RİESZ UZAYLARINDA NETLERİN YAKINSAKLIKLARI ÜZERİNE

ON CONVERGENCE OF NETS IN RIESZ SPACE

EZGİ HAN ERYÜKSEL

Doç. Dr. NAZİFE ERKURŞUN ÖZCAN

Tez Danışmanı

Hacettepe Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim – Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin
Matematik Anabilim Dalı İçin Öngördüğü
YÜKSEK LİSANS TEZİ
olarak hazırlanmıştır.

2023

ÖZET

RIESZ UZAYLARINDA NETLERİN YAKINSAKLIKLARI ÜZERİNE

EZGİ HAN ERYÜKSEL
Yüksek Lisans, Matematik Bölümü
Tez Danışmanı: Doç. Dr. NAZİFE ERKURŞUN ÖZCAN
Haziran, 130 sayfa

Banach latisleri sıra, relatif düzgün, sınırsız sıra, sınırsız norm ve sınırsız mutlak yakınsaklık gibi birçok farklı yakınsaklık yapılarıyla donatılabilir. Bu yakınsaklıkların bir kısmı topolojik iken bir kısmı topolojik olmasa da sadece sıra yapısını koruyan yakınsaklıklardır. Sınırsız sıra yakınsaklık ilk olarak "bireysel yakınsama" adı altında De Marr tarafından tanımlandıktan sonra Nakano tarafından "uo-yakınsama" adı altında incelenmiştir. Son zamanlarda birçok araştırmacı farklı tipteki sınırsız yakınsamaların özellikleri ile ilgilenmiştir. Sınırsız norm yakınsaklık ise ilk olarak Troitsky tarafından tanıtılmış ve incelenmiştir. Son olarak Zabeti uaw-yakınsaklığı tanımlamış ve üzerinde çalışmıştır. Bu tezde tüm bu yakınsaklık çeşitleri ile ilgilenilmiştir, aralarındaki ilişkiler araştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: yakınsaklık, Riesz uzayları, Banach latis, sıra yakınsaklık, sınırsız sıra yakınsaklık, sınırsız norm yakınsaklık, sınırsız mutlak zayıf yakınsaklık

ABSTRACT

ON CONVERGENCE OF NETS IN RIESZ SPACE

EZGİ HAN ERYÜKSEL
Master of Science, Department of Mathematics
Supervisor: Doç. Dr. NAZİFE ERKURŞUN ÖZCAN
June 2023, 130 pages

Banach lattices can be equipped with many convergence structures such as order, relative regular, unbounded order, unbounded norm convergence, and absolutely unbounded weak convergence. While some of these convergences are topological, some of them are not. However they are convergences that only preserve the order structure. Unbounded order convergence was firstly defined by De Marr under the name of "individual convergence" and then examined under the name of "uo-convergence" by Nakano. Recently, many researchers have focused on the properties of different types of unbounded convergence. Unbounded norm convergence was firstly introduced and studied by Troitsky. Finally, Zabeti uaw-convergence defined and worked on. In this thesis, all these types of convergence is studied and the relationships between them are investigated.

Key Words: convergence, Riesz space, Banach lattice, order convergence, unbounded order convergence, unbounded norm convergence, unbounded absolutely weak convergence

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca her zaman her koşulda yanımda olan, destek ve emeklerini asla esirgemeyen, daima bana yol gösteren, öğrencisi olmaktan her zaman gurur duyacağım değerli tez danışmanım Doç. Dr. Nazife Erkurşun Özcan'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Lisans ve yüksek lisans eğitimim boyunca bilgileriyle ışık tutan, bana üniversite hayatım boyunca kazandırdıkları her şey için Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümündeki tüm hocalarıma teşekkür ederim.

Araştırma görevliliği kadrom için Ankara Medipol Üniversitesi Bilgisayar Mühendisliği Bölümündeki tüm hocalarıma teşekkür ederim.

Hayatım boyunca beni destekleyen, haklarını asla ödeyemeceğim anneme ve babama teşekkür ederim. Bu süreçte bana destek olan, yanımda olan tüm arkadaşlarıma teşekkür ederim.

İÇINDEKILER

1 GİRİŞ

Riesz uzayları üzerine ilk çalışma, 1928 yılında lineer fonksiyonların ayrışımı konusunda Riesz tarafından yazılan makalesi olarak kabul edilir. Riesz uzaylarının belli başlı özellikleri 1930 yıllarında Kantorovich ve Freudental tarafından ayrı ayrı çalışmalar ile gösterilmiştir. Bu çalışmalardan sonra bu alana olan ilgi artmış ve Nakano, Ogasawara, Yosida, Vulikh gibi matematikçilerde alandaki gelişmelere katkı sağlamışlardır.

Bu gelişmelerden önemli bir tanesi ise Riesz uzaylarında bulunan netlerin yakınsama durumlarıdır. Bu tez içerisinde Riesz uzaylarında üzerinde tanımlanan tüm yakınsaklık kavramları çalışılmıştır. Bu yakınsaklıklar: sıra yakınsaklık, göreceli düzgün yakınsaklık, sınırsız sıra yakınsaklık, sınırsız norm yakınsaklık ve sınırsız mutlak zayıf yakınsaklıktır.

Bu tez içerisinde sınırsız yakınsaklık kavramının bazı özellikleri üzerinde durulmuştur. Mevcut literatürde norm yakınsaklık ve sıra yakınsaklık gibi bazı yakınsaklıklar yaygın olarak kullanıldığından bu tez içerisinde bu yakınsaklıkların genel teorileri ve örnekleri üzerinde çalışılmıştır. Bir çok matematikçi tarafından norm ve diğer yakınsaklık türleri arasındaki ilişkiler araştırılmıştır.

E bir Riesz uzay olmak üzere $(x_\alpha) \subset E$ bir net ve $x \in E$ olsun. Eğer $|x_\alpha - x| \leq y_\beta$ olacak şekilde $y_\beta \downarrow 0$ neti var ise (x_α) neti x elemanına sıra yakınsaktır (o-yakınsak) denir ve $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ şeklinde gösterilir. Yine E Riesz uzayında (x_α) bir net ve $x \in E$ olmak üzere her $y \in E^+$ için $|x_\alpha - x| \wedge y \xrightarrow{o} 0$ ise (x_α) netine sınırsız sıra yakınsaktır (uo-yakınsak) denir ve $x_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ olarak yazılır. 1948 yılında Nakano tarafından ilk defa sınırsız sıra yakınsaklık "bireysel yakınsaklık" olarak tanımlanmıştır. 1964 yılında ise DeMarr [10] makalesinde "bireysel yakınsaklık" tanımını sıralı vektör uzaylarında "sınırsız sıra yakınsaklık" olarak değiştirmiştir.

1977 yılında Wickstead [33] makalesinde sınırsız sıra yakınsaklık ile zayıf yakınsaklık arasındaki ilişkiyi incelemiştir. Ayrıca Wickstead bir net zayıf yakınsak ise sınırsız sıra yakınsak olduğunu bulmuştur ve bunun tersinin de geçerli olduğu çeşitli Banach latislerinin durumlarını göstermiştir. 1997 yılında Kaplan ise "On unbounded order convergence" adlı makalesinde sınırsız sıra yakınsaklığın bazı karakterizasyonlarını vermiştir, [21]. Örneğin Kaplan bu makalesinde zayıf birime sahip bir Dedekind tam Riesz uzaylarında sınırsız sıra yakınsaklığın iki sonucunu vermiştir. Ayrıca bu makalesinde sınırsız sıra yakınsak dizilerin sıra sınırlılığı üzerine önemli bir teorem olan Nakano teoremini ispatlamıştır.

Son zamanlarda ise Gao ve Xanthos Banach latislerinde sınırsız sıra Cauchy netleri üzerine araştırmalar yapmışlardır, [18]. Banach latislerinde Pozitif Schur özelliği ve KB-uzayları kavramlarını kullanarak sınırsız sıra Cauchy netlerinin bazı özellikleri üzerine çalışmışlardır. Bu çalışmada Gao ve Xanthos sıra sürekli bir Banach latisin Pozitif Schur özelliğini sahip olması için gerek ve yeter koşul Dunford-Pettis teoreminin bir versiyonu olması gerektiğini göstermişlerdir.

2014 yılına gelince Gao "Unbounded order convergence in dual space" adlı makalesinde bir Banach latisinin dual uzayında sınırsız sıra yakınsaklık kavramı üzerine çalışmalar yapmıştır, [15]. Bu makalesinde Gao dual uzaylarda bir net sınırsız sıra yakınsak ise $w*$-yakınsak olduğunu bulmuştur ve Banach latislerinde bu gerektirmenin tersininde bazı koşullar altında geçerli olduğu çeşitli durumları vermiştir.

2017 yılında Gao, Troitsky ve Xanthos "Uo-convergence and its applications to Cesàro means in Banach lattices" isimli makalede sınırsız sıra yakınsaklığın bir çok farklı yönlerini ve sonuçlarını verdiler, [17]. Örneğin bu makalede sınırsız sıra yakınsaklığı kullanarak bir Banach latisinde bir dizinin Cesàro ortalamasının yakınsaklığı hakkında sonuçlar elde etmişlerdir.

Bir Riesz uzayının Dedekind tam olması için gerek ve yeter koşul her sıra Cauchy netinin sıra yakınsak olmasıdır. Bu durumu kullanarak 2017 yılında Li ve Chen [24] makalesinde Dedekind tamlığa ek bir koşul ile birlikte bir Riesz uzayının universal tam olması için gerek ve yeter koşul her sınırsız sıra Cauchy netinin uo-yakınsak olması gerektiğini göstermişlerdir. 2019 yılında ise Y.Azouzi [6] makalesinde universal tamlık durumunda verilen bu sonucun ek varsayıma ihtiyaç olmadan yeniden tanımlayıp, ispat etmiştir.

E Banach latis olmak üzere $(x_\alpha) \subset E$ bir net ve $x \in E$ olsun. Her $y \in E^+$ için $|x_\alpha - x| \wedge y \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ ise (x_α) netine sınırsız norm yakınsaktır (un-yakınsak) denir ve $x_\alpha \xrightarrow{un} 0$ olarak ifade edilir. 2004 yılında bu yakınsaklık "d-yakınsaklık" olarak Troitsky tarafından tanıtıldı. 2016 yılına gelindiğinde ise d-yakınsaklık adı Deng, O'Brien ve Troitsky tarafından [11] makalesinde sınırsız norm yakınsaklık olarak değiştirilmiştir. Bu makalede sınırsız norm yakınsaklığın sınırsız sıra yakınsaklık ve zayıf yakınsaklık gibi diğer yakınsaklık türleri ile arasındaki ilişkiler çalışılıp, bazı sonuçlar verilmiştir. Ayrıca sınırsız norm yakınsaklığın topolojik olduğunu gösterilmiştir.

E Riesz uzay olmak üzere $(x_\alpha) \subset E$ bir net ve $x \in E$ olsun. Her $y \in E^+$ için $|x_\alpha - x| \wedge y \xrightarrow{w} 0$ ise (x_α) netine sınırsız mutlak zayıf yakınsaktır (uaw-yakınsak) denir ve $x_\alpha \xrightarrow{uaw} 0$ olarak gösterilir. 2017 yılında O. Zabeti tarafından [38] makalesinde sınırsız mutlak zayıf yakınsaklık tanımı verilmiştir. O. Zabeti bu makalesinde sınırsız mutlak zayıf yakınsaklık ile diğer yakınsaklıklar arasında çeşitli ilişkiler üzerinde çalışmıştır. Son zamanlarda ise A.Elbour "Some properties on the unbounded absolute weak convergence in Banach lattices" adlı makalesinde sınırsız mutlak zayıf yakınsaklığın çeşitli özelliklerini göstermiştir, [12].

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Bu çalışmanın birinci bölümünde, kullanacağımız gerekli tanımlar ve teoremlere yer verilmiştir. Burada Riesz uzaylarının temel özellikleri, ideal, band ve Riesz alt uzay kavramları, Banach latis tanımı ve özelliklerini anlatılmıştır.

İkinci bölümde ise sıra yakınsaklık kavramı, göreceli düzgün yakınsaklık kavramı çalışılmıştır. Sıra yakınsaklığın temel özellikleri incelendikten sonra bu yakınsaklığın alt uzayda ve üst uzayda nasıl davrandıkları ve hangi koşullarda aynı yakınsaklığa sahip oldukları, norm yakınsaklığı ile arasındaki ilişkisi ve ölçü uzayında bulunan yakınsaklıklar arasındaki ilişkileri çalışılmıştır. Bunlara ek olarak sıra yakınsaklığın topolojik olmadığı gösterilmiştir. Göreceli düzgün yakınsaklığın temel özellikleri incelendikten sonra bu yakınsaklığın sıra yakınsaklık, norm yakınsaklık, ölçü uzayında bulunan diğer yakınsaklıklar arasındaki ilişkileri ele alınmıştır.

Üçüncü bölümde sınırsız sıra yakınsaklık kavramı anlatılmıştır. Sınırsız sıra yakınsaklığın temel özellikleri incelendikten sonra bu yakınsaklığın alt uzayda ve üst uzayda nasıl davrandıkları ve hangi koşullar altında aynı yakınsaklığa sahip oldukları, sıra yakınsaklık ve ölçü uzayında bulunan yakınsaklık çeşitleri ile arasındaki ilişkiler çalışılmıştır. Daha sonra sınırsız sıra yakınsaklık ile Nakano sonuçları çalışılıp Nakano teoremi verilmiştir. Ayrıca universal tamlık tanımı verilip Cesàro ortalaması ile sınırsız sıra yakınsaklık arasındaki ilişki incelenmiştir. Uo-yakınsaklığın AL-Temsil tanımı verilip özellikleri çalışılmıştır. Bunlara ek olarak sınırsız sıra yakınsaklığın hangi koşullar altında norm yakınsaklığı ve zayıf yakınsaklığı gerektirdiği, uo-Cauchy kavramının genel özellikleri, hangi koşullar altında uo-Cauchy netinin veya dizisinin uo-yakınsak olduğu gösterilip, sınırsız sıra yakınsaklık ile $w*$-yakınsaklık arasındaki ilişkiler verilmiştir. Son olarak sınırsız sıra yakınsaklığın topolojik olmadığı gösterilmiştir.

Dördüncü bölümde sınırsız norm yakınsaklık kavramı üzerinde durulmuştur. Sınırsız norm yakınsaklığın temel özellikleri çalışıldıktan sonra ilk olarak norm yakınsaklık ile ayrık alt dizileri arasındaki ilişkiler ile ilgilenilmiştir. Daha sonra sınırsız norm yakınsaklık ve ölçüde bulunan yakınsaklıklar arasındaki ilişkiler incelenip, AL-Temsil tanımı verilmiştir. Bunlara ek olarak sınırsız norm yakınsaklık ile zayıf yakınsaklığın hangi koşullar altında birbirlerini gerektirdiği çalışılmıştır. Son olarak sınırsız norm yakınsaklığın topolojik olduğu gösterilmiştir.

Son bölümde ise sınırsız mutlak zayıf yakınsaklık kavramı ele alınmıştır. Sınırsız mutlak zayıf yakınsaklığın temel özellikleri çalışıldıktan sonra ilk olarak sınırsız mutlak zayıf yakınsaklık ile mutlak zayıf yakınsaklık arasındaki ilişki çalışılmıştır. Daha sonra bazı koşullar altında sınırsız mutlak zayıf yakınsaklığın zayıf yakınsaklığı ve w^*-yakınsaklığı gerektirdiği ve hangi koşullar altında uaw-Cauchy, un-Cauchy ve uo-Cauchy netlerinin zayıf yakınsak olduğu gösterilmiştir. Bunlara ek olarak zayıf dizisel sürekli operasyon tanımı verilip, bu tanım ile birlikte zayıf yakınsaklığın uaw-yakınsaklığı gerektirdiği ve hangi koşullar altında zayıf yakınsaklık, sınırsız norm yakınsaklık, sınırsız mutlak zayıf yakınsaklıklığın birbirlerine denk olduğu verilmiştir.

2 TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Bu bölümde tez boyunca kullanılacak olan temel tanım ve kavramlar verilecektir. Detaylı bilgi için herhangi bir klasik fonksiyonel analiz veya Banach latisleri kitabına bakılabilir. Örneğin; [4, 5, 25, 14, 26, 29, 36] kaynakları incelenebilir.

2.1 Riesz Uzaylarının Temel Özellikleri

Tanım 2.1.1. E boştan farklı herhangi bir küme ve bu küme üzerinde tanımlanan "$\leq$" işlemi her $x, y, z \in E$ için

(i) $x \leq x$ (yansıma özelliği)

(ii) $x \leq y$ ve $y \leq x \Rightarrow x = y$ (ters simetrik özelliği)

(iii) $x \leq y$ ve $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (geçişkenlik özelliği)

koşullarını sağlıyorsa E kümesine *kısmi sıralı küme* denir.

Tanım 2.1.2. E kısmi sıralı kümesi bir vektör uzayı olsun. E kısmi sıralı vektör uzayı her $x, y, z \in E$ ve $0 \leq \lambda \in \mathbb{R}$ için

(i) $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$

(ii) $x \leq y \Rightarrow \lambda x \leq \lambda y$

koşulları sağlanıyorsa E uzayına *sıralı vektör uzayı* denir.

Tanım 2.1.3. E kısmi sıralı bir küme olmak üzere her $x, y \in E$ için $x \vee y = \sup\{x, y\}$ ve $x \wedge y = \inf\{x, y\}$ var ve E'nin elemanı ise E kümesine *latis* denir.

Tanım 2.1.4. E sıralı vektör uzayı aynı zamanda bir latis ise E uzayına *Riesz uzay* veya *vektör latis* denir.

Tanım 2.1.5. E bir Riesz uzay ve $x, y \in E$ olsun. Her $n \in N$ için $nx \leq y$ iken $x \leq 0$ oluyor ise E Riesz uzayı Arşimettir denir.

Tanım 2.1.6. E vektör latisindeki $x \geq 0$ özelliğini sağlayan $x \in E$ elemanına pozitif eleman denir. $E^+ = \{x \in E : x \geq 0\}$ şeklinde tanımlanan kümeye E'nin pozitif konisi adı verilir ve pozitif koni aşağıdaki özellikleri sağlar.

(i) $E^+ + E^+ \subseteq E^+$ öyle ki $E^+ + E^+ = \{x + y : x, y \in E^+\}$ olur.

(ii) Her $0 \leq \lambda \in \mathbb{R}$ için $\lambda E^+ \subseteq E^+$ sağlanır öyle ki $\lambda E^+ = \{\lambda x : x \in E^+\}$ kümesidir.

(iii) $E^+ \cap (-E^+) = \{0\}$ öyle ki $-E^+ = \{-x : x \in E^+\}$ kümesidir.

E vektör uzayının herhangi bir F alt uzayı yukarıdaki üç koşulu sağlıyor ise F, E'nin konisidir denir.

Tanım 2.1.7. E sıralı vektör uzayı ve $A \subseteq E$ boştan farklı bir alt kümesi olsun. Eğer her $a \in A$ için $x \geq a$ olacak şekilde bir $x \in E$ bulunabiliyor ise A kümesine üstten sınırlıdır denir. A kümesinin üst sınırları var ise bu üst sınırlarının en küçüğüne A'nın en küçük üst sınırı (supremumu) adı verilir. Benzer şekilde her $a \in A$ için $y \leq a$ olacak şekilde bir tane $y \in E$ bulunabiliyorsa A kümesine alttan sınırlıdır denir. A kümesinin alt sınırları varsa ve bu alt sınırlarının en büyüğüne A'nın en büyük alt sınırı (infimumu) adı verilir.

Lemma 2.1.8. *Sıralı vektör uzayı E'nin Riesz uzay olması için gerek ve yeter koşul her $x, y \in E$ ikilisi için $x \wedge y \in E$ olmasıdır. Dahası eğer x ve y Riesz uzayının elemanları ise*

$$x \vee y = -[(-x) \wedge (-y)] \text{ ve } x \wedge y = -[(-x) \vee (-y)] \text{ olur.}$$

Kanıt. E sıralı vektör uzayının herhangi $x, y \in E$ elemanı için $x \wedge y$ var ve $x \wedge y \in E$ olsun. $z = (-x) \wedge (-y)$ alalım. Biz burada $x \vee y = -z$ olduğunu kanıtlamak istiyoruz. Öncelikle z'nin infimum olmasından dolayı $z \leq -x$ ve $z \leq -y$ ya da $x \leq -z$ ve $y \leq -z$ olduğunu biliyoruz. O halde $-z$, $\{x, y\}$ kümesi için bir üst sınırdır. O halde $-z$ bu küme için üst sınırların en küçüğü olduğunu gösterelim. Varsayalım ki $x \leq t$ ve $y \leq t$ olacak şekilde bir t vektörü olsun. Bu durumda $-t \leq -x$ ve $-t \leq -y$ olur. O halde $-t \leq (-x) \wedge (-y) = z$ sağlanır ve $t \geq -z$ olur. Burada $x \vee v = -z$ sağlanır. Diğer yönü de benzer şekilde gösterilir. □

Tanım 2.1.9. E Riesz uzayındaki herhangi bir x elemanının pozitif kısmı $x^+ = x \vee 0$, negatif kısmı $x^- = (-x) \vee 0$ ve mutlak değeri $|x| = x \vee (-x)$ şeklinde gösterilir.

Teorem 2.1.10. *(Latis Özellikleri) x, y ve z Riesz uzayının elemanları olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır.*

(*i*) $x + (y \vee z) = (x + y) \vee (x + z)$ *ve* $x + (y \wedge z) = (x + y) \wedge (x + z)$

(*ii*) $x - (y \wedge z) = (x - y) \vee (x - z)$ *ve* $x - (y \vee z) = (x - y) \wedge (x - z)$

(*iii*) $x \vee y = (x - y)^+ + y = (y - x)^+ + x$

(*iv*) $\lambda \geq 0$ *için* $\lambda(x \vee y) = (\lambda x) \vee (\lambda y)$ *ve* $\lambda(x \wedge y) = (\lambda x) \wedge (\lambda y)$

(*v*) *Her* $\lambda \in \mathbb{R}$ *için* $|\lambda x| = |\lambda||x|$

(*vi*) $x \vee y = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$ *ve* $x \wedge y = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$

(*vii*) $x + y = (x \vee y) + (x \wedge y)$

(*viii*) $x = x^+ - x^-$ *ve* $x^+ \wedge x^- = 0$

(*ix*) $|x| = x^+ + x^-$ *(buradan* $|x| = 0 \leftrightarrow x = 0$*)*

(*x*) $|x - y| = (x \vee y) - (x \wedge y)$

(*xi*) $|x + y| \vee |x - y| = |x| + |y|$

(*xii*) $|x| \vee |y| = \frac{1}{2}(|x + y| + |x - y|)$ *ve* $|x| \wedge |y| = \frac{1}{2}||x + y| - |x - y||$

Kanıt. (*i*) Sıralı vektör uzayındaki iki y ve z elemanının supremumu $y \vee z$ var ise her x elemanı için $\{x + y, x + z\}$ kümesinin de supremumu vardır ve

$$x + y \vee z = (x + y) \vee (x + z)$$

olur. Öncelikle sabit bir x için $t = y \vee z$ olsun. $x + y \leq x + t$ ve $x + z \leq x + t$ olduğu açıkça görülür. Varsayalım ki $x + y \leq s$ ve $x + z \leq s$ olsun. O halde

$$y \leq s - x \text{ ve } z \leq s - x$$

şeklinde yazılabilir ve böylece $t = y \vee z \leq s$ veya $x + t \leq s$ olur. Buradan da açıktır ki $x + t$, $\{x + y, x + z\}$ kümesinin supremumudur. İkinci kısımda benzer şekilde gösterilebilir.

(*ii*) Lemma 2.1.8 yardımıyla bir önceki adımlar izlenir.

(*iii*) $(x-y)^+ + y = (x-y) \vee 0 + y = [(x-y)+y] \vee (0+y) = x+y$ şeklinde gösterilir. İkinci kısımda benzer şekilde ifade edilir.

(*iv*) $\lambda \geq 0$ alalım. $x \leq x \vee y$ ve $y \leq x \vee y$ olduğundan

$$\lambda x \leq \lambda(x \vee y) \text{ ve } \lambda y \leq \lambda(x \vee y)$$

yazılabilir. $x \vee y = z$ şeklinde ifade edelim. Buradan $x \leq \frac{1}{\lambda}z$ ve $y \leq \frac{1}{\lambda}z$ ve $x \vee y \leq \frac{1}{\lambda}z$ olur. Sonuç olarak $\lambda(x \vee y) \leq z$ olup buradan

$$(\lambda x) \vee (\lambda y) = \lambda(x \vee y)$$

olduğu görülür. Diğer kısımda benzer şekilde gösterilir.

(*v*) Eğer $\lambda \geq 0$ ise

$$|\lambda x| = (\lambda x) \vee (-\lambda x) = \lambda\,[x \vee y(-x)] = |\lambda||x|$$

olur. Eğer $\lambda < 0$ ise

$$|\lambda x| = (\lambda x) \vee (-\lambda x) = [(-\lambda)(-x)] \vee (-\lambda x) = (-\lambda)\,[(-x) \vee (x)] = |\lambda||x|$$

olur.

(*vi*) Birinci kısım için;

$$\frac{1}{2}(x + y + |x-y|) = \frac{1}{2}\,[x + y + (x-y) \vee (x-y)] = \frac{1}{2}\,[(2x) \vee (2y)] = x \vee y$$

olur.

(*vii*)

$$\begin{aligned}
&(x \wedge y) \leq y \Rightarrow y - (x \wedge y) \geq 0\\
&x + y - (x \wedge y) \geq x\\
&x + y - (x \wedge y) \geq y\\
&\Rightarrow x + y - (x \wedge y) \geq (x \vee y)\\
&(x \vee y) + (x \wedge y) \leq (x + y) \qquad (2.1.1)
\end{aligned}$$

Diğer yandan

$$\begin{aligned}
&u \leq (x \vee y) \Rightarrow x + y - (x \vee y) \leq y\\
&v \leq (x \vee y) \Rightarrow x + y - (x \vee y) \leq x\\
&\Rightarrow x + y - (x \vee y) \leq (x \wedge y)\\
&(x + y) \leq (x \wedge y) + (x \vee y) \qquad (2.1.2)
\end{aligned}$$

olup (2.1.1) ve (2.1.2)'den istenilen sonuç elde edilir.

$(viii)$ (vii)'den $y=0$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned} x &= (x \vee 0) + (x \wedge 0) \\ &= (x \vee 0) - ((-x) \vee 0) \\ &= x^+ - x^- \end{aligned}$$

olarak bulunur. İkinci kısmı için ise

$$\begin{aligned} x^+ \wedge x^- &= (x^+ - x^-) \wedge 0 + x^- \\ &= x \wedge 0 + x^- \\ &= -\left[(-x) \vee 0\right] + x^- \\ &= -x^- + x^- = 0 \end{aligned}$$

(ix)

$$\begin{aligned} |x| &= x \vee (-x) \\ &= (2x) \vee 0 - u \\ &= 2x^+ - (u^+ - u^-) \\ &= u^+ + u^- \end{aligned}$$

(x) Mutlak değer tanımı, (i) ve (vii) özellikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} |u - v| &= (x - y) \vee (y - x) \\ &= (2x) \vee (2v) - (x + y) \\ &= 2(x + y) - (x \vee y + x \wedge y) \\ &= (x \vee y) - (x \wedge y) \end{aligned}$$

(xi)

$$\begin{aligned} |x+y| \vee |x-y| &= [(x+y) \vee (-x-y)] \vee [(x-y) \vee (y-x)] \\ &= [(x+y) \vee (x-y)] \vee [(-x-y) \vee (y-x)] \\ &= [x + (y \vee (-y))] \vee [-x + ((-y) \vee y)] \\ &= [x + |y|] \vee [-x + |y|] \\ &= [x \vee (-x)] + |y| \\ &= |x| + |y| \end{aligned}$$

(xii)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left[|x+y| + |x-y|\right] &= \frac{1}{2}\left[(x+y) \vee (-x-y) + |x-y|\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[(x+y+|x-y|) \vee (-x-y+|x-y|)\right] \\ &= \frac{1}{2}([2(x \vee y)] \vee [2\{(-x) \vee (-y)\}]) \\ &= x \vee y \vee (-x) \vee (-y) \\ &= [x \vee (-x)] \vee [x \vee (-y)] \\ &= |x| \vee |y| \end{aligned}$$

□

Lemma 2.1.11. *E Riesz uzayının boştan farklı her A alt kümesi supremuma (ya da infumuma) sahip ise her $x \in E$ için $x + A$ kümesi de supremum (ya da infimum) değerine sahiptir ve aşağıdaki latis özelliklerini sağlar.*

$$x + \sup A = \sup(x + A) \quad \textit{ve} \quad x + \inf A = \inf(x + A)$$

Benzer şekilde

$$x - \sup A = \inf(x - A) \quad \textit{ve} \quad x - \inf A = \sup(x - A)$$

$$\lambda \geq 0 \textit{ için } \lambda \sup A = \sup(\lambda A) \quad \textit{ve} \quad \lambda \inf A = \inf(\lambda A)$$

özellikleri sağlanır.

Riesz uzayı dağılma kuralını sağlayan latis olarak düşünülebilir. Aslında sonsuz dağılma kuralını sağlıyor diyebiliriz ve bir sonraki lemmada bu durumu göstereceğiz.

Lemma 2.1.12. *(Sonsuz Dağılım Kuralı) E Riesz uzayının boştan farklı alt kümesi A supremum değere* $(\sup A)$ *sahip ise her $x \in E$ için* $\sup\{x \wedge a : a \in A\}$ *vardır ve*

$$x \wedge \sup A = \sup\{x \wedge a\}$$

sağlanır. Benzer şekilde E Riesz uzayının boştan farklı A alt kümesinin infimum değeri $(\inf A)$ *var ise her $x \in E$ için* $\inf\{x \vee a : a \in A\}$ *vardır ve*

$$x \vee \inf A = \inf\{x \wedge a : a \in A\}$$

sağlanır. Özel olarak eğer $x, x_1, x_2, \cdots, x_n$ Riesz uzayının elemanları ise

$$x \wedge \left[\bigvee_{i=1}^{n}\right] = \bigvee_{i=1}^{n}(x \vee x_i)$$

ve

$$x \vee \left[\bigwedge_{i=1}^{n}\right] = \bigwedge_{i=1}^{n}(x \vee x_i)$$

sağlanır.

Kanıt. İlk formülü kanıtlamak yeterli olacaktır. Sabit $x \in A$ için $s = \sup A$ olsun. Her $a \in A$ için $x \wedge a \leq x \wedge s$ olduğu açıktır. Varsayalım ki her $a \in A$ için $\{x \wedge a : a \in A\}$ kümesinin $x \wedge a \leq t$ olacak şekilde $t \in E$ üst sınırı olsun. Latis özelliklerinden her $a \in A$ için

$$(x + a) - (x \vee a) = x \wedge a \leq t$$

sağlanır. Buradan her $a \in A$ için

$$a \leq t + (x \vee a) - x \leq t + (x \vee s) - x$$

olur. Böylece $s \leq t + (x \vee s) - x$ sağlanır. Sonuç olarak $x \wedge s = (x + s) - (x \vee s) \leq t$ elde edilir. Buradan $x \wedge s = \sup\{x \wedge a : a \in A\}$ olur.

□

Dağılma kuralının bir sonucu olarak Riesz uzayının çok bilinen Birkhoff Özelliği karşımıza çıkar.

Sonuç 2.1.13. *(Birkhoff Özelliği) Eğer x, y ve z Riesz uzayında keyfi elemanlar ise*

$$|(x \vee z) - (y \vee z)| + |(x \wedge z) - (y \wedge z)| = |x - y|$$

Kanıt. Teorem 2.1.10'de bulunan (x). ve (vii). latis özelliklerini dağılım kuralı ile birlikte kullanırsak

$$\begin{aligned}
|x \vee z - y \vee z| + |x \wedge z - y \wedge z| = |x - y| \\
&= [(x \vee z) \vee (y \vee z) - (x \vee z) \wedge (y \vee z)] \\
&+ \cdots + [(x \vee z) \vee (y \wedge z) - (x \wedge z) \wedge (y \wedge z)] \\
&= [z \vee (x \vee y) - z \vee (x \wedge y)] + [z \vee (x \vee y) - z \wedge (x \wedge y)] \\
&= [z \vee (x \vee y) + z \wedge (x \vee y)] - [z \vee (x \wedge y) + z \wedge (x \wedge y)] \\
&= [z + x \vee y] - [z + x \wedge y] = x \vee y - x \wedge y = |x - y|
\end{aligned}$$

□

Şimdi Riesz uzayında bazı önemli latis eşitsizliklerini kanıtlayacağız.

Teorem 2.1.14. *(Latis Eşitsizlikleri) Aşağıda verilen latis eşitsizlikleri Riesz uzayında sağlanır.*

(i) *x ve y Riesz uzayında iki eleman ve $x \leq y$ koşulunu sağlıyor ise $x^+ \leq y^+$ ve $x^- \leq y^-$ sağlanır.*

(ii) (Üçgen Eşitsizliği) *x ve y Riesz uzayında iki eleman olsun. Bu durumda*

$$||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$$

sağlanır.

(iii) (Birkhoff Eşitsizliği) *x, y ve z Riesz uzayında elemanlar olsun. Bu durumda*

$$|(x \vee z) - (y \vee z)| \leq |x - y| \text{ ve } |(x \wedge z) - (y \wedge z)| \leq |x - y|$$

sağlanır.

(iv) *Eğer $x, x_1, x_2, \cdots, x_n$ Riesz uzayında pozitif elemanlar ise*

$$x \wedge (x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n) \leq (x \wedge x_1) + (x \wedge x_2) + (x \wedge x_3) + \cdots + (x \wedge x_n)$$

Eğer her $i \neq j$ için $x \wedge x_i \wedge x_j = 0$ ise eşitlik durumu sağlanır.

(v) *Eğer $x, x_1, x_2, \cdots, x_n$ Riesz uzayında pozitif elemanlar ise*

$$n(x_1^+ \wedge \cdots \wedge x_n^+) = n(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n)^+ \leq (x_1 + \cdots + x_n)^+$$

sağlanır.

Kanıt. (i) $x \leq y$ olduğundan $x \leq y \leq y \vee 0 = y^+$ ve $0 \leq y^+$ olur. Buradan $x^+ = x \vee 0 \leq y^+$ yazılır. Diğer eşitsizlik için de $-y \leq -x$ olarak alınıp benzer adımlar uygulanabilir.

(ii) $x + y \leq |x| + |y|$ ve $-(x + y) = -x - y \leq |x| + |y|$ olduğu açıktır. Buradan

$$|x + y| = (x + y) \vee [-(x + y)] \leq |x| + |y|$$

elde edilir. Diğer eşitsizlik için ise

$$|x| = |(x + y) - y| \leq |x + y| + |y|$$

ve böylece

$$|x| - |y| \leq |x + y|$$

olur. Benzer şekilde

$$-(|x| - |y|) = |y| - |x| \leq |x + y|$$

olup sonuç olarak $||x| - |y|| = (|x| - |y|) \vee (|y| - |x|)| \leq |x + y|$ elde edilir.

(iii) Sonuç 2.1.13'de bulunan Birkhoff Eşitsizliği ispatındaki adımlar uygulanır.

(iv) x, x_1 *ve* x_2 pozitif elemanlar olsun. Basitçe $y = x \wedge (x_1 + x_2)$ alalım. Buradan

$$y \leq x_1 + x_2 \text{ ve } y - x_1 \leq x_2$$

olur. Ayrıca $y - x_1 \leq y \leq x$ olduğundan

$$y - x_1 \leq x \wedge x_2$$

olur. O halde

$$y - x \wedge x_2 \leq x_1$$

olur. Böylece $y - x \wedge x_2 \leq y$ olur. Buradan

$$y - x \wedge x_2 \leq x \wedge x_1 \text{ veya } y \leq x \wedge x_1 + x \wedge x_2$$

elde edilir. Eğer $x \wedge x_1 \wedge x_2 = (x \wedge x_1) \wedge (x \wedge x_2) = 0$ ise

$$\begin{aligned} x \wedge (x_1 + x_2) &\leq x \wedge x_1 + x \wedge x_2 \\ &= (x \wedge x_1) \vee (x \wedge x_2) \\ &= x \wedge (x_1 \vee x_2) \leq x \wedge (x_1 + x_2) \end{aligned}$$

olup

$$x \wedge (x_1 + x_2) = x \wedge x_1 + x \wedge x_2$$

elde edilir. n tane eleman için benzer şekilde ispatlanabilir.

(v) $n(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n) \leq x_1 + \cdots + x_n$ eşitsizliğinden $n(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n)^+ \leq (x_1 + \cdots + x_n)^+$ kolayca elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} n(x_1^+ \wedge \cdots \wedge x_n^+) &= n\left[(x_1 \vee 0) \wedge (x_2 \vee 0) \wedge \cdots \wedge (x_n \vee 0)\right] \\ &= n[(x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n) \vee 0 \\ &= n(x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n)^+ \end{aligned}$$

□

Tanım 2.1.15. E bir Riesz uzay ve x, y herhangi iki elemanı olmak üzere $|x| \wedge |y| = 0$ koşulunu sağlıyor ise *ayrık* veya *birbirine diktir* denir ve $x \perp y$ şeklinde gösterilir. E Riesz uzayının boştan farklı herhangi iki alt kümesi A ve B'nin ayrık veya birbirine dik olması için her $a \in A$ ve $b \in B$ için $a \perp b$ olmalıdır. $x \perp D$ ifadesi her $y \in D$ için $x \perp y$ anlamına gelmektedir.

Aşağıdaki lemmada basit ayrıklık özelliklerinden bahsedeceğiz.

Lemma 2.1.16. *(Ayrıklık Özellikleri)*

(i) *Eğer bir Riesz uzayında $x \perp y$ ve $x \perp z$ ise her $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ için $x \perp (\lambda y + \mu z)$ sağlanır.*

(ii) *Bir Riesz uzayında keyfi x ve y elemanlarının ayrık olması için gerek ve yeter koşul $|x + y| = |x - y|$ olmasıdır.*

(iii) *Eğer bir Riesz uzayında $x \perp y$ ise*

$$|x + y| = |x - y| = |x| + |y| = ||x| - |y|| = |x| \vee |y|$$

olur.

(iv) *Riesz uzayının ikili ayrık, sıfırdan farklı elemanları içeren alt kümesi lineer bağımsızdır.*

Kanıt. (i) Verilenlerden $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ için $x \perp y$ ve $x \perp z$ olduğunu biliyoruz. Buradan

$$\begin{aligned} 0 \leq |x| \wedge (\lambda y + \mu z|) &\leq |x| \wedge (|\lambda y| + |\mu z|) \\ &= |x| \wedge (|\lambda||y| + |\mu||z|) \leq |x| \wedge (|\lambda||y|) + |x| \wedge (|\mu||z|) \\ &\leq (1 + |\lambda|)|x| \wedge (1 + |\lambda|)|y| + (1 + |\mu|)|x| \wedge (1 + |\mu|)|z| \\ &= (1 + |\lambda|)\,[|x| \wedge |y|] + (1 + |\mu|)\,[|x| \wedge |z|] \\ &= (1 + |\lambda|)0 + (1 + |\mu|)0 = 0 \end{aligned}$$

ve böylece $|x| \wedge |\lambda y + \mu z| = 0$ olup $|x| \perp |\lambda y + \mu z|$ olur.

(ii) Teorem 2.1.10'da (xii). maddesinden bir Riesz uzayındaki iki vektör için

$$|x| \wedge |y| = \frac{1}{2}||x + y| - |x - y||$$

olduğunu biliyoruz. Buradan $x \perp y$ ($|x| \wedge |y| = 0$) ancak ve ancak $|x + y| = |x - y|$ çift taraflı gerçekleşir.

(iii) Varsayalım Riesz uzayında $x \perp y$ olsun. (ii)'den biliyoruz ki $|x + y| = |x - y|$ olur. Benzer sonuç $|x|$ ve $|y|$ için de gerçekleşir ve

$$||x| - |y|| = ||x| + |y|| = |x| + |y| = |x| \vee |y|$$

elde edilir. Teorem 2.1.10'de (xi)'i düşünürsek

$$|x + y| = |x - y| = |x + y| \vee |x - y| = |x| + |y|$$

sonucu elde etmiş oluruz.

(iv) Varsayalım ki Riesz uzayında $x_1, \cdots, x_n$ sıfırdan farklı ikili ayrık elemanlar ve $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n + \cdots + \alpha_n x_n = 0$ olsun. (i) ve (iii)'un sonucu olarak

$$0 = |\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n| = |\alpha_1 x_1| + \cdots + |\alpha_n x_n| = |\alpha_1||x_1| + \cdots + |\alpha_n||x_n|$$

ve buradan her i için $|\alpha_i||x_i| = 0$ olur. Her i için $|x_i| > 0$ olduğundan $|\alpha_i| = 0$ veya her i için $\alpha_i = 0$ olur. Sonuç olarak $x_1, \cdots, x_n$ lineer bağımsız vektörlerdir.

□

Riesz Ayrışım Özelliği olarak aşağıda verilen özellik Riesz uzaylarında kritik bir rol oynar.

Teorem 2.1.17. ***(Riesz Ayrışım Özelliği)*** *E bir Riesz uzayı ve $|x| \leq |y_1 + y_2 + \cdots + y_n|$ eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda her $i = 1, \cdots, n$ için $|x_i| \leq |y_i|$ ve $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ olacak şekilde $x_1, \cdots, x_n \in E$ vardır. Ek olarak eğer x pozitif bir vektör ise x_i de pozitif vektör olarak seçilebilir.*

Kanıt. Tümevarım yöntemi kullanılarak her $n \in \mathbb{N}$ için ispatlanabilir. Burada sadece $n = 2$ için sonuç bulalım. Varsayalım ki $|x| \leq |y_1 + y_2|$ ve $x_1 = [x \vee (-|y_1|)] \wedge |y_1|$ alalım.

$$-|y_1| \leq x \vee (-|y_1|) \text{ ve } -|y_1| \leq |y_1|$$

olduğundan $-|y_1| \leq x_1$ ve $-x_1 \leq |y_1|$ elde edilir. Diğer yandan $x_1 \leq |y_1|$ olduğundan $|x_1| = (-x_1) \vee x_1 \leq |y_1|$ (eğer x pozitif ise $0 \leq x_1 \leq x$ olduğu açıktır) olur. Şimdi eğer $x_2 = x - x_1$ alınır ise

$$x_2 = x - [x \vee (-|y_1|)] \wedge |y_1| = [0 \wedge (x + |y_1|)] \vee (x - |y_1|)$$

olur. Bununla birlikte $|x| \leq |y_1| + |y_2|$ olması $-|y_1| - |y_2| \leq x \leq |y_1| + |y_2|$ durumunu gerektirir ve buradan

$$-|y_2| = (-|y_2|) \wedge 0 \leq (x + |y_1|) \wedge 0 \leq x_2 \leq 0 \vee (x - |y_1|) \leq |y_2|$$

olup $|x_2| \leq |y_2|$ elde edilir. Herhangi $n \in \mathbb{N}$ için benzer şekilde gösterilebilir.

□

Tanım 2.1.18. A boştan farklı bir küme olmak üzere A üzerinde "$\geq$" bağıntısı verilmiş olsun.

(i) Her $\alpha \in A$ için $\alpha \geq \alpha$

(ii) Her α, β, $\gamma \in A$ için $\alpha \geq \beta$ ve $\beta \geq \gamma \implies \alpha \geq \gamma$

(iii) Herhangi α, $\beta \in A$ için $\gamma \geq \alpha$ ve $\gamma \geq \beta$ olacak şekilde bir tane γ vardır

koşulları sağlanıyor ise A kümesi üstten yönlendirilmiştir denir. $(A, \geq)$ kümesine üstten yönlendirilmiş küme adı verilir.

Tanım 2.1.19. $(A, \geq)$ yönlendirilmiş küme ve E herhangi bir küme olmak üzere $x : A \to E$ fonksiyonuna net denir ve (x_α) şeklinde gösterilir.

E bir Riesz uzay ve $(x_\alpha) \subset E$ içerisinde bir net olsun. Herhangi α ve β için $\beta \geq \alpha$ iken $x_\beta \geq x_\alpha$ koşulu sağlanıyor ise (x_α) neti artandır denir ve $x_\alpha \uparrow$ şeklinde gösterilir. Benzer şekilde azalan ifadesi de tanımlanır ve $x_\alpha \downarrow$ şeklinde gösterilir. $x_\alpha \uparrow x$ gösterimi; (x_α) artan bir nettir, $\{x_\alpha : \alpha \in A\}$ kümesinin supremum değeri vardır ve bu değer x'dur anlamına gelir. Benzer şekilde $x_\alpha \downarrow x$ ifadesi de tanımlanır. $x_\alpha \uparrow \leq$ x ifadesi her α için $x_\alpha \uparrow$ ve $x_\alpha \leq x$ şeklinde tanımlanır. Ayrıca boştan farklı D bir alt küme olmak üzere her $x, y \in D$ için $z \geq x$ ve $z \geq y$ olacak şekilde bir $z \in D$ var ise D kümesi üstten yönlendirilmiş küme denir ve $D \uparrow$ şeklinde gösterilir. Eğer $D \uparrow x$ ise D üstten yönlendirilmiş küme ve $\sup D = x$ olarak ifade edilir. Benzer ifade aşağı yönlendirilmiş ve infimum için de söylenir.

Üstten yönlendirilmiş küme ile artan net arasında bir bağlantı vardır. Eğer $x_\alpha \uparrow$ ise $D = \{x_\alpha : \alpha \in A\}$ kümesine üstten yönlendirilmiş küme denir. $x_\alpha \uparrow x$ olması için gerek ve yeter koşul $D \uparrow x$ olmasıdır. Eğer $D \uparrow$ üstten yönlendirilmiş küme ise her $\alpha \in D$ için $x_\alpha \uparrow x$ 'dur. Aynı şekilde azalan net ve aşağı yönlendirilmiş küme arasında da bir ilişki vardır.

2.2 İdeal, Band ve Riesz Alt Uzayı

Tanım 2.2.1. E bir Riesz uzay $A \subseteq E$ alt küme olsun. $x \in E$ ve $y \in A$ olmak üzere eğer $|x| \leq |y|$ iken $x \in A$ oluyor ise A'ya solid adı verilir. Bir Riesz uzayının solid vektör alt uzayına ideal denir. B bir ideal olsun. Eğer $\sup A \in E$ değeri olan her $A \subset B$ alt kümesi için $\sup A \in B$ oluyor ise B idealine band adı verilir.

Band tanımı sıra kapalı kavramı ile verilebilir. Fakat bunun için sıra yakınsaklığa ihtiyaç vardır. Sıra yakınsaklık kavramı bir sonraki ünitede tanımlanıp tekrar band kavramı ele alınacaktır.

Örnek 2.2.2. *c_0, ℓ_∞ uzayının idealidir ancak bandi değildir. Çünkü (e_n), c_0 uzayının standart taban elemanları olmak üzere $v_n = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$ olarak tanımlayalım. ℓ_∞ içinde $e = \sup\{v_n : n \in \mathbb{N}\}$ vardır ancak c_0 içinde supremum değeri yoktur.*

Önerme 2.2.3. *A ve B ideal olmak üzere cebirsel toplam*

$$A + B = \{a + b : a \in A,\ b \in B\}$$

bir idealdir.

Kanıt. $A+B$'nin vektör alt uzayı olduğu aşikardır. $f \in A+B$ alalım. $|g| \leq |f|$ koşulunu sağlayan her $g \in E$ için $g \in A + B$ olduğunu göstermeliyiz. $f \in A + B$ olduğundan $f' \in A$ ve $f'' \in B$ için $f = f' + f''$ şeklinde yazılabilir.

$$|g| \leq |f| = |f' + f''|$$

olmak üzere Riesz Ayrıştırma Teoreminden $g = g' + g''$ olmak üzere $0 \leq |g'| \leq |f'|$ ve $0 \leq |g''| \leq |f''|$ olacak şekilde g' ve g'' vardır. A ve B ideal olduğundan $g' \in A$ ve $g'' \in B$ elde edilir. Böylece $g = g' + g'' \in A + B$ olup $A + B$ idealdir. □

Lemma 2.2.4. *A idealinin bir band olması için gerek ve yeter koşul $(x_\alpha) \subseteq A$ neti için $0 \leq x_\alpha \uparrow x$ iken $x \in A$ olmasıdır.*

Kanıt. A ideali bir band olsun. $(x_\alpha) \subseteq A$ olmak üzere $0 \leq x_\alpha \uparrow x$ neti için tanımdan $x \in A$ olur. Diğer yönünü göstermek için $(x_\alpha) \subseteq A$ neti alalım. $0 \leq x_\alpha \uparrow$ iken $\sup\{x_\alpha\}$ vardır ve A'nın elemanı olur. Böylece A bir bandtir. □

Tanım 2.2.5. E bir Riesz uzay ve $D \subseteq E$ alt kümesi olsun. D'yi içeren ideallerin kesişimine, başka bir ifade ile D'yi içeren en küçük ideale D tarafından üretilen ideal denir. Görülüyor ki D tarafından üretilen I_D olmak üzere [5] refaransından

$$I_D = \{x \in E : \exists x_1, \cdots, x_n \text{ ve } \lambda \geq 0 \text{ için } |x| \leq \lambda \sum_{i=1}^{n} |x_i|\}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.2.6. E bir Riesz uzay olmak üzere tek eleman $\{x\}$ ile üretilen ideale esas ideal denir. Görülüyor ki x tarafından üretilen I_x olmak üzere [5] refaransından

$$I_x = \{y \in E : \exists \lambda \geq 0 \text{ vardır öyle ki } |y| \leq \lambda |x|\}$$

olarak tanımlanır.

Örnek 2.2.7. *$\mathbb{R}^2$' de $\emptyset, \mathbb{R}^2$, x-ekseni ve y-ekseni ideallerdir. $I_{(0,1)} = x$-ekseni ve $I_{(1,0)} = y$-eksenidir.*

Tanım 2.2.8. E bir Riesz uzay ve $e \in E$ olmak üzere her $x \in E$ için $|x| \leq \lambda e$ olacak şekilde $\lambda \geq 0$ var ise $e \geq 0$ elemanına sıra birim (güçlü birim) denir. Diğer bir deyişle $I_e = E$ ise e elemanına sıra birimdir denir.

Örnek 2.2.9. *K kompakt Hausdorff uzay olsun. $f \in C(K)$ kesin pozitif fonksiyonu sıra birimdir. Çünkü $f \in C(K)$ kesin pozitif fonksiyon olsun.*

$$\alpha = \max_{x \in K} |f(x)|$$

olarak tanımlayalım. Kompakt kümeler üzerinde sürekli fonksiyonlar maximum ve minimum değere sahip olduğundan α iyi tanımlıdır. Dahası, $\alpha > 0$ ve $|f| \leq \alpha \cdot \mathbb{1}_K$ olur. Böylece f sıra birimdir. Ayrıca $\mathbb{1}_K$ sabit fonksiyonu sıra birimdir.

Tanım 2.2.10. E Riesz uzay ve I, E'nin bir ideali olsun. I'yı içeren bandlerin en küçüğüne I ideali tarafından üretilen band adı verilir I ideali tarafından üretilen band B_I olmak üzere [5, Teorem 1.38]'den

$$B_I = \{x \in E : \exists\ (x_\alpha) \subset I^+ \text{ vardır öyle ki } 0 \leq x_\alpha \uparrow |x|\}$$

olarak tanımlanır.

A kümesi tarafından üretilen band ile A kümesi tarafından üretilen idealin ürettiği band aynıdır. Böylece aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 2.2.11. E bir Riesz uzay olmak üzere tek eleman $\{x\}$ ile üretilen bande esas band denir. x elemanı tarafından üretilen band B_x olmak üzere [5, Teorem 1.38]'den

$$B_x = \{y \in E : |y| \wedge n|x| \uparrow |y|\}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.2.12. E bir Riesz uzay, $e \in E^+$ ve B_e, e elemanı tarafından üretilen esas band olmak üzere $B_e = E$ ise e elemanına zayıf birim denir.

Bir Riesz uzayında her sıra birim, zayıf birimdir. Ancak tersi her zaman doğru değildir. Örnek 2.2.16'e bakılabilir. Ayrıca aşağıdaki örneğin ispatı [26] bulunabilir.

Örnek 2.2.13. *$p \in [1, \infty)$ olmak üzere*

(i) c_0, ℓ_p Riesz uzayları sıra birime sahip değildir.

(ii) (X, Σ, μ) ölçülebilir uzay olmak üzere $L_p(X, \Sigma, \mu)$ uzayı sıra birime sahip değildir.

(iii) ℓ_∞ uzayının duali zayıf birime sahip değildir.

Önerme 2.2.14. *(X, Σ, μ) ölçülebilir uzay olsun. $L_\infty(X, \Sigma, \mu)$ uzayında $\mathbb{1}_X$ sabit fonksiyonu sıra birimdir.*

Kanıt. $f \in L_\infty(X, \Sigma, \mu)$ alalım. O halde $|f| \leq \|f\|_\infty$ olur. Buradan

$$-\|f\|_\infty \cdot \mathbb{1}_X \leq f \leq \|f\|_\infty \cdot \mathbb{1}_X$$

olarak yazılır. Böylece $\mathbb{1}_X$ sıra birimdir. □

Teorem 2.2.15. *(X, Σ, μ) ölçülebilir uzay ve $p \in [1, \infty)$ olsun. $f \in L_p$ elemanına normda yakınsak $(f_n) \subseteq L_p$ dizisi olmak üzere $f_n \leq f$ ise $f = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$ olur.*

Örnek 2.2.16. *(X, Σ, μ) ölçülebilir uzay olmak üzere herhangi kesin pozitif L_p fonksiyonu zayıf birimdir.*

Kanıt. f kesin pozitif ve $g \geq 0$ olacak şekilde $f, g \in L_p$ alalım. Teorem 2.2.15'den

$$g = \sup_{n \in \mathbb{N}} g \wedge (nf)$$

olur. Herhangi $\epsilon > 0$ için $\|g - s\|_p < \epsilon$ olacak şekilde $s \in L_p$ step fonksiyonu vardır. O halde hemen hemen her yerde $Mf \leq s$ olacak şekilde $M \in \mathbb{N}$ vardır. Dahası, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\|g \wedge (nf) - s \wedge (nf)\|_p^p = \int |g \wedge (nf) - s \wedge (nf)|^p \mathrm{d}\mu$$

$x \in X$ için $g(x) \leq nf(x)$ olduğundan $s(x) \geq nf(x)$ olur. Buradan

$$g(x) - nf(x) \leq nf(x) - nf(x) = 0$$

elde edilir. O halde

$$nf(x) - g(x) \leq s(x) - g(x)$$

Böylece her $x \in S$ için

$$|g(x) \wedge (nf(x)) - s(x) \wedge (nf(x))| \leq |g(x) - s(x)|$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}\|g \wedge (nf) - s \wedge (nf)\|_p^p &= \int |g \wedge (nf) - s \wedge (nf)|^p \mathrm{d}\mu \\ &= \int |g - s|^p \mathrm{d}\mu \\ &= \|g - s\|_p^p \\ &< \epsilon^p\end{aligned}$$

Böylece her $n \geq \mathbb{N}$ için

$$\|g - g \wedge (nf)\| \leq \|g - s\|_p + \|s - s \wedge (nf)\|_p + \|s \wedge (nf) - g \wedge (nf)\|_p \leq \epsilon + 0 + \epsilon$$

olur. O halde $g \wedge (nf) \to g$ elde edilir. Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ için $(g \wedge nf) \leq g$ olur. Böylelikle Teorem 2.2.15'den istenilen elde edilir. $\square$

Tanım 2.2.17. E bir Riesz uzay ve $e > 0$ bir vektör olsun.

$$V_e = \{\lambda e : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

olarak tanımlanan V_e kümesi E Riesz uzayının vektör alt uzayı olarak alalım. I_e, e tarafından üretilen ideal olmak üzere $I_e = V_e$ ise e elemanına ayrık vektör denir.

Örnek 2.2.18. *$E = \mathbb{R}^2$ ve $e = (1,0) \in \mathbb{R}^2$ olsun. $(0,1)$ tarafından üretilen ideal*

$$I_{(1,0)} = \{y \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq \lambda(1,0)\}$$

olur. $V_e = x$-ekseni olarak alırsak $(1,0)$ ayrık vektördür. Benzer şekilde $e = (0,1) \in \mathbb{R}^2$ olarak alınırsa

$$I_{(0,1)} = \{y \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq \lambda(0,1)\}$$

olur. $V_e = y$-ekseni olarak alırsak $(0,1)$ ayrık vektördür. Aynı şekilde $e = (1,1) \in \mathbb{R}^2$ olarak alınırsa $I_{(1,1)} = \mathbb{R}^2$ olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} V_{(1,1)} &= \{\lambda(1,1) : \lambda \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\lambda(1,1) : y = x\} \end{aligned}$$

elde edilir. Ancak $V_{(1,1)} \neq I_{(1,1)}$ olur. Böylece $(1,1)$ ayrık vektör değildir.

Örnek 2.2.19. *$C[0,1]$ Riesz uzay ve $\mathbb{1} \in C[0,1]$ alalım.*

$$V_{\mathbb{1}} = \{\lambda \mathbb{1} : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

kümesi sabit fonksiyonlara eşittir. Örnek 2.2.9'dan biliyoruz ki $\mathbb{1}$ elemanı tarafından üretilen ideal $I_{\mathbb{1}} = C[0,1]$'dir. Ancak $V_{\mathbb{1}} \neq I_{\mathbb{1}}$ olur.

Tanım 2.2.20. E bir Riesz uzay ve $e > 0$ bir vektör olsun. $x \wedge y = 0$ olacak şekilde $x, y \in [0,e]$ alalım. Bu durumda $x = 0$ veya $y = 0$ oluyor ise e vektörüne atom denir.

Örnek 2.2.21. *$E = (\mathbb{R}^2, \leq_n)$ ve $e = (1,0)$ olsun. $x, y \in [0,e]$ alalım. $x = (x_1, x_2)$ ve $y = (y_1, y_2)$ olmak üzere*

$$x \wedge y = (x_1 \wedge y_1, x_2 \wedge y_2) = 0 \implies x_1 = 0 \vee y_1 = 0 \implies x = 0 \vee y = 0$$

olur. Böylece $(1,0)$ elemanı atomdur.

Örnek 2.2.22. *$E = C[0,1]$ Riesz uzayı ve $e = \mathbb{1}$ sabit fonksiyonu olsun. $x, y \in [0, \mathbb{1}]$ alalım. $x \wedge y = 0$ olması için $x = 0$ veya $y = 0$ olmak zorunda değildir. O halde $\mathbb{1}$ sabit fonksiyonu atom değildir.*

Örnek 2.2.23. *$E = \ell_\infty$ Riesz uzayı ve $e = (1, 0, 0, ...)$ olsun. $x, y \in [0, e]$ olarak alalım. $x = (x_1, 0, 0, ...)$ ve $y = (y_1, 0, 0, ...)$ olmak üzere*

$$x \wedge y = (x_1, 0, 0, ...) \wedge (y_1, 0, 0, ...) = (0, 0, 0, ...)$$

olması için $x_1 = 0$ veya $y_1 = 0$ olmalıdır. Böylece $x = 0$ veya $y = 0$ olmalıdır. O halde $e = (1, 0, 0, ...)$ atomdur.

Lemma 2.2.24. *E bir Arşimet Riesz uzay ve $e \in E$ olsun.*

$$e \text{ atomdur} \iff e \text{ ayrık vektördür.}$$

Kanıt. $(\Rightarrow)$ e atom olsun. e'nin ayrık vektör olduğunu göstermek için $I_e = V_e$ olduğunu göstermeliyiz. $u \in I_e$ alalım.

$$u \in I_e \implies \exists\, \lambda \geq 0, |u| \leq \lambda e$$

olur. Buradan $u \in V_e$ elde edilir. Diğer yandan $u \in V_e$ alalım. O halde,

$$u \in V_e \implies \exists\, \lambda \geq 0, u = \lambda e$$

olur. Buradan

$$|u| = |\lambda e| = |\lambda| e \leq |\lambda| e$$

elde edilir. Böylece $u \in I_e$ olur. O halde e ayrık vektördür.

$(\Leftarrow)$ e ayrık vektör olsun. O halde $I_e = V_e$'dir. $x, y \in [0, e]$ için $x \wedge y = 0$ alalım. $x, y \in [0, e]$ olduğundan

$$0 \leq x \leq e \text{ ve } 0 \leq y \leq e$$

olur. Ayrıca $I_e = V_e$ olduğundan $y = \lambda e$ ve $y = \mu e$ olarak yazılabilir.

$$\begin{aligned} \lambda e \wedge \mu e = 0 &\implies \lambda = 0 \vee \mu = 0 \\ &\implies x = 0 \vee y = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece e atomdur.

□

Tanım 2.2.25. E bir Riesz uzay olsun.

$$A = \{ \text{ ayrık, tüm atomların kümesi } \}$$

olmak üzere A kümesi tarafından üretilen band E uzayına eşit oluyor ise E uzayına atomik Riesz uzay denir.

a atomu tarafından üretilen B_a bandi izdüşüm bandidir ve $B_a = span\{a\}$ olarak tanımlanır. Ayrıca herhangi $a \in E$ için P_a, B_a bandi üzerinde tanımlı izdüşüm bandtir.

Tanım 2.2.26. E bir Banach latis olsun. Her pozitif eleman, uzayın atomlarının toplamı şeklinde yazılabiliyor ise E uzayına tamamen atomik uzay denir

Aşağıda tamamen atomik olan bir uzay örneği verebiliriz.

Örnek 2.2.27. *Her n ve k için $0 \leq k \leq 2^n$ olmak üzere*

$$I_{n,k} = (\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})$$

aralığı olsun.

$$X_n = span\{\chi_{I_{n,k}} : \chi_{I_{n,k}} \text{ karakteristik fonksiyon ve } 0 \leq k \leq 2^n\}$$

olarak tanımlayalım. $n = 1$ *için* $k = 0, 1, 2$ *olmak üzere*

$$I_{1,0} = (0, \frac{1}{2})$$
$$I_{1,1} = (\frac{1}{2}, 1)$$
$$I_{1,2} = (1, \frac{3}{2})$$

olur. Buradan $X_1 = span\{\chi_{I_{1,0}}, \chi_{I_{1,1}}, \chi_{I_{1,2}}\}$ *olur.*
$n = 2$ *için* $k = 0, 1, 2, 3, 4$ *olmak üzere*

$$I_{2,0} = (0, \frac{1}{4})$$
$$I_{2,1} = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$$
$$I_{2,2} = (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$$
$$I_{2,3} = (\frac{3}{4}, 1)$$
$$I_{2,4} = (1, \frac{5}{4})$$

olur. Buradan $X_2 = span\{\chi_{I_{2,0}}, \chi_{I_{2,1}}, \chi_{I_{2,2}}, \chi_{I_{2,3}}, \chi_{I_{2,4}}\}$ *olur.*

$$X = \{(f_n) : f_n \in X_n \text{ ve } \lim f_n = f, f \in L_p[0,1]\}$$

şeklinde tanımlansın. Burada limit L_p *normuna göre alınmaktadır.*

$$f_1 \in X_1 \text{ için } f_1 = \sum_{i=1}^{3} c_i \chi_{I_{1,i}}$$
$$f_2 \in X_2 \text{ için } f_2 = \sum_{i=1}^{5} c_i \chi_{I_{2,i}}$$
$$\vdots$$
$$f_n \in X_n \text{ için } f_n = \sum_{i=1}^{2^n+1} c_i \chi_{I_{n,i}}$$

olur. Böylece X *atomların gerdiği bir uzaydır.*

Tanım 2.2.28. $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $[a, b]$ kapalı aralığını alalım. $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı f_1 ve f_2 fonksiyonu için

$$(f_1, f_2) = \int_a^b f_1(x)f_2(x)dx = 0$$

oluyor ise f_1 ve f_2 fonksiyonlarına ortogonal fonksiyon denir.

Örnek 2.2.29. $[-1, 1]$ *aralığı üzerinde tanımlı* $f_1(x) = x^2$ *ve* $f_2(x) = x^3$ *alalım.*

$$\begin{aligned}(f_1, f_2) &= \int_{-1}^{1} x^2x^3dx \\ &= \int_{-1}^{1} x^5dx \\ &= \frac{1}{6}x^6|_{-1}^{1} \\ &= 0\end{aligned}$$

olduğundan $f_1(x) = x^2$ *ve* $f_2(x) = x^3$ *ortogonal fonksiyonlardır.*

Tanım 2.2.30. $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı $(\phi_n)_{n=0}^{\infty}$ reel değerli fonksiyonlar kümesi için

$$(\phi_m, \phi_n) = \int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x)dx = 0$$

oluyor ise $(\phi_n)_{n=0}^{\infty}$ ortogonaldir denir.

Örnek 2.2.31. $[-\pi, \pi]$ *aralığı üzerinde tanımlı reel değerli* $\{1, \cos x, \cos 2x, \cdots\}$ *fonksiyonlar kümesini alalım.* $\phi_0(x) = 1$ *ve* $n \neq 0$ *olmak üzere* $\phi_n(x) = \cos nx$ *olarak alınırsa,*

$$\begin{aligned}(\phi_0, \phi_n) &= \int_{-\pi}^{\pi} \phi_0(x)\phi_n(x)dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx \\ &= \frac{1}{n}\sin nx|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{n}[\sin n\pi - \sin(-n\pi)] \\ &= 0\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi $n \neq m$ *olmak üzere*

$$\begin{aligned}(\phi_m, \phi_n) &= \int_{-\pi}^{\pi} \phi_m(x)\phi_n(x)dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]dx \\ &= \frac{1}{2}[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)}{m-n})]_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0\end{aligned}$$

olduğundan ortogonal fonksiyonlardır.

Tanım 2.2.32. E bir Riesz uzay olmak üzere hiç bir elemanı atom değil ise E Riesz uzayına atomik olmayan Riesz uzay denir.

Örnek 2.2.33. *$C[0,1]$ Arşimet Riesz uzayı olmak üzere herhangi bir ayrık elemana sahip değildir. Buradan $C[0,1]$ uzayı atoma sahip değildir. Gerçekten, $0 < f \in C[0,1]$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $(a,b) \subseteq [0,1]$ alalım. Herhangi $x \in (a,b)$ için $f(x) > \epsilon$ olacak şekilde $\epsilon > 0$ vardır. Ancak $C[0,1]$'de $\epsilon\chi_{(a,b)}$'den küçük iki sıfırdan farklı g ve h ortogonal fonksiyon oluşturulabilir. Böylece f atom değildir.*

Tanım 2.2.34. E bir Riesz uzay, F vektör alt uzay olsun. Her $x, y \in F$ elemanlarının supremum değeri F'nin elemanı oluyor ise F uzayına E 'nin Riesz alt uzayı denir.

Önerme 2.2.35. *F vektör alt uzayının Riesz alt uzay olması için gerek ve yeter koşul her $x \in F$ için $x \vee 0 = x^+ \in F$ olmasıdır.*

Kanıt. ($\Rightarrow$) Açıktır.

($\Leftarrow$) Her $x \in E$ için $x \vee 0 = x^+ \in F$ olsun. Teorem 2.1.10'den $x \vee y = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$ olarak yazılır. F vektör alt uzay olduğundan her $x, y \in F$ için $x - y \in F$' dir. Kabulden $(x-y)^+ \in F$'dir. $y - x \in F$ ve $(y-x)^+ \in F$ olur. Buradan $(x-y)^- = (y-x)^+ \in F$ olmak üzere;

$$|x - y| = (x-y)^+ + (x-y)^- \in F$$

elde edilir. Böylece $x \vee y \in F$ olur.

□

Lemma 2.2.36. *Her ideal bir Riesz alt uzaydır.*

Kanıt. F bir ideal olsun. Her $x \in F$ için $0 \leq x^+ \leq |x|, |x| \in F$ ve F solid olduğundan $x^+ \in F$ elde edilir. Böylece F Riesz alt uzayıdır. □

Lemma 2.2.37. *Bir Riesz alt uzayı K'nın ideal olması için gerek ve yeter koşul $0 \leq x \leq y$ ve $y \in K$ ise $x \in K$ olmasıdır.*

Kanıt. ($\Rightarrow$) K Riesz alt uzay bir ideal olsun. K bir ideal olduğundan tanım gereği bir solidtir. O halde $0 \leq x \leq y$ ve $y \in K$ olduğundan $x \in K$ elde edilir.

($\Leftarrow$) K bir Riesz alt uzay, $0 \leq x \leq y$ ve $y \in K$ olsun. Buradan K solidtir. O halde K idealdir.

□

Tanım 2.2.38. E Riesz uzayının boştan farklı bir alt kümesi A'nın ayrık tümleyeni

$$A^d = \{x \in E : \forall\ a \in A \text{ için } a \perp x\}$$

şeklinde tanımlanır. A^d, E içerisinde bir idealdir. Ayrık tümleyen kümesi

- $(A^d)^d = A^{dd}$
- $A \subseteq A^{dd}$ ve
- $A \subseteq B$ ise $B^d \subseteq A^d$

özelliklerini sağlar.

Tanım 2.2.39. E bir Riesz uzay ve F Riesz alt uzay olsun. E içerisinde ki her $0 < x$ için $0 \leq y \leq x$ olacak şekilde en az bir tane $y \in F$ var ise F, E içerisinde sıra yoğundur denir.

Teorem 2.2.40. *E Arşimet Riesz uzayı olmak üzere F, E'nin Riesz alt uzayı olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.*

(i) *F, E'de sıra yoğundur.*

(ii) *Her $x \in E^+$ için $x = \sup\{y \in F : 0 \leq y \leq x\}$ olur.*

Kanıt. (i) $\implies$ (ii) F, E'de sıra yoğun ve her $x \in E^+$ için $\sup \neq \{y \in F : 0 \leq y \leq x\}$ olsun. Böylece $y \in F$ ve $0 \leq y \leq x - z$ olacak şekilde $0 < z \in E$ vardır. $0 < t \leq z$ koşulunu sağlayan bir $t \in F$ alalım. Buradan $t \leq z + (x - z) = x$ ve $t \leq x - z$ olur ve buradan $2t \leq (x - z) + z = x$ elde edilir. $0 \leq nt \leq x$ için E Arşimet olduğundan $t = 0$ olmalıdır. Bu durum $0 < t$ olması ile çelişir.

(ii) $\implies$ (i) Sıra yoğunluk tanımından açıktır.

□

Teorem 2.2.41. *E bir Riesz uzay ve A bir ideal olsun. A ideali A^{dd} içerisinde sıra yoğundur. Ayrıca, E içerisinde sıra yoğun bir A idealinin olması için gerek ve yeter koşul $A^d = \{0\}$ olmasıdır.*

Kanıt. Öncelikle A ideali sıra yoğundur $\iff$ $A^d = \{0\}$ olduğunu gösterelim.

($\Rightarrow$) A, E içerisinde sıra yoğun bir ideal olsun. $0 \neq x \in A^d$ için $0 < y \leq |x|$ olacak şekilde en az bir tane $y \in A$ vardır.

$$0 < |y| \wedge |a| \leq |x| \wedge |a| \implies |y| \wedge |a| = 0$$

olur. Buradan $y \in A^d$ olur. $y \in A \cap A^d$ ve $A \cap A^d = \{0\}$ olduğundan çelişki elde edilir. Böylece $A^d = \{0\}$ olur.

($\Leftarrow$) $A^d = \{0\}$ ve $0 < x \in E$ olsun. Her $y \in A^+$ için $x \wedge y > 0$ olur. $0 < x \wedge y \leq y$ ve A solid olduğundan $x \wedge y \in A$ olur. $0 < x \wedge y \leq x$ olacak şekilde $x \wedge y \in A$ olduğundan A sıra yoğundur. Son olarak A'nın A^{dd} içerisinde sıra yoğun olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki A, A^{dd} içerisinde sıra yoğun olmasın. O halde $0 < v \leq u$ olacak şekilde en az bir $0 < u \in A^{dd}$ ve $v \in A$ vardır. A ideal olduğundan her $v \in A$ için $|v| \wedge u = 0$'dır. $u \in A^d$ ve $u \in A \cap A^{dd} = \{0\}$ ise $u = 0$ olur ancak bu $0 < u$ olması ile çelişir.

□

Teorem 2.2.42. *E bir Riesz uzay ve A, E'nin bir ideali olsun. $A \oplus A^d$, E içerisinde sıra yoğundur.*

Kanıt. $x \in A \oplus A^d$ ise her $a \in A$ ve $b \in A^d$ için $x \perp (a + b)$ olur.

$$0 \leq |a| \leq |a| + |b| \implies 0 \leq |a| \wedge |x| \leq (|a| + |b|) \wedge |x|$$

elde edilir. $(|a| + |b|) \wedge |x| = 0$ olduğundan $|a| \wedge |x| = 0$ olur. Buradan $x \in A^d$ elde edilir.Benzer şekilde

$$0 \leq |b| \leq |a| + |b| \implies 0 \leq |b| \wedge |x| \leq (|a| + |b|) \wedge |x|$$

ve $(|a| + |b|) \wedge |x| = 0$ olduğundan $|b| \wedge |x| = 0$ olur. Buradan $x \in A^{dd}$ elde edilir. Böylece $u \in A \cap A^{dd} = 0$ olur. Buradan $x = 0$ elde edilir. □

Dikkat edilirse her ideal ürettiği bandte sıra yoğundur. Ayrıca A^d her zaman bir bandtir. Bir A kümesinin ürettiği band A^{dd} olur. Aşağıda bu teorem verilecektir.

Teorem 2.2.43. *E bir Arşimet Riesz uzay ve $\emptyset \neq A \subset E$ bir alt kümesi olsun. A tarafından üretilen band A^{dd}'tir.*

Kanıt. A tarafından üretilen band ile A ideali tarafından üretilen band aynıdır. Böylece A ideal olsun. Teorem 2.2.41'den A, A^{dd} içinde sıra yoğundur. O halde her $x \in A^{dd}$ için $0 \leq x_\alpha \uparrow |x|$ olacak şekilde $(x_\alpha) \subset A$ neti vardır. Buradan A^{dd}, A'yı içeren en küçük bandtir. □

Teorem 2.2.44. *E bir Riesz uzay ve A ile $B \subset E$ birer ideal olmak üzere $E = A \oplus B$ olsun. O halde A ve B'nin her ikisi de $A = B^d$ ve $B = A^d$ sağlayan bandtir.*

Kanıt. İlk olarak her bir $a \in A$ ve $b \in B$ için $|a| \wedge |b| \in A \cap B = \{0\}$ olur. Böylece $A \perp B$'dir. Buradan $A \subset B^d$ elde edilir. Diğer yandan $x \in B^d$ alalım. $a \in A$ ve $b \in B$ için $x = a + b$ olarak yazılacağından $b = x - a \in B \cap B^d = \{0\}$ olur. Buradan $x = a$ yani $a \in A$ elde edilir. $B^d \subset A$ olur. O halde $A \subset B^d$ ve $B^d \subset A$ olduğundan $A = B^d$ elde edilir. □

Tanım 2.2.45. E bir Riesz uzay ve $B \subset E$ band olmak üzere $E = B \oplus B^d$ oluyor ise B'ye izdüşüm band (projection band) denir.

Teorem 2.2.46. *E bir Riesz uzay ve B, E içinde bir ideal olmak üzere aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.*

(*i*) *B bir izdüşüm bandtir.*

(*ii*) *Her bir $x \in E^+$ için $B^+ \cap [0, x]$ kümesinin E içerisinde supremumu vardır ve B'ye aittir.*

(*iii*) *$E = B \oplus A$ olacak şekilde $A \subset E$ ideali vardır.*

Kanıt. $(i) \implies (ii)$ B izdüşüm band ve $x \in E^+$ alalım. $0 \leq y \in B$ ve $0 \leq z \in B^d$ olmak üzere $x = y + z$ olarak yazılır. $u \in B^+$ için $u \leq x = y + z$ oluyor ise $0 \leq (u - y)^+ \leq z \in B^d$ ve $(u - y)^+ \in B$ yani $(u - y)^+ = 0$ olur. Böylece $u \leq y$ elde edilir. Buradan y elemanı $B^+ \cap [0, x]$ için üst sınırdır. $y \in B \cap [0, x]$ olduğundan E içinde $y = \sup\{u \in B : u \leq x\} = \sup B \cap [0, x]$ olur.

$(ii) \implies (iii)$ $x \in E^+$ ve $u = \sup B \cap [0, x]$ olsun. $u \in B$ ve $y = x - u \geq 0$ alalım. O halde $0 \leq w \in B$ ise $0 \leq y \wedge w \in B$ olur ve $0 \leq u + y \wedge w \in B$ elde edilir.

$$u + y \wedge w = (u + y) \wedge (u + w) = x \wedge (u + w) \leq x$$

olur. Buradan $u + y \wedge w \leq u$ elde edilir. O halde $y \wedge w = 0$'dır. Böylece $y \in B^d$ olur. $x = u + y$ olduğundan $E = B \oplus B^d$ olur. Burada $A = B^d$ alınırsa istenilen gösterilmiş olur.

$(iii) \implies (i)$ Teorem 2.2.44'den ispat açıktır. □

Her band bir izdüşüm band olmak zorunda değildir. E Riesz uzayında her band bir izdüşüm band ise E uzayına izdüşüm özelliğine sahiptir denir. Ancak Dedekind tam Riesz uzayında her band bir izdüşüm banttir. O halde Dedekind tam Riesz uzayları izdüşüm band özelliğine sahiptir. Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Tanım 2.2.47. E bir Riesz uzay olmak üzere E'nin boş kümeden farklı her üstten sınırlı alt kümesinin supremum değeri var ise E uzayına Dedekind tam uzay denir. Benzer şekilde E'nin her üstten sınırlı sayılabilir alt kümesinin supremum değeri var ise E uzayına Dedekind σ-tam uzay denir.

Teorem 2.2.48. *(F. Riesz) E bir Dedekind tam Riesz uzay ve $B \subset E$ bir band olsun. $E = B \oplus B^d$ olur.*

Tanım 2.2.49. V bir vektör uzay olmak üzere $P : V \to V$ bir operatör olsun. $P^2 = P$ oluyor ise P operatörüne izdüşüm (projection) denir. Aynı zamanda V Riesz uzayı ve P operatörü pozitif ise pozitif izdüşüm (positive projection) denir.

Tanım 2.2.50. E bir Riesz uzay ve B, E içinde bir izdüşüm band ise $E = B \oplus B^d$ olur. Buradan her $x \in E$ vektörü $x_1 \in B$ ve $x_2 \in B^d$ olmak üzere $x = x_1 + x_2$ olarak yazılır.

$$P_B : E \to E \text{ izdüşüm } P_B(x) = x_1$$

olarak tanımlanır. P_B pozitif izdüşümdür. P_B formundaki izdüşümlere izdüşüm band (projection band) denir.

Teorem 2.2.51. *E bir Riesz uzay ve B, E içinde izdüşüm band olsun.*

$$P_B(x) = \sup\{y \in B : 0 \leq y \leq x\} = \sup(B \cap [0, x]) \text{ olur.}$$

Kanıt. $x \in E^+$ alalım. Teorem 4.3.4'den $u = \sup\{y \in B : 0 \leq y \leq x\}$ vardır ve B'ye aittir. $u = P_B(x)$ olduğunu gösterelim. $x = x_1 + x_2$ olmak üzere $0 \leq x_1 \in B$ ve $0 \leq x_2 \in B^d$ için $x = x_1 + x_2$ formunda yazılır. $0 \leq x_1 \leq x$ olduğundan $0 \leq x_1 \leq u$ olur. Buradan $0 \leq u - x_1 \leq x - x_1 = x_2$'dir. Böylece $u - x_1 \in B^d$ elde edilir. $u - x_1 \in B$ ve $B \cap B^d = \{0\}$ olduğundan $u - x_1 = 0$ olur. O halde $u = x_1$ elde edilmiş olur. □

2.3 Banach Latis ve Özellikleri

Tanım 2.3.1. $\|\cdot\|$, E Riesz uzayı üzerinde tanımlı bir norm olmak üzere; eğer $|x| \leq |y|$ iken $\|x\| \leq \|y\|$ oluyor ise $\|\cdot\|$ normuna latis normu denir ve latis normlu Riesz uzayına, normlu Riesz uzayı adı verilir. Dahası normlu Riesz uzayı verilen norma göre tam ise Banach latis olarak adlandırılır.

Her x elemanı için normlu bir Riesz uzayında $|x| = \||x|\|$ eşitliğinin $\|x^+ - y^+\| \leq \|x - y\|$ ve $\||x| - |y|\| \leq \|x - y\|$ eşitsizliklerinin sağlandığını söyleyebiliriz.

Örnek 2.3.2. *$(L_p, \|\cdot\|_p), (\ell_p, \|\cdot\|_p)$ birer Banach latistir. K kompakt ve Hausdorff olmak üzere $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ bir Banach latis iken $(C(K), \|\cdot\|_p)$ normlu Riesz uzayıdır.*

Teorem 2.3.3. *E normlu Riesz uzayının norm tamlanışı E uzayını Riesz alt uzay olarak içeren bir Banach latistir.*

Teorem 2.3.4. *Bir Banach latis uzayından normlu Riesz uzayına tanımlanan her pozitif operatör süreklidir.*

Kanıt. E bir Banach latis, F normlu Riesz uzay olmak üzere $T : E \to F$ pozitif operatör olsun. T operatörünün sürekli olduğunu göstermek için norm sınırlı olduğunu göstermek yeterlidir. Kabul edelim ki T operatörü norm sınırlı olmasın. O halde $\|x_n\| = 1$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için $\|Tx_n\| \geq n^3$ olacak şekilde $(x_n) \subset E$ bir dizisi vardır. $|Tx_n| \leq T|x_n|$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \geq 0$ alalım. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|x_n\|}{n^2} < \infty$ ve E'nin norm tamlanışından E içinde $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n^2}$ serisi norm yakınsaktır. $x = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n^2}$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq \frac{x_n}{n^2} \leq x$ olduğundan,

$$n \leq \|T(\frac{x_n}{n^2})\| \leq \|Tx\| < \infty$$

olur. Böylece çelişki elde edilir. O halde T operatörü norm sınırlıdır. Buradan süreklidir. □

Sonuç 2.3.5. *(Goffman) Bir Riesz uzayını Banach latis yapan tüm latis normları birbirine denktir.*

Kanıt. E Bir Riesz uzay olmak üzere $\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$ normları E Riesz uzayını Banach latis yapan normlar olsun. Teorem 2.3.4'den $I : (E, \|\cdot\|_1) \to (E, \|\cdot\|_2)$ birim operatörü homeomorfizmdir. Böylece $\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$ normları birbirine denktir. □

Tanım 2.3.6. E normlu Riesz uzay ve $(x_\alpha) \subset E$ bir net olmak üzere eğer $x_\alpha \downarrow 0$ iken $\|x_\alpha\| \downarrow 0$ koşulu sağlanıyor ise E'nin normuna sıra sürekli norm ve E uzayına ise sıra sürekli normlu Riesz uzayı denir. Eğer bu koşul dizi için sağlanıyor ise σ-sıra sürekli normlu Riesz uzay adı verilir.

Teorem 2.3.7. *(Nakano) E bir Banach latis olmak üzere aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.*

- (i) *E sıra sürekli norma sahiptir.*
- (ii) *E içinde $0 \leq x_n \uparrow x$ ise (x_n) norm Cauchy dizisidir.*
- (iii) *E Dedekind σ-tam ve E içinde $x_n \downarrow 0$ ise $\|x_n\| \downarrow 0$ olur.*
- (iv) *E, E'''nin bir idealidir.*
- (v) *E'nin her sıra sınırlı aralığı zayıf kompakttır.*

Sonuç 2.3.8. *Sıra sürekli norma sahip her Banach latis Dedekind tamdır.*

Örnek 2.3.9. $1 \leq p < \infty$ *olmak üzere $L_p(\mu)$ uzayı sıra sürekli norma sahip Banach latistir. Teorem 2.3.7'in (vi). özelliğinden her yansımalı Banach latis sıra sürekli norma sahiptir. Bunun yanında sup normu ile birlikte $C[0,1], L_\infty[0,1]$ ve ℓ_∞ uzayları Banach latis olup sıra sürekli norma sahip değildir.*

Tanım 2.3.10. E bir Riesz uzay ve $(x_n) \subset E$ bir dizi olsun. $n \neq m$ için $|x_n| \wedge |x_m| = 0$ oluyor ise (x_n) dizisine ayrık dizi denir.

Teorem 2.3.11. *(Fremlin-Meyer-Nieberg) Bir Banach latisin sıra sürekli norma sahip olması için gerek ve yeter koşul her sıra sınırlı ayrık dizinin normunun sıfıra yakınsamasıdır.*

Ayrıca bir sonuç olarak;

Sonuç 2.3.12. *E'nin sıra sürekli norma sahip olması için gerek ve yeter koşul her ayrık norm sınırlı $(f_n) \subset E'$ dizisinin $\sigma(E', E)$ içinde 0'a yakınsak olmasıdır.*

Tanım 2.3.13. Riesz uzayı üzerinde tanımlanan f pozitif lineer fonksiyoneli $x > 0$ iken $f(x) > 0$ koşulunu sağlıyor ise f pozitif fonksiyoneline kesin pozitif fonksiyonel denir.

Sıralı sürekli normlu ve zayıf sıra birimli bir Banach latis her zaman kesin pozitif bir lineer fonksiyonele sahiptir. Ayrıntılar bir sonraki teoremde yer almaktadır.

Teorem 2.3.14. *E sıra sürekli norma sahip bir Banach latis ise her $x > 0$ için $[0, x]$ sıra sınırlı aralığı üzerinde kesin pozitif olan lineer bir fonksiyonel vardır.*

Tanım 2.3.15. E bir Banach latis olmak üzere

- Her $x, y \in E^+$ için $x \wedge y = 0$ iken $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ oluyor ise E uzayına AL-uzayı,
- Her $x, y \in E^+$ için $x \wedge y = 0$ iken $\|x \wedge y\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$ oluyor ise E uzayına AM-uzayı denir.

Önerme 2.3.16. *Her AL-uzayı sıra sürekli norma sahiptir.*

Kanıt. Bunu göstermek için $(x_n) \subset [0, x]$ aralığı içinde ayrık bir dizi alalım. İki ayrık eleman x ve y için $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ koşulundan

$$\sum_{n=1}^{k} \|x_n\| = \|\sum_{n=1}^{k} x_n\| = \|x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_k\| \leq \|x\|$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$ ve genel terim testinden $\|x_n\| \to 0$ olur. Buradan Teorem 2.3.11'den E sıra sürekli norma sahip olur. □

Teorem 2.3.17. *E bir Riesz uzay ve e güçlü birim olmak üzere*

$$\|x\|_e = \inf\{\lambda \in \mathbb{R}^+ : \|x\| \leq \lambda e\}$$

şeklinde tanımlanan $\|\cdot\|_e : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonu olsun. $(E, \|\cdot\|_e)$ normlu uzaydır.

Kanıt. $A_x = \{\lambda \in \mathbb{R}^+ : |x| \leq \lambda e\}$ ve $\|x\|_e = \inf A_x$ olarak tanımlayalım. e güçlü birim olduğundan $I_e = E$'dir. Her $x \in E$ için $x \in I_e$ olduğundan $|x| \leq \lambda e$ olacak şekilde en az bir tane $\lambda > 0$ vardır. Böylece $A_x = \{\lambda \in \mathbb{R}^+ : |x| \leq \lambda e\} \neq \emptyset$'dır. $\|\cdot\|_e$ fonksiyonu anlamlıdır. Her $x, y \in E$ için $x = y$ olsun.

$$x = y \implies A_x = A_y \implies \inf A_x = \|x\|_e = \inf A_y = \|y\|_e$$

olur ve $\|\cdot\|_e$ fonksiyonu iyi tanımlıdır.
Her $x \in E$ için $\|x\|_e \geq 0$'dır. $\|x\|_e = 0$ olsun. $\inf A_x = 0$ ise $\lambda_n \downarrow 0$ olacak şekilde en az bir tane $(\lambda_n) \subset A_x$ vardır. Buradan her $n \in \mathbb{N}$ için $|x| \leq \lambda_n e$ elde edilir. Böylece $x = 0$'dır.
$x = 0$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $|x| \leq \frac{1}{n}e$ ve $B = \{\frac{1}{n} : |x| \leq \frac{1}{n}e\} \subset A_x$ olur. Buradan,

$$0 = \inf B \geq \inf A_x \implies \inf A_x = \|x\|_e = 0$$

elde edilir. Herhangi $x \in E$ ve $\beta \geq 0$ için $\|\beta x\|_e = |\beta| \|x\|_e$ olduğunu gösterelim.

- $\beta = 0$ ise aşikardır.

- $\beta \neq 0$ olsun.

$$\begin{aligned}\|\beta x\| &= \inf\{\lambda > 0 : |\beta x| \leq \lambda e\} \\ &= \inf\{\lambda > 0 : |\beta||x| \leq \lambda e\} \\ &= \inf\{\lambda > 0 : |x| \leq \frac{\lambda}{|\beta|} e\} \\ &= |\beta| \inf\{\frac{\lambda}{|\beta|} > 0 : |x| \leq \frac{\lambda}{|\beta|} e\} \\ &= |\beta| \|x\|_e\end{aligned}$$

Herhangi iki eleman $x, y \in E$ için üçgen eşitsizliğinin sağlandığını gösterelim. $x \in E$ ve $\lambda \in A_x$ için $|x| \leq \lambda e$ ve

$$\inf_{\lambda \in A_x} |x| \leq \inf_{\lambda \in A_x} \lambda e = (\inf_{\lambda \in A_x} \lambda) e$$

olur. Böylece $|x| \leq \|x\|_e e$ bulunur. Benzer şekilde $|y| \leq \|y\|_e e$ olur.

$$|x + y| \leq |x| + |y| \leq \|x\|_e e + \|y\|_e e = e(\|x\|_e + \|y\|_e)$$

Buradan $\|x\|_e + \|y\|_e \in A_{x+y}$ ve

$$\inf A_{x+y} = \|x + y\|_e \leq \|x\|_e + \|y\|_e$$

elde edilir. Buradan $(E, \| \cdot \|_e)$ normlu uzaydır. □

Teorem 2.3.18. *E bir Banach latis ve $x \in E$ olsun. I_x ideali $\| \cdot \|_{|x|}$ normuna göre bir AM-uzayıdır ve $[-|x|, |x|]$ sıra aralığı kapalı birim yuvardır.*

E bir Banach latis ve e güçlü birimi olsun. Teorem 2.3.18'dan $I_e = E$ olduğundan, $(E, \| \cdot \|_e)$ bir AM-uzayı olur. Böylece E bir Banach latis ve güçlü birime sahip ise E uzayı AM-uzayı olur.

Örnek 2.3.19. *$\mathbb{1}$ sabit fonksiyonu $C[0, 1]$ uzayının güçlü birimi olduğundan $(C[0, 1], \| \cdot \|_\infty)$ bir AM-uzayıdır.*

Teorem 2.3.20. *E bir normlu Riesz uzay olmak üzere $E^{'}$ topolojik duali olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

(i) E uzayı AM-uzayıdır gerek ve yeter koşul $E^{'}$ uzayı AL-uzayıdır.

(ii) E uzayı AL-uzayıdır gerek ve yeter koşul $E^{'}$ uzayı AM-uzayıdır.

Örnek 2.3.21. *$(\ell_1, \| \cdot \|_1)$ bir AL-uzay ve $\ell_1^{'} = \ell_\infty$ olduğundan $(\ell_\infty, \| \cdot \|_\infty)$ bir AM-uzayıdır. Ayrıca $c' = \ell_1, c_{00}' = \ell_1$ ve ℓ_1 bir AL-uzay olduğundan $(c, \| \cdot \|_\infty)$ ve $(c_{00}, \| \cdot \|_\infty)$ birer AM-uzaydır.*

Tanım 2.3.22. E normlu Riesz uzay olmak üzere $e \in E$ olsun. Eğer e tarafından üretilen ideal I_e, E içinde norm yoğun ise e elemanına kuasi iç nokta adı verilir. Kısaca $\bar{I_e}^{\| \cdot \|} = E$ olmalıdır.

Teorem 2.3.23. *E normlu Riesz uzay ve $e \in E^+$ olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.*

(i) e kuasi iç noktadır.

(ii) Her $e \in E^+$ için $\|x - (x \wedge ne)\| \to 0$

(iii) E' üzerinde f kesin pozitifttir, yani $0 < f \in E'$ ise $f(e) > 0$ olur.

Kanıt. $(i) \implies (ii)$ e kuasi iç nokta olsun. Yani $\bar{I_e}^{\|\cdot\|} = E$'dir. Herhangi $x \in E^+$ alalım. Herhangi $\epsilon > 0$ için $\|y - x\| < \epsilon$ olacak şekilde en az bir tane $y \in I_e$ vardır. $z = y^+ \wedge x \leq y^+ \in I_e$ elemanını alalım.

$$y \leq y^+ = y \vee 0 \implies y \wedge x \leq y^+ \wedge x \implies -(y^+ \wedge x) \leq -(y \wedge x)$$

olduğundan

$$0 \leq x - z = x - y^+ \wedge x \leq x - [x - (x - y)^+] = (x - y)^+$$

elde edilir. Buradan $\|x - z\| \leq \|x - y\| < \epsilon$ ve $0 \leq z \leq x$'dir. $z \in I_e$ olduğundan $z \leq ke$ özelliğini sağlayacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ vardır. Her $n \geq k$ için $ne \geq ke$'dir.

$$0 \leq x - x \wedge ne \leq x - x \wedge ke \leq x - z$$

elde edilir. Böylece

$$0 \leq \|x - x \wedge ne\| \leq \|x - z\| < \epsilon \implies x - x \wedge ne \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$$

olur.

$(ii) \implies (iii)$ Her $x \in E^+$ için $\|x - x \wedge ne\| \to 0$ olsun. Herhangi $f \in E'$ ve $0 < f$ alalım. Kabul edelim ki $f(e) = 0$ olsun. Her $x \in E^+$ için $0 \leq x \wedge ne \leq ne$ ve $0 \leq f(x \wedge ne) \leq f(ne) = nf(e) = 0$ elde edilir. Her $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in E^+$ için $f(x \wedge ne) = 0$ bulunur. Buradan $f(x) = 0$ ve $f = 0$ olur. Ancak bu durum f'nin pozitif olması ile çelişir.

$(iii) \implies (i)$ Kabul edelim ki I_e ideali E içinde norm yoğun olmasın. Hahn Banach Teoreminden $f(I_e) = 0$ olacak şekilde en az bir tane $f \in E'$ vardır. $f^+ > 0$ alalım.

$$\begin{aligned} f^+(e) &= \sup\{f(y) : y \in E \text{ ve } 0 \leq y \leq e\} \\ &= \sup\{f(y) : y \in I_e \text{ ve } 0 \leq y \leq e\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Ancak bu durum bize çelişki verir. Böylece $E = \bar{I_e}^{\|\cdot\|}$ olur.

□

Sonuç 2.3.24. *E normlu Riesz uzay olmak üzere $e \in E$ güçlü birim olsun. O halde e kuasi iç noktadır. Yani, $I_e = E$ ise $\bar{I_e}^{\|\cdot\|} = E$ olur.*

Örnek 2.3.25. *Örnek 2.2.9'de $C[0,1]$ uzayında $\mathbb{1}$ sabit fonksiyonunun sıra birim(güçlü birim) olduğunu biliyoruz. O halde Sonuç 2.3.24'den $C[0,1]$ uzayında $\mathbb{1}$ sabit fonksiyonu kuasi iç noktadır.*

Sonuç 2.3.26. *E normlu Riesz uzay ve $e \in E$ kuasi iç nokta olsun. Her $u \in E^+$ için $u + e$ bir kuasi iç noktadır.*

Kanıt. e kuasi iç nokta olsun. O halde Önerme 2.3.23'den $\|x - x \wedge n(u+e)\| \to 0$ olur.

$$0 \leq x - x \wedge n(u+e) \leq x - x \wedge ne \implies \|x - x \wedge n(u+e)\| \leq \|x - x \wedge ne\|$$

elde edilir. $\|x - x \wedge n(u+e)\| \to 0$ olduğundan $\|x - x \wedge n(u+e)\| \to 0$ olur. $\square$

Örnek 2.3.27. *$C[0,1]$ uzayında $\mathbb{1}$ sabit fonksiyonunun kuasi iç nokta olduğunu Örnek 2.3.25 gördük. Buradan $C[0,1]$ uzayında $f(x) = \sin x$ olmak üzere $\mathbb{1} + f = \mathbb{1} + \sin x$ kuasi iç noktadır.*

Sonuç 2.3.28. *Eğer E ayrılabilir Banach latis ise E'nin kuasi iç noktaları vardır.*

Kanıt. $M = (x_n)_n \subset E$ olsun. E ayrılabilir olduğundan $\overline{M}^{\|\cdot\|} = E$'dir. $e = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|}{2^n \|x_n\|}$ olarak tanımlayalım.

$$\left\|\frac{|x_n|}{2^n \|x_n\|}\right\| = \frac{\|x_n\|}{2^n \|x_n\|} \leq \frac{1}{2^n} = M_n$$

olur. Burada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ serisi geometrik seri ve $r = \frac{1}{2}$ olduğundan yakınsaktır. O halde e Weierstrass M-testinden tanımlanır. Herhangi $f \in E'$ alalım.

$$f(e) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(|x_n|)}{2^n \|x_n\|} > 0$$

elde edilir. Buradan $e \in E$ kuasi iç noktadır. $\square$

Sonuç 2.3.29. *E normlu Riesz uzay ve $e \in E$ kuasi iç nokta olsun. $e \in E$ zayıf birimdir.*

Kanıt. $e \in E$ kuasi iç nokta olsun. O halde Önerme 2.3.23'den $\|x - x \wedge ne\| \to 0$ olur. Buradan e zayıf birimdir. $\square$

Ancak her zayıf birim kuasi iç nokta olmak zorunda değildir.

Örnek 2.3.30. *$C[0,1]$ uzayında $e(t) = t$ fonksiyonunu düşünelim. e'nin zayıf birim olduğunu gösterelim. Herhangi $f \in C[0,1]$ için*

$$f \wedge ne \uparrow f \iff f(t) \wedge ne(t) = f(t) \wedge nt \leq f(t)$$

olmak üzere $f(t) \wedge nt \in \mathbb{R}$ ve $\sup f(t) \wedge nt = g(t)$ olsun. $g(t) \neq f(t)$ alalım. $f(t) \wedge nt \leq g(t) < f(t)$ olur. $g(t) \leq m(f(t) \wedge nt) \leq f(t) \wedge kt$ olacak şekilde en az bir tane $m \in \mathbb{N}$ vardır. Ancak $g(t)$ supremum olamaz. $e(t) = t$ fonksiyonunun $C[0,1]$ uzayında kuasi iç noktası olmadığını gösterelim. $1(t) = 1 \in C[0,1]$ olmak üzere

$$\|1 - 1 \wedge ne\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} \|1(t) - 1(t) \wedge ne(t)\| = \sup_{t \in [0,1]} |1 - 1 \wedge nt| = 1 \nrightarrow 0$$

olduğundan $e(t) = t$ kuasi iç nokta değildir.

Sonuç 2.3.31. *E sıra sürekli norma sahip Banach latis ise her zayıf birim kuasi iç noktadır.*

Kanıt. e zayıf birim olsun.

$$\begin{aligned} x \wedge ne \uparrow x &\implies \|x \wedge ne\| \uparrow \|x\| \\ &\implies \|x \wedge ne\| \to \|x\| \\ &\implies \|x \wedge ne - x\| \to 0 \end{aligned}$$

olur. Böylece e kuasi iç noktadır. □

3 SIRA VE GÖRECELİ DÜZGÜN YAKINSAKLIK

Bu bölümde sıra yakınsaklığın ve göreceli düzgün yakınsaklıklğın genel özellikleri ve teoremleri verilecektir.

3.1 Sıra Yakınsaklık ve Özellikleri

Sıra yakınsama kavramı Riesz uzayları teorisinde önemli bir yere sahiptir. Sıra yakınsamanın tanımı herhangi bir topolojiye bağlı değildir. Bu bölümde sıra yakınsama ve özellikleri incelenecektir. Bu kısımda [3, 4, 17, 29] kitapları ve makaleleri incelenmiştir.

Tanım 3.1.1. E bir Riesz uzay ile A ve B iki yönlendirilmiş küme olmak üzere $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \subseteq E$ bir net ve $x \in E$ olsun. Her bir $\beta \in B$ ve her $\alpha \geq \alpha_0$ için $|x_\alpha - x| \leq y_\beta \downarrow 0$ olacak şekilde bir tane (y_β) neti ve en az bir tane $\alpha_0 \in A$ var ise (x_α) netine sıra-2 yakınsaktır denir ve $x_\alpha \xrightarrow{o_2} x$ şeklinde gösterilir. x elemanına ise sıra limiti adı verilir.

Genel olarak,

$$x_\alpha \xrightarrow{o_2} x \iff \forall\beta \in B, \exists\alpha_0 \in A, \forall\alpha > \alpha_0 \text{ iken } |x_\alpha - x| \leq y_\beta \downarrow 0$$

olarak tanımlanır.

Lemma 3.1.2. *Riesz uzayında bir netin sıra limiti var ise tektir.*

Kanıt. Kabul edelim ki $x_\alpha \xrightarrow{o_2} x$ ve $x_\alpha \xrightarrow{o_2} z$ olsun. O halde

$$x_\alpha \xrightarrow{o_2} x \iff \forall\beta \in B, \exists\alpha_1 \in A, \forall\alpha > \alpha_1 \text{ iken } |x_\alpha - x| \leq y_\beta \downarrow 0$$
$$x_\alpha \xrightarrow{o_2} z \iff \forall\gamma \in \Gamma, \exists\alpha_2 \in A, \forall\alpha > \alpha_2 \text{ iken } |x_\alpha - z| \leq v_\gamma \downarrow 0$$

$y_\beta \downarrow 0$ ve $v_\gamma \downarrow 0$ olduğundan $(y_\beta + v_\gamma) \downarrow 0$ olur. O halde $\alpha_0 = \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$ olarak seçilirse her $\alpha > \alpha_0$ iken

$$\begin{aligned} |x - z| &\leq |x - x_\alpha + x_\alpha - z| \\ &\leq |x_\alpha - x| + |x_\alpha - z| \\ &\leq (y_\beta + v_\gamma) \downarrow 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $|x - z| = 0$ olur. Böylece $x = z$ elde edilir. □

Teorem 3.1.3. *E bir Riesz uzay (x_α) ve $(z_\beta) \subset E$ iki net olmak üzere $x_\alpha \xrightarrow{o_2} x$ ve $z_\beta \xrightarrow{o_2} z$ olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanır.*

(i) $|x_\alpha| \xrightarrow{o_2} |x|, x_\alpha^+ \xrightarrow{o_2} x^+, x_\alpha^- \xrightarrow{o_2} x^-$ *olur.*

(ii) Her $a, b \in \mathbb{R}$ *için* $ax_\alpha + bz_\beta \xrightarrow{o_2} ax + bz$ *olur.*

(iii) $x_\alpha \vee z_\beta \xrightarrow{o_2} x \vee z$ *ve* $x_\alpha \wedge z_\beta \xrightarrow{o_2} x \wedge z$ *olur.*

(iv) $x_\alpha \uparrow x$ *veya* $x_\alpha \downarrow x$ *ise* $x_\alpha \xrightarrow{o_2} x$ *olur.*

(v) Her $\alpha \geq \alpha_1$ *için* $x_\alpha \leq w$ *ise* $x \leq w$ *olur.*

(vi) $x_\alpha \uparrow$ *ve* $x_\alpha \xrightarrow{o_2} x$ *ise* $x_\alpha \uparrow x$ *olur.*

Kanıt. İlk olarak $x_\alpha \xrightarrow{o_2} x$ olduğundan

$$\forall \gamma \in \Gamma, \exists \alpha_1 \in A, \forall \alpha > \alpha_1 \text{ iken } |x_\alpha - x| \leq y_\gamma \downarrow 0$$

olacak şekilde y_γ neti vardır. Benzer şekilde $z_\beta \xrightarrow{o_2} z$ olduğundan

$$\forall \theta \in \Theta, \exists \beta_1 \in B, \forall \beta > \beta_1 \text{ iken } |z_\beta - z| \leq v_\theta \downarrow 0$$

olacak şekilde v_θ neti vardır.

(i)

$$|x_\alpha^+ - x^+| = |x_\alpha \vee 0 - x \vee 0| \leq |x_\alpha - x| \leq y_\gamma \downarrow 0$$

olup $x_\alpha^+ \xrightarrow{o_2} x^+$ elde edilir. Benzer şekilde,

$$|x_\alpha^- - x^-| = |x_\alpha \wedge 0 - x \wedge 0| \leq |x_\alpha - x| \leq y_\gamma \downarrow 0$$

olup $x_\alpha^- \xrightarrow{o_2} x^-$ olur. Son olarak $|x_\alpha| \xrightarrow{o_2} |x|$ olduğunu göstermek için $x_\alpha^+ \xrightarrow{o_2} x^+$ ve $x_\alpha^- \xrightarrow{o_2} x^-$ olduğunu kullanabiliriz. $|x_\alpha| \xrightarrow{o_2} |x|$ için $|x_\alpha| = x_\alpha^+ + x_\alpha^-$ ve $|x| = x^+ + x^-$ olarak tanımlandığından ve $y_\gamma \downarrow 0$ olduğundan $y_\gamma + y_\gamma = 2y_\gamma \downarrow 0$

$$\begin{aligned} ||x_\alpha| - |x|| &= |(x_\alpha^+ + x_\alpha^-) - (x^+ + x^-)| \\ &= |x_\alpha^+ + x_\alpha^- - x^+ - x^-| \\ &\leq |x_\alpha^+ - x^+| + |x_\alpha^- - x^-| \\ &\leq y_\gamma + y_\gamma \\ &\leq 2y_\gamma \downarrow 0 \end{aligned}$$

olup $|x_\alpha| \xrightarrow{o_2} |x|$ elde edilmiş olur.

(ii) İlk olarak $y_\gamma \downarrow 0$ ve $v_\theta \downarrow 0$ olduğundan $|a|y_\gamma \downarrow 0$ ve $|b|v_\theta \downarrow 0$ olur. Buradan

$$(|a|y_\gamma + |b|v_\theta) \downarrow 0$$

olur.

$$\forall (\gamma, \theta) \in \Gamma \times \Theta, \exists (\alpha_1, \beta_1) \in \Gamma \times \Theta, \forall (\alpha, \beta) > (\alpha_1, \beta_1)$$

iken

$$\begin{aligned} |(ax_\alpha + bz_\beta) - (ax + bz)| &= |ax_\alpha + bz_\beta - ax - bz| \\ &= |a(x_\alpha - x) + b(z_\beta - z)| \\ &\leq |a(x_\alpha - x)| + \|b(z_\beta - z)| \\ &\leq |a||x_\alpha - x| + |b||z_\beta - z| \\ &\leq (|a|y_\gamma + |b|v_\theta) \downarrow 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

(iii)

$$\forall(\gamma,\theta)\in\Gamma\times\Theta,\exists(\alpha_1,\beta_1)\in\Gamma\times\Theta,\forall(\alpha,\beta)>(\alpha_1,\beta_1)$$

iken

$$\begin{aligned}|x_\alpha\vee z_\beta-x\vee z| &= |x_\alpha\vee z_\beta-x\vee z_\beta+x\vee z_\beta-x\vee z|\\ &\leq |x_\alpha\vee z_\beta-x\vee z_\beta|+|x\vee z_\beta-x\vee z|\\ &\leq |x_\alpha-x|+|z_\beta-z|\\ &\leq (y_\gamma+v_\theta)\downarrow 0\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\forall(\gamma,\theta)\in\Gamma\times\Theta,\exists(\alpha_1,\beta_1)\in\Gamma\times\Theta,\forall(\alpha,\beta)>(\alpha_1,\beta_1)$$

iken

$$\begin{aligned}|x_\alpha\wedge z_\beta-x\wedge z| &= |x_\alpha\wedge z_\beta-x\wedge z_\beta+x\wedge z_\beta-x\wedge z|\\ &\leq |x_\alpha\wedge z_\beta-x\wedge z_\beta|+|x\wedge z_\beta-x\wedge z|\\ &\leq |x_\alpha-x|+|z_\beta-z|\\ &\leq (y_\gamma+v_\theta)\downarrow 0\end{aligned}$$

olur.

(iv) $x_\alpha\uparrow x$ durumunu ele alalım. $x_\alpha\uparrow$ olduğundan $-x_\alpha\downarrow$ olur. $(x-x_\alpha)\downarrow 0$ olduğunu gösterelim. Bunun için her $t_{\alpha_1},t_{\alpha_2}\in(x-x_\alpha)$ için $t_{\alpha_1}=x-x_{\alpha_1}$ ve $t_{\alpha_2}=x-x_{\alpha_2}$ olur. $-x_{\alpha_1},-x_{\alpha_2}\in -x_\alpha$ ve $-x_\alpha\downarrow$ olduğudan $-x_{\alpha_3}\leq -x_{\alpha_1}$ ve $-x_{\alpha_3}\leq -x_{\alpha_2}$ olacak şekilde $-x_{\alpha_3}\in -x_\alpha$ vardır. Buradan $x-x_{\alpha_3}\leq x-x_{\alpha_1}$ ve $x-x_{\alpha_3}\leq x-x_{\alpha_2}$ olur. O halde $(x-x_\alpha)\downarrow$ elde edilir. $\sup(x_\alpha)=x$ ve $\inf(-x_\alpha)=-x$ olacağından $\inf(x-x_\alpha)=x+\inf(-x_\alpha)=x+(-x)=0$ olur. Benzer şekilde $x_\alpha\downarrow x$ durumu gösterilir.

(v) $x_\alpha\leq w$ ise $w-x_\alpha\geq 0$ olur. Ayrıca $x_\alpha\xrightarrow{o_2}x$ olduğundan $-x_\alpha\xrightarrow{o_2}-x$ olur. O halde $(w-x_\alpha)\xrightarrow{o_2}(w-x)$ elde edilir. Buradan $(w-x_\alpha)^+=w-x\ _\alpha\xrightarrow{o_2}(w-x)^+=(w-x)$ yazılır ve $w-x\geq 0$ ise $w\geq x$ bulunur.

(vi) $x_\alpha\uparrow$ ve $x_\alpha\xrightarrow{o_2}x$ olsun. $x_\alpha\uparrow$ olduğundan $(-x_\alpha)\downarrow$ olur. Her $x\in E$ için $x^-\leq|x|$ olduğundan $(x-x_\lambda)^-\leq|x-x_\alpha|$ sağlanır ve her keyfi α için

$$\begin{aligned}\alpha\leq\alpha' &\Longrightarrow x_\alpha\leq x_{\alpha'}\\ &\Longrightarrow -x_\alpha\geq -x_{\alpha'}\\ &\Longrightarrow x-x_{\alpha'}\leq x-x_\alpha\\ &\Longrightarrow -(x-x_\alpha)\leq-(x-x_{\alpha'})\\ &\Longrightarrow -(x-x_\alpha)\vee 0\leq-(x-x_{\alpha'})\vee 0\\ &\Longrightarrow (x-x_\alpha)^-\leq(x-x_{\alpha'})^-\\ &\Longrightarrow 0\leq(x-x_\alpha)^-\leq(x-x_{\alpha'})^-\leq y_\gamma\downarrow 0\\ &\Longrightarrow 0\leq(x-x_\alpha)^-\leq inf y_\gamma=0\\ &\Longrightarrow -(x-x_\alpha)\vee 0=0\\ &\Longrightarrow -(x-x_\alpha)\leq 0\\ &\Longrightarrow x_\alpha-x\leq 0\\ &\Longrightarrow x_\alpha\leq x\end{aligned}$$

olup x bir üst sınırdır. Her $\alpha > \alpha_1$ için

$$0 \leq (x - x_\alpha) = |x - x_\alpha| \leq y_\gamma \downarrow 0$$

elde edilir.

$$\inf(x - x_\alpha) = 0 \implies -\sup(x - x_\alpha) = 0 \implies \sup x_\alpha = x$$

olur. Buradan $x_\alpha \uparrow x$ elde edilir.

$\square$

Tanım 3.1.4. E bir Riesz uzay, $(x_\alpha) \subseteq E$ bir net ve $x \in E$ olsun. Her bir $\alpha \in A$ ve her $\alpha \geq \alpha_0$ için $|x_\alpha - x| \leq y_\alpha$ olacak şekilde $y_\alpha \downarrow 0$ neti ve en az bir tane $\alpha_0 \in A$ var ise (x_α) netine sıra-1 yakınsaktır denir ve $x_\alpha \xrightarrow{o_1} x$ şeklinde gösterilir. x elamanına (x_α) netinin sıra limiti adı verilir.

Her zaman sıra-1 yakınsak ise sıra-2 yakınsaktır. Ancak tersi her zaman doğru olmak zorunda değildir. Aşağıdaki örnek [30] kaynağında görülebilir.

Örnek 3.1.5.

$$E = \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : g = c\mathbb{1} + f, c \in \mathbb{R} \text{ ve } f \text{ sonlu destek kümesine sahip fonksiyon } \}$$

olarak tanımlayalım. $(E, \leq)$ *sıralı vektör uzaydır.*

$$(g_1 \vee g_2)(x) = g_1(x) \vee g_2(x)$$

olarak tanımlansın. E bir Riesz uzaydır. $\{n\}$ tek elemanlı kümesinin karakteristik fonksiyonu her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = \chi_{\{n\}}$ olarak alalım. x_n dizisinin sıra-2 yakınsak olduğunu gösterelim.

$$\Lambda = \{\mathbb{R} \text{ 'da tüm sonlu alt kümelerin kümesi } \}$$

olarak tanımlayalım. Her $\alpha \in \Lambda$ için z_α, α'nın karakteristik fonksiyonu olsun. (z_α) bir nettir ve $z_\alpha \uparrow \mathbb{1}$ olur. $y_\alpha = \mathbb{1} - z_\alpha$ olarak alınırsa $y_\alpha \downarrow 0$ elde edilir. O halde her bir $\alpha \in \Lambda$ için $m > \max \alpha$ ve her $n > m$ iken $x_n \leq y_\alpha$ olacak şekilde en az bir tane $m \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan $x_n \xrightarrow{o_2} 0$ elde edilir. x_n dizisinin 0 elemanına sıra-1 yakınsak olmadığını gösterelim. Kabul edelim ki $x_n \xrightarrow{o_1} 0$ olsun. Buradan her $n > n_0$ için $x_n \leq u_n$ olacak şekilde $u_n \downarrow 0$ dizisi vardır. Böylece her $k \geq n$ için $x_k \leq u_n$ olur. Buradan sonlu küme F_n hariç $1 \leq u_n$ bulunur. Herhangi $t \in \cup_{n=1}^{\infty} F_n$ elemanı için $u_n(t) \geq 1$ her $n \in \mathbb{N}$ bulunur ki $u_n \downarrow 0$ koşulu ile çelişki elde edilir.

Aşağıdaki lemma'da Dedekind tamlanışı ile sıra yakınsaklık tanımından bahsedileceğinden öncelikle Dedekind tamlık tanımını hatırlayalım. E bir Riesz uzay olmak üzere E'nin boş kümeden farklı her üstten sınırlı alt kümesinin supremum değeri var ise E uzayına *Dedekind tam uzay* denir. Benzer şekilde E'nin boş kümeden farklı her üstten sınırlı sayılabilir alt kümesinin supremum değeri var ise E uzayına *Dedekind σ-tam uzay* denir.

Lemma 3.1.6. *E bir Riesz uzay olsun.*

- *E Riesz uzayı Dedekind tam olması için gerek ve yeter koşul $0 \leq x_\alpha \uparrow$ koşulunu sağlayan E içindeki her (x_α) neti için $x_\alpha \uparrow x$ olan bir $x \in E$ var olmasıdır.*

- *E Riesz uzayı Dedekind σ-tam olması için gerek ve yeter koşul $0 \leq x_n \uparrow$ koşulunu sağlayan E içindeki her (x_n) dizisi için $x_n \uparrow u$ olan bir $x \in E$ var olmasıdır.*

Tanım 3.1.7. E bir Riesz uzay olmak üzere F, E'nin Riesz alt uzayı olsun. Her $x \in E$ için $x \leq v$ olacak şekilde $v \in F$ varsa F'ye majorizing uzay denir.

Teorem 3.1.8. *(Nakano-Judin) E Arşimet Riesz uzay olsun. E uzayına Riesz izomorfik olacak şekilde majorizing ve sıra yoğun Riesz alt uzayını içeren E^δ Dedekind tam Riesz uzay vardır. Böylece E, E^δ uzayının Riesz alt uzayıdır ve $x \in E^\delta$ için*

$$x = \sup\{y \in E : y \leq x\} = \inf\{z \in E : z \geq x\}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.1.9. E Arşimet Riesz uzay olmak üzere Teorem 3.1.8'da belirtilen koşulu sağlayan E^δ uzayına E'nin Dedekind tamlanışı denir.

Lemma 3.1.10. *E bir Riesz uzay olmak üzere E^δ, E'nin Dedekind tamlanışı ve $(x_\alpha) \subseteq E$ bir net olsun. E içinde $x_\alpha \xrightarrow{o_2} x$ olması için gerek ve yeter koşul E^δ içinde $x_\alpha \xrightarrow{o_1} x$ olmasıdır.*

Kanıt. ($\Rightarrow$) E içinde $x_\alpha \xrightarrow{o_2} x$ olsun. O halde

$$\forall \beta \in B, \exists \alpha_0 \in A, \forall \alpha \geq \alpha_0 \text{ iken } |x_\alpha - x| \leq z_\beta \downarrow 0$$

olacak şekilde en az bir tane (z_β) neti vardır.

$$B = \{u \in E^\delta : \exists \beta \geq \beta_0 \text{ için } z_\beta \leq u\}$$

olarak tanımlayalım ve B içinde $u_1 \geq u_2 \iff E^\delta$ içinde $u_1 \leq u_2$ olsun. $u = y_\alpha$ olacak şekilde E^δ içinde bir net alalım.

$$y_\alpha = \sup\{z_\beta \in E : z_\beta \leq y_\alpha\} = z_{\beta_1}$$

olarak tanımlayalım. Buradan $y_\alpha \downarrow 0$ olur.

$$\exists \alpha_0 \in A, \forall \alpha \geq \alpha_0 \text{ için } |x_\alpha - x| \leq z_\beta \leq z_{\beta_1} \leq y_\alpha \downarrow 0$$

Böylece E^δ içinde $x_\alpha \xrightarrow{o_1} x$ olur.

($\Leftarrow$) E^δ içinde $x_\alpha \xrightarrow{o_1} x$ olsun. O halde $|x_\alpha - x| \leq z_\alpha$ olacak şekilde $z_\alpha \downarrow 0$ neti vardır.

$$B = \{\beta \in E : \exists \alpha \geq \alpha_0 \text{ için } \beta \geq z_\alpha\}$$

ve B' de $\beta_1 \geq \beta_2$ iken E' de $\beta_1 \leq \beta_2$ olarak tanımlayalım. $y_\beta = \beta$ olacak şekilde bir net alalım. E, E^δ' da sıra yoğun olduğundan $y_\beta \downarrow 0$ elde edilir. $\beta \in B$ için en az bir tane α_1 vardır $z_{\alpha_1} \leq \beta = y_\beta$ olur. Her $\alpha \geq \alpha_1$ için

$$|x_\alpha - x| \leq z_\alpha \leq z_{\alpha_1} \leq y_\beta \downarrow 0$$

Böylece E içerinde $x_\alpha \xrightarrow{o_2} x$ olur.

□

Buradan sonra sıra yakınsaklık tanımı olarak sıra-2 yakınsaklık tanımı kullanılacaktır ve $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ olarak göstereceğiz.

Örnek 3.1.11. *(X, Σ, μ) bir ölçü uzayı ve μ, σ-sonlu olmak üzere*

$$L_o(\mu) = \{f : X \to \mathbb{R} \text{ ölçülebilir fonksiyon, } f(x) < \infty \text{ h.h.h. }\}$$

olarak tanımlayalım. $(f_n) \subseteq L_o(\mu)$ bir dizi ve $f \in L_o(\mu)$ olsun. Her $x \in X$ ve her μ-hhh için $f_n(x) \to f(x)$ oluyor ise $f_n \to f$ μ-hhh noktasal yakınsar ve $f_n \xrightarrow{n} f$ şeklinde gösterelim. Her $\epsilon > 0$ için $\mu(A) = 0$ ve $\lim \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) = 0$ olacak şekilde en az bir tane $A \in \Sigma$ var ise $f_n \to f$ ölçüde yakınsaktır ve $f_n \xrightarrow{\mu} f$ şeklinde gösterilir. μ, σ-sonlu olduğu için $L_o(\mu)$ içinde aşağıdaki ifadeler doğrudur.

$$f_n \xrightarrow{o} f \iff f_n \xrightarrow{n} f$$
$$f_n \xrightarrow{\mu} f \iff f_{n_{k_j}} \xrightarrow{o} f$$

Kanıt. Öncelikle birinci ifadeyi ispat edelim. $f_n \xrightarrow{o} f$ olsun. O halde en az bir tane $\alpha_0 \in N$ için her $\alpha \geq \alpha_0$ iken $|f_n(x) - f(x)| \leq g_m \downarrow 0$ olacak şekilde en az bir tane (g_m) vardır. $g_m = \frac{1}{m}$ alırsak $\inf g_m = 0$ olur. Her $\epsilon > 0$ için en az bir tane $N = \frac{1}{\epsilon}$ olarak seçilirse her $n > N$ için $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \epsilon$. O halde $f_n \xrightarrow{n} f$ elde edilir. Diğer yönü için $f_n \xrightarrow{n} f$ olsun. Buradan $(f_n - f) \xrightarrow{n} 0$ olur. Egoroff teoreminden en az bir tane $\lambda_n \uparrow \infty$ vardır ve $\lambda_n(f_n - f) \xrightarrow{n} 0$ elde edilir. Burada $h_n = \lambda_n(f_n - f)$ ve $h = \sup h_n$ olarak tanımlansın. $g_n = \frac{1}{\lambda} h \downarrow 0$ olur.

$$\begin{aligned} |f_n - f| &\leq \frac{\lambda_n}{\lambda_n} |f_n - f| \\ &\leq \frac{1}{\lambda} sup \lambda_n (f_n - f) \\ &\leq \frac{1}{\lambda_n} = g_n \downarrow 0 \end{aligned}$$

İkinci ifadeyi ispat edelim. İlk olarak $f_n \xrightarrow{\mu} f \implies f_{n_{k_j}} \xrightarrow{o} f$ olduğunu gösterelim. $f_n \xrightarrow{\mu} f$ olsun. Her $\epsilon > 0$ ve $\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x) \geq \epsilon\}) = 0$ için

$$\mu(\{x \in X : |f_{n_1}(x) - f(x) \geq 1\}) \leq \frac{1}{2}$$

olacak şekilde en az bir tane $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Benzer şekilde

$$\mu(\{x \in X : |f_{n_2}(x) - f(x) \geq \frac{1}{2}\}) \leq \frac{1}{2^2}$$

olmak üzere $n_2 > n_1$ olacak şekilde $n_2 \in \mathbb{N}$ vardır. Bu şekilde devam edilirse

$$\mu(\{x \in X : |f_{n_k}(x) - f(x) \geq \frac{1}{k}\}) \leq \frac{1}{2^k}$$

olmak üzere $n_k > n_{k-1}$ olacak şekilde $n_k \in \mathbb{N}$ vardır.

$$A_k = \{x \in X : |f_{n_k}(x) - f(x)| > \frac{1}{k}\}$$

olarak tanımlayalım. $x \notin \cap_{j=1}^{\infty} \cup_{k=j}^{\infty} A_k$ ise $x \notin \cup_{k=j}^{\infty} A_k$ olacak şekilde bir j vardır. Böylece $k = j, k = j+1, k = j+2, \cdots$ için $x \notin A_k$ olur. O halde $|f_{n_k}(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k}$'dır. Buradan $\cap_{j=1}^{\infty} \cup_{k=j}^{\infty} A_k$ kümesinin dışında f_{n_k} dizisi f'e yakınsaktır. O halde $f_{n_k} \xrightarrow{hhh} f$ olur. Böylece ilk özellikten $f_{n_k} \xrightarrow{n} f$, dolayısıyla $f_{n_k} \xrightarrow{o} f$ elde edilir.
$f_{n_{k_j}} \xrightarrow{o} f \implies f_n \xrightarrow{\mu} f$ olduğunu gösterelim. f_n'nin her alt dizisi 0'a hemen hemen her yerde yakınsak bir alt diziye sahip olsun. İlk olarak $\mu(A) < \infty$ olacak şekilde $A \in \Sigma$ için $\lim_{n\to\infty} \int_A \frac{f_n}{1+f_n} \mathrm{d}\mu = 0$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $\int_A \frac{f_n}{1+f_n} \mathrm{d}\mu$ 0'a yakınsak olmasın. O halde en az bir tane $\epsilon > 0$ için $\int_A \frac{g_n}{1+g_n} \mathrm{d}\mu \geq \epsilon$ olacak şekilde (f_n)'nin (g_n) alt dizisi vardır. Aynı zamanda kabulden (g_n)'nin bir alt dizisi vardır (h_n) öyle ki $h_n \xrightarrow{hhh} 0$ olur. Buradan $\frac{h_n}{1+h_n} \xrightarrow{hhh} 0$ ve $0 \leq \frac{h_n}{1+h_n} \leq 1$ olduğundan Lebesgue Yakınsaklık Teoreminden $\int_A \frac{h_n}{1+h_n} \mathrm{d}\mu \to 0$ elde edilir. Ancak kabulden $\int_A \frac{h_n}{1+h_n} \mathrm{d}\mu \geq \epsilon$ olduğundan çelişki olur. O halde $\lim_{n\to\infty} \int_A \frac{f_n}{1+f_n} \mathrm{d}\mu = 0$ olmalıdır.
$A_n = \{w \in A : f_n(w)\epsilon\}$ tanımlayalım.

$$t \geq \epsilon \iff \frac{t}{1+t} \geq \frac{\epsilon}{1+\epsilon}$$

olduğundan $A_n = \{w \in A : \frac{f_n(w)}{1+f_n(w)} \geq \frac{\epsilon}{1+\epsilon}\}$ olur. Buradan $\frac{f_n}{1+f_n}\chi_{A_n} \geq \frac{\epsilon}{1+\epsilon}\chi_{A_n}$ ve böylece

$$\frac{\epsilon}{1+\epsilon}\mu(A_n) = \int_{A_n} \frac{\epsilon}{1+\epsilon}\chi_{A_n} \mathrm{d}\mu \leq \int_{A_n} \frac{f_n}{1+f_n}\chi_{A_n} \mathrm{d}\mu \to 0$$

Böylece $\mu(A_n) \to 0$ olur. Buradan $f_n \xrightarrow{\mu} 0$ elde edilir. □

Tanım 3.1.12. E bir Riesz uzay ve $(x_\alpha) \subset E$ bir net olsun. $(x_\alpha - x_\beta)_{(\alpha,\beta)} \xrightarrow{o} 0$ ise (x_α) netine sıra-Cauchy denir.

Not 3.1.13. *E bir Dedekind tam Riesz uzay ve $(x_\alpha) \subset E$ bir net olsun.*

$$x_\alpha \xrightarrow{o} x \iff \inf_\alpha \sup_{\beta\geq\alpha} |x_\beta - x| = 0 \iff x = \inf_\alpha \sup_{\beta\geq\alpha} x_\beta = \sup_\alpha \inf_{\beta\geq\alpha} x_\beta$$

Tanım 3.1.14. E bir Riesz uzay, $F \subset E$ alt kümesi olsun. Herhangi $(x_\alpha) \subseteq F$ ve E içinde $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ iken $x \in F$ oluyor ise F'ye sıra kapalı denir. Eğer bu tanımda net yerine dizi alırsak σ-sıra kapalı adı verilir.

Lemma 3.1.15. *E Riesz uzayının F solid alt kümesinin sıra kapalı olması için gerek ve yeter koşul $(x_\alpha) \subseteq F$ olmak üzere $0 \leq x_\alpha \uparrow x$ neti için $x \in F$ olmasıdır.*

Kanıt. ($\Rightarrow$) F solid, sıra kapalı ve $(x_\alpha) \subseteq F$ için $x_\alpha \uparrow x$ olsun. $x_\alpha \uparrow x$ olduğundan Teorem 3.1.3'den $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ olur. F sıra kapalı olduğundan $x \in F$ elde edilir.

($\Leftarrow$) $(x_\alpha) \subseteq F$ solid, $0 \leq x_\alpha \uparrow x$ ve $x \in F$ olsun. $x_\alpha \uparrow x$ olduğundan Teorem 3.1.3'den $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ olur. O halde $|x_\alpha - x| \leq y_\beta$ olacak şekilde $y_\beta \downarrow 0$ neti vardır. Burada $0 \leq (|x| - y_\beta)^+ \uparrow |x|$ ve $(|x| - y_\beta)^+ \leq |x_\alpha|$ koşulları sağlanır. F solid olduğundan her α için $(|x| - y_\beta)^+ \in F$'dir. $(|x| - y_\beta)^+ \uparrow |x|$ olduğundan $(|x| - y_\beta)^+ \xrightarrow{o} |x|$ olur. $x \in F$ olduğundan F sıra kapalıdır.

□

Bu lemmadan sonra ön bilgiler ünitesinde verilen band kavramını tekrar düşünebiliriz. $I \subseteq E$ bir ideal olmak üzere eğer I sıra kapalı ise band adını alır. Band için verilen bütün sonuçlar sıra kapalılık kavramı ile tekrar ispatlanabilir.

E bir Riesz uzay, F Riesz alt uzayı olsun. Eğer F'in her alt kümesinin supremum değeri veya infimum değeri F'in içinde yer alıyor ise F, E'nin içine gömülebilir denir.

Tanım 3.1.16. E bir Riesz uzay olmak üzere F, E'nin Riesz alt uzayı ve $K \subseteq F$ olsun. K'nın E içinde ki infimum değeri ile F içinde ki infimum değeri aynı ise F'ye regüler uzay denir.

Teorem 3.1.17. *E bir Riesz uzay ve F, E'nin Riesz alt uzayı olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.*

(i) F, E'nin regüler alt uzayıdır.

(ii) Eğer $(x_\alpha) \subseteq F$ neti F içerisinde $x_\alpha \downarrow 0$ ise E içerisinde de $x_\alpha \downarrow 0$ olur.

(iii) Eğer $(x_\alpha) \subseteq F$ neti F içerisinde $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ ise E içerisinde de $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ olur.

Kanıt. (i) $\implies$ (ii) F, E'nin regüler Riesz alt uzayı olsun. Bu durumda her $u, v \in F$ ikilisi için $v \vee v \in F$ ve $u \wedge v \in F$ ve F regüler olduğundan bu supremum veya infimum değeri E içerisinde de aynıdır. $(x_\alpha) \subseteq F$ neti $x_\alpha \downarrow 0$ ise $-x_\alpha \uparrow 0$ olur. Bu supremum değeri E içerisinde de aynı olacağından E içerisinde de $-x_\alpha \uparrow 0$ olur. Böylece E içerisinde $x_\alpha \downarrow 0$ elde edilir.

(ii) $\implies$ (iii) $(x_\alpha) \subseteq F$ neti için $x_\alpha \downarrow 0$ olmak üzere $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ olsun. F içinde $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ olduğundan $(x_\alpha - x) \downarrow 0$ ve $(x_\alpha - x) \xrightarrow{o} 0$'dır. Kabulden E içinde $(x_\alpha - x) \downarrow 0$ olur. Sıra yakınsaklık özelliğinden E içinde $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ olur.

(iii) $\implies$ (i) $(x_\alpha) \subseteq F$ neti için $x_\alpha \downarrow$ olmak üzere F içinde $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ olsun. Buradan $(x_\alpha - x) \xrightarrow{o} 0$ yazılır. F içinde $(x_\alpha - x) \xrightarrow{o} 0$ ve $(x_\alpha - x) \downarrow$ olduğundan sıra yakınsaklık özelliğinden $(x_\alpha - x) \downarrow 0$ sağlanır. Kabulden E içinde de $(x_\alpha - x) \downarrow 0$ koşulu sağlandığından F regülerdir.

□

Lemma 3.1.18. *Her I ideali regüler Riesz alt uzaydır.*

Kanıt. I bir ideal, $(x_\alpha) \subseteq I$ ve I içerisinde $x_\alpha \downarrow 0$ olmak üzere E içerisinde $\inf(x_\alpha) = e \neq 0$ olsun. İnfimum özelliğinden her α için $0 < e < x_\alpha$ olur ve I bir ideal olduğundan $e \in I$ elde edilir. Böylece I içerisinde $\inf(x_\alpha) = e$ elde edilir. Bu durum e'nin 0 olması ile çelişir. □

Her regüler Riesz alt uzayı ideal olmak zorunda değildir. Örneğin; $A = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ uzayı $\mathbb{R}^2$'de Riesz alt uzaydır. Aynı zamanda her $u, v \in A$ için $u = (u_1, u_1)$ ve $v = (v_1, v_1)$ olmak üzere A içerisinde $u \vee v = (u_1 \vee v_1, u_1 \vee v_1)$ tanımlanır ve $\mathbb{R}^2$ içerisinde de aynıdır. Böylece A regülerdir. Ancak A bir ideal değildir.

Tanım 3.1.19. E bir Riesz uzay ve F Riesz alt uzay olsun.

- E içerisinde ki her $0 < x$ için $0 \leq y \leq x$ olacak şekilde en az bir tane $y \in F$ var ise F, E içerisinde sıra yoğundur denir.
- E içerisinde ki her $0 < x$ için $0 \leq x_\alpha \uparrow x$ olacak şekilde $(x_\alpha) \subseteq F$ dizisi var ise F, E içerisinde süper sıra yoğundur denir.

Her süper sıra yoğun sıra yoğundur. Ancak tersi her zaman doğru olmak zorunda değildir. Örneğin; $E = \mathbb{R}^2$' de lexicografik sıralamayı ve $F = y$-eksenini olarak düşünelim. F sıra yoğundur. Ancak $(0,1)$ elemanı için $(0,1) = \sup\{y \in F^+ : 0 \leq y \leq (1,0)\}$ olacak şekilde $y \in F^+$ elemanı yoktur. Bu durumda F süper sıra yoğun değildir.

Teorem 3.1.20. *Her sıra yoğun Riesz alt uzayı regüler Riesz alt uzaydır.*

Kanıt. Kabul edelim ki F sıra yoğun ancak regüler olmayan bir Riesz alt uzay olsun. Bu durumda $(x_\alpha) \subseteq F$ neti F içerisinde $x_\alpha \downarrow 0$ olmak üzere Teorem 3.1.17'dan E içinde $x_\alpha \downarrow 0$ koşulu sağlanmaz. Böylece bir tane $0 < x \in E$ için $0 < x \leq x_\alpha$ olur. F, E içerisinde sıra yoğun olduğundan $0 < y < x$ olacak şekilde bir tane $y \in F$ vardır. Buradan F içinde tüm α indisleri için $0 < y \leq x_\alpha$ olur. Bu durum $x_\alpha \downarrow 0$ olması ile çelişir. Bu durumda F regüler uzaydır. □

Teorem 3.1.21. *E Arşimet Riesz uzay olmak üzere F, E'nin sıra yoğun Riesz alt uzayı olsun. F Dedekind tam ise F, E içinde idealdir.*

Kanıt. $y \in F$ ve $x \in E$ için $0 \leq x \leq y$ olsun. E Arşimet Riesz uzay ve F, E içinde sıra yoğun olduğundan Teorem 2.2.40'dan E içinde $0 \leq x_\alpha \uparrow x$ olacak şekilde $(x_\alpha) \subset F$ neti vardır. F Dedekind tam olduğundan Lemma 3.1.6'den F içinde $0 \leq x_\alpha \uparrow w$ olacak şekilde $w \in F$ vardır. Teorem 3.1.17'den F regüler Riesz alt uzay olur ve böylece E içinde $x_\alpha \uparrow w$ elde edilir. Buradan $x = w \in F$ olur. O halde F, E uzayının bir idealidir. □

Tanım 3.1.22. E bir Riesz uzay ve F, E'nin Riesz alt uzayı olsun. Her $x \in E$ elemanı F içinde bir netin sıra limiti oluyor ise F, E içinde sıra yakınsaklığa göre yoğundur denir.

Genel olarak F, E içerisinde sıra yoğun ise sıra yakınsaklığa göre yoğundur. Ancak tersi her zaman doğru olmak zorunda değildir.

Örnek 3.1.23. *g sürekli fonksiyon ve h sonlu tane nokta hariç sıfır değerine eşit fonksiyon olmak üzere E, $f = g + h$ formunda yazılabilen $[0,1]$ üzerinde reel değerli fonksiyonlar kümesi olsun. Buradan E, $\mathbb{R}^{[0,1]}$'in Riesz alt uzayıdır. $F = C[0,1]$ olmak üzere F, E'nin Riesz alt uzayıdır. F sıra yoğun değildir. Gerçekten,*

$$\chi_{\frac{1}{2}} = \begin{cases} 1 & x = \frac{1}{2} \\ 0 & x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

olmak üzere $0 \leq g \leq \chi_{\frac{1}{2}}$ olacak şekilde $g \in C[0,1]$ sürekli fonksiyonu yoktur.

Teorem 3.1.24. *E bir Riesz uzay ve $F \subset E$ sıra yoğun, majorizing ve regüler alt uzayı ve $(x_\alpha) \subset F$ bir net olsun.*

F içinde $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ olması için gerek ve yeter koşul E içinde $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ olmasıdır.

Kanıt. ($\Rightarrow$) F regüler olduğundan Teorem 3.1.17'den F içinde $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ ise E içinde $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ sağlanır.

($\Leftarrow$) E içinde $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ olsun. O halde $|x_\alpha| \leq u_\beta \downarrow 0$ olacak şekilde (u_β) neti vardır. $A = \{y \in F : \exists\beta \text{ için } y \geq u_\beta\}$ olarak tanımlayalım. E içinde $\inf A = 0$ olur. Kabul edelim ki F içinde $\inf A \neq 0$ olsun. O halde $0 \leq z \leq A$ olacak şekilde

$z \in E$ vardır. Buradan $z \leq \{y \in F : y \geq u_\beta\}$ olacağından $z \leq u_\beta$ olur. O halde $z = 0$ elde edilir. F içinde $\inf A = 0$ olur. A aşağı yönlendirilmiş küme olduğundan A, F içinde azalandır. Böylece A'yı F içinde azalan bir net olarak düşünebiliriz. $|x_\alpha| \leq u_\beta \downarrow 0$ olduğundan F içinde $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ olur.

□

Sonuç 3.1.25. *E bir Riesz uzay ve $(x_\alpha) \subset E$ bir net olmak üzere E içerisinde $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ olması için gerek ve yeter koşul E^δ içerisinde $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ olmasıdır.*

Teorem 3.1.26. *E bir Riesz uzay ve F, E'in regüler Riesz alt uzayı olsun. F^δ, E^δ içinde regüler Riesz alt uzaydır.*

Lemma 3.1.27. *E bir Riesz uzay ve F, E'nin regüler Dedekind tam Riesz alt uzayı olsun. $(y_\alpha) \subset F$ sıra sınırlı bir net ve $x \in E$ olmak üzere E içinde $y_\alpha \xrightarrow{o} x$ ise $x \in F$ ve F içinde $y_\alpha \xrightarrow{o} x$ olur.*

Kanıt. E^δ, E'in Dedekind tamlanışı ve $(y_\alpha) \subset F$, $x \in E$ olmak üzere E içinde $y_\alpha \xrightarrow{o} x$ olsun. $y_\alpha \xrightarrow{o} x$ olduğundan $x = \inf_\alpha \sup_{\beta \geq \alpha} y_\beta = \sup_\alpha \inf_{\beta \geq \alpha} y_\beta$ olur. F Dedekind tam olduğundan supremum ve infimum değerleri vardır. Ayrıca F regüler ve $F \subset E$ olduğundan F içindeki supremum ve infimum değerleri E ile aynıdır. Böylece $x \in F$ ve F içinde $y_\alpha \xrightarrow{o} x$ elde edilir. □

Sonuç 3.1.28. *E bir Riesz uzay ve F, E'nin regüler Riesz alt uzayı olsun. F içinde $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ olması için gerek ve yeter koşul her $(x_\alpha) \subset F$ sıra sınırlı neti için E içinde $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ olmasıdır.*

Kanıt. $(\Rightarrow)$ Teorem 3.1.17'dan açıktır.

$(\Leftarrow)$ Her sıra sınırlı $(x_\alpha) \subset F$ neti için E içinde $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ olsun. Sonuç 3.1.25'dan E içinde $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ olması için gerek ve yeter koşul E$^\delta$ içinde $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ olmasıdır. Ayrıca E bir Riesz uzay ve F, E'nin regüler Riesz alt uzayı olmak üzere F^δ, E^δ'nın regüler Riesz uzayıdır. Böylece Teorem 3.1.17'den F^δ içinde $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ olur. Buradan F^δ içinde $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ olduğundan Sonuç 3.1.25'dan F içinde $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ elde edilir.

□

Sonuç 3.1.29. *E bir Riesz uzay ve F, E'nin regüler Riesz alt uzayı olsun. E içerisinde F sıra yakınsaklığa göre yoğun ise F, E içerisinde sıra yoğundur. Dahası, F Dedekind tam ise F, E'nin bir idealidir.*

Kanıt. F, E içerisinde sıra yakınsaklığa göre yoğun olsun. F, E'nin regüler Riesz alt uzayı olduğundan F^δ, E^δ içerisinde regüler Riesz alt uzayıdır. F^δ, E^δ içerisinde ideal olduğunu göstermeliyiz. $b \in F^\delta$ ve $a \in E^\delta$ olmak üzere $0 \leq a \leq b$ olsun.

$$[0, a] = \{z \in E^\delta : 0 \leq a \leq b\}$$

olarak tanımlansın. E, E^δ içerisinde sıra yoğun olduğundan $a \in E^\delta$ için $a = \sup[0, a] \cap E$ olur. $x \in [0, a] \cap E$ alalım. F, E içerisinde sıra yakınsaklığa göre yoğun olduğundan E içerisinde $y_\alpha \xrightarrow{o} x$ olacak şekilde $(y_\alpha) \subset F$ neti vardır. Sonuç 3.1.25'den E içerisinde $y_\alpha \xrightarrow{o} x$ olduğundan E^δ içerisinde de $y_\alpha \xrightarrow{o} x$ olur. $z_\alpha = |z_\alpha| \wedge b$ olarak tanımlansın. z_α, F^δ içerisinde sıra sınırlı bir nettir ve $z_\alpha \xrightarrow{o} x$ olur. Böylece Lemma 3.1.27'dan $x \in F^\delta$ elde edilir. Buradan E^δ içerisinde $a = \sup[0, a] \cap F^\delta$ olur. Ancak F^δ içerisinde $[0, a] \cap F^\delta$ sıra sınırlı olduğundan E^δ içerisindeki supremum değeri ile F^δ içerisinde supremum değeri aynıdır. Böylece $a \in F^\delta$ elde edilir. F^δ solid olur. Buradan F^δ, E^δ içerisinde bir idealdir. F'nin E içerisinde sıra yoğun olduğunu göstermeliyiz. $x \in E^+$ alalım. F, E içerisinde sıra yakınsaklığa göre yoğun olduğundan $y_\alpha \xrightarrow{o} x$ olacak şekilde $y_\alpha \subset F$ neti vardır. Buradan $|y_\alpha| \vee x \xrightarrow{o} x$ elde edilir. O halde $z = |y_{\alpha_0}| \vee x > 0$ olacak şekilde en az bir tane α_0 vardır. F^δ bir ideal olduğundan $z \in F^\delta$. F^δ içerisinde F'nin sıra yoğun olduğundan $0 < y \leq z \leq x$ olacak şekilde $y \in F$ vardır. Böylece F, E içerisinde sıra yoğundur. F Dedekind tam ise E^δ'nın bir idealidir. Böylece F, E'nin bir idealidir.

□

Lemma 3.1.30. *E sıra sürekli norma sahip Riesz uzay olması için gerek ve yeter koşul $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ ise $x_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ olmasıdır.*

Kanıt. ($\Rightarrow$) E sıra sürekli norma sahip Riesz uzay ve $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ olsun. $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ olduğundan $|x_\alpha| \leq y_\beta \downarrow 0$ olacak şekilde (y_β) neti vardır. Aynı zamanda E sıra sürekli norma sahip olduğundan $\|x_\alpha\| \leq \|y_\beta\| \downarrow 0$ olur. Böylece $\|x_\alpha\| \leq \|y_\beta\| \to 0$ elde edilir. Buradan $\|x_\alpha\| \to 0$ olur.

($\Leftarrow$) $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ ise $x_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ ve $x_\alpha \downarrow 0$ olsun. $x_\alpha \downarrow 0$ olduğundan sıra yakınsaklık özelliğinden $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ olur. Kabulden $x_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$'dır. O halde $\|x_\alpha\| \to 0$ elde edilir. Böylece Teorem 3.1.3'den $\|x_\alpha\| \downarrow 0$, yani başka bir ifade ile E sıra sürekli norma sahiptir.

□

Lemma 3.1.31. *E bir Banach latis olmak üzere $(x_n) \subset E$ bir dizi ve $x \in E$ olsun. $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ ise $x_{n_k} \xrightarrow{o} x$ olacak şekilde en az bir tane $(x_{n_k}) \subset E$ alt dizisi vardır.*

Kanıt. $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ olsun.

$$\begin{aligned} x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x &\iff \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N \text{ iken } \|x_n - x\| \leq \epsilon \\ &\iff \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n_k > N \text{ iken } \|x_{n_k} - x\| \leq \frac{\epsilon}{2^k} \end{aligned}$$

$\sum_{k=1}^{\infty} |x_{n_k} - x| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^k} \leq \epsilon$ olduğundan $\sum_{k=1}^{\infty} |x_{n_k} - x|$ serisi yakınsaktır. $\sum_{k=1}^{\infty} |x_{n_k} - x|$ serisinin yakınsak olması $\sum_{k=1}^{\infty} |x_{n_k} - x|$ serisinin mutlak yakınsak olmasıdır. Seri mutlak yakınsak ve E bir Banach latis ise $\sum_{k=1}^{\infty} |x_{n_k} - x| = s$ yakınsaktır. O halde $s_n = \sum_{k=1}^{n} |x_{n_k} - x|$ kısmi toplamlar dizisini düşünelim. $s_n > 0$ ve $s_{n+1} > s_n$ olduğundan $s_n \uparrow s$ elde edilir. $s - s_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_{n_k} - x| = u_n \geq 0$ ve $u_{n+1} \leq u_n$ olduğundan $u_n \downarrow 0$ olur.

$$\begin{aligned} s_n \uparrow s &\implies \sup s_n = s \\ &\implies s - \sup s_n = 0 \\ &\implies s + \inf\{-s_n\} = 0 \\ &\implies \inf\{s - s_n\} = 0 \\ &\implies \inf\{u_n\} = 0 \end{aligned}$$

Böylece (x_{n_k}) alt dizisi için her $n \geq n_k$ iken $|x_{n_k} - x| \leq u_n \downarrow 0$ olduğundan $x_{n_k} \xrightarrow{o} x$ elde edilir. $\square$

Teorem 3.1.32. *E bir Riesz uzay olmak üzere aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.*

(i) E Arşimettir.

(ii) $\mathbb{R}$'de $\lambda_\alpha \xrightarrow{o} 0$ olacak şekilde (λ_α) sınırlı neti var ise her $u \in E$ için $\lambda_\alpha u \xrightarrow{o} 0$ olur.

(iii) $\mathbb{R}$'de $\lambda_n \xrightarrow{o} 0$ ise her $u \in E$ için $\lambda_n u \xrightarrow{o} 0$ olur.

(iv) Her B bandi için $B = B^{dd}$ olur.

(v) $\emptyset \neq A_1 \subseteq E^+$ ve $A_2 = \{v \in E : \forall u \in A_1$ için $0 \leq v \leq u\}$ ise $\inf\{u - v : u \in A_1$ ve $v \in A_2\} = 0$ olur.

Kanıt. (i) $\Longrightarrow$ (ii) E arşimet ve $\mathbb{R}$'de $\lambda_\alpha \xrightarrow{o} 0$ olacak şekilde (λ_α) sınırlı neti olsun. (λ_α) sınırlı olduğundan supremum değeri vardır. $\mu_\beta = \sup_{\beta \geq \alpha} |\lambda_\alpha|$ olsun. $\lambda_\alpha \xrightarrow{o} 0$ olduğundan $\mu_\beta = \sup_{\beta \geq \alpha} |\lambda_\alpha| \downarrow 0$ olur.

$$|\lambda_\alpha u| = |\lambda_\alpha||u| \leq \mu_\beta |u|$$

olduğundan $\mu_\beta |u| \downarrow 0$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $\mu_\beta |u| \downarrow 0$ olmasın. Buradan bir tane $v \in E^+$ vardır her bir α için $0 < v \leq \mu_\beta |u|$ elde edilir. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için her $\beta > \beta_n$ için $\mu_\beta \leq \frac{1}{n}$ olacak şekilde en az bir tane β_n vardır. Buradan her n için $nv \leq |u|$ olur ve E arşimet olduğundan $v = 0$ olmalıdır. Ancak bu durum $0 < v$ olması ile çelişir.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Aşikardır.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\mathbb{R}$'de $\lambda_\alpha \xrightarrow{o} 0$ iken her $u \in E$ için $\lambda_\alpha u \xrightarrow{o} 0$ ve B bir band olsun. Her zaman $B \subseteq B^{dd}$ olur. O halde $B^{dd} \subseteq B$ olduğunu gösterelim. $0 < u \in B^{dd}$ alalım. Kabul edelim ki $u \neq \sup\{v \in B : 0 \leq v \leq u\}$ olsun. $x \in B$ ve her n için $0 \leq nx \leq u$ veya $0 < x \leq \frac{1}{n}u$ olur ve $\frac{1}{n}u \downarrow 0$ olduğundan $x = 0$ elde edilir. Böylece $u = \sup\{v \in B : 0 \leq v \leq u\}$ olmalıdır. B bir band olduğundan $u \in B$ elde edilir. Buradan $B^{dd} \subseteq B$ olur. Böylece $B^{dd} = B$.

(iv) $\Longrightarrow$ (v) J, E'nin ideali olsun. İlk olarak J tarafından üretilen ideal J^{dd} ile aynı olduğunu gösterelim.

$$B_j = \{u \in E : u_\alpha \subseteq J \text{ neti vardır öyle ki } 0 \leq u_\alpha \uparrow |u|\}$$

olarak tanımlansın. J^{dd} bir band olduğundan $J \subseteq J^{dd}$ yazılır ve $B_j \subseteq J^{dd}$ olur. B herhangi bir band olmak üzere $J \subseteq B$ iken $J^{dd} \subseteq B^{dd} = B$ olduğundan $B_j = J^{dd}$ elde edilir. $\emptyset \neq A_1 \subseteq E^+$ bir alt küme ve

$$A_2 = \{v \in E : \forall u \in A_1 \text{ için } 0 \leq v \leq u\}$$

olsun. Kabul edelim ki $\inf\{u - v : u \in A_1 \text{ ve } v \in A_2\} \neq 0$ olsun. Böylece $w \in E^+$ için her $u \in A_1, v \in A_2$ için $0 \leq w \leq u - v$ olur.

$$w \leq u - v \Longrightarrow w + v \leq u$$

olur ve buradan $w+v \in A_2$ elde edilir.

$$w \leq u-(w+v) \implies w \leq u-w-v \implies 2w \leq u-v$$

elde edilir. O halde bu şekilde devam ettirildiğinde

$$0 \leq nw \leq u-v \leq u$$

elde edilir. Buradan $w=0$ sonucu elde edilir.

$(v) \implies (i)$ Kabul edelim ki her $n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq nu$ ve $A_1 = \{v-nu : n \in \mathbb{N}\}$ olsun. Buradan $A_2 = \{x \in E^+ : x \leq v-nu\}$ olur.

$$\inf\{u-v : u \in A_1 \text{ ve } v \in A_2\} = \inf\{v-nu-x : n \in \mathbb{N}, x \in A_2\} = 0$$

olarak yazılır. Buradan $0 \leq u \leq v-nu-x$ olacağından $u=0$ elde edilir. Böylece E Arşimettir.

□

3.2 Göreceli Düzgün Yakınsaklık ve Özellikleri

Bu bölümde sıra yakınsamanın yanı sıra Riesz uzayındaki diziler için başka bir yakınsaklık çeşidini ele alacağız. Bu bölümde [2, 4, 5, 26, 29] kaynakları dikkate alınmıştır.

Tanım 3.2.1. E bir Riesz uzay, $(x_n) \subset E$ bir dizi, $x \in E$ ve $u \in E^+$ olsun. Her $\epsilon > 0$ için $n \geq N$ iken $|x_n - x| \leq \epsilon u$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ varsa (x_n) dizisi x elemanına *u-düzgün yakınsaktır (u-uniformly convergent)* denir ve $x_n \xrightarrow{u-u} x$ ile gösterilir.

Tanım 3.2.2. E bir Riesz uzay, $(x_n) \subset E$ bir dizi ve $x \in E$ olsun. $x_n \xrightarrow{u-u} x$ olacak şekilde bir $u \in E^+$ varsa (x_n) dizisi x elemanına *göreceli düzgün yakınsaktır (relatively uniformly convergent)* denir ve $x_n \xrightarrow{ru} x$ ile gösterilir. x elemanına ise *düzgün limit(uniformly limit)* adı verilir.

Tanıma denk olarak başka bir tanımda verilebilir.

Tanım 3.2.3. E bir Riesz uzay, $(x_n) \subset E$ bir dizi ve $u \in E^+$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $|x_n - x| \leq \epsilon_n u$ olacak şekilde $\epsilon_n \downarrow 0$ koşulunu sağlayan bir (ϵ_n) pozitif skaler dizisi var ise (x_n) dizisine *göreceli düzgün yakınsaktır* denir.

Lemma 3.2.4. *Riesz uzayında bir dizinin düzgün limiti var ise tektir.*

Kanıt. $x_n \xrightarrow{ru} x$ ve $x_n \xrightarrow{ru} y$ olsun.

$$x_n \xrightarrow{ru} x \iff \exists u \in E^+, \forall \epsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1 \text{ için } |x_n - x| \leq \epsilon u$$
$$x_n \xrightarrow{ru} y \iff \exists v \in E^+, \forall \epsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_2 \text{ için } |x_n - x| \leq \epsilon v$$

$w = u+v$ alalım. Verilen $\epsilon > 0$ için $N = \max\{N_1, N_2\}$ olarak seçilirse her $n > N$ iken

$$|x-y| \leq |x_n - x| + |x_n - y| \leq \epsilon u + \epsilon v = \epsilon(u+v) = \epsilon w$$

olur. Böylece $x = y$ elde edilir. □

Lemma 3.2.5. *E bir Riesz uzay , $(x_n), (y_n) \subset E$ birer dizi olmak üzere $x_n \xrightarrow{ru} x$ ve $y_n \xrightarrow{ru} y$ olsun. Aşağıdaki ifadeler doğrudur.*

(i) $x_n^+ \xrightarrow{ru} x^+, x_n^- \xrightarrow{ru} x^-, |x_n| \xrightarrow{ru} |x|$ *olur.*

(ii) *Her* $a, b \in \mathbb{R}$ *için* $ax_n + by_n \xrightarrow{ru} ax + by$ *olur.*

(iii) $x_n \vee y_n \xrightarrow{ru} x \vee y$ *olur.*

(iv) $x_n \wedge y_n \xrightarrow{ru} x \wedge y$ *olur.*

Kanıt. $x_n \xrightarrow{ru} x$ ve $y_n \xrightarrow{ru} y$ olsun. O halde,

$$x_n \xrightarrow{ru} x \iff \exists u \in E^+, \forall \epsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1 \text{ iken } |x_n - x| \leq \epsilon u$$
$$y_n \xrightarrow{ru} y \iff \exists v \in E^+, \forall \epsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_2 \text{ iken } |x_n - x| \leq \epsilon v$$

olur.

(i)

$$\begin{aligned} |x_n^+ - x^+| &= |x_n \vee 0 - x \vee 0| \\ &\leq |x_n - x| \\ &\leq \epsilon u \end{aligned}$$

olur. Böylece $x_n^+ \xrightarrow{ru} x^+$ elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} |x_n^- - x^-| &= |x_n \wedge 0 - x \wedge 0| \\ &\leq |x_n - x| \\ &\leq \epsilon u \end{aligned}$$

olur. Buradan $x_n^- \xrightarrow{ru} x^-$ elde edilir.

$$\begin{aligned} ||x_n| - |x|| &= |x_n^+ - x^+ + x_n^- - x^-| \\ &\leq |x_n^+ - x^+| + |x_n^- - x^-| \\ &\leq \epsilon u + \epsilon u = 2\epsilon u \end{aligned}$$

olur. O halde $|x_n| \xrightarrow{ru} |x|$ elde edilir.

(ii) Her $a, b \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} |ax_n + by_n - ax - by| &\leq |a||x_n - x| + |b||y_n - y| \\ &\leq |a|\epsilon u + |b|\epsilon v \\ &\leq \epsilon(|a|u + |b|v) \end{aligned}$$

$|a|u + |b|v \in E^+$ olduğundan $ax_n + by_n \xrightarrow{ru} ax + by$ elde edilmiş olur.

(iii)

$$\begin{aligned} |x_n \vee y_n - x \vee y| &= |x_n \vee y_n - x \vee y_n + x \vee y_n - x \vee y| \\ &\leq |x_n \vee y_n - x \vee y_n| + |x \vee y_n - x \vee y| \\ &\leq |x_n - x| + |y_n - y| \\ &\leq \epsilon u + \epsilon v = \epsilon(u + v) \end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}|x_n \wedge y_n - x \wedge y| &= |x_n \wedge y_n - x \wedge y_n + x \wedge y_n - x \wedge y| \\ &\leq |x_n \wedge y_n - x \wedge y_n| + |x \wedge y_n - x \wedge y| \\ &\leq |x_n - x| + |y_n - y| \\ &\leq \epsilon u + \epsilon v = \epsilon(u+v)\end{aligned}$$

□

Teorem 3.2.6. *E bir Riesz uzay ve $(x_n) \subset E$ bir dizi olsun.*

$$x_n \xrightarrow{ru} x \text{ ise } x_n \xrightarrow{o} x \text{ olur.}$$

Kanıt. $x_n \xrightarrow{ru} x$ olsun. Buradan,

$$x_n \xrightarrow{ru} x \iff \exists u \in E^+, \forall \epsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0 \text{ iken } |x_n - x| \leq \epsilon u$$

olur. $y_m = u\frac{1}{m}$ olarak alalım. O halde $y_m \downarrow$ ve $\inf(y_m) = 0$ olduğunu gösterelim.

$$m < n \text{ için } \frac{1}{n} < \frac{1}{m} \implies \forall u \in E^+ \text{ için } \frac{1}{n}u < \frac{1}{m}u \implies y_n < y_m$$

olduğundan $y_m \downarrow$ bulunur. Aynı zamanda E uzayı Arşimet olduğundan herhangi bir $u \in E^+$ için $\frac{1}{m}u \downarrow 0$ olur.

$$|x_n - x| \leq u\frac{1}{m} = y_m \downarrow 0$$

olur. $x_n \xrightarrow{o} x$ elde edilir. □

Tersi her zaman doğru olmak zorunda değildir.

Örnek 3.2.7. $C[0,1]$ *uzayı üzerinde*

$$\begin{aligned}f_n \xrightarrow{ru} f &\equiv f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f \\ f_n \xrightarrow{o} f &\implies f_n \xrightarrow{n} f\end{aligned}$$

olarak düşünebiliriz. $f_n \xrightarrow{o} f$ *olacak şekilde bir* (f_n) *dizisini düşünelim.* $f_n \xrightarrow{n} f$ *olur fakat* $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|} f$ *yani* $f_n \xrightarrow{ru} f$ *olmak zorunda değildir. olmak üzere* $f_n(x) \xrightarrow{n} f(x)$ *iken* $f_n(x) \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f(x)$ *düzgün yakınsak değildir.*

Ancak bazı koşullar ile birlikte $x_n \xrightarrow{ru} x \iff x_n \xrightarrow{o} x$ geçerlidir. Öncelikle aşağıdaki tanıma ihtiyacımız vardır.

Tanım 3.2.8. E bir Riesz uzay ve $(x_n) \subset E$ bir dizi olsun. $x_n \xrightarrow{o} 0$ iken $\lambda_n x_n \xrightarrow{o} 0$ ve $0 \leq \lambda_n \uparrow \infty$ olacak şekilde en az bir tane $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ dizisi var ise (x_n) dizisi sıra yakınsamaya göre kararlıdır denir.

Teorem 3.2.9. *E bir Riesz uzay, (x_n) sıra yakınsamaya göre kararlı bir dizi olsun.*

$$x_n \xrightarrow{ru} x \text{ olması için gerek ve yeter koşul } x_n \xrightarrow{o} x \text{ olmasıdır.}$$

Kanıt. ($\Rightarrow$) Teorem 3.2.6'den açıktır.

($\Leftarrow$) $x_n \xrightarrow{o} x$ ve (x_n) sıra yakınsamaya göre kararlı bir dizi olsun. (x_n) sıra yakınsamaya göre kararlı olduğundan $\lambda_n x_n \xrightarrow{o} 0$ olacak şekilde en az bir tane $\lambda_n \uparrow \infty$ vardır. İlk olarak $x_n \xrightarrow{o} 0$ iken $x_n \xrightarrow{ru} 0$ olduğunu gösterelim. $\lambda_n x_n \xrightarrow{o} 0$ olduğundan

$$\lambda_n x_n \xrightarrow{o} 0 \implies |\lambda_n x_n| \leq z_m \text{ olacak şekilde } z_m \downarrow 0 \text{ vardır.}$$

O halde,

$$|\lambda_n x_n| \leq z_m \implies |x_n| \leq \frac{z_m}{|\lambda_n|} \leq \frac{z_1}{|\lambda_n|} = \frac{1}{\lambda_n} z_1 \in E^+ \implies x_n \xrightarrow{ru} 0$$

Şimdi $x_n \xrightarrow{o} x$ iken $x_n \xrightarrow{ru} x$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} x_n \xrightarrow{o} x &\implies u_n = x_n - x \xrightarrow{o} 0 \\ &\implies u_n \xrightarrow{ru} 0 \\ &\implies x_n - x \xrightarrow{ru} 0 \\ &\implies x_n \xrightarrow{ru} x \end{aligned}$$

□

Örnek 3.2.10. *μ, σ- sonlu olmak üzere $(x_n) \subseteq L_0(\mu)$ ve $x \in L_0(\mu)$ için*

$$x_n \xrightarrow{n} x \iff x_n \xrightarrow{ru} x \iff x_n \xrightarrow{o} x \text{ olur.}$$

Kanıt. İlk olarak $x_n \xrightarrow{n} x \implies x_n \xrightarrow{ru} x$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $x_n \xrightarrow{n} x$ olsun. Egoroff Teoremin'den $\lambda_n \uparrow \infty$ ve $\lambda_n(x_n - x) \xrightarrow{n} 0$ olacak şekilde bir (λ_n) pozitif reel sayılar dizisi vardır. $y = \sup\{\lambda_n |x_n - x| : n \in \mathbb{N}\}$ olarak tanımlayalım. Buradan $y \in L_0(\mu)$ olur.

$$\lambda_n |x_n - x| \leq y \implies |x_n - x| \leq \frac{1}{\lambda_n} y$$

elde edilir. Böylece $x_n \xrightarrow{ru} x$ olur.

Teorem 3.2.6'den $x_n \xrightarrow{ru} x \implies x_n \xrightarrow{o} x$ olur.

Örnek 3.1.11'den $x_n \xrightarrow{o} x \implies x_n \xrightarrow{n} x$ aşikardır.

□

Teorem 3.2.11. *E normlu Riesz uzay ve $(x_n) \subset E$ bir dizi olsun.*

$$x_n \xrightarrow{ru} x \text{ ise } x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x \text{ olur.}$$

Kanıt. $x_n \xrightarrow{ru} x$ olsun.

$$x_n \xrightarrow{ru} x \iff \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N \text{ için } |x_n - x| < \epsilon u$$

E normlu Riesz uzay olduğundan $\|x_n - x\| \leq \|u\| \|\epsilon\|$ elde edilir. Buradan $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ olur. □

Teorem 3.2.12. *E bir normlu Riesz uzay olmak üzere $(x_n) \subset E$ bir dizi olsun. $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ olması için gerek ve yeter koşul her (x_{n_k}) alt dizisi için $x_{n_{k_j}} \xrightarrow{ru} x$ olacak şekilde bir $(x_{n_{k_j}})$ alt dizisinin var olmasıdır.*

Lemma 3.2.13. *E Riesz uzay ve $e \in E^+$ elemanı E'nin güçlü birimi olsun.*

$$x_n \xrightarrow{ru} x \text{ olması için gerek ve yeter koşul } x_n \xrightarrow{e-u} x \text{ olmasıdır.}$$

Kanıt. ($\Rightarrow$) $x_n \xrightarrow{ru} x$ olsun. e, E'nin güçlü birimi olduğundan herhangi $u \in E$ için $|u| \leq \lambda e$ olacak şekilde en az bir tane $\lambda > 0$ vardır.

$$|x_n - x| \leq \epsilon u \leq \epsilon \lambda e$$

olur ve $x_n \xrightarrow{e-d} x$ elde edilir.

($\Leftarrow$) $x_n \xrightarrow{e-u}$ olsun.

$$\exists e \in E^+, \forall \epsilon > 0, \exists\ N \in \mathbb{N}, \forall n > N \text{ iken } |x_n - x| \leq \epsilon e$$

olur ve böylece $x_n \xrightarrow{ru} x$ elde edilir.

□

Örnek 3.2.14. *K Hausdorff ve kompakt topolojik uzay olmak üzere $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ Banach latis ve $\mathbb{1}$ güçlü birim olsun. $(f_n) \subset C(K)$ için*

$$f_n \xrightarrow{\|\cdot\|} f \iff f_n \xrightarrow{\mathbb{1}-u} f \iff f_n \xrightarrow{ru} f \text{ olur.}$$

Kanıt.

$$\begin{aligned}
f_n \xrightarrow{\|\cdot\|} f &\iff \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \text{ için } \|f_n - f\|_\infty < \epsilon \\
&\iff \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in K \text{ için } f_n(x) \to f(x) \\
&\iff \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in K \text{ için } |f_n(x) - f(x)| \leq e\mathbb{1}(x) \\
&\iff \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in K \text{ için } |f_n - f|(x) \leq \epsilon\mathbb{1}(x) \\
&\iff \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \text{ için } |f_n - f| \leq \epsilon\mathbb{1} \\
&\iff f_n \xrightarrow{\mathbb{1}-u} f \\
&\iff f_n \xrightarrow{ru} f
\end{aligned}$$

□

Tanım 3.2.15. E bir Riesz uzay ve $A \subset E$ olsun. Her göreceli düzgün yakınsak $(x_n) \subseteq A$ dizisi için $x_n \xrightarrow{ru} x$ iken $x \in A$ oluyor ise A'ya düzgün kapalı denir.

Teorem 3.2.16. *E bir Riesz uzay olmak üzere I, E'nin bir ideali olsun. E/I Riesz bölüm uzayı Arşimettir gerek ve yeter koşul I düzgün kapalı idealdir.*

Kanıt. ($\Rightarrow$) E/I Arşimet ve $x_n \xrightarrow{ru} x$ olsun.

$$x_n \xrightarrow{ru} x \iff \exists u > 0, \epsilon_n \downarrow 0 \text{ için } |x_n - x| \leq \epsilon_n u$$

olur. E'den E/I kanonik dönüşümü $x \to \dot{x}$ latis homomorfizm olduğundan

$$|\dot{x}| = |x|^{\cdot} \leq |x - x_n|^{\cdot} + |x_n|^{\cdot} = |x - x_n|^{\cdot} \leq \epsilon_n \dot{u}$$

elde edilir. E/I Arşimet olduğundan $\dot{x} = 0$ ve böylece $x \in I$ elde edilir. O halde I düzgün kapalı idealdir.

($\Leftarrow$) I düzgün kapalı ve her bir n için $0 \leq n\dot{x} \leq \dot{y}$ olsun. Kabul edelim ki E içinde $0 \leq x \leq y$ ve $x_n = (x - \frac{1}{n}y)^+$ olsun. Buradan $\dot{x_n} = (\dot{x} - \frac{1}{n}\dot{y})^+ = \frac{1}{n}(n\dot{x} - \dot{y})^+ = 0$ olur.

$$|x_n - x| = |(x - \frac{1}{n}y)^+ - x^+| \leq |(x - \frac{1}{n}y) - x| = \frac{1}{n}y$$

Böylece $x_n \xrightarrow{ru} x$ olur. I düzgün kapalı olduğundan $x \in I$ ve $\dot{x} = 0$ elde edilir. Buradan E/I Riesz bölüm uzayıdır.

□

Tanım 3.2.17. E bir Riesz uzay ve $(x_n) \subseteq E$ bir dizi olsun. Her $\epsilon > 0$ için $|x_n - x_m| \leq \epsilon u$ olacak şekilde $u > 0$ varsa (x_n) dizisine düzgün Cauchy denir.

Tanım 3.2.18. E bir Riesz uzay olmak üzere E içerisindeki her düzgün Cauchy dizisi göreceli düzgün yakınsak ise E uzayına düzgün tamdır denir.

Teorem 3.2.19. *E Arşimet Riesz uzayı sıra yakınsamaya göre kararlı olsun.*

E uzayı Dedekind tam olması için gerek ve yeter koşul E uzayı düzgün tam olmasıdır.

Kanıt. ($\Rightarrow$) E uzayı Dedekind tam olsun. Herhangi $(x_n) \subset E$ düzgün Cauchy dizisini alalım. (x_n) düzgün Cauchy olduğundan

$$\forall \epsilon > 0, \exists\ N \in \mathbb{N}, \forall\ m > n > N \text{ için } |x_m - x_n| < \epsilon u$$

olacak şekilde $u \in E^+$ elemenı vardır. Böylece (x_n) sıra Cauchy dizisidir. E Dedekind tam olduğundan $x_n \xrightarrow{o} x$ olacak şekilde bir $x \in E$ vardır. E uzayı sıra yakınsamaya göre kararlı olduğundan Teorem 3.2.9'den $x_n \xrightarrow{ru} x$ elde edilir. Böylece E uzayı düzgün tamdır.

($\Leftarrow$) E uzayı düzgün tam ve $(x_n) \subset E$ dizisi sıra Cauchy olsun. Teorem 3.2.9'den (x_n) düzgün Cauchy dizisidir. E düzgün tam olduğundan $x_n \xrightarrow{ru} x$ olacak şekilde bir $x \in E$ vardır. Teorem 3.2.6'dan $x_n \xrightarrow{o} x$ olur. O halde E Dedekind tamdır.

□

Teorem 3.2.20. *E bir Riesz uzay olsun.*

- *E uzayı Dedekind tam olması için gerek ve yeter koşul E izdüşüm özelliğine sahip ve düzgün tam olmasıdır.*
- *E uzayı Dedekind σ-tam olması için gerek ve yeter koşul E temel izdüşüm özelliğine sahip ve düzgün tam olmasıdır.*

Teorem 3.2.21. *E güçlü birime sahip düzgün tam Riesz uzay ise güçlü birimin belirlediği norma göre tamdır.*

Kanıt. Teorem 2.3.17'ten $(E, \|\cdot\|_e)$ normlu uzaydır. İlk olarak normlu Riesz uzay olduğunu gösterelim. $|x| \leq |y|$ olsun. Her $\lambda \in A_y$ için $|x| \leq |y| \leq \lambda e$ olduğundan $\lambda \in A_x$ elemanıdır. Böylece,

$$A_y \subset A_x \implies \inf A_x \leq \inf A_y \implies \|x\|_e \leq \|y\|_e$$

bulunur. $(E, \|\cdot\|_e)$ normlu Riesz uzaydır.
$(E, \|\cdot\|_e)$ normlu Riesz uzayın norm ile tam olduğunu gösterelim. Bunun için $(x_n) \subset E$ norm Cauchy dizisini alalım.

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, N \in \mathbb{N}, \forall\, m > n > N \text{ için } \|x_m - x_n\|_e = \inf\{\lambda \geq 0 : |x_m - x_n| \leq \lambda e\} < \epsilon$$

olur. $\epsilon = 1$ alalım.

$$\exists\, N_1 \in \mathbb{N}, \forall\, m > n > N_1 \text{ için } \inf\{\lambda \geq 0 : |x_m - x_n| \leq \lambda e\} < 1$$

Buradan $|x_m - x_n| \leq \lambda_1 e$ olacak şekilde en az bir tane $\lambda_1 \leq 1$ vardır. Aynı şekilde

$$\begin{aligned}
&\epsilon = \frac{1}{2}, \exists \lambda_2 \leq \frac{1}{2}, \forall m > n > \lambda_2 \text{ iken } |x_m - x_n| \leq \lambda_2 e \\
&\epsilon = \frac{1}{3}, \exists \lambda_3 \leq \frac{1}{3}, \forall m > n > \lambda_3 \text{ iken } |x_m - x_n| \leq \lambda_3 e \\
&\vdots \\
&\epsilon = \frac{1}{k}, \exists \lambda_k \leq \frac{1}{k}, \forall m > n > \lambda_k \text{ iken } |x_m - x_n| \leq \lambda_k e
\end{aligned}$$

(λ_k) dizisini düşünelim. $\lambda_k \leq \frac{1}{k}$ olduğundan $\lambda_k \downarrow$ ve $\inf \lambda_k = 0$ elde edilir. Buradan (x_n) dizisi düzgün Cauchy'dir. E düzgün tam olduğundan $x_n \xrightarrow{ru} x$ olacak şekilde bir $x \in E$ vardır. Buradan

$$\forall \epsilon > 0 \text{ için } \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N \text{ iken } |x_n - x| \leq \epsilon u$$

olur. $(E, \|\cdot\|_e)$ normlu Riesz uzayı olduğundan,

$$\|x_n - x\| \leq \epsilon \|u\| \text{ ve } x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$$

bulunur. O halde $(E, \|\cdot\|_e)$ Banach uzayıdır. □

3.3 Sıra Yakınsaklık Topolojik Değildir

Bu bölümde sıra yakınsamanın topolojik olmasığı tartışalacaktır. [9] makalesi takip edilecektir.

Lemma 3.3.1. *$(X, \mathcal{T})$ topolojik Riesz uzay olmak üzere $(x_\alpha) \subset X$ bir neti için $x_\alpha \xrightarrow{\mathcal{T}} 0$ ise $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

(i) $e \in X$ sıra birimi vardır.

(ii) Herhangi bir (x_α) neti için $\|x\|_e = \inf\{\lambda > 0 : |x| \leq \lambda e\}$ olmak üzere $x_\alpha \xrightarrow{\mathcal{T}} 0$ ise $x_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|_e} 0$ olur.

Kanıt. N, $\mathcal{T}$'un 0 komşuluğu olsun.

(i) $\Delta = \{(y, U) : U \in N \text{ ve } y \in U\}$ için $(y_{\alpha 1}, U_1) \leq (y_{\alpha 2}, U_2) l \iff U_1 \geq U_2$ olarak tanımlayalım. Δ üstten yönlendirilmiş kümedir. Her bir $\alpha = (y, U)$ için $x_\alpha = x_{(y,U)} = y \in U$ olarak tanımlayalım. Her $U \in U_{\mathcal{T}}(0)$ için $\alpha_0 = x_{(y_0, U_0)}$ olmak üzere her $\alpha = (y, U) \geq \alpha_0 = (y_0, U_0)$ için $U \subset U_0$ olacak şekilde en az bir tane α_0 vardır. Buradan $y \in U_0$ ve $x_\alpha \in U$ elde edilir. Böylece her $\alpha \geq \alpha_0$ için $x_\alpha \xrightarrow{\mathcal{T}} 0$ olur. Kabulden $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$'dır. $(y_0, U_0) \in \Delta$ ve $e \in X^+$ olmak üzere $(y, U) \geq (y_0, U_0)$ için

$$|x_\alpha - 0| = |x_\alpha| = x_{(y,U)} = y \in [-e, e]$$

elde edilir. Buradan her $x \in X$ için $n \in \mathbb{N}$ vardır $|x| \in nU_0$ olur. Böylece $|x| \leq n \cdot e$ elde edilir. O halde e sıra birimdir.

(ii) $I_e = \{x \in X : \exists\lambda \geq 0$ vardır $|x| \leq \lambda e\}$ olmak üzere e sıra birim olduğundan $I_e = X$'dir. Her $x \in X$ için $\|x\|_e = \inf\{\lambda \geq 0 : |x| \leq \lambda e\}$ olarak tanımlansın. Minkowski fonksiyoneli bir yarınormdur. Buradan $(X, \|\cdot\|)$ normlu Riesz uzaydır. Kabul edelim ki $x_\alpha \xrightarrow{\mathcal{T}} 0$ ve U_0, 0'ın komşuluğu olsun. $X_\alpha \xrightarrow{\mathcal{T}} 0$ olduğundan $x_\alpha \in U_0$ olur. $\epsilon > 0$ alalım. ϵU_0, 0'ın komşuluğu olur. Böylece her $\alpha \geq \alpha_\epsilon$ için $x_\alpha \in \epsilon U_0$ olacak şekilde α_ϵ vardır. Buradan $|x_\alpha| \leq \epsilon e$ elde edilir. $x_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|_e} 0$'dır.

□

Teorem 3.3.2. $(X, \mathcal{T})$ *topolojik Riesz uzay olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.*

(i) $dimX < \infty$

(ii) $x_\alpha \xrightarrow{\mathcal{T}} 0 \iff x_\alpha \xrightarrow{o} 0$

Kanıt. $(i) \implies (ii)$ $dimX < \infty$ olsun. $dimX < \infty$ olduğundan $X = \mathbb{R}^n$ veya $X = \mathbb{C}^n$ gibi düşünülebilir. O halde

$$x_\alpha \xrightarrow{\mathcal{T}} 0 \iff \forall k = 1, \cdots, n \text{ için } x_\alpha^k \to 0 \iff x_\alpha \xrightarrow{o} 0$$

elde edilir.

$(ii) \implies (i)$ Kabul edelim ki $x_\alpha \xrightarrow{\mathcal{T}} 0 \iff x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ olsun. Lemma 3.3.1'den e, X'in sıra birimidir ve $(X = T_e, \|\cdot\|_e)$ norm latistir. Biliyoruz ki $x_\alpha \xrightarrow{\mathcal{T}} 0$ ise $x_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|_e} 0$'dır.

$$\begin{aligned} x_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|_e} 0 &\implies x_\alpha \xrightarrow{ru} 0 \\ &\implies x_\alpha \xrightarrow{o} 0 \\ &\implies x_\alpha \xrightarrow{\mathcal{T}} 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $x_\alpha \xrightarrow{\mathcal{T}} 0 \iff x_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|_e} 0$ olur. $(X', \|\cdot\|)$, $(X, \|\cdot\|_e)$ norm tamlanışı olsun. $(X', \|\cdot\|)$ Banach latistir. I_e', $e \in X'$ tarafından üretilen esas ideal olarak alınsın. e sıra birim olmak üzere $\|z'\|_e = \inf\{\lambda > 0 : |z| \leq \lambda e\}$ normu ile $(I_e', \|\cdot\|_e')$ bir AM-uzaydır. Buradan I_e', K kompakt Hausdorff uzay olmak üzere sıra birimi sabit $\mathbb{1}$ fonksiyonu olan $C(K)$ uzayına latis izomorfiktir. Ayrıca $X = I_e, I_e'$'nin alt latisidir. I_e' ile $C(K)$ uzayı birbirine izomorf olduğundan I_e'nin elemanlarını K üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonlar olarak tanımlayabiliriz. $t_0 \in K$ ve $g = \chi_{t_0}$, t_0'nın karakteristik fonksiyonu olmak üzere

$$F = \{f \in X : f \geq 0 \text{ ve } f(t_0) = 1\}$$

olarak tanımlayalım. F noktasal sıralama ile alttan yönlendirilmiş kümedir. Her $\alpha \in F$ için $f_\alpha = \alpha$ olsun. Kabul edelim ki $f_\alpha \downarrow g$ ve $g \notin C(K)$ olsun. O halde $C(K)$ uzayında $f_\alpha \downarrow 0$ olduğundan X'de $f_\alpha \downarrow 0$ olur. Teorem 3.1.3'den $f_\alpha \xrightarrow{o} 0$'dır. Kabulden $f_\alpha \xrightarrow{\mathcal{T}} 0$ olur. Böylece $f_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|_e} 0$ elde edilir. $\|f_\alpha\|_e \geq 1$ olduğundan norm tanımı ile çelişir. Bu durumda $g \in C(K)$ olmalıdır. t_0 açıktır. Buradan K ayrıktır. K ayrık ve kompakt olduğundan K sonludur. $C(K)$ uzayı ile $I_e = X$ izomorf olduğundan X sonludur.

$\square$

4 SINIRSIZ SIRA YAKINSAKLIK

Sınırsız yakınsama çeşitleri arasında Riesz uzaylarında sınırsız sıra yakınsaklık oldukça önemlidir. Bu bölümde sınırsız sıra yakınsaklığın öncelikle genel özellikleri verilecektir. Riesz uzaylarında önemli bir yere sahip olan Nakano teoremi ispatlanacaktır. Bunlara ek olarak Universal Tamlık tanımı ile uo yakınsaklık arasındaki ilişki, uo- yakınsaklık ile AL-Temsil kavramı, Uo yakınsaklığın norm yakınsaklık ve $w*$-yakınsaklık arasındaki ilişkileri ve uo-Cauchy kavramanın genel özellikleri verilecektir. Son olarak, uo-yakınsaklığın herhangi bir topolojiye bağlı olmadığı gösterilecektir.

4.1 Sınırsız Sıra Yakınsaklık ve Özellikleri

Bu bölümde sıra yakınsaklığın genel özellikleri ve teoremleri verilmiştir ve [17, 18] makaleleri üzerinde çalışılmıştır.

Tanım 4.1.1. E bir Riesz uzay olmak üzere $(x_\alpha) \subset E$ bir net olsun. Eğer her $y \in E^+$ için $|x_\alpha - x| \wedge y \xrightarrow{o} 0$ ise (x_α) neti x elemanına *sınırsız sıra yakınsaktır (unbounded order convergent)* denir ve $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ olarak gösterilir. x elemanına ise *uo-limit* adı verilir.

Lemma 4.1.2. *Riesz uzayında bir netin uo-limiti varsa tektir.*

Kanıt. Kabul edelim ki x_1 ve x_2 birbirinden farklı olmak üzere $x_\alpha \xrightarrow{uo} x_1$ ve $x_\alpha \xrightarrow{uo} x_2$ olsun. $x_\alpha \xrightarrow{uo} x_1$ olduğundan

$$\begin{aligned} x_\alpha \xrightarrow{uo} x_1 &\iff \forall y \in E^+ \text{ için } |x_\alpha - x_1| \wedge y \xrightarrow{uo} 0 \\ &\iff \forall y \in E^+, \forall \beta \in B, \exists \alpha_1 \in A, \forall \alpha > \alpha_1 \text{ iken } ||x_\alpha - x_1| \wedge y| \leq z_\beta \downarrow 0 \end{aligned}$$

olacak şekilde (z_β) neti vardır. Ayrıca $x_\alpha \xrightarrow{uo} x_2$ olduğundan

$$\begin{aligned} x_\alpha \xrightarrow{uo} x_2 &\iff \forall y \in E^+ \text{ için } |x_\alpha - x_2| \wedge y \xrightarrow{uo} 0 \\ &\iff \forall y \in E^+, \forall \gamma \in \Gamma, \exists \alpha_2 \in A, \forall \alpha > \alpha_2 \text{ iken } ||x_\alpha - x_2| \wedge y| \leq t_\gamma \downarrow 0 \end{aligned}$$

olacak şekilde (t_γ) neti vardır. $z_\beta \downarrow 0$ ve $t_\gamma \downarrow$ olduğundan $(z_\beta + t_\gamma) \downarrow 0$ olur.

$$|x_1 - x_2| = |x_1 - x_\alpha + x_\alpha - x_2| \leq |x_\alpha - x_1| + |x_\alpha - x_2|$$

olarak yazılabileceğinden

$$\begin{aligned} 0 \leq |x_1 - x_2| \wedge y &\leq (|x_\alpha - x_1| + |x_\alpha - x_2|) \wedge y \\ &\leq |x_\alpha - x_1| \wedge y + |x_\alpha - x_2| \wedge y \\ &\leq (z_\beta + t_\gamma) \downarrow 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan her $y \in E^+$ için $|x_1 - x_2| \wedge y = 0$ olur. Böylece $|x_1 - x_2| = 0$ elde edilir. O halde $x_1 = x_2$ olur. □

Lemma 4.1.3. *E bir Riesz uzay, $(x_\alpha), (z_\alpha) \subset E$ birer net olmak üzere $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ ve $z_\alpha \xrightarrow{uo} z$ olsun. Aşağıdaki ifadeler doğrudur.*

(i) $x_\alpha^+ \xrightarrow{uo} x^+, x_\alpha^- \xrightarrow{uo} x^-, |x_\alpha| \xrightarrow{uo} |x|$ *olur.*

(ii) Her $a, b \in \mathbb{R}$ *için* $ax_\alpha + bz_\alpha \xrightarrow{uo} ax + bz$ *olur.*

(iii) $0 \leq x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ *ve* $x_\alpha \leq y_\alpha \xrightarrow{uo} y$ *ise* $0 \leq x \leq y$ *olur.*

Kanıt. İlk olarak $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ olduğundan

$$\begin{aligned} x_\alpha \xrightarrow{uo} x &\iff \forall y \in E^+ \text{ için } |x_\alpha - x| \wedge y \xrightarrow{o} 0 \\ &\iff \forall y \in E^+, \forall \beta \in B, \exists \alpha_1 \in A, \forall \alpha > \alpha_1 \text{ için } ||x_\alpha - x| \wedge y| \leq v_\beta \downarrow 0 \end{aligned}$$

olacak şekilde (v_β) neti vardır. Ayrıca $z_\alpha \xrightarrow{uo} z$ olduğundan

$$\begin{aligned} z_\alpha \xrightarrow{uo} z &\iff \forall y \in E^+ \text{ için } |z_\alpha - z| \wedge y \xrightarrow{o} 0 \\ &\iff \forall y \in E^+, \forall \gamma \in \Gamma, \exists \alpha_2 \in A, \forall \alpha > \alpha_2 \text{ için } ||x_\alpha - x| \wedge y| \leq u_\gamma \downarrow 0 \end{aligned}$$

olacak şekilde (u_γ) neti vardır.

(i) $|x_\alpha^+ - x^+| = |x_\alpha \vee 0 - x \vee 0| \leq |x_\alpha - x|$ eşitsizliğinden

$$|x_\alpha^+ - x^+| \wedge y \leq |x_\alpha - x| \wedge y \leq v_\beta \downarrow 0$$

olur. Benzer şekilde $|x_\alpha^- - x^-| = |x_\alpha \vee 0 - x \vee 0| \leq |x_\alpha - x|$ eşitsizliğinden

$$|x_\alpha^- - x^-| \wedge y \leq |x_\alpha - x| \wedge y \leq v_\beta \downarrow 0$$

elde edilir. Buradan $x_\alpha^+ \xrightarrow{uo} x^+$ ve $x_\alpha^- \xrightarrow{uo} x^-$ olur. Son olarak, $|x_\alpha| \xrightarrow{uo} |x|$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} ||x_\alpha| - |x|| &= |(x_\alpha^+ + x_\alpha^-) - (x^+ + x^-)| \\ &= |x_\alpha^+ + x_\alpha^- - x^+ - x^-| \\ &\leq |x_\alpha^+ - x^+| + |x_\alpha^- - x^-| \end{aligned}$$

olarak yazılabileceğinden

$$\begin{aligned} ||x_\alpha| - |x|| \wedge y &\leq (|x_\alpha^+ - x^+| + |x_\alpha^- - x^-|) \wedge y \\ &\leq |x_\alpha^+ - x^+| \wedge y + |x_\alpha^- - x^-| \wedge y \\ &\leq v_\beta + v_\beta = 2v_\beta \downarrow 0 \end{aligned}$$

Buradan $|x_\alpha| \xrightarrow{uo} |x|$ elde edilir.

(ii) $|x_\alpha - x| \wedge y \leq v_\beta \downarrow 0$ olduğundan

$$a \in \mathbb{R} \text{ için } (|a||x_\alpha - x|) \wedge |a|y = |a|(|x_\alpha - x| \wedge y) \leq |a|v_\beta \downarrow 0$$

elde edilir. Benzer şekilde $|z_\alpha - z| \wedge y \leq u_\gamma \downarrow 0$ olduğundan

$$b \in \mathbb{R} \text{ için } (|b||z_\alpha - z|) \wedge |b|y = |b|(|z_\alpha - z| \wedge y) \leq |b|u_\gamma \downarrow 0$$

olur. Ayrıca $|a|v_\beta \downarrow 0$ ve $|b|u_\gamma \downarrow 0$ olduğundan $(|a|v_\beta + |b|u_\gamma) \downarrow 0$ elde edilir.

$$\begin{aligned} |(ax_\alpha + bz_\alpha) - (ax + bz)| &= |ax_\alpha + bz_\alpha - ax - bz| \\ &= |ax_\alpha - ax + bz_\alpha - bz| \\ &\leq |ax_\alpha - ax| + |bz_\alpha - bz| \\ &\leq |a||x_\alpha - x| + |b||z_\alpha - z| \end{aligned}$$

eşitsizliğini kullanarak her $y \in E^+$ için

$$\begin{aligned}
|(ax_\alpha + bz_\alpha) - (ax + bz)| \wedge y &\leq (|a||x_\alpha - x| + |b||z_\alpha - z|) \wedge y \\
&\leq (|a||x_\alpha - x|) \wedge y + (|b||z_\alpha - z|) \wedge y \\
&\leq |a||x_\alpha - x| \wedge |a|y + |b||z_\alpha - z| \wedge |b|y \\
&= |a|(|x_\alpha - x| \wedge y) + |b|(|z_\alpha - z| \wedge y) \\
&\leq (|a|v_\beta + |b|u_\gamma) \downarrow 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $ax_\alpha + bz_\alpha \xrightarrow{uo} ax + bz$ olur.

(iii) $0 \leq x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ ve $x_\alpha \leq y_\alpha \xrightarrow{uo} y$ olsun. $0 \leq x_\alpha$ olduğundan $|x_\alpha| = x_\alpha$ elde edilir. O halde (i).özellikten $|x_\alpha| \xrightarrow{uo} |x|$ olur. Böylece limitin tekliğinden $|x| = x$ ve $x \geq 0$ olur. Benzer şekilde $y_\alpha \xrightarrow{uo} y$ olduğundan $|y| = y$ elde edilir. O halde $a = 1$ ve $b = -1$ alınırsa,

$$y_\alpha - x_\alpha \xrightarrow{uo} y - x$$

olur. $0 \leq y_\alpha - x_\alpha$ olduğundan $0 \leq y - x$ elde edilir. Buradan $0 \leq x \leq y$ olur.

□

Önerme 4.1.4. *E bir Riesz uzay ve $(x_\alpha) \subset E$ bir net olsun.*

$$x_\alpha \xrightarrow{o} x \text{ ise } x_\alpha \xrightarrow{uo} x \text{ olur.}$$

Kanıt. $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ olsun. O halde

$$x_\alpha \xrightarrow{o} x \iff \forall \beta \in B, \exists \alpha_0 \in A, \forall \alpha > \alpha_0 \text{ için } |x_\alpha - x| \leq z_\beta \downarrow 0$$

olacak şekilde (z_β) neti vardır. Her $y \in E^+$ için

$$\begin{aligned}
||x_\alpha - x| \wedge y - 0| &= ||x_\alpha - x| \wedge y - 0 \wedge y| \\
&\leq ||x_\alpha - x| - 0| = |x_\alpha - x| \leq z_\beta \downarrow 0
\end{aligned}$$

olur. Böylece $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ elde edilir. □

Bu önermenin tersi her zaman doğru olmak zorunda değildir.

Örnek 4.1.5. *c_0 uzayında $e_n = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots)$ dizisini düşünelim.*
$y = (y_1, y_2, \cdot, y_n, \cdot) \in E^+$ elemanını alalım.

$$\begin{aligned}
||e_n| \wedge y| &= ||(0, ..., 0, 1, 0, ...0) \wedge (y_1, y_2, ..., y_n)| \\
&= |(0 \wedge y_1, 0 \wedge y_2, ..., 1 \wedge y_m, 0 \wedge y_{m+1}, ...)| \\
&= |(0, 0, ..., 1 \wedge y_m, 0, ...)|
\end{aligned}$$

$y \in c_0$ olduğundan $y_m \to 0$ olur. Böylece $e_n \xrightarrow{uo} 0$ elde edilir. Ancak (e_n), 0'a sıra yakınsak değildir.

Tanım 4.1.6. E bir Riesz uzay ve $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \subset E$ bir net olsun. $(x_\alpha - x_\beta)_{(\alpha,\beta) \in \Lambda \times \Lambda} \xrightarrow{uo} 0$ oluyor ise (x_α) netine uo-Cauchy neti adı verilir.

Önerme 4.1.4'nin aksine aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

Önerme 4.1.7. *E bir Riesz uzay ve (x_α) sıra sınırlı bir net olsun.*

$$x_\alpha \xrightarrow{o} x \text{ olması için gerek ve yeter koşul } x_\alpha \xrightarrow{uo} x \text{ olmasıdır.}$$

Kanıt. ($\Rightarrow$) Önerme 4.1.4'den açıktır.

($\Leftarrow$) $x_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ olsun. O halde her $u \in E^+$ için $|x_\alpha - 0| \wedge u \leq y_\beta$ olacak şekilde en az bir tane $y_\beta \downarrow 0$ neti vardır. Ayrıca (x_α) sıra sınırlı olduğundan $0 \leq |x_\alpha| \leq z$ olacak şekilde en az bir tane $z \in E^+$ vardır. O halde $|x_\alpha| = |x_\alpha| \wedge z \leq y_\beta \downarrow 0$ elde edilir. Böylece $|x_\alpha| = |x_\alpha| \wedge z \xrightarrow{o} 0$ olur.

□

Önerme 4.1.4'den her uo-Cauchy neti o-Cauchy netidir. Ayrıca Önerme 4.1.7'den (x_α) sıra sınırlı net ise her o-Cauchy neti uo-Cauchy netidir.

Aksi belirtilmediği sürece ölçü σ-toplamsal alınacaktır. (X, Σ, μ) ölçü uzayı olmak üzere $L_0(\mu)$, X üzerinde tanımlı tüm ölçülebilir reel değerli fonksiyonların uzayı olsun. $f \geq g$ sıralaması her $t \in X$ için hemen hemen heryerde $f(t) \geq g(t)$ olarak tanımlandığında $L_0(\mu)$ uzayı Riesz uzayıdır. Ayrıca $L_0(\mu)$ uzayı Dedekind σ-tamdır.

Örnek 4.1.8. *$(x_n) \subset L_0(\mu)$ bir dizi olmak üzere aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.*

(i) (x_n) uo-yakınsaktır.

(ii) (x_n) uo-Cauchy'dir.

(iii) (x_n) hemen hemen heryerde yakınsaktır.

(iv) (x_n) sıra yakınsaktır.

(v) (x_n) sıra Cauchy'dir.

Ayrıca eğer (x_n) sıra sınırlı ise (i), (iii) ve (iv) limitleri aynıdır.

Kanıt. (i) $\Longrightarrow$ (ii) $x_n \xrightarrow{uo} x$ olsun. O halde her $y \in L_0^+(\mu)$ için $|x_n - x| \wedge y \xrightarrow{o} 0$ olur.

$$|x_n - x_m| = |x_n - x + x - x_m| \leq |x_n - x| + |x - x_m|$$

eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| \wedge y &\leq (|x_n - x| + |x - x_m|) \wedge y \\ &\leq |x_n - x| \wedge y + |x_m - x| \wedge y \end{aligned}$$

elde edilir. $|x_n - x| \wedge y \xrightarrow{o} 0$ ve $|x_m - x| \wedge y \xrightarrow{o} 0$ olduğundan $|x_n - x_m| \wedge y \xrightarrow{o} 0$ olur. Böylece (x_n) uo-Cauchydir.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) (x_n) dizisi uo-Cauchy ancak hemen hemen her yerde yakınsak olmasın. En az bir tane $\epsilon > 0$ için

$$A = \{t \in \Omega : \inf_{n,m \geq 1} \sup_{k \leq n, l \leq m} |x_k(t) - x_l(t)| > \epsilon\}$$

pozitif ölçüye sahiptir. (x_n) dizisi uo-Cauchy ve χ_A pozitif olduğundan $|x_n - x_m| \wedge \chi_A \xrightarrow{o} 0$ olur. Buradan,

$$|x_n - x_m| \wedge \chi_A \xrightarrow{o} 0 \iff ||x_n - x_m| \wedge \chi_A| \leq y_n \downarrow 0$$

olur. $v_{n,m} = \sup_{k \leq n, l \leq m} |x_k - x_l| \wedge \chi_A \downarrow 0$ elde edilir. Ancak herhangi $n, m \geq 1$ ve her $t \in A$ için

$$v_{n,m}(t) = \sup_{k \leq n, l \leq m} |x_k(t) - x_l(t)| \wedge \chi_A \geq \epsilon$$

olur. Ancak $v_{n,m} \geq \epsilon \chi_A > 0$'dır. Böylece (x_n) hemen hemen her yerde yakınsak olmalıdır.

$(iii) \implies (iv)$ $x_n \xrightarrow{hhh} x$ olsun. Buradan $x_n - x \xrightarrow{hhh} 0$ olur. Bu durumda $x_n \xrightarrow{o} 0$ olduğunu ispatlamamız yeterli olacaktır. Kabul edelim ki her $t \in \Omega$ için $x_n(t) \to 0$ olsun. $\sup |x_n(t)| < \infty$ olur. Buradan $(x_n) \subset L_0(\mu)$ dizisinin noktasal supremum değeri ile (x_n) dizisinin supremum değeri aynıdır. O halde (x_n) sıra sınırlıdır. Her t ve n için $z_n(t) = \sup_{k \geq n} |x_k(t)|$ olsun.

$$z_n = \sup_{k \geq n} |x_k| \in L_0(\mu) \quad \text{ve } z_k(t) \downarrow 0$$

olur. $|x_n| \leq z_n \downarrow 0$ olduğundan $x_n \xrightarrow{o} 0$ elde edilir.

$(iv) \implies (v)$ $x_n \xrightarrow{o} 0$ olsun. O halde $|x_n - x| \leq y_n \downarrow 0$ olacak şekilde (y_n) dizisi vardır.

$$|x_n - x_m| = |x_n - x + x - x_m| \leq |x_n - x| + |x - x_m| \leq y_n + y_n = 2y_n \downarrow 0$$

olur. Böylece (x_n) sıra Cauchydir.

$(v) \implies (i)$ (x_n) sıra Cauchy olsun. $L_0(\mu)$ uzayı Dedekind σ-tam olduğundan (x_n) sıra yakınsaktır. Her sıra yakınsak dizi uo-yakınsak olduğundan (x_n) dizisi uo-yakınsak olur.

Ayrıca (x_n) sıra sınırlı ise Önerme 4.1.7'den uo- ve o-limit ve Örnek 3.1.11'dan o- ile hhh-limit aynıdır.

□

Lemma 4.1.9. *E bir Dedekind tam Riesz uzay ve I, E'nin bir ideali olsun. $(x_\alpha) \subset I$ bir net olmak üzere,*

I içerisinde $x_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ olması için gerek ve yeter koşul E içerisinde $x_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ olmasıdır.

Kanıt. $(\Rightarrow)$ I içinde $x_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ olsun. O halde her $y \in I^+$ için $|x_\alpha| \wedge y \xrightarrow{o} 0$ olduğundan $||x_\alpha| \wedge y| \leq t_\beta \downarrow 0$ olacak şekilde (t_β) neti vardır. $y \in I^+$ ve $0 \leq z \in I^+$ için

$$|x_\alpha| \wedge (y + z) = |x_\alpha| \wedge y + |x_\alpha| \wedge z = |x_\alpha| \wedge y \xrightarrow{o} 0$$

olur. Herhangi bir $w \in E^+$ ve $u \in (I \oplus I^d\ )$ alalım. Buradan $w \wedge u \in I \oplus I^d$ elde edilir. $(\inf \sup |x_\beta| \wedge w) \wedge u = \inf \sup(|x_\beta| \wedge (w + u)) = 0$ olur. O halde $\inf \sup(|x_\beta| \wedge w) = 0$ olur. Buradan her $w \in E^+$ için $|x_\beta| \wedge w \xrightarrow{o} 0$. Böylece $x_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ elde edilir.

($\Leftarrow$) E içerisinde $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ olsun. O halde her $y \in E^+$ için $|x_\alpha| \wedge y \xrightarrow{o} 0$ olur. Her $y \in I^+ \subset E$ içinde geçerli olacağından her $y \in I^+$ için $|x_\alpha| \wedge y \xrightarrow{o} 0$ elde edilir. Böylece I içerisinde $x_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ olur.

□

Aşağıdaki teoremde uo-yakınsaklık ile Riesz alt uzayı arasındaki ilişki verilecektir.

Teorem 4.1.10. *E bir Riesz uzay ve F Riesz alt uzay uzay olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.*

(i) *F regülerdir.*

(ii) *$(y_\alpha) \subset F$ neti içinde $y_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ ise E içinde $y_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ olur.*

(iii) *$(y_\alpha) \subset F$ neti içinde $y_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ olması için gerek ve yeter koşul E içinde $y_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ olur.*

Kanıt. (iii) $\Longrightarrow$ (ii) Aşikardır.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) $(y_\alpha) \subset F$ neti için F içinde $y_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ ise E içinde $y_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ ve F içinde $y_\alpha \downarrow 0$ olsun.

$$y_\alpha \xrightarrow{uo} 0 \text{ olduğundan } \forall z \in \ F^+ \ \text{ için } |y_\alpha - y| \wedge z \xrightarrow{o} 0$$

olur. O halde Önerme 4.1.7'den her sıra sınırlı net için sıra yakınsaklık ve uo-yakınsaklık birbirine denk olduğundan kabulden E içinde $y_\alpha \downarrow 0$ elde edilir.

(i) $\Longrightarrow$ (iii) E içerisinde F regüler ve F içinde $y_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ olacak şekilde bir (y_α) neti olsun. E, E^δ içerisinde regüler olduğundan F, E^δ içerisinde regüler olur. E^δ içerisinde F tarafından üretilen ideal I olsun. I içerisinde $y_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ olduğunu gösterelim. $u \in I^+$ alalım. I ideal olduğundan $0 \leq u \leq y$ olacak şekilde $y \in F^+$ vardır. F içerisinde $y_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ olduğundan $|y_\alpha| \wedge y \xrightarrow{o} 0$ ve E^δ içerisinde F regüler olduğundan E^δ içerisinde $|y_\alpha| \wedge y \xrightarrow{o} 0$ olur. Dahası I, E^δ içerisinde regüler olduğundan Sonuç 3.1.28'den I içerisinde $|y_\alpha| \wedge y \xrightarrow{o} 0$ elde edilir. $u \in I^+$ olmak üzere $0 \leq u \leq y$ olduğundan $|y_\alpha| \wedge u \xrightarrow{o} 0$ olur. Böylece I içerisinde $y_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ elde edilir. Lemma 4.1.9'den E^δ içerisinde $y_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ olur. Son olarak $x \in E^+$ için E^δ içerisinde $|y_\alpha| \wedge x \xrightarrow{o} 0$ ve Sonuç 3.1.25'dan E içerisinde $y_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ elde edilir. Tersine E içerisinde $y_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ olacak şekilde bir (y_α) neti olsun. $u \in F^+$ alalım. $y_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ olduğundan her $e \in E^+$ için $|y_\alpha| \wedge e \xrightarrow{o} 0$ olur. Teorem 3.1.17'den F içinde $|y_\alpha| \wedge u \xrightarrow{o} 0$. Buradan F içerisinde $y_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ elde edilir.

□

Lemma 4.1.9'den E uzayı Dedekind tam alınmıştır. Fakat Teorem 4.1.10 bize Dedekind tamlanışın gerekli olmadığını göstermiştir. Bu sebeple aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.1.11. *E bir Riesz uzay F, E'nin bir ideali veya E bir norm latis F, E'nin sıra sürekli norma sahip tam Riesz alt uzayı olsun. $(y_\alpha) \subset F$ bir net için F içerisinde $y_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ gerek ve yeter koşul E içerisinde $y_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ olur.*

Kanıt. Her ideal bir regüler Riesz alt uzay olduğundan Teorem 4.1.10'dan açıktır.
F Dedekind tam sıra sürekli norma sahip olsun. F'nin regüler olduğunu göstermemiz yeterlidir. $A = (x_\alpha) \uparrow$ bir net olmak üzere F içinde $x_\alpha \uparrow x$ olsun. F sıra sürekli olduğundan F içinde $\|x_\alpha\| \to \|x\|$ elde edilir. Böylece E içinde $\|x_\alpha\| \to \|x\|$ olur. O halde E içinde $\|x_\alpha\| \to \|x\|$ ve $x_\alpha \uparrow$ olduğundan E içinde $x_\alpha \uparrow x$ bulunur. Bu durumda F, E içinde regülerdir. Böylece Teorem 4.1.10'dan açıktır. □

Lemma 4.1.12. *E bir Riesz uzay ve x_0 zayıf birim olsun.*

$$x_\alpha \xrightarrow{uo} 0 \text{ olması için gerek ve yeter koşul } |x_\alpha| \wedge x_0 \xrightarrow{o} 0 \text{ olmasıdır.}$$

Kanıt. Öncelikle E Dedekind tam olsun.

($\Rightarrow$) $x_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ olsun. O halde her $y \in E^+$ için $|x_\alpha| \wedge y \xrightarrow{o} 0$ olur. Buradan $x_0 \in E^+$ olduğundan $|x_\alpha| \wedge x_0 \xrightarrow{o} 0$ elde edilir.

($\Leftarrow$) $y \in E^+$ alalım. x_0 zayıf birim olduğundan $\inf\sup(|x_\beta| \wedge y) = 0$ olur. Ayrıca $|x_\alpha| \wedge x_0 \xrightarrow{o} 0$ olduğundan

$$(\inf\sup(|x_\beta| \wedge y)) \wedge x_0 = (\inf\sup(|x_\beta \wedge x_0|)) \wedge y = 0 \wedge y = 0$$

Buradan $|x_\alpha| \wedge y \xrightarrow{o} 0$ olur.

Kabul edelim ki E Dedekind tam olmasın. x_0 elemanı E'nin Dedekind tamlanışı olan E^δ uzayının zayıf birimi olsun. E, E^δ içinde regüler olduğundan Teorem 4.1.10'dan E içinde $x_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ olması için gerek ve yeter koşul E^δ içinde $x_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ olmasıdır. Sonuç 4.1.11'dan,

$$x_\alpha \xrightarrow{uo} 0 \iff |x_\alpha| \wedge x_0 \xrightarrow{o} 0$$

olur. Teorem 3.1.17'den E içinde $|x_\alpha| \wedge x_0 \xrightarrow{o} 0$'dır. Buradan $x_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ olur. □

Sonuç 4.1.13. *E bir Dedekind σ-tam Riesz uzay ve $(x_n) \subset E$ ayrık dizi olsun. O halde, E içerisinde $x_n \xrightarrow{uo} 0$ olur.*

Kanıt. $x \in E^+$ alalım. $\sup_{k\geq n}(|x_k| \wedge x) \downarrow 0$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki her $n \geq 1$ için $\sup_{k\geq n}(|x_k \wedge x) \geq y \geq 0$ olsun.

$$0 \leq y \wedge |x_n| \leq (\sup_{k\geq n+1}(|x_k| \wedge x)) \wedge |x_n| = \sup_{k\geq n+1}(|x_k| \wedge |x_n| \wedge y) = 0$$

Böylece her $n \geq 1$ için $y \wedge |x_n| = 0$ olur.

$$y = y \wedge \sup_{n\geq 1}(|x_n| \wedge x) = \sup_{n\geq 1}(y \wedge |x_n| \wedge x) = 0$$

olduğundan $|x_n| \wedge x \xrightarrow{o} 0$ elde edilir. □

Lemma 4.1.14. *E bir Riesz uzay, B bir izdüşüm band ve P band izdüşüm dönüşümü olsun. E içinde $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ ise hem E hemde B içinde $Px_\alpha \xrightarrow{uo} Px$ olur.*

Kanıt. P latis homomorfizim ve $0 \leq P \leq I$ olduğunu hatırlatalım. $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ olsun. Buradan her $y \in E^+$ için $|x_\alpha - x| \wedge y \xrightarrow{o} 0$ olur.

$$|Px_\alpha - Px| = P|x_\alpha - x| \leq |x_\alpha - x|$$

olduğundan ve $|Px_\alpha - Px| \wedge y \leq |x_\alpha - x| \wedge y$ olur. $|x_\alpha - x| \wedge y \xrightarrow{o} 0$ olduğundan $|Px_\alpha - Px| \wedge y \xrightarrow{o} 0$ elde edilir. O halde E içinde $Px_\alpha \xrightarrow{uo} Px$ elde edilir. Özel olarak, her $y \in B^+$ için $|Px_\alpha - Px| \wedge y \xrightarrow{o} 0$ olacağından B içinde $Px_\alpha \xrightarrow{uo} Px$ olur. □

Lemma 4.1.15. *E sıra sürekli bir Banach latis olsun. $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ ise $\|x\| \leq \liminf \|x_\alpha\|$ olur.*

Kanıt. $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ olsun. O halde,

$$x_\alpha \xrightarrow{uo} x \iff \forall y \in \; E^+ \; \text{ için } |x_\alpha - x| \wedge y \xrightarrow{o} 0 \iff ||x_\alpha - x| \wedge y| \leq z_\beta \downarrow 0$$

olacak şekilde (z_β) neti vardır. Ayrıca,

$$||x_\alpha| \wedge |x| - |x| \wedge |x|| \leq ||x_\alpha| - |x|| \wedge |x| \leq |x_\alpha - x| \wedge |x|$$

eşitsizliğinde $|x_\alpha - x| \wedge |x| \xrightarrow{o} 0$ olduğundan $|x_\alpha - x| \wedge |x| \leq y_\gamma \downarrow 0$ olacak şekilde (y_γ) neti vardır. Buradan $|x_\alpha| \wedge |x| \xrightarrow{\|\cdot\|} |x|$ elde edilir. Böylece,

$$\|x\| \leq \liminf \||x_\alpha| \wedge |x|\| \leq \liminf \|x_\alpha\|$$

olur. □

4.2 Nakano Sonuçları

Bu bölümde [21] makalesi incelenmiştir. Bu bölüm boyunca $\mathbb{1}$ zayıf birim olarak gösterilecektir. E Dedekind tam ise B_a bir izdüşüm bandtir. Böylece

$$E = B_a \oplus B_a^d$$

elde edilir. $\mathbb{1} \in E$ zayıf birim olsun. $\mathbb{1}_a$, $\mathbb{1}$'nin B_a içindeki komponenti olmak üzere

$$\mathbb{1} = \mathbb{1}_a \oplus \mathbb{1}_a^{'} \in B_a \oplus B_a^d = E$$

şeklinde yazılabilir.

Lemma 4.2.1. *E Dedekind tam Riesz uzay ve B_a bir izdüşüm band olmak üzere $\mathbb{1}_a$, $\mathbb{1}$'nin B_a içindeki komponenti olsun.*

$$\mathbb{1}_a = 0 \iff a = 0$$

Kanıt. $(\Rightarrow)$ $\mathbb{1}_a = 0$ ise $\mathbb{1} = \mathbb{1}_a^{'} \in B_a^d$ olur.
$\mathbb{1}_a = 0$ ise $\mathbb{1} = \mathbb{1}_a^{'} \in B_a^d$ olur. Herhangi bir $x \in B_a$ alınır ise $x \wedge \mathbb{1}_a^{'} = 0$ olur. $a \in B_a$ olduğundan $a \wedge \mathbb{1} = 0$ ise $a = 0$ olmak zorundadır.

$(\Leftarrow)$ $a = 0$ ise $B_a = 0$ ve $\mathbb{1}_a = 0$ olur.

□

$\mathbb{1}$ zayıf birim olmak üzere $a \in E^+$ olsun. Eğer $e = \mathbb{1}_a$ ise $a_e = a$ olur. Burada a_e elemanı $a \in E^+$'nın e tarafından üretilen B_e bandındeki komponentidir. Buradan a ile e'nin aynı bandi ürettiği söylenebilir.

Not 4.2.2. *$\mathbb{1}_a, B_a$ bandinin içinde $\mathbb{1}$ zayıf biriminin komponenti*

$$\mathbb{1} = \mathbb{1}_a + \mathbb{1}_a^{'}$$

olmak üzere $B_{\mathbb{1}_a} = B_a$ elde edilir.

Kanıt. $B_{\mathbb{1}_a} = B_a$ eşitliğini göstermek yeterli olacaktır.
$u \in B_{\mathbb{1}_a}$ alalım. $|u| \wedge n|\mathbb{1}| \uparrow |u|$ olur. $\mathbb{1}_a \in B_a$ olduğundan $|\mathbb{1}_a| \wedge n|a| \uparrow |\mathbb{1}_a|$ olur.

$$\begin{aligned} n\mathbb{1} \wedge n^2 a \uparrow n\mathbb{1}_a &\implies |u| \wedge n\mathbb{1}_a \wedge n^2 a \uparrow |u| \wedge n\mathbb{1}_a \\ &\implies |u| \wedge n^2 a \uparrow |u| \\ &\implies u \in B_a \end{aligned}$$

Tersine $u \in B_a$ alalım. $|u| \wedge n^2 a \uparrow |u|$ olur. $\mathbb{1}_a \in B_a^{'} \implies \mathbb{1} \wedge na \uparrow \mathbb{1}_a$ olduğunu biliyoruz. $n\mathbb{1}_a \wedge n^2 a \uparrow n\mathbb{1}_a$ olur. Böylece $u \in B_{\mathbb{1}_a}$ elde edilir. O halde $B_{\mathbb{1}_a} = B_a$ eşitliği sağlanır. □

Lemma 4.2.3. *E Dedekind tam Riesz uzay olsun. $a \in E$, $e = \mathbb{1}_{a^+}$ için $a_e = a^+$ ve $d = \mathbb{1} - e = \mathbb{1} - \mathbb{1}_{a^+}$ şeklinde alınır ise $a_d = -a^-$ olur.*

Kanıt. $a \in E$ olmak üzere $a^+ \in E^+$ ve $B_{a^+} = B_{\mathbb{1}_a^+}$ olsun.

$$\begin{gathered} a = a_{\mathbb{1}_a^+} + a^{'}_{\mathbb{1}_a^+} \in B_{\mathbb{1}_a^+} \oplus B^d_{\mathbb{1}_a^+} \\ a = a^+ - a^- \end{gathered}$$

$\mathbb{1} \in a$ olduğundan

$$\mathbb{1} = \mathbb{1}_{\mathbb{1}_a^+} + \alpha = \mathbb{1}_{\mathbb{1}_a^+} + (\mathbb{1} - \mathbb{1}_{\mathbb{1}_a^+})$$

olur. d tarafından üretilen band

$$B_d = B^d_{\mathbb{1}_a^+} \implies a_d = a^{'}_{\mathbb{1}_a^d} = -a^-$$

olarak elde edilir. □

Lemma 4.2.4. *E Dedekind tam Riesz uzay, $\mathbb{1}$ zayıf birim ve $a \in E^+$ olmak üzere herhangi bir $\lambda > 0$ için*

$$e_a(\lambda) = \mathbb{1}_{(a-\lambda\mathbb{1})^+} \leq \frac{1}{\lambda} a \text{ olur.}$$

Ayrıca $e_a(\lambda) = \mathbb{1}_{(a-\lambda\mathbb{1})^+}$ elemanına a'nın spektral elemanı adı verilir.
$A = \{e_a(\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ kümesine a'nın spektral ailesi denir.

Kanıt. $\alpha > 0$ olduğundan $\alpha = \alpha_e = \alpha_{\mathbb{1}_\alpha}$ şeklinde düşünebiliriz. $(a-\lambda\mathbb{1})_{e_a(\lambda)}$ elemanının $e_a(\lambda)$'nın ürettiği bandin içindeki $(a - \lambda\mathbb{1})$ elemanının komponenti olduğunu biliyoruz. Böylece Lemma 4.2.2'den $(a - \lambda\mathbb{1})_{e_a(\lambda)} = (a - \lambda\mathbb{1})^+ \geq 0$ olur.
Diğer taraftan $(a - \lambda\mathbb{1})_{e_a(\lambda)} = a_{e_a(\lambda)} - \lambda\mathbb{1}_{e_a(\lambda)}$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} &0 \leq (a - \lambda\mathbb{1})_{e_a(\lambda)} = (a - \lambda\mathbb{1})^+ = a - \lambda\mathbb{1}_{e_a(\lambda)} \\ &a - \lambda\mathbb{1}_{e_a(\lambda)} = a - \lambda\mathbb{1}_{(a-\lambda\mathbb{1})^+} \geq 0 \\ &\mathbb{1}_{(a-\lambda\mathbb{1})^+} \leq \frac{a}{\lambda} \end{aligned}$$

$(a - \lambda\mathbb{1}) \in E = B_{e_a(\lambda)} \oplus B^d_{e_a(\lambda)}$ olmak üzere $a = a_{e_a(\lambda)} + a^{'}_{e_a(\lambda)}$ ve $\mathbb{1} = \mathbb{1}_{e_a(\lambda)} + \mathbb{1}^{'}_{e_a(\lambda)}$ olarak yazılabileceğinden

$$\begin{aligned} (a - \lambda\mathbb{1}) &= a_{e_a(\lambda)} + a^{'}_{e_a(\lambda)} - \lambda\mathbb{1}_{e_a(\lambda)} - \lambda\mathbb{1}^{'}_{e_a(\lambda)} \\ &= (a_{e_a(\lambda)} - \lambda\mathbb{1}_{e_a(\lambda)}) + (a^{'}_{e_a(\lambda)} - \lambda\mathbb{1}^{'}_{e_a(\lambda)}) \\ &= a_{e_a(\lambda)} - \lambda\mathbb{1}_{e_a(\lambda)} \end{aligned}$$

elde edilir. □

Lemma 4.2.5. *E bir Riesz uzay ve $a \in E^+$ olmak üzere herhangi $\lambda > 0$ için*

$$-(a-\lambda\mathbb{1})^- \leq \lambda(\mathbb{1} - \mathbb{1}_{(a-\lambda\mathbb{1})^+}) \text{ olur.}$$

Not 4.2.6. *$a \in E$ için $e = \mathbb{1}_{a^+}$ ve $d = \mathbb{1} - e = \mathbb{1} - \mathbb{1}_{a^+}$ olmak üzere*

$$a_e = a^+ \text{ ve } a_d = -a^-$$

elde edilir. Ayrıca $(a-\lambda\mathbb{1}) \in E$ olmak üzere $e_a(\lambda) = \mathbb{1}_{(a-\lambda\mathbb{1})^+}$ ve $d_a(\lambda) = \mathbb{1} - \mathbb{1}_{(a-\lambda\mathbb{1})^+}$ olur. Buradan,

$$(a-\lambda\mathbb{1})_{\mathbb{1}_{(a-\lambda\mathbb{1})^+}} = (a-\lambda\mathbb{1})_{e_a(\lambda)} = (a-\lambda\mathbb{1})^+ \text{ ve } (a-\lambda\mathbb{1})_{d_a(\lambda)} = -(a-\lambda\mathbb{1})^-$$

elde edilir.

Lemma 4.2.7. *E bir Riesz uzay olmak üzere $S = (a_\alpha) \subset E^+$ şeklinde tanımlansın.*

$$\wedge_\alpha \mathbb{1}_{a_\alpha} = 0 \text{ ise } \wedge_\alpha a_\alpha = 0 \text{ olur.}$$

Tersi doğru değildir.

Kanıt. Herhangi α için $\mathbb{1}_{a_\alpha} \in B_{a_\alpha}$ olur. a_α pozitif olduğundan Not 4.2.2'den $a_\alpha = a_{\alpha_{\mathbb{1}_{a_\alpha}}}$ olur. Böylece,

$$\mathbb{1} = \mathbb{1}_{a_\alpha} + \mathbb{1}'_{a_\alpha} \text{ ve } a_\alpha = a_{\alpha_{\mathbb{1}_{a_\alpha}}} + a'_{\alpha_{\mathbb{1}_{a_\alpha}}} = a_{\alpha_{\mathbb{1}_{a_\alpha}}} + \mathbb{1}'_{a_\alpha}$$

olarak yazılabileceğinden

$$\begin{aligned} 0 \leq a_\alpha \wedge \mathbb{1} &\leq a_\alpha \wedge (\mathbb{1}_{a_\alpha} + \mathbb{1}'_{a_\alpha}) \\ &\leq a_\alpha \wedge \mathbb{1}_{a_\alpha} + a_\alpha \wedge \mathbb{1}_{a_\alpha} \\ &= a_\alpha \wedge \mathbb{1}_{a_\alpha} \\ &\leq \mathbb{1}_{a_\alpha} \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\wedge_\alpha \mathbb{1}_{a_\alpha} = 0 \implies \wedge_\alpha(\mathbb{1} \wedge a_\alpha) = 0 \implies \wedge_\alpha a_\alpha = 0$$

bulunur.
Tersini doğru olmadığını göstermek için $a_n = \frac{1}{n}\mathbb{1}$ alınsın. $\wedge_n a_n = 0$ olur. $\mathbb{1}_{a_n}$ elemanı a_n tarafından üretilen B_{a_n} bandinin içinde $\mathbb{1}$'in komponentidir.

$$B_{a_n} = \{x \in E : |x| \wedge n a_n \uparrow |x|\}$$

olduğundan $|x| \wedge n\frac{1}{n}\mathbb{1} = |x| \wedge \mathbb{1} \uparrow |x|$ olmalıdır. Fakat $|x| \wedge \mathbb{1} \leq |x|$ olmalıdır. Bu durumda $B_{a_n} = E$ elde edilir. □

Lemma 4.2.8. *E bir Riesz uzay ve $S = (a_\alpha) \subset E^+$ kümesi için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.*

(*i*) *Her $\lambda > 0$ için $\wedge_\alpha \mathbb{1}_{(a-\lambda\mathbb{1})^+} = 0$*

(*ii*) $\wedge_\alpha a_\alpha = 0$

Kanıt. (*i*) $\implies$ (*ii*) Her $\lambda > 0$ için $\wedge_\alpha \mathbb{1}_{(a-\lambda\mathbb{1})^+} = 0$ olsun. Lemma 4.2.7'ten $\wedge_\alpha \beta_\alpha = \wedge_\alpha (a_\alpha - \lambda\mathbb{1})^+ = 0$ olur.

$$\wedge_\alpha (a_\alpha - \lambda\mathbb{1}) = \wedge_\alpha [(a_\alpha - \lambda\mathbb{1})^+ - (a_\alpha - \lambda\mathbb{1})^-] \leq 0$$

elde edilir. Böylece,

$$\forall\lambda > 0 \text{ için } 0 \leq \wedge_\alpha a_\alpha - \lambda\mathbb{1} \leq 0 \implies 0 \leq \wedge_\alpha a_\alpha \leq \lambda\mathbb{1} \implies \wedge_\alpha a_\alpha = 0$$

elde edilir.

(*ii*) $\implies$ (*i*) $\wedge_\alpha a_\alpha = 0$ olsun. Lemma 4.2.4'den her α için $\lambda\mathbb{1}_{(a_\alpha-\lambda\mathbb{1})^+} \leq a_\alpha$ olduğunu biliyoruz. O halde

$$0 \leq \lambda \wedge_\alpha \mathbb{1}_{(a_\alpha-\lambda\mathbb{1})^+} \leq \wedge_\alpha a_\alpha = 0 \implies \forall\lambda > 0 \text{ için } \wedge_\alpha \mathbb{1}_{(a_\alpha-\lambda\mathbb{1})^+} = 0$$

□

Lemma 4.2.9. *E bir Riesz uzay ve $S = (a_\alpha) \subset E^+$ kümesi verilsin.*

$$\mathbb{1}_{a_\alpha} \xrightarrow{o} 0 \implies a_\alpha \xrightarrow{uo} 0 \textit{ olur.}$$

Kanıt. $\mathbb{1}_{a_\alpha} \xrightarrow{o} 0$ olsun.

$$0 \leq a_\alpha \wedge \mathbb{1} \leq \mathbb{1}_{a_\alpha}$$

olarak yazılabilir. $\mathbb{1}_{a_\alpha} \xrightarrow{o} 0$ olduğundan $a_\alpha \wedge \mathbb{1} \xrightarrow{o} 0$ olur. O halde Lemma 4.1.12'den $a_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ elde edilir. □

Teorem 4.2.10. *E bir Riesz uzay ve $(a_\alpha) \subset E^+$ neti için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.*

(*i*) *Her $\lambda > 0$ için $\mathbb{1}_{(a_\alpha-\lambda\mathbb{1})^+} \xrightarrow{o} 0$*

(*ii*) $a_\alpha \xrightarrow{uo} 0$

Kanıt. (*i*) $\implies$ (*ii*) Her $\lambda > 0$ için $\mathbb{1}_{(a_\alpha-\lambda\mathbb{1})^+} \xrightarrow{o} 0$ olsun. Öncelikle (a_α) netini sıra sınırlı kabul edelim. O halde Lemma 4.2.9'den

$$\forall\lambda > 0 \text{ için } (a_\alpha - \lambda\mathbb{1})^+ \xrightarrow{uo} 0$$

olur. Böylece $\limsup_\alpha (a_\alpha - \lambda\mathbb{1})^+ = 0$ ve $\limsup_\alpha (a_\alpha - \lambda\mathbb{1}) \leq 0$ elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} \limsup_\alpha a_\alpha - \limsup_\alpha \lambda\mathbb{1} \leq 0 &\implies \limsup_\alpha a_\alpha \leq \lambda\mathbb{1} \\ &\implies \limsup_\alpha a_\alpha = 0 \\ &\implies a_\alpha \xrightarrow{uo} 0 \end{aligned}$$

olur. Şimdi (a_α) neti sıra sınırlı olmasın. Böylece her α için $a_\alpha \wedge \mathbb{1} \leq \mathbb{1}$ olduğundan $(\beta_\alpha) = (a_\alpha \wedge \mathbb{1})$ neti sıra sınırlıdır. Herhangi $\lambda > 0$ için

$$0 \leq \mathbb{1}_{(\beta_\alpha-\lambda\mathbb{1})^+} \leq \mathbb{1}_{(a_\alpha-\lambda\mathbb{1})^+} \xrightarrow{o} 0$$

olduğundan $\mathbb{1}_{(\beta_\alpha-\lambda\mathbb{1})^+} \xrightarrow{o} 0$ olur. O halde $\beta_\alpha = a_\alpha \wedge \mathbb{1} \xrightarrow{o} 0$ olduğundan $a_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ olur.

$(ii) \implies (i)$ $a_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ olsun. Buradan $a_\alpha \wedge \mathbb{1} \xrightarrow{o} 0$ olur. Böylece Lemma 3.2.4'ten

$$\begin{aligned}
&\mathbb{1}_{(a_\alpha-\lambda\mathbb{1})^+} \leq \frac{1}{\lambda}a_\alpha \\
&\mathbb{1}_{(a_\alpha-\lambda\mathbb{1})^+} \wedge \lambda\mathbb{1} \leq \frac{1}{\lambda}a_\alpha \wedge \frac{1}{\lambda}\mathbb{1} = \frac{1}{\lambda}(a_\alpha \wedge \mathbb{1}) \xrightarrow{o} 0 \\
&\mathbb{1}_{(a_\alpha-\lambda\mathbb{1})^+} \wedge \frac{1}{\lambda}\mathbb{1} \xrightarrow{o} 0
\end{aligned}$$

olur. Burada $\lambda = 1$ alınırsa

$$\mathbb{1}_{(a_\alpha-\lambda\mathbb{1})^+} \wedge \mathbb{1} \xrightarrow{o} 0 \implies \mathbb{1}_{(a_\alpha-\lambda\mathbb{1})^+} \xrightarrow{uo} 0$$

elde edilir. Buradan $(\mathbb{1}_{(a_\alpha-\lambda\mathbb{1})^+})$ neti sıra sınırlı olduğundan $\mathbb{1}_{(a_\alpha-\lambda\mathbb{1})^+} \xrightarrow{o} 0$ elde edilir.

□

Aşağıdaki teoremde universal σ-tamlık kavramına ihtiyaç vardır. Bu kavram bir sonraki bölümde ayrıntısı ile çalışılmıştır. Tanım için Bölüm 3.3 bakılabilir.

Teorem 4.2.11. *(Nakano) E uzayı universal σ-tam ise her sınırsız sıra yakınsak $(a_n) \subset E$ dizisi sıra sınırlıdır.*

Kanıt. Genelleme yaparak $(a_n) \subset E^+$'dir ve $a_n \xrightarrow{uo} 0$ olup, Lemma 4.3.4'den (a_n) dizisinin ürettiği band izdüşüm bandi, universal σ-tam ve zayıf birime sahiptir. Basitleştirerek E'nin zayıf birim $\mathbb{1}$'e sahip olduğunu kabul edelim. $a_n \xrightarrow{uo} 0$ olduğundan Teorem 4.2.10'den her $\lambda > 0$ için $\mathbb{1}_{(a_n-\lambda\mathbb{1})^+} \xrightarrow{o} 0$ olur. $d_n = \wedge_{m\geq n}\mathbb{1}_{(a_n-\lambda\mathbb{1})^+}$ olarak tanımlayalım. $\mathbb{1}_{(a_n-\lambda\mathbb{1})^+} \xrightarrow{o} 0$ olduğundan $\mathbb{1}_{(a_n-\lambda\mathbb{1})^+} \downarrow 0$ olur. Buradan,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{1}_{(a_1-\lambda\mathbb{1})^+} \geq \mathbb{1}_{(a_2-\lambda\mathbb{1})^+} \geq \cdots \geq \mathbb{1}_{(a_n-\lambda\mathbb{1})^+} \geq \cdots \\
&\wedge_{m\geq 1}\, \mathbb{1}_{(a_1-\lambda\mathbb{1})^+} \geq \wedge_{m\geq 2}\mathbb{1}_{(a_2-\lambda\mathbb{1})^+} \geq \cdots \wedge_{m\geq n}\, \mathbb{1}_{(a_n-\lambda\mathbb{1})^+} \geq \cdots
\end{aligned}$$

olduğundan $d_n \downarrow 0$ elde edilir.
d_n tarafından üretilen F_n bandini ele alalım. $F_n = B_{d_n}$ olarak tanımlayalım. $0 \leq x \leq y$ iken $I_x \leq I_y$ olduğundan F_n bandi bu koşulu sağlansın. $\cap_{n=1}^{\infty}F_n = 0$ olduğunu göstermeliyiz. $0 \neq x \in \cap_{n=1}^{\infty}F_n$ alalım. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için $x \in F_n$ olur.

$$d_1 \geq d_2 \geq \cdots d_n \geq \cdots$$

olduğundan

$$\lambda d_1 \geq \lambda d_2 \geq \cdots \geq \lambda d_n \geq \cdots$$

olur ve her $n \in \mathbb{N}$ için $x \in F_n$ ve $\inf d_n = 0$ olması ile çelişir. Böylece $x = 0$ olur.
$c_n = 1 - d_n$ dizisini tanımlayalım. $d_n \downarrow 0$ olduğundan $c_n \uparrow 1$ olur. $F_n \uparrow$ olduğundan $F_n^d \downarrow$ olur. Ayrıca,

$$F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots \supseteq F_n \subseteq \cdots \text{ olduğundan } F_1^d \subseteq F_2^d \subseteq \cdots \subseteq F_n^d \subseteq \cdots$$

elde edilir. $0 \neq x \in E \setminus cl[\sum_{n=1}^{\infty}(F_n)^d]$ elemanı var olsun. O halde $x \neq cl[\sum_{n=1}^{\infty}(F_n)^d]$ elde edilir. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için $x \perp F_n^d$ ve her $n \in F_n$ olur. Buradan $x \in \cap_{n=1}^{\infty}F_n = \{0\}$

çelişkisi elde edilir. $\cap_{n=1}^{\infty} F_n = 0$ olur. $\cap_{n=1}^{\infty} F_n = 0$ olduğundan $E = cl[\sum_{n=1}^{\infty}(F_n)^d]$ olur. $E = cl[\sum_{n=1}^{\infty}(F_n)^d]$ ve her $m \geq n$ için $(a_m)_{F_n^d} \leq 1$ olur.
$F_n^d = (B_{d_n})^d = (B^d_{\wedge_{m\geq n}(\mathbb{1}_{a_m - n\mathbb{1}})})$ ve $e_1 = c_1, e_2 = c_2 - c_1, \cdots, e_n = c_n - c_{n-1}$ olarak tanımlayalım. $H_n = B_{e_n}$ izdüşüm bandi olsun. Bazı özelliklerin doğru olduğunu göstermeliyiz.
1)$n \neq m$ iken $H_n \cap H_m = 0$ olduğunu gösterelelim. $x \in H_n \cap H_m$ alalım. Buradan $x \in H_n$ ve $x \in H_m$ olur. Böylece $|x| \wedge ke_n \uparrow |x|$ ve $|x| \wedge ke_m \uparrow |x|$ elde edilir.

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow |x| \wedge k(c_n - c_{n-1}) \wedge |x| \wedge k(c_m - c_{m-1}) \uparrow |x| \wedge |x| = |x| \\
&\Longrightarrow |x| \wedge k(c_n - c_{n-1}) \wedge k(c_m - c_{m-1}) \uparrow |x| \\
&\Longrightarrow |x| \wedge k[(c_n - c_{n-1}) \wedge (c_m - c_{m-1})] \uparrow |x| \\
&\Longrightarrow |x| \wedge k(c_m - c_{m-1}) \uparrow |x| \\
&\Longrightarrow |x| = 0 \\
&\Longrightarrow x = 0
\end{aligned}$$

Böylece $H_n \cap H_m = 0$ elde edilir.
2) $\sum_{i=1}^{\infty} H_i = (F_n)^d$ olduğunu gösterelim. $x \in \sum_{i=1}^{\infty} H_i$ alalım. O halde $x = h_1 + h_2 + \cdots + h_n$ olacak şekilde $h_1, h_2, \cdots, h_n$ vardır. Her bir i için

$$H_i = B_{e_i} = B_{c_i - c_{i-1}} = B_{\mathbb{1} - d_i - (\mathbb{1} - d_{i-1})} = B_{d_{i-1} - d_i}$$

olur. Her bir i için $h_i \in H_i$ olduğundan

$$\exists\ \lambda_i > 0, 0 \leq h_i \leq \lambda_i(d_{i-1} - d_i)$$

elde edilir. Yani,

$$\begin{aligned}
x &= \lambda_1(\mathbb{1} - d_1) + \lambda_2(d_1 - d_2) + \lambda_3(d_2 - d_3) + \cdots + \lambda_n(d_{n-1} - d_n) \\
&= \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)d_1 + (\lambda_3 - \lambda_2)d_2 + \cdots - \lambda_n d_n \\
&\geq \lambda_1 - (\lambda_n + \lambda_1)d_1
\end{aligned}$$

olur. $\lambda_n(\mathbb{1} - Cd_1) \in F_1^d$'dir. Böylece $x \in F_n^d$ elde edilir. Diğer taraftan $x \in F_n^d$ alalım.

$$x \in B_{c_n} = B_{\mathbb{1} - d_n}$$

olduğundan

$$\exists\ \lambda > 0 : x \leq \lambda c_n = \lambda(\mathbb{1} - d_n)$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned}
x &\leq \lambda(\mathbb{1} - d_1 + d_1 - d_2 + d_2 - d_3 + \cdots + d_{n-1} - d_n) \\
&\leq h_1 + h_2 + \cdots + h_n
\end{aligned}$$

olduğundan $x \in \sum_{i=1}^{\infty} H_i$ elde edilir.
3) $E = cl(\sum_{n=1}^{\infty} H_n)$ olduğunu gösterelim. $E = cl(\sum_{n=1}^{\infty} F_n^d)$ olduğundan 2.özellikten $E =$

$cl(\sum_{n=1}^{\infty} H_n)$ elde edilir.
4) Her $m \geq n$ için $(a_m)_{H_n} \leq e_n$ olur.
(4)'ten her n için

$$\{(a_m)_{H_n} : \text{m}= 1,2, \cdots\} \leq (\wedge_{m=1}^{n}(a_m)_{H_n}) \wedge e_n = b_n$$

bulunur. b_n'ler ayrık ve E lateral σ-tam olduğundan $b = \vee_n b_n$ vardır. Böylece her $n \in \mathbb{N}, b_n \leq b$ olduğundan $0 \leq \{a_n\} \leq b$ elde edilir. □

Sonuç 4.2.12. *E universal σ-tam ve $(x_n) \subset E$ bir dizi olsun.*

$$x_n \xrightarrow{uo} x \textit{ olması için gerek ve yeter koşul } x_n \xrightarrow{o} x \textit{ olmasıdır.}$$

Kanıt. Önerme 4.1.4'den $x_n \xrightarrow{uo} x$ ise $x_n \xrightarrow{o} x$ olduğunu ve (x_n) dizisi sıra sınırlı ise Önerme 4.1.7'den $x_n \xrightarrow{uo} x \iff x_n \xrightarrow{o} x$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca Nakano Teorem 4.2.11'den her sınırsız yakınsak (x_n) dizisinin sıra sınırlı olduğunu gördük. Böylece ispat biter. □

4.3 Universal Tamlık ve uo-Yakınsaklık

Bu bölümde uo-Cauchy ile sıra yakınsaklığın hangi koşullar altında denk olduğu tartışılacaktır. Bu bölümde [17] makalesi incelenmiştir.

Tanım 4.3.1. E bir Riesz uzay olsun.

- Her $(x_n) \subset E^+$ ayrık dizisinin supremumu var ise E uzayına lateral σ-tam uzay denir.
- Her ayrık alt kümesinin supremumu var ise E uzayına lateral tam uzay denir.

Örnek 4.3.2. *$\mathbb{R}^2$'de lexicographic düzlem bir lateral tam uzaydır.*

Tanım 4.3.3. E bir Riesz uzay olsun.

- E uzayı hem Dedekind tam hem de lateral tam uzay ise E uzayına universal tam uzay denir.
- E uzayı hem Dedekind σ-tam hem de lateral σ-tam uzay ise E uzayına universal σ-tam uzay denir.

Lemma 4.3.4. *E uzayı universal σ-tam olmak üzere $D = (x_n)$ dizisi için B_D, D tarafından üretilen band olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

(i) B_D izdüşüm banttir.

(ii) B_D Dedekind σ-tamdır.

(iii) B_D lateral σ-tamdır.

(iv) B_D zayıf birime sahiptir.

Tanım 4.3.5. E Riesz uzay ve L universal tam Riesz uzay olmak üzere E uzayına Riesz izomorf olan bir $M \subset L$ sıra yoğun Riesz alt uzayı varsa L uzayına E uzayının universal tamlanışı denir ve E^u olarak gösterilir.

Teorem 4.3.6. *(Maeda-Ogasawara) Her Arşimet Riesz uzayının (Riesz izomorfizmine bağlı) tek bir universal tamlanışı vardır. E Arşimet Riesz uzayının universal tamlanışı E^u şeklinde gösterilir.*

Teorem 4.3.7. *E universal σ-tam Riesz uzay ve $(x_n) \subset E$ bir dizi olsun.*

(x_n) uo-Cauchy olması için gerek ve yeter koşul (x_n) dizisinin sıra yakınsak olmasıdır.

Kanıt. (x_n) dizisi uo-Cauchy olsun.

$$(x_n) \text{ sıra sınırlı } \implies (x_n) \text{ o-Cauchy } \implies (x_n) \text{ sıra yakınsaktır}$$

olduğundan (x_n) dizisinin sıra sınırlı olduğunu göstermek yeterlidir. Lemma 4.3.4'den E uzayı $e > 0$ zayıf birimine sahiptir. Herhangi bir $x \geq 0$ için B_x, x tarafından üretilen band ve P_x izdüşüm band olsun. $P_x e = e_x$ olarak tanımlayalım. Teorem 4.2.10'dan her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$a_\alpha \xrightarrow{uo} 0 \iff e_{(a_\alpha - ne)} \xrightarrow{o} 0$$

olacak şekilde $a_\alpha \subset E^+$ neti vardır. Buradan $e_{(|x_m - x_n| - e)^+} \xrightarrow{o} 0$ olur. Böylece,

$$\inf_{m,n \geq 1} \sup_{k \geq n, l \geq m} e_{(|x_k - x_l| - e)^+} = 0 \text{ veya } \inf_{n \geq 1} \sup_{k \geq l \geq n} e_{(|x_k - x_l| - e)^+} = 0$$

olarak yazılabileceğinden bunu tekrardan formulleştirerek

$$d_n = \sup_{k \geq l \leq n} e_{(|x_k - x_l| - e)^+} \downarrow 0$$

alalım. $e_1 = e - d_1$ ve $e_n = d_{n-1} - d_n$ inşa edelim. Böylece,

(1) B_{e_n}'ler ayrıktır.

(2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} P_{e_i} x \uparrow x$

(3) Her bir n için $(P_{e_n}|x_m|)_{m=1}^{\infty}, b_n$ ile üstten sınırlı ve her $x \in E^+$ için $P_{e - e_{x^+}}(x+e) \leq e$ olduğunu gösterelim.

$$P_{e - e_x}(x + e) = (x + e) - P_{e_{x^+}}(x + e) \leq e$$

Herhangi $m \geq n$ için

$$P_{e - d_n}|x_m - x_n| \leq P_{e - e_{(|x_m - x_n| - e)^+}}|x_m - x_n| \leq e$$

Böylece

$$P_{e_n}|x_m - x_n| = P_{e_n} P_{e - d_n}|x_m - x_n| \leq P_{e_n} e = e_n$$

Sonuç olarak her $m \geq n$ için

$$P_{e_n}|x_m| \leq e_n + P_{e_n}|x_n|$$

elde edilir. Son olarak b_n'ler ayrık olduğundan E içinde $b = \sup_n b_n$ supremum vardır. Her $m \geq 1$ için

$$\sum_{i=1}^{n} P_{e_i}|x_m| = \vee_{i=1}^{n} P_{e_i}|x_m| \leq b$$

Buradan $|x_m| \leq b$ elde edilir. □

Sonuç 4.3.8. *E universal σ-tam Riesz uzay olmak üzere $(x_n) \subset E$ olsun.*

$$x_n \xrightarrow{uo} 0 \text{ olması için gerek ve yeter koşul } x_n \xrightarrow{o} 0 \text{ olmasıdır.}$$

Sonuç 4.3.9. *E bir Riesz uzay ve $(x_n) \subset E$ bir dizi olsun.*

- *E içinde $x_n \xrightarrow{uo} 0$ olması için gerek ve yeter koşul E^u içinde $x_n \xrightarrow{o} 0$ olmasıdır.*
- *E içinde (x_n) dizisinin uo-Cauchy olması için gerek ve yeter koşul E^u içinde (x_n) dizisinin sıra yakınsak olmasıdır.*

Kanıt. E, E^u içerisinde sıra yoğundur. Böylece Teorem 3.1.20'den E, E^u içerisinde regülerdir. O halde Teorem 4.1.10'den E içerisinde $x_n \xrightarrow{uo} 0$ olması için gerek ve yeter koşul E^u içerisinde $x_n \xrightarrow{uo} 0$ olmasıdır. Böylece Sonuç 4.3.8'den E içinde $x_n \xrightarrow{uo} 0$ olması için gerek ve yeter koşul E^u içinde $x_n \xrightarrow{o} 0$ olmasıdır. Teorem 4.3.7'den (x_n) dizisinin uo-Cauchy olması için gerek ve yeter koşul x_n dizisinin sıra yakınsak olmasıdır. □

Tanım 4.3.10. E bir Riesz uzay ve $(x_n) \subset E$ bir dizi olmak üzere $a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$ dizisine (x_n) dizisinin Cesàro ortalama dizisi denir.

Lemma 4.3.11. *E bir Dedekind σ-tam Riesz uzay ve $(x_n) \subset E$ bir dizi olsun. $(x_n) \xrightarrow{o} 0$ ise (x_n) dizisinin Cesàro ortalama dizisi sıfıra sıra yakınsaktır.*

Kanıt. $x_n \xrightarrow{o} 0$ olsun. O halde $|x_n| \leq u_m \downarrow 0$ olacak şekilde (u_m) dizisi vardır.

$$\begin{aligned} |\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i| &\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} u_i \\ &\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k_n-1} u_i + \frac{1}{n}\sum_{i=k_n}^{m} u_i \\ &\leq \frac{k_n}{n}u_1 + u_{k_n} \downarrow 0 \end{aligned}$$

□

Sonuç 4.3.12. *E bir Riesz uzay ve $(x_n) \subset E$ bir dizi olsun. E içinde $x_n \xrightarrow{uo} 0$ ise (x_n)'nin Cesàro ortalama dizisi de 0'a uo-yakınsaktır.*

Tanım 4.3.13. E bir Riesz uzay ve $A \subset E$ bir alt küme olsun. $(x_\alpha) \subset A$ bir net ve $x \in E$ için $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ iken $x \in A$ oluyor ise A' ya uo-kapalı denir.

Önerme 4.3.14. *E bir Riesz uzay ve F, E'nin Riesz alt uzayı olsun. F'nin E içinde uo-kapalı olması için gerek ve yeter koşul F'nin E içinde o-kapalı olmasıdır.*

Kanıt. ($\Rightarrow$) $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ olsun. O halde Önerme 4.1.4'den $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ olur. F, E içinde uo-kapalı olduğundan $x \in F$ elde edilir. Buradan F, E içinde o-kapalıdır.

($\Leftarrow$) F, E içinde sıra kapalı, $(y_\alpha) \subset F$ ve $x \in E$ için $y_\alpha \xrightarrow{uo} x$ olsun. uo-yakınsaklık özelliğinden $y_\alpha^+ \xrightarrow{uo} x^+$ olduğundan genelliği bozmadan $y_\alpha^+ \xrightarrow{uo} x^+$ olarak kabul edelim. O halde $y_\alpha \subset F^+$ ve $x \in E^+$ için

$$|y_\alpha \wedge z - x \wedge z| \leq |y_\alpha - x| \wedge z \xrightarrow{o} 0 \tag{4.3.1}$$

olarak yazılır. Buradan $y \in F^+$ için $y_\alpha \wedge y \xrightarrow{o} x \wedge y$ olur. F sıra kapalı olduğundan $x \wedge y \in F$ olur. Diğer yandan $0 \leq z \in F^d$ için $y_\alpha \wedge z = 0$'dır. Buradan (4.3.1)'den $x \wedge z = 0$ elde edilir. Böylece $x \in F^{dd}$ olur. O halde $0 \leq z_\beta \uparrow x$ olacak şekilde (z_β) neti vardır. Dahası her β için $z_\beta \leq w_\beta$ olacak şekilde $w_\beta \in F$ vardır. Buradan,

$$z_\beta \uparrow x = z_\beta \wedge x \leq w_\beta \wedge x \leq x$$

olduğundan $w_\beta \wedge x \xrightarrow{o} x$ olur. $w_\beta \wedge x \in F$ ve F sıra kapalı olduğundan $x \in F$'dir. $\square$

4.4 AL-Temsili ve uo-Yakınsaklık

Bu bölümde uo-yakınsaklık ile topolojik yakınsaklık arasındaki ilişkiler Riesz uzayı üzerinde tanımlı kesin pozitif fonksiyonel yardımı ile tanımlanan uzayın AL-temsili ilişkisi ile verilecektir. Bu bölümde [17, 18] makaleleri incelenmiştir.

E bir Riesz uzay ve f_0, E üzerinde kesin pozitif fonksiyonel olmak üzere

$$\begin{aligned} f_0 : & E \to \mathbb{R} \\ & x \to f_0(x) \end{aligned}$$

$\|x\|_L = f_0(|x|)$ şeklinde tanımlansın. $(E, \|\cdot\|_L)$ bir normlu uzaydır.

Kanıt. 1. Her $x > 0$ için kesin pozitif fonksiyonel olduğundan $\|x\|_L = f_0(|x|) > 0$

2.

$$\begin{aligned} \|x\|_L = 0 &\iff f_0(|x|) = 0 \\ &\iff |x| = 0 \\ &\iff x = 0 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \|\lambda x\|_L &= f_0(|\lambda x|) \\ &= f_0(|\lambda||x|) \\ &= |\lambda| f_0(|x|) \\ &= |\lambda| \|x\|_L \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} \|x + y\|_L &= f_0(|x + y|) \\ &\leq f_0(|x| + |y|) \\ &= f_0(|x|) + f_0(|y|) \\ &= \|x\|_L + \|y\|_L \end{aligned}$$

$\square$

Böylece $\tilde{E}$, E Riesz uzayının norm tamlanışı olmak üzere Teorem 2.3.3'den $(\tilde{E}, \|\cdot\|_L)$ bir Banach uzayıdır.

Lemma 4.4.1. *E bir normlu Riesz uzay ve $\tilde{E}$, E Riesz uzayının norm tamlanışı olsun. $(\tilde{E}, \|\cdot\|_L)$ bir AL-uzaydır.*

Kanıt. Her $x, y \in \tilde{E}^+$ için $x \wedge y = 0$ ise

$$
\begin{aligned}
\|x+y\|_L &= f_0(|x+y|) \\
&= f_0(|x|+|y|) \\
&= f_0(|x|) + f_0(|y|) \\
&= \|x\|_L + \|y\|_L
\end{aligned}
$$

□

E Dedekind tam olsun. E, $\tilde{E}$ içinde idealdir. Ayrıca $E, \tilde{E}$ içinde norm yoğun, böylelikle sıra yoğundur. İspat için [26, Prop.2.4.16] bakılabilir.

AL-temsil, uo-yakınsaklık ve f_0 kesin pozitif fonksiyonelinin sıra sürekli olması ilişkisi ile yakından ilgilidir. Öncelikle sıra süreklilik tanımı verelim.

Tanım 4.4.2. E bir Riesz uzay, $x \in E$ ve $f_0 : E \to \mathbb{R}$ bir fonksiyonel olsun. (x_α) neti için her $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ iken $f_0(x_\alpha) \to f_0(x)$ oluyor ise f_0 fonksiyoneline sıra süreklidir denir.

Teorem 4.4.3. *E bir Riesz uzay ve f_0 kesin pozitif fonksiyonel olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.*

(i) f_0, E üzerinde sıra süreklidir.

(ii) E, $\tilde{E}$ içinde regüler Riesz alt uzaydır.

(iii) E, $\tilde{E}$ içinde sıra yoğun Riesz alt uzaydır.

(iv) $(x_\alpha) \subset E$ herhangi net olmak üzere E içinde $x_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\tilde{E}$ içinde $x_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ olmasıdır.

Ek olarak eğer E Dedekind tam ise $(i) - (iv)$ denkliği (v)'de denktir.

(v) E, $\tilde{E}$ içinde bir idealdir.

Kanıt. $(i) \implies (ii)$ f_0, E üzerinde sıra sürekli fonksiyonel olmak üzere E içinde $x_\alpha \downarrow 0$ netini alalım. $\tilde{E}$ içinde $x_\alpha \downarrow 0$ olduğunu göstermeliyiz. E, $\tilde{E}$ içinde Riesz alt uzay olduğundan $x_\alpha \downarrow$ olur. Kabul edelim ki $\tilde{E}$ içinde $x \neq 0$ olmak üzere $x_\alpha \downarrow x$ olsun. $\tilde{E}$ uzayı AL-uzay olduğundan $\tilde{E}$ sıra süreklidir. Buradan,

$$
\begin{aligned}
x_\alpha - x \downarrow 0 &\implies \|x_\alpha - x\|_L \to 0 \\
&\implies \|x_\alpha - x\|_L = f_0(x_\alpha - x) \to 0 \\
&\implies f_0(x_\alpha) \to f_0(x)
\end{aligned}
$$

Fakat E içinde $x_\alpha \downarrow 0$ iken f_0'da E içinde sıra sürekli olduğundan $f_0(x_\alpha) \to f_0(0) = 0$ olur. Buradan çelişki elde edilir. O halde $\tilde{E}$ içinde $x_\alpha \downarrow 0$ olur.

$(ii) \implies (i)$ E, $\tilde{E}$ içinde regüler Riesz alt uzay olsun. $\tilde{E}$, AL-uzay olduğundan $\tilde{E}$ sıra süreklidir. $\tilde{E}$ içinde $x_\alpha \downarrow 0$ ise Teorem 3.1.3'den $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ olur. $\tilde{E}$ sıra sürekli olduğundan $f_0(x_\alpha) \xrightarrow{o} f_0(x)$ olur. E, $\tilde{E}$ içinde regüler olduğundan E içinde $x_\alpha \downarrow 0$'dır ve buradan $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ elde edilir. O halde $f_0(x_\alpha) \xrightarrow{o} f_0(x)$ olur. Böylece f_0, E üzerinde sıra süreklidir.

$(ii) \implies (iii)$ E, $\tilde{E}$ içinde norm yoğundur. O halde herhangi $x \in \tilde{E}$ için $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ olacak şekilde en az bir tane $(x_n) \subset E$ dizisi vardır. Lemma 3.1.31'den $x_{n_k} \xrightarrow{o} x$ olacak şekilde en az bir tane $(x_{n_k}) \subset E$ alt dizisi vardır. Böylece E, $\tilde{E}$ içinde sıra yakınsaklığa göre yoğundur. E regüler Riesz alt uzay olduğundan Sonuç 3.1.29'dan E, $\tilde{E}$ içinde sıra yoğundur.

$(iii) \implies (iv)$ E, $\tilde{E}$ içinde sıra yoğun Riesz alt uzay olsun.

($\Rightarrow$) E içinde $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ olsun. Böylece

$$\forall\, y \in E \text{ için } |x_\alpha - x| \wedge y \xrightarrow{o} 0 \iff ||x_\alpha - x| \wedge y| \leq z_\beta \downarrow 0$$

olur. $\tilde{y} \in \tilde{E}$ alalım. E, $\tilde{E}$ içinde sıra yoğun Riesz alt uzay olduğundan Teorem 2.2.40'dan $\tilde{y} = \sup\{y \in E : y \leq \tilde{y}\}$ olarak tanımlayalım. O halde,

$$\forall\, \tilde{y} \in \tilde{E} \text{ için } |x_\alpha - x| \wedge \tilde{y} \xrightarrow{o} 0$$

elde edilir.

($\Leftarrow$) $\tilde{E}$ içinde $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ olsun. O halde her $\tilde{y} \in \tilde{E}$ için $|x_\alpha - x| \wedge \tilde{y} \xrightarrow{o} 0$ olur. E, $\tilde{E}$'nin içinde sıra yoğun olduğundan her $\tilde{y} \in \tilde{E}$ elemanı

$$\tilde{y} = \sup\{y \in E : y \leq \tilde{y}\}$$

olarak yazıldığından her $y \in E$ için $|x_\alpha - x| \wedge y \xrightarrow{o} 0$ olur.

$(ii) \implies (iv)$ ve $(iv) \implies (ii)$ Teorem 4.1.10'dan sağlanmaktadır.

Ayrıca, Sonuç 3.1.29'dan (v) ile $(i) - (iv)$ denkliği elde edilir.

□

Not 4.4.4. *E bir Riesz uzay ve f_0, E üzerinde kesin pozitif sıra sürekli fonksiyonel olsun. $\tilde{E}$, AL-uzay olduğundan Kakutani Temsil Teoreminden E uzayı en az bir tane μ ölçüsüne göre $L_1(\mu)$'nin regüler Riesz alt uzayıdır. Tersi de doğrudur. Gerçekten, bir Riesz uzay $L_1(\mu)$'nin regüler alt Riesz latis izomorfik olması için gerek ve yeter koşul bir tane kesin pozitif sıra sürekli fonksiyoneli var olmasıdır. Ayrıca, bir Riesz uzay $L_1(\mu)$'nin bir idealine latis izomorfik olması için gerek ve yeter koşul bu Riesz uzayın Dedekind tam olması ve bir tane kesin pozitif sıra sürekli fonksiyonelin sahip olmasıdır.*

Not 4.4.5. *E bir Riesz uzay ve f_0, E üzerinde kesin pozitif sıra sürekli fonksiyonel olsun. Kabul edelim ki E uzayı x_0 zayıf birimine sahip olsun. E, $\tilde{E}$ içinde sıra yoğun olduğundan x_0, $\tilde{E}$ uzayının da zayıf birimidir. Gerçekten, E uzayı $\tilde{E}$ içinde sıra yoğun olduğundan her $x \in \tilde{E}$ için Teorem 2.2.40'dan $x = \sup\{y \in E : 0 \leq y \leq x\}$ olarak yazılabilir ve*

$$x \wedge nx_0 \geq y \wedge nx_0 \uparrow y \implies x \wedge nx_0 \uparrow \sup y = x$$

olur. Böylece, x_0, $\tilde{E}$ uzayının zayıf birimidir. Buradan Kakutani Temsil Teoreminden ölçüyü sonlu ve x_0'nın $\mathbb{1}$ sabit fonksiyonu ile ilişkili seçilebilir. Dahası, E Dedekind tam olsun. O halde Teorem 4.4.3'den E, $L_1(\mu)$'nin bir ideali olarak düşünülebilir. Böylelikle E, $\mathbb{1}$ sabit fonksiyonunu içerir. Buradan E, $L_0(\mu)$ uzayını kapsar. Bu kapsamanın geçerli olması için f_0 fonksiyonelinin sıra sürekli olması şarttır.

Lemma 4.4.6. *E bir Dedekind tam normlu Riesz uzay olmak üzere $\tilde{E}$, E uzayının norm tamlanışı, $(x_\alpha) \subset E$ bir net ve $x \in E$ olsun.*

$$E \text{ içinde } x_\alpha \xrightarrow{uo} x \text{ ise } \tilde{E} \text{ içinde } x_\alpha \xrightarrow{uo} x \text{ olur.}$$

Kanıt. E, $\tilde{E}$ içinde ideal olduğundan Lemma 4.1.9'dan ispat biter. □

Lemma 4.4.7. *E bir normlu Riesz uzay olmak üzere $\tilde{E}$, E uzayının norm tamlanışı ve f_0 norm sürekli fonksiyonel olsun.*

(i) Herhangi $(x_\alpha) \subset E$ ve $x \in E$ için E içinde $x_\alpha \xrightarrow{w} x$ ise $\tilde{E}$ içinde $x_\alpha \xrightarrow{w} x$ olur.

(ii) $A \subset E$ kümesi E içinde zayıf relatif kompakt ise A kümesi $\tilde{E}$ içinde zayıf relatif kompakttır.

Kanıt. (*i*) $(x_\alpha) \subset E$ ve $x \in E$ için E içinde $x_\alpha \xrightarrow{w} x$ olsun. E uzayı normlu Riesz uzay ve f_0 norm sürekli fonksiyonel olduğundan E uzayı $\tilde{E}$ uzayı içine sürekli bir şekilde gömülür.

$$\begin{aligned} x_\alpha \xrightarrow{w} x &\implies \forall\, f \in E' \text{ için } f(x_\alpha) \to f(x) \\ &\implies f_0(x_\alpha) \to f_0(x) \\ &\implies \|x_\alpha\| \to \|x\| \\ &\implies x_\alpha \xrightarrow{w} x \end{aligned}$$

Böylece $\tilde{E}$ içinde $x_\alpha \xrightarrow{w} x$ olur.

(*ii*) $A \subset E$ kümesi E içinde zayıf relatif kompakt olsun. Buradan $A \subset E$ zayıf kompakt olduğundan her $(x_\alpha) \subset A$ neti için E içinde $x_{\alpha_\beta} \xrightarrow{w} x$ iken $x \in A$ olacak şekilde bir tane x_{α_β} alt neti vardır. O halde (*i*)'den $\tilde{E}$ uzayı içinde $x_{\alpha_\beta} \xrightarrow{w} x$ iken $x \in A$ olur. Böylece $A, \tilde{E}$ içinde zayıf relatif kompakttır.

□

AL-Temsili için kesin pozitif fonksiyonel f_0 varlığı önemlidir. Aşağıdaki önermede bu fonksiyonelin varlığını kesinleştirir.

Önerme 4.4.8. *Her zayıf birime sahip sıra sürekli bir Banach latis uzayında kesin pozitif fonksiyonel vardır; $f_0(|x|) = 0$ ise $x = 0$ olacak şekilde en az bir tane $f_0 > 0$ vardır.*

Kanıt. İlk olarak E ayrılabilir bir Banach latis olsun. $A = \{x \in E : x \geq 0, \|x\| = 1\}$ kümesinin içinde yoğun olan bir (x_n) dizisini alalım. Hahn-Banach teoreminden her $n \in \mathbb{N}$ için

$$f_n(x_n) = 1, \|f_n\| = 1$$

olacak şekilde en az bir tane $f_n \in E'$ vardır. Burada (f_n)'ler pozitif seçilebilir. Aksi durumda $|f_n|$ olarak düşünülebilir. $g = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{2^n}$ olarak tanımlayalım. g kesin pozitif bir fonksiyoneldir. $x > 0$ ve $\|x\| = 1$ olacak şekilde bir $x \in E$ alalım. (x_n) dizisi A içinde yoğun olduğundan $\|x_n - x\| < \frac{1}{2}$ olacak şekilde en az bir tane (x_n) dizisi vardır. O halde,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(x)}{2^n} \geq \frac{f_n(x)}{2^n} \geq \frac{1}{2^{n+1}} > 0$$

elde edilir.
İkinci adım olarak E uzayı ayrılabilir olmasın. Ayrık normu bir ve pozitif olan elemanlardan oluşan maximal bir (g_n) dizisinin varlığını ispatlamak yeterli olacaktır. Burada maximallik (g_n) dizisine bir eleman daha eklemek istersek ayrıklığın bozulması anlamına gelmektedir. Eğer bu dizinin varlığı ispat edilir ise $g = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n}{2^n}$ elemanı yazılabilir ve e, E uzayı üzerinde tanımlı kesin pozitif fonksiyonel olur. Şimdi g'nın kesin pozitif olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki g kesin pozitif olmasın. O halde,

$$F = \{x \in E : g(|x|) = 0\}$$

kümesi vardır. Ayrıca F kümesi bandtir. E uzayı sıra sürekli norma sahip olduğundan Dedekind tamdır ve F bir izdüşüm bandtir. $\|g_0\| = 1$ ve $g_0(F^d) = 0$ olacak şekilde bir tane pozitif fonksiyonel g_0 vardır. Ayrıca herhangi $x \in E$ için

$$0 \leq g \wedge g_0(x) = \inf\{g(y) + g_0(z) : y, z \in E^+ \text{ için } x = y + z\}$$

$x = y + z$ için $y \in F$ ve $z \in F^d$ olmak üzere $g(y) + g(z) = 0 + 0 = 0$ olur. Böylece $g \wedge g_0 = 0$ bulunur. Buradan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n}{2^n} \wedge g_0 = 0$ olduğundan $g_n \wedge g_0 = 0$ olur. g_0, (e_n) dizisine diktir. Buradan çelişki elde edilir. Böylece g kesin pozitiftir.
İspatı bitirmek için ayrık, normu bir olan pozitif elemanlardan oluşan maximal $\{g_\alpha\}_{\alpha \in \wedge}$ netinin sayılabilir olduğunu göstermeliyiz. Herhangi $\alpha \in \wedge$ için

$$Y_\alpha = \{x \in E : g_\alpha(|x|) = 0\}$$

bandi ve P_α, Y_α^d üzerinde band izdüşümünü tanımlansın. $\alpha \neq \beta$ iken $g_\alpha \wedge g_\beta = 0$ olduğundan $Y_\alpha^d \cap Y_\beta^d = 0$ olur. $Y_\alpha^d \cap Y_\beta^d = 0$ olduğunu ispatlayalım. Bir tane $0 \leq u \in Y_\alpha^d \cap Y_\beta^d$ olsun.

$$0 \leq (g_\alpha \wedge g_\beta)(u) = \inf\{g_\alpha(y) + g_\beta(z) : y, z \in E^+ \text{ için } u = y + z\}$$

$0 \leq y_n, z_n \leq u$, her $n \in \mathbb{N}$ için $u = y_n + z_n$ olacak şekilde (y_n) ve (z_n) dizileri vardır. Ayrıca

$$g_\alpha(y_n) \leq \frac{1}{2^n}, g_\alpha(z_n) \leq \frac{1}{2^n}$$

olur.

$$\tilde{y}_k = \sup_{k \leq n < \infty} y_n$$

$$\tilde{z}_k = \sup_{k \leq n < \infty} z_n$$

dizileri azalan pozitif dizilerdir. E Dedekind tam ve sıra sürekli norma sahip olduğundan $\|\tilde{y}_k\| \downarrow$ ve $\|\tilde{z}_k\| \downarrow$ elde edilir. Buradan $(\tilde{y}_k)$ ve $(\tilde{z}_k)$ dizilerinin norm limiti $\tilde{y}_k \geq 0$ ve $\tilde{z}_k \geq 0$ vardır.

$$\begin{aligned} g_\alpha(\tilde{y}_k) &= g_\alpha(\tilde{y} - \tilde{y}_k) + g_\alpha(\tilde{y}_k) \\ &\leq \|g_\alpha\| \|\tilde{y} - \tilde{y}_k\| + \frac{1}{2^k} \end{aligned}$$

$\|g_\alpha\| \|\tilde{y} - \tilde{y}_k\| \to 0$ ve $\frac{1}{2^k} \to 0$ olduğundan $g_\alpha(\tilde{y}) = 0$ bulunur. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} g_\beta(\tilde{z}_k) &= g_\beta(\tilde{z} - \tilde{z}_k) + g_\beta(\tilde{z}_k) \\ &\leq \|g_\beta\| \|\tilde{z} - \tilde{z}_k\| + \frac{1}{2^k} \end{aligned}$$

$\|g_\beta\| \|\tilde{z} - \tilde{z}_k\| \to 0$ ve $\frac{1}{2^k} \to 0$ olduğundan $g_\beta(\tilde{z}) = 0$ bulunur. Buradan $0 \leq u \leq \tilde{y} + \tilde{z}$ elde edilir. Riesz Ayrıştırma Teoreminden en az bir tane $y^{'}$ ve $0 \leq y^{'} \leq \tilde{y}$, $0 \leq z^{'} \leq \tilde{z}$ için $u = y^{'} + z^{'}$ olacak şekilde en az bir tane $z^{'}$ vardır.

$$\begin{aligned} 0 \leq g_\alpha(y^{'}) \leq g_\alpha^{'}(\tilde{y}) = 0 &\implies g_\alpha(y^{'}) = 0 \\ 0 \leq g_\beta(z^{'}) \leq g_\beta^{'}(\tilde{z}) = 0 &\implies g_\beta(z^{'}) = 0 \end{aligned}$$

Buradan $g_\alpha \wedge g_\beta(u) = 0$ elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} g_\alpha(y^{'}) = 0 &\implies y^{'} \in Y_\alpha \\ g_\beta(y^{'}) = 0 &\implies y^{'} \in Y_\beta \end{aligned}$$

elemanıdır.

$$\begin{aligned} 0 \leq y^{'} \leq u \text{ ve } u \in Y_\alpha^d &\implies y^{'} \in Y_\alpha^d \\ 0 \leq z^{'} \leq u \text{ ve } u \in Y_\beta^d &\implies z^{'} \in Y_\beta^d \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} y^{'} \in Y_\alpha \cap Y_\alpha^d &\implies y^{'} = 0 \\ z^{'} \in Y_\beta \cap Y_\beta^d &\implies z^{'} = 0 \end{aligned}$$

olur ve böylece $u = 0$ elde edilir.
e zayıf birim olmak üzere her $\alpha \in \wedge$ için $e_\alpha = P_\alpha(e)$ komponentini tanımlayalım. e zayıf birim olduğundan her $\alpha \in \wedge$ için $e_\alpha \neq 0$ olur. Her $\wedge^{'} \subset \wedge$ sayılabilir alt kümesi için $(e_\alpha)_{\alpha \in \wedge^{'}}$ dizisini oluşturalım. E Dedekind tam ve sıra sürekli olduğundan

$$\sum_{\alpha \in \wedge^{'}} e_\alpha \leq \sum_{\alpha \in \wedge^{'}} \|e_\alpha\|$$

serisi E içinde yakınsaktır. Buradan $\wedge$ sayılabilir bulunur. □

Bu önermede E uzayının sıra sürekli olması koşulu ihmal edilemez. Γ sayılamaz kümesi için $E = \ell_\infty(\Gamma)$ alınır ise önerme doğru olmaz.

Not 4.4.9. *E bir Banach latis olmak üzere her esas bandi bir kesin pozitif sıra sürekli kesin pozitif fonksiyonelin varlığını kabul eder. (E sıra sürekli ise bu fonksiyonelin varlığı kesindir.) B, (x_n) dizisini içeren bir esas band olsun. Örneğin* $x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|}{2^n\|x_n\|}$ *elemanını düşünürsek* $B = B_{x_0}$ *alabiliriz. Kabulden* B_{x_0} *için bir tane kesin pozitif sıra sürekli fonksiyonel* f_0 *olsun.* (B_{x_0}, f_0) *AL-temsili* $L_1(\mu)$*'yu düşünelim.* B_{x_0} *zayıf birimine sahiptir. E içinde* $x_n \xrightarrow{uo} 0$ *olması için gerek ve yeter koşul B içinde* $x_n \xrightarrow{uo} 0$ *olmasıdır. Buradan B içinde* $x_n \xrightarrow{uo} 0$ *olması için gerek ve yeter koşul* L_1 *içinde* $x_n \xrightarrow{hhh} 0$ *olmasıdır. Aynı şekilde E içinde* x_n *uo-Cauchy olması için gerek ve yeter koşul* x_n *dizisi hemen hemen her yerde ölçülebilir bir fonksiyona yakınsak olmasıdır.*

Bu tekniği aşağıdaki önermede kullanalım.

Önerme 4.4.10. *E bir Banach latis olmak üzere her esas bandi bir kesin pozitif sıra sürekli fonksiyonele sahip olsun.* $0 \leq x_n \xrightarrow{o} 0$ *ise* $x_{n_k} \xrightarrow{uo} 0$ *olacak şekilde bir tane alt dizisi* (x_{n_k}) *vardır.*

Kanıt. Bir esas bandi için f_0 kesin pozitif sıra sürekli fonksiyonel ve $L_1(\mu)$ AL-temsilini alalım. $0 \leq x_n \xrightarrow{w} 0$ olsun. Buradan $f_0(x_n) \to 0$ olur. Böylece $\|x_n\| \to 0$, yani $L_1(\mu)$ içinde norm yakınsaktır. $L_1(\mu)$ içinde $x_{n_k} \xrightarrow{hhh} 0$ olacak şekilde en az bir tane x_{n_k} alt dizisi vardır. $L_1(\mu)$ içinde $x_{n_k} \xrightarrow{uo} 0$ olması için gerek ve yeter koşul E içinde $x_{n_k} \xrightarrow{uo} 0$ olmasıdır. □

Aşağıdaki örnek Cesàro ortalaması için alternatif bir ispat sunar.

Örnek 4.4.11. *E bir Banach latis olmak üzere her esas bandi bir kesin pozitif sıra sürekli fonksiyonele sahip olsun.* $x_n \xrightarrow{uo} 0$ *olsun.* $L_1(\mu)$ *içinde* $x_n \xrightarrow{hhh} 0$ *yakınsaktır.* (x_n) *dizisinin Cesàro ortalaması da* $L_1(\mu)$ *içinde* 0*'a hemen hemen her yerde yakınsak olması için gerek ve yeter koşul E içinde Cesàro ortalamasının* 0 *uo-yakınsak olmasıdır.*

4.5 uo-Yakınsak Netlerin Norm Yakınsaklığı

uo-yakınsaklık ile norm yakınsaklık arasında herhangi bir gerektirme ilişkisi yoktur. Bu bölümde çeşitli kabuller altında bu iki yakınsaklık arasındaki ilişki verilecektir. Bu bölümde [18] makalesi incelenmiştir.

Lemma 4.5.1. *E atomik, sıra sürekli bir Banach latis olsun.* $x_n \xrightarrow{w} 0$ *ise* $x_n \xrightarrow{uo} 0$ *olur.*

Kanıt. $x_n \xrightarrow{w} 0$ olsun. Kabul edelim ki (x_n) dizisi 0 elemanına uo-yakınsak olmasın. O halde $\inf_k |x_{n_k}| > 0$ olacak şekilde (x_n) dizisinin (x_{n_k}) alt dizisi vardır.

$$a < \inf_k |x_{n_k}|$$

olacak şekilde $a \in E^+$ atomu vardır. Özel olarak her k için $|x_{n_k}| > a$ olarak alalım. f fonksiyonu a atomunun biorthogonal fonksiyonu olsun. $x \in E$ olmak üzere $P_a(x) = f(x)a$ olacak şekilde P_a, B_a üzerinde tanımlı band izdüşüm olarak tanımlayalım. f fonksiyonu latis homomorfizmdir. O halde

$$|f(x_{n_k})| = f(|x_{n_k}|) \geq f(a) = 1$$

olur. Ancak bu durum $x_n \xrightarrow{w} 0$ olması ile çelişir. □

Tanım 4.5.2. E bir Banach latis ve $A \subset E$ alt kümesi olsun. Her $\epsilon > 0$ için $A \subset [-u, u] + \epsilon B_x$ olacak şekilde en az bir $u \in E^+$ var ise A kümesine neredeyse sıra sınırlıdır denir.

Önerme 4.5.3. *E sıra sürekli bir Banach latis ve $(x_\alpha) \subset E$ bir net olsun.*

$$(x_\alpha) \text{ neredeyse sıra sınırlı ve } x_\alpha \xrightarrow{uo} x \text{ ise } x_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|} x \text{ olur.}$$

Kanıt. (x_α) neredeyse sıra sınırlı ve $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ olsun. O halde,

$$\begin{aligned} x_\alpha \xrightarrow{uo} x &\iff \forall\, y \in E^+ \text{ için } |x_\alpha - x| \wedge y \xrightarrow{o} 0 \\ &\iff ||x_\alpha - x| \wedge y| \leq z_\beta \downarrow 0 \end{aligned}$$

olur. Ayrıca $(|x_\alpha - x|)$ neti sıra sınırlıdır. Böylece $\epsilon > 0$ ve her α için

$$\|\|x_\alpha - x\| - \|x_\alpha - x\| \wedge u\| = \|(|x_\alpha - x| - u)^+\| \leq \epsilon \tag{4.5.1}$$

olacak şekilde en az bir tane $u > 0$ vardır. $|x_\alpha - x| \wedge u \xrightarrow{o} 0$ olduğundan (4.5.1) eşitsizliğinde $\||x_\alpha - x| \wedge u\| \to 0$ olur. O halde $x_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ elde edilir. □

Lemma 4.5.4. *E sıra sürekli bir Banach latis ve $A \subset E$ göreceli zayıf kompakt alt küme olsun. Herhangi bir $\epsilon > 0$ ve $f_+ \in E'$ fonksiyoneli için $\sup_{x \in A} f((\|x\| - u)^+) < \epsilon$ olacak şekilde $u \in E'_+$ vardır.*

Kanıt. İlk olarak f_0 kesin pozitif fonksiyonel olsun. E sıra sürekli olduğundan Dedekind tamdır ve f sıra süreklidir. $\tilde{E}$ uzayının bir AL-uzay olduğunu biliyoruz. A kümesi E uzayı içinde göreceli zayıf kompakt olduğundan Lemma 4.4.7'den $\tilde{E}$ uzayı içinde A kümesi göreceli zayıf kompakttır ve neredeyse sıra sınırlıdır. Buradan,

$$\sup_{x \in A} f((|x| - v)^+) = \sup_{x \in A} \|(|x| - v)^+)\|_L < \epsilon$$

olacak şekilde $v \in \tilde{E}$ vardır. E uzayı $\tilde{E}$ içinde norm yoğun olduğundan

$$f(|u - v|) = \|u - v\|_L < \epsilon$$

olacak şekilde $u \in E$ vardır. Böylece

$$(|x| - u)^+ \leq (|x| - v)^+ + |v - u| \implies \sup_{x \in A} f((|x| - u)^+) < 2\epsilon$$

olur. Genel durumunu düşünelim.

$$N_f = \{x \in E : f(|x|) = 0\}$$

ve $N_f = C_f^d$ kümelerini tanımlayalım. N_f'nın band olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} &1) 0 \leq f(|\lambda x + \mu y|) \leq |\lambda| f|x| + |\mu| f|y| = 0 \implies f(|\lambda x + \mu y|) = 0 \\ &2) |y| \leq |x| \implies 0 \leq f(|y|) \leq f(|x|) = 0 \implies f(|y|) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece N_f bir idealdir. Şimdi N_f sıra kapalı olduğunu gösterelim. $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ olsun. Buradan $|x_\alpha - x| \leq y_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde en az bir tane (y_β) neti vardır olur.

$$0 \leq f(|x|) \leq f(|x_\alpha - x| \leq y_\beta \downarrow 0 \implies f(|x|) = 0 \implies x \in N_f$$

olduğundan N_f sıra kapalıdır. Böylece N_f sıra kapalı ideal olduğundan bandtir. Ayrıca $N_f = C_f^d$ olduğundan C_f^d bandtir. N_f ve C_f sıra sürekli bir Banach latistir. (E sıra sürekli olduğundan Dedekind tamdır, ayrıca E uzayında her band izdüşüm bandi olduğunu hatırlatalım.) O halde $E = N_f \oplus C_f$ olur. P, C_f üzerinde band izdüşümü olsun. A, E içerisinde göreceli zayıf kompakt olduğundan $P(A)$, C_f içerisinde göreceli zayıf kompakttır. Ayrıca f, C_f üzerinde kesin pozitiftir. İlk durumdan $\sup_{x\in A}(f|(P|x|-u)^+|) \leq \epsilon$ olacak şekilde en az bir tane $u \in C_f$ vardır.

$$(|x|-u)^+ \leq (P|x|-u)^+ + (I-P)|x| \text{ ve } f((I-P)|x|) = 0 \implies \sup_{x\in A} f((|x|-u)^+) < \epsilon$$

□

Tanım 4.5.5. E bir normlu Riesz uzay ve $(x_n) \subset E$ dizi olmak üzere $0 \leq x_n \xrightarrow{w} 0$ iken $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ oluyor ise E pozitif Schur özelliğine sahiptir denir.

c_0 Banach latisinin içinde (e_n) standart bazını alalım. (e_n) normda yakınsak değildir fakat $e_n \xrightarrow{w} 0$ yakınsaktır. Bu sebeple c_0 uzayı Pozitif Schur Özelliğine sahip değildir. Buradan yola çıkılarak bir Banach latisin, Pozitif Schur Özelliğine sahip olması için o uzayın c_0 uzayına homeomorfik olan bir latisi içermemesi gerekir.

Aşağıdaki lemmada sıra sürekli bir Banach latis için Dunford - Pettis Teoremini sağladığını göstereceğiz. Bu teorem her relatif zayıf kompakt alt kümelerin neredeyse sıra sınırlı olduğunu söyler. İspat için [35, Teorem 7] ve [26, Prop 3.6.2] kaynaklarına bakılabilir. Ayrıca uo-yakınsaklık kavramı kullanılarak [20] makalesinde alternatif ispatları da verilmiştir.

Lemma 4.5.6. *E pozitif Schur özelliğine sahip bir Banach latis ve x_0, E uzayının zayıf birimi olsun. E uzayının her göreceli zayıf kompakt alt kümesi neredeyse sıra sınırlıdır.*

Kanıt. $A \subset E$ göreceli zayıf kompakt olsun. Her $f \in E'_+$ için $\lim_n \sup_{x\in A} f((|x| - nx_0)^+) = 0$ olduğunu göstermeliyiz. E pozitif Schur özelliğine sahip olduğu için sıra süreklidir. Böylece Lemma 4.5.4'den herhangi $f > 0$ ve $\epsilon > 0$ için $\sup_{x\in A} f((|x|-u)^+) < \epsilon$ olacak şekilde $u \in E^+$ vardır. x_0, E uzayının zayıf birimi olduğundan

$$\forall\, n \geq n_0 \text{ için } \|(u - nx_0)^+\| = \|u - u \wedge nx_0\| < \epsilon$$

olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan

$$\forall\, n \geq n_0 \text{ için } f((u - nx_0)^+) < \|f\|\epsilon$$

elde edilir. Böylece

$$\forall\, n \geq n_0 \text{ için } \sup_{x\in A} f((|x| - nx_0)^+) \leq (1 + \|f\|)\epsilon$$

olur. Buradan $\lim_n \sup_{x\in A} f((|x| - nx_0)^+) = 0$ elde edilir.
Her $\epsilon > 0$ için $\sup_{x\in A} f((|x| - nx_0)^+) \leq \epsilon$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki tersi doğru olsun. O halde en az bir $\epsilon > 0$ için herhangi $n \geq 1$ için $\|(|x_n| - nx_0)^+\| > \epsilon$ olacak şekilde $(x_n) \in A$ vardır. Ancak $(|x_n| - nx_0)^+ \xrightarrow{w} 0$ olur. Böylece $\|(|x_n| - nx_0)^+\| \to 0$ elde edilir. Bu durum Pozitif Schur özelliği ile çelişmektedir.

□

Lemma 4.5.7. *E sıra sürekli bir Banach latis olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.*

(*i*) *E uzayı pozitif Schur özelliğine sahiptir.*

(*ii*) *E uzayının her göreceli zayıf kompakt sayılabilir alt kümesi neredeyse sıra sınırlıdır.*

(*iii*) *E uzayının her göreceli zayıf kompakt alt kümesi neredeyse sıra sınırlıdır.*

Önerme 4.5.8. *E sıra sürekli bir Banach latis ve $(x_\alpha) \subset E$ bir net olsun. (x_α) göreceli zayıf kompakt net ve $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ ise $|\sigma|(E, E')$ içerisinde $x_\alpha \to x$ olur.*

Kanıt. $f \in E'_+$ ve $\epsilon > 0$ alalım. Lemma 4.5.4'den her α için

$$f(|x_\alpha - x| - |x_\alpha - x| \wedge u) = f((|x_\alpha - x| - u)^+) < \epsilon \tag{4.5.2}$$

olacak şekilde $u \in E^+$ vardır. $|x_\alpha - x| \wedge u \xrightarrow{o} 0$ ve f sıra sürekli olduğundan

$$f(|x_\alpha - x| \wedge u) \to 0 \tag{4.5.3}$$

(4.5.2) ve (4.5.3)'dan $f(|x_\alpha - x|) \to 0$ elde edilir. □

Teorem 4.5.9. *E bir Dedekind σ-tam Banach latis olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.*

(*i*) *E pozitif Schur özelliğine sahiptir.*

(*ii*) *Her zayıf relatif kompakt $(x_\alpha) \subset E$ neti için $0 \leq x_\alpha \xrightarrow{w} 0 \implies x_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ olur.*

(*iii*) *Her bir $(x_n) \subset E$ dizisi ve $x \in E$ için $x_n \xrightarrow{w} x$ ve $x_n \xrightarrow{uo} x \implies x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ olur.*

(*iv*) *Her zayıf relatif kompakt $(x_\alpha) \subset E$ neti ve $x \in E$ için $x_\alpha \xrightarrow{uo} x \implies x_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ olur.*

(*v*) *Her bir $(x_n) \subset E$ dizisi için $0 \leq x_n \xrightarrow{w} 0$ ve $x_n \xrightarrow{uo} 0 \implies x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ olur.*

(*vi*) *Her zayıf relatif kompakt $(x_\alpha) \subset E$ neti için $0 \leq x_\alpha \xrightarrow{uo} 0 \implies x_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ olur.*

Kanıt. İlk olarak E'nin sıra sürekli olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki (v). özellik sağlansın. Herhangi bir (x_n) ayrık sıra sınırlı dizisini alalım. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için $|x_n| \leq x$ elde edilir. $f \in E'$ olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{n} f(|x_i|) = f(\sum_{i=1}^{n} |x_i|) = f(\bigvee_{i=1}^{n} |x_i|) \leq f(x)$$

Buradan $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} f(x_n)$ serisi genel terim testinden yakınsaktır. Böylece $f_n \to 0$ olur. O halde $x_n \xrightarrow{w} 0$ elde edilir.
$x_n \xrightarrow{o} 0$ olduğunu gösterelim. E Dedekind σ-tam olduğundan $y_n = \sup_{m \geq n} |x_m| \downarrow 0$ olduğunu göstermeliyiz. Kabul edelim ki $0 \leq u \leq y_n$ olsun.

$$u = y_n \wedge u = (\sup(|x_m| \wedge u) \perp x_{n-1}$$

olduğundan

$$u = y_n \wedge u = \sup(|x_n| \wedge u) = 0$$

olur. Buradan $y_n = \sup|x_m| \downarrow 0$ olur. O halde $x_n \xrightarrow{o} 0$ elde edilir. $x_n \xrightarrow{uo} 0$ sağlanır. Kabulden $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ elde edilir.

$(v) \implies (i)$ $0 \leq x_n \xrightarrow{w} 0$ ancak $(x_n), 0$'a normda yakınsak olmasın. O halde $\inf_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| > 0$ olur. $B, (x_n)$ dizisi tarafından üretilen bir band olsun. E sıra sürekli olduğundan B'de sıra süreklidir. Buradan B zayıf birime sahip olduğundan kesin pozitif $f_0 > 0$ fonksiyonel vardır. $\tilde{B} = (B, f_0)$ bir AL-uzaydır. O halde $\|x_n\|_L = f_0(x_n) \to 0$ olur. Böylece $x_{n_k} \xrightarrow{o} 0$ olacak şekilde bir (x_{n_k}) alt dizisi vardır. Buradan $x_{n_k} \xrightarrow{uo} 0$ elde edilir. Kabulden $x_{n_k} \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ olur. Ancak x_n dizisi 0'a norm yakınsak değildir. Buradan çelişki elde edilir. Böylece $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ olur.

$(v) \implies (iii)$ $0 \leq x_n \xrightarrow{w} 0$ ve $0 \leq x_n \xrightarrow{uo} 0$ ise $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ koşulu sağlansın. Her $(x_n) \subset E$ için $x_n \xrightarrow{w} x$ ve $x_n \xrightarrow{uo} x$ olsun. O halde,

$$x_n \xrightarrow{uo} x \iff \forall\, y \in\ E \text{ için } |x_n - x| \wedge y \xrightarrow{o} 0$$

elde edilir. Buradan $(x_n - x) \xrightarrow{uo} 0$ olur. Böylece uo-yakınsaklık özelliğinden $|x_n - x| \xrightarrow{uo} |0|$ yani $|x_n - x| \xrightarrow{uo} 0$ olur. (x_n) zayıf relatif kompakt olduğundan $|x_n - x| \xrightarrow{w} 0$ olur. O halde kabulden $x_n - x \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$'dır. Böylece $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ elde edilir.

$(i) \implies (ii)$ E pozitif Schur özelliğine sahip olsun. Kabul edelim ki (x_α) göreceli zayıf kompakt net için $0 \leq x_\alpha \xrightarrow{w} 0$ ancak $x_\alpha, 0$'a norm yakınsak olmasın. O halde

$$\exists \epsilon > 0 \text{ vardır } \forall \alpha \text{ ve } \beta(\alpha) \geq \alpha \text{ için } \|x_\beta(\alpha)\| \geq \epsilon$$

$\inf \|x_\alpha\| > 0$ olsun. $\overline{\{x_\alpha : \alpha\}}^w$ göreceli zayıf kompakt olduğundan $0 \in \overline{\{x_\alpha : \alpha\}}^w$ olur. Buradan $(y_n) \subset \overline{\{x_\alpha : \alpha\}}^w$ vardır $y_n \xrightarrow{w} 0$ elde edilir. Böylece pozitif Schur özelliğinden $\|y\| \to 0$ olur.

$(ii) \implies (iv)$ x_α zayıf relatif kompakt net olmak üzere $0 \leq x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ olsun.

$$x_\alpha \xrightarrow{uo} x \text{ olduğundan } \forall y \in\ E^+ \text{ için } |x_\alpha - x| \wedge y \xrightarrow{o} 0$$

Buradan Önerme 4.5.8'den $|x_\alpha - x| \xrightarrow{w} 0$ elde edilir. (x_α) göreceli zayıf kompakt net olduğundan $\{\alpha : |x_\alpha - x|\}$ göreceli zayıf kompakttır ve kabulden $(x_\alpha - x) \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ elde edilir. Böylece $x_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ olur.

□

4.6 uo-Cauchy

Bu bölümde [18] makalesi incelenmiştir. Hatırlayalım ki E bir Riesz uzay ve $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \subset E$ bir net olsun. $(x_\alpha - x_\beta)_{(\alpha,\beta)\in\Lambda\times\Lambda} \xrightarrow{uo} 0$ oluyor ise (x_α) netine uo-Cauchy neti adı verilir. Bu bölümde uo-Cauchy net ile uo-yakınsaklık arasındaki ilişki verilecektir.

Lemma 4.6.1. *E bir Riesz uzay ve $(x_\alpha) \subset E$ bir net ve (x_{α_j}), (x_α) netinin bir alt neti olsun.*

$$(x_\alpha) \text{ neti uo-Cauchy ve } x_{\alpha_j} \xrightarrow{uo} x \text{ ise } x_\alpha \xrightarrow{uo} x \text{ olur.}$$

Kanıt. x_α neti uo-Cauchy ve $x_{\alpha_j} \xrightarrow{uo} x$ olsun. x_α, uo-Cauchy neti olduğundan

$$\forall\, y \in E^+ \text{ için } |x_\alpha - x_\beta| \wedge y \xrightarrow{o} 0$$

olur. Aynı zamanda $x_{\alpha_j} \xrightarrow{uo} x$ olduğundan

$$\forall\, y \in E^+ \text{ için } |x_{\alpha_j} - x| \wedge y \xrightarrow{o} 0$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} |x_\alpha - x| &= |x_\alpha - x + x_{\alpha_j} - x_{\alpha_j}| \\ &\leq |x_{\alpha_j} - x| + |x_\alpha - x_{\alpha_j}| \end{aligned}$$

olur. Burada $\alpha_j = \beta$ olarak alınırsa her $y \in E^+$ için

$$\begin{aligned} |x_\alpha - x| \wedge y &\leq (|x_\alpha - x| + |x_\alpha - x_\beta|) \wedge y \\ &= |x_\alpha - x| \wedge y + |x_\alpha - x_\beta| \wedge y \end{aligned}$$

ve $|x_\alpha - x| \wedge y \xrightarrow{o} 0$ olur. Böylece $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ elde edilir. □

Lemma 4.6.2. *E bir normlu Riesz uzay ve $(x_\alpha) \subset E$ bir net olsun.*

$$x_\alpha \text{ neti uo-Cauchy ve } x_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|} x \text{ ise } x_\alpha \xrightarrow{uo} x \text{ olur.}$$

Kanıt. x_α uo-Cauchy neti ve $x_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ olsun. $x_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ olduğundan Lemma 3.1.31'den $x_{\alpha_j} \xrightarrow{o} x$ olacak şekilde en az bir tane $(x_{\alpha_j}) \subset x_\alpha$ alt neti vardır. Önerme 4.1.4'dan $x_{\alpha_j} \xrightarrow{uo} x$ elde edilir. Lemma 4.6.1'dan $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ elde edilir. □

Önerme 4.6.3. *Sıra sürekli bir Banach latis uzayında her neredeyse sıra sınırlı neti uo-Cauchy ise $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ ve $x_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ olur.*

Kanıt. (x_α) neredeyse sıra sınırlı ve uo-Cauchy neti olsun. Buradan $(x_\alpha - x_{\alpha'})$ neredeyse sıra sınırlıdır ve $(x_\alpha - x_{\alpha'}) \xrightarrow{uo} 0$ olur. Önerme 4.5.3'den $(x_\alpha - x_{\alpha'}) \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ olur. Böylece (x_α) neti norm Cauchy'dir. O halde (x_α) norm yakınsaktır. Buradan Lemma 4.6.2'den $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ elde edilir. □

Teorem 4.6.4. *E sıra sürekli bir Riesz uzay olmak üzere her relatif zayıf kompakt uo-Cauchy neti için $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ ve $|\sigma|(E, E')|$ içinde x_α, x elemanına zayıf yakınsaktır.*

Kanıt. (x_α) zayıf relatif kompakt ve uo-Cauchy olsun. (x_α) zayıf relatif kompakt net olduğundan $x_\beta \xrightarrow{w} x$ olacak şekilde (x_β) alt neti vardır. $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ olduğunu göstermeliyiz.

Kabul edelim ki E zayıf birimine sahip olsun. O halde Teorem 2.3.14'den E', f_0 kesin pozitif fonksiyoneline sahiptir. AL-Temsilden biliyoruz ki $\tilde{E}$ bir AL-uzaydır. Lemma

4.4.7'den (x_α), $\tilde{E}$ içinde relatif zayıf kompakt nettir. Böylece $\tilde{E}$ içinde (x_α) neredeyse sıra sınırlıdır. Lemma 4.4.6'den (x_α), $\tilde{E}$ içinde uo-Cauchy'dir. Buradan Önerme 4.6.3'den $y \in \tilde{E}$ için $x_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|} y$ ve $x_\alpha \xrightarrow{uo} y$ olur. $x_\beta \xrightarrow{uo} x$ olduğundan Lemma 4.4.7'den $\tilde{E}$ içinde $x_\beta \xrightarrow{w} x$ olur. Böylece $\tilde{E}$ içinde $y = x$ elde edilir. O halde $\tilde{E}$ içinde $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ olur. Lemma 4.4.6'den E içinde $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$'dir. Önerme 4.5.8'den $|\sigma|(E, E')$ içinde zayıf yakınsak elde edilir.
Genel olarak $y > 0$ alalım. B, E içinde y tarafından üretilen band ve P izdüşüm band olsun. O halde B bir zayıf birime sahip sıra sürekli bir Banach latistir. İspatın başında alınan E uzayı gibi düşünülebilir. Buradan Px_α, B içinde zayıf relatif kompakttır ve en az bir $x_\beta \subset x_\alpha$ alt neti için B içinde $Px_\beta \xrightarrow{w} Px$ olur. Böylece Lemma 4.1.14'den (Px_β) uo-Cauchy'dir. O halde B içinde $Px_\beta \xrightarrow{uo} Px$ elde edilir. Buradan,

$$|x_\alpha - x| \wedge y = P(|x_\alpha - x| \wedge y) = |Px_\alpha - Px| \wedge y \xrightarrow{o} 0$$

olur. Böylece E içinde $Px_\alpha \xrightarrow{uo} Px$ elde edilir. □

Lemma 4.6.5. *E Dedekind tam Banach latis, $F \subset E$ kapalı alt latisi olsun. F sıra sürekli ise aşağıdaki ifadeler doğrudur.*

(*i*) *F'nin her üstten sıra sınırlı alt kümesi için E ve F içindeki supremum değeri aynıdır.*

(*ii*) *Her sıra sınırlı $(x_\alpha) \subset F$ neti için F içinde $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ olması için gerek ve yeter koşul E içinde $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ olmasıdır.*

(*iii*) *Herhangi $(x_\alpha) \subset F$ neti için F içinde $x_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ olması için gerek ve yeter koşul E içinde $x_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ olmasıdır.*

Kanıt. (*i*) $x_\alpha \uparrow$ olacak şekilde $A = (x_\alpha) \subset F$ olsun. F içinde (x_α)'nın supremum değeri x olsun. O halde F sıra sürekli olduğundan F'nin normunda $x_\alpha \to x$ olur. Böylece E'nin normunda $x_\alpha \to x$ elde edilir. $x_\alpha \uparrow$ olduğundan E içinde $x_\alpha \uparrow x$ olur.

(*ii*) F içinde $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ olsun. F kapalı olduğundan Dedekind tamdır. O halde $\sup_{\beta \geq \alpha} |x_\beta| = y_\alpha$ olacak şekilde (y_α) neti vardır. F içinde $y_\alpha \downarrow 0$ elde edilir. (*i*)'den E içinde $y_\alpha \downarrow 0$ olur. $y_\alpha \downarrow 0$ olduğundan sıra yakınsaklık özelliğinden $y_\alpha \xrightarrow{o} 0$ olur. $|x_\alpha| \leq y_\alpha \xrightarrow{o} 0$ olduğundan E içinde $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ elde edilir.
Tersine E içinde $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ olsun. E Dedekind tam olduğundan $y_\alpha = \sup_{\beta \geq \alpha} |x_\beta|$ iyi tanımlıdır ve E içinde $y_\alpha \downarrow 0$ olur. (*i*)'den $(y_\alpha) \in F$ elde edilir. F içinde $y_\alpha \downarrow 0$ olur. Buradan F içinde $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ olur.

(*iii*) E içinde $x_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ olsun. Herhangi $0 < y \in F$ için E içinde $|x_\alpha| \wedge y \xrightarrow{o} 0$ olur. Buradan (*ii*)'den F içinde $|x_\alpha| \wedge y \xrightarrow{o} 0$ olur. Böylece F içinde $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ elde edilir.
Tersine F içinde $x_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ olsun. E içinde F tarafından üretilen ideal I olsun. $x \in I^+$ alalım. Buradan $y \in F^+$ için $x \leq y$ olur. F içinde $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ olması için gerek ve yeter koşul $|x_\alpha| \wedge y \xrightarrow{o} 0$ olmasıdır. (*ii*)'den E içinde $|x_\alpha| \wedge y \xrightarrow{o} 0$ olur. Buradan Lemma 4.1.14'den I içinde $x_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ elde edilir. Böylece Lemma 4.1.9'den E içinde $x_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ olur.

□

Tanım 4.6.6. E bir normlu Riesz uzay olmak üzere her artan, norm sınırlı dizi norm yakınsak ise E uzayına KB-uzay denir.

Bir Banach latisin KB-uzay olması için gerek ve yeter koşul $0 \leq x_\alpha \uparrow$ ve $\sup\{\|x_\alpha\|\} < \infty$ koşulunu sağlayan her netin norm yakınsak olmasıdır. Böylece her KB-uzay sıra sürekli norma sahiptir. c_0 uzayı KB-uzay değildir. Her yansımalı uzay KB-uzaydır.

Teorem 4.6.7. *E sıra sürekli bir Banach latis olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.*

(i) E uzayı KB-uzaydır.

(ii) E içinde her norm sınırlı uo-Cauchy neti uo-yakınsaktır.

(iii) E içinde her norm sınırlı uo-Cauchy dizi uo-yakınsaktır.

Kanıt. $(i) \implies (ii)$ (x_α), uo-Cauchy ve norm sınırlı olsun.

$$|x^+ - y^+| \leq |x-y| \text{ ve } |x^- - y^-| \leq |x-y|$$

olduğundan (x_α^+) ve (x_α^-) netleri uo-Cauchy'dir. Böylece genelliği bozmadan $x_\alpha \in E^+$ olsun. Kabul edelim ki E, x_0 zayıf birimini içersin. $k \in \mathbb{N}$ alalım.

$$|x_\alpha \wedge kx_0 - x_{\alpha'} \wedge kx_0| \leq |x_\alpha - x_{\alpha'}| \wedge kx_0 \xrightarrow{o} 0$$

olduğundan

$$|x_\alpha \wedge kx_0 - x_{\alpha'} \wedge kx_0 \leq |x_\alpha - x_{\alpha'}| \wedge kx_0 \leq y_\beta \downarrow 0$$

olacak şekilde (y_α) neti vardır. Buradan $x_\alpha \wedge kx_0$, o-Cauchy'dir. $x_\alpha \wedge kx_0$ sıra sınırlı olduğundan $x_\alpha \wedge kx_0$ olur ve $y_k \in E$ elemanına sıra yakınsaktır.

$$\sup \|y_k\| \leq \sup_k \sup_\alpha \|x_\alpha \wedge kx_0\| \leq \sup_\alpha \|x_\alpha\| < \infty$$

olduğundan (y_k) artandır ve (y_k) dizisi $y \in E$ elemanına yakınsaktır. $x_\alpha \xrightarrow{uo} y$ olduğunu gösterelim. Bunun için $|x_\alpha - y| \wedge x_0 \xrightarrow{o} 0$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$$x_{\alpha,\alpha'} = \sup_{\beta \geq \alpha, \beta \geq \alpha'} |x_\beta - x_{\beta'}| \wedge x_0$$

olarak tanımlayalım. (x_α), uo-Cauchy neti olduğundan $x_{\alpha,\alpha'} \downarrow 0$ olur. $k \geq 1$ için

$$\forall\, \beta \geq \alpha, \beta' \geq \alpha' \text{ için } |x_\beta \wedge kx_0 - x_{\beta'} \wedge kx_0| \wedge x_0 \leq |x_\beta - x_{\beta'}| \wedge x_0 \leq x_{\alpha,\alpha'} \downarrow 0$$

olur. Buradan $|x_\beta - kx_0 \wedge kx_0 - y_k| \wedge x_0 \leq x_{\alpha,\alpha'}$ elde edilir. $k \to \infty$ iken

$$\forall\, \beta \geq \alpha \text{ için } |x_\beta - y| \wedge x_0 \leq x_{\alpha,\alpha'} \implies |x_\alpha - y| \wedge x_0 \xrightarrow{o} 0 \implies x_\alpha \xrightarrow{uo} y$$

elde edilir.
Genel olarak $\{y_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$, E'nin ikili ayrık maksimal birleşimi olsun. Her bir $\delta = \{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n\} \in \Delta$ için $(y_{\gamma_i})_1^n$ tarafından üretilen band B_δ pozitif Schur özelliği ile birlikte sıra sürekli bir Banach latistir ve $y_\delta = \sum_{i=1}^{n} y_{\gamma_i}$ zayıf birimine

sahiptir. Her bir P_δ, B_δ üzerinde band izdüşüm olsun. Her bir B_δ, KB-uzayıdır. E sıra sürekli olduğundan her bir $x \in E$ için $P_\delta x_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ olur. Lemma 4.1.14'den $(P_\delta x_\alpha)$, B_δ içinde uo-Cauchy'dir. Böylece B_δ içinde $P_\delta x_\alpha \xrightarrow{uo} z_\delta$ olacak şekilde $0 \leq z_\delta \in B_\delta$ vardır ve dahası E içinde de $P_\delta x_\alpha \xrightarrow{uo} z_\delta$ elde edilir. Lemma 4.1.3'den (z_δ) neti artandır ve Lemma 4.1.15'den $\sup \|z_\delta\| \leq \sup_\alpha \|x_\alpha\| < \infty$ olur. (z_δ) artan ve norm sınırlıdır. E uzayı KB-uzay olduğundan (z_δ) neti $0 \leq x \in E$ elemanına yakınsaktır.
$x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ olduğunu göstermeliyiz. Herhangi $y \in E^+$ alalım. P_y, B_y üzerinde band izdüşüm olsun. $P_y x_\alpha$ netinin $0 \leq y_0 \in B_y$ elemanına uo-yakınsak olduğunu gösterelim. E içinde

$$|x_\alpha - y_0| \wedge y = P_y(|x_\alpha - y_0| \wedge y) = |P_y x_\alpha - P_y y_0| \wedge y$$

olur. Buradan E içinde

$$|P_\delta x_\alpha - P_\delta y_0| \wedge y \leq |x_\alpha - y_0| \xrightarrow{o} 0$$

olur. E içinde $P_\delta x_\alpha \to z_\delta$ olduğunu hatırlatalım. O halde $|z_\delta - P_\delta y_0| \wedge y = 0$ olur. Buradan $\lim P_\delta y_0 = y_0$ ve $\lim z_\delta$ ise

$$|x - y_0| \wedge y = 0 = |P_y x - y_0| \wedge y \implies P_y x = y_0$$

elde edilir. Böylece E içinde

$$|x_\alpha - x| \wedge y = |P_y x_\alpha - P_y x| \wedge y = |P_y x_\alpha - y_0| \wedge y \xrightarrow{o} 0$$

olur.

$(ii) \implies (iii)$ E içinde her norm sınırlı uo-Cauchy neti uo-yakınsak olsun. Her net bir dizi olduğundan her norm sınırlı uo-Cauchy dizisi uo-yakınsaktır.

$(iii) \implies (i)$ E içinde her norm sınırlı dizi uo-yakınsak olsun. Kabul edelim ki E uzayı KB-uzay olmasın. O halde E uzayı c_0 uzayına latis izomorfik olan uzayı içersin. Genelliği bozmadan $c_0 \subset E$ alalım. c_0 uzayında $x_n = \sum_{i=1}^{n} e_i$ uo-Cauchy neti ve $\sup_n \|x_n\| < \infty$ olur. O halde Lemma 4.6.5'den E içinde (x_n) dizisi uo-Cauchy'dir. x_n, uo-Cauchy ve norm sınırlı olduğundan kabulden x_n, x'e uo-yakınsaktır.
u, c_0'nın zayıf birimi, u tarafından üretilen band B ve P_B band izdüşüm olsun. Lemma 4.1.14'den $x_n = P_B x_n \to P_B x$ elde edilir. Buradan $x = P_B x$ olur. Dahası $k \geq 1$ için

$$|x_n \wedge ku - x \wedge ku| \leq |x_n - x| \wedge ku \xrightarrow{o} 0$$

Böylece E sıra sürekli olduğundan $x_n \wedge ku$, $x \wedge ku$ norm yakınsaktır. $x_n \wedge ku \subset c_0$ olduğundan $x \wedge ku \in c_0$ olur. Buradan $x = P_B x = \lim_k x \wedge ku \in c_0$ elde edilir. Lemma 4.6.5'den c_0 içinde $x_n \xrightarrow{uo} x$ olur. Ancak bu durum çekişki verir. O halde E, KB-uzay olmalıdır.

□

4.7 uo-Yakınsaklık ve Zayıf* Yakınsaklık ilişkisi

Bu bölümde [15] makalesi incelenmiştir. Bu kısımda E' uzayı üzerinde uo-yakınsaklık ile w^*-yakınsaklık ilişkisi incelenecektir. Öncelikle her $f_n \in E'$ için $f_n \xrightarrow{uo} f$ ise $f_n \xrightarrow{w^*} 0$ olması için E uzayının sonlu boyutlu olması gerekir. Gerçekten, kabul edelim ki $\dim E = \infty$ olsun. E' uzayında ayrık, normalize edilmiş (f_n) dizisini alalım.

$$nf_n \wedge u \leq nf_n \wedge nu \leq n(f_n \wedge u) \to 0$$

olduğundan $|nf_n - 0| \wedge u \to 0$ olur. Buradan $nf_n \xrightarrow{uo} 0$ elde edilir.

$$nf_n \xrightarrow{uo} 0 \implies nf_n \xrightarrow{w^*} 0$$

olur. Buradan $\|nf_n\| < \infty, \forall\, n \in \mathbb{N}$ olur ki böylece sınırlıdır. Ancak $\dim E = \infty$ olması ile çelişir. O halde E uzayı sonlu boyutlu olduğunda uo-yakınsaklık, w^*-yakınsaklıktır. E herhangi bir Banach latis uzay olduğunda hangi koşullar altında uo-yakınsaklığın w^*-yakınsaklığı gerektirdiğini inceleyeceğiz.

Teorem 4.7.1. *E Banach latis uzayı sıra sürekli norma sahip olması için gerek ve yeter koşul herhangi $\epsilon > 0$ ve her $x \in E^+$ için $\|f\| \leq 1$ olmak üzere $(|f| - g)^+(x) < \epsilon$ olacak şekilde $g \in E'$ var olmasıdır.*

Teorem 4.7.2. *E bir Banach latis olmak üzere aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.*

(*i*) *E sıra sürekli norma sahiptir.*

(*ii*) *Her norm sınırlı $(f_\alpha) \in E'$ neti için $f_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ ise $f_\alpha \xrightarrow{w*} 0$ olur.*

(*iii*) *Her norm sınırlı $(f_\alpha) \in E'$ neti için $f_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ ise $f_\alpha \xrightarrow{|\sigma|(E',E)} 0$ olur.*

(*iv*) *Her norm sınırlı $(f_n) \in E'$ dizisi için $f_n \xrightarrow{uo} 0$ ise $f_n \xrightarrow{w*} 0$ olur.*

(*v*) *Her norm sınırlı $(f_n) \in E'$ dizisi için $f_n \xrightarrow{uo} 0$ ise $f_\alpha \xrightarrow{|\sigma|(E',E)} 0$ olur.*

Kanıt. $f_n \xrightarrow{uo} 0$ gerek ve yeter koşul $|f_n| \xrightarrow{uo} 0$ olmasıdır. Böylece $(ii) \iff (iii)$ ve $(iv) \iff (v)$ açıktır.

$(i) \implies (iii)$ E sıra sürekli norma sahip olsun. Norm sınırlı ve $f_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ olacak şekilde $(f_\alpha) \in E'$ netini alalım. Teorem 4.7.1'den her $x \in E^+$ ve $\epsilon > 0$ için

$$|f_\alpha|(x) - |f_\alpha| \wedge g(x) < \epsilon$$

olacak şekilde $g \in E'$ vardır.

$$f_\alpha \xrightarrow{uo} 0 \iff \forall\, g \in E^+ \text{ için } |f_\alpha| \wedge g \xrightarrow{o} 0$$

olur. E sıra sürekli norma sahip olduğundan Lemma 3.1.30'den $|f_\alpha| \wedge g \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ elde edilir. Böylece $\limsup_\alpha |f_\alpha|(x) \leq \epsilon$ olur. Burada ϵ keyfi olarak seçildiğinden $\lim_\alpha |f_\alpha|(x) = 0$ elde edilir.

$(iii) \implies (v)$ Her norm sınırlı $(f_\alpha) \in E^{'}$ neti için $f_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ ise $f_\alpha \xrightarrow{|\sigma|(E^{'},E)} 0$ olsun. Her net bir dizi olduğundan her norm sınırlı $f_n \in E^{'}$ neti için $f_n \xrightarrow{uo} 0$ ise $f_n \xrightarrow{|\sigma|(E^{'},E)} 0$ olur.

$(v) \implies (i)$ Her norm sınırlı $(f_n) \subset E^{'}$ dizisi için $f_n \xrightarrow{uo} 0$ ise $f_n \xrightarrow{|\sigma|(E^{'},E)} 0$ olsun. $f_n \subset E^{'}$ ayrık, norm sınırlı dizisini alalım. Lemma 4.1.13'den $f_n \xrightarrow{uo} 0$ olur. O halde kabulden $f_n \xrightarrow{w*} 0$ olur. Böylece Sonuç 2.3.12'ten E sıra süreklidir.

□

Teorem 4.7.3. *E sıra sürekli bir Banach latis olsun. $E^{'}$ içinde herhangi norm sınırlı uo-Cauchy neti uo-yakınsak ve $|\sigma|(E^{'},E)$ yakınsak ise aynı limit değerine yakınsaktır.*

Kanıt. Teorem 4.6.4 yapılan ispattaki adımlara paralel olarak yapılır. Burada dikkat edilecek durum uo-Cauchy netinin norm sınırlı olmasıdır. □

Burada Teorem 4.7.2'den sıra sürekli norma sahip Banach latis üzerinde her norm sınırlı uo-yakınsaklık netin w^*-yakınsak olduğunu gösterdik. Şimdi hangi koşullar altında w^*-yakınsaklığın uo-yakınsaklığı gerektirdiğini inceleyelim.

Örnek 4.7.4. $(d_n)_{n=1}^{\infty} \subset (0,1]$ *olmak üzere* $d_n \downarrow$ *ve* $d_0 = 1$ *olsun. Eğimi* ∞*'a doğru artan,* d_1 *uzunluğunda bir doğru parçası dizisi alalım. Bu diziyi* $\{I_{0,n}\}_{n=1}^{\infty}$ *olarak tanımlayalım. Ayrıca burada* $I_{0,n}$*'nin eğimi* $I_{0,n-1}$ *eğiminden daha büyüktür. Her* $I_{0,n}$ *ve* $I_{0,n-1}$ *arasında uzunluğu* d_2 *olan eğimleri* $I_{0,n}$*'nın eğimine doğru artan doğru parçalarının başka bir dizisini oluşturalım. Benzer şekilde uzunluğu* d_3 *olan başka dizi oluşturalım. Tüm bu doğru parçalarının birleşimi* T *olsun.* T *kompakt ve Hausdorff'dur.* X*,* T *üzerindeki orijinde sıfır olan ve her doğru parçasıyla sınırlandırıldığında afin olan sürekli fonksiyonların uzayı olarak tanımlayalım. Yani*

$$X = C(T) = \{f : T \to \mathbb{R} \text{ sürekli fonksiyon } : f(0) = 0 \text{ ve } f|_{I_{0,n}} \text{ afin fonksiyon } \}$$

olarak tanımlanır. f *herhangi doğru parçası üzerinde afin olduğundan* f*'in tüm özelliği uç noktalarla belirlenir.*

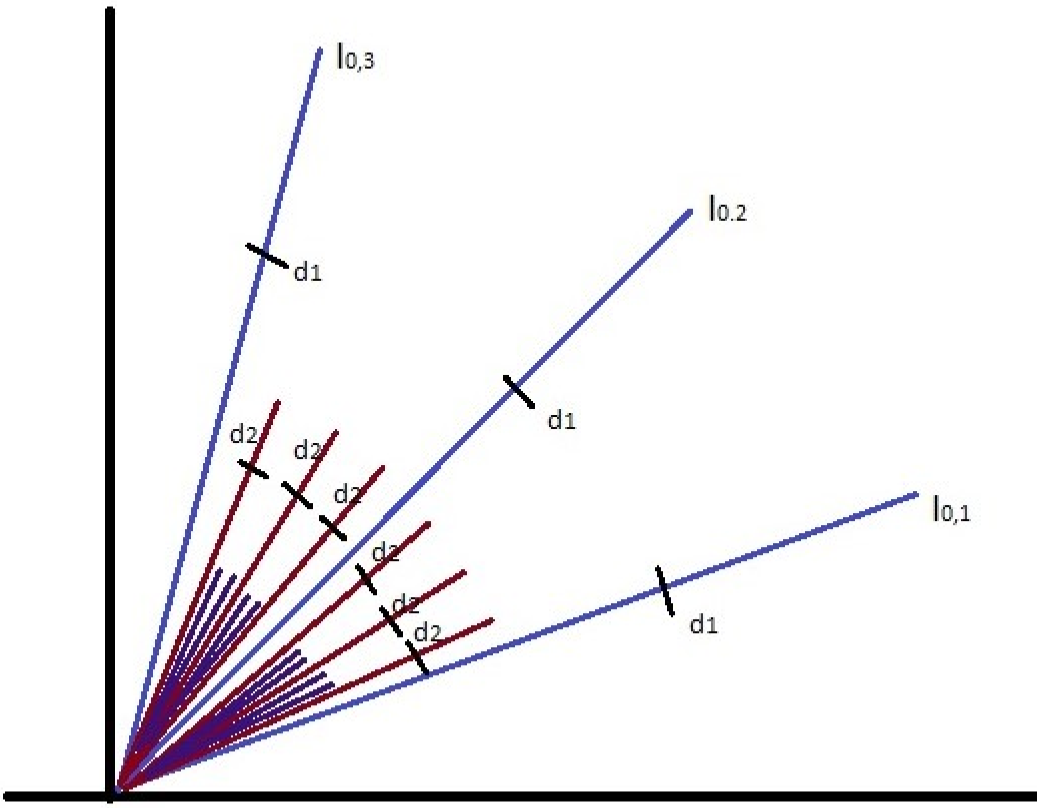
$$f(x) = ax + by + c$$

doğru parçasının f *alrındaki görüntüsü doğru parçasıdır.* $\{t_n\}$ *noktaları uzunluğu* d_2 *olan ve* $I_{0,2}$ *ile* $I_{0,3}$ *doğru parçalarının arasında kalan doğru parçalarının uç noktaları olsun.* $\lim_{n\to\infty} t_n = t_0 \in I_{0,3}$ *doğru parçası üzerinde ve orijine uzaklığı* d_2 *olan* $\delta_{t_n} \subset X'$ *alalım.*

$$\delta_{t_n}(x) = \begin{cases} 1, & x = t_n \\ 0, & x \neq t_n \end{cases}$$

olarak tanımlanır. Her $x \in X$ *için* $\delta_{t_n}(x) \to \delta_{t_0}(x)$ *olduğundan* $\delta_{t_n} \xrightarrow{w^*} \delta_{t_0}$ *olur.* X' *atomik olduğundan Teorem* $\bigwedge_{n=1}^{\infty} |\delta_{t_n} - \delta_{t_0}| = 0$ *olmalıdır. Fakat* $\delta_{t_n} \perp \delta_{t_0}$ *olur. Yani* $\delta_{t_n}(x) \wedge \delta_{t_0}(x) = 0$ *olmalıdır.*

$$\delta_{t_0}(x) = \begin{cases} 1, & x = t_0 \\ 0, & x \neq t_0 \end{cases}$$



Şekil 1:

olur. O halde her $n \geq 1$ *için* $\delta_{t_n} \perp \delta_{t_0}$ *olur.*

$$|\delta_{t_n} - \delta_{t_0}|(x) = |\delta_{t_n}(x) - \delta_{t_0}(x)| \begin{cases} 1, & x = t_n \\ 1, & x = t_0 \\ 0, & x \neq t_n, t_0 \end{cases}$$

olur. Her $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$|\delta_{t_n} - \delta_{t_0}| \geq \delta_{t_0} \implies \bigwedge_{n=1}^{\infty} |\delta_{t_n} - \delta_{t_0}| \geq \delta_{t_0} > 0$$

Bu ise çelişki verir.

Lemma 4.7.5. *E bir Banach latis olmak üzere aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.*

(*i*) *Herhangi* $(f_n) \subset E'$ *dizisi için* $f_n \xrightarrow{w^*} 0$ *ise* $f_n \to 0$ *olur.*

(*ii*) *Herhangi* $(f_n) \subset E'$ *dizisi için* $f_n \xrightarrow{w^*} 0$ *ise* $\wedge_{n=1}^{\infty} |f_n| = 0$ *olur.*

Her iki durumda da E' *atomiktir.*

Kanıt. İspat için [33, Teorem 3.1] bakılabilir. □

Lemma 4.7.6. *E bir Banach latis uzay olmak üzere aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.*

(i) *E sıra sürekli norma sahiptir.*

(ii) *Her norm sınırlı $f_\alpha \subset E^{'}$ neti uo ve w^*-yakınsak ise limit değerleri aynıdır.*

Kanıt. (i) $\implies$ (ii) Teorem 4.7.2'den açıktır.

(ii) $\implies$ (i) Her norm sınırlı $f_\alpha \subset E^{'}$ neti uo ve w^*-yakınsak ise aynı limit değerine yakınsak ve kabul edelim ki E sıra sürekli norma sahip olsun. O halde Teorem 2.3.11'den norm sınırlı, ayrık (f_n) dizisi 0'a w^*-yakınsak değildir. Böylece [5, Teorem 12.23]'den $f \neq 0$ elemanına w^*-yakınsak olacak şekilde (f_n) dizisinin (f_{n_k}) alt dizisi vardır. Ayrıca (f_n) norm sınırlı ve ayrık olduğundan Sonuç 4.1.13'den $f_n \xrightarrow{uo} 0$ olur. Kabulden $f_\alpha \xrightarrow{w^*} 0$ elde edilir.

□

Teorem 4.7.7. *E bir Banach latis uzay olmak üzere aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.*

(i) *E sıra sürekli ve atomiktir.*

(ii) *Her norm sınırlı $(f_\alpha) \subset E^{'}$ neti için $f_\alpha \xrightarrow{w^*}$ ise $f_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ olur.*

(iii) *Her $(f_\alpha) \subset E^{'}$ neti için $f_\alpha \xrightarrow{w^*}$ ise $f_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ olur.*

Kanıt. (iii) $\implies$ (ii) Açıktır.

(ii) $\implies$ (i) Her norm sınırlı $(f_\alpha) \subset E$ neti için $f_\alpha \xrightarrow{w^*} 0$ ise $f_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ olsun. Lemma 4.7.6'den E sıra süreklidir. Lemma 4.7.5'den $E^{'}$ atomiktir.

(i) $\implies$ (iii) E sıra sürekli ve atomik olsun. $(f_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$, E'nin atomlarının bir tam ayrık sistemi olsun. Her bir γ için

$$f_\gamma(x_\alpha) = \begin{cases} 1 & \gamma = \alpha \\ 0 & \gamma \neq \alpha \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. (f_γ), $E^{'}$'nin atomlarının bir tam ayrık sistemidir ve $E^{'}$, (f_γ) fonksiyonu ile birlikte $\mathbb{R}^\Gamma$ içine ideal olarak gömülebilir.

$$\forall\, \gamma \neq \beta \text{ için } f_\gamma \wedge f_\beta = 0$$

olur. Böylece ayrıktır. Herhangi $(f_\gamma) \subset E$ neti için $f_\gamma \xrightarrow{w^*} 0$ ise her $\gamma \in \Gamma$ için $f_\gamma(x_\alpha) \to 0$ olur. O halde $\mathbb{R}^\Gamma$ içinde (f_γ), 0'a noktasal yakınsaktır. Denk olarak, $\mathbb{R}^\Gamma$ içinde $f_\gamma \xrightarrow{uo} 0$ elde edilir. Buradan $E^{'}$ içinde $f_\gamma \xrightarrow{uo} 0$ olur.

□

Önerme 4.7.8. *E bir Dedekind σ-tam Banach latis ve $(f_n) \subset E^{'}$ içinde w^*-yakınsak dizisi olsun.*

$$f_n \xrightarrow{uo} 0 \text{ ise } f_n \xrightarrow{|\sigma|(E^{'},E)} 0 \text{ olur.}$$

Kanıt. Herhangi $x \in E^+$ ve $\epsilon > 0$ alalım. Teorem 4.7.1'dan

$$|f_n|(x) - |f_n| \wedge g(x) < \epsilon$$

olacak şekilde $g \in E'$ vardır. $f_n \xrightarrow{uo} 0$ olduğundan her $g \in E'$ için $|f_n| \wedge g \xrightarrow{o} 0$ olur. Böylece

$$\forall\ x \in E \text{ için } (|f_n| \wedge g)(x) \to 0$$

Buradan $|f_n|(x) < \epsilon$ elde edilir. O halde $\limsup_n |f_n|(x) < \epsilon$ olur. Böylece $\lim_n |f_n|(x) = 0$'dır. Buradan $f_n \xrightarrow{|\sigma|(E',E)} 0$ elde edilir. □

Bu önermede verilen Dedekind tamlık kaldırılamaz. Örnek aşağıdaki gibidir.

Örnek 4.7.9. $E = C[0,1]$ *olsun.*

$$f_n = \begin{cases} \delta_{\frac{1}{3n-3}} - \delta_{\frac{1}{3n-2}} + \delta_{\frac{1}{3n-1}} - \delta_{\frac{1}{3n-3}} & n \text{ çift ise} \\ \delta_{\frac{1}{3n-2}} - \delta_{\frac{1}{3n-1}} & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. $(f_n) \subset C'[0,1]$ *içinde bir dizidir. Böylece*

$$f_n = \begin{cases} f_1 = \delta_1 - \delta_{\frac{1}{2}} & n = 1 \\ f_2 = \delta_{\frac{1}{3}} - \delta_{\frac{1}{4}} + \delta_{\frac{1}{5}} - \delta_{\frac{1}{3}} & n = 2 \\ f_3 = \delta_{\frac{1}{7}} - \delta_{\frac{1}{8}} & n = 3 \\ f_4 = \delta_{\frac{1}{9}} - \delta_{\frac{1}{10}} + \delta_{\frac{1}{11}} - \delta_{\frac{1}{9}} & n = 4 \\ f_5 = \delta_{\frac{1}{13}} - \delta_{\frac{1}{14}} & n = 5 \\ \vdots \end{cases}$$

(f_n)*'ler* E' *içinde ayrıktır.* E' *Dedekind tam olduğundan Sonuç 4.1.13'dan* $f_n \xrightarrow{uo} 0$ *olur. Buradan* $f_n(x) \xrightarrow{n} 0$ *ise* $f_n \xrightarrow{w^*} 0$ *elde edilir.*

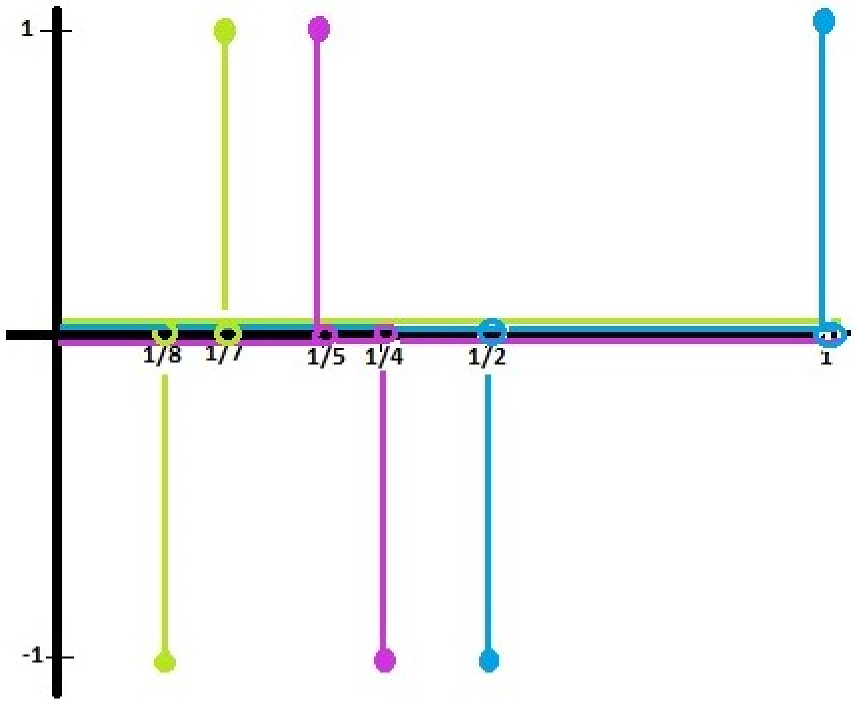
$$|f_{2n}| = \begin{cases} f_2 = \delta_{\frac{1}{3}} + \delta_{\frac{1}{4}} + \delta_{\frac{1}{5}} + \delta_{\frac{1}{3}} & n = 1 \\ f_4 = \delta_{\frac{1}{9}} + \delta_{\frac{1}{10}} + \delta_{\frac{1}{11}} + \delta_{\frac{1}{9}} & n = 2 \\ \vdots \end{cases}$$

ve

$$|f_{2n+1}| = \begin{cases} f_1 = \delta_1 + \delta_{\frac{1}{2}} & n = 0 \\ f_3 = \delta_{\frac{1}{7}} + \delta_{\frac{1}{8}} & n = 1 \\ f_5 = \delta_{\frac{1}{13}} + \delta_{\frac{1}{14}} & n = 2 \\ \vdots \end{cases}$$

olarak tanımlanır. Buradan,

$$|f_{2n}|(x) = 2\delta_{\frac{1}{3n-3}} + \delta_{\frac{1}{3n-2}} + \delta_{\frac{1}{3n-1}}(x) \begin{cases} 2 & x = \frac{1}{3n-3} \\ 1 & x = \frac{1}{3n-2} \\ 1 & x = \frac{1}{3n-1} \\ 0 & x \in [0,1] \setminus \{\frac{1}{3n-3} \cup \frac{1}{3n-2} \cup \frac{1}{3n-1}\} \end{cases}$$



Şekil 2:

ve

$$|f_{2n+1}|(x) = \delta_{\frac{1}{3n-2}} + \delta_{\frac{1}{3n-1}}(x) \begin{cases} 1 & x = \frac{1}{3n-2} \\ 1 & x = \frac{1}{3n-1} \\ 0 & x \in [0,1] \setminus \{\frac{1}{3n-2} \cup \frac{1}{3n-1}\} \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlanır. Buradan $|f_{2n}|(x) \to 4\delta_0(x)$ *ve* $|f_{2n+1}|(x) \to 2\delta_0(x)$ *olur. O halde,* $|f_{2n}|$ *ve* $|f_{2n+1}|$*, 0'a* w^**-yakınsak değildir.*

Tanım 4.7.10. E bir Banach latis ve $(f_n) \subset E_+^{'}$ bir dizi olsun. Her $f_n \xrightarrow{w^*} 0$ iken $f_n \xrightarrow{w} 0$ oluyor ise E uzayına pozitif Grothendick özelliğine sahiptir denir.

Önerme 4.7.11. *E bir Dedekind σ-tam Banach latis olmak üzere aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.*

(i) E pozitif Grothendick özelliğine sahiptir.

(ii) Herhangi $(f_n) \subset E^{'}$ için $f_n \xrightarrow{w^*} 0$ ve $f_n \xrightarrow{uo} 0$ ise $f_n \xrightarrow{w} 0$ olur.

(iii) Herhangi $(f_n) \subset E^{'}$ için $f_n \xrightarrow{w^*} 0$ ve $f_n \xrightarrow{uo} 0$ ise $f_n \xrightarrow{|\sigma|(E^{'},E^{''})} 0$ olur.

Kanıt. $(i) \implies (ii)$ E pozitif Grothendick özelliğine sahip ve $(f_n) \subset E^{'}$ dizisi için $f_n \xrightarrow{w^*} 0$ ve $f_n \xrightarrow{uo} 0$ olsun. Önerme 4.7.8'den $|f_n| \xrightarrow{w^*} 0$ olur. E pozitif Grothendick özelliğine sahip olduğundan $|f_n| \xrightarrow{w} 0$ olur.

$(iii) \implies (ii)$ Açıktır.

$(ii) \implies (i)$ Herhangi $(f_n) \subset E^{'}$ dizisi için $f_n \xrightarrow{w^*} 0$ ve $f_n \xrightarrow{uo} 0$ ise $f_n \xrightarrow{w} 0$ olsun. İlk olarak $E^{'}$ sıra sürekli norma sahip olduğunu gösterelim. $E^{'}$, Dedekind tam olduğundan E', σ-sıra sürekli norma sahip olduğunu gösterelim. $f_n \downarrow 0$ alalım. O halde her $x \in E$ için $f_n(x) \to 0$ olur. $f_n \xrightarrow{w^*} 0$ ve $f_n \xrightarrow{o} 0$ elde edilir. $f_n \xrightarrow{o} 0$ olduğundan $f_n \xrightarrow{uo} 0$ olur. Böylece $f_n \xrightarrow{w^*} 0$ ve $f_n \xrightarrow{uo} 0$ olduğundan kabulden $f_n \xrightarrow{w} 0$ elde edilir. Teorem 5.4.1(Dini Teorem)'den $\|f_n\| \to 0$ olur. Böylece E', σ-sıra sürekli norma sahiptir. $f_n \xrightarrow{w^*} 0$ olacak şekilde $(f_n) \subset E'_+$ ayrık bir dizisini alalım. Sonuç 4.1.13'den $f_n \xrightarrow{uo} 0$ elde edilir. $f_n \xrightarrow{w^*} 0$ ve $f_n \xrightarrow{uo} 0$ olduğundan kabulden $f_n \xrightarrow{w} 0$ olur. Böylece [26, Teorem 5.3.13]'den E uzayı pozitif Grothendick özelliğine sahiptir.

□

Tanım 4.7.12. E bir Banach latis olsun. Her $(f_n) \subset E'$ pozitif dizisi için $f_n \xrightarrow{w^*} 0$ iken $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ oluyor ise E uzayı dual pozitif Schur özelliğine sahiptir denir.

Önerme 4.7.13. *E bir Dedekind σ-tam uzay olmak üzere aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.*

(i) *E dual pozitif Schur özelliğine sahiptir.*

(ii) *Herhangi $(f_n) \subset E'$ için $f_n \xrightarrow{w^*} 0$ ve $f_n \xrightarrow{uo} 0$ ise $\|f_n\| \to 0$ olur.*

Kanıt. $(i) \implies (ii)$ E dual pozitif Schur özelliğine sahip, herhangi $(f_n) \subset E'$ dizisi için $f_n \xrightarrow{w^*} 0$ ve $f_n \xrightarrow{uo} 0$ olsun. Teorem 4.7.8'den $|f_n| \xrightarrow{|\sigma|(E',E)} 0$ olur. E dual pozitif Schur özelliğine sahip olduğundan $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ olur.

$(ii) \implies (i)$ Herhangi $(f_n) \subset E'$ için $f_n \xrightarrow{w^*} 0$ ve $f_n \xrightarrow{uo} 0$ iken $\|f_n\| \to 0$ olsun. Bir (x_n) dizisinin ayrık terimleri E'nin pozitif birim yuvarından alınsın. Teorem 4.7.3'den $f_n(x_n) \to 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. Kabul edelim ki $f_n(x_n) \nrightarrow 0$ olsun. O halde $0 < \epsilon < f_n(x_n)$ olur. Böylece [32, Prop 0.3.11]

$$g_n \wedge g_m = 0, g_n \leq f_n \text{ ve } g_n(x_n) = f_n(x_n)$$

olacak şekilde $g_n \in E'_+$ vardır. Buradan $g_n \xrightarrow{w^*} 0$ olur. Ayrıca g_n ayrık dizi olduğundan Sonuç 4.1.13'den $g_n \xrightarrow{uo} 0$ elde edilir. Kabulden $\|g_n\| \to 0$ olur.

$$\epsilon \leq f_n(x_n) = g_n(x_n) \leq \|g_n\| \to 0$$

Böylece $f_n(x_n) \to 0$ elde edilir. Ancak bu durum çelişki verir. O halde $f_n(x_n) \to 0$ olmalıdır.

□

Önerme 4.7.14. *E sıra sürekli bir Banach latis olmak üzere aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.*

(1) *Her norm sınırlı $(f_\alpha) \subset E'$ neti için $f_\alpha \xrightarrow{w^*} 0$ ve $f_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ ise $f_\alpha \xrightarrow{w} 0$ olur.*

(2) *Her norm sınırlı $(f_\alpha) \subset E'$ neti için $f_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ ise $f_\alpha \xrightarrow{w} 0$ olur.*

(3) *E pozitif Grothendick özelliğine sahiptir.*

(4) *E yansımalıdır.*

Kanıt. (1) $\implies$ (2) Teorem 4.7.2'den açıktır.

(2) $\implies$ (3) Önerme 4.7.11'den açıktır.

(3) $\implies$ (4) E pozitif Grothendick özelliğine sahip olsun. $(f_n) \subset E'$ alalım. $f_n \downarrow 0$ ise $f_n \xrightarrow{w^*} 0$ olur. E pozitif Grothendick özelliğine sahip olduğundan $f_n \xrightarrow{w} 0$ olur. Teorem 5.4.1(Dini Type)'den $\|f_n\| \to 0$ elde edilir. Böylece E', σ-sıra sürekli norma sahiptir. [5, Teorem 4.59]'dan E', KB-uzaydır. E'', KB-uzay olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki E'' uzayı KB-uzay olmasın. E', ℓ_1 uzayını latis izomorfik uzay olarak içerir. [5, Teorem 4.69] Genelliği bozmadan $\ell_1 \subset E'$ alalım. $(e_n), \ell_1$'nin standart tabanı olsun. Biliyoruz ki ℓ_1 içinde $e_n \xrightarrow{uo} 0$'dır. Böylece Lemma 4.6.5'den E' içinde $e_n \xrightarrow{uo} 0$ olur. E sıra sürekli norma sahip olduğundan Teorem 4.7.2'den E' içinde $e_n \xrightarrow{w^*} 0$ elde edilir. E pozitif Grothendick özelliğine sahip olduğundan E' içinde $e_n \xrightarrow{w} 0$ olur. O halde ℓ_1 içinde $e_n \xrightarrow{w} 0$'dır. Böylece E'', KB-uzaydır[5, Teorem 4.70].

□

4.8 uo-Yakınsaklık Topolojik Değildir

Bu bölümde öncelikle hemen hemen her yerde yakınsaklığın topolojik olmadığını gösterelim. Bunun için [28] makalesi takip edilecektir. $[0, 1]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı sınırlı, ölçülebilir reel değerli fonksiyonların uzayını X olarak alalım. X uzayı üzerinde tanımlanan herhangi bir topoloji üzerindeki yakınsaklık ile hemen hemen her yerde yakınsaklık aynı değildir.
Ölçüde sıfıra yakınsak ancak hemen hemen her yerde sıfıra yakınsak olmayan bir (f_n) dizisi tanımlayalım. $1 \leq m \leq n$ olmak üzere

$$f_m^n(x) = \begin{cases} 1, & \frac{m-1}{n} \leq x \leq \frac{m}{n} \\ 0, & \frac{m-1}{n} > x \text{ veya } \frac{m}{n} < x \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Kabul edelim ki X üzerinde hemen hemen her yerde yakınsaklığın topolojisi tanımlansın. (f_n) dizisi sıfıra hemen hemen her yerde yakınsak olmadığından öyle bir 0 komşuluğu vardır ki (f_n) dizisi sıklıkla $N(0)$ komşuluğu dışında bulunur. $N(0)$ komşuluğunda bulunmayan terimlerin bir alt dizisi $(f_{n'})$ olsun. $(f_{n'})$ sıfıra ölçüde yakınsaktır. O halde $(f_{n'})$ dizisinin sıfıra hemen hemen her yerde yakınsak bir alt dizisi vardır [22, p.46]. Ancak bu alt dizi $N(0)$ komşuğunda olmalıdır. Bu durum $(f_{n'})$ dizisinin $N(0)$ komşuluğunda bulunmaması ile çelişmektedir. Buradan böyle bir topoloji yoktur. Gerçekten, hemen hemen her yerde yakınsamayı bir komşuluk filtresiyle tanımlamanın bir yolu yoktur.
Şimdi uo-yakınsaklığın topolojik olmadığını gösterelim. [9] makalesi incelenecektir.

Önerme 4.8.1. *E bir atomik Riesz uzay olsun. (x_α) netinin uo-yakınsak olması için gerek ve yeter koşul (x_α) netinin noktasal yakınsak olmasıdır.*

Kanıt. Genelliği bozmadan $(x_\alpha) \in E^+$ alalım.

($\Rightarrow$) $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ olsun. Buradan $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ ise $x_\alpha \xrightarrow{n} x$ elde edilir.

($\Leftarrow$) (x_α), E içinde x elemanına noktasal yakınsak olsun. Ω, E içinde tüm atomların birleşimi ve $\Delta = P_{fin} \times \mathbb{N}$ olsun. Δ yönlendirilmiş kümedir ve $n \leq m$ için $(A, n) \leq$

$(B,m) \implies A \subset B$ olur. Her bir $\delta = (F,n) \in \Delta$ için $P_a, span\{a\}$ üzerinde izdüşüm band olmak üzere $y_\delta = \frac{1}{n}\sum_{a\in F} P_a u + \sum_{a\in\Omega\setminus F} P_a u$ olarak tanımlayalım. (x_α), x elemanına noktasal yakınsak olduğundan herhangi $y_{(F,n)}$ için

$$\exists\, \alpha_0, \forall\, \alpha > \alpha_0 \text{ için } |x_\alpha - x| \wedge u \leq y_{(F,n)}$$

olur. $y_{(F,n)} \downarrow 0$ olduğundan $|x_\alpha - x| \wedge u \xrightarrow{o} 0$ elde edilir. O halde herhangi $u \in E^+$ için $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ olur.

□

Teorem 4.8.2. *Atomik Riesz uzayda uo-yakınsaklık topolojiktir.*

Kanıt. Önerme 4.8.1'den bir atomik Riesz uzayda uo-yakınsaklık noktasal yakınsaklıktır. Böylece topolojiktir. □

Sonuç 4.8.3. *E bir atomik Riesz uzay olsun. E'nin her sıra sınırlı altküme üzerinde sıra yakınsaklık topolojiktir.*

Kanıt. Teorem 4.8.2'den uo-yakınsaklık topolojiktir. Böylece alt uzay topolojisinde E'nin herhangi alt kümesi üzerinde topolojiktir. Sıra sınırlı aralık üzerinde Önerme 4.1.7'den her uo-yakınsaklık ile o-yakınsaklık çakıştığını biliyoruz. E'nin sıra sınırlı altkümeleri üzerinde uo-yakınsak topolojik olduğundan o-yakınsaklık topolojiktir. □

5 SINIRSIZ NORM YAKINSAKLIK

Üçüncü bölümde hemen hemen her yerde yakınsaklığın Riesz uzaylarına genellemesi olan sınırsız sıra yakınsaklıktan bahsedildi. Bu yakınsaklık dikkate alındığında Banach latisleri içinde yakınsaklığın farklı versiyonları akla gelebilir. Bu bölümde bu versiyonlardan biri olan sınırsız norm yakınsaklık incelenecektir. un-yakınsaklık ölçüde yakınsamanın bir genellemesi olarak düşünülebilir. Bu bölümde [11, 19, 20] makalesi incelenmiştir.

5.1 Sınırsız Norm Yakınsaklık ve Özellikleri

Tanım 5.1.1. E bir Banach latis ve $(x_\alpha) \subset E$ bir net olsun. Her $u \in E^+$ için $|x_\alpha - x| \wedge u \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ oluyor ise (x_α) neti x elemanına *sınırsız norm yakınsaktır (unbounded norm convergent)* denir ve $x_\alpha \xrightarrow{un} x$ ile gösterilir. x elemanı ise *un-limit* olarak adlandırılır.

Genel olarak,

$$\begin{aligned} x_\alpha \xrightarrow{un} x &\iff \forall u \in E^+ \text{ için } |x_\alpha - x| \wedge u \xrightarrow{\|\cdot\|} 0 \\ &\iff \forall u \in E^+ \text{ için } \||x_\alpha - x| \wedge u\| \to 0 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Lemma 5.1.2. *E bir Banach latis ve $(x_\alpha) \subset E$ bir net olsun. (x_α) neti sınırsız norm yakınsak ise un-limit tektir.*

Kanıt. $x_\alpha \xrightarrow{un} x$ ve $x_\alpha \xrightarrow{un} y$ olsun. O halde,

$$\begin{aligned} x_\alpha \xrightarrow{un} x &\iff \forall\, u \in E^+ \text{ için } \||x_\alpha - x| \wedge u\| \to 0 \\ x_\alpha \xrightarrow{un} y &\iff \forall\, u \in E^+ \text{ için } \||x_\alpha - y| \wedge u\| \to 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

$$0 \leq |x - y| = |x - x_\alpha + x_\alpha - y| \leq |x_\alpha - x| + |x_\alpha - y|$$

olduğundan $u = |x - y|$ alınır ise

$$0 \leq |x - y| = |x - y| \wedge u \leq |x_\alpha - x| \wedge u + |x_\alpha - y| \wedge u \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$$

elde edilir. Böylece $|x - y| = 0$ ise $x = y$ olur. □

Lemma 5.1.3. *E bir Banach latis ve $(x_\alpha), (y_\alpha) \subset E$ birer net olmak üzere aşağıdaki ifadeler doğrudur.*

(i) $x_\alpha \xrightarrow{un} x$ olması için gerek ve yeter koşul $(x_\alpha - x) \xrightarrow{un} 0$ olmasıdır.

(ii) $x_\alpha \xrightarrow{un} x$ ise $x_\alpha^+ \xrightarrow{un} x^+$, $x_\alpha^- \xrightarrow{un} x^-$ ve $|x_\alpha| \xrightarrow{un} |x|$ olur.

(iii) $x_\alpha \xrightarrow{un} x$ ve $y_\alpha \xrightarrow{un} y$ ise her $a, b \in \mathbb{R}$ için $ax_\alpha + by_\alpha \xrightarrow{un} ax + by$ olur.

Kanıt. (i)

$$\begin{aligned} x_\alpha \xrightarrow{un} x &\iff \forall\, u \in E^+ \text{ için } \||x_\alpha - x| \wedge u\| \to 0 \\ &\iff \forall\, u \in E^+ \text{ için } \||(x_\alpha - x)| \wedge u\| \to 0 \\ &\iff x_\alpha - x \xrightarrow{un} 0 \end{aligned}$$

(ii) $x_\alpha \xrightarrow{un} 0$ olsun. O halde,

$$x_\alpha \xrightarrow{un} x \iff \forall\, u \in E^+ \text{ için } \||x_\alpha - x| \wedge u\| \to 0$$

olur. İlk olarak $x_\alpha^+ \xrightarrow{un} x^+$ olduğunu gösterelim.

$$|x_\alpha^+ - x^+| = |x_\alpha \vee 0 - x \vee 0| \leq |x_\alpha - x|$$

olduğundan

$$|x_\alpha^+ - x^+| \wedge u \leq |x_\alpha - x| \wedge u$$

olur. $|x_\alpha - x| \wedge u \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ olduğundan $|x_\alpha^+ - x^+| \wedge u \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ elde edilir. Böylece $x^+ \xrightarrow{un} x^+$ olur. Benzer şekilde $x_\alpha^- \xrightarrow{un} x^-$ olduğunu gösterelim.

$$|x_\alpha^- - x^-| = |x_\alpha \wedge 0 - x \wedge 0| \leq |x_\alpha - x|$$

olduğundan

$$|x_\alpha^- - x^-| \wedge u \leq |x_\alpha - x| \wedge u$$

olur. Buradan $|x_\alpha - x| \wedge u \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ olduğundan $|x_\alpha^- - x^-| \wedge u \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ elde edilir. Böylece $x^- \xrightarrow{un} x^-$ olur. Son olarak $|x_\alpha| \xrightarrow{un} |x|$ olduğunu göstermeliyiz.

$$||x_\alpha| - |x|| \leq |x_\alpha - x|$$

olduğundan

$$||x_\alpha| - |x|| \wedge u \leq |x_\alpha - x| \wedge u \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$$

olur. Buradan $|x_\alpha - x| \wedge u \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ olduğundan $||x_\alpha| - |x|| \wedge u \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ elde edilir. Böylece $|x_\alpha| \xrightarrow{un} |x|$ olur.

(iii)

$$\begin{aligned}|(ax_\alpha + by_\alpha) - (ax + by)| &= |ax_\alpha + by_\alpha - ax - by| \\ &= |ax_\alpha - ax + by_\alpha - by| \\ &\leq |ax_\alpha - ax| + |by_\alpha - by| \\ &\leq |a||x_\alpha - x| + |b||y_\alpha - y|\end{aligned}$$

elde edilir. O halde her $u \in E^+$ için

$$\begin{aligned}|(ax_\alpha + by_\alpha) - (ax + by)| \wedge u &\leq |a||x_\alpha - x| \wedge u + |a||y_\alpha - y| \wedge u \\ &= |a|(|x_\alpha - x| \wedge \frac{u}{|a|}) + |b|(|y_\alpha - y| \wedge \frac{u}{|b|}) \xrightarrow{\|\cdot\|} 0\end{aligned}$$

Burada $\frac{u}{|a|}$ ve $\frac{u}{|b|} \in E^+$ olur. Böylece,

$$|(ax_\alpha + by_\alpha) - (ax + by)| \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$$

elde edilir.

$\square$

Genel olarak,

$$x_\alpha \xrightarrow{un} x \text{ olması için gerek ve yeter koşul } |x_\alpha - x| \xrightarrow{un} 0 \text{ olmasıdır.}$$

Önerme 5.1.4. *E bir Banach latis ve $(x_\alpha) \subset E$ bir net olsun.*

$$x_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|} 0 \text{ ise } x_\alpha \xrightarrow{un} 0 \text{ olur.}$$

Ayrıca her sıra sınırlı (x_α) neti için

$$x_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|} 0 \iff x_\alpha \xrightarrow{un} 0 \text{ olur.}$$

Kanıt. $x_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ olsun. O halde $\|x_\alpha - 0\| = \|x_\alpha\| \to 0$ olur. Her $u \in E^+$ için $|x_\alpha| \wedge u \leq |x_\alpha|$ olacağından,

$$\||x_\alpha| \wedge u\| \leq \|x_\alpha\|$$

olur. $\|x_\alpha\| \to 0$ olduğundan $\||x_\alpha| \wedge u\| \to 0$ olur. Buradan $x_\alpha \xrightarrow{un} 0$ elde edilir.

(x_α) neti sıra sınırlı olsun. O halde $|x_\alpha| \leq z$ olacak şekilde en az bir tane $z \in E^+$ elemanı vardır. Ayrıca, $x_\alpha \xrightarrow{un} 0$ olduğu için

$$|x_\alpha| = |x_\alpha| \wedge z \implies \|x_\alpha\| \leq \||x_\alpha| \wedge z\|$$

eşitsizliğinden $\||x_\alpha| \wedge z\| \to 0$ ve böylece $\|x_\alpha\| \to 0$ elde edilir. $x_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ olur. □

Önerme 5.1.5. *E sıra sürekli bir Banach latis olsun.*

$$x_\alpha \xrightarrow{uo} x \text{ ise } x_\alpha \xrightarrow{un} x \text{ olur.}$$

Kanıt. $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ olsun. O halde her $u \in E^+$ için $|x_\alpha - x| \wedge u \xrightarrow{o} 0$ olur. E sıra sürekli olduğundan

$$\forall\, u \in E^+ \text{ için } \||x_\alpha - x| \wedge u\| \to 0$$

elde edilir. Böylece $x_\alpha \xrightarrow{un} x$ olur. □

Örnek 5.1.6. *ℓ_∞ içinde $(e_n) = (0, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots)$ standart birim dizisini alalım. (e_n) dizisi 0'a un-yakınsak değildir. Gerçekten herhangi 1 sabit dizisi alalım. Bu sabit diziyi u olarak tanımlayalım.*

$$\begin{aligned}
|e_n| \wedge u &= |(0, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots) \wedge (u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots)| \\
&= |(0 \wedge u_1, 0 \wedge u_2, 0 \wedge u_3, \cdots, 0 \wedge u_n, \cdots) \\
&= |(0 \wedge 1, 0 \wedge 1, 0 \wedge 1, \cdots, 1 \wedge 1, \cdots)| \\
&= |(0, 0, 0, \cdots, 1, \cdots)|
\end{aligned}$$

olacağından $\|(0, 0, 0, \cdots, 1, \cdots)\|_\infty = 1$ elde edilir. Ayrıca Sonuç 4.1.13'den (e_n) ayrık dizi olduğundan $e_n \xrightarrow{uo} 0$ olur. Buradan 0 elemanına uo-yakınsak bir ayrık dizinin 0 elemanına un-yakınsak olması gerekmediğini gösterilir. İkinci olarak $e_n \xrightarrow{uo} 0$ olduğundan bu örnek Önerme 5.1.5'den sıra sürekliliğin kaldırılamayacağını gösterir. Son olarak,

E bir Riesz uzay ve $F \subset E$ regüler alt uzayı olmak üzere Önerme 4.1.10'den E içinde $x_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ olması için gerek ve yeter koşul F içinde $x_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ olmasıdır. Bu durum un-yakınsaklık için geçerli değildir. Gerçekten c_0, ℓ_∞ içinde regüler uzaydır. ℓ_∞ içinde (e_n) dizisi 0'a un-yakınsak olmadığını gösterdik. $u = (u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots) \in c_0$ alalım. Buradan,

$$\begin{aligned} |e_n| \wedge u &= |(0,0,\cdots,0,1,0,\cdots) \wedge (u_1,u_2,u_3,\cdots,u_n,\cdots)| \\ &= |(0 \wedge u_1, 0 \wedge u_2, 0 \wedge u_3, \cdots, 0 \wedge u_n, \cdots) \\ &= |(0,0,0,\cdots,1 \wedge u_n,\cdots)| \end{aligned}$$

olur. Burada $|1 \wedge u_n| \leq |u_n|$ elde edilir ve $u \in c_0$ olduğundan $u_n \to 0$'dır. O halde $|1 \wedge u_n| \to 0$ olur. Böylece (e_n) dizisi c_0 içinde 0'a un-yakınsak iken ℓ_∞ uzayı içinde (e_n) dizisi 0'a un-yakınsak değildir.

Örnek 5.1.7. *Alt uzayda un-yakınsaklık, ℓ_1 uzayına latis izomorfik bir alt uzay olsa bile uzayın tamamında un-yakınsak olmak zorunda değildir. $E = \ell_1 \oplus \ell_\infty$ olmak üzere (f_n), ℓ_1 uzayının standart birim tabanı ve (g_n), ℓ_∞ uzayının standart birim dizisi olsun. $x_n = f_n \oplus g_n$ olarak alalım. Y, E içinde (x_n) tarafından üretilen kapalı tabanı olsun. E içinde (x_n) ayrık bir dizi olduğundan Y, (x_n) tarafından üretilen kapalı alt uzaydır.*

$$\begin{aligned} \| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \| &= \| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k \| \vee \| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k g_k \| \\ &= (\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|) \vee (\bigvee_{k=1}^{n} |\alpha_k|) \\ &= \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| \end{aligned}$$

E içinde temel dizi (x_n), ℓ_1 içinde (f_n)'e denktir ve E içinde Y, ℓ_1 uzayına latis izomorfiktir. ℓ_1 içinde $f_n \xrightarrow{un} 0$ olur. Böylece Y içinde $x_n \xrightarrow{un} 0$ olur. Ancak E içinde x_n dizisi 0'a un-yakınsak değildir.

Lemma 5.1.8. *E bir Banach latis ve $(x_\alpha) \subset E$ bir net olsun.*

$$x_\alpha \xrightarrow{un} x \text{ ise } |x_\alpha| \wedge |x| \xrightarrow{\|\cdot\|} |x| \text{ ve } \|x\| \leq \liminf_\alpha \|x_\alpha\| \text{ olur.}$$

Kanıt. $x_\alpha \xrightarrow{un} x$ olsun. O halde,

$$x_\alpha \xrightarrow{un} x \iff \forall\, u \in E^+ \text{ için } |x_\alpha - x| \wedge u \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} 0 \leq ||x_\alpha| \wedge |x| - |x|| &= ||x_\alpha| \wedge |x| - |x| \wedge |x|| \\ &\leq ||x_\alpha| - |x|| \wedge |x| \\ &\leq |x_\alpha - x| \wedge |x| \end{aligned}$$

ve $|x_\alpha - x| \wedge |x| \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ olduğundan $||x_\alpha| \wedge |x| - |x|| \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ elde edilir.

$$\|\,|x_\alpha| \wedge |x| - |x|\,\| \to 0 \implies |x_\alpha| \wedge |x| \xrightarrow{\|\cdot\|} |x|$$

olur. Ayrıca

$$\|x\| \leq \liminf_{\alpha} \||x_\alpha| \wedge |x|\| \leq \liminf_{\alpha} \|x_\alpha\|$$

elde edilir. $\square$

Lemma 5.1.9. *E bir Banach latis ve $(x_\alpha) \subset E$ bir net olsun.*

$$x_\alpha \xrightarrow{un} x \text{ ve } (x_\alpha) \text{ neredeyse sıra sınırlı } \implies x_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|} x \text{ olur.}$$

Kanıt. $x_\alpha \xrightarrow{un} x$ olsun. O halde

$$x_\alpha \xrightarrow{un} x \iff \forall\, u \in E^+ \text{ için } |x_\alpha - x| \wedge u \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$$

olur. (x_α) sıra sınırlı olduğundan $(|x_\alpha - x|)$ neti de neredeyse sıra sınırlıdır. Böylece verilen $\epsilon > 0$ ve her α için

$$\||x_\alpha - x| - |x_\alpha - x| \wedge u\| = \|(|x_\alpha - x| - u)^+\| < \epsilon$$

olacak şekilde en az bir tane $u > 0$ vardır. Böylece $x_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ olur. $\square$

Önerme 5.1.10. *E bir Banach latis ve $(x_\alpha) \subset E$ bir net olsun.*

$$(x_\alpha) \text{ relatif zayıf kompakt net ve } x_\alpha \xrightarrow{un} x \text{ ise } |\sigma|(E, E^{'}) \text{ içinde } x_\alpha \to x \text{ olur.}$$

Kanıt. Genelliği bozmadan $x = 0$ olsun. $\epsilon > 0$ alalım. (x_α) relatif zayıf kompakt net olduğundan $f((|x_\alpha| - u)^+) < \epsilon$ olacak şekilde $u \in E^+$ vardır. Ayrıca $x_\alpha \xrightarrow{un} 0$ olduğundan $f(|x_\alpha| \wedge u) \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ olur. Böylece

$$f(|x_\alpha|) = f(|x_\alpha| \wedge u) + f((|x_\alpha| - x)^+) < 2\epsilon$$

olduğundan $f(|x_\alpha|) \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ elde edilir. $\square$

Lemma 5.1.11. *E bir Banach latis ve e kuasi iç nokta olsun.*

$$x_\alpha \xrightarrow{un} 0 \text{ olması için gerek ve yeter koşul } |x_\alpha| \wedge e \xrightarrow{\|\cdot\|} 0 \text{ olmasıdır.}$$

Kanıt. $(\Rightarrow)$ $x_\alpha \xrightarrow{un} 0$ olsun. O halde her $u \in E^+$ için $|x_\alpha| \wedge u \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ olduğundan $e \in E^+$ elemanı içinde $|x_\alpha| \wedge e \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ geçerlidir.

$(\Leftarrow)$ $|x_\alpha| \wedge e \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ olsun. $u \in E^+$ ve $\epsilon > 0$ alalım.

$$\begin{aligned} |x_\alpha| \wedge u &\leq |x_\alpha| \wedge (u - u \wedge me) + |x_\alpha| \wedge (u \wedge me) \\ &\leq (u - u \wedge me) + m(|x_\alpha| \wedge e) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\||x_\alpha| \wedge u\| \leq \|u - u \wedge me\| + \||x_\alpha| \wedge e\| \tag{5.1.1}$$

olur. Ayrıca e kuasi iç nokta olduğundan $\|u - u \wedge me\| < \frac{\epsilon}{2}$ sağlanır.

$$|x_\alpha| \wedge e \xrightarrow{\|\cdot\|} 0 \implies \exists\ \alpha_0, \forall\ \alpha \geq \alpha_0 \text{ iken } \||x_\alpha| \wedge e\| < \frac{\epsilon}{2m}$$

elde edilir. O halde (5.1.1)'dan

$$\||x_\alpha| \wedge u\| < \frac{\epsilon}{2} + m\frac{\epsilon}{2m} = \epsilon$$

elde edilir. Buradan $|x_\alpha| \wedge u \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ olur. Böylece $x_\alpha \xrightarrow{un} 0$ elde edilir. □

Sonuç 5.1.12. *E sıra sürekli bir Banach latis ve e zayıf birim olsun.*

$$x_\alpha \xrightarrow{un} 0 \text{ olması için gerek ve yeter koşul } |x_\alpha| \wedge e \xrightarrow{\|\cdot\|} 0 \text{ olmasıdır.}$$

Kanıt. E sıra sürekli uzay olduğundan Sonuç 2.3.31'den her zayıf birim bir kuasi iç nokta olur. Böylece Lemma 5.1.11'den ispat açıktır. □

Sonuç 5.1.13. *E Banach latisi kuasi iç noktaya sahip bir uzay ve $(x_\alpha) \subset E$ net olmak üzere $x_\alpha \xrightarrow{un} 0$ olsun. $x_{\alpha_n} \xrightarrow{un} 0$ olacak şekilde artan (α_n) indis dizisi vardır.*

Kanıt. $x_\alpha \xrightarrow{un} 0$ olsun. E uzayı kuasi iç noktaya sahip ve $x_\alpha \xrightarrow{un} 0$ olduğundan

$$\forall\ \epsilon > 0, \exists\ \alpha_0, \forall\ \alpha_0 > \alpha \text{ iken } \||x_\alpha| \wedge e\| < \epsilon$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
&\epsilon = 1, \exists\ \alpha_1, \forall \alpha > \alpha_1 \text{ iken } \||x_{\alpha_1}| \wedge e\| < 1 \\
&\epsilon = \frac{1}{2}, \exists\ \alpha_2, \forall \alpha > \alpha_2 \text{ iken } \||x_{\alpha_2}| \wedge e\| < \frac{1}{2} \\
&\vdots \\
&\epsilon = \frac{1}{n}, \exists\ \alpha_n, \forall \alpha > \alpha_n \text{ iken } \||x_{\alpha_n}| \wedge e\| < \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Böylece $x_{\alpha_n} \xrightarrow{un} 0$ elde edilir. □

Lemma 5.1.14. *E bir Banach latis olmak üzere B projeksiyon band olsun. P_B band izdüşüm olmak üzere $0 \leq P_B \leq I$ için $x_\alpha \xrightarrow{un} x$ ise hem E hemde B içinde $P_B x_\alpha \xrightarrow{un} P_B x$ olur.*

Kanıt. $x_\alpha \xrightarrow{un} x$ olsun. O halde her $y \in E^+$ için $|x_\alpha - x| \wedge y \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ olur.

$$|P_B x_\alpha - P_B x| = P_B|x_\alpha - x| \leq |x_\alpha - x|$$

olduğundan

$$|P_B x_\alpha - P_B x| \wedge y \leq |x_\alpha - x| \wedge y$$

elde edilir. $|x_\alpha - x| \wedge y \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ olduğundan E içinde $|P_B x_\alpha - P_B x| \wedge y \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ olur. Özel olarak her $y \in B^+$ için $|P_B x_\alpha - P_B x| \wedge y \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ elde edilir. □

5.2 Ayrık Altdiziler ve un-Yakınsaklık

Lemma 5.2.1. *E bir Riesz uzay, u ve v pozitif vektörler olsun. $|x| = u+v$ olmak üzere $x = y + z$, $|y| = u$ ve $|z| = v$ olacak şekilde y, z elemanları vardır.*

Kanıt. İlk olarak $|x| = x^+ + x^-$ olarak yazılır. $|x| = u+v$ olduğundan $x^+ + x^- = u+v$ olur. Buradan Teorem 2.1.17'den

$$u = a + b \text{ ve } v = c + d$$
$$x^+ = a + c \text{ ve } x^- = b + d$$

olacak şekilde a, b, c, d elemanları vardır. $y = a - b$ ve $z = c - d$ olarak alalım.

$$\begin{aligned} y + z &= a - b + c - d \\ &= a + c - (b + d) \\ &= x^+ - x^- \\ &= x \end{aligned}$$

olur. Ayrıca $0 \leq a \leq x^+$ ve $0 \leq b \leq x^-$ olduğundan $a \perp b$ elde edilir. Böylece

$$|y| = |a - b| = a + b = u$$

olur. Benzer şekilde $0 \leq c \leq y^+$ ve $0 \leq d \leq y^-$ olduğundan $c \perp d$ olur ve buradan

$$|z| = |c - d| = c + d = v$$

elde edilir. □

Teorem 5.2.2. *E bir Banach latis ve $(x_\alpha) \subset E$ bir net olmak üzere $x_\alpha \xrightarrow{un} 0$ olsun. $x_{\alpha_k} - d_k \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ olacak şekilde ayrık bir (d_k) dizisi ve (α_k) artan indis vardır.*

Kanıt. İlk olarak her α için $x_\alpha \geq 0$ olsun. Herhangi bir α_1 alalım. $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{k-1}$ inşa edelim.

$$\text{Her } i = 1, 2, ..., k-1 \text{ için } x_\alpha \wedge x_{\alpha_i} \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$$

olduğunu hatırlatalım. Böylece her $i = 1, 2, ..., k-1$ için $\|x_{\alpha_k} \wedge x_{\alpha_i}\| \leq \frac{1}{2^{k+i}}$ olacak şekilde $\alpha_k \geq \alpha_{k-1}$ seçelim. Buradan artan bir (α_k) indeks dizisi elde edilir. $1 \leq i \leq k$ olmak üzere $z_{ik} = x_{\alpha_i} \wedge x_{\alpha_k}$ için $\|z_{ik}\| \leq \frac{1}{2^{k+i}}$ olur. Her k için

$$v_k = \sum_{i=1}^{k-1} z_{ik} + \sum_{j=k+1}^{\infty} z_{kj}$$

olarak tanımlayalım. Buradan $\|v_k\| < \frac{1}{2^k}$ elde edilir. $d_k = (x_{\alpha k} - v_k)^+$ olarak alalım. $0 \leq x_{\alpha k} - d_k \leq v_k$'dır. Gerçekten $x_{\alpha k} - d_k \leq v_k$ olduğunu gösterelim. $d_k = (x_{\alpha k} - v_k)^+$ olduğundan

$$\begin{aligned} x_{\alpha k} - d_k &= x_{\alpha k} - (x_{\alpha k} - v_k)^+ \\ &= x_{\alpha k} - (x_{\alpha k} - v_k \vee 0) \\ &= x_{\alpha k} - x_{\alpha k} + v_k \wedge x_{\alpha k} \\ &= v_k \wedge x_{\alpha k} \\ &\leq v_k \end{aligned}$$

olur. Buradan $\|x_{\alpha k}-d_k\| \leq \|v_k\| \to 0$ elde edilir. $\|v_k\| \to 0$ olduğundan $\|x_{\alpha k}-d_k\| \to 0$ olur. (d_k)'nın ayrık bir dizi olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} d_k &= (x_{\alpha k} - v_k)^+ \leq (x_{\alpha k} - z_{km})^+ = x_{\alpha k} - (x_{\alpha k} \wedge x_{\alpha m}) \\ d_m &= (x_{\alpha m} - v_m)^+ \leq (x_{\alpha m} - z_{km})^+ = x_{\alpha m} - (x_{\alpha m} \wedge x_{\alpha m}) \end{aligned}$$

olarak tanımlayalım. $d_k \perp d_m$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} d_k \wedge d_m &= (x_{\alpha k} - (x_{\alpha k} \wedge x_{\alpha m})) \wedge (x_{\alpha m} - (x_{\alpha k} \wedge x_{\alpha m})) \\ &= ((x_{\alpha k} - x_{\alpha k}) \vee (x_{\alpha k} - x_{\alpha m})) \wedge ((x_{\alpha m} - x_{\alpha k}) \vee (x_{\alpha m} - x_{\alpha m})) \\ &= (0 \vee (x_{\alpha k} - x_{\alpha m})) \wedge ((x_{\alpha m} - x_{\alpha k}) \vee 0) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $u = x_{\alpha k} - x_{\alpha m}$ olarak alınırsa

$$(0 \vee u) \wedge (0 \vee (-u)) = u^+ \wedge u^- = 0$$

olur. Böylece $d_k \wedge d_m = 0$ elde edilir.
Genel olarak $(|x_\alpha|)$ bir net, (α_k) artan indis dizisi ve $|x_{\alpha k}| = w_k + h_k$ olacak şekilde (w_k) ve (h_k) iki pozitif diziler olmak üzere (w_k) ayrık ve $h_k \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ olur. Lemma 5.2.1'den E içinde $|d_k| = w_k$, $|g_k| = h_k$ ve $x_{\alpha_k} = d_k + g_k$ olacak şekilde (d_k) ve (g_k) dizileri vardır. (d_k) ayrık bir dizi ve $g_k \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$'dır. Böylece $x_{\alpha_k} - d_k \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ elde edilir. □

Sonuç 5.2.3. *E sıra sürekli bir Banach latis ve $(x_\alpha) \subset E$ bir net olmak üzere $x_\alpha \xrightarrow{un} 0$ olsun. $x_{\alpha_k} \xrightarrow{uo} 0$ ve $x_{\alpha_k} \xrightarrow{un} 0$ olacak şekilde (α_k) artan indis dizisi vardır.*

Kanıt. İlk olarak $x_{\alpha_k} \xrightarrow{un} 0$ olduğunu gösterelim. Teorem 5.2.2'den $x_{\alpha_k} - d_k \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ olacak şekilde (α_k) artan indisi ve (d_k) dizisi vardır. (d_k) ayrık dizi olduğundan Sonuç 4.1.13'den $d_k \xrightarrow{uo} 0$'dur. Buradan Önerme 5.1.5'den $d_k \xrightarrow{un} 0$ olur. Ayrıca $x_{\alpha_k} - d_k \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ olduğundan Önerme 5.1.4'den $x_{\alpha_k} - d_k \xrightarrow{un} 0$ elde edilir. Dahası $d_k \xrightarrow{un} 0$ olduğundan $x_{\alpha_k} \xrightarrow{un} 0$ olur. Şimdi ise $x_{\alpha_k} \xrightarrow{uo} 0$ olduğunu gösterelim. E sıra sürekli ve $x_{\alpha_k} - d_k \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ olduğundan $x_{\alpha_k} - d_k \xrightarrow{o} 0$ olur. Böylece $x_{\alpha_k} - d_k \xrightarrow{uo} 0$ elde edilir. $d_k \xrightarrow{uo} 0$ olduğundan $x_{\alpha_k} \xrightarrow{uo} 0$ olur. □

5.3 un-Yakınsaklık ile uo-Yakınsaklık ve Ölçüde Yakınsaklık İlişkileri

Önerme 5.3.1. *E bir Banach latis ve $(x_n) \subset E$ bir dizi olsun. $x_n \xrightarrow{un} 0$ ise $x_{n_k} \xrightarrow{uo} 0$ olacak şekilde (x_n) dizisinin (x_{n_k}) alt dizisi vardır.*

Kanıt. $e = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|}{2^n \|x_n\|}$ olarak tanımlayalım. B_e, E içerisinde e elemanı tarafından üretilen band ve $x_n \xrightarrow{un} 0$ olsun. $x_n \xrightarrow{un} 0$ olduğundan $|x_n| \wedge e \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ olur. Böylece B_e içerisinde de $|x_n| \wedge e \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$'dir. Buradan Lemma 3.1.31'den $|x_{n_k}| \wedge e \xrightarrow{o} 0$ olacak şekilde (x_n) dizisinin (x_{n_k}) alt dizisi vardır. B_e içerisinde de e zayıf birim olduğundan B_e içerisinde $x_{n_k} \xrightarrow{uo} 0$ olur. Son olarak B_e, E içerisinde ideal olduğundan Lemma 4.1.9'den E içinde $x_{n_k} \xrightarrow{uo} 0$ elde edilir. □

Sonuç 5.3.2. *$1 \leq p < \infty$ olmak üzere $(f_n) \subset L_p$ bir dizi ve μ bir sonlu ölçü olsun.*

$$f_n \xrightarrow{un} 0 \text{ olması için gerek ve yeter koşul } f_n \xrightarrow{\mu} 0 \text{ olmasıdır.}$$

Kanıt. Genelliği bozmadan $f_n \geq 0$ olsun.

($\Rightarrow$) $f_n \xrightarrow{un} 0$ olsun. O halde (f_n) dizisinin her alt dizisi $f_{n_k} \xrightarrow{un} 0$ olur. Böylece Önerme 5.3.1'den $f_{n_{k_i}} \xrightarrow{uo} 0$ olacak şekilde $(f_{n_{k_i}})$ alt dizisi vardır. Bu durumda Örnek 4.1.8'den $f_{n_{k_i}} \xrightarrow{hhh} 0$ olur. O halde $f_n \xrightarrow{\mu} f$ elde edilir.

($\Leftarrow$) $f_n \xrightarrow{\mu} 0$ olsun. Genelliği bozmadan her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n \geq 0$ alalım. Lebesgue Baskın Yakınsaklık Teoreminden $f_n \wedge \mathbb{1} \xrightarrow{\|\cdot\|_p} 0$ olur. $\mathbb{1}$, L_p'nin kuasi iç noktası olduğundan Sonuç 2.3.31'den $\mathbb{1}$ zayıf birimdir ve Sonuç 5.1.12'den $f_n \xrightarrow{un} 0$ olur.

□

Teorem 5.3.3. *E sıra sürekli bir Banach latis ve $(x_n) \subset E$ bir dizi olmak üzere $x_n \xrightarrow{un} 0$ olması için gerek ve yeter koşul $x_{n_{k_i}} \xrightarrow{uo} 0$ olacak şekilde (x_n) dizisinin $(x_{n_{k_i}})$ alt dizisi var olmasıdır.*

Kanıt. ($\Rightarrow$) Önerme 5.3.1'den açıktır.

($\Leftarrow$) Kabul edelim ki (x_n) dizisi 0'a un-yakınsak olmasın. O halde her $k \in \mathbb{N}$ için $\||x_{n_k}| \wedge u\| > \delta$ olacak şekilde $\delta > 0$, $u \in E^+$ ve (x_{n_k}) alt dizisi vardır. Ayrıca kabulden $x_{n_{k_i}} \xrightarrow{uo} 0$ olacak şekilde (x_{n_k}) dizisinin $(x_{n_{k_i}})$ alt dizisi vardır. Buradan Önerme 5.1.5'den $x_{n_{k_i}} \xrightarrow{un} 0$ olur. Böylece $|x_{n_{k_i}}| \wedge u \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ elde edilir. Ancak bu durum çelişki verir. O halde $x_n \xrightarrow{un} 0$ olmalıdır.

□

E uzayı, e zayıf birimine sahip sıra sürekli bir Banach latis olsun. μ sonlu ölçü uzay olmak üzere E uzayı $L_1(\mu)$ içinde sıra ve norm yoğun ideal olarak alalım. Böylece, $R(T)$, $L_1(\mu)$ uzayının sıra ve norm yoğun ideal olacak şekilde

$$T : E \to L_1(\mu)$$

latis izomorfizim vardır. T sürekli ve $T(e) = 1$ olsa bile T'nin norm izomorfizim olmasına gerek yoktur. Dahası $R(T)$, $L_\infty(\mu)$ uzayını norm ve sıra yoğun ideali olarak içerir. E, $L_1(\mu)$ uzayının bir ideali ve görüntü kümesi $R(T)$ olarak tanımlanır. Bir $L_1(\mu)$ uzayına E'nin bu şekilde dahil edilmesine E'nin $AL-Temsili$ denir.

Teorem 5.3.4. *E zayıf birime sahip sıra sürekli bir Banach latis ve $L_1(\mu)$, E uzayının AL-Temsili olsun. $(x_n) \subset E$ bir dizi olmak üzere*

$$E \text{ içinde } x_n \xrightarrow{un} 0 \text{ olması için gerek ve yeter koşul } L_1(\mu) \text{ içinde } x_n \xrightarrow{\mu} 0 \text{ olmasıdır.}$$

Kanıt. ($\Rightarrow$) E içinde $x_n \xrightarrow{un} 0$ olsun. O halde Teorem 5.3.3'den $x_{n_{k_i}} \xrightarrow{uo} 0$ olacak şekilde her (x_{n_k}) alt dizisinin $(x_{n_{k_i}})$ alt dizisi vardır. Örnek 4.1.8'den $L_1(\mu)$ uzayı içinde $x_{n_{k_i}} \xrightarrow{hhh} 0$ elde edilir. Buradan $x_n \xrightarrow{\mu} 0$ olur.

($\Leftarrow$) $x_n \xrightarrow{\mu} 0$ olsun. $\mathbb{1}$, L_1'nin kuasi iç noktası olduğundan Sonuç 2.3.31'den $\mathbb{1}$ zayıf birimdir. Böylece Sonuç 5.1.12 ve Lebesgue Baskınlık Teoreminden L_1'nin normunda $x_n \wedge \mathbb{1} \to 0$ olması için gerek ve yeter şart $x_n \xrightarrow{un} 0$ olmasıdır.

□

Lemma 5.3.5. *E atomik ve sıra sürekli bir Banach latis olmak üzere $(x_n) \subset E$ sıra sınırlı bir dizi olsun.*

$$x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} 0 \text{ ise } x_n \xrightarrow{o} 0 \text{ olur.}$$

Kanıt. Genelliği bozmadan $x_n \geq 0$ alalım. Ayrıca (x_n) sıra sınırlı olduğundan her n için $x_n \leq u$ olacak şekilde $u \in E^+$ vardır. $u = \sum_{i=1}^{\infty} u_i a_i$ olacak şekilde A içinde (a_i) ayrık atomların bir dizisi vardır. Buradan bu seri norm ve sıra yakınsaktır. $\sum_{i=1}^{\infty} u_i a_i$ sıra yakınsak olduğundan $\sum_{i=1}^{\infty} u_i a_i \leq y_k \downarrow 0$ olacak şekilde (y_k) neti vardır. Verilen $n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq x_n \leq u$ olduğundan $x_n = \sum x_{ni} a_i$ olarak yazılır. Her n için $0 \leq x_{ni} a_i \leq x_n$ ve $\lim_{n\to\infty} x_{ni} = 0$ elde edilir.Böylece (x_n) dizisi 0'a bileşen vari olarak yakınsaktır. Her bir $k \in \mathbb{N}$ için

$$v_k = \sum_{i=1}^{k} (\frac{1}{k} \wedge u_i) a_i + \sum_{i=k+1}^{\infty} u_i a_i$$

olarak tanımlayalım. $v_k \downarrow 0$ olduğunu gösterelim.

$$v_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{k} \wedge u_i a_i + \sum_{i=k+1}^{\infty} u_i a_i \leq \sum_{i=1}^{k} u_i a_i + \sum_{i=k+1}^{\infty} u_i a_i = \sum_{i=1}^{\infty} u_i a_i$$

olur. Buradan $v_k \leq y_k \downarrow 0$ elde edilir. O halde $v_k \downarrow 0$'dır. Diğer yandan $x_n \leq u$ ve (x_n) dizisi 0'a bileşen vari yakınsak olduğundan her $n \geq n_k$ için $x_n \leq v_k \downarrow 0$ elde edilir. Böylece $x_n \xrightarrow{o} 0$ olur. □

Teorem 5.3.6. *E sıra sürekli norma sahip bir Banach latis olsun. E^+ içinde bir kuasi iç nokta var ise*

$$L_\infty(\mu) \subset E \subset L_1(\mu) \text{ ve } L_\infty(\mu) \subset E' \subset L_1(\mu)$$

olacak şekilde (X, Σ, μ) olasılık ölçü uzayı vardır. Böylelikle $L_\infty(\mu)$, E içinde yoğun idealdir, E' içinde $L_\infty(\mu)$ sıra yoğun idealdir ve $L_1(\mu)$ içinde E' bir yoğun idealdir. Dahası her $f \in E'$ ve $x \in E$ için $< f, x >= \int f(x) d\mu$ olur.

Lemma 5.3.7. *μ sonlu, atomik olmayan bir ölçü olmak üzere (f_n), 0 elemanına ölçüde yakınsak ancak 0'a hemen hemen her yerde yakınsak olmayacak şekilde $(f_n) \in L_\infty(\mu)$ dizisi vardır.*

Teorem 5.3.8. *E bir Banach latis olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.*

(i) *Herhangi $(x_\alpha) \subset E$ neti için $x_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ olması için gerek ve yeter koşul $x_\alpha \xrightarrow{un} 0$ olmasıdır.*

(*ii*) *Herhangi* $(x_n) \subset E$ *neti için* $x_n \xrightarrow{uo} 0$ *olması için gerek ve yeter koşul* $x_n \xrightarrow{un} 0$ *olmasıdır.*

(*iii*) E *sıra sürekli ve atomiktir.*

Kanıt. $(i) \implies (ii)$ Herhangi (x_α) neti için $x_\alpha \xrightarrow{uo} 0 \iff x_\alpha \xrightarrow{un} 0$ olsun. Her net bir dizi olduğundan herhangi bir $(x_n) \subset E$ dizisi için $x_n \xrightarrow{uo} 0 \iff x_n \xrightarrow{un} 0$ olur.

$(ii) \implies (iii)$ Herhangi (x_n) dizisi için $x_n \xrightarrow{uo} 0 \iff x_n \xrightarrow{un} 0$ olsun. x_n, E içinde ayrık sıra sınırlı dizi olsun. Sonuç 4.1.13'den $x_n \xrightarrow{uo} 0$ olur. Kabulden $x_n \xrightarrow{un} 0$ elde edilir. (x_n) sıra sınırlı olduğundan Önerme 5.1.4'den $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ elde edilir. Böylece sıra süreklidir.
Her kapalı ideal izdüşüm bandtir. E'nin atomik olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki E atomik olmasın. O halde E içerisinde tüm atomlar tarafından üretilen band E_1, E'nin öz alt kümesidir. E_2, E_1'nin band tamamlayıcısı olsun. $0 \neq w \in E_2$ ve $Y = B_w$ olarak tanımlayalım. $Y \subseteq E_2$, Y sıra süreklidir. w, Y içinde zayıf birim ve Y atoma sahip değildir. Y'nin AL-Temsilden $L_\infty(\mu) \subseteq Y \subseteq L_1(\mu)$ elde edilir. Y atoma sahip olmadığından μ atomik olmayan ölçüdür. Böylece Lemma 5.3.7'den $x_n \xrightarrow{\mu} 0$ fakat (x_n), 0'a hemen hemen heryerde yakınsak olmayacak şekilde $(x_n) \subset L_\infty(\mu)$ dizisi vardır. Buradan (x_n) dizisi 0'a un-yakınsaktır fakat (x_n) dizisi 0'a uo-yakınsak değildir. Bu durum kabul ile çelişir.

$(iii) \implies (i)$ E sıra sürekli ve atomik olsun. Buradan Lemma 5.1.14'den herhangi $a \in E$ atomu için $x_\alpha \xrightarrow{un} 0$ gerek ve yeter koşul $P_\alpha x_\alpha \to 0$ olur. O halde Önerme 4.8.1'den $x_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ elde edilir.

□

5.4 un-Yakınsaklık ve Zayıf Yakınsaklık İlişkisi

Teorem 5.4.1. *(Dini Type Teoremi)* (E, τ) *yerel konveks solid Riesz uzay ve* $(x_\alpha) \subset E$ *neti için* $x_\alpha \downarrow 0$ *olsun.*

$$x_\alpha \xrightarrow{\tau} 0 \text{ olması için gerek ve yeter koşul } x_\alpha \xrightarrow{w} 0 \text{ olmasıdır.}$$

Dini Type Teoreminden her monoton zayıf yakınsak net norm yakınsaktır.

Lemma 5.4.2. E *atomik olmayan, sıra sürekli norma sahip bir Banach latis olmak üzere herhangi* $x \in E^+$ *olsun. Her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $|x_n| = x$ *ve* $x_n \xrightarrow{w} 0$ *olacak şekilde bir* $(x_n) \subset E$ *dizisi vardır. Açıkca,* (x_n) *dizisi* 0*'a un-yakınsak değildir.*

Kanıt. $x \in E^+$ ve F, sürekli bir norma ve zayıf birime sahip x tarafından üretilen E'nin kapalı ideali olsun. E sıra sürekli bir Banach latis olduğundan Sonuç 2.3.31'dan her zayıf birim bir kuasi iç noktadır. Böylece Teorem 5.3.6'den $L_\infty(\mu) \subset F \subset L_1(\mu)$ ve $L_\infty(\mu) \subset F' \subset L_1(\mu)$ olacak şekilde (X, Σ, μ) olasılık ölçü uzayı vardır. $L_\infty(\mu)$, F'nin yoğun ideali olduğundan

$$\forall\, g \in F' \text{ için } < g, y >= \int g(y)\, d\mu$$

olur. Buradan $y \in F$ ve $x = \chi_X$ elde edilir. Ayrıca E uzayı atomik olmayan bir uzay olduğundan F herhangi bir atom içermemektedir. O halde $L_\infty(\mu)$ herhangi bir atomu içermez. Önerme 2.1 [8] referansından $|x_n| = \chi_X = x$ ve her $f \in L_1(\mu)$ için $\lim_{n\to\infty} \int f(x_n)\mathrm{d}\mu = 0$ olacak şekilde $x_n \in L_\infty(\mu)$ dizisi vardır. $F' \subset L_1(\mu)$ olduğundan her $f \in F'$ için $\lim_{n\to\infty} < f, x_n >= \lim \int f(x_n)\mathrm{d}\mu = 0$ olur. Böylece $x_n \xrightarrow{w} 0$ elde edilir. □

Önerme 5.4.3. *E bir Banach latis olmak üzere aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.*

(i) Her $(x_n) \subset E$ dizisi için $x_n \xrightarrow{w} 0$ ise $x_n \xrightarrow{un} 0$ olur.

(ii) E sıra sürekli ve atomik uzaydır.

Kanıt. $(i) \implies (ii)$ Her (x_n) dizisi için $x_n \xrightarrow{w} 0$ ise $x_n \xrightarrow{un} 0$ olsun. Öncelikle E uzayının sıra sürekli olduğunu gösterelim. (x_n) ayrık sıra sınırlı dizi olsun. Buradan $x_n \xrightarrow{w} 0$ olur. Böylece kabulden $x_n \xrightarrow{un} 0$ elde edilir. (x_n) sıra sınırlı olduğundan Önerme 5.1.4'den $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$'dır. O halde E sıra süreklidir. Şimdi E'nin atomik olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki E atomik uzay olmasın. Buradan E_1 atomlar tarafından üretilen band ve E_2, E_1 bandinin tamamlayıcısı olmak üzere $E = E_1 \oplus E_2$'dir. E atomik uzay olmadığından $E_2 \neq \{0\}$ olur. O halde E_2 sıra sürekli ve atomik uzay olmadığından Lemma 5.4.2'den $x_n \xrightarrow{w} 0$ ancak $|x_n| = x$ olacak şekilde (x_n) dizisi vardır. Kabulden $x_n \xrightarrow{un} 0$ olur. Ancak Lemma 5.4.2'den x_n, x'e un-yakınsak değildir. Buradan çelişki elde edilir. O halde E atomik uzaydır.

$(ii) \implies (i)$ E sıra sürekli, atomik uzay ve $x_n \xrightarrow{w} 0$ olsun. O halde Lemma 4.5.1'den $x_n \xrightarrow{uo} 0$ olur. Buradan Önerme 5.1.5'den E sıra sürekli uzay olduğundan $x_n \xrightarrow{un} 0$ elde edilir.

□

Önerme 5.4.4. *E sıra sürekli bir Banach latis ve $(x_\alpha) \subset E$ pozitif bir net olsun.*

$$x_\alpha \xrightarrow{w} 0 \text{ ise } x_\alpha \xrightarrow{un} 0 \text{ olur.}$$

Kanıt. $x_\alpha \xrightarrow{w} 0$ olsun. Her $u \in E^+$ için $0 \leq x_\alpha \wedge u \leq x_\alpha$ olarak yazılır. Buradan $x_\alpha \xrightarrow{w} 0$ olduğundan $x_\alpha \wedge u \xrightarrow{w} 0$ olur. Böylece (x_α) pozitif ve sıra sınırlı net olduğundan Teorem 5.1.5'den $x_\alpha \wedge u \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ elde edilir. Böylece $x_\alpha \xrightarrow{un} 0$ olur. □

Teorem 5.4.5. *E' sıra sürekli bir Banach latis ve norm sınırlı $(x_\alpha) \subset E^+$ neti olsun.*

$$x_\alpha \xrightarrow{un} 0 \text{ ise } x_\alpha \xrightarrow{w} 0 \text{ olur.}$$

Kanıt. E' sıra sürekli ve (x_α) norm sınırlı net olmak üzere $x_\alpha \xrightarrow{un} 0$ olsun. Genelliği bozmadan $\|x_\alpha\| < 1$ alalım. E' sıra sürekli olduğundan [5, Teorem.4.37]'den her $\epsilon > 0$ ve $f \in E'$ için $f(|x_\alpha| - |x_\alpha| \wedge u) < \epsilon$ olacak şekilde $u \in E^+$ vardır. Her $u \in E^+$ için $x_\alpha \wedge u \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ olduğundan $f(x_\alpha \wedge u) \to 0$ olur. Buradan $f(x_\alpha) < \epsilon$ elde edilir. Böylece $f(x_\alpha) \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ olur. O halde $x_\alpha \xrightarrow{w} 0$'dır. □

Aşağıda verilen örnek ile bu teoremin tersinin doğru olmadığını gösterelim.

Örnek 5.4.6. *E' sıra sürekli bir Banach latis olmasın. O halde ℓ_1, E içine latis izomorfik olarak gömülebilir. (e_n), ℓ_1'nin standart tabanı olmak üzere E içinde bir dizi olsun. ℓ_1 içinde e_n, 0'a zayıf yakınsak değildir. Gerçekten $\ell_1' = \ell_\infty$ olmak üzere $y = (1,1,1,...) \in \ell_\infty$ ve $f(e_n) = e_n y$ olarak alalım. Buradan $f(e_n) = y_n = 1$'dir ve y_n, 0'a yakınsak değildir. Ancak $e_n \xrightarrow{un} 0$ olur. $u = (u_1, u_2, ..., u_n, ...)$ alalım.*

$$\begin{aligned} |e_n| \wedge u &= |(0,0,...,1,0,...)| \wedge (u_1,u_2,...,u_n,...) \\ &= (0 \wedge u_1, 0 \wedge u_2, ..., 0 \wedge u_n, ...) \\ &= (0,0,...,1 \wedge u_n, ...) \end{aligned}$$

elde edilir. $u \in \ell_1$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} e_n \wedge u < \infty$. Buradan Genel Terim Testinde $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ olur. O halde

$$0 \leq \|e_n \wedge u\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} e_n \wedge u = 1 \wedge u_n \leq u_n$$

elde edilir. $u_n \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ olduğundan $\|e_n \wedge u\|_1 \to 0$ olur. O halde $e_n \xrightarrow{un} 0$'dır.

Teorem 5.4.7. *E bir Banach latis ve E' sıra sürekli olmak üzere aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.*

(*i*) *E sıra süreklidir.*

(*ii*) *Her norm sınırlı $(f_\alpha) \subset E'$ neti için $f_\alpha \xrightarrow{un} 0$ ise $f_\alpha \xrightarrow{w^*} 0$ olur.*

(*iii*) *Her norm sınırlı $(f_\alpha) \subset E'$ neti için $f_\alpha \xrightarrow{un} 0$ ise $f_\alpha \xrightarrow{|\sigma|(E',E)} 0$ olur.*

(*iv*) *Her norm sınırlı $(f_n) \subset E'$ dizisi için $f_n \xrightarrow{un} 0$ ise $f_n \xrightarrow{w^*} 0$ olur.*

(*v*) *Her norm sınırlı $(f_n) \subset E'$ dizisi için $f_n \xrightarrow{un} 0$ ise $f_n \xrightarrow{|\sigma|(E',E)} 0$ olur.*

Kanıt. Teorem 4.7.2 ispatda verilen adımlara benzer şekilde ispatlanır. □

Sonuç 5.4.8. *E atomik ve sıra sürekli bir Banach latis olsun.*

$x_\alpha \xrightarrow{un} x$ olması için gerek ve yeter koşul her a atomu için $f_a(x_\alpha) \to f_a(x)$ olmasıdır.

Kanıt. ($\Rightarrow$) $x_\alpha \xrightarrow{un} x$ olsun. Lemma 5.1.14'den biliyoruz ki P_B izdüşüm band olmak üzere $P_B x_\alpha \xrightarrow{un} P_B x$'dir. Buradan her a atomu için $P_a x_\alpha = f_a(x_\alpha)$ ve $P_a x = f_a(x)$ olmak üzere $P_a x_\alpha \xrightarrow{un} P_a x$ olduğundan $f_a(x_\alpha) \to f_a(x)$ elde edilir.

($\Leftarrow$) Her a atomu için $f_a(x_\alpha) \to f_a(x)$ olsun. E sıra sürekli norma sahip olduğundan

$$\begin{aligned} f_a(x_\alpha) \to f_a(x) &\implies P_a(x_\alpha) \xrightarrow{un} P_a(x) \\ &\implies x_\alpha \xrightarrow{un} x \end{aligned}$$

elde edilir.

□

Bu sonuçta sıra sürekli norma sahip olma özelliği kaldırılamaz. Bunu aşağıdaki örnek ile açıklayalım.

Örnek 5.4.9. *ℓ_∞ uzayını düşünelim. ℓ_∞ uzayı atomik uzaydır fakat sıra sürekli norma sahip değildir. (e_n), ℓ_∞ uzayının atomları olmak üzere e_n, 0'a un-yakınsak değildir. Gerçekten*

$$\begin{aligned} e_n \xrightarrow{un} 0 &\implies \forall\, u \in \ell_\infty \text{ için } |e_n| \wedge u \xrightarrow{\|\cdot\|} 0 \\ &\implies \forall\, u \in \ell_\infty \text{ için } \||e_\alpha| \wedge u\| \to 0 \\ &\implies \forall\, u \in \ell_\infty \text{ için } \||(0,0,\cdots,1,0,\cdots)| \wedge (u_1,u_2,\cdots,u_n,\cdots)\| \\ &\implies \forall\, u \in \ell_\infty \text{ için } \|(0 \wedge u_1, 0 \wedge u_2, \cdots, 1 \wedge u_n, \cdots)\| \\ &\implies \|(0,0,\cdots,1 \wedge u_n, 0, \cdots)\| \end{aligned}$$

olduğundan e_n, 0'a un-yakınsak değildir. Ancak $e_n = (0,0,\cdots,1,0,\cdots)$ olmak üzere bileşen vari olarak 0'a yakınsaktır. Böylece $f_a(e_n) \to 0$ elde edilir.

Önerme 5.4.10. *E bir Banach latis olmak üzere aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.*

(i) *E atomik ve sıra süreklidir.*

(ii) *Her $(x_\alpha) \subset E$ neti için $x_\alpha \xrightarrow{w} 0$ ise $x_\alpha \xrightarrow{un} 0$ olur.*

(iii) *Her $(x_n) \subset E$ dizisi için $x_n \xrightarrow{w} 0$ ise $x_n \xrightarrow{un} 0$ olur.*

Kanıt. $(i) \implies (ii)$ Sonuç 5.4.8'den açıktır.

$(ii) \implies (iii)$ Açıktır.

$(iii) \implies (i)$ Önerme 5.4.3'den açıktır.

□

Hatırlayalım ki Teorem 4.7.7'den E' içindeki her norm sınırlı zayıf*-yakınsak netin uo-yakınsak olması için gerek ve yeter koşul E uzayının atomik ve sıra sürekli olmasıdır. Dahası Önerme 5.4.10 ile birlikte aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 5.4.11. *E bir Banach latis ve $(f_n) \subset E'$ bir dizi olmak üzere $f_n \xrightarrow{w^*} 0$ iken $f_n \xrightarrow{un} 0$ oluyor ise E' atomik ve sıra süreklidir.*

5.5 un-Yakınsaklık Topolojiktir

Verilen bir $\epsilon > 0$ ve sıfırdan farklı $u \in E^+$ elemanı için

$$V_{u,\epsilon} = \{x \in E : \||x| \wedge u\| < \epsilon\}$$

olarak tanımlayalım. N_0 bu formdaki tüm kümelerin birleşimi olsun. Her Hausdorff lineer topoloji için N_0, sıfırın komşuluklarının tabanıdır.

Tanım 5.5.1. $U \subset E$ bir alt kümesi olmak üzere her $V \in N_0$ için $y + v \subset U$ oluyor ise U alt kümesine y'nin komşuluğu denir.

$x_n \xrightarrow{un} 0$ olması için gerek ve yeter koşul N_0 içindeki her küme x_n netinin kuyruğunu içermesidir. Böylece un-yakınsaklık bu topoloji tarafından tanımlanan yakınsaktır.
N_0, 0'nın komşulukları tabanı olduğunu gösterelim. Bunun için bazı özelliklerin sağlandığını göstermeliyiz.

İlk olarak N_0 içindeki her kümenin 0'ı içerdiğini gösterelim.

$$0 \in E, \forall\, u \in E^+ \text{ için } \|0 \wedge u\| = \|0\| = 0 < \epsilon$$

olduğundan $0 \in V_{u,\epsilon}$ olur.

$i)$ Her $U, V \in N_0$ için $W \subset U \cap V$ olacak şekilde $W \in N_0$ vardır.
N_0 içinde V_{u_1,ϵ_1} ve V_{u_2,ϵ_2} alalım. $\epsilon = \epsilon_1 \wedge \epsilon_2$ ve $u = u_1 \wedge u_2$ olarak seçelim. $x \in V_{u,\epsilon}$ olsun. O halde $\||x| \wedge u\| < \epsilon$ olur.

$$|x| \wedge u_1 \leq |x| \wedge u \implies \||x| \wedge u_1\| \leq \||x| \wedge u\| < \epsilon \leq \epsilon_1$$

olduğundan $x \in V_{u_1,\epsilon_1}$ olur. Benzer şekilde,

$$|x| \wedge u_2 \leq |x| \wedge u \implies \||x| \wedge u_2\| \leq \||x| \wedge u\| < \epsilon \leq \epsilon_2$$

olduğundan $x \in V_{u_2,\epsilon_2}$ olur. Böylece,

$$V_{u,\epsilon} \subset V_{u_1,\epsilon_1} \cap V_{u_2,\epsilon_2}$$

elde edilir.

$ii)$ Her $U \in N_0$ için $V + V \subset U$ olacak şekilde $V \in N_0$ vardır.
$V_{u,\epsilon} + V_{u,\epsilon} \subset V_{u,2\epsilon}$ olduğunu göstermeliyiz. $x \in V_{u,\epsilon} + v_{u,\epsilon}$ alalım. Bu durumda,

$$x = y + z \text{ olacak şekilde } y \in V_{u,\epsilon} \text{ ve } z \in V_{u,\epsilon}$$

vardır. $y \in V_{u,\epsilon}$ olduğundan $\||y| \wedge u\| < \epsilon$ ve $z \in V_{u,\epsilon}$ olduğundan $\||z| \wedge u\| < \epsilon$ elde edilir. $|x| = |y + z| \leq |y| + |z|$ olacağından

$$|x| \wedge u \leq |y| \wedge u + |z| \wedge u \implies \||x| \wedge u\| \leq \||y| \wedge u\| + \||z| \wedge u\| < \epsilon + \epsilon$$

elde edilir. Buradan $\||x| \wedge u\| < 2\epsilon$ olur. O halde $x \in V_{u,2\epsilon}$ elde edilir.

$iii)$ Her $U \in N_0$ ve $|\lambda| < 1$ skaleri için $\lambda U \subset U$'dir.
$\lambda V_{u,\epsilon} = \{x \in E : \||\lambda x| \wedge u\| < \frac{\epsilon}{\lambda}\}$ olmak üzere $x \in \lambda V_{u,\epsilon}$ alalım.

$$\begin{aligned} \||\lambda x| \wedge u\| &= \||\lambda||x| \wedge u\| < \frac{\epsilon}{\lambda} \\ &= |\lambda|\||x| \wedge u\| < \frac{\epsilon}{\lambda} \end{aligned}$$

olduğundan $\||x| \wedge u\| < \epsilon$ olur. Böylece $x \in V_{u,\epsilon}$ elde edilir.

$iv)$ Her $U \in N_0$ ve $y \in U$ için $y + V \subset U$ olacak şekilde en az bir tane $V \in N_0$ vardır.
$u \in E^+$, $\epsilon > 0$ için $y + V_{u,\epsilon}$ alalım. $V \in E^+$ için $y + V_{v,\delta} \subset V_{u,\epsilon}$ olacak şekilde en az bir tane $\lambda > 0$ var olduğunu gösterelim. $v = u$ seçelim. $y \in V_{u,\epsilon}$ olduğundan $\||y| \wedge u\| < \epsilon$ olur. $\delta = \epsilon - \||y| \wedge u\|$ olarak alalım.

$$x \in V_{u,\delta} \iff \||x| \wedge u\| < \epsilon - \||y| \wedge u\| = \delta$$

elde edilir. $|y + x| \wedge u \leq |y| \wedge u + |x| \wedge u$ olduğundan

$$\||y + x| \wedge u\| \leq \||y| \wedge u\| + \||x| \wedge u\| < \||y| \wedge u\| + \delta = \epsilon$$

olur. Böylece $x + y \in V_{u,\epsilon}$ elde edilir. Bu durumda $y + V_{u,\epsilon} \subset V_{u,\epsilon}$ olur.

(v) $\cap N_0 = \{0\}$'dır.
Kabul edelim ki $0 \neq x \in V_{u,\epsilon}$ olsun. Her $\epsilon > 0$ için $x \in V_{|x|,\epsilon}$ alınırsa $\|x\| = \||x| \wedge |x|\| < \epsilon$ olur. Buradan çelişki elde edilir. O halde $\cap N_0 = \{0\}$ olur.

6 SINIRSIZ MUTLAK ZAYIF YAKINSAKLIK

uo-yakınsaklık ve un-yakınsaklık birçok yazar tarafından araştırılmıştır ve tezde yukarıdaki bölümlerde ele alınmıştır. Bu bölümde zayıf yakınsaklığın sınırsız versiyonu dikkate alınacaktır. Bu bölümde [12] ve [38] makaleleri incelenmiştir.

6.1 Sınırsız Mutlak Zayıf Yakınsaklık ve Özellikleri

Tanım 6.1.1. E bir Banach latis ve $(x_\alpha) \subset E$ bir net olsun. Her $u \in E^+$ için $|x_\alpha - x| \wedge u \xrightarrow{w} 0$ ise (x_α) neti x elemanına *sınırsız mutlak zayıf yakınsaktır (unbounded absolutely weak convergent)* denir ve $x_\alpha \xrightarrow{uaw} x$ olarak gösterilir. x elemanına *uaw-limit* adı verilir.

Lemma 6.1.2. *Banach latiste bir netin uaw-limiti var ise tektir.*

Kanıt. Kabul edelim ki $x_\alpha \xrightarrow{uaw} x$ ve $x_\alpha \xrightarrow{uaw} y$ olsun. O halde her $u \in E^+$ için

$$|x_\alpha - x| \wedge u \xrightarrow{w} 0 \text{ ve } |x_\alpha - y| \wedge u \xrightarrow{w} 0$$

olur. Buradan

$$\forall\ f \in E^{'} \text{ için } f(|x_\alpha - x| \wedge u) \to 0 \text{ ve } f(|x_\alpha - y| \wedge u) \to 0$$

elde edilir. $|x - y| = |x - x_\alpha + x_\alpha - y| \leq |x_\alpha - x| + |x_\alpha - y|$ olduğundan

$$\begin{aligned} 0 \leq |x - y| \wedge u &\leq (|x_\alpha - x| + |x_\alpha - y|) \wedge u \\ &\leq |x_\alpha - x| \wedge u + |x_\alpha - y| \wedge u \end{aligned}$$

yazabiliriz.

$$0 \leq f(|x - y| \wedge u) \leq f(|x_\alpha - x| \wedge u) + f(|x_\alpha - y| \wedge u)$$

olur. $f(|x_\alpha - x| \wedge u) \to 0$ ve $f(|x_\alpha - y| \wedge u) \to 0$ olduğundan $f(|x - y| \wedge u) = 0$ elde edilir. Böylece her $u \in E$ için $|x - y| \wedge u = 0$ ve $|x - y| = 0$ olur. O halde $x = y$ elde edilir. □

Tanım 6.1.3. E bir Banach latis ve $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \subset E$ bir net olsun. $(x_\alpha - x_\beta)_{(\alpha,\beta) \in \Lambda \times \Lambda} \xrightarrow{uaw} 0$ oluyor ise (x_α) netine uaw-Cauchy neti adı verilir.

Lemma 6.1.4. *E bir Banach latis, $(x_\alpha) \subset E$ bir net olsun. Aşağıdaki ifadeler doğrudur.*

(i) $x_\alpha \xrightarrow{uaw} x$ *ve* $y_\beta \xrightarrow{uaw} y$ *ise her* $a, b \in \mathbb{R}$ *için* $ax_\alpha + by_\beta \xrightarrow{uaw} ax + by$ *olur.*

(ii) $x_\alpha \xrightarrow{uaw} x$ *ise* $x^+ \xrightarrow{uaw} x^+$, $x^- \xrightarrow{uaw} x^-$ *ve* $|x_\alpha| \xrightarrow{uaw} |x|$ *olur.*

(iii) $x_\alpha \xrightarrow{uaw} x$ *olması için gerek ve yeter koşul* $(x_\alpha - x) \xrightarrow{uaw} 0$ *olmasıdır.*

Kanıt. (i) $x_\alpha \xrightarrow{uaw} x$ ve $y_\beta \xrightarrow{uaw} y$ olsun. O halde,

$$\begin{aligned} x_\alpha \xrightarrow{uaw} x &\iff \forall\ u \in E^+ \text{ için } |x_\alpha - x| \wedge u \xrightarrow{w} 0 \\ &\iff \forall\ f \in E^{'}, \forall\ u \in E^+ \text{ için } f(|x_\alpha - x| \wedge u) \to 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_\beta \xrightarrow{uaw} y &\iff \forall\, u \in E^+ \text{ için } |y_\beta - y| \wedge u \xrightarrow{w} 0 \\ &\iff \forall\, f \in E^{'}, \forall\, u \in E^+ \text{ için } f(|y_\beta - y| \wedge u) \to 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} |ax_\alpha + by_\beta - (ax + by)| &= |ax_\alpha - ax + by_\beta - by| \\ &\leq |ax_\alpha - ax| + |by_\beta - by| \\ &= |a(x_\alpha - x)| + |b(y_\beta - y)| \\ &\leq |a||x_\alpha - x| + |b||y_\beta - y| \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} 0 \leq |ax_\alpha - ax + by_\beta - by| \wedge u &\leq (|a||x_\alpha - x| + |b||y_\beta - y|) \wedge u \\ &\leq |a||x_\alpha - x| \wedge u + |b||y_\beta - y| \wedge u \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} 0 \leq f(|ax_\alpha - ax + by_\beta - by| \wedge u) &\leq f(|a||x_\alpha - x| \wedge u) + f(|b||y_\beta - y| \wedge u) \\ &\leq |a| f(|x_\alpha - x| \wedge u) + |b| f(|y_\beta - y| \wedge u) \end{aligned}$$

elde edilir. $|a|f(|x_\alpha - x| \wedge u) \to 0$ ve $|b|f(|y_\beta - y| \wedge u) \to 0$ olduğundan $f(|ax_\alpha - ax + by_\beta - by| \wedge u) \to 0$ olur. Böylece $ax_\alpha + by_\beta \xrightarrow{uaw} ax + by$ bulunur.

(ii) Her $u \in E^+$ için

$$|x_\alpha^+ - x^+| = |x_\alpha \vee 0 - x \vee 0| \leq |x_\alpha - x| \implies |x_\alpha^+ - x^+| \wedge u \leq |x_\alpha - x| \wedge u$$

olur. Buradan her $f \in E^{'}$ için

$$0 \leq f(|x_\alpha^+ - x^+| \wedge u) \leq f(|x_\alpha - x| \wedge u)$$

olarak yazılır ve $f(|x_\alpha - x| \wedge u) \to 0$ olduğundan $f(|x_\alpha^+ - x^+| \wedge u) \to 0$ elde edilir. Böylece $x_\alpha^+ \xrightarrow{uaw} x^+$ olur. Benzer şekilde $x_\alpha^- \xrightarrow{uaw} x^-$ olduğunu gösterelim. Her $u \in E^+$ için

$$|x_\alpha^- - x^-| = |x_\alpha \wedge 0 - x \wedge 0| \leq |x_\alpha - x| \implies |x_\alpha^- - x^-| \wedge u \leq |x_\alpha - x| \wedge u$$

Buradan her $f \in E^{'}$ için

$$0 \leq f(|x_\alpha^- - x^-| \wedge u) \leq f(|x_\alpha - x| \wedge u)$$

olarak yazılır ve $f(|x_\alpha - x| \wedge u) \to 0$ olduğundan $f(|x_\alpha^- - x^-| \wedge u) \to 0$ elde edilir. Böylece $x_\alpha^- \xrightarrow{uaw} x^-$ olur. Son olarak $|x_\alpha| \xrightarrow{uaw} |x|$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} ||x_\alpha| - |x|| &= |(x_\alpha^+ + x_\alpha^-) - (x^+ - x^-)| \\ &= |x_\alpha^+ + x_\alpha^- - x^+ - x^-| \\ &= |x_\alpha^+ - x^+ + x_\alpha^- - x^-| \\ &\leq |x_\alpha^+ - x^+| + |x_\alpha^- - x^-| \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Buradan her $u \in E$ için

$$||x_\alpha| - |x|| \wedge u \leq |x_\alpha^+ - x^+| \wedge u + |x_\alpha^- - x^-| \wedge u$$

olur. Her $f \in E^{'}$ için

$$0 \leq f(||x_\alpha| - |x|| \wedge u) \leq f(|x_\alpha^+ - x^+| \wedge u) + f(|x_\alpha^- - x^-| \wedge u)$$

elde edilir. $f(|x_\alpha^+ - x^+| \wedge u) \to 0$ ve $f(|x_\alpha^- - x^-| \wedge u) \to 0$ olduğundan $f(||x_\alpha| - |x|| \wedge u) \to 0$ olur. Böylece $|x_\alpha| \xrightarrow{uaw} |x|$ elde edilir.

(iii)

$$\begin{aligned} x_\alpha \xrightarrow{uaw} x &\iff \forall\, u \in E^+ \text{ için } |x_\alpha - x| \wedge u \xrightarrow{w} 0 \\ &\iff \forall\, f \in E^{'}, \forall\, u \in E^+ \text{ için } f(|x_\alpha - x| \wedge u) \to 0 \\ &\iff x_\alpha - x \xrightarrow{uaw} 0 \end{aligned}$$

□

Lemma 6.1.5. *Her mutlak zayıf yakınsak net sınırsız mutlak zayıf yakınsaktır.*

Kanıt. (x_n) dizisi, 0'a mutlak zayıf yakınsak olsun. Buradan her $f \in E^{'}$ için $|f|(|x_\alpha|) \to 0$ olur. Her $u \in E^+$ için

$$|f|(|x_\alpha| \wedge u) \leq |f|(|x_\alpha|) \to 0$$

olduğundan $|f|(|x_\alpha| \wedge u) \to 0$ olur. Buradan $f(|x_\alpha| \wedge u) \to 0$ elde edilir. O halde $x_\alpha \xrightarrow{uaw} 0$ olur. □

Ancak genel olarak tersi her zaman doğru değildir.

Örnek 6.1.6. *$E = c_0$ ve $x_n = n^2 e_n$ alalım. $x_n \xrightarrow{uaw} 0$ olduğunu gösterelim. Her $u \in E^+$ ve $f \in E^{'}$ için*

$$f(x_n \wedge u) = f((0,0,...,n^2,0,...) \wedge u) = f((0,0,...,n^2 \wedge u_n,0,...))$$

olur. Burada $a_n = n^2 \wedge u_n \leq u_n$ olsun. $f \in c_0^{'} = \ell_1$ olduğundan

$$0 \leq f(x_n \wedge u) = f((0,0,...,a_n,0,...)) \leq f(0,\cdots,0,u_n,0,\cdots) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i y_i = u_n y_n$$

en az bir tane $y \in \ell_1$ vardır. $y_n \in \ell_1$ olduğundan $y_n \to 0$ ve $u_n y_n \to 0$ olur. Böylece $x_n \xrightarrow{uaw} 0$ bulunur.

(x_n) dizisinin 0'a mutlak yakınsak olmadığını gösterelim. $f = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ olacak şekilde $f \in c_0^{'} = \ell_1$ alalım.

$$f(x_n) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^n y_i = n^2 y_n = n^2 \frac{1}{n^2} = 1$$

olur. Buradan $f(x_n) \nrightarrow 0$ yakınsamaz. O halde (x_n) dizisinin 0'a mutlak yakınsak değildir.

Lemma 6.1.7. *E bir Riesz uzay olmak üzere her ayrık (x_n) dizisi sıfıra sınırsız mutlak zayıf yakınsaktır.*

Kanıt. Herhangi $u \in E^+$ elemanını alalım. (x_n) dizisi ayrık olduğundan $|x_n| \wedge u$ ayrıktır. Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq |x_n| \wedge u \leq u$ olduğundan $|x_n| \wedge u$ sıra sınırlıdır. Herhangi $f \in E'$ için

$$\sum_{n=1}^{k} f(|x_n| \wedge u) = f(\sum_{n=1}^{k} |x_n| \wedge u) = f(\bigvee_{n=1}^{k} |x_n| \wedge u) \leq f(u)$$

olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} f(|x_n| \wedge u)$ serisi yakınsaktır. Genel Terim Testinden $f(|x_n| \wedge u) \to 0$ olur. Böylece $x_n \xrightarrow{uaw} 0$ elde edilir. □

Lemma 6.1.8. *E bir Riesz uzay ve $e \in E^+$ bir kuasi iç nokta olsun.*

$$x_\alpha \xrightarrow{uaw} 0 \text{ olması için gerek ve yeter koşul } |x_\alpha| \wedge e \xrightarrow{w} 0 \text{ olmasıdır.}$$

Kanıt. ($\Rightarrow$) $x_\alpha \xrightarrow{uaw} 0$ olsun. Herhangi $u \in E^+$ için $|x_\alpha| \wedge u \xrightarrow{w} 0$ olduğundan $u = e$ alınırsa $|x_\alpha| \wedge e \xrightarrow{w} 0$ olur.

($\Leftarrow$) $|x_\alpha| \wedge e \xrightarrow{w} 0$ olsun. $u \in E^+$ ve $\epsilon > 0$ alalım. Buradan,

$$x_\alpha \wedge e \xrightarrow{w} 0 \iff \forall\, f \in E' \text{ için } f(|x_\alpha| \wedge e) \xrightarrow{w} 0$$

olur. e, kuasi iç nokta olduğundan Teorem 2.3.23'den

$$\forall\, u \in E^+ \text{ için } u \wedge me \xrightarrow{\|\cdot\|} u \implies \|u - u \wedge me\| \to 0$$

olur. Buradan her zaman normda yakınsaklık zayıf yakınsaklığı verdiğinden her $f \in E'$ için $f(u - u \wedge me) \to 0$ elde edilir. O halde

$$\begin{aligned} |x_\alpha| \wedge u &\leq |x_\alpha| \wedge (u - u \wedge me) + |x_\alpha| \wedge (u \wedge me) \\ &\leq (u - u \wedge me) + m(|x_\alpha| \wedge e) \end{aligned}$$

olduğundan

$$0 \leq f(|x_\alpha| \wedge u) \leq f(u - u \wedge me) + mf(|x_\alpha| \wedge e)$$

elde edilir. Buradan $f(u - u \wedge me) \to 0$ ve $mf(|x_\alpha| \wedge e) \to 0$ olduğundan $f(|x_\alpha| \wedge u) \to 0$ olur. Böylece $x_\alpha \xrightarrow{uaw} 0$ elde edilir.

□

un-yakınsaklığı her zaman uaw-yakınsaklığını gerektirir. Fakat tersi doğru değildir. Eğer ℓ_∞ uzayında standart taban (e_n) dizisi ele alınırsa $e_n \xrightarrow{uaw} 0$ fakat $e_n \xrightarrow{un} 0$ olmaz. Aşağıdaki lemma un-yakınsaklık ile uaw-yakınsaklıklarının hangi koşullar altında denk olduklarını söyleyecektir.

Teorem 6.1.9. *Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.*

(i) E sıra süreklidir.

(ii) Her $(x_\alpha) \subset E$ neti $x_\alpha \xrightarrow{uaw} 0$ olması için gerek ve yeter koşul $x_\alpha \xrightarrow{un} 0$ olur.

(iii) Her $(x_n) \subset E$ dizisi $x_n \xrightarrow{uaw} 0$ olması için gerek ve yeter koşul $x_n \xrightarrow{un} 0$ olur.

Kanıt.

$(i) \implies (ii)$ E sıra sürekli ve $x_\alpha \xrightarrow{uaw} 0$ olsun.

$$x_\alpha \xrightarrow{uaw} 0 \iff \forall\, f \in E', \forall\, u \in E^+ \text{ için } f(|x_\alpha| \wedge u) \to 0$$

olur. Sıra sürekli bir Banach latis uzayda her sıra sınırlı aralık üzerinde norm ve mutlak zayıf topoloji denk olduğundan $\||x_\alpha| \wedge u\| \to 0$ elde edilir.

$(ii) \implies (iii)$ Her $(x_\alpha) \subset E$ neti için $x_\alpha \xrightarrow{uaw} 0$ gerek ve yeter koşul $x_\alpha \xrightarrow{un} 0$ olsun. Her net bir dizi olduğundan $x_n \xrightarrow{uaw} 0$ gerek ve yeter koşul $x_n \xrightarrow{un} 0$ elde edilir.

$(iii) \implies (i)$ Her $(x_n) \subset E$ dizisi için $x_n \xrightarrow{uaw} 0$ gerek ve yeter koşul $x_n \xrightarrow{un} 0$ olsun. (x_n) ayrık dizisini alalım. Lemma 6.1.7'den $x_n \xrightarrow{uaw} 0$ olur. Kabulden $x_n \xrightarrow{un} 0$ elde edilir. (x_n) sıra sınırlı olduğundan Önerme 5.1.4'den $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ elde edilir. Böylece Teorem 2.3.11'den E sıra süreklidir. □

un-yakınsaklığın aksine uo-yakınsaklık her zaman uaw-yakınsaklığını gerektirmez. Aşağıdaki örneğe bakalım.

Örnek 6.1.10. *$E = C[0,1]$ uzayını ele alalım. $f_n(0) = 1$, $f_n(\frac{1}{n}) = f(1) = 0$ koşullarını sağlayan ve lineer bir (f_n) fonksiyon dizisini alalım. İlk olarak $f_n \xrightarrow{uo} 0$ olduğunu gösterelim. Bunun için*

$$(|f_n - 0| \wedge u)(x) = |f_n(x)| \wedge u(x) \xrightarrow{o} 0 \iff \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N \text{ iken } |f_n| \wedge u \leq g_n \downarrow 0$$

olduğunu göstermeliyiz. Buradan her $x \in [0,1]$ için $f_n(x) \downarrow 0$ olduğundan $g_n = f_n(x)$ olarak alabiliriz. O halde,

$$|f_n(x)| \wedge u(x) \leq f_n(x) \downarrow 0$$

olur. Böylece $f_n \xrightarrow{uo} 0$ elde edilir. (f_n) dizisinin 0'a sınırsız mutlak zayıf yakınsak olmadığını gösterelim.

$$\begin{aligned} I :& C[0,1] \to \mathbb{R} \\ & If = f(0) \end{aligned}$$

olarak tanımlayalım. Buradan $u = \mathbb{1}$ olarak alınır ise

$$I(f_n \wedge u) = I(f_n) = f_n(0) = 1$$

olduğundan 0'a yakınsak değildir. Böylece (f_n) dizisi 0'a uaw-yakınsak değildir.

Sonuç 6.1.11. *E sıra sürekli bir Banach latis olsun. E' içindeki her norm sınırlı uaw-Cauchy neti w^*-yakınsaktır.*

Kanıt. $(f_\alpha) \subset E'$ norm sınırlı uaw-Cauchy neti olsun. Buradan Teorem 6.1.9'dan (f_α) neti zayıf*-Cauchy'dir. O halde Banach Alaoğlu Teoreminden (f_α) neti zayıf*-yakınsaktır. □

Teorem 6.1.12. *E bir Banach latis ve E', E'nin norm duali olsun. E sıra sürekli norma sahip olması için gerek ve yeter koşul her $\epsilon > 0$, $0 \leq f \in E'$ ve her $x \in E$ için $\|x\| = 1$ olmak üzere $f((|x| - y)^+) \leq \epsilon$ olacak şekilde $y \in E^+$ elemanının olmasıdır.*

Teorem 6.1.13. *E bir Riesz uzay ve E', E uzayının duali olmak üzere aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.*

(i) $E^{'}$ sıra süreklidir.

(ii) Her norm sınırlı $(x_\alpha) \subset E$ neti için $x_\alpha \xrightarrow{uaw} 0$ ise $x_\alpha \xrightarrow{w} 0$ olur.

(iii) Her norm sınırlı $(x_n) \subset E$ neti için $x_n \xrightarrow{uaw} 0$ ise $x_n \xrightarrow{w} 0$ olur.

Kanıt. $(i) \implies (ii)$ $E^{'}$ sıra sürekli ve norm sınırlı $(x_\alpha) \subset E$ neti için $x_\alpha \xrightarrow{uaw} 0$ olsun. (x_α) norm sınırlı olduğundan genelliği bozmadan $\|x_\alpha\| < 1$ alalım. $E^{'}$ sıra sürekli olduğundan Teorem 6.1.12'den

$$\forall\epsilon > 0, \forall f \in E^{'} \text{ için } f(|x| - |x| \wedge u) \leq \epsilon$$

olur. $x_\alpha \xrightarrow{uaw} 0$ olduğundan her $f \in E^{'}$ için $f(|x_\alpha| \wedge u) \to 0$ yazabiliriz. O halde

$$f(|x_\alpha| - x_\alpha \wedge u) \leq \epsilon \implies f(|x_\alpha|) - f(x_\alpha \wedge u) \leq \epsilon \implies f(|x_\alpha|) \leq \epsilon$$

olur. Buradan $f(|x_\alpha|) \to 0$ elde edilir. Böylece $x_\alpha \xrightarrow{w} 0$ olur.

$(ii) \implies (iii)$ Her norm sınırlı $(x_\alpha) \subset E$ neti için $x_\alpha \xrightarrow{uaw} 0$ ise $x_\alpha \xrightarrow{w} 0$ olsun. Her net bir dizi olduğundan her norm sınırlı $(x_n) \subset E$ dizisi için $x_n \xrightarrow{uaw} 0$ ise $x_n \xrightarrow{w} 0$ olur.

$(iii) \implies (i)$ Her norm sınırlı $(x_n) \subset E$ dizisi için $x_n \xrightarrow{uaw} 0$ ise $x_n \xrightarrow{w} 0$ olsun. Her ayrık norm sınırlı $(x_n) \subset E$ dizisi için Lemma 6.1.7'den $x_n \xrightarrow{uaw} 0$ olur. Böylece kabulden $x_n \xrightarrow{w} 0$ elde edilir. [5, Teorem 4.69]'dan $E^{'}$ sıra süreklidir.

□

Önerme 6.1.14. *E bir Banach latis ve E', E uzayının duali olmak üzere aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.*

(i) E sıra süreklidir.

(ii) Her norm sınırlı $(f_n) \subset E^{'}$ dizisi için $f_n \xrightarrow{uaw} 0$ ise $f_n \xrightarrow{w^*} 0$ olur.

(iii) Her norm sınırlı $(f_n) \subset E^{'}$ dizisi için $f_n \xrightarrow{uaw} 0$ ise $f_n \xrightarrow{|\sigma|(E,E^{'})} 0$ olur.

Kanıt. $(i) \implies (ii)$ E sıra sürekli ve her norm sınırlı $(f_n) \subset E'$ dizisi için $f_n \xrightarrow{uaw} 0$ olsun.

$$f_n \xrightarrow{uaw} 0 \iff \forall\ g \in E^+ \text{ için } |f_n| \wedge g \xrightarrow{w} 0$$

(f_n) norm sınırlı olduğundan $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\| < \infty$ olur. $x \in E^+$ alalım. Teorem 4.7.1'den

$$\forall\epsilon > 0, \exists, g \in E^{'}, \forall x \in E \text{ için } |f_n|(x) - (|f_n| \wedge g)(x) < \epsilon$$

olur. $(|f_n| \wedge g)(x) \to 0$ olduğundan $|f_n(x)| < \epsilon$ elde edilir. $\sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n|(x) < \epsilon$ olur. Buradan $\lim_{n\to\infty} |f_n|(x) \to 0$ elde edilir.

$(ii) \implies (iii)$ $f_n \xrightarrow{uaw} 0$ olsun. Kabulden $f_n \xrightarrow{w^*} 0$ olur. O halde her $x \in E$ için $|f_n|(x) \to 0$ olur. Böylece her $|x| \in E$ için $|f_n||x| \to 0$ elde edilir.

$(iii) \implies (i)$ Ayrık, norm sınırlı (f_n) dizisini alalım. Lemma 6.1.7'den $f_n \xrightarrow{uaw} 0$'dır. Kabulden $f_n \xrightarrow{|\sigma|(E,E')} 0$ olur. Buradan Teorem 2.3.11'den E sıra sürekli norma sahiptir.

□

Teorem 6.1.15. *E bir Banach latis olmak üzere aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.*

(i) *E yansımalıdır.*

(ii) *E içindeki her norm sınırlı uaw-Cauchy neti zayıf yakınsaktır.*

(iii) *E içindeki her norm sınırlı uaw-Cauchy dizisi zayıf yakınsaktır.*

Kanıt. $(i) \implies (ii)$ E yansımalı uzay ve $(x_\alpha) \subset E$ bir norm sınırlı uaw-Cauchy neti olsun. E yansımalı uzay olduğundan KB-uzaydır. Böylece E sıra sürekli norma sahiptir. Buradan Teorem 6.1.13'den (x_α) neti zayıf-Cauchy'dir. O halde Banach Alaoğlu Teoreminden (x_α) neti zayıf yakınsaktır.

$(ii) \implies (iii)$ E içindeki her norm sınırlı uaw-Cauchy neti zayıf yakınsak olsun. Her net bir dizi olduğundan her norm sınırlı uaw-Cauchy dizisi zayıf yakınsaktır.

$(iii) \implies (i)$ E içindeki her norm sınırlı uaw-Cauchy dizisi zayıf yakınsak olsun. E'nin yansımalı olduğunu göstermeliyiz. E'nin yansımalı uzay olduğunu göstermek için c_0 ve ℓ_1 uzaylarına latis izomorfik uzayları içermediğini gösterelim. Kabul edelim ki E uzayı ℓ_1 uzayına latis izomorfik bir uzayı içersin. ℓ_1'nin birim vektör tabanı ayrıktır. Böylece Lemma 6.1.7'den E içinde 0'a uaw-yakınsaktır. Buradan uaw-Cauchy'dir. O halde kabulden E içinde zayıf yakınsaktır. E uzayı, ℓ_1 uzayına latis izomorfik bir uzay içerdiğinden ℓ_1 içinde de zayıf yakınsaktır. Ancak bu durum bize çelişki verir. Kabul edelim ki E uzayı c_0'ı alt uzayı olarak içersin. e_i, c_0'nın standart tabanı olmak üzere $x_n = \sum_{i=1}^{n} e_i$ olarak tanımlayalım . $f \in E'$ ve $u \in E^+$ alalım. (x_n), c_0 içinde zayıf Cauchy olduğundan

$$f(|x_m - x_n| \wedge u) \leq f(x_m - x_n) \to 0$$

olur. Böylece (x_n) dizisi uaw-Cauchy'dir. Buradan E içinde zayıf yakınsaktır. Buradan c_0 uzayı içinde de zayıf yakınsaktır. Ancak bu durum bize çalişki verir. O halde E uzayı yansımalıdır.

□

Teorem 6.1.9 ile Teorem 6.1.15 birleştirirsek aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 6.1.16. *E sıra sürekli bir Banach latis olmak üzere aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.*

(i) *E yansımalıdır.*

(ii) *E içindeki her norm sınırlı un-Cauchy neti zayıf yakınsaktır.*

(iii) *E içindeki her norm sınırlı un-Cauchy dizisi zayıf yakınsaktır.*

Sıra süreklilik koşulu olmadığı zaman denklik sağlanmaz. Örneğin ℓ_∞ uzayında her norm sınırlı un-Cauchy neti norm sınırlıdır ve böylece zayıf yakınsaktır. Fakat ℓ_∞ uzayı yansımalı değildir. Şimdi bu sonucu uo-Cauchy neti için inceleyeceğiz.

Teorem 6.1.17. *E sıra sürekli bir Banach latis olmak üzere aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.*

(i) *E yansımalıdır.*

(ii) *E içindeki her norm sınırlı uo-Cauchy neti zayıf yakınsaktır.*

(iii) *E içindeki her norm sınırlı uo-Cauchy dizisi zayıf yakınsaktır.*

Kanıt. $(i) \implies (ii)$ E yansımalı uzay ve (x_α) norm sınırlı uo-Cauchy neti olsun.

$$\begin{aligned} x_\alpha \text{ uo-Cauchy } &\implies |x_\beta - x_\alpha| \wedge u \xrightarrow{o} 0 \\ &\implies |x_\beta - x_\alpha| \wedge u \leq y_\theta \text{ olacak şekilde } y_\theta \downarrow 0 \text{ neti vardır} \end{aligned}$$

olur. O halde her $f \in E^{'}$ için $f(|x_\beta - x_\alpha| \wedge u) \leq f(y_\theta)$ elde edilir. Ayrıca E sıra sürekli bir uzay ve $y_\theta \downarrow 0$ olduğundan $\|f(y_\theta)\| \downarrow 0$ olur. Buradan $f(y_\theta) \downarrow 0$'dır. Böylece (x_α) neti uaw-Cauchy'dir. O halde $x_\alpha \xrightarrow{w} 0$ elde edilir.

$(ii) \implies (iii)$ Her norm sınırlı uo-Cauchy neti zayıf yakınsaktır. Her net bir dizi olduğundan uo-Cauchy dizisi zayıf yakınsaktır.

$(iii) \implies (i)$ Teorem 6.1.15'de yapılan ispata benzer şekilde ispatlanır.

□

6.2 uaw-Yakınsaklık ve Zayıf Dizisel Sürekli Latis Operasyonları İlişkisi

Bu bölümde uaw-yakınsaklık ile zayıf-yakınsaklık arasındaki ilişkiler daha derinlemesine incelenecektir.

Tanım 6.2.1. E bir Banach latis ve $(x_n) \subset E$ bir dizi olsun. $x_n \xrightarrow{w} 0$ iken $|x_n|$ dizisi $\sigma(E^{''}, E^{'})$-topolojisine göre yakınsak; $|x_n| \xrightarrow{w^*} 0 \iff$ her $f \in E^{'}$ için $|x_n|(f) \to 0$ ise E uzayına zayıf dizisel sürekli latis operasyonlara sahiptir denir.

Teorem 6.2.2. *E bir Banach latis olmak üzere aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.*

(i) *E zayıf dizisel sürekli latis operasyonlara sahiptir.*

(ii) *Herhangi $(x_n) \subset E$ dizisi için $x_n \xrightarrow{w} 0$ ise $x_n \xrightarrow{uaw} 0$ olur.*

Kanıt. $(i) \implies (ii)$ E zayıf dizisel sürekli latis operasyonlara sahip ve $x_n \xrightarrow{w} 0$ olsun. O halde $x_n \xrightarrow{w} 0$ ise $|x_n| \xrightarrow{w^*} 0$ olur. Herhangi $u \in E^+$ alalım.

$$0 \leq |x_n| \wedge u \leq |x_n| \implies \forall\, f \in E^{'} \text{ için } 0 \leq f(|x_n| \wedge u) \leq f(|x_n|) \to 0$$

olduğundan $f(|x_n| \wedge u) \to 0$ olur. O halde $|x_n| \wedge u \xrightarrow{w} 0$ elde edilir. Böylece $x_n \xrightarrow{uaw} 0$ olur.

$(ii) \implies (i)$ $x_n \xrightarrow{w} 0$ olsun. Kabulden $x_n \xrightarrow{uaw} 0$ olur.

$$\begin{aligned} x_\alpha \xrightarrow{uaw} 0 &\implies \forall\, u \in E^+ \text{ için } |x_n| \wedge u \xrightarrow{w} 0 \\ &\implies \forall\, u \in E^+, \forall\, f \in E^{'} \text{ için } f(|x_n| \wedge u) \to 0 \end{aligned}$$

$f \in E^{'}$ ve $\epsilon > 0$ alalım. [5, Teorem 4.37]'den

$$f(|x_n| - |x_n| \wedge u) = f(|x_n| - u)^+ < \epsilon$$

olacak şekilde $u \in E^+$ vardır. $f(|x_n| \wedge u) \to 0$ olduğundan $f(|x_n|) \to 0$ elde edilir. Böylece $|x_n| \xrightarrow{w} 0$ olur. Buradan $|x_n| \xrightarrow{w^*} 0$'dır.

□

Lemma 6.2.3. *Her AM-uzayı zayıf dizisel sürekli latis operasyonlara sahiptir.*

Kanıt. E uzayı AM-uzayı ise [5, Teorem 4.29]'den $E \cong F$ latis izomorfik olacak şekilde $C(\Omega)$'nin kapalı Riesz alt uzayı vardır. $F = C(\Omega)$ olsun. $(f_n) \subset F = C(\Omega)$ olmak üzere $f_n \xrightarrow{w} 0$ olur. O halde her $\mu \in C(\Omega)^{'}$ için $I_n(f_n) = \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu \to 0$ olmalıdır. Ayrıca $f_n \xrightarrow{w} 0$ olduğundan (f_n) norm sınırlıdır.

$$\int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega \sup f_n \, \mathrm{d}\mu = (\sup f_n)\mu(\Omega) \to 0$$

olur. O halde $\sup f_n \to 0$ ise $f_n \xrightarrow{n} 0$ elde edilir. $|f_n| \in E^{''}$ ve her $\mu \in E^{'} = C(\Omega)^{'}$ için

$$|f_n|(\mu) \to 0 \implies \mu(|f_n|) \to 0 \implies |f_n| \xrightarrow{w^*} 0$$

elde edilir. Böylece $C(\Omega)$ kompakt Hausdorff topolojik uzay olmak üzere Ω için zayıf dizisel sürekli latis operasyonlara sahiptir. Kapalı her alt uzayıda zayıf dizisel sürekli latis operasyonlara sahiptir. Böylece E, AM-uzayı zayıf dizisel sürekli latis operasyona sahip olur. □

Her AM-uzayı dizisel zayıf süreklidir. Ayrıca E sıra sürekli norma sahip Banach latis olmak üzere E uzayının latis operasyonlarının dizisel zayıf sürekli olması için gerek ve yeter koşul E uzayının ayrık olmasıdır. (İspati için [26, Önerme 2.5.23]'e bakılabilir.)

Önerme 6.2.4. *Her atomik sıra sürekli norma sahip Banach latis uzayı zayıf dizisel sürekli latis operasyonlara sahiptir.*

Kanıt. İspati için [26, Teorem 2.5.23] bakılabilir. □

Aşağıdaki örnek atomik sıra süreklilik özelliğinin zayıf dizisel operasyonları için önemini ve kaldırılamayacağını vermektedir.

Örnek 6.2.5. $E = L^p[0,1]$ *ve* $f_n(t) = \sin(2\pi nt)$ *olarak alalım.* $E^{'} = L^q[0,1]$ *olur. Her* $F \in L^q[0,1]$ *için*

$$\begin{aligned} |F(f_n)| &= |\int_0^1 f_n(t)g(t) \, \mathrm{d}t| \\ &\leq \int_0^1 |f_n(t)g(t)| \, \mathrm{d}t \\ &\leq (\int_0^1 |f_n(t)|^p \, \mathrm{d}t)^{\frac{1}{p}} (\int_0^1 |g(t)|^q \, \mathrm{d}t)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

olacağından

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 |\sin(2\pi nt)|\,\mathrm{d}t &= n[\int_0^{\frac{1}{n}} |\sin(2\pi nt)|\,\mathrm{d}t - \int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} |\sin(2\pi nt)|\,\mathrm{d}t] \\
&= n[-\frac{\cos(2\pi nt)}{2\pi n}|_0^{\frac{1}{2n}} + \frac{\cos(2\pi nt)}{2\pi n}|_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}}] \\
&= \frac{1}{2\pi}[-\cos\pi + \cos 0 + \cos 2\pi - \cos\pi] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece $f_n \to 0$ *olur.*

$$
\begin{aligned}
F(f_n^+) &= \int_0^1 (\sin(2\pi nt))^+\,\mathrm{d}t \\
&= n\int_0^{\frac{1}{2n}} \sin(2\pi nt)\,\mathrm{d}t \\
&= n\frac{-\cos(2\pi nt)}{2n\pi}|_0^{\frac{1}{2n}} \\
&= \frac{1}{2\pi}[1+1] \\
&= \frac{1}{\pi}
\end{aligned}
$$

olduğundan $f_n^+ \to \frac{1}{\pi}$ *olur.*

Sonuç 6.2.6. *E bir Banach latis olmak üzere aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.*

(*i*) *E zayıf dizisel sürekli latis operasyonlara sahiptir,* E' *sıra süreklidir.*

(*ii*) *Her norm sınırlı* $(x_n) \subset E$ *dizisi için* $x_n \xrightarrow{w} 0$ *olması için gerek ve yeter koşul* $x_n \xrightarrow{uaw} 0$ *olmasıdır.*

Kanıt. Teorem 6.2.2 ve Teorem 6.1.13'den açıktır. □

Sonuç 6.2.7. *E bir AM-uzay ve* $(x_n) \subset E$ *norm sınırlı bir dizi olsun.*

$$x_n \xrightarrow{w} 0 \text{ olması için gerek ve yeter koşul } x_n \xrightarrow{uaw} 0 \text{ olmasıdır.}$$

Kanıt. E bir AM-uzay olduğundan zayıf dizisel sürekli latis operasyonlara sahiptir. Teorem 6.2.2'den $x_n \xrightarrow{w} 0$ ise $x_n \xrightarrow{uaw} 0$ elde edilir. Ayrıca E', AL-uzaydır ve AL-uzay sıra sürekli norma sahip olduğundan Teorem 6.1.13'den $x_n \xrightarrow{uaw} 0$ ise $x_n \xrightarrow{w} 0$ olur. □

Sonuç 6.2.8. *E bir Banach latis olmak üzere aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.*

(*i*) *E atomiktir, E ve* E' *sıra süreklidir.*

(*ii*) *Her norm sınırlı* $(x_n) \subset E$ *dizisi için* $x_n \xrightarrow{w} 0 \iff x_n \xrightarrow{uaw} 0 \iff x_n \xrightarrow{un} 0$ *olur.*

Kanıt. Teorem 6.1.9 ve Sonuç 6.2.6 elde edilir. □

Önerme 6.2.9. *E sıra sürekli bir Banach latis olmak üzere aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.*

(i) *E' sıra süreklidir.*

(ii) *Her norm sınırlı $(x_\alpha) \subset E$ neti için $x_\alpha \xrightarrow{un} 0$ ise $x_\alpha \xrightarrow{w} 0$ olur.*

(iii) *Her norm sınırlı $(x_n) \subset E$ dizisi için $x_n \xrightarrow{un} 0$ ise $x_n \xrightarrow{w} 0$ olur.*

Kanıt. $(i) \implies (ii)$ Teorem 5.4.5'den açıktır.

$(ii) \implies (iii)$ Açıktır.

$(iii) \implies (i)$ $(x_n) \subset E^+$ norm sınırlı, ayrık bir dizi ve $u \in E^+$ alalım. E sıra sürekli olduğundan $x_n \xrightarrow{un} 0$ olur. Kabulden $x_n \xrightarrow{w} 0$ elde edilir. [26, Teorem 2.4.14]'den $E^{'}$ sıra süreklidir.

□

Sonuç 6.2.10. *E bir Banach latis olmak üzere aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.*

(i) *E atomiktir, E ile $E^{'}$ sıra süreklidir.*

(ii) *Her norm sınırlı $(x_\alpha) \subset E$ neti için $x_\alpha \xrightarrow{un} 0 \iff x_\alpha \xrightarrow{uaw} 0 \iff x_\alpha \xrightarrow{w} 0$ olur.*

(iii) *Her norm sınırlı $(x_n) \subset E$ dizsi için $x_n \xrightarrow{un} 0 \iff x_n \xrightarrow{uaw} 0 \iff x_n \xrightarrow{w} 0$ olur.*

(iv) *Her norm sınırlı $(x_\alpha) \subset E$ neti için $x_\alpha \xrightarrow{un} 0 \iff x_\alpha \xrightarrow{w} 0$ olur.*

(v) *Her norm sınırlı $(x_n) \subset E$ dizisi için $x_n \xrightarrow{un} 0 \iff x_n \xrightarrow{w} 0$ olur.*

Kanıt. İspatı Sonuç 6.2.8'den açıktır. □

Önerme 6.2.11. *E bir Banach latis ve $(x_\alpha) \subset E$ bir net olsun. (x_α) neredeyse sıra sınırlı veya göreceli zayıf kompakt ise $x_\alpha \xrightarrow{uaw} 0$ olması için gerek ve yeter koşul $|x_\alpha| \xrightarrow{w} 0$ olmasıdır.*

Kanıt. $(\Rightarrow)$ $x_\alpha \xrightarrow{uaw} 0$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned} x_\alpha \xrightarrow{uaw} 0 &\iff \forall\, u \in E^+ \text{ için } |x_\alpha| \wedge u \xrightarrow{w} 0 \\ &\iff \forall u \in E^+, \forall f \in E^{'} \text{ için } f(|x_\alpha| \wedge u) \to 0 \end{aligned}$$

olur.

- (x_α) neredeyse sıra sınırlı olsun. $\|(|x_\alpha| - u)^+\| < \epsilon$ olacak şekilde $u \in E^+$ vardır.

$$\begin{aligned} |f(|x_\alpha|)| &= |f(|x_\alpha| - u)^+| + |f(|x_\alpha| \wedge u)| \\ &\leq \epsilon\|f\| + |f(|x_\alpha| \wedge u)| \end{aligned}$$

olur. $f(|x_\alpha| \wedge u) \to 0$ olduğundan $f(|x_\alpha|) \to 0$ elde edilir. Böylece $|x_\alpha| \xrightarrow{w} 0$ olur.

- (x_α) göreceli zayıf kompakt olsun. Teorem 4.37, [5] teoreminden

$$f(|x_\alpha| - |x_\alpha| \wedge u) = f(|x_\alpha| - u)^+ < \epsilon$$

  olacak şekilde $u \in E^+$ vardır. $f(|x_\alpha| \wedge u) \to 0$ olduğundan $f(|x_\alpha|) \to 0$'dır. Böylece $|x_\alpha| \xrightarrow{w} 0$ elde edilir.

$(\Leftarrow)$ $|x_\alpha| \xrightarrow{w} 0$ olsun. O halde

$$\forall f \in E' \text{ için } f(|x_\alpha|) \to 0$$

olur. Buradan her $u \in E^+$ için

$$|x_\alpha| \wedge u \leq |x_\alpha|$$

olduğundan $f(|x_\alpha| \wedge u) \leq f(|x_\alpha|)$ elde edilir. $f(|x_\alpha|) \to 0$ olduğundan $f(|x_\alpha| \wedge u) \to 0$ olur. Böylece $x_\alpha \xrightarrow{uaw} 0$ elde edilir.

□

Sonuç 6.2.12. *E bir Banach latis ve $(x_\alpha) \subset E$ ayrık bir net olsun. (x_α) neti E'' içinde neredeyse sıra sınırlı ise $|x_\alpha| \xrightarrow{w} 0$ olur.*

Kanıt. (x_α), E'' içinde ayrık net olduğundan $x_\alpha \xrightarrow{uaw} 0$ olur. O halde Önerme 6.2.11'den $|x_\alpha| \xrightarrow{\sigma(E'',E''')} 0$ elde edilir. Buradan $|x_\alpha| \xrightarrow{w} 0$ olur. □

Lemma 6.2.13. *E bir Banach latis ve $(x_n) \subset E$ bir dizi olsun.*

$$x_n \xrightarrow{w} x \text{ ve } x_n \xrightarrow{uaw} y \text{ ise } x = y \text{ olur.}$$

Kanıt. $z_n = x_n - y$ ve $z = x - y$ olarak alalım. $z_n = x_n - y$ olduğundan $z_n \xrightarrow{w} z = x - y$ ve $z_n \xrightarrow{uaw} 0$ olur. (z_n) göreceli zayıf kompakt olduğundan Önerme 6.2.11'den $|z_n| \xrightarrow{w} 0$ olur. Böylece $z_n \xrightarrow{w} 0$ elde edilir. O halde $z = 0$ olur. Buradan $x = y$'dir. □

Kaynaklar

[1] Y.A. Abramovich and C.D. Aliprantis, *An invitation to operator theory*, volume 50 of Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, **2002**.

[2] Y.A. Abramovich and C.D. Aliprantis, *Positive Operators*, Chapter 2 of Handbook of the Geometry of Banach Spaces, Elsevier Science B.V., **2002**.

[3] Y.A. Abramovich and G. Sirotkin, *On order convergence of nets*, *Positivity*, 9(3):287–292, **2005**.

[4] C.D. Aliprantis and O. Burkinshaw, *Locally solid Riesz spaces with applications to economics*, volume 105 of Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, **2003**.

[5] C.D. Aliprantis and O. Burkinshaw, *Positive operators*, Springer, Dordrecht, Original of the 1985 original, **2006**.

[6] Y. Azouzi, *Completeness for vector lattices*, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 472:216-230, **2019**.

[7] R. Beattie and H.-P. Butzmann, *Convergence Structures and Applications to Functional Analysis*, Kluwer, Dordrech, **2002**.

[8] Z.L. Chen and A.W.Wickstead, *Relative weak compactness of solid hulls in Banach lattices*, **1997**

[9] Y.A. Dabboorasad, E.Y. Emel'yanov, and M.A.A. Marabeh, *Order convergence in infinite-dimensional vector lattices is not topological*, arXiv:1705.09883, **2017**.

[10] R. DeMarr, *Partially ordered linear spaces and locally convex linear topological spaces*, *Illinois J. Math.*, 8:601–606, **1964**.

[11] Y. Deng, M. O'Brien, and V.G. Troitsky, *Unbounded norm convergence in Banach lattices*, *Positivity*, 21(3):963–974, **2017**.

[12] A. Elbour, *Some properties on the unbounded absolute weak convergence in Banach lattices*, Arxiv:2004.10691, **2020**.

[13] N. Erkurşun Özcan, N.A. Gezer, and O. Zabeti, *Unbounded absolute weak Dunford-Pettis and unbounded absolute weak compact operators*, Turkish Journal of Math, **2019**.

[14] D. H. Fremlin, *Topological Riesz spaces and measure theory*, Cambridge University Press, London-New York, **1974**.

[15] N. Gao, *Unbounded order convergence in dual spaces*, J. Math. Anal. Appl., 419(1):347–354, **2014**.

[16] N. Gao, D.H. Leung, and F. Xanthos, *Duality for unbounded order convergence and applications*, *Positivity*, **2017**.

[17] N. Gao, V.G. Troitsky, and F. Xanthos, *Uo-convergence and its applications to Cesàro means in Banach lattices*, Israel J. Math., 220(2), 649—689, **2017**.

[18] N. Gao and F. Xanthos, *Unbounded order convergence and application to martingales without probability*, J. Math. Anal. Appl., 415(2), 931–947, **2014**.

[19] M. Kandić, H. Li, and V.G. Troitsky, *Unbounded norm topology beyond normed lattices*, *Positivity*, 22, 745-760, **2018**.

[20] M. Kandić, M.A.A. Marabeh, and V.G. Troitsky, *Unbounded norm topology in Banach lattices*, *J. Math. Anal. Appl.*, 451(1), 259–279, **2017**.

[21] S. Kaplan, *On unbounded order convergence*, Real Anal. Exchange, 23(1):175–184, **1997/98**.

[22] A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Functional Analysis*, Vol 2, Grayleek, Albany, **1961**

[23] E. Lacey, P. Wojtaszczyk, *Nonatomic Banach lattices can have ℓ_1 as a dual space*, *Proc. Amer. Math. Soc.* , 57, 79–84, **1976**.

[24] H. Li and Z. Chen, *Some loose ends on unbounded order convergence. Positivity*, 22, 83-90, **2017**.

[25] W.A.J. Luxemburg and A. C. Zaanen, *Riesz spaces*, Vol. I. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London; American Elsevier Publishing Co., New York. North-Holland Mathematical Library, **1971**

[26] P. Meyer-Nieberg, *Banach lattices*, Springer-Verlag, Berlin, **1991**.

[27] H. Nakano, *Ergodic theorems in semi-ordered linear spaces*, Ann. of Math., 49(2), 538–556, **1948**.t

[28] E.T. Ordman, *Classroom Notes: Convergence Almost Everywhere is Not Topological*, Amer. Math. Monthly, 73(2):182–183, **1966**.

[29] H.H. Schaefer, *Banach lattices and positive operators*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 215, **1974**.

[30] M.A. Taylor, *Unbounded convergences in vector lattices*, Master of Science in Mathematics, Department of Mathematical and Statistical Sciences University of Alberta, **2018**.

[31] B.Z. Vulikh and O.S. Korsakova, *Spaces in which convergence in norm coincides with order convergence*, Mat. Zametki, 13:259–268, **1973**.

[32] B.Z. Vulikh, *Introduction to the theory of partially ordered spaces*, Translated from the Russian by Leo F. Boron, with the editorial collaboration of Zaanen, A. C. and Kiyoshi Iséki. Wolters-Noordhoff Scientific Publications, Ltd., Groningen, **1967**.

[33] A.W. Wickstead, *Weak and unbounded order convergence in Banach lattices*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A, 24(3):312–319, **1977**.

[34] A. Wirth, *Order and norm convergence in Banach lattices*, Glasgow Math. J., 15:13, **1974**.

[35] W. Wnuk, *Locally solid Riesz spaces not containing* c_0, Bull. Polish Acad. Sci. Math., 36(1-2):51–56, **1988**.

[36] A.C. Zaanen, *Riesz Spaces II*, North-Holland Mathematical Library, **30**, **1983**.

[37] A.C. Zaanen, *Introduction to operator theory in Riesz spaces*, Springer-Verlag, Berlin, **1997**.

[38] O. Zabeti, *Unbounded absolute weak convergence in Banach lattices*, *Positivity*, 22(1):501-505, **2017**.