BASİT VE TABAKALI RASTGELE ÖRNEKLEMEDE ÜSTEL FONKSİYONU KULLANAN KİTLE ORTALAMASI TAHMİN EDİCİLERİ

POPULATION MEAN ESTIMATORS USING EXPONENTIAL FUNCTION IN SIMPLE AND STRATIFIED RANDOM SAMPLINGS

CEREN ÜNAL

PROF. DR. CEM KADILAR

Tez Danışmanı

Hacettepe Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin

İstatistik Anabilim Dalı için Öngördüğü

YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırlanmıştır.

2017

CEREN ÜNAL' ın hazırladığı "**Basit ve Tabakalı Rasgele Örneklemede Üstel Fonksiyonu Kullanan Kitle Ortalaması Tahmin Edicileri**" adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından "**İSTATİSTİK ANABİLİM DALI**" nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Hülya ÇINGI
Başkan ....

Prof. Dr. Cem KADILAR
Danışman ....

Prof. Dr. Mehtap AKÇİL OK
Üye ....

Doç. Dr. Semra TÜRKAN
Üye ....

Yrd. Doç. Dr. Esra POLAT
Üye ....

Bu tez Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. Menemşe GÜMÜŞDERELİOĞLU

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Sevgili Aileme…

YAYINLAMA VE FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI BEYANI

Enstitü tarafından onaylanan lisansüstü tezimin/raporumun tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı (kağıt) ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda verilen koşullarla kullanıma açma iznini Hacettepe üniversitesine verdiğimi bildiririm. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet haklarım bende kalacak, tezimin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanım hakları bana ait olacaktır.

Tezin kendi orijinal çalışmam olduğunu, başkalarının haklarını ihlal etmediğimi ve tezimin tek yetkili sahibi olduğumu beyan ve taahhüt ederim. Tezimde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanması zorunlu metinlerin yazılı izin alarak kullandığımı ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederim.

☐ **Tezimin/Raporumun tamamı dünya çapında erişime açılabilir ve bir kısmı veya tamamının fotokopisi alınabilir.**
(Bu seçenekle teziniz arama motorlarında indekslenebilecek, daha sonra tezinizin erişim statüsünün değiştirilmesini talep etseniz ve kütüphane bu talebinizi yerine getirse bile, tezinin arama motorlarının önbelleklerinde kalmaya devam edebilecektir.)

☒ **Tezimin/Raporumun 12/06/2020 tarihine kadar erişime açılmasını ve fotokopi alınmasını (İç Kapak, Özet, İçindekiler ve Kaynakça hariç) istemiyorum.**
(Bu sürenin sonunda uzatma için başvuruda bulunmadığım taktirde, tezimin/raporumun tamamı her yerden erişime açılabilir, kaynak gösterilmek şartıyla bir kısmı ve ya tamamının fotokopisi alınabilir)

☐ **Tezimin/Raporumun ………….. tarihine kadar erişime açılmasını istemiyorum, ancak kaynak gösterilmek şartıyla bir kısmı veya tamamının fotokopisinin alınmasını onaylıyorum.**

☐ **Serbest Seçenek/Yazarın Seçimi**

12/06/2017

Ceren ÜNAL

ETİK

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında,

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversitede veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

12/06/2017

CEREN ÜNAL

ÖZET

BASİT VE TABAKALI RASTGELE ÖRNEKLEMEDE ÜSTEL FONKSİYONU KULLANAN KİTLE ORTALAMASI TAHMİN EDİCİLERİ

Ceren ÜNAL

Yüksek Lisans, İstatistik Bölümü

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Cem KADILAR

Haziran 2017,144 Sayfa

Bu tez çalışmasında Basit ve Tabakalı Rastgele Örnekleme yöntemlerinde kitle ortalaması tahmini için literatürde yer alan üstel fonksiyona sahip tahmin ediciler incelenmiştir. Her iki örnekleme yöntemi için üstel fonksiyona sahip tahmin edici aileleri önerilmiştir. Önerilen tahmin ediciler ile literatürde yer alan tahmin ediciler oransal veya çarpımsal olmalarına bağlı olarak karşılaştırılmıştır. Ayrıca, incelenen tahmin ediciler tek ve iki yardımcı değişken bilgisinden yararlanmalarına göre farklı veri setleri üzerinden sayısal gösterimleri gerçekleştirilmiştir. Çalışmanın sonucunda ise, elde edilen koşullar altında, önerilen tahmin edici ailelerinin karşılaştırılan tahmin edicilere göre daha etkin olduğu bulunmuştur.

Anahtar Kelimeler: Basit Rastgele Örnekleme, Tabakalı Rastgele Örnekleme, Üstel tip tahmin ediciler, Hata Kareler Ortalaması, Fark Yöntemi, Yardımcı değişken, Etkinlik

ABSTRACT

POPULATION MEAN ESTIMATORS USING EXPONENTIAL FUNCTION IN SIMPLE AND STRATIFIED RANDOM SAMPLINGS

Ceren ÜNAL

Master of Science, Department of Statistics

Supervisor: Prof. Dr. Cem KADILAR

June 2017,144 Pages

In this study, we investigated estimators with exponential functions for estimation of mean estimator in simple and stratified random samplings. Family of estimators based on the exponential function is proposed for both sampling methods. The proposed estimators are compared with ratio and product estimators in literature. Moreover, we provide an application on different data sets to demonstrate efficiency of the proposed estimators according to the information of one and two auxiliary variables. As a result of this study, the proposed estimators are more efficient than other estimators in literature under the obtained conditions in theory.

Keywords: Simple Random Sampling, Stratified Random Sampling, Exponential Type Estimators, Mean Square Error (MSE), First Order Approximation, Auxiliary Variables, Efficiency

TEŞEKKÜR

Tez konusunun seçiminde beni teşvik eden, çalışmanın her aşamasında önerileriyle beni yönlendiren, tecrübe ve deneyimlerinden yararlandığım değerli danışmanım ve hocam Sayın Prof. Dr. Cem KADILAR' a,

Tüm yardım ve destekleri için Sayın Dr. Hatice ÖNCEL ÇEKİM' e

Lisans ve Yüksek Lisans dönemlerimde bilgilerinden yararlandığım Hacettepe Üniversitesi İstatistik Bölümünde yer alan tüm hocalarıma teşekkürü bir borç bilirim.

Hayatım boyunca maddi ve manevi her zaman yanımda olan, varlıklarıyla güç veren, yol gösterip beni bu günlere getiren annem Serpil ÜNAL' a; babam Zati ÜNAL' a ve herkesten kıymetli olan canım kardeşim Cemre ÜNAL' a sonsuz teşekkürler…

İçindekiler

Sayfa

ÇİZELGELER

Sayfa

1. GİRİŞ

Kitle üzerinde çalışmak, araştırmacının zaman, para ve insan gücü bakımından zorluklarla karşılaşmasına sebep olabilir. Çoğu zaman kitlenin tamamına ulaşmak imkânsızdır. Bu durumlarla karşılaşmamak adına, kitleyi simgeleyebilecek nitelikte alt grup olan örneklemden yararlanılır. Amaç, kitle yapısına en uygun örnekleme yöntemi ile örneklemler seçme ve bu örneklemlerden yaralanarak kitle hakkında tahminler yapmaktır.

Çalışmamıza yönelik olarak ilgilendiğimiz örneklem seçme yöntemlerinden biri, Basit Rastgele Örnekleme (BRÖ) yöntemidir. BRÖ yöntemi en temel ve en yaygın olarak kullanılan örnekleme yöntemlerindendir. Bu yöntemde, örneklem uzayındaki her bir örneklem birimine eşit seçilme olasılığı tanınmaktadır. Seçilen örneklem birimi yerine konulmadan örneklem büyüklüğü elde edilene kadar bu işlem tekrar edilmektedir.

İlgilendiğimiz diğer bir örnekleme yöntemi ise Tabakalı Rastgele Örnekleme (TRÖ) yöntemidir. Bu örnekleme yönteminde, hiçbir kitle birimi açıkta kalmayacak şekilde kitle alt gruplara bölünür. Tabakalar arası değişim büyük; tabaka içi değişim ise küçük olacak şekilde her bir tabakaya BRÖ yöntemi uygulanması sonucunda, bu örnekleme yöntemi TRÖ yöntemi olarak adlandırılmaktadır. Bu yöntemde, heterojen olan bir kitlenin kendi içinde homojen tabakalara ayrılması, duyarlılığın artması anlamına gelmektedir.

Kitleyi simgeleyebilecek niteliğe sahip örneklemin çekim sürecinden sonra örneklemden kitle özelliklerini tahmin etme süreci gelmektedir. Seçilen örneklemden yararlanılarak, kitle özelliklerini tahmin etmek amacıyla tanımlanan matematiksel eşitliğe tahmin edici adı verilmektedir. Kitle parametrelerinin tahmininin, örneklem seçiminde kullanılan süreçle ilişkili olduğu unutulmamalıdır. Örneklemden yapılan tahminlerin iyi bir tahmin edici olabilmesi için ise; tutarlılık, yansızlık, etkinlik ve duyarlılık özelliklerini taşıması istenir.

Bahsedilen özelliklerden etkinlik, Hata Kareler Ortalamasının (HKO) küçük olması anlamına gelmektedir. Tahmin edici için; HKO ne kadar küçükse, o derece etkin olduğu söylenebilir. HKO, θ parametresinin $\hat{\theta}$ tahmin edicisi için,

$$HKO\left(\hat{\theta}\right)=E\left(\hat{\theta}-\theta\right)^2=V\left(\hat{\theta}\right)+\left(YAN\right)^2 \tag{1.1}$$

olarak tanımlanmaktadır [1].

(1.1) eşitliğinden görüleceği üzere, yansız tahmin edicilerin varyansı ile HKO aynı anlama gelmektedir. Çalışmamızda, tahmin edicilerin HKO eşitliğinin bulunmasında Fark Yönteminden yararlanılmıştır. Taylor Serisi Yöntemi gibi Fark Yöntemi de doğrusal olmayan tahmin edicilerin yan ve HKO eşitliğinin bulunmasında kullanılmaktadır [1].

Fark Yöntemi için, BRÖ yönteminde,

$$\begin{aligned} e_y &= \frac{\bar{y}-\bar{Y}}{\bar{Y}} \rightarrow \bar{y} = \bar{Y}\left(1+e_y\right) \\ e_x &= \frac{\bar{x}-\bar{X}}{\bar{X}} \rightarrow \bar{x} = \bar{X}\left(1+e_x\right) \\ e_z &= \frac{\bar{z}-\bar{Z}}{\bar{Z}} \rightarrow \bar{z} = \bar{Z}\left(1+e_z\right) \end{aligned} \tag{1.2}$$

değişken sayısı kadar fark terimi tanımlanmaktadır. Beklenen değer, karelerinin beklenen değerleri ve kovaryans eşitlikleri gösterimi,

$$f = \frac{n}{N} \qquad \gamma = \frac{1-f}{n} \qquad R = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} \tag{1.3}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} & E\left(e_x\right) = E\left(e_y\right) = E\left(e_z\right) = 0 \\ & E\left(e_x^2\right) = \frac{1-f}{n}C_x^2 \qquad E\left(e_y^2\right) = \frac{1-f}{n}C_y^2 \qquad E\left(e_z^2\right) = \frac{1-f}{n}C_z^2 \\ & E\left(e_y e_x\right) = \frac{1-f}{n}\rho_{yx}C_yC_x \quad E\left(e_y e_z\right) = \frac{1-f}{n}\rho_{yz}C_yC_z \quad E\left(e_x e_z\right) = \frac{1-f}{n}\rho_{xz}C_xC_z \end{aligned} \tag{1.4}$$

(1.3)'de yer alan ifadelerden yararlanılarak (1.4) eşitliğindeki gibi ifade edilmektedir. TRÖ yönteminde ise benzer şekilde,

$$f = \frac{n_h}{N_h} \qquad \gamma = \frac{1-f_h}{n_h} \qquad R = \frac{\bar{Y}_{st}}{\bar{X}_{st}} \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned} e_y &= \frac{\bar{y}_{st}-\bar{Y}}{\bar{Y}} \rightarrow \bar{y}_{st} = \bar{Y}\left(1+e_y\right) \\ e_x &= \frac{\bar{x}_{st}-\bar{X}}{\bar{X}} \rightarrow \bar{x}_{st} = \bar{X}\left(1+e_x\right) \\ e_z &= \frac{\bar{z}_{st}-\bar{Z}}{\bar{Z}} \rightarrow \bar{z}_{st} = \bar{Z}\left(1+e_z\right) \end{aligned} \tag{1.6}$$

ve

$$E(e_x)=E(e_y)=E(e_z)=0$$

$$E(e_x^2)=\frac{1}{\overline{X}^2}\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h S_{xh}^2 \qquad E(e_y^2)=\frac{1}{\overline{Y}^2}\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h S_{yh}^2 \qquad E(e_z^2)=\frac{1}{\overline{Z}^2}\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h S_{zh}^2 \tag{1.7}$$

$$E(e_y e_x)=\frac{1}{\overline{Y}\overline{X}}\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h S_{yxh} \quad E(e_y e_z)=\frac{1}{\overline{Y}\overline{Z}}\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h S_{yzh} \quad E(e_x e_z)=\frac{1}{\overline{X}\overline{Z}}\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h S_{xzh}$$

(1.6) ve (1.7) eşitliklerinden yararlanılarak işlemler yapılır.

Tahmin edicilerin taşıması istenen özellikleri yukarıda sıralanmıştı. Bahsedilen özellikler arasında duyarlılık özelliği,

$$duyarlılık=\frac{1}{V(\hat{\theta})} \tag{1.8}$$

olarak tanımlanmaktadır. (1.8) eşitliğinden de anlaşılacağı üzere, tahmin edici için elde edilen varyans ne kadar küçükse o derece de duyarlı olduğu sonucuna ulaşılmaktadır. Bu noktadaki amaç ise, yüksek duyarlılığa ve etkinliğe sahip kitle parametreleri tahmini yapmaktır. Yardımcı değişken bilgisinden faydalanmak ise duyarlılığın ve etkinliğin artmasını sağlamaktadır.

Yardımcı değişken aynı zamanda ilgilenilen tahmin edici türünde de rol oynamaktadır. İlgilenilen değişken (y) ile yardımcı değişken (x) arasındaki ilişkinin düzeyine bağlı olarak, tahmin edici türleri kullanılmaktadır. İlgilenilen değişken (y) ve yardımcı değişken olan (x) değişkenleri arasındaki ilişki doğrusal ve orijinden geçiyor ise, bu aşamada;

- Değişkenler arasındaki ilişki pozitif olduğu durumlarda oransal tahmin ediciler [2]
- Değişkenler arasındaki ilişki negatif olduğu durumlarda çarpımsal tahmin ediciler [3]

dikkate alınmalıdır. Belirtilen durumda, ilişki doğrusal ve orijinden geçiyor ise, oransal ve çarpımsal tahmin ediciler klasik regresyon tahmin edicisi ile aynı etkinliğe sahiptir. Ancak, çoğu zaman bu durum sağlanamamaktadır ve bahsedilen tahmin edicilerin etkinliği benzer olmamaktadır.

Bu noktada yeni bir bakış açısı olan üstel fonksiyon içeren kitle ortalaması tahmin edicileri, üstel oransal ve üstel çarpımsal olmak üzere Bahl ve Tuteja [4] tarafından önerilmiştir [5]. Bu çalışma, kitle ortalaması tahmininde üstel tip tahmin ediciler açısından temel teşkil etmektedir. Bu çalışma dikkate alınarak, son dönemde önerilen üstel tip tahmin ediciler popüler olarak kullanılmaktadır.

Bu bilgilerden yola çıkarak, çalışmamızın amacı literatürde yer alan BRÖ ve TRÖ yöntemlerinde üstel fonksiyonu kullanan kitle ortalaması tahmin edicilerinin teorik ve sayısal gösterimli olarak incelenmesi olmak üzere, bu tez çalışmasında,

2. Bölümde, tahmin edicilerin etkinlik karşılaştırmasında yer alan oransal, çarpımsal ve regresyon tahmin edicilerinden ve konuyla alakalı genel bilgilerden bahsedilmiştir.

3. Bölümde BRÖ yönteminde yer alan üstel fonksiyona sahip literatürdeki kitle ortalaması tahmin edicileri, tek ve iki yardımcı değişken bilgisinden yararlanmalarına bağlı olarak incelenmiş, oransal ve çarpımsal olmalarına bağlı olarak etkinlik karşılaştırmaları yapılmıştır. Benzer adımlar 4. Bölümde TRÖ yöntemi için gerçekleştirilmiştir.

5. Bölümde ve 6. Bölümde sırasıyla, kitle ortalaması için BRÖ ve TRÖ yöntemlerinde yardımcı değişken bilgisi kullanarak üstel tip tahmin edici aileleri önerilmiştir. Önerilen tahmin edicilerin etkinlik karşılaştırması yapılmış ve teorik olarak belli koşulların sağlanması durumunda, karşılaştırılan tahmin edicilere göre daha etkin olduğu sonucuna varılmıştır.

7. Bölümde, BRÖ yönteminde; 8. Bölümde ise TRÖ yönteminde incelenen tahmin ediciler ve önerilen tahmin edici aileleri için sayısal gösterim yapılmıştır. Literatür çalışmasında verilen tahmin ediciler, tek ve iki yardımcı değişken bilgisine sahip olmalarına bağlı olarak farklı veri setlerinden yararlanılmıştır. 5. ve 6. Bölümde teorik olarak elde edilen sonuçlar, bu bölümlerde sayısal gösterimli olarak gösterilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

Önceki bölümde, ilgilenilen örnekleme yöntemleri ile yardımcı değişken hakkında kısaca bahsedilmişti. Bu bölümde, BRÖ ve TRÖ yöntemlerinde, tek ve iki yardımcı değişken bilgisinden faydalanmalarına bağlı olarak temel olan oransal, çarpımsal ve regresyon tahmin edicilerinden bahsedilecektir. İncelenecek olan bu tahmin ediciler, ileriki bölümlerde literatürde yer alan tahmin ediciler ve önerilen tahmin edici ailelerinin etkinlik karşılaştırmasında yeniden karşımıza çıkacaktır. Bu nedenle, bu tahmin ediciler sırasıyla BRÖ ve TRÖ yöntemlerine göre detaylı olarak bu bölümde incelenecektir.

2.1. BRÖ Yöntemi için Genel Bilgiler

BRÖ yönteminde, $S = (S_1, S_2, ..., S_N)$ kümesi N boyutlu sonlu kitleyi göstersin. Yerine konmadan n boyutlu örneklem, S kitlesinden BRÖ yöntemi ile seçilsin ve (y_i, x_i), $(i = 1, 2, ..., N)$ sırasıyla ilgilenilen değişken ve yardımcı değişkeni göstersin.

Bu değişkenlere ait kitle bilgileri

$$X = \sum_{i=1}^{N} x_i \quad Y = \sum_{i=1}^{N} y_i$$
$$\bar{X} = \frac{X}{N} \quad \bar{Y} = \frac{Y}{N} \tag{2.1}$$

olmak üzere, örnekleme ait bilgiler ise

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i \quad y = \sum_{i=1}^{n} y_i$$
$$\bar{x} = \frac{x}{n} \quad \bar{y} = \frac{y}{n} \tag{2.2}$$

biçiminde verilmektedir [6].

BRÖ yöntemi için ilk olarak tek yardımcı değişken bilgisinden yararlanılan klasik oransal, klasik çarpımsal ve regresyon tahmin edicilerinden; devamında ise iki yardımcı değişken bilgisinden yararlanılan klasik oransal, klasik çarpımsal ve regresyon tahmin ediciler incelenecektir.

İlk olarak, Cochran [7] klasik oransal tahmin ediciyi

$$t_R = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} \bar{X} \tag{2.3}$$

olarak önermiştir. Önerilen tahmin edicinin HKO hesaplanmasında Fark Yöntemi ile

$$HKO(t_R) = \gamma \bar{Y}^2 \left(C_y^2 - 2C_{xy} + C_x^2 \right) \tag{2.4}$$

biçiminde elde edilmiştir. Burada C_y^2 ve C_x^2 ifadeleri

$$C_y^2 = \frac{S_y^2}{\bar{Y}^2} \quad C_x^2 = \frac{S_x^2}{\bar{X}^2} \tag{2.5}$$

biçimindedir.

Bu eşitliklerinden yararlanılarak,

$$\begin{gathered} R = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} \quad S_x^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} \left(x_i - \bar{X} \right)^2 \quad S_y^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} \left(y_i - \bar{Y} \right)^2 \\ S_{yx} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} \left(y_i - \bar{Y} \right) \left(x_i - \bar{X} \right) \end{gathered} \tag{2.6}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} HKO(t_R) &= \gamma \bar{Y}^2 \left(C_y^2 - 2C_{xy} + C_x^2 \right) \\ &= \gamma \bar{Y}^2 \left(\frac{C_y^2}{\bar{Y}^2} - 2 \frac{C_{xy}}{\bar{Y}\bar{X}} + \frac{C_x^2}{\bar{X}^2} \right) \\ &= \gamma \left(S_y^2 - 2RS_{xy} + R^2 S_x^2 \right) \end{aligned} \tag{2.7}$$

dır. (2.4) eşitliğinde elde edilen HKO, tekrar düzenlenerek (2.7) eşitliğindeki gibi yazılabilmektedir.

Klasik çarpımsal tahmin edici t_P ise Robson [3] tarafından

$$t_P = \frac{\bar{y}}{\bar{X}} \bar{x} \tag{2.8}$$

olarak tanımlanmıştır ve önerilen klasik çarpımsal tahmin edicinin HKO eşitliği

$$HKO(t_P) = \gamma \bar{Y}^2 \left(C_y^2 + 2C_{xy} + C_x^2 \right) \tag{2.9}$$

biçimindedir.

Benzer şekilde, (2.9) eşitliği,

$$HKO\left(t_P\right) = \gamma\left(S_y^2 + 2RS_{xy} + R^2 S_x^2\right) \tag{2.10}$$

biçiminde yeniden ifade edilebilmektedir.

Etkinlik karşılaştırmasında yer alan regresyon tahmin edicisi ise Cochran [2] tarafından b regresyon katsayısı olmak üzere

$$t_{reg} = \bar{y} + b\left(\bar{X} - \bar{x}\right) \tag{2.11}$$

biçiminde tanımlanmış ve

$$HKO\left(t_{reg}\right) = \gamma \bar{Y}^2 C_y^2 \left(1 - \rho_{xy}^2\right) \tag{2.12}$$

biçiminde elde edilmiştir.

Srivenkataramana [8] 1980 yılındaki çalışmasında,

$$g = \frac{n}{N-n}, \qquad \bar{x}^* = \frac{\left(N\bar{X} - n\bar{x}\right)}{\left(N-n\right)} \tag{2.13}$$

olmak üzere

$$t_{R*} = \frac{\bar{y}}{\bar{X}} \bar{x}^* \tag{2.14}$$

biçiminde t_{R*} oransal tahmin edicisini benzer dönüşüm kullanılarak çarpımsal tahmin edicisini de

$$t_{P*} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}^*} \bar{X} \tag{2.15}$$

biçiminde önermiştir. Önerilen tahmin edicilerin Hata Kareler Ortalamaları (HKO), sırasıyla

$$HKO\left(t_{R*}\right) = \gamma \bar{Y}^2 \left(C_y^2 + g^2 C_x^2 - 2gC_{yx}\right) \tag{2.16}$$

$$HKO\left(t_{P*}\right) = \gamma \bar{Y}^2 \left(C_y^2 + g^2 C_x^2 + 2gC_{yx}\right) \tag{2.17}$$

biçiminde elde edilmiştir.

BRÖ yönteminde iki yardımcı değişken bilgisinden yararlanan klasik oransal, klasik çarpımsal ve regresyon tahmin edicilerinden ilk olarak, klasik oransal Singh [9] tarafından

$$t_{RR} = \bar{y} \frac{\bar{X}}{\bar{x}} \frac{\bar{Z}}{\bar{z}} \tag{2.18}$$

biçiminde ifade edilen t_{RR} tahmin edicisi için

$$HKO\left(t_{RR}\right)=\gamma\bar{Y}^{2}\left[C_y^2+C_x^2-2C_{yx}+C_z^2-2C_{yz}+2C_{xz}\right] \tag{2.19}$$

şeklinde verilmiştir.

Aynı çalışmada önerilen klasik çarpımsal tahmin edicisi

$$t_{PP}=\bar{y}\frac{\bar{x}}{\bar{X}}\frac{\bar{z}}{\bar{Z}} \tag{2.20}$$

olarak tanımlanmış ve

$$HKO\left(t_{PP}\right)=\gamma\bar{Y}^{2}\left[C_y^2+C_x^2+2C_{yx}+C_z^2+2C_{yz}+2C_{xz}\right] \tag{2.21}$$

elde edilmiştir.

BRÖ yönteminde incelenecek son tahmin edici ise, iki yardımcı değişken bilgisinden yararlanılan regresyon tahmin edicisidir. Bu tahmin edici Sharma ve Singh [10] çalışmasında

$$t_{reg2}=\bar{y}+b_1\left(\bar{X}-\bar{x}\right)+b_2\left(\bar{Z}-\bar{z}\right) \tag{2.22}$$

olarak tanımlanmış ve

$$HKO\left(t_{reg2}\right)=\gamma\bar{Y}^{2}\left[C_y^2\left(1-\rho_{yx}^2-\rho_{yz}^2+2\rho_{yx}\rho_{yz}\rho_{xz}\right)\right] \tag{2.23}$$

biçiminde bulunmuştur.

2.2. TRÖ Yöntemi için Genel Bilgiler

Önceki bölümde, TRÖ yöntemi ile ilgili kısaca bilgi verilmişti. Bu örnekleme yöntemine ait önemli bir nokta, heterojen olan kitlenin homojen olan tabakalara ayrılarak duyarlılıktaki kayıp miktarının azaltılmasıdır. TRÖ yönteminde, N büyüklüğünde sonlu $U=\left(U_1,U_2,...,U_N\right)$ kitlesini ele alalım. $h\,(h=1,2,...,L)$ tabaka olmak üzere, N büyüklüğündeki heterojen kitle N_h büyüklüğünde olan L homojen tabakaya $N_h\left(h=1,2,...,L\right)$ ayrılsın, $N=\sum_{h=1}^{L}N_h$. y_{hi} ve x_{hi} $\left(h=1,2,...,L;i=1,2,...,N_h\right)$ sırasıyla h. tabaka i. birimdeki ilgilenilen değişken ve yardımcı değişkeni göstersin. Homojen tabakalara BRÖ uygulayarak N_h büyüklüğünde olan tabakalardan n_h büyüklüğünde örneklem seçilsin, $n=\sum_{h=1}^{L}n_h$.

Tabaka ağırlığı $W_h = \dfrac{N_h}{N}$ olmak üzere,

$$\overline{Y}_h = \frac{1}{N_h}\sum_{i=1}^{N_h} y_{hi}$$
$$\overline{X}_h = \frac{1}{N_h}\sum_{i=1}^{N_h} x_{hi} \tag{2.24}$$

olup, yardımcı değişkenin h. tabakada kitle ortalamaları

$$\overline{Y} = \overline{Y}_{st} = \sum_{h=1}^{L} W_h \overline{Y}_h$$
$$\overline{X} = \overline{X}_{st} = \sum_{h=1}^{L} W_h \overline{X}_h \tag{2.25}$$

biçiminde olmaktadır. Benzer eşitlikler örneklem için

$$\overline{y}_h = \frac{1}{n_h}\sum_{i=1}^{n_h} y_{hi}$$
$$\overline{x}_h = \frac{1}{n_h}\sum_{i=1}^{n_h} x_{hi} \tag{2.26}$$

şeklindedir. Ortalama tahminleri ise

$$\overline{y} = \overline{y}_{st} = \sum_{h=1}^{L} W_h \overline{y}_h$$
$$\overline{x} = \overline{x}_{st} = \sum_{h=1}^{L} W_h \overline{x}_h \tag{2.27}$$

biçimindedir [6].

TRÖ yöntemi içinde ilk olarak tek yardımcı değişken bilgisinden yararlanan tahmin ediciler incelenecek, devamında ise iki yardımcı değişken bilgisinden yararlanan benzer tahmin ediciler incelenecektir.

Hansen ve diğerleri [11], kitle ortalaması tahmini için klasik oransal tahmin ediciyi

$$t_{R(st)} = \frac{\overline{y}_{st}}{\overline{x}_{st}}\overline{X} \tag{2.28}$$

olarak önermişler ve bu tahmin edicinin HKO'sunu

$$HKO\left(t_{R(st)}\right) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 + R^2 S_{xh}^2 - 2RS_{yxh}\right) \tag{2.29}$$

biçiminde elde etmişlerdir. Burada

$$S_{xh}^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{h=1}^{L}\sum_{i=1}^{N_h}\left(X_{hi}-\bar{X}_h\right)^2 \quad S_{yh}^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{h=1}^{L}\sum_{i=1}^{N_h}\left(Y_{hi}-\bar{Y}_h\right)^2$$
$$R = \frac{\bar{Y}_{st}}{\bar{X}_{st}} \qquad S_{yxh} = \frac{1}{N-1}\sum_{h=1}^{L}\sum_{i=1}^{N_h}\left(Y_{hi}-\bar{Y}_h\right)\left(X_{hi}-\bar{X}_h\right) \tag{2.30}$$

olarak tanımlanmaktadır. Aynı çalışmada, klasik oransal tahmin edicinin yanı sıra çarpımsal tahmin edici de önerilmiştir. Önerilen $t_{P(st)}$ tahmin edicisi

$$t_{P(st)} = \frac{\bar{y}_{st}}{\bar{X}}\bar{x}_{st} \tag{2.31}$$

olarak tanımlanmıştır. Tahmin edici için bulunan HKO,

$$HKO\left(t_{P(st)}\right) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 + R^2 S_{xh}^2 + 2RS_{yxh}\right) \tag{2.32}$$

biçimindedir.

TRÖ yönteminde regresyon tahmin edicisi

$$t_{reg(st)} = \bar{y}_{st} + b_c\left(\bar{X} - \bar{x}_{st}\right) \tag{2.33}$$

olarak tanımlanmıştır [11]. Burada, b_c TRÖ yöntemi için regresyon katsayısını göstermek üzere,

$$HKO\left(t_{reg(st)}\right) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h S_{yh}^2 \left(1-\rho_c^2\right) \tag{2.34}$$

biçimindedir. Burada, ρ_c^2 ifadesi

$$\rho_c^2 = \frac{\left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \rho_h S_{yh} S_{xh}\right)^2}{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h S_{yh}^2 \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h S_{xh}^2} \tag{2.35}$$

biçiminde gösterilmektedir.

Srivenkataramana [8], çalışmasında yer alan

$$g_h = \frac{n_h}{N_h - n_h} \qquad \bar{x}_{st}^* = \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{x}_h^* \qquad \bar{x}_h^* = \frac{\left(N_h \bar{X}_h - n_h \bar{x}_h\right)}{\left(N_h - n_h\right)} \tag{2.36}$$

dönüşümlerinden yararlanılarak, Kushwaha [12], TRÖ yöntemi için

$$t_{R*(st)} = \frac{\bar{y}_{st}}{\bar{X}}\bar{x}_{st}^* \tag{2.37}$$

biçiminde oransal tahmin edicisini, aynı dönüşüm kullanılarak çarpımsal tahmin edicisini

$$t_{P*(st)} = \frac{\bar{y}_{st}}{\bar{x}^{*}_{st}} \bar{X} \tag{2.38}$$

biçiminde vermiştir. Bu tahmin edicilerin HKO eşitlikleri ise sırasıyla

$$HKO\left(t_{R*(st)}\right) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 + R^2 g_h^2 S_{xh}^2 - 2Rg_h S_{yxh}\right) \tag{2.39}$$

$$HKO\left(t_{P*(st)}\right) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 + R^2 g_h^2 S_{xh}^2 + 2Rg_h S_{yxh}\right) \tag{2.40}$$

biçiminde elde edilmiştir.

Tek yardımcı değişken bilgisinden yararlanan tahmin edicilerin devamında, iki yardımcı değişken bilgisinden yararlanan klasik oransal, klasik çarpımsal ve regresyon tahmin edicileri incelemesi yapılacaktır.

İlk olarak, Koyuncu ve Kadılar [13], iki yardımcı değişken bilgisinden yararlanarak klasik oransal tahmin edicisini,

$$t_{RR(st)} = \bar{y}_{st} \frac{\bar{X}}{\bar{x}_{st}} \frac{\bar{Z}}{\bar{z}_{st}} \tag{2.41}$$

biçiminde ve klasik çarpımsal tahmin edicisini ise

$$t_{PP(st)} = \bar{y}_{st} \frac{\bar{x}_{st}}{\bar{X}} \frac{\bar{z}_{st}}{\bar{Z}} \tag{2.42}$$

biçiminde tanımlamışlardır. Önerilen tahmin edicilerin HKO eşitlikleri

$$R_1 = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} = \frac{\bar{Y}_{st}}{\bar{X}_{st}} \qquad R_2 = \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} = \frac{\bar{Y}_{st}}{\bar{Z}_{st}} \tag{2.43}$$

olmak üzere, sırasıyla

$$HKO\left(t_{RR(st)}\right) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left[S_{yh}^2 + R_1^2 S_{xh}^2 + R_2^2 S_{zh}^2 - 2R_1 S_{yxh} + 2R_1 R_2 S_{xzh} - 2R_2 S_{yzh}\right] \tag{2.44}$$

$$HKO\left(t_{PP(st)}\right) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left[S_{yh}^2 + R_1^2 S_{xh}^2 + R_2^2 S_{zh}^2 + 2R_1 S_{yxh} + 2R_1 R_2 S_{xzh} + 2R_2 S_{yzh}\right] \tag{2.45}$$

biçimindedir.

TRÖ yönteminde incelenecek son tahmin edici ise, iki yardımcı değişken bilgisinden yararlanılan regresyon tahmin edicisidir. Bu tahmin edici

$$t_{reg2(st)} = \bar{y}_{st} + b_1\left(\bar{X} - \bar{x}_{st}\right) + b_2\left(\bar{Z} - \bar{z}_{st}\right) \tag{2.46}$$

biçimindedir. Bu tahmin edicinin HKO eşitliği

$$HKO\left(t_{reg2}\right) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h S_{yh}^2 \left(1 - \rho_{yxh}^2 - \rho_{yzh}^2 + 2\rho_{yxh}\rho_{yzh}\rho_{xzh}\right) \tag{2.47}$$

biçiminde elde edilmiştir.

3. BASİT RASTGELE ÖRNEKLEMEDEKİ TAHMİN EDİCİLER

Basit Rastgele Örnekleme (BRÖ) yönteminde, kitle ortalaması tahmini için birçok üstel tahmin edici önerilmiştir. İncelenen üstel tahmin ediciler, tek yardımcı değişken (x) ve iki yardımcı değişken (x) (z) bilgisini kullanmasına bağlı olarak, alt bölümlerde verilmiştir. İncelemeye ilk olarak tek yardımcı değişken bilgisini kullanan, sonrasında ise iki yardımcı değişken bilgisini kullanan üstel tahmin edicilerle devam edilecektir.

3.1. BRÖ Yönteminde Tek Yardımcı Değişken Bilgisini Kullanan Üstel Tahmin Ediciler

Bu alt bölümde, BRÖ yönteminde literatürdeki kitle ortalaması tahmini için tek yardımcı değişken bilgisini kullanan üstel tahmin ediciler incelenecektir. Tahmin edici incelemesine; temel olarak alınan Bahl ve Tuteja [4] tarafından önerilen üstel oransal ve üstel çarpımsal tahmin ediciler ile başlanılacaktır. Devamında ise, bahsedilen tahmin ediciler için etkinlik karşılaştırılması yapılacaktır.

İlk olarak, Bahl ve Tuteja [4] oransal tahmin edicisini,

$$t_{BT} = \bar{y}exp\left(\frac{\bar{X}-\bar{x}}{\bar{X}+\bar{x}}\right) \tag{3.1}$$

olarak önermişler ve elde edilen HKO eşitliğini

$$C = \rho_{xy}\frac{C_y}{C_x}$$

olmak üzere

$$HKO(t_{BT}) = \bar{Y}^2\gamma\left[C_y^2 + \frac{C_x^2}{4}(1-4C)\right] \tag{3.2}$$

biçiminde vermişlerdir. Önerdikleri çarpımsal tahmin edici

$$t_{TB} = \bar{y}exp\left(\frac{\bar{x}-\bar{X}}{\bar{x}+\bar{X}}\right) \tag{3.3}$$

olup HKO'sunu

$$HKO(t_{TB}) = \bar{Y}^2\gamma\left[C_y^2 + \frac{C_x^2}{4}(1+4C)\right] \tag{3.4}$$

olarak elde etmişlerdir.

Literatürde yer alan BRÖ yönteminde tek yardımcı değişken bilgisinden yararlanan tahmin edicilerin incelemesine, sırasıyla oransal tahmin ediciler ile devam edilecektir.

Singh ve diğerleri [14] tarafından önerilen t_{SCSS} tahmin edici ailesi,

$$t_{SCSS} = \bar{y}\exp\left[\frac{\left(a\bar{X}+b\right)-\left(a\bar{x}+b\right)}{\left(a\bar{X}+b\right)+\left(a\bar{x}+b\right)}\right] \tag{3.5}$$

olarak taraflarınca önerilmiştir. Önerilen tahmin edici için, $\beta_2(x)$ (basıklık katsayısı), C_x (değişim katsayısı) ve ρ (korelasyon katsayısı) yardımcı değişken bilgisinden yararlanılarak $\theta_{2,i} = \dfrac{a_i\bar{X}}{2\left(a_i\bar{X}+b_i\right)}$, $i = 1, 2, ..., 10$ tanımlanmış ve kullanılan a_i ve b_i değerleri Çizelge 3.1'de gösterilmektedir.

Çizelge 3.1 Teta Tablosu

θ	a	b
θ_1	1	1
θ_2	1	$\beta_2(x)$
θ_3	1	C_x
θ_4	1	ρ
θ_5	$\beta_2(x)$	C_x
θ_6	C_x	$\beta_2(x)$
θ_7	C_x	ρ
θ_8	ρ	C_x
θ_9	$\beta_2(x)$	ρ
θ_{10}	ρ	$\beta_2(x)$

Çizelge 3.1 dikkatle incelendiğinde, bu tahmin edici ailesinin, $a = 1$ ve $b = 1$ olduğu durumda, Bahl ve Tuteja [4] tarafından önerilen klasik oransal tahmin edicisiyle aynı olduğu görülmektedir.

Bu tahmin edicinin HKO ise,

$$HKO\left(t_{SCSS}\right) = \bar{Y}^2\gamma\left(C_y^2+\theta_{2,i}^2C_x^2-2\theta_{2,i}\rho_{xy}C_xC_y\right) \tag{3.6}$$

biçiminde elde edilmektedir.

Singh ve diğerleri [14] t_{SCSS} oransal tahmin edicinin yanı sıra, t^*_{SCSS} tahmin edici ailesini

$$t^*_{SCSS} = \alpha t_{SCSS,1} + (1-\alpha) t_{SCSS,i}, \ i = 1,2,...,10 \tag{3.7}$$

biçiminde önermişlerdir. Burada α , HKO'yu minimum yapan sabit bir sayıdır. Aynı zamanda, (3.7) eşitliğinde $t_{SCSS,1}$ yerine konulduğunda,

$$t^*_{SCSS} = \alpha \bar{y} \exp\left(\frac{\bar{X} - \bar{x}}{\bar{X} + \bar{x}} \right) + (1-\alpha) t_{SCSS,i}, \ i = 1,2,...,10 \tag{3.8}$$

biçiminde elde edilmektedir ve

$$HKO\left(t^*_{SCSS}\right) = \bar{Y}^2 \gamma \left(C_y^2 + C_x^2 \left(\frac{\alpha}{2} + \theta_{2,i} - \alpha\theta_{2,i} \right)^2 - 2\rho_{xy} C_x C_y \left(\frac{\alpha}{2} + \theta_{2,i} - \alpha\theta_{2,i} \right) \right) \tag{3.9}$$

olmaktadır. Burada optimum α değeri

$$\alpha^* = \frac{2\left(\rho \frac{C_y}{C_x} - \theta_{2,i} \right)}{\left(1 - 2\theta_{2,i}\right)}$$

olmakta ve (3.9) eşitliğinde yerine konduğunda

$$HKO_{\min}\left(t^*_{SCSS}\right) = \bar{Y}^2 \gamma C_y^2 \left(1 - \rho_{xy}^2\right) = HKO\left(t_{reg}\right) \tag{3.10}$$

elde edilmektedir ve bu eşitliğin, klasik regresyon tahmin edicisinin HKO'suna eşit olduğu gözden kaçırılmamalıdır.

Yadav ve Kadılar [15] tarafından önerilen üstel tahmin edici ailesi aşağıda yer almaktadır. k, $HKO(t_{YK})$'sı minimum yapan sabit bir sayı; a ve b ise $\beta_2(x)$ (basıklık katsayısı), C_x (değişim katsayısı) ve ρ (korelasyon katsayısı) gibi yardımcı değişken bilgisi olmak üzere, Çizelge 3.1'de yer alan teta $\left(\theta_{2,i}\right)$, $i = 1,2,...,10$ değerlerinden yararlanılmıştır.

$$t_{YK} = k\bar{y} \exp\left[\frac{\left(a\bar{X} + b\right) - \left(a\bar{x} + b\right)}{\left(a\bar{X} + b\right) + \left(a\bar{x} + b\right)} \right] \tag{3.11}$$

Önerilen t_{YK} üstel tahmin edicisi için

$$\theta_{2,i} = \frac{a_i \bar{X}}{2\left(a_i \bar{X} + b_i\right)}, \ i = 1,2,...,10$$

olmak üzere,

$$HKO(t_{YK}) = \bar{Y}^2 \gamma \left[(k-1)^2 + k^2 C_y^2 + \theta_{2,i}^2 C_x^2 \left(5k^2 - 4k\right) - 2\theta_{2,i} \rho_{xy} C_x C_y \left(2k^2 - k\right) \right], i = 1,...,10 \tag{3.12}$$

biçimindedir.

Eşitlik (3.11)'de verilen tahmin edici için optimum k değeri,

$$k^{*}=\frac{\gamma\left(2\theta_{2,i}^{2}C_{x}^{2}-\theta_{2,i}\rho_{xy}C_{x}C_{y}\right)+1}{\gamma\left(C_{y}^{2}+5\theta_{2,i}^{2}C_{x}^{2}-4\theta_{2,i}\rho_{xy}C_{x}C_{y}\right)+1} \tag{3.13}$$

biçiminde hesaplanmaktadır. Bulunan k^{*} değeri (3.12) eşitliğinde yerine konularak,

$$HKO_{\min}\left(t_{YK}\right)=\gamma\bar{Y}^{2}\left[1-\frac{\left(\gamma\left(2\theta_{2,i}^{2}C_{x}^{2}-\theta_{2,i}\rho_{xy}C_{x}C_{y}\right)+1\right)^{2}}{\gamma\left(C_{y}^{2}+5\theta_{2,i}^{2}C_{x}^{2}-4\theta_{2,i}\rho_{xy}C_{x}C_{y}\right)+1}\right],\; i=1,2,...,10 \tag{3.14}$$

elde edilmektedir. (3.14) eşitliğini daha kısa bir şekilde gösterebilmek amacıyla

$$A_{YK}=\left[\gamma\left(2\theta_{2,i}^{2}C_{x}^{2}-\theta_{2,i}\rho_{xy}C_{x}C_{y}\right)+1\right],\quad B_{YK}=\left[\gamma\left(C_{y}^{2}+5\theta_{2,i}^{2}C_{x}^{2}-4\theta_{2,i}\rho_{xy}C_{x}C_{y}\right)+1\right] \tag{3.15}$$

olsun. Bu durumda, (3.14) eşitliği

$$HKO_{\min}\left(t_{YK}\right)=\bar{Y}^{2}\gamma\left[1-\frac{A_{YK}^{2}}{B_{YK}}\right] \tag{3.16}$$

biçiminde de yazılabilmektedir.

Ekpenyong ve Enang [16]

$$\gamma_{1}=1+\gamma C_{y}^{2}\quad \gamma_{2}=C_{x}^{2}\gamma\left(\rho_{xy}\frac{C_{y}}{C_{x}}-\frac{1}{2}\right)\quad \gamma_{3}=\frac{\gamma C_{x}^{2}}{2}\quad \gamma_{4}=\gamma C_{x}^{2}\quad \gamma_{5}=\gamma C_{x}^{2}\left(\rho_{xy}\frac{C_{y}}{C_{x}}-1\right) \tag{3.17}$$

sembollerini kullanarak iki oransal tahmin edici önermişlerdir.

İlk tahmin edici, θ_1 ve θ_2 sabitler olmak üzere,

$$t_{EE1}=\theta_{1}\bar{y}+\theta_{2}\left(\bar{X}-\bar{x}\right)\exp\left(\frac{\bar{X}-\bar{x}}{\bar{X}+\bar{x}}\right) \tag{3.18}$$

biçimindedir. Gerekli işlemler yapılarak,

$$HKO\left(t_{EE1}\right)=\bar{Y}^{2}\left(1+\theta_{1}^{2}\gamma_{1}-2\theta_{1}-2\theta_{1}\theta_{2}m\gamma_{2}-2\theta_{2}m\gamma_{3}+\theta_{2}^{2}m^{2}\gamma_{4}\right) \tag{3.19}$$

biçiminde elde edilmiştir.

HKO elde edildikten sonra, tahmin edicide yer alan θ_1 ve θ_2 sabitlerine göre türev alınarak, optimum değerlerine ulaşılmaktadır. Bulunan sonuçlar aşağıda yer almaktadır.

$$\theta_{1}^{*}=\frac{\gamma_{4}+\gamma_{2}\gamma_{3}}{\gamma_{1}\gamma_{4}-\gamma_{2}^{2}},\qquad \theta_{2}^{*}=\frac{\gamma_{2}+\gamma_{1}\gamma_{3}}{m\left(\gamma_{1}\gamma_{4}-\gamma_{2}^{2}\right)} \tag{3.20}$$

θ_1^{*} ve θ_2^{*} değerleri (3.19) eşitliğinde yerine konarak,

$$HKO_{\min}\left(t_{EE1}\right)=\bar{Y}^{2}\gamma\left[1-\left(\frac{\gamma_{4}+2\gamma_{2}\gamma_{3}+\gamma_{1}\gamma_{3}^{2}}{\gamma_{1}\gamma_{4}-\gamma_{2}^{2}}\right)\right] \tag{3.21}$$

biçiminde bulunmuştur. (3.21) eşitliği,

$$\left(\frac{\gamma_4 + 2\gamma_2\gamma_3 + \gamma_1\gamma_3^2}{\gamma_1\gamma_4 - \gamma_2^2}\right) = q_1 \tag{3.22}$$

olmak üzere yeniden düzenlendiğinde,

$$HKO_{\min}\left(t_{EE1}\right) = \bar{Y}^2\gamma\left[1 - q_1\right] \tag{3.23}$$

elde edilmiştir.

Önerdikleri ikinci tahmin edici ise,

$$t_{EE2} = \varphi_1\bar{y} + \varphi_2\left(\bar{X} - \bar{x}\right)\exp\left(\frac{2\left(\bar{X} - \bar{x}\right)}{\bar{X} + \bar{x}}\right) \tag{3.24}$$

biçimindedir. Burada, φ_1 ve φ_2 sabitlerdir.

Bu tahmin edicinin HKO'su

$$HKO\left(t_{EE2}\right) = \bar{Y}^2\left(\varphi_1^2\gamma_1 - 2\varphi_1 - 2\varphi_1\varphi_2 m\gamma_5 - 2\varphi_2 m\gamma_4 + \varphi_2^2 m^2\gamma_4\right) \tag{3.25}$$

biçimindedir. İlk tahmin edicide olduğu gibi benzer işlemler yapıldığında

$$\varphi_1^* = \frac{\gamma_4 + \gamma_4\gamma_5}{\gamma_1\gamma_4 - \gamma_5^2}, \qquad \varphi_2^* = \frac{\gamma_5 + \gamma_1\gamma_4}{m\left(\gamma_1\gamma_4 - \gamma_5^2\right)} \tag{3.26}$$

elde edilir ve

$$HKO_{\min}\left(t_{EE2}\right) = \bar{Y}^2\gamma\left[1 - \left(\frac{\gamma_4 + 2\gamma_4\gamma_5 + \gamma_1\gamma_4^2}{\gamma_1\gamma_4 - \gamma_5^2}\right)\right] \tag{3.27}$$

biçiminde bulunur.

$$\left(\frac{\gamma_4 + 2\gamma_4\gamma_5 + \gamma_1\gamma_4^2}{\gamma_1\gamma_4 - \gamma_5^2}\right) = q_2 \tag{3.28}$$

eşitliği kullanılarak (3.27) eşitliği yeniden düzenlendiğinde,

$$HKO_{\min}\left(t_{EE2}\right) = \bar{Y}^2\gamma\left[1 - q_2\right] \tag{3.29}$$

sonucuna ulaşılır.

Shabbir ve Gupta [17] kitle ortalaması tahmini için üstel oransal tahmin edici önermişlerdir. Bu tahmin edici, k_1 ve k_2 sabitler olmak üzere,

$$t_{SG} = \left[k_1\bar{y} + k_2\left(\bar{X} - \bar{x}\right)\right]\exp\left(\frac{\bar{A} - \bar{a}}{\bar{A} + \bar{a}}\right) \tag{3.30}$$

biçimindedir. Burada,

$$\bar{A} = \bar{X} + N\bar{X}, \qquad \bar{a} = \bar{x} + N\bar{X} \tag{3.31}$$

biçiminde tanımlanmıştır. $\bar{A}$ ve $\bar{a}$ ifadeleri (3.30) eşitliğinde yerine konularak yeniden düzenlenirse,

$$t_{SG} = \left[k_1\bar{y} + k_2\left(\bar{X} - \bar{x}\right)\right]\exp\left(\frac{\bar{X} + N\bar{X} - \bar{X} - \bar{X}e_x - N\bar{X}}{\bar{X} + N\bar{X} + \bar{X} + \bar{X}e_x + N\bar{X}}\right)$$

bulunur.

Fark Yöntemi ile daha önceki bölümde bahsedilen işlemler gerçekleştirildiğinde,

$$\begin{aligned} HKO\left(t_{SG}\right) = \bar{Y}^2\gamma\Bigg(&\left(k_1 - 1\right)^2 + k_1^2\left(C_y^2 + \frac{C_x^2}{\left(N+1\right)^2} - \frac{2C_{xy}}{\left(N+1\right)}\right) + \bar{X}^2k_2^2\gamma C_x^2 - \frac{k_2\bar{X}\bar{Y}}{\left(N+1\right)}\gamma C_x^2 \\ &- 2\bar{Y}^2k_1\gamma\left(\frac{3C_x^2}{8\left(N+1\right)^2} - \frac{C_{xy}}{2\left(N+1\right)}\right) + 2k_1k_2\bar{X}\bar{Y}\gamma\left(\frac{C_x^2}{\left(N+1\right)} - C_{xy}\right)\Bigg) \end{aligned} \tag{3.32}$$

elde edilir. Burada, k_1 ve k_2 sabitlerine göre türev alınarak,

$$k_1^* = \frac{1 - \dfrac{\gamma C_x^2}{8\left(N+1\right)^2}}{1 + \gamma C_y^2\left(1 - \rho^2\right)}, \qquad k_2^* = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}}\left[\frac{1}{2\left(N+1\right)} - \frac{1 - \dfrac{\gamma C_x^2}{8\left(N+1\right)^2}}{1 + \gamma C_y^2\left(1 - \rho^2\right)}\left\{\frac{1}{\left(N+1\right)} - \rho\frac{C_y}{C_x}\right\}\right]$$

bulunur.

k_1^* ve k_2^* değerleri Eşitlik (3.32)'de yerine konularak,

$$HKO_{\min}\left(t_{SG}\right) = \bar{Y}^2\left[\left\{1 - \frac{\gamma C_x^2}{4\left(N+1\right)^2}\right\} - \frac{1 - \dfrac{\gamma C_x^2}{8\left(N+1\right)^2}}{1 + \gamma C_y^2\left(1 - \rho^2\right)}\right] \tag{3.33}$$

eşitliğine ulaşılır.

Yadav [18] tarafından kitle ortalaması tahmini için önerilen t_Y tahmin edicisi, dönüşüm içeren oransal-oransal tahmin edici olup,

$$t_Y = \bar{y}\left[\alpha\exp\left(\frac{\bar{X} - \bar{x}}{\bar{X} + \bar{x}}\right) + \left(1 - \alpha\right)\exp\left(\frac{\bar{x}^* - \bar{X}}{\bar{x}^* + \bar{X}}\right)\right] \tag{3.34}$$

biçiminde verilmiştir. Burada, $\left(\bar{x}^*\right)$ ifadesi ile İkinci Bölümde bahsedilen ve (2.13) eşitliğinde verilen dönüşüm kullanılmıştır. Dolayısıyla, (3.34) eşitliği

$$t_Y = \bar{Y}\left(1+e_y\right)\left[\alpha \exp\left(\frac{\bar{X}-\bar{X}-\bar{X}e_x}{\bar{X}+\bar{X}+\bar{X}e_x}\right)+\left(1-\alpha\right)\exp\left(\frac{\bar{X}-\bar{X}ge_x-\bar{X}}{\bar{X}-\bar{X}ge_x+\bar{X}}\right)\right]$$

biçiminde de yazılabilmektedir. Burada, $(1-\alpha)$ ifadesi için $(1-\alpha)=\alpha_1$ yazılarak ve gereken işlemler yapılarak

$$HKO\left(t_Y\right) = \bar{Y}^2\gamma\left(C_y^2 + \alpha_1^2\frac{C_x^2}{4} + \alpha_1\rho_{xy}C_xC_y\right) \tag{3.35}$$

eşitliğine ulaşılmaktadır.

Minimum HKO için, Eşitlik (3.35)'de

$$\frac{\partial HKO\left(t_Y\right)}{\partial \alpha_1} = 0$$

işlemi gerçekleştirilerek,

$$\alpha_1^* = -2\frac{\rho_{xy}C_xC_y}{C_x^2} \tag{3.36}$$

olarak elde edilmiştir. Bulunan α_1^* sonucu (3.35)'de yerine konularak,

$$HKO_{\min}\left(t_Y\right) = \gamma\bar{Y}^2C_y^2\left(1-\rho_{xy}^2\right) = HKO\left(t_{reg}\right) \tag{3.37}$$

elde edilmiştir ve bu eşitliğin klasik regresyon tahmin edicisinin HKO'suna eşit olduğu görülmektedir.

Kitle ortalaması tahmini için önerilen üstel oransal tahmin edicilerden sonra, üstel çarpımsal tahmin edicilerden bahsedelim.

İlk olarak, Singh ve diğerleri [14] tarafından önerilen t_{SCSS} tahmin edicisi dikkate alınarak, Onyeka [19] tarafından t_O üstel çarpımsal tahmin edicisi önerilmiştir.Bu tahmin edici

$$t_O = \bar{y}exp\left[\frac{\left(a\bar{x}+b\right)-\left(a\bar{X}+b\right)}{\left(a\bar{x}+b\right)+\left(a\bar{X}+b\right)}\right] \tag{3.38}$$

biçimindedir. Burada, $\theta_i = \left(\frac{a_i\bar{X}}{a_i\bar{X}+b_i}\right)$, $i=1,2,...,10$ eşitliği kullanılmış, 7. Bölümde literatürde yer alan tahmin edicilerin sayısal gösterim sonuçları kısmında Çizelge 3.1'deki a_i ve b_i değerlerinden yararlanılarak elde edilmiştir. Tahmin edici için, (1.2)'deki ifadelerden yararlanılarak,

$$t_O = \bar{Y}\left(1+e_y\right)exp\left(\frac{\theta_i e_x}{2}\left(1+\frac{\theta_i e_x}{2}\right)^{-1}\right)$$

biçiminde yazılabilmektedir. İşlemler devam ettirilerek,

$$HKO\left(t_O\right) = \bar{Y}^2\gamma\left(C_y^2 + \frac{\theta_i C_x^2}{4}\left(\theta_i + 4\rho_{xy}\frac{C_y}{C_x}\right)\right),\ i=1,2,...,10 \tag{3.39}$$

bulunmaktadır.

İkinci olarak, Solanki ve diğerleri [5] tarafından

$$t_{SSR} = \bar{y}\left[2-\left(\frac{\bar{x}}{\bar{X}}\right)^{\alpha}\exp\left\{\frac{\delta\left(\bar{x}-\bar{X}\right)}{\bar{x}+\bar{X}}\right\}\right] \tag{3.40}$$

önerilmiştir. Burada, (α,δ) değerleri seçilen sabitleri ifade etmektedir. Gerekli işlemler yapılarak

$$HKO\left(t_{SSR}\right) = \bar{Y}^2\gamma\left(C_y^2 + \frac{C_x^2}{4}\left(2\alpha+\delta\right)^2 - \rho_{xy}C_xC_y\left(2\alpha+\delta\right)\right) \tag{3.41}$$

elde edilmiştir. Minimum HKO'yu bulabilmek için,

$$\frac{\partial HKO\left(t_{SSR}\right)}{\partial\delta} = 0$$

işlemi yapılarak,

$$HKO_{\min}\left(t_{SSR}\right) = \bar{Y}^2\gamma C_y^2\left(1-\rho_{xy}^2\right) = HKO\left(t_{reg}\right) \tag{3.42}$$

elde edilmiştir. Görüldüğü gibi minimum HKO eşitliği klasik regresyon tahmin edicisinin HKO eşitliği ile aynıdır.

Kitle ortalaması tahmini için önerilen üstel çarpımsal ve üstel oransal tahmin edicilerden sonra, içinde hem oransal hem de çarpımsal ifadeler içeren literatürdeki tahmin edicilerden bahsedelim.

İlk olarak, Singh ve diğerleri [20] tarafından kitle ortalaması tahmini için

$$t_{SCS} = \bar{y}\left[\alpha\exp\left(\frac{\bar{X}-\bar{x}}{\bar{X}+\bar{x}}\right) + \left(1-\alpha\right)\exp\left(\frac{\bar{x}-\bar{X}}{\bar{X}+\bar{x}}\right)\right] \tag{3.43}$$

tahmin edicisi önerilmiştir.

(1.2)'de yer alan eşitliklerden yararlanılarak,

$$t_{SCS} = \bar{Y}\left(1+e_y\right)\left[\alpha \exp\left(\frac{\bar{X}-\bar{X}-\bar{X}e_x}{\bar{X}+\bar{X}+\bar{X}e_x}\right)+\left(1-\alpha\right)\exp\left(\frac{\bar{X}+\bar{X}e_x-\bar{X}}{\bar{X}+\bar{X}+\bar{X}e_x}\right)\right]$$

yazılabilmektedir. İşlemler devam ettirildiğinde,

$$HKO\left(t_{SCS}\right) = \bar{Y}^2\gamma\left(C_y^2 + C_x^2\left(\frac{1}{4}+\alpha^2-\alpha\right)+2\rho_{xy}C_xC_y\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\right) \tag{3.44}$$

bulunmaktadır. α sabitine göre türev alınarak (3.44) eşitliğinde, bulunan optimum α $\left(\alpha^*\right)$ yerine konularak minimum HKO,

$$HKO_{\min}\left(t_{SCS}\right) = \bar{Y}^2\gamma C_y^2\left(1-\rho_{xy}^2\right) = HKO\left(t_{reg}\right) \tag{3.45}$$

biçiminde regresyon tahmin edicisinin HKO eşitliği ile aynı bulunmuştur.

Özel Kadılar [21] tarafından kitle ortalaması tahmini için α sabit olmak üzere,

$$t_{GÖK} = \bar{y}\left(\frac{\bar{x}}{\bar{X}}\right)^{\alpha}\exp\left(\frac{\bar{X}-\bar{x}}{\bar{X}+\bar{x}}\right) \tag{3.46}$$

biçiminde önerilmiştir. HKO çıkarsaması için (1.2) ifadelerindeki eşitliklerden yararlanılarak,

$$t_{GÖK} = \bar{Y}\left(1+e_y\right)\left(1+e_x\right)^{\alpha}\exp\left(\frac{-\bar{X}e_x}{2\bar{X}+\bar{X}e_x}\right)$$

elde edilmiş ve devamında gereken işlemler yapılarak,

$$HKO\left(t_{GÖK}\right) = \bar{Y}^2\gamma\left(C_y^2 + \frac{C_x^2}{4} + \alpha^2 C_x^2 - \alpha C_x^2 - \rho_{xy}C_xC_y + 2\alpha\rho_{xy}C_xC_y\right) \tag{3.47}$$

bulunmuştur. Burada, (α) değerinin optimum değeri

$$\alpha^* = \frac{1}{2} - \rho_{xy}\frac{C_y}{C_x} \tag{3.48}$$

biçimindedir.

$\left(\alpha^*\right)$ değerinden yararlanılarak,

$$HKO_{\min}\left(t_{GÖK}\right) = \bar{Y}^2\gamma\left(C_y^2 - \rho_{xy}^2 C_y^2\right) = \bar{Y}^2\gamma C_y^2\left(1-\rho_{xy}^2\right) = HKO\left(t_{reg}\right) \tag{3.49}$$

eşitliğine ulaşılmıştır.

Upadhyaya ve diğerleri [22] ise t_{RUSCY} üstel oransal tahmin edicisini ve t_{PUSCY} üstel çarpımsal tahmin edicisini önermişlerdir. t_{RUSCY} üstel oransal tahmin edicisi,

$$t_{RUSCY} = \bar{y}\exp\left\{\frac{\bar{X} - \bar{\mathrm{x}}}{\bar{X} + (a-1)\bar{\mathrm{x}}}\right\} \tag{3.50}$$

biçimindedir. Gerekli işlemler yapılarak,

$$HKO(t_{RUSCY}) = \bar{\mathrm{Y}}^2\gamma\left(C_y^2 + \frac{C_x^2}{a^2}\left(1 - 2a\rho_{xy}\frac{C_y}{C_x}\right)\right) = \bar{\mathrm{Y}}^2\gamma\left(C_y^2 + \frac{C_x^2}{a^2}(1 - 2aC)\right) \tag{3.51}$$

elde edilmiştir. Burada, α sabitine göre türev alınarak, optimum α değeri

$$a^* = \rho_{xy}\frac{\mathrm{C_x}}{\mathrm{C_y}}$$

biçiminde bulunmuştur. Böylece, α^* değeri (3.51) eşitliğinde yerine konularak,

$$HKO_{\min}(t_{RUSCY}) = \gamma\bar{Y}^2C_y^2\left(1 - \rho_{xy}^2\right) = HKO\left(t_{reg}\right) \tag{3.52}$$

elde edilmiştir.

Önerilen diğer tahmin edici t_{PUSCY} ise,

$$t_{PUSCY} = \bar{y}\exp\left\{\frac{\bar{\mathrm{x}} - \bar{X}}{\bar{X} + (b-1)\bar{\mathrm{x}}}\right\} \tag{3.53}$$

biçimindedir. t_{RUSCY} tahmin edici için yapılan işlemler t_{PUSCY} üstel çarpımsal tahmin edici içinde yapıldığında,

$$HKO(t_{PUSCY}) = \bar{\mathrm{Y}}^2\gamma\left(C_y^2 + \frac{C_x^2}{b^2}\left(1 + 2b\rho_{xy}\frac{C_y}{C_x}\right)\right) = \bar{\mathrm{Y}}^2\gamma\left(C_y^2 + \frac{C_x^2}{b^2}(1 + 2bC)\right) \tag{3.54}$$

biçiminde bulunur. Burada, b sabitine göre türev alınarak, optimum b değeri

$$b^* = -\rho_{xy}\frac{\mathrm{C_x}}{\mathrm{C_y}}$$

olarak elde edilmiştir. Böylece, b^* değeri (3.54)'de yerine konularak,

$$HKO_{\min}(t_{PUSCY}) = \gamma\bar{Y}^2C_y^2\left(1 - \rho_{xy}^2\right) = HKO\left(t_{reg}\right) \tag{3.55}$$

sonucuna ulaşılmıştır. Yani, t_{RUSCY} üstel oransal tahmin edicisi ve t_{PUSCY} üstel çarpımsal tahmin edicisinin elde edilen minimum HKO'larının, klasik regresyon tahmin edicisinin HKO'suna sahip olduğu görülmektedir.

Shabbir ve diğerleri [23],

$$t_{SHG}=\left[\frac{\bar{y}}{2}\left(\exp\left(\frac{\bar{X}-\bar{x}}{\bar{X}+\bar{x}}\right)+\exp\left(\frac{\bar{x}-\bar{X}}{\bar{x}+\bar{X}}\right)\right)+w_1\left(\bar{X}-\bar{x}\right)+w_2\bar{y}\right]\exp\left(\frac{\bar{X}-\bar{x}}{\bar{X}+\bar{x}}\right) \tag{3.56}$$

tahmin edicisini önermişlerdir. Burada, w_1 ve w_2 $HKO\left(t_{SHG}\right)$'yi minimum yapan sabitlerdir. (3.56) eşitliğinde verilen tahmin edici, (1.2)'deki eşitliklerden yararlanılarak,

$$t_{SHG}=\left[\frac{\bar{Y}\left(1+e_y\right)}{2}\left(\exp\left(\frac{-\bar{X}e_x}{2\bar{X}+\bar{X}e_x}\right)+\exp\left(\frac{\bar{X}e_x}{2\bar{X}+\bar{X}e_x}\right)\right)-w_1\bar{X}e_x+w_2\bar{Y}\left(1+e_y\right)\right]\exp\left(\frac{-\bar{X}e_x}{2\bar{X}+\bar{X}e_x}\right)$$

biçiminde de yazılabilmektedir. Gerekli işlemler yapılarak,

$$\begin{aligned}HKO\left(t_{SHG}\right)=\Bigg(&\frac{1}{4}\gamma C_x^2\left\{\left(\bar{Y}^2+4\bar{X}\bar{Y}w_1+4\bar{X}^2w_1^2\right)+2\bar{Y}\left(3\bar{Y}+4\bar{X}w_1\right)w_2+4\bar{Y}^2w_2^2\right\}\\&+\bar{Y}^2\left\{w_2^2+\gamma C_y^2\left(1+2w_2+w_2^2\right)\right\}-\gamma\bar{Y}C_{xy}\left(1+w_2\right)\left(\bar{Y}+2\bar{X}w_1+2\bar{Y}w_2\right)\Bigg)\end{aligned} \tag{3.57}$$

elde edilmiştir. Minimum HKO'ya ulaşmak için,

$$\frac{\partial HKO\left(t_{SHG}\right)}{\partial w_1}=0, \qquad \frac{\partial HKO\left(t_{SHG}\right)}{\partial w_2}=0$$

yapılarak optimum değerler sırasıyla

$$w_1^*=\frac{\bar{Y}\left[-4\rho_{xy}C_y+C_x\left\{2-\gamma C_x^2+\gamma\rho_{xy}C_xC_y+2\gamma\left(-1+\rho_{xy}^2\right)C_y^2\right\}\right]}{4\bar{X}C_x\left\{-1+\gamma\left(-1+\rho_{xy}^2\right)C_y^2\right\}}, \qquad w_2^*=\frac{\gamma\left(C_x^2-4\left(-1+\rho_{xy}^2\right)C_y^2\right)}{4\left\{-1+\gamma\left(-1+\rho_{xy}^2\right)C_y^2\right\}} \tag{3.58}$$

biçiminde bulunmuştur. Bu optimum değerler, (3.57) eşitliğinde yerine konulduğunda,

$$HKO_{\min}\left(t_{SHG}\right)=\frac{\gamma\bar{Y}^2\left\{\gamma C_x^4-8\left(-1+\rho_{xy}^2\right)\left(-2+\gamma C_x^2\right)C_y^2\right\}}{16\left\{-1+\gamma\left(-1+\rho_{xy}^2\right)C_y^2\right\}} \tag{3.59}$$

olduğu görülmektedir.

Diğer bir gösterimle, t_{SHG} tahmin edicisi için,

$$T_1=\frac{\gamma^2\bar{Y}^2\left(C_x^4+16C_x^2C_y^2\left(1-\rho_{xy}^2\right)+64\left(1-\rho_{xy}^2\right)C_y^4\right)}{64\left(1+\gamma C_y^2\left(1-\rho_{xy}^2\right)\right)}, \qquad T_2=\frac{\gamma^2\bar{Y}^2\left(3C_x^4+16C_x^2C_y^2\left(1-\rho_{xy}^2\right)\right)}{64\left(1+\gamma C_y^2\left(1-\rho_{xy}^2\right)\right)}$$

biçiminde olmak üzere,

$$t_{SHG}=T_1+T_2=\frac{\gamma^2\bar{Y}^2\left(4C_x^4+32C_x^2C_y^2\left(1-\rho_{xy}^2\right)+64\left(1-\rho_{xy}^2\right)C_y^4\right)}{64\left(1+\gamma C_y^2\left(1-\rho_{xy}^2\right)\right)}$$

yazılabilmektedir.

Dolayısıyla,

$$HKO_{\min}\left(t_{SHG}\right)=\gamma\bar{Y}^2C_y^2\left(1-\rho_{xy}^2\right)-\frac{\gamma^2\bar{Y}^2\left(4C_x^4+32C_x^2C_y^2\left(1-\rho_{xy}^2\right)+64\left(1-\rho_{xy}^2\right)C_y^4\right)}{64\left(1+\gamma C_y^2\left(1-\rho_{xy}^2\right)\right)} \tag{3.60}$$

$$=HKO\left(t_{reg}\right)-\left(T_1+T_2\right) \tag{3.61}$$

olmaktadır.

Vishwakarma ve diğerleri [24] tarafından üstel oransal tahmin edici t_{RVSGP} ve üstel çarpımsal tahmin edici olan t_{PVSGP} önerilmiştir. Sırasıyla, α sabit olmak üzere t_{RVSGP} tahmin edicisi,

$$t_{RVSGP}=\alpha\bar{y}+\left(1-\alpha\right)\bar{y}\exp\left(\frac{\bar{X}-\bar{x}}{\bar{X}+\bar{x}}\right) \tag{3.62}$$

biçimindedir. Gerekli işlemler yapılarak, tahmin edicinin HKO eşitliği

$$HKO\left(t_{RVSGP}\right)=\bar{Y}^2\gamma\left[C_y^2+\frac{C_x^2}{4}\left(1-\alpha\right)^2-\rho_{xy}C_xC_y\left(1-\alpha\right)\right] \tag{3.63}$$

şeklinde bulunmuştur. Burada, α sabitine göre türev alınarak optimum α değeri $\left(\alpha^*\right)$ bulunmuştur. HKO eşitliğinde yerine konularak,

$$HKO_{\min}\left(t_{RVSGP}\right)=\bar{Y}^2\gamma C_y^2\left(1-\rho_{xy}^2\right)=HKO\left(t_{reg}\right) \tag{3.64}$$

olduğu görülmüştür.

β sabit olmak üzere, önerilen diğer tahmin edici olan t_{PVSGP} ise,

$$t_{PVSGP}=\beta\bar{y}+\left(1-\beta\right)\bar{y}\exp\left(\frac{\bar{x}-\bar{X}}{\bar{X}+\bar{x}}\right) \tag{3.65}$$

biçimindedir. Aynı işlemler tekrarlandığında, HKO eşitliği

$$HKO\left(t_{PVSGP}\right)=\bar{Y}^2\gamma\left(C_y^2+\frac{C_x^2}{4}\left(1-\beta\right)^2+\rho_{xy}C_xC_y\left(1-\beta\right)\right) \tag{3.66}$$

olmaktadır. HKO eşitliğinde yer alan β sabitine göre türev alınarak optimum β değeri $\left(\beta^*\right)$ bulunmuş ve (3.66) eşitliğinde yerine konularak,

$$HKO_{\min}\left(t_{PVSGP}\right)=\bar{Y}^2\gamma C_y^2\left(1-\rho_{xy}^2\right)=HKO\left(t_{reg}\right)=HKO_{\min}\left(t_{RVSGP}\right) \tag{3.67}$$

sonucuna ulaşılmıştır. Böylece, önerilen t_{RVSGP} ve t_{PVSGP} tahmin edicilerinin, minimum HKO'larının birbirine ve aynı zamanda klasik regresyon tahmin edicisinin HKO'suna eşit olduğu görülmektedir.

Singh ve Pal [25] tarafından t_{SP1}, t_{SP2}, t_{SP3} üstel oransal tahmin edicileri ve t_{SP4} üstel çarpımsal tahmin edicileri önerilmiştir.

$$C=\rho_{xy}\frac{C_y}{C_x}$$

olmak üzere, tahmin ediciler sırasıyla incelediğinde,

$$t_{SP1}=\bar{y}\exp\left(\frac{2\left(\bar{X}-\bar{x}\right)}{\bar{X}+\bar{x}}\right) \tag{3.68}$$

biçiminde önerilmiştir. Fark Yönteminden yararlanılarak,

$$HKO\left(t_{SP1}\right)=\bar{Y}^2\gamma\left(C_y^2+C_x^2\left(1-2C\right)\right) \tag{3.69}$$

bulunmuştur.

Diğer önerilen t_{SP2} tahmin edicisi ve HKO eşitliği sırasıyla

$$t_{SP2}=\bar{y}\left(\frac{\bar{X}}{\bar{x}}\right)\exp\left(\frac{\bar{X}-\bar{x}}{\bar{X}+\bar{x}}\right) \tag{3.70}$$

$$HKO\left(t_{SP2}\right)=\bar{Y}^2\gamma\left(C_y^2+\frac{3C_x^2}{4}\left(3-4C\right)\right) \tag{3.71}$$

biçimindedir.

t_{SP3} tahmin edicisi ve HKO eşitliği sırasıyla

$$t_{SP3}=\bar{y}\left(\frac{a\bar{X}+b}{a\bar{x}+b}\right)\exp\left\{\frac{a\left(\bar{X}-\bar{x}\right)}{a\left(\bar{X}+\bar{x}\right)+2b}\right\} \tag{3.72}$$

$$HKO\left(t_{SP3}\right)=\bar{Y}^2\gamma\left(C_y^2+\frac{3\tau C_x^2}{4}\left(3\tau-4C\right)\right) \tag{3.73}$$

biçimindedir.

Singh ve Pal [25] tarafından son olarak, t_{SP4} üstel çarpımsal tahmin edicisi önerilmiştir. Bu tahmin edici,

$$t_{SP4}=\bar{y}\left(\frac{a\bar{x}+b}{a\bar{X}+b}\right)\exp\left\{\frac{a\left(\bar{x}-\bar{X}\right)}{a\left(\bar{X}+\bar{x}\right)+2b}\right\} \tag{3.74}$$

biçiminde önerilmiştir. Tahmin edicinin HKO eşitliği ise

$$HKO\left(t_{SP4}\right)=\bar{Y}^2\gamma\left(C_y^2+\frac{3\tau C_x^2}{4}\left(3\tau+4C\right)\right) \tag{3.75}$$

biçiminde verilmiştir.

BRÖ yönteminde kitle ortalaması tahmini için önerilen üstel tahmin edicilerden tek yardımcı değişken bilgisini kullananlarda son olarak, Bahl ve Tuteja [4] çalışmasından yararlanılarak, Sharma ve Tailor [26] tarafından önerilen tahmin ediciler bulunmaktadır. Bu tahmin ediciler sırasıyla t_{BT*} ve t_{TB*} tahmin edicileridir. Sharma ve Tailor [26] önerdikleri tahmin edicilerde dönüşüm kullanmışlardır.

Önerdikleri ilk tahmin edici

$$t_{BT*} = \bar{y}\exp\left(\frac{\bar{x}^* - \bar{X}}{\bar{x}^* + \bar{X}}\right) \tag{3.76}$$

şeklindedir. (1.2), (1.4) ve (2.13) ifadelerinden yararlanılarak ve gerekli işlemler yapıldığında,

$$C = \rho_{xy}\frac{C_y}{C_x}$$

tanımlanmış olmak üzere,

$$HKO\left(t_{BT*}\right) = \bar{Y}^2\gamma\left(C_y^2 + gC_x^2\left(\frac{g}{4} - C\right)\right) \tag{3.77}$$

biçiminde bulunmaktadır.

Önerilen diğer tahmin edici ise

$$t_{TB*} = \bar{y}\exp\left(\frac{\bar{X} - \bar{x}^*}{\bar{X} + \bar{x}^*}\right) \tag{3.78}$$

şeklindedir. Benzer işlemler t_{TB*} için de yapılarak,

$$HKO\left(t_{TB*}\right) = \bar{Y}^2\gamma\left(C_y^2 + gC_x^2\left(\frac{g}{4} + C\right)\right) \tag{3.79}$$

olarak elde edilmektedir.

3.1.1. Tek Yardımcı Değişken Bilgisini Kullanan Tahmin Edicilerin Etkinlik Karşılaştırması

Önceki alt bölümde, BRÖ yöntemi için kitle ortalaması tahmininde, tek yardımcı değişken bilgisi kullanan üstel tahmin ediciler incelenmişti. Bu bölümde, incelenen bu tahmin edicilerin etkinlik karşılaştırmaları verilecektir. Üstel tahmin edicilerden oransal olanlar t_R, t_{BT}, t_{reg} ; çarpımsal olanlar t_P, t_{TB}, t_{reg} ve hem oransal hem de çarpımsal olanlar $t_R, t_P, t_{BT}, t_{TB}, t_{reg}$ kendi içlerinde karşılaştırılması yapılacaktır.

Karşılaştırmada ilk olarak, Bahl ve Tuteja [4] tarafından önerilen t_{BT} tahmin edicisi ile başlanacaktır. Önerilen tahmin edici üstel oransal olduğundan t_R, t_{reg} tahmin edicileri ile etkinlik karşılaştırması yapılacaktır.

$$HKO(t_{BT}) < HKO(t_R)$$

$$\gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2 + \frac{C_x^2}{4} - C_{xy}\right) < \gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2 + C_x^2 - 2C_{xy}\right)$$

$$\frac{3}{4} > \rho_{xy}\frac{C_y}{C_x} \tag{3.80}$$

Yapılan etkinlik karşılaştırması sonucunda, önerilen t_{BT} üstel tahmin edicinin (3.80) koşulu altında daha etkin olduğu söylenebilmektedir.

$$HKO(t_{BT}) < HKO(t_{reg})$$

$$\gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2 + \frac{C_x^2}{4} - C_{xy}\right) < \gamma\bar{Y}^2 C_y^2\left(1 - \rho_{xy}^2\right)$$

$$\left(\frac{C_x}{2} - \rho_{xy}C_y\right)^2 < 0 \tag{3.81}$$

t_{BT} tahmin edicisinin klasik regresyon tahmin edicisi ile yapılan etkinlik karşılaştırması sonucunda elde edilen (3.81) koşulunun sağlanması $\frac{C_x}{2}$ ifadesinin $\rho_{xy}C_y$ çarpımına eşit olduğu durum hariç diğer durumlarda mümkün olmadığından klasik regresyon tahmin edicisinin, önerilen tahmin ediciye göre daha etkin olduğu sonucuna ulaşılmaktadır.

t_{TB} üstel çarpımsal tahmin edicisi için ise t_P, t_{reg} tahmin edicileri ile etkinlik karşılaştırması yapılacaktır.

$$HKO(t_{TB}) < HKO(t_P)$$

$$\gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2 + \frac{C_x^2}{4} + C_{xy}\right) < \gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2 + C_x^2 + 2C_{xy}\right)$$

$$-\frac{3}{4} < \rho_{xy}\frac{C_y}{C_x} \tag{3.82}$$

Yapılan karşılaştırmada, önerilen t_{TB} üstel tahmin edicinin (3.82) koşulu altında klasik çarpımsal tahmin ediciye göre daha etkin olduğu görülmektedir.

$$HKO(t_{TB}) < HKO(t_{reg})$$

$$\gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2+\frac{C_x^2}{4}+C_{xy}\right)<\gamma\bar{Y}^2C_y^2\left(1-\rho_{xy}^2\right)$$

$$\left(\frac{C_x}{2}+\rho_{xy}C_y\right)^2<0 \tag{3.83}$$

Önerilen üstel oransal tahmin edici gibi (t_{BT}) , t_{TB} tahmin edicisinin klasik regresyon tahmin edicisi ile yapılan etkinlik karşılaştırması sonucunda elde edilen (3.83) koşulunun sağlanması $\frac{C_x}{2}$ ile $\rho_{xy}C_y$ ifadeleri toplamının 0 değerine eşit olması durumu dışında mümkün olmadığından, klasik regresyon tahmin edicisinin her zaman önerilen t_{BT} ve t_{TB} tahmin edicilerinden daha etkin olduğu söylenebilmektedir.

Singh ve diğerleri [14] tarafından önerilen t_{SCSS} tahmin edicisi için, sırasıyla t_R, t_{BT}, t_{reg} tahmin edicileriyle karşılaştırıldığında,

$$HKO(t_{SCSS}) < HKO(t_R)$$

$$\gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2+\theta_{2,i}^2C_x^2-2\theta_{2,i}C_{xy}\right)<\gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2+C_x^2-2C_{xy}\right)$$

$$\left(1-\theta_{2,i}\right)\left[C_x^2\left(1+\theta_{2,i}\right)-2C_{xy}\right]>0$$

$$\theta_{2,i}<1\rightarrow\left[C_x^2\left(1+\theta_{2,i}\right)-2C_{xy}\right]>0\rightarrow\left(1+\theta_{2,i}\right)>2\frac{\rho_{xy}C_y}{C_x},\ i=1,2,...,10 \tag{3.84}$$

$$\theta_{2,i}>1\rightarrow\left[C_x^2\left(1+\theta_{2,i}\right)-2C_{xy}\right]<0\rightarrow\left(1+\theta_{2,i}\right)<2\frac{\rho_{xy}C_y}{C_x},\ i=1,2,...,10 \tag{3.85}$$

$$HKO(t_{SCSS}) < HKO(t_{BT})$$

$$\gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2+\theta_{2,i}^2C_x^2-2\theta_{2,i}C_{xy}\right)<\gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2+\frac{C_x^2}{4}-C_{xy}\right)$$

$$\left(\frac{1}{2}-\theta_{2,i}\right)\left(C_x^2\left(\frac{1}{2}+\theta_{2,i}\right)-2C_{xy}\right)>0$$

$$\theta_{2,i}<\frac{1}{2}\rightarrow C_x^2\left(\frac{1}{2}+\theta_{2,i}\right)-2C_{xy}>0\rightarrow C_x^2\left(\frac{1}{2}+\theta_{2,i}\right)>2C_{xy},\ i=1,2,...,10 \tag{3.86}$$

$$\theta_{2,i}>\frac{1}{2}\rightarrow C_x^2\left(\frac{1}{2}+\theta_{2,i}\right)-2C_{xy}<0\rightarrow C_x^2\left(\frac{1}{2}+\theta_{2,i}\right)<2C_{xy},\ i=1,2,...,10 \tag{3.87}$$

$$HKO(t_{SCSS}) < HKO(t_{reg})$$

$$\gamma \bar{Y}^2 \left(C_y^2 + \theta_{2,i}^2 C_x^2 - 2\theta_{2,i} C_{xy}\right) < \gamma \bar{Y}^2 C_y^2 \left(1 - \rho_{xy}^2\right)$$

$$\left(\theta_{2,i} C_x - \rho_{xy} C_y\right)^2 < 0,\ i = 1, 2, ..., 10 \tag{3.88}$$

koşulları bulunmaktadır. (3.84), (3.85), (3.86) ve (3.87) koşulları sağlandığı takdirde, önerilen t_{SCSS} tahmin edicisinin diğer tahmin edicilerden daha etkin olduğu söylenebilmektedir. Klasik regresyon tahmin edicisi ile yapılan karşılaştırmada ise (3.88) eşitsizliğinin sağlanması $\theta_{2,i} C_x$ ile $\rho_{xy} C_y$ değerlerinin birbirine eşit olması durumu dışında mümkün olmadığı için belirtilen durum haricinde t_{reg} tahmin edicisi daha etkindir.

Önerilen diğer tahmin edici olan genelleştirilmiş t_{SCSS}^* üstel oransal tahmin edicinin,

$$HKO_{\min}\left(t_{SCSS}^*\right) < HKO(t_R)$$

$$\gamma \bar{Y}^2 C_y^2 \left(1 - \rho_{xy}^2\right) < \gamma \bar{Y}^2 \left(C_y^2 + C_x^2 - 2C_{xy}\right)$$

$$\left(C_x - \rho_{xy} C_y\right)^2 > 0 \tag{3.89}$$

$$HKO_{\min}\left(t_{SCSS}^*\right) < HKO(t_{BT})$$

$$\gamma \bar{Y}^2 C_y^2 \left(1 - \rho_{xy}^2\right) < \gamma \bar{Y}^2 \left(C_y^2 + \frac{C_x^2}{4} - C_{xy}\right)$$

$$\left(\frac{C_x}{2} - \rho_{xy} C_y\right)^2 > 0 \tag{3.90}$$

(3.89) eşitsizliğinde C_x ifadesinin $\rho_{xy} C_y$ çarpımına eşit olduğu durum ve (3.90) eşitsizliğinde $\frac{C_x}{2}$ ifadesinin $\rho_{xy} C_y$ çarpımına eşit olduğu durumun haricinde, t_{SCSS}^* tahmin edicisinin t_R ve t_{BT} tahmin edicilerinden daha etkin olduğu görülmektedir. Bu aşamada, t_{SCSS}^* tahmin edicisinin HKO'sunun, klasik regresyon tahmin edicinin HKO'suna eşit olmasından dolayı etkinlik karşılaştırmasına gerek duyulmamıştır.

Yadav ve Kadılar [15] tarafından önerilen üstel oransal tahmin t_{YK} tahmin edicisi için, HKO eşitliği (3.14) eşitliğinde elde edilmişti. Etkinlik karşılaştırmasında kolaylık olması açısından (3.15) eşitliğinde verilen A_{YK} ve B_{YK} kısaltmalarıyla yazılarak, (3.16) eşitliğinde yer alan HKO ile karşılaştırılma yapılmıştır.

$$HKO_{\min}\left(t_{YK}\right) < HKO\left(t_R\right)$$

$$\bar{Y}^2\left[1-\frac{A_{YK}^2}{B_{YK}}\right] < \gamma\bar{Y}^2\left[C_y^2+C_x^2-2C_{xy}\right]$$

$$\gamma\left[C_y^2+C_x^2-2C_{xy}\right]-\left[1-\frac{A_{YK}^2}{B_{YK}}\right] > 0 \tag{3.91}$$

$$HKO_{\min}\left(t_{YK}\right) < HKO\left(t_{BT}\right)$$

$$\bar{Y}^2\left[1-\frac{A_{YK}^2}{B_{YK}}\right] < \gamma\bar{Y}^2\left[C_y^2+\frac{C_x^2}{4}-C_{xy}\right]$$

$$\gamma\left[C_y^2+\frac{C_x^2}{4}-C_{xy}\right]-\left[1-\frac{A_{YK}^2}{B_{YK}}\right] > 0 \tag{3.92}$$

$$HKO_{\min}\left(t_{YK}\right) < HKO\left(t_{reg}\right)$$

$$\bar{Y}^2\left[1-\frac{A_{YK}^2}{B_{YK}}\right] < \gamma\bar{Y}^2C_y^2\left(1-\rho_{xy}^2\right)$$

$$\gamma C_y^2\left(1-\rho_{xy}^2\right)-\left[1-\frac{A_{YK}^2}{B_{YK}}\right] > 0 \tag{3.93}$$

Yapılan etkinlik karşılaştırmalarında elde edilen (3.91), (3.92) ve (3.93) koşulları sağlandığı durumlarda, önerilen üstel oransal tahmin edicinin, t_R, t_{BT}, t_{reg} tahmin edicilerine göre daha etkin olduğu sonucuna ulaşılmaktadır.

Ekpenyong ve Enang [16] tarafından önerilen t_{EE1} ve t_{EE2} tahmin edicilerinin HKO eşitliği (3.23) ve (3.29) ifadelerindeki gibi yazılmıştı. t_{EE1} ve t_{EE2} için etkinlik karşılaştırmasında t_R, t_{BT}, t_{reg} tahmin edicilerini de aynı kısaltmalardan yararlanarak yazmamız gerekmektedir.

İlk olarak etkinlik karşılaştırmasında t_{EE1} için,

$$HKO\left(t_R\right)=\bar{Y}^2\theta\left[C_y^2+C_x^2-2C_{xy}\right]=\bar{Y}^2\left[\gamma_1-2\gamma_2-1\right] \tag{3.94}$$

$$HKO\left(t_{BT}\right)=\bar{Y}^2\theta\left[C_y^2+\frac{C_x^2}{4}-C_{xy}\right]=\bar{Y}^2\left[\gamma_1-\gamma_2-\frac{\gamma_3}{2}-1\right] \tag{3.95}$$

$$HKO\left(t_{reg}\right)=\bar{Y}^2\theta C_y^2\left(1-\rho^2\right)=\bar{Y}^2\left[\gamma_1-\left(\frac{\left(\gamma_2+\gamma_3\right)^2}{\gamma_4}\right)-1\right] \tag{3.96}$$

eşitlikleri elde edilmiştir. Bu eşitliklerden yararlanılarak etkinlik karşılaştırması yapıldığında,

$$HKO_{\min}\left(t_{EE1}\right) < HKO\left(t_R\right)$$

$$\bar{Y}^2\left[1-q_1\right] < \bar{Y}^2\left[\gamma_1 - 2\gamma_2 - 1\right]$$

$$\bar{Y}^2\left[\gamma_1 - 2\gamma_2 - 1 - 1 + q_1\right] > 0$$

$$\left[\left(\gamma_1 + \left(\frac{\gamma_4 + 2\gamma_2\gamma_3 + \gamma_1\gamma_3^2}{\gamma_1\gamma_4 - \gamma_2^2}\right)\right) - 2\left(\gamma_2 + 1\right)\right] > 0$$

$$\frac{\gamma_1\left(\gamma_1\gamma_4 - \gamma_2^2 + \gamma_3^2 - 2\gamma_2\gamma_4 - 2\gamma_4\right) + \gamma_4 + 2\gamma_2\left(\gamma_3 + 2\gamma_2^2 + 2\gamma_2\right)}{\gamma_1\gamma_4 - \gamma_2^2} > 0,\ \left(\gamma_1\gamma_4 - \gamma_2^2\right) > 0 \qquad (3.97)$$

$$HKO_{\min}\left(t_{EE1}\right) < HKO\left(t_{BT}\right)$$

$$\bar{Y}^2\left[1-q_1\right] < \bar{Y}^2\left[\gamma_1 - \gamma_2 - \frac{\gamma_3}{2} - 1\right]$$

$$\bar{Y}^2\left[\gamma_1 - \gamma_2 - \frac{\gamma_3}{2} - 1 - 1 + q_1\right] > 0$$

$$\left[\left(\gamma_1 - \gamma_2\right) + \left(\left(\frac{\gamma_4 + 2\gamma_2\gamma_3 + \gamma_1\gamma_3^2}{\gamma_1\gamma_4 - \gamma_2^2}\right) - 2\right) - \frac{\gamma_3}{2}\right] > 0$$

$\left(\gamma_1\gamma_4 - \gamma_2^2\right) > 0$ olmak üzere,

$$\frac{\gamma_1\left(2\gamma_1\gamma_4 - 2\gamma_2^2 - 2\gamma_2\gamma_4 + 2\gamma_3^2 - 4\gamma_4 - \gamma_3\gamma_4\right) + 2\gamma_4\left(1 - 2\gamma_1\right) + \gamma_2\left(2\gamma_2^2 + 4\gamma_3 + 4\gamma_2 + \gamma_2\gamma_3\right)}{\gamma_1\gamma_4 - \gamma_2^2} > 0 \qquad (3.98)$$

$$HKO_{\min}\left(t_{EE1}\right) < HKO\left(t_{reg}\right)$$

$$\bar{Y}^2\left[1-q_1\right] < \bar{Y}^2\left[\gamma_1 - \left(\frac{\left(\gamma_2 + \gamma_3\right)^2}{\gamma_4}\right) - 1\right]$$

$$\bar{Y}^2\left[\gamma_1 - \left(\frac{\left(\gamma_2 + \gamma_3\right)^2}{\gamma_4}\right) - 1 - 1 + q_1\right] > 0$$

$$\left[\gamma_1\gamma_4 - \left(\gamma_2 + \gamma_3\right)^2 - 2\gamma_4 + q_1\gamma_4\right] > 0$$

$$\left[\gamma_1\gamma_4 - \left(\gamma_2 + \gamma_3\right)^2 - 2\gamma_4 + \left(\frac{\gamma_4 + 2\gamma_2\gamma_3 + \gamma_1\gamma_3^2}{\gamma_1\gamma_4 - \gamma_2^2}\right)\gamma_4\right] > 0$$

$$\frac{\left(\gamma_4\left(\gamma_1 - 1\right) - \gamma_2\left(\gamma_2 + \gamma_3\right)\right)^2}{\gamma_4\left(\gamma_1\gamma_4 - \gamma_2^2\right)} > 0,\ \left(\gamma_4\left(\gamma_1\gamma_4 - \gamma_2^2\right)\right) > 0 \qquad (3.99)$$

olmaktadır. (3.97), (3.98) ve (3.99) ifadelerinde yer alan koşullar sağlandığı durumda, önerilen t_{EE1} tahmin edicisinin, t_R, t_{BT}, t_{reg} tahmin edicilerine göre daha etkin olduğu söylenebilmektedir.

Aynı düzeltmeler t_{EE2} tahmin edicisi için gerçekleştirildiğinde,

$$HKO\left(t_R\right)=\bar{Y}^2\theta\left[C_y^2+C_x^2-2C_{xy}\right]=\bar{Y}^2\left[\gamma_1-\gamma_4-2\gamma_5-1\right] \tag{3.100}$$

$$HKO\left(t_{BT}\right)=\bar{Y}^2\theta\left[C_y^2+\frac{C_x^2}{4}-C_{xy}\right]=\bar{Y}^2\left[\gamma_1-\gamma_5-\frac{3\gamma_3}{2}-1\right] \tag{3.101}$$

$$HKO\left(t_{reg}\right)=\bar{Y}^2\theta C_y^2\left(1-\rho^2\right)=\bar{Y}^2\left[\gamma_1-\left(\frac{\left(\gamma_4+\gamma_5\right)^2}{\gamma_4}\right)-1\right] \tag{3.102}$$

eşitlikleri elde edilmektedir. Bu eşitliklerden yararlanılarak etkinlik karşılaştırması yapıldığında,

$$HKO_{\min}\left(t_{EE2}\right)<HKO\left(t_R\right)$$

$$\bar{Y}^2\left[1-q_2\right]<\bar{Y}^2\left[\gamma_1-\gamma_4-2\gamma_5-1\right]$$

$$\bar{Y}^2\left[\gamma_1-\gamma_4-2\gamma_5-1-1+q_2\right]>0$$

$$\left[\left(\gamma_1+q_2\right)-2\left(\gamma_5+1\right)-\gamma_4\right]>0$$

$$\left[\left(\gamma_1+\left(\frac{\gamma_4+2\gamma_4\gamma_5+\gamma_1\gamma_4^2}{\gamma_1\gamma_4-\gamma_5^2}\right)\right)-2\left(\gamma_5+1\right)-\gamma_4\right]>0$$

$$\frac{\gamma_1\left(\gamma_1\gamma_4-\gamma_5^2-2\gamma_4\gamma_5-2\gamma_4\right)+\gamma_4\left(1+\gamma_5^2\right)+2\gamma_5\left(\gamma_4+\gamma_5^2+\gamma_5\right)}{\gamma_1\gamma_4-\gamma_5^2}>0,\ \left(\gamma_1\gamma_4-\gamma_5^2\right)>0 \tag{3.103}$$

$$HKO_{\min}\left(t_{EE2}\right)<HKO\left(t_{BT}\right)$$

$$\bar{Y}^2\left[1-q_2\right]<\bar{Y}^2\left[\gamma_1-\gamma_5-\frac{3\gamma_3}{2}-1\right]$$

$$\bar{Y}^2\left[\gamma_1-\gamma_5-\frac{3\gamma_3}{2}-1-1+q_2\right]>0$$

$$\left[\left(\gamma_1-\gamma_5\right)+\left(q_2-2\right)-\frac{3\gamma_3}{2}\right]>0$$

$$\left[\left(\gamma_1-\gamma_5\right)+\left(\left(\frac{\gamma_4+2\gamma_4\gamma_5+\gamma_1\gamma_4^2}{\gamma_1\gamma_4-\gamma_5^2}\right)-2\right)-\frac{3\gamma_3}{2}\right]>0$$

$$\frac{\gamma_1\left(2\gamma_1\gamma_4-2\gamma_5^2-2\gamma_4\gamma_5+2\gamma_4^2-4\gamma_4-3\gamma_3\gamma_4\right)+2\gamma_4+\gamma_5\left(2\gamma_5^2+4\gamma_5+4\gamma_4+3\gamma_3\gamma_5\right)}{\gamma_1\gamma_4-\gamma_5^2}>0,\ \left(\gamma_1\gamma_4-\gamma_5^2\right)>0 \tag{3.104}$$

$$HKO_{\min}\left(t_{EE2}\right) < HKO\left(t_{reg}\right)$$

$$\bar{Y}^2\left[1-q_2\right] < \bar{Y}^2\left[\gamma_1 - \left(\frac{\left(\gamma_4+\gamma_5\right)^2}{\gamma_4}\right) - 1\right]$$

$$\bar{Y}^2\left[\gamma_1 - \left(\frac{\left(\gamma_4+\gamma_5\right)^2}{\gamma_4}\right) - 1 - 1 + q_2\right] > 0$$

$$\left[\gamma_1\gamma_4 - \left(\gamma_4+\gamma_5\right)^2 - 2\gamma_4 + q_2\gamma_4\right] > 0$$

$$\left[\gamma_1\gamma_4 - \left(\gamma_2+\gamma_3\right)^2 - 2\gamma_4 + \left(\frac{\gamma_4 + 2\gamma_4\gamma_5 + \gamma_1\gamma_4^2}{\gamma_1\gamma_4 - \gamma_5^2}\right)\gamma_4\right] > 0$$

$$\frac{\left(\gamma_4\left(\gamma_1-1\right) - \gamma_5\left(\gamma_4+\gamma_5\right)\right)^2}{\gamma_4\left(\gamma_1\gamma_4-\gamma_5^2\right)} > 0 \quad \gamma_4\left(\gamma_1\gamma_4-\gamma_5^2\right) > 0 \qquad (3.105)$$

koşulları elde edilmektedir. (3.103), (3.104) ve (3.105) koşullarının sağlandığı durumda, önerilen t_{EE2} tahmin edicisinin, t_R, t_{BT}, t_{reg} tahmin edicilerine göre daha etkin olduğu söylenebilmektedir.

Shabbir ve Gupta [17] tarafından önerilen t_{SG} üstel oransal tahmin edici için t_R, t_{BT} ve t_{reg} tahmin edicileri ile etkinlik karşılaştırması yapılmıştır.

$$HKO_{\min}\left(t_{SG}\right) < HKO\left(t_R\right)$$

$$\bar{Y}^2\left[\left(1-\frac{\gamma C_x^2}{4\left(N+1\right)^2}\right) - \frac{\left(1-\frac{\gamma C_x^2}{8\left(N+1\right)^2}\right)^2}{1+\gamma C_y^2\left(1-\rho_{xy}^2\right)}\right] < \gamma\bar{Y}^2\left[C_y^2 + C_x^2 - 2C_{xy}\right]$$

$\left(1+\gamma C_y^2\left(1-\rho_{xy}^2\right)\right) = \alpha$ olmak üzere,

$$\left(\gamma\left(C_x - \rho_{xy}C_y\right)^2 + \left(\gamma^2 C_y^2\left(1-\rho_{xy}^2\right)\right)\left(C_y^2 + C_x^2 - 2C_{xy}\right)\right.$$
$$\left. + \left(\frac{\gamma^2 C_x^2}{4\left(N+1\right)^2}\right)\left(C_y^2\left(1-\rho_{xy}^2\right) + \frac{C_x^2}{16\left(N+1\right)^2}\right)\right) > 0 \qquad (3.106)$$

$HKO_{\min}\left(t_{SG}\right) < HKO\left(t_{BT}\right)$

$$\bar{Y}^2\left[\left(1-\frac{\gamma C_x^2}{4\left(N+1\right)^2}\right)-\frac{\left(1-\frac{\gamma C_x^2}{8\left(N+1\right)^2}\right)^2}{1+\gamma C_y^2\left(1-\rho_{xy}^2\right)}\right] < \gamma\bar{Y}^2\left[C_y^2+\frac{C_x^2}{4}-C_{xy}\right]$$

$\left(1+\gamma C_y^2\left(1-\rho_{xy}^2\right)\right)=\alpha$ olmak üzere,

$$\left(\gamma\left(\frac{C_x}{2}-\rho_{xy}C_y\right)^2+\left(\gamma^2 C_y^2\left(1-\rho_{xy}^2\right)\right)\left(C_y^2+\frac{C_x^2}{4}-C_{xy}\right)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\gamma^2 C_x^2}{4\left(N+1\right)^2}\right)\left(C_y^2\left(1-\rho_{xy}^2\right)+\frac{C_x^2}{16\left(N+1\right)^2}\right)\right)>0 \qquad (3.107)$$

$HKO_{\min}\left(t_{SG}\right) < HKO\left(t_{reg}\right)$

$$\bar{Y}^2\left[\left(1-\frac{\gamma C_x^2}{4\left(N+1\right)^2}\right)-\frac{\left(1-\frac{\gamma C_x^2}{8\left(N+1\right)^2}\right)^2}{1+\gamma C_y^2\left(1-\rho_{xy}^2\right)}\right] < \gamma\bar{Y}^2 C_y^2\left(1-\rho_{xy}^2\right)$$

$\left(1+\gamma C_y^2\left(1-\rho_{xy}^2\right)\right)=\alpha$ olmak üzere,

$$\left[\left[\gamma C_y^2\left(1-\rho_{xy}^2\right)\right]^2+\left(\frac{\gamma^2 C_x^2}{4\left(N+1\right)^2}\right)\left(C_y^2\left(1-\rho_{xy}^2\right)+\frac{C_x^2}{16\left(N+1\right)^2}\right)\right]>0 \qquad (3.108)$$

(3.106), (3.107) ve (3.108) koşulları sağlandığı takdirde, önerilen t_{SG} tahmin edicisinin daha etkin olduğu sonucuna varılmaktadır.

Yadav [18] tarafından önerilen t_Y üstel oransal tahmin edicisinde dönüşüm uygulandığı belirtilmişti. Bu yüzden tahmin edicinin etkinlik karşılaştırması $t_R, t_{BT}, t_{R*}, t_{BT*}$ ve t_{reg} tahmin edicilerine göre yapılacaktır.

$HKO_{\min}\left(t_Y\right) < HKO\left(t_R\right)$

$\gamma\bar{Y}^2 C_y^2\left(1-\rho_{xy}^2\right) < \gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2+C_x^2-2C_{xy}\right)$

$$\left(C_x-\rho_{xy}C_y\right)^2>0 \qquad (3.109)$$

$$HKO_{\min}(t_Y) < HKO(t_{BT})$$

$$\gamma\bar{Y}^2 C_y^2(1-\rho_{xy}^2) < \gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2 + \frac{C_x^2}{4} - C_{xy}\right)$$

$$\left(\frac{C_x}{2} - \rho_{xy}C_y\right)^2 > 0 \qquad (3.110)$$

$$HKO_{\min}(t_Y) < HKO(t_{R*})$$

$$\gamma\bar{Y}^2 C_y^2(1-\rho_{xy}^2) < \gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2 + g^2C_x^2 - 2gC_{xy}\right)$$

$$\left(gC_x - \rho_{xy}C_y\right)^2 > 0 \qquad (3.111)$$

$$HKO_{\min}(t_Y) < HKO(t_{BT*})$$

$$\gamma\bar{Y}^2 C_y^2(1-\rho_{xy}^2) < \gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2 + \frac{g^2}{4}C_x^2 - gC_{xy}\right)$$

$$\left(\frac{g}{2}C_x - \rho_{xy}C_y\right)^2 > 0 \qquad (3.112)$$

Yapılan etkinlik karşılaştırmalarında (3.109) koşulunda C_x ifadesinin $\rho_{xy}C_y$ çarpımına eşit; (3.110) koşulu için $\frac{C_x}{2}$ ifadesinin $\rho_{xy}C_y$ çarpımına eşit; (3.111) koşulunda gC_x ifadesinin $\rho_{xy}C_y$ çarpımına eşit ve (3.112) koşulu için ise $\frac{g}{2}C_x$ ifadesinin $\rho_{xy}C_y$ çarpımına eşit olduğu durumların haricinde her zaman sağlanacağı için, önerilen üstel oransal tahmin edici t_Y'nin karşılaştırılan $t_R, t_{BT}, t_{R*}, t_{BT*}$ tahmin edicilerinde daha etkin olduğu söylenebilmektedir. Klasik regresyon tahmin edicisi t_{reg} ile t_Y tahmin edicilerinin HKO'larının birbirine eşit olduğu unutulmamalıdır.

Onyeka [19] tarafından önerilen üstel çarpımsal tahmin edici olan t_O sırasıyla t_P, t_{TB} ve t_{reg} tahmin edicileriyle karşılaştırılacaktır.

$$HKO(t_O) < HKO(t_P)$$

$$\gamma\bar{Y}^2\left[C_y^2 + \frac{\theta^2C_x^2}{4} + \theta C_{xy}\right] < \gamma\bar{Y}^2\left[C_y^2 + C_x^2 + 2C_{xy}\right]$$

$$(2-\theta)\left[\frac{C_x^2}{4}(2+\theta) + C_{xy}\right] > 0$$

$$\theta < 2 \rightarrow \left[\frac{C_x^2}{4}(2+\theta) + C_{xy} \right] > 0 \rightarrow K > -\left(\frac{\theta+2}{4} \right) \tag{3.113}$$

$$\theta > 2 \rightarrow \left[\frac{C_x^2}{4}(2+\theta) + C_{xy} \right] < 0 \rightarrow K < -\left(\frac{\theta+2}{4} \right) \tag{3.114}$$

$$HKO(t_O) < HKO(t_{TB})$$

$$\gamma \bar{Y}^2 \left[C_y^2 + \frac{\theta^2 C_x^2}{4} + \theta C_{xy} \right] < \gamma \bar{Y}^2 \left[C_y^2 + \frac{C_x^2}{4} + C_{xy} \right]$$

$$(1-\theta)\left[\frac{C_x^2}{4}(1+\theta) + C_{xy} \right] > 0$$

$$\theta < 1 \rightarrow \left[\frac{C_x^2}{4}(1+\theta) + C_{xy} \right] > 0 \rightarrow K > -\left(\frac{\theta+1}{4} \right) \tag{3.115}$$

$$\theta > 1 \rightarrow \left[\frac{C_x^2}{4}(1+\theta) + C_{xy} \right] < 0 \rightarrow K < -\left(\frac{\theta+1}{4} \right) \tag{3.116}$$

$$HKO(t_O) < HKO(t_{reg})$$

$$\gamma \bar{Y}^2 \left[C_y^2 + \frac{\theta^2 C_x^2}{4} + \theta C_{xy} \right] < \gamma \bar{Y}^2 C_y^2 \left(1-\rho_{xy}^2\right)$$

$$\left(\frac{\theta C_x}{4} + \rho_{xy} C_y \right)^2 < 0 \tag{3.117}$$

θ değerlerine bağlı olarak, klasik çarpımsal tahmin edici t_P ile olan etkinlik karşılaştırmasında, (3.113) ve (3.114); Bahl ve Tuteja [4] tarafından önerilen üstel çarpımsal tahmin edici ile olan karşılaştırmada ise (3.115) ve (3.116) koşullarının sağlandığı durumlarda, Onyeka [19] tarafından önerilen tahmin edici daha etkin olarak bulunmaktadır. t_{reg} ile olan karşılaştırmada ise (3.117) koşulunun sağlanması $\frac{\theta C_x}{4}$ ile $\rho_{xy} C_y$ ifadelerinin toplamının 0 olması durumu haricinde mümkün olmadığı için t_{reg} tahmin edicisinin daha etkin olduğu söylenebilmektedir.

Solanki ve diğerleri [5] tarafından önerilen t_{SSR} üstel çarpımsal tahmin edicisinin etkinlik karşılaştırmasında,

$$HKO_{min}\left(t_{SSR}\right) < HKO\left(t_P\right)$$

$$\gamma\bar{Y}^2 C_y^2\left(1-\rho_{xy}^2\right) < \gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2 + C_x^2 + 2C_{xy}\right)$$

$$\left(C_x + \rho_{xy}C_y\right)^2 > 0 \tag{3.118}$$

$$HKO_{min}\left(t_{SSR}\right) < HKO\left(t_{TB}\right)$$

$$\gamma\bar{Y}^2 C_y^2\left(1-\rho_{xy}^2\right) < \gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2 + \frac{C_x^2}{4} + C_{xy}\right)$$

$$\left(\frac{C_x}{2} + \rho_{xy}C_y\right)^2 > 0 \tag{3.119}$$

olmaktadır. (3.118) koşulu C_x ifadesi ile $\rho_{xy}C_y$ çarpımı toplamının 0 olduğu durum hariç ve (3.119) koşulu $\frac{C_x}{2}$ ifadesi ile $\rho_{xy}C_y$ çarpımı toplamının 0 olduğu durum haricinde her zaman sağlanacağı için, önerilen t_{SSR} tahmin edicisinin karşılaştırma yapılan t_{TB}, t_P tahmin edicilerinden daha etkin olduğu söylenebilmektedir. Tahmin edicinin HKO'su ile klasik regresyon tahmin edicisinin HKO'su birbirine eşit olduğundan, etkinlik karşılaştırması yapılmamıştır.

Singh ve diğerleri [20] t_{SCS} tahmin edicisini önermişlerdi. Tahmin edici içinde hem oransal hem de çarpımsal ifade bulunduğu için sırasıyla t_R, t_P, t_{BT}, t_{TB} etkinlik karşılaştırması yapılacaktır. t_{reg} tahmin edicisinin HKO'su önerilen tahmin edicinin HKO'suna eşit olduğu için etkinlik karşılaştırması verilmemiştir.

$$HKO_{\min}\left(t_{SCS}\right) < HKO\left(t_R\right)$$

$$\gamma\bar{Y}^2 C_y^2\left(1-\rho_{xy}^2\right) < \gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2 + C_x^2 - 2C_{xy}\right)$$

$$\left(C_x - \rho_{xy}C_y\right)^2 > 0 \tag{3.120}$$

$$HKO_{\min}\left(t_{SCS}\right) < HKO\left(t_P\right)$$

$$\gamma\bar{Y}^2 C_y^2\left(1-\rho_{xy}^2\right) < \gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2 + C_x^2 + 2C_{xy}\right)$$

$$\left(C_x + \rho_{xy}C_y\right)^2 > 0 \tag{3.121}$$

$$HKO_{\min}\left(t_{SCS}\right) < HKO\left(t_{BT}\right)$$

$$\gamma\bar{Y}^2 C_y^2\left(1-\rho_{xy}^2\right) < \gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2 + \frac{C_x^2}{4} - C_{xy}\right)$$

$$\left(\frac{C_x}{2} - \rho_{xy}C_y\right)^2 > 0 \qquad (3.122)$$

$$HKO_{\min}\left(t_{SCS}\right) < HKO\left(t_{TB}\right)$$

$$\gamma\bar{Y}^2 C_y^2\left(1-\rho_{xy}^2\right) < \gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2 + \frac{C_x^2}{4} + C_{xy}\right)$$

$$\left(\frac{C_x}{2} + \rho_{xy}C_y\right)^2 > 0 \qquad (3.123)$$

(3.120) koşulunda C_x ile $\rho_{xy}C_y$ ifadelerinin birbirine eşit olması hariç; (3.121) koşulunda C_x ile $\rho_{xy}C_y$ ifadeleri toplamının 0 olması hariç; (3.122) koşulunda $\frac{C_x}{2}$ ile $\rho_{xy}C_y$ ifadelerinin birbirine eşit olması hariç ve son olarak (3.123) koşulunda ise $\frac{C_x}{2}$ ile $\rho_{xy}C_y$ ifadelerinin toplamının 0 olması haricinde, önerilen t_{SCS} üstel tahmin edicisinin her durumda karşılaştırılan t_R, t_P, t_{BT} ve t_{TB} tahmin edicilere göre daha etkin olduğu görülmektedir.

Özel Kadılar [21] tarafından önerilen üstel tahmin edici $t_{GÖK}$ için, sırasıyla t_R, t_P, t_{BT}, t_{TB} etkinlik karşılaştırması yapıldığında,

$$HKO_{\min}\left(t_{GÖK}\right) < HKO\left(t_R\right)$$

$$\gamma\bar{Y}^2 C_y^2\left(1-\rho_{xy}^2\right) < \gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2 + C_x^2 - 2C_{xy}\right)$$

$$\left(C_x - \rho_{xy}C_y\right)^2 > 0 \qquad (3.124)$$

$$HKO_{\min}\left(t_{GÖK}\right) < HKO\left(t_P\right)$$

$$\gamma\bar{Y}^2 C_y^2\left(1-\rho_{xy}^2\right) < \gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2 + C_x^2 + 2C_{xy}\right)$$

$$\left(C_x + \rho_{xy}C_y\right)^2 > 0 \qquad (3.125)$$

$$HKO_{\min}\left(t_{GÖK}\right) < HKO\left(t_{BT}\right)$$

$$\gamma\bar{Y}^2 C_y^2\left(1-\rho_{xy}^2\right) < \gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2 + \frac{C_x^2}{4} - C_{xy}\right)$$

$$\left(\frac{C_x}{2} - \rho_{xy}C_y\right)^2 > 0 \tag{3.126}$$

$$HKO_{\min}\left(t_{GÖK}\right) < HKO\left(t_{TB}\right)$$

$$\gamma\bar{Y}^2 C_y^2\left(1-\rho_{xy}^2\right) < \gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2 + \frac{C_x^2}{4} + C_{xy}\right)$$

$$\left(\frac{C_x}{2} + \rho_{xy}C_y\right)^2 > 0 \tag{3.127}$$

koşulları elde edilmektedir. (3.124) koşulunda C_x ile $\rho_{xy}C_y$ ifadelerinin birbirine eşit olması hariç; (3.125) koşulunda C_x ile $\rho_{xy}C_y$ ifadelerinin toplamının 0 olması hariç; (3.126) $\frac{C_x}{2}$ ile $\rho_{xy}C_y$ ifadelerinin birbirine eşit olması haricinde ve son olarak (3.127) koşulunda ise, $\frac{C_x}{2}$ ile $\rho_{xy}C_y$ ifadelerinin toplamının 0 olması haricindeki durumlarda önerilen $t_{GÖK}$ üstel tahmin edicinin diğer tahmin edicilerden daha etkin olduğu söylenebilmektedir. t_{reg} tahmin edicisinin HKO'su önerilen tahmin edicinin HKO'suna eşit olduğu için karşılaştırması verilmemiştir.

Upadhyaya ve diğerleri [22] tarafından önerilen t_{RUSCY} üstel oransal; t_{PUSCY} ise üstel çarpımsal tahmin edici olmak üzere etkinlik karşılaştırması yapılacaktır. İlk olarak, t_{RUSCY} için,

$$HKO_{\min}\left(t_{RUSCY}\right) < HKO\left(t_R\right)$$

$$\gamma\bar{Y}^2 C_y^2\left(1-\rho_{xy}^2\right) < \gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2 + C_x^2 - 2C_{xy}\right)$$

$$\left(C_x - \rho_{xy}C_y\right)^2 > 0 \tag{3.128}$$

$$HKO_{\min}\left(t_{RUSCY}\right) < HKO\left(t_{BT}\right)$$

$$\gamma\bar{Y}^2 C_y^2\left(1-\rho_{xy}^2\right) < \gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2 + \frac{C_x^2}{4} - C_{xy}\right)$$

$$\left(\frac{C_x}{2}-\rho_{xy}C_y\right)^2>0 \tag{3.129}$$

koşulları elde edilmiştir. (3.128) koşulunda C_x ile $\rho_{xy}C_y$ ifadelerinin birbirine eşit olması ve (3.129) koşulunda ise $\frac{C_x}{2}$ ile $\rho_{xy}C_y$ ifadelerinin birbirine eşit olması durumları haricinde bu koşullar her zaman sağlanacağı için önerilen t_{RUSCY} tahmin edicisinin diğer tahmin edicilerden daha etkin olduğu söylenebilmektedir.

t_{PUSCY} üstel çarpımsal tahmin edici için ise,

$$HKO_{\min}\left(t_{PUSCY}\right)<HKO\left(t_P\right)$$

$$\gamma\bar{Y}^2C_y^2\left(1-\rho_{xy}^2\right)<\gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2+C_x^2+2C_{xy}\right)$$

$$\left(C_x+\rho_{xy}C_y\right)^2>0 \tag{3.130}$$

$$HKO_{\min}\left(t_{PUSCY}\right)<HKO\left(t_{TB}\right)$$

$$\gamma\bar{Y}^2C_y^2\left(1-\rho_{xy}^2\right)<\gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2+\frac{C_x^2}{4}+C_{xy}\right)$$

$$\left(\frac{C_x}{2}+\rho_{xy}C_y\right)^2>0 \tag{3.131}$$

koşulları bulunmuş ve (3.130) koşulu C_x ile $\rho_{xy}C_y$ ifadeleri toplamının 0 ve (3.131) koşulunda ise $\frac{C_x}{2}$ ile $\rho_{xy}C_y$ ifadelerinin toplamının 0 olması durumları hariç koşullar her zaman sağlanacağı için, önerilen t_{PUSCY} tahmin edicisinin t_P ve t_{TB} tahmin edicilerine göre daha etkin olduğu sonucuna varılmıştır.

Shabbir ve diğerleri [23] tarafından önerilen t_{SHG} oransal-çarpımsal tahmin edicisinin, etkinlik karşılaştırması sırasıyla t_R, t_P, t_{BT}, t_{TB} ve t_{reg} tahmin edicileri ile etkinlik karşılaştırması yapılacaktır. Etkinlik karşılaştırması için, minimum HKO (3.61) eşitliğindeki gibi alınıp yapılmıştır.

$$HKO_{\min}\left(t_{SHG}\right)<HKO\left(t_R\right)$$

$$\gamma\bar{Y}^2C_y^2\left(1-\rho_{xy}^2\right)-\left(T_1+T_2\right)<\gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2+C_x^2-2C_{xy}\right)$$

$$\left(C_x-\rho_{xy}C_y\right)^2+\left(T_1+T_2\right)>0 \tag{3.132}$$

$$HKO_{\min}\left(t_{SHG}\right) < HKO\left(t_P\right)$$

$$\gamma\bar{Y}^2C_y^2\left(1-\rho_{xy}^2\right)-\left(T_1+T_2\right) < \gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2+C_x^2+2C_{xy}\right)$$

$$\left(C_x+\rho_{xy}C_y\right)^2+\left(T_1+T_2\right) > 0 \qquad (3.133)$$

$$HKO_{\min}\left(t_{SHG}\right) < HKO\left(t_{BT}\right)$$

$$\gamma\bar{Y}^2C_y^2\left(1-\rho_{xy}^2\right)-\left(T_1+T_2\right) < \gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2+\frac{C_x^2}{4}-C_{xy}\right)$$

$$\left(\frac{C_x}{2}-\rho_{xy}C_y\right)^2+\left(T_1+T_2\right) > 0 \qquad (3.134)$$

$$HKO_{\min}\left(t_{SHG}\right) < HKO\left(t_{TB}\right)$$

$$\gamma\bar{Y}^2C_y^2\left(1-\rho_{xy}^2\right)-\left(T_1+T_2\right) < \gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2+\frac{C_x^2}{4}+C_{xy}\right)$$

$$\left(\frac{C_x}{2}+\rho_{xy}C_y\right)^2+\left(T_1+T_2\right) > 0 \qquad (3.135)$$

$$HKO_{\min}\left(t_{SHG}\right) < HKO\left(t_{reg}\right)$$

$$\gamma\bar{Y}^2C_y^2\left(1-\rho_{xy}^2\right)-\left(T_1+T_2\right) < \gamma\bar{Y}^2C_y^2\left(1-\rho_{xy}^2\right)$$

$$\left(T_1+T_2\right) > 0 \qquad (3.136)$$

Elde edilen (3.132), (3.133), (3.134), (3.135) ve (3.136) koşullarının sağlandığı durumlarda, önerilen t_{SHG} tahmin edicisinin, karşılaştırılan tahmin edicilere göre daha etkin olduğu söylenebilmektedir.

Vishwakarma ve diğerleri [24] tarafından önerilen üstel oransal t_{RVSGP} tahmin edicisi, t_R ve t_{BT} ile; üstel çarpımsal t_{PVSGP} tahmin edicisi ise t_P ve t_{TB} ile karşılaştırılacaktır. Klasik regresyon tahmin edicisinin HKO'su, önerilen tahmin edicilerin HKO'larına eşit olduğu için t_{reg} ile etkinlik karşılaştırmasına yer verilmemiştir.

Önerilen t_{RVSGP} tahmin edicisi için,

$$HKO_{\min}\left(t_{RVSGP}\right) < HKO\left(t_R\right)$$

$$\gamma\bar{Y}^2C_y^2\left(1-\rho_{xy}^2\right) < \gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2+C_x^2-2C_{xy}\right)$$

$$\left(C_x-\rho_{xy}C_y\right)^2 > 0 \qquad (3.137)$$

$$HKO_{\min}\left(t_{RVSGP}\right) < HKO\left(t_{BT}\right)$$

$$\gamma\bar{Y}^2 C_y^2\left(1-\rho_{xy}^2\right) < \gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2+\frac{C_x^2}{4}-C_{xy}\right)$$

$$\left(\frac{C_x}{2}-\rho_{xy}C_y\right)^2 > 0 \qquad (3.138)$$

olmaktadır. (3.137) ve (3.138) koşullarında yer alan eşitsizlikteki ifadelerin birbirine eşit olmaası durumu haricinde her zaman sağlanacağı için t_{RVSGP} tahmin edicisinin, t_R ve t_{BT} tahmin edicilere göre daha etkin olduğu söylenebilmektedir.

t_{PVSGP} tahmin edicisi için ise,

$$HKO_{\min}\left(t_{PVSGP}\right) < HKO\left(t_P\right)$$

$$\gamma\bar{Y}^2 C_y^2\left(1-\rho_{xy}^2\right) < \gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2+C_x^2+2C_{xy}\right)$$

$$\left(C_x+\rho_{xy}C_y\right)^2 > 0 \qquad (3.139)$$

$$HKO_{\min}\left(t_{PVSGP}\right) < HKO\left(t_{TB}\right)$$

$$\gamma\bar{Y}^2 C_y^2\left(1-\rho_{xy}^2\right) < \gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2+\frac{C_x^2}{4}+C_{xy}\right)$$

$$\left(\frac{C_x}{2}+\rho_{xy}C_y\right)^2 > 0 \qquad (3.140)$$

olmaktadır. (3.139) ve (3.140) eşitsizliklerinde yer alan koşullardaki ifadelerin toplamlarının 0 olması durumu haricinde her zaman sağlanacağı için, önerilen t_{PVSGP} tahmin edicisinin diğer tahmin edicilere göre daha etkin olduğu görülmektedir.

Singh ve Pal [25] tarafından önerilen tahmin edicilerden $t_{SP1}, t_{SP2}, t_{SP3}$ oransal üstel; t_{SP4} ise üstel çarpımsal tahmin edicilerdi. Etkinlik için sırasıyla t_{SP1}; t_R ile aynı HKO eşitliğine sahip olmasından dolayı sadece t_{BT} ve t_{reg} ile; t_{SP2} ve t_{SP3} tahmin edicileri; t_R, t_{BT}, t_{reg} ile, t_{SP4} ise t_P, t_{TB}, t_{reg} ile karşılaştırılacaktır.

Sırasıyla t_{SP1} tahmin edicisi için,

$$HKO\left(t_{SP1}\right) < HKO\left(t_{BT}\right)$$

$$\gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2 + C_x^2 - 2C_{xy}\right) < \gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2 + \frac{C_x^2}{4} - C_{xy}\right)$$

$$\frac{3}{4} < \rho_{xy}\frac{C_y}{C_x} \qquad (3.141)$$

olmaktadır. Dolayısıyla, Bahl ve Tuteja [4] tarafından önerilen tahmin edici (3.141) koşulu sağlandığında t_{SP1} tahmin edicisinin daha etkin olduğu söylenebilmektedir.

$$HKO\left(t_{SP1}\right) < HKO\left(t_{reg}\right)$$

$$\gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2 + C_x^2 - 2C_{xy}\right) < \gamma\bar{Y}^2 C_y^2\left(1 - \rho_{xy}^2\right)$$

$$\left(C_x - \rho_{xy}C_y\right)^2 < 0 \qquad (3.142)$$

t_{reg} ile yapılan karşılaştırmada ise, elde edilen (3.142) koşulunun sağlanması C_x ile $\rho_{xy}C_y$ ifadelerinin birbirnine eşit olması durumu haricinde mümkün olmadığından, klasik regresyon tahmin edicisinin her zaman t_{SP1} tahmin edicisinden daha etkin olacağı söylenebilir. t_{SP2} tahmin edicisi için,

$$HKO\left(t_{SP2}\right) < HKO\left(t_{R}\right)$$

$$\gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2 + \frac{9C_x^2}{4} - 3C_{xy}\right) < \gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2 + C_x^2 - 2C_{xy}\right)$$

$$\frac{4}{5}\rho_{xy}\frac{C_y}{C_x} > 0 \qquad (3.143)$$

$$HKO\left(t_{SP2}\right) < HKO\left(t_{BT}\right)$$

$$\gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2 + \frac{9C_x^2}{4} - 3C_{xy}\right) < \gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2 + \frac{C_x^2}{4} - C_{xy}\right)$$

$$\rho_{xy}\frac{C_y}{C_x} > 1 \qquad (3.144)$$

$$HKO\left(t_{SP2}\right) < HKO\left(t_{reg}\right)$$

$$\gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2 + \frac{9C_x^2}{4} - 3C_{xy}\right) < \gamma\bar{Y}^2 C_y^2\left(1 - \rho_{xy}^2\right)$$

$$\left(\frac{3}{2}C_x - \rho_{xy}C_y\right)^2 < 0 \qquad (3.145)$$

olmaktadır. Klasik oransal tahmin edici t_R ile Bahl ve Tuteja [4] tarafından önerilen üstel oransal tahmin edici ile olan karşılaştırmada (3.143) ve (3.144) koşullarının sağlandığı durumlarda t_{SP2} olarak önerilen tahmin edici daha etkin olarak bulunmaktadır. t_{reg} ile olan karşılaştırmada bulunan (3.145) koşulunun sağlanması $\frac{3}{2}C_x$ ile $\rho_{xy}C_y$ ifadelerinin birbirine eşit olması durumu haricinde mümkün olmadığı için, t_{reg} tahmin edicisinin daha etkin olduğu söylenebilmektedir.

t_{SP3} ve t_{SP4} tahmin edicileri için ise, HKO eşitliğinde yer alan

$$C = \rho_{xy}\frac{C_y}{C_x}$$

biçiminde tanımlanmış olmak üzere etkinlik karşılaştırmaları yapılmıştır.

$$HKO(t_{SP3}) < HKO(t_R)$$

$$\bar{Y}^2\gamma\left(C_y^2 + \frac{3\tau C_x^2}{4}(3\tau - 4C)\right) < \gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2 + C_x^2 - 2C_{xy}\right)$$

$$C_{xy}(2 - 3\tau) < C_x^2\left(1 - \frac{9\tau^2}{4}\right)$$

$$\rho_{xy}\frac{C_y}{C_x} < \frac{(2+3\tau)}{4} \tag{3.146}$$

$$HKO(t_{SP3}) < HKO(t_{BT})$$

$$\bar{Y}^2\gamma\left(C_y^2 + \frac{3\tau C_x^2}{4}(3\tau - 4C)\right) < \gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2 + \frac{C_x^2}{4} - C_{xy}\right)$$

$$C_{xy}(1 - 3\tau) < C_x^2\left(\frac{1}{4} - \frac{9\tau^2}{4}\right)$$

$$\rho_{xy}\frac{C_y}{C_x} < \frac{(1+3\tau)}{4} \tag{3.147}$$

$$HKO(t_{SP3}) < HKO(t_{reg})$$

$$\bar{Y}^2\gamma\left(C_y^2 + \frac{3\tau C_x^2}{4}(3\tau - 4C)\right) < \gamma\bar{Y}^2 C_y^2\left(1 - \rho_{xy}^2\right)$$

$$\left(\frac{3\tau}{2}C_x - \rho_{xy}C_y\right)^2 < 0 \tag{3.148}$$

t_R ve t_{BT} ile olan karşılaştırmada, (3.146) ve (3.147) koşullarının sağlandığı durumlarda, önerilen t_{SP3} tahmin edicisi daha etkin olarak bulunmaktadır. t_{reg} ile olan karşılaştırmada bulunan (3.148) koşulunun sağlanması eşitsizlikte yer alan ifadelerin birbirine eşit olması durumu hariç mümkün olmadığı için, t_{reg} tahmin edicisinin daha etkin olduğu söylenebilmektedir.

Önerilen t_{SP4} tahmin edicisi için t_P, t_{TB}, t_{reg} karşılaştırmaları yapılmıştır.

$$HKO\left(t_{SP4}\right) < HKO\left(t_P\right)$$

$$\bar{Y}^2\gamma\left(C_y^2 + \frac{3\tau C_x^2}{4}\left(3\tau + 4C\right)\right) < \gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2 + C_x^2 + 2C_{xy}\right)$$

$$C_{xy}\left(3\tau - 2\right) < C_x^2\left(1 - \frac{9\tau^2}{4}\right)$$

$$\rho_{xy}\frac{C_y}{C_x} > \frac{\left(2 + 3\tau\right)}{4} \tag{3.149}$$

$$HKO\left(t_{SP4}\right) < HKO\left(t_{TB}\right)$$

$$\bar{Y}^2\gamma\left(C_y^2 + \frac{3\tau C_x^2}{4}\left(3\tau + 4C\right)\right) < \gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2 + \frac{C_x^2}{4} + C_{xy}\right)$$

$$C_{xy}\left(3\tau - 1\right) < C_x^2\left(\frac{1}{4} - \frac{9\tau^2}{4}\right)$$

$$\rho_{xy}\frac{C_y}{C_x} > \frac{\left(1 + 3\tau\right)}{4} \tag{3.150}$$

$$HKO\left(t_{SP4}\right) < HKO\left(t_{reg}\right)$$

$$\bar{Y}^2\gamma\left(C_y^2 + \frac{3\tau C_x^2}{4}\left(3\tau + 4C\right)\right) < \gamma\bar{Y}^2 C_y^2\left(1 - \rho_{xy}^2\right)$$

$$\left(\frac{3\tau}{2}C_x + \rho_{xy}C_y\right)^2 < 0 \tag{3.151}$$

(3.149) ve (3.150) koşulları sağlandığı takdirde, önerilen üstel çarpımsal tahmin edici t_{SP4}'ün daha etkin olduğu söylenebilmektedir. Ancak, t_{reg} ile olan karşılaştırmada bulunan (3.151) koşulunun sağlanması eşitsizlikte yer alan ifadelerin toplamının 0 olması haricinde mümkün olmadığı için, klasik regresyon tahmin edicisinin t_{SP4} tahmin edicisine göre daha etkin olduğu sonucuna varılmaktadır.

Tek yardımcı değişken bilgisini kullanan tahmin edicilerin karşılaştırmasında son olarak, Sharma ve Tailor [26] tarafından önerilen t_{BT*} ve t_{TB*} tahmin edicileri incelenecektir.
İlk olarak üstel oransal tahmin edicisi $\left(t_{BT*}\right)$, t_R, t_{BT}, t_{reg} ve t_{R*} ile de karşılaştırılacaktır.

$$HKO\left(t_{BT*}\right) < HKO\left(t_R\right)$$

$$\gamma \bar{Y}^2\left(C_y^2 + \frac{g^2}{4}C_x^2 - gC_{yx}\right) < \gamma \bar{Y}^2\left(C_y^2 + C_x^2 - 2C_{xy}\right)$$

$$\frac{\left(g+2\right)}{4} < \rho_{xy}\frac{C_y}{C_x} \tag{3.152}$$

$$HKO\left(t_{BT*}\right) < HKO\left(t_{R*}\right)$$

$$\gamma \bar{Y}^2\left(C_y^2 + \frac{g^2}{4}C_x^2 - gC_{yx}\right) < \gamma \bar{Y}^2\left(C_y^2 + g^2C_x^2 - 2gC_{yx}\right)$$

$$g > \frac{4}{3}\rho_{xy}\frac{C_y}{C_x} \tag{3.153}$$

$$HKO\left(t_{BT*}\right) < HKO\left(t_{BT}\right)$$

$$\gamma \bar{Y}^2\left(C_y^2 + \frac{g^2}{4}C_x^2 - gC_{yx}\right) < \gamma \bar{Y}^2\left(C_y^2 + \frac{C_x^2}{4} - C_{yx}\right)$$

$$\frac{\left(g+1\right)}{4} < \rho_{xy}\frac{C_y}{C_x} \tag{3.154}$$

$$HKO\left(t_{BT*}\right) < HKO\left(t_{reg}\right)$$

$$\gamma \bar{Y}^2\left(C_y^2 + \frac{g^2}{4}C_x^2 - gC_{yx}\right) < \gamma \bar{Y}^2 C_y^2\left(1 - \rho_{xy}^2\right)$$

$$\left(\frac{g}{2}C_x - \rho_{xy}C_y\right)^2 < 0 \tag{3.155}$$

(3.152), (3.153) ve (3.154) koşulları sağlandığında, önerilen t_{BT*} üstel oransal tahmin edicisinin, t_R, t_{R*}, t_{BT} tahmin edicilerine göre daha etkin olduğu görülmektedir. Ancak klasik regresyon tahmin edicisi ile yapılan etkinlik karşılaştırılmasında, elde edilen (3.155) koşulunun sağlanması $\frac{g}{2}C_x$ ile $\rho_{xy}C_y$ ifadelerinin birbirine eşit olması haricinde mümkün olmadığı için, t_{reg} tahmin edicisinin t_{BT*} tahmin edicisinden daha etkin olduğu söylenebilir.

t_{TB*} için etkinlik karşılaştırmasında,

$$HKO\left(t_{TB*}\right) < HKO\left(t_{P}\right)$$

$$\gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2+\frac{g^2}{4}C_x^2+gC_{yx}\right) < \gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2+C_x^2+2C_{xy}\right)$$

$$-\frac{\left(g+2\right)}{4} < \rho_{xy}\frac{C_y}{C_x} \tag{3.156}$$

$$HKO\left(t_{TB*}\right) < HKO\left(t_{P*}\right)$$

$$\gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2+\frac{g^2}{4}C_x^2+gC_{yx}\right) < \gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2+g^2C_x^2+2gC_{yx}\right)$$

$$g > -\frac{4}{3}\rho_{xy}\frac{C_y}{C_x} \tag{3.157}$$

$$HKO\left(t_{TB*}\right) < HKO\left(t_{TB}\right)$$

$$\gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2+\frac{g^2}{4}C_x^2+gC_{yx}\right) < \gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2+\frac{C_x^2}{4}+C_{yx}\right)$$

$$-\frac{\left(g+1\right)}{4} < \rho_{xy}\frac{C_y}{C_x} \tag{3.158}$$

$$HKO\left(t_{TB*}\right) < HKO\left(t_{reg}\right)$$

$$\gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2+\frac{g^2}{4}C_x^2+gC_{yx}\right) < \gamma\bar{Y}^2C_y^2\left(1-\rho_{xy}^2\right)$$

$$\left(\frac{g}{2}C_x+\rho_{xy}C_y\right)^2 < 0 \tag{3.159}$$

olmaktadır. (3.156), (3.157) ve (3.158) koşulları sağlandığında, önerilen t_{TB*} üstel çarpımsal tahmin edicisinin, t_P, t_{P*}, t_{TB} tahmin edicilerine göre daha etkin olduğu görülmektedir. Ancak klasik regresyon tahmin edicisi ile yapılan etkinlik karşılaştırılmasında elde edilen (3.159) koşulunun sağlanması eşitsizlikte yer alan ifadelerin toplamının 0 olması durumu dışında mümkün olmadığı için, t_{reg} tahmin edicinin t_{TB*} tahmin edicisinden daha etkin olduğu söylenebilir.

3.2. BRÖ Yönteminde İki Yardımcı Değişken Bilgisini Kullanan Üstel Tahmin Ediciler

Önceki alt bölümde, Basit Rastgele Örnekleme yöntemi için tek yardımcı değişken (x) bilgisinden yararlanan literatürdeki üstel fonksiyona sahip tahmin ediciler incelenmişti. Bu bölümde ise, iki yardımcı değişkene $(x),(z)$ sahip üstel tip tahmin ediciler incelenecektir.

İncelemeye ilk olarak, t_{BT2}, t_{TB2} ile başlanılacak ve devamında ise, tahmin edicilerin etkinlik karşılaştırmalarından bahsedilecektir.

Noor-ul-Amin ve diğerleri [27] tarafından önerilen iki yardımcı değişken bilgisinden yararlanan üstel oransal tahmin edici,

$$t_{BT2} = \bar{y}\exp\left[\frac{\bar{X}-\bar{x}}{\bar{X}+\bar{x}} - \frac{\bar{z}-\bar{Z}}{\bar{Z}+\bar{z}}\right] \tag{3.160}$$

biçiminde verilmiş ve

$$HKO\left(t_{BT2}\right) = \gamma\bar{Y}^2\left[C_y^2 + \frac{C_x^2}{4} + \frac{C_z^2}{4} - C_{yx} - C_{yz} + \frac{C_{xz}}{2}\right] \tag{3.161}$$

biçiminde elde edilmiştir. Önerilen üstel çarpımsal tahmin edici ise,

$$t_{TB2} = \bar{y}\exp\left[\frac{\bar{x}-\bar{X}}{\bar{X}+\bar{x}} - \frac{\bar{Z}-\bar{z}}{\bar{Z}+\bar{z}}\right] \tag{3.162}$$

şeklinde verilmiş ve

$$HKO\left(t_{TB2}\right) = \gamma\bar{Y}^2\left[C_y^2 + \frac{C_x^2}{4} + \frac{C_z^2}{4} + C_{yx} + C_{yz} + \frac{C_{xz}}{2}\right] \tag{3.163}$$

biçiminde bulunmuştur.

Singh ve diğerleri [28] kitle ortalaması için iki yardımcı değişkenli üstel oransal-çarpımsal tahmin ediciyi

$$t_{SUT} = \bar{y}\exp\left[\frac{\bar{X}-\bar{x}}{\bar{X}+\bar{x}}\right]\exp\left[\frac{\bar{z}-\bar{Z}}{\bar{Z}+\bar{z}}\right] \tag{3.164}$$

şeklinde vermişlerdir ve

$$K_{ij} = \rho_{ij} \frac{C_i}{C_j}, \; (i, j = x, y, z)$$

tanımından yararlanılarak

$$HKO(t_{SUT}) = \bar{Y}^2 \gamma \left[C_y^2 + \left(C_x^2 \left(\frac{1-4K_{yx}}{4} \right) \right) + \left(C_z^2 \left(\frac{1+4K_{yz}-2K_{xz}}{4} \right) \right) \right] \tag{3.165}$$

biçiminde elde etmişlerdir. Burada, t_{SUT} olarak önerdikleri tahmin ediciyi genelleştirerek, α_1 ve α_2 tahmin edicide yer alan sabitler olmak üzere

$$t_{SUT}^{(\alpha_1,\alpha_2)} = \bar{y} \exp\left\{ \alpha_1 \frac{(\bar{X}-\bar{x})}{(\bar{X}+\bar{x})} \right\} \exp\left\{ \alpha_2 \frac{(\bar{z}-\bar{Z})}{(\bar{z}+\bar{Z})} \right\} \tag{3.166}$$

şeklinde önermişlerdir.

$$\frac{\partial HKO\left(t_{SUT}^{(\alpha_1,\alpha_2)}\right)}{\partial \alpha_1} = 0 \qquad \frac{\partial HKO\left(t_{SUT}^{(\alpha_1,\alpha_2)}\right)}{\partial \alpha_2} = 0 \tag{3.167}$$

işlemlerini yaparak optimum α_1 ve α_2 değerlerini

$$\alpha_1^* = \frac{2(K_{yx} - K_{yz}K_{xz})}{(1-\rho_{xz}^2)}, \quad \alpha_2^* = \frac{-2(K_{yz} - K_{yx}K_{xz})}{(1-K_{xz}K_{zx})} \tag{3.168}$$

biçiminde bulmuşlardır. Burada, α_1^* ve α_2^* değerleri, (3.165) eşitliğinde yerine konularak,

$$HKO_{\min}\left(t_{SUT}^{(\alpha_1,\alpha_2)}\right) = \frac{\bar{Y}^2}{2} \gamma C_y^2 \left[1 - \frac{(\rho_{yx}^2 + \rho_{yz}^2 - 2\rho_{xz}\rho_{yz}\rho_{yx})}{(1-\rho_{xz}^2)} \right] \tag{3.169}$$

eşitliğine ulaşmışlardır.

Noor-ul-Amin ve diğerleri [27] tarafından önerilen tahmin edicilerden iki tanesi (3.160) ve (3.162) eşitliklerinde verilmişti. (3.160) eşitliğinde verilen üstel oransal tahmin edicinin genelleştirilmiş hali

$$t_{AHK3} = \bar{y} \exp\left[\frac{\bar{X}-\bar{x}}{\bar{X}+(a-1)\bar{x}} - \frac{\bar{z}-\bar{Z}}{\bar{Z}+(b-1)\bar{z}} \right] \tag{3.170}$$

biçiminde önerilmiştir. Önerilen genelleştirilmiş üstel oransal-oransal tahmin edicinin HKO bulunmuş, devamında a ve b sabitlerine göre türev alınarak optimum a ve b değerleri,

$$K_{AHK} = \frac{K_{yz} - K_{yx}K_{xz}}{1-\rho_{xz}^2} \tag{3.171}$$

olmak üzere,

$$a^* = \frac{1}{K_{yx} - K_{xz}\left(\dfrac{K_{yz} - K_{yx}K_{xz}}{1-\rho_{xz}^2}\right)} = \frac{1}{K_{yx} - K_{xz}K_{AHK}}, \qquad b^* = \frac{1-\rho_{xz}^2}{K_{yz} - K_{yx}K_{xz}} \tag{3.172}$$

eşitliğindeki gibi bulunarak,

$$\begin{aligned} HKO_{\min}\left(t_{AHK3}\right) = \bar{Y}^2\gamma\Big(C_y^2 - C_x^2\left(K_{yx}^2 - K_{AHK}^2K_{xz}^2\right) \\ +K_{AHK}C_z^2\left(2K_{xz}\left(K_{yx} - K_{AHK}K_{xz}\right) - 2K_{yz} + K_{AHK}\right)\Big) \end{aligned} \tag{3.173}$$

elde edilmiştir.

Önerilen genelleştirilmiş üstel çarpımsal-çarpımsal tahmin edici ise,

$$t_{AHK4} = \bar{y}\exp\left[\frac{\bar{x} - \bar{X}}{\bar{x}(c-1) + \bar{X}} - \frac{\bar{Z} - \bar{z}}{\bar{Z} + \bar{z}(d-1)}\right] \tag{3.174}$$

biçiminde verilmiştir.

(3.171) eşitliğinden yararlanılarak, c ve d sabitlerine göre türev alınarak optimum c ve d değerleri,

$$c^* = \frac{1}{K_{xz}K_{AHK} - K_{yx}}, \qquad d^* = \frac{1-\rho_{xz}^2}{K_{yx}K_{xz} - K_{yz}} \tag{3.175}$$

olarak bulunmakta ve HKO'da yerine koyularak,

$$\begin{aligned} HKO_{\min}\left(t_{AHK4}\right) = \bar{Y}^2\gamma\Big(C_y^2 - C_x^2\left(K_{yx}^2 - K_{AHK}^2K_{xz}^2\right) \\ +K_{AHK}C_z^2\left(2K_{xz}\left(K_{yx} - K_{AHK}K_{xz}\right) + 2K_{yz} - K_{AHK}\right)\Big) \end{aligned} \tag{3.176}$$

eşitliğine ulaşılmaktadır.

Sharma ve Singh [10] iki yardımcı değişken bilgisinden yararlanarak, üstel tahmin edici ailesi önermişlerdir. δ ve β (-1,0,1) değerlerini alan, w_1 ve w_2 HKO'yu minimum yapan sabitleri ve $\eta_1, \eta_2, \lambda_1, \lambda_2$ ise $C_x, \beta_2(x), \rho$ gibi yardımcı değişken bilgilerini göstermek üzere, önerilen tahmin edici

$$t_{SS} = \bar{y}\left[w_1\left(\frac{\bar{x}}{\bar{X}}\right)^{\delta}\exp\left(\frac{\eta_1\left(\bar{X} - \bar{x}\right)}{\eta_1\left(\bar{X} + \bar{x}\right) + 2\lambda_1}\right) + w_2\left(\frac{\bar{z}}{\bar{Z}}\right)^{\beta}\exp\left(\frac{\eta_2\left(\bar{Z} - \bar{z}\right)}{\eta_2\left(\bar{Z} + \bar{z}\right) + 2\lambda_2}\right)\right] \tag{3.177}$$

biçiminde verilmiştir.

Tahmin edicinin minimum HKO hesaplamasında optimum w_1 $\left(w_1^*\right)$ ve optimum w_2 $\left(w_2^*\right)$ değerleri bulunmuştur.

$$
\begin{aligned}
A_1 &= 1 + C_y^2 + C_x^2\left(\gamma_1^2 - 2\gamma_1\delta + \delta^2 + 3\gamma_1^2 - 2\delta\gamma_1 + \delta^2 - \delta\right) + 4\delta C_{yx} - 4\gamma_1 C_{yx} \\
A_2 &= 1 + C_y^2 + C_z^2\left(\gamma_2^2 - 2\gamma_2\beta + \beta^2 + 3\gamma_2^2 - 2\beta\gamma_2 + \beta^2 - \beta\right) + 4\beta C_{yz} - 4\gamma_2 C_{yz} \\
A_3 &= 1 - C_x\left(\delta\rho_{yx}C_y - \gamma_1\rho_{yx}C_y - \frac{3}{2}\gamma_1^2 C_x + \delta\gamma_1 C_x - \frac{\delta(\delta-1)}{2}C_x\right) \\
A_4 &= 1 - C_z\left(\beta\rho_{yz}C_y - \gamma_2\rho_{yz}C_y - \frac{3}{2}\gamma_2^2 C_z + \beta\gamma_2 C_z - \frac{\beta(\beta-1)}{2}C_z\right) \\
A_5 &= \Bigg(1 + C_y^2 + \frac{3}{2}\gamma_1^2 C_x^2 - \delta\gamma_1 C_x^2 + \frac{\delta(\delta-1)}{2}C_x^2 + \frac{3}{2}\gamma_2^2 C_z^2 - \beta\gamma_2 C_z^2 + \frac{\beta(\beta-1)}{2}C_z^2 \\
&\qquad + 2\delta C_{yx} - 2\gamma_1 C_{yx} + 2\beta C_{yz} - 2\gamma_2 C_{yz} + C_{xz}\left(\delta-\gamma_1\right)\left(\beta-\gamma_2\right)\Bigg)
\end{aligned}
\tag{3.178}
$$

Bu değerlerden yararlanılarak,

$$
w_1^* = \left(\frac{A_2A_3 - A_4A_5}{A_1A_2 - A_5^2}\right), \qquad w_2^* = \left(\frac{A_1A_4 - A_3A_5}{A_1A_2 - A_5^2}\right) \tag{3.179}
$$

biçiminde hesaplanmaktadır. (3.178) eşitliğinde yer alan değerlere bağlı olarak, gerekli işlemler yapılarak,

$$
\begin{aligned}
HKO_{\min}\left(t_{SS}\right) = \gamma\bar{Y}^2 \Bigg(& 1 + \frac{\left(4A_3A_4A_5 - 2A_1A_4^2 - 2A_2A_3^2\right)}{A_1A_2 - A_5^2} \\
&+ \frac{A_1^2A_2A_4^2 + A_1A_2^2A_3^2 - 2A_1A_2A_3A_4A_5 - A_1A_4^2A_5^2 - A_2A_3^2A_5^2 + 2A_3A_4A_5^2}{\left(A_1A_2 - A_5^2\right)^2}\Bigg)
\end{aligned}
\tag{3.180}
$$

elde edilmiştir. Burada,

$$
\begin{aligned}
y &= \left(1 + \frac{\left(4A_3A_4A_5 - 2A_1A_4^2 - 2A_2A_3^2\right)}{A_1A_2 - A_5^2}\right) \\
z &= \left(\frac{A_1^2A_2A_4^2 + A_1A_2^2A_3^2 - 2A_1A_2A_3A_4A_5 - A_1A_4^2A_5^2 - A_2A_3^2A_5^2 + 2A_3A_4A_5^2}{\left(A_1A_2 - A_5^2\right)^2}\right)
\end{aligned}
\tag{3.181}
$$

olarak tanımlanırsa,

$$
HKO_{\min}\left(t_{SS}\right) = \gamma\bar{Y}^2\left[1 + \left(y + z\right)\right] \tag{3.182}
$$

elde edilir.

Son olarak, Riaz ve diğerleri [29] üstel oransal-regresyon tahmin edicisi önermişlerdir. δ (-1) veya (1) değerini alan ve (α, β) ise pozitif sabitler olmak üzere, tahmin edici,

$$t_{RAH} = \left[\bar{y} + \alpha\left(\bar{Z} - \bar{z}\right)\right] exp\left[\delta \frac{\bar{X} - \bar{x}}{\bar{X} + (\beta - 1)\bar{x}}\right] \tag{3.183}$$

biçiminde verilmiştir ve

$$\begin{aligned} HKO\left(t_{RAH}\right) = \Bigg(& \gamma \bar{Y}^2 \left(C_y^2 + \frac{\delta^2}{\beta^2} C_x^2 - \frac{2\delta}{\beta} \rho_{xy} C_x C_y \right) \\ & + \gamma \bar{Z}^2 \alpha^2 C_z^2 + \overline{YZ}\gamma \left(\frac{2\alpha\delta}{\beta} \rho_{xz} C_x C_z - 2\alpha \rho_{yz} C_y C_z \right) \Bigg) \end{aligned} \tag{3.184}$$

olarak bulunmuştur.

$$\frac{\partial HKO\left(t_{RAH}\right)}{\partial \alpha} = 0, \qquad \frac{\partial HKO\left(t_{RAH}\right)}{\partial \beta} = 0$$

türev işlemleri yapılarak, optimum a ve β değerleri

$$K_{ij} = \rho_{ij} \frac{C_i}{C_j}, \left(i, j = x, y, z\right)$$

ifadesinden yararlanılarak

$$\alpha^* = \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \left[\frac{K_{yz} - K_{yx} K_{xz}}{\delta\left(1 - \rho_{xz}^2\right)} \right], \qquad \beta^* = \frac{\delta\left(1 - \rho_{xz}^2\right)}{K_{yx} - K_{xz} K_{yz} \dfrac{C_z^2}{C_x^2}} \tag{3.185}$$

elde edilmiştir ve

$$HKO_{min}\left(t_{RAH}\right) = \frac{\gamma \bar{Y}^2 C_y^2}{(1 - \rho_{xz}^2)} \left[1 - \delta^2 \rho_{xz}^2 - \rho_{yz}^2 - \delta^2 \rho_{xy}^2 + 2\delta^2 \rho_{yz} \rho_{xy} \rho_{xz}\right] \tag{3.186}$$

bulunmuştur.

Önerilen t_{RAH} tahmin edicisinde yer alan δ değerine bağlı olarak, $\delta = 1$ ve $\delta = -1$ değerleri için iki özel durum bulunmaktadır.

$\delta = 1$ olduğu durumda önerilen tahmin edici,

$$t_{RAH1} = \left[\bar{y} + \alpha\left(\bar{Z} - \bar{z}\right)\right] exp\left[\frac{\bar{X} - \bar{x}}{\bar{X} + (\beta - 1)\bar{x}}\right] \tag{3.187}$$

biçiminde yazılabilmektedir. Minimum HKO eşitliği ise, (3.186) eşitliğinde $\delta = 1$ koyularak

$$HKO_{min}\left(t_{RAH1}\right)=\frac{\gamma\bar{Y}^2C_y^2}{(1-\rho_{xz}^2)}\left[1-\rho_{xz}^2-\rho_{yz}^2-\rho_{xy}^2+2\rho_{yz}\rho_{xy}\rho_{xz}\right] \tag{3.188}$$

biçiminde olmaktadır.

$\delta=-1$ durumunda ise,

$$t_{RAH2}=\left[\bar{y}+\alpha\left(\bar{Z}-\bar{z}\right)\right]exp\left[\frac{\bar{x}-\bar{X}}{\bar{X}+\left(\beta-1\right)\bar{x}}\right] \tag{3.189}$$

şeklinde yazılmakta ve

$$HKO_{min}\left(t_{RAH2}\right)=\frac{\gamma\bar{Y}^2C_y^2}{(1-\rho_{xz}^2)}\left[1-\rho_{xz}^2-\rho_{yz}^2-\rho_{xy}^2+2\rho_{yz}\rho_{xy}\rho_{xz}\right] \tag{3.190}$$

olmaktadır.

3.2.1. İki Yardımcı Değişken Bilgisini Kullanan Tahmin Edicilerin Etkinlik Karşılaştırması

Basit rastgele örnekleme yönteminde iki yardımcı değişken bilgisini kullanan tahmin ediciler bir önceki bölümde incelenmişti. Bu bölümde, bahsedilen tahmin edicilerin etkinlik karşılaştırması yapılacaktır. Literatürde yer alan iki yardımcı değişken bilgisini kullanan oransal tahmin ediciler sırasıyla, t_{RR}, t_{BT2} ve t_{reg2} birbiriyle; çarpımsal tahmin ediciler sırasıyla t_{PP}, t_{TB2} ve t_{reg2} birbiriyle; hem oransal hem de çarpımsal ifade içeren tahmin ediciler ise $t_{RR}, t_{PP}, t_{BT2}, t_{TB2}$ ve t_{reg2} birbiriyle karşılaştırılacaktır.

İlk olarak, Singh ve diğerleri [28] tarafından önerilen oransal-çarpımsal tahmin edici t_{SUT} ve genelleştirilmiş $t_{SUT}^{(\alpha_1,\alpha_2)}$ tahmin edicilerinin karşılaştırması yapılacaktır. Etkinlik karşılaştırmalarında,

$$HKO\left(t_{SUT}\right)<HKO\left(t_{RR}\right)$$

$$\gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2+\frac{C_x^2}{4}+\frac{C_z^2}{4}-C_{yx}+C_{yz}-\frac{C_{xz}}{2}\right)<\gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2+C_x^2+C_z^2-2C_{yx}-2C_{yz}+2C_{xz}\right)$$

$$C_x^2\left(\frac{3}{4}-K_{yx}\right)+C_z^2\left(\frac{3}{4}-3K_{yz}+\frac{5K_{xz}}{2}\right)>0$$

$$\left(\frac{3}{4}-K_{yx}\right)>0\rightarrow K_{yx}<\frac{3}{4} \tag{3.191}$$

$$\left(\frac{3}{4}-3K_{yz}+\frac{5K_{xz}}{2}\right)>0\rightarrow K_{yz}<\left(\frac{3+10K_{xz}}{12}\right) \tag{3.192}$$

$$HKO\left(t_{SUT}\right) < HKO\left(t_{PP}\right)$$

$$\gamma \bar{Y}^2\left(C_y^2+\frac{C_x^2}{4}+\frac{C_z^2}{4}-C_{yx}+C_{yz}-\frac{C_{xz}}{2}\right) < \gamma \bar{Y}^2\left(C_y^2+C_x^2+C_z^2+2C_{yx}+2C_{yz}+2C_{xz}\right)$$

$$C_x^2\left(\frac{3}{4}+3K_{yx}\right)+C_z^2\left(\frac{3}{4}+K_{yz}+\frac{5K_{xz}}{2}\right) > 0$$

$$\left(\frac{3}{4}+3K_{yx}\right) > 0 \rightarrow K_{yx} > -\frac{1}{4} \tag{3.193}$$

$$\left(\frac{3}{4}+K_{yz}+\frac{5K_{xz}}{2}\right) > 0 \rightarrow K_{yz} > -\left(\frac{3+10K_{xz}}{4}\right) \tag{3.194}$$

$$HKO\left(t_{SUT}\right) < HKO\left(t_{BT2}\right)$$

$$\gamma \bar{Y}^2\left(C_y^2+\frac{C_x^2}{4}+\frac{C_z^2}{4}-C_{yx}+C_{yz}-\frac{C_{xz}}{2}\right) < \gamma \bar{Y}^2\left(C_y^2+\frac{C_x^2}{4}+\frac{C_z^2}{4}-C_{yx}-C_{yz}+\frac{C_{xz}}{2}\right)$$

$$2 < \frac{C_{xz}}{C_{yz}} \tag{3.195}$$

$$HKO\left(t_{SUT}\right) < HKO\left(t_{TB2}\right)$$

$$\gamma \bar{Y}^2\left(C_y^2+\frac{C_x^2}{4}+\frac{C_z^2}{4}-C_{yx}+C_{yz}-\frac{C_{xz}}{2}\right) < \gamma \bar{Y}^2\left(C_y^2+\frac{C_x^2}{4}+\frac{C_z^2}{4}+C_{yx}+C_{yz}+\frac{C_{xz}}{2}\right)$$

$$-2 < \frac{C_{xz}}{C_{yx}} \tag{3.196}$$

$$HKO\left(t_{SUT}\right) < HKO\left(t_{reg2}\right)$$

$$\gamma \bar{Y}^2\left(C_y^2+\frac{C_x^2}{4}+\frac{C_z^2}{4}-C_{yx}+C_{yz}-\frac{C_{xz}}{2}\right) < \gamma \bar{Y}^2 C_y^2\left(1-\rho_{xy}^2-\rho_{yz}^2+2\rho_{xy}\rho_{yz}\rho_{xz}\right)$$

$$\left(\rho_{xy}^2+\rho_{yz}^2-2\rho_{xy}\rho_{yz}\rho_{xz}\right) < \left(K_{xy}+\frac{1}{4C_y^2}\left(2C_{xz}-C_x^2-C_z^2-4C_{yz}\right)\right) \tag{3.197}$$

koşulları elde edilmektedir. t_{RR} için (3.191), (3.192), t_{PP} için (3.193), (3.194), t_{BT2} için (3.195), t_{TB2} için (3.196) ve t_{reg2} (3.197) koşulları sağlandığı durumlarda önerilen t_{SUT} üstel tahmin edicinin karşılaştırma yapılan tahmin edicilere göre daha etkin olduğu söylenebilmektedir.

Genelleştirilmiş tahmin edici olan $t_{SUT}^{(\alpha_1,\alpha_2)}$ için ise aynı karşılaştırmalar yapıldığında,

$$HKO_{\min}\left(t_{SUT}^{(\alpha_1,\alpha_2)}\right) < HKO\left(t_{RR}\right)$$

$$\frac{\bar{Y}^2}{2}\gamma C_y^2\left[1-\frac{\left(\rho_{yx}^2+\rho_{yz}^2-2\rho_{xz}\rho_{yz}\rho_{yx}\right)}{\left(1-\rho_{xz}^2\right)}\right] < \gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2+C_x^2+C_z^2-2C_{yx}-2C_{yz}+2C_{xz}\right)$$

$$\left(\frac{C_y^2}{2}+C_x^2+C_z^2-2C_{yx}-2C_{yz}+2C_{xz}\right)+\frac{C_y^2\left(\rho_{yx}^2+\rho_{yz}^2-2\rho_{xz}\rho_{yz}\rho_{yx}\right)}{2\left(1-\rho_{xz}^2\right)} > 0 \tag{3.198}$$

$$HKO_{\min}\left(t_{SUT}^{(\alpha_1,\alpha_2)}\right) < HKO\left(t_{PP}\right)$$

$$\frac{\bar{Y}^2}{2}\gamma C_y^2\left[1-\frac{\left(\rho_{yx}^2+\rho_{yz}^2-2\rho_{xz}\rho_{yz}\rho_{yx}\right)}{\left(1-\rho_{xz}^2\right)}\right] < \gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2+C_x^2+C_z^2+2C_{yx}+2C_{yz}+2C_{xz}\right)$$

$$\left(\frac{C_y^2}{2}+C_x^2+C_z^2+2C_{yx}+2C_{yz}+2C_{xz}\right)+\frac{C_y^2\left(\rho_{yx}^2+\rho_{yz}^2-2\rho_{xz}\rho_{yz}\rho_{yx}\right)}{2\left(1-\rho_{xz}^2\right)} > 0 \tag{3.199}$$

$$HKO_{\min}\left(t_{SUT}^{(\alpha_1,\alpha_2)}\right) < HKO\left(t_{BT2}\right)$$

$$\frac{\bar{Y}^2}{2}\gamma C_y^2\left[1-\frac{\left(\rho_{yx}^2+\rho_{yz}^2-2\rho_{xz}\rho_{yz}\rho_{yx}\right)}{\left(1-\rho_{xz}^2\right)}\right] < \gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2+\frac{C_x^2}{4}+\frac{C_z^2}{4}-C_{yx}-C_{yz}+\frac{C_{xz}}{2}\right)$$

$$\left(\frac{C_y^2}{2}+\frac{C_x^2}{4}+\frac{C_z^2}{4}-C_{yx}-C_{yz}+\frac{C_{xz}}{2}\right)+\frac{C_y^2\left(\rho_{yx}^2+\rho_{yz}^2-2\rho_{xz}\rho_{yz}\rho_{yx}\right)}{2\left(1-\rho_{xz}^2\right)} > 0 \tag{3.200}$$

$$HKO_{\min}\left(t_{SUT}^{(\alpha_1,\alpha_2)}\right) < HKO\left(t_{TB2}\right)$$

$$\frac{\bar{Y}^2}{2}\gamma C_y^2\left[1-\frac{\left(\rho_{yx}^2+\rho_{yz}^2-2\rho_{xz}\rho_{yz}\rho_{yx}\right)}{\left(1-\rho_{xz}^2\right)}\right] < \gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2+\frac{C_x^2}{4}+\frac{C_z^2}{4}+C_{yx}+C_{yz}+\frac{C_{xz}}{2}\right)$$

$$\left(\frac{C_y^2}{2}+\frac{C_x^2}{4}+\frac{C_z^2}{4}+C_{yx}+C_{yz}+\frac{C_{xz}}{2}\right)+\frac{C_y^2\left(\rho_{yx}^2+\rho_{yz}^2-2\rho_{xz}\rho_{yz}\rho_{yx}\right)}{2\left(1-\rho_{xz}^2\right)} > 0 \tag{3.201}$$

$$HKO_{\min}\left(t_{SUT}^{(\alpha_1,\alpha_2)}\right) < HKO\left(t_{reg2}\right)$$

$$\frac{\bar{Y}^2}{2}\gamma C_y^2\left[1-\frac{\left(\rho_{yx}^2+\rho_{yz}^2-2\rho_{xz}\rho_{yz}\rho_{yx}\right)}{\left(1-\rho_{xz}^2\right)}\right] < \gamma\bar{Y}^2 C_y^2\left(1-\rho_{xy}^2-\rho_{yz}^2+2\rho_{xy}\rho_{xz}\rho_{yz}\right)$$

$$\left(1-\rho_{xz}^2-\rho_{yx}^2-\rho_{yz}^2+2\rho_{xz}\rho_{yz}\rho_{yx}\right) < 2\left(1-\rho_{xz}^2\right)\left(1-\rho_{xy}^2-\rho_{yz}^2+2\rho_{xy}\rho_{xz}\rho_{yz}\right)$$

$$\left(1-\rho_{xy}^2-\rho_{yz}^2-\rho_{xz}^2+2\rho_{xy}\rho_{xz}\rho_{yz}+2\rho_{xz}^2\rho_{xy}^2+2\rho_{xz}^2\rho_{yz}^2-4\rho_{xz}^2\rho_{xy}\rho_{xz}\rho_{yz}\right) > 0 \tag{3.202}$$

koşulları bulunur. (3.198), (3.199), (3.200), (3.201) ve (3.202) koşullarının sağlanması durumunda, önerilen tahmin edicinin sırasıyla etkinlik karşılaştırması yapılan $t_{RR}, t_{PP}, t_{BT2}, t_{TB2}$ ve t_{reg2} tahmin edicilerine göre daha etkin olduğu söylenebilmektedir.

Etkinlik karşılaştırmasında ikinci olarak Noor-ul-Amin ve diğerleri [27] tarafından önerilen tahmin edicilerden sırasıyla; $t_{BT2}, t_{TB2}, t_{AHK3}, t_{AHK4}$ karşılaştırılmıştır.

$$HKO(t_{BT2}) < HKO(t_{RR})$$

$$\gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2 + \frac{C_x^2}{4} + \frac{C_z^2}{4} - C_{yx} - C_{yz} + \frac{C_{xz}}{2}\right) < \gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2 + C_x^2 + C_z^2 - 2C_{yx} - 2C_{yz} + 2C_{xz}\right)$$

$$C_x^2\left(\frac{3}{4} - K_{yx}\right) + C_z^2\left(\frac{3}{4} - K_{yz} + \frac{3}{2}K_{xz}\right) > 0$$

$$\left(\frac{3}{4} - K_{yx}\right) > 0 \rightarrow K_{yx} < \frac{3}{4} \tag{3.203}$$

$$\left(\frac{3}{4} - K_{yz} + \frac{3}{2}K_{xz}\right) > 0 \rightarrow K_{yz} < \left(\frac{3 + 6K_{xz}}{4}\right) \tag{3.204}$$

$$HKO(t_{BT2}) < HKO(t_{reg2})$$

$$\gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2 + \frac{C_x^2}{4} + \frac{C_z^2}{4} - C_{yx} - C_{yz} + \frac{C_{xz}}{2}\right) < \gamma\bar{Y}^2 C_y^2\left(1 - \rho_{xy}^2 - \rho_{yz}^2 + 2\rho_{xy}\rho_{xz}\rho_{yz}\right)$$

$$\left(C_y^2\left(2\rho_{xy}\rho_{xz}\rho_{yz} - \rho_{xy}^2 - \rho_{yz}^2\right) + C_x^2\left(-\frac{1}{4} + K_{yx}\right) + C_z^2\left(-\frac{1}{4} + K_{yz} - \frac{K_{xz}}{2}\right)\right) > 0$$

$$C_y^2\left(2\rho_{xy}\rho_{xz}\rho_{yz} - \rho_{xy}^2 - \rho_{yz}^2\right) > 0 \rightarrow 2\rho_{xy}\rho_{xz}\rho_{yz} > \left(\rho_{xy}^2 + \rho_{yz}^2\right) \tag{3.205}$$

$$C_x^2\left(-\frac{1}{4} + K_{yx}\right) \rightarrow K_{yx} > \frac{1}{4} \tag{3.206}$$

$$C_z^2\left(-\frac{1}{4} + K_{yz} - \frac{K_{xz}}{2}\right) > 0 \rightarrow K_{yz} > \left(\frac{1 + 2K_{xz}}{4}\right) \tag{3.207}$$

koşulları bulunmuştur.

(3.203), (3.204) koşulları sağlandığında t_{BT2} tahmin edicisinin t_{RR} tahmin edicisinden; (3.205), (3.206), (3.207)koşullarının sağlanması durumunda da t_{reg2} tahmin edicisinden daha etkin olduğu söylenebilmektedir.

t_{TB2} çarpımsal tahmin edicisi ise, t_{PP} ve t_{reg2} tahmin edicileriyle karşılaştırıldığında,

$$HKO(t_{TB2}) < HKO(t_{PP})$$

$$\gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2+\frac{C_x^2}{4}+\frac{C_z^2}{4}+C_{yx}+C_{yz}+\frac{C_{xz}}{2}\right) < \gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2+C_x^2+C_z^2+2C_{yx}+2C_{yz}+2C_{xz}\right)$$

$$C_x^2\left(\frac{3}{4}+K_{yx}\right)+C_z^2\left(\frac{3}{4}+K_{yz}+\frac{3}{2}K_{xz}\right)>0$$

$$\left(\frac{3}{4}+K_{yx}\right)>0 \rightarrow K_{yx} > -\frac{3}{4} \tag{3.208}$$

$$\left(\frac{3}{4}+K_{yz}+\frac{3}{2}K_{xz}\right)>0 \rightarrow K_{yz} > -\left(\frac{3+6K_{xz}}{4}\right) \tag{3.209}$$

$$HKO(t_{TB2}) < HKO(t_{reg2})$$

$$\gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2+\frac{C_x^2}{4}+\frac{C_z^2}{4}+C_{yx}+C_{yz}+\frac{C_{xz}}{2}\right) < \gamma\bar{Y}^2C_y^2\left(1-\rho_{xy}^2-\rho_{yz}^2+2\rho_{xy}\rho_{xz}\rho_{yz}\right)$$

$$\left(C_y^2\left(2\rho_{xy}\rho_{xz}\rho_{yz}-\rho_{xy}^2-\rho_{yz}^2\right)+C_x^2\left(-\frac{1}{4}-K_{yx}\right)+C_z^2\left(-\frac{1}{4}-K_{yz}-\frac{K_{xz}}{2}\right)\right)>0$$

$$C_y^2\left(2\rho_{xy}\rho_{xz}\rho_{yz}-\rho_{xy}^2-\rho_{yz}^2\right)>0 \rightarrow 2\rho_{xy}\rho_{xz}\rho_{yz} > \left(\rho_{xy}^2+\rho_{yz}^2\right) \tag{3.210}$$

$$C_x^2\left(-\frac{1}{4}-K_{yx}\right) \rightarrow K_{yx} < -\frac{1}{4} \tag{3.211}$$

$$C_z^2\left(-\frac{1}{4}-K_{yz}-\frac{K_{xz}}{2}\right)>0 \rightarrow K_{yz} < -\left(\frac{1+2K_{xz}}{4}\right) \tag{3.212}$$

koşulları elde edilmektedir.

t_{PP} ile yapılan etkinlik karşılaştırmasında (3.208), (3.209) ve t_{reg2} ile yapılan etkinlik karşılaştırmasında ise (3.210), (3.211), (3.212) koşulları sağlandıkları durumda, t_{TB2} tahmin edicisinin, karşılaştırılan tahmin edicilere göre daha etkin olduğu söylenebilmektedir.

Üçüncü tahmin edici olan t_{AHK3} , oransal bir tahmin edici olması nedeniyle t_{RR} , t_{BT2}, t_{reg2} tahmin edicileriyle etkinlik karşılaştırılması yapılmıştır.

$$HKO_{\min}\left(t_{AHK3}\right) < HKO\left(t_{RR}\right)$$

$$\gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2 - K_{yx}^2C_x^2 + K_{AHK}^2K_{zx}^2C_x^2 + 2K_{AHK}K_{xz}K_{yx}C_z^2 - 2K_{AHK}^2K_{xz}K_{zx}C_z^2 - 2K_{AHK}K_{yz}C_z^2 + K_{AHK}^2C_z^2\right) < \gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2 + C_x^2 + C_z^2 - 2C_{yx} - 2C_{yz} + 2C_{xz}\right)$$

$$K_{yz} > \frac{K_{AHK}^2\left(1-2\rho_{xz}^2\right) + 2K_{xz}\left(K_{AHK}K_{yx} - 1\right) - 1}{2\left(K_{AHK} - 1\right)} \tag{3.213}$$

$$HKO_{\min}\left(t_{AHK3}\right) < HKO\left(t_{BT2}\right)$$

$$\gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2 - K_{yx}^2C_x^2 + K_{AHK}^2K_{zx}^2C_x^2 + 2K_{AHK}K_{xz}K_{yx}C_z^2 - 2K_{AHK}^2K_{xz}K_{zx}C_z^2 - 2K_{AHK}K_{yz}C_z^2 + K_{AHK}^2C_z^2\right) < \gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2 + \frac{C_x^2}{4} + \frac{C_z^2}{4} - C_{yx} - C_{yz} + \frac{C_{xz}}{2}\right)$$

$$K_{yz} > \frac{\left(2K_{xz}\left(4K_{AHK}K_{yx} - 1\right) + 4K_{AHK}^2\left(1-\rho_{xz}^2\right) + 1\right)}{4\left(2K_{AHK} - 1\right)} \tag{3.214}$$

$$HKO_{\min}\left(t_{AHK3}\right) < HKO\left(t_{reg2}\right)$$

$$\gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2 - K_{yx}^2C_x^2 + K_{AHK}^2K_{zx}^2C_x^2 + 2K_{AHK}K_{xz}K_{yx}C_z^2 - 2K_{AHK}^2K_{xz}K_{zx}C_z^2 - 2K_{AHK}K_{yz}C_z^2 + K_{AHK}^2C_z^2\right) < \gamma\bar{Y}^2C_y^2\left(1 - \rho_{xy}^2 - \rho_{yz}^2 + 2\rho_{xy}\rho_{yz}\rho_{xz}\right)$$

$$K_{yz} > \frac{\left(K_{AHK} + 2K_{xz}K_{yx} - 2K_{AHK}\rho_{xz}^2\right)}{2} \tag{3.215}$$

(3.213), (3.214) ve (3.215) koşullarının sağlanması durumunda t_{AHK3} tahmin edicisinin sırasıyla $t_{RR}, t_{BT2}, t_{reg2}$ tahmin edicilere göre daha etkin olduğu söylenebilmektedir.

Son olarak t_{AHK4} tahmin edici ise, çarpımsal tahmin edici olmasından dolayı t_{PP} , t_{TB2} , t_{reg2} tahmin edicileriyle etkinlik karşılaştırması yapılmıştır.

$$HKO_{\min}\left(t_{AHK4}\right) < HKO\left(t_{PP}\right)$$

$$\gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2 - K_{yx}^2C_x^2 + K_{AHK}^2K_{zx}^2C_x^2 + 2K_{AHK}K_{xz}K_{yx}C_z^2 - 2K_{AHK}^2K_{xz}K_{zx}C_z^2 + 2K_{AHK}K_{yz}C_z^2 - K_{AHK}^2C_z^2\right) < \gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2 + \frac{C_x^2}{4} + \frac{C_z^2}{4} + C_{yx} + C_{yz} + \frac{C_{xz}}{2}\right)$$

$$K_{yz} > \frac{-4K_{AHK}^2\left(1+2\rho_{xz}^2\right) - 2K_{xz}\left(1 - 4K_{AHK}K_{yx}\right) - 1}{4\left(1 - 2K_{AHK}\right)} \tag{3.216}$$

$$HKO_{\min}\left(t_{AHK4}\right) < HKO\left(t_{TB2}\right)$$

$$\gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2 - K_{yx}^2C_x^2 + K_{AHK}^2K_{zx}^2C_x^2 + 2K_{AHK}K_{xz}K_{yx}C_z^2 \right.$$
$$\left. -2K_{AHK}^2K_{xz}K_{zx}C_z^2 + 2K_{AHK}K_{yz}C_z^2 - K_{AHK}^2C_z^2\right) < \gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2 + \frac{C_x^2}{4} + \frac{C_z^2}{4} + C_{yx} + C_{yz} + \frac{C_{xz}}{2}\right)$$

$$K_{yz} > \frac{\left(2K_{xz}\left(4K_{AHK}K_{yx} - 1\right) - 4K_{AHK}^2\left(1 + 2\rho_{xz}^2\right) - 1\right)}{4\left(1 - 2K_{AHK}\right)} \tag{3.217}$$

$$HKO_{\min}\left(t_{AHK4}\right) < HKO\left(t_{reg2}\right)$$

$$\gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2 - K_{yx}^2C_x^2 + K_{AHK}^2K_{zx}^2C_x^2 + 2K_{AHK}K_{xz}K_{yx}C_z^2 \right.$$
$$\left. -2K_{AHK}^2K_{xz}K_{zx}C_z^2 + 2K_{AHK}K_{yz}C_z^2 - K_{AHK}^2C_z^2\right) < \gamma\bar{Y}^2C_y^2\left(1 - \rho_{xy}^2 - \rho_{yz}^2 + 2\rho_{xy}\rho_{yz}\rho_{xz}\right)$$

$$K_{yz} < \frac{\left(K_{AHK} - 2K_{zx}K_{yx} - 2K_{AHK}\rho_{xz}^2\right)}{2} \tag{3.218}$$

(3.216), (3.217) ve (3.218) koşulları sağlandığı durumlarda, t_{AHK4} tahmin edicisinin sırasıyla t_{PP}, t_{TB2} ve t_{reg2} tahmin edicilerine göre daha etkin olduğu söylenebilmektedir.

Sharma ve Singh [10] tarafından önerilen t_{SS} tahmin edicisi için bir önceki bölümde kolaylık olması açısından kısaltmalar gerçekleştirilmişti. Yapılan adlandırmalar sonucunda elde edilen minimum HKO ifadesi (3.182)'deki gibi bulunmuştu. Bu eşitlikten yararlanarak etkinlik karşılaştırması yapılacaktır. Karşılaştırmada, t_{SS} tahmin edicisi hem oransal hem de çarpımsal ifade içerdiği için $t_{RR}, t_{PP}, t_{BT2}, t_{TB2}$ ve t_{reg2} tahmin edicilerinden yararlanılacaktır.

$$HKO_{\min}\left(t_{SS}\right) < HKO\left(t_{RR}\right)$$

$$\gamma\bar{Y}^2\left[1 + \left(y + z\right)\right] < \gamma\bar{Y}^2\left[C_y^2 + C_x^2 + C_z^2 - 2C_{yx} - 2C_{yz} + 2C_{xz}\right]$$

$$\left[C_y^2 + C_x^2 + C_z^2 - 2C_{yx} - 2C_{yz} + 2C_{xz} - 1 - \left(y + z\right)\right] > 0 \tag{3.219}$$

$$HKO_{\min}\left(t_{SS}\right) < HKO\left(t_{PP}\right)$$

$$\gamma\bar{Y}^2\left[1 + \left(y + z\right)\right] < \gamma\bar{Y}^2\left[C_y^2 + C_x^2 + C_z^2 + 2C_{yx} + 2C_{yz} + 2C_{xz}\right]$$

$$\left[C_y^2 + C_x^2 + C_z^2 + 2C_{yx} + 2C_{yz} + 2C_{xz} - 1 - \left(y + z\right)\right] > 0 \tag{3.220}$$

$$HKO_{\min}\left(t_{SS}\right) < HKO\left(t_{BT2}\right)$$

$$\gamma\bar{Y}^2\left[1 + \left(y + z\right)\right] < \gamma\bar{Y}^2\left[C_y^2 + \frac{C_x^2}{4} + \frac{C_z^2}{4} - C_{yx} - C_{yz} + \frac{C_{xz}}{2}\right]$$

$$\left[C_y^2+\frac{C_x^2}{4}+\frac{C_z^2}{4}-C_{yx}-C_{yz}+\frac{C_{xz}}{2}-1-(y+z)\right]>0 \tag{3.221}$$

$$HKO_{\min}(t_{SS})<HKO(t_{TB2})$$

$$\gamma\bar{Y}^2\left[1+(y+z)\right]<\gamma\bar{Y}^2\left[C_y^2+\frac{C_x^2}{4}+\frac{C_z^2}{4}+C_{yx}+C_{yz}+\frac{C_{xz}}{2}\right]$$

$$\left[C_y^2+\frac{C_x^2}{4}+\frac{C_z^2}{4}+C_{yx}+C_{yz}+\frac{C_{xz}}{2}-1-(y+z)\right]>0 \tag{3.222}$$

$$HKO_{\min}(t_{SS})<HKO(t_{reg2})$$

$$\gamma\bar{Y}^2\left[1+(y+z)\right]<\gamma\bar{Y}^2C_y^2\left[1-\rho_{xy}^2-\rho_{yz}^2+2\rho_{xy}\rho_{yz}\rho_{xz}\right]$$

$$\left[C_y^2\left(1-\rho_{xy}^2-\rho_{yz}^2+2\rho_{xy}\rho_{yz}\rho_{xz}\right)-1-(y+z)\right]>0 \tag{3.223}$$

Elde edilen (3.219), (3.220), (3.221), (3.222) ve (3.223) koşullarının sağlandığı durumlarda, önerilen t_{SS} üstel tahmin edicinin diğer tahmin edicilerden daha etkin olduğu sonucuna varılmıştır.

Son olarak, Riaz ve diğerleri [29] tarafından önerilen iki yardımcı değişken bilgisini kullanan t_{RAH}, oransal tahmin edici olduğundan etkinlik karşılaştırmasında t_{RR} , t_{BT2}, t_{reg2} tahmin edicileri kullanılacaktır. Bunun yanı sıra, t_{RAH} oransal tahmin edici için (3.183) ifadesinde yer alan δ değerinin (1) veya (-1) olmasına bağlı olarak özel durumu bulunmaktaydı.

Bu noktada unutmamak gerekir ki, elde edilen t_{RAH} tahmin edicisi için HKO'da, istenen δ değeri yerine koyularak aynı karşılaştırmalar yapılabilir.

$$HKO_{\min}(t_{RAH})<HKO(t_{RR})$$

$$\frac{\gamma\bar{Y}^2C_y^2}{\left(1-\rho_{xz}^2\right)}\left[1-\rho_{yz}^2-\delta^2\rho_{xz}^2-\delta^2\rho_{xy}^2+2\delta^2\rho_{yz}\rho_{xy}\rho_{xz}\right]<\gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2+C_x^2+C_z^2-2C_{xy}-2C_{yz}+2C_{xz}\right)$$

$$\frac{\left(\rho_{xz}^2+\rho_{xy}^2-2\rho_{yz}\rho_{xy}\rho_{xz}\right)}{\left(1-\rho_{xz}^2\right)}>\frac{1}{\delta^2}\left(\frac{\left(1-\rho_{yz}^2\right)}{\left(1-\rho_{xz}^2\right)}-\frac{\left(C_y^2+C_x^2+C_z^2\right)}{C_y^2}+\frac{2\left(C_{xy}+C_{yz}-C_{xz}\right)}{C_y^2}\right) \tag{3.224}$$

$$HKO_{\min}\left(t_{RAH}\right) < HKO\left(t_{BT2}\right)$$

$$\frac{\gamma\bar{Y}^2C_y^2}{\left(1-\rho_{xz}^2\right)}\left[1-\rho_{yz}^2-\delta^2\rho_{xz}^2-\delta^2\rho_{xy}^2+2\delta^2\rho_{yz}\rho_{xy}\rho_{xz}\right] < \gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2+\frac{C_x^2}{4}+\frac{C_z^2}{4}-C_{xy}-C_{yz}+\frac{C_{xz}}{2}\right)$$

$$\frac{\left(\rho_{xz}^2+\rho_{xy}^2-2\rho_{yz}\rho_{xy}\rho_{xz}\right)}{\left(1-\rho_{xz}^2\right)} > \frac{1}{\delta^2}\left(\frac{\left(1-\rho_{yz}^2\right)}{\left(1-\rho_{xz}^2\right)}-\frac{\left(C_x^2+C_z^2\right)}{4C_y^2}+\frac{\left(C_{xy}+C_{yz}-\frac{C_{xz}}{2}\right)}{C_y^2}-1\right) \tag{3.225}$$

$$HKO_{\min}\left(t_{RAH}\right) < HKO\left(t_{reg2}\right)$$

$$\frac{\gamma\bar{Y}^2C_y^2}{\left(1-\rho_{xz}^2\right)}\left[1-\rho_{yz}^2-\delta^2\rho_{xz}^2-\delta^2\rho_{xy}^2+2\delta^2\rho_{yz}\rho_{xy}\rho_{xz}\right] < \gamma\bar{Y}^2C_y^2\left(1-\rho_{xy}^2-\rho_{yz}^2+2\rho_{yz}\rho_{xy}\rho_{xz}\right)$$

$$\frac{\left(\rho_{xz}^2+\rho_{xy}^2-2\rho_{yz}\rho_{xy}\rho_{xz}\right)}{\left(1-\rho_{xz}^2\right)} > \frac{1}{\delta^2}\left(\rho_{xy}^2+\rho_{yz}^2-2\rho_{yz}\rho_{xy}\rho_{xz}+\frac{\left(1-\rho_{yz}^2\right)}{\left(1-\rho_{xz}^2\right)}-1\right) \tag{3.226}$$

t_{RAH} üstel oransal tahmin edici için yapılan karşılaştırmada, (3.224), (3.225) ve (3.226) koşullarının sağlandığı durumda, sırasıyla t_{RR}, t_{BT2} ve t_{reg2} tahmin edicilerine göre daha etkin olduğu bulunmaktadır. Önerilen tahminin özel durumu olan t_{RAH1} ve t_{RAH2} tahmin edicileri için, (3.224), (3.225), (3.226) koşullarında sırasıyla $\delta = 1$ ve $\delta = -1$ yazılarak, t_{RAH1} ve t_{RAH2} için koşulların belirlenebileceği unutulmamalıdır.

4. TABAKALI RASTGELE ÖRNEKLEMEDEKİ TAHMİN EDİCİLER

Üçüncü bölümde BRÖ yönteminde, literatürde yer alan üstel tip tahmin ediciler incelenmişti. Bu bölümde ise, Tabakalı Rastgele Örnekleme (TRÖ) yönteminde kitle ortalaması tahmini için önerilen üstel tahmin ediciler hakkında bilgi verilecektir. İlk olarak, literatürde yer alan tek yardımcı değişken (x) bilgisini kullanan; devamında ise iki yardımcı değişken $(x,\, z)$ bilgisini kullanan üstel tahmin ediciler incelenecek ve sonrasında etkinlik karşılaştırması verilecektir.

4.1. TRÖ Yönteminde Tek Yardımcı Değişken Bilgisini Kullanan Üstel Tahmin Ediciler

Singh ve diğerleri [30], Bahl ve Tuteja [4] tarafından BRÖ yöntemi için önerilen tahmin ediciyi TRÖ yöntemi için uyarlamışlar ve

$$t_{BT(st)} = \bar{y}_{st} \exp\left[\frac{\bar{X}_{st} - \bar{x}_{st}}{\bar{X}_{st} + \bar{x}_{st}}\right] \tag{4.1}$$

tahmin edicisini önermişlerdir. (1.6) ve (1.7) eşitliklerinden yararlanılarak gerekli işlemler yapıldığında,

$$HKO\left(t_{BT(st)}\right) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 - RS_{yxh} + \frac{R^2}{4} S_{xh}^2 \right) \tag{4.2}$$

elde edilmiştir.

Aynı şekilde Bahl ve Tuteja [4] tarafından BRÖ yöntemi için önerilen t_{TB} tahmin edicisini dikkate alarak,

$$t_{TB(st)} = \bar{y}_{st} \exp\left[\frac{\bar{x}_{st} - \bar{X}_{st}}{\bar{x}_{st} + \bar{X}_{st}}\right] \tag{4.3}$$

tahmin edicisini önermişlerdir. Gerekli işlemler yapılarak,

$$HKO\left(t_{TB(st)}\right) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 + RS_{yxh} + \frac{R^2}{4} S_{xh}^2 \right) \tag{4.4}$$

bulunmuştur.

Singh ve diğerleri [30], 1981 yılındaki Sisodia ve Dwivedi çalışmasında yer alan

$$\bar{X}_{SD} = \sum_{h=1}^{L} W_h \left(\bar{X}_h + C_{xh} \right), \qquad \bar{x}_{SD} = \sum_{h=1}^{L} W_h \left(\bar{x}_h + C_{xh} \right) \tag{4.5}$$

değişim katsayısını içeren eşitliklerden yararlanarak,

$$t_{SD} = \bar{y}_{st} \exp\left[\frac{\bar{X}_{SD} - \bar{x}_{SD}}{\bar{X}_{SD} + \bar{x}_{SD}} \right] \tag{4.6}$$

tahmin edicisini önermişlerdir. (4.5) eşitliğinde tanımlanan $\bar{X}_{SD}, \bar{x}_{SD}$ ve

$$R_{SD} = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}_{SD}} \tag{4.7}$$

eşitlikleri kullanılarak,

$$HKO\left(t_{SD}\right) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 - R_{SD} S_{yxh} + \frac{R_{SD}^2}{4} S_{xh}^2 \right) \tag{4.8}$$

ulaşmışlardır. Devamında, 1993 yılındaki Singh ve Kakran çalışmasında yer alan basıklık katsayısı için,

$$\bar{X}_{SK} = \sum_{h=1}^{L} W_h \left(\bar{X}_h + \beta_{2h(x)} \right), \qquad \bar{x}_{SK} = \sum_{h=1}^{L} W_h \left(\bar{x}_h + \beta_{2h(x)} \right) \tag{4.9}$$

tanımlarından yararlanmışlar ve

$$t_{SK} = \bar{y}_{st} \exp\left[\frac{\bar{X}_{SK} - \bar{x}_{SK}}{\bar{X}_{SK} + \bar{x}_{SK}} \right] \tag{4.10}$$

tahmin edicisini önermişlerdir.

$$R_{SK} = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}_{SK}} \tag{4.11}$$

olmak üzere,

$$HKO\left(t_{SK}\right) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 - R_{SK} S_{yxh} + \frac{R_{SK}^2}{4} S_{xh}^2 \right) \tag{4.12}$$

biçiminde bulmuşlardır. 1999 yılındaki Upadhyaya ve Singh çalışmasına benzer şekilde, basıklık katsayısı ve değişim katsayısı bir arada kullanılarak,

$$\bar{X}_{US1} = \sum_{h=1}^{L} W_h \left(\bar{X}_h \beta_{2h(x)} + C_{xh} \right), \qquad \bar{x}_{US1} = \sum_{h=1}^{L} W_h \left(\bar{x}_h \beta_{2h(x)} + C_{xh} \right) \tag{4.13}$$

eşitlikleri yazılmış ve

$$t_{US1} = \bar{y}_{st} \exp\left[\frac{\bar{X}_{US1} - \bar{x}_{US1}}{\bar{X}_{US1} + \bar{x}_{US1}} \right] \tag{4.14}$$

tahmin ediciyi önerilmişler ve

$$HKO\left(t_{US1}\right)=\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(S_{yh}^2-R_{US1}S_{yxh}+\frac{R_{US1}^2}{4}S_{xh}^2\right) \tag{4.15}$$

elde etmişlerdir. Burada,

$$R_{US1}=\frac{\bar{Y}_{st}\sum_{h=1}^{L}W_h\bar{X}_h\beta_{2h(x)}}{\bar{X}_{US1}\bar{X}_{st}} \tag{4.16}$$

biçiminde tanımlanmıştır. Yine aynı çalışmada,

$$\bar{X}_{US2}=\sum_{h=1}^{L}W_h\left(\bar{X}_hC_{xh}+\beta_{2h(x)}\right),\qquad \bar{x}_{US2}=\sum_{h=1}^{L}W_h\left(\bar{x}_hC_{xh}+\beta_{2h(x)}\right) \tag{4.17}$$

tanımlarından yararlanılarak,

$$t_{US2}=\bar{y}_{st}\exp\left[\frac{\bar{X}_{US2}-\bar{x}_{US2}}{\bar{X}_{US2}+\bar{x}_{US2}}\right] \tag{4.18}$$

tahmin edicisini önermişlerdir.

$$R_{US2}=\frac{\bar{Y}_{st}\sum_{h=1}^{L}W_h\bar{X}_hC_{xh}}{\bar{X}_{US2}\bar{X}_{st}} \tag{4.19}$$

olmak üzere, gerekli işlemler yapılarak

$$HKO\left(t_{US2}\right)=\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(S_{yh}^2-R_{US2}S_{yxh}+\frac{R_{US2}^2}{4}S_{xh}^2\right) \tag{4.20}$$

biçiminde elde etmişlerdir.

Singh ve diğerleri [30], 2001 yılındaki Singh çalışmasından yola çıkarak,

$$\bar{X}_{GNS1}=\sum_{h=1}^{L}W_h\left(\bar{X}_h+\sigma_{xh}\right),\qquad \bar{x}_{GNS1}=\sum_{h=1}^{L}W_h\left(\bar{x}_h+\sigma_{xh}\right) \tag{4.21}$$

tanımlarından yararlanmış ve

$$t_{GNS1}=\bar{y}_{st}\exp\left[\frac{\bar{X}_{GNS1}-\bar{x}_{GNS1}}{\bar{X}_{GNS1}+\bar{x}_{GNS1}}\right] \tag{4.22}$$

tahmin edicisini önermişlerdir.

$$R_{GNS1}=\frac{\bar{Y}_{st}}{\sum_{h=1}^{L}W_h\left(\bar{X}_h+\sigma_{xh}\right)} \tag{4.23}$$

olmak üzere,

$$HKO\left(t_{GNS1}\right)=\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(S_{yh}^2-R_{GNS1}S_{yxh}+\frac{R_{GNS1}^2}{4}S_{xh}^2\right) \tag{4.24}$$

biçiminde elde etmişlerdir.

Benzer olarak, aynı çalışmada

$$t_{GNS2}=\bar{y}_{st}\exp\left[\frac{\bar{X}_{GNS2}-\bar{x}_{GNS2}}{\bar{X}_{GNS2}+\bar{x}_{GNS2}}\right] \tag{4.25}$$

tahmin edicisini önermişlerdir.

$$\bar{X}_{GNS2}=\sum_{h=1}^{L}W_h\left(\bar{X}_h\beta_{2h(x)}+\sigma_{xh}\right),\qquad \bar{x}_{GNS2}=\sum_{h=1}^{L}W_h\left(\bar{x}_h\beta_{2h(x)}+\sigma_{xh}\right) \tag{4.26}$$

tanımlarından yararlanılarak,

$$HKO\left(t_{GNS2}\right)=\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(S_{yh}^2-R_{GNS2}S_{yxh}+\frac{R_{GNS2}^2}{4}S_{xh}^2\right) \tag{4.27}$$

biçiminde bulmuşlardır. Burada,

$$R_{GNS2}=\frac{\bar{Y}_{st}}{\sum_{h=1}^{L}W_h\left(\bar{X}_h\beta_{2h(x)}+\sigma_{xh}\right)} \tag{4.28}$$

biçiminde ifade edilmektedir. Son olarak, α $HKO\left(t_{SKSC}\right)$'i minimum yapan sabit sayı olmak üzere Singh ve diğerleri [30]

$$t_{SKSC}=\bar{y}_{st}\exp\left[\frac{\bar{X}_{st,a,b}-\bar{x}_{st,a,b}}{\bar{X}_{st,a,b}+\bar{x}_{st,a,b}}\right]^{\alpha}$$

tahmin edicisini önermişlerdir. Burada

$$\bar{X}_{st,a,b}=\sum_{h=1}^{L}W_h\left(a_h\bar{X}_h+b_h\right),\qquad \bar{x}_{st,a,b}=\sum_{h=1}^{L}W_h\left(a_h\bar{x}_h+b_h\right) \tag{4.29}$$

eşitlikleri yazıldığında,

$$HKO\left(t_{SKSC}\right)=\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(S_{yh}^2-\alpha R_{a,b}S_{yxh}+\frac{R_{a,b}^2\alpha^2}{4}S_{xh}^2\right) \tag{4.30}$$

elde edilmektedir. Burada,

$$R_{a,b}=\frac{\bar{Y}_{st}\sum_{h=1}^{L}W_h\bar{X}_h a}{\bar{X}_{st}\sum_{h=1}^{L}W_h\left(a\bar{X}_h+b\right)} \tag{4.31}$$

olarak yazılmaktadır. (4.30) eşitliğinde yer alan α değerine göre türev alındığında, optimum α değeri

$$\alpha^* = 2\frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h S_{yxh}}{R_{a,b} \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h S_{xh}^2} \tag{4.32}$$

biçiminde bulunmaktadır.

α^* değeri (4.30) eşitliğinde yerine konularak,

$$HKO_{\min}\left(t_{SKSC}\right) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h S_{yh}^2 \left(1-\rho_c^2\right) \tag{4.33}$$

elde edilmektedir.

Singh ve diğerleri [31], Singh ve diğerlerinin [30] yaptığı çalışmada önerilen $t_{TB(st)}, t_{SD}, t_{SK}$ ve t_{US1}, t_{US2} tahmin edicilerini bir arada toplayarak

$$t_{KKCSi} = \bar{y}_{st} \exp\left[\frac{\bar{X}_{KKCSi} - \bar{x}_{KKCSi}}{\bar{X}_{KKCSi} + \bar{x}_{KKCSi}}\right], \quad i = 0,1,2,3,4 \tag{4.34}$$

tahmin edicisini önermişlerdir. Burada, her bir i değeri sırasıyla (4.5), (4.9), (4.13) ve (4.17) eşitliklerini temsil etmektedir.

2005 yılındaki Kadılar ve Çıngı çalışması dikkate alınarak, k_i $HKO\left(t_{SKCKi}\right)$, $i = 0,1,2,3,4$ minimum yapan sabit sayı olmak üzere Singh ve diğerleri [31]

$$t_{SKCKi} = k_i t_{KKCSi} = k_i \bar{y}_{st} \exp\left[\frac{\bar{X}_{KKCSi} - \bar{x}_{KKCSi}}{\bar{X}_{KKCSi} + \bar{x}_{KKCSi}}\right], \quad i = 0,1,2,3,4 \tag{4.35}$$

tahmin ediciyi önermişlerdir. (1.6) ve (1.7) ifadelerinden yararlanarak Fark Yöntemi ile

$$\begin{aligned} HKO\left(t_{SKCKi}\right) = \Bigg(& \bar{Y}^2 \left(k_i - 1\right)^2 + k_i^2 \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 - R_{KKCSi} a_{hi} S_{yxh} + \frac{R_{KKCSi}^2}{4} a_{hi}^2 S_{xh}^2 \right) \\ & + 2k_i \left(2k_i - 1\right) \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(\frac{3}{8} R_{KKCSi}^2 a_{hi}^2 S_{xh}^2 - \frac{1}{2} R_{KKCSi} a_{hi} S_{yxh} \right) \Bigg) \end{aligned} \tag{4.36}$$

elde edilmektedir. Burada, R_{KKCSi}, $i = 0,1,2,3,4$ ifadesi sırasıyla (4.7), (4.11), (4.16) ve (4.19) eşitliklerini belirtmektedir. (4.36) eşitliğinde yer alan sabit k_i değerine göre türev alınarak,

$$k_i^* = \frac{\bar{Y}\left(YAN\left(t_{KKCSi}\right) + \bar{Y}\right)}{\bar{Y}^2 + HKO\left(t_{KKCSi}\right) + 2\bar{Y}YAN\left(t_{KKCSi}\right)}, \quad i = 0,1,2,3,4 \tag{4.37}$$

olarak bulunmuştur. (4.36) eşitliğinde optimum k_i yerine koyularak,

$$HKO_{\min}\left(t_{SKCKi}\right)=\left(\bar{Y}^{2}\left(k_i^{*}-1\right)^{2}+k_i^{*2}\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(S_{yh}^2-R_{KKCSi}a_{hi}S_{yxh}+\frac{R_{KKCSi}^2}{4}a_{hi}^2S_{xh}^2\right)\right.$$
$$\left.+\;2k_i^{*}\left(2k_i^{*}-1\right)\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(\frac{3}{8}R_{KKCSi}^2a_{hi}^2S_{xh}^2-\frac{1}{2}R_{KKCSi}a_{hi}S_{yxh}\right)\right),\ i=0,1,2,3,4 \qquad (4.38)$$

elde edilmektedir.

Etkinlik karşılaştırmasında kolaylık olması açısından, eşitlikte yer alan ifadelerde kısaltma yapılmıştır.

$$E\left(t_{KKCSi}-\bar{Y}\right)=YAN\left(t_{KKCSi}\right)=\frac{1}{\bar{X}_{4i}}\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(\frac{3}{8}R_{4i}a_{hi}^2S_{xh}^2-\frac{1}{2}a_{hi}S_{yxh}\right),\ i=0,1,2,3,4$$

ve

$$A_i=\bar{Y}YAN\left(t_{KKCSi}\right)=\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(\frac{3}{8}R_{KKCSi}^2a_{hi}^2S_{xh}^2-\frac{1}{2}R_{KKCSi}a_{hi}S_{yxh}\right)$$

olmak üzere,

$$HKO_{\min}\left(t_{SKCKi}\right)=\bar{Y}^{2}\left(k_i^{*}-1\right)^{2}+k_i^{*2}HKO\left(t_{KKCSi}\right)+2k_i^{*}\left(k_i^{*}-1\right)A_i,\quad i=0,1,2,3,4 \qquad (4.39)$$

biçiminde yazılabilir.

Diğer bir tahmin edici ω_{1i} ve ω_{2i} sabitleri göstermek üzere t_{KCKSi}, $i=0,1,2,3,4$ ise,

$$t_{KCKSi}=\omega_{1i}\bar{y}_{st}+\omega_{2i}t_{KKCSi},\quad i=0,1,2,3,4 \qquad (4.40)$$

olarak önerilmiştir.

$$A_i=\sum_{h}^{L}W_h^2\gamma_h\left(\frac{3}{8}R_{KKCSi}^2a_{hi}^2S_{xh}^2-\frac{R_{KKCSi}a_{hi}S_{yxh}}{2}\right)$$
$$C_i=\sum_{h}^{L}W_h^2\gamma_h\left(S_{yh}^2-\frac{R_{KKCSi}}{2}a_{hi}S_{yxh}\right) \qquad (4.41)$$
$$D=\sum_{h}^{L}W_h^2\gamma_hS_{yh}^2$$

biçimindeki semboller ile,

$$HKO\left(t_{KCKSi}\right)=\left(\bar{Y}_{st}^{\,2}(\omega_{1i}+\omega_{2i}-1)^2+\omega_{1i}^{\,2}D+\omega_{2i}^{\,2}HKO\left(t_{KKCSi}\right)\right.$$
$$\left.+2\omega_{1i}\omega_{2i}C_i+2\left(\omega_{1i}+\omega_{2i}-1\right)\omega_{2i}A_i\right),\ i=0,1,2,3,4 \qquad (4.42)$$

yazılabilmektedir. (4.42) eşitliğinde,

$$\frac{\partial HKO\left(t_{KCKSi}\right)}{\partial\omega_{1i}}=0,\quad \frac{\partial HKO\left(t_{KCKSi}\right)}{\partial\omega_{2i}}=0$$

türev işlemleri yapılarak optimum ω_{1i} ve optimum ω_{2i} değerleri

$$\omega_{1i}^{*}=\frac{\left(\bar{Y}^{2}+A_{i}\right)\left(\bar{Y}^{2}+C_{i}+A_{i}\right)-\bar{Y}^{2}\left(\bar{Y}^{2}+HKO\left(t_{KKCSi}\right)+2A_{i}\right)}{\left(\bar{Y}^{2}+C_{i}+A_{i}\right)^{2}-\left(\bar{Y}^{2}+D\right)\left(\bar{Y}^{2}+HKO\left(t_{KKCSi}\right)+2A_{i}\right)}$$
$$\omega_{2i}^{*}=\frac{\left(\bar{Y}^{2}+C_{i}+A_{i}\right)\bar{Y}^{2}-\left(\bar{Y}^{2}+D\right)\left(\bar{Y}^{2}+A_{i}\right)}{\left(\bar{Y}^{2}+C_{i}+A_{i}\right)^{2}-\left(\bar{Y}^{2}+D\right)\left(\bar{Y}^{2}+HKO\left(t_{KKCSi}\right)+2A_{i}\right)} \tag{4.43}$$

biçiminde olmaktadır. ω_{1i}^{*} ve ω_{2i}^{*} optimum değerler, HKO eşitliğinde yerine konularak,

$$\begin{aligned}HKO_{\min}\left(t_{KCKSi}\right)=&\Big(\bar{Y}^{2}(\omega_{1i}^{*}+\omega_{2i}^{*}-1)^{2}+\omega_{1i}^{*2}D+\omega_{2i}^{*2}HKO\left(t_{KKCSi}\right)\\&+2\omega_{1i}^{*}\omega_{2i}^{*}C_{i}+2\left(\omega_{1i}^{*}+\omega_{2i}^{*}-1\right)\omega_{2i}^{*}A_{i}\Big),\quad i=0,1,2,3,4\end{aligned} \tag{4.44}$$

bulunmaktadır.

Etkinlik karşılaştırmasında kolaylık olması açısından, (4.44) eşitliğinde (4.41) eşitliklerinden yararlanılarak,

$$\begin{aligned}X_{KCKSi}^{*}=&\Big(S_{yh}^{2}\left(\omega_{1i}^{*2}+\omega_{2i}^{*2}+2\omega_{1i}^{*}\omega_{2i}^{*}\right)\\&+S_{xh}^{2}\left(\omega_{2i}^{*2}a_{hi}^{2}R_{KKCSi}^{2}+\frac{3}{4}a_{hi}^{2}R_{KKCSi}^{2}\omega_{1i}^{*}\omega_{2i}^{*}-\frac{3}{4}a_{hi}^{2}R_{KKCSi}^{2}\omega_{2i}^{*}\right)\\&+S_{yxh}\left(-2\omega_{2i}^{*2}a_{hi}R_{hi}-2\omega_{1i}^{*}\omega_{2i}^{*}a_{hi}R_{hi}+\omega_{2i}^{*}a_{hi}R_{hi}\right)\Big),\ i=0,1,2,3,4\end{aligned} \tag{4.45}$$

olmak üzere,

$$HKO_{\min}\left(t_{KCKSi}\right)=\bar{Y}^{2}\left(\omega_{1i}^{*}+\omega_{2i}^{*}-1\right)^{2}+\sum_{h=1}^{L}W_{h}^{2}\gamma_{h}X_{KCKSi}^{*},\quad i=0,1,2,3,4 \tag{4.46}$$

biçiminde de yazılabilmektedir.

Singh ve diğerleri [14], Singh ve diğerleri [30] tarafından yapılan çalışmadan yola çıkarak

$$t_{SCSS(st)}=k\bar{y}_{st}\exp\left[\frac{\bar{X}_{st}-\bar{x}_{st}}{\bar{X}_{st}+\bar{x}_{st}}\right] \tag{4.47}$$

üstel oransal tahmin edicisini önermişlerdir. Burada, k sabit olmak üzere, (1.6) ve (1.7) ifadelerinden yararlanarak Fark Yöntemi ile

$$\begin{aligned}HKO\left(t_{SCSS(st)}\right)=&\left(\bar{Y}^{2}\left(k-1\right)^{2}+k^{2}\sum_{h=1}^{L}W_{h}^{2}\gamma_{h}\left(S_{yh}^{2}+\frac{R^{2}S_{xh}^{2}}{4}-RS_{yxh}\right)\right.\\&\left.+\left(2k^{2}-2k\right)\sum_{h=1}^{L}W_{h}^{2}\gamma_{h}\left(\frac{3}{8}R^{2}S_{xh}^{2}-\frac{R}{2}S_{yxh}\right)\right)\end{aligned} \tag{4.48}$$

ulaşılmıştır. Burada, k sabitine göre türev işlemi alınarak, optimum k değeri

$$k^* = \frac{\bar{Y}^2 + \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(\frac{3R^2}{8} S_{xh}^2 - \frac{R}{2} S_{yxh} \right)}{\bar{Y}^2 + \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 + R^2 S_{xh}^2 - 2RS_{yxh} \right)} \tag{4.49}$$

biçiminde bulunmuştur. Bulunan değer (4.48) eşitliğinde yerine konularak,

$$HKO_{\min}\left(t_{SCSS(st)}\right) = \left[\bar{Y}^2 - \frac{\left(\bar{Y}^2 + \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(\frac{3R^2}{8} S_{xh}^2 - \frac{R}{2} S_{yxh} \right) \right)^2}{2\left(\bar{Y}^2 + \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 + R^2 S_{xh}^2 - 2RS_{yxh} \right) \right)} \right] \tag{4.50}$$

elde edilmiştir.

Kolaylık olması açısından,

$$W_1 = \bar{Y}^2 + \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(\frac{3R^2}{8} S_{xh}^2 - \frac{R}{2} S_{yxh} \right), \quad W_2 = \bar{Y}^2 + \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 + R^2 S_{xh}^2 - 2RS_{yxh} \right) \tag{4.51}$$

ifadelerinden yararlanılarak yazıldığında,

$$HKO_{\min}\left(t_{SCSS(st)}\right) = \left[\bar{Y}^2 - \frac{W_1^2}{2W_2} \right] \tag{4.52}$$

elde edilmektedir.

Malik ve diğerleri [32], Singh ve Solankinin 2012 yılındaki çalışmasından motive olarak,

$$t_{SMS} = \left[\lambda_1 \bar{y}_{st} + \lambda_2 \left(\bar{X} - \bar{x}_{st} \right) \right] \left\{ 2 - \left(\frac{\bar{X}}{\bar{x}_{st}} \right) \exp\left(\frac{\bar{X} - \bar{x}_{st}}{\bar{X} + \bar{x}_{st}} \right) \right\} \tag{4.53}$$

üstel oransal tahmin edicisini önermişlerdir ve devamında,

$$\begin{aligned} P_1 &= \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h S_y^2 + \frac{9}{4} \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h R_h^2 S_{xh}^2 + \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \bar{Y}_h^2 + 3\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h R_h S_{yxh} \\ P_2 &= \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h S_{xh}^2 \\ P_3 &= \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h S_{yxh} \\ P_4 &= \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h R_h S_{xh}^2 \end{aligned} \tag{4.54}$$

ifadelerinden yararlanarak,

$$HKO\left(t_{SMS}\right) = \lambda_1^2 P_1 + \lambda_2^2 P_2 - 2\lambda_1 \lambda_2 P_3 - 3\lambda_1 \lambda_2 P_4 - 2\lambda_1 \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \bar{Y}_h^2 + \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \bar{Y}_h^2 \tag{4.55}$$

elde etmişlerdir.

λ_1 ve λ_2 sabitlerine göre (4.55) eşitliğinde türevler alınarak, optimum λ_1 ve optimum λ_2 değerleri

$$\lambda_1^* = \frac{4P_2\sum_{h=1}^{L}W_h^2\bar{Y}_h^2}{4P_1P_2-(2P_3+3P_4)^2},\quad \lambda_2^* = \frac{2(2P_3+3P_4)\sum_{h=1}^{L}W_h^2\bar{Y}_h^2}{4P_1P_2-(2P_3+3P_4)^2} \tag{4.56}$$

biçiminde bulunmuştur.

Burada, λ_1^* ve λ_2^* değerleri (4.55) eşitliğinde yazılarak,

$$HKO_{\min}\left(t_{SMS}\right) = \sum_{h=1}^{L}W_h^2\bar{Y}_h^2 + \sum_{h=1}^{L}W_h^4\bar{Y}_h^4\left(\frac{16P_2P_3^2-16P_1P_2^2+48P_2P_3P_4+36P_2P_4^2}{\left(4P_1P_2-(2P_3+3P_4)^2\right)^2}\right) \tag{4.57}$$

elde edilmiştir.

Shabbir ve Gupta [17] tarafından BRÖ yönteminde t_{SG} tahmin edicisi önerilmişti. Bu bölümde ise, önerilen tahmin edicinin TRÖ yöntemi uyarlaması incelenecektir. d_1 ve d_2 sabit olmak üzere,

$$t_{SG(st)} = \left[d_1\bar{y}_{st} + d_2\left(\bar{X}-\bar{x}_{st}\right)\right]\exp\left(\frac{\bar{A}-\bar{a}_{st}}{\bar{A}+\bar{a}_{st}}\right) \tag{4.58}$$

biçiminde önerilmiştir.

Shabbir ve Gupta [17], 1996 yılındaki Bedi [33] çalışmasında yer alan

$$\bar{A} = \bar{X}+N\bar{X},\quad \bar{a}_{st} = \bar{x}_{st}+N\bar{X} = \bar{X}\left(N+1\right)+\bar{X}e_x \tag{4.59}$$

dönüşümlerini kullanarak tahmin edicilerini tanımlamışlardır. Bu dönüşümler yerine konularak, Fark Yöntemi yardımıyla

$$\begin{aligned}HKO\left(t_{SG(st)}\right) &= \left(\bar{Y}_h^2\left(d_1-1\right)^2\right.\\ &+\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(d_1^2\left(S_{yh}^2+\frac{R_h^2S_{xh}^2}{\left(N+1\right)^2}-\frac{2R_hS_{yxh}}{\left(N+1\right)}\right)-2d_1\left(\frac{3R_h^2S_{xh}^2}{8\left(N+1\right)^2}-\frac{R_hS_{yxh}}{2\left(N+1\right)}\right)\right)\\ &+\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_hd_2^2S_{xh}^2-\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_hd_2\left(\frac{R_hS_{xh}^2}{\left(N+1\right)}\right)+2d_1d_2\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(\frac{R_hS_{xh}^2}{\left(N+1\right)}-S_{yxh}\right)\left.\right)\end{aligned} \tag{4.60}$$

elde edilmiştir. d_1 ve d_2 sabitlerine göre türev alınarak,

$$d_1^* = \frac{1-\dfrac{\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\dfrac{S_{xh}^2}{\bar{X}_h^2}}{8\left(N+1\right)^2}}{1+\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\dfrac{S_{yh}^2}{\bar{Y}_h^2}\left(1-\rho^2\right)},\qquad d_2^* = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}}\left[\frac{1}{2\left(N+1\right)}-d_1^*\left\{\frac{1}{\left(N+1\right)}-\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\frac{S_{yxh}}{\bar{X}_h\bar{Y}_h}\right\}\right] \tag{4.61}$$

bulunmuştur. Bulunan optimum değerler kullanılarak,

$$HKO_{\min}\left(t_{SG(st)}\right)=\bar{Y}^2\left[\left\{1-\frac{1}{4(N+1)^2}\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\frac{S_{xh}^2}{\bar{X}_h^2}\right\}-\frac{\left(1-\frac{1}{8(N+1)^2}\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\frac{S_{xh}^2}{\bar{X}_h^2}\right)^2}{1+\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\frac{S_{yh}^2}{\bar{Y}_h^2}\left(1-\rho^2\right)}\right] \tag{4.62}$$

elde edilmiştir.

Solanki ve Singh [34] ise, TRÖ yöntemi için üstel oransal tahmin edicisini önermişlerdir.

$$t_{SS(st)}=\lambda_1\bar{y}_{st}\left[\frac{\bar{X}^*}{a\bar{x}_{st}^*+(1-a)\bar{X}^*}\right]^g+\lambda_2\bar{y}_{st}\exp\left[\frac{\delta\left(\bar{X}^*-\bar{x}_{st}^*\right)}{\left(\bar{X}^*+\bar{x}_{st}^*\right)}\right] \tag{4.63}$$

$$v=\frac{a_{st}\bar{X}}{a_{st}\bar{X}+b_{st}} \tag{4.64}$$

ve

$$\bar{X}^*=a_{st}\bar{X}+b_{st}, \qquad \bar{x}_{st}^*=a_{st}\bar{x}_{st}+b_{st} \tag{4.65}$$

olmak üzere, tahmin edicide a_{st} ve b_{st} yardımcı değişkenin bilgileri, a sabiti, λ_1, λ_2 HKO'yu minimum yapan sabitler ve (δ, g) ise $(-1,0,1)$ değerlerini alabilen sabitlerdir. (4.64) ve (4.65) eşitliklerinden yararlanılarak,

$$\begin{aligned}
A&=\left(1+2E\left(e_y\right)-2avgE\left(e_x\right)+E\left(e_y^2\right)-4avgE\left(e_ye_x\right)+a^2v^2g(g+1)E\left(e_x^2\right)\right)\\
C&=\left(1+2E\left(e_y\right)-\delta vE\left(e_x\right)+E\left(e_y^2\right)-\delta vE\left(e_ye_x\right)+\frac{\delta(\delta+2)}{4}v^2E\left(e_x^2\right)+\frac{\delta^2v^2}{4}E\left(e_x^2\right)\right)\\
D&=\left(1+2E\left(e_y\right)-\frac{v(2ag+\delta)}{2}E\left(e_x\right)-v(2ag+\delta/2)E\left(e_xe_y\right)+E\left(e_y^2\right)+\frac{A^*v^2}{8}E\left(e_x^2\right)\right)\\
B&=\left(1+E\left(e_y\right)-avg\left(E\left(e_x\right)+E\left(e_xe_y\right)\right)-\frac{g(g-1)}{2}a^2v^2E\left(e_x^2\right)\right)\\
E&=\left(1+E\left(e_y\right)-\frac{\delta v}{2}\left(E\left(e_x\right)+E\left(e_xe_y\right)\right)+\frac{\delta(\delta+2)}{8}v^2E\left(e_x^2\right)\right)\\
A^*&=\left[(2ag+\delta)^2+2\left(2a^2g+\delta\right)\right]
\end{aligned} \tag{4.66}$$

biçiminde kısaltmaları kullanılarak,

$$HKO\left(t_{SS(st)}\right)=\bar{Y}^2\gamma\left[1+\lambda_1^2A+\lambda_2^2C+2\lambda_1\lambda_2D-2\lambda_1B-2\lambda_2E\right] \tag{4.67}$$

yazılabilmektedir.

λ_1 ve λ_2 sabitlerine göre türev alınarak

$$\lambda_1^* = \frac{BC - ED}{AC - D^2}, \quad \lambda_2^* = \frac{EA - BD}{AC - D^2} \tag{4.68}$$

biçiminde bulunmuştur.

$\left(\lambda_1^*\right)$ ve $\left(\lambda_2^*\right)$ eşitlikleri (4.67) eşitliğinde yerine yazılarak, (4.66)'da verilen ifadeleri türünden

$$HKO_{\min}\left(t_{SS(st)}\right) = \bar{Y}^2 \gamma \left[1 - \frac{\left(B^2C - 2BDE + AE^2\right)}{\left(AC - D^2\right)}\right] \tag{4.69}$$

eşitliğine ulaşılmaktadır.

Yadav ve Shukla [35] TRÖ yöntemi için, üstel çarpımsal tahmin edici önermişlerdir. Önerilen tahmin edicide α sabit olmak üzere dönüşüm uygulayarak,

$$t_{YS} = \alpha \bar{y}_{st} \exp\left[\frac{\bar{x}_{st} - \bar{X}}{\bar{x}_{st} + \bar{X}}\right] + (1-\alpha)\bar{y}_{st} \exp\left[\frac{\bar{X} - \bar{x}_{st}^*}{\bar{X} + \bar{x}_{st}^*}\right] \tag{4.70}$$

biçiminde ifade etmişlerdir. Burada $(1-\alpha)$ ifadesi α_1 olarak adlandırılarak,

$$HKO(t_{YS}) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h \left[S_{yh}^2 + \frac{\alpha^2 R^2}{4} S_{xh}^2 + \frac{\alpha_1^2 g^2 R^2}{4} S_{xh}^2 + \alpha R S_{yxh} + \alpha_1 g R S_{yxh} + \frac{\alpha \alpha_1 g R^2}{2} S_{xh}^2\right] \tag{4.71}$$

elde etmişlerdir. Burada α sabitine göre türev alma işlemi yapılarak,

$$\alpha^* = \frac{g^2 E(e_x^2) - 2E\left(e_y e_x\right) + 2gE\left(e_y e_x\right) - gE(e_x^2)}{E(e_x^2) + g^2 E(e_x^2) - 2gE(e_x^2)} \tag{4.72}$$

bulunmuştur. (4.72) eşitliği

$$\begin{aligned} A_{YS} &= g^2 E\left(e_x^2\right) - 2E\left(e_y e_x\right) + 2gE\left(e_y e_x\right) - gE\left(e_x^2\right) \\ B_{YS} &= E\left(e_x^2\right) + g^2 E\left(e_x^2\right) - 2gE\left(e_x^2\right) \end{aligned} \tag{4.73}$$

biçiminde kısaltmalarla,

$$\alpha^* = \frac{A_{YS}}{B_{YS}} \tag{4.74}$$

yazılabilmektedir. Tanımlanan α^* değeri (4.71) eşitliğinde yerine konularak,

$$HKO_{min}(t_{YS}) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h \left[S_{yh}^2 + \frac{g_h^2 R^2}{4} S_{xh}^2 + R g_h S_{yxh}\right] - \bar{Y}^2 \frac{A_{YS}^2}{4B_{YS}} \tag{4.75}$$

yazılabilmektedir.

Özel ve Kadılar [36], α sabit olmak üzere

$$t_{KK} = \bar{y}\left(\frac{\bar{x}_{st}}{\bar{X}_{st}}\right)^{\alpha} \exp\left[\frac{\bar{X}_{st} - \bar{x}_{st}}{\bar{X}_{st} + \bar{x}_{st}}\right] \tag{4.76}$$

tahmin edicisini önermişler ve

$$HKO(t_{KK}) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(\frac{R^2}{4} S_{xh}^2 + \alpha^2 R^2 S_{xh}^2 + S_{yh}^2 - \alpha R^2 S_{xh}^2 - RS_{yxh} + 2\alpha RS_{yxh}\right) \tag{4.77}$$

elde etmişlerdir. Önerilen tahmin edicide yer alan α değerine göre (4.77) eşitliğinde türev alınmış ve optimum α değeri

$$\alpha^* = \frac{1}{2} - \frac{\rho S_y}{RS_x} \tag{4.78}$$

olmak üzere,

$$HKO_{\min}(t_{KK}) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h S_{yh}^2 \left(1 - \rho_c^2\right) = HKO\left(t_{reg(st)}\right) \tag{4.79}$$

biçiminde bulmuşlardır. Bulunan minimum HKO'nun, TRÖ yöntemi için klasik regresyon tahmin edicisinin HKO'suna eşit olduğu görülmektedir.

Özel [37], a sabit olmak üzere,

$$t_{GÖ} = \bar{y}_{st}\left(\frac{\bar{x}_{st}}{\bar{X}_{st}}\right)^{\alpha} \exp\left[\frac{\bar{X}_{st,a,b} - \bar{x}_{st,a,b}}{\bar{X}_{st,a,b} + \bar{x}_{st,a,b}}\right] \tag{4.80}$$

tahmin edicisini önermiştir. (4.29) eşitliklerinde yer alan a_h, b_h yardımcı değişken bilgileri olmak üzere, gerekli işlemler yapılarak,

$$HKO(t_{GÖ}) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left[S_{yh}^2 + R^2 S_{xh}^2 (\alpha - \theta)^2 + 2RS_{yxh}(\alpha - \theta)\right] \tag{4.81}$$

elde edilmiştir. Burada, α değerine göre türev alınarak,

$$\alpha^* = \theta - \frac{\rho_{xy} S_y}{RS_x} \tag{4.82}$$

optimum α değeri (4.81) eşitliğinde yerine konularak,

$$HKO_{\min}(t_{GÖ}) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h S_{yh}^2 \left(1 - \rho_c^2\right) = HKO\left(t_{reg(st)}\right) \tag{4.83}$$

biçiminde bulunmuştur. TRÖ yöntemi için $t_{GÖ}$ ile $t_{reg(st)}$ tahmin edicilerinin HKO'larının birbirine eşit olduğu görülmektedir.

Yadav ve diğerleri [38], a ve b sabitler olmak üzere,

$$t_{RYUSC} = \bar{y}_{st} \exp\left[\frac{\bar{X} - \bar{x}_{st}}{\bar{X} + (a-1)\bar{x}_{st}}\right] \quad (4.84)$$

üstel oransal tahmin edicisini önermişler ve

$$HKO(t_{RYUSC}) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left[S_{yh}^2 - \frac{2}{a} RS_{yxh} + \frac{R^2}{a^2} S_{xh}^2\right] \quad (4.85)$$

biçiminde bulmuşlardır. Burada, a sabitine göre türev alınmış ve optimum a değeri

$$a^* = \frac{RS_{xh}^2}{S_{yxh}} \quad (4.86)$$

olarak elde edilmiştir.

Bulunan optimum a değeri (4.85) eşitliğinde yerine konularak,

$$HKO_{\min}(t_{RYUSC}) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h S_{yh}^2 (1-\rho_c^2) = HKO\left(t_{reg(st)}\right) \quad (4.87)$$

biçiminde elde edilmektedir. Bulunan minimum HKO'nun klasik regresyon tahmin edicisinin HKO'suna eşit olduğu görülmektedir.

Önerilen diğer tahmin edicisi ise, üstel çarpımsal tahmin edici olup,

$$t_{PYUSC} = \bar{y}_{st} \exp\left[\frac{\bar{x}_{st} - \bar{X}}{\bar{X} + (b-1)\bar{x}_{st}}\right] \quad (4.88)$$

şeklinde ifade edilmiştir. Benzer olarak işlemler tekrar edildiğinde,

$$HKO(t_{PYUSC}) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left[S_{yh}^2 + \frac{2}{b} RS_{yxh} + \frac{R^2}{b^2} S_{xh}^2\right] \quad (4.89)$$

bulunmaktadır. Optimum b değeri ise,

$$b^* = -\frac{RS_{xh}^2}{S_{yxh}} \quad (4.90)$$

biçimindedir. b^* değeri (4.89) eşitliğinde yerine konularak,

$$HKO_{\min}(t_{PYUSC}) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h S_{yh}^2 (1-\rho^2) = HKO\left(t_{reg(st)}\right) \quad (4.91)$$

sonucuna ulaşılmıştır.

Singh ve diğerleri [39],

$$t_{SSS}=\bar{y}_{st}\left[\theta\exp\left(\frac{\bar{X}-\bar{x}_{st}}{\bar{X}+\bar{x}_{st}}\right)+(1-\theta)\exp\left(\frac{\bar{x}_{st}-\bar{X}}{\bar{x}_{st}+\bar{X}}\right)\right] \tag{4.92}$$

olarak ifade edilen üstel oransal-çarpımsal tahmin edicisini önermişler ve

$$HKO\left(t_{SSS}\right)=\bar{Y}^2\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left[\frac{S_{yh}^2}{\bar{Y}^2}+\frac{S_{yxh}}{\bar{Y}\bar{X}}2\left(\frac{1}{2}-\theta\right)+\frac{S_{xh}^2}{\bar{X}^2}\left(\frac{1}{2}-\theta\right)^2\right] \tag{4.93}$$

bulmuşlardır. Sabit θ değerine göre türev alınarak optimum değer,

$$\theta^*=\frac{1}{2}+\frac{\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\frac{S_{yxh}}{\bar{Y}\bar{X}}}{\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\frac{S_{xh}^2}{\bar{X}^2}} \tag{4.94}$$

biçiminde elde edilmiştir ve (4.93) eşitliğinde yerine konulduğunda

$$HKO_{\min}\left(t_{SSS}\right)=\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_hS_{yh}^2\left(1-\rho_c^2\right) \tag{4.95}$$

bulunmuştur. Elde edilen minimum HKO, $t_{reg(st)}$ tahmin edicisinin HKO'suna eşit olarak bulunmuştur.

Koyuncu [40], tek yardımcı değişken bilgisini kullanarak,

$$t_N=\left[w_1\bar{y}_{st}+w_2\left(\frac{\bar{x}_{st}}{\bar{X}}\right)^{\gamma}\right]\exp\left[\frac{A_{st}(\bar{X}-\bar{x}_{st})}{A_{st}(\bar{X}+\bar{x}_{st})+2B_{st}}\right] \tag{4.96}$$

tahmin edicisini önermiştir.

$$\psi=\frac{\bar{X}A_{st}}{\bar{X}A_{st}+B_{st}} \tag{4.97}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}
H&=\left(1+e_y^2+\psi^2e_x^2-2\psi e_ye_x\right)\\
B^*&=\left(1+\left(\gamma^2+\psi^2+\gamma\left(\gamma-1\right)-\psi\gamma-\gamma\psi\right)e_x^2\right)\\
D^*&=\left(\psi e_ye_x-2-\frac{3}{4}\psi^2e_x^2\right)\\
G&=\left(e_x^2\left(\psi\gamma-\frac{3}{4}\psi^2-\gamma\left(\gamma-1\right)\right)-2\right)\\
F&=\left(2+2(\gamma-\psi)E\left(e_ye_x\right)+E\left(e_x^2\right)\left(2\psi^2+\gamma\left(\gamma-1\right)-2\gamma\psi\right)\right)
\end{aligned} \tag{4.98}$$

biçiminde tanımlanmış ve

$$HKO\left(t_N\right)=\left[\bar{Y}^2+\bar{Y}^2w_1^2H+w_2^2B^*+\bar{Y}^2w_1D^*+\bar{Y}w_2G+\bar{Y}w_1w_2F\right] \tag{4.99}$$

sonucuna ulaşılmıştır. Burada w_1 ve w_2 sabitlerine göre türev alınarak, (4.98)'de verilen ifadeler yardımıyla optimum değerleri,

$$\begin{aligned} w_1^* &= \frac{-\left(\bar{Y}^2D^*-\bar{Y}F\left(\dfrac{-\bar{Y}G-\bar{Y}w_1F}{2B^*}\right)\right)}{2\bar{Y}^2H}=\frac{FG-2B^*D^*}{4HB^*-F^2} \\ w_2^* &= \frac{-\bar{Y}G-\bar{Y}F\left(\dfrac{FG-2B^*D^*}{4HB^*-F^2}\right)}{2B^*}=\bar{Y}\,\frac{D^*F-2HG}{4HB^*-F^2} \end{aligned} \tag{4.100}$$

olarak elde edilmiş ve (4.99) eşitliğinde yerine konularak,

$$HKO_{\min}(t_N)=\bar{Y}^2\left[1-\frac{B^*D^{*2}-D^*FG+HG^2}{4B^*H-F^2}\right] \tag{4.101}$$

bulunmuştur.

Son olarak, Tailor ve diğerleri [41], $t_{BT*(st)}$ ve $t_{TB*(st)}$ tahmin edicilerini, Srivenkataramana [8] ve Bahl ve Tuteja [4] çalışmalarından yola çıkarak,

$$t_{BT*(st)}=\bar{y}_{st}\exp\left[\frac{\bar{x}_{st}^*-\bar{X}}{\bar{x}_{st}^*+\bar{X}}\right] \tag{4.102}$$

biçiminde tanımlamışlardır. (2.13) eşitliklerinden yararlanılarak

$$HKO\left(t_{BT*(st)}\right)=\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(S_{yh}^2-Rg_hS_{yxh}+\frac{R^2g_h^2S_{xh}^2}{4}\right) \tag{4.103}$$

elde edilmiştir.

Önerilen üstel çarpımsal tahmin edici ise,

$$t_{TB*(st)}=\bar{y}_{st}\exp\left[\frac{\bar{X}-\bar{x}_{st}^*}{\bar{X}+\bar{x}_{st}^*}\right] \tag{4.104}$$

olarak tanımlanmıştır. Benzer işlemler tekrar edilerek,

$$HKO\left(t_{TB*(st)}\right)=\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(S_{y_h}^2+Rg_hS_{yxh}+\frac{R^2g_h^2S_{xh}^2}{4}\right) \tag{4.105}$$

biçiminde elde edilmiştir.

4.1.1. Tek Yardımcı Değişken Bilgisini Kullanan Tahmin Edicilerin Etkinlik Karşılaştırması

İncelenen tek yardımcı değişken bilgisini kullanan tahmin ediciler, bu bölümde üstel oransal, üstel çarpımsal ve hem oransal hem de çarpımsal ifade içeren tahmin ediciler kendi içlerinde birbirleriyle karşılaştırılacaktır. Üstel oransal olan tahmin ediciler $t_{R(st)}, t_{BT(st)}$ ve $t_{reg(st)}$ aralarında, üstel çarpımsal tahmin ediciler $t_{P(st)}, t_{TB(st)}$ ve $t_{reg(st)}$ aralarında karşılaştırılacakken, oransal ve çarpımsal ifadeyi birlikte içeren tahmin ediciler ise, her iki karşılaştırmaları da kapsayacak şekilde $\left(t_{R(st)}, t_{P(st)}, t_{BT(st)} \text{ ve } t_{TB(st)}\right)$ aralarında yapılacaktır.

Karşılaştırmalara, önerilen üstel oransal olan tahmin ediciler ile başlayalım.

Singh ve diğerleri [30] tarafından önerilen tahmin edicilerin karşılaştırması için,

$$S_1 = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h S_{yxh}, \quad S_2 = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h S_{xh}^2 \tag{4.106}$$

biçiminde ifade edilen eşitliklerden yararlanılmıştır. Bahl ve Tuteja [4] çalışmasından yararlanılarak önerilen $t_{BT(st)}$ tahmin edicisi için,

$$HKO\left(t_{BT(st)}\right) < HKO\left(t_{R(st)}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 - RS_{yxh} + \frac{R^2}{4} S_{xh}^2 \right) < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 - 2RS_{yxh} + R^2 S_{xh}^2 \right)$$

$$R > \frac{4S_1}{3S_2} \tag{4.107}$$

dir. $t_{R(st)}$ tahmin edicisi ile yapılan karşılaştırmada (4.107) koşulunun sağlanması durumunda, $t_{BT(st)}$ tahmin edicisinin daha etkin olduğu bulunmuştur.

$$HKO\left(t_{BT(st)}\right) < HKO\left(t_{reg(st)}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 - RS_{yxh} + \frac{R^2}{4} S_{xh}^2 \right) < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h S_{yh}^2 \left(1 - \rho_c^2 \right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(\frac{R}{2} S_{xh} - \rho_c S_{yh} \right)^2 < 0 \tag{4.108}$$

$t_{reg(st)}$ ile yapılan karşılaştırmada ise (4.108) koşulunun sağlanması eşitsizlikte yer alan ifadelerin birbirine eşit olması haricinde mümkün olmadığı için, her durumda TRÖ yöntemi için klasik regresyon tahmin edicisinin, önerilen tahmin ediciye göre daha etkin olduğu söylenebilir.

$$HKO\left(t_{TB(st)}\right) < HKO\left(t_{P(st)}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 + RS_{yxh} + \frac{R^2}{4} S_{xh}^2 \right) < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 + 2RS_{yxh} + R^2 S_{xh}^2 \right)$$

$$R > -\frac{4S_1}{3S_2} \tag{4.109}$$

$$HKO\left(t_{TB(st)}\right) < HKO\left(t_{reg(st)}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 + RS_{yxh} + \frac{R^2}{4} S_{xh}^2 \right) < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h S_{yh}^2 \left(1 - \rho_c^2\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(\frac{R}{2} S_{xh} + \rho_c S_{yh} \right)^2 < 0 \tag{4.110}$$

dir. Yapılan etkinlik karşılaştırmasında, (4.109) koşulunun sağlandığı durumda $t_{TB(st)}$ tahmin edicisinin daha etkin olduğu ancak $t_{reg(st)}$ ile yapılan karşılaştırmada (4.110) koşulunun sağlanması eşitsizlikte yer alan ifadelerin toplamının 0 olması haricinde mümkün olmadığı için $t_{reg(st)}$ tahmin edicisinin daha etkin olduğu bulunmuştur.

t_{SD} tahmin edicisi için,

$$HKO\left(t_{SD}\right) < HKO\left(t_{R(st)}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 - R_{SD} S_{yxh} + \frac{R_{SD}^2}{4} S_{xh}^2 \right) < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 - 2RS_{yxh} + R^2 S_{xh}^2 \right)$$

$$R > \frac{R_{SD}}{2} \to S_2 > \left(\frac{4S_1}{2R + R_{SD}} \right) \tag{4.111}$$

$$R < \frac{R_{SD}}{2} \to S_2 < \left(\frac{4S_1}{2R + R_{SD}} \right) \tag{4.112}$$

$$HKO\left(t_{SD}\right) < HKO\left(t_{BT(st)}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 - R_{SD} S_{yxh} + \frac{R_{SD}^2}{4} S_{xh}^2 \right) < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 - RS_{yxh} + \frac{R^2}{4} S_{xh}^2 \right)$$

$$R_{SD} > R \rightarrow S_2 < \left(\frac{4S_1}{R_{SD} + R} \right) \tag{4.113}$$

$$R_{SD} < R \rightarrow S_2 > \left(\frac{4S_1}{R_{SD} + R} \right) \tag{4.114}$$

koşulları elde edilmiştir. R ve R_{SD} değerleri arasındaki ilişkiye bağlı olarak $t_{R(st)}$ ile karşılaştırmasında, (4.111) ve (4.112); $t_{BT(st)}$ ile karşılaştırmasında ise (4.113) ve (4.114) koşulları elde edilmiştir. Koşulların sağlanması durumunda önerilen tahmin edici diğer tahmin edicilere göre daha etkin olarak bulunmaktadır.

$$HKO(t_{SD}) < HKO\left(t_{reg(st)}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 - R_{SD} S_{yxh} + \frac{R_{SD}^2}{4} S_{xh}^2 \right) < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h S_{yh}^2 \left(1 - \rho_c^2\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(\frac{R_{SD}}{2} S_{xh} - \rho_c S_{yh} \right)^2 < 0 \tag{4.115}$$

$t_{reg(st)}$ ile yapılan karşılaştırmada (4.115) koşulunun sağlanması eşitsizlikte yer alan ifadelerin birbirine eşit olma durumu haricinde mümkün olmadığı için, klasik regresyon tahmin edicisine göre daha etkin bulunmuştur.

t_{SK} tahmin edicisinin etkinlik karşılaştırmasında,

$$HKO(t_{SK}) < HKO\left(t_{R(st)}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 - R_{SK} S_{yxh} + \frac{R_{SK}^2}{4} S_{xh}^2 \right) < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 - 2R S_{yxh} + R^2 S_{xh}^2 \right)$$

$$R > \frac{R_{SK}}{2} \rightarrow S_2 > \left(\frac{4S_1}{2R + R_{SK}} \right) \tag{4.116}$$

$$R < \frac{R_{SK}}{2} \rightarrow S_2 < \left(\frac{4S_1}{2R + R_{SK}} \right) \tag{4.117}$$

$$HKO(t_{SK}) < HKO\left(t_{BT(st)}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 - R_{SK} S_{yxh} + \frac{R_{SK}^2}{4} S_{xh}^2 \right) < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 - R S_{yxh} + \frac{R^2}{4} S_{xh}^2 \right)$$

$$R_{SK} > R \rightarrow S_2 < \left(\frac{4S_1}{R_{SK} + R} \right) \tag{4.118}$$

$$R_{SK} < R \rightarrow S_2 > \left(\frac{4S_1}{R_{SK} + R} \right) \tag{4.119}$$

$$HKO\left(t_{SK}\right) < HKO\left(t_{reg(st)}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 - R_{SK} S_{yxh} + \frac{R_{SK}^2}{4} S_{xh}^2 \right) < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h S_{yh}^2 \left(1 - \rho_c^2\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(\frac{R_{SK}}{2} S_{xh} - \rho_c S_{yh} \right)^2 < 0 \tag{4.120}$$

koşulları elde edilmiştir. R ve R_{SK} değerlerine bağlı olarak; $t_{R(st)}$ ile karşılaştırmada (4.116) veya (4.117), $t_{BT(st)}$ ile karşılaştırmada ise (4.118) veya (4.119) koşulları sağlandığında önerilen tahmin edicinin diğer tahmin edicilere göre daha etkin olduğu görülmektedir. Ancak, $t_{reg(st)}$ ile etkinlik karşılaştırmasında (4.120) koşulunun sağlanması eşitsizlikte yer alan ifadelerin birbirine eşit olması haricinde mümkün olmadığı için $t_{reg(st)}$ tahmin edicisi daha etkin bulunmuştur.

t_{US1} üstel oransal tahmin edicisinin,

$$HKO\left(t_{US1}\right) < HKO\left(t_{R(st)}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 - R_{US1} S_{yxh} + \frac{R_{US1}^2}{4} S_{xh}^2 \right) < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 - 2RS_{yxh} + R^2 S_{xh}^2 \right)$$

$$R > \frac{R_{US1}}{2} \rightarrow S_2 > \left(\frac{4S_1}{2R + R_{US1}} \right) \tag{4.121}$$

$$R < \frac{R_{US1}}{2} \rightarrow S_2 < \left(\frac{4S_1}{2R + R_{US1}} \right) \tag{4.122}$$

$$HKO\left(t_{US1}\right) < HKO\left(t_{BT(st)}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 - R_{US1} S_{yxh} + \frac{R_{US1}^2}{4} S_{xh}^2 \right) < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 - RS_{yxh} + \frac{R^2}{4} S_{xh}^2 \right)$$

$$R_{US1} > R \rightarrow S_2 < \left(\frac{4S_1}{R_{US1} + R} \right) \tag{4.123}$$

$$R_{US1} < R \rightarrow S_2 > \left(\frac{4S_1}{R_{US1} + R} \right) \tag{4.124}$$

$$HKO\left(t_{US1}\right) < HKO\left(t_{reg(st)}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 - R_{US1} S_{yxh} + \frac{R_{US1}^2}{4} S_{xh}^2 \right) < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h S_{yh}^2 \left(1-\rho_c^2\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(\frac{R_{US1}}{2} S_{xh} - \rho_c S_{yh} \right)^2 < 0 \tag{4.125}$$

koşulları elde edilmiştir. $t_{R(st)}$ ve $t_{BT(st)}$ tahmin edicileri ile yapılan karşılaştırmalarında, R ve R_{US1} değerlerine göre (4.121), (4.122), (4.123) ve (4.124) koşulların sağlandığı durumda t_{US1} tahmin edicisinin daha etkin olduğu bulunmuştur. $t_{reg(st)}$ ile yapılan karşılaştırmada ise (4.125) koşulunun sağlanması eşitsizlikte görülen terimlerin birbirine eşit olması durumu haricinde mümkün olmadığından, TRÖ yöntemi için her durumda klasik regresyon tahmin edicisinin daha etkin olduğu söylenebilir.

1999 yılındaki Upadhyaya ve Singh çalışması dikkate alınarak, önerilen t_{US2} tahmin edicisi için,

$$HKO\left(t_{US2}\right) < HKO\left(t_{R(st)}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 - R_{US2} S_{yxh} + \frac{R_{US2}^2}{4} S_{xh}^2 \right) < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 - 2R S_{yxh} + R^2 S_{xh}^2 \right)$$

$$R > \frac{R_{US2}}{2} \rightarrow S_2 > \left(\frac{4S_1}{2R + R_{US2}} \right) \tag{4.126}$$

$$R < \frac{R_{US2}}{2} \rightarrow S_2 < \left(\frac{4S_1}{2R + R_{US1}} \right) \tag{4.127}$$

$$HKO\left(t_{US2}\right) < HKO\left(t_{BT(st)}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 - R_{US2} S_{yxh} + \frac{R_{US2}^2}{4} S_{xh}^2 \right) < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 - R S_{yxh} + \frac{R^2}{4} S_{xh}^2 \right)$$

$$R_{US2} > R \rightarrow S_2 < \left(\frac{4S_1}{R_{US2} + R} \right) \tag{4.128}$$

$$R_{US2} < R \rightarrow S_2 > \left(\frac{4S_1}{R_{US1} + R} \right) \tag{4.129}$$

$$HKO\left(t_{US2}\right) < HKO\left(t_{reg(st)}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 - R_{US2} S_{yxh} + \frac{R_{US2}^2}{4} S_{xh}^2 \right) < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h S_{yh}^2 \left(1-\rho_c^2\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(\frac{R_{US2}}{2} S_{xh} - \rho_c S_{yh} \right)^2 < 0 \tag{4.130}$$

koşulları elde edilmiştir. $t_{R(st)}$ ve $t_{BT(st)}$ ile yapılan karşılaştırmada R ve R_{US2} değerlerine bağlı olarak (4.126), (4.127), (4.128) ve (4.129) koşullarının sağlandığı durumda t_{US2} tahmin edicisi daha etkin bulunmuştur. Bu durum $t_{reg(st)}$ ile yapılan karşılaştırmada geçerli değildir. (4.130) koşulunun sağlanması eşitsizlikteki ifadelerin birbirine eşitliği haricinde mümkün olmadığı için, her koşulda $t_{reg(st)}$, t_{US2} 'ye göre daha etkindir.

t_{GNS1} üstel oransal tahmin edicisi için ise,

$$HKO\left(t_{GNS1}\right) < HKO\left(t_{R(st)}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 - R_{GNS1} S_{yxh} + \frac{R_{GNS1}^2}{4} S_{xh}^2 \right) < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 - 2R S_{yxh} + R^2 S_{xh}^2 \right)$$

$$R > \frac{R_{GNS1}}{2} \rightarrow S_2 > \left(\frac{4S_1}{2R + R_{GNS1}} \right) \tag{4.131}$$

$$R < \frac{R_{GNS1}}{2} \rightarrow S_2 < \left(\frac{4S_1}{2R + R_{GNS1}} \right) \tag{4.132}$$

$$HKO\left(t_{GNS1}\right) < HKO\left(t_{BT(st)}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 - R_{GNS1} S_{yxh} + \frac{R_{GNS1}^2}{4} S_{xh}^2 \right) < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 - R S_{yxh} + \frac{R^2}{4} S_{xh}^2 \right)$$

$$R_{GNS1} > R \rightarrow S_2 < \left(\frac{4S_1}{R_{GNS1} + R} \right) \tag{4.133}$$

$$R_{GNS1} < R \rightarrow S_2 > \left(\frac{4S_1}{R_{GNS1} + R} \right) \tag{4.134}$$

koşulları elde edilmiştir. R ve R_{GNS1} değerleri arasındaki ilişkiye bağlı olarak, $t_{R(st)}$ ile karşılaştırmasında, (4.131) ve (4.132); $t_{BT(st)}$ ile etkinlik karşılaştırmasında ise (4.133) ve (4.134) koşullarının sağlanması durumunda, t_{GNS1} tahmin edicisi daha etkin olarak bulunmaktadır.

$$HKO\left(t_{GNS1}\right) < HKO\left(t_{reg(st)}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 - R_{GNS1} S_{yxh} + \frac{R_{GNS1}^2}{4} S_{xh}^2 \right) < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h S_{yh}^2 \left(1-\rho_c^2\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(\frac{R_{GNS1}}{2} S_{xh} - \rho_c S_{yh} \right)^2 < 0 \qquad (4.135)$$

koşulunun sağlanması eşitsizlikteki ifadelerin birbirine eşitliği haricinde mümkün olmadığı için, belirtilen durum dışındaki her durumda $t_{reg(st)}$ tahmin edicisi t_{GNS1} tahmin edicisine göre daha etkindir.

t_{GNS2} üstel oransal tahmin edicisi için,

$$HKO\left(t_{GNS2}\right) < HKO\left(t_{R(st)}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 - R_{GNS2} S_{yxh} + \frac{R_{GNS2}^2}{4} S_{xh}^2 \right) < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 - 2RS_{yxh} + R^2 S_{xh}^2 \right)$$

$$R > \frac{R_{GNS2}}{2} \rightarrow S_2 > \left(\frac{4S_1}{2R + R_{GNS2}} \right) \qquad (4.136)$$

$$R < \frac{R_{GNS2}}{2} \rightarrow S_2 < \left(\frac{4S_1}{2R + R_{GNS2}} \right) \qquad (4.137)$$

$$HKO\left(t_{GNS2}\right) < HKO\left(t_{BT(st)}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 - R_{GNS2} S_{yxh} + \frac{R_{GNS2}^2}{4} S_{xh}^2 \right) < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 - RS_{yxh} + \frac{R^2}{4} S_{xh}^2 \right)$$

$$R_{GNS2} > R \rightarrow S_2 < \left(\frac{4S_1}{R_{GNS2} + R} \right) \qquad (4.138)$$

$$R_{GNS2} < R \rightarrow S_2 > \left(\frac{4S_1}{R_{GNS2} + R} \right) \qquad (4.139)$$

$$HKO\left(t_{GNS2}\right) < HKO\left(t_{reg(st)}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 - R_{GNS2} S_{yxh} + \frac{R_{GNS2}^2}{4} S_{xh}^2 \right) < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h S_{yh}^2 \left(1-\rho_c^2\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(\frac{R_{GNS2}}{2} S_{xh} - \rho_c S_{yh} \right)^2 < 0 \qquad (4.140)$$

koşulları elde edilmiştir. R_{GNS2} ve R değerleri arasındaki ilişkiye bağlı olarak, (4.136), (4.137), (4.138) ve (4.139) koşullarının sağlandığı sürece $t_{R(st)}$ ve $t_{BT(st)}$ tahmin edicilerine göre daha etkin olduğu bulunmuştur. $t_{reg(st)}$ ile olan etkinlik karşılaştırmasında ise, (4.140) koşulunun sağlanması eşitsizlikteki ifadelerin birbirine eşitliği haricinde mümkün olmadığı için belirtilen durum dışında $t_{reg(st)}$ her zaman t_{GNS2} tahmin edicisine göre daha etkindir.

Singh ve diğerleri [30] tarafından önerilen tahmin edicilerden son olarak, t_{SKCK} tahmin edicisinin etkinlik karşılaştırmasında,

$$HKO_{\min}\left(t_{SKSC}\right) < HKO\left(t_{R(st)}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h S_{yh}^2 \left(1-\rho_c^2\right) < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 - 2RS_{yxh} + R^2 S_{xh}^2\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(RS_{xh} - \rho_c S_{yh}\right)^2 > 0 \tag{4.141}$$

$$HKO_{\min}\left(t_{SKSC}\right) < HKO\left(t_{BT(st)}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h S_{yh}^2 \left(1-\rho_c^2\right) < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 - RS_{yxh} + \frac{R^2}{4} S_{xh}^2\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(\frac{R}{2} S_{xh} - \rho_c S_{yh}\right)^2 > 0 \tag{4.142}$$

koşulları elde edilmiştir. (4.141) ve (4.142) koşulları eşitsizliklerden görülen terimlerin kendi içinde birbirirlerine eşit olması haricindeki durumlar sağlandığında t_{SKSC} tahmin edicisinin her zaman diğer tahmin edicilerden daha etkin olduğu söylenebilmektedir. $t_{reg(st)}$ ile t_{SKSC} tahmin edicileri aynı HKO'ya sahip olduğu için karşılaştırılmalarına yer verilmemiştir.

Singh ve diğerleri [31] tarafından önerilen t_{SKCKi}, $i = 0,1,2,3,4$ üstel oransal tahmin edicisi için $t_{R(st)}, t_{BT(st)}$ ve $t_{reg(st)}$ ile etkinlik karşılaştırması yapılmıştır.

$$HKO_{\min}\left(t_{SKCKi}\right) < HKO\left(t_{R(st)}\right), \; i = 0,1,2,3,4$$

$$\bar{Y}^2 \left(k_i^* - 1\right)^2 + k_i^{*2} HKO\left(t_{KKCSi}\right) + 2k_i^* \left(k_i^* - 1\right) A_i < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 - 2R_i S_{yxh} + R_i^2 S_{xh}^2\right)$$

$$X_{SKCKi1}=\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(S_{yh}^2-2R_iS_{yxh}+R_i^2S_{xh}^2-k_i^{*2}\left(S_{yh}^2-2R_ia_hS_{yxh}+R_i^2a_h^2S_{xh}^2\right)+k_i\left(\frac{3R_i^2}{4}a_h^2S_{xh}^2-R_ia_hS_{yxh}\right)\right)$$

olarak kısaltılırsa,

$$\bar{Y}^2<\frac{1}{\left(k_i^*-1\right)^2}X_{SKCKi1},\ i=0,1,2,3,4 \qquad (4.143)$$

sonucu elde edilmektedir. (4.143) koşulunun sağlandığı durumda, t_{SKCKi}, $i=0,1,2,3,4$ tahmin edicisinin, oransal tahmin edicisinden daha etkin olduğu söylenebilmektedir.

$$HKO\left(t_{SKCKi}\right)<HKO\left(t_{BT(st)}\right),\ i=0,1,2,3,4$$

$$\bar{Y}^2\left(k_i^*-1\right)^2+k_i^{*2}HKO\left(t_{KKCSi}\right)+2k_i^*\left(k_i^*-1\right)A_i<\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(S_{yh}^2-R_iS_{yxh}+\frac{R_i^2}{4}S_{xh}^2\right)$$

$$X_{SKCKi2}=\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(S_{yh}^2-R_iS_{yxh}+\frac{R_i^2}{4}S_{xh}^2-k_i^{*2}\left(S_{yh}^2-2R_ia_hS_{yxh}+R_i^2a_h^2S_{xh}^2\right)+k_i\left(\frac{3R_i^2}{4}a_h^2S_{xh}^2-R_ia_hS_{yxh}\right)\right)$$

olmak üzere,

$$\bar{Y}^2<\frac{1}{\left(k_i^*-1\right)^2}X_{SKCKi2},\ i=0,1,2,3,4 \qquad (4.144)$$

şeklinde elde edilmektedir. (4.144) koşulunun sağlandığı durumda, t_{SKCKi}, $i=0,1,2,3,4$ tahmin edicisinin Bahl-Tuteja tahmin edicisinden daha etkin olduğu söylenebilmektedir.

$t_{reg(st)}$ ile yapılan karşılaştırmada ise,

$$HKO\left(t_{SKCKi}\right)<HKO\left(t_{reg(st)}\right),\ i=0,1,2,3,4$$

$$\bar{Y}^2\left(k_i^*-1\right)^2+k_i^{*2}HKO\left(t_{KKCSi}\right)+2k_i^*\left(k_i^*-1\right)A_i<\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_hS_{yh}^2\left(1-\rho^2\right)$$

$$X_{SKCKi3}=\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(S_{yh}^2\left(1-\rho^2\right)-k_i^{*2}\left(S_{yh}^2-2R_ia_hS_{yxh}+R_i^2a_h^2S_{xh}^2\right)+k_i\left(\frac{3R_i^2}{4}a_h^2S_{xh}^2-R_ia_hS_{yxh}\right)\right)$$

olarak kısaltıldığında,

$$\bar{Y}^2<\frac{1}{\left(k_i^*-1\right)^2}X_{SKCKi3},\ i=0,1,2,3,4 \qquad (4.145)$$

yazılabilmektedir. (4.145) koşulunun sağlandığı durumda t_{SKCKi}, $i=0,1,2,3,4$ tahmin edicisinin $t_{reg(st)}$ tahmin edicisine göre daha etkin olduğu sonucuna varılmıştır.

Diğer tahmin edici t_{KCKSi}, $i=0,1,2,3,4$ için etkinlik karşılaştırması yapıldığında,

$$HKO_{\min}\left(t_{KCKSi}\right) < HKO\left(t_{R(st)}\right),\ i=0,1,2,3,4$$

$$\bar{Y}^2\left(\omega_{1i}^*+\omega_{2i}^*-1\right)^2+\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h X_{KCKSi}^* < \sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(S_{yh}^2-2RS_{yxh}+R^2S_{xh}^2\right)$$

$$X_{KCKSi1}^* = S_{yh}^2-2RS_{yxh}+R^2S_{xh}^2-X_{KCKSi}^*$$

olmak üzere,

$$\bar{Y}^2 < \sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\frac{1}{\left(\omega_{1i}^*+\omega_{2i}^*-1\right)^2}X_{KCKSi1}^*,\ i=0,1,2,3,4 \qquad (4.146)$$

$$HKO_{\min}\left(t_{KCKSi}\right) < HKO\left(t_{BT(st)}\right),\ i=0,1,2,3,4$$

$$\bar{Y}^2\left(\omega_{1i}^*+\omega_{2i}^*-1\right)^2+\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h X_{KCKSi}^* < \sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(S_{yh}^2-RS_{yxh}+\frac{R^2}{4}S_{xh}^2\right)$$

$$X_{KCKSi2}^* = S_{yh}^2-RS_{yxh}+\frac{R^2}{4}S_{xh}^2-X_{KCKSi}^*$$

olarak yazıldığında,

$$\bar{Y}^2 < \sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\frac{1}{\left(\omega_{1i}^*+\omega_{2i}^*-1\right)^2}X_{KCKSi2}^*,\ i=0,1,2,3,4 \qquad (4.147)$$

$$HKO_{\min}\left(t_{KCKSi}\right) < HKO\left(t_{reg(st)}\right),\ i=0,1,2,3,4$$

$$\bar{Y}^2\left(\omega_{1i}^*+\omega_{2i}^*-1\right)^2+\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h X_{KCKSi}^* < \sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h S_{yh}^2\left(1-\rho^2\right)$$

$$X_{KCKSi3}^* = S_{yh}^2\left(1-\rho^2\right)-X_{KCKSi}^*$$

ifade edilirse,

$$\bar{Y}^2 < \sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\frac{1}{\left(\omega_{1i}^*+\omega_{2i}^*-1\right)^2}X_{KCKSi3}^*,\ i=0,1,2,3,4 \qquad (4.148)$$

koşulları elde edilmektedir . (4.146), (4.147) ve (4.148) koşulların sağlandığı durumlarda önerilen tahmin edicinin sırasıyla $t_{R(st)}, t_{BT(st)}, t_{reg(st)}$ tahmin edicilere göre daha etkin olduğu söylenebilmektedir.

Singh ve diğerlerinin [14] önerdiği $t_{SCSS(st)}$ tahmin edicisi için, (4.52) eşitliğindeki HKO'sundan yararlanılarak,

$$HKO_{\min}\left(t_{SCSS(st)}\right) < HKO\left(t_{R(st)}\right)$$

$$\left[\bar{Y}^2 - \frac{W_1^2}{2W_2}\right] < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 + R_h^2 S_{xh}^2 - 2R_h S_{yxh}\right) \tag{4.149}$$

$$HKO_{\min}\left(t_{SCSS(st)}\right) < HKO\left(t_{BT(st)}\right)$$

$$\left[\bar{Y}^2 - \frac{W_1^2}{2W_2}\right] < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 + \frac{R_h^2}{4} S_{xh}^2 - R_h S_{yxh}\right) \tag{4.150}$$

$$HKO_{\min}\left(t_{SCSS(st)}\right) < HKO\left(t_{reg(st)}\right)$$

$$\left[\bar{Y}^2 - \frac{W_1^2}{2W_2}\right] < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h S_{yh}^2 \left(1 - \rho_c^2\right) \tag{4.151}$$

etkinlik karşılaştırması yapılmış ve (4.149), (4.150) ve (4.151) koşullarının sağlandığı durumlarda, $t_{SCSS(st)}$ tahmin edicisinin diğer tahmin edicilerden daha etkin olduğu söylenebilir.

Malik ve diğerleri [32] tarafından önerilen t_{SMS} tahmin edicisi için $t_{R(st)}, t_{BT(st)}$ ve $t_{reg(st)}$ tahmin edicileri ile etkinlik karşılaştırılması yapılmıştır. Burada, $HKO_{\min}\left(t_{SMS}\right)$ için (4.54) eşitliklerinde yer alan kısaltmalar kullanılmıştır.

$$HKO_{\min}\left(t_{SMS}\right) < HKO\left(t_{R(st)}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \bar{Y}_h^2 + \sum_{h=1}^{L} W_h^4 \bar{Y}_h^4 \frac{\left(16P_2P_3^2 - 16P_1P_2^2 + 48P_2P_3P_4 + 36P_2P_4^2\right)}{\left(4P_1P_2 - (2P_3 + 3P_4)^2\right)^2} < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \bar{Y}_h^2 \left(S_{yh}^2 - 2R_h S_{yxh} + R_h^2 S_{xh}^2\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \bar{Y}_h^2 \left(S_{yh}^2 - 2R_h S_{yxh} + R_h^2 S_{xh}^2 - 1\right) - \sum_{h=1}^{L} W_h^4 \bar{Y}_h^4 \frac{\left(16P_2P_3^2 - 16P_1P_2^2 + 48P_2P_3P_4 + 36P_2P_4^2\right)}{\left(4P_1P_2 - (2P_3 + 3P_4)^2\right)^2} > 0 \tag{4.152}$$

$$HKO_{\min}\left(t_{SMS}\right) < HKO\left(t_{BT(st)}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \bar{Y}_h^2 + \sum_{h=1}^{L} W_h^4 \bar{Y}_h^4 \frac{\left(16P_2P_3^2 - 16P_1P_2^2 + 48P_2P_3P_4 + 36P_2P_4^2\right)}{\left(4P_1P_2 - (2P_3 + 3P_4)^2\right)^2} < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \bar{Y}_h^2 \left(S_{yh}^2 - R_h S_{yxh} + \frac{R_h^2}{4} S_{xh}^2\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \bar{Y}_h^2 \left(S_{yh}^2 - R_h S_{yxh} + \frac{R_h^2}{4} S_{xh}^2 - 1\right) - \sum_{h=1}^{L} W_h^4 \bar{Y}_h^4 \frac{\left(16P_2P_3^2 - 16P_1P_2^2 + 48P_2P_3P_4 + 36P_2P_4^2\right)}{\left(4P_1P_2 - (2P_3 + 3P_4)^2\right)^2} > 0 \tag{4.153}$$

$$HKO_{\min}\left(t_{SMS}\right) < HKO\left(t_{reg(st)}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \bar{Y}_h^2 + \sum_{h=1}^{L} W_h^4 \bar{Y}_h^4 \frac{\left(16P_2P_3^2 - 16P_1P_2^2 + 48P_2P_3P_4 + 36P_2P_4^2\right)}{\left(4P_1P_2 - (2P_3+3P_4)^2\right)^2} < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \bar{Y}_h^2 S_{yh}^2 \left(1-\rho_h^2\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \bar{Y}_h^2 S_{yh}^2 \left(1-\rho_h^2\right) - \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \bar{Y}_h^2 - \sum_{h=1}^{L} W_h^4 \bar{Y}_h^4 \frac{\left(16P_2P_3^2 - 16P_1P_2^2 + 48P_2P_3P_4 + 36P_2P_4^2\right)}{\left(4P_1P_2 - (2P_3+3P_4)^2\right)^2} > 0 \qquad (4.154)$$

koşulları elde edilmiştir. (4.152), (4.153) ve (4.154) koşulları sağlandığında, t_{SMS} tahmin edicisinin karşılaştırılan tahmin edicilere göre daha etkin olduğu sonucuna varılmaktadır.

Shabbir ve Gupta [17] tarafından önerilen üstel oransal tahmin edici $t_{SG(st)}$ ile $t_{R(st)}, t_{BT(st)}$ ve $t_{reg(st)}$ tahmin edicileri arasında etkinlik karşılaştırması yapılmıştır.

$$HKO_{\min}\left(t_{SG(st)}\right) < HKO\left(t_{R(st)}\right)$$

$$\bar{Y}^2 \left[\left\{ 1 - \frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \frac{S_{xh}^2}{\bar{X}^2}}{4(N+1)^2} \right\} - \frac{\left\{ 1 - \frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \frac{S_{xh}^2}{\bar{X}^2}}{8(N+1)^2} \right\}^2}{1 + \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \frac{S_{yh}^2}{\bar{Y}^2}\left(1+\rho^2\right)} \right] < \bar{Y}^2 \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(\frac{S_{yh}^2}{\bar{Y}^2} - 2\frac{S_{yxh}}{\bar{Y}\bar{X}} + \frac{S_{xh}^2}{\bar{X}^2} \right)$$

$$\left(\left\{ \sqrt{W_h^2 \gamma_h \frac{S_{yh}^2}{\bar{Y}_h^2}} - \frac{W_h^2 \gamma_h \frac{S_{yxh}}{\bar{Y}_h \bar{X}_h}}{\sqrt{W_h^2 \gamma_h \frac{S_{xh}^2}{\bar{X}_h^2}}} \right\}^2 + \left\{ \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \frac{S_{yh}^2}{\bar{Y}_h^2}\left(1-\rho^2\right) \right\} \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left[\frac{S_{yh}^2}{\bar{Y}_h^2} + \frac{S_{xh}^2}{\bar{X}_h^2} - 2\frac{S_{yxh}}{\bar{Y}_h \bar{X}_h} \right] \right.$$

$$\left. + \frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \frac{S_{xh}^2}{\bar{X}_h^2}}{4(N+1)^2} \left\{ \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \frac{S_{yh}^2}{\bar{Y}_h^2}\left(1-\rho^2\right) + \frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \frac{S_{xh}^2}{\bar{X}_h^2}}{16(N+1)^2} \right\} \right) > 0 \qquad (4.155)$$

$$HKO_{\min}\left(t_{SG(st)}\right) < HKO\left(t_{BT(st)}\right)$$

$$\bar{Y}^2\left[\left\{1-\frac{\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\frac{S_{xh}^2}{\bar{X}^2}}{4\left(N+1\right)^2}\right\}-\frac{\left\{1-\frac{\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\frac{S_{xh}^2}{\bar{X}^2}}{8\left(N+1\right)^2}\right\}^2}{1+\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\frac{S_{yh}^2}{\bar{Y}^2}\left(1+\rho^2\right)}\right] < \bar{Y}^2\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(\frac{S_{yh}^2}{\bar{Y}^2}-\frac{S_{yxh}}{\bar{Y}\bar{X}}+\frac{S_{xh}^2}{4\bar{X}^2}\right)$$

$$\left(\left\{\frac{\sqrt{W_h^2\gamma_h\frac{S_{yh}^2}{\bar{Y}_h^2}}}{2}-\frac{W_h^2\gamma_h\frac{S_{yxh}}{\bar{Y}_h\bar{X}_h}}{\sqrt{W_h^2\gamma_h\frac{S_{xh}^2}{\bar{X}_h^2}}}\right\}^2+\left\{\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\frac{S_{yh}^2}{\bar{Y}_h^2}\left(1-\rho^2\right)\right\}\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left[\frac{S_{yh}^2}{\bar{Y}_h^2}+\frac{S_{xh}^2}{4\bar{X}_h^2}-\frac{S_{yxh}}{\bar{Y}_h\bar{X}_h}\right]\right.$$
$$\left.+\frac{\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\frac{S_{xh}^2}{\bar{X}_h^2}}{4\left(N+1\right)^2}\left\{\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\frac{S_{yh}^2}{\bar{Y}_h^2}\left(1-\rho^2\right)+\frac{\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\frac{S_{xh}^2}{\bar{X}_h^2}}{16\left(N+1\right)^2}\right\}\right)>0 \tag{4.156}$$

$$HKO_{\min}\left(t_{SG(st)}\right) < HKO\left(t_{reg(st)}\right)$$

$$\bar{Y}^2\left[\left\{1-\frac{\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\frac{S_{xh}^2}{\bar{X}^2}}{4\left(N+1\right)^2}\right\}-\frac{\left\{1-\frac{\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\frac{S_{xh}^2}{\bar{X}^2}}{8\left(N+1\right)^2}\right\}^2}{1+\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\frac{S_{yh}^2}{\bar{Y}^2}\left(1+\rho^2\right)}\right] < \bar{Y}^2\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\frac{S_{yh}^2}{\bar{Y}^2}\left(1-\rho^2\right)$$

$$\left\{\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\frac{S_{yh}^2}{\bar{Y}_h^2}\left(1-\rho^2\right)\right\}^2+\frac{\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\frac{S_{xh}^2}{\bar{X}_h^2}}{4\left(N+1\right)^2}\left\{\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\frac{S_{yh}^2}{\bar{Y}_h^2}\left(1-\rho^2\right)+\frac{\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\frac{S_{xh}^2}{\bar{X}_h^2}}{16\left(N+1\right)^2}\right\}>0 \tag{4.157}$$

koşulları elde edilmiştir. (4.155), (4.156) ve (4.157) koşulları sağlandığında $t_{SG(st)}$ tahmin edicisinin karşılaştırılan tahmin edicilere göre daha etkin olduğu söylenebilmektedir.

İncelenen tahmin ediciler içinde, üstel oransal tahmin edici son olarak Solanki ve Singh [34] tarafından önerilen $t_{SS(st)}$ tahmin edicisidir. Tahmin edicide dönüşüm uygulandığı için $t_{R(st)}, t_{BT(st)}$ ve $t_{reg(st)}$ tahmin edicilerinin yanı sıra $t_{R*(st)}, t_{BT*(st)}$ ile de etkinlik karşılaştırması yapılmıştır.

$$HKO_{\min}\left(t_{SS(st)}\right) < HKO\left(t_{R(st)}\right)$$

$$\bar{Y}^2\gamma\left[1-\frac{\left(B^2C-2BDE+AE^2\right)}{\left(AC-D^2\right)}\right] < \bar{Y}^2\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(\frac{S_{yh}^2}{\bar{Y}^2}-2\frac{S_{yxh}}{\overline{YX}}+\frac{S_{xh}^2}{\bar{X}^2}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(\frac{S_{yh}^2}{\bar{Y}^2}-2\frac{S_{yxh}}{\overline{YX}}+\frac{S_{xh}^2}{\bar{X}^2}\right)-\gamma\left[1-\frac{\left(B^2C-2BDE+AE^2\right)}{\left(AC-D^2\right)}\right] > 0 \tag{4.158}$$

$$HKO_{\min}\left(t_{SS(st)}\right) < HKO\left(t_{R^*(st)}\right)$$

$$\bar{Y}^2\gamma\left[1-\frac{\left(B^2C-2BDE+AE^2\right)}{\left(AC-D^2\right)}\right] < \bar{Y}^2\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(\frac{S_{yh}^2}{\bar{Y}^2}-2g_h\frac{S_{yxh}}{\overline{YX}}+g_h^2\frac{S_{xh}^2}{\bar{X}^2}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(\frac{S_{yh}^2}{\bar{Y}^2}-2g_h\frac{S_{yxh}}{\overline{YX}}+g_h^2\frac{S_{xh}^2}{\bar{X}^2}\right)-\gamma\left[1-\frac{\left(B^2C-2BDE+AE^2\right)}{\left(AC-D^2\right)}\right] > 0 \tag{4.159}$$

$$HKO_{\min}\left(t_{SS(st)}\right) < HKO\left(t_{BT(st)}\right)$$

$$\bar{Y}^2\gamma\left[1-\frac{\left(B^2C-2BDE+AE^2\right)}{\left(AC-D^2\right)}\right] < \bar{Y}^2\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(\frac{S_{yh}^2}{\bar{Y}^2}-\frac{S_{yxh}}{\overline{YX}}+\frac{S_{xh}^2}{4\bar{X}^2}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(\frac{S_{yh}^2}{\bar{Y}^2}-\frac{S_{yxh}}{\overline{YX}}+\frac{S_{xh}^2}{4\bar{X}^2}\right)-\gamma\left[1-\frac{\left(B^2C-2BDE+AE^2\right)}{\left(AC-D^2\right)}\right] > 0 \tag{4.160}$$

$$HKO_{\min}\left(t_{SS(st)}\right) < HKO\left(t_{BT^*(st)}\right)$$

$$\bar{Y}^2\gamma\left[1-\frac{\left(B^2C-2BDE+AE^2\right)}{\left(AC-D^2\right)}\right] < \bar{Y}^2\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(\frac{S_{yh}^2}{\bar{Y}^2}-g_h\frac{S_{yxh}}{\overline{YX}}+g_h^2\frac{S_{xh}^2}{4\bar{X}^2}\right)$$

$$\gamma\left[1-\frac{\left(B^2C-2BDE+AE^2\right)}{\left(AC-D^2\right)}\right] < \sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(\frac{S_{yh}^2}{\bar{Y}^2}-g_h\frac{S_{yxh}}{\overline{YX}}+g_h^2\frac{S_{xh}^2}{4\bar{X}^2}\right) \tag{4.161}$$

$$HKO_{\min}\left(t_{SS(st)}\right) < HKO\left(t_{reg(st)}\right)$$

$$\bar{Y}^2\gamma\left[1-\frac{\left(B^2C-2BDE+AE^2\right)}{\left(AC-D^2\right)}\right] < \bar{Y}^2\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\frac{S_{yh}^2}{\bar{Y}^2}\left(1-\rho^2\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\frac{S_{yh}^2}{\bar{Y}^2}\left(1-\rho^2\right)-\gamma\left[1-\frac{\left(B^2C-2BDE+AE^2\right)}{\left(AC-D^2\right)}\right] > 0 \tag{4.162}$$

koşulları elde edilmiştir. (4.158), (4.159), (4.160), (4.161) ve (4.162) koşullarının sağlandığı durumda $t_{SS(st)}$ tahmin edicisinin karşılaştırılan tahmin edicilere göre daha etkin olduğu sonucuna ulaşılmaktadır.

Üstel çarpımsal tahmin edici t_{YS} Yadav ve Shukla [35] tarafından önerilmişti. Tahmin edicide dönüşüm kullanıldığı için, etkinlik karşılaştırmasında $t_{P(st)}, t_{TB(st)}, t_{P*(st)}, t_{TB*(st)}$ ve $t_{reg(st)}$ tahmin edicileri ile karşılaştırılmıştır.

$$HKO_{\min}(t_{YS}) < HKO\left(t_{P(st)}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 + \frac{R^2 g_h^2}{4} S_{xh}^2 + R g_h S_{yxh} \right) - \bar{Y}^2 \frac{A_{YS}^2}{4B_{YS}} < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 + 2RS_{yxh} + R^2 S_{xh}^2 \right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(R^2 S_{xh}^2 \left(1 - \frac{g_h^2}{4} \right) - RS_{yxh}\left(g_h - 2 \right) \right) + \bar{Y}^2 \frac{A_{YS}^2}{4B_{YS}} > 0 \qquad (4.163)$$

$$HKO_{\min}(t_{YS}) < HKO\left(t_{P*(st)}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 + \frac{R^2 g_h^2}{4} S_{xh}^2 + R g_h S_{yxh} \right) - \bar{Y}^2 \frac{A_{YS}^2}{4B_{YS}} < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 + 2R g_h S_{yxh} + R^2 g_h^2 S_{xh}^2 \right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(R g_h S_{yxh} + \frac{3R^2 g_h^2}{4} S_{xh}^2 \right) + \bar{Y}^2 \frac{A_{YS}^2}{4B_{YS}} > 0 \qquad (4.164)$$

$$HKO_{\min}(t_{YS}) < HKO\left(t_{TB(st)}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 + \frac{R^2 g_h^2}{4} S_{xh}^2 + R g_h S_{yxh} \right) - \bar{Y}^2 \frac{A_{YS}^2}{4B_{YS}} < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 + RS_{yxh} + \frac{R^2}{4} S_{xh}^2 \right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(\frac{R^2}{4} S_{xh}^2 \left(1 - g_h^2 \right) + RS_{yxh}\left(1 - g_h \right) \right) + \bar{Y}^2 \frac{A_{YS}^2}{4B_{YS}} > 0 \qquad (4.165)$$

$$HKO_{\min}(t_{YS}) < HKO\left(t_{TB*(st)}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 + \frac{R^2 g_h^2}{4} S_{xh}^2 + R g_h S_{yxh} \right) - \bar{Y}^2 \frac{A_{YS}^2}{4B_{YS}} < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 + R g_h S_{yxh} + \frac{R^2 g_h^2}{4} S_{xh}^2 \right)$$

$$\bar{Y}^2 \frac{A_{YS}^2}{4B_{YS}} > 0 \qquad (4.166)$$

$$HKO_{\min}\left(t_{YS}\right) < HKO\left(t_{reg(st)}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 + \frac{R^2 g_h^2}{4} S_{xh}^2 + R g_h S_{yxh} \right) - \bar{Y}^2 \frac{A_{YS}^2}{4B_{YS}} < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h S_{yh}^2 \left(1-\rho_c^2\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(\frac{R g_h}{2} S_{xh} + \rho_c S_{yh} \right)^2 < \bar{Y}^2 \frac{A_{YS}^2}{4B_{YS}} \tag{4.167}$$

koşulları elde edilmiştir. (4.163), (4.164), (4.165), (4.166) ve (4.167) koşullarının sağlandığı durumlarda t_{YS} üstel çarpımsal tahmin edicinin $t_{P(st)}, t_{TB(st)}, t_{P*(st)}, t_{TB*(st)}$ ve $t_{reg(st)}$ tahmin edicilerinden daha etkin olduğu söylenebilmektedir.

Özel ve Kadılar [36] tarafından önerilen üstel tahmin edici t_{KK} için, $t_{R(st)}, t_{P(st)}, t_{BT(st)}$ ve $t_{TB(st)}$ tahmin edicileri ile etkinlik karşılaştırması yapılmıştır. t_{KK} ile $t_{reg(st)}$ tahmin edicilerinin HKO'ları birbirine eşit olduğu için aralarında etkinlik karşılaştırılması yapılmamıştır.

$$HKO_{\min}\left(t_{KK}\right) < HKO\left(t_{R(st)}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h S_{yh}^2 \left(1-\rho_c^2\right) < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 - 2R_h S_{yxh} + R_h^2 S_{xh}^2 \right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(R_h S_{xh} - \rho_c S_{yh} \right)^2 > 0 \tag{4.168}$$

$$HKO_{\min}\left(t_{KK}\right) < HKO\left(t_{P(st)}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h S_{yh}^2 \left(1-\rho_c^2\right) < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 + 2R_h S_{yxh} + R_h^2 S_{xh}^2 \right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(R_h S_{xh} + \rho_c S_{yh} \right)^2 > 0 \tag{4.169}$$

$$HKO_{\min}\left(t_{KK}\right) < HKO\left(t_{BT(st)}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h S_{yh}^2 \left(1-\rho_c^2\right) < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 - R_h S_{yxh} + \frac{R_h^2}{4} S_{xh}^2 \right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(\frac{R_h}{2} S_{xh} - \rho_c S_{yh} \right)^2 > 0 \tag{4.170}$$

$$HKO_{\min}\left(t_{KK}\right) < HKO\left(t_{TB(st)}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h S_{yh}^2 \left(1-\rho_c^2\right) < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 + R_h S_{yxh} + \frac{R_h^2}{4} S_{xh}^2 \right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(\frac{R_h}{2} S_{xh} + \rho_c S_{yh} \right)^2 > 0 \tag{4.171}$$

koşulları elde edilmiştir. (4.168) ve (4.170) koşullarında görülen terimlerin birbirine eşit olmaları durumu ile (4.169) ve (4.171) koşullarındaki ifadelerin toplamının 0 olması haricindeki koşulların sağlandığı durumlarda, t_{KK} tahmin edicisinin her zaman karşılaştırılan diğer tahmin edicilerden daha etkin olduğu söylenebilmektedir.

Özel [37] çalışmasında önerdiği $t_{GÖ}$ tahmin edicisinin etkinlik karşılaştırılması yapıldığında,

$$HKO_{\min}\left(t_{GÖ}\right) < HKO\left(t_{R(st)}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h S_{yh}^2 \left(1-\rho_c^2\right) < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 - 2R_h S_{yxh} + R_h^2 S_{xh}^2 \right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(R_h S_{xh} - \rho_c S_{yh} \right)^2 > 0 \tag{4.172}$$

$$HKO_{\min}\left(t_{GÖ}\right) < HKO\left(t_{P(st)}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h S_{yh}^2 \left(1-\rho_c^2\right) < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 + 2R_h S_{yxh} + R_h^2 S_{xh}^2 \right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(R_h S_{xh} + \rho_c S_{yh} \right)^2 > 0 \tag{4.173}$$

$$HKO_{\min}\left(t_{GÖ}\right) < HKO\left(t_{BT(st)}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h S_{yh}^2 \left(1-\rho_c^2\right) < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 - R_h S_{yxh} + \frac{R_h^2}{4} S_{xh}^2 \right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(\frac{R_h}{2} S_{xh} - \rho_c S_{yh} \right)^2 > 0 \tag{4.174}$$

$$HKO_{\min}\left(t_{GÖ}\right) < HKO\left(t_{TB(st)}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h S_{yh}^2 \left(1-\rho_c^2\right) < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 + R_h S_{yxh} + \frac{R_h^2}{4} S_{xh}^2 \right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(\frac{R_h}{2} S_{xh} + \rho_c S_{yh} \right)^2 > 0 \tag{4.175}$$

koşulları elde edilmiştir. (4.172) ile (4.174) koşullarında yer alan ifadelerin birbirine eşit olması durumu ve (4.173) ile (4.175) koşullarında ise yer alan ifadelerin ise toplamlarının 0 olması durumu haricinde bu koşullar her zaman sağlanacağı için, $t_{GÖ}$ tahmin edicisinin karşılaştırılan tüm tahmin edicilere göre daha etkin olduğu sonucuna varılmaktadır. TRÖ yöntemi için, klasik regresyon tahmin edicisi ile aynı HKO eşitliğine sahip olduğu için $t_{reg(st)}$ ile karşılaştırma yapılmamıştır.

Yadav ve diğerleri [38] tarafından önerilen t_{RYUSC} tahmin edicinin $t_{R(st)}$ ve $t_{BT(st)}$ ile olan karşılaştırması sonucu,

$\beta = \dfrac{S_{yxh}}{S_{xh}^2}$ olmak üzere,

$$HKO_{\min}\left(t_{RYUSC}\right) < HKO\left(t_{R(st)}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h S_{yh}^2 \left(1-\rho_c^2\right) < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 - 2RS_{yxh} + R^2 S_{xh}^2 \right)$$

$$\left(R-\beta\right)^2 \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h S_{xh}^2 > 0 \tag{4.176}$$

$$HKO_{\min}\left(t_{RYUSC}\right) < HKO\left(t_{BT(st)}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h S_{yh}^2 \left(1-\rho_c^2\right) < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 - RS_{yxh} + \frac{R^2}{4} S_{xh}^2 \right)$$

$$\left(\frac{R}{2} - \beta\right)^2 \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h S_{xh}^2 > 0 \tag{4.177}$$

koşulları elde edilmiştir. (4.176) koşulunda R ile β'nın birbirine eşit olması ve (4.177) koşulunda ise R ile $\dfrac{\beta}{2}$'nin birbirine eşit oldukları durum dışında her zaman sağlanacağı için, t_{RYUSC} tahmin edicisinin karşılaştırılan diğer tahmin edicilerden daha etkin olduğu sonucuna ulaşılmaktadır.

Diğer tahmin edici t_{PYUSC} ise, $t_{R(st)}$ ve $t_{BT(st)}$ ile karşılaştırılmıştır ve

$$HKO_{\min}\left(t_{PYUSC}\right) < HKO\left(t_P\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h S_{yh}^2 \left(1-\rho_c^2\right) < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 + 2RS_{yxh} + R^2 S_{xh}^2\right)$$

$$\left(R+\beta\right)^2 \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h S_{xh}^2 > 0 \tag{4.178}$$

$$HKO_{\min}\left(t_{PYUSC}\right) < HKO\left(t_{TB(st)}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h S_{yh}^2 \left(1-\rho_c^2\right) < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 + RS_{yxh} + \frac{R^2}{4} S_{xh}^2\right)$$

$$\left(\frac{R}{2}+\beta\right)^2 \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h S_{xh}^2 > 0 \tag{4.179}$$

koşulları elde edilmiştir. (4.178) koşulunda R ile β 'nınmve (4.179) koşulunda ise $\frac{R}{2}$ ile β değerleri toplamının 0 olması haricindeki koşullar her zaman sağlandığından, belirtilen durum hariç t_{PYUSC} tahmin edicisi karşılaştırılan diğer tahmin edicilerden her durumda daha etkin bulunmuştur.

Singh ve diğerleri [39] tarafından önerilen t_{SSS} tahmin edicisinin karşılaştırmasında ise,

$$HKO_{\min}\left(t_{SSS}\right) < HKO\left(t_{R(st)}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h S_{yh}^2 \left(1-\rho_c^2\right) < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 - 2RS_{yxh} + R^2 S_{xh}^2\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(RS_{xh} - \rho S_{yh}\right)^2 > 0 \tag{4.180}$$

$$HKO_{\min}\left(t_{SSS}\right) < HKO\left(t_{P(st)}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h S_{yh}^2 \left(1-\rho_c^2\right) < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 + 2RS_{yxh} + R^2 S_{xh}^2\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(RS_{xh} + \rho S_{yh}\right)^2 > 0 \tag{4.181}$$

$$HKO_{\min}\left(t_{SSS}\right) < HKO\left(t_{BT(st)}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h S_{yh}^2 \left(1-\rho_c^2\right) < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 - RS_{yxh} + \frac{R^2}{4} S_{xh}^2\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(\frac{R}{2} S_{xh} - \rho S_{yh} \right)^2 > 0 \tag{4.182}$$

$$HKO_{\min}\left(t_{SSS}\right) < HKO\left(t_{TB(st)}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h S_{yh}^2 \left(1-\rho_c^2\right) < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 + RS_{yxh} + \frac{R^2}{4} S_{xh}^2 \right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(\frac{R}{2} S_{xh} + \rho S_{yh} \right)^2 > 0 \tag{4.183}$$

koşulları bulunmuştur. (4.180) ile (4.182) koşullarındaki ifadelerin birbirine eşit olduğu ve (4.181) ile (4.183) koşullarında ise yer alan ifadelerin toplamının 0 olması durumları haricindeki her durumda sağlanacağı için, t_{SSS} tahmin edicisinin, karşılaştırılan tahmin edicilerden daha etkin olduğu sonucuna varılmaktadır.

Koyuncu [40] tarafından önerilen t_N üstel oransal tahmin edici, $t_{R(st)}, t_{P(st)}, t_{BT(st)}, t_{TB(st)}$ ve $t_{reg(st)}$ ile karşılaştırılmış ve

$$HKO_{\min}\left(t_N\right) < HKO\left(t_{R(st)}\right)$$

$$\bar{Y}^2 \left[1 - \frac{B^* D^{*2} - D^* FG + HG^2}{4B^* H - F^2} \right] < \bar{Y}^2 \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(\frac{S_{yh}^2}{\bar{Y}^2} - 2\frac{S_{yxh}}{\bar{Y}\bar{X}} + \frac{S_{xh}^2}{\bar{X}^2} \right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(\frac{S_{yh}^2}{\bar{Y}^2} - 2\frac{S_{yxh}}{\bar{Y}\bar{X}} + \frac{S_{xh}^2}{\bar{X}^2} \right) - \left[1 - \frac{B^* D^{*2} - D^* FG + HG^2}{4B^* H - F^2} \right] > 0 \tag{4.184}$$

$$HKO_{\min}\left(t_N\right) < HKO\left(t_{P(st)}\right)$$

$$\bar{Y}^2 \left[1 - \frac{B^* D^{*2} - D^* FG + HG^2}{4B^* H - F^2} \right] < \bar{Y}^2 \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(\frac{S_{yh}^2}{\bar{Y}^2} + 2\frac{S_{yxh}}{\bar{Y}\bar{X}} + \frac{S_{xh}^2}{\bar{X}^2} \right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(\frac{S_{yh}^2}{\bar{Y}^2} + 2\frac{S_{yxh}}{\bar{Y}\bar{X}} + \frac{S_{xh}^2}{\bar{X}^2} \right) - \left[1 - \frac{B^* D^{*2} - D^* FG + HG^2}{4B^* H - F^2} \right] > 0 \tag{4.185}$$

$$HKO_{\min}\left(t_N\right) < HKO\left(t_{BT(st)}\right)$$

$$\bar{Y}^2 \left[1 - \frac{B^* D^{*2} - D^* FG + HG^2}{4B^* H - F^2} \right] < \bar{Y}^2 \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(\frac{S_{yh}^2}{\bar{Y}^2} - \frac{S_{yxh}}{\bar{Y}\bar{X}} + \frac{S_{xh}^2}{4\bar{X}^2} \right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(\frac{S_{yh}^2}{\bar{Y}^2} - \frac{S_{yxh}}{\bar{Y}\bar{X}} + \frac{S_{xh}^2}{4\bar{X}^2} \right) - \left[1 - \frac{B^* D^{*2} - D^* FG + HG^2}{4B^* H - F^2} \right] > 0 \tag{4.186}$$

$$HKO_{\min}\left(t_N\right) < HKO\left(t_{TB(st)}\right)$$

$$\bar{Y}^2\left[1-\frac{B^*D^{*^2}-D^*FG+HG^2}{4B^*H-F^2}\right] < \bar{Y}^2\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(\frac{S_{yh}^2}{\bar{Y}^2}+\frac{S_{yxh}}{\overline{YX}}+\frac{S_{xh}^2}{4\bar{X}^2}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(\frac{S_{yh}^2}{\bar{Y}^2}+\frac{S_{yxh}}{\overline{YX}}+\frac{S_{xh}^2}{4\bar{X}^2}\right)-\left[1-\frac{B^*D^{*^2}-D^*FG+HG^2}{4B^*H-F^2}\right]>0 \tag{4.187}$$

$$HKO_{\min}\left(t_N\right) < HKO\left(t_{reg(st)}\right)$$

$$\bar{Y}^2\left[1-\frac{B^*D^{*^2}-D^*FG+HG^2}{4B^*H-F^2}\right] < \bar{Y}^2\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\frac{S_{yh}^2}{\bar{Y}^2}\left(1-\rho^2\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\frac{S_{yh}^2}{\bar{Y}^2}\left(1-\rho^2\right)-\left[1-\frac{B^*D^{*^2}-D^*FG+HG^2}{4B^*H-F^2}\right]>0 \tag{4.188}$$

koşulları elde edilmiştir. (4.184), (4.185), (4.186), (4.187) ve (4.188) koşullarının sağlandığı durumlarda t_N tahmin edicisinin karşılaştırılan tahmin edicilere göre daha etkin olduğu söylenebilmektedir.

Tailor ve diğerleri [41] tarafından önerilen $t_{BT*(st)}$ tahmin edicisi ile $t_{R(st)}, t_{R*(st)}, t_{BT(st)}$ ve $t_{reg(st)}$ tahmin edicileri karşılaştırılmıştır.

$$HKO\left(t_{BT*(st)}\right) < HKO\left(t_{R(st)}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(S_{yh}^2+\frac{R^2g_h^2}{4}S_{xh}^2-Rg_hS_{yxh}\right) < \sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(S_{yh}^2-2RS_{yxh}+R^2S_{xh}^2\right)$$

$$R < \frac{4\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_hS_{yxh}\left(g_h-2\right)}{\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_hS_{xh}^2\left(g_h^2-4\right)} \tag{4.189}$$

$$HKO\left(t_{BT*(st)}\right) < HKO\left(t_{R*(st)}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(S_{yh}^2+\frac{R^2g_h^2}{4}S_{xh}^2-Rg_hS_{yxh}\right) < \sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(S_{yh}^2-2Rg_hS_{yxh}+R^2g_h^2S_{xh}^2\right)$$

$$R > \frac{4\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_hg_hS_{yxh}}{3\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_hg_h^2S_{xh}^2} \tag{4.190}$$

$$HKO\left(t_{BT^*(st)}\right) < HKO\left(t_{BT(st)}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 + \frac{R^2 g_h^2}{4} S_{xh}^2 - R g_h S_{yxh} \right) < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 - R S_{yxh} + \frac{R^2}{4} S_{xh}^2 \right)$$

$$R < \frac{4 \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h S_{yxh} \left(g_h - 1 \right)}{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h S_{xh}^2 \left(g_h^2 - 1 \right)} \tag{4.191}$$

koşulları elde edilmiştir. (4.189), (4.190) ve (4.191) koşullarının sağlandığı durumlarda $t_{BT^*(st)}$ tahmin edicisi daha etkin; ancak

$$HKO\left(t_{BT^*(st)}\right) < HKO\left(t_{reg(st)}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 + \frac{R^2 g_h^2}{4} S_{xh}^2 - R g_h S_{yxh} \right) < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h S_{yh}^2 \left(1 - \rho_c^2 \right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(\frac{R g_h}{2} S_{xh} - \rho_c S_{yh} \right)^2 < 0 \tag{4.192}$$

$t_{reg(st)}$ ile yapılan karşılaştırmada bulunan (4.192) koşulunun sağlanması eşitsizlikte yer alan ifadelerin birbirine eşit olması durumu haricinde mümkün olmadığından, $t_{reg(st)}$ tahmin edicisi daha etkin olarak bulunmuştur.

Diğer tahmin edici $t_{TB^*(st)}$ için ise, $t_{P(st)}, t_{TB(st)}, t_{P^*(st)}$ ve $t_{reg(st)}$ ile karşılaştırılmaları yapılmıştır.

$$HKO\left(t_{TB^*(st)}\right) < HKO\left(t_{P(st)}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 + \frac{R^2 g_h^2}{4} S_{xh}^2 + R g_h S_{yxh} \right) < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 + 2 R S_{yxh} + R^2 S_{xh}^2 \right)$$

$$R < \frac{4 \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h S_{yxh} \left(2 - g_h \right)}{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h S_{xh}^2 \left(g_h^2 - 4 \right)} \tag{4.193}$$

$$HKO\left(t_{TB^*(st)}\right) < HKO\left(t_{P^*(st)}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 + \frac{R^2 g_h^2}{4} S_{xh}^2 + R g_h S_{yxh} \right) < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 + 2 R g_h S_{yxh} + R^2 g_h^2 S_{xh}^2 \right)$$

$$R > -\frac{4\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h g_h S_{yxh}}{3\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h g_h^2 S_{xh}^2} \tag{4.194}$$

$$HKO\left(t_{TB*(st)}\right) < HKO\left(t_{TB(st)}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 + \frac{R^2 g_h^2}{4} S_{xh}^2 + R g_h S_{yxh} \right) < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 + R S_{yxh} + \frac{R^2}{4} S_{xh}^2 \right)$$

$$R > \frac{4\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h S_{yxh} \left(g_h - 1\right)}{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h S_{xh}^2 \left(1 - g_h^2\right)} \tag{4.195}$$

$$HKO\left(t_{TB*(st)}\right) < HKO\left(t_{reg(st)}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 + \frac{R^2 g_h^2}{4} S_{xh}^2 + R g_h S_{yxh} \right) < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h S_{yh}^2 \left(1 - \rho_c^2\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(\frac{R g_h}{2} S_{xh} + \rho_c S_{yh} \right)^2 < 0 \tag{4.196}$$

koşulları elde edilmiştir. Bulunan (4.193), (4.194), (4.195) ve (4.196) koşullarının sağlandığı durumlarda $t_{TB*(st)}$ daha etkin olmakla birlikte, $t_{reg(st)}$ ile yapılan karşılaştırmada ise elde edilen eşitsizlikte görülen ifadelerin toplamının 0 olması haricindeki durumlarda sağlanamadığından klasik regresyon tahmin edicisinin daha etkin olduğu bulunmuştur.

4.2. TRÖ Yönteminde İki Yardımcı Değişken Bilgisini Kullanan Üstel Tahmin Ediciler

TRÖ yöntemi için tek yardımcı değişken (x) bilgisini kullanan üstel tahmin edicilerden sonra, bu alt bölümde iki yardımcı değişken (x) (z) bilgisini kullanan üstel tahmin ediciler incelenecektir.

İlk olarak, Singh ve Malik [42] çalışmasında $t_{BT2(st)}, t_{TB2(st)}$ tahmin edicilerinden bahsetmiştir.

Birinci önerdikleri tahmin edici

$$t_{BT2(st)} = \bar{y}_{st} \exp\left[\frac{\bar{X} - \bar{x}_{st}}{\bar{X} + \bar{x}_{st}}\right] \exp\left[\frac{\bar{Z} - \bar{z}_{st}}{\bar{Z} + \bar{z}_{st}}\right] \tag{4.197}$$

biçimindedir. Verilen iki yardımcı değişken bilgisini kullanan üstel oransal tahmin edici için Fark Yöntemi kullanılarak, HKO eşitliği aşağıdaki

$$HKO\left(t_{BT2(st)}\right) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 + R_{1h}^2 \frac{S_{xh}^2}{4} + R_{2h}^2 \frac{S_{zh}^2}{4} - R_{1h} S_{yxh} - R_{2h} S_{yzh} + R_{1h} R_{2h} \frac{S_{xzh}}{2} \right) \tag{4.198}$$

biçiminde elde edilmiştir.

Benzer şekilde, ikinci önerdikleri tahmin edici

$$t_{TB2(st)} = \bar{y}_{st} \exp\left[\frac{\bar{x}_{st} - \bar{X}}{\bar{x}_{st} + \bar{X}}\right] \exp\left[\frac{\bar{z}_{st} - \bar{Z}}{\bar{z}_{st} + \bar{Z}}\right] \tag{4.199}$$

biçimindedir.

Benzer işlemler tekrarlandığında

$$HKO\left(t_{TB2(st)}\right) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 + \frac{R_{1h}^2}{4} S_{xh}^2 + \frac{R_{2h}^2}{4} S_{zh}^2 + R_{1h} S_{xyh} + R_{2h} S_{yzh} + \frac{R_{1h} R_{2h}}{2} S_{xzh} \right) \tag{4.200}$$

elde edilir.

Tailor ve Chouhan [43] tarafından t_{TC} ve t_{KTC} üstel tahmin edicileri önerilmiştir. İlk olarak önerdikleri tahmin edici

$$t_{TC} = \bar{y}_{st} \exp\left[\frac{\bar{X}_{st} - \bar{x}_{st}}{\bar{X}_{st} + \bar{x}_{st}}\right] \exp\left[\frac{\bar{z}_{st} - \bar{Z}_{st}}{\bar{z}_{st} + \bar{Z}_{st}}\right] \tag{4.201}$$

biçiminde verilmiştir. (1.6) ve (1.7) ifadelerinden yararlanılarak, gerekli işlemler yapıldığında,

$$HKO\left(t_{TC}\right) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left[S_{yh}^2 + \frac{1}{4}\left(R_2^2 S_{zh}^2 + R_1^2 S_{xh}^2 - 2 R_1 R_2 S_{xzh} \right) + R_2 S_{yzh} - R_1 S_{yxh} \right] \tag{4.202}$$

elde edilmektedir.

K bir sabit olmak üzere,

$$t_{KTC} = K \bar{y}_{st} \exp\left[\frac{\bar{X}_{st} - \bar{x}_{st}}{\bar{X}_{st} + \bar{x}_{st}}\right] \exp\left[\frac{\bar{z}_{st} - \bar{Z}_{st}}{\bar{z}_{st} + \bar{Z}_{st}}\right] \tag{4.203}$$

tahmin edicisi önerilmiştir. Benzer işlemler tekrarlanarak,

$$HKO\left(t_{KTC}\right)=\left(K-1\right)^2\bar{Y}^2+\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\Big(K^2\left(S_{yh}^2+R_1^2S_{xh}^2+2R_2S_{yzh}-R_1R_2S_{xzh}-2R_1S_{xyh}\right)$$
$$+K\left(-\frac{3}{4}R_1^2S_{xh}^2+\frac{R_2^2S_{zh}^2}{4}-R_2S_{yzh}+\frac{R_1R_2S_{xzh}}{2}+R_1S_{xyh}\right)\Big) \quad (4.204)$$

elde edilir. (4.204) eşitliğinde düzenleme yapılırsa,

$$HKO\left(t_{KTC}\right)=\Big(K^2HKO\left(t_{TC}\right)+\left(K-1\right)^2\bar{Y}^2$$
$$+2K\left(K-1\right)\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\Big(\frac{1}{8}\left(3R_1^2S_{xh}^2-R_2^2S_{zh}^2-2R_1R_2S_{xzh}\right) \quad (4.205)$$
$$+\frac{1}{2}\left(R_2S_{yzh}-R_1S_{yxh}\right)\Big)\Big)$$

biçiminde de yazılabilmektedir. Burada,

$$c=\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left[\frac{1}{8}\left(3R_1^2S_{xh}^2-R_2^2S_{zh}^2-2R_1R_2S_{xzh}\right)+\frac{1}{2}\left(R_2S_{yzh}-R_1S_{yxh}\right)\right] \quad (4.206)$$

olsun. Bu durumda,

$$HKO\left(t_{KTC}\right)=\left(K-1\right)^2\bar{Y}^2+K^2HKO\left(t_{TC}\right)+2K\left(K-1\right)c \quad (4.207)$$

olur.

Lone ve diğerleri [44] tarafından

$$t_{LTS}=\bar{y}_{st}\exp\left[\alpha\left(\frac{\bar{X}-\bar{x}_{st}}{\bar{X}+\bar{x}_{st}}\right)+b\left(\frac{\bar{z}_{st}-\bar{Z}}{\bar{z}_{st}+\bar{Z}}\right)\right] \quad (4.208)$$

tahmin edicisi önerilmiştir. Burada, α ve b HKO'yu minimum yapan sabit sayılardır ve

$$\alpha_1=\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_hS_{yh}^2 \qquad \alpha_2=\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_hS_{xh}^2 \qquad \alpha_3=\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_hS_{zh}^2$$
$$\alpha_4=\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_hS_{xzh} \qquad \alpha_5=\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_hS_{yzh} \qquad \alpha_6=\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_hS_{yxh} \quad (4.209)$$

olsun. Bu durumda,

$$HKO\left(t_{LTS}\right)=\left(\alpha_1+\frac{R_1^2\alpha^2}{4}\alpha_2+\frac{R_2^2b^2}{4}\alpha_3-\frac{R_1R_2\alpha b}{2}\alpha_4+bR_2\alpha_5-\alpha R_1\alpha_6\right) \quad (4.210)$$

yazılabilir. Burada, α ve b sabitlerine göre türev alınır ve optimum α optimum b değerleri,

$$\alpha^* = \frac{2(\alpha_3\alpha_6 - \alpha_4\alpha_5)}{R_1(\alpha_2\alpha_3 - \alpha_4^2)}, \quad b^* = \frac{2(\alpha_4\alpha_6 - \alpha_2\alpha_5)}{R_2(\alpha_2\alpha_3 - \alpha_4^2)} \tag{4.211}$$

(4.210) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$HKO_{\min}\left(t_{LTS}\right) = \left(\alpha_1 - \frac{\alpha_2\alpha_5^2 + \alpha_3\alpha_6^2 - 2\alpha_4\alpha_5\alpha_6}{\alpha_2\alpha_3(1-\rho_{xz}^2)}\right) \tag{4.212}$$

ulaşılmış olur. Burada,

$$\rho_{xz}^2 = \left(1 - \frac{\alpha_4^2}{\alpha_2\alpha_3}\right) \tag{4.213}$$

olmaktadır.

4.2.1. İki Yardımcı Değişken Bilgisini Kullanan Tahmin Edicilerin Etkinlik Karşılaştırması

Tabakalı rastgele örnekleme yöntemi için, incelenen iki yardımcı değişken bilgisini kullanan üstel tip tahmin edicilerin bu bölümde, etkinlik karşılaştırılması yapılacaktır. İncelenen tahmin edicilerden üstel oransal olanlar, $t_{RR(st)}, t_{BT2(st)}$ ve $t_{reg2(st)}$ birbirleriyle; üstel çarpımsal olanlar, $t_{PP(st)}, t_{TB2(st)}$ ve $t_{reg2(st)}$ birbirleriyle; hem oransal hem de çarpımsal ifade içerenler ise $t_{RR(st)}, t_{PP(st)}, t_{BT2(st)}, t_{TB2(st)}$ ve $t_{reg2(st)}$ birbirleriyle karşılaştırılacaktır. Eşitliklerde geçen

$$R_1 = \frac{\bar{Y}_{st}}{\bar{X}_{st}}, \qquad R_2 = \frac{\bar{Y}_{st}}{\bar{Z}_{st}}$$

olmak üzere, ilk olarak Singh ve Malik [42] çalışmasında $t_{BT2(st)}$ iki yardımcı değişken bilgisini kullanan üstel oransal tahmin edici,

$$HKO\left(t_{BT2(st)}\right) < HKO\left(t_{RR(st)}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2\gamma_h\left(S_{yh}^2 + \frac{R_1^2}{4}S_{xh}^2 + \frac{R_2^2}{4}S_{zh}^2 - R_1S_{yxh} - R_2S_{yzh} + \frac{R_1R_2}{2}S_{xzh}\right) < \sum_{h=1}^{L} W_h^2\gamma_h\left(S_{yh}^2 + R_1^2S_{xh}^2 + R_2^2S_{zh}^2 - 2R_1S_{yxh} - 2R_2S_{yzh} + 2R_1R_2S_{xzh}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2\gamma_h\left(R_1\left(3R_1S_{xh}^2 - 4S_{yxh} + 6R_2S_{xzh}\right) + R_2\left(3R_2S_{zh}^2 - 4S_{yzh}\right)\right) > 0 \tag{4.214}$$

$$HKO\left(t_{BT2(st)}\right) < HKO\left(t_{reg2(st)}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 + \frac{R_1^2}{4} S_{xh}^2 + \frac{R_2^2}{4} S_{zh}^2 - R_1 S_{yxh} - R_2 S_{yzh} + \frac{R_1 R_2}{2} S_{xzh} \right) < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h S_{yh}^2 \left(1 - \rho_{yxh}^2 - \rho_{yzh}^2 + 2\rho_{xyh}\rho_{xzh}\rho_{yzh}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 \left(2\rho_{xyh}\rho_{xzh}\rho_{yzh} - \rho_{yxh}^2 - \rho_{yzh}^2\right) - \frac{R_1^2}{4} S_{xh}^2 - \frac{R_2^2}{4} S_{zh}^2 + R_1 S_{yxh} + R_2 S_{yzh} - \frac{R_1 R_2}{2} S_{xzh} \right) > 0 \tag{4.215}$$

biçiminde karşılaştırılmış ve (4.214) ve (4.215) koşulların sağlandığı durumlarda $t_{BT2(st)}$ tahmin edicisinin oransal tahmin ediciden daha etkin olduğu sonucuna varılmıştır.

$t_{TB2(st)}$ üstel çarpımsal tahmin edici ise,

$$HKO\left(t_{TB2(st)}\right) < HKO\left(t_{PP(st)}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 + \frac{R_1^2}{4} S_{xh}^2 + \frac{R_2^2}{4} S_{zh}^2 + R_1 S_{yxh} + R_2 S_{yzh} + \frac{R_1 R_2}{2} S_{xzh} \right) < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 + R_1^2 S_{xh}^2 + R_2^2 S_{zh}^2 + 2R_1 S_{yxh} + 2R_2 S_{yzh} + 2R_1 R_2 S_{xzh} \right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(R_1 \left(3R_1 S_{xh}^2 + 4S_{yxh} + 6R_2 S_{xzh}\right) + R_2 \left(3R_2 S_{zh}^2 + 4S_{yzh}\right)\right) > 0 \tag{4.216}$$

$$HKO\left(t_{TB2(st)}\right) < HKO\left(t_{reg2(st)}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 + \frac{R_1^2}{4} S_{xh}^2 + \frac{R_2^2}{4} S_{zh}^2 + R_1 S_{yxh} + R_2 S_{yzh} + \frac{R_1 R_2}{2} S_{xzh} \right) < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h S_{yh}^2 \left(1 - \rho_{yxh}^2 - \rho_{yzh}^2 + 2\rho_{xyh}\rho_{xzh}\rho_{yzh}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 \left(2\rho_{xyh}\rho_{xzh}\rho_{yzh} - \rho_{yxh}^2 - \rho_{yzh}^2\right) - \frac{R_1^2}{4} S_{xh}^2 - \frac{R_2^2}{4} S_{zh}^2 - R_1 S_{yxh} - R_2 S_{yzh} - \frac{R_1 R_2}{2} S_{xzh} \right) > 0 \tag{4.217}$$

$t_{PP(st)}$ ve $t_{reg2(st)}$ ile karşılaştırılmış ve (4.216) ve (4.217) koşulların sağlandığı durumlarda $t_{TB2(st)}$ tahmin edicisinin $t_{PP(st)}$ ve $t_{reg2(st)}$ tahmin edicilerine göre daha etkin olduğu bulunmuştur.

Tailor ve Chouhan [43] tarafından önerilen t_{TC} tahmin edicisi için $t_{R(st)}, t_{P(st)}, t_{BT(st)}, t_{TB(st)}$ ve $t_{reg(st)}$ ile etkinlik karşılaştırması yapılmış ve sırasıyla,

$HKO(t_{TC}) < HKO\left(t_{RR(st)}\right)$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 + \frac{R_1^2}{4} S_{xh}^2 + \frac{R_2^2}{4} S_{zh}^2 - \frac{R_1 R_2}{2} S_{xzh} + R_2 S_{yzh} - R_1 S_{yxh} \right) < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 + R_1^2 S_{xh}^2 + R_2^2 S_{zh}^2 + 2R_1 R_2 S_{xzh} - 2R_2 S_{yzh} - 2R_1 S_{yxh} \right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(R_1 \left(3R_1 S_{xh}^2 + 10 R_2 S_{xzh} - 4 S_{yxh} \right) + R_2 \left(3R_2 S_{zh}^2 - 12 S_{yzh} \right) \right) > 0 \qquad (4.218)$$

$HKO(t_{TC}) < HKO\left(t_{PP(st)}\right)$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 + \frac{R_1^2}{4} S_{xh}^2 + \frac{R_2^2}{4} S_{zh}^2 - \frac{R_1 R_2}{2} S_{xzh} + R_2 S_{yzh} - R_1 S_{yxh} \right) < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 + R_1^2 S_{xh}^2 + R_2^2 S_{zh}^2 + 2R_1 R_2 S_{xzh} + 2R_2 S_{yzh} + 2R_1 S_{yxh} \right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(R_1 \left(3R_1 S_{xh}^2 + 10 R_2 S_{xzh} + 12 S_{yxh} \right) + R_2 \left(3R_2 S_{zh}^2 + 4 S_{yzh} \right) \right) > 0 \qquad (4.219)$$

$HKO(t_{TC}) < HKO\left(t_{BT2(st)}\right)$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 + \frac{R_1^2}{4} S_{xh}^2 + \frac{R_2^2}{4} S_{zh}^2 - \frac{R_1 R_2}{2} S_{xzh} + R_2 S_{yzh} - R_1 S_{yxh} \right) < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 + \frac{R_1^2}{4} S_{xh}^2 + \frac{R_2^2}{4} S_{zh}^2 + \frac{R_1 R_2}{2} S_{xzh} - R_2 S_{yzh} - R_1 S_{yxh} \right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(R_1 S_{xzh} - 2 S_{yzh} \right) > 0 \qquad (4.220)$$

$HKO(t_{TC}) < HKO\left(t_{TB2(st)}\right)$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 + \frac{R_1^2}{4} S_{xh}^2 + \frac{R_2^2}{4} S_{zh}^2 - \frac{R_1 R_2}{2} S_{xzh} + R_2 S_{yzh} - R_1 S_{yxh} \right) < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 + \frac{R_1^2}{4} S_{xh}^2 + \frac{R_2^2}{4} S_{zh}^2 + \frac{R_1 R_2}{2} S_{xzh} + R_2 S_{yzh} + R_1 S_{yxh} \right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(R_2 S_{xzh} + 2 S_{yxh} \right) > 0 \qquad (4.221)$$

$$HKO\left(t_{TC}\right) < HKO\left(t_{reg2(st)}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 + \frac{R_1^2}{4} S_{xh}^2 + \frac{R_2^2}{4} S_{zh}^2 - \frac{R_1 R_2}{2} S_{xzh} \right. \left. + R_2 S_{yzh} - R_1 S_{yxh} \right) < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h S_{yh}^2 \left(1 - \rho_{xyh}^2 - \rho_{yzh}^2 + 2\rho_{xyh}\rho_{xzh}\rho_{yzh}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 \left(2\rho_{xyh}\rho_{xzh}\rho_{yzh} - \rho_{xyh}^2 - \rho_{yzh}^2 +\right) - \frac{R_1^2}{4} S_{xh}^2 - \frac{R_2^2}{4} S_{zh}^2 + \frac{R_1 R_2}{2} S_{xzh} - R_2 S_{yzh} + R_1 S_{yxh} \right) > 0 \tag{4.222}$$

koşulları elde edilmiştir. (4.218), (4.219), (4.220), (4.221) ve (4.222) koşullarının sağlandığı durumlarda t_{TC} tahmin edicisinin karşılaştırılan diğer tahmin edicilerden daha etkin olduğu bulunmuştur.

Diğer tahmin edici t_{KTC} ise hem oransal hem de çarpımsal ifade içerdiği için (4.207) eşitliğinden yararlanılarak benzer karşılaştırmalar yapılarak,

$$HKO\left(t_{KTC}\right) < HKO\left(t_{RR(st)}\right)$$

$$K^2 HKO\left(t_{TC}\right) + \bar{Y}^2 \left(K-1\right)^2 + 2K\left(K-1\right)c < HKO\left(t_{RR(st)}\right)$$

$$K^2 < \frac{\left(HKO\left(t_{RR(st)}\right) + 2K\left(\bar{Y}^2 + c\right) - \bar{Y}^2\right)}{\left(HKO\left(t_{TC}\right) + \bar{Y}^2 + 2c\right)}$$

$$-\sqrt{\frac{HKO\left(t_{RR(st)}\right) + 2K\left(\bar{Y}^2 + c\right) - \bar{Y}^2}{HKO\left(t_{TC}\right) + \bar{Y}^2 + 2c}} < K < +\sqrt{\frac{HKO\left(t_{RR(st)}\right) + 2K\left(\bar{Y}^2 + c\right) - \bar{Y}^2}{HKO\left(t_{TC}\right) + \bar{Y}^2 + 2c}} \tag{4.223}$$

$$HKO\left(t_{KTC}\right) < HKO\left(t_{PP(st)}\right)$$

$$K^2 HKO\left(t_{TC}\right) + \bar{Y}^2 \left(K-1\right)^2 + 2K\left(K-1\right)c < HKO\left(t_{PP(st)}\right)$$

$$K^2 < \frac{\left(HKO\left(t_{PP(st)}\right) + 2K\left(\bar{Y}^2 + c\right) - \bar{Y}^2\right)}{\left(HKO\left(t_{TC}\right) + \bar{Y}^2 + 2c\right)}$$

$$-\sqrt{\frac{HKO\left(t_{PP(st)}\right) + 2K\left(\bar{Y}^2 + c\right) - \bar{Y}^2}{HKO\left(t_{TC}\right) + \bar{Y}^2 + 2c}} < K < +\sqrt{\frac{HKO\left(t_{PP(st)}\right) + 2K\left(\bar{Y}^2 + c\right) - \bar{Y}^2}{HKO\left(t_{TC}\right) + \bar{Y}^2 + 2c}} \tag{4.224}$$

$$HKO\left(t_{KTC}\right) < HKO\left(t_{BT2(st)}\right)$$

$$K^2 HKO\left(t_{TC}\right) + \bar{Y}^2 \left(K-1\right)^2 + 2K\left(K-1\right)c < HKO\left(t_{BT2(st)}\right)$$

$$K^2 < \frac{\left(HKO\left(t_{BT2(st)}\right) + 2K\left(\bar{Y}^2 + c\right) - \bar{Y}^2\right)}{\left(HKO\left(t_{TC}\right) + \bar{Y}^2 + 2c\right)}$$

$$-\sqrt{\frac{HKO\left(t_{BT2(st)}\right) + 2K\left(\bar{Y}^2 + c\right) - \bar{Y}^2}{HKO\left(t_{TC}\right) + \bar{Y}^2 + 2c}} < K < +\sqrt{\frac{HKO\left(t_{BT2(st)}\right) + 2K\left(\bar{Y}^2 + c\right) - \bar{Y}^2}{HKO\left(t_{TC}\right) + \bar{Y}^2 + 2c}} \tag{4.225}$$

$$HKO\left(t_{KTC}\right) < HKO\left(t_{TB2(st)}\right)$$

$$K^2 HKO\left(t_{TC}\right) + \bar{Y}^2 \left(K-1\right)^2 + 2K\left(K-1\right)c < HKO\left(t_{TB2(st)}\right)$$

$$K^2 < \frac{\left(HKO\left(t_{TB2(st)}\right) + 2K\left(\bar{Y}^2 + c\right) - \bar{Y}^2\right)}{\left(HKO\left(t_{TC}\right) + \bar{Y}^2 + 2c\right)}$$

$$-\sqrt{\frac{HKO\left(t_{TB2(st)}\right) + 2K\left(\bar{Y}^2 + c\right) - \bar{Y}^2}{HKO\left(t_{TC}\right) + \bar{Y}^2 + 2c}} < K < +\sqrt{\frac{HKO\left(t_{TB2(st)}\right) + 2K\left(\bar{Y}^2 + c\right) - \bar{Y}^2}{HKO\left(t_{TC}\right) + \bar{Y}^2 + 2c}} \tag{4.226}$$

$$HKO\left(t_{KTC}\right) < HKO\left(t_{reg2(st)}\right)$$

$$K^2 HKO\left(t_{TC}\right) + \bar{Y}^2 \left(K-1\right)^2 + 2K\left(K-1\right)c < HKO\left(t_{reg2(st)}\right)$$

$$K^2 < \frac{\left(HKO\left(t_{reg2(st)}\right) + 2K\left(\bar{Y}^2 + c\right) - \bar{Y}^2\right)}{\left(HKO\left(t_{TC}\right) + \bar{Y}^2 + 2c\right)}$$

$$-\sqrt{\frac{HKO\left(t_{reg2(st)}\right) + 2K\left(\bar{Y}^2 + c\right) - \bar{Y}^2}{HKO\left(t_{TC}\right) + \bar{Y}^2 + 2c}} < K < +\sqrt{\frac{HKO\left(t_{reg2(st)}\right) + 2K\left(\bar{Y}^2 + c\right) - \bar{Y}^2}{HKO\left(t_{TC}\right) + \bar{Y}^2 + 2c}} \tag{4.227}$$

koşullar elde edilmiştir. (4.223), (4.224), (4.225), (4.226) ve (4.227) koşullarının sağlandığı durumlarda t_{KTC} üstel tahmin edicinin karşılaştırılan diğer tahmin edicilerden daha etkin olduğu bulunmuştur.

Son olarak, Lone ve diğerleri [44] tarafından önerilen t_{LTS} tahmin edicisi $t_{RR(st)}, t_{PP(st)}, t_{BT2(st)}, t_{TB2(st)}$ ve $t_{reg2(st)}$ ile karşılaştırılmıştır. (4.209) eşitliklerinde kullanılan kısaltmalar, karşılaştırma yapılacak tahmin ediciler için uygulandığında,

$$
\begin{aligned}
&HKO\left(t_{RR(st)}\right)=\alpha_1+R_1^2\alpha_2+R_2^2\alpha_3-2R_1\alpha_6+2R_1R_2\alpha_4-2R_2\alpha_5\\
&HKO\left(t_{PP(st)}\right)=\alpha_1+R_1^2\alpha_2+R_2^2\alpha_3+2R_1\alpha_6+2R_1R_2\alpha_4+2R_2\alpha_5\\
&HKO\left(t_{BT2(st)}\right)=\alpha_1+\frac{R_1^2}{4}\alpha_2+\frac{R_2^2}{4}\alpha_3-R_1\alpha_6+\frac{R_1R_2}{2}\alpha_4-R_2\alpha_5\\
&HKO\left(t_{TB2(st)}\right)=\alpha_1+\frac{R_1^2}{4}\alpha_2+\frac{R_2^2}{4}\alpha_3+R_1\alpha_6+\frac{R_1R_2}{2}\alpha_4+R_2\alpha_5\\
&HKO\left(t_{reg2(st)}\right)=\alpha_1\left(1-\rho_{xyh}^2-\rho_{yzh}^2+2\rho_{xyh}\rho_{xzh}\rho_{yzh}\right)
\end{aligned}
\tag{4.228}
$$

yazılabilir. (4.228)'de verilen eşitliklerden yararlanarak sırasıyla karşılaştırmalar yapılmıştır.

$$HKO_{\min}\left(t_{LTS}\right)<HKO\left(t_{RR(st)}\right)$$

$$\alpha_1-\frac{\left(\alpha_2\alpha_5^2+\alpha_3\alpha_6^2-2\alpha_4\alpha_5\alpha_6\right)}{\alpha_2\alpha_3\left(1-\rho_{xz}^2\right)}<\alpha_1+R_1^2\alpha_2+R_2^2\alpha_3-2R_1\alpha_6+2R_1R_2\alpha_4-2R_2\alpha_5$$

$$
\begin{aligned}
&\Big(\left(\alpha_2\alpha_3-\alpha_4^2\right)\left(R_1^2\alpha_2^2\alpha_3+R_2^2\alpha_2\alpha_3^2-2R_1\alpha_2\alpha_3\alpha_6-2R_2\alpha_2\alpha_3\alpha_5+2R_1R_2\alpha_2\alpha_3\alpha_4\right)\\
&\qquad\qquad+\left(\alpha_2\alpha_3\right)\left(\alpha_2\alpha_5^2+\alpha_3\alpha_6^2-2\alpha_4\alpha_5\alpha_6\right)\Big)>0
\end{aligned}
\tag{4.229}
$$

$$HKO_{min}\left(t_{LTS}\right)<HKO\left(t_{PP(st)}\right)$$

$$\alpha_1-\frac{\left(\alpha_2\alpha_5^2+\alpha_3\alpha_6^2-2\alpha_4\alpha_5\alpha_6\right)}{\alpha_2\alpha_3\left(1-\rho_{xz}^2\right)}<\alpha_1+R_1^2\alpha_2+R_2^2\alpha_3+2R_1\alpha_6+2R_1R_2\alpha_4+2R_2\alpha_5$$

$$
\begin{aligned}
&\Big(\left(\alpha_2\alpha_3-\alpha_4^2\right)\left(R_1^2\alpha_2^2\alpha_3+R_2^2\alpha_2\alpha_3^2+2R_1\alpha_2\alpha_3\alpha_6+2R_2\alpha_2\alpha_3\alpha_5+2R_1R_2\alpha_2\alpha_3\alpha_4\right)\\
&\qquad\qquad+\left(\alpha_2\alpha_3\right)\left(\alpha_2\alpha_5^2+\alpha_3\alpha_6^2-2\alpha_4\alpha_5\alpha_6\right)\Big)>0
\end{aligned}
\tag{4.230}
$$

$$HKO_{min}\left(t_{LTS}\right)<HKO\left(t_{BT2(st)}\right)$$

$$\alpha_1-\frac{\left(\alpha_2\alpha_5^2+\alpha_3\alpha_6^2-2\alpha_4\alpha_5\alpha_6\right)}{\alpha_2\alpha_3\left(1-\rho_{xz}^2\right)}<\alpha_1+\frac{R_1^2}{4}\alpha_2+\frac{R_2^2}{4}\alpha_3-R_1\alpha_6+\frac{R_1R_2}{2}\alpha_4-R_2\alpha_5$$

$$
\begin{aligned}
&\left(\left(\alpha_2\alpha_3-\alpha_4^2\right)\left(\frac{R_1^2}{4}\alpha_2^2\alpha_3+\frac{R_2^2}{4}\alpha_2\alpha_3^2-2R_1\alpha_2\alpha_3\alpha_6-2R_2\alpha_2\alpha_3\alpha_5+\frac{R_1R_2}{2}\alpha_2\alpha_3\alpha_4\right)\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\left(\alpha_2\alpha_3\right)\left(\alpha_2\alpha_5^2+\alpha_3\alpha_6^2-2\alpha_4\alpha_5\alpha_6\right)\right)>0
\end{aligned}
\tag{4.231}
$$

$$HKO_{\min}\left(t_{LTS}\right) < HKO\left(t_{TB2(st)}\right)$$

$$\alpha_1 - \frac{\left(\alpha_2\alpha_5^2 + \alpha_3\alpha_6^2 - 2\alpha_4\alpha_5\alpha_6\right)}{\alpha_2\alpha_3\left(1-\rho_{xz}^2\right)} < \alpha_1 + \frac{R_1^2}{4}\alpha_2 + \frac{R_2^2}{4}\alpha_3 + R_1\alpha_6 + \frac{R_1R_2}{2}\alpha_4 + R_2\alpha_5$$

$$\begin{aligned}\Bigg(\left(\alpha_2\alpha_3 - \alpha_4^2\right)\left(\frac{R_1^2}{4}\alpha_2^2\alpha_3 + \frac{R_2^2}{4}\alpha_2\alpha_3^2 + 2R_1\alpha_2\alpha_3\alpha_6 + 2R_2\alpha_2\alpha_3\alpha_5 + \frac{R_1R_2}{2}\alpha_2\alpha_3\alpha_4\right) \\ + \left(\alpha_2\alpha_3\right)\left(\alpha_2\alpha_5^2 + \alpha_3\alpha_6^2 - 2\alpha_4\alpha_5\alpha_6\right)\Bigg) > 0\end{aligned} \qquad (4.232)$$

$$HKO_{\min}\left(t_{LTS}\right) < HKO\left(t_{reg2(st)}\right)$$

$$\alpha_1 - \frac{\left(\alpha_2\alpha_5^2 + \alpha_3\alpha_6^2 - 2\alpha_4\alpha_5\alpha_6\right)}{\alpha_2\alpha_3\left(1-\rho_{xz}^2\right)} < \alpha_1\left(1 - \rho_{xyh}^2 - \rho_{yzh}^2 + 2\rho_{xyh}\rho_{xzh}\rho_{yzh}\right)$$

$$\begin{aligned}\Big(\left(\alpha_1\alpha_2^2\alpha_3^2 - \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4^2\right)\left(2\rho_{xyh}\rho_{xzh}\rho_{yzh} - \rho_{xyh}^2 - \rho_{yzh}^2\right) \\ + \left(\alpha_2\alpha_3\right)\left(\alpha_2\alpha_5^2 + \alpha_3\alpha_6^2 - 2\alpha_4\alpha_5\alpha_6\right)\Big) > 0\end{aligned} \qquad (4.233)$$

koşulları elde edilmiştir. (4.229), (4.230), (4.231), (4.232) ve (4.233) koşullarının sağlandığı durumlarda t_{LTS} tahmin edicisinin karşılaştırılan tahmin edicilere göre daha etkin olduğu sonucuna varılmıştır.

5. BASİT RASTGELE ÖRNEKLEMEDE ÖNERİLEN TAHMİN EDİCİ AİLESİ

5.1. Basit Rastgele Örneklemede Kitle Ortalaması Tahmini için Önerilen Tahmin Edici Ailesi

(3.72) eşitliğinde yer alan Singh ve Pal [25] ve (3.11) eşitliğinde verilen Yadav ve Kadılar [15] tarafından önerilen tahmin edicilerden yola çıkılarak, BRÖ yöntemi için, $t_{CCi}; i=1,2,...,10$ tahmin edici ailesi önerilmiştir. Burada, $\alpha=-1,0,1$ değerlerini alan ve k, $HKO\left(t_{CCi}\right)$, $i=1,2,...,10$ minimum yapan sabit bir sayı; a_i ve b_i ise $\beta_2\left(x\right)$ (basıklık katsayısı), C_x (değişim katsayısı) ve ρ (korelasyon katsayısı) gibi yardımcı değişkenin bilgilerini göstermektedir.

Önerilen tahmin edici,

$$t_{CCi}=k\bar{y}\left(\frac{a_i\bar{X}+b_i}{a_i\bar{x}+b_i}\right)^{\alpha}\exp\left(\frac{a_i\left(\bar{X}-\bar{x}\right)}{a_i\left(\bar{X}+\bar{x}\right)+2b_i}\right),\ i=1,2,...,10 \tag{5.1}$$

biçiminde olup $a_i\ ve\ b_i,\ i=1,2,...,10$ değerleri için Çizelge 3.1'de yer alan sıralamayla parametreler kullanılmıştır.

Eşitlik (5.1)'de yer alan tahmin edici için Fark Yöntemi kullanılarak,

$$t_{CCi}=k\bar{Y}\left(1+e_y\right)\left(\frac{a_i\bar{X}+b_i}{a_i\bar{X}+a_i\bar{X}e_x+b_i}\right)^{\alpha}\exp\left(\frac{a_i\left(\bar{X}-\bar{X}-\bar{X}e_x\right)}{a_i\left(\bar{X}+\bar{X}+\bar{X}e_x\right)+2b_i}\right)$$

$$=k\bar{Y}\left(1+e_y\right)\left(\frac{a_i\bar{X}+b_i}{a_i\bar{X}+b_i}+\frac{a_i\bar{X}e_x}{a_i\bar{X}+b_i}\right)^{-\alpha}\exp\left(\frac{-a_i\bar{X}e_x}{2\left(a_i\bar{X}+b_i\right)+a_i\bar{X}e_x}\right),\qquad \theta_i=\frac{a_i\bar{X}}{a_i\bar{X}+b_i}$$

$$=k\bar{Y}\left(1+e_y\right)\left(1+\theta_ie_x\right)^{-\alpha}\exp\left(\frac{2\left(a_i\bar{X}+b_i\right)}{-a_i\bar{X}e_x}-\frac{a_i\bar{X}e_x}{a_i\bar{X}e_x}\right)^{-1}$$

$$\cong k\bar{Y}\left(1+e_y\right)\left(1-\theta_ie_x\right)^{\alpha}\exp\left(-\frac{\theta_ie_x}{2}\left(1+\frac{\theta_ie_x}{2}\right)^{-1}\right)$$

$$=k\bar{Y}\left(1+e_y\right)\left(1-\alpha\theta_ie_x+\frac{\alpha\left(\alpha-1\right)}{2}\theta_i^2e_x^2\right)\left(1-\frac{\theta_ie_x}{2}+\frac{\theta_i^2e_x^2}{8}\right)\left(1+\frac{\theta_i^2e_x^2}{4}\right)$$

$$=k\bar{Y}\left(1+e_y\right)\left(1-\alpha\theta_i e_x+\frac{\alpha\left(\alpha-1\right)}{2}\theta_i^2 e_x^2\right)\left(1-\frac{\theta_i e_x}{2}+\frac{3\theta_i^2 e_x^2}{8}\right)$$

$$=k\bar{Y}\left(1+e_y\right)\left(1-\frac{\theta_i e_x}{2}+\frac{3\theta_i^2 e_x^2}{8}-\alpha\theta_i e_x+\frac{\alpha\theta_i^2 e_x^2}{2}+\frac{\alpha^2\theta_i^2 e_x^2}{2}-\frac{\alpha\theta_i^2 e_x^2}{2}\right)$$

$$=k\bar{Y}\left(1-\frac{\theta_i e_x}{2}+\frac{3\theta_i^2 e_x^2}{8}-\alpha\theta_i e_x+\frac{\alpha\theta_i^2 e_x^2}{2}+\frac{\alpha^2\theta_i^2 e_x^2}{2}-\frac{\alpha\theta_i^2 e_x^2}{2}+e_y-\frac{\theta_i e_y e_x}{2}-\alpha\theta_i e_y e_x\right)$$

$$\begin{aligned}=\bar{Y}\Bigg(&k-\frac{k\theta_i e_x}{2}+\frac{3k\theta_i^2 e_x^2}{8}-k\alpha\theta_i e_x+\frac{k\alpha\theta_i^2 e_x^2}{2}\\&+\frac{k\alpha^2\theta_i^2 e_x^2}{2}-\frac{k\alpha\theta_i^2 e_x^2}{2}+ke_y-\frac{k\theta_i e_y e_x}{2}-k\alpha\theta_i e_y e_x\Bigg)\end{aligned} \tag{5.2}$$

şeklinde yazılabilir. Önerilen tahmin ediciden $\left(\bar{Y}\right)$ çıkarılarak, gereken düzenlemeler yapıldığında,

$$\begin{aligned}\left(t_{CCi}-\bar{Y}\right)=\bar{Y}\Bigg(&k-1+ke_y-\frac{k\theta_i e_x}{2}-k\alpha\theta_i e_x-\frac{k\theta_i e_y e_x}{2}-k\alpha\theta_i e_y e_x\\&-\frac{k\alpha\theta_i^2 e_x^2}{2}+\frac{3k\theta_i^2 e_x^2}{8}+\frac{k\alpha\theta_i^2 e_x^2}{2}+\frac{k\alpha^2\theta_i^2 e_x^2}{2}\Bigg)\end{aligned}$$

$$\left(t_{CCi}-\bar{Y}\right)=\bar{Y}\left(k-\frac{k\theta_i e_x}{2}+\frac{3k\theta_i^2 e_x^2}{8}-k\alpha\theta_i e_x+\frac{k\alpha^2\theta_i^2 e_x^2}{2}+ke_y-\frac{k\theta_i e_y e_x}{2}-k\alpha\theta_i e_y e_x-1\right) \tag{5.3}$$

biçiminde elde edilir. Bu eşitliğin beklenen değeri alındığında, tahmin edicinin yanı

$$E\left(t_{CCi}-\bar{Y}\right)=\bar{Y}\left(\left(k-1\right)+\frac{E\left(e_x^2\right)}{2}k\theta_i^2\left(\frac{3}{4}+\alpha^2\right)-E\left(e_y e_x\right)k\theta_i\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)\right)$$

$$YAN\left(t_{CCi}\right)=\bar{Y}\left(k-1\right)+\bar{Y}\gamma\left(\left(\frac{k\theta_i^2}{2}C_x^2\left(\frac{3}{4}+\alpha^2\right)-k\theta_i C_{yx}\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)\right)\right),\ i=1,2,...,10 \tag{5.4}$$

biçiminde elde edilmektedir. (5.3) eşitliğinin karesi, devamında ise elde edilen ifadenin beklenen değeri alındığında,

$$\left(t_{CCi}-\bar{Y}\right)^2=\bar{Y}^2\Big(\left(k-1\right)^2+k^2e_y^2+k^2\theta_i^2e_x^2+2\alpha^2k^2\theta_i^2e_x^2-k\alpha^2\theta_i^2e_x^2+\alpha k^2\theta_i^2e_x^2$$
$$-\frac{3k\theta_i^2e_x^2}{4}+k\theta_ie_ye_x+2k\alpha\theta_ie_ye_x-2k^2\theta_ie_ye_x-4\alpha k^2\theta_ie_ye_x\Big)$$

$$E\left(t_{CCi}-\bar{Y}\right)^2=\bar{Y}^2\left(\left(k-1\right)^2+\gamma k^2E\left(e_y^2\right)+\gamma\theta_i^2E\left(e_x^2\right)\left(k^2+2\alpha^2k^2+\alpha k^2-\frac{3k}{4}-k\alpha^2\right)\right.$$
$$\left.+\gamma\theta_iE\left(e_ye_x\right)\left(k+2k\alpha-2k^2-4\alpha k^2\right)\right)$$

$$HKO\left(t_{CCi}\right)=\bar{Y}^2\left(k-1\right)^2$$
$$+\bar{Y}^2\gamma\left(k^2C_y^2+\theta_i^2C_x^2\left(k^2+2\alpha^2k^2+\alpha k^2-\frac{3k}{4}-k\alpha^2\right)\right.\tag{5.5}$$
$$\left.+\theta_i\rho_{xy}C_yC_x\left(k+2k\alpha-2k^2-4\alpha k^2\right)\right),\quad i=1,2,\ldots,10$$

eşitliğine ulaşılmaktadır. Burada,

$$\theta_1=\frac{\bar{X}}{\left(\bar{X}+1\right)}\qquad\theta_2=\frac{\bar{X}}{\left(\bar{X}+\beta_2\left(x\right)\right)}\qquad\theta_3=\frac{\bar{X}}{\left(\bar{X}+C_x\right)}\qquad\theta_4=\frac{\bar{X}}{\left(\bar{X}+\rho\right)}$$
$$\theta_5=\frac{\beta_2\left(x\right)\bar{X}}{\left(\beta_2\left(x\right)\bar{X}+C_x\right)}\qquad\theta_6=\frac{C_x\bar{X}}{\left(C_x\bar{X}+\beta_2\left(x\right)\right)}\qquad\theta_7=\frac{C_x\bar{X}}{\left(C_x\bar{X}+\rho\right)}$$
$$\theta_8=\frac{\rho\bar{X}}{\left(\rho\bar{X}+C_x\right)}\qquad\theta_9=\frac{\beta_2\left(x\right)\bar{X}}{\left(\beta_2\left(x\right)\bar{X}+\rho\right)}\qquad\theta_{10}=\frac{\rho\bar{X}}{\left(\rho\bar{X}+\beta_2\left(x\right)\right)}$$

olmaktadır.

(5.5) eşitliğinde,

$$\frac{\partial HKO\left(t_{CCi}\right)}{\partial k}=0\tag{5.6}$$

türev işlemi yapılarak, k için optimum değere ulaşılır. Bu değer k^* ile gösterilirse

$$k^*=\frac{\gamma\left(\frac{3}{4}\theta_i^2C_x^2+\alpha^2\theta_i^2C_x^2-\theta_iC_{xy}-2\alpha\theta_iC_{xy}\right)+2}{\gamma\left(2C_y^2+2\theta_i^2C_x^2+4\alpha^2\theta_i^2C_x^2+2\alpha\theta_i^2C_x^2-4\theta_iC_{xy}-8\alpha\theta_iC_{xy}\right)+2}\tag{5.7}$$

şeklinde elde edilir.

Bulunan k^* değeri (5.5) eşitliğindeki sabit değer olan k yerine konulduğunda,

$$\begin{aligned} HKO_{\min}\left(t_{CCi}\right) = \bar{Y}^2 \Bigg(& \left(k^* - 1\right)^2 + \gamma k^{*2} C_y^2 \\ & + \gamma \theta_i^2 C_x^2 \left(k^{*2} + 2\alpha^2 k^{*2} + \alpha k^{*2} - \frac{3k^*}{4} - k^* \alpha^2 \right) \\ & + \gamma \theta_i \rho_{xy} C_y C_x \left(k^* + 2k^* \alpha - 2k^{*2} - 4\alpha k^{*2} \right) \Bigg), \qquad i = 1, 2, \ldots, 10 \end{aligned} \tag{5.8}$$

elde edilir. k^* değeri için,

$$\begin{aligned} A &= \left(A = \gamma \left(\frac{3}{4} \theta_i^2 C_x^2 + \alpha^2 \theta_i^2 C_x^2 - \theta_i C_{xy} - 2\alpha \theta_i C_{xy} \right) + 2 \right) \\ B &= \left(\gamma \left(2C_y^2 + 2\theta_i^2 C_x^2 + 4\alpha^2 \theta_i^2 C_x^2 + 2\alpha \theta_i^2 C_x^2 - 4\theta_i C_{xy} - 8\alpha \theta_i C_{xy} \right) + 2 \right) \end{aligned} \tag{5.9}$$

şeklinde semboller kullanırsak ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} HKO_{\min}\left(t_{CCi}\right) &= \bar{Y}^2 \Bigg(\left(\frac{A}{B} - 1 \right)^2 + \gamma \frac{A^2}{B^2} C_y^2 + \gamma \theta_i^2 C_x^2 \left(\frac{A^2}{B^2} + 2\alpha^2 \frac{A^2}{B^2} + \alpha \frac{A^2}{B^2} - \frac{3A}{4B} - \alpha^2 \frac{A}{B} \right) \\ & \qquad + \gamma \theta_i \rho_{xy} C_y C_x \left(\frac{A}{B} + 2\alpha \frac{A}{B} - 2\frac{A^2}{B^2} - 4\alpha \frac{A^2}{B^2} \right) \Bigg) \\ &= \bar{Y}^2 \Bigg(\frac{A^2}{B^2} \left[\gamma \left(C_y^2 + \theta_i^2 C_x^2 + 2\alpha^2 \theta_i^2 C_x^2 + \alpha \theta_i^2 C_x^2 - 2\theta_i \rho_{xy} C_y C_x - 4\alpha \theta_i \rho_{xy} C_y C_x \right) + 1 \right] \\ & \qquad - \frac{A}{B} \left[\gamma \left(\frac{3}{4} \theta_i^2 C_x^2 + \alpha^2 \theta_i^2 C_x^2 - \theta_i \rho_{xy} C_y C_x - 2\alpha \theta_i \rho_{xy} C_y C_x \right) + 2 \right] + 1 \Bigg) \\ &= \bar{Y}^2 \left(\frac{A^2}{B^2} \frac{B}{2} - \frac{A}{B} A + 1 \right) \\ &= \bar{Y}^2 \left(\frac{A^2}{2B} - \frac{A^2}{B} + 1 \right) \end{aligned}$$

$$HKO_{min}\left(t_{CCi}\right) = \bar{Y}^2 \left(1 - \frac{A^2}{2B} \right), \; i = 1, 2, \ldots, 10 \tag{5.10}$$

elde edilir.

5.2. Basit Rastgele Örneklemede Kitle Ortalaması Tahmini için Önerilen Tahmin Edici Ailesinin Etkinlik Karşılaştırması

Bu Alt Bölümde, (2.3), (3.1), (2.11) ve (3.72) eşitliklerinde bahsedilen t_R, t_{BT}, t_{reg}, t_{SP3} tahmin edicileri ile önerilen tahmin edicinin etkinlik karşılaştırılması yapılacaktır. İlk olarak, (2.3) eşitliğinde yer alan Cochran [7] tarafından önerilen t_R klasik oransal tahmin edicisinin HKO eşitliği ile önerilen tahmin edicinin (5.10) eşitliğindeki HKO karşılaştırılmıştır.

$$HKO_{min}\left(t_{CCi}\right) < HKO\left(t_R\right),\ i = 1,2,...,10$$

$$\bar{Y}^2\left(1-\frac{A^2}{2B}\right) < \gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2 + C_x^2 - 2C_{xy}\right)$$

$$\left(1-\frac{A^2}{2B}\right) < \gamma\left(C_y^2 + C_x^2 - 2C_{xy}\right) \tag{5.11}$$

(5.11) koşulu sağlandığında, önerilen tahmin edicinin, klasik oransal tahmin ediciden daha etkin olduğu sonucuna ulaşılmaktadır.

İkinci olarak, (3.1) eşitliğinde yer alan Bahl ve Tuteja [4] tarafından önerilmiş olan t_{BT} tahmin edicisinin HKO eşitliği ile önerilen tahmin edicinin (5.10) eşitliğinde yer alan HKO'su karşılaştırılmıştır.

$$HKO_{min}\left(t_{CCi}\right) < HKO\left(t_{BT}\right),\ i = 1,2,...,10$$

$$\bar{Y}^2\left(1-\frac{A^2}{2B}\right) < \gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2 + \frac{C_x^2}{4} - C_{xy}\right)$$

$$\left(1-\frac{A^2}{2B}\right) < \gamma\left(C_y^2 + \frac{C_x^2}{4} - C_{xy}\right) \tag{5.12}$$

(5.12) koşulu sağlandığı durumda, önerilen tahmin edicinin, Bahl ve Tuteja [4] tarafından önerilen tahmin ediciden daha etkin olduğu sonucuna ulaşılmaktadır.

Üçüncü olarak, (2.11) ifadesinde yer alan t_{reg} klasik regresyon tahmin edicisinin HKO eşitliği ile önerilen tahmin edicinin (5.10) eşitliğinde yer alan HKO eşitliği karşılaştırılmıştır.

$$HKO_{min}\left(t_{CCi}\right) < HKO\left(t_{reg}\right),\ i=1,2,...,10$$

$$\bar{Y}^2\left(1-\frac{A^2}{2B}\right) < \gamma\bar{Y}^2C_y^2\left(1-\rho_{xy}^2\right)$$

$$\left(1-\frac{A^2}{2B}\right) < \gamma C_y^2\left(1-\rho_{xy}^2\right) \tag{5.13}$$

(5.13) koşulu sağlandığında, önerilen tahmin edicinin $\left(t_{CCi},\ i=1,2,...,10\right)$, klasik regresyon tahmin edicisinden $\left(t_{reg}\right)$ daha etkin olduğu söylenebilmektedir.

Son olarak ise, (3.72) ifadesinde yer alan t_{SP3} tahmin edicinin HKO eşitliği ile önerilen tahmin edicinin (5.10) ifadesinde yer alan HKO eşitliği karşılaştırılmıştır.

$$HKO_{min}\left(t_{CCi}\right) < HKO\left(t_{SP3,i}\right),\ i=1,2,...,10$$

$$\bar{Y}^2\left(1-\frac{A^2}{2B}\right) < \bar{Y}^2\gamma\left(C_y^2+\frac{3\theta_iC_x^2}{4}\left(3\theta_i-4C\right)\right)$$

$$\left(1-\frac{A^2}{2B}\right) < \gamma\left(C_y^2+\frac{3\theta_iC_x^2}{4}\left(3\theta_i-4C\right)\right),\ i=1,2,...,10 \tag{5.14}$$

(5.14) koşulu sağlandığı durumda, önerilen $t_{CCi},\ i=1,2,...,10$ tahmin edicisinin, Singh ve Pal [25] tarafından önerilen $t_{SP3}, i=1,2,...,10$ tahmin ediciden daha etkin olduğu görülmektedir.

Sonuç olarak, (5.11), (5.12), (5.13), (5.14) ifadelerinde yer alan koşullar sağlandığında, BRÖ yönteminde önerilen $t_{CCi},\ i=1,2,...,10$ tahmin edicisinin, etkinlik karşılaştırması yapılan $t_R,\ t_{BT}, t_{reg}$ ve $t_{SP3,i},\ i=1,2,...,10$ tahmin edicilerinden daha etkin olduğu söylenebilmektedir.

6. TABAKALI RASTGELE ÖRNEKLEMEDE ÖNERİLEN TAHMİN EDİCİ AİLESİ

6.1. Tabakalı Rastgele Örneklemede Kitle Ortalaması Tahmini için Önerilen Tahmin Edici Ailesi

(3.72) eşitliğinde yer alan Singh ve Pal [25] ve (3.11) eşitliğinde verilen Yadav ve Kadılar [15] çalışmalarından motive olunarak, BRÖ yöntemi için $t_{CCi}; i = 1,2,...,10$ tahmin edici ailesi önerilmişti. Önerilen tahmin ediciden yola çıkılarak, TRÖ yöntemi için, $t_{CCi}^{(st)}; i = 1,2,...,10$ tahmin edici ailesi

$$t_{CCi}^{(st)} = k\bar{y}_{st}\left(\frac{a_i\bar{X}_{st} + b_i}{a_i\bar{x}_{st} + b_i}\right)^{\alpha}\exp\left(\frac{a_i\left(\bar{X}_{st} - \bar{x}_{st}\right)}{a_i\left(\bar{X}_{st} + \bar{x}_{st}\right) + 2b_i}\right), \; i = 1,2,...,10 \qquad (6.1)$$

biçiminde önerilmiştir. Burada, $\alpha = -1,0,1$ değerlerini alan ve k, $HKO\left(t_{CCi}\right)$, $i = 1,2,...,10$ minimum yapan bir sabit; a ve b ise $\beta_2\left(x\right)$ (basıklık katsayısı), C_x (değişim katsayısı) ve ρ (korelasyon katsayısı) gibi yardımcı değişkenin bilgilerini göstermektedir. Ayrıca, a_i *ve* b_i, $i = 1,2,...,10$ için Çizelge 3.1'de gösterilen sırayla parametreler kullanılmıştır.

(6.1) eşitliğinde yer alan TRÖ yönteminde önerilen tahmin edici için Fark Yöntemi ile birinci dereceden yaklaşımı ele alınarak,

$$t_{CCi}^{(st)} = k\bar{Y}\left(1 + e_y\right)\left(\frac{a_i\bar{X} + b_i}{a_i\bar{X} + a_i\bar{X}e_x + b_i}\right)^{\alpha}\exp\left(\frac{a_i\left(\bar{X} - \bar{X} - \bar{X}e_x\right)}{a_i\left(\bar{X} + \bar{X} + \bar{X}e_x\right) + 2b_i}\right)$$

$$= k\bar{Y}\left(1 + e_y\right)\left(\frac{a_i\bar{X} + b_i}{a_i\bar{X} + b_i} + \frac{a_i\bar{X}e_x}{a_i\bar{X} + b_i}\right)^{-\alpha}\exp\left(\frac{-a_i\bar{X}e_x}{2\left(a_i\bar{X} + b_i\right) + a_i\bar{X}e_x}\right)$$

ve

$$\theta_i = \frac{a_i\bar{X}}{a_i\bar{X} + b_i}, \; i = 1,2,...,10 \qquad (6.2)$$

olmak üzere,

$$= k\bar{Y}\left(1 + e_y\right)\left(1 + \theta_i e_x\right)^{-\alpha}\exp\left(\frac{2\left(a_i\bar{X} + b_i\right)}{-a_i\bar{X}e_x} - \frac{a_i\bar{X}e_x}{a_i\bar{X}e_x}\right)^{-1}$$

$$\cong k\bar{Y}\left(1+e_y\right)\left(1-\theta_i e_x\right)^{\alpha}\exp\left(-\frac{\theta_i e_x}{2}\left(1+\frac{\theta_i e_x}{2}\right)^{-1}\right)$$

$$=k\bar{Y}\left(1+e_y\right)\left(1-\alpha\theta_i e_x+\frac{\alpha\left(\alpha-1\right)}{2}\theta_i^2 e_x^2\right)\left(1-\frac{\theta_i e_x}{2}+\frac{\theta_i^2 e_x^2}{8}\right)\left(1+\frac{\theta_i^2 e_x^2}{4}\right)$$

$$=k\bar{Y}\left(1+e_y\right)\left(1-\alpha\theta_i e_x+\frac{\alpha\left(\alpha-1\right)}{2}\theta_i^2 e_x^2\right)\left(1-\frac{\theta_i e_x}{2}+\frac{3\theta_i^2 e_x^2}{8}\right)$$

$$=k\bar{Y}\left(1+e_y\right)\left(1-\frac{\theta_i e_x}{2}-\alpha\theta_i e_x+\frac{3\theta_i^2 e_x^2}{8}+\frac{\alpha\theta_i^2 e_x^2}{2}+\frac{\alpha^2\theta_i^2 e_x^2}{2}-\frac{\alpha\theta_i^2 e_x^2}{2}\right)$$

$$=k\bar{Y}\left(1+e_y-\frac{\theta_i e_x}{2}-\alpha\theta_i e_x+\frac{3\theta_i^2 e_x^2}{8}+\frac{\alpha\theta_i^2 e_x^2}{2}+\frac{\alpha^2\theta_i^2 e_x^2}{2}-\frac{\alpha\theta_i^2 e_x^2}{2}-\frac{\theta_i e_y e_x}{2}-\alpha\theta_i e_y e_x\right)$$

$$\begin{aligned}=\bar{Y}\Bigg(&k+ke_y-\frac{k\theta_i e_x}{2}-k\alpha\theta_i e_x+\frac{3k\theta_i^2 e_x^2}{8}+\frac{k\alpha\theta_i^2 e_x^2}{2}+\frac{k\alpha^2\theta_i^2 e_x^2}{2}\\&-\frac{k\alpha\theta_i^2 e_x^2}{2}-\frac{k\theta_i e_y e_x}{2}-k\alpha\theta_i e_y e_x\Bigg)\end{aligned} \tag{6.3}$$

biçiminde yazılabilmektedir. TRÖ için önerilen tahmin ediciden $\left(\bar{Y}\right)$ çıkarılıp gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\begin{aligned}\left(t_{CCi}^{(st)}-\bar{Y}\right)=\bar{Y}\Bigg(&\left(k-1\right)+ke_y-k\alpha\theta_i e_x-\frac{k\theta_i e_x}{2}+\frac{3k\theta_i^2 e_x^2}{8}+\frac{k\alpha\theta_i^2 e_x^2}{2}\\&+\frac{k\alpha^2\theta_i^2 e_x^2}{2}-\frac{k\alpha\theta_i^2 e_x^2}{2}-\frac{k\theta_i e_y e_x}{2}-k\alpha\theta_i e_y e_x\Bigg)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(t_{CCi}^{(st)}-\bar{Y}\right)=\bar{Y}\Bigg(&\left(k-1\right)+ke_y-\frac{k\theta_i e_x}{2}-k\alpha\theta_i e_x+\frac{3k\theta_i^2 e_x^2}{8}\\&+\frac{k\alpha^2\theta_i^2 e_x^2}{2}-\frac{k\theta_i e_y e_x}{2}-k\alpha\theta_i e_y e_x\Bigg)\end{aligned} \tag{6.4}$$

elde edilmektedir. (6.4) eşitliğinin beklenen değeri alındığında, tahmin edicisinin yanı

$$E\left(t_{CCi}^{(st)}-\bar{Y}\right)=\bar{Y}\left(\left(k-1\right)+\frac{E\left(e_x^2\right)}{2}k\theta_i^2\left(\frac{3}{4}+\alpha^2\right)-E\left(e_y e_x\right)k\theta_i\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)\right)$$

$$=\bar{Y}\left(\left(k-1\right)+\frac{k\theta_i^2 S_{xh}^2}{2\bar{X}^2}\left(\frac{3}{4}+\alpha^2\right)-k\theta_i\frac{S_{yxh}}{\bar{X}\bar{Y}}\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)\right)$$

$$YAN\left(t_{CCi}^{(st)}\right)=\left(k-1\right)\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\frac{k\theta_i}{\bar{X}}\left(\frac{\theta_i R S_{xh}^2}{2}\left(\frac{3}{4}+\alpha^2\right)-S_{yxh}\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)\right),\ i=1,2,...,10 \tag{6.5}$$

biçiminde bulunur. (6.4) eşitliğinin karesi, devamında ise beklenen değeri alındığında,

$$\left(t_{CCi}^{(st)}-\bar{Y}\right)^2=\bar{Y}^2\Big((k-1)^2+k^2e_y^2+k^2\theta_i^2e_x^2+2\alpha^2k^2\theta_i^2e_x^2-k\alpha^2\theta_i^2e_x^2$$

$$+\alpha k^2\theta_i^2e_x^2-\frac{3k\theta_i^2e_x^2}{4}+k\theta_ie_ye_x+2k\alpha\theta_ie_ye_x-4\alpha k^2\theta_ie_ye_x-2k^2\theta_ie_ye_x\Big)$$

$$E\left(t_{CCi}^{(st)}-\bar{Y}\right)^2=\bar{Y}^2\left((k-1)^2+k^2E\left(e_y^2\right)+\theta_i^2E\left(e_x^2\right)\left(k^2+2\alpha^2k^2+\alpha k^2-\frac{3k}{4}-k\alpha^2\right)\right.$$

$$\left.+\theta_iE\left(e_ye_x\right)\left(k+2k\alpha-2k^2-4\alpha k^2\right)\right)$$

$$HKO\left(t_{CCi}^{(st)}\right)=\left(\bar{Y}^2(k-1)^2\right.$$

$$+\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(k^2S_{yh}^2+\theta_i^2R^2S_{xh}^2\left(k^2+2\alpha^2k^2+\alpha k^2-\frac{3k}{4}-k\alpha^2\right)\right. \tag{6.6}$$

$$\left.\left.+\theta_iRS_{yxh}\left(k+2k\alpha-2k^2-4\alpha k^2\right)\right)\right),\ i=1,2,...,10$$

elde edilir. Burada,

$$\theta_1=\frac{\bar{X}}{\left(\bar{X}+1\right)}\qquad\theta_2=\frac{\bar{X}}{\left(\bar{X}+\beta_2(x)\right)}\qquad\theta_3=\frac{\bar{X}}{\left(\bar{X}+C_x\right)}\qquad\theta_4=\frac{\bar{X}}{\left(\bar{X}+\rho\right)}$$

$$\theta_5=\frac{\beta_2(x)\bar{X}}{\left(\beta_2(x)\bar{X}+C_x\right)}\qquad\theta_6=\frac{C_x\bar{X}}{\left(C_x\bar{X}+\beta_2(x)\right)}\qquad\theta_7=\frac{C_x\bar{X}}{\left(C_x\bar{X}+\rho\right)}$$

$$\theta_8=\frac{\rho\bar{X}}{\left(\rho\bar{X}+C_x\right)}\qquad\theta_9=\frac{\beta_2(x)\bar{X}}{\left(\beta_2(x)\bar{X}+\rho\right)}\qquad\theta_{10}=\frac{\rho\bar{X}}{\left(\rho\bar{X}+\beta_2(x)\right)}$$

Minimum HKO eşitliğine ulaşabilmek için,

$$\frac{\partial HKO\left(t_{CCi}^{(st)}\right)}{\partial k}=0 \tag{6.7}$$

türev işlemi yapıldığında, optimum k değerine

$$k^*=\frac{\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(\frac{3}{4}\theta_i^2R^2S_{xh}^2+\alpha^2\theta_i^2R^2S_{xh}^2-\theta_iRS_{xyh}-2\alpha\theta_iRS_{xyh}\right)+2\bar{Y}^2}{\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(2S_{yh}^2+2\theta_i^2R^2S_{xh}^2+4\alpha^2\theta_i^2R^2S_{xh}^2+2\alpha\theta_i^2R^2S_{xh}^2-4\theta_iRS_{xyh}-8\alpha\theta_iRS_{xyh}\right)+2\bar{Y}^2} \tag{6.8}$$

şeklinde ulaşılmaktadır. (6.6) eşitliğinde yer alan k değeri yerine, optimum k değeri $\left(k^*\right)$ yazıldığında,

$$
\begin{aligned}
HKO_{\min}\left(t_{CCi}^{(st)}\right) &= \bar{Y}^2\left(k^*-1\right)^2 \\
&\quad + \bar{Y}^2\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(k^{*2}\frac{S_{yh}^2}{\bar{Y}^2}\right. \\
&\qquad + \theta_i\frac{S_{yxh}}{\bar{X}\bar{Y}}\left(k^*+2k^*\alpha-2k^{*2}-4\alpha k^{*2}\right) \\
&\qquad \left. + \theta_i^2\frac{S_{xh}^2}{\bar{X}^2}\left(k^{*2}+2\alpha^2k^{*2}+\alpha k^{*2}-\frac{3k^*}{4}-k^*\alpha^2\right)\right), i=1,2,...,10
\end{aligned} \tag{6.9}
$$

elde edilmektedir. k^* değeri için,

$$
\begin{aligned}
A_{st} &= \left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(\frac{3}{4}\theta_i^2R^2S_{xh}^2+\alpha^2\theta_i^2R^2S_{xh}^2-\theta_iRS_{xyh}-2\alpha\theta_iRS_{xyh}\right)+2\bar{Y}^2\right) \\
B_{st} &= \left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(2S_{yh}^2+2\theta_i^2R^2S_{xh}^2+4\alpha^2\theta_i^2R^2S_{xh}^2+2\alpha\theta_i^2R^2S_{xh}^2-4\theta_iRS_{xyh}-8\alpha\theta_iRS_{xyh}\right)+2\bar{Y}^2\right)
\end{aligned} \tag{6.10}
$$

olmak üzere,

$$
k^* = \frac{A_{st}}{B_{st}} \tag{6.11}
$$

yazıldığında,

$$
\begin{aligned}
HKO_{\min}\left(t_{CCi}^{(st)}\right) &= \bar{Y}^2\left(\frac{A_{st}}{B_{st}}-1\right)^2 \\
&\quad + \bar{Y}^2\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(\frac{A_{st}^2}{B_{st}^2}\frac{S_{yh}^2}{\bar{Y}^2}+\theta_i^2\frac{S_{xh}^2}{\bar{X}^2}\left(\frac{A_{st}^2}{B_{st}^2}+2\alpha^2\frac{A_{st}^2}{B_{st}^2}+\alpha\frac{A_{st}^2}{B_{st}^2}-\frac{3A_{st}}{4B_{st}}-\frac{A_{st}}{B_{st}}\alpha^2\right)\right. \\
&\qquad \left. +\theta_i\frac{S_{yxh}}{\bar{X}\bar{Y}}\left(\frac{A_{st}}{B_{st}}+2\alpha\frac{A_{st}}{B_{st}}-2\frac{A_{st}^2}{B_{st}^2}-4\alpha\frac{A_{st}^2}{B_{st}^2}\right)\right) \\
&= \bar{Y}^2\left(\frac{A_{st}^2}{B_{st}^2}-\frac{2A_{st}}{B_{st}}+1\right) \\
&\quad + \sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(\frac{A_{st}^2}{B_{st}^2}S_{yh}^2+\theta_i^2R^2S_{xh}^2\left(\frac{A_{st}^2}{B_{st}^2}+2\alpha^2\frac{A_{st}^2}{B_{st}^2}+\alpha\frac{A_{st}^2}{B_{st}^2}-\frac{3A_{st}}{4B_{st}}-\frac{A_{st}}{B_{st}}\alpha^2\right)\right. \\
&\qquad \left. +\theta_iRS_{yxh}\left(\frac{A_{st}}{B_{st}}+2\alpha\frac{A_{st}}{B_{st}}-2\frac{A_{st}^2}{B_{st}^2}-4\alpha\frac{A_{st}^2}{B_{st}^2}\right)\right)
\end{aligned} \tag{6.12}
$$

(Düzenlemeler yapılırsa)

$$=\left(\frac{A_{st}^2}{B_{st}^2}\left[\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(S_{yh}^2+\theta_i^2R^2S_{xh}^2+2\alpha^2\theta_i^2R^2S_{xh}^2+\alpha\theta_i^2R^2S_{xh}^2-2\theta_iRS_{xyh}-4\alpha\theta_iRS_{xyh}\right)+\bar{Y}^2\right]\right.$$

$$\left.-\frac{A_{st}}{B_{st}}\left[\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(\frac{3}{4}\theta_i^2R^2S_{xh}^2+\alpha^2\theta_i^2R^2S_{xh}^2-\theta_iRS_{xyh}-2\alpha\theta_iRS_{xyh}\right)+2\bar{Y}^2\right]+\bar{Y}^2\right)$$

$$=\left(\frac{A_{st}^2}{B_{st}^2}\frac{B_{st}}{2}-\frac{A_{st}}{B_{st}}A_{st}+\bar{Y}^2\right)$$

$$=\left(\frac{A_{st}^2}{2B_{st}}-\frac{A_{st}^2}{B_{st}}+\bar{Y}^2\right)$$

$$HKO_{min}\left(t_{CCi}^{(st)}\right)=\left(\bar{Y}^2-\frac{A_{st}^2}{2B_{st}}\right),\ i=1,2,...,10 \tag{6.13}$$

biçiminde elde edilir.

6.2. Tabakalı Rastgele Örneklemede Kitle Ortalaması Tahmini için Önerilen Tahmin Edici Ailesinin Etkinlik Karşılaştırması

TRÖ yöntemi için önerilen tahmin edici ailesinden bahsedildikten sonra, bu bölümde (2.28), (4.1) ve (2.33) eşitliklerinde bahsedilen $t_{R(st)},\ t_{BT(st)}, t_{reg(st)}$ tahmin edicileri ile önerilen tahmin edici ailesinin teorik olarak etkinlik karşılaştırılması yapılacaktır.

İlk olarak, (2.28) eşitliğinde yer alan $t_{R(st)}$ klasik oransal tahmin edicisinin HKO eşitliği ile önerilen tahmin edicinin (6.13) ifadesinde yer alan min HKO eşitliği karşılaştırılmıştır.

$$HKO_{min}\left(t_{CCi}^{(st)}\right)<HKO\left(t_{R(st)}\right),\ i=1,2,...,10$$

$$\left(\bar{Y}^2-\frac{A^2}{2B}\right)<\bar{Y}^2\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(\frac{S_{yh}^2}{\bar{Y}^2}-2\frac{S_{yxh}}{\bar{Y}\bar{X}}+\frac{S_{xh}^2}{\bar{X}^2}\right)$$

$$\left(\bar{Y}^2-\frac{A^2}{2B}\right)<\sum_{h=1}^{L}W_h^2\gamma_h\left(S_{yh}^2-2RS_{yxh}+R^2S_{xh}^2\right) \tag{6.14}$$

(6.14) koşulu sağlandığında, önerilen $\left(t_{CCi}^{(st)},\ i=1,2,...,10\right)$ tahmin edicisinin, klasik oransal tahmin ediciden $\left(t_{R(st)}\right)$ daha etkin olduğu sonucuna ulaşılmaktadır.

İkinci olarak, (4.1) eşitliğinde yer alan Singh ve diğerleri [30] tarafından önerilmiş olan $t_{BT(st)}$ tahmin edicisinin HKO eşitliği ile önerilen tahmin edicinin (6.13) ifadesinde yer alan minimum HKO eşitliği karşılaştırılmıştır.

$$HKO_{min}\left(t_{CCi}^{(st)}\right) < HKO\left(t_{BT(st)}\right),\ i=1,2,...,10$$

$$\left(\bar{Y}^2 - \frac{A^2}{2B}\right) < \bar{Y}^2 \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(\frac{S_{yh}^2}{\bar{Y}^2} - \frac{S_{yxh}}{\bar{Y}\bar{X}} + \frac{S_{xh}^2}{4\bar{X}^2}\right)$$

$$\left(\bar{Y}^2 - \frac{A^2}{2B}\right) < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h \left(S_{yh}^2 - RS_{yxh} + \frac{R^2}{4} S_{xh}^2\right) \tag{6.15}$$

(6.15) koşulunun sağlandığı durumda, önerilen tahmin edicinin, $t_{BT(st)}$ tahmin edicisinden daha etkin olduğu bulunmuştur.

Son olarak, (2.33) ifadesinde yer alan $t_{reg(st)}$ tahmin edicisinin HKO ile önerilen tahmin edicinin (6.13) ifadesinde yer alan HKO eşitliği karşılaştırılmıştır.

$$HKO_{min}\left(t_{CCi}^{(st)}\right) < HKO\left(t_{reg(st)}\right),\ i=1,2,...,10$$

$$\left(\bar{Y}^2 - \frac{A^2}{2B}\right) < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \gamma_h S_{yh}^2 \left(1-\rho_c^2\right) \tag{6.16}$$

(6.16) koşulu sağlandığında, önerilen tahmin edicinin, $t_{reg(st)}$ tahmin edicisinden daha etkin olduğu söylenebilmektedir.

Sonuç olarak, (6.14), (6.15), (6.16) ifadelerinde yer alan koşullar sağlandığında, TRÖ yöntemi için önerilen $t_{CCi}^{(st)},\ i=1,2,...,10$ tahmin edicisinin, etkinlik karşılaştırması yapıldığında $t_{R(st)},\ t_{BT(st)}, t_{reg(st)}$ tahmin edicilerinden daha etkin olduğu sonucuna ulaşılmaktadır.

7. BASİT RASTGELE ÖRNEKLEME İÇİN SAYISAL GÖSTERİM

7.1. BRÖ Yönteminde Literatürde Yer Alan Tahmin Ediciler için Sayısal Gösterim

Bu bölümde, 5. Bölümde teorik olarak önerilen ve 3. Bölümde bahsedilen, literatürde yer alan tahmin ediciler için, sayısal gösterim gerçekleştirilmiştir. Tek yardımcı değişken bilgisinden yararlanan tahmin ediciler için Kadılar ve Çıngı [45] veri seti; iki yardımcı değişken bilgisinden yararlanan tahmin ediciler için ise, Çıngı ve diğerleri [46] veri seti kullanılmıştır. Önerilen tahmin edici ailesi için, sayısal gösterimde kullanılan veri setlerinde değişkenler arasındaki ilişkilerin pozitif olmasından dolayı α değeri 1 olarak alınmıştır. Bu yüzden sayısal gösterimde, incelenen tahmin ediciler arasında üstel çarpımsal olanlara yer verilmemiştir. Bu tahmin ediciler; Onyeka [19] tarafından önerilen t_O ve Solanki ve diğerleri [5] tarafından önerilen t_{SSR}'dir. Veri setlerine ait kitle bilgileri, alt bölümlerde yer almaktadır.

7.1.1. Tek Yardımcı Değişken Bilgisinden Yararlanan Tahmin Ediciler için Sayısal Gösterim

Bu alt bölümde, incelenen tek yardımcı değişken bilgisine sahip tahmin ediciler için Kadılar ve Çıngı [45] tarafından kullanılan veri seti üzerinden sayısal gösterim yapılmıştır. Yardımcı değişkenin elma ağaçları sayısının olduğu veri seti, 1999 yılında Marmara Bölgesindeki 106 ilçede bulunan ton olarak elma üretim miktarlarını (y) içermektedir. Marmara Bölgesi için elma üretim miktarı ile elma ağaçları arasındaki korelasyon katsayısının 0.82 olması nedeniyle veri setinde sadece üstel oransal tahmin ediciler için sayısal gösterim yapılacaktır. Veri setine ait kitle bilgileri Çizelge 7.1'de verilmektedir.

Çizelge 7.1 BRÖ Yönteminde Marmara Bölgesi elma üretim miktarı (y) ve elma ağaçları sayısı (x) değişkenlerine ait betimsel istatistikler

$N = 106$ $\quad$ $n = 20$	$\rho = 0.82$
$\bar{X} = 24375.59$	$S_x = 49189.08$
$\bar{Y} = 1536.77$	$S_y = 6425.09$
$C_x = 2.02$	$S_{yx} = 257778692.30$
$C_y = 4.18$	$\beta_2(x) = 25.71$

Kitle bilgileri Çizelge 7.1'de verilen veri setinden yararlanılarak, BRÖ yöntemi için tek yardımcı değişken bilgisinden yararlanan üstel tip tahmin edicilerin HKO'ları elde edilmiştir. Tabloda yer alan tahmin ediciler, 3. Bölümde yer alan tahmin ediciler olup inceleme sırasına göre verilmiştir. Sonuçlar Çizelge 7.2'de gösterilmektedir.

Çizelge 7.2 BRÖ yönteminde tek yardımcı değişken bilgisine sahip tahmin ediciler ve HKO değerleri

t_{BT}	$HKO(t_{BT}) = 2783998.29$
$\theta_1 \to t_{SCSS,1}$	$HKO(t_{SCSS,1}) = 2783998.29$
$\theta_2 \to t_{SCSS,2}$	$HKO(t_{SCSS,2}) = 2785173.753$
$\theta_3 \to t_{SCSS,3}$	$HKO(t_{SCSS,3}) = 2784092.309$
$\theta_4 \to t_{SCSS,4}$	$HKO(t_{SCSS,4}) = 2784045.299$
$\theta_5 \to t_{SCSS,5}$	$HKO(t_{SCSS,5}) = 2784021.794$
$\theta_6 \to t_{SCSS,6}$	$HKO(t_{SCSS,6}) = 2784703.509$
$\theta_7 \to t_{SCSS,7}$	$HKO(t_{SCSS,7}) = 2784021.794$
$\theta_8 \to t_{SCSS,8}$	$HKO(t_{SCSS,8}) = 2784115.814$
$\theta_9 \to t_{SCSS,9}$	$HKO(t_{SCSS,9}) = 2784000.64$
$\theta_{10} \to t_{SCSS,10}$	$HKO(t_{SCSS,10}) = 2785502.971$
t^*_{SCSS}	$HKO_{\min}(t^*_{SCSS}) = 1377460.202$
$\theta_1 \to t_{YK,1}$	$HKO_{\min}(t_{YK,1}) = 1446772.751$
$\theta_2 \to t_{YK,2}$	$HKO_{min}(t_{YK,2}) = 1447086.742$
$\theta_3 \to t_{YK,3}$	$HKO_{min}(t_{YK,3}) = 1446797.889$
$\theta_4 \to t_{YK,4}$	$HKO_{\min}(t_{YK,4}) = 1446785.32$
$\theta_5 \to t_{YK,5}$	$HKO_{min}(t_{YK,5}) = 1446779.035$
$\theta_6 \to t_{YK,6}$	$HKO_{min}(t_{YK,6}) = 1446961.208$

Çizelge 7.2'nin Devamı

$\theta_7 \to t_{YK,7}$	$HKO_{\min}\left(t_{YK,7}\right) = 1446779.029$
$\theta_8 \to t_{YK,8}$	$HKO_{\min}\left(t_{YK,8}\right) = 1446804.173$
$\theta_9 \to t_{YK,9}$	$HKO_{\min}\left(t_{YK,9}\right) = 1446773.379$
$\theta_{10} \to t_{YK,10}$	$HKO_{\min}\left(t_{YK,10}\right) = 1447174.566$
t_{EE}	$HKO_{\min}\left(t_{EE}\right) = 424673.28$
t_{SG}	$HKO_{\min}\left(t_{SG}\right) = 869686.6031$
t_Y	$HKO_{\min}\left(t_Y\right) = 1377460.202$
t_{SCS}	$HKO_{\min}\left(t_{SCS}\right) = 1377460.202$
$t_{GÖK}$	$HKO_{\min}\left(t_{GÖK}\right) = 1377460.202$
t_{RUSCY}	$HKO_{\min}\left(t_{RUSCY}\right) = 1377460.202$
t_{SHG}	$HKO_{\min}\left(t_{SHG}\right) = 1824576.03$
t_{RVSGP}	$HKO_{min}\left(t_{RVSGP}\right) = 1377460.202$
t_{SP1}	$HKO\left(t_{SP1}\right) = 1854265.551$
t_{SP2}	$HKO\left(t_{SP2}\right) = 1415503.254$
$\theta_1 \to t_{SP3,1}$	$HKO\left(t_{SP3,1}\right) = 1415527.045$
$\theta_2 \to t_{SP3,2}$	$HKO\left(t_{SP3,2}\right) = 1416116.65$
$\theta_3 \to t_{SP3,3}$	$HKO\left(t_{SP3,3}\right) = 1415551.317$
$\theta_4 \to t_{SP3,4}$	$HKO\left(t_{SP3,4}\right) = 1415522.762$
$\theta_5 \to t_{SP3,5}$	$HKO\left(t_{SP3,5}\right) = 1415505.123$
$\theta_6 \to t_{SP3,6}$	$HKO\left(t_{SP3,6}\right) = 1415806.464$
$\theta_7 \to t_{SP3,7}$	$HKO\left(t_{SP3,7}\right) = 1415512.911$
$\theta_8 \to t_{SP3,8}$	$HKO\left(t_{SP3,8}\right) = 1415561.87$
$\theta_9 \to t_{SP3,9}$	$HKO\left(t_{SP3,9}\right) = 1415504.013$

Çizelge 7.2'nin Devamı

$\theta_{10} \rightarrow t_{SP3,10}$	$HKO\left(t_{SP3,10}\right) = 1416251.781$
t_{BT*}	$HKO\left(t_{BT*}\right) = 4052219.998$
t_R	$HKO\left(t_R\right) = 1854265.551$
t_{reg}	$HKO\left(t_{reg}\right) = 1377460.202$

7.1.2. İki Yardımcı Değişken Bilgisinden Yararlanan Tahmin Ediciler için Sayısal Gösterim

BRÖ yönteminde, teorik olarak 3. Bölümde incelenen iki yardımcı değişken bilgisine sahip üstel tahmin edicilerde sayısal sonuçlar için Çıngı ve diğerleri [46] veri setinden yararlanılmıştır. Veri setinde, 1. Bölge olarak belirlenen Marmara Bölgesinden yararlanılmıştır. Veri setine ait öğretmen sayısı (y) ve öğrenci sayısı (x) değişkenleri arasındaki korelasyon katsayısının 0.936 ve öğretmen sayısı (y) ile hem ilkokul hem ortaokulda bulunan sınıf sayısı (z) arasında ise 0.978 olmasından dolayı veri setinde üstel oransal tahmin ediciler için sayısal gösterim yapılacaktır. Marmara Bölgesine ait kitle bilgileri Çizelge 7.3'de verilmiştir.

Çizelge 7.3 BRÖ yönteminde Marmara bölgesinde bulunan öğretmen sayısı (y), öğrenci sayısı (x) ve hem ilkokul hem ortaokulda bulunan sınıf sayısı (z) değişkenlerine ait betimsel istatistikler

$N = 127$	$n = 31$	$\beta_{2h}\left(x\right) = 4.593$
$\bar{X} = 20804.59$	$\bar{Y} = 703.74$	$\bar{Z} = 498.28$
$S_x = 30486.751$	$S_y = 883.835$	$S_z = 555.5816$
$C_x = 1.4654$	$C_y = 1.2559$	$C_z = 1.1150$
$\rho_{yx} = 0.936$	$\rho_{yz} = 0.978$	$\rho_{xz} = 0.9396$

Çizelge 7.3'de verilen kitle bilgilerinden yararlanılarak, sayısal sayısal gösterim gerçekleştirilmiş ve elde edilen sonuçlar Çizelge 7.4'de verilmiştir. Tabloda yer alan iki yardımcı değişken bilgisinden yararlanan tahmin ediciler, 3. Bölümde yer alan tahmin ediciler olup inceleme sırasına göre verilmiştir.

Çizelge 7.4 BRÖ yönteminde iki yardımcı değişken bilgisine sahip tahmin ediciler ve HKO değerleri

t_{SUT}	$HKO\left(t_{SUT}\right)=15762.99773$
$t_{SUT}^{(\alpha_1,\alpha_2)}$	$HKO_{\min}\left(t_{SUT}^{(\alpha_1,\alpha_2)}\right)=6381.223$
t_{AHK3}	$HKO_{\min}\left(t_{AHK3}\right)=782.0183$
t_{SS}	$HKO_{\min}\left(t_{SS}\right)=316340.9296$
$t_{RAH}\ \gamma=1\rightarrow t_{RAH1}$	$HKO\left(t_{RAH1}\right)=782.018259$
t_{RR}	$HKO\left(t_{RR}\right)=22345.99132$
$t_{BT(2)}$	$HKO\left(t_{BT2}\right)=1184.437$
$t_{reg(2)}$	$HKO\left(t_{reg2}\right)=16919.06198$

7.2. BRÖ Yönteminde Önerilen Tahmin Edici için Sayısal Gösterim

Bu bölümde önerilen tahmin edici ailesi için, BRÖ yöntemindeki sayısal gösterim, tek yardımcı değişkene sahip tahmin edicilerin HKO hesaplamasında kullanılan ve veri setinin kitle bilgileri Çizelge 7.1'de verilen Kadılar ve Çıngı [45] çalışması üzerinden yapılmıştır. Veri setinde ilgilenilen değişken ve yardımcı değişken arasındaki korelasyon katsayısının 0.82 olmasından dolayı, önerilen tahmin edicide $\alpha=1$ alınarak sayısal gösterim sonuçları elde edilmiştir.

$\theta_i=\dfrac{a_i\bar{X}}{a_i\bar{X}+b_i}, i=1,2,...,10$ olmak üzere, Çizelge 3.1'de belirtilen a ve b değerlerine bağlı olarak bulunan teta (θ) değerlerinden yararlanılarak, $HKO_{\min}\left(t_{CCi}\right)\ i=1,2,\ldots,10$ sonuçları elde edilmiştir. Teta değerleri ve karşılık gelen HKO Sonuçları Çizelge 7.5'de görülmektedir.

Çizelge 7.5 BRÖ yönteminde önerilen tahmin edici içim Teta $(\theta_i, i=1,2,...,10)$ değerleri ve önerilen tahmin edici HKO değerleri

θ	$HKO_{\min}$
$\theta_1 = 0,999958976$	$HKO_{\min}(t_{CC1}) = 1313627,498$
$\theta_2 = 0,998946342$	$HKO_{\min}(t_{CC2}) = 1315907,209$
$\theta_3 = 0,999917135$	$HKO_{\min}(t_{CC3}) = 1313721,904$
$\theta_4 = 0,99996636$	$HKO_{\min}(t_{CC4}) = 1313610,835$
$\theta_5 = 0,999996777$	$HKO_{\min}(t_{CC5}) = 1313542,192$
$\theta_6 = 0,99947811$	$HKO_{\min}(t_{CC6}) = 1314711,387$
$\theta_7 = 0,999983346$	$HKO_{\min}(t_{CC7}) = 1313572,502$
$\theta_8 = 0,999898947$	$HKO_{\min}(t_{CC8}) = 1313762,936$
$\theta_9 = 0,999998692$	$HKO_{\min}(t_{CC9}) = 1313537,87$
$\theta_{10} = 0,998715349$	$HKO_{\min}(t_{CC10}) = 1316425,746$

BRÖ yöntemi için, önerilen tahmin edici, 5. Bölümde teorik olarak t_R, t_{BT}, t_{reg} ve t_{SP3} tahmin edicileri ile karşılaştırılmıştı. Elde edilen koşullar altında, önerilen tahmin edici ailesinin daha etkin olduğu sonucuna ulaşılmıştı. Teorik olarak karşılaştırmayı sayısal gösterimli olarak da desteklemek için, aynı veri seti üzerinden bahsedilen tahmin ediciler için sayısal gösterim yapıldığında, elde edilen sonuçlar Çizelge 7.6'da gösterilmektedir.

Çizelge 7.6 BRÖ yönteminde önerilen tahmin edici için karşılaştırılan tahmin ediciler ve HKO değerleri

$HKO(t_{BT}) = 2783998,29$
$HKO(t_R) = 1854265,551$
$HKO(\bar{y}_{reg}) = 1377460,202$
$\theta_1 = 0,999958976 \rightarrow HKO(t_{SP3,\theta_1}) = 1415527,045$
$\theta_2 = 0,998946342 \rightarrow HKO(t_{SP3,\theta_2}) = 1416116,65$
$\theta_3 = 0,999917135 \rightarrow HKO(t_{SP3,\theta_3}) = 1415551,317$
$\theta_4 = 0,99996636 \rightarrow HKO(t_{SP3,\theta_4}) = 1415522,762$
$\theta_5 = 0,999996777 \rightarrow HKO(t_{SP3,\theta_5}) = 1415505,123$
$\theta_6 = 0,99947811 \rightarrow HKO(t_{SP3,\theta_6}) = 1415806,464$
$\theta_7 = 0,999983346 \rightarrow HKO(t_{SP3,\theta_7}) = 1415512,911$
$\theta_8 = 0,999898947 \rightarrow HKO(t_{SP3,\theta_8}) = 1415561,87$
$\theta_9 = 0,999998692 \rightarrow HKO(t_{SP3,\theta_9}) = 1415504,013$
$\theta_{10} = 0,998715349 \rightarrow HKO(t_{SP3,\theta_{10}}) = 1416251,781$

Etkinlik karşılaştırmasında, (5.11), (5.12), (5.13), (5.14) eşitsizliklerinde elde edilen koşullar sağlandığında, önerilen tahmin edicinin daha etkin olduğu bulunmuştu. Çizelge 7.5 ve Çizelge 7.6 incelendiğinde, önerilen tahmin edicinin HKO değerlerinin, karşılaştırılan klasik oransal (t_R) , Bahl ve Tuteja [4] tarafından önerilen (t_{BT}) , klasik regresyon (t_{reg}) ve Singh ve Pal [25] tarafından önerilen $(t_{SP3,i})$, $i = 1, 2, ..., 10$ tahmin edicilerinin HKO değerlerinden daha küçük olduğu görülmektedir. Dolayısıyla, teorik olarak bulunan koşulların, sayısal gösterimli bir şekilde sağlandığı ve önerilen tahmin edicinin daha etkin olduğu bulunmuştur.

8. TABAKALI RASTGELE ÖRNEKLEME İÇİN SAYISAL GÖSTERİM

8.1. TRÖ Yönteminde Literatürde Yer Alan Tahmin Ediciler için Sayısal Gösterim

Bu bölümde, 6. Bölümde Tabakalı Rastgele Örnekleme yöntemi için önerilen ve 4. Bölümde teorik olarak bahsedilen tahmin ediciler için, gerçek bir veri kümesinde Hata Kareler Ortalaması (HKO) sonuçları elde edilmiştir. Tek yardımcı değişken bilgisine sahip tahmin ediciler için Kadılar ve Çıngı [45] çalışmasında yer alan veri seti; iki yardımcı değişken bilgisine sahip olan tahmin ediciler için ise Çıngı ve diğerleri [46] veri seti kullanılmıştır. TRÖ yönteminde, kullanılan veri setlerinde korelasyon katsayılarının pozitif olmasından dolayı, önerilen tahmin edici ailesi için sayısal gösterimde α değeri 1 olarak alınmıştır. Bu sebepten dolayı, incelenen üstel tip tahmin ediciler arasında Yadav ve Shukla [35] tarafından önerilen üstel çarpımsal tahmin edicisine (t_{YS}) sayısal gösterimde yer verilmemiştir. Veri setlerine ait kitle bilgileri alt bölümlerde yer almaktadır.

8.1.1. Tek Yardımcı Değişken Bilgisinden Yararlanan Tahmin Ediciler için Sayısal Gösterim

Analizin bu kısmında, incelenen tek yardımcı değişken bilgisinden yararlanan tahmin ediciler için Kadılar ve Çıngı [45] tarafından kullanılan veri setinin, tamamı üzerinden sayısal sayısal gösterim gerçekleştirilmiştir. Kullanılan veri, 1999 yılında Türkiye'de bulunan 854 ilçedeki elma ağaçları sayısı (y) ve elma üretim miktarlarını (x) kapsamaktadır. Tüm bölgeler için elma üretim miktarı ile elma ağaçları sayısı arasındaki korelasyon katsayısının 0.90 olması nedeniyle, veri setinde sadece üstel oransal tahmin ediciler için sayısal gösterim yapılacaktır. Tabakalar sırasıyla; Marmara, Ege, Akdeniz, İç Anadolu, Karadeniz, Doğu ve Güneydoğu Anadolu bölgelerini göstermek üzere, veri setine ait kitle bilgileri Çizelge 8.1'de verilmektedir.

Çizelge 8.1 TRÖ yönteminde tabakalara ait elma üretim miktarı (y) ve elma ağaçları sayısı (x) değişkenlerine ait betimsel istatistikler

Tabaka	*1 Marmara B.*	*2 Ege B.*	*3 Akdeniz B.*	*4 İç Anadolu B.*	*5 Karadeniz B.*	*6 Doğu ve G.Doğu Ana. B.*
N_h	106	106	94	171	204	173
n_h	9	17	38	67	7	2
W_h	0.12	0.12	0.11	0.20	0.24	0.20
$\bar{X}_h$	24375.59	27421.70	72409.95	74365.68	26441.72	9843.83
$\bar{Y}_h$	1536.77	2212.59	9384.31	5588.01	966.96	404.40
S_{xh}	49189.08	57460.62	160757.31	285603.13	45402.78	18793.95
S_{yh}	6425.09	11551.53	29907.48	28643.42	2389.77	945.75
ρ	0.82	0.86	0.90	0.99	0.71	0.89
$\beta_{2h}(x)$	26.68	34.57	26.14	97.6	27.47	28.11
C_{xh}	2.02	2.10	2.22	3.84	1.72	1.91

Çizelge 8.1'de verilen kitleye ait bilgilerden yararlanılarak, literatürde yer alan tahmin edicilerin HKO değerleri elde edilmiş ve bu değerler Çizelge 8.2'de verilmiştir. Tabloda yer alan tahmin ediciler, 4. Bölümdeki incelenme sırasına göre verilmiştir.

Çizelge 8.2 TRÖ yönteminde tek yardımcı değişken bilgisine sahip tahmin ediciler ve HKO değerleri

$t_{BT(st)}$	$HKO\left(t_{BT(st)}\right) = 360853.8658$
t_{SD}	$HKO\left(t_{SD}\right) = 360883.1405$
t_{SK}	$HKO\left(t_{SK}\right) = 361299.9244$
t_{US1}	$HKO\left(t_{US1}\right) = 361039.4345$
t_{US2}	$HKO\left(t_{US2}\right) = 361195.7284$
t_{GNS1}	$HKO\left(t_{GNS1}\right) = 397449.0366$

Çizelge 8.2'nin Devamı

t_{GNS2}	$HKO\left(t_{GNS2}\right)=361689.5473$
t_{SKSC}	$HKO_{\min}\left(t_{SKSC}\right)=204523.6051$
t_{SKCK0}	$HKO_{\min}\left(t_{SKCK0}\right)=351238.9697$
t_{SKCK1}	$HKO_{\min}\left(t_{SKCK1}\right)=351267.1901$
t_{SKCK2}	$HKO_{\min}\left(t_{SKCK2}\right)=351524.4701$
t_{SKCK3}	$HKO_{min}\left(t_{SKCK3}\right)=327829.9951$
t_{SKCK4}	$HKO_{\min}\left(t_{SKCK4}\right)=328029.7357$
t_{KCKS0}	$HKO_{\min}\left(t_{KCKS0}\right)=208194.2309$
t_{KCKS1}	$HKO_{\min}\left(t_{KCKS1}\right)=208269.2937$
t_{KCKS2}	$HKO_{\min}\left(t_{KCKS2}\right)=208322.3631$
t_{KCKS3}	$HKO_{\min}\left(t_{KCKS3}\right)=261388.8804$
t_{KCKS4}	$HKO_{\min}\left(t_{KCKS4}\right)=195584.6455$
$t_{SCSS(st)}$	$HKO_{\min}\left(t_{SCSS(st)}\right)=397444.949$
t_{SMS}	$HKO_{\min}\left(t_{SMS}\right)=2435999.692$
$t_{SG(st)}$	$HKO\left(t_{SG(st)}\right)=2886.952$
$t_{SS(st)1}$	$HKO_{min}\left(t_{SS(st)1}\right)=198983.1914$
$t_{SS(st)2}$	$HKO_{min}\left(t_{SS(st)2}\right)=198967.1560$
$t_{SS(st)3}$	$HKO_{min}\left(t_{SS(st)3}\right)=198413.1288$
$t_{SS(st)4}$	$HKO_{min}\left(t_{SS(st)4}\right)=199172.3777$
$t_{SS(st)5}$	$HKO_{min}\left(t_{SS(st)5}\right)=197755.2091$
$t_{SS(st)6}$	$HKO_{min}\left(t_{SS(st)6}\right)=199715.269$

Çizelge 8.2'nin Devamı

$t_{SS(st)7}$	$HKO_{min}\left(t_{SS(st)7}\right)=198128.7811$
$t_{SS(st)8}$	$HKO_{min}\left(t_{SS(st)8}\right)=199178.0946$
$t_{SS(st)9}$	$HKO_{min}\left(t_{SS(st)9}\right)=198981.2372$
$t_{SS(st)10}$	$HKO_{min}\left(t_{SS(st)10}\right)=198745.6554$
$t_{SS(st)11}$	$HKO_{min}\left(t_{SS(st)11}\right)=198910.1213$
$t_{SS(st)12}$	$HKO_{min}\left(t_{SS(st)12}\right)=199180.1684$
t_{KK}	$HKO_{\min}\left(t_{KK}\right)=204523.6051$
$t_{GÖ}$	$HKO_{\min}\left(t_{GÖ}\right)=204523.6051$
t_{RYUSC}	$HKO_{\min}\left(t_{RYUSC}\right)=204523.6051$
t_{SSS}	$HKO_{\min}\left(t_{SSS}\right)=204523.6051$
t_{N1}	$HKO_{\min}\left(t_{N1}\right)=24992.85733$
t_{N2}	$HKO_{min}\left(t_{N2}\right)=82270.44716$
t_{N3}	$HKO_{\min}\left(t_{N3}\right)=350724.5132$
t_{N4}	$HKO_{\min}\left(t_{N4}\right)=24276.75069$
t_{N5}	$HKO_{\min}\left(t_{N5}\right)=83182.12506$
t_{N6}	$HKO_{\min}\left(t_{N6}\right)=347813.5139$
t_{N7}	$HKO_{\min}\left(t_{N7}\right)=24886.76825$
t_{N8}	$HKO_{\min}\left(t_{N8}\right)=82405.16355$
t_{N9}	$HKO_{\min}\left(t_{N9}\right)=350303.237$
$t_{BT*(st)}$	$HKO\left(t_{BT*(st)}\right)=860065.1499$
$t_{R(st)}$	$HKO\left(t_{R(st)}\right)=214736.2492$
$t_{reg(st)}$	$HKO\left(t_{reg(st)}\right)=204523.6051$

8.1.2. İki Yardımcı Değişken Bilgisinden Yararlanan Tahmin Ediciler için Sayısal Gösterim

Literatürde olan iki yardımcı değişkenli tahmin edicilerin sayısal gösteriminde Çıngı ve diğerleri [46] çalışmasından yararlanılmıştır. Veri seti Türkiye'de 6 bölgede toplam 923 ilçeyi kapsamaktadır. Tabakalar sırasıyla Çizelge 8.3'de belirtilmiştir. Çalışmada, öğretmen sayısı ilgilenilen değişkeni (y) ; öğrenci sayısı birinci yardımcı değişkeni (x), hem ilkokul hem de ortaokulda bulunan sınıf sayısı ikinci yardımcı değişkeni (z) göstermektedir. Veri setine ait y ve x değişkenleri ile y ve z değişkenleri arasındaki her iki korelasyon katsayısının yaklaşık 0.80 olmasından dolayı veri setinde üstel oransal tahmin ediciler için sayısal gösterim yapılacaktır. Kitleye ait gerekli bilgiler Çizelge 8.3'de yer almaktadır.

Çizelge 8.3 TRÖ yönteminde tabakalar için öğretmen sayısı (y), öğrenci sayısı (x) ve hem ilkokul hem ortaokulda bulunan sınıf sayısı (z) değişkenlerine ait betimsel istatistikler

Tabaka	*1 Marmara B.*	*2 Ege B.*	*3 Akdeniz B.*	*4 İç Anadolu B.*	*5 Karadeniz B.*	*6 Doğu ve G.Doğu Ana. B.*
N_h	127	117	103	170	205	201
n_h	31	21	29	38	22	39
$\bar{X}_h$	20804.59	9211.79	14309.30	9478.85	5569.95	12997.59
$\bar{Y}_h$	703.74	413	573.17	424.66	267.03	393.84
$\bar{Z}_h$	498.28	318.33	431.36	498.28	227.20	313.71
S_{xh}	30486.751	15180.760	27549.697	18218.931	8997.776	23094.141
S_{yh}	883.835	644	1033.467	810.585	403.654	711.723
S_{zh}	555.5816	365.4576	612.9509	458.0282	260.8511	397.0481
$\beta_{2h}(x)$	4.593	18.543	15.446	10.162	21.947	23.114
ρ_{yxh}	0.936	0.996	0.994	0.983	0.989	0.965
ρ_{yzh}	0.978	0.976	0.983	0.982	0.964	0.982
ρ_{xzh}	0.9396	0.9696	0.9765	0.9636	0.0914	0.9660

ve

$$R_1 = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} = \frac{436.4331}{11440.5} = 0.038$$

$$R_2 = \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} = \frac{436.4331}{367.6009} = 1.1872$$

olmak üzere, Çizelge 8.3'de kitle bilgileri verilen veri setinden yararlanarak, iki yardımcı değişken bilgisine sahip tahmin ediciler için elde edilen sayısal HKO değerleri Çizelge 8.4'de verilmektedir. Tabloda yer alan tahmin ediciler, 4. Bölümdeki incelenme sırasına göre verilmiştir.

Çizelge 8.4 TRÖ yönteminde iki yardımcı değişken bilgisine sahip tahmin ediciler ve HKO değerleri

$t_{BT2(st)}$	$HKO\left(t_{BT2(st)}\right) = 627793.0238$
t_{TC}	$HKO\left(t_{TC}\right) = 626853.1605$
t_{LTS}	$HKO_{\min}\left(t_{LTS}\right) = 2948.159445$
$t_{RR(st)}$	$HKO\left(t_{RR(st)}\right) = 2510805.178$
$t_{reg2(st)}$	$HKO\left(t_{reg2(st)}\right) = 8721.612619$

8.2. TRÖ Yönteminde Önerilen Tahmin Edici için Sayısal Gösterim

(3.72) eşitliğinde yer alan Singh ve Pal [25] ve (3.11) eşitliğinde verilen Yadav ve Kadılar [15] çalışmaları dikkate alınarak hem BRÖ hem de TRÖ yöntemi için tahmin edici aileleri önerilmişti. Bu alt bölümde TRÖ yöntemi için önerilen tahmin edici ailesi için sayısal sayısal gösterim yapılacaktır. Önerilen tahmin edici ailesi için TRÖ yöntemindeki sayısal gösterimde, Lone ve Tailor [47] çalışmasından faydalanılmıştır. Kitlenin yardımcı değişkeni sabit sermaye (x), ilgilenilen değişkeni üretim (y) olmak üzere, değişkenler arasındaki korelasyon katsayısının 0.876 olmasından dolayı, önerilen tahmin edicide $\alpha = 1$ alınarak sayısal gösterim sonuçları elde edilmiştir. Kitleye ait bilgiler Çizelge 8.5'de verilmektedir.

Çizelge 8.5 TRÖ yönteminde üretim (y) ve sabit sermaye (x) değişkenlerine ait betimsel istatistikler

Tabaka	*1. Tabaka*	*2. Tabaka*
N_h	5	5
n_h	2	2
W_h	0.5	0.5
$\bar{X}_h$	214.4	333.8
$\bar{Y}_h$	1925.8	315.6
S_{xh}	74.87	66.35
S_{yh}	615.92	340.38
ρ	0.8535	0.9899
$\beta_{2h}(x)$	1.88	2.32
S_{yxh}	39360.68	22356.50

$\theta_i = \dfrac{a_i\bar{X}}{a_i\bar{X}+b_i},\ i=1,2,...,10$ olmak üzere, Çizelge 3.1'de belirtilen a ve b değerlerine bağlı olarak bulunan teta değerlerinden yararlanılarak, $HKO_{\min}\left(t_{CCi}^{(st)}\right)\ i=1,2,...,10$ sonuçları elde edilmiştir. Teta değerleri ve karşılık gelen HKO değerleri Çizelge 8.6'da görülmektedir.

Çizelge 8.6 TRÖ yönteminde önerilen tahmin edici için Teta $\left(\theta_i, i=1,2,...,10\right)$ değerleri ve önerilen tahmin edici HKO değerleri

θ	$HKO_{\min}$
$\theta_1 = 0,9963649582$	$HKO_{\min}\left(t_{CC1}^{st}\right) = 8535,583484$
$\theta_2 = 0,9927562477$	$HKO_{\min}\left(t_{CC2}^{st}\right) = 8538,189888$
$\theta_3 = 0,9990014032$	$HKO_{\min}\left(t_{CC3}^{st}\right) = 8534,152727$
$\theta_4 = 0,9966486281$	$HKO_{\min}\left(t_{CC4}^{st}\right) = 8535,410349$
$\theta_5 = 0,9995004522$	$HKO_{\min}\left(t_{CC5}^{st}\right) = 8533,926898$
$\theta_6 = 0,9727980631$	$HKO_{\min}\left(t_{CC6}^{st}\right) = 8566,122956$
$\theta_7 = 0,9878758916$	$HKO_{\min}\left(t_{CC7}^{st}\right) = 8542,905769$
$\theta_8 = 0,9989166625$	$HKO_{\min}\left(t_{CC8}^{st}\right) = 8534,1922497$
$\theta_9 = 0,9983215014$	$HKO_{\min}\left(t_{CC9}^{st}\right) = 8534,483446$
$\theta_{10} = 0,9917562348$	$HKO_{\min}\left(t_{CC10}^{st}\right) = 8539,044653$

TRÖ yönteminde önerilen tahmin edici, 6. Bölümde teorik olarak $t_{R(st)}$, $t_{BT(st)}$, $t_{reg(st)}$ tahmin edicileri ile karşılaştırılmıştı. Aynı veri seti üzerinden bahsedilen tahmin ediciler için sayısal gösterim yapıldığında, elde edilen sonuçlar Çizelge 8.7'de gösterilmektedir.

Çizelge 8.7 TRÖ yönteminde önerilen tahmin edici için karşılaştırılan tahmin ediciler ve HKO sonuçları

$HKO\left(t_{R(st)}\right) = 11837,81832$
$HKO\left(t_{BT(st)}\right) = 21352,59727$
$HKO\left(t_{reg(st)}\right) = 8595,99973$

Etkinlik karşılaştırmasında, (6.14), (6.15), (6.16) eşitsizliklerinde elde edilen koşullar sağlandığında, TRÖ yöntemi için önerilen tahmin edicinin daha etkin olduğu bulunmuştu. Çizelge 8.6 ve Çizelge 8.7 incelendiğinde, önerilen tahmin edicinin HKO değerlerinin, karşılaştırılan klasik oransal $\left(t_{R(st)}\right)$, Singh ve diğerleri [30] tarafından önerilen $\left(t_{BT(st)}\right)$ ve klasik regresyon $\left(t_{reg(st)}\right)$ tahmin edicilerinin HKO değerlerinden daha küçük olduğu görülmektedir. Bu durumda, koşullar sağlandığı sürece önerilen tahmin edici ailesinin karşılaştırma yapılan tahmin edicilere göre daha etkin olduğu söylenebilmektedir.

9. SONUÇ VE TARTIŞMA

Örnekleme teorisinde yer alan tahmin ediciler incelendiğinde; oransal, çarpımsal ve regresyon tipinde birçok tahmin ediciler bugüne kadar önerilmiştir. Bu tahmin edicilere alternatif olarak önerilen üstel tahmin ediciler son zamanlarda yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu çalışmada, Basit ve Tabakalı Rastgele Örnekleme yönteminde yer alan üstel tip tahmin ediciler üzerinde yoğunlaşılmıştır.

Bu tez çalışmasında, ilk olarak BRÖ yöntemi için literatürde yer alan üstel fonksiyona sahip tahmin ediciler tek ve iki yardımcı değişken bilgisinden yararlanmalarına bağlı olarak incelenmiştir. İncelenen tek ve iki yardımcı değişken bilgisine sahip tahmin ediciler, üstel oransal, üstel çarpımsal veya üstel oransal-çarpımsal olmalarına bağlı olarak etkinlik karşılaştırmaları yapılmıştır. BRÖ yöntemi için izlenen tüm işlemler, TRÖ yöntemi için de tekrar edilmiştir. BRÖ yönteminde yer alan üstel tip tahmin ediciler tek ve iki yardımcı değişken bilgisinden yararlanan tahmin ediciler olarak üstel oransal, üstel çarpımsal ve üstel oransal-çarpımsal olmalarına bağlı olarak ayrı ayrı incelenmiş ve etkinlik karşılaştırmaları ilgili bölümlerde yapılmıştır.

Yapılan literatür incelemesi ve etkinlik karşılaştırmasından sonra, Yadav ve Kadılar [15] ve Singh ve Pal [25] çalışmaları dikkate alınarak, her iki örnekleme yöntemi için tahmin edici aileleri önerilmiştir. Önerilen tahmin edici BRÖ yöntemi için, Cochran [7] tarafından önerilen klasik oransal tahmin edici t_R; klasik regresyon tahmin edicisi t_{reg} ve Bahl ve Tuteja [4] tarafından önerilen t_{BT} tahmin edicileriyle karşılaştırılmış ve elde edilen koşullar altında, önerilen tahmin edici ailelerinin karşılaştırılan tahmin edicilerden daha etkin olduğu görülmüştür. Benzer adımlar TRÖ yönteminde de yapılmış ve önerilen tahmin edici ailesi için etkinlik karşılaştırması yapılan $t_{R(st)}$ [11] , klasik regresyon tahmin edicisi $t_{reg(st)}$ ve $t_{BT(st)}$ [30] tahmin edicilerine göre, koşullar sağlandığı sürece daha etkin olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Sayısal gösterim kısmında ise, BRÖ yöntemi incelenen tek yardımcı değişken bilgisinden yararlanan tahmin ediciler için Kadılar ve Çıngı [45] çalışmasından yararlanılmıştır. İki yardımcı değişken bilgisine sahip tahmin edicilerin sayısal gösteriminde ise Çıngı ve diğerleri [46] veri seti kullanılmıştır. TRÖ yönteminde ise, tek yardımcı değişken bilgisine sahip literatürde yer alan tahmin ediciler için Kadılar ve Çıngı [45] çalışması; iki yardımcı değişken bilgisine sahip tahmin edicilerde Çıngı ve diğerleri [46] çalışmasından yararlanılmıştır.

Önerilen tahmin edicilerin sayısal gösteriminde ise, BRÖ yöntemi için Kadılar ve Çıngı [45], TRÖ yöntemi için ise Lone ve Tailor [47] çalışmasında yer alan veri seti kullanılmıştır. Teorik olarak karşılaştırılan tahmin edicilere de örnekleme yöntemine göre aynı sayısal gösterim yapılmıştır.

BRÖ yöntemi için, Çizelge 7.5 ve Çizelge 7.6, TRÖ yöntemi için ise Çizelge 8.6 ve Çizelge 8.7 dikkatle incelendiğinde, teorik olarak elde edilen sonuçların sayısal gösterim ile desteklendiği görülmektedir. Önerilen tahmin edici ailelerinin, elde edilen koşulların sağlanması durumunda karşılaştırma yapılan tahmin edicilere göre daha etkin olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

KAYNAKLAR

[1] Çıngı, H., *Örnekleme Kuramı*, H.Ü. Fen Fakültesi Basımevi, Ankara, **2009.**

[2] Cochran, W. G., *Sampling Techniques,* John Wiley and Sons, New-York , **1977.**

[3] Robson, D. S., Application of multivariate polykays to the theory of unbiased ratio type estimation, *Journal of American Statistical Association*, 52(280), 511-522, **1957.**

[4] Bahl, S., Tuteja, R. K., Ratio and product type exponential estimators, *Journal of Information and Optimization Sciences,* 12(1), 159-164, **1991.**

[5] Solanki, R. S., Singh, H. P., Rathaur, A., An alternative estimator for estimating the finite population mean using auxiliary information in sample surveys, *International Scholarly Research Network Probability and Statistics,* 1-14, **2012.**

[6] Cingi, H., Kadilar, C., *Advances in Sampling Theory-Ratio Method of Estimation*, Bentham Science Publishers, **2009.**

[7] Cochran, W. G., The estimation of the yields of the cereal experiments by sampling for the ratio of grain to total produce, *The Journal of Agricultural Science,* 30(02), 262-275, **1940.**

[8] Srivenkataramana, T., A dual to ratio estimator in sample surveys, *Biometrika*, 67(1), 199-204, **1980.**

[9] Singh, M. P., Ratio cum product method of estimation, *Metrika*, 12(1), 34-42, **1967.**

[10] Sharma, P., Singh, R., A class of exponential ratio estimators of finite population mean using two auxiliary variables, *Pakistan Journal of Statistics and Operation Research,* 11(2), 221-229, **2015.**

[11] Hansen, M. H., Hurwitz, W. N., Gurney, M., Problem and methods of the sample survey of business, *Journal of American Statistical Association*, 41, 174-189, **1946.**

[12] Kushwaha, K. S., Upadhyaya, L. N., Dubey, S. P., A dual to ratio estimator in stratified random sampling, *Proc. Math. Soc.,* 6, 11-15, **1990.**

[13] Koyuncu, N., Kadilar, C., Family of estimators of population mean using two auxiliary variables in stratified random sampling, Communications in Statistics-Theory and Methods, 38(14), 2398-3417, **2009.**

[14] Singh, R., Chauhan, P., Sawan, N., Smarandache, F., Improvement in estimating the population mean using exponential estimator in simple random sampling, *Bulletin of Statistics&Economics,* 3(A09), 13-18, **2009.**

[15] Yadav, S. K., Kadilar, C., Efficient family of exponential estimators for the population mean, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics,* 42(6), 671-677, **2013.**

[16] Ekpenyong, E. J., Enang, E. I., Efficient exponential ratio estimator for estimating the population mean in simple random sampling, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 44(3), 689-705, **2015.**

[17] Shabbir, J., Gupta, S., On estimating finite population mean in simple and stratified random sampling, *Communications in Statistics-Theory and Methods,* 40(2), 199-212, **2011.**

[18] Yadav, S. K., Improved exponential ratio cum dual to ratio type estimator of population mean, *International Journal of Applied and Computational Mathematics,* 1(4), 89-598, **2015.**

[19] Onyeka, A. C., A class of product type exponential estimators of the population mean in simple random sampling scheme, *Statistics in Transition New Series*, 14(2), 189-200, **2013.**

[20] Singh, R., Chauhan, P., Sawan, N., On linear combination of ratio and product type exponential estimator for estimating the finite population mean, *Statistics in Transition New Series,* 9(1), 105-115, **2008.**

[21] Özel Kadilar, G., A new exponential type estimator for the population mean in simple random sampling, *Journal of Modern Applied Statistical Methods,* 15(2), 207-214, **2016.**

[22] Upadhyaya, L. N., Singh, H. P., Chatterjee, S., Yadav, R., Improved ratio and product exponential type estimators, *Journal of Statistical Theory and Practice,* 5(2), 285-302, **2011.**

[23] Shabbir, J., Haq, A., Gupta, S., A new difference-cum-exponential type estimator of finite population mean in simple random sampling," *Revista Colombiana de Estadistica,* 37(1), 199-211, **2014.**

[24] Vishwakarma, G., Singh, R., Gupta, P. C., Pareek, S., Improved ratıo and product type estimators of finite population mean in simple random sampling, *Revista Investigacion Operacional,* 36(3), 70-76, **2016.**

[25] Singh, H. P., Pal, S. K., A new chain ratio-ratio-type exponential estimator using auxiliary information in sample surveys," *International Journal of Mathematics And its Applications,* 3(4B), 37-46, **2015.**

[26] Sharma, B., Tailor, R., A new ratio-cum-dual to ratio estimator of finite population mean in simple random sampling, *Global Journal of Science Frontier Research,* 10(1), 27-31, **2010.**

[27] Noor-ul-Amin, M., Hanif, M., Kadilar, C., Improved exponential type estimators using the ınformation of two auxiliary variables, *Middle-East Journal of Scientific Research,* 19(12), 1711-1715, **2014.**

[28] Singh, H. P., Upadhyaya, L. N., Tailor, R., Ratio cum product type exponential estimator, *Statistica,* 69(4) , 299-310, **2009.**

[29] Riaz, N., Noor-ul-Amin, M., Hanif, M., Regression-cum-exponential ratio type estimators for the population mean, *Middle-East Journal of Scientific Research,* 19(12), 1716-1721, **2014.**

[30] Singh, R., Kumar, M., Singh, R. D., Chaudhary, M. K., Exponential ratio-type estimators in stratified random sampling, in *International Symposium on Optimisation and Statistics*, Aligarh, **2008.**

[31] Singh, R., Kumar, M., Chaudhary, M. K., Kadilar, C., Improved exponential estimator in stratified random sampling, *Pakistan Journal of Statistics and Operation Research,* 5(2), 67-82, **2009.**

[32] Malik, S., Singh, V. K., Singh, R., An improved estimator for population mean using auxiliary information in stratified random sampling, *Statistics in Transition New Series,* 15(1), 59-66, **2014.**

[33] Bedi, P. K., Efficient utilization of auxiliary information at estimation stage, *Biometrical Journal,* 38(8), 973-976, **1996.**

[34] Solanki, R. S., Singh, H. P., An efficient class of estimators for the population mean using auxiliary information in stratified random sampling, *Communications in Statistics-Theory and Methods,* 43(16), 3380-3401, **2014.**

[35] Yadav, S. K., Shukla, A. K., Improved product cum dual to product estimator of population mean in stratified random sampling, *Journal of Statistics Applications&Probability,3(3)* , 363-368, **2014.**

[36] Özel, G., Kadılar, C., A new kind estimator for the population mean in the stratified random sampling, In *International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics*, **2015.**

[37] Özel, G., Modified exponential type estimator for population mean using auxiliary variables in stratified random sampling, *Alphanumeric Journal,* 3(2), 049-056, **2015.**

[38] Yadav, R., Upadhyaya, L. N., Singh, H. P., Chatterjee, S., Improved ratio and product exponential type estimators for finite population mean in stratified random sampling, *Communications in Statistics-Theory and Methods,* 43(15), 3269-3285, **2014.**

[39] Singh, R., Sharma, P., Smarandache, F., Exponential ratio-product type estimators under second order approximation in stratified random sampling, arXiv:1404.2608, **2014.**

[40] Koyuncu, N., Improved exponential type estimators for finite population mean in stratified random sampling, *Pakistan Journal of Statistics and Operation Research,* 12(3), 429-441, **2016.**

[41] Tailor, R., Jatwa, N. K., Tailor, R., Garg, N., Dual to ratio and product type exponential estimators in stratified random sampling using two auxiliary variates, *Journal of Reliability and Statistical Studies*, 6(2), 115-126, **2013.**

[42] Singh, R., Malik, S., A new estimator for population mean using two auxiliary variables in stratified random sampling, in *arXiv:1403.8039,* **2014.**

[43] Tailor, R., Chouhan, S., Ratio-cum-product type exponential estimator of finite population mean in stratified random sampling, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 43(2), 343-354, **2014.**

[44] Lone, H. A., Tailor, R., Singh, H. P., Generalized ratio-cum-product type exponential estimator in stratified random sampling, *Communications in Statistics-Theory and Methods,* 45(11), 3302-3309, **2016.**

[45] Kadilar, C., Cingi, H., Ratio estimators in stratified random sampling, *Biometrical Journal*, 45(2), 218-225, **2003.**

[46] Çıngı, H., Kadılar, C., Koçberber, G., Türkiye genelinde ilk ve ortaöğretim olanaklarının incelenmesi ve belirlenen aksaklıklara çözüm önerilerinin getirilmesi, *Tübitak*, **2008.**

[47] Lone, H. A., Tailor, R., A class of estimators of population mean in case of post stratification, *Pakistan Journal of Statistics and Operation Research*, 12(1), 111-124, **2016.**

ÖZGEÇMİŞ

Kimlik Bilgileri

Adı Soyadı : Ceren ÜNAL

Doğum Yeri : Altındağ

Doğum Tarihi : 17/07/1991

Medeni Hali : Bekar

E-posta : cerenunal@hacettepe.edu.tr

Adresi : Hacettepe Üni. Beytepe Yerleşkesi İstatistik Bölümü Beytepe, Ankara

Eğitim

Lise : 2005 – 2009 Leyla Turgut Lisesi

Lisans : 2009 – 2014 Hacettepe Üniversitesi, İstatistik Bölümü

Yüksek Lisans :

Yabancı Dil ve Düzeyi

İngilizce : 77,5 (YDS)

İş Deneyimi

Eylül 2016 - .... Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi, İstatistik Bölümü-Araştırma Görevlisi

Deneyim Alanları

-

Tezden Üretilmiş Projeler ve Bütçesi

-

Tezden Üretilmiş Yayınlar

-

Tezden Üretilmiş Tebliğ ve/veya Poster Sunumu ile Katıldığı Toplantılar

-

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZ ÇALIŞMASI ORJİNALLİK RAPORU

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
İSTATİSTİK ANABİLİM DALI BAŞKANLIĞI'NA

Tarih: 13/ 06/ 2017

Tez Başlığı: BASİT VE TABAKALI RASTGELE ÖRNEKLEMEDE ÜSTEL FONKSİYONU KULLANAN KİTLE ORTALAMASI TAHMİN EDİCİLERİ

Yukarıda başlığı gösterilen tez çalışmamın a) Kapak sayfası, b) Giriş, c) Ana bölümler, d) Sonuç kısımlarından oluşan toplam 139 sayfalık kısmına ilişkin, 13/06/2017 tarihinde şahsım tarafından *Turnitin* adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 3'tür.

Uygulanan filtrelemeler:

1- Kaynakça hariç
2- Alıntılar dâhil
3- 5 kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Çalışması Orjinallik Raporu Alınması ve Kullanılması Uygulama Esasları'nı inceledim ve bu Uygulama Esasları'nda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

13/ 06/ 2017

Adı Soyadı:	CEREN ÜNAL
Öğrenci No:	N14124537
Anabilim Dalı:	İSTATİSTİK
Programı:	İSTATİSTİK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI
Statüsü:	☒ Y.Lisans ☐ Doktora ☐ Bütünleşik Dr.

DANIŞMAN ONAYI

UYGUNDUR.

C. Kadılar

PROF. DR. CEM KADILAR