HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı

Matematik Eğitimi Programı

ÖĞRETMEN ADAYLARININ GERÇEL SAYILARIN CEBİRSEL ÖZELLİKLERİNİ OLUŞTURMA SÜREÇLERİ

Oğuzhan GENÇASLAN

Yüksek Lisans Tezi

Ankara, 2024

Liderlik, araştırma, inovasyon, kaliteli eğitim ve değişim ile

Daha ileriye... En İyiye...

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı

Matematik Eğitimi Programı

ÖĞRETMEN ADAYLARININ GERÇEL SAYILARIN CEBİRSEL ÖZELLİKLERİNİ OLUŞTURMA SÜREÇLERİ

PRESERVICE TEACHERS' PROCESSES OF CONSTRUCTION OF ALGEBRAIC PROPERTIES OF REAL NUMBERS

Oğuzhan GENÇASLAN

Yüksek Lisans Tezi

Ankara, 2024

Öz

Sayılar ve sayı sistemleri matematiğin temelinde yer alması nedeniyle matematik öğretim süreçlerinde önemli bir rol oynamaktadır. Bu sayı sistemlerinden biri olan gerçel sayılar sistemi, modern matematiğin kök hücresi olarak nitelendirilir. Gerçel sayılar sisteminin sağladığı cisim aksiyomlarının işe koşulmasıyla oluşturulabilen ve sayı sistemlerinin işlevini artıran bazı cebirsel özellikler yapılandırılmıştır. Gerçel sayıların bu cebirsel özelliklerinin, okul matematiğinde öğrencilere doğrudan verildiği ve ilköğretimden itibaren öğretim süreçlerinde kullanıldığı bilinmektedir. Bu bağlamda, çalışmada matematik öğretmeni adaylarının gerçel sayıların cebirsel özelliklerine ilişkin bilgi oluşturma süreçlerinin RBC modeli çerçevesiyle incelenmesi amaçlanmıştır. Bu cebirsel özellikler $a \cdot 0 = 0$ ve $a \cdot (-1) = (-a)$ olarak belirlenmiştir. Çalışma nitel araştırma yaklaşımı ile tasarlanmış bir durum çalışmasıdır. Çalışma grubu altı ilköğretim matematik öğretmenliği programı öğrencisinden oluşmaktadır. Çalışmanın verileri, etkinlik uygulama formu yoluyla gerçekleştirilen öğretim görüşmeleri kapsamında elde edilmiştir. Öğretim görüşmeleri sırasında sesli düşünme yaklaşımı benimsenmiştir. Elde edilen veriler, RBC modelinde yer alan tanıma, kullanma ve oluşturma epistemik eylemleri çerçevesiyle analiz edilmiştir. Verilerin analizi sonucunda, katılımcılardan biri belirlenen iki cebirsel özelliğin oluşturulma sürecinde de sadece tanıma eylemi gerçekleştirebilmiştir. Üç katılımcı tanıma ve kullanma eylemlerini gerçekleştirebilmiştir. İki katılımcı ise her iki cebirsel özelliği de oluşturmuştur. Ayrıca, üniversite öğrencilerinin bilgi oluşturma süreçlerinde, toplama işleminin etkisiz eleman özelliğini, dağılma özelliğini ve toplama işleminin ters eleman özelliğini sıklıkla kullanarak sonuca ulaştığı görülmüştür. Bilgiyi oluşturamayan katılımcıların ise hem ispatlama ile ilgili hem de gerçel sayılar ve cebirsel özellikleriyle ilgili yetersiz anlayışlara sahip olabileceğine yönelik bulgular elde edilmiştir. Sonuçlar kapsamında çeşitli önerilerde bulunulmuştur.

Anahtar sözcükler: gerçel sayılar, bilgi oluşturma, RBC modeli, ispat

Abstract

Numbers and number systems have an important role in mathematics teaching processes as they are at the foundation of mathematics. One of these number systems, the real number system, is considered to be the origin of modern mathematics. Some algebraic properties that can be constructed by utilizing the field axioms provided by the real number system and that increase the function of number systems have been constructed. It is known that these algebraic properties of real numbers are given directly to students in school mathematics and used in teaching processes starting from primary education. In this context, this study aimed to examine the knowledge construction processes of preservice mathematics teachers about the algebraic properties of real numbers within the framework of the RBC model. These algebraic properties were determined as $a \cdot 0 = 0$ and $a \cdot (-1) = (-a)$. The study is a case study designed with a qualitative research approach. The study group consisted of six primary mathematics teaching program students. The data of the study were obtained within the scope of teaching interviews conducted through the form of activity practice. Think-aloud approach was adopted during the teaching interviews. The data obtained were analyzed within the framework of epistemic acts of recognizing, building-with and constructing in the RBC model. As a result of the analysis of the data, one of the participants could only perform the act of recognizing in the process of constructing the two algebraic properties. Three participants were able to perform both recognizing and building-with actions. Two participants were able to construct both algebraic properties. In addition, it was observed that university students frequently used the identity element property of addition, the distributive property, and the inverse element property of addition in the knowledge construction process. It was found that the participants who could not construct knowledge may have inadequate understandings about both proof and real numbers and their algebraic properties. Finally, some recommendations were made.

Keywords: real numbers, knowledge construction, RBC model, proof

Teşekkür

Yüksek lisans sürecimde yol göstericiliği ile bu süreci verimli ve doğru bir şekilde yürütmemi sağlayan, sürecimin son anına kadar emeğini ve desteğini asla esirgemeyen değerli danışmanım Prof. Dr. Şenol DOST’ a sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Tez yazma sürecimde görüşlerini paylaşarak durumlara farklı açılardan bakmamı sağlayan değerli ikinci danışmanım Prof. Dr. Memet KULE’ ye teşekkür ederim.

Tez savunmamda yer alan değerli jüri üyelerinden; bana akademik anlamda deneyim edinme fırsatı veren ve değerli tecrübelerini aktaran Doç. Dr. Selin URHAN hocama ve aklıma gelen her türlü soruya içtenlikle cevap vererek desteğini sunan Dr. Öğr. Üyesi Seda ŞAHİN hocama teşekkürü borç bilirim.

Her zaman ve her koşulda yanımda olup bana yalnız olmadığımı hatırlatan ve özverisiyle beni bugünlere getiren canım annem Ayşe KİRAZ' a ve bugün olduğum kişide pay sahibi olan, öngörüleri ve hayat tecrübeleriyle bana yol gösteren babam Mesut GENÇASLAN' a emeklerinden dolayı minnettarım.

Matematik ile ilgili hatırımda kalan en eski anılarımda yanımda olan, zekasından ve ileri görüşlülüğünden emin olduğum ve bende her zaman bir ışık olduğuna beni inandıran saygıdeğer ve emektar dedem Yaşar KİRAZ' a ve beni büyüten, sözleriyle aklımda yer eden canım anneannem Zübeyde KİRAZ' a sonsuz teşekkür ederim.

Bu süreçte desteği ve yardımıyla yanımda olduğunu hissettiren Buşra KARA' ya çok teşekkür ederim.

Ayrıca, yüksek lisans süresince sağladığı destekten dolayı TÜBİTAK’a teşekkür ederim.

İçindekiler

Tablolar Dizini

Şekiller Dizini

Simgeler ve Kısaltmalar Dizini

MEB: Millî Eğitim Bakanlığı

NCTM: National Council of Teachers of Mathematics

CCSSI: Common Core State Standards Initiative

YÖK: Yükseköğretim Kurulu

RBC: Recognizing, Building with, Constructing

$\mathbb{R}$: Gerçel sayılar kümesi

Bölüm 1

Giriş

Bu bölümde, problem durumunun ne olduğu ve nereden kaynaklandığı açıklanmış, araştırmanın temel amacına ve önemine değinilmiş ve bunlara yönelik oluşturulan araştırma problemi ile alt problemler ifade edilmiştir. Bölümün sonunda ise çalışmaya ilişkin sayıltıların ve sınırlılıkların neler olduğuna ve çalışmanın kapsamını belirleyen tanımlara yer verilmiştir.

Problem Durumu

İnsanlığın varoluşundan bu yana gelişerek ilerleyen matematik, insanoğlunun ihtiyaçları sayesinde ortaya çıkmıştır (D’Ambrosio & Almeida, 2017). İlk zamanlardan günümüze kadar devamlılığını sürdüren bu ihtiyaçlardan birisi de sayma ihtiyacıdır. Sayı olarak adlandırılan simgeler, sayma eyleminin ifade edilmesine yönelik bir standart oluşturulması amacıyla yaratılmış sembolik gösterimlerdir (Ansari, 2008). İnsanların farklı gösterimlere sahip olan sayı sembolleri ve sayılarla ilişkili kavramlarla birlikte gelişen becerileri, insan bilişini diğer canlılardan farklı kılmıştır (Margolis & Laurence, 2008). Bu durum, matematiksel sistemin bir parçası olan sayıların öneminin bir göstergesidir.

Bireyler gündelik yaşam içerisinde sayı kavramına sıklıkla ihtiyaç duyarlar. Sayıların bu yönü sebebiyle öğrenciler sayıları günlük hayatla ilişkilendirirken daha az zorlanmaktadır (Pan vd., 2022). Bu nedenle, sayı kavramının anlaşılması zor olmadığı düşünülerek kavramsal boyutu ve paradigması göz ardı edilebilmektedir. Matematiğin temelini oluşturduğu ifade edilen sayıların (NCTM, 1989) esas mantığının ve paradigmasının farkında olunmaması, matematik öğrenen veya matematik yapmaya çalışan bireylerin özellikle cebir ile ilişkili olan durumlarda kısıtlı bir anlayışa sahip olmalarına sebep olmaktadır (Vamvakoussi & Vosniadou, 2007; Giannakoulias vd., 2007).

Okul matematiğinde sayılara yönelik anlatımlara doğal sayılar ile başlangıç yapılır ve devamında tam sayılar, rasyonel sayılar, irrasyonel sayılar, gerçel sayılar ve karmaşık sayılar ele alınır (Carraher vd., 2008). İrrasyonel sayılar, gerçel sayı doğrusu üzerinde yer alan rasyonel sayıların arasındaki sürekliliği sağlar. Bu durum tamlık özelliği olarak ifade edilir ve rasyonel sayılar ile irrasyonel sayılardan oluşan gerçel sayılar kümesi ($\mathbb{R}$) tamlık özelliğini içerisinde barındırır. $\mathbb{R}$'yi de içeren gerçel sayılar sistemi, tamlık özelliğinin de desteğiyle Weierstrass tarafından geliştirilen modern analizin payandası görevini görür (Tall & Katz, 2014). Bunun yanında, gerçel sayılar sistemi birçok matematiksel kavrama ve işleme sağlam bir zemin sağlayarak matematiğin kök hücresi rolünü üstlenmektedir. Gerçel sayılar, okul matematiğinin yanında kalkülüs, cebir gibi ileri düzey matematik alanlarına da temel oluşturur. Ayrıca, gerçel sayıların, gerçek dünya ile ilgili problemlerin modellenerek çözülmesine ve gerçek dünya üzerinde ölçümler yapılmasına yönelik bir çerçeve olarak kabul edildiği bilinmektedir (Dougherty, 2017). Tüm bu işlevler düşünüldüğünde, öğrencilerin matematik yaparken gerçel sayılar ile sıklıkla karşılaşacağı ve matematiksel kavramları veya durumları kavrayışlarında gerçel sayılara ihtiyaç duyacağı söylenebilir.

M.Ö. 300 yılında yazılan Elementler adlı eserde Öklid'in Pisagorcuların, Theaitetos'un ve Eudoxus'un ilgili çalışmalarını kaydetmesiyle ilk kez görülen gerçel sayılar, 20. yüzyılın başlarında yapılan Dedekind'in çalışmalarına kadar uzanır (Klein, 1968). Günümüzde gerçel sayılar ve alt kümelerinin öğretimi, ilköğretim ve ortaöğretim matematik programlarının temel bir bileşenidir (NCTM, 2000; MEB, 2018a; MEB, 2018b). Gerçel sayılar, özellikle üniversitelerde matematik eğitimi süreçlerinde merkezi rol oynar (YÖK, 2018). Gerçel sayıların yapısına ilişkin bilgiler, matematiğin temellerini anlama açısından önemlidir. Bunun yanında, gerçel sayılar sistemi, ileri düzey birçok matematiksel kavramın (örn., türev, süreklilik, integral, limit) yapılandırılmasında kilit role sahiptir (Tall & Katz, 2014). Buna rağmen, öğrencilerin bu kavramlarla ilgili günümüze kadar devam eden çeşitli sorunlar yaşadığı ve zorluklarla karşılaştığı bilinmektedir (örn., Adiredja, 2021; Roh, 2008; Tall, 1993). Örneğin, üst düzey bazı matematiksel kavramlar yoluyla tanımlanan türevin cebirsel ve geometrik yorumunun kapsadığı değişim oranı ve limit kavramlarına ilişkin anlamlandırma sürecinde öğrencilerin zorlandığı görülmüştür (Orton, 1983). Alanyazında, bu zorluklara yönelik çeşitli öneriler geliştirilmiştir (örn., Gençaslan, 2022; Zengin & Tatar, 2014). Diğer yandan, öğrencilerin fonksiyonun sürekliliği ile fonksiyonun türevi arasındaki ilişkiyi kavrama sürecinde de sorunlar yaşadığı bilinmektedir (Viveros & Sacristan, 2002).

Gerçel sayılar sisteminin birden çok inşa biçimine sahip olması ve tamlık, yakınsaklık gibi kavramları içerisinde barındırması, öğrenciler tarafından gerçel sayıları ve cebirsel özelliklerini anlaşılması nispeten zor bir hâle getirmektedir (Adams, 1998; Merenluoto & Lehtinen, 2002). Bu nedenle, öğrencilerin bu konularda çeşitli inşa ve ispat süreçlerini deneyimleyebilmesi adına öğretim programlarında ve ders kitaplarında gerçel sayı yapısına ve bu yapının cebirsel özelliklerine yeterli önemin verilmesi gerekmektedir (Vamvakoussi & Vosniadou, 2007). Akıl yürütme ve ispat kavramlarının sıklıkla gündeme geldiği bu inşa süreçlerinde ortak olan durum, direkt olarak aksiyomlar yoluyla yapılan başlangıçlara sahip olmalarıdır (Nesin, 2010). Öğrenciler bu tür durumlarla ve örneklerle yeterince karşılaşmamış ve çeşitli uygulamalar yapmamış ise bu süreçleri zihinlerinde anlamlandırabilmeleri için daha fazla çabalamakta ve zorlanmaktadırlar (Moore, 1994).

Genel anlamda matematiksel sistemde ve özel olarak sayı sistemlerinin oluşturulma süreçlerinde, aksiyomlarla yapılan başlangıcın ardından çeşitli tanımlar yapılarak teoremler oluşturulur ve teoremler kanıtlanarak inşa süreci devam eder. İspat, bu tür sistemlerin geliştirildiği süreçlerde devreye girmektedir. İspatlama, yapının inşa edilmesi sırasında kullanılmak istenen teoremlerin doğruluğundan emin olunmasını sağlar. Ayrıca, matematikçilerin bilgiyi oluşturma ve doğrulama için kullandığı bir araç olan ispat, matematik öğretim süreçlerinde de önemli bir yer tutmaktadır (Herbst, 2002). İspatlama sürecinde yapılan uygulamalara paralel olarak zihinde gerçekleşen akıl yürütme süreci de ispat sürecine eşlik etmektedir. Akıl yürütme, matematiksel düşünme süreçlerinin gerektirdiği üst düzey bir beceri olarak görülür (Ross, 1998). Bu süreçlerde argümanlar oluşturulur ve çıkarımlar yapılır. Bir ifadenin kanıtlanması sırasında, farklı durumlarla ilgili çıkarımların da önü açılmaktadır. Tüm bu anlamları ve ilişkileri ile ispat kavramı, köklerinde kabul edilen gerçekler veya esasların ve verilerin yer aldığı, bu köklerden beslenen ve uçlarında yapraklar (çıkarımlar) bulunan dalların (bağlantıların) birbirine bağladığı ve en tepesinde bir sonuç yer alan bir ağaca benzetilebilir (Bell, 1976). Sonuç olarak, matematik yaparak zihinlerinde sürekli yeni bilgiler yapılandıran öğrencilerin, ispatlama ve akıl yürütme bağlamında yeterli bir düzeyde olmalarının önemli olduğu ifade edilebilir.

Öğrenme ortamlarında yeni bilgilerin oluşturulmasına yönelik doğrudan anlatım, örnekler üzerinden yapılabilecek uygulamalar veya deneyler gibi birçok yol bulunmaktadır (Dean & Kuhn, 2007). Matematik özelinde düşünüldüğünde ise matematiğin doğasına uymayan öğretim teknikleri ve bilgi oluşturma süreçleri, öğrencilerin bu süreçleri başarılı bir şekilde sonuçlandıramamasına neden olabilmektedir (Ernest, 1989). Tümdengelimsel bir bilim olan matematik biliminin öğretim süreçlerinde, tümel bilgi formlarından çıkarımlar yapılarak yeni bilgilere ulaşılması söz konusudur. Bu tür çıkarımların yapılabilmesi için akıl yürütmeye imkân veren ortamlar gerekmektedir. Aksi bir durumda, bilgilerin tekil olarak diğer ögelerle arasındaki ilişkilerden yoksun bir şekilde sunulması, öğrencilerin bu bilgileri ezberlemelerine ve bilgilerin diğer kavramlardan tamamen bağımsız bir şekilde oluşturulmasına neden olur (Baki, 2008). Öğrenenlerin zihinlerinde meydana gelen bu kopukluk ve boşluk, ileride karşılaşacakları ve bağlantılı olan bilgilerin oluşturulma süreçlerinde zorluklar yaşamalarına neden olabilmektedir (Bell, 1976). Gerçel sayılar bağlamında yapılan çalışmalar, bu durumun geçmişten günümüze devam ettiğini göstermektedir (örn., Çelen, 2023; Lehtinen vd., 1997; Tall & Schwartzenberger, 1978).

Eğitim alanında çalışmalarına devam eden araştırmacılar, öğretme ve öğrenmeye yönelik geleneksel ve öğretmen merkezli yaklaşımların sınırlılıklarını fark ettikçe, bireysel (ya da küçük gruplarla) bilgi oluşturma süreçleri son yıllarda giderek daha da önemli hâle gelmektedir (Schoenfeld, 1994). Bilginin oluşturulması yaklaşımı öğrencilerin öğrenme süreçlerindeki aktif rolünü vurgulamakta, onları problem çözme, eleştirel düşünme ve belirli bir konu veya kavram hakkında kendi anlayışlarını ve bilgilerini inşa etmelerine imkân tanıyan sorgulamaya dayalı faaliyetlere katılmaya teşvik etmektedir (Kidron & Monaghan, 2009; Tabach & Hershkowitz, 2002). Bu yaklaşım, öğrenmenin başkalarıyla etkileşim yoluyla gerçekleşen sosyal ve bilişsel bir süreç olduğu fikrine dayanır ve öğrenenlerin kendi bilgilerini kişisel deneyimler, derin düşünme süreçleri ve başkalarıyla etkileşimler yoluyla oluşturduklarını öne süren yapılandırmacı yaklaşıma dayanır (Piaget, 1973; Vygotsky, 1978; Dreyfus, 2007). Bu durum, matematik eğitimi bağlamında öğrencilerin sadece bir öğretmenden veya ders kitabından bilgi edinmek yerine öğrenme sürecine aktif olarak katılmaları gerektiği anlamına gelir.

Bilgi oluşturma yaklaşımının özellikle matematik eğitiminde etkili olduğu görülmektedir (Kidron & Monaghan, 2009). Araştırmalar, problem çözme faaliyetlerine ve sorgulamaya dayalı öğrenmeye katılan öğrencilerin, formülleri ve prosedürleri ezberleyenlere kıyasla matematiksel kavramlar ve ilkeler hakkında derin bir anlayış geliştirme olasılıklarının daha yüksek olduğunu göstermiştir (NCTM, 2014). Bu yaklaşım, öğrencilerin yeni bilgileri mevcut bilgilerle ilişkilendirmelerine, problem çözmeye yönelik farklı yaklaşımları keşfetmelerine ve kendi öğrenmeleri üzerinde düşünmelerine olanak tanır. Öğretim süreçlerinin bilgi oluşturma yaklaşımına uygun biçimde şekillendirilmesi bu yaklaşıma fayda sağlayabilir. Ancak, öğrencilerin sınıf ortamında gerçekleştirdikleri bilgi oluşturma süreçlerini takip etmek ve sürecin değerlendirilmesi aşılması gereken ciddi problemlerdendir (Dreyfus vd., 2001). Bu bağlamda, matematiksel sınıf ortamlarında gerçekleşen bilgi oluşturma süreçlerinin analiz edilebilmesi için belirli bir çerçeve sağlayan RBC modeli (Hershkowitz vd., 2001), bağlam içinde soyutlama (bilgi oluşturma) fikri ile ortaya atılmıştır. Model içerisinde yer alan ve gözlemlenebilir olan *tanıma (recognizing), kullanma (building-with)* ve *oluşturma (constructing)* epistemik eylemleri, öğrencilerin söylemlerinin bu temalara göre analiz edilmesini sağlar ve öğrencinin bilgi oluşturma süreçlerinde geçirdiği aşamaları ortaya koymaya yarar (Dreyfus vd., 2001). Bu süreçlerin analiz edilmesi, öğretim süreçlerinde öğrencilerin ne tür ihtiyaçları olduğu ve buna yönelik geliştirilecek uygulamalarda nelere dikkat edileceği gibi önemli konularda fikir edinilmesini sağlamaktadır (Schwarz vd., 2004).

Bu çalışmada, matematik öğretmeni adaylarının gerçel sayıların cebirsel özelliklerini oluşturma süreçleri incelenmiştir. Bilgi oluşturma süreçleri, RBC modelinde yer alan epistemik eylemler çerçevesinde değerlendirilmiştir. Çalışma kapsamında seçilen gerçel sayıların cebirsel özellikleri, gerçel sayılar sisteminin sağladığı cisim aksiyomları yoluyla elde edilmektedir. Sistemin oluşturulmasının ilk basamağı olan aksiyomlar, yukarıda ifade edilen tümel bilgilere örnek olarak verilebilir. Bu çalışmada ele alınan cebirsel özellikler aşağıda verilmiştir:

- Her $a \in \mathbb{R}$ için $a \cdot 0 = 0$ olur.
- Her $a \in \mathbb{R}$ için $a \cdot (-1) = (-a)$ olur.

Bu özellikler, gerçel sayılar sisteminin sağlamış olduğu cisim aksiyomlarından yararlanılarak elde edilmektedir. Sayı sistemi içerisinde tanımlanmış bilinen toplama ve çarpma işlemi kapsamında kullanılan cisim aksiyomları yoluyla yapılandırılan ispat süreçleri, bu çıkarımları ortaya koymanın tek yoludur. Bu nedenle, öğrencilerin gerçel sayılar sistemine ve içerdiği işlemlerin sağladığı özelliklere yönelik kavramsal düzeyde bir anlayışa sahip olmasının önemli olduğu düşünülmektedir (Belin, 2016). Özellikle işlemler ve özelliklerinin kavramsal düzeyde anlaşılması, kavramsallaştırmanın zor olduğu matematiksel nesnelerin gerekçelendirilmesinde kullanılmaktadır (Wasserman, 2016). Buna rağmen, okul matematiğinde bu özellikler -tam aksi yapılması gerekirken (Robinet, 1986)- öğrencilere küçük yaşlardan itibaren üzerine düşünmelerine fırsat verilmeden doğrudan verilmektedir. Cebirsel özelliklerin işlevlerini ezberlemek durumunda kalan öğrenciler, ileride sıkça karşılaşacakları gerçel sayılar sistemi ile ilgili yeterli bir anlayış elde edememektedir (Tall & Schwartzenberger, 1978). Bu anlamda, matematik öğretmeni adaylarının gerçel sayılar sistemiyle ilgili akıl yürütme süreçleri sonucunda ortaya çıkan çıkarımları ve ispatları tecrübe etmeleri için uygun sınıf ortamı ve tartışma süreci gereklidir (Smith vd., 2023). Bu çalışmada, matematik öğretmeni adaylarının, gerçel sayıların yapılandırılmasında ve işlevselliğinde büyük rol oynayan cebirsel özellikleri oluşturma süreçleri incelenmiştir. Konu alanı olarak gerçel sayıların seçilmesine etki eden en temel unsurlar, sayılar alanının matematiğin temelini oluşturması (NCTM, 2000; Giannakoulias vd., 2007; MEB, 2018b) ve gerçel sayıların matematiksel birçok konu ve kavramın anlaşılmasında kilit rol oynamasıdır (Fischbein vd., 1995; Sirotic & Zazkis, 2007; Giannakoulias vd., 2007; Bergé, 2008; Çevikbaş & Argün, 2017). Diğer yandan, öğrencilerin gerçel sayılarla ilgili yaşadıkları zorluklar sonucunda günümüze kadar devam eden düşük kavramsal anlayış düzeylerine (Baştürk, 2015; Cornu, 1991; Sierpinska, 1987; Yiğitcan Nayir vd., 2018), yetersiz işlemsel beceriye (Tall & Schwartzenberger, 1978; Voskoglou & Kosyvas, 2012) ve çeşitli kavram yanılgılarına sahip olmaları da (Çelik & Özdemir, 2011; Szydlik, 2000; Toluk Uçar, 2015; Yazıcı & Albayrak, 2019) konu seçiminde etkili olan unsurlar arasındadır. Özel olarak $a \cdot 0 = 0$ cebirsel özelliğinin seçilmesinin sebebi, öğrencilerin (Jooste, 2011; Levenson vd., 2004; Santos, 2019; Yantz, 2013; Yorulmaz & Önal, 2017), öğretmen adaylarının (Monandi, 2021; Risnanosanti, 2020) ve öğretmenlerin (Hill, 2000; Jooste, 2011; Osterhus, 1998) sıfır ile çarpma konusunu kural temelli öğretimler yoluyla ezberlediklerini ve eksik kavramsal anlayışa sahip olduklarını gösteren çalışmalardır. $a \cdot (-1) = (-a)$ cebirsel özelliğinin seçilme nedeni olarak da benzer şekilde öğrencilerin (-1) ile çarpma konusunda yetersiz kavramsal anlayışa sahip olmaları gösterilebilir (Lakoff & Núñez, 2000; Mowat & Davis, 2010).

Araştırmanın Amacı ve Önemi

Bu tez çalışmasında, matematik öğretmeni adaylarının, gerçel sayıların cebirsel özelliklerine ilişkin bilgi oluşturma süreçlerinin RBC modeli çerçevesiyle incelenmesi amaçlanmıştır.

Matematikteki birçok konu ve kavramın temelini oluşturan gerçel sayıların önemine (Fischbein vd., 1995; Sirotic & Zazkis, 2007) rağmen günümüzde öğrencilerin anlamakta zorlandığı, çeşitli kavram yanılgılarına ve eksik kavrama düzeylerine sahip oldukları bir konu olmaya devam etmektedir (Çelen, 2023; Dreyfus, 1991). Ayrıca aksiyomatik yapısıyla birlikte analizin temellerini atan gerçel sayıların inşa sürecinde de kullanılan ispat, akıl yürütme ve çıkarsama eylemleri, öğrencilerin bu sayı sistemine yönelik anlayış geliştirmesi amacıyla gerçekleştirilen öğretim uygulamaları içerisinde de yer almalıdır (Vamvakoussi & Vosniadou, 2007).

Cebir alanı ile ilgili bilgi oluşturma süreçlerinin RBC modeli yoluyla analizine yönelik çalışmalar (örn., Altun & Yılmaz, 2010; Tabach vd., 2006; Tabach vd., 2014; Tsamir & Dreyfus, 2002), cebir alanı ile ilgili ispat çalışmaları (Belin & Akar, 2020; Fajriah & Suryaningsih, 2020; Healy & Hoyles, 2000; Rizos & Adam, 2022) ve RBC modeli çerçevesinde gerçekleştirilen ispat çalışmaları (Dreyfus & Kidron, 2014; Kaya, 2018; Kidron & Dreyfus, 2014; Pala, 2020) vardır. Bu çalışmaların, genel anlamda cebir alanıyla ilgili olanları olsa da özel olarak gerçel sayılara ve gerçel sayıların cebirsel özelliklerine ilişkin bir bilgi oluşturma çalışmasına rastlanmamıştır. Ayrıca, yerli ve yabancı literatürde incelenen çalışmalar arasında direkt olarak ispat süreçlerine yönelik yapılan çalışmalarında daha az olduğu görülmüştür.

Bu tez çalışması, matematik öğretmeni adaylarının gerçel sayıların cebirsel özelliklerini oluşturma süreçlerini ortaya koymayı amaçlamaktadır. Elde edilen sonuçların, matematik öğretim programlarının geliştirilme süreçlerinde, gerçel sayılar ve cebirsel özellikleriyle ilgili kısımların akıl yürütmeye dayalı öğrenme ortamlarıyla zenginleştirilmesi bağlamında katkı sağlayacağı düşünülmektedir. Ayrıca, çalışmanın, öğretim programı doğrultusunda hazırlanan ders kitaplarındaki gerçel sayılarla ilgili bölümlere, öğrencilerin gerçel sayılar sistemine ve cebirsel özelliklerine yönelik inşa ve ispat süreçlerini deneyimleyebilecekleri etkinliklerin kazandırılması anlamında da fayda sağlayacağı ifade edilebilir. Son olarak, bu tez çalışması matematik eğitimi alanyazınına gerçel sayıların cebirsel özelliklerine yönelik boşluğu doldurması bakımından da önemli görülmektedir.

Araştırma Problemi

Araştırmanın ana problemi, “Matematik öğretmeni adaylarının gerçel sayıların cebirsel özelliklerine ilişkin bilgi oluşturma süreçleri nasıldır?” olarak belirlenmiştir.

Alt Problemler

1. Matematik öğretmeni adaylarının “Her $a \in \mathbb{R}$ için $a \cdot 0 = 0$ olur.” bilgisini oluşturma süreçleri nasıldır?
2. Matematik öğretmeni adaylarının “Her $a \in \mathbb{R}$ için $a \cdot (-1) = (-a)$ olur.” bilgisini oluşturma süreçleri nasıldır?

Sayıltılar

Araştırmaya seçilen örneklem grubunun, uygulama etkinliğindeki sorulara verdikleri cevapların içtenlikle ve yanlılıktan uzak olduğu kabul edilmiştir.

Sınırlılıklar

Araştırma;

1. Matematik öğretmeni adaylarının gerçel sayıların cebirsel özelliklerini oluşturmasına yönelik hazırlanan uygulama etkinliği ile,
2. Çalışma grubu, bir devlet üniversitesinde öğrenim görmekte olan matematik öğretmeni adaylarıyla,
3. 2022-2023 yılları arasındaki eğitim öğretim dönemlerine elde edilen bulgularla,

sınırlıdır.

Tanımlar

Gerçel Sayılar Sistemi: Gerçel sayılar kümesi, bilinen toplama işlemi, bilinen çarpma işlemi, sıralama bağıntısı, 0 elemanı ve 1 elemanından oluşan bir sayı sistemidir (Nesin, 2019).

RBC Modeli: Tanıma (recognizing), kullanma (building with) ve oluşturma (constructing) epistemik eylemleri yoluyla matematiksel bilgi oluşturma süreçlerinin analiz edilebilmesi sağlayan bir modeldir (Hershkowitz vd., 2001).

İspatlama: Bilgilerin kesinliğinden emin olunmasını, yeni bilgilerin doğruluğu hakkında kişilerin ikna edilmesini ve bilgilere yönelik açıklamalar yapılmasını sağlayan eylemdir (Bell, 1976; Tall, 1989; de Villiers, 1990).

Akıl Yürütme: Argüman oluşturmak ve yargılara varmak için benimsenen düşünme biçimidir (Lithner, 2000).

Çıkarım: Çeşitli önermeler kullanarak ve tanımlardan yararlanılarak yeni önermeler geliştirmektir (Weber, 2005).

Bölüm 2

Araştırmanın Kuramsal Temeli ve İlgili Araştırmalar

Bu bölümün amacı, çalışmanın kuramsal çerçevesini oluşturan RBC modelini açıklamak, bu modele yönelik ilgili araştırmaları sunmak ve çalışmanın odak konusu olan gerçel sayıları tanıtarak cebir alanına ve özellikle gerçel sayılara yönelik araştırmaları gözden geçirmektir. Bu amaç doğrultusunda bu bölümde sıralı olarak;

- Sayıların matematik eğitimindeki yeri ve önemine değinilerek gerçel sayılar ve cebirsel özellikleri ayrıntılı bir şekilde tanıtılmış,
- Gerçel sayılara yönelik bazı çalışmaların ilgili bulguları ifade edilmiş,
- Çalışmanın kapsamı dikkate alınarak ispat ve ispatlama kavramlarından bahsedilmiş,
- Çalışmanın kuramsal çerçevesi bağlamında, RBC modeli ve modelde yer alan epistemik eylemler açıklanmış,
- Çeşitli sınıf düzeylerine yönelik cebir alanı kapsamında RBC modeli yardımıyla gerçekleştirilen bilgi oluşturma ve ispat süreci analizlerine ilişkin araştırma bulguları sunulmuştur.

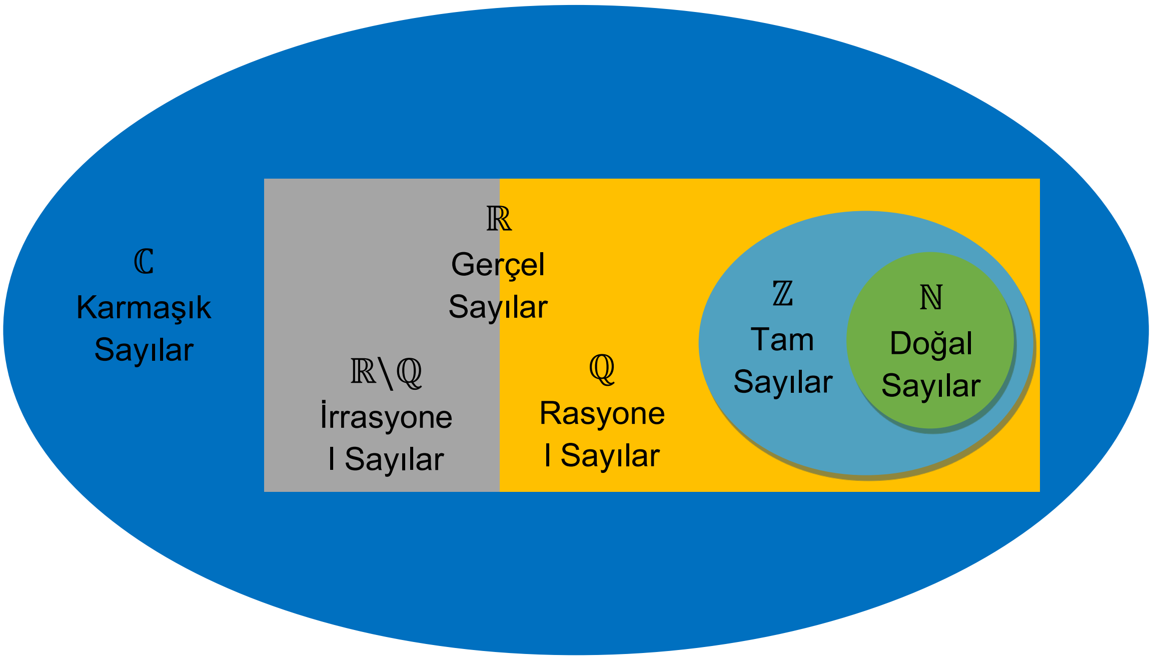
Gerçel Sayılar ve Cebirsel Özellikleri

Sayılar, matematik öğretim programlarının ve matematik öğrenim süreçlerinin temel taşı olarak nitelendirilir (NCTM, 2000). Öğrenciler okullardaki matematik eğitimi süreçlerinde, başlangıcı doğal sayıların keşfedilmesiyle yaparlar ve doğal sayıların zenginleştirilmesiyle gerçel sayılar ortaya çıkar. Bu yapılandırma, doğal sayıların sırasıyla tam sayılar ve rasyonel sayılar kümelerine genişletilmesinin ardından irrasyonel sayılar kümesinin eklenmesiyle gerçekleşir. Ardından da karmaşık sayıların oluşturulması gelir.

Şekil 1'de kümelerin birbirleriyle olan kapsama ilişkileri resmedilmiştir. Bu şekilden de anlaşılacağı üzere, gerçel sayılar kümesinin elemanları yalnızca rasyonel sayılar kümesinin ve irrasyonel sayılar kümesinin elemanlarından oluşmaktadır. Çoğu kaynakta bu duruma dikkat edilerek hazırlanmış şemalar yer almaktadır (Merenluoto & Palonen, 2007). Ancak bazı kaynaklarda, öğrencilere gerçel sayı kümesinin rasyonel ve irrasyonel sayı kümelerinde olmayan bazı elemanlara sahip olduğunu düşündürecek şekilde hazırlanmış şemalar bulunabilmektedir. Bu durum, öğrencilerin ileriki öğrenim süreçlerinde gerçel sayılar kümesinin alt kümeleriyle ilişkisi hakkında çeşitli kavram yanılgılarına ve anlam karmaşalarına sebep olabilir (Giannakoulias vd., 2007).

Şekil 1

Sayı Kümelerinin Birbiriyle İlişkisi



Öğrencilerin sayı sistemlerini inşa etmeye ve alt kümelerden diğer sayı kümelerine doğru gerçekleşen genişleme süreçlerine hakimiyeti, ileride karşılaşacakları konu ve kavramları anlayış düzeylerini etkilemektedir (Fischbein vd., 1995; Merenluoto & Palonen, 2007). Sayılar gibi temel konularda öğrencilerin yaşadığı zorlukların ileriki öğrenmelerine yansımaması adına, matematik ders kitaplarında bu konu ve kavramlara gerekli önemin verilmesine dikkat edilmelidir (Merenluoto & Lehtinen, 2002; Voskoglou

& Kosyvas, 2012). Ayrıca, öğrencilere matematik öğretim programları doğrultusunda, küçük yaşlardan itibaren matematiğin günlük hayatla ve insanoğlunun ihtiyaçlarıyla ilişkisinin fark ettirilmesi gerektiği ifade edilmektedir (Yavuz Mumcu, 2017). Bu bağlamda, sayılar alanına yönelik uygulanacak olan öğretim süreçlerinde öğrencilere, sayı kümelerinin genişleme işlemlerine, mevcut kümelerin içerdiği elemanların bazı problemlerin çözüm süreçlerinde yeterli gelmemesi nedeniyle ihtiyaç duyulduğu fikrinin fark ettirilmesi gerekir (Giannakoulias vd., 2007). Bununla birlikte, yapılandırmacı yaklaşımın öğretim süreçlerine kazandırdığı bakış açılarını dikkate alarak öğrencileri kendi öğrenim süreçlerinin merkezi hâline getirip istenilen konu, durum veya kavramları kendilerinin keşfetmesine olanak sağlayan ortamlar oluşturulması faydalı olabilir (Fish, 1999). Üniversite öğrencileriyle yapılan bir çalışmada (Fajriah & Suryaningsih, 2020) Gerçel Analiz dersindeki öğrenci çalışma kâğıtlarının gerçel analiz öğrenme sürecine uygun olduğu ancak bazı etkinliklerin, öğrencilerin gerçel sayıların cebirsel özelliklerine yönelik bilgi eksikliğinden dolayı kullanışlı olamayabileceği ifade edilmiştir. İskenderoğlu ve Baki (2011) tarafından yapılan bir çalışmada ise bir dönem Türkiye'de okutulan 8. sınıf matematik ders kitapları incelendiğinde, gerçel sayılar ile ilgili soruların düzeylerinin yeterli olmadığı saptanmıştır. Bunun yanı sıra, Belçika, Singapur, Amerika Birleşik Devletleri gibi ülkelerin öğretim programlarında, temel teşkil etmesi amacıyla gerçel sayılar konusu diğer ülkelere göre daha erken dönemlerde okutulmaktadır (Çimen, 2012; Ata Özer & Yaman, 2021).

Millî Eğitim Bakanlığı (MEB) matematik öğretim programı gerçel sayılar bağlamında incelendiğinde, öğrencilerin gerçel sayıları tanımaları ve irrasyonel sayılar ile rasyonel sayıların arasındaki ilişkileri fark edebilmeleri hedeflenmektedir (MEB, 2018a). Buna ilişkin 8. sınıf, sayılar ve işlemler öğrenme alanı, kareköklü ifadeler alt öğrenme alanı 8. kazanım şu şekildedir:

M.8.1.3.8. Gerçek sayıları tanır, rasyonel ve irrasyonel sayılarla ilişkilendirir.

Tam kare olmayan sayıların kareköklerinin rasyonel sayı olarak belirtilemediğine (iki tam sayının oranı şeklinde yazılamadığına) dikkat çekilir. π sayısı bir irrasyonel sayı olarak tanıtılır. İrrasyonel sayı olmasına rağmen işlemlerde kolaylık sağlaması açısından π sayısı yerine 3; 3,14 veya 22/7 de alınabileceği vurgulanır. (MEB, 2018a)

Burada, gerçel sayıların inşasına ve cebirsel özelliklerine yönelik bir uygulama görülmemektedir. Onun yerine, düzeye uygun olarak öğrencilere bazı sayıların rasyonel sayı olma şartlarını sağlamadığı ve rasyonel sayı olmayan sayılar (irrasyonel sayılar) olarak ifade edilebilecek bir kümeye ihtiyaç duyulduğu keşfettirilmektedir. Bu sayede, öğrenci gerçel sayı kümesinin rasyonel ve irrasyonel sayı kümelerinin birleşimi olduğu fikrine aşina olacaktır.

Ortaöğretim matematik dersi öğretim programı incelendiğinde, öncelikle gerçel sayılar ve diğer sayı kümelerinin (doğal, tam, rasyonel ve irrasyonel) sembolleri tanıtılarak aralarındaki ilişkilerin incelendiği, gerçel sayıların inşasında kullanılan toplama ve çarpma işlemlerinin özelliklerinin (cebirsel özellikler) üzerinde durulduğu görülmektedir. Ayrıca, gerçel sayılarda aralık kavramı açıklanır; gerçel sayılar kullanılarak uygulamalar yapılır ve fonksiyon kavramıyla ilişkisi açıklanır. Son olarak, bazı denklemlerde çözümün gerçel sayılar kümesinde bulunmadığı ve buradan hareketle gerçel sayılarında içerisinde bulunduğu farklı bir sayı kümesi tanımlama ihtiyacı olduğu ifade edilir. Bu bağlamda, ilgili kazanımlardan bazıları öğretim programı içerisinde şu şekilde ifade edilmektedir:

9.3.1.1. Sayı kümelerini birbiriyle ilişkilendirir.

a) Doğal sayı, tam sayı, rasyonel sayı, irrasyonel sayı ve gerçek sayı kümelerinin sembolleri tanıtılarak bu sayı kümeleri arasındaki ilişki üzerinde durulur.

c) Gerçek sayılar kümesinde toplama ve çarpma işlemlerinin özellikleri üzerinde durulur.

10.2.1.1. Fonksiyonlarla ilgili problemler çözer.

b) Sadece gerçek sayılar üzerinde tanımlanmış fonksiyonlar ele alınır.

12.2.1. Gerçek Sayı Dizileri. (MEB, 2018b)

Gerçel sayılar sistemi; $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi, toplama işlemi $(+)$, çarpma işlemi $(\cdot)$, sıralama bağıntısı $(<)$ ve $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesine ait olan 0 ve 1 elemanlarını içeren bir sistemdir. Gerçel sayılar sisteminin cisim aksiyomlarını sağladığı ve bir cisim yapısı oluşturduğu bilinmektedir. Bu altılı yapı, $(\mathbb{R}, +, \ \cdot, <, 0, 1)$ şeklinde gösterilir (Nesin, 2019). Gerçel sayılar sistemi kümeler kuramı aksiyomlarıyla yaratılabileceği gibi, matematiğin en önemli işlevlerinden biri olan matematiksel analizin yapılandırılması amacı ile (Nesin, 2019) belirli sayıda özelliğin aksiyom olarak kabul edilmesi yoluyla da inşa edilebilir.

Aşağıdaki dört takım aksiyomu gerçekleyen $\mathbb{R}$ kümesine gerçel sayılar kümesi, elemanlarına da gerçel sayılar denir.

(A) Toplama Aksiyomları

Her $(j, k) \in \mathbb{R}\, x\, \mathbb{R}$ için $(j, k) \rightarrow j + k \in \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı $+ : \mathbb{R}\, x\, \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü her $p, m, n \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki özellikleri sağlar:

(i) $(p + m) + n = p + (m + n)$

(ii) $p + m = m + p$

(iii) $p + 0 = 0 + p = p$ olacak şekilde bir $0 \in \mathbb{R}$ elemanı vardır (0 a toplamaya göre sıfır veya etkisiz eleman denir).

(iv) $p + (-p) = (-p) + p = 0$ olacak şekilde bir $-p \in \mathbb{R}$ elemanı vardır ($-p$ ye p nin toplamaya göre tersi denir).

Üzerinde i, ii, iii, iv özelliklerini sağlayan ikililere değişmeli toplamsal grup (veya Abel grubu) denir. O halde, $(\mathbb{R}, +)$ bir değişmeli toplamsal gruptur.

(B) Çarpma Aksiyomları

Her $(j, k) \in \ \mathbb{R}\, x\, \mathbb{R}$ için $(j, k) \rightarrow j \cdot k \in \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı $\mathbb{R}\, x\, \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü her $p, m, n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için aşağıdaki özellikleri sağlar:

(i) $(p \cdot m) \cdot n = p \cdot (m \cdot n)$

(ii) $p \cdot m = m \cdot p$

(iii) $p \cdot 1 = 1 \cdot p = p$ olacak şeklide bir $1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ elemanı vardır (1 e çarpmaya göre birim veya etkisiz eleman denir).

(iv) $p \cdot p^{-1} = p^{-1} \cdot p = 1$ olacak şekilde bir $p^{-1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ elemanı vardır (p^{-1} elemanına p nin çarpmaya göre tersi denir).

Üzerinde i, ii, iii, iv özelliklerini sağlayan ikililere değişmeli çarpımsal grup denir. O halde $(\mathbb{R}, \ \cdot)$ bir değişmeli çarpımsal gruptur.

(a, b) Çarpma İşleminin Toplama İşlemi Üzerinde Soldan ve Sağdan Dağılma Özellikleri

Her $p, m, n \in \mathbb{R}$ için $p \cdot (m + n) = p \cdot m + p \cdot n, \qquad (p + m) \cdot n = p \cdot n + m \cdot n$ dir.

Üzerinde A, B, (a, b) özelliklerini sağlayan üçlülere cisim denir. O halde $(\mathbb{R}, +, \ \cdot)$ üçlüsü bir cisimdir.

(C) Sıralama Aksiyomları

$\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı "$\leq$" bağıntısı herhangi $p, m, n \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki özellikleri sağlar:

(i) $p \leq p;$

(ii) $p \leq m \ ve \ m \leq p \Rightarrow p = m;$

(iii) $p \leq m \ ve \ m \leq n \Rightarrow p \leq n;$

(iv) $p \leq m \ veya \ m \leq p;$

Bu durumda, $\mathbb{R}$ tam (lineer) sıralanmış bir cisimdir.

(I,III) Toplama ve Sıralama İşlemleri Arasında Bağıntı

Her $p, m, n \in \mathbb{R}$ için $p \leq m \Rightarrow p + n \leq m + n$ dir.

(II,III) Çarpma ve Sıralama İşlemleri Arasında Bağıntı

Her $p, m, n \in \mathbb{R}$ için $(p \leq m) \ ve \ (0 \leq n) \Rightarrow p \cdot n \leq m \cdot n$ dir.

(D) Tamlık Aksiyomları

$\mathbb{R}$ nin boş olmayan A ve B alt kümeleri her $p \in A$ ve her $m \in B$ için $p \leq m$ eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda, her $p \in A$ ve $m \in B$ için $p \leq n \leq m$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{R}$ elemanı vardır.

Belirtelim ki, (A, B, C, D) aksiyomlar takımı gerçel sayıların çok az sayıda özelliklerini kapsamaktadır. Bunlara ek olarak gerçel sayıların aşağıdaki özellikleri de verilebilir.

(a) Her $p \in \mathbb{R}$ için $p \cdot 0 = 0$

(b) Her $p \in \mathbb{R}$ için $-p = (-1) \cdot p.$

(c) Her $p \in \mathbb{R}$ için $(-1) \cdot (-p) = p.$

(d) Her $p \in \mathbb{R}$ için $(-p) \cdot (-p) = p \cdot p$.

(e) $\mathbb{R}$ de toplamaya göre sıfır elemanı tektir.

(f) $\mathbb{R}$ de her elemanın toplamsal tersi tektir.

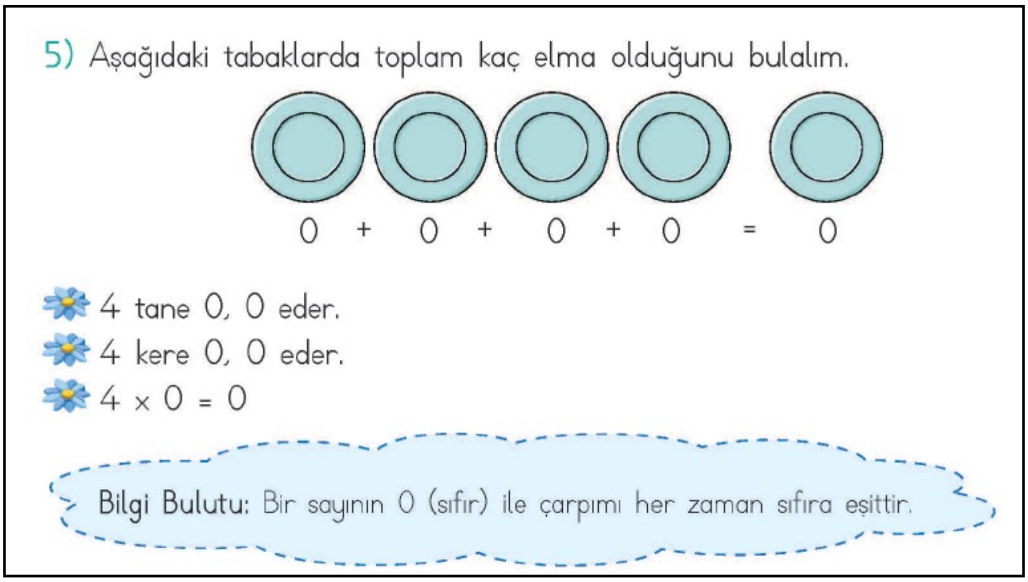
(g) $\mathbb{R}$ de birim eleman tektir.

(h) Her $p \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ sayısının p^{-1} tersi tektir.

Dört takım aksiyom (cisim aksiyomları) ile birlikte inşa edilen gerçel sayılar sisteminin içerisinde yer alan ve bu aksiyomlar kullanılarak çıkarsanmış sekiz adet cebirsel özellik ifade edilmiştir. Bu cebirsel özellikler ifade edilen cisim aksiyomları ile ispatlanabilmektedir. Bu özelliklerin, ilköğretim seviyesinden yükseköğretim seviyesine kadar her dönemde öğrencilerin ve öğreticilerin karşılaşabilecekleri veya kullanmaya ihtiyaç duyabilecekleri özellikler olduğu söylenebilir. Millî Eğitim Bakanlığı, Talim ve Terbiye Kurulunun kabul ettiği matematik ders kitapları incelendiğinde, birinci sınıftan itibaren yedinci sınıfa kadar gerçel sayıları sisteminin sağladığı cisim aksiyomları kapsamında toplama ve çarpma işlemlerinin özelliklerinin kullanıldığı görülmektedir (bkz. Şekil 2, 3, 4). Yedinci sınıfa kadar gerçel sayılarla tanışmayan öğrenciler gerçel sayılar ile ilk defa sekizinci sınıfta karşılaşmaktadır. Sekizinci sınıfta da işlemsel anlayışla verilen gerçel sayılar, irrasyonel sayıların kullanım alanlarıyla sınırlandırılmıştır.

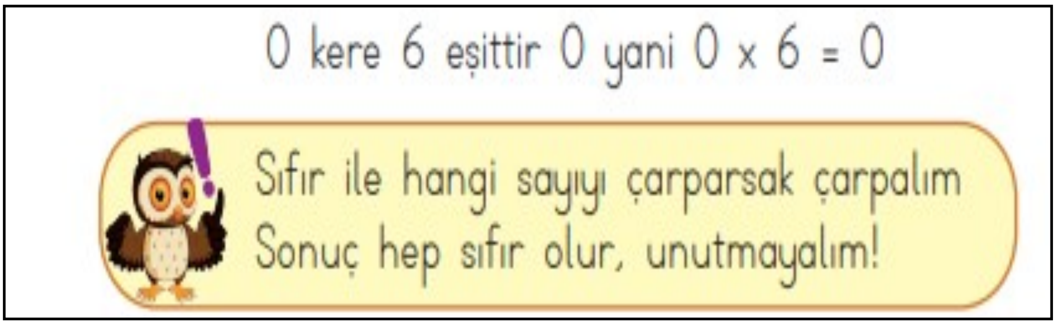
Şekil 2

İkinci sınıf matematik ders kitabından ilgili bir örnek



Şekil 3

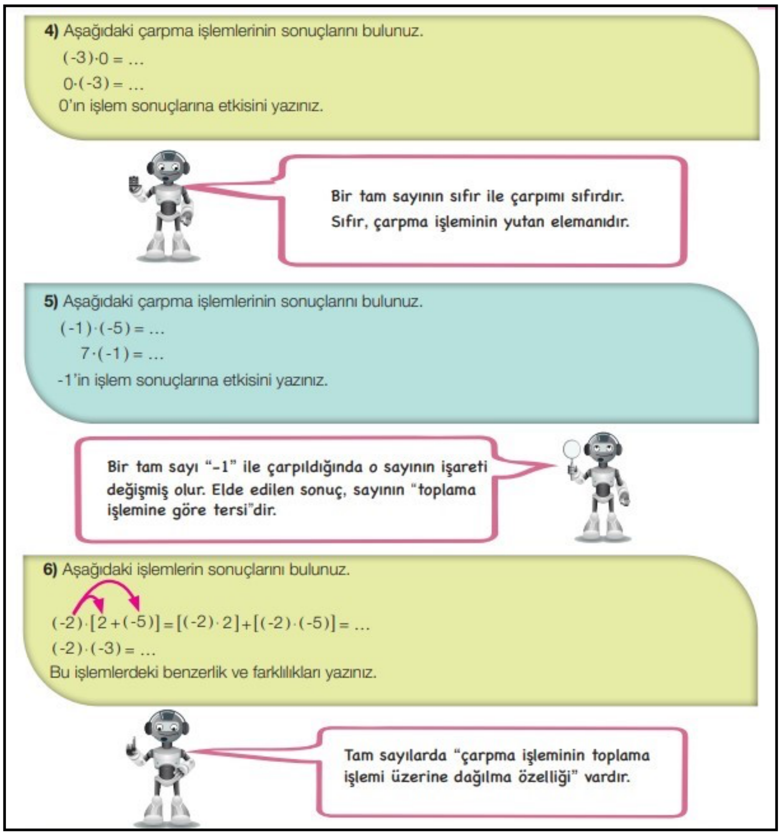
Üçüncü sınıf matematik ders kitabından ilgili bir örnek



İkinci sınıfta kullanılan matematik ders kitabında yer alan çarpma işlemine ilişkin örnek Şekil 2'de verilmiştir. Örnekte, çarpma işlemi ile toplama işlemi ilişkilendirilmiştir. Buradan hareketle, birinci sınıfta verilen "sıfır ile toplanan herhangi bir sayının değerinin değişmediği" bilgisi kullanılarak "0" ile çarpım yapmaya dair bir açıklama yapılmıştır.

Şekil 4

Yedinci sınıf matematik ders kitabından ilgili bir örnek



Şekil 5

Dokuzuncu sınıf matematik ders kitabından ilgili bir örnek

Gerçek Sayılar Kümesinde Toplama ve Çarpma İşleminin Özellikleri

Toplama İşleminin Özellikleri

Kapalılık Özelliği
Her a, b $\in \mathbb{R}$ için $a + b \in \mathbb{R}$ dir. Bu özelliğe toplama işleminin **kapalılık özelliği** denir.

3 ve 4 gerçek sayılardır ve bu iki sayının toplamının sonucu $3 + 4 = 7$ de bir gerçek sayıdır.

Değişme Özelliği
Her a, b $\in \mathbb{R}$ için $a + b = b + a$ olur. Bu özelliğe toplama işleminin **değişme özelliği** denir.

$3 + 4 = 4 + 3$
$7 = 7$ olur.

Birleşme Özelliği
Her a, b, c $\in \mathbb{R}$ için $a + (b + c) = (a + b) + c$ olur. Bu özelliğe toplama işleminin **birleşme özelliği** denir.

$3 + (4 + 5) = (3 + 4) + 5$
$3 + 9 = 7 + 5$
$12 = 12$ olur.

Etkisiz (Birim) Eleman Özelliği
Her a $\in \mathbb{R}$ için $a + 0 = 0 + a = a$ olduğundan "0" toplama işleminin **etkisiz (birim)** elemanıdır.

$4 + 0 = 0 + 4 = 4$ olur.

Ters Eleman Özelliği
Her a $\in \mathbb{R}$ için $a + (-a) = (-a) + a = 0$ olduğundan a nın toplama işlemine göre tersi $-a$ olur.

$4 + (-4) = (-4) + 4 = 0$ olur.

Çarpma İşleminin Özellikleri

Kapalılık Özelliği
Her a, b $\in \mathbb{R}$ için $a \cdot b \in \mathbb{R}$ olur. Bu özelliğe çarpma işleminin **kapalılık özelliği** denir.

3 ve 4 gerçek sayılardır ve bu iki sayının çarpımının sonucu $3 \cdot 4 = 12$ sayısı da gerçek bir sayıdır.

Değişme Özelliği
Her a, b $\in \mathbb{R}$ için $a \cdot b = b \cdot a$ olur. Bu özelliğe çarpma işleminin **değişme özelliği** denir.

$3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$
$12 = 12$ olur.

Birleşme Özelliği
Her a, b, c $\in \mathbb{R}$ için $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ olur. Bu özelliğe çarpma işleminin **birleşme özelliği** denir.

$3 \cdot (4 \cdot 5) = (3 \cdot 4) \cdot 5$
$3 \cdot 20 = 12 \cdot 5$
$60 = 60$ olur.

Etkisiz (Birim) Eleman Özelliği
Her a $\in \mathbb{R}$ için $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ olduğundan çarpma işleminin **etkisiz (birim) elemanı** "1" olur.

$4 \cdot 1 = 1 \cdot 4 = 4$ olur.

Ters Eleman Özelliği
Her a $\in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ için $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$ olduğundan a nın çarpma işlemine göre **tersi** $\frac{1}{a}$ olur.

$4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1$ olur.
0 sayısının çarpma işlemine göre tersi yoktur.

Yutan Eleman Özelliği
Her a $\in \mathbb{R}$ için $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ olduğundan çarpma işleminin **yutan elemanı** "0" olur.

$4 \cdot 0 = 0 \cdot 4 = 0$ olur.
Yutan elemanın tersinin olmadığına dikkat ediniz.

Çarpma İşleminin Toplama İşlemi Üzerine Dağılma Özelliği
Her a, b, c $\in \mathbb{R}$ için $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ ve $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ olur. Bu özelliğe çarpma işleminin toplama işlemi üzerine **soldan ve sağdan dağılma özelliği** denir.

$3 \cdot (4 + 5) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5$
$3 \cdot 9 = 12 + 15$
$27 = 27$ olur.

$(3 + 4) \cdot 5 = 3 \cdot 5 + 4 \cdot 5$
$7 \cdot 5 = 15 + 20$
$35 = 35$ olur.

Üçüncü sınıf matematik ders kitabında "0" ile çarpmaya ilişkin yer alan ifadeler Şekil 3'te gösterilmiştir. Bu açıklamalar ikinci sınıf matematik ders kitabından yapılan açıklamalarla benzerlik göstermektedir.

Çalışma ile ilgili olarak yedinci sınıf matematik ders kitabında yer alan örnekler ve açıklamalar Şekil 4'te gösterilmiştir. Burada, çalışmada veri toplamak için kullanılan gerçel sayıların cebirsel özelliklerine ilişkin ifadeler yer almaktadır. Çarpma işleminde "0" ve "-1" elemanlarının kullanımıyla ilgili olan sözel ifadelerin yanında çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliğine ilişkin bir ifade de bulunmaktadır.

Ortaöğretimde, ilköğretim öğrencilerinin gerçel sayılara yönelik anlayışlarındaki işlemsel boyutun baskınlığı azaltılarak daha kavramsal olarak ele alınsa da gerçel sayıların inşasına veya cebirsel özellikleri bağlamında ispat süreçlerine değinilmemektedir. Ortaöğretim süreçlerinde, gerçel sayılar sisteminden ayrık olarak göz önüne alınan gerçel sayılar kümesinin fonksiyon, diziler gibi önemli kavramların tanımlarında ve uygulamalarında yer aldığı görülmektedir. Şekil 5'te görüldüğü üzere, toplama ve çarpma işlemlerinin kapalılık özelliği, değişme özelliği, birleşme özelliği, etkisiz eleman özelliği ve ters eleman özelliği ifade edilmiştir. Buna ek olarak, kitapta çarpma işleminin "yutan eleman" özelliği ve çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliğine dair ifadeler yer almaktadır.

Gerçel Sayılar ve Cebirsel Özelliklerine Yönelik Yapılan Araştırmalar

Bu başlık altında, gerçel sayılarla ilgili yapılmış olan ve bu çalışmanın kapsamına giren çalışmalar sunulacaktır.

David Hilbert'in "Cantor'un cenneti" olarak nitelendirdiği kümeler kuramı (von Plato, 2013) modern matematiğin önemli temel taşlarından biri olarak kabul edilir. Bunun sebebi, modern matematiğin çeşitli dallarında kullanılan sayılar ve sayı sistemleri, grup, bağıntı, fonksiyon gibi temel matematiksel kavramların tanımlanma sürecinde kümeler kuramından yararlanılmasıdır (Bingölbali & Bingölbali, 2013). Kümeler kuramı yardımıyla geliştirilen sayı sistemlerinden biri olan gerçel sayılar sistemi, öğrencilerin sayılar ile ilişkili konuları ve kavramları anlama süreçlerinde oldukça önemlidir (Fischbein vd., 1995) ve analiz başta olmak üzere matematiğin birçok alanında merkezde yer alır (Tall & Katz, 2014). Karmaşık sayılar hariç diğer tüm sayı (doğal, tam, rasyonel ve irrasyonel) kümelerini içeren ve karmaşık sayıların da gerçel kısmını oluşturan gerçel sayılar, bu kümelerde veya kümelerin içerdiği sayılarda yaşanan sorunların sebebi konumunda olabilirken aynı zamanda sonuçlarından da etkilenebilmektedir (Moralı vd., 2004). Zira, gerçel sayılar kümesi rasyonel sayılar ve irrasyonel sayılar kümelerinin birleşimine verilen addır. Gerçel sayılar kümesi, alt kümelerinde olmayan özgün bir elemana sahip değildir. Dolayısıyla, gerçel sayılar ile ilgili yapılmış ve bu çalışmanın kapsamına giren çalışmalar incelenirken alt ve üst kümelerine yönelik çalışmaları incelemenin daha isabetli olacağı düşünülmektedir.

İlköğretim matematik öğretmeni adayları ile gerçekleştirdiği doktora tezi çalışmasında Monandi (2021), öğretmen adaylarının cebirsel problemleri çözme ve sadeleştirme süreçlerini inceleyerek gerçel sayıların özelliklerine yönelik bilgi düzeylerini ve bu bilgileri uygulama kapasitelerini ortaya koymuştur. Çalışmada, toplama ve çarpma işlemlerine ilişkin birleşme, değişme, etkisiz ve birim eleman (identity), ters eleman ve çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliklerine odaklanılmıştır. Tez çalışmasının sonuçlarına göre, öğretmen adaylarının gerçel sayıların özelliklerine ilişkin kavramsal anlayış düzeylerinin çok düşük olduğu saptanmıştır.

Öğretmenlerin ve ilköğretim düzeyindeki öğrencilerin sıfır kavramına ilişkin anlayışlarını inceleyen Jooste (2011), kural temelli öğretme ve öğrenmenin sıfırla çarpmanın kavramsal boyutta anlaşılmasını zorlaştıracağı sonucuna ulaşmıştır. Ayrıca, ilköğretim öğrencilerinin sıfırla çarpma işleminde sorun yaşadıklarını destekleyen bulgular elde etmiştir. Araştırmacı son olarak, öğrencilere sıfırın temel işlemlerdeki davranışına ilişkin kendi anlamalarını inşa etme fırsatları oluşturulmasını önermiştir.

Adams (1998) yaptığı çalışmada, sınıf öğretmeni adaylarının gerçel sayılar sistemi ile ilgili matematik konu bilgisine odaklanmayı amaçlamıştır. Araştırmacı, 93 öğretmen adayına gerçel sayılar sistemine ilişkin açık uçlu bir ölçek uygulamıştır. Açık uçlu ölçeğin sonuçları, katılımcıların gerçel sayılar sistemi (özellikle doğal sayılar, rasyonel sayılar ve tam sayılar) hakkındaki anlayışlarının ve alan bilgilerinin yetersiz olduğunu göstermiştir.

Lehtinen ve arkadaşları (1997) tarafından yapılan bir çalışmada, matematikte bazı kavramların öğreniminin önceki bilgilerden yeni bilgilere geçişte yaşanan sorunlardan dolayı zorlaştığını gösterme bağlamında, kalkülüs öğrenimi ve rasyonel sayılardan gerçel sayılara geçişle bağlantılı kavramsal değişim sorunlarına odaklanılmıştır. Deneysel çalışmada, 65 ortaokul öğrencisi 40 saatlik bir kalkülüs dersinden sonra test edilmiştir. Buna ek olarak, 11 öğrenci ile bireysel görüşme gerçekleştirilmiştir. Analizler sonucu, kesikli sayı fikrinden sürekli sayı fikrine geçişte yaşanan kavramsal değişim sırasında öğrencilerin zorlandığı görülmüştür. Ayrıca, öğrencilerin hiçbirinin kalkülüsün algoritmik işlemlerini yapmayı öğrenmiş olmalarına rağmen gerçel sayılar konusunda yeterli bir anlayış geliştirememesi bu sonucu destekler niteliktedir.

Merenluoto ve Lehtinen (2002) tarafından yapılan bir başka çalışmada ise öğrencilerin sayı kümelerinin genişlemesine ilişkin gerçekleşen kavramsal değişimde yaşadıkları sorunları tespit etmek için 564 ortaokul öğrencisine, rasyonel ve gerçel sayılar alanında tanımlama, sınıflandırma ve oluşturma problemlerini içeren bir test uygulanmıştır. Elde edilen verilerin analizi sonucunda, rasyonel ve gerçel sayılar alanındaki sorularla ölçülen sayı kavramlarındaki değişimin öğrencilerin çoğunluğu tarafından yeterince gerçekleştirilmediği tespit edilmiştir. Daha ileri düzey sayılarla ilgili görevler üzerinde çalışırken, doğal sayıların mantığını ve genel varsayımlarını kendiliğinden kullandıkları veya cevaplarını günlük sezgilerine dayandırdıkları saptanmıştır. Ayrıca, öğrencilerin hatalı olmasına rağmen doğal sayıların mantığını kullandıklarında cevaplarının kesinliğini abarttığı görülmüştür.

Vamvakoussi ve Vosniadou (2004) tarafından gerçekleştirilen çalışmada, dokuzuncu sınıf öğrencilerinin rasyonel sayıların cebirsel ve yapısal özelliklerini kavramsal değişim perspektifinden anlamaları incelenmiştir. 16 adet dokuzuncu sınıf öğrencisi ile içerisinde gerçel sayıların cebirsel özelliklerine ve yoğunluğa ilişkin sorular bulunan bir anket yardımıyla bireysel görüşmeler yapılmıştır. Diğer çoğu çalışmanın aksine, bu çalışmada öğrencilerin gerçel sayıların cebirsel özellikleri ile ilgili soruları rahatlıkla cevaplandırabildikleri belirlenmiştir. Araştırmacı bu durumun, öğrencilerin doğal sayılar hakkında sahip oldukları bilgilerden kaynaklandığını ifade etmiştir.

Giannakoulias ve arkadaşları (2007) tarafından yürütülen çalışmada, Kalkülüs dersini almakta olan ancak henüz gerçel sayıların yapısı üniversite düzeyinde öğretilmemiş 215 üniversite birinci sınıf öğrencisiyle çalışılmıştır. Veriler, öğrencilerin temel kalkülüs kavramlarında karşılaştıkları sorunları tespit etmek amacıyla araştırmacıların geliştirmiş olduğu daha büyük bir tanı testinin parçası olan bir anket yoluyla toplanmıştır. Elde edilen nicel veriler, kategorik değişkenlerle gizli sınıf analizi kullanılarak analiz edilmiştir. Sonuç olarak, öğrencilerin gerçel sayıların yoğunluğu, gerçel sayıların alt kümeleriyle olan yapısal bağlantıları ve irrasyonel ve rasyonel sayıların belirlenmesi konusunda zorluklar yaşadığı görülmüştür. Ayrıca, bazı durumlarda rasyonel veya irrasyonel sayı kümelerini gerçel sayılardan bağımsız tanımladıkları tespit edilmiştir. Buna ek olarak, gerçel sayıların cebirsel özelliklerinden biri olan ters eleman bulundurma özelliğine yönelik sorular soran araştırmacılar, öğrencilerin çoğunun gerçel sayıların (çalışmada köklü ve ondalık sayıları kullanılmıştır) aynı zamanda ters elemanının da olduğu yönünde fikir belirttiği ancak bu sayının ne olduğunu bulma konusunda kafa karışıklığı yaşadıklarını belirtmiştir.

Bergé (2008) tarafından yapılan araştırmada, gerçel sayılar kümesinin tamlık özelliğinin üniversite düzeyinde öğretim ve öğrenim süreçlerine odaklanılmıştır. Analiz ve Kalkülüs derslerine yönelik dört lisans dersini gözlemleyen araştırmacı, gerçel sayıların tamlık kavramının hem analiz hem de kalkülüs derslerinde yer aldığını, ancak teorik gerekçelendirmelerin çok aşikâr biçimleriyle verildiğini ifade etmiştir. Bu durumun da Kalkülüsten Analize geçişte başarısızlık oranın artmasına sebep olduğunu belirtmiştir.

Merenluoto ve Palonen (2007) tarafından yapılmış olan araştırmada, üniversitedeki matematik öğreticilerinin gerçel sayıları öğrenme geçmişlerine ve sayılar hakkındaki düşüncelerine ilişkin tanımlamalarını analiz etmek amaçlanmıştır. Yedi üniversite matematik öğreticisi ile görüşme gerçekleştirilmiştir. Bu yarı yapılandırılmış görüşmelerde, matematikçilerden gerçel sayılarla ilgili kişisel öğrenme geçmişlerini, sayılarla ilgili informal düşüncelerini ve gerçel sayıları kullanırken sahip oldukları kesinliğin temelini açıklamaları istenmiştir. Elde edilen veriler ışığında, matematikçilerin resmin bütününü görebildiği, birden fazla temsili değerlendirebildiği ve bunlar arasında esnek geçişler yapabildiği tespit edilmiştir. Ayrıca, sayı doğrusu metaforunu kullanmakta ve gerçel sayıların temel ilkelerine dikkat ettikleri saptanmıştır.

Sirotic ve Zazkis (2007) tarafından yapılan çalışmada, ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının irrasyonel sayılara ilişkin anlayışlarına odaklanılmıştır. Özellikle, sayıların çokluğu ve yoğunluğu, rasyonel ve irrasyonel sayıların gerçel sayı doğrusu üzerine yerleştirilmesi ve rasyonel ve irrasyonel sayı kümelerinin elemanları arasındaki işlemler incelenmiştir. 46 öğretmen adayı ile yürütülen çalışmada veriler, görev temelli anket ve görüşmelerden elde edilmiştir. Verilerin analizinden elde edilen sonuçlara göre, katılımcıların sezgileri ile formal ve algoritmik bilgileri arasında tutarsızlıklar olduğu görülmüştür.

Bergé (2010) tarafından yapılan bir başka makale çalışmasında, öğrencilerin gerçel sayılar kümesinin tamlık özelliğine ilişkin algılarının açıklanması amaçlanmıştır. Örneklemi oluşturan öğrenciler, Kalkülüs ve Analiz alanında üç lisans dersi almışlardır. Veriler, yazılı bir anket uygulamasıyla toplanmıştır. Elde edilen veriler incelendiğinde, çok az öğrencinin Cauchy dizilerine ve sağladığı temel anlamlara hâkim olduğu görülmüştür. Buna ek olarak, öğrencilerin çoğunun tamlığın hangi sorunu çözdüğü için geliştirildiğini bilmediği ve tamlığın anlamlarına ilişkin eksiklikler olduğu görülmüştür.

Çelik ve Özdemir'in (2011) yapmış olduğu çalışmada, öğrencilerin karmaşık sayılarla ilgili bilgi düzeylerini ve sahip oldukları kavram yanılgılarını saptamak hedeflenmiştir. Örneklem, ortaöğretim düzeyindeki 483 öğrenciden oluşmaktadır. Veri toplama aracı olarak 50 adet çoktan seçmeli sorudan oluşan bir test geliştirilmiştir ve uygulanmıştır. Elde edilen verilerin analizi sonucu, öğrencilerin karmaşık sayılara duyulan ihtiyacı anlamlandıramadıkları ve i karmaşık sayısı ile herhangi bir gerçel sayının karşılaştırılıp karşılaştırılamayacağı hususunda sorunlar yaşadıkları belirlenmiştir.

Uçar (2015) yaptığı makale çalışmasında, temsillerin gerçel sayıların anlaşılmasındaki önemini incelemeyi amaçlamıştır. 158 ortaokul matematik öğretmen adayı ile çalışan araştırmacı, katılımcılardan gerçel (rasyonel ve irrasyonel) sayıları tanımlamaları ve belirlemelerini, bu sayı kümelerini şematik olarak ifade etmelerini beklemiştir. Bu sürecin sonunda 10 adet katılımcıyla görüşmeler yapılmış ve elde edilen veriler incelendiğinde, öğretmen adaylarının, sayıların rasyonel mi yoksa irrasyonel mi olduğunu belirlemekte sorun yaşadığı görülmüştür. Bu süreçte, sayıların temsillerinin, katılımcıların sayıları belirleme muhakemelerine etki ettiği de belirlenmiştir.

Alanyazındaki çalışmalar incelendiğinde; öğrencilerin, genellikle gerçel sayıları oluşturan rasyonel ve irrasyonel sayıları belirlemede ve tanımlamada çeşitli zorluklar yaşadığı; gerçel sayıların inşasını açıklamak için daha çok ortaöğretim matematik öğretim süreçlerinde sayı kümelerinin elemanlarının bazı durumlarda yetersiz kalması durumunda ortaya çıkan ihtiyaçtan dolayı kullanılan, doğal sayılardan irrasyonel sayılara kadar gerçekleştirilen genişletme işlemi hakkında sahip oldukları anlayış düzeyinin düşük olduğu; karmaşık sayılar ile gerçel sayılar arasındaki ilişkiyi yorumlayamadıkları; gerçel sayıların tamlık ve yoğunluk özelliklerini anlamlandıramadıkları; gerçel sayıların cebirsel özelliklerine kavramsal anlamda hakim olmadıkları gibi birçok olumlu olarak nitelendirilemeyecek türde sonuçla karşılaşılmıştır.

RBC Modeli

RBC modeli, matematiksel bilgiyi oluşturma sürecinin matematiksel soyutlama perspektifinden incelenebilmesi amacıyla geliştirilen bir modeldir (Hershkowitz vd., 2001). Tanıma (recognizing), kullanma (building with) ve oluşturma (constructing) adı verilen üç adet gözlemlenebilir epistemik (bilgiyi oluşturma ve kullanma ile ilgili) eylem ile temellendirilen modelin ismi, bu epistemik eylemlerin ilk harflerinin birleştirilmesi yoluyla elde edilmiştir. Öğrencilerin matematiksel bilgiyi oluşturmak amacıyla gerçekleştirdiği matematiksel aktiviteler, bu epistemik eylemler doğrultusunda analiz edilebilmektedir (Tabach & Hershkowitz, 2002).

RBC modelinin temeli sosyokültürel (hem toplumsal hem kültürel alanı ilgilendiren) ve epistemolojik (bilginin oluşumu ile ilgili) ilkelerden oluşmaktadır. Bu ilkeler Davydov'un (1990) bilgi oluşturma felsefesi ve Leont'ev'in (1981) aktivite teorisine dayandırılmıştır (Özmantar & Monaghan 2007; Dreyfus 2007). Ayrıca, "bağlamdan koparma" fikrinin, anlamlı soyut düşünmenin gelişimsel sürecine ilişkin yetersiz kalan zayıf bir kavram olduğunu iddia eden van Oers (1998), “bağlam içinde soyutlama” kavramının soyut düşüncenin gelişimine bir açıklama getirebileceğini iddia etmiştir. RBC modelinin geliştirilmesi sürecinde bağlam içinde soyutlama (AiC) düşüncesinin benimsenmesinde etkili olan bu iddianın yanında, dikey matematikleştirmenin ve Davydov'un (1990) somutluğa yüklediği anlamın da etkili olduğu ifade edilmektedir (Kidron & Monaghan, 2009). Bu ifadede kullanılan dikey matematikleştirme kavramı, matematiksel bir problemi çözme sürecinde matematiksel sistemin içerisinde yer alan kavramlar ve işlemler yoluyla problemi daha derinlemesine anlamak ile ilgilidir (Treffers, 1987).

Davydov, soyut ve somut arasındaki çelişkileri çözümleyerek gidermeyi amaçlayan bir düşünce yaklaşımıyla öğrenmenin doğasını anlamaya yönelik (epistemolojik) bir teori geliştirmiştir. Bu teoride soyutlamayı başlangıçta var olan yetersiz bilginin; her ayrıntısıyla tutarlı, kapsamlı bilgiye dönüşme süreci olarak değerlendirmiştir (Schwarz vd., 2004). Davydov, bilincin; deneysel düşünce ve teorik düşünce olmak üzere iki düzeyde gerçekleştiğini belirtmektedir. Deneysel düşünce, gerçekler arasındaki belirleyici nitelikleri ortaya koymayı amaçlar (örn., nesnelerin benzer olan ve olmayan özelliklerini belirlemek). Teorik düşüncede ise kavramların genel şekillerinin ve kurallarının yeniden üretilmesi söz konusudur. RBC soyutlama teorisi, soyutlamanın Davydov bağlamında teorik düşünceyi gerektirdiği fakat matematiksel yapılar arasındaki benzerlikler ve farklılıkların belirlenmesinde yine Davydov'un kullanımıyla deneysel düşünceyi de içerebileceğini ifade eder.

RBC modelinin dayandığı bir diğer yaklaşım Aktivite Teorisidir. Bu teoride bireyin eylemi bilinçli bir amaç tarafından yönlendirilir, amaca yöneliktir. Bireyin aktivitesi ise bireyin genel hedefleriyle ilişkili bir güdü tarafından yönlendirilmektedir. Farklı eylemlerin sebeplerini görmek için aktivitenin bütününün ötesindeki güdüyü anlamak gerekir. RBC modeli soyutlamayı bu bakış açısıyla değerlendirmekte (bkz. Şekil 6) ve soyutlamanın bir birey veya grup tarafından ele alınan ve belli bir amaca yönelik olarak devam ettirilen eylemler zinciri olduğuna işaret etmektedir (Hershkowitz vd., 2020).

RBC modelini geliştiren araştırmacılar, sunulan problem çözme sürecinde öğrencilerin bilgiyi oluşturma süreçlerini analiz etmeyi amaçlamışlardır. Bu amaçla Aktivite Teorisi ve Davydov'un perspektiflerinden yola çıkılarak oluşturulan beş madde ile RBC modelinin dayanaklarını ve matematiksel soyutlama sürecinin temel ilkelerini ifade etmişlerdir:

1. Soyutlama, Aktivite Teoremi bağlamında ele alınmaktadır.

2. Soyutlama süreci, öğrencinin sosyal ve kişisel geçmişi ile sosyal etkileşimini içeren kişisel ve sosyal yapısına bağlıdır.

3. Soyutlama süreci (Davydov bağlamında) teorik düşünceyi gerektirir, deneysel düşünceyi de ayrıca içerebilir.

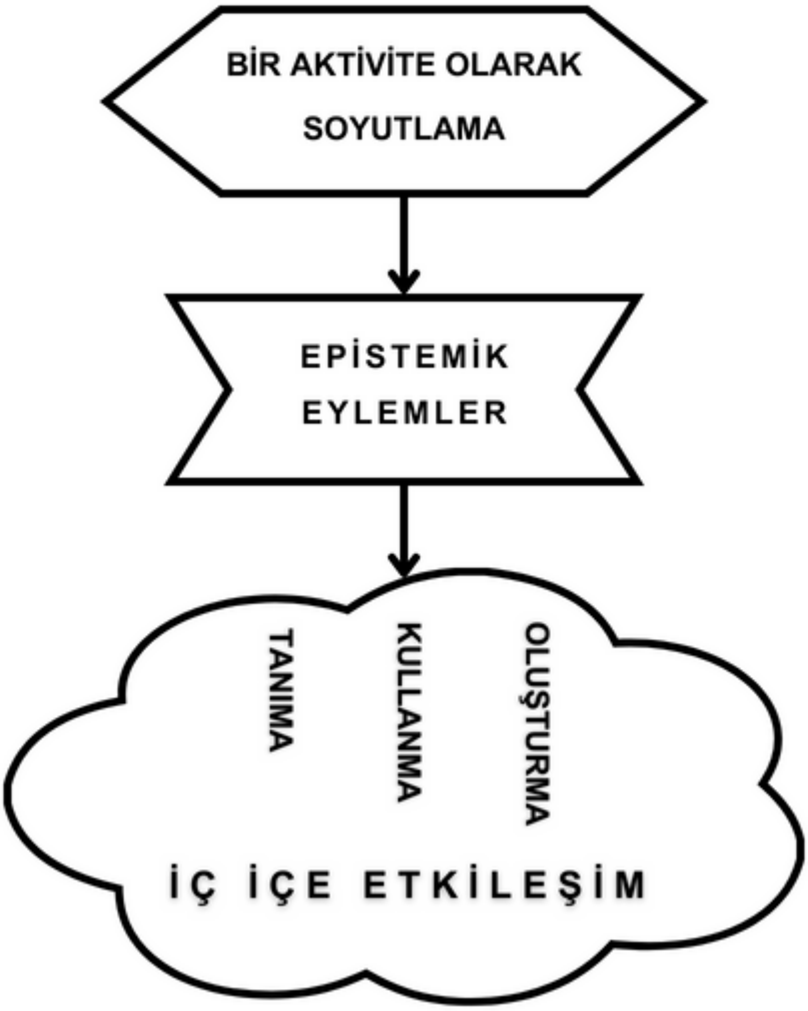
4. Soyutlama süreci, işlem görmemiş soyut gerçekleri yeni yapıya doğru ilerletmektedir.

5. Yeni yapı, soyut gerçeklerin yeniden düzenlenmesi ve bu gerçekler arasındaki iç ve dış bağlantıların kurulmasıyla ortaya çıkar.

RBC modelini geliştiren araştırmacılar, yukarıda ifade edilen beş maddeli tanımı, araştırmalarda daha işlevsel kullanabilmek için aşağıdaki tanımda toplamıştır (Hershkowitz vd., 2001): “Soyutlama süreci, daha önce oluşturulmuş matematiksel

Şekil 6

Bir aktivite olarak soyutlama (Dreyfus, 2007)



bilgilerin dikey olarak yeniden düzenlenerek yeni bir matematiksel yapı oluşturulması aktivitesidir".

Önceden oluşturulmuş matematiksel bilgi ifadesi iki farklı anlamda kullanılmaktadır. İlki, önceden gerçekleştirilen soyutlama süreçlerinin sonunda ulaşılan matematiksel yapıların yeni soyutlama süreçlerindeki kullanılabilirliği, diğeri ise yeni bir aktivitenin, işlem görmemiş bir soyutlama süreci ile başlayacağına işaret etmektedir. Yeniden düzenleme ifadesiyle ise yeni yapıların elde edilme süreçlerindeki üst düzey matematiksel eylemler kastedilmektedir. Bu eylemler, matematiksel ilişkiler kurma, yeni hipotezler üretme, matematiksel genellemeler yapma, problem çözme süreçlerinde veya ispatlama süreçlerinde yeni stratejiler oluşturma olarak ifade edilebilmekte ve bu eylemlerin yüksek düzeyde teorik düşünme içerdiği belirtilmektedir (Hershkowitz vd., 2020).

RBC modelinin sosyokültürel yaklaşımı dolayısıyla öğrencilerin akademik geçmişleri ve etkinliğin gerçekleştiği koşullar üzerinde özellikle durur. Bu durumlara dikkat edilmesi, öğrencilerin epistemik eylemlere ulaşabilme durumunun, dikkat edilen özelliklerle anlamlı bir ilişkiye sahip olup olmadığının tespiti konusunda fayda sağlamaktadır.

Bahsedilen epistemik eylemlerden ilki olan tanıma, daha önce oluşturulan bir yapının fark edilmesidir (Hershkowitz vd., 2001). Burada bahsedilen "yapı", matematiksel bir etkinlik sonucunda ortaya çıkan (Tsamir & Dreyfus, 2005) kavram, yöntem veya stratejiler olabilir. Tanıma, deneysel düşünce seviyesinde gerçekleşir ve çoğu zaman nesnelerin benzer olan ve olmayan özelliklerini belirlerken kendini gösterir (Hershkowitz vd., 2001).

Kullanma, istenilen bir amaca ulaşmak için önceden oluşturulan matematiksel yapıların işe koşulması olarak tanımlanmaktadır (Schwarz vd., 2004). Kullanma sürecinde öğrenci, problemi çözmek için mevcut bilgisini kullanır ve genellikle bir problem çözme, matematiksel bir durumu anlama ve açıklama veya bir süreç üzerinde dikkatle düşünme gibi bir hedefi başarmaya odaklanıldığında gerçekleşir. Öğrenciler bu hedefi gerçekleştirmek için stratejilerin, kuralların veya teoremlerin yardımına başvurabilirler.

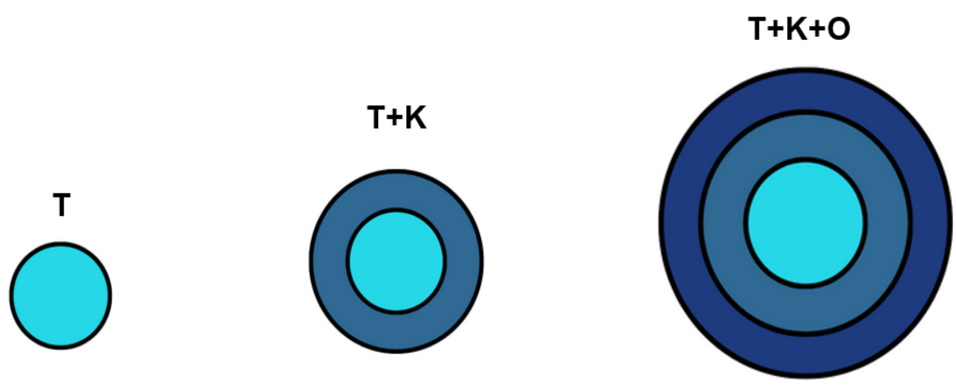
Halihazırda sahip olunan bilgilerin birleştirilmesi veya bir araya getirilmesiyle bu bilgiler arasında yeniden düzenlemeler yapılması sonucunda yeni anlamların meydana gelmesi süreci “oluşturma" epistemik eylemi olarak adlandırılır (Bikner-Ahsbahs, 2004). RBC modelinin merkezinde yer alan oluşturma epistemik eylemi gerçekleşmeden soyutlama gerçekleşemez. Oluşturma epistemik eylemi, sırayla tanıma ve kullanma epistemik eylemlerinin gerçekleştirilmesi sonucunda ortaya çıkan bir eylem değil, kendini bu epistemik eylemlerle eş zamanlı olarak gösteren bir eylemdir.

Bir yapı oluşurken, bu yapının sağlamlığını destekleyecek küçük yapılar eş zamanlı olarak oluşmaktadır. Bu durum oluşturma sürecinin küçük fakat birbiriyle ilişkili adımlarla ilerlediğinin göstergesidir. Eğer öğrenci oluşturma eylemi sürecinde soyutlama yapıyorsa, yeni bilgiyi ifade etmek için bu süreçle eş zamanlı olarak bir dil geliştirir ve bu yeni bilginin doğruluğunu kanıtlamak veya açıklamak için bu dili kullanır (Hershkowitz vd., 2001). Bu ifade, bazı önermelerin öğrencilerin zihinlerinde bilgi olarak sınıflandırılabilmesi için ispatlamaya başvurmaları gereken durumlar olabileceğini de göstermektedir.

RBC modelinde, oluşturma epistemik eylemi üç epistemik eylemin bir birleşimi iken, tanıma epistemik eylemleri diğer iki epistemik eylemin içerisinde, kullanma epistemik eylemleri ise oluşturma epistemik eylemlerinin içinde yer almaktadır (Hershkowitz vd., 2001). Bu durum, RBC ile veri analizi yaparken öğrencilerin hangi epistemik eylemi ya da eylemleri gerçekleştirebildiğini göstermek için Şekil 7'deki gibi kullanılabilir.

Şekil 7

RBC Modeline Göre Gerçekleştirilen Epistemik Eylemlerin Gösterimi



T: Tanıma epistemik eylemi
K: Kullanma epistemik eylemi
O: Oluşturma epistemik eylemi

Oluşturulan bilgilerin kalıcı hale gelmesi ile ilgili olan pekiştirme (consolidation) epistemik eylemi, oluşturulmuş yeni bilgi yapısının farklı bilgi oluşturma süreçlerinde tekrar tekrar tanınması ve kullanılması olarak ifade edilmektedir (Dreyfus vd., 2001). Bu sayede, öğrencilerin oluşturduğu bilgiler ilerleyen süreçlerde kendilerine daha tanıdık gelmektedir. Soyutlama sürecinde pekiştirme, hem soyutlanan yeni öge zihinde oluşurken hem de zihinde oluşan soyutlamalar ifade edilirken gerçekleşmektedir (Dreyfus & Tsamir, 2004).

RBC Modeli ile İlgili Araştırmalar

RBC modeli, öğrencilerin bilgi oluşturma süreçlerini mikro anlamda analiz edebilmek için kullanılmaktadır. Matematiğin birçok alanında kullanılan model, farklı derslerdeki kavramların oluşturulma süreçlerini analiz etmek için de kullanılabilmektedir (Karch & Sevian, 2022). Topuz ve Cantürk Günhan (2020) tarafından, Türkiye'deki bilgi oluşturma süreçlerinin incelendiği çalışmaların içerik analizinin yapıldığı makale çalışmasında, yapılan 50 adet çalışmadan 31 tanesinin (%62) sayılar ve cebirle ilgili olduğu görülmüştür. Geometride 12, olasılıkta üç ve diğer konularda dört adet çalışmaya rastlanmıştır. Buradan hareketle, sayılar ve cebir konusunun matematik için önemi tekrar vurgulanabilir.

Bu bölümde, matematik eğitimi alanyazını kapsamında RBC modeli kullanılarak gerçekleştirilmiş ilgili çalışmalardan bahsedilmiştir. Çalışmalar seçilirken ağırlıklı olarak cebir alanıyla ilgili olmasına dikkat edilmiştir. Ayrıca, alanyazında özel olarak belirli bir matematiksel konu veya kavrama yönelik RBC modeli kullanılarak yürütülen diğer çalışmalar Tablo 1'de listelenmiştir.

Tablo 1

RBC Modeli Kullanılarak Yapılan Diğer Çalışmalar

Çalışılan konu/kavram	Çalışmalar

Sonsuzluk	Dreyfus & Tsamir, 2004; Tsamir & Dreyfus, 2005
Koordinat sistemi	Sezgin Memnun, 2011; Sezgin Memnun & Altun, 2012c
Doğru denklemi	Sezgin Memnun, 2011; Sezgin Memnun & Altun, 2012a; Sezgin Memnun & Altun, 2012b
Eşitsizlik	Kaplan & Elif, 2015
Üçgende dikme ve yükseklik	Yeşildere & Türnüklü, 2008
Açı	Tunalı, 2010; Türnüklü & Özcan, 2014; Temiz, 2019
Olasılık ve istatistik	Ron vd., 2010; Akkaya, 2010; Katrancı, 2010; Katrancı & Altun; 2013; Ron vd., 2017; Eroğlu, 2021
Birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem ve eşitsizlik grafiği	Ayanoğlu, 2012
Doğrusal ilişki	Altun & Durmaz, 2013
Silindirin yüzey alanı	Altaylı Özgül & Kaplan, 2016
Özdeşlik	Ulaş, 2015; Ulaş & Yenilmez, 2017
Oran ve Orantı	Mahanin vd., 2017; Aramış, 2021
Düzlemde öteleme ve dönme	Güler & Arslan, 2018; Başeğmez, 2023
En büyük ortak bölen ve en küçük ortak kat	Çubukluöz vd., 2018
Parabol	Demir & Gür, 2020; Kobak Demir, 2017; Kobak Demir & Gür, 2019;
Tam sayılar	Hasar & Üzel, 2020
Değişken	Eldekci, 2019; Gurbuz & Ozdemir, 2020
Fonksiyon	Williams, 2007
Pisagor teoremi	Güler & Arslan, 2017
Üçgende benzerlik	Guler & Arslan, 2015
Kesirlerde işlemler	Celebioglu & Yazgan, 2015; Yıldırım, 2019
Alan ve hacim	Okuyucu, 2022
Çarpanlar ve katlar	Bayraktar, 2020

Çokgenler	Özgül, 2018; Hisar, 2020
Üçgende alan	Bulut, 2018

Deneysel veriler yoluyla RBC modelinin tanıtıldığı Hershkowitz, Schwarz ve Dreyfus (2001) tarafından yapılan makale çalışmasında, verilerin daha detaylı ele alınabilmesi amacıyla sadece bir dokuzuncu sınıf öğrencisi ile çalışılmıştır. Veri toplama süreci, çalışmanın bağlamını oluşturan fonksiyon konusunun verildiği dönemin sonunda olan bir öğrenci ile gerçekleştirilmiştir. Araştırmacı, bu süreçte öğrencinin yaptıklarını açıklaması ve yaptıkları üzerine düşünmesi için açımlayıcı sorular sorma rolünü üstlenmiştir. Öğrencinin değişim oranını bir fonksiyon olarak inşa edebildiği görülmüştür. İnşa etme sürecinin analizi sonucunda, üç epistemik eylemden oluşan ve matematiksel bilgi oluşturma (soyutlama) süreçlerinin analiz edilebilmesi için bir çerçeve sağlayan RBC modeli ortaya koyulmuştur. Ayrıca, araştırmanın sonucunda öğrencilerin matematiksel bilgi oluşturma süreçlerinin tek başlarına bir problem durumu ile uğraştıkları zamanlarda ortaya çıkma olasılığının yüksek olduğu ifade edilmiştir.

Dreyfus ve arkadaşları (2001), RBC modelinin tanıtıldığı çalışmanın (Hershkowitz vd., 2001) ardından modeli doğrulamak ve geliştirmek amacıyla akran etkileşiminin sağlandığı iki kişilik iki öğrenci grubuyla çalışmışlardır. Araştırmacılar, işbirliği yoluyla akran etkileşiminin sağlandığı çalışma gruplarındaki soyutlama süreçlerinin nasıl şekillendiği incelemişlerdir. Çalışmada, RBC modeli ile 7. sınıf öğrencilerinin, çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliğine yönelik rutin olmayan bir cebir problemini çözme süreçleri analiz edilmiştir. Verilerin analizi sonucunda, soyutlamanın birbirinden farklı etkileşim şekillerinde oluşabileceği ve bu etkileşimlerin ortak noktasının, öğrencilerin ikili ilişkilerindeki bütünlük ve bağlılık durumları olduğu ifade edilmiştir.

Ron ve arkadaşlarının (2006) yaptığı bir çalışmada, RBC modeli yoluyla sekizinci sınıf iki kişiden oluşan bir öğrenci grubunun temel olasılık durumlarını öğrenme süreci incelenmiştir. Çalışmada, ipucu sayısı giderek azalan bir dizi görev kullanılmıştır. "Kısmi bilgi" (PaCC) kavramı üzerinde durulan çalışmanın sonucunda, öğrencilerin temel olasılık durumlarını oluşturabildiği ancak oluşturdukları bilgileri kullanmaları gereken durumlarda zorlandıkları belirlenmiştir.

Temel olasılık durumlarının oluşturulma süreçlerinin incelendiği bir diğer çalışma Hershkowitz ve arkadaşları (2007) tarafından yapılmıştır. Bu çalışmada, diğer çalışmalardan farklı olarak çalışma grubu üçer kişiden üç farklı grup şeklinde belirlenmiştir. Öğrencilerin süreçte çok farklı bilgiler paylaştığı görülse de her birinin bu bilgilerden faydalanarak ortak ve bireysel görünen bir bilgi yapısı oluşturdukları görülmüştür. Ayrıca, genelde iki öğrencinin daha aktif olduğu ve öğrencilerin süreçte bilgi veren, soru soran, bilgiyi oluşturan gibi roller üstlendikleri tespit edilmiştir.

Subroto ve Suryadi (2018) tarafından tek bir üniversite öğrencisiyle gerçekleştirilen vaka çalışmasında, öğrencinin soyut cebir dersinde yer alan grup teorisine ilişkin kavramlar hakkında epistemolojik engellere sahip olup olmadığı incelenmiştir. Bu inceleme yapılırken öğrencilerin soyutlama süreçleri RBC modeli ile analiz edilmiştir. Sonuçlar, öğrencilerin RBC modelinde yer alan tanıma, kullanma ve oluşturma epistemik eylemlerinin her birinde çeşitli epistemolojik engellere sahip olduğu tespit edilmiştir. Bu epistemolojik engellerin ortaya çıkma sebebi olarak ise sezgilerin dikkatsizce kullanımı ve belirlenen kavramların genellenemeyecek kadar kapsamlı olması gösterilmiştir.

Tabach ve arkadaşları (2014), giriş düzeyinde diferansiyel denklemler dersi verilen bir matematik sınıfında, dört üniversite öğrencisinden oluşan bir odak grubun bilgi oluşturma sürecini ve oluşturulan bilginin değişimini incelemişlerdir. Elde edilen veriler sonucunda, odak gruptaki öğrencilerin nüfus artışı denklemine ilişkin bir anlayış geliştirdikleri, bu denklemi yaklaşık olarak çözme bağlamında iterasyon konseptini kavramsallaştırdıkları ve daha dar bir aralık kullanmanın yaklaşımı iyileştirdiğini keşfettikleri görülmüştür.

Kidron ve Dreyfus (2010) tarafından yapılan bir makale çalışmasında, bir öğrencinin çatallanma (bifurcation) kavramıyla ilgili bir durumu gerekçelendirme aktivitelerinde ortaya çıkan yeni bilgi oluşturma süreçleri incelenmiştir. Verilerin RBC+C modeli ile analizi sonucunda, öğrencinin farklı yeni bilgiler oluşturarak beklenen bilgiyi oluşturmasında bu bilgilerden yararlandığı ve oluşturduğu bilgiyi pekiştirdiği görülmüştür.

Üstün yetenekli bir onuncu sınıf öğrencisi ile çalışan Tsamir ve Dreyfus (2002), yaptıkları makale çalışmasında sonsuz kümelerin karşılaştırılmasıyla ilgili görevler kullanmışlardır. Bu görevleri kullanarak öğrencinin bilgi oluşturma sürecini inceleyen araştırmacılar, analizlerinde RBC modelini temele almışlardır. Çalışmada gerçekleştirilen analizlerden elde edilen sonuçlara göre, öğrencinin bilgiyi oluşturduğunu ancak pekiştirmeye ihtiyacı olduğu görülmüştür. Bir diğer sonuç ise oluşturma eyleminin diğer eylemle iç içe bir yapıda olmasına rağmen iç içe geçmiş eylemlerin toplamından daha fazla bir bilişsel yüke sahip olmasıdır.

Türkiye alanyazınında RBC modeli kullanılarak yapılan ilk çalışmalardan biri olan Yeşildere (2006) tarafından yapılan tez çalışmasında, farklı matematiksel güce sahip ilköğretim altı, yedi ve sekizinci sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme ve bilgi oluşturma süreçleri nasıl gerçekleştiğini incelemiştir. Durum çalışması olarak tasarlanan araştırmada, veriler üçgen eşitsizliğine yönelik açık uçlu problemlerden elde edilmiştir. Öğrencilerden bu eşitsizliğe, ispat ve çıkarım yoluyla elde edecekleri ilişkiler yoluyla ulaşmaları hedeflenmiştir. Verilerin ilgili bölümleri RBC modeli ile analiz edilmiştir. Elde edilen verilere göre düşük matematiksel güce sahip öğrencilerin bilgi oluşturmada yavaş ve sorunlu bir süreçten geçtikleri, yüksek matematiksel güce sahip öğrencilerin önceden oluşturulan bilgileri tanımada, kullanmada ve oluşturmada daha başarılı olduğu tespit edilmiştir.

Gerçel sayıların alt kümelerinden biri olan tam sayılara yönelik Hasar (2019) tarafından yapılan yüksek lisans tez çalışmasında, yapılandırmacı öğrenme yaklaşımı kullanılarak matematik dersine yönelik motivasyon düzeylerine göre seçilen öğrencilerin bilgi oluşturma düzeylerinin incelenmesi amaçlanmıştır. Veriler, görüşmelerde uygulanan etkinlikler yoluyla elde edilmiş ve RBC+C modeli baz alınarak analiz edilmiştir.

Elde edilen sonuçlara göre, araştırmacının da desteğiyle tüm öğrencilerin tam sayılarla ilgili bilgileri oluşturabildiği ifade edilmiştir. Ayrıca, matematik başarı düzeyi daha yüksek olan öğrencilerin oluşturma ve pekiştirme süreçlerinde de pozitif anlamlı farklara sahip olduğu görülmüştür.

Sayılar ile ilgili yapılan bir diğer çalışmada Monroy ve Astudillo (2013), üniversite öğrencilerini az kişilik gruplara ayırarak tartışma yoluyla çift tam sayıların tanımını yapılandırmalarını beklemiştir. Çalışmanın verileri RBC modeli ile analiz edilmiştir. Sonuçlar, öğrencilerin matematiksel dili kullanırken zorlandıklarını ve hatalı tanımlar oluşturdukları için öğretmenin yardımına ihtiyaç duyduklarını göstermiştir.

Cebir alanında önemli bir kavram olan köklü sayılara yönelik bilgi oluşturma süreçlerini inceleyen Dinç (2018), matematik dersindeki başarı seviyeleri düşük, orta ve yüksek olan sekizinci sınıf öğrencileriyle çalışmıştır. Araştırma, çoklu durum ile desenlenmiş olup ikişer gruplarla yürütülmüştür. Öğrencilerin bilgiyi oluşturma süreçlerini incelemek amacıyla hazırlanan köklü sayılara ilişkin dört soruluk uygulama yoluyla toplanan veriler, RBC modeli ile analiz edilmiştir. Elde edilen sonuçlara göre, çok az sayıda öğrencinin oluşturma basamağına ulaşabildiği görülmüştür. Ayrıca, kareköklü sayılara yönelik bilgi oluşturma süreçlerinde, sayı kümelerinin önemli olduğu tespit edilmiştir.

Yapılandırmacı yaklaşıma ve gerçekçi matematik eğitimi yaklaşımına göre tasarlanan öğretim süreçlerinde, dördüncü sınıf öğrencilerinin kesir kavramına yönelik bilgileri oluşturma sürecini araştıran Çelebioğlu (2014), araştırmanın çalışma grubunu farklı başarı düzeylerinden olan öğrenci gruplarından oluşturmuştur. Elde edilen veriler RBC modeli ile analiz edilmiş ve sonuçlar, öğrencilerin çoğunluğunun kesir kavramını soyutlamayı başardığını göstermiştir.

Özçakır Sümen'in (2019) yaptığı makale çalışmasında, sekizinci sınıf altı öğrencinin tam, yarım ve çeyrek kavramlarını oluşturma süreçlerini RBC modeli yoluyla incelemeyi amaçlamıştır. Bir durum çalışması olan araştırmanın verileri çalışma yaprakları ve yarı yapılandırılmış görüşmeler yoluyla elde edilmiştir. Çalışmanın sonuçlarına göre, öğrencilerin çoğunluğunun tam, yarım ve çeyrek kavramlarını soyutlayamadıkları tespit edilmiştir.

Yılmaz (2021) yapmış olduğu doktora tezi çalışmasında, altıncı ve yedinci sınıf öğrencileri ile çalışmıştır. Çalışmasında, öğrencilerin cebirsel kavram ve bu kavrama yönelik genellemeleri soyutlama yoluyla oluşturma süreçlerini incelemiş ve süreç içerisinde geliştirdiği öğretim tasarımının bu sürece etkisini tespit etmeye çalışmıştır. Deney ve kontrol grubu ile yapılan çalışmada, uygulamalar sonrasında ön test ve son test arasında pozitif ve anlamlı farklılık olduğu görülmüştür. Ayrıca, başarı düzeyleri daha yüksek olan öğrencilerin bilgileri oluşturabildiği ancak başarısı daha düşük olan öğrencilerin yanlış yorumlamalar sebebiyle zorlandığı gözlenmiştir. Cebirsel kavramlarla ilgili soyutlama süreçlerinin incelendiği bir başka çalışma Gürbüz (2021) tarafından yapılan doktora tezi çalışmasıdır. Çalışma grubunun ortaokul öğrencilerinden oluştuğu çalışmada yapılan incelemelerde, RBC modeli ve tahmini öğrenme yörüngeleri kullanılmıştır. İki aşamada yürütülen çalışmada, ilk aşamada tasarım temelli araştırma yöntemi kullanılarak öğrencilerin cebirsel kavramlara yönelik tahmini öğrenme yörüngeleri tespit edilmiş ve uygulaması yapılmıştır. İkinci aşamada ise öğrencilerin soyutlama süreçlerini betimleyebilmek adına görüşmeler yapılmış ve elde edilen veriler analiz edilmiştir. Sonuçta, yüksek başarı düzeyli öğrencilerin, değişkenler arası ilişkileri tespit ederek denklemleri sonuçlandırabildiği görülmüştür. Ayrıca, öğrencilerin, onlara sunulan bilgileri yapılandırabildiği denklemlere ilişkin bilgileri oluşturabildikleri ifade edilmiştir.

Şimşekler (2017) tarafından yapılan tez çalışmasında, RBC modeli yoluyla özel yetenekli bir sekizinci sınıf öğrencisinin bilgiyi oluşturma süreçlerinin incelenmesi amaçlanmıştır. Bu amaçla denklem, örüntü, üslü sayılar kavramlarına ve yüzde problemlerine yönelik bilgilerin soyutlama süreçlerini ortaya çıkarması hedeflenen dört uygulama problemi hazırlanmış ve problemler öğrenciye çözdürülmüştür. Verilerin toplanmasında gözlem ve görüşme tekniğinden yararlanılmıştır. Görüşmelerden ve çalışma yapraklarından elde edilen veriler, özel yetenekli öğrencinin matematiksel soyutlama sürecinde zorlanmadığını ve soyutlama sürecini gerçekleştirerek bilgiyi yapılandırdığını göstermiştir. Denklem kavramına yönelik bilgi oluşturma süreçlerinin incelendiği bir diğer çalışmada Çıldır (2014), üstün yetenekli öğrencilere iki bilinmeyenli denklem kurma kazanımına yönelik günlük hayattan bir probleme uygun olacak şekilde hazırlanan bir uygulama sorusu yoluyla veri toplamıştır. Çalışma grubunu oluşturan iki öğrenciden biri belirlenen kazanıma sahip değilken diğer öğrenci bu kazanıma ilişkin bir öğrenim süreci geçirmiştir. Elde edilen veriler RBC modeli ile incelenmiştir. Analiz sonuçlarına göre, öğrencilerin soruda verilen bilgileri tanıdıkları, kullandıkları ve iki bilinmeyenli birinci dereceden bir denklem kurarak (denklem bilgisini oluşturarak) pekiştirdikleri görülmüştür.

Dooley (2012) tarafından yapılan bir çalışmada, ilköğretim öğrencilerinden oluşan bir sınıftan birbiriyle ilişkili iki adet denklem kurma problemini çözmeleri istenmiştir. Sürecin RBC+C modeli ile analizi sonucunda, öğrencilerin tartışma ortamında birbirini olumlu yönde etkileyerek problem durumuna ilişkin bilgileri oluşturduğu ve pekiştirdiği görülmüştür. Ayrıca, bilgi oluşturma sürecinde öğretmenin aşırı yönlendirmesinin öğrencilerin akıl yürütme süreçlerini olumsuz etkileyebileceği ifade edilmiştir.

Sekizinci sınıf başarı düzeyleri farklı beş adet öğrencinin eşitsizlik ile ilgili soyutlama süreçlerinin incelenmesine yönelik yapılan yüksek lisans tezi çalışmasında Süzen (2019), verileri konuya yönelik hazırlamış olduğu dört adet problem ile toplamıştır. Verilerin RBC modeli temel alınarak analiz edilmesi sonucunda, başarı düzeyi orta ve yüksek olan öğrencilerin başarı düzeyleriyle doğru orantılı bir hızda bilgi oluşturma süreçlerini başarıyla tamamladıkları ancak düşük başarı düzeyindeki öğrencinin soyutlama sürecini tamamlayamadığı görülmüştür.

İki altıncı sınıf öğrencisinin doğru ve ters orantı kavramlarını soyutlama süreçlerini inceleyen Kalaycı ve Akkaya (2019), öğretim deneyi yöntemi doğrultusunda yarı yapılandırılmış görüşmeler gerçekleştirmişlerdir. Buradan elde edilen verilerin RBC+C modeli yoluyla analiz edilmesi sonucunda, konuyla ilgili alt kavramları tanıyarak süreç içerisinde kullandıkları ve istenilen kavramları oluşturarak pekiştirdikleri ifade edilmiştir.

İlhan (2019) yaptığı yüksek lisans tezi çalışmasında, altı dokuzuncu sınıf öğrencinin fonksiyon kavramını oluşturma süreçlerini incelemiştir. Elde edilen veriler RBC modeli temel alınarak analiz edilmiş ve ortaya çıkan sonuçlara göre, temel bilgileri tanıyan öğrencilerin birbiriyle olan etkileşimleri süreçte etkili olmuştur. Başarı düzeyi yüksek öğrenciler fonksiyon kavramını oluştururken, düşük başarı düzeyine sahip öğrencilerin oluşturamadığı görülmüştür. Fonksiyon konusuyla ilgili yapılan bir diğer çalışmada ortaöğretim öğrencileriyle çalışan Altun ve Yılmaz (2010), seçtikleri iki öğrencilerin parçalı fonksiyon kavramını oluşturma süreçlerini incelemiştir. Bunun yanında pekiştirme süreçlerini de inceleyen araştırmacılar, öğrencilerin hazırbulunuşluklarını işe koşabilecekleri problemler tasarlayarak uygulamaları grup çalışması olarak gerçekleştirmiştir. Uygulama sonucunda RBC+C modeli ile yapılan analizler sonucunda, öğrencilerin önceden oluşturmuş oldukları bilgileri tanıyarak kullanmayı başardıkları, parçalı fonksiyon bilgisini oluşturabildikleri ve pekiştirebildikleri görülmüştür. Bu sonuca ek olarak, problem tabanlı uygulamaların bilginin oluşturulma sürecine olumlu etkileri olduğu tespit edilmiştir.

Demir ve Gür (2020) tarafından yapılan makale çalışmasında, yapılandırmacı yaklaşım temelli teknoloji destekli öğrenme ortamlarında lise öğrencilerinin parabol bilgisini soyutlama süreçlerinin incelenmesi amaçlanmıştır. Sürecin incelenmesinde RBC+C modeli kullanılmıştır. Gerçekleştirilen durum çalışmasında, çalışma grubu bir öğretmen ve 20 öğrenciden oluşmaktadır. Veri toplama aracı olarak yapılandırılmamış gözlem, öğrenci ürünleri ve klinik mülakat kullanılmıştır. Araştırma sonuçları, yapılandırmacı yaklaşımın temel alındığı uygun teknoloji destekli öğrenme ortamlarının, öğrencilerin bilgiyi oluşturmalarını ve pekiştirmelerini kolaylaştırdığını göstermektedir.

Sezgin Memnun ve arkadaşları (2017) tarafından yapılan makale çalışmasında, RBC modeli kullanılarak limit kavramının oluşturulma sürecinin incelenmesi amaçlanmıştır. Çalışmanın sonucunda, öğrencilerin fonksiyon, sonsuzluk ve dizi kavramlarına yönelik önceki bilgileri yardımıyla limit kavramını oluşturabildiği görülmüştür. Gürbüz ve arkadaşlarının (2018) yaptığı çalışmada da aynı amaç güdülerek benzer katılımcı türlerinden benzer süreçlerle veri toplanmıştır. RBC modeliyle yapılan analizlerin sonuçlarına bakıldığında ise öğrencilerin işlemsel bilgi anlamında sorun yaşamadığı ancak kavramsal öğrenmeyi gerçekleştiremedikleri belirlenmiştir. Bu süreçte, öğrencilerin özellikle temsillerle ilgili zorluklar yaşadıkları tespit edilmiştir.

Sezgin Memnun ve arkadaşları (2019) tarafından yapılmış olan makale çalışmasında, 12. sınıf öğrencilerinin süreklilik kavramına yönelik bilgi oluşturma sürecini incelemek amaçlanmıştır. Bu süreçte araç olarak RBC modeli kullanılmıştır. Yarı yapılandırılmış görüşmeler yapan ve video kaydına alan araştırmacılar, görüşmelerde öğrencilere iki adet problem yöneltilmiştir. Bu problemleri çözme sürecinde gözlemlenen öğrenciler, süreklilik bilgisine ilişkin ön bilgileri tanımakta zorluk çekmemiş ancak oluşturma aşamasında sorun yaşamıştır.

Yukarıda ifade edilen çalışmalar incelendiğinde, sayılar ve cebir alanına yönelik birçok çalışma yapıldığı görülmektedir. Yapılan çalışmalarda yer alan öneri kısımlarına dikkat edildiğinde ise halen çalışmaya açık birçok konu ve kavram bulunduğu söylenebilir. Ayrıca, RBC modelinin geliştirilmesi açısından bakıldığında da benzer çalışmaların farklı yöntemler veya farklı niteliklerde çalışma gruplarıyla yapılabileceği ifade edilebilir.

İspat ve İspatlama

İnsanlık tarihinde, elde edilen tabletlerden tahmin edildiği üzere ispatın ilk kez Babiller tarafından kullanıldığı düşünülmektedir (Krantz, 2007). Babiller döneminde, ispatın ihtiyaçlar doğrultusunda kullanıldığı bilinmektedir. Bu nedenle, yapılan ispatların modern ispatlarla uyumsuz olduğu ve deneme-yanılma yoluyla sezgisel süreçlerden yararlanılarak elde edildiği ifade edilmektedir (Sezen Yüksel, 2020). Daha sonra, Thales ve Pisagor ile Antik Yunan döneminde dedüktif anlayışla yapılan kanıtlar, ispatlamanın gelişim sürecinde büyük rol oynamıştır (Dönmez, 2002; Krantz, 2007). Varoluşundan bu yana doğrular ve gerçekleri elde etmeye çalışan insanoğlu, ispatı da buna yönelik bir doğrulama aracı olarak kullanmaktadır (Sezen Yüksel, 2020). İspatlama eyleminin bu genel amacının çatısı altında birçok özel işlevi de bulunmaktadır. Bilgilerin kesinliğinden emin olunmasını sağlayan ispat, bu bilgilere yönelik açıklamalar yapılmasına da olanak sağlayabilmektedir (Bell, 1976; Tall, 1989). Burada kastedilen açıklamalar genellikle "neden doğru" sorusuna verilen cevaplardır. Bu cevaplar, yeni bilgilerin doğruluğu açısından kişileri ikna etmede önemli rol oynar (de Villiers, 1990). İspatın bir başka işlevi ise temellendirilen birçok unsur ile birlikte aksiyomları kullanarak kanıtlanan teoremlerin de katkısıyla matematiksel sistemin yaratılmasını sağlamasıdır (Bell, 1976).

Özellikle fen bilimlerinin işlevsel ve güvenilir bir araç olarak kullanmakta olduğu matematiksel sistemin bahsedilen nitelikleri elde edebilmesi, sistemin oluşmasında kilit rol oynayan ispat kavramına atfedilir. Buradan hareketle, ispatın matematiksel sistem içerisinde ve diğer alanlarda elde edilen yeni bilgilerin oluşumundaki katkısının yadsınamayacağı söylenebilir. Ayrıca, ispatın sağladığı kesinlik ve aynı bilginin farklı şekillerde ispatlanabilme esnekliğinden dolayı matematiğin kendi içerisinde ve farklı alanlarla arasında evrensel boyutta bir iletişim kurulabilmekte ve bilginin yaygınlaşması sağlanmaktadır (Hanna, 2000).

Babiller ve Antik Yunan dönemleri ile başlayarak günümüze kadar ulaşan ispat kavramının ve ispat yapma eyleminin, tarih boyunca matematik alanının genişlemesine paralel olarak öneminin de arttığı görülmektedir (Hersh, 2008). Özellikle Antik Yunan döneminde, matematik yapısının aksiyomlara bağlı olarak yapılandırıldığı ve tümdengelimsel düşünce sisteminin yaygınlaştığı ifade edilmektedir (Almeida, 2001; Hanna, 1990; Harel & Sowder, 2007; Kleiner, 1991). Araştırmacıların, tümdengelimsel ve tümevarımsal akıl yürütmenin matematiksel düşünme becerisindeki gelişime olumlu katkı sağladığını fark etmesi, ispat kavramının öneminin artmasına ve geliştirilmesine yönelik çalışmalar yapılmasına sebep olmuştur (Courant & Robbins, 1996).

Polya (1954), matematiksel aktivite türlerine ilişkin iki farklı düşünme biçimi tanımlanmıştır. Olası muhakeme olarak adlandırılan düşünme biçimi çıkarım yapmayı desteklerken dedüktif muhakeme olarak adlandırılan düşünme biçimi ise matematiksel bilginin doğruluğundan emin olunmasını destekler. Bu muhakeme türleri, Harel ve Sowder (2007) tarafından ortaya atılan ispatın sosyal ve bilişsel ihtiyaçlara yönelik ortaya çıktığı fikrini destekler niteliktedir (Zeybek Simsek, 2020). Ayrıca, matematiksel düşünme süreçlerinin ikna etme, akıl yürütme ve ispat süreçleriyle meydana geldiği de belirtilmektedir (Harel & Sowder, 1998; 2007). Matematiksel düşünmenin bu bileşenleri sayesinde, öğrenciler problem çözme süreci sırasında nedenleri araştırmakta ve ikna olmak için argümanlar bulmaya çalışmaktadır. Akıl yürütme ve ispat yapma eylemleri de bu ikna sürecinin olmazsa olmazları olarak düşünülebilir. Öyle ki, NCTM (2000) tarafından hazırlanan, matematik öğretim süreçlerinin yol haritası olarak ifade edilen ilkeler ve standartlarla ilgili çalışmada, akıl yürütme ve ispatın matematik öğretiminde esas süreçlerden biri olduğu belirtilmiştir.

Akıl yürütme becerisi, üst düzey bir beceri olarak kabul edilmekte ve matematiksel bir beceri olarak görüldüğü kadar temel bir beceri olarak da nitelendirilmektedir (Ross, 1998). Akıl yürütme becerisi, argüman oluşturmak ve yargılara varmak için benimsenen düşünme biçimi olarak tanımlanır (Lithner, 2000). Yapılan çalışmalarda genel olarak, tümevarım (indüktif) ve tümdengelim (dedüktif) olmak üzere iki tür akıl yürütme biçimi vurgulanmıştır. İspat süreçlerinde sıklıkla kullanılan tümevarım, doğru olduğu kabul edilen ifadeler yoluyla genel bir sonuca ulaşmayı temel alır (Mish, 1991). Tümdengelimsel akıl yürütme ise her adımın önceki adımı takip etmesi gereken mantıksal bir akıl yürütme silsilesinden çıkarılan sonuçları ifade eder (Ennis, 1969). Simon (1996), bu iki akıl yürütme biçiminde de “matematiksel sistemin nasıl çalıştığı” fikrinin sorgulanmasına ortam oluşturulmadığını iddia ederek dönüşümsel akıl yürütme adını verdiği üçüncü bir akıl yürütme biçimi ortaya atmıştır. Dönüşümsel akıl yürütme, öğrencilerin matematiksel nesneler üzerinde yapılan işlemler sonucu, bu nesnelerin geçirdiği dönüşümleri veya değişimleri zihinlerinde ya da gerçek hayatta canlandırması olarak tanımlanmaktadır.

İspat, yapısı gereği zihinsel etkinliklerle şekillenir. Bu süreçte, doğruluğu gösterilmek istenen ifadeye yönelik argümanlar oluşturulur ve gerekçeler sunulur. Bu eylemler, akıl yürütme süreçlerinde de gerçekleştirilmektedir. Akıl yürütmeler sonucu elde edilen argümanlar ve gerekçeler tek başlarına ispat olarak nitelendirilemeyeceği gibi, formal bir şekilde gerçekleştirilen ispatlar da bazı akıl yürütme süreçleri sonucu elde edilen açıklamalar kadar aydınlatıcı olamayabilmektedir (Kaufman, 1981). İspat ve akıl yürütme kavramları ve içerisinde yer alan eylemlerin yapısından dolayı ispat ve akıl yürütmenin aynı şeyi ifade ettiğini düşünen kaynaklar (NCTM, 2000; Brodie, 2010) bulunmaktadır. Bu düşüncelere ek olarak, akıl yürütme eylemlerinin ispat süreçlerinde kullanılan becerilere yönelik bir araç olarak değerlendirildiği (Almeida, 1996) çalışmalar da vardır.

Hanna (1990), ispat kavramına ilişkin yaptığı ayrım ile ispatın üç farklı yapısını ortaya koymayı amaçlamıştır. Bunlar formal ispat, kabul edilebilir ispat ve ispat öğretimi olarak ifade edilmiştir. Formal ispat, modern aksiyomatik matematik sistematiği içerisinde bilgilerin geçerliliğini sağlamak amacıyla dedüktif olarak gerçekleştirilen ikna süreçleri olarak ifade edilebilir. Kabul edilebilir ispat, matematik dünyasındaki nitelikli ve önemli matematikçiler tarafından kabul edilen ispatlara verilen addır. İspat öğretimi ise matematik öğretimi süreçlerinde öğrencilere, bilgileri ispat yoluyla açıklamak olarak düşünülebilir. Hanna (1990; 1995) daha sonra yaptığı çalışmalarda, ispatın algılanma şekline göre ispatlayan ve açıklayan ispatlar olarak bu kavramı iki farklı açıdan değerlendirmiştir. Araştırmacı ayrıca bu ispat türlerinin kullanımının, süreç içerisindeki kullanım ihtiyaçlarına göre seçildiğini belirtmektedir.

İspat yapma ve yapılan ispatı anlama süreçlerinde, düşünme biçimleri ve ispat türlerinin farkında olunması kadar ispata ilişkin temel kavramların neler olduğunun da bilinmesi gerekmektedir. Matematiğin aksiyomatik sistemi içerisinde gerçekleştirilen ispatlar, bu sistem içerisinde bulunan elemanlardan ayrı düşünülemez. Bu elemanlar; tanımsız terim, aksiyom, tanımlı terim, teorem ve ispat olarak ifade edilebilir.

Tanımsız terim, aksiyomatik sistemlerin başlangıç noktası olarak nitelendirilebilir. Tanımsız terimler, aksiyomatik sistemlerin içerisinde nesnelerin tanımlanmasına engel olabilecek döngülerin ortaya çıkmasını önler (Garnier & Taylor, 2009). Bu döngüler, tanımlanacak olan ögenin tanımında bir başka ögenin kullanılmasından kaynaklanır. Bu durum, bazı terimlerin tanımlanmadan kullanılmasını gerektirmektedir. Hilbert'in geliştirdiği Öklid Geometrisinde yer alan nokta, doğru ve düzlem kavramları bu tür terimlere örnek verilebilir. Terimlerin tanımsız olması, beraberinde bu terimler arasında nasıl bir ilişki olduğunun henüz bilinmemesine neden olur. Bu sebeple, aksiyomatik sistemlerin içerisinde bu terimlerin arasındaki bağlantıları ifade eden ve ispatlanmadan kabul edilen önermeler vardır. Bu önermelere aksiyom adı verilir. Aksiyomların oluşturulmasıyla birlikte yapılandırılan aksiyomatik sistem daha işlevsel ve üretken hale gelir. Bu değişim, sistemin içerisine dahil edilen anlamlandırılabilecek ve çıkarım yapılabilecek ilişkilerin varlığından kaynaklanmaktadır. Bu sayede, tanımlı terimler olarak adlandırılan ve tanımsız terimlere sürekli başvurulmasının önüne geçen terimler ortaya çıkar (Garnier & Taylor, 2009). Noktalar yardımıyla tanımlanmış olan doğru parçası kavramı, bu tür bir terime örnek olarak gösterilebilir. Teorem ise tanımsız terimler arasındaki ilişkileri ifade eden aksiyomları kullanarak mantıksal akıl yürütme yoluyla ortaya koyulan ve aksiyomatik sistem içerisindeki terimlerle ilgili ifadeler içeren önermelerdir (Garnier & Taylor, 2009). İlk olarak doğrudan aksiyomlardan yola çıkılarak elde edilen teoremler ispatlanır ve geliştirilen diğer teoremler kanıtlanmış olan teoremler yoluyla ispatlanarak süreç bu şekilde devam ettirilir. İspat kavramı ise bu aksiyomatik yapı içerisindeki teoremleri sonuç olarak ortaya koyan argümanlardır (Garnier & Taylor, 2009). Basitçe ispat, matematiksel önermelerin doğruluğu veya yanlışlığını gösteren açıklamalar olarak da ifade edilebilir.

Waring (2008) öğretim süreçlerinde ispat kullanımının, matematikteki konu ve kavramlar arasındaki ilişkilerin farkına varılmasına ve matematiğin bir disiplin olarak bir bütün halinde anlamlandırılmasına katkı sağladığını ifade etmektedir. Matematik eğitimine yönelik gerçekleştirilen reformlarda ispat kavramının daha ön plana alınmaya başlanması (NCTM, 2000), ispatın öneminin matematik öğretimi açısından da anlaşıldığını göstermektedir (Hanna, 1989; de Villiers, 1990; King, 1992; Schoenfeld, 2009). Bu doğrultuda, matematik öğretimi için geliştirilen standartlarda ve programlarda son on yılda, öğrencilerin matematiksel akıl yürütme ve ispat kavramlarıyla daha erken karşılaşması gerektiği ve buna yönelik uygulamalara yer verildiği görülmektedir (NCTM, 2000; CCSSI, 2010; MEB, 2018a; MEB, 2018b). Ders kitaplarının her yaş dönemindeki öğretim süreçlerinde etkili bir araç olması (Stein vd., 2007) nedeniyle matematik ders kitaplarının da bu standartlar ve programlara uygun hazırlanmasına dikkat edilmesi gerekmektedir. Aksine durumları gösteren bazı çalışmalar, ders kitaplarına yer alan ispat ve akıl yürütmeye yönelik etkinliklerin sayısının yetersiz olduğuna dikkat çekmiştir (Hanna & Bruyn, 1999; Newton & Newton, 2007; Stylianides, 2009; Thompson vd., 2012; Davis vd., 2012; Bieda vd., 2014; Zeybek Simsek, 2020).

Cebir Öğrenme Alanına Yönelik Yapılmış İspat Çalışmaları

İspat yapma süreçlerinde, cebir alanıyla bağlantılı olan bilgi, kavram, teorem ve ilişkilerin sıklıkla kullanıldığı (Bell, 1976; Hanna, 1990; Kleiner, 1991) fakat kullanmakta çeşitli zorluklarla karşılaşıldığı bilinmektedir (Rizos & Adam, 2022). Ayrıca, bu ispat süreçlerinde yer alan kişilerin farklı anlayışları da önemli bir çalışma konusu olmaktadır (Healy & Hoyles, 2000). Bu bölümde, çalışmanın çerçevesini belirleyen cebir alanı bağlamında yapılmış olan çalışmalara ve özel olarak cebir alanının içerisinde yer alan gerçel sayılar ve gerçel sayıların cebirsel özellikleri ile ilgili ispat çalışmaları gözden geçirilecektir.

Rizos ve Adam (2022) tarafından yapılan araştırmada, birinci sınıf 60 matematik bölümü öğrencisi ile çalışılmıştır. Pandemi sürecinde yapılan bu çalışmada amaç, öğrencilerin gerçel sayıları nasıl anlamlandırdıklarını ortaya çıkarmaktır. Uygulamalarda kullanılan görevler, anketler ve yapılan görüşmelerden elde edilen verilere göre, öğrencilerin zihinlerinde oluşturdukları gerçel sayı kavramının eksikliklerinin olduğu ve sayı kümeleri arasındaki ilişkileri ortaya koyma noktasında kafa karışıklığı yaşadıkları belirlenmiştir. Buna ek olarak, “iki rasyonel sayının bölümü her zaman bir rasyonel sayı mıdır?” sorusuna verilen cevaplardan elde edilen veriler, öğrencilerin yarısından fazlasının doğru cevabı verdiğini ama buna karşın sadece yaklaşık dörtte birinin iki rasyonel sayının bölümü hakkında kesin bir ispat yapabildiğini göstermiştir.

Belin ve Akar’ın (2020) yapmış olduğu karma araştırmada, nicel akıl yürütme biçiminin matematik öğretmeni adaylarının gerçel sayılara yönelik ispatları anlama süreçlerine etkisi incelenmiştir. Çalışma grubu 19 matematik öğretmeni adayından oluşturulmuş ve öğretmen adaylarına öğretim etkinlikleri uygulanmıştır. Ön ve son testlerde ispatları kavrama noktasında anlamlı farklar bulunmuştur. Ayrıca, çalışma grubunun içerisindeki altı katılımcıyla görüşmeler yapılmıştır. Buradan elde edilen sonuçlara göre, öğretmen adaylarının nicel akıl yürütme gerçekleştirdikleri ve bu akıl yürütme biçiminin özellikle gerçel sayılara ilişkin yapılan ispatları anlama konusunda faydalı olduğu ifade edilmiştir.

Gerçel analiz dersleri için yapılandırmacı yaklaşımı temel alarak kullanışlı ve etkili çalışma yaprakları hazırlamayı amaçlayan Fajriah ve Suryaningsih (2020), bu dersi alan lisans öğrencileri ile çalışmıştır. Geliştirdikleri çalışma yaprakları cebirin özellikleri ve gerçel sayıların sıralı özelliklerini içermektedir. Yapılan uygulamalar sonucunda tüm kriterleri sağladığı görülen çalışma yapraklarının bu derslerde kullanılmasının uygun olduğu ifade edilmiştir. Etkinlik uygulamaları sırasında ortaya çıkan bir başka sonuç, öğrencilerin gerçel sayılarda bulunan cebirsel özelliklere yönelik ispat problemlerinde zorlandığıdır.

Healy ve Hoyles (2000) tarafından yapılan çalışmada, ortaöğretim düzeyindeki başarılı öğrencilerin cebirde ispat konusundaki anlayışlarının tespiti ve bu anlayışlara sahip olma nedenleri araştırılmıştır. Anket yoluyla toplanan verilerin analizi sonucunda, öğrencilerin, cebirsel argümanları daha fazla kullandığı ya da cebir içermese bile ikna edici ve açıklayıcı argümanları tercih ettiği iki farklı anlayışa sahip oldukları belirlenmiştir. Öğrencilerin geneli deneysel argümanları tercih etmiş ve en başarılı öğrenciler ispatlarını cebir kullanmadan günlük dilde ifade etmişlerdir. Öğrencilerin yanıtlarının temelde matematiksel yeterlilikleriyle ilgili olduğu bulunsa da öğretim programları, ispata bakış açıları ve cinsiyetleri de etken olarak değerlendirilmiştir.

Bergé (2008) tarafından yapılan araştırmada, yukarıdaki bir bölümde de ifade edildiği gibi gerçel sayılar kümesinin tamlık özelliği üzerinde durulmuştur. Bu özelliğe yönelik yapılan uygulamalarda, öğrencilerden ağırlıklı olarak akıl yürütme ve ispat yapılması beklenmiştir. Öğrencilerin çalışma sırasındaki dönem içerisinde ders aldığı öğretmenlere bu soruları nasıl uyguladıkları sorulmuş ve öğretmenlerin ispatları tahtada anlatırken çeşitli kavram yanılgılarına ve mantıksal hatalara sebebiyet verdiği tespit edilmiştir. Örneğin, ispat kavramının matematikten tamamen bağımsız bir kavram olduğu veya kısıtlı kavram kullanılarak yapılan ispatlar nedeniyle öğrencilerin önerme ile ilgili akıl yürütmelerini sınırlandırdığı sonuçlarına ulaşılmıştır.

İspatı anlama üzerine gerçekleştirdiği tez çalışmasında Belin (2016), gerçel sayıların ondalık biçimde açılımı bağlamında çalışılmıştır. Matematik öğretmeni adaylarıyla çalışan araştırmacı, açılımlara yönelik yapılan uygulamalar sırasında öğretmen adaylarının sahip oldukları nicel muhakemelerin ispatı anlamaya olan etkisi incelenmiştir. Uygulamaların öncesinde ve sonrasında, araştırmacının geliştirdiği ispat anlama testi uygulanmış ve anlamlı farklar elde edilmiştir. Bunun nedeni olarak öğretmen adaylarına sunulan örnek ispatlar içerisinde çıkarsamalar yapılmasına imkân verilmesi, öğretmen adaylarının diyagramlar oluşturmaları ve araştırmacı tarafından matematiksel terimlerin gösterimlerine yönelik tanımlara ve kavramsal anlamlara vurgu yapılması gösterilebilir. Bu sonuç, yapılan görüşmelerden elde edilen verilerle de desteklenmiştir.

Sayıların irrasyonel olup olmadığını belirlemeye yönelik farklı çözüm süreçlerine ilişkin anlayışları inceleyen Çiftçi ve arkadaşları (2015), 40 matematik öğretmeni adayı ile çalışmıştır. Bu çözümler ispat yoluyla gerçekleştirilmekte ve beklenen çözümlerde çelişki bulunarak aksinin doğru olduğunun gösterilmesi yöntemine başvurulmuştur. Öğretmen adaylarına uygulanan açık uçlu sorulardan elde edilen veriler incelendiğinde, genel olarak matematik öğretmeni adaylarının kullandığı çözüm yollarının kısıtlı olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Bunun bir sebebi olarak araştırmacı, sayılar sisteminde bulunan gerçel sayı kavramına yönelik gerçekleştirilen öğretimlerin tek düze ve sunum yöntemine benzer şekilde uygulanması olabileceğini ifade etmiştir.

Çalışmaların sonuçları göz önüne alındığında, öğrencilerin ispat kavramı ve ispatlama eylemine yönelik yetersiz bir anlayışa sahip oldukları ve ispat süreçlerinde cebirsel bilgileri kullanmakta ve cebirsel ispatları yapmakta zorlandıkları görülmektedir. Araştırmacılar, çalışmalarda elde ettikleri sonuçları ispat yapmaya yönelik öğretim süreçlerinin etkili olmamasına, öğrencilere ispat süreçlerine yönelik deneyim elde edebilecekleri ve akıl yürütmeye fırsat veren öğrenim ortamlarının sağlanamamasına bağlamaktadır.

Bölüm 3

Yöntem

Bu tez çalışması nitel araştırma yaklaşımı ile yürütülmüştür. Nitel araştırma, sosyal yaşamın incelenmesine yönelik çok çeşitli yaklaşımlar ve metotlar için kullanılan bir şemsiye terimdir (Saldana, 2011). Nesnelerin anlamlarına, kavramlarına, tanımlarına, özelliklerine, metaforlarına, sembollerine ve betimlemelerine atıfta bulunan çalışmalara nitel araştırma denir (Lune & Berg, 2017). Nitel araştırmalar, bireylerin veya grupların içerisinde bulunduğu durumları veya kolayca anlaşılamayan karmaşık konuları detaylı bir şekilde inceleyerek bunlara ilişkin bir bakış açısı veya bir öngörü sağlamayı hedefler (Creswell, 2013). Bu hedef doğrultusunda, nitel araştırmalarda belirlenen problem durumuna ilişkin anlamlandırma arayışı söz konusudur.

Bu çalışmada, ilköğretim matematik öğretmenliği programında öğrenim gören öğretmen adaylarının gerçel sayıların cebirsel özelliklerine ilişkin bilgi oluşturma süreçlerinin incelenmesi amaçlanmıştır. Katılımcılar, belirlenen cebirsel özelliklerin doğası gereği bu özellikleri ispatlama yoluyla oluşturmaya çalışmışlardır. Çalışmada, katılımcıların bilgi oluşturma süreçleri, yapılandırdıkları ispatlama aktiviteleri kapsamında detaylı bir şekilde incelenmiştir. Bu nedenle, bu tez çalışmasında nitel araştırma yaklaşımlarından durum çalışması (case study) kullanılmıştır. Durum çalışması, belirli bir durum/durumlar hakkında "ne", "nasıl" ya da "neden" gibi soruların yanıtlarını ortaya koymak amacıyla durumun/durumların doğal ortamında doğrudan ve derinlemesine incelendiği nitel araştırma yaklaşımıdır (Yin, 2018). Durum çalışmalarında gözlemler, görüşmeler, görsel-işitsel materyaller, belgeler ve raporlar gibi birden fazla veri toplama kaynağıyla ayrıntılı, derinlemesine veri toplama süreci gerçekleştirilir (Creswell, 2013). Ayrıca, bu yaklaşımın benimsendiği araştırmalarda, durumların kendisi temel analiz birimi olarak değerlendirilir (Yin, 2018). Buradan hareketle bu çalışmada, araştırmacının uzman görüşüne başvurarak hazırlamış olduğu etkinlik uygulamalarında yer alan iki problemin her biri ayrı bir durum olarak ele alınmıştır. Katılımcılar ile gerçekleştirilen öğretim görüşmeleri (teaching interview) ayrı ayrı değerlendirilerek, RBC modelinde tanımlanan epistemik eylemler bağlamında katılımcıların belirlenen sorulara ilişkin bilgi oluşturma süreçleri ortaya çıkarılmıştır.

Çalışma Grubu

Araştırmanın çalışma grubu, amaçlı örnekleme yöntemlerinden ölçüt örnekleme ile belirlenmiştir. Araştırmada kullanılan durum çalışması yaklaşımına benzer olarak amaçlı örnekleme yöntemi, bolca bilgi ve veri elde edilme potansiyelindeki durumların detaylı ve derinlemesine incelenebilmesine imkân sağlar (Patton, 1987). Bu tez çalışmasında, katılımcıların bilgi oluşturma süreçlerinden elde edilen zengin ve ayrıntılı bilgilerin katılımcıların ispat süreçlerine ışık tutarak açıklamalar sağlaması hedeflendiği için amaçlı örnekleme yöntemi kullanılmıştır.

Katılımcıların bilgi oluşturma süreçlerine katkı sağlayabilecek ön bilgilere sahip olması adına bazı lisans derslerini başarıyla geçmiş olmaları ve çalışmanın esas veri kaynağını oluşturan öğretim görüşmelerinde katılımcıların kendini iyi ve açıkça ifade edebiliyor olmaları beklenmektedir. Bu sebeple çalışmada ölçüt örnekleme yöntemi kullanılmıştır.

Bu tez çalışması, bir devlet üniversitesinin Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Matematik Eğitimi Ana Bilim Dalı, İlköğretim Matematik Öğretmenliği programında öğrenim görmekte olan altı öğrenci (6 kadın) ile yürütülmüştür. Çalışma grubu gönüllülük esasına dayalı olarak oluşturulmuştur. Katılımcılar çalışma içerisinde "Ö1", "Ö2", "Ö3", "Ö4", "Ö5" ve "Ö6" olarak isimlendirilmiştir. Katılımcıların belirlenme sürecinde çalışmanın konusuyla ilgili olan Analiz 1, Matematiğin Temelleri 1, Soyut Matematik derslerini başarıyla geçmiş olmaları gözetilmiştir. Analiz 1 dersi; kümeler ve sayı sistemleri, bağıntı ve fonksiyon çeşitleri konularını içermektedir. Matematiğin Temelleri 1 dersi kapsamında; sayılar ve cebir öğrenme alanlarındaki konulara ilişkin temel kavramlar ve özellikleri, bu kavramların birbiriyle ilişkisi ve çoklu gösterimlerle birbirlerine dönüştürülmesi konuları bulunmaktadır. Soyut Matematik dersinde ise sembolik mantık ve kanıt teknikleri, kümeler, kümeler cebiri, küme takımları, küme takımlarının parçalanışları, çarpım kümeleri, bağıntılar, bağıntının tersi, bağıntının bileşkesi, denklik bağıntıları ve denklik sınıfları, sıralama bağıntıları, kısmi sıralı küme, tam sıralı küme, fonksiyonlar, birebir ve örten fonksiyonlar, fonksiyonların bileşkesi, fonksiyonların tersi, işlemler konuları yer almaktadır.

Çalışmada kullanılan öğretim görüşmesi (Hershkowitz vd., 2001) ve sesli düşünme (Think Aloud) (van Someren vd., 1994) veri toplama tekniklerinin yapısı gereği, katılımcıların düşüncelerini rahatça ve açıklayıcı bir şekilde ifade edebilmeleri gerekmektedir. Katılımcıların seçilme sürecinde bu gerekliliğin sağlanması amacıyla, derslerine giren öğretim elemanları ve öğretim üyelerinden katılımcıların kendini iyi ifade edebilme durumları ile ilgili görüşler alınmıştır.

Veri Toplama Araçları

Bu tez çalışmasının verileri, katılımcılar ile gerçekleştirilen öğretim görüşmeleri yoluyla elde edilmiştir. Hershkowitz ve arkadaşları (2001) öğretim görüşmesini, temelde katılımcının ne yaptığını ve neden yaptığını açıklaması için çeşitli soruların sorulduğu bir görüşme türü olarak tanımlamıştır. Aynı zamanda, görüşmecinin ortamda bulunarak katılımcının kendi kendine geçirdiği süreçlerde muhtemelen ulaşamayacağı bir görüye ulaşmasını sağlayacak sorular sorması, bu görüşmenin ek olarak didaktik bir niyetinin olduğunu göstermektedir. Bu sebeple, Hershkowitz ve arkadaşları (2001) bu görüşme türüne "öğretim görüşmesi" (teaching interview) adını vermeyi tercih etmiştir.

Öğretim görüşmelerinde, matematik öğretmeni adaylarının gerçel sayıların cebirsel özelliklerine ilişkin bilgi oluşturma süreçlerini analiz etmek amacıyla araştırmacı tarafından yarı yapılandırılmış görüşme formatında oluşturulmuş olan etkinlik uygulama formu (EK-A) kullanılmıştır. Söz konusu form hazırlanırken Matematik Eğitimi Ana Bilim Dalından bir öğretim elemanının uzman görüşüne başvurulmuştur. Etkinlik uygulama formunun geliştirilme süreci Şekil 8'de özetlenmiştir. Formun ilk halinde, her bir cebirsel özelliğe yönelik beş farklı etkinlik bulunmaktadır. Bu etkinlikler düzey bağlamında ipucu miktarına bağlı olarak zordan kolaya doğru geliştirilmiştir. İlk etkinlikte herhangi bir ipucu verilmeden cebirsel özelliğin doğru olduğunun gösterilmesi istenmiştir. İkinci etkinlikte ipucu olarak katılımcılara toplama ve çarpma işlemlerine ilişkin aksiyomlar verilmiştir. Üçüncü etkinlikte, katılımcılara ispat süreçlerinde spesifik olarak hangi bilgileri kullanmaları gerektiği belirtilmiştir. Dördüncü etkinlikte ise cebirsel özelliklere yönelik ispat süreçlerinin başlangıç adımları verilmiştir. Burada amaç, verilerin, katılımcıların düzeylerine uygun olan etkinlikten toplanmasını sağlamaktadır. Bu amaç doğrultusunda,

Şekil 8

Etkinlik Uygulama Formunun Tasarım Süreci

katılımcıların zor olarak nitelendirilen etkinlikten (Etkinlik 1) başlayarak gerekirse diğer etkinliklere geçmeleri beklenmiştir.

Etkinlik uygulama formunun bahsedilen ilk hali uzman görüşüne sunulmuş ve dönütler doğrultusunda düzenlenmiştir. Uzman görüşleri doğrultusunda, ipucu olarak toplama ve çarpma işleminin özelliklerinin verildiği ikinci etkinliğe gerek olmadığına karar verilmiş ve formdan çıkarılmıştır. Ayrıca, formda cebirsel özelliklerle ilgili etkinliklere geçmeden önceki bölüme cisim aksiyomlarına yönelik örneklerin ve bu örneklere yönelik çözüm önerilerinin bulunduğu ön etkinlikler eklenmiştir. Bu geliştirme ile katılımcıların ön etkinliklerde yer alan çözüm önerilerini inceleyerek cisim aksiyomlarını fark etmeleri ve bu aksiyomların kullanımına yönelik deneyim elde etmeleri hedeflenmiştir. Etkinlik uygulama formunun bu haliyle, belirlenen bir katılımcı ile uygun bir sınıf ortamında bir pilot uygulama gerçekleştirilmiştir.

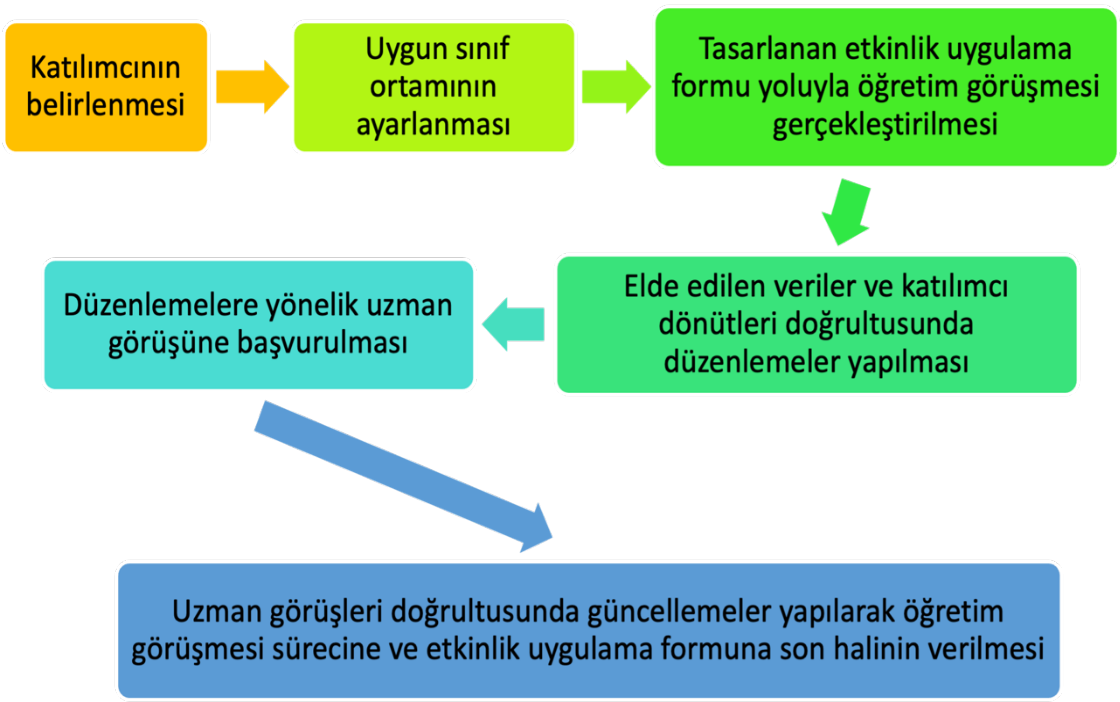
Pilot Uygulama

Esas uygulamadan önce, etkinlik uygulama formu içerisinde esas uygulama sürecinin verimliliğini düşürebilecek olan durumların tespit edilmesi yoluyla uygulanabilirlik kontrolü yapılması ve planlanan öğretim görüşmesi sürecinin test edilmesi amacıyla bir pilot uygulama gerçekleştirilmiştir. Pilot uygulama süreci Şekil 9'da açıklanmıştır. Öncelikle, tez çalışmasının örnekleminin belirlenme biçimine benzer yolla gönüllülük esas alınarak bir matematik öğretmeni adayı (erkek) belirlenmiştir. İlköğretim matematik öğretmenliği programı ikinci sınıf öğrencisi olan katılımcı, esas uygulamaya dahil olan Ö2 ile aynı özelliklere sahiptir. Katılımcı, çalışmanın konusuyla ilgili olan Analiz 1, Matematiğin Temelleri 1 ve Soyut Matematik derslerini başarıyla geçmiş ve katılımcının kendini iyi ifade edebildiği derslerine giren öğretim elemanlarından görüş alınarak teyit edilmiştir. Uygun sınıf ortamında uygulanan pilot çalışmada, ilk olarak öğrenciye araştırmacı tarafından uygulama süreci anlatılmıştır. Katılımcıdan önce ön etkinlikleri incelemesi, daha sonra verilen problem durumlarını çözmesi istenmiştir.

Katılımcının görüşlerini rahat ifade edebilmesi adına verdiği cevapların herhangi bir değerlendirmeye tabii tutulmayacağı söylenmiştir. Uygulama sürecinde ses kaydı alınmıştır. Sürecin sonunda, araştırmacı katılımcıdan uygulamaya yönelik geri dönütler istemiş, ek olarak eleştirel bir perspektif ile gözlemlediği uygulama sürecine ilişkin olumlu veya olumsuz bazı durumları not almıştır. Araştırmacı, uygulama sürecinde elde edilen verilerin analizi, araştırmacının gözlemleri ve alan notları doğrultusunda uzman görüşüne başvurarak çalışmanın veri toplama aracı ve veri toplama süreci ile ilgili son kararı vermiştir. Pilot çalışmadan öncesi ve sonrası arasındaki en belirgin fark, ipucu içeren etkinliklerin veri toplama aracından çıkarılması (bkz. Şekil 10) olmuştur. Bunun yanında, ön etkinlikler matematiksel olarak daha anlaşılır hale getirilmiştir (bkz. Şekil 11). Ek olarak, uzman görüşü dahilinde, etkinlik uygulama formundaki metinsel düzeltmeler ve problem durumlarının açık, net ve anlaşılır olmasıyla ilgili eksiklikler tamamlanmıştır.

Şekil 9

Pilot Uygulama Süreci



Şekil 10

Etkinlik Uygulama Formundan Çıkarılan Etkinlik Örneği

ETKİNLİK 4

$\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı bilinen toplama " + " ve çarpma " · " işlemlerinin aşağıda verilen

- $a + 0 = 0 + a = a$ olacak şekilde bir $0 \in \mathbb{R}$ elemanı vardır (0 sayısına toplama işlemine göre birim veya etkisiz eleman denir).
- $a, b, c \in \mathbb{R}$ için $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, $\quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ dir.
- $a + (-a) = (-a) + a = 0$ olacak şekilde bir $-a \in \mathbb{R}$ elemanı vardır ($-a$ elemanına a elemanının toplamaya göre tersi denir).
- $(a + b) + c = a + (b + c)$ (Kullanabileceğiniz durumlar olabilir, zorunlu değildir.)

özelliklerini kullanarak, her $a \in \mathbb{R}$ için

$$a \cdot 0 = 0$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm Önerisi:

Formun nihai hali, yapılan bu pilot uygulama sonucunda araştırmacı ve uzmanın görüş birliği ile verilmiştir. Etkinlik uygulama formunda, ön etkinlik olarak katılımcıların konuya ilişkin temel bilgileri deneyimlemeleri adına cisim aksiyomlarına yönelik problem durumları ve çözüm önerileri yer almıştır. Ön etkinliğin devamında, formda asıl uygulamaya yönelik iki problem yer almaktadır. Problemler, gerçel sayıların cebirsel özelliklerinin ispatlanmasına yönelik hazırlanmıştır. Matematiğin hiyerarşik yapısı gereği, bazı cebirsel özelliklerin ispatı diğer cebirsel özelliklere doğrudan bağlı olabilmektedir. Örneğin, birinci cebirsel özelliğin $(\mathrm{a} \cdot 0 = 0)$ ispatlanması sonucunda katılımcının bu özelliği bir bilgi olarak oluşturması, ikinci cebirsel özelliğin $((-1) \cdot \mathrm{a} = -a)$ ispat sürecinde bu bilgiyi tanıyarak kullanmasına imkân oluşturmaktadır. Bu nedenle, formda yer alan problemlerin katılımcıya sunulması belirli bir sıralamaya

Şekil 11

Etkinlik Uygulama Formunda Yer Alan Ön Etkinlik Örneği

ETKİNLİK 1

Aşağıda bazı örnekler ve bu örneklere yönelik $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı toplama " + " ve çarpma " · " işlemlerinin özellikleri kullanılarak elde edilmiş çözüm önerileri bulunmaktadır. Bu çözüm önerilerinde, $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı işlemlerin hangi özelliklerinin kullanıldığını belirleyiniz.

Örnek

Aşağıdaki eşitliğin doğru olduğunun gösterildiği çözüm önerilerinde, etkinliğin açıklamasında belirtilen işlemlerin özelliklerinden hangilerinin bulunduğunu inceleyiniz.

$$1 + 2 + 4 = 7$$

Çözüm Önerisi:

$$1 + 2 + 4 = \mathbf{1 + 2 + 4}$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2 + 4 = \mathbf{1} + (\mathbf{2} + \mathbf{4}) = \mathbf{1} + \mathbf{6} = \mathbf{6} + \mathbf{1}$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2 + 4 = (\mathbf{1} + \mathbf{2}) + \mathbf{4} = \mathbf{3} + \mathbf{4} = \mathbf{4} + \mathbf{3}$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2 + 4 = \mathbf{7}$$

olduğu görülür.

bağlıdır. Etkinlik uygulama formunda, belirlenen problemlerin sırasıyla nasıl sunulduğu Şekil 12'de gösterilmiştir. Pilot uygulama sonrasında gerekli düzenlemeler ve planlamalar yapılarak esas çalışmaya geçilmiştir.

Veri Toplama Süreci

Araştırmanın verileri, araştırmacı tarafından 2022-2023 eğitim öğretim yılı güz döneminde toplanmıştır. Pilot uygulama sonucunda son hali verilen etkinlik uygulama formu ile çalışma grubunu oluşturan üniversite öğrencilerinin her biriyle ayrı ayrı görüşülmüş ve bu görüşmeler birer gün içerisinde tamamlanmıştır. Bu süreç aralıklı tarihlerde gerçekleşmiş olmak üzere toplamda iki hafta sürmüştür. Veri toplama süreçleri öğretim görüşmeleri yoluyla gerçekleştirilmiş ve bu görüşmelerinden elde edilen bulguların daha verimli ve yorumlanabilir olması amacıyla sesli düşünme yöntemi kullanılmıştır. Sesli düşünme yöntemi, sahip olunan düşüncenin yorum katılmadan basit

Şekil 12

Etkinlik Uygulama Formunda Asıl Uygulamada Yer alan Problem Durumları

Her $a \in \mathbb{R}$ için

$$a \cdot 0 = 0$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm Önerisi:

Her $a \in \mathbb{R}$ için

$$(-1) \cdot a = -a$$

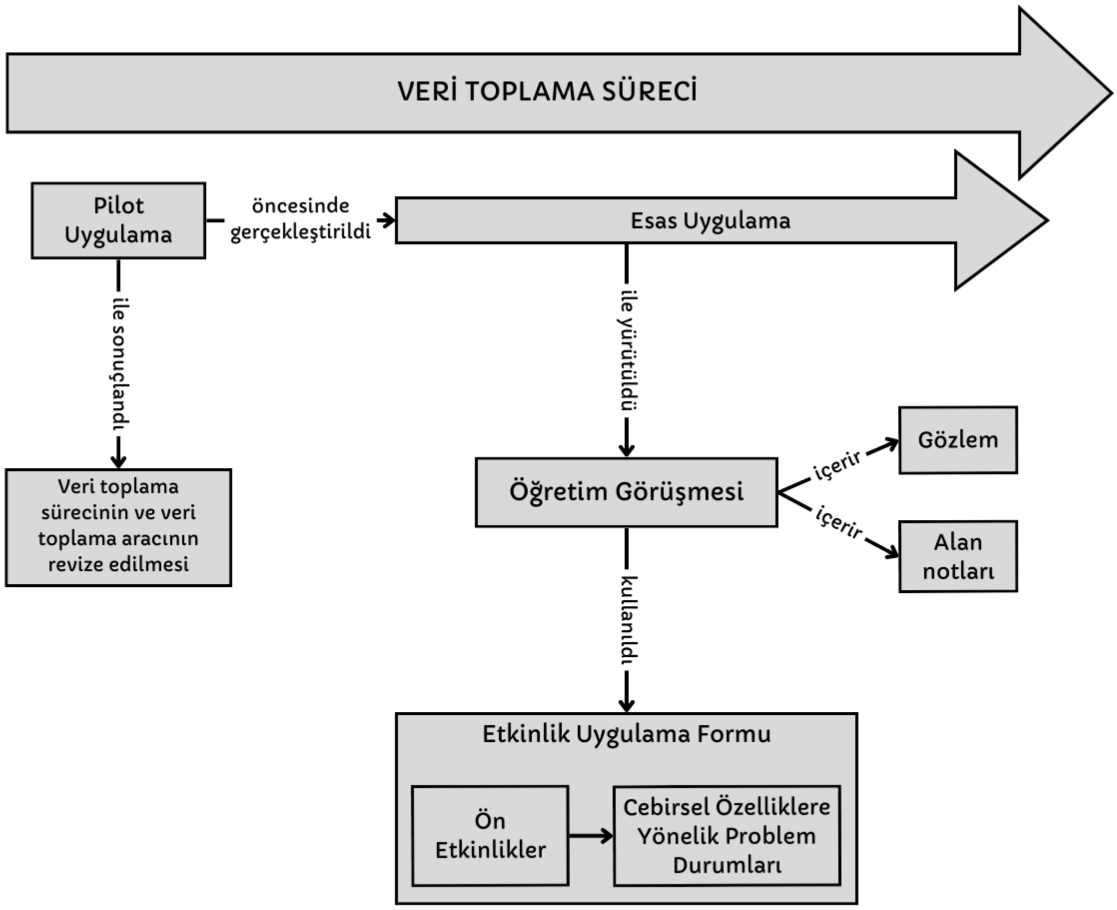
olduğunu gösteriniz.

Çözüm Önerisi:

bir söylem yoluyla aktarılmasını hedefler (van Someren vd., 1994). Bu yöntem kullanılırken, kişiden akıl yürütmesi sırasında fikirlerini, çıkarımlarını, sezgilerini zihninde belirdiği anda zihninde belirdiği haliyle sesli olarak ifade etmesi beklenir. Nispeten daha objektif ve ham olan bu söylemler, onlardan elde edilen metinlerin analizleri sonucunda da verimli ve etkili bulgular sağlar (van Someren vd., 1994). Tez çalışmasının veri toplama süreci, bahsedilen veri toplama yöntemleri doğrultusunda tasarlanmıştır. Veri toplama süreci Şekil 13'te, bu süreçte kullanılan öğretim görüşmesi yönteminin içeriği ise Şekil 14'te gösterilmiştir. Katılımcılar belirlenen ölçütlere göre seçildikten sonra araştırmacı matematik öğretmeni adayları ile iletişime geçerek, katılımcıların uygulama sürecini daha verimli geçirebilmelerini sağlamak amacıyla ders programlarının yoğunluğunun gözetildiği bir uygulama takvimi hazırlamıştır. Araştırmacı, yine uygulama süreçlerinin etkili olması adına, katılımcılar ile bire bir görüşmeye uygun, katılımcının

Şekil 13

Veri Toplama Süreci



rahat hareket edebileceği ve sürece herhangi bir dış etkenin dahil olmasının engellendiği bir sınıf ortamı seçmiştir. Uygulama süreçlerinde araştırmacı, açımlayıcı sorular sormak, süreci gözlemlemek ve alan notları (field notes) almak dışında sürecin kendisine ve katılımcılara yönlendirici olabilecek müdahalelerden kaçınmıştır.

Araştırmacı, uygulama sürecine başlamadan önce katılımcıları yapılacak olan çalışma hakkında bilgilendirmiş, görüşmeleri ses kaydına alacağını hatırlatarak tekrar izinlerini almış ve katılımcıların düşüncelerini rahat ifade edebilmesi için bu çalışmanın herhangi bir şekilde değerlendirilmeye alınmayacağını ve söylemlerinin yanlış veya eksik olmasının hiçbir mahsuru olmadığı ifade etmiştir. Daha sonra, katılımcılara etkinlik uygulama formu sunulmuş, genel olarak tüm etkinlik uygulaması boyunca önlerine gelen problem durumlarını okumaları ve anlamadıkları yerleri sormaları istenmiştir. Eğer

Şekil 14

Öğretim Görüşmesi Yöntemi

katılımcılar tarafından anlaşılmayan yerler varsa araştırmacı tarafından gerekli açıklamalar yapılmıştır. Araştırmacı, katılımcıların kâğıt ve kalem ile çözüm yapmaya başlamalarını istemiştir. Katılımcıların çözüm süreçlerini aktardığı kağıtlar, verilerin analiz aşamasında "çalışma kağıtları" veya "doküman" isimleriyle kullanılmıştır. Burada, katılımcılardan probleme ilişkin ispat süreci boyunca sesli düşünerek, ispat sürecinde geçirdikleri aşamaları ve işe koştukları matematiksel kavramlar, araçlar veya yöntemleri açıklamaya çalışmaları beklenmiştir. Katılımcılara istedikleri süre kadar düşünebilecekleri, görüşmenin bir süre sınırı olmadığı ifade edilmiştir. Ayrıca, katılımcıların problem durumlarıyla ilgili araştırmacının önemli gördüğü sonuçlara ulaştıkları her durumda, süreçlerini sözlü olarak tekrar ifade etmeleri istenmiştir. Katılımcıların birinci cebirsel özelliğe ilişkin bilgi oluşturma süreçleri ortalama yaklaşık 40 dakika, ikinci cebirsel özelliğe ilişkin bilgi oluşturma süreçleri ortalama yaklaşık 25 dakika sürmüştür.

Verilerin Analizi

Araştırmanın nitel verileri, katılımcılar ile sınıf ortamında etkinlik uygulama formu kullanılarak gerçekleştirilmiş olan öğretim görüşmelerinden elde edilmiştir. Bu görüşmeler sırasında katılımcıların izni dahilinde ses kayıtları alınmış ve daha sonra araştırmacı tarafından metne dönüştürülmüştür. Araştırmacı, transkripsiyon sürecinde veri kaybı yaşanmaması için ses kayıtlarını birçok kez dinleyerek transkript belgesi ile birlikte karşılıklı teyit sağlamıştır. Transkript belgelerinde katılımcılar “Ö1”, “Ö2”, “Ö3”, “Ö4”, “Ö5” ve “Ö6” kodları ile, araştırmacı ise “A” ile kodlanarak yazılmıştır. Ses kayıtlarının transkript belgelerinden oluşan esas veriyi destekler nitelikte farklı veri kaynakları da bulunmaktadır. Bu kaynaklar, katılımcıların uygulama sürecinde kullandığı çalışma kağıtları (dokümanlar) ve araştırmacının süreç boyunca aldığı alan notlarıdır. Bu sayede, çalışmada çeşitleme (triangulation) sağlanmış ve çalışmanın inandırıcılığı desteklenmiştir.

Çalışmada elde edilen veriler, RBC modelinin (Hershkowitz vd., 2001) teorik çerçevesi doğrultusunda analiz edilmiştir. Analiz sürecinde içerik analizi gerçekleştirilmiştir. İçerik analizi, metinlerin içerisinde yer alan bilgilerin analiz edilmesi amacıyla kullanılır ve kategoriler yardımıyla metinsel verinin anlamlandırılmasını sağlar (Miles & Huberman, 1994). Veri analizi aşaması, RBC modelinde (Hershkowitz vd., 2001) yer alan epistemik eylemler bağlamında gerçekleştirilmiştir. *Tanıma*, *kullanma* ve *oluşturma* olarak adlandırılan her bir epistemik eylem, çalışmanın veri analiz sürecinde bilgi oluşturma süreçlerini ortaya koymak amacıyla birer tema olarak kabul edilmiştir. Katılımcıların öğretim görüşmesi sürecindeki söylemleri ve incelenen dokümanlarda yazmış oldukları çözüm süreçleri, belirli kriterlere göre bu temaların altında değerlendirilmiştir. Tablo 2’de, epistemik eylemlerin (temaların) isimleri, epistemik eylemlerin gerçekleşme durumunun belirlenmesi için gerekli kriterler ve bu kriterlerin gerçekleşmesiyle birlikte temaya ait olduğu düşünülen söylem örnekleri yer almaktadır. Analiz edilen söylemler, katılımcıların dokümanları ile desteklenmiştir. Araştırmacı, yaptığı değerlendirmelerin anlamlılığını ve teorik çerçevenin sağladığı kriterlere uygunluğunu uzman görüşü alarak kontrol etmiştir.

İlk olarak, katılımcıların birinci cebirsel özelliğe ilişkin bilgi oluşturma süreçlerinde ortaya çıkan söylemler ve ispat süreçlerini aktardıkları çalışma kağıtlarındaki çözüm adımları incelenmiştir. Bu inceleme *tanıma, kullanma ve oluşturma* temalarının altında gerçekleştirilmiştir. Bu temaların altında, katılımcıların spesifik olarak hangi cebirsel özelliğe (örneğin dağılma özelliği) ilişkin bir epistemik eylem gerçekleştirdikleri de sunulmuştur. Benzer akış ikinci cebirsel özelliğe ilişkin süreçler için de yapılandırılmıştır.

Tablo 2

Temalar, Temaların Kriterleri ve Örnekleri

Tema	Temanın Kriterleri	Temaya Ait Örnekler
Tanıma	• Bilgiye önceden sahip olunması (bilginin önceden oluşturulmuş olması) • Bilginin mevcut durum veya problemle ilişkisi olması	• "*a ile $(-a)$'nın toplamının 0 olduğunu **biliyorum**.*" • "*Burada fonksiyonun birebir ve örten olduğunda sağladığı durumları **kullanabilirim**.*" • *"Teğetin eğimi ile türev kavramının ilişkili olduğunu **hatırlıyorum**.*"
Kullanma	• İşe koşulan bilgilerin kullanıcı tarafından tanınması • Bilgilerin mevcut problem durumuna yönelik bir gerekçelendirmeyle veya bir çözüm stratejisinin	• "*a yerine de $a+0$ yazdım ve sonra da **dağıttım**.*" • *"$x=2$ noktasındaki değerine ulaşmak bileşke fonksiyonun özelliklerini **kullandım**."*

	gerçekleştirilmesi ile ilgili olması • Eylemin dikey matematikleştirme niteliğinde olması	• *"İstenen alanı bulabilmek için iki noktayı sınır olarak seçip belirli integral **yapıyorum**."* • *"Bu adımda, toplamanın ters eleman özelliğini **kullandım** ve sıfıra ulaştım."*
Oluşturma	• Tanınan bilgilerin kullanılması yoluyla üretilen bilgiye daha önceden sahip olunmaması • Üretilen yeni bilginin farkında olunması ve açıklanabilmesi	• *"0 yerine $0+0$ yazabileceğim biliyorum, yazayım. Sonra a'yı $0+0$ üzerine dağıttım. Ondan sonra $a \cdot 0$ ile neyi toplarsam bana kendisini verir? **$a \cdot 0$'ın 0'a eşit olması gerekiyor.**"* • *"Doğal sayılardan tam sayılara doğru tanımladığım fonksiyonun birebir ve örten olduğunu gösterebildiğim için **tam sayılar kümesi sayılabilir bir kümedir diyebilirim**."*

Geçerlik ve Güvenirlik

Bu bölümde, ağırlıklı olarak nicel araştırmalarda kullanılan "geçerlik" ve "güvenirlik" kavramları yerine Lincoln ve Guba'nın (1985) nitel araştırmalar için önerdiği "inandırıcılık", "aktarılabilirlik", "tutarlık" ve "teyit edilebilirlik" kavramları kullanılmıştır. Araştırmanın inandırıcılığı, katılımcıların zihinlerinde var olan inşa edilmiş gerçeklikler ile onların sahip olduğu düşünülen gerçeklikler arasındaki uyuma bağlıdır (Erlandson vd., 1993). Aktarılabilirlik, araştırmada elde edilen bulguların, farklı bağlamlar içerisinde ve farklı katılımcılara ne düzeyde uygulanabilir olduğu ile alakalıdır (Merriam, 2013). Araştırmanın tutarlığı, benzer veya aynı bağlamlar ve özellikleri birbirine çok yakın veya birebir olan katılımcılarla tekrar gerçekleştirilmesi halinde benzer bulguların elde edilmesi kapsamında değerlendirilir (Yıldırım & Şimşek, 2013). Teyit edilebilirlik ise bir araştırmada ortaya koyulan bulguların, araştırmayı yapan kişinin önyargılarıyla meydana gelmemesi ve bu bulguların araştırmanın odağını yansıtması ile ilişkilendirilir (Erlandson vd., 1993).

Uzun süreli etkileşim, araştırmacının çalışılan bağlam içerisinde yeteri kadar kalması ve vakit geçirmesi yoluyla, çalışmanın etkilenebileceği iç ve dış hallere bağlılığını ortadan kaldırarak inandırıcılığı artırmayı hedefleyen bir yöntemdir (Merriam, 2013). Bu tez çalışması kapsamında, sahada gerçekleştirilen birebir öğretim görüşmeleri sırasında araştırmacının tüm süreçte katılımcılarla etkileşim halinde olmasına dikkat edilmiştir. Araştırmanın inandırıcılığını sağlamak için önerilen bir diğer yöntem olan derinlik odaklı veri toplamada, araştırmanın problemini çözmek amacıyla ilgili durumun süreci boyunca sürekli ve farklı bakış açılarıyla takip edilmesi ve değerlendirilmesi önemli görülür (Erlandson vd., 1993). Bu anlamda, araştırmanın uygulama sürecinde katılımcıların söylemlerinden elde edilen verilerin çalışmanın amacına hizmet etmekte yetersiz kaldığının düşünüldüğü durumlarda araştırmacı tarafından katılımcılardan ek açıklamalar istenmiştir. Açıklamalardan elde edilen verilerin analiz edilirken eleştirel bir perspektifle karşılaştırılması ile benzerlik ve farklılıklar bağlamında bir örüntü olup olmadığının araştırılması sağlanmıştır. Araştırmanın inandırıcılık düzeyinin artırılması amacıyla farklı yöntemlerle ve bağlamla ilişkili farklı bakış açılarından toplanan bilgilerin karşılaştırılarak kontrol edilmesi ise çeşitleme olarak isimlendirilir (Yıldırım & Şimşek, 2013). Araştırmada toplanan veriler, öğretim görüşmesinden elde edilen ses kaydının transkript belgesi, katılımcıların kullandığı çalışma kağıtları ve araştırmacının uygulama sırasında aldığı alan notları olarak çeşitlendirilmiştir. Bir diğer inandırıcılığı sağlama yöntemi olan uzman incelemesi, araştırmacının yeteri sıklıkta geri bildirim elde etmeyi hedefleyerek araştırmanın kapsamına hâkim bir uzmana başvurmasıyla gerçekleştirilir (Erlandson vd., 1993). Uzman incelemesi için tüm süreç boyunca her aşamada nitel araştırma konusunda ve matematik alanında uzman bir akademisyenin görüşüne başvurulmuştur. Katılımcı teyidi ise araştırmada toplanan verilerin, toplandığı kişilerden araştırmacı tarafından doğrulanmasının sağlanmasıyla araştırmanın inandırıcılığını yükseltmeyi hedefler (Merriam, 2013). Araştırmanın uygulama sürecinde uzun açıklamalar yapan katılımcılardan bu açıklamalarını özetlemelerinin istenmesi ve araştırmacının veriler içerisinde emin olmadığı noktalarda katılımcılardan görüş talep edilmesi ile katılımcı teyidi yapılmıştır. Bu yöntemlerin uygulanmasıyla birlikte çalışmanın inandırıcılık boyutu desteklenmiştir.

Araştırmanın aktarılabilirliğinin artırılması amacıyla kullanılan yöntemlerden biri olan ayrıntılı betimleme, araştırmacının detaylı bir veri toplama süreci sonucunda topladığı verileri diğer bir kişinin zihninde doğrudan deneyimleyebileceği şekilde sunabilmesiyle ilgilidir (Erlandson vd., 1993). Bu bağlamda, araştırmanın durum çalışması olması ve bir olguyu derinlemesine betimlemeyi amaçlaması, araştırmada elde edilen verilerin analizinde içerik analizi kullanılması ve bulgularda sıklıkla alıntılara yer verilmesi ayrıntılı bir betimleme gerçekleştirildiğini göstermektedir. Aktarılabilirliği sağlamak için gerçekleştirilen diğer bir uygulama olan amaçlı örnekleme, çalışma grubunun çalışılan durum hakkında detaylı ve zengin bir veri sağlayacak şekilde seçilmesiyle ilgilidir (Merriam, 2013). Bu tez çalışmasında örneklem seçilirken amaçlı örnekleme yöntemi kullanılması, araştırmanın aktarılabilirlik boyutunun sağlandığının bir diğer göstergesi olarak düşünülebilir.

Tutarlık incelemesi yöntemi, çalışmanın sürecini yansıtması ve denetlenebilmesi için belge, kayıt, not gibi dokümanlarla araştırmanın kapsadığı süreçlerin dış kontrole açık olmasını sağlayarak tutarlığı artırmayı hedefler (Yıldırım & Şimşek, 2013). Bu anlamda, çalışmanın tasarlanma sürecinde baştan sonra belirli bir düzenin takip edilmesi ve belirli bir teorik çerçeve dahilinde yürütülmesi tez çalışmasının tutarlığına katkı sağlamaktadır.

Araştırmanın teyit edilebilirliğini yükseltmek amacıyla kullanılan teyit incelemesi, araştırma akışının araştırmanın dışındaki kişiler tarafından denetlenebilecek şekilde takip edilebilirliği yüksek kurgulanması ile ilgilidir (Erlandson vd., 1993). Bu tez çalışmasının teyit edilebilirliği ise çalışmada elde edilen verilerin (ses kayıtları ve bu ses kayıtlarının transkript belgeleri, çalışma kağıtları ve araştırmacının alan notları) elektronik ortamda kaydedilmesi yoluyla sağlanmıştır.

Bölüm 4

Bulgular ve Yorumlar

Bu tez çalışmasında matematik öğretmeni adaylarının gerçel sayıların iki farklı cebirsel özelliğini oluşturma süreçlerinin incelenmesi amaçlanmıştır. Bu bölümde, elde edilen verilerin analizi sonucunda ortaya çıkan bulgular ve ilişkili yorumlar sunulmuştur. Çalışmada kullanılan her bir cebirsel özellik için tüm katılımcıların bilgi oluşturma süreçleri, alıntılardan yararlanılarak RBC modelindeki *tanıma*, *kullanma* ve *oluşturma* epistemik eylemlerine göre gruplandırılmıştır. Metin içerisinde araştırmacı “A”, katılımcılar ise “Ö1”, “Ö2”, “Ö3”, “Ö4”, Ö5 ve “Ö6” şeklinde temsil edilmiştir.

Öğretmen Adaylarının Birinci Cebirsel Özelliğe İlişkin Bilgi Oluşturma Süreçleri

İlk olarak, $a \in R$ olmak üzere $a \cdot 0 = 0$ cebirsel özelliğine yönelik bilgi oluşturma süreçlerinin incelenmesi sonucunda elde edilen bulgular verilmiştir.

Tanıma Epistemik Eylemine Yönelik Bulgular

Bu kısımda, öğretmen adayları ile yapılan görüşmeler ve bu görüşmeler sırasında öğretmen adaylarının yanıtlarını aktardığı çalışma kağıtları doğrultusunda, öğretmen adayları tarafından gerçekleştirildiği düşünülen tanıma eylemleri ifade edilmiştir. Ayrıca, araştırmacının gözlemleri ve alan notları ile tanıma epistemik eylemine ilişkin elde edilen bulgular yorumlanmıştır. Bu eylemler, öğretmen adaylarının önceden sahip oldukları ve bağlamla ilişki kurarak ispat süreçlerinde kullanmayı hedefledikleri bilgi yapılarını hatırlamalarını içerir. Öğretmen adayları, görüşmeler esnasında gerçel sayılar üzerinde tanımlanan toplama ve çarpma işlemlerine ilişkin bazı özellikleri ve ispat sürecine katkı sağlayan diğer bazı bilgileri dile getirerek veya çalışma kağıtlarına not ederek bu bilgi yapılarını *tanıdıklarını* göstermişlerdir.

Toplama İşleminin Etkisiz Eleman Özelliği. Aşağıda, öğretmen adaylarının ispat süreçlerinde toplama işleminin etkisiz eleman özelliğini bağlam içinde hatırlayarak fark ettiği durumlar verilmiştir.

- Ö1: "*Toplama ve çarpma verilmiş. Çarpmada herhangi bir* 0 *bilmiyorum. Toplamada ben* 0 *görmüştüm. Etkisiz elemandı. Onu kullanmam gerekiyor. Yazayım, not alayım. Bunu kullanmam gerek.* 0 *ile herhangi bir elemanı toplarsam sonuç değişmiyor.*"
- Ö2: *"*0*'ı hiç bilmiyorum,* 0*'ın yutan eleman olduğunu bilmiyorum. Onu kullanmamam lazım.* 0*'ın toplamada etkisiz eleman olduğunu biliyorum, bence onu kullanacağım."*
- Ö5: "*Hocam* $a + 0 = a$ *olduğunu biliyorum çünkü toplamanın bir özelliğinde* 0 *etkisiz eleman.*"

Dağılma Özelliği. Öğretmen adayları, ispat süreci içerisinde dağılma özelliğini hatırlamış ve bunu dile getirmiştir.

- Ö1: "$(a + 0) \cdot 0$ *olarak yazdım. Ben dağılma özelliğini biliyorum.* 0*'ı* $(a + 0)$*'ın üzerine dağıtabilirim.*"
- Ö2: "*Dağıtsam ne çıkacak, dağıtmayı biliyor muyumdur acaba? Bence biliyorumdur şu an bu aşamada.* [...] a *parantezine alsak* $1 + (-1)$ *olacak. O da* $a \cdot 0$*'a eşit olacak ama işte eksisinden koparamıyoruz.*"
- Ö6: "*Çarpmanın toplama üzerine dağılma özelliği olduğunu gördük de… Yani iki terimli olsa da aynı şey geçerli olduğunu biliyorum zaten.* $(2 + 3)$ *ile mesela* $(5 + 7)$*. Böyle de çarpılabilir.*"

Toplama İşleminin Ters Eleman Özelliği. Aşağıda, öğretmen adaylarının toplama işleminin ters eleman özelliğini hatırladığı durumlar gösterilmiştir.

- Ö1: "*Toplamaya göre tersini toplarsam* 0 *olur. Ters eleman.* 1*'in tersi* (-1)*.* a *ile* $(-a)$*'nın toplamının* 0 *olduğunu biliyorum. Kesin oradan gelir.* [...] *Toplamaya göre tersi bizi* 0*'a götürecekti.*"
- Ö2: "0*'ı* a *cinsinden yazıp* 0*'ı da getirebilirim.* $a + (-a)$ *yani* a *ile* $(-a)$*'yı toplayınca o zaman zaten* 0 *olacağını gösteriyoruz.*"
- Ö4: "*Denklemleri bir tarafa toplamaya çalışsam, sonuçta şeyi biliyordum ben: Aynı değere sahip iki elemanın değerleri aynı ama işaretleri aynı değilse diyordum, toplamları* 0 *olur diyordum.*"

Çarpma İşleminin Birim Eleman Özelliği. Öğretmen adayları, ispat süreçlerinde çarpma işleminin birim eleman özelliğini hatırlamıştır.

- Ö1: "*Çarpmada da* 1 *etkisiz elemandı. Onu da kullanabilirim. Sadece bir tarafı* 1 *ile çarpmam bir şey değiştirmeyecek. Bunu büyük ihtimalle* $a + 0$ *ile kullanacağım.*"
- Ö2: "1 *ile* a*'yı çarptığımda* 1*'in etkisiz eleman olma özelliğini kullanarak yine işlemin sonucunu* a*'ya getirmiş oluyorum.*"
- Ö3: "$a + 0$ *ile* 1*'i çarparsam* $1 \cdot a + 1 \cdot 0$ *olur.* $1 \cdot 0 = 0$*, etki etmeyecek.*"

Çarpma İşleminin Ters Eleman Özelliği. Öğretmen adaylarının çarpma işleminin birim eleman özelliğini hatırladığı durumlar aşağıda ifade edilmiştir.

- Ö1: "a*'dan kurtulmak için* a*'nın tersiyle çarpsam her tarafı.*"
- Ö2: "$a \cdot a^{-1} = 1$ *olur. Bu bir işime yaramaz.*"
- Ö6: "1*'i* 1*'in tersiyle çarparsam* 1*'e götürüyordu.*"

Yutan Eleman Söylemi. Aşağıda, öğretmen adaylarının, onlardan oluşturmaları beklenen cebirsel özelliğin okul matematiğindeki ifade ediliş şeklini hatırladığı durumlar verilmiştir.

- Ö1: “*Bu* $a \cdot 0 = 0$ *yutan eleman aslında. Yutan elemanı göstereceğiz. Yutan eleman diye bir şey bir anda ortaya çıkmamıştır. İllaki bir yerlerden gelmiştir ki biz buna yutan eleman diyoruz.*”
- Ö2: “*Yutan elemandır bu kesin. Şimdi benim* 0*’ın yutan eleman olduğunu göstermem lazım.*”

Öğretmen adayları birinci cebirsel özelliğe ilişkin problem durumunu inceledikten sonra ispatlamaya yönelmiştir. İspatlama sürecine başlayabilmek amacıyla doğruluğunun aşikâr olduğunu düşündükleri cebirsel bir ifade belirleme konusunda kendilerinden emin davranışlar sergilemedikleri gözlemlenmiştir. Öğretmen adayları, ispatlama sürecinde belirledikleri cebirsel ifadelere matematiksel manipülasyonlar uygulayarak birinci cebirsel özelliğe ulaşmaya çalışmıştır. Bu süreçte, matematiksel manipülasyon gerçekleştirmeyi hedefleyerek tümdengelimsel akıl yürütmüşler ve sonuçta problem durumu bağlamında bazı özellikleri tanımışlardır: toplama işleminin etkisiz ve ters eleman özelliği, çarpma işleminin birim ve ters eleman özelliği, çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliği ve okul matematiğinde kullanılan yutan eleman kavramı. Araştırmacının, problem durumlarının öğretmen adayları tarafından anlaşılıp anlaşılmadığını belirlemek için sorduğu sorular sonucunda, öğretmen adaylarının birinci cebirsel özelliği okul matematiğinde yutan eleman olarak kullandığı ve problem durumunda ifade edildiği haliyle daha önce karşılaşmadığı saptanmıştır. Öte yandan, öğretmen adaylarının toplama işleminin etkisiz eleman özelliğini ve çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliğini diğer özelliklere göre daha önce tanıdıkları görülmüştür.

Kullanma Epistemik Eylemine Yönelik Bulgular

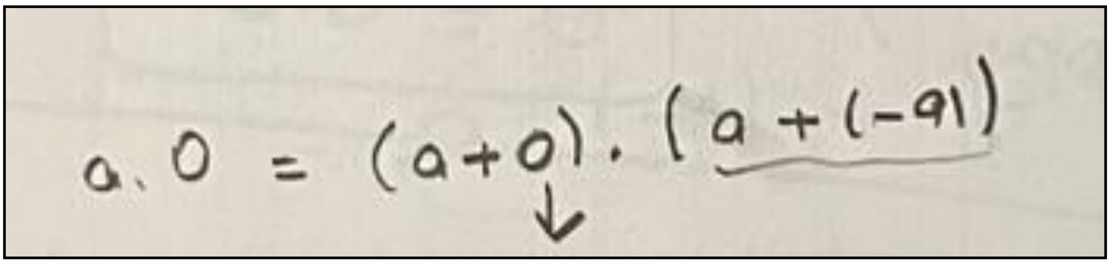
Bu kısımda, öğretmen adaylarıyla yapılan görüşmeler ve bu görüşmeler sırasında öğretmen adaylarının çözüm süreçlerini aktardığı çalışma kağıtları doğrultusunda, öğretmen adaylarının gerçekleştirdiği düşünülen *kullanma* eylemleri ifade edilmiştir. Ayrıca, araştırmacının gözlemleri ve alan notlarından yararlanarak kullanma epistemik eylemine yönelik elde edilen bulgular yorumlanmıştır. Bu eylemler, öğretmen adaylarının *tanıdıkları* bilgi yapılarını ispat süreçleri için belirledikleri stratejiler doğrultusunda bir araya getirerek (dikey matematikleştirme) işe koşmalarını kapsar. Öğretmen adaylarının bu eylemleri, gerçekleştirdikleri düşünce deneylerine ilişkin söylemler ve matematiksel ifadelerle çalışma kâğıdı üzerinde yaptıkları denemeler sonucunda ortaya çıkan bazı işlemsel süreçler yoluyla ortaya konmuştur.

Toplama İşleminin Etkisiz Eleman Özelliği. Öğretmen adaylarının ispat süreçlerinde toplama işleminin etkisiz eleman özelliğini *kullandığı* durumlar aşağıda ifade edilmiştir.

- Ö1: *"0'ı kullanabilirim toplama olarak, $a + 0$ diyebilirim. Çünkü bir sorun çıkarmıyor. $a + 0$ ile neyi çarpabilirim.* [...] 0 *yerine* $0 + 0$ *da diyebilirim.* [...] "*Yani* $a \cdot 0$, *şu an* $a \cdot 0 + 0 \cdot 0$ *ile eşit.*"
- Ö1: "*O zaman* $a \cdot 0 + a \cdot 0$ *ifadesinin yine aslında* $a \cdot 0$*'ı vermesini isteyeceğim ki bir sayıyı kendisiyle topladığımda bana yine kendisini versin. Aslında bu* $x = x + x$ *eşitliği doğruysa sadece* 0 *için geçerlidir demek gibi, yani* $x = 2x$ *sadece* $x = 0$ *için geçerlidir.*"

Şekil 15

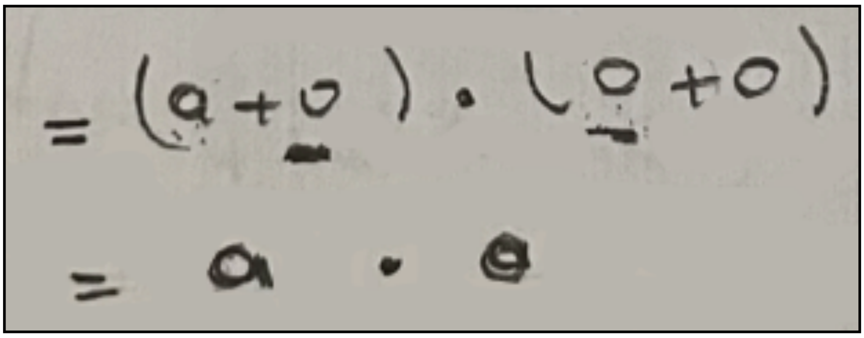
Ö1'in Toplama İşleminin Etkisiz Eleman Özelliğini Kullanarak Yazdığı Bir Eşitlik



- Ö2: “*Hocam,* $a + 0 = a$ *olduğunu biliyorum çünkü toplama özelliğinde* 0 *etkisiz eleman, araya çarpma işlemi koyuyorum. Burası a sonucuna götürdü.* 0 *ile* 0*’ı topladım, etkisiz eleman oldukları için sonuç yine* 0*.”*

Şekil 16

Ö2’nin Toplama İşleminin Etkisiz Eleman Özelliğini Kullanarak Yaptığı İşlem Adımları



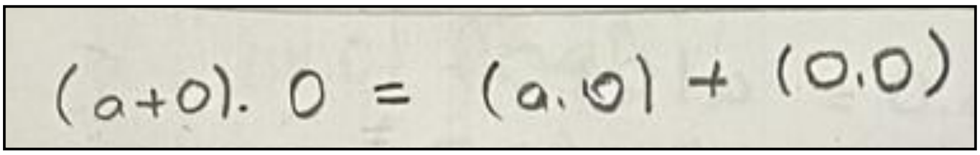
- Ö2: “*Ya şuraya* $a + 0$ *yerine direkt* a *yazsam.* […] 0 *yerine de* $0 + 0$*’ı bir daha yazsam sonra da dağıtsam ne olur?*”
- Ö3: “*O zaman,* 0 *yerine* $0 + 0$ *yazıyım ben.*”
- Ö5: “$a + 0$ *yine* a*’ya eşit olacak.* a *yerine* $a + 0$ *yazılabilir. Deneyeyim.*”

Dağılma Özelliği. Aşağıda, öğretmen adaylarının ispat süreci içerisinde dağılma özelliğini *işe koştuğu* durumlar sunulmuştur.

- Ö1: “*Bir dağıtalım.* $a \cdot 0 + 0 \cdot 0$ *oldu. Ama ben* $0 \cdot 0 = 0$ *olduğunu biliyor muyum?*”

Şekil 17

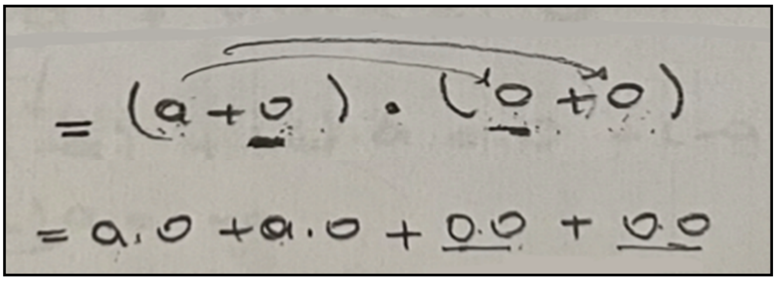
Ö1’in Dağılma Özelliğini Kullanarak Yazdığı Bir Eşitlik



- Ö2: "[…] *Çok basit bir düzeyde dağıtma özelliğini gördüm, burada ben bunları birbirine dağıtsam ne olur?* […] *Evet,* a *ile* 0*'ı çarptım.* $a \cdot 0$ *oldu burası, sonra tekrardan* a *ile* 0*'ı çarptım.* $a \cdot 0$ *ifadesini buldum, araya toplama işaretini koydum.* 0 *ile* 0*'ı çarptım.* 0 *ile* 0*'ı yine çarptım.*"

Şekil 18

Ö2'nin Dağılma Özelliğini Kullandığı Bir İşlem Adımı



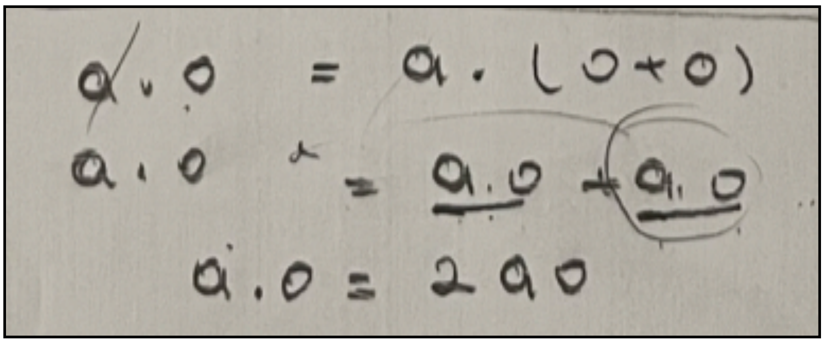
- Ö2: "*Ya şuraya* a *yerine* $a + 0$ *yazmaktansa direkt* a *yazsam, yanına* $0 + 0$*'ı bir daha yazsam ne olur içeri dağıttığımda?* $a \cdot 0 + a \cdot 0$ *gelir dağılma özelliğinden. Aynı yere geliyor,* $2 \cdot a \cdot 0$ *oluyor.*"

  A: "*İki terimi topladığı söyleyip nasıl* $2 \cdot a \cdot 0$ *yazdın?*"

  Ö2: "*Çünkü aynı özelliğe sahiplerdi.* $a \cdot 0$ *ve bir tane daha* $a \cdot 0$*, bu ikisini topladım direkt.*"

Şekil 19

Ö2'nin Dağılma Özelliğini Kullandığı Bir Diğer İşlem Adımı

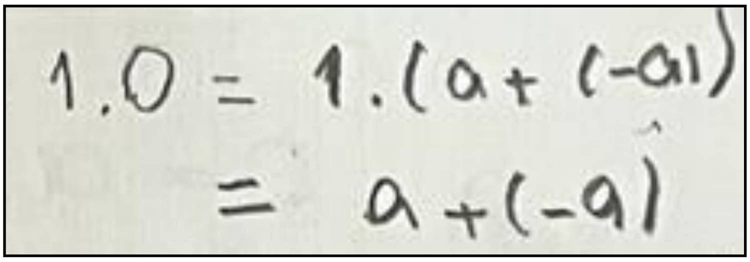


Toplama İşleminin Ters Eleman Özelliği. Öğretmen adaylarının ispat süreci içerisinde toplama işleminin ters eleman özelliğini *kullandığı* durumlar aşağıda gösterilmiştir.

- Ö1: "a*'nın sonucunun* 0*'a gitmesi için* a*'yı* a*'nın tersiyle toplayacağım ya da direkt* 0 *yerine* $a + (-a)$ *yazabilirim.*"

Şekil 20

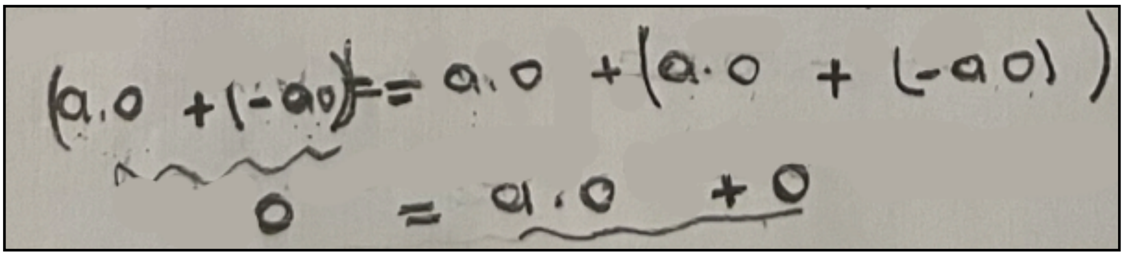
Ö1'in Toplama İşleminin Ters Eleman Özelliğini Kullandığı Bir Denemesi



- Ö1: *"Aynı zamanda* 0 *yerine şey de yazabilirim.* $a \cdot 0$ *ile* $a \cdot 0$*'ın tersini yazabilirim. Ben bunu karşıya gönderebilir miyim ya da her taraftan* $a \cdot 0$ *çıkarayım.*

Şekil 21

Ö1'in Toplama İşleminin Ters Eleman Özelliğini Kullanarak Yazdığı Bir Eşitlik

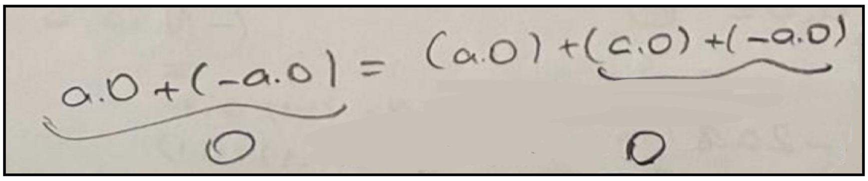


- Ö2: "$2 + (-2)$ *gibi yapmış olabiliriz.* $a \cdot 0 + (-(a \cdot 0))$ *olur.*" […] Ö2: "$a \cdot 0$ *ifadesini eşitliğin bu tarafından çıkarırım,* $a \cdot 0 - a \cdot 0$ *olur. Aynı işlemi diğer tarafa uygulamam gerekiyor ki denklik bozulmasın.* $a \cdot 0 - a \cdot 0 = 2 \cdot a \cdot 0 - a \cdot 0$ *olur.*"

- Ö2: “$2 \cdot a \cdot 0 - a \cdot 0$ *ifadesinde eksiyi kullanmamam lazım. O yüzden işleme* $a \cdot 0$*’ın zıt işaretlisini ekliyorum. Ben toplamada biliyorum ki değersel olarak aynı ama işaret olarak zıtsa toplamları* 0 *yapar. Bunu toplamanın özelliğini kullanarak yazdığım için bu taraf* 0 *oldu.*”

Şekil 22

Ö2’nin Toplama İşleminin Ters Eleman Özelliğini Kullandığı Bir İşlem Adımı



- Ö3: “$a \cdot 0$ *bir sayı* $-(a \cdot 0)$ *da bir sayı. Aynı değere sahip ama zıt işareti oldukları için toplamanın özelliğine göre buranın toplamları* 0 *yapılır.*”

Çarpma İşleminin Birim Eleman Özelliği. Aşağıda, öğretmen adaylarının ispat süreçlerinde çarpma işleminin birim eleman özelliğini kullandığı durumlar ifade edilmiştir.

- Ö4: “$a \cdot 0$*’daki* 0 *yerine ne yazabilirim?* $a \cdot 0 = a \cdot 1 \cdot 0$ *olarak deneyeyim, etkisiz elemanı kullanayım.*”
- Ö5: “1 *ile* a*’yı çarptığında* 1*’in etkisiz eleman olma özelliğini kullanarak yine* a*’ya getirmiş oluyorum işlemi.*”

Denklem Çözme Kavramları. Öğretmen adayları, ispat sürecindeki bazı noktalarda denklem çözme ile ilgili önceki bilgilerini çağırarak bu bilgileri işlem adımlarında *kullanmıştır*.

- Ö1: “*Eşitliğin sol tarafını sabit bırakacağım.*”
- Ö2: “*Bir denklem kurmam lazım başta o kesin.* […] *Şu an denklemleri bir tarafa toplamaya çalışsam.*”
- Ö4: “*En sonda da* 0 *ile çarpsam eşitliği bozmuş olmuyorum.* […] *Ya da bu tarafı sıfırlayıp, ama hayır sıfırlayamayız denklem bozuluyor.*”

Öğretmen adaylarının çoğu, tanımış oldukları bilgileri formal ispat süreçlerinde belirledikleri stratejiler doğrultusunda kullanmıştır. Ö6'nın tanıdığı bilgileri ispat sürecine katkı sağlayacak şekilde kullanamadığı belirlenmiştir. Ayrıca, Ö6'nın, söylemlerinde genellikle "böyle görmüştüm", "bu şekilde yapıyorduk" gibi ifadeler kullandığı gözlemlenmiştir.

Diğer öğretmen adayları, kullandıkları bilgiler arasından toplama işleminin etkisiz ve ters eleman özelliği ve çarpma işleminin toplama üzerine dağılma özelliğini daha sık kullanmıştır. Öğretmen adayları toplama işleminin etkisiz eleman özelliğini özellikle ispat süreçlerinin başlangıcında belirlenen cebirsel ifadenin matematiksel olarak manipüle edilme aşamasında kullanmışlardır. Diğer yandan, dağılma özelliği ispat süreçlerinde toplama ve çarpma işlemlerinin bir araya geldiği durumlarda kullanılmıştır. Toplama işleminin ters eleman özelliği ise çoğunlukla ispat süreçlerinin tam olarak istenen sonuca ulaştırılması konusunda işe koşulmuştur. Bu bilgilerin, öğretmen adaylarının ispat süreçlerinde merkezde yer aldığı ancak çarpma işleminin birim ve ters eleman özelliğinin çeşitli işlemsel denemeler haricinde ispat süreçlerine herhangi bir etkisi olmadığı görülmüştür. Ayrıca, ispat süreçlerinin işlemsel boyutunda öğretmen adaylarının denklem çözme kavramlarını kullandıkları da gözlemlenmiştir. Öte yandan, bazı katılımcıların henüz oluşturmadıkları $a \cdot (-1) = -a$ bilgisini kullanabileceklerini düşündükleri görülmüştür.

Oluşturma Epistemik Eylemine Yönelik Bulgular

Bu kısımda, öğretmen adaylarının yapılan görüşmelerdeki söylemleri ve görüşme süreci içerisinde çalışma kağıtlarına aktardıkları yanıtları dikkate alınarak öğretmen adaylarının gerçekleştirdiği düşünülen *oluşturma* eylemleri ifade edilmiştir. Bu eylemler, öğretmen adaylarının *tanıdıkları* bilgi yapılarını *kullanarak (dikey matematikleştirme)* yeni bir bilgi yapısı inşa etmelerini içermektedir. Yeni bilginin ortaya çıkma sürecinde *tanıma*, *kullanma* ve *oluşturma* eylemleri iç içe geçmiş halde birbirini destekler ve belirli bir sıralamaya sahip değildir. Bu sebeple, öğretmen adaylarının oluşturma eylemleri sadece bir söylem veya gösterim değil, diğer epistemik eylemler ile birlikte ortaya koyulan süreçlerden meydana gelir. Aşağıda, öğretmen adaylarının çalışma kağıtları üzerine aktardıkları ispat süreçlerini nasıl açıkladıkları ve bunun sonucunda yeni bilgi yapılarını ne şekilde *oluşturdukları* gösterilmiştir.

Aşağıdaki alıntı ve Şekil 23'te görüleceği üzere Ö1, öncelikle toplama işleminin etkisiz eleman özelliğini tanımış ve matematiksel manipülasyon eyleminde kullanmıştır. Araştırmacı, öğretmen adayının akıl yürütme sürecini devam ettirmesi amacıyla bir soru sormuş ve öğretmen adayı bilgiyi kullanma eylemini açıklarken yeni bir bilgi ($0 \cdot 0 = 0$) oluşturmuştur. Araştırmacı bilginin bilinçli şekilde oluşturulduğundan emin olmak için açımlayıcı bir sormuş ve öğretmen adayının toplama işleminin etkisiz eleman özelliğini kavramsal düzeyde ele alarak oluşturma epistemik eylemini açıklayabildiği görülmüştür.

Ö1: "*Bunu (*0 *yerine* $0+0$ *yazdığı ifadeyi kastediyor) çarparsam* $a \cdot 0 + 0 \cdot 0$ *geliyor.*" *(Öğretmen adayı öncesinde tanıdığı bilgiyi kullanıyor)*

A: "*Bu neye eşit?*"

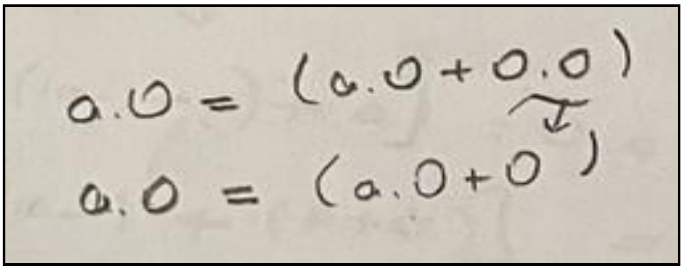
Ö1: "*Bu* $a \cdot 0$ *ifadesinden geliyor. Yani* $a \cdot 0$*, şu an* $a \cdot 0 + 0 \cdot 0$ *eşit. E sağ tarafta demek ki* $0 \cdot 0$ *ifadesinin* 0 *olduğunu görüyorum.*" *(Öğretmen adayı bilgiyi oluşturuyor)*

A: "*Neden?*" *(Araştırmacı açımlayıcı bir soru soruyor)*

Ö1: "$a \cdot 0$*'a hiçbir şey olmamış. O zaman, toplamada etkisiz elemanın* 0 *olduğunu zaten biliyorum. Burada iki şey toplanmış ve* $a \cdot 0$ *olmuş. O zaman* $0 \cdot 0$ *da* 0 *olur.*"

Şekil 23

Ö1'in $\mathbf{0 \cdot 0 = 0}$ *Bilgisini Oluşturma Eylemi*



(Öğretmen adayı tanıma ve kullanma eylemleri ile birlikte oluşturma eylemini açıklıyor)

Aşağıdaki alıntıda da görüleceği gibi Ö1, tanıdığı toplama işleminin etkisiz eleman özelliğini kavramsal boyutta düşünerek ispat sürecinin sonuçlanması için ne gerektiğine yönelik akıl yürütmüştür. Ardından, Ö1 düşüncesini örneklendirerek desteklemiştir. Öğretmen adayının akıl yürütmesi sonucunda, ispat sürecinin başlangıcında toplama işleminin etkisiz eleman özelliğini kullanarak gerçekleştirdiği matematiksel manipülasyonu değiştirdiği görülmüştür. Daha sonra, işlemsel boyutta dağılma özelliğini ve kavramsal boyutta toplama işleminin etkisiz eleman özelliğini kullanarak alıntının başında ifade ettiği şekilde bilgiyi oluşturmuştur. Araştırmacının, öğretmen adayından ispat sürecinin son aşamasını işlemsel süreçlerle de göstermesini istemesi üzerine, öğretmen adayının toplama işleminin ters eleman özelliğini kullanarak bilgiyi oluşturduğu görülmüştür (bkz. Şekil 24).

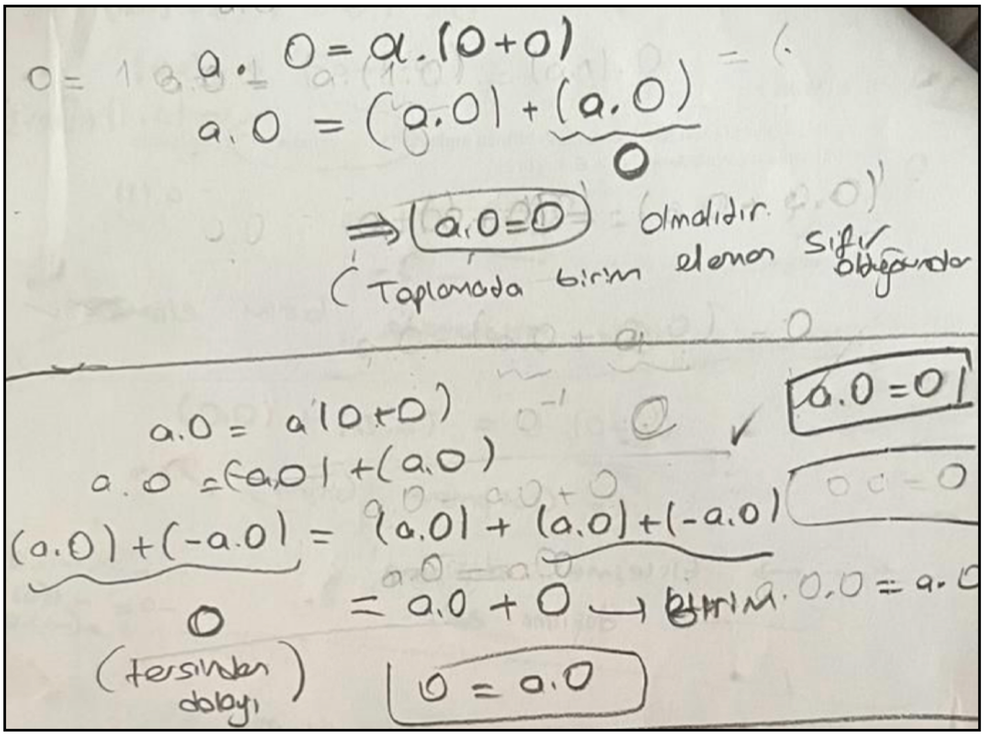
Ö1: "*O zaman $a \cdot 0 + a \cdot 0$ ifadesinin yine aslında $a \cdot 0$'ı vermesini isteyeceğim ki bir sayının aynısıyla kendisini topladığımda bana yine kendisini versin. Aslında bu şey gibi, $x = x + x$ eşitliği doğruysa sadece 0 için geçerlidir, yani $x = 2x$ sadece $x = 0$ için geçerlidir. Burada, $0 \cdot 0$ yerine $a \cdot 0$ olsaydı ben direkt etkisiz eleman özelliğinden diyecektim ki, demek ki $a \cdot 0 = 0$'dır.* [...] *O zaman, 0 yerine $0 + 0$ yazayım ben. $0 + 0 = 0$ olduğu için bunu yazmamda sorun yok. Sonra a'yı $0 + 0$ üzerine dağıttım. Ondan sonra $a \cdot 0$ ile neyi toplarsam bana kendisini verir? $a \cdot 0$'ın 0'a eşit olması gerekiyor.*

A: "Son aşamayı eşitlik üzerinden de gösterebilir misin?" (Araştırmacı, öğretmen adayının oluşturma eylemini işlemsel süreçler ile desteklemesini istiyor)

Ö1: "[...] $x + x = x$ ifadesine benziyor yine. Her tarafa $(-x)$ eklersem yine aynı sonuç çıkar. Yani iki tarafa da $(-(a \cdot 0))$ eklersem yine $a \cdot 0 = 0$ olduğunu görebiliriz." (Öğretmen adayı oluşturma eylemini işlemsel olarak gösteriyor)

Şekil 24

Ö1'in $\boldsymbol{a} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ Bilgisini Oluşturma Eylemi

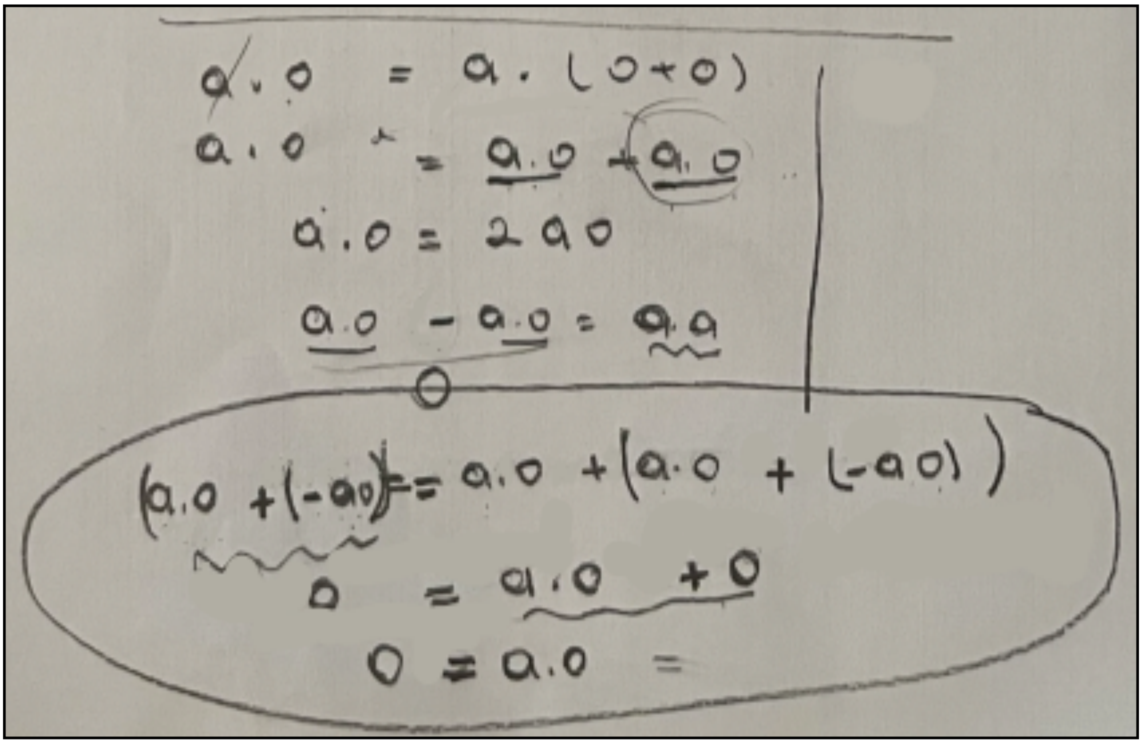


Birinci cebirsel özelliği oluşturmayı başaran diğer öğretmen adayı Ö2, toplama işleminin etkisiz eleman özelliğini ve dağılma özelliğini kullanarak ispat sürecini yapılandırmıştır. Ardından, toplama işleminin ters eleman özelliğini kullanmış ve son olarak toplama işleminin etkisiz eleman özelliğini kullanarak bilgiyi oluşturmuştur. Ö2'nin bu süreçteki söylemleri, toplama işleminin etkisiz ve ters eleman özelliklerini hem işlemsel hem de kavramsal boyutta tanıdığını göstermiştir.

Ö2: *"Şurayı dağıtırsam $a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0$ gelir. Ben bu denklemin her iki tarafına $-(a \cdot 0)$ ekledim ve bunu paranteze alma özelliğini kullanarak $+(-(a \cdot 0))$ şeklinde yazdım.* [...] *Zıt işaretli $a \cdot 0$ ekliyorum.* [...] *Aynı değere sahip ama zıt işaretli oldukları için toplamanın özelliğine göre $a \cdot 0$ ve $-(a \cdot 0)$ ifadelerinin toplamları 0 olur.* [...] *Değer olarak birbiriyle aynı ama işaret olarak zıt olan iki değeri topladığında 0 ettiğini biliyorum, diğer taraf da 0 oldu. Bir de şunu* *biliyorum,* $a \cdot 0 + 0$ *işleminde* 0*'ın etkisiz eleman olduğunu bildiğim için bu ifadenin* $a \cdot 0$ *olduğunu biliyorum.* $a \cdot 0 = 0$ *geldi."*

Şekil 25

Ö2'nin $\boldsymbol{a} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ *Bilgisini Oluşturma Eylemi*

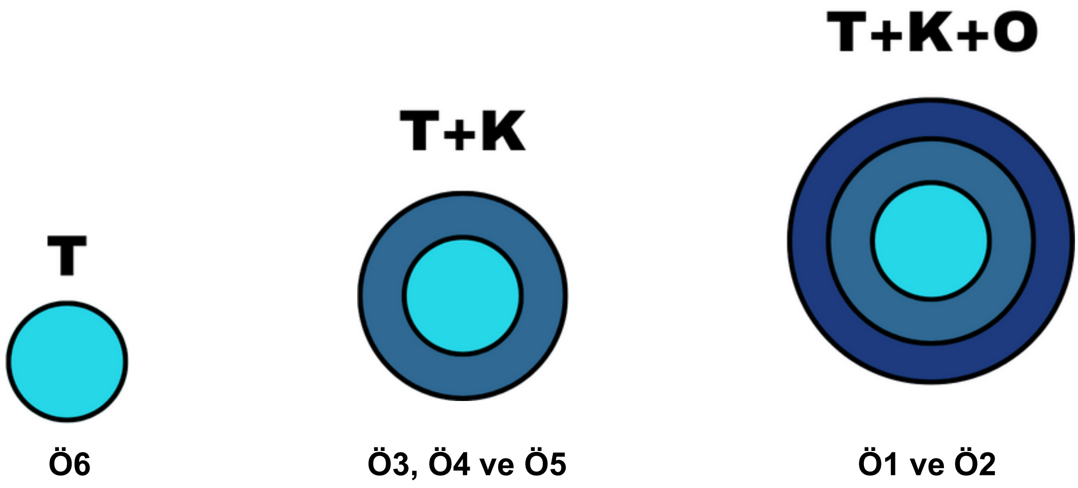


Birinci cebirsel özelliğe ilişkin bilgi oluşturma süreçlerinin analizi sonucunda, Ö1 ve Ö2'nin *oluşturma* epistemik eylemini gerçekleştirebildiği; Ö3, Ö4 ve Ö5'in *tanıma* ve *kullanma* epistemik eylemlerini gerçekleştirebildiği ancak *oluşturma* epistemik eylemini gerçekleştiremediği; Ö6'nın ise sadece *tanıma* epistemik eylemini gerçekleştirebildiği belirlenmiştir. Bu durum Şekil 26'da görselleştirilmiştir.

Ö6'nın bu süreçte, tanıdığı bilgiler yoluyla gerçekleştirdiği cebirsel işlem adımlarında parantez ve eksi işareti ile karşılaştığı durumlarda zorlandığı gözlemlenmiştir. Ayrıca, önceden oluşturduğu ve bu süreçte tanıdığı bilgileri kullanamayan Ö6'nın, oluşturduğu bilgi yapılarına yönelik araştırmacının sorularına anlamlı yanıtlar veremediği görülmüştür.

Şekil 26

Katılımcıların Gerçekleştirebildiği Epistemik Eylemlerin Gösterimi



Öğretmen Adaylarının İkinci Cebirsel Özelliğe İlişkin Bilgi Oluşturma Süreçleri

Birinci cebirsel özelliğe ilişkin bilgi oluşturma sürecini takiben, öğretmen adaylarının $a \in R$ olmak üzere $a \cdot (-1) = (-a)$ cebirsel özelliğine yönelik bilgi oluşturma süreçleri incelenmiş ve elde edilen bulgular aşağıda ifade edilmiştir. Bu kısımda yalnızca Ö1 ve Ö2 kod adlı katılımcıların bulguları yer almaktadır.

Tanıma Epistemik Eylemine Yönelik Bulgular

Bu kısımda, öğretmen adaylarının yapılan görüşmelerdeki söylemleri doğrultusunda gerçekleştirdikleri düşünülen *tanıma* eylemleri sunulmuştur. Ayrıca, araştırmacının gözlemleri ve alan notları ile tanıma epistemik eylemine ilişkin elde edilen bulgular yorumlanmıştır. Bu eylemler, öğretmen adaylarının daha önce inşa etmiş olduğu ve ispat süreçlerinde kullanmayı amaçladığı bilgi yapılarını hatırlamalarını kapsar. Bu kısımda, öğretmen adaylarının gerçekleştirdiği düşünülen tanıma eylemleri başlıklara ayrılmamış ve tek başlık altında sunulmuştur.

- Ö1: "*Yine eşitliğin her iki tarafıyla oynayabiliriz, hani illa birini bırakıp diğerini göstermek zorunda değiliz.* a *yerine* $a + 0$ *yazsam.*" *(Toplama işleminde etkisiz eleman)*
- Ö1: "$a \cdot 0 = 0$ *bunu zaten biliyorum.*" *($a \cdot 0 = 0$ bilgisi)*
- Ö2: "*Toplamaya göre ters elemanda da aslında eksiyi kullanıyor. Eksiyi kullanabileceğim tek yer burası, o kesin şu an.*"

  A: "*Nasıl kullanacaksın?*"

  Ö2: "*Şimdi şöyle düşünüyorum* (-1) *sayısının toplamaya göre tersini düşünelim* 1 *olur. Ama bunu nasıl bağlayacağım?*" *(Toplamada ters eleman)*
- Ö1: "1*'i etkisiz olduğu için istediğim zaman devreye sokabilirim ki zaten bana* 1 *değil* (-1) *lazım.*" *(Çarpmada birim eleman)*

Öğretmen adaylarına ikinci cebirsel özelliğe yönelik problem durumu sunulmuş ve öğretmen adayları benzer şekilde ispatlamaya yönelmiştir. Öğretmen adayları, ispat sürecinin başlangıcında doğruluğunun aşikâr olduğunu düşündükleri bir cebirsel ifade belirleme konusunda, birinci cebirsel özelliğe ilişkin yürüttükleri sürece göre daha net davranmıştır. İspatlama süreci benzer şekilde matematiksel manipülasyonlar yoluyla gerçekleşmiştir. Bu süreçte, öğretmen adayları tarafından matematiksel manipülasyon yapmak amaçlanmış ve tümdengelimsel yaklaşım benimsenmiştir. Problem durumu bağlamında, öğretmen adaylarının toplama işleminin etkisiz ve ters eleman özelliğini, çarpma işleminin birim eleman özelliğini ve yeni oluşturulmuş olan $a \cdot 0 = 0$ bilgisini tanıdığı görülmüştür. Ayrıca, öğretmen adaylarının dağılma özelliğine ilişkin tanıma eylemi olarak değerlendirilebilecek bir söylemde bulunmadığı belirlenmiştir.

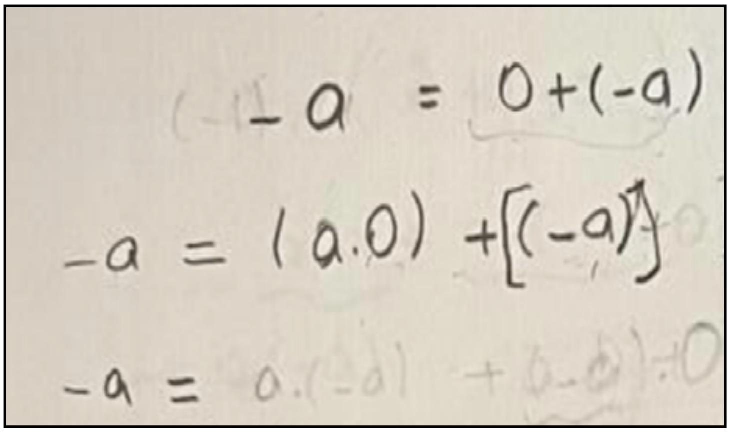
Kullanma Epistemik Eylemine Yönelik Bulgular

Bu kısımda, öğretmen adaylarının görüşmeler sırasında ifade ettikleri söylemleri ve çalışma kağıtlarına aktardıkları işlemsel süreçler doğrultusunda gerçekleştirdikleri düşünülen *kullanma* eylemleri ifade edilmiştir. Bu eylemler, öğretmen adaylarının belirledikleri stratejilere göre *tanımış* oldukları bilgi yapılarını bir araya getirmelerini içerir. Öğretmen adaylarının birinci uygulama sırasında *kullandığı* bilgi yapılarını ikinci cebirsel özelliğe ilişkin bilgi oluşturma süreçlerinde tekrar detaylıca göstermemeleri nedeniyle daha az *kullanma* eylemi ortaya çıkmıştır. Bu nedenle, öğretmen adaylarının gerçekleştirdiği düşünülen kullanma eylemleri başlıklara ayrılmamış ve tek başlıkta sunulmuştur.

- Ö1: "$((-a)+0)\cdot(a\cdot 0)$ *yazdım.* [...] *Ya da sadece* $(-a)$ *ile çarpayım.* $a\cdot(-a)+(-a)\cdot 0$ *geliyor.*" *(Dağılma özelliği)*
- Ö1: "$(-a)\cdot 0$ *desem.* $a\cdot 0=0$ *olduğunu biliyoruz da* $(-a)\cdot 0+a\cdot 0=0$ *olup olmadığını biliyor muyuz?* [...] *Yani işaretin bir önemi yok.* 0 *parantezine aldığımızda* $(-a)\cdot 0+a\cdot 0=0\cdot\left(a+(-a)\right)=0\cdot 0=0$ *oluyor. O zaman da* $(-a)\cdot 0=0$ *olabiliyor.*" *(Dağılma özelliği ve* $0\cdot 0=0$ *bilgisi)*
- Ö2: "$a+(-a)$*, burası* 0*.* (-1) *eklersem yine aynı yere geliyor işte.*" *(Toplamada ters eleman özelliği)*
- Ö2: "*Tamam dağıtalım tek tek içine,* 1 *ile* a*'yı çarptım.* (-1) *ile* a*'yı çarptım, şu aradaki parantezi kaldıramıyorum o kesin.*" *(Dağılma özelliği)*
- A: "*Neden* $(-a)$ *ile başladın?*" *(Araştırmacı açımlayıcı bir soru soruyor)*
  Ö1: "*Parçalayıp* 0 *ekleyip* 0 *yerine de* $a\cdot 0$ *yazabilirim diye.*" *(*$a\cdot 0=0$ *bilgisi)*

Şekil 27

Ö1'in Dağılma Özelliğini ve $\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}$ *Bilgisini Kullandığı Bazı İşlemler*



- Ö1: “*Bir saniye az önce kendi yaptığım işlemi uygulayabilirim.* $1 \cdot a$*’nın cevabı* 1 *çarpmanın etkisiz elemanı olduğu için* a *olur.*” *(Çarpmada birim eleman özelliği)*
- Ö2: “*Başta* $(1 + (-1)) \cdot a$ *yazdım ve bunun sonucunun* 0 *olduğunu biliyorum.*”

  A: “*Nereden biliyorsun?*”

  Ö2: “*Şuradan biliyorum,* $1 + (-1)$*'in toplamı aynı değere sahip iki elemanın toplamı olduğundan* 0 *yapar ve ben bir önceki işlemde bulmuştum ki* 0 *ile bir sayıyı çarptığımızda yutan eleman olmasından dolayı* 0 *oluyor.*” *(Toplamada ters eleman özelliği ve* $a \cdot 0 = 0$ *bilgisi)*

Öğretmen adayları, tanıdıkları bilgileri formal ispat süreçlerine ilişkin geliştirdikleri stratejileri göz önüne alarak kullanmıştır. Bu bilgiler; toplama etkisiz ve ters eleman özelliği, çarpmada birim eleman özelliği, dağılma özelliği, $0 \cdot 0 = 0$ bilgisi ve $a \cdot 0 = 0$ bilgisi olarak ifade edilebilir. Çarpmada birim eleman özelliği haricinde kullanılan tüm bilgilerin ispat sürecine katkı sağladığı görülmüştür. Ayrıca, ispat sürecinde öğretmen adaylarının parantez kullanımı ile ilgili zorluk yaşadığı gözlemlenmiştir.

Oluşturma Epistemik Eylemine Yönelik Bulgular

Bu kısımda, öğretmen adaylarıyla yapılan görüşmeler ve çalışma kağıtlarına aktardıkları yanıtları doğrultusunda gerçekleştirdikleri düşünülen *oluşturma* eylemleri ifade edilmiştir. Bu eylemler, öğretmen adaylarının ilgili bilgi yapılarını *tanıması*, dikey matematikleştirme yoluyla bir araya getirerek *kullanması* ve sonuçta yeni bir bilgi yapısı *oluşturmasını* içerir. Önceden yapılandırılmamış bir bilginin inşa edilme sürecinde *tanıma*, *kullanma* ve *oluşturma* epistemik eylemleri birbirinden ayrı tutulmamalıdır. Bu eylemler iç içe geçer ve bağlantılıdır ancak önceden belirlenmiş bir sıraları yoktur. Aşağıda, öğretmen adaylarının görüşme sırasındaki söylemleri ve çalışma kağıtlarına aktardıkları işlem adımları ile ispat süreçlerini nasıl açıkladıkları sunulmuştur.

Ö1 isimli katılımcı, yukarıdaki alıntıda görüleceği gibi, ispat sürecini tanıdığı bilgileri kullanarak yaptığı işlemsel deneylerle yürütmeye çalışmış ve ispat sürecinin son adımında toplamaya göre ters eleman özelliğinden yola çıkarak sezgisel çıkarım yoluyla bilgiyi oluşturmuştur (bkz. Şekil 28).

Ö1: "[…] a *ile* (-1) *sürekli kalıyor.* $(-a)$*'yı da kullanamıyorum. O zaman direkt* 0*'dan başlayabilirim. Hem* a*'nın hem de* 0*'ın olduğu bir ifade olmalı.* $a \cdot 0 = 0$ *ifadesini kullanabiliriz.* 1*'i etkisiz olduğu için istediğim zaman devreye sokabilirim ki zaten bana* 1 *değil* (-1) *lazım. Sonra bir yerden ya* a*'yı ya da* $(-a)$*'yı bir şekilde yalnız bırakmam gerekiyor. Şöyle desek… Bunu biliyorum… Toplama işleminde buranın kesinlikle* $(-a)$ *olması gerekiyor.*"

A: "*Neden?*"

Ö1: "*Çünkü* 0 *birim eleman, beni birim elemana götüren* a*'nın tersi olmalı.* a *reel sayı ise toplamaya göre tersi* $(-a)$ *olur.*"

Daha sonra Ö1, ispat sürecinin son aşamasında tanıdığı bilgileri kullanarak ispatı formal yolla da göstermiş ve oluşturduğu bilginin okul matematiğinde ne anlama geldiğini ifade etmiştir (bkz. Şekil 28).

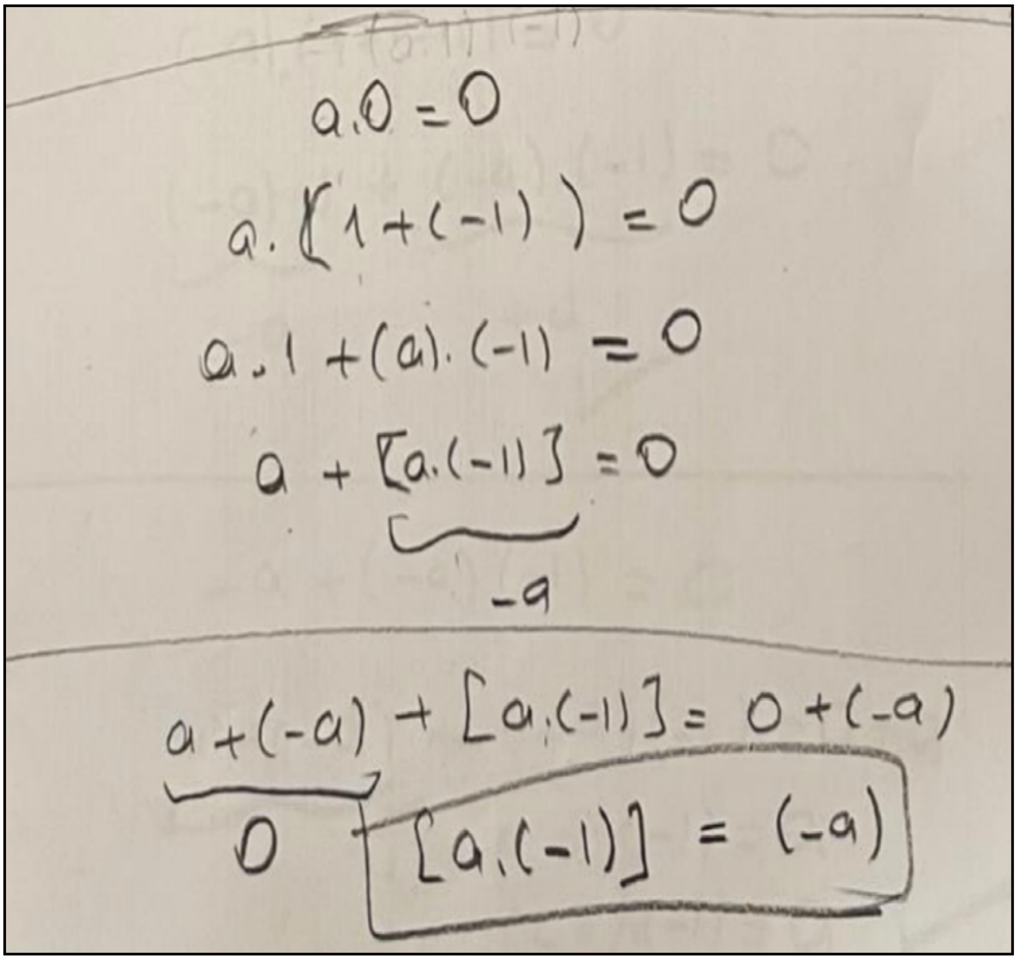
Ö1: "*Cebirsel olarak da şu şekilde ifade edebilirim: Her tarafa* $(-a)$ *eklerim. Eşitlik değişmez.* 0*'a* $(-a)$ *eklersem zaten* 0 *etkisiz olduğundan dolayı burası yine* $(-a)$ *olacak. Burası da* $a + (-a)$*'dan* 0 *olucak.* 0 *yine etkisiz olduğundan dolayı istediğimiz eşitliği elde etmiş oluyoruz.*"

A: "*Bu ifade neyi gösteriyor?" (Araştırmacı açımlayıcı bir soru soruyor)*

Ö1: "*Bu aslında, hani biz diyoruz ya* $(-2) \cdot a = -2a$ *olur diye. Eksinin tamamen* $2a$*'nın önüne geçtiğini,* $2a$*'yı negatif yaptığını öğrendik. Artı ile eksinin çarpımının da eksi olduğunu görüyoruz.*"

Şekil 28

Ö1'in $\boldsymbol{a} \cdot (-\mathbf{1}) = (-\boldsymbol{a})$ Bilgisini Oluşturma Eylemi



Benzer şekilde Ö2 isimli katılımcı da ispat sürecinde tanıdığı bilgileri kullanarak işlemsel denemeler yapmış ve kullandığı bilgiler yoluyla adım adım ispat sürecini açıklayarak ve bilgiyi oluşturmuştur (bkz. Şekil 29).

Ö2: "[…] *Bir denklem kurdum kendimce, o denklemin benden istenen ifadeye eşit olabileceğini göstermeye çalıştım. Başta* $(1 + (-1)) \cdot a$ *yazdım ve bunun sonucunun* 0 *olduğunu biliyorum.*"

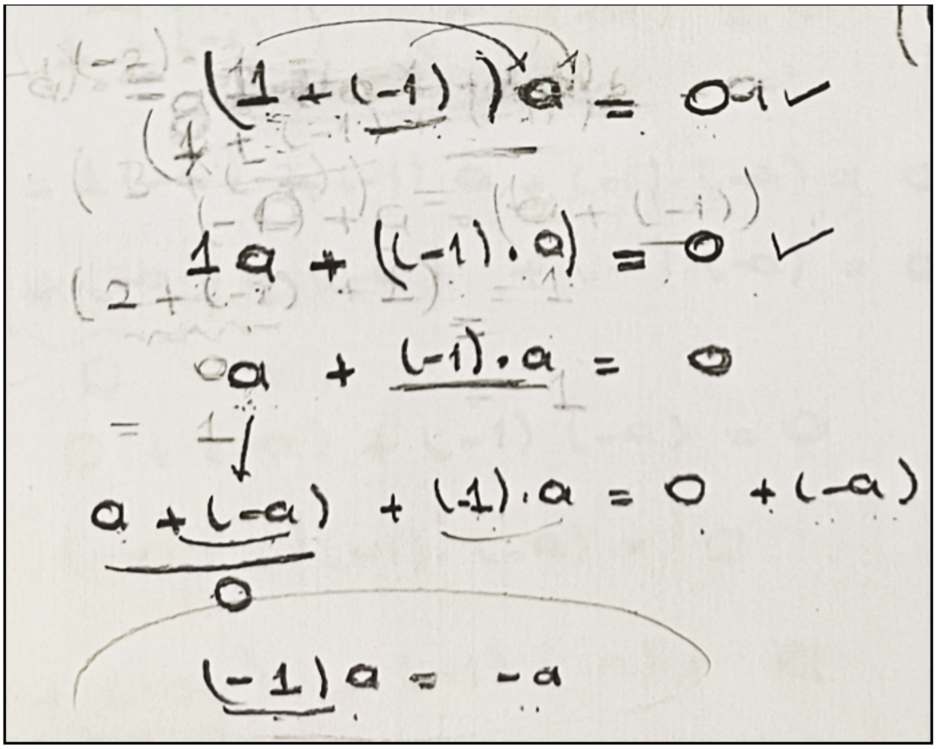
A: "*Nereden biliyorsun?*" *(Araştırmacı açımlayıcı bir soru soruyor)*

Ö2: "*Şuradan biliyorum,* $1 + (-1)$*'in toplamı, aynı değere sahip ters işaretli iki elemanın toplamı olduğundan* 0 *yapar ve ben bir önceki işlemde bulmuştum ki* 0 *ile bir sayıyı çarptığımızda yutan eleman olmasından dolayı sonuç* 0 *oluyor.* […]

Daha sonra içeri dağıtma özelliğinden a'yı tek tek içeri dağıttım. $1 \cdot a + (-1) \cdot a = 0$ olduğunu yazdım. Ben dedim ki burada benim amacım $(-1) \cdot a$'yı bulabilmek yalnız bırakabilmek, a burada fazlalık. a'yı yok etmek için denkleme bir $(-a)$ ekledim. Yani bir $(-a)$ çıkartmak yerine $(-a)$ ekledim çıkartmayı bilmediğim için. $(-a)$ ekledikten sonra $a + (-a)$ aynı değere sahip yine ters işaretli iki eleman var ve toplamı 0 yapacak. Tabii denklemin bozulmaması için aynı işlemi karşı tarafa da yaptım. Bir $(-a)$ ekledim. 0 ile bir değeri topladığımız zaman zaten o değerin kendisi geliyor toplama özelliğinden, yani $(-1) \cdot a$ geliyor. Bu tarafta 0 ile bir değeri topladığımızda yine aynı özellikten o değerin kendisi geliyor, yani sadece $(-a)$ geliyor. $(-1) \cdot a$'nın $(-a)$'ya eşit olduğunu bulmuş oluyorum."

Şekil 29

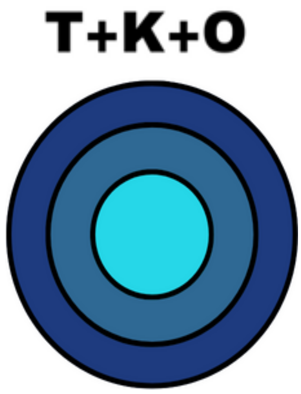
Ö2'nin $\boldsymbol{a} \cdot (-\mathbf{1}) = (-\boldsymbol{a})$ Bilgisini Oluşturma Eylemi



İkinci cebirsel özelliğe ilişkin bilgi oluşturma süreçlerinin analizi sonucunda, bir önceki cebirsel özellik olan $a \cdot 0 = 0$ özelliğini oluşturabilmiş olan Ö1 ve Ö2'nin benzer şekilde ikinci cebirsel özelliği de oluşturabildiği belirlenmiştir. Bu durum, Şekil 30'de görselleştirilmiştir.

Şekil 30

Katılımcıların Gerçekleştirebildiği Epistemik Eylemlerin Gösterimi



Bölüm 5

Sonuç, Tartışma ve Öneriler

Tez çalışmasının bu bölümü üç kısımdan oluşmaktadır. İlk olarak, araştırmada ortaya konan bulgular, ilgili alanyazından da yararlanılarak tartışılmıştır. Daha sonra, araştırmanın sonuçları bir araya getirilerek sunulmuş ve son olarak araştırmanın sonuçlarına ve sınırlılıklarına bağlı olarak ileride yapılacak olan çalışmalar için önerilerde bulunulmuştur.

Bu araştırmada, matematik öğretmeni adaylarının gerçel sayıların cebirsel özelliklerine ilişkin bilgi oluşturma süreçlerini ortaya koymak hedeflenmiştir. Bu bağlamda, çalışmada matematik öğretmeni adaylarının bilgiyi nasıl oluşturdukları, bilgi oluşturma süreçleri arasında ne gibi benzerliklerin ve farklılıkların olduğu, bilgiyi oluştururken hangi aşamalarda ve neden zorlandıkları incelenmiştir.

Araştırmanın verilerinin analizi sonucunda Ö6 isimli katılımcının $a \cdot 0 = 0$ cebirsel özelliğine (birinci cebirsel özellik) ilişkin bilgi oluşturma sürecinde sadece tanıma epistemik eylemini gerçekleştirebildiği belirlenmiştir. Kullanma ve oluşturma epistemik eylemlerini gerçekleştiremeyen katılımcı, $a \cdot 0 = 0$ cebirsel özelliğinin oluşturulmasına bağlı olan $(-1) \cdot a = (-a)$ cebirsel özelliğine (ikinci cebirsel özellik) yönelik bilgi oluşturma sürecinde de yalnızca tanıma epistemik eylemi olarak değerlendirilen söylemlerde bulunmuştur. Bu sonuçlar, Fajriah ve Suryaningsih (2020) tarafından yapılan çalışmada elde edilen, öğrencilerin gerçel sayıların cebirsel özelliklerine yönelik ispat problemlerinde zorlandığı sonucunu destekler niteliktedir. Öğretmen adayının ispat sürecinde zorlanmasının sebeplerinden biri, gerçel sayıların özelliklerine ilişkin kavramsal anlayışın düşük olması olabilir. Nitekim Monandi (2021) tarafından yapılan doktora tez çalışmasında da benzer bulgular elde edilmiştir. Bir diğer sebep olarak Ö6'nın tanıdığı bilgilerin dogmatik olması gösterilebilir. Alanyazındaki birçok çalışma (örn., Jooste, 2011; Osterhus, 1998) ezbere dayalı işlemsel anlayışla gerçekleştirilen öğretim süreçlerinin cebirsel özelliklere ilişkin kavramsal anlayışı olumsuz etkilediğini desteklemektedir.

Alanyazında, bu çalışmanın konusu ile ilgili RBC modeli kullanılarak yapılan bazı çalışmaların sonuçları, bu çalışmanın sonuçları ile oluşturma epistemik eyleminin gerçekleştirilme durumu bağlamında paralellik göstermektedir (Dinç, 2018; Sezgin Memnun vd., 2019). Aynı zamanda, alanyazında bu çalışmanın sonuçları ile oluşturma epistemik eyleminin gerçekleştirilme durumu bağlamında zıtlık gösteren çalışmaların da yer aldığı görülmektedir (Dreyfus vd., 2001; Hasar, 2019; Tabach vd., 2014). Ö6'nın kullanma eylemini ve dolayısıyla oluşturma eylemini gerçekleştirememesi çeşitli sebeplere bağlanabilir. Katılımcı, çalışmadaki soyut cebir dersi kapsamına giren bazı kavramları kullanırken epistemolojik engellere takılmış olabilir. Nitekim alanyazında, Subroto ve Suryadi (2018) tarafından yapılan çalışmada da paralel sonuçlara ulaşılmıştır. Diğer yandan, alanyazında yer alan çalışmalarda da olduğu gibi (Monroy & Astudillo, 2013), katılımcının ispat sürecini yapılandırırken matematiksel dil bağlamında zorlandığı düşünülebilir. Katılımcının tanıma epistemik eylemini gerçekleştirmesine rağmen tanıdığı bilgileri geliştirdiği stratejiler doğrultusunda dikey matematikleştirme yoluyla bir araya getirememesi, -Ron ve arkadaşlarının (2006) çalışmasında da önemli olduğu sonucuna varılan- önceden oluşturulmuş bilgi yapılarının sağlamlığı ile ilgili olabilir.

Katılımcılar arasından üç matematik öğretmeni adayı (Ö3, Ö4 ve Ö5), birinci cebirsel özelliği oluşturma süreçlerinde toplama ve çarpma işlemlerinin özelliklerine ilişkin tanıma epistemik eylemleri gerçekleştirmiş ve bu özellikleri süreç içerisinde kullanmışlardır. Ancak, bu katılımcıların birinci cebirsel özelliği oluşturamadığı görülmüştür. Bu nedenle, Ö3, Ö4 ve Ö5 isimli katılımcılar, Ö6 isimli katılımcıda olduğu gibi ikinci cebirsel özelliğe ilişkin bilgi oluşturma süreçlerinde tanıma epistemik eylemi haricinde bir epistemik eylem gerçekleştirememiştir. Bu durum, alanyazında Hasar'ın (2019) sayı kümeleri ile ilgili kazanımlara ilişkin bilgi oluşturma süreçlerini incelediği çalışmasında elde edilen sonuçlarla zıtlık göstermektedir. Katılımcıların tanıma ve kullanma eylemlerini gerçekleştirmesine rağmen ispatı tamamlayamaması, önceki öğrenim süreçlerinde okulda verilen ispat kavramı ve örneklerinin akıl yürütme süreçlerini sınırlandırması ile ilgili olabilir. Nitekim gerçel sayıların tamlık özelliğine ilişkin çalışan Bergé (2008) de benzer bulgular elde etmiştir. Diğer yandan, Hanna'nın (1990) tanımlamasına göre dedüktif yaklaşım ile formal ispatlama yapan Ö1 ve Ö2 isimli matematik öğretmeni adayları da benzer şekilde toplama ve çarpma işlemlerinin özelliklerini bağlam (problem durumu) içinde tanımışlar, tanımış oldukları özellikleri bilgiyi oluşturmaya yönelik belirledikleri stratejiler doğrultusunda dikey matematikleştirme yoluyla bir araya getirmişler (kullanma epistemik eylemi) ve onlar için yeni bir bilgi olan $a \cdot 0 = 0$ cebirsel özelliğini oluşturmuşlardır. $a \cdot 0 = 0$ cebirsel özelliğini oluşturan katılımcılar, bu cebirsel özelliği toplama ve çarpma işlemlerinin özellikleriyle birlikte tanıyarak $(-1) \cdot a = (-a)$ cebirsel özelliğine ilişkin bilgi oluşturma süreçlerinde kullanmışlardır. Sürecin sonunda Ö1 ve Ö2, ikinci cebirsel özelliği oluşturmayı başarmışlardır. Bu durum, alanyazında, bu tez çalışmasının konusuyla ilişkili konularda gerçekleştirilen Sezgin Memnun ve arkadaşları (2019) ve Süzen (2019) tarafından yapılan çalışmaların sonuçlarıyla zıtlık göstermektedir. Diğer yandan, sonuçlar, Dreyfus ve arkadaşlarının (2001) yaptığı çalışmanın sonuçlarıyla uyumludur.

İkinci cebirsel özelliğe ilişkin tanıma epistemik eylemleri, birinci cebirsel özelliğe göre daha az gerçekleşmiştir. Bunun sebebi, öğretmen adaylarının birinci cebirsel özelliğe ilişkin bilgi oluşturma sürecinde tanımış oldukları bilgi yapılarını ikinci cebirsel özelliğe yönelik bilgi oluşturma süreçlerinde tekrar ifade etmemeleridir. Benzer durum kullanma epistemik eylemi için de gerçekleşmiştir.

Esas uygulamada, katılımcılar ilk olarak ön etkinlikleri incelemişlerdir. Bu etkinliklerde çeşitli cebirsel eşitlikler yer almaktadır. Katılımcıların bu eşitliklerin doğru olduğunun gösterildiği çözüm önerilerini (ispatlamaları) inceleyerek gerçel sayılar sisteminin sağladığı cisim aksiyomlarını fark etmeleri hedeflenmiştir (bkz. Şekil 11). Tüm katılımcıların bu süreçte birleşme ve değişme özelliğini, toplama işleminin etkisiz ve ters eleman özelliğini, çarpma işleminin birim ve ters eleman özelliğini, çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliğini fark ettikleri görülmüştür. Araştırmacı gözlemlerine ve alan notlarına göre, bu aşamada matematik öğretmeni adaylarının zorlanmadığı söylenebilir. Bunun sebebinin, içeriğinde sayılar ve cebir öğrenme alanlarındaki konulara ilişkin temel kavramlar ve özelliklerinin yer aldığı Matematiğin Temelleri 1 adlı dersin katılımcılar tarafından başarıyla tamamlanan bir ders olduğu düşünülebilir. Diğer yandan, katılımcılar, fark ettikleri özelliklerin matematiksel süreçlerde ne şekilde kullanılabileceğini ifade etme ve örneklendirme konusunda yetersiz kalmıştır. Bu durum, matematik öğretmeni adaylarının önceki eğitim öğretim süreçlerinde bu özelliklerle ilgili yeterince ispatlama süreci deneyimleyememesiyle ilişkili olabilir. Bu sonuç, Moore (1994) tarafından yapılan çalışmanın sonuçlarıyla uyumludur.

Esas uygulamanın ikinci aşamasında, matematik öğretmeni adaylarına öncelikle “Her $a \in \mathbb{R}$ için $a \cdot 0 = 0$” olduğunu göstermeleri beklenen problem durumu sunulmuştur. Katılımcılar problem durumunun doğası gereği ispatlama yapmaya yönelmiş ve bu cebirsel özelliğin doğru olduğunu göstermek için ispat yapmaları gerektiğini ifade etmişlerdir. Bu durum, bilgi oluşturma süreçlerinde ispatlamaya başvurulduğu durumlara örnek olarak verilebilir. Elde edilen bu sonucun Herbst’in (2002) elde ettiği sonuçlar ile örtüştüğü görülmüştür. Çalışmada matematik öğretmeni adaylarının akıl yürütme süreçleriyle ilgili de çeşitli sonuçlar elde edilmiştir. Öğretmen adaylarının sürecin tamamında Jeannotte ve Kirean (2017) tarafından tanımlandığı şekliyle dedüktif akıl yürütme gerçekleştirdikleri söylenebilir. Bu bağlamda, matematik öğretmeni adaylarının ispat yapma becerilerinin ön planda yer aldığı ve süreçte bu becerileri aktif bir şekilde kullanmaları gerektiği anlaşılmaktadır. Matematik öğretmeni adayları, genel olarak ispatlama süreçlerine başlama noktasında sorun yaşamıştır. Er ve Dost (2022) tarafından yapılan çalışmada, bu sonucu destekler nitelikte bulgular elde edilmiştir. İspat sürecine başlarken katılımcıların gerçel sayılar sisteminin sağladığı cisim aksiyomlarını kullanabileceklerinin farkında oldukları, ancak bu aksiyomlar dışında kalan cebirsel özellikleri kullanabilme durumlarıyla ilgili net bir görüşleri olmadığı gözlemlenmiştir. Örneğin, problem durumunda verilen ve doğrulanması beklenen $a \cdot 0 = 0$ eşitliğini doğru kabul ederek, başlangıcı bu ifade üzerinde işlemler gerçekleştirerek yapan matematik öğretmeni adayları (Ö4 ve Ö6) olduğu görülmüştür. Bunun yanında, katılımcıların çoğu henüz oluşturmadıkları bir süreçte iken $a \cdot (-1) = (-a)$ cebirsel özelliğini kullanmayı düşündüklerinin anlaşıldığı söylemlerde bulunmuşlardır. Bu durumlar, katılımcıların ispatlamaya ilişkin akıl yürütme süreçlerinin sınırlı kaldığına işaret etmektedir. Bu sonuç, Bergé'nin (2008) yaptığı çalışmanın sonuçları ile örtüşmektedir.

Matematik öğretmeni adayları ispat sürecine başlama aşamasında birçok bilgiyi tanımışlardır. Etkinlikte yer alan problem durumunu okuyan katılımcılar, bu ifadenin okul matematiğinde "yutan eleman" olarak adlandırıldığını ve sınıflarda bu şekilde kullanıldığını hatırlamıştır. Katılımcıların tanımış olduğu birinci cebirsel özelliğin okul matematiğinde "yutan eleman" olarak kullanılmasıyla ilgili bu bilgi, bazı katılımcıları birinci cebirsel özelliğin zaten açık olduğu ve kanıtlanarak bilginin oluşturulmasına ihtiyaç olmadığı yanılsamasına götürmüştür. Güven Akdeniz ve arkadaşlarının (2022) yapmış olduğu çalışmada, bu durumu destekler nitelikte bulgular elde edilmiştir. Okul matematiğinde $a \cdot 0 = 0$ cebirsel özelliğinin "yutan eleman" olarak kullanılmasının, özelliğin kavramsal anlamını yansıtmadığı ve eksik anlayışlara yol açabileceği belirtilmiştir (Güven Akdeniz vd., 2022). Araştırmacı bu tür durumlarda katılımcılara sorular sormuş ve birinci cebirsel özelliğin oluşturulması gereken bir bilgi olduğu yönünde akıl yürütmelerini sağlamıştır.

Katılımcıların ispat süreçlerine başlayabilmek amacıyla doğru olduğu aşikâr olan eşitlikleri ele aldıkları görülmüştür. Bu eşitlikler; $a = a$, $0 = 0$, $1 = 1$, $a \cdot 0 = a \cdot 0$, $5 = 5$ şeklinde ifade ettikleri eşitliklerdir. Katılımcılar, akıl yürütmeleri sonucunda bu eşitlikleri matematiksel anlamda manipüle ederek onlardan istenen cebirsel ifadeye ulaşmayı hedeflemiş ve bu hedefle kullanabilecekleri bilgileri düşünmüşlerdir. Kaput ve arkadaşlarının (2008a) yaptığı bir çalışmada da benzer olarak öğrencilerin kavramsal anlamalarını geliştirmek amacıyla cebirsel ifadeleri çeşitli matematiksel manipülasyon eylemleri ile farklı şekillerde yazmaya çalıştıkları belirlenmiştir. Matematik öğretmeni adaylarının, onlara sunulan problem durumu bağlamı içerisinde tanımış oldukları ve matematiksel manipülasyon süreçlerinde kullanmayı amaçladıkları bilgiler ise gerçel sayılar sisteminin sağladığı bilinen cisim aksiyomlarıdır. Bu amaçla, toplama işleminin etkisiz ve ters eleman özelliklerini, çarpma işleminin birim ve ters eleman özelliklerini ve çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliğini tanımışlardır. Katılımcıların tanıma epistemik eylemleri, önceden zihinlerinde var olan ve ele aldıkları matematiksel görev bağlamıyla ilgili olduğunu fark ettikleri anlarda gerçekleşmiştir. Katılımcılar bu eylemi gerçekleştirirken genellikle “[…] bilgisini hatırlıyorum/görmüştüm/biliyorum/kullanabilirim.” gibi söylemlerde (örn., “*Ben dağılma özelliğini biliyorum.*”, “*Toplamada ben* 0 *görmüştüm. Etkisiz elemandı.*”) bulunmuştur. Matematik öğretmeni adaylarının ispat süreçlerinin ilk aşamalarında bilgi oluşturma süreçlerinde ihtiyaç duyacakları tüm bilgileri tanıdıkları söylenebilir. Bu durum, katılımcıların önceki öğrenmelerinden elde ettikleri hazırbulunuşlukları ve ön etkinlikleri deneyimlemeleriyle açıklanabilir. Matematik öğretmeni adaylarından birinin (Ö6) tanıdığı bilgileri istenen bilgiyi oluşturmaya yönelik kullanamadığı ve bilgiyi oluşturamadığı görülmüştür. Bu durum, Fajriah ve Suryaningsih (2020) tarafından yapılan çalışmanın, öğrencilerin gerçel sayılarda bulunan cebirsel özelliklere yönelik ispat problemlerinde zorlandığı sonucuyla benzerlik göstermektedir.

Matematik öğretmeni adayları, birinci cebirsel özelliği oluşturmak amacıyla yürüttükleri ispatlama süreçlerinde, belirledikleri stratejiler doğrultusunda tanımış oldukları bazı bilgileri kullanmışlardır. İspatlama süreçlerini başlatmayı ve cebirsel ifadeleri matematiksel olarak manipüle etmeyi hedefleyerek toplamanın etkisiz eleman özelliğini kullandıkları görülmüştür. Katılımcılar, a değişkeni yerine $a + 0$ veya 0 yerine $0 + 0$ yazarak $a \cdot 0$ ifadesinden $a \cdot (0 + 0)$ ifadesini ya da $(a + 0) \cdot (0 + 0)$ ifadesini elde etmişlerdir (bkz. Şekil 15 ve Şekil 16). İspat sürecini başlatan toplama işleminin etkisiz eleman özelliği, gerçel sayıların cebirsel özelliklerine ilişkin bilgi oluşturma süreçlerinde tetikleyici görevi görmektedir. Diğer yandan, matematik öğretmeni adayları ispat süreçlerinde toplama işlemi ile çarpma işleminin bir araya geldiği durumlarda (bkz. Şekil 17 ve Şekil 18) çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliğini kullanmışlardır. Katılımcılar dağılma özelliğini genellikle toplama işleminin etkisiz eleman özelliğini kullanarak elde ettikleri cebirsel ifadeleri başka bir gerçel sayı ile çarpma durumunda işe koşmuşlardır (bkz. Şekil 17, 18, 19). Kaminski (2002) tarafından yapılan bir makale çalışmasında elde edilen sonuçlar, öğretmen adaylarının dağılma özelliğini tanıdıklarını ancak nasıl kullanacakları konusunda net bir fikre sahip olmadıklarını tespit etmiştir. Bu sonuçlar, bu tez çalışmasında elde edilen bulgular ile örtüşmemektedir. Dağılma özelliği, ispat süreçlerinin kilitlendiği ve ilerlemediği durumlarda, toplama ve çarpma işlemleri arasında kurduğu işlem ilişkisi ile katılımcıların akıl yürütmesine katkı sağlamıştır. Buradan, dağılma özelliğinin, gerçel sayıların cebirsel özelliklerini oluşturmaya yönelik süreçlerde anahtar rolü üstlendiği görülmektedir. Bu sonuca paralel olarak, Kinzer ve Stanford (2013) tarafından yapılan çalışmada da dağılma özelliğinin çarpma işlemiyle ilgili öğrenme süreçlerindeki önemi vurgulanmıştır.

Matematik öğretmeni adayları, ispat süreçlerindeki stratejileri doğrultusunda toplama işleminin ters eleman özelliğini kullanmışlardır. Toplama işleminin ters eleman özelliği, çoğunlukla ispat süreçlerinin tam olarak istenen sonuca ulaştırılması konusunda işe koşulmuştur. Alanyazında da ters eleman özelliğinin cebirsel bağlam içerisindeki akıl yürütme süreçlerinde manipüle edilerek etkili bir şekilde kullanılabileceği ifade edilmiştir (Cook vd., 2023). Toplamanın ters eleman özelliğini kullanırken katılımcılar iki yol izlemiştir: 0 yerine bir gerçel sayı ile o gerçel sayının toplama işlemine göre ters elemanının toplamının, örneğin $5+(-5)$, yazılması (bkz. Şekil 20) ve bir eşitlik içerisindeki cebirsel bir ifadenin değerini 0 yapmak amacıyla o cebirsel ifadenin toplama işlemine göre ters elemanını eşitliğin her iki tarafına eklemek (bkz. Şekil 21 ve Şekil 22).

Ayrıca, katılımcılar okul matematiğinde “bir denklemin herhangi bir tarafında yer alan ifadeyi karşıya işaretini değiştirerek atmak” olarak ifade edilen durumun toplama işleminin ters eleman özelliğinden yararlanılarak elde edilen bir çıkarım olduğunu fark etmişlerdir. Bu bağlamda, matematik öğretmeni adaylarının denklem çözmeye ilişkin kavramları kullandıkları belirlenmiştir. Öte yandan, matematik öğretmeni adaylarının ispat süreçlerine gözle görülür bir katkı sağlamasa da çarpma işleminin birim ve ters eleman özelliklerini kullandıkları ve çeşitli denemeler yaptıkları gözlemlenmiştir.

Matematik öğretmeni adayı katılımcılarından yalnızca Ö1 ve Ö2 birinci cebirsel özelliğe ilişkin bilgi oluşturma süreçlerinde oluşturma epistemik eylemini gerçekleştirebilmiştir. Oluşturma epistemik eylemi, tanınan bilgi yapılarının dikey matematikleştirme yoluyla kullanılması sonucunda yeni bir bilgiye ulaşmasını ifade eder (Hershkowitz vd., 2001). Oluşturma epistemik eyleminin tanımı, bu eylemin diğer epistemik eylemleri de içinde barındırabileceğine işaret eder. Katılımcılar, onlardan oluşturması beklenen bilgilerle ilgili ispat süreci sırasında, istenen bilgiler dışında çeşitli bilgileri de oluşturabilirler. Buna örnek olarak, Ö1’in oluşturmuş olduğu $0 \cdot 0 = 0$ bilgisi verilebilir. Katılımcı, toplama işleminin etkisiz eleman özelliğini kullanarak $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0)$ ifadesini elde etmiş ve daha sonra dağılma özelliğini kullanarak $a \cdot 0 = a \cdot 0 + 0 \cdot 0$ ifadesine ulaşmıştır. Son olarak, katılımcı toplamanın etkisiz elemanı özelliğini kullanarak “$a \cdot 0$*’a hiçbir şey olmamış. O zaman, toplamada etkisiz elemanın* 0 *olduğunu zaten biliyorum.* […] *Burada iki şey toplanmış ve* $a \cdot 0$ *olmuş. O zaman* $0 \cdot 0$ *da* 0 *olur.*” söyleminde bulunmuştur (bkz. Şekil 23). Bu yolla Ö1, $0 \cdot 0 = 0$ bilgisini oluşturduğunu göstermiştir.

Ö1 isimli katılımcının birinci cebirsel özelliğe ilişkin oluşturma epistemik eylemi incelendiğinde (bkz. Şekil 24), ispat sürecinin başlangıcının doğru olduğu aşikâr olan $a \cdot 0 = a \cdot 0$ eşitliğiyle yapıldığı görülmektedir. Daha sonra, katılımcının toplama işleminin etkisiz eleman özelliğini tanıması ve kullanması ile devam ettiği görülmüştür. Bu kullanma epistemik eylemi, $a \cdot 0$ yerine $a \cdot (0 + 0)$ yazılmasıyla gerçekleştirilmiştir. Ö1 daha sonra dağılma özelliğini kullanarak $\mathrm{a} \cdot 0 + 0 \cdot 0 = a \cdot 0$ eşitliğini elde etmiştir. Bulduğu eşitlikte, $a \cdot 0$ ifadesine eklenen $0 \cdot 0$ ifadesinin yine $a \cdot 0$ ifadesine eşit olduğunu fark etmiş ve önceden tanımış olduğu toplamada etkisiz eleman özelliğini düşünerek eklenen ifadenin toplama işleminin etkisiz elemanı olan 0 olması gerektiğini ifade etmiştir ("*Ondan sonra $a \cdot 0$ ile neyi toplarsam bana kendisini verir? $a \cdot 0$'ın 0'a eşit olması gerekiyor."*). Katılımcının toplama işleminin etkisiz elemanına bağlı sezgisel bir çıkarım yaparak bilgiyi oluşturduğu görülmüştür. Daha sonra, araştırmacı, katılımcının sezgisel sürecini eşitlik üzerinden de göstermesini istemiştir. Bu bağlamda, Ö1 gerçekleştirdiği ispat sürecinin son aşamasında yaptığı sezgisel çıkarım yerine toplama işleminin ters eleman özelliğini kullanarak eşitliğin her iki tarafına da $-(a \cdot 0)$ eklemiştir. Daha sonra, Ö1 eşitliğin her iki tarafında yer alan ve toplama işlemine göre birbirinin ters elemanı olan ifadeleri toplayarak 0'a ulaşmış ve son olarak toplama işleminin etkisiz eleman özelliğini kullanarak $0 = a \cdot 0$ eşitliğine ulaşarak bilgiyi daha formal bir yolla oluşturmuştur.

Ö2'nin birinci cebirsel özelliği oluşturma süreci (bkz. Şekil 25) değerlendirildiğinde, Ö1'e benzer olarak $a \cdot 0 = a \cdot 0$ eşitliği ile başladığı ve toplama işleminin etkisiz eleman özelliğini kullanarak $a \cdot 0$ yerine $a \cdot (0 + 0)$ yazdığı belirlenmiştir. Daha sonra Ö2, dağılma özelliğini Ö1 ile aynı şekilde kullanarak $a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0$ eşitliğini elde etmiştir. Bu noktada Ö1'den farklı olarak Ö2, $a \cdot 0 + a \cdot 0$ ifadesini toplayarak $2 \cdot a \cdot 0$ ifadesini elde etmiş fakat ispat sürecini bu aşamadan sonra ilerletemediği için bir adım geriye dönmüştür. İspat sürecinin son aşamasında Ö2, Ö1'den farklı olarak ilk adımda sezgisel çıkarımdan ziyade daha formal bir yol izlemiştir. Ö2, toplama işleminin ters eleman özelliğini, $a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0$ ifadesinde her iki tarafa $a \cdot 0$ ifadesinin toplama işlemine göre tersi olan $-(a \cdot 0)$ ekleyerek kullanmıştır. Daha sonra, toplamsal tersi olan ifadeler toplanarak 0 elde edilmiş ve toplama işleminin etkisiz eleman özelliği kullanılarak Ö1 ile benzer şekilde $0 = a \cdot 0$ sonucuyla istenen bilginin oluşturulduğu görülmüştür.

Gerçel sayıların cebirsel özelliklerinden bu tez çalışması kapsamında ele alınan ikinci cebirsel özelliğe ilişkin bilgi oluşturma süreçlerinde yalnızca Ö1 ve Ö2 değerlendirilmiştir. Bunun nedeni, ikinci cebirsel özelliğin oluşturulmasının birinci cebirsel özelliğin kullanılmasına (ve dolayısıyla oluşturulmasına) bağlı olmasıdır. Matematik öğretmeni adayları, birinci cebirsel özelliğe ilişkin bilgi oluşturma süreçlerinden elde ettikleri deneyimleri ikinci cebirsel özelliğe ilişkin süreçte değerlendirerek denemeler yaparken daha amaca yönelik eylemler sergilemiştir. Öğretmen adayları ikinci cebirsel özelliğe ilişkin süreçte, ilk cebirsel özelliğin ispat sürecinde kullanışlı olan özellikleri seçerek bu özelliklere yönelik tanıma ve kullanma epistemik eylemleri gerçekleştirmeye yoğunlaştığı gözlemlenmiştir.

Ö1 ve Ö2 ikinci cebirsel özelliği oluşturmak için yürüttükleri ispatlama süreçlerinde, toplama işleminde etkisiz ve ters eleman özelliği, dağılma özelliği ve bir önceki süreçte oluşturdukları $0 \cdot 0 = 0$ ve $a \cdot 0 = 0$ bilgilerini tanımışlardır. Buna ek olarak, Ö1 çarpma işleminde etkisiz eleman özelliğini tanımış ama ispat süreçlerinde kullanmamıştır. Katılımcılar tanımış oldukları tüm bilgileri ispat süreçlerinde yaptıkları denemelerin farklı anlarında kullanmışlardır (bkz. Şekil 28). Bu bulgunun, Healy ve Hoyles'un (2000) çalışmasında ortaya atılan genellikle öğrencilerin deneysel argümanları tercih ettiği iddiasını desteklediği görülmektedir.

Ö1, ikinci cebirsel özelliği oluşturma sürecinde denemeler yaparken özellikle (-1) ve $(-a)$ ifadelerini işe koşmayı tercih etmiştir. Bunun sebebi, ispatlaması gereken bilginin içerisinde bu ifadelerin yer alması olabilir. Ö1, bir önceki süreçte oluşturmuş olduğu $a \cdot 0 = 0$ bilgisini ispat sürecine başlamak için kullanmıştır. Daha sonra, toplama işleminin ters eleman özelliğini kullanarak 0 yerine $1 + (-1)$ yazmıştır. Ö1 elde ettiği $a \cdot \big(1 + (-1)\big) = 0$ eşitliğinde dağılma özelliğini kullanarak $a \cdot 1 + a \cdot (-1) = 0$ ifadesini elde etmiştir. Burada Ö1, toplama işleminin ters eleman özelliğinin sağladığı “bir gerçel sayı ile o gerçel sayının toplama işlemine göre tersinin toplamı 0 eder” durumunu kullanmış ve sezgisel çıkarım yoluyla $a \cdot (-1)$ ifadesinin a'nın toplama işlemine göre tersi olması gerektiğini ifade etmiştir. Bu çıkarım doğru olmasına rağmen araştırmacı katılımcıdan ispat sürecini formal yolla da açıklamasını istemiştir. Ö1, elde ettiği $a + a \cdot (-1) = 0$ ifadesinde toplama işleminin ters eleman özelliğini kullanarak eşitliğin her iki tarafına da $(-a)$ eklemiştir. Önceki bilgi oluşturma süreçlerinin son aşamalarına benzer olarak, eşitliğin sol tarafındaki $a + (-a)$ ifadesinin sonucu toplama işleminin ters eleman özelliğinden 0, eşitliğin sağ tarafındaki $0 + (-a)$ ifadesinin sonucu ise $(-a)$ olarak bulunmuştur. Buradan da $a \cdot (-1) = (-a)$ ifadesine ulaşan Ö1'in oluşturma epistemik eylemini gerçekleştirdiği görülmüştür (bkz. Şekil 28). Ö2 de benzer süreçlerden geçerek ikinci cebirsel özelliği oluşturmayı başarmıştır. Öncelikle, $0 \cdot a = 0$ eşitliğini ele almıştır. Toplama işleminin ters eleman özelliğini kullanarak 0 yerine $(1 + (-1))$ yazmış ve dağılma özelliğini kullanarak $1 \cdot a + (-1) \cdot a = 0$ ifadesine ulaşmıştır. Daha sonra, tekrar toplama işleminin ters eleman özelliğini kullanarak eşitliğin her iki tarafına $(-a)$ ifadesini eklemiştir. Ö2 bu yolla, $a + (-a) + (-1) \cdot a = (-a)$ eşitliğine ulaşmış ve toplama işleminin etkisiz ve ters eleman özelliklerini kullanarak $(-1) \cdot a = (-a)$ bilgisini oluşturmuştur.

Matematik öğretmeni adaylarının gerçel sayıların cebirsel özelliklerine ilişkin bilgi oluşturma süreçlerine genel olarak bakıldığında, yürüttükleri ispat süreçlerinde ele aldıkları cebirsel ifadeleri aynı temsil türünde farklı şekillerde temsillerle nasıl yazabilecekleri üzerine akıl yürüttükleri gözlemlenmiştir (bkz. Şekil 21). Diğer yandan, birinci ve ikinci cebirsel özellikleri oluşturan matematik öğretmeni adayları, bilgi oluşturma süreçlerinde toplama işleminin etkisiz eleman ve ters eleman özelliğini tanımış, sıklıkla ve önemli noktalarda kullanmıştır. Ancak, çarpma işleminin cebirsel özelliklerini tanımasına rağmen ispat süreçlerine katkı sağlayacak şekilde kullanamamış veya kullandıkları anlarda ispat süreçlerinde herhangi bir ilerleme kaydedememişlerdir. Dağılma özelliğini ise bilgi oluşturma süreçlerinde hem tanımış hem de toplama ve çarpma işlemlerinin kesiştiği noktalarda etkili bir şekilde kullanmışlardır. Öte yandan, gerçel sayıların belirlenen iki cebirsel özelliğini de oluşturamayan matematik öğretmeni adayları da bulunmaktadır. Bunun sebebi, öğretmen adaylarının gerçel sayılar konusuna yönelik zorluklar yaşamaları veya yetersiz kavramsal anlayışları olabilir. Nitekim alanyazında bu sonuca paralel birçok çalışma bulunmaktadır (Adams, 1998; Fischbein vd., 1995; Tall & Schwartzenberger, 1978). Bir diğer sebep, gerçel sayılar sisteminin birden çok inşa biçimine sahip olması ve tamlık, yakınsaklık gibi üst düzey kavramları içerisinde barındırması sebebiyle anlaşılmasının zor olması olabilir. Alanyazındaki çalışmaların sonuçlarının da bu çalışmada elde edilen sonuçla örtüştüğü görülmüştür (Merenluoto & Lehtinen, 2002; Tall & Mejia-Ramos, 2010). Öğrenciler, gerçel sayıların nasıl inşa edildiği, aksiyomlara neden ihtiyaç duyulduğu ve hangi aksiyomların kabul edilerek ilerlendiği, işlemlerin nasıl tanımlandığı ve bu işlemlerin hangi özelliklere sahip oldukları, aksiyomlar ve özellikler yoluyla ne tür çıkarımlar yapılabileceği gibi konularda yetersiz bir anlayışa sahiptirler. Alanyazında, bu durumu destekler nitelikte bulgu elde edilmiş çalışmalar vardır (Adams, 1998; Monandi, 2021). Bu eksikliklerin giderilmesi için akıl yürütme, çıkarımlar yapma ve ispat eylemlerinden bağımsız hareket edilmemesi gerekir. Sayı sistemlerine ilişkin kavram yanılgılarına sahip olan matematik öğretmeni adaylarının bu konuya daha da dikkat etmesi gerekmektedir. Bu gerekliliklerden bahseden başka çalışmalar da vardır (Fish, 1999). Öğrencilerin sahip olduğu kavram yanılgılarını anlamanın ve bunlara çözüm bulmanın öğretmenin alan bilgisi ve pedagojik bilgisi ile ilgili olabileceği (Akkuş, 2013) düşünüldüğünde, bu tür anlayışlarını geliştirmeden mezun olan matematik öğretmeni adaylarının, öğrencilere bu alanlarda ne kadar bilgi verebileceği ve soyutlamalarına ne kadar katkı sağlayabileceği tartışmalıdır. Bu bağlamda, matematik öğretmeni adaylarının gerçel sayılar sistemiyle ilgili akıl yürütme süreçleri sonucunda ortaya çıkan çıkarımları ve ispatları tecrübe etmeleri için uygun sınıf ortamı ve tartışma süreçlerinin tasarlanması gereklidir. Nitekim alanyazında da benzer öneriler verilmiştir (Smith vd., 2023). Diğer yandan, öğrencilerin bu konularda çeşitli inşa ve ispat süreçlerini deneyimleyebilmesi adına öğretim programlarında ve ders kitaplarında gerçel sayı yapısına ve bu yapının cebirsel özelliklerine yeterli önemin verilmesine dikkat edilmelidir. Vamvakoussi ve Vosniadou (2007) tarafından yapılan çalışmada da benzer noktaya vurgu yapılmıştır.

Sayılar ve sayı sistemleri, matematiğin kullanıldığı pratik süreçlerde ve matematiksel sistemin sağlamlaştırılması ve geliştirilmesinin hedeflendiği teorik süreçlerde en temelde rol oynamaktadır. Bu bağlamda, matematiğin ayrılmaz parçası olarak görülen cebiri, öğrencilerin erken yaşta içselleştirmelerinin önemine dikkat çekilmelidir. Alanyazında bu görüşü destekleyen çalışmalar bulmak mümkündür (Kaput vd., 2008b). Sayılar ve içinde bulundukları sayı sistemlerinin gücünün ve öneminin farkında olunması, bu kavramların anlaşılmasının ve kullanılmasının kolaylaşmasını sağlayabilir. Bu noktada, matematik öğretim programları ve matematik ders kitapları önem arz etmektedir. Ancak, Türkiye'deki ilköğretim ve ortaöğretim matematik öğretim programlarında (MEB, 2018a, MEB, 2018b) ve ders kitaplarında, sayı kümeleri bulundukları sayı sisteminin bir unsuru olarak değil, bağımsız bir yapı olarak gösterilmektedir. Bu durum, öğrencilerin sayılar ile sayı sistemlerini birbirinden ayrı görmelerine sebep olabilir. Dougherty (2017), buna ek olarak matematik öğretim süreçlerinde sayı kümeleri arasındaki bağlantılar, birbirlerini kapsama durumları ve bu kümelerin inşa süreçleri göz ardı edildiğini ifade etmektedir. Öğrencilerin rasyonel ve irrasyonel sayıları gerçel sayılardan bağımsız olarak tanımladığına dair bulgular bulan Giannakoulias ve arkadaşlarının (2007) yaptığı çalışma bu düşünceyi destekler niteliktedir. Öğrencilerin, özellikle sayı sistemlerinin temel özellikleri ve bileşenleri ile sayı kümelerinin inşasında daha alt kümelerin işlevlerine (örn., tam sayıların inşasında doğal sayıların işlevi) yönelik kavramsal anlayışları önemlidir. Voskoglou ve Kosyvas (2012) bu görüşü desteklemekte ve buna dikkat edilmediği durumlarda öğrencilerin sayı sistemlerini içselleştirmede zorluk yaşaması veya bu kapsamda kavram yanılgısı oluşmasının ileriki süreçleri olumsuz etkileyebileceğini ifade etmektedir.

Okul cebirinde (school algebra) genellikle girdi ve çıktıların her ikisi de gerçel sayılardır (Arcavi vd., 2016). Çalışmanın çerçevesini belirleme sürecinde gerçel sayılar ve gerçel sayıların cebirsel özellikleri kapsamında matematik öğretim programları (MEB, 2018a, MEB, 2018b) ve Millî Eğitim Bakanlığı, Talim ve Terbiye Kurulunun onayladığı matematik ders kitapları incelenmiştir. Bu incelemeler sonucunda, birinci sınıftan itibaren yedinci sınıf düzeyine kadar olan süreçte gerçel sayılar sisteminin sağladığı cisim aksiyomlarının (toplama işleminin etkisiz ve ters eleman özelliği, çarpma işleminin birim ve ters eleman özelliği, dağılma özelliği) ve gerçel sayıların cebirsel özelliklerinin ($a \cdot 0 = 0$ ve $-1 \cdot a = -a$ özellikleri) kullanıldığı ve ifade edildiği görülmüştür (bkz. Şekil 2, 3, 4). Şekil 3 ve Şekil 4'te görülen ifadelere bakıldığında, çarpma işleminde sıfır sayısının kullanımına yönelik ifadelerin yer aldığı görülmektedir. Bu ifadeler içerisinde "tane" veya "kere" kelimelerinin tercih edilmesi düzeye uygun olarak değerlendirilse de diğer yandan, öğrencilerin ileriki sınıf düzeylerinde karşılarına çıkan irrasyonel sayılar ile yapacakları sezgisel çarpma işlemlerini bu kelimeler yoluyla anlamlandırmakta zorlanabilecekleri söylenebilir. Nitekim Davis (1997) ile Mowat ve Davis (2010), yaptıkları çalışmalarda öğrencilerin tekrarlı toplama kavramını sezgisel çarpmaya uyguladıklarını ve bu yüzden çarpma işlemini sınırlayarak içselleştiremediklerini tespit etmişlerdir.

Örneğin, öğrencinin işlemsel becerileri doğrultusunda, 3 ile $\sqrt{5}$ sayılarının çarpımını "3 tane $\sqrt{5}$" olarak düşünerek $3\sqrt{5}$ sonucuna ulaşabileceği öngörülebilir. Ancak tersi düşünüldüğünde, öğrencinin "$\sqrt{5}$ tane 3" ifadesini anlamlandıramaması olasıdır. Sekizinci sınıf düzeyinde ise gerçel sayılar tanıtılarak gerçel sayılar kümesinin rasyonel ve irrasyonel sayı kümeleriyle ilişkilerinden bahsedilmektedir.

Ortaöğretim düzeyine gelindiğinde, dokuzuncu sınıfta gerçel sayılar sisteminin sağladığı cisim aksiyomları öğrenciye daha formal bir dille aktarılmaya çalışılmıştır. Öte yandan, Şekil 7'de görüldüğü üzere, dokuzuncu sınıf matematik ders kitabı içerisinde "yutan eleman" özelliğinin tanımı ve açıklaması yapılırken "Her $a \in R$ için $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ olduğundan çarpmanın yutan elemanı "0" olur." ifadesi geçmektedir. Bu ifade, gerçel sayılar sistemi içerisinde kanıtlanması gereken $a \cdot 0 = 0$ cebirsel özelliğini, çarpma işleminin "yutan elemanının" 0 olmasının bir sebebi gibi göstermektedir. Aksine, çarpma işleminde "yutan elemandan" söz edilebilmesi için, öncelikle $a \cdot 0 = 0$ önermesinin kanıtlanması gerekmektedir. Buradaki çelişkili durum, öğrencilerin gerçel sayılar sistemi ve cebirsel özelliklerine ilişkin kavramsal anlayışlarını olumsuz etkileyebilir ve ortaöğretim ve yükseköğretim süreçlerinde karşısına çıkabilecek eksik anlayışlara yol açabilir. Onuncu sınıftan itibaren on ikinci sınıfa kadar ise fonksiyon, dizi, limit, türev, integral gibi üst düzey matematiksel kavramların tanımlanmasında gerçel sayılar kümesi merkezde yer almıştır.

Sonuç olarak, matematik öğretim programlarında ve matematik ders kitaplarında gerçel sayılar kümesine ve gerçel sayıların cebirsel özelliklerine sıklıkla yer verildiği ve kullanıldığı anlaşılmaktadır. Diğer yandan, ortaöğretime ait matematik öğretim programında gerçel sayılar kümesinin dahil olduğu gerçel sayılar sisteminden bahsedilmemektedir. Bunun sebebi, rasyonel sayıların gerçel sayılara genişleme durumunda sayılabilirlik ve tamlık gibi kavramların sürece dahil olması olabilir. Bu kavramlar dahil olduğunda öğrencilerin zorlandığını gösteren çalışmalar mevcuttur (Adams, 1998; Merenluoto & Lehtinen, 2002). Dolayısıyla, öğrenciler gerçel sayıların inşa sürecini deneyimleyememekte ve okul matematiğinde kullandıkları birçok cebirsel özelliğin gerçel sayı yapısından kaynaklandığının farkına varamamaktadır.

Gerçel sayılar sistemi bu çalışmanın ana çerçevesini oluşturmuştur. Gerçel sayılar sisteminin modern matematikteki yeri, temel birçok konuyu kapsaması (örn., köklü sayılar, dairenin alanı, Pisagor Teoremi) ve ileri düzey kavramlarda (örn., limit, süreklilik) merkezi bir rolü olması, göz ardı edilemeyecek bir öneme sahip olduğunu göstermektedir (González-Martín vd., 2013; Tall & Katz, 2014). Bu nedenle, gerçel sayılar sisteminin ve gerçel sayıların cebirsel özelliklerinin içselleştirilmesi elzemdir. Gerçel sayıların cebirsel özelliklerine ilişkin öğrencilerin bilgi oluşturma süreçlerinin incelenmesi, bu anlamda öğretim ortamlarında öğreticilere ve öğretim programlarının düzenlenme süreçlerinde ilgililere yol gösterici olabilir.

Araştırmanın sonuçları ve alanyazın göz önüne alındığında;

- Gerçel sayılar sistemi ve gerçel sayıların cebirsel özelliklerine yönelik inşa ve ispat süreçlerinin matematik öğretim programlarına ve ders kitaplarına düzeye uygun şekilde entegre edilmesi,
- Öğrencilerin akıl yürütme, ispatlama, çıkarım yapma gibi birbiriyle yakından ilişkili ve matematiksel süreçlerin temelini oluşturan eylemlere yönelik ilköğretim düzeyinden itibaren yeterli deneyimi elde etmelerinin sağlanması,

önerilmektedir.

Bu tez çalışmasının sınırlılıkları düşünüldüğünde, gelecekte yapılacak olan araştırmalar için;

- Gerçel sayılar sistemi bağlamında, matematik öğretim programları ve matematik ders kitaplarının içerikleri incelenerek karşılaştırmalar yapılması ve bu öğretim unsurlarının arasındaki uyumun araştırılması,
- Yapılacak olan uygulamalarda bireysel görüşmeler yerine grup görüşmeleri yapılması ve gerçel sayıların cebirsel özelliklerine ilişkin bilgi oluşturma süreçlerinde grup etkileşiminin etkisinin incelenmesi,
- RBC modeli yoluyla gerçel sayıların cebirsel özelliklerine ilişkin bilgi oluşturma süreçlerinin analizlerinde, modelde yer alan epistemik eylemlerin farklı teorik çerçevelerle zenginleştirilmesi

önerilebilir.

Kaynaklar

Adams, T. L. (1998). Prospective Elementary Teachers' Mathematics Subject Matter Knowledge: The Real Number System. *Action in Teacher Education*, *20*(2), 35-48. https://doi.org/10.1080/01626620.1998.10462915

Adiredja, A. P. (2021). The Pancake Story and the Epsilon–Delta Definition. *PRIMUS, 31*(6), 662-677. https://doi.org/10.1080/10511970.2019.1669231

Akkaya, R. (2010). *Olasılık ve istatistik öğrenme alanındaki kavramların gerçekçi matematik eğitimi ve yapılandırmacılık kuramına göre bilgi oluşturma sürecinin incelenmesi* (Yayın No. 263028) [Doktora Tezi, Bursa Uludağ Üniversitesi]. Yüksek Öğretim Kurumu Ulusal Tez Merkezi.

Akkuş, R. (2013). Öğrencilerin Fikirlerini Takip Etme: Nereye Kadar? *Eğitim ve Bilim, 38*(169), 96-108.

Almeida, D. (1996). Variation in proof standards: Implications for mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *27*(5), 659-665. https://doi.org/10.1080/0020739960270504

Almeida, D. (2001). Pupils' proof potential. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 32*(1), 53-60.

Altaylı Özgül, D., & Kaplan, A. (2016). 7. Sınıf öğrencilerinin silindirin yüzey alanı konusundaki soyutlama süreçlerinin ve paylaşılan bilgilerinin incelenmesi. *Bayburt Eğitim Fakültesi Dergisi, 11*(2), 344-364.

Altun, M. & Yılmaz, A. (2010). Lise öğrencilerinin parçalı fonksiyon bilgisini oluşturma ve pekiştirme süreci. *Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 23*(1), 311-337.

Altun, M., & Durmaz, B. (2013). Doğrusal ilişki bilgisini oluşturma süreci üzerine bir durum çalışması. *Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 26*(2), 423-438.

Ansari, D. (2008). Effects of development and enculturation on number representation in the brain. *Nat Rev Neurosci 9,* 278–291. https://doi.org/10.1038/nrn2334

Aramış, Z. F. (2021). *7.sınıf öğrencilerinin RBC+C modeli bağlamında oran ve orantı konusundaki bilgi oluşturma süreçleri* (Yayın No. 687635) [Yüksek Lisans Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi]. Yüksek Öğretim Kurumu Ulusal Tez Merkezi.

Arcavi, A., Drijvers, P., & Stacey, K. (2016). *The Learning and Teaching of Algebra: Ideas, Insights and Activities* (1st ed.). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315545189

Ata Özer, A. & Yaman, H. (2021). 8. sınıf matematik konularına göre Türkiye, Singapur ve ABD matematik ders kitaplarının içerik ve görsellik açısından karşılaştırılması. *Bolu Abant İzzet Baysal Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 21*(4), 1359-1377. https://dx.doi.org/10.17240/aibuefd.2021..-955650

Ayanoğlu, P. (2012). *7.sınıf öğrencilerinin birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem ve eşitsizlik grafiği bilgisi oluşturma süreçleri* (Yayın No. 307589) [Yüksek Lisans Tezi, Kastamonu Üniversitesi]. Yüksek Öğretim Kurumu Ulusal Tez Merkezi.

Baki, A. (2008). *Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi.* Harf Eğitim Yayıncılığı.

Başeğmez, K. Ö. (2023). *RBC soyutlama modeline göre düzlemde öreleme ve dönme kavramının farklı düşünme yapılarına sahip öğretmen adayları üzerinde incelenmesi* (Yayın No. 784785) [Yüksek Lisans Tezi, Necmettin Erbakan Üniversitesi]. Yüksek Öğretim Kurumu Ulusal Tez Merkezi.

Baştürk, S. (2015). Sekizinci Sınıf Öğrencilerinin Sayı ve Sayı Kümeleriyle İlgili Kavrayışlarının İncelenmesi. *Elektronik Eğitim Bilimleri Dergisi*, *4*(8), 128-147.

Bayraktar, F. (2020). *Ortaokul altıncı sınıf öğrencilerinin çarpanlar ve katlar konusundaki bilgi oluşturma süreçlerinin RBC+C Modeli ile incelenmesi* (Yayın No. 657072) [Yüksek Lisans Tezi, Fırat Üniversitesi]. Yüksek Öğretim Kurumu Ulusal Tez Merkezi.

Belin, M. (2016). *Prospective mathematics teachers' quantitative reasoning on the development of decimal representation of real numbers and its effect on their comprehension of a related proof (*Yayın No. 459452) [Yüksek Lisans Tezi, Boğaziçi Üniversitesi]. Yüksek Öğretim Kurumu Ulusal Tez Merkezi.

Belin, M., & Akar, G. K. (2020). The effect of quantitative reasoning on prospective mathematics teachers' proof comprehension: The case of real numbers. *The Journal of Mathematical Behavior, 57,* 100757. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100757

Bell, A. W. (1976). A study of pupil's proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics, 7*(1), 23-40.

Bergé, A. (2008). The completeness property of the set of real numbers in the transition from calculus to analysis. *Educational Studies in Mathematics, 67,* 217-235. https://doi.org/10.1007/s10649-007-9101-5

Bergé, A. 2010. Students' perceptions of the completeness property of the set of real numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 41*(2), 217–227. https://doi.org/10.1080/00207390903399638

Bieda, K. N., Ji, X., Drwencke, J., & Picard, A. (2014). Reasoning-and-proving opportunities in elementary mathematics textbooks. *International Journal of Educational Research*, *64*, 71-80.

Bikner-Ahsbahs, A. (2004). Towards the emergence of constructing mathematical meanings. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Pychology of Mathematics Education. 2*, 119-126.

Bingölbali, E., & Bingölbali, F. (2013). Sezgisel ve Aksiyomatik Açıdan Küme Kavramı: Nedir? Tarihsel Olarak Nasıl Gelişmiştir? Zembat, İ. Ö., Özmantar, M. F., Bingölbali, E., Şandır, H., & Delice, A. (Eds.), *Tanımları ve Tarihsel Gelişimleriyle Matematiksel Kavramlar* (ss. 35-58). Pegem Akademi.

Brodie, K. (2010). *Teaching mathematical reasoning in* secondary *school classrooms* (Vol. 775). Springer Science & Business Media. https://doi.org/10.1007/978-0-387-09742-8

Bulut, S. (2018). *Ortaokul 6.sınıf öğrencilerinin üçgende alan bilgisini oluşturma sürecinin RBC+C modeline göre incelenmesi* (Yayın No. 514473) [Yüksek Lisans Tezi, Bolu Abant İzzet Baysal Üniversitesi]. Yüksek Öğretim Kurumu Ulusal Tez Merkezi.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., & Schwartz, J. L. (2008). Early algebra is not the same as algebra early. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 235-272). Routledge.

Celebioglu, B., & Yazgan, Y. (2015). The investigation of fourth graders' construction process of fractional multiplication using RBC+ C model. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, *197*, 316-319.

Common Core State Standards Initiative (CCSSI). (2010). *Common core state standards for mathematics*. Retrieved from https://corestandards.org/wp-content/uploads/2023/09/Math_Standards1.pdf

Cook, J. P., Melhuish, K., & Uscanga, R. (2023). Reasoning productively across algebraic contexts: Students develop coordinated notions of inverse. *The Journal of Mathematical Behavior*, *72*, Article 101099.

Cornu, B. (1991). Limits, In Tall, D. (Ed.) *Advanced mathematical thinking* (pp. 153 – 166). Kluwer Academic Publishers.

Courant, R., & Robbins, H. (1996). *What is Mathematics?: an elementary approach to ideas and methods*. Oxford University Press.

Creswell, J. W. (2013). *Qualitative Inquiry & Research Design: Choosing among Five Approaches (3rd ed.)*. Sage.

Çelebioğlu, B. (2014). *Kesir kavramına ilişkin bilgi oluşturma sürecinin incelenmesi* (Yayın No. 407241) [Doktora Tezi, Bursa Uludağ Üniversitesi]. Yüksek Öğretim Kurumu Ulusal Tez Merkezi.

Çelen, Y. (2023). Misconceptions of 9th Grade Students about Numbers. *TOJET: The Turkish Online Journal of Educational Technology*, *22*(2).

Çelik, A. & Özdemir, M. F. (2011). Ortaöğretimde Kompleks Sayılarla İlgili Kavram Yanılgılarının Belirlenmesi ve Çözüm Önerileri. *Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi Dergisi, (29),* 203-229. https://dergipark.org.tr/tr/pub/deubefd/issue/25122/265285

Çevikbaş, M., & Argün, Z. (2017). Geleceğin Matematik Öğretmenlerinin Rasyonel ve İrrasyonel Sayı Kavramları Konusundaki Bilgileri. *Eğitim Fakültesi Dergisi*, *30*(2), 551-581.

Çiftçi, Z., Akgün, L. & Soylu, Y. (2015). Matematik Öğretmeni Adaylarının İrrasyonel Sayılarla İlgili Anlayışları. *Ahi Evran Üniversitesi Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi, 16*(1), 341-356.

Çildir, M. (2014). A Special Case Study on the Concept of Equation with Two Gifted Students. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, *116*, 2650-2654. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2014.01.629

Çimen, E. E. (2012). Uluslararası Amerikan Okulu Matematik Eğitiminin İncelenmesi. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi, 1*(3), 44-54.

Çubukluöz, Ö., Adıgüzel, T., Gökkurt Özdemir, B. & Akkaya, R. (2018). Ortaokul 7. sınıf Öğrencilerinin En Büyük Ortak Bölen ve En Küçük Ortak Kat Konusundaki Bilgi Oluşturma Süreçlerinin RBC+C Modeli ile İncelenmesi. *Journal of Computer and Education Research, 6*(12), 285-319.

D’ambrosio, U. & Almeida, M. C. (2017). Ethnomathematics and the Emergence of Mathematics. In Adam, J. W.; Barmby, P.; Mesoudi, A. (Eds.). *The Nature and*

Development of Mathematics: Cross Disciplinary Perspectives on Cognition, Learning and Culture. (pp. 69–85). Routledge.

Davis, B. (1997). Listening for differences: An evolving conception of mathematics teaching. *Journal for research in mathematics education*, *28*(3), 355-376.

Davis, J. D. (2012). An examination of reasoning and proof opportunities in three differently organized secondary mathematics textbook units. *Mathematics Education Research Journal*, *24*, 467-491.

Davydov, V. V. (1990). Types of Generalization in Instruction: Logical and Psychological Problems in the Structuring of School Curricula. *Soviet Studies in Mathematics Education. Volume 2.* National Council of Teachers of Mathematics, 1906 Association Dr., Reston, VA 22091.

de Villiers, M. (1990). The Role and Function of Proof in Mathematics. *Pythagoras*, *24*, 17-24.

Dean Jr, D., & Kuhn, D. (2007). Direct instruction vs. discovery: The long view. *Science Education*, *91*(3), 384-397. https://doi.org/10.1002/sce.20194

Demir, M. K., & Gür, H. (2020). Teknoloji Destekli Öğrenme Ortamlarında Parabol Kavramının Soyutlanması Sürecinin İncelenmesi. *Boğaziçi Üniversitesi Eğitim Dergisi, 37*(2), 3-35.

Dinç, Y. (2018). *Sekizinci sınıf öğrencilerinin kareköklü sayılar konusunda bilgiyi oluşturma süreçlerinin incelenmesi* (Yayın No. 52577) [Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi]. Yüksek Öğretim Kurumu Ulusal Tez Merkezi.

Dooley, T. (2012). Constructing and consolidating mathematical entities in the context of whole class discussion. In J. Dindyal, L. P. Cheng, & S. F. Ng (Eds.), *Mathematics education: Expanding horizons (Proceedings of the 35th conference of the mathematics education group of Australasia)* (pp. 234–241). MERGA.

Dougherty, B. (2017). Measure up: A quantitative view of early algebra. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 389-412). Routledge.

Dönmez, A. (2002). *Matematiğin öyküsü ve serüveni* (II. Cilt: Mezopotamya ve Mısır Matematiği). Toplumsal Dönüşüm Yayınları.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. In D. Tall, D. (Ed.) *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). Kluwer Academic Publishers.

Dreyfus, T. (2007). Processes of abstraction in context the nested epistemic actions model. https://citeseerx.ist.psu.edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=d1900be9d6a043ac815c81344caa8c2713dcc329

Dreyfus, T. & Tsamir, P. (2004). Ben's Consolidation of Knowledge Structures about Infinite Sets. *Journal of Mathematical Behavior, 23*(3), 271-300. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2004.06.002

Dreyfus, T., & Kidron, I. (2014). From proof image to formal proof—A transformation. In S. Rezat, M. Hattermann, & A. Peter-Koop (Eds.), *Transformation—A fundamental idea in mathematics education—Festschrift for Rudolf Strässer* (pp. 269–289). Springer.

Dreyfus, T., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. (2001). Abstraction in context II: The case of peer interaction. *Cognitive Science Quarterly, 1*(3/4), 307-368.

Eldekci, S. (2019). *7.sınıf düzeyindeki ortaokul öğrencilerinin değişken kavramını soyutlama sürecinin RBC modeliyle ortaya çıkarılması* (Yayın No. 590046) [Yüksek Lisans Tezi, Bolu Abant İzzet Baysal Üniversitesi]. Yüksek Öğretim Kurumu Ulusal Tez Merkezi.

Ennis, R. (1969). *Logic in Teaching,* Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.

Er, S., & Dost, Ş. (2022). A design study to develop the proof skills of mathematics pre-service teachers. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi, 16*(1), 189-226. https://doi.org/10.17522/balikesirnef.1081825

Erlandson, D. A. (1993). *Doing naturalistic inquiry: A guide to methods*. Sage.

Ernest, P. (1989). The knowledge, beliefs, and attitudes of the mathematics teacher: A model. *Journal of Education for Teaching, 15*(1), 13-33. https://doi.org/10.1080/0260747890150102

Eroğlu, E. (2021). *Yedinci sınıf öğrencilerinin merkezi eğilim ölçüleri konusuna ilişkin bilgiyi oluşturma süreçlerinin incelenmesi* (Yayın No. 662450) [Yüksek Lisans Tezi, Bursa Uludağ Üniversitesi]. Yüksek Öğretim Kurumu Ulusal Tez Merkezi.

Fajriah, N., & Suryaningsih, Y. (2020). The development of constructivism-based student worksheets. *Journal of Physics: Conference Series*, *1470*(1), 012011. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1470/1/012011

Fischbein, E., Jehiam, R., & Cohen, D. (1995). The Concept of Irrational Numbers in High-School Students and Prospective Teachers. *Educational Studies in Mathematics*, (29), 29-44. https://doi.org/10.1007/BF01273899

Fish, L. (1999). Why use the 5E model for teaching science? *Tapestries Times, 1*(2), 2-3.

Garnier, R., & Taylor, J. (2009). *Discrete Mathematics: Proofs, Structures and Applications, Third Edition).* CRC Press. https://doi.org/10.1201/9781439812815

Gençaslan, O. (2022). Türev Kavramının Öğretiminde Dinamik Görselleştirme Kullanımı. A. Şimşek & Semra F. E. (Eds.), *Pedagojiden Uygulamaya Yansımalar: Teknolojinin Öğretim Ortamlarında Kullanımı* (ss. 223-247). Pegem Akademi.

Giannakoulias, E., Souyoul, A., & Zachariades, T. (2007). Students' thinking about fundamental real numbers properties. *Proceedings of the fifth congress of the*

European society for research in mathematics education (pp. 416-425). Cyprus: ERME, Department of Education, University of Cyprus.

González-Martín, A. S., Giraldo, V., & Souto, A. M. (2013). The introduction of real numbers in secondary education: An institutional analysis of textbooks. *Research in Mathematics Education*, *15*(3), 230-248. https://doi.org/10.1080/14794802.2013.803778

Guler, H. K., & Arslan, C. (2015). A Real Context Problem for Consolidating the Similarity. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, *197*, 398-403.

Gurbuz, M. C., & Ozdemir, M. E. (2020). A learning trajectory study on how the concept of variable is constructed by students. *World Journal of Education*, *10*(1), 134–148. https://doi.org/10.5430/wje.v10n1p134

Güler, H. K. & Arslan, Ç. (2017). Consolidation of similarity knowledge via Pythagorean Theorem: a Turkish case study. *Acta Didactica Napocensia*, *10*(2), 67-79.

Güler, H.K., & Arslan, Ç. (2018). Matematik öğretmeni adaylarının düzlemde dönme dönüşümü formüllerini oluşturma sürecinin incelenmesi. *Gazi Üniversitesi Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi, 38*(2), 613-633.

Gürbüz, M. Ç. (2021). *Ortaokul öğrencilerinin cebirsel kavramları soyutlama süreçlerinin incelenmesi* (Yayın No. 668641) [Doktora Tezi, Bursa Uludağ Üniversitesi]. Yüksek Öğretim Kurumu Ulusal Tez Merkezi.

Gürbüz, M. Ç., Ağsu, M., & Özdemir, M. E. (2018). An Analysis of How Preservice Math Teachers Construct the Concept of Limit in Their Minds. *European Journal of Education Studies*, *5*(6), 103-126. https://doi.org/10.5281/zenodo.1490240

Güven Akdeniz, D., Yakıcı Topbaş, E. S., & Argün, Z. (2022). Zero in arithmetic operations: A comparison of students with and without learning disabilities. *Journal of Pedagogical Research,* *6*(3), 27-52. https://doi.org/10.33902/JPR.202213737

Hanna, G. (1989). More than formal proof. *For the learning of mathematics*, *9*(1), 20-23.

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange*, *21*, 6–13.

Hanna, G. (1995). Challenges to the importance of proof. *For the learning of Mathematics*, *15*(3), 42-49.

Hanna, G. (2000). Proof, Explanation and Exploration: An Overview. *Educational Studies in Mathematics, 44*(1), 5-23. https://doi.org/10.1023/A:1012737223465

Hanna, G., & De Bruyn, Y. (1999). Opportunity to learn proof in Ontario grade twelve mathematics texts. *Ontario Mathematics Gazette*, *37*(4), 23-29.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A. H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.). *Research in collegiate mathematics education III: Vol. 7. CBMS issues in mathematics education* (pp. 234–283). American Mathematical Society.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 805–842). Information Age Publishing.

Hasar, B. (2019). *Farklı matematiksel motivasyon düzeylerine sahip 6.sınıf öğrencilerinin tam sayılar alt öğrenme alanındaki bilgiyi oluşturma süreçlerinin incelenmesi* (Yayın No. 561480) [Yüksek Lisans Tezi, Balıkesir Üniversitesi]. Yüksek Öğretim Kurumu Ulusal Tez Merkezi.

Hasar, B. & Üzel, D. (2020). Farklı Matematiksel Motivasyona Düzeylerine Sahip 6. Sınıf Öğrencilerinin Tam Sayılar Alt Öğrenme Alanındaki Bilgiyi Oluşturma Süreçlerinin İncelenmesi. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi,* *14*(1), 810-839. https://doi.org/10.17522/balikesirnef.694738

Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(4), 396-28. https://doi.org/10.2307/749651

Herbst, P. G. (2002). Engaging Students in Proving: A Double Bind on the Teacher. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(3), 176–203. https://doi.org/10.2307/749724

Hersh, R. (2008). Mathematical practice as a scientific problem. In B. Gold & R. A. Simons (Eds.), Proof and other dilemmas: Mathematics and philosophy (pp. 95–108). Mathematical Association of America.

Hershkowitz, R., Dreyfus, T., & Schwarz, B. B. (2020). Abstraction in Context. In: S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (ss. 9-13). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_100032

Hershkowitz, R., Hodas, N., Dreyfus, T., Schwartz, B. (2007). Abstracting Processes, from individuals constructing of knowledge to a group's "shared knowledge". *Mathematics Education Research Journal, 19*(2), 41-68.

Hershkowitz, R., Schwarz, B. B., & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: Epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(2), 195-222. https://doi.org/10.2307/749673

Hill, H. C. (2000). *Implementation networks: Non-state resources for getting policy done* (Yayın No. 9963803) [Doktora Tezi, University of Michigan]. ProQuest Dissertations & Theses Global.

Hisar, F. M. (2020). *Yedinci sınıf çokgenler konusunda 5E öğrenme döngüsüne göre epistemik eylemlerin RBC Soyutlama Modeliyle incelenmesi* (Yayın No. 656756) [Doktora Tezi, Anadolu Üniversitesi]. Yüksek Öğretim Kurumu Ulusal Tez Merkezi.

İlhan, A. (2019). *9. sınıf öğrencilerinin farklı temsiller bağlamında fonksiyon kavramı bilgisi oluşturma süreçleri* (Yayın No. 545249) [Yüksek Lisans Tezi, Kastamonu Üniversitesi]. Yüksek Öğretim Kurumu Ulusal Tez Merkezi.

İskenderoğlu, T., & Baki, A. (2011). İlköğretim 8. sınıf matematik ders kitabındaki soruların PISA matematik yeterlik düzeylerine göre sınıflandırılması. *Eğitim ve Bilim, 36*(161).

Jeannotte, D., & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(1), 1-16. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8

Jooste, Z. (2011). Learners' understanding of zero: the "nothing" that is actually something. H. Venkat & A. A. Essien, (Eds.), *Proceedings of 17th National Congress of the Association for Mathematical Education of South Africa (AMESA)*, (pp. 350–364).

Kalaycı, Ö. & Akkaya, R. (2019). Ortaokul öğrencilerinin doğru ve ters orantı bilgisini oluşturma sürecinin RBC+C modeline göre incelenmesi: Bir öğretim deneyi. *Bolu Abant İzzet Baysal Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 19*(4), 1775- 1790. https://doi.org/10.17240/aibuefd.2019..-598172

Kaminski, E. (2002). Promoting mathematical understanding: Number sense in action. *Mathematics Education Research Journal*, *14*(2), 133-149. https://doi.org/10.1007/BF03217358

Kaplan, A., & Elif, A. (2015). Ortaokul 4. Sınıf Öğrencilerinin Eşitsizlik Konusundaki Bilgi Oluşturma Süreçlerinin İncelenmesi. *Bayburt Eğitim Fakültesi Dergisi, 10*(1), 130-153.

Kaput, J. J., Blanton, M. L., & Moreno, L. (2008a). Algebra from a symbolization point of view. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 19–55). Routledge.

Kaput, J. J., Carraher, D. W., & Blanton, M. L. (Eds.). (2008b). *Algebra in the early grades*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315097435

Karch, J. M., & Sevian, H. (2022). Development of a framework to capture abstraction in physical chemistry problem solving. *Chemistry Education Research and Practice, 23*(1), 55-77. https://doi.org/10.1039/d1rp00119a

Katrancı, Y. (2010). *Olasılığın temel kuralları bilgisinin yapılandırmacı kurama göre oluşturulması sürecinin incelenmesi* (Yayın No. 311069) [Yüksek Lisans Tezi, Bursa Uludağ Üniversitesi]. Yüksek Öğretim Kurumu Ulusal Tez Merkezi.

Katrancı, Y., Altun, M. (2013) İlköğretim İkinci Kademe Öğrencilerinin Olasılık Bilgisini Oluşturma ve Pekiştirme Süreci, *Kalem Eğitim ve İnsan Bilimleri Dergisi,* 3(2), 11-58.

Kaufman, B. (1981). *Mathematical Education for the Gifted Secondary School Student.* MEGSSS in Action.

Kaya, E. P. (2018). *İlköğretim matematik öğretmen adaylarının denklik bağıntısına ilişkin kanıt imajlarının incelenmesi* (Yayın No. 527022) [Yüksek Lisans Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi]. Yüksek Öğretim Kurumu Ulusal Tez Merkezi.

Kidron, I. & Dreyfus, T. (2014). Proof image. *Educational Studies in Mathematics*, *87*(3), 297-321.

Kidron, I., & Dreyfus, T. (2010). Justification enlightenment and combining constructions of knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 74, 75-93.

Kidron, I., & Monaghan, J. (2009). Commentary on the chapters on the construction of knowledge. In *Transformation of knowledge through classroom interaction* (pp. 89-98). Routledge.

King, J. P. (1992). *The art of mathematics*. Courier Corporation.

Kinzer, C. J., & Stanford, T. (2013). The distributive property: The core of multiplication. *Teaching Children Mathematics, 20*(5), 302–309. https://doi.org/10.5951/teacchilmath.20.5.0302

Klein, J. (1968). *Greek mathematical thought and the origin of algebra* (E. Brann, Trans.). M.I.T. Press.

Kleiner, I. (1991). Rigor and proof in mathematics: A historical perspective. *Mathematics Magazine, 64*, 291-314.

Kobak Demir, M. (2017). *Matematik öğretmenlerinin öğrencilerin bilgiyi yapılandırma sürecindeki rolünün incelenmesi* (Yayın No. 482529) [Doktora Tezi, Balıkesir Üniversitesi]. Yüksek Öğretim Kurumu Ulusal Tez Merkezi.

Kobak Demir, M., & Gür, H. (2019). Lise öğrencilerinin parabol bilgisini oluşturma süreçlerinde öğretmen etkisi. *Kuramsal Eğitimbilim Dergisi, 12(*1), 151-184. https://doi.org/10.30831/akukeg.408347

Krantz, S. (2007). The history and concept of mathematical proof. http://www.math.wustl.edu/~sk/eolss.pdf

Lakoff, G., & Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from: Essence and Algebra*. Basic Books.

Lehtinen, E., Merenluoto, K., & Kasanen, E. (1997). Conceptual change in mathematics: From rational to (un)real numbers. *European Journal of Psychology of Education*, *12*(2), 131–145. https://doi.org/10.1007/bf03173081

Leont'ev, A. N. (1981). The problem of activity in psychology. In J. V. Wertsch (Ed.), *The concept of activity in soviet psychology* (ss. 37–71). Sharpe.

Levenson, E., Tirosh, D., & Tsamir, P. (2004). Elementary School Students' Use of Mathematically-Based and Practically-Based Explanations: The Case of Multiplication. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *35*. https://eric.ed.gov/?id=ED489578

Lincoln, Y. S., & Guba, E. G. (1985). *Naturalistic inquiry*. Sage.

Lithner, J. (2000). Mathematical reasoning in task solving. *Educational Studies in Mathematics*, 41(2), 165-190.

Lune, H., & Berg, B. L. (2017). *Qualitative research methods for the social sciences (ninth)*. Pearson Education Limited.

Mahanin, H.U.H., Shahrill, M., Tan, A., & Mahadi, M.A. (2017). Integrating the use of interdisciplinary learning activity task in creating students' mathematical knowledge. *International Journal of Research in Education and Science, 3*(1), 280-298.

Margolis, E., & Laurence, S. (2008). How to learn the natural numbers: Inductive inference and the acquisition of number concepts. *Cognition, 106*(2), 924-939. https://doi.org/10.1016/j.cognition.2007.03.003

Merenluoto, K., & Lehtinen, E. (2002). Conceptual Change in Mathematics: Understanding the Real Numbers. İçinde M. Limón & L. Mason (Ed.), *Reconsidering Conceptual Change: Issues in Theory and Practice* (ss. 232-257). Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47637-1_13

Merenluoto, K., & Palonen, T. (2007). When we clashed with the real numbers: Complexity of conceptual change in number concept. *Reframing the conceptual change approach in learning and instruction*, 247-263.

Merriam, S. B., & Tisdell, E. J. (2015). *Qualitative research: A guide to design and implementation*. John Wiley & Sons.

Miles, M. B., & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: An expanded sourcebook*. Sage.

Millî Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı. (2018a). *Matematik Dersi Öğretim Programı (İlkokul ve Ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8. Sınıflar)*. Millî Eğitim Bakanlığı.

Millî Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı. (2018b). *Ortaöğretim Matematik Dersi (9, 10, 11 ve 12. Sınıflar) Öğretim Programı*. Millî Eğitim Bakanlığı.

Mish, F. C. (1991). *Webster's Ninth New Collegiate Dictionary*. Merriam-Webster.

Monandi, O. O. (2021). *An Investigation of Pre-Service Elementary-School Teachers' Knowledge of Properties of Real Numbers* (Yayın No. 2557214024) [Doktora Tezi, Illinois State University]. ProQuest Dissertations & Theses Global.

Monroy, A. A., & Astudillo, M. T. G. (2013). Interactive reconstruction of a definition. In *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2276-2285).

Moore, R. C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics*, *27*(3), 249-266. https://doi.org/10.1007/BF01273731

Moralı, S., Köroğlu, H., & Çelik, A. (2004). Buca Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmen Adaylarının Soyut Matematik Dersine Yönelik Tutumları ve Rastlanan Kavram Yanılgıları. *Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *24*(1), 161-175.

Mowat, E., & Davis, B. (2010). Interpreting embodied mathematics using network theory: Implications for mathematics education. *Complicity: An International Journal of Complexity and Education*, *7*(1), 1-31. https://doi.org/10.29173/cmplct8834

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), 1989, "Principles and standards for school mathematics", Reston, VA.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), 2000, "Principles and standards for school mathematics", Reston, VA.

National Council of Teachers of Mathematics. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all.* Author. Reston, VA.

Nesin, A. (2010). *Sayıların İnşası.* Open Course Ware Consortium Project.

Nesin, A. (2019). *Analiz I*. Nesin Yayıncılık.

Newton, D. P., & Newton, L. D. (2007). Could elementary mathematics textbooks help give attentionto reasons in the classroom? *Educational Studies in Mathematics, 64*(1), 69–84.

Okuyucu, İ. (2022). *Ortaokul öğrencilerinin dikdörtgenler prizmasının alan ve hacim bağlantılarını oluşturma süreçlerinin incelenmesi* (Yayın No. 719771) [Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi]. Yüksek Öğretim Kurumu Ulusal Tez Merkezi.

Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics, 14*(3), 235-250. https://doi.org/10.1007/BF00410540

Osterhus, C. B. (1998). *Fourth-grade teachers' knowledge of multiplication and division of whole numbers within an inquiry-based staff development context: A collective case study*. The University of North Carolina at Greensboro. 9900399

Özçakır Sümen, Ö. (2019). Primary School Students' Abstraction Levels of Whole-Half-Quarter Concepts According to RBC Theory. *Journal on Mathematics Education, 10*(2), 251-264. https://doi.org/10.22342/jme.10.2.7488.251-264

Özgül, D. A. (2018). *Ortaokul öğrencilerinin çokgenler konusundaki soyutlama süreçlerinin incelenmesi: RBC+C modeli* (Yayın No. 533284) [Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi]. Yüksek Öğretim Kurumu Ulusal Tez Merkezi.

Özmantar, M. F. & Monaghan, J. (2007). A Dialectical Approach to the Formation of Mathematical Abstractions. *Mathematics Education Research Journal, 19*(2), 89–112. https://doi.org/10.1007/bf03217457

Pala, O. (2020). *İspat imajının dinamiklerinin sonsuz kümelerin denkliği bağlamında incelenmesi* (Yayın No. 652225) [Doktora Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi]. Yüksek Öğretim Kurumu Ulusal Tez Merkezi.

Pan, Y., Ke, F., & Xu, X. (2022). A systematic review of the role of learning games in fostering mathematics education in K-12 settings. *Educational Research Review*, *36*, 100448. https://doi.org/10.1016/j.edurev.2022.100448

Patton, M. Q. (1987). *How to use qualitative methods in evaluation* (No. 4). Sage.

Piaget, J. (1973). *To understand is to invent: The future of education.* Grossman.

Pólya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning. Vol. I: Patterns of plausible inference.* Princeton University Press.

Risnanosanti, Y. D. (2020). Undergraduate Students' Conceptual Understanding on Abstract Algebra. https://www.scitepress.org/Papers/2018/85233/85233.pdf

Rizos, I., & Adam, M. (2022). Mathematics students' conceptions and reactions to questions concerning the nature of rational and irrational numbers. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 17*(3). https://doi.org/10.29333/iejme/11977

Robinet, J. (1986). Les réels: Quels modèles en ont les élèves? *Educational Studies in Mathematics, 17*(4), 359–386. http://www.jstor.org/stable/3482259

Roh, K. H. (2008). Students' images and their understanding of definitions of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics, 69*(3), 217-233. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9128-2

Ron, G., Dreyfus, T. & Hershkowitz, R. (2010), Partially Correct Constructs Illuminate Students' Inconsistent Answers. *Educational Studies in Mathematics,* 75, 65–87.

Ron, G., Dreyfus, T., & Hershkowitz, R. (2006). Partial knowledge constructs. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 457–464). Charles University Faculty of Education.

Ron, G., Dreyfus, T., & Hershkowitz, R. (2017). Looking back to the roots of partially correct constructs: The case of the area model in probability. *The Journal of Mathematical Behavior*, *45*, 15–34. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2016.10.004

Ross, K. A. (1998). Doing and proving: The place of algorithms and proofs in school mathematics. *The American mathematical monthly*, *105*(3), 252-255. https://doi.org/10.1080/00029890.1998.12004875

Saldana, J. (2011). *Fundamentals of qualitative research*. Oxford University Press.

Santos, E. D. L. (2019). Helping a Student with Learning Disabilities Memorize Multiplication Facts. *International Journal for Innovation Education and Research*, *7*(7), 133-146. https://doi.org/10.31686/ijier.vol7.iss7.1590

Schoenfeld, A. H. (2009). Series editor’s foreword: The soul of mathematics. In D. A. Stylianou, M. L. Blanton, & E. J. Knuth (Eds.), *Teaching and Learning Proof Across the Grades: A K-16 Perspective* (pp. xii–xvi). Routledge.

Schoenfeld, A. H. (Ed.). (1994). *Mathematical thinking and problem solving.* Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Schwarz, B., Dreyfus, T., Hadas, N., & Hershkowitz, R. (2004). Teacher guidance of knowledge construction. In M. J. Hoines, & A. B. Fuglesad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *4*, 169–176.

Sezen Yüksel, N., (2020). Matematik Tarihi ve Felsefesi Çerçevesinde İspat ve İspatlama. In Uğurel, I (Ed.), *Matematiksel İspat ve Öğretimi* (pp.41-68), Anı Yayıncılık.

Sezgin Memnun, D. (2011) *İlköğretim altıncı sınıf öğrencilerinin analitik geometrinin koordinat sistemi ve doğru denklemi kavramlarını yapılandırmacı öğrenme ve gerçekçi matematik eğitimine göre oluşturma süreçlerinin araştırılması* (Yayın

No. 306364) [Doktora Tezi, Bursa Uludağ Üniversitesi]. Yüksek Öğretim Kurumu Ulusal Tez Merkezi.

Sezgin Memnun, D. & Altun, M. (2012a). RBC+C Modeline Göre Doğrunun Denklemi Kavramının Soyutlanması Üzerine Bir Çalışma: Özel Bir Durum Çalışması. *Cumhuriyet Uluslararası Eğitim Dergisi, 1*(1), 17-37.

Sezgin Memnun, D. & Altun, M. (2012b). İki Altıncı Sınıf Öğrencisinin Doğru Denklemini Oluşturma Sürecinin İncelenmesi. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi, 6*(1), 171-200.

Sezgin Memnun, D. & Altun, M. (2012c). Matematiksel Başarı Düzeyleri Farklı İki Altıncı Sınıf Öğrencisinin Koordinat Sistemini Soyutlamaları Üzerine Bir Örnek Olay Çalışması. *Elektrik Sosyal Bilimler, 6*(1), 171-200.

Sezgin Memnun, D., Aydın, B., Özbilen, Ö., & Erdoğan, G. (2017). The Abstraction Process of Limit Knowledge. *Educational Sciences: Theory and Practice*, *17*(2), 345-371. https://doi.org/10.12738/estp.2017.2.0404

Sezgin Memnun, D., Sevindik, F., Beklen, C., & Dinç, E. (2019). Analysis of the Abstraction Process of Continuity Knowledge. *World Journal of Education, 9*(2), 141-150. https://doi.org/10.5430/wje.v9n2p141

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics, 18,* 371-397. https://doi.org/10.1007/bf00240986

Simon, M. A. (1996). Beyond inductive and deductive reasoning: The search for a sense of knowing. Educational *Studies in mathematics*, *30*(2), 197-210. https://doi.org/10.1007/bf00302630

Sirotic, N., & Zazkis, A. (2007). Irrational Numbers: The Gap between Formal and Intuitive Knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, *65*(1), 49-76. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9041-5

Smith, J. L., Karcher, S., & Whitacre, I. (2023). Is i a number? An examination of advanced undergraduate students' definitions of number. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*. Advance online publication. https://doi.org/10.1007/s40753-022-00210-y

Stein, M. K., Remillard, J., & Smith, M. S. (2007). How curriculum influences student learning. In F. K. J. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 1, pp. 319–369). Information Age Publishing.

Stylianides, G. J. (2009). Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. *Mathematical thinking and learning*, *11*(4), 258-288.

Subroto, T., & Suryadi, D. (2019). Epistemological obstacles in mathematical abstraction on abstract algebra. In *3rd International Conference on Mathematical Sciences and Statistics. IOP Conference Series: Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1132). https://doi.org/10.1088/1742-6596/1132/1/012032

Süzen, C. (2019). *Eşitsizlik kavramına ilişkin bilgiyi oluşturma sürecinin incelenmesi* (Yayın No. 589808) [Yüksek Lisans Tezi, Bursa Uludağ Üniversitesi]. Yüksek Öğretim Kurumu Ulusal Tez Merkezi.

Szydlik, J. E. (2000). Mathematical beliefs and conceptual understanding of the limit of a function. *Journal for Research in Mathematics Education, 31,* 258-276. https://doi.org/10.2307/749807

Şimşekler, Z. H. (2017). *Özel yetenekli çocuklarda matematiksel soyutlama* (Yayın No. 487363) [Yüksek Lisans Tezi, Bursa Uludağ Üniversitesi]. Yüksek Öğretim Kurumu Ulusal Tez Merkezi.

Tabach, M., & Hershkowitz, R. (2002). Construction of knowledge and its consolidation. In *Proceedings of the 26th PME Conference* (Vol. 4, pp. 265-272).

Tabach, M., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. (2006). Constructing and Consolidating of Algebraic Knowledge within Dyadic Processes: A Case Study. *Educational*

Studies in Mathematics, *63*(3), 235-258. https://doi.org/10.1007/s10649-005-9012-2

Tabach, M., Hershkowitz, R., Rasmussen, C., & Dreyfus, T. (2014). Knowledge shifts and knowledge agents in the classroom. *The Journal of Mathematical Behavior*, *33*, 192-208. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.12.001

Tall, D. (1989). The Nature of Mathematical proof. *Mathematics Teaching*, 127, 28-32.

Tall, D. (1993). Students' difficulties in calculus. In C. Gaulin et al. (Eds.), *Proceedings of Working Group 3 on Students' Difficulties in Calculus, 7th International Conference on Mathematicaal Education* (pp. 13-28).

Tall, D., & Katz, M. (2014). A cognitive analysis of Cauchy's conceptions of function, continuity, limit and infinitesimal, with implications for teaching the calculus. *Educational Studies in Mathematics*, *86*(1), 97-124. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9531-9

Tall, D., & Mejia-Ramos, J. P. (2010). The long-term cognitive development of reasoning and proof. In G. Hanna, H. N. Jahnke, & H. Pulte (Eds.), *Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives*. (pp. 137–149). Springer.

Tall, D., & Schwarzenberger, R. (1978). Conflicts in the learning of real numbers and limits. *Mathematics Teaching, 82,* 44-49.

Temiz, D. (2019). *Altıncı sınıf öğrencilerinin açı konusu öğreniminde modelleme etkinliklerine dayalı bilgiyi oluşturma ve pekiştirme süreçleri* (Yayın No. 543320) [Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi]. Yüksek Öğretim Kurumu Ulusal Tez Merkezi.

Thompson, D. R., Senk, S. L., & Johnson, G. J. (2012). Opportunities to learn reasoning and proof in high school mathematics textbooks. *Journal for Research in Mathematics Education*, *43*(3), 253-295.

Toluk Uçar, Z. (2015). Ortaokul Matematik Öğretmeni Adaylarının Reel Sayıları Kavrayışlarında Temsillerin Rolü. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, *24*(3), 1149-1164.

Topuz, F., & Cantürk Günhan, B. (2020). Content analysis of research on processes of constructing knowledge in mathematics education in Turkey. *Bartın University Journal of Faculty of Education*, *9*(2), 279-300.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions: A model of goal and theory description in mathematics instruction—the Wiskobas Project*. Springer.

Tsamir, P., & Dreyfus, T. (2002). Comparing infinite sets—A process of abstraction: The case of Ben. *The Journal of Mathematical Behavior*, *21*(1), 1-23. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(02)00100-1

Tsamir, P., Dreyfus, T. (2005). How Fragile Is Consolidated Knowledge? Ben's Comparisons of Infinite Sets. *Journal of Mathematical Behavior, 24*, 15-38. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2004.12.001

Tunalı, Ö. K. (2010). *Açı kavramının gerçekçi matematik öğretimi ve yapılandırmacı kurama göre öğretiminin karşılaştırılması* (Yayın No. 311070) [Yüksek Lisans Tezi, Bursa Uludağ Üniversitesi]. Yüksek Öğretim Kurumu Ulusal Tez Merkezi.

Türnüklü, E. & Özcan, B. N. (2014). Öğrencilerin geometride RBC teorisine göre bilgiyi oluşturma süreçleri ile Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri arasındaki ilişki: örnek olay çalışması. *Mustafa Kemal Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi, 11*(27), 295-316.

Uçar, Z. T. (2015). Ortaokul matematik öğretmen adaylarının reel sayıları kavrayışlarına temsillerin etkisi. *Kastamonu Education Journal*, *24*(3), 1149-1164.

Ulaş, T. (2015). *Sekizinci sınıf öğrencilerinin özdeşlik kavramını oluşturma süreçlerinin incelenmesi* (Yayın No. 423567) [Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi]. Yüksek Öğretim Kurumu Ulusal Tez Merkezi.

Ulaş, T. & Yenilmez, K. (2017). Sekizinci sınıf öğrencilerinin özdeşlik kavramını oluşturma süreçlerinin incelenmesi. *International e-Journal of Educational Studies, 1*(2), 103-117.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach. *The Conceptual Change Approach to Mathematics Learning and Teaching*, *14*(5), 453-467. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2004.06.013

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2007). How many numbers in an interval? Presuppositions, synthetic models and the effect of the number line. In S. Vosniadou, A. Baltas, & X. Vamvakoussi (Eds.), Reframing the conceptual change approach in learning and instruction (pp. 267–283). Elsevier.

van Oers, B. (1998). The fallacy of decontextualisation. Mind, Culture, and Activity, 5(2), 135–142.

van Someren, M., Barnard, Y. F., & Sandberg, J. (1994). *The think aloud method: a practical approach to modelling cognitive*. Academic Press.

Viveros, K., & Sacristán, A. (2002). College students' conceptual links between the continuity and the differentiability of a function. In D. S. Mewborn, P. Sztajin, D. Y. White, H. G. Wiegel, R. L. Bryant, & K. Nooney (Eds.), *Proceedings of the 24th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1-4, pp.353-363).

von Plato, J. (2013). Kurt Gödel and the Foundations of Mathematics: Horizons of Truth by Matthias Baaz, Christos H. Papadimitriou, Hilary W. Putnam, Dana S. Scott, and Charles L. Harper, Jr. (Eds.). *The Mathematical Intelligencer*, *35*(2), 70-73. https://doi.org/10.1007/s00283-012-9359-z

Voskoglou, M., & Kosyvas, G. (2012). Analyzing students' difficulties in understanding real numbers. *Journal of Research in Mathematics Education*, *1*(3), 301-336. https://doi.org/10.4471/redimat.2012.16

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes.* Harvard University Press.

Waring, S. (2008). Teaching proof at KS4. *The Mathematics Enthusiast*, *5*(1), 155-162.

Wasserman, N. H. (2016). Abstract Algebra for Algebra Teaching: Influencing School Mathematics Instruction. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *16*(1), 28-47. https://doi.org/10.1080/14926156.2015.1093200

Weber, K. (2005). Problem-solving, proving, and learning: The relationship between problem-solving processes and learning opportunities in the activity of proof construction. *The Journal of Mathematical Behavior, 24*(3-4), 351-360. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2005.09.005

Williams, G. (2007). Abstracting in the context of Spontaneous Learning. *Mathematics Education Research Journal*, *19*(2), 69-88. https://doi.org/10.1007/BF03217456

Yantz, J. (2013). *Developing meaning for algebraic procedures: An exploration of the connections undergraduate students make between algebraic rational expressions and basic number properties* (Yayın No. 3592692) [Doktora Tezi, Middle Tennessee State University).

Yavuz Mumcu, H. (2018). Examining Mathematics Department Students' Views on the Use of Mathematics in Daily Life. *International Online Journal of Education and Teaching*, *5*(1), 61-80.

Yazıcı, N., & Abayrak, M. (2019). Evrensel Küme ve Sonsuz Küme Kavramlarına İlişkin Matematik Öğretmenlerinin Genel Alan Bilgisi. *Kastamonu Education Journal, 27*(5), 2027-2042. https://doi.org/10.24106/kefdergi.3265

Yeşildere, S. (2006). *Farklı matematiksel güce sahip ilköğretim 6,7 ve 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme ve bilgiyi oluşturma süreçlerinin incelenmesi* (Yayın No. 206024) [Doktora Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi]. Yüksek Öğretim Kurumu Ulusal Tez Merkezi.

Yeşildere, S. & Türnüklü, E. B. (2008) İlköğretim sekizinci sınıf öğrencilerin bilgi oluşturma süreçlerinin matematiksel güçlerine göre incelenmesi. *Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 21*(2), 485-509.

Yiğitcan Nayir, Ö., Kurt Erhan, G., Koştur, M., Türkoğlu, H. & Mirasyedioğlu, Ş. (2018). Sınıf öğretmenliği öğrencilerinin sayı kümelerine ilişkin hazırbulunuşluklarının sözel, matematiksel ve model temsilleriyle incelenmesi. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi, 9*(2), 249-282.

Yin, R. K. (2018). *Case study research and applications* (Vol. 6). Sage.

Yıldırım, A. & Şimşek, H. (2013). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri. (9. Baskı).* SeçkinYayıncılık.

Yıldırım, B. (2019). *Ortaokul 6.sınıf öğrencilerinin kesirlerle bölme algoritması oluşturma sürecinin incelenmesi* (Yayın No. 547120) [Yüksek Lisans Tezi, Bolu Abant İzzet Baysal Üniversitesi]. Yüksek Öğretim Kurumu Ulusal Tez Merkezi.

Yılmaz, R. (2021). *Cebirsel kavram ve genellemelerinin, soyutlama sürecine uygun öğretiminin tasarımı, uygulanması ve değerlendirilmesi* (Yayın No. 675575) [Doktora Tezi, Bursa Uludağ Üniversitesi]. Yüksek Öğretim Kurumu Ulusal Tez Merkezi.

YÖK, (2018). *Matematik Öğretmenliği Lisans Programı.* https://www.yok.gov.tr/Documents/Kurumsal/egitim_ogretim_dairesi/Yeni-Ogretmen-Yetistirme-Lisans-Programlari/Matematik_Ogretmenligi_Lisans_Programi.pdf.

Yorulmaz, A., & Önal, H. (2017). Examination of the views of class teachers regarding the errors primary school students make in four operations. *Universal Journal of Educational Research*, *5*(11), 1885-1895. https://doi.org/10.13189/ujer.2017.051105

Zengin, Y. & Tatar, E. (2014). Türev uygulamaları konusunun öğretiminde geogebra yazılımının kullanımı. *Kastamonu Eğitim Dergisi, 22*(3), 1209-1228.

Zeybek Simsek, Z. (2020). Constructing-evaluating-refining mathematical conjectures and proofs. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning, 21*(2), 197-215.

EK-A: Etkinlik Uygulama Formu

GERÇEL SAYILARIN BAZI CEBİRSEL ÖZELLİKLERİNİN OLUŞTURULMASINA YÖNELİK ETKİNLİK UYGULAMALARI

ETKİNLİK 1

Aşağıda bazı örnekler ve bu örneklere yönelik $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı toplama " $+$ " ve çarpma " $\cdot$ " işlemlerinin özellikleri kullanılarak elde edilmiş çözüm önerileri bulunmaktadır. Bu çözüm önerilerinde, $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı işlemlerin hangi özelliklerinin kullanıldığını belirleyiniz.

Örnek

Aşağıdaki eşitliğin doğru olduğunun gösterildiği çözüm önerilerinde, etkinliğin açıklamasında belirtilen işlemlerin özelliklerinden hangilerinin bulunduğunu inceleyiniz.

$$1 + 2 + 4 = 7$$

Çözüm Önerisi:

$$1 + 2 + 4 = \mathbf{1 + 2 + 4}$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2 + 4 = \mathbf{1} + (\mathbf{2} + \mathbf{4}) = \mathbf{1} + \mathbf{6} = \mathbf{6} + \mathbf{1}$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2 + 4 = (\mathbf{1} + \mathbf{2}) + \mathbf{4} = \mathbf{3} + \mathbf{4} = \mathbf{4} + \mathbf{3}$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2 + 4 = \mathbf{7}$$

olduğu görülür.

Örnek 2

$x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$8 + x = 8$$

$$y + 2 = x$$

denklemlerinin çözümlerini elde ediniz ve inceleyiniz,

$$(4 + 5) + \big(2 + (-2)\big) = 9$$

eşitliğinin doğru olduğunun gösterildiği çözüm önerisinde, etkinliğin açıklamasında belirtilen işlemlerin özelliklerinden hangilerinin bulunduğunu inceleyiniz.

Çözüm Önerisi:

$$(4 + 5) + \big(2 + (-2)\big) = (\mathbf{4} + \mathbf{5}) + \big(\mathbf{2} + (-\mathbf{2})\big)$$

$$\Leftrightarrow (4 + 5) + \big(2 + (-2)\big) = \mathbf{9} + \mathbf{0}$$

$$\Leftrightarrow (4 + 5) + \big(2 + (-2)\big) = \mathbf{9}$$

olduğu görülür.

Örnek 3

Aşağıdaki eşitliğin doğru olduğunun gösterildiği çözüm önerisinde, etkinliğin açıklamasında belirtilen işlemlerin özelliklerinden hangilerinin bulunduğunu inceleyiniz.

$$4 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

Çözüm Önerisi:

$$4 \cdot 3 \cdot 5 = \mathbf{4} \cdot \mathbf{3} \cdot \mathbf{5}$$

$$\Leftrightarrow 4 \cdot 3 \cdot 5 = (\mathbf{4} \cdot \mathbf{3}) \cdot \mathbf{5}$$

$$\Leftrightarrow 4 \cdot 3 \cdot 5 = \mathbf{12} \cdot \mathbf{5} = \mathbf{5} \cdot \mathbf{12}$$

$$\Leftrightarrow 4 \cdot 3 \cdot 5 = \mathbf{4} \cdot (\mathbf{3} \cdot \mathbf{5})$$

$$\Leftrightarrow 4 \cdot 3 \cdot 5 = \mathbf{4} \cdot \mathbf{15} = \mathbf{15} \cdot \mathbf{4}$$

$$\Leftrightarrow 4 \cdot 3 \cdot 5 = \mathbf{60}$$

olduğu görülür.

Örnek 4

$x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$7 \cdot x = 7$$

$$y \cdot 2 = x$$

denklemlerinin çözümlerini elde ediniz ve inceleyiniz,

$$5 \cdot (2 \cdot 2^{-1}) = 5$$

eşitliğinin doğru olduğunun gösterildiği çözüm önerisinde, etkinliğin açıklamasında belirtilen işlemlerin özelliklerinden hangilerinin bulunduğunu inceleyiniz.

Çözüm Önerisi:

$$5 \cdot (2 \cdot 2^{-1}) = \mathbf{5 \cdot (2 \cdot 2^{-1})}$$

$$\Leftrightarrow 5 \cdot (2 \cdot 2^{-1}) = \mathbf{5 \cdot 1}$$

$$\Leftrightarrow 5 \cdot (2 \cdot 2^{-1}) = \mathbf{5}$$

olduğu görülür.

Örnek 5

Aşağıdaki eşitliğin doğru olduğunun gösterildiği çözüm önerilerinde, etkinliğin açıklamasında belirtilen işlemlerin özelliklerinden hangilerinin bulunduğunu inceleyiniz.

$$5 \cdot (2 + 7) = 45$$

Çözüm Önerisi:

$$5 \cdot (2 + 7) = \mathbf{5 \cdot (2 + 7)}$$

$$\Leftrightarrow 5 \cdot (2 + 7) = \mathbf{(5 \cdot 2) + (5 \cdot 7)}$$

$$\Leftrightarrow 5 \cdot (2 + 7) = \mathbf{10 + 35 = 45}$$

olduğu görülür.

Çözüm Önerisi 2:

$$(2 + 7) \cdot 5 = \mathbf{(2 + 7) \cdot 5}$$

$$\Leftrightarrow (2 + 7) \cdot 5 = \mathbf{(2 \cdot 5) + (7 \cdot 5)}$$

$$\Leftrightarrow (2 + 7) \cdot 5 = \mathbf{10 + 35 = 45}$$

olduğu görülür.

ETKİNLİK 2

Her $a \in \mathbb{R}$ için

$$a \cdot 0 = 0$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm Önerisi:

ETKİNLİK 3

Her $a \in \mathbb{R}$ için

$$(-1) \cdot a = -a$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm Önerisi:

EK-B: Araştırma Etik Komisyonu Onay Bildirimi

Tarih: 20/12/2022 09:20
Sayı: E-35853172-300-00002577916
00002577916

T.C.
HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ REKTÖRLÜĞÜ
Rektörlük

Sayı : E-35853172-300-00002577916 20.12.2022
Konu : Oğuzhan GENÇASLAN Hk. (Etik Komisyon İzni)

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

İlgi : 16.11.2022 tarihli ve E-51944218-300-00002519670 sayılı yazınız.

Enstitünüz Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Eğitimi yüksek lisans programı öğrencisi **Oğuzhan GENÇASLAN**'ın, **Prof. Dr. Şenol DOST** danışmanlığında yürüttüğü **"Öğretmen Adaylarının Gerçel Sayıların Cebirsel Özelliklerinin Oluşturma Süreçlerinin İncelenmesi"** başlıklı tez çalışması, Üniversitemiz Senatosu Etik Komisyonunun **13 Aralık 2022** tarihinde yapmış olduğu toplantıda incelenmiş olup, etik açıdan uygun bulunmuştur.

Bilgilerinizi ve gereğini rica ederim.

Prof. Dr. Vural GÖKMEN
Rektör Yardımcısı

EK-C: Etik Beyanı

Hacettepe Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında,

* tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
* görsel, işitsel ve yazılı bütün bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
* başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
* atıfta bulunduğum eserlerin bütününü kaynak olarak gösterdiğimi,
* kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
* bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversitede veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

……/……/…….

Oğuzhan GENÇASLAN

EK-Ç: Yüksek Lisans Tez Çalışması Orijinallik Raporu

……/……./…..

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
Eğitim Bilimleri Enstitüsü
Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı Başkanlığına,

Tez Başlığı: Öğretmen Adaylarının Gerçel Sayıların Cebirsel Özelliklerini Oluşturma Süreçleri

Yukarıda başlığı verilen tez çalışmamın tamamı (kapak sayfası, özetler, ana bölümler, kaynakça) aşağıdaki filtreler kullanılarak **Turnitin** adlı intihal programı aracılığı ile kontrol edilmiştir. Kontrol sonucunda aşağıdaki veriler elde edilmiştir:

Rapor Tarihi	**Sayfa Sayısı**	**Karakter Sayısı**	**Savunma Tarihi**	**Benzerlik Oranı**	**Gönderim Numarası**
06/01/2024	146	188432	05/01/2024	%8	2242995597

Uygulanan filtreler:
1. Kaynaklar hariç
2. Alıntılar dâhil
3. 5 kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç

Hacettepe Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Tez Çalışması Orijinallik Raporu Alınması ve Kullanılması Uygulama Esaslarını inceledim ve çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan eder, gereğini saygılarımla arz ederim.

Ad Soyadı:	Oğuzhan GENÇASLAN	İmza
Öğrenci No.:	N21135075	
Ana Bilim Dalı:	Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi	
Programı:	Matematik Eğitimi	
Statüsü:	☒ Y.Lisans ☐ Doktora ☐ Bütünleşik Dr.	

DANIŞMAN ONAYI

UYGUNDUR.
(Prof. Dr. Şenol DOST)

EK-D: Thesis/Dissertation Originality Report

……/……./………

HACETTEPE UNIVERSITY
Graduate School of Educational Sciences
To The Department of Mathematics and Science Education

Thesis Title: Preservice Teachers' Processes of Construction of Algebraic Properties of Real Numbers

The whole thesis that includes the *title page, introduction, main chapters, conclusions and bibliography section* is checked by using **Turnitin** plagiarism detection software take into the consideration requested filtering options. According to the originality report obtained data are as below.

Time Submitted	Page Count	Character Count	Date of Thesis Defense	Similarity Index	Submission ID
06/01/2024	146	188432	05/01/2024	%8	2242995597

Filtering options applied:
1. Bibliography excluded
2. Quotes included
3. Match size up to 5 words excluded

I declare that I have carefully read Hacettepe University Graduate School of Educational Sciences Guidelines for Obtaining and Using Thesis Originality Reports; that according to the maximum similarity index values specified in the Guidelines, my thesis does not include any form of plagiarism; that in any future detection of possible infringement of the regulations I accept all legal responsibility; and that all the information I have provided is correct to the best of my knowledge.

I respectfully submit this for approval.

Name Lastname:	Oğuzhan GENÇASLAN	
Student No.:	N21135075	
Department:	Mathematics and Science Education	Signature
Program:	Mathematics Education	
Status:	☒ Masters ☐ Ph.D. ☐ Integrated Ph.D.	

ADVISOR APPROVAL

APPROVED
(Prof. Dr. Şenol DOST)

EK-E: Yayımlama ve Fikrî Mülkiyet Hakları Beyanı

Enstitü tarafından onaylanan lisansüstü tezimin/raporumun tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı (kâğıt) ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda verilen koşullarla kullanıma açma iznini Hacettepe Üniversitesine verdiğimi bildiririm. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet haklarım bende kalacak, tezimin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanım haklan bana ait olacaktır.

Tezin kendi orijinal çalışmam olduğunu, başkalarının haklarını ihlal etmediğimi ve tezimin tek yetkili sahibi olduğumu beyan ve taahhüt ederim. Tezimde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanılması zorunlu metinlerin yazılı izin alınarak kullandığımı ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederim.

Yükseköğretim Kurulu tarafından yayınlanan "**Lisansüstü Tezlerin Elektronik Ortamda Toplanması, Düzenlenmesi ve Erişime Açılmasına ilişkin Yönerge**" kapsamında tezim aşağıda belirtilen koşullar haricince YÖK Ulusal Tez Merkezi / H.Ü. Kütüphaneleri Açık Erişim Sisteminde erişime açılır.

- o Enstitü/Fakülte yönetim kurulu kararı ile tezimin erişime açılması mezuniyet tarihinden itibaren 2 yıl ertelenmiştir. (1)
- o Enstitü/Fakülte yönetim kurulunun gerekçeli kararı ile tezimin erişime açılması mezuniyet tarihimden itibaren ... ay ertelenmiştir. (2)
- o Tezimle ilgili gizlilik kararı verilmiştir. (3)

.... /......... /.........

Oğuzhan GENÇASLAN

"Lisansüstü Tezlerin Elektronik Ortamda Toplanması, Düzenlenmesi ve Erişime Açılmasına İlişkin Yönerge"

(1) *Madde 6. 1. Lisansüstü tezle ilgili patent başvurusu yapılması veya patent alma sürecinin devam etmesi durumunda, tez danışmanının önerisi ve enstitü anabilim dalının uygun görüşü Üzerine enstitü veya fakülte yönetim kurulu iki yıl süre ile tezin erişime açılmasının ertelenmesine karar verebilir.*

(2) *Madde 6.2. Yeni teknik, materyal ve metotların kullanıldığı, henüz makaleye dönüşmemiş veya patent gibi yöntemlerle korunmamış ve internetten paylaşılması durumunda 3.şahıslara veya kurumlara haksız kazanç; imkânı oluşturabilecek bilgi ve bulguları içeren tezler hakkında tez danışmanın önerisi ve enstitü anabilim dalının uygun görüşü üzerine enstitü veya fakülte yönetim kurulunun gerekçeli kararı ile altı ayı aşmamak üzere tezin erişime açılması engellenebilir.*

(3) *Madde 7. 1. Ulusal çıkarları veya güvenliği ilgilendiren, emniyet, istihbarat, savunma ve güvenlik, sağlık vb. konulara ilişkin lisansüstü tezlerle ilgili gizlilik kararı, tezin yapıldığı kurum tarafından verilir*. Kurum ve kuruluşlarla yapılan işbirliği protokolü çerçevesinde hazırlanan lisansüstü tezlere ilişkin gizlilik kararı ise, ilgili kurum ve kuruluşun önerisi ile enstitü veya fakültenin uygun görüşü Üzerine üniversite yönetim kurulu tarafından verilir. Gizlilik kararı verilen tezler Yükseköğretim Kuruluna bildirilir.*

Madde 7.2. Gizlilik kararı verilen tezler gizlilik süresince enstitü veya fakülte tarafından gizlilik kuralları çerçevesinde muhafaza edilir, gizlilik kararının kaldırılması halinde Tez Otomasyon Sistemine yüklenir

**Tez danışmanının önerisi ve enstitü anabilim dalının uygun görüşü üzerine enstitü veya fakülte yönetim kurulu tarafından karar verilir.*