $\nu_{C(a)}$

Kanıt: L bir lokal ve bir $a \in L$ olmak üzere $\nu_{C(a)} = \bigwedge\{s \in \uparrow a: x \leq s\} = a \vee x$ ve $\nu_{O(a)} = \bigwedge\{a \longrightarrow y: x \leq a \longrightarrow y, y \in L\}$ dir. Eğer $x \leq a \longrightarrow y$ ise $a \longrightarrow x \leq a \longrightarrow (a \longrightarrow y) = a \longrightarrow y$ olur. Böylece $a \longrightarrow x \leq \nu_{O(a)}$ bulunur. Diğer taraftan (H2) gereği $x \leq a \longrightarrow x$ ve böylece $a \longrightarrow x \in \{a \longrightarrow y: x \leq a \longrightarrow y, y \in L\}$ ve $\nu_{O(a)} \leq a \longrightarrow x$ dir. Sonuç olarak $\nu_{O(a)} = a \longrightarrow x$ elde edilir.

3.3.5.Sonuç: Kapalı alt lokaller söz konusu olduğunda, 3.3.9.Önermede verilen supremum ile L üzerindeki supremum işlemleri çakışır.

Gerçekten, $a_i \in C(a)$ olmak üzere, $\coprod_{i\in I} a_i = \nu_{C(a)}(\bigvee_{i\in I} a_i) = (\bigvee_{i\in I} a_i) \vee a = \bigvee_{i\in I} a_i$ dir.

3.3.6.Sonuç: C(a) ve O(a) alt lokallerine karşılık gelen denklikler, sırasıyla, ∇_a ve Δ_a biçiminde gösterilmek üzere,

(a) $x \nabla_a y \Leftrightarrow \nu_{C(a)}(x) = \nu_{C(a)}(y) \Leftrightarrow a \vee x = a \vee y$ dir. ν_S

(b) $x \Delta_a y \Leftrightarrow \nu_{O(a)}(c) = \nu_{O(a)}(y) \Leftrightarrow a \longrightarrow x = a \longrightarrow y \Leftrightarrow a \wedge x = a \wedge y$ dir.

Şimdi her alt lokalin, kapalı ve açık alt lokaller yardımıyla üretilebileceği gösterilmek istensin.

3.3.17.Önerme: L bir lokal ve $S \subseteq L$ bir alt lokal olmak üzere,

$S = \bigcap\{C(x) \vee O(y): \nu_S(x) = \nu_S(y)\}$ dir.

Kanıt: ($\subseteq$): Bir $a \in S$ verilsin ve $\nu_S(x) = \nu_S(y)$ olsun. Öncelikle $\nu_S(a) = a$ olduğundan, 3.3.7.Önerme (b) gereği $x \longrightarrow a = \nu_S(x) \longrightarrow a = \nu_S(y) \longrightarrow a = y \longrightarrow a$ ve böylece (H8) gereği $a = (a \vee x) \wedge (x \longrightarrow a) = (a \vee x) \wedge (y \longrightarrow a) \in C(x) \vee O(y)$ dir.

($\supseteq$): Bir $a \in \bigcap\{C(x) \vee O(y): \nu_S(x) = \nu_S(y)\}$ verilsin. $\nu(\nu(a)) = \nu(a)$ olduğundan $a \in C(\nu(a)) \vee O(a)$ dır. Böylece $a = y \wedge (a \longrightarrow z)$ olacak şekilde bir $y \in C(\nu(a))$ ve bir $z \in L$ vardır ve böylece $y \geq \nu(a) \geq a$ olur. Buradan $1 = a \longrightarrow a = a \longrightarrow (y \wedge (a \longrightarrow z)) = (a \longrightarrow y) \wedge (a \longrightarrow (a \longrightarrow z)) = 1 \wedge (a \longrightarrow z) = (a \longrightarrow z)$ bulunur. Böylece $a = y \wedge (a \longrightarrow z) = y$ ve $y \geq \nu(a) \Rightarrow a \geq \nu(a)$ dir. O halde $a = \nu(a)$ ve buradan $a \in S$ dir. Sonuç olarak $S = \bigcap\{C(x) \vee O(y): \nu_S(x) = \nu_S(y)\}$ bulunur.

3.3.7.Sonuç: E bir çatı denkliği olmak üzere, $E = \bigvee\{\nabla_a \cap \Delta_a : a\ E\ b\}$ dir.

Şimdi klasik uzaylardaki açık, sürekli ve kapalı sürekli dönüşümlerin, çatı ve lokal teorisindeki karşılıkları incelenecektir.

3.3.18.Önerme: L, M birer lokal, $f : L \rightarrow M$ bir lokalik dönüşüm ve $S \subseteq L$ bir alt lokal olsun. Bu durumda S ve f(S)'ye karşılık gelen denklikler arasında "$a\ E_{f[S]}\ b \Leftrightarrow f^*(a)\ E_S\ f^*(b)$" şeklinde bir ilişki vardır.

Kanıt: 3.3.4.Sonuç ve adjoint tanımı kullanılırsa,

$a\ E_{f[S]}\ b \Leftrightarrow \forall s \in S, (a \leq f(s) \Leftrightarrow b \leq f(s))$" $\Leftrightarrow \forall s \in S, (f^*(a) \leq s \Leftrightarrow f^*(b) \leq s) \Leftrightarrow f^*(a)\ E_S\ f^*(b)$ elde edilir.

3.3.11.Tanım: L ve M birer lokal ve $f: L \rightarrow M$ bir lokalik dönüşüm olmak üzere, $\forall S \subseteq L$ açık alt lokali için $f(S) \subseteq M$ bir açık alt lokal ise f lokalik dönüşümü açıktır denir.

3.3.19.Önerme: L ve M birer lokal ve $f: L \rightarrow M$ bir lokalik dönüşümü olsun. Bu durumda f'nin açık olması için gerek ve yeter koşul f^* dönüşümünün bir tam Heyting homomorfizması olmasıdır.

Kanıt: (⇒): Öncelikle $f: L \rightarrow M$ lokalik dönüşümünün açık olması için gerek ve yeter koşul, $\forall a \in L$ için $f[O(a)] = O(b)$ olacak şekilde bir $b \in M$ olmasıdır. Bu koşulu sağlayan b elemanı $\emptyset(a)$ biçiminde gösterilsin. 3.3.12.Önerme gereği b tektir ve böylece $\emptyset: L \rightarrow M$ dönüşümü iyi tanımlıdır.

3.3.6.Sonuç (b) ve 3.3.18.Önerme gereği $\forall x, y \in L$ için $x\ E_{f[O(a)]}\ y = x\ E_{O(b)}\ y \Leftrightarrow f^*(x)\ E_{O(a)}\ f^*(y)$ yani $x \wedge b = x \wedge \emptyset(a) = y \wedge \emptyset(a) = y \wedge b \Leftrightarrow f^*(x) \wedge a = f^*(y) \wedge a$ elde edilir. Bu ifade $x \wedge \emptyset(a) \leq y \wedge \emptyset(a) \Leftrightarrow f^*(x) \wedge a \leq f^*(y) \wedge a$ biçiminde de yazılabilir. Buradan $x \wedge \emptyset(a) \leq y$ ve $f^*(x) \wedge a \leq f^*(y)$ olduğundan,

$$x \wedge \emptyset(a) \leq y \Leftrightarrow f^*(x) \wedge a \leq f^*(y) \qquad (*)$$

elde edilir. Özel olarak $x = 1$ alınırsa $\emptyset(a) \leq y \Leftrightarrow a \leq f^*(y)$ sağlanır. Böylece f^* dönüşümü, $\emptyset$'nin bir sağ adjointidir ve bu nedenle keyfi infimumları korur. Ayrıca f^* bir sol adjoint olduğundan keyfi upremumları da korur. O halde f^* bir tam homomorfizmadır.

Diğer taraftan, (*) özelliğinden, $\forall a$ için, $a \leq f^*(x) \longrightarrow f^*(y) \Leftrightarrow f^*(x) \wedge a \leq f^*(y) \Leftrightarrow x \wedge \emptyset(a) \leq y \Leftrightarrow \emptyset(a) \leq x \longrightarrow y \Leftrightarrow a \leq f^*(x \longrightarrow y)$ olduğundan $f^*(x \longrightarrow y) = f^*(x) \longrightarrow f^*(y)$ elde edilir. Böylece f^* Heyting işlemini korur ve dolayısıyla bir Heyting homomorfizmasıdır.

(⇐): f^* bir tam Heyting homomorfizması olsun. Bu durumda f^* dönüşümünün bir $\emptyset: L \longrightarrow M$ sol adjointi vardır. Ayrıca f^* tam olduğundan hem keyfi supremumları hem de keyfi infimumları korur. O halde,

$f^*(x) \wedge a \leq f^*(y) \Leftrightarrow a \leq f^*(x) \longrightarrow f^*(y) = f^*(x \longrightarrow y) \Leftrightarrow \emptyset(a) \leq x \longrightarrow y \Leftrightarrow x \wedge \emptyset(a) \leq y$ olur ve böylece (*) ifadesi sağlanır. Sonuç olarak f açıktır.

3.3.12.Tanım: L ve M birer lokal ve f: $L \rightarrow M$ bir lokalik dönüşüm olsun. Eğer L' deki her kapalı alt lokalin f altındaki görüntüsü de kapalı alt lokal ise, f dönüşümüne kapalıdır denir.

3.3.20.Önerme: L, M birer lokal ve f: $L \rightarrow M$ bir lokalik dönüşüm olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirlerine denktir:

(1) f kapalıdır,

(2) $\forall a \in L$ için $f(\uparrow a) = \uparrow f(a)$ dır,

(3) $\forall a \in L$ ve $\forall b \in M$ için $f(a \vee f^*(b)) = f(a) \vee b$ dir,

(4) $\forall a \in L$ ve $\forall b, c \in M$ için $c \leq f(a) \vee b \Leftrightarrow f^*(c) \leq a \vee f^*(b)$,

(5) $\forall a \in L$ ve $\forall b, c \in M$ için $f(a) \vee b = f(a) \vee c \Leftrightarrow a \vee f^*(b) = a \vee f^*(c)$ dir.

Kanıt: (1) ⇒ (2): f bir kapalı lokalik dönüşümü ve bir $a \in L$ olsun. Öncelikle f kapalı olduğundan $f[\uparrow a] = \uparrow b$ olacak şekilde bir $b \in M$ vardır. Ayrıca $a \in \uparrow a$ olduğundan, $f(a) \in \uparrow b$ ve böylece $b \leq f(a)$ dır. Diğer taraftan f(a), $f[\uparrow a]$'nın en küçük elemanı ve $b \in f[\uparrow a]$ olduğundan $f(a) \leq b$ dır. Sonuç olarak $f(a) = b$ bulunur.

(2) ⇒ (1): Açıktır.

(2) ⇒ (3): Lokalik dönüşümler infimumu korudukları için sırayı da korurlar. Bu nedenle, $f(a \vee f^*(b)) \geq f(a) \vee f(f^*(b)) \geq f(a) \vee b$ sağlanır. Diğer taraftan, $(f(a) \vee b) \in \uparrow f(a)$ olduğundan (2)' den $f(a) \vee b = f(x)$ olacak şekilde bir $x \in \uparrow a$ vardır. Ayrıca $f(x) \geq b \Leftrightarrow x \geq f^*(b)$ olduğundan $x \geq a \vee f^*(b)$ ve böylece $f(a \vee f^*(b)) \leq f(x) = f(a) \vee b$ elde edilir.

(3) ⇒ (2): Eğer $x \in \uparrow f(a)$ ise $x \geq f(a)$ dir. Buradan da $x = x \vee f(a)$ ve kabul gereği $x = x \vee f(a) = f(a \vee f^*(x))$ elde edilir. O halde $(a \vee f^*(x)) \in \uparrow a$ olduğundan $x = f(a \vee f^*(x)) \in f[\uparrow a]$ dır. Diğer kapsama için $y \in f(\uparrow a)$ alınırsa, $f(x) = y$ olacak şekilde bir $x \in \uparrow a$ bulunabilir. Burada $x \geq a$ olacağı için $f(a) \leq f(x) = y$ olup $y \in \uparrow f(a)$ elde edilir.

(3) ⇔ (4): $f(a \vee f^*(b)) = f(a) \vee b \Leftrightarrow (c \leq f(a) \vee b \Leftrightarrow c \leq f(a \vee f^*(b)))$

$\Leftrightarrow (c \leq f(a) \vee b \Leftrightarrow f^*(c) \leq a \vee f^*(b))$ dir.

(4) ⇒ (5): $\forall a \in L$ ve $\forall b, c \in M$ için $f(a) \vee b = f(a) \vee c$ olsun. Buradan $f^*(c) \leq a \vee f^*(b) \Leftrightarrow c \leq f(a) \vee b = f(a) \vee c \Leftrightarrow f^*(c) \leq a \vee f^*(c)$ olup $a \vee f^*(b) = a \vee f^*(c)$ elde edilir. Diğer taraftan $a \vee f^*(b) = a \vee f^*(c)$ ise $c \leq f(a) \vee b \Leftrightarrow f^*(c) \leq a \vee f^*(b) = a \vee f^*(c) \Leftrightarrow c \leq f(a) \vee c$ olduğundan $f(a) \vee b = f(a) \vee c$ bulunur.

(5) ⇒ (4): $\forall a \in L$ ve $\forall b, c \in M$ için $f(a) \vee b = f(a) \vee c \Leftrightarrow a \vee f^*(b) = a \vee f^*(c)$ olsun. Eğer $c \leq f(a) \vee b$ ise $f^*(c) \leq f^*(f(a) \vee b) = f^*(f(a)) \vee f^*(b) \leq a \vee f^*(b)$ dir. Diğer taraftan eğer $f^*(c) \leq a \vee f^*(b)$ ise $f^*(c) \vee (a \vee f^*(b)) = f^*(c) \vee f^*(b) \vee a = a \vee f^*(b)$ dir. O halde kabul gereği $f(a) \vee b = f(a) \vee b \vee c$ ve böylece $f(a) \vee b \geq c$ dir.

3.3.13.Tanım: L bir lokal ve $S \subseteq L$ bir alt lokal olsun. S' yi kapsayan en küçük kapalı alt lokale S'nin kapanışı denir.

$\overline{S} = \uparrow(\bigwedge S)$ dir; gerçekten $S \subseteq T$ olacak şekilde $\forall T$ alt lokali, $\bigwedge S$' yi içerir ve diğer taraftan $S \subseteq \uparrow(\bigwedge S)$ olduğu da açıktır. Böylece S alt lokalinin kapanışı elde edilir.

Ayrıca $S \subseteq T$ ve T bir kapalı alt lokal olsun. O halde $\exists a \in L$ için $T = \uparrow a$ dir ve T bir yukarı küme olduğundan $\uparrow(\bigwedge S) \subseteq T$ dir. Böylece $\uparrow(\bigwedge S)$, S' yi içeren en küçük kapalı alt lokaldir.

3.3.21.Önerme: (1) Bir L lokali ve $S, T \subseteq L$ alt lokalleri verilsin. Bu durumda $\overline{0} = 0$, $\overline{\overline{S}} = \overline{S}$, $\overline{S \vee T} = \overline{S} \vee \overline{T}$ dir.

(2) $\overline{O(a)} = C(a^*) = \uparrow(a^*)$ dır.

Kanıt: (1) $\overline{0} = 0$, $\overline{\overline{S}} = \overline{S}$ ifadeleri açıktır. Şimdi $\overline{S \vee T} = \overline{S} \vee \overline{T}$ ifadesi gösterilecektir: $\bigwedge S = a$ ve $\bigwedge T = b$ olsun. Buradan $\overline{S} \vee \overline{T} = \uparrow a \vee \uparrow b = \{x \wedge y : x \in \uparrow a, y \in \uparrow b\} = \uparrow(a \wedge b)$ dir. Gerçekten,

$\overline{S} \vee \overline{T} \subseteq \uparrow a \vee \uparrow b$ kısmı açıktır. Diğer kapsama için $z \in \uparrow(a \wedge b)$ alınırsa, $a \wedge b \leq z$ dir. Şimdi $x = a \vee z$, $y = b \vee z$ olarak tanımlansın, $x \wedge y = (a \vee z) \wedge (b \vee z) = z \vee (a \wedge b) = z$ olup $z \in \{x \wedge y : x \in \uparrow a, y \in \uparrow b\}$ dır. Sonuç olarak

$\overline{S} \vee \overline{T} = \uparrow a \vee \uparrow b = \{x \wedge y : x \in \uparrow a, y \in \uparrow b\} = \uparrow(a \wedge b) = \uparrow\bigwedge(S \vee T) = \overline{S \vee T}$ bulunur.

(2) ($\wedge$-distr) gereği $\bigwedge_{x \in L} (a \longrightarrow x) = a \longrightarrow \bigwedge_{x \in L} x = a \longrightarrow 0 = a^*$ dır ve böylece $\overline{O(a)} = \uparrow(a^*) = C(a^*)$ elde edilir.

3.3.14.Tanım: L bir lokal ve $S \subseteq L$ bir alt lokal olsun. Eğer $\overline{S} = L$ ise S' ye bir yoğun alt lokal denir.

Burada $\overline{S} = \uparrow(\bigwedge S)$ eşitliği kullanılarak "S, L'de yoğundur $\Leftrightarrow 0 \in S$ dir." denkliğinin sağlandığı görülebilir.

3.3.15.Tanım: $f: L \to M$ lokalik dönüşümü için $0 \in f(S)$ ise f' ye bir yoğun lokalik dönüşüm denir. Şimdi h çatı homomorfizması, f'nin adjointi olmak üzere, "h çatı homomorfizması yoğun ise ($h(x) = 0 \Rightarrow x = 0$) denkliği sağlanır" sonucu elde edilebilir. Gerçekten $h(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq f(0) = 0$ dır.

3.3.22.Önerme: Bir L lokali için $B_L = \{x \longrightarrow 0: x \in L\}$, L'nin bir alt lokalidir.

Kanıt: Öncelikle 3.1.7.Önerme gereği, $\bigwedge\{x_i \longrightarrow 0\} = (\bigvee x_i) \longrightarrow 0$ dır ve böylece (S1) sağlanır. Diğer taraftan $y \in L$ için, (H7) gereği $y \longrightarrow (x \longrightarrow 0) = (y \wedge x) \longrightarrow 0$ olduğundan (S2) de sağlanır. Böylece B_L, L'nin bir alt lokalidir.

3.3.23.Önerme: L bir lokal olmak üzere B_L, L' nin en küçük yoğun alt lokalidir. L' nin her yoğun alt lokali, en küçük yoğun alt lokal B_L' yi içerir.

Kanıt: İlk olarak (H1) gereği $1 \longrightarrow 0 = 0 \in B_L$ dir ve böylece B_L yoğun bir alt lokaldir. Diğer yandan S, L' nin yoğun bir alt lokali ve $(x \longrightarrow 0) \in B_L$ ise (S2) gereği $(x \longrightarrow 0) \in S$ dir. Buradan $B_L \subseteq S$ elde edilir.

3.3.24.Önerme: L, M birer lokal olmak üzere $S \subseteq L$ alt lokali ve $f: L \to M$ lokalik dönüşümü verilsin. Bu durumda $f(\overline{S}) \subseteq \overline{f(S)}$ dir.

Kanıt: $S \subseteq L$ bir alt lokal ve f bir lokalik dönüşüm olmak üzere, lokalik dönüşümler keyfi infimumları koruduğu için $f(\bigwedge S) = \bigwedge f(S)$ dir. O halde $f(\uparrow\bigwedge S) \subseteq \uparrow\bigwedge f(S)$ sağlanır. (Gerçekten $s \in f(\uparrow\bigwedge S)$ ise $\exists x \in \uparrow\bigwedge S$; $f(x) = s$ dir. Buradan $x \in \uparrow\bigwedge S \Rightarrow \exists y \in \bigwedge S$; $y \leq x \Rightarrow \exists y \in \bigwedge S$; $f(y) \leq f(x)$ olur. Böylece $f(y) \in f(\bigwedge S) = \bigwedge f(S)$ olduğundan $f(x) = s \in \uparrow\bigwedge f(S)$) elde edilir.

Şimdi lokallerdeki kapanış işlemi ile alt lokallerdeki kapanış işlemi arasındaki ilişki incelenecektir.

3.3.16.Tanım: L bir lokal, $S \subseteq L$ ve $T \subseteq S$ birer alt lokal olsun. Bu durumda, $\{x \in S: x \geq \bigwedge T\} = \{x \in L: x \geq \bigwedge T\} \cap S$, yani T'nin S'deki kapanışı $\overline{T}^S = \overline{T} \cap S$ dir.

3.3.25.Önerme: L, M birer lokal ve $f: L \to M$ bir lokalik dönüşüm olsun. Bu durumda $\forall a, b \in L$ için $f_{-1}[C(a) \vee O(b)] = f_{-1}[C(a)] \vee f_{-1}[O(b)]$ dir.

Kanıt: İlk olarak 3.3.6.Önerme gereği öngörüntü dönüşümü bir sağ adjoint olduğundan, $\wedge$' leri korur ve böylece $f_{-1}(C(a) \vee O(b)) \cap f_{-1}(O(a) \cap C(b)) = f_{-1}(0) = 0$ dir. Diğer taraftan, dağılma ve monotonluk kullanılırsa, $(f_{-1}[O(a)] \cap f_{-1}[C(b)])^*$

$$f_{-1}[C(a) \vee O(b)] \vee f_{-1}[O(a) \cap C(b)] = f_{-1}[C(a) \vee O(b)] \vee (f_{-1}[O(a)] \cap f_{-1}[C(b)])$$

$$\geq f_{-1}[C(a)] \vee f_{-1}[O(b)] \vee (f_{-1}[O(a)] \cap f_{-1}[C(b)])$$

$$= (f_{-1}[Ca)] \vee f_{-1}[O(b)] \vee f_{-1}[O(a)]) \cap (f_{-1}[C(a)] \vee f_{-1}[O(b)] \vee f_{-1}[C(b)])$$

$\geq (f_{-1}[C(a)] \vee f_{-1}[O(a)]) \cap (f_{-1}[O(b)] \vee f_{-1}[C(b)])$ elde edilir. Buradan 3.3.15.Önerme gereği,

$= (C(f^*(a)) \vee O(f^*(a))) \cap (O(f^*(b)) \vee C(f^*(b))) = L \cap L = L$ bulunur. Böylece $f_{-1}[C(a) \vee O(b)]$ elemanı $f_{-1}[O(a) \cap C(b)]$'nin tümleyenidir. O halde 3.3.15.Önerme gereği, $(f_{-1}[O(a) \cap C(b)])^* = f_{-1}[C(a)] \vee f_{-1}[O(b)]$ olur ve böylece $f_{-1}[C(a) \vee O(b)] = (f_{-1}[O(a) \cap C(b)])^* = (f_{-1}[O(a)] \cap f_{-1}[C(b)])^* = f_{-1}[C(a)] \vee f_{-1}[O(b)]$ elde edilir.

3.3.26.Önerme: L, M birer lokal ve f: L → M bir lokalik dönüşüm olsun. Bu durumda öngörüntü dönüşümü $f_{-1}[\ ]: \mathcal{S}\ell(M) \to \mathcal{S}\ell(L)$ bir ko-çatı homomorfizmasıdır

Kanıt: $f_{-1}[\ ]$ dönüşümü bir sağ adjoint olduğundan $\wedge$'leri korur. Diğer taraftan, $C(1) = \uparrow 1 = \{1\} = \mathbf{0}$ olduğundan $f_{-1}[\mathbf{0}] = f_{-1}[C(1)] = C(f^*(1)) = C(1) = \mathbf{0}$ dır. Şimdi f_{-1}'nin sonlu $\vee$'leri koruduğu gösterilecektir. S, T $\in \mathcal{S}\ell(M)$ olmak üzere 3.3.17.Önerme gereği,

$S = \bigcap_{i\in I}\{C(x_i) \vee O(y_i)\}$, $T = \bigcap_{j\in J}\{C(u_j) \vee O(v_j)\}$ olacak şekilde $x_i, y_i, u_j, v_j \in L$ vardır. Buradan 3.3.13.Önerme, 3.3.15.Önerme ve 3.3.25.Önerme gereği

$$f_{-1}[S \vee T] = f_{-1}[\bigcap_{i,j}\{C(x_i) \vee O(y_i) \vee C(u_j) \vee O(v_j)\}]$$

$$= f_{-1}[\bigcap_{i,j}C(x_i \wedge u_j) \vee O(y_i \wedge v_j)\}]$$

$$= \bigcap_{i,j}((f_{-1}[C(x_i \wedge u_j) \vee O(y_i \wedge v_j)\}]$$

$$= \bigcap_{i,j}((f_{-1}[C(x_i \wedge u_j) \vee f_{-1}[O(y_i \wedge v_j)])$$

$$= \bigcap_{i,j}(C(f^*(x_i \wedge u_j)) \vee O(f^*(y_i \wedge v_j)))$$

$$= \bigcap_{i,j}(C(f^*(x_i) \vee C(f^*(u_j)) \vee O(f^*(y_i) \wedge O(f^*(v_j)))$$

$$= \bigcap_{i,j}((f_{-1}[C(x_i)] \vee f_{-1}C(u_j)] \vee f_{-1}[O(y_i)] \vee f_{-1}[O(v_j)])$$

$$= \bigcap_{i\in I}((f_{-1}[C(x_i) \vee O(y_i)] \vee \bigcap_{j\in J}((f_{-1}[C(u_j) \vee O(v_j)]$$

$= f_{-1}[\bigcap_{i\in I}(C(x_i) \vee O(y_i))] \vee f_{-1}[\bigcap_{i\in J}(C(u_j) \vee O(v_j))] = f_{-1}[S] \vee f_{-1}[T]$

elde edilir. Böylece $f_{-1}[\ ]: \mathcal{S\ell}(M) \to \mathcal{S\ell}(L)$ dönüşümü bir ko-çatı homorfizmasıdır.

3.3.8.Sonuç: L, M birer lokal ve f: L → M bir lokalik dönüşüm olmak üzere $f_{-1}[\ ]: \mathcal{S\ell}(M) \to \mathcal{S\ell}(L)$ dönüşümü tümleyenleri korur.

Kanıt: $S \in \mathcal{S\ell}(M)$ alınsın ve S^*, S'nin tümleyeni olsun. O halde $S \wedge S^* = \mathbf{0}$, $S \vee S^* = M$ dir. Diğer taraftan $\mathbf{0} = f_{-1}[0] = f_{-1}[S \wedge S^*] = f_{-1}[S] \wedge f_{-1}[S^*]$ ve $L = f_{-1}[M] = f_{-1}[S \vee S^*] = f_{-1}[S] \vee f_{-1}[S^*]$ olur. Böylece $(f_{-1}[S])^* = f_{-1}[S^*]$ elde edilir.

3.3.27.Önerme: L bir lokal ve a ∈ L bir ∧- indirgenemez eleman olsun. Bu durumda ∀x ∈ L için $x \longrightarrow a = 1$ ya da $x \longrightarrow a = a$ dır.

Kanıt: Eğer $x \longrightarrow a \neq 1$ ise (H2) gereği $x \nleq a$ ve (H3) gereği $a \leq x \longrightarrow a$ dir. Diğer taraftan (H5) gereği $x \wedge (x \longrightarrow a) \leq a$ dir. O halde a, ∧- indirgenemez eleman olduğundan $x \longrightarrow a \leq a$ ve (H3) gereği $x \longrightarrow a = a$ olur.

3.3.28.Önerme: $x \longrightarrow a = a \neq 1$ ise {a, 1} kümesi bir alt lokaldir ancak ve ancak a, ∧- indirgenemez elemandır.

Kanıt: (⇐): a, ∧- indirgenemez olacak şekilde bir a ∈ L verilsin ($a \neq 1$). {a, 1} kümesi düşünüldüğünde, 3.3.27.Önerme gereği S2 sağlanır. Ayrıca, $a \wedge 1 = a$ olduğundan S1 sağlanır. Böylece {a, 1} kümesi, L'nin bir alt lokalidir.

(⇒): {a, 1} kümesi bir alt lokal olacak şekilde bir $a \neq 1$, a ∈ L verilsin ve $x \wedge y \leq a$ olacak şekilde x, y ∈ L alınsın. Buradan $x \leq y \longrightarrow a$ dır. Eğer $y \nleq a$ ise $y \longrightarrow a \neq 1$ olur ve buradan $x \leq y \longrightarrow a = a$ bulunur, yani $x \leq a$ olup a, ∧- indirgenemez elemandır.

3.3.11.Sonuç: $p \neq 1$ olacak şekilde {p, 1} alt lokali tek nokta alt lokali olarak adlandırılacaktır. Tek nokta ile tek nokta alt lokali arasındaki ilişki klasik uzaylarda x ile {x} arasındaki ilişki ile aynıdır.

3.3.12.Sonuç: L bir lokal olmak üzere $B_L \subseteq L$ nin, **0**' ı içeren L' deki en küçük alt lokal olduğu biliniyor. Bu ifade genişletilirse, ∀a ∈ L için $b(a) = \{x \longrightarrow a : x \in L\}$ kümesi a'yı içeren en küçük alt lokaldir: Gerçekten $1 \longrightarrow a = a$ olduğundan $a \in b(a)$ dır. Ardından $\bigwedge(x_i \longrightarrow a) = \bigvee x_i \longrightarrow a$ olduğundan S2 sağlanır ve $y \longrightarrow (x \longrightarrow a) = (x \wedge y) \longrightarrow a$ olduğundan S1 sağlanır. Böylece b(a) bir alt lokaldir. Son olarak S, a' yı içeren bir alt lokal olsun. Keyfi bir $x \longrightarrow a \in b(a)$ alınırsa, S2 gereği, $x \longrightarrow a \in S$ dir. Böylece $b(a) \subseteq S$ olur.

3.3.29.Önerme: Bir L lokali verilsin. Bu durumda,

(a) $\bigwedge b(a) = a$ dir,

(b) $x \in L$'nin $b(a)$' daki yarı tümleyeni $x^* = x \longrightarrow a$ şeklindedir,

(c) $b(a) = \{x: x = (x \longrightarrow a) \longrightarrow a\}$ ifadeleri sağlanır.

Kanıt: (a) $a = 1 \longrightarrow a$ olduğundan $a \in b(a)$ ve böylece $\bigwedge b(a) \leq a$ dir. Diğer taraftan (H3) gereği $a \leq x \longrightarrow a$ ve böylece $a \leq \bigwedge b(a)$ elde edilir.

(b) (a) şıkkı gereği a, b(a)'nın en küçük elemanıdır ve 3.3.12.Sonuç gereği $x^* = x \longrightarrow a$ olur.

(c) $(x \longrightarrow a) \in L$ olduğundan $\{x: x = (x \longrightarrow a) \longrightarrow a\} \subseteq b(a)$ kapsaması açıktır. Diğer taraftan $x \in L$ alınsın. Herhangi bir $y \in L$ için (H5) gereği, $y \wedge (y \longrightarrow a) \leq a$ dır. Buradan $y \leq (y \longrightarrow a) \longrightarrow a$ olur. Şimdi $y = x \longrightarrow a$ olarak alınırsa, $x \longrightarrow a \leq ((x \longrightarrow a) \longrightarrow a) \longrightarrow a$ elde edilir.

3.1.5.Önerme gereği $x \longrightarrow a \geq ((x \longrightarrow a) \longrightarrow a) \longrightarrow a$ olur.

Böylece $x \longrightarrow a = ((x \longrightarrow a) \longrightarrow a) \longrightarrow a$ olup $(x \longrightarrow a) \in \{y: y = (y \longrightarrow a) \longrightarrow a\}$ elde edilir.

3.3.16.Tanım: L bir lokal olsun. Bu durumda bir S alt lokali ile çatı denklik bağıntısı arasındaki ilişki, "$x\ E_S\ y \Leftrightarrow (\forall s \in S$ için $x \leq s \Leftrightarrow y \leq s)$" biçimindedir. Ayrıca alt lokaller ile nükleus dönüşümleri arasındaki ilişki $\nu_S(x) = \bigwedge\{s \in S: x \leq s\}$, $(x\ E_S\ y \Leftrightarrow \nu_S(x) = \nu_S(y))$ şeklinde verilebilir.

Diğer taraftan, $\forall S$ alt lokali bir denklik bağıntısı yardımıyla $S = \{\text{maks}Ex: x \in L\}$ biçiminde elde edilebilir. Burada $\text{maks}Ex = \bigvee Ex = \bigvee\{y: y\ E\ x\}$ biçiminde tanımlıdır.

3.3.17.Tanım: (a) L bir lokal ve R, L üzerinde ikili işlem olsun. Bu durumda $\forall a, b, c$ için $a\ R\ b \Rightarrow (a \wedge c \leq s \Leftrightarrow b \wedge c \leq s)$ koşulunu sağlayan $s \in S$ elemanına R-doymuştur, ya da kısaca doymuştur, denir. L'nin tüm doymuş elemanlarının oluşturduğu küme L/R ile gösterilir.

(b) $\mu_R: L \rightarrow L/R$; $\mu_R = (x \longrightarrow \bigwedge\{s$ doymuş: $x \leq s\})$ dönüşümü tanımlanabilir.

3.3.30.Önerme: Bir L lokali verilsin. Bu durumda $S = L/R$, L'nin bir alt lokali ve $j: S \rightarrow L$ gömme dönüşümü için $\mu_R = j^*$ dir. Ayrıca $\nu_S(a) = \mu_R(a)$ eşitliği ve $(a\ R\ b \Rightarrow \nu_S(a) = \nu_S(b))$ gerektirmesi sağlanır.

Kanıt: Öncelikle S = L/R'nin keyfi infimum işlemi altında kapalı olduğu gösterilecektir. Bunu yapmak amacıyla, $\forall i \in I$ için s_i' ler doymuş olsun. O halde $\forall a, b, c$ için

$a\,R\,b \Rightarrow (\forall i \in I)\,(a \wedge c \leq s_i \Leftrightarrow (b \wedge c \leq s_i) \;\Rightarrow (\forall i \in I)\,(a \wedge c \leq \bigwedge_{i\in I} s_i \Leftrightarrow (b \wedge c \leq \bigwedge_{i\in I} s_i)$

olur ve böylece $\bigwedge_{i\in I} s_i$ doymuş eleman olduğu için S1 sağlanır.

Diğer taraftan $x \in L/R$ ve $s \in L$ için,

$a \wedge c \leq x \longrightarrow s \Leftrightarrow a \wedge c \wedge x \leq s \Leftrightarrow b \wedge c \wedge x \leq s \Leftrightarrow b \wedge c \leq x \longrightarrow s$

olduğundan $x \longrightarrow s$ doymuş bir elemandır ve böylece S2 sağlanır. O halde L/R bir alt lokaldir. Şimdi $\nu_S(a) = \mu_R(a)$ eşitliği gösterilecektir: Öncelikle $a \leq \nu(a) \in L/R$ olduğundan $b \leq \nu(a)$ dır. Buradan $\nu(b) \leq \nu(\nu(a)) = \nu(a)$ olup $\nu(b) \leq \nu(a)$ elde edilir. Benzer şekilde, $\nu(a) \leq \nu(b)$ olduğu da gösterilebilir.

Son olarak $\forall x \in L$ ve $s \in S$ için $\mu_R(x) \leq s \Leftrightarrow x \leq s = j(s)$ olduğundan $\mu_R(x) = j^*$ dir. Ayrıca 3.3.8.Tanım gereği $\nu_S(a) = j^*(a)$ dır ve böylece $\nu_S(a) = \mu_R(a)$ bulunur.

3.3.31.Önerme: L bir lokal, S bir alt lokal ve E buna karşılık gelen denklik bağıntısı olsun. Bu durumda, $S = L/E$ dir.

Kanıt: Öncelikle kanıt için gerekli olan, "E- doymuş elemanlar tam olarak maksEx formundadır" ifadesi gösterilecektir. Öncelikle E infimumları ve dolayısıyla sıralamayı koruduğu için,

$a\,E\,b \Rightarrow (a \wedge c)\,E\,(b \wedge c) \Rightarrow (a \wedge c \leq \text{maksE}x \Leftrightarrow b \wedge c \leq \text{maksE}x)$

sağlanır. Böylece maksEx bir doymuş elemandır. Diğer taraftan, s bir E-doymuş eleman ise $(\text{maksE}x)\,E\,s \Rightarrow (\text{maksE}x \wedge 1 \leq s \Leftrightarrow s \wedge 1 \leq s) \Rightarrow \text{maksE}x \leq s$ olur. Ayrıca $s \leq \text{maksE}x$ olduğu açıktır. Böylece $\text{maksE}x = s$ elde edilir.

3.3.32.Önerme: L, M birer lokal ve R, L üzerinde bir ikili işlem olsun. Bu durumda $a\,R\,b \Rightarrow f^*(a) = f^*(b)$ biçiminde tanımlanan $f\colon M \rightarrow L$ lokalik dönüşümü için $f(M) \subseteq L/R$ dir ve ayrıca

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[dr, "f"'] & L/R \arrow[d, "j"] \\ & L \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde bir $\bar{f}\colon M \rightarrow L/R$ lokalik dönüşümü vardır. Burada $j\colon L/R \rightarrow L$ gömme dönüşümüdür.

Kanıt: Bu ifadenin kanıtlanabilmesi için $\forall x \in M$ için $f(x)$' in doymuş olduğunun gösterilmesi yeterlidir. Bunun için, $a\,R\,b$ olmak üzere $a \wedge c \leq f(x) \Leftrightarrow f^*(a) \wedge f^*(b) = f^*(a \wedge c) \leq x \Leftrightarrow f^*(b) \wedge f^*(c) = f^*(b \wedge c) \leq x \Leftrightarrow b \wedge c \leq f(x)$ sağlandığından $f(x)$ bir doymuş elemandır.

3.3.13.Sonuç: $\bar{f}^*$ dönüşümü $\bar{f}$'nin sol adjointi olmak üzere, $\forall a \in L/R$ için $f^*(a) = \bar{f}^*(a)$ dır. Gerçekten $j \circ \bar{f} = f$ olduğundan $\bar{f}^*(a) = \bar{f}^*(\nu(a)) = \bar{f}^*(j^*(a)) = f^*(a)$ dır.

3.3.33.Önerme: R, L lokali üzerinde bir ikili işlem olsun. Bu durumda $\mu_R: L \to L/R$, $a\ R\ b \Rightarrow \mu_R(a) = \mu_R(b)$ gerektirmesini sağlayan bir çatı homomorfizmasıdır ve $a\ R\ b \Rightarrow h(a) = h(b)$ biçimindeki her çatı homomorfizması için

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\mu_R"] \arrow[dr, "h"'] & L/R \arrow[d, "\bar{h}"] \\ & M \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde bir $\bar{h}: L/R \to M$ çatı homomorfizması vardır. Ayrıca $\bar{h}|_{(L/R)}$ dır, yani $\forall a \in L/R$ için $\bar{h}(a) = h(a)$ dır.

Kanıt: $\mu_R: L \to L/R$ dönüşümü için $x, y \in L$ olmak üzere,

$x \leq \mu_R(x)$, $y \leq \mu_R(y) \Rightarrow x \wedge y \leq \mu_R(x) \wedge \mu_R(y) \Rightarrow$ L/R, $\wedge$ altında kapalı olduğu için $\mu_R(x \wedge y) \leq \mu_R(x) \wedge \mu_R(y)$ dir. Diğer taraftan $a = \mu_R(x) \wedge \mu_R(y)$ ise $a \leq \mu_R(x) = \bigwedge\{s: x \leq s, s \text{ doymuş}\}$ve $a \leq \mu_R(y) = \bigwedge\{t: y \leq t, t \text{ doymuş}\}$ olur. Bu nedenle $s \geq x$ ve $t \geq y$ olan $\forall s, t$ doymuş elemanları için $a \leq s$, $a \leq t$ ve böylece $a \leq s \wedge t$ dir. Buradan $a \leq \bigwedge\{s \wedge t \text{ doymuş}\}$ olur ve böylece $\mu_R(x) \wedge \mu_R(y) \leq \mu_R(x \wedge y)$ elde edilir. Şimdi x_i, $i \in I$ için, $x_i \leq \bigvee_{i\in I} x_i \Rightarrow \mu_R(x_i) \leq \mu_R(\bigvee_{i\in I} x_i) \Rightarrow \bigvee_{i\in I} \mu_R(x_i) \leq \mu_R(\bigvee_{i\in I} x_i)$ elde edilir. Eşitsizliğin diğer yönünün gösterilmesi için $\mu_R(\mu_R(x)) = \mu_R(x)$ eşitliğine ihtiyaç vardır. Gerçekten $\mu_R(\mu_R(x)) = \bigwedge\{s \text{ doymuş}: \mu_R(x) \leq s\} = \mu_R(x)$ (L/R'de $\wedge$' leri koruduğu için $\mu_R(x)$ doymuştur). Şimdi, $\forall i \in I$ için $x_i \leq \mu_R(x_i) \Rightarrow \bigvee_{i\in I} x_i \leq \mu_R(x_i) \Rightarrow \mu_R(\bigvee_{i\in I} x_i) \leq \mu_R(\mu_R(x_i)) = \mu_R(x_i) \Rightarrow \mu_R(\bigvee_{i\in I} x_i) \leq \mu_R(x_i) \Rightarrow \mu_R(\bigvee_{i\in I} x_i) \leq \bigvee_{i\in I} \mu_R(x_i)$ dır. O halde $\mu_R(\bigvee_{i\in I} x_i) = \bigvee_{i\in I} \mu_R(x_i)$ elde edilir.

Ayrıca a R b ise $a \wedge c \leq 1 \Leftrightarrow b \wedge c \leq 1$ olduğundan $\mu_R(1) = \bigwedge\{s \text{ doymuş}: 1 \leq s\} = 1$' dir. Diğer taraftan $\mu_R(0) = \bigwedge\{s \text{ doymuş}: 0 \leq s\} = 0$ olur; Gerçekten a R b ise,

$a \wedge c \leq 0 \Leftrightarrow \mu_R(a) \wedge \mu_R(c) = \mu_R(a \wedge c) \leq \mu_R(0)$ dır. $\mu_R(b) = \mu_R(a)$ olduğundan $\mu_R(a) \wedge \mu_R(c) = \mu_R(b) \wedge \mu_R(c) = \mu_R(b \wedge c) \leq \mu_R(0) \Leftrightarrow b \wedge c \leq 0$ dır. O halde 0 doymuştur ve $\mu_R(0) = 0$ dır. Sonuç olarak $\mu_R: L \to L/R$ bir çatı homomorfizasıdır.

Şimdi $\bar{h}: L/R \to M$ dönüşümünün çatı homomorfizması olduğu gösterilecektir: $s_1, s_2 \in L/R$ için, $\mu_R: L \to L/R$ olduğundan $s_1 = \mu_R(x)$ ve $s_2 = \mu_R(y)$ olacak şekilde $x, y \in L$ vardır. Buradan $\bar{h}\mu_R(x) = h(x)$ olduğundan $\bar{h}(s_1) \wedge \bar{h}(s_2) = \bar{h}(\mu_R(x) \wedge \bar{h}(\mu_R(y)) = h(x) \wedge h(y) = h(x \wedge y) = \bar{h}\mu_R(x \wedge y) = \bar{h}(\mu_R(x) \wedge \mu_R(y)) = \bar{h}(s_1 \wedge s_2)$ dir. Diğer taraftan $i \in I$ ailesi için s_i, $i \in I$ olmak üzere $\mu_R(x_i) = s_i$ olacak şekilde $x_i \in L$ vardır. Böylece $\bigvee_{i\in I} \bar{h}(s_i) = \bigvee_{i\in I} \bar{h}(\mu_R(x_i)) = \bigvee_{i\in I} h(x_i) =$

$h(\bigvee_{i\in I} x_i) = \overline{h}(\mu_R(\bigvee_{i\in I} x_i)) = \overline{h}(\bigvee_{i\in I} \mu_R(x_i)) = \overline{h}((\bigvee_{i\in I} s_i)$ olur. Son olarak $\overline{h}(1) = \overline{h}(\mu_R(1)) = h(1) = 1$ ve $\overline{h}(0) = \overline{h}(\mu_R(0)) = h(0) = 0$ dır. Böylece $\overline{h}$: L/R → M dönüşümü bir çatı homomorfizmasıdır.

3.3.34.Önerme: L bir latis, C, L'nin tabanı ve R ⊆ LxL bir denklik olsun. Bu durumda ∀a, b ∈ L ve ∀c ∈ C için $a\ R\ b \Rightarrow (a \wedge c)\ R\ (b \wedge c)$ dir. Ayrıca s ∈ L elemanının doymuş olması için gerek ve yeter koşul "$a\ R\ b \Rightarrow (a \leq s \Leftrightarrow b \leq s)$" dir.

3.3.18.Tanım: L bir latis olmak üzere, ν: L → L dönüşümü ∀a, b ∈ L için,

(N1) $a \leq \nu(a)$,

(N2) $a \leq b \Rightarrow \nu(a) \leq \nu(b)$,

(PN) $\nu(a) \wedge b \leq \nu(a \wedge b)$ koşullarını sağlıyor ise bu dönüşüme yarı nükleus denir.

3.3.35.Önerme: L bir latis olmak üzere, $\nu(\nu(a)) = \nu(a)$ koşulunu sağlayan her yarı nükleus bir nükleustur.

Kanıt: L bir latis ve ν: L → L bir yarı nükleus olsun. Bu durumda a, b ∈ L olmak üzere $\nu(a) \wedge \nu(b) \leq \nu(a \wedge \nu(b)) \leq \nu(\nu(a \wedge b)) = \nu(a \wedge b)$ dır. Eşitsizliğin diğer tarafı da benzer şekilde görülebilir.

3.4. Lokalik Dönüşümlerin Yapıları

Bu kesimde [1, 4, 6] nolu kaynaklar temel alınarak lokalik dönüşümlerin yapıları incelenecektir. Ayrıca bazı kategoriler ve özel funktorlar tanımlanacaktır.

3.4.1.Tanım: Nesneleri 1' i içeren ∧- yarılatisler, morfizmaları ise (∧, 1)- homomorfizmalar, yani sonlu infimumları koruyan dönüşümler olan kategori **$\mathbf{SLat_1}$** ile gösterilecektir.

3.4.1.Önerme: S bir ∧- yarılatis olmak üzere, $\mathcal{D}S = \{X \subseteq S : \downarrow X = X\}$ ailesi bir çatıdır. Burada çatı işlemleri $X \wedge Y = X \cap Y$ ve $\bigvee_{i\in I} X_i = \bigcup_{i\in I} X_i$ biçimindedir.

3.4.2.Önerme: S, T birer ∧-yarılatis ve h: S → T olmak üzere, $\mathcal{D}h: \mathcal{D}S \to \mathcal{D}T$, $\mathcal{D}h(X) = \downarrow h(X)$ dönüşümü bir çatı homomorfizmasıdır.

Kanıt: $\mathcal{D}h(\emptyset) = \emptyset$ ve $\mathcal{D}h(S) = \downarrow h(S) \supseteq \downarrow 1 = T$ dir. Gerçekten $h(1) = h(\bigwedge\emptyset) = \bigwedge h(\emptyset) = \bigwedge\emptyset = 1$ olduğundan $h(1) = 1 \in h(S)$ ve böylece $\downarrow 1 \subseteq \downarrow h(S)$ bulunur. Diğer taraftan $\mathcal{D}h(\bigcup_{i\in I} X_i) = \downarrow h(\bigcup_{i\in I} X_i) = \downarrow \bigcup_{i\in I} h(X_i) = \bigcup_{i\in I} \downarrow h(X_i) = \bigcup_{i\in I} \mathcal{D}h(X_i)$ dir.

Son olarak $\mathcal{D}h(X) \cap \mathcal{D}h(Y) = \downarrow h(X) \cap \downarrow h(Y) = \{z: \exists x \in X, \exists y \in Y\ z \leq h(x) \wedge h(y) = h(x \wedge y)\}$ $= \{z: \exists u \in h(X \cap Y), z \leq u\} = \mathcal{D}h(X \cap Y)$ elde edilir. O halde $\mathcal{D}h$ bir çatı homomorfizmasıdır.

3.4.2.Tanım: $\mathcal{D}$: $\mathbf{SLat_1} \rightarrow \mathbf{Frm}$, $\mathcal{D}S = \{X \subseteq S: \downarrow X = X\}$ ve $h: S \rightarrow T$ için $\mathcal{D}h: \mathcal{D}S \rightarrow \mathcal{D}T$, $\mathcal{D}h(X) = \downarrow h(X)$ biçiminde tanımlanan funktora aşağı-küme funktoru denir

3.4.3.Önerme: α_S: $S \rightarrow \mathcal{D}S$, $\alpha_S(x) = \downarrow x$ dönüşümü, bir $\wedge$- yarılatis homomorfizmasıdır, yani keyfi infimum işlemini korur.

Kanıt: $\downarrow x \cap \downarrow y = \downarrow(x \wedge y)$ ve $\downarrow 1 = S = 1_{\mathcal{D}(S)}$ dir.

3.4.4.Önerme: S bir $\wedge$- yarılatis, L çatı olsun ve $f: S \rightarrow L$ bir yarılatis homomorfizması verilsin. Bu durumda $h \circ \alpha_S = f$ olacak şekilde bir ve yalnız bir $h: \mathcal{D}S \rightarrow L$ çatı homomorfizması vardır.

Kanıt: $h: \mathcal{D}S \rightarrow L$, $h(X) = \bigvee_{x \in X} f(x)$ dönüşümü tanımlansın. $h(\emptyset) = \bigvee \emptyset = \emptyset$ ve $h(S) = \bigvee_{x \in X} f(x) \geq 1$ ve $h(\bigcup X_i) = \bigvee h(X_i)$ olduğu açıktır. Şimdi $h(X) \wedge h(Y) = (\bigvee_{x \in X} f(x)) \wedge (\bigvee_{y \in Y} f(y)) = \bigvee\{f(x) \wedge f(y): x \in X, y \in Y\} = \bigvee\{f(x \wedge y): x \in X, y \in Y\} \leq \bigvee\{f(z): z \in X \wedge Y\} = h(X \cap Y)$ olup $h(X) \wedge h(Y) \leq h(X \cap Y)$ dir. Ayrıca, h dönüşümü monoton olduğundan $h(X \cap Y) \leq h(X) \wedge h(Y)$ dir. O halde $h(X) \wedge h(Y) = h(X \cap Y)$ olup, h bir çatı homomorfizmasıdır.

Diğer taraftan, h dönüşümü supremumu koruduğu için $h(X) = h(\bigcup\{\downarrow x: x \in X\}) = \bigvee_{x \in X} h(\downarrow x) = \bigvee_{x \in X} (h \circ \alpha_S)(x) = \bigvee_{x \in X} f(x)$ dir ve supremumun tekliğinden dolayı h dönüşümü de tek olmalıdır.

3.4.1.Sonuç: Aşağı küme olmayan bir X kümesi verildiğinde, bu küme yardımıyla $\downarrow X$ aşağı kümesi elde edilebilir ve $h(\downarrow X) = \bigvee_{x \in X} f(x)$ sağlanır.

3.4.3.Tanım: $\forall i \in J$ için L_i bir çatı olmak üzere, $\prod_{i \in J} L_i$ kartezyen çarpım kümesi üzerindeki sıralama $(x_i)_{i \in J} \leq (y_i)_{i \in J} \Leftrightarrow (\forall i \in J)\ x_i \leq y_i$ olarak tanımlanır.

Bu durumda P_j: $\prod_{i \in J} L_i \rightarrow L_i$, $P_j((x_i)_{i \in J}) = x_i$ izdüşüm dönüşümleri birer çatı homomorfizmasıdır ve çatı homomorfizmalarından oluşan her $(h_j: M \rightarrow L_i)_{i \in J}$ sistemi için $P_j \circ h = h_j$ olacak şekilde tek bir $h: M \rightarrow \prod_{i \in J} L_i$, $h(x) = (h_j(x))_{i \in J}$ çatı homomorfizması vardır.

Ayrıca boş çatıların çarpımı tek elemanlı çatı olan ($\mathbf{1} = \{0_1 = 1_1\}$) dir ve $L \rightarrow \mathbf{1}$ dönüşümü bir çatı homomorfizmasıdır.

3.4.4.Tanım: Frm kategorisinde çarpım işlemi olduğundan, Loc kategorisinde ko-çarpım işlemi vardır. Sabit bir $j \in J$ için

$$\alpha_j: L_j \to \prod_{i\in J} L_i,\ (\alpha_j(x))_{i\in J} = \begin{cases} x, & i = j \\ 1, & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Burada $P_j((x_i)_{i\in J}) \leq x \Leftrightarrow (x_i)_{i\in J} \leq \alpha_j(x)$ dir. $\alpha_j: L_j \to \prod_{i\in J} L_i$ dönüşümleri de Loc'da ko-çarpımı oluşturur. Sonuç olarak çarpım ve ko-çarpım aşağıdaki gibi birer diyagram olarak gösterilebilir.

(Loc'da koçarpım) (Frm'de çarpım)

$$\begin{tikzcd} & L1 \oplus L2 \arrow[d, "\exists!"] & \\ L2 \arrow[ur, "\alpha_2"] \arrow[r] & M & L1 \arrow[l] \arrow[ul, "\alpha_1"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & L1 x L2 \arrow[d, "\exists!"] & \\ L2 \arrow[ur, "P_2"] \arrow[r] & M & L1 \arrow[l] \arrow[ul, "P_1"'] \end{tikzcd}$$

3.4.1.Notasyon: $\forall i \in J$ için L_i'ler birer çatı veya yarılatis olmak üzere

$\prod'_{i\in J} L_i = \{(x_i)_{i\in J} \in \prod_{i\in J} L_i$: sonlu sayıda $i \in J$ hariç $x_i = 1\}$ olsun. Şimdi $j \in J$ indisi sabit olmak üzere, $x \in L_i$ $u \in \prod'_{i\in J} L_i$ ve $v_i = \begin{cases} x, & i = j \text{ ise} \\ u_i, & i \neq j \text{ ise} \end{cases}$ için $x *_j u = v$ olsun. Son olarak $\bar{1} \in \prod'_{i\in J} L_i$ elemanı, $\forall i \in J$ için $\bar{1}_i = 1$ olacak şekilde tanımlansın.

3.4.5.Önerme: $\forall i \in J$ için L_i' ler birer yarılatis olsun. Bu durumda $\forall j \in J$ için $K_j: L_i \to \prod'_{i\in J} L_i$, $K_j(x) = x *_j \bar{1}$ dönüşümleri birer homomorfizmadır ve ayrıca $(K_j: L_i \to \prod'_{i\in J} L_i)_{i\in J}$ sistemi **SLat₁** kategorisinde ko-çarpım oluşturur.

Kanıt: $\forall j \in J$ için K_j dönüşümlerinin birer homomorfizma olduğu açıktır. Şimdi,

$\forall i \in J$ için $h_j: L_j \to M$ homomorfizmalarından oluşan herhangi bir sistem ve $\forall j \in J$ için $h \circ K_j = h_j$ olacak şekilde bir ve yalnız bir $h: \prod'_{i\in J} L_i \to M$ homomorfizmasının olduğu gösterilecektir:

$$\begin{tikzcd} \prod'_{i\in J} L_i \arrow[r, "\exists! h"] \arrow[dr, "K_j"'] & M \arrow[d, "h_j"] \\ & L_j \end{tikzcd}$$

İlk olarak h homomorfizmasının tekliği gösterilecektir: Önermedeki koşulu sağlayan bir h homomorfizmasının var olduğu kabul edelsin. $(x_i)_{i\in J} \in \prod'_{i\in J} L_i$ ve $(x_i)_{i\in J}$' nin 1' den farklı olan tüm kordinatları $(x_{j_1}, \dots x_{j_n})$ olsun. Burada,

$h((x_i)_{i\in J}) = h(\wedge_{i=1}^{n}(x_{j_k} *_{j_k} \bar{1})) = \wedge_{i=1}^{n}(h_{j_k}(x_{j_k}))$ olduğundan, infimumum tekliğinden dolayı h de tektir.

Şimdi $h((x_i)_{i\in J}) = \bigwedge_{i\in J} h_i(x_i)$ olarak tanımlanırsa, $x \in L_j$ için $h(K_j(x)) = h(1, 1, 1, ..., x, 1, ..) = h_j(x)$ elde edilir. Ayrıca $h(1) = 1$ ve $x = (x_i)_{i\in J}$, $y = (y_i)_{i\in J}$ için $h((x_i \wedge y_i)_{i\in J})$

$h(x \wedge y) = h((x_i \wedge y_i)_{i\in J}) = \bigwedge_{i\in J} h_i(x_i \wedge y_i) = \bigwedge_{i\in J} h_i(x_i) \wedge \bigwedge_{i\in J} h_i(y_i) = h(x) \wedge h(y)$ dir. O halde h bir $\wedge$- yarılatis homomorfizmasıdır.

3.4.2.Sonuç: $\forall i \in J$ için L_i' ler birer çatı olsun. Aşağı küme çatısı üzerinde $\mathcal{D}(\prod'_{i\in J} L_i)$ üzerinde aşağıdaki tüm ikililerden oluşan R bağıntısı incelenecektir:

Keyfi $j \in J$ ve $\{x^k : k \in K\} \subseteq L_j$, $u \in \prod'_{i\in J} L_i$ için $(\bigcup_{k\in K}\downarrow(x^k *_j u), \downarrow(\bigvee_{k\in K} x^k) *_j u) \in R$ dir. Ayrıca K indeks kümesi boş olabilir, böylece özel olarak

$\forall j \in J$ ve $\forall i \in I$ için $(\emptyset, \downarrow(\mathbf{0} *_j u)) \in R$ dir.

R bağıntısı 3.3.34.Önerme'deki koşulu sağlar ve sonuç olarak doymuş elemanlar aşağıdaki koşulları sağlayan aşağı kümelerdir.

$U \subseteq \prod'_{i\in J} L_i$ verilsin. $\forall j \in J$, $\forall\{x^k : k \in K\} \subseteq L_j$ ve $\forall u \in \prod'_{i\in J} L_i$ için $\{x^k *_j u : k \in K\} \subseteq U \Rightarrow \downarrow(\bigvee_{k\in K} x^k) *_j u \subseteq U$ dır.

Şimdi $\bigoplus_{i\in J} L_i = \mathcal{D}(\prod'_{i\in J} L_i)/R$ dir. Böylece $\bigoplus_{i\in J} L_i$ doygunluk koşulunu sağlayan bütün $U \subseteq \prod'_{i\in J} L_i$ aşağı kümelerden oluşan çatıdır. Buradan

$\mu_R = (x \longrightarrow \bigwedge\{s \text{ doymuş}: x \leq s\}): L \to L/R$ dönüşümünü kullanırsak $\mu = \mathcal{D}(\prod'_{i\in J} L_i) \to \bigoplus_{i\in J} L_i$ dir.

Nüklei tarafından verilen çatı homomorfizması için ve $\alpha = \prod'_{i\in J} L_i \to \mathcal{D}(\prod'_{i\in J} L_i)$ 3.4.3.Önerme gereği yarılatis olacaktır. Sonuç olarak $((x_i)_{i\in J})$

$\ell_i: L_i \to \bigoplus_{i\in J} L_i$, $\ell_j = \mu \circ \alpha \circ K_j$ dir.

3.4.6.Önerme: $\forall i \in J$ için $\ell_j: L_i \to \bigoplus_{i\in J} L_i$, $\ell_j = \mu \circ \alpha \circ K_j$ bir çatı homomorfizmasıdır.

Kanıt: μ, α ve K_j dönüşümleri sonlu infimumu koruduğundan, ℓ_j dönüşümleri de korur. Ayrıca, $\ell_j(\bigvee_{k\in K} x^k) = (\mu \circ \alpha \circ K_i)((\bigvee_{k\in K} x^k) = (\mu \circ \alpha)((\bigvee_{k\in K} (x^k *_j \bar{1})) = \mu(\downarrow(\bigvee_{k\in K} (x^k *_j \bar{1})) = \mu(\bigcup_{k\in K}\downarrow(x^k *_j \bar{1})) = \bigvee_{k\in K} \mu(\downarrow(x^k *_j \bar{1})) = \bigvee_{k\in K} \mu(\alpha(x^k *_j \bar{1})) = \bigvee_{k\in K} ((\mu \circ \alpha K_j)(x^k)) = \bigvee_{k\in K} (\ell_j)(x^k)$ olur, yani ℓ_j dönüşümleri keyfi supremumu da korur.

3.4.7.Önerme: $(\ell_j: L_i \to \bigoplus_{i\in J} L_i)_{i\in J}$ sistemi **Frm** kategorisinde L_i' lerin ko-çarpımıdır.

Kanıt: $\forall j \in J$ için h_j: $L_j \to M$ dönüşümleri birer çatı homomorfizması olsun. Şimdi L_i' ler birer yarılatis olarak düşünülürse 3.4.5.Önerme gereği, f: $\prod'_{i\in J} L_i \to M$, $f((x_i)_{i\in J}) = \bigwedge_{i\in J} f(x_i)$ biçiminde tanımlı bir f yarılatis homomorfizması vardır ve $\forall i \in J$ için $f \circ K_i = h_i$ dir. Bu sayede g: $\mathcal{D}(\prod'_{i\in J} L_i) \to M$, $g(X) = \bigvee\{f(x): x \in X\}$ biçiminde tanımlı ve $g \circ \alpha = f$ eşitliğini sağlayan bir çatı homomorfizması elde edilir. Şimdi bir $j \in J$, $u \in \prod'_{i\in J} L_i$ ve $\{x^k *_j u : k \in K\} \subseteq L_j$ alınsın. Bu durumda $(\bigcup_{k\in K}\downarrow(x^k *_j u)\ ,\ \downarrow(\bigvee_{k\in K} x^k) *_j u) \in R$ olmak üzere,

$$g(\bigcup_{k\in K}\downarrow(x^k *_j u)) = g(\downarrow\bigcup_{k\in K} (x^k *_j u)) = (g \circ \alpha)(\bigcup_{k\in K} (x^k *_j u)) = f(\bigcup_{k\in K} (x^k *_j u))$$
$$= \bigvee_{k\in K} f(x^k *_j u) = \bigvee_{k\in K} f((x^k *_j \bar{1}) \wedge (1 *_j u)) = \bigvee_{k\in K} f((x^k *_j \bar{1}) \wedge f(1 *_j u))$$
$$= (\bigvee_{k\in K} (f_j(x^k) \wedge f(1 *_j u)) = (\bigvee_{k\in K} (f_j(x^k)) \wedge f(1 *_j u) = f_j(\bigvee_{k\in K} x^k) \wedge f(1 *_j u)$$
$$= f((\bigvee_{k\in K} x^k) *_j \bar{1}) \wedge f(1 *_j u) = f(\bigvee_{k\in K} x^k) *_j u) = g(\downarrow(\bigvee_{k\in K} x^k) *_j u)$$

elde edilir ve böylece g dönüşümü R bağıntısını korur. O halde 3.3.13.Sonuç gereği $h \circ \mu = g$ olacak şekilde bir h: $\bigoplus_{i\in J} L_i \to M$ çatı homomorfizması vardır ve $h \circ \ell_j = h \circ \mu \circ \alpha \circ K_j = g \circ \alpha \circ K_j = f \circ K_j = h_j$ dir.

Son olarak $\downarrow(x_j)$'ler $x_j \neq 1$ olacak şekilde $\downarrow K_j(x_j)$ elemanlarının sonlu infimumları biçiminde elemanlar olmak üzere, $\forall U \subseteq \prod'_{i\in J} L_i$ aşağı kümesi $\downarrow(x_j)$' lerin supremumu biçiminde ifade edilebilir. Böylece $\mathcal{D}(\prod'_{i\in J} L_i)$, $j \in J$, $x \in L_j$ olacak şekilde $\alpha \circ K_j(x)$ formundaki elemanlardan sonlu infimum ve keyfi supremum yoluyla üretilir. Böylece μ: $\mathcal{D}(\prod'_{i\in J} L_i) \to \bigoplus_{i\in J} L_i$ olduğundan $\bigoplus_{i\in J} L_i$ çatısının $\mu \circ \alpha \circ K_j = \ell_j$ formundaki elemanlar tarafından üretildiği söylenebilir. O halde $\forall i \in J$ için $h \circ \ell_j = h_j$ olacak şekilde h çatı homomorfizması teklikle belirlenir.

3.4.2.Notasyon: Sonlu çatı sistemleri $L \oplus M$, $L_1 \oplus L_2, \oplus \ldots\oplus L_n$ vb. biçiminde ifade edilecektir.

3.4.5.Tanım: R bağıntısının tanımında $K = \emptyset$ olma durumu da mümkündür. Bu nedenle bir i için $u_i = 0$ olacak şekilde tanımlanmış her u elemanı, her doymuş U kümesinin içindedir. Gerçekten $K = \emptyset$ ve U doymuş ise $\emptyset = \{x^k *_j u: k \in K\} \subseteq U$ ve $\bigvee x^k = 0$ olduğundan $0 *_j u = (u_1, u_2, \ldots, u_{j-1}, 0, u_{j+1}, \ldots) \in U$ dır.

3.4.8.Önerme: $\mathcal{n} = \{u \in \prod'_{i\in J} L_i: \exists i$ için $u_i = 0\}$ en küçük doymuş küme ve böylece ko-çarpımın en küçük elemanıdır.

3.4.9.Önerme: $\forall a \in \prod'_{i\in J} L_i$ için $\downarrow a \cup \mathcal{n} = \mu(\downarrow a)$ dir ve böylece $\downarrow a \cup \mathcal{n}$ kümesi, $\downarrow a$'yı içeren en küçük doymuş küme olur.

Kanıt: 3.3.30.Önerme'den μ dönüşümünün bir nükleus yardımıyla tanımlandığı biliniyor. O halde nükleus tanımı gereği $\downarrow a \subseteq \mu(\downarrow a)$ dır. Şimdi, $\mu(\downarrow a) \in \bigoplus_{i\in J} L_i$ olduğundan $\mu(\downarrow a)$ doymuştur ve $\mathcal{n}$ en küçük doymuş eleman olduğundan $\mathcal{n} \subseteq \mu(\downarrow a)$ dır. Böylece $\downarrow a \cup \mathcal{n} \subseteq \mu(\downarrow a)$ olur. Şimdi $\downarrow a \cup \mathcal{n}$ 'nın doymuş olduğunun gösterilmesi için, $\forall k \in K$ için $x^k *_j u \in \downarrow a \cup \mathcal{n}$ verilsin. Buradan $x^k *_j u \in \downarrow a$ ya da $x^k *_j u \in \mathcal{n}$ dır, yani bir $i \neq j$ için $u_i = 0$ ya da $u_i \neq 0$ dır. Eğer bir $i \neq j$ için $u_i = 0$ ise $(\bigvee_{k\in K} x^k) *_j u \in \mathcal{n} \subseteq \downarrow a \cup \mathcal{n}$ dır. Eğer $i \neq j$ için $u_i \neq 0$ ise iki durum vardır: $\bigvee_{k\in K} x^k = 0$ ya da $\bigvee_{k\in K} x^k \neq 0$. Eğer $\bigvee_{k\in K} x^k = 0$ ise $(\bigvee_{k\in K} x^k) *_j u \in \mathcal{n} \subseteq \downarrow a \cup \mathcal{n}$ dır. Eğer $\bigvee_{k\in K} x^k \neq 0$ ise $x^t \neq 0$ olacak şekilde bir t vardır ve böylece $x^t *_j u \in \downarrow a$ dır. Sonuç olarak $\forall i \neq j$ için $u_i \leq a_i$ ve $\forall k$ için $x^k \leq a_j$ olur.

Buradan $(\bigvee_{k\in K} x^k) *_j u \leq a$ ve böylece $(\bigvee_{k\in K} x^k) *_j u \in \downarrow a \subseteq \downarrow a \cup \mathcal{n}$ elde edilir. O halde $\downarrow a \cup \mathcal{n} = \mu(\downarrow a)$ dir.

3.4.3.Notasyon: $\downarrow(a_i)_i \cup \mathcal{n}$ elemanı, $\bigoplus a_i$ ile gösterilecektir.

Aşağıdaki ifadeler çok kullanışlı olduğu için ifade etmekte yarar vardır.

3.4.10.Önerme:

(1) $\forall U \in \bigoplus_{i\in J} L_i$ için $U = \bigcup\{\bigoplus a_i : \bigoplus a_i \leq U\} = \bigvee\{\bigoplus a_i : \bigoplus a_i \leq U\}$,

(2) $\bigoplus a_i = \bigwedge_{i\in J} \ell_i(a_i)$,

(3) İki çatının ko-çarpımının olması durumunda, $\bigvee_{i\in I} (a_i \oplus b) = (\bigvee_{i\in I} a_i) \oplus b$ ve $\bigvee_{i\in I} (a \oplus b_i) = a \oplus (\bigvee_{i\in I} b_i)$ eşitlikleri vardır. Sonuç olarak olarak $(\bigvee_{i\in I} a_i) \oplus (\bigvee_{i\in I} b_i) = \bigvee_{i\in I} (a_i \oplus b_i)$ olur,

(4) Eğer $\bigoplus_{i\in J} a_i \notin \mathcal{n}$ ise $\bigoplus_{i\in J} a_i \leq \bigoplus_{i\in J} b_i \Rightarrow \forall i$ için $a_i \leq b_i$,

(5) Ko-diyagonal homomorfizma $\nabla: {}^J L \to L$ (yani, $\forall i$ için $L_i = L$ ve $\nabla \ell_i = id_L$ olmak üzere $\nabla: {}^J L = \bigoplus_{i\in J} L_i \to L$ dönüşümü) $\nabla(\bigoplus_{i\in J} a_i) = \bigwedge_{i\in J} a_i$ biçiminde tanımlıdır.

Kanıt: (1) $U \in \bigoplus_{i\in J} L_i$ olmak üzere, U bir aşağı küme ve böylece $U = \bigcup\{\downarrow a : a \in U\} = \bigcup\{\downarrow a : \downarrow a \subseteq U\}$ dir. Ayrıca U doymuş ve $\mu(\downarrow a)$, $\downarrow a$'ı içeren en küçük doymuş küme olduğundan $\downarrow a \subseteq U \Rightarrow \mu(\downarrow a) = \bigoplus a_i \leq U$ dir. Böylece $U \leq \bigcup\{\bigoplus a_i : \bigoplus a_i \leq U\} \leq U$ elde edilir ve doymuş elemanların birleşimi de doymuş olduğundan $\bigcup\{\bigoplus a_i : \bigoplus a_i \leq U\} = \bigvee\{\bigoplus a_i : \bigoplus a_i \leq U\}$ dir.

(2) Daha iyi bir gösterim için J(a), $a_i \neq 1$ olan $i \in J$' lerin sonlu kümesi olsun. O halde $a = \wedge_{i\in J(a)}K_i(a_i)$ dir ve böylece, α ve μ sonlu supremumu koruduğundan $\oplus_{i\in J(a)} a_i = \mu(\downarrow a) = (\mu \circ \alpha)(\wedge_{i\in J(a)}K_i(a_i)) = \wedge_{i\in J(a)} (\mu \circ \alpha \circ K_i)(a_i) = \wedge_{i\in J(a)} (\ell_i)(a_i)$ bulunur.

(3) $\vee_{i\in I} (a_i \oplus b) = (a_1 \oplus b) \vee (a_2 \oplus b) \vee ... = (\ell_1(a_1) \wedge \ell_2(b)) \vee (\ell_1(a_2) \wedge \ell_2(b)) \vee ... = (\ell_1(a_1) \vee \ell_1(a_2) \vee \ell_1(a_3) \vee .....) \wedge \ell_2(b) = \ell_1(\vee_{i\in I} a_i) \wedge \ell_2(b) = (\vee_{i\in I} a_i) \oplus b$ bulunur. Benzer şekilde diğer eşitlikler gösterilebilir.

(4) $\mu(\downarrow a) = \downarrow a \cup \mathcal{n} = \oplus_{i\in J} a_i \neq \mathcal{n} \Rightarrow a \notin \mathcal{n}$ dir. Tersine $a \in \mathcal{n}$ ise $\exists i_0$ için $a_{i_0} = 0$ dır. Bu durumda $y \in \downarrow a \Rightarrow y \leq a \Rightarrow y_{i_0} \leq a_{i_0} = 0 \Rightarrow y \in \mathcal{n}$ dir. Böylece $\downarrow a \subseteq \mathcal{n}$ olup $\downarrow a \cup \mathcal{n} = \mathcal{n}$ çelişkisi elde edilir.

$\oplus_{i\in J} a_i \leq \oplus_{i\in J} b_i$ ise özel olarak $a = (a_i)_i \in \downarrow b \cup \mathcal{n}$ dir. $a \notin \mathcal{n}$ olduğundan $a \in \downarrow b$ bulunur. Buradan $a \leq b$ elde edilir.

(5) (2) özelliği ve $\nabla \ell_i = id_L$ olduğu kullanılarak,

$\oplus_{i\in J} a_i = \wedge_{i\in J} \ell_i(a_i) \Rightarrow \nabla(\oplus_{i\in J} a_i) = \nabla(\wedge_{i\in J} \ell_i(a_i)) = \wedge_{i\in J} \nabla(\ell_i(a_i)) = \wedge_{i\in J} a_i$ elde edilir.

3.4.3.Sonuç: Loc kategorisinde $\Delta: L \to L^J$ diyagonali için uygun bir formül bulunabilir. Öncelikle Δ ve ∇ dönüşümleri adjoint olmalıdır. 3.4.10.Önerme (1)'den $\Delta(a) = \{(u_i)_i: \oplus_{i\in J} u_i \leq \Delta(a)\}$ dir. Δ ve ∇ dönüşümleri adjoint olduğundan $\oplus_{i\in J} u_i \leq \Delta(a) \Leftrightarrow \nabla(\oplus_{i\in J} u_i) = \wedge_{i\in J} u_i \leq a$ olur. Böylece $\Delta(a) = \{(u_i)_i: \wedge_{i\in J} u_i \leq a\}$ elde edilir. O halde $\Delta: L \to L \oplus L$ diyagonali için $\Delta(a) = \{(x, y): x \wedge y \leq a\}$ dır ve $\nabla(U) \leq a \Leftrightarrow (\forall u \in U)\ \nabla(u) = \wedge_{i\in J} u_i \leq a \Leftrightarrow (\forall u \in U)\ u \in \Delta(a) \Leftrightarrow U \leq \Delta(a)$ sağlanır.

3.4.6.Tanım: 3.2.13.Önerme gereği Sp bir sağ adjoint olduğundan çarpımı korur. Burada oluşturulmuş ko-çarpım ile topolojik uzayların çarpımları, yani $\Omega(\prod_{i\in J} X_i)$ ile $\oplus_{i\in J} \Omega(X_i)$ arasındaki ilişki incelenecektir. Bu iki yapı arasında

$\pi: \oplus_{i\in J} \Omega(X_i) \to \Omega(\prod_{i\in J} X_i)$, $\pi\ell_i = \Omega(p_i)$ biçiminde tanımlı bir kanonik çatı homomorfizması vardır. Burada $p_i: \prod_{i\in J} X_i \to X_i$ projeksiyon dönüşümleridir. π dönüşümü genel olarak bir izomorfizma değildir fakat örten ve yoğundur.

3.4.11.Önerme: π homomorfizması örten ve yoğundur.

Kanıt: $(x_i)_i \in \prod'_{i\in J} L_i$ yani, $K \subseteq J$ sonlu, $i \notin K$ için $x_i = 1$ olacak şekilde $x_i \in L_i$' lerden oluşan bir sistem için $\pi(\oplus_{i\in J} x_i) = \cap_{i\in K} p_i^{-1}(x_i)$ dir. Ayrıca $\cap_{i\in K} p_i^{-1}(x_i)$ kümeleri birleşim yoluyla $\Omega(\prod_{i\in J} X_i)$' i ürettikleri için π örtendir. Şimdi eğer $u \neq 0$ $\oplus_{i\in J} \Omega(X_i)$'de ise $\oplus_{i\in J} x_i \leq u$ olacak şekilde yukarıdaki gibi verilmiş $(x_i)_i \in \prod'_{i\in J} L_i$ vardır. Böylece $\emptyset \neq \bigcap_{i\in K} p_i^{-1}(x_i) \subseteq \pi(u)$ olur. O halde 3.3.14.Tanım'dan π dönüşümü yoğundur.

3.4.12.Önerme: Eğer X_i'ler sober uzay ve $\bigoplus_{i\in J} \Omega(X_i)$ uzaysal ise π bir izomorfizmadır.

Kanıt: Elimizde $\emptyset$: $\bigoplus_{i\in J} \Omega(X_i) \to \Omega(Y)$ şeklinde bir izomorfizma vardır. Burada Y sober seçilirse, 3.1.12.Önerme gereği $\emptyset \circ \ell_i = \Omega(q_i)$ olacak şekilde tek olarak belirlenen sürekli q_i: $Y \to X_i$ dönüşümleri vardır. Eğer f_i: $\mathbf{2} \to X_i$ sürekli bir dönüşüm ve $\Omega(f_i)$: $\Omega(X_i) \to \Omega(2)$ homomorfizması dikkate alınırsa, $h \circ \ell_i = \Omega(f_i)$ olacak şekilde h: $\bigoplus_{i\in J} \Omega(X_i) \to \Omega(2)$ dönüşümü elde edilir. Şimdi $h \circ \emptyset^{-1}$: $\Omega(Y) \to \Omega(2)$ dir ve $\Omega(f) = h \circ \emptyset^{-1}$ olacak şekilde f: $\mathbf{2} \to Y$ tek olarak tanımlanır. Böylece $\Omega(q_i \circ f) = f_i = h \circ \emptyset^{-1} \circ \emptyset \circ \ell_i = h \circ \ell_i = \Omega(f_i)$ olur ve buradan $q_i \circ f = f_i$ dir. Böyle bir f' nin tekliği kolayca görülebilir. Böylece $(q_i: Y \to X_i)_{i\in J}$ sistemi **Top** kategorisinde çarpımı oluşturur. Buradan $q_i \circ g = p_i$ olacak şekilde bir g: $X \to Y$ izomorfizması vardır ve $\Omega(g) \circ \emptyset \circ \ell_i = \Omega(q_i \circ g) = \Omega(p_i) = \pi \circ \ell_i$ dır. Böylece $\pi = \Omega(g) \circ \emptyset$ bir izomorfizmadır.

3.4.4.Sonuç: Loc kategorisinde p_j: $\bigoplus_{j\in J} L_j \to L_j$ izdüşümlerin çarpımını ele alalım. Burada adjankşın kullanılırsa $p_j(U) = \bigvee_{i\in J}\{x: \ell_i(x) \subseteq U\}$ dır ve U doymuş olduğundan $(\mu \circ \alpha \circ K_j)(x) \subseteq U \Leftrightarrow \downarrow K_j(x) \subseteq U \Leftrightarrow x *_j u \in U$ elde edilir. Böylece $p_j(U) = \bigvee_{i\in J}\{x: x *_j u \in U\}$olarak bulunur.

3.4.13.Önerme: i = 1, 2 için f_i: $M \to L_i$'ler lokalik dönüşüm olmak üzere, bu dönüşümlere karşılık gelen f: $M \to L_1 \oplus L_2$ dönüşümü,

$f(a) = \{(x, y): y \leq f_2(f_1^*(x) \longrightarrow a)\} = \{(x, y): x \leq f_1(f_2^*(y) \longrightarrow a)\}$ biçiminde ifade edilir.

Kanıt: 3.4.7.Önerme'nin kanıtındaki dönüşümler kullanılırsa, g: $\mathcal{D}(\prod'_{i\in J} L_i) \to M$ ve dolayısıyla f^*: $M \to \prod'_{i\in J} L_i$ için, $f^*(U) = \bigvee\{f_1^*(x) \wedge f_2^*(x): (x, y) \in U\}$ elde edilir. Yukarıdaki koşulları sağlayan f dönüşümü verilsin. Eğer $f^*(U) \leq a$ ve $(x, y) \in U$ ise $f_1^*(x) \wedge f_2^*(x) \leq a \Rightarrow f_1^*(x) \leq f_2^*(y) \longrightarrow a \Rightarrow x \leq f_1(f_2^*(y) \longrightarrow a)$ ve $(x, y) \in f(a)$ olur. Diğer taraftan, $U \subseteq f(a)$ ve $(x, y) \in U$ ise $x \leq f_1(f_2^*(y) \longrightarrow a)$ dır ve böylece $f_1^*(x) \leq f_2^*(y) \longrightarrow a \Rightarrow f_1^*(x) \wedge f_2^*(x) \leq a$ bulunur. Buradan $f^*(U) \subseteq a$ elde edilir.

3.4.5.Sonuç: Özel olarak Δ: $L \to L \oplus L$ diyagonal homomorfizması $\Delta(a) = \{(x, y): x \wedge y \leq a\}$ formülü ile verilir.

3.4.14.Önerme: Herhangi f_i: $M_i \rightarrow L_i$, $i = 1, 2$ için lokalik dönüşümleri, $(f_1 \oplus f_2)(U) = \bigvee\{f_1(a) \oplus f_2(b) : a \oplus b \leq U\}$ eşitliği ile tanımlanan ve

$$
\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[d, "f_1"'] & M_1 \oplus M_2 \arrow[l, "p_{M_1}"'] \arrow[r, "p_{M_2}"] \arrow[d, "f_1 \oplus f_2"] & M_2 \arrow[d, "f_2"] \\
L_1 & L_1 \oplus L_2 \arrow[l, "p_{L_1}"'] \arrow[r, "p_{L_2}"] & L_2
\end{tikzcd}
$$

diyagramını değişmeli yapan $f_1 \oplus f_2$ dönüşümü teklikle belirlidir.

Kanıt: 3.4.13.Önerme gereği,

$(f_1 \oplus f_2)(U) = \{(a, b): b \leq f_2 p_{M_2}((f_1 p_{M_1})^*(a) \longrightarrow U)\} = \{(a, b): (f_1 p_{M_1})^*(a) \cap (f_2 p_{M_2})^*(b) \leq U\}$

$= \{(a, b): (f_1^*(a) \oplus 1) \cap (1 \oplus f_2^*(b)) \leq U\} = \{(a, b): f_1^*(a) \oplus f_2^*(b) \leq U\}$ dır.

Son elde edilen küme doymuş olduğundan $\bigvee\{a \oplus b : f_1^*(a) \oplus f_2^*(b) \leq U\}$ ile çakışır. Ayrıca f ile f^*'nin adjankşın olması yardımıyla, bu kümenin $\bigvee\{f_1(a) \oplus f_2(b) : a \oplus b \leq U\}$' a eşit olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

3.4.7.Tanım: 3.4.2.Sonuç'ta verilen $\mu: \mathcal{D}(L_1 x L_2) \rightarrow L_1 \oplus L_2$ bölüm çatısını hatırlayalım. μ notasyonu aynı zamanda ona karşılık gelen $\mathcal{D}(L_1 x L_2) \rightarrow \mathcal{D}(L_1 x L_2)$ nükleusunu göstermek için de kullanılacaktır. $\pi_1(U) = \{(\bigvee A, b): A x \{b\} \subseteq U\}$ ve $\pi_2(U) = \{(a, \bigvee B): \{a\} x B \subseteq U\}$ olmak üzere μ dönüşümü, $\nu = \pi_2 \pi_1$ yarı nükleusu tarafından belirlenir.

4. AYIRMA AKSİYOMLARI

Bu bölümde ayırma aksiyomlarının çatı ve lokal teorisindeki karşılıkları tartışılacaktır. Ayırma aksiyomları çoğunlukla noktaya bağlı olsalar da, özellikle düzenlilik (regularity) ve tamamen düzenlilik (completely regularity) tanımları, nokta-bağımsız yöntemlerle de karakterize edilebilir. T_1 özelliği yerine ondan daha zayıf fakat topolojik uzaylarda da bir karşılığı olan bir aksiyom verilecektir. Burada, karşılığı bulunması zor olan özellik Hausdorff aksiyomudur. Her ne kadar tam anlamıyla Hausdorff özelliğine karşılık gelmese de benzer özelliklere sahip karşılıkları verilebilir. T_0 aksiyomu ise tamamen nokta-bağımlı olması sebebiyle bu teori içerinde bir karşılığı olmayacaktır.

4.1. Subfitlik ve fitlik:

Burada subfitlik ve fitlik kavramları ve onların diğer ayrıma aksiyomlarıyla olan ilişkileri verilecektir. Bu kesimde [1, 9, 16, 19] nolu kaynaklar temel alınmıştır.

X, T_0 uzayı olmak üzere, T_1 uzaylarının çatısı olan $\Omega(X)$ üzerinde bir akiyomu karakterize etmek mümkündür. Fakat burada problem, tanımlanan bu aksiyomlaların elimizdeki lokali uzaysal yapacak olmasıdır. Bu nedenle hem topolojide hem de cebirde genel olarak yapılması gereken şey, genelleştirme üzerinde daha zayıf bir koşulla işe başlamaktır.

4.1.1.Tanım: L bir lokal olmak üzere, $\forall a, b \in L$ için "$a \nleq b \Rightarrow \exists c \in L, a \vee c = 1 \neq b \vee c$" koşulu sağlanıyorsa L lokaline altfit (subfit) denir.

Eğer $\Omega(X)$ çatısı altfit ise X uzayı altfit dir denir.

4.1.2.Tanım: Bir X uzayı verilsin. $\forall x \in X$ için $U \setminus \{x\}$ kümesi açık olacak şekilde $x \in U$ açık kümesi varsa X uzayına T_D dir denir.

4.1.1.Önerme:

(1) Her T_1 uzayı T_D dir.

(2) Her T_D uzayı T_0 dır.

Kanıt: (1) X uzayı T_1 olsun. T_1 uzayında her tek nokta $\{x\}$ kümesi kapalı olduğundan $x \in U$ kümesi açık iken $U \setminus \{x\}$ kümesi de açıktır. Böylece X uzayı T_D dir.

(2) X uzayı T_D olsun. $x \neq y$ olacak şekilde $x, y \in X$ verilsin. T_D uzayı gereği $x \in U$ ve $U \setminus \{x\}$ açık kümeleri vardır. y elemanın iki seçeneği bulunmaktadır; ya $y \in U$ ya da $y \notin U$ olmak zorundadır. Eğer $y \in U$ ise $U \setminus \{x\}$ açığı için $y \in U \setminus \{x\}$ ve $x \notin U \setminus \{x\}$ dır. $y \notin U$ ise U açığı için $x \in U$ ve $y \notin U$ dır. Böylece X uzayı T_0 dır.

4.1.2.Önerme:

(1) Her T_1 uzayı altfittir,

(2) X uzayı için $T_1 \equiv T_D$ ve altfit,

(3) X uzayının altfit olması için gerek ve yeter koşul $\forall U$ açık kümesi ve $\forall x \in U$ için $\overline{\{y\}} \subseteq U$ olacak şekilde bir $y \in \overline{\{x\}}$ olmasıdır.

Kanıt: (1) X uzayı T_1 olsun. Eğer $U \nsubseteq V$ ise bir $x \in U \setminus V$ seçilebilir. X uzayı T_1 olduğundan $X \setminus \{x\} \in \Omega(X)$ dır. Ayrıca $U \cup (X \setminus \{x\}) = X \neq V \cup (X \setminus \{x\})$ ve böylece X uzayı altfit dir.

(2) X uzayı T_1 olsun. 4.1.1.Önerme (1) gereği X uzayı T_D dir ve (1) gereği altfit dir. Böylece $T_1 \Rightarrow T_D$ ve altfit dir.

Diğer yönü için, X uzayı T_D ve altfit olsun. Bir $x \in X$ alınsın, T_D özelliğinden, $x \in U$ ve $U \setminus \{x\}$ açık olacak şekilde bir U açığı vardır. Ayrıca $U \nsubseteq U \setminus \{x\}$ olduğundan altfit gereği, $U \cup V = X \neq (U \setminus \{x\}) \cup V$ olacak şekilde bir V açığı vardır. Buradan $x \notin V$ dir ve $X \setminus \{x\} = (U \cup V) \setminus \{x\} = (U \setminus \{x\}) \cup V$ (V ve $U \setminus \{x\}$ açık olduğu için açıktır. Buradan $\{x\}$ kümesi kapalı olup uzay T_1 dir. Sonuç olarak, T_D ve altfit $\Rightarrow T_1$ olur.

(3) ($\Leftarrow$): $U \nsubseteq V$ ise en az bir $x \in U \setminus V$ ve böylece $\overline{\{y\}} \subseteq U$ olacak şekilde bir $y \in \overline{\{x\}}$ vardır. Bu durumda, $U \cup (X \setminus \overline{\{y\}}) = X$ olur. Diğer taraftan $x \in X \setminus V$ dir. Böylece $\overline{\{x\}} \subseteq X \setminus V$ ve $\overline{\{x\}} \cap V = \emptyset$ bulunur. Buradan $y \notin V \cup (X \setminus \overline{\{y\}})$ ve $V \cup (X \setminus \overline{\{y\}}) \neq X$ dir. Sonuç olarak, $U \cup (X \setminus \overline{\{y\}}) = X \neq V \cup (X \setminus \overline{\{y\}})$ sağlanır ve böylece X uzayı altfit dir.

($\Rightarrow$): X uzayı altfit olsun ve bir $x \in U \in \Omega(X)$ alınsın. O halde $U \nsubseteq X \setminus \overline{\{x\}}$ olacağından $V \cup U = X \neq V \cup (X \setminus \overline{\{x\}})$ olacak şekilde bir V açığı vardır. Böylece $\exists y \in X$ için $y \notin V \cup (X \setminus \overline{\{x\}})$ dir. Yani $\exists y \notin Y$ için $y \in \overline{\{x\}}$ olur. Ardından $\overline{\{y\}} \subseteq X \setminus V$ ve $V \cup U = X$ olduğundan $\overline{\{y\}} \subseteq U$ bulunur.

Şimdi altfitlikten de daha güçlü olan fitlik özelliği verilecektir. Her şeyden önce bu çok önemli bir cebirsel özelliktir ve bazı açılardan regülerlik aksiyomuna benzemektedir.

4.1.3.Tanım: L bir lokal (çatı) olsun. $\forall a, b \in L$ için $a \nleq b \Rightarrow \exists c \in L$; $a \vee c = 1$ ve $c \longrightarrow b \nleq b$ koşulu sağlanıyor ise L lokali fittir denir.

4.1.3.Önerme:

(1) Her fit lokal, alt fittir,

(2) Fit bir lokalinin her alt lokali de fittir.

Kanıt: (1) L, bir fit lokal ve $a, b, c \in L$' ler fit olma koşullarını sağlayan elemanlar olsun, yani $a \nleq b \Rightarrow a \vee c = 1$ ve $c \longrightarrow b \nleq b$ sağlansın. Şimdi $c \longrightarrow b = (c \longrightarrow b) \wedge (b \longrightarrow b) = (c \vee b) \longrightarrow b \neq b$ olduğundan $b \vee c \neq 1$ bulunur. Gerçekten $b \vee c = 1$ olsaydı $(c \vee b) \longrightarrow b = 1 \longrightarrow b = b$ çelişkisi elde edilirdi. Sonuç olarak L altfittir.

(2) $a, b \in S \subseteq L$ ve $a \not\leq b$ verilsin ve $x \vee_S y$, S'deki supremum işlemini göstersin. Fitlik tanımı gereği, $a \vee c = 1$ ve $c \longrightarrow b \not\leq b$ olacak şekilde $c \in L$ vardır. Ayrıca $\nu_S(c) \vee_S a \geq c \vee a = 1$ dir ve 3.3.7.Önerme(b) gereği $\nu_S(c) \longrightarrow b = c \longrightarrow b \not\leq b$ olur. Sonuç olarak $a \not\leq b$ iken $\nu_S(c) \in S$ için $\nu_S(c) \longrightarrow b \not\leq b$ olur ve böylece $S \subseteq L$ fittir.

4.1.1.Sonuç: Fitlik özelliğinin yapısı incelenmeden önce, aşağıdaki notasyon verilmelidir. L'nin bir S alt lokali için $S' = \downarrow(S \setminus \{1\})$, $(= \{x \in L: \nu_S(x) \neq 1\})$ dir.

Gerçekten $A = \{x \in L: \nu_S(x) \neq 1\}$ olsun. $x \in A \Rightarrow \nu_S(x) = \bigwedge\{s \in S: x \leq s\} \neq 1 \Rightarrow \exists s \in S, x \leq s: s \neq 1 \Rightarrow x \in \downarrow(S \setminus \{1\}) \Rightarrow x \in S'$ dır. Diğer taraftan $x \in \downarrow(S \setminus \{1\}) \Rightarrow x \in S \setminus \{1\} \Rightarrow x \in S$ ve $x \neq 1 \Rightarrow \nu_S(x) \neq 1 \Rightarrow x \in A$ dır.

4.1.4.Önerme: Bir L lokali verilsin. Herhangi bir S alt lokali ve bir $c \in L$ elemanı için

$S \subseteq O(c) \Leftrightarrow \nu_S(c) = 1$ dir

Kanıt: ($\Leftarrow$): Eğer $\nu_S(c) = 1$ ise herhangi bir $s \in S$ için, 3.3.7.Önerme ve (H1) gereği, $c \longrightarrow s = \nu_S(c) \longrightarrow s = 1 \longrightarrow s = s$ olup $s \in O(c)$ dir $(O(c) = \{x \in L: c \longrightarrow x = x\})$.

($\Rightarrow$): Eğer $s = \nu_S(c) \neq 1$ ise nüklei tanımı gereği, $c \leq s$ dir ve (H2) gereği $c \longrightarrow s = 1 \neq s$ bulunur. Buradan $s \notin O(c) \Rightarrow s \in S \setminus O(c)$ ve $S \not\subseteq O(c)$ bulunur.

4.1.5.Önerme: Bir L lokalinde aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) L fit dir,

(2) L' nin herhangi S, T alt lokalleri için $S' = T' \Rightarrow S = T$ dir,

(3) L' nin herhangi bir S alt lokali için $S = \bigcap\{O(x): \nu_S(x) = 1\}$ dir,

(4) Her alt lokal, açık alt lokallerin bir kesişimi biçiminde ifade edilebilir,

(5) Her kapalı alt lokal, açık alt lokallerin bir kesişimi şeklinde ifade edilebilir.

Kanıt: (1) ⇒ (2): L fit ve S, T alt lokalleri için $S' = T'$ olsun. Şimdi $b \neq 1$ biçiminde bir $b \in T$ alınsın ve $a = \nu_S(b)$ olarak tanımlansın. Şimdi $a \vee c = 1$ ve $b \vee c \leq a_1 \in S$ olsun. Bu durumda $a \vee c \leq a \vee \nu_S(c) = \nu_S(b) \vee \nu_S(c) \leq \nu_S(b \vee c) \leq \nu_S(a_1) = a_1$, yani $a \vee c = 1 \leq a_1$ ve $\nu_S(b \vee c) \leq a_1 = 1$ olur. O halde $\nu_S(b \vee c) = 1$ olduğundan 4.1.1.Sonuç gereği, $b \vee c \notin S' = T'$ dir ve böylece $b \vee c = 1$ olur. (H8) gereği, $(b \vee c) \wedge (c \longrightarrow b) \leq b \Rightarrow b \vee c \leq ((c \longrightarrow b) \longrightarrow b) \in T$ bulunur.

$(b \vee c) \notin T' = \downarrow(T \setminus \{1\})$ ve $(b \vee c) \in \downarrow T$ olduğundan $(c \longrightarrow b) \longrightarrow b = 1$ ve $c \longrightarrow b \leq b$ dir. Böylece $a \leq b$ ve $b \leq \nu_S(b) = a$ olup $a = b$ bulunur ve $T \subseteq S$ dir. Aynı işlemler T ile S' nin yerleri değiştirilerek yapılırsa $S = T$ bulunur.

(2) ⇒ (3): (⊆): 4.1.1.Sonuç gereği açıktır.

(⊇): Eğer $a \in T = \bigcap\{O(x): \nu_S(x) = 1\}$ ise $\nu_S(x) = 1$ olan bir x için, O(x) tanımı gereği, $x \longrightarrow a = a$ dır. Böylece $a \notin S'$ alınırsa $\nu_S(a) = 1$ olur ve $x = a$ seçilirse $a = a \longrightarrow a = 1 \Rightarrow a \notin T \setminus \{1\}$ olur. Buradan $T \setminus \{1\} \subseteq S'$ dir. Sonuç olarak $T' \subseteq S' \subseteq T'$, yani $S' = T'$ olduğundan (2) gereği, $S = T$ elde edilir.

(3) ⇒ (4) ⇒ (5) açıktır.

(5) ⇒ (1): ∀c için, "$a \vee c = 1$, $c \longrightarrow b \leq b \Rightarrow a \leq b$" olduğu gösterilmelidir. $a \vee c = 1$ olan bütün c'ler için $c \longrightarrow b = b$ olsun. Şimdi $\uparrow a$ alt lokali kapalı olduğundan varsayım gereği bazı açık alt lokallerin kesişimidir. Ayrıca 3.3.14.Önerme gereği $O(c) \cap \uparrow a = O_{\uparrow a}(\nu_{\uparrow a}(c))$ dir. Eğer $\nu_{\uparrow a}(c) = 1$ ise $O_{\uparrow a}(1) = \{s \in \uparrow a: 1 \longrightarrow s = s\} = \uparrow a$ ve $\uparrow a \subseteq O(c)$ dir. Böylece $\uparrow a$, $\nu_{\uparrow a}(c) = 1$ olacak şekilde O(c) açık alt lokallerinin kesişimi olarak yazılabilir. Buradan, $\nu_{\uparrow a}(c) = \bigwedge\{s \in \uparrow a: c \leq s\} = \bigwedge\{s: a \leq s, c \leq s\} = a \vee c$ olduğundan $C(a) = \uparrow a = \bigcap\{O(c): a \vee c = 1\}$ dir. Yani $a \vee c = 1$ olan ∀c için $b \in O(c)$ olduğundan $b \in \uparrow a$ olur ve böylece $a \leq b$ bulunur.

Yukarıdaki (1) ⇔ (2) denkliğinin, cebirde ilginç bir yorumu bulunmaktadır.

4.1.6.Önerme: Bir L çatısının fit olması için gerek ve yeter koşul L üzerindeki çatı denkliği için "$E_1 1 = E_2 1 \Rightarrow E_1 = E_2$" gerektirmesinin olmasıdır.

Kanıt: E denkliğinin S alt lokali ile ilişkisinin $x \mathrel{E} y \Leftrightarrow (\forall s \in S, x \leq s \Leftrightarrow y \leq s)$ biçiminde olduğu bilinmektedir. Bu durumda $x \in S' \Leftrightarrow (\exists s \neq 1, s \in S, x \leq s) \Leftrightarrow (x, 1) \notin E$ ve böylece $E_1 = E_2 \Leftrightarrow S_1 = S_2 \Leftrightarrow S_1' = S_2' \Leftrightarrow E_1 1 = E_2 1$ olur.

4.1.4.Tanım: Eğer $\forall x \in L$ için $x \leq y$ olacak şekilde bir $y \in S$ varsa $S \subseteq L$ alt lokaline kofinal denir.

4.1.7.Önerme: Bir L lokali için aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) L altfit dir,

(2) Bir $S \subseteq L$ alt lokali için $S \setminus \{1\}$, $L \setminus \{1\}$'de kofinal ise $S = L$ dir,

(3) Eğer bir $S \subseteq L$ alt lokali için $S \neq L$ ise $S \cap C(x) = \mathbf{0}$ olacak şekilde bir $C(x) \neq \mathbf{0}$ kapalı alt lokali vardır,

(4) Her $O(a)$ açık alt lokali için $O(a) = \bigvee\{C(x) \colon x \vee a = 1\}$ dir,

(5) Her açık alt lokal, kapalı alt lokallerin supremumu biçiminde yazılabilir.

Kanıt: (1) ⇒ (2): İlk olarak, "$S \setminus \{1\}$, $L \setminus \{1\}$'de kofinaldir $\Leftrightarrow S' = L'$" olduğu gösterilecektir.

(⇒): Bir $x \in L' = \downarrow(L \setminus \{1\})$ alınsın. O halde $\exists y \in L \setminus \{1\}$ için $x \leq y$ dir. $S \setminus \{1\}$, $L \setminus \{1\}$'de kofinal olduğundan $y \leq z$ olacak şekilde bir $z \in S \setminus \{1\}$ vardır. Buradan $x \in \downarrow z$ ve böylece $x \in S^1$ bulunur.

(⇐): $\forall x \in L \setminus \{1\}$ için $x \leq x$ olduğundan $x \in \downarrow(L \setminus \{1\})$ ve böylece $x \in S'$ dir. O halde $x \leq y$ olacak şekilde bir $y \in S \setminus \{1\}$ vardır ve böylece $S \setminus \{1\}$, $L \setminus \{1\}$'de kofinaldir.

Şimdi ispatı tamamlamak için $b \in L$ ve $a = \nu_S(b)$ alınsın. Eğer $a \vee c = 1$ ise $\nu_S(b \vee c) \geq a \vee c = 1$ olduğundan 4.1.1.Sonuç gereği $b \vee c \notin S' = L' = \downarrow(L \setminus \{1\}) \Rightarrow b \vee c = 1$ olur. Bu durumda, altfitlik gereği, $a \leq b$ olup $b \in S$ dir. Öyleyse, $L \subseteq S$ ve böylece $S = L$ dir.

(2) ⇒ (3): $S \neq L$ verilsin. (2) gereği $S \setminus \{1\}$, $L \setminus \{1\}$' de kofinal değildir. O halde öyle bir $x \in L$ vardır ki $\forall y \in S$ için $x \nleq y$ dir. Ayrıca $C(x) = \uparrow x$ olduğundan, $\forall y \in S$ için $y \notin \uparrow x = C(x)$ ve $S \cap C(x) = \mathbf{0}$ dır.

(3) ⇒ (2): Bir S alt lokali için $S \setminus \{1\}$, $L \setminus \{1\}$' de kofinal olsun ve istenilenin aksine $S \neq L$ kabul edilsin. O halde (3) gereği, $S \cap C(x) = \mathbf{0}$ olacak şekilde bir $C(x) \neq \mathbf{0}$ kapalı alt lokali vardır. Bu durumda $\forall s \in S$ için $s \notin C(x) = \uparrow x$, yani $\forall s \in S$ için $x \nleq s$ dir. Bu da kabul ile çelişir. O halde $S = L$ olmalıdır.

(4) ⇔ (5): Öncelikle $C(x) \subseteq O(a) \Leftrightarrow x \vee a = 1$ sağlanır. Gerçekten $C(x) \subseteq O(a) \Leftrightarrow C(x) \cap C(a) = \mathbf{0} \Leftrightarrow C(x \vee a) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \uparrow(x \vee a) = 1 \Leftrightarrow x \vee a = 1$ dir. İstenilen denklik, bu gerektirme yardımıyla kolayca elde edilir.

(3) ⇒ (4): $S = \bigvee\{C(x) \colon x \vee a = 1\}$ ve $C(y) \cap (C(a) \vee S) = \mathbf{0}$ olsun. O halde, $C(y) \cap C(a) = \mathbf{0}$ ve dolayısıyla $C(y) \subseteq O(a)$ dır. Böylece (4) ⇔ (5) ispatında gösterildiği gibi $y \vee a = 1$. S'nin tanımı gereği $C(y) \subseteq S$ dir ve buradan da $C(y) = C(y) \cap (C(a) \vee S) = \mathbf{0}$ bulunur. Böylece (3) gereği, $C(a) \vee S = L$' dir. Sonuç olarak (3)' te S yerine $C(a) \vee S$ yazıldı ve ardından $C(y) \cap (C(a) \vee S) = \mathbf{0}$ koşulunu sağlayan her $C(a) \vee S$ alt lokali için $C(y) = \mathbf{0}$ bulunmuş oldu.

Böylece $C(a) \vee S = L$ dir. Buradan $O(a)$ ile $C(a)$ birbirlerinin tümleyeni olduğundan $O(a) \subseteq S$ bulunur.

Diğer taraf açıktır, çünkü $x \vee a = 1$ olduğundan $C(x) \subseteq O(a)$ ve böylece $S = \bigvee\{C(x): x \vee a = 1\} \subseteq O(a)$ olur.

(4) ⇒ (1): Eğer $a \nleq b$ ise $b \in C(b) \setminus C(a)$ olduğundan $C(b) \nsubseteq C(a)$ dir. Böylece $O(a) \nsubseteq O(b)$ elde edilir. O halde (4)'den $c \vee a = 1$ ve $C(c) \nsubseteq O(b)$ olacak şekilde bir c vardır ve böylece $b \vee c \neq 1$ dir. O halde L altfittir.

4.1.2.Sonuç: L çatısının altfit olması için gerek ve yeter koşul L üzerindeki çatı bağıntısının $E1 = \{1\} \Rightarrow E = \Delta = \{(x, x): x \in L\}$

özelliğini sağlamasıdır.

4.1.8.Önerme: Bir L lokalinin fit olması için gerek ve yeter koşul her alt lokalinin altfit olmasıdır.

Kanıt: (⇒): 4.1.3.Önerme (2)'de gösterilmiştir.

(⇐): L, her alt lokali altfit olan bir lokal olmak üzere, L'nin, 4.1.5.Önerme (2)'yi sağladığı gösterilecektir. Bunun için $S' = T'$ olacak şekilde S ve T alt lokalleri verilsin. Şimdi $S \vee T$ alt lokalini ele alınırsa, kabul gereği $S \vee T$'nin altfit olduğu söylenebilir. Şimdi, 4.1.7.Önerme (2) kullanılarak, $S = S \vee T = T$ olduğu gösterilecektir. Bunun için $s \wedge t \in S \vee T$ alınsın ve $s \wedge t < 1$ olsun. Eğer $s < 1$ ise $s \wedge t \leq s < 1$ dir. Eğer $s = 1$ ise $t < 1$ dir ve $t \in T^1 = S^1$ olduğundan $t \leq s' < 1$ olacak şekilde bir $s' \in S'$ vardır. Böylece $s' \in S$ için $s \wedge t \leq s' < 1$ dir ve buradan $S \setminus \{1\}$, $(S \vee T) \setminus \{1\}$'de kofinal olur. O halde 4.1.7.Önerme (2) gereği, $S = S \vee T$ elde edilir. Benzer işlemler T için de yapılırsa $T = S \vee T$ bulunur. Böylece $S = T$ olup 4.1.5.Önerme (2) gereği, L fittir.

4.1.3.Sonuç: Eğer X uzayı T_1 ise onun her alt uzayı da T_1 ve böylece altfit dir. Bu ifade Lc(X) lokalinin her zaman fit olduğu anlamına gelmez. Lc(X)'in, alt uzaylarla temsil edilmeyen ve altfit olmayan alt uzayları da olabilir.

4.1.5.Tanım: Eğer bir $h: M \rightarrow L$ çatı homomorfizması "$h(a) = 1 \Rightarrow a = 1$" gerektirmesini sağlıyor ise h' ye ko-yoğundur denir.

4.1.9.Önerme: Bir $f: M \rightarrow L$ lokalik dönüşümünün ko-yoğun olması için gerek ve yeter koşul $f[L \setminus \{1\}]$' nin, $M \setminus \{1\}$ de kofinal olmasıdır.

Kanıt: ($\Leftarrow$): f: $M \to L$ bir lokalik dönüşüm olsun. 3.2.5.Önerme'de $f(x) \geq 1 \Leftrightarrow x \geq f^*(1) = 1$ olduğu görülmüştü. Şimdi eğer $f[L \setminus \{1\}]$, $M \setminus \{1\}$'de kofinal ve $b < 1$ ise $b \leq f(a)$ olacak şekilde bir $a < 1$ elemanı vardır ve böylece $f^*(b) \leq a < 1$ dir. O halde f^* ko-yoğun ve böylece f ko-yoğundur.

($\Rightarrow$): f^* ko-yoğun ve $b < 1$ ise $f^*(b) = a < 1$ ve $b \leq f(a)$ dır ve böylece $f[L \setminus \{1\}]$, $M \setminus \{1\}$' de kofinaldir.

4.1.4.Sonuç: Bir L çatısının altfit olması için gerek ve yeter koşul her h: $L \to M$ ko-yoğun çatı homomorfizmasının bire-bir olmasıdır.

Kanıt:($\Rightarrow$): L üzerindeki $E = \{(x, y): h(x) = h(y)\}$ denkliği göz önüne alınsın. Eğer h ko-yoğun ise $E1 = \{1\}$ olur. O halde 4.1.2.Sonuç'tan $E = \Delta$ olup h bire-birdir.

($\Leftarrow$): Eğer varsayım sağlanır ve $E1 = \{1\}$ olursa, h: $L \to L/E$ dönüşümü göz önüne alındığında $(x, y) \in E \Rightarrow h(x) = h(y) \Rightarrow x = y$ elde edilir. Böylece $E = \Delta$ olup, L altfittir.

4.1.5.Sonuç: L lokalinin altfit olması için gerek ve yeter koşul her ko-yoğun f: $M \to L$ lokalik dönüşümünün örten olmasıdır.

4.1.10.Önerme: Bir altfit lokalin her tümleyenli alt lokali altfittir.

Kanıt: T, bir $S \subseteq L$ alt lokalinin tümleyeni, yani $S \cap T = \mathbf{0}$ ve $S \vee T = L$ olsun. Ayrıca $S_0 \setminus \{1\}$, S içinde kofinal olacak şekilde bir $S_0 \subseteq S$ verilsin ve bir $x \in L$ alınsın. Şimdi $S_0 \vee T$ dikkate alınırsa, $x = s \wedge t$ olacak şekilde bir $s \in S$ ve bir $t \in T$ vardır. Eğer $x < 1$ ise iki durum vardır:
(i) $t < 1$ ve $x = s \wedge t \leq t \in (S_0 \vee T)$ dir.

(ii) $t = 1$ dir ve bu durumda $s < 1$ olup $x = s < s_0$ olacak şekilde $s_0 < 1$, $s_0 \in S_0$ vardır.

Böylece $(S_0 \vee T) \setminus \{1\}$, $L \setminus \{1\}$'de kofinaldir ve L altfit olduğundan $S_0 \vee T = L$ olur. Böylece, $S = S \cap (S_0 \vee T) = S \cap S_0 = S_0$ dır ve sonuç olarak, 4.1.7.Önerme (2) $\Rightarrow$ (1) gereği, S altfit olur.

4.1.6.Sonuç: 3.3.19.Önerme'den açık lokalik dönüşümlerin tam olarak, sol adjointleri f^* tam Heyting homomorfizmaları olan, f: $L \to M$ lokalik dönüşümleri olduğu biliniyor. Buradan h: $M \to L$ açık çatı homomorfizmalarının, aşağıdaki (*) koşulunu sağlayan $\emptyset$ dönüşümlerinin varlığı ile karakterize edilebileceği görülür.

$x \wedge \emptyset(a) = y \wedge \emptyset(a) \Leftrightarrow h(x) \wedge a = h(y) \wedge a$ (*)

Eğer $E = \{(x, y): h(x) \wedge a = h(y) \wedge a\}$ ve $E' = \{(x, y): x \wedge \emptyset(a) = y \wedge \emptyset(a)\}$ şeklinde tanımlanırsa, (*) koşulu tekrardan düzenlenilerek $E = E'$ elde edilir. Eğer M fit ise 4.1.6.Önerme gereği,

$E1 = E'1$, yani $\emptyset(a) \leq x \Leftrightarrow x \wedge \emptyset(a) = \emptyset(a) \Leftrightarrow h(x) \wedge a = a \Leftrightarrow a \leq h(a)$ elde edilir. Böylece (*) gereği, h, ∅'nin bir sağ adjointidir. Bu durumda, eğer M fit çatı ise "h: M → L çatı homomorfizmasının açık olması için gerek ve yeter koşul h'nin bir tam latis homomorfizması olmasıdır." Burada ayrıca Heyting koşulları da kendiliğinden sağlanır, yani $h(a \longrightarrow b) = h(a) \longrightarrow h(b)$ olur. Gerçekten, $x \leq h(a \longrightarrow b) \Rightarrow \emptyset(x) \leq a \longrightarrow b \Rightarrow \emptyset(x) \wedge a \leq b \Rightarrow x \wedge h(a) \leq h(\emptyset(x)) \wedge h(a) = h(\emptyset(x) \wedge a) \leq h(b) \Rightarrow x \leq h(a) \longrightarrow h(b)$ sağlanır. Benzer olarak $x \leq h(a) \longrightarrow h(b) \Rightarrow x \leq h(a \longrightarrow b)$' nin sağlandığı da gösterilebilir.

4.1.11.Önerme: Eğer M altfit olsun. Bu durumda h: M → L çatı homomorfizmasının açık olması için gerek ve yeter koşul h'nin bir tam latis homomorfizması olmasıdır.

Kanıt: M altfit bir lokal olsun.

(⇒): h: M → L açık bir çatı homomorfizması ise 3.3.19.Önerme gereği h, özel olarak bir tam latis homomorfizmasıdır.

(⇐): h: M → L tam latis homomorfizması ve ∅, h' nin sol adjointi olsun. Bu durumda, $\emptyset(a \wedge h(b)) = \emptyset(a) \wedge b$ dir. Gerçekten, $\emptyset(a \wedge h(b)) \leq \emptyset(a) \wedge \emptyset(h(b)) \leq \emptyset(a) \wedge b$ olur. Diğer taraftan eğer $\emptyset(a) \wedge b \nleq \emptyset(a \wedge h(b))$ ise altfitlik gereği, $(\emptyset(a) \wedge b) \vee c = 1 \neq \emptyset(a \wedge h(b)) \vee c$ olacak şekilde bir c vardır ama $h(\emptyset(a \wedge h(b)) \vee c) = h(\emptyset(a \wedge h(b)) \vee h(c) = h\emptyset(a \wedge h(b)) \vee h(c) \geq (a \wedge h(b)) \vee h(c) = (a \vee h(c)) \wedge (h(b) \vee h(c)) = (a \vee h(c)) \wedge h(b \vee c) = a \vee h(c) \geq a$ dır. Böylece $\emptyset(a \wedge h(b)) \vee c \geq \emptyset(a)$ ve $\emptyset(a \wedge h(b)) \vee c \geq \emptyset(a) \vee c = 1$ çelişkisi elde edilir. Buradan $\emptyset(a) \wedge b \leq \emptyset(a \wedge h(b))$ olup $\emptyset(a \wedge h(b)) = \emptyset(a) \wedge b$ bulunur.

4.2. Hausdorff, Regülerlik ve Tamamen Regülerlik Aksiyomları

Burada Hausdorff, regülerlik ve tamamen regülerlik aksiyomları ile bu aksiyomların birbirleri ve diğer ayırma aksiyomları ile ilişkileri verilecektir. Bu kesimde [1, 9, 16] nolu kaynaklar temel alınmıştır.

Bir X topolojik uzayında Hausdorff aksiyomunun $\Delta = \{(x, x): x \in X\}$ kümesinin XxX' de kapalı olmasıyla karakterize edilebildiği biliniyor. Bundan faydalanılarak lokalllerde Hausdorff tanımı yapılabilir.

4.2.1.Tanım: L bir çatı olmak üzere, $\Delta: L \rightarrow L \oplus L$ dönüşümü bir kapalı lokalik dönüşüm ise L çatısına Hausdorff denir.

3.4.3.Sonuç'tan $\Delta(a) = \{(x, y): x \wedge y \leq a\}$'nın sol adjointi $\Delta^*(U) = \bigvee\{x \wedge y: (x, y) \in U\} = \bigvee\{x: (x, x) \in U\}$ olduğu biliniyor. İkinci eşitliği göstermek için, $A = \{x \wedge y: (x, y) \in U\}$ ve

$B = \{x: (x, x) \in U\}$ denilirse, $(x, y) \in U$, $x \wedge y \in A \Rightarrow (x \wedge y, x \wedge y) \leq (x, y)$ olduğundan $x \wedge y \in B$ ve $x \wedge y \leq \bigvee B$ olur. O halde $\bigvee A \leq \bigvee B$ dir. Diğer taraf açık olduğundan $\bigvee A = \bigvee B$ elde edilir.

Tanımda verilen koşul $\Delta[L] \subseteq L \oplus L$'nin kapalı bir alt lokal olması anlamına gelir. Ayrıca Δ lokalik dönüşümü bir sağ adjoint olarak keyfi infimumları koruduğundan $\bigwedge\Delta[L] = \Delta(\bigwedge L) = \Delta[0]$ ve böylece $\Delta[L] = \uparrow\Delta[0]$ elde edilir.

$L \oplus L$' de $\Delta[0] = \{(x, y): x \wedge y \leq 0\}$ elemanı d_L ile gösterilecektir.

Hausdorff aksiyomu için 4.2.1' den farklı tanımlar da yapılacağı için, buradaki aksiyomdan I-Hausdorff olarak bahsedilecektir. I-Hausdorff özelliğinin, klasik topolojide bilinen Hausdorff aksiyomunun lokal versiyonu olduğuna ve aslında tam anlamıyla bir genelleştirmesi olmadığına dikkat edilmelidir. Çünkü Lc(XxY) ile Lc(X) $\oplus$ Lc(Y) çatılarının izomorf olmaları gerekmediğinden $\Delta[L]$, $\Delta = \{(x, x): x \in X\}$'nın bir genelleştirilmesi gibi düşünülemez.

Eğer Lc(X) I-Hausdorff ise X Hausdorff dur fakat tersi genellikle doğru değildir.

$\Delta^*(a \oplus a) = a$ olduğundan Δ^* dönüşümünün örten olduğu açıktır. Böylece $\Delta^* \circ \Delta \circ \Delta^* = \Delta^*$olduğundan $\Delta \circ \Delta^* = id$ ve adjankşın tanımından $U \subseteq (\Delta \circ \Delta^*)(U)$ elde edilir.

4.2.1.Önerme: L bir lokal olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) L, I-Hausdorff tur,

(2) $\forall U \supseteq d_L$ doymuş kümesi için $(\Delta \circ \Delta^*)(U) = U$ dır. Diğer bir deyişle, sırasıyla, Δ ve Δ^*'ın kısıtlamaları olan, $L \rightarrow \uparrow d_L$ ve $\uparrow d_L \rightarrow L$ birbirlerinin tersidir.

(3) $\alpha \circ \Delta^* = \delta$, $\delta(U) = U \vee d_L$ olacak şekilde bir $\alpha: L \rightarrow \uparrow d_L$ dönüşümü vardır.

Kanıt: (1) ⇒ (2): $U \supseteq d_L$ olsun. $U \in \uparrow d_L$ ve I-Hausdorff özelliği gereği, $\uparrow d_L = \Delta[L]$ olduğundan $U \in \Delta[L]$ dir. Şimdi $\beta: \uparrow d_L \rightarrow L$ olmak üzere $U = \Delta(a)$ olacak şekilde bir $a = \beta(U)$ seçilsin. O halde, $U = \Delta(a) = \Delta(\beta(U))$ ve buradan $\Delta^*(U) = (\Delta^* \circ \Delta)((\beta(U)) = \beta(U)$ dir. O halde $U = \Delta(\beta(U)) = (\Delta \circ \Delta^*)(U)$ olur

Ayrıca burada $\uparrow d_L = \Delta[L]$ olduğundan $L \rightarrow \uparrow d_L$ dönüşümü Δ' ya eşittir. $\Delta(\beta(U)) = U$ ve $(\beta \circ \Delta)(U) = (\Delta^* \circ \Delta)(U) = U$ sağlandığından, Δ ve β dönüşümleri birbirinin tersidir.

(2) ⇒ (3): $\alpha: L \rightarrow \uparrow d_L$, $\alpha(a) = \Delta(a)$ olmak üzere,

$U \vee d_L = (\Delta \circ \Delta^*)(U \vee d_L) = \Delta(\Delta^*(U) \vee \Delta^*(d_L)) = \Delta(\Delta^*(U) \vee \Delta^*\Delta(0)) = \Delta(\Delta^*(U) \vee 0) = \Delta(\Delta^*(U)) = \alpha(\Delta^*(U))$ elde edilir.

(3) ⇒ (1): δ bir homomorfizma ve Δ^* örten bir homomorfizma olduğundan α bir homomorfizmadır ve δ örten olduğundan α da örten olur. Ayrıca, $(\Delta^* \circ \alpha \circ \Delta^*)(U) = (\Delta^* \circ \delta)(U) = \Delta^*(U \vee d_L) = \Delta^*(U \vee \Delta(0)) = \Delta^*(U) \vee (\Delta^* \circ \Delta)(0) = \Delta^*(U)$ sağlandığından α bire-birdir. Gerçekten $a, b \in L$ için $\alpha(a) = \alpha(b)$ ise Δ^* örten olduğundan $a = \Delta^*(U_a)$, $b = \Delta^*(U_b)$ olacak şekilde $U_a, U_b \in L \oplus L$ vardır. Şimdi, $(\alpha \circ \Delta^*)(U_a) = (\alpha \circ \Delta^*)(U_b) \Rightarrow (\Delta^* \circ \alpha \circ \Delta^*)(U_a) = (\Delta^* \circ \alpha \circ \Delta^*)(U_b) \Rightarrow \Delta^*(U_a) = \Delta^*(U_b) \Rightarrow U_a = U_b \Rightarrow a = b$ olduğundan istenilen elde edilmiş olur.

Böylece α bir izomorfizmadır ve (1) sağlanır.

4.2.2.Önerme: L bir lokal olmak üzere, L'nin I-Hausdorff olması için gerek ve yeter koşul her doymuş $U \supseteq d_L$ kümesi için "$(a \wedge b, a \wedge b) \in U \Rightarrow (a, b) \in U$" koşulunun sağlanmasıdır.

Sonuç olarak herhangi bir I-Hausdorff lokali için, $(a \oplus b) \vee d_L = (b \oplus a) \vee d_L$ olur.

Kanıt: (⇒): L, bir I-Hausdorff lokal ise 4.2.1.Önerme gereği, $\Delta\Delta^*(U) = U$ dır. Ayrıca Δ'nın tanımından $(a \wedge b, a \wedge b) \in U = (\Delta \circ \Delta^*)(U)$ ise $(a \wedge b) \leq \Delta^*(U)$ ve $(a,b) \in (\Delta \circ \Delta^*)(U) = U$ dır.

(⇐): Önermede verilen koşul sağlansın ve $x_i \in L$ $(i \in J)$ olsun. Bu durumda $U \supseteq d_L$ doymuş kümesi için $(x_i, x_i) \in U$ ise, bir j için, $(x_i, x_j) \in U$ dır.

Şimdi 4.2.1.Önerme (3) kullanılırsa $\alpha(a) = (a \oplus a) \vee d_L$dir ve α'nın infimumu koruduğu açıktır. Şimdi 3.4.10.Önerme gereği,

$\alpha(\bigvee_{i \in J} a_i) = ((\bigvee_{i \in J} a_i) \oplus (\bigvee_{i \in J} a_i)) \vee d_L = (\bigvee_{i,j \in J} (a_i \oplus a_j)) \vee d_L = (\bigvee_{i,j \in J} (a_i \oplus a_j) \vee d_L) = \bigvee_{i,j \in J} \alpha(a_i)$ olur. Son eşitliğin gösterilmesi için $A = \{(a_i \oplus a_i): i \in J\} = \{\downarrow(a_i, a_i) \cup n: i \in J\}$ ve $B = \{(a_i \oplus a_j): i, j \in J\} = \{\downarrow(a_i, a_j) \cup n: i, j \in J\}$ olarak tanımlansın. Burada $A \subseteq B$ olduğu açıktır. Ayrıca $(a_i, a_i) \in A$ olduğundan $\forall j$ için $(a_i, a_j) \in A$ ve böylece $B \subseteq A$ olur.

Bu durumda α ve böylece $\alpha \circ \Delta^*$ bir çatı homomorfizmasıdır ve $(\alpha \circ \Delta^*)(a \oplus b) = \alpha(a \wedge b) = ((a \wedge b) \oplus (a \wedge b)) \vee d_L = (a \oplus b) \vee d_L$ dır. Burada son eşitliğin ispatlanması için $V = (a \wedge b) \oplus (a \wedge b) = \downarrow(a \wedge b, a \wedge b) \cup n$ denilsin. $(a \wedge b, a \wedge b) \in V$ olduğundan kabul gereği, $(a, b) \in V$ dir. Diğer taraftan $(a \wedge b, a \wedge b) \in \downarrow(a, b)$ dir ve böylece $V = \downarrow(a \wedge b, a \wedge b) \cup n = \downarrow(a, b) \cup n = a \oplus b$ dir.

3.4.10.Önerme (1)'den $a \oplus b$ elemanları, $L \oplus L$' yi ürettiğinden istenilen sonuç elde edilmiş olur.

4.2.3.Önerme: Bir I-Hausdorff lokalin her alt lokali de I-Hausdorff tur.

Kanıt: $S \subseteq L$, bir alt lokal, U, SxS'de bir doymuş küme ve $U \supseteq \Delta_S(0_S) = \{(x, y) \in SxS: x \wedge y = \nu_S(0)\}$ olsun. Öncelikle $\downarrow U$ kümesi, LxL'de doymuştur. Gerçekten, eğer $(x_i, y) \in \downarrow U$ ise $x_i' \geq x_i$ ve $y' \geq y$ olacak şekilde bir $(x_i', y') \in U$ vardır ve U doymuş olduğundan $(\bigvee^S_{i\in J}(x_i'),) y') \in U$ dır. Ayrıca $\bigvee_{i\in J} x_i \leq \bigvee_{i\in J} x_i' \leq \nu_S(\bigvee_{i\in J} x_i') = (\bigvee^S_{i\in J}(x_i')$ ve böylece $(\bigvee_{i\in J} x_i', y') \in U$ olur.

Diğer taraftan $\downarrow U \supseteq d_L$ olur. Gerçekten $x \wedge y = 0$ ise $\nu_S(x) \wedge \nu_S(y) = \nu_S(0)$ ve böylece $(x, y) \leq (\nu_S(x), \nu_S(y)) \in \Delta_S(0_S) \subseteq U$ olur.

Şimdi $(a, b) \in SxS$ için $(a \wedge b, a \wedge b) \in U$ ise $(a \wedge b, a \wedge b) \in \downarrow U$ dır. L, I-Hausdorff ve $U \supseteq d_L$ doymuş olduğundan $(a, b) \in \downarrow U$ olur. O halde U aşağı küme olduğundan $(a, b) \in U$ elde edilir. Sonuç olarak S alt lokali, I-Hausdorff tur.

4.2.2.Tanım: 1972 de, Dowker ve Strauss [23] ayırma aksiyomlarının muadilleri olarak, noktadan bağımsız koşullar önerdi. Örneğin Hausdorff tipi bir aksiyom

"Eğer $a \vee b = 1$, $a, b \neq 1$ ise $u \wedge v = 0$ olacak şekilde $u \nleq a$, $v \nleq b$ elemanları vardır" biçimindedir. Bu tanımlamanın daha zayıf bir varyantı da,

"Eğer $a \vee b \neq a, b$ ise $u \wedge v = 0$ olacak şekilde $u \nleq a$, $v \nleq b$ elemanları vardır" biçimindedir. Bu özellik, DS-Hausdorff özelliği olarak adlandırılacaktır.

4.2.4.Önerme: Herhangi $a, b \in L$ için $U = \downarrow(a, a \wedge b) \cup (a \wedge b, b) \cup \mathcal{n}$, LxL'in doymuş bir alt kümesidir.

Kanıt: $(x_i, y) \in U$ $(i \in J)$ olsun. Eğer $y = 0$ ise $\mathcal{n}$ tanımı gereği $(\bigvee_{i\in J} x_i, y) \in U$ olduğu açıktır. Şimdi $y \leq a \wedge b$ ise $\forall i \in J$ için $x_i \leq a$ ve böylece $\bigvee_{i\in J} x_i \leq a$ olup $(\bigvee_{i\in J} x_i, y) \in \downarrow(a, a \wedge b) \subseteq U$ bulunur. Diğer taraftan eğer $y \nleq a \wedge b$ ise $(x_i, y) \in \downarrow(a \wedge b, b)$ olmak zorundadır. $\forall i \in J$ için $x_i \leq a \wedge b$ ve $y \leq b$ dir. Buradan $(\bigvee_{i\in J} x_i, y) \in \downarrow(a \wedge b, b) \subseteq U$ bulunur. Aynı işlemler, $(x, \bigvee_{i\in J} y_i)$ için de yapılabilir.

4.2.5.Önerme: Her I-Hausdorff lokal, DS-Hausdorff tur.

Kanıt: L lokali DS-Hausdorff olmasın. O halde, $u \wedge v = 0$ ve $(u, v) \leq (a, b)$ olduğunda $u \leq b$ ya da $v \leq b$ olacak şekilde a, b $(a, b \neq a \vee b)$ vardır. Bu durumda 4.2.4.Önerme'de verilen U için

$d_L \cap (a \oplus b) \subseteq U$ dır. Gerçekten $(x, y) \in d_L \cap (a \oplus b)$ ise $x \wedge y = 0$ ve $(x, y) \in \downarrow(a, b) \cup \mathcal{n}$ dir. Eğer $(x, y) \in \mathcal{n}$ ise $(x, y) \in U$ olduğu açıktır. Eğer $(x, y) \in \downarrow(a, b)$ ise $x \wedge y = 0$ ve $(x, y) \leq (a, b)$ olduğundan $x \leq a$, $y \leq b$ dir. Ayrıca $x \leq b$, $y \leq a$ olduğu da bilindiğinden $(x, y) \in \downarrow(a, a \wedge b)$ ya da $(x, y) \in \downarrow(a \wedge b, b)$, yani $(x, y) \in U$ dur.

Şimdi tersine L'nin I-Hausdorff olduğunu kabul edelim. Öncelikle $(a \wedge b, a \wedge b) \in \downarrow(a \wedge b, a \wedge b)$ olduğundan $(a \wedge b, a \wedge b) \in (a \wedge b) \oplus (a \wedge b)$ dır. Ayrıca 4.2.2.önerme gereği, $(a, b) \in (a \wedge b) \oplus (a \wedge b)$ dır ve böylece $(a, b) \in (a \wedge b) \oplus (a \wedge b) \vee d_L$ olur. Buradan $(a, b) \in ((a \wedge b) \oplus (a \wedge b) \vee d_L) \cap (a \oplus b) \subseteq (a \wedge b) \oplus (a \wedge b) \vee U = U$ elde edilir, ki bu bir çelişkidir, çünkü $(a, b) \in U$ olsaydı $a \vee b = a$ ya da $a \vee b = b$ olurdu. O halde L I-Hausdorff değildir.

Şimdi, DS-Hausdorff koşulu altında uzaysallığın, güçlendirilmiş bir çatı dağılma kuralı yardımıyla nasıl sağlanabileceği gösterilecektir.

4.2.3.Tanım: X kümesinin bütün alt kümelerinden oluşan sistem

$\bigcup_{i \in J} \bigcap \mathcal{A}_i = \bigcap \{\bigcup_{i \in J} \emptyset(i) : \emptyset \in \prod_{i \in J} \mathcal{A}_i\}$ tamamen dağılımlılık özelliğini sağlar.

Şimdi X topolojik uzayının açıklarından oluşan $\Omega(X)$ çatısı göz önüne alınsın ve $\forall i \in J$ için $\mathcal{F}_i$, $\Omega(X)$' in sonlu alt kümelerinden oluşan sistem olsun. Bu durumda

$\bigcup_{i \in J} \bigcap \mathcal{F}_i = \bigwedge \{\bigcup_{i \in J} \emptyset(i) : \emptyset \in \prod_{i \in J} \mathcal{F}_i\}$ dir.

4.2.4.Tanım: Bir L tam latisi ve $i \in J$ olmak üzere, sonlu $F_i \subseteq L$ tarafından oluşturulan herhangi bir F_i, $i \in J$ sistemi için,

$$\bigvee \bigwedge F_i = \bigwedge \{\bigvee_{i \in J} \emptyset(i) : \emptyset \in \prod_{i \in J} F_i\} \qquad \text{(RD)}$$

dağılma kuralını sağlıyor ise L' ye bir kuazi-topoloji denir.

Her kuazi-topoloji bir çatıdır. Gerçekten $F_i = \{a, b_i\}$ kümeleri verilsin. Sağ tarafta, $a \wedge \bigvee_{i \in J} b(i)$ 'yi elde etmek için, eğer bir k için $\emptyset(k) = a$ ise $\bigvee_{i \in J} \emptyset(i) \geq a$ olduğunun göz önünde bulundurulması yeterlidir.

Yukarıdan her topolojinin bir kuazi-topoloji olduğu açıktır. 1953 yılında Raney [24] her kuazi-topolojinin, bir topolojinin tam izomorfik görüntüsü olduğunu kanıtlamış ve bu kanıt her kuazi-topolojinin bir topoloji olup olmadığı sorusunu gündeme getirmiştir. Tezde yapılan tanımlar göz önüne alındığında, (RD) özelliğini sağlayan her çatının, bir uzaysal çatının tam alt lokali olduğu sonucu elde edilebilir. Burada tam alt lokal ile kastedilen, ilgili alt lokale karşılık gelen çatı homomorfizmasının tam olmasıdır. Burada asıl problem, (RD) özelliğini sağlayan her çatının uzaysal olup olmadığıdır. Kriz ve Pultr [22] tarafından, cevabın olumsuz olduğu gösterilmiştir. Burada, DS-Hausdorff çatılarda uzaysallık ve (RD) özelliğinin denk olduğu kısaca gösterilecektir.

4.2.6.Önerme: DS-Hausdorff bir çatıda, her yarı asal eleman asaldır.

Kanıt: L çatısı DS-Hausdorff ve $p \neq 1$ yarı asal ancak asal olmayan bir eleman olsun. Bu durumda, $a \wedge b = p$ olacak şekilde $a, b \nleq p$ elemanları vardır. Böylece $a \vee b \neq a, b$ dir ve buradan $u \wedge v = 0$, $u \nleq a$, $v \nleq b$ olacak şekilde u, v elemanları vardır. O halde $u, v \nleq a \wedge b = p$ olduğundan, p yarı asal değildir, ki bu bir çelişkidir. O halde p elemanı asaldır.

4.2.7.Önerme: Bir L çatısının (RD) özelliğini sağlaması için gerek ve yeter koşul $\forall a \in L$ elemanının a-yarı asal elemanların infimumu olarak yazılabilmesidir.

Kanıt: ($\Rightarrow$): L çatısı (RD) özelliğini sağlasın ve bir $a \in L$ için, $\bigwedge F_i \leq a$ ve $F_i \subseteq L$'ler sonlu olacak şekilde bir $\{Fi, i \in J\}$ sistemi seçilsin. Özel olarak $\{a\} \in \{F_i, i \in J\}$ olduğundan $a = \bigvee \bigwedge F_i = \bigwedge\{\bigvee_{i \in J} \emptyset(i) : \emptyset \in \prod_{i \in J} F_i\}$ dir. Şimdi $\emptyset \in \prod_{i \in J} F_i$ olacak şekilde $\forall p = \bigvee_{i \in J} \emptyset(i)$, a-yarı asaldır. Gerçekten eğer $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n \leq a$ ise $F_k = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ olacak şekilde bir k vardır ve $x_j = \emptyset(k) \leq \bigvee_{i \in J} \emptyset(i) = p'$ dir, yani p, a-yarı asaldır. Böylelikle $a \in L$ için $a = \bigwedge p$ dir ve istenilen elde edilmiş olur.

($\Leftarrow$): Şimdi $\forall a \in L$ öğesi, a-yarı asal elemanların infimumu olarak yazılabilsin ve $\bigwedge F_i \leq a$ ve $F_i \subseteq L$'ler sonlu olacak şekilde bir $\{F_i, i \in J\}$ sistemi için $a = \bigvee \bigwedge F_i$ olsun. Varsayımdan, a-yarı asal p_m elemanları için $a = \bigwedge_{m \in M} p_m$ dir. Şimdi sabit bir m için, $\bigwedge F_i \leq a$ olduğundan $\emptyset_m(k) \in F_m$ olacak şekilde bir $\emptyset_m(k)$ vardır ve $\emptyset_m(k) \leq a \Rightarrow \emptyset_m(k) \leq p_m$ dir. O halde, bu şekilde tanımlanan $\emptyset_m$ için $\bigvee_{i \in J} \emptyset(i) \leq p_m$dir.

O halde $\forall M$ için $\bigwedge\{\bigvee_{i \in J} \emptyset(i) : \emptyset \in \prod_{i \in J} F_i\} \leq p_m$ ve böylece $\bigwedge\{\bigvee_{i \in J} \emptyset(i) : \emptyset \in \prod_{i \in J} F_i\} \leq \bigwedge_{m \in M} p_m = a = \bigvee \bigwedge F_i$ dir. Eşitliğin diğer tarafı açık olduğundan,

$\bigvee \bigwedge F_i = \bigwedge\{\bigvee_{i \in J} \emptyset(i) : \emptyset \in \prod_{i \in J} F_i\}$ elde edilir ve böylece L çatısı (RD) özelliğine sahiptir.

4.2.8.Önerme: L çatısı DS-Hausdorff olsun. Bu durumda, L'nin uzaysal olması için gerek ve yeter koşul (RD) özelliğini sağlamasıdır.

Kanıt: Eğer L uzaysal ise 4.2.4.Tanım gereği (RD) özelliğini sağlar. Diğer yönü için L, (RD) özelliğini sağlasın. O halde 4.2.6.Önerme ve 4.2.7.Önerme gereği $\forall a \in L$, asal elemanların infimumu olarak yazılabilir. Böylece 3.2.15.Önerme gereği L uzaysal olur.

Şimdi, topolojik uzaylarda regülerlik aksiyomundan yola çıkılarak, bu aksiyomun nokta bağımsız bir genelleştirilmesinin nasıl yapılacağı konusu üzerinde durulacaktır. X bir topolojik uzay olmak üzere, $\forall F \subseteq X$ kapalı kümesi ve $x \notin F$ için $x \in V_1$, $F \subseteq V_2$ ve $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ olacak şekilde V_1, V_2 açık kümeleri bulunabiliyorsa X uzayının regüler olduğu biliniyor. Bu ifade, açıkça, "$\forall U$ açık kümesi ve $\forall x \in U$ için $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$ olacak şekilde bir V açığı vardır" ifadesine denktir. Yine denk olarak, bir X uzayının regüler olması için gerek ve yeter koşul $\forall U \subseteq X$ açık kümesinin $U = \bigcup\{V \in \Omega(X): \overline{V} \subseteq U\}$ biçiminde ifade edilebilmesidir. Burada $\overline{V} \subseteq U$ kapsaması

$$V \prec U \equiv \exists W \text{ açık; } V \cap W = \emptyset \text{ ve } W \cup U = X,$$

bağıntısıyla da ifade edilebilir. Burada V'nin $\Omega(X)$'deki yarı tümleyeni olan $V^* = X \setminus \overline{V}$ olarak göz önüne alınırsa, yukarıdaki bağıntı $V \prec U \equiv V^* \cup U = X$ biçiminde de yazılabilir. Şimdi tüm bu bilgilerden yola çıkılarak, L çatısı üzerinde bir bağıntı ve bu bağıntı yardımıyla regülerlik aksiyomu tanımlanabilir.

4.2.5.Tanım: L bir çatı olmak üzere, $a \prec b$ bağıntısı

$$a \prec b \equiv a^* \vee b = 1 \qquad \text{(rb1)}$$

ya da denk olarak

$$a \prec b \equiv \exists c \text{ için } a \wedge c = 0 \text{ ve } c \vee b = 1 \qquad \text{(rb2)}$$

şeklinde tanımlıdır.

4.2.9.Önerme: L bir çatı olmak üzere, aşağıdaki özellikler sağlanır:

(1) $a \prec b \Rightarrow a \leq b$,

(2) $\forall a \in L$ için $0 \prec a \prec 1$,

(3) $x \leq a \prec b \leq y \Rightarrow x \prec y$,

(4) $a \prec b \Rightarrow b^* \prec a^*$,

(5) $a \prec b \Rightarrow a^{**} \prec b$,

(6) $i = 1, 2$ için $a_i \prec b_i$ ise $a_1 \vee a_2 \prec b_1 \vee b_2$ ve $a_1 \wedge a_2 \prec b_1 \wedge b_2$ dir.

Kanıt: (1) $a = a \wedge 1 = a \wedge (a^* \vee b) = (a \wedge a^*) \vee (a \wedge b) = a \wedge b \Rightarrow a \leq b$ dir.

(2) $0^* \vee a = 1 \vee a = 1$ olduğundan $0 \prec a$ ve $a^* \vee 1 = 1$ olduğundan $a \prec 1$ dir.

(3) $x \leq a \Rightarrow a^* \leq x^*$ olduğu biliniyor. Buradan, $a \prec b$ ise $a^* \vee b = 1$ ve böylece $1 = a^* \vee b \leq x^* \vee b \leq x^* \vee y$ dir. O halde $x^* \vee y = 1$ yani $x \prec y$ dir.

(4) $a \prec b \Rightarrow 1 = a^* \vee b \leq a^* \vee b^{**} \Rightarrow a^* \vee b^{**} = 1 \Rightarrow b^* \prec a^*$.

(5) $a \prec b \Rightarrow a^* \vee b = 1 \Rightarrow a^{***} \vee b = 1 \Rightarrow a^{**} \prec b$. $(a_1 \wedge a_2)^*$ a_2^*

(6) $(a_1 \vee a_2)^* \vee (b_1 \vee b_2) = (a_1^* \wedge a_2^*) \vee (b_1 \vee b_2) = (a_1^* \vee b_1 \vee b_2) \wedge (a_2^* \vee b_1 \vee b_2) \geq (a_1^* \vee b_1) \wedge (a_2^* \vee b_2) = 1 \wedge 1 = 1$ olduğundan $a_1 \vee a_2 \prec b_1 \vee b_2$ dir. Diğer taraftan,

$(a_1 \wedge a_2)^* \vee (b_1 \wedge b_2) \geq (a_1^* \vee a_2^*) \vee (b_1 \wedge b_2) \geq (a_1^* \vee b_1) \wedge (a_1^* \vee b_1) = 1 \wedge 1 = 1$ olduğundan $a_1 \wedge a_2 \prec b_1 \wedge b_2$ elde edilir.

4.2.6.Tanım: L bir çatı olmak üzere, $\forall a \in L$ için $a = \bigvee\{x : x \prec a\}$ oluyorsa ise L çatısı regülerdir denir.

4.2.1.Sonuç: X uzayının regüler olması için gerek ve yeter koşul Lc(X)' in regüler olmasıdır.

I-Hausdorff özelliği, klasik özelliğin kesin bir eşdeğeri olmasa da, biraz sonra gösterileceği gibi regülerlik ile bir ilişkisi vardır.

4.2.10.Önerme: L bir lokal, $U \subseteq LxL$, $d_L \subseteq U$ özelliğine sahip doymuş bir küme ve $(a \wedge b, a \wedge b) \in U$ olsun. Bu durumda $x \prec a$, $y \prec b$ olan $\forall x, y$ için $(x, y) \in U$ dir.

Kanıt: Yukarıda verilenler çerçevesinde, $x \prec a$ ve $y \prec b$ olsun. Buradan $x^* \vee a = 1$, $y^* \vee b = 1$ dır. O halde 3.4.10.Önerme (3) gereği ve $(x \oplus x^*)$, $(y^* \oplus y)$, $((a \wedge b) \oplus (a \wedge b))$ elemanları doymuş U kümesinin elemanları olduğundan,

$(x, y) \in x \oplus y = (x \wedge (y^* \vee b)) \oplus (y \wedge (x^* \vee a)) = ((x \wedge y^*) \vee (x \wedge b)) \oplus ((y \wedge x^*) \vee (y \wedge a))$

$= ((x \wedge y^*) \oplus (y \wedge x^*)) \vee ((x \wedge y^*) \oplus ((y \wedge a)) \vee ((x \wedge b) \oplus (y \wedge x^*)) \vee ((x \wedge b) \oplus (y \wedge a))$

$\leq (x \oplus x^*) \vee (x^* \oplus y) \vee (x \oplus x^*) \vee ((a \wedge b) \oplus (a \wedge b)) \subseteq U$ ve böylece $(x, y) \in U$ olur.

4.2.11.Önerme: Her regüler lokal, I-Hausdorff ve böylece DS-Hausdorfftur.

Kanıt: L, bir regüler lokal olsun ve bir $d_L \subseteq U$ doymuş kümesi ile $((a \wedge b), (a \wedge b)) \in U$ biçimindeki elemanlar verilsin. Eğer $x \prec a$, $y \prec b$ ise, 4.2.10 Önerme gereği, $(x, y) \in U$ dır. Şimdi, U doymuş bir küme olduğundan $(a, y) = (\bigvee\{x: x \prec a\}, y) \in U$ ve $(a, b) = (a, \bigvee\{y: y \prec b\}) \in U$ bulunur. O halde $(a, b) \in U$ olup L lokali I-Hausdorff ve böylece 4.2.5 Önerme'den DS-Hausdorff tur.

4.2.2.Sonuç: Aşağıda verilen formüller incelendiğinde, regülerlik $\Rightarrow$ fitlik $\Rightarrow$ altfitlik gerektirmelerinin sağlandığı görülebilir.

$a \nleq b \Rightarrow \exists c, a \vee c = 1 \neq b \vee c$ (altfit),

$a \nleq b \Rightarrow \exists c, a \vee c = 1, c \longrightarrow b \nleq b$ (fit).

4.2.12.Önerme: L lokalinin regüler olması için gerek ve yeter koşul $\forall a, b \in L$ için "$a \nleq b \Rightarrow \exists c, a \vee c = 1, c \longrightarrow 0 \nleq b$" koşulunun sağlanmasıdır.

Kanıt: ($\Rightarrow$): L lokali regüler olsun ve $a = \bigvee\{x: x \prec a\} \nleq b$ ise $x^* \vee a = 1$ ve $x \nleq b$ olacak şekilde bir x vardır. Buradan, $c = x^*$ alınırsa, $x \leq c^* = c \longrightarrow 0$ ve böylece $c \longrightarrow 0 \nleq b$ olur.

($\Leftarrow$): $\forall a, b \in L$ için $a \nleq b \Rightarrow \exists c, a \vee c = 1, c \longrightarrow 0 \nleq b$ koşulu sağlansın ve $a \nleq \bigvee\{b: b \prec a\}$ olsun. Bu durumda $c \vee a = 1$ ve $c^* \nleq \bigvee\{b: b \prec a\}$ olacak şekilde bir c vardır. Fakat bu durum $c^* \prec a$ olması ile çelişir.

4.2.3.Sonuç: L bir regüler çatı (lokal) olsun. Bu durumda,

(1) Eğer E ve E', L üzerinde çatı denklikleri ve $E1 = E'1$ ise $E = E'$,

(2) L'nin her alt lokali, açık alt lokallerin kesişimidir,

(3) Her tam çatı homomorfizması bir Heyting homomorfizmasıdır,

(4) Her ko-yoğun çatı homomorfizması bire-birdir,

(5) Her yoğun çatı homomorfizması regüler çatılar kategorisinde bir monomorfizmadır.

Kanıt: (1)-(4) koşulları sırasıyla 4.1.6.Önerme, 4.1.5.Önerme (4), 4.1.6.Sonuç, 4.1.4.Sonuç kullanılarak kolayca elde edilebilir.

4.2.7.Tanım: L bir lokal ve $a, b \in L$ olsun. Bu durumda

"$a \prec\prec b \Leftrightarrow a_0 = a, a_1 = b$ ve $r < s$ için $a_r \prec a_s$ olacak şekilde $a_r \in L, (r \in \mathbb{Q}, 0 \leq r \leq 1)$ vardır"

L üzerinde bir bağıntıdır.

4.2.13.Önerme: L bir çatı ve $a, b, a_i, b_i \in L$ olmak üzere, aşağıdaki özellikler sağlanır:

(1) $a \prec\prec b \Rightarrow a \leq b$,

(2) $\forall a \in L$ için $0 \prec\prec a \prec\prec 1$,

(3) $x \leq a \prec\prec b \leq y \Rightarrow x \prec\prec y$

(4) $a \prec\prec b \Rightarrow b^* \prec\prec a^*$,

(5) $a \prec\prec b \Rightarrow a^{**} \prec\prec b$,

(6) $i = 1, 2$ için $a_i \prec\prec b_i$ ise $a_1 \vee a_2 \prec\prec b_1 \vee b_2$ ve $a_1 \wedge a_2 \prec\prec b_1 \wedge b_2$ dir.

Kanıt: 4.2.9.Önerme kanıtına benzer olarak kolayca gösterilebilir.

4.2.8.Tanım: L bir çatı olmak üzere, $\forall a \in L$ için $a = \bigvee\{x: x \prec\prec a\}$ oluyorsa L çatısı tamamen regülerdir denir.

4.2.4.Sonuç: Bir X uzayının tamamen regüler olması için gerek ve yeter koşul Lc(X) uzayının tamamen regüler olmasıdır.

4.2.14.Önerme: Her $h: L \to M$ çatı homomorfizması için

$a \prec b \Rightarrow h(a) \prec h(b)$ ve $a \prec b \Rightarrow h(a) \prec\prec h(b)$ gerektirmeleri sağlanır.

Kanıt: "$\prec$" ve "$\prec\prec$" bağıntılarının tanımları kullanılarak kolayca görülebilir.

4.2.9.Tanım: L bir lokal olsun. Eğer $a \vee b = 1$ olacak şekilde $\forall a, b \in L$ için $u \wedge v = 0$, $a \vee v = 1 = b \vee v$ olacak şekilde $u, v \in L$ varsa, L lokaline normaldir denir Denk olarak, "$a \vee b = 1$ olan $\forall a, b \in L$ çifti için $a \vee u^* = 1 = b \vee u$ olacak şekilde bir $u \in L$ vardır" ifadesi de kullanılabilir.

4.2.10.Tanım: L bir lokal (çatı) olmak üzere eğer her a R b şeklindeki $a, b \in L$ için a R c R b olacak şekilde $c \in L$ varsa R bağıntısı interpolasyon özelliğini sağlar denir.

4.2.15.Önerme: Normal bir lokalde $\prec$ bağıntısı arasına girebilirdir. Sonuç olarak normal bir lokalde $\prec\prec$ ile $\prec$ bağıntıları ve böylece regülerlik ve tamamamen regülerlik çakışır.

Kanıt: L bir normal lokal olsun ve $a \prec b$ olacak şekilde $a, b \in L$ verilsin. O halde $u \wedge v = 0$, $a \vee v^* = 1 = b \vee u$ olacak şekilde $u, v \in L$ vardır. Böylece $a \prec v$ ve $v^* \vee b \geq u \vee b = 1$ olduğundan $v \prec b$ dir. Sonuç olarak $a \prec v \prec b$ olduğundan $\prec$ bağıntısı interpolasyon özelliğini sağlar.

4.2.16.Önerme: Her normal, altfit lokal tamamen regülerdir.

Kanıt: Normal uzaylarda $\prec\prec$ ile $\prec$ bağıntıları çakıştığından, L lokalinin regüler olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Şimdi $a \in L$ için $b = \bigvee\{x : x \prec a\}$ olarak tanımlansın ve $a \vee c = 1$ olsun. Normallik tanımı gereği $a \vee u^* = 1 = c \vee u$ olacak şekilde bir $u \in L$ vardır. Böylece $u \leq b$ ve $b \vee c = 1$ dir. Sonuç olarak $a \vee c = 1$ olmasının her zaman $b \vee c = 1$ olmasını gerektirdiği görüldü. O halde, altfitlikten $a \leq b$ elde edilir. Ayrıca $b \leq a$ açık olduğundan $a = b$ elde edilir ve böylece L regülerdir.

Klasik topolojide, $T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2$ gerektirmeleri sağlanır. Daha yakından incelediğinde, ikinci gerektirmede T_1' in zorunlu olmadığı yani $T_3 + T_0 \Rightarrow T_2$ gerektirmesinin de sağlandığı görülebilir. Diğer taraftan uzayın $T_4 + T_0$ olması, T_3 olmasını gerektirmez. Bu nedenle T_0' dan daha güçlü bir aksiyom olan altfitlik, bu gerektirmenin sağlanması için yeterli olacaktır.

5. KOMPAKTLIK VE KOMPAKTLAŞTIRMA

5.1. Kompaktlık

Burada kompaktlık kavramı ve bazı ayırma aksiyomları ile arasındaki ilişkiler verilecektir. Bu kesimde [1, 6, 8, 10, 16] nolu kaynaklar temel alınmıştır.

5.1.1.Tanım: L bir çatı olmak üzere $\bigvee A = 1$ olacak şekildeki bir $A \subset L$ alt kümesine, L çatısının bir örtüsü denir. A, L çatısının bir örtüsü olmak üzere, $\bigvee B = 1$ olacak şekildeki bir $B \subset A$ alt kümesine A'nın bir alt örtüsü denir.

Bu örtü tanımı, klasik topolojideki açık örtü kavramına karşılık gelir. Yani açık kümelerden oluşan bir örtüdür.

5.1.2.Tanım L çatısının (lokalinin) her örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa, L çatısı kompakttır denir.

5.1.3.Tanım: Verilen bir çatının, her örtüsünün sayılabilir alt örtüsü varsa bu çatıya Lindelöf çatı denir.

5.1.1.Önerme: Kompakt bir çatının her alt çatısı ve her kapalı alt lokali de kompakttır.

Kanıt: Alt çatılardaki ve kapalı alt lokallerdeki supremum işlemi ile L' deki supremum işleminin çakışmasının bir sonucudur.

5.1.2.Önerme: L bir çatı olmak üzere, bir $S \subseteq L$ kompakt alt lokalinin, $f: L \to M$ lokalik dönüşümü altındaki görüntüsü de kompakttır.

Kanıt: $j: S \to L$ gömme dönüşümü olsun ve örten ve bire-bir $f \circ j$ bileşkesi gözönüne alınsın. Bu durumda,

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] & M \\ S \arrow[u, "j"] \arrow[r, "g"] & f(S) \arrow[u, "m"'] \end{tikzcd}$$

g örten olduğundan diyagramdan üretilen ve $(g \circ g^*) = id$ eşitliğini sağlayan bir $g^*: f(S) \to S$ çatı homomorfizması vardır.

Şimdi eğer f(S)' de, $\bigvee_{i\in I} a_i = 1$ ise S' de $g^*(\bigvee_{i\in I} a_i) = \bigvee_{i\in I} g^*(a_i) = 1$ olur ve böylece S kompakt olduğundan sonlu bir $K \subseteq J$ için $g^*(\bigvee_{i\in K} a_i) = \bigvee_{i\in K} g^*(a_i) = 1$ olur. Buradan $\bigvee_{i\in K} a_i = (g \circ g^*)(\bigvee_{i\in K} a_i) = 1$ ve böylece f(S) kompakttır.

Şimdi, klasik topolojik uzaylardakine benzer olarak, kompakt I-Hausdorff lokallerin normal olduğu gösterilecektir. Bunun için önce, 3.4.7.Tanım'da verilen ve $\pi_1(U) = \{(\bigvee A, b): A\times\{b\} \subseteq U\}$, $\pi_2(U) = \{(a, \bigvee B): \{a\}\times B \subseteq U\}$ olmak üzere, $\nu = \pi_2 \circ \pi_1$ yarı nükleusu tarafından üretilen μ nükleusu hatırlatılacaktır.

5.1.3.Önerme: L_1 kompakt bir çatı ve $(1, b) \in \mu(U)$ ise $(1, b) \in \nu(U) = (\pi_2 \circ \pi_1)(U)$ dır.

5.1.4.Önerme: $U = (a \oplus 1) \cup d_L = \downarrow(a, 1) \cup d_L$ için

$(\pi_2 \circ \pi_1)(U) = \{(x, y): y \leq \bigvee\{b: x \leq a \vee b^*\}$ dir.

Kanıt: $(x, y) \in \{(x, y): y \leq \bigvee\{b: x \leq a \vee b^*\}\}$ olsun. Bu durumda $y \leq \bigvee\{b: x \leq a \vee b^*\}$dir. Şimdi $B = \{b: x \leq a \vee b^*\}$ ve $b \in B$ için $x_1(b) = x \wedge a$ ve $x_2(b) = x \wedge b^*$ olsun. Bu durumda,

$(x_1(b), b), (x_2(b), b) \in \pi_1(U)$ dir. Gerçekten, $A = \{x \wedge b^*\}$ ise $Ax\{b\} = \{(x \wedge b^*, b) \subseteq d_L \subseteq U$ ve böylece $(x_2(b), b) \in \pi_1(U)$ dir. Ayrıca $A = \{x \wedge a\}$ ise $Ax\{b\} = \{(x \wedge a, b)\} \subseteq \downarrow(a,1) \cup d_L = U$ ve böylece $(\bigvee A, b) = (x \wedge a, b) = (x_1(b), b) \in \pi_1(U)$ olur.

Bu durumda, $(x, b) = (x_1(b) \vee x_2(b), b) \in \pi_1(U)$. O halde $\{x\}xB \subseteq \pi_1(U)$ ve dolayısıyla $(x, \bigvee B) \in (\pi_2 \circ \pi_1)(U)$ olur.

Diğer taraftan, $(x, y) \in (\pi_2 \circ \pi_1)(U)$ alınsın. O halde $\bigvee B = y$ olacak şekilde bir B için $\{x\}xB \subseteq \pi_1(U)$ olur. Ayrıca, $\pi_1(U)$ tanımı gereği, $\forall b \in B$ için $x = \bigvee A(b)$ ve $A(b)x\{b\} \subseteq \downarrow(a,1) \cup d_L$ olacak şekilde bir $A(b)$ vardır. Bu durumda, bir $z \in A(b)$ için $(z, b) \in U = \downarrow(a,1) \cup d_L \Rightarrow z \leq a$ ya da $z \wedge b = 0 \Rightarrow z \leq a$ ya da $z \leq b^* \Rightarrow z \leq a \vee b^*$ olur. Böylece $x = \bigvee A(b) = \bigvee\{z: z \in A(b)\} \leq a \vee b^*$ ve $y \leq \bigvee\{b: x \leq a \vee b^*\}$ dir. Bu durumda $(x, y) \in \{(x, y): y \leq \bigvee\{b: x \leq a \vee b^*\}\}$ elde edilir.

5.1.5.Önerme: Her kompakt I-Hausforff çatı, regülerdir.

Kanıt: L bir kompakt I- Hausdorff ve $a \in L$ olsun. $(1, a) \in (1 \oplus a)$ ve L çatısı I-Hausdorff olduğundan 4.2.2.Önerme gereği $(1 \oplus a) \vee d_L = (a \oplus 1) \vee d_L$ ve böylece $(1, a) \in (\pi_2 \circ \pi_1)(\downarrow(a, 1) \cup d_L)$ olur. Gerçekten $\mu(\downarrow a)$, $\downarrow a$ kümesini içeren en küçük U doymuş kümedir ve $\mu(\downarrow a) = \downarrow a \cup n = \bigoplus_i a_i$ dır. Buradan $(1, a) \in (a \oplus 1) \vee d_L = \mu(\downarrow(a, 1) \cup d_L)$ olup 5.1.3.Önerme kullanılabilir. O halde 5.1.4.Önerme gereği $a \leq \bigvee\{b: 1 = a \vee b^*\} = \bigvee\{b: b \prec a\}$ bulunur. Diğer taraftan $\bigvee\{b: b \prec a\} \leq a$ ifadesi açık olduğundan $a = \bigvee\{b: b \prec a\}$ elde edilir.

5.1.6.Önerme: Her regüler ve Lindelöf lokal, (özel olarak her kompakt ve regüler lokal) normaldir. Bunun sonucu olarak $\prec$ bağıntısı interpolasyon özelliğini sağladığı için bu lokal tamamen regüler de olur.

Kanıt: L regüler ve Lindelöf bir lokal ve a, b ∈ L için $a \vee b = 1$ olsun. Öncelikle regülerlik gereği $a = \bigvee\{x: x \prec a\}$ ve $b = \bigvee\{x: x \prec b\}$ dir. Bu durumda,

$\bigvee\{x: x \prec a\} \vee b = 1 = a \vee \bigvee\{x: x \prec b\}$ ve Lindelöf özelliği gereği, $\bigvee_{i=1}^{\infty} x_i \vee b = 1 = a \vee \bigvee_{i=1}^{\infty} y_i$ olacak şekilde $x_1, x_2, x_3,... \prec a$ ve $y_1 , y_2, y_3,... \prec b$ elemanları vardır. Burada $x_1 \leq x_2 \leq ...$, $y_1 \leq y_2 \leq ...$ olduğu varsayılabilir. Şimdi $u_i = x_i \wedge y_i^*$ ve $v_i = y_i \wedge x_i^*$ olarak tanımlanırsa, $a \vee v_i = a \vee (y_i \wedge x_i^*) = (a \vee y_i) \wedge (a \vee x_i^*) = a \vee y_i$ elde edilir. Benzer şekilde de $b \vee u_i = b \vee x_i$ eşitliği de elde edilebilir. Sonuç olarak $u = \bigvee_{i=1}^{\infty} u_i$ ve $v = \bigvee_{i=1}^{\infty} v_i$ olarak tanımlanırsa, $a \vee v = \bigvee_{i=1}^{\infty} (a \vee v_i) = \bigvee_{i=1}^{\infty} (a \vee y_i) = a \vee \bigvee_{i=1}^{\infty} y_i = 1$ ve benzer şekilde $b \vee u = 1$ elde edilir. Böylece $\forall i, j$ için $u_i \wedge v_j = x_i \wedge y_i^* \wedge y_j \wedge x_j^* = 0$ dır. Burada eğer $i \leq j$ ise $x_i \wedge x_j^* = 0$ dır ve değilse $y_i^* \wedge y_j = 0$ olduğu kolayca görülebilir. Sonuç olarak $\wedge v = \bigvee_{i,j=1}^{\infty} (u_i \vee v_j) = 0$ olup, L çatısı normaldir.

5.1.1.Sonuç: Her kompakt I-Hausdorff lokal normaldir.

5.1.7.Önerme: L kompakt ve M regüler birer lokal olsun. Bu durumda, her $f: L \to M$ yoğun lokalik dönüşümü örtendir. L kompakt ve M regüler birer çatı ise her $h: M \to L$ yoğun çatı homomorfizması bir-birdir. $h(\bigvee_{i=1}^{n} x_i)$

Kanıt: L kompakt, M regüler birer çatı ve $h: M \to L$ yoğun bir çatı homomorfizması olsun. Öncelikle h dönüşümünün ko-yoğun olduğu gösterilecektir: Bunun için $h(a) = 1$ olsun. Bu durumda $a = \bigvee\{x: x \prec a\}$ olduğundan $h(a) = h(\bigvee\{x: x \prec a\}) = \bigvee\{h(x): x \prec a\} = 1$ elde edilir. L kompakt olduğundan, $\bigvee_{i=1}^{n} h(x_i) = 1$ dir ve 4.2.9.Önerme gereği $x = x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_n \prec a$ olur. Buradan $x^* \vee a = 1$ ve $h(x) = h(\bigvee_{i=1}^{n} x_i) = \bigvee_{i=1}^{n} h(x_i) = 1$ bulunur. Son olarak $h(x^*) \leq h(x)^* = 0$ ve yoğunluktan dolayı $x^* = 0$ dır. Böylece $a = 1$ olur.

Şimdi aksine h bire-bir olmasın, yani $h(a) = h(b)$ iken $a \neq b$ olacak şekilde a, b ∈ M elemanları var olsun. Genelliği bozmadan $a \nleq b$ olduğu kabul edilsin. M regüler ve a ∈ M olduğundan, $a = \bigvee\{x: x \prec a\} \nleq b$ olur. O halde, $x_0 \nleq b$ ve $x_0 \prec a$ olacak şekilde bir x_0 vardır ve buradan $x_0^* \vee a = 1$ ve böylece $h(x_0^*) \vee h(a) = h(x_0^*) \vee h(b) = 1$ elde edilir. Şimdi $b = \bigvee\{x: x \prec b\}$ ise $h(x_0^*) \vee h(\bigvee_{y \prec b} y) = h(x_0^*) \vee \bigvee_{y \prec b} h(y) = 1$ bulunur. L kompakt olduğundan, $h(x_0^*) \vee \bigvee_{i=1}^{n} h(y_i) = 1$ olacak şekilde $y_i \in L$ $(i = 1, \ldots n)$ vardır. Eğer $\bigvee y_i = y$ olarak tanımlanırsa, $\forall i$ için $y_i \prec b$ olduğundan 4.2.9.Önerme gereği $y \prec b$ olur. Buradan $h(x_0^*) \vee h(y) = 1 = h(x_0^* \vee y)$ ve h ko-yoğun olduğundan $x_0^* \vee y = 1$ olur. O halde $x_0 \prec y \Rightarrow x_0 \prec y \prec b \Rightarrow x_0 \leq y \leq b$ elde edilir, ki bu bir çelişkidir.

5.2. Kompaklaştırma

Burada, Banaschewski ve Mulvey tarafından tanıtılan, tamamen regüler uzayların Stone-Cech kompaktlaştırmasının nokta-bağımsız bir karşılığı verilecektir. Bu kesimde [1, 6, 8, 10, 16] nolu kaynaklar temel alınmıştır. Ayrıca bu kesimde, ideallerin boş olmadığı varsayılacak ve I = L idealleri de göz önünde bulundurulacaktır.

5.2.1.Önerme: L çatısının tüm ideallerinden aile J(L), üzerindeki kapsama bağıntısıyla kompakt bir çatıdır.

Kanıt: İlk önce, ideallerin keyfi kesişiminin de bir ideal olduğunun hatırlatılması yararlı olacaktır. Ayrıca ideallerden oluşan herhangi bir $\{I_i,\ i \in J\}$ sisteminin J(L)'de bir supremumu vardır ve $\bigvee_{i\in J} I_i = \{\bigvee F\text{: F sonlu, } F \subseteq \bigcup_{i\in J} I_i\}$ dir. Gerçekten bu aile, tüm I_J ideallerini içeren bir idealdir. Diğer taraftan, K tüm I_J ideallerini kapsayan bir ideal ise, F $\bigcup_{i\in J} I_i$ özelliğindeki sonlu F' ler için $\bigvee F \in K$ olması gerekir. Eğer K ve I_j 'ler ideal iseler, $\bigvee_{i\in J} (K \cap I_i) \subseteq K \cap \bigvee_{i\in J} I_i$ olduğu açıktır. Eğer $x \in K \cap \bigvee_{i\in J} I_i$ ise $x \in K$ ve sonlu $F \subseteq \bigvee_{i\in J} I_i$ için $x = \bigvee F$ biçiminde olur. Buradan $x \in F \subseteq \bigvee_{i\in J} (K \cap I_i)$ dir, çünkü $x = \bigvee F \in K$ ve $\forall f \in F$ için $f \leq \bigvee F$ olup F aşağı küme olduğundan $F \subseteq K$ dır. Böylece $\bigvee_{i\in J} I_i$ bir çatıdır.

Son olarak J(L)' nin kompakt olduğunu göstermek için, $\bigvee_{i\in J} I_i = L = 1_{J(L)}$ olsun. Özel olarak, $1 \in \bigvee_{i\in J} I_i$ olduğundan sonlu bir $F \subseteq \bigcup_{i\in J} I_i$ için $1 = \bigvee F$ elde edilir. Buradan $F \subseteq \bigcup_{i\in J0} I_i$ olacak şekilde sonlu bir $J_0 \subseteq J$ indis kümesi vardır ve $F \subseteq \bigcup_{i\in J0} I_i$ ve supF = 1 olduğundan $1 \in \bigvee_{i\in J0} I_i$ olur. O halde $L = \bigvee_{i\in J0} I_i$ ve böylece J(L) kompakttır.

5.2.1.Sonuç: υ: J(L) → L, $\upsilon(I) = \bigvee I$ ve α: L → J(L), α(a) = ↓a biçiminde tanımlanan α ve υ dönüşümleri göz önüne alınsın. Bu durumda, açıkça $(\upsilon \circ \alpha)(a) = a$ ve $I \subseteq (\alpha \circ \upsilon)(I)$ olur ve böylece bu dönüşümler adjointtir. Dolayısıyla υ, supremumu korur. Ayrıca, υ sonlu infimumu da korur. Gerçekten,

$$\upsilon(I_1) \wedge \upsilon(I_2) = \bigvee I_1 \wedge \bigvee I_2 = \bigvee\{a_1 \wedge a_2\text{: } a_j \in I_j\} \leq \bigvee\{a\text{: } a \in I_1 \cap I_2\} = \upsilon(I_1 \cap I_2) \leq \upsilon(I_1) \wedge \upsilon(I_2)$$

dır. O halde υ, bir çatı homomorfizması ve böylece α bir lokalik dönüşümdür.

5.2.2.Sonuç: α, bir yoğun lokalik gömme dönüşümüdür.

Kanıt: Aşağı küme tanımı gereği, α'nın bire-bir olduğu açıktır. Ayrıca I ≠ 0, yani I ≠ {0} ise $\upsilon(I) = \bigvee I \neq \{0\}$ dır (Çünkü α(I) = ↓I olup {0}'dan farklıdır).

5.2.3.Sonuç: Böylece her L lokaline karşılık, L' den kompakt lokale tanımlı yoğun bir gömme dönüşümü vardır. Bunu, L'nin kompakt genişlemesi olarak ele alabiliriz, fakat maalesef bu tanım yeterli olmaz, çünkü L kompakt bile olsa, J(L) oldukça geniştir. Bu problem tamamen regüler lokaller yardımıyla çözülebilir.

5.2.1.Tanım: L bir lokal ve $I \subseteq L$ bir ideal olsun. Eğer, $\forall a \in I$ için $a \prec\prec b$ olacak şekilde bir $b \in I$ varsa, I ideali regülerdir denir.

5.2.2.Önerme: L'nin regüler ideallerinden oluşan R(L) ailesi, J(L)'nin bir alt çatısıdır. Böylece R(L) kompakt bir lokaldir.

Kanıt: Öncelikle $I_1, I_2 \in R(L)$ ve $a \in I_1 \cap I_2$ olsun. Bu durumda, $a \prec\prec b_1$ ve $a \prec\prec b_2$ olacak şekilde $b_1 \in I_1$ ve $b_2 \in I_1$ elemanları vardır. 4.2.9.Önerme gereği, $a \prec\prec b_1 \wedge b_2 \in I_1 \cap I_2$ olur. Böylece $I_1 \cap I_2 \in R(L)$ dir. Şimdi, $i \in J$ için I_j' ler regüler ve $F \subseteq \bigcup_{i\in J} I_i$ sonlu olsun. Bir $x \in F$ için $x \in I_{j(x)}$ olacak şekilde bir $j(x)$ ve $x \prec\prec x'$ olacak şekilde bir $x' \in I_{j(x)}$ seçilsin. Buradan, $F' = \{x' : x \in F\}$ biçiminde tanımlanırsa, $F' \subseteq \bigcup_{i\in J} I_i$ ve 4.2.13.Önerme (6) gereği $\bigvee F \prec\prec \bigvee F'$ bulunur ve böylece istenilen elde edilmiş olur.

5.2.2.Tanım: L bir lokal ve $a \in L$ olmak üzere $\sigma(a) = \{x : x \prec\prec a\}$ biçiminde tanımlıdır.

5.2.3.Önerme: L bir lokal ve $a \in L$ olmak üzere, $\sigma(a)$ bir regüler idealdir.

Kanıt: Eğer $x, y \in \sigma(a)$ ise $x \prec\prec a$ ve $y \prec\prec a$ olduğundan $x \vee y \prec\prec a$ ve böylece $x \vee y \in \sigma(a)$ dir. Ayrıca $y \leq x$, $x \in \sigma(a) \Rightarrow x \prec\prec a$ ve $y \leq x \Rightarrow y \prec\prec a \Rightarrow y \in \sigma(a)$ olup $\sigma(a)$ bir ideal olur. Son olarak $\sigma(a)$'nın regüler bir lokal olduğu açıktır.

5.2.4.Önerme: L bir lokal olmak üzere, $a \prec\prec b$ ise $\sigma(a) \prec \sigma(b)$ dir

Kanıt: "$\prec\prec$" işleminin interpolasyon özelliği gereği, $a \prec\prec x \prec y \prec\prec b$ olacak şekilde $x, y \in L$ vardır. Buradan $y \in \sigma(b)$ ve 4.2.13.Önerme (4) gereği, $x^* \in \sigma(a^*)$ dir. Böylece $1 = x^* \vee y \in \sigma(a^*) \vee \sigma(b)$ ve $\sigma(a^*) \vee \sigma(b) = L = 1_{J(L)}$ elde edilir. Eğer $x \in \sigma(a^*) \cap \sigma(a)$ ise $x \leq a^* \wedge a = 0$ yani $x = 0$ elde edilir. Gerçekten, $x \in \sigma(a^*) \cap \sigma(a) \Rightarrow (x \in \sigma(a^*)$ ve $x \in \sigma(a)) \Rightarrow$ $(x \prec\prec a^*$ ve $x \prec\prec a) \Rightarrow (x \leq a^*$ ve $x \leq a) \Rightarrow x \leq a^* \wedge a$ dir. Böylece $\sigma(a^*) \cap \sigma(a) = 0_{J(L)}$ olduğundan $\sigma(a) \prec \sigma(b)$ elde edilir.

5.2.5.Önerme: L lokali tamamen regüler ise R(L) de tamamen regülerdir.

Kanıt: 5.2.2. Önerme' den R(L)'nin kompakt olduğu bilindiğinden ve "regüler + kompakt ⇒ tamamen regüler" gerektirmesi var olduğundan, R(L)'nin tamamen regüler olduğunun gösterilmesi için regüler olduğunun gösterilmesi yeterlidir. Şimdi herhangi bir I ideali için $I = \bigcup\{\sigma(a): a \in I\}$ = eşitliğinin sağlandığı gösterilsin. Öncelikle $x \in \bigcup\{\sigma(a): a \in I\}$ ise $x \in \sigma(a)$ olacak şekilde bir $a \in I$ vardır ve buradan $x \prec\prec a$ ve $x \leq a \in I$ ve böylece $x \in I$'dır. Diğer taraftan, $x \in I$ ise tamamen regülerlikten dolayı $a \prec\prec b$ olacak şekilde bir $b \in I$ vardır ve böylece $a \in \sigma(b) \subseteq \bigcup\{\sigma(a): a \in I\}$elde edilir.

Bunların yanı sıra, $\bigcup\{\sigma(a): a \in I\} \in R(L)$ dir. Gerçekten $b \in \bigcup\{\sigma(a): a \in I\}$ ise $b \in \sigma(a)$ olacak şekilde bir $a \in I$ vardır. Buradan $b \prec\prec a$ ve interpolasyon özelliğinden $b \prec\prec c \prec\prec a$ olacak şekilde $c \in L$ vardır. O halde $c \in L$ için $c \in \sigma(a)$, $b \prec\prec c$ dir. Böylece $\bigcup\{\sigma(a): a \in I\} \in R(L)$ olduğundan $\bigcup\{\sigma(a): a \in I\} = \bigvee\{\sigma(a): a \in I\}$dir.

Şimdi L tamamen regüler olduğundan, $\forall a \in L$ için $a = \bigvee\{b: b \prec\prec a\}$ dır. Buradan, $\sigma(a) = \bigcup\{\sigma(b): b \prec\prec a\} = \bigvee\{\sigma(b): b \prec\prec a\}$ olur. 5.2.4.Önerme gereği, $I = \bigcup\{\sigma(b): b \prec\prec a, a \in I\} \supseteq \bigvee\{K : K \prec\prec I\}$ bulunur.

5.2.4.Sonuç: L tamamen regüler çatı olsun. Bu durumda $\upsilon(I) = \bigvee I$ ve ayrıca $(\upsilon \circ \sigma)(a) = a$ ve $I \subseteq (\sigma \circ \upsilon)(I)$ dır

Ayrıca 5.2.1.Sonuç'taki yöntem kullanılarak $\upsilon: R(L) \rightarrow L$ dönüşümünün bir çatı homomorfizması olduğu gösterilebilir ve böylece σ, bir lokalik gömme dönüşümüdür.

5.2.6.Önerme: L kompakt bir lokal olmak üzere υ ve σ dönüşümleri birbirlerinin tersidir.

Kanıt: Bir $x \in (\sigma \circ \upsilon)(I)$ alınsın. Bu durumda, özel olarak $x \prec \bigvee I$ ve $x^* \vee \bigvee I = 1$ dir ve kompaktlık gereği, $x^* \vee y_1 \vee y_2 \vee \ldots \vee y_n = 1$ olacak şekilde $y_1, y_2, \ldots, y_n \in I$ vardır. Fakat $y = y_1 \vee y_2 \vee \ldots \vee y_n \in I$ ve $x \prec y$ olacaktır ve böylece $x \in I$ dır. O halde $(\sigma \circ \upsilon)(I) \subseteq I$ bulunur. Eşitliğin diğer tarafı, 5.2.4 Sonuç' tan açıktır.

6. DEĞERLEME (VALUATION)

Bu kesimde bir latis üzerine kurulan gerçel değerli bir fonksiyon yardımıyla elde edilen değerleme (valuation) dönüşümü verilecektir. Daha sonra değerleme dönüşümü kullanılarak bir metrik yapısı kurulacaktır. Bu kesimde [17] ve [18] nolu kaynaklar temel alınmıştır.

6.1.Tanım: L ve M kısmi sıralı kümeler olmak üzere, herhangi bir f: $L \to M$ fonksiyonu, "$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$" koşulunu sağlıyor ise f fonksiyonuna izotondur denir. Ayrıca $x < y$ iken $f(x) < f(y)$ oluyorsa f fonksiyonuna kesin izotondur denir.

6.2.Tanım: L bir $\vee$-yarılatis olmak üzere, kesin artan bir V: $L \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $x \wedge y$ varsa, $V(x \vee y) + V(x \wedge y) \leq V(x) + V(y)$ koşulunu sağlıyor ise V'ye bir yukarı değerleme dönüşümü (upper valuation) denir.

6.1.Önerme: Eğer V bir yukarı değerleme ise, d_V: $LxL \to \mathbb{R}^+$, $d_V(x, y) = 2.V(x \vee y)- V(x) - V(y)$ bir metriktir.

Kanıt: Latisler ve sıralı kümeler üzerinde tanımlı bu ve bunun gibi metrikler hakkında ayrıntılı bilgiye [28]' ten ulaşılabilir.

6.3.Tanım: L sonlu $\wedge$-yarılatis L üzerinde kesin izoton V: $L \to \mathbb{R}$ dönüşümü, $x \vee y$ var olduğunda, $V(x \vee y) + V(x \wedge y) \geq V(x) + V(y)$ koşulunu sağlıyorsa V'ye bir aşağı değerleme (lower valuation) dönüşümü denir.

6.2.Önerme: V aşağı değerleme ise d_V: $LxL \to \mathbb{R}^+$, $d_V(x, y) = V(x) + V(y) - 2V(x \wedge y)$ bir metriktir.

6.4.Tanım: Sonlu bir L latisi üzerinde kesin izoton V: $L \to \mathbb{R}$ dönüşümü, yukarı ve aşağı değerleme koşullarını sağlıyor ise V'ye bir değerleme (valuation) dönüşümü denir.

Önerme: Eğer V değerleme dönüşümü ise $d_V(x, y) = V(x \vee y) - V(x \wedge y)$ bir metriktir.

Kanıt: $d_V(x, y) = 2V(x \vee y) - V(x) - V(y)$ ve $d_V(x, y) = V(x) + V(y) - 2V(x \wedge y)$ eşitlikleri taraf tarafa toplanır ve sadeleştirmeler yapıldıktan sonra, $d_V(x, y) = V(x \vee y) - V(x \wedge y)$ elde edilir.

6.3.Önerme: Artan $V: L \rightarrow \mathbb{R}$ değerleme dönüşümü yardımı ile L latisi üzerinde, $d: LxL \rightarrow \mathbb{R}$; $d(x, y) = V(x \vee y) - V(x \wedge y)$ biçiminde tanımlanan uzaklık fonksiyonu, $\forall x, y, z, a \in L$ için aşağıdaki koşulları sağlar:

(1) $d(x, x) = 0$, $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) = d(y, x)$,

(2) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$,

(3) $d(a \vee x, a \vee y) + d(a \wedge x, a \wedge y) \leq d(x, y)$.

Kanıt: (1) Tanımlardan açıktır.

(3) $d(a \vee x, a \vee y) + d(a \wedge x, a \wedge y) = V(a \vee x \vee y) - V((a \vee x) \wedge (a \vee y)) + V((a \wedge x) \vee (a \wedge y)) - V(a \wedge x \wedge y) \leq V(a \vee x \vee y) - V(a \vee (x \wedge y)) + V(a \wedge (x \vee y)) - V(a \wedge x \wedge y) = V(a) + V(x \vee y) - V(a) - V(x \wedge y) = V(x \vee y) - V(x \wedge y) = d(x, y)$.

(2) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x \vee y, y) + d(y, x \wedge y) + d(y \vee z, y) + d(y, y \wedge z) \geq d(x \vee y \vee z, y \vee z) + d(y \vee z, y) + d(y, x \wedge y) + d(x \wedge y, x \wedge y \wedge z)$ dir. Çünkü, $d(x \vee y \vee z, y \vee z) \leq d(x \vee y, y)$ ve $d(x \wedge y, x \wedge y \wedge z) \leq d(y, y \wedge z)$ dir.

Bunlar birleştirilirse, $d(x \vee y \vee z, x \wedge y \wedge z) \geq d(x \vee y, x \wedge y) \geq d(x, y)$ bulunur.

6.5.Tanım: Herhangi bir M kümesi üzerinde (2) ve (3) özelliklerini sağlayan bir metrik veya uzunluğa yarı-metrik denir. Böylece artan değerlemeli latislere, yarı metrik latis denir.

6.4.Önerme: L, 0'ı bulunduran bir göreceli tümleyensel latis olmak üzere, $x \wedge y = 0$ olduğunda, $V(x \vee y) = V(x) + V(y)$ koşulunu sağlayan, reel değerli $V(x)$ fonksiyonu, bir değerleme dönüşümüdür.

Kanıt: x, y, t elemanları verilsin ve t, [0, y] aralığında $x \wedge y$'nin göreceli tümleyeni olsun. Bu durumda, $t \wedge x \wedge y = 0$ ve $t \vee (x \wedge y) = y$ dir. Böylece $V(y) = V(x \wedge y) + V(t)$ olur. Ayrıca $t \leq y$ ise, $x \wedge t = x \wedge (y \wedge t) = (x \wedge y) \wedge t = 0 \Rightarrow x \wedge t = 0$ bulunur. Ardından, $x \vee t = [x \vee (x \wedge y)] \vee t = x \vee [(x \wedge y) \vee t] = x \vee y$ dir. Buradan kabul gereği, $V(x \vee y) = V(x) + V(t)$ elde edilir. Şimdi $V(y) = V(x \wedge y) + V(t)$ ve $V(x \vee y) = V(x) + V(t)$ ifadeleri taraf tarafa çıkarılırsa, $V(x \vee y) + V(x \wedge y) = V(x) + V(y)$ bulunur ve kanıt tamamlanır.

6.5.Önerme: Her metrik latis, modülerdir.

Kanıt: Eğer $x \leq z$ ise değerleme tanımı kullanılarak, $V[x \vee (y \wedge z)] - V[(x \vee y) \wedge z] = V[x \vee (y \wedge z)] + V[x \wedge (y \wedge z)] - V[x \wedge (y \wedge z)] + V[(x \vee y) \vee z] - V[(x \vee y) \vee z] - V[(x \vee y) \wedge z] = V(x) + V(y \wedge z) - V(x \wedge y) + V(y \vee z) - V(x \vee y) - V(z) = V(x) - V(x \vee y) - V(x \wedge y) + V(y \vee z) + V(y \wedge z) - V(z) = V(x) - V(x) - V(y) + V(y) + V(z) - V(z) = 0$ elde edilir. Diğer taraftan $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge z$ eşitsizliği her zaman sağlandığından ve V pozitif olduğundan, $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$ olur.

Şimdi, dağılımlı latisleri ifade edecek değerleme dönüşümleri karakterize edilecektir

6.6.Tanım: Bir metrik latisin dağılımlı olması için gerek ve yeter koşul $V[x \vee (y \wedge z)] = V[(x \vee y) \wedge (x \vee z)]$ olmasıdır. Herhangi bir metrik latiste, değerleme kuralı kullanılırsa,

$V[x \vee (y \wedge z)] = V(x) + V(y) + V(z) - V(y \vee z) - V(x \wedge y \wedge z)$ ve $V[(x \vee y) \wedge (x \vee z)] = V(x \vee y) + V(x \vee z) - V(x \vee y \vee z)$ dir. Üstteki eşitlik (-) ile çarpılıp, alttaki eşitlik ile toplanırsa,

$V(x \vee y \vee z) - V(x \wedge y \wedge z) = V(x \vee y) + V(y \vee z) + V(x \vee z) + V(x) + V(y) - V(z)$ elde edilir. Şimdi eşitliğin sağ tarafında değerleme kuralı uygulanırsa,

$V(x \vee y) + V(y \vee z) + V(x \vee z) + V(x) + V(y) - V(z) = V(x) + V(y) + V(z) - V(x \wedge y) - V(y \wedge z) - V(x \wedge z)$ elde edilir. Sonuç olarak

$2\{V(x \vee y \vee z) - V(x \wedge y \wedge z)\} = V(x \vee y) + V(y \vee z) + V(x \vee z) - V(x \wedge y) - V(y \wedge z) - V(x \wedge z)$ elde edilir ve bu koşulu sağlayan değerlemelere, dağılımlı değerleme denir.

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Sonuçlar

Bu tez çalışmasında, bir tam latisin özel birer hali olarak tanımlanan çatı (frame) yapısı üzerinde kompaktlık, ayırma aksiyomları gibi bazı topolojik özellikleri incelenmiştiri ayrıca latisler üzerinde tanımlanan gerçel değerli fonksiyonlar yardımıyla elde edilen değerleme (valuation) dönüşümleri ve bu dönüşümler kullanılarak elde edilen metrikler tanıtılmıştır.

Öneriler

6. bölümde, latisler üzerinde tanımlanan gerçel değerli fonksiyonlar yardımıyla elde edilen değerleme (valuation) dönüşümleri ve bu dönüşümler kullanılarak elde edilen metrikler tanıtılmıştır. Latisler yardımıyla elde edilen metrikler kullanılarak tanımlanın açık kümeler üzerine kolaylıkla topolojik uzaylar kurulabilir. İleride, bu kurulan topolojik uzaylar ile latis teori arasındaki ilişkilerin inceleneceği çalışamaların, literatüre önemli katkılar verebilecekleri düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

[1] Picado J., Pultr A., Frames and Locales: Topology Without Points, Birkhauser/Springer Basel AG, **2012**.

[2] Stone M. H., The Theory of Representations for Boolean Algebras, Transactions of The American Mathematical Society, 40, 37-111, **1936**.

[3] Stone, M. H., Boolean Algebras and Their Applications to Topology, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 20 (3), 197-202, **1934**.

[4] Picado J., Pultr A., A Boolean Extension of a Frame and A Representation of Discontinuity, Quaestiones Mathematicae 40 (8), 1111-1125, **2017**.

[5] Menger K., Topology Without Points, Rice Institute Pamphlet, 27, 80-107, **1940**.

[6] Johnstone P.T., Stone Spaces, Cambridge University Press, **1986**.

[7] Gierz G., Hofmann K.H., Keimel K., Lawson J.D., Mislove M.W., Scott D.S., A Compendium of Continuous Lattices, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, **1980**.

[8] Banaschewski B., Mulvey C. J., Stone-Cech Compactification of Locales I, Houston Journal of Mathematics, 6, 301-312, **1980**.

[9] Isbell J.R., Atomless Parts of Spaces, Mathematica Scandinavica, 31, 5-32, **1972**.

[10] Kopperman R., Asymmetry and Duality in Topology, Topology and its Applications 66 (1), 1-39, **1995**.

[11] McKinsey J.C.C., Tarski A., The Algebra of Topology, The Annals of Mathematics, 45, 141-191, **1944**.

[12] Wallman H., Lattices and Topological Spaces, The Annals of Mathematics, 39, 112-126, **1938**.

[13] Garrett Birkhoff Lattice Theory, American Mathematical Society Colloquium Publications, **1991**.

[14] Stephan Willard, General Topology, Addıson-Wesley Publishing Company, **1970**.

[15] Kamal El-Saady, Separation Axioms and Compactness of L-fuzzy Frames, and Their Applications to L-fuzzy Topological Spaces, Mathematical and Computer Modelling 57 (2013) 826-835, **2013**.

[16] Picado J., Pultr A. Separation in Point-Free Topology, University of Coimbra Coimbra, Portugal, **2021**.

[17] Bruno Leclerc. Lattice Valuations, Medians and Majorities, Discrete Mathematics 111 (1993) 345-356, **1993**.

[18] Bram Westerbaan, Lattice Valuations, a Generalısation of Measure and Integral, Cornell University, **2019**.

[19] Hausdorff F., Grundzüge der Mengenlehre (Veit & Co., Leipzig, **1914**)

[20] Ehresmann C., Gattungen von Lokalen Strukturen, Jber. Deutsch Math. Verein 60,59-77 (**1957**).

[21] Johnstone P.T., Tychonoff Theorem Without the Axiom of Choise, Fund. Math 113, 21-35 (**1981**).

[22] Kriz I. and Pultr A. A Spatiality Criterion and an Example of A Quasitopology Which Is Not A Topology. *Houston J. Math.*, 15(2):215–234, **1989**.

[23] C.H. Dowker and D.P. Strauss. Separation Axioms for Frames. In: *Topics in Topology*, pp. 223–240. Proc. Colloq., Keszthely, 1972. Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, vol. 8, North-Holland, Amsterdam, **1974**.

[24] G.N. Raney. A Subdirect-Union Representation for Completely Distributive Complete Lattices. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 4:518–522, **1953**.

[25] Pelletier J.W., Locales in Functional Analysis, Journal of Pure and Applied Algebra 70 (**1991**) 133-145.

[26] Rosenthal K.I., *Quantales and Their Applications*, Pitman Research Notes in Mathematics Series 234, Longman, **1990.**

[27] Coecke B., Moore D., Wilce A., *Current Research in Operational Quantum Logic: Algebras, Categories, Languages*, Springer Science & Business Media, **2013.**

[28] B. Bonjarded. Metrics and Partially Ordered Sets – A Survey, Discrete Mathematics 35 (**1981**) 173-184.