

**KOPULA FONKSİYONLARI VE KRİPTO PARA
BİRİMLERİNE BİR UYGULAMA**

**COPULA FUNCTIONS AND AN APPLICATION TO
CRYPTOCURRENCIES**

HANİFE ŞAHİN

DOÇ. DR DUYGU İÇEN

Tez Danışmanı

Hacettepe Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin

İstatistik Anabilim Dalı için Öngördüğü

LİSANSÜSTÜ TEZİ olarak hazırlanmıştır.

ÖZET

KOPULA FONKSİYONLARI VE KRİPTO PARA BİRİMLERİNE BİR UYGULAMA

Hanife ŞAHİN

Yüksek Lisans, İstatistik Bölümü

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Duygu İÇEN

Haziran 2023, 71 sayfa

Günümüzde adını sıkça duyduğumuz kripto paralar ilk olarak 2009 yılında hayatımıza Bitcoin ile girmiştir. Kripto paralar oldukça değişken olmakla birlikte risk düzeyleri çoğunlukla bilinmemektedir. Yatırımcılar için risk ve kuyruk özelliklerini bilmek önemlidir. Bu nedenle kripto paralar arasındaki bağımlılık yapısını modellemek için finansal verilerde yaygın olarak kullanılan kopula fonksiyonları kullanılmıştır. Bu amaçla piyasa değeri en büyük olan 4 kripto para birimi (Bitcoin (BTC), Ethereum (ETH), Binance Coin (BNB), Ripple (XRP)) seçilmiştir. Bu kripto para çiftleri arasındaki bağımlılık yapısına en uygun kopula fonksiyonları belirlenmiştir. Analizler sonucunda, BTC-ETH, BTC-BNB ve BTC-XRP kripto para çiftleri arasındaki bağımlılık yapısı Survival Tawn-2 kopula, ETH-BNB arasındaki bağımlılık yapısı Frank kopula, ETH ile XRP arasındaki bağımlılık yapısı Survival BB8 kopula ve BNB-XRP arasındaki bağımlılık yapısı Survival Gumbel kopula ile açıklanmaktadır. Böylece kripto para

birimlerinin riskleri ve kuyruk bağımlılığı hakkında bir fikir verebilmesi açısından yapılan çalışma literatüre bir katkı sunmaktadır. Tez çalışmasında açık kaynak kodlu R yazılımının 4.2.2 versiyonu kullanılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Kopula Fonksiyonları, Kripto Para, Bağımlılık.

ABSTRACT

COPULA FUNCTIONS AND AN APPLICATION TO CRYPTOCURRENCIES

Hanife ŞAHİN

Master of Statistics, Department of Statistics

Supervisor: Assoc. Dr. Duygu İÇEN

June 2023, 71 pages

Cryptocurrency that we hear frequently today first entered our lives in 2009 with Bitcoin. While cryptocurrencies are highly volatile, their risk levels are mostly unknown. It is important for investors to know the risk and tail characteristics. For this reason, copula functions, which are widely used in financial data, are used to model the dependency structure between cryptocurrencies. For this purpose, the 4 cryptocurrencies with the largest market value (Bitcoin (BTC), Ethereum (ETH), Binance Coin (BNB), Ripple (XRP)) are selected. The most suitable copula functions are determined for the dependency structure between these crypto currency pairs. As a result of the analyses, it is showed that the dependency structure between BTC-ETH, BTC-BNB and BTC-XRP crypto currency pairs is explained by Survival Tawn-2 copula. Then, the dependency structure between ETH-BNB is explained by Frank copula. Moreover, dependency structure between ETH and XRP is explained by Survival BB8 copula and the dependency structure between BNB-XRP is explained by the Survival Gumbel copula. Thus, the study makes a contribution to the literature in terms of giving an idea about the

risks and tail dependence of cryptocurrencies. The 4.2.2 version of the open source R software is used in this study.

Keywords: Copula Functions, Cryptocurrency, Dependency.

TEŞEKKÜR

Büyük bir emek ve özveri ile hazırladığım yüksek lisans tezimi tamamlamanın heyecanını ve gururunu yaşıyorum. Tez çalışmamda, konu seçiminden araştırmanın yürütülmesine birçok konuda bana yardımcı olan ve öğrencisi olmaktan her zaman gurur duyacağım tez danışmanım Doç. Dr. Duygu İÇEN'e danışmanlığı için çok teşekkür ederim.

Tez savunmamda yapıcı eleştirileri ile tezin son şeklini almasını sağlayan değerli jüri üyesi hocalarıma teşekkür ederim.

Hayatım boyunca beni destekleyen, haklarını asla ödeyemeyeceğim annem Döndü ŞAHİN ve babam Satılmış ŞAHİN'e teşekkürü bir borç bilirim.

Hanife ŞAHİN

Haziran 2023, Ankara

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR.....	v
İÇİNDEKİLER	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
ÇİZELGELER DİZİNİ	x
SİMGELER VE KISALTMALAR	xi
1. GİRİŞ	1
1.1. Önceki Çalışmalar.....	2
2. KRİPTO PARA BİRİMLERİ VE TEKNOLOJİSİ	5
2.1. Blok Zincir Teknolojisi.....	5
2.2. Kripto Para ve Çeşitleri.....	9
2.2.1. Bitcoin(BTC)	9
2.2.2. Ethereum(ETH)	9
2.2.3. Binance Coin(BNB).....	10
2.2.4. Ripple(XRP)	10
3. KOPULA FONKSİYONLARI	11
3.1. Kopula Tarihçesi.....	11
3.2. Kopulaların Tanımı.....	12
3.2.1. Matematiksel Özellikleri.....	12
3.2.2. Sklar Teoremi	13
3.2.3. Bağımsızlık Kopulası ve Frechet-Hoeffding Sınırları	13
3.3. Kopula Çeşitleri	14
3.3.1. Eliptik Kopulalar.....	14
3.3.1.1. Gaussian Kopula	14
3.3.1.2. Student- t Kopula	15
3.3.2. Arşimedyan Kopulalar	16

3.3.2.1. Joe Kopula	16
3.3.2.2. Frank Kopula	16
3.3.2.3. Gumbel Kopula.....	17
3.3.2.4. Clayton Kopula	17
3.3.2.5. Clayton-Gumbel Kopula.....	17
3.3.2.6. Joe-Gumbel Kopula	18
3.3.2.7. Joe-Clayton Kopula	18
3.3.2.8. Joe-Frank Kopula.....	18
3.3.3. Diğer Kopula Çeşitleri	19
3.3.3.1. Survival Tawn-2	19
3.3.3.2. Survival BB8.....	19
3.3.3.3. Survival Gumbel	20
3.4. Bağımlılık	20
3.4.1. Sıra Korelasyonu.....	21
3.4.1.1. Spearman'ın sıra korelasyonu (ρ).....	21
3.4.1.2. Kendall'ın sıra korelasyonu (τ)	22
3.5. Kuyruk Bağımlılığı	23
4. KRİPTO PARA BİRİMLERİNE UYGULAMA	28
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	50
6. KAYNAKLAR	53
EKLER.....	57
EK 1 - Tez Çalışmasında Kullanılan R Studio Kodları	57
EK 2 - Tez Çalışması Orjinallik Raporu.....	70

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Özet (hash) fonksiyonunun bloklardaki işlevselliği	6
Şekil 2.2. Dağıtılmış defter teknolojisi	8
Şekil 2.3. Blok zincir çeşitleri.....	8
Şekil 4.1. Kripto para birimlerinin zaman serisi grafikleri	29
Şekil 4.2. Bitcoin kripto para birimine ait grafikler.....	31
Şekil 4.3. Ethereum kripto para birimine ait grafikler	32
Şekil 4.4. BNB kripto para birimine ait grafikler	33
Şekil 4.5. XRP kripto para birimine ait grafikler.....	35
Şekil 4.6. Survival Tawn-2 kopula (BTC-ETH) için kopula yoğunluğunun 3 boyutlu yüzey grafiği ve kontur (contour) grafikleri (Parametre1 = 6,88 ve parametre2 = 0,86)	37
Şekil 4.7. Survival Tawn-2 kopuladan alınan örneklemin saçılım grafiği (Parametre1 = 6,88 ; parametre2 = 0,86 ; n = 1000).....	38
Şekil 4.8. BTC-ETH grafiği ve belirlenen kopula ve marjinal dağılımlardan elde edilen dağılımın grafiği.....	38
Şekil 4.9. Survival Tawn-2 kopula (BTC-BNB) için kopula yoğunluğunun 3 boyutlu yüzey grafiği ve kontur (contour) grafikleri (Parametre1 = 5,19 ve parametre2 = 0,9)	39
Şekil 4.10. Survival Tawn-2 kopuladan alınan örneklemin saçılım grafiği (Parametre1 = 5,19 ; parametre2 = 0,9 ; n = 1000).....	40
Şekil 4.11. BTC-BNB grafiği ve belirlenen kopula ve marjinal dağılımlardan elde edilen dağılımın grafiği.....	40
Şekil 4.12. Survival Tawn-2 kopula (BTC-BNB) için kopula yoğunluğunun 3 boyutlu yüzey grafiği ve kontur (contour) grafikleri (Parametre1 = 3,64 ve parametre2 = 0,93)	41
Şekil 4.13. Survival Tawn-2 kopuladan alınan örneklemin saçılım grafiği (Parametre1 = 3,64 ; parametre2 = 0,93; n = 1000).....	42
Şekil 4.14. BTC-XRP grafiği ve belirlenen kopula ve marjinal dağılımlardan elde edilen dağılımın grafiği.....	42
Şekil 4.15. Frank kopula (ETH-BNB) için kopula yoğunluğunun 3 boyutlu yüzey grafiği ve kontur (contour) grafikleri (Parametre1 = 29,59).....	43

Şekil 4.16. Frank kopuladan alınan örneklemin saçılım grafiği (Parametre1 = 29,59 ; n = 1000).....	44
Şekil 4.17. ETH-BNB grafiği ve belirlenen kopula ve marjinal dağılımlardan elde edilen dağılımın grafiği	44
Şekil 4.18. Survival BB8 kopula (ETH-XRP) için kopula yoğunluğunun 3 boyutlu yüzey grafiği ve kontur (contour) grafikleri (Parametre1 = 6 ve parametre2 = 0,92)	45
Şekil 4.19. Survival BB8 kopuladan alınan örneklemin saçılım grafiği (Parametre1 = 6 ; parametre2 = 0,92; n = 1000)	46
Şekil 4.20. ETH-XRP grafiği ve belirlenen kopula ve marjinal dağılımlardan elde edilen dağılımın grafiği	46
Şekil 4.21. Survival Gumbel kopula (BNB-XRP) için kopula yoğunluğunun 3 boyutlu yüzey grafiği ve kontur (contour) grafikleri (Parametre1 = 4,34).....	47
Şekil 4.22. Survival Gumbel kopuladan alınan örneklemin saçılım grafiği (Parametre1 = 4,34 ; n = 1000)	48
Şekil 4.23. BNB-XRP grafiği ve belirlenen kopula ve marjinal dağılımlardan elde edilen dağılımın grafiği	48

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 3.1. Bazı Kopulalar ve Özellikleri	24
Çizelge 3.2. Bazı Kopulalar ve Bağımlılıkları.....	25
Çizelge 3.3. Bazı Kopulalar ve Kuyruk Bağımlılığı.....	26
Çizelge 4.1. Veriye dair özet istatistikler.....	28
Çizelge 4.2. Kripto para birimleri arasındaki Kendall'ın sıra korelasyonu (τ).....	30
Çizelge 4.3. Kripto para birimleri arasındaki Spearman'ın sıra korelasyonu (ρ)	30
Çizelge 4.4. Bitcoin kripto para biriminin dağılım uygunluğu.....	31
Çizelge 4.5. Ethereum para biriminin dağılım uygunluğu.....	32
Çizelge 4.6. BNB para biriminin dağılım uygunluğu	33
Çizelge 4.7. XRP para biriminin dağılım uygunluğu	34
Çizelge 4.8. Kripto Para Birimlerine En Uygun Marjinal Dağılımlar	35
Çizelge 4.9. Ortak dağılımlara uygun kopula fonksiyonlarının bilgileri	36
Çizelge 5.1. Kripto Para Çiftlerine En Uygun Kopula Fonksiyonları	51

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

ρ	Spearman'ın sıra korelasyonu
τ	Kendall'ın sıra korelasyonu

Kısaltmalar

BB1	Clayton-Gumbel Kopula
BB6	Joe-Gumbel Kopula
BB7	Joe-Clayton Kopula
BB8	Joe-Frank Kopula
AIC	Akaike Bilgi Kriteri
BIC	Bayes Bilgi Kriteri
BTC	Bitcoin
ETH	Ethereum
BNB	Binance Coin
XRP	Ripple

1. GİRİŞ

Geçmişte insanlar ödeme aracı olarak altın, gümüş gibi değerli madenler kullanmışlardır. Zaman ilerledikçe kullanılan ödeme araçlarının yerini para almıştır. Daha sonra teknolojinin gelişmesiyle dijital para kullanımı yaygınlaşmıştır. Kredi, banka kartı ve internet bankacılığı kullanımı artmıştır. Fakat merkezi otoriteye bağıllık söz konusu olduğu için dijital para hala güvenilir olmayan bir ödeme aracıdır. 2008 yılında ABD’de ortaya çıkan ekonomik krizle beraber merkezi otoriteye bağılı olmadan varlıklarını korumak isteyen insanlar alternatif para arayışına girmişlerdir. Ekonomik krizden iki ay sonra Satoshi Nakamoto adını kullanan bir kişi ya da grup tarafından “Bitcoin: Eşten Eşe Elektronik Ödeme Sistemi” adlı makale ile Bitcoin tanıtılmıştır [1]. Böylece Bitcoin ile kripto para tanımı ortaya çıkmıştır.

Kripto paraların aldığı değerler gün içinde değişkenlik göstermekte ve sahip oldukları risk düzeyleri çoğunlukla bilinmemektedir. Finansal veriler genellikle normallik varsayımlarına uyumlu değildir. Piyasalardaki ani ve yüksek oynaklık sonucunda finansal veriler kalın kuyruklu ve oynak bir yapıya sahiptir. Finansal alanda üzerinde çalışılan verinin risk ve kuyruk özelliklerini bilmek önemlidir.

Kripto paralar Türkiye’de henüz ödeme işlemlerinde kullanılmıyor olsa da insanların finansal anlamda fikir edinebilmesi açısından finans alanında yaygın olarak kullanılan kopula fonksiyonları ile kripto paraların bağımlılık yapısının incelenmesi literatürde büyük önem taşıyan bir konu olmaya devam etmektedir. Bu noktadan hareketle, tez çalışmasının amacı kripto para madencilerine ve kripto paralara yatırım yapan ya da yapmak isteyen araştırmacılara kripto paraların riskleri ve bağımlılık ilişkileri hakkında bir fikir verebilmesi açısından bir uygulama yapmak ve bu uygulama adımlarını açıklayarak yatırım yapmak istedikleri kripto para birimleri arasındaki ilişkileri yorumlamalarına dair bir kaynak oluşturmaktadır.

Kripto para birimleri arasındaki bağımlılık yapısını analiz etmek için finans alanında yaygın olarak kullanılan kopula fonksiyonlarını kullanmanın birçok avantajı bulunmaktadır. İlk olarak karmaşık ve doğrusal olmayan bağımlılık yapısını kopula fonksiyonları yakalayabilmektedir. Finans alanında yaygın olarak kullanılan artan ve sürekli dönüşümlerde kopula fonksiyonları değişmezdir. Son olarak kopula fonksiyonları bağımlılık yapısının yanında kuyruk bağımlılığı hakkında da bilgi vermektedir.

Uygulama kısmında piyasa değeri açısından en büyük hacme sahip olan kripto para birimlerinden birkaçı belirlenecektir. Belirlenen kripto para birimlerine en uygun kopula fonksiyonları bulunacaktır. Böylece kripto para birimleri arasındaki bağımlılık yapısı ve kuyruk bağımlılığı hakkında bilgi sahibi olunması amaçlanmaktadır.

Bu amaç doğrultusunda hazırlanan tez çalışmasının giriş bölümünde tezin amacı ve kopula fonksiyonlarının finans alanındaki yapılmış olan uygulama ve araştırmalarına dair kısa bilgi verilmiştir. İkinci bölümde literatürde sıklıkla kullanılan kripto para birimleri hakkında bilgi verilmiş ve kripto paraların kullandığı blok zincir teknolojisini ve blok zincir teknolojisinin bazı alt başlıkları ayrıntılı olarak açıklanmıştır. Üçüncü bölümde tezin bir diğer ana konu başlıklarından biri olan kopula fonksiyonları, bu fonksiyonların özellikleri ve literatürde en sık kullanılan kopula fonksiyonları açıklanmıştır. Tez çalışmasının dördüncü bölümü ele alınan kripto paralar arasındaki bağımlılık yapısının kopula fonksiyonları ile araştırılmasını örneklendiren ve elde edilen sonuçların yorumlarını içeren uygulama kısmından oluşmaktadır.

1.1. Önceki Çalışmalar

Bu bölümde kopula fonksiyonlarının uygulama alanlarına ve bu konu ile ilgili yapılan araştırmalara yer verilecektir.

Çifter ve Özün [2] çalışmasında Türk lirası faiz oranı ile günlük ABD doları/YTL döviz kurundan oluşan eşit ağırlıklandırılmış bir portföye ait riske maruz değeri delta normal, EWMA, dinamik koşullu korelasyon ve koşullu simetrik joe-clayton kopula yöntemleriyle tahmin etmişlerdir. Koşullu kopula yönteminin risk öngörüsünde en başarılı performansı sergilediği sonucuna ulaşılmıştır.

Ning [3] hisse senedi piyasası ile döviz piyasası arasındaki bağımlılık yapısını kopula yöntemini kullanarak incelemiştir. Çalışmada analiz edilen tüm hisse senedi-döviz getiri çiftlerinde hem euro öncesi hem de euro sonrası dönemler için önemli bir simetrik üst ve alt kuyruk bağımlılığı olduğunu bulmuştur. Bağımlılığın önemli olmaya devam ettiğini ancak euro'nun piyasaya sürülmesinden sonra daha zayıf olduğu sonucuna ulaşmıştır.

Bingöl [4] çalışmasında euro ve dolar için ihracat oranları arasındaki bağımlılık yapısını kopula yöntemiyle ortaya koymaya çalışmıştır. Elde edilen sonuçlara göre euro ve dolar ihracat oranları arasındaki bağımlılık yapısını açıklamada Gumbel Ali Mikhail Haq ve Clayton ailesinin kullanılabileceğini tespit etmiştir. Bunlardan hesaplanan ki-kare değerlerinden diğerine göre daha küçük hesaplanan, yani en uygun olanının Clayton ailesi olduğu görülmüştür.

Osterrieder vd. [5] en öne çıkan kripto paralardan Bitcoin, Litecoin, Dash, Monero, MaidSafeCoin ve Ripple'ın Haziran 2014'ten Eylül 2016 arasındaki verilerini kullanarak risklerini analiz etmişlerdir. Bağımlılığı incelemek için kopula kullanmışlardır. Analiz edilen kripto paralar için hem sol hem de sağ kuyrukta normal dağılımdan büyük sapmalar gözlemlenmiştir. Hem ampirik hem de Gauss kopulası verilere uyarlanmıştır. Kullanılan kripto paralar, çok yüksek düzeyde korelasyona sahip olan Bitcoin ve Litecoin dışında, orta derecede korelasyona sahiptir. Kripto para getirilerinin son derece değişken, çok daha riskli ve geleneksel para birimlerinden daha ağır kuyruk davranışı sergilediğini bulmuşlardır. Genel olarak Bitcoin'e yapılan yatırım, diğer kripto paralara kıyasla daha güvenli olarak kabul edilebileceğini söylemişlerdir.

Bouri vd. [6] küresel finansal stres endeksi ile Bitcoin getirileri arasındaki nicel koşullu bağımlılığı ortaya çıkarmak için kopula, Granger nedensellik ve çapraz kuantilogram olmak üzere üç farklı yöntem kullanmışlardır. Küresel finansal stres endeksi ile Bitcoin getirileri arasında sağ kuyruk bağımlılığı olduğu kopula yöntemi ile elde edilmiştir. Küresel finansal stres endeksinin, Bitcoin getirilerinin dağılımının sol ve sağ kuyruğundaki Bitcoin getirilerine güçlü bir şekilde Granger neden olduğu Granger nedensellik yöntemi ile elde edilmiştir. Son olarak Bitcoin'in küresel finansal strese karşı güvenli bir sığınak olarak hareket edebileceği orta vadede küresel finansal stres endeksinden Bitcoin getirilerine kadar yalnızca sınırlı yönlü öngörülebilirlik göstereceği sonucuna çapraz kuantilogram yöntemi ile ulaşılmıştır.

Karakaş vd. [7] Bitcoin, Bitcoin Cash, Ethereum, Litecoin ve IOTA finansal göstergelerinin kapanış fiyatlarını kullanarak Bitcoin ve diğer kripto para göstergeleri arasındaki ilişkiyi CD Vine Kopula yaklaşımı ile incelemişlerdir. Bitcoin ve önemli finansal göstergeler arasında güçlü bir bağımlılık olduğu sonucuna ulaşmışlardır.

2. KRİPTO PARA BİRİMLERİ VE TEKNOLOJİSİ

ABD’de 2008 yılında meydana gelen ve kısa süre içinde bütün dünyayı etkisi altına alan ekonomik krizle birlikte merkez bankaları ve finans kurumlarına duyulan güven azalmıştır. Bunun sonucu olarak dünyada dolara alternatif para birimi arayışları ortaya çıkmıştır. Aynı yıl Satoshi Nakamoto adını kullanan bir kişi veya grup tarafından “Bitcoin: Eşten Eşe Elektronik Ödeme Sistemi” adlı makale yayınlanmış ve blok zincir teknolojisi ile üretilen ilk kripto para olan Bitcoin ortaya çıkmıştır [1]. 2009 yılında ise ilk Bitcoin bloğu oluşturulmuştur. Böylece, kripto paranın ortaya çıkışı aslında Bitcoin’in ortaya çıkışı ile olmuştur.

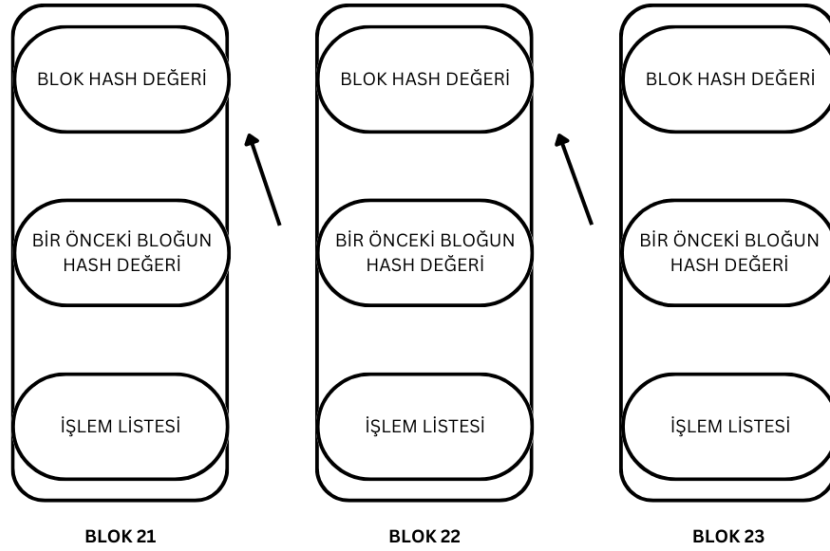
Kripto para ‘cryptocurrency’, ‘crypto’ ve ‘curreny’ kelimelerinden türetilmiştir. Kripto paralar belirlenen sayılarda üretilirler. Üretim aşamasında blok zincir teknolojisi kullanılmaktadır.

2.1. Blok Zincir Teknolojisi

Kripto paranın arkasında yer alan blok zincir teknolojisinde işlemler bloklar halinde tutulmakta ve bu bloklar birbirine bağlanarak zincir oluşturmaktadır. Bu işlem zincirine blok zincir adı verilmektedir[8].

Blok zincir teknolojisinde veriler blok olarak isimlendirilen ve zinciri oluşturan yapılarda saklanmaktadır. Yeni bir blok oluşturmak için bir önceki bloğa ait özet (hash) değeri alınmakta ve blokta yer alacak işlemler belirlenmektedir. Bloğun özet değeri hesaplanıp üretilen yeni blok doğrulanarak zincire eklenmektedir. Her blok birbirine zincirlenerek eklenmeye devam etmektedir. Zincire eklenen bloğun içindeki bilgiler asla değiştirilemez veya silinemez[8].

Şekil 2.1 ile özet fonksiyonunun blok zincirindeki işlevselliğinin daha iyi anlaşılması için örnek verilmektedir.



Şekil 2.1. Özet (hash) fonksiyonunun bloklardaki işlevselliği

Bloklar birbirine özet (hash) değeri ile bağlıdır. Bu özet değeri kriptografi(şifreleme) bilimi ile elde edilen fonksiyonlar sonucu oluşur. Girdinin özet değerini hesaplamak kolay olmalıdır. Her zaman aynı uzunlukta olan bir özet değeri oluşturmak için herhangi bir boyuttaki girdi alınarak özet fonksiyonundan geçirilmektedir. Veri girdilerindeki en ufak bir değişiklik tamamen farklı bir çıktı oluşturacaktır. Blok zincirinde kullanılan özet fonksiyonları ile aynı çıktıyı verecek iki farklı girdi bulma ihtimali düşüktür[9]. Özet fonksiyonuna SHA-256 örnek olarak verilebilir. SHA(Güvenli Özet Algoritması-Secure Hash Algorithm), ABD Ulusal Güvenlik Ajansı(National Security Agency - NSA) tarafından geliştirilen özet algoritmalar serisidir. FIBS(Federal Bilgi İşleme Standardı) onaylı ve NIST(National Institute of Standards and Technology) tarafından önerilen güvenli özet fonksiyonları arasında SHA-256 yer almaktadır[10]. Bitcoin’de kullanılan SHA-256’da girdi, bir harf ya da birkaç kelime uzunluğunda olsa bile daima 16’lık sayı sisteminde 64 karakterlik çıktı sunmaktadır.

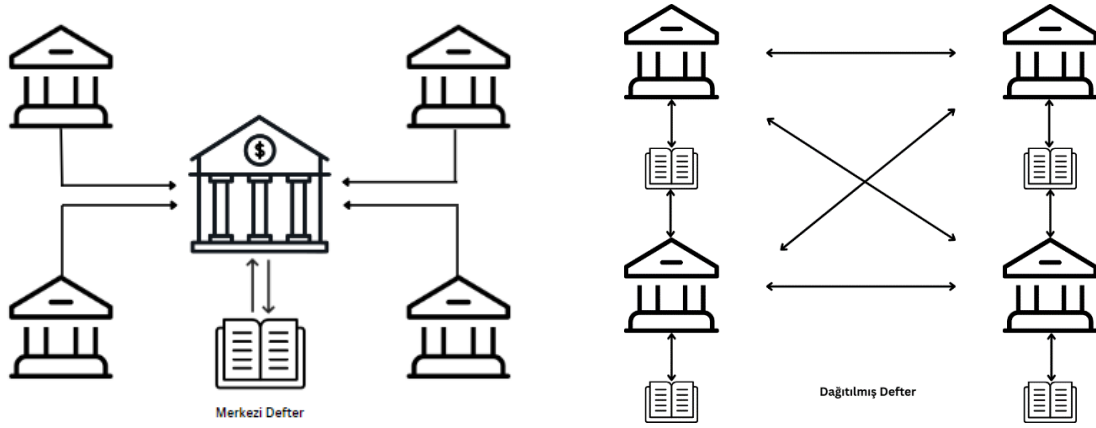
Blok zincir teknolojisinde zincire yeni bir blok eklenebilmesi için fikir birliği (consensus) algoritmaları kullanılmaktadır. Bu algoritmalar blok zincirde kayıtların bütün düğümlerde aynı şekilde güncellenebilmesini sağlamaktadır. İş kanıtı (Proof of Work) ve hisse kanıtı (Proof of Stake) en bilinen fikir birliği algoritmalarıdır. İş kanıtında yeni bir blok eklemek için madencilerin sistemin belirlediği zorluk derecesindeki bir şifreyi çözmeleri gerekmektedir. Gün geçtikçe zorluk derecesi artan bu şifrelerin çözülüp yeni blokların oluşturulması için daha güçlü işlemcilerle ihtiyaç duyulmakta ve bu durum enerji tüketimini arttırmaktadır. Ayrıca madenciler oluşturdukları bloklardan ödül almaktadır. Bitcoin bu fikir birliği algoritmasını kullanmaktadır. Hisse kanıtı ise hesaplama gücü

yerine hisse sahipliğine dayanan bir algoritmadır. Fikir belirtebilmek için belli bir hisseye sahip olmak gerekmektedir. Hisseleri ağ içerisine kilitleyerek diğer doğrulayıcılarla hangi işlemlerin bir sonraki bloğa ekleneceğine yönelik karar alınmaktadır. Bu sistem sayesinde pahalı madencilik donanımlarına ve yüksek enerji tüketimine ihtiyaç duyulmamaktadır[11]. Bir kripto para çeşidi olan Ethereum 2.0 güncellemesi ile bu sistemi kullanmaya başlamıştır. İstisna bir durum olarak herhangi bir algoritma sonucunda fikir birliği oluşmaması durumunda çatallanma (fork) meydana gelmektedir. Bu duruma açık kaynak kodlu projelerde rastlamak mümkündür. Bunun en büyük örneği 2017 yılında Bitcoin’de meydana gelen bir çatallanma ile Bitcoin Cash’in oluşmasıdır. Blok zincir teknolojisi birçok özelliğe sahiptir. Aşağıda birkaçı sıralanmıştır.

- Merkeziyetsiz olma
- Değiştirilemez olma
- Dağıtık olma
- Şeffaf olma
- Güvenli olma

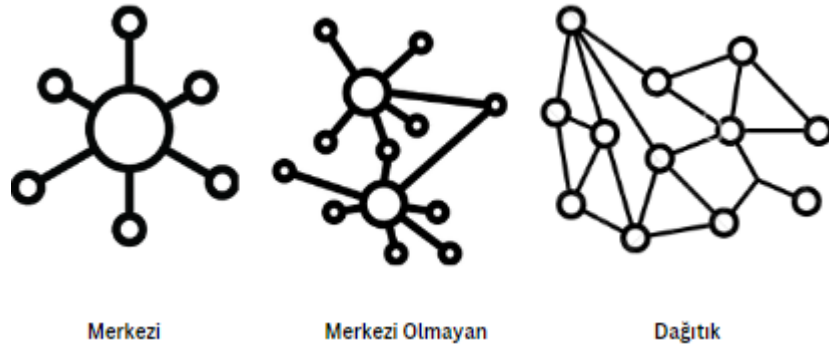
Blok zincir teknolojisi herhangi bir merkeze bağlı olmadan kendi kendine işleyen ve sadece üyelik sistemi ile yürütülen bir ağ yapısıdır. Bu durum ağ üzerindeki merkezi otoriteyi ortadan kaldırarak katılımcıları doğrudan birbirine bağlamaktadır. Böylece ağdaki katılımcılar ağ üzerinde gerçekleşen işlemleri doğrudan görebilmekte ve onaylayabilmektedir (Merkeziyetsiz olma özelliği). Veriler doğrulandıktan sonra blok zincir ağına eklenerek dağıtık bir şekilde depolanmaktadır. Depolamanın dağıtılmış olması sayesinde kayıtlar birçok yerde tutulur ve bu sayede tek bir ağ hasar görse veya siber saldırıya uğrasa bile veriler değiştirilememekte ve kaybolmamaktadır (Değiştirilemez olma özelliği). Bu teknolojinin en önemli özelliklerinden birisi de verilerin tek bir yerde tutulmaması, dağıtılabilir şekilde kaydedilmesi, depolanması ve güncellenmesidir (Dağıtık olma özelliği). Verilerin kaydı her düğüme şeffaf olup veriler geriye dönük olarak doğrulanabilir (Şeffaf olma özelliği). Blok zincir teknolojisinde internet aracılığıyla ağa erişebilen her kişi bir merkez görevini görmektedir. Bu yüzden siber saldırının başarılı olabilmesi için ağın en az %51’inin ele geçirilmesi gerekmektedir. Verilerin de farklı yerlerde dağıtılmış bir şekilde depolandığını göz önüne alırsak bu saldırının gerçekleşmesi neredeyse imkansız olmaktadır. Bu durum blok zincir teknolojisini oldukça güvenli olduğunu göstermektedir (Güvenli olma özelliği)[12].

Blok zincir teknolojisinin defter yapısı(Dağıtılmış Defter Teknolojisi) Şekil 2.2 ile gösterilmektedir.



Şekil 2.2. Dağıtılmış defter teknolojisi

Blok zincir genel (public-dağıtık), özel (private-merkezi) ve konsorsiyum (consortium-merkezi olmayan) olmak üzere üç çeşittir. Şekil 2.3 ile blok zincirinin çeşitleri görülmektedir.



Şekil 2.3. Blok zincir çeşitleri

Genel blok zincirinde(merkezi olmayan blok zinciri) işlemleri herkes görebilmekte ve bu zincire katılmak gerekli yazılımı indirmek kadar basit bir işlemdir. İzinsiz olarak da ifade edilmektedir. Bu sistem tamamen bağımsız ve merkezi otorite gerektirmeyen blok zincir sistemi olarak kabul edilmektedir[8]. Bitcoin ve Ethereum genel blok zincirinin önde gelen örnekleridir.

Merkezi blok zincir çeşidini oluşturan özel sistemler kimin blok zincirini görebileceği ve onunla etkileşim kurabileceğine yönelik kurallar koymaktadır[13]. Dolayısıyla izne dayalı çerçeveler olarak adlandırılmaktadır. Kontrol ile ilgili bir hiyerarşi olduğundan, bunlar merkezi olan sistemlerdir. Özel blok zincirler ilk başta gereksiz gibi görünebilir de kurumsal çevreler için bazı önemli uygulamalara sahiptir.

Konsorsiyum blok zincirindeki(dağıtık blok zinciri) veriler açık ya da özel olabilmektedir. Okuma ve yazma kabiliyeti belirli sayıda düğüme genişletilebilir. Zincirin görünürlüğü sınırlı olabilir, yetkili kişiler tarafından görülebilir veya herkes tarafından görülebilir. Fikir birliğine ulaşılması halinde, değişiklikler kolayca gerçekleştirilebilir. IBM firmasının Hyperledger projesi bu zincir türünün en büyük örneğidir [14].

2.2. Kripto Para ve Çeşitleri

Günümüzde ise 9000'den fazla kripto para vardır[15]. Bitcoin ilk çıkan kripto paradır ve ondan sonra ortaya çıkan diğer kripto paralar onun alternatifidir ve altcoin olarak adlandırılmaktadır.

2.2.1. Bitcoin(BTC)

Satoshi Nakamoto adını kullanan bir kişi veya grup tarafından 2008 yılında ortaya çıkmış ve ilk işlemi 2009 yılında yapılmıştır. Açık kaynak kodlu, merkezi olmayan bir kripto paradır. Üretilebilecek en fazla Bitcoin sayısı 21.000.000 adetle sınırlıdır. SHA-256 hash fonksiyonunu kullanmaktadır[16].

Herhangi bir aracıya ihtiyaç duymayan kendi ağında kullanıcıdan kullanıcıya transfer edilebilen bir kripto paradır. Yapılan işlemler kriptografi bilimi ile madenciler tarafından doğrulanmaktadır. Doğrulanmış işlemler blok zincir adı verilen deftere kaydedilmektedir. Bu işlem karşılığında madenciler 6.25 Bitcoin ödülü almaktadır. Bu ödül miktarı her 210.000 blokta yarıya indirilmektedir. Fikir birliği algoritması olarak ise iş kanıtı (Proof of Work) algoritması kullanılmaktadır[16].

2.2.2. Ethereum(ETH)

Vitalik Buterin tarafından 2013 yılında önerilmiş ve 2015 yılında ilk işlemi yapılmıştır. Ethereum'un yerel kripto para birimi Ether(ETH)'dir. Bitcoin'den sonra en büyük piyasa değerine sahip sanal paradır. İçinde gömülü bir bilgisayar bulunan bir blok zincirdir. Merkezi olmayan, izin gerektirmeyen, sansüre dayanıklı bir şekilde uygulama ve organizasyon oluşturmanın temelidir. Ethereum evreninde, Ethereum ağındaki her katılımcının durumunu sakladığı ve hemfikir olduğu küresel sanal bilgisayar(Ethereum Sanal Makinesi veya EVM) vardır. Ethereum ağına katılan herkes(her Ethereum düğümü)

bu bilgisayarın bir kopyasını tutmaktadır. Ethereum, akıllı sözleşmeler ve dağıtılmış uygulamalar(dapps) oluşturulmasını ve yayınlanmasını sağlamak amacıyla oluşturulmuştur. Fikir birliği algoritması olarak ise hisse kanıtı (Proof of Stake) algoritması kullanılmaktadır[17].

2.2.3. Binance Coin(BNB)

Binance Coin, kripto para borsası olan Binance'nin kendi ürettiği kripto paradır. 2017 yılında ilk arzı gerçekleşmiştir. BNB, başlangıçta Ethereum ağında işlem görüyordu fakat artık Binance'nin kendi blok zinciri olan Binance Chain'in yerel para birimidir[18].

2017'de ortaya çıkan BNB ilk başta indirimli alım-satım ücretleri için oluşturulmuştu. Fakat günümüzde ödemeler, seyahat konaklama rezervasyonu, eğlence amaçlı gibi birçok kullanım alanı bulunmaktadır[18].

Binance, BNB'nin arzını azaltmak ve dolayısıyla değerini artırmak için her üç ayda bir BNB alarak ve kalıcı olarak yok ederek yakım işlemi yapmaktadır. Yakılacak BNB miktarı, Binance'nin üç aylık toplam işlem hacminin beşte birine denk gelmektedir. Üretilebilecek en fazla Binance Coin sayısı 200.000.000 adetle sınırlıdır[18].

2.2.4. Ripple(XRP)

2011 yılında, mühendis olan David Schwartz, Jed McCaleb ve Arthur Britto tarafından XRP defteri geliştirilmeye başlanmıştır. Bu üç mühendis, Bitcoin'den esinlenerek daha sürdürülebilir ve özellikle ödemeler için oluşturulmuş bir dijital varlık ortaya koymak için uğraşmışlardır. 2012 yılında XRP piyasaya sürülmüştür. Kısa süre sonra bu üç mühendise Chris Larsen de katılmıştır[19].

XRP, XRP defterine özgü bir dijital varlıktır. 3-5 saniye süren işlemler ile diğer dijital varlıklardan daha hızlı, daha ucuz ve daha çevrecidir[20].

Dünyada birçok bankanın dahil olduğu RippleNet ağı, SWIFT veya Western Union gibi uluslararası para gönderme sistemlerine rakip olarak tasarlanmıştır. Türkiye'de ise Akbank, RippleNet ile anlaşma sağlayarak bu ağa dahil olmuştur.

3. KOPULA FONKSİYONLARI

Tez çalışmasının bu bölümünde kopula fonksiyonlarına ait literatür bilgisi, bu fonksiyonların özellikleri ve literatürde sıklıkla kullanılan bazı çeşitlerine dair ayrıntılı bilgi verilmiştir.

3.1. Kopula Tarihçesi

Kopulalar ile ilgili temel çalışmalar 1940’larda başlamış olup Finlandiyalı istatistikçi Wassily Hoeffding tarafından iki değişkenli, standartlaştırılmış bir fonksiyon bulunmuştur. Çalışması $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2$ aralığını kapsamakta ve çalışmasındaki marjinal dağılımlar, $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ aralığında düzgün(uniform) dağılıma uymaktadır. Hoeffding, normalizasyon için $[0,1]^2$ yerine $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2$ aralığını kullandığı için kopulaları matematiksel olarak tanımını eksik kalmıştır.

Hoeffding, devamında yaptığı çalışmalarla, bulduğu bu fonksiyonları “temel en olası olasılık sınırları” adını verdiği sınırlara göre karakterize ederek, ölçeğe göre değişmeyen (scale-invariant) bağımlılık ölçüleri üzerinde çalışmıştır [21]. Sonra Fransalı matematikçi Maurice Rene Frechet 1951’de Hoeffding’in çalışmasından habersiz bir şekilde yaptığı çalışması ile Frechet sınırlarını bulmuştur [22]. Bu yüzden günümüzde Frechet-Hoeffding sınırları olarak bilinmektedir.

1956 yılında Robert Feron, birim küp üzerinde tanımlanmış olan bazı yardımcı fonksiyonlar (auxiliary functions) tanıtmıştır [23]. Bu fonksiyonlar, dağılımları kendilerinin tek değişkenli marjinal dağılımları ile birleştirmektedir. Amerikalı matematikçi Abe Sklar da benzer fonksiyonların genelleştirilebileceğini fark ederek $n \geq 2$ boyutları için tanımlamıştır [24]. Çok boyutlu dağılım fonksiyonlarını oluşturmak için tek boyutlu dağılım fonksiyonlarını bir araya getiren bu fonksiyon için uygun bir isim olacağını düşünerek “kopula(copula)” olarak adlandırmıştır [25].

3.2. Kopulaların Tanımı

Kopula kelimesi “bağlantı, bağ, ilişki (link, tie, bond)” anlamlarına gelen Latince bir isimdir [26]. İki veya daha fazla herhangi bir şeyi birbirine bağlayan bir kelime veya ifade olarak kullanılır [27]. Kopula kelimesi literatürde ilk defa matematiksel veya istatistiksel anlamda Abe Sklar tarafından kullanılmıştır [24].

Kopulalar hakkında daha ayrıntılı bilgiye geçmeden önce istatistikte kullanılan bazı tanım ve açıklamalara değinmek gerekmektedir.

İstatistik çerçevesinde her iki (veya daha fazla) rastgele değişken çifti, marjinallerine ve bu marjinaler arasındaki bağımlılığa bağlı olarak ortak bir dağılım oluşturmaktadır. Bu nedenle, marjinaler ve bağımlılık yapısı göz önüne alındığında, ortak dağılım belirlenebilmektedir.

$C(u)$, standart tekdüze (uniform) marjinal dağılımlarla $[0,1]^d$ üzerinde dağılım fonksiyonu olan d -boyutlu bir kopula olarak tanımlansın. Kopulaların çok değişkenli dağılım fonksiyonları için gösterimi Eşitlik 3.1 ile verilir:

$$C(u) = C(u_1, u_2, \dots, u_d) \quad (3.1)$$

3.2.1. Matematiksel Özellikleri

$C : [0,1]^d \rightarrow [0,1]$ üzerinde tanımlı kopula fonksiyonunu karakterize eden üç temel özellik vardır.

1. Herhangi bir i için $u_i = 0$ ise $C(u_1, \dots, u_d) = 0$
2. Tüm $i \in 1, \dots, d$ için $C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i$, $u_i \in [0,1]$, marjinal dağılımların tekdüze(uniform) olmasını gerektirir
3. $a_i \leq b_i$ olan $(a_1, \dots, a_d), (b_1, \dots, b_d) \in [0,1]^d$ için

$$\sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_d=1}^2 (-1)^{i_1+\dots+i_d} C(u_{1i_1}, \dots, u_{di_d}) \geq 0$$

Burada tüm $i \in 1, \dots, d$ için $u_{i1} = a_i$ ve $u_{i2} = b_i$. Bu, dağılım fonksiyonu C 'ye sahip rastgele vektörün negatif olmayan olasılıklara sahip olmasını sağlayan dikdörtgen eşitsizliği olarak adlandırılır [28].

3.2.2. Sklar Teoremi

Marjinaleri F_1, F_2, \dots, F_d olan d-boyutlu F dağılım fonksiyonu verildiğinde $C : [0,1]^d \rightarrow [0,1]$ olacak biçimde bir kopula vardır ve Eşitlik 3.2 ile verilir:

$$F(u_1, u_2, \dots, u_d) = C(F_1(u_1), F_2(u_2), \dots, F_d(u_d)) \quad (3.2)$$

Eğer tüm F_1, F_2, \dots, F_d marjinalleri süreklirse tek bir C kopulası vardır; diğer taraftan C $RanF_1 \times RanF_2 \times \dots \times RanF_d$ de tanımlıdır. $RanF_i$, i marjinalinin değer kümesini gösterir. Bunun aksi de geçerlidir, eğer C d-boyutlu bir kopula ve F_1, F_2, \dots, F_d dağılım fonksiyonlarıysa yukarıda tanımlanan F fonksiyonu F_1, F_2, \dots, F_d marjinalleriyle d-boyutlu dağılım fonksiyonudur [25].

Sklar teoremi, herhangi çok boyutlu bileşik (ortak) dağılım fonksiyonunun, bir kopula aracılığı ile tek değişkenli marjinal dağılım fonksiyonları ile yazılabileceğini açıklamaktadır [24].

3.2.3. Bağımsızlık Kopulası ve Frechet-Hoeffding Sınırları

Eş-monoton (comonotonicity), ters-monoton (countermonotonicity) ve bağımsızlık kopulaları olmak üzere birkaç sözde (pseudo) temel kopula vardır.

Raslantı değişkenlerinin bağımsız olması durumunda bir C kopula fonksiyonu “bağımsızlık kopulası” olarak ifade edilmektedir ve Eşitlik 3.3 ile verilir:

$$\Pi(u) = C(u_1, u_2, \dots, u_d) = \prod_{i=1}^d u_i \quad (3.3)$$

Eş-monoton kopula (comonotonicity), mükemmel pozitif bağımlılık ve ters-monoton kopula (countermonotonicity) mükemmel negatif bağımlılık anlamına gelmektedir. Sezgisel olarak, bir kopula varsa ve pozitif veya negatif bağımlılık yapılarından hiçbirine sahip değilse, ikisi arasında bir yerde olmalıdır. Bu nedenle her $C(u_1, u_2, \dots, u_d)$ kopulasının sınırları vardır ve Eşitlik 3.4 ile verilir:

$$W(u_1, u_2, \dots, u_d) \leq C(u_1, u_2, \dots, u_d) \leq M(u_1, u_2, \dots, u_d) \quad (3.4)$$

Bağımlılığın alt ve üst sınırları Hoeffding [21] ve Frechet [22]’in çalışmalarına dayanılarak aşağıdaki eşitliklerle tanımlanmıştır.

$$W(u_1, u_2, \dots, u_d) = \max\{u_1 + \dots + u_d + 1 - d, 0\} \quad (3.5)$$

$$M(u_1, u_2, \dots, u_d) = \min\{u_1, u_2, \dots, u_d\} \quad (3.6)$$

Eşitlik 3.5'te yer alan Frechet-Hoeffding alt sınırını, Eşitlik 3.6'da yer alan ise Frechet-Hoeffding üst sınırını ifade etmektedir. Böylece Frechet-Hoeffding alt sınırı “ters-monoton kopula (countermonotonicity)”, Frechet-Hoeffding üst sınırı ise “eş-monoton kopula (comonotonicity)” olarak adlandırılmaktadır [28].

3.3. Kopula Çeşitleri

Bu bölümde literatürde en sık kullanılan kopula çeşitleri ve açıklamaları verilmiştir.

3.3.1. Eliptik Kopulalar

Eliptik kopulalar çok değişkenli eliptik dağılımlardan elde edilmektedir. Gaussian kopula ve Student-t kopula eliptik kopulanın en önemli örnekleridir. Bu iki kopula merkez kısımlarında oldukça benzerdir ve Student kopulanın serbestlik derecesi arttıkça da kuyruk bölgesinde de birbirlerine benzer oldukları görülmektedir. Uç noktalar arasındaki bağımlılıklar açısından oldukça farklı davranışlara sahiplerdir. Gaussian ve t dağılımlı rastgele değişkenlerin kolayca üretilebilmesinden dolayı eliptik kopulaları benzetmek (simüle etmek) kolaydır.

3.3.1.1. Gaussian Kopula

İki değişkenli normal dağılımdan kolaylıkla türetilir ve Eşitlik 3.7 ile verilen dağılım fonksiyonuna sahiptir:

$$C_\rho(u_1, u_2) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}} \exp\left(-\frac{s_1^2 - 2\rho s_1 s_2 + s_2^2}{2(1-\rho^2)}\right) ds_1 ds_2 \quad (3.7)$$

Eşitlik 3.7'de ρ , iki değişkenli normal dağılımın doğrusal korelasyon katsayısıdır [29].

Gauss dağılımı, bağımlılığı modellemenin geleneksel yolu gibi görünse de finansal uygulamalarla ilgili bazı sorunları vardır. Örneğin, Gauss kopulası, merkezi çevresinde en çok dağılmış olanıdır ve kuyruklarda neredeyse hiç bağımlılık göstermez. Ayrıca, oldukça basit bir sezgiye sahip olduğu ve normal dağılıma dayandığı için birçok profesyonel uygulayıcılar ve araştırmacılar bunu kullanma eğilimindedir. Ancak, mali veriler genellikle çarpıktır ve Gauss dağılımına kıyasla daha uç sonuçlar(ağır kuyruklu) gösterir. Bu nedenle, Gauss kopulası finansal analizde neredeyse hiçbir zaman çalışmaz, ancak uygun varsayımlarla normal kopula hala geçerli olabilir [28].

$$C_{\rho}(u_1, u_2) = \Phi_{\rho}(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2)) \quad (3.8)$$

Eşitlik 3.8’de Φ^{-1} ters normal fonksiyon ve Φ ise ρ ’ya eşit bir kovaryans matrisi tarafından tanımlanan iki değişkenli normal dağılımın kümülatif dağılım fonksiyonudur.

3.3.1.2. Student- t Kopula

Student’in t-kopulası, üst ve alt kuyruk bağımlılığı olan eliptik bir kopuladır. Gauss kopulasına benzer şekilde, kapalı bir form çözümü yoktur. İki boyutlu t-kopula Eşitlik 3.9 ile tanımlanır:

$$C_{v,P}(u_1, u_2) = t_{v,P}(t_v^{-1}(u_1), t_v^{-1}(u_2)) \quad (3.9)$$

Parametreler, t_v ile t-dağılımından gelir; burada v , serbestlik derecesini temsil eder ve $P, X \sim t_2(v, 0, P)$ vektörünün ortak dağılım fonksiyonudur. Bu ayar içerisinde P korelasyon matrisidir.

Bu kopula, aşırı sonuçlar söz konusu olduğunda, özellikle pozitif sonuçların negatif sonuçlarla eşit derecede muhtemel olduğu durumlarda içgörü sağlayabilir. Ayrıca t-dağılımı, merkezi çevresinde bağımlılık esnekliğine izin verir, bu nedenle finansal ortamda ana yaklaşımlardan biri olabilir.

Gauss ve Student t, kuyruklarda simetriye sahip eliptik bir şekle sahip eliptik dağılımlardır. Aslında, her eliptik dağılım Gauss dağılımının bir uzantısı olarak görülebilir, $v \rightarrow \infty$ olduğunda Gauss dağılımı olur.

Joe kopula ile karşılaştırıldığında, Student t-kopulası sadece olumlu sonuçlarda değil, aynı zamanda olumsuz sonuçlarda da yüksek bağımlılık gösterir. Bu, merkezi etrafındaki bağımlılığın üst ve alt kuyruk bağımlılığını vurguladığı için finansal ortamda olumlu olmasının nedenlerinden biridir [28].

$$C_{v,\rho}(u_1, u_2) = \int_{-\infty}^{t^{-1}(u_1, u_2)} \int_{-\infty}^{t^{-1}(u_1, u_2)} \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}} \left(1 + \frac{s_1^2 - 2\rho s_1 s_2 + s_2^2}{v(1-\rho^2)}\right)^{-\frac{v+2}{2}} ds_1 ds_2 \quad (3.10)$$

Eşitlik 3.10’da ρ , v serbestlik derecesine karşılık gelen iki değişkenli t dağılımının doğrusal korelasyon katsayısını göstermektedir [29].

3.3.2. Arşimedyan Kopulalar

Arşimedyan kopulaların kolaylıkla inşa edilebilmeleri ve bu sınıfa ait çok çeşitli kopula ailelerinin olmasından dolayı geniş bir uygulama yelpazesine sahiptir.

Arşimedyan kopulaları ortak bir varsayımı paylaşırlar ve Eşitlik 3.11 ile verilen biçimde yazılabilmeleri gerekir:

$$C(u_1, \dots, u_d) = \psi(\psi^{-1}(u_1) + \dots + \psi^{-1}(u_d)) \quad (3.11)$$

Eşitlik 3.11’de, ψ bir üreteç fonksiyonudur ve ψ^{-1} genelleştirilmiş ters fonksiyondur.

Üreteç fonksiyonu şu özelliklere sahiptir:

1. $\psi : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$, $\psi(0) = 1$ ve $\lim_{x \rightarrow \infty} \psi(x) = 0$
2. ψ sürekli olmalıdır
3. ψ kesin olarak $[0, \psi^{-1}(0)]$ üzerinde azalmaktadır
4. ψ^{-1} , $\psi^{-1}(x) = \inf\{u: \psi(u) \leq x\}$ ile verilir

Üreteç fonksiyonu özellikle önemlidir, çünkü λ_U ve λ_L olarak adlandırılan üst kuyruk ve alt kuyruk katsayılarının türetilmesine izin vermektedir.

3.3.2.1. Joe Kopula

Joe kopula asimetrik Arşimedyan bir kopuladır. İki değişkenli Joe kopula Eşitlik 3.12 ile ifade edilir.

$$C_\theta(u_1, u_2) = 1 - ((1 - u_1)^\theta + (1 - u_2)^\theta - (1 - u_1)^\theta(1 - u_2)^\theta)^{1/\theta} \quad (3.12)$$

Joe kopulanın üretici fonksiyonu $\varphi_\theta(t) = -\ln(1 - (1 - t)^\theta)$ ’dir. θ parametresi $[1, \infty)$ aralığındaki değerleri almaktadır. $\theta = 1$ iken bağımsızlık kopulasına ve $\theta \rightarrow \infty$ ise Frechet-Hoeffding üst sınırına (mükemmel pozitif bağımlılık) eşit olur [25].

3.3.2.2. Frank Kopula

Frank kopula simetrik bir Arşimedyan kopuladır. İki değişkenli Frank kopula Eşitlik 3.13 ile ifade edilir.

$$C_\theta(u_1, u_2) = -\frac{1}{\theta} \ln \left(1 + \frac{(e^{-\theta u_1} - 1)(e^{-\theta u_2} - 1)}{(e^{-\theta} - 1)} \right) \quad (3.13)$$

Frank kopulanın üretici fonksiyonu $\varphi_\theta(t) = -\ln \frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1}$, dir. θ parametresi $(-\infty, \infty) \setminus \{0\}$ aralığındaki değerleri almaktadır. $\theta \rightarrow 0$ iken bağımsızlık kopulasına, $\theta \rightarrow \infty$ iken, Frechet-Hoeffding üst sınırına (mükemmel pozitif bağımlılık) ve $\theta \rightarrow -\infty$ ise Frechet-Hoeffding alt sınırına (mükemmel negatif bağımlılık) eşit olur [25].

3.3.2.3. Gumbel Kopula

Gumbel kopula asimetric bir Arşimedyen kopuladır. Yani bağımsızlık ve mükemmel pozitif bağımlılık arasında bir aralığa sahiptir ve negatif bağımlılığı yoktur. İki değişkenli Gumbel kopula Eşitlik 3.14 ile ifade edilir.

$$C_\theta(u_1, u_2) = \exp(-[(-\ln u_1)^\theta + (-\ln u_2)^\theta]^{1/\theta}) \quad (3.14)$$

Gumbel kopulanın üretici fonksiyonu $\varphi_\theta(t) = (-\ln t)^\theta$, dir. θ parametresi $[1, \infty)$ aralığındaki değerleri almaktadır. $\theta = 1$ iken bağımsızlık kopulasına, $\theta \rightarrow \infty$ ise Frechet-Hoeffding üst sınırına (mükemmel pozitif bağımlılık) eşit olur [25].

Gumbel kopulanın üst kuyrukta bağımlılığının olması ve alt kuyrukta bağımlılığının olmaması hatta negatif değerlere bile izin vermemesi finansal anlamda pratik uygulamalarının olmamasına neden olmaktadır [28].

3.3.2.4. Clayton Kopula

Clayton kopula asimetric bir Arşimedyen kopuladır. Alt kuyruk, üst kuyruktan daha büyük bağımlılık gösterir. İki değişkenli Clayton kopula Eşitlik 3.15 ile ifade edilir.

$$C_\theta(u_1, u_2) = [\max(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1, 0)]^{-1/\theta} \quad (3.15)$$

Clayton kopulanın üretici fonksiyonu $\varphi_\theta(t) = \frac{1}{\theta} (t^{-\theta} - 1)$, dir. θ parametresi $[-1, \infty) \setminus \{0\}$ aralığındaki değerleri almaktadır. θ parametresinin artmasıyla gözlemler arasındaki bağımlılık artar. $\theta \rightarrow 0$ iken bağımsızlık kopulasına, $\theta = -1$ iken Frechet-Hoeffding alt sınırına (mükemmel negatif bağımlılık) ve $\theta \rightarrow \infty$ iken Frechet-Hoeffding üst sınırına (mükemmel pozitif bağımlılık) eşit olur [25].

3.3.2.5. Clayton-Gumbel Kopula

Clayton-Gumbel kopula kısaca BB1 olarak isimlendirilir. İki değişkenli BB1 kopula Eşitlik 3.16 ile ifade edilir.

$$C_{\theta, \delta}(u_1, u_2) = (1 + [(u_1^{-\theta} - 1)^\delta + (u_2^{-\theta} - 1)^\delta]^{1/\delta})^{-1/\theta} \quad (3.16)$$

BB1 kopulanın üetici fonksiyonu $\varphi_{\theta,\delta}(t) = (1 + t^{1/\delta})^{-1/\theta}$, dir. δ parametresi $[1, \infty)$, θ parametresi ise $(0, \infty)$ aralığındaki değerleri almaktadır. $\delta = 1$ olduğunda Clayton kopulaya, $\theta \rightarrow 0$ iken Gumbel kopulaya eşit olmaktadır [30]. BB1 kopulası, Clayton ve Gumbel kopularının her iki uç durumu arasındaki kombinasyonu verdiği için çok kullanışlı bir kopuladır [28].

3.3.2.6. Joe-Gumbel Kopula

Joe-Gumbel kopula kısaca BB6 olarak isimlendirilir. İki değişkenli BB6 kopula Eşitlik 3.17 ile gösterilir.

$$C_{\theta,\delta}(u_1, u_2) = 1 - (1 - \exp - [(-\log(1 - (1 - u_1)^\theta))^\delta + (-\log(1 - (1 - u_2)^\theta))^\delta]^{1/\delta})^{1/\theta} \quad (3.17)$$

BB6 kopulanın üetici fonksiyonu $\varphi_{\theta,\delta}(t) = 1 - (1 - \exp(-t^{1/\delta}))^{1/\theta}$, dir. δ parametresi $[1, \infty)$, θ parametresi ise $[1, \infty)$ aralığındaki değerleri almaktadır. $\theta = 1$ olduğunda Gumbel kopulaya, $\delta = 1$ olduğunda ise Joe kopulaya eşit olmaktadır [30]. BB6 kopulası, üst kuyruk bağımlılığını vurguladığı için asimetric kuyruk bağımlılığlarını tespit etmeye yardımcı bir kopuladır [28].

3.3.2.7. Joe-Clayton Kopula

Joe-Clayton kopula kısaca BB7 olarak isimlendirilir. İki değişkenli BB7 kopula Eşitlik 3.18 ile gösterilir.

$$C_{\theta,\delta}(u_1, u_2) = 1 - (1 - ((1 - (1 - u_1)^\theta)^{-\delta} + (1 - (1 - u_2)^\theta)^{-\delta} - 1)^{-1/\delta})^{1/\theta} \quad (3.18)$$

BB7 kopulanın üetici fonksiyonu $\varphi_{\theta,\delta}(t) = 1 - (1 - (1 + t)^{-1/\delta})^{1/\theta}$, dir. δ parametresi $(1, \infty)$, θ parametresi ise $[1, \infty)$ aralığındaki değerleri almaktadır. $\theta = 1$ olduğunda Clayton kopulaya, $\delta \rightarrow 0$ iken Joe kopulaya eşit olmaktadır [30].

3.3.2.8. Joe-Frank Kopula

Joe-Frank kopula kısaca BB8 olarak isimlendirilir. İki değişkenli BB8 kopula Eşitlik 3.19 ile gösterilir.

$$C_{\theta,\delta}(u_1, u_2) = \frac{1}{\delta} \left(1 - \left[1 - \frac{1}{1 - (1 - \delta)^\theta} (1 - (1 - \delta u_1)^\theta)(1 - \delta u_2)^\theta \right]^{\frac{1}{\theta}} \right) \quad (3.19)$$

BB8 kopulunun üreteç fonksiyonu $\varphi_{\theta,\delta}(t) = \frac{1}{\delta}(1 - (1 - 1 - (1 - \delta)^\theta)e^{-\delta})^{1/\theta}$, dir. δ parametresi $(0, 1]$, θ parametresi ise $[1, \infty)$ aralığındaki değerleri almaktadır. $\theta \rightarrow 0$ iken Frank kopulaya, $\delta = 1$ olduğunda ise Joe kopulaya eşit olmaktadır [30]. Joe kopulası, açık bir üst kuyruk bağımlılığına sahip olan aşırı bir kopula iken, Frank kopula güçlü pozitif bağımlılık ya da güçlü negatif bağımlılık sağlar [28].

3.3.3. Diğer Kopula Çeşitleri

Bu bölümde literatürde yoğun bir şekilde kullanılan ve uygulamalarda sıklıkla karşılaşılan Bölüm 3.3.1. ile Bölüm 3.3.2. başlıkları dışında yer alan bazı önemli kopula çeşitlerine yer verilmiştir. Bu kopulalar döndürülmüş kopula olarak literatürde yer alan özelleşmiş adlara sahip kopula çeşitleridir. Kopulaların, 180 derece döndürülmüş (rotated) kopulaları aynı zamanda hayatta kalma (survival) kopulası olarak adlandırılmaktadır. Bir arşimedyan kopulunun hayatta kalma kopulası arşimedyan kopula değildir.

3.3.3.1. Survival Tawn-2

Tawn kopula, üç parametrelili uç değer(extreme value) kopulasıdır. Tawn kopula, Gumbel kopulasının asimetric bir uzantısıdır[31]. İki değişkenli Tawn kopula Eşitlik 3.20 ile gösterilir.

$$C_{\theta_1, \theta_2, \theta_3}(u_1, u_2) = \exp(\ln(u_1^{(1-\theta_1)}) + \ln(u_2^{(1-\theta_2)})) - ((-\theta_1 \ln(u_1))^{\theta_3} + (-\theta_2 \ln(u_2))^{\theta_3})^{1/\theta_3} \quad (3.20)$$

θ_1 ve θ_2 parametreleri $[0,1]$, θ_3 parametresi ise $[1, \infty]$ aralığındaki değerleri almaktadır[32].

Survival Tawn-2 kopula, 180 derece döndürülmüş Tawn-2 kopuladır. C, Tawn-2 kopula olmak üzere Survival Tawn-2 kopula Eşitlik 3.21 ile verilmiştir[33].

$$C^{180}(u_1, u_2) = C(1 - u_1, 1 - u_2) \quad (3.21)$$

3.3.3.2. Survival BB8

Survival BB8 kopula, 180 derece döndürülmüş BB8 kopuladır. Eşitlik 3.19 ile verilen C, BB8 kopula olmak üzere Survival BB8 kopula Eşitlik 3.22 ile verilmiştir.

$$C^{180}(u_1, u_2) = C(1 - u_1, 1 - u_2) \quad (3.22)$$

3.3.3.3. Survival Gumbel

Survival Gumbel kopula, 180 derece döndürülmüş Gumbel kopuladır. Eşitlik 3.14 ile verilen C , Gumbel kopula olmak üzere Survival Gumbel kopula Eşitlik 3.23 ile verilmiştir.

$$C^{180}(u_1, u_2) = C(1 - u_1, 1 - u_2) \quad (3.23)$$

3.4. Bağımlılık

Rastgele değişkenler arasındaki bağımlılık ilişkileri, olasılık ve istatistikte en çok çalışılan konulardan biridir. Ortak dağılımın kesin artan dönüşümler altında değişmeyen özelliğini yakalayan kopula fonksiyonları, rasgele değişkenler arasındaki bağımlılık ya da ilişki söz konusu olduğunda önemli rol oynamaktadır.

Pearson korelasyon katsayısı yaygın olarak kullanılan bir bağımlılık ölçüsüdür ve Eşitlik 3.24 ile elde edilmektedir.

$$\rho_{XY} = \frac{cov[X, Y]}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (3.24)$$

Pearson korelasyon katsayısının yukarıda verilen formülünde $cov[X, Y] = E[X, Y] - E[X]E[Y]$, $\sigma_X, \sigma_Y > 0$, σ_X ve σ_Y sırasıyla X ve Y 'nin standart sapmalarını göstermektedir. Pearson korelasyon katsayısı doğrusal bağımlılığın bir ölçüsüdür ve normallik varsayımı gerektirmektedir. $[-1, 1]$ aralığında değerler almaktadır. Simetriktir ve değişkenlerin doğrusal dönüşümlerine göre değişmemektedir.

Formülden anlaşılacağı üzere pearson korelasyon katsayısının sifıra eşit olması için $cov[X, Y] = 0$ olması yeterlidir. Fakat korelasyonun sifıra eşit olması her zaman bağımsızlığı ifade etmemektedir. Bu bağımlılığın bir ölçüsü olarak korelasyonun zayıflığını göstermektedir. Korelasyonun ikinci bir zayıflığı, ikinci momentleri olmayan bazı uzun kuyruklu dağılımlar için tanımlanmamış olmasıdır. Korelasyonun üçüncü bir zayıflığı, kesinlikle artan doğrusal olmayan dönüşümler altında değişmez olmamasıdır. Korelasyonun dördüncü bir zayıflığı ise asimetric bağımlılığın varlığında yetersiz kalmasıdır. Bu zayıflıklar göz önüne alındığında alternatif bağımlılık ölçüsü olan sıra korelasyonu ele alınmalıdır [34].

Parametrik olmayan yöntemlerle hesaplanan Kendall'ın sıra korelasyonu (Kendall'ın τ 'su) ve Spearman'ın sıra korelasyonu (Spearman'ın ρ 'su), pearson korelasyon katsayısının aksine doğrusallık ve normallik varsayımı gerektirmemektedir. Monoton dönüşümler altında değişmezlik özelliğine sahiplerdir ve mükemmel bağımlılığı yakalayabilmektedirler. Ayrıca marjinal dağılımların fonksiyonel biçimlerine bağlı değildirler. Bu yüzden kopulalar söz konusu olduğunda pearson korelasyon katsayısını kullanmak yerine Kendall'ın sıra korelasyonu ya da Spearman'ın sıra korelasyonunu kullanmak daha sağlam (robust) bir sonuç elde etmemize yardımcı olacaktır [34].

3.4.1. Sıra Korelasyonu

Kopulaların uyum ve Kendall'ın τ 'su gibi birliktelik ölçülerinde oynadığı rolü göstermek için, önce iki vektör (X_1, Y_1) arasındaki uyum ve uyumsuzluk olasılıklarının farkı olan bir “uyum fonksiyonu (Q)” tanımlanır.

(X_1, Y_1) ve (X_2, Y_2) , $F(X_1 \text{ ve } X_2 \text{'nin})$ ve $G(Y_1 \text{ ve } Y_2 \text{'nin})$ ortak marjinal fonksiyonları ile sırasıyla H_1 ve H_2 ortak dağılım fonksiyonlarına sahip sürekli rasgele değişkenlerin bağımsız vektörleri olsun. C_1 ve C_2 sırasıyla (X_1, Y_1) ve (X_2, Y_2) 'nin kopulaları olsun. Böylece $H_1(x, y) = C_1(F(x), G(y))$ ve $H_2(x, y) = C_2(F(x), G(y))$ olur.

$$Q = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0] \quad (3.25)$$

$$Q = Q(C_1, C_2) = 4 \int \int_{I^2} C_2(u, v) dC_1(u, v) - 1 \quad (3.26)$$

Eşitlik 3.25'te uyum fonksiyonu olan Q , (X_1, Y_1) ve (X_2, Y_2) 'nin uyum ve uyumsuzlukları arasındaki farkı göstermektedir. Eşitlik 3.26'da uyum fonksiyonunun sadece kopulalar aracılığıyla (X_1, Y_1) ve (X_2, Y_2) 'nin dağılım fonksiyonlarına bağlı olduğu ifade edilmektedir [25].

3.4.1.1. Spearman'ın sıra korelasyonu (ρ)

Spearman'ın sıra korelasyonu Eşitlik 3.27 ile tanımlanır:

$$\rho(X, Y) = \rho(F_1(X), F_2(Y)) \quad (3.27)$$

Burada X ve Y rasgele değişken, F_1 ve F_2 sürekli dağılım fonksiyonları ve F ortak dağılım fonksiyonudur.

Spearman'ın sıra korelasyonunun kitle versiyonu uyum ve uyumsuzluğa dayanmaktadır. (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) ve (X_3, Y_3) , ortak bir dağılım fonksiyonu H (marjinalleri F ve G) ve kopula C ile üç bağımsız rastgele vektör olsun. Spearman ρ 'su, iki vektör (X_1, Y_1) , (X_2, Y_3) için uyumluluk olasılığı eksi uyumsuzluk olasılığı ile orantılı olarak tanımlanır. Yani, aynı marjinallere sahip bir vektör çifti, ancak bir vektör H dağılım fonksiyonuna sahipken, diğerinin bileşenleri bağımsızdır ve bu durum Eşitlik 3.28 ile verilir.

$$\rho_{X,Y} = 3(P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0]) \quad (3.28)$$

Burada (X_3, Y_2) çifti de eşit olarak kullanılabilir. (X_1, Y_1) 'in ortak dağılım fonksiyonu $H(x,y)$ iken, (X_2, Y_3) 'ün ortak dağılım fonksiyonu $F(x)G(y)$ 'dir (çünkü X_2 ve Y_3 bağımsız). Böylece X_2 ve Y_3 'ün kopulası Π 'dir.

X ve Y , kopulası C olan sürekli rasgele değişkenler olsun. O zaman X ve Y için Spearman'ın ρ 'su Eşitlik 3.29 ile tanımlanır.

$$\rho_{X,Y} = \rho_C = 3Q(C, \Pi) = 12 \int \int_{J^2} uv \, dC(u, v) - 3 = 12 \int \int_{J^2} C(u, v) \, dudv - 3 \quad (3.29)$$

Buradaki 3 katsayısı bir normalleştirme sabitidir. Çünkü $Q(C, \Pi)$, $[-1/3, 1/3]$ aralığında değerler almaktadır [25].

3.4.1.2. Kendall'in sıra korelasyonu (τ)

Kendall'ın sıra korelasyonu Eşitlik 3.30 ile tanımlanır:

$$\rho(X, Y) = \Pr[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - \Pr[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0] \quad (3.30)$$

Burada (X_1, Y_1) ve (X_2, Y_2) , F ortak dağılım fonksiyonuna sahip iki bağımsız rastgele değişken çiftidir. İlk terim, $\Pr[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0]$ uyum (concordance), ikinci terim ise uyumsuzluk (discordance) olarak adlandırılmaktadır.

$$\rho(X, Y) = \Pr[\text{uyum}] - \Pr[\text{uyumsuzluk}] \quad (3.31)$$

Böylece Kendall'ın sıra korelasyonu iki değişken çifti arasındaki göreceli farkın bir ölçüsüdür.

Hem Spearman'ın sıra korelasyonu hem de Kendall'ın sıra korelasyonu (X, Y) arasındaki monoton bağımlılığın ölçüleridir. Her iki ölçüm de bir rasgele değişkenin büyük değerlerinin diğerinin büyük değerleri ile ilişkili olduğu özelliğine atıfta bulunan uyumluluk kavramına dayanmaktadır. Aksine uyumsuzluk ise birinin büyük değerlerinin diğerinin küçük değerleri ile ilişkili olduğu anlamına gelmektedir. Her iki bağımlılık ölçüsü de simetri, normalizasyon, eş ve karşı monotonluk özelliklerine sahiptir. $[-1, 1]$ aralığında değerler alır ve bağımsızlık altında sıfır değerini almaktadır [34].

X ve Y , kopulası C olan sürekli rasgele değişkenler olsun. O zaman X ve Y için Kendall'ın τ 'su Eşitlik 3.32 ile tanımlanır:

$$\tau_{X,Y} = \tau_C = Q(C_1, C_2) = 4 \int \int_{I^2} C_2(u, v) dC_1(u, v) - 1 = 4E(C(U, V)) - 1 \quad (3.32)$$

Buradaki integral, ortak dağılım fonksiyonu C olan uniform $(0,1)$ U ve V rasgele değişkenlerinin $C(U, V)$ fonksiyonunun beklenen değeri olarak yorumlanabilir [25].

3.5. Kuyruk Bağımlılığı

Kuyruk bağımlılığı, rasgele değişkenlerin marjinal dağılımlarından bağımsızdır ve ortak dağılım fonksiyonunun sağ (üst) ve sol (alt) kuyruklarındaki uyumu veya X ve Y rasgele değişkenlerinin aşırı değerlerini ölçmektedir. Ayrıca X ve Y değişkenlerinin kesinlikle artan dönüşümleri altında değişmezdirler [35].

X ve Y , sırasıyla F ve G dağılım fonksiyonlarına sahip sürekli rastgele değişkenler olsun. Bu durumda alt kuyruk bağımlılığı Eşitlik 3.33 ile verilir.

$$\lambda_L = \lim_{t \rightarrow 0^+} P[Y \leq G^{(-1)}(t) | X \leq F^{(-1)}(t)] = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{C(t, t)}{t} \quad (3.33)$$

Eşitlik 3.33'te λ_L ile gösterilen alt kuyruk bağımlılığı eğer varsa, $t \rightarrow 0^+$ iken X değişkeninin F dağılım fonksiyonunun $100t$. yüzdeler diliminden küçük ya da eşit olması koşuluyla, Y değişkeninin G dağılım fonksiyonunun $100t$. yüzdeler diliminden küçük ya da eşit olma koşullu olasılığının sınırındadır. X ve Y sürekli rastgele değişkenleri için üst kuyruk bağımlılığı ise Eşitlik 3.34 ile verilir.

$$\lambda_U = \lim_{t \rightarrow 1^-} P[Y > G^{(-1)}(t) | X > F^{(-1)}(t)] = 2 - \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{1 - C(t, t)}{1 - t} \quad (3.34)$$

Eşitlik 3.34'te λ_U ile gösterilen üst kuyruk bağımlılığı eğer varsa, $t \rightarrow 1^-$ iken X değişkeninin F dağılım fonksiyonunun $100t$. yüzdeler diliminden büyük olması koşuluyla, Y değişkeninin G dağılım fonksiyonunun $100t$. yüzdeler diliminden büyük olma koşullu olasılığının sınırınıdır [25].

λ_U ile λ_L sırasıyla alt ve üst kuyruk bağımlılıkları $[0,1]$ arasında değerler almaktadır. Eğer λ_L veya λ_U pozitif ise X ve Y değişkenleri, sırasıyla alt (sol) veya üst (sağ) kuyruk bağımlılığına sahiptir. $\lambda_L = 0$ ve $\lambda_U = 0$ olursa X ve Y değişkenlerinin kuyrukları bağımsızdır. Eğer $\lambda_U = \lambda_L$ ise X ve Y değişkenlerinin simetrik kuyruk bağımlılığı olduğu kabul edilmektedir. Aksi durumda ($\lambda_U \neq \lambda_L$) bağımlılık yapısı asimetriktir. Eğer $\lambda_L > 0$ ise büyük kayıplar aynı anda meydana gelme eğilimindedir. $\lambda_U > 0$ ise büyük kazançlar aynı anda meydana gelme eğilimindedir [35].

Çizelge 3.1'de yaygın olarak kullanılan kopulaların bazı özellikleri hakkında bilgiler özetlenmiştir[36].

Çizelge 3.1. Bazı Kopulalar ve Özellikleri

Kopula Türleri	Eliptik Kopula		Arşimet Kopula		
	Gauss	t	Gumbel	Clayton	Frank
Simülasyon Kolaylığı	Kolay	Kolay	Zor	Zor	Zor
Kuyruk Bağımlılığı	Hayır	Evet	Evet	Evet	Hayır
Kuyruk Simetrisi	Simetrik	Simetrik	Asimetrik	Asimetrik	Simetrik
Negatif Bağımlılık	Evet	Evet	Hayır	Hayır	Evet
Yapı Simetrisi	Asimetrik		Simetrik		

Çizelge 3.2'de kopulalara ait Kendall'ın τ değerleri yer almaktadır[33].

Çizelge 3.2. Bazı Kopulalar ve Bağımlılıkları

Kopula	Kendall'ın τ 'su
Gaussian	$\frac{2}{\pi} \arcsin(\theta)$
Student t	$\frac{2}{\pi} \arcsin(\theta)$
Clayton	$\frac{\theta}{\theta + 2}$
Gumbel	$1 - \frac{1}{\theta}$
Frank	$D_1(\theta) = \int_0^\theta \frac{x/\theta}{\exp(x)-1} dx$ olmak üzere $1 - \frac{4}{\theta} + 4 \frac{D_1(\theta)}{\theta}$
Joe	$1 + \frac{4}{\theta^2} \int_0^1 x \log(x)(1-x)^{2(1-\theta)/\theta} dt$
BB1	$1 - \frac{2}{\delta(\theta + 2)}$
BB6	$1 + \frac{4}{\delta\theta} \int_0^1 -\log(-(1-t)^\theta + 1) (1-t - (1-t)^{-\theta} + (1-t)^{-\theta}t) dt$
BB7	$1 + 4 \int_0^1 ((1 - (1-t)^\theta)^{-\delta} - 1)/(-\theta\delta(1-t)^{\theta-1}(1 - (1-t)^\theta)^{-\delta-1}) dt$
BB8	$1 + \frac{4}{\theta\delta} \int_0^1 -\log\left(\frac{(1-t\delta)^\theta - 1}{(1-\delta)^\theta - 1}\right) (1-t\delta - (1-t\delta)^\theta + (1-t\delta)^{-\theta}t\delta) dt$
Survival Tawn-2	$A(t) = (1-\delta)(1-t) + ((1-t)^{-\theta} + (\delta t)^{-\theta})^{-1/\theta}$ olmak üzere $\int_0^1 \frac{t(1-t)A''(t)}{A(t)} dt$
Survival BB8	$1 + \frac{4}{\theta\delta} \int_0^1 -\log\left(\frac{(1-t\delta)^\theta - 1}{(1-\delta)^\theta - 1}\right) (1-t\delta - (1-t\delta)^\theta + (1-t\delta)^{-\theta}t\delta) dt$
Survival Gumbel	$1 - \frac{1}{\theta}$

Çizelge 3.2’de görüldüğü üzere BB8 kopula ile Survival BB8 kopulanın Kendall’in sıra korelasyonu aynıdır. Benzer şekilde Gumbel kopula ile Survival Gumbel kopulanın Kendall’in sıra korelasyonu da aynıdır. Bu Kendall’in sıra korelasyonunun dönüşüm altında değişmediğini göstermektedir.

Çizelge 3.3. Bazı Kopulalar ve Kuyruk Bağımlılığı

Kopula	Alt Kuyruk Bağımlılığı λ_L	Üst Kuyruk Bağımlılığı λ_U
Gaussian	-	-
Student t	$2t_{v+1}(-\sqrt{(v+1)}\sqrt{\frac{(1-\theta)}{1+\theta}})$	$2t_{v+1}(-\sqrt{(v+1)}\sqrt{\frac{(1-\theta)}{1+\theta}})$
Clayton	$2^{-1/\theta}$	-
Gumbel	-	$2 - 2^{1/\theta}$
Frank	-	-
Joe	-	$2 - 2^{1/\theta}$
BB1	$2^{-1/(\theta\delta)}$	$2 - 2^{1/\delta}$
BB6	-	$2 - 2^{1/(\theta\delta)}$
BB7	$2^{-1/\delta}$	$2 - 2^{1/\theta}$
BB8	-	$\delta = 1$ ise $2 - 2^{1/\theta}$ değilse 0
Survival Tawn-2	$1 + \delta - (\delta^\theta + 1)^{1/\theta}$	-
Survival BB8	$\delta = 1$ ise $2 - 2^{1/\theta}$ değilse 0	-
Survival Gumbel	$2 - 2^{1/\theta}$	-

Çizelge 3.3 kopula çeşitlerinin alt ve üst kuyruk bağımlılıklarına dair bilgi vermektedir[33]. Gaussian, Frank gibi kopulalar Çizelge 4.3'te görüldüğü üzere alt ve üst kuyruk bağımlılığına sahip değildir. Ancak alt ve üst kuyruk bağımlılıkları eşit olduğundan simetrik kopula olarak bilinmektedirler. Clayton, Gumbel gibi kopulalar alt veya üst kuyruk bağımlılığına sahiptir ve Çizelge 4.3'te görüldüğü üzere alt ve üst kuyruk bağımlılıkları eşit olmadığından asimetric kopulalar olarak adlandırılmaktadırlar. T-kopula ise üst ve alt kuyruk bağımlılığına sahiptir ve Çizelge 3.3'te görüldüğü üzere alt ve üst kuyruk bağımlılıkları eşit olduğundan simetrik bir kopuladır. Diğer kopulalar için Çizelge 3.3 baz alınarak benzer yorumlar yapılabilir.

4. KRİPTO PARA BİRİMLERİNE UYGULAMA

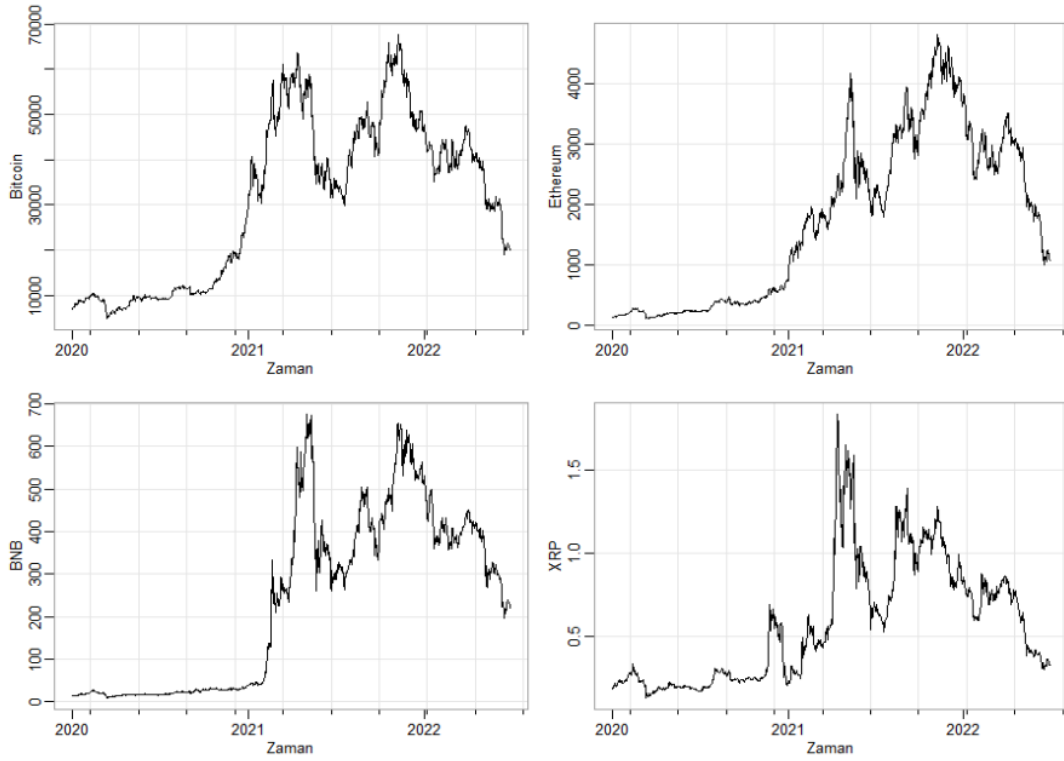
Kripto para birimleri arasındaki bağımlılık yapısını analiz etmek için kopula fonksiyonları kullanılacaktır. Bu amaçla piyasa değeri açısından en büyük hacme sahip olan kripto para birimlerinden birkaçı belirlenecektir. Belirlenen kripto para birimlerine en uygun kopula fonksiyonları bulunacaktır. Böylece kripto para birimleri arasındaki bağımlılık yapısı ve kuyruk bağımlılığı hakkında bilgi sahibi olunması amaçlanmaktadır. Tez çalışmasında R yazılımının 4.2.2 versiyonu kullanılmıştır (EK 1).

Çalışmada, kripto para borsasında yer alan ve en büyük hacme sahip olan ilk 4 kripto para birimi seçilmiştir. Bu kripto paralar Bitcoin (BTC), Ethereum (ETH), Binance Coin (BNB), Ripple (XRP) günlük verilerinden oluşmakta ve 01.01.2020-30.06.2022 tarih aralığını kapsamaktadır[37]. Veriye ait özet istatistikler Çizelge 4.1 ile verilmiştir.

Çizelge 4.1. Veriye dair özet istatistikler

	BTC	ETH	BNB	XRP
Minimum	4826	107,9	9,25	0,1360
Q_1	10675	353	22,99	0,2443
Medyan	33743	1784,9	259,69	0,4962
Ortalama	30749	1746	233,5	0,5770
Q_3	46146	2930	404,48	0,8263
Maksimum	67528	4808,4	676,56	1,8362
Çarpıklık	0.8311923	0.33171724	0.27590206	0.78347721
Basıklık	1.620356	1.773703	1.621164	2.780593

Çizelge 4.1'e bakıldığında BTC ve XRP kripto para birimlerinin çarpıklığı 0.5 değerinden büyük olduğu için dağılımların sağa çarpık olduğu söylenebilir. Kripto para birimlerinin basıklığı 3 değerinden küçük olduğu için kısa kuyruklu dağılımlar olduğu söylenebilir. Şekil 4.1'de kripto para birimlerine ait zaman serisi grafikleri yer almaktadır.



Şekil 4.1. Kripto para birimlerinin zaman serisi grafikleri

Şekil 4.1’de kripto para birimlerinin 2020-2022 yılları arasındaki fiyat değişimleri görülmektedir.

Analiz sırasında karşılaşılan R programının fonksiyonel uyarısı sebebiyle ölçeklendirme yapılmasına karar verilmiştir. Böylece kripto para birimlerine pozitif değerlerden oluşan veri değerleri için karekök dönüşümü uygulanmıştır. Log dönüşümü negatif sonuçlar getirdiği için karekök dönüşümü tercih edilmiştir. Kendall’ın sıra korelasyonu ve Spearman’ın sıra korelasyonu dönüşüm altında değişmez oldukları için ve kopula fonksiyonu da korelasyon yapısını koruduğu için yapılan bu işlem kripto para birimleri arasındaki bağımlılık yapısını elde ederken bulduğumuz kopula sonuçlarını değiştirmeyecektir.

Kripto para birimleri arasındaki Kendall’ın sıra korelasyonu (τ) ve Spearman’ın sıra korelasyonu (ρ) sırasıyla Çizelge 4.2 ve Çizelge 4.3 ile verilmiştir.

Çizelge 4.2. Kripto para birimleri arasındaki Kendall'ın sıra korelasyonu (τ)

Kendall (τ)	BTC	ETH	BNB	XRP
BTC	1			
ETH	0,8	1		
BNB	0,78	0,88	1	
XRP	0,73	0,77	0,8	1

Çizelge 4.2'ye bakıldığında kripto para birimleri arasında yüksek bir korelasyon olduğu görülmektedir. En yüksek korelasyon ETH-BNB arasındadır.

Çizelge 4.3. Kripto para birimleri arasındaki Spearman'ın sıra korelasyonu (ρ)

Spearman(ρ)	BTC	ETH	BNB	XRP
BTC	1			
ETH	0,91	1		
BNB	0,92	0,97	1	
XRP	0,89	0,93	0,95	1

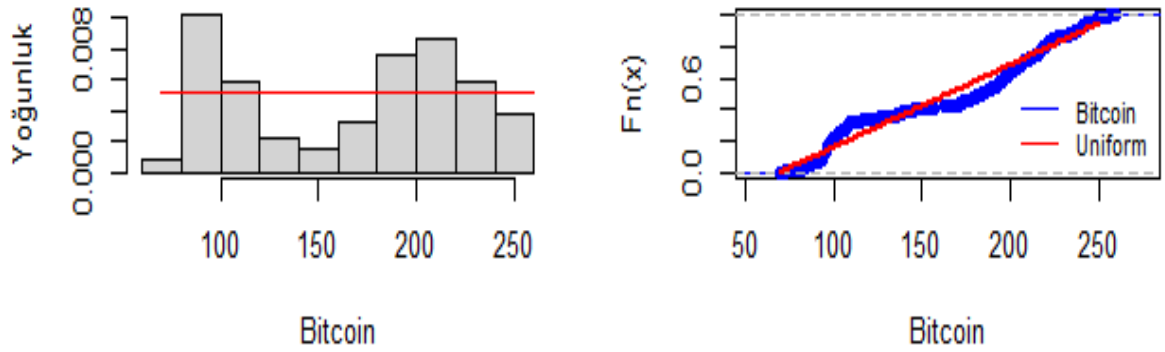
Çizelge 4.3'e bakıldığında kripto para birimleri arasında yüksek bir korelasyon olduğu görülmektedir. En yüksek korelasyon ETH-BNB arasındadır.

Kripto para birimlerine en uygun marjinal dağılımları belirleyebilmek amacıyla uyum iyiliği istatistiklerine ve kriterlerine bakılmıştır. Uyum iyiliği istatistikleri olarak Kolmogorov-Smirnov istatistiği, Cramer-von Mises istatistiği ve Anderson Darling istatistiği kullanılmıştır. Uyum iyiliği kriteri olarak Akaike Bilgi Kriteri (AIC) ve Bayes Bilgi Kriteri (BIC) kullanılmıştır. En küçük değer baz alınarak en uygun marjinal dağılım seçilmiştir.

Çizelge 4.4. Bitcoin kripto para biriminin dağılım uygunluğu

BTC	Uyum İyiliği İstatistikleri			Uyum İyiliği Kriterleri	
	Kolmogorov Smirnov İstatistiği	Cramer-von Mises İstatistiği	Anderson Darling İstatistiği	Akaike Bilgi Kriteri(AIC)	Bayes Bilgi Kriteri(BIC)
Normal	0,1668932	6,2085777	37,2914991	9931,220	9940,851
Logistik	0,1672954	5,5841490	35,7830111	10034,06	10043,69
Cauchy	0,173974	7,966931	56,748133	10491,78	10501,41
Log-Normal	0,1755205	8,4818113	47,9077198	9998,736	10008,367
Üstel	0,3686555	35,8768048	182,8567428	11152,52	11157,33
Gamma	0,1607165	7,6670558	43,9769082	9956,556	9966,188
Uniform	0,1120421	2,9353473	Inf	9578,330	9587,961
Weibull	0,1730459	6,2526157	38,0528061	9886,575	9896,206
Log-Logistik	0,1632908	7,2875966	45,3194987	10094,43	10104,06

Çizelge 4.4'te Bitcoin kripto para birimine en uygun marjinal dağılımı bulabilmek için elde edilen uyum iyiliği istatistikleri ve kriterlerine ait değerler yer almaktadır. En küçük değerler baz alınarak Bitcoin para biriminin uniform dağılımına uyduğu görülmektedir.



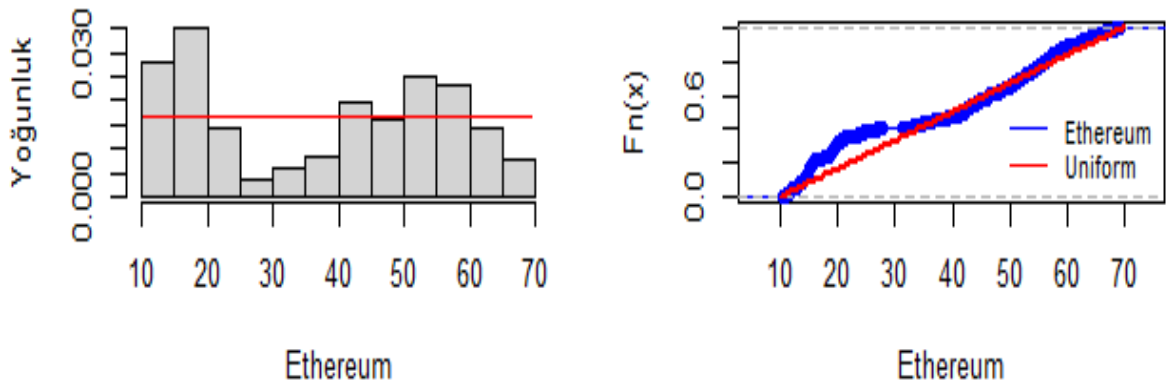
Şekil 4.2. Bitcoin kripto para birimine ait grafikler

Bitcoin kripto para birimine ait histogram ve kümülatif dağılım fonksiyonu Şekil 4.2'de görülmektedir.

Çizelge 4.5. Ethereum para biriminin dağılım uygunluğu

ETH	Uyum İyiliği İstatistikleri			Uyum İyiliği Kriterleri	
	Kolmogorov Smirnov İstatistiği	Cramer-von Mises İstatistiği	Anderson Darling İstatistiği	Akaike Bilgi Kriteri(AIC)	Bayes Bilgi Kriteri(BIC)
Normal	0,1580657	5,6414027	34,7032428	7900,920	7910,551
Logistik	0,1554244	5,2324485	33,5096126	8006,986	8016,618
Cauchy	0,1634928	6,1584134	46,3699812	8510,650	8520,281
Log-Normal	0,1838796	7,9998508	45,2010229	7938,648	7948,279
Üstel	0,2527536	17,8552459	102,5419230	8438,402	8443,217
Gamma	0,1616906	7,0572377	40,5619597	7879,002	7888,633
Uniform	0,1608635	4,2434378	Inf	7440,036	7449,668
Weibull	0,1509153	6,4093452	38,2709738	7829,477	7839,109
Log-Logistik	0,1579997	7,0096927	42,8872768	8035,562	8045,193

Çizelge 4.5'te Ethereum kripto para birimine en uygun marjinal dağılımı bulabilmek için elde edilen uyum iyiliği istatistikleri ve kriterlerine ait değerler yer almaktadır. En küçük değerler baz alınarak Ethereum para biriminin uniform dağılıma uyduğu görülmektedir.



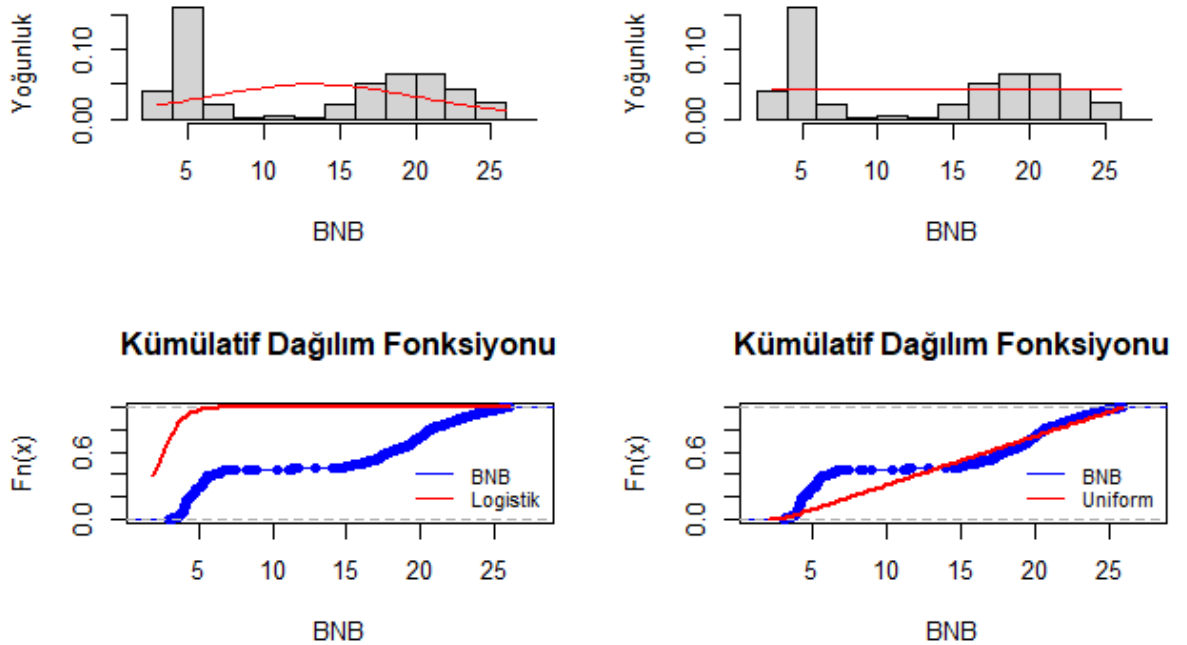
Şekil 4.3. Ethereum kripto para birimine ait grafikler

Ethereum kripto para birimine ait histogram ve kümülatif dağılım fonksiyonu Şekil 4.3'te görülmektedir.

Çizelge 4.6. BNB para biriminin dağılım uygunluğu

BNB	Uyum İyiliği İstatistikleri			Uyum İyiliği Kriterleri	
	Kolmogorov Smirnov İstatistiği	Cramer-von Mises İstatistiği	Anderson Darling İstatistiği	Akaike Bilgi Kriteri(AIC)	Bayes Bilgi Kriteri(BIC)
Normal	0,2288212	11,2751671	66,3248107	6341,057	6350,689
Logistik	0,222275	10,299581	61,702188	6462,421	6472,052
Cauchy	0,2441804	11,1712800	75,4602860	7007,699	7017,330
Log-Normal	0,2315399	13,6716360	76,7716563	6285,259	6294,890
Üstel	0,2217871	13,1539612	80,5735791	6523,252	6528,068
Gamma	0,208911	12,904681	73,344037	6240,289	6249,921
Uniform	0,2753205	13,0445275	Inf	5720,712	5730,343
Weibull	0,2147436	12,8039999	73,8502297	6210,772	6220,403
Log-Logistik	0,21048	12,25291	71,01449	6408,440	6418,071

Çizelge 4.6’da BNB kripto para birimine en uygun marjinal dağılımı bulabilmek için elde edilen uyum iyiliği istatistikleri ve kriterlerine ait değerler yer almaktadır. En küçük değerler baz alınarak BNB para biriminin logistik ve uniform dağılımına uyduğu görülmektedir. Daha net bir sonuca ulaşabilmek için BNB kripto para birimine ait histogram ve kümülatif dağılım fonksiyonu grafiğine bakılmalıdır.



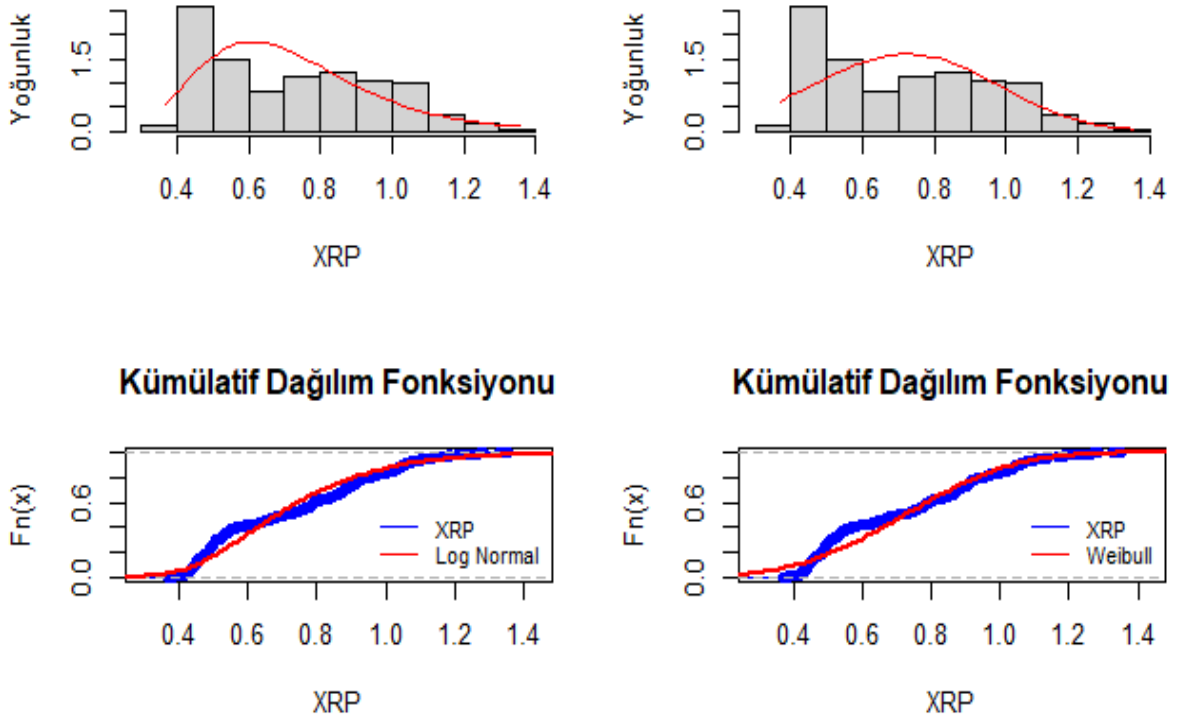
Şekil 4.4. BNB kripto para birimine ait grafikler

Şekil 4.4'e bakıldığında uniform dağılımın BNB kripto para birimine daha çok uyduğu görülmektedir.

Çizelge 4.7. XRP para biriminin dağılım uygunluğu

XRP	Uyum İyiliği İstatistikleri			Uyum İyiliği Kriterleri	
	Kolmogorov Smirnov İstatistiği	Cramer-von Mises İstatistiği	Anderson Darling İstatistiği	Akaïke Bilgi Kriteri(AIC)	Bayes Bilgi Kriteri(BIC)
Normal	0,1470372	3,6587717	22,9715033	-33,76428	-24,13300
Logistik	0,1343038	3,5637227	23,2184192	44,30812	53,93940
Cauchy	0,1771274	5,0551607	38,1012929	507,7461	517,3774
Log-Normal	0,1257017	3,8095040	22,5161060	-115,5396	-105,9083
Üstel	0,4203692	38,4969107	191,2214298	1231,083	1235,899
Gamma	0,1334349	3,6258433	21,8502699	-106,92382	-97,29254
Uniform	0,2212752	22,6602468	Inf	-21,25954	-11,62826
Weibull	0,1379879	3,1252305	20,0161873	-58,77330	-49,14202
Log-Logistik	0,1240778	3,7196649	23,0763974	-19,00633	-9,37505

Çizelge 4.7'de XRP kripto para birimine en uygun marjinal dağılımı bulabilmek için elde edilen uyum iyiliği istatistikleri ve kriterlerine ait değerler yer almaktadır. En küçük değerler baz alınarak XRP para biriminin log normal ve weibull dağılıma uyduğu görülmektedir. Daha net bir sonuca ulaşabilmek için XRP kripto para birimine ait histogram ve kümülatif dağılım fonksiyonu grafiğine bakılmalıdır.



Şekil 4.5. XRP kripto para birimine ait grafikler

Şekil 4.5'e bakıldığında log normal dağılımın XRP kripto para birimine daha çok uyduğu görülmektedir.

Çizelge 4.8 ile kripto para birimleri için en uygun marjinal dağılımlar yer almaktadır.

Çizelge 4.8. Kripto Para Birimlerine En Uygun Marjinal Dağılımlar

	BTC	ETH	BNB	XRP
Dağılım	Uniform	Uniform	Uniform	Log Normal

Kripto para birimlerinin marjinal dağılımları belirlendikten sonra ortak dağılımlarının hangi kopula fonksiyonuna uygun olduğunu belirlenecektir. Bu durumda 4 kripto para birimi ikili olarak incelenecektir ve böylece $C\binom{4}{2} = 6$ farklı ortak dağılım ortaya çıkacaktır.

R yazılımında, VineCopula kütüphanesinde yer alan BiCopSelect() fonksiyonunda tanımlı olan 40 kopula çeşidi bulunmaktadır. Her kripto para çiftinin ortak dağılımına en uygun kopula fonksiyonunu bulmak için BiCopSelect() fonksiyonunda tanımlı olan 40 kopula fonksiyonu denenmektedir. En küçük AIC ve BIC değerine sahip kopula fonksiyonu, kripto para çiftinin ortak dağılımına en uygun kopula fonksiyonu olarak seçilmektedir.

Çizelge 4.9’da kripto para çiftlerinin ortak dağılımlarına en uygun kopula fonksiyonunun parametreleri, Kendall’ın sıra korelasyonu (τ), AIC, BIC, alt ve üst kuyruk bağımlılık değerleri verilmiştir.

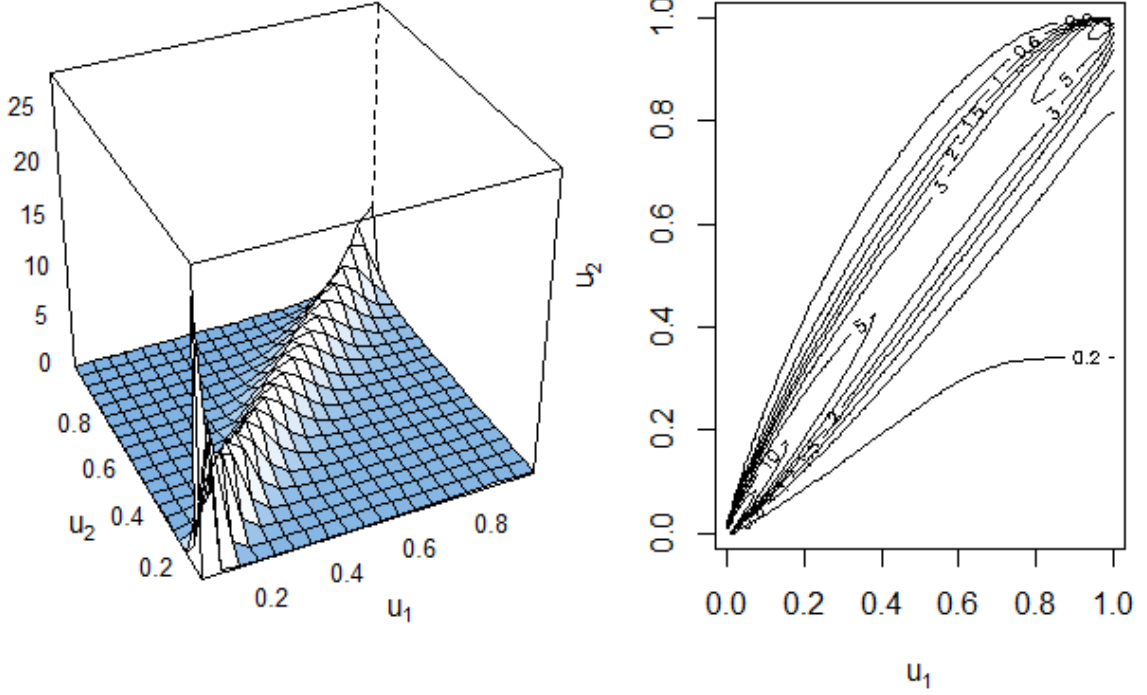
Çizelge 4.9. Ortak dağılımlara uygun kopula fonksiyonlarının bilgileri

	BTC-ETH	BTC-BNB	BTC-XRP	ETH-BNB	ETH-XRP	BNB-XRP
Kopula	Survival Tawn-2	Survival Tawn-2	Survival Tawn-2	Frank	Survival BB8	Survival Gumbel
Parametre1	6,88	5,19	3,64	29,59	6	4,34
Parametre2	0,86	0,9	0,93		0,92	
Tau (τ)	0,75	0,74	0,69	0,87	0,68	0,77
AIC	-2116,823	-1914,174	-1486,163	-2674,221	-1566,672	-1961,616
BIC	-2107,192	-1904,543	-1476,532	-2669,405	-1557,041	-1956,801
Lower	0,8151921	0,8064631	0,7608372	0	0	0,826995
Upper	0	0	0	0	0	0

Çizelge 4.9’a bakıldığında BTC-ETH, BTC-BNB, BTC-XRP ve BNB-XRP ortak dağılımlarına uygun bulunan kopula fonksiyonları alt kuyruk bağımlılığına sahiptir ($\lambda_L > 0$). Bu durumda büyük kayıpların aynı anda meydana gelme eğilimi vardır.

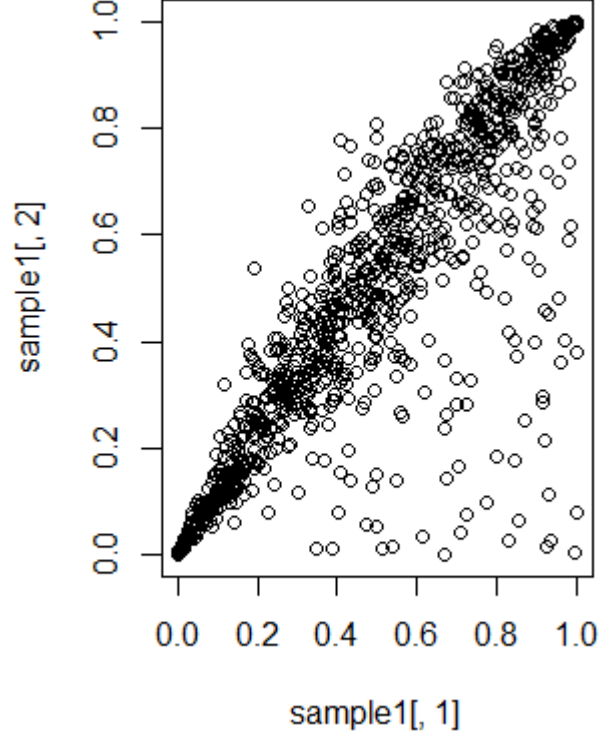
Ortak dağılımlara uygun bulunan kopula fonksiyonlarının korelasyon değerleri kripto paralar arasındaki korelasyon değerlerine benzerdir. Korelasyon yapısı, marjinal dağılımlara bakılmaksızın kopula tarafından yakalanmıştır.

BTC-ETH ortak dağılımının Survival Tawn-2 kopula olduğu bulunmuştur. Şekil 5.6’da ortak dağılımdan elde edilen Survival Tawn-2 kopula için parametre1 ve parametre2 kullanılarak kopula yoğunluğunun 3 boyutlu yüzey grafiği ve kontur grafiği yer almaktadır.



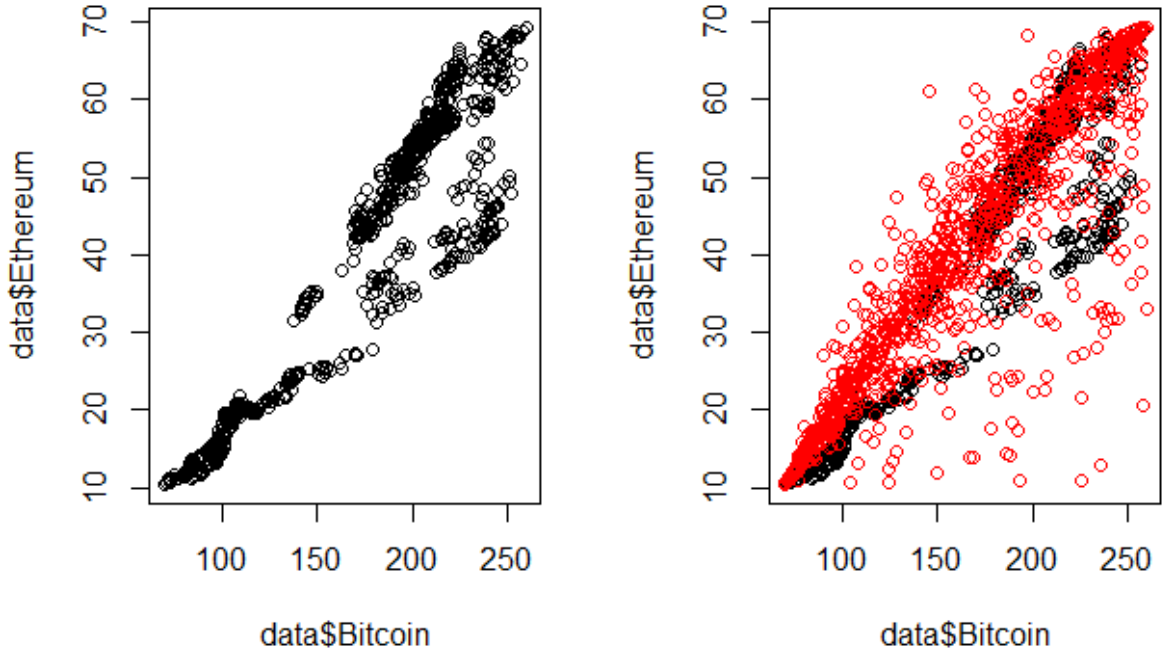
Şekil 4.6. Survival Tawn-2 kopula (BTC-ETH) için kopula yoğunluğunun 3 boyutlu yüzey grafiği ve kontur (contour) grafikleri (Parametre1 = 6,88 ve parametre2 = 0,86) Şekil 4.6’da ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunun 3 boyutlu yüzey grafiği ve 2 boyutlu kontur grafiği yer almaktadır. Kontur grafiğinden pozitif yönlü ve yüksek düzeyli bir ilişki gözlemlenmektedir.

Şekil 4.7’de Survival Tawn-2 kopyuladan alınan örneklemin saçılım grafiği verilmiştir. İncelenen örneklemin Kendall’in sıra korelasyonu 0,7261582 bulunmuştur. Bu korelasyon ile BTC ile ETH para birimlerinin ortak dağılımından elde edilen kopyulanın Kendall’in sıra korelasyonu (0.75) benzerdir. BTC ile ETH arasındaki Kendall’in sıra korelasyonu 0.8’dir.



Şekil 4.7. Survival Tawn-2 kopuladan alınan örneklemin saçılım grafiği (Parametre1 = 6,88 ; parametre2 = 0,86 ; n = 1000)

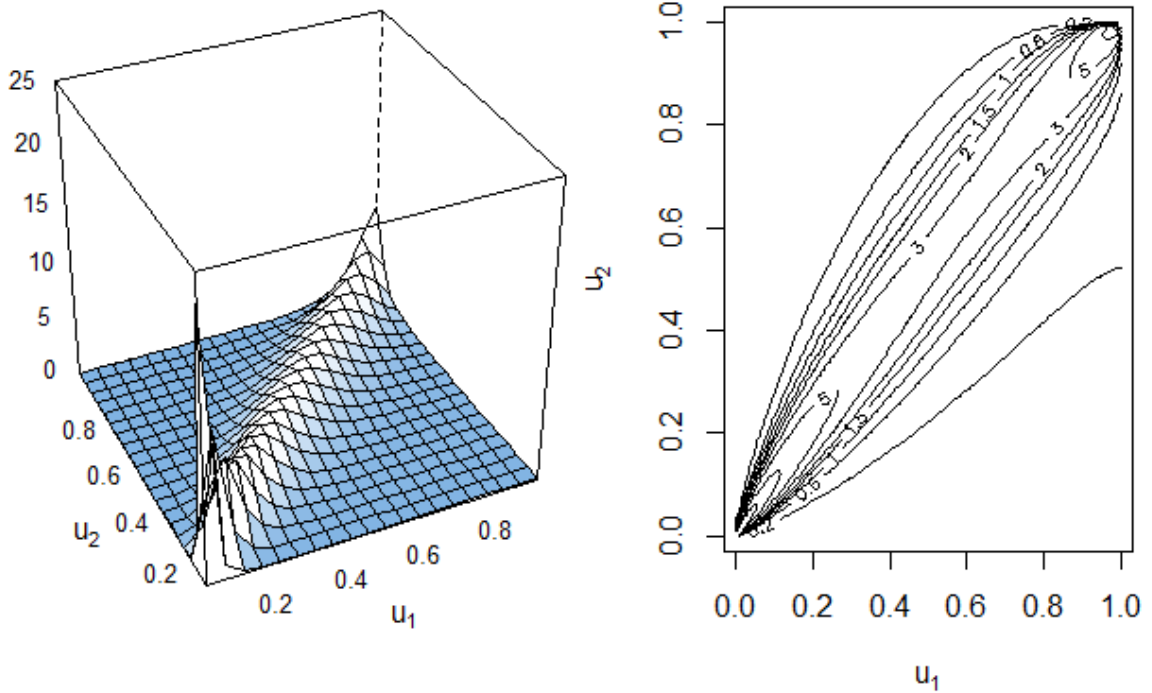
Marjinaleri uniform olan, Survival Tawn-2 kopula aracılığıyla birbirine bağlanan iki değişkenli dağılım oluşturulmuştur. Bu dağılımdan alınan örneklem ile BTC-ETH grafiğinin uyduğu Şekil 4.8’de görülmektedir.



Şekil 4.8. BTC-ETH grafiği ve belirlenen kopula ve marjinal dağılımlardan elde edilen dağılımın grafiği

Şekil 4.8’de siyah noktalar BTC-ETH kripto para birimlerinin saçılım grafiğini göstermektedir. Kırmızı noktalar ise marjinaleri uniform olan, Survival Tawn-2 kopula aracılığıyla birbirine bağlanan iki değişkenli dağılımdan alınan örnekleme göstermektedir.

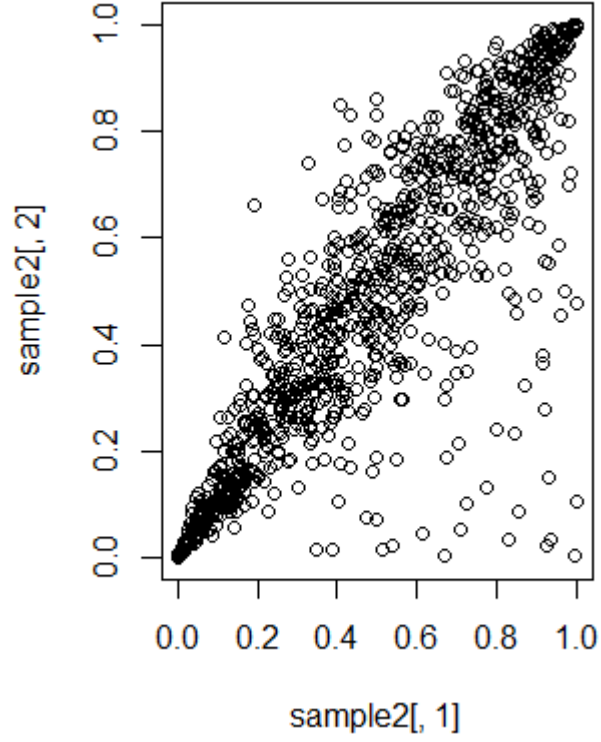
BTC-BNB ortak dağılımının Survival Tawn-2 kopula olduğu bulunmuştur. Şekil 4.9’da ortak dağılımdan elde edilen Survival Tawn-2 kopula için parametre1 ve parametre2 kullanılarak kopula yoğunluğunun 3 boyutlu yüzey grafiği ve kontur grafiği yer almaktadır.



Şekil 4.9. Survival Tawn-2 kopula (BTC-BNB) için kopula yoğunluğunun 3 boyutlu yüzey grafiği ve kontur (contour) grafikleri (Parametre1 = 5,19 ve parametre2 = 0,9)

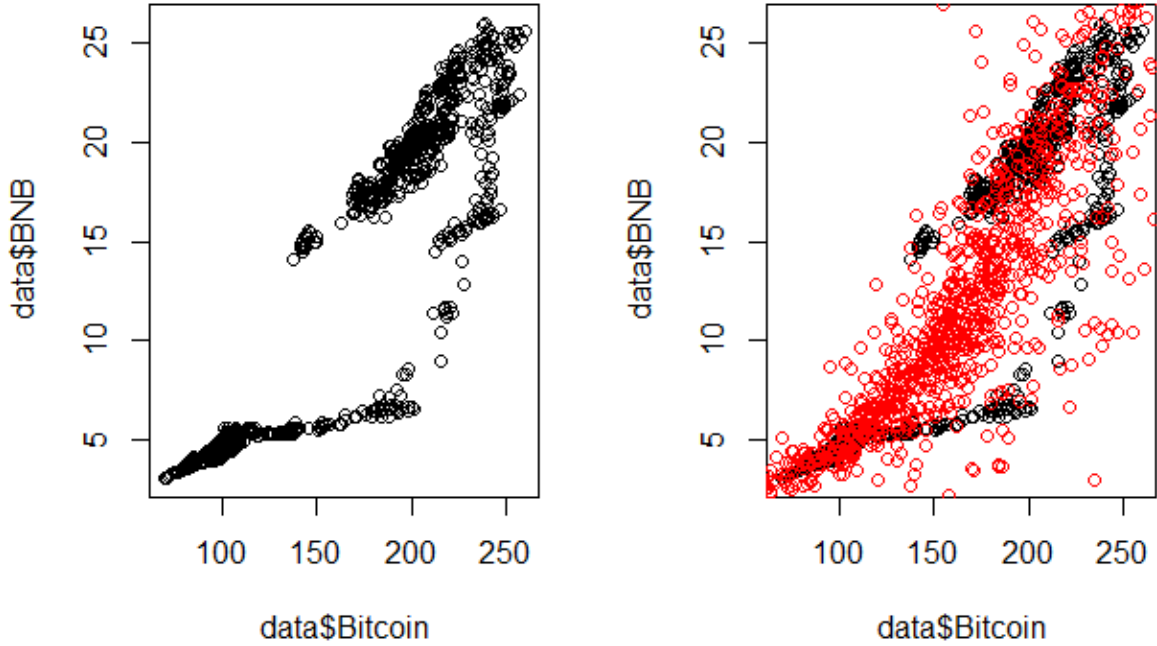
Şekil 4.9’da ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunun 3 boyutlu yüzey grafiği ve 2 boyutlu kontur grafiği yer almaktadır. Kontur grafiğinden pozitif yönlü ve yüksek düzeyli bir ilişki gözlemlenmektedir.

Şekil 4.10’da Survival Tawn-2 kopuladan alınan örneklemin saçılım grafiği verilmiştir. İncelenen örneklemin Kendall’in sıra korelasyonu 0,7131171 bulunmuştur. Bu korelasyon ile BTC ile BNB para birimlerinin ortak dağılımından elde edilen kopulanın Kendall’in sıra korelasyonu (0.74) benzerdir. BTC ile BNB arasındaki Kendall’in sıra korelasyonu 0,78’dir.



Şekil 4.10. Survival Tawn-2 kopuladan alınan örneklemin saçılım grafiği (Parametre1 = 5,19 ; parametre2 = 0,9 ; n = 1000)

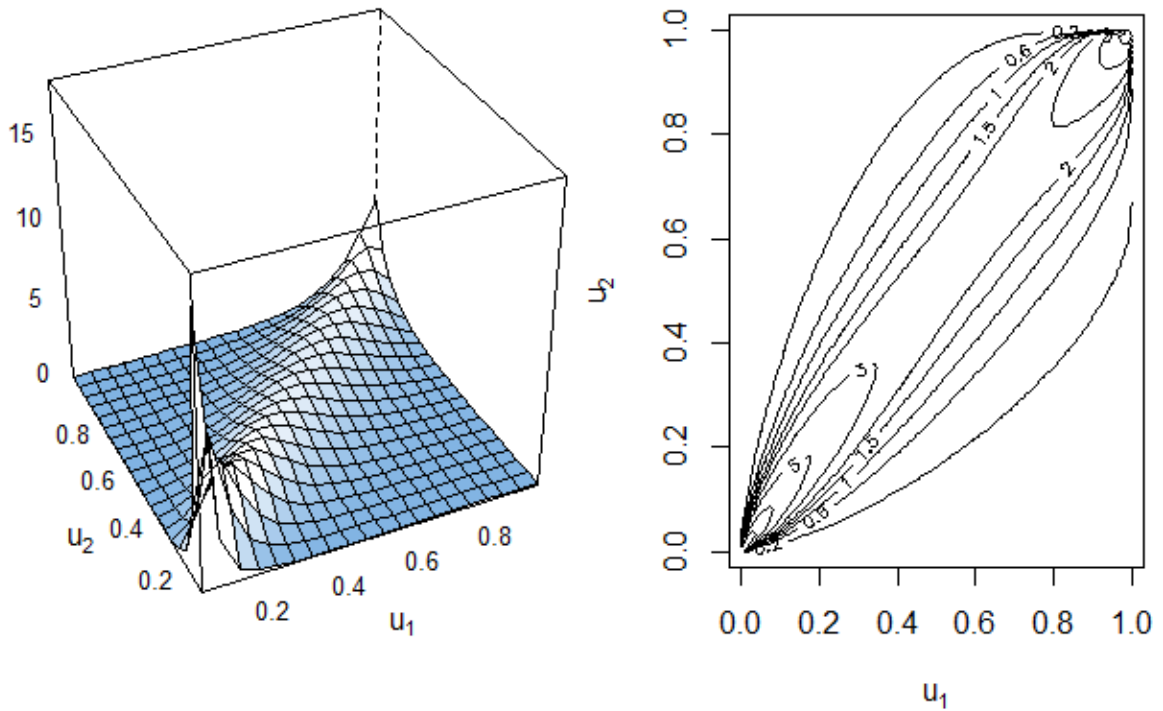
Marjinalleri uniform olan, Survival Tawn-2 kopula aracılığıyla birbirine bağlanan iki değişkenli dağılım oluşturulmuştur. Bu dağılımdan alınan örneklem ile BTC-BNB grafiğinin uyduğu Şekil 4.11’de görülmektedir.



Şekil 4.11. BTC-BNB grafiği ve belirlenen kopula ve marjinal dağılımlardan elde edilen dağılımın grafiği

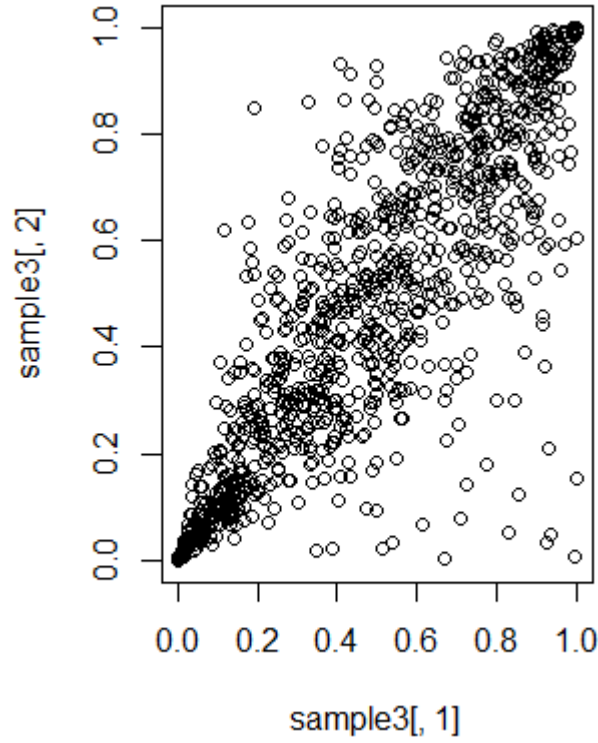
Şekil 4.11’de siyah noktalar BTC-BNB kripto para birimlerinin saçılım grafiğini göstermektedir. Kırmızı noktalar ise marjinaleri uniform olan, Survival Tawn-2 kopula aracılığıyla birbirine bağlanan iki değişkenli dağılımdan alınan örnekleme göstermektedir.

BTC-XRP ortak dağılımının Survival Tawn-2 kopula olduğu bulunmuştur. Şekil 4.12’de ortak dağılımdan elde edilen Survival Tawn-2 kopula için parametre1 ve parametre2 kullanılarak kopula yoğunluğunun 3 boyutlu yüzey grafiği ve kontur grafiği yer almaktadır.



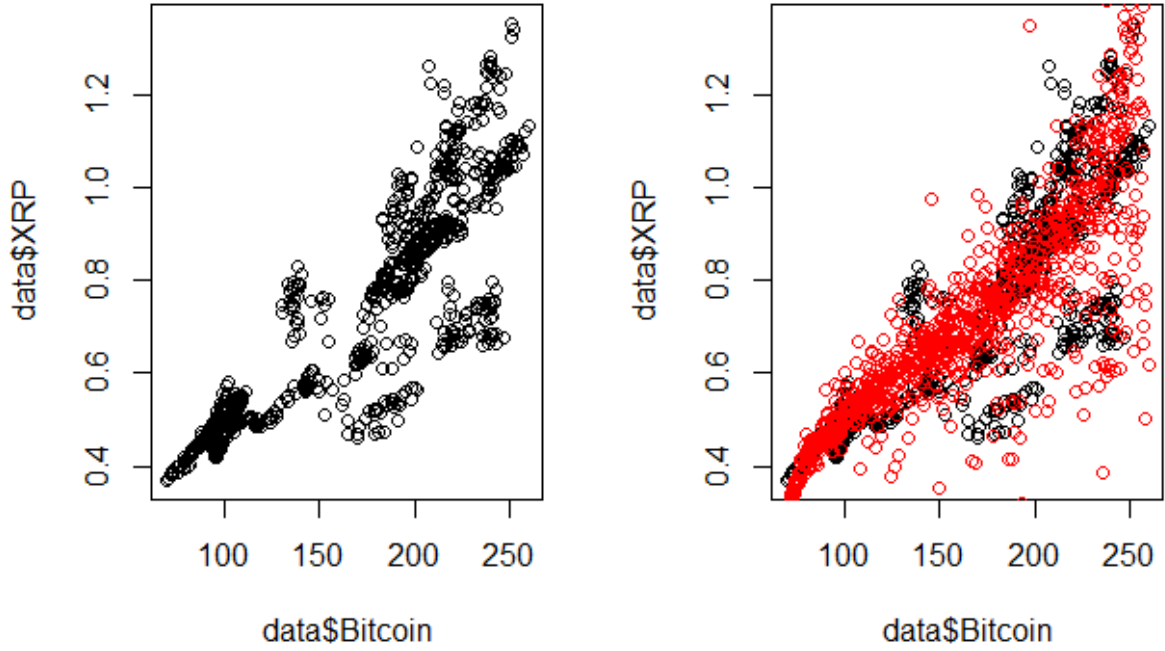
Şekil 4.12. Survival Tawn-2 kopula (BTC-BNB) için kopula yoğunluğunun 3 boyutlu yüzey grafiği ve kontur (contour) grafikleri (Parametre1 = 3,64 ve parametre2 = 0,93) Şekil 4.12’de ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunun 3 boyutlu yüzey grafiği ve 2 boyutlu kontur grafiği yer almaktadır. Kontur grafiğinden pozitif yönlü ve yüksek düzeyli bir ilişki gözlemlenmektedir.

Şekil 4.13’te Survival Tawn-2 kopuladan alınan örneklemin saçılım grafiği verilmiştir. İncelenen örneklemin Kendall’in sıra korelasyonu 0,6606887 bulunmuştur. Bu korelasyon ile BTC ile XRP para birimlerinin ortak dağılımından elde edilen kopulanın Kendall’in sıra korelasyonu (0.69) benzerdir. BTC ile XRP arasındaki Kendall’in sıra korelasyonu 0,73’tür.



Şekil 4.13. Survival Tawn-2 kopuladan alınan örneklemin saçılım grafiği (Parametre1 = 3,64 ; parametre2 = 0,93; n = 1000)

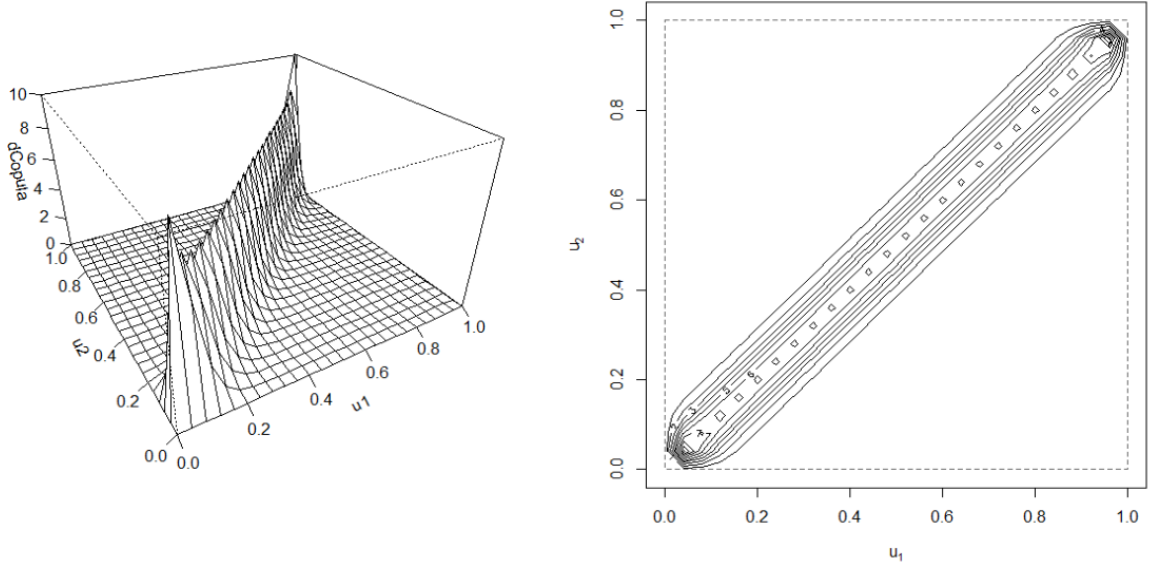
Marjinaleri sırasıyla uniform ve log normal olan, Survival Tawn-2 kopula aracılığıyla birbirine bağlanan iki değişkenli dağılım oluşturulmuştur. Bu dağılımdan alınan örneklem ile BTC-XRP grafiğinin uyduğu Şekil 4.14'te görülmektedir.



Şekil 4.14. BTC-XRP grafiği ve belirlenen kopula ve marjinal dağılımlardan elde edilen dağılımın grafiği

Şekil 4.14'te siyah noktalar BTC-XRP kripto para birimlerinin saçılım grafiğini göstermektedir. Kırmızı noktalar ise marjinaleri sırasıyla uniform ve log normal olan, Survival Tawn-2 kopula aracılığıyla birbirine bağlanan iki değişkenli dağılımdan alınan örnekleme göstermektedir.

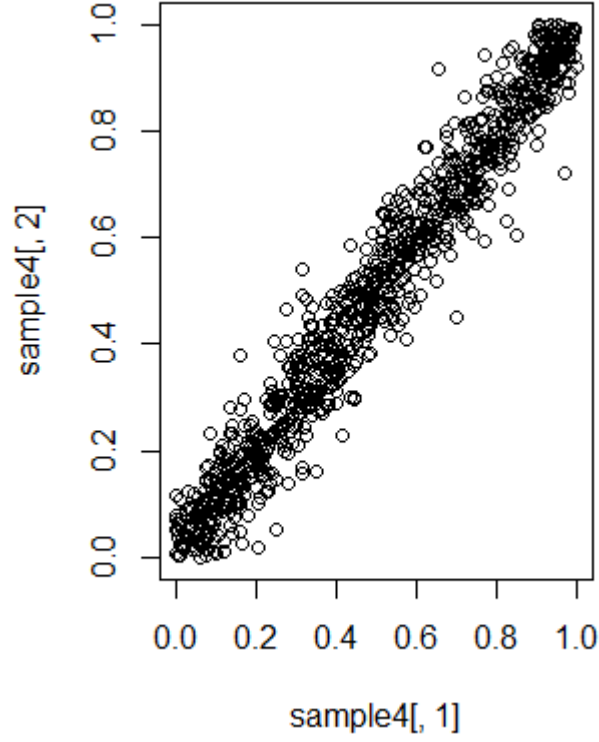
ETH-BNB ortak dağılımının Frank kopula olduğu bulunmuştur. Şekil 4.15'te ortak dağılımdan elde edilen frank kopula için parametre1 kullanılarak kopula yoğunluğunun 3 boyutlu yüzey grafiği ve kontur grafiği yer almaktadır.



Şekil 4.15. Frank kopula (ETH-BNB) için kopula yoğunluğunun 3 boyutlu yüzey grafiği ve kontur (contour) grafikleri (Parametre1 = 29,59)

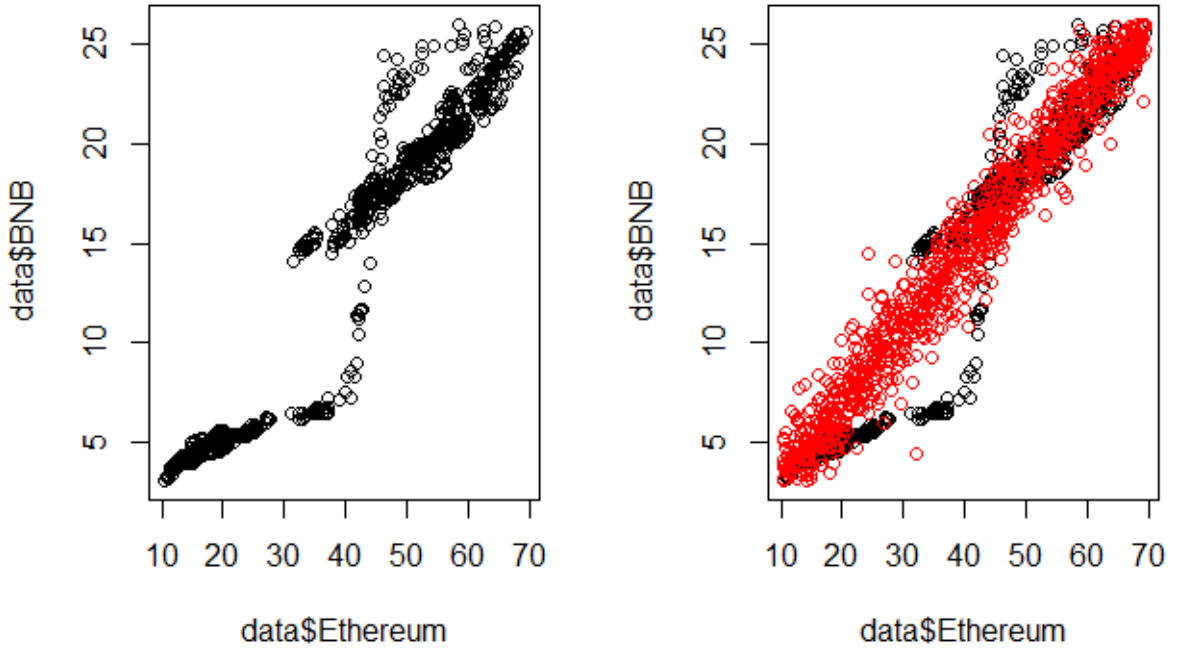
Şekil 4.15'te ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunun 3 boyutlu yüzey grafiği ve 2 boyutlu kontur grafiği yer almaktadır. Kontur grafiğinden pozitif yönlü ve yüksek düzeyli bir ilişki gözlemlenmektedir.

Şekil 4.16'da frank kopuladan alınan örneklemin saçılım grafiği verilmiştir. İncelenen örneklemin Kendall'in sıra korelasyonu 0,8664865 bulunmuştur. Bu korelasyon ile ETH ile BNB para birimlerinin ortak dağılımından elde edilen kopulanın Kendall'in sıra korelasyonu (0.87) benzerdir. ETH ile BNB arasındaki Kendall'in sıra korelasyonu 0,88'dir.



Şekil 4.16. Frank kopuladan alınan örneklemin saçılım grafiği (Parametre1 = 29,59 ; n = 1000)

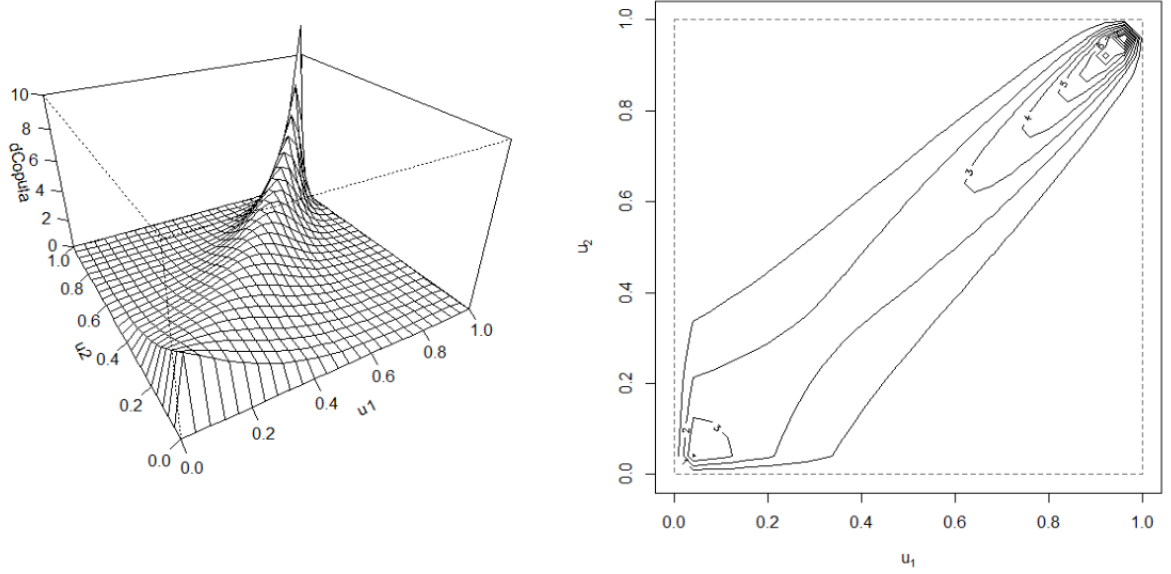
Marjinalleri uniform olan, frank kopula aracılığıyla birbirine bağlanan iki değişkenli dağılım oluşturulmuştur. Bu dağılımdan alınan örneklem ile ETH-BNB grafiğinin uyduğu Şekil 4.17’de görülmektedir.



Şekil 4.17. ETH-BNB grafiği ve belirlenen kopula ve marjinal dağılımlardan elde edilen dağılımın grafiği

Şekil 4.17’de siyah noktalar ETH-BNB kripto para birimlerinin saçılım grafiğini göstermektedir. Kırmızı noktalar ise marjinaleri uniform olan, frank kopula aracılığıyla birbirine bağlanan iki değişkenli dağılımdan alınan örnekleme göstermektedir.

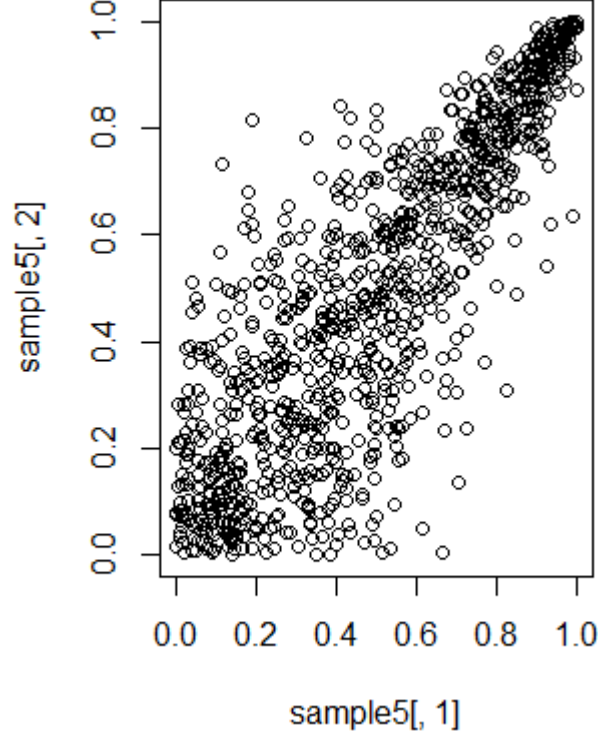
ETH-XRP ortak dağılımının Survival BB8 kopula olduğu bulunmuştur. Şekil 4.18’de ortak dağılımdan elde edilen Survival BB8 kopula için parametre1 ve parametre2 kullanılarak kopula yoğunluğunun 3 boyutlu yüzey grafiği ve kontur grafiği yer almaktadır.



Şekil 4.18. Survival BB8 kopula (ETH-XRP) için kopula yoğunluğunun 3 boyutlu yüzey grafiği ve kontur (contour) grafikleri (Parametre1 = 6 ve parametre2 = 0,92)

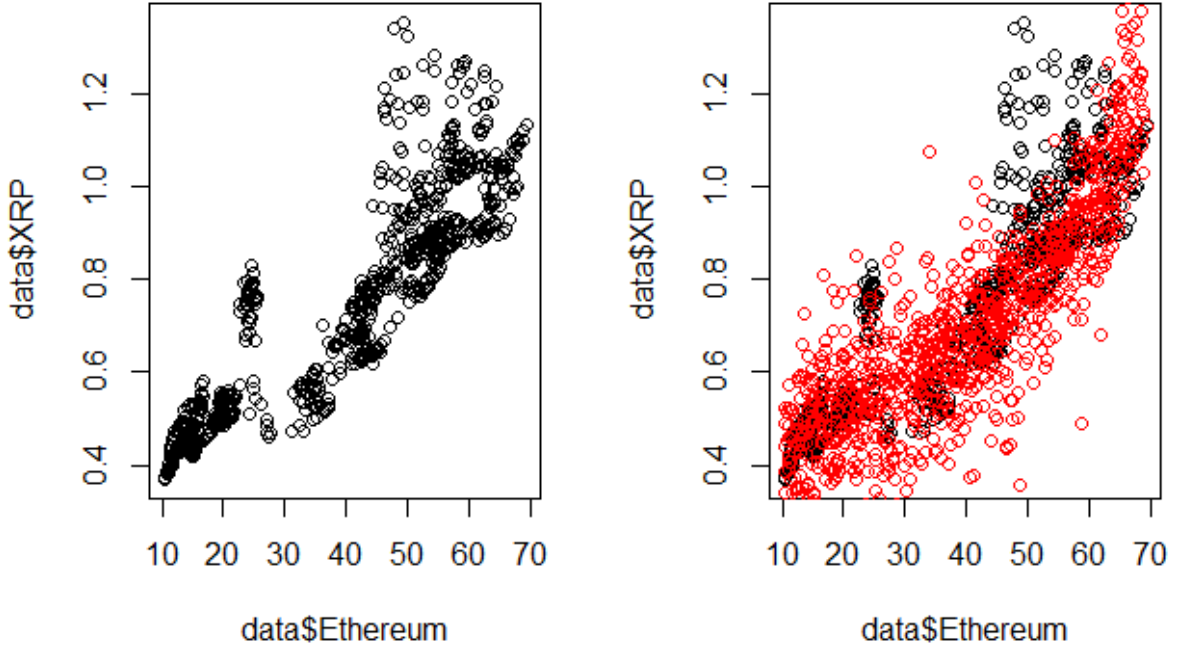
Şekil 4.18’de ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunun 3 boyutlu yüzey grafiği ve 2 boyutlu kontur grafiği yer almaktadır. Kontur grafiğinden pozitif yönlü ve yüksek düzeyli bir ilişki gözlemlenmektedir.

Şekil 4.19’da Survival BB8 kopyuladan alınan örneklemin saçılım grafiği verilmiştir. İncelenen örneklemin Kendall’in sıra korelasyonu 0,6491852 bulunmuştur. Bu korelasyon ile ETH ile XRP para birimlerinin ortak dağılımından elde edilen kopyulanın Kendall’in sıra korelasyonu (0.68) benzerdir. ETH ile XRP Kendall’in sıra korelasyonu 0,77’dir.



Şekil 4.19. Survival BB8 kopuladan alınan örneklemin saçılım grafiği (Parametre1 = 6 ; parametre2 = 0,92; n = 1000)

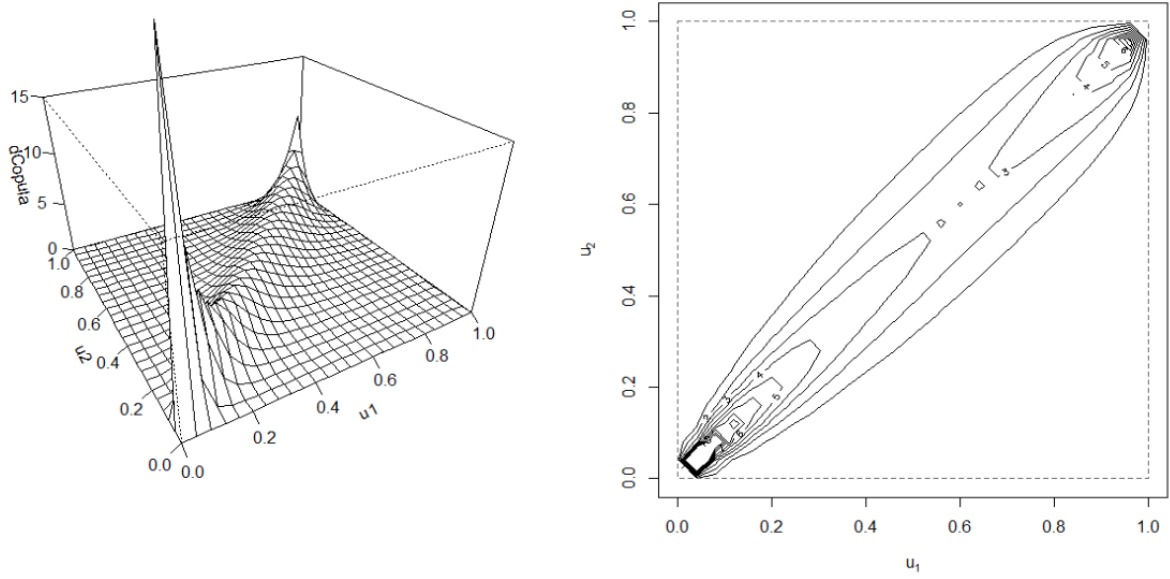
Marjinaleri sırasıyla uniform ve log normal olan, Survival BB8 kopula aracılığıyla birbirine bağlanan iki değişkenli dağılım oluşturulmuştur. Bu dağılımdan alınan örneklem ile ETH-XRP grafiğinin uyduğu Şekil 4.20’de görülmektedir.



Şekil 4.20. ETH-XRP grafiği ve belirlenen kopula ve marjinal dağılımlardan elde edilen dağılımın grafiği

Şekil 4.20’de siyah noktalar ETH-XRP kripto para birimlerinin saçılım grafiğini göstermektedir. Kırmızı noktalar ise marjinaleri sırasıyla uniform ve log normal olan, Survival BB8 kopula aracılığıyla birbirine bağlanan iki değişkenli dağılımdan alınan örnekleme göstermektedir.

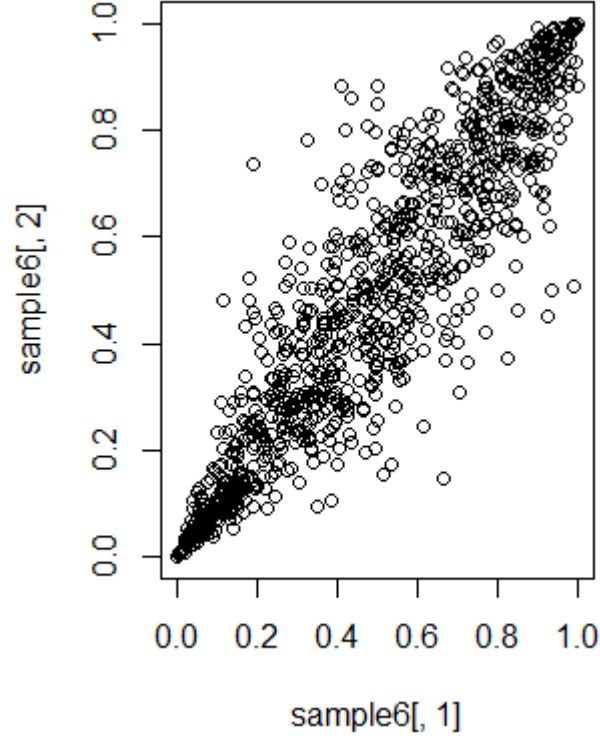
BNB-XRP ortak dağılımının Survival Gumbel kopula olduğu bulunmuştur. Şekil 4.21’de ortak dağılımdan elde edilen Survival Gumbel kopula için parametre1 kullanılarak kopula yoğunluğunun 3 boyutlu yüzey grafiği ve kontur grafiği yer almaktadır.



Şekil 4.21. Survival Gumbel kopula (BNB-XRP) için kopula yoğunluğunun 3 boyutlu yüzey grafiği ve kontur (contour) grafikleri (Parametre1 = 4,34)

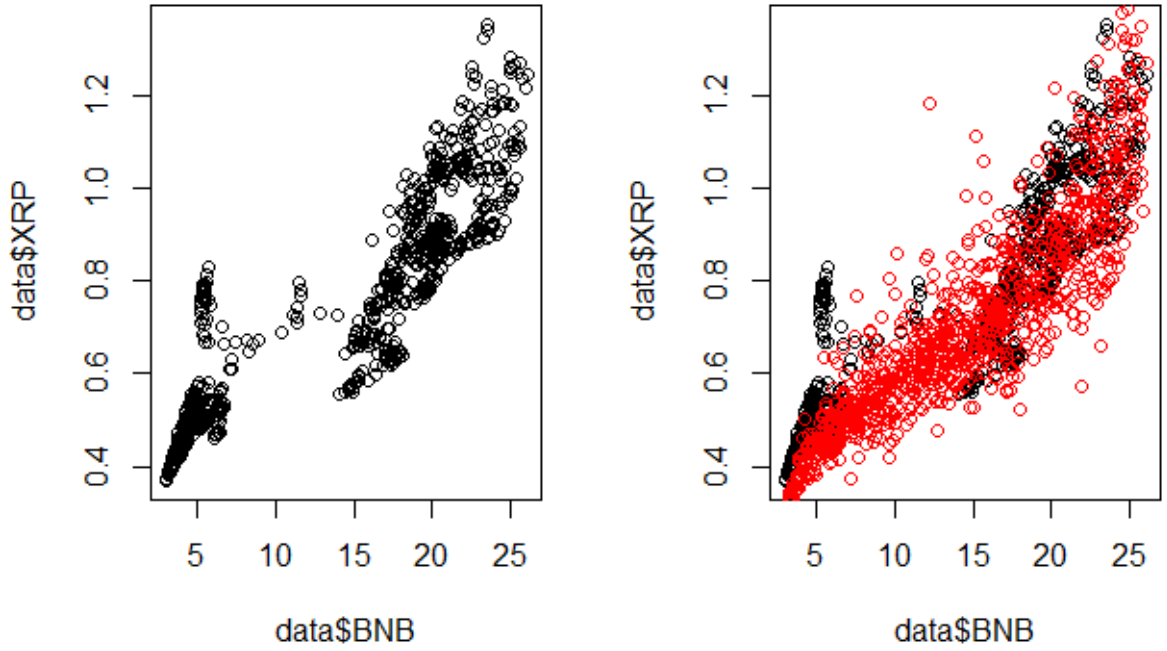
Şekil 4.21’de ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunun 3 boyutlu yüzey grafiği ve 2 boyutlu kontur grafiği yer almaktadır. Kontur grafiğinden pozitif yönlü ve yüksek düzeyli bir ilişki gözlemlenmektedir.

Şekil 4.22’de Survival Gumbel kopuladan alınan örneklemin saçılım grafiği verilmiştir. İncelenen örneklemin Kendall’in sıra korelasyonu 0,7526366 bulunmuştur. Bu korelasyon ile BNB ile XRP para birimlerinin ortak dağılımından elde edilen kopulanın Kendall’in sıra korelasyon (0.77) benzerdir. BNB ile XRP arasındaki Kendall’in sıra korelasyonu 0.8’dir.



Şekil 4.22. Survival Gumbel kopuladan alınan örneklemin saçılım grafiği (Parametre1 = 4,34 ; n = 1000)

Marjinalleri sırasıyla uniform ve log normal olan, Survival Gumbel kopula aracılığıyla birbirine bağlanan iki değişkenli dağılım oluşturulmuştur. Bu dağılımdan alınan örneklem ile BNB-XRP grafiğinin uyduğu Şekil 4.23'te görülmektedir.



Şekil 4.23. BNB-XRP grafiği ve belirlenen kopula ve marjinal dağılımlardan elde edilen dağılımın grafiği

Şekil 4.23'te siyah noktalar BNB-XRP kripto para birimlerinin saçılım grafiğini göstermektedir. Kırmızı noktalar ise marjinaleri sırasıyla uniform ve log normal olan, Survival Gumbel kopula aracılığıyla birbirine bağlanan iki değişkenli dağılımdan alınan örnekleme göstermektedir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Günümüzde pek çok alanda yerini dijital teknoloji altyapısına bırakan en dikkat çekici yeniliklerden biri, binlerce yıldır varlığını korumuş ve bir değişim aracı olarak kabul edilmiş olan paranın, merkezi bir otoriteye bağlı olmadan sanal ortamda değiş tokuş aracı olarak kullanılmasına imkan bulması olmuştur. Kripto para olarak adını literatüre yazan bu kavram, matematiğin özelleşmiş bir alanı olan kriptografi bilimi kullanılarak şifrelenmiş, blok zinciri teknolojisi ile tasarlanmış ve dijital bir değiş tokuş aracı olması için oluşturulmuş bir sanal paradır.

Kripto paralar oldukça değişken olmakla birlikte sahip oldukları risk düzeyleri çoğunlukla bilinmemektedir. Yatırımcılar için risk ve kuyruk özelliklerini bilmek önemlidir. Bu nedenle kripto paralar arasındaki bağımlılık ilişkisini modellemek literatürde oldukça sık çalışma alanı bulmaya başlayan yeni ve popüler bir alandır. Özellikle ekonomi, finans ve bankacılık sektörlerinde bağımlılığı analiz etmek için kopula fonksiyonlarının kullanılmasının pek çok avantajı vardır. Bunlardan birincisi karmaşık ve doğrusal olmayan bağımlılık yapısını kopula fonksiyonları yakalayabilmektedir. Bununla birlikte artan ve sürekli dönüşümlerde kopula fonksiyonları değişmezdir. Son olarak kopula fonksiyonları bağımlılık yapısının yanında kuyruk bağımlılığı hakkında da bilgi vermektedir. Bu nedenle kripto paraların kapanış fiyatlarından oluşan veriye kopula fonksiyonları uygulanarak bağımlılık yapısının analiz edilmesi yatırımlara ve finans alanında çalışan uzmanlara çok büyük fayda sağlayacağı bilinmektedir.

Tez çalışması kapsamında, kripto para borsasında yer alan ve en büyük hacme sahip olduğu kabul edilen Bitcoin (BTC), Ethereum (ETH), Binance Coin (BNB), Ripple (XRP) kripto para birimleri arasındaki bağımlılık yapısı kopula fonksiyonları ile araştırılmıştır. Bu amaçla 01.01.2020-30.06.2022 tarih aralığında kripto para birimlerinin gün sonundaki kapanış değerleri veri seti olarak kullanılmıştır. Tez çalışmasında R yazılımının 4.2.2 versiyonunda VineCopula, VC2copula ve copula gibi kütüphaneler kullanılarak sonuçlar elde edilmiştir (EK 1).

Çizelge 5.1. Kripto Para Çiftlerine En Uygun Kopula Fonksiyonları

	BTC-ETH	BTC-BNB	BTC-XRP	ETH-BNB	ETH-XRP	BNB-XRP
Kopula	Survival	Survival	Survival	Frank	Survival	Survival
	Tawn-2	Tawn-2	Tawn-2		BB8	Gumbel

Çizelge 5.1 ‘de görüldüğü üzere analizler sonucunda BTC-ETH, BTC-BNB ve BTC-XRP kripto para çiftleri arasındaki bağımlılık yapısı Survival Tawn-2 kopula, ETH-BNB arasındaki bağımlılık yapısı Frank kopula , ETH ile XRP arasındaki bağımlılık yapısı Survival BB8 kopula ve BNB-XRP arasındaki bağımlılık yapısı Survival Gumbel kopula ile açıklanmaktadır.

BTC-ETH, BTC-BNB, BTC-XRP ve BNB-XRP kripto para çiftleri arasında alt kuyruk bağımlılığı bulunmaktadır ($\lambda_L > 0$). Böylece bu kripto para çiftlerinde büyük kayıpların aynı anda meydana gelme eğilimi olduğu sonucuna varılmaktadır. Aynı zamanda bu kripto para çiftleri asimetrik bağımlılık yapısına sahiptir ($\lambda_U \neq \lambda_L$). ETH-BNB ile ETH-XRP kripto para çiftleri ise $\lambda_L = 0$ ve $\lambda_U = 0$ olduğu için kuyrukları bağımsızdır.

Analizler sonucunda alt kuyruk bağımlılığına sahip kripto para çiftlerinde büyük kayıpların aynı anda meydana gelme eğiliminin olduğu sonucuna varılmıştır. Fakat üst kuyruk bağımlılığına sahip olan kripto para çiftleri olmadığı için büyük kazançların aynı anda meydana gelme eğilimi olduğu sonucuna herhangi bir kripto para çifti için söylenememiştir.

Sonuç olarak, matematik, finans ve istatistik alanlarının kesişim noktasında bulunan bu tez çalışması, kripto para borsasında en yüksek hacme sahip olduğu bilinen dört kripto para çeşidinin piyasalardaki ani ve yüksek oynaklık sonucunda sahip olabilecekleri alt ve üst kuyruk bağımlılık yapıları kopula fonksiyonları kullanılarak elde edilmiştir. Böylece kripto para madencilerine ve kripto paralara yatırım yapan ya da yapmak isteyen insanlara kripto paraların riskleri ve bağımlılık ilişkileri hakkında bir fikir verebilmesi açısından yapılan çalışma literatüre bir katkı sunmaktadır.

Yapılan çalışma sonucunda, üç kripto para çiftinin uç değer kopula olarak bulunması uç değer kopulası üzerine daha çok yoğunlaşılacağı fikrini doğurmuştur. Bununla birlikte çalışmada kullanılan R yazılımının dışında farklı açık kaynak kodlu programlar

kullanılarak, kripto paralardaki bağımlılık yapısını ortaya çıkarmada kopula fonksiyon çeşitliliğini içeren kütüphanelere sahip bilgisayar yazılımlarının avantaj ve dezavantajlarının karşılaştırılması da potansiyel bir araştırma konusu olarak önerilmektedir.

6. KAYNAKLAR

- [1] S. Nakamoto, Bitcoin: A Peer-to-Peer Electronic Cash System, (2008).
- [2] A. Çifter, A. Özün, Koşullu Copula ve Dinamik Koşullu Korelasyon ile Portföy Riskinin Hesaplanması: Türkiye Verileri Üzerine Bir Uygulama, Bankacılar Derg. (2007) 12–27.
- [3] C. Ning, Dependence structure between the equity market and the foreign exchange market—A copula approach, J. Int. Money Financ. 29 (2010) 743–759. <https://doi.org/10.1016/j.jimonfin.2009.12.002>.
- [4] A. Bingöl, Kopula Fonksiyonları ve Bir Uygulama, 2012.
- [5] J. Osterrieder, M. Strika, J. Lorenz, Bitcoin and Cryptocurrencies—Not for the Faint-Hearted, Int. Financ. Bank. 4 (2017) 56–94. <https://doi.org/10.5296/ifb.v4i1.10451>.
- [6] E. Bouri, R. Gupta, C.K.M. Lau, D. Roubaud, S. Wang, Bitcoin and global financial stress: A copula-based approach to dependence and causality in the quantiles, Q. Rev. Econ. Financ. 69 (2018) 297–307. <https://doi.org/10.1016/j.qref.2018.04.003>.
- [7] A. Metin Karakaş, A. Demir, S. Çalık, Interdependence of Bitcoin and Other Crypto Money Indicators: CD Vine Copula Approach, BEÜ Fen Bilim. Derg. 9 (2020) 1527–1536.
- [8] G. Ünal, Ç. Uluyol, Blok Zinciri Teknolojisi, Bilişim Teknol. Derg. 13 (2020) 167–175. <https://doi.org/10.17671/gazibtd.516990>.
- [9] Anonim, Blockchain Nasıl Çalışır?, Binance Acad. <https://academy.binance.com/tr/articles/how-does-blockchain-work> (Erişim tarihi: 14 Ocak 2022).
- [10] Anonim, Hash Functions, <https://csrc.nist.gov/projects/hash-functions> (Erişim tarihi: 1 Mayıs 2023).
- [11] Proof Of Work Ve Proof Of Stake Nedir, ICYPEX. (2023). <https://www.icrypex.com/tr/blog/proof-of-work-ve-proof-of-stake-nedir> (Erişim tarihi 14 Ocak 2023).
- [12] Anonim, Blockchain Nedir? Blockchain Özellikleri Nelerdir?, ICYPEX.

- <https://www.icrypex.com/tr/blog/blockchain-nedir> (Erişim tarihi: 14 Ocak 2023).
- [13] Anonim, Özel, Herkese Açık ve Konsorsiyum Blockchainlerin Farkları, Binance Acad. <https://academy.binance.com/tr/articles/private-public-and-consortium-blockchains-whats-the-difference> (Erişim tarihi: 14 Ocak 2023).
- [14] E. Androulaki, A. Barger, V. Bortnikov, C. Cachin, K. Christidis, A. De Caro, D. Enyeart, C. Ferris, G. Laventman, Y. Manevich, S. Muralidharan, C. Murthy, B. Nguyen, M. Sethi, G. Singh, K. Smith, A. Sorniotti, C. Stathakopoulou, M. Vukolić, S.W. Cocco, J. Yellick, Hyperledger Fabric: A Distributed Operating System for Permissioned Blockchains, 2018. www.hyperledger.org (Erişim tarihi: 25 Aralık 2022).
- [15] Anonim, All Cryptocurrencies. <https://www.investing.com/crypto/currencies> (Erişim tarihi: 1 Mayıs 2023).
- [16] Anonim, Bitcoin, Vikipedi. https://tr.wikipedia.org/wiki/Bitcoin#cite_note-JSC-11 (Erişim tarihi: 22 Mayıs 2023).
- [17] Anonim, Intro to Ethereum. <https://ethereum.org/en/developers/docs/intro-to-ethereum/> (Erişim tarihi: 1 Mayıs 2023).
- [18] J. Frankenfield, Binance Coin (BNB) Uses, Support, and Market Cap, (2022). <https://www.investopedia.com/terms/b/binance-coin-bnb.asp> (Erişim tarihi: 1 Mayıs 2023).
- [19] Anonim, History, <https://xrpl.org/history.html> (Erişim tarihi: 1 Mayıs 2023).
- [20] Anonim, XRP, <https://xrpl.org/xrp-overview.html> (Erişim tarihi: 1 Mayıs 2023).
- [21] W. Hoeffding, Maßstabinvariante Korrelationstheorie, *Schriften Des Math. Instituts Und Des Instituts Für Angew. Math. Der Univ. Berlin.* 5 (1940) 179–233.
- [22] M.R. Frechet, Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont données, *Ann. Univ. Lyon. Sect. A.* 14 (1951) 53–77.
- [23] R. Feron, Sur les tableaux de correlation dont les marges sont données. Cas de l'espace à trois dimensions, *Publ. Inst. Stat. Univ. Paris.* 5 (1956) 3–12.
- [24] A. Sklar, Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges, *Publ. Inst. Stat. Univ. Paris.* 8 (1959) 229–231.
- [25] R.B. Nelsen, *An Introduction to Copulas*, Springer, New York, 2006.

- [https://www.scirp.org/\(S\(351jmbntvnsjt1aadkozje\)\)/reference/referencespapers.aspx?referenceid=2289565](https://www.scirp.org/(S(351jmbntvnsjt1aadkozje))/reference/referencespapers.aspx?referenceid=2289565) (Erişim tarihi: 10 Aralık 2022).
- [26] J.F. Charles, J.R. V. Marchant, Cassell's Latin dictionary, 1853. <https://adams.marmot.org/Record/.b17128547> (Erişim tarihi: 11 Aralık 2022).
- [27] J. Simpson, E. Weiner, The Oxford English Dictionary, Oxford University Press, United Kingdom, 1989. [https://www.scirp.org/\(S\(lz5mqp453edsnp55rrgjt55\)\)/reference/ReferencesPapers.aspx?ReferenceID=1438349](https://www.scirp.org/(S(lz5mqp453edsnp55rrgjt55))/reference/ReferencesPapers.aspx?ReferenceID=1438349) (Erişim tarihi: 11 Aralık 2022).
- [28] A. Buike, Copula Modeling for World's Biggest Competitors, (2018) 1–29.
- [29] H. Manner, Estimation and Model Selection of Copulas with an Application to Exchange Rates, Maastricht Res. Sch. Econ. Technol. Organ. (2007). https://www.researchgate.net/publication/4775225_Estimation_and_Model_Selection_of_Copulas_with_an_Application_to_Exchange_Rates (Erişim tarihi: 17 Aralık 2022).
- [30] H. Joe, Multivariate Models and Dependence Concepts, Chapman and Hall, 1997.
- [31] A.K. Nikoloulopoulos, D. Karlis, Fitting copulas to bivariate earthquake data: the seismic gap hypothesis revisited, *Environmetrics*. 19 (2008) 251–269. <https://doi.org/10.1002/env.869>.
- [32] M. Sadegh, E. Ragno, A. AghaKouchak, Multivariate Copula Analysis Toolbox (MvCAT): Describing dependence and underlying uncertainty using a Bayesian framework, *Water Resour. Res.* 53 (2017) 5166–5183. <https://doi.org/10.1002/2016WR020242>.
- [33] T. Nagler, U. Schepsmeier, J. Stoeber, E.C. Brechmann, B. Graeler, T. Erhardt, C. Almeida, A. Min, C. Czado, M. Hofmann, M. Killiches, H. Joe, T. Vatter, Package “VineCopula,” 2023. <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2007.02.001>.
- [34] P.K. Trivedi, D.M. Zimmer, Copula modeling: An introduction for practitioners, *Found. Trends Econom.* 1 (2005) 1–111. <https://doi.org/10.1561/08000000005>.
- [35] S. Borovkova, Risk Management With Tail Copulas For Emerging Market Portfolios, *Int. J. Econ. Financ. Stud.* 3 (2011) 219–228. <https://dergipark.org.tr/en/pub/ijefs/issue/26163/275636> (Erişim tarihi: 24 Aralık 2022).

- [36] J. Li, X. Zhu, C.F. Lee, D. Wu, J. Feng, Y. Shi, On the aggregation of credit, market and operational risks, *Rev. Quant. Financ. Account.* 44 (2015) 161–189. <https://doi.org/10.1007/S11156-013-0426-0>.
- [37] Anonim, All Cryptocurrencies, Investing.Com. <https://www.investing.com/crypto/currencies> (Erişim tarihi: 30 Temmuz 2022).

EKLER

EK 1 - Tez Çalışmasında Kullanılan R Studio Kodları

```
###-----Veri Okuma
#install.packages("readxl")
library(readxl)
data <- read_excel("DATA/data.xlsx")
#install.packages("lubridate")
library(lubridate)
data$Tarih <- dmy(data$Tarih)
View(data)
str(data)
###-----Özet istatistikler
summary(data)
#install.packages('moments')
library(moments)
skewness(data)
kurtosis(data)
###-----Korelasyon
#install.packages("psych")
library(psych)
pairs.panels(data[,-1],method = "pearson")
pairs.panels(data[,-1],method = "kendall")
pairs.panels(data[,-1],method = "spearman")
###-----Kripto Paraların Grafikleri
#install.packages("astsa")
library(astsa)
par(mfrow = c(4, 2))
tsplot(x=data$Tarih, y=data$Bitcoin, main=NULL, ylab='Bitcoin Fiyatı ($)',
xlab='Zaman')
tsplot(x=data$Tarih, y=data$Ethereum, main=NULL, ylab='Ethereum Fiyatı ($)',
xlab='Zaman')
tsplot(x=data$Tarih, y=data$BNB, main=NULL, ylab='BNB Fiyatı ($)', xlab='Zaman')
```

```

tsplot(x=data$Tarih, y=data$XRP, main=NULL, ylab='XRP Fiyatı ($)', xlab='Zaman')
###-----sqrt() donusumu
data$Bitcoin <- sqrt(data$Bitcoin)
data$Ethereum <- sqrt(data$Ethereum)
data$BNB <- sqrt(data$BNB)
data$XRP <- sqrt(data$XRP)
View(data)
str(data)
###-----Marjinal dağılımı bulma
#install.packages("fitdistrplus")
library(fitdistrplus)
Bitcoin.norm <- fitdist(data$Bitcoin, "norm")
plotdist(data$Bitcoin,"norm",para=list(mean=Bitcoin.norm$estimate[1],sd=Bitcoin.norm$estimate[2]))
Bitcoin.log <- fitdist(data$Bitcoin,"logis")
plotdist(data$Bitcoin,"logis",para=list(location=Bitcoin.log$estimate[1],scale=Bitcoin.log$estimate[2]))
Bitcoin.cauchy <- fitdist(data$Bitcoin,"cauchy")
plotdist(data$Bitcoin,"cauchy",para=list(location=Bitcoin.cauchy$estimate[1],scale=Bitcoin.cauchy$estimate[2]))
Bitcoin.lnorm <- fitdist(data$Bitcoin,"lnorm")
plotdist(data$Bitcoin,"lnorm",para=list(meanlog=Bitcoin.lnorm$estimate[1],sdlog=Bitcoin.lnorm$estimate[2]))
Bitcoin.exp <- fitdist(data$Bitcoin,"exp")
plotdist(data$Bitcoin, "exp", para = list(rate=Bitcoin.exp$estimate[1]))
Bitcoin.gamma <- fitdist(data$Bitcoin,"gamma")
plotdist(data$Bitcoin,"gamma",para=list(shape=Bitcoin.gamma$estimate[1],rate=Bitcoin.gamma$estimate[2]))
Bitcoin.unif <- fitdist(data$Bitcoin,"unif")
plotdist(data$Bitcoin,"unif",para=list(min=Bitcoin.unif$estimate[1],max=Bitcoin.unif$estimate[2]))
Bitcoin.weibull <- fitdist(data$Bitcoin,"weibull")
plotdist(data$Bitcoin,"weibull",para=list(shape=Bitcoin.weibull$estimate[1],scale=Bitcoin.weibull$estimate[2]))

```

```

#install.packages("actuar")
library(actuar)
Bitcoin.llogis <- fitdist(data$Bitcoin,"llogis")
plotdist(data$Bitcoin,"llogis",para
=list(shape=Bitcoin.llogis$estimate[1],scale=Bitcoin.llogis$estimate[2]))
gofstat(list(Bitcoin.norm, Bitcoin.log, Bitcoin.cauchy, Bitcoin.lnorm, Bitcoin.exp,
Bitcoin.gamma, Bitcoin.unif, Bitcoin.weibull, Bitcoin.llogis), fitnames = c("norm",
"log", "cauch", "lnorm", "exp", "gamma", "unif", "weibull", "llogis"))

par(mfrow = c(2, 2))
hist(data$Bitcoin, prob=TRUE, main = "", xlab = "Bitcoin", ylab = "Yoğunluk")
lines(seq(min(data$Bitcoin),max(data$Bitcoin),length=50),dunif(seq(min(data$Bitcoin)
,max(data$Bitcoin),length=50),Bitcoin.unif$estimate[1],Bitcoin.unif$estimate[2]),col="
red")
plot(ecdf(data$Bitcoin), xlab = "Bitcoin", main = "", col="blue")
legend('bottomright', inset = 0.01, c("Bitcoin","Uniform"),col=c("blue", "red"), cex=0.8,
lty=1, bty='n')
curve(punif(x, Bitcoin.unif$estimate[1], Bitcoin.unif$estimate[2]),
from = 70, to = 250, add = TRUE, col='red', lwd = 2)
###-----Ethereum
Ethereum.norm <- fitdist(data$Ethereum, "norm")
plotdist(data$Ethereum,"norm",para=list(mean=Ethereum.norm$estimate[1],sd=Ethere
um.norm$estimate[2]))
Ethereum.log <- fitdist(data$Ethereum,"logis")
plotdist(data$Ethereum,"logis",para=list(location=Ethereum.log$estimate[1],scale=Ethere
um.log$estimate[2]))
Ethereum.cauchy <- fitdist(data$Ethereum,"cauchy")
plotdist(data$Ethereum,"cauchy",para=list(location=Ethereum.cauchy$estimate[1],scale
=Ethereum.cauchy$estimate[2]))
Ethereum.lnorm <- fitdist(data$Ethereum,"lnorm")
plotdist(data$Ethereum,"lnorm",para=list(meanlog=Ethereum.lnorm$estimate[1],sdlog
=Ethereum.lnorm$estimate[2]))
Ethereum.exp <- fitdist(data$Ethereum,"exp")
plotdist(data$Ethereum, "exp", para = list(rate=Ethereum.exp$estimate[1]))

```

```

Ethereum.gamma <- fitdist(data$Ethereum,"gamma")
plotdist(data$Ethereum,"gamma",para=list(shape=Ethereum.gamma$estimate[1],rate=Ethereum.gamma$estimate[2]))
Ethereum.unif <- fitdist(data$Ethereum,"unif")
plotdist(data$Ethereum,"unif",para=list(min=Ethereum.unif$estimate[1],max=Ethereum.unif$estimate[2]))
Ethereum.weibull <- fitdist(data$Ethereum,"weibull")
plotdist(data$Ethereum,"weibull",para=list(shape=Ethereum.weibull$estimate[1],scale=Ethereum.weibull$estimate[2]))
#install.packages("actuar")
library(actuar)
Ethereum.llogis <- fitdist(data$Ethereum,"llogis")
plotdist(data$Ethereum,"llogis",para
=list(shape=Ethereum.llogis$estimate[1],scale=Ethereum.llogis$estimate[2]))
gofstat(list(Ethereum.norm, Ethereum.log, Ethereum.cauchy, Ethereum.lnorm,
Ethereum.exp, Ethereum.gamma, Ethereum.unif, Ethereum.weibull, Ethereum.llogis),
fitnames = c("norm", "log", "cauch", "lnorm", "exp", "gamma", "unif", "weibull",
"llogis"))

par(mfrow = c(2, 2))
hist(data$Ethereum, prob=TRUE, main = "", xlab = "Ethereum", ylab = "Yoğunluk")
lines(seq(min(data$Ethereum),max(data$Ethereum),length=50),dunif(seq(min(data$Ethereum),max(data$Ethereum),length=50),Ethereum.unif$estimate[1],Ethereum.unif$estimate[2]),col="red"))
plot(ecdf(data$Ethereum), xlab = "Ethereum", main = "", col="blue")
legend('bottomright', inset = 0.01, c("Ethereum","Uniform") ,col=c("blue", "red"),
cex=0.8, lty=1, bty='n')
curve(punif(x, Ethereum.unif$estimate[1], Ethereum.unif$estimate[2]),
from = 10, to = 70, add = TRUE, col='red', lwd = 2)
###-----BNB
BNB.norm <- fitdist(data$BNB, "norm")
plotdist(data$BNB,"norm",para=list(mean=BNB.norm$estimate[1],sd=BNB.norm$estimate[2]))
BNB.log <- fitdist(data$BNB,"logis")

```



```

plotdist(data$BNB,"logis",para=list(location=BNB.log$estimate[1],scale=BNB.log$estimate[2]))
BNB.cauchy <- fitdist(data$BNB,"cauchy")
plotdist(data$BNB,"cauchy",para=list(location=BNB.cauchy$estimate[1],scale=BNB.cauchy$estimate[2]))
BNB.lnorm <- fitdist(data$BNB,"lnorm")
plotdist(data$BNB,"lnorm",para=list(meanlog=BNB.lnorm$estimate[1],sdlog=BNB.lnorm$estimate[2]))
BNB.exp <- fitdist(data$BNB,"exp")
plotdist(data$BNB, "exp", para = list(rate=BNB.exp$estimate[1]))
BNB.gamma <- fitdist(data$BNB,"gamma")
plotdist(data$BNB,"gamma",para=list(shape=BNB.gamma$estimate[1],rate=BNB.gamma$estimate[2]))
BNB.unif <- fitdist(data$BNB,"unif")
plotdist(data$BNB,"unif",para=list(min=BNB.unif$estimate[1],max=BNB.unif$estimate[2]))
BNB.weibull <- fitdist(data$BNB,"weibull")
plotdist(data$BNB,"weibull",para=list(shape=BNB.weibull$estimate[1],scale=BNB.weibull$estimate[2]))
#install.packages("actuar")
library(actuar)
BNB.llogis <- fitdist(data$BNB,"llogis")
plotdist(data$BNB,"llogis",para
=list(shape=BNB.llogis$estimate[1],scale=BNB.llogis$estimate[2]))
gofstat(list(BNB.norm, BNB.log, BNB.cauchy, BNB.lnorm, BNB.exp, BNB.gamma,
BNB.unif, BNB.weibull, BNB.llogis), fitnames = c("norm", "log", "cauch", "lnorm",
"exp", "gamma", "unif", "weibull", "llogis"))

par(mfrow = c(2, 2))
hist(data$BNB, prob=TRUE, main = "", xlab = "BNB", ylab = "Yoğunluk")
lines(seq(min(data$BNB),max(data$BNB),length=50),dlogis(seq(min(data$BNB),max(
data$BNB),length=50),BNB.log$estimate[1],BNB.log$estimate[2]),col="red")
hist(data$BNB, prob=TRUE, main = "", xlab = "BNB", ylab = "Yoğunluk")

```

```

lines(seq(min(data$BNB),max(data$BNB),length=50),dunif(seq(min(data$BNB),max(
data$BNB),length=50),BNB.unif$estimate[1],BNB.unif$estimate[2]),col="red")
plot(ecdf(data$BNB), xlab = "BNB", main = "Kümülatif Dağılım Fonksiyonu",
col="blue")
legend('bottomright', inset = 0.01, c("BNB","Logistik") ,col=c("blue", "red"), cex=0.8,
lty=1, bty='n')
curve(plogis(x, BNB.lnorm$estimate[1], BNB.lnorm$estimate[2]),
      from = 2, to = 26, add = TRUE, col='red', lwd = 2)
plot(ecdf(data$BNB), xlab = "BNB", main = "Kümülatif Dağılım Fonksiyonu",
col="blue")
legend('bottomright', inset = 0.01, c("BNB","Uniform") ,col=c("blue", "red"), cex=0.8,
lty=1, bty='n')
curve(punif(x, BNB.unif$estimate[1], BNB.unif$estimate[2]),
      from = 2, to = 26, add = TRUE, col='red', lwd = 2)
###-----XRP
XRP.norm <- fitdist(data$XRP, "norm")
plotdist(data$XRP,"norm",para=list(mean=XRP.norm$estimate[1],sd=XRP.norm$estim
ate[2]))
XRP.log <- fitdist(data$XRP,"logis")
plotdist(data$XRP,"logis",para=list(location=XRP.log$estimate[1],scale=XRP$log$esti
mate[2]))
XRP.cauchy <- fitdist(data$XRP,"cauchy")
plotdist(data$XRP,"cauchy",para=list(location=XRP.cauchy$estimate[1],scale=XRP.ca
uchy$estimate[2]))
XRP.lnorm <- fitdist(data$XRP,"lnorm")
plotdist(data$XRP,"lnorm",para=list(meanlog=XRP.lnorm$estimate[1],sdlog=XRP.lnor
m$estimate[2]))
XRP.exp <- fitdist(data$XRP,"exp")
plotdist(data$XRP, "exp", para = list(rate=XRP.exp$estimate[1]))
XRP.gamma <- fitdist(data$XRP,"gamma")
plotdist(data$XRP,"gamma",para=list(shape=XRP.gamma$estimate[1],rate=XRP.gam
ma$estimate[2]))
XRP.unif <- fitdist(data$XRP,"unif")

```

```

plotdist(data$XRP,"unif",para=list(min=XRP.unif$estimate[1],max=XRP.unif$estimate
[2]))
XRP.weibull <- fitdist(data$XRP,"weibull")
plotdist(data$XRP,"weibull",para=list(shape=XRP.weibull$estimate[1],scale=XRP.wei
bull$estimate[2]))
#install.packages("actuar")
library(actuar)
XRP.llogis <- fitdist(data$XRP,"llogis")
plotdist(data$XRP,"llogis",para
=list(shape=XRP.llogis$estimate[1],scale=XRP.llogis$estimate[2]))
gofstat(list(XRP.norm, XRP.log, XRP.cauchy, XRP.lnorm, XRP.exp, XRP.gamma,
XRP.unif, XRP.weibull, XRP.llogis), fitnames = c("norm", "log", "cauch", "lnorm",
"exp", "gamma", "unif", "weibull", "llogis"))

par(mfrow = c(2, 2))
hist(data$XRP, prob=TRUE, main = "", xlab = "XRP", ylab = "Yoğunluk")
lines(seq(min(data$XRP),max(data$XRP),length=50),dlnorm(seq(min(data$XRP),max(
data$XRP),length=50),XRP.lnorm$estimate[1],XRP.lnorm$estimate[2]),col="red")
hist(data$XRP, prob=TRUE, main = "", xlab = "XRP", ylab = "Yoğunluk")
lines(seq(min(data$XRP),max(data$XRP),length=50),dweibull(seq(min(data$XRP),ma
x(data$XRP),length=50),XRP.weibull$estimate[1],XRP.weibull$estimate[2]),col="red"
)
plot(ecdf(data$XRP), xlab = "XRP", main = "Kümülatif Dağılım Fonksiyonu",
col="blue")
legend('bottomright', inset = 0.01, c("XRP","Log Normal") ,col=c("blue", "red"),
cex=0.8, lty=1, bty='n')
curve(plnorm(x, XRP.lnorm$estimate[1], XRP.lnorm$estimate[2]),
from = 0, to = 1.5, add = TRUE, col='red', lwd = 2)
plot(ecdf(data$XRP), xlab = "XRP", main = "Kümülatif Dağılım Fonksiyonu",
col="blue")
legend('bottomright', inset = 0.01, c("XRP","Weibull") ,col=c("blue", "red"), cex=0.8,
lty=1, bty='n')
curve(pweibull(x, XRP.weibull$estimate[1], XRP.weibull$estimate[2]),
from = 0, to = 1.5, add = TRUE, col='red', lwd = 2)

```

```

####-----Kopula
#install.packages("VineCopula")
library(VineCopula)
#-----Bitcoin ile Ethereum
u1 <- pobs(as.matrix(cbind(data[,2],data[,3])))[,1] #Bitcoin
v1 <- pobs(as.matrix(cbind(data[,2],data[,3])))[,2] #Ethereum
Bitcoin_Ethereum <- BiCopSelect(u1, v1, familyset=NA, method = "mle")
Bitcoin_Ethereum # Rotated Tawn type 2 180 degrees
Bitcoin_Ethereum$family
Bitcoin_Ethereum$staildep
Bitcoin_Ethereum$AIC
Bitcoin_Ethereum$BIC
#install.packages("VC2copula")
library(VC2copula)
par(mfrow = c(1, 2))
tawnCopula_B_E <- BiCop(family = 214, par=Bitcoin_Ethereum$par,
par2=Bitcoin_Ethereum$par2)
plot(tawnCopula_B_E)
contour(tawnCopula_B_E, margins = "unif")

set.seed(42)
sample1 <- BiCopSim(1000,tawnCopula_B_E)
plot(sample1[,1],sample1[,2])
cor(sample1[,1],sample1[,2], method = "kendall")

#install.packages("copula")
library(copula)
set.seed(555)
BTC_ETH <- copulaFromFamilyIndex(family=214, par=Bitcoin_Ethereum$par, par2 =
Bitcoin_Ethereum$par2)
mjd_b_e <- mvdc(copula=BTC_ETH, margins=c("unif","unif"),
paramMargins=list(list(min=Bitcoin.unif$estimate[1], max=Bitcoin.unif$estimate[2]),
list(min=Ethereum.unif$estimate[1], max=Ethereum.unif$estimate[2])))
dist.sample1 <- rMvdc(1000,mjd_b_e)

```

```

plot(data$Bitcoin,data$Ethereum)
points(dist.sample1[,1],dist.sample1[,2],col='red')
#-----Bitcoin ile BNB
u2 <- pobs(as.matrix(cbind(data[,2],data[,4])))[,1] #Bitcoin
v2 <- pobs(as.matrix(cbind(data[,2],data[,4])))[,2] #BNB
Bitcoin_BNB <- BiCopSelect(u2, v2, familyset=NA, method = "mle")
Bitcoin_BNB # Rotated Tawn type 2 180 degrees
Bitcoin_BNB$family
Bitcoin_BNB$taildep
Bitcoin_BNB$AIC
Bitcoin_BNB$BIC
par(mfrow = c(1, 2))
tawnCopula_B_BNB <- BiCop(family = 214, par=Bitcoin_BNB$par,
par2=Bitcoin_BNB$par2)
plot(tawnCopula_B_BNB) # surface plot of copula density
contour(tawnCopula_B_BNB, margins = "unif")

set.seed(42)
sample2 <- BiCopSim(1000,tawnCopula_B_BNB)
plot(sample2[,1],sample2[,2])
cor(sample2[,1],sample2[,2], method = "kendall")

set.seed(555)
BTC_BNB <- copulaFromFamilyIndex(family=214, par=Bitcoin_BNB$par, par2 =
Bitcoin_BNB$par2)
mjd_b_bnb <- mvdc(copula=BTC_BNB, margins=c("logis","gamma"),
paramMargins=list(list(location=Bitcoin.log$estimate[1], cale=Bitcoin.log$estimate[2]),
list(shape=BNB.gamma$estimate[1], rate=BNB.gamma$estimate[2])))
dist.sample2 <- rMvdc(1000,mjd_b_bnb)
plot(data$Bitcoin,data$BNB)
points(dist.sample2[,1],dist.sample2[,2],col='red')
#-----Bitcoin ile XRP
u3 <- pobs(as.matrix(cbind(data[,2],data[,5])))[,1] #Bitcoin
v3 <- pobs(as.matrix(cbind(data[,2],data[,5])))[,2] #XRP

```

```

Bitcoin_XRP <- BiCopSelect(u3, v3, familyset=NA, method = "mle")
Bitcoin_XRP # Rotated Tawn type 2 180 degrees
Bitcoin_XRP$family
Bitcoin_XRP$taildep
Bitcoin_XRP$AIC
Bitcoin_XRP$BIC
par(mfrow = c(1, 2))
tawnCopula_B_XRP <- BiCop(family = 214, par=Bitcoin_XRP$par,
par2=Bitcoin_XRP$par2)
plot(tawnCopula_B_XRP) # surface plot of copula density
contour(tawnCopula_B_XRP, margins = "unif")

set.seed(42)
sample3 <- BiCopSim(1000,tawnCopula_B_XRP)
plot(sample3[,1],sample3[,2])
cor(sample3[,1],sample3[,2], method = "kendall")

set.seed(555)
BTC_XRP <- copulaFromFamilyIndex(family=214, par=Bitcoin_XRP$par, par2 =
Bitcoin_XRP$par2)
mjd_b_xrp <- mvdc(copula=tawnCopula_B_E, margins=c("unif","lnorm"),
paramMargins=list(list(min=Bitcoin.unif$estimate[1], max=Bitcoin.unif$estimate[2]),
list(meanlog=XRP.lnorm$estimate[1], sdlog=XRP.lnorm$estimate[2])))
dist.sample3 <- rMvdc(1000,mjd_b_xrp)
plot(data$Bitcoin,data$XRP)
points(dist.sample3[,1],dist.sample3[,2],col='red')
#-----Ethereum ile BNB
u4 <- pobs(as.matrix(cbind(data[,3],data[,4])))[,1] #Ethereum
v4 <- pobs(as.matrix(cbind(data[,3],data[,4])))[,2] #BNB
Ethereum_BNB <- BiCopSelect(u4, v4, familyset=NA, method = "mle")
Ethereum_BNB # Frank
Ethereum_BNB$family
Ethereum_BNB$taildep
Ethereum_BNB$AIC

```

```

Ethereum_BNB$BIC
par(mfrow = c(1, 2))
frankCopula_E_BNB <- frankCopula(param=c(Ethereum_BNB$par))
persp(frankCopula_E_BNB, dCopula, zlim = c(0,10))
contour(frankCopula_E_BNB,dCopula,zlim=c(0,10))

set.seed(42)
sample4 <- rCopula(1000,frankCopula_E_BNB)
plot(sample4[,1],sample4[,2])
cor(sample4[,1],sample4[,2], method = "kendall")

set.seed(555)
mjd_e_bnb <- mvdc(copula=frankCopula_E_BNB, margins=c("unif","unif"),
paramMargins=list(list(min=Ethereum.unif$estimate[1],
max=Ethereum.unif$estimate[2]), list(min=BNB.unif$estimate[1],
max=BNB.unif$estimate[2])))
dist.sample4 <- rMvdc(1000,mjd_e_bnb)
plot(data$Ethereum,data$BNB)
points(dist.sample4[,1],dist.sample4[,2],col='red')
#-----Ethereum ile XRP
u5 <- pobs(as.matrix(cbind(data[,3],data[,5])))[,1] #Ethereum
v5 <- pobs(as.matrix(cbind(data[,3],data[,5])))[,2] #XRP
Ethereum_XRP <- BiCopSelect(u5, v5, familyset=NA, method = "mle")
Ethereum_XRP # Survival BB8
Ethereum_XRP$family
Ethereum_XRP$taildep
Ethereum_XRP$AIC
Ethereum_XRP$BIC
par(mfrow = c(1, 2))
BB8Copula_E_XRP <- BB8Copula(param=c(Ethereum_XRP$par,
Ethereum_XRP$par2))
persp(BB8Copula_E_XRP, dCopula, zlim = c(0,10))
contour(BB8Copula_E_XRP,dCopula,zlim=c(0,10))
set.seed(42)

```

```

sample5 <- rCopula(1000,BB8Copula_E_XRP)
plot(sample5[,1],sample5[,2])
cor(sample5[,1],sample5[,2], method = "kendall")

set.seed(555)
mjd_e_xrp <- mvdc(copula=BB8Copula_E_XRP, margins=c("unif", "lnorm"),
paramMargins=list(list(min=Ethereum.unif$estimate[1],
max=Ethereum.unif$estimate[2]), list(meanlog=XRP.lnorm$estimate[1],
sdlog=XRP.lnorm$estimate[2])))
dist.sample5 <- rMvdc(1000,mjd_e_xrp)
plot(data$Ethereum,data$XRP)
points(dist.sample5[,1],dist.sample5[,2],col='red')
#-----BNB ile XRP
u6 <- pobs(as.matrix(cbind(data[,4],data[,5])))[,1] #BNB
v6 <- pobs(as.matrix(cbind(data[,4],data[,5])))[,2] #XRP
BNB_XRP <- BiCopSelect(u6, v6, familyset=NA, method = "mle")
BNB_XRP # Survival Gumbel
BNB_XRP$family
BNB_XRP$taildep
BNB_XRP$AIC
BNB_XRP$BIC
par(mfrow = c(1, 2))
surGumbelCopula_BNB_XRP <- surGumbelCopula(param=c(BNB_XRP$par))
persp(surGumbelCopula_BNB_XRP, dCopula, zlim = c(0,15))
contour(surGumbelCopula_BNB_XRP,dCopula,zlim=c(0,10))

set.seed(42)
sample6 <- rCopula(1000,surGumbelCopula_BNB_XRP)
plot(sample6[,1],sample6[,2])
cor(sample6[,1],sample6[,2], method = "kendall")

set.seed(555)
mjd_bnb_xrp <- mvdc(copula=surGumbelCopula_BNB_XRP,
margins=c("unif", "lnorm"), paramMargins=list(list(min=BNB.unif$estimate[1],

```



```
max=BNB.unif$estimate[2]),                                list(meanlog=XRP.lnorm$estimate[1],
sdlog=XRP.lnorm$estimate[2]))
dist.sample6 <- rMvdc(1000,mjd_bnb_xrp)
plot(data$BNB,data$XRP)
points(dist.sample6[,1],dist.sample6[,2],col='red')
```

EK 2 - Tez Çalışması Orjinallik Raporu

Şablona uygun olarak hazırlanan “Orjinallik Raporu”nun imzalı hali bu bölümde verilmelidir.