# TOPOLOJİK UZAYLARDA YAKINLIK

# NEARNESS IN TOPOLOGICAL SPACES

**ÖZGÜN ŞEFİK**

**Prof. Dr. Murat Diker**
**Tez Danışmanı**

Hacettepe Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim–Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin
Matematik Anabilim Dalı için Öngördüğü
YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırlanmıştır.

2017

**ÖZGÜN ŞEFİK**'in hazırladığı "**Topolojik Uzaylarda Yakınlık**" adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **MATEMATİK ANABİLİM DALI**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Murat DİKER

Danışman ..............................................

Prof. Dr. Mustafa DEMİRCİ

Başkan ..............................................

Doç Dr. Ayşegül ALTAY UĞUR

Üye ..............................................

Bu tez Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. Menemşe GÜMÜŞDERELİOĞLU
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

# YAYINLAMA VE FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI BEYANI

Enstitü tarafından onaylanan lisansüstü tezimin/raporumun tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı (kağıt) ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda verilen koşullarla kullanıma açma iznini Hacettepe üniversitesine verdiğimi bildiririm. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet haklarım bende kalacak, tezimin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanım hakları bana ait olacaktır.

Tezin kendi orijinal çalışmam olduğunu, başkalarının haklarını ihlal etmediğimi ve tezimin tek yetkili sahibi olduğumu beyan ve taahhüt ederim. Tezimde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanması zorunlu metinlerin yazılı izin alarak kullandığımı ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederim.

☐ **Tezimin/Raporumun tamamı dünya çapında erişime açılabilir ve bir kısmı veya tamamının fotokopisi alınabilir.**
(Bu seçenekle teziniz arama motorlarında indekslenebilecek, daha sonra tezinizin erişim statüsünün değiştirilmesini talep etseniz ve kütüphane bu talebinizi yerine getirse bile, tezinin arama motorlarının önbelleklerinde kalmaya devam edebilecektir.)

☒ **Tezimin/Raporumun 08.06.2019 tarihine kadar erişime açılmasını ve fotokopi alınmasını (İç Kapak, Özet, İçindekiler ve Kaynakça hariç) istemiyorum.**
(Bu sürenin sonunda uzatma için başvuruda bulunmadığım taktirde, tezimin/raporumun tamamı her yerden erişime açılabilir, kaynak gösterilmek şartıyla bir kısmı ve ya tamamının fotokopisi alınabilir)

☐ **Tezimin/Raporumun ............. tarihine kadar erişime açılmasını istemiyorum, ancak kaynak gösterilmek şartıyla bir kısmı veya tamamının fotokopisinin alınmasını onaylıyorum.**

☐ **Serbest Seçenek/Yazarın Seçimi**

08 / 06 / 2017

*(İmza)*

*Öğrencinin Adı Soyadı*

Özgün ŞEFİK

# ETİK

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında,

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

08/06/2017

ÖZGÜN ŞEFİK

# ÖZET

## TOPOLOJİK UZAYLARDA YAKINLIK

**ÖZGÜN ŞEFİK**

**Yüksek Lisans, Matematik Bölümü**

**Tez Danışmanı: Prof. Dr. Murat DİKER**

**Mayıs 2017, 64 sayfa**

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, yakınlık teorisinin temel motivasyonlarını içeren bilgiler verilmiştir.

İkinci bölüm, metrik uzaylarda yakınlık kavramına ayrılmıştır. Burada iki kümenin yakınlığı gap fonksiyoneli ile tanımlanmıştır. Özellikle bir kümenin kapanış noktası yakınlıkla ifade edilmiştir. Fonksiyonların sürekliliği, dizilerin yakınsaklığı kavramları yakınlık ile karakterize edilmiştir. Ayrıca bir kümenin içi de yakınlık kavramıyla verilmiştir. Bir metrik uzayda bir kümenin proksimal komşuluğu tanımlanmış ve temel özellikleri tartışılmıştır. Metrikle uyumlu proksimal bağıntı ve ince proksimal bağıntı kavramları tanımlanmış ve her ince proksimal bağıntının metrik proksimal bağıntı olduğu kanıtlanmıştır. Kompakt uzaylarda her metrik proksimal bağıntının da ince proksimal bağıntı olduğu gösterilmiştir. Proksimal süreklilik tanımlanmış ve her proksimal sürekli fonksiyonun sürekli olduğu gösterilmiştir. Herrlich anlamında yakınlık verilmiş ve Herrlich yakınlığının temel özellikleri sunulmuştur. Metrik proksimal bağıntı kullanılarak Cauchy dizileri için karakterizasyon verilmiştir. Düzgün süreklilik ile proksimal sürekliliğin denk olduğu gösterilmiştir. Ek olarak Hausdorff metrik tanımlanmış ve her yakınsak kapalı küme dizisinin düzgün yakınsak olduğu gösterilmiştir. Son olarak, sürekli genişlemeler için Taimanov teoremi kanıtlanmıştır.

Üçüncü bölümde, metrik proksimal bağıntısının bir genelleştirilmesi olarak Efremovič proksimal bağıntısı tanımlanmıştır. Daha sonra Lodato proksimal bağıntısı verilmiş ve her Efremovič proksimal bağıntının Lodato proksimal bağıntı olduğu gösterilmiştir. Ek olarak topolojiyle uyumlu proksimal bağıntılar göz önüne alınmıştır. Bu bağlamda proksimal bağıntı, topolojik uzayların ayırma özellikleri altında çalışılmıştır. Özellikle

tamamen regüler ve normal uzaylarda topolojiyle uyumlu proksimal bağıntının varlığı tartışılmıştır.

Dördüncü bölümde betimsel yakınlık kavramı tartışılmıştır. Son olarak konumsal ve betimsel yakınlıklar karşılaştırılmıştır.

**Anahtar Kelimeler**: Betimsel proksimal bağıntı, Efremovič proksimal bağıntı, Gap fonksiyoneli, Herrlich yakınlığı, Lodato proksimal bağıntı, Metrik proksimal bağıntı, Proksimal yakınlık, Yakınlık.

# ABSTRACT

## NEARNESS IN TOPOLOGICAL SPACES

**ÖZGÜN ŞEFİK**

**Master of Science, Department of Mathematics**

**Supervisor: Prof. Dr. Murat DİKER**

**May 2017, 64 pages**

This paper consists of four chapters. The first chapter is an introduction which contains the basic motivation of nearness theory.

The second section is devoted to nearness in metric spaces. Here, the nearness of two sets is defined by gap functional. In particular, the closure point of a set is defined using nearness. The concepts of convergence of a sequence, and continuity of a function are characterized in terms of nearness. The interior of a set is also defined using nearness. Proximal neighbourhood of a set in a metric space is defined and the basic properties are discussed. Compatible proximity and fine proximity are defined and it is proved that every fine proximity is also metric proximity. For compact spaces, it is shown that every metric proximity is a fine proximity. The proximal continuity is defined and it is proved that every proximal continuous function is also continuous. The nearness in the sense of Herrlich is given and the basic properties of Herrlich nearness are presented. Using metric proximity, a characterization is given for Cauchy sequences. It is proved that uniform continuity is equivalent to proximal continuity. Further, Hausdorff metric is defined and it is proved that every convergent closed set sequence is uniform convergent. Finally, for continuous extensions, the Taimanov Theorem is proved.

In the third chapter, Efremovič proximity is defined as a generalization of metric proximity. Then the Lodato proximity is presented and it is shown that every Efremovič proximity is a Lodato proximity. Further, compatible proximity is considered in topological spaces. In this respect, proximity is studied under certain separation properties of topological spaces. In particular, for completely regular and normal spaces, the existence of compitable proximity is discussed.

In the fourth chapter, descriptive proximity is discussed in the sense of Efremovič and Lodato. Finally, spatial and descriptive proximities are compared.

**Keywords**: Descriptive proximity, Efremovič proximity, Gap functional, Herrlich nearness, Lodato proximity, Metric proximity, Proximity, Nearness.

# TEŞEKKÜR

Tezime en büyük katkıyı veren, hiçbir zaman desteğini benden esirgemeyen, danışmanım Prof. Dr. Murat DİKER'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Tezimin oluşmasında çok büyük emeği geçen, her türlü sıkıntıma koşan, sevgili hocam Doç. Dr. Ayşegül ALTAY UĞUR'a çok teşekkür ederim. Prof. Dr. Mustafa DEMİRCİ'ye ve Doç. Dr. Sadık BAYHAN'a değerli görüşleri ve katkıları için teşekkürü borç bilirim.

Matematiğe ve Topoloji'ye olan ilgimin temel sebeplerinden olan, her konuşmasından ilham aldığım Prof. Dr. Ali BÜLBÜL'e; her türlü konuda beni destekleyen, yardımıma koşan, yeni ufuklar açan değerli hocam Doç. Dr. Şenol DOST'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca mesai arkadaşım Arş. Gör. Selin URHAN'a desteklerinden ötürü teşekkür ederim.

Her biriyle ayrı ayrı gurur duyduğum, ikiz kardeşlerim Pınar ve Umutcan ŞEFİK'e teşekkür ederim. Beni ben yapan insanlar, babam Osman ŞEFİK'e ve annem Satı ŞEFİK'e sonsuz teşekkürler. Tez sürecinde yaşadığım sıkıntılarımda yanımda olan, her türlü desteğini aldığım Özge GÜLLÜ'ye teşekkürlerimi sunarım.

# İçindekiler

**ÖZET** **i**

**ABSTRACT** **iii**

**TEŞEKKÜR** **v**

**ŞEKİL LİSTESİ** **vii**

**1. GİRİŞ** **1**

**2 METRİK UZAYLAR** **3**

**3 TOPOLOJİK UZAYLAR** **38**

3.1. Proksimal Yakınlık Uzayları . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 38

3.2. Ayırma Aksiyomları . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 47

**4 DİJİTAL GÖRÜNTÜ** **53**

4.1. Konumsal ve Betimsel Yakınlık . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 54

4.2. Betimsel Anlamda Efremovič ve Lodato Yakınlıkları . . . . . . . . . . . 57

**KAYNAKLAR** **62**

**ÖZGEÇMİŞ** **64**

# Şekil Listesi


1 Efremovič proksimal yakınlık uzayı . . . . . 39
2 Betimsel olarak uzak ve yakın kümeler . . . . . 55
3 Konumsal yakınlıkta (EF5) koşulu . . . . . 55
4 Konumsal ve Betimsel Yakınlık . . . . . 56
5 Doku hücresi . . . . . 57
6 Betimsel komşuluklar ve betimsel EF-yakınlık aksiyomlarını sağlayan kümeler . . . . . 60

# 1. GİRİŞ

$\mathbb{R}$eel sayılar ekseni üzerinde iki noktanın birbirine yakınlığı salt değer fonksiyonundan elde edilen metrik kullanılarak ölçülebilir. Benzer şekilde, $\mathbb{R}^2$ düzleminde iki noktanın birbirine yakınlığı hesaplanabilir. Üç boyutlu $\mathbb{R}^3$ uzayında bir noktanın bir düzleme olan uzaklığı, ya da iki düzlemin birbirine olan uzaklığı ölçülebilir. Nokta düzlemin üzerinde ise, aradaki uzaklığın sıfır olduğunu düşünürsek, noktanın düzleme yakın olduğunu ifade edebiliriz. Ancak noktanın düzlem üzerinde olmaması durumunda, noktanın düzleme hangi anlamda yakın kabul edilebileceği matematiksel olarak ifade edilebilmelidir. Bu ölçümlerde kullanmış olduğumuz metrik, matematiğe yakın alanlarda çalışanlarca da bilinen Euclid metriğidir. Yakınlık teorisinin gelişimindeki başlangıç noktası, Euclid metriğinin sağlamış olduğu özelliklerin boş olmayan herhangi bir $X$ kümesi üzerinde daha genel olarak gözönüne alınması, yani metrik uzay kavramına ulaşılmasıdır. $\mathbb{R}^n$ uzayında boş kümeden farklı herhangi iki $A$ ve $B$ kümesi için $a = (a_j)_{j=1}^n$ ve $b = (b_j)_{j=1}^n$ olmak üzere,

$$D(A,B) = \text{ebas}\{\sqrt{\Sigma_{j=1}^n (a_j - b_j)^2} \mid a \in A \text{ ve } b \in B\} = 0$$

$A$ ve $B$ kümelerini $\mathbb{R}^n$ uzayında yakın kümeler olarak görebiliriz. Ancak böyle bir durumda $A$ ve $B$ kümelerinin ortak noktaları olmasa da yakınlık kavramına formal bir yaklaşım elde edilmiş olur. Örneğin, reel sayı ekseni üzerinde $A = (0,1)$ ve $B = (1,2)$ açık aralıkları için $D(A,B) = 0$ olduğu gözlenirse, bu iki kümenin ortak noktaları olmasa da bu anlamda yakın olduklarını ifade edebiliriz. Burada "bir anlamda ifadesi" yakınlık kavramının literatürde farklı ve yararlı yaklaşımlarla ifade edilebilmesi nedeniyle kullanılmıştır. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinde iki nokta arasındaki bilinen uzaklık kavramı kullanılarak, bir $A \subseteq \mathbb{R}$ kümesi için

$$D(\{x\}, A) = \text{ebas}\{|x-y| \mid y \in A\}$$

ifadesini gözönüne aldığımızda, $\{y \mid D(\{x\}, A) = 0\}$ kümesi bir topolojik uzay ya da metrik uzayda bir $A$ altkümesinin kapanış tanımın doğal karşılığı olur. Metrik topolojideki kavramlar kullanılmadan, metrik uzaylarda bir küme için kapanış ve iç gibi kavramlar tanımlanabilir.

Yakınlık teorisinin tarihsel gelişimi açısından; bu çalışmada yakınlık kavramı önce metrik uzaylarda, daha sonra da topolojik uzaylarda tartışılmıştır. Genel olarak S. A. Naimpally ve James Peters'ın "*Yakın ve Uzak Üzerinden Topolojik Uzaylar*" [9], James Peters'ın "*Dijital Görüntülerin Topolojisi*" [13] başlıklı kitaplarının yanısıra literatürde bulunan konu ile ilgili çalışmalar incelenerek bir derleme yapılmıştır. Bunun için önce gap fonksiyoneli kullanılarak, herhangi iki kümenin yakınlığı tanımlanmış ve yakınlık noktaya bağlı olarak ifade edilmiştir. Böylece kapanış kavramına ulaşılmıştır. Yakınlığın temel özellikleri incelenmiş ve kapanış operatörü yakınlık kavramı kullanılarak tanımlanmıştır. Bir dizinin yakınsaklığı, limit noktası, bir fonksiyonun sürekliliği gibi temel kavramlar yakınlık cinsinden ifade edilmiş ve buna bağlı olarak sürekliliğin bir karakterizasyonu yakınlık kullanılarak elde edilmiştir. Kapanış operatörünün tümleyensel eşleniği olan iç operatörü tanımlanarak, açık ve kapalı küme kavramları verilmiştir. Böylece bir açık yuvarın açık küme olduğu yakınlık kullanılarak gösterilmiş ve komşuluk kavramı yakınlıkla ifade edilmişir. Aslında yakınlık teorisinin temel motivasyonu gap fonksiyoneli yardımıyla tanımlanan proksimal bağıntıdır. Yakınlık kullanılarak proksimal komşuluklar verilmiş ve temel özellikleri incelenmiştir. Metrikle uyumlu proksimal bağıntı tanımlanmış, metrik uzaylarda proksimal bağıntının temel özellikleri yardımıyla, (Efremovič ) proksimal bağıntı herhangi bir topolojik uzay üzerinde de tanımlanmıştır. Buna göre her metrik uzay metrik proksimal bağıntı ile bir Efremovič proksimal yakınlık uzayıdır. Daha sonra Efremovič proksimal yakınlık uzaylarını da kapsayan Lodato proksimal yakınlık uzay sınıfı ele alınmış ve topolojik uzaylarda topolojiyle uyumlu proksimal yakınlık üzerinde çalışılmıştır. Bir $R_0$ topolojik uzayda topolojiyle uyumlu bir proksimal yakınlığın varlığı gösterilmiş, ince ve kaba proksimal yakınlık uzayları üzerinde durulmuştur. Proksimal komşuluklar tanımlanarak, topolojik uzaylarda süreklilik karakterize edilmiştir. Proksimal sürekli fonksiyon tanımlanarak, uyumlu proksimal yakınlıklar gözönüne alındığında süreklilik ve proksimal süreklilik kavramlarının eşdeğer olduğu gözlenmiştir. Bir topolojik uzayın topoloji ile uyumlu proksimal yakınlığının Efremovič olmasının uzayın normal olmasıyla eşdeğer olduğu gösterilmiştir. Fonksiyonel ayrılmış kümeler tanımlanarak, regüler uzayların topolojisiyle uyumlu bir proksimal yakınlığın varlığı kanıtlanmıştır.

Bir görüntüdeki görsel örüntüler (visual patterns) ve yapılar, piksel denilen ve soyut olmayan noktalardan oluşan dijital görüntülerde bulunmaktadır. J. Peters tarafından tanımlanan nokta kümelerinin betimsel yakınlığı oldukça yeni bir kavramdır [15, 16]. Mekansal (ya da konumsal) olarak ayrık olan kümelerin bibirine benzerliğinin betimsel anlamda yakınlık olarak gözönüne alınması, görüntü analizinde dijital görüntünün daha iyi algılanabilmesine olanak sağlamaktadır. Bu çalışmada mekansal ve betimsel anlamda proksimal yakınlıklar tanımlanmış ve örneklere yer verilmiştir.

# 2. METRİK UZAYLAR

Metrik kavramı ilk kez 1906 yılında Fréchet tarafından ortaya atılmıştır [4].

**Tanım 2.1.** $X \neq \emptyset$ bir küme ve $d : X \times X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer

(M1) $d(x, y) \geq 0$

(M2) $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$

(M3) $d(x, y) = d(y, x)$

(M4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

özellikleri sağlanıyorsa, $d$ fonsiyonuna $X$ kümesi üzerinde *bir metrik* ve $(X, d)$ ikilisine de *bir metrik uzay* denir.

Metrik uzaylarla ilgili temel kavramların yakınlık kavramına göre de tanımlanabileceğini 1908 yılında ilk kez farkeden 1880-1956 yılları arasında yaşamış olan Macar Matematikçi Frigyes Riesz' dir [17].

**Tanım 2.2.**

(1) $(X, d)$ metrik uzay, $A, B \subseteq X$ olsun.

$$D(A, B) = \begin{cases} \text{ebas}\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}, & A, B \neq \emptyset \\ \infty, & A = \emptyset \text{ veya B} = \emptyset \end{cases}$$

ile tanımlı $D : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna bir *gap fonksiyoneli* denir.

(2) $A = \{x\}$ olsun. Eğer $D(\{x\}, B) = 0$ ise, $x$ noktası $B$ kümesine *yakındır* denir ve $x$ noktasına $B$ kümesinin *kapanış noktası* adı verilir.

**Örnek 2.3.** $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi üzerinde $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere $d(x, y) =| x - y |$ metriğini düşünelim. $A = (0, 1)$ ve $x = 0$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} D(0, (0, 1)) &= \text{ebas}\{| 0 - a | : a \in (0, 1)\} \\ &= \text{ebas}\{a : a \in (0, 1)\} \\ &= \text{ebas}\{(0, 1)\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. O halde 0 noktası $(0, 1)$ kümesine yakındır ve 0 noktası $(0, 1)$ kümesinin bir kapanış noktasıdır.

Bir noktanın bir kümeye yakınlığından söz edebiliyorsak, bir kümenin de diğer kümeye yakınlığından söz edebiliriz.

**Tanım 2.4.** $(X, d)$ bir metrik uzay ve $A, B \subseteq X$ olsun. Eğer $D(A, B) = 0$ ise, $A$ ve $B$ kümelerine *yakındır* denir ve bu durum $A\delta B$ ile gösterilir.

**Örnek 2.5.** $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi üzerinde mutlak değer metriğini düşünelim. Yakınlık tanımını gözönüne alırsak,

$$\begin{aligned} D((0, 1), (1, 2)) &= \text{ebas}\{d(a, b) \ : a \in (0, 1), b \in (1, 2)\} \\ &= \text{ebas}\{| a - b | : a \in (0, 1), b \in (1, 2)\} \end{aligned}$$

olur. Şimdi $a = 1 - \frac{\epsilon}{2} \in (0, 1)$ ve $b = 1 + \frac{\epsilon}{2} \in (1, 2)$ olacak şekilde bir $\epsilon > 0$ seçelim. Böylece $| a-b |=| 1-\frac{\epsilon}{2}-(1+\frac{\epsilon}{2}) |= \epsilon$ olur ve en büyük alt sınır tanımından $D(A, B) = 0$ elde edilir.

**Teorem 2.6.** *$(X, d)$ metrik uzay ve $A, B \subseteq X$ olsun. Eğer $A$ ve $B$ kümelerine yakın en az bir nokta var ise, $A\delta B$ olur.*

**Kanıt:** $x\delta A$ ve $x\delta B$ olacak şekilde bir $x \in X$ var olsun. O halde, her $\epsilon > 0$ sayısı için $d(x, a) < \frac{\epsilon}{2}$ ve $d(x, b) < \frac{\epsilon}{2}$ olacak şekilde $a \in A$ ve $b \in B$ vardır. Buradan;

$$d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

elde edilir. O halde, $D(A, B) = 0$ olup, $A\delta B$ elde edilir. $\square$

**Örnek 2.7.** $\mathbb{R}^2$ düzleminde doğal metriğe göre eğriler ile asimptotları yakındır. Örneğin, $A = \{(x,0) : x \in (0,\infty)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ ile $B = \{(x, \frac{1}{x}) : x \in (0,\infty)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ kümeleri yakın kümelerdir. Çünkü,

$$\begin{aligned} D(A,B) &= \text{ebas}\{d((x,0),(x,\frac{1}{x})) : x \in (0,\infty)\} \\ &= \text{ebas}\{\sqrt{(x-x)^2 + (0-\frac{1}{x})^2} : x \in (0,\infty)\} \\ &= \text{ebas}\{\frac{1}{x} : x \in (0,\infty)\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur.

**Tanım 2.8.** $(X,d)$ metrik uzay olsun. $B \subseteq X$ alt kümesi için;

$$clB = \{x \in X : D(x,B) = 0\}$$

ile verilen kümeye $B$ *kümesinin kapanışı* denir.

**Örnekler 2.9.**

(1) $\mathbb{R}$ kümesinde $(a,b)$ açık aralığının kapanışı

$$\begin{aligned} cl(a,b) &= \{x \in X : D(x,(a,b)) = 0\} \\ &= \{x \in X : \text{ebas}\{\mid x-y \mid : y \in (a,b)\} = 0\} \\ &= (a,b) \cup \{a,b\} \\ &= [a,b] \end{aligned}$$

olur.

(2) $\mathbb{R}$ kümesinde $(a,\infty)$ açık aralığının kapanışı $cl(a,\infty) = [a,\infty)$ olur.

**Teorem 2.10.** *$(X,d)$ metrik uzay olsun. Bu durumda her $B, C \subseteq X$ ve her $x \in X$ için aşağıdaki özellikler sağlanır.*

(K.1) $x\delta B \Longrightarrow B \neq \emptyset$

(K.2) $\{x\} \cap B \neq \emptyset \Longrightarrow x\delta B$.

(K.3) $x\delta(B \cup C) \Longleftrightarrow x\delta B$ *veya* $x\delta C$.

(K.4) *Her* $b \in B$ *için* $x\delta B$ *ve* $b\delta C$ *ise,* $x\delta C$ *olur.*

**Kanıt:** (K.1): $x\delta B$ olsun. O halde, $D(\{x\}, B) = 0$ olur. Gap fonksiyoneli tanımından $B \neq \emptyset$ elde edilir.

(K.2): $\{x\} \cap B \neq \emptyset$ olsun. O halde, $x \in B$ olur. $D(x, B) = \text{ebas}\{d(x, b) \ : \ b \in B\} = d(x, x) = 0$ olduğundan, $x\delta B$ elde edilir.

(K3): $D(x, B \cup C) = min\{D(x, B), D(x, C)\}$ olduğunu göstermek yeterlidir. Eğer $B = \emptyset$ ve $C = \emptyset$ ise,

$$D(x, B \cup C) = \infty = \min\{D(x, B), D(x, C)\}$$

olur. $B \cup C \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
D(x, B \cup C) &= \text{ebas}\{d(x, a) : a \in B \cup C\} \\
&= \text{ebas}\{d(x, a) : a \in B \text{ veya } a \in C\} \\
&= \min\{\text{ebas}\{d(x, a) : a \in B\}, \text{ebas}\{d(x, a) : a \in C\}\} \\
&= \min\{D(x, B), D(x, C)\}
\end{aligned}$$

elde edilir.

(K4): $x\delta B$ olsun. Buradan, $D(x, B) = \{\text{ebas}\{d(x, b) : b \in B\} = 0$ olur. O halde, en büyük alt sınır tanımından bir $\epsilon > 0$ sayısı için, $d(x, b_0) < \frac{\epsilon}{2}$ olacak şekilde $b_0 \in B$ vardır. Varsayımdan, her $b \in B$ için $b\delta C$ olduğundan, $d(b_0, c) < \frac{\epsilon}{2}$ olacak şekilde $c \in C$ vardır. Buradan,

$$d(x, c) \leq d(x, b_0) + d(b_0, c) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

olur. O halde $D(x, C) = 0$, yani $x\delta C$ elde edilir.

□

Tanım 2.8 kullanılarak, yakınlıkla ifade edilen (K1)-(K4) özellikleri kapanış yardımıyla aşağıdaki şekilde yazılabilir:

**Teorem 2.11.** $(X, d)$ *metrik uzay,* $B, C \subseteq X$ *alt kümeleri verilsin. Aşağıdaki özellikler sağlanır.*

(cl.1) $\text{cl}\emptyset = \emptyset$

(cl.2) $B \subseteq \text{cl}B$

(cl.3) $\text{cl}(B \cup C) = \text{clB} \cup \text{cl}C$

(cl.4) $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}B) = \mathrm{cl}B$

**Kanıt:** (cl.1): Teorem 2.10 (K.1)'den $A = \emptyset$ ise, her $x \in X$ için $x\underline{\delta}A$ olur. O halde, her $x \in X$ için $x \notin \mathrm{cl}\emptyset$ ve buradan; $\mathrm{cl}\emptyset = \emptyset$ elde edilir.

(cl.2): $x \in B$ olsun. O halde, $\{x\} \cap B \neq \emptyset$ olup, Teorem 2.10 (K.2)'den $x\delta B$ ve buradan, $x \in \mathrm{cl}B$ olur. O halde $B \subseteq \mathrm{cl}B$ elde edilir.

(cl.3): $x \in \mathrm{cl}(B \cup C)$ olsun. O halde, $x\delta(B \cup C)$ ve Teorem2.10 (K.3)'ten $x\delta B$ veya $x\delta C$ elde edilir. Böylece $x \in (\mathrm{cl}B \cup \mathrm{cl}C)$ bulunur.

Tersine, $x \in (\mathrm{cl}B \cup \mathrm{cl}C)$ olsun. Buradan, $x \in \mathrm{cl}B$ veya $x \in \mathrm{cl}C$ elde edilir. O halde $x\delta B$ veya $x\delta C$ olur. Teorem2.10 (K.3)'ten $x\delta(B \cup C)$ elde edilir. Buradan, $x \in \mathrm{cl}(B \cup C)$ olur.

(cl.4): $x \in \mathrm{cl}(\mathrm{cl}B)$ olsun. O halde, $x\delta\mathrm{cl}B$ elde edilir. Her $b \in \mathrm{cl}B$ için $b\delta B$ ve $x\delta\mathrm{cl}B$ olduğundan, Teorem2.10 (K.4)'ten $x\delta B$ elde edilir. O halde $x \in \mathrm{cl}B$ olur.

Tersine, $x \in \mathrm{cl}B$ olsun. O halde $x\delta B$ ve $B \subseteq \mathrm{cl}B$ olduğundan Teorem2.10 (K.3)'ten $x\delta B \cup \mathrm{cl}B$ yani $x\delta\mathrm{cl}B$ olur v eböylece $x \in \mathrm{cl}(\mathrm{cl}B)$ elde edilir. □

Şimdi limit noktası kavramını yakınlıkla ifade edebiliriz:

**Tanım 2.12.** $(X, d)$ metrik uzay, $B \subseteq X$ olsun. Bir $p \in X$ için $p\delta(B - \{p\})$ oluyorsa, p noktasına B kümesinin *limit noktası* ve $B$ kümesinin limit noktalarının kümesine *türev kümesi* denir. Bir $B$ kümesinin türev kümesini $B'$ ile göstereceğiz.

**Teorem 2.13.** *$(X, d)$ metrik uzay ve $B \subseteq X$ olsun.* $\mathrm{cl}B = B \cup B'$ *olur.*

**Kanıt:** $x \in \mathrm{cl}B$ ve $x \notin B$ olsun. O halde, $D(x, B) = 0$ olur. Diğer yandan $x \notin B$ olduğundan, $B = B - \{x\}$ eşitliği açıktır. Buradan, $D(x, B - \{x\}) = 0$, yani $x\delta B - \{x\}$ olur. Bu ise, $x \in B'$ demektir.

$x \in B \cup B'$ olsun. $x \in B$ ise, $x \in B \subseteq \mathrm{cl}B$ olur. Şimdi $x \notin B$ olsun. Bu durumda $x \in B'$ olmak zorundadır. Buradan $x\delta(B - \{x\})$ elde edilir. Böylece $x\delta B$, yani $D(x, B) = 0$ dir. Sonuç olarak, $x \in \mathrm{cl}B$ elde edilir.

□

**Tanım 2.14.** $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi ve $X \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere,

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow X, \quad f(n) = x_n$$

ile tanımlı $f$ fonksiyonuna, $X$ *üzerinde bir dizidir* denir ve $\{x_n\}$ ile gösterilir.

Metrik uzaylarda bir dizinin $\mathcal{L}$ limitine yakınsama tanımı şu şekildedir.

**Tanım 2.15.** $(X, d)$ metrik uzay ve $\{x_n\}$, $X$ kümesinde bir dizi olsun. Bir $\epsilon > 0$ sayısı verildiğinde $n \geq m$ olan her $n \in \mathbb{N}$ için $d(\mathcal{L}, x_n) < \epsilon$ olacak şekilde öyle bir $m \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabiliyor ise, $\{x_n\}$ dizisi $\mathcal{L}$ noktasına *yakınsıyor* denir.

Aşağıdaki sonuç bir dizinin yakınsaklığının yakınlık kavramıyla karakterize edilebileceğini göstermektedir.

**Teorem 2.16.** *$(X, d)$ metrik uzay,*

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow X, f(n) = x_n \ (n \in \mathbb{N})$$

*$X$ üzerinde bir dizi ve $\mathcal{L} \in X$ olsun. Bu durumda $f$ dizisinin $\mathcal{L}$ noktasına yakınsıyor olması için gerek ve yeter koşul, her $M \subseteq \mathbb{N}$ sonsuz kümesi için $\mathcal{L}\delta f(M)$ olmasıdır.*

**Kanıt:** $M \subseteq \mathbb{N}$ sonsuz bir küme olsun ve $\epsilon > 0$ sayısı verilsin. Varsayımdan, $n \geq m$ olan tüm $n \in \mathbb{N}$ sayıları için $d(\mathcal{L}, x_n) < \epsilon$ olacak şekilde bir $m \in \mathbb{N}$ vardır. $M$ kümesi sonsuz olduğundan, $n_0 \geq m$ iken $d(x_{n_0}, \mathcal{L}) < \epsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in M$ vardır. O halde en büyük alt sınır tanımından $D(\mathcal{L}, f(M)) = \text{ebas}\{d(\mathcal{L}, x_n) : x_n \in M\} = 0$ olur. Yani $\mathcal{L}\delta f(M)$ elde edilir.

Tersine, her $M \subseteq \mathbb{N}$ sonsuz kümesi için $\mathcal{L}\delta f(M)$ olsun. Aksine, $f$ dizisi $\mathcal{L}$ noktasına yakınsamasın. Bu durumda, her $m \in \mathbb{N}$ için

$$\exists n \in \mathbb{N}(n \geq m \Longrightarrow D(\mathcal{L}, x_n) \geq \epsilon)$$

olacak şekilde bir $\epsilon > 0$ sayısı vardır. Bu şekilde oluşturulan $n \in \mathbb{N}$ sayılarının kümesi sonsuz olup; varsayımdan $D(\mathcal{L}, f(M)) > 0$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. □

**Tanım 2.17.** $(X, d_X)$ ve $(Y, d_Y)$ iki metrik uzay, $f : X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon ve $p \in X$ olsun. Herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı ve her $x \in X$ için

$$d_X(x, p) < \eta \Longrightarrow d_Y(f(x), f(p)) < \epsilon$$

koşulunu sağlayan en az bir $\eta > 0$ sayısı var ise, $f$ fonksiyonuna $p \in X$ noktasında *süreklidir* denir.

Süreklilik kavramı da yakınlık kullanılarak karakterize edilebilir:

**Teorem 2.18.** *$(X, d_X)$ ve $(Y, d_Y)$ iki metrik uzay, $f : X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda $f$ fonksiyonunun bir $p \in X$ noktasında sürekli olması için gerek ve yeter koşul, $p\delta E$ koşulunu sağlayan her $E \subseteq X$ altkümesi için $f(p)\delta f(E)$ olmasıdır.*

**Kanıt:** Bir $E \subseteq X$ için $p\delta E$ olsun. Bu durumda, $D_X(p, E) = 0$ olur. En büyük alt sınır tanımından $\eta > 0$ sayısı için $d_X(p, q) < \epsilon$ olacak şekilde en az bir $q \in E$ vardır. $f$ fonksiyonu sürekli olduğundan $\epsilon > 0$ sayısı için $d_Y(f(p), f(q)) < \epsilon$ olur. Buradan $D_Y(f(p), f(E)) = 0$ elde edilir. Yani $f(p)\delta f(E)$ olur.

Tersine, $p \in X$ ve $\epsilon > 0$ sayısı için $E = \{x \in X \mid d_Y(f(p), f(x)) \geq \epsilon\}$ kümesini gözönüne alalım. O halde $D_Y(f(p), f(E)) \geq \epsilon$ olur. Varsayımdan, $D_X(p, E) \geq \eta$ olacak şekilde en az bir $\eta > 0$ sayısı vardır. Buradan $x \in X$ için $d_X(p, x) \geq D_X(p, E) \geq \eta$ elde edilir. O halde $\epsilon > 0$ sayısı için,

$$d_Y(f(p), f(x)) \geq \epsilon \Longrightarrow d_X(p, x) \geq \eta$$

olacak şekilde bir $\eta > 0$ sayısı vardır. O halde $f$ fonksiyonu $p$ noktasında süreklidir. □

Süreklilik yerel bir kavramdır. Ancak süreklilik bir küme için ifade edilebir.

**Tanım 2.19.** $(X, d_X)$ ve $(Y, d_Y)$ iki metrik uzay, $f : X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer $f$ fonksiyonu $X$ kümesinin her noktasında sürekliyse, $f$ fonksiyonuna *süreklidir* denir.

Sabit fonksiyonun ve birim fonksiyonun sürekli olduğunu ya da iki sürekli fonksiyonun bileşkesinin de sürekli olduğunu biliyoruz. Ancak bu özellikler yakınlık kavramı kullanılarak gösterilebilir:

**Örnekler 2.20.** $(X, d_X)$, $(Y, d_Y)$ ve $(Z, d_Z)$ metrik uzaylar olsun.

(1) Sabit fonksiyonlar süreklidir. $f : X \longrightarrow Y$ fonksiyon ve

$$(\forall x \in X) \ \ (c \in Y) \ \ (f(x) = c)$$

olsun. $p \in X$ ve $p\delta E$ olan $E \subseteq X$ altkümesini alalım. Bu durumda, $f(p) = f(E) = c$ ve buradan $f(p)\delta f(E)$ olur. Yani $f$ sabit fonksiyonu süreklidir.

(2) Birim fonksiyon süreklidir. $f$ fonksiyonu birim fonksiyon yani,

$$f : X \longrightarrow Y, \quad f(x) = x \ (\forall x \in X)$$

olsun. Bir $p \in X$ ve $E \subseteq X$ için, $f(p) = p$ ve $f(E) = E$ olduğundan

$$p\delta E \Longrightarrow f(p)\delta f(E)$$

sağlanır.

(3) İki sürekli fonksiyonun bileşkesi süreklidir. $f : Y \longrightarrow Z$ ve $g : X \longrightarrow Y$ iki sürekli fonksiyon olsun.

$$f \circ g : X \longrightarrow Z, \quad (f \circ g)(x) = f(g(x)) \ (\forall x \in X)$$

bileşke fonksiyonu tanımlansın. Bir $p \in X$ noktası ve $p\delta E$ olan $E \subseteq X$ altkümesini ele alalım. Bu durumda $g$ fonksiyonu sürekli olduğundan, $g(p)\delta g(E)$ olur. O halde, $f$ fonksiyonu sürekli olduğundan $f(g(p))\delta f(g(E))$ olur. Bileşke fonksiyon tanımından, $(f \circ g)(p)\delta(f \circ g)(E)$ elde edilir.

**Teorem 2.21.** *$(X, d)$ metrik uzay, $\emptyset \neq E \subseteq X$ olsun. Bu durumda*

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = D(x, E)$$

*ile tanımlı $f$ fonksiyonu süreklidir.*

**Kanıt:** $p \in X$ ve $D(p, E) = r \geq 0$ olsun. İnfimum tanımından $\epsilon > 0$ sayısı için $d(p, y) \leq r + \frac{\epsilon}{2}$ olacak şekilde en az bir $y \in E$ vardır. Eğer $\eta = \frac{\epsilon}{2}$ olarak seçilirse, $d(p, x) < \eta$ koşulunu sağlayan her $x \in X$ için

$$d(x, y) \leq d(x, p) + d(p, y) \leq r + \epsilon$$

elde edilir. Buradan, $D(x,E) \leq r+\epsilon$ bulunur. O halde, $\epsilon > 0$ için;

$$d(p,x) < \eta \quad \Longrightarrow d(f(p),f(x)) = \mid D(x,E) - D(p,E) \mid \leq \epsilon$$

elde edilir. □

Bir kümenin kapanışını noktanın kümeye olan yakınlığı ile ifade etmiştik. Şimdi yakınlığı kullanarak, kapanış kavramının eşleniği olan iç kavramını ve böylece açık küme kavramını verebiliriz. Kuşkusuz kapalı kümeleri de yakınlık ile ifade edeceğiz.

**Tanım 2.22.** $(X,d)$ metrik uzay ve $A,B \subseteq X$ alt kümeleri verilsin.

(1) Bu durumda,

$$\text{int}A = \{x \in X \quad : \ D(x,(X \setminus A)) > 0\}$$

ile verilen kümeye $A$ *kümesinin içi* denir.

(2) $intA = A$ ise, $A$ kümesine *açık küme* denir.

(3) $B$ kümesi kendisine yakın olan bütün noktaları içeriyorsa, $B$ kümesine *kapalı küme* denir.

**Teorem 2.23.** *$(X,d)$ metrik uzay ve $A,B \subseteq X$ alt kümeleri verilsin. O halde*

$$A \subseteq B \quad \Longrightarrow \text{int}A \subseteq \text{int}B$$

*olur.*

**Kanıt:** $a \in \text{int}A$ olsun. O halde, $D(a,(X\setminus A)) > 0$ olur. $A \subseteq B$ olduğundan $(X-B) \subseteq (X \setminus A)$ elde edilir. Böylece bir noktanın bir kümeye yakınlığı tanımından

$$D(a,(X \setminus B)) > 0$$

olur. Yani $a \in \text{int}B$ 'dir. □

**Teorem 2.24.** *$(X,d)$ metrik uzay ve $F \subseteq X$ olsun.*

$$F \ \textit{ kümesi kapalıdır.} \quad \Longleftrightarrow \quad (X \setminus F) \ \textit{ kümesi açıktır.}$$

**Kanıt:** $F$ kümesi kapalı olsun. Yani kendisine yakın olan bütün noktaları içersin. Bir $p \in (X \setminus F)$ noktası için $p \notin F$ ve varsayımdan $p\underline{\delta}F$ olur. Buradan $D(p, F) > 0$ elde edilir. O halde $p \in \mathrm{int}(X \setminus F)$ dir. Diğer yandan $(X \setminus F) \subseteq \mathrm{int}(X \setminus F)$ olduğundan, $X \setminus F$ kümesi açıktır.

Şimdi de, $X \setminus F$ kümesi açık olsun. $F$ kümesinin kendisine yakın olan bütün noktaları içermediğini varsayalım. O halde $p\delta F$ olan en az bir $p \in (X \setminus F)$ vardır. Bu ise $(X \setminus F)$ kümesinin açık olmasıyla çelişir. O halde, $F$ kümesi kendisine yakın olan bütün noktaları içerir. □

**Lemma 2.25.** $(X, d)$ *metrik uzay ve* $p \in X$ *olsun. Her* $\epsilon > 0$ *sayısı için,*

$$S_d(p, \epsilon) = \{x \in X \ : \ d(x, p) < \epsilon\}$$

*açık yuvarı bir açık kümedir.*

**Kanıt:** $p \in X$ ve bir $\epsilon > 0$ sayısı için, $S_d(p, \epsilon)$ açık yuvarının açık küme olmadığını varsayalım. O halde,

$$x_0\delta(X \setminus S_d(p, \epsilon)) \text{ olacak şekilde bir } x_0 \in S_d(p, \epsilon) \text{ noktası vardır.}$$

Buradan $d(x_0, p) < \epsilon$ olur. Eğer $\epsilon_1 = \epsilon - d(x_0, p) > 0$ dersek; $\epsilon_1 < \epsilon$ olduğundan, $S_d(p, \epsilon_1) \subseteq S_d(p, \epsilon)$ ve buradan $X \setminus S_d(p, \epsilon) \subseteq X \setminus S_d(p, \epsilon_1)$ elde edilir. Şimdi, $x_0\delta(X \setminus S_d(p, \epsilon))$ olduğundan en büyük alt sınır tanımı gereği,

$$(\exists y_0 \in X \setminus S_d(p, \epsilon) \subseteq X \setminus S_d(p, \epsilon_1)) \ \ (d(x_0, y_0) < \epsilon_1)$$

olur. O halde,

$$\begin{aligned} d(y_0, p) &\leq d(y_0, x) + d(x_0, p) \\ &< \epsilon_1 + d(x_0, p) \\ &= \epsilon - d(x_0, p) + d(x_0, p) \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

olup, $y_0 \in S_d(p, \epsilon)$ çelişkisi elde edilir. O halde, $S_d(p, \epsilon)$ açık yuvarı bir açık kümedir. □

**Tanım 2.26.** $(X, d)$ metrik uzay ve $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$ bir dizi olsun. Her $k \in \mathbb{N}$ için, $n_{k+1} > n_k$ olmak üzere,

$$g : \mathbb{N} \longrightarrow X \quad , \quad g(k) = f(n_k)$$

ile tanımlı diziye, *$f$ dizisinin bir alt dizisi* denir.

Şimdi metrik uzaylarda dizilerle ilgili iyi bilinen bir sonucu hatırlatalım:

**Teorem 2.27.** *$(X, d)$ metrik uzay ve $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$ bir dizi olsun. Eğer $f$ dizisi bir $\mathcal{L} \in X$ noktasına yakınsıyor ise, $f$ dizisinin her alt dizisi de $\mathcal{L}$ noktasına yakınsar.*

**Tanım 2.28.** $(X, d)$ metrik uzay, $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$ bir dizi ve $c \in X$ olsun. Eğer

$$(\forall \epsilon > 0) \;\; (\forall m \in \mathbb{N}) \;\; (\exists n \in \mathbb{N}) \;\; (n > m) \;\; (d(f(n), c) < \epsilon)$$

oluyorsa, $c$ noktasına *$f$ dizisinin bir yığılma noktası* denir.

**Lemma 2.29.** *$(X, d)$ metrik uzay, $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$ bir dizi ve $c \in X$ olsun. O halde $c \in X$ noktasının $f$ dizisinin bir yığılma noktası olması için gerek yeter koşul, $f$ dizisinin $c$ noktasına yakınsayan bir alt dizisinin var olmasıdır.*

Metrik uzaylarda bir dizinin yığılma noktası yakınlık kavramı ile karakterize edilebilir:

**Teorem 2.30.** *$(X, d)$ metrik uzay, $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$ bir dizi ve $c \in X$ olsun. Bu durumda $c \in X$ noktasının bir yığılma noktası olması için gerek yeter koşul, $c\delta f(M)$ olan en az bir $M \subseteq \mathbb{N}$ sonsuz alt kümesinin var olmasıdır.*

**Kanıt:** $c \in X$, $f$ dizisinin bir yığılma noktası olsun. Şimdi $\epsilon > 0$ olmak üzere her $m \in \mathbb{N}$ sayısına karşılık,

$$M = \{n_m \in \mathbb{N} \; : \; n_m > m, \;\; d(c, f(n_m)) < \epsilon\}$$

kümesini oluşturalım. Bu durumda $c \in X$ bir yığılma noktası olduğundan $M$ kümesi sonsuzdur. Üstelik $c\delta f(M)$ olur. Gerçekten, $\epsilon > 0$ sayısı için öyle bir $n \in \mathbb{N}$ vardır ki; $n > m$ ve $c \in X$ yığılma noktası olduğundan $d(c, f(n)) < \epsilon$ olur. O halde en büyük alt sınır tanımından $D(c, f(M)) = 0$ olur.

Tersine, $M \subseteq \mathbb{N}$ sonsuz kümesi ve $c \in X$ için $c\delta f(M)$ olsun. Böylece en büyük alt sınır tanımından,

$$(\forall \epsilon > 0) \ \ (\exists m \in M) \ \ (d(c, f(M)) < \epsilon)$$

olur. Buradan, her bir $n \in \mathbb{N}$ için $\epsilon = \frac{1}{n}$ dersek

$$V_n = S_d(c, \tfrac{1}{n}) = \{x \in X \ : \ d(x, c) < \tfrac{1}{n}\}$$

kümesi $f(M)$ kümesinin bazı elemanlarını kapsar. Yani her $n \in \mathbb{N}$ için $d(c, f(m)) < \frac{1}{n}$ olacak şekilde $m \in M$ vardır. Böylece $f(m) \in S_d(c, \frac{1}{n})$ olur. Bu durumda $k \in \mathbb{N}$ için $n_{k+1} > n_k$ olmak üzere;

$$f(n_1) \in V_1 \cap f(M)$$
$$f(n_2) \in V_2 \cap f(M)$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$f(n_k) \in V_k \cap f(M)$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$

şeklinde oluşturulan $g : \mathbb{N} \longrightarrow X, \quad g(k) = f(n_k)$ dizisi $f$ dizisinin bir alt dizisidir. Kuruluşu gereği $g$ dizisi $c$ noktasına yakınsar. Çünkü, $M^* \subseteq X$ sonsuz küme,

$$D(c, g(M^*)) = \text{ebas}\{d(c, g(k)) : k \in M^*\}$$

ve $\epsilon > 0$ olmak üzere Arşimet Aksiyomundan $\frac{1}{\epsilon} < n_0$ olacak şekilde öyle bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır ki,

$$d(c, g(n_0)) = d(c, f(n_{n_0})) \leq \frac{1}{n_0} < \epsilon$$

olur. Bu durumda $D(c, g(M^*)) = 0$ olup $g$ dizisi $c$ noktasına yakınsar. Lemma 2.29' dan $c$ noktası $f$ dizisinin yığılma noktası olur. $\square$

**Teorem 2.31.** *$(X,d)$ bir metrik uzay $A,B,C \subseteq X$ ve $x,y \in X$ olsun. $\delta_d \subseteq \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$ olmak üzere,*

$$\delta_d = \{(A,B) : A,B \subseteq X \ ve \ D(A,B) = 0\}$$

*ile tanımlı $\delta_d$ bağıntısı aşağıdaki özellikleri sağlar.*

(P.1) $A\delta_d B \iff B\delta_d A$

(P.2) $A\delta_d B \implies A \neq \emptyset, \quad B \neq \emptyset$

(P.3) $A \cap B \neq \emptyset \implies A\delta_d B$

(P.4) $A\delta_d(B \cup C) \iff A\delta_d B$ *ya da* $A\delta_d C$

(P.5) $A\underline{\delta_d}B \implies A\underline{\delta_d}E$ *ve* $(X-E)\underline{\delta_d}B$ *olacak şekilde en az bir* $E \subseteq X$ *kümesi vardır.*

(P.6) $\{x\}\delta_d\{y\} \iff x = y$

**Kanıt:** (P.1): $A\delta_d B \iff D(A,B) = 0 \iff D(B,A) = 0 \iff B\delta_d A$

(P.2): $A\delta_d B$ olsun. O halde $D(A.B) = 0$ olur. Gap fonksiyonunun tanımından $A \neq \emptyset$ ve $B \neq \emptyset$ olur.

(P.3): $A \cap B \neq \emptyset$ olsun. O halde $x \in A$ ve $x \in B$ olan en az bir $x \in X$ vardır. Buradan, $D(x,A) = 0$ ve $D(x,B) = 0$ yani, $x\delta_d A$ ve $x\delta_d B$ elde edilir. Her iki kümeye de yakın en az bir nokta olduğundan Teorem 2.6'den $A\delta_d B$ olur.

(P.4): $A\delta_d(B \cup C)$ olsun. Aksine, $D(A,B) \neq 0$ ve $D(A,C) \neq 0$ olsun. O halde,

$$(\exists \epsilon_1 > 0)(\forall a \in A, \ \forall b \in B)(d(a,b) \geq \epsilon_1)$$

ve benzer şekilde,

$$(\exists \epsilon_2 > 0)(\forall a \in A, \ \forall c \in C)(d(a,c) \geq \epsilon_2)$$

olur. $\min\{\epsilon_1, \epsilon_2\} = \epsilon$ olsun. Varsayımımızdan, $D(A, B \cup C) = 0$ olduğundan en büyük alt sınır tanımı gereği, en az bir $a_1 \in A$ ve $b_1 \in B \cup C$ için $d(a_1, b_1) < \epsilon$ olur. Varsayalım ki, $b_1 \in B$ olsun. Bu durumda,

$$d(a_1, b_1) < \epsilon \leq \epsilon_1$$

çelişkisi elde edilir. Benzer şekilde, $b_1 \in C$ ise

$$d(a_1, b_1) < \epsilon \leq \epsilon_2$$

çelişkisi elde edilir. Buradan, $D(A, B) = 0$ veya $D(A, C) = 0$ elde edilir.

Tersine, $A\delta_d B$ olsun. O halde $D(A, B) = 0$ olur. Buradan,
ebas$\{d(a, b) : \quad a \in A, \ b \in B\} = 0$ elde edilir. En büyük alt sınır tanımı gereği

$$\begin{aligned} D(A, B \cup C) &= \text{ebas}\{d(a, b) : \quad a \in A, \ b \in B \cup C\} \\ &\leq \text{ebas}\{d(a, b) : \quad a \in A, \ b \in B\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan $D(A, B \cup C) = 0$ olur. $A\delta_d C$ durumunda da benzer şekilde istenen elde edilir.

(P.5): $A\underline{\delta_d}B$ olsun. O halde $D(A, B) = \epsilon_0$ olacak şekilde bir $\epsilon_0 > 0$ sayısı vardır.

$$E = \{x \in X \quad : \quad D(x, B) \leq \tfrac{\epsilon_0}{2}\}$$

kümesini tanımlayalım. $B \neq \emptyset$ olduğundan, bir $b \in B$ için $D(b, B) = 0$ olur. Buradan $b \in E$ olduğu için boş kümeden farklıdır.

$D(A, E) =$ ebas$\{d(a, x) \quad a \in A, \ x \in E\} = 0$ olduğunu varsayalım. En büyük alt sınır tanımından;

$$(\forall \epsilon > 0) \ (\exists a \in A, \exists x \in E) \ (d(a, x) < \epsilon)$$

olur. O halde $\epsilon_0$ sayısı için, $d(a, x) < \frac{\epsilon_0}{2}$ olacak şekilde $a \in A, \ x \in E$ vardır. Bu durumda, $D(x, B) \leq \frac{\epsilon_0}{2}$ ve buradan, $d(x, b) \leq \frac{\epsilon_0}{2}$ olacak şekilde bir $b \in B$ vardır. O halde,

$$\begin{aligned} d(a, b) &\leq d(a, x) + d(x, b) \\ &< \tfrac{\epsilon_0}{2} + \tfrac{\epsilon_0}{2} \\ &= \epsilon_0 \end{aligned}$$

olur. Bu ise $A\underline{\delta_d}B$ yani, $D(A, B) = \epsilon_0$ olmasıyla çelişir. Böylece $A\delta_d E$ olur.

$X \setminus E = \{x \in X \quad D(x, B) > \frac{\epsilon_0}{2}\}$ olduğundan $D(B, X \setminus E) \geq \frac{\epsilon_0}{2}$ olur. Buradan $B\underline{\delta_d}X \setminus E$ elde edilir.

(P.6): $\{x\}\delta_d\{y\}$ olsun. O halde $d(x,y)=0$ ve buradan $x=y$ elde edilir. $\square$

**Tanım 2.32.** $(X,d)$ metrik uzay olsun. $X$ üzerinde bir $\delta\subseteq\mathcal{P}(X)\times\mathcal{P}(X)$ bağıntısı (P.1)-(P.5) özelliklerini sağlıyor ise, $\delta$ bağıntısına $X$ *üzerinde bir proksimal bağıntı* denir.

**Tanım 2.33.** $(X,d)$ metrik uzay olsun. $\delta_d\subseteq\mathcal{P}(X)\times\mathcal{P}(X)$ olmak üzere

$$\delta_d=\{(A,B): A,B\subseteq X \ \textit{ve}\ D(A,B)=0\}$$

ile tanımlı $\delta_d$ bağıntısına *metrik proksimal bağıntı* denir.

Biz $(A,B)\in\delta_d$ olmasını $A\delta_d B$ ile ya da kısaca $A\delta B$ ile göstereceğiz. Ayrıca $(A,B)\notin\delta_d$ olmasını $A\underline{\delta}_d B$ ile ya da kısaca $A\underline{\delta}B$ ile göstereceğiz.

**Lemma 2.34.** *$(X,d)$ bir metrik uzay, $\emptyset\neq A,B,C\subseteq X$ ve $b\in B$ olsun.*

(a) *$\delta$ bir metrik proksimal bağıntı olmak üzere;*

$$(A\delta B)\wedge(\forall b\in B)\ (b\delta C)\Longrightarrow A\delta C$$

*sağlanır.*

(b) *$\delta$ bir metrik proksimal bağıntı olmak üzere;*

$$A\delta B\Longleftrightarrow(\mathrm{cl}A)\ \delta\ (\mathrm{cl}B)$$

*sağlanır.*

(c) *$A\underline{\delta}B$ ise $\mathrm{cl}A\subseteq X\setminus B$ ve $A\subseteq\mathrm{int}(X\setminus B)$ olur.*

**Kanıt:** (a): $A\delta B$ ve her $b\in B$ için $b\delta C$ olsun. Tersine, $A\underline{\delta}C$ olduğunu varsayalım. Bu durumda (P.5)'ten;

$$A\underline{\delta}E \ \text{ ve } \ (X\setminus E)\underline{\delta}C \ \text{ olacak şekilde bir } \ E\subseteq X \ \text{ kümesi vardır.}$$

$A\delta B$ olduğundan, $B\nsubseteq E$ olur. Aksine $B\subseteq E$ olsa, $A\underline{\delta}E$ olduğundan $A\underline{\delta}B$ olur ki bu çelişkidir. O halde $B\nsubseteq E$ yani, $B\cap(X\setminus E)\neq\emptyset$ olur. Bu durumda, $b\in(B\cap X\setminus E)$ için; $b\delta C$ ve $b\in X\setminus E$ olduğundan $C\delta(X\setminus E)$ elde edilir (Teorem2.6'den). Bu ise varsayımla çelişir.

O halde $A\delta C$ olur.

(b): $A\delta B$ olsun. $A \subseteq \mathrm{cl}A$ ve $B \subseteq \mathrm{cl}B$ olduğundan $(\mathrm{cl}A)\delta(\mathrm{cl}B)$ olur.

Tersine, $(\mathrm{cl}A)\delta(\mathrm{cl}B)$ olsun. Buradan $D(\mathrm{cl}A, \mathrm{cl}B) = 0$ ve en büyük alt sınır tanımından;

$$(\forall \epsilon > 0)\ (\exists x \in \mathrm{cl}A,\ \exists y \in \mathrm{cl}B)\ (d(x,y) < \frac{\epsilon}{3})$$

olur. Şimdi, $x \in \mathrm{cl}A = \{x \in X \ : \ D(x,A) = 0\}$ ve $y \in \mathrm{cl}B = \{y \in X \ : \ D(y,B) = 0\}$ olduğundan en büyük alt sınır tanımı gereği;

$$(\forall \epsilon > 0)\ (\exists a \in A)\ (d(x,a) < \frac{\epsilon}{3}),$$

$$(\forall \epsilon > 0)\ (\exists b \in B)\ (d(y,b) < \frac{\epsilon}{3})$$

olur. O halde;

$$\begin{aligned} d(a,b) &\leq d(a,x) + d(x,y) + d(y,b) \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, $D(A,B) = 0$ yani $A\delta B$ olur.

(c): $A\underline{\delta}B$ olsun. O halde, $\mathrm{cl}A\underline{\delta}B$ olur. Çünkü, $\mathrm{cl}A\delta B$ ise $A\delta B$ 'dir. Gerçekten, $\mathrm{cl}A\delta B$ olduğundan $D(\mathrm{cl}A, B) = 0$ olur. En büyük alt sınır tanımından,

$$(\forall \epsilon > 0)\ \ (\exists a \in \mathrm{cl}A, \exists b \in B)\ \ (d(a,b) < \frac{\epsilon}{2})$$

olur. $a \in \mathrm{cl}A$ olduğundan, $D(a,A) = 0$ ve buradan;

$$(\forall \epsilon > 0)\ \ (\exists a' \in A)\ \ (d(a,a') < \frac{\epsilon}{2})$$

elde edilir. Her $\epsilon > 0$ ve $a' \in A$, $b \in B$ için;

$$\begin{aligned} d(a',b) &\leq d(a',a) + d(a,b) \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

ve buradan, $D(A,B) = 0$ yani, $A\delta B$ elde edilir.

Dolayısıyla, $A\underline{\delta}B$ olduğundan, $\mathrm{cl}A\underline{\delta}B$ olur. Buradan, $\mathrm{cl}A \subseteq X \setminus B$ elde edilir.

Ayrıca, $A\underline{\delta}B$ ise, $A \subseteq \mathrm{int}(X \setminus B)$ olur. $x \in A$ olsun. $A\underline{\delta}B$ olduğundan, $\epsilon > 0$ sayısı için $D(x, B) > \epsilon$ olur. O halde $x \notin B$ ve $x \in X \setminus B$ elde edilir. Buradan, $D(x, B) > \epsilon$ olduğundan $x \in S(x, \frac{\epsilon}{2}) \subseteq X - B$ elde edilir. O halde $x \in \mathrm{int}(X \setminus B)$ olur.

□

**Tanım 2.35.** $(X, d)$ metrik uzay olsun. $A, B \subseteq X$ alt kümeleri verilsin.

(1) Eğer $A \subseteq \mathrm{int}B$ oluyorsa $B$ kümesine, *$A$ kümesinin bir komşuluğu* denir.

(2) Eğer bir komşuluğun her noktası tümleyenine uzak ise, o komşuluğa *açık komşuluk* denir.

**Teorem 2.36.** *$(X, d)$ metrik uzay olsun. $A, B \subseteq X$ alt kümeleri verilsin. Eğer $A\underline{\delta}(X \setminus B)$ ise, $B$ kümesi $A$ kümesinin komşuluğudur.*

**Kanıt:** $A\underline{\delta}(X \setminus B)$ olsun. Lemma 2.34 (c)'den $A \subseteq \mathrm{int}(X \setminus (X \setminus B)) = \mathrm{int}B$ olur. □

Teorem2.36'in tersi doğru değildir. Örneğin; $\mathbb{R}$'de mutlak değer metriği ile elde edilen $\delta$ metrik proksimal bağıntısını düşünelim. $A = (0, 1)$ ve $B = [0, 1]$ kümeleri için;

$$A \subseteq \mathrm{int}B = (0, 1)$$

olur. Fakat, $A\delta\mathbb{R} \setminus [0, 1]$ olur. Çünkü $\{0\}\delta A$ ve $\{0\}\delta\mathbb{R} \setminus [0, 1]$ olup 0 noktası iki kümeye yakın olduğundan $A\delta\mathbb{R} \setminus [0, 1]$ elde edilir.

**Tanım 2.37.** (X,d) metrik uzay ve $A, B \subseteq X$ olsun. Eğer $A\underline{\delta}(X \setminus B)$ oluyor ise, $B$ kümesine $A$ kümesinin *bir proksimal komşuluğu* denir ve $A << B$ ile gösterilir.

**Teorem 2.38.** *$(X, d)$ metrik uzay $A, B, C, D \subseteq X$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır.*

P.K.(1) $A << B \iff (X \setminus B) << (X \setminus A)$

P.K.(2) $\emptyset << X$

P.K.(3) $A << B \implies A \subseteq B$

P.K.(4) $A \subseteq B$, $C \subseteq D$ *ve* $B << C$ *ise* $A << D$ *olur.*

P.K.(5) $A << B_k \ (1 \leq k \leq n, \ n \in \mathbb{N}) \iff A << \bigcap\{B_k \ : \ 1 \leq k \leq n, \ n \in \mathbb{N}\}$

P.K.(6) $A << B \implies A << E << B$ *koşulunu sağlayan en az bir* $E \subseteq X$ *vardır.*

**Kanıt:** P.K.(1): $A << B$ olsun. O halde $A\underline{\delta}(X \setminus B)$ olur. Teorem2.31 (P.1)'den, $(X \setminus B)\underline{\delta}A$ olur. O halde, $(X \setminus B) << (X \setminus A)$ elde edilir. Benzer şekilde $(X \setminus B) << (X \setminus A)$ ise, $A << B$ elde edilir.

P.K.(2): Teorem 2.31 (P.2)'den $\emptyset\ \underline{\delta}\ \emptyset$ olduğundan, $\emptyset\underline{\delta}(X \setminus X)$ elde edilir. O halde, $\emptyset << X$ olur.

P.K.(3): $A << B$ olsun. O halde $A\underline{\delta}(X \setminus B)$ olur. Teorem 2.31 (P.3)'den $A \cap (X \setminus B) = \emptyset$ elde edilir. Buradan, $A \subseteq B$ olur.

P.K.(4): $A \subseteq B$, $C \subseteq D$ ve $B << C$ olsun. O halde, $B\underline{\delta}(X \setminus C)$ olur. $C \subseteq D$ olduğundan, $(X \setminus D) \subseteq (X \setminus C)$'dir. Böylece $B\underline{\delta}(X \setminus D)$ olur. Teorem 2.31 (P.4)'ten $B\underline{\delta}((X \setminus C) \cup (X \setminus D))$ elde edilir. Eğer $A \subseteq B$ olduğunu göz önüne alırsak, $A\underline{\delta}((X \setminus C) \cup (X \setminus D))$, yani $A\underline{\delta}(X \setminus C)$ olur. Böylece $(X \setminus D) \subseteq (X \setminus C)$ kapsamasından $A\underline{\delta}(X \setminus D)$ elde edilir. Yani, $A << D$'dir.

P.K.(5): $A << B_k$ $(k = 1, .., n)$ $(n \in \mathbb{N})$ olsun. Bu durumda her $k$ için $A\underline{\delta}(X \setminus B_k)$ olur. Teorem 2.31 (P.4)'ten $A\underline{\delta} \bigcup\{X \setminus B_k\ :\ k = 1, .., n\ ,\ n \in \mathbb{N}\}$ elde edilir. Ayrıca

$$\bigcup\{X \setminus B_k\ :\ k = 1, .., n\ ,\ n \in \mathbb{N}\} = X \setminus \bigcap\{B_k\ :\ k = 1, .., n\ ,\ n \in \mathbb{N}\}$$

eşitliğini gözönüne alırsak, $A\underline{\delta} \bigcap\{B_k\ :\ k = 1, .., n\ ,\ n \in \mathbb{N}\}$ ve böylece

$$A << \bigcap\{B_k\ :\ k = 1, .., n\ ,\ n \in \mathbb{N}\}$$

elde edilir.

P.K.(6): $A << B$ olsun. Tanımdan $A\underline{\delta}(X \setminus B)$ dir. Teorem 2.31 (P.5)'ten $A\underline{\delta}E$ ve $(X \setminus E)\underline{\delta}(X \setminus B)$ olacak şekilde bir $E \subseteq X$ kümesi vardır. $X \setminus E = E'$ dersek $E'$ kümesi istenen koşulu sağlar. Diğer yandan $A\underline{\delta}(X \setminus (X \setminus E))$ olduğundan, $A << E'$ ve $(X \setminus E)\underline{\delta}(X \setminus B)$ dir. Böylece $E' << B$ elde edilir. □

**Tanım 2.39.** $(X, d)$ metrik uzay, $x \in X$ ve $E \subseteq X$ olsun. Eğer $X$ üzerinde bir $\delta$ proksimal yakınlığı

$$x \in \mathrm{cl}E \iff \{x\}\delta E$$

koşulunu sağlıyorsa, $\delta$ proksimal bağıntısına *metrikle uyumlu proksimal bağıntı* denir.

**Teorem 2.40.** *Metrik proksimal bağıntısı metrikle uyumlu bir proksimal bağıntıdır.*

**Kanıt:** $(X, d)$ metrik uzay, $E \subseteq X$ olsun. Bir $x \in \mathrm{cl}E$ alalım. Bu durumda cl tanımından, $D(x, E) = 0$ olup buradan, $\{x\}\delta E$ elde edilir. Tersine bir $x \in X$ için, $\{x\}\delta E$ olsun. Metrik proksimal bağıntı tanımından, $D(x, E) = 0$ olur ve böylece $x \in \mathrm{cl}E$ elde edilir. $\square$

**Teorem 2.41.** *$(X, d)$ metrik uzay ve $A, B \subseteq X$ olsun. $\delta_0 \subseteq \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$ olmak üzere;*

$$\delta_0 = \{(A, B) \ : \ \mathrm{cl}A \cap \mathrm{cl}B \neq \emptyset\}$$

*ile tanımlı $\delta_0$ bağıntısı $X$ üzerinde bir proksimal bağıntıdır.*

**Kanıt:** (P.1): $A\delta_0 B$ olsun. O halde $\mathrm{cl}A \cap \mathrm{cl}B \neq \emptyset$ olur. Kesişim işleminin değişme özelliğinden, $\mathrm{cl}B \cap \mathrm{cl}A \neq \emptyset$ ve buradan; $B\delta_0 A$ elde edilir. Benzer şekilde $B\delta_0 A$ ise $A\delta_0 B$ olur.

(P.2): $A\delta_0 B$ olsun. O halde $\mathrm{cl}A \cap \mathrm{cl}B \neq \emptyset$ olur. Buradan; $\mathrm{cl}A \neq \emptyset$ ve $\mathrm{cl}B \neq \emptyset$ elde edilir. Bir $a \in \mathrm{cl}A$ seçelim. Buradan, $D(a, A) = 0$ ve $\{a\}\delta A$ olur. Teorem 2.31 (P.2)'den $A \neq \emptyset$ olur. Benzer şekilde $B \neq \emptyset$ elde edilir.

(P.3): $A \cap B \neq \emptyset$ olsun. O halde $\mathrm{cl}A \cap \mathrm{cl}B \neq \emptyset$ olur. Bu ise, $A\delta_0 B$ demektir.

(P.4): $A\delta_0(B \cup C) \Longrightarrow \mathrm{cl}A \cap (\mathrm{cl}(B \cup C)) \neq \emptyset \Longrightarrow \mathrm{cl}A \cap (\mathrm{cl}B \cup \mathrm{cl}C) \neq \emptyset \Longrightarrow (\mathrm{cl}A \cap \mathrm{cl}B) \cup (\mathrm{cl}A \cap \mathrm{cl}C) \neq \emptyset$

O halde ya $\mathrm{cl}A \cap \mathrm{cl}B \neq \emptyset$ ya da $\mathrm{cl}A \cap \mathrm{cl}C \neq \emptyset$ olur. Yani, ya $A\delta_0 B$ ya da $A\delta_0 C$ elde edilir.

(P.5): $A\underline{\delta_0}B$ olsun. O halde, $\mathrm{cl}A \cap \mathrm{cl}B = \emptyset$ olur.

$$f : X \longrightarrow [0, 1], \quad f(x) = \frac{D(x, \mathrm{cl}A)}{D(x, \mathrm{cl}A) + D(x, \mathrm{cl}B)}$$

ile tanımlı $f$ fonksiyonu süreklidir. Çünkü; Teorem 2.21'den

$$g : X \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = D(x, \mathrm{cl}A)$$

ile tanımlı $g$ fonksiyonu süreklidir. Diğer yandan $\mathbb{R}$ üzerindeki mutlak değer metriği düşünüldüğünde, $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $l : X \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonları için, $h+l$ ve $\dfrac{h}{l}$ $(l \neq 0)$ fonksiyonları süreklidir. $D(x, \mathrm{cl}A) + D(x, \mathrm{cl}B) \neq 0$'dır. Tersine, $D(x, \mathrm{cl}A) + D(x, \mathrm{cl}B) = 0$ olsun. Buradan; $D(x, \mathrm{cl}A) = 0$ ve $D(x, \mathrm{cl}B) = 0$ olur. O halde, $x\delta\mathrm{cl}A$ ve $x\delta\mathrm{cl}B$ elde edilir. Böylece $\epsilon > 0$ için,

$$(\exists a \in \mathrm{cl}A) \;\; (d(x,a) < \frac{\epsilon}{2})$$

olur. $a \in \mathrm{cl}A$ olduğundan;

$$(\exists a' \in A) \;\; (d(a,a') < \frac{\epsilon}{2})$$

elde edilir. O halde;

$$d(x,a') \leq d(x,a) + d(a,a') < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

eşitsizliğinden, $x\delta A$ olur ki, bu ise $x \in \mathrm{cl}A$ olması demekdir. Benzer şekilde, $x\delta\mathrm{cl}B$ olduğundan $x \in \mathrm{cl}B$ dir. O halde $\mathrm{cl}A \cap \mathrm{cl}B \neq \emptyset$ olur ki, bu $A\underline{\delta_0}B$ olmasıyla çelişir. O halde, $D(x,\mathrm{cl}A) + D(x,\mathrm{cl}B) \neq 0$ olup, $f$ fonksiyonu süreklidir. Üstelik $f(A) = 0$ ve $f(B) = 1$ dir.

$E = f^{-1}[\frac{1}{2}, 1]$ olsun. Bu durumda $A \subseteq f^{-1}(\{0\}) \subseteq (X \setminus E)$ ve $B \subseteq f^{-1}(\{1\}) \subseteq E$ olur. Şimdi, $\mathrm{cl}A \cap \mathrm{cl}B \neq \emptyset$ olduğunu varsayalım. O halde, $x \in \mathrm{cl}A$ ve $x \in \mathrm{cl}E$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır. Buradan, $x\delta A$ ve $x\delta E$ olur. Teorem 2.6'den $A\delta E$ dir. O halde $a\delta E$ olacak şekilde bir $a \in A$ noktası vardır. $f$ fonksiyonu sürekli olduğundan, $f(a)\delta f(E)$ dir. Ancak $f(a) = 0$ ve $f(E) \subseteq [\frac{1}{2}, 1]$ kümeleri mutlak değer metriğine göre yakın değildir. Böylece $\mathrm{cl}A \cap \mathrm{cl}E = \emptyset$ olur. Yani $A\underline{\delta_0}E$ elde edilir. $X \setminus E = X - (f^{-1}[\frac{1}{2}, 1]) = f^{-1}[0, \frac{1}{2})$ dir. Şimdi, $\mathrm{cl}(X \setminus E) \cap \mathrm{cl}B \neq \emptyset$ olduğunu varsayalım. Buradan, $x \in \mathrm{cl}(X \setminus E)$ ve $x \in \mathrm{cl}B$ olacak şekilde $x \in X$ vardır. O halde $x\delta(X \setminus E)$ ve $x\delta B$ olur. Teorem 2.6'den $B\delta(X \setminus E)$ dir ve böylece $b\delta(X \setminus E)$ olacak şekilde $b \in B$ vardır. Fakat $f$ sürekli fonksiyon olduğundan, $f(b)\delta f(X \setminus E)$ olur. Ancak $f(b) = 1$ ve $f(X \setminus E) \subseteq [0, \frac{1}{2})$ olduğundan bu bir çelişkidir. Böylece $B\underline{\delta_0}(X \setminus E)$ elde edilir.

□

**Tanım 2.42.** $(X,d)$ metrik uzay ve $A, B \subseteq X$ olsun. $\delta_0 \subseteq \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$ olmak üzere;

$$\delta_0 = \{(A,B) \; : \; \mathrm{cl}A \cap \mathrm{cl}B \neq \emptyset\}$$

ile tanımlı $\delta_0$ bağıntısına *ince proksimal bağıntı* denir.

**Teorem 2.43.** *Her ince proksimal bağıntı metrik proksimal bağıntıdır.*

**Kanıt:** $(X,d)$ metrik uzay, $A, B \subseteq X$ için $A\delta_0 B$ olsun. O halde $\mathrm{cl}A \cap \mathrm{cl}B \neq \emptyset$ olur. Teorem 2.31 (P.3)'ten, $\mathrm{cl}A\delta\mathrm{cl}B$ elde edilir. Lemma 2.34 (b)'den $A\delta B$ olur. □

Tersine her metrik proksimal bağıntı ince proksimal bağıntı olmak zorunda değildir.

**Örnek 2.44.** $\mathbb{R}$ üzerinde mutlak değer metriğini düşünelim. $A = \mathbb{N}^+$ ve $B = \{n - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^+\}$ olsun. Her $\epsilon > 0$ sayısı için, Arşimet Aksiyomundan, $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}^+$ vardır. O halde, $n_0 \in A$ ve $n_0 - \frac{1}{n_0} \in B$ olmak üzere;

$$| n_0 - (n_0 - \frac{1}{n_0}) |=| \frac{1}{n_0} |< \epsilon$$

olur. O halde en büyük alt sınır tanımından, $D(A,B) = 0$ olur. Buradan, $A\delta B$ elde edilir. Şimdi $\delta$ bağıntısının ince proksimal bağıntı olmadığını gösterelim.

$$\mathrm{cl}A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ D(x, \mathbb{N}^+\}$$

$x \in \mathbb{N}^+$ için $x \in \mathrm{cl}A$ olur. $x \notin \mathbb{N}^+$ olsun. O halde; $x < 1$ veya $x > 1$ olur. Şimdi $x < 1$ olduğunu varsayalım. Eğer $\frac{d(x,1)}{2} = \epsilon$ dersek,

$$D(x, \mathbb{N}^+) = \mathrm{ebas}\{d(x,n) \ : \ n \in \mathbb{N}^+\} = d(x,1) > \epsilon$$

olur. O halde; $x \notin \mathrm{cl}A$ elde edilir.

Eğer $x > 1$ ise; $n_0 < x < n_0 + 1$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}^+$ vardır. Şimdi $\epsilon$ sayısı

$$\frac{min\{d(x,n_0), d(x,n_0+1)\}}{2}$$

olarak seçelim. Bu durumda

$$D(x, \mathbb{N}^+) = \mathrm{ebas}\{d(x,n) \ : \ \mathbb{N}^+\} = \min\{d(x,n_0), d(x,n_0+1)\} > \epsilon$$

olur. Buradan, $x \notin \mathrm{cl}A$ elde edilir. O halde; $\mathrm{cl}A = \mathbb{N}^+ = A$ olur. Benzer şekilde $\mathrm{cl}B = B$ elde edilir. $A \cap B \neq \emptyset$ olduğundan $\mathrm{cl}A \cap \mathrm{cl}B \neq \emptyset$ bulunur. Yani; $A\underline{\delta_0}B$ olur.

**Teorem 2.45.** *Kompakt metrik uzaylarda her metrik proksimal bağıntı ince proksimal bağıntıdır.*

**Kanıt:** $(X,d)$ kompakt metrik uzay, $A, B \subseteq X$ için $A\delta B$ olsun. Aksine, $\mathrm{cl}A \cap \mathrm{cl}B = \emptyset$

olduğunu varsayalım. Kompakt uzayların kapalı alt kümeleri de kompakt olduğundan, cl$A$ ve cl$B$ kompakt olur. O halde, Teorem 2.56'den cl$A\underline{\delta}$cl$B$ ve buradan $A\underline{\delta}B$ çelişkisi elde edilir. O halde cl$A \cap$ cl$B \neq \emptyset$ yani $A\delta_0 B$ elde edilir.

□

**Tanım 2.46.** $(X, d)$, $(Y, d')$ iki metrik uzay ve $f : X \longrightarrow Y$ fonksiyon olsun. Eğer her $A, B \subseteq X$ için

$$A\delta_d B \implies f(A)\delta_{d'} f(B)$$

oluyorsa, $f$ fonksiyonuna, *proksimal sürekli fonksiyon* denir.

**Teorem 2.47.** *$(X, d)$, $(Y, d')$ iki metrik uzay ve $f : X \longrightarrow Y$ proksimal sürekli fonksiyon olsun. Bu durumda her $E, F \subseteq X$ için*

$$E\underline{\delta_{d'}}F \Longrightarrow f^{-1}(E)\underline{\delta_d} f^{-1}(F)$$

*olur.*

**Kanıt:** $E\underline{\delta_{d'}}F$ olsun. O halde, $D'(E, F) > 0$ olur. Aksine, $D(f^{-1}(E), f^{-1}(F)) = 0$ olduğunu varsayalım. $f$ proksimal sürekli olduğundan, $D'(f(f^{-1}(E)), f(f^{-1}(F))) = 0$ elde edilir. Ancak $f(f^{-1}(E)) \subseteq E$ ve $f(f^{-1}(F)) \subseteq F$ olduğundan, $D'(E, F) = 0$ çelişkisi elde edilir. O halde, $D(f^{-1}(E), f^{-1}(F)) > 0$ olup, $f^{-1}(E)\underline{\delta_d} f^{-1}(F)$ elde edilir.
□

**Teorem 2.48.** *Her proksimal sürekli fonksiyon süreklidir.*

**Kanıt:** $(X, d)$, $(Y, d')$ iki metrik uzay ve $f : X \longrightarrow Y$ proksimal sürekli fonksiyon olsun. Ayrıca $x \in X$ ve $A \subseteq X$ için, $x\delta A$ olsun. $f$ proksimal sürekli olduğundan, $\{x\}\delta A \implies f(\{x\}\delta f(A)$ yani, $f(x)\delta f(A)$ elde edilir. □

Teorem 2.48'nin tersi doğru değildir:

**Örnek 2.49.** Her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = x^2$ ile tanımlı $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. $f$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ kümesi üzerinde süreklidir. $\mathbb{R}$ kümesi üzerindeki mutlak değer metriğine göre $\mathbb{N}^+$ kümesi, Örnek 2.44'den $E = \{n - \frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}^+\}$ kümesine yakındır. Fakat, $f(\mathbb{N}^+)$ kümesi $f(E)$ kümesine yakın değildir. Çünkü,

$$\begin{aligned}
D(f(\mathbb{N}^+), f(E)) &= \text{ebas}\{d(f(n), f(e)) \ : \ n \in \mathbb{N}^+, \ e \in E\} \\
&= \text{ebas}\{d(n^2, (n - \frac{1}{n})^2 \ : \ n \in \mathbb{N}^+\} \\
&= \text{ebas}\{\mid n^2 - (n - (\frac{1}{n})^2 \mid : \ n \in \mathbb{N}^+\} \\
&= \text{ebas}\{2 - \frac{1}{n^2} \ : \ \mathbb{N}^+\} \\
&= 1
\end{aligned}$$

dir.

**Lemma 2.50.** $(X, d), (Y, d')$ *metrik uzaylar,* $f : X \longrightarrow Y$ *bir fonksiyon ve* $X$ *üzerinde* $\delta_0$ *ince proksimal bağıntısı,* $Y$ *üzerinde ise herhangi bir* $\lambda$ *metrikle uyumlu proksimal bağıntı olsun. Bu durumda*

$$f \textit{ süreklidir.} \quad \Longleftrightarrow \quad f \textit{ proksimal süreklidir.}$$

**Kanıt:** Teorem 2.48'den $f$ fonksiyonu proksimal sürekli ise süreklidir. Şimdi $f$ sürekli bir fonksiyon ve $A, B \subseteq X$ alt kümeleri için $A\delta_0 B$ olsun. Bu durumda $\text{cl}A \cap \text{cl}B \neq \emptyset$ dir ve

$$\emptyset \neq f(\text{cl}A \cap \text{cl}B) \subseteq f(\text{cl}A) \cap f(\text{cl}B)$$

olduğundan, $f(\text{cl}A) \cap f(\text{cl}B) \neq \emptyset$ elde edilir. Şimdi,

$$f(\text{cl}A) \subseteq \text{cl}(f(A)) \ \ \textit{ve} \ \ f(\text{cl}B) \subseteq \text{cl}(f(B))$$

olduğunu gösterelim. $y \in f(\text{cl}A)$ ise $f(p) = y$ olacak şekilde bir $p \in \text{cl}A$ vardır. Buradan, $p\delta A$ ve $f$ sürekli olduğundan, $f(p)\delta f(A)$ olur. Bu ise, $f(p) = y \in \text{cl}(f(A))$ demektir. Benzer şekilde $f(\text{cl}B) \subseteq \text{cl}(f(B))$ olduğu gösterilebilir. O halde, $\text{cl}f(A) \cap \text{cl}f(B) \neq \emptyset$ olur. O halde $z \in \text{cl}f(A)$ ve $z \in \text{cl}f(B)$ olacak şekilde bir $z \in Y$ vardır. $\lambda$ uyumlu proksimal bağıntı olduğundan, $z\lambda f(A)$ ve $z\lambda f(B)$ olur. Buradan $f(A)\lambda f(B)$ elde edilir. O halde, $f$ proksimal sürekli olur. □

**Tanım 2.51.** $(X, d)$ metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. $\epsilon > 0$ sayısı için,

$$S(A, \epsilon) = \bigcup \{S(a, \epsilon) \ : \ a \in A\}$$

kümesine $A$ *kümesinin bir $\epsilon$-genişlemesi* denir.

**Teorem 2.52.** *$(X, d)$ metrik uzay, $A, B \subseteq X$ olsun. Her $\epsilon > 0$ için;*

$$A\delta B \iff S(A,\epsilon) \cap S(B,\epsilon) \neq \emptyset$$

*olur.*

**Kanıt:** $A\delta B$ olacak şekilde $A, B \subseteq X$ kümeleri ve $\epsilon > 0$ sayısı alalım. Bu durumda, $d(a, b) < \epsilon$ olacak şekilde $a \in A$ ve $b \in B$ vardır. Buradan, $a \in S(b, \epsilon)$ olur. O halde,

$$a \in \bigcup\{S(b,\epsilon)\ :\ b \in B\} = S(B,\epsilon) \text{ ve } a \in S(A,\epsilon)$$

olduğundan, $S(A, \epsilon) \cap S(B, \epsilon) \neq \emptyset$ elde edilir.
Tersine, $\epsilon > 0$ için $S(A, \epsilon) \cap S(B, \epsilon) \neq \emptyset$ olsun. O halde, $x \in S(A, \epsilon)$ ve $x \in S(B, \epsilon)$ olacak şekilde $x \in X$ vardır. Buradan, $d(a, x) < \frac{\epsilon}{2}$ ve $d(b, x) < \frac{\epsilon}{2}$ olacak şekilde $a \in A$, $b \in B$ vardır. O halde,

$$d(a,b) \leq d(a,x) + d(x,b) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

olup; $A\delta B$ elde edilir. □

**Tanım 2.53.** [6] $(X, d)$ metrik uzay olsun. Bu durumda

$$\eta = \{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X) \mid \forall\epsilon > 0,\ \bigcap\{S(A,\epsilon)\ :\ A \in \mathcal{A}\} \neq \emptyset\}$$

ailesine *Herrlich anlamında yakın ailelerin kümesi* ve $\mathcal{A}$ ailesine *Herrlich anlamında yakın aile* denir.
Burada $\mathcal{A} \in \eta$ için kısaca $\eta\mathcal{A}$ gösterimini kullanacağız. Eğer $\mathcal{A} \notin \eta$ oluyorsa, bunu kısaca $\underline{\eta}\mathcal{A}$ ile göstereceğiz. Dikkat edilirse, burada $\eta \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ dir.

**Tanım 2.54.** $(X, d)$ metrik uzay olsun. $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$, $E \subseteq X$ olsun.

(1) $\mathcal{A} \vee \mathcal{B} = \{A \cup B\ :\ A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}\}$ kümesine $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ ailelerinin *birleşim kümesi* denir.

(2) $\mathrm{cl}_\eta E = \{x \in X\ :\ \{\{x\}, E\} \in \eta\}$ kümesine, $E$ kümesinin $\eta$ *anlamında kapanış kümesi* denir.

(3) $\mathrm{cl}_\eta \mathcal{A} = \{\mathrm{cl}_\eta A \ : \ A \in \mathcal{A}\}$ kümesine, $\mathcal{A}$ ailesinin $\eta$ *anlamında kapanış kümesi* denir.

**Teorem 2.55.** *$(X, d)$ metrik uzay olsun. $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$, $E \subseteq X$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır.*

(N.1) $\bigcap\{A \subseteq X \ : \ A \in \mathcal{A}\} \neq \emptyset \implies \mathcal{A} \in \eta$.

(N.2) $\underline{\eta}\mathcal{A},\ \underline{\eta}\mathcal{B} \implies \underline{\eta}(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$.

(N.3) *$\mathcal{A} \in \eta$ ve $B \in \mathcal{B}$ olsun. Eğer, $A \subseteq B$ olacak şekilde $A \in \mathcal{A}$ var ise; $\mathcal{B} \in \eta$ olur.*

(N.4) $\emptyset \in \mathcal{A} \implies \underline{\eta}\mathcal{A}$.

(N.5) $(\mathrm{cl}_\eta \mathcal{A}) \in \eta \implies \mathcal{A} \in \eta$.

**Kanıt:** (N.1): $\bigcap\{A \subseteq X \ : \ A \in \mathcal{A}\} \neq \emptyset$ olsun. Her $\epsilon > 0$ sayısı için,

$$\bigcap\{A \subseteq X \ : \ A \in \mathcal{A}\} \subseteq \bigcap\{S(A, \epsilon) \ : \ A \in \mathcal{A}\}$$

olduğunu gösterelim. $x \in \bigcap\{A \subseteq X \ : \ A \in \mathcal{A}\}$ olsun. O halde, her $A \in \mathcal{A}$ için $x \in A$ olur. Buradan, $x \in \bigcup\{S(a, \epsilon) \ : \ a \in A\} = S(A, \epsilon)$ elde edilir. Her $A \in \mathcal{A}$ için $x \in S(A, \epsilon)$ olduğundan, $x \in \bigcap\{S(A, \epsilon) \ : \ A \in \mathcal{A}\}$ olur. O halde, $\bigcap\{A \subseteq X \ : \ A \in \mathcal{A}\} \neq \emptyset$ göz önüne alındığında, $\bigcap\{S(A, \epsilon) \ : \ A \in \mathcal{A}\} \neq \emptyset$ elde edilir. Buradan, $\mathcal{A} \in \eta$ olur.

(N.2): $\underline{\eta}\mathcal{A},\ \underline{\eta}\mathcal{B}$ olsun. O halde, $\epsilon > 0$ sayısı için,

$$\bigcap\{S(A, \epsilon) \ : \ A \in \mathcal{A}\} = \emptyset = \bigcap\{S(B, \epsilon) \ : \ B \in \mathcal{B}\}$$

olur. Aksine, $\mathcal{A} \vee \mathcal{B} = \{A \cup B \ : \ A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}\} \in \eta$ olduğunu varsayalım. Buradan,

$$\bigcap\{S(A \cup B, \epsilon) \ : \ A \cup B \in \mathcal{A} \vee \mathcal{B}\} \neq \emptyset$$

elde edilir. O halde, $x \in \bigcap\{S(A \cup B, \epsilon) \ : \ A \cup B \in \mathcal{A} \vee \mathcal{B}\}$ olacak şekilde $x \in X$ vardır. Buradan, her $A \in \mathcal{A}$ ve $B \in \mathcal{B}$ için;

$$x \in S(A \cup B, \epsilon) = \bigcup\{S(a, \epsilon) \ : \ a \in A \cup B\}$$

olur. O halde, $x \in \bigcup\{S(a, \epsilon) \ : \ a \in A\} = S(A, \epsilon)$ ya da $x \in \bigcup\{S(a, \epsilon) \ : \ a \in B\} = S(B, \epsilon)$ elde edilir. Eğer, $x \in \bigcup\{S(a, \epsilon) \ : \ a \in A\} = S(A, \epsilon)$ ise,
her $A \in \mathcal{A}$ için $x \in \bigcap\{S(A, \epsilon) \ : \ A \in \mathcal{A}\}$ olur. Bu ise, $\underline{\eta}\mathcal{A}$ olmasıyla çelişir.

Benzer çelişki $x \in \bigcup\{S(a,\epsilon) \ : \ a \in B\} = S(B,\epsilon)$ durumunda da gerçekleşir. O halde $\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \notin \eta$ olur.

(N.3): $\mathcal{A} \in \eta$ olsun. Aksine; $\mathcal{B} \notin \eta$ olsun. O halde, $\bigcap\{S(B,\epsilon) \ : \ B \in \mathcal{B}\} = \emptyset$ olacak şekilde bir $\epsilon > 0$ sayısı vardır.

$$\mathcal{A}^* = \{A_B \ : \ B \in \mathcal{B}, \ A_B \subseteq B\}$$

kümesini göz önüne alalım. Her $B \in \mathcal{B}$ için, $A_B \subseteq B$ olduğundan, $\bigcap\{S(A_B,\epsilon) \ : \ A_B \in \mathcal{A}^*\} \subseteq \bigcap\{S(B,\epsilon) \ : \ B \in \mathcal{B}\}$ olur. Gerçekten, $x \in \bigcap\{S(A_B,\epsilon) \ : \ A_B \in \mathcal{A}^*\}$ ise, her $A_B$ için; $x \in S(A_B,\epsilon) \subseteq S(B,\epsilon)$ olur. Buradan $x \in \bigcap\{S(B,\epsilon) \ : \ B \in \mathcal{B}\}$ elde edilir. O halde, $\bigcap\{S(A_B,\epsilon) \ : \ A_B \in \mathcal{A}^*\} = \emptyset$ dir. $\mathcal{A}^* \subseteq \mathcal{A}$ olduğundan, $\bigcap\{S(A,\epsilon) \ : \ A \in \mathcal{A}\} \subseteq \bigcap\{S(A_B,\epsilon) \ : \ A_B \in \mathcal{A}^*\}$ olur. O halde, $\bigcap\{S(A,\epsilon) \ : \ A \in \mathcal{A}\} = \emptyset$ dir. Bu ise, $\mathcal{A} \in \eta$ olmasıyla çelişir. Böylece $\mathcal{B} \in \eta$ elde edilir.

(N.4): $\emptyset \in \mathcal{A}$ olsun. Her $\epsilon > 0$ için, $S(\emptyset,\epsilon) = \bigcup\{S(a,\epsilon) \ : \ a \in \emptyset\} = \emptyset$ olup,

$$S(\emptyset,\epsilon) \cap (\bigcap\{S(A,\epsilon) \ : \ A \in \mathcal{A}\} = \emptyset$$

elde edilir. O halde, $\mathcal{A} \notin \eta$ olur.

(N.5): $\mathrm{cl}_\eta\mathcal{A} \in \eta$ olsun. Her $\epsilon > 0$ için,

$$\bigcap\{S(\mathrm{cl}_\eta A,\epsilon) \ : \ A \in \mathcal{A}\} \neq \emptyset$$

olur. Aksine, $\mathcal{A} \notin \eta$ olduğunu varsayalım. O halde,

$$\bigcap\{S(A,\epsilon) \ : \ A \in \mathcal{A}\} = \emptyset$$

olur. Şimdi, $S(\mathrm{cl}_\eta A, \frac{\epsilon}{3}) \subseteq S(A,\epsilon)$ olduğunu gösterelim. Aksine, $x \in S(\mathrm{cl}_\eta A, \frac{\epsilon}{3})$ ve $x \notin S(A,\epsilon)$ olacak şekilde bir $x \in X$ var olsun. $x \in S(\mathrm{cl}_\eta A, \frac{\epsilon}{3})$ olduğundan, $x \in S(b, \frac{\epsilon}{3})$ olacak şekilde bir $b \in \mathrm{cl}_\eta A$ vardır. O halde, $S(b, \frac{\epsilon}{3}) \cap S(A, \frac{\epsilon}{3}) \neq \emptyset$ olur. Buradan, $z \in S(b, \frac{\epsilon}{3})$ ve $z \in S(A, \frac{\epsilon}{3})$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır. O halde, $z \in S(a, \frac{\epsilon}{3})$ olacak şekilde $a \in A$ vardır. Buradan,

$$d(x,a) \leq d(x,b) + d(b,z) + d(z,a) < \tfrac{\epsilon}{3} + \tfrac{\epsilon}{3} + \tfrac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

elde edilir. Bu ise, $x \notin S(A,\epsilon)$ olmasıyla çelişir. Böylece $S(\mathrm{cl}_\eta A, \frac{\epsilon}{3}) \subseteq S(A,\epsilon)$ elde edilir. Sonuç olarak,

$$\bigcap\{S(\mathrm{cl}_\eta A, \tfrac{\epsilon}{3}) \ : \ A \in \mathcal{A}\} \subseteq \bigcap\{S(A,\epsilon) \ : \ A \in \mathcal{A}\} = \emptyset$$

bulunur. Bu ise, $\mathrm{cl}_\eta A \in \eta$ olmasıyla çelişir. O halde, $\mathcal{A} \in \eta$ dir. □

**Teorem 2.56.** *$(X,d)$ metrik uzay, $A, B \subseteq X$ metrik uzayda kapalı alt kümeler olsun. Eğer $A \cap B = \emptyset$ ve $A, B$ kümelerinden en az biri kompakt ise $A\underline{\delta}B$ dir.*

**Kanıt:** $A \subseteq X$ kompakt olsun. $A, B$ kapalı ve $A \cap B = \emptyset$ olduğundan, her $a \in A$ için $\{a\}\underline{\delta}B$ olur. Çünkü aksine, $\{a\}\delta B$ olsa, $B$ kapalı olduğundan; $a \in B$ elde edilir. Bu ise $A \cap B = \emptyset$ olmasıyla çelişir. O halde, her $b \in B$ için, $d(a,b) \geq \epsilon_1$ olacak şekilde $\epsilon_1 > 0$ sayısı vardır. $N_a = S(a,\epsilon_1)$ kümesi $a$'nın bir açık komşuluğudur. Üstelik, $N_a\underline{\delta}B$ olur. Çünkü, her $b \in B$ ve $x \in S(a,\epsilon_1)$ için,

$$\epsilon_1 \leq d(a,b) \leq d(a,x) + d(x,b)$$

olup, buradan $d(x,b) \geq \epsilon_1 - d(a,x) > 0$ elde edilir. O halde en büyük alt sınır tanımından, $D(S(a,\epsilon_1),B) > 0$, yani, $N_a\underline{\delta}B$ dir. Bu durumda $A \subseteq \bigcup_{a\in A} N_a$ olduğundan

$$\{N_a \ : \ a \in A\}$$

ailesi $A$ kümesinin bir açık örtüsüdür. $A$ kümesi kompakt olduğundan, bu örtünün

$$\{N_{a_k} \ : \ k \in \{1,...,n\}\}$$

şeklinde sonlu bir alt örtüsü vardır. $N_a\underline{\delta}B$ ve Teorem 2.31'dan $n \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere, $B\underline{\delta}\bigcup_{k=1}^{n} N_{a_k}$ elde edilir. O halde, $A \subseteq (\bigcup_{k=1}^{n} N_{a_k})$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ olduğundan, $B\underline{\delta}A$ yani, $A\underline{\delta}B$ elde edilir.

□

**Tanım 2.57.** $(X,d)$ metrik uzay $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$ bir dizi olsun. Her $\epsilon > 0$ sayısı için;

$$(\forall n, m \geq n_0) \ \ (d(f(n), f(m)) < \epsilon)$$

olacak şekilde en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ doğal sayısı varsa, $f$ dizisine *bir Cauchy dizisi* denir.

**Lemma 2.58.** (Efremovič Lemması) *$(X,d)$ metrik uzay ve $\delta$, $X$ üzerinde bir metrik proksimal bağıntı olsun. Eğer $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$ ile $g : \mathbb{N} \longrightarrow X$ herhangi iki dizi ve her $n \in \mathbb{N}$ için $d(f(n), g(n)) \geq r > 0$ ise,*

$$\{f(p) \ : \ p \in P\} \ \underline{\delta} \ \{g(p) \ : \ p \in P\}$$

*olacak şekilde en az bir $P \subseteq \mathbb{N}$ sonsuz alt kümesi vardır.*

**Kanıt:** Her $n \in \mathbb{N}$ için;

$$B_n = \{m \in \mathbb{N} \ : \ d(f(n), g(m)) \leq \frac{r}{4}\}, \quad C_n = \{m \in \mathbb{N} \ : \ d(g(n), f(m)) \leq \frac{r}{4}\}$$

kümelerini tanımlayalım. Her $n \in \mathbb{N}$ için, $B_n$ veya $C_n$ boş küme ise; her $P \subseteq \mathbb{N}$ sonsuz kümesi için istenen elde edilir. Eğer $B_n$ veya $C_n$ kümelerinden birisi sonsuz ise, $P = B_n$ veya $P = C_n$ alındığında istenen elde edilir. Varsayalım ki, $B_n$ kümesi sonsuz olsun. $m_1, m_2 \in B_n$ için,

$$d(g(m_1), g(m_2)) \leq d(g(m_1), f(n)) + d(f(n), g(m_2)) \leq \frac{r}{4} + \frac{r}{4} = \frac{r}{2}$$

olur. Buradan, $d(f(m_1), g(m_2)) \geq \frac{r}{2}$ olur. Aksine, $d(f(m_1), g(m_2)) < \frac{r}{2}$ varsayalım. O halde,

$$d(f(m_1), g(m_1)) \leq d(f(m_1), g(m_2)) + d(g(m_2), g(m_1)) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$$

olur. Bu ise, her $n \in \mathbb{N}$ için $d(f(n), g(n)) \geq r > 0$ olması ile çelişir. Yani, $d(f(m_1), g(m_2)) \geq \frac{r}{2}$ elde edilir.

Şimdi, $P = B_n$ dersek, her $m_1, m_2 \in P = B_n$ için, $d(f(m_1), g(m_2)) \geq \frac{r}{2}$ olduğundan, en büyük alt sınır tanımı gereği

$$\{f(p) \ : \ p \in P\} \ \underline{\delta} \ \{g(p) \ : \ p \in P\}$$

elde edilir. Benzer şekilde $C_n$ sonsuz küme ise, $P = C_n$ alınarak yapılır.

Şimdi $B_n$ ve $C_n$ sonlu kümeler olsun. $n_1 = 1$ ve $n_2$, $n_1$ sayısından ve $B_{n_1} \cup C_{n_1}$ kümesindeki her elemandan büyük ilk doğal sayı olsun. O halde, $n_2 \notin B_{n_1}$ ve buradan

$d(f(n_1), g(n_2)) > \frac{r}{4}$ elde edilir. Benzer olarak, $n_2 \notin C_{n_1}$ ve buradan $d(g(n_1), f(n_2)) > \frac{r}{4}$ olur. Bu şekilde, $n_{k+1}$, $n_k$ ve $B_{n_k} \cup C_{n_k}$ kümesindeki her elemandan daha büyük ilk doğal sayı olsun. $n_{k+1} \notin B_{n_k}$ ve buradan, $d(f(n_k), g(n_{k+1})) > \frac{r}{4}$ olur. Benzer şekilde, $n_{k+1} \notin C_{n_k}$ ve buradan $d(g(n_k), f(n_{k+1})) > \frac{r}{4}$ olur. O halde,

$$P = \{n_k \ : \ k \in \mathbb{N}\}$$

sonsuz bir kümedir. Üstelik, her $p, l \in P$ için $d(f(p), g(l)) > \frac{r}{4}$ olur. Bu ise, $\{f(p) \ : \ p \in P\} \ \underline{\delta} \ \{g(p) \ : \ p \in P\}$ demektir. □

**Teorem 2.59.** *$(X, d)$ metrik uzay, $\delta \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ metrik proksimal bağıntı ve $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$ bir dizi olsun. Bu durumda*

$$f, \text{ Cauchy dizisidir.} \Longleftrightarrow \text{Her } A, B \subseteq \mathbb{N} \text{ sonsuz kümesi için } f(A)\delta f(B) \text{dir.}$$

**Kanıt:** $f$ Cauchy dizisi ve $A, B \subseteq \mathbb{N}$ sonsuz alt kümeler olsun. Bu durumda her $m \geq n_0$ için $m \in A \cap B$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. $f$ Cauchy dizisi olduğundan, $\epsilon > 0$ sayısı ve her $m, n \geq n_0$ için $d(f(m), f(n)) < \epsilon$ olur. $f(m) \in f(A)$ ve $f(n) \in B$ olduğundan, en büyük alt sınır tanımından $D(f(A), f(B)) = 0$ olup, $f(A)\delta f(B)$ elde edilir.

Şimdi her $A, B \subseteq \mathbb{N}$ sonsuz kümesi için, $f(A)\delta f(B)$ olsun. Tersine $f$ Cauchy dizisi olmasın. O halde her $N_i \in \mathbb{N}$ için;

$$(\exists \epsilon > 0) \ \ (\exists n, m > N_i) \ \ (d(f(m), f(n)) \geq \epsilon)$$

olur. Tümevarım yöntemiyle her $i \in \mathbb{N}$ için $n_i, m_i > N_i$ olan $f(n_i), f(m_i)$ alt dizilerini oluşturalım.

$d(f(m_i), f(n_i)) \geq \epsilon$ olduğundan, Lemma 2.58 (Efremovič Lemma)'dan

$$\{f(m_p) \ : \ p \in P\}\underline{\delta}\{f(n_p) \ : \ p \in P\}$$

olan $P \subseteq \mathbb{N}$ sonsuz alt kümesi vardır. Bu ise kabul ile çelişir. Buradan $f$ Cauchy dizisidir. □

**Teorem 2.60.** $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ *bir Cauchy dizisi ise, $f$ dizisi sınırlıdır.*

**Kanıt:** Tersine, $f$ sınırsız olsun. O halde, her $M \in \mathbb{R}$ için $\mid f(n) \mid > M$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan, $\mid f(n_1) \mid > \mid f(1) \mid +1$ olacak şekilde $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Benzer şekilde, $\mid f(n_2) \mid > \mid f(n_1) \mid +1$ olacak şekilde $n_2 \in \mathbb{N}$ vardır. O halde her $i \in \mathbb{N}$ için $\mid f(n_{i+1}) \mid > \mid f(n_i) \mid +1$ olacak şekilde $n_{i+1} \in \mathbb{N}$ vardır.
Buradan, $A = \{n_{2i} : : i \in \mathbb{N}\}$ ve $B = \{n_{2i+1} \ : \ i \in \mathbb{N}\}$ şeklinde oluşturulan $A, B \subseteq \mathbb{N}$ kümeleri sonsuzdur. Üstelik $f(A)\underline{\delta}f(B)$ olur. Çünkü, her $a \in A$ ve $b \in B$ için, $a = n_{2i},\ b = n_{2k+1}$ olacak şekilde $i, k \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan, $k > i$ olmak üzere,

$$\mid f(n_{2k+1}) \mid > \mid f(n_{2i}) \mid +(2k + 1 - 2i).1$$

olur. O halde,

$$\mid f(n_{2k+1}) - f(n_{2i}) \mid \geq \mid f(n_{2k+1}) \mid - \mid f(n_{2i}) \mid > (2k + 1 - 2i).1 > 0$$

dir. Bu ise $f$ dizisinin Cauchy dizisi olmasıyla çelişir.

$\square$

**Tanım 2.61.** $(X, d), (Y, d')$ iki metrik uzay, $f : X \longrightarrow Y$ fonksiyon olsun. Eğer her $\epsilon > 0$ sayısı için $x, y \in X$ olmak üzere,

$$(d(x, y) < \eta) \Longrightarrow (d'(f(x), f(y)) < \epsilon)$$

olacak şekilde en az bir tane $\eta > 0$ sayısı varsa $f$ fonksiyonuna *düzgün süreklidir* denir.

**Teorem 2.62.** (Efremovič Teoremi) $(X, d), (Y, d')$ *metrik uzay, $f : X \longrightarrow Y$ fonksiyon olsun. O halde,*

$$f \textit{ düzgün süreklidir.} \quad \Longleftrightarrow \quad f \textit{ proksimal süreklidir.}$$

**Kanıt:** $f$ düzgün sürekli olsun. $A, B \subseteq X$ ve $A\delta_d B$ alalım. O halde, $\epsilon > 0$ için $d(a, b) < \epsilon$ olacak şekilde $a \in A$ ve $b \in B$ vardır. $f$ düzgün sürekli olduğundan, $d'(f(a), f(b)) < \epsilon$ olur. O halde, $f(A)\delta_{d'}f(B)$ elde edilir.

$f$ proksimal sürekli olsun. Aksine, $f$ fonksiyonunun düzgün sürekli olmadığını varsayalım. Bu durumda, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \text{ ve } d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \epsilon$$

olacak şekilde $\epsilon > 0$ ve $x_n, y_n \in X$ vardır. O halde, Lemma 2.58'den

$$\{f(x_p) \ : \ p \in P\}\underline{\delta}\{f(y_p) \ : \ p \in P\}$$

olacak şekilde $P \subseteq \mathbb{N}$ sonsuz kümesi vardır. $f$ proksimal sürekli olduğundan,

$$\{x_p \ : \ p \in P\}\underline{\delta}\{y_p \ : \ p \in P\}$$

olur. Ancak, $n > \frac{1}{\epsilon}$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ alınırsa, $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n} < \epsilon$ olur. Bu ise $\{x_p \ : \ p \in P\}\underline{\delta}\{y_p \ : \ p \in P\}$ olması ile çelişir. O halde, $f$ düzgün süreklidir. □

**Tanım 2.63.** $(X, d)$ metrik uzay olsun. $X$ kümesinin boştan farklı bütün kapalı alt kümelerinin ailesine *bir hiperuzay* denir. Hiperuzayı $CL(X)$ ile göstereceğiz.

**Teorem 2.64.** *$(X, d)$ metrik uzay ve $E = \{\epsilon > 0 : A \subseteq S(B, \epsilon),\ B \subseteq S(A, \epsilon)\}$ olsun. Bu durumda her $A, B \in CL(X)$ için*

$$d_H(A, B) = \begin{cases} \text{ebas}E, & E \neq \emptyset \\ \infty, & E = \emptyset \end{cases}$$

*ile tanımlı $d_H : CL(X) \times CL(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu metrik olma koşullarını sağlar.*

**Kanıt:** (M.1) Tanımından; $d_H(A, B) \geq 0$ olur.

(M.2) $d_H(A, B) = 0$ olsun. Buradan, $\text{ebas}\{\epsilon > 0 : A \subseteq S(B, \epsilon),\ B \subseteq S(A, \epsilon)\} = 0$ elde edilir. O halde, her $\epsilon > 0$ için $A \subseteq S(B, \epsilon),\ B \subseteq S(A, \epsilon)$ olur. Şimdi $x \in A$ olsun. O halde, her $\epsilon > 0$ için $x \in S(B, \epsilon)$ olur. Buradan, her $\epsilon$ için $D(x, B) < \epsilon$ elde edilir. O halde, $x\delta B$ olur. Metrik proksimity metrikle uyumlu bir proksimity ve $x \in \text{cl}B$ ile $B$ kümesi kapalı olduğundan $x \in B$ dir. Benzer şekilde $x \in B$ ise $x \in A$ dir. O halde $A = B$ elde edilir.

Tersine, $A = B$ olsun. O halde, her $\epsilon > 0$ için $A \subseteq S(B, \epsilon),\ B \subseteq S(A, \epsilon)$ olur. Buradan, $\text{ebas}\{\epsilon > 0 : A \subseteq S(B, \epsilon),\ B \subseteq S(A, \epsilon)\} = 0$ elde edilir. böylece $d_H(A, B) = 0$ dir.

(M.3) Tanımdan $d_H(A, B) = d_H(B, A)$ olduğu açıktır.

(M.4) $A, B, C \in CL(X)$ ve $d_H(A, C) = k, d_H(B, C) = l$ olsun. Buradan, $C \subseteq S(B, l)$ ve $B \subseteq S(A, k)$ elde edilir. O halde $C \subseteq S(A, k + l)$ olur. Gerçekten, $c \in C$ için, $D(c, B) \leq l$ ve buradan her $b \in B$ için $d(c, b) \leq l$ olur. Benzer şekilde, $b \in B$ ve her $a \in A$ için $d(b, a) \leq k$ elde edilir. O halde, her $a \in A$ için

$$d(c, a) \leq d(c, b) + d(b, a) \leq k + l$$

olur. Buradan, $c \in S(A, k + l)$ elde edilir. Benzer şekilde, $A \subseteq S(B, k)$ ve $B \subseteq S(C, l)$ olduğundan, $A \subseteq S(C, k + l)$ olur. O halde, $d_H(A, C) \leq k + l$ olur. Bu ise,

$$d_H(A, C) \leq d_H(A, B) + d_H(B, C)$$

demektir.

□

**Teorem 2.65.** *$(X, d)$ metrik uzay, $A, B \in CL(X)$ olsun. O halde,*

$$d_H(A, B) = sup\{\mid D(x, A) - D(x, B) \mid : \ x \in X\}$$

*eşitliği sağlanır.*

**Kanıt:** $d_H(A, B) = \rho$ ve $sup\{\mid D(x, A) - D(x, B) \mid : \ x \in X\} = \rho'$ diyelim. Şimdi, $a \in A$ olsun. $sup\{\mid D(a, A) - D(a, B) \mid\} =\mid D(a, A) - D(a, B) \mid=\mid D(a, B) \mid\leq \rho'$ olur. Supremum tanımından, her $\epsilon > 0$ için $D(a, B) < \rho' + \epsilon$ olur. Buradan, $A \subseteq S(B, \rho' + \epsilon)$ elde edilir.

Benzer şekilde $b \in B$ için, $\mid D(b, A) \mid\leq \rho'$ ve buradan $D(b, A) < \rho' + \epsilon$ olup, $B \subseteq S(A, \rho' + \epsilon)$ elde edilir. O halde,

$$\rho' + \epsilon \in \{\epsilon > 0 : A \subseteq S(B, \epsilon), \ B \subseteq S(A, \epsilon)\}$$

ve

$$d_H(A, B) = \text{ebas}\{\epsilon > 0 : A \subseteq S(B, \epsilon), \ B \subseteq S(A, \epsilon)\} = \rho$$

olduğundan, $\rho \leq \rho' + \epsilon$ elde edilir. $\epsilon > 0$ sayısı keyfi olduğundan, $\rho \leq \rho'$ olur.

Şimdi $\rho' \leq \rho$ olduğunu gösterelim. $x \in X$ ve $\epsilon > 0$ sayısı için, $D(x, A) = \text{ebas}\{d(x, a) : a \in A\}$ ve en büyük alt sınır tanımından; $d(x, a) < D(x, A) + \epsilon$ olacak şekilde $a \in A$ vardır. Benzer şekilde, $d(a, b) < D(a, B) + \epsilon$ olacak şekilde $b \in B$ vardır.
$S(B, D(a, B)) = \{x \in X \ : \ D(x, B) < D(a, B)\}$ olduğundan, $a \notin S(B, D(a, B))$ ve $a \in A$ olduğundan, $A \not\subseteq S(B, D(a, B))$ elde edilir. O halde, $D(a, B) \notin \{\epsilon > 0 \ : \ A \subseteq S(B, \epsilon), \ B \subseteq S(A, \epsilon\}$ ve buradan $D(a, B) \leq \rho$ elde edilir. O halde,

$$d(a, b) < D(a, B) + \epsilon \leq \rho + \epsilon$$

olur. Buradan;

$$D(x, B) \leq d(x, b) \leq d(x, a) + d(a, b) < D(x, A) + \rho + 2\epsilon$$

elde edilir. Yani, $D(x, B) - D(x, A) \leq \rho + 2\epsilon$ olur. $\rho'$ üst sınırların en küçüğü olduğu için, $\rho' \leq \rho + 2\epsilon$ elde edilir. $\epsilon > 0$ keyfi olduğundan $\rho' \leq \rho$ olur.
$\rho \leq \rho'$ ve $\rho' \leq \rho$ olduğundan, $\rho = \rho'$ elde edilir.

□

**Tanım 2.66.** $(CL(X), d_H)$ metrik uzayına *Hausdorff Metrik Uzay* denir.

**Teorem 2.67.** *$(CL(X), d_H)$ Hausdorff metrik uzay ve her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \subseteq X$ olmak üzere, $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ kapalı kümelerin bir dizisi olsun. $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi kapalı bir $A$ kümesine yakınsıyor ise, $D(x, A_n)$ fonksiyonlar dizisi $D(x, A)$ sayısına düzgün yakınsar.*

**Kanıt:** $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi kapalı bir $A$ kümesine yakınsasın. O halde,

$$(\forall \epsilon > 0) \ \ (\exists n_0 \in \mathbb{N}) \ \ (\forall n \geq n_0) \ \ (d_H(A_n, A) < \epsilon)$$

olur. Buradan, her $\epsilon > 0$, her $n \geq n_0$ ve her $x \in X$ için;

$$\mid D(x, A_n) - D(x, A) \mid \leq sup\{\mid D(x, A_n) - D(x, A) \mid : \ x \in X\} < \epsilon$$

elde edilir. Böylece $D(x, A_n)$ fonksiyonlar dizisi $D(x, A)$ sayısına yakınsar..

□

**Tanım 2.68.** $(X,d)$ metrik uzay, $D \subseteq X$ olsun. Eğer $\mathrm{cl}D = X$ oluyorsa, $D$ kümesine $X$ kümesinin *bir yoğun alt kümesi* denir.

**Tanım 2.69.** $(X,d),(Y,d')$ iki metrik uzay, $(A,d_A)$, $X$ uzayının bir alt uzayı ve $f : A \longrightarrow Y$ bir sürekli fonksiyon olsun. Eğer $F|_A = f$ olacak şekilde bir $F : X \longrightarrow Y$ sürekli fonksiyonu varsa; $f$ fonksiyonuna, *$X$ kümesine sürekli olarak genişletilebilir fonksiyon* denir.
$F$ fonksiyonuna, *$f$ fonksiyonunun $X$ kümesi üzerindeki bir sürekli genişlemesi* denir.

**Örnek 2.70.** $f : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ olsun. $f$ fonksiyonu süreklidir. $\mathrm{cl}(0,1) = [0,1]$ olup, $(0,1) \subseteq [0,1]$ yoğun alt kümedir. Ancak, $f$ fonksiyonunun $[0,1]$ kümesine sürekli genişlemesi yoktur.

**Teorem 2.71.** *$(X,d),(Y,d')$ iki metrik uzay, $(Y,d')$ tam uzay ve $S \subseteq X$ yoğun alt küme olmak üzere; $f : S \longrightarrow Y$ düzgün sürekli fonksiyon ise, $f$ fonksiyonunun bir tek düzgün sürekli genişlemesi vardır.*

**Teorem 2.72.** [18] (Taimanov Teoremi) *$(X,d)$ metrik uzay, $(Y,d')$ kompakt metrik uzay, $D \subseteq X$ yoğun alt küme ve $f : D \longrightarrow Y$ sürekli fonksiyon olsun. $f$ fonksiyonunun $X$ kümesi üzerine sürekli genişlemeye sahip olması için gerekli ve yeterli koşul, her $E, F \subseteq Y$ ayrık kapalı alt kümeleri için $\mathrm{cl}_X f^{-1}(E) \cap \mathrm{cl}_X f^{-1}(F) = \emptyset$ olmasıdır.*

**Kanıt:** $(X,d)$ bir metrik uzay, $(Y,d')$ bir kompakt metrik uzay, $D \subseteq X$ bir yoğun alt küme olsun. Ayrıca $f : D \longrightarrow Y$ fonksiyonu sürekli ve $\hat{f} : X \longrightarrow Y$ fonksiyonu da $f$ fonksiyonunun bir sürekli genişlemesi olsun. $D$ alt uzayı üzerinde $A, B \subseteq D$ için $A\delta_D B \iff A\delta_0 B$ olduğundan

$$A\delta_D B \iff \mathrm{cl}_X A \cap \mathrm{cl}_X B \neq \emptyset$$

ile tanımlı $\delta_D$ bağıntısı da, $D$ üzerinde bir metrik proksimal bağıntıdır.
Öte yandan, Teorem 2.45'den $Y$ uzayı üzerindeki metrik proksimal bağıntı ince proksimal bağıntıdır.
Şimdi $\hat{f}$ fonksiyonunun proksimal sürekli olduğunu gösterelim. $\hat{f}$ fonksiyonu sürekli, $\delta_0$ $X$ üzerinde ince proksimity ve $Y$ üzerinde metrikle uyumlu proksimal bağıntı olduğundan, Lemma 2.50'dan $\hat{f}$ fonksiyonu proksimal süreklidir. $A, B \subseteq D$ ve $A\delta_D B$ olsun. Bu durumda $A\delta_0 B$ olur. $\hat{f}$ proksimal sürekli olduğundan $\hat{f}(A)\delta_0'\hat{f}(B)$ elde edilir. $\hat{f}|_D = f$

olduğundan, $\hat{f}(A)\delta_0 f(A), \hat{f}(B) = f(B)$ ve buradan $f(A)\delta_0' f(B)$ olur. $f$ fonksiyonu proksimal süreklidir. Şimdi $E, F \subseteq Y$ kapalı ve $E \cap F = \emptyset$ olsun. Buradan, $\mathrm{cl}E \cap \mathrm{cl}F = \emptyset$ elde edilir. O halde, $E\delta_0' F$ olur. $f$ proksimal sürekli olduğundan, $f^{-1}(E)\underline{\delta_0} f^{-1}(F)$ elde edilir. Yani, $\mathrm{cl}_X f^{-1}(E) \cap \mathrm{cl}_X f^{-1}(F) = \emptyset$ dir.

Tersine, her $E, F \subseteq Y$ ayrık kapalı alt kümeleri için $\mathrm{cl}_X f^{-1}(E) \cap \mathrm{cl}_X f^{-1}(F) = \emptyset$ olsun. $f : D \longrightarrow X$ sürekli fonksiyonunun bir sürekli genişlemesi olduğunu gösterelim. Bunun için öncelikle $f$ fonksiyonunun proksimal sürekli olduğunu göstereceğiz. $A, B \subseteq D$ alt kümeleri için $A\delta_D B$ olsun. O halde, $\mathrm{cl}_X A \cap \mathrm{cl}_X B \neq \emptyset$ olur. Aksine, $f(A)\delta_0' f(B)$ olduğunu varsayalım. Buradan, $\mathrm{cl}_Y f(A) \cap \mathrm{cl}_Y f(B) = \emptyset$ olur. Varsayımdan,

$$\mathrm{cl}_X f^{-1}(\mathrm{cl}_Y(f(A))) \cap \mathrm{cl}_X f^{-1}(\mathrm{cl}_Y(f(B))) = \emptyset$$

olur. $f$ sürekli olduğundan $C \subseteq Y$ alt kümesi için $\mathrm{cl}_X f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(\mathrm{cl}_Y C)$ olduğunu biliyoruz. O halde, $\mathrm{cl}_X(\mathrm{cl}_X f^{-1}(f(A))) \subseteq \mathrm{cl}_X f^{-1}(\mathrm{cl}_Y(f(B)))$ olur. Buradan,

$$\mathrm{cl}_X f^{-1}(f(A)) \cap \mathrm{cl}_X f^{-1}(f(B)) = \emptyset$$

elde edilir. $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ ve $B \subseteq f^{-1}(f(B))$ olduğundan,

$$\mathrm{cl}_X A \cap \mathrm{cl}_X B = \emptyset$$

bulunur. Bu ise $A\delta_D B$ olması ile çelişir. O halde $f$ bir proksimal sürekli fonksiyondur. Teorem 2.62 (Efremovič Teorem)'den $f$ bir düzgün sürekli fonksiyon olduğundan Teorem 2.71'den $f$ fonksiyonunun $X$ üzerine düzgün sürekli bir genişlemesi vardır.

□

# 3. TOPOLOJİK UZAYLAR

Bilindiği gibi her metrik uzay aynı zamanda bir topolojik uzaydır. Bu durumda daha önce değinmiş olduğumuz metrik proksimiti kavramı daha genel olarak topolojik uzaylara taşınabilir. Önceki bölümde metrik proksimiti, kapalı küme kavramı kullanılmadan gap fonksiyoneli yardımıyla verilmiş, yakınsaklık ve süreklilik gibi temel kavramlar kapanış kümesi tanımlanarak çalışılmıştır. Bu bölümde metrik proksimiti ile ilgili yaklaşımlar daha genel olarak topolojik uzaylar teorisi için gözönüne alınacaktır.

## 3.1. Proksimal Yakınlık Uzayları

**Tanım 3.1.1.** $\emptyset \neq X$ bir küme ve $A, B, C \subseteq X$ olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan her $\delta \subseteq \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$ bağıntısına $X$ üzerinde bir *(Efremovič ) proksimal yakınlık* denir.

(E.1) $A\delta B \iff B\delta A$

(E.2) $A\delta B \implies A \neq \emptyset, \quad B \neq \emptyset$

(E.3) $A \cap B \neq \emptyset \implies A\delta B$

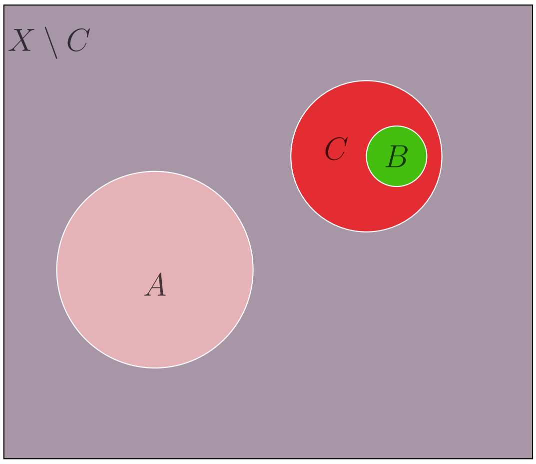
(E.4) $A\delta(B \cup C) \iff A\delta B$ ya da $A\delta C$

(E.5) $A\underline{\delta}B \implies A\underline{\delta}E$ ve $(X/E)\underline{\delta}B$ olacak şekilde en az bir $E \subseteq X$ kümesi vardır.

Üzerinde bir proksimal yakınlık bağıntısı tanımlanmış olan her $X$ kümesine bir *proksimal yakınlık uzayı* denir ve $(X, \delta)$ ile gösterilir.

**Örnek 3.1.2.** Teorem 2.31' den her metrik uzay bir proksimal yakınlık uzayıdır.

**Örnek 3.1.3.** $(X, \delta)$, Şekil 1'deki EF-uzayı olsun. Buna göre $A$ ve $B$ uzak kümelerdir, yani $A\underline{\delta}B$ dir. Bu durumda $B\underline{\delta}(X \setminus C)$ olacak şekilde bir $C$ kümesi bulabiliyoruz.




Şekil 1: Efremovič proksimal yakınlık uzayı

**Tanım 3.1.4.** $\emptyset \neq X$ bir küme ve $A, B, C \subseteq X$ olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan her $\delta \subseteq \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$ bağıntısına $X$ üzerinde bir *Lodato proksimal yakınlık (L-proksimal yakınlık)* denir.

(L.1) $A\delta B \iff B\delta A$

(L.2) $A\delta B \implies A \neq \emptyset, \quad B \neq \emptyset$

(L.3) $A \cap B \neq \emptyset \implies A\delta B$

(L.4) $A\delta(B \cup C) \iff A\delta B$ ya da $A\delta C$

(L.5) $A\delta B$ ve her $b \in B$ için $b\delta C$ ise, $A\delta C$'dir.

**Lemma 3.1.5.** *$\emptyset \neq X$ bir küme ve $\delta$ bir Efremovič proksimal yakınlık ve $A, B \subseteq X$ olsun. Bu durumda*

$$\exists a \in X \ (a\delta A \quad \wedge \quad a\delta B) \implies A\delta B$$

*olur.*

**Kanıt:** $a \in X$ ve $A, B \subseteq X$ için, $a\delta A$ ve $a\delta B$ olsun. Aksine $A\underline{\delta}B$ olduğunu varsayalım. O halde, (E.5)'ten

$$(\exists E \subseteq X) \ \ (A\underline{\delta}E \quad \wedge \quad (X - E)\underline{\delta}B)$$

elde edilir. Buradan, $a \in E$ veya $a \in X - E$ olur. Eğer $a \in E$ ise, $A\delta\{a\}$ olduğundan, (E.4)'ten $A\delta(\{a\} \cup E)$ yani, $A\delta E$ çelişkisi elde edilir. Eğer $a \in X - E$ ise benzer şekilde, $B\delta\{a\}$ olduğundan, (E.4)'ten $B\delta(\{a\} \cup (X - E))$ yani, $B\delta X - E$ çelişkisi elde edilir. Böylece $A\delta B$ elde edilir.

$\square$

**Teorem 3.1.6.** *Her Efremovič proksimal yakınlık bir L-proksimal yakınlıktır.*

**Kanıt:** (L.5) özelliğinin var olduğunu gösterirsek kanıt biter. O halde $A, B, C \subseteq X$ için, $A\delta B$ ve her $b \in B$ için $b\delta C$ olsun. Aksine $A\underline{\delta}C$ olduğunu varsayalım. O halde (E.5)'ten,

$$(\exists E \subseteq X) \;\; (A\underline{\delta}E \quad \wedge \quad (X-E)\underline{\delta}C)$$

elde edilir. Şimdi $B \nsubseteq E$ olduğunu gösterelim. Aksine, $B \subseteq E$ olduğunu varsayalım. $A\delta B$ ve (E.4)'ten, $A\delta B \cup E$ yani $A\delta E$ çelişkisi elde edilir. O halde, $B \nsubseteq E$ olur. Buradan, $B \cap (X-E) \neq \emptyset$ elde edilir. Şimdi $b \in (B \cap (X-E))$ olsun. Bu durumda $b \in B$ olduğundan; varsayımımız gereği $b\delta C$ olur. Ayrıca $b \in (X-E)$ olduğundan, $\{b\} \cap (X-E) \neq \emptyset$ ve (E.3)'ten $\{b\}\delta(X-E)$ olur. Lemma 3.1.5'dan $C\delta(X-E)$ elde edilir ki, bu bir çelişkidir. O halde, $A\delta C$ dir. □

**Örnek 3.1.7.** Her metrik uzay bir Efremoviç yakınlık uzayı olduğından, Lemma 3.1.5 gereği, her metrik uzay aynı zamanda bir L-proksimal yakınlık uzayıdır.

**Tanım 3.1.8.** $(X, \tau)$ bir topolojik uzay, $\delta$ $X$ üzerinde bir proksimal yakınlık olsun. $A \subseteq X$ olmak üzere;

$$x\delta A \iff x \in \mathrm{cl}A$$

oluyorsa, $\delta$ proksimal yakınlığına *topolojiyle uyumlu proksimal yakınlık* denir.

**Tanım 3.1.9.** $(X, \tau)$ bir topolojik uzay, $x, y \in X$ olmak üzere,

$$x \in \mathrm{cl}\{y\} \iff y \in \mathrm{cl}\{x\}$$

oluyorsa, $(X, \tau)$ uzayına $R_0$ *topolojik uzayı denir.*

**Teorem 3.1.10.** $(X, \tau)$ $R_0$*-topolojik uzay,* $\delta$ *topolojiyle uyumlu bir proksimal yakınlık olsun. Bu durumda her* $x, y \in X$ *için*

$$x\delta\{y\} \iff y\delta\{x\}$$

*dir.*

**Kanıt:** $x\delta\{y\}$ olsun. $\delta$ topolojiyle uyumlu olduğundan, $x \in \mathrm{cl}\{y\}$ olur. $X$ uzayı $R_0$ olduğundan, $y \in \mathrm{cl}\{x\}$ elde edilir. Buradan, $y\delta\{x\}$ olur. Tersine, $y\delta\{x\}$ olsun. Benzer şekilde, $y \in \mathrm{cl}\{x\}$ ve buradan $x \in \mathrm{cl}\{y\}$ elde edilir. $\delta$ topolojiyle uyumlu olduğundan, $x\delta\{y\}$ dir. □

**Tanım 3.1.11.** $(X, \delta)$ bir proksimal yakınlık uzayı, $Y \subseteq X$ ve $A, B \subseteq Y$ olsun. $Y$ kümesinde,

$$A\delta_Y B \iff A\delta B$$

ile tanımlı $\delta_Y$ bağıntısına *alt uzay proksimal yakınlığı* denir.

**Teorem 3.1.12.** $(X, \tau)$ *bir topolojik uzay ve* $\delta$*,* $X$ *üzerindeki topolojiyle uyumlu proksimal yakınlık olsun. Bu durumda her* $Y \subseteq X$ *için* $\delta_Y$ *alt uzay proksimal yakınlığı,* $Y$ *üzerindeki alt uzay topolojisi ile uyumludur.*

**Kanıt:** $A \subseteq Y$ ve $x \in \mathrm{cl}_Y A$ olsun. $\mathrm{cl}_Y A = Y \cap \mathrm{cl}_X A$ olduğundan, $x \in \mathrm{cl}_X A$ elde edilir. Diğer yandan, $\delta$, $X$ üzerindeki topolojiyle uyumlu olduğundan $x\delta A$ dir. Buradan, $x\delta_Y A$ elde edilir. Tersine, $x \in Y$ için $x\delta_Y A$ olsun. O halde, $x\delta A$ ve buradan $x \in \mathrm{cl}_X A$ elde edilir. Ancak $x \in Y$ olduğundan, $x \in Y \cap \mathrm{cl}_X A = \mathrm{cl}_Y A$ bulunur.

□

**Teorem 3.1.13.** $(X, \tau)$ *bir* $R_0$ *topolojik uzay olsun. Bu durumda* $X$ *uzayı her* $A, B \subseteq X$ *için*

$$A\delta_0 B \iff \mathrm{cl}A \cap \mathrm{cl}B \neq \emptyset$$

*ile tanımlı topolojiyle uyumlu bir L-proksimal yakınlığa sahiptir.*

**Kanıt:** $(X, \tau)$ $R_0$-topolojik uzayı ve $A, B, C \subseteq X$ olsun. Öncelikle, $\delta_0$ bağıntısının bir L-proksimal yakınlığı olduğunu gösterelim.

(L.1): $A\delta_0 B$ olsun. O halde $\mathrm{cl}A \cap \mathrm{cl}B \neq \emptyset$ olur. Kesişimin değişme özelliğinden $\mathrm{cl}B \cap \mathrm{cl}A \neq \emptyset$ ve buradan, $B\delta_0 A$ elde edilir. Benzer şekilde $B\delta_0 A$ ise $A\delta_0 B$ bulunur.

(L.2): $A\delta_0 B$ olsun. O halde $\mathrm{cl}A \cap \mathrm{cl}B \neq \emptyset$ olur. Buradan, $\mathrm{cl}A \neq \emptyset,\ \mathrm{cl}B \neq \emptyset$ elde edilir. O halde; $A, B \neq \emptyset$ olur.

(L.3): $A \cap B \neq \emptyset$ olsun. $A \subseteq \mathrm{cl}A$ ve $B \subseteq \mathrm{cl}B$ olduğundan, $\mathrm{cl}A \cap \mathrm{cl}B \neq \emptyset$ olur ve böylece $A\delta_0 B$ elde edilir.

(L.4): $A\delta_0(B \cup C)$ ise $\mathrm{cl}A \cap (\mathrm{cl}(B \cup C)) \neq \emptyset$ dir. $\mathrm{cl}(B \cup C) = \mathrm{cl}B \cup \mathrm{cl}C$ olduğundan, $\mathrm{cl}A \cap (\mathrm{cl}B \cup \mathrm{cl}C) \neq \emptyset$ olur. Kesişimin birleşime dağılma özelliğinden, $(\mathrm{cl}A \cap \mathrm{cl}B) \cup$

$(\mathrm{cl}A \cap \mathrm{cl}C) \neq \emptyset$ olur. Buradan, $\mathrm{cl}A \cap \mathrm{cl}B \neq \emptyset$ veya $\mathrm{cl}A \cap \mathrm{cl}C \neq \emptyset$ elde edilir. O halde, $A\delta_0 B$ veya $A\delta_0 C$ olur. Denkliğin diğer tarafı benzer şekilde gösterilebilir.

(L.5): $A\delta_0 B$ ve her $b \in B$ için $\{b\}\delta_0 C$ olsun. Buradan, $\mathrm{cl}A \cap \mathrm{cl}B \neq \emptyset$ ve her $b \in B$ için $\mathrm{cl}\{b\} \cap \mathrm{cl}C \neq \emptyset$ elde edilir. O halde her $b \in B$ için $x_b \in \mathrm{cl}\{b\} \cap \mathrm{cl}C$ olacak şekilde $x_b \in X$ vardır. $X$ uzayı $R_0$ olduğundan, $b \in \mathrm{cl}\{x_b\}$ ve $x_b \in \mathrm{cl}C$ olduğundan $\mathrm{cl}\{x_b\} \subseteq \mathrm{cl}C$ ve buradan $b \in \mathrm{cl}C$ elde edilir. O halde $B \subseteq \mathrm{cl}C$ olur. Böylece $\mathrm{cl}B$, $B$ kümesini kapsayan en küçük kapalı küme olduğundan, $\mathrm{cl}B \subseteq \mathrm{cl}C$ dir. $\mathrm{cl}A \cap \mathrm{cl}B \neq \emptyset$ olduğu göz önüne alınırsa, $\mathrm{cl}A \cap \mathrm{cl}C \neq \emptyset$ olur. O halde, $A\delta_0 C$ elde edilir.

Şimdi $\delta_0$ proksimal yakınlığının topolojiyle uyumlu olduğunu gösterelim. $x \in X$ ve $E \subseteq X$ için $x\delta_0 E$ olsun. Buradan, $\mathrm{cl}\{x\} \cap \mathrm{cl}E \neq \emptyset$ elde edilir. O halde, $y \in \mathrm{cl}\{x\},\ y \in \mathrm{cl}E$ olacak şekilde en az bir $y \in X$ vardır. $X$ $R_0$-topolojik uzayı olduğundan, $x \in \mathrm{cl}\{y\} \subseteq \mathrm{cl}E$ bulunur. Tersine, $x \in \mathrm{cl}E$ olsun. O halde, $\mathrm{cl}\{x\} \cap \mathrm{cl}E \neq \emptyset$ olur. Buradan, $x\delta_0 E$ elde edilir.

□

**Lemma 3.1.14.** *$(X,\delta)$ proksimal yakınlık uzayı, $A, B, C, D \subseteq X$ olsun. Eğer $A\delta B$, $A \subseteq C$ ve $B \subseteq D$ ise, $C\delta D$ olur.*

**Kanıt:** $A\delta B$ ve $A \subseteq C$ olduğundan, (E.4)'ten $B\delta(A \cup C)$ yani, $B\delta C$ olur. O halde (E.1)'den $C\delta B$ ve $B \cup D = D$ olduğundan, $C\delta(B \cup D)$, yani $C\delta D$ elde edilir.

□

**Teorem 3.1.15.** *$(X,\tau)$ topolojik uzay, $\delta$ topolojiyle uyumlu L-proksimal yakınlık olsun. Bu durumda her $A, B \subseteq X$ için*

$$A\delta B \iff \mathrm{cl}A\delta\mathrm{cl}B$$

*dir.*

**Kanıt:** $A\delta B$ olsun. $A \subseteq \mathrm{cl}A$ ve $B \subseteq \mathrm{cl}B$ olduğundan Lemma 3.1.14'den $\mathrm{cl}A\delta\mathrm{cl}B$ elde edilir. Tersine $\mathrm{cl}A\delta\mathrm{cl}B$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $\delta$ topolojiyle uyumlu olduğundan, her $x \in \mathrm{cl}B$ için $x\delta B$ olur. O halde (L.5)'ten $\mathrm{cl}A\delta B$ olur. (L.1)'den $B\delta\mathrm{cl}A$ elde edilir. Benzer şekilde, her $y \in \mathrm{cl}A$ için $y\delta A$ olduğundan, $B\delta A$ ve buradan $A\delta B$ elde edilir.

$\square$

**Teorem 3.1.16.** *$(X,\tau)$ topolojik uzay, $\delta$ $X$ üzerindeki topolojiyle uyumlu proksimal yakınlık ve $A, B \subseteq X$ için $A\underline{\delta}B$ olsun. O halde aşağıdakiler sağlanır.*

(i) $\mathrm{cl}A \subseteq (X - B)$.

(ii) $A \subseteq \mathrm{int}(X \setminus B)$.

**Kanıt:** (i): $A\underline{\delta}B \implies \mathrm{cl}A\underline{\delta}\mathrm{cl}B \implies \mathrm{cl}A\underline{\delta}B \implies \mathrm{cl}A \subseteq (X - B)$
(ii): $A\underline{\delta}B \implies A\underline{\delta}\mathrm{cl}B \implies A \subseteq (X - \mathrm{cl}B) = \mathrm{int}(X - B)$

$\square$

**Teorem 3.1.17.** *$\emptyset \neq X$ bir küme $\delta, \delta'$ $X$ üzerinde iki proksimal yakınlık bağıntısı olsun. Bu durumda*

$$\delta' \prec \delta \iff (\forall A, B \subseteq X)\ \ (A\delta B \implies A\delta' B)$$

*ile tanımlı "$\prec$" bağıntısı bir kısmi sıralama bağıntısıdır.*

**Kanıt:** $A, B \subseteq X$ olmak üzere, $A\delta B$ ise $A\delta B$ olduğundan, $\delta \prec \delta$ olup bağıntı yansımalıdır.
$\delta, \delta', \delta''$ $X$ üzerinde proksimal yakınlık bağıntıları, $\delta \prec \delta'$ ve $\delta' \prec \delta''$ olsun. O halde $A\delta''B$ olmak üzere, $A\delta'B$ olur. Buradan, $A\delta B$ elde edilir. O halde $\delta \prec \delta''$ olur. Yani, "$\prec$" geçişmelidir.
$\delta \prec \delta'$ ve $\delta' \prec \delta$ olsun. Bu durumda

$$A\delta B \iff A\delta' B$$

elde edilir. Böylece $\delta = \delta'$ olur. Yani "$\prec$" bağıntısı ters simetriktir. $\square$

**Tanım 3.1.18.** $\emptyset \neq X$ bir küme ve $\delta, \delta'$ $X$ üzerinde tanımlı iki proksimal yakınlık olsun. Eğer $\delta' \prec \delta$ oluyorsa $\delta$ proksimal yakınlık bağıntısına $\delta'$ *proksimal yakınlık bağıntısından daha incedir* veya $\delta'$ proksimal yakınlık bağıntısına $\delta$ *proksimal yakınlık bağıntısından daha kabadır* denir.

**Teorem 3.1.19.** *$(X,\tau)$ bir $R_0$-topolojik uzayı olmak üzere, $X$ üzerindeki en ince uyumlu L-proksimal yakınlık $\delta_0$ proksimal yakınlığıdır.*

**Kanıt:** $\delta$ $X$ üzerinde herhangi bir uyumlu proksimal yakınlık ve $A, B \subseteq X$ olmak üzere, $A\delta_0 B$ olsun. O halde $\mathrm{cl}A \cap \mathrm{cl}B \neq \emptyset$ elde edilir. (L.3)'ten $\mathrm{cl}A\delta_0\mathrm{cl}B$ olur. Teorem 3.1.15'den $A\delta B$ elde edilir. O halde, $\delta \prec \delta_0$ olur.

□

**Tanım 3.1.20.** $(X, \delta)$ L-proksimal yakınlık uzayı $A, B \subseteq X$ olsun. Eğer $A\underline{\delta}(X \setminus B)$ ise, $B$ kümesine $A$ *kümesinin proksimal komşuluğu* denir ve bu durum $A << B$ ile gösterilir.

**Teorem 3.1.21.** $(X, \delta)$ *bir proksimal yakınlık uzayı* $A, B, C \subseteq X$ *olsun. Aşağıdakiler sağlanır.*

(P.N.1) $A << B \iff (X \setminus B) << (X \setminus A)$.

*(P.N.2)* $X << X$.

(P.N.3) $A << B \implies A \subseteq B$.

(P.N.4) $A \subseteq B$, $C \subseteq D$ *ve* $B << C$ *ise,* $A << D$ *olur.*

(P.N.5) $A << B_k$ $(1 \leq k \leq n,\ n \in \mathbb{N}) \implies A << \bigcap_{k=1}^{n}\{B_k\}$.

(P.N.6) $A << B$ *ise, her* $C \subseteq X$ *için* $A << C$ *dir ya da* $\{x\} << B$ *olacak şekilde en az bir* $x \in (X \setminus C)$ *vardır.*

(P.N.7) $A << B$ *olsun. Bu durumda* $A << C << B$ *olacak şekilde en az bir* $C \subseteq X$ *vardır.*

**Kanıt:** (P.N.1): $A << B \iff A\underline{\delta}(X \setminus B) \iff (X \setminus B)\underline{\delta}A \iff (X \setminus B) << (X \setminus A)$

(P.N.2): $X\underline{\delta}\emptyset$ olduğundan $X\underline{\delta}(X \setminus X)$ ve buradan, $X << X$ elde edilir.

(P.N.3): $A << B \implies A\underline{\delta}(X \setminus B) \implies A \cap (X \setminus B) = \emptyset \implies A \subseteq B$

(P.N.4): Aksine $A << D$ olmasın. Yani, $A\delta(X \setminus D)$ olsun. $(X \setminus D) \subseteq (X \setminus C)$ ve (E.4)'ten $A\delta((X \setminus D) \cup (X \setminus C))$ yani, $A\delta(X \setminus C)$ elde edilir. (E.1)'den $(X \setminus C)\delta A$ olur. $A \subseteq B$ ve $(X \setminus C)\delta(A \cup B)$ olduğundan, $(X \setminus C)\delta B$ elde edilir. Buradan, $B\delta(X \setminus C)$ olur. Bu ise, $B << C$ olması ile çelişir. O halde, $A << D$ olur.

(P.N.5): $B_1$ ve $B_2$ için göstermek yeterlidir. $A << B_1$ ve $A << B_2$ olsun. Tanımdan, $A\underline{\delta}(X \setminus B_1)$ ve $A\underline{\delta}(X \setminus B_2)$ olur. (E.4)'ten $A\underline{\delta}((X \setminus B_1) \cup (X \setminus B_2))$ ve buradan $A\underline{\delta}(X \setminus (B_1 \cap B_2))$ elde edilir. O halde, $A << (B_1 \cap B_2)$ olur.

(P.N.6): $A << B$ olsun. O halde $A\underline{\delta}(X \setminus B)$ olur. Böylece (L.5)'ten her $C \subseteq X$ için, $A\underline{\delta}(X \setminus C)$ ya da $x\underline{\delta}(X \setminus B)$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır. Bu ise istenendir.

(P.N.7): $A << B$ olsun. Buradan, $A\underline{\delta}(X \setminus B)$ olur. O halde (E.5)'ten $A\underline{\delta}D$ ve $(X \setminus D)\underline{\delta}(X \setminus B)$ olacak şekilde bir $D \subseteq X$ vardır. Eğer $D = X \setminus C$ alınırsa, istenen elde edilir. $\square$

**Teorem 3.1.22.** $(X, \delta)$ *bir proksimal yakınlık uzayı,* $A, B \subseteq X$ *olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.*

(i) $A << B \implies \mathrm{cl}A << \mathrm{cl}B.$

(ii) $A << B \implies A << \mathrm{int}B.$

**Kanıt:** (i) $A << B \implies A\underline{\delta}(X \setminus B) \implies \mathrm{cl}A\underline{\delta}\mathrm{cl}(X \setminus B) \implies \mathrm{cl}A\underline{\delta}(X \setminus B) \implies \mathrm{cl}A\underline{\delta}(X \setminus \mathrm{cl}B) \implies \mathrm{cl}A << \mathrm{cl}B.$
(ii) Eğer $A << B \implies A\underline{\delta}(X \setminus B) \implies \mathrm{cl}A\underline{\delta}\mathrm{cl}(X \setminus B) \implies \mathrm{cl}(X \setminus B)\underline{\delta}\mathrm{cl}A \implies \mathrm{cl}(X \setminus B)\underline{\delta}A \implies A\underline{\delta}\mathrm{cl}(X \setminus B)$ olduğu gözönüne alınırsa, $\mathrm{cl}(X \setminus B) = (X \setminus \mathrm{int}B)$ olduğundan, $A\underline{\delta}X \setminus \mathrm{int}B$, yani $A << \mathrm{int}B$ elde edilir.

$\square$

**Tanım 3.1.23.** $(X, \tau), (Y, \tau*)$ iki topolojik uzay, $f : X \longrightarrow Y$ bir fonskiyon ve $c \in X$ olsun. Eğer $f(c) \in V \in \tau*$ olan her $V$ için $f(U) \subseteq V$ olacak şekilde en az bir $U \in \tau$ var ise, $f$ fonksiyonuna $c$ *noktasında süreklidir* denir.
Eğer, $f$ fonksiyonu her $c \in X$ için sürekliyse, $f$ fonksiyonuna $X$ üzerinde *süreklidir* denir.

**Teorem 3.1.24.** $(X, \tau), (Y, \tau*)$ *iki topolojik uzay,* $f : X \longrightarrow Y$ *fonksiyon ise aşağıdakiler denktir.*

*(a)* $f$ *süreklidir.*

*(b) Her* $H \in \tau*$ *için* $f^{-1}(H) \in \tau$ *olur.*

*(c) Her* $A \subseteq Y$ *kapalı kümesi için* $f^{-1}(A) \subseteq X$ *kapalıdır.*

*(d) Her* $A \subseteq X$ *için* $f(\mathrm{cl}A) \subseteq \mathrm{cl}f(A)$ *olur.*

**Teorem 3.1.25.** $(X,\tau),(Y,\tau*)$ *iki topolojik uzay,* $f: X \longrightarrow Y$ *bir fonksiyon ve* $\delta,\delta'$ *sırasıyla* $X$ *ve* $Y$ *kümesi üzerindeki* $\tau$ *ve* $\tau*$ *topolojileriyle uyumlu proksimal yakınlıklar olsun. Bu durumda*

$$f\,\textit{süreklidir.} \iff (\forall c \in X)(\forall A \subseteq X) \;\; (c\delta A \implies f(c)\delta' f(A))$$

*dir.*

**Kanıt:** $c \in X$ ve $A \subseteq X$ için, $c\delta A$ olsun. Aksine, $f(c)\underline{\delta}f(A)$ olduğunu varsayalım. O halde $f(c) \notin \mathrm{cl}f(A)$ olur. $f$ sürekli ve $\mathrm{cl}f(A)$ kapalı olduğundan, $f^{-1}(\mathrm{cl}f(A))$ kümesi $X$ uzayında kapalıdır. $f(c) \notin \mathrm{cl}f(A)$ olduğundan, $c \notin f^{-1}(\mathrm{cl}f(A))$ olur. $A \subseteq f^{-1}(\mathrm{cl}f(A))$ ve $f^{-1}(\mathrm{cl}f(A))$ kapalı olduğundan,

$$A \subseteq \mathrm{cl}A \subseteq f^{-1}(\mathrm{cl}f(A))$$

elde edilir. $c \notin f^{-1}(\mathrm{cl}f(A))$ olduğundan, $c \notin \mathrm{cl}A$ ve buradan $c\underline{\delta}A$ çelişkisi elde edilir. O halde $f(c)\delta f(A)$ olur.

Şimdi de her $c \in X$ ve $A \subseteq X$ için $c\delta A$ ise $f(c)\delta f(A)$ olsun. $f$ fonksiyonun sürekli olduğunu gösterelim. $E \subseteq Y$ açık küme olsun. $f^{-1}(E) = \emptyset$ ise kanıt biter. O halde, $f^{-1}(E) \neq \emptyset$ olsun. Buradan, en az bir $c \in f^{-1}(E)$ vardır. Buradan, $f(c) \in E$ olur. Diğer yandan $E$ kümesi $Y$ uzayında açık olduğundan, $Y \setminus E$ kümesi kapalıdır. O halde, $Y \setminus E = \mathrm{cl}(Y \setminus E)$ olur. Böylece $f(c) \notin \mathrm{cl}(Y \setminus E)$ ve buradan, $f(c)\underline{\delta}(Y \setminus E)$ elde edilir. Varsayımımızdan $c\underline{\delta}f^{-1}(Y \setminus E)$ dir. Ancak $f^{-1}(Y \setminus E) = X \setminus f^{-1}(E)$ olduğundan, $c\underline{\delta}(X \setminus f^{-1}(E))$ elde edilir. Her $c \notin X \setminus f^{-1}(E)$ için $c\underline{\delta}X \setminus f^{-1}(E)$ olduğundan, $X \setminus f^{-1}(E)$ kapalıdır. Böylece $f^{-1}(E)$ açık olur. Sonuç olarak, Teorem 3.1.24'den $f$ fonksiyonun sürekli olduğu elde edilmiş olur.

□

**Tanım 3.1.26.** $(X,\delta),(Y,\delta')$ iki L-proksimal yakınlık uzayı ve $f: X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $A, B \subseteq X$ için

$$A\delta B \implies f(A)\delta' f(B)$$

koşulu sağlanıyorsa, $f$ fonksiyonuna *proksimal sürekli (p-sürekli)* fonksiyon denir.

**Örnekler 3.1.27.** $(X,\delta),(Y,\delta'),(Z,\delta'')$ L-proksimal yakınlık uzayları olsun.

(a) $f : X \longrightarrow Y$ sabit fonksiyonu, p-süreklidir. Gerçekten, bir $c \in Y$ ve her $x \in X$ için $f(x) = c$ olsun. O halde, $A, B \subseteq X$ için $f(A) = c$ ve $f(B) = c$ olduğundan, $f(A)\delta' f(B)$ elde edilir.

(b) $f : X \longrightarrow X$ birim fonksiyonu, p-süreklidir. Gerçekten, $A, B \subseteq X$ için $A\delta B$ olsun. Bu durumda $f(A) = A$ ve $f(B) = B$ olduğundan, $f(A)\delta f(B)$ olur.

(c) Proksimal sürekli fonksiyonların bileşkesi de p-süreklidir. $f : X \longrightarrow Y$ ve $g : Y \longrightarrow Z$ iki p-sürekli fonksiyon ve $A, B \subseteq X$ için $A\delta B$ olsun. $f$ p-sürekli olduğundan, $f(A), f(B) \in Y$ ve $f(A)\delta' f(B)$ olur. Benzer şekilde, $g$ fonksiyonu da p-sürekli olduğundan, $g(f(A))\delta'' g(f(B)$ elde edilir. O halde

$$A\delta B \implies g \circ f(A)\delta'' g \circ f(B)$$

olduğundan, $g \circ f : X \longrightarrow Z$ fonksiyonu da p-sürekli olur.

**Teorem 3.1.28.** $(X,\tau),(Y,\tau*)$ *iki topolojik uzay,* $\delta,\delta'$ *sırasıyla* $X, Y$ *üzerindeki* $\tau$, $\tau*$ *topolojileriyle uyumlu proksimal yakınlıklar ve* $f : X \longrightarrow Y$ *fonksiyon olsun. Bu durumda* $f$ *fonksiyonu p-sürekli ise süreklidir.*

**Kanıt:** $c \in X$ ve $A \subseteq X$ için, $c\delta A$ olsun. $f$ p-sürekli olduğundan, $f(\{c\})\delta' f(A)$ olur. Bu ise istenendir.

□

## 3.2. Ayırma Aksiyomları

**Tanım 3.2.1.** $(X,\tau)$ bir topolojik uzay olsun. Eğer her $x, y \in X, x \neq y$ için

$$(x \in G, y \notin G) \text{ veya } (x \notin G, y \in G)$$

olacak şekilde bir $G \subseteq X$ açık kümesi bulunabiliyorsa, $(X,\tau)$ topolojik uzayına bir $T_0$-*uzayı* denir.

**Teorem 3.2.2.** $(X,\tau)$ *bir* $T_0$*-topolojik uzayı ve* $\delta$, $\tau$ *topolojisi ile uyumlu proksimal yakınlık olsun. Bu durumda her* $x, y \in X$ *ve* $x \neq y$ *için* $x\underline{\delta}y$ *veya* $y\underline{\delta}x$ *olur.*

**Kanıt:** $x, y \in X$ ve $x \neq y$ olsun. O halde, $x \in G, y \notin G$ veya $y \in G, x \notin G$ olacak şekilde bir $G \in \tau$ vardır.
$x \in G, y \notin G$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $y \in (X - G)$ olur. $X - G$ kapalı ve $x \notin (X - G)$ olduğundan, $\{x\}\underline{\delta}(X - G)$ dir. Çünkü aksine, $\{x\}\delta(X - G)$ olduğunu varsayarsak; $\delta$ proksimal yakınlığı topoloji ile uyumlu olduğundan $x \in \mathrm{cl}(X - G) = (X - G)$ çelişkisi elde edilir. O halde, $\{x\}\underline{\delta}(X - G)$ olur ve (E.4)'ten $\{x\}\underline{\delta}\{y\}$ elde edilir. Eğer $y \in G, x \notin G$ olduğunu varsayılırsa, benzer şekilde $\{y\}\underline{\delta}\{x\}$ elde edilir.

□

**Tanım 3.2.3.** $(X, \tau)$ bir topolojik uzay olsun. Eğer her $x, y \in X, x \neq y$ için $G, H \subseteq X$ gibi iki açık küme,

$$(x \in G, y \notin G) \quad \wedge \quad (x \notin H, y \in H)$$

sağlanacak şekilde bulunabiliyorsa, bu $(X, \tau)$ topolojik uzayına $T_1$-*uzayı* denir.

**Teorem 3.2.4.** *Bir $(X, \tau)$ topolojik uzayının $T_1$-uzayı olması için gerek ve yeter şart her $x \in X$ için $\{x\}$ tek nokta kümesinin kapalı olmasıdır.*

**Teorem 3.2.5.** *$(X, \tau)$ bir $T_1$ uzayı ve $\delta$, $X$ üzerindeki $\tau$ topolojisi ile uyumlu proksimal yakınlık olsun. Bu durumda her $x, y \in X$, $x \neq y$ için $\{x\}\underline{\delta}\{y\}$ ve $\{y\}\underline{\delta}\{x\}$ olur.*

**Kanıt:** $x, y \in X$ için $x \neq y$ olsun. $X$, $T_1$-uzayı olduğundan, $\{x\}, \{y\}$ kümeleri kapalıdır. O halde, $x \notin \{y\} = \mathrm{cl}\{y\}$ ve $y \notin \{x\} = \mathrm{cl}\{x\}$ olur. Ancak $\delta$ topolojiyle uyumlu olduğundan, $x\underline{\delta}\{y\}$ ve $y\underline{\delta}\{x\}$ elde edilir.

□

**Tanım 3.2.6.** $(X, \tau)$ uzayı $T_1$ olsun. Eğer her kapalı $A \subseteq X$ ve $x \notin A$ için

$$f(x) = 0 \text{ ve } f(A) = 1$$

olacak şekilde bir $f : X \longrightarrow [0, 1]$ sürekli fonksiyonu bulunabiliyorsa, $(X, \tau)$ topolojik uzayına *tamamen regüler uzay* ya da *Tychonoff uzayı* denir.

**Tanım 3.2.7.** $(X, \tau)$ $T_1$ uzayı olsun. Eğer her kapalı ve ayrık $A, B \subseteq X$ alt kümeleri için

$$A \subseteq G,\ B \subseteq H \text{ve } G \cap H = \emptyset$$

olacak şekilde $G, H \subseteq X$ açık kümeleri, bulunabiliyorsa, $(X, \tau)$ topolojik uzayına *normal uzay* denir.

**Teorem 3.2.8.** *$(X, \tau)$ topolojik uzayı normal uzay ise Tychonoff uzayıdır.*

**Teorem 3.2.9.** *Bir $(X, \tau)$ topolojik uzayının normal olması için gerekli ve yeterli koşul $X$ üzerindeki uyumlu proksimal $\delta_0$ yakınlığının Efremovič proksimal yakınlık olmasıdır.*

**Kanıt:** $(X, \tau)$ normal uzay olsun. $X$ üzerindeki $\delta_0$ proksimal yakınlığının L-proksimal yakınlık olduğunu göstermiştik (Teorem 3.1.13). O halde $\delta_0$ proksimal yakınlığının (E.5) özelliğini sağladığını gösterelim. $A, B \subseteq X$ için $A\underline{\delta_0}B$ olsun. Buradan, $\mathrm{cl}A \cap \mathrm{cl}B = \emptyset$ elde edilir. $(X, \tau)$ normal uzay olduğundan,

$$\mathrm{cl}A \subseteq E,\ \mathrm{cl}B \subseteq E' \text{ ve } E \cap E' = \emptyset$$

olacak şekilde $E, E' \in \tau$ vardır. Buradan $E' \subseteq (X \setminus E)$ olduğundan,

$$A \subseteq \mathrm{cl}A \subseteq E,\ B \subseteq \mathrm{cl}B \subseteq (X \setminus E)$$

elde edilir. O halde $\mathrm{cl}A$ kapalı olduğundan, $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}A) = \mathrm{cl}A$ olur. Buradan $\mathrm{cl}A \cap E' = \emptyset$ yani, $\mathrm{cl}A\underline{\delta_0}E'$ elde edilir. Benzer şekilde $\mathrm{cl}B\underline{\delta_0}E$ olur. $E \in \tau$ olduğundan, $X \setminus E$ kapalı ve $\mathrm{cl}A \subseteq E$ olduğundan, $\mathrm{cl}A \subseteq (X \setminus E) = \emptyset$ olur. Yani, $\mathrm{cl}A\underline{\delta_0}(X \setminus E)$ elde edilir. Buradan, $A\underline{\delta_0}(X \setminus E)$ olur. Öylece $\mathrm{cl}B\underline{\delta_0}E$ olduğundan, $B\underline{\delta_0}E$ dir. Bu durumda $\delta_0$ Efremovič proksimal yakınlığı olur.

$\delta_0$, $X$ üzerinde Efremovič proksimal yakınlık ve $A, B \subseteq X$ ayrık kapalı kümeler olsun. Bu durumda $\mathrm{cl}A \cap \mathrm{cl}B = \emptyset$ olur. Buradan, $A\underline{\delta_0}B$ elde edilir. Ayrıca $\delta_0$ Efremovič proksimal yakınlık olduğundan, $A\underline{\delta_0}E$ ve $B\underline{\delta_0}(X \setminus E)$ olacak şekilde $E \subseteq X$ vardır. Buradan, $A \cap \mathrm{cl}E = \emptyset$ ve $B \cap \mathrm{cl}(X \setminus E) = \emptyset$ olur. O halde $A \subseteq (X \setminus \mathrm{cl}E)$ ve $B \subseteq (X \setminus \mathrm{cl}(X \setminus E))$ elde edilir. $X \setminus \mathrm{cl}E, X \setminus \mathrm{cl}(X \setminus E) \in \tau$ olduğu açıktır. Aksine, $X \setminus \mathrm{cl}E \cap X \setminus \mathrm{cl}(X \setminus E) \neq \emptyset$ olduğunu varsayalım. O halde $x \in X \setminus \mathrm{cl}E$ ve $x \in X \setminus \mathrm{cl}(X \setminus E)$ olacak şekilde en az bir $x \in X$ vardır. Buradan, $x \notin \mathrm{cl}E$, $x \notin \mathrm{cl}(X \setminus E)$ ve $\mathrm{cl}E \cup \mathrm{cl}(X \setminus E) = X$ olduğundan $x \notin X$ çelişkisi elde edilir. O halde, $(X \setminus \mathrm{cl}E) \cap (X \setminus \mathrm{cl}(X \setminus E)) = \emptyset$ olur, yani $(X, \tau)$ normal uzaydır. $\square$

**Tanım 3.2.10.** $(X, \tau)$ bir topolojik uzay ve $A, B \subseteq X$ olsun. Eğer,

$$f(A) = 0, \ f(B) = 1$$

olacak şekilde bir $f : X \longrightarrow [0, 1]$ sürekli fonksiyonu varsa, $A$ ve $B$ kümesine *tamamen ayrılmış* ya da *fonksiyonel ayrılmış* denir.

**Teorem 3.2.11.** *Her tamamen regüler $(X, \tau)$ uzayı (Tychonoff uzayı)*

$$\forall A, B \subseteq X, \ A\underline{\delta_F}B \iff A, B \textit{ fonksiyonel ayrılmıştır.}$$

*ile verilen $\delta_F$ uyumlu proksimal yakınlığa sahiptir.*

**Kanıt:** Öncelikle $\delta_F$ bağıntısının proksimal yakınlık olduğunu gösterelim.

(E.1): $A\underline{\delta_F}B \iff B\underline{\delta_F}A$ tanımdan açıktır.

(E.2): Boş küme bütün kümelerden fonksiyonel ayrılmış olduğundan, $A, B = \emptyset$ için $A, B$ fonksiyonel ayrılmıştır. O halde $A\underline{\delta_F}B$ elde edilir.

(E.3): $A\underline{\delta_F}B$ olsun. O halde $A, B$ fonksiyonel ayrılmıştır. Buradan, $A \cap B = \emptyset$ olur.

(E.4): $A, B, C \subseteq X$ olmak üzere, $A\underline{\delta_F}B$ ve $A\underline{\delta_F}C$ olsun. O halde,

$$f, g : X \longrightarrow [0, 1], \ f(A) = 0, \ f(B) = 1 \text{ ve } g(A) = 0, \ g(C) = 1$$

olacak şekilde $f, g$ sürekli fonksiyonları vardır. Şimdi,

$$h : X \longrightarrow [0, 1], \quad h(x) = \text{maks}\{f(x), g(x)\}$$

fonksiyonunu tanımlarsak, $h$ sürekli ve $h(A) = \text{maks}\{f(A), g(A)\} = 0$ ve $h(B \cup C) = \max\{f(B \cup C), g(B \cup C)\} = 1$ olur. O halde $A$ ve $B \cup C$ fonksiyonel ayrılmıştır. Buradan, $A\underline{\delta_F}(B \cup C)$ elde edilir.

Tersine, $A\underline{\delta_F}(B \cup C)$ olsun. O halde,

$$f(A) = 0, \ f(B \cup C) = 1$$

olacak şekilde $f : X \longrightarrow [0, 1]$ sürekli fonksiyonu vardır. Böylece $f(B), f(C) \subseteq f(B \cup C)$ olduğundan, $f(B) = 1$ ve $f(C) = 1$ elde edilir. O halde $A, B$ ve $A, C$ fonksiyonel ayrılmış olup $A\underline{\delta_F}B$ ve $A\underline{\delta_F}C$ elde edilir.

(E.5): $A\underline{\delta_F}B$ olsun. Bu durumda

$$f(A) = 0,\ \ f(B) = 1$$

olacak şekilde bir $f : X \longrightarrow [0, 1]$ sürekli fonksiyonu vardır. Şimdi

$$E = \{x \in X \ : \ \tfrac{1}{2} \leq f(x) \leq 1\}$$

olsun. O halde, $A\underline{\delta_F}E$ ve $(X \setminus E)\underline{\delta_F}B$ olduğunu gösterelim. Bunun için

$$g(y) = \begin{cases} 2y, & 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} < y \leq 1 \end{cases}$$

ile tanımlı $g : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ sürekli fonksiyonunu göz önüne alalım. Böylece $f$ sürekli olduğundan,

$$g \circ f : X \longrightarrow [0, 1]$$

bileşke fonksiyonu da süreklidir. Üstelik, $(g \circ f)(A) = 0$ ve $(g \circ f)(E) = 1$ olduğundan, $A$ ve $E$ kümeleri fonksiyonel ayrılmıştır. O halde, $A\underline{\delta_F}E$ olur.

Şimdi,

$$h(y) = \begin{cases} 0, & 0 \leq y < \frac{1}{2} \\ 2y - 1, & \frac{1}{2} \leq y \leq 1 \end{cases}$$

ile tanımlı $h : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ sürekli fonksiyonunu göz önüne alalım. $f$ fonksiyonu sürekli olduğundan,

$$h \circ f : X \longrightarrow [0, 1]$$

bileşke fonksiyonu da süreklidir. Diğer yandan

$$X - E = \{x \in X \ : \ 0 \leq f(x) < \tfrac{1}{2}\}$$

olduğundan, $(h \circ f)(B) = h(f(B)) = h(1) = 1$ ve $(h \circ f)(X \setminus E) = h(f(X \setminus E)) = 0$ elde edilir. O halde, $B$ ve $X \setminus E$ kümeleri fonksiyonel ayrılmış olup, $(X \setminus E)\underline{\delta_F}B$ olur.

Şimdi, $\delta_F$ proksimal yakınlığının uyumlu olduğunu gösterelim.

$x \notin \mathrm{cl}A$ olsun. $\mathrm{cl}A$ kapalı ve $X$ Tychonoff uzayı olduğundan,

$$f(\{x\}) = 0, \quad f(\mathrm{cl}A) = 1$$

olacak şekilde bir $f : X \longrightarrow [0,1]$ sürekli fonksiyonu vardır. O halde $A \subseteq \mathrm{cl}A$ olduğundan, $f(A) = 1$ olur. Buradan, $\{x\}$ ve $A$ kümesi fonksiyonel ayrılmış olup, $x\underline{\delta_F}A$ elde edilir.

Tersine, $x\underline{\delta_F}A$ olsun. Buradan,

$$f(x) = 0, \quad f(A) = 1$$

olacak şekilde bir $f : X \longrightarrow [0,1]$ sürekli fonksiyonu vardır.

Aksine, $x \in \mathrm{cl}A$ olduğunu varsayalım. O halde,

$$(\forall G \in \tau) \ \ (x \in G) \ \ (\{x\} \cap A \neq \emptyset)$$

olur. Ancak, $[0,1) \subseteq [0,1]$ uzayında açık küme ve $f$ sürekli olduğundan $f^{-1}([0,1))$ kümesi $X$ uzayında açık olup, $x \in f^{-1}([0,1))$ ve $f^{-1}([0,1)) \cap A = \emptyset$ çelişkisi elde edilir. O halde $x \notin \mathrm{cl}A$ olur. $\square$

# 4. DİJİTAL GÖRÜNTÜ

Bu bölümde dijital görüntülerin proksimal yakınlıkla ilişkilendirilebileceğini göreceğiz ([9], [11], [12], [13], [14]).

**Tanım 4.1.** Konum ve renk tonları ile ilgili bilgilere sahip olan görsel alan nesnelerinin ayrık gösterimine *bir dijital görüntü* denir. Digital görüntüdeki nesnelerden (noktalardan) oluşan boş olmayan bir kümeye *dijital görsel uzay* ya da *dijital görüntü kümesi* denir.

**Tanım 4.2.** Bir $X \neq \emptyset$ dijital görüntü kümesinin noktalarına *piksel* denir. "piksel" kelimesi ingilizcede "picture" ve "cell" kelimelerinden türetilmiştir.

**Tanım 4.3.** $X \neq \emptyset$ dijital görüntü kümesi olmak üzere, bir $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna *piksellerin özellik fonksiyonu* denir.

**Örnek 4.4.** $X \neq \emptyset$ bir dijital görüntü kümesi, $x \in X$ bir piksel ve $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu renk özelliği fonksiyonu olsun.
$A = \{1, 2, 3\} \subseteq \mathbb{R}$ kümesi renklerin kümesini temsil etmek üzere (1-sarı, 2-kırmızı, 3-mavi), $\phi(x) = 1$ ise, $x \in X$ sarı renkli bir pikseldir.

**Tanım 4.5.** $X \neq \emptyset$ dijital görüntü kümesi ve $x \in X$ bir piksel olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\phi_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ piksellerin özellik fonksiyonu olmak üzere,

$$\Phi = \{\phi_1, \phi_2, ...\}$$

kümesine *piksellerin özellik vektörü* denir ve herhangi bir $x$ pikselinin $\Phi$ özellik fonksiyonu altındaki değeri $\Phi(x) = (\phi_1(x), \phi_2(x), ...)$ ile gösterilir. Özellik vektörü $X$ kümesinden $\mathbb{R}^n$ kümesine bir fonksiyondur. Bir pikselin betimlenmesi özellik vektörü ile sağlanır.

**Örnek 4.6.** $X \neq \emptyset$ dijital görüntü kümesi ve $x \in X$ bir piksel olsun.

$$\phi_1 : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

piksellerin renk özelliği fonksiyonu ve

$$\phi_2 : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

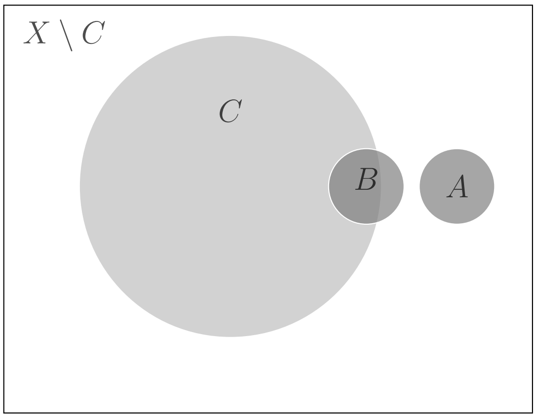
piksellerin şekil özelliği fonksiyonu ve $\Phi = \{\phi_1, \phi_2\}$ özellik vektörü olsun. $A = \{1, 2, 3\} \subseteq \mathbb{R}$ kümesi renklerin kümesini temsil etmek üzere (1-sarı, 2-kırmızı, 3-mavi), $B = \{1, 2\} \subseteq \mathbb{R}$ kümesi şekillerin kümesini temsil etsin (1-kare, 2-yuvarlak).
O halde, $\phi_1(x) = 2$ ve $\phi_2(x) = 2$ olmak üzere, $\Phi(x) = (\phi_1(x), \phi_2(x)) = (2, 2)$ elde edilir. Buradan, $x \in X$ pikseli, kırmızı ve yuvarlaktır.

## 4.1. Konumsal ve Betimsel Yakınlık

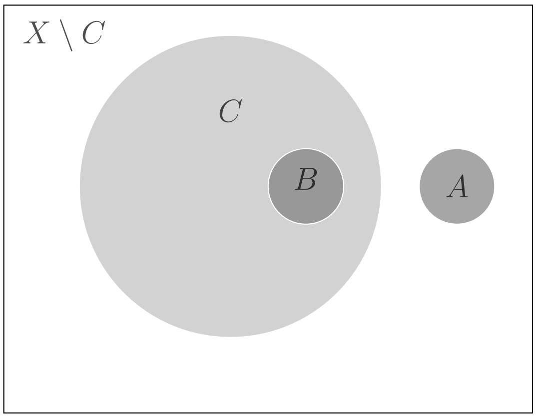
$X \neq \emptyset$ bir küme, $\delta$, $X$ kümesi üzerinde bir metrik proksimal bağıntı olsun. Buna göre, eğer $A, B \subseteq X$ ve $A \cap B \neq \emptyset$ ise $A\delta B$ olduğundan bu iki kümeye $\delta$ proksimal bağıntısına göre yakın kümeler denir. Bu durumda herhangi iki küme yakın değilse, bu kümeler ayrık olmalıdır. Bahsettiğimiz bu yakınlık konumsal yakınlıktır. $X$ kümesi üzerindeki $\delta$ yakınlığı daha önce ele aldığımız Efremovič yakınlığı olsun. Aşağıda verilen EF5 aksiyomu

(EF5) $A\underline{\delta}B \implies A\underline{\delta}E$ ve $(X \setminus E)\underline{\delta}B$ olacak şekilde en az bir $E \subseteq X$ kümesi vardır.

biçimindeydi. Şekil 3' de görüldüğü gibi $A\underline{\delta}B$ dir ve $C$ kümesi $B\underline{\delta}(X \setminus C)$ ve $A\underline{\delta}C$ ifadelerini sağladığından (EF5) aksiyomu için aranan kümedir. Şekil 2'de $A$ ve $B$ kümeleri mekansal olarak ayrık, aynı tonda gri renk özelliği açısından betimsel olarak ayrık değildir ve üstelik betimsel açıdan gözlemlendiğinde gri renginin farklı tonlarıyla $B$ ve $C$ ayrıktır.




Şekil 2: Betimsel olarak uzak ve yakın kümeler



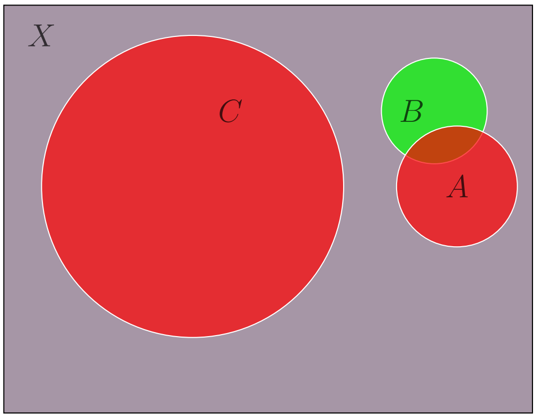

Şekil 3: Konumsal yakınlıkta (EF5) koşulu

Şimdi $X \neq \emptyset$ bir küme, $\Phi = \{\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n\}$, elemanları her bir $x \in A$ pikselinin özelliklerini temsil eden özellik fonksiyonlarının kümesi olsun. Bu durumda $\Phi(x)$, $x$ pikseli için bir özellik vektörüdür, yani $\Phi(x)$ bileşenleri $x$ pikselini tanımlayan özellik değerleri olan bir vektördür. Bir özellik vektörü hem $X$ kümesindeki $x$ pikselinin, hem de $X$ kümesinin altkümelerinin betimlenmesini sağlar. $\delta_\Phi$ ile göstereceğimiz bir betimleyici yakınlık bağıntısı elde edebilmek için kümede tanımlı noktalara bir taban sağlayan özellik fonksiyonlarının kümesi seçilmelidir. Şimdi $A, B \in \mathcal{P}(X)$ ve $\mathcal{Q}(A)$ ile $\mathcal{Q}(B)$, $A$ ve $B$ kümesindeki pikselleri betimleyen kümeler olsun. Buna göre

$\mathcal{Q}(A) = \{\Phi(a) \mid a \in A\}$,

$\mathcal{Q}(B) = \{\Phi(b) \mid b \in B\}$

dir.




Şekil 4: Konumsal ve Betimsel Yakınlık

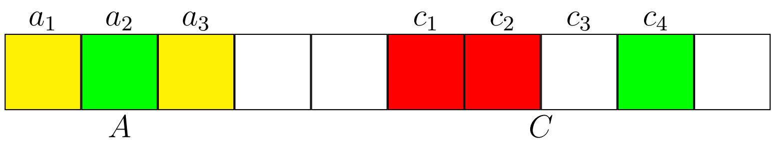
Şekil 4'de görüldüğü gibi mekansal olarak ayrık olmayan iki küme betimsel açıdan ayrık olabilir. Burada $A$ ve $C$ kümeleri mekansal olarak ayrık iken betimsel açıdan ayrık değildir. $A$ ve $B$ kümeleri için durum bunun tam tersidir, yani $A$ ve $B$ mekansal olarak ayrık olmayan ancak betimsel olarak ayrık kümelerdir.

Örneğin, Şekil 5' de verilen $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ kümelerini gözönüne alalım. Bu durumda $x = a_2$ için aşağıdaki piksel şeridinde $\Phi(a_2) = \Phi(c_4)$ olduğundan $\Phi(x)$ hem $\mathcal{Q}(A)$ kümesinde hem de $\mathcal{Q}(B)$ kümesindedir. Bu durumda $A$ ve $C$ kümeleri mekansal olarak ayrık olsalar da betimsel açıdan ayrık değildir. Yani $A$ ve $C$ kümeleri betimsel olarak yakın kümelerdir. Bu durumu $A\delta_\Phi C$ ile göstereceğiz. Eğer $A$ ve $B$ kümeleri betimsel olarak uzaksa, bu durumu da $A\underline{\delta_\Phi}B$ ile göstereceğiz.

Bu durumda ileride vereceğimiz gibi betimsel yakınlık

$$A\delta_\Phi C \Longleftrightarrow \mathcal{Q}(A) \cap \mathcal{Q}(B) \neq \emptyset$$

ile tanımlanabilir.




Şekil 5: Doku hücresi

Şimdi betimsel birleşim ve betimsel kesişim işlemlerini aşağıda aşağıdaki tanımla verebiliriz:

**Tanım 4.1.1.** $X \neq \emptyset$ dijital görüntü kümesi, $A, E \subseteq X$ ve $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonu $X$ kümesinin pikselleri için bir özellik vektörü olsun.

(i)

$$A \cap_{\Phi} E = \{x \in A \cup E \ : \ \Phi(x) \in \mathcal{Q}(A) \ \wedge \ \Phi(x) \in \mathcal{Q}(E)\}$$

kümesine $A$ ve $E$ kümelerinin *betimsel arakesit kümesi* denir.

(ii)

$$A \cup_{\Phi} E = \{x \in A \cup E \ : \ \Phi(x) \in \mathcal{Q}(A) \ \vee \ \Phi(x) \in \mathcal{Q}(E)\}$$

kümesine $A$ ve $E$ kümelerinin *betimsel birleşim kümesi* denir.

Dikkat edilirse, bir $x \in A \cup E$ pikselinin $A \cap_{\Phi} E$ betimsel kesişim kümesinde olması için $\Phi(x) = \Phi(a) = \Phi(b)$ olacak şekilde bir $a \in A$ ve bir $b \in E$ olmalıdır. Bu özellik betimsel kesişim kümesini bilinen kesişim kümesinden ayıran en önemli özelliktir. Ancak; bilinen birleşim kümesiyle betimsel birleşim kümesinin aynı olduğu aşikardır.

**Örnek 4.1.2.** Şekil 5' deki $A$ ve $C$ kümelerini gözönüne alalım. Piksel şeridindeki renkleri gösteren özellik fonksiyonunu $\Phi$ ile karşı gelen $\delta_{\Phi}$ ile gösterelim. $A$ ve $C$ kümelerinin ayrık olduğunu ancak betimsel olarak yakın olduklarını biliyoruz. Dikkat edilirse, $\Phi(a_2)$, $\mathcal{Q}(A)$ kümesinde, $\Phi(c_4)$ ise, $\mathcal{Q}(C)$ kümesindedir. Söz konusu piksel şeridine $X$ dersek , $X$ kümesinde aynı betimlemeleri veren başka bir piksel yoktur. Bu nedenle $A \cap_{\Phi} C = \{a_2, c_4\}$ olur.

## 4.2. Betimsel Anlamda Efremovič ve Lodato Yakınlıkları

Şimdi $\Phi$, bir $X \neq \emptyset$ kümesi üzerinde bir özellik vektörü olsun. Bu durumda $\Phi$ özellik vektörüne bağlı olarak betimsel birleşim ve arakesit işlemleri mekansal anlamda daha önce tartışmış olduğumuz Efremovič ve Lodato yakınlıklarını betimsel anlamda gözönüne almamızı sağlar:

**Tanım 4.2.1.** $X \neq \emptyset$ bir küme ve $A, B, C \subseteq X$ olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $\delta_\Phi \subseteq \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$ bağıntısına $X$ üzerinde *bir betimsel EF-proksimal yakınlık bağıntısı* denir.

($\mathrm{EF}_\Phi$.1) $A\delta_\Phi B \iff B\delta_\Phi A$

($\mathrm{EF}_\Phi$.2) $A\delta_\Phi B \implies A \neq \emptyset, \quad B \neq \emptyset$

($\mathrm{EF}_\Phi$.3) $A \cap_\Phi B \neq \emptyset \implies A\delta_\Phi B$

($\mathrm{EF}_\Phi$.4) $A\delta_\Phi(B \cup_\Phi C) \iff A\delta_\Phi B$ ya da $A\delta_\Phi C$

($\mathrm{EF}_\Phi$.5) $A\underline{\delta_\Phi}B \implies A\underline{\delta_\Phi}E$ ve $(X/E)\underline{\delta_\Phi}B$ olacak şekilde en az bir $E \subseteq X$ kümesi vardır.

Üzerinde bir proksimal yakınlık bağıntısı tanımlanmış olan her $X$ kümesine bir *proksimal yakınlık uzayı* denir ve $(X, \delta)$ ile gösterilir.

**Örnek 4.2.2.** $X$, Şekil 1'deki noktalar kümesi ve $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$ olmak üzere, $X$ üzerinde betimsel $\delta_\Phi$ EF-yakınlığını gözönüne alalım. $\delta_\Phi$ EF-yakınlığını $\mathrm{EF}_\Phi$.1–$\mathrm{EF}_\Phi$.4 aksiyomlarını sağlar. Ayrıca $A \subseteq X \setminus C$ olsun. $B \subset C$, $C\underline{\delta_\Phi}X \setminus C$, $A \subset X \setminus C$ ve $A\underline{\delta_\Phi}B$ ve $B\underline{\delta_\Phi}X \setminus C$ ve $A\underline{\delta_\Phi}C$ ifadelerinin sağlandığı kolaylıkla görülebilir. O halde, $\delta_\Phi$, $\mathrm{EF}_\Phi$.5 özelliğini de sağlamış olur.

**Tanım 4.2.3.** $X \neq \emptyset$ dijital görüntü kümesi, $A, B, C \subseteq X$ ve $\delta_\Phi \subseteq \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$ ailesi aşağıdaki özellikleri sağlayan bir bağıntı olsun.

($\mathrm{L}_\Phi$.1) $A\delta_\Phi B \implies A, B \neq \emptyset$

($\mathrm{L}_\Phi$.2) $A \cap_\Phi B \neq \emptyset \implies A\delta_\Phi B$

($\mathrm{L}_\Phi$.3) $A\delta_\Phi B \iff B\delta_\Phi A$

($\mathrm{L}_\Phi$.4) $A\delta_\Phi(B \cup C) \iff A\delta_\Phi B \vee A\delta_\Phi C$

($\mathrm{L}_\Phi$.5) $A\delta_\Phi B$ ve her $b \in B$ için $b\delta_\Phi C$ ise $A\delta_\Phi C$ olur.

Bu $\delta_\Phi$ bağıntısına *betimsel L-proksimal yakınlık bağıntısı* denir. $(X, \delta_\Phi)$ uzayına da *betimsel L-proksimal yakınlık uzayı* denir.

**Teorem 4.2.4.** *$X \neq \emptyset$ dijital görüntü kümesi, $A, B \subseteq X$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ özellik vektörü olsun. $\delta_\Phi \subseteq \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$ olmak üzere,*

$$A\delta_\Phi B \iff \mathcal{Q}(A) \cap \mathcal{Q}(B) \neq \emptyset$$

*ile tanımlı $\delta_\Phi$ bağıntısı betimsel L-proksimal yakınlık bağıntısıdır.*

**Kanıt:** (D.P.1): $A\delta_\Phi B$ olsun. O halde, $\mathcal{Q}(A) \cap \mathcal{Q}(B) \neq \emptyset$ olur. O halde, $z \in \mathcal{Q}(A)$ ve $z \in \mathcal{Q}(B)$ olacak şekilde en az bir $z \in \mathbb{R}^n$ vardır. Buradan, $z = \Phi(x)$ ve $z = \Phi(x')$ olacak şekilde $x \in A$ ve $x' \in B$ vardır. O halde, $A, B \neq \emptyset$ elde edilir.

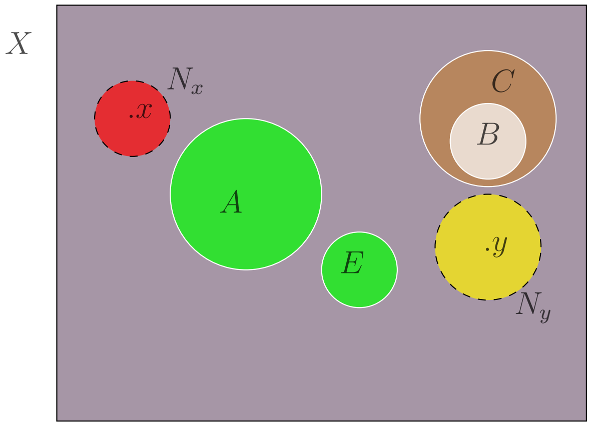
(D.P.2): $A \cap_\Phi B \neq \emptyset$ olsun. O halde, $\Phi(x) \in \mathcal{Q}(A)$ ve $\Phi(x) \in \mathcal{Q}(B)$ olacak şekilde en az bir $x \in A \cup B$ vardır. Buradan, $\mathcal{Q}(A) \cap \mathcal{Q}(B) \neq \emptyset$ elde edilir. Yani, $A\delta_\Phi B$ olur.

(D.P.3): $A\delta_\Phi B \iff \mathcal{Q}(A) \cap \mathcal{Q}(B) \neq \emptyset \iff \mathcal{Q}(B) \cap \mathcal{Q}(A) \neq \emptyset \iff B\delta_\Phi A$

(D.P.4): $A\delta_\Phi(B \cup C)$ olsun. O halde, $\mathcal{Q}(A) \cap \mathcal{Q}(B \cup C) \neq \emptyset$ olur. O halde, $z \in \mathcal{Q}(A), z \in \mathcal{Q}(B \cup C)$ olacak şekilde $z \in \mathbb{R}^n$ vardır. Buradan, $\Phi(x) = z, \Phi(x') = z$ olacak şekilde $x \in A$ ve $x' \in (B \cup C)$ vardır. Eğer $x' \in B$ ise, $\Phi(x') \in \mathcal{Q}(B)$ olur ve buradan $\mathcal{Q}(A) \cap \mathcal{Q}(B) \neq \emptyset$ elde edilir. O halde $A\delta_\Phi B$ olur.
Eğer $x' \in C$ ise benzer şekilde $A\delta_\Phi C$ elde edilir.
Tersine, $A\delta_\Phi B$ olsun. O halde, $\mathcal{Q}(A) \cap \mathcal{Q}(B) \neq \emptyset$ elde edilir. Buradan, $\Phi(x) \in \mathcal{Q}(A), \Phi(x) \in \mathcal{Q}(B)$ olacak şekilde $x \in A \cup B$ vardır. O halde, $x \in (A \cup B \cup C)$ olup; $\Phi(x) \in \mathcal{Q}(A)$ ve $\Phi(x) \in \mathcal{Q}(B \cup C)$ olduğundan, $\mathcal{Q}(A) \cap \mathcal{Q}(B \cup C) \neq \emptyset$ elde edilir. O halde $A\delta_\Phi(B \cup C)$ olur.

(D.P.5): $A\delta_\Phi B$ ve her $b \in B$ için $b\delta_\Phi C$ olsun. O halde $\mathcal{Q}(A) \cap \mathcal{Q}(B) \neq \emptyset$ elde edilir. Buradan, $\Phi(x) \in \mathcal{Q}(A), \Phi(x) \in \mathcal{Q}(B)$ olacak şekilde $x \in A \cup B$ vardır. Her $b \in B$ için $b\delta_\Phi C$ olduğundan, $x\delta_\Phi C$ elde edilir. Buradan $\Phi(x) \in \mathcal{Q}(C)$ olup, $\mathcal{Q}(A) \cap \mathcal{Q}(C) \neq \emptyset$ elde edilir. O halde, $A\delta_\Phi C$ olur.

$\square$




Şekil 6: Betimsel komşuluklar ve betimsel EF-yakınlık aksiyomlarını sağlayan kümeler

Genellikle dijital görüntü kümeleri $\mathbb{R}^2$ düzleminin alt kümeleridir. Burada Euclid metriği

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2,\ d_E(x,y) = \sqrt{\Sigma_{i=1}^{2}(x_i - y_i)^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

ile tanımlıdır. Genel olarak, $\mathbb{R}^n$ n-boyutlu Euclid uzayı

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ d_E(x,y) = \sqrt{\Sigma_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$$

metriği ile verilir. Bir diğer metrik $\mathbb{R}^n$ üzerinde

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ d(x,y) = \Sigma_{i=1}^{n}|x_i - y_i|$$

ile tanımlı taksi metriğidir.

**Tanım 4.2.5.** $X \neq \emptyset$ dijital görüntü kümesi, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ özellik vektörü olsun. $\epsilon > 0$ ve $r > 0$ için,

$$N_{\Phi(x)} = \{y \in X\ :\ d(\Phi(x), \Phi(y)) < \epsilon,\ d(x,y) < r\}$$

kümesine $x \in X$ pikselinin *sınırlı betimsel komşuluğu*

$$N'_{\Phi(x)} = \{y \in X\ :\ d(\Phi(x), \Phi(y)) = 0,\ d(x,y) < r\}$$

kümesine de $x \in X$ pikselinin *betimsel olarak ayırt edilemez komşuluğu* denir. Sınırlı betimsel komşulukta $d(x, y) < r$ iki piksel arasındaki konumsal uzaklığın $r$ sayısından küçük olduğunu, $d(\Phi(x), \Phi(y)) < \epsilon$ ise iki piksel arasındaki betimleme farkının $\epsilon$ sayısından daha az olduğunu göstermektedir. Betimsel olarak ayırt edilemez komşuluk ise birbirlerine olan uzaklıkları $r$ sayısından küçük olan piksellerin özellikler açısından birbirinden ayırt edilemeyeceğini ifade etmektedir.

**Örnek 4.2.6.** Şekil 6'da $x$ ve $y$ piksellerinin betimsel olarak ayırt edilemez komşulukları $N_x$ ve $N_y$ dir. Burada, $x$ pikseli için $r$ değeri daha küçük seçilmiş, $y$ pikseli için daha büyük seçilmiştir. Dijital görüntü kümesi üzerindeki metrik, Euclid metriği olarak alınmıştır. O halde $\phi_1$, Örnek 4.6'daki renk özellik fonksiyonu ve $A \subseteq \mathbb{R}$ renklerin kümesi olsun. Eğer $\Phi = \{\phi_1\}$ dersek, $x' \in N_x$ olmak üzere,

$$d(\Phi(x), \Phi(x')) = d(\phi_1(x), \phi_1(x')) = d(2, 2) = 0$$

elde edilir. Benzer şekilde, $y' \in N_y$ olmak üzere,

$$d(\Phi(y), \Phi(y')) = d(\phi_1(y), \phi_1(y')) = d(1, 1) = 0$$

olur.

# Kaynaklar


[1] Anonim, Extension of a Uniformly Continuous Function between Metric Spaces, http://math.stackexchange.com/questions/245237/extension-of-a-uniformly-continuous-function-between-metric-spaces, (Mart, **2017**).

[2] Bülbül, A. *Genel Topoloji*, Hacettepe Üniversitesi Yayınları, Gözden geçirilmiş 4.baskı, Ankara, **2014**.

[3] Engelking, R., *General Topology, Revised and completed edition*, Heldermann Verlag, Berlin, **1989**.

[4] Fréchet, M., Surquelques points du calcul fonctionnel. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 22, 1-74, **1906**.

[5] Gagrat, M., Naimpally, S., Proximity Approach to Semi-Metric and Developable Spaces. *Pacific Journal of Mathematics*, 44(1), 93-105, **1973**.

[6] Herrlich, H., A concept of nearness. *General Topology and Applications*, 4, 191-212, **1974**.

[7] Husain, T., *Topology and Maps*, Plenum Press, New York, **1977**.

[8] Naimpally, S., *Proximity Approach to Problems in Topology and Analysis*, Oldenbourg Verlag, München, **2009**.

[9] Naimpally, S., Peters, J., *Topology with Applications: Topological Spaces via Near and Far*, World Scientific, Singapore, **2013**.

[10] Naimpally, S., Warrack, B., *Proximity Spaces*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, ISBN 978-0-521-09183-1, **1970**.

[11] Peters, J., Local Near Sets: Pattern Discovery in Proximity Spaces. *Mathematics in Computer Science*, 7, 87-106, **2013**.

[12] Peters, J., Near Sets. General theory about nearness of objects, *Applied Mathematical Sciences*, 1, no. 53, 2609-2629, **2007**.

[13] Peters, J., *Topology of Digital Images: Visual Pattern Discovery in Proximity Spaces*, Springer Verlag, Heidelberg, Berlin, **2014**.

[14] Peters, J., Naimpally, S., Applications of near sets. *Notices of the American Mathematical Society*, 59(4), 536–542, **2012**.

[15] Peters, J., Near sets. General theory about nearness of objects. *Applied Mathematical Sciences* 1(53), 2609–2629, **2007**.

[16] Peters, J., Near sets. Special theory about nearness of objects. *Fundam. Inf.* 75(1-4), 407–433,**2007**.

[17] Riesz, F., Stetigkeitbegriff und abstrakte mengenlehre. *m IV Congresso Internazionale dei Matematici*, 2, 18-24, **1908**.

[18] Taimanov, A., On the extension of continuous mapping of topological spaces. *Matematicheskii Sbornik*, 31, 451-463, **1952**.

# ÖZGEÇMİŞ

**Kimlik Bilgileri**

| | | |
|---|---|---|
| Adı Soyadı | : | Özgün ŞEFİK |
| Doğum Yeri | : | ANKARA |
| Medeni Hali | : | Bekar |
| E-posta | : | ozgun.sefik@hacettepe.edu.tr |

**Eğitim**

| | | |
|---|---|---|
| Lise | : | 2003-2007 75.Yıl AÖL |
| Lisans | : | 2007-2008 Hacettepe Üniversitesi,<br>Yabancı Diller Yüksek Okulu, Almanca Hazırlık<br>2008-2013 Hacettepe Üniversitesi, Eğitim Fakültesi,<br>Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Bölümü |

**Yabancı Dil ve Düzeyi**

İngilizce, İyi; Almanca, Orta

**İş Deneyimi**

2014- Araştırma Görevlisi-Hacettepe Üniversitesi

**Deneyim Alanları**

–

**Tezden Üretilmiş Projeler ve Bütçesi**

–

**Tezden Üretilmiş Yayınlar**

–

**Tezden Üretilmiş Tebliğ ve/veya Poster Sunumu ile Katıldığı Toplantılar**

–

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS/DOKTORA TEZ ÇALIŞMASI ORJİNALLİK RAPORU

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
......Matematik...................... ANABİLİM DALI BAŞKANLIĞI'NA

Tarih: 07/06/2017

Tez Başlığı / Konusu: ......Topolojik Uzaylarda Yakınlık........................................

..............................................................................................................

Yukarıda başlığı/konusu gösterilen tez çalışmamın a) Kapak sayfası, b) Giriş, c) Ana bölümler ve d) Sonuç kısımlarından oluşan toplam ...63... sayfalık kısmına ilişkin, 07/06/2017 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından ....Turnitin.... adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı %17 'tür.

Uygulanan filtrelemeler:

1- Kaynakça hariç
2- Alıntılar ~~hariç~~/dâhil
3- 5 kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Çalışması Orjinallik Raporu Alınması ve Kullanılması Uygulama Esasları'nı inceledim ve bu Uygulama Esasları'nda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

07/06/2017

Tarih ve İmza

**Adı Soyadı:** Özgün ŞEFİK

**Öğrenci No:** N14126128

**Anabilim Dalı:** Matematik

**Programı:** Topoloji

**Statüsü:** ☒ Y.Lisans ☐ Doktora ☐ Bütünleşik Dr.

**DANIŞMAN ONAYI**

UYGUNDUR.

Prof. Dr. Murat Diker

(Unvan, Ad Soyad, İmza)