HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı

Matematik Eğitimi Programı

ORTAÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ GEOMETRİK KANITLARININ SOLO TAKSONOMİSİNE GÖRE İNCELENMESİ

Selen ERTAŞ

Yüksek Lisans Tezi

Ankara, 2023

Liderlik, araştırma, inovasyon, kaliteli eğitim ve değişim ile

Daha ileriye... En İyiye...

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı

Matematik Eğitimi Programı

ORTAÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ GEOMETRİK KANITLARININ SOLO TAKSONOMİSİNE GÖRE İNCELENMESİ

INVESTIGATION OF SECONDARY SCHOOL MATHEMATICS TEACHERS' GEOMETRIC PROOFS ACCORDING TO SOLO TAXONOMY

Selen ERTAŞ

Yüksek Lisans Tezi

Ankara, 2023

Kabul ve Onay

Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne,

Selen ERTAŞ'ın hazırladığı "ORTAÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ GEOMETRİK KANITLARININ SOLO TAKSONOMİSİNE GÖRE İNCELENMESİ" başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından **Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı, Matematik Eğitimi Bilim Dalında Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Jüri Başkanı	Doç.Dr.Gönül YAZGAN SAĞ	İmza
Jüri Üyesi (Danışman)	Dr.Öğr.Üyesi Meltem SARI UZUN	İmza
Jüri Üyesi	Dr.Öğr.Üyesi Selin URHAN	İmza

Enstitü Yönetim Kurulunun
…./…/…. Tarihli ve ……
sayılı kararı.

Bu tez Hacettepe Üniversitesi Lisansüstü Eğitim, Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri uyarınca yukarıdaki jüri üyeleri tarafından 07 / 06 / 2023 tarihinde uygun görülmüş ve Enstitü Yönetim Kurulunca ..... / ..... / .... tarihi itibarıyla kabul edilmiştir.

Prof. Dr. İsmail Hakkı MİRİCİ

Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Öz

Bu çalışmada, ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının oluşturdukları geometrik kanıtların düzeyleri SOLO taksonomisine göre incelenmiştir. Çalışma nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması olarak tasarlanmıştır. Araştırmanın çalışma grubu Ankara'daki bir devlet üniversitesinin matematik öğretmenliği bölümüne devam etmekte olan 7 öğretmen adayıdır. Öğretmen adayları, 2. sınıfta öğrenim görmektedir ve lisans programlarında yer alan Öklid Geometrisi dersini farklı başarı düzeylerinde tamamlamışlardır. Araştırmanın verileri, geometrik kanıt formu ve bireysel görüşmeler yoluyla toplanmıştır. Araştırmacı tarafından hazırlanan geometrik kanıt formu katılımcılara yazılı olarak uygulandıktan sonra bireysel görüşmeler yapılmış ve bu görüşmelerin ses kaydı alınmıştır. Verilerin analizinde betimsel analiz kullanılmış ve öğretmen adaylarının yanıtları SOLO taksonomisine göre incelenmiştir. Nitel verilerin analizinde güvenirliğin sağlanması için iki farklı uzman tarafından yapılan incelemeler arasında tutarlılığa bakılmıştır. Araştırma sonucunda kanıtlama sürecinde verilen bilgiler arasında daha fazla ilişki kuran, argümanlarını gerekçelendirebilen kişilerin oluşturdukları kanıtlar SOLO taksonomisine göre daha yüksek seviyede çıkmıştır. SOLO taksonomisine göre alt düzeyde yer alan yanıtlar veren öğretmen adaylarının, yazdıklarını destekleyici nitelikte veri sunamadıkları, doğru biçimde kanıtlayamadıkları, konuyla ilgili bilgi eksikliklerinin olduğu, özel durumlar için kanıt oluşturdukları görülmüştür. Her öğretmen adayının farklı teoremler için yanıtları, farklı SOLO taksonomisi düzeyinde çıkmıştır bu nedenle SOLO ortalama puanları alınarak Van Hiele düşünme düzeyleri ile karşılaştırılmıştır. Aynı Van Hiele geometrik düşünme düzeyine sahip olan öğretmen adaylarının SOLO ortalama düzeylerinin farklı olduğu görülmüştür. Dolayısıyla Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri ile SOLO taksonomisi düzeylerinin birbiri ile paralel olmadığı tespit edilmiştir.

Anahtar Kelimler: Kanıt, Matematik eğitimi, Geometrik Kanıt, Ortaöğretim matematik öğretmeni adayı, SOLO taksonomisi

Abstract

In this study, the levels of secondary school pre-service mathematics teachers' geometric proofs are investigated according to the SOLO taxonomy. This qualitative study is designed as a case study. The participants of the study are 7 pre-service teachers who are attending the mathematics teaching department of a state university in Ankara. Pre-service teachers are studying their 2nd year and have completed the Euclidean Geometry course with different degrees. Data were collected through geometric proof form and individual interviews. First, geometric proof form which is prepared by the researcher was applied to the participants and then individual interviews were conducted and these interviews were audio recorded. Descriptive analysis was used in the analysis of the data and the answers of the pre-service teachers were investigated according to SOLO taxonomy. In order to ensure the coding reliability of the data, the consistency of the coding made by two different experts was checked. As a result of the research, the proofs of pre-service teachers who can establish more relationships between the information through the proving process and justify their arguments were evaluated at a higher level of SOLO taxonomy. It was observed that pre-service teachers whose answers were evaluated at lower levels of SOLO taxonomy could not provide data supporting their writing, could not prove correctly, had a lack of knowledge about the subject, and proved the theorems for special cases. Pre-service teachers' answers for different theorems were at different levels of SOLO taxonomy. Therefore, the mean of SOLO scores were determined and compared with Van Hiele thinking levels. It was observed that, the mean of SOLO levels of pre-service teachers who had the same Van Hiele geometric thinking level are different. Therefore, it was determined that Van Hiele geometric thinking levels and SOLO taxonomy levels were not parallel to each other.

Keywords: Proof, Mathematics education, Geometric Proof, Secondary school pre-service mathematics teachers, SOLO taxonomy

Teşekkür

Lisans ve lisansüstü eğitimim süresince, değerli bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, bana her zaman destek olan ve motivasyon kaynağım olan tez danışmanım Dr.Öğr.Üyesi Meltem SARI UZUN'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca tez çalışmamı geliştirmek yönünde öneri ve bilgilerini benden esirgemeyen değerli hocalarım Prof.Dr.Ayşegül ALTAY UĞUR, Dr.Öğr.Üyesi Selin URHAN ve Doç.Dr.Gönül YAZGAN SAĞ'a teşekkürlerimi sunarım. Süreç içerisinde çalışmama gönüllü olarak destek olan öğretmen adaylarına teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımın her anında yanımda olan, mesafelere rağmen hep yanımda olan, yorulduğum ve ümitsizliğe kapıldığım zamanlarında desteklerini hep hissettiğim canım annem Emel KÜÇÜKŞENLİK, canım babam Süleyman KÜÇÜKŞENLİK ve canım ablam Selin DOĞAN'a sonsuz teşekkür ederim. Son olarak hayatıma katıldığı andan itibaren hayatımı kolaylaştıran ve bana tezimi bitirme gücünü veren eşim Melih ERTAŞ'a teşekkür ederim.

İçindekiler

Tablo Dizini

Şekil Dizini

Simgeler ve Kısaltmalar Dizini

SOLO: Structure of the Observed Learning Outcomes (Gözlenebilir Öğrenme Çıktılarının Yapısı)

MEB: Milli Eğitim Bakanlığı

NCTM: National Council of Mathematics Teachers (Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi)

Bölüm 1

Giriş

Matematik sayıların ve niceliklerin yapılarını, özelliklerini, aralarındaki bağıntıları tümdengelimli akıl yürütme yoluyla inceler ve matematiğin aritmetik, geometri, cebir gibi dalları vardır. Matematik bilimi, nesnelerin özelliklerini ve aralarındaki ilişkileri ortaya çıkararak genelleme ve nihayetinde elde edilen sonuçların kanıtlanması sürecidir (Yıldırım, 2000). Dolayısıyla kanıtlar matematiğin bir parçasıdır. Kanıtların aynı zamanda matematik öğretiminin bir aracı olduğunu söylemek yanlış olmaz (Knuth, 2002). Kanıt aracı, matematiksel bilgi bütününü resmeder (Hanna, 2000). Bütüne bakarak küçük birimler arası ilişki hakkında yoruma varılabilir. Bu sebeple kanıtla matematiksel kavramlar arası ilişki açıklığa kavuşturulabilir ve böylece anlamlı öğrenme sağlanabilir.

Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi (NCTM, 2000) matematiksel kanıtın matematik eğitimindeki önemini, matematik eğitiminin temel dayanaklarından birisinin akıl yürütme ve kanıt olduğunu belirterek vurgulamış ve kanıtın matematik eğitiminin her noktasında olması gerektiğini belirtmiştir. Bu gerekliliğe sebep olarak kanıtla eğitimin, bilgilerin ezberlenmesini engellemesi ve bilgilerin temelinin öğrenilmesini sağlaması gösterilebilir. Matematik eğitiminde kullanılan kanıtlar sayesinde matematiksel bilgiler sağlam temellerle inşa edilebilir ve kanıtlar bilginin kavranmasında önemli rol oynayabilir. Dolayısıyla matematik eğitiminde kanıtlar önemli bir yere sahiptir. Milli Eğitim Bakanlığı (MEB, 2018a, 2018b) ilköğretim ve ortaöğretim matematik öğretim programında matematik eğitiminin genel amaçları içinde akıl yürütme becerisinin gelişmesine vurgu yapılırken kanıt yapmaya yönelik açık bir vurgu yapılmamıştır. Ancak, birçok matematikçi için ve birçok matematik müfredatında, matematiksel akıl yürütme ile kanıt eşdeğerdir (NCTM, 2000). Almeida (1996) ise matematiksel akıl yürütmenin kanıt sürecindeki bir araç olduğunu düşünmektedir. Dolayısıyla ülkemizdeki öğretim programlarında (MEB, 2018a, 2018b) açık bir dille kanıt kavramına yer verilmese de akıl yürütme becerisiyle ilişkili olarak kanıtın yer aldığı çıkarımı yapılabilir. Bu bağlamda öğrencilerin matematiksel kanıtlama ve akıl yürütme becerilerinin geliştirilmesi önemlidir.

Hanna ve Jahnke (1993) yapmış oldukları gözlemler sonucunda matematiksel kanıtların okul matematiğinde genellikle geometri alanında olduğunu belirlemişlerdir. Okullarda geometrik kanıtların daha fazla kullanılmasının nedeni bu kanıtların matematiksel kanıtlara nazaran daha anlaşılır, somut ve kanıt yöntemlerine bağlı olmaksızın yapılabilmesidir (Hanna, 2000). Bu bağlamda geometri, matematik eğitiminde kanıtları öğretmek ve öğrenmek için iyi bir başlangıç noktası olarak kullanılabilir (Zaimoğlu, 2012).

Öğrencilerin kanıtlama becerisini kazanmaları ve bu becerinin gelişmesi için öğretmenlerin öğretim sürecinde izleyecekleri yol önemlidir. Bu konuda öğretmenlere önemli görevler düşmektedir. Altıparmak ve Öziş (2005) yapmış oldukları çalışmada akıl yürütme ve kanıt becerisinin öğretiminde ve geliştirilmesinde öğretmenin önemini "İspat ve akıl yürütme becerisinin öğretimi ve öğrencilerin geliştirilmesi matematik öğretmenine bağlıdır." cümlesiyle vurgulamışlardır. Kanıt öğretiminde öğretmen, öğrencileri yaptığı kanıtlardan farklı kanıtlar yapmaya yönlendirmelidir (İnam, Uğurel, 2016). Bunun yanı sıra öğrencilerin kanıtı zihinlerinde anlamlandırmaları için uygun ortam sağlanmalı ve öğrenciler kanıtın nasıl yapıldığını düşünmeye sevk edilmelidir (Hanna, 2000; İnam, Uğurel, 2016). Öğretmenlerin uygun kanıtları sunması ve kanıt öğretiminde süreci iyi yönetmesi bu alandaki yetkinliği ile ilişkilidir. Matematik alanındaki ilk kanıt çalışmalarının genellikle geometri üzerinde yapılması ve okul matematiğinde geometrik kanıtların ağırlıkta olması dolayısıyla öğretmenlerin geometrik kanıt konusundaki yetkinlikleri önemlidir. Geleceğin öğretmeni olan öğretmen adaylarının kanıt alanındaki ve özel olarak geometrik kanıt üzerindeki yetkinliklerinin belirlenmesi ve bu konudaki, farkındalıklarının arttırılması için bu çalışmada, öğretmen adaylarının geometri alanında oluşturdukları kanıtları incelenecektir.

Çalışmalarda, öğretmenlerin geometrik kanıt alanındaki yetkinlikleri arttıkça Van Hiele düşünme düzeylerinde artış olduğu sonucuna varılmıştır (Coşkun, 2009; Polat, Oflaz, Akgün, 2019). Jurdak (1991) ise yapmış olduğu çalışmada SOLO taksonomisi ile Van Hiele geometrik düşünme düzeylerinin birbiriyle paralel olabileceğini iddia etmiş ve Van Hiele düzeyleri ile SOLO taksonomisinin düzeyleri arasında karşılaştırma ve eşleştirme yapmıştır. Bossé, Bayaga, Lynch-Davis ve DeMarte (2021) çalışmalarında öğrencilerin analitik geometri ile ilgili anlamalarını değerlendirmek için Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri ve SOLO taksonomisinin de yer aldığı birden fazla çerçeveyi eş zamanlı olarak kullanmışlardır. Bu çerçevelerin hangisinin öğrencilerin anlamalarını değerlendirmeye daha uygun olacağını düşünmüş ve sonuçta öğrencilerin bilgilerini ve eylemlerini değerlendirmede birbirlerini tamamlayıcı olduklarına karar vermişlerdir. Hasan ve Juniati (2022) tarafından yapılan çalışmada ise öğrencilerin problem çözmedeki geometrik düşünme profillerini ortaya koymak için SOLO taksonomisi kullanılmıştır. Bu çalışmalar göz önünde bulundurulduğunda geometrik kanıt becerilerinin değerlendirilmesinde SOLO taksonomisinin uygun bir çerçeve olabileceği düşünülmektedir. Literatür incelendiğinde öğretmen adaylarının kanıt yapma becerilerini farklı şekillerde değerlendiren çalışmalar olduğu görülmektedir (Ceylan, 2012; Polat, Oflaz, Akgün, 2019; Şimşek, Şimşek, Dündar, 2013) ancak öğrenme çıktılarını değerlendirmek için kullanılabilen SOLO taksonomisinden yararlanılarak kanıtlama becerilerini değerlendiren herhangi bir çalışmaya rastlanmamıştır.

SOLO taksonomisi değişik konularda ve düzeylerde kişilerin öğrenme çıktılarını yorumlamayı hedefleyen bir taksonomidir (Biggs, Collis, 1982). Alanda bulunan çalışmalar (Bağdat, 2013; Çelik, 2007; Göktepe, Özdemir, 2013; Lian ve İdris, 2006) SOLO taksonomisinin, kişinin yanıtlarını yorumlamak için kullanışlı olduğunu vurgulamaktadır. Piaget bilişsel gelişim kuramından esinlenerek ortaya çıkan SOLO taksonomisinin, ilgili bu kuramdan en büyük farkı; kişinin ait olduğu gelişim aşamasına odaklanılmayıp, verilen yanıta yoğunlaşarak öğrencinin değerlendirilmesidir (Pegg, Tall, 2004). SOLO taksonomisinin en önemli olanaklarından bir tanesi, kişinin cevabına ulaşırken kullandığı düşünme süreçlerini değerlendirebilen bir model olmasıdır (Biggs, Collis, 1982). SOLO taksonomisi beş düşünme seviyesinden oluşur. Kişilerin yanıtlarının karmaşıklığının artması, yaptıkları tutarlı açıklamaların artması ve birden fazla durumu hesaba katarak düşünme becerilerinin artması SOLO taksonomisindeki düşünme seviyelerinin de artacağı anlamına gelir (Çelik, 2007). Dolayısıyla SOLO taksonomisi öğrencilerin başarılarını değerlendirmek adına kapsamlı bir çerçeve sunmaktadır, farklı alanlarda ve konularda çalışmalar yapılması alana katkı sağlayabilir. Bu nedenle bu çalışmada öğretmen adaylarının geometrik kanıtları SOLO taksonomisine göre incelenecektir.

Problem Durumu

Literatür tarandığında geometrik kanıt becerilerinin değerlendirilmesi üzerine yapılan çalışmaların bazılarının dinamik yazılım ortamlarında gerçekleştirildiği görülmektedir (Ceylan, 2012; Hanna, 2000; Hoyles, Jones, 1998; Mariotti, 2000). Bunun yanı sıra bazı çalışmalarda geometrik kanıt becerilerinin, Van Hiele düşünme seviyeleri ile ilişkisi araştırılmış ve ilişki olduğu sonucuna varılmıştır (Coşkun, 2009; Polat, Oflaz, Akgün, 2019).

SOLO taksonomisi genellikle öğrencilerin öğrenme çıktılarını, beceri ve düşünme düzeylerini değerlendirmek için kullanılabilir (Biggs, Collis, 1982). Jurdak (1991) yapmış olduğu çalışmada Van Hiele düşünme düzeyleri ile SOLO taksonomisi düzeylerinin birbiri ile paralel olduğunu tespit etmiştir. Bossé vd. (2021) öğrencilerin analitik geometri ile ilgili anlamalarını değerlendirmede Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri ile SOLO taksonomisini birlikte kullanmışlardır. Hasan ve Juniati (2022) ise öğrencilerin geometrik düşünme profillerini ortaya çıkarmada SOLO taksonomisinden yararlanmışlardır. Yukarıda sözü edilen çalışmalar beraber değerlendirildiğinde öğretmen adaylarının geometrik kanıtla ilgili durumlarının veya yeterliklerinin belirlenmesi için oluşturdukları geometrik kanıtların değerlendirmesinde SOLO taksonomisinin kullanılabileceği düşünülmüştür. Dolayısıyla çalışmanın problem durumunu ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının oluşturduğu geometrik kanıtların SOLO taksonomisi kullanılarak değerlendirilmesi oluşturmaktadır.

Araştırmanın Amacı ve Önemi

Çalışmada ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının oluşturdukları geometrik kanıtların SOLO taksonomisine göre incelenmesi amaçlanmaktadır. Yapılan araştırmalarda matematik öğretmen adaylarının kanıt oluşturmakta zorlandıkları belirlenmiştir (Güler, Kar, Öçal, Çiltaş, 2011; Gürsel, 2013; Pekşen Sağır, 2013). Bu araştırmaların çoğunun genel kanıt kavramı ve analiz, cebir gibi alanlarda kanıt yapma becerileri üzerine yoğunlaştığı ve geometrik kanıtlar üzerine yapılan çalışmaların daha az sayıda olduğu görülmektedir (Sarı, 2011). Ortaöğretim matematik müfredatında öğrenciler kanıtla daha çok geometri konularında karşılaşmaktadır. Geometri öğrenmek öğrencilerin problem çözme ve akıl yürütme becerilerinin gelişmesini de desteklemektedir (Hasan ve Juniati, 2022). Öğrencilerin geometrik kavramların nasıl ve neden oluştuğunu anlayabilmeleri, geometriyi öğrenebilmeleri için geometrik kanıt üretmeleri önemlidir (Battista, Clements, 1995; akt. İpek, 2010). Öğrencilerin geometrik kanıt üretebilmesi için öğretmenler bilgi ve becerilerini kullanarak öğrencileri iyi yönlendirmelidir. Dolayısıyla öncelikle geleceğin öğretmeni olacak matematik öğretmeni adayların geometrik kanıt üretme konusunda yetkin olmaları gerekmektedir. Bu kapsamda ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının geometrik kanıt üretme becerilerinin kapsamlı bir şekilde incelenmesinin önemli olduğu söylenebilir.

Matematik eğitimi ile ilgili çalışmalarda SOLO taksonomisinin daha çok farklı matematik konularında kullanıldığı olup geometri konularında az sayıda çalışmada kullanıldığı görülmektedir (Bossé vd., 2021). Daha önceki çalışmalarda geometrik kanıt becerisi ile Van Hiele düşünme seviyelerinin (Coşkun, 2009; Polat, Oflaz, Akgün, 2019) ve Van Hiele düşünme düzeylerin ile SOLO taksonomisi (Jurdak, 1991) düzeylerinin ilişkili olduğu gözlemlenmiştir. Hasan ve Juniati (2022) de öğrencilerin problem çözmedeki geometrik profillerini ortaya çıkarmak için SOLO taksonomisinden yararlanmışlardır. Bu sebeple SOLO taksonomisinin geometrik kanıtların değerlendirilmesinde kullanılabileceği düşünülmüştür. Literatür incelendiğinde, çeşitli alanlarda değerlendirme imkanı sunan SOLO taksonomisinin geometrik kanıtların değerlendirilmesi amacıyla kullanılmadığı fark edilmiştir. Bu çalışma buna bir örnek olması bakımından önemli olacaktır. Bunun yanı sıra bu çalışmanın geometrik kanıtların SOLO taksonomisine göre nasıl değerlendirilebileceği hakkında alana katkı sağlanması beklenmektedir.

Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının geometrik kanıt becerilerinin incelenmesi, meslek hayatlarında geometrik kanıt alanında öğrencilere verecekleri öğretim hakkında bizlere fikir sunabilir. Dolayısıyla öğretmen adaylarının meslek hayatına geçmeden önce mevcut durumlarının belirlenmesi önemli olacaktır. Bu çalışmada ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının oluşturduğu geometrik kanıtların SOLO taksonomisiyle incelenmesiyle üniversite öğretim elemanlarına da geometrik kanıtların değerlendirmesinde alternatif bir yol sunabileceği düşünülmüştür.

Araştırma Problemi

- Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının oluşturdukları geometrik kanıtlar SOLO taksonomisine göre hangi düzeyde yer almaktadır?

Alt Problemler

- Öklid geometrisi farklı başarı düzeylerinde tamamlamış olan ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının her bir teorem için oluşturdukları geometrik kanıtlar SOLO taksonomisine göre hangi düzeyde yer almaktadır?
- Öğretmen adaylarının, SOLO taksonomisine göre farklı düzeylerde geometrik kanıt oluşturmalarının nedenleri nelerdir?

Sayıltılar

- Öğretmen adaylarının Geometrik Kanıt Formuna bilgi ve becerilerini yansıtabildikleri ve bireysel görüşmelerdeki sorulara içtenlikle yanıt verdikleri varsayılmıştır.

Sınırlılıklar

- Araştırmanın sonuçları çalışmanın katılımcısı olan yedi öğrenci ile sınırlıdır.
- Öğretmen adaylarının geometrik kanıtla ilgili becerileri Geometrik Kanıt Formu ve bireysel görüşme yoluyla toplanan verilerle sınırlıdır.
- Öğretmen adaylarının Öklid Geometrisi dersini pandemi döneminde uzaktan eğitim ile almış olmaları ve verilerin çevrimiçi ortamda toplanması çalışmanın sınırlılıklarındandır.

Tanımlar

Kanıt: Herhangi bir düşünceyi teyit etmek için kullanılan ve inandırıcı olduğu müddetçe değişik formlarda olabilen savlardır. (Hanna, 2000).

Matematiksel Kanıt: Matematiksel kanıt bir neticenin doğruluğunu göstermek için değişik gerekçeler sunmak ve doğruluğuna inandırmak için elde edilen sonuçların bir dizgenin içine yerleştirerek sunulmasıdır (Hanna, 2000).

Geometrik kanıt: Geometrik kanıt herhangi bir geometrik ifadenin doğru olduğunu gerekçeler sunarak göstermektir.

SOLO taksonomisi: SOLO (Structure of the Observed Learning Outcomes) çeşitli konu alanlarında ve farklı öğrenme seviyelerindeki öğrencilerin, bilgi ve beceri çıktılarını kullanarak öğretimin kalitesini ortaya koymaya yönelik bir taksonomidir (Bigss, Collis, 1982).

Bölüm 2

Araştırmanın Kuramsal Temeli ve İlgili Araştırmalar

1) SOLO Taksonomisi

Açılımı “Structure of the Observed Learning Outcome” olan SOLO taksonomisinin Türkçe karşılığı “Gözlenebilir Öğrenme Çıktılarının Yapısı” şeklindedir. Bu taksonomi John Biggs ve Kevin Collis tarafından 1982 yılında geliştirilmiştir. SOLO taksonomisi, öğrenenler tarafından verilen yanıtları kullanarak bilişsel bilgi ve becerileri sistematik bir çerçevede değerlendiren bir modeldir (Biggs, Collis, 1991).

SOLO Taksonomisi geliştirilirken matematik, ingilizce, modern diller, tarih ve coğrafya gibi farklı alanlarda uygulama yapılmıştır (Bağdat, 2013). Taksonominin geliştirilmesinde farklı alanlardan yararlanılması bu taksonominin konu ve derslerden bağımsız bir model olduğunu göstermektedir.

SOLO taksonomisinin temeli Piaget’in Bilişsel Gelişim Evrelerine dayanmaktadır. Piaget’in modeline göre aynı yaşta olan çocukların aynı evrede olduğu düşünülmektedir. Ancak yapılan etkinliklerde aynı yaş grubundaki çocukların aynı evrede olmayabileceği görülmüştür (Biggs, Collis, 1991; Pegg, Tall, 2004). SOLO taksonomisi Piaget’in gelişim modelinde ortaya çıkan bu durumu gidermek için geliştirilmiştir. SOLO taksonomisinde öğrencinin bulunduğu evre konunun içeriğine göre değişebilirken, Piaget’in bilişsel gelişim modelinde öğrencinin bulunduğu gelişim evresi konunun içeriğinden bağımsızdır (Köse, 2018). Fisher, Silver (1985) Piaget bilişsel gelişim kuramına ek olarak soyut evrenin ötesinde bir evre olduğunu belirtmiştir ve bu evre SOLO taksonomisinde bulunmaktadır (Biggs, Collis, 1991). SOLO taksonomisinin Piaget gelişim modelinin geliştirilmesiyle ortaya çıkmasından dolayı Çelik (2007) SOLO taksonomisi ve Piaget gelişim modelinin karşılaştırmasına çalışmasında yer vermiştir. Bu karşılaştırmaya göre Piaget gelişim modelinin 4 düzeyi SOLO taksonomisinin ilk 4 düzeyine karşılık gelmektedir fakat SOLO taksonomisinin soyut sonrası düzeyine (soyutlanmış yapı) karşılık gelen düzey Piaget gelişim modelinde bulunmamaktadır.

SOLO taksonomisi Biggs ve Collis (1982) tarafından beş farklı düzey olarak tanımlamıştır. Hiyerarşik bir yapıya sahip olan bu düzeyler yapı öncesi (prestructural), tek yönlü yapı (unistructural), çok yönlü yapı (multistructural), ilişkilendirilmiş yapı (relational), soyutlanmış yapı (extended abstract) olarak adlandırılmaktadır.

SOLO taksonomisinin düzeyleri ve bu düzeylerin anlamları aşağıda verilmiştir. Verilen bilgiler Biggs ve Collis (1982)'in çalışmalarından alınmıştır.

Şekil 1

SOLO Taksonomisi Düzeyleri

1.1.Yapı öncesi (prestructural):

Öğrenciler bu düzeyde görevleri hiç anlamamakta veya çok az anlamaktadır. Dolayısıyla bu düzeydeki öğrenciler göreve yeteri kadar yanıt veremez. Öğrenci problemin yanıt ile ilgili olmayan yönlerine gereğinden fazla takılı kalır. Bu düzeyde öğrenci daha çok verilen ifadenin tekrarı şeklinde yanıtlar verir.

1.2.Tek yönlü yapı (unistructural):

Öğrenciler bu düzeyde görev ile ilgili uygun terminolojiyi kullanabilir. Öğrenci problemi çözme odaklıdır fakat çözüm için yeteri kadar bilgi kullanamaz. Öğrenci daha çok çözüme uygun olan bir bilgi parçasını kullanabilir. Öğrenci kullandığı bilgi parçasının bütün içindeki yerini bilemez ve farklı bilgilerle ilişkilendiremez. Dolayısıyla öğrencinin yanıtları tutarsız olabilir.

1.3.Çok yönlü yapı (multistructural):

Öğrenci sonuca ulaşabileceğini düşündüğü birden çok bilgi kullanabilir fakat bu bilgiler arasında ilişki kuramaz. Diğer bir ifadeyle bu düzeyde konu hakkındaki birden çok bilgi parçasını listeleyebilir ancak bilgilerini birbiriyle ilişkilendirilemez. Bu yüzden yanıtlarında bazı tutarsızlıklara rastlanabilir ve neden-sonuç ilişkisi kurulmakta güçlük çekilir.

1.4.İlişkisel yapı (relational):

Öğrenci bu düzeyde görevle ilgili olan bilgi parçalarının hepsini kullanabilir ve ilişkilendirebilir. Öğrenci tutarlı bir bütün oluşturur, genellemeler yapabilir ama bu genellemeler sınırlı düzeydedir. Dolayısıyla öğrenci yeni fikirler üretmez, mevcut bilgilerin ötesinde bir sonuca ulaşılamaz.

1.5.Soyutlanmış yapı (extended):

Öğrenci çözüm için uğraşırken yeni fikirler üretebilir ve problemde verilenlere ek düşünceler kullanarak sonuca varır. Öğrenci sonuçta genellemeler yapabilir, yeni fikirler veya bilgiler üretebilir.

Dolayısıyla SOLO taksonomisiyle öğrencinin probleme verdiği yanıtın doğruluğunun incelenebilmesinin yanı sıra problemi nasıl algıladığı ve nasıl bir düşünce yolundan geçtiği de incelenebilir (Jimoyiannis, 2011). Bu nedenle SOLO taksonomisi öğrenmenin hem nitel hem nicel boyutunu değerlendirebilen bir modeldir. Çalışmalarda SOLO Taksonomisine göre değerlendirilenler görev, performans, konu veya durum biçiminde adlandırılmıştır. Bizim çalışmamızda bu görev geometrik kanıt olarak adlandırılacaktır.

SOLO taksonomisinin düzeyleri ve bu düzeyleri içeren gösterge filleri Tablo 1'de verilmiştir.

Tablo 1

SOLO Taksonomisinin Düzeyleri ve Bu Düzeylerin Gösterge Fiilleri (Çetin, İlhan, 2016)

SOLO DÜZEYLERİ	YAPI ÖNCESİ	TEK YÖNLÜ YAPI	ÇOK YÖNLÜ YAPI	İLİŞKİSEL YAPI	SOYUTLANMIŞ YAPI
TEMEL ÖZELLİKLERİ	Üzerinde çalışılan konu ile ilgili öğrenilenler yanlıştır ya da herhangi bir şey öğrenilememiştir.	Üzerinde çalışılan konunun tek bir yönüne odaklanılır.	Üzerinde çalışılan konunun iki ya da daha fazla yönü anlaşılır, fakat parçalar arasında ilişki kurulamaz	Üzerinde çalışılan konunun farklı yönleri birbirleri ile ilişkilendirilir, bu sayede tutarlı bir yapıya sahip bir bütün elde edilir.	Mevcut bilgilerin ötesinde akıl yürütülebilir ve genellemelere ulaşılabilir. Farklı bir alana transfer edebilme söz konusudur.
GÖSTERGE FİİLLERİ	-Problemde verilenleri tekrar etmek -“Bilmiyorum” demek -Cevap verememek	-Açıklamak -Tanımlamak -Ezberlemek -Basit bir işlemi uygulamak -Adlandırmak -Sıralamak -Saymak	-Birleştirmek -Sınıflandırmak -Numaralandırmak -Listelemek -Tanımlamak -Metaforik konuşmak -Planlamak -Algoritmaları ve yöntemleri uygulamak	-Analiz etmek -Karşılaştırmak -Birleştirmek -İlişkilendirmek -X ve Y gibi bilinmeyenler arasındaki ilişkileri kurmak -Sebep ve sonuçları açıklamak -Verilen bir teoriyi ilgili alana uygulamak	-Kuram oluşturmak -Genellemeler yapmak -Tahmin etmek -Hipotez kurmak -Değerlendirmek -Yansıtmak -Teoriyi yeni bir alana uygulamak -Tartışmak -Derinlemesine incelemek

SOLO taksonomisinin farklı çalışmalarda ele alınan düzeyleri incelendiğinde hepsinin temeli Biggs ve Collis (1982) ‘in çalışmalarında bahsettiği 5 düzeye dayanmasına rağmen bazı çalışmalarda bu düzeylerin genişletildiği görülmüştür (Burnett, 1999; Chan, Tsui, Chan Mandy, Hong Joe, 2002; Sunardi, 2006; aktaran Hasan, Juniati, 2022).

Burnett (1999) çalışmasında danışmanlık hizmeti alan 35 danışandan danışmanlık süreci boyunca ne öğrendiklerini anlatan bir mektup yazmalarını istemiş ve bu mektuplar içerisindeki öğrenme bilgilerini SOLO taksonomisine göre değerlendirmiştir. 2 farklı kişi tarafından değerlendirilme yapılmış ve değerlendirmelerin birbiriyle ilişkisine bakarak kontrol sağlamıştır. Değerlendirmeler sırasında farklı yanıtlar üzerine düşünülmüş ve ait olduğu SOLO taksonomisi düzeyi belirlenirken yanıtların güçlüğünün birbirinden farklı olabildiği fark edilmiştir. Tartışmalar sonucu daha deneyimli olan değerlendirici tarafından yeni bir kategori önerilmiş ve bu kategorilendirme kullanılarak değerlendirmeler yapılmıştır. Bu kategorilerde çok yönlü yapı düzeyi düşük, orta, yüksek olarak 3 ayrı düzeye ve ilişkisel yapı düzeyi düşük, yüksek olarak 2 ayrı düzeye bölünmüş ve SOLO taksonomisi 8 düzey olarak ele alınmıştır.

Burnett'in 1999 yılında yapmış olduğu çalışmada kullandığı SOLO taksonomisi düzeyleri ve düzeylerinin anlamı aşağıda tablo biçiminde sunulmuştur.

Tablo 2

SOLO Taksonomisinin Burnett(1999)'in Çalışmasına Göre Düzeyleri

SOLO Taksonomisi Düzeyi	Düzeyin Anlamı
Yapı Öncesi	Hiçbir şey öğrenilmedi, bilinen bilgiler yanıtta kullanılamadı. Soruyu yeniden ifade edebilir.
Tek Yönlü Yapı	Sadece bir nokta yanıta dahil edilebilir.
Çok Yönlü Yapı- Düşük	Birden fazla bilgi biliniyor ancak bu bilgileri birbirine bağlanamıyor. Ana parçalar ile ilgili herhangi bir şey yapılamamıştır.
Çok Yönlü Yapı- Orta	Birden fazla bilgi biliniyor ancak bu bilgileri birbirine bağlanamıyor. Ana parçaların basit bir şekilde geliştirebilir, listeleme yapabilir.
Çok Yönlü Yapı- Yüksek	Birden fazla bilgi biliniyor ve bu bilgileri birbirine bağlamak için çalışmalar vardır. Ana parçalardan birkaçı detaylandırabilir, genişletebilir veya örnekleme yoluyla geliştirebilir.
İlişkisel Yapı- Düşük	Bilgiler çoğunlukla ilgili bir kavram veya temaya entegre edilmiştir, ancak genel yapıdan sapan noktalar olabilir. Ayrıntılandırma, genişletme ve örneklendirme yoluyla ilgili kavram temasında bir miktar gelişme vardır.
İlişkisel Yapı- Yüksek	Bilgiler ilgili bir kavram temasına entegre edilmiştir. Yanıtlar arasında güçlü bir bağ vardır. İlgili kavram teması detaylandırma, genişletme ve örnekleme yoluyla geliştirilir.
Soyutlanmış Yapı	Öğrenilen yönler ilgili bir kavram etrafında bütünleştirilir ve bu tema yeni bir alana uygulanır. Öğrenilenler daha soyut durumlara aktarılır. Bir teori ortaya çıkarılabilir.

Chan vd. (2002) çalışmasında, lisansüstü öğrencilerinin ruh sağlığı hakkında bilişsel öğrenme çıktılarını ölçmede üç taksonomiyi (SOLO taksonomisi, Bloom taksonomisi, Yansıtıcı düşünme taksonomisi) kullanmıştır. Çalışma iki gruptan oluşmaktadır. Birinci grupta lisansüstü öğrencilerin seçtikleri bir konu hakkında vaka çalışması yapmaları ve bununla ilgili bir dönem ödevi sunmaları istenmiştir. Ödevde öğrencilerin öğrenme çıktılarını SOLO taksonomisinin 9 düzeyli hali yani çok yönlü yapı düzeyinin 3 ayrı düzeye ve ilişkisel yapı düzeyinin 3 ayrı düzeye bölünmüş şekliyle ve diğer iki taksonomiyi de kullanarak incelenmiştir. İkinci grupta öğrencilere örnek bir vaka çalışması problemi ve beş olası çözüm sunulmuştur. Öğrencilerin bu çözümlerden birini seçerek gerekçesini kısa yanıtlı olarak ifade etmeleri istenmiştir. Buradan elde edilen yanıtlar SOLO taksonomisinin 5 düzeyli haline ve diğer iki taksonomiye göre incelenmiştir. Çalışmanın sonucunda SOLO taksonomisine alt düzeylerin eklenmesinin puanlayıcı belirsizliğini azalttığı ve güvenirliği arttığı tespit edilmiştir. Chan vd.'nin 2002 yılında yapmış olduğu çalışmada kullandığı SOLO taksonomisi düzeyleri aşağıda tablo biçiminde sunulmuştur.

Tablo 3

SOLO Taksonomisinin Chan vd.(2002)'nin Çalışmasına Göre Düzeyleri

SOLO Taksonomisi Düzeyi	Düzeyin Anlamı
Yapı Öncesi	Durumu anlayabilir ve tekrar edebilir. Ardından durumu çözmek için tahmin yürütebilir.
Tek Yönlü Yapı	Durumun yalnızca ilgili bir bilgi parçasından bahsedebilir.
Çok Yönlü Yapı- Düşük	Durumla ilgili, iki ila üç bağımsız yönü detaylandırmadan sunabilir.
Çok Yönlü Yapı- Orta	Durumla ilgili oldukça fazla bilgi sunabilir ancak bilgileri fazla detaylandıramaz.
Çok Yönlü Yapı- Yüksek	Durumla ilgili birçok ilgili yönü sunabilir. Her noktayı örneklerle ve açıklamalarla detaylandırabilir.
İlişkisel Yapı- Düşük	Durumla ilgili bir veya iki yöndeki fikirleri genelleştirebilir ve küçük bağlantılar oluşturabilir.
İlişkisel Yapı- Orta	Durumla ilgili birçok yöndeki fikirleri genelleştirebilir ve bağlantılar oluşturabilir.
İlişkisel Yapı- Yüksek	Durumla ilgili tüm fikirleri genelleştirebilir ve tüm bağlantılar oluşturabilir.
Soyutlanmış Yapı	Durumla ilgili bütün fikirleri tutarlı bir şekilde genelleştirin ve disiplinin geleneksel uygulamalarını, temel ilkelerini sorgulayabilir.

Burnett (1999) ve Chan vd. (2002)'ın çalışmalarına benzer olarak Sunardi (2006) de çalışmasında 5 düzeyden birine ait olmayan öğrencilerin olduğunu fark etmiş ve böylelikle taksonomiyi 7 düzeyli biçimde yeniden düzenlemiştir. Bu düzeyleri yapı öncesi, tek yönlü yapı, çok yönlü yapı, yarı ilişkisel yapı, ilişkisel yapı, soyut yapı, soyutlanmış yapı biçiminde adlandırmış ve taksonominin bu haline SOLO Plus taksonomi adını vermiştir (aktaran Hasan, Juniati, 2022).

Literatür tarandığında matematik eğitiminde değerlendirme modeli olarak SOLO taksonomisinin kullanıldığı çalışmaların mevcut olduğu görülmüştür. Bu çalışmalar öğrencilerin öğrenme çıktılarını kıyaslanması, kazanımların SOLO taksonomisine göre değerlendirilmesi, SOLO taksonomisi seviyelerine uygun sorular hazırlanması şeklinde gruplandırılabilir. Bu çalışmaların bazıları aşağıda sunulmuştur.

Lian ve İdris (2006), araştırmalarında öğrencilerin doğrusal denklemlerin kullanımındaki cebirsel çözme becerilerini değerlendirmek için SOLO taksonomisini kullanmışlardır. Çalışmaya 4 öğrenci dahil edilmiştir. Çalışma iki aşamadan oluşmaktadır. Birinci aşamada SOLO taksonomisinin yapı öncesi, tek yönlü yapı, çok yönlü yapı ve ilişkisel yapı seviyelerini içeren sekiz adet soru sorulmuştur. Her bir problem için SOLO taksonomisinin bütün düzeylerine ait soru oluşturulmuş ve bu sorular yöneltilmiştir. İkinci aşamada ise öğrenciler ile görüşme yapılarak cebirsel çözme süreçlerine açıklık getirilmiştir. Araştırmanın sonucunda öğrencilerin çoğunlukla tek yönlü ile çok yönlü yapılarına sahip olduğu belirlenmiştir.

Çelik (2007) araştırmasında matematik öğretmeni adaylarının cebirsel düşünme becerilerini SOLO taksonomisini kullanarak incelemiştir. Araştırma 8 katılımcı ile yürütülmüştür. Çalışmada öğretmen adaylarına 11 soru yöneltilmiş ve mülakatlar yapılmıştır. Araştırmanın neticesinde öğretmen adaylarının genellikle SOLO taksonomisinin ilişkisel yapı seviyesinden daha alt seviyelerde yer aldıkları ortaya çıkmıştır.

Sarıhan Musan (2012) araştırmasında SOLO taksonomisinden yararlanarak dinamik matematik yazılımı destekli öğretimin öğrencilerinin denklem ve eşitsizlik konusundaki anlama düzeyleri üzerindeki etkisini incelemiştir. Araştırma 8. sınıf öğrencileri ile yapılmıştır. Öğrenciler belirlenen konuda Geogebra Dinamik Matematik Yazılımı’dan yararlanılarak 24 ders saatlik bir eğitim almıştır. Bu eğitim toplam 4 hafta sürmüştür. Araştırmada 7 soru oluşturulmuştur. Araştırma neticesinde Geogebra Dinamik Matematik Yazılımı'dan yararlanarak aldıkları eğitimin öğrencilerin anlama düzeylerinin gelişmesine katkı sağladığı belirlenmiş fakat bu artışın istatiksel olarak anlamlı olmadığı görülmüştür.

Göktepe ve Özdemir (2013) araştırmalarında ilköğretim matematik öğretmen adaylarının uzamsal görselleştirme becerilerini ölçmek için SOLO taksonomisinden yararlanmışlardır. Veriler geometri başarı testi ve Purdue Uzamsal Görselleştirme testinden yararlanarak toplanmıştır. Purdue Uzamsal Görselleştirme testi sonucuna göre 6 öğrenci seçilmiş ve klinik mülakat yapılmıştır. Öğrencilerin yanıtlarının SOLO taksonomisine göre hangi düşünme seviyesinde olduğu incelenmiştir. Araştırma sonucunda çoğu öğretmen adayının uzamsal görselleştirme becerisinin çok yönlü yapı düzeyinde olduğu tespit edilmiştir.

Bağdat (2013) araştırmasında SOLO taksonomisinden yararlanarak 8.sınıfta okuyan 15 öğrencinin cebirsel düşünme becerilerini incelemiştir. Araştırmacı tarafından 8 problem oluşturulmuş ve bu problemlere yönelik klinik mülakatlar yapılmıştır. Araştırmanın sonuçlarına göre öğrencilerin ilişkisel yapı seviyesinin altında olduğu sonucuna varılmıştır.

Biber ve İncikabı (2016) yapmış oldukları çalışmada SOLO taksonomisinden yararlanarak 67 ilköğretim matematik öğretmeni adayının fonksiyonlarla kurdukları problem ifadelerinden yola çıkarak öğretmen adaylarının fonksiyonlar konusundaki bilgi düzeylerini incelemişlerdir. Araştırma sonucunda öğretmen adaylarının genellikle ilk dört düzeyde bulundukları, 5. düzeyde bulunan çok az öğretmen adayının olduğu görülmüştür.

Mulbar, Rahman ve Ahsar (2017) istatistik bölümü birinci sınıf öğrencilerinin matematiksel problem çözme becerilerinin analizinde SOLO taksonomisini kullanmışlardır. Alan bağımsız bilişsel stile sahip öğrenciler SOLO taksonomisine göre alan bağımlı bilişsel stile sahip öğrencilerden daha üst düzeyde yer almışlardır.

Köse (2018) çalışmasında SOLO taksonomisinden yararlanarak üst düzey düşünme becerisine sahip olan 11 matematik öğretmen adayının düşünme yapılarını incelemiştir. Veri toplama araçları olarak düşünme yapılarını belirlemek için Matematiksel Süreç Aracından ve uzamsal yeteneklerini belirlemek için Purdue Uzamsal Görselleştirme Testinden yararlanmıştır. 92 öğretmeni adayı arasından üst düzey uzamsal yetenekli olan 11 matematik öğretmen adayı düşünme yapılarının belirlenmesi için seçilmiş ve bu kişilerle mülakatlar yapılmıştır. Araştırmanın sonucunda öğretmen adaylarının çoğunlukla çok yönlü yapı düşünme seviyesinde olduğu ortaya çıkmıştır.

Fernández, Nieto ve Mendoza (2019) yapmış oldukları çalışmada öğrencilerin düzlemler ve uzay geometri konusunda problem çözmedeki anlayış düzeylerini belirlemek ve sınıflandırmak için SOLO taksonomisini kullanmışlardır. Çalışma 21 ve 41 yaşları arasında bulunan daha önce Geometri 1 ve Geometri 2 dersini almış 32 öğrenciyle yürütülmüştür. Öğrencilere geometri problemleri verilmiş ve bu problemi çözerken ne düşündüklerini ifade etmeleri istenerek veriler toplanmıştır. Öğrencilerin verdikleri yanıtlar SOLO taksonomisine göre ilk dört düzeyde çıkmıştır.

Layuk, Pagiling ve Taufik (2020) yapmış oldukları çalışmada 11.sınıf öğrencilerinin dönüşüm geometrisi problemlerinin çözümündeki kavram yanılgılarını ve nedenlerini belirlemek için SOLO taksonomisini kullanmışlardır. Yapı öncesi düzeydeki birinin kavram yanılgılarının çeviri yanılgısı; tek yapısal düzeydeki birinin kavram yanılgısının stratejisi yanılgısı ve sistematik hata yanılgısı; çok yapısal düzeydeki birinin kavram yanılgısının hesaplama yanılgıları ve işaret yanılgıları; ilişkisel yapı düzeyinde birinin sistematik kavram yanılgıları, hesaplama yanılgıları ve işaret yanılgıları olduğu bulunmuştur. Öğrencilerin kavram yanılgılarının nedenleri; öğrencilerin anlamalarının düşük olması, problem çözmede acele etmeleri, kullanılan formülleri unutmaları, formüllere değer girerken hata yapmaları ve hesaplamalarda dikkatli davranmamaları biçiminde sıralanmıştır.

Kılıç (2020) çalışmasında 8. Sınıfta okuyan 45 öğrenciye dönüşüm geometrisi öğrenme alanına ilişkin kavram karikatürü etkinlikleriyle öğretim yapmış ve öğrencilerin öğrenmelerini SOLO taksonomisine göre değerlendirmiştir. Çalışmada 9 tane kavram karikatürü kullanılmış olup veriler gözlemlerden, diyaloglardan ve araştırmacı notlarından elde edilmiştir. Araştırmanın sonucunda öğrencilerin ilişkisel yapı seviyesinin altında olduğu sonucuna varılmıştır.

Ertem Akbaş ve Baki (2020) meslek yüksekokulu öğrencilerinin Bilgisayar Cebir Sistemi (BCS) yazılımının kullanıldığı ortamda limit-süreklilik konusunu nasıl öğrendiklerini analiz etmek için SOLO taksonomisini kullanmışlardır. Öğrencilerinin limit-süreklilik konusu ile ilgili öğrenme çıktıları ilişkisel yapı düzeyinin altında tespit edilmiştir. BCS yazılımı kullanımı sonrasında, öğrencilerin yapı öncesi ve tek yönlü yapı düzeyindeki öğrenme çıktılarının çok yönlü yapı ve ilişkisel yapı düzeylerine doğru ilerlediği gözlemlenmiştir.

Elazzabi ve Kaçar (2020) araştırmalarında SOLO taksonomisinden yararlanarak Libyalı ve Türk öğrencilerin ikinci dereceden bir değişkenli sözel problemler konusundaki becerilerini incelemişlerdir. Çalışmaya 27 öğrenci Libya'dan, 27 öğrenci Türkiye'den seçilmiştir. Sonuçlara göre Türk öğrencilerdeki, çok yönlü yapı ve ilişkisel yapı düzeyinde çıkan öğrenci oranının Libyalı öğrencilere göre daha fazla olduğu tespit edilmiştir. Bu nedenle Türk öğrencilerin, Libyalı öğrencilere göre daha başarılı olduğu çıkarımı yapılmıştır. Öğrencilerin başarısız olma nedenleri; soruların doğru biçimde yorumlanamaması, sözel olan problemleri anlayamamaları ve matematiksel bir ifadeye çevirememeleri olarak belirlenmiştir.

Erbaş (2021) araştırmasında SOLO taksonomisinden yararlanarak ortaokul matematik dersi öğretim programı kazanımlarını ve ders kitaplarındaki değerlendirme sorularını incelemiştir. Araştırma sonucunda kazanımların ve soruların genellikle çok yönlü yapı seviyesinde olduğunu tespit etmiştir. Bunun yanı sıra birkaç tane de soyutlanmış yapı seviyesinde kazanım ve soru olduğu tespit edilmiştir.

2) Geometrik Kanıt

Matematikte şüphesiz en önemli kavram kanıttır. İnsanların matematik biliminde de doğruya ve gerçeğe ulaşma isteği sonucunda kanıt ortaya çıkmıştır (Sezen Yüksel, 2020). Kanıt bilginin doğrulanmasını sağlamasının yanı sıra çeşitli sonuçların organize edilmesi ile yeni bilgilerin ortaya çıkmasını sağlar. Bell (1976) kanıtın taşıdığı anlamları sınıflandırmıştır;

1- Doğrulama; bir ifadenin doğruluğunu sunma,

2- Açıklama; bir ifadenin neden doğru ya da yanlış olduğunu açıklama,

3- Sistematikleştirme; temel kavramların, bilgilerin teoremler içerisinde düzenlenmesi (aktaran Galbraith, 1981).

Babil dönemi matematik tarihinde sezgisel olarak kanıt sayılabilecek verilerin yer aldığı ilk dönemdir. Bu dönemde daha çok genelleme ve uygulama yoluyla doğruyu göstermeye çalışmışlardır ancak mantıksal çıkarımın yapıldığı dönem olarak kayıtlara Antik Yunan dönemi geçmiştir. Antik Yunan döneminde mantıksal argümanlarla matematiksel ifadeleri yorumlamaya başlamışlardır (Bramlett, Drake, 2013). Bu dönemde Thales kendinden önce ortaya konulan önermeleri mantıksal çıkarım yoluyla kanıtlamıştır. Bu önermeler aşağıda verilmiştir.

- Çapı gören çevre açı diktir.
- Çember, çapı tarafından iki eşit parçaya bölünür.
- İkizkenar bir üçgenin taban açıları eşittir.
- Ters açılar birbirine eşittir.
- Benzer üçgenlerin kenarları orantılıdır.
- İki üçgenin birer kenarı ve bu kenarlara bitişik açıları eşitse, bu iki üçgen birbirine eşittir. (Sezen Yüksel, 2020).

Dolayısıyla yukarıdaki önermeler de incelendiğinde matematikte ilk kanıtların geometri ile ilgili kanıtlara dayandığı görülmektedir. Otten, Males, Gilberstson ve Clark (2014) yapmış oldukları çalışmada lise geometri derslerinde kanıt öğretimi yapılmasının öğrencilerin kanıtı yapma ile ilgili çalışmalar yapması ve matematikteki netlik kavramını öğrenmeleri açısından önemli olduğunu belirtmiştir. Dolayısıyla geometri alanında kanıtların yapılması öğrencilerin kanıt yapma becerilerine katkı sağlayabilir. Farklı ülkelerde yapılan eğitim reformlarında da bu fikir desteklenmiştir (Dolev, Even, 2015). Türkiye'de müfredatlarda kanıt, akıl yürütme gibi kavramlara yer verilmiştir (MEB, 2018a, 2018b). Müfredatlarda yer verilmesine rağmen öğrencilerin kanıt yapma becerilerinin yeterli olmadığı tespit edilmiştir (Harel, Sowder, 1998). Öğrencilerin kanıt yapma becerilerini arttırmaya yönelik NCTM (2014) derslerde matematiksel akıl yürütme ve kanıt gerektiren etkinliklere yer verilmesi, matematiksel gösterimlerin kullanılması ve ilişkilendirilmesi, matematik sınıflarında verimli bir biçimde öğrencilerin kanıt yapmasının desteklenmesi gerektiğine vurgu yapmıştır.

Literatür tarandığında geometrik kanıt ile ilgili çok sayıda çalışmanın olduğu görülmüştür. Bu çalışmaların en temel sonuçlarından biri öğrencilerin ispatları okuma, anlama ve yapmada güçlük çektikleridir. Öğrencilerin güçlük çekme nedenleri doğru olmayan kanıt kavramına sahip olmaları, matematiksel notasyondan kaynaklanan yetersizlik, teorem ve kavramı anlayamama yani kavramsal anlamadaki yetersizlik biçiminde belirlenmiştir. (Weber, 2004). Moore (1994) çalışmasında öğrencilerin zorlanma nedenlerini kanıta nasıl başlayacağını bilememek, kavram tanımındaki eksikler ve bu kavramlar arasındaki uyuşmazlıklar olarak belirlemiştir. Almeida (2000) öğretmen adaylarının lisans eğitiminde tanım, teorem, ispat biçimde öğrenmelerine rağmen okul matematiğinde sezgi, deneme-yanılma, varsayım gibi yöntemler ile karşılaşmaları bu nedenle eksikliklerinin olduğunu belirlemiştir. Raman (2002) öğrencilerin özel olarak düşündüklerini genele aktarırken sıkıntı yaşadıklarını, özel ve genel anlamları arasında bağlantı kuramadıklarını belirlemiştir. Aşağıda literatürde bulunan geometrik kanıt ile ilgili çalışmaların bazıları sunulmuştur.

Coşkun (2009) çalışmasında 9. ve 10. sınıfta okumakta olan toplam 96 öğrencinin Van Hiele geometrik düşünme seviyesi ile kanıt yazabilmeleri arasındaki ilişkiyi araştırmıştır. Çalışmada başlangıçta Van Hiele geometrik düşünme testi ve ardından geometrik kanıt yazma uygulaması yapılmıştır. Öğrencilerin yazdıkları, puan verilerek değerlendirilmiştir. Araştırmanın neticesinde Van Hiele düzeyleri ile kanıt yazabilme arasında olumlu bir ilişki olduğu tespit edilmiştir.

İpek (2010) çalışmasında geometri öğretimi dersi alan 39 ilköğretim matematik öğretmeni adayının dinamik geometri yazılımları (DGY) kullanarak cebirsel ve geometrik kanıt yazma süreçlerini incelemiş ve öğretmen adaylarının görüşlerini toplamıştır. Bu çalışmada öğretmen adaylarının DGY kullanarak kanıtlama sürecinde farklı kanıt yöntemlerini kullanabildikleri, şekilsel olarak geometrik ve cebirsel kanıtlar üretebildikleri görülmüştür. Dolayısıyla DGY yazılımlarının kanıt öğretimi için etkili bir araç olduğu sonucuna varılmıştır.

Ceylan (2012) çalışmasını üniversitenin 2.sınıfında öğrenim görmekte olan 6 ilköğretim matematik öğretmeni adayı ile yürütmüştür. Çalışmada GeoGebra dinamik geometrik yazılımından yararlanarak öğretmen adaylarının geometriyle ilgili kanıt yapma becerilerini incelemiştir. Öğretmen adayları kanıtlarını yaparken ses kayıtları alınmıştır. Çalışmanın sonucunda GeoGebra dinamik geometri yazılımının değişik çözüm alternatifleri bulmaya çalışma, geometrinin özeliklerini keşfedebilme, genelleyebilme ve akıl yürülme becerilerini destekler nitelikte olduğu bulunmuştur.

Şimşek, Şimşek ve Dündar (2013) yapmış oldukları çalışmada 12.sınıfa devam eden 7 öğrencinin geometrik kanıt yapma süreçlerini incelemiştir. 9 geometrik kanıt sorusuna verdikleri yanıtlar ve yarı yapılandırılmış görüşmeler çalışmanın verilerini oluşturmuştur. Öğrencilerin kanıt yapma yeterliklerinin beklenenden az olduğu görülmüştür. Kısmen doğru yapılan kanıtlara ilişkin görüşmelerde öğrenciler kanıtları görüşmede sırasında da bitirememişlerdir. Görüşmede katılımcıların genellikle yazdıkları ifadelerin doğruluğundan emin olmadıkları belirlenmiştir.

Polat, Oflaz ve Akgün'ün (2019) çalışmalarında 85 ilköğretim matematik öğretmeninin görsel kanıtları, Van Hiele geometrik düşünme seviyeleri ve uzamsal düşünme ile ilişkilendirilmiştir. Van Hiele geometrik düşünme düzeylerini ve uzamsal düşünmenin görsel kanıtlarla ilişkisini ortaya konulmuştur. Çalışmanın sonunda görsel kanıt becerisi ile Van Hiele geometrik düşünme düzeylerinin ilişkili olduğu sonucuna varılmıştır. Fakat öğretmenlerin görsel kanıt yapma becerileri ile uzamsal düşünmeleri arasındaki ilişki anlamlı çıkmamıştır.

Coşkun (2020) çalışmasında ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının geometrik kanıt yapma yeterliliklerini, temel geometrik kavramlarının bilme düzeylerini ve kullandıkları kanıt yöntemleri hakkındaki bilgilerini incelemiştir. Araştırma verileri 6 soruluk geometrik kanıt testinden ve 11 öğretmenle yapılan görüşmeden elde edilmiştir. Araştırmaya üniversite üçüncü ve dördüncü sınıfta eğitim alan 228 öğretmen adayı katılmıştır. Araştırmada katılımcıların kanıtları anlamak yerine ezberledikleri, temel geometrik kavramları karıştırdıkları, kanıtın türünü belirleyemedikleri, temel geometrik kavramlara ilişkin bilgi düzeylerinin düşük olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Dolayısıyla katılımcıların kanıtlama yeterlilikleri düşük olarak bulunmuştur.

3) Van Hiele Geometrik Düşünme Modeli

Van Hiele geometrik düşünme modeli Hollandalı matematik öğretmeni olan çift tarafından doktora çalışmaları sırasında geliştirilmiştir. Çift öğrencilerin geometri öğreniminde zorluklar yaşadıklarını gözlemlemiş, geometrideki öğrenme güçlüklerinin sebepleri ile bu güçlüklerin gidilmesine yönelik birden fazla çalışma yapmıştır. Ardından Van Hiele geometrik düşünme modeli ortaya çıkmıştır. Dolayısıyla Van Hiele geometrik düşünme modeli, kişilerin geometriyi nasıl biçimlendirdiğini gösterir. Bu modele göre kişilerin geometri konularını öğrenmekte güçlük çekmelerinin, konuların kişilerin bulundukları düzeyden daha üst bir düzeyde anlatılmasından kaynaklandığını savunmaktadır (Gömlekçi, 2021). Van Hiele geometrik düşünme modeline göre öğrencilerin geometri öğrenirken görsel düzey (1.düzey), analiz düzeyi (2.düzey), basit çıkarım düzeyi (3.düzey), formal çıkarım düzeyi (4.düzey) ve sistematik düşünme düzeyi (5.düzey) olarak adlandırılan aşamalardan geçmeleri gerekir. Modelin en temel özelliklerinden biri sıralı bir yapıya sahip olmasıdır yani öğrencinin herhangi bir seviyede olması için öncelikle o seviyenin alt basamaklarını geçmesi gerekir. Modelin diğer özelliklerinden biri de düzeyler arasında ilerleme yaşa veya gelişime bağlı değildir.

Van Hiele düşünme modelinin düzeyleri aşağıda tanıtılacaktır:

Düzey 1- Görsel Düzey: Bu düzeydeki bireyler şeklin görüntüsüne bakarak gruplandırma yapabilir. Mesela şekle bakıp bu bir üçgendir veya karedir diyebilir. Bu düzeydeki bireylere şekil başlangıçta nasıl tanıtılmışsa sadece onu tanıyabilir. Örneğin bir üçgen düz bir biçimde tanıtıldıysa ters çevirip sorulduğunda buna üçgen diyemez. Çünkü bu düzeydeki bireyler verilen şeklin özelliklerini fark edemez.

Düzey 2- Analiz Düzeyi: Bu düzeyde bireyler şeklin özelliklerini bilir ve bunları kullanarak şekle karar verir. Örneğin birey kare şeklinin bütün kenar uzunluklarının birbirine eşit olduğunu, bütün açılarının $90°$ olduğunu bilebilir. Fakat birey şeklin özelliklerini bir bütün olarak algılayamaz. Bu düzeydeki bireyler gözlemler, ölçümler, çizimler ve modeller yardımıyla formun özelliklerini oluşturabilir.

Düzey 3- Basit Çıkarım Düzeyi: Bu düzeyde bireyler şeklin kendi özellikleri arasında ilişki kurabilir. Dolayısıyla bu düzeydeki birey bir şeklin birden fazla tanımının olabileceğini bilir. Bunun yanı sıra bireyler bu düzeyde şekiller arası ilişkileri de kurmaya başlar. Örneğin birey "Her kare aynı zamanda bir dikdörtgendir." ifadesini anlayabilir ancak bunu kanıtlayamaz. Dolayısıyla bu düzeydeki bireyler kanıtı anlayabilir ancak kendisi kanıt yapamaz.

Düzey 4- Formal Çıkarım Düzeyi: Bu düzeydeki bireyler kanıtın önemini anlayarak kanıt yapabilir. Geçmişte kanıtları yapılmış teoremlere veya aksiyomlara dönerek tümdengelimden yararlanarak farklı teoremleri kanıtlayabilir. Bireyler şeklin birden fazla tanımını birbirine eşit olduğunu kanıtlayarak gösterebilir. Öklid geometrisi düzeyinde tanımsız terim, aksiyom, teorem gibi kavramları açıklayabilirken, Öklid geometrisi dışında bu kavramları bu bireyler kavrayamazlar.

Düzey 5- Sistematik Düşünme Düzeyi: Bu düzeydeki bireyler aksiyomatik yapılar arasındaki farkları anlayabilir. Bireyler Öklid geometrisi dışında da aksiyomları, teoremleri, tanımları ve kavramları anlayabilir. Öklid geometrisi dışında da teorem üretebilirler.

Literatür taraması sonucu Van Hiele Düşünme modeli ile ilgili olan çalışmalardan bazıları aşağıda sunulmuştur.

Usiskin'in (1982) yapmış olduğu çalışmada 10.sınıf öğrencilerinden oluşan 2700 katılımcıya 20 soru içeren geometri testi ve Van Hiele geometri testi uygulamıştır. Çalışma neticesinde öğrencilerin Van Hiele düşünme düzeylerinin ilk iki seviyesinde yayıldığını gözlemlemiştir. Elde ettiği sonuç ile öğrencilerin üniversite geometrisine hazır olmadığı çıkarımını yapmıştır.

Senk (1989) yapmış olduğu çalışmada Van Hiele geometri düşünme seviyeleri ile geometrik kanıt yazma becerisi arasında ilişki olup olmadığını incelemiştir. Çalışmanın neticesinde bu iki değişken arasında olumlu bir ilişki olduğunu tespit etmiştir. Yani Van Hiele düşünme seviyesi yüksek olan öğrencinin kanıt yazma becerisinin de yüksek olduğu sonucu çıkmıştır.

Çelebi Akkaya (2006) çalışmasını 6.sınıfta öğrenim gören 55 öğrenci ile yürütmüştür. Çalışmada Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri dikkate alınarak planlanan öğretim faaliyetlerinin öğrencilerin geometrik düşünme düzeylerine, geometri dersine yönelik tutumlarına ve geometri başarılarına etkisi incelenmiştir. Araştırma neticesinde Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri dikkate alınarak yapılan öğretiminin öğrencilerin geometrik düşünme düzeylerine, geometri dersine yönelik tutumlarına ve geometri başarılarına olumlu yönde katkı sağladığı fark edilmiştir.

Tutak (2008) çalışmasında geometri dersi öğrenme ortamlarında somut nesne ve geometri yazılımlarının kullanılmasının öğrencilerinin geometri ders başarılarına, tutumlarına ve Van Hiele geometrik düşünme düzeylerine etkileri incelenmiştir. Çalışma ilköğretim 4.sınıf öğrencilerinden 3 grup oluşturulmasıyla yapılmıştır. Birinci gruba somut nesneler, ikinci gruba geometri yazılımı olan Cabri kullanılmış, üçüncü gruba materyal kullanılmamıştır. Çalışma neticesinde birinci gruptaki öğrencilerin ikinci gruptaki öğrencilere göre daha başarılı olduğu dolayısıyla birinci gruptaki öğrencilerin Van Hiele geometrik düşünme düzeylerinin daha yüksek çıktığı tespit edilmiştir. Birinci ve ikinci gruptaki öğrencilerinin olumlu tutumlarının arttığı tespit edilmiştir.

Terzi (2010) araştırmasını 8. sınıf öğrencilerinden 38 kişi ile yapmıştır. Araştırmada Van Hiele geometrik düşünme seviyelerine uygun olarak tasarlanan öğretimin öğrencilerin geometrik düşünme becerisine ve geometri başarısına etkisini incelemiştir. Araştırmacı öğrencilerdeki değişimi değerlendirebilmek için Van Hiele geometri testi uygulamıştır. Çalışma sonucunda gruplar arasında eğitimden önce geometrik düşünme becerisi ve geometri başarısında bir farklılık yokken eğitimden sonra gruplar arasında farklılık görülmüştür. Bu farklılık Van Hiele geometrik düşünme seviyelerine uygun olarak tasarlanan öğretimle ders alan grupta olumlu yönde bir artış olmasından kaynaklanmaktadır.

Yılmaz (2011) araştırmasını 7. sınıf öğrencilerinden 60 kişi ile yapmıştır. Araştırmada öğrencilerin doğrular ve açılar konusunda bulunan hata ve kavram yanılgılarını Van Hiele geometri anlama düzeylerine göre analizi yapılmıştır. Araştırma neticesinde Van Hiele geometri anlama düzeyi düşük olan öğrencilerin hata ve kavram yanılgılarının daha çok olduğu tespit edilmiştir.

Duatepe Paksu (2013) araştırmasını farklı üniversitelerden 1730 sınıf öğretmeni adayı ile yapmıştır. Araştırmada öğretmen adaylarının matematik programında yer alan geometri konularına yönelik olarak hazır bulunuşluk durumu, geometri düşünme düzeyi, geometriye yönelik tutum ve öz yeterlilikleri üzerine çalışmıştır. Araştırma neticesinde öğretmen adaylarının geometriye yönelik hazır bulunuşlulukları ve geometrik düşünme düzeyleri düşük seviyede çıkarken geometriye yönelik özyeterliklerinin ve tutumlarının orta seviyede olduğu tespit edilmiştir.

Karapınar (2017) araştırmasını 161 8.sınıf öğrencisi ile yapmıştır. Bu araştırmada öğrencilerin geometrik cisimler konusunda uygulanan başarı testindeki durumları ile Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri arasındaki ilişki olup olmadığı incelenmiştir. Araştırma neticesinde geometrik cisimler testindeki başarıları ile geometrik düşünme düzeyleri arasında pozitif yönlü bir ilişki olduğu tespit edilmiştir.

Literatürde Van Hiele ve SOLO taksonomisini içeren çalışmalar mevcuttur. Bu çalışmalar aşağıda listelenecektir.

Jurdak (1991) araştırmasında Van Hiele düzeyleri ile SOLO taksonomisi düzeylerini karşılaştırmıştır. Açıklayıcı bir örnek üzerinden karşılaştırılması sonucunda Van Hiele Düzeyleri ile SOLO Taksonomisi düzeyleri arasında paralellik olduğu ortaya çıkmıştır.

Bossé vd. (2021) araştırmasını 11.sınıf 7 öğrenci ile yürütmüştür. Bu çalışmada öğrencilerin analitik geometri ile ilgili anlamlarını değerlendirmek için 2 problemi çözmeleri istenmiştir. Öğrencilerin ifadeleri hem alan bilgisi hem de eylemleri yönünden beş çerçeve ile incelenmiştir. Öğrencilerin alan bilgisini ölçmek için yararlanılan çerçevelerden biri Van Hiele düşünme seviyeleri, eylem bilgisini ölçmek için kullanılan çerçevelerden biri ise SOLO taksonomisidir. Çalışmada Van Hiele ve SOLO taksonomisinin birbirinin tamamlayıcısı olduğu düşünülmüştür. Araştırmanın sonucunda öğrencilerin bilgi düzeyleri ile eylem düzeyleri arasında paralellik olamayabileceği görülmüştür. Sadece en yüksek ve en düşük puanlara sahip öğrencilerin Van Hiele ve SOLO taksonomi çerçevelerine göre bilgi ve eylem düzeyleri arasında yordayıcı bir bağlantı olabileceği tespit edilmiştir.

Hasan ve Juniati (2022) çalışmasını 34 lisans matematik eğitimi öğrencisinin problem çözmedeki geometrik düşünme profillerini belirlemek için SOLO taksonomisini kullanmışlardır. Sonuçta yüksek ve orta matematiksel becerilere sahip kişilerin Van Hiele geometrik düşünme açısından da analitik olduklarını, bileşenleri ve geometrik özellikleri birbiriyle bağlantılı düşündükleri sonucuna varmışlardır.

Bölüm 3

Yöntem

Bu kısımda araştırma yöntemi, araştırmanın katılımcıları, verilerin toplanması ve veri analizi ile ilgili bilgiler verilecektir.

Araştırmanın Türü

Bu araştırma nitel bir çalışmadır. Rich ve Ginsburg (1999) nitel çalışmaları *"birden fazla bakış açısıyla sosyal ya da kişisel bir durumu anlamayı hedefleyen, doğal ortamında yapılan ve hedeflenen olayın karmaşık ve bütüncül bir resmini oluşturmayı amaç edinen"* bir araştırma yöntemi olarak tanımlamaktadır. Dolayısıyla incelenen olay veya olgu hakkında ayrıntılı bir düşünceye ulaşılmasını sağlayan nitel araştırmalar (Morgan, 1996), bireylerin düşünce yapılarının nasıl oluştuğunu ortaya çıkarmada da etkilidir. Bu çalışmada da öğretmen adayların geometrik kanıtları SOLO taksonomisine göre incelenerek düşünce yapıları ortaya çıkarılmıştır. Bu nedenle araştırmada nitel yaklaşım benimsenmiş ve durum çalışması (case study) deseni kullanılmıştır. Durum çalışması bir durumu her yönüyle derinlemesine araştırılmasını sağlar. Durum çalışması, incelenen güncel duruma özgü olarak, nasıl veya neden sorularına cevap vermeye çalışan, bütüncül bir yaklaşımla ilgili durum üzerine veri toplama imkânı sunan nitel bir araştırma türüdür (Yin, 2018). Bu çalışmada öğretmen adaylarının geometrik kanıtları bireysel görüşmelerden de destek alınarak SOLO taksonomisine göre derinlemesine incelenerek sebep sonuç çerçevesinde açıklanması amaçlandığı için durum çalışması kullanılmıştır.

Araştırmanın Katılımcıları

Nitel araştırmalar için ortaya çıkmış örnekleme yöntemlerinden birisi genelleme ihtiyacı duyulmayan ve seçkisiz olmayan örnekleme çeşitlerinden amaçlı örnekleme yöntemidir (Yıldırım, Şimşek, 2016). Amaçlı örnekleme, araştırmanın amacı ve evrene göre araştırmacının belirlediği çalışma grubunun tercih edilmesidir. Bu çalışmada Öklid geometrisi dersini almış farklı akademik başarı düzeyine ve farklı Van Hiele düşünme düzeyine sahip öğretmen adayları ile çalışılması amaçlandığı için katılımcıların belirlenmesinde amaçlı örnekleme yöntemi kullanılmasının uygun olduğuna karar verilmiştir. Bu çalışma, Ankara'daki bir devlet üniversitesinin Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Bölümü Matematik Eğitimi Anabilim Dalı'nda, Matematik Öğretmenliği Programı'nda, 2021-2022 eğitim ve öğretim yılı güz döneminde, ikinci sınıf öğretmen adaylarıyla gerçekleştirilmiştir. Katılımcıların kanıt konusunda bilgi birikiminin olması gerektiği düşünüldüğü için Öklid geometrisi dersini almış ve bu dersten başarılı olmuş öğretmen adayları seçilmiştir. Çalışma da birinci sınıfın bahar döneminde Öklid Geometrisi dersini aldıkları için temel bilgilere sahip oldukları düşünülen ikinci sınıf öğretmen adaylarıyla çalışılmıştır. Öğretmen adaylarının hepsinin Öklid geometrisi dersini yüksek başarı veya düşük başarı ile tamamlamış olmasının veri çeşitliliğini sağlamayacağı düşünülerek farklı başarılarda tamamlamış öğretmen adayları seçilmiştir. Bunun yanı sıra öğretmen adaylarının farklı akademik başarılarda olmaları ve Van Hiele geometri testinde farklı düzeylerde çıkmış olmasına dikkat edilerek gönüllü katılımcılar seçilmiş böylelikle verilerin çeşitlendirilerek elde edilmesi amaçlanmıştır. Katılımcıların belirlenmesi için 2.sınıfa devam eden tüm öğretmen adaylarına yani 21 öğretmen adayına Van Hiele Geometri Testi (EK-1) 35 dakika uygulanmıştır. Çalışmada belirlenen kriterlere uyan, kendini iyi ifade edebilen, çalışma için gönüllü olan ve nitelikli veri sağlayabileceği düşünülen 21 öğretmen adayı içerisinden dokuz ortaöğretim matematik öğretmeni adayı çalışma sürecine dahil edilmiştir. Öğretmen adaylarından biri geometri kanıt formunun ilk uygulaması sırasında ve diğer bir öğretmen adayı da geometrik kanıt formunun ikinci uygulamasına katılamadığından çalışma yedi öğretmen adayı ile tamamlanmıştır.

Katılımcıların bilgilerinin gizliliği için öğretmen adayları Ö1, Ö2, Ö3, Ö4, Ö5, Ö6, Ö7 biçiminde adlandırılarak bulgular sunulmuştur. Katılımcıların Öklid Geometrisini geçme notu, akademik not ortalaması ve Van Hiele düzeyleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 4

Katılımcılar ve Bilgileri

Katılımcı	Akademik ortalama	Öklid Geometrisi dersini geçme notu	Van Hiele düzeyi
Ö1	3.22	B2	1.düzey
Ö2	3.39	C2	4.düzey
Ö3	2.67	D	3.düzey
Ö4	3.21	B2	3.düzey
Ö5	3.10	B3	5.düzey
Ö6	3.55	B2	3.düzey
Ö7	3.05	B3	5.düzey

Veri Toplama Süreci

Araştırmanın verilerini Van Hiele Geometri Testi sonuçları, Geometrik kanıt form uygulamalarında öğretmen adaylarının verdiği yazılı yanıtlar, bu forma yönelik yapılan bireysel görüşmelerin ses kayıtları ve araştırmacının görüşmeler sırasında aldığı notlar oluşturmaktadır. Veriler, Van Hiele Geometri Testi, Geometrik Kanıt Form-1 uygulaması, Geometrik Kanıt Form-2 uygulaması ve bireysel görüşmeler şeklinde sırasıyla dört aşamada toplanmıştır. Aşağıda bulunan tablo veri toplama aşamaları ve bunların uygulanma tarihlerini içermektedir.

Tablo 5

Veri Toplama Süreci

Veri Toplama Aşaması	Uygulama Tarihleri
1- Van Hiele Geometri Testi	10.01.2022
2- Geometrik Kanıt Formu-1	17.01.2022
3- Geometrik Kanıt Formu-2	24.01.2022
4- Bireysel Görüşmeler	31.01.2022-06.02.2023

Araştırma sürecinin ilk aşamasında çalışmanın katılımcılarını belirlemeye yönelik olarak öğretmen adaylarına Van Hiele Geometri Testi (EK-1) uygulanmıştır. Van Hiele Geometri Testi Google Formlar üzerinden düzenlenmiş ve 2.sınıf öğretmen adaylarının tümü yani 21 kişiye uygulanmıştır. Öğretmen adaylarına bu testi uygulamaları için 35 dakikada süre verilmiştir. Öğretmen adayları verilen süreden önce testi tamamlamışlardır. Bu uygulama sırasında öğretmen adaylarından akademik not ortalamaları ve Öklid geometrisi dersini geçme notlarını da yazmaları istenmiştir.

Geometrik kanıt formunun başlangıçta bir bütün olarak uygulanması düşünülürken uzman görüşünde bu formun tek bir oturumda yapılmasının çok uzun sürebileceği ve öğretmen adaylarının sıkılabileceği doğrultusunda yorumlar alınmıştır. Bu nedenle uygulamaların bir oturumda 4 teoremin diğer oturumda 3 teoremin kanıtlarının sorulması şeklinde iki oturumda yapılmasına karar verilmiştir. Van Hiele geometri testi uygulandıktan 1 hafta sonra birinci geometrik kanıt form uygulaması çevrim içi ortamda yapılmıştır. Bu uygulamaya tüm öğretmen adayları aynı anda katılmış ve bu uygulama yaklaşık 1,5 saat sürmüştür. Uygulama sırasında herhangi bir süre kısıtlaması yapılmamıştır. Geometrik kanıt formunun ikinci kısmı ilk uygulamadan bir hafta sonra, birinci geometrik kanıt form uygulaması gibi çevrim içi ortamda yine süre kısıtlaması olmadan uygulandı ve yaklaşık 1,5 saat sürmüştür. Yapılan uygulamaların ekran kayıtları alınmıştır. Takip eden 2 hafta içinde öğretmen adaylarının kanıtları yaparkenki düşünme süreçlerini ortaya çıkarmaya yönelik sorular sorulması amacıyla bireysel görüşmeler yapılmıştır. Böylelikle verilerin daha sağlıklı bir şekilde analiz edilip yorumlanması amaçlanmıştır. Görüşmeler çevrim içi ortamda her bir öğretmen adayı ile ayrı olarak kendi kağıtlarının yansıtılması ve üzerine konuşulması biçiminde yapılmıştır. Bireysel görüşmelerde herhangi bir süre kısıtlaması yapılmamış olup her biri yaklaşık 20 dk. sürmüş ve bu görüşmelerin de kayıtları alınmıştır.

Veri toplama sürecinde öğretmen adaylarına her bir uygulamanın başında nasıl yapabileceklerine yönelik gerekli açıklamalar yapılarak anlaşılabilirlik arttırılmıştır. Bu araştırmada yazılı dokümanlarla, görüşmelerin video kayıtlarıyla farklı veri toplama yöntemlerinden yararlanılarak veri çeşitlemesi yapılmış ve çalışmanın inandırıcılığını arttırmak, geçerlik ve güvenirliği sağlamak amaçlanmıştır

Veri Toplama Araçları

1- Van Hiele Geometri Testi

Van Hiele geometrik düşünme seviyelerini sayısal olarak belirlemek için Usiskin (1982) Van Hiele Geometri Testi'ni geliştirilmiştir. Van Hiele geometri testinin Türkçe dile tercümesini ve geçerlik-güvenirlik çalışmalarını Duatepe (2000) yapmıştır. Bu testte her bir Van Hiele düşünme düzeyi için beş çoktan seçmeli soru bulunmaktadır. Dolayısıyla testte toplam 25 soru bulunmaktadır. Testte bulunan ilk beş soru yani görsel düzey (1.düzey)'e ait sorular, şekilleri görsel olarak eşleştirmek ile ilgili olup şekle bakarak ismini bilip bilmediğini öğrenmeye yönelik sorulardır. Analiz düzeyine (2.düzey) ait olan sonraki beş soru, şekillerin özelliklerini bilip bilmediğini ortaya çıkarmaya yönelik sorulardır. Basit çıkarım düzeyine (3.düzey) ait olan sonraki beş soru, şekiller arasındaki ilişkisel çıkarımın yapılıp yapılamadığını ölçmeye yönelik sorulardır. Formal çıkarım düzeyine (4.düzey) ait olan sonraki beş soru, muhakeme edebilme ve mantıksal çıkarım yapabilme düzeyini ölçmeye yönelik sorulardır. Sistematik düşünme düzeyine (5.düzey) ait olan son beş soru ise öğrencinin Öklid ve Öklid dışı geometrilerde de muhakeme yapıp yapamadığını tespit etmeye yönelik sorulardır.

Van Hiele Geometri Testi, çalışmaya farklı düzeylerde katılımcıların belirlenmesi için kullanılmıştır. Van Hiele Geometri Testi Google Formlar üzerinden düzenlenmiş ve öğretmen adaylarına çevrimiçi ortamda uygulanmıştır. Öğretmen adaylarına bu testi uygulamaları için 35 dakikada süre verilmiştir. Öğretmen adayları verilen süreden önce testi tamamlamışlardır. Van Hiele Geometri Testi değerlendirme sonucunda farklı Van Hiele geometrik düşünme düzeyinde olan öğretmen adayları çalışmanın sonraki adımlarına katılmak üzere belirlenmiştir.

2- Geometrik Kanıt Formları

Çalışmada araştırmacı tarafından uzman görüşü alınarak oluşturulan geometrik kanıt formu iki kısma ayrılarak iki ayrı oturumda uygulanmıştır. İlk uygulamada teoremlerin yer aldığı birinci kısım geometrik kanıt form-1 ve ikinci oturumda uygulanan teoremlerin yer aldığı kısım geometrik kanıt form-2 biçiminde adlandırılmıştır.

Birinci oturum uygulamasında kullanılan geometrik kanıt form-1 ‘in birinci bölümünde ad-soyad, akademik ortalama ve Öklid geometrisi dersini geçme notları sorulmuş olup ikinci bölümünde ise öğretmen adaylarının geometrik kanıtlama becerilerini ortaya çıkarmaya yönelik olarak verilen 4 tane teoremi kanıtlamaları istenmiştir. İkinci oturum uygulamasında kullanılan geometrik kanıt form-2’nin birinci bölümünde formların kime ait olduğunun belirlenebilmesi ve birinci oturumda elde edilen veriler ile bir bütün olarak değerlendirilebilmesi için ad-soyad yazmaları ve ikinci bölümünde verilen 3 tane teoremi kanıtlamaları istenmiştir. Formlarda bulunan teoremlerin farklı konular kapsamında ve farklı güçlük düzeylerinde olmalarına dikkat edilmiştir. Bu şekilde öğretmen adaylarının geometrik kanıtlama becerilerinin daha kapsamlı bir şekilde değerlendirilmesi amaçlanmıştır.

Teoremlerin seçimi için ortaöğretim matematik öğretim programı, lise ders kitapları ve Öklid geometrisi dersinin içeriği incelenmiştir. Üçgende alan, üçgenlerin eşliği, Menelaus teoremi, Öklid teoremi, çember, dörtgen konularının hem lise geometri konuları kapsamında hem de Öklid geometrisi ders içeriğinde yer aldığı belirlenmiştir. Bu nedenle öğretmen adaylarının mevcut bilgilerini kullanabilecekleri ve bilgi eksikliğinden çok etkilenmeyecekleri düşünülen temel kavramlarla ilgili teoremler seçilmiştir. Aynı zamanda teoremlerin farklı yollarla kanıtlanabilir olmasına dikkat edilmiştir. Belirlenen teoremler çalışmanın amacına uygunluğu, zorluk düzeyleri, anlaşılırlığı ve kullanılan matematiksel dil bakımından değerlendirilmeleri için matematik doktoralı bir profesör ve matematik eğitimi doktoralı iki öğretim üyesi olmak üzere üç uzman tarafından incelenmiştir. Uzmanlardan gelen dönütlere göre formun tek oturumda durumunda öğretmen adaylarının sıkılabileceği ve sağlıklı veri toplanmayabileceği ön görülmüştür. Bu nedenle form iki oturumda uygulanacak biçimde düzenlenmiştir. Bunun yanı sıra uzmanlardan teoremlerin anlaşılabilirlik katılımcıların düzeyine ve çalışmanın amacına uygunluk yönünden de değerlendirilmesi istenmiştir. Uzmanlardan gelen dönütlere göre düzeltmeler yapılmış ve formların son şekli verilmiştir. Geometrik kanıt formlarının pilot uygulaması ortaöğretim matematik öğretmenliği üçüncü sınıfta okuyan öğretmen adaylarına yapılmıştır. Uygulama sonucunda elde edilen bilgilere göre formun çalışmanın amacına uygun olduğu ve anlaşılırlık yönünden herhangi bir sıkıntı olmadığı görülmüştür.

3- Bireysel Görüşmeler

Geometrik Kanıt Formlarının uygulamaları yapıldıktan sonra yazılı dokümanlar incelenmiş ve öğretmen adaylarının her biriyle bireysel görüşme yapılmıştır. Bu görüşmeler öğretmen adayların geometrik kanıt formlarındaki teoremleri kanıtlarken düşündüklerini öğrenebilmek, teoremlere verdiği yanıtların anlaşılırlığını arttırmak ve verdikleri cevapları doğru yorumlayabilmek için yapılmıştır. Kişilerin yaptıkları adımlar hakkında açıklama yapması kişinin düşünlerine dair ipucu verir (Karataş ve Güven, 2003). Bundan dolayı bu çalışmada öğretmen adaylarının teoremi kanıtlarken ne düşündüklerini anlamak, yazdıklarını ifade etmelerini ve anlaşılmayan yerleri açıklamalarını sağlamak amacıyla görüşmeler yapılmıştır. Görüşmeler çevrim içi ortamda her bir öğretmen adayı ile ayrı olarak kendi kağıtlarının yansıtılması ve üzerine konuşulması biçiminde yapılmıştır. Öğretmen adaylarının aklından geçenleri içtenlikle anlatması istenmiş ve yazdığı ifadeleri açıklarken müdahale edilmemiştir. Teoremi kanıtlayamamış öğretmen adaylarına görüşme sırasında tekrar düşünme fırsatı verilmiş ve aklına bir fikir gelip gelmediği sorulmuştur. İlgili teoremi farklı teoremlerden (Pisagor teoremi, sinüs teoremi, üçgende benzerlik teoremleri vb.) yararlanarak kanıtlamış fakat hangi teoremden yararlandığına dair bir açıklama yapmamış olan öğretmen adaylarına oluşturdukları kanıtlardaki adımları açıklamaları için sorular yöneltilmiştir. Teoremin kanıtını belli bir noktaya kadar getirmiş ancak tamamlayamamış ise teoremi kanıtlamak için görüşme sırasında aklına gelen bir fikir olup olmadığı sorulmuştur. Teoremi tamamen doğru bir biçimde tamamlamış öğretmen adaylarına teorem ifadesindeki değişiklikler veya ek durumlar olması sonucunda nasıl bir düşünebilecekleri ve ne tür fikirler geliştirebilecekleri sorulmuştur. Teoremin kanıtını nasıl yaptığını hatırlayamayan öğretmen adaylarına yeterli süre verilerek düşünmeleri sağlanmıştır. Görüşmelerde herhangi bir süre kısıtlaması yapılmamış olup görüşmeler yaklaşık 20 dakika sürmüştür. Verilerin araştırma için kullanılacağı açıklanarak katılımcıların izni doğrultusunda görüşmelerin kaydı alınmıştır.

Verilerin Analizi

Bireysel görüşme kayıtları, araştırmacı notları, geometrik kanıt formuna verilen yanıtlar araştırmanın verilerini oluşturmaktadır. Bulgular elde edilirken bütün veriler birbiriyle karşılaştırılmış ve verilerin birbirini doğrulaması ile sonuçlara ulaşılmıştır. Nitel araştırmalarda veri analizinde betimleme, analiz ve yorumlama süreçleri ön plandadır. Betimleme, araştırma verilerinin araştırma problemine yönelik olarak neleri söylediğinin ortaya konulması; analiz, veriler içerisinde direkt olarak görünemeyen, ancak kavramsal kodlama ile ilişkilerin ortaya çıkarılması; yorumlama, verilerin araştırmacının gözünden değerlendirilmesi sürecidir (Yıldırım ve Şimşek, 2016). Bu çalışmada yazılı doküman, görüşme gibi farklı veri türleri birlikte kullanılarak SOLO taksonomisi çerçevesine göre değerlendirilmiş, kodlanmış ve bulgular yorumlanmıştır. Öğrencilerin teoremler için oluşturdukları geometrik kanıtlar incelenmiş, görüşmelerde yaptıkları açıklamalar çözümlenmiş ve tüm verilerin bir araya getirilmesiyle öğrencilerin düşünme süreçleri ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Öğrencilerin verdikleri yanıtlara göre oluşturdukları geometrik kanıtların düzeyi çalışmada analiz birimi olarak kabul edilen geometrik kanıtların SOLO taksonomisine göre değerlendirilmesiyle belirlenmiştir. Veriler analiz edilirken başlangıçta SOLO taksonomisinin 5 düzeyli olarak yani Biggs ve Collis (1982)'in sınıflandırmasına göre kullanılması kararlaştırılmıştır. Bossé vd. (2021) öğrenci yanıtlarını SOLO taksonomisinin 5 düzeyli haline göre gruplandırmış ancak bazı yanıtları belirli bir düzeye koymanın yetersiz olduğunu belirterek bazen bir yanıtı iki kategoriye koymuştur. Bu çalışmada da bu durumla karşılaşılmıştır. Bu nedenle Burnett (1999)'un sınıflandırdığı gibi SOLO taksonomisinin 8 düzeyli hali kullanılmaya karar verilmiştir. Yapılan analizler sonucunda bu çalışmada çok yönlü yapı-orta düzeye ihtiyaç olmadığı tespit edilerek yeni bir gruplandırma yapılmıştır. Bu gruplandırma yapı öncesi, tek yönlü yapı, çok yönlü yapı-düşük, çok yönlü yapı-yüksek, ilişkisel yapı-düşük, ilişkisel yapı-yüksek ve soyutlanmış yapı olmak üzere 7 düzeylidir. Çalışmada doğru bir analiz yapabilmek için SOLO taksonomisi düzeyleri ve düzeylerin anlamları çalışmaya uygun olarak araştırmacılar tarafından belirlenmiştir. Düzeylerin anlamı oluşturulurken Burnett (1999) ve Chan vd. (2002)'nın çalışmaları temel alınmıştır. Bu çalışmaya uygun olarak geometrik kanıtlar için belirlenen düzeyler ve anlamları Tablo 6'da sunulmuştur.

Tablo 6

Çalışmada Kullanılan SOLO Taksonomisi Düzeyleri ve Anlamları

SOLO Taksonomisi Düzeyi	***Düzeyin Anlamı***
Yapı Öncesi	Teoremi anlayabilir ve tekrar edebilir. Teoremin kanıtına dair herhangi bir işlem yapmaz.
Tek Yönlü Yapı	Teoremin ilgili bir bilgi parçasını sunabilir. Teoremi şekle dönüştürebilir. Teoremi nasıl kanıtlayabileceğine dair bir fikir sunabilir ancak kanıtlayamaz.
Çok Yönlü Yapı- Düşük	Teoremin kanıtı ile ilgili birden fazla bilgi parçası sunabilir ancak bu bilgi parçalarını birbiriyle ilişkilendiremez. Bilgi parçaları listeleyebilir. Bilgi parçaları arasında tutarsız ilişkiler kurar. Teoremin kanıtını sezgisel yolla yapmaya çalışır.
Çok Yönlü Yapı- Yüksek	Teoremin kanıtına dair birden fazla bilgi parçası sunabilir ancak bu bilgi parçaları arasında hem doğru hem yanlış ilişkiler kurar. Bilgi parçalarını açıklamalarıyla detaylandırabilir. Neden-sonuç ilişkisi kurmaya çalışır ancak doğru ifade edemez. Teoremin kanıtında bilgi parçalarından birini veya bir adımı unutarak/yanlış kullanarak sonuca varabilir.
İlişkisel Yapı-Düşük	Teoremin kanıtına dair ilgili birçok bilgi parçası sunabilir. Parçalar arasında sınırlı bağlantılar kurabilir. Sunduğu gerekçeler yetersiz olabilir. Kanıt genellenebilir değildir belli bir durum için yapılmıştır.
İlişkisel Yapı- Yüksek	Teoremin kanıtına dair bütün bilgi parçaları arasında bağlantı oluşturabilir ancak bunu farklı durumlara genelleyemez. Ek çizimler veya ifadeler olması durumunda teoremi nasıl kanıtlayacağını ifade edemeyebilir. Kanıt doğru bir biçimde yapılsa da gerekçelendirmede bazı eksikler olabilir.
Soyutlanmış Yapı	Teoremin kanıtına dair tüm bilgi parçaları arasında tutarlı bir biçimde bağlantı oluşturarak bütünü oluşturur. Teoremi genelleyerek farklı bir duruma aktarabilir. Gerekçelendirmeleri doğru bir biçimde yapar.

Chan vd. (2002) çalışmalarında öğrencilerin SOLO ortalama puanlarını hesaplamak için her bir düzeye 1'den başlayarak puan vermiştir. Bu çalışmada da öğretmen adaylarının

SOLO taksonomisi düzeyi ile Van Hiele düşünme seviyeleri arasında bir bağlantı olup olmadığını değerlendirebilmek için her bir SOLO taksonomisi düzeyine puan atanmış ve ardından her bir öğrencinin ortalama SOLO taksonomisi düzeyi bulunmuştur. Aşağıda her bir SOLO taksonomisine atanan puanlar tablosu (Tablo 7) bulunmaktadır.

Tablo 7

SOLO Taksonomisi Düzeyleri ve Puanları

SOLO Taksonomisi Düzeyi	**Düzey Puanı**
Yapı Öncesi	1
Tek Yönlü Yapı	2
Çok Yönlü Yapı-Düşük	3
Çok Yönlü Yapı-Yüksek	4
İlişkisel Yapı-Düşük	5
İlişkisel Yapı-Yüksek	6
Soyutlanmış Yapı	7

Dolayısıyla bu çalışmada veriler mevcut düzeylere göre değerlendirilip düzenlenmiş ve yorumlanmış biçimde okuyucuya sunulmuştur (Yıldırım, Şimşek, 2016) yani betimsel analiz yaklaşımı uygulanmıştır.

Verilerin analizinde doğrudan alıntılar yapılarak öğretmen adaylarının yazdıkları ve görüşme sırasındaki ifadelerine yer verilmiştir. Veriler analiz edilirken biri matematik eğitimi alanında uzman diğeri araştırmacı olmak üzere iki farklı kişi tarafından SOLO taksonomisine göre sınıflandırılmıştır. Güvenirlik kapsamında araştırmacı tarafından, farklı zaman diliminde iki kere SOLO taksonomisine göre sınıflandırma yapılmıştır. Böylelikle öğretmen adaylarının yanıtlarının SOLO taksonomisine göre sınıflandırmasında nihai karara varılmıştır.

Bölüm 4

Bulgular ve Yorumlar

1. Geometrik Kanıt Formu-1 Bulgu ve Yorum

1.A) S.1. Teoreme İlişkin Bulgu ve Yorumlar

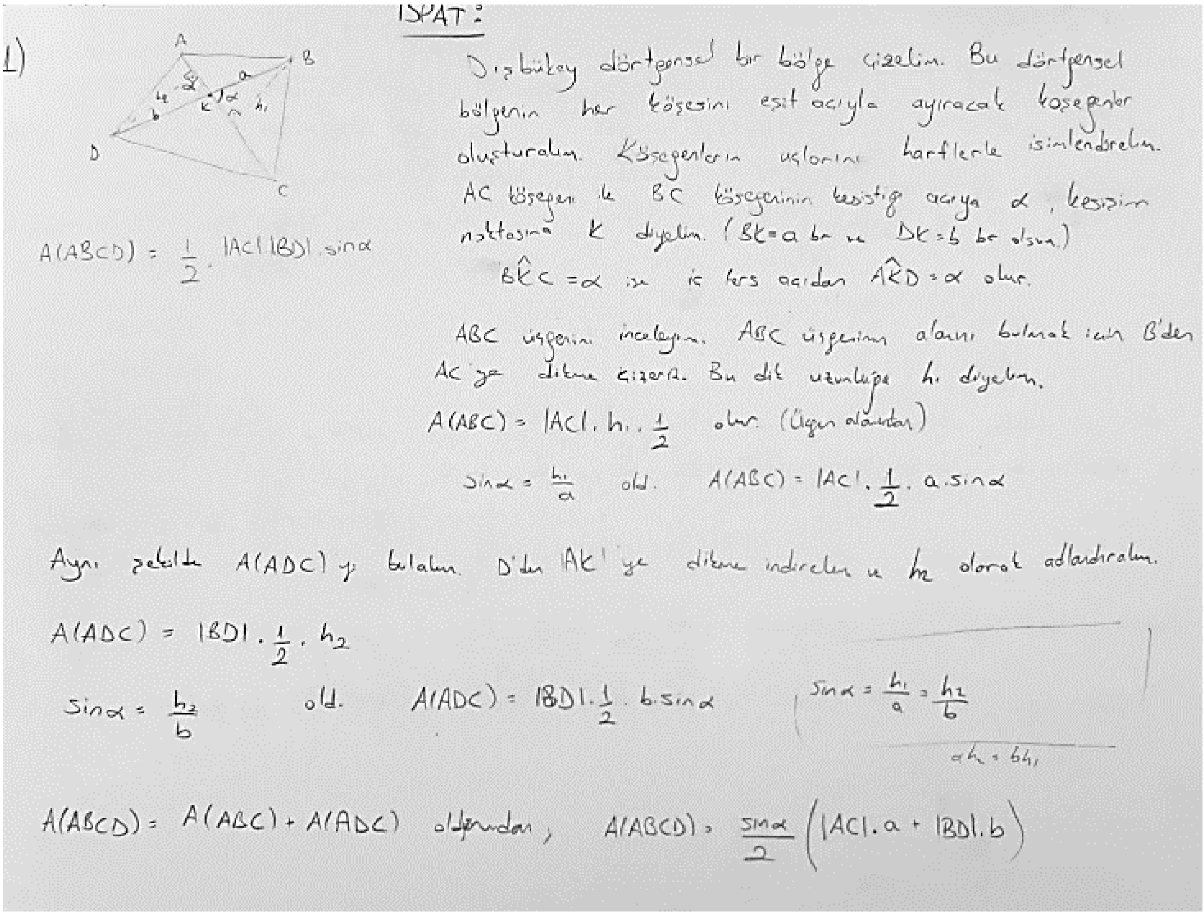
S.1. Teorem: Dışbükey bir dörtgensel bölgenin alanının, köşegenlerinin uzunlukları ile köşegenleri arasındaki açının sinüsünün çarpımının yarısına eşit olduğunu kanıtlayınız.

Kanıtlanması istenen birinci teorem yukarıda verilmiştir.

Ö1'in F1. S1. Teoreme ilişkin kanıtı:

Şekil 2

Ö1'in F1. S1.Teoreme İlişkin Yazdıkları


1)

$A(ABCD) = \frac{1}{2} \cdot |AC| \, |BD| \cdot \sin\alpha$

İSPAT:

Dışbükey dörtgensel bir bölge çizelim. Bu dörtgensel bölgenin her köşesini eşit açıyla ayıracak köşegenler oluşturalım. Köşegenlerin uçlarını harflerle isimlendirelim. AC köşegeni ile BC köşegeninin kesiştiği açıya α, kesişim noktasına K diyelim. ($BK = a$ br ve $DK = b$ br olsun.)

$B\hat{K}C = \alpha$ ise iç ters açıdan $A\hat{K}D = \alpha$ olur.

ABC üçgenini inceleyim. ABC üçgeninin alanını bulmak için B'den AC'ye dikme çizeriz. Bu dik uzunluğu h_1 diyelim.

$A(ABC) = |AC| . h_1 . \frac{1}{2}$ olur (Üçgen alanından)

$\sin\alpha = \frac{h_1}{a}$ old. $A(ABC) = |AC| . \frac{1}{2} . a . \sin\alpha$

Aynı şekilde A(ADC)'yi bulalım. D'den |AK|'ye dikme indirelim ve h_2 olarak adlandıralım.

$A(ADC) = |BD| . \frac{1}{2} . h_2$

$\sin\alpha = \frac{h_2}{b}$ old. $A(ADC) = |BD| . \frac{1}{2} . b . \sin\alpha$

$\sin\alpha = \frac{h_1}{a} = \frac{h_2}{b}$

$a h_2 = b h_1$

$A(ABCD) = A(ABC) + A(ADC)$ olduğundan, $A(ABCD) = \frac{\sin\alpha}{2} \left(|AC| . a + |BD| . b \right)$

Ö1 kodlu öğretmen adayı öncelikle verilen teoremin ne olduğunu görsel olarak ifade etmek için dış bükey dörtgen ve bu dörtgenin köşegenlerini çizerek harflendirmeler yapmıştır.

Öğretmen adayına şekil üzerinde açıların eşitliğini neye göre yaptığı sorulmuştur. Ö1 *"$\widehat{BKC}$ açısına $\propto$ dediğimde ters açıdan $\widehat{AKD}$ açısı da $\propto$ oldu."* açıklamasını yapmıştır. Ö1'in bu teoremde iki üçgensel bölgenin alanını toplayarak teoremi ispatlamaya çalıştığı görülmektedir. Üçgensel bölgelerin alanlarını bulabilmek için B ve D noktalarından iki dikme indirmiş ve bu dikmeleri h_1 *ve* h_2 olarak adlandırmıştır. Buradan $A(ABC) = \frac{1}{2}|AC|.h_1$ ve $A(ADC) = \frac{1}{2}|BD|.h_2$ olacak biçimde her bir üçgenin alanını yazmıştır. Ancak bu yazım incelendiğinde öğretmen adayının $A(ADC)$ ifadesinde tabanı yanlış aldığı için alanı yanlış yazdığı görülmektedir. Ö1 $A(ADC) = \frac{1}{2}.|AC|.h_2$ biçimde yazsaydı alanı doğru biçimde yazmış olacaktı. Görüşme sırasında öğretmen adayı alanları yazarken yanlışlık yaptığını fark edememiştir. Ardından Ö1'in sinüs açılımından yararlanarak $sin \propto = \frac{h_1}{a}$ ve benzer biçimde diğer tarafta $sin \propto = \frac{h_2}{b}$ yazdığı görülmektedir. Ö1 bu eşitlikleri ilk yazdığı alan eşitliklerinde h_1 ve h_2 yerine yazarak yeni iki alan formülü oluşturmuştur. Bu alanlar A$(ABC) = \frac{1}{2}.|AC|.a.sin \propto$ ve $A(ADC) = \frac{1}{2}.|BD|.b.sin \propto$ biçimindedir. Daha sonra bu alanları toplamış ve tüm dörtgensel bölgenin alanını yazmış. Ancak bulunan sonuç kanıtlanması istenen teorem ile aynı değildir. Ö1'e bunun farkında olup olmadığı sorulduğunda "*Daha sonra bende farklı bir noktaya vardığımı fark ettim ama geri dönemedim*." biçiminde açıklama yapmıştır. Ö1'e şu an yanıt ile ilgili aklına gelen bir şey olup olmadığı sorulmuştur. Ö1 *"şu anda da göremedim."* biçiminde açıklama yapmıştır.

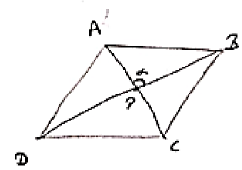
Yukarıda Ö1 kodlu öğretmen adayının birinci teoreme verdiği yanıta ve görüşme sırasında yaptığı açıklamalara yer verilmiştir. Ö1'in teoremi kanıtında üçgenlerin alanının toplamının tüm dörtgenin alanına eşit olacağını kullanarak kanıtı yaptığı görülmektedir. Ö1 teoremi kanıtlarken sinüs alan teoreminden yararlanmış ancak bunu tek bir alan için doğru bir biçimde uygulayabilmiştir. Çünkü Ö1, ADC üçgeninin alanını yazarken yanlış yazmış ve dolayısıyla alanları topladığında kanıtlanması istenen teoremden farklı bir ifade bulmuştur. Ö1 kanıtlanması istenen ifadeden farklı bir ifade bulduğunu fark etmesine rağmen yanlışı hangi noktada yaptığını bulamamış bu nedenle kanıtı doğru bir biçimde tamamlayamamıştır.

Dolayısıyla Ö1'in kanıtı yaparken düşündüğü yol doğrudur ancak uygularken bazı yönlerini doğru yapabilmesine rağmen bazı kısımlarını yanlış yapmıştır. Ö1 ADC üçgenin alanını doğru bir biçimde yazabilseydi alanı kanıtı doğru bir biçimde kanıtlamış olacaktır. Bu nedenle Ö1 kodlu öğretmen adayının bu teorem için verdiği yanıtın SOLO taksonomisinin "Çok Yönlü Yapı-Yüksek" seviyesinde olduğu söylenebilir.

Ö2'nin F1. S1. Teoreme ilişkin kanıtı:

Şekil 3

Ö2'nin F1. S1. Teoreme İlişkin Yazdıkları



ABCD bir dörtgen olsun. Köşegenlerin kesiştiği nokta P olsun, $\widehat{APB} = \alpha$ olsun.

$|AP| = |PC| = a$, $|DP| = |PB| = b$ olsun.

APB üçgeninin alanını $\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\alpha$ olarak bulabiliriz. Aynı şekilde $\widehat{DPC} = \alpha$ ve $|DP| = b$, $|PC| = a$ olduğundan $A(DPC) = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\alpha$ olur.

$\widehat{APD} = 180 - \alpha = \widehat{BPC}$ olduğundan

$A(APD) = A(BPC) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(180 - \alpha) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\alpha$ olur.

O halde dörtgenin alanı

$A(APB) + A(DPC) + A(APD) + A(BPC) = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\alpha = 2 \cdot a \cdot b \cdot \sin\alpha$ olarak bulunur.

Köşegenlerin uzunlukları $2a$ ve $2b$ olduğundan

$A(ABCD) = 2 \cdot a \cdot b \cdot \sin\alpha = \frac{2a \cdot 2b \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{|AC| \cdot |BD| \cdot \sin\alpha}{2}$ olur.

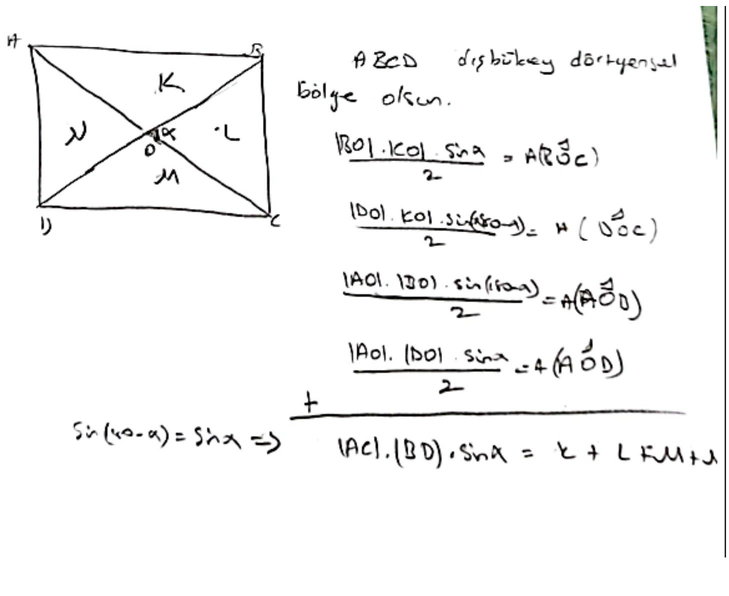
Ö2 kodlu öğretmen adayı yazdıkları incelendiğinde öncelikle şekli çizdiği ve şeklin altında yazan $|AP| = |PC| = a$ ve $|DP| = |PB| = b$ ifadeleri dolayısıyla Ö2'nin köşegenlerin birbirini ortalayacağını iddia ettiği görülmektedir. Dolayısıyla Ö2'nin özel bir dörtgen seçerek kanıta devam ettiği düşünülmüş ve Ö2'e özel bir dörtgen seçip seçmediği sorulmuştur. Ö2 "*Öncelikle özel bir dörtgen olan dikdörtgeni seçerek teoremi kanıtlamaya başladım.*" şeklinde soruyu yanıtlamıştır. Bu noktada Ö2'nin teoremin her dörtgen için geçerli olduğunu düşünmeden kanıtlamaya çalıştığı fark edilmektedir. Bu nedenle Ö2'ye "*Her dörtgende köşegenler birbirini ortalar mı?"* sorusu yöneltilmiştir. Ö2 bu soruyu *"evet"* biçiminde yanıtlamıştır. Ö2'nin yanlış bir fikir üzerine kanıta devam ettiği gözlenmektedir. Ö2 ardından sinüs alan formülünü kullanarak APB, DPC, APD ve BPC üçgenlerinin alanlarını yazmıştır. APD ve BPC üçgenlerinin alanlarını yazarken $sin \propto = \sin(180° - \propto)$ eşitliğini kullanmıştır. Ö2 bu dört üçgensel bölgenin alanların toplamının dörtgensel bölgenin alanı olduğunu iddia ederek teoremi kanıtlamıştır. Ö2'ye teoremi dikdörtgeni kullanarak kanıtladığı hatırlatılarak yaptığı kanıtın tüm dörtgenler için geçerliliği sorulmuştur. Ö2 "*Dikdörtgen için yaptığımdan tüm dörtgenler için geçerlidir."* biçiminde soruyu yanıtlamıştır.

Yukarıda Ö2 kodlu öğretmen adayının birinci teoreme verdiği yanıt ve görüşme sırasında yaptığı açıklamalara yer verilmiştir. Bu verilere bakıldığında Ö2'nin her dörtgende köşegenlerin birbirini ortalayacağını kabul ettiği ve kanıtı dikdörtgen için yapmasına rağmen tüm dörtgenler için geçerli olduğunu düşündüğü gözlemlenmiştir. Ö2, teoremin kanıtına dair birden çok veri sunmuş ancak bu verileri açıklarken tutarsız yanıtlar vermiş ve doğru bir biçimde neden sonuç ilişkisini kuramamıştır. Bu nedenle Ö2 kodlu öğretmen adayının verdiği yanıtın SOLO taksonomisinin "Çok Yönlü Yapı-Düşük" seviyesinde olduğu söylenebilir.

Ö3'ün F1. S1. Teoreme ilişkin kanıtı:

Şekil 4

Ö3'ün F1. S1. Teoreme İlişkin Yazdıkları



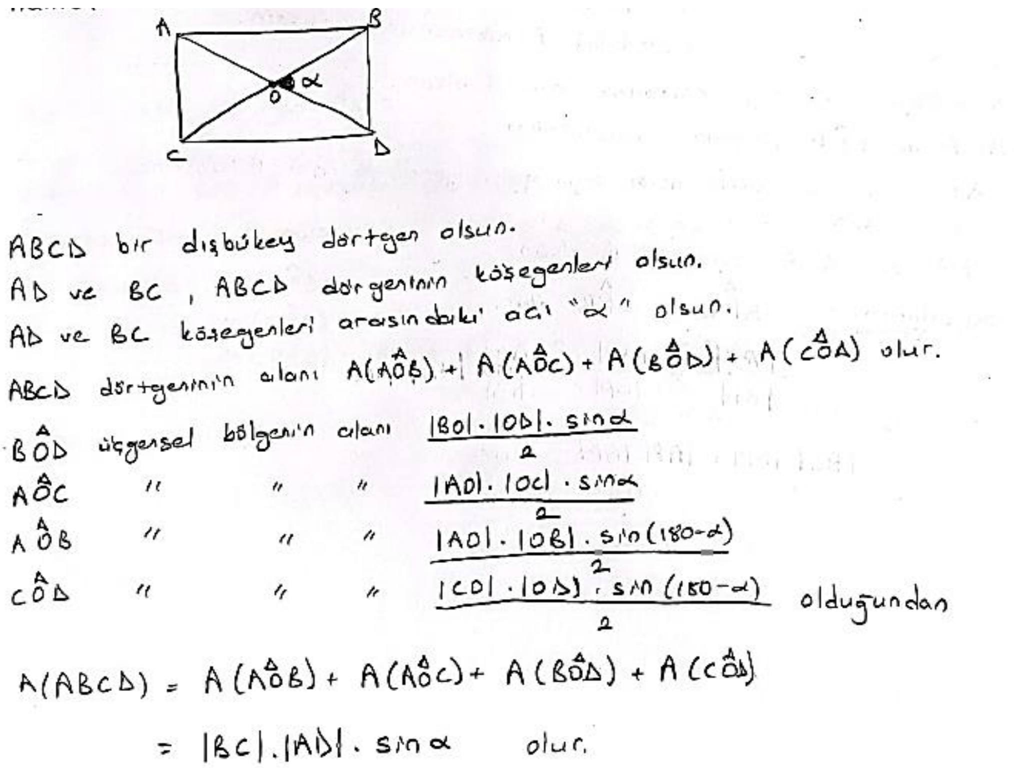
Ö3 kodlu öğretmen adayının “*şekli çizdiğimde bir dörtgenin dört tane üçgenden oluştuğunu gözlemledim.*” açıklaması kanıtı dört üçgensel bölgenin alanından yararlanarak yaptığının bir göstergesidir. Ö3 $m(\widehat{BOC}) = \propto$ biçiminde adlandırmış ve sinüs alan teoreminden yararlanarak BOC, DOC, AOB ve DOA üçgenlerinin alanını yazmıştır. Ö3’ün DOC ve AOB üçgenlerinin alanlarını yazdıktan sonra $\sin(180° - \propto) = sin \propto$ eşitliğinden yararlanarak tüm eşitliklerinin $sin \propto$ biçimimde olduğunu gözlemlediği görülmektedir. Ö3’ün çizdiği şeklin dikdörtgene benzer olması nedeniyle Ö3’e “*Seçtiğin dörtgen bir dikdörtgen mi? Yaptığın işlem tüm dörtgenler için geçerli midir?*” sorusu yöneltilmiştir. Ö3 “*seçtiğim açı herhangi bir açı, bu açının sinüs değeri ve bu açının bütünlerinin sinüs değeri aynı olur dolayısıyla kanıt bütün dörtgenler için geçerlidir*.” biçiminde ifade etmiştir. Ö3 yaptığı kanıtta bu dört alanı topladığında istenen ifadenin ortaya çıktığını söylemiştir ancak ara işlemleri tam olarak göstermemiştir bu nedenle Ö3’e $|AC|.|BD|$ ifadesini nereden bulduğu sorulmuştur. Ö3 "$|BO|$ *ile* $|OD|$*’yi topladığımızda* $|BD|$ *ve benzer biçimde* $|AO|$ *ile* $|OC|$*’yi topladığımızda* $|AC|$ *dolayısıyla toplam alan* $|AC|.|BD|.sin \propto$ *olur*.” biçiminde ifade etmiştir. Ö3’ün ifadesinde teoremde bulunan $\frac{1}{2}$ ifadesi bulunmamasının nedeni ifadeleri ortak paranteze alırken yanlışlık yapmasıdır.

Yukarıda Ö3 kodlu öğretmen adayının birinci teoreme verdiği cevap ve görüşme sırasında yaptığı açıklamalara yer verilmiştir. Ö3 teoremi şekle doğru bir biçimde aktarabilmiştir. Ö3 kanıtı son aşamaya kadar doğru bir biçimde yapabilmesine rağmen son aşamada ortak paranteze alma işlemini yapmayı unutmuştur. Dolayısıyla Ö3 teoremi tam doğru olarak kanıtlayamamıştır. Ö3’ün bilgileri çoğunlukla ilgili kanıta bilgi parçaları arasında bağlantı kurulabildiği görülmektedir ancak kanıtı tam olarak doğru tamamlayamadığı için verdiği yanıtın SOLO taksonomisinin “İlişkisel Yapı-Düşük” seviyesinde olduğu söylenebilir.

Ö4'ün F1. S1. Teoreme ilişkin kanıtı:

Şekil 5

Ö4'ün F1. S1. Teoreme İlişkin Yazdıkları



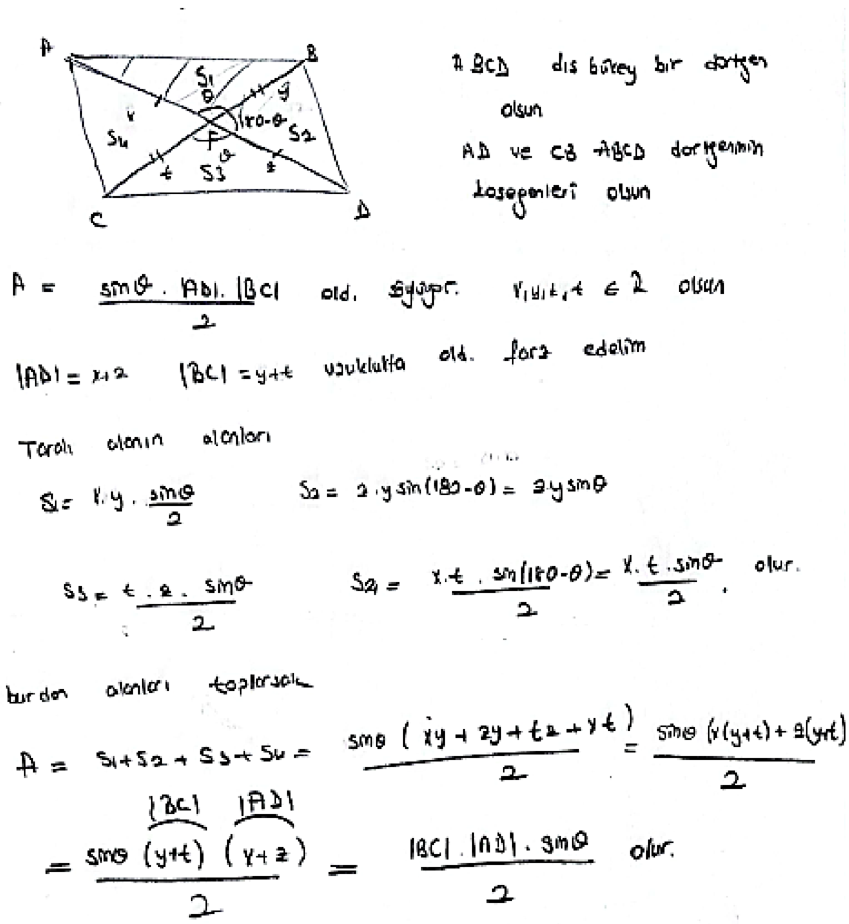
Ö4 kodlu öğretmen adayı "*Teoremde sinüs görünce sinüs alan formülünden yararlanarak teoremi kanıtlamaya karar verdim.*" biçiminde açıklama yaparak teoremi nasıl yapmayı hedeflediğini açıklamıştır. Ö4 dörtgeni çizdikten sonra $m(\widehat{BOD}) = \propto$ olarak adlandırmıştır. Ö4'ün teoremin kanıtı için köşegenlerle ayırdığı dört üçgensel bölgenin alanını topladığında bir dikdörtgensel bölgenin alanına eşit olduğunu göstermeye çalıştığı görülmektedir. Ö4, BOD, AOC, AOB ve COD üçgenlerinin alanını sinüs alan teoreminden yararlanarak yazmıştır. Ö4'ün kâğıdı incelendiğinde $\sin(180°-\propto)$ ifadelerinin var olduğu görülmektedir ancak son aşamada bu ifadeler görülmemektedir. Bu nedenle Ö4'ün $\sin(180°-\propto) = sin \propto$ ifadesinden yararlandığı düşünülmüştür ve Ö4'e teoremin kanıtında $\sin(180-\propto) = sin \propto$ ifadesinden yararlanıp yararlanmadığı sorulmuştur. Ö4 "*Bu eşitliği düşünerek kanıtıma devam ettim, bu ifadeyi birim çemberden gösterebiliyorduk*." biçiminde cevap vermiştir. Ö4'ün kanıtının sonucunda çıkan ifade ile teorem arasında farklılık olduğu kâğıttan görülmektedir Ö4'e bu farklılığın farkında olup olmadığı sorulmuştur. Ö4 "*Sonra incelediğimde kanıtım tam olarak tutmadığını sezdim. İfademde* $\frac{1}{2}$ *'nin eksik olduğunu fark ettim."* biçiminde yanıt vermiştir. Ö4'ün hangi noktada yanlışlık yaptığını öğrenebilmek için aradaki toplama işlemlerini nasıl yaptığı Ö4'e sorulmuştur. Ö4 " $\frac{|DO|}{2}$ *biçiminden 2 tane vardı dolayısıyla toplayınca 1 tane |DO| yapıyordu. Benzer bir ifadeyle |CO| elde ettim ve bu ikisini toplayınca |CB| oldu*." biçiminde açıklama yapmıştır. Ö4'ün bu ifadesinden toplama işlemini yaparken ortak paranteze alarak işlem yapması gerektiğini unutarak kanıtı yaptığı anlaşılmaktadır. Ö4'ün bu yanlışının farkında olup olmadığını öğrenebilmek için hangi kısmı yanlış yapmış olabileceği sorulmuş ve Ö4 "*sinüslerde bir yanlışlık olduğunu düşünüyorum*." açıklamasını yapmıştır. Son olarak Ö4'ün çizdiği şekil bir dikdörtgene benzediği için yaptığı kanıtın tüm dörtgenler için geçerli olup olmadığı sorulmuştur. Ö4 "*Tüm dörtgenler için düşünebilir miyim bilmiyorum ben kanıtımı dikdörtgen üzerinden yaptım*." biçiminde yanıt vermiştir.

Yukarıda Ö4 kodlu öğretmen adayının birinci teoreme verdiği cevap ve görüşme sırasında yaptığı açıklamalara yer verilmiştir. Ö4 teoremi şekle doğru aktarabilmesine rağmen Ö3 kodlu öğretmen adayı gibi kanıtta ortak paranteze alma işlemini unutarak son aşamada yanlış toplama yaptığı görülmektedir. Ö4 kodlu öğretmen adayı Ö3 kodlu öğretmen adayından farklı olarak teoremi sadece dikdörtgenler için kanıtlamıştır. Dolayısıyla Ö4'ün genelleme noktasında da sorun yaşadığı görülmektedir. Yani Ö4'ün yanıtında teoremi kanıtlamak için gerekli olan bilgi parçaları vardır ancak bu bilgi parçaları arasında doğru bir ilişki kuramamış, yanlışlıklar yapmıştır. Bu nedenle Ö4 kodlu öğretmen adayının verdiği yanıtın SOLO taksonomisinin "Çok Yönlü Yapı-Yüksek" seviyesinde olduğu söylenebilir.

Ö5'in F1. S1. Teoreme ilişkin kanıtı:

Şekil 6

Ö5'in F1. S1. Teoreme İlişkin Yazdıkları



Ö5 kodlu öğretmen adayının kâğıdı incelendiğinde şekli çizdiği ve alanları hesapladığı görülmektedir. Öncelikle dörtgeni dört üçgensel bölgeye bölüp her bir alanı S_1, S_2, S_3, S_4 diye adlandırdığı ve bu bölgelerin alanlarını sinüs alan teoremi ile yazdığı görülmektedir. Ö5'in S_2 ve S_4 bölgelerin alanlarını yazdıktan sonra $\sin(180°-\propto) = sin \propto$ eşitliğinden yaralandığı görülmektedir. Ardından S_1, S_2, S_3, S_4 alanlarını topladığında dörtgenin alanına eşit olduğunu göstererek teoremi kanıtlamıştır. Ö5'in şeklin üzerine gösterdiği eşit parçalar net bir biçimde anlaşılmadığı için öğretmen adayına "$|AE|$ *ile* $|ED|$ *birbirine eşit mi? Yani x ile z birbirine eşit mi?"* sorusu yöneltilmiştir. Ö5 "*Dörtgende köşegenler birbirini ortalayacağı için eşit olacağını düşünüyorum.*" biçiminde açıklama yapmıştır. Ardından Ö5'e eş olduğunu düşündüğü uzunluklara aynı harf vermeden kanıta devam etmesinin nedeni sorulmuştur. Ö5 "*Başta eşit* *olduğunu düşünerek teoremi anlamaya çalıştım ama sonrasında farklı harfler verdim böylece kanıtı genel olarak göstermiş oldum.”* biçiminde ifade etmiştir.

Yukarıda Ö5 kodlu öğretmen adayının birinci teoreme verdiği cevap ve görüşme sırasında yaptığı açıklamalara yer verilmiştir. Bu verilere bakıldığında Ö5’in kanıta dair verileri doğru bir biçimde kullanarak tutarlı bir yapı oluşturduğu ancak bütün dörtgenlerde köşegenlerin birbirini ortalayacağını şeklinde yanlış bir bilgiye sahip olduğu görülmüştür. Daha sonra bu fikri kullanmadan kanıtı tamamlamıştır. Dolayısıyla Ö5 elde ettiği verinin dışında fikir sunarken yanılmıştır. Bu nedenle Ö5 kodlu öğretmen adayının verdiği yanıtın SOLO taksonomisinin “İlişkisel Yapı-Yüksek” seviyesinde olduğu söylenebilir.

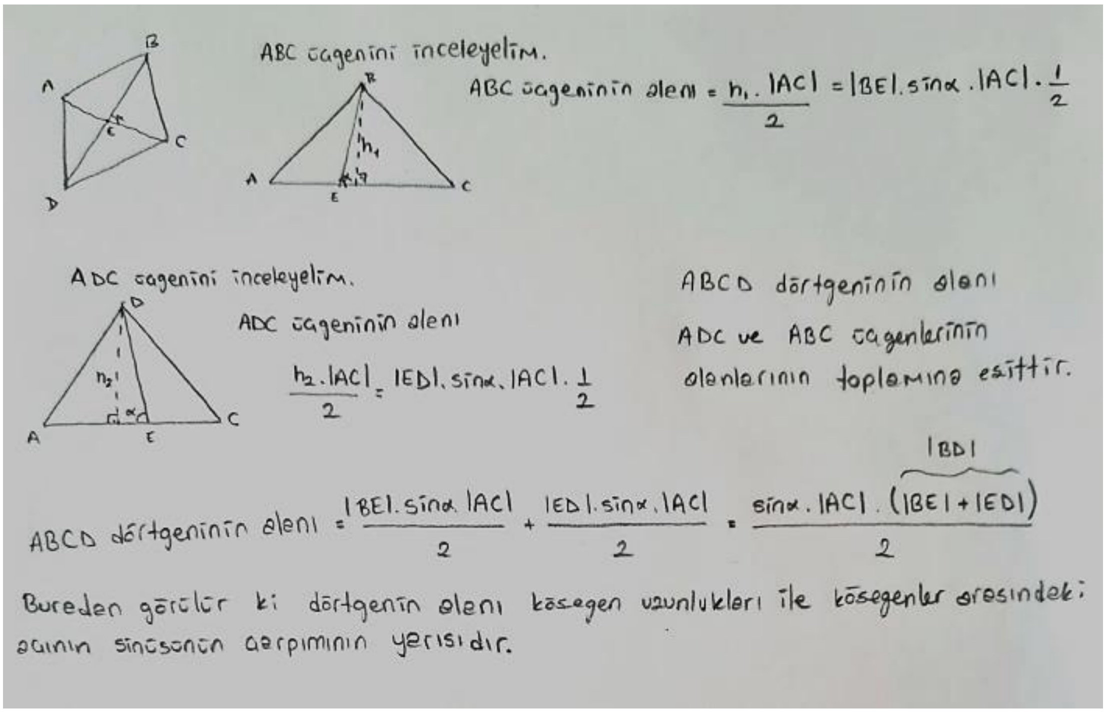
Ö6’nın F1. S1.Teoreme ilişkin kanıtı:

Ö6 kodlu öğretmen adayı bu teoremin kanıtına ilişkin herhangi bir şey yazamamıştır. Öğretmen adayı görüşme sırasında da kanıta dair aklına bir şey gelmediğini belirtmiştir. Dolayısıyla Ö6 kodlu öğretmen adayının verdiği yanıtın SOLO taksonomisinin “Yapı Öncesi” seviyesinde olduğu söylenebilir.

Ö7’nin F1. S1. Teoreme ilişkin kanıtı:

Şekil 7

Ö7’nin F1. S1. Teoreme İlişkin Yazdıkları



Ö7 kodlu öğretmen adayı öncelikle şekli çizmiş ve şekil üzerinde harflendirmeler yapmıştır. Ö7 bir dörtgeni iki üçgene bölmüş ve bu iki üçgenin alanlarının toplamının dörtgenin alanı olacağını kullanarak teoremi kanıtlamıştır. Ö7'nin yazdıkları incelendiğinde ABC ve ADC üçgenlerinin alanını bilinen üçgen alan formülünü ve de sinüs alan teoremini kullanarak iki türlü yazdığı görülmektedir. Ancak Ö7 ABCD dikdörtgenin alanını ABC üçgeni ile ADC üçgenin alanları toplamı biçiminde ifade ettiğinde sinüs alan teoremiyle yazdığı görülmektedir. Ö7 ADC ve ABC üçgenlerinin alanları toplarken ortak paranteze alma işleminden yararlanmış ve sonuçta teoremin kanıtını oluşturmuştur. Ö7'ye bunun herhangi bir dörtgen için geçerli olup olmadığı sorulduğunda ve Ö7 "*yaptığım ispat tüm dörtgenler için geçerlidir.*" biçiminde yanıt vermiştir.

Yukarıda Ö7 kodlu öğretmen adayının birinci teoreme ilişkin yazdıklarına ve görüşme sırasında yaptığı açıklamalara yer verilmiştir. Bu verilere bakıldığında Ö7'nin teoremi herhangi bir dörtgen için doğru bir biçimde kanıtladığı görülmektedir. Dolayısıyla Ö7 teoremi açık bir biçimde kanıtlamış ve doğru bir biçimde genelleyebilmiştir. Dolayısıyla Ö7 kodlu öğretmen adayının verdiği yanıtın SOLO taksonomisinin "Soyutlanmış Yapı" seviyesinde olduğu söylenebilir.

1.B) S.2.Teoreme İlişkin Bulgu ve Yorumlar

S.2. Teorem: Bir çemberin AB ve CD kesenleri çemberin dışındaki bir P noktasında kesişirse

$$|PA|.|PB| = |PC|.|PD|$$

olduğunu kanıtlayınız.

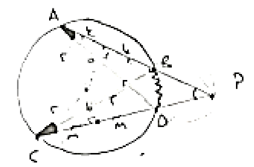
Kanıtlanması istenen ikinci teorem yukarıda verilmiştir.

Ö1'in F1. S2. Teoreme ilişkin kanıtı:

Şekil 8

Ö1'in F1. S2. Teoreme İlişkin Yazdıkları

1)



$|PA|.|PB| = |PC|.|PD|$

İSPAT:

Bir çember çizelim ve bu çemberi iki farklı düz çizgiyle keselim. Bu düz çizgilerin çember üzerinde kestikleri noktaları A,B,C,D olarak adlandıralım. Bu iki düz çizgi çember dışında olan bir P noktasında kesişsin. Çizdiğimizin çemberin yarıçapına r diyelim.

$|AB| < |CD|$ olsun. Teorem gereği $|AB| < |CD|$ olursa $|AB|$'den çember merkezine çizdiğimiz uzaklık, a, $|CD|$'den çember merkezine çizdiğimiz uzaklık olan b'den büyük olur.

Yani; $|AB| < |CD| \Rightarrow a > b$

$|AB|$'ye çizilen dikme $|AB|$'yi k uzunluğunda iki parçaya ayırsın, $|CD|$'ye çizilen dikme $|CD|$'yi m uzunluğunda iki eş parçaya ayırsın. Pisagor teoreminden;

$a^2+k^2=r^2$
$b^2+m^2=r^2$ ve $a>b$ olduğundan

$k<m$ olur.

$D\hat{A}P$ ve $B\hat{C}P$ aynı yayı gördüğünden eşittir.

ADP üçgeni ile CBP üçgeni için benzer diyebiliriz çünkü iki açısı eşit. O halde

$\overset{\triangle}{APD} \sim \overset{\triangle}{CBP}$

$$\frac{|PD|}{|PB|} = \frac{|PA|}{|PC|} = \frac{|AD|}{|CB|}$$

$|PB|.|PA| = |PD|.|PC|$

Ö1 kodlu öğretmen adayı bu teoremde öncelikle şekli çizmiştir. Ö1 yarıçapa r, merkezden $|AB|$'ye inen dikme uzunluğuna a, $|CB|$'e inen dikme uzunluğuna b demiştir. Ö1 $|AB| < |CD|$ seçmiş ve ardından $a > b$ olduğu çıkarımını yapmıştır. Ö1'e daha sonra ne yaptığı sorulduğunda öğretmen adayından "*Buradan bir şey gelmeyeceğini düşündüm ve açılara geçtim.*" biçiminde yanıt gelmiştir. Ardından Ö1'in açıları harflendirdiği görülmektedir. Ö1 harflendirme yaparken aynı yayı gören açıların ölçülerini eşit olarak yazmıştır. Örneğin $m(\widehat{DAP})$ ile $m(\widehat{BCP})$ aynı BD yayını gördükleri için açı ölçüleri aynı olmuştur. Ö1 iki açı ölçüsü aynı olduğu için APD ile CBP üçgenlerinin benzer olacağını ifade etmiştir. Ö1'e hangi benzerlik teoreminden yararlandığı sorulduğunda *"Açı-kenar-açı sanırım yok Açı-Açı* *benzerliğini kullandım.*" biçiminde bir yanıt vermiştir. Ö1'in benzer üçgenleri yazarken aynı açıları karşılıklı olarak yazmadığı fark edilmiş ve öğretmen adayına "*İki üçgenin benzer olduğunu yazarken harflerin sıralaması önemli midir?*" sorusu yöneltilmiştir. Ö1 "*Evet önemlidir ben yanlış yazmışım ikincisi CPB olmalı.*" biçiminde yanıtını düzeltmiştir. Dolayısıyla Ö1, APD ile CPB üçgenlerinin benzer olduğunu söylemiştir. Ardından benzerliği kullanarak üçgenlerin kenarlarını birbiriyle oranlamıştır. Ö1 $\frac{|PD|}{|PB|} = \frac{|PA|}{|PC|}$ eşitliğinde içler dışlar çarpımı yaparak teoremin kanıtını tamamlamıştır.

Yukarıda Ö1 kodlu öğretmen adayının ikinci teoreme verdiği cevap ve görüşme sırasında yaptığı açıklamalara yer verilmiştir. Ö1 teoremi şekle doğru bir biçimde aktarabilmesine rağmen başlangıçta farklı bir şekilde kanıtlamaya çalışmış ancak bu şekilde pek başarılı olamamıştır. Ardından Ö1 üçgenlerin benzerliğinden yararlanarak teoremi kanıtlamıştır. Kâğıt üzerinde üçgenlerin benzer olması ile ilgili yeterli gerekçe sunmamış olsa da görüşme sırasında yeterli gerekçeleri sunmuştur. Ö1'in yazdıkları incelendiğinde kanıt yaparken benzer üçgenlerin yazımında harflendirme sıralamasını yanlış yazdığı görülmektedir ancak bu yanlış yazımını görüşme sırasında düzeltmiştir. Dolayısıyla Ö1 verileri doğru bir biçimde bütünleştirerek genelleyebilmiştir. Bu nedenle Ö1 kodlu öğretmen adayının verdiği yanıtın SOLO taksonomisinin "Soyutlanmış Yapı" seviyesinde olduğu söylenebilir.

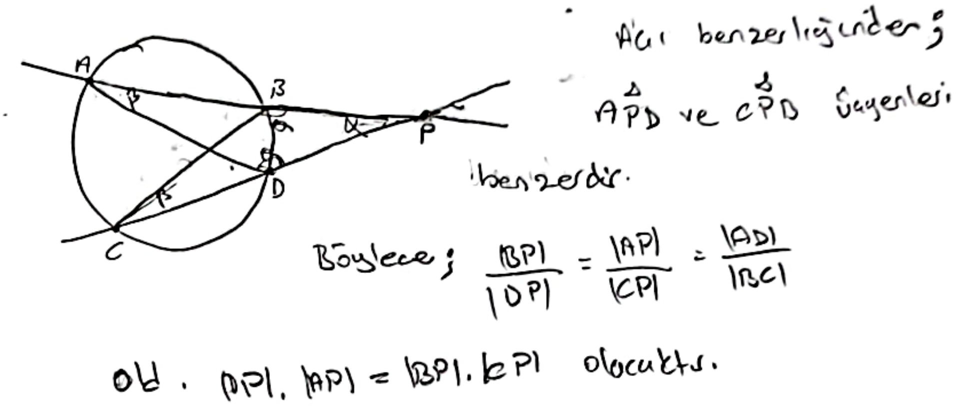
Ö2'nin F1. S2. Teoreme ilişkin kanıtı:

Ö2 kodlu öğretmen adayı teoremin ifadesini şekle dönüştürebilmiştir ancak bunun dışında herhangi bir şey yapamamıştır. Yapılan görüşmelerde de öğretmen adayı aklına bir şey gelmediğini belirtmiştir. Dolayısıyla Ö2 kodlu öğretmen adayının teoremin ifadesini şekle dönüştürebilmesi dolayısıyla verdiği yanıtın SOLO taksonomisinin "Tek Yönlü Yapı" seviyesinde olduğu söylenebilir.

Ö3'ün F1. S2. Teoreme ilişkin kanıtı:

Şekil 9

Ö3'ün F1. S2. Teoreme İlişkin Yazdıkları



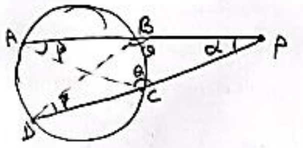
Ö3 kodlu öğretmen adayının yazdıklarından benzerlik kullanarak teoremi kanıtlamaya çalıştığı görülmektedir. Ö3'ün yazdıklarında açıları nasıl adlandırdığı tam anlaşılmadığı için öğretmen adayına görüşme sırasında sorulmuştur ve öğretmen adayı "*Çemberde açının özelliklerinden yararlanarak açıları yerleştirdim.*" biçiminde yanıt vermiştir. Ö3'ün APD ve CPB üçgenlerinin benzer olduğunu ifade ettiği görülmektedir. Ö3'e bu benzerliği hangi benzerlik kuralına göre yazdığı sorulmuştur. Ö3 *"benzerlik kuralının ismini hatırlayamadım."* biçiminde yanıt vermiştir. Daha sonra benzerliği kullanarak kenarları birbirine oranlamıştır. Bu oranlama sonucunda $\frac{|BP|}{|DP|} = \frac{|AP|}{|CP|} = \frac{|AD|}{|BC|}$ olarak bulmuştur. Ö3 daha sonra $\frac{|BP|}{|DP|} = \frac{|AP|}{|CP|}$ eşitliğini kullanarak içler dışlar çarpımı yapmış ve böylece istenilen teoremi kanıtlamıştır.

Yukarıda Ö3 kodlu öğretmen adayının ikinci teoreme verdiği cevap ve görüşme sırasında yaptığı açıklamalara yer verilmiştir. Ö3 teoremi doğru bir biçimde şekle aktarabilmiştir. Bu verilere bakıldığında Ö3'ün teoremin kanıtında benzerlikten yararlandığı ancak hangi benzerlik teoremini kullandığının farkında olmadığı görülmektedir. Dolayısıyla Ö3 kanıtı doğru tamamlamış olsa da yazdığı ifadelere gerekçe sunmakta yetersiz kaldığından SOLO taksonomisinin "İlişkisel Yapı-Yüksek" seviyesinde olduğu söylenebilir.

Ö4'ün F1. S2.Teoreme ilişkin kanıtı:

Şekil 10

Ö4'ün F1. S2. Teoreme İlişkin Yazdıkları



Bir çember olsun ve bu çemberin kesenleri AB ve CD olsun.
Bu kesenler çemberin dışındaki P noktasında kesişsin.
Kesenlerin kesiştiği noktadaki açı α olsun.
$A\hat{C}P$ ve $D\hat{B}P$ üçgenleri oluşturalım.
CAP açısı ile BDP açısı aynı yayı gördüğü için β açısına sahip olsun.
DBP ve ACP açılarıda θ olsun.
Bu durumda $A\hat{P}C \sim D\hat{P}B$ olur.

$$\frac{|PC|}{|BP|} = \frac{|AP|}{|DP|} = \frac{|AC|}{|DB|} \text{ olur.}$$

$$|PC| \cdot |DP| = |AP| \cdot |BP| \text{ olur.}$$

Ö4 kodlu öğretmen adayının teoremi kanıtlarken önce şekli çizdiği ve daha sonra benzerlikten yararlandığı görülmektedir. Ö4 bu yöntemi seçme nedenini "*Öklid geometrisi dersinde bu tarz bir $|DB|$ ve $|AC|$ biçiminde hayali bir şey çizip benzerlik yaptığımızı hatırladım o yüzden bu şekilde bir kanıt yapmaya yöneldim*." biçiminde açıklamıştır. Ö4'e açıları nasıl adlandırdığı ve benzerlik ilişkisini nasıl kurduğu sorulmuştur. Ö4 "$m(\widehat{CAB})$ *ile* $m(\widehat{BDC})$ *aynı yayı gördükleri için birbirine eşit olur.* $m(\widehat{APD})$ *de zaten iki üçgeninde ortak açısı olduğu için* $\hat{P}$ *açıları da aynı oluyor. Geriye* $\hat{B}$ *ve* $\hat{P}$ *açısıyla* $\widehat{ACP}$ *açısı kaldığı için onlarda haliyle 180° 'ye tamamlayacağı için aynı açı oluyordu o nedenle APC üçgeniyle DPB üçgeni benzer olmuş oldu.*" biçiminde soruyu yanıtlamıştır. Ardından Ö4'ün $\frac{|PC|}{|BP|} = \frac{|AP|}{|DP|} = \frac{|AC|}{|DB|}$ eşitliğini yazdığı görülmektedir. Ö4'e eşitliği neye göre yazdığı sorulmuştur ve Ö4 "*Oranı önce β açılarına göre sonra $\propto$ açısına göre inceledim.*" biçiminde yanıtlamıştır. Ö4 $\frac{|AC|}{|DF|}$

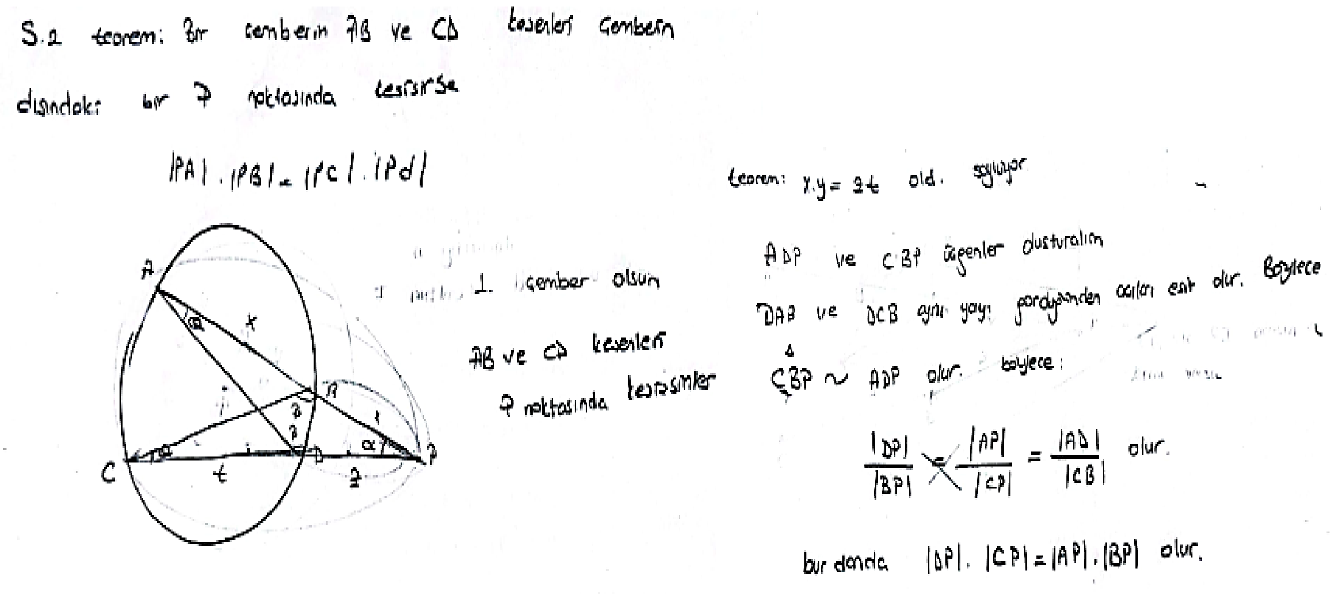
oranının teoremin kanıtı için gerekli olmadığını fark ettikten sonra sadece $\frac{|PC|}{|DB|} = \frac{|AB|}{|DF|}$ eşitliğinden yararlanarak içler dışlar çarpımı yapmış ve teoremi kanıtlamıştır. Ö4'e teoremi genelleyip genelleyemediğini test edebilmek için "*Bize* $|PA|$, $|PB|$, $|PC|$ *yi verse eşitliği kullanarak* $|PD|$*'yi bulabilir miyiz?*" biçiminde soru sorulmuş ve Ö4 tarafından "*P noktası çemberin içinden geçecek şekilde kesiyorsa bulabiliriz.*" biçiminde yanıt gelmiştir.

Yukarıda Ö4 kodlu öğretmen adayının ikinci teoreme verdiği cevap ve görüşme sırasında yaptığı açıklamalara yer verilmiştir. Ö4 teoremi şekle doğru bir biçimde aktarabildikten sonra teoremi nasıl kanıtlayacağını baştan belirlemiştir. Ö4 teoremin kanıtını doğru bir biçimde yapmıştır ve yaptığı açıklamalar kanıtı açıklamaya yeterlidir. Ö4 teoremi genelleyebilmiş ve teoremin uygulamasına dair yeterli açıklamaları yapabilmiştir. Dolayısıyla Ö4 kodlu öğretmen adayının verdiği yanıtın SOLO taksonomisinin "Soyutlanmış Yapı" seviyesinde olduğu söylenebilir.

Ö5'in F1. S2. Teoreme ilişkin kanıtı:

Şekil 11

Ö5'in F1. S2. Teoreme İlişkin Yazdıkları



Ö5 kodlu öğretmen adayı öncelikle şekli çizip harflendirmeler yaptığı görülmektedir. Şekil üzerinde y gözükmemektedir ancak Ö5 teoremi y'e bağlı olarak yazmıştır. Yapılan görüşmede sorulduğunda "*x, y, z, t gibi harfler yazınca karışıklık oldu o nedenle bunun yerine*

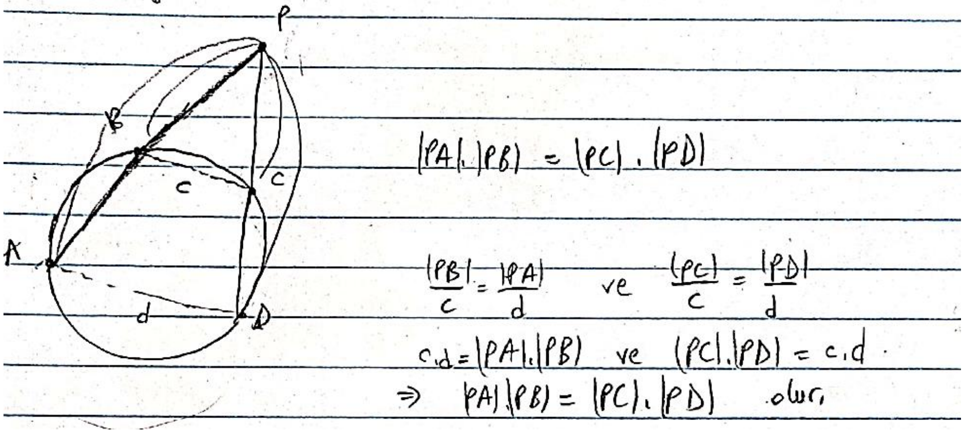
$|AB|$ *diyerek kanıta devam ettim.*" biçiminde yanıt gelmiştir. Ö5'in daha sonra benzer üçgenler yaratarak kanıta devam ettiği görülmektedir. Aynı yayı gören $m(\widehat{DAB})$ ile $m(\widehat{DCB})$ ölçülerinin eşit olacağını yazmıştır. Ö5'e hangi benzerlik teoreminden yararlanarak kanıta devam ettiği sorulduğunda "*benzerlik teoremlerini karıştırıyorum ama galiba açı-açı benzerliğini kullandım.*" biçiminde açıklama yapmıştır. Son durumda Ö5 CBP üçgeni ile ADP üçgenlerinin benzer olacağını yazmış ve kenarları oranlamıştır. Elde ettiği orandan $\frac{|DP|}{|BP|} = \frac{|AP|}{|CP|}$ ifadesinde içler dışlar çarpımı yapmış ve teoremin kanıtını tamamlamıştır.

Yukarıda Ö5 kodlu öğretmen adayının ikinci teoreme verdiği cevap ve görüşme sırasında yaptığı açıklamalara yer verilmiştir. Ö5 şekli doğru bir biçimde çizebilmiştir. Ö5 başlangıçta şekil üstünde harflendirmeler yapmış ancak daha sonra karışıklık olduğu gerekçesiyle harflendirme yapmadan kanıta devam etmiştir. Ö5 teoremin kanıtında benzerlikten yararlanmıştır ancak hangi benzerlik teoremini kullandığını ifade etmekte güçlük çekmiştir. Dolayısıyla Ö5 gerekçelendirme noktasında yetersiz kalmıştır. Ö5 kanıtı doğru bir biçimde tamamlamıştır yani bilgi parçalarını arasında bağlantı oluşturabilmiştir. Ancak Ö5'in gerekçe sunmakta yaşadığı güçlük teoremi genellerken zorluk yaşayabileceğini göstermektedir. Bu nedenle Ö5 kodlu öğretmen adayının verdiği yanıtın SOLO taksonomisinin "İlişkisel Yapı-Yüksek" seviyesinde olduğu söylenebilir.

Ö6'nın F1. S2. Teoreme ilişkin kanıtı:

Şekil 12

Ö6'nın F1. S2. Teoreme İlişkin Yazdıkları



Ö6 kodlu öğretmen adayı teoremi görselleştirdikten sonra benzerlikten yararlandığı kağıdında yazdığı ifadelerde görülmektedir. Ö6'nın şekil üzerinde |BC| uzunluğunu c, |AD| uzunluğunu d olarak harflendirdiği görülmektedir. Ö6'nın benzerliği nasıl yaptığı tam olarak anlaşılmadığı için Ö6'ya *"$|BC|$ ve $|AD|$ nin birbirine paralel olduğunu mu iddia ediyorsun? Paralel olmasa da aynı şeyleri yapar mıydın?"* biçiminde soru yöneltilmiştir. Ö6 *"Paralel olması gerekiyor. Paralel olmasa böyle bir şeyden bahsedemezdim. Yani orada bir küçük üçgen ile bir büyük üçgenin benzerliğinden yararlanıyorum."* biçiminde açıklama yapmıştır. Ö6'ya bu uzunlukların her zaman paralel olup olmayacağı sorulmuş ve öğretmen adayı tarafından "*Evet her zaman paralel olur.*" şeklinde yanıt gelmiştir. Ardından Ö6 PBC üçgeni ile PAD üçgeni arasında benzerlik yaparak $\frac{|PB|}{c} = \frac{|PA|}{d}$ ve $\frac{|PC|}{c} = \frac{|PD|}{d}$ oranlarını elde etmiştir. Ö6 elde ettiği oranlarda içler dışlar çarpımı yaparak $c.d$ eşitliğini iki farklı şekilde yazmıştır. Bulmuş olduğu $c.d$ 'leri eşitleyerek teoremi kanıtını tamamlamıştır.

Yukarıda Ö6 kodlu öğretmen adayının ikinci teoreme verdiği cevap ve görüşme sırasında yaptığı açıklamalara yer verilmiştir. Ö6 şekli doğru bir biçimde çizmiştir. Ö6 hayali olarak çizdiği çizginin her seferinde paralel olduğunu iddia etmiştir ancak bu iddiasına yönelik yeterli gerekçe sunamamıştır. Ö6'nın sunduğu ifadede eğimleri aynı devam eden iki doğrunun çember üzerindeki kesiştiği noktaları alarak doğru parçası oluşturduğumuz için o parçalar birbirine paralel olur. Ö6 teoremi doğru bir biçimde kanıtlayabilmesine rağmen gerekçe sunmakta yetersiz kalması nedeniyle Ö6 kodlu öğretmen adayının verdiği yanıtın SOLO taksonomisinin "İlişkisel Yapı- Yüksek" seviyesinde olduğu söylenebilir.

Ö7'nin F1. S2. Teoreme ilişkin kanıtı:

Şekil 13

Ö7'nin F1. S2. Teoreme İlişkin Yazdıkları

Ö7 kodlu öğretmen adayı bu teoremde öncelikle şekli doğru bir biçimde çizmiş ve şekli üçgensel bölgelere bölmüştür. Ö7 bu üçgensel bölgelerin her birinin alanını yukarıda olduğu gibi iki biçimde yazmış ancak kanıtı devam ettirememiştir. Yapılan görüşmelerde de Ö7 aklına bir başlangıç adımı gelmediğini belirtmiştir. Ö7 kodlu öğretmen adayının teoremi şekle doğru aktarabilmesi dolayısıyla kanıtı SOLO taksonomisinin "Tek Yönlü Yapı" evresindedir.

1.C) S.3.Teoreme İlişkin Bulgu ve Yorumlar

S.3. Teorem: Bir ABCD dörtgeninde $\hat{A}$ ve $\hat{B}$ açılarının açıortaylarının kesim noktası P olsun.

$$m(\widehat{APB}) = \frac{m(\hat{C}) + m(\hat{D})}{2}$$

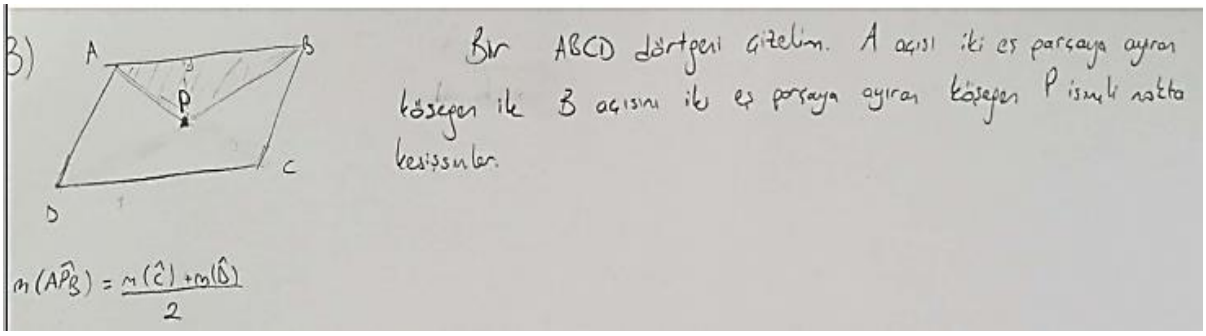
olduğunu kanıtlayınız.

Kanıtlanması istenen üçüncü teorem yukarıda verilmiştir.

Ö1'in F1. S3. Teoreme ilişkin kanıtı:

Şekil 14

Ö1'in F1. S3. Teoreme İlişkin Yazdıkları



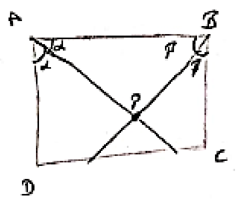
Ö1 kodlu öğretmen adayı teoremi kanıtlarken sadece şekli çizip bıraktığı görülmektedir. Ö1'e görüşme sırasında kanıtlamaya yönelik aklına fikir gelip gelmediği sorulmuştur. Ö1 *"Açıları ve z kuralını kullanarak bir şeyler yapabileceğimi düşünüyorum."* biçiminde cevap vermiştir. Ö1'e z kuralını hangi kısımda kullanmayı düşündüğü sorulmuştur. Ö1 *"P noktasından [AB]'e bir paralel çizerim."* biçiminde açıklama yapmıştır. Ö1'e "*Bütün dörtgen çizimlerinde bir paralel çizebilir miyiz?"* sorusu yöneltilmiştir. Ö1 *"tüm durumlarda* *geçerli olduğunu söylemem, nasıl bir dörtgen olduğu bizim için önemlidir."* şeklinde yanıt vermiştir.

Yukarıda Ö1 kodlu öğretmen adayının üçüncü teoreme verdiği cevap ve görüşme sırasında yaptığı açıklamalara yer verilmiştir. Ö1 teoremi şekle doğru bir biçimde aktarabilmiştir. Ö1 soruda ek bir paralel doğru çizimi ile teoremi kanıtlayabileceğini ancak bu kanıtın tüm dörtgenler için geçerli olamayacağını belirtmiştir. Dolayısıyla Ö1 teoremi nasıl kanıtlayabileceğine dair fikir sunmuştur ancak kanıta bunu uygulayamamıştır. Dolayısıyla Ö1 kodlu öğretmen adayının verdiği yanıtın SOLO taksonomisinin "Tek Yönlü Yapı" seviyesinde olduğu söylenebilir.

Ö2'nin F1. S3. Teoreme ilişkin kanıtı:

Şekil 15

Ö2'nin F1. S3. Teoreme İlişkin Yazdıkları



$m(\hat{A}) = 2\alpha$

$m(\hat{B}) = 2\beta$ olsun

APB bir üçgen ve $P\hat{A}B = \alpha$, $P\hat{B}A = \beta$ olduğundan

$A\hat{P}B = 180 - \alpha - \beta$ olur.

ABCD bir dörtgen olduğundan ve $\hat{A} = 2\alpha$, $\hat{B} = 2\beta$ olduğundan

$\hat{D} + \hat{C} = 360 - 2\alpha - 2\beta$ olur.

O halde $A\hat{P}B = 180 - \alpha - \beta = \dfrac{360 - 2\alpha - 2\beta}{2} = \dfrac{m(\hat{C}) + m(\hat{D})}{2}$ dir.

Ö2 kodlu öğretmen adayı bir dörtgen çizmiş ve açıları harflendirmiştir. Şeklin daha çok dikdörtgene benzemesi dolayısıyla Ö2'ye şeklin özel bir dörtgen olup olmadığı sorulmuştur. Ö2 *"önce dikdörtgen için düşündüm ama çizmiş olduğum dörtgen* $|AB|$ *ve* $|DC\,|$ $kenarları$ *birbirine paralel olmayan herhangi bir dörtgendir."* biçiminde açıklama yapmıştır. Ö2'nin kanıtı incelendiğinde üçgenin iç açıları toplamının $180°$ olduğunu kullanarak

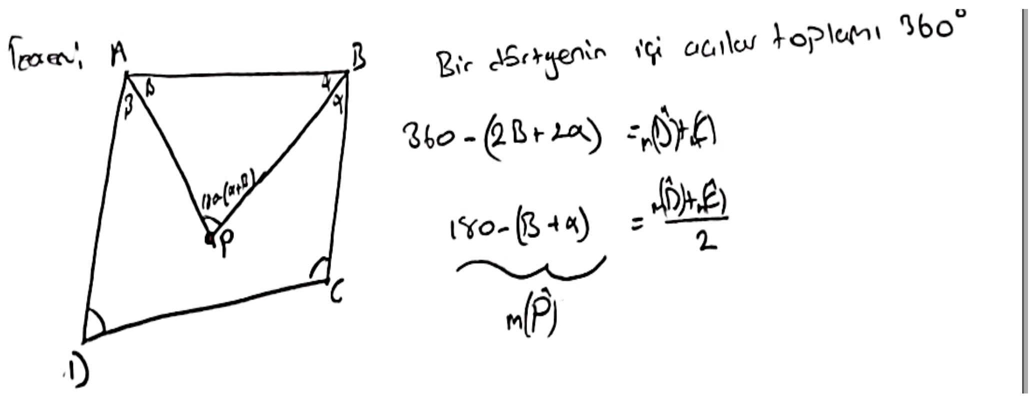
$m(\widehat{APB}) = 180° - \propto - \beta$ olarak bulduğu gözlemlenmektedir. Benzer biçimde Ö2 dörtgenin iç açıları toplamının $360\,°$ olduğunu kullanarak $m(\widehat{D}) + m(\widehat{C}) = 360° - 2 \propto - 2\,\beta$ olarak bulmuştur. Ö2 bu iki ifadeyi incelediğinde teoremde bahsedilen ilişkiyi gözlemleyerek kanıtı tamamlamıştır. Ö2'nin çizimi incelendiğinde açıortaylar dörtgenin iç bölgesinde kesişmiştir bu nedenle Ö2'ye *"Açıortaylar her zaman dörtgenin iç bölgesinde mi kesişir? Eğer açıortaylar farklı bir noktada kesişseydi teoremi kanıtlama şeklin değişir miydi?"* sorusu yöneltilmiştir. Ö2 *"Hayır açıortaylar başka noktalarda da kesişebilir eğer farklı bir noktada kesişseydi teoremi kanıtlama şeklim değişmezdi."* biçiminde yanıtlamıştır.

Yukarıda Ö2 kodlu öğretmen adayının üçüncü teoreme verdiği cevap ve görüşme sırasında yaptığı açıklamalara yer verilmiştir. Ö2 teoremin kanıtını doğru bir biçimde yapmış ve yaptığı açıklamalar kanıt için yeterlidir. Ö2 kanıtta göstermediği ama farklı çizimler olsaydı kanıtını nasıl yürüteceğini ifade etmesi öğretmen adayının elinde olan verilerin ötesinde düşünebildiğini göstermektedir. Bu nedenle Ö2 teorem için gerekli verileri doğru bir biçimde bütünleştirmiş ve diğer durumlara genelleyebilmiştir. Dolayısıyla Ö2 kodlu öğretmen adayının verdiği yanıtın SOLO taksonomisinin "Soyutlanmış Yapı" seviyesinde olduğu söylenebilir.

Ö3'ün F1. S3.Teoreme ilişkin kanıtı:

Şekil 16

Ö3'ün F1. S3. Teoreme İlişkin Yazdıkları



Ö3 kodlu öğretmen adayı önce şekli çizmiş ve şekil üzerinde harflendirmeler yapmıştır. Daha sonra Ö3'ün $m(\widehat{D})$ ile $m(\widehat{C})$ 'nin toplamını bulduğu görülmektedir, Ö3'e bunu nasıl yazdığı sorulmuştur. Ö3 "*Dörtgenin iç açıları toplamı* $360°$ *olduğunu kullanarak* $m(\widehat{D}) +$

$m(\hat{C})$ *ifadesini buldum.*" biçiminde açıklamıştır. Ö3 benzer bir biçimde "*Üçgenin iç açıları toplamının* $180°$ *olduğunu kullanarak* $m(\widehat{APB}) = 180° - (\propto + \beta)$ *olarak buldum."* ifadesinde bulunmuştur. Ö3'ün çizimine göre açıortayların kesişim noktası dörtgenin iç bölgesindedir bu nedenle Ö3'e "*açıortayların kesişim noktası her zaman dörtgenin iç bölgesinde mi olur?*" sorusu yöneltilmiştir. Ö3 "*Açıortay eğer* $90°$*'den küçük olan açılarda oluşuyorsa dörtgenin iç bölgesinde, eğer* $90°$*'den büyük olan açılardan oluşuyorsa dörtgenin dış bölgesinde kesişir.*" cevabını vermiştir. Yapmış olduğu çizimde açıortaylar içeride bir yerde kesiştiği için açıortay çizdiği açıların $90°$'den küçük olan bir dörtgen çizdiği çıkarımı yapılmış ve Ö3'e "Açıortayı $90°$*'den büyük olan açılarda oluştursaydın benzer bir biçimde mi kanıtlardın?"* biçiminde soru yöneltilmiştir. Ö3 "*Benzer bir biçimde kanıtlamayı denerdim*." biçiminde açıklama yapmıştır.

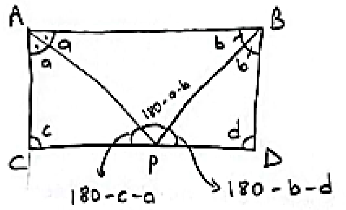
Yukarıda Ö3 kodlu öğretmen adayının üçüncü teoreme verdiği cevap ve görüşme sırasında yaptığı açıklamalara yer verilmiştir. Ö3 teoremi doğru bir biçimde çizime aktarmıştır. Ö3'ün kağıdında açılar toplamını yazdığı ifadelerde yeterince açıklama yoktur ancak görüşme sırasında Ö3 yeterince gerekçe sunmuştur. Ö3 çizimde oluşabilecek değişikliklere karşın nasıl kanıtı yürüteceğine dair net bir açıklama yapmıştır. Dolayısıyla Ö3 teorem ile ilgili tüm ifadeleri bir araya getirerek düzgün bir biçimde bütünleştirmiştir. Bu nedenle Ö3 kodlu öğretmen adayının verdiği yanıtın SOLO taksonomisinin "Soyutlanmış Yapı" seviyesinde olduğu söylenebilir.

Ö4'ün F1. S3. Teoreme ilişkin kanıtı:

Şekil 17

Ö4'ün F1. S3. Teoreme İlişkin Yazdıkları

Kanıt:



$(180-c-a)+(180-a-b)+(180-b-d)=180$

$360-2a-2b-c-d=0$

$360-2a-2b=c+d$

$180-a-b=\frac{c+d}{2}$

$m(A\hat{P}B)=\frac{m(\hat{C})+m(\hat{D})}{2}$

ABCD bir dörtgen olsun.
$\hat{A}$ ve $\hat{B}$ açılarının açıortaylarının kesim noktası CD kenarı üzerindeki bir P noktası olsun.
$\hat{A}$ açısı $2a$, $\hat{B}$ açısı $2b$, $\hat{C}$ açısı c ve $\hat{D}$ açısı d olsun.

Bu durumda $m(A\hat{P}B)=180-a-b$
$m(C\hat{P}A)=180-c-a$
$m(D\hat{P}B)=180-b-d$ olur. (Üçgenin iç açılar toplamı 180)

O halde $m(A\hat{P}B)+m(C\hat{P}A)+m(D\hat{P}B)=180$ (doğrusal olduğundan)

$m(A\hat{P}B)=\frac{m(\hat{C})+m(\hat{D})}{2}$ olur.

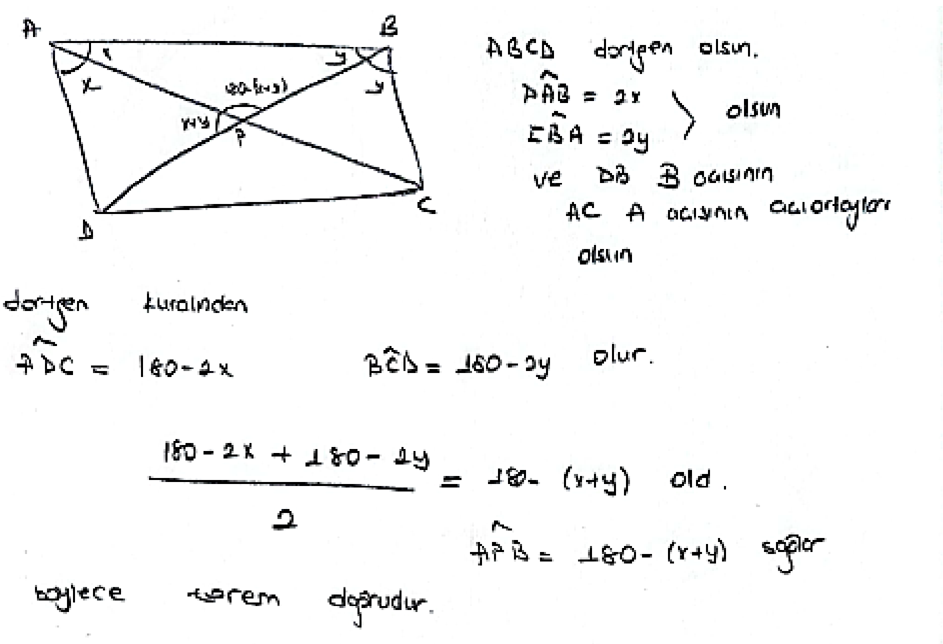
Ö4 kodlu öğretmen adayı öncelikle şekli çizmiş ve açı isimlendirmeleri yapmıştır. Öğretmen adayına açıları nasıl adlandırdığı sorulmuştur. Ö4 "Ü*çgenin iç açıları toplamı* 180° *olduğu kullanarak* $m(\widehat{APC})$*,* $m(\widehat{BPD})$ *ve* $m(\widehat{APB})$ *açılarını ifade ettim."* demiştir. Ardından Ö4'ün $m(\widehat{APC})+m(\widehat{BPD})+m(\widehat{APB})=180°$ eşitliğini yazdığı görülmektedir Ö4'e bu eşitliği nasıl yazdığı sorulmuş ve öğretmen adayı "*bu üç açının toplamı bir doğru açı oluşturduğu için bu biçimde yazdım."* açıklamasında bulunmuştur. Ardından eşitliği kullanarak Ö4 kanıtı tamamladığı görülmektedir. Ö4'ün çizimi dikdörtgeni andırması sebebiyle yaptığı teoremin tüm dörtgenler için geçerli olup olmadığı sorulmuştur. Ö4 "*Şekil dikdörtgene benzer olabilir ama teoremi dikdörtgene ait özel özelliklerden yararlanmadan kanıtladım."* biçiminde yanıtlamıştır. Ardından Ö4'e "*Açıortaylar her zaman kenar üzerinde mi kesişir? Eğer farklı noktada kesişirse kanıtı nasıl yapardın?"* sorusu yöneltilmiştir. Ö4 *"Açıortaylar her zaman* *kenar üzerinde kesişmez örneğin açıortaylar içeride bir yerde de kesişebilir o zaman [CD] ye paralel bir doğru çizip kanıtı aynı şekilde yapabilirdim."* açıklamasını yapmıştır.

Yukarıda Ö4 kodlu öğretmen adayının üçüncü teoreme verdiği cevap ve görüşme sırasında yaptığı açıklamalara yer verilmiştir. Ö4 teoremin kanıtını doğru bir biçimde yapmıştır ve yaptığı açıklamalar kanıt için yeterlidir. Ö4'ün açıortayların dörtgenin iç bölgesinde kesişmemesi durumunda da nasıl kanıtlayabileceğini Ö4 teoremi genelleyebildiğini göstermektedir. Dolayısıyla Ö4 kodlu öğretmen adayının verdiği yanıtın SOLO taksonomisinin "Soyutlanmış Yapı" seviyesinde olduğu söylenebilir.

Ö5'in F1. S3. Teoreme ilişkin kanıtı:

Şekil 18

Ö5'in F1. S3. Teoreme İlişkin Yazdıkları



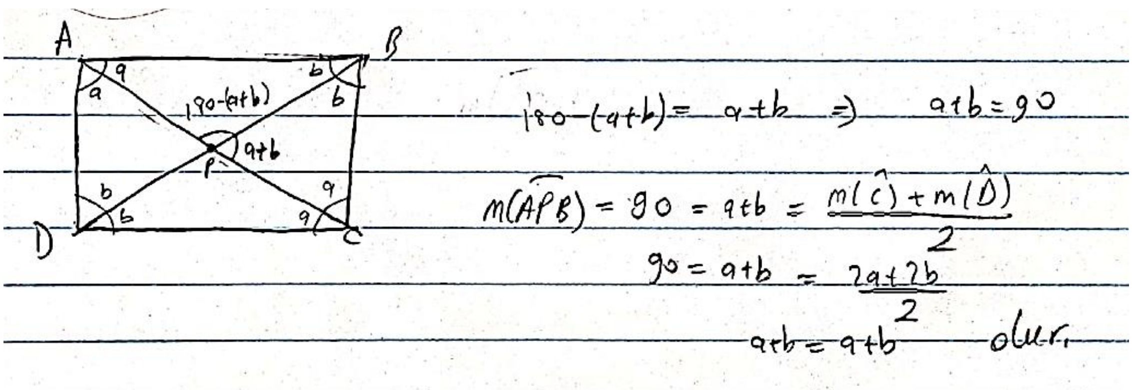
Ö5 kodlu öğretmen adayı önce şekli çizip ardından harflendirmeler yapmıştır. Üçgenin iç açıları toplamının $180°$ olduğunu kullanarak $m(\widehat{APB}) = 180° - (x + y)$ biçiminde bulmuştur. Ardından $m(\widehat{BAD}) + m(\widehat{ADC}) = 180°$ ve $m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{BCD}) = 180°$ olduğunu belirterek $m(\widehat{ADC}) = 180° - 2x$ ve $m(\widehat{BCD}) = 180° - 2y$ olarak bulmuştur. Ardından teoremi de hatırlayarak bu ifadeler arasındaki ilişkiyi kullanmış ve teoremin kanıtını tamamlamıştır. Ö5'in şeklinden köşegenlerin kesişim noktası açıortaylarının kesim noktasıdır çıkarımı yapılmaktadır Ö5'in bu noktadaki görüşü merak edilerek "A*çıortayların kesişim noktası her zaman köşegenlerin kesişim noktası olmak zorunda mıdır?*" sorusu yöneltilmiştir. Ö5 "*Aslında öyle olmak zorunda olmadığını şimdi gözlemleyebiliyorum ama o an aklıma gelmemişti.*" biçiminde açıklama yapmıştır. Araştırmacı tarafından Ö5'e "*Farklı bir yerde kesiştiği durumunda kanıtını nasıl yapardın?*" sorusu yöneltilmiş ve Ö5 "*Yine aynı kanıtı yapardım."* biçiminde yanıt vermiştir.

Yukarıda Ö5 kodlu öğretmen adayının üçüncü teoreme verdiği cevap ve görüşme sırasında yaptığı açıklamalara yer verilmiştir. Ö5 teoremi şekle doğru bir biçimde aktarabilmiştir. Ö5'in kanıttı doğru bir biçimde açıklamıştır ancak açıortayların farklı kesişim noktası olabileceğini farkına geç varmıştır. Görüşme sırasında farklı çizimlerin olabileceğini belirtse de yeterince açıklayıcı gerekçeler sunamamıştır. Dolayısıyla Ö5'in genelleme noktasında sıkıntı yaşayabileceği düşünülmüştür. Bu nedenle Ö5 kodlu öğretmen adayının verdiği yanıtın "İlişkisel Yapı- Yüksek" seviyesinde olduğu söylenilebilir.

Ö6'nın F1. S3. Teoreme ilişkin kanıtı:

Şekil 19

Ö6'nın F1. S3. Teoreme İlişkin Yazdıkları



Ö6 kodlu öğretmen adayı öncelikle şekli çizmiş ve açıları harflendirmiştir. Ö6'nın çizimine bakıldığında köşegenlerin aynı zamanda birer açıortay olduğunu düşündüğü görülmektedir. Ö6'ya "*Dörtgende açıortaylar her zaman köşegen olmak zorunda mıdır?"* sorusu yöneltilmiş ve "*Açıortay olması için illa köşegen olması şart değildir, ama aklıma gelen şekil yukarıdaki gibidir."* biçiminde yanıt vermiştir. Gelen yanıta istinaden Ö6'ya

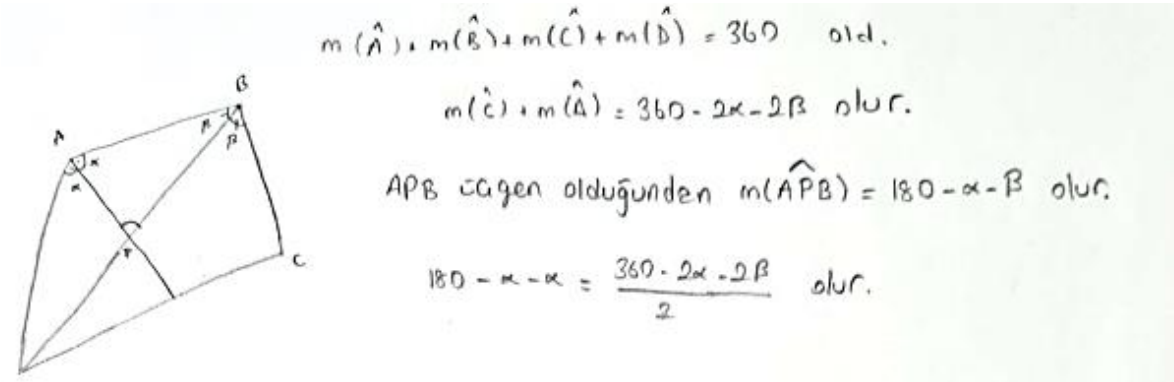
"*Açıortaylar başka yerlerde kesişebilir mi? Eğer kesişirse kanıtı nasıl devam ettirirdin?"* soruları yöneltilmiştir. Ö6 *"Açıortaylar başka yerlerde kesişebilir. Kanıtı benzer biçimde yürütürdüm."* yanıtını vermiştir. Ö6'nın açıları nasıl harflendirdiği tam olarak anlaşılamadığı için Ö6'ya sorulmuş ve Ö6 "*Çizmiş olduğum dörtgende karşılıklı kenarlar birbirine paraleldir. Buradan hareketle Z kuralından yararlanarak* $m(\widehat{DCA})$ *ile* $m(\widehat{BAC})$ *birbirine eşit olur."* yanıtını vermiştir. Benzer biçimde Ö6'nın diğer eş açıları da yazdığı gözlemlenmektedir. Diğer bir yandan Ö6 $m(\widehat{APB})$'i yazarken üçgenin iç açıları toplamının $180°$ olduğu bilindiğinden yararlanarak $m(\widehat{APB})$'i $180° - a - b$ biçiminde ifade etmiştir. Ö6'nın ilk eşitliği nereden yazdığı tam olarak anlaşılamamış ve Ö6'ya sorulmuştur. Ö6 "*İki iç açının ölçüsünün toplamının bir dış açı olduğunu kullanarak* $m\left(\widehat{DAP}\right) + m\left(\widehat{PDA}\right) = m(\widehat{APB})$ *eşitliğini yazdım ve ardından* $a + b = 90°$ *olarak buldum*." açıklamasını yapmıştır. Dolayısıyla $m\left(\widehat{APB}\right) = 90°$ olmuştur. Ardından $m\left(\hat{C}\right) + m\left(\hat{D}\right) = 2a + 2b$ olduğunu gözlemlemiş ve eşitliği yazarak kanıtı tamamlamıştır.

Yukarıda Ö6 kodlu öğretmen adayının üçüncü teoreme verdiği cevap ve görüşme sırasında yaptığı açıklamalara yer verilmiştir. Ö6 teoremi şekle doğru bir biçimde aktarabilmiştir. Ancak Ö6 açıortay doğrularının köşegen olacağını kullanarak teoremi kanıtlamıştır. Görüşme sırasında farklı noktalarda kesişebileceğini ifade etmiştir. Ö6 çizdiği dörtgende karşılıklı kenarların paralel olduğunu belirtmiş ve açıları buna göre yerleştirmiştir. Bu nedenle Ö6'nın kanıtı tüm dörtgenlere genellenebilir değildir. Dolayısıyla Ö6 genellemeye uygun bir kanıt yapamamıştır, özel bir dörtgen için kanıt yapmıştır. Yani Ö6 kanıtta bir yöne odaklanmış ve bütün içerisindeki yerini tam olarak doğru açıklayamamıştır. Bu nedenle Ö6 kodlu öğretmen adayının verdiği yanıtın SOLO taksonomisinin "İlişkisel Yapı-Düşük" seviyesinde olduğu söylenilebilir.

Ö7'nin F1. S3. Teoreme ilişkin kanıtı:

Şekil 20

Ö7'nin F1. S3. Teoreme İlişkin Yazdıkları



Ö7 kodlu öğretmen adayı öncelikle şekli çizmiş ve açılara harflendirmeler yapmıştır. Ardından Ö7'nin açıortayların kesim noktasının farklı bir nokta olabileceği ile ilgili farkındalığını ölçmek için Ö7'ye *"Açıortaylar her zaman dörtgenin iç bölgesinde mi kesişir?"* sorusu yöneltilmiştir. Ö7 *"Açıortaylar üç farklı yerde kesişebilir, çizimimde bunların hepsini göstermem gerekirdi."* biçiminde açıklamıştır. Buna istinaden Ö7'ye "*Şekiller farklılaşınca kanıtın değişir miydi*?" sorusu yöneltilmiştir. Ö7 *"Şekillerin farklılaşması benim kanıtımı etkilemez."* biçiminde açıklamıştır. Ö7 kağıdında dörtgenin iç açıları toplamının $360°$ olduğunu kullanarak $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) + m(\hat{D}) = 360°$ olarak yazdığı görülmektedir. Ardından $m(\hat{A}) = 2\propto$ ve $m(\hat{B}) = 2\beta$ olduğu için $m(\hat{C}) + m(\hat{D}) = 360° - 2\propto -2\beta$ olarak bulmuştur. Ö7 daha sonra üçgenin iç açıları toplamının $180°$ olduğunu kullanarak $m(\widehat{APB}) = 180°-\propto -\beta$ olarak bulmuştur Ö7'nin eşitlikte $180°-\propto -\propto$ olarak yazdığı görülmektedir Ö7'ye bir yanlışlık olup olmadığı sorulduğunda "$180°-\propto -\beta$ *yazmalıydım yanlış yazmışım*." biçiminde açıklama yapmıştır. Ö7 son olarak eşitliği göstererek ve teoremi kanıtlamıştır.

Yukarıda Ö7 kodlu öğretmen adayının üçüncü teoreme verdiği cevap ve görüşme sırasında yaptığı açıklamalara yer verilmiştir. Ö7 teoremi şekle doğru bir biçimde aktarmıştır. Öğretmen adayına sorulan sorular ile açıortayların 3 farklı noktada kesişebileceğine dair cevap alınmıştır. Ö7'nin kanıtladığı teoremin farklı yönlerini düşünebilmesi kanıtı genelleyebildiğini göstermektedir. Dolayısıyla Ö7 yaptığı kanıtı diğer durumlara da genelleyebilmiştir. Yani Ö7 bilgi parçaları arasında tutarlı bir bağlantı kurarak kanıtı doğru bir biçimde yapabilmiştir. Bu nedenle Ö7 kodlu öğretmen adayının verdiği yanıtın SOLO taksonomisinin "Soyutlanmış Yapı" seviyesinde olduğu söylenilebilir.

1.D) S.4.Teoreme İlişkin Bulgu ve Yorumlar

S.4. Teorem: ABCD bir dikdörtgen, P de dikdörtgensel bölgede alınan bir nokta olmak üzere;

$$|PB|^2 + |PD|^2 = |PC|^2 + |PA|^2$$

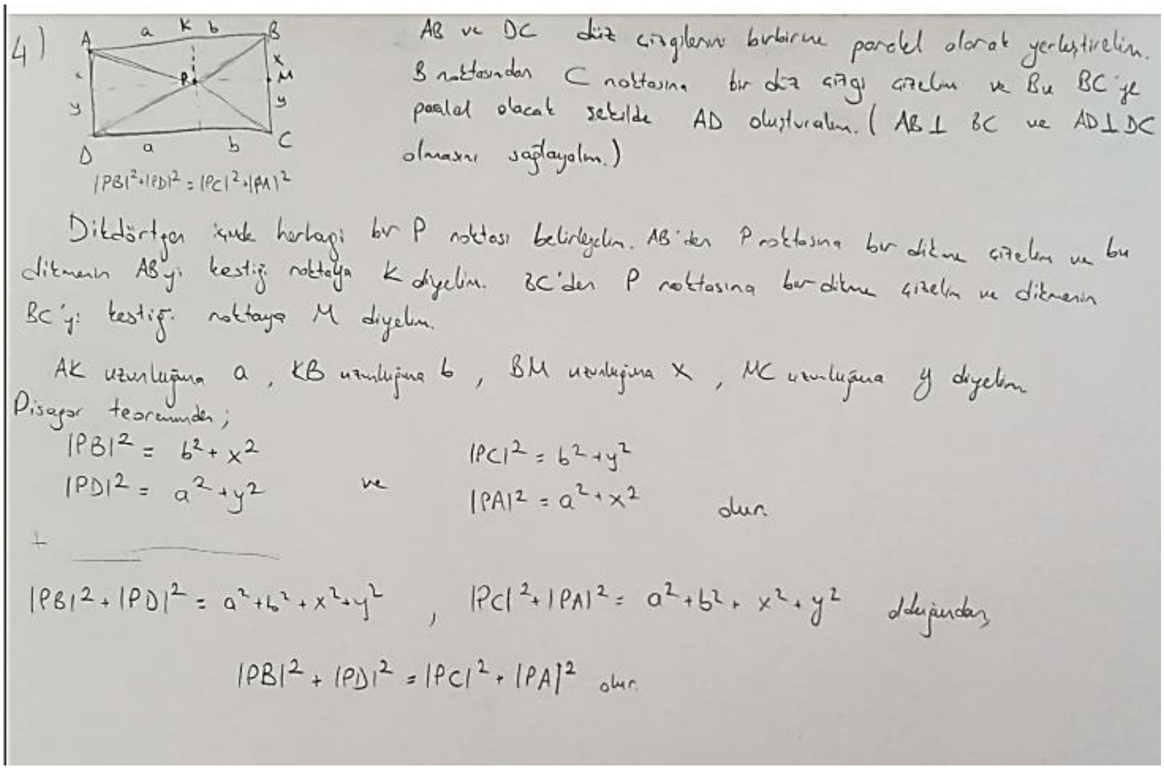
olduğunu kanıtlayınız.

Kanıtlanması istenen dördüncü teorem yukarıda verilmiştir.

Ö1'in F1. S4. Teoremine ilişkin kanıtı:

Şekil 21

Ö1'in F1. S4. Teoreme İlişkin Yazdıkları



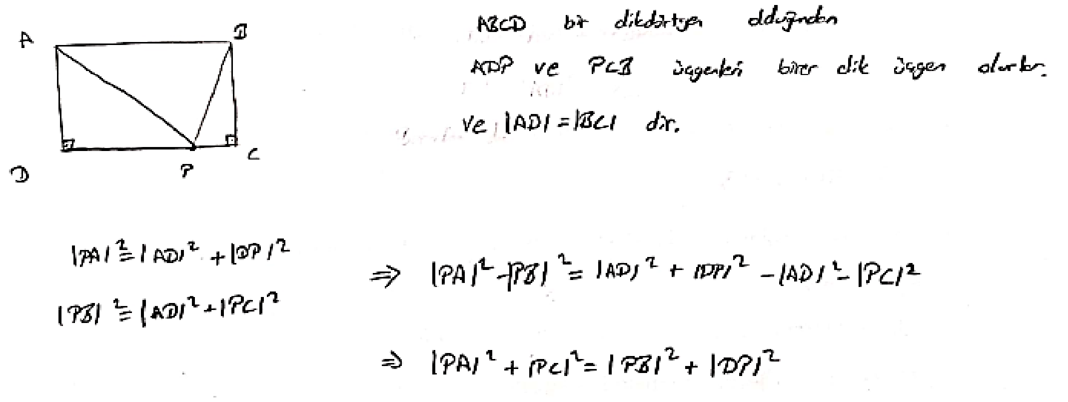
Ö1 kodlu öğretmen adayı öncelikle şekli çizmiş ve harflendirmeler yapmıştır. Ardından Ö1 dikdörtgenin içinde bir P noktası almıştır. Bu P noktasıyla kenarları birleştirmiştir. Ö1'in P noktasından kenarlara birer dikme indirdiği görülmüş ve dikme indirme nedeni sorulmuştur. Ö1 "*|PA|, |PB|, |PC| ve |PD| uzunluklarını Pisagor teoremi kullanarak bulacağım o nedenle dik üçgenlere ihtiyacım var bu nedenle dikme indirdim*." biçiminde açıklama yapmıştır. Ardından Ö1 $|PA|^2$, $|PB|^2$, $|PC|^2$ ve $|PD|^2$ eşitliklerini Pisagor teoremini kullanarak yazmıştır. $|PB|^2$ ile $|PD|^2$ eşitliklerini ve $|PC|^2$ ile $|PA|^2$ eşitliklerini toplamış ve sonuçların birbirine eşit olduğunu göstermiştir. Böylelikle Ö1 teoremin kanıtını doğru bir biçimde tamamlamıştır. Ö1'e yapmış olduğu kanıtın hangi dörtgenler için geçerli olduğu sorulmuştur. Ö1 *"Her kare bir dikdörtgendir. Ben kanıtımı dikdörtgen için kanıtladım o nedenle kare içinde kanıtlamış oldum."* ifadesini kullanmıştır.

Yukarıda Ö1 kodlu öğretmen adayının dördüncü teoreme ilişkin yaptığı kanıt ve görüşme sırasında yaptığı açıklamalara yer verilmiştir. Ö1 Pisagor teoreminden yararlanarak kanıtı doğru bir biçimde yürütmüştür. Ö1 kanıtı hangi dikdörtgen için yaptığını söylemiş ve dikdörtgen ile kare arasında doğru bir bağ kurarak kare için de geçerli olduğu çıkarımını yapabilmiştir. Bu nedenle Ö1 kodlu öğretmen adayının verdiği yanıtın SOLO taksonomisinin "Soyutlanmış Yapı" seviyesinde olduğu söylenilebilir.

Ö2'nin F1. S4.Teoremine ilişkin kanıtı:

Şekil 22

Ö2'nin F1. S4. Teoreme İlişkin Yazdıkları



Ö2 kodlu öğretmen adayı öncelikle bir dikdörtgen çizmiş ve teoremde bahsedilen P noktasını dikdörtgenin kenarı üzerinde seçerek harflendirmeleri yapmıştır. Ö2'nin $|PA|^2 = |AD|^2 + |DP|^2$ ve benzer biçimde $|PB|^2 = |AD|^2 + |PC|^2$ eşitliklerini yazdığı görülmektedir ancak bu eşitlikleri nereden yazdığına dair yeterli bir açıklama yoktur. Bu nedenle Ö2'ye eşitlikleri nasıl yazdığı sorulmuştur. Ö2 "*Pisagor teoreminden yararlanarak eşitlikleri yazdım.*" biçiminde açıklama yapmıştır. Ardından Ö2 yazmış olduğu eşitlikleri alt alta çıkarmış ve $|PA|^2 - |PB|^2 = |AD|^2 + |DP|^2 - |AD|^2 - |PC|^2$ eşitliğini elde etmiştir. Ardından düzenleme yaparak teoremde kanıtlanması istenen ifadeyi elde etmiştir. Ö2'nin kanıtı dikdörtgenin kenarı üstünde bir nokta alarak yapmasından dolayı Ö2'ye *"Dikdörtgenin içerisinde bir nokta alarak da teoremi kanıtlayabilir miyiz?"* sorusu yöneltilmiştir. Ö2 *"Teoremde dikdörtgensel bölgede alınan bir nokta diye belirtilince dikdörtgenin üstünde bir nokta olması gerektiğini düşündüm. Ancak dikdörtgensel bölgenin içerisinde de bir noktada olabilirdi."* biçiminde açıklama yapmıştır. Ardından "*Kenar üstünde bir nokta aldığımda kanıtın daha kolay olduğunu düşündüğüm için kenarın üstünde bir nokta alarak kanıtı yaptım."* biçiminde ek bir açıklama yaparak dikdörtgenin üstünde bir nokta almasının nedenini belirtmiştir. Daha sonra Ö2'ye *"Noktayı dikdörtgenin içerisinde alsaydın kanıtı benzer biçimde mi yapardın?"* sorusu yöneltilmiştir. Ö2 "*Hayır aynı kanıtı yapmazdım, fakat nasıl yapabileceğim hakkında fikrim yok."* açıklamasını yapmıştır.

Yukarıda Ö2 kodlu öğretmen adayının dördüncü teoreme ilişkin yaptığı kanıt ve görüşme sırasında yaptığı açıklamalara yer verilmiştir. Ö2 diğer öğretmen adaylarından farklı bir çizim yapmasına rağmen yaptığı çizim teoremin ifadesine uygundur. Ö2'nin kanıtı yapmış olduğu şekil ile uyumludur ancak Ö2 noktayı içeride bir yerde alırsa teoremin kanıtını yapamayacağını belirtmiştir. Dolayısıyla Ö2 kanıtı yaparken bilgi parçaları arasında bağlantı kurabilmiş ancak bu bağlantılar bir şekil ile sınırlı kalmıştır. Dolayısıyla Ö2 kanıtı genelleyememiştir. Bu nedenle Ö2 kodlu öğretmen adayının verdiği yanıtın SOLO taksonomisinin "İlişkisel Yapı-Yüksek" seviyesinde olduğu söylenebilir.

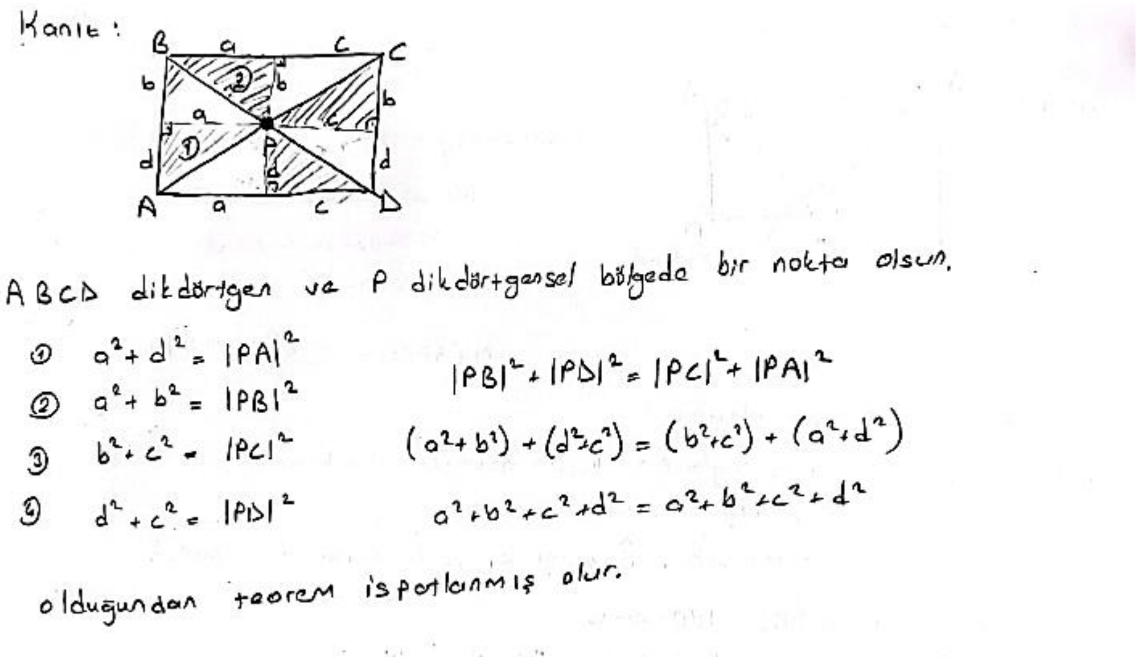
Ö3'ün F1. S4. Teoremine ilişkin kanıtı:

Ö3 kodlu öğretmen adayı öncelikle şekli çizmiş ancak kanıta dair herhangi bir şey yapamamıştır. Görüşme sırasında da kanıta dair fikir sunamamıştır bu nedenle Ö3 kodlu öğretmen adayının verdiği yanıt şekli çizebilmesinden dolayı SOLO taksonomisinin "Tek Yönlü Yapı" seviyesinde olduğu söylenebilir.

Ö4'ün F1. S4.Teoremine ilişkin kanıtı:

Şekil 23

Ö4'ün F1. S4. Teoreme İlişkin Yazdıkları



Ö4 kodlu öğretmen adayı öncelikle bir dikdörtgen çizmiş ve bu dikdörtgene harflendirmeler yapmıştır. Ardından Ö4 dikdörtgenin içinden aldığı P noktasından kenarlara dikmeler çizerek üçgensel bölgeler elde etmiştir. Daha sonra üçgensel bölgelerin bazılarını tarayarak dört farklı eşitlik yazmıştır. Ö4'ün yazdığı eşitliklerde yeterli açıklama olmadığı için Ö4'e eşitlikleri nasıl yazdığı sorulmuştur. Ö4 *"Pisagor teoremi kullanarak her bir eşitliği yazdım."* biçiminde yanıt vermiştir. Ardından teoremde olduğu gibi $|PA|^2+|PC|^2=|PB|^2+|PD|^2$ eşitliğini yazarak dört farklı eşitliği yerine yazmıştır. Sonucunda teoremde verilen ifadeyi doğrulamıştır. Ö4'ün teoremi genelleyip genelleyemediği hakkında çıkarım yapabilmek için Ö4'e "*Uzunluklardan üçü verildiğinde yerine koyarak dördüncü uzunluğu bulabilir miyiz?"* sorusu yöneltilmiştir. Ö4 *"Evet, diğer uzunluğu bulabiliriz."* biçiminde yanıt vermiştir.

Yukarıda Ö4 kodlu öğretmen adayının dördüncü teoreme ilişkin yaptığı kanıt ve görüşme sırasında yaptığı açıklamalara yer verilmiştir. Ö4'ün kanıta başlangıç adımı ve ilerlemesi doğrudur ancak son aşamada kanıtlaması isteneni yerine yazarak kanıtladığını belirtmiştir. Ancak bu bir doğru kanıtlama yöntemi değildir. Dolayısıyla Ö4 kanıtında doğru adımlar vardır ancak kanıtı doğru bir biçimde tamamlayamamıştır. Yani Ö4'ün yazdıkları arasında güçlü bir ilişki vardır ancak genelleme adına yetersizdir. Bu nedenle Ö4 kodlu öğretmen adayının verdiği yanıtın SOLO taksonomisinin "İlişkisel Yapı-Yüksek" seviyesinde olduğu söylenebilir.

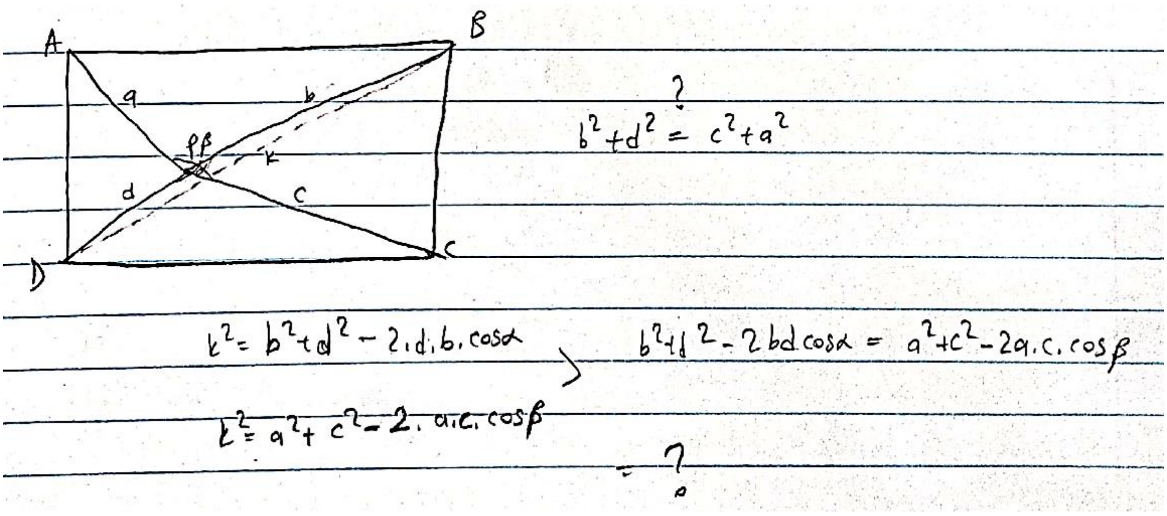
Ö5'in F1. S4.Teoreme ilişkin kanıtı:

Ö5 kodlu öğretmen adayı teoremin kanıtına ilişkin bir şey yapamamıştır. Ö5'e görüşme sırasında aklına gelen bir fikir olup olmadığı sorulmuştur. Ö5 aklına bir şey gelmediğini belirtmiştir. Bu nedenle Ö5 kodlu öğretmen adayının verdiği yanıtın "Yapı Öncesi" seviyesinde olduğu söylenebilir.

Ö6'nın F1. S4. Teoreme ilişkin kanıtı:

Şekil 24

Ö6'nın F1. S4. Teoreme İlişkin Yazdıkları



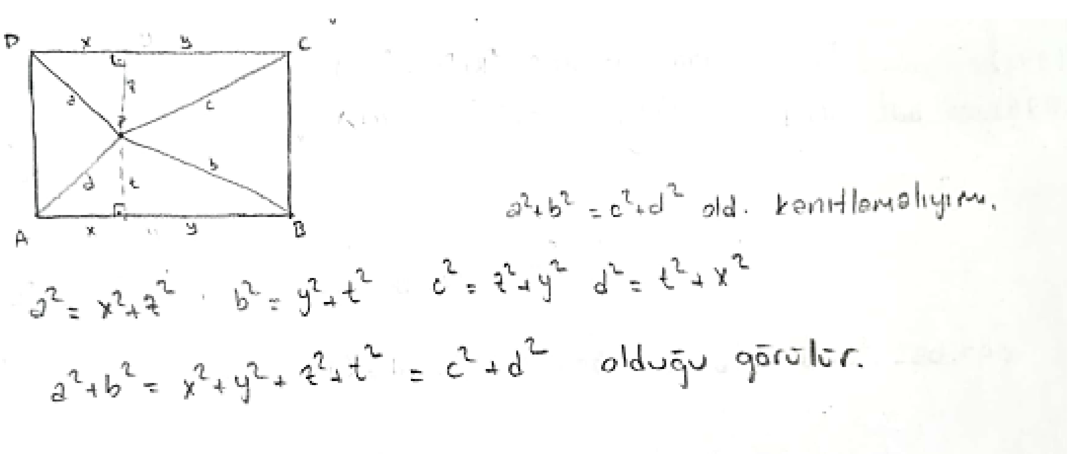
Ö6 kodlu öğretmen adayın öncelikle teoreme uygun şekli çizmiş ve teoremin ifadesini şekil üzerindeki harflendirmelerini kullanarak matematiksel biçimde yazmıştır. Ardından Ö6 |DB| köşegenini çizmiş ve DPB üçgeni oluşturmuştur. Daha sonra Ö6'nin bazı eşitlikler yazdığı görülmektedir ancak eşitlikleri nasıl yazdığına dair yeterli açıklama bulunmamaktadır. Bu nedenle Ö6'ya eşitlikleri nasıl yazdığı sorulmuştur. Ö6 *"Eşitlikleri kosinüs teoreminden yararlanarak yazdım."* biçiminde yanıt vermiştir. Ardından Ö6 |AC| köşegeni üzerinden oluşan APC üçgeni için köşegenlerin uzunluklarının aynı olacağını kullanarak kosinüs teoremini yazdığı görülmektedir. Daha sonra Ö6 elde etmiş olduğu k^2 ifadelerini eşitlemiştir ancak daha sonra bir şey yapmamıştır. Görüşme sırasında bu aşamada ne düşündüğü Ö6'ya sorulmuştur. Ö6 bu aşamada *"$\propto$ ve β açılarının eşit olup olmadığını bilemediğimiz için ilerleyemedim."* biçiminde açıklama yapmıştır. Dolayısıyla Ö6 yazdıklarını devam ettirememiş yanıtını burada bırakmıştır. Ö6'ya görüşme sırasında teoremin kanıtına dair aklına farklı bir fikir gelip gelmediği sorulmuştur ve Ö6 *"Aklıma gelen başka bir fikir yok."* biçiminde yanıt vermiştir.

Yukarıda Ö6 kodlu öğretmen adayının dördüncü teoreme ilişkin yaptığı kanıt ve görüşme sırasında yaptığı açıklamalara yer verilmiştir. Ö6 şekli harflendirerek ve matematiksel ifadeye dönüştürerek doğru bir yol izlemiştir ancak devamında ürettiği fikir teoremi kanıtlamak için yeterli olmamıştır. Dolayısıyla Ö6 teoremi kanıtlamaya yönelik şekli çizebilmiş ancak daha sonra doğru veriler sunamamıştır. Bu nedenle Ö6 kodlu öğretmen adayının verdiği yanıtın SOLO taksonomisinin "Tek Yönlü Yapı" seviyesinde olduğu söylenebilir.

Ö7'nin F1. S4. Teoreme ilişkin kanıtı:

Şekil 25

Ö7'nin F1. S4. Teoreme ilişkin yazdıkları



Ö7 kodlu öğretmen adayı öncelikle teoremi şekle dönüştürmüş ve şekle uygun olarak teoremin ifadesini matematiksel olarak yazmıştır. Ardından Ö7 dikdörtgenin içinden bir P noktası almış ve bu noktandan |DC| ve |AB| kenarlarına dikme indirerek isimlendirmiştir. Daha sonra Ö7'nin eşitlikler yazdığı görülmektedir ancak bu eşitlikleri nasıl yazdığına dair açıklama bulunmamaktadır. Dolayısıyla Ö7'ye eşitlikleri nasıl yazdığı görüşme sırasında sorulmuştur. Ö7 "*Eşitlikleri Pisagor teoremini kullanarak yazdım.*" biçiminde açıklama yapmıştır. Daha sonra yazmış olduğu a^2 ve b^2 eşitliklerini alt alta toplamış ve $a^2 + b^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ ifadesini elde etmiştir. Benzer bir biçimde c^2 ve d^2 eşitliklerini alt alta toplamış ve $c^2 + d^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ ifadesini elde etmiştir. Dolayısıyla Ö7 $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ olduğunu göstererek kanıtı doğru bir biçimde tamamlamıştır.

Yukarıda Ö7 kodlu öğretmen adayının dördüncü teoreme ilişkin yaptığı kanıt ve görüşme sırasında yaptığı açıklamalara yer verilmiştir. Ö7 teoremin kanıtına dair yeterli açıklamaları yapmış ve teoremi doğru bir biçimde genelleyebilmiştir. Bu nedenle Ö7 kodlu öğretmen adayının verdiği yanıtın SOLO taksonomisinin "Soyutlanmış Yapı" seviyesinde olduğu söylenebilir.

2. Geometrik Kanıt Formu-2 Bulgu ve Yorum

2.A) S.1.Teoreme İlişkin Bulgu ve Yorumlar

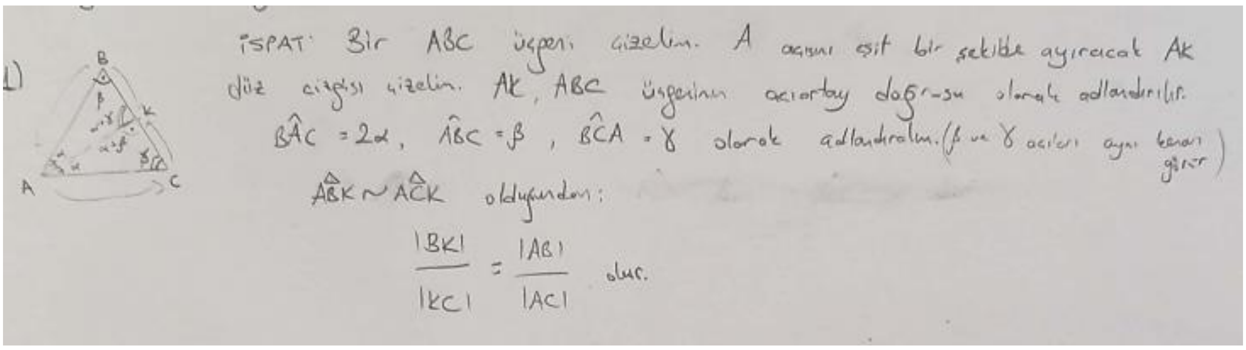
S.1. Teorem: Bir üçgende, herhangi bir açıortayın karşı kenar üzerinde ayırdığı parçaların uzunlukları oranı, bu parçalara bitişik kenarların uzunlukları oranına eşit olduğunu kanıtlayınız.

Kanıtlanması istenen birinci teorem yukarıda verilmiştir.

Ö1'in F2. S1.Teoreme ilişkin kanıtı:

Şekil 26

Ö1'in F2. S1. Teoreme İlişkin Yazdıkları


1)

İSPAT: Bir ABC üçgeni çizelim. A açısını eşit bir şekilde ayıracak AK düz çizgisi çizelim. AK, ABC üçgeninin açıortay doğrusu olarak adlandırılır.

$\widehat{BAC} = 2\alpha$, $\widehat{ABC} = \beta$, $\widehat{BCA} = \gamma$ olarak adlandıralım. (β ve γ açıları aynı kenarı görür)

$\overset{\triangle}{ABK} \sim \overset{\triangle}{ACK}$ olduğundan;

$$\frac{|BK|}{|KC|} = \frac{|AB|}{|AC|}$$ olur.

Ö1 kodlu öğretmen adayının yazdığı ifadeler incelendiğinde kanıtı yaparken benzerlik teoreminden yararlandığı görülmektedir. Ö1'in hangi benzerlikten kuralından yararlanarak benzerlik yaptığı anlaşılmamaktadır bu nedenle Ö1'e hangi benzerlikten yararlandığı sorulmuştur. Ö1 *"Açı-açı benzerliğinden yararlandım ancak doğru bir biçimde yazamadım bu nedenle teoremin kanıtını tamamlayamadan bıraktım."* cevabını vermiştir. Ö1'e görüşme sırasında aklına gelen farklı bir fikir veya kanıtın devamına ilişkin düşüncesi olup olmadığı sorulmuştur. Ö1 "*Çevrel çember çizerek kanıtlayabileceğimi düşünüyorum."* biçiminde yanıt vermiştir. Ancak Ö1 bu fikrini temellendirecek herhangi bir şey söylememiştir.

Yukarıda Ö1 kodlu öğretmen adayının birinci teoreme ilişkin yaptığı kanıt ve görüşme sırasında yaptığı açıklamalara yer verilmiştir. Ö1 teoremi şekle doğru bir biçimde aktarabilmiştir. Ö1 öncelikle benzerlikten yararlanmaya çalışmıştır. Ö1'in farklı üçgenlerde aynı kenarı gören açıların eşit olacağını düşündüğü gözlemlenmektedir ancak bu yanlış bir düşüncedir. Bu ifadenin doğrusu aynı üçgen içerisinde kenar uzunlukları aynı olan açılar birbirine eşit olmasıdır. Dolayısıyla Ö1'in teoremi kanıtlamaya yönelik fikirleri vardır ancak bu fikirlerde yanlışlıklar vardır. Ö1 farklı fikirler sunabilmiş ancak bunları doğru bir şekilde ifade edememiş ve ilişkilendirememiştir. Bu nedenle Ö1 kodlu öğretmen adayının verdiği yanıtın SOLO taksonomisinin "Çok Yönlü Yapı- Düşük" seviyesinde olduğu söylenebilir.

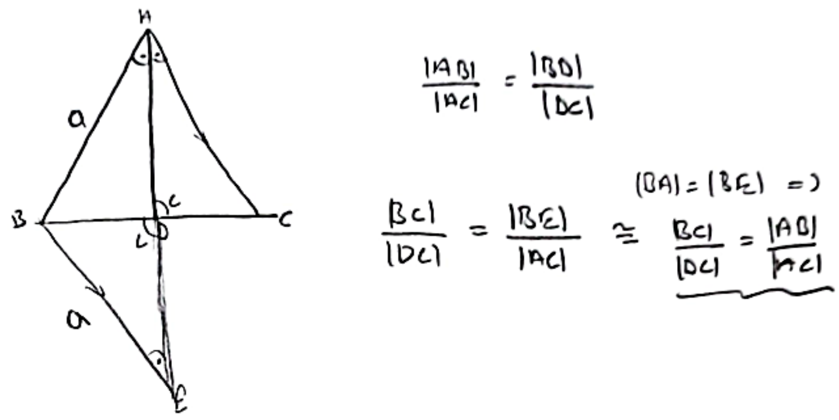
Ö2'nin F2. S1.Teoreme ilişkin kanıtı:

Ö2 kodlu öğretmen adayı şekli çizmiş ve teoremi matematiksel bir ifadeye dönüştürmüştür ancak kanıta dair herhangi bir şey yapmamıştır. Görüşme sırasında aklına gelen bir şey olup olmadığı sorulduğunda teoremin kanıtına dair aklına gelen bir şey olmadığını belirtmiştir. Ö2 kodlu öğretmen adayının teoremi şekle doğru aktarabildiği için verdiği yanıtın SOLO taksonomisinin "Tek Yönlü Yapı" seviyesinde olduğu söylenebilir.

Ö3'ün F2. S1.Teoreme ilişkin kanıtı:

Şekil 27

Ö3'ün F2. S1. Teoreme İlişkin Yazdıkları



Ö3 kodlu öğretmen adayı öncelikle teoreme uygun şekli çizmiş ve teoremin ifadesini şekle uygun bir biçimde yazmıştır. Ö3'ün kanıtı nasıl yaptığı tam anlaşılmadığı için görüşme sırasında öğretmen adayına kanıtı nasıl yaptığı sorulmuştur. Ö3 "*Teoremin kanıtını benzerlikten yapmaya karar verdim. Bu nedenle |AD| doğru parçasını uzatarak |AC|' e paralel olacak biçimde |BE| doğru parçası çizdim ve açıları yerleştirdim."* ifadesinde bulunmuştur. Ö3 açıları yerleştirirken $m(\widehat{BDE})$ ile $m(\widehat{ADC})$ 'e aynı harfi verdiği şekil üzerinden görülmektedir. Ö3'e $m(\widehat{BDE})$ ile $m(\widehat{ADC})$ 'e neden aynı harf verdiğinin sebebi sorulmuştur. Ö3 "$m(\widehat{BDE})$ ile $m(\widehat{ADC})$ *ters açı oldukları için aynı olur. Bu nedenle bu açılara aynı harfi verdim."* biçiminde soruya yanıt vermiştir. Benzer bir biçimde $m(\widehat{BED})$ ile $m(\widehat{CAD})$ 'ın aynı olduğu görülmektedir. Ö3 $m(\widehat{BED})$ ile $m(\widehat{CAD})$ 'ın aynı olmasına gerekçe olarak *"z kuralını"* sunmuştur. Ö3'ün yazdıkları incelendiğinde hangi üçgenler arasında benzerlik teoremini yazdığı ve hangi benzerlik teoreminden yararlanarak yazdığı tam olarak anlaşılmamaktadır. Bu nedenle Ö3'e hangi üçgenlerde benzerlik yaptığı ve hangi benzerlik teoreminden yararlandığı sorulmuştur. Ö3 *"BDE üçgeni ile CDA üçgenleri arasında benzerlik yaptım. Ancak hangi benzerlik teoremi olduğunu bilmiyorum."* biçiminde açıklama yapmıştır. Daha sonra Ö3 BDE üçgeni ile CDA üçgenin kenarları oranlayarak $\frac{|BC|}{|DC|} = \frac{|BE|}{|AC|}$ eşitliğini yazmıştır. Ö3 yazmış olduğu $|AB| = |BE|$ eşitliği için *"ABE bir ikizkenar üçgen olduğu için* $|AB| = |BE|$ *olur."* açıklamasını yapmıştır.

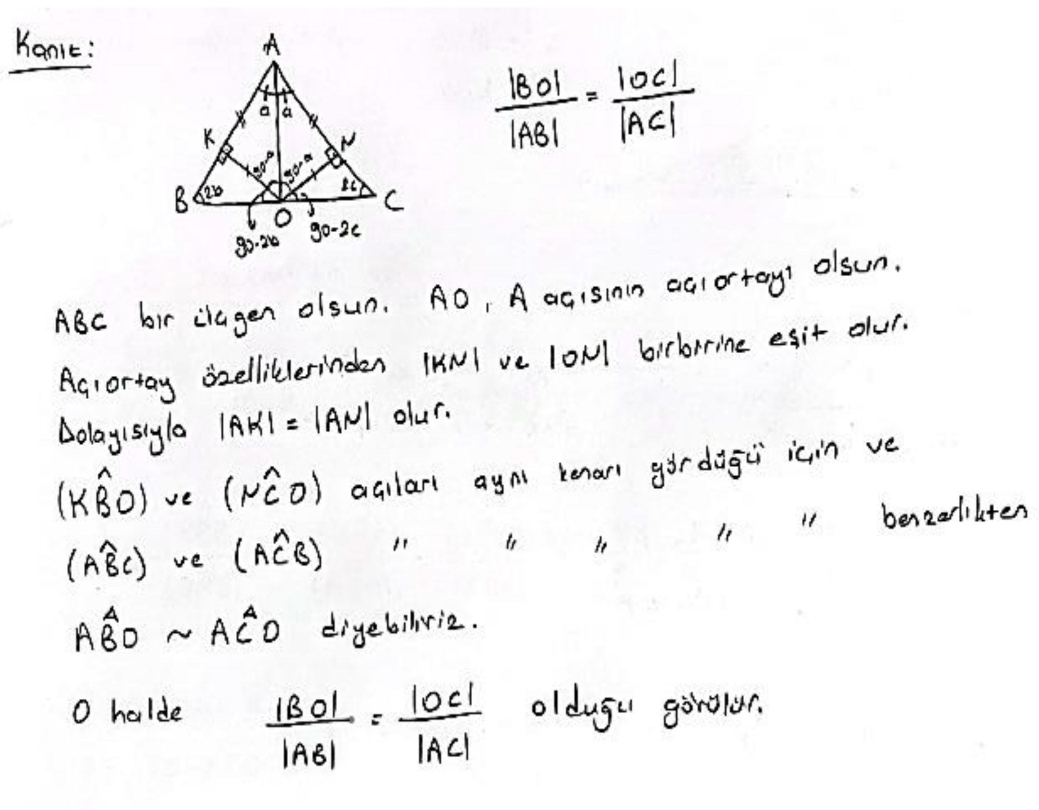
Daha sonra Ö3 $\frac{|BC|}{|DC|} = \frac{|BE|}{|AC|}$ eşitliğinde $|BE|$ yerine $|AB|$ yazmış ve $\frac{|BC|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|AC|}$ eşitliğini elde etmiştir. Böylelikle teoremin kanıtını doğru bir biçimde tamamlamıştır.

Yukarıda Ö3 kodlu öğretmen adayının birinci teoreme ilişkin yaptığı kanıt ve görüşme sırasında yaptığı açıklamalara yer verilmiştir. Ö3 kanıtlamaya başlamadan önce kanıtı nasıl yapacağına karar vermiştir. Ö3 teoremin çizimde ek bir çizim yapmıştır ve bu çizim sayesinde kanıtı tamamlayabilmiştir. Ö3 kanıtı doğru bir biçimde yapabilmesine rağmen hangi benzerlik teoreminden yararlanarak yaptığını bilememiştir. Dolayısıyla Ö3 kanıtı doğru bir biçimde yapmasına rağmen Ö3'ün gerekçelendirme noktasında eksiği vardır. Bu nedenle Ö3 kodlu öğretmen adayının verdiği yanıtın SOLO taksonomisinin "İlişkisel Yapı-Yüksek" seviyesinde olduğu söylenebilir.

Ö4'ün F2. S1.Teoreme ilişkin kanıtı:

Şekil 28

Ö4'ün F2. S1. Teoreme İlişkin Yazdıkları



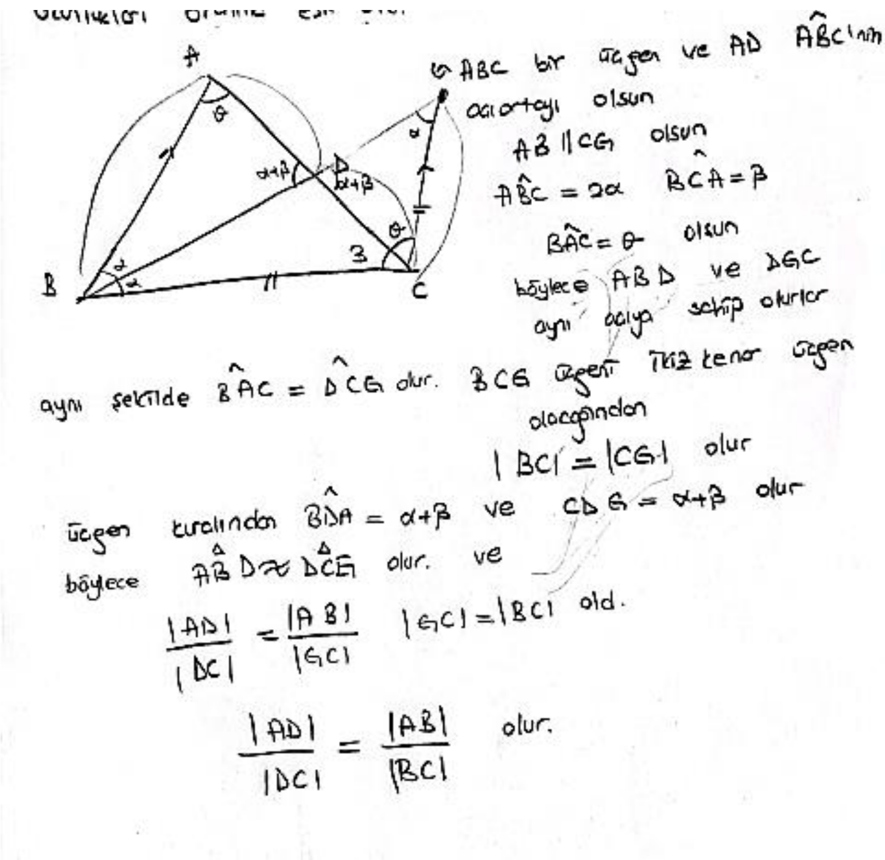
Ö4 kodlu öğretmen adayı öncelikle şekli çizmiş ve teoremi matematiksel ifade olarak yazmıştır. Ardından Ö4'ün |AB| ve |AC| kenarlarına birer dikme indirdiği görülmektedir. Ö4 indirdiği dikmelerin uzunluklarının ve ayırmış olduğu [AK]'nın uzunluğu ile [AN]'nın uzunluğunun eşit olduğunu yazmıştır. Ö4'ün bu bilgilere nasıl ulaştığı tam olarak anlaşılmamaktadır bu nedenle Ö4'e bu eşitlikleri nasıl yazdığı sorulmuştur. Ö4 *"Çizmiş olduğum dikmelerle bir deltoid oluşturmuş oldum. Yazmış olduğum eşitlikleri deltoidin özelliklerine göre yazdım ancak daha sonra bu eşitlikleri kullanmadan kanıta devam ettim."* biçiminde yanıt vermiştir. Daha sonra Ö4'ün yazdıkları incelendiğinde benzerlikten yararlandığı görülmektedir. Ö4 $m(\widehat{KBO})$ ile $m\left(\widehat{NCO}\right)$'nun aynı kenarı gördükleri için birbirine eşit olduğunu ve benzer bir biçimde $m(\widehat{ABC})$ ile $m\left(\widehat{ACB}\right)$'nin birbirine eşit olacağını belirtmiştir. Dolayısıyla Ö4 ABO üçgeni ile ACD üçgenin benzer olacağını yazmıştır. Ancak Ö4 hangi benzerlik teoreminden yararlandığını belirtmemiştir bu nedenle Ö4'e hangi benzerlik teoreminden yararlandığı sorulmuştur. Ö4 "*Açı-kenar-açı benzerliğinden yararlandım.*" açıklamasını yapmıştır. Ardından Ö4 benzer üçgenlerin kenarlarını birbirine oranlayarak teoremin kanıtını doğru bir biçimde tamamlamıştır.

Yukarıda Ö4 kodlu öğretmen adayının birinci teoreme ilişkin yaptığı kanıt ve görüşme sırasında yaptığı açıklamalara yer verilmiştir. Ö4 benzerlikten yararlanarak teoremi kanıtlamaya çalışmıştır. Ö4'ün bu düşüncesi teoremi kanıtlamak için doğru olmasına rağmen Ö4 yanlış bir benzerlikten yararlanmıştır ve bu yanlışlığının farkına varmamıştır. Ö4 kanıtı doğru yaptığını iddia ederek açıklamalarını yapmıştır. Dolaysıyla Ö4'ün kanıtında birden çok bilgi vardır ancak bu bilgilerin doğrudan sapan bir noktası vardır. Bu nedenle Ö4 kodlu öğretmen adayının verdiği yanıtın SOLO taksonomisinin "İlişkisel Yapı-Düşük" evresinde olduğu söylenebilir.

Ö5'in F2. S1. Teoreme ilişkin kanıtı:

Şekil 29

Ö5'in F2. S1. Teoreme İlişkin Yazdıkları



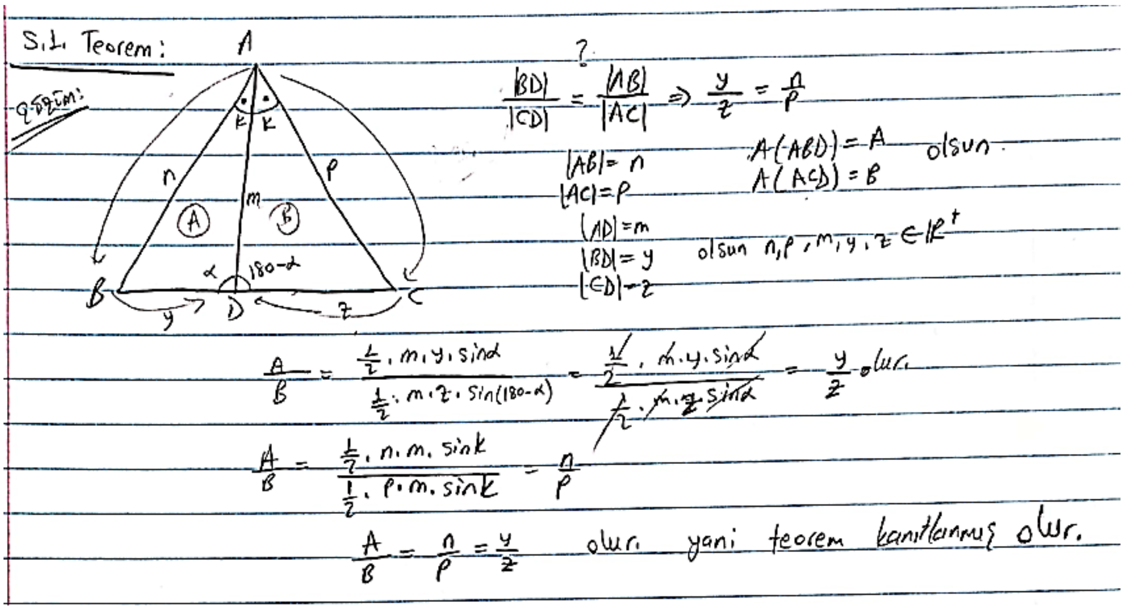
Ö5 kodlu öğretmen adayı öncelikle bir ABC üçgeni çizmiş ardından |AB| kenarına paralel olacak biçimde bir |CG| doğru parçası çizmiştir. Sonrasında |BD| doğru parçasını uzatarak |BG| doğru parçasını elde etmiştir. Ö5'e böyle bir çizim yapmasının nedeni sorulmuş ve Ö5 "*Benzer üçgenler oluşturabilmek için böyle bir çizim yaptım.*" biçimde yanıt vermiştir. Ardından Ö5 kenarın birbirine paralel olmasından yararlanarak açıları harflendirmiştir. Harflendirmeler sonrasında ABD üçgeni ile DCG üçgenin benzer olduğunu ifade etmiştir. Ancak Ö5 açıları kullanarak yazdığı bu üçgenlerin benzerliğini yazarak harflerin sıralamasını karıştırmıştır ve görüşme sırasında bu karışıklığın farkına varmamıştır. İki üçgen arasında benzerliği yazarken sıralamayı karıştırmasına rağmen $\frac{|AD|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|GC|}$ oranını doğru bir biçimde yazmıştır. Daha sonra |GC|=|BC| olduğunu kullanarak eşitlikteki |GC| yerine |BC| yazmıştır. Böylece kanıtı tamamlamıştır.

Yukarıda Ö5 kodlu öğretmen adayının birinci teoreme ilişkin yaptığı kanıt ve görüşme sırasında yaptığı açıklamalara yer verilmiştir. Ö5 benzer üçgenleri yazarken yanlışlık yapmasına rağmen devamında yaptığı açıklamalar doğrudur. Görüşme sırasında üçgenlerde yaptığı bu yanlışlığı fark ederek düzeltmiştir. Bu nedenle Ö5'in bu yanlışlığının nedenin dalgınlık olduğu düşünülmüştür. Bu nedenle Ö5 kodlu öğretmen adayının verdiği yanıtın SOLO taksonomisinin "Soyutlanmış Yapı" evresinde olduğu söylenebilir.

Ö6'nın F2. S1.Teoreme ilişkin kanıtı:

Şekil 30

Ö6'nın F2. S1. Teoreme İlişkin Yazdıkları



Ö6 kodlu öğretmen adayı öncelikle teoremin şeklini çizmiş ve teoremi matematiksel bir ifadeye dönüştürmüştür. Ardından Ö6'nın ABD ve ADC üçgenlerin alanlarını sırasıyla A ve B diye harflendirmiştir. Ö6'nın alanları yazarken yeterli açıklama yazmadığı görülmektedir o nedenle Ö6'ya alanları nasıl yazdığı sorulmuştur. Ö6 "*Sinüs alan formülünden yararlanarak alanları yazdım.*" biçiminde yanıt vermiştir. Ö6 $\frac{A}{B} = \frac{\frac{1}{2}.m.y.sin\propto}{\frac{1}{2},m.z.\sin{(180° - \propto)}}$ oranını yazmıştır gerekli sadeleştirmeleri yaparak $\frac{A}{B} = \frac{y}{z}$ eşitliğini elde etmiştir. Benzer bir biçimde farklı açıları kullanarak yine A ve B açılarını yazarak oranlamış ve $\frac{A}{B} = \frac{\frac{1}{2}.n.m.sink}{\frac{1}{2},p.m.\text{sink}}$ oranını elde etmiştir. Alan oranlarında sadeleştirmeleri yaparak $\frac{A}{B}=\frac{n}{p}$ eşitliğini elde etmiştir. Ardından elde etmiş olduğu $\frac{A}{B}$ oranlarını birbirine eşitleyerek $\frac{y}{z}=\frac{n}{p}$ elde etmiştir böylelikle teoremin kanıtını doğru bir şekilde tamamlamıştır.

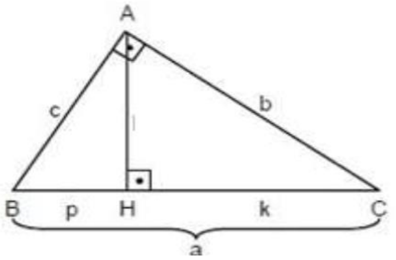
Yukarıda Ö6 kodlu öğretmen adayının birinci teoreme ilişkin yaptığı kanıt ve görüşme sırasında yaptığı açıklamalara yer verilmiştir. Ö6 teoremi şekle doğru bir biçimde aktarmıştır. Ö6 diğer öğretmen adaylarından farklı bir yol izleyerek sinüs alan teoreminden yararlanarak soruyu kanıtlamıştır. Ö6 açılar arası geçişte, teoremi uygulamasında ve yapmış olduklarını doğru bir biçimde yazarak yeterli açıklamalar yapmıştır. Dolayısıyla Ö6 tüm yapıları doğru bir biçimde bütünleştirmiştir. Bu nedenle Ö6 kodlu öğretmen adayının verdiği yanıtın SOLO taksonomisinin "Soyutlanmış Yapı" evresinde olduğu söylenebilir.

Ö7'nin F2. S1.Teoreme ilişkin kanıtı:

Ö7 kodlu öğretmen adayı kağıdında şekli çizmiş ancak kanıta dair herhangi bir ifade yazmamıştır. Görüşme sırasında nasıl bir izleyebileceğimizi sorduğumda, Ö7 "*Teoremin kanıtını çevrel çember çizerek, benzerlikten veya üçgenlerin alanlarını kullanarak bulabileceğimi düşündüm ama yapamadım.*" biçiminde açıklama yapmıştır. Ö7 kodlu öğretmen adayı teoremi şekle doğru bir biçimde aktarabilmesinden dolayı verdiği yanıtın SOLO taksonomisinin "Tek Yönlü Yapı" evresinde olduğu söylenebilir.

2.B) S.2.Teoreme İlişkin Bulgu ve Yorumlar

S.2. Teorem: Bir dik üçgende her bir dik kenarının uzunluğunun karesi, bu dik kenarların hipotenüs üzerindeki dik izdüşümü ile hipotenüs uzunluğunun çarpımına eşit olduğunu kanıtlayınız.



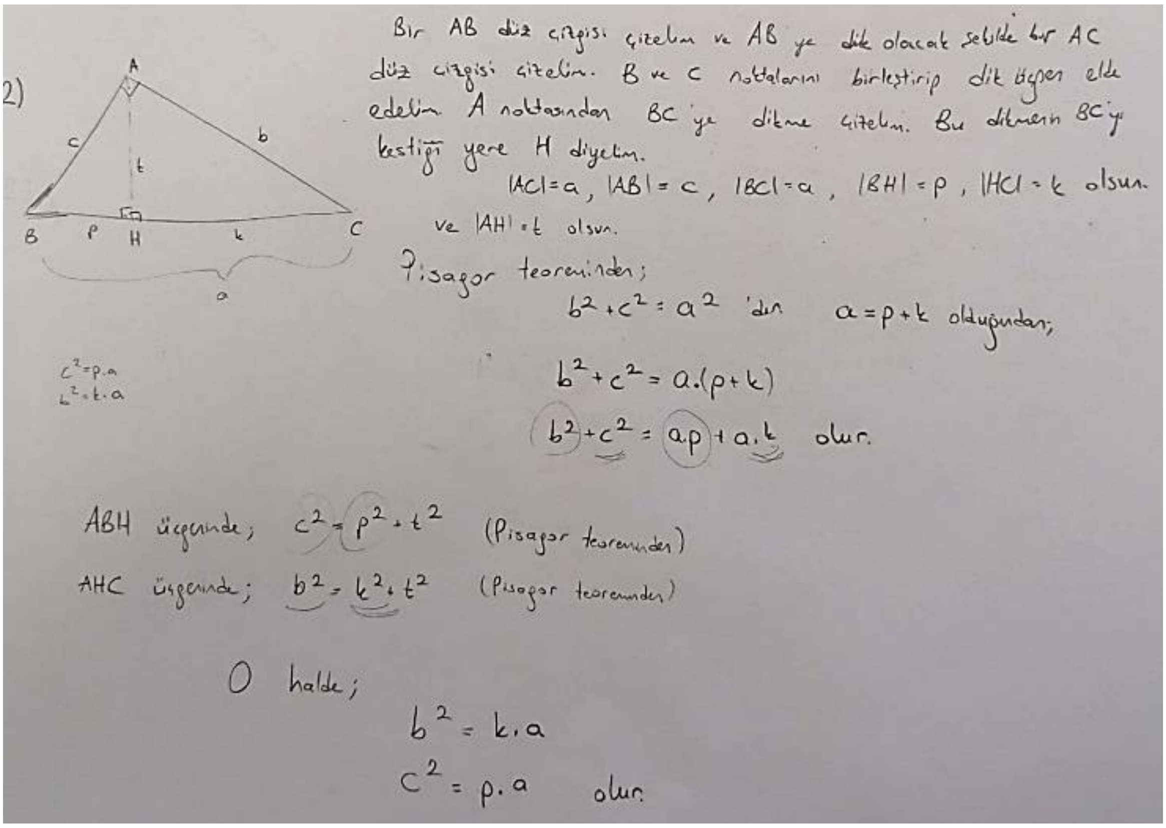
$$c^2 = p.a$$
$$b^2 = k.a$$

Kanıtlanması istenen ikinci teorem yukarıda verilmiştir.

Ö1'in F2. S2.Teoreme ilişkin kanıtı:

Şekil 31

Ö1'in F2. S2. Teoreme İlişkin Yazdıkları



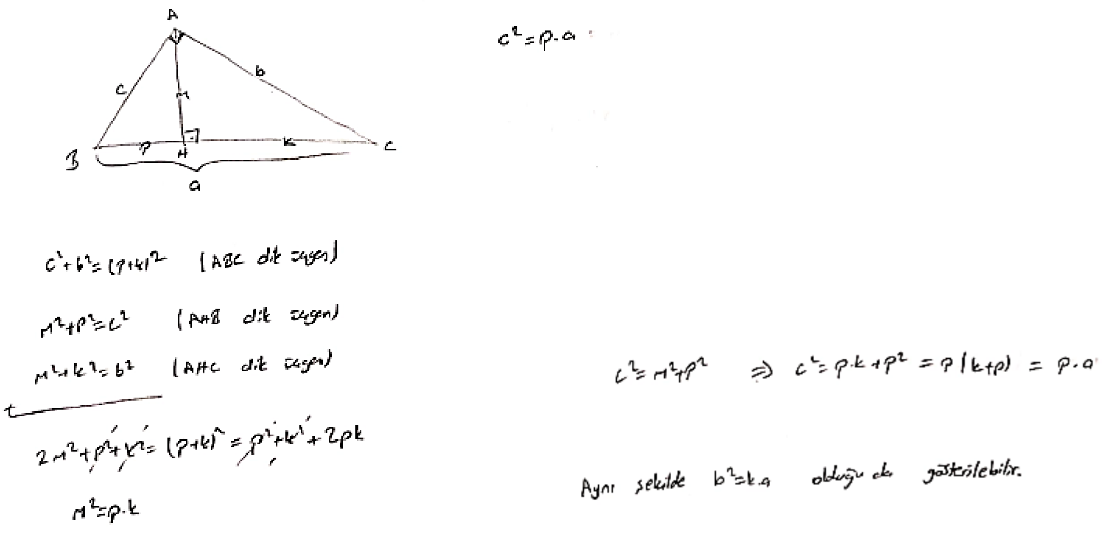
Ö1 kodlu öğretmen adayı öncelikle ABC üçgeninde Pisagor teoremini yazarak $b^2+c^2=a^2$ eşitliğini elde etmiştir. Ardından Ö1 |BH|+|HC|=|BC| olduğunu kullanarak $a=p+k$ eşitliğini yazmıştır. Ö1 $b^2+c^2=a^2$ ifadesindeki a'nın yerine eşiti olan $p+k$'ı yazmış ve dağılma özelliğinden yararlanarak $b^2+c^2=a.p+a.k$ eşitliğini elde etmiştir. Ardından öğretmen adayı ABH ve AHC üçgenlerinde Pisagor teoremini yazmıştır. Ö1'in ardından yazmış olduğu $b^2=a.k$ ve $c^2=a.p$ eşitliklerine nereden ulaştığı anlaşılmamaktadır bu nedenle öğretmen adayına eşitliklere nereden ulaştığı sorulmuştur. Ö1 "$b^2=a.k$ *ve* $c^2=a.p$ *olduğunu düşündüm ama bunu kanıtlamam lazımdı bunun için ABH ve AHC üçgenlerinde Pisagor teoremini yazdım ve* c^2*'nin p ile* b^2*'nin k ile ilişkili olduğunu gördüm böylelikle* $b^2=a.k$ *ve* $c^2=a.p$ *olduğunu kanıtlamış oldum.*" biçiminde açıklamıştır. Ö1 bu şekilde kanıtı tamamlamıştır.

Yukarıda Ö1 kodlu öğretmen adayının ikinci teoreme ilişkin yaptığı kanıt ve görüşme sırasında yaptığı açıklamalara yer verilmiştir. Ö1 öncelikle Pisagor teoreminden yararlanarak eşitlikler yazmıştır. Ö1 kanıtı yaparken sezgileriyle hareket etmiş ve sezgilerini desteklediğini düşünerek kanıtı tamamladığını iddia etmiştir. Ö1'in Pisagor teoremini bildiği, bunu bu teoremin kanıtına uygulayabildiği ve teorem ile ilişkilendirmeye çalıştığı görülmektedir. Dolayısıyla Ö1 birden fazla bilgi biliyordur ancak bu bilgilerin hepsini kullanarak teoremi kanıtlayamamıştır. Bu nedenle Ö1 kodlu öğretmen adayının verdiği yanıtın SOLO taksonomisinin "Çok Yönlü Yapı-Düşük" evresinde olduğu söylenebilir.

Ö2'nin F2. S2.Teoreme ilişkin kanıtı:

Şekil 32

Ö2'nin F2. S2. Teoreme İlişkin Yazdıkları



Ö2 kodlu öğretmen adayı diğer öğretmen adayları gibi öncelikle eşitlikler yazdığı görülmektedir. Ö2'nin her bir eşitliğinin yanına dik üçgen yazmasından dolayı Pisagor teoreminden yararlandığı görülmektedir. Ö2 ABH ve AHC üçgenlerinde Pisagor teoremlerinden yararlanarak eşitlikleri yazmış ve bu eşitlikleri alt alta toplayarak $c^2 + b^2 = 2m^2 + p^2 + k^2$ ifadesini elde etmiştir. Ardından ABC üçgeninde Pisagor teoreminden yararlanarak $c^2 + b^2 = (p + k)^2$ eşitliğini yazmıştır. Ö2 elde etmiş olduğu iki $c^2 + b^2$ ifadesinin eşitlerini birbirine eşitlemiş ve böylece $m^2 = p.k$ eşitliğini elde etmiştir. Daha sonra

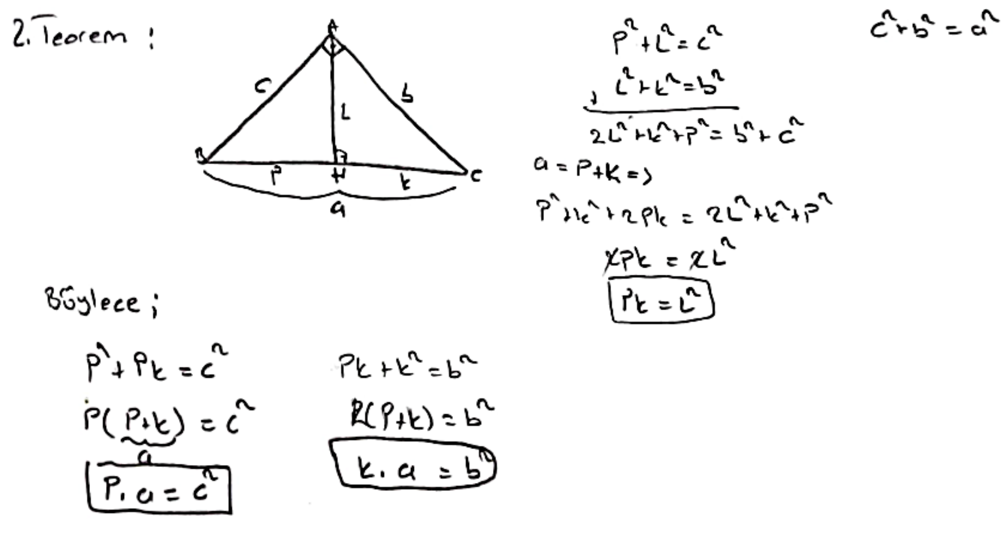
ABH üçgeni için yazmış olduğu Pisagor teoreminde m^2 ifadesi yerine eşiti olan $p.k$ yazmış ve ardından ortak paranteze alarak $c^2 = p.a$ eşitliğini elde etmiştir. Ö2 $b^2 = k.a$ eşitinin benzer bir biçimde gösterilebileceğini yazmış ancak göstermemiştir. Görüşme sırasında $b^2 = k.a$ eşitliğini nasıl gösterileceğini sözel olarak yeterli açıklamalarla yapmıştır. Dolayısıyla Ö2 teoremin kanıtını doğru bir biçimde yapmıştır.

Yukarıda Ö2 kodlu öğretmen adayının ikinci teoreme ilişkin yaptığı kanıt ve görüşme sırasında yaptığı açıklamalara yer verilmiştir. Ö2 kanıtlanması istenenlerden sadece bir tanesini kanıtlamıştır. Bu nedenle görüşme sırasında Ö2'ye diğer kısmı nasıl yapabileceği sorulmuş ve Ö2'den gerekli, yeterli yanıtlar alınmıştır. Dolayısıyla Ö2 kanıtı doğru bir biçimde yaparak bütün verileri kanıt için kullanarak genelleyebilmiştir. Bu nedenle Ö2 kodlu öğretmen adayının verdiği yanıtın SOLO taksonomisinin "Soyutlanmış Yapı" evresinde olduğu söylenebilir.

Ö3'ün F2. S2. Teoreme ilişkin kanıtı:

Şekil 33

Ö3'ün F2. S2. Teoreme İlişkin Yazdıkları



Ö3 kodlu öğretmen adayının öncelikle eşitlikler yazdığı görülmektedir ancak eşitlikleri neye göre yazdığına dair yeterli açıklamayı kağıdına yazmamıştır. Bu nedenle Ö3'e eşitlikleri nasıl yazdığı sorulmuştur. Ö3 *"Eşitlikleri Pisagor teoreminden yararlanarak yazdım."*

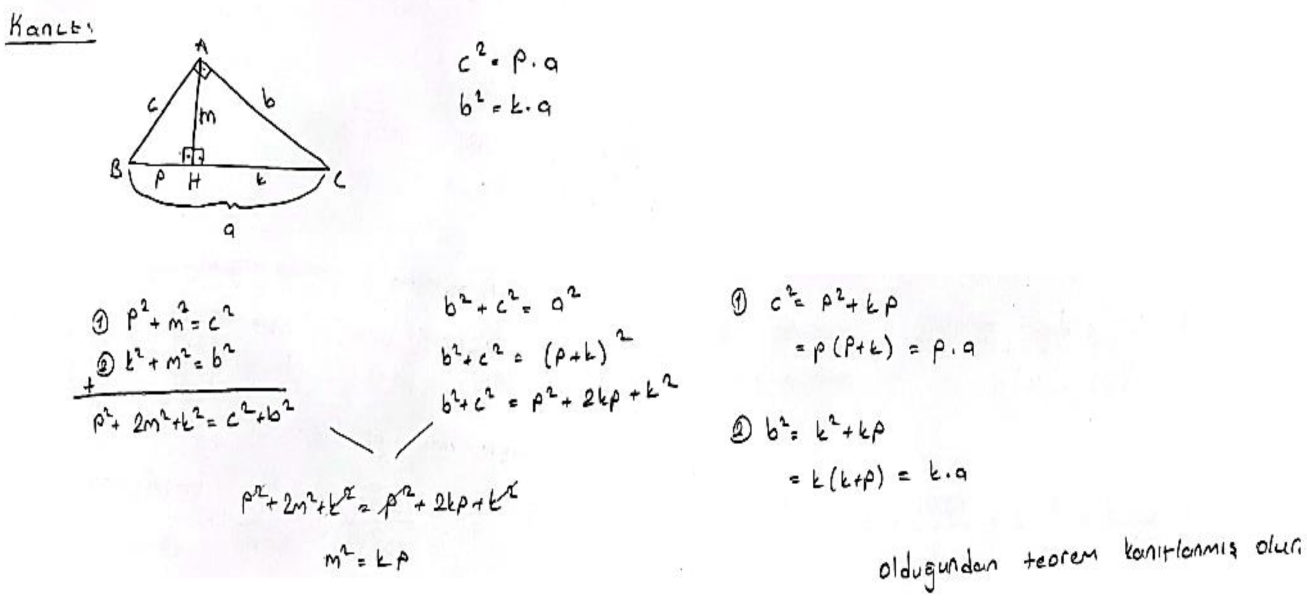
biçiminde açıklama yapmıştır. Ö3 ABH üçgeninde Pisagor teoremini yazarak $c^2 = p^2 + l^2$ ve AHC üçgeninde Pisagor teoremini yazarak $b^2 = l^2 + k^2$eşitliklerini elde etmiştir. Ardından bu eşitlikleri alt alta toplayarak $b^2 + c^2 = 2l^2 + k^2 + p^2$ elde etmiştir ve ABC üçgeninde Pisagor teoremini yazarak $b^2 + c^2 = (p + k)^2$ eşitliğini elde etmiştir. Dolayısıyla $b^2 + c^2$ ifadesini iki farklı biçimde elde etmiştir. Ardından Ö3 bu iki farklı eşitliği birbirine eşitleyerek düzenlemeler yapmıştır ve $p.k = l^2$ eşitliğini elde etmiştir. Ardından Ö3 ABH üçgeninde yazmış olduğu Pisagor teoreminde l^2'nin yerine eşiti olan $p.k$ yı yazmış ve böylece $p.a = c^2$ eşitliğini elde etmiştir. Benzer bir biçimde AHC üçgenindeki Pisagor teoreminde l^2'nin yerine eşiti olan $p.k$ yı yazmış ve böylece $k.a = b^2$ eşitliğini elde etmiştir. Ö3 teoremin kanıtını böylelikle doğru bir biçimde tamamlamıştır.

Yukarıda Ö3 kodlu öğretmen adayının ikinci teoreme ilişkin yaptığı kanıt ve görüşme sırasında yaptığı açıklamalara yer verilmiştir. Ö3 Pisagor teoreminden yararlanarak teoremi kanıtlamıştır. Ö3 her bir adımı doğru bir biçimde tamamlayarak teoremi kanıtlamıştır. Yani Ö3 bütün bilgilerini bütünleştirip genelleyebilmiştir. Bu nedenle Ö3 kodlu öğretmen adayının verdiği yanıtın SOLO taksonomisinin "Soyutlanmış Yapı" evresinde olduğu söylenebilir.

Ö4'ün F2. S2.Teoreme ilişkin kanıtı:

Şekil 34

Ö4'ün F2. S2. Teoreme İlişkin Yazdıkları



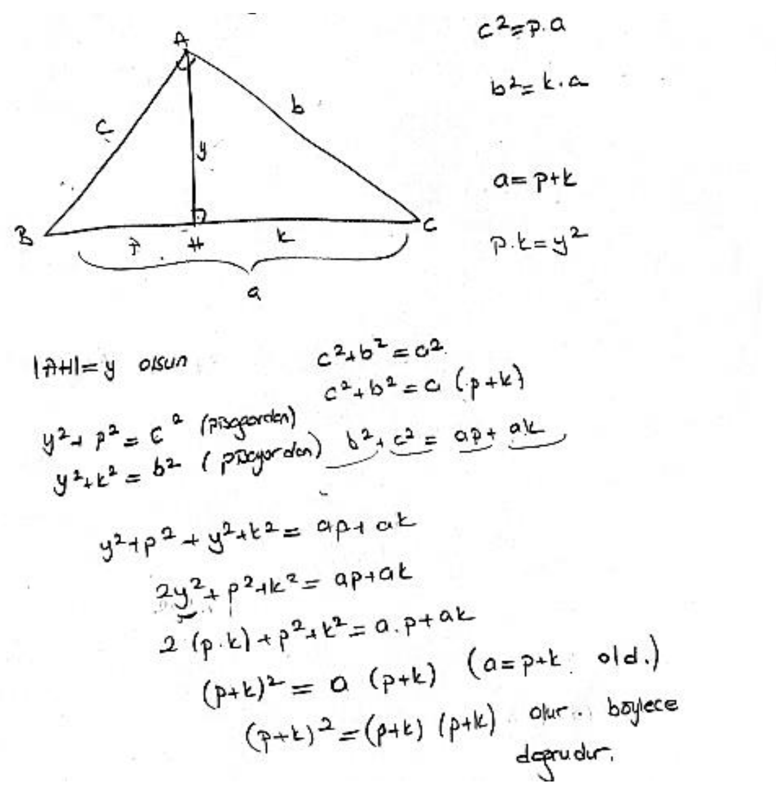
Ö4 kodlu öğretmen adayının öncelikle eşitlikler yazdığı görülmektedir ancak yazdıklarında yeterli açıklama olmadığı için eşitlikleri nasıl yazdığı Ö4'e sorulmuştur. Ö4 *"Pisagor teoreminden yararlanarak yazdım."* biçiminde açıklamıştır. Dolayısıyla Ö4 ABH üçgeninde Pisagor teoremini kullanarak $c^2 = p^2 + m^2$ ve AHC üçgeninde Pisagor teoremini kullanarak $b^2 = k^2 + m^2$ eşitliklerini yazmıştır. Ardından yazmış olduğu eşitlikleri alt alta toplayarak $c^2 + b^2$ ifadesinin eşitini elde etmiştir. Diğer bir yandan Ö4 ABC üçgeninde Pisagor teoremini kullanarak $a^2 = b^2 + c^2$ ifadesini bulmuş ve bu ifadede a'nın yerine eşiti olan $p + k$ yazarak $b^2 + c^2$ ifadesinin eşitini farklı bir biçimde ifade etmiştir. Daha sonra elde etmiş olduğu iki $b^2 + c^2$ eşitliğini birbirine eşitlemiş ve düzenleme yaparak $m^2 = k.p$ bulmuştur. Ardından ABH üçgeninde yazmış olduğu Pisagor teoreminde m^2 yerine eşiti olan $k.p$ ifadesini yazmış ve ortak paranteze alarak $c^2 = p.a$ eşitliğini bulmuştur. Benzer bir biçimde AHC üçgeninde yazmış olduğu Pisagor teoreminde m^2 yerine eşiti olan $k.p$ ifadesini yazmış ve ortak paranteze alarak $b^2 = k.a$ eşitliğini bulmuştur. Böylece Ö4 teoremin kanıtını doğru bir biçimde tamamlamıştır.

Yukarıda Ö4 kodlu öğretmen adayının ikinci teoreme ilişkin yaptığı kanıt ve görüşme sırasında yaptığı açıklamalara yer verilmiştir. Ö4, Ö3 kodlu öğretmen adayı ile benzer adımları kullanarak teoremi doğru bir biçimde kanıtlamıştır. Bu nedenle Ö4 kodlu öğretmen adayının verdiği yanıtın SOLO taksonomisinin "Soyutlanmış Yapı" evresinde olduğu söylenebilir.

Ö5'in F2. S2.Teoreme ilişkin kanıtı:

Şekil 35

Ö5'in F2. S2. Teoreme İlişkin Yazdıkları



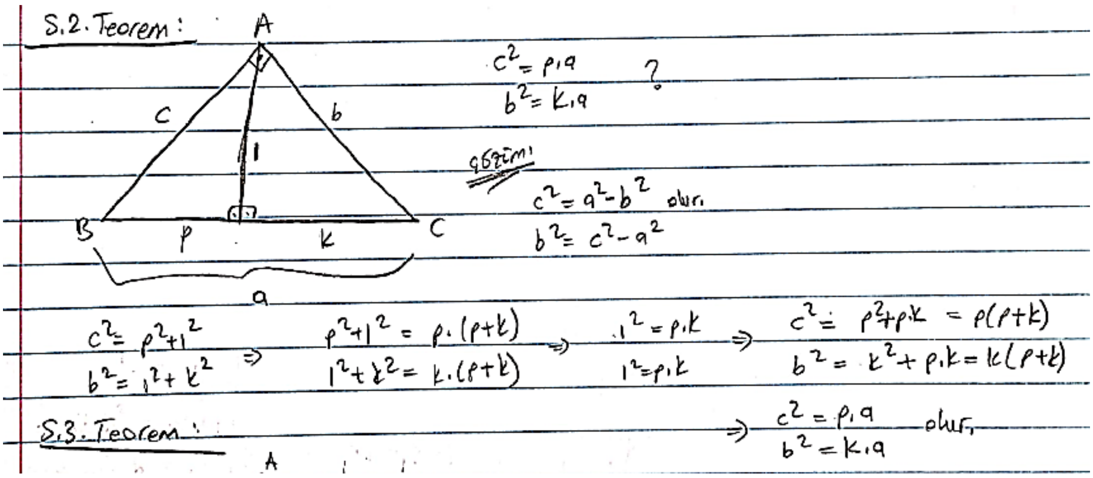
Ö5 kodlu öğretmen adayı ABH üçgeninde Pisagor teoreminden yararlanarak $y^2 + p^2 = c^2$ ve AHC üçgeninde Pisagor teoremini yararlanarak $y^2 + k^2 = b^2$ eşitliklerini yazmıştır. Daha sonra yazmış olduğu bu iki Pisagor eşitliklerini alt alta toplayarak $c^2 + b^2$ ifadesinin eşitini elde etmiştir. Ardından ABC üçgeninde Pisagor teoreminden yararlanarak $c^2 + b^2 = a^2$ eşitliğini elde etmiş ve a'nın yerine eşiti olan $p + k$ yazmış ve dağılma özelliğinden yararlanarak $c^2 + b^2 = a.p + a.k$ eşitliğini elde etmiştir. Ö5 böylelikle iki farklı $c^2 + b^2$ ifadesi elde etmiş olup bu iki farklı ifadeyi birbirine eşitlemiştir. Ardından elde etmiş olduğu yeni eşitlikte y^2 yerine $p.k$ yazmıştır. Ancak $y^2 = p.k$ ifadesini nasıl elde ettiğine dair herhangi bir açıklama yoktur bu nedenle görüşme sırasında Ö5'e bu eşitliği nereden bulduğu sorulmuştur. Ö5 *"Öklid kurallarının bir diğerinden $y^2 = p.k$ olduğunu söyleyebiliyorduk."* biçiminde açıklama yapmıştır. Ö5'in kullanmış olduğu bu eşitliğin kanıtını bilip bilmediğini öğrenebilmek için "$y^2 = p.k$ ifadesini nasıl kanıtlayabiliriz biliyor musun?" sorusu yöneltilmiştir ve Ö5 *"Hayır bilmiyorum."* biçiminde yanıt vermiştir. Ardından $2.(p.k) + p^2 + k^2 = a.p + a.k$ eşitliğini elde etmiş ve bu eşitlikte düzenleme yaparak $(p + k)^2 = (p + k).(p + k)$ olduğunu göstermiştir. Ö5 teoremi kanıtlarken ne yapmaya çalıştığını "*İki ifadenin eşitliğini göstererek teoremin doğru olduğunu kanıtlamaya çalıştım.*" biçiminde açıklamıştır. Böylelikle Ö5 teoremi kanıtladığını ifade etmiştir.

Yukarıda Ö5 kodlu öğretmen adayının ikinci teoreme ilişkin yaptığı kanıt ve görüşme sırasında yaptığı açıklamalara yer verilmiştir. Ö5'in kanıtı incelendiğinde ifadelerin birbirine eşit olduğunu göstermekten başka bir şey yapamadığı görülmektedir. Ö5'in yazdıkları ve yaptığı açıklamalar doğru olmasına rağmen kanıtlanmak istenen ifade elde edilememiştir. Dolayısıyla Ö5 birden çok verileri birbiriyle ilişkilendirmeye çalışmış ama sonuçta bir noktaya varamamıştır. Bu nedenle öğretmen adayının verdiği yanıtın SOLO taksonomisinin "Çok Yönlü Yapı- Düşük" evresinde olduğu söylenebilir.

Ö6'nın F2. S2.Teoreme ilişkin kanıtı:

Şekil 36

Ö6'nın F2. S2. Teoreme İlişkin Yazdıkları



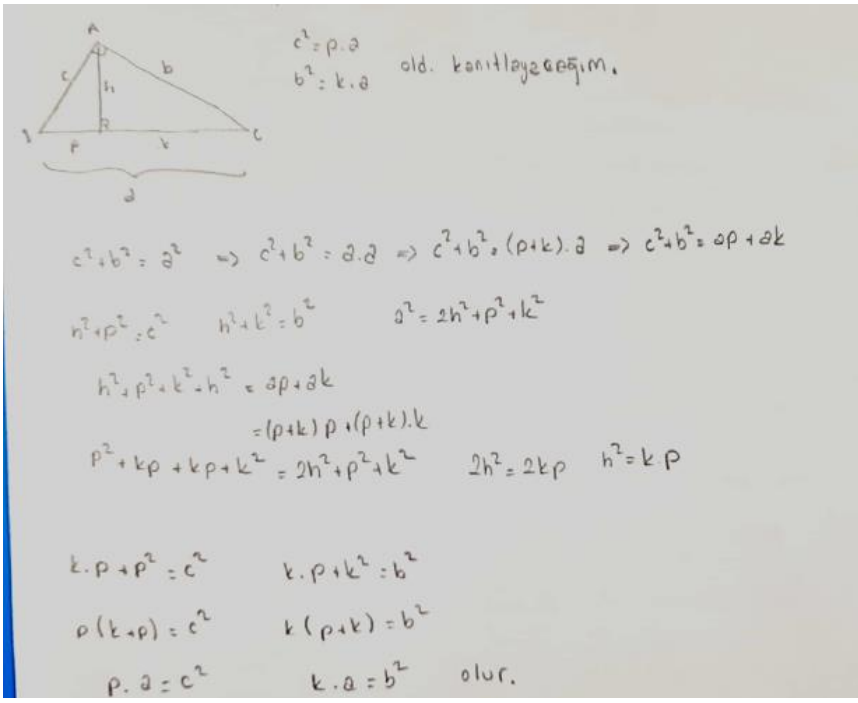
Ö6 kodlu öğretmen adayının eşitlikler yazdığı görülmektedir ancak bu eşitlikleri nasıl yazdığını kağıdında açıklamamıştır. Bu nedenle Ö6'ya eşitlikleri nasıl yazdığı sorulmuştur. Ö6 "*Pisagor teoreminden yararlanarak* $c^2 = p^2 + \iota^2$ *ifadesini yazdım ve ardından* $c^2 = p.(p + k)$ *olduğunu biliyordum bunu kullanarak elde ettiğim iki farklı* c^2 *ifadelerini birbirine eşitledim."* biçiminde açıklamıştır. Ancak bu noktada Ö6'nın $c^2 = p.(p + k)$ ifadesini yazarak kanıtlamak isteneni kanıtın içerisinde bildiği veri olarak kullandığı görülmektedir. Bu noktadan sonra eşitleyerek $\iota^2 = p.k$ bulmuş ve bu ifadeyi de $c^2 = p^2 + \iota^2$ ifadesinde yerine yazmış ve ortak paranteze aldıktan sonra $c^2 = p.a$ olduğunu iddia etmiştir. Ö6'nın $b^2 = k.a$ ifadesini kanıtlarken de benzer bir kanıt aşamasını kullandığı görülmektedir.

Yukarıda Ö6 kodlu öğretmen adayının ikinci teoreme ilişkin yaptığı kanıt ve görüşme sırasında yaptığı açıklamalara yer verilmiştir. Ö6 kanıtlamak isteneni kanıtın içerisinde bildiği bir veri olarak kullanarak kanıtı tamamladığını iddia etmiştir. Dolayısıyla Ö6 bilineni kullanarak kanıt yapmıştır ancak böyle bir kanıt, kanıt yapma biçimine uymamaktadır. Ö6 ile yapılan görüşmede Ö6 bu eksikliğini fark etmemiştir. Ö6'nın Pisagor teoremini, Öklid teoremini ezbere bildiği yazdıklarından anlaşılmaktadır. Dolayısıyla Ö6'nın birden fazla şey bildiği ancak bu bilgileri birbirine bağlayamadığı anlaşılmaktadır. Bunun yanı sıra Ö6'nın kanıtı devam ettirmek için herhangi bir şey yapmadığı görüşme sırasında söyledikleri ve kâğıda yazdıklarından anlaşılmaktadır. Bu nedenle Ö6 kodlu öğretmen adayının verdiği yanıtın SOLO taksonomisinin "Çok Yönlü Yapı- Düşük" evresinde olduğu söylenebilir.

Ö7'nin F2. S2.Teoreme ilişkin kanıtı:

Şekil 37

Ö7'nin F2. S2. Teoreme İlişkin Yazdıkları



Ö7 kodlu öğretmen adayı eşitlikler yazdığı görülmektedir ancak eşitlikleri neye göre yazdığına dair açıklama yoktur bu nedenle Ö7'ye eşitlikleri nasıl yazdığı sorulmuştur. Ö7 Pisagor teoreminden yararlanarak yazdığını belirtmiştir. Dolayısıyla öncelikle ABC üçgeninde Pisagor teoremini yazmış ardından a^2 ifadesini $a.a$ olacak biçimde ayırmış ve a ifadesinin yerine eşiti olan $p+k$ 'ı yazarak $c^2+b^2=a.p+a.k$ bulmuştur. Ardından dikmenin sağındaki ve solundaki üçgenlerde Pisagor teoremini yazmış ve bu iki ifadeyi alt alta toplayarak $c^2+b^2=2h^2+p^2+k^2$ ifadesini bulmuştur. Ö7 bulmuş olduğu iki farklı c^2+b^2 ifadelerini birbirine eşitlemiş ve $h^2=k.p$ eşitliğini elde etmiştir. Ardından sağdaki ve soldaki üçgenlerde yazmış olduğu Pisagor teoremlerinde h^2 ifadesi yerine eşiti olan $k.p$ 'yi yazmış ve gerekli düzenlemeleri yapınca istenen teoremi doğru bir biçimde kanıtlamıştır.

Yukarıda Ö7 kodlu öğretmen adayının ikinci teoreme ilişkin yaptığı kanıt ve görüşme sırasında yaptığı açıklamalara yer verilmiştir. Ö7 öncelikle Öklid teoreminin diğer eşitliğini kanıtlamış ardından bu eşitlikten yararlanarak istenilen teoremleri kanıtlamıştır. Ö7 teoremi kanıtlamaya yönelik ilgili verileri düzgün bir şekilde sıralayarak ve bütünleştirerek kanıtı doğru bir biçimde yapmıştır. Bu nedenle Ö7 kodlu öğretmen adayının verdiği yanıtın SOLO taksonomisinin "Soyutlanmış Yapı" evresinde olduğu söylenebilir.

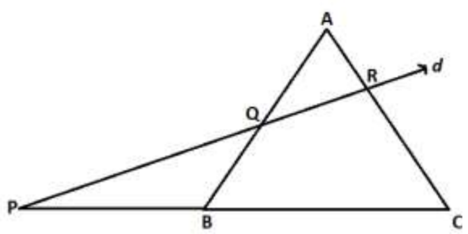
2.C) S.3.Teoreme İlişkin Bulgu ve Yorumlar

S.3.Teorem: Herhangi bir *d* doğrusu ABC üçgeninin kenarlarını P, Q ve R noktalarında kestiğinde

$$\frac{|QA|}{|QB|}\cdot\frac{|PB|}{|PC|}\cdot\frac{|RC|}{|RA|}=1$$

olduğunu kanıtlayınız.

Kanıt:

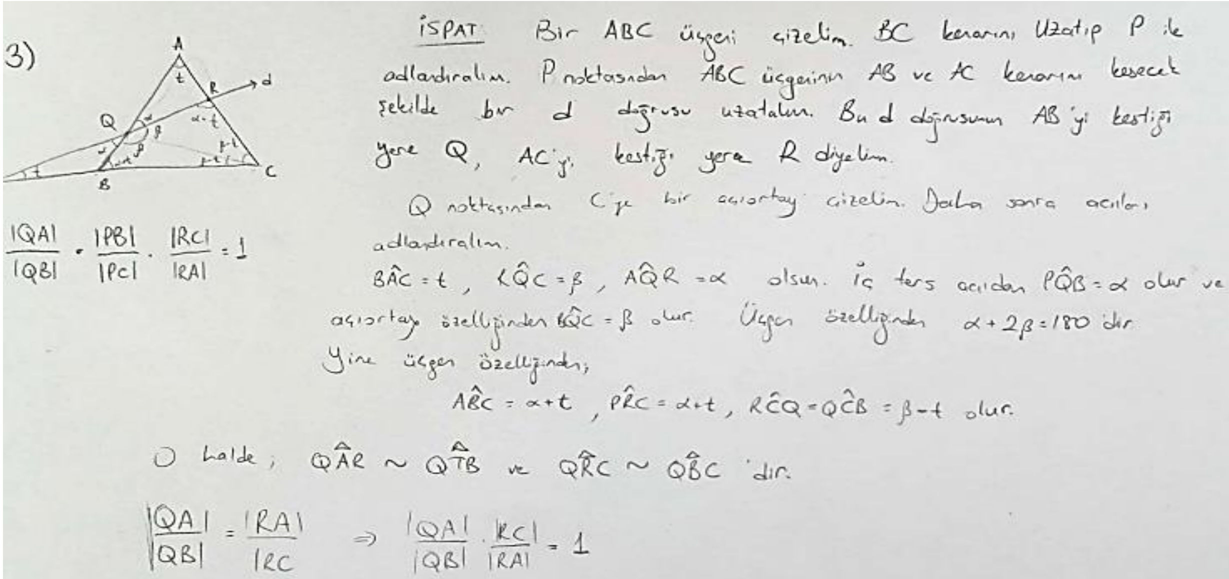


Kanıtlanması istenen üçüncü teorem yukarıda verilmiştir.

Ö1'in F2. S3.Teoreme ilişkin kanıtı:

Şekil 38

Ö1'in F2. S3. Teoreme İlişkin Yazdıkları



Ö1 kodlu öğretmen adayı öncelikle Q noktası ile C noktasını birleştiren doğru parçasını çizmiş ve bu doğru parçasının hem $\widehat{BQR}$ hem de $\widehat{RCB}$ açıları için açıortay olduğunu iddia etmiştir. Bu nedenle Ö1 'e "Her zaman bu çektiğimiz doğru hem $\widehat{BQR}$ hem de $\widehat{RCB}$ açıları için açıortay olur mu?" sorusu yöneltilmiştir. Ö1 *"Söyleyemeyebiliriz, ancak o an söyleyebileceğimizi düşündüm."* biçiminde açıklama yapmıştır. Ardından $m(\widehat{BAC}) = t$, $m(\widehat{RQC}) = \beta$ ve $m(\widehat{AQR}) = \propto$ olarak adlandırmış. $m(\widehat{AQR})$ ile $m(\widehat{PQB})$ iç ters açı oldukları için $m(\widehat{PQB}) = \propto$ olmuştur. Ö1'in $m(\widehat{QPB}) = t$ açısını neye göre yazdığı tam olarak anlaşılmamaktadır ve Ö1 görüşme sırasında bu noktaya bir açıklık getirememiştir. Daha sonra QAR üçgeni ile QPB üçgenin ve QRC üçgeni ile QBC üçgenin benzer üçgenler olduğunu iddia etmiştir. Ö1 'e hangi benzerlikten yararlanarak bunu söylebildiği sorulmuştur. Ö1 "Açı-Açı- Açı benzerliğinden dolayı benzerdir çünkü bu üçgenlerde açılar karşılıklı olarak aynıdır." yanıtını vermiştir. Ardından benzerliği kullanarak oranlamalar yapmıştır. Ancak bu yazdığı oranlar iddia ettiği benzer üçgenlere göre yanlış yazmıştır. Dolayısıyla Ö1 yanlış bir şekilde teoremin ispatını tamamladığını iddia etmiştir.

Yukarıda Ö1 kodlu öğretmen adayının üçüncü teoreme ilişkin yaptığı kanıt ve görüşme sırasında yaptığı açıklamalara yer verilmiştir. Ö1 teoremi benzerlikten yararlanarak kanıtlamaya çalışmıştır ancak ilk hamlesi olan açıortay ile ilgili ortaya koyduğu iddia yanlıştır. Dolayısıyla Ö1 kurduğu fikir üzerinden ilerlemiştir. Teoremi kanıtlamak için alternatif fikirler üretememiştir bu nedenle Ö1'in verdiği yanıtın SOLO taksonomisinin "Tek Yönlü Yapı" evresinde olduğu söylenebilir.

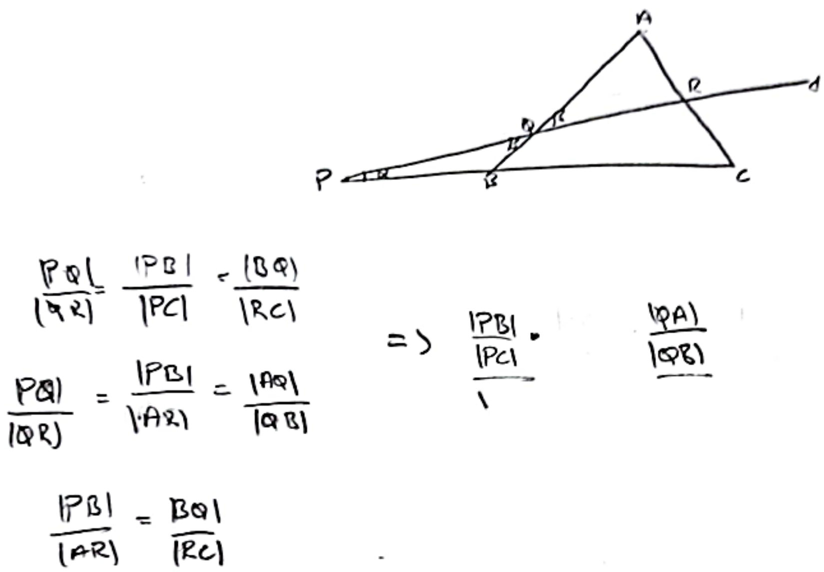
Ö2'nin F2. S3.Teoreme ilişkin kanıtı:

Ö2 kodlu öğretmen adayı bu teoremi kanıtlamaya dair herhangi bir şey yazamamıştır. Görüşme sırasında aklına gelen bir kanıt olup olmadığı sorulduğunda Ö2 *"Aklıma kelebek teoremi geldi ama buradan kanıtın gelmeyeceğini düşündüğüm için yapmadım."* demiştir. Ö2 kodlu öğretmen adayı kanıta dair bir şey yapmamasından dolayı verdiği yanıtın SOLO Taksonomisine göre "Yapı Öncesi" seviyesinde olduğu söylenebilir.

Ö3'ün F2. S3.Teoreme ilişkin kanıtı:

Şekil 39

Ö3'ün F2. S3. Teoreme İlişkin Yazdıkları



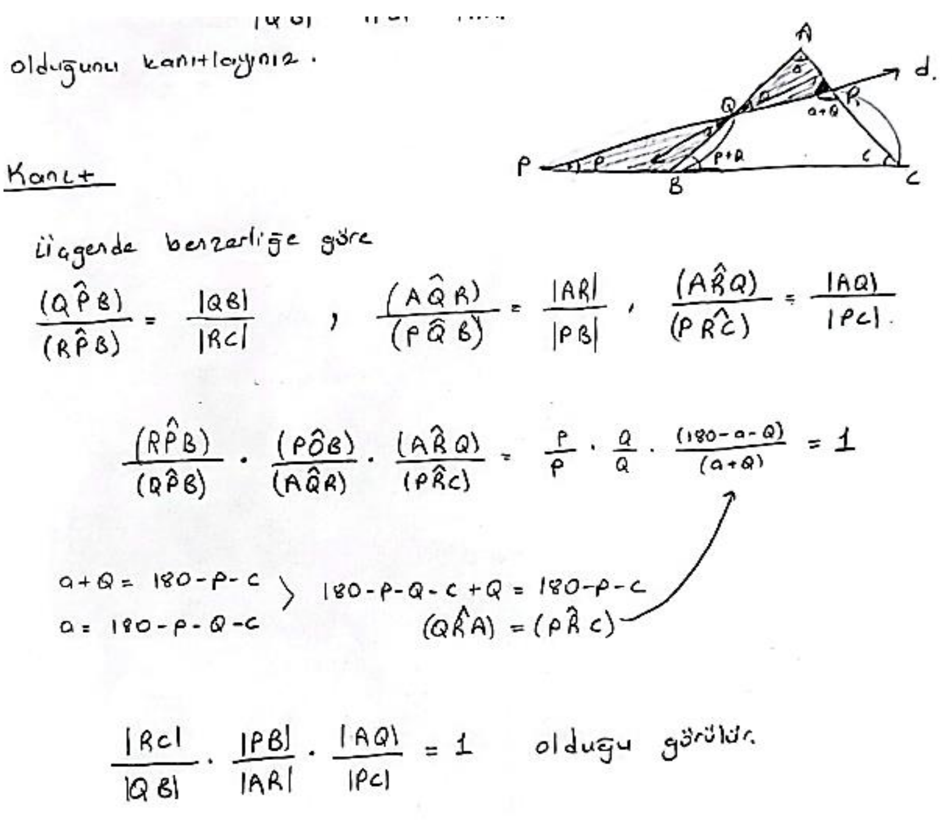
Ö3 kodlu öğretmen adayının eşitlikleri nasıl yazdığını açıklayacak yeterli bilgi kağıdında bulunmadığı için Ö3'e neler yaptığı sorulmuştur. Ö3 *"Oran gördüğümde benzerlik yapmak aklıma geliyor bu nedenle burada da benzerlik yapmaya çalıştım."* biçiminde açıklamıştır. Ö3'ün hangi üçgenler arasında benzerlik yapmaya çalıştığı anlaşılmamaktadır bu nedenle Ö3'e hangi üçgenlerde benzerlik yaptığı sorulmuştur. Ö3 *"Aslında burada sadece ters açıları yerleştirebildim, çok ilerleyemedim."* biçiminde açıklama yapmıştır.

Yukarıda Ö3 kodlu öğretmen adayının üçüncü teoreme ilişkin yaptığı kanıt ve görüşme sırasında yaptığı açıklamalara yer verilmiştir. Ö3 nasıl yapabileceğine dair bir doğru çerçeve çizmiştir ancak ilerleyememiştir. Bu nedenle öğretmen adayının verdiği yanıtın SOLO taksonomisinin "Tek Yönlü Yapı" seviyesinde olduğu söylenebilir.

Ö4'ün F2. S3. Teoreme ilişkin kanıtı:

Şekil 40

Ö4'ün F2. S3. Teoreme İlişkin Yazdıkları



olduğunu kanıtlayınız.

Kanıt

üçgende benzerliğe göre

$\frac{(Q\hat{P}B)}{(R\hat{P}B)} = \frac{|QB|}{|RC|}$, $\frac{(A\hat{Q}R)}{(P\hat{Q}B)} = \frac{|AR|}{|PB|}$, $\frac{(A\hat{R}Q)}{(P\hat{R}C)} = \frac{|AQ|}{|PC|}$.

$$\frac{(R\hat{P}B)}{(Q\hat{P}B)} \cdot \frac{(P\hat{O}B)}{(A\hat{Q}R)} \cdot \frac{(A\hat{R}Q)}{(P\hat{R}C)} = \frac{P}{P} \cdot \frac{Q}{Q} \cdot \frac{(180-a-Q)}{(a+Q)} = 1$$

$a+Q = 180-P-C$

$a = 180-P-Q-C$

$180-P-Q-C+Q = 180-P-C$

$(Q\hat{R}A) = (P\hat{R}C)$

$\frac{|RC|}{|QB|} \cdot \frac{|PB|}{|AR|} \cdot \frac{|AQ|}{|PC|} = 1$ olduğu görülür.

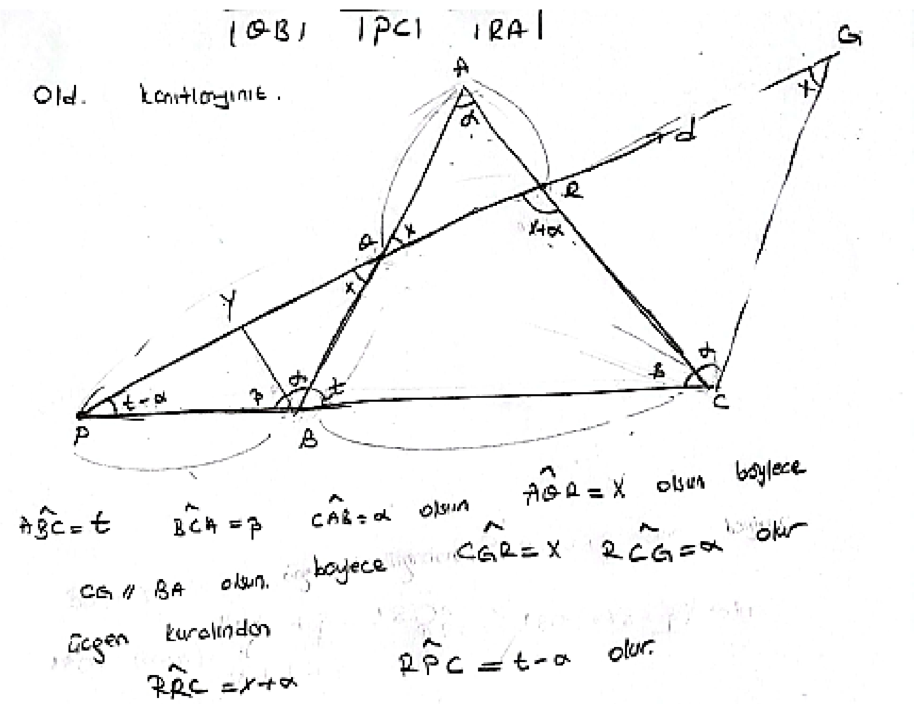
Ö4 kodlu öğretmen adayının kâğıdı incelendiğinde yazdıklarından çıkarım pek fazla yapılamamıştır bu nedenle görüşme sırasında Ö4'e sorulmuştur. Ö4 "*Sonuca ulaşmaya yönelik işlemler yaptım, benzerlikten yararlandım. Kelebek teoremi çıkıyordu onu kullandım.*" biçiminde açıklamıştır. Ö4'ün kelebek teoremini kullanabilmesi için bir paralellik söz konusu olmalıdır ancak Ö4 bunun farkında değildir. Ardından benzer olduğunu iddia ettiği kısımlarda kenar oranlarını yazmıştır. Daha sonra açı oranlarının çarpımını 1 olarak göstermiştir. Bu açıların oranları aynı zamanda kenarların oranlarına eşit olduğu için bu kenarların oranlarının çarpımının da 1 olduğunu ifade etmiştir.

Yukarıda Ö4 kodlu öğretmen adayının üçüncü teoreme ilişkin yaptığı kanıt ve görüşme sırasında yaptığı açıklamalara yer verilmiştir. Ö4 teoremin kanıtını yaparken teorem ifadesinde yer alan matematiksel yazımlara nasıl ulaşabileceğini düşünerek yapmıştır. Ö4 benzerlikten yararlanmıştır ancak hangi üçgenlerin benzer olduğunu, hangi benzerlikten yararlanarak yazdığını açıklayamamıştır. Ö4'ün elinde birden fazla ilişkili veri vardır ancak bunları temellendirme noktasında sorunlar vardır. Bu nedenle öğretmen adayının verdiği yanıtın SOLO Taksonomisinin "Çok Yönlü Yapı-Yüksek" seviyesinde olduğu söylenebilir.

Ö5'in F2. S3. Teoreme ilişkin kanıtı:

Şekil 41

Ö5'in F2. S3. Teoreme İlişkin Yazdıkları



Ö5 kodlu öğretmen adayı öncelikle şeklin üstünde açıları yerleştirmeye çalışmıştır. Ö5 teoremi nasıl kanıtlayacağını *"Benzer üçgenler elde ederek benzerlik teoremlerini kullanmaya çalıştım."* biçiminde ifade etmiştir. Yazdıklarından ne düşündüğü ve nasıl ilerlemiş olduğu tam anlaşılmadığı için görüşme sırasında sorulmuştur. Ö5 *"[AC]'e paralel*

[YB]'i çizdim ardından paralellikten yararlanarak Z kuralını kullandım." biçiminde ifade etmiştir. Ö5'in yazdıkları doğru olmasına rağmen buradan bir şeyler elde edememiştir.

Yukarıda Ö5 kodlu öğretmen adayının üçüncü teoreme ilişkin yaptığı kanıt ve görüşme sırasında yaptığı açıklamalara yer verilmiştir. Ö5 soruyu şekle doğru bir biçimde aktarmış çözüme yönelik girişimde bulunmuş ancak ilerleyememiştir. Bu nedenle öğretmen adayının verdiği yanıtın SOLO taksonomisinin "Tek Yönlü Yapı" seviyesinde olduğu söylenebilir.

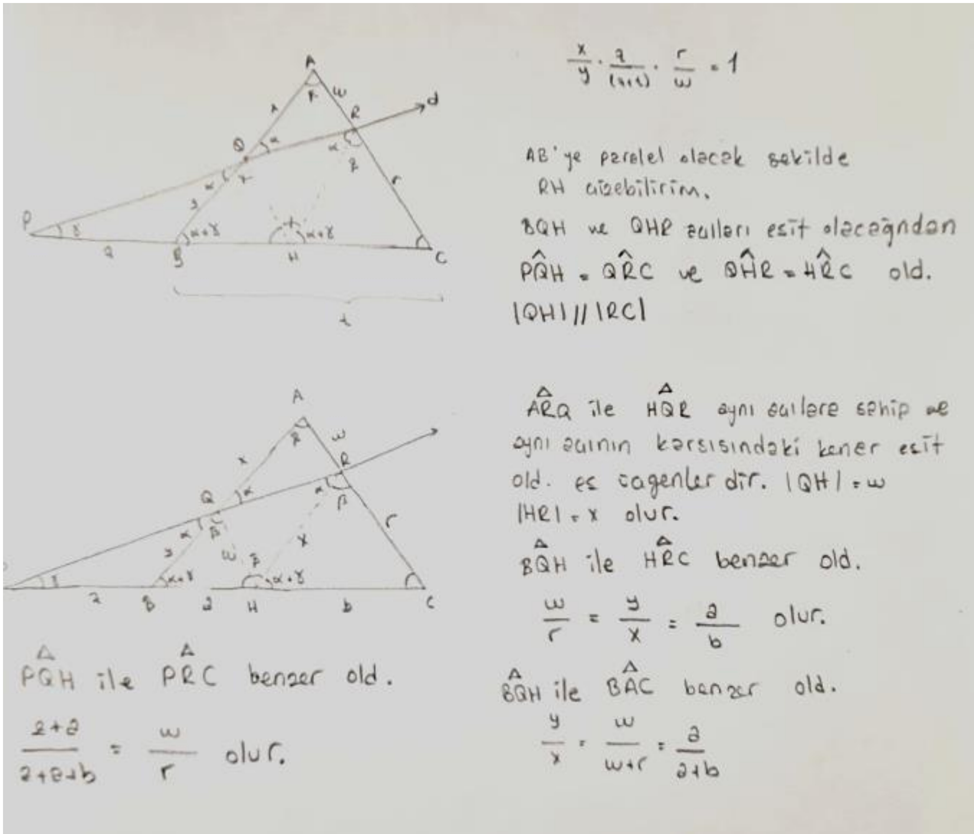
Ö6'nın F2. S3.Teoreme ilişkin kanıtı:

Ö6 kodlu öğretmen adayı bu teoremde kanıta dair bir şey yapamamış ve görüşme sırasında da aklına herhangi bir şey gelmediğini belirtmiştir. Ö6 kodlu öğretmen adayı kanıta dair bir şey yapmamasından kolayı verdiği yanıtın SOLO Taksonomisine göre "Yapı Öncesi" seviyesinde olduğu söylenebilir.

Ö7'nin F2. S3.Teoreme ilişkin kanıtı:

Şekil 42

Ö7'nin F2. S3. Teoreme İlişkin Yazdıkları



Ö7 kodlu öğretmen adayı öncelikle |AC|'na paralel bir |QH| ve |AB|'e paralel bir |HR| çizmiştir. Ardından açıları isimlendirmiştir. Paralellikleri kullanarak iç ters açıdan dolayı aynı olan açıları yazmıştır. ARQ ile HQR aynı açı ve kenar uzunluklarına sahip olduğu için eş üçgenler olduğunu ifade etmiştir. Ardından BQH ile HRC'nin, BQH ile BAC'ın ve PQH ile PRC'nin benzer olduğunu yazdığı görülmektedir. Ö7'ye hangi benzerlik teoreminden dolayı bu şekilde yazdığı sorulmuştur. Ö7 Açı-Açı benzerlik teoreminden yararlanarak yaptığını ifade etmiştir. Ardından Ö7'nin bu üçgenlerdeki her bir benzerlik ilişkisini kullanarak oranlar yazdığı görülmektedir. Ö7 bu aşamadan sonra bir şey yapamamıştır. Görüşme sırasında da aklına başka bir şey gelmediğini ifade etmiştir.

Yukarıda Ö7 kodlu öğretmen adayının üçüncü teoreme ilişkin yaptığı kanıt ve görüşme sırasında yaptığı açıklamalara yer verilmiştir. Ö7 teoremi benzerlikten yararlanarak kanıtlamaya çalışmıştır. Ö7 teoremin kanıtına ilişkin birden fazla doğru ifadeler kullanmasına rağmen kanıtın sonucuna ulaşamamıştır. Çünkü Ö7 ilişki kuramamıştır bilgi parçalarını sadece sıralayabilmiştir. Dolayısıyla öğretmen adayının verdiği yanıtın SOLO taksonomisinin "Çok Yönlü Yapı-Düşük" seviyesinde olduğu söylenebilir.

Bölüm 5

Sonuç ve Tartışma

Bu çalışma üniversite ikinci sınıfa devam etmekte olan 7 ortaöğretim matematik öğretmen adayı ile gerçekleştirilmiştir. Öğretmen adayları seçilirken geometri dersini almış farklı başarılarda tamamlamış olmalarına, farklı Van Hiele düşünme düzeylerine sahip olmalarına ve akademik ortalamalarının değişkenlik göstermesine dikkat edilmiştir. Öncelikle Van hiele düşünme testi uygulanmış ikinci aşamada 2 oturumda geometrik kanıt form uygulanması yapılmış ve son aşamada bireysel görüşmeler yapılarak ses kayıtları alınmıştır. Ardından öğretmen adaylarının uygulanan kanıt formlarına verdikleri yanıtları ve görüşmedeki ifadeleri SOLO taksonomisine göre değerlendirilmiştir. SOLO taksonomisi öncelikle 5 li düzeyine göre değerlendirme yapılmış ancak verileri açıklamada yetersiz kaldığı düşünülerek Burnett (1999) ve Chan vd. (2002) çalışmamalarından destek alınarak 7'li yeni bir gruplandırma yapılmış ve veriler buna göre değerlendirilmiştir. Aşağıda her bir öğretmen adayı ve bu öğretmen adaylarının teoremlere yönelik yaptıkları kanıtların SOLO taksonomisine göre hangi düzeyde yer aldığı verilmiştir.

Tablo 8

Öğretmen Adayları ve Her Bir Teorem İçin SOLO Taksonomisi Düzeyleri

	GEOMETRİK KANIT FORMU-1 (F1.)				**GEOMETRİK KANIT FORMU-2 (F2.)**		
Teoremler / **Öğretmen Adayları**	**S.1.**	**S.2.**	**S.3.**	**S.4.**	**S.1.**	**S.2.**	**S.3.**
Ö1	Çok Yönlü Yapı-Yüksek	Soyutlanmış Yapı	Tek Yönlü Yapı	Soyutlanmış Yapı	Çok Yönlü Yapı-Düşük	Çok Yönlü Yapı-Düşük	Tek Yönlü Yapı
Ö2	Çok Yönlü Yapı-Düşük	Tek Yönlü Yapı	Soyutlanmış Yapı	İlişkisel Yapı-Yüksek	Tek Yönlü Yapı	Soyutlanmış Yapı	Yapı Öncesi
Ö3	İlişkisel Yapı-Düşük	İlişkisel Yapı-Yüksek	Soyutlanmış Yapı	Tek Yönlü Yapı	İlişkisel Yapı-Yüksek	Soyutlanmış Yapı	Tek Yönlü Yapı
Ö4	Çok Yönlü Yapı-Yüksek	Soyutlanmış Yapı	Soyutlanmış Yapı	İlişkisel Yapı-Yüksek	İlişkisel Yapı- Düşük	Soyutlanmış Yapı	Çok Yönlü Yapı-Yüksek

Ö5	İlişkisel Yapı- Yüksek	İlişkisel Yapı- Yüksek	İlişkisel Yapı- Yüksek	Yapı Öncesi	Soyutlanmış yapı	Çok Yönlü Yapı- Düşük	Tek yönlü yapı
Ö6	Yapı Öncesi	İlişkisel Yapı- Yüksek	İlişkisel Yapı- Düşük	Tek Yönlü Yapı	Soyutlanmış yapı	Çok Yönlü Yapı- Düşük	Yapı öncesi
Ö7	Soyutlanmış Yapı	Tek Yönlü Yapı	Soyutlanmış Yapı	Soyutlanmış Yapı	Tek Yönlü Yapı	Soyutlanmış Yapı	Çok Yönlü Yapı- Yüksek

Tablo incelendiğinde bir öğretmen adayının farklı teoremlerde farklı düzeylerde çıktığı görülmektedir. Bossé vd. (2021) çalışmalarında bazen yüksek düzeyde çıkan öğrencilerin zaman zaman düşük düzeylerde olduğu belirlenmiştir. Bu çalışmada da öğrenciler teoremlere verdikleri yanıtlar farklı düzeylerdedir. Örneğin Ö1 kodlu öğretmen adayı sırasıyla çok yönlü yapı-yüksek, soyutlanmış yapı, tek yönlü yapı, soyutlanmış yapı, çok yönlü yapı-düşük, çok yönlü yapı-düşük, tek yönlü yapı düzeylerinde çıkmıştır. Buda demektir ki öğretmen adayı her bir teoremde farklı SOLO taksonomisi düzeyindedir. Bu aslında beklenen bir durumdur. Çünkü SOLO taksonomisinde öğrencinin bulunduğu seviye konunun içeriğine göre değişebilmektedir (Köse, 2018). Geometrik kanıt formlarında bulunan teoremler farklı konuları (Üçgende alan, üçgenlerin eşliği, Menelaus teoremi, Öklid teoremi, çember, dörtgen) içermektedir. Dolayısıyla öğretmen adayının verdiği yanıtlar SOLO taksonomisinde farklı düzeylerdedir.

Bundan sonraki kısımda, elde edilen sonuçlara göre öğretmen adaylarının bazı yanıtlarının neden SOLO taksonomisinin alt düzeylerinde kaldığı ve kanıt oluşturmada ne tür güçlükler yaşadıkları verilmektedir.

Geometrik Kanıt formu-1 (F1.)'e yönelik sonuçlar

F1. S1. Teoremine yönelik sonuçlar: Öğretmen adaylarının verdikleri yanıtlar değerlendirildiğinde 1 tanesinin yapı öncesi, 1 tanesinin çok yönlü yapı- düşük, 2 tanesinin ilişkisel yapı- düşük, 1 tanesinin ilişkisel yapı- yüksek ve 1 tanesinin, soyutlanmış yapı seviyesinde olduğu belirlenmiştir. Dolayısıyla öğretmen adaylarının bu teorem için verdikleri yanıtlarının yığıldıkları yerin SOLO taksonomisinin çok yönlü yapı ve daha üst seviyesinde olduğu söylenebilir. SOLO taksonomisinin alt düzeylerinde kalan yanıtlar incelendiğinde öğretmen adaylarının, bütün dörtgenlerde köşegenlerin birbirini ortalayacağını düşünmek, üçgenin alanını doğru biçimde yazamamak, özel bir dörtgen için teoremi kanıtlamak dolayısıyla genelleme de sorun yaşamak gibi nedenlerle yanıtlarının düşük düzeyde yer aldığı görülmektedir.

F1. S2. Teoremine yönelik sonuçlar: Öğretmen adaylarının verdikleri yanıtlar değerlendirildiğinde 2 tanesinin tek yönlü yapı, 3 tanesinin ilişkisel yapı- yüksek, 2 tanesinin soyutlanmış yapı seviyelerinde olduğu belirlenmiştir. Dolayısıyla öğretmen adaylarının bu teorem için verdikleri yanıtların SOLO taksonomisinin ilişkisel yapı ve daha üst seviyelerinde yığıldığı belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının çoğu tarafından geçerli bir şekilde kanıtlanan bu teoremde, SOLO taksonomisinin alt düzeylerinde kalan yanıtlarda benzerlik teoremini yanlış kullanmak ve yazılan bilgi parçalarını destekler nitelikte bilgi sunamamak gibi sorunlar görülmüştür.

F1. S3. Teoremine yönelik sonuçlar: Öğretmen adaylarının verdikleri yanıtlara göre 1 tanesinin tek yönlü yapı, 1 tanesinin ilişkisel yapı- düşük, 1 tanesinin ilişkisel yapı-yüksek, 4 tanesinin soyutlanmış yapı seviyelerinde olduğu belirlenmiştir. Dolayısıyla öğretmen adaylarının bu teorem için verdikleri yanıtların ilişkisel yapı ve daha üst seviyelerde olduğu belirlenmiştir. SOLO taksonomisinin alt düzeylerinde kalan yanıtlarda öğretmen adaylarının, teoremi özel bir dörtgen için kanıtladıkları genellemede sorun yaşadıkları görülmüştür.

F1. S4. Teoremine yönelik sonuçlar: Öğretmen adaylarının verdikleri yanıtlara göre 1 tanesinin yapı öncesi, 2 tanesinin tek yönlü yapı, 2 tanesinin ilişkisel yapı-yüksek, 2 tanesinin soyutlanmış yapı seviyelerinde olduğu belirlenmiştir. Dolayısıyla öğretmen adaylarının bu teorem için verdikleri yanıtlar belli bir düzeye yığılmamış ve her SOLO taksonomisi seviyesine dağılmıştır. Teoremi kanıtlarken SOLO taksonomisinin alt düzeylerinde kalan yanıtlarda öğretmen adaylarının teoremin farklı çizimlerinde teoremi kanıtlayamadıkları ve kanıtlanması istenen teoremi kullanarak kanıtlamaya çalıştıkları görülmüştür.

Geometrik Kanıt formu-2 (F2.)' ye yönelik sonuçlar

F2. S1. Teoremine yönelik sonuçlar: Öğretmen adaylarının verdikleri yanıtlara göre 2 tanesinin tek yönlü yapı, 1 tanesinin çok yönlü yapı-düşük, 1 tanesinin ilişkisel yapı-düşük, 1 tanesinin ilişkisel yapı-yüksek, 2 tanesinin soyutlanmış yapı seviyelerinde olduğu belirlenmiştir. Dolayısıyla öğretmen adaylarının bu teorem için verdikleri yanıtlar belli bir noktaya yığılmamış ve her SOLO taksonomisi seviyesine dağılmıştır. Öğretmen adaylarının bu teoremi kanıtlarken SOLO taksonomisinin alt düzeylerinde kalmasının başlıca nedenleri; üçgenlerde benzerlik konusunda yanlışlar yapmaları ve benzerlik teoremlerini doğru bir biçimde kullanamamalarıdır.

F2. S2. Teoremine yönelik sonuçlar: Öğretmen adaylarının verdikleri yanıtlara göre göre 3 tanesinin çok yönlü yapı- düşük, 4 tanesinin soyutlanmış yapı seviyelerinde olduğu belirlenmiştir. Dolayısıyla öğretmen adaylarının bu teorem için verdikleri yanıtların yığıldıkları yer çok yönlü yapı ve soyutlanmış yapı seviyelerinde olduğu belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının çok yönlü yapı-düşük olarak değerlendirilen yanıtlarının bu düzeyde çıkmasının nedeni kanıt yaparken sezgisel yaklaşmaları, adımlarını gerekçelendirmemeleri ve bilgileri doğru bir şekilde ilişkilendirmemeleridir.

F3. S3. Teoremine yönelik sonuçlar: Öğretmen adaylarının verdikleri yanıtlara göre göre 2 tanesinin yapı öncesi, 3 tanesinin tek yönlü yapı, 2 tanesinin çok yönlü yapı-yüksek seviyelerinde olduğu belirlenmiştir. Dolayısıyla öğretmen adaylarının bu teorem için verdikleri yanıtların yığıldıkları yer yapı öncesi ve tek yönlü yapı seviyelerinde olduğu belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının kanıtlarken SOLO taksonomisinin alt düzeylerinde kalmasının başlıca nedenleri; kanıtı nasıl yapabileceklerine dair fikir sunmalarına rağmen geçerli bir kanıt oluşturmamaları ve benzerlik teoremini yanlış kullanmalarıdır.

Weber ve Alcock (2009) çalışmalarında birçok öğrencinin kanıtı yazamadığını gözlemlemişler ve öğrencilerin kanıt yapmakta çektiği güçlüğün nedenini kanıt yazamama ve düşündüklerini ifade edememe biçiminde ifade etmişlerdir. Bu çalışmada da öğretmen adaylarının bir kısmı teoremlerde herhangi bir şey yazamamışlardır. Weber (2006) ve Moore (1994) çalışmalarında öğrencilerin kanıt yapmakta çektiği güçlüğün nedenlerinden birinin nasıl yapılacağına dair karar verme stratejilerine sahip olmamaları olduğunu belirlemişlerdir. Bu çalışmada da öğretmen adayları bazı teorem ifadelerini şekle dönüştürebilmiş ancak nasıl kanıtlanacağını belirleyememiştir dolayısıyla nasıl yapabileceğine dair karar verme stratejilerine sahip değildirler. Goetting (1995; aktaran Sarı, 2011) öğrencilerin kanıt yapmakta çektiği güçlüğün nedenlerinden birinin kanıt yöntemlerinin yeterince bilinmemesi ve doğru uygulanmaması olduğunu belirtmiştir. Bu çalışmada da öğretmen adaylarının kanıtlanması istenen teoremi kullanarak kanıt yaptıkları veya sezgisel olarak kanıtlamaya çalıştıkları gözlemlenmiştir. Dolayısıyla öğretmen adaylarının kanıt yöntemlerini yeterince bilmediği bu noktada eksiklerinin olduğu ifade edilebilir. Raman (2002) çalışmasında öğrencilerin özel ve genel anlamları arasında bağlantı kurmakta güçlük çektiklerini belirlemiştir. Bu çalışmada da öğretmen adaylarının özel bir durum için kanıtladıkları farklı veya daha genel durumlar için kanıtlayamadıkları görülmüştür. Dolayısıyla öğretmen adayları özel ve genel durumlar arasında bağlantı kuramamışlardır. Weber (2001) öğrencilerin teorem ve kavram bilgisi olmasına rağmen bunları doğru kullanamadıkları için kanıt yapmakta güçlük çektiklerini belirtmiştir. Bu çalışmada da öğretmen adaylarının bazıları benzerlik teoremini bilmesine rağmen bunu doğru bir biçimde kullanamamıştır. Yeşildere ve Akkoç (2011), Çelik (2007) çalışmalarında öğrencilerin hatalı veya uygun olmayan genellemeler yaptıklarını tespit etmişlerdir. Bu çalışmada da öğretmen adayları kanıtlarını genellerken güçlük çekmişlerdir.

Dolayısıyla öğretmen adaylarının kanıt yapmakta güçlük çekmelerinin dolayısıyla SOLO taksonomisinde alt seviyelerde çıkmalarının nedenleri; kanıt yazamama, düşündüklerini ifade edememe, kanıta nasıl başlayacağını bilememe, kanıt yöntemlerini yeterince bilememe, özel ve genel anlamlar arasında bağlantı kuramama, teorem ve kavram bilgisini doğru bir biçimde kullanamama, genelleyememe ve yazdıklarını destekleyici nitelikte veri sunamama biçiminde sıralanabilir.

Chan vd. (2002) çalışmalarında öğrencilerin SOLO ortalama puanlarını hesaplamak için her bir düzeye 1’den başlayarak puan vermişlerdir. Bu çalışmada da öğretmen adaylarının SOLO taksonomisi düzeyi ile Van Hiele düşünme seviyeleri arasında bir bağlantı olup olmadığını değerlendirebilmek için her bir SOLO taksonomisi düzeyine puan atanmıştır ve ortalama puanları hesaplanmıştır. Aşağıda bulunan tablo (Tablo 9) bunu göstermektedir.

Tablo 9

SOLO Ortalama Puanı, Puana Göre Düzey ve Van Hiele Düzeyleri

Öğretmen Adayı	SOLO Ortalama Puanı	SOLO Ortalama Puanına Göre Düzeyi	Van Hiele Düzeyi
Ö1	3,85	Çok Yönlü Yapı- Yüksek	1.Düzey
Ö2	4	Çok Yönlü Yapı- Yüksek	4.Düzey
Ö3	5	İlişkisel Yapı-Düşük	3.Düzey
Ö4	5.71	İlişkisel Yapı-Yüksek	3.Düzey
Ö5	4.42	Çok Yönlü Yapı-Yüksek	5.Düzey
Ö6	3.42	Çok Yönlü Yapı-Düşük	3.Düzey
Ö7	5.14	İlişkisel Yapı-Düşük	5.Düzey

Jurdak (1991) SOLO taksonomisi düzeyleri ile Van Hiele düşünme düzeylerinin birbiri ile paralellik gösterdiğini ifade etmiştir. Hasan ve Juniati (2022) de çalışmalarında problem çözmedeki geometrik düşünme profillerini belirlemek için SOLO taksonomisini kullanmışlar ve yüksek ve orta matematiksel becerilere sahip kişilerin Van Hiele geometrik düşünme açısından da analitik olduklarını, bileşenleri ve geometrik özellikleri birbiriyle bağlantılı düşündükleri sonucuna varmışlardır. Yukarıdaki tabloya bakıldığı zaman Ö1 Van Hiele'nin 1. düşünme düzeyinde, Ö2 Van Hiele'nin 4. düşünme düzeyinde, Ö5 Van Hiele'nin 5. düşünme düzeyinde olmasına rağmen bu üç öğretmen adayının SOLO taksonomisi ortalama puan düzeyleri çok yönlü yapı-yüksek çıkmıştır. Benzer bir biçimde Ö3 Van Hiele'nin 3. düşünme düzeyinde, Ö7 Van Hiele'nin 5. düşünme düzeyinde olmasına rağmen bu iki öğretmen adayının SOLO taksonomisi ortalama puan düzeyleri ilişkisel yapı-düşük çıkmıştır. Dolayısıyla öğretmen adaylarının Van Hiele düzeyleri ile SOLO taksonomisinde alınan ortalama puana göre belirlenen düzeyleri birbiriyle karşılaştırıldığında düzeylerin birbiriyle paralel olduğu gözlemlenememiştir. Bossé vd. (2021) Van Hiele düzeyleri ile SOLO taksonomisi düzeylerinin birbirini tamamlayıcı iki çerçeve olduğunu belirtmişlerdir. Yapmış oldukları çalışmada en düşük ve en yüksek puana sahip öğrencilerde Van Hiele düzeyi ile SOLO taksonomisi düzeyinde yordayıcı bir bağlantı olabileceği ancak tüm öğrenciler için Van Hiele düşünme düzeyleri ile SOLO taksonomisi düzeylerinin değişiklik gösterdiği ve birbirine paralel olmayabileceği sonucuna ulaşmışlardır. Dolayısıyla SOLO taksonomisi ve Van Hiele düşünme düzeylerinin belirli bir noktaya kadar tutarlılık gösterdiği belirlenmiştir. Bu çalışmada da SOLO taksonomisi ve Van Hiele düzeyleri arasında bir paralellik olmamasının nedeni çalışmanın farklı konularda teoremler içermesi olabilir. Bu nedenle teoremlerin belli konu kapsamında sınırlandırılmasıyla çalışmalar yapılabilir.

Bölüm 6

Öneriler

- Çalışma 7 kişi ile sınırlı tutulmuştur. Çalışma daha geniş bir grup ve daha az sayıda teorem ile yürütülerek sonuçlar karşılaştırılabilir.
- Çalışmanın tümü çevrim içi ortam üzerinden gerçekleştirilmiştir aynı çalışma yüz yüze ortamda yapılabilir.
- Bu çalışma SOLO taksonomisi kullanılarak yapılmıştır ve geometrik kanıtların değerlendirilmesinde uygun bir çerçeve olduğu düşünülmüştür. İleride başka taksonomi veya değerlendirme kriterleriyle çalışmalar yapılarak elde edilecek sonuçlar karşılaştırılabilir.
- Mevcut çalışmada öğretmen adaylarının oluşturdukları kanıtlar ve kanıtlama süreçleri sadece SOLO taksonomisine göre incelenmiş ve Van Hiele geometrik düşünme düzeylerine göre değerlendirilmemiştir. Bossé vd. (2021)'nin çalışmalarındaki gibi öğretmen adaylarının teoremlere ilişkin yanıtlarının her iki çerçeveye göre değerlendirildiği ve sonuçların karşılaştırıldığı farklı çalışmalar yapılabilir.
- Çalışmada uygulanan geometrik kanıt formu farklı konu içeriklerinde teoremlerinden oluşmaktadır. Konu kapsamı daraltılarak hazırlanacak teoremler ve kanıt görevleriyle yeniden bir form oluşturulabilir ve çalışma uygulanabilir.
- Çalışmada SOLO taksonomisinin 5 boyutlu olarak kullanılması verileri açıklamada yetersiz olduğu düşüncesiyle 7 boyutlu olarak kullanılmıştır. Önceden yapılan çalışmalarda 8 ve 9 boyutlu yapılabileceği tespit edilmiştir (Burnett, 1999; Chan vd., 2002). Bu nedenle farklı çalışmalarda SOLO taksonomisini 7 boyutlu olarak kullanılarak, kullanılabilirliği diğer çalışmalar tarafından test edilebilir.
- Öğretmen adaylarının yapmış olduğu kanıtlar incelendiğinde teoremleri kanıtlarken genelde üçgende benzerlikten yararlandıkları görülmüştür. Ancak bu noktada öğretmen adaylarının eksikleri olduğu tespit edilmiştir. Öğretim süreçlerinde bu konu üzerinde daha

çok durulması ve öğrencilerin eksiklerinin giderilmesine yönelik çalışmalar yapılması önerilebilir.

- Öğretmen adaylarından bazılarının kanıtlama sürecini yanlış yürüttükleri görülmüştür. Kanıtlama sürecindeki güçlüklerin belirlenerek bunları gidermeye yönelik çalışmaların yapılması düşünülebilir.

KAYNAKÇA

Almeida, D. (1996). Justifying and the Proving in the Mathematics Classroom, Philosophy in Mathematics Education. *Philisoph of Mathematical Education Journal*, 9.

Almeida, D. (2000). A survey of mathematics undergraduates' interaction with proof: some implications form mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31(6),* 869–890.

Altıparmak, K., Öziş, T. (2005). Matematiksel kanıt ve matematiksel muhakemenin gelişimi üzerine bir inceleme. *Ege Eğitim Dergisi*, *6 (1),* 25-37.

Bağdat, O. (2013). İ*lköğretim 8.sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme becerilerinin SOLO taksonomisi ile incelenmesi* (Yüksek lisans tezi). Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.

Bell, A. (1976). A study of pupils' proof explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics, 7*, pp.23-40.

Biber, A. C., İncikabı, L. (2016). İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Fonksiyonlar Konusu İle İlgili Kurdukları Problemler: Solo Taksonomiye Göre Analiz. *Mersin Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *12(3)*, 796-809.

Biggs, J. B., Collis, K. F. (1982). *Evaluating the quality of learning: The SOLO taxonomy* (structure of the observed learning outcome). New York: Academic Press.

Biggs, J. ve Collis, K. (1991). *Multimodal Learning and The Quality of Intelligent Behaviour,* Ed: H. Rowe, Intelligence, Reconceptualization and Measurement Laurence Erlbaum Assoc. New Jersey.

Bossé, M. J., Bayaga, A., Lynch-Davis, K., ve DeMarte, A. (2021). Assessing analytic geometry understanding: Van Hiele, SOLO, and Beyond. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning, 22(1)*, 1-23.

Bramlett, D. C., Drake, C.T. (2013). A History of Mathematical Proof: Ancient Greece to the Computer Age . *Journal of Mathematical Sciences, Mathematics Education, 8(2)*.

Burnett, P.C. (1999). Children's self-talk and academic self-concepts: The impact of teachers' statements. *Educational Psychology in Practice*, *15(3)*, 195.

Ceylan, T. (2012). *GeoGebra yazılımı ortamında ilköğretim matematik öğretmen adaylarının geometrik kanıt biçimlerinin incelenmesi* (Yüksek lisans tezi). Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Chan, C. C., Tsui, M.S., Chan Mandy, Y.C., Hong Joe, H.(2002). Attitudes toward people with disabilities between Chinese rehabilitation and business students: an implication for practice. *Rehabilitation Psychology*, (47), 324-338.

Coşkun, F. (2009). *Ortaöğretim öğrencilerinin van hiele geometri anlama seviyeleri ile kanıt yazma becerilerinin ilişkisi* (Yüksek lisans tezi). Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Coşkun, M. (2020). *İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının geometri alanındaki kanıt yapabilme yeterliklerinin incelenmesi* (Yüksek lisans tezi). Erciyes Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Kayseri.

Çelebi Akkaya, S. (2006). *Van Hiele düzeylerine göre hazırlanan etkinliklerin ilköğretim 6.sınıf öğrencilerinin tutumuna ve başarısına etkisi* (Yüksek lisans tezi). Abant İzzet Baysal Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Bolu.

Çelik, D. (2007). *Öğretmen adaylarının cebirsel düşünme becerilerinin analitik incelenmesi.* (Doktora tezi). Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Çetin, R., İlhan, M. (2016). SOLO taksonomisi. *Bingölbali, E.Özarslan, S., Zembat, İ.Ö.(Ed.) Matematik eğitiminde teoriler. (*p. 861-879). Ankara: Pegem Akademi.

Dolev, S., Even, R. (2015). Justifications and explanations in Israeli 7th grade math textbooks. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 13(2), 309–327.

Duatepe, A. (2000). *An Investigation on the Relationship between Van Hiele Geometric Level of Thinking and Demographic Variables for Preservice Elementary School Teachers* (Master Thesis). Middle East Technical University, Ankara.

Duatepe Paksu, A. (2013). Sınıf Öğretmeni Adaylarının Geometri Hazırbulunuşlukları, Düşünme Düzeyleri, Geometriye Karşı Özyeterlikleri ve Tutumları. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 33 (33).

Elazzabi˙, A., Kaçar, A. (2020). Investigation of Libyan and Turkish students' thinking levels in solving quadratic word problems based on SOLO taxonomy. *Pegem Eğitim ve Öğretim Dergisi*, 10(1), 283–316.

Erbaş, İ. (2021). *Ortaokul matematik dersi öğretim programı kazanımlarının ve matematik ders kitabı değerlendirme sorularının solo taksonomisi çerçevesinde incelenmesi* (Yüksek lisans tezi). Necmettin Erbakan Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı, Konya.

Ertem Akbaş, E., Baki, A. (2020). MYO öğrencilerinin bilgisayar destekli ortamda "limit-süreklilik" konusundaki öğrenmelerinin SOLO Taksonomisine göre değerlendirilmesi: Bir eylem araştırması. *Journal of Computer and Education Research*, 8(16), 631-671.

Fernández, E., Nieto, Z., Mendoza, L. (2019). Styles of reasoning according to the taxonomy structure of observed learning outcome of John Biggs in the students of geometry of the specialty of mathematics. *Journal of Physics: Conference Series. 1329.*

Galbraith, P. L. (1981). A Clinical Investigation of Process. *Educational Studies in Mathematics*. 12(1), 1-28.

Göktepe, S., Özdemir, A.Ş. (2013). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının uzamsal görselleştirme becerilerinin SOLO modeli ile incelenmesi. *Kalem Eğitim ve İnsan Bilimleri Dergisi*, 3(2), 91-146.

Gömlekçi, M. (2021). F*en lisesi öğrencilerinin geometri başarıları ile Van Hiele geometri düşünme düzeyleri arasındaki ilişkinin incelenmesi* (Yüksek lisans tezi). Dicle Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Diyarbakır.

Güler, G., Kar, T., Öçal. M.F. ve Çiltaş, A. (2011). Prospective mathematics teachers' difficulties in proof. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 15, 336 – 340.

Gürsel, G. (2013). *Matematik öğretmeni adaylarının cebir öğrenme alanındaki kanıt süreçlerinin incelenmesi* (Doktora tezi). Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Hanna, G., Jahnke, H.N. (1993). Proof and application. *Educational Studies in Mathematics. 24*, 421 https://doi.org/10.1007/BF01273374.

Hanna, G. (2000). Proof, Explanation and Exploration: An Overview. *Educational Studies in Mathematics,* 44(1), 5–23. https://doi.org/10.1023/A:1012737223465.

Harel, G., Sowder, L. (1998). *Students' Proof Schemes: Results from Exploratory Studies.* In A. H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Ed.), Research in Collegiate Mathematics Education III (Vol. 7, pp. 234-283). Providence RI: AMS, CBMS: Issues in Mathematics Education.

Hasan, B., Juniati, D. (2022). Geometric Thinking Profile in Problem Solving Based on SOLO Plus Taxonomy. *Indonesian Journal of Mathematics Education*, 5(2),55-63.

Hoyles, C., Jones, K. (1998). *Proof in dynamic geometry contexts*. Mammana, C., Villani, V. (Ed.), Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century. 121-128. Dordrecht: Kluwer.

İnam, B., Uğurel, I. (2016). İspat kavrama testine dayalı bir öğretim uygulamasında karşılaşılan güçlükler ve sürece müdahale yolları. *Mersin Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 12(1), 1-21.

İpek, S. (2010). *İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının dinamik geometri yazılımları kullanarak gerçekleştirdikleri geometrik ve cebirsel kanıt süreçlerinin incelenmesi* (Yüksek lisans tezi). Hacettepe Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Ankara.

Jimoyiannis, A. (2011). Using SOLO taxonomy to explore students' mental models of the programming variabla and the assignment statement. *Themes in Science-Technology Education*, 4(2), 53-74.

Jurdak, M. (1991). Van Hiele levels and the SOLO taxonomy. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 22*, 57-60.

Karapınar, F. (2017). *8. sınıf öğrencilerinin geometrik cisimler konusundaki bilgilerinin Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri açısından incelenmesi.* (Yüksek Lisans Tezi). Erciyes Üniversitesi, Eğitim Bilimleri enstitüsü, Kayseri.

Karataş, İ., Güven, B. (2003). Problem Çözme Davranışlarının Değerlendirilmesinde Kullanılan Yöntemler: Klinik Mülakatın Potansiyeli. *İlköğretim Online*, 2(2), 2-9.

Kılıç, E. (2020). *8.sınıf öğrencilerinin kavram karikatürü etkinlikleri ile dönüşüm geometrisi konusundaki öğrenmelerinin SOLO taksonomisin göre değerlendirilmesi* (Yüksek lisans tezi). Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Van.

Knuth, E. (2002). Teachers conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 5(1), 61-88.

Köse, O. (2018). *Üst Düzey Uzamsal yeteneğe sahip matematik öğretmen adaylarının düşünme yapılarına göre solo taksonomisi düzeylerinin belirlenmesi* (Yüksek lisans tezi). Selçuk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Konya.

Layuk, L., Pagiling, S.L., Taufik, A.R. (2020). Miskonsepsi Siswa Kelas XI Berdasarkan Taksonomi SOLO pada Transformasi Geometri. *Musamus Jurnal of Mathematics Education*, 3(1), 8-18.

Lian, L.H., İdris, N. (2006). Assessing algebraic solving ability of form four students. *International Electronic Journal of Mathematics Education (IEJME)*, 1(1), 55-76.

Mariotti, M. A. (2000). Introduction to proof: The mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 1-2, 25-53.

Mili Eğitim Bakanlığı (2018a). *Ortaöğretim Matematik Dersi (9, 10, 11 ve 12.Sınıflar) Öğretim Programı*, Ankara: Milli Eğitim Basımevi.

Milli Eğitim Bakanlığı (2018b). *İlkokul ve Ortaokul Matematik Dersi (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8.Sınıflar) Öğretim Programı*, Ankara: Milli Eğitim Basımevi

Moore, R. C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics, 27*(3), 249-266

Morgan, D. L. (1996). *Focus groups as qualitative research (C. 16).* New York: Sage publications.

Mulbar, U., Rahman, A., Ahmar, A.S. (2017). A*nalysis of the ability in mathematical problem-solving based on SOLO taxonomy and cognitive style. World Transactions on Engineering and Technology Education*, 15(1), 68-73.

National Council of Teachers of Mathematics(2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. Reston, VA: Author.

Otten, S., Gilbertson, N., Males, L., Clark, D. (2014). *The Mathematical Nature of Reasoning and Proving Opportunities in Geometry Textbooks.* Mathematical Thinking and Learning.

Pegg, J. ve Tall, D. (2004). Fundamental Cycles in Learning Algebra: An Analysis. http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/drafts/dot2001z-pegg-icmi-algebra.pdf adresinden 6 Haziran 2021 tarihinde ulaşılmıştır.

Pekşen Sağır, P. (2013). *Matematik öğretmen adaylarının kanıt yapma süreçlerinin incelenmesi* (Yüksek lisans tezi). Marmara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

Polat, K., Oflaz, G., Akgün, L. (2019). Görsel kanıt becerisinin, Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri ve uzamsal yetenek ile ilişkisi. *Erciyes Eğitim Dergisi*, 3(2), 105-122.

Raman, M. J. (2002). *Proof and justification in collegiate calculus.* (Doctoral dissertation). University of California, Berkeley.

Rich, M., Ginsburg, K.R. (1999). The reason and rhyme of qualitative research: Why, when, and how to use qualitative methods in the study of adolescent health. *Journal of Adolescent Health,* 25(6), 371–378.

Sarı, M. (2011). *Üniversite öğrencilerinin matematiksel kanıt ile ilgili güçlükleri ve kanıt öğretimi* (Doktora tezi). Hacettepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Sarıhan Musan, M. (2012). *Dinamik matematik yazılımı destekli ortamda 8. sınıf öğrencilerinin denklem ve eşitsizlikleri anlama seviyelerinin solo taksonomisine göre incelenmesi* (Yüksek lisans tezi). Pamukkale Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Denizli.

Senk, S.L.(1989). Van Hiele levels and achievement in writing geometry proofs. *Journal for Research in Mathematics Education,* 20(3), 309-321.

Sezen Yüksel, N. (2020). *Matematik Tarihi ve Felsefesi Çerçevesinde İspat ve İspatlama. Matematiksel İspat ve Öğretimi (pp.41-68).* Anı Yayıncılık.

Sowder, L., Harel, G. (1998). Types of Students' Justification. *The Mathematics Teacher. 91(8)*, 670-675.

Şimşek, E., Şimşek, A., Dündar, S. (2013). Lise 12.sınıf öğrencilerinin geometrik kanıt süreçlerinin incelenmesi. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi*, 2(4), 43-57.

Terzi, M. (2010). *Van Hiele geometrik düşünme düzeylerine göre tasarlanan öğretim durumlarının öğrencilerin geometrik başarı ve geometrik düşünme becerilerine etkisi.* (Doktora Tezi). Gazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Matematik eğitimi Anabilim Dalı, Ankara.

Tutak, T. (2008). *Somut nesneler ve dinamik geometri yazılımı kullanımının öğrencilerin bilişsel öğrenmelerine, tutumlarına ve Van Hiele geometri anlama düzeylerine etkisi* (Doktora Tezi). Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry (Final Report).* Chicago, IL: Department of Education, University of Chicago.

Yeşildere, S., Akkoç, H. (2011). Matematik öğretmen adaylarının şekil örüntülerini genelleme süreçleri. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 30,* 141-153.

Yıldırım, C. (2000). *Matematiksel Düşünme,* İstanbul: Remzi Kitabevi.

Yıldırım, A., Şimşek, H. (2016). *Nitel araştırma yöntemleri: Sosyal bilimlerde (11. Baskı).* Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Yılmaz, S. (2011). *7.Sınıf öğrencilerinin doğrular ve açılar konusundaki hata ve kavram yanılgılarının Van Hiele geometri anlama düzeyleri açısından analizi* (Yüksek Lisans Tezi). Kastamonu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kastamonu.

Yin, R. K. (2018). *Case study research and applications: Design and methods.* Sage publication.

Zaimoğlu, Ş. (2012). *8.sınıf öğrencilerinin geometrik kanıt süreci ve eğilimleri* (Yüksek lisans tezi). Kastamonu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kastamonu.

Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proof: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 48(1), 101–119.

Weber, K. (2004). Traditional instruction in advanced mathematics courses: A case study of one professor's lectures and proofs in an introductory real analysis course. *Journal of Mathematical Behavior, 23,* pp.115–133.

Weber, K. (2006). *Investigating and Teaching the Processes Used to Construct Proofs. Research in Collegiate Mathematics Education*, VI. AMS, Hitt, F. Harel, G. & Selden, A. (Eds.).197-232.

Weber, K., Alcock, L. (2009). Semantic and Syntactic Reasoning in the Representation System of Proof. Teaching and Learning Proof Across Grades: A K-16 Perspective, Stylianou, D.A, Blanton M. L., &. Knuth E. J (Eds.), New York/Washington, DC: Routledge/National Council of Teachers of Mathematics. 323-338.

EKLER

EK-A: Geometrik Kanıt Formu -1

AÇIKLAMA

Veri toplama aracı iki bölümden oluşmaktadır. Geometrik kanıt formun birinci bölümde, verilerin analiz edilmesinde ve yorumlanmasında katkısı olacağı düşünülen bazı bilgilerinizi yazmanız; ikinci bölümünde ise geometriyle ilgili olan teoremleri kanıtlamanız beklenmektedir. Bu bir sınav değildir ve sizin başarı durumunuzu belirlemez. Uygulamanın amacı**,** ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının yaptıkları geometrik kanıtları SOLO taksonomisini kullanarak değerlendirmektir. Kendinizle ilgili vereceğiniz bilgiler ve yapacağınız kanıtlar araştırmacı dışında kimse ile paylaşılmayacaktır. Toplanan veriler yüksek lisans tez çalışmasında kullanılacaktır. Çalışmaya katılmanız tamamen gönüllülük esasına dayanmakta olup çalışmaya sağladığınız katkı için teşekkür ederim.

Yüksek Lisans Öğrencisi Selen KÜÇÜKŞENLİK

1.Bölüm

Kişisel Bilgiler

a) Adınız ve Soyadınız:

b) Akademik not ortalamanız:

c) Öklid geometrisi dersini geçme notunuz:

2.Bölüm

Geometrik Kanıt Bölümü

S.1. Teorem: Dışbükey bir dörtgensel bölgenin alanının, köşegenlerinin uzunlukları ile köşegenleri arasındaki açının sinüsünün çarpımının yarısına eşit olduğunu kanıtlayınız.

Kanıt::

S.2. Teorem: Bir çemberin AB ve CD kesenleri çemberin dışındaki bir P noktasında kesişirse

$$|PA|.|PB| = |PC|.|PD|$$

olduğunu kanıtlayınız.

Kanıt:

S.3. Teorem: Bir ABCD dörtgeninde $\hat{A}$ ve $\hat{B}$ açılarının açıortaylarının kesim noktası P olsun.

$$m(\widehat{APB}) = \frac{m(\hat{C}) + m(\hat{D})}{2}$$

olduğunu kanıtlayınız.

Kanıt:

S.4. Teorem: ABCD bir dikdörtgen, P de dikdörtgensel bölgede alınan bir nokta olmak üzere;

$$|PB|^2 + |PD|^2 = |PC|^2 + |PA|^2$$

olduğunu kanıtlayınız.

Kanıt:

EK-B: Geometrik Kanıt Formu-2

AÇIKLAMA

Veri toplama aracı iki bölümden oluşmaktadır. Geometrik kanıt formun birinci bölümde, verilerin analiz edilmesinde ve yorumlanmasında katkısı olacağı düşünülen bazı bilgilerinizi yazmanız; ikinci bölümünde ise geometriyle ilgili olan teoremleri kanıtlamanız beklenmektedir. Bu bir sınav değildir ve sizin başarı durumunuzu belirlemez. Uygulamanın amacı, ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının yaptıkları geometrik kanıtları SOLO taksonomisini kullanarak değerlendirmektir. Kendinizle ilgili vereceğiniz bilgiler ve yapacağınız kanıtlar araştırmacı dışında kimse ile paylaşılmayacaktır. Toplanan veriler yüksek lisans tez çalışmasında kullanılacaktır. Çalışmaya katılmanız tamamen gönüllülük esasına dayanmakta olup çalışmaya sağladığınız katkı için teşekkür ederim.

Yüksek Lisans Öğrencisi Selen KÜÇÜKŞENLİK

1.Bölüm

Kişisel Bilgiler

d) Adınız ve Soyadınız:

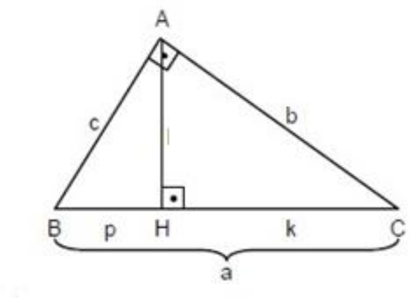
2.Bölüm

Geometrik Kanıt Bölümü

S.1. Teorem: Bir üçgende, herhangi bir açıortayın karşı kenar üzerinde ayırdığı parçaların uzunlukları oranı, bu parçalara bitişik kenarların uzunlukları oranına eşit olduğunu kanıtlayınız.

Kanıt:

S.2. Teorem: Bir dik üçgende her bir dik kenarının uzunluğunun karesi, bu dik kenarların hipotenüs üzerindeki dik izdüşümü ile hipotenüs uzunluğunun çarpımına eşit olduğunu kanıtlayınız.



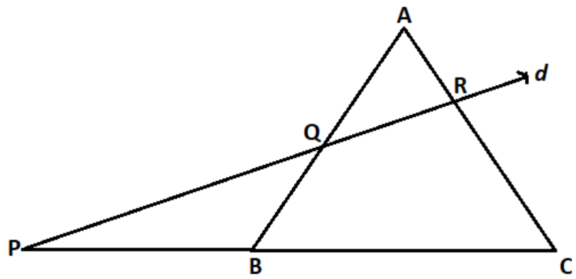
$$c^2 = p.a$$

$$b^2 = k.a$$

Kanıt:

S.3.Teorem: Herhangi bir *d* doğrusu ABC üçgeninin kenarlarını P, Q ve R noktalarında kestiğinde

$$\frac{|QA|}{|QB|}.\frac{|PB|}{|PC|}.\frac{|RC|}{|RA|} = 1$$



olduğunu kanıtlayınız.

Kanıt:

EK-C: Van Hiele Geometri Testi İzni

Van Hiele geometri testini kullanmak için talep Gelen Kutusu ×

Selen KÜÇÜKŞENLİK <sele... 20 Eki 2021 Çar 10:09

Alıcı: aduatepe

Merhaba Asuman hocam ben Hacettepe üniversitesi eğitim enstitüsü, matematik eğitimi programı yüksek lisans öğrencisiyim.
Tezimde Dr.Öğr.Üyesi Meltem SARI UZUN ile birlikte çalışıyorum. Tezim için Türkçeye uyarladığınız Van Hiele geometri testini izniniz olursa kullanmak istiyorum. Tezimde Van Hiele geometri testini kullanabilir miyim?
Selen KÜÇÜKŞENLİK

Asuman DUATEPE-PAKSU ... 20 Eki 2021 Çar 11:14

Alıcı: ben

Sayın Selen Küçükşenlik,

Ölçeği kullanmanızda bir sakınca yoktur.

İyi çalışmalar dilerim.

Asuman Duatepe-Paksu

EK-Ç: Van Hiele Geometri Testi

YÖNERGE

Bu test 25 sorudan oluşmaktadır. Sizden testteki her soruyu bilmeniz beklenmemektedir.

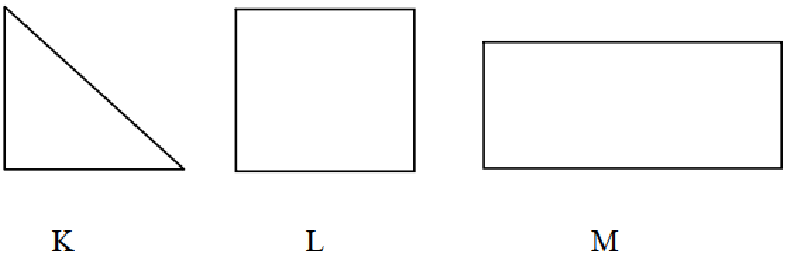
Kitapçığı açtığınızda;

1- Bütün soruları dikkatlice okuyunuz.
2- Doğru olduğunu düşündüğünüz seçenek üzerinde düşünün. Her soru için tek bir doğru cevap vardır. Cevap kağıdına doğru olduğunu düşündüğünüz seçeneği işaretleyiniz.
3- Soru kağıdındaki boşlukları çizim yapmak için kullanabilirsiniz.
4- İşaretlemiş olduğunuz cevabı değiştirmek isterseniz, ilk işareti tamamen siliniz.
5- Bu test için size verilecek süre 35 dakikadır.

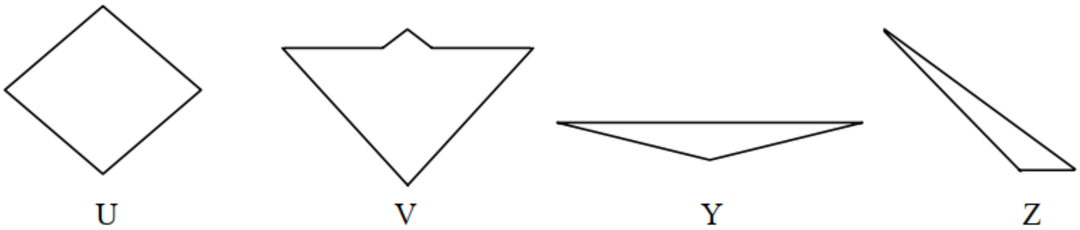
VAN HİELE GEOMETRİ TESTİ

1- Aşağıdakilerden hangisi ya da hangileri karedir?

a) Yalnız K
b) Yalnız L
c) Yalnız M
d) L ve M
e) Hepsi karedir.

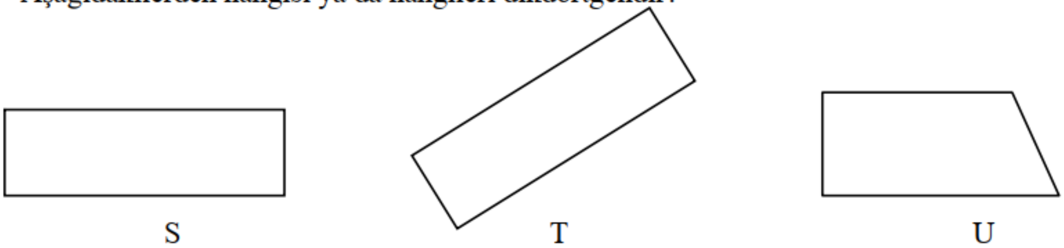


2- Aşağıdakilerden hangisi ya da hangileri üçgendir?



a) Hiçbiri üçgen değildir.
b) Yalnız V
c) Yalnız Y
d) Y ve Z
e) V ve Y

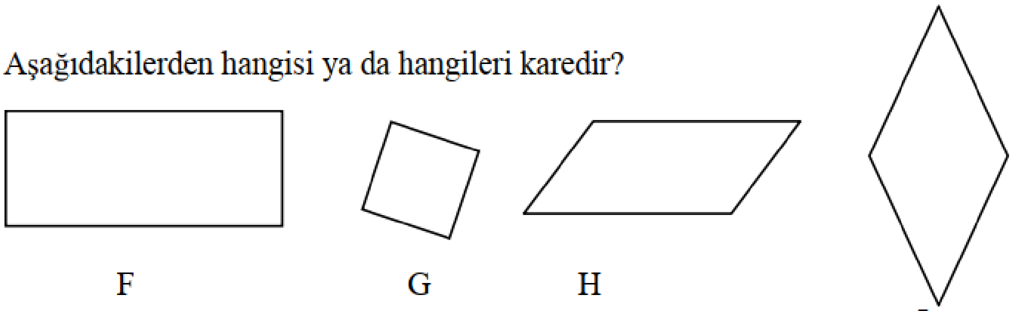
3- Aşağıdakilerden hangisi ya da hangileri dikdörtgendir?



S T U

a) Yalnız S
b) Yalnız T
c) S ve T
d) S ve U
e) Hepsi dikdörtgendir.

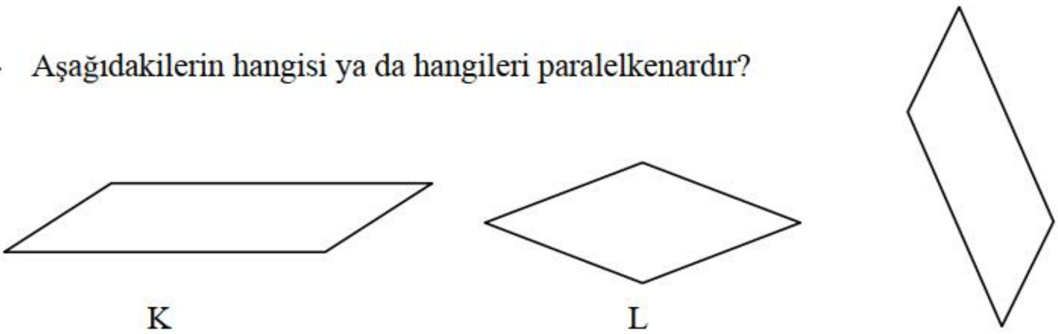
4- Aşağıdakilerden hangisi ya da hangileri karedir?



F G H I

a) Hiçbiri kare değildir.
b) Yalnız G
c) F ve G
d) G ve I
e) Hepsi karedir.

5- Aşağıdakilerin hangisi ya da hangileri paralelkenardır?

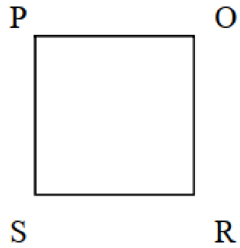


K L M

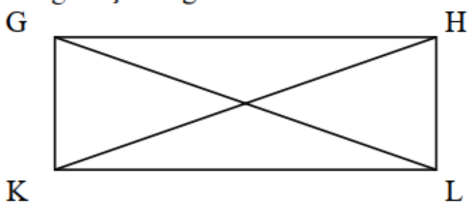
a) Yalnız K
b) Yalnız L
c) K ve M
d) Hiçbiri paralel kenar değildir.
e) Hepsi paralel kenardır.

6- PORS bir karedir.
Aşağıdakilerden hangi özellik her kare için doğrudur?

a) [PR] ve [RS] eşit uzunluktadır.
b) [OS] ve [PR] diktir.
c) [PS] ve [OR] diktir.
d) [PS] ve [OS] eşit uzunluktadır.
e) O açısı R açısından daha büyüktür.

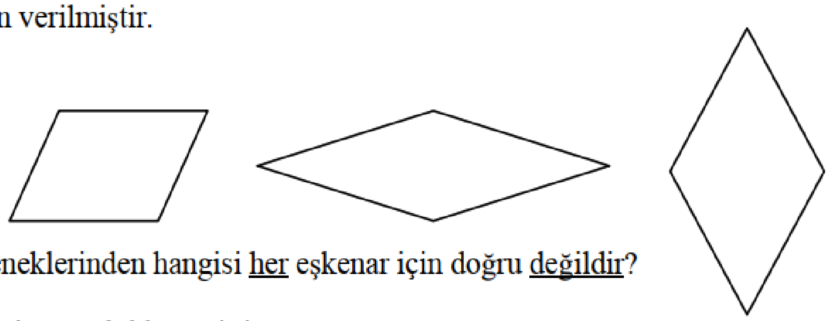


7- Bir GHJK dikdörtgeninde, [GL] ve [HK] köşegendir. Buna göre aşağıdakilerden hangisi her dikdörtgen için doğrudur?



a) 4 dik açısı vardır.
b) 4 kenarı vardır.
c) Köşegenlerinin uzunlukları eşittir.
d) Karşılıklı kenarların uzunlukları eşittir.
e) Seçeneklerin hepsi her dikdörtgen için doğrudur.

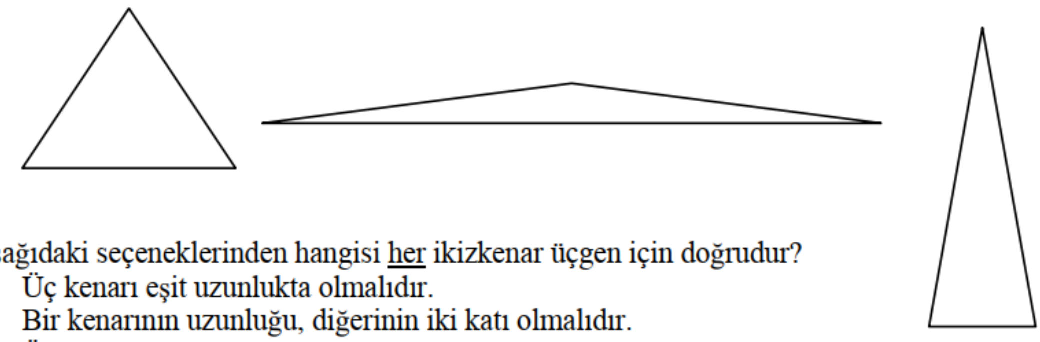
8- Eşkenar dörtgen tüm kenar uzunlukları eşit olan, 4 kenarlı bir şekildir. Aşağıda 3 tane eşkenar dörtgen verilmiştir.



Aşağıdaki seçeneklerinden hangisi her eşkenar için doğru değildir?

a) İki köşegenin uzunlukları eşittir.
b) Her köşegen, aynı zamanda açıortaydır.
c) Köşegenleri birbirine diktir.
d) Karşılıklı açılarının ölçüsü eşittir.
e) Seçeneklerin hepsi her eşkenar dörtgen için doğrudur.

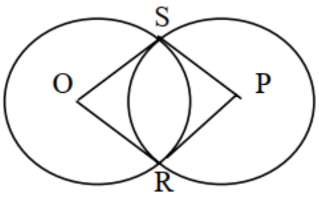
9- İkizkenar üçgen, iki kenarı eşit olan üçgendir. Aşağıda üç ikiz kenar üçgen verilmiştir.

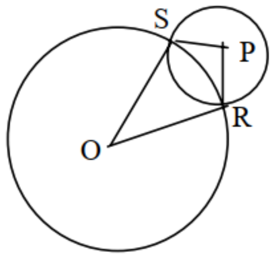


Aşağıdaki seçeneklerinden hangisi her ikizkenar üçgen için doğrudur?

a) Üç kenarı eşit uzunlukta olmalıdır.
b) Bir kenarının uzunluğu, diğerinin iki katı olmalıdır.
c) Ölçüsü eşit olan en az iki açısı olmalıdır.
d) Üç açısının da ölçüsü eşit olmalıdır.
e) Seçeneklerinden hiçbiri her ikizkenar üçgen için doğru değildir.

10. Merkezleri birbirinin içinde yer almayan ve merkezleri P ve O ile adlandırılmış olan iki çember 4 kenarları PROS şeklini oluşturmak üzere R ve S noktalarında kesişirler. Aşağıda iki örnek verilmiştir.





Aşağıdaki seçeneklerinden hangisi her zaman doğru <u>değildir?</u>
a) PROS şeklinin iki kenarı eşit uzunlukta olacaktır.
b) PROS şeklinin en az iki açısının ölçüsü eşit olacaktır.
c) [PO] ve [RS] dik olacaktır.
d) P ve O açılarının ölçüleri eşit olacaktır.
e) Yukarıdaki seçeneklerin hepsi doğrudur.

11. Önerme S: ABC üçgeninin üç kenarı eşit uzunluktadır.
Önerme T: ABC üçgeninde, B ve C açılarının ölçüleri eşittir.
Buna göre aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

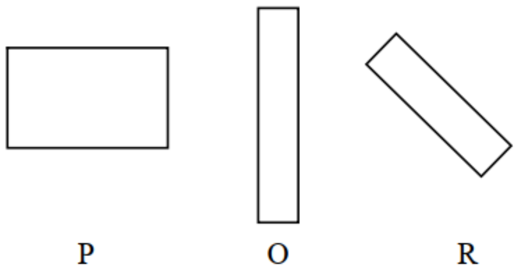
a) S ve T önermeleri ikisi de aynı anda doğru olamaz.
b) Eğer S doğruysa, T de doğrudur.
c) Eğer T doğruysa, S de doğrudur.
d) Eğer S yanlışsa, T de yanlıştır.
e) Yukarıdaki seçeneklerin hiçbiri doğru değildir.

12. Önerme 1: F şekli bir dikdörtgendir.
Önerme 2: F şekli bir üçgendir.

Bu iki önermeye göre aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
a) Eğer 1 doğruysa, 2 de doğrudur.
b) Eğer 1 yanlışsa, 2 doğrudur.
c) 1 ve 2 aynı anda doğru olamaz.
d) 1 ve 2 aynı anda yanlış olamaz.
e) Yukarı seçeneklerin hiçbiri doğru değildir.

13. Aşağıdaki şekillerden hangisi ya da hangileri dikdörtgen olarak adlandırılabilir?

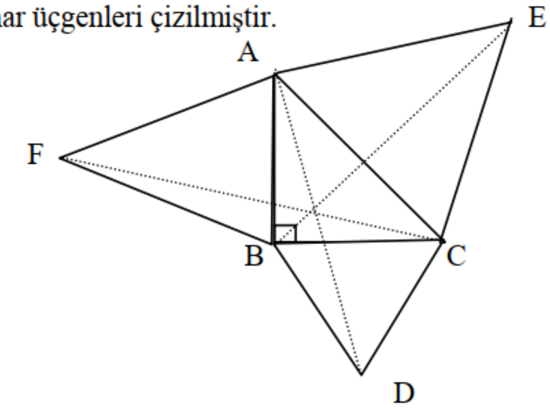
a) Hepsi
b) Yalnız O
c) Yalnız R
d) P ve O
e) O ve R



14. Tüm dikdörtgenlerde olup, bazı paralelkenarlarda olmayan özellik nedir?
a) Karşılıklı kenarları eşittir.
b) Köşegenler eşittir.
c) Karşılıklı kenarlar paraleldir.
d) Karşılıklı açıları eşittir.
e) Yukarıdaki seçeneklerin hiçbiri doğru değildir.

15- Aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
a) Dikdörtgenlerin tüm özellikleri, tüm kareler için geçerlidir.
b) Karelerin tüm özellikleri, tüm dikdörtgenler için de geçerlidir.
c) Dikdörtgenin tüm özellikleri, tüm paralel kenarlar için geçerlidir.
d) Karelerin tüm özellikleri, tüm paralel kenarlar için geçerlidir.
e) Yukarıdaki seçeneklerin hiçbiri doğru değildir.

16- Aşağıda bir ABC dik üçgeni verilmiştir. ABC üçgeninin kenarları üzerinde; ACE, ABF ve BCD eşkenar üçgenleri çizilmiştir.



Bu bilgilerden [AD], [BE] ve [CF] ortak bir noktadan geçtikleri kanıtlanabilir. Bu kanıt size neyi ifade eder?
a) Yalnızca bu üçgen için; [AD], [BE] ve [CF] nin ortak bir noktası olduğundan emin olabiliriz
b) Sadece bazı dik üçgenlerde; [AD], [BE] ve [CF] nin ortak bir noktası vardır.
c) Herhangi bir dik üçgende, [AD], [BE] ve [CF]nin ortak bir noktası vardır.
d) Herhangi bir üçgende, [AD], [BE] ve [CF]nin ortak bir noktası vardır.
e) Herhangi bir eşkenar üçgende, [AD], [BE] ve [CF]nin ortak bir noktası vardır.

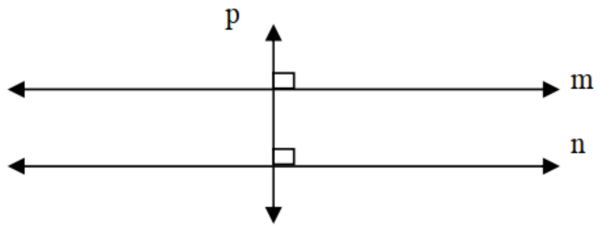
17- Aşağıda bir şeklin üç özelliği verilmiştir.
Özellik D: Köşegenleri eşit uzunluktadır.Özellik S: Bir karedir.Özellik R: Bir dikdörtgendir.
Bu özellikler dikkate alındığında aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
a) D gerektirir S, o da gerektirir R.
b) D gerektirir R, o da gerektirir S.
c) R gerektirir D, o da gerektirir S.
d) R gerektirir S, o da gerektirir D.
e) S gerektirir R, o da gerektirir D.

18. Aşağıda iki önerme verilmiştir.
I- Eğer bir şekil dikdörtgense, köşegenleri birbirini ortalayarak keser.
II- Eğer bir şeklin köşegenleri birbirini ortalayarak kesiyorsa şekil dikdörtgendir.
Buna göre aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

a) I'in doğru olduğunu kanıtlamak için, II nin doğru olduğunu kanıtlamak yeterlidir.
b) II'nin doğru olduğunu kanıtlamak için, I in doğru olduğunu kanıtlamak yeterlidir.
c) II'nin doğru olduğunu kanıtlamak için, köşegenleri birbirini ortalayan bir dikdörtgen bulmak yeterlidir.
d) II nin yanlış olduğunu kanıtlamak için, köşegenleri birbirini ortalayan dikdörtgen olmayan bir şekil bulmak yeterlidir.
e) Yukarıdaki seçeneklerin hiçbiri doğru değildir.

19- Aşağıdaki üç ifadeyi inceleyin.
{1} Aynı doğruya dik olan iki doğru paraleldir.
{2} İki paralel doğrudan birine dik olan doğru, diğerine de diktir.
{3} Eğer iki doğru eş uzaklıktaysa paraleldir.

Aşağıdaki şekilde, m ve p, n ve p doğrularının birbirine dik olduğu verilmiştir. Buna göre yukarıdaki cümlelerden hangisi ya da hangileri m doğrusunun n doğrusuna paralel olmasının nedeni olabilir?



a) Yalnız {1}
b) Yalnız {2}
c) Yalnız {3}
d) {1} ya da {2}
e) {2} ya da {3}

20- Aşağıdaki ifadelerden hangisi doğrudur?
Geometride,
a) Her terim tanımlanabilir ve her doğru önermenin doğru olduğu kanıtlanabilir.
b) Her terim tanımlanabilir ama bazı önermelerin doğru olduğunu varsaymak gerekir.
c) Bazı terimler tanımsız kalmalıdır, ama bütün doğru önermelerin doğruluğu kanıtlanabilir.
d) Bazı terimler tanımsız kalmalıdır ve doğru olduğu varsayılmış bazı önermelere gerek vardır.
e) Yukarıdaki seçeneklerinden hiçbiri doğru değildir.

21- Bir açıyı üçlemek demek onu üç eşit parçaya bölmek demektir. 1847 yılında, P.L. Wantzel bir açının yalnızca pergel ve işaretlenmemiş cetvel kullanarak <u>üçlenemeyeceğini</u> kanıtlamıştır. Bu kanıttan nasıl bir sonuca varabilirsiniz?

a) Açılar yalnızca pergel ve işaretlenmemiş cetvel kullanarak <u>iki eş</u> parçaya ayrılamazlar.
b) Açılar yalnızca pergel ve <u>işaretlenmiş</u> cetvel kullanarak üçlenemezler.
c) Açılar herhangi bir çizim aracı kullanarak üçlenemezler.
d) Gelecekte, birinin yalnız pergel ve işaretlenmiş cetvel kullanarak açıları üçlemesi mümkün olabilir.
e) Hiç kimse, açıları yalnızca pergel ve işaretlenmemiş cetvel kullanarak üçleyecek genel bir yöntem bulamayacaktır.

22- Ali adlı bir matematikçinin kendi tanımladığı geometriye göre, aşağıdaki önerme doğrudur.
Bir üçgenin iç açılarının ölçüsü toplamı 180 dereceden azdır.
Buna göre aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
a) Ali üçgenin açılarını ölçerken hata yapmıştır.
b)Ali mantıksal bir hata yapmıştır.
c) Ali doğru sözcüğünün anlamını bilmiyordur.
d)Ali bilinen geometridekilerden farklı varsayımlarla başlamıştır.
e) Yukarıdaki seçeneklerden hiçbiri doğru değildir.

23- F geometrisinde, her şey alışık olduklarımızdan farklıdır. Burada sadece dört nokta ve 6 doğru vardır. Her doğru iki nokta içerir. Eğer P, O, R ve S nokta ise, {P,O}, {P,R}, {P,S}, {O,R}, {O, S} ve {R, S} doğrulardır.

. P

O .

. R . S

Kesişme ve paralel terimlerinin F- geometrisindeki kullanımı şöyledir: {P, O} ve {P,R} doğruları P' de kesişirler çünkü P {P, O} ve {P,R} ın ortak noktasıdır. {P, O} ve {R, S} doğruları paraleldir çünkü ortak hiçbir noktaları yoktur.
Buna göre, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

a) {P, R} ve {O, S} kesişirler.
b) {P, R} ve {O, S} paraleldir.
c) {O, R} ve {R,S} paraleldir.
d) {P, S} ve {O, R} kesişirler.
e) Yukarıdaki seçeneklerin hiçbiri doğru değildir.

24- İki ayrı geometri kitabı 'dikdörtgen' sözcüğünü iki farklı şekillerde tanımlamıştır. Buna göre aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
a) Kitaplardan birinde hata vardır.
b) Tanımlardan biri yanlıştır. Dikdörtgen için iki farklı tanım olamaz.
c) Bir kitapta tanımlanan dikdörtgenin özellikleri diğer kitaptakinden farklı olmalıdır.
d) Bir kitapta tanımlanan dikdörtgenin özellikleri diğer kitaptakiyle aynı olmalıdır.
e) Kitaplarda tanımlanan dikdörtgenlerin farklı özellikleri olabilir.

25- Varsayalım aşağıdaki önerme I ve II yi kanıtladınız.
I. Eğer p ise q dir.
II. Eğer s ise q değildir.
Buna göre önerme I ve II den aşağıdakilerden hangisi çıkartılabilir?
a) Eğer s ise, p değildir.
b) Eğer p değil ise q değildir.
c) Eğer p veya q ise s dir.
d) Eğer p ise s dir.
e) Eğer s değil ise p dir.

EK-D: Araştırma Etik Komisyon İzin Muafiyeti Formu/ Araştırma Etik Komisyonu Onay Bildirimi

Tarih: 17/11/2021 12:01
Sayı: E-35853172-300-00001869984

00001869984

T.C.
HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ REKTÖRLÜĞÜ
Rektörlük

Sayı : E-35853172-300-00001869984 17.11.2021
Konu : Selen KÜÇÜKŞENLİK Hk (Etik Komisyon İzni)

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

İlgi : 28.10.2021 tarihli ve E-51944218-300-00001841645 sayılı yazı

Enstitünüz Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Eğitimi Yüksek Lisans Programı öğrencilerinden **Selen KÜÇÜKŞENLİK**'in **Dr. Öğr Üyesi Meltem Sarı UZUN** danışmanlığında yürüttüğü **"Ortaöğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Yaptıkları Geometrik Kanıtların SOLO Taksonomisine Göre İncelenmesi"** başlıklı tez çalışması Üniversitemiz Senatosu Etik Komisyonun **09 Kasım 2021** tarihinde yapmış olduğu toplantıda incelenmiş olup, etik açıdan uygun bulunmuştur.

Bilgilerinizi ve gereğini saygılarımla rica ederim.

Prof. Dr. Vural GÖKMEN
Rektör Yardımcısı

Bu belge güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır.

Belge Doğrulama Kodu: B6AE212C-A6E0-4C4E-BC12-3CA423926494 Belge Doğrulama Adresi: https://www.turkiye.gov.tr/hu-ebys

Adres: Hacettepe Üniversitesi Rektörlük 06100 Sıhhiye-Ankara
E-posta:yazimd@hacettepe.edu.tr İnternet Adresi: www.hacettepe.edu.tr Elektronik Ağ: www.hacettepe.edu.tr
Telefon: 0 (312) 305 3001-3002 Faks:0 (312) 311 9992
Kep: hacettepeuniversitesi@hs01.kep.tr

Bilgi için: Duygu Didem İLERİ
Memur
Telefon: .

EK E: Etik Beyanı

Hacettepe Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında,

* tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
* görsel, işitsel ve yazılı bütün bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
* başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
* atıfta bulunduğum eserlerin bütününü kaynak olarak gösterdiğimi,
* kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
* bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversitede veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

…./…./…..

Selen ERTAŞ

EK-F: Yüksek Lisans Tez Çalışması Orijinallik Raporu

03/07/2023

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
Eğitim Bilimleri Enstitüsü
Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı Başkanlığına,

Tez Başlığı: ORTAÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ GEOMETRİK KANITLARININ SOLO TAKSONOMİSİNE GÖRE İNCELENMESİ

Yukarıda başlığı verilen tez çalışmamın tamamı (kapak sayfası, özetler, ana bölümler, kaynakça) aşağıdaki filtreler kullanılarak **Turnitin** adlı intihal programı aracılığı ile kontrol edilmiştir. Kontrol sonucunda aşağıdaki veriler elde edilmiştir:

Rapor Tarihi	Sayfa Sayısı	Karakter Sayısı	Savunma Tarihi	Benzerlik Oranı	Gönderim Numarası
03/07/2023	140	173360	07/06/2023	%11	2125965087

Uygulanan filtreler:
1. Kaynaklar hariç
2. Alıntılar dâhil
3. 5 kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç

Hacettepe Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Tez Çalışması Orijinallik Raporu Alınması ve Kullanılması Uygulama Esaslarını inceledim ve çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan eder, gereğini saygılarımla arz ederim.

Ad Soyadı: Selen ERTAŞ

Öğrenci No.: N20130350

Ana Bilim Dalı: Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Matematik Eğitimi

İmza

Programı: Matematik Eğitimi

Statüsü: ☒ Y.Lisans ☐ Doktora ☐ Bütünleşik Dr.

DANIŞMAN ONAYI

UYGUNDUR.

(Unvan, Ad Soyadı, İmza)

EK-G: Thesis/Dissertation Originality Report

03/07/2023

HACETTEPE UNIVERSITY
Graduate School of Educational Sciences
To The Department of Mathematics and Science Education Mathematics Education

Thesis Title: INVESTIGATION OF SECONDARY SCHOOL MATHEMATICS TEACHERS' GEOMETRIC PROOFS ACCORDING TO SOLO TAXONOMY

The whole thesis that includes the *title page, introduction, main chapters, conclusions and bibliography section* is checked by using **Turnitin** plagiarism detection software take into the consideration requested filtering options. According to the originality report obtained data are as below.

Time Submitted	**Page Count**	**Character Count**	**Date of Thesis Defense**	**Similarity Index**	**Submission ID**
03/07 /2023	140	173360	07/06/2023	%11	2125965087

Filtering options applied:
1. Bibliography excluded
2. Quotes included
3. Match size up to 5 words excluded

I declare that I have carefully read Hacettepe University Graduate School of Educational Sciences Guidelines for Obtaining and Using Thesis Originality Reports; that according to the maximum similarity index values specified in the Guidelines, my thesis does not include any form of plagiarism; that in any future detection of possible infringement of the regulations I accept all legal responsibility; and that all the information I have provided is correct to the best of my knowledge.

I respectfully submit this for approval.

Name Lastname:	Selen ERTAŞ	
Student No.:	N20130350	
Department:	Mathematics and Science Education Mathematics Education	Signature
Program:	Mathematics Education	
Status:	☒ Masters ☐ Ph.D. ☐ Integrated Ph.D.	

ADVISOR APPROVAL

APPROVED
(Title, Name Lastname, Signature)

EK-H: Yayımlama ve Fikrî Mülkiyet Hakları Beyanı

Enstitü tarafından onaylanan lisansüstü tezimin/raporumun tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı (kâğıt) ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda verilen koşullarla kullanıma açma iznini Hacettepe Üniversitesine verdiğimi bildiririm. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet haklarım bende kalacak, tezimin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanım haklan bana ait olacaktır.

Tezin kendi orijinal çalışmam olduğunu, başkalarının haklarını ihlal etmediğimi ve tezimin tek yetkili sahibi olduğumu beyan ve taahhüt ederim. Tezimde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanılması zorunlu metinlerin yazılı izin alınarak kullandığımı ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederim.

Yükseköğretim Kurulu tarafından yayınlanan "**Lisansüstü Tezlerin Elektronik Ortamda Toplanması, Düzenlenmesi ve Erişime Açılmasına ilişkin Yönerge**" kapsamında tezim aşağıda belirtilen koşullar haricince YÖK Ulusal Tez Merkezi / H.Ü. Kütüphaneleri Açık Erişim Sisteminde erişime açılır.

- o Enstitü/ Fakülte yönetim kurulu kararı ile tezimin erişime açılması mezuniyet tarihinden itibaren 2 yıl ertelenmiştir. (1)
- o Enstitü/Fakülte yönetim kurulunun gerekçeli kararı ile tezimin erişime açılması mezuniyet tarihimden itibaren … ay ertelenmiştir. (2)
- o Tezimle ilgili gizlilik kararı verilmiştir. (3)

……… /……… /………

(imza)

Selen ERTAŞ

"Lisansüstü Tezlerin Elektronik Ortamda Toplanması, Düzenlenmesi ve Erişime Açılmasına İlişkin Yönerge"

(1) *Madde 6. 1. Lisansüstü tezle ilgili patent başvurusu yapılması veya patent alma sürecinin devam etmesi durumunda, tez danışmanının önerisi ve enstitü anabilim dalının uygun görüşü Üzerine enstitü veya fakülte yönetim kurulu iki yıl süre ile tezin erişime açılmasının ertelenmesine karar verebilir.*

(2) *Madde 6. 2. Yeni teknik, materyal ve metotların kullanıldığı, henüz makaleye dönüşmemiş veya patent gibi yöntemlerle korunmamış ve internetten paylaşılması durumunda 3. şahıslara veya kurumlara haksız kazanç; imkânı oluşturabilecek bilgi ve bulguları içeren tezler hakkında tez danışmanın önerisi ve enstitü anabilim dalının uygun görüşü üzerine enstitü veya fakülte yönetim kurulunun gerekçeli kararı ile altı ayı aşmamak üzere tezin erişime açılması engellenebilir.*

(3) *Madde 7. 1. Ulusal çıkarları veya güvenliği ilgilendiren, emniyet, istihbarat, savunma ve güvenlik, sağlık vb. konulara ilişkin lisansüstü tezlerle ilgili gizlilik kararı, tezin yapıldığı kurum tarafından verilir*. Kurum ve kuruluşlarla yapılan işbirliği protokolü çerçevesinde hazırlanan lisansüstü tezlere ilişkin gizlilik kararı ise, ilgili kurum ve kuruluşun önerisi ile enstitü veya fakültenin uygun görüşü Üzerine üniversite yönetim kurulu tarafından verilir. Gizlilik kararı verilen tezler Yükseköğretim Kuruluna bildirilir.*

Madde 7.2. Gizlilik kararı verilen tezler gizlilik süresince enstitü veya fakülte tarafından gizlilik kuralları çerçevesinde muhafaza edilir, gizlilik kararının kaldırılması halinde Tez Otomasyon Sistemine yüklenir

**Tez danışmanının önerisi ve enstitü anabilim dalının uygun görüşü üzerine enstitü veya fakülte yönetim kurulu tarafından karar verilir.*