

# **KESİRLİ FOURIER DÖNÜŞÜMÜNÜN MAXWELL DENKLEMLERİNE UYGULANMASI**

## **APPLICATION OF FRACTIONAL FOURIER TRANSFORM TO MAXWELL'S EQUATIONS**

**İŞİLTAN SAYIN**

**Prof. Dr. Feza Arıkan  
Tez Danışmanı**

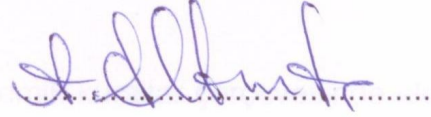
Hacettepe Üniversitesi  
Lisansüstü Eğitim - Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin  
Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı İçin Öngördüğü  
DOKTORA TEZİ olarak hazırlanmıştır.

2016

**İŞILTAN SAYIN**'ın hazırladığı "**Kesirli Fourier Dönüşümünün Maxwell Denklemlerine Uygulanması**" adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **ELEKTRİK VE ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

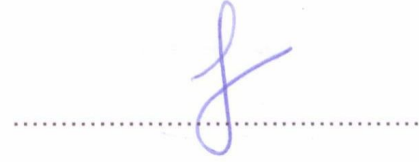
Prof. Dr. Ayhan Altıntaş

Başkan



Prof. Dr. Feza Arıkan

Danışman



Prof. Dr. Birsen Saka Tanatar

Üye




Doç. Dr. Sinan Gezici

Üye



Doç. Dr. Berkan Dülek

Üye



Bu tez Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından **DOKTORA TEZİ** olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. Salih Bülent ALTEN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

## ETİK

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

29/09/2016



İşiltan SAYIN

## ÖZET

### KESİRLİ FOURIER DÖNÜŞÜMÜNÜN MAXWELL DENKLEMLERİNE UYGULANMASI

#### İŞİLTAN SAYIN

Doktora, Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Feza Arıkan

Eylül 2016, 133 sayfa

Kesirli Fourier Dönüşümü (KFD), klasik Fourier Dönüşümünün (FD) genel bir halidir. KFD, FD'nin kullanıldığı bir çok alanda kullanılabilir. KFD, zaman ve frekans uzamlarını genelleştirerek kesirli Fourier uzamlarını tanımlar. KFD'nin uygulandığı alanlarda sistemlerin başarımı bu kesir değeri üzerinden eniyilebilir.

Kırınım teorisinde bir açıklıktan yayılan alanlar Fresnel yaklaşımında Fresnel İntegrali (FRİ) biçiminde verilir. FRİ, KFD cinsinden ifade edilebilir. Hızlı ve güvenilir KFD hesaplama yöntemleri kullanılarak açıklık antenden yayılan alanlar Fresnel bölgesinde bulunabilir. Bu tez kapsamında, sayısal KFD hesaplama yöntemleri incelenerek sürekli KFD ile olan ilişkileri verilmiştir. KFD hesaplama yöntemleri Hızlı Kesirli Fourier Dönüşümü (HKFD) ve Ayrık Kesirli Fourier Dönüşümü (AKFD) olarak sınıflandırılabilir. HKFD'de, KFD işlecinin içerdiği alt 'chirp' evrişim işlecinin hesaplanmasında Hızlı FD (FD) kullanılır. AKFD yönteminde, sinyal vektörü, Ayrık FD (AFD) matrisinin kesirli kuvveti ile çarpılır. HKFD ve AKFD yöntemleri giriş ve çıkışlarındaki örnekleme aralıklarının sabit olduğunu varsayar. Örnekleme aralıkları yöntemlerin varsaydığı şekilde seçildiğinde çıkış örnekleri sürekli KFD örneklerini verir. Ancak, örnekleme aralıkları farklı seçildiğinde sürekli KFD örneklerine ulaşmak için açı ve faz düzeltme-

leri uygulanmalıdır. Bu çalışmada, farklı örnek aralıkları için HKFD yöntemine uygulanması gereken düzeltmeler elde edilmiş, HKFD ve AKFD yöntemlerinin başarımları, sürekli KFD örnekleri ile aralarındaki fark hesaplanarak incelenmiştir. Sürekli KFD örnekleri uyarlanır Gauss-Kronrod (GK) sayısal integral hesaplama yöntemi ile elde edilmiştir. Yöntemlerin sürekli KFD örneklerini elde etme başarımlarının birbirine yakın olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Bu tez kapsamında, literatürde ilk defa, HKFD yöntemi, açı ve faz düzeltmeleri uygulanarak, Fresnel kırınım deseninin hesaplanmasında kullanılmıştır. KFD yöntemleri ile hesaplanan kırınım desenlerinin başarımları, FRI'ye göre daha geniş bir bölgede geçerli olan Rayleigh-Sommerfeld İntegralinin (RSİ) değerleri ile karşılaştırılmıştır. RSİ, GK yöntemi ile hesaplanmıştır. Yöntemlerin hızları, kırınım desenlerini hesaplama süreleri üzerinden karşılaştırılmıştır. Yapılan benzetimler, sonucunda, HKFD ve AKFD yöntemleri ile elde edilen kırınım desenlerinin birbirine çok benzediği ve Fresnel bölgesinde RSİ'ya çok yakın olduğu, Fresnel bölgesinden uzaklaştıkça RSİ'dan farklı değerler vermeye başladığı gözlenmiştir. Yöntemlerin hızları karşılaştırıldığında, HKFD yönteminin AKFD yöntemine göre yaklaşık on kat; GK yöntemine göre yaklaşık bin kat daha hızlı olduğu görülmüştür. Bu tez kapsamında, HKFD yöntemine uygulanan açı ve faz düzeltmeleri ile, farklı örnekleme aralıklarında, FRI'nin örneklemini hızlı ve güvenilir bir şekilde hesaplayan bir yöntem sunulmuştur. MATLAB ortamında bir kullanıcı arayüzü geliştirilmiş farklı kaynak dağılımı, açıklık boyu, gözlem uzaklığı seçimlerinin kırınım desenine olan etkisinin hızlı bir şekilde incelenmesine olanak sağlanmıştır.

Elektromanyetikte bir akım kaynağından yayılan alanların bulunmasında ışınım integralleri çözümlenmelidir. Bu çalışmada, bir akım yoğunluğundan yayılan elektrik alan vektör bileşenleri Fresnel yaklaşımında KFD ile ifade edilmiştir. Elektromanyetik alanlar, vektör potansiyeli cinsinden ifade edilip, gözlem koordinatlarına göre olan türevler alındıktan sonra, elde edilen integraller Fresnel yaklaşımında KFD cinsinden yazılmıştır. Sayısal KFD hesaplama yöntemleri kullanılarak akım yoğunluğundan yayılan elektromanyetik alan vektör-

leri hızlı ve verimli bir şekilde elde edilmiştir. Bu tez kapsamında, literatürde ilk kez KFD kullanılarak bir akım kaynağından yayılan elektromanyetik alanların vektör biçiminde hesaplanması gerçekleştirilmiştir.

Bu tez kapsamında geliştirilen özgün yöntem ile dipol, çapraz dipol ve açıklık antenlerden yayılan elektromanyetik alan vektörleri hesaplanmış ve Fresnel bölgesinde akım kaynağından yayılan elektromanyetik alanların vektör bileşenlerinin hızlı ve verimli hesaplanabildiği gösterilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Kesirli Fourier Dönüşümü, Maxwell Denklemleri, Işıma, Kırınım.

## **ABSTRACT**

### **APPLICATION OF FRACTIONAL FOURIER TRANSFORM TO MAXWELL'S EQUATIONS**

**İŞILTAN SAYIN**

**Doctor of Philosophy, Department of  
Electrical and Electronics Engineering**

**Supervisor: Prof. Dr. Feza Arıkan**

**September 2016, 133 pages**

Fractional Fourier Transform (FrFT) is the generalization of the classical Fourier Transform (FT). FrFT can be applied to various fields that have already made use of the FT. FrFT defines the fractional Fourier domains by generalizing the time and frequency domains. In the application fields of FrFT, the system performance can be optimized over the fractional order of the FrFT.

In the diffraction theory, under Fresnel approximations, fields radiated from an aperture can be given in the form of Fresnel Integral (FRI). FRI can be written in terms of FrFT. Radiated fields from the aperture can be computed by employing the fast and accurate computation methods of the FrFT. In this thesis, numerical computation methods of the FrFT are studied and their relation to continuous FrFT is given. FrFT computation methods can be grouped into two categories as fast FrFT (fFrFT) and discrete FrFT (dFrFT). In fFrFT, computation of the convolution operator in the FrFT is evaluated by the Fast Fourier Transform (FFT). In dFrFT method, signal vector to be transformed is multiplied by the fractional power of the Discrete Fourier Transform (DFT) matrix. fFrFT and dFrFT methods assume constant sampling intervals for the signals in their inputs and outputs. If the sampling intervals of the signals are chosen as the assumed intervals, the output samples match the samples of the continuous

FrFT. However, if the sampling intervals are not equal to the assumed intervals, angle and phase corrections have to be made in order to get the continuous FrFT samples at the output. In this study, angle and phase corrections needed for the fFrFT method are derived. The performances of the fFrFT and dFrFT methods are compared over their similarities to the continuous FrFT samples. The samples of the continuous FrFT are obtained by the adaptive Gauss-Kronrod (GK) numerical integral computation method. It is observed that the performance of these two methods in the computation of the continuous FrFT samples are close to each other.

In the scope of this thesis, for the first time in the literature, fFrFT method is applied to the evaluation of FRI, by employing the angle and phase corrections. The performance of the FrFT methods in evaluation of the diffraction integrals are compared with their difference to the Rayleigh-Sommerfeld Integral (RSI), which is valid in a broader region than the FRI. RSI, is computed with the GK method. It is observed that the diffraction patterns of fFrFT and dFrFT are similar and they are close to the values of the GK method in the Fresnel region. Through the outside of the Fresnel region, it is observed that the methods compute different values than that of the GK method. The computation speeds of the methods are compared by employing the computation times of the diffraction patterns. It is observed that fFrFT method is ten times faster than the dFrFT method; and a thousand times faster than the GK method. In the scope of this thesis, with the derived angle and phase corrections for the fFrFT, a fast and accurate method for evaluation of FRI for different sampling intervals is developed.

In electromagnetics, radiation integrals have to be solved in order to obtain the fields radiated from a current source. In this study, electric field vector components radiated from a current source, under Fresnel approximation, are given in terms of the FrFT. The electromagnetic fields are given in terms of vector potentials, and derivatives with respect to observation coordinates are evaluated. The obtained integral forms are written in terms of FrFT. Employing the



numerical FrFT methods, fast and efficient computation of the electromagnetic field vector components are performed. In the scope of this thesis, first time in the literature, the computation of the electromagnetic fields radiated from a current source in the vector form is performed by employing the FrFT.

In this thesis, the developed method is applied to the computation of radiated fields for the dipole, cross-dipole and aperture antennas. It is observed that, employing the developed method in the Fresnel region, vector components of the radiated electromagnetic fields from the current source can be obtained rapidly and efficiently.

**Keywords:** Fractional Fourier Transform, Maxwell's Equations, Radiation, Diffraction.

## TEŞEKKÜR

Akademik hayatım boyunca hiç bitmeyen enerjisiyle her zaman yanımda olan, her türlü destek ve katkıyı sunan değerli danışmanım Prof. Dr. Feza Arıkan'a saygıyla teşekkürlerimi sunarım. Tez konumun fikir sahibi değerli hocam Prof. Dr. Orhan Arıkan'a katkıları ve yardımlarından dolayı teşekkür ederim. Tez komitesine vermiş oldukları değerli katkılardan dolayı teşekkür ediyorum.

Bütün araştırma görevlisi arkadaşlarıma, bu zorlu ve uzun tez sürecini daha keyifli ve eğlenceli hale getirdikleri için teşekkür ederim. Bütün bölüm personeline göstermiş oldukları her türlü yardım ve sunmuş oldukları gülyüzlü ortam için teşekkür etmek istiyorum.

Hiçbir fedakarlıktan kaçınmayarak her zaman desteklerini, sevgi ve sıcaklıklarını hissettiren anneme, babama ve ablama sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

# İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET .....	i
ABSTRACT .....	iv
TEŞEKKÜR .....	vii
İÇİNDEKİLER .....	viii
ŞEKİLLER .....	x
ÇİZELGELER .....	xiv
SİMGELER VE KISALTMALAR .....	xv
SÖZLÜK DİZİNİ .....	xvi
1. GİRİŞ .....	1
2. MAXWELL DENKLEMLERİ .....	9
3. KESİRLİ FOURIER DÖNÜŞÜMÜ .....	23
4. KESİRLİ FOURIER DÖNÜŞÜMÜNÜ AYRIK HESAPLAMA YÖNTEMLERİ .....	31
4.1. Hızlı Kesirli Fourier Dönüşümü (HKFD) .....	31
4.1.1. Sürekli KFD ile HKFD İlişkisi .....	35
4.2. Ayrık Kesirli Fourier Dönüşümü (AKFD) Yöntemleri .....	38
4.2.1. S yöntemi .....	40
4.2.2. Dikgen İzdüşüme Dayalı AKFD .....	43
4.2.3. AKFD yöntemleri ile bulunan AFD özvektörlerinin karşılaştırılması	47
4.2.4. Sürekli KFD ile AKFD arasındaki ilişki .....	47
4.3. KFD'yi Ayrık Hesaplama Yöntemlerinin Başarım Karşılaştırması .....	49
5. FRESNEL İNTEGRALI-KESİRLİ FOURIER DÖNÜŞÜMÜ İLİŞKİSİ ...	55
6. ZAMAN UZAMINDA SONLU FARKLAR YÖNTEMİ İLE IŞIMA DESENLERİ .....	86
7. KIRINIM DESENLERİNİN HESAPLANMASI İÇİN KULLANICI ARAYÜZÜ .....	94

8. YÜZEY AKIM KAYNAĞINDAN YAYILAN VEKTÖR ALANLARIN KFD İLE HESAPLANMASI .....	98
9. SONUÇ .....	112
KAYNAKLAR .....	114
EKLER .....	117
EK-1 .....	117
EK-2 .....	123
ÖZGEÇMİŞ .....	132

## ŞEKİLLER

	<u>Sayfa</u>
Şekil 3.1. Kare darbe sinyalinin sürekli KFD örnekleri . . . . .	25
Şekil 3.2. $a$ kesirli Fourier uzamı ve gürültü süzme [1]. . . . .	27
Şekil 3.3. HG işlevleri . . . . .	28
Şekil 4.1. Zaman-frekans koordinat dönüşümü. . . . .	32
Şekil 4.2. Chirp çarpımı ile frekans uzamının genişlemesi. . . . .	33
Şekil 4.3. HG işlevleri ile AFD özvektörleri arasındaki farkın normu. . . . .	48
Şekil 4.4. Kare darbe sinyalinin $\alpha = 0.05$ için ayırık KFD'leri . . . . .	50
Şekil 4.5. Kare darbe sinyalinin $\alpha = 0.2$ için ayırık KFD'leri . . . . .	51
Şekil 4.6. Kare darbe sinyalinin $\alpha = 0.4$ için ayırık KFD'leri . . . . .	51
Şekil 4.7. Kare darbe sinyalinin $\alpha = \pi/4$ için ayırık KFD'leri . . . . .	52
Şekil 4.8. Açık ve faz düzeltmesinin KFD örneklerine etkisi . . . . .	53
Şekil 5.1. Açıklık anten geometrisi ve Fresnel bölgesi . . . . .	56
Şekil 5.2. KFD açısının, gözlem düzleminin açıklığa uzaklığı ile değişimi. . . . .	60
Şekil 5.3. Kaynak dağılımları, $U_0(x', 0)$ . a) Kare, b) Doğrusal-fazlı kare, c) Gauss, d) Gauss-chirp, e) HG dağılımı. . . . .	66
Şekil 5.4. Kare kaynak dağılımı için, $FRI_{GK}$ , $FNI_{GK}$ , $FRI_{HKFD}$ , $FRI_{AKFD}$ kırınım desenlerinin $e_{rms}$ hatalarının gözlem uzaklığı ile değişimi. . . . .	68
Şekil 5.5. Doğrusal fazlı kaynak dağılımı için, $FRI_{GK}$ , $FNI_{GK}$ , $FRI_{HKFD}$ , $FRI_{AKFD}$ kırınım desenlerinin $e_{rms}$ hatalarının gözlem uzaklığı ile değişimi. . . . .	69
Şekil 5.6. Gauss kaynak dağılımı için, $FRI_{GK}$ , $FNI_{GK}$ , $FRI_{HKFD}$ , $FRI_{AKFD}$ kırınım desenlerinin $e_{rms}$ hatalarının gözlem uzaklığı ile değişimi. . . . .	70
Şekil 5.7. Gauss-chirp kaynak dağılımı için, $FRI_{GK}$ , $FNI_{GK}$ , $FRI_{HKFD}$ , $FRI_{AKFD}$ kırınım desenlerinin $e_{rms}$ hatalarının gözlem uzaklığı ile değişimi. . . . .	71

Şekil 5.8. HG kaynak dağılımı için, $FRI_{GK}$ , $FNI_{GK}$ , $FRI_{HKFD}$ , $FRI_{AKFD}$ kırınım desenlerinin $e_{rms}$ hatalarının gözlem uzaklığı ile değişimi.....	72
Şekil 5.9. Kare kaynak dağılımı için, $FRI_{GK}$ , $FNI_{GK}$ , $FRI_{HKFD}$ , $FRI_{AKFD}$ kırınım desenlerinin $e_{norm}$ hatalarının gözlem uzaklığı ile değişimi.....	73
Şekil 5.10. Doğrusal fazlı kaynak dağılımı için, $FRI_{GK}$ , $FNI_{GK}$ , $FRI_{HKFD}$ , $FRI_{AKFD}$ kırınım desenlerinin $e_{norm}$ hatalarının gözlem uzaklığı ile değişimi.....	74
Şekil 5.11. Gauss kaynak dağılımı için, $FRI_{GK}$ , $FNI_{GK}$ , $FRI_{HKFD}$ , $FRI_{AKFD}$ kırınım desenlerinin $e_{norm}$ hatalarının gözlem uzaklığı ile değişimi.....	75
Şekil 5.12. Gauss-chirp kaynak dağılımı için, $FRI_{GK}$ , $FNI_{GK}$ , $FRI_{HKFD}$ , $FRI_{AKFD}$ kırınım desenlerinin $e_{norm}$ hatalarının gözlem uzaklığı ile değişimi.....	76
Şekil 5.13. HG kaynak dağılımı için, $FRI_{GK}$ , $FNI_{GK}$ , $FRI_{HKFD}$ , $FRI_{AKFD}$ kırınım desenlerinin $e_{norm}$ hatalarının gözlem uzaklığı ile değişimi.....	77
Şekil 5.14. Kare kaynak dağılımı için, $FRI_{GK}$ , $FNI_{GK}$ , $FRI_{HKFD}$ , $FRI_{AKFD}$ kırınım desenlerinin $e_{SKL}$ hatalarının gözlem uzaklığı ile değişimi.....	78
Şekil 5.15. Doğrusal fazlı kaynak dağılımı için, $FRI_{GK}$ , $FNI_{GK}$ , $FRI_{HKFD}$ , $FRI_{AKFD}$ kırınım desenlerinin $e_{SKL}$ hatalarının gözlem uzaklığı ile değişimi.....	79
Şekil 5.16. Gauss kaynak dağılımı için, $FRI_{GK}$ , $FNI_{GK}$ , $FRI_{HKFD}$ , $FRI_{AKFD}$ kırınım desenlerinin $e_{SKL}$ hatalarının gözlem uzaklığı ile değişimi.....	80
Şekil 5.17. Gauss-chirp kaynak dağılımı için, $FRI_{GK}$ , $FNI_{GK}$ , $FRI_{HKFD}$ , $FRI_{AKFD}$ kırınım desenlerinin $e_{SKL}$ hatalarının gözlem uzaklığı ile değişimi.....	81
Şekil 5.18. HG kaynak dağılımı için, $FRI_{GK}$ , $FNI_{GK}$ , $FRI_{HKFD}$ , $FRI_{AKFD}$ kırınım desenlerinin $e_{SKL}$ hatalarının gözlem uzaklığı ile değişimi.....	82

Şekil 5.19. Kare kaynak dağılımı kırınım desenleri, $2L = 2\lambda$ . . . . .	83
Şekil 5.20. Kare kaynak dağılımı kırınım desenleri, $2L = 20\lambda$ . . . . .	83
Şekil 5.21. Gauss kaynak dağılımı kırınım desenleri, $2L = 2\lambda$ . . . . .	84
Şekil 5.22. Gauss kaynak dağılımı kırınım desenleri, $2L = 20\lambda$ . . . . .	84
Şekil 5.23. HKFD, AKFD, GK hesaplama süreleri. . . . .	85
Şekil 6.1. İki boyutlu ZUSF uzayı ve alanların yerleşimi. . . . .	87
Şekil 6.2. İki boyutlu TUT açık sınır koşulu için geometri. . . . .	88
Şekil 6.3. $d = 0.25r_{ff}$ için $ZUSF$ , $RS_{GK}$ , $FRI_{HKFD}$ kırınım desenleri. . . . .	90
Şekil 6.4. $d = 0.50r_{ff}$ için $ZUSF$ , $RS_{GK}$ , $FRI_{HKFD}$ kırınım desenleri. . . . .	91
Şekil 6.5. $d = 0.75r_{ff}$ için $ZUSF$ , $RS_{GK}$ , $FRI_{HKFD}$ kırınım desenleri. . . . .	91
Şekil 6.6. $d = r_{ff}$ için $ZUSF$ , $RS_{GK}$ , $FRI_{HKFD}$ kırınım desenleri. . . . .	92
Şekil 7.1. Kırınım desenleri için kullanıcı arayüzü. . . . .	95
Şekil 7.2. Kırınım desenleri için kullanıcı arayüzü, $FRI_{HKFD}$ ve $FNI_{GK}$ kırınım desenleri. . . . .	96
Şekil 7.3. Kırınım desenleri için kullanıcı arayüzü, $FRI_{HKFD}$ ve $RS_{GK}$ kırınım desenleri. . . . .	96
Şekil 7.4. Kırınım desenleri için kullanıcı arayüzü, $FRI_{HKFD}$ ve $FRI_{GK}$ kırınım desenleri. . . . .	97
Şekil 8.1. Boyu $2L = \lambda$ olan $x$ -ekseninde dipol, $z = 5\lambda$ için a) $E_x$ bileşeni. . . . .	102
Şekil 8.2. Boyu $2L = \lambda$ olan $x$ -ekseninde dipol, $z = 5\lambda$ için $E_z$ bileşeni. . . . .	103
Şekil 8.3. Boyu $2L = \lambda$ olan $x$ -ekseninde dipol, $z = 10\lambda$ için $E_x$ bileşeni. . . . .	103
Şekil 8.4. Boyu $2L = \lambda$ olan $x$ -ekseninde dipol, $z = 10\lambda$ için $E_z$ bileşeni. . . . .	104
Şekil 8.5. Boyu $2L = \lambda$ olan $x$ -ekseninde dipol, $z = 100\lambda$ için a) $E_x$ bileşeni. . . . .	104
Şekil 8.6. Boyu $2L = \lambda$ olan $x$ -ekseninde dipol, $z = 100\lambda$ için $E_z$ bileşeni. . . . .	105
Şekil 8.7. Çapraz dipol antenler: $2L = \lambda$ , faz farkı $90^\circ$ , $z = 5\lambda$ , a) $E_x$ , b) $E_y$ , c) $E_z$ bileşenleri. . . . .	106
Şekil 8.8. Çapraz dipol antenler: $2L = \lambda$ , faz farkı $90^\circ$ , $z = 10\lambda$ , a) $E_x$ , b) $E_y$ , c) $E_z$ bileşenleri. . . . .	107

Şekil 8.9. Çapraz dipol antenler: $2L = \lambda$ , faz farkı $90^\circ$ , $z = 100\lambda$ , a) $E_x$ , b) $E_y$ , c) $E_z$ bileşenleri. ....	108
Şekil 8.10. $L_x = 9\lambda$ , $L_y = 6\lambda$ açıklık için, $J_x = 1$ , $J_y = 0$ , $z = r_{ff}$ uzaklığında $E_x$ alanı a) $E_x(x, y)$ , b) $E_x(x, 0)$ , c) $E_x(0, y)$ . Düz çizgi GK yöntemi, kesikli çizgi $FRI_{HKFD}$ yöntemidir. ....	109
Şekil 8.11. $L_x = 9\lambda$ , $L_y = 6\lambda$ açıklık için, $J_x = 1$ , $J_y = 0$ , $z = r_{ff}$ uzaklığında $H_y$ alanı a) $H_y(x, y)$ , b) $H_y(x, 0)$ , c) $H_y(0, y)$ . Düz çizgi GK yöntemi, kesikli çizgi $FRI_{HKFD}$ yöntemidir. ....	110
EK1.1. Doğrusal fazlı kare kaynak dağılımı kırınım desenleri, $2L = 2\lambda$ .	117
EK1.2. Doğrusal fazlı kare kaynak dağılımı kırınım desenleri, $2L = 20\lambda$ . ....	118
EK1.3. Gauss-chirp kaynak dağılımı kırınım desenleri, $2L = 2\lambda$ . ....	119
EK1.4. Gauss-chirp kaynak dağılımı kırınım desenleri, $2L = 20\lambda$ . ....	120
EK1.5. HG dağılımı kırınım desenleri, $2L = 2\lambda$ . ....	121
EK1.6. HG kaynak dağılımı kırınım desenleri, $2L = 20\lambda$ . ....	122



## ÇİZELGELER

	<u>Sayfa</u>
Çizelge 4.1. AFD matrisinin özdeğerlerinin tekrar sayıları. ....	39
Çizelge 4.2. Bağlı hata $e_r$ değerleri. ....	52
Çizelge 4.3. Açık ve faz düzeltmesi sonrası bağlı hata $e_r$ değerleri. ....	53
Çizelge 6.1. Açıklık boyu $2L = 5\lambda$ için Fresnel bölgesinde $FRI_{HKFD}$ ve ZUSF yöntemlerinin, $RS_{GK}$ 'ya göre hata değerleri. ....	92
Çizelge 8.1. Dipol anten boyu $\lambda$ için Fresnel bölgesinde $FRI_{HKFD}$ 'nin GK'ya göre $e_{SKL}$ hata değerleri. ....	105

## SİMGELER VE KISALTMALAR

FD	Fourier Dönüşümü
AFD	Ayrık Fourier Dönüşümü
HFD	Hızlı Fourier Dönüşümü
KFD	Kesirli Fourier Dönüşümü
AKFD	Ayrık Kesirli Fourier Dönüşümü
HKFD	Hızlı Kesirli Fourier Dönüşümü
RSİ	Rayleigh-Sommerfeld İntegrali
FRI	Fresnel İntegrali
FNI	Fraunhofer İntegrali
GK	Uyarlanırs Gauss-Kronrod sayısal integral hesaplama yöntemi
$\lambda$	Dalgaboyu
$\beta$	Dalga sayısı
$\mathcal{F}$	Fourier Dönüşümü işleci
$\mathcal{F}_a$	Kesirli Fourier Dönüşümü işleci
$\#(N, k)$	$N$ boyutlu AFD matrisinin $k$ indisli özdeğerinin tekrar sayısı
$\epsilon$	Elektrik geçirgenlik
$\mu$	Manyetik geçirgenlik
$\epsilon_0$	Boşuzayın elektrik geçirgenliği
$\mu_0$	Boşuzayın manyetik geçirgenliği
$\psi_n(\cdot)$	$n$ . dereceden Hermite-Gauss fonksiyonu
$h_n(\cdot)$	$n$ . dereceden Hermite polinomu

## SÖZLÜK DİZİNİ

Birbiçimli	: Uniform
Birim Matris	: Unitary Matrix
Birimcil	: Unitary
Birimdik	: Orthonormal
Dalga cephesi	: Wavefront
Dalga sayısı	: Wavenumber
Dalgaboyu	: Wavelength
Dikgen	: Orthogonal
Durağan hal	: Steady-state
Enbüyük	: Maximum
Enbüyültme	: Maximization
Eniyi	: Optimum
Eniyileştirme	: Optimization
Enküçük	: Minimum
Enküçültme	: Minimization
Eşyönlü	: Isotropic
Evrişim	: Convolution
Hüzme Biçimlendirme	: Beamforming
Intrinsic impedance	: Öz empedans
Kerte	: Rank
Öz-ayrışım	: Eigendecomposition
Özdeğer	: Eigenvalue
Özişlev	: Eigenfunction
Özvektör	: Eigenvector
Özyineleme	: Recursion
Sıfır Uzayı	: Null Space
Tekdüze	: Monotonic
Tekil Değer Ayırıştırması	: Singular Value Decomposition

Tekil Olmayan	: Nonsingular
Üçlü köşegen matris	: Tri-diagonal matrix
Üstel	: Exponential
Yinelemeli	: Iterative

# 1. GİRİŞ

Fourier Dönüşümü (FD) bilimin birçok alanında kendisine yer edinmiş, doğa ve evren yasalarının, fiziksel olayların anlaşılmasında ve teorilerin geliştirilmesinde büyük katkılar sağlamıştır. Kesirli Fourier Dönüşümü (KFD), klasik Fourier Dönüşümünün (FD) genel halidir. KFD, FD'nin kullanıldığı bir çok alanda kullanılmakta ve hesaplama karmaşıklığı, FD'ninkine yakın olduğu için, başarımın artmasına hesaplama yükünü arttırmadan imkan verebilmektedir [1]. KFD'nin bazı uygulama örnekleri olarak sinyal ve görüntü işleme [2], Zaman-Frekans (ZF) analizi [3], optik [4], hüzme şekillendirme [5], iletişim sistemleri [6] ve diferansiyel denklemlerin çözümü [7] verilebilir.

Zaman-Frekans (ZF) gösterimi, bir sinyalin enerjisinin zaman ve frekans uzamlarında nasıl değiştiğini gösteren iki boyulu bir gösterimdir [1, 8]. Sinyalin enerjisinin frekanstaki dağılımını zamana göre verir. KFD, sinyali ZF düzleminde saat yönünde döndürür; zaman ve frekans uzamlarını kesirli uzamlara, her uzam için bir kesir değeri tanımlayarak genelleştirir.

KFD, ilk olarak Namias tarafından geliştirilmiş ve Schrödinger diferansiyel denkleminin çözümünde kullanılmıştır [7]. KFD bazı biçimlerdeki diferansiyel denklemlere uygulandığı zaman en yüksek dereceden türev içeren terimin önündeki katsayı KFD'nin derecesine bağlı olarak ifade edilebilmekte ve bu KFD derecesinin belirli bir değeri için sıfır değerini almaktadır. Elde edilen diferansiyel denklemin derecesi KFD bölgesinde bir derece azaldığı için diferansiyel denklemin analitik çözümü bu bölgede daha kolay elde edilebilmektedir [7]. Elde edilen çözümün ters KFD'si alınarak zaman bölgesindeki çözüme ulaşılabilmektedir.

Bir çok uygulamada incelenmek istenen sinyalin sadece bir sistem ve/veya gürültü tarafından bozulmuş hali gözlenebilmektedir. Bozucu sistemin ve gürültünün etkisinin giderilebilmesi için gözlem sinyalinden istenen sinyal kestirilmelidir. İstenen sinyal ile kestirim arasındaki Ortalama Karesel Hatayı (OKH)

en küçülterek, gözlem sinyalindeki bozulmaları ve gürültüyü en aza indirecek doğrusal bir kestirim işleci düşünülebilir. İstenen sinyalin ve gürültünün durağan olduğu ve sistemin zamanda değişmez olduğu durumlarda en iyi kestirim işleci Wiener süzgece karşılık gelmektedir [2]. Bu işleç zamanda değişmez bir işleçtir ve klasik Fourier bölgesinde çarpma işlemi ile gerçekleştirilebilir. Ancak zamanla değişen bir sistem veya durağan olmayan sinyal ve gürültü süreçleri için OKH'yı en aza indirecek olan kestirim işleci Wiener süzgeçten farklı olacak ve klasik Fourier bölgesinde çarpma işlemi ile gerçekleştirilemeyecektir. Bu problemin çözümünde KFD kullanılarak  $a$  kesirli Fourier bölgesinde süzgeç uygulanmış ve klasik Fourier uzamında elde edilen kestirim hatalarından daha az kestirim hataları elde edilmiştir [2]. Bu sayede, gürültünün 'chirp' tabanlı olduğu durumlarda, klasik Fourier bölgesinde yapılan süzme işlemi ile elde edilen OKH'den daha az OKH değerlerine ulaşılabilmektedir [2].

KFD ses ve görüntü işlemede gürültü süzmede kullanılmaktadır [1]. Zamanda veya frekans uzamında gürültü süzmenin mümkün olmadığı durumlarda,  $a$  kesirli Fourier uzamında gürültü süzme mümkün olabilmekte ve ters KFD uygulanarak istenen sinyal geri kazanılabilmektedir. KFD'nin hesaplanmasındaki işlem yükü, klasik Fourier dönüşümünün hesaplanmasındaki işlem yüküne yakın olduğundan, elde edilen kestirim hatasındaki azalma, ek bir hesaplama yükü getirilmeden elde edilebilmektedir.

KFD hüzme biçimlendirme problemlerinde de kullanılmaktadır. [5]'de hüzme biçimlendiricinin çıkışı ile istenen sinyal arasındaki OKH'yı en küçülten hüzme biçimlendirici ağırlıkları KFD'nin farklı  $a \in [-1, 1]$  değerleri için hesaplanmış ve en az OKH'yı veren ağırlıklar seçilmiştir. Bu sayede en küçük OKH uzayda hüzme biçimlendirme ( $a = 0$ ) veya en küçük OKH frekansta hüzme biçimlendirme ( $a = 1$ ) yöntemleri ile elde edilebilen OKH'den daha az OKH değerlerine ulaşılmıştır. Yöntem duran, sabit hızla ve ivmeli hızla hareket eden kaynaklar için uygulanmıştır. Toplanır Gauss gürültü varsayımı altında doğrusal olarak yerleştirilmiş beş alıcıdan alınan anlık ölçümler kullanılmıştır. Kaynaklar alıcı

dizisinin uzak alanında bulunmakta ve kendi referans koordinat sistemlerinde sinüs biçiminde elektromanyetik dalga yaymaktadırlar. Bu varsayımlar altında elde edilen en az OKH hem duran hem de hareket eden kaynaklar için  $a$ 'nın 0 veya 1'den farklı olduğu durumlarda elde edilmiştir. Bu yöntem ile ivmeli hareket eden kaynak için, uzay veya frekansta hüzme biçimlendirme yöntemlerine göre %60 daha az OKH elde edilmiştir [5].

KFD'nin optik alanında bir çok uygulaması bulunmaktadır. Işığın genliğinin optik bir sistemin girişindeki ve çıkışındaki dağılımları arasındaki ilişki KFD ile gösterilebilmekte ve bu sayede KFD, optik sistemler ile gerçekleştirilebilmektedir. KFD'nin sinyal işleme uygulamaları, optik sinyal işleme alanında da kullanılabilir [9].

Açıklık antenin uzak alan deseni, Fraunhofer yaklaştırması ile açıklık anten üzerindeki dağılımın FD'si olarak yazılabilir [10]. Fresnel yayılma integrali KFD cinsinden ifade edilebilir [1, 9, 11]. Yakın alanın başlangıcından uzak alanı içeren bölge boyunca ve kaynağa dik olan eksene yakın bölgelerde (Fresnel bölgesi) yayılan alanlar KFD cinsinden yazılabilir.

Dereceli indisli ortamların KFD ile doğal bir ilişkileri vardır. Işık böyle bir ortamda ilerlerken, genliğinin dağılımına, derecesi uzaklıkla sürekli artan KFD işleci uygulanmaktadır. Dereceli indisli ortamlar, KFD işlecini doğal olarak gerçekleştirmektedirler [1].

Maxwell Denklemleri, uzayın herhangi bir noktasında ve anında elektrik ve manyetik alanlar ile bu alanlara neden olan kaynaklar arasındaki ilişkileri verir. Bir akım kaynağından yayılan elektromanyetik alanlar, Maxwell Denklemlerinin çözümü ile elde edilir [12, 13]. Elektromanyetik yöntemler genel olarak analitik ve sayısal olarak sınıflandırılabilir. Analitik yöntemler, problemin tam çözümünü ifade edebilmekte ancak pratikte sadece belli geometrik yapılarda tam çözüm elde edilebilmektedir.

Bilgisayarların hız ve belleklerinin gelişmesi ile birlikte elektromanyetik prob-

lemlerin çözümünde sayısal yöntemler sıkça kullanılmaya başlanmıştır [14,15]. Sayısal Elektromanyetik yöntemleri genel olarak Zaman Uzamı (ZU) ve Frekans Uzamı (FU) tabanlı yöntemler olarak sınıflandırılabilir. ZU tabanlı yöntemler geçici tepkilerin ve geniş bantlı problemlerin incelenmesinde kullanışlı olurken, FU tabanlı yöntemler durağan hal tepkilerin ve dar bantlı problemlerin incelenmesinde en iyi çözümü vermektedir [15]. Bu çalışmada sunulan tez kapsamında, uzayda ve/veya zamanda KFD kullanılarak, hem ZB tabanlı hem de FB tabanlı yaklaşımların avantajlarını ön plana çıkarabilecek bir sayısal elektromanyetik yöntemin geliştirilebileceği düşünülmüştür.

Işınım, yayılım ve saçılım problemlerinde haberleşme ve radar uygulamalarında kullanılan pek çok geniş bantlı ve uzun süreli sinyaller için ZU ve FU yaklaşımları yeterli olmamaktadır. Her iki yaklaşımın avantajlarını öne çıkaracak yöntemler geliştirilebileceği; bu durum için Maxwell Denklemlerinin, frekans uzamı veya zaman uzamı yerine, Kesirli Fourier uzamında çözülebileceği ve her iki yaklaşımın da avantajlarının korunabileceği; Örneğin 'chirp' darbe sinyallerinin kullanıldığı radar problemleri için, zaman-frekans gösteriminde, sinyalin dayanağının belli bölgelerde yoğunlaştığı durumlarda, kesirli Fourier bölgesinde uygulanacak çözüm tekniklerinin fayda sağlayabileceği öngörülmüştür. Sayın et al. [16] çalışmasında, KFD, zaman uzamında Maxwell Denklemlerine uygulanarak kesirli uzamda Maxwell Denklemlerinin diferansiyel biçimleri elde edilmiştir. Kesirli uzamdaki diferansiyel denklemler, Sonlu Farklar yöntemi ile fark denklemleri biçimine dönüştürülmüştür. Bu çalışma EK-2'de verilmiştir. Kesirli uzamda denklemlerin yinelemeli çözülmesi için gereken başlangıç değerleri, kararlılık koşullarının belirlenmesinde fayda sağlayabileceği düşünülerek KFD'nin optik ve kırınım teorisindeki uygulamaları incelenmiştir.

Maxwell Denklemlerinin çözülmesi ile alanlar vektör biçiminde elde edilir. Optikte kullanılan frekanslarda ışığın dalgaboyu küçük olduğu için ışığın vektör özelliği ihmal edilebilir [17]. Bu durumda skalar alanın çözülmesi yeterli olur. Kırınım teorisinde karşılaşılan yayılma integralleri analitik olarak zordur ve doğ-



rudan sayısal çözümler yoğun hesaplama karmaşıklığı gerektirir [10, 12]. Bu yüzden hızlı sayısal yöntemlerle uyumlu sade integral biçimleri elde etmek için matematiksel yaklaşımlar kullanılır. Bir açıklıktan yayılan skalar alan Rayleigh-Sommerfeld İntegrali (RSİ) ile ifade edilir. RSİ'nin analitik ve sayısal hesaplanması zor olduğu için Fresnel yaklaşımı uygulanabilir. Fresnel yaklaşımı yayılma integralleri için sade bir biçim sağlamaktadır ve optik, yakın alan anten analizi, Bilgisayarla-Hesaplanmış-Holografi (BHH) gibi birçok alanda kullanılır [1, 17, 18]. Fresnel yaklaşımı ile, açıklığa paralel bir düzlemdeki alan dağılımı, açıklık üzerindeki alan dağılımının Fresnel dönüşümü olur [1, 18]. Anten teorisinde bir açıklık antenden yayılan alanlar yakın ve uzak mesafelerde Fresnel yayılma integrali ile ifade edilir [12]. BHH'de bir cisimden saçılan ışık dağılımı, hologram oluşturabilmek için bir referans düzleminde hesaplanır. Yoğun hesaplama karmaşıklığını azaltmak için Fresnel yaklaşımı kullanılır. Böylece hafıza kaynaklarına duyulan ihtiyaç azalır ve hızlı hesaplama yöntemleri elde edilir [19]. Fresnel bölgesinde dalga yayılması birçok araştırma alanı için önemli bir konudur. Bu yüzden Fresnel yayılma integralinin hesaplanmasında hızlı, doğru ve verimli sayısal yöntemler önem kazanmaktadır.

Fresnel integrali KFD ile ifade edilebildiği için, KFD'nin hesaplanmasında kullanılan hızlı yöntemler kullanılarak Fresnel integrali verimli bir şekilde hesaplanabilmektedir. Bu tez kapsamında, ilk olarak, literatürde varolan sayısal KFD hesaplama yöntemleri incelenerek sürekli KFD ile olan ilişkileri verilmiştir. KFD hesaplama yöntemleri Hızlı FD (HFD) tabanlı ve Ayrık FD (AFD) tabanlı yöntemler olarak sınıflandırılabilir. HFD tabanlı yöntemlerde KFD işleci chirp çarpımı, chirp evrişimi alt işleçlerine bölünerek evrişim işleçlerinin hesaplanmasında HFD yöntemi kullanılır [20]. Bu yöntemler bu çalışmada Hızlı KFD (HKFD) yöntemleri olarak adlandırılmıştır. AFD tabanlı yöntemler ise sinyalin örneklerini içeren vektörün, AFD matrisinin kesirli kuvveti ile çarpılmasına dayanır [21, 22]. AFD matrisinin kesirli kuvvetinin hesaplanmasında AFD matrisinin özvektörleri bulunur, AFD matrisinin öz-ayrışımı elde edilir ve özdeğerleri içeren çapraz matrisin kesirli kuvveti alınır. Özvektörler, KFD işlecinin özfonksi-

yonları olan Hermite-Gauss işlevlerine benzemelidir. Bu çalışmada AFD tabanlı KFD hesaplama yöntemleri Ayrık KFD (AKFD) olarak adlandırılmıştır. HKFD ve AKFD yöntemleri giriş ve çıkışlarındaki örnekleme aralıklarının sabit olduğunu varsayar. Örnekleme aralıkları yöntemlerin varsaydığı şekilde seçildiğinde çıkış örnekleri sürekli KFD örneklerini verir. Ancak, örnekleme aralıkları farklı seçildiğinde sürekli KFD örneklerine ulaşmak için açı ve faz düzeltmeleri uygulanmalıdır.

KFD'nin genel hali olan Doğrusal Kanonik Dönüşüm (DKD) için sabit örnekleme varsayan DKD hesaplama yöntemlerinin sürekli DKD ile olan ilişkisi [23]'de verilmiştir. Bu çalışmada girişinde ve çıkışında sabit örnekleme varsayan HKFD yönteminin sürekli KFD ile olan ilişkisi ve farklı örnekleme aralıklarında uygulanması gereken açı ve faz düzeltmeleri çıkarılmıştır. Elde edilen açı ve faz düzeltmelerinin, [22]'de AKFD yöntemleri için verilen düzeltmelerle benzer olduğu, aradaki farkın iki yöntemin KFD tanımlarından kaynaklandığı gözlenmiştir. HKFD ve AKFD yöntemlerinin KFD örneklerini hesaplama başarımları, sürekli KFD'ye göre bağlı hataları üzerinden karşılaştırılmıştır. Sürekli KFD örnekleri uyarlanır Gauss-Kronrod (GK) sayısal integral hesaplama yöntemi ile elde edilmiştir [24]. Yöntemlerin benzer hata değerleri verdikleri gözlenmiştir. HKFD ve AKFD yöntemleri, Fresnel integralinin hesaplanarak bir açıklığın kırınım desenlerinin elde edilmesinde kullanılmıştır.

Literatürde, Fresnel integralinin KFD ile hesaplanması üzerine yapılan çalışmalarda kısıtlı sayıda durum ve parametre incelenmiştir [4, 11]. Bu tez kapsamında ikinci olarak, Fresnel integralinin hesaplanması, kullanılan KFD yöntemi, gözlem düzleminin uzaklığı, açıklık boyu, kaynak dağılımının etkileri üzerinden ayrıntılı olarak incelenmiştir. Yöntemlerin kırınım deseni hesaplamadaki doğrulukları ve hızları karşılaştırılmıştır.

KFD yöntemleri ile hesaplanan yayılma desenlerinin başarımları, RSİ'nin GK yöntemi ile hesaplanan kırınım desenleri ile karşılaştırılarak incelenmiştir. Yöntemlerin hızları, kırınım desenlerinin hesaplanma süreleri cinsinden elde edilip

karşılaştırılmıştır. Yapılan benzetimler, sonucunda, HKFD ve AKFD yöntemleri ile elde edilen kırınım desenlerinin birbirine çok benzediği ve Fresnel bölgesinde RSI'ye çok yakın olduğu, Fresnel bölgesinden uzaklaştıkça RSI'den farklı değerler vermeye başladığı gözlenmiştir. Yöntemlerin hızları karşılaştırıldığında, iki boyutlu uzayda, HKFD yönteminin AKFD yöntemine göre yaklaşık on kat; GK yöntemine göre yaklaşık bin kat daha hızlı olduğu görülmüştür. Bu tez kapsamında, HKFD yöntemine uygulanan açı ve faz düzeltmeleri ile, farklı örnekleme aralıklarında, Fresnel integralinin örneklerini hızlı ve güvenilir bir şekilde hesaplayan bir yöntem sunulmuştur. MATLAB ortamında bir kullanıcı arayüzü geliştirilmiş farklı kaynak dağılımı, açıklık boyu, gözlem uzaklığı seçimlerinin kırınım desenine olan etkisinin hızlı bir şekilde incelenmesine olanak sağlanmıştır.

Bu çalışma kapsamında, KFD'nin kırınım desenini ifade etme başarımı Zaman Uzamında Sonlu Farklar (ZUSF) yöntemi kullanılarak incelenmiştir. ZUSF yöntemi uzayı ızgaralara bölerek elektrik ve manyetik alan vektörlerini uzayda ve zamanda ayırık hale getirir [25–27]. Benzetim uzayının her noktasında alan bileşenlerini hesapladığı için kırınım deseni hesaplama karmaşıklığı KFD'nin hesaplama karmaşıklığına göre fazladır. Bu nedenle KFD ile kırınım deseni elde etme ZUSF ile elde etmeye göre çok daha hızlıdır. Sayin et al. [28]'da, dalgaboyu mertebesindeki açıklıklardan KFD ile elde edilen kırınım desenlerinin Zaman Uzamında Sonlu Farklar yöntemi ile karşılaştırılmıştır. Yakın alanda KFD'nin kırınım desenini ifade edebildiği gözlenmiştir. Bu çalışma EK-2'te sunulmuştur.

Elektromanyetik teorisinde bir akım yoğunluğundan yayılan alanların bulunmasında, skalar ve vektör potansiyellerinin kullanılması kolaylık sağlamaktadır [29]. Vektör potansiyeli, akım yoğunluğunun kaynak koordinatlarına göre integrali biçimindedir. Vektör potansiyelinin gözlem koordinatlarına göre türevleri alınarak elektromanyetik alanlar bulunmaktadır. Bu çalışmada, bir akım yoğunluğundan yayılan elektrik alan vektör bileşenleri Fresnel yaklaştırması altında

KFD ile ifade edilmiştir. Elektromanyetik alanlar vektör potansiyeli cinsinden ifade edilip, gözlem koordinatlarına göre olan türevler alındıktan sonra, elde edilen integraller Fresnel yaklaştırması altında KFD ile ifade edilmiştir. Sayısal hesaplama yöntemleri kullanılarak akım yoğunluğundan yayılan elektromanyetik alan vektörleri hızlı ve verimli bir şekilde elde edilmiştir. Bu tez kapsamında, literatürde ilk kez KFD kullanılarak bir akım kaynağından yayılan elektromanyetik alanların vektör biçiminde hesaplanması gerçekleştirilmiştir.

Bu tez kapsamında geliştirilen yöntem dipol, çapraz dipol ve açıklık antenlerden yayılan elektromanyetik alan vektörlerinin hesaplanmasında uygulanmıştır. Uzak alanda analitik çözüm, GK ve HKFD hesaplama yöntemleri ile dipol antenden yayılan alanlar hesaplanmış ve birbirine yakın ışın desenleri elde edilmiştir. Çapraz dipol ve açıklık antenlerden yayılan elektromanyetik alan vektörleri iki boyutlu düzlem üzerinde KFD hesaplama yöntemi ile elde edilmiştir. Geliştirilen yöntem kullanılarak, Fresnel bölgesinde akım kaynağından yayılan elektromanyetik alanların vektör bileşenleri hızlı ve verimli hesaplanabilmektedir.

Maxwell denklemlerinden başlayarak elektromanyetik ışınma, yayılma, saçılma olayları verilmiş, skalar kırınım integralleri Bölüm 2'de anlatılmıştır. Bölüm 3'te KFD'nin farklı iki tanımı ve aralarındaki ilişki verilmiş, Hermite-Gauss işlevleri ve özellikleri özetlenmiştir. Bölüm 4'te KFD'nin sayısal hesaplama yöntemleri anlatılmıştır. Bölüm 5'te iki boyutlu uzayda kırınım integralleri özetlenmiş, Fresnel integrali ile KFD ilişkisi verilerek sayısal KFD hesaplama yöntemleri ile Fresnel integrallerinin hesaplanması anlatılmıştır. Bölüm 6'da ZUSF yöntemi anlatılmış, ZUSF ve KFD ile elde edilen kırınım desenlerinin karşılaştırılması verilmiştir. Bölüm 7'de, kırınım desenlerinin incelenmesi için tasarlanan kullanıcı arayüzü sunulmuştur. Bölüm 8'de vektör elektromanyetik alanların, Fresnel yaklaştırması altında KFD ile hesaplanması verilmiştir. Sonuçlar Bölüm 9'de tartışılmıştır.

## 2. MAXWELL DENKLEMLERİ

Maxwell Denklemleri uzayın her noktasında ve her anda, elektrik ve manyetik alanlar ile kaynaklar arasındaki ilişkiyi verir. Bu bölümde, ilerideki bölümlere altyapı oluşturacak elektromanyetik teorisindeki bazı temel kavramlar sunulmuştur. Bu bölümdeki bilgilerin derlenmesinde [12, 13, 30] kaynaklarından faydalanılmıştır.

Maxwell Denklemlerinin zaman uzamındaki diferansiyel biçimleri Eş. 2.1-2.4 ile verilir.

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{J}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \vec{D}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}, t) = q_{ev}(\vec{r}, t) \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \quad (2.4)$$

Yukarıdaki eşitliklerde,  $\vec{r} = \hat{a}_x x + \hat{a}_y y + \hat{a}_z z$  konum vektörü,  $t$  zaman,  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  elektrik alan vektörü,  $\vec{H}(\vec{r}, t)$  manyetik alan vektörü,  $\vec{D}(\vec{r}, t)$  elektrik akı yoğunluk vektörü,  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  manyetik akı yoğunluk vektörüdür.  $\vec{J}(\vec{r}, t)$  akım yoğunluk vektörü,  $q_{ev}(\vec{r}, t)$  elektrik yük yoğunluğudur. Skalar çarpım işleci,  $\cdot$ , vektör çarpım işleci,  $(\times)$  ile gösterilir.  $(\nabla \cdot)$ , iraksama;  $(\nabla \times)$ , dönel işlecini gösterir.

Maxwell Denklemlerinin zaman uzamındaki integral biçimleri aşağıda verilmiştir.

$$\oint_C \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{s} \quad (2.5)$$

$$\oint_C \vec{H}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{s} + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{D}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{s} \quad (2.6)$$

$$\oint_S \vec{D}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{s} = \int_V q_{ev}(\vec{r}, t) dv = Q_e \quad (2.7)$$

$$\oint_S \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{s} = 0 \quad (2.8)$$

Eş. 2.5-2.6'da  $S$  açık yüzey;  $C$ ,  $S$  yüzeyini çevreleyen kapalı döngüdür. Eş. 2.5, kapalı  $C$  döngüsündeki elektrik alan çizgi integralinin, döngünün çevrelediği  $S$  yüzeyinden geçen manyetik akının zamanla artış hızının negatifi olduğunu ifade eder ve Faraday elektromanyetik indüklenme yasası ile ilişkilidir. Eş. 2.6, manyetik alanın, kapalı  $C$  döngüsündeki çizgi integralinin, döngünün çevrelediği  $S$  yüzeyinden geçen toplam akıma eşit olduğunu ifade eder ve Amper devre yasası olarak bilinir. Eş. 2.7-2.8'te  $S$ ,  $V$  hacmini kapsayan kapalı bir yüzeydir. Eş. 2.7'te  $Q_e$  toplam elektrik yüküdür. Eş. 2.7'te, bir  $V$  hacmi içindeki toplam elektrik yük, elektrik akı yoğunluğunun hacmi kapsayan kapalı  $S$  yüzeyindeki integraline eşittir ve bu eşitlik Gauss yasası olarak bilinir. Eş. 2.8'te, bir  $V$  hacminin yüzeyindeki dik manyetik akı yoğunluğunun  $S$  kapalı yüzeyindeki integrali sıfırdır. Bu durum manyetik yüklerin fiziksel olarak bulunmamasından kaynaklanır.

Fiziksel olarak gerçekte varolmayan eşdeğer akım yoğunluğu ve yüklerin tanımlanması açıklık antenler gibi bazı problemlerin incelenmesinde matematiksel kolaylık sağlamaktadır. Eşdeğer akım yoğunlukları açıklık anten yüzeyi üzerinde tanımlanabilir. Eşdeğer akım yoğunluklarının sonsuz bir uzayda ışıma yaptığı varsayılarak açıklık antenden yayılan elektromanyetik alanlar elde edilir. Maxwell Denklemlerinin eşdeğer yük ve akım yoğunluklarının tanımlandığı durumdaki biçimleri aşağıda verilmiştir.

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\vec{M}(\vec{r}, t) - \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (2.9)$$

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{J}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \vec{D}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (2.10)$$

$$\nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}, t) = q_{ev}(\vec{r}, t) \quad (2.11)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = q_{mv}(\vec{r}, t) \quad (2.12)$$

Eş. 2.9-2.12'da  $\vec{M}(\vec{r}, t)$  manyetik akım yoğunluk vektörü,  $q_{mv}$  manyetik yük yoğunluğu,  $Q_m$  toplam manyetik yüküdür. Eşdeğer akım yoğunluk vektörü ve manyetik yük yoğunluğunu içeren Maxwell Denklemlerinin integral biçimleri

aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$\oint_C \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l} = - \int_S \vec{M}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{s} - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{s} \quad (2.13)$$

$$\oint_C \vec{H}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{s} + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{D}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{s} \quad (2.14)$$

$$\int_S \vec{D}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{s} = \int_V q_{ev}(\vec{r}, t) dv = Q_e \quad (2.15)$$

$$\int_S \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{s} = \int_V q_{mv}(\vec{r}, t) dv = Q_m \quad (2.16)$$

Bu tez çalışmasında fazör tanımı için zaman bağımlılığı  $e^{j\omega t}$  biçiminde varsayılmıştır. Bu durumda Maxwell denklemlerinde zamana göre birinci dereceden türev  $j\omega$  ile çarpıma dönüşür ve diferansiyel denklemler daha kolay çözülebilir. Fazör gösteriminde zaman uzamı frekans uzamına dönüşmüştür ve alanların tek bir frekansta oldukları varsayılır. Fazör gösterimi sabit frekanstaki alanların genlik ve faz bilgisini içerir. Fazör gösteriminden zaman gösterimine dönüşüm elektrik alan vektörü için  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left[ \vec{E}(\vec{r}) e^{j\omega t} \right]$  biçimindedir. Maxwell denklemlerinin fazör biçimleri aşağıda verilmiştir.

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = -j\omega \vec{B}(\vec{r}) \quad (2.17)$$

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r}) = \vec{J}(\vec{r}) + j\omega \vec{D}(\vec{r}) \quad (2.18)$$

$$\nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}) = q_{ev}(\vec{r}) \quad (2.19)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0 \quad (2.20)$$

Maxwell denklemlerinin integral biçimlerinin fazör gösterimi aşağıda verilmiştir.

$$\oint_C \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = -j\omega \int_S \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{s} \quad (2.21)$$

$$\oint_C \vec{H}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} + j\omega \int_S \vec{D}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{s} \quad (2.22)$$

$$\int_S \vec{D}(\vec{r}) \cdot \vec{ds} = \int_V q_{ev}(\vec{r}) dv = Q_e \quad (2.23)$$

$$\int_S \vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{ds} = 0 \quad (2.24)$$

Maxwell denklemlerinin eşdeğer kaynakların tanımlandığı durumdaki fazör gösterimleri aşağıda verilmiştir.

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = -\vec{M}(\vec{r}) - j\omega\vec{B}(\vec{r}) \quad (2.25)$$

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r}) = \vec{J}(\vec{r}) + j\omega\vec{D}(\vec{r}) \quad (2.26)$$

$$\nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}) = q_{ev}(\vec{r}) \quad (2.27)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0 \quad (2.28)$$

Maxwell denklemlerinin eşdeğer kaynakların tanımlandığı durumda integral biçimlerinin fazör gösterimi aşağıda verilmiştir.

$$\oint_C \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{dl} = - \int_S \vec{M}(\vec{r}) \cdot \vec{ds} - j\omega \int_S \vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{ds} \quad (2.29)$$

$$\oint_C \vec{H}(\vec{r}) \cdot \vec{dl} = \int_S \vec{J}(\vec{r}) \cdot \vec{ds} + j\omega \int_S \vec{D}(\vec{r}) \cdot \vec{ds} \quad (2.30)$$

$$\int_S \vec{D}(\vec{r}) \cdot \vec{ds} = \int_V q_{ev}(\vec{r}) dv = Q_e \quad (2.31)$$

$$\int_S \vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{ds} = \int_V q_{mv}(\vec{r}) dv = Q_m \quad (2.32)$$

Malzeme ortamında bulunan yükler uygulanan elektromanyetik alan ile etkileşime girerek ortam içindeki alanın boş uzaydakine göre farklılaşmasını sağlar. Bu durumda uygulanan alanlar ile ortam içindeki alanlar arasındaki ilişkiler belirlenmelidir. Kayıpsız, doğrusal, eşyönlü, birbiçimli bir ortam için bu ilişkiler aşağıda verilmiştir.

$$\vec{D} = \epsilon\vec{E} \quad (2.33)$$



$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (2.34)$$

Yukarıdaki eşitliklerde  $\epsilon$  elektrik geçirgenlik,  $\mu$  manyetik geçirgenliktir. Boş uzay için  $\epsilon = \epsilon_0 \approx \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}$  F/m,  $\mu = \mu_0 \approx 4\pi 10^{-7}$  H/m değerlerini alır.

Maxwell denklemlerinde  $\vec{J}(\vec{r}, t)$  ile gösterilen akım yoğunluğu, kaynak akım yoğunluğunun yanında iletim ve yerdeğiştirme akım yoğunluklarından oluşur. İletim akım yoğunluğu  $\vec{J}_c = \sigma \vec{E}$  biçiminde, yerdeğiştirme akımı ise fazör gösteriminde  $\vec{J}_d = j\omega\epsilon \vec{E}$  biçimindedir. Burada  $\sigma$  maddenin iletkenliğidir. İyi iletkenler için  $\sigma \gg j\omega\epsilon$ , iyi dielektrikler için ise  $\sigma \ll j\omega\epsilon$  ilişkisi geçerlidir.

İki farklı ortam arasındaki arayüzde elektromanyetik alanlar sınır koşullarını sağlamalıdır. Sınır koşullarının eşdeğer kaynakların tanımlandığı durumdaki genel biçimleri aşağıda verilmiştir.

$$\hat{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = -\vec{M}_s \quad (2.35)$$

$$\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_s \quad (2.36)$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = q_{es} \quad (2.37)$$

$$\hat{n} \times (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = q_{ms} \quad (2.38)$$

Yukarıdaki eşitliklerde,  $\hat{n}$ , yönü birinci ortamdaki ikinci ortama doğru olan birim vektör;  $\vec{E}_1, \vec{H}_1, \vec{D}_1, \vec{B}_1$  birinci ortamdaki vektör alanları;  $\vec{E}_2, \vec{H}_2, \vec{D}_2, \vec{B}_2$  ikinci ortamdaki vektör alanları;  $\vec{M}_s$ , yüzey manyetik akım yoğunluğu;  $\vec{J}_s$ , yüzey elektrik akım yoğunluğu;  $q_{es}$ , yüzey elektrik yük yoğunluğu;  $q_{ms}$ , yüzey manyetik yük yoğunluğudur.

Elektromanyetikte karşılaşılan problemler genel olarak ışınım, yayılma ve saçılma olarak sınıflandırılabilir. Işınım, akım ve yük kaynaklarından elektromanyetik dalganın açığa çıkmasıdır. Yayılma, elektromanyetik dalganın uzayda belirli bir yönde ilerlemesidir. Saçılma, bir cisimle karşılaşılan elektromanyetik dalganın cisim üzerinde indüklediği akım yoğunluğunun saçılan elektromanyetik

dalgayı ışıması olayıdır.

Işıma problemlerinde bilinen akım ve yük kaynaklarından yayılan elektromanyetik alanlar bulunur. Alanlar, yük ve akım kaynaklarından doğrudan bulunabileceği gibi, diğer bir yöntem de önce skalar ve vektör potansiyellerinin bulunup daha sonra elektromanyetik alanların çözülmesidir. Bu durumda önce kaynak koordinatlarına göre integral hesaplanır, daha sonra da gözlem koordinatlarına göre türevler hesaplanarak alanlar bulunur. Eşdeğer manyetik yük yoğunluğunun varsayılmadığı durumda manyetik akı yoğunluk vektörü

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}, t) \quad (2.39)$$

biçiminde ifade edilebilir.  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  manyetik vektör potansiyelidir. Zaman uzamında manyetik vektör potansiyel ve skalar elektrik potansiyel cinsinden dalga denklemi

$$\nabla^2 \vec{A}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{r}, t) = -\mu \vec{J}(\vec{r}', t) + \nabla \left( \nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) + \mu \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \phi_e(\vec{r}, t) \right) \quad (2.40)$$

biçimindedir. Burada  $c = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$  dalganın ortamdaki faz hızı,  $\phi_e(\vec{r}, t)$ , skalar elektrik potansiyeldir. Lorentz koşulu ile

$$\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) = -\mu \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \phi_e(\vec{r}, t) \quad (2.41)$$

seçilirse Eş. 2.40'ın sağ tarafındaki son terim sıfır olur ve dalga denklemi

$$\nabla^2 \vec{A}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{r}, t) = -\mu \vec{J}(\vec{r}', t) \quad (2.42)$$

biçimine sadeleşir. Zaman uzamında vektör potansiyelinin çözümü

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}', t - \frac{R}{c})}{R} dv' \quad (2.43)$$

olur.  $R = \|\vec{r} - \vec{r}'\|$ , kaynak noktası  $\vec{r}'$  ile gözlem noktası  $\vec{r}$  arasındaki uzaklıktır. Dalga denkleminin fazör biçimindeki gösterimi

$$\nabla^2 \vec{A}(\vec{r}) + \beta^2 \vec{A}(\vec{r}) = -\mu \vec{J}(\vec{r}') \quad (2.44)$$

biçimindedir. Yukarıdaki eşitlikte  $\beta = \omega\sqrt{\epsilon\mu} = \omega/c$  dalga sayısıdır. Vektör potansiyelinin fazör gösterimindeki çözümü

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') e^{-j\beta R}}{R} dv' \quad (2.45)$$

$$= \mu \int_V \vec{J}(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') dv' \quad (2.46)$$

olur. Eş. 2.46'de,  $G(\vec{r}, \vec{r}')$ , üç boyutlu boş uzay Green fonksiyonu,

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{e^{-j\beta R}}{4\pi R} \quad (2.47)$$

olarak tanımlıdır. Elektrik ve manyetik alanlar fazör uzamında manyetik vektör potansiyeli cinsinden,

$$\vec{E}_A(\vec{r}) = -j\omega \vec{A}(\vec{r}) + \frac{\nabla(\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}))}{j\omega\mu\epsilon} \quad (2.48)$$

$$\vec{H}_A(\vec{r}) = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A}(\vec{r}) \quad (2.49)$$

biçiminde ifade edilir. Elektromanyetik alanlar, Eş. 2.46 ve 2.47 ifadelerinin Eş. 2.48 ve 2.49'da yerine konulması ile,

$$\vec{E}_A(\vec{r}) = -j\omega\mu \int_V \vec{G}(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \vec{J}(\vec{r}') dv' \quad (2.50)$$

$$\vec{H}_A(\vec{r}) = \int_V \nabla G(\vec{r}, \vec{r}') \times \vec{J}(\vec{r}') dv' \quad (2.51)$$

verilir. Eş. 2.50 ifadesinde,

$$\bar{\bar{G}}(\vec{r}, \vec{r}') = \left[ \bar{\bar{I}} + \frac{\nabla\nabla}{\beta^2} \right] G(\vec{r}, \vec{r}') \quad (2.52)$$

dyadik Green fonksiyonudur.  $\bar{\bar{I}}$  birim dyad işlecidir ve uygulandığı vektörün kendisini verir.

Eş. 2.50-2.51 ifadelerindeki gözlem koordinatlarına göre türevler alınır, elektromanyetik alanlar elektrik akım yoğunluğu cinsinden,

$$\vec{E}_A(\vec{r}) = \frac{-j\eta}{4\pi\beta} \int_V \left\{ \frac{-1 - j\beta R + \beta^2 R^2}{R^5} \vec{J}(\vec{r}') + \frac{3 + j3\beta R - \beta^2 R^2}{R^5} \vec{R} (\vec{R} \cdot \vec{J}(\vec{r}')) \right\} e^{-j\beta R} dv' \quad (2.53)$$

$$\vec{H}_A(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \left( \vec{J}(\vec{r}') \times \vec{R} \right) \frac{(1 + j\beta R)}{R^3} e^{-j\beta R} dv' \quad (2.54)$$

biçiminde elde edilir. Eş. 2.53 ifadesinde,  $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$  ortamın öz empedansıdır.

Eşdeğer manyetik akım yoğunluğu  $\vec{M}(\vec{r}', t)$ 'den yayılan elektrik vektör potansiyelinin zaman ve fazör gösterimleri, sırasıyla, Eş. 2.55 ve 2.56 ile verilen denklemleri sağlar.

$$\nabla^2 \vec{F}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{F}(\vec{r}, t) = -\epsilon \vec{M}(\vec{r}', t) \quad (2.55)$$

$$\nabla^2 \vec{F}(\vec{r}) + \beta^2 \vec{F}(\vec{r}) = -\epsilon \vec{M}(\vec{r}') \quad (2.56)$$

Elektrik vektör potansiyelinin zaman ve fazör gösterimlerinin çözümleri, sırasıyla,

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = \frac{\epsilon}{4\pi} \int_V \vec{M} \left( \vec{r}', t - \frac{R}{c} \right) dv' \quad (2.57)$$

$$\vec{F}(\vec{r}) = \epsilon \int_V \vec{M}(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') dv' \quad (2.58)$$

biçiminde olur. Elektrik vektör potansiyelinden kaynaklanan elektrik ve manyetik alanların fazör biçimleri,

$$\vec{E}_F(\vec{r}) = \frac{-1}{\epsilon} \nabla \times \vec{F}(\vec{r}) \quad (2.59)$$

$$\vec{H}_F(\vec{r}) = -j\omega \vec{F}(\vec{r}) + \frac{\nabla (\nabla \cdot \vec{F}(\vec{r}))}{j\omega\mu\epsilon} \quad (2.60)$$

olarak verilir.

Elektrik vektör potansiyelinden kaynaklanan elektromanyetik alanlar, Eş. 2.59 ve 2.60 ifadelerinde, Eş. 2.58'in yerine konulup türevlerin alınması ile, eşdeğer manyetik akım yoğunluğu cinsinden

$$\vec{E}_F(\vec{r}) = \frac{-1}{4\pi} \int_V \left( \vec{M}(\vec{r}') \times \vec{R} \right) \frac{(1 + j\beta R)}{R^3} e^{-j\beta R} dv' \quad (2.61)$$

$$\vec{H}_F(\vec{r}) = \frac{-j}{4\pi\eta\beta} \int_V \left\{ \frac{-1 - j\beta R + \beta^2 R^2}{R^5} \vec{M}(\vec{r}') + \frac{3 + j3\beta R - \beta^2 R^2}{R^5} \vec{R} (\vec{R} \cdot \vec{M}(\vec{r}')) \right\} e^{-j\beta R} dv' \quad (2.62)$$

biçiminde verilir.

Kaynaklardan yayılan elektrik ve manyetik alanlar, elektrik akım yoğunluğu ve manyetik akım yoğunluğundan yayılan alanların toplamıdır.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_A(\vec{r}) + \vec{E}_F(\vec{r}) \quad (2.63)$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}_A(\vec{r}) + \vec{H}_F(\vec{r}) \quad (2.64)$$

Elektromanyetik yayılma problemlerinde, elektromanyetik dalganın uzayda iler-

lemesi incelenir. Bir kaynaktan ışıyan elektromanyetik dalga birbiçimli bir ortamda kaynaktan dışa doğru yayılır. Kaynağın dışında kalan bölgelerde yük ve akım yoğunlukları sıfır olur. Eş. 2.17-2.20 ile verilen fazör biçimindeki Maxwell Denklemleri,

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = -j\omega\vec{B}(\vec{r}) \quad (2.65)$$

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r}) = j\omega\vec{D}(\vec{r}) \quad (2.66)$$

$$\nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}) = 0 \quad (2.67)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0 \quad (2.68)$$

halini alır. Eş. 2.44 ile verilen dalga denklemi kaynağın bulunmadığı bölgelerde,

$$\nabla^2 \vec{A}(\vec{r}) + \beta^2 \vec{A}(\vec{r}) = 0 \quad (2.69)$$

şeklinde yazılabilir. Eş. 2.69 ile verilen dalga denkleminin çözümlerinden biri düzlem dalga,

$$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}_0 e^{-j\vec{\beta} \cdot \vec{r}} \quad (2.70)$$

biçimindedir. Eş. 2.70'da,  $\vec{\beta} = \hat{a}_x\beta_x + \hat{a}_y\beta_y + \hat{a}_z\beta_z$ , yayılma vektörü;  $\vec{r}$ , konum vektörüdür. Düzlem dalga yayılma vektörü yönünde ilerler. Sonsuz uzaklıkta bulunan bir kaynaktan ışıyan elektromanyetik dalga düzlem dalga biçiminde yayılır. Elektromanyetik dalga kaynaktan uzaklaştıkça yayılma yönüne dik olan düzlem üzerinde faz  $(\vec{\beta} \cdot \vec{r})$  sabit olur.

Saçılma problemlerinde gelen elektromanyetik dalganın bir cismin hacmi veya yüzeyinde indüklediği eşdeğer akım yoğunluğu bulunur. İndüklenen akım yoğunluğu bulunduğundan sonra saçılan alanlar ışınım integralleri hesaplanarak elde edilebilir. Mükemmel elektrik iletken bir cismin yüzeyinde, Eş. 2.35 ile verilen sınır koşulu uygulandığında, gelen elektrik alan,  $\vec{E}^i$ , ile saçılan elektrik alan,

$\vec{E}^s$ , toplamı sıfır olur.

$$\vec{E}^i + \vec{E}^s = 0 \quad (2.71)$$

Gelen elektromanyetik alan, iletken cismin yüzeyinde bir elektrik akım yoğunluğu,  $\vec{J}_s$ , indükler. İndüklenen elektrik akım saçılan alanların kaynağını oluşturur. Saçılan elektrik alan bu akım yoğunluğu cinsinden ifade edilip cismin yüzeyinde gelen elektrik alanın negatifi ile eşitlenerek elektrik alan integral denklemi,

$$\frac{1}{\omega\epsilon} \left[ \beta^2 \int_S \vec{J}_s(\vec{r}') G(\vec{r}_s, \vec{r}') ds' + \nabla \int_S \nabla' \cdot \vec{J}_s(\vec{r}') G(\vec{r}_s, \vec{r}') ds' \right]_t = \vec{E}_t^i(\vec{r} = \vec{r}_s) \quad (2.72)$$

elde edilir. Eş. 2.72 ile verilen integral denkleminde,  $\nabla$  gözlem koordinatlarına göre türevleri,  $\nabla'$  kaynak koordinatlarına göre türevleri içerir,  $\vec{r}_s$  cismin yüzeyindeki herhangi bir noktayı işaret eden vektördür.

Manyetik alan integral denklemi ise mükemmel iletken cismin yüzeyinde, Eş. 2.36 ile verilen sınır koşulunun uygulanması ile elde edilir. Gelen ve saçılan manyetik alanın cismin yüzeyinde toplamları yüzey akım yoğunluğuna eşit olur.

$$\vec{J}_s(\vec{r}') = \hat{n} \times [\vec{H}^i(\vec{r}') + \vec{H}^s(\vec{r}')] \quad (2.73)$$

Saçılan manyetik alan,  $\vec{H}^s(\vec{r})$ , cismin  $S$  yüzeyi üzerinde, Eş. 2.49 ve Eş. 2.46 kullanılarak, Eş. 2.73 ifadesinde yerine konulursa, manyetik alan integral denklemi,

$$\vec{J}_s(\vec{r}') - \hat{n} \times \int_S \vec{J}_s(\vec{r}') \times \nabla' G(\vec{r}, \vec{r}') ds' = \hat{n} \times \vec{H}^i(\vec{r}') \quad (2.74)$$

şeklinde elde edilir.

Bölüm 5'te KFD'nin kırınım olayı ile ilişkisi verilmiş, KFD ile kırınım desenleri-

nin hesaplanması incelenmiştir. Bu yüzden kırınım teorisinin temel formülleri burada özetlenecektir. Elektromanyetik dalganın, bir açıklıktan veya bir engelin kenarından geçerken yayılma doğrultusunda farklı yönlerde doğru sapmalar meydana gelmesi kırınım olarak adlandırılır. Açıklık boyu, dalgaboyuna göre büyük olduğu zaman kırınım etkisi azalırken, açıklığın boyu dalgaboyuna göre küçük olduğu zaman kırınımın etkisi artar. Bu durum dalga cephesi üzerindeki her noktada küresel bir kaynağın olduğu varsayımı ile açıklanır ve Huygen ilkesi olarak bilinir. Optik alanında dalgaboyu çok küçük olduğu için elektromanyetik dalganın vektör özelliği ihmal edilerek skalar alan yaklaştırması yapılabilir.

Skalar kırınım teorisinde, bir yüzeyden saçılan alan, yüzey üzerindeki alan ve alanın yüzey normaline göre türevinden bulunabilir. Eş. 2.75 ile verilen Helmholtz-Kirchhoff formülü,

$$U(\vec{r}) = \int_S \left[ U_0(\vec{r}') \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} - G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial U_0(\vec{r}')}{\partial n'} \right] dS' \quad (2.75)$$

$\vec{r}$  gözlem noktasındaki  $U(\vec{r})$  alanının,  $S$  yüzeyi üzerinde bulunan  $\vec{r}'$  noktasındaki  $U_0(\vec{r}')$  alanının ve alanın  $\hat{n}$  yüzey normali yönündeki  $\partial U_0(\vec{r}')/\partial n$  türevinden bulunabileceğini ifade eder. Eş. 2.75 ifadesinde,  $G(\vec{r}, \vec{r}')$ , Eş. 2.47 ile verilen boş uzay Green fonksiyonudur. Eş. 2.75'de,  $S$  yüzeyi üzerinde değeri sıfır olan bir Green fonksiyonu seçilirse, saçılan alanın bulunması için, sadece yüzey üzerindeki alan yeterli olur.  $xy$  düzleminde bir açıklık için, Eş. 2.75'deki Green fonksiyonu,

$$G_1(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{e^{-j\beta r_1}}{4\pi r_1} - \frac{e^{-j\beta r_2}}{4\pi r_2} \quad (2.76)$$

olarak seçilebilir. Eş. 2.76'de  $r_1 = \|\vec{r} - \vec{r}'\|$ ,  $r_2 = \|\vec{r} - \vec{r}''\|$  olarak tanımlıdır.  $\vec{r}''$  noktası,  $\vec{r}'$  noktasının açıklığa göre görüntüsüdür ve her iki nokta  $xy$  düzlemine göre bakışlımlı olur. Bu durumda  $r_1$  ve  $r_2$  uzaklıkları  $S$  açıklık yüzeyi üzerinde eşit olacağı için Eş. 2.76 ile verilen Green fonksiyonu açıklık üzerinde sıfır olur. Eş. 2.75'de, Eş. 2.76 yerine konulup,  $\hat{n} = \hat{a}_z$  için türevler alındığında saçılan



alan yüzey üzerindeki alan cinsinden,

$$U(\vec{r}) = \int_S U_0(\vec{r}') \frac{e^{-j\beta R}}{2\pi R} \left( j\beta + \frac{1}{R} \right) \frac{z}{R} ds' \quad (2.77)$$

biçiminde ifade edilir. Eş. 2.77, Rayleigh-Sommerfeld (RS) integrali olarak adlandırılır. RS integrali çözümlenerek açıklığın  $z > 0$  bölgesindeki alanlar elde edilebilir. Burada  $z$  doğrultusu açıklığa dik olan yayılma yönündedir.

RS integralinin analitik olarak çözülmesi zordur, bu yüzden genlik ve fazda yaklaşımlar kullanılarak integral daha sade bir biçimde yazılabilir.  $xy$  düzleminde bir açıklık için, açıklıktan uzak mesafelerde genlikte  $\beta R \gg 1$ ,  $z/R \approx 1$  ve  $1/R \approx 1/r$ , fazda

$$R = [z^2 + (x - x')^2 + (y - y')^2]^{1/2} \\ \approx z + \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{2z} \quad (2.78)$$

yaklaşımları Eş. 2.77'de uygulanırsa,

$$U(x, y, z) = \frac{j\beta e^{-j\beta z}}{2\pi z} \int_S U_0(x', y') \exp \left[ -j\beta \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{2z} \right] dx' dy' \quad (2.79)$$

integrali elde edilir. Eş. 2.79 Fresnel İntegrali (FRI) olarak adlandırılır.

Açıklıktan uzaklaştıkça Eş. 2.78 ifadesi,

$$R \approx z + \frac{x^2 + y^2}{2z} - \frac{xx' + yy'}{z} + \frac{x'^2 + y'^2}{2z} \\ \approx z + \frac{x^2 + y^2}{2z} - \frac{xx' + yy'}{z} \quad (2.80)$$

biçiminde sadeleştirilebilir. Eş. 2.77 ile verilen RSI'nin fazında Eş. 2.80 ile verilen yaklaştırma uygulandığında,

$$U(x, y, z) = \frac{j\beta e^{-j\beta r_0}}{2\pi z} \int_S U_0(x', y') \exp \left[ j\beta \left( \frac{xx'}{z} + \frac{yy'}{z} \right) \right] dx' dy' \quad (2.81)$$

Fraunhofer İntegrali (FNİ) elde edilir. Eş. 2.81'de  $r_0 = z + (x^2 + y^2)/2z$  olarak tanımlıdır.

Bu bölümde Maxwell denklemlerinin zaman ve frekans uzamlarındaki gösterimleri ile bu gösterimlerin diferansiyel ve integral biçimleri verilmiştir. Elektromanyetik teorisinde ışınım, yayılma ve saçılım olayları özetlenmiştir. Üç boyutlu uzayda RSi, FRİ ve FNİ tanımları yapılmıştır. RSi, FRİ ve FNİ'nin iki boyutlu uzaydaki biçimlerinin çıkarımı Bölüm 5'te verilecektir. Sonraki bölümde KFD'nin tanımı ve özellikleri verilmiştir.

### 3. KESİRLİ FOURIER DÖNÜŞÜMÜ

Fourier Dönüşümü (FD) birçok doğa ve fiziksel olayın açıklanmasında ve teorilerin geliştirilmesinde kullanılmıştır. FD, sinyal işleme, iletişim sistemleri, tomografi, spektrometre gibi geniş uygulama alanları bulmuştur. FD, süreksiz bir sinyali, farklı frekanslardaki sürekli karmaşık üstel işlevlerle açılımı olarak ifade eder ve sinyalin frekans içeriğini verir. Bir sinyalin FD'si,

$$g_1(u) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u')e^{-j2\pi uu'} du' \quad (3.1)$$

olarak tanımlıdır. Ters FD,

$$g(u') = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(u)e^{-j2\pi uu'} du \quad (3.2)$$

biçimindedir. Bu bölümde, FD'nin genel bir hali olan Kesirli Fourier Dönüşümü (KFD) anlatılacaktır.

KFD, sinyal işleme, iletişim sistemleri, hüzme biçimlendirme, diferansiyel denklemlerin çözümü gibi alanlarda kullanılmaktadır. KFD, FD'nin genel; Doğrusal Kanonik Dönüşümün (DKD) özel bir halidir. KFD,  $a$  kesir değeri bir olduğu zaman sinyalin FD'sine; sıfır olduğu zaman sinyalin kendisine eşit olmaktadır. KFD, FD'nin kullanıldığı birçok alanda uygulanarak başarımın iyileştirilmesine olanak verebilmektedir. Bu yüzden FD gibi KFD'nin hesaplanmasında kullanılacak yöntemler araştırılmaktadır. Bu bölümde KFD'nin tanımı verilecek ve KFD'nin özdeşleri olan Hermite-Gauss işlevleri anlatılacaktır. Bu bölümdeki bilgilerin derlenmesinde [1] kaynağından yararlanılmıştır.

Sürekli  $g(u')$  işlevinin  $a$  kesir değeri sürekli KFD'si,

$$g_a(u) = \mathcal{F}^a\{g(u')\}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} K_a(u, u')g(u')du' \quad (3.3)$$

olarak verilir [1, 31]. Eş. 3.3'de,  $\mathcal{F}^a$ ,  $a$  kesir değerli KFD işleci;  $K_a(u, u')$ ,  $a$  kesir değerli KFD işlecinin çekirdek işlevidir.  $\mathcal{F}^a$  KFD işleci için, Ters KFD işleci,  $\mathcal{F}^{-a}$  olur. Literatürde iki farklı çekirdek işlevi tanımı kullanılmaktadır. Bunlardan birincisi Eş. 3.4'de verilmiştir [1].

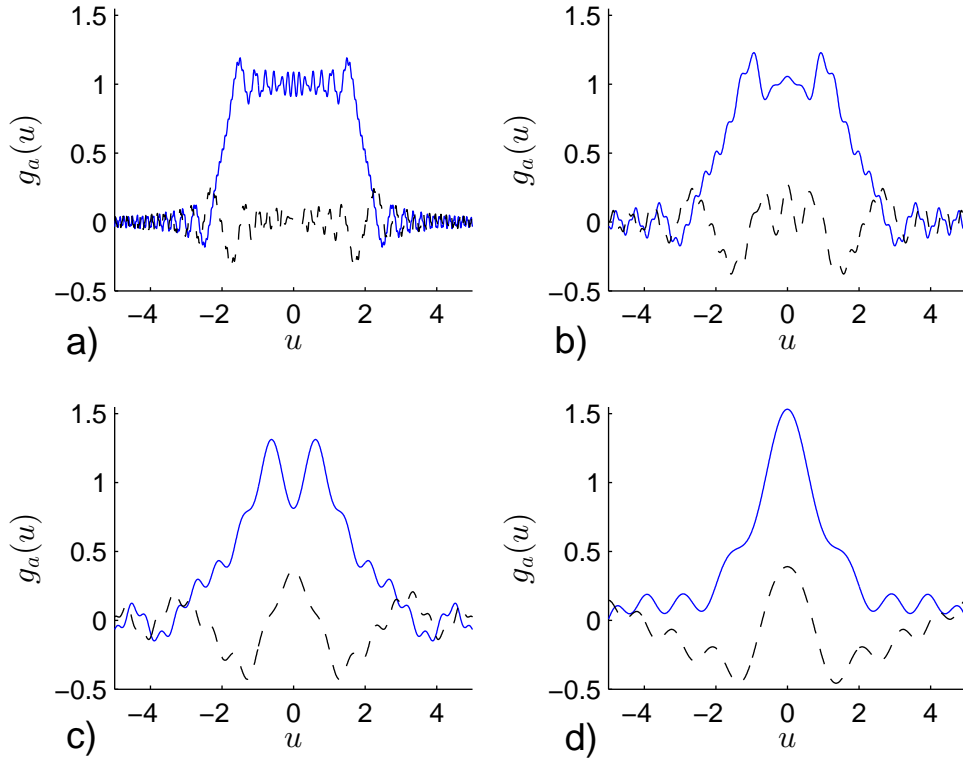
$$K_a(u, u') \equiv \begin{cases} \sqrt{1 - j \cot \alpha} \exp\{j\pi(u^2 \cot \alpha - 2uu' \csc \alpha + u'^2 \cot \alpha)\}, & a \neq 2m \\ \delta(u - u'), & a = 4m \\ \delta(u + u'), & a = 4m \pm 2 \end{cases} \quad (3.4)$$

Yukarıdaki eşitlikte  $\alpha \equiv \frac{a\pi}{2}$  sinyalin zaman-frekans gösterimindeki dönme açısına karşılık gelmektedir;  $m$  tamsayıdır. Literatürde sıkça kullanılan ikinci bir KFD çekirdek işlevi de Eş. 3.5'te verilmiştir [22].

$$K_{2,a}(u, u') \equiv \begin{cases} \sqrt{\frac{1 - j \cot \alpha}{2\pi}} \exp\left\{j \left(\frac{u^2 + u'^2}{2}\right) \cot \alpha - juu' \csc \alpha\right\}, & a \neq 2m \\ \delta(u - u'), & a = 4m \\ \delta(u + u'), & a = 4m \pm 2 \end{cases} \quad (3.5)$$

Kesir değeri  $a = 1$  için, birinci KFD tanımı, zaman uzamını frekans uzamına eşlerken, ikinci KFD tanımı, zaman uzamını açısal frekans uzamına eşlemektedir.  $K_a(u, u')$  ve  $K_{2,a}(u, u')$ , Eş. 3.3'deki  $K_a(u, u')$  yerine konulduğunda elde edilen iki farklı  $a$  kesir değerli KFD işleçleri, sırasıyla,  $\mathcal{F}^a$  ve  $\mathcal{F}_2^a$  ile gösterilecektir. Şekil 3.1'de kare darbe sinyalinin,  $g(u') = 1, -2 \leq u' \leq 2$ ,  $\mathcal{F}_2^a$  ile elde edilen sürekli KFD'leri verilmektedir. Şekil 3.1'de KFD'nin gerçel kısmı düz çizgi ile, sanal kısmı ise kesikli çizgi ile gösterilmektedir. Şekil 3.1 incelendiğinde,  $a$  kesir değerinin 0'a yakın değerlerinde dönüşümün kare darbe sinyaline, 1'e yakın olduğu durumda ise kare darbe sinyalinin FD'sine benzediği görülür. Şekil 3.1a ve b'de dönüşüm kare darbe sinyaline; Şekil 3.1d'de dönüşüm  $\text{sinc}(\cdot)$  işlevine; Şekil 3.1c'de ise dönüşüm kare darbe sinyali ile  $\text{sinc}(\cdot)$  işlevi arasında bir şekle

sahiptir.



Şekil 3.1. Kare darbe sinyalinin sürekli KFD örnekleri; a)  $\alpha = 0.05$  rad,  $a = 0.03$ , b)  $\alpha = 0.2$  rad,  $a = 0.13$ , c)  $\alpha = 0.4$  rad,  $a = 0.26$ , d)  $\alpha = \pi/4$  rad,  $a = 0.5$ . Düz çizgi gerçel kısım, kesikli çizgi sanal kısım.

KFD işleci doğrusal ve birimcil bir dönüşümdür. Birimcil olduğu için, KFD bir sinyalin farklı gösterimleri arasındaki dönüşüm işleci olarak düşünülebilir ve sinyallerin iç çarpım ve norm değerleri KFD ile değişmemektedir. Art arda uygulanan  $\mathcal{F}^a$  ve  $\mathcal{F}^b$  KFD işleçlerinin dereceleri toplanabilir ve tek bir  $\mathcal{F}^a \mathcal{F}^b = \mathcal{F}^{a+b}$  KFD işleci olarak yazılabilir.

Klasik Fourier Dönüşümünde (FD) sinyalin içerdiği bilgi zaman uzamından frekans uzamına dönüştürülür. Bu durum zamanda gözlenebilecek bir çok değişikliğin izlenmesini engeller. Kısa süreli Fourier dönüşümü (KSFD) veya Wigner Dağılımı (WD) gibi zaman-frekans gösterimleri sinyalin farklı frekanslardaki bileşenlerinin zamanla değişimlerinin incelenmesine olanak verir. KFD'nin önemli özelliklerinden bir tanesi Wigner Dağılımı ile olan ilişkisidir.  $x(t)$  sinyali-

nin WD'si aşağıda verilmiştir.

$$W_x(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau \quad (3.6)$$

WD, sinyalin enerjisinin zaman-frekans düzleminde dağılımı olarak yorumlanabilir. KFD bir sinyale uygulandığında sinyalin zaman-frekans düzleminin saat yönünde  $a\pi/2$  açısı kadar dönmesine neden olur.  $x(t)$  sinyalinin KFD'sinin WD'si,  $x(t)$  sinyalinin KFD'si cinsinden,

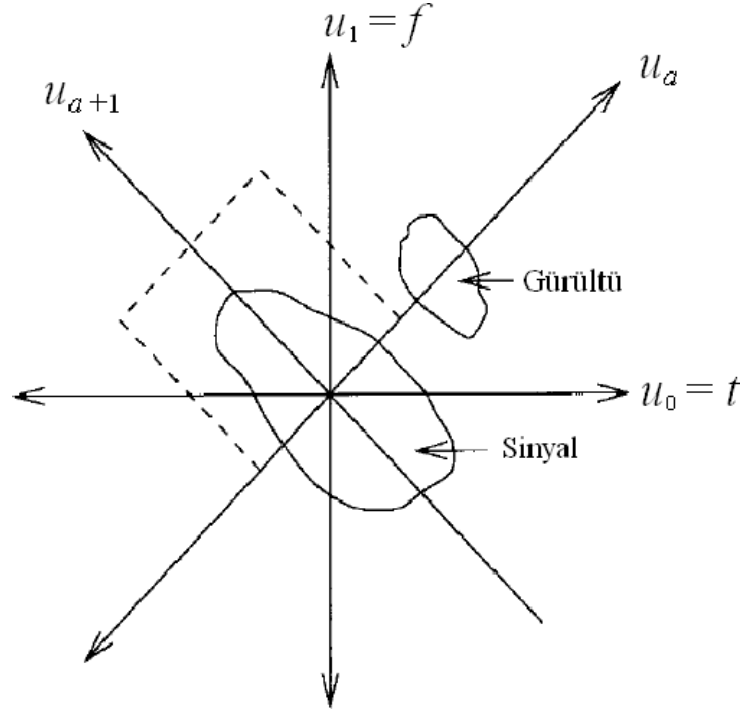
$$W_{x_a}(t, f) = W_x(t \cos \alpha - f \sin \alpha, t \sin \alpha + f \cos \alpha) \quad (3.7)$$

biçiminde yazılabilir.  $W_{x_a}(t, f)$ ,  $W_x(t, f)$ 'nin saat yönünde  $a$  açısı kadar dönmüş hali olur. KFD'nin bu özelliği, frekans uzamında süzülmesi mümkün olmayan gürültünün kesirli Fourier uzamında süzülmesine imkan tanır. ZF gösteriminin bir örneği Şekil 3.2'de verilmiştir [1]. Sinyalin zaman uzamındaki gösterimi yatay eksene, frekans uzamındaki gösterimi dikey eksene,  $a$  kesirli Fourier uzamındaki gösterimi  $u_a$  eksenine karşılık gelir.  $u_a$  eksenini KFD derecesi ile değiştirdiği için, KFD, ZF gösterimindeki zaman ve frekans eksenlerini genelleştirmiş olur. Şekil 3.2'de, zaman veya frekans uzamlarında süzülmesi mümkün olmayan gürültü sinyali, tepkisi kesikli çizgi ile gösterilen bir süzgeç ile kesirli uzamda süzülebilir.

KFD, zaman ve frekans uzamlarını genelleştirir. KFD,  $\alpha = a\pi/2$  açısı ile alındığında zaman sinyalinin  $a$  kesir değerli Fourier uzamındaki gösterimi elde edilir. Bu gösterim,  $a = 0$  için sinyalin zaman uzamındaki gösterimine,  $a = 1$  için frekans uzamındaki gösterime karşılık gelir.

KFD'nin özışlevleri Hermite-Gauss (HG) işlevleridir. Değişintisi  $\sigma$  olan,  $n$ . dereceden HG işlevi Eş. 3.8 ile verilmiştir.

$$\psi_{\sigma, n}(t) = \frac{1}{(2^n n! \sqrt{\pi} \sigma)^{1/2}} h_n\left(\frac{t}{\sigma}\right) \exp\left(\frac{-t^2}{2\sigma^2}\right). \quad (3.8)$$



Şekil 3.2.  $a$  kesirli Fourier uzamı ve gürültü süzme [1].

HG işlevi birim enerjili olacak şekilde normalize edilmiştir;  $h_n(\cdot)$ ,  $n$ . dereceden Hermite polinomudur. Hermite polinomu,

$$h_n(u) = (-1)^n e^{u^2} \frac{d^n}{du^n} e^{-u^2} \quad (3.9)$$

kullanılarak üretilebilir. İlk dört Hermite polinomu,

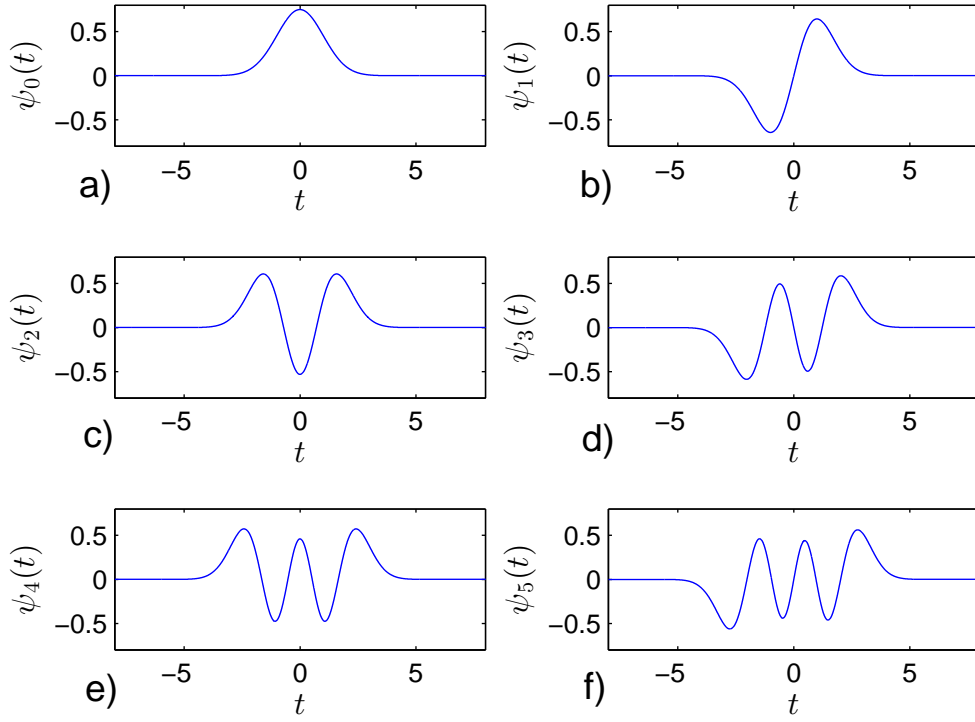
$$h_0(u) = 1 \quad (3.10)$$

$$h_1(u) = 2u \quad (3.11)$$

$$h_2(u) = 4u^2 - 2 \quad (3.12)$$

$$h_3(u) = 8u^3 - 12u \quad (3.13)$$

olarak yazılabilir. HG işlevi Hermite polinomu ile Gauss işlevinin çarpımı biçimindedir. Şekil 3.3'de birim değışintili HG işlevleri  $n = 0$ 'dan  $n = 5$ 'e kadar verilmiştir. Grafikler incelendiğinde  $n$  derecesi arttıkça HG işlevinin yatay eksenini kestiği nokta sayısının ve salınımının artmakta olduğu görülür. HG işlevleri



Şekil 3.3. Birim değışintili  $n$ . dereceden HG işlevleri; a)  $n = 0$ , b)  $n = 1$ , c)  $n = 2$ , d)  $n = 3$ , e)  $n = 4$ , f)  $n = 5$ .

sonlu enerjili sinyaller için taban kümesi oluşturur ve birbirlerine birimdik işlevlerdir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\sigma,n}(t) \psi_{\sigma,m}(t) dt = \delta(n - m). \quad (3.14)$$

Enerjisi sonlu bir sinyal HG işlevleri ile açılabilir. Zaman-frekans gösteriminde merkezi orijinde bulunan ve enerjisinin büyük bir bölümü sonlu bir yarıçap içerisinde kalan sinyallerin HG açılımı, az sayıda terim ile, açılım hatasının enküçük olduğu gösterimler verebilmektedir [3].

HG işlevleri, Eş. 3.15 ile verilen özyineleme denklemi ve Eş. 3.16 ve 3.17 ile



verilen başlangıç değerleri kullanılarak hesaplanabilir.

$$\psi_{\sigma,n}(u) = \sqrt{\frac{2}{n}} \frac{u}{\sigma} \psi_{\sigma,n-1}(u) - \sqrt{\frac{n-1}{n}} \psi_{\sigma,n-2}(u) \quad (3.15)$$

$$\psi_{\sigma,0}(u) = \frac{1}{(\sqrt{\pi}\sigma)^{1/2}} \exp\left(\frac{-u^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3.16)$$

$$\psi_{\sigma,1}(u) = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{\pi}\sigma)^{1/2}} \frac{u}{\sigma} \exp\left(\frac{-u^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3.17)$$

HG işlevleri, Eş. 3.15-3.17 yerine, Hermite çokterimlisinin ve Gauss işlevinin ayrı ayrı hesaplanıp çarpılması ile de bulunabilir, ancak bu yöntemle  $n$  işlev derecesinin büyük olduğu durumlar için sayısal hata artmaktadır.

Eş. 3.4 ile verilen  $\mathcal{F}^a$  KFD işlecinin özişlevi, değişintisi  $\sigma^2 = 1/2\pi$  olan,  $\psi_n(u)$  HG işlevidir. Eş. 3.5 ile verilen  $\mathcal{F}_2^a$  KFD işlecinin özişlevi birim değişintili,  $\psi_{1,n}(u)$ , HG işlevidir. Her iki KFD tanımı için,  $e^{-jan\pi/2}$ ,  $n$ . dereceden HG özişlevin özdeğeridir.

$$\mathcal{F}^a \{\psi_n(u')\} (u) = \exp\left(-j\frac{\pi}{2}an\right) \psi_n(u) \quad (3.18)$$

$$\mathcal{F}_2^a \{\psi_{1,n}(u')\} (u) = \exp\left(-j\frac{\pi}{2}an\right) \psi_{1,n}(u) \quad (3.19)$$

KFD çekirdek işlevi, HG işlevleri cinsinden,

$$K_a(u, u') = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-jn\alpha} \psi_n(u) \psi_n(u') \quad (3.20)$$

biçiminde açılabilir.

KFD'nin Eş. 3.4 ile verilen tanımındaki giriş-çıkış ilişkisi, Eş. 3.5 ile verilen KFD tanımı cinsinden tanımlanabilir.  $\mathcal{F}^a$  işlecinin özişlevlerinin değişintisi  $(1/2\pi)$ ,  $\mathcal{F}_2^a$  işlecinin değişintisinden daha azdır. Bu nedenle,  $\mathcal{F}^a$  işleci,  $\mathcal{F}_2^a$  işleci cinsinden yazılmak istendiğinde, giriş sinyaline yatay ekseninde genişletme işleci uygulanmalı, elde edilen sinyale  $\mathcal{F}_2^a$  KFD işleci uygulandıktan sonra, çıkış sinyaline yatay ekseninde daraltma işleci uygulanmalıdır. Böylelikle iki tanım arasındaki

ilişki

$$g_a(u) = \mathcal{F}_2^a \left\{ g \left( \frac{u'}{\sqrt{2\pi}} \right) \right\} (u\sqrt{2\pi}) \quad (3.21)$$

$$g_a(u) = \mathcal{F}^a \left\{ g \left( u'\sqrt{2\pi} \right) \right\} \left( \frac{u}{\sqrt{2\pi}} \right) \quad (3.22)$$

şeklinde verilebilir.

Bir sonraki bölümde literatürde incelenen sayısal KFD hesaplama yöntemleri anlatılacaktır. Farklı KFD tanımlarına dayanan yöntemlerin karşılaştırılmasında bu bölümde verilen KFD tanımları arasındaki ilişkilerden yararlanılacaktır.

## 4. KESİRLİ FOURIER DÖNÜŞÜMÜNÜ AYRIK HESAPLAMA YÖNTEMLERİ

Sürekli bir sinyalin Ayrik Fourier Dönüşümü (AFD) sinyalin sürekli Fourier Dönüşümü'nün (FD) örneklerini vermektedir. Sinyalin eşit aralıklarla elde edilmiş örneklerini içeren bir vektör, AFD matrisi ile çarpıldığında, elde edilen vektör sinyalin FD'sinin örneklerini içerir. Hızlı Fourier Dönüşümü (HFD) sinyalin FD'sinin örneklerinin verimli ve hızlı bir şekilde elde edilmesini sağlar.

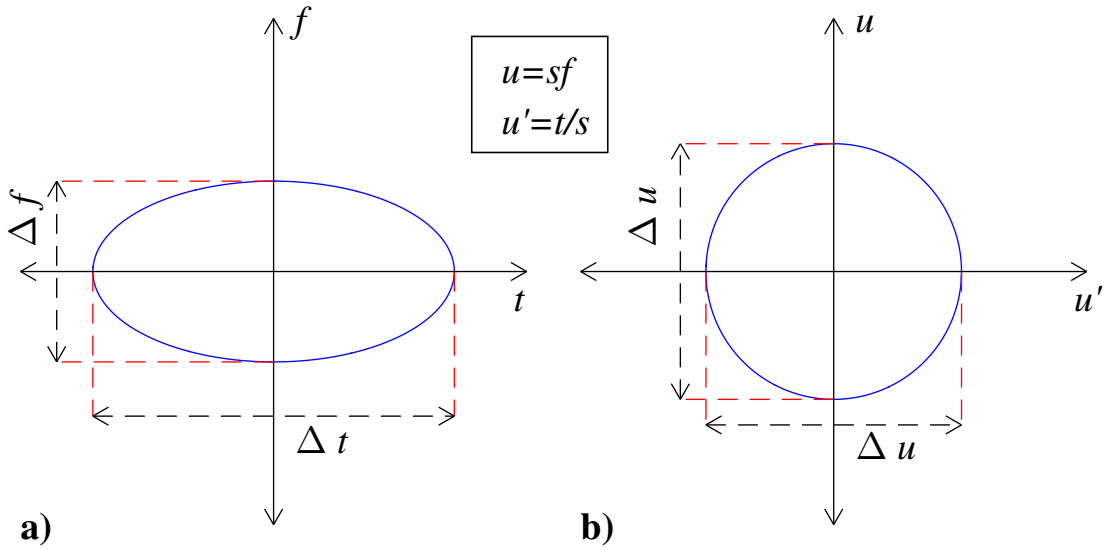
Bu bölümde KFD'nin ayrik hesaplanmasında kullanılan yöntemler anlatılacaktır. KFD'yi ayrik hesaplama yöntemleri iki sınıfa ayrılabilir. Birinci sınıftaki yöntemler sürekli KFD işlecini 'chirp' çarpımı, chirp evrişimi gibi alt işlemlere ayırtmakta ve evrişim işlecinin uygulanmasında HFD'yi kullanmaktadır. Bu sayede KFD örnekleri hızlı bir şekilde elde edilebilmektedir. Birinci sınıftaki yöntemler bu çalışmada Hızlı Kesirli Fourier Dönüşümü (HKFD) olarak adlandırılacak ve Bölüm 4.1'de anlatılacaktır. İkinci sınıftaki yöntemlerde ise vektör AFD matrisinin kesirli kuvveti ile çarpılmaktadır. AFD matrisinin kesirli kuvvetlerinin hesaplanabilmesi için öncelikle AFD matrisinin özvektör ve özdeğerlerinin hesaplanması gerekmektedir. İkinci sınıftaki yöntemler bu özvektörlerin belirlenmesinde farklılık göstermektedirler. İkinci sınıftaki yöntemler Ayrik KFD olarak adlandırılacak ve Bölüm 4.2'de anlatılacaktır. AKFD ve HKFD, sırasıyla, AFD ve HFD işleçlerinin genel hali olarak düşünülebilir.

### 4.1 Hızlı Kesirli Fourier Dönüşümü (HKFD)

Bu bölümde [20]'de önerilen sayısal KFD hesaplama yöntemi anlatılacaktır. Hızlı Kesirli Fourier Dönüşümü (HKFD), KFD işlecinin, chirp ile çarpım veya evrişim gibi alt işlemlere ayrışımına dayanmaktadır. Chirp ile evrişim HFD kullanılarak yapılmakta ve toplam hesaplama karmaşıklığı HFD'nin hesaplama karmaşıklığı mertebesinde ( $\mathcal{O}(N \log N)$ ) olmaktadır.

HKFD yönteminde, sinyalin zaman-frekans (ZF) gösteriminde destek bölgesinin belirli bir yarıçap içerisinde olduğu varsayılmaktadır. Eğer sinyal bu özelliği

sağlamıyor ise önce koordinat dönüşümü yapılmalıdır. Sinyalin zaman uzamındaki genişliği  $\Delta t$ , frekans uzamındaki genişliği  $\Delta f$  ile gösterilecek olursa,  $s = \sqrt{\Delta t/\Delta f}$  için  $u' = t/s$  ve  $u = sf$  değişken değişiklikleri yapıldığında yeni koordinat sisteminde  $\Delta t$  ve  $\Delta f$ 'ye karşı gelen yeni genişlikler  $\Delta u = \Delta u' = \sqrt{\Delta t \Delta f}$  birbirine eşit olmaktadır. Şekil 4.1'de bir sinyalin koordinat dönüşümünden önceki ve sonraki ZF gösterimleri verilmiştir. Şekil 4.1a'da verilen ZF gösterimi koordinat dönüşümünden sonra Şekil 4.1b'deki hali almıştır. HKFD yönteminde önceden sinyalin ZF gösterimine bu koordinat dönüşümünün uygulandığı, ve koordinat dönüşümünün uygulandığı sinyalin enerjisinin büyük bir kısmının ZF gösteriminde belirli bir yarıçap içerisinde bulunduğu varsayılmaktadır. Nyquist örnekleme frekansında  $N = \frac{\Delta u}{1/\Delta u} = (\Delta u)^2$  örnek gerekmektedir.



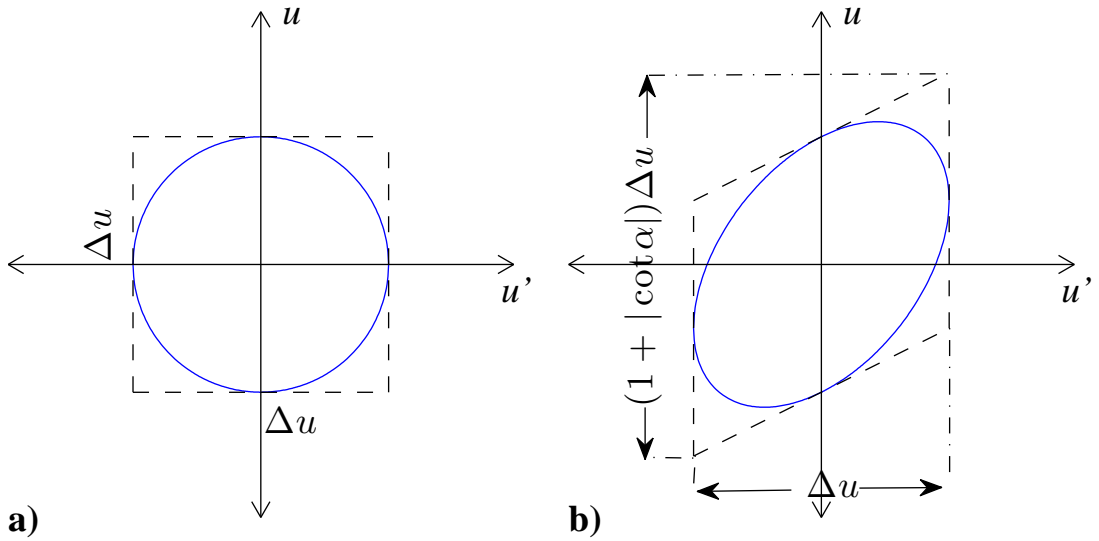
Şekil 4.1. Zaman-frekans koordinat dönüşümü.

Eş. 3.3 ve 3.4 ile tanımlanan  $\mathcal{F}_1^\alpha$  KFD işleci Eş. 4.1'deki biçimde yazılabilir.

$$g_a(u) = A_\alpha e^{j\pi \cot \alpha u^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi \csc \alpha uu'} h(u') du' \quad (4.1)$$

Eş. 4.1'de  $A_\alpha = \sqrt{1 - j \cot \alpha}$ ,  $h(u') = \exp(j\pi \cot \alpha u'^2)g(u')$ ,  $g(u')$  sinyalinin

chirp işlevi ile çarpımıdır. Bir sinyalin chirp işlevi ile çarpılması sinyalin frekans genişliğini arttırmaktadır. Şekil 4.2 chirp çarpımının sinyalin ZF uzamına etkisini göstermektedir. Şekil 4.2a ve b, sırasıyla,  $g(u')$  ve  $h(u')$  sinyallerinin ZF gösterimleridir. Kesir değeri  $0.5 \leq a \leq 1.5$  için chirp çarpımı uygulandığında frekans genişliğindeki artış  $(1 + |\cot \alpha|)\Delta u \leq 2\Delta u$  ile sınırlıdır. Grafikler incelendiğinde sinyalin zaman genişliği aynı kalırken, frekanstaki genişliği artmaktadır. Kesir değeri  $0.5 \leq a \leq 1.5$  için frekans genişliği en fazla  $2\Delta u$  olmaktadır. Chirp



Şekil 4.2. Chirp çarpımı ile frekans uzamının genişlemesi.

çarpımı sinyalin frekans genişliğini en fazla iki kat arttırdığı için HKFD uygulanmadan önce aradeğerleme yöntemleri kullanılarak sinyalin örnek sayısı iki katına arttırılmalı; HKFD uygulandıktan sonra da elde edilen KFD örneklerinin sayısı seyreltme işlemi ile iki kat azaltılmalıdır. Böylece  $u'$  uzamındaki  $N$  örnek,  $u$  uzamındaki  $N$  örneğe eşlenmiş olur. Örnek sayısı iki kat arttırıldıktan sonra Shannon geriçatım formülü kullanılarak  $h(u')$  Eş. 4.2'deki biçimde yazılabilir:

$$h(u') = \sum_{n=-N}^N e^{j\pi \cot \alpha \left(\frac{n}{2\Delta u}\right)^2} g\left(\frac{n}{2\Delta u}\right) \text{sinc} \left[ 2\Delta u \left(u' - \frac{n}{2\Delta u}\right) \right]. \quad (4.2)$$

Eş. 4.2, Eş. 4.1'de yerine konulup, integral ve toplam işleçlerinin sırası değışti-

rilirse Eş. 4.3 elde edilir.

$$g_a(u) = A_\alpha e^{j\pi \cot \alpha u^2} \sum_{n=-N}^N e^{j\pi \cot \alpha \left(\frac{n}{2\Delta u}\right)^2} g\left(\frac{n}{2\Delta u}\right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi \csc \alpha u u'} \text{sinc} \left[ 2\Delta u \left( u' - \frac{n}{2\Delta u} \right) \right] du' \quad (4.3)$$

Eş. 4.3'deki integral FD biçimindedir ve

$$\frac{1}{2\Delta u} \exp \left( -j2\pi \csc \alpha u \frac{n}{2\Delta u} \right) \text{rect} \left( \frac{\csc \alpha u}{2\Delta u} \right)$$

ifadesine eşittir.  $\text{rect}(u)$  işlevi,  $-0.5 < u < 0.5$  aralığında 1'e, bu aralığın dışında 0'a eşittir. Kesir değeri  $0.5 \leq a \leq 1.5$  arasında iken  $\csc \alpha u / 2\Delta u < 0.5$  olmakta ve  $\text{rect} \left( \frac{\csc \alpha u}{2\Delta u} \right) = 1$  olmaktadır. Eş. 4.3,

$$g_a(u) = \frac{A_\alpha}{2\Delta u} \sum_{n=-N}^N e^{j\pi \left( \cot \alpha u^2 - 2 \csc \alpha u \frac{n}{2\Delta u} + \cot \alpha \left( \frac{n}{2\Delta u} \right)^2 \right)} g\left(\frac{n}{2\Delta u}\right). \quad (4.4)$$

biçiminde yazılabilir. Eş. 4.4 ile verilen  $g_a(u)$ ,  $u = m/(2\Delta u)$  noktalarında hesaplanırsa  $g(u')$  işlevinin  $a$  kesirli KFD'sinin ayrık değerleri elde edilmiş olur:

$$g_a\left(\frac{m}{2\Delta u}\right) = \frac{A_\alpha}{2\Delta u} \sum_{n=-N}^N e^{j\pi \left( \cot \alpha \left( \frac{m}{2\Delta u} \right)^2 - 2 \csc \alpha \frac{mn}{(2\Delta u)^2} + \cot \alpha \left( \frac{n}{2\Delta u} \right)^2 \right)} g\left(\frac{n}{2\Delta u}\right) \quad (4.5)$$

Eş. 4.5, Eş. 4.6'deki gibi ayrık evrişim kullanılarak ifade edilebilir.

$$g_a\left(\frac{m}{2\Delta u}\right) = \frac{A_\alpha}{2\Delta u} e^{j\pi \left( \cot \alpha - \csc \alpha \right) \left( \frac{m}{2\Delta u} \right)^2} \sum_{n=-N}^N e^{-j\pi \csc \alpha \left( \frac{m-n}{2\Delta u} \right)^2} e^{j\pi \csc \alpha \left( \frac{n}{2\Delta u} \right)^2} g\left(\frac{n}{2\Delta u}\right) \quad (4.6)$$

Eş. 4.6'deki toplam ifadesi ayrık evrişim biçimindedir. Ayrık evrişim HFD kullanılarak  $\mathcal{O}(N \log N)$  mertebesinde hesaplama karmaşıklığı ile bulunabilir. Ayrık evrişim sonucunda elde edilen sinyale tekrar chirp çarpım işleci ve örnek seyreltme uygulanarak KFD örnekleri elde edilir. Toplam hesaplama karmaşıklığı

$\mathcal{O}(N \log N)$  mertebesindedir [1, 20].

HKFD yöntemi bütün kesirli Fourier uzamlarında sinyalin genişliğinin aynı olduğunu varsayar. Sinyalin,  $1/\sqrt{N}$  periyotlu  $N$  tane örneğinden, sinyalin sürekli KFD'sinin yaklaşımlarını kesirli uzamda da  $1/\sqrt{N}$  periyodu ile verir. Ancak örnekleme periyodu  $1/\sqrt{N}$ 'den farklı seçildiğinde HKFD'nin çıkışı sürekli KFD'nin örneklerine benzememektedir. Bu durumda sürekli KFD örneklerine ulaşmak için uygulanması gereken açı ve faz düzeltmeleri 4.1.1 da anlatılacaktır.

#### 4.1.1 Sürekli KFD ile HKFD İlişkisi

Bu alt bölümde HKFD yönteminde örnekleme periyodu  $1/\sqrt{N}$ 'den farklı seçildiğinde HKFD ile sürekli KFD arasındaki ilişki verilecektir. KFD'nin genel hali olan Doğrusal Kanonik Dönüşüm (DKD) için [23]'de sabit örnekleme aralığı varsayan hesaplama yöntemleri ile sürekli DKD arasındaki ilişki verilmiştir. Burada bu ilişkinin özel bir hali HKFD ve sürekli KFD için verilecektir.

HKFD yönteminde, sinyalin zaman ve frekans eksenlerinde eşit genişlikte olduğu ( $\Delta u' = \Delta u$ ) varsayılır. Nyquist örnekleme frekansında örnekleme periyodu  $1/\Delta u$ , örnek sayısı  $N = \frac{\Delta u}{(1/\Delta u)} = \Delta u^2$ , frekans genişliği  $\Delta u = \sqrt{N}$  olur. Sinyalin zaman ve frekanstaki genişlikleri eşit olduğunda HKFD yöntemi giriş sinyalinin  $g\left(n/\sqrt{N}\right)$ ,  $-N/2 \leq n \leq N/2 - 1$ , örneklerini çıkış sinyalinin  $g_a\left(m/\sqrt{N}\right)$ ,  $-N/2 \leq n \leq N/2 - 1$ , örneklerine eşler. HKFD yönteminin çıkış örnekleri,

$$\hat{g}_{a,1/\sqrt{N}}(m) = g_a\left(m \frac{1}{\sqrt{N}}\right) \quad (4.7)$$

olarak yazılabilir. Örnekleme periyodu  $T_s \neq 1/\sqrt{N}$  olarak seçilirse, HKFD yöntemi,  $g(nT_s) = g\left(T_s \sqrt{N} \frac{1}{\sqrt{N}}\right)$  giriş örneklerini,  $g\left(T_s \sqrt{N} u'\right)$  ölçeklenmiş sin-

yalın  $1/\sqrt{N}$  aralıklı,

$$\hat{g}_{a,T_s}(m) = \mathcal{F}_a \left\{ g \left( T_s \sqrt{N} u' \right) \right\} \left( \frac{m}{\sqrt{N}} \right) \quad (4.8)$$

örnekleri olarak görür. Bu yüzden, HKFD yönteminin çıkışında elde edilen örnekler, sürekli KFD'nin örneklerinden farklı olur. Ölçeklenmiş sinyalin sürekli KFD'si, KFD'nin özellikleri kullanılarak [1, 32],

$$\mathcal{F}_a \left\{ g \left( T_s \sqrt{N} u' \right) \right\} (u) = P_D^{-1} (\zeta', \alpha, u) g_b \left( \frac{u \sin \zeta'}{T_s \sqrt{N} \sin \alpha} \right) \quad (4.9)$$

biçiminde yazılabilir. Yukarıdaki eşitlikte,  $\zeta' = \frac{b'\pi}{2} = \tan^{-1} (T_s^2 N \tan \alpha)$  ve  $P_D$ ,

$$P_D (\alpha, \zeta, u) = \sqrt{\frac{T_s^2 N - j \cot \zeta}{1 - j \cot \zeta}} \exp \left\{ j\pi u^2 \cot \zeta \left( 1 - \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \zeta} \right) \right\} \quad (4.10)$$

olarak tanımlıdır. Eş. 4.9 ile verilen çıkış sinyali, istenilen  $\mathcal{F}_a \{g(u')\}(u)$  sinyalinden farklı olur. Çünkü bir sinyalin ölçeklenmiş halinin KFD'si, sinyalin kendisinin başka bir kesir değerli KFD'si ile orantılıdır. HKFD yönteminde örnekleme periyodu  $1/\sqrt{N}$ 'den farklı seçildiğinde, çıkışta  $a$  kesir değerli KFD'nin örnekleri elde edilmek istenirse, HKFD yöntemi,

$$\zeta = \tan^{-1} \left( \frac{1}{T_s^2 N} \tan \alpha \right) \quad (4.11)$$

açısı ile uygulanmalıdır. Böylece çıkış sinyali,

$$\mathcal{F}_b \left\{ g \left( T_s \sqrt{N} u' \right) \right\} (u) = P_D^{-1} (\alpha, \zeta, u) g_a \left( \frac{u \sin \alpha}{T_s \sqrt{N} \sin \zeta} \right) \quad (4.12)$$

olarak bulunur. HKFD yönteminin çıkış örnekleri arasındaki aralık  $1/\sqrt{N}$  olduğu için Eş. 4.12 ifadesinin,  $u = m/\sqrt{N}$  noktalarındaki örnekleri elde edilmiş



olur. Eş. 4.12 ifadesinde,  $g_a(\cdot)$  sağ tarafa alınıp Eş. 4.8 kullanılırsa,

$$g_a\left(\frac{m \sin \alpha}{T_s N \sin \zeta}\right) = P_D\left(\alpha, \zeta, \frac{m}{\sqrt{N}}\right) \hat{g}_{b, T_s}(m). \quad (4.13)$$

elde edilir.  $a$  kesirli Fourier uzamında çıkış örnekleri arasındaki aralık,

$$\begin{aligned} \Delta_\alpha &= \frac{\sin \alpha}{T_s N \sin \zeta} \\ &= \sqrt{T_s^2 \cos^2 \alpha + \frac{1}{(N T_s)^2} \sin^2 \alpha}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

olur.

Eş. 4.10 ifadesi,  $u = m \Delta_\alpha$  yerine konularak  $\Delta_\alpha$  cinsinden

$$\hat{P}_D(\alpha, \zeta, m) = \sqrt{\frac{T_s^2 N - j T_s^2 N \cot \alpha}{1 - j T_s^2 N \cot \alpha}} \exp\left\{j \pi (m \Delta_\alpha)^2 \cot \alpha \left(1 - \frac{\cos^2 \zeta}{\cos^2 \alpha}\right)\right\} \quad (4.15)$$

biçiminde yazılabilir.

HKFD yöntemi ile  $g(u')$ 'nin  $T_s$  periyoduyla örneklenmiş değerlerinden,  $g(u')$  sinyalinin  $a$  kesir değerli sürekli KFD'sinin örneklerini elde etmek için açı ve faz düzeltmeleri uygulanmalıdır. Önce HKFD yöntemi Eş. 4.11 ile verilen  $\zeta'$  açısı ile uygulanarak  $\hat{g}_b(m)$  değerleri bulunur.  $\hat{g}_b(m)$  örneklerine, Eş. 4.15'te verilen faz düzeltme çarpanı,

$$g_a(m \Delta_\alpha) = \hat{P}_D(\alpha, \zeta, m) \hat{g}_b(m) \quad (4.16)$$

biçiminde uygulanarak  $g_a(u)$  sinyalinin örnekleri elde edilir.  $a$  kesirli uzamda örnekler arasındaki mesafe Eş. 4.14 ile verilir.

Bir sonraki alt bölümde FD matrisinin kesirli kuvvetlerine dayanan KFD'nin ayrık hesaplama yöntemleri verilmiştir.

## 4.2 Ayrık Kesirli Fourier Dönüşümü (AKFD) Yöntemleri

AKFD yöntemi, AFD matrisinin öz-ayrışımına dayanmaktadır. Bu yüzden ilk önce AFD matrisinin özellikleri incelenecektir.  $\mathbf{g} = [g(0) \ g(1) \ \dots \ g(N-1)]$  vektörünün AFD'si,  $\mathbf{g}_1 = [g_1(0) \ g_1(1) \ \dots \ g_1(N-1)]$ , Eş. 4.17 ile tanımlanmıştır.

$$g_1(m) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} g(n) \exp(-j(2\pi/N)mn), \quad m = 0, \dots, N-1 \quad (4.17)$$

Eş. 4.17 matris biçiminde yazılabilir:

$$\mathbf{g}_1 = \mathbf{F}\mathbf{g} \quad (4.18)$$

Eş. 4.18'teki  $N \times N$  boyutlu  $\mathbf{F}$  matrisi AFD matrisidir. AFD matrisi  $\mathbf{F}$  aşağıda verilmiştir:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \exp\left(-j\frac{2\pi}{N}\right) & \dots & \exp\left(-j\frac{2\pi}{N}(N-1)\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \exp\left(-j\frac{2\pi}{N}(N-1)\right) & \dots & \exp\left(-j\frac{2\pi}{N}(N-1)(N-1)\right) \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Eş. 4.19 ile tanımlanan  $\mathbf{F}$  matrisi simetrik ( $\mathbf{F} = \mathbf{F}^T$ ) ve birimcildir ( $\mathbf{F}^H \mathbf{F} = \mathbf{I}$ ).  $\mathbf{F}$  simetrik olduğu için köşegenleştirilebilir.

Bir vektörün  $\mathbf{F}$  ile çarpımı vektörün AFD'sini;  $\mathbf{F}^2$  ile çarpımı vektörün zamana göre tersini;  $\mathbf{F}^3$  ile çarpımı vektörün AFD'sinin frekansa göre tersini;  $\mathbf{F}^4$  ile çarpımı ise vektörün kendisini vermektedir. Buradan yola çıkılarak bir vektörün AKFD'sinin,  $\mathbf{F}$ 'nin kesirli kuvveti ile çarpılarak elde edilebileceği önerilmiştir.  $\mathbf{F}^a$ ,  $\mathbf{F}$  matrisinin öz-ayrışımı kullanılarak hesaplanabilir:

$$\mathbf{g}_a = \mathbf{F}^a \mathbf{g} \quad (4.20)$$

$$= \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^a \mathbf{U}^T \mathbf{g}. \quad (4.21)$$

Çizelge 4.1. AFD matrisinin özdeğerlerinin tekrar sayıları.

$N$	$\#(N, 0):$ 1 özdeğerinin tekrar sayısı	$\#(N, 1):$ $-j$ özdeğerinin tekrar sayısı	$\#(N, 2):$ $-1$ özdeğerinin tekrar sayısı	$\#(N, 3):$ $j$ özdeğerinin tekrar sayısı
$4m$	$m + 1$	$m$	$m$	$m - 1$
$4m + 1$	$m + 1$	$m$	$m$	$m$
$4m + 2$	$m + 1$	$m$	$m + 1$	$m$
$4m + 3$	$m + 1$	$m + 1$	$m + 1$	$m$

Eş. 4.21'de,  $\mathbf{U}$  birimcil,  $\Lambda$  köşegen matrislerdir.  $\mathbf{U}$  matrisinin sütunları, AFD matrisinin özvektörleridir.  $N$  tek sayı için  $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_0 \ \mathbf{u}_1 \ \dots \ \mathbf{u}_{N-2} \ \mathbf{u}_{N-1}]$ ,  $N$  çift sayı için  $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_0 \ \mathbf{u}_1 \ \dots \ \mathbf{u}_{N-2} \ \mathbf{u}_N]$ ;  $\mathbf{u}_n$ ,  $\mathbf{F}$  matrisinin özvektörüdür.  $\Lambda$  matrisinin köşegeni üzerindeki elemanları AFD matrisinin özdeğerleridir. Köşegen üzerindeki özdeğerler,  $n = 0, 1, \dots, N - 2, N - 1 + (N)_2$  için,  $\exp(-jan\pi/2)$ 'ye eşittir.  $(\cdot)_2$ , ikiye göre mod işlevidir. AKFD'nin sürekli KFD'ye benzeyebilmesi için, AKFD özvektörleri sürekli KFD'nin özışlevleri olan HG işlevlerinin örneklerine benzemeli; HG işlevleri gibi gerçel ve birimdik taban kümesi oluşturmalıdır.

McClellan ve Parks, [33]'te AFD matrisinin özdeğerlerini ve özvektörlerini incelemiştir. AFD özvektörlerinin çift ( $g(-n) = g(n)$ ) veya tek ( $g(-n) = -g(n)$ ) oldukları gösterilmiş, dikgen olmayan AFD özvektör taban kümesi oluşturulmuş, ve AFD matrisinin özdeğerlerinin tekrar sayıları bulunmuştur. AFD matrisinin dört farklı özdeğeri  $\{1, j, -1, -j\}$  vardır. Çizelge 4.1,  $N \times N$  boyutlu AFD matrisi  $\mathbf{F}$ 'nin özdeğerlerinin tekrar sayılarını göstermektedir.  $\#(N, k)$  işlevi  $k$  indisli  $\exp(-j(\pi/2)k)$  özdeğerinin tekrar sayısını ifade etmektedir.

AFD matrisi simetrik bir matris olduğu için en az bir tane birbirine birimdik olan  $N$  elemanlı özvektör kümesine sahiptir. Ancak özdeğerleri tekrarettiği için gerçel ve birimdik özvektör kümesi sayısı birden fazla olabilir.

Dickinson ve Steiglitz, [34]'te AFD matrisi ile sırabagımsız olan bir matris kullanılarak AFD matrisinin gerçel ve birimdik özvektör kümesinin oluşturulabilece-

ğini göstermişlerdir. S ile gösterilen bu matris Eş. 4.22 ile verilmektedir.

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix}
 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\
 1 & 2 \cos \frac{2\pi}{N} & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 2 \cos \frac{4\pi}{N} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \cos \frac{(N-3)2\pi}{N} & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \cos \frac{(N-2)2\pi}{N} & 1 \\
 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \cos \frac{(N-1)2\pi}{N}
 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

S matrisi gerçel ve simetrik bir matris olduğu için gerçel ve birimlik özvektör kümesine sahiptir. F ve S matrisleri sırabagimsizdir ( $\mathbf{FS} = \mathbf{SF}$ ). Sırabagimsiz matrislerin ortak özvektör kümesi bulunmaktadır. S matrisinin özvektörleri hesaplanarak AFD matrisinin gerçel ve birimlik özvektör taban kümesi bulunabilir.

S matrisinin özdeğerleri  $N \neq 4m$  için birbirlerinden farklıdır. Bu durumda S matrisinin tek birimlik özvektör kümesi bulunmaktadır.  $N = 4m$  için ise S'nin sifira eşit olan özdeğeri iki defa tekrarlanmaktadır. Bu özdeğere karşılık gelen birden fazla iki elemanlı özvektör kümesi bulunabilir. Candan et al., [31]'da, bu iki özvektörü tek ve çift olarak belirleyecek bir yöntem önermiştir. Bu sayede S matrisinden AFD matrisinin özvektörlerinin bulunmasındaki belirsizlik ortadan kaldırılmıştır. Bu çalışma, Bölüm 4.2.1'de daha ayrıntılı olarak verilecektir.

#### 4.2.1 S yöntemi

Bu bölümde [21]'de geliştirilen AFD matrisinin öz-ayrışımına dayanan S-yöntemi verilmiştir. HG işlevleri Eş. 4.23 ile verilen diferansiyel denklemin çözümleridir.

$$\frac{d^2 \psi_n(u)}{du^2} - u^2 \psi_n(u) = \lambda \psi_n(u) \quad (4.23)$$

Türev işleci  $\mathcal{D} = d/du$  ve FD işleci  $\mathcal{F}$  için Eş. 4.23 aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$(\mathcal{D}^2 + \mathcal{F}\mathcal{D}^2\mathcal{F}^{-1})\psi_n(u) = \mathcal{S}\psi_n(u) = \lambda\psi_n(u) \quad (4.24)$$

Eş. 4.24'de  $\mathcal{S} = (\mathcal{D}^2 + \mathcal{F}\mathcal{D}^2\mathcal{F}^{-1})$  işlecinin özışlevi HG işlevleridir.  $\mathcal{S}$  ve  $\mathcal{F}$  sırabagımsız işleçler olduğu için FD'nin özışlevleri de HG işlevleridir. [31]'da, sürekli  $\mathcal{S}$  işleci sonlu farklar yöntemi ile ayrık hale getirilerek Eş. 4.22 ile verilen S matrisi elde edilmiştir.

AFD matrisinin özvektörlerinin tek veya çift vektör olduğu; F ve S matrislerinin ortak bir özvektör kümesinin bulunduğu yukarıda belirtilmişti. Bu nedenle S matrisinin özvektörleri de tek veya çift vektörler olmalıdır. [31]'da benzerlik dönüşümü  $\mathbf{PSP}^{-1}$  kullanılarak S matrisi çift ve tek alt matrislere ayrılmıştır. P izdüşüm matrisi Eş. 4.25'de verilmiştir.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Eş. 4.25 ile verilen P vektörü gerçel, simetrik ve birimcil olduğu için  $\mathbf{P}^T = \mathbf{P} = \mathbf{P}^{-1}$  olmaktadır.  $\mathbf{h} = \mathbf{P}\mathbf{g}$  vektörünün ilk  $\lfloor N/2 + 1 \rfloor$  elemanı g vektörünün çift bileşenlerini, son  $\lfloor N/2 - 1 \rfloor$  elemanı da g vektörünün tek bileşenleridir.  $\lfloor \cdot \rfloor$  işlevi argümanından küçük veya eşit en büyük tamsayı,  $\lceil \cdot \rceil$  işlevi argümanından büyük veya eşit en küçük tamsayıdır. S matrisinin  $\mathbf{PSP}^{-1}$  benzerlik dönüşümü matrisi Eş. 4.26 deki gibi çift Ev ve tek Od alt matrislere ayrıştırılmaktadır.

$$\mathbf{PSP}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_v & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{O}_d \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

S matrisi incelendiğinde PS matris çarpımının ilk  $\lfloor N/2 + 1 \rfloor$  satırının çift diziler, son  $\lfloor N/2 - 1 \rfloor$  satırının tek diziler olduğu görülür. PS sağ taraftan  $P^{-1} = P$  matrisi ile çarpıldığında her satır çift ve tek dizi bileşenlerine ayrılır: İlk  $\lfloor N/2 + 1 \rfloor$  satır çift dizi olduğu için bu kısım  $[E_v \ 0]$  matrisine; son  $\lfloor N/2 - 1 \rfloor$  satır tek dizi olduğu için bu kısım  $[0 \ O_d]$  matrisine dönüştürülmüş olur ve Eş. 4.26 ile verilen üçlü köşegen matris elde edilir.

PSP'nin alt blok matrisleri  $E_v$  ve  $O_d$  özvektörlerinden S'nin özvektörleri bulunabilir.  $E_v$  matrisinin özvektörleri  $e_{ev}$  ile gösterilirse, PSP matrisi aşağıdaki eşitliği sağlamalıdır:

$$PSP \begin{bmatrix} e_{ev} \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_{ev} \begin{bmatrix} e_{ev} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Eşitliğin her iki tarafı sol taraftan P ile çarpıldığında

$$SP \begin{bmatrix} e_{ev} \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_{ev} P \begin{bmatrix} e_{ev} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlik incelendiğinde  $P [e_{ev}^T \ 0^T]^T$  vektörünün S matrisinin çift özvektörü olduğu görülmektedir.  $O_d$  matrisinin özvektörleri  $e_{od}$  ile gösterilirse, benzer şekilde S matrisinin tek özvektörleri de  $P [0^T \ e_{od}^T]^T$  çarpımı ile bulunabilir. S matrisinin bu şekilde hesaplanan özvektör kümesi tek bir tanedir ve F matrisi ile ortaklaşa sahiplenildiği için, AFD matrisinin gerçel ve birimlik özvektör kümesi oluşturulmuş olur.

Eş. 4.21 ile verilen AKFD'nin hesaplanmasında, S matrisinin özvektörleri kullanılabilir. Bu durumda AKFD yöntemi S yöntemi olarak adlandırılacaktır.

Son olarak hangi özvektörün hangi HG işlevine karşılık geldiği belirlenmelidir. Sürekli HG işlevlerinin yatay eksenle kesişim noktalarının sayısı  $n$  derecesi ile aynıdır. AFD özvektörlerinin sırası da bu şekilde seçilebilir. S matris özvektörünün yatay akseni kesme sayısı özdeğeri ile ters orantılıdır [31]. AFD öz-

vektörleri de yatay eksen kesme sayıları artacak şekilde seçilirse sürekli HG işlevlerine benzeyen AFD özvektör kümesi seçilmiş olur. AFD özvektörlerinin  $S$  matrisinin özdeğerlerine göre sıralanması, yatay eksenle kesişim noktalarının sayısal olarak hesaplandığı durumlarda yapılan hataları gidermektedir [31].

Bir sonraki bölümde AFD özvektörlerinin, HG işlevi örneklerinin AFD matrisinin öz-uzaylarına izdüşümlenmesi ile yaklaşıklaması anlatılacaktır.

#### 4.2.2 Dikgen İzdüşüme Dayalı AKFD

Bu bölümde [22]'de verilen, AFD matrislerinin özvektörlerini hesaplama yöntemi anlatılacaktır. AFD matrisinin özvektörleri, sürekli FD'nin özışlevleri olan HG işlevlerine benzemelidir. [22]'de, HG işlevlerinden elde edilen örneklerle oluşturulan vektörlerin AFD öz-uzaylarına olan izdüşümleri hesaplanmış ve AFD özvektörleri olarak önerilmişlerdir.

Bölüm 4.2'de  $F$  matrisinin dört farklı özdeğeri  $1$ ,  $-j$ ,  $-1$  ve  $j$  olarak verilmiştir. Her bir özdeğerin özvektör kümesi,  $F$  matrisinin farklı bir öz-uzayını germektedir.  $E_0$ ,  $E_1$ ,  $E_2$  ve  $E_3$  AFD öz-uzayları, sırasıyla,  $1$ ,  $-j$ ,  $-1$  ve  $j$  özdeğerlerine karşılık gelecektir. Farklı öz-uzayları geren özvektörler birbirlerine diktir.

Sürekli KFD'nin özışlevleri birim değışintili HG işlevleri olduğu için, AFD matrisinin şekilleri HG işlevlerine benzeyen özvektörleri,  $\hat{\mathbf{u}}_n$ , AKFD özvektörleri olarak seçilebilir:

$$\mathbf{F}^{2\alpha/\pi} \hat{\mathbf{u}}_n = e^{-jn\alpha} \hat{\mathbf{u}}_n \quad (4.29)$$

Yukarıdaki özdeğer denkleminde  $\hat{\mathbf{u}}_n$ ,  $n$ . dereceden HG işlevine benzeyen özvektördür. HG işlevleri ile benzer şekle sahip olan AFD özvektörleri, AFD Hermite özvektörleri olarak adlandırılmıştır.

AFD Hermite özvektörleri, HG özışlevlere benzeyebilmek için, AFD'den sonra

şekillerini korumalıdır. Eş. 3.8 ile verilen HG işlevi  $T_s$  aralığı ile örneklendiğinde

$$\psi_{\sigma,n}(mT_s) = \frac{1}{(2^n n! \sqrt{\pi\sigma})^{1/2}} h_n \left( \frac{mT_s}{\sigma} \right) \exp \left( \frac{-m^2 T_s^2}{2\sigma^2} \right). \quad (4.30)$$

elde edilir. Eş. 3.8 ile verilen HG işlevinin  $T_s$  aralığı ile elde edilen örneklerinin AFD'si, sürekli FD'nin örneklerini  $m2\pi/NT_s$  noktalarında vermektedir. HG işlevinin FD'si  $m2\pi/NT_s$  noktalarında örneklense HG işlevinin AFD'si elde edilebilir:

$$\mathcal{F} \{ \psi_{\sigma,n} \} \left( \frac{m2\pi}{NT_s} \right) = \frac{\sqrt{\sigma}}{(2^n n! \sqrt{\pi\sigma})^{1/2}} h_n \left( \frac{m2\pi}{NT_s} \right) \exp \left( \frac{-m^2 2\pi^2 \sigma^2}{N^2 T_s^2} \right). \quad (4.31)$$

Eş. 4.30 ve 4.31'de verilen ayrı HG işlevlerinin şekillerinin birbirine benzemesi için HG işlevinin değışintisi  $\sigma = \sqrt{\frac{N}{2\pi}} T_s$  olarak seçilmelidir. Bu durumda Eş. 4.30 aşığıdaki gibi yazılabilir.

$$\phi_n(m) = \frac{1}{(2^n n! \sqrt{\pi\sigma})^{1/2}} h_n \left( \frac{m}{\sqrt{N/2\pi}} \right) \exp \left( \frac{-m^2 \pi}{N} \right). \quad (4.32)$$

$\phi_n(m)$ , HG işlevinin örneklerini vermektedir.  $\phi_n(m)$  örneklerinden oluşan vektör normalize edilerek AFD özvektörlerine benzeyen vektörler elde edilebilir.

$$\bar{\mathbf{u}}_n = \frac{[\phi_n(0) \ \phi_n(1) \ \dots \ \phi_n(N-1)]^T}{\left\| [\phi_n(0) \ \phi_n(1) \ \dots \ \phi_n(N-1)]^T \right\|} \quad (4.33)$$

HG işlevinin örnekleri yaklaşık olarak AFD özvektörlerini vermektedir.  $n$  arttıkça yaklaştırmaya hatası da artmaktadır.  $\bar{\mathbf{u}}_n$  vektörlerinin AFD öz-uzaylarına izdüşümleri, HG işlevlerine daha çok benzeyen AFD özvektörlerini,  $\tilde{\mathbf{u}}_n$ , verebilir:

$$\tilde{\mathbf{u}}_n = \sum_{(n-m)_4=0} \langle \bar{\mathbf{u}}_n, \mathbf{v}_m \rangle \mathbf{v}_m, \quad n, m = 0, 1, \dots, N-2, N-1 + (N)_2 \quad (4.34)$$

Eş. 4.34'te,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  vektör iç çarpımı işlecidir. Eş. 4.34 ile verilen  $\tilde{\mathbf{u}}_n$  vektörleri,  $n = 4p + l$  için,  $l$ . AFD öz-uzayını geren,  $p$ . özvektörü göstermektedir.



$l$ .,  $l = 0, 1, 2, 3$ , AFD öz-uzayı  $e^{-jl\pi/2}$  özdeğerine karşılık gelmektedir.  $p$  indisi  $p = 0, 1, \dots, \#(N, l)$  değerlerini alabilir. AFD özdeğerlerinin tekrar sayısını gösteren  $\#(N, l)$ , aynı zamanda  $l$ . AFD öz-uzayının kertesine karşılık gelmektedir ve Çizelge 4.1'de verilmiştir. AFD özvektörlerine benzeyen  $\tilde{\mathbf{u}}_n$  vektörleri, farklı AFD öz-uzaylarına izdüşümler ise birbirine dik olmakta, aynı AFD öz-uzayına izdüşümler ise dik olmayabilmektedir. AKFD'nin sürekli KFD'ye benzer olması için özvektör kümesinin birimdik olması gerekmektedir. Dikgenleştirme algoritmaları kullanılarak  $\tilde{\mathbf{u}}_n$  vektörleri AFD öz-uzayları içerisinde de birimdik hale getirilebilir. [22]'de iki farklı dikgenleştirme yöntemi, Gram-Schmidt Algoritması (GSA) ve Dikgen Procrustes Algoritması (DPA) önerilmiştir. Farklı AFD öz-uzaylarına izdüşümler olan vektörler zaten dik oldukları için, yalnızca aynı AFD öz-uzayına izdüşüm vektörleri kendi aralarında birimdik hale getirilerek AFD Hermite özvektörleri,  $\hat{\mathbf{u}}_n$ , oluşturulabilir.

### Gram-Schmitt Algoritması

GSA algoritması kullanılarak birimdik ve gerçel bir AFD özvektör kümesi oluşturulabilir. GSA yönteminde:

- HG işlevlerinin örnekleri  $\phi_n(m)$  Eş. 4.32 ile hesaplanarak Eş. 4.33'deki  $\bar{\mathbf{u}}_n$  vektörü elde edilir.
- S matrisinin özvektörleri  $\mathbf{v}_m$  bulunur.
- Eş. 4.34 kullanılarak  $\bar{\mathbf{u}}_n$  vektörlerinin AFD öz-uzaylarına izdüşümleri  $\tilde{\mathbf{u}}_n$  vektörleri olarak hesaplanır.
- Her  $l$ .,  $l = 0, 1, 2, 3$ , AFD alt öz-uzayı için,  $\hat{\mathbf{u}}_{4p+l}$ ,  $p = 0, 1, \dots, \#(N, l)$ , vektörleri aşağıdaki denklemler kullanılarak hesaplanabilir:

$$\mathbf{e}_{4p+l} = \tilde{\mathbf{u}}_{4p+l} - \sum_{q=0}^{\#(N,l)} \langle \tilde{\mathbf{u}}_{4p+l}, \hat{\mathbf{u}}_{4p+l} \rangle \hat{\mathbf{u}}_{4p+l}$$

$$\hat{\mathbf{u}}_{4p+l} = \frac{\mathbf{e}_{4p+l}}{\|\mathbf{e}_{4p+l}\|_2}$$

Eş. 4.21 ile verilen AKFD'nin hesaplanmasında, GSA yöntemi kullanılarak bulunan  $\hat{u}_n$  AFD özvektörleri kullanılabilir. Bu durumda AKFD yöntemi GSA olarak adlandırılacaktır.

### Dikgen Procrustes Algoritması

Dikgen Procrustes Algoritması (DPA) aynı AFD öz-uzayına ait  $\bar{u}_n$  vektörlerini dikgenleştirmek için kullanılabilir. Her  $l$ ,  $l = 0, 1, 2, 3$ , alt uzay için,  $V_l$ ,  $\bar{U}_l$ ,  $\hat{U}_l$  matrisleri tanımlanabilir.  $V_l$  matrisinin sütunları,  $v_{4p+l}$ , S matrisinin özvektörleridir.  $\bar{U}_l$  matrisinin sütunları,  $\bar{u}_{4p+l}$ , AFD Hermite özvektörleridir.  $\hat{U}_l$  matrisinin sütunları,  $\hat{u}_{4p+l}$ , dikgen AFD Hermite özvektörleridir.  $p$  indisi,  $p = 0, 1, \dots, \#(N, l)$  değerlerini almaktadır.

Dikgen Procrustes problemi,  $Q_l^T Q_l = I$  kısıtı sağlanacak şekilde,  $\|\bar{U}_l - \hat{U}_l\|_F = \|\bar{U}_l - V_l Q_l\|_F$  Frobenius normunu en küçülten  $Q_l$  matrisinin bulunmasıdır. Bu şekilde HG işlevlerinin örnekleri  $\bar{U}_l$  ile dikgen AFD Hermite özvektörlerinin  $\hat{U}_l$  gerdiği uzaylar arasındaki Frobenius norm en küçük olacaktır. Frobenius normu enküçülten  $Q_k$  matrisi hesaplandığında,  $\hat{U}_l = V_l Q_l$  matrisi de bulunabilir.  $V_l^T V_l = I$  olduğu için  $\hat{U}_l^T \hat{U}_l = I$  olacaktır. Bu şekilde gerçel ve birimcil özvektörler elde edilmiş olur.  $Q_l$ ,  $V_l^T U_l$  çarpımının Tekil Değer Ayrışımı (TDA) ile bulunabilir. DPA yöntemi ile AFD'nin özvektörlerinin hesaplanması aşağıda verilmektedir:

- HG işlevlerinin örnekleri  $\phi_n(m)$  Eş. 4.32 ile hesaplanarak Eş. 4.33'deki  $\bar{u}_n$  vektörü elde edilir.
- S matrisinin özvektörleri  $v_m$  bulunur.
- Her  $l$ ,  $l = 0, 1, 2, 3$ , AFD öz-uzayı için,  $\hat{U}_l$  matrisi aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$V_l^T U_l$  çarpımının TDA'sı  $A_l D_l B_l^T$  hesaplanır.

$$Q_l = A_l B_l^T$$

$$\hat{U}_l = V_l Q_l$$

Eş. 4.21 ile verilen AKFD'nin hesaplanmasında, DPA yöntemi kullanılarak bulunan  $\hat{\mathbf{u}}_n$  AFD özvektörleri kullanılabilir. Bu durumda AKFD yöntemi DPA olarak adlandırılacaktır.

### 4.2.3 AKFD yöntemleri ile bulunan AFD özvektörlerinin karşılaştırılması

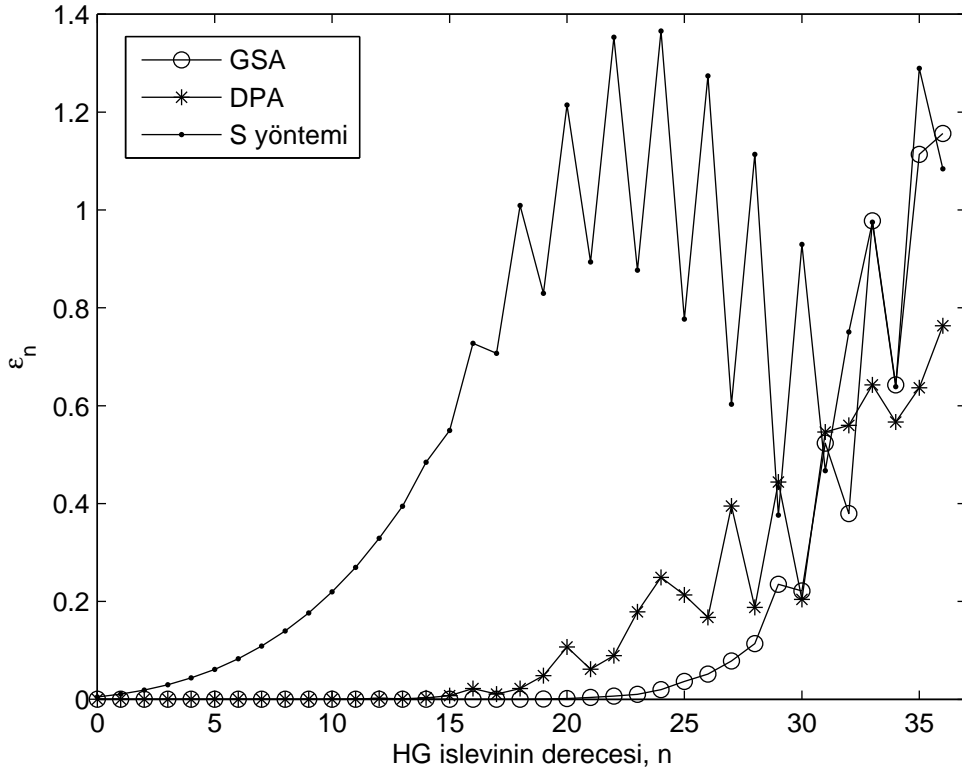
GPA, HG işlevlerinin örnekleri ile dikgen AFD Hermite özvektörleri arasındaki farkı, işlev derecesi  $n$ 'nin küçük değerlerinden başlayarak  $n$ 'nin büyük değerlerine doğru en küçültmektedir. Bu yüzden GSA özvektörleri ile HG işlevinin örnekleri arasındaki fark  $n$ 'nin küçük değerleri için az,  $n$ 'nin büyük değerleri için fazla olmalıdır. DPA ise HG işlevlerinin örneklerinin gerdiği uzay ile, dikgen AFD Hermite özvektörlerinin gerdiği uzay arasındaki toplam farkı en küçültmektedir. AFD özvektörleri ile HG işlevlerinin örnekleri arasındaki farkın normu  $\epsilon_n$  aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$\epsilon_n = \|\bar{\mathbf{u}}_n - \hat{\mathbf{u}}_n\|_2$$

Şekil 4.3'te  $n = 0, \dots, 37$  için, GSA, DPA ve S yöntemi ile elde edilen özvektörler ile hesaplanan  $\epsilon_n$  değerleri gösterilmektedir. Şekil 4.3 incelendiğinde S yöntemi ile elde edilen özvektörlerin GSA ve DPA ile elde edilenlere göre HG işlevlerinin örneklerine daha az benzediği gözlenmektedir. OPA özvektörlerinin  $n$ 'nin büyük değerleri için; GSA özvektörlerinin ise  $n$ 'nin küçük değerleri için HG işlevi örneklerine daha çok benzediği görülmektedir.

### 4.2.4 Sürekli KFD ile AKFD arasındaki ilişki

AKFD yöntemleri, giriş ve çıkıştaki örnekleme aralığının  $T_s = \sqrt{2\pi/N}$  olduğunu varsayar. Bu nedenle giriş sinyalinin örnekleme periyodu  $T_s \neq \sqrt{2\pi/N}$  olarak seçilirse, Bölüm 4.1.1'de verilen HKFD ve sürekli KFD ilişkisinde olduğu gibi açı ve faz düzeltmelerinin uygulanması gerekir. Ancak HKFD ve AKFD yöntemleri örnekleme aralıklarını farklı varsaydıkları için uygulanması gereken açı ve faz düzeltmeleri farklı olur. HKFD, sürekli KFD'nin Eş. 3.4 ile verilen  $\mathcal{F}^a$  tanımı ile; AKFD, KFD'nin Eş. 3.5 ile verilen  $\mathcal{F}_2^a$  tanımı kullanılarak elde edil-



Şekil 4.3. HG işlevleri ile AFD özvektörleri arasındaki farkın normu.

miştir. Bölüm 3'de bu tanımlar arasındaki ilişki Eş. 3.22 ile verilmiştir.  $\mathcal{F}^a$  tanımı ile,  $\mathcal{F}_2^a$  tanımındaki giriş çıkış ilişkisinin elde edilmesi için, sinyal  $\sqrt{2\pi}$  kadar daraltılmalı,  $\mathcal{F}^a$  işleci uygulanmalı, ve çıkışta  $\sqrt{2\pi}$  kadar genişletilmelidir. Giriş sinyalinin daraltılması, örnek periyodunun  $\sqrt{2\pi}$ 'ye bölünmesi ile uygulanırsa, HKFD için Eş. 4.11 ile verilen açı düzeltmesi, AKFD yöntemi için,

$$\zeta = \tan^{-1} \left( \frac{1}{\left(\frac{T_s}{2\pi}\right)^2 N} \tan \alpha \right) \quad (4.35)$$

biçiminde olur. Çıkış uzamının  $\sqrt{2\pi}$  ile genişletilmesi ile, HKFD için Eş. 4.14 ile verilen çıkış örnekleri arasındaki mesafe, AKFD yöntemi için,

$$\begin{aligned} \Delta_\alpha &= \frac{\sin \alpha}{T_s N \sin \zeta} \\ &= \sqrt{T_s^2 \cos^2 \alpha + \frac{4\pi^2}{(NT_s)^2} \sin^2 \alpha} \end{aligned} \quad (4.36)$$

biçiminde olur. AKFD yöntemi için faz düzeltme çarpanı,

$$P_D(\alpha, \zeta, u) = \sqrt{\frac{\frac{T_s^2}{2\pi}N - j\frac{T_s^2}{2\pi}N \cot \alpha}{1 - j\frac{T_s^2}{2\pi}N \cot \alpha}} \exp \left[ j\frac{u^2}{2} \cot \alpha \left( 1 - \frac{\cos^2 \zeta}{\cos^2 \alpha} \right) \right] \quad (4.37)$$

biçiminde verilir.  $P_D(\alpha, \zeta, u)$  faz düzeltme çarpanının  $\Delta_\alpha$  aralıklı örnekleri,

$$\hat{P}_D(\alpha, \zeta, m) = \sqrt{\frac{\frac{T_s^2}{2\pi}N - j\frac{T_s^2}{2\pi}N \cot \alpha}{1 - j\frac{T_s^2}{2\pi}N \cot \alpha}} \exp \left[ j\frac{(m\Delta_\alpha)^2}{2} \cot \alpha \left( 1 - \frac{\cos^2 \zeta}{\cos^2 \alpha} \right) \right] \quad (4.38)$$

olur.

AKFD yöntemi ile  $g(u')$  sinyalinin,  $a = 2\alpha/\pi$  kesir değerli sürekli KFD'sinin örnekleri elde edilmek istenirse, AKFD sinyale Eş. 4.35 ile verilen  $\zeta = b\pi/2$  açısı ile uygulanır. Elde edilen değerlere Eş. 4.38 ile verilen faz düzeltme çarpanı uygulanmalıdır. Böylece  $g_a(u)$  sinyalinin örnekleri,

$$\hat{g}_a(m) = \hat{P}_D(\alpha, \zeta, m)\hat{g}_b(m) \quad (4.39)$$

biçiminde elde edilir. Örnekler arasındaki mesafe Eş. 4.36 ile verilir.

Bir sonraki alt bölümde, KFD'nin sayısal hesaplama yöntemlerinin başarımlarını karşılaştırılması verilecek, HKFD ve AKFD yöntemleri için verilen açı ve faz düzeltmelerinin etkisi incelenecektir.

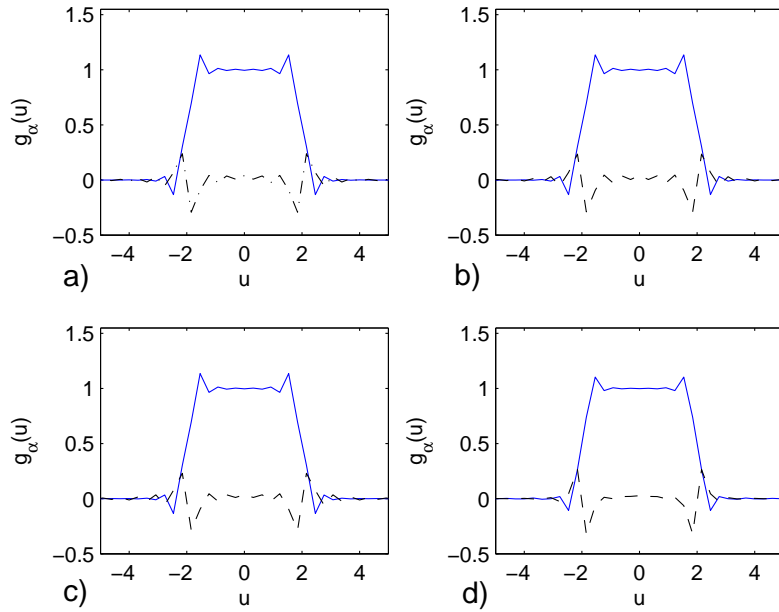
### 4.3 KFD'yi Ayrık Hesaplama Yöntemlerinin Başarım Karşılaştırması

Bu alt bölümde KFD'yi ayrık hesaplama yöntemlerinin başarımlarını karşılaştırılacaktır. Yöntemlerin başarımlarını ölçütü olarak sürekli KFD'ye ne kadar yakın örnekler verebildikleri seçilmiştir. Sürekli KFD ile yöntemlerin KFD örnekleri arasındaki bağıl hata başarımlarını ölçütü olarak kullanılabilir.  $g(u')$  sinyali için bağıl hata aşağıda verilmiştir.

$$e_r = \frac{\|\mathbf{g}_a - \hat{\mathbf{g}}_a\|_2}{\|\mathbf{g}_a\|_2} \quad (4.40)$$

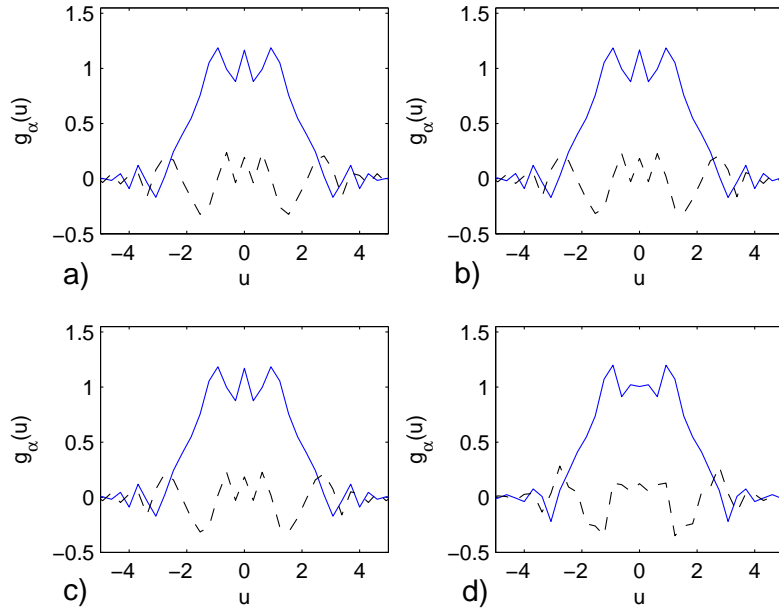
$g_a$ ,  $g_a(u)$ 'nin örneklerini içeren vektör;  $\hat{g}_a$ ,  $\hat{g}_a(u)$ 'nin  $m\Delta_\alpha$  noktalarındaki ayırık KFD yöntemleri ile bulunan örnekleridir.  $\Delta_\alpha$  kesirli uzamdaki örnekler arası uzaklığı göstermektedir.  $m = -\lfloor N/2 \rfloor, \dots, \lfloor (N-1)/2 \rfloor$  KFD indisidir.

Bölüm 3'de,  $g(u') = 1$ ,  $-2 \leq u' \leq 2$ , kare darbe sinyalinin sürekli KFD'si Şekil 3.1'de çeşitli  $a$  kesir değerleri için verilmiştir. Aynı sinyalin ayırık KFD'leri, örnekleme aralığı  $T_s = 4/13$  için,  $N = 74$  tane örnek ile HKFD, GSA, DPA ve S yöntemleri ile hesaplanmıştır. Şekil 4.4,  $\alpha = 0.05$ ; Şekil 4.5,  $\alpha = 0.2$ ; Şekil 4.6,  $\alpha = 0.4$ ; Şekil 4.7,  $\alpha = \pi/4$  için HKFD, GSA, DPA ve S yöntemleri ile elde edilen ayırık KFD'leri göstermektedir. Şekillerde düz çizgi gerçel kısım, kesikli çizgi sanal kısımdır. Çizelge 4.2'de verilen  $e_r$  bağıl hata değerleri incelendiğinde HKFD, GSA ve DPA yöntemlerinin birbirlerine yakın bağıl hata değerleri verdiği, S-yönteminin diğer yöntemlere göre daha fazla bağıl hata verdiği görülmektedir. HKFD, GSA, DPA birbirlerine benzer KFD örnekleri vermiştir.

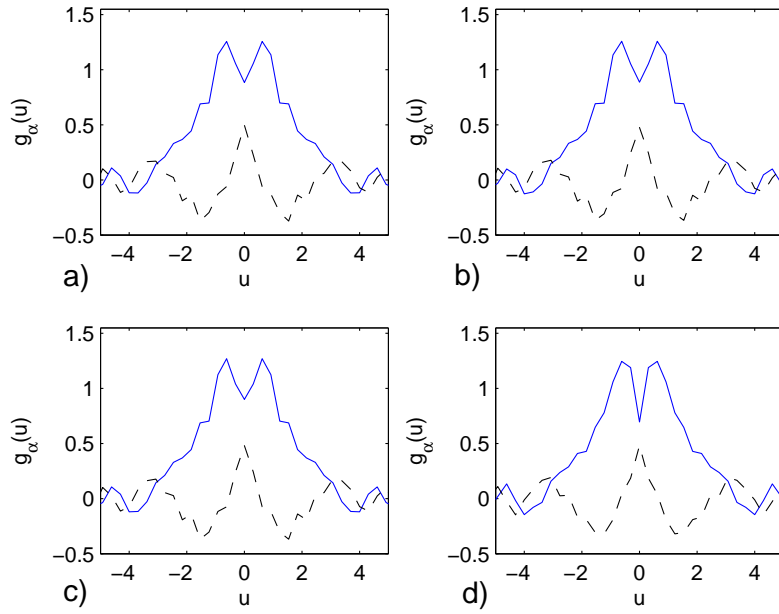


Şekil 4.4. Kare darbe sinyalinin  $\alpha = 0.05$  için ayırık KFD'leri  $g_a(u)$ : a) HKFD, b) GSA, c) DPA, d) S-yöntemi. Düz çizgi gerçel kısım, kesikli çizgi sanal kısımdır.

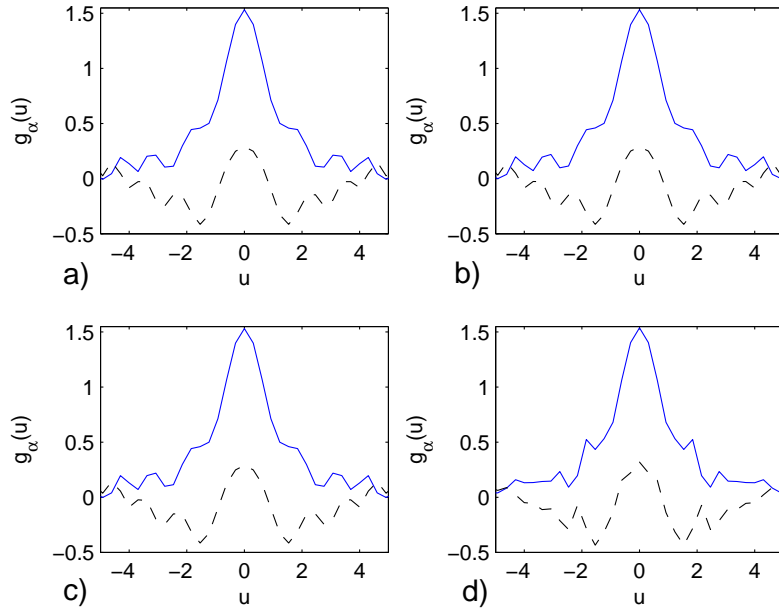
Örnek sayısı  $N = 74$  ve örnekleme aralığı  $T_s = 4/13$  olarak seçildiğinde  $T_s \approx \sqrt{2\pi/N}$  olmaktadır. Bölüm 4.2.4'de anlatılan açı ve faz düzeltmetlerine



Şekil 4.5. Kare darbe sinyalinin  $\alpha = 0.2$  için ayrık KFD'leri  $g_a(u)$ : a) HKFD, b) GSA, c) DPA, d) S-yöntemi. Düz çizgi gerçel kısım, kesikli çizgi sanal kısım.



Şekil 4.6. Kare darbe sinyalinin  $\alpha = 0.4$  için ayrık KFD'leri  $g_a(u)$ : a) HKFD, b) GSA, c) DPA, d) S-yöntemi. Düz çizgi gerçel kısım, kesikli çizgi sanal kısım.



Şekil 4.7. Kare darbe sinyalinin  $\alpha = \pi/4$  için ayrık KFD'leri  $g_a(u)$ : a) HKFD, b) GSA, c) DPA, d) S-yöntemi. Düz çizgi gerçel kısım, kesikli çizgi sanal kısım.

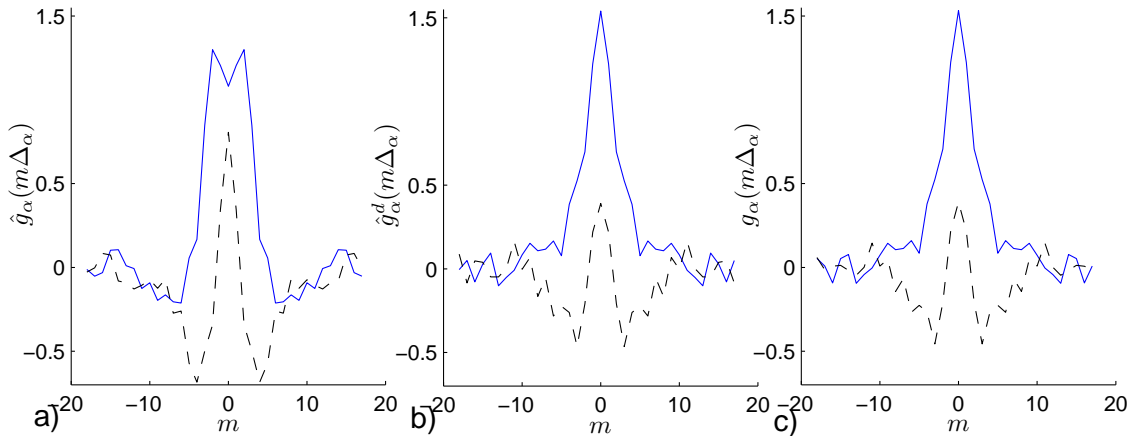
Çizelge 4.2. Bağlı hata  $e_r$  değerleri.

	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.4$	$\alpha = \pi/4$
HKFD	0.240	0.238	0.236	0.232
GSA	0.240	0.236	0.241	0.237
DPA	0.241	0.234	0.239	0.237
S-yöntemi	0.243	0.273	0.270	0.245

gerek kalmamaktadır. Ancak örnekleme aralığı  $T_s = 4/13$  iken örnek sayısı  $N = 37$  seçildiğinde  $T_s = 0.76\sqrt{(N/2\pi)}$  olmaktadır. Bu durumda açı ve faz düzeltmelerine gerek duyulmaktadır. HKFD, GSA, DPA, S yöntemleri ile elde edilen dönüşümlere, Eş. 4.39 ile verilen açı ve faz düzeltmeleri uygulandıktan sonra elde edilen KFD'ler sırasıyla, HKFD<sup>d</sup>, GSA<sup>d</sup>, DPA<sup>d</sup> ve S<sup>d</sup> yöntemleri olarak adlandırılacaktır.  $g(u')$  sinyalinin AKFD'si,  $\hat{g}_a(u)$ , açı-faz düzeltmesi uygulandıktan sonra  $\hat{g}_a^d(u)$  ile gösterilecektir. Şekil 4.8,  $g(u') = 1, -2 \leq u' \leq 2$ , kare darbe sinyalinin  $N = 37, T_s = 4/43$  için AKFD'sine, açı-faz düzeltmesinin etkisini göstermektedir. Şekil 4.8a, GSA ile elde edilen  $\hat{g}_a(u)$ 'nin örneklerini, Şekil 4.8b GSA<sup>d</sup> ile elde edilen  $\hat{g}_a^d(u)$ 'nin örneklerini, Şekil 4.8c Gauss-Kronrod



uyarlanır sayısal integral alma yöntemi [24] ile elde edilen sürekli KFD  $g_a(u)$  örneklerini göstermektedir.  $\hat{g}_a^d(u)$ , sürekli KFD  $g_a(u)$ 'ya açı-faz düzeltmesinden sonra benzemektedir. Aynı sonuç HKFD ve DPA ve S yöntemleri ile de elde edilmiştir. Çizelge 4.3, HKFD, GSA, DPA, S, HKFD<sup>d</sup>, GSA<sup>d</sup>, DPA<sup>d</sup> ve S<sup>d</sup> yöntemleri ile sürekli KFD arasındaki bağıl hatayı  $e_r$  vermektedir. Çizelge 4.3 incelendiğinde  $\alpha$ 'nın her değerinde açı-faz düzeltmesinin KFD yöntemlerinin bağıl hatalarını azalttığı görülmektedir. HKFD en az bağıl hata değerlerini vermiştir.



Şekil 4.8. Açı ve faz düzeltmesinin kare darbe sinyalinin KFD örneklerine etkisi  $\alpha = \pi/4$  için AKFD'leri: a) GSA, b) GSA<sup>d</sup>, c) Sürekli KFD örnekleri. Düz çizgi gerçel kısım, kesikli çizgi sanal kısım.

Çizelge 4.3. Açı ve faz düzeltmesi sonrası bağıl hata  $e_r$  değerleri.

	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.4$	$\alpha = \pi/4$
HKFD	0.175	0.281	0.429	0.628
HKFD <sup>d</sup>	0.134	0.099	0.072	0.052
GSA	0.175	0.283	0.427	0.627
GSA <sup>d</sup>	0.134	0.099	0.083	0.060
DPA	0.175	0.281	0.427	0.630
DPA <sup>d</sup>	0.134	0.100	0.072	0.062
S-yön.	0.177	0.262	0.467	0.614
S <sup>d</sup> -yön.	0.135	0.186	0.229	0.198

Bu bölümde anlatılan HKFD, AKFD, ve GK yöntemleri, bir sonraki bölümde bir açıklığın yakın alanından başlayarak farklı uzaklıklar için kırınım deseninin hesaplanmasında kullanılacaktır. GSA yöntemi Çizelge 4.1'de gösterildiği gibi HG işlevlerine benzeyen AFD matrisinin özvektörlerini bulmada en az hatayı

vermiştir. Bu yüzden sonraki bölümlerde AKFD yöntemi olarak, GSA yöntemi seçilmiştir. Bölüm 8’da sayısal KFD hesaplama yöntemleri kullanılarak dipol anten ve açıklık antenlerden yayılan vektör alanlar Fresnel yaklaşırması altında hesaplanacaktır.

## 5. FRESNEL İNTEGRALİ-KESİRLİ FOURIER DÖNÜŞÜMÜ İLİŞKİSİ

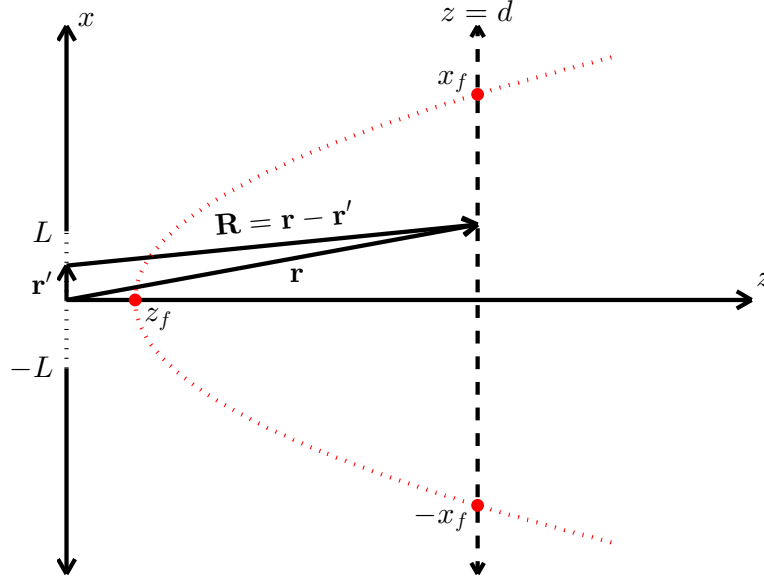
Bir açıklıktan yayılan elektromanyetik dalga, açıklığın yakın alanından uzak alanına kadar olan bölgede Fresnel integrali ile ifade edilebilmektedir [18]. Bu yüzden Fresnel integralinin hızlı çözüm teknikleri araştırılmaktadır. Fresnel integrali KFD cinsinden yazılabilir [9, 11]. KFD'nin hesaplanmasında kullanılan hızlı yöntemler kullanılarak Fresnel integrali verimli bir şekilde hesaplanabilmektedir. Literatürde Fresnel integralinin KFD ile hesaplanması üzerine yapılan çalışmalarda kısıtlı sayıda durum ve parametre incelenmiştir. Bu tez kapsamında Fresnel integralinin hesaplanmasında kullanılan KFD yöntemi, gözlem düzleminin uzaklığı, açıklık boyu, kaynak dağılımının etkileri incelenmiştir.

Üç boyutlu uzayda kırınım olayını açıklayan Rayleigh-Sommerfeld, Fresnel ve Fraunhofer integralleri Bölüm 2'de verilmiştir. Bu bölümde, bu integrallerin iki boyutlu uzaydaki biçimleri verilecek; Fresnel integrali ile KFD arasındaki ilişki kullanılarak, Bölüm 4'te verilen KFD'yi sayısal hesaplama yöntemlerinin Fresnel integralinin çözülmesindeki başarımları incelenecektir.

İki boyutlu uzayda, açıklığın  $x$  ekseninde olduğu varsayılacaktır. Açıklıktan yayılan alanlar  $z$  eksenine yönünde ilerlemektedir ve  $y$  ekseninde değişim olmadığı varsayılmıştır. Şekil 5.1 iki boyutlu uzayda açıklık geometrisini gösterir. Üç boyutlu uzayda Eş. 2.77 ile verilen Rayleigh-Sommerfeld integrali (RSİ), iki boyutlu uzayda [17]:

$$U(\vec{r}) = \int_C U_0(\vec{r}') \frac{j\beta}{2} H_1^{(1)}(\beta R) \frac{z}{R} dl' \quad (5.1)$$

biçimini alır. Yukarıdaki eşitlikte:  $U(\vec{r})$ ,  $\vec{r}$  gözlem noktasındaki alan,  $U_0(\vec{r}')$ ,  $\vec{r}'$  kaynak noktasındaki bilinen alan,  $\beta$  dalga sayısı,  $H_1^{(1)}(.)$  birinci çeşit birinci dereceden Hankel fonksiyonudur. Kaynak noktası ile gözlem noktası arasındaki



Şekil 5.1. Açıklık anten geometrisi ve Fresnel bölgesi.

uzaklık

$$R = \sqrt{z^2 + (x - x')^2} \quad (5.2)$$

olarak verilmiştir.  $(x, z)$  gözlem noktasının koordinatları,  $(x', 0)$  kaynak noktasının koordinatlarıdır. Açıklık boyu  $2L$  için Eş. 5.1 aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$U(\vec{r}) = \int_{-L}^{+L} U_0(x') \frac{j\beta}{2} H_1^{(1)}(\beta R) \frac{z}{R} dx' \quad (5.3)$$

Yukarıdaki eşitlikteki integralin analitik çözümü zor olduğu için sayısal yöntemler kullanılır. Bunun yanında  $R$  için farklı yaklaşımlar kullanılarak farklı bölgelerde integral ifadesi basitleştirilebilir.

Hankel fonksiyonunun büyük argüman değerlerinde

$$\lim_{x \rightarrow \infty} H_\nu^{(1)}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{j\pi x}} (-j)^\nu e^{jx} \quad (5.4)$$

yaklaşırması kullanılabilir [17]. Birinci çeşit birinci dereceden Hankel fonksiyonu için

$$H_1^{(1)}(\beta R) \approx \sqrt{\frac{2}{j\pi\beta R}}(-j)e^{j\beta R} \quad (5.5)$$

yaklaşırması Eş. 5.3 ifadesinde  $z/R \approx 1$  varsayımı altında yerine konulursa,

$$U(\vec{r}) \approx \int_{-L}^L U_0(x') \sqrt{\frac{\beta}{j2\pi z}} e^{j\beta R} dx' \quad (5.6)$$

elde edilir. Gözlem noktasının, açıklıktan uzak ve  $z$  eksenine yakın olduğu bölgelerde Binom açılımı kullanılarak

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{(x-x')^2 + z^2} \\ &= z + \frac{(x-x')^2}{2z} - \frac{(x-x')^4}{8z^3} + \frac{(x-x')^6}{16z^5} - \dots \\ &\approx z + \frac{(x-x')^2}{2z} \end{aligned} \quad (5.7)$$

yaklaşırması yazılabilir. Eş. 5.7, Eş. 5.6 ifadesinde yerine konulursa iki boyutlu uzayda Fresnel integrali (FRİ) elde edilir:

$$U(\vec{r}) \approx \sqrt{\frac{\beta}{j2\pi z}} e^{j\beta z} \int_{-L}^L U_0(x') e^{j\beta \frac{(x-x')^2}{2z}} dx' \quad (5.8)$$

Fresnel yaklaşırmasının hatası, üstel terimin fazında kullanılan Eş. 5.7 ile verilen  $R$  yaklaşırmasında toplama dahil edilmeyen, paydadaki derecesi en küçük olan terimden kaynaklanan hatadan azdır. Üstel terimin fazında yapılan en büyük hata  $\pi/100$  ile sınırlandırılırsa [17]:

$$\beta \frac{(|x|+L)^4}{8z^3} < \frac{\pi}{100} \quad (5.9)$$

$$\frac{|x|}{\lambda} < \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{z}{\lambda}\right)^{3/4} - \frac{L}{\lambda} \quad (5.10)$$

eşitsizlikleri elde edilir. Eş. 5.10, açıklığa uzaklığı  $z$  olan gözlem düzleminde Fresnel yaklaşımının geçerli olduğu,  $|x| < x_f$ , aralığını verir.  $x_f$ ,  $|x| > x_f$  için Eş. 5.10 eşitsizliğinin sağlanmadığı Fresnel bölgesinin sınır değeridir. Bu bölgeden uzaklaştıkça Fresnel yaklaşımı geçerliliğini yitirir. Eş. 5.10 eşitsizliğinde  $x = 0$  konularsa,  $z$  ekseninde Fresnel yaklaşımının geçerli olduğu en küçük  $z$  koordinatı,

$$z_{\min} = 5^{2/3} \lambda \left( \frac{L}{\lambda} \right)^{4/3} \quad (5.11)$$

olarak elde edilir.

Işıyan yakın alan, açıklığın kırınım deseninin şeklinin uzaklıkla değişkenlik gösterdiği bölgedir. Işıyan yakın alanın başladığı uzaklık,  $r_{nf} = 0.62 \sqrt{(2L)^3 / \lambda}$  olarak verilir.

Uzak alan, açıklığın kırınım deseni şeklinin uzaklıkla değişmediği bölge olarak tanımlıdır. Uzak alanın başladığı uzaklık yaklaşık olarak

$$r_{ff} = \frac{2(2L)^2}{\lambda} \quad (5.12)$$

ile verilir.

Eş. 5.7 yaklaşımında  $(x')^2 / (2z)$  terimi ihmal edilirse,

$$R \approx z + \frac{x^2}{2z} - \frac{xx'}{z} \quad (5.13)$$

yaklaşımı yazılabilir. Bu yaklaşım Eş. 5.6 ifadesinde yerine konularsa Fraunhofer integrali (FNI) elde edilir.

$$U(\vec{r}) \approx \sqrt{\frac{\beta}{j2\pi z}} e^{j\beta(z + \frac{x^2}{2z})} \int_{-L}^L U_0(x') e^{-j\beta \frac{xx'}{z}} dx' \quad (5.14)$$

Şekil 5.1 açıklık, gözlem düzlemi ve Fresnel yaklaşımının geçerli olduğu

bölgeyi gösterir. Açıklık boyu  $2L$ 'dir.  $z_f$ , Fresnel bölgesinin başladığı  $z$  koordinatı;  $x_f$ ,  $z = d$  gözlem düzleminde Fresnel yaklaştırmasının geçerli olduğu en büyük  $x$  koordinatını gösterir. Kesikli çizgi ile gösterilen eğri, Fresnel bölgesinin sınırlarını gösterir.

Fresnel integrali, Kesirli Fourier Dönüşümü (KFD) cinsinden ifade edilebilir [1,4, 11]. Bölüm 3'de literatürde sıkça kullanılan iki farklı KFD tanımı ve aralarındaki ilişki verilmiştir. Eş. 3.4 ile verilen,  $\mathcal{F}^a$ , KFD işleci, Eş. 3.5 ile verilen,  $\mathcal{F}_2^a$ , KFD işleci cinsinden Eş. 3.21'deki gibi ifade edilmiştir. Literatürde bu KFD tanımları Fresnel integralini ifade etmede kullanılarak, Fresnel integralinin örneklerinin KFD hesaplama yöntemleri ile elde edilmesinde kullanılmıştır .

Hanna et al. [11], Eş. 5.8 ile verilen Fresnel integralini  $\mathcal{F}_2^a$  işleçli KFD cinsinden,

$$U(x) = \sqrt{\frac{1}{1 + j \tan \alpha}} \exp [j (\beta L)^2 \tan \alpha] \exp \left[ j \frac{\sin(2\alpha)}{4} \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right] U_{0,a}^{sc} \left( \frac{x}{L} \cos \alpha \right) \quad (5.15)$$

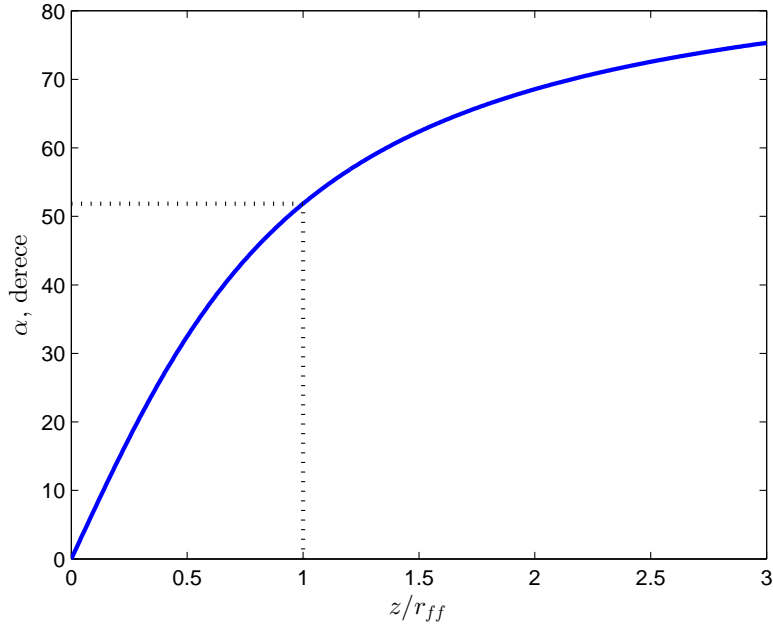
biçiminde ifade etmiştir. Eş. 5.15'te,  $U_0^{sc}(x') = U(Lx')$  olarak tanımlıdır;  $U_{0,a}^{sc}(x) = \mathcal{F}_2^a(U_0^{sc}(x'))(x)$ ,  $U_0^{sc}(x')$  işlevinin,  $\mathcal{F}_2^a$  işleçli KFD'sidir;  $\alpha = a\pi/2$  açısı ile düzlemin açıklığa olan uzaklığı  $d$  arasında,

$$\alpha = \tan^{-1} \left( \frac{d}{\beta L^2} \right) \quad (5.16)$$

ilişkisi bulunmaktadır. Şekil 5.2, gözlem düzleminin açıklığa olan uzaklığına bağlı KFD açı değerlerini gösterir. Uzak alan sınırı olan  $z = r_{ff}$  uzaklığında  $\alpha = 51.85^\circ$  değerini almaktadır.

Eş. 5.8 ile verilen Fresnel-KFD ilişkisi [1,4] çalışmalarında  $\mathcal{F}^a$  işleçli KFD tanımı cinsinden,

$$U(x) = e^{j\beta d} e^{-j\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\cos \alpha}{s}} \exp \left( \frac{j\beta x^2}{2d \csc^2 \alpha} \right) \tilde{U}_{0,a} \left( \frac{x \cos \alpha}{s} \right) \quad (5.17)$$



Şekil 5.2. KFD açısının, gözlem düzleminin açıklığa uzaklığı ile değişimi.

biçiminde ifade edilmiştir. Eş. 5.17'te,

$$\alpha = \tan^{-1} \left( \frac{\lambda d}{s^2} \right) \quad (5.18)$$

$$\tilde{U}_{0,a}(x) = \mathcal{F}^a(\sqrt{s}U_0(sx'))(x) \quad (5.19)$$

olarak tanımlıdır. Eş. 5.17'de,  $s$  sabiti, giriş sinyalinin uzay-frekans gösteriminde enerjinin yaklaşık olarak bir daire içinde olmasını sağlayan ölçekleme sabitidir. Bölüm 4.1'de zaman-frekans uzamının ölçeklenmesi anlatılmış ve  $s$  sabiti ile ölçeklemenin bir sinyalin zaman-frekans uzamına etkisi Şekil 4.1'de gösterilmiştir. Eş. 5.15 ifadesinde,  $s$  sabitinin seçimi giriş-çıkış ilişkisini değiştirmez, ancak Eş. 5.18 ile verilen  $\alpha$ 'nın  $d$  uzaklığına göre değişimini etkiler [4].

Eş. 5.17 ve 5.15 ile verilen FRİ-KFD ilişkilerinden yola çıkılarak, FRİ, Bölüm 4'te anlatılan sayısal KFD hesaplama yöntemleri kullanılarak hesaplanabilir. İki farklı ilişki ile elde edilecek yöntemlerin doğru bir şekilde karşılaştırılabilmesi için Eş. 5.15 ve 5.15 ile verilen ilişkiler arasındaki bağlantı bilinmelidir. Eş. 5.16 ve 5.18 incelendiğinde,  $s = L\sqrt{2\pi}$  seçiminin, Eş. 5.15 ve 5.15 ilişkile-



rini aynı yaptığı görülür. Böylece, ölçekleme sabitinin  $s = L\sqrt{2\pi}$  değeri için iki farklı ilişkiden yola çıkılarak elde edilen KFD cinsinden Fresnel integrallerinin örnekleri birbirleri ile karşılaştırılabilir.

Açıklıktan yayılan skalar alanın Fresnel yaklaşırması altında sayısal KFD yöntemleri ile hesaplanması Algoritma 5.1 ve 5.2'de verilmiştir. Algoritma 5.1, Eş. 5.15 ile verilen FRİ-KFD ilişkisini Bölüm 4.1'de verilen HKFD yöntemini kullanarak hesaplar. Bu yöntem,  $FRI_{HKFD}$  olarak adlandırılacaktır ve KFD'yi HFD kullanarak hesapladığı için hesaplama karmaşıklığı,  $N$  örnek sayısı olmak üzere,  $\mathcal{O}(N \log(N))$  mertebesindedir. Algoritma 5.2, Eş. 5.17 ile verilen FRİ-KFD ilişkisini Bölüm 4.2'de verilen AKFD yöntemini kullanarak hesaplar ve bu çalışmada  $FRI_{AKFD}$  olarak adlandırılacaktır. Bu yöntem KFD'yi matris çarpımı ile hesapladığı için karmaşıklığı  $\mathcal{O}(N^2)$  mertebesindedir.

Yöntemlerin kırınım deseni hesaplama başarımlarının incelenebilmesi için sayısal integral hesaplama yöntemi olan Gauss-Kronrod (GK) kareleme yöntemi referans alınmıştır [24]. Bu yöntemle bir gözlem noktasındaki kırınım deseninin değeri  $10^{-8}$  hata mertebesinde bulunabilir. HKFD ve AKFD yöntemlerinin doğruluklarının incelenmesinde GK yöntemi kullanılabilir. Ancak gözlem düzlemindeki her nokta için bu yöntemin uygulanması gerektiğinden, gözlem düzlemi üzerindeki bütün noktalar için GK yönteminin yeniden uygulanması gerekir. Bu da kırınım desenini hesaplama karmaşıklığını artırır.  $RS_{GK}$ ,  $FRI_{GK}$ ,  $FNI_{GK}$  sırasıyla, RSİ, FRİ ve FNI'nın GK yöntemi ile çözülmesi ile elde edilen kırınım desenlerini gösterecektir.

$FRI_{HKFD}$  ve  $FRI_{AKFD}$ 'nin kırınım desenlerinin başarımlarının karşılaştırılmasında  $RS_{GK}$  yöntemi ile aralarındaki fark çeşitli hata fonksiyonları ile incelenmiştir.  $U_{RS}^{GK}(n)$ ,  $RS_{GK}$  kırınım deseninin;  $U_{FRI}(n)$ ,  $FRI_{GK}$ ,  $FRI_{HKFD}$ ,  $FRI_{AKFD}$  yöntemlerinden birinin kırınım deseninin  $n$ . örneğidir.  $N_F$ , gözlem düzleminde Fresnel sınırları,  $-x_f < x < x_f$ , arasında kalan kalan örnek sayısıdır. Hata fonksiyonları aşağıda verilmiştir.

---

**Algoritma 5.1** Fresnel İntegralinin HKFD yöntemi ile hesaplanması,  $FRI_{HKFD}$ 

---

**1** Açıklık üzerinde  $U_0(x')$  kaynak dağılımı örneklenir.

$$\hat{U}_0(n) = U_0(nT_s), \quad -N/2 \leq n \leq (N-1)/2.$$

**2**  $U_0(x')$  giriş sinyali  $s$  sabiti ile ölçeklenir.

$$\tilde{U}_0(n) = \sqrt{s}\hat{U}_0(n), \quad -N/2 \leq n \leq (N-1)/2.$$

$$\Delta u' = T_s/s$$

**3**  $z = d$  uzaklığına karşılık gelen  $\alpha$  açısı hesaplanır.

$$\alpha = \tan^{-1} \left( \frac{2\pi d}{\beta s^2} \right)$$

**4**  $\tilde{U}_0(n)$  örneklerinin KFD'si Bölüm 4.1.1'de verilen HKFD yöntemi ile elde edilir:

$$\alpha' = \frac{a'\pi}{2} = \tan^{-1} \left( \frac{1}{\Delta u'^2 N} \tan \alpha \right)$$

$$\tilde{U}_{0,a}(n) = \hat{P}_D(\alpha, \alpha', n) \tilde{U}_{0,a'}(n), \quad -N/2 \leq n \leq (N-1)/2$$

**5** Gözlem düzleminde örnekler arasındaki aralık hesaplanır.

$$\Delta u = \sqrt{(\Delta u' \cos \alpha)^2 + \left( \frac{\sin \alpha}{\Delta u' N} \right)^2}$$

$$\Delta x = s \sec \alpha \Delta u$$

**6** Faz çarpımları uygulanarak Fresnel integralinin örnekleri bulunur.

$$U(n) = \exp \left( j \frac{\beta}{d} \right) \exp \left( -j \frac{\alpha}{2} \right) \sqrt{\frac{\cos \alpha}{s}} \exp \left[ \frac{j\beta (n\Delta x)^2}{2d \csc^2 \alpha} \right] \tilde{U}_{0,a}(n)$$

---

---

**Algoritma 5.2** Fresnel İntegralinin AKFD yöntemi ile hesaplanması,  $FRI_{AKFD}$ 

---

**1**  $N \times N$  boyutlu AFD matrisinin özvektör kümesi bulunur.

$$\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^T$$

**2** Açıklık üzerinde  $U_0(x')$  kaynak dağılımı örneklenir.

$$\hat{U}_0(n) = U_0(nT_s), \quad -N/2 \leq n \leq (N-1)/2.$$

**3**  $z = d$  uzaklığına karşılık gelen  $\alpha$  açısı hesaplanır.

$$\alpha = \tan^{-1} \left( \frac{d}{\beta L^2} \right)$$

**4**  $U_0(Lx')$  işlevinin KFD'si, Bölüm 4.2.4'de verilen AKFD yöntemi ile elde edilir:

$$\alpha'' = \frac{\alpha''\pi}{2} = \tan^{-1} (L^2 \tan \alpha)$$

$$\Delta\alpha'' = \sqrt{(T_s \cos \alpha'')^2 + \left( \frac{2\pi \sin \alpha''}{NT_s} \right)^2}$$

$$\alpha' = \tan^{-1} \left( \frac{2\pi}{NT_s^2} \tan \alpha'' \right)$$

$$\mathbf{U}_{0,a'} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}^{a'}\mathbf{V}^T\mathbf{U}_0$$

$$U_{0,a'}(n) = P_D(\alpha, \alpha', n)U_{0,a'}(n)$$

$$U_{0,a}^{sc}(n) = \sqrt{\frac{1 - j \cot \alpha}{L^2 - j \cot \alpha}} \exp \left\{ \frac{j (n\Delta\alpha'')^2 L^2 \sin(2\alpha)}{4 \sin^2 \alpha''} \left( 1 - \frac{\cos^2 \alpha''}{\cos^2 \alpha} \right) \right\} U_{0,a'}(n)$$

**5** Gözlem düzleminde örnekler arasındaki aralık hesaplanır.

$$\Delta u = \Delta_{\alpha''} L \sin \alpha / \sin \alpha''$$

$$\Delta x = L \sec \alpha \Delta u$$

**6** Faz çarpımları uygulanarak Fresnel integralinin örnekleri bulunur.

$$U(n) = \sqrt{\frac{1}{1 + j \tan \alpha}} \exp [j (\beta L)^2 \tan \alpha] \exp \left[ j \frac{\sin(2\alpha)}{4} \left( \frac{n\Delta x}{L} \right)^2 \right] U_{0,a}^{sc}(n)$$

---

1. Kare ortalama kök hata,  $e_{rms}$ :

$$e_{rms} = \sqrt{\frac{1}{N_F} \sum_{n=1}^{N_F} \left| U_{RS}^{GK}(n) - \hat{U}_{FRI}(n) \right|^2} \quad (5.20)$$

2. Normalize hata,  $e_{norm}$ :

$$e_{norm} = \frac{\left\| \mathbf{U}_{RS}^{GK} - \hat{\mathbf{U}}_{FRI} \right\|_2}{\left\| \mathbf{U}_{RS}^{GK} \right\|_2} \quad (5.21)$$

3. Simetrik Kullback-Leibler uzaklığı,  $e_{SKL}$ :

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{U}_{RS}^{GK}}{\sum_{n=1}^N U_{RS}^{GK}(n)} \quad (5.22)$$

$$\mathbf{q} = \frac{\hat{\mathbf{U}}_{FRI}}{\sum_{n=1}^N \hat{U}_{FRI}(n)} \quad (5.23)$$

$$K_{pq} = \sum_{n=1}^N p_n \ln \left( \frac{p_n}{q_n} \right) \quad (5.24)$$

$$K_{qp} = \sum_{n=1}^N q_n \ln \left( \frac{q_n}{p_n} \right) \quad (5.25)$$

$$e_{SKL} = K_{pq} + K_{qp} \quad (5.26)$$

Açıklık üzerindeki skalar alanın dağılımı için kare, doğrusal fazlı kare, Gauss, Gauss-chirp, HG işlevleri seçilmiştir. Kaynak dağılımlarının ifadeleri aşağıda verilmiştir.

1. Kare dağılım:

$$U_0(x', 0) = \text{rect} \left( \frac{x'}{2L} \right) \quad (5.27)$$

Yukarıdaki eşitlikte,  $\text{rect}(\cdot)$  işlevi,  $|x'| < 1$  için  $\text{rect}(x') = 1$ ;  $|x'| = 1$  için  $\text{rect}(x') = 1/2$ ;  $\text{rect}(x') = 0$  olarak tanımlıdır.

2. Doğrusal fazlı kare dağılımı:

$$U_0(x', 0) = \text{rect}\left(\frac{x'}{2L}\right) e^{-j2\pi\frac{x'}{L}} \quad (5.28)$$

3. Gauss dağılımı:

$$U_0(x', 0) = \text{rect}\left(\frac{x'}{2L}\right) \text{gauss}\left(\frac{4x'}{L\sqrt{2\pi}}\right) \quad (5.29)$$

Yukarıdaki eşitlikte  $\text{gauss}(\cdot)$  işlevi,  $\text{gauss}(x') = \exp(-\pi x'^2)$  olarak tanımlıdır. Eş. 5.29 ile verilen Gauss dağılımında sabitler, standart sapma  $L/4$  olacak şekilde seçilmiştir.

4. Gauss-chirp dağılımı:

$$U_0(x', 0) = \text{rect}\left(\frac{x'}{2L}\right) \text{gauss}\left(\frac{4x'}{L\sqrt{2\pi}}\right) \text{chirp}\left(x', \frac{1}{L^2}, \frac{1}{L}\right) \quad (5.30)$$

Yukarıdaki eşitlikte,  $\text{chirp}(x, \chi, \xi) = \exp[j\pi(\chi x^2 + 2\xi x)]$  olarak tanımlıdır.

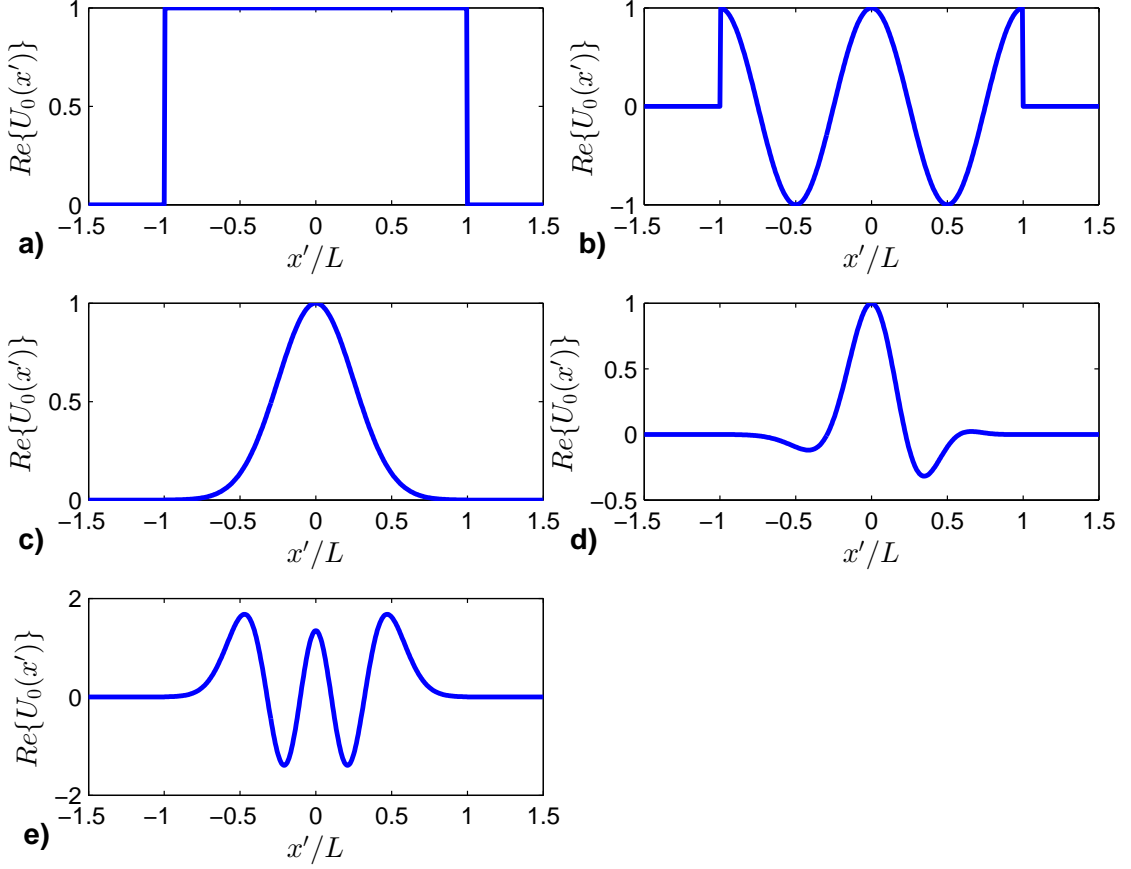
5. HG dağılımı:

$$U_0(x', 0) = \text{rect}\left(\frac{x'}{2L}\right) \psi_{\sigma, n}(x') \quad (5.31)$$

Yukarıdaki eşitlikte HG işlevinin standart sapması  $\sigma = \frac{L}{2}$ ; derecesi  $n = 4$  olarak seçilmiştir.

Eş. 5.27-5.31 ile verilen açıklık üzerindeki kaynak dağılımları, Şekil 5.3'de gösterilmiştir. Kaynak dağılımlarının parametreleri,  $U_0(x', 0)$  açıklığının dışında sıfır olacak şekilde seçilmiştir.

FRI,  $FRI_{HKFD}$  ve  $FRI_{AKFD}$  yöntemleri ile hesaplandığında, gözlem düzle-



Şekil 5.3. Kaynak dağılımları,  $U_0(x', 0)$ . a) Kare, b) Doğrusal-fazlı kare, c) Gauss, d) Gauss-chirp, e) HG dağılımı.

minde elde edilen örnekler arasındaki mesafe

$$\Delta x = \sqrt{T_s^2 + \left(\frac{2\pi d}{\beta N T_s}\right)^2} \quad (5.32)$$

olarak elde edilir [4]. Uzaklık değıştikçe gözlem düzlemi üzerinde Fresnel sınırları,  $-x_f < x < x_f$ , arasında kalan örnek sayısı,  $N_F$ , değışmektedir. Uzaklık değıştikçe,  $N_F$ 'in az sayıda olması kırınım desenlerinin gözlenmesine engel olabilir. Bu yüzden  $T_s$ , gözlem düzlemi üzerinde en küçük aralıkları verecek şekilde seçilmiştir. Eş. 5.32 ile verilen  $\Delta x$ 'in  $T_s$ 'e göre türevi alınıp sıfıra eşitle-

nirse, her uzaklıkta  $N_F$ 'i enbüyük yapacak  $T_s$  örnekleme periyodu,

$$T_s = \sqrt{\frac{2\pi d}{\beta N}} \quad (5.33)$$

olarak bulunur. Yöntemlerin başarımlarını karşılaştırmasında, kaynak dağılımlarının örnekleme periyodu gözlem uzaklığı değıştikçe Eş. 5.33 ile kullanılarak seçilmiştir.

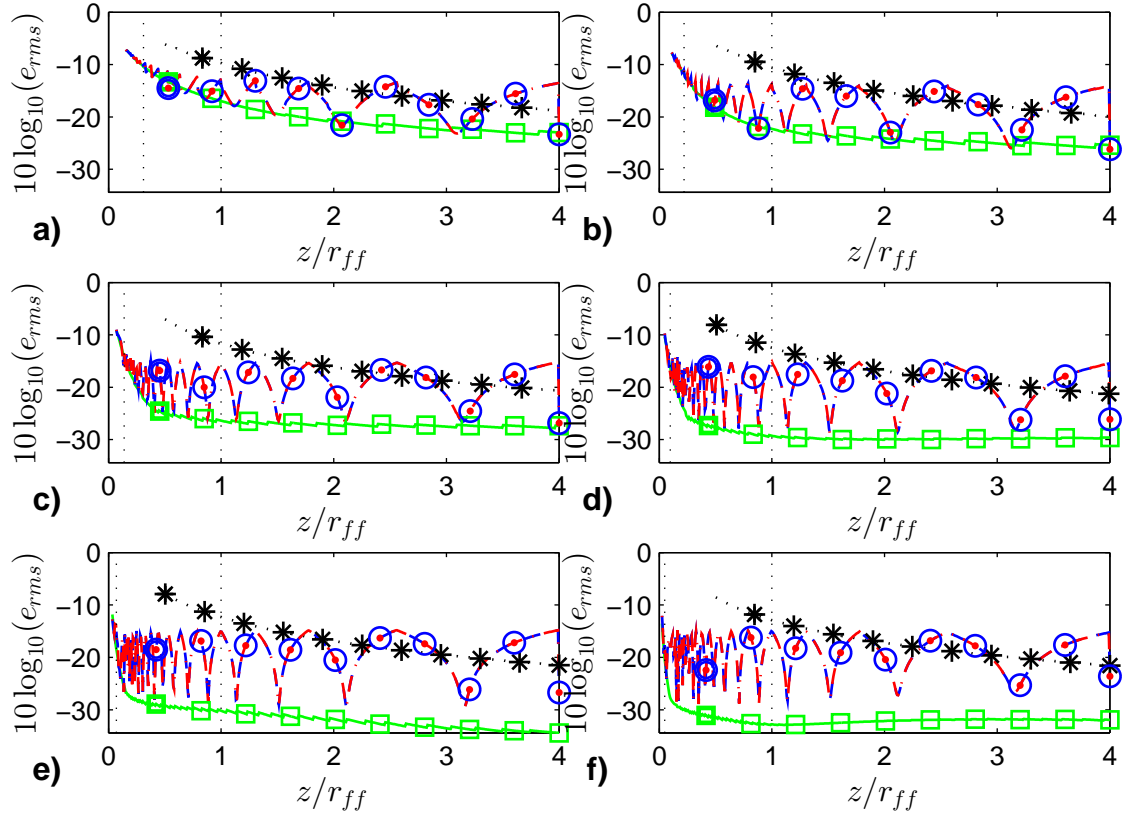
$FRI_{GK}$ ,  $FNI_{GK}$ ,  $FRI_{HKFD}$  ve  $FRI_{AKFD}$  ile elde edilen kırınım desenlerinin,  $RS_{GK}$  kırınım desenine göre  $e_{rms}$  hataları incelenmiştir.  $FRI_{GK}$ , Fresnel yaklaşımından kaynaklanan taban hataları,  $FNI_{GK}$ , Fraunhofer yaklaşımından kaynaklanan taban hataları verecektir.  $FRI_{GK}$  ve  $FNI_{GK}$  yöntemlerinin hataları incelenerek yaklaşımların nerelerde geçerli olduğu incelenebilir.  $FRI_{HKFD}$  ve  $FRI_{AKFD}$  yöntemlerinin hataları incelenerek, yöntemlerin hangi bölgelerde  $FRI_{GK}$  ile verilen taban hata değerlerine yakın hata değerleri verdiği incelenmiştir.

Şekil 5.4-Şekil 5.7 farklı kaynak dağılımları için yöntemlerin  $e_{rms}$  hatasının değişimini, gözlem düzleminin kaynak düzlemine olan uzaklığına göre, logaritmik ölçekte gösterir. Kare işareti  $FRI_{GK}$ , yıldız işareti  $FNI_{GK}$ , daire işareti  $FRI_{HKFD}$ , nokta işareti  $FRI_{AKFD}$ 'nin  $e_{rms}$  hatasını gösterir. Kaynak düzlemi  $z = 0$  noktasındadır. Dik noktalı çizgiler yakın alan ve uzak alanın başlangıç noktalarını işaret eder. Şekil 5.4 kare; Şekil 5.5 doğrusal fazlı kare; Şekil 5.6 Gauss; Şekil 5.7 Gauss-chirp; Şekil 5.4 HG kaynak dağılımları ile elde edilmiştir.

Şekil 5.4-Şekil 5.7 incelendiğinde  $FRI_{GK}$  hatasının yakın alan sınırı  $r_{nf}$ 'ten sonra daha hızlı azalmaya başladığı;  $FNI_{GK}$  hatasının uzak alan sınırı  $r_{ff}$ 'den sonra azaldığı görülür. Bütün kaynak dağılımları için, açıklık boyu arttıkça, genel olarak  $e_{rms}$  hatalarının azaldığı gözlenmiştir.

$FRI_{HKFD}$  ve  $FRI_{AKFD}$  yöntemleri ile her kaynak dağılımı ve açıklık boyu için

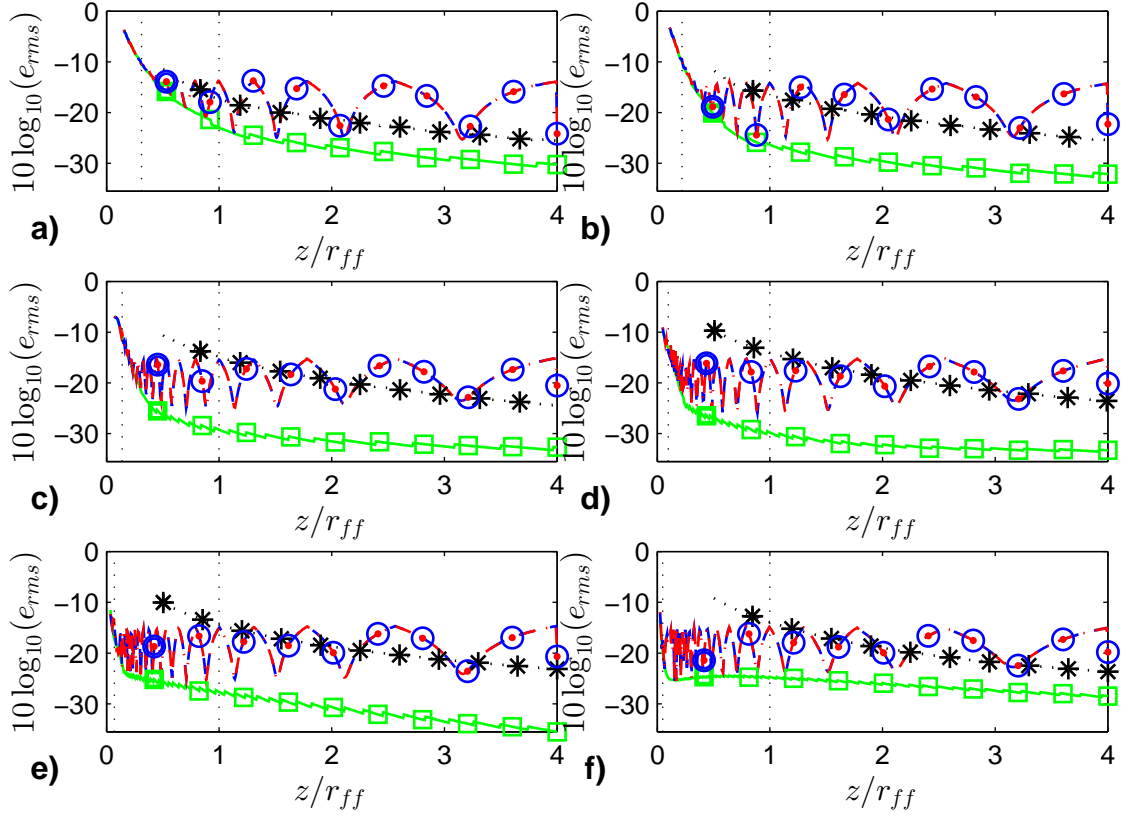
genellikle benzer kırınım desenleri elde edilmiştir.  $FRI_{HKFD}$  ve  $FRI_{AKFD}$  ile elde edilen  $e_{rms}$  hataları, yöntemlerin taban hatalarını veren  $FRI_{GK}$  ile karşılaştırıldığında kare ve doğrusal fazlı dağılımlar için taban hatalardan fazla hatalar elde edildiği; Gauss, Gauss-chirp ve HG dağılımları için taban hatalara çok yakın hatalar elde edildiği gözlenmiştir. KFD taban fonksiyonları chirp biçiminde olduğu ve çekirdek fonksiyonu HG fonksiyonları ile açılabilirdiği için KFD yöntemleri bu dağılımlarda daha iyi başarımlar göstermiştir.



Şekil 5.4. Kare kaynak dağılımı için,  $FRI_{GK}$  (kare),  $FRI_{GK}$  (yıldız),  $FRI_{HKFD}$  (daire),  $FRI_{AKFD}$  (nokta) kırınım desenlerinin  $e_{rms}$  hatalarının gözlem uzaklığı ile değişimi. Açıklık boyu a)  $2L = \lambda$ , b)  $2L = 2\lambda$ , c)  $2L = 5\lambda$ , d)  $2L = 10\lambda$ , e)  $2L = 20\lambda$ , f)  $2L = 40\lambda$ .

Şekil 5.9-Şekil 5.12 farklı kaynak dağılımları için yöntemlerin  $e_{norm}$  hatasının değişimini, gözlem düzleminin kaynak düzlemine olan uzaklığına göre, logaritmik ölçekte gösterir. Şekil 5.14-Şekil 5.17 farklı kaynak dağılımları için yöntemlerin  $e_{SKL}$  hatasının değişimini, gözlem düzleminin kaynak düzlemine olan uzaklığına göre, logaritmik ölçekte gösterir. Grafikler incelendiğinde,  $r_{ff}$  uzak

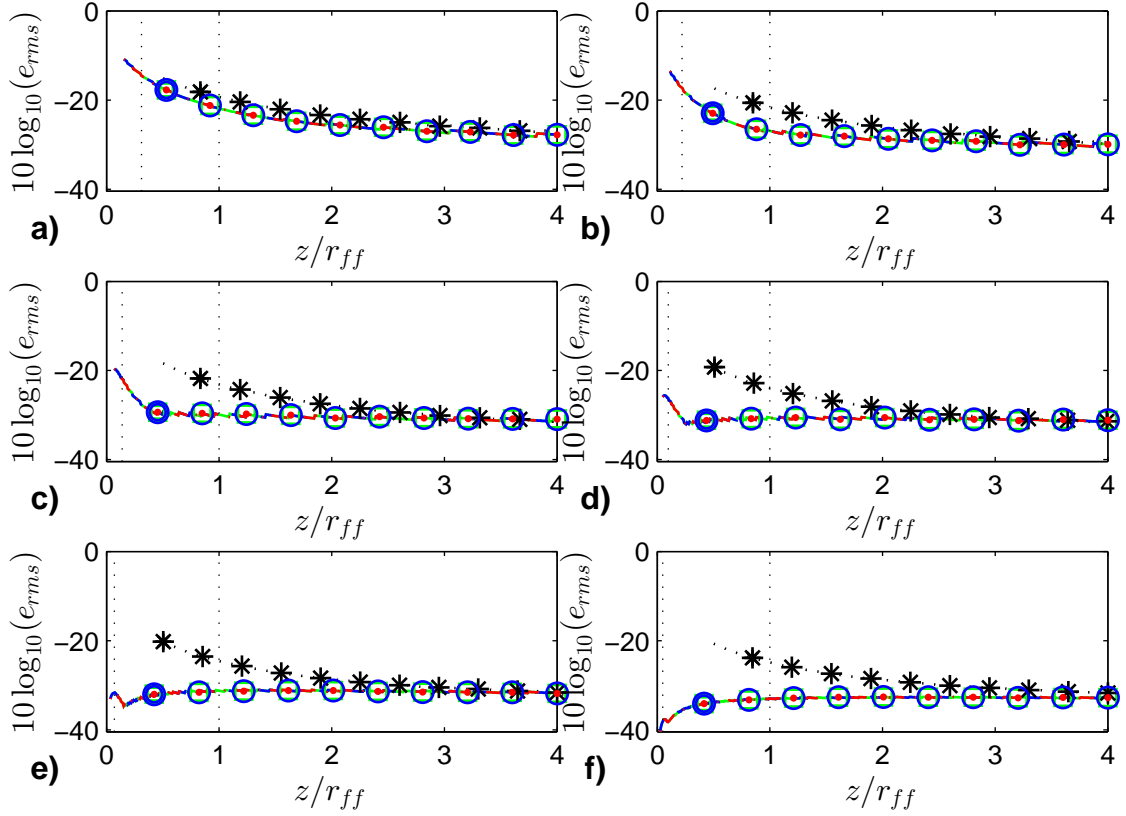




Şekil 5.5. Doğrusal fazlı kaynak dağılımı için,  $FRI_{GK}$  (kare),  $FNI_{GK}$  (yıldız),  $FRI_{HKFD}$  (daire),  $FRI_{AKFD}$  (nokta) kırınım desenlerinin  $e_{rms}$  hatalarının gözlem uzaklığı ile değişimi. Açıklık boyu a)  $2L = \lambda$ , b)  $2L = 2\lambda$ , c)  $2L = 5\lambda$ , d)  $2L = 10\lambda$ , e)  $2L = 20\lambda$ , f)  $2L = 40\lambda$ .

sınırından önce  $FRI_{GK}$  hatasının diğer yöntemlerin hatalarına göre fazla olduğu, uzak alana doğru gidildikçe bu farkın azaldığı görülmüştür.

Şekil 5.20'te kare kaynak dağılımı için, farklı uzaklıklarda  $FRI_{HKFD}$ ,  $FRI_{AKFD}$  ve  $RS_{GK}$  yöntemleri ile elde edilen kırınım desenleri gösterilir. Örnek sayısı  $N = 512$ , örnekleme periyodu Eş. 5.33'teki gibi, gözlem düzleminde en küçük aralıkları veren örnekleme periyodu olarak seçilmiştir. Düz çizgi GK; kare HKFD; noktalar da AKFD yöntemi ile elde edilen kırınım deseni örneklerini gösterir. Dik kesikli çizgi  $z = d$  uzaklığındaki gözlem düzlemindeki Fresnel bölgesinin sınırlarını,  $x_f$ , gösterir. Şekil 5.20 incelendiğinde HKFD ve AKFD yöntemlerinin GK yöntemine, Fresnel bölgesi içerisinde, yakın sonuçlar verdiği görülür. Yayılma eksenini olan  $z$  ekseninden uzaklaştıkça yöntemler GK yönte-

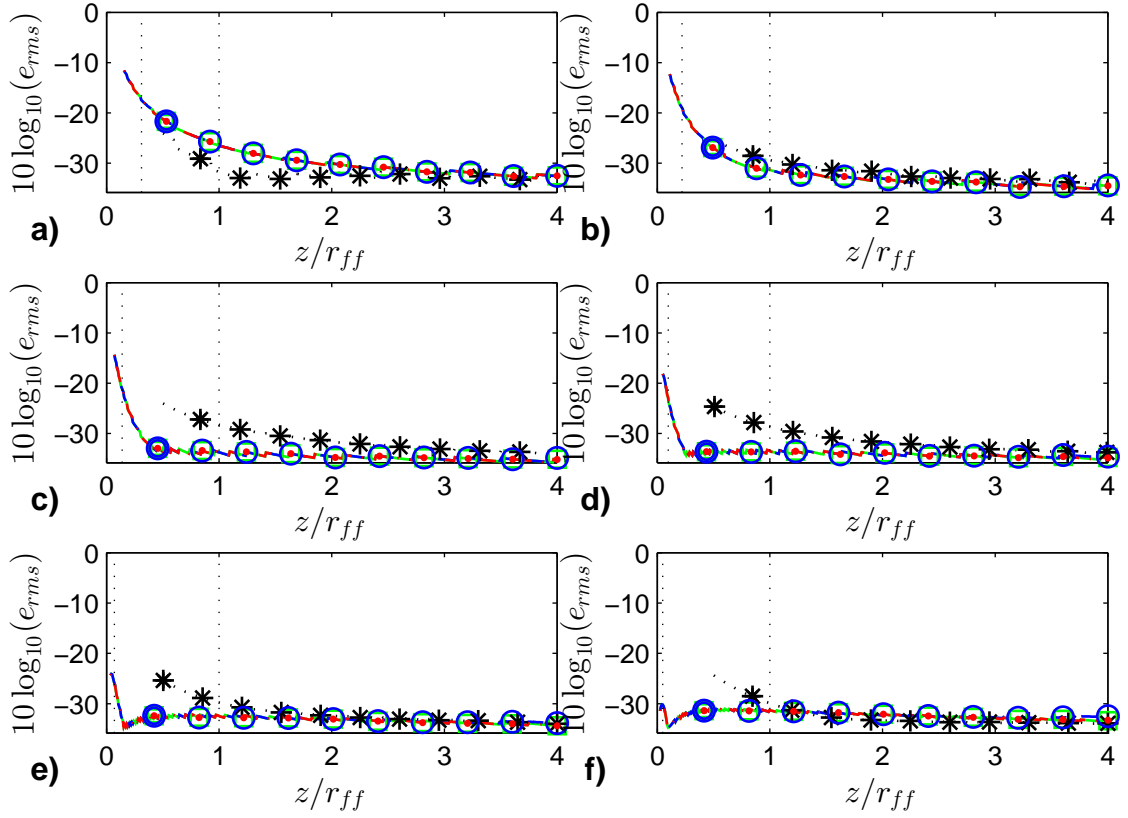


Şekil 5.6. Gauss kaynak dağılımı için,  $FRI_{GK}$  (kare),  $FNI_{GK}$  (yıldız),  $FRI_{HKFD}$  (daire),  $FRI_{AKFD}$  (nokta) kırınım desenlerinin  $e_{rms}$  hatalarının gözlem uzaklığı ile değişimi. Açıklık boyu a)  $2L = \lambda$ , b)  $2L = 2\lambda$ , c)  $2L = 5\lambda$ , d)  $2L = 10\lambda$ , e)  $2L = 20\lambda$ , f)  $2L = 40\lambda$ .

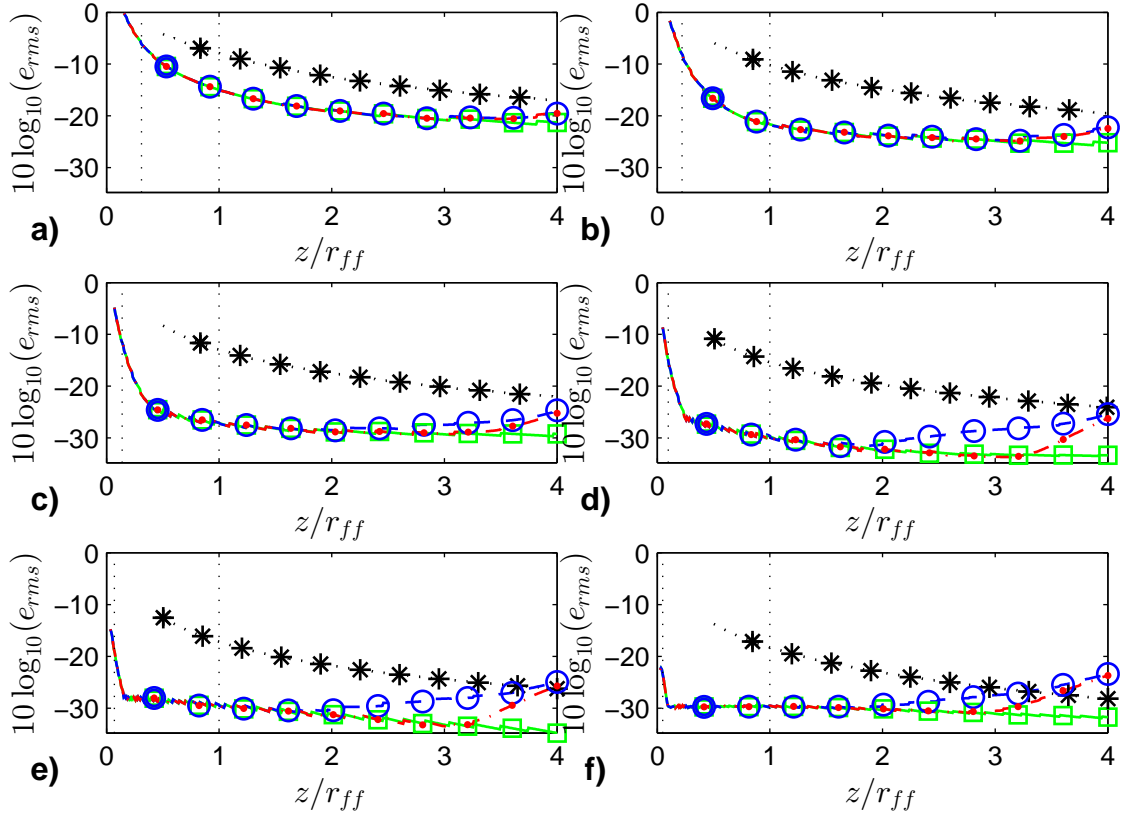
minin verdiği değerlerden farklı değerler verir.

Doğrusal fazlı kare, Gauss-chirp ve HG kaynak dağılımları için,  $2L = 2\lambda$  ve  $2L = 20\lambda$  açıklık boyları için  $RS_{GK}$ ,  $FRI_{HKFD}$  ve  $FRI_{AKFD}$  yöntemleri ile elde edilen kırınım desenleri EK-1'de verilmiştir.

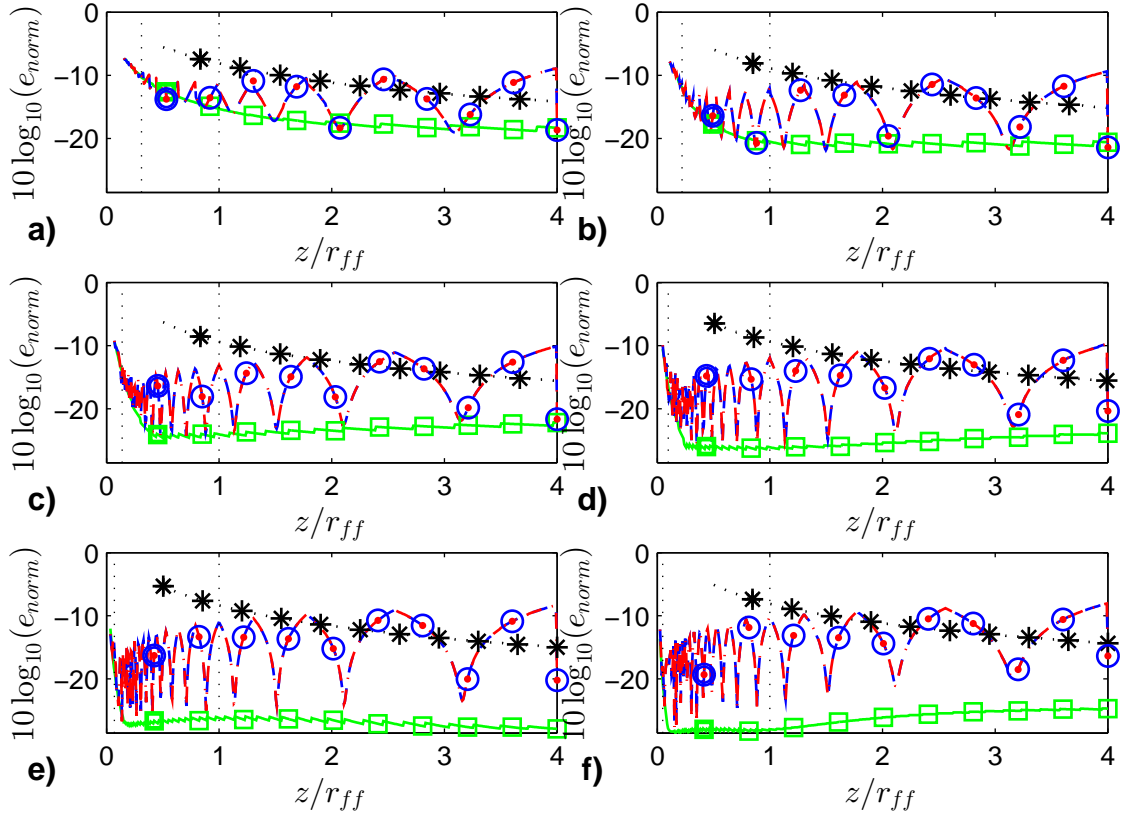
Yöntemlerin hesaplama karmaşıklığının incelenmesinde yöntemlerin hesaplama süreleri kullanılmıştır. Yöntemler Matlab ortamında, Intel Core i7 işlemcili, 2.4 GHz hızında, 16 GB RAM hafızalı bir bilgisayarda koşturulmuştur. Şekil 5.23, kare kaynak dağılımı ve  $L = 20\lambda$  için yöntemlerin kırınım deseni hesaplama sürelerini, gözlem düzleminin uzaklığına göre gösterir. HKFD yöntemi GK yöntemine göre yaklaşık  $10^3$ , AKFD yöntemine göre de yaklaşık 10 kat az sürede kırınım desenini hesaplamaktadır.



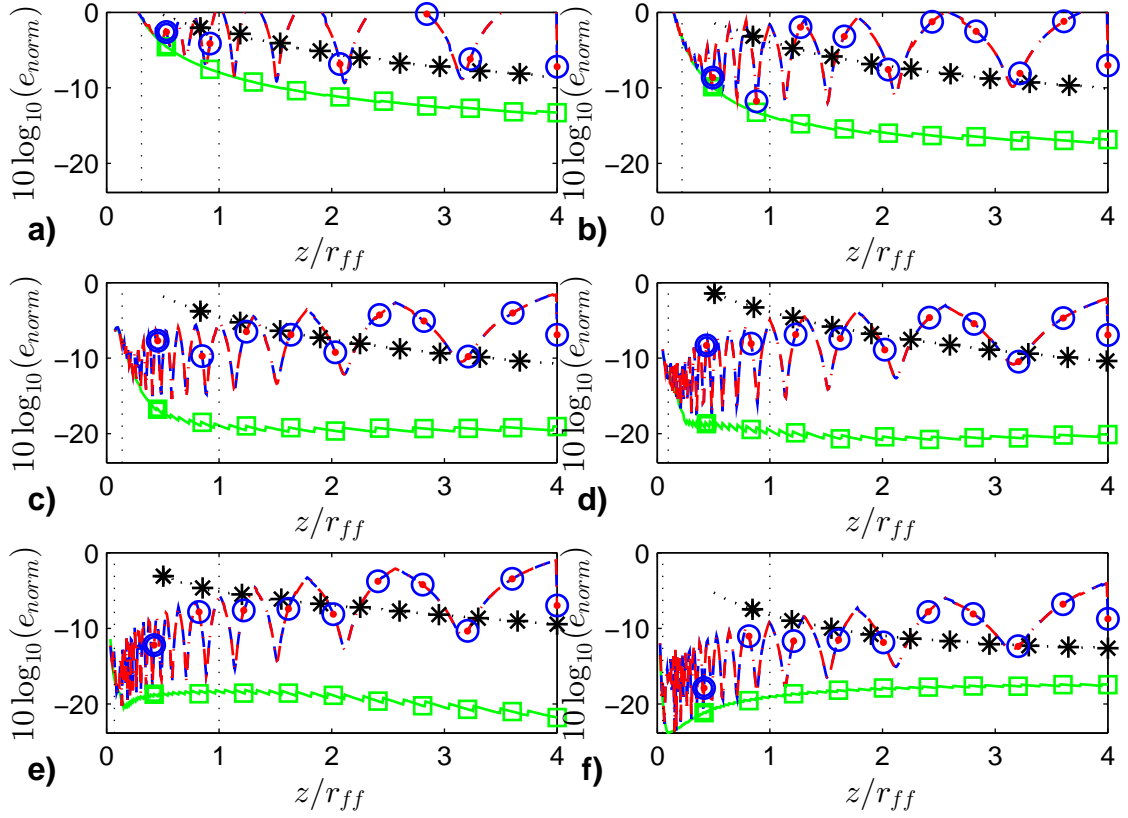
Şekil 5.7. Gauss-chirp kaynak dağılımı için,  $FRI_{GK}$  (kare),  $FNI_{GK}$  (yıldız),  $FRI_{HKFD}$  (daire),  $FRI_{AKFD}$  (nokta) kırınım desenlerinin  $e_{rms}$  hatalarının gözlem uzaklığı ile değişimi. Açıklık boyu a)  $2L = \lambda$ , b)  $2L = 2\lambda$ , c)  $2L = 5\lambda$ , d)  $2L = 10\lambda$ , e)  $2L = 20\lambda$ , f)  $2L = 40\lambda$ .



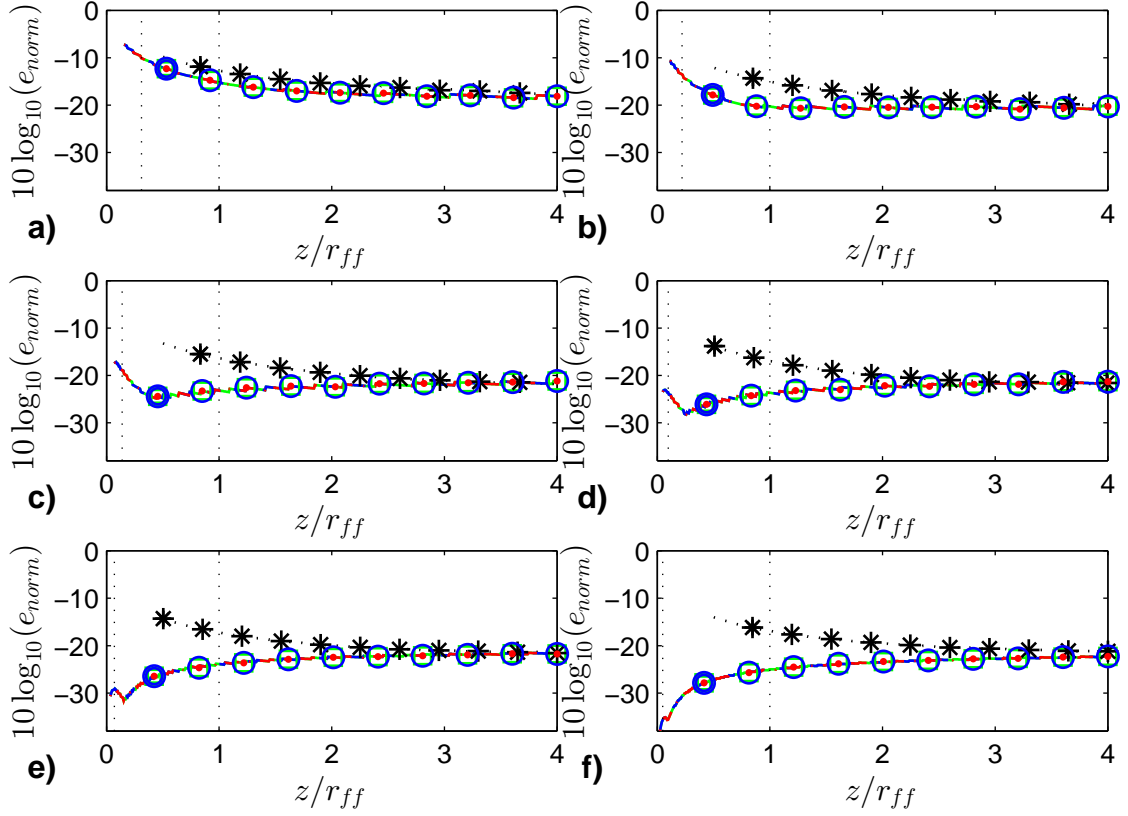
Şekil 5.8. HG kaynak dağılımı için,  $FRI_{GK}$  (kare),  $FNI_{GK}$  (yıldız),  $FRI_{HKFD}$  (daire),  $FRI_{AKFD}$  (nokta) kırınım desenlerinin  $e_{rms}$  hatalarının gözlem uzaklığı ile değişimi. Açıklık boyu a)  $2L = \lambda$ , b)  $2L = 2\lambda$ , c)  $2L = 5\lambda$ , d)  $2L = 10\lambda$ , e)  $2L = 20\lambda$ , f)  $2L = 40\lambda$ .



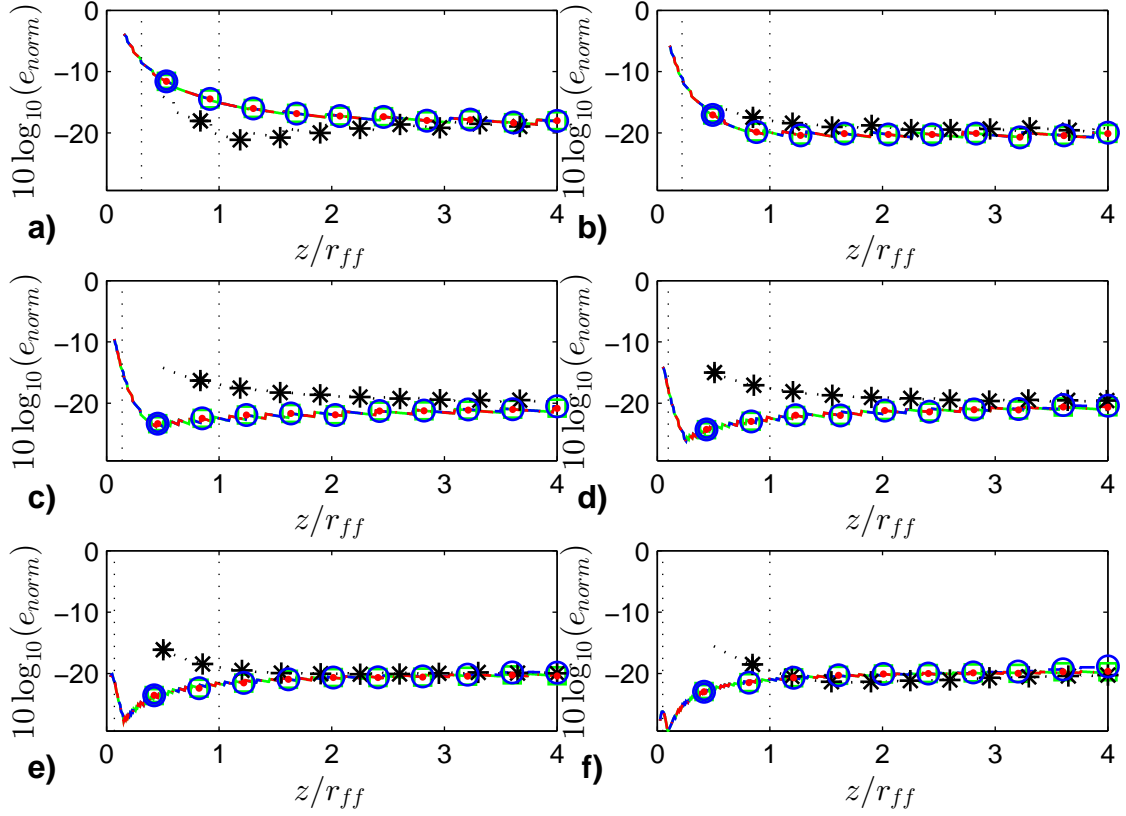
Şekil 5.9. Kare kaynak dağılımı için,  $FRI_{GK}$  (kare),  $FNI_{GK}$  (yıldız),  $FRI_{HKFD}$  (daire),  $FRI_{AKFD}$  (nokta) kırınım desenlerinin  $e_{norm}$  hatalarının gözlem uzaklığı ile değişimi. Açıklık boyu a)  $2L = \lambda$ , b)  $2L = 2\lambda$ , c)  $2L = 5\lambda$ , d)  $2L = 10\lambda$ , e)  $2L = 20\lambda$ , f)  $2L = 40\lambda$ .



Şekil 5.10. Doğrusal fazlı kaynak dağılımı için,  $FRI_{GK}$  (kare),  $FNI_{GK}$  (yıldız),  $FRI_{HKFD}$  (daire),  $FRI_{AKFD}$  (nokta) kırınım desenlerinin  $e_{norm}$  hatalarının gözlem uzaklığı ile değişimi. Açıklık boyu a)  $2L = \lambda$ , b)  $2L = 2\lambda$ , c)  $2L = 5\lambda$ , d)  $2L = 10\lambda$ , e)  $2L = 20\lambda$ , f)  $2L = 40\lambda$ .

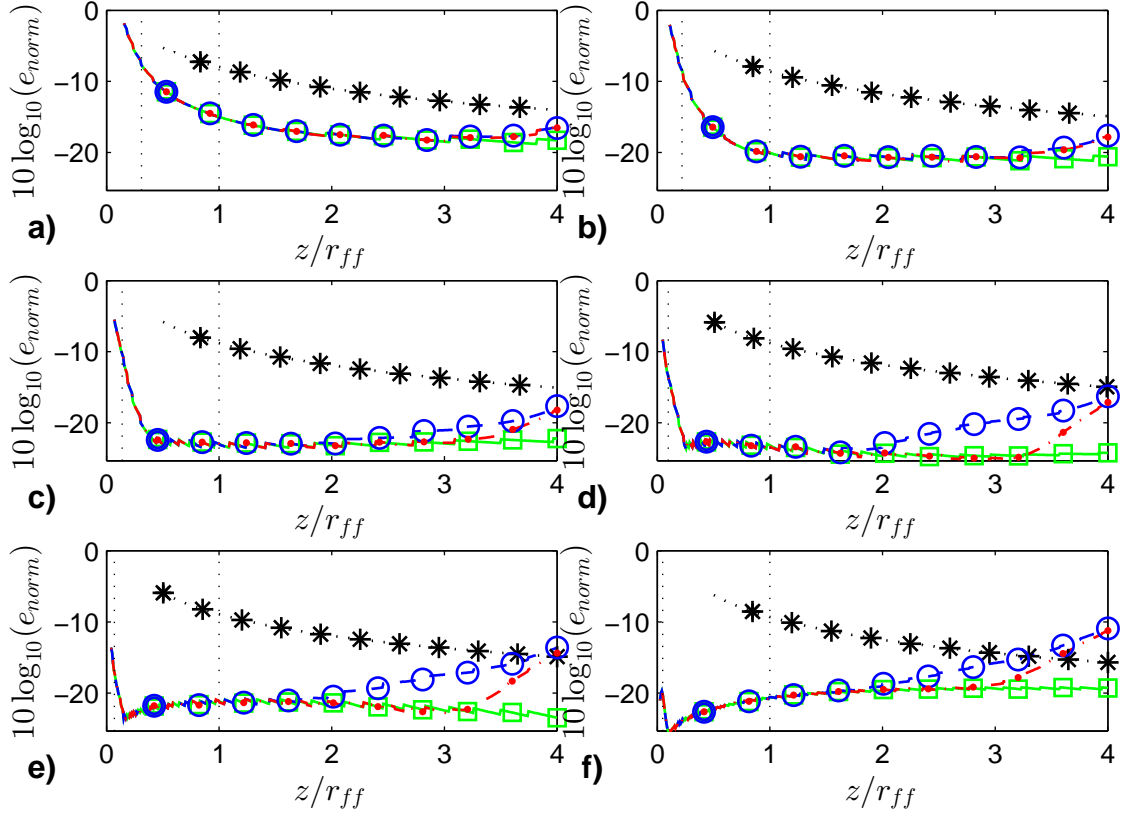


Şekil 5.11. Gauss kaynak dağılımı için,  $FRI_{GK}$  (kare),  $FNI_{GK}$  (yıldız),  $FRI_{HKFD}$  (daire),  $FRI_{AKFD}$  (nokta) kırınım desenlerinin  $e_{norm}$  hatalarının gözlem uzaklığı ile değişimi. Açıklık boyu a)  $2L = \lambda$ , b)  $2L = 2\lambda$ , c)  $2L = 5\lambda$ , d)  $2L = 10\lambda$ , e)  $2L = 20\lambda$ , f)  $2L = 40\lambda$ .

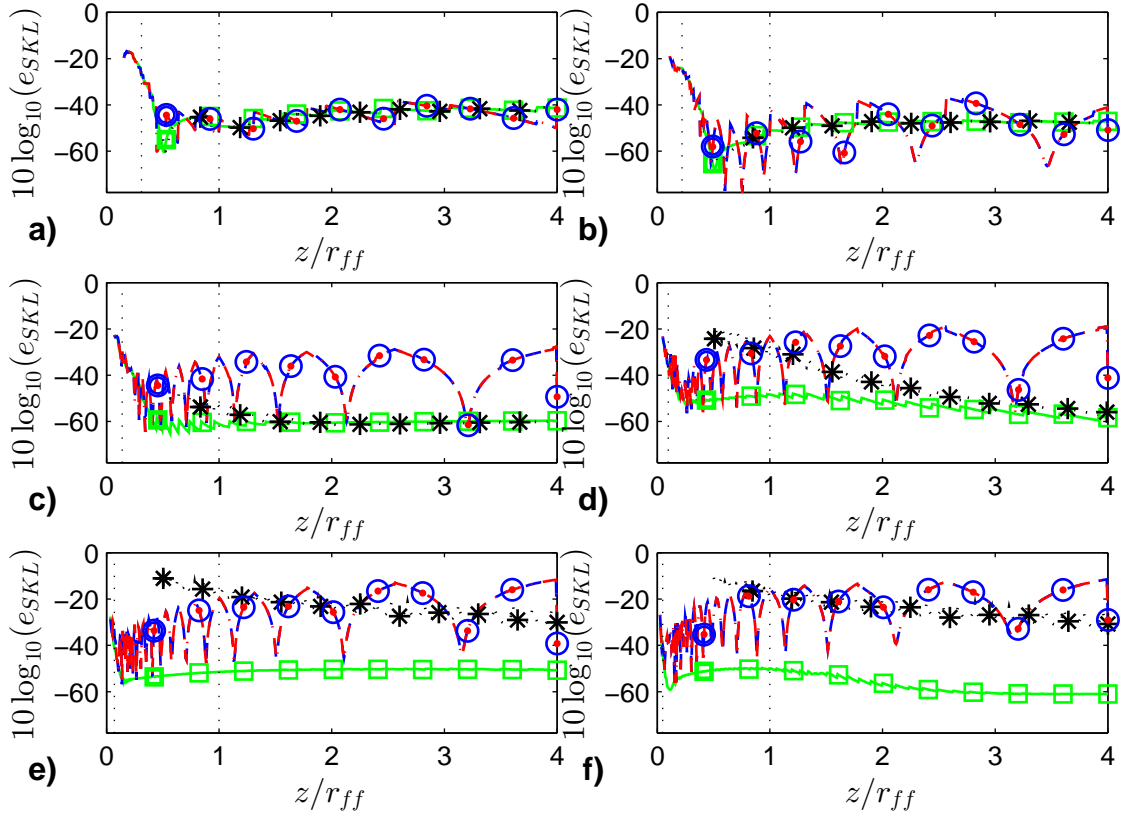


Şekil 5.12. Gauss-chirp kaynak dağılımı için,  $FRI_{GK}$  (kare),  $FNI_{GK}$  (yıldız),  $FRI_{HKFD}$  (daire),  $FRI_{AKFD}$  (nokta) kırınım desenlerinin  $e_{norm}$  hatalarının gözlem uzaklığı ile değişimi. Açıklık boyu a)  $2L = \lambda$ , b)  $2L = 2\lambda$ , c)  $2L = 5\lambda$ , d)  $2L = 10\lambda$ , e)  $2L = 20\lambda$ , f)  $2L = 40\lambda$ .

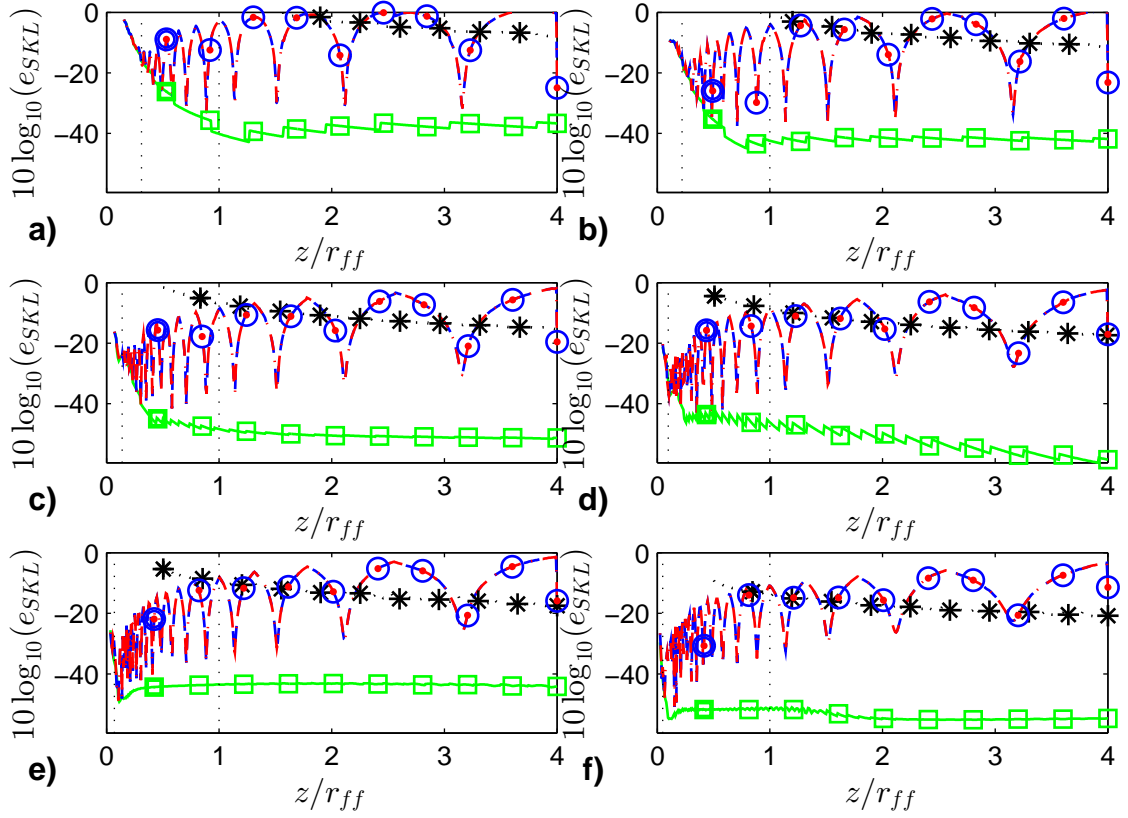




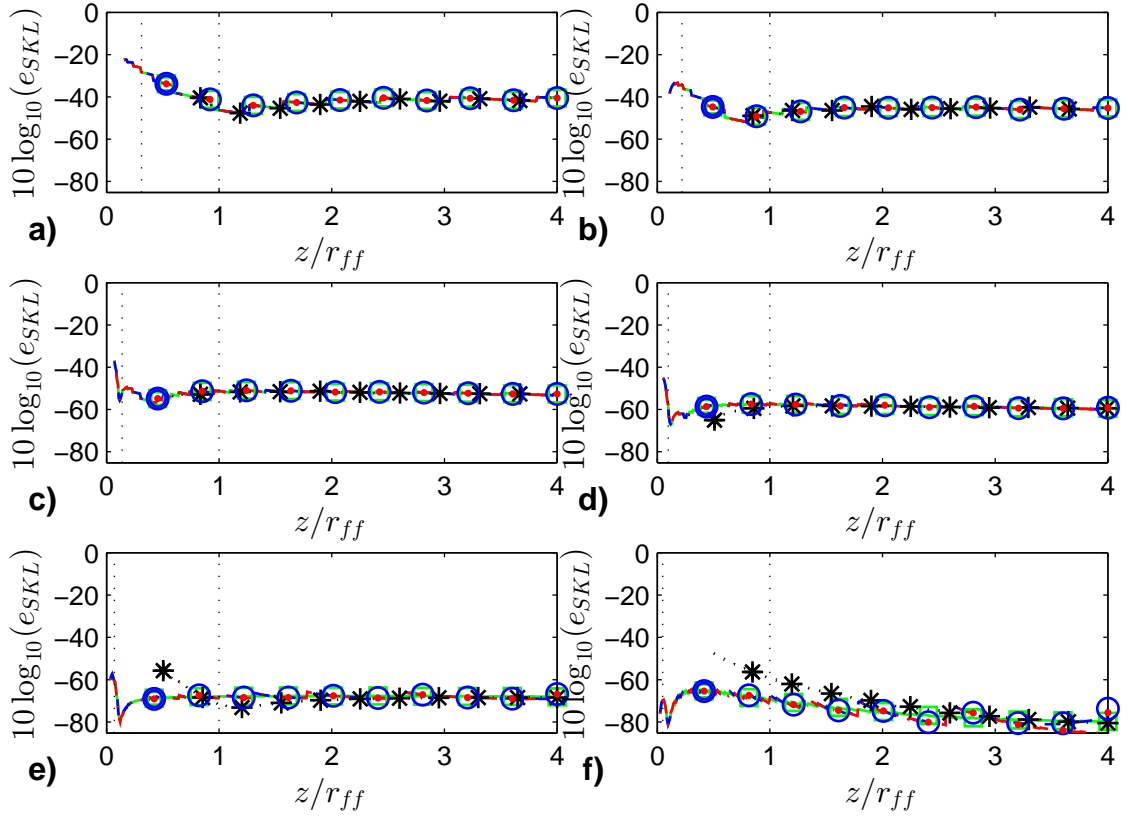
Şekil 5.13. HG kaynak dağılımı için,  $FRI_{GK}$  (kare),  $FNI_{GK}$  (yıldız),  $FRI_{HKFD}$  (daire),  $FRI_{AKFD}$  (nokta) kırınım desenlerinin  $e_{norm}$  hatalarının gözlem uzaklığı ile değişimi. Açıklık boyu a)  $2L = \lambda$ , b)  $2L = 2\lambda$ , c)  $2L = 5\lambda$ , d)  $2L = 10\lambda$ , e)  $2L = 20\lambda$ , f)  $2L = 40\lambda$ .



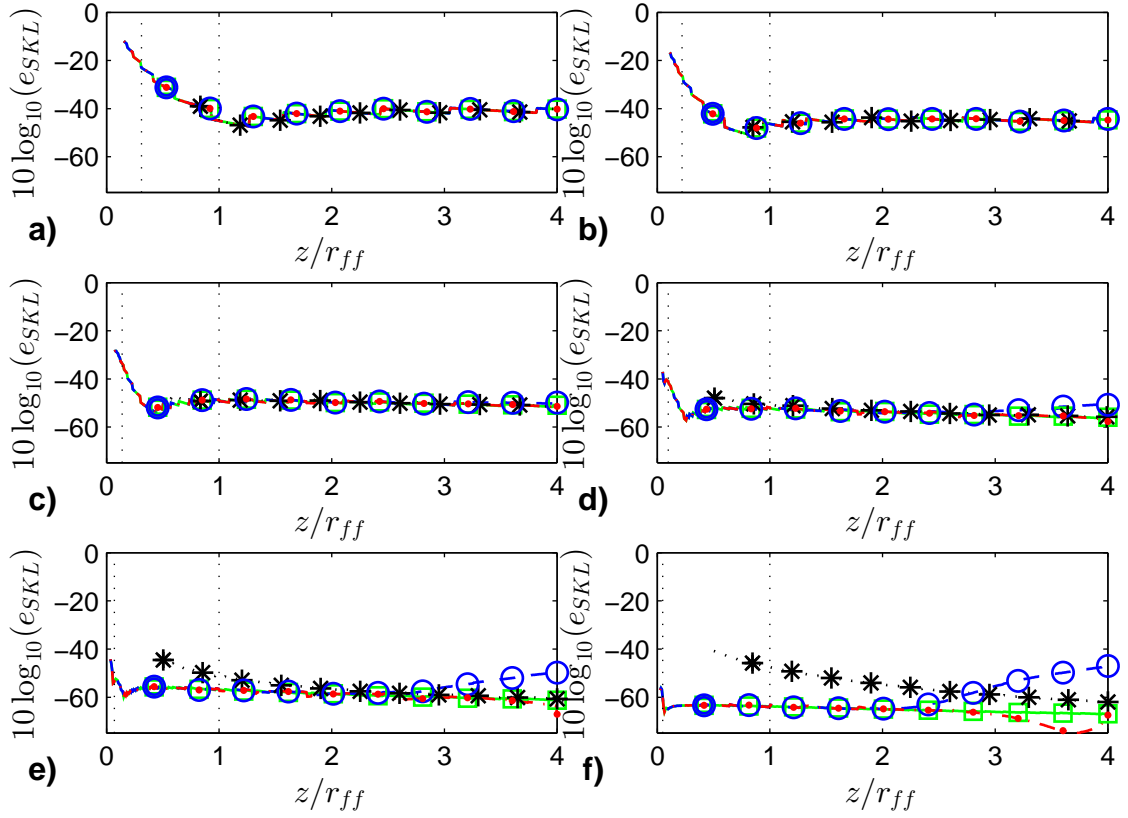
Şekil 5.14. Kare kaynak dağılımı için,  $FRI_{GK}$  (kare),  $FNI_{GK}$  (yıldız),  $FRI_{HKFD}$  (daire),  $FRI_{AKFD}$  (nokta) kırınım desenlerinin  $\epsilon_{SKL}$  hatalarının gözlem uzaklığı ile değişimi. Açıklık boyu a)  $2L = \lambda$ , b)  $2L = 2\lambda$ , c)  $2L = 5\lambda$ , d)  $2L = 10\lambda$ , e)  $2L = 20\lambda$ , f)  $2L = 40\lambda$ .



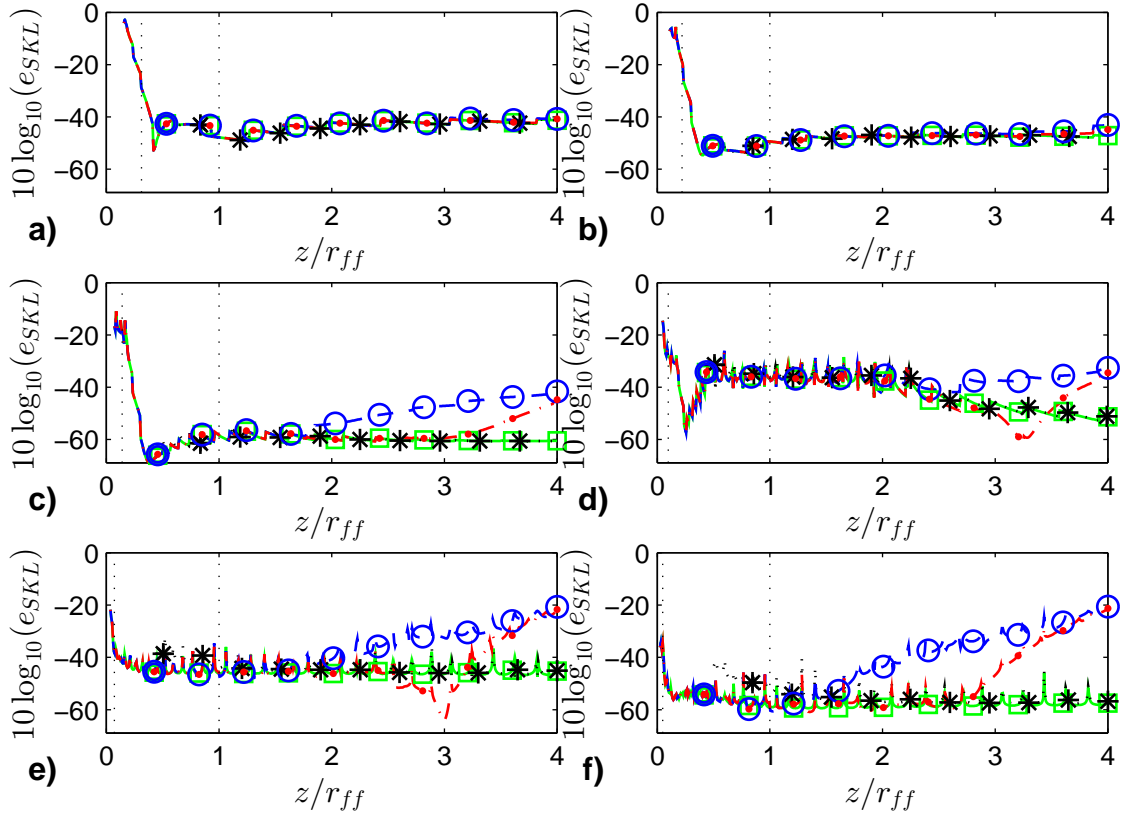
Şekil 5.15. Doğrusal fazlı kaynak dağılımı için,  $FRI_{GK}$  (kare),  $FNI_{GK}$  (yıldız),  $FRI_{HKFD}$  (daire),  $FRI_{AKFD}$  (nokta) kırınım desenlerinin  $\epsilon_{SKL}$  hatalarının gözlem uzaklığı ile değişimi. Açıklık boyu a)  $2L = \lambda$ , b)  $2L = 2\lambda$ , c)  $2L = 5\lambda$ , d)  $2L = 10\lambda$ , e)  $2L = 20\lambda$ , f)  $2L = 40\lambda$ .



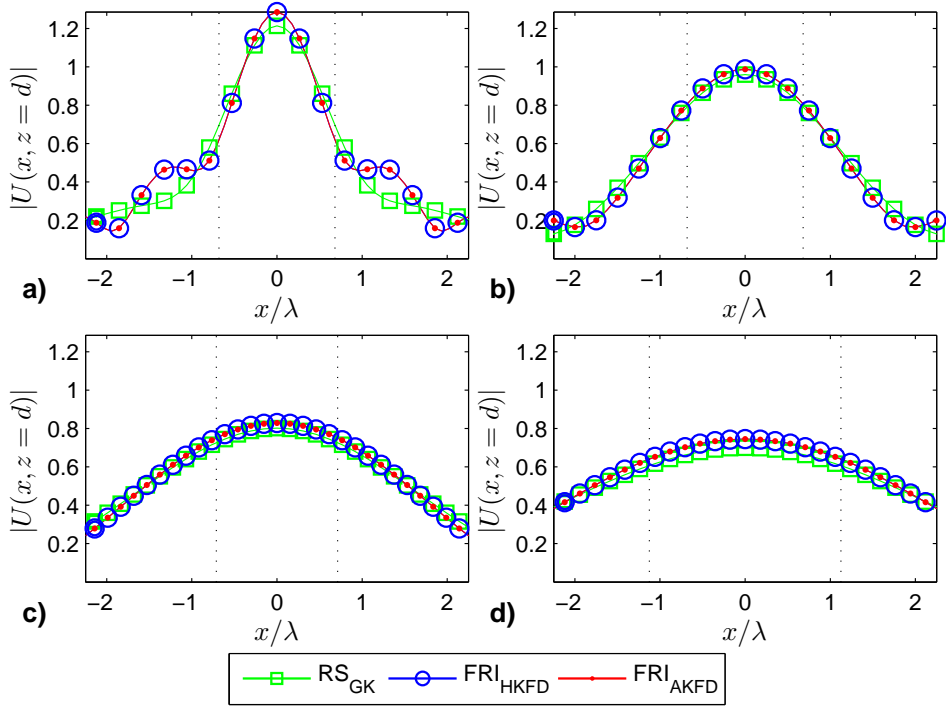
Şekil 5.16. Gauss kaynak dağılımı için,  $FRI_{GK}$  (kare),  $FNI_{GK}$  (yıldız),  $FRI_{HKFD}$  (daire),  $FRI_{AKFD}$  (nokta) kırınım desenlerinin  $\epsilon_{SKL}$  hatalarının gözlem uzaklığı ile değişimi. Açıklık boyu a)  $2L = \lambda$ , b)  $2L = 2\lambda$ , c)  $2L = 5\lambda$ , d)  $2L = 10\lambda$ , e)  $2L = 20\lambda$ , f)  $2L = 40\lambda$ .



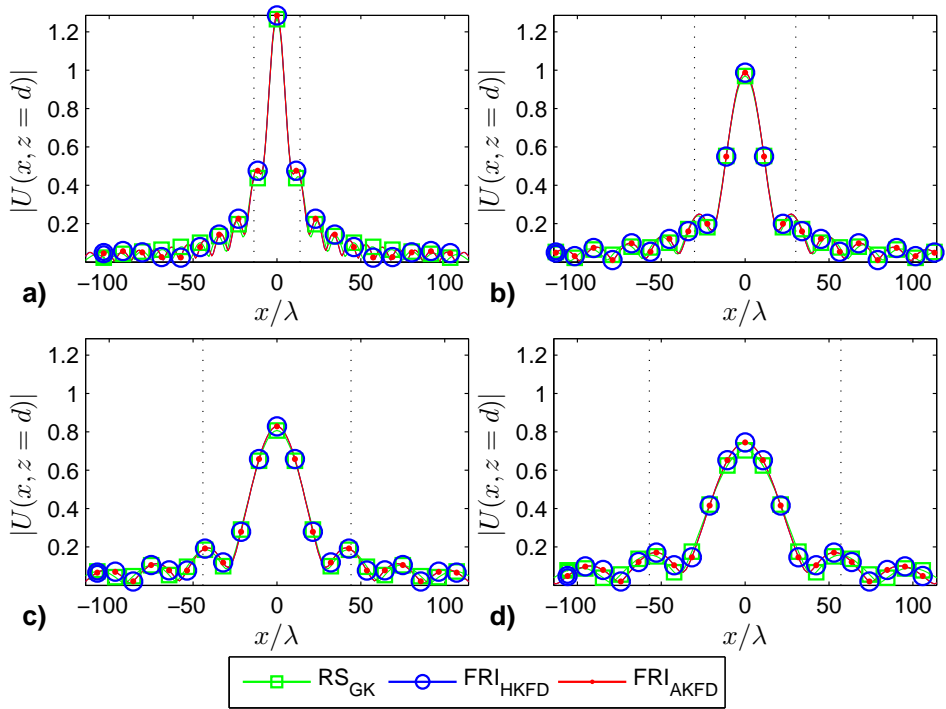
Şekil 5.17. Gauss-chirp kaynak dağılımı için,  $FRI_{IGK}$  (kare),  $FNI_{IGK}$  (yıldız),  $FRI_{HKFD}$  (daire),  $FRI_{AKFD}$  (nokta) kırınım desenlerinin  $e_{SKL}$  hatalarının gözlem uzaklığı ile değişimi. Açıklık boyu a)  $2L = \lambda$ , b)  $2L = 2\lambda$ , c)  $2L = 5\lambda$ , d)  $2L = 10\lambda$ , e)  $2L = 20\lambda$ , f)  $2L = 40\lambda$ .



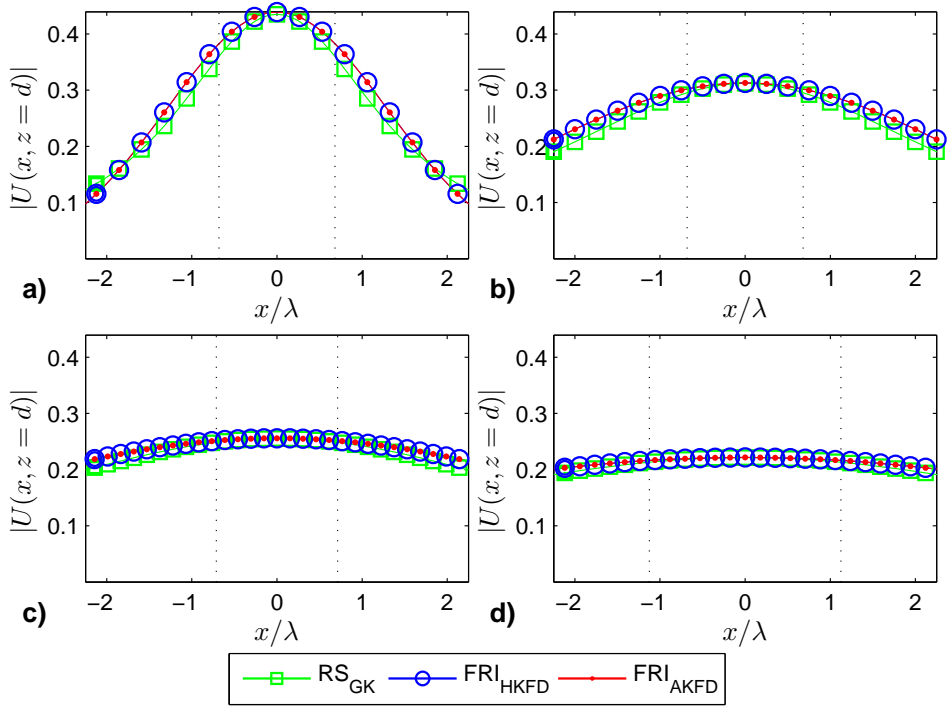
Şekil 5.18. HG kaynak dağılımı için,  $FRI_{GK}$  (kare),  $FNI_{GK}$  (yıldız),  $FRI_{HKFD}$  (daire),  $FRI_{AKFD}$  (nokta) kırınım desenlerinin  $\epsilon_{SKL}$  hatalarının gözlem uzaklığı ile değişimi. Açıklık boyu a)  $2L = \lambda$ , b)  $2L = 2\lambda$ , c)  $2L = 5\lambda$ , d)  $2L = 10\lambda$ , e)  $2L = 20\lambda$ , f)  $2L = 40\lambda$ .



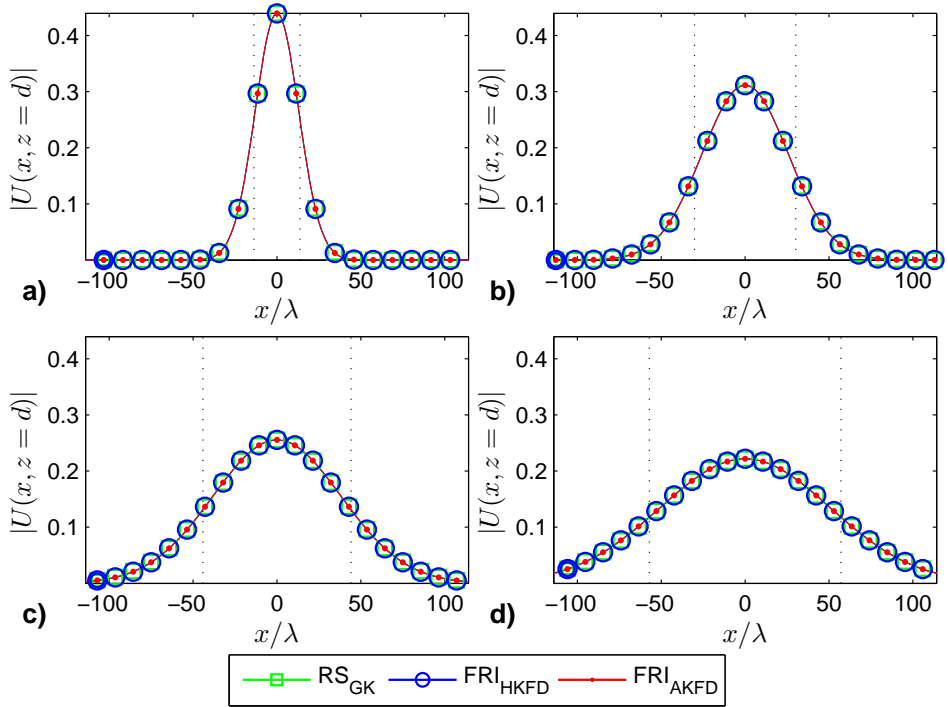
Şekil 5.19. Kare kaynak dağılımı için kırınım desenleri,  $2L = 2\lambda$ , a)  $d = 0.25r_{ff}$ , b)  $d = 0.5r_{ff}$ , c)  $d = 0.75r_{ff}$ , d)  $d = r_{ff}$ .



Şekil 5.20. Kare kaynak dağılımı için kırınım desenleri,  $2L = 20\lambda$ , a)  $d = 0.25r_{ff}$ , b)  $d = 0.5r_{ff}$ , c)  $d = 0.75r_{ff}$ , d)  $d = r_{ff}$ .

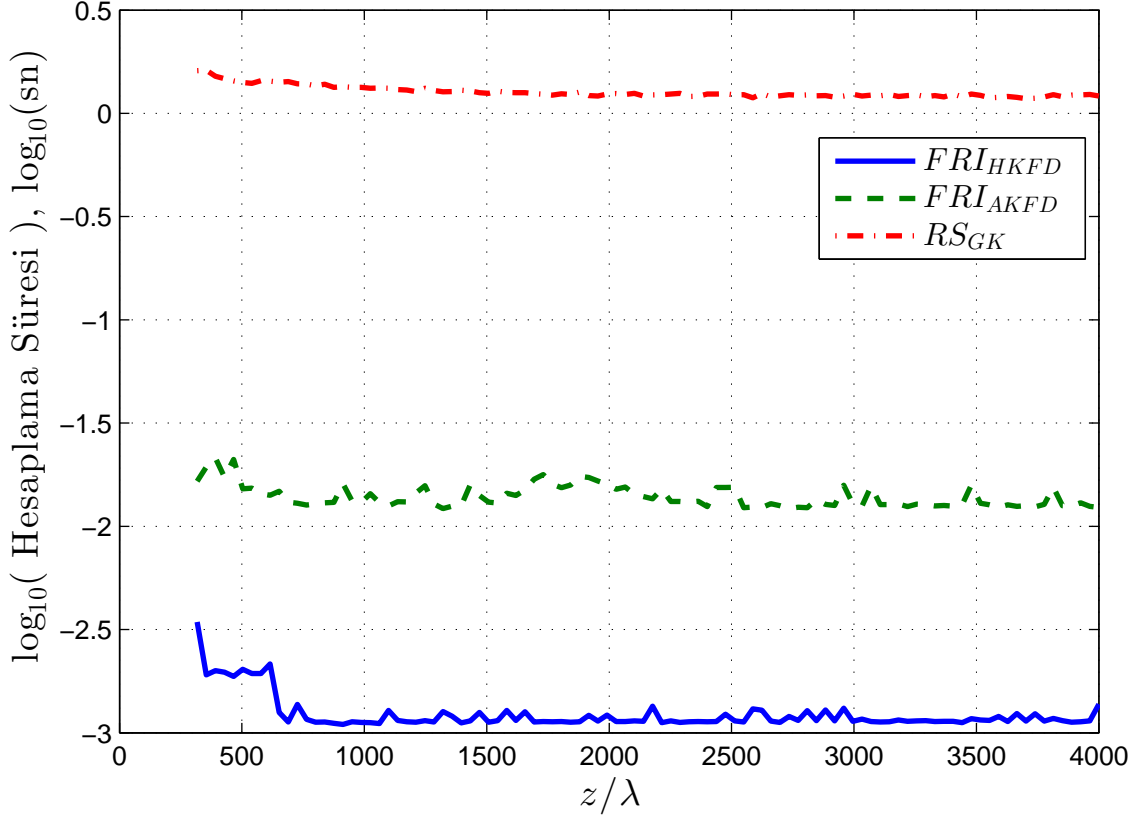


Şekil 5.21. Gauss kaynak dağılımı için kırınım desenleri,  $2L = 2\lambda$ , a)  $d = 0.25r_{ff}$ , b)  $d = 0.5r_{ff}$ , c)  $d = 0.75r_{ff}$ , d)  $d = r_{ff}$ .



Şekil 5.22. Gauss kaynak dağılımı için kırınım desenleri,  $2L = 20\lambda$ , a)  $d = 0.25r_{ff}$ , b)  $d = 0.5r_{ff}$ , c)  $d = 0.75r_{ff}$ , d)  $d = r_{ff}$ .





Şekil 5.23.  $L = 20\lambda$  ve kare kaynak dağılımı için uzaklığa göre  $FRI_{HKFD}$ ,  $FRI_{AKFD}$  ve  $RS_{GK}$  kırınım deseni hesaplama süreleri.

Bu bölümde FRI ve KFD arasındaki ilişki kullanılarak, sayısal KFD hesaplama yöntemleri ile skalar kırınım desenleri elde edilmiştir. Kırınım desenlerinin başarımları RSİ integraline benzerlikleri üzerinden farklı hata işlevleri kullanılarak karşılaştırılmıştır.  $FRI_{HKFD}$  yöntemi ile Fresnel bölgesinde kırınım deseni örnekleri hızlı ve verimli hesaplanabilmektedir. Bir sonraki bölümde  $FRI_{HKFD}$  yöntemi ile elde edilen kırınım desenleri, Zaman Uzamında Sonlu Farklar yöntemi ile elde edilen kırınım desenleri ile karşılaştırılacaktır.

## 6. ZAMAN UZAMINDA SONLU FARKLAR YÖNTEMİ İLE İŞİMA DESENLERİ

Bölüm 6'da geliştirilen KFD ile FRİ hesaplama yönteminin başarımı, çıkış örneklerinin, RSİ örneklerine göre hatası üzerinden incelenmiştir. Bu bölümde, yöntemin başarımı sayısal elektromanyetik yöntem olan Zaman Uzamında Sonlu Farklar (ZUSF) yöntemi ile karşılaştırılmıştır.

ZUSF yöntemi 1966 yılında Yee tarafından geliştirilmiştir [25]. Maxwell denklemlerindeki türev işleçlerinin sonlu farklar yöntemi ile ayrık hale getirilmesine ve elde edilen fark denklemlerinin yinelemeli çözümüne dayanır [27]. Antenin yakın alanında elektrik alan ifadesinin analitik çözümü zorlaşmaktadır. Bu yüzden açıklık antenden yayılan elektromanyetik dalgaların hem uzak hem de yakın alanda incelenmesinde Zaman Uzamında Sonlu Farklar (ZUSF) yöntemi kullanılacaktır. Bu bölümde [26, 27] kaynakları kullanılmıştır.

İki boyutlu uzayda  $TE_z$  kipi için Maxwell denklemleri;

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \left[ \frac{\partial H_z}{\partial y} - \sigma E_x \right] \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \left[ -\frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma E_y \right] \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left[ \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} - \sigma^* H_z \right] \quad (6.3)$$

şeklinde yazılabilir. Yukarıdaki denklemlerde  $\epsilon$  dielektrik,  $\mu$  manyetik geçirgenlik,  $\sigma$  elektrik iletkenlik,  $\sigma^*$  manyetik iletkenlik sabitleridir. Yukarıdaki Maxwell denklemleri, türev işleçlerinin sonlu farklar yaklaşırması ile uzay ve zamanda Eş. 6.4-6.6'daki gibi ayrık hale getirilebilir.

$$E_x|_{k+\frac{1}{2},l}^{n+1} = C_a E_x|_{k+\frac{1}{2},l}^n + C_b \left[ H_z|_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - H_z|_{k+\frac{1}{2},l-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right] \quad (6.4)$$

$$E_y|_{k,l+\frac{1}{2}}^{n+1} = C_a E_y|_{k,l+\frac{1}{2}}^n + C_b \left[ H_z|_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - H_z|_{k-\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right] \quad (6.5)$$

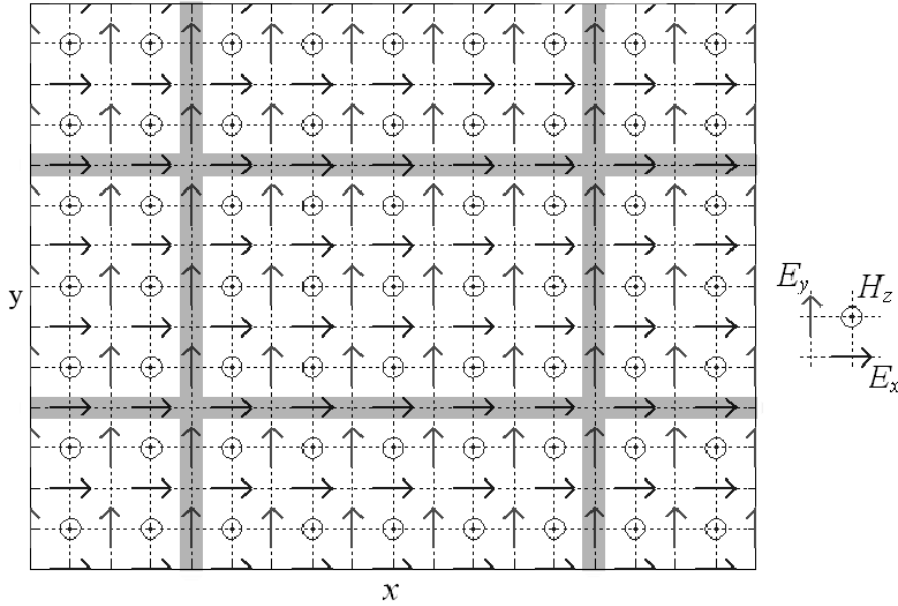
$$H_z|_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}}^{n+1} = D_a H_z|_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}}^n + D_b \left[ E_x|_{k+\frac{1}{2},l+1}^n - E_x|_{k+\frac{1}{2},l}^n + E_y|_{k,l+\frac{1}{2}}^n - E_y|_{k+1,l+\frac{1}{2}}^n \right] \quad (6.6)$$

Yukarıdaki fark denklemlerindeki sabitler  $\Delta x = \Delta y$  için aşağıda verilmiştir.

$$C_a = \frac{1 - \frac{\sigma \Delta t}{2\epsilon}}{1 + \frac{\sigma \Delta t}{2\epsilon}} \quad , \quad C_b = \frac{\frac{\Delta t}{\epsilon \Delta x}}{1 + \frac{\sigma \Delta t}{2\epsilon}} \quad (6.7)$$

$$D_a = \frac{1 - \frac{\sigma^* \Delta t}{2\mu}}{1 + \frac{\sigma^* \Delta t}{2\mu}} \quad , \quad D_b = \frac{\frac{\Delta t}{\mu \Delta x}}{1 + \frac{\sigma^* \Delta t}{2\mu}} \quad (6.8)$$

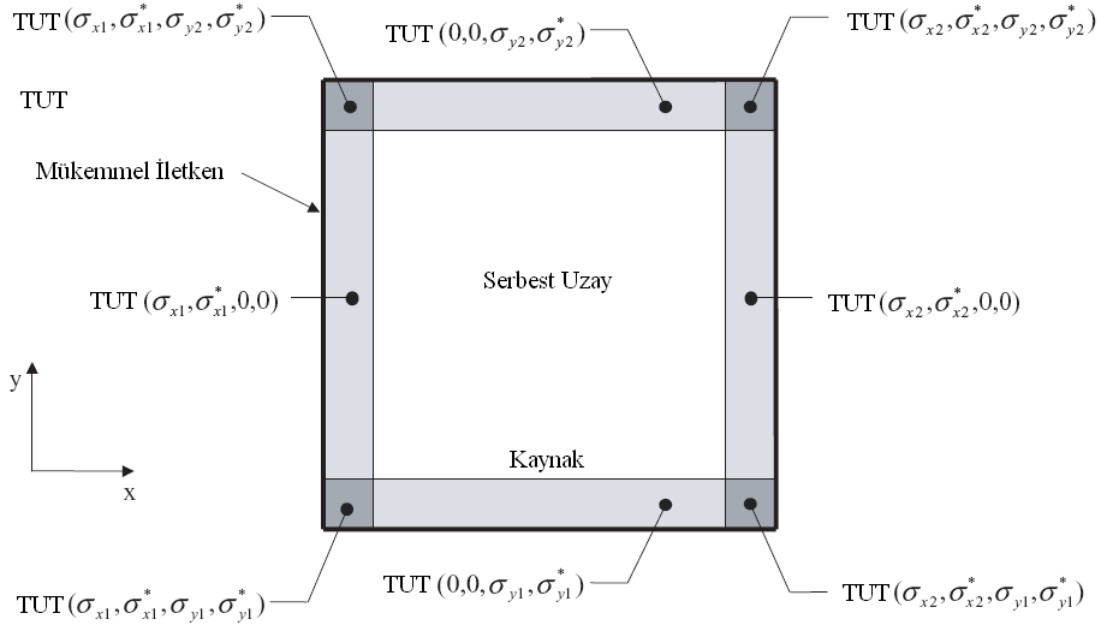
Şekil 6.1 iki boyutlu  $xy$  uzayında elektrik ve manyetik alanların nasıl konumlandığını göstermektedir. İki boyutlu uzay  $x$  ve  $y$  eksenleri boyunca hücelere bölünmüştür.  $\Delta x = \Delta y$ ,  $x$  ve  $y$  eksenlerinde hücrelerin kenar uzunlukları eşit seçilmiştir.  $E_x$  ve  $E_y$  elektrik alanları hücrelerin kenarlarının ortalarında,  $H_z$  manyetik alanı ise hücrelerin orta noktalarına yerleştirilmiştir.  $E_x$  vektörü  $x$  ekseninde yarım indislere,  $E_y$  vektörü  $y$  ekseninde yarım indislere,  $H_z$  vektörü ise her iki eksende yarım indislere yerleştirilmiştir. Zamanda ise manyetik alan yarım zaman indislerine yerleştirilmiştir. Açıklık antenden yayılan EM dalgaların



Şekil 6.1. İki boyutlu ZUSF uzayı ve alanların yerleşimi.

benzetiminde, dalganın sonsuz bir uzaya yayılmasının sağlanması için açık sınır koşulları uygulanmıştır. Bu amaçla Tam Uyumlandırılmış Tabaka (TUT) yöntemi kullanılmıştır [26]. Bu yöntemde dalganın yayıldığı ortamın etrafı TUT'lar ile çevrilir. TUT içindeki elektrik veya manyetik alanlar iki parçaya ayrılarak her

bir parçaya kayıplar atanabilir. Bu sayede soğurucu tabakanın empedansı dalga'nın geliş açısı ve frekansından bağımsız olabilmektedir. Şekil 6.2'de, iki boyutlu serbest uzay düzlemi dört yanından da TUT'lar ile çevrelenmiş, TUT'lar ise mükemmel iletken tabaka ile çevrelenmiştir. Şekil 6.2'de görüldüğü gibi belirli bir yönde EM dalga TUT ile karşılaştığında yalnızca o yöndeki TUT'un elektrik ve manyetik iletkenlikleri sıfırdan farklıdır. TUT'ların kesiştiği bölgelerde ise her yöndeki elektrik ve manyetik iletkenler sıfırdan farklıdır. TUT içerisinde



Şekil 6.2. İki boyutlu TUT açık sınır koşulu için geometri [26].

elektrik ve manyetik alanlar her zaman adımında aşağıdaki fark denklemlerindeki gibi güncellenmektedir:

$$E_x|_{k+\frac{1}{2},l}^{n+1} = C_{a,E_x} E_x|_{k+\frac{1}{2},l}^n - C_{b,E_x} \left[ H_{zx}|_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - H_{zx}|_{k+\frac{1}{2},l-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + H_{zy}|_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - H_{zy}|_{k+\frac{1}{2},l-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right] \quad (6.9)$$

$$E_y|_{k,l+\frac{1}{2}}^{n+1} = C_{a,E_y} E_y|_{k,l+\frac{1}{2}}^n - C_{b,E_y} \left[ H_{zx}|_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - H_{zx}|_{k-\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + H_{zy}|_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - H_{zy}|_{k-\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right] \quad (6.10)$$

$$H_{zx}|_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = D_{a,H_{zx}} H_{zx}|_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - D_{b,H_{zx}} \left[ E_y|_{k+1,l+\frac{1}{2}}^n - E_y|_{k,l+\frac{1}{2}}^n \right] \quad (6.11)$$

$$H_{zy}|_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = D_{a,H_{zy}} H_{zy}|_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - D_{b,H_{zy}} \left[ E_x|_{k+\frac{1}{2},l+1}^n - E_x|_{k+\frac{1}{2},l}^n \right] \quad (6.12)$$

Yukarıdaki denklemlerdeki sabitler  $\Delta x = \Delta y$  için aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned}
 C_{a,E_x} &= e^{-\frac{\sigma_y \Delta t}{\epsilon}} & , & & C_{b,E_x} &= \frac{1 - C_{a,E_x}}{\sigma_y \Delta x} \\
 C_{a,E_y} &= e^{-\frac{\sigma_x \Delta t}{\epsilon}} & , & & C_{b,E_y} &= \frac{1 - C_{a,E_y}}{\sigma_x \Delta x} \\
 D_{a,H_{zx}} &= e^{-\frac{\sigma_x^* \Delta t}{\mu}} & , & & D_{b,H_{zx}} &= \frac{1 - D_{a,H_{zx}}}{\sigma_x^* \Delta x} \\
 D_{a,H_{zy}} &= e^{-\frac{\sigma_y^* \Delta t}{\mu}} & , & & D_{b,H_{zy}} &= \frac{1 - D_{a,H_{zy}}}{\sigma_y^* \Delta x}
 \end{aligned}
 \tag{6.13}$$

ZUSF benzetimlerinde açıklık anten serbest uzayla TUT tabakanın kesiştiği  $y = 0$  doğrusu boyunca yerleştirilmiştir. Açıklığın üzerinde bulunduğu mükemmel iletken,  $y = 0$  doğrusu boyunca teğet elektrik alan olan  $E_x$ 'in sifıra eşitlenmesi ile elde edilmiştir. Açıklık anten üzerinde  $E_x$  değerlerine genliği sabit tek frekanslı kaynak atanmıştır. Bu şekilde açıklık antenden EM dalga yayılımı benzetimi sabit bir frekans için yapılmıştır. Şekil 6.1'de gösterilen ZUSF ızgarasının bir hücresindeki elektrik alanın genliği  $|\bar{E}| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$  olarak ifade edilebilir. Sinüzoidal kaynağın periyodu  $T = N\Delta t$  olarak ifade edilirse, ortalama elektrik alan genliği,

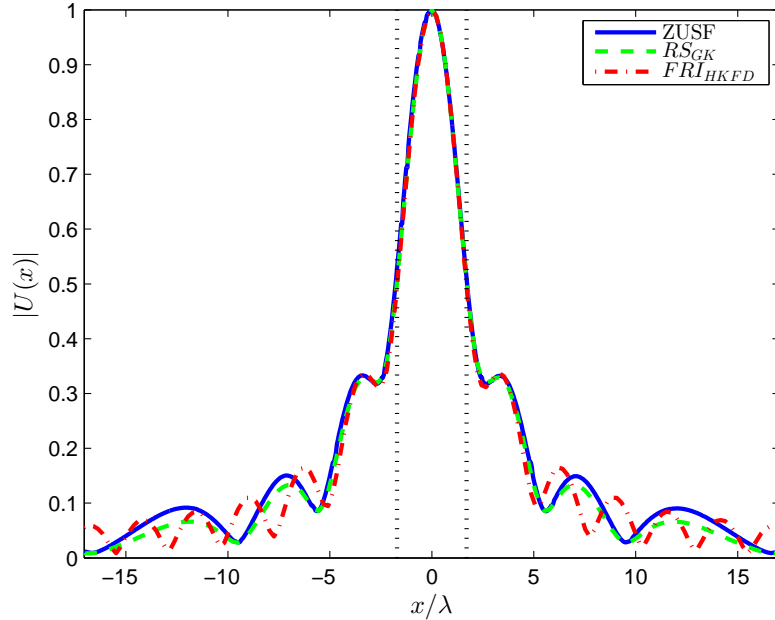
$$|\bar{E}|_{av} = \frac{1}{N} \sum_{n=n_t}^{n_t+N} |\bar{E}^n| \tag{6.14}$$

olur. Burada  $n_t$ , EM dalganın açıklık antenden  $r$  mesafesi kadar uzağa ilerlemesi için gereken süreye karşılık gelen zaman adımı sayısıdır.

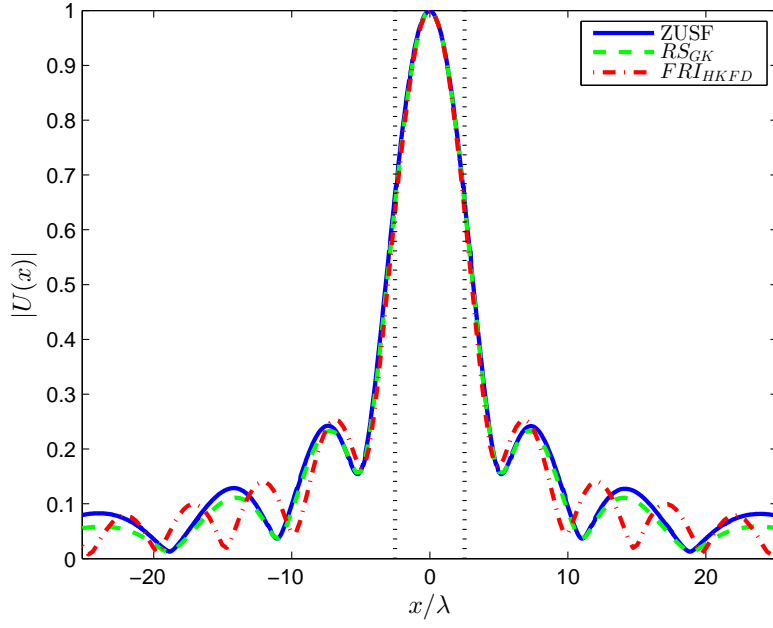
ZUSF yöntemi ile benzetimi yapılan bölgedeki elektromanyetik alanlar elde edilir. Açıklığa belirli bir mesafedeki gözlem düzlemi üzerinde her noktada Eş. 6.14'ün uygulanması ile, elektrik alan genliğinin deseni çıkartılabilir. Bu tez kapsamında, iki ve üç boyutlu uzay için ZUSF algoritması MATLAB ortamında yazılarak, elektrik alan desenlerinin elde edilmesinde kullanılmıştır. Boyu  $2L = 5\lambda$  olan bir açıklık için, Eş. 5.27 ile verilen kare dağılımı, geliştirilen ZUSF algorit-

masına girilerek elektrik alan desenleri elde edilmiştir.

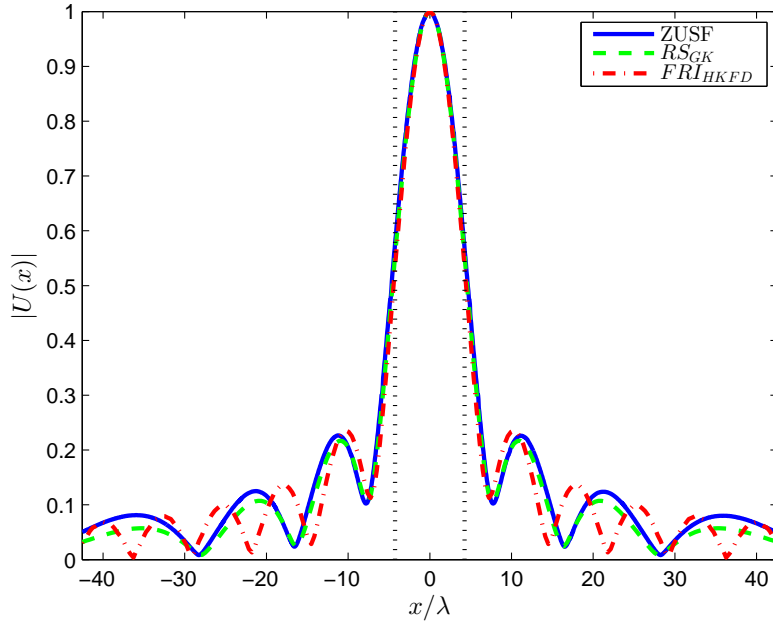
Bölüm 5'te KFD ile FRI hesaplama yöntemleri analitik çözümün örneklerine en yakın örnekleri veren  $RS_{GK}$  ile karşılaştırılmıştır. Bu bölümde anlatılan sayısal ZUSF yöntemi ile elde edilen kırınım desenleri,  $FRI_{HKFD}$  ve  $RS_{GK}$  desenleri ile karşılaştırılmıştır. ZUSF ile  $RS_{GK}$ 'ninkine benzer ışınım desenleri bulunurken,  $FRI_{HKFD}$  yöntemi ile Fresnel bölgesinde ZUSF ve  $RS_{GK}$ 'ya yakın sonuçlar elde edilmiştir. Şekil 6.3'te,  $d = 0.25r_{ff}$  için, Şekil 6.4'te,  $d = 0.50r_{ff}$  için, Şekil 6.5'te,  $d = 0.75r_{ff}$  için, Şekil 6.4'te,  $d = r_{ff}$  için ZUSF,  $RS_{GK}$  ve  $FRI_{HKFD}$  yöntemleri ile boyu  $2L = 5\lambda$  ve kare kaynak dağılımına sahip bir açıklık için elde edilen kırınım desenleri gösterilmektedir. Şekillerde noktalı dikey çizgiler arasında kalan bölge Fresnel yaklaşımının en fazla  $\pi/100$  faz hatası ile geçerli olduğu bölgeyi gösterir. FRI integralinin RSİ ve ZUSF ile elde edilen desenlere Fresnel bölgesinde yakın olduğu, Fresnel bölgesinin dışına çıkıldıkça, Fresnel yaklaşımının geçerliliğini yitirdiği için, kırınım desenlerinin farklı olduğu görülür. ZUSF yöntemi ile benzetim uzayının her noktasındaki elektrik ve manyetik alanlar yinelemeli bir şekilde çözüldüğü için hesaplama karmaşıklığı yüksektir.



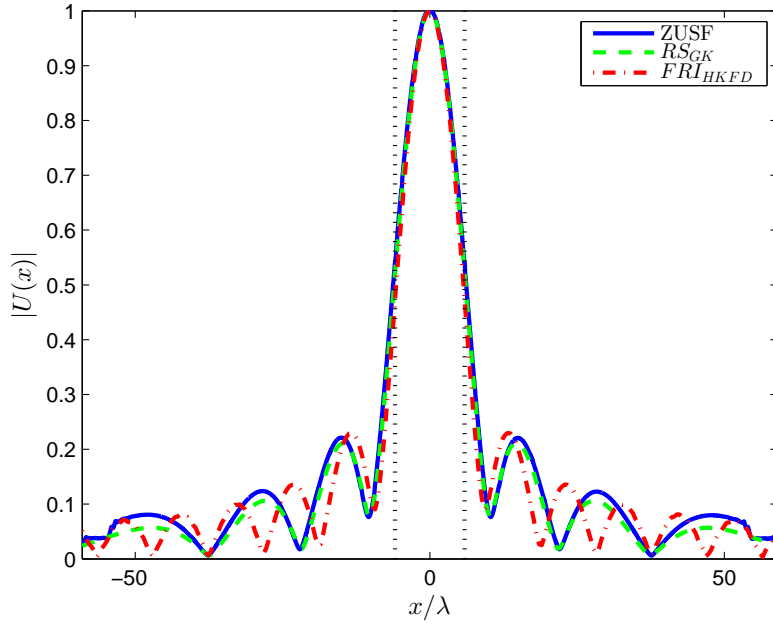
Şekil 6.3.  $d = 0.25r_{ff}$  için ZUSF,  $RS_{GK}$ ,  $FRI_{HKFD}$  kırınım desenleri.



Şekil 6.4.  $d = 0.50r_{ff}$  için  $ZUSF$ ,  $RS_{GK}$ ,  $FRI_{HKFD}$  kırınım desenleri.



Şekil 6.5.  $d = 0.75r_{ff}$  için  $ZUSF$ ,  $RS_{GK}$ ,  $FRI_{HKFD}$  kırınım desenleri.



Şekil 6.6.  $d = r_{ff}$  için  $ZUSF$ ,  $RS_{GK}$ ,  $FRI_{HKFD}$  kırınım desenleri.

Çizelge 6.1'de, Şekil 6.3-Şekil 6.6 ile dört farklı uzaklıkta verilen kırınım desenleri için,  $FRI_{HKFD}$  ve  $ZUSF$  yöntemlerinin  $RS_{GK}$ 'ya göre hata değerleri verilmiştir. Hata değerleri Eş. 5.20-5.26 ile verilen hata fonksiyonları ile, sadece Fresnel bölgesinde kalan örnekler üzerinden hesaplanmıştır. Çizelge 6.1 incelendiğinde açıklığa yakın gözlem düzlemleri için  $FRI_{HKFD}$ 'nin  $RS_{GK}$ 'ya daha çok benzediği, uzak mesafeler içinse  $ZUSF$  yönteminin  $RS_{GK}$ 'ya daha yakın değerler verdiği görülmüştür.

Çizelge 6.1. Açıklık boyu  $2L = 5\lambda$  için Fresnel bölgesinde  $FRI_{HKFD}$  ve  $ZUSF$  yöntemlerinin,  $RS_{GK}$ 'ya göre hata değerleri.

$z = d$	$e_{rms}^{(FRI_{HKFD})}$	$e_{rms}^{(ZUSF)}$	$e_{norm}^{(FRI_{HKFD})}$	$e_{norm}^{(ZUSF)}$	$e_{SKL}^{(FRI_{HKFD})}$	$e_{SKL}^{(ZUSF)}$
$0.25r_{ff}$	0.002	0.012	0.002	0.014	$6.66 \times 10^{-6}$	$1.63 \times 10^{-4}$
$0.5r_{ff}$	0.007	0.007	0.008	0.008	$3.95 \times 10^{-5}$	$6.04 \times 10^{-5}$
$0.75r_{ff}$	0.010	0.011	0.012	0.013	$1.03 \times 10^{-4}$	$1.20 \times 10^{-4}$
$r_{ff}$	0.024	0.009	0.028	0.011	$6.27 \times 10^{-4}$	$7.29 \times 10^{-5}$

$ZUSF$  yöntemi açıklık düzleminde başlayarak, benzetim uzayının her noktasında sonlu farklar yöntemi ile ayrık hale getirilen Maxwell denklemlerini yinele-



meli olarak çözmektedir. Elektrik ve manyetik alan vektörlerinin her bileşeni için benzetim uzayındaki Yee hücre sayısı ile doğru orantılı hafıza gerekmekte ve hesaplama karmaşıklığı artmaktadır. İki boyutlu uzay için ZUSF'nin hesaplama karmaşıklığı  $\mathcal{O}(N^3)$ 'den daha fazla olur. Kırınım deseni elde etmek için skalar yaklaştırma altında KFD kullanıldığında hesaplama karmaşıklığı  $\mathcal{O}(N \log(N))$  olur. Fresnel bölgesinde, KFD ile ZUSF yöntemine göre çok daha hızlı kırınım deseni elde edilebilir.

Bir sonraki bölümde, Bölüm 5'te anlatılan skalar kırınım deseni hesaplama yöntemi için geliştirilen kullanıcı arayüzü anlatılacaktır.

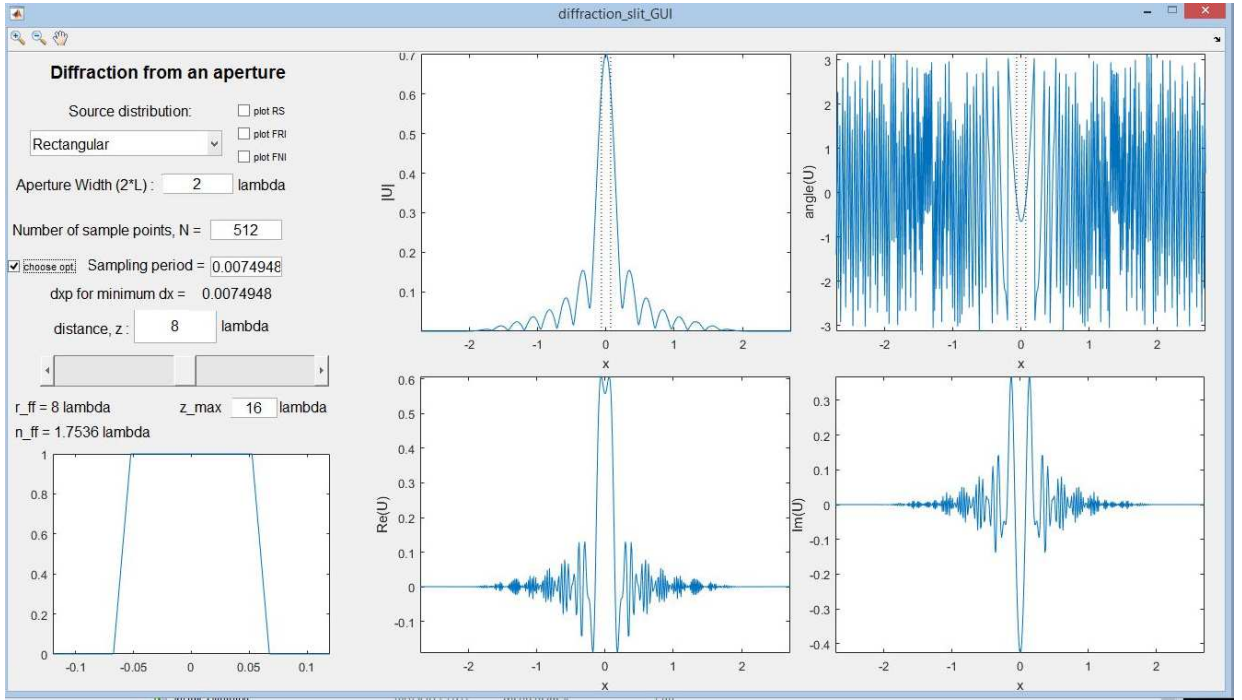
## 7. KIRINIM DESENLERİNİN HESAPLANMASI İÇİN KULLANICI ARAYÜZÜ

Bölüm 5'te geliştirilen FRI integralinin farklı örnekleme aralıkları için hızlı ve verimli çözümünü veren  $FRI_{HKFD}$  algoritmasının  $RS_{GK}$  ve  $FRI_{GK}$  yöntemleri ile daha ayrıntılı karşılaştırılabilmesi için bir kullanıcı arayüzü tasarlanmıştır. Böylece, kırınım desenlerinin hesaplanmasında örnekleme periyodu, açıklık boyuna olan uzaklık, açıklık üzerindeki kaynak dağılımı, örnek sayısı, açıklık boyu parametrelerinin etkisi daha hızlı ve ayrıntılı olarak incelenebilir.

Tasarlanan kullanıcı arayüzü Şekil 7.1'de verilmiştir. Kaynak dağılımı olarak Eş. 5.27-5.31 ile verilen dağılımlar seçilebilir. Açıklık boyu, örnek sayısı, örnek periyodu gözlem düzleminin açıklık düzlemine olan uzaklığı kullanıcı tarafından girilebilmektedir.  $FRI_{HKFD}$  ile elde edilen kırınım deseninin genliği, fazı, gerçel ve sanal kısımları arayüzün sağ tarafındaki şekillerde verilmektedir. Uzaklık, kaydırma çubuğu ile değiştirilerek kırınım deseninin yakın alandan uzak alana doğru gidildikçe, kaynak dağılımından kaynağın FD'sine doğru olan değişim sürekli olarak gözlenebilmektedir.

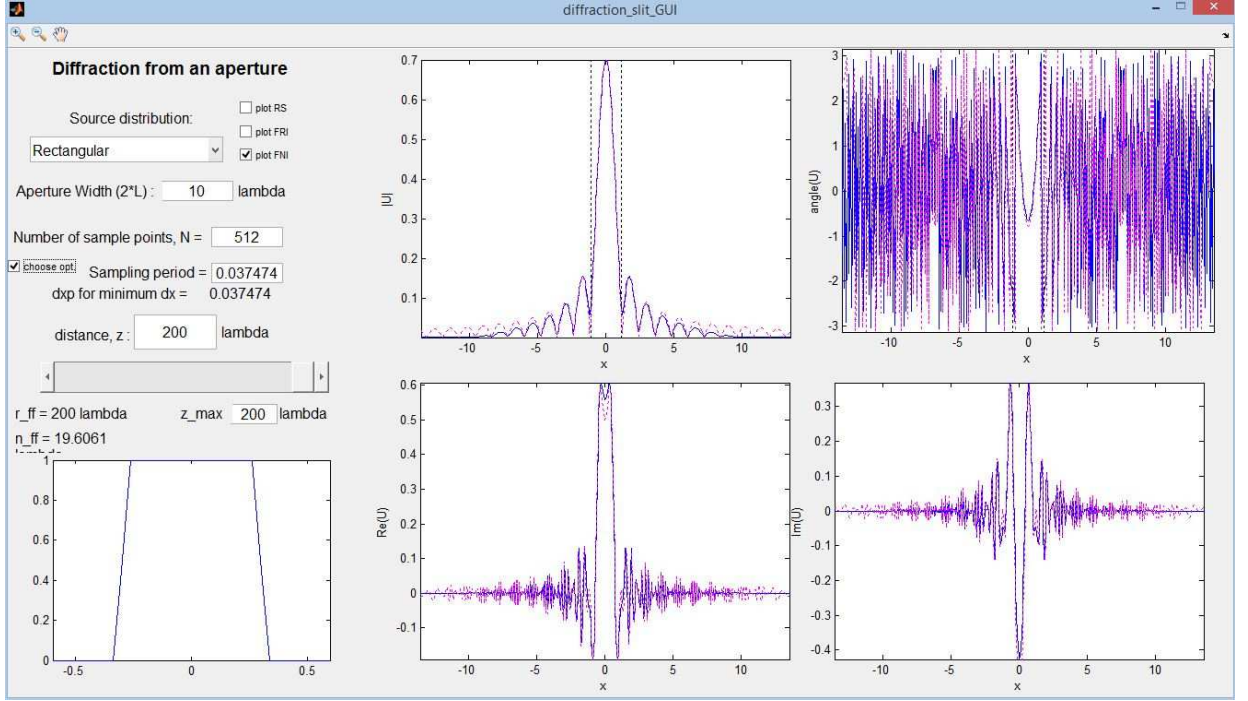
Uzaklık değiştikçe, gözlem düzlemi üzerindeki örnekleme aralıkları değişmektedir. Gözlem düzlemi üzerinde en az aralığı verecek olan örnekleme periyodu Eş. 5.33'de verilmektedir ve uzaklığa ve örnekleme sayısına bağlı olarak değişir. 'choose opt.' kutusu işaretlendiğinde, örnekleme periyodu her uzaklık ve örnekleme sayısı seçimi için otomatik olarak Eş. 5.33'de verildiği biçimde seçilir.

$FRI_{GK}$  ile elde edilen kırınım deseninin GK yöntemleri ile karşılaştırılması için  $RS_{GK}$ ,  $FRI_{GK}$  ve  $FNI_{GK}$  ile hesaplanan kırınım desenleri 'plot RS', 'plot FRI', 'plot FNI' kutuları işaretlenerek çizdirilebilir. Şekil 7.2'de, kullanıcı arayüzü kullanılarak, boyu  $2L = 10\lambda$  olan bir açıklık için, uzak alan sınırı,  $z = r_{ff} = 200\lambda$  mesafesinde  $FRI_{HKFD}$  ve  $FNI_{GK}$  ile elde edilen kırınım desenleri gösterilmiştir. Düz mavi çizgi  $FRI_{HKFD}$  desenini, kesikli mor çizgi  $FNI_{GK}$  desenini gösterir.

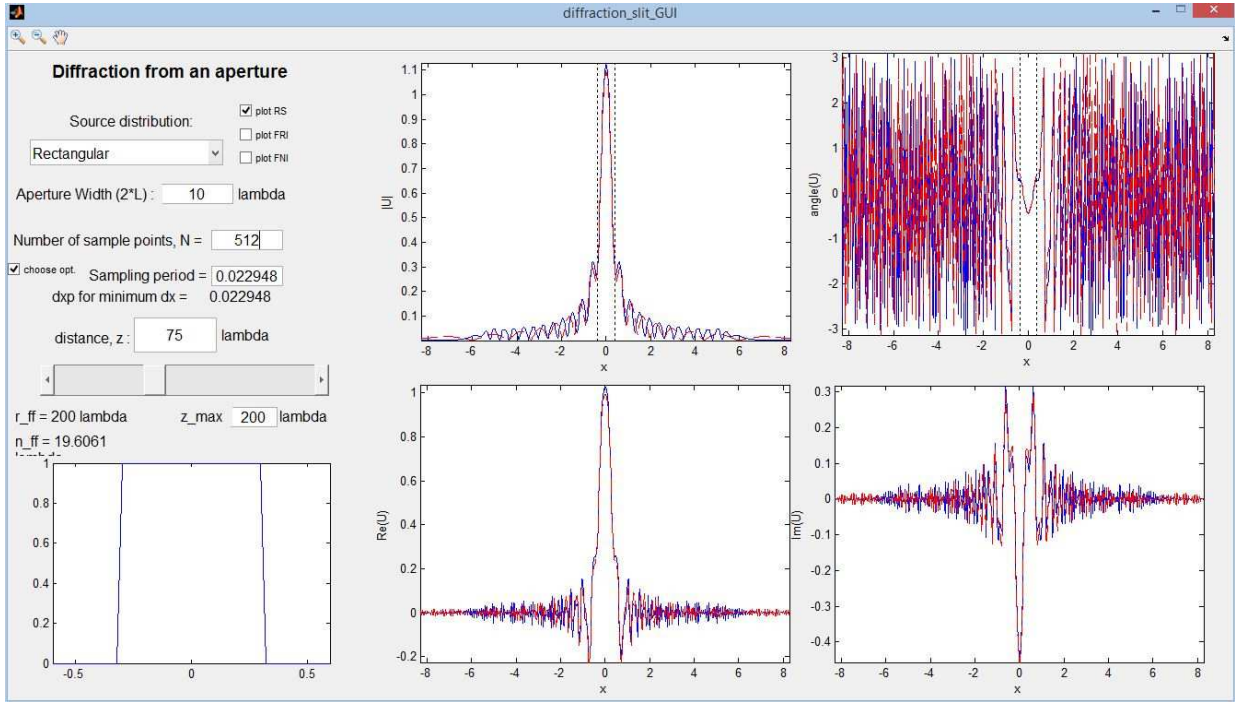


Şekil 7.1. Kırınım desenleri için kullanıcı arayüzü.

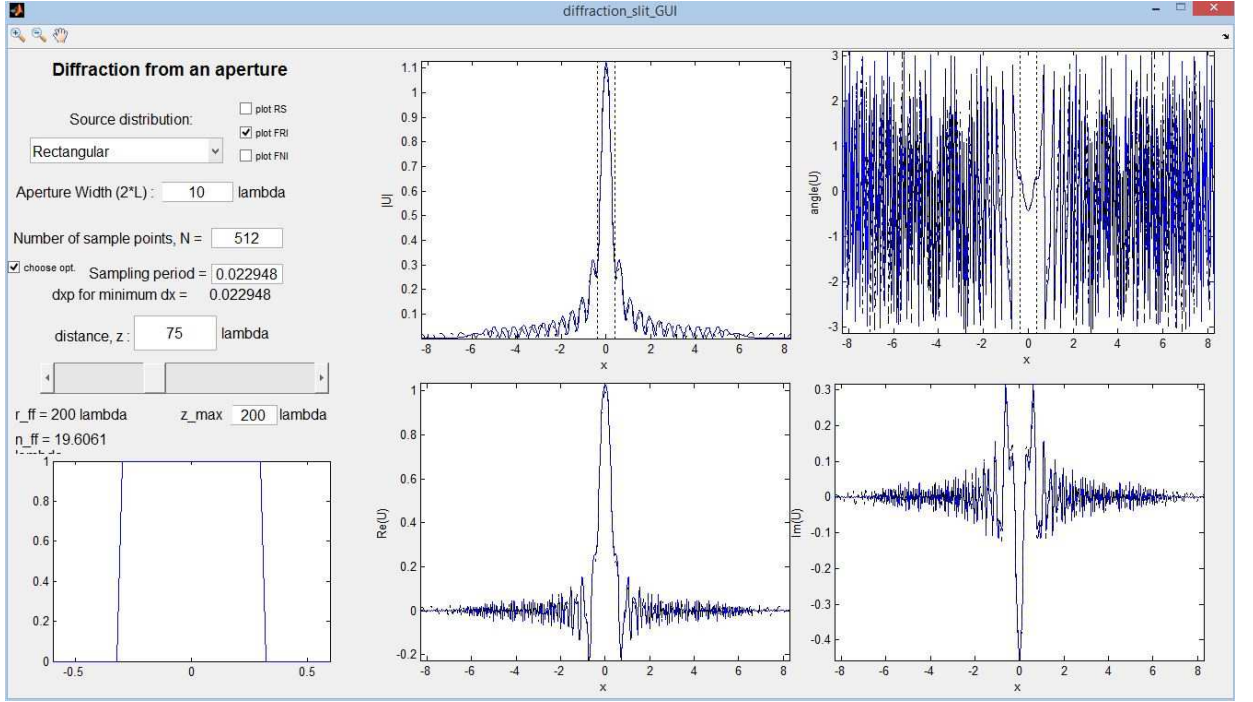
rir. Noktalı dikey çizgiler gözlem düzlemindeki Fresnel sınırlarıdır. Şekil 7.3'te açıklığın yakın alan bölgesi içerisinde kalan  $z = 75\lambda$  uzaklığında  $FRI_{HKFD}$  ve  $RS_{GK}$  ile elde edilen kırınım desenleri gösterilmektedir.  $RS_{GK}$  deseni kırmızı kesikli çizgi ile gösterilmiştir. Uzaklık değişince örnekleme periyodu, gözlem düzleminde en küçük örnek aralıklarını verecek şekilde seçilmiştir. Şekil 7.4'te  $z = 75\lambda$  uzaklığı için  $FRI_{HKFD}$  ve  $FRI_{GK}$  kırınım desenleri elde edilmiştir.  $FRI_{GK}$  deseni siyah kesikli çizgi ile gösterilir.



Şekil 7.2. Kırınım desenleri için kullanıcı arayüzü,  $FRI_{HKFD}$  ve  $FNI_{GK}$  kırınım desenleri.



Şekil 7.3. Kırınım desenleri için kullanıcı arayüzü,  $FRI_{HKFD}$  ve  $RS_{GK}$  kırınım desenleri.



Şekil 7.4. Kırınım desenleri için kullanıcı arayüzü,  $FRI_{HKFD}$  ve  $FRI_{GK}$  kırınım desenleri.

Kullanıcı arayüzü ile kırınım deseninin kaynak dağılımı, örnek sayısı, örnek-leme aralığı, uzaklık, açıklık boyu değişkenlerinin etkisi ve Fresnel ve Fraunhofer yaklaşımlarının geçerli olduğu bölgeler incelenebilir.

Bir sonraki bölümde dipol ve çapraz dipol antenlerden yayılan elektromanyetik alanların Fresnel yaklaşımında KFD ile hesaplanması verilmiştir.

## 8. YÜZEY AKIM KAYNAĞINDAN YAYILAN VEKTÖR ALANLARIN KFD İLE HESAPLANMASI

Bu bölümde, bir çizgi veya yüzey akım yoğunluğundan yayılan elektromanyetik alan vektörlerinin, Fresnel yaklaşması altında KFD ile hesaplanması verilmiştir. Elektrik ve manyetik alan vektörlerinin bulunmasında önce akım yoğunluğunun Green fonksiyonu ile çarpımının integrali kaynak koordinatları üzerinden alınır. Sonra gözlem koordinatlarına göre türev işleçleri uygulanmaktadır. Bu çalışmada, integral alınmadan önce türev işleçleri uygulanmış, elde edilen ifadelerde kaynak koordinatları integralin içinde korunmuş, gözlem koordinatları integralin dışına alınmıştır. Bu sayede akım kaynağının kaynak koordinatları ile çarpımının integrali Fresnel yaklaşması altında KFD cinsinden yazılabilir. Akım yoğunluğu ve kaynak koordinatlarının çarpımının Bölüm 5'te verilen hızlı yöntemlerle KFD'si hızlı ve verimli bir şekilde hesaplanabilir.

Bir akım yoğunluğundan yayılan elektromanyetik alanlar antenin yakın ve uzak mesafesinde vektör potansiyeli cinsinden,

$$\vec{E}(\vec{r}) = -j\omega \left[ \vec{I} + \frac{\nabla\nabla\cdot}{\omega^2\mu\epsilon} \right] \vec{A}(\vec{r}) \quad (8.1)$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A}(\vec{r}) \quad (8.2)$$

olarak verilir. Gözlem koordinatlarına göre türev işleçleri uygulandığında elektrik alan vektör bileşenleri, Eş. 2.53 kullanılarak,

$$E_x(\vec{r}) = \frac{-j\eta}{4\pi\beta} \int_{V'} \left\{ P_1 \frac{J_x(\vec{r}')}{R} + (x - x') P_2 \frac{\vec{R} \cdot \vec{J}(\vec{r}')}{R} \right\} e^{-j\beta R} dV' \quad (8.3)$$

$$E_y(\vec{r}) = \frac{-j\eta}{4\pi\beta} \int_{V'} \left\{ P_1 \frac{J_y(\vec{r}')}{R} + (y - y') P_2 \frac{\vec{R} \cdot \vec{J}(\vec{r}')}{R} \right\} e^{-j\beta R} dV' \quad (8.4)$$

$$E_z(\vec{r}) = \frac{-j\eta}{4\pi\beta} \int_{V'} \left\{ P_1 \frac{J_z(\vec{r}')}{R} + (z - z') P_2 \frac{\vec{R} \cdot \vec{J}(\vec{r}')}{R} \right\} e^{-j\beta R} dV' \quad (8.5)$$

biçiminde yazılabilir. Yukarıdaki eşitliklerde,

$$\vec{R} = \hat{a}_x (x - x') + \hat{a}_y (y - y') + \hat{a}_z (z - z') \quad (8.6)$$

$$\vec{J}(\vec{r}') = \hat{a}_x J_x(\vec{r}') + \hat{a}_y J_y(\vec{r}') + \hat{a}_z J_z(\vec{r}') \quad (8.7)$$

$$P_1 = \frac{-1 - j\beta R + \beta^2 R^2}{R^2} \quad (8.8)$$

$$P_2 = \frac{3 + j3\beta R - \beta^2 R^2}{R^4} \quad (8.9)$$

ile verilir.  $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ ,  $\vec{r}'$  kaynak noktasından,  $\vec{r}$  gözlem noktasına uzanan vektör;  $\vec{J}(\vec{r}')$ , elektrik akım yoğunluğu vektörüdür. Benzer şekilde Eş. 2.54 kullanılarak manyetik alan vektör bileşenleri,

$$H_x(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int [J_y(\vec{r}') (z - z') - J_z(\vec{r}') (y - y')] \frac{(1 + j\beta R)}{R^3} e^{-j\beta R} dv' \quad (8.10)$$

$$H_y(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int [J_z(\vec{r}') (x - x') - J_x(\vec{r}') (z - z')] \frac{(1 + j\beta R)}{R^3} e^{-j\beta R} dv' \quad (8.11)$$

$$H_z(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int [J_x(\vec{r}') (y - y') - J_y(\vec{r}') (x - x')] \frac{(1 + j\beta R)}{R^3} e^{-j\beta R} dv' \quad (8.12)$$

biçiminde yazılabilir.

Eş. 8.8 ve 8.9 ile verilen  $P_1$  ve  $P_2$  fonksiyonlarındaki  $R$  uzaklığına Fresnel bölgesinde  $R \simeq z$  yaklaştırması uygulanırsa,

$$P_1^F = \frac{-1 - j\beta z + \beta^2 z^2}{z^2} \quad (8.13)$$

$$P_2^F = \frac{3 + j3\beta z - \beta^2 z^2}{z^4} \quad (8.14)$$

elde edilir. Eş. 8.3-8.5 ve Eş. 8.10-8.12 ifadelerinde integral parantezin içine dağıtılıp, gözlem koordinatları integral dışına çıkartılırsa elektrik ve manyetik alan bileşenleri,

$$E_x = \frac{-j\eta}{\mu\beta} \left\{ P_1^F A_x + P_2^F \left( x^2 A_x - 2x A_x' + A_x^{(x')^2} + xy A_y - x A_y' - y A_y' \right. \right. \\ \left. \left. + A_y^{x'y'} + xz A_z - x A_z' - z A_z' + A_z^{x'z'} \right) \right\} \quad (8.15)$$

$$E_y = \frac{-j\eta}{\mu\beta} \left\{ P_1^F A_y + P_2^F \left( xyA_x - yA_x^{x'} - xA_x^{y'} + A_x^{x'y'} + y^2A_y - 2yA_y^{y'} \right. \right. \\ \left. \left. + A_y^{(y')^2} + yzA_z - yA_z^{z'} - zA_z^{y'} + A_z^{y'z'} \right) \right\} \quad (8.16)$$

$$E_z = \frac{-j\eta}{\mu\beta} \left\{ P_1^F A_z + P_2^F \left( xzA_x - zA_x^{x'} - xA_x^{z'} + A_x^{x'z'} + yzA_y - zA_y^{y'} \right. \right. \\ \left. \left. - yA_y^{z'} + A_y^{y'z'} + z^2A_z - 2zA_z^{z'} + A_z^{(z')^2} \right) \right\} \quad (8.17)$$

$$H_x(\vec{r}') = \frac{(1+j\beta r)}{\mu r^3} \left( zA_y - A_y^{z'} - yA_z + A_z^{y'} \right) \quad (8.18)$$

$$H_y(\vec{r}') = \frac{(1+j\beta r)}{\mu r^3} \left( xA_z - A_z^{x'} - zA_x + A_x^{z'} \right) \quad (8.19)$$

$$H_z(\vec{r}') = \frac{(1+j\beta r)}{\mu r^3} \left( yA_x - A_x^{y'} - xA_y + A_y^{x'} \right) \quad (8.20)$$

olarak yazılabilir. Eş. 8.15-8.20'de integral terimleri,

$$A_x^{(x')^m(y')^n(z')^k} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{J_x}{R} (x')^m (y')^n (z')^k e^{-j\beta R} dV' \quad (8.21)$$

$$A_y^{(x')^m(y')^n(z')^k} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{J_y}{R} (x')^m (y')^n (z')^k e^{-j\beta R} dV' \quad (8.22)$$

$$A_z^{(x')^m(y')^n(z')^k} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{J_z}{R} (x')^m (y')^n (z')^k e^{-j\beta R} dV' \quad (8.23)$$

olarak tanımlıdır.  $xy$  düzleminde bulunan bir akım kaynağı için, Eş. 8.21-8.23 ifadelerinde Fresnel yaklaşması uygulanabilir. Genlikte  $R \simeq z$ , fazda Eş. 2.78 ile verilen yaklaşırma uygulanarak Eş. 8.21-8.23 ifadeleri, Eş. 2.79 ile verilen Fresnel integrali biçiminde yazılabilir. Bu ifadeler, Eş. 5.15 ile verildiği gibi KFD cinsinden yazılabilirler.

$$A_x^{mn}(x, y) \approx \frac{j\mu}{4\pi z} e^{-j\beta z} e^{\frac{-j}{2}(\alpha_x + \alpha_y)} \sqrt{s_x s_y} e^{j\pi \left(\frac{x}{s_x}\right)^2 \cos \alpha_x \sin \alpha_x} \\ e^{j\pi \left(\frac{y}{s_y}\right)^2 \cos \alpha_y \sin \alpha_y} \tilde{J}_{x, \alpha_x, \alpha_y}^{mn} \left( \frac{x \cos \alpha_x}{s_x}, \frac{y \cos \alpha_y}{s_y} \right) \quad (8.24)$$



Yukarıdaki eşitlikte,  $x = s_x u'$  ve  $y = s_y v'$  için,

$$\tilde{J}_q^{mn}(u', v') = \sqrt{s_x s_y} J_x^{mn}(u' s_x, v' s_y) \quad (8.25)$$

$$= \sqrt{s_x s_y} J_q(u' s_x, v' s_y) (u' s_x)^m (v' s_y)^n \quad (8.26)$$

olarak tanımlıdır.  $\tilde{J}_{x, a_x, a_y}^{mn}(u, v)$ ,  $\tilde{J}_x^{mn}(u', v')$  işlevinin iki boyutlu KFD'sidir. KFD'nin derecesi,  $x$  ekseninde  $a_x$ ,  $y$  ekseninde  $a_y$ 'dir. Hızlı KFD hesaplama yöntemleri kullanılarak akım kaynağından yayılan EM alanlar Fresnel bölgesinde hesaplanabilir.

Yöntem ilk olarak akım yoğunluğu bilinen sonlu dipol antenden yayılan alanların hesaplanmasında uygulanmıştır. Uzunluğu  $2L$ , yönü  $z$  ekseninde olan sonlu dipol antenin üzerindeki akım yoğunluğu,

$$I(z') = \sin[\beta(L - z')] \operatorname{rect}\left(\frac{z'}{2L}\right) \quad (8.27)$$

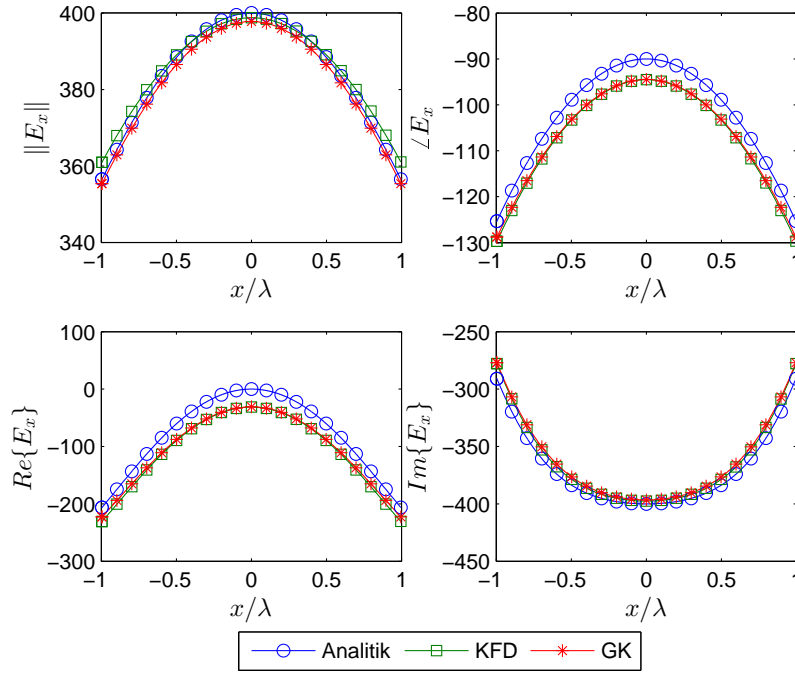
olarak verilir [29]. Fraunhofer yaklaştırması ile sonlu dipol antenden yayılan EM alanlar uzak alanda analitik olarak bulunabilir.  $z$ -ekseni boyunca uzanan sonlu bir dipol antenin uzak mesafesindeki elektromanyetik alanlar analitik olarak,

$$E_\theta \simeq j\eta \frac{I_0 e^{-j\beta r}}{2\pi r} \left[ \frac{\cos\left(\frac{\beta l}{2} \cos\theta\right) - \cos\left(\frac{\beta l}{2}\right)}{\sin\theta} \right] \quad (8.28)$$

$$H_\phi \simeq \frac{E_\theta}{\eta} \simeq j \frac{I_0 e^{-j\beta r}}{2\pi r} \left[ \frac{\cos\left(\frac{\beta l}{2} \cos\theta\right) - \cos\left(\frac{\beta l}{2}\right)}{\sin\theta} \right] \quad (8.29)$$

ile verilir. Dipol anten  $x$  veya  $y$  eksenlerinde ise döndürme işlemleri ile gözlem noktalarındaki alanlar bulunabilir.

Sonlu dipol anten için uzak alanda EM alanlar analitik çözüm, Fresnel integralinin sayısal integral (GK) ve KFD ile hesaplanması ile bulunmuştur. Uzunluğu  $2L = \lambda$  olan,  $x$  yönünde sonlu dipole çeşitli uzaklıklarda elektrik ve manyetik alan bileşenleri hesaplanmıştır. Şekil 8.1 ve Şekil 8.2, sırasıyla,  $E_x$  ve  $E_z$  bileşenlerini,  $z = 5\lambda$  gözlem düzleminde,  $y = 0$  için gösterir. Şekil 8.3 ve Şe-

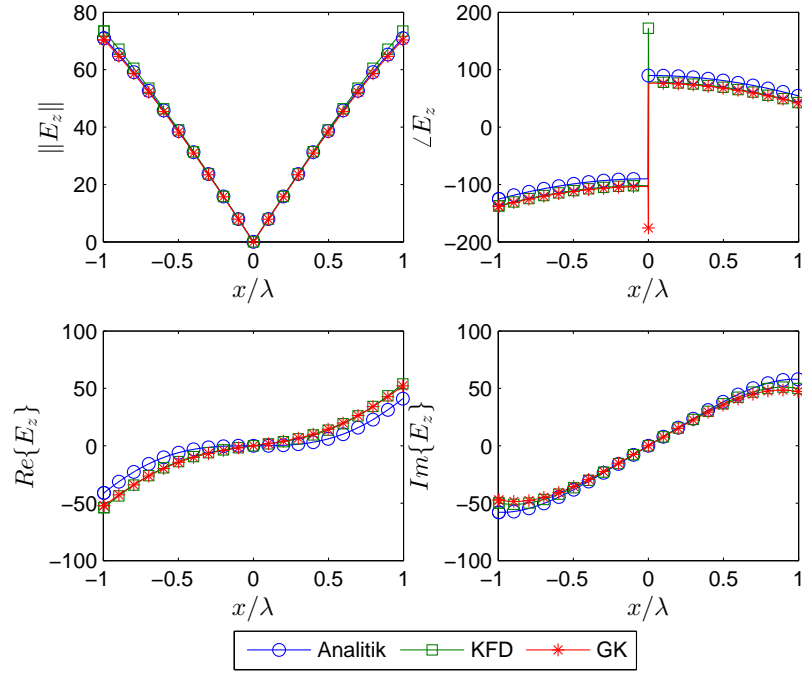


Şekil 8.1. Boyu  $2L = \lambda$  olan  $x$ -ekseninde dipol,  $z = 5\lambda$  için a)  $E_x$  bileşeni.

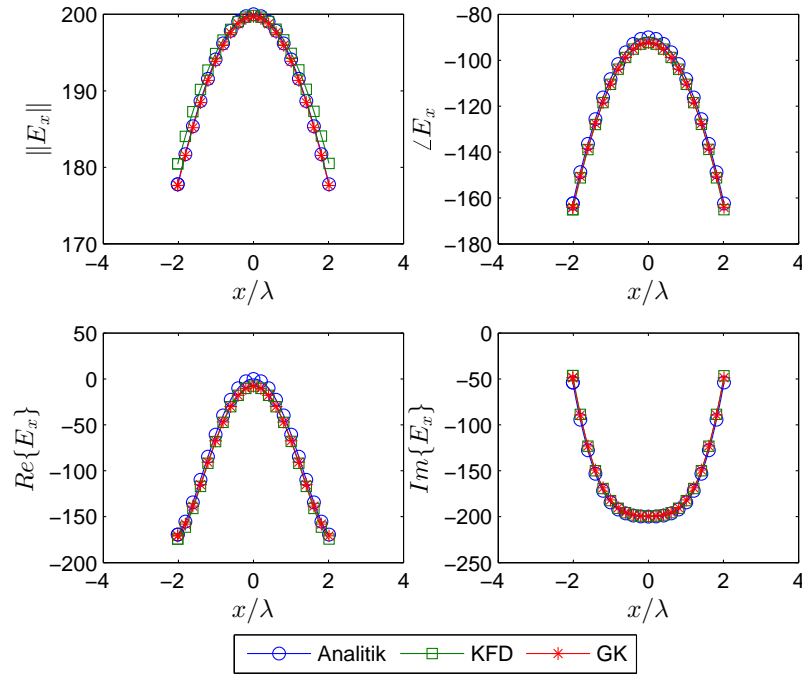
Şekil 8.4, sırasıyla,  $E_x$  ve  $E_z$  bileşenlerini,  $z = 10\lambda$  gözlem düzleminde,  $y = 0$  için gösterir. Şekil 8.5 ve Şekil 8.6, sırasıyla,  $E_x$  ve  $E_z$  bileşenlerini,  $z = 100\lambda$  gözlem düzleminde,  $y = 0$  için gösterir. Uzak alan sınırı  $r_{ff} = 2\lambda$ 'dir. Uzak alana gidildikçe uzak alanda geçerli olan analitik çözüm ile GK ve KFD yöntemleri örtüşmektedir. Antene daha yakın olan durumlar için GK yöntemi ile KFD yöntemi Fresnel bölgesinde örtüşmektedir. KFD yöntemi ile dipol antenin Fresnel bölgesinde elektrik alanın vektör bileşenleri hesaplanabilmektedir.

Çizelge 8.1'de, geliştirilen KFD yöntemi ile elde edilen elektrik ve manyetik alan vektör bileşenlerinin GK yöntemi ile elde edilen değerlere göre  $e_{SKL}$  hataları verilmiştir. Hata değerleri Fresnel bölgesinde kalan örnekler üzerinden hesaplanmıştır. Çizelge 8.1 incelendiğinde KFD ile elde edilen değerlerin GK yöntemi ile elde edilenlere çok yakın olduğu görülmektedir.

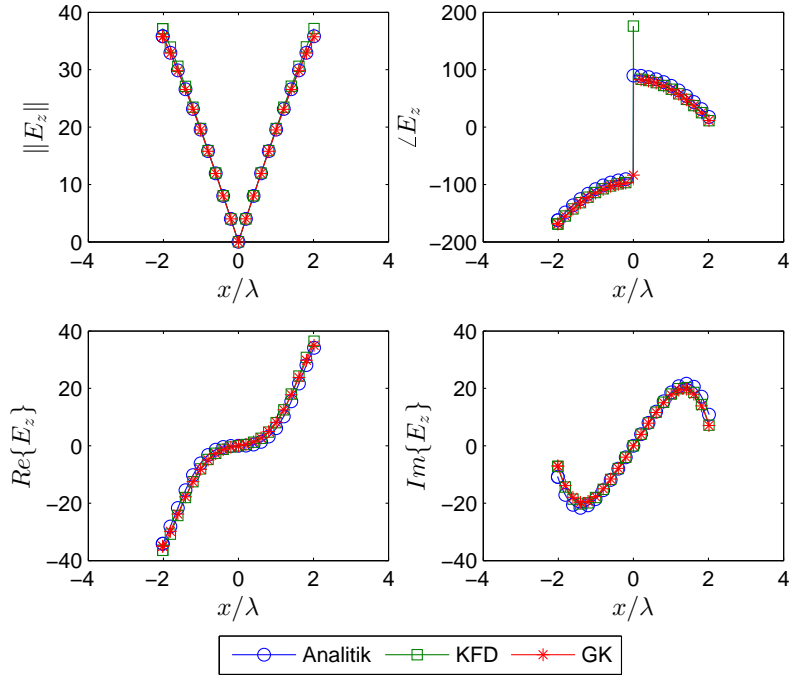
Çapraz dipol anten, birbirine dik iki tane sonlu dipol antenden oluşur.  $x$  ve  $y$  eksenlerindeki sonlu dipollerin boyu  $2L_x = 2L_y = \lambda$  olarak seçilmiştir. Dipoller üzerindeki akım yoğunlukları arasında doksan derece faz farkı vardır ve



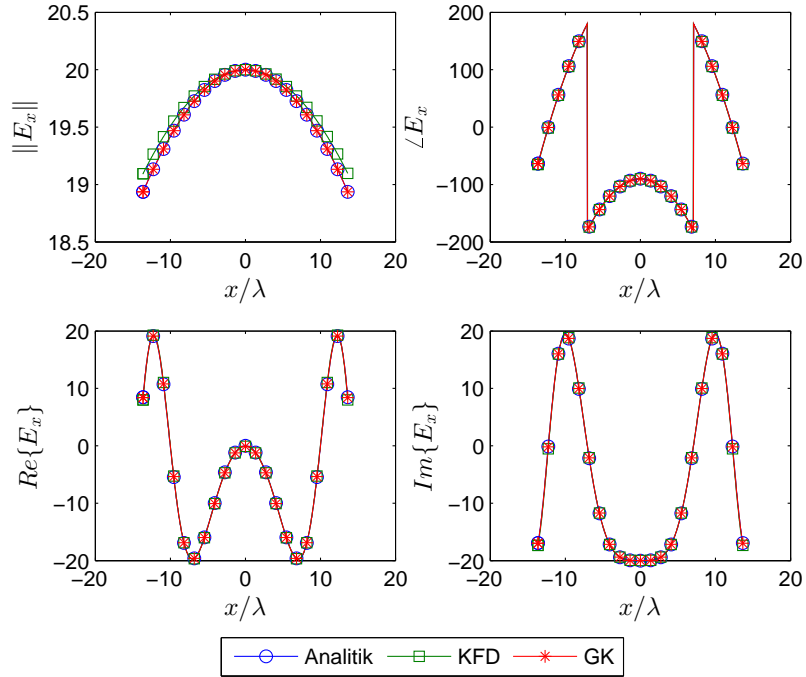
Şekil 8.2. Boyu  $2L = \lambda$  olan  $x$ -ekseninde dipol,  $z = 5\lambda$  için  $E_z$  bileşeni.



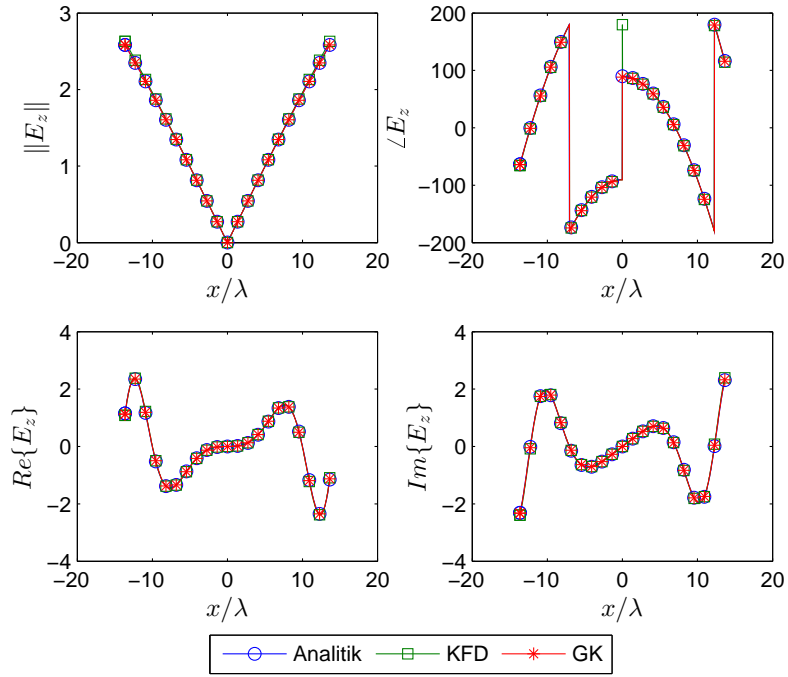
Şekil 8.3. Boyu  $2L = \lambda$  olan  $x$ -ekseninde dipol,  $z = 10\lambda$  için  $E_x$  bileşeni.



Şekil 8.4. Boyu  $2L = \lambda$  olan  $x$ -ekseninde dipol,  $z = 10\lambda$  için  $E_z$  bileşeni.



Şekil 8.5. Boyu  $2L = \lambda$  olan  $x$ -ekseninde dipol,  $z = 100\lambda$  için a)  $E_x$  bileşeni.



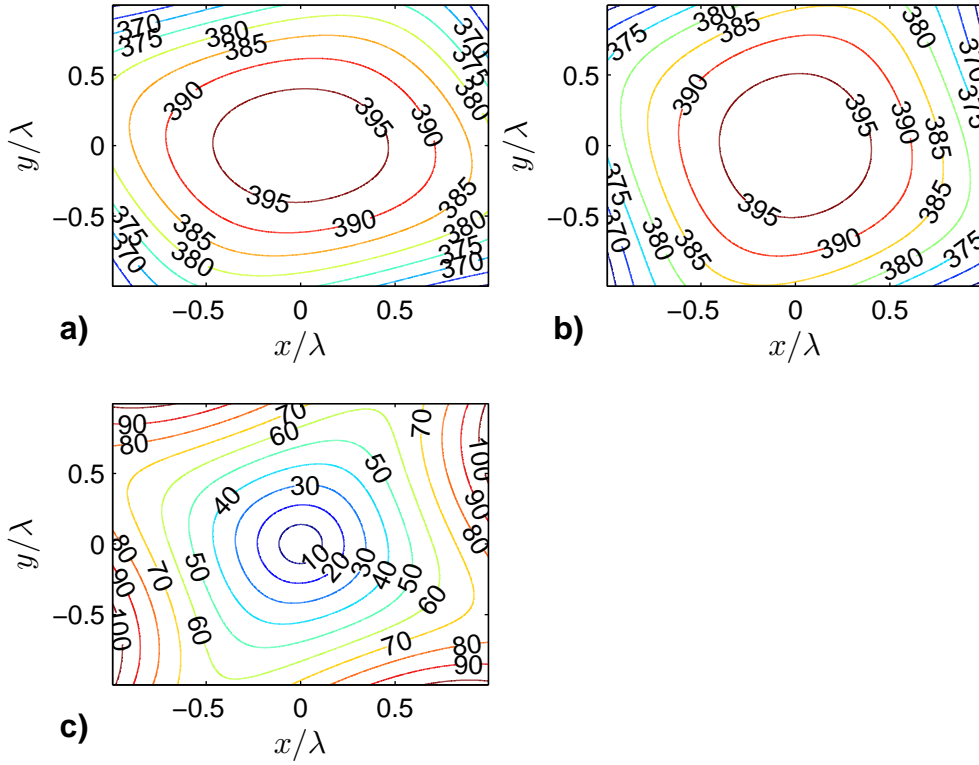
Şekil 8.6. Boyu  $2L = \lambda$  olan  $x$ -ekseninde dipol,  $z = 100\lambda$  için  $E_z$  bileşeni.

Çizelge 8.1. Dipol anten boyu  $\lambda$  için Fresnel bölgesinde  $FRI_{HKFD}$ 'nin GK'ya göre  $e_{SKL}$  hata değerleri.

	$z = 5\lambda$	$z = 10\lambda$	$z = 100\lambda$
$E_x$	$2.26 \times 10^{-5}$	$2.69 \times 10^{-5}$	$6.84 \times 10^{-6}$
$E_z$	$2.58 \times 10^{-5}$	$2.74 \times 10^{-5}$	$6.64 \times 10^{-6}$
$H_y$	$9.34 \times 10^{-7}$	$5.27 \times 10^{-7}$	$1.92 \times 10^{-8}$

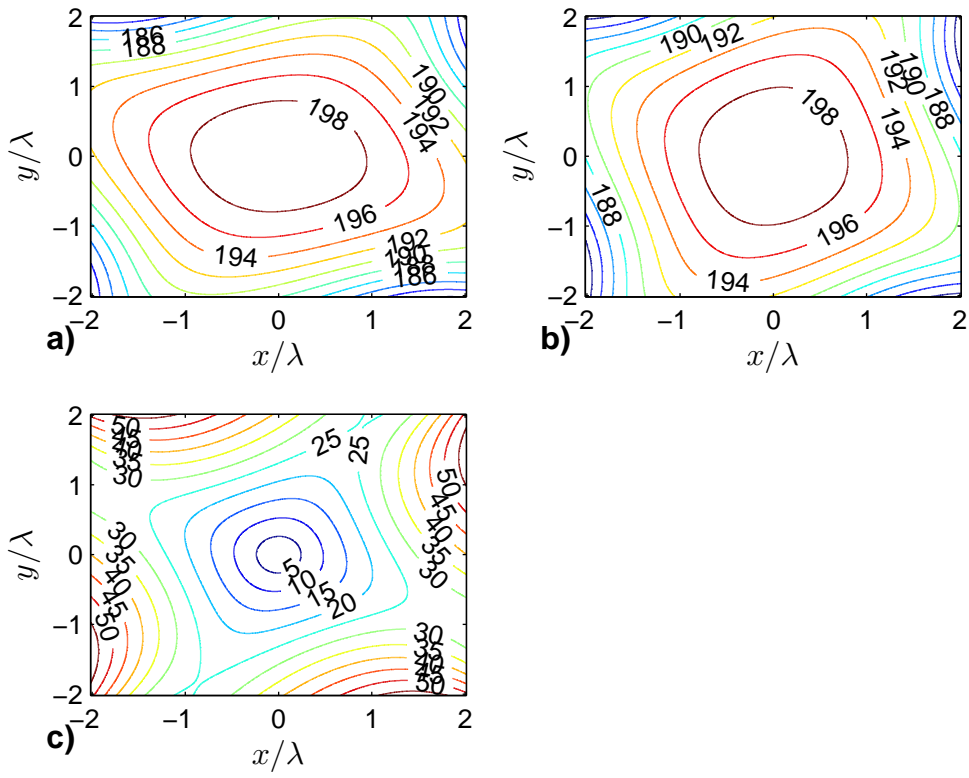
birbirinden bağımsız oldukları varsayılmıştır.  $E_x$ ,  $E_y$  ve  $E_z$  bileşenleri KFD yöntemi ile Fresnel bölgesi içerisinde,  $z = 5\lambda$ ,  $z = 10\lambda$  ve  $z = 100\lambda$  uzaklıktaki gözlem düzlemlerinde hesaplanmıştır. Şekil 8.7,  $z = 5\lambda$ ; Şekil 8.7,  $z = 10\lambda$ ; Şekil 8.7,  $z = 100\lambda$  uzaklığında Fresnel bölgesinde KFD ile elde edilen elektrik alan vektör bileşenlerini gösterir.  $z$  uzaklığı arttıkça alan genliklerinin azaldığı;  $E_x$  ve  $E_y$  bileşenlerinin, antenin çapraz dipol olması nedeniyle, birbirine yakın değerlerde olduğu görülmektedir.

Geliştirilen yöntem, açıklık anten için uygulanmıştır. Açıklık üzerindeki eşdeğer elektrik akım yoğunluğunun bilindiği durum için, elektrik ve manyetik alan vektörleri Eş. 8.24 kullanılarak hesaplanabilir.  $x$  ve  $y$  eksenlerindeki yarı boyu,

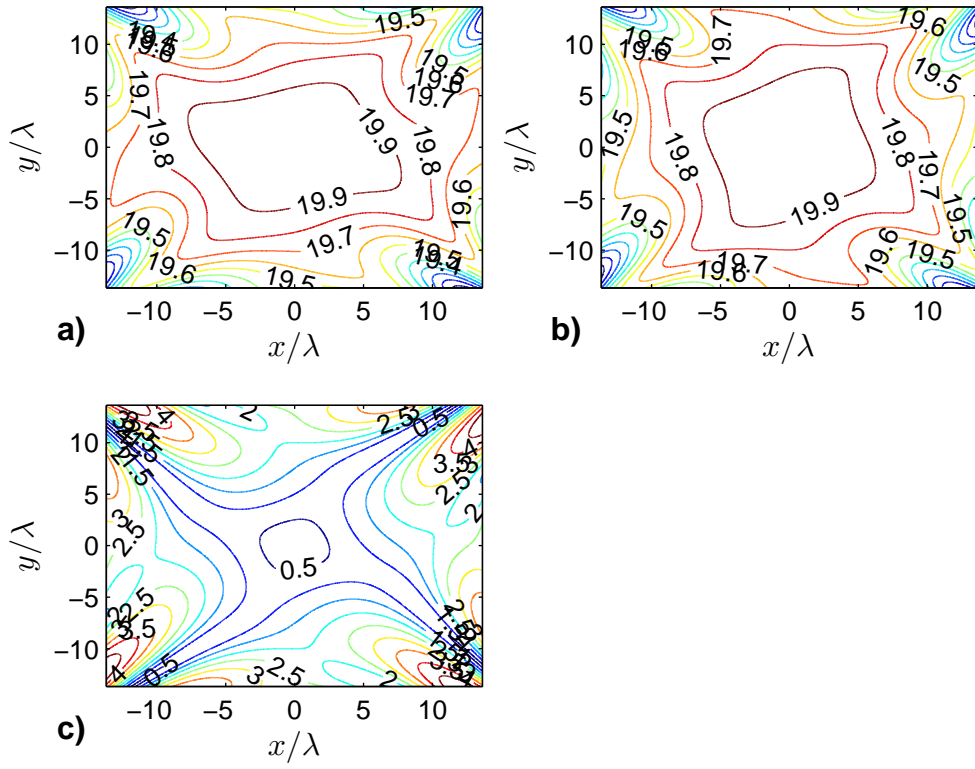


Şekil 8.7. Çapraz dipol antenler:  $2L = \lambda$ , faz farkı  $90^\circ$ ,  $z = 5\lambda$ , a)  $E_x$ , b)  $E_y$ , c)  $E_z$  bileşenleri.

sırasıyla,  $L_x = 9\lambda$  ve  $L_y = 6\lambda$  olan açıklık için, akım yoğunluğu vektör bileşenleri  $J_x = 1$ ,  $J_y = 0$ , şeklinde seçilmiştir. Açıklık dışında akım yoğunlukları sıfırdır. Şekil 8.10a, Fresnel yaklaşımında KFD ile hesaplanan  $E_x$  bileşenini gösterir. Karşılaştırma amacıyla, 8.3 ile verilen ışınma integrali yatay ve dikey eksenler üzerindeki gözlem noktaları için çözdürülerek  $E_x$  bileşeninin değerleri elde edilmiştir. Şekil 8.10b yatay eksen üzerinde GK ve KFD ile hesaplanan  $E_x$  değerlerini, Şekil 8.10c dikey eksen üzerinde GK ve KFD ile hesaplanan  $E_x$  değerlerini gösterir. Şekil 8.10b ve Şekil 8.10c incelendiğinde KFD ile hesaplanan değerlerin Fresnel bölgesinde GK ile hesaplanan ışınma integrallerinin değerlerine yakın olduğu görülür. Fresnel bölgesi dışına çıkıldıkça KFD yöntemi ışınma integrali değerlerinden uzaklaşmaktadır.

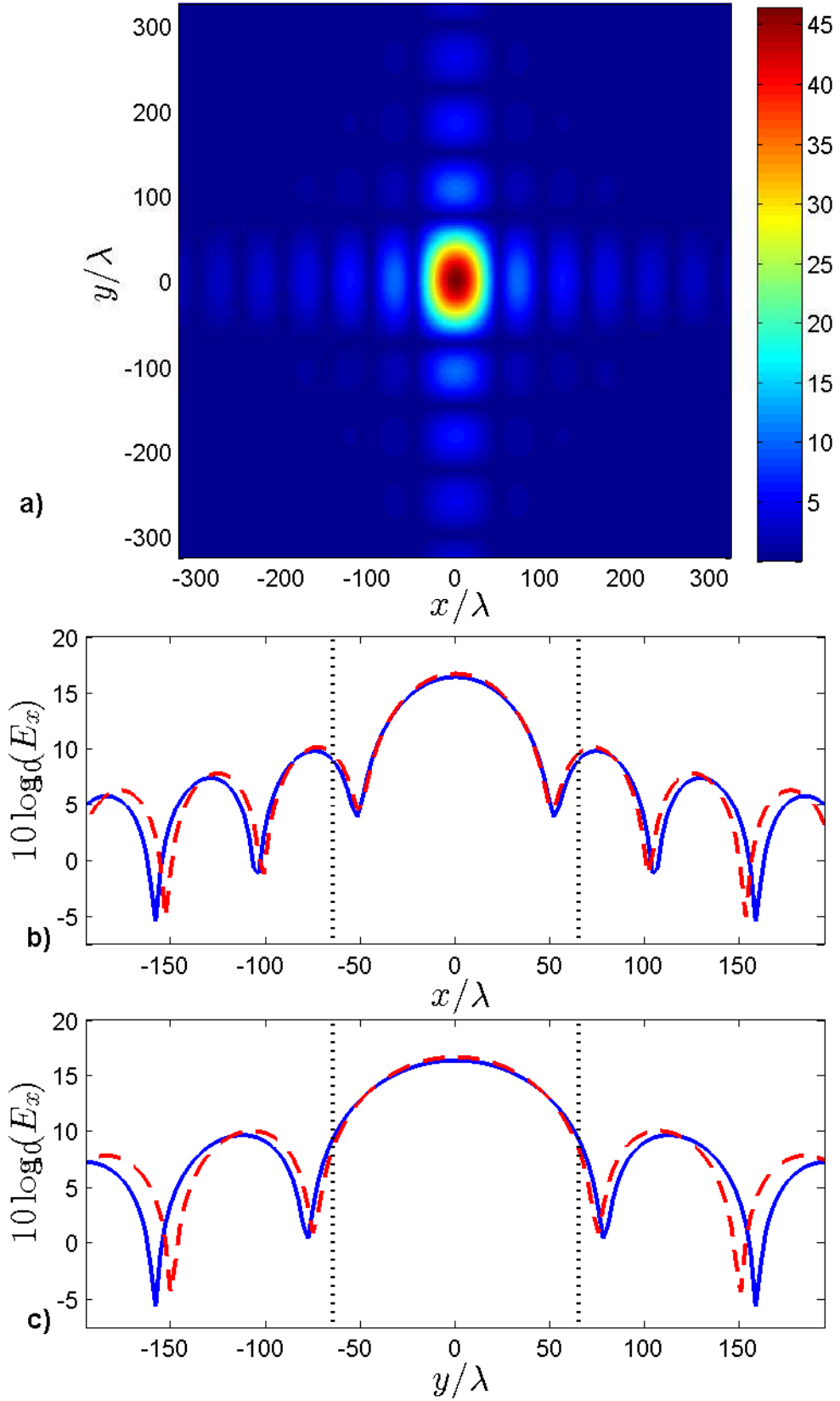


Şekil 8.8. Çapraz dipol antenler:  $2L = \lambda$ , faz farkı  $90^\circ$ ,  $z = 10\lambda$ , a)  $E_x$ , b)  $E_y$ , c)  $E_z$  bileşenleri.

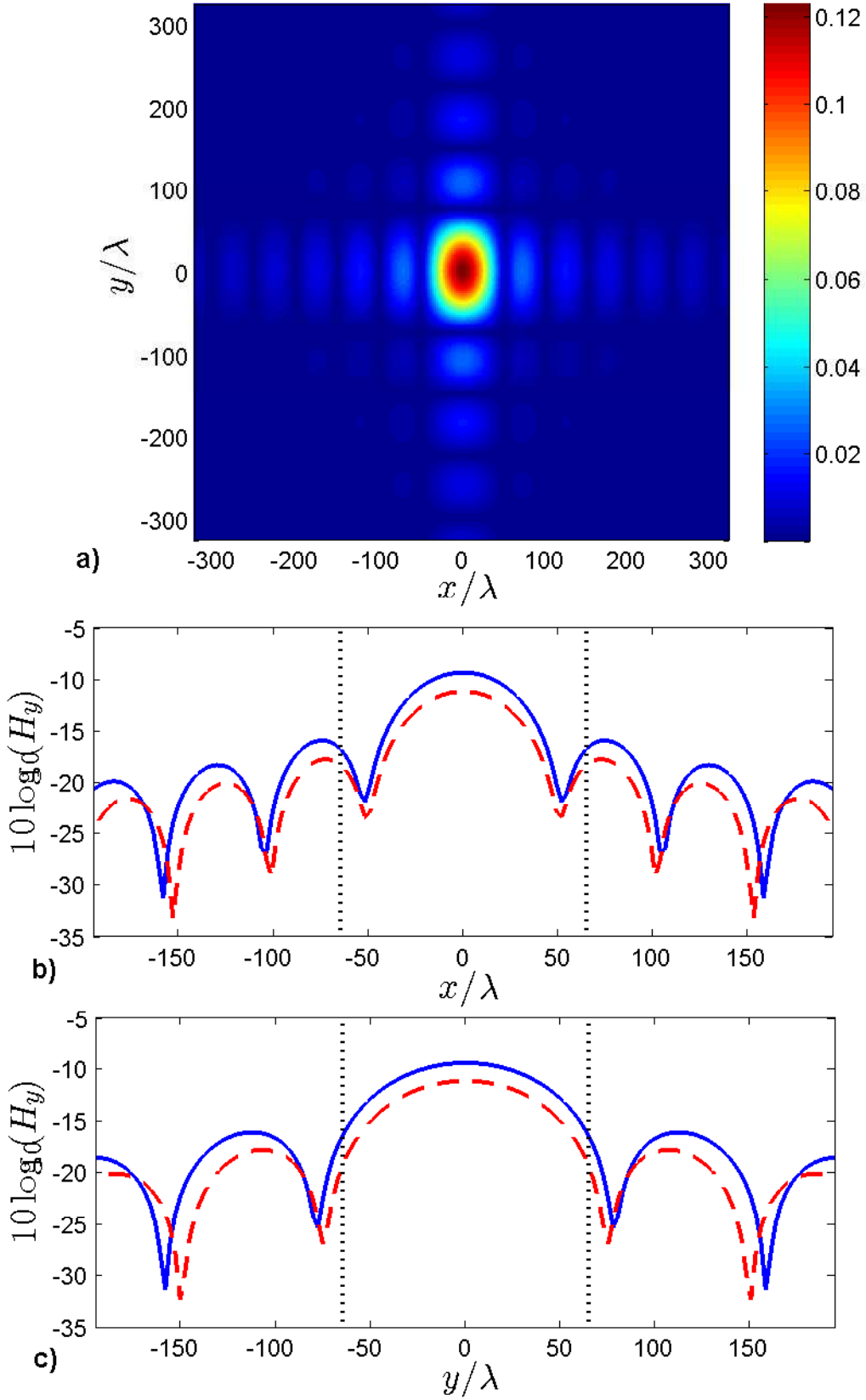


Şekil 8.9. Çapraz dipol antenler:  $2L = \lambda$ , faz farkı  $90^\circ$ ,  $z = 100\lambda$ , a)  $E_x$ , b)  $E_y$ , c)  $E_z$  bileşenleri.





Şekil 8.10.  $L_x = 9\lambda$ ,  $L_y = 6\lambda$  açıklık için,  $J_x = 1$ ,  $J_y = 0$ ,  $z = r_{ff}$  uzaklığında  $E_x$  alanı a)  $E_x(x, y)$ , b)  $E_x(x, 0)$ , c)  $E_x(0, y)$ . Düz çizgi GK yöntemi, kesikli çizgi  $FRI_{HKFD}$  yöntemidir.



Şekil 8.11.  $L_x = 9\lambda$ ,  $L_y = 6\lambda$  açıklık için,  $J_x = 1$ ,  $J_y = 0$ ,  $z = r_{ff}$  uzaklığında  $H_y$  alanı a)  $H_y(x, y)$ , b)  $H_y(x, 0)$ , c)  $H_y(0, y)$ . Düz çizgi GK yöntemi, kesikli çizgi  $FRI_{HKFD}$  yöntemidir.

Bu bölümde düzlem üzerindeki akım yoğunluğundan yayılan elektrik alan vektörü Fresnel yaklaşırması altında KFD cinsinden elde edilmiştir. Sonlu dipol için yayılan alanlar analitik çözüm, sayısal integral hesaplama ve KFD yöntemleri ile elde edilmiş; Fresnel bölgesinde yöntemlerin birbirine yakın elektrik alan değerleri verdiği görülmüştür. Çapraz dipol ve açıklık antenler için uzak alanda bir düzlem üzerindeki elektrik alan vektör bileşenleri KFD ile hesaplanmıştır. Bu tez kapsamında, literatürde ilk kez KFD kullanılarak bir akım kaynağından yayılan elektromanyetik alanların vektör bileşenlerinin hesaplanması gerçekleştirilmiştir.

Sonuçlar bir sonraki bölümde tartışılacaktır.

## 9. SONUÇ

Bu çalışmada, ilk olarak sayısal KFD hesaplama yöntemleri incelenmiştir. Sayısal KFD yöntemleri Hızlı KFD (HKFD) ve Ayrık KFD (AKFD) olarak sınıflandırılabilir. HKFD, Hızlı FD (HFD) tabanlı; AKFD yöntemleri Ayrık (FD) tabanlı yöntemlerdir. Bu yöntemler kullanılarak sürekli KFD örnekleri elde edilmek istenirse açı ve faz düzeltmesi uygulanmalıdır. Bu çalışmada, HKFD için açı ve faz düzeltmeleri çıkarılmış ve AKFD için literatürde önerilen düzeltmelerle benzer olduğu görülmüştür. Yöntemlerin başarımları, çıkış örneklerinin, sürekli KFD örneklerine benzerliği üzerinden karşılaştırılmıştır. Sürekli KFD örnekleri, uyarlanır Gauss-Kronrod (GK) sayısal integral hesaplama yöntemi ile hesaplanmıştır. HKFD ve AKFD yöntemlerinin GK yöntemine göre bağıl hataları incelenmiş HKFD ve AKFD'in açı ve faz düzeltmeleri sonrası sürekli KFD değerlerine yakın değerler verdiği gözlenmiştir.

Bu çalışmada, elektromanyetik ışınım integrallerinin çözümünde KFD uygulamaları araştırılmıştır. Öncelikle skalar alan yaklaşımı altında, iki boyutlu uzayda bir açıklıktan yayılan alanlar sayısal KFD yöntemleri ile elde edilmiştir. Literatürde verilen iki FRİ-KFD ilişkisi incelenmiştir. Hanna et al. [11]'de, özişlevleri birim değışintili olan KFD tanımı kullanılarak AKFD yöntemi ile FRİ'nin hesaplanması verilmektedir. HKFD yönteminin dayandığı KFD tanımının ise özişlevleri daha dardır. Bu iki FRİ-KFD ilişkisi birbirleri cinsinden ifade edilerek, HKFD ve AKFD ile FRİ'ler hesaplanmıştır. FRİ'nin KFD ile hesaplanmasında, açıklık boyu, gözlem düzleminin uzaklığı, kullanılan KFD yöntemi, açıklık üzerindeki kaynak dağılımının etkileri incelenmiştir. Yöntemlerin FRİ hesaplama başarımları, AKFD ve HKFD kırınım desenlerinin, RSİ kırınım desenine göre hataları üzerinden karşılaştırılmıştır. RSİ örnekleri GK yöntemi ile hesaplanmıştır. Hatalar incelendiğinde HKFD ve AKFD yöntemlerinin benzer FRİ örnekleri verdiği, Fresnel bölgesinde bu örneklerin RSİ örnekleri ile örtüştüğü, Fresnel bölgesinin dışına çıkıldıkça RSİ örnekleri ile aralarındaki farkın arttığı görülmüştür. Yöntemlerin hızları, FRİ hesaplama süreleri cinsinden yakın alandan uzak

alana kadar yapılmıştır. HKFD yönteminin AKFD yöntemine göre yaklaşık on kat; GK yöntemine göre yaklaşık bin kat daha hızlı olduğu gözlenmiştir. Bu çalışma kapsamında, literatürde ilk kez, FRİ'nin KFD ile hesaplanmasında HKFD yöntemine açı ve faz düzeltmelerinin uygulanması ile örnekleme periyodu seçiminden bağımsız, hızlı ve verimli bir yöntem sunulmuştur.

KFD'nin kırınım desenini ifade etme başarımı Zaman Uzamında Sonlu Farklar (ZUSF) yöntemi kullanılarak incelenmiştir.

Kırınım desenlerinin KFD ile elde edilmesinde, örnekleme periyodu, açıklık boyu, kaynak dağılımı, gözlem düzlemi uzaklığının etkilerinin hızlı bir şekilde incelenebilmesi için MATLAB ortamında kullanıcı arayüzü tasarlanmıştır. Bu sayede, kırınım deseninin yakın alandan uzak alana doğru gidildikçe sürekli değişimi incelenebilir.

Önerilen FRİ hesaplama yöntemi akım yoğunluğundan yayılan elektromanyetik alan vektörlerinin Fresnel bölgesinde hesaplanmasında uygulanmıştır. Elektrik alan vektör bileşenleri, akım yoğunluğunun, kaynak koordinatlarının kuvvetleri ile çarpımının FRİ'lerinin doğrusal birleşimi olarak ifade edilmiştir. HKFD yöntemi açı ve faz düzeltmeleri ile uygulanarak dipol ve çapraz dipol antenlerden yayılan elektrik alan vektör bileşenleri KFD ile Fresnel bölgesinde hızlı ve verimli hesaplanmıştır. Bu tez kapsamında, literatürde ilk kez, KFD yöntemi kullanılarak akım yoğunluğundan yayılan elektrik alanlar vektör biçiminde elde edilmiştir.

Gelecek çalışmalarda, KFD, Maxwell denklemlerine uzayda ve/veya zamanda uygulanarak, elektromanyetik problemleri zaman uzamında ve frekans uzamında çözen yöntemlerin artılarını ön plana çıkartabilecek bir yöntemin geliştirilmesi amaçlanmaktadır. KFD'nin yayılma ve saçılma problemlerindeki olası uygulamaları incelenecektir.

## KAYNAKLAR

- [1] Ozaktas, H.M., Kutay, M.A., Zalevsky, Z., *The Fractional Fourier Transform: With Applications in Optics and Signal Processing*, Wiley, **2001**.
- [2] Kutay, M.A., Özaktas, H.M., Arıkan, O., Onural, L., Optimal filtering in fractional fourier domains, *IEEE Transactions on Signal Processing*, 45, 5, 1129–1143, **1997**.
- [3] Alp, Y.K., Arıkan, O., Time–frequency analysis of signals using support adaptive hermite–gaussian expansions, *Digital Signal Processing*, 22, 6, 1010–1023, **2012**.
- [4] Özaktas, H.M., Arık, S.Ö., Coşkun, T., Fundamental structure of fresnel diffraction: natural sampling grid and the fractional fourier transform, *Optics Letters*, 36, 13, 2524–2526, **2011**.
- [5] Yetik, İ.Ş., Nehorai, A., Beamforming using the fractional fourier transform, *IEEE Transactions on Signal Processing*, 51, 6, 1663–1668, June, 2003.
- [6] Wen, H., Tang, J., Wu, J., Song, H., Wu, T., Wu, B., Ho, P., Lv, S., Sun, L., A cross-layer secure communication model based on discrete fractional fourier transform (dfrft), *IEEE Transactions on Emerging Topics in Computing*, 3, 1, 119–126, March, **2015**.
- [7] Namias, V., The fractional order fourier transform and its application to quantum mechanics, *IMA Journal of Applied Mathematics*, 25, 3, 241–265, **1980**.
- [8] Cohen, L., *Time-Frequency analysis*, Prentice Hall, **1995**.
- [9] Özaktas, H.M., David, M., Fractional fourier optics, *Journal of the Optical Society of America A*, 12, 4, 743–751, Apr, **1995**.
- [10] Kraus, J.D., *Antennas*, McGraw-Hill Education, **1988**.
- [11] Hanna, M.T., Shaarawi, A.M., Seif, N.P.A., Ahmed, W.A.E.M., Discrete fractional fourier transform as a fast algorithm for evaluating the diffraction pattern of pulsed radiation, *Journal of the Optical Society of America A*, 28, 8, 1610–1619, Aug, **2011**.
- [12] Kong, J.A., *Electromagnetic Wave Theory*, A Wiley-Interscience publication. Wiley, **1986**.
- [13] Balanis, C.A., *Advanced Engineering Electromagnetics*, John Wiley & Sons, **1989**.
- [14] Poljak, D., *Advanced Modeling in Computational Electromagnetic Compatibility*, John Wiley & Sons, **2007**.

- [15] Miller, E.K., A selective survey of computational electromagnetics, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 36, 9, 1281–1305, **1988**.
- [16] Sayın, I., Arıkan, F., Arıkan, O., Kesirli fourier dönüşümünün zaman bölgesinde sonlu farklar yöntemine uygulanması, Sinyal İşleme ve İletişim Uygulamaları (IEEE SİU2010) Kurultayı, **2010**.
- [17] Singer, W., Totzeck, M., Gross, H., *Handbook of Optical Systems, Physical Image Formation*, 2, John Wiley & Sons, **2006**.
- [18] Goodman, J.W., *Introduction to Fourier Optics*, Mac. Graw-Hill, New York, **1960**.
- [19] Esmer, G.B., Fast computation of fresnel diffraction field of a three-dimensional object for a pixelated optical device, *Applied Optics*, 52, 1, A18–A25, **2013**.
- [20] Özaktas, H.M., Arıkan, O., Kutay, M.A., Bozdağı, G., Digital computation of the fractional fourier transform, *IEEE Transactions on Signal Processing*, 44, 9, 2141–2150, Sep, **1996**.
- [21] Candan, Ç., *The Discrete Fractional Fourier Transform*, Yüksek Lisans Tezi, Bilkent Üniversitesi, Ankara, **1998**.
- [22] Pei, S.C., Yeh, M.H., Tseng, C.C., Discrete fractional fourier transform based on orthogonal projections, *IEEE Transactions on Signal Processing*, 47, 5, 1335–1348, May, **1999**.
- [23] Öktem, F.S., Özaktas, H.M., Exact relation between continuous and discrete linear canonical transforms, *Signal Processing Letters, IEEE*, 16, 8, 727–730, **2009**.
- [24] Shampine, L.F., Vectorized adaptive quadrature in matlab, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 211, 131–140, **2008**.
- [25] Yee, K.S., Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell's equations, *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 14, 3, 302–307, **1966**.
- [26] Berenger, J.P., A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves, *Journal of Computational Physics*, 114, 185–200, **1994**.
- [27] Taflove, A., *Computational Electromagnetics: The Finite-Difference Time-Domain Method*, Artech House, **1995**.
- [28] Sayın, I., Arıkan, F., Arıkan, O., Kesirli Fourier dönüşümü ile açıklık antenden yayılan elektrik alanların hesaplanması, URSI-TÜRKİYE 2014 VII. Bilimsel Kongresi, **2014**.

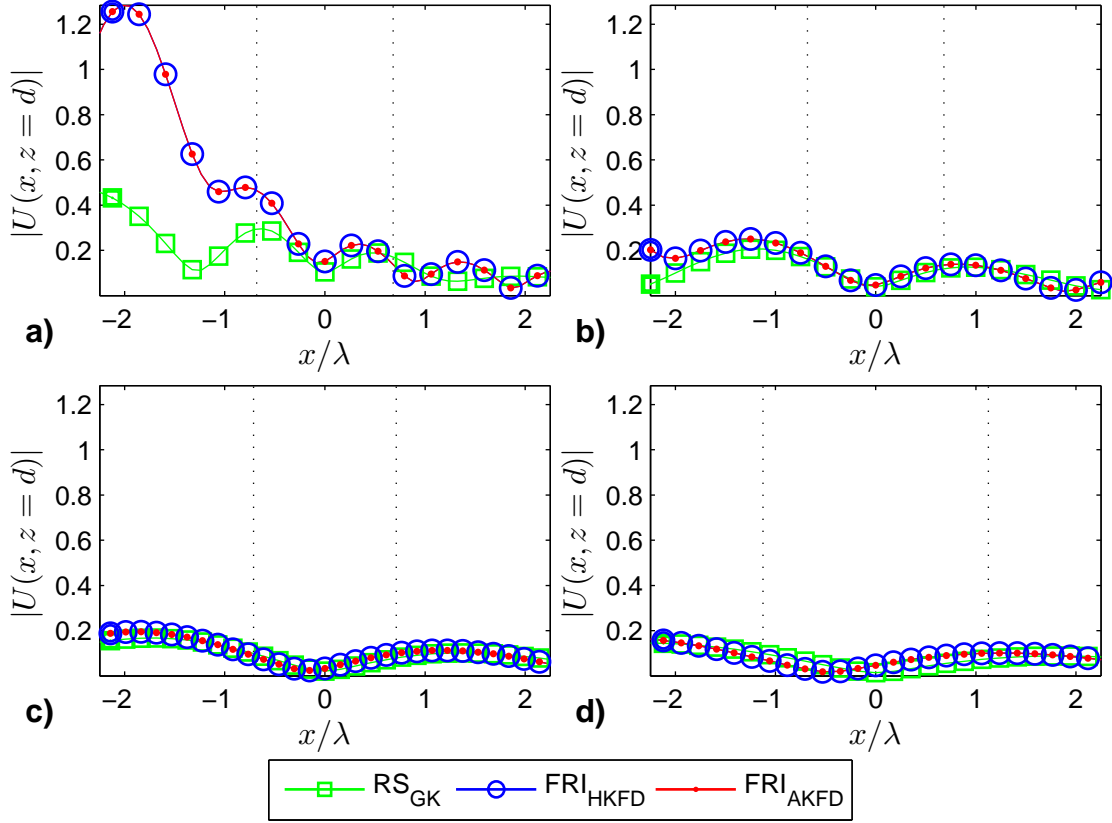
- [29] Balanis, C.A., *Antenna Theory: Analysis and Design*, John Wiley & Sons, **2005**.
- [30] Ishimaru, A., *Electromagnetic Wave Propagation, Radiation, and Scattering*, Prentice-Hall, **1991**.
- [31] Candan, C., Kutay, M.A., Özaktaş, H.M., The discrete fractional fourier transform, *IEEE Transactions on Signal Processing*, 48, 5, 1329–1337, May, **2000**.
- [32] Almeida, L.B., The fractional fourier transform and time-frequency representations, *IEEE Transactions on Signal Processing*, 42, 11, 3084–3091, 1994.
- [33] McClellan, J.H., Parks, T.W., Eigenvalue and eigenvector decomposition of the discrete fourier transform, *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*, AU-20, 66–74, **1972**.
- [34] Dickinson, B.W., Steiglitz, K., Eigenvectors and functions of the discrete fourier transform, *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, ASSP-30, 1, 25–31, **1982**.



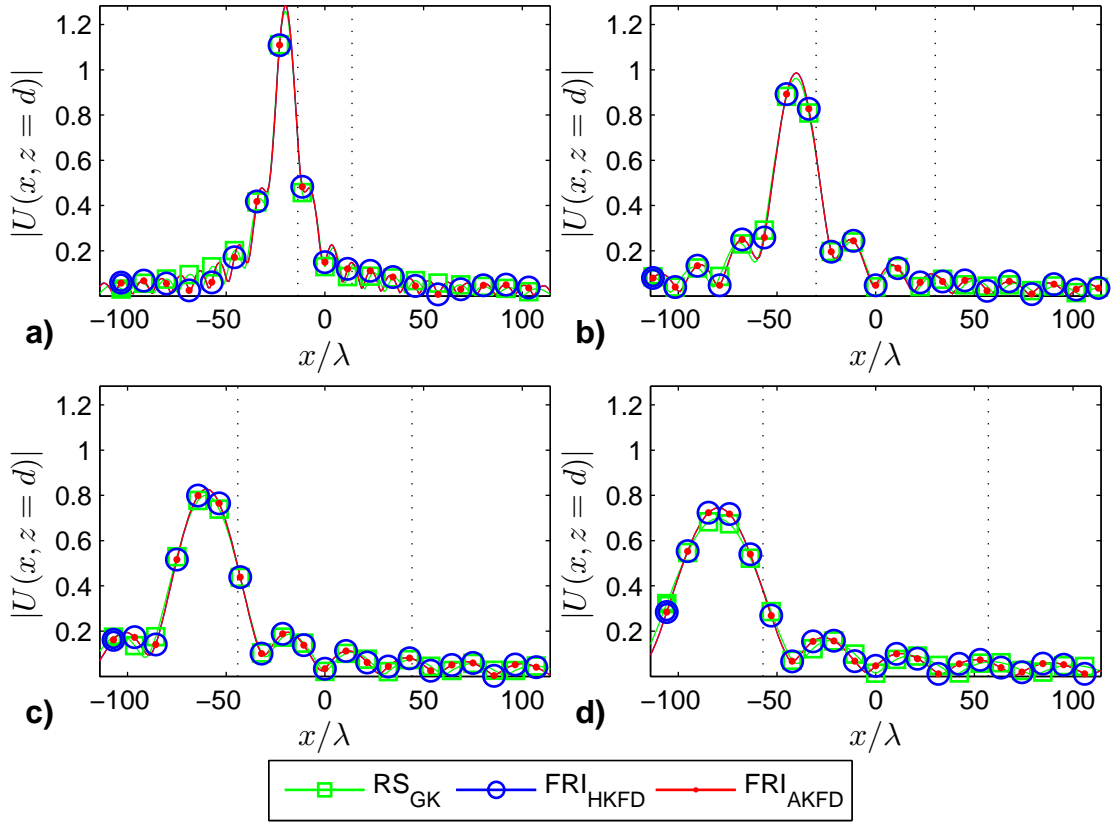
## EKLER

### EK-1

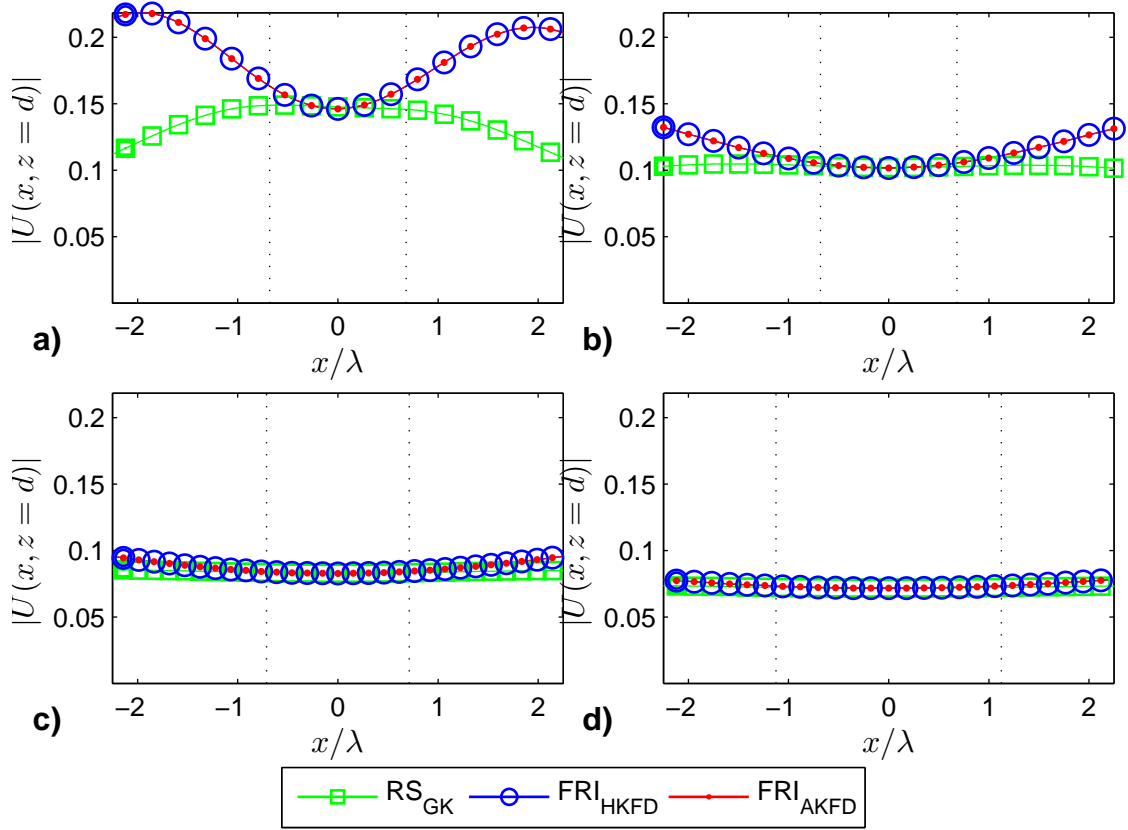
Doğrusal fazlı kare, Gauss-chirp ve HG kaynak dağılımları için,  $2L = 2\lambda$  ve  $2L = 20\lambda$  açıklık boyları için  $RS_{GK}$ ,  $FRI_{HKFD}$  ve  $FRI_{AKFD}$  yöntemleri ile elde edilen kırınım desenleri:



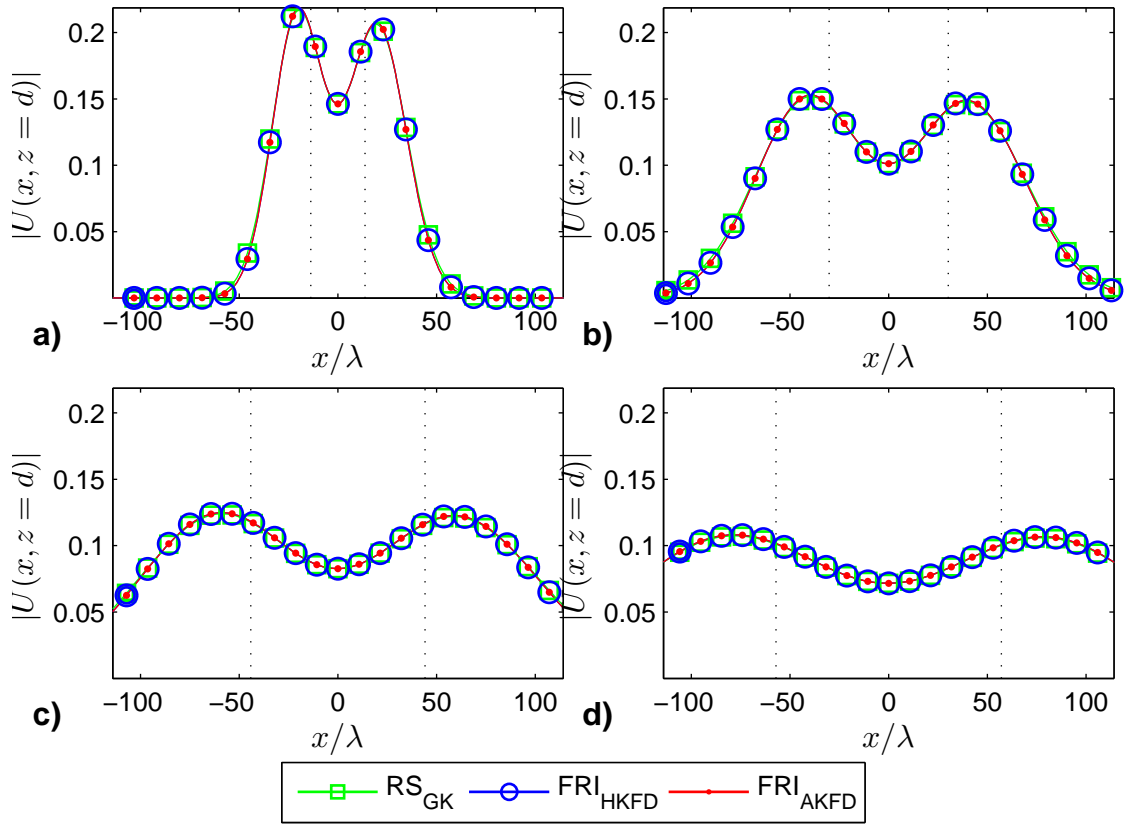
Şekil 9.1. Açıklık kırınım desenleri, doğrusal fazlı kare kaynak dağılımı,  $2L = 2\lambda$ , a)  $d = 0.25r_{ff}$ , b)  $d = 0.5r_{ff}$ , c)  $d = 0.75r_{ff}$ , d)  $d = r_{ff}$ .



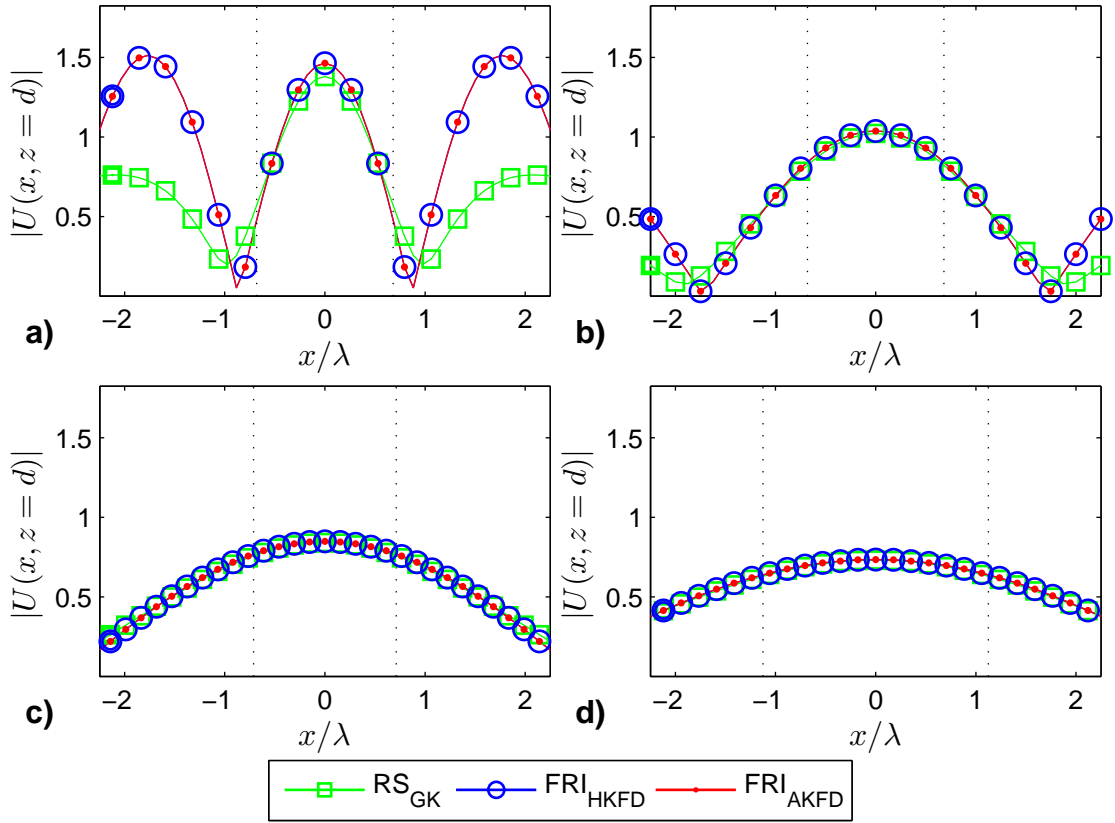
Şekil 9.2. Açıklık kırınım desenleri, doğrusal fazlı kare kaynak dağılımı,  $2L = 20\lambda$ , a)  $d = 0.25r_{ff}$ , b)  $d = 0.5r_{ff}$ , c)  $d = 0.75r_{ff}$ , d)  $d = r_{ff}$ .



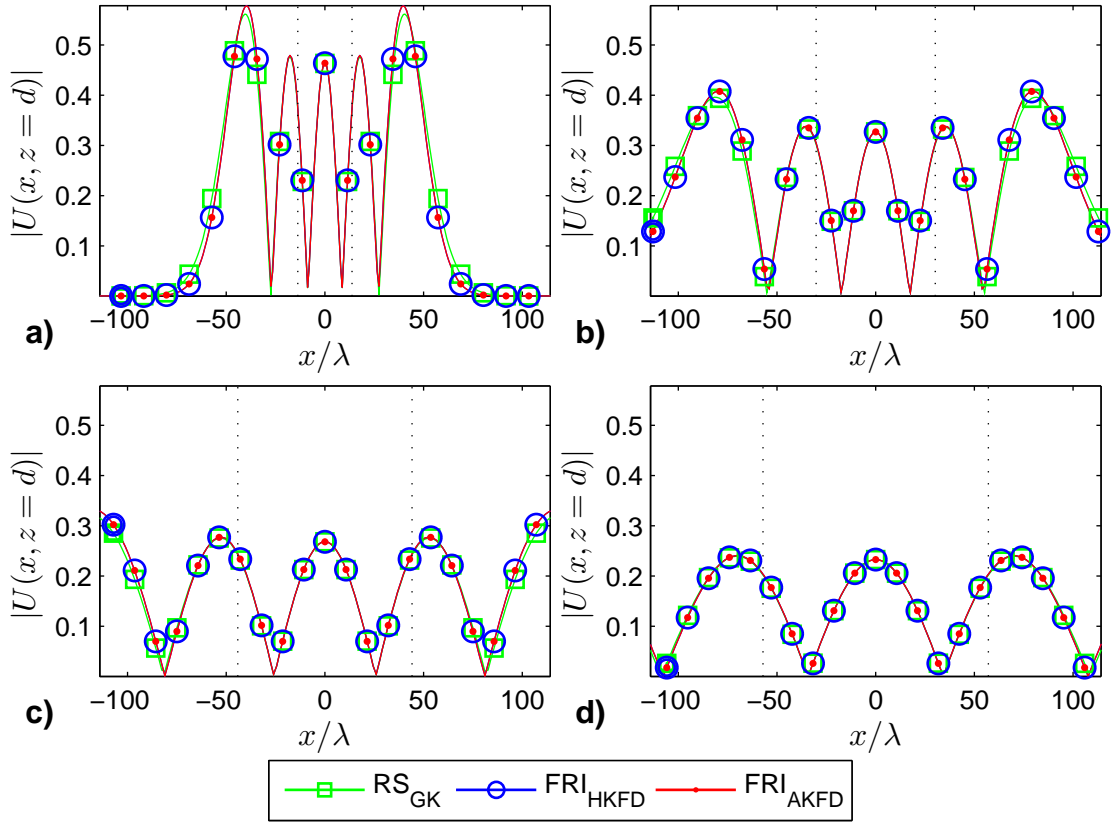
Şekil 9.3. Açıklık kırınım desenleri, Gauss-chirp kaynak dağılımı,  $2L = 2\lambda$ , a)  $d = 0.25r_{ff}$ , b)  $d = 0.5r_{ff}$ , c)  $d = 0.75r_{ff}$ , d)  $d = r_{ff}$ .



Şekil 9.4. Açıklık kırınım desenleri, Gauss-chirp kaynak dağılımı,  $2L = 20\lambda$ , a)  $d = 0.25r_{ff}$ , b)  $d = 0.5r_{ff}$ , c)  $d = 0.75r_{ff}$ , d)  $d = r_{ff}$ .



Şekil 9.5. Açıklık kırınım desenleri, HG kaynak dağılımı,  $2L = 2\lambda$ , a)  $d = 0.25r_{ff}$ , b)  $d = 0.5r_{ff}$ , c)  $d = 0.75r_{ff}$ , d)  $d = r_{ff}$ .



Şekil 9.6. Açıklık kırınım desenleri, HG kaynak dağılımı,  $2L = 20\lambda$ , a)  $d = 0.25r_{ff}$ , b)  $d = 0.5r_{ff}$ , c)  $d = 0.75r_{ff}$ , d)  $d = r_{ff}$ .

## **EK-2**

Tezden üretilmiş tebliğ ve poster sunumları burada verilmiştir.

# Kesirli Fourier Dönüşümünün Zaman Bölgesinde Sonlu Farklar Yöntemine Uygulanması

## Application of Fractional Fourier Transform to Finite Difference Time Domain Method

İşıltan Sayın<sup>1</sup>, Feza Arıkan<sup>1</sup>, Orhan Arıkan<sup>2</sup>

1. Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü  
Hacettepe Üniversitesi  
{isiltan, arikan}@hacettepe.edu.tr

2. Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü  
Bilkent Üniversitesi  
oarikan@bilkent.edu.tr

### Özetçe

Bilgisayarların hız ve belleklerinin gelişmesi ile birlikte elektromanyetik problemlerin çözümünde sayısal yöntemler sıkça kullanılmaya başlanmış ve bu konuda çok sayıda araştırma yapılmıştır. Sayısal Elektromanyetik yöntemleri genel olarak zaman ve frekans tabanlı yöntemler olarak sınıflandırılabilir. Zaman tabanlı yöntemler geçici tepkilerin ve geniş bantlı problemlerin incelenmesinde kullanışlı olurken, frekans tabanlı yöntemler durağan hal tepkilerin ve dar bantlı problemlerin incelenmesinde en iyi çözümü vermektedir. Her iki yaklaşımın da avantajlarını ön plana çıkarabilecek bir yöntem geliştirilebileceği düşünülmektedir. Uzayda ve/veya zamanda Kesirli Fourier Dönüşümü uygulanarak bazı durumlarda hesaplama karmaşıklığı azaltılabilir. Kesirli Fourier Dönüşümü, sürekli Fourier Dönüşümünün genelleştirilmiş halidir. Son yıllarda bu konu üzerinde çeşitli çalışmalar yapılmakta ve uygulama alanları genişlemektedir. Genel olarak, sinyal işleme ve gürültü süzme gibi alanlarda kullanılmaktadır. Bu çalışmada Kesirli Fourier Dönüşümü, ilk kez Maxwell denklemlerine zaman bölgesinde uygulanmış ve elde edilen diferansiyel denklemler sonlu farklar yaklaşımı ile ayrık hale getirilmiştir. Elde edilen ayrık sonlu fark denklemlerinin çözümü için öneriler sunulmuştur.

### Abstract

With the improvement in the computer speed and memory, Numerical Methods are frequently used in the solution of electromagnetic problems. Numerical Methods can be classified as the frequency domain and the time domain based methods. While the time domain methods are suitable for modeling of the transient response and wideband problems, the frequency domain methods are suitable for modeling of the steady state response and narrow band problems. A numerical method that has the advantages of both time and frequency domain approaches can be developed. Applying Fractional Fourier Transform in space and/or time can reduce the computational complexity for some cases. The Fractional Fourier Transform is a generalization of the continuous

Fourier Transform. In last decades, there are several studies and applications concerning this transform. Generally, it is used in signal processing and noise filtering. In this study, Fractional Fourier Transform is applied to the Maxwell's Equations for the first time in literature. Finite difference equations are obtained by the application of finite difference approximation to the differential equations.

### 1. Giriş

Elektromanyetik alan teorisi, duran veya hareketli yükler ve bu yüklerin oluşturduğu elektrik ve manyetik alanlarla ilgilenen bir bilim dalıdır. Bu yüzden günümüzde kullanılan her türlü elektronik sistemin tasarım ve analizinde gerekli olan temel konulardan birisidir. Elektromanyetik teori, anten tasarımı ve analizi, radar kesit alanı hesaplanması, elektromanyetik uyumluluk ve girişim, haberleşme sistemleri, uzaktan algılama, optik gibi çok çeşitli konularda uygulama alanı bulmuştur. Bu konularda karşılaşılan problemlerin çözümünde elektromanyetik yöntemler kullanılmaktadır.

Elektromanyetik yöntemler analitik ve sayısal olarak sınıflandırılabilir. Analitik yöntemler, problemin tam çözümünü vermekte ancak pratikte sadece belli geometrik yapılarla uygulanabilmektedir. Bilgisayarların hız ve bellek kapasitelerinin artmasıyla elektromanyetikteki problemlerin sayısal yöntemlerle çözümü ağırlık kazanmıştır. Genel olarak sayısal elektromanyetik yöntemleri integral denklemi (İD) veya diferansiyel denklem (DD) çözen yöntemler olarak sınıflandırılabilir. Bu sınıflandırmadan ayrı olarak, sayısal elektromanyetik yöntemler, zaman bölgesi (ZB) ve frekans bölgesi (FB) tabanlı yöntemler olarak da gruplandırılabilir [1-2]. İD-FB tabanlı yöntemlere örnek olarak, momentler ve hızlı çokkutup yöntemleri, DD-ZB tabanlı yöntemlere Zaman Bölgesinde Sonlu Farklar (ZBSF), DD-FB tabanlı yöntemlere ise Sonlu Elemanlar Yöntemi verilebilir. İD ve DD-FB tabanlı yöntemlerde, doğrusal denklem sistemi oluşturularak bilinmeyenler matris denklemi çözülerek bulunur. Bunlara ek olarak DD-ZB tabanlı yöntemlerde de kapalı ve açık olmak üzere iki çeşit çözüm bulunabilir. DD-ZB açık çözümlerde doğrusal denklem sistemleri yerine Maxwell



denklemlerindeki diferansiyel denklemler yinelemeli bir şekilde çözülür ve bu nedenle bu tip yöntemler bilgisayar kaynaklarına daha az ihtiyaç duyarlar. Ancak çözümün sayısal olarak kararlı olabilmesi için zaman ve uzay adımlarının kararlılık koşullarını sağlaması gerekir. DD-ZB tabanlı kapalı çözümlerin elde edilmesinde de matris denklemleri çözülür. Açık çözüm yaklaşımına göre bu yöntemin avantajı, çözümün daima kararlı olmasıdır [2-3]. Problem boyutları büyüdükçe yöntemlerin bilgisayar kaynaklarına olan ihtiyacı da artmaktadır.

FB tabanlı yöntemler problemi tek bir frekansta çözdükleri için geniş bantlı kaynak bulunan problemlere uygulandıkları zaman her bir frekans için problem tekrar çözülmesi gerekmektedir ve hesaplama karmaşıklığı artmaktadır. ZB tabanlı yöntemler ise geniş bantlı kaynakların bulunduğu problemleri tek bir benzetimle çözebilmektedir. Ancak bu yöntemlerde de her bir kaynak için benzetim tekrarlanmalıdır [1; 4]. Doğrusal ve özdeş olmayan, yöne ve zamana bağımlı ortamlar içeren problemler ZB tabanlı yöntemlerle daha kolay çözülebilirler.

Işınım, yayılım ve saçılım problemlerinde haberleşme ve radar uygulamalarında kullanılan pekçok geniş bantlı ve uzun süreli darbeleri sinyaller için ZB ve FB yaklaşımları yeterli olmamaktadır. Her iki yaklaşımın avantajlarını öne çıkaracak yöntemler geliştirilebilir. Bu durumda Maxwell Denklemleri, frekans bölgesi veya zaman bölgesi yerine, Kesirli Fourier bölgesinde çözülerek her iki yaklaşımın da avantajlarının korunabileceği düşünülmektedir. Bazı durumlarda örneğin 'chirp' darbe sinyallerinin kullanıldığı radar problemlerindeki gibi kaynaktan üretilen sinyalin zaman-frekans gösteriminde, sinyalin dayanağının belli bölgelerde yoğunlaştığı durumlar için, kesirli Fourier bölgesinde uygulanacak çözüm teknikleri fayda sağlayabilir.

Bu çalışmada Kesirli Fourier Dönüşümünün (KFD), Maxwell Denklemlerine ve ZBSF yöntemine uygulanabileceği önerilmektedir. Uygulamada karşılaşılan problemler anlatılmış ve çözüm önerileri verilmiştir. İkinci ve üçüncü bölümlerde, sırasıyla, KFD ve ZBSF yöntemi anlatılmıştır. Dördüncü bölümde KFD'nin Maxwell denklemlerine uygulanarak sonlu farklar yöntemi ile çözülebileceğine değinilmiştir.

## 2. Kesirli Fourier Dönüşümü

Kesirli Fourier Dönüşümü (KFD), zaman-frekans analizi, gürültü süzme, radar sinyallerinin işlenmesi, iletişim, hüzmeye şekillendirme, sinyallerin geliş açılarının kestirimi gibi birçok alanda kullanılmaktadır. KFD klasik Fourier dönüşümünün genelleştirilmiş halidir.  $f(u)$  sinyalinin KFD'si aşağıdaki gibi verilebilir [5; 6]:

$$f_a(u) \equiv (F^a f)(u) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} K_a(u, u') f(u') du' \quad (1)$$

Yukarıdaki denklemde  $K_a(u, u')$  çekirdek fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$K_a(u, u') \equiv \sqrt{1 - i \cot \alpha} e^{i\pi(u^2 \cot \alpha - 2uu' \csc \alpha + u'^2 \cot \alpha)} \quad (2)$$

Burada,  $a$  KFD'nin kesir değerini göstermektedir. KFD, sinyalin zaman-frekans gösteriminin  $\alpha = \pi/2$  açısı kadar dönmesine neden olur. KFD  $a=0$  için zaman sinyalinin

kendisini,  $a=1$  için sinyalin klasik Fourier dönüşümünü verir. Bir sinyalin KFD'si,  $a$  kesir değerli Fourier bölgesindedir.

Bir sonraki bölümde ZBSF yöntemi anlatılacaktır.

## 3. Zaman Bölgesinde Sonlu Farklar Yöntemi

Zaman Bölgesinde Sonlu Farklar (ZBSF) yöntemi 1966 yılında Yee tarafından önerilmiştir [7]. ZBSF yöntemi diferansiyel denklem çözen ve zaman bölgesi tabanlı yöntemlerdendir. ZBSF yöntemi Maxwell denklemlerindeki türevlerin sonlu farklar ile ayrıklaştırılmasına dayanır. Aşağıdaki denklemde  $f(x)$  fonksiyonunun  $x_m$  noktasındaki birinci dereceden türevinin, merkezi sonlu farklar yöntemi ile ayrıklaştırılmış yaklaşımı verilmektedir [8; 9].

$$\left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x_m} \cong \frac{f(x_m + \Delta x/2) - f(x_m - \Delta x/2)}{\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (3)$$

Yukarıdaki denklemde  $O(\Delta x^2)$  ayrıklaştırım hatasının mertebesini ifade eder.  $\Delta x$  adım uzunluğudur ve  $\Delta x$  sifira yaklaştıkça (3) gerçek değerine yakınsar.

Uzayın her noktasında elektrik ve manyetik alanlar ve yükler arasındaki ilişkiyi veren Maxwell denklemlerinin diferansiyel biçimleri aşağıda verilmektedir.

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (4)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (7)$$

Yukarıdaki denklemlerde  $\mathbf{E}$  elektrik alan,  $\mathbf{D}$  elektrik akı yoğunluğu,  $\mathbf{H}$  manyetik alan ve  $\mathbf{B}$  manyetik akı yoğunluğu vektörleridir.  $\mathbf{J}$  akım yoğunluğu vektörü,  $\rho$  ise elektriksel yük yoğunluğudur. Örnek olarak tek boyutta bir düzlem dalğanın yayılımı düşünülebilir. Tek boyutlu, kayıpsız, kaynak içermeyen bir ortamda x-ekseni yönünde ilerleyen bir düzlem dalga için (4) ve (5) denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (8)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial H_y}{\partial x} \quad (9)$$

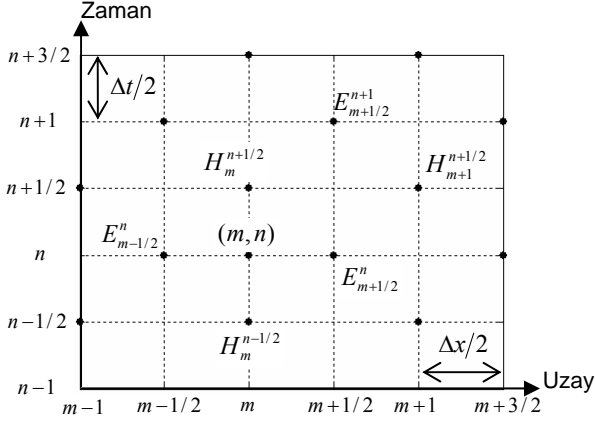
Yukarıdaki denklemlerde  $\varepsilon$  dielektrik sabiti,  $\mu$  manyetik geçirgenlik sabitidir. ZBSF yönteminde zaman ve uzaydaki türev ifadeleri sonlu farklar ile yakınlaştırılarak (8) ve (9) denklemleri aşağıdaki gibi ayrık hale getirilebilir.

$$H_m^{n+1/2} = H_m^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{\mu \Delta x} [E_{m+1/2}^n - E_{m-1/2}^n] \quad (10)$$

$$E_{m+1/2}^{n+1} = E_{m+1/2}^n + \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x} [H_{m+1}^{n+1/2} - H_m^{n+1/2}] \quad (11)$$

Yukarıdaki denklemlerde  $m$  ayrık x-eksenindeki noktaların indisini,  $n$  ise ayrık zaman eksenindeki noktaların indisini

göstermektedir.  $\Delta x$  x-eksenindeki adım uzunluğu,  $\Delta t$  ise zaman eksenindeki adım uzunluğudur. Şekil 1, ayrık hale getirilen uzay-zaman düzlemini göstermektedir [9].



Şekil 1. Ayrık uzay-zaman düzlemi

Yukarıda verilen (11) eşitliği incelendiğinde, zamanda bir adım öndeki elektrik alan değerinin, bir önceki adımdaki elektrik alan değeri ve uzayda bu noktaya komşu olan noktalardaki manyetik alan değerlerine bağlı olduğu görülür. Aynı ilişki (10) eşitliğinde de söz konusudur. Sonuç olarak başlangıç değerleri verildiğinde, zaman ilerledikçe her noktadaki elektrik ve manyetik alan değerleri, bir önceki anda hesaplanan elektrik ve manyetik alan değerlerinden bulunabilir.

(11) ve (10) sonlu fark denklemlerinin çözümünün sayısal olarak kararlı olabilmesi için  $\Delta x$  ve  $\Delta t$  adım uzunlukları belirli bir koşulu sağlamalıdır. Fiziksel olarak bu koşul elektromanyetik dalganın  $\Delta t$  süresi boyunca  $\Delta x$  adım uzunluğundan daha fazla ilerlememesini gerektirir. Tek boyutlu bir problem için bu koşul aşağıdaki biçimi alır.

$$c\Delta t \leq \Delta x \quad (12)$$

Yukarıdaki denklemde  $c$  boşluktaki ışık hızını ifade eder.  $\Delta x$  adım uzunluğu ise Nyquist örnekleme frekansına karşılık gelen dalga boyundan daha küçük seçilmelidir.

$$\Delta x \leq \frac{\lambda_{\min}}{2} \quad (13)$$

Yukarıdaki ifadede  $\lambda_{\min}$  sistemdeki en büyük frekansa karşılık gelen dalga boyudur. Genel olarak,  $\Delta x$ ,  $\lambda_{\min}/10$  ile  $\lambda_{\min}/40$  arasında seçilmektedir [8].

Sonsuz uzayda yayılım içeren problemlerde, benzetim sınırlı bir alanda yapıldığı için benzetimin sonlandırıldığı noktalarda geri yansıma gözlemlenebilir. Geri yansımanın olmaması için açık sınır koşulları sağlanmalıdır [8].

Sonraki bölümde KFD'nin Sonlu farklar yöntemine uygulanmasına giriş yapılacaktır.

#### 4. KFD'nin ZBSF Yöntemine Uygulanması

KFD yöntemi Maxwell Denklemlerine uygulanarak hem zaman bölgesi yöntemlerinin hem de frekans bölgesi yöntemlerinin avantajları belli problemler için öne çıkartılabilir.

Tek boyutlu, kayıpsız ve özdeş olarak tanımlanabilen basit bir ortam için Maxwell denklemleri (8) ve (9)'de verilmiştir. KFD, bu denklemlere zaman bölgesinde uygulanırsa  $a$  kesir değerli Fourier bölgesinde Maxwell denklemleri aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$j2\pi \sin \alpha u H_{y,a}(x,u) + \cos \alpha \frac{\partial}{\partial u} H_{y,a}(x,u) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} E_{z,a}(x,u) \quad (14)$$

$$j2\pi \sin \alpha u E_{z,a}(x,u) + \cos \alpha \frac{\partial}{\partial u} E_{z,a}(x,u) = \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial x} H_{y,a}(x,u) \quad (15)$$

Yukarıdaki denklemler  $\alpha = 0$  için zaman bölgesindeki Maxwell denklemlerine,  $\alpha = \pi/2$  için Maxwell denklemlerinin Fourier dönüşümüne karşılık gelmektedir. (14) ve (15) denklemleri merkezi sonlu farklar ile ayrık hale getirilirse aşağıdaki sonlu fark denklemleri elde edilebilir.

$$H_{m,a}^{n+1/2} = H_{m,a}^{n-1/2} \left( \frac{\cos \alpha - j\pi u_n \Delta u \sin \alpha}{\cos \alpha + j\pi u_n \Delta u \sin \alpha} \right) + \frac{\Delta u [E_{m+1/2,a}^n - E_{m-1/2,a}^n]}{\mu \Delta x (\cos \alpha + j\pi u_n \Delta u \sin \alpha)} \quad (16)$$

$$E_{m+1/2,a}^{n+1} = E_{m+1/2,a}^n \left( \frac{\cos \alpha - j\pi u_n \Delta u \sin \alpha}{\cos \alpha + j\pi u_n \Delta u \sin \alpha} \right) + \frac{\Delta u [H_{m+1,a}^{n+1/2} - H_{m,a}^{n+1/2}]}{\epsilon \Delta x (\cos \alpha + j\pi u_n \Delta u \sin \alpha)} \quad (17)$$

Yukarıdaki denklemlerde  $u_n = n\Delta u$ ,  $a$  kesir değerli Fourier bölgesindeki  $n$  indisli noktanın  $u$  değerini göstermektedir. Ayrık sonlu fark (16) ve (17) denklemleri sürekli eşdeğerlerinde olduğu gibi,  $\alpha$ 'nın, sırasıyla, 0 ve  $\pi/2$  değerleri için zaman ve frekans bölgesindeki sonlu fark biçimlerini almaktadır.

Zaman bölgesinde verilen bir kaynağın KFD'si kaynak olarak (16) ve (17) eşitliklerine uygulanarak  $a$  kesir değerli Fourier bölgesinde sistem çözülebilir ve ters KFD ile çözüm zaman bölgesine geri dönüştürülebilir.

## 5. Tartışma

Günümüzde elektromanyetik alanında karşılaşılan problemlerin çözümünde sayısal elektromanyetik yöntemleri ağırlık kazanmıştır. Sayısal elektromanyetik yöntemleri zaman ve frekans tabanlı olarak sınıflandırılabilir. Zaman bölgesi tabanlı yöntemler ile, sistemin geçici tepkisinin gözlenmesi ve tek bir benzetimle geniş bir frekans bandında sistem tepkisinin elde edilmesi mümkündür. Frekans tabanlı yöntemler ise sistemin durağan hal tepkisini verirken, geniş bantlı problemler için hesaplama karmaşıklığı artmaktadır. Her iki yöntemin de avantajlarını ön plana çıkarabilecek bir yöntemin geliştirilebileceği düşünülmektedir. KFD uygulayarak, sayısal yöntemler  $a$  kesir değerli Fourier bölgelerinde uygulanabilir. Bu sayede bazı durumlar için hesaplama karmaşıklığının azalacağı öngörülmektedir. Gelecekte yapılacak çalışmalarda KFD'nin ZBSF yöntemine uygulanabilmesi için gerekli olan kararlılık ve sınır koşulları incelenecek, ve tek boyutlu uzayda, basit ortamda düzlem dalganın yayılımı  $a$  kesir değerli Fourier bölgesinde çözülmeye çalışılacaktır.

## 6. Kaynakça

- [1] Poljak, D., *Advanced Modeling in Computational Electromagnetic Compatibility*, John Wiley & Sons, New York, 2007.
- [2] Miller, E. K., "A selective survey of computational electromagnetics", *IEEE Trans. On Antennas & Propagat.*, Vol. 36, No. 9, 1988, p 1281-1305.
- [3] Sevgi, L., *Elektromanyetik Problemler ve Sayısal Yöntemler*, Birsen Yay., İstanbul, 1999.
- [4] Rao, S. M., *Time Domain Electromagnetics*, Academic Press, San Diego, 1999.
- [5] Özaktaş, H. M., Zalevsky, Z., Kutay, M. A., *The Fractional Fourier Transform with Applications in Optics and Signal Processing*, John Wiley & Sons, New York, 2001.
- [6] Candan, Ç., "The Discrete Fractional Fourier Transform", MS. Thesis, Bilkent University, Ankara, 1998.
- [7] Yee, K. S., "Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations", *IEEE Trans. AP*, vol. 14, no. 3, p 302-307, 1966.
- [8] Taflove, A., *Computational Electromagnetics: The Finite-Difference Time-Domain Method*, Artech House, Norwood, MA, 1995.
- [9] Stutzman, W. L., Thiele, G. A., *Antenna Theory and Design*, John Wiley & Sons, New York, 1998.

## Kesirli Fourier Dönüşümü ile Açıklık Antenden Yayılan Elektrik Alanların Hesaplanması

Işıltan Sayın, Feza Arıkan, Orhan Arıkan\*  
Hacettepe Üniversitesi  
Elektronik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü  
Beytepe, Ankara  
isiltan@ee.hacettepe.edu.tr, arikan@hacettepe.edu.tr,

\*Bilkent Üniversitesi  
Elektronik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü  
Beytepe, Ankara  
oarikan@ee.bilkent.edu.tr

**Özet:** Açıklık antenin üzerindeki elektrik alan ile uzak alan örüntüsü arasında Fourier Dönüşümü (FD), yakın alan örüntüsü arasında da Kesirli Fourier Dönüşümü (KFD) ilişkisi bulunmaktadır. Bu çalışmada, bir açıklık antenin uzak ve yakın alandaki örüntüleri incelenmiştir. Uzak alan örüntüleri, analitik, Zaman Uzamında Sonlu Farklar (ZUSF) ve açıklık üzerindeki alanın FD'si ile elde edilmiş ve birbirleri ile karşılaştırılmıştır. Yöntemler çeşitli açıklık boyları için uzak alanda birbirlerine benzer sonuçlar vermiştir. Yakın alanda ZUSF ile elde edilen örüntüler, açıklık alanının KFD'si ile karşılaştırıldığında, yakın alandan uzak alana gidilirken benzer sonuçlar elde edilmektedir.

**Abstract:** The electric field on an aperture antenna is related to the far-field pattern by the Fourier Transform (FT) and to the near-field pattern by the Fractional Fourier transform (FrFT). In this work, the near and far field patterns of an aperture antenna are studied. The far field patterns are obtained with an analytical formula, Finite Difference Time Domain (FDTD) method and the FT of the aperture field. When the patterns are compared with each other for several aperture lengths, it is observed that in the far field the methods give similar results. When the near field patterns obtained by the FDTD method are compared with the FrFT of the aperture field, from near field to far field similar patterns are obtained.

### 1. Giriş

Kesirli Fourier Dönüşümü (KFD), klasik Fourier Dönüşümünün (FD) geliştirilmiş halidir. KFD, FD'nin kullanıldığı yerlerde barındırdığı esneklikle farklı yaklaşımların getirilmesine imkan sağlamakta ve uygulama alanını genişletmektedir. KFD'nin hesaplama karmaşıklığı FD'ninkine yakın olduğu için uygulandığı alanlarda başarımın artmasına imkan sağlanırken hesaplama karmaşıklığı aynı kalabilmektedir [1]. KFD'nin optik alanında bir çok uygulaması bulunmaktadır. Işığın genliğinin optik bir sistemin girişindeki ve çıkışındaki dağılımları arasındaki ilişki KFD ile gösterilebilir [2].

Kırınım teorisinde, bir açıklığın uzak alandaki kırınım örüntüsü, açıklıktaki dağılımın FD'si biçimindeyken, yakın alandaki kırınım örüntüsü açıklığın KFD'si biçiminde oluşmaktadır [1]-[2]. Açıklığın boyu dalgaboyuna göre çok büyük olduğu, gözlem noktasının açıklığa dik olan eksene yakın olduğu ve elektrik alanın skaler olduğu varsayımları altında kırınım örüntüsü yakın alanda Fresnel integrali ile verilir. Fresnel integrali KFD ile ifade edilebilmektedir. Bu varsayımlar altında yakın alandaki kırınım örüntüsü açıklığa paralel bir düzlem üzerinde KFD ile hesaplanabilir [3]. Ancak açıklığın boyu dalgaboyu mertebesindeyken bu yaklaşım geçerliliğini yitirmektedir.

Bu çalışmada, dalga boyu mertebesinde bir açıklık antenin uzak ve yakın alandaki kırınım örüntüsü incelenmiştir. Uzak alandaki kırınım örüntüsünün elde edilmesinde analitik çözüm, Zaman Uzamında Sonlu Farklar (ZUSF) yöntemi, ve açıklık üzerindeki alanın FD'si kullanılmıştır. Genel olarak üç yöntem ile elde edilen uzak alan örüntüleri birbirine benzemektedir. Yakın alandaki kırınım örüntüleri ise ZUSF yöntemi ile elde edilmiştir. Açıklık üzerindeki elektrik alanın KFD'si ile yakın alandaki ZUSF örüntüleri karşılaştırılmıştır. Açıklık üzerindeki elektrik alanın belirli bir kesir değerindeki KFD'sinin ZUSF yöntemi ile elde edilen elektrik

alan örüntüsüne yakın olduğu gözlenmiştir. Anten ile gözlem noktası arasındaki mesafe, antenden uzak alana doğru giderken, ZUSF yöntemine yakın sonuç veren KFD'nin kesir değeri sıfırdan bire doğru yaklaşmaktadır.

Bir sonraki bölümde açıklık antenden yayılan elektrik alanın kırınım örüntüsünü hesaplamada kullanılan yöntemler anlatılmıştır. Bölüm 3'te uzak ve yakın alanda hesaplanan kırınım örüntülerinin birbirleri ile karşılaştırması verilmiştir. Sonuçlar Bölüm 4'te tartışılmıştır.

## 2. Kırınım Örüntülerinin Hesaplanması

Açıklığın uzak alanındaki kırınım örüntüsünün hesaplanmasında analitik çözüm, ZUSF yöntemi ve açıklık üzerindeki alan genliğinin FD'si kullanılmıştır. Kırınım örüntüsü  $r$  yarıçaplı yarım çember üzerindeki gözlem noktalarında hesaplanmıştır. Açıklık iki boyutlu uzayda  $x$  ekseninde  $-L$  ile  $L$  arasındadır.  $z$  eksenine açıklığa dik ve yayılma yönündedir. Açıklık üzerinde elektrik alan genliği  $E_0$  sabittir. Açıklıktan yayılan elektrik alanın uzak alandaki ifadesi durağan faz yaklaşması kullanılarak

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \approx 2LE_0 \sqrt{\frac{jk_0}{2\pi r}} e^{-jk_0 r} \frac{\sin(k_x L)}{k_x L} \mathbf{a}_\theta \quad (1)$$

biçiminde yazılabilir [4]. Eş. (1)'de  $\mathbf{r}$  gözlem noktası;  $k_0$  dalga sayısı;  $r$ ,  $\mathbf{r}$ 'nin büyüklüğü;  $k_x = k_0 \sin\theta$ ;  $\mathbf{a}_\theta$ ,  $\theta$  yönündeki birim vektördür. Uzak alan elektrik alanın analitik çözümünün hesabı için Eş. (1) kullanılacaktır.

ZUSF yöntemi için [5]'de verilen yöntem kullanılmıştır. ZUSF yöntemi ile açıklık antenden uzak alana kadar olan bölgede tek bir frekansta elektromanyetik dalga yayılım benzetimi yapılarak her bir nokta ve zamandaki alanlar kaydedilmiştir. Bu alanlardan istenilen bir uzaklık için ortalama güç veya ortalama elektrik alan genliği hesaplanabilir. Bu sayede hem uzak alan hem de yakın alandaki kırınım örüntüleri elde edilebilir.

Yakın alandaki kırınım örüntüsü ile ilişkili olan açıklık üzerindeki elektrik alanın KFD'nin hesaplanmasında [6]'deki yöntem kullanılmıştır. KFD'nin  $a$  kesir değeri sıfırdan bire doğru değişirken elde edilen kırınım örüntüsü açıklık üzerindeki elektrik alandan uzak alandaki kırınım örüntüsüne benzemektedir. Dalgaboyu mertebesinde bir açıklık için yakın alanda hangi uzaklıkta hangi kesir değerinin kullanılması gerektiği bilinmemektedir. Bu yüzden KFD ile elde edilecek kırınım örüntüsünün bulunmasında  $a$  kesir değeri sıfırdan bire değişirken KFD'ler hesaplanmış ve yatay ekseninde yan hüzmeler örtüşecek şekilde ölçeklenerek ZUSF örüntüsüne en yakın örüntüyü veren  $a$  kesir değeri seçilmiştir.

Bir sonraki bölümde, uzak alanda analitik çözüm, ZUSF yöntemi ve açıklık üzerindeki alanın FD'si ile elde edilen kırınım örüntülerinin karşılaştırılması; yakın alanda, ZUSF yöntemi ve açıklık üzerindeki alanın KFD'si ile elde edilen kırınım örüntüleri karşılaştırılacaktır.

## 3. Kırınım Örüntülerinin Karşılaştırılması

Bu bölümde açıklık antenin uzak ve yakın alanlarında farklı yöntemle elde edilen kırınım örüntüleri karşılaştırılmıştır. Şekiller a, b ve c, boyu sırasıyla, bir, üç ve beş dalgaboyu olan açıklık için elde edilen normalleştirilmiş uzak alan örüntülerini göstermektedir. Işıma örüntüleri  $k_x = k_0 \sin\theta$ 'ya göre,  $\theta = -90^\circ$ 'den  $+90^\circ$ 'ye kadar çizdirilmiştir. Grafikler incelendiğinde açıklık alanının FD'si ile elde edilen örüntülerin analitik çözüme çok yakın sonuçlar verdiği, ZUSF yöntemi ile elde edilen uzak alan örüntülerinin analitik ve FD yöntemleri ile elde edilen örüntülere çok benzer olduğu gözlenmektedir.

Şekiller a, b, c ve d'de, sırasıyla,  $r=1.02m$ ,  $r=0.51m$ ,  $r=0.21m$  ve  $r=0.12m$  uzaklıklarında elde edilen kırınım örüntüleri verilmiştir. KFD ile elde edilen örüntünün ZUSF'ye en çok benzediği  $a$  kesir değeri Şekil 2'nin altında verilmiştir. Uzak alana yakın bölgelerde KFD yakın alan kırınım örüntüsü ile örtüşürken, gözlem uzaklığı açıklık antene yaklaşırken KFD yakın alan örüntüsüne daha az benzemektedir. Uzak alana gidildikçe ZUSF yöntemi ile elde edilen örüntüye benzeyen KFD'nin  $a$  kesir değeri bire doğru yaklaşmaktadır. KFD, dalgaboyu mertebesinde açıklık antenin kırınım örüntüsü için yakın alandan uzak alana olan geçişi ifade edebilmektedir.

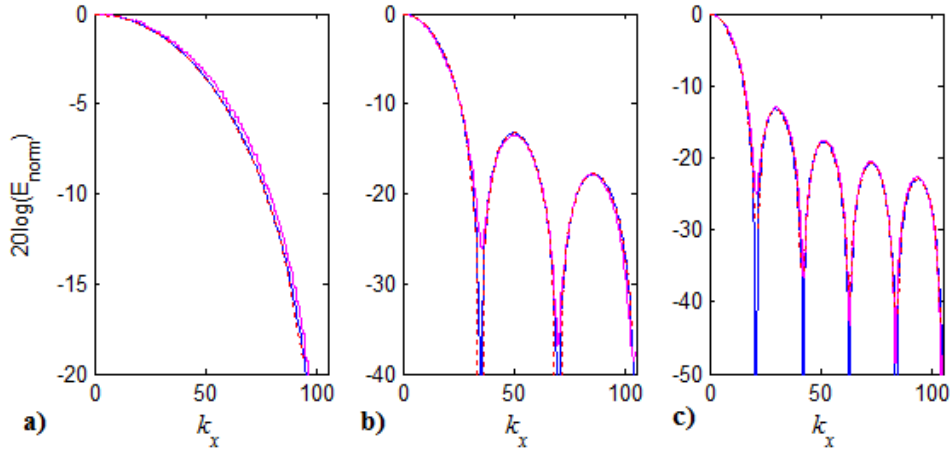
## 4. Sonuç

Dalga boyu mertebesinde bir açıklık antenin uzak ve yakın alandaki kırınım örüntüsü ile açıklık alanının KFD ilişkisi incelenmiştir. Uzak alandaki kırınım örüntüsü analitik çözüm, ZUSF yöntemi ve açıklık alanın FD'si ile hesaplanmıştır. Üç yöntem ile birbirine benzer uzak alan örüntüleri elde edilmiştir. Yakın alandaki kırınım örüntüleri ise ZUSF yöntemi ile elde edilmiştir. Açıklık alanın KFD'si ile yakın alandaki ZUSF örüntüleri

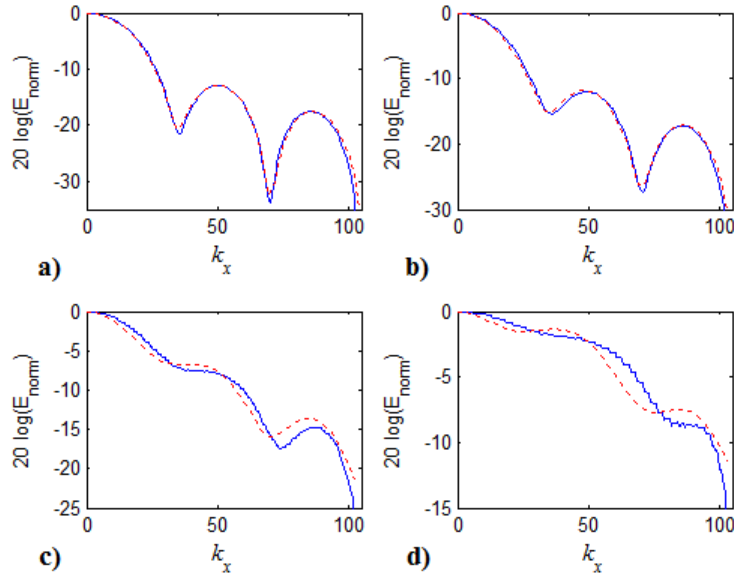
karşılaştırılmıştır. Açıklık alanının KFD'sinin, yakın alandan uzak alana gidilirken ZUSF yöntemi ile elde edilen örüntüye yakın olduğu, gözlem noktası açıklığa yaklaştıkça KFD'nin örüntüyü ifade edemediği gözlenmiştir. İlerideki çalışmalarda KFD kesir değerinin uzaklıkla değişimi daha ayrıntılı incelenebilir.

### Kaynaklar

- [1]. Özaktaş, H. M., Zalevsky, ve Z., Kutay, M. A., The Fractional Fourier Transform with Applications in Optics and Signal Processing, John Wiley & Sons, New York, 2001.
- [2]. Özaktaş, H. M., ve Mendlovic, D., Fractional Fourier Optics, J. Opt. Soc. Am. A, 12, s.743-751, 1995.
- [3]. Hanna, M. T., Shaarawi, A. M., Seif, N. P. A., Ahmed, W. A. E. M., Discrete fractional Fourier Transform as a fast algorithm for evaluating the diffraction pattern of pulsed radiation, J. Opt. Soc. Am. A., 2011.
- [4]. Collin, R. E., Antennas and Radiowave Propagation, McGraw-Hill, 1985.
- [5]. Taflove, A., Computational Electromagnetics: The Finite-Difference Time-Domain Method, Artech House, Norwood, MA, 1995.
- [6]. Özaktaş, H. M., Arıkan, O., Kutay, M. A., ve Bozdağı, G., Digital computation of the fractional Fourier transform, IEEE T. Signal. Proces., 44, 9, 1996.



Şekil 1. Uzak alan kırınım örüntüleri, a)  $2L=\lambda$ , b)  $2L=3\lambda$ , c)  $2L=5\lambda$ . Düz eğri analitik çözüm, çizgili eğri ZUSF, noktali eğri FD kırınım örüntüsünü gösterir.



Şekil 2. Yakın alan kırınım örüntüleri, a)  $r=1.02\text{m}$  ( $a=0.88$ ), b)  $r=0.51\text{m}$  ( $a=0.78$ ), c)  $r=0.21\text{m}$  ( $a=0.54$ ), d)  $r=0.12\text{m}$  ( $a=0.39$ ). Düz eğri ZUSF, çizgili eğri KFD kırınım örüntüsünü gösterir.

## Computation of Fresnel Integral by Fractional Fourier Transform Methods

Isiltan Sayin<sup>(1)\*</sup>, Feza Arikan<sup>(1)</sup> and Orhan Arikan<sup>(2)</sup>

(1) Hacettepe University, Electrical and Electronics Engineering, Ankara, Turkey

(2) Bilkent University, Electrical and Electronics Engineering, Ankara, Turkey

Fractional Fourier Transform (FrFT) is the generalization of the ordinary Fourier Transform (FT) and a subclass of the Linear Canonical Transform (LCT). FrFT is used in many fields, where ordinary FT has already found applications, such as signal processing, optics, telecommunications, noise filtering, beamforming, and solution of differential equations.

The Fresnel integral is the paraxial approximation to the Rayleigh-Sommerfeld integral. It gives the approximate fields in the radiating near field of an aperture. Fresnel integral can be written in terms of the continuous FrFT of the source distribution. So, efficient and accurate computation of FrFT is of great importance for obtaining the Fresnel approximations to the radiating fields from an aperture.

Discrete FrFT can give the approximate samples of the continuous FrFT, such as the Discrete Fourier Transform (DFT) gives the samples of the continuous FT. Several discrete FrFT definitions has been developed in the literature. Among these definitions two of them are widely used to compute the Fresnel integral. One of these definitions is based on the Fast Fourier Transform (FFT) method (Özaktas et al., *IEEE T Signal Proces*, **44**, **9**, 1996, pp. 2141-2150). The second definition is based on the eigen-decomposition of the DFT matrix (Pei et al., *IEEE T Signal Proces*, **47**, **5**, 1999, pp. 1335-1348). In the FFT based method, FrFT operator is divided into sub-operators such as chirp multiplications and chirp convolution and since the convolution is performed by FFT, this method has  $O(N \log N)$  complexity. The disadvantage of this method is that it assumes constant sampling intervals in all fractional domains, so when the sampling interval is different from the assumed one, the output is not the approximate samples of the continuous FrFT, but samples of FrFT with different parameters. In the method based on the eigen-decomposition of the DFT matrix, the eigenvectors of the DFT matrix has to be well defined in order to get the generalization of the DFT. Also this method applies an angle modification and phase compensation in order to get the samples of the continuous FrFT. This method has no constraint on the sampling interval as the FFT based method and has high computational complexity of  $O(N^2)$ .

In this study, scalar fields radiating from a slit are considered. It is shown that paraxial Fresnel approximation to the scalar fields can be computed efficiently by the FFT based method without the sampling interval constraint. The relation between the FFT based algorithm and the continuous FrFT is derived as a special case of the relations between discrete and continuous LCTs given in (F. S. Öktem and H. M. Özaktas, *IEEE Signal Proc Let*, **16**, **8**, 2009, pp. 727-730). It is observed that derived relation is same with the angle modification and phase compensation proposed in the eigen-decomposition based method. So, the Fresnel approximation can also be computed in terms of the samples of the continuous FrFT without sampling interval constraint with  $O(N \log N)$  complexity.

Expansion of the FrFT kernel in Hermite-Gaussian basis functions are considered and the effect of the source distribution is investigated in the expansion of the Fresnel approximation integral. As the source distribution becomes similar to the Hermite-Gaussian functions, less terms are needed in the expansion.

## ÖZGEÇMİŞ

### Kimlik Bilgileri

Adı Soyadı : İŞILTAN SAYIN  
Doğum Yeri : Ankara  
Medeni Hali : Bekar  
E-posta : isiltansayin@yahoo.com  
Adresi : Remzi Oğuz Arık Mah., Şimşek Sk.,  
45/7, Çankaya / ANKARA

### Eğitim

Lisans : Hacettepe Üniversitesi  
Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Böl., ANKARA  
(2001-2005)  
Yüksek Lisans : Hacettepe Üniversitesi  
Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Böl., ANKARA  
(2005-2008)  
Doktora : Hacettepe Üniversitesi  
Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Böl., ANKARA  
(2008-2016)

### Yabancı Dil ve Düzeyi

İngilizce : Çok İyi  
İspanyolca : Başlangıç

### İş Deneyimi

Aralık 2005-... : Araştırma Görevlisi, Hacettepe Üniversitesi  
Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Böl., ANKARA  
Ağustos 2014 : Staj, TURKSAT, ANKARA

### Deneyim Alanları

Elektromanyetik, Sinyal İşleme, Kesirli Fourier Dönüşümü, Geliş Yönü Bulma Yöntemleri, Uzaktan Algılama



## **Tezden Üretilmiş Projeler ve Bütçesi**

-

## **Tezden Üretilmiş Yayınlar**

Sayın, I., Arıkan, F., Arıkan, O., Computation of Electromagnetic Vector Field Radiation Integrals by Fractional Fourier Transform, Turkish Journal of Electrical Engineering & Computer Sciences dergisine Eylül 2016'da gönderilmiştir.

## **Tezden Üretilmiş Tebliğ ve/veya Poster Sunumu ile Katıldığı Toplantılar**

Sayın, I., Arıkan, F., Arıkan, O., Computation of Fresnel Integral by Fractional Fourier Transform Methods, 1st URSI Atlantic Radio Science Conference (URSI AT-RASC), 2015.

Sayın, I., Arıkan, F., Arıkan, O., Kesirli Fourier Dönüşümü ile Açıklık Antenden Yayılan Elektrik Alanların Hesaplanması, URSI-TÜRKİYE 2014 VII. Bilimsel Kongresi, 28-30 Ağustos 2014.

Sayın, I., Arıkan, F., Arıkan, O., Kesirli Fourier Dönüşümünün Zaman Bölgesinde Sonlu Farklar Yöntemine Uygulanması, Sinyal İşleme ve İletişim Uygulamaları (IEEE SIU2010) Kurultayı, 2010.

## **Diğer Yayınlar**

Sayın, I., Arıkan, F., Arıkan, O., Regional TEC Mapping with Random Field Priors and Kriging, Radio Science, 43, 2008.

Sayın, I., Arıkan, F., Akdoğan, K.E., Optimum temporal update periods for regional ionosphere monitoring, Radio Science, 45, 2010.

## **Diğer Tebliğ ve/veya Poster Sunumu ile Katıldığı Toplantılar**

Deviren, M.N., Arıkan, F., Sayın, I., Koroglu, O., Automatic TEC Mapping Using a GPS Network and GIM-TEC, URSI-AT-RASC, Mayıs 2015, İspanya.

Arıkan, F., Arıkan, O., Sezen, U., Toker, C., Lenk, O., Kilicoglu, A., Sayın, I., Koroglu, O., IONOLAB group activities using CORS-TR GPS network, Beacon Satellite Symposium-BSS 2010 (BEACON 2010), Haziran 2010.

Sayın, I., Arıkan, F., Akdoğan, K.E., Investigation of Optimum Temporal Update Periods for Regional TEC Monitoring, RAST'2009 Recent Advances in Space Research, Haziran 2009, İstanbul, Türkiye.

Arıkan, F., Yılmaz, A., Arıkan, O., Sayın, I., Gurun, M., Akdoğan, K.E., Space Weather Activities of IONOLAB Group: TEC Mapping Geophysical Research Abstracts, EGU General Assembly 2009, Nisan 2009.

Sayın, I., Arıkan, F., Gulyaeva, T.L., Regional Mapping of Total Electron Content with Kriging and Randaom Field Prior, ATMOS'2008 Atmosfer Bilimleri Sempozyumu, Mart 2008, İstanbul, Türkiye.

Sayın, I., Yılmaz, A., Arıkan, F., Comparison of Kriging, Random Field Priors and Neural Network on Synthetic TEC Data, TUJK'2007 Turkish National Geodetic Commission Scientific Meeting, Kasım 2007, Ankara, Türkiye.

Arıkan, F., Yılmaz, A., Sayın, I., Sezen, U., Arıkan, O., Erturk, O., Gurun Temur, M., Investigation of Lithosphere-Atmosphere-Ionosphere Coupling by Monitoring TEC and Computerized Ionospheric Tomography, International Workshop on Early Warning and Monitoring Earthquake by Using Electromagneism Detecting Satellite, Temmuz 2007.

Sayın, I., Arıkan, F., Arıkan, O., Regional Space-Time Interpolation of GPS-TEC with Kriging, IRI/COST 296 Workshop, Temmuz 2007, Prag.

Sayın, I., Arıkan, F., Arıkan, O., Synthetic TEC Mapping with Ordinary and Universal Kriging, RAST'2007 Recent Advances in Space Research, Haziran 2007, İstanbul, Türkiye.

Sayın, I., Arıkan, F., ARIKAN, O., Kriging ve Rassal Alan Öncülü ile Sentetik Toplam Elektron İçeriği Aradeğerlemesi, SİU'2007 Sinyal İşleme ve Uygulamaları Kurultayı, Haziran 2007, Eskişehir, Türkiye.

Uğurlu, O., Sezen, U., Sayın, I., Web Tabanlı IONOLAB TEİ Kestirimi, SİU'2007 Sinyal İşleme ve Uygulamaları Kurultayı, Haziran 2007, Eskişehir, Türkiye.

### **Yüksek Lisans Tezi**

Kriging ve Rassal Alan Öncülü ile Toplam Elektron İçeriği Haritalaması, Hacettepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ocak 2008.

### **Diğer Projeler**

Haziran 2006-Haziran 2008 : TUBİTAK EEEAG 105E171, Elektron Dağılımının GPS Ölçümleriyle Bilgisayarlı Tomografik Görüntülenmesi, Araştırmacı.

Eylül 2009-Eylül 2010 : TUBİTAK EEEAG 109E055, Bölgesel Otomatik TEİ Haritalaması ve Sürekli Gözlenmesi, Araştırmacı.



HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
YÜKSEK LİSANS/DOKTORA TEZ ÇALIŞMASI ORJİNALLİK RAPORU

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ  
ELEKTRİK VE ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI BAŞKANLIĞI'NA

Tarih: 28/09/2016

Tez Başlığı / Konusu: Kesirli Fourier Dönüşümü'nün Maxwell Denklemlerine Uygulanması.....

Yukarıda başlığı/konusu gösterilen tez çalışmamın a) Kapak sayfası, b) Giriş, c) Ana bölümler d) Sonuç ve e)Kaynakça kısımlarından oluşan toplam 111 sayfalık kısmına ilişkin, 28/09/2016 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından Turnitin adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 4 'tür.

Uygulanan filtrelemeler:

- 1- Kaynakça hariç
- 2- Alıntılar hariç/dâhil
- 3- 5 kelimedenden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Çalışması Orijinallik Raporu Alınması ve Kullanılması Uygulama Esasları'nı inceledim ve bu Uygulama Esasları'nda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

Tarih ve İmza

Adı Soyadı: İşıltan Sayın  
Öğrenci No: N40244814  
Anabilim Dalı: Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü  
Programı: Elektromanyetik Alanlar  
Statüsü:  Y.Lisans  Doktora  Bütünleşik Dr.

28.09.2016

**DANIŞMAN ONAYI**

UYGUNDUR.

Prof. Dr. Feza ARIKAN