

**BAĞIMSIZ BİLEŞENLER ANALİZİ İLE ÇOK DEĞİŞKENLİ
GEOİSTATİSTİKSEL KESTİRİM**

**MULTIVARIATE GEOSTATISTICAL ESTIMATION USING
INDEPENDENT COMPONENT ANALYSIS**

BABAK SOHRABIAN

Prof. Dr. A.ERHAN TERCAN

Tez Danışmanı

Hacettepe Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim- Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin

Maden Mühendisliği Anabilim Dalı İçin Öngördüğü

DOKTORA TEZİ

Olarak hazırlanmıştır.

2013

BABAK SOHRABIAN'ın hazırladığı “ **BAĞIMSIZ BİLEŞENLER ANALİZİ İLE ÇOK DEĞİŞKENLİ JEOİSTATİSTİKSEL KESTİRİM**” adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **MADEN MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**'ında **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Başkan

(Prof. Dr., Nurkan KARAHANOĞLU)

Danışman

(Prof. Dr., A.Erhan TERCAN)

Üye

(Prof. Dr., Cem SARAÇ)

Üye

(Prof. Dr., Yılmaz ÖZÇELİK)

Üye

(Prof. Dr., Bahtiyar ÜNVER)

Bu tez Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından DOKTORA TEZİ olarak onaylanmıştır.

Prof.Dr. Fatma SEVİN DÜZ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgi eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünde bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

20/02/2013

İmza

Öğrenci adı ve Soyadı

ÖZET

BAĞIMSIZ BİLELEŞENLER ANALİZİ İLE ÇOKDEĞİŞKENLİ JEOİSTATİSTİKSEL KESTİRİM

BABAK SOHRABIAN

Doktora, Maden mühendisliği Bölümü

Tez Danışmanı: Prof. Dr. ABDULLAH ERHAN TERCAN

Şubat 2013, 76 sayfa

Bu çalışma, 111M218 numaralı, "Çokdeğişkenli Jeoistatistiksel Kestirimde Dikleştirilmiş Bileşenli Yeni Yöntemlerin Geliştirilmesi" adlı TÜBİTAK Projesi desteğiyle hazırlanmıştır. Çokdeğişkenli verilerin jeoistatistiksel kestirimi tekdeğişkenli kestirime kıyasla oldukça zordur. Zorluk, değişkenler arasındaki uzaklığa bağlı çapraz ilişkilerin modellenmesi ve bunların jeoistatistiksel kestirimde kullanılmasından kaynaklanmaktadır. Değişkenler arasında çapraz ilişki mevcut değilse çokdeğişkenli kestirim (Eşkrigleme) tekdeğişkenli kestirime (krigleme) indirgenir. Bu çalışmanın amacı çokdeğişkenli jeoistatistiksel kestirim problemini tekdeğişkenli kestirime indireyecek yöntemler geliştirmektir. Bir yaklaşım, değişkenleri dikleştirmek yani aralarındaki uzaklığa bağlı çapraz ilişkiyi gidererek yeni değişkenlere (bileşenlere) dönüştürmektir. Bu kapsamda iki yöntem önerilmiştir: (1) bağımsız bileşenler analizi ve (2) uzaklığa bağlı çapraz ilişkinin enküçüklenmesi. Değeri bilinmeyen noktalarda her bir yöntemden elde edilen bileşenler krigleme ile kestirilmiş ve kestirilmiş değerler verilerin gerçek uzayına dönüştürülmüştür. Geleneksel eşkrigleme yönteminin performansı yeni geliştirilmiş Bağımsız Bileşenler Krigleme (BBK) ve Uzaklığa Bağlı Çapraz ilişkinin Enküçüklenmesi ile Krigleme (UBÇEK) yöntemlerinin performansı ile karşılaştırılmıştır. Yöntemler ayrıca bir andezit ocağında işletilebilir ve işletilmez

bloklarının belirlenmesinde kullanılmıştır. Çalışma sonuçları BBK ve UBÇEK yöntemlerinin eşkrigleme yöntemine iyi bir alternatif olduğunu göstermiştir.

Anahtar Kelimeler: Uzaklığa bağlı çapraz ilişki, dikleştirme, variogram, eşkrigleme

ABSTRACT

MULTIVARIATE GEOSTATISTICAL ESTIMATION USING INDEPENDENT COMPONENT ANALYSIS

BABAK SOHRABIAN

Doctor of Philosophy, Department of Mining Engineering

Supervisor: Prof. Dr. ABDULLAH ERHAN TERCAN

Şubat 2013, 76 sayfa

This work is prepared with the support of TÜBİTAK Project, named "Çokdeğişkenli Jeostatistiksel Kestirimde Dikleştirilmiş Bileşenli Yeni Yöntemlerin Geliştirilmesi" with the code number 111M218. Geostatistical estimation of multivariate data is much more difficult than univariate estimations. There are two main reasons for this difficulty: Modeling spatial cross-correlations between variables and using model parameters in geostatistical estimations. If there is no spatial cross-correlation between variables, multivariate estimation is reduced to simple univariate estimation. The main purpose of this thesis is to develop methods that reduce multivariate problems to univariate ones. One approach is to transform spatially cross-correlated variables to orthogonal factors which do not show spatial cross-correlations with each other. In this study, two new methods were developed to generate orthogonal factors: (1) Independent component analysis and (2) minimum spatial cross-correlation method. Components derived from each method are estimated at unknown locations and estimated values are back-transformed into original space. Performance of

traditional cokriging estimation method is compared to Independent Component Kriging (ICK) and Minimum Spatial Cross-correlation Kriging (MSCK). ICK and MSCK methods were also used for determination of exploitable blocks of an andesite quarry. The study results show that the ICK and the MSCK methods are good alternatives to traditional cokriging estimation method.

Keywords: Spatial cross-correlation, orthogonalization, variogram, cokriging

TEŞEKKÜR

Tez çalışmalarım sırasında yüksek bilgi ve tecrübesiyle sürekli olarak bana destek veren, yapıcı yorumları ve eleştirileriyle beni en iyi şekilde yönlendiren ve tez konumun TÜBİTAK proje niteliğine gelmesini sağlayan ve böylece doktora çalışmalarımı sürdürmemde bana maddi destek şansı veren tez danışmanım Prof. Dr. Abdullah Erhan TERCAN'a içtenlikle teşekkür ederim.

Çalışma esnasında her türlü manevi ve bilimsel destek sağlayan ve tezin tamamlanmasında değerli emekleri bulunan tez izleme komitesi üyelerine, Prof. Dr. Yılmaz ÖZÇELİK'e ve Prof. Dr. Nurkan KARAHANOĞLU'ya çok teşekkür ederim.

Tez çalışmalarımda bana bilimsel ve manevi destek veren arkadaşım yüksek mühendis Hamza KIVRAK'a ve kod yazımında bana destek veren araştırma görevlisi Nurettin Alper TOPRAK'a teşekkürlerimi sunarım. Bu süreçte Türkçe yazım hataları düzetmelerinde ve işlemlerde bana yardımcı olan araştırma görevlileri Deniz EKŞİ, Emre YILMAZKAYA, Okay ALTUN, Süphi ÜNAL, Ergin GÜLCAN ve Özgür ÖZCAN'a teşekkür ederim.

Bu çalışmada ve bütün yaşamım boyunca bana manevi ve maddi destek tanıyan ve her zaman bana güvenen aileme, babam Kahraman SOHRABIAN'a, annem Rukiye NİKMARD'e, kız kardeşlerime Solmaz ve Sanaz SOHRABIAN'a ve çok sevdiğim eşim Zeinab ARIYANKHESAL'a teşekkür ederim.

Bu tez çalışmalarına verdiği maddi destekten dolayı TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

İçindekiler Dizini

	<u>sayfa</u>
KABUL VE ONAY SAYFASI	i
ETİK	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vii
İÇİNDEKİLER	viii
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER VE YÖNTEMLER.....	3
2.1. Problem Tanımı ve Şimdiki Çalışmanın Literatürdeki Yeri	3
2.2. Bağımsız Bileşenler Analizi	4
2.2.1. BBA, TBA Ve MOF Yöntemlerinin Benzetilmiş Veriler Üzerinde Karşılaştırılması	6
2.2.2. İstatistiksel Bağımsızlık	8
2.2.3. Bağımsız Bileşenlerin Kestirimi	8
2.2.4. Normal-dışılığın Ölçütleri	9
2.2.4.1. Basıklık (Kurtosis)	10
2.2.4.2. Negontropi	12
2.2.5. Negentropinin Yaklaşımları	13
2.2.6. BB Analizinden Önceki İşlemler	14
2.2.7. Hızlı BBA Algoritması	15
2.2.7.1. Tek Bir Bağımsız Bileşene İlişkin Hızlı BBA Algoritması	15
2.2.7.2. Birden Çok Bağımsız Bileşenin Kestirimine İlişkin Hızlı BBA Algoritması	16
2.3. Uzaklığa Bağlı Çapraz İlişkinin Enküçüklenmesi Yöntemi	17
2.3.1. Enküçükleme Ölçütü	18
2.3.2. φ 'nin Dereceli Azaltma Algoritması İle Enküçüklenmesi	18

2.3.3. φ' nin İki Değişken İçin Enküçüklenmesi	19
2.3.4. UBÇE Algoritmasının N-boyutlu Veri Kümesine Uygulanması	22
3. JEOİSTATİSTİKSEL KESTİRİM.....	24
3.1. Krigleme	24
3.2. Eşkrigleme	25
3.3. Dikleştirilmiş Bileşenli Krigleme	27
4. BİR BOYUTTA ÖRNEK UYGULAMALAR.....	29
4.1. Problemin Tanımı	29
4.2. Bir Boyutta Bağımsız Bileşenlerle Krigleme	29
4.3. Bir Boyutta UBÇE Bileşenleri İle Krigleme.....	34
5. BBK, UBÇEK VE EŞKRİGLEME YÖNTEMLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI.....	38
5.1. Jura Veri Kümesi	38
5.2. Verilerin Özet İstatistiği	39
5.3. Variogram Analizi	40
5.4. Kestirim Performansının Karşılaştırılması.....	46
6. BİR ANDEZİT OCAĞINDA DİKLEŞTİRİLMİŞ BİLEŞENLERLE KESTİRİM.....	48
6.1. Değişkenler Arası Uzaklığa Bağlı Çapraz İlişkinin Değerlendirilmesi	49
6.2. Dikleştirilmiş Bileşenlerin Üretimi	49
6.3. Dikleştirilmiş Bileşenlerinin Variogram Analizi	52
6.4. Kestirim Ve İşletilebilir Blokların Belirlenmesi	53
6.5. Kestirim Yöntemlerinin Karşılaştırılması	59
7. SONUÇLAR	62
KAYNAKLAR	64
EK 1. Bağımsız Bileşenleri Üreten MATLAB Kodu	67
EK 2. UBÇE Yönteminde Kullanılan (2.28) Nolu Eşitliğin Türetimi	69
EK 3. UBÇE Bileşenleri Üreten MATLAB Kodu	71
ÖZGEÇMİŞ	76

1.GİRİŞ

Uzaklığa bağılı çapraz ilişki gösteren değişkenlere yerbilimlerinde sıklıkla rastlanır. Polimetalik bir maden yatağında tenör değişkenleri (bakır, kurşun ve çinko), kömürde kalite değişkenleri (ısıl değer, kül, nem ve uçucu madde), mühendislik jeolojisinde jeomekanik değişkenler (tek eksenli basma dayanımı, dolaylı çekme dayanımı, elastisite modülü) petrolde petrofiziksel değişkenler (geçirgenlik, boşluk oranı, su doygunluğu) birer örnektir.

Böyle birbiri ile ilişkili değişkenler kümesinin kestirimi çok değişkenli yöntemler gerektirir. Eşkrigleme, bu amaçla yaygın bir şekilde kullanılan bir yöntemdir. Ancak değişken sayısı üçden fazla olduğunda uzaklığa bağılı çapraz ilişkilerin modellenmesi ve ayrıca büyük boyutlu doğrusal denklem sistemlerinin çözümündeki zorluklardan dolayı eşkrigleme yöntemi pratik olmaktan uzaklaşır. Örneğin değişken sayısı 4 ve örnek sayısı 5 olduğunda on adet variogramı pozitif tanımlı olacak şekilde modellemek ve ayrıca kestirimde yirmi beş adet bilinmeyenden oluşan yirmi beş adet doğrusal denklem sistemini çözmek gerekir.

Çok değişkenli kestirim problemlerinin daha basit bir şekilde çözümüne olanak verecek yeni yöntemlere gereksinim vardır. Bir yaklaşım, uzaklığa bağılı çapraz ilişki gösteren değişkenleri dikleştirilmiş bileşenlere (uzaklığa bağılı çapraz ilişki göstermeyen faktörlere) dönüştürüp, bu bileşenleri krigleme ile kestirmek ve son aşamada kestirim değerlerine geri dönüşüm uygulamaktır. Dikleştirilmiş bileşenlerin krigleme ile kestirimi, eşkriglemeye eşdeğer olduğundan eşkriglemeye ilişkin problemler doğal olarak ortadan kalkacaktır.

Uzaklığa bağılı ilişki gösteren değişkenlerin dikleştirilmiş bileşenlere dönüştürülmesi bu yaklaşımın ilk ve en önemli adımını oluşturmaktadır. Bu nedenle bu çalışmada amaç, dikleştirilmiş bileşenler üretmek ve değişkenler kümesinin çok değişkenli jeostatistiksel kestiriminde basit ve hızlı yöntemler geliştirmektir. Bu amaçla tezde iki farklı yaklaşımın kullanılması önerilmiştir: (i) bağımsız bileşenler analizi (BBA), (ii) uzaklığa bağılı çapraz ilişkinin enküçüklenmesi (UBÇE). BBA, çok değişkenli verilerden istatistiksel olarak dikleştirilmiş ve aynı zamanda bağımsız olan bileşenler üretmeyi amaçlar. Literatürde yapılan çalışmalar incelendiğinde değişkenler kümesinin BBA kullanılarak kestirildiği bir araştırmaya rastlanmamıştır. UBÇE yöntemi ise yeni

geliştirilecek bir yaklaşım olup uzaklığa bağlı çapraz ilişkinin iteratif bir şekilde minimize edilmesine dayanır. Bu yüzden tez, her iki konuda yapılmış ilk çalışma niteliğindedir.

Jeoistatistik teknikler, madencilikte maden yatağının kaynak/rezervinin hesaplanmasında kullanılırlar. Böyle yöntemler geliştirildiğinde polimetalik yataklardaki kaynak/rezerv kestirimlerinde işlem yoğunluğu standart yöntemlere göre oldukça azalacaktır. Örneğin 4 değişken ve 5 adet örnekle dikleştirilmiş bileşenler kullanılarak yapılacak kestirim işleminde yalnızca 4 adet variogramı modellemek ve 4 bilinmeyenli 4 ayrı doğrusal denklem sistemini çözmek yeterli olacaktır.

Tezin ikinci bölümü, problemi tanımlamakta, şimdiki çalışmanın literatürdeki yerini belirlemektedir. Bu bölümde ayrıca bağımsız bileşenler analizi ve uzaklığa bağlı çapraz ilişkinin enküçüklenmesi hakkında ayrıntılı bilgiler verilmektedir. Üçüncü bölüm jeoistatistiksel kestirimi içermekte, krigleme, eşkrigleme ve dikleştirilmiş bileşenli kriglemenin teorisini açıklamaktadır. Dördüncü bölüm, bağımsız ve UBÇE bileşenlerinin bir boyutta krigleme ile kestirimine ilişkin örnekler sunmaktadır. Beşinci bölüm, bağımsız bileşenli krigleme (BBK) ve UBÇE bileşenli krigleme (UBÇEK) yöntemlerini eşkrigleme yöntemi ile karşılaştırmaktadır. Altıncı bölüm, BBK ve UBÇEK yöntemlerini bir andezit ocağında işletilebilir blokların kestirimine uygulamaktadır. Yedinci bölüm sonuçları içermektedir.

2. GENEL BİLGİLER VE YÖNTEMLER

Bu bölümde problemin kısaca bir tanımı yapılmış, şimdiki çalışmanın literatürdeki yeri belirlenmiş, bağımsız bileşenler analizi ve uzaklığa bağlı ilişkinin enküçüklenmesi geniş bir şekilde açıklanmıştır.

2.1. Problem Tanımı ve Çalışmanın Literatürdeki Yeri

Uzaklığa bağlı çapraz ilişki gösteren değişkenlerin doğrusal bir dönüşüm uygulayarak uzaklığa bağlı ilişki göstermeyen bileşenlere dönüştürülmesi yerbilimlerinin ve özellikle maden kaynak kestiriminin en önemli konularından biridir. Bu yönde şimdiye kadar farklı çalışmalar yapılmıştır. Suro-Perez ve Journal [1], temel bileşenler analizini indikatör değişkenlere uygulayıp uzaklığa bağlı ilişki göstermeyen bileşenler üretmiştir. Xie vd. [2] ve Tercan [3], farklı uzaklıklarda hesaplanmış variogram matrislerini eşzamanlı köşegenleştirme yöntemi kullanarak dikleştirmeye çalışmışlardır.

Son yıllarda, minimum/maximum otokorelasyon faktörleri (MAF) yöntemi faktörleştirme amacıyla sıklıkla kullanılan bir yöntem olmuştur. Bu yöntem ilk olarak Switzer ve Green [4] tarafından geliştirilmiştir. Desbarats ve Dimitrakopoulos [5], Desbarats [6], Fonseca ve Dimitrakopoulos [7], Boucher vd. [8], Boucher ve Dimitrakopoulos [9], Rondon ve Tran [10] ve Rondon [11] bu yöntemi uzaklığa bağlı ilişki gösteren değişkenlerin birleşik benzetimlerinde (joint simulation) kullanmışlardır. Bu yöntem, aslında temel bileşenler analizinin kısa ve uzun-mesafede hesaplanan varyans-kovaryans matrislerine uygulanmasına dayanmaktadır. Goovaerts [12], iki yapılı doğrusal variogram modelleri (2YDVM) ile modellenen değişkenlerin dikleştirilmesi ile elde edilen bileşenlerin uzaklığa bağlı ilişkisizliği sağladığını göstermiştir. Ancak 2YDVM varsayımı çoğu durumda gerçekçi bir varsayım değildir. Ayrıca, MAF yönteminin ikiden daha fazla uzaklıkta uygulanmasının bir avantaj sağlamadığı görülmüştür [13].

Goovaerts [12] genel olarak tüm uzaklıklarda ilişki göstermeyen bileşenlerin üretilmesinin mümkün olmadığına işaret etmektedir. Bu durumda araştırmacılar, dikleştirmenin yaklaşık bir şekilde gerçekleştirildiği yaklaşımlara yönelmişlerdir. Örneğin Muller ve Ferreira [14], Gauss Yaklaşımıyla Eşit Ağırlıklı Köşegenleştirme (GYEAK) yöntemini bir demir yatağında birkaç değişkenin birleşik benzetimi için kullanmıştır. Bu yöntem ilk olarak Tichavsky ve Yeredor [15] tarafından ortaya

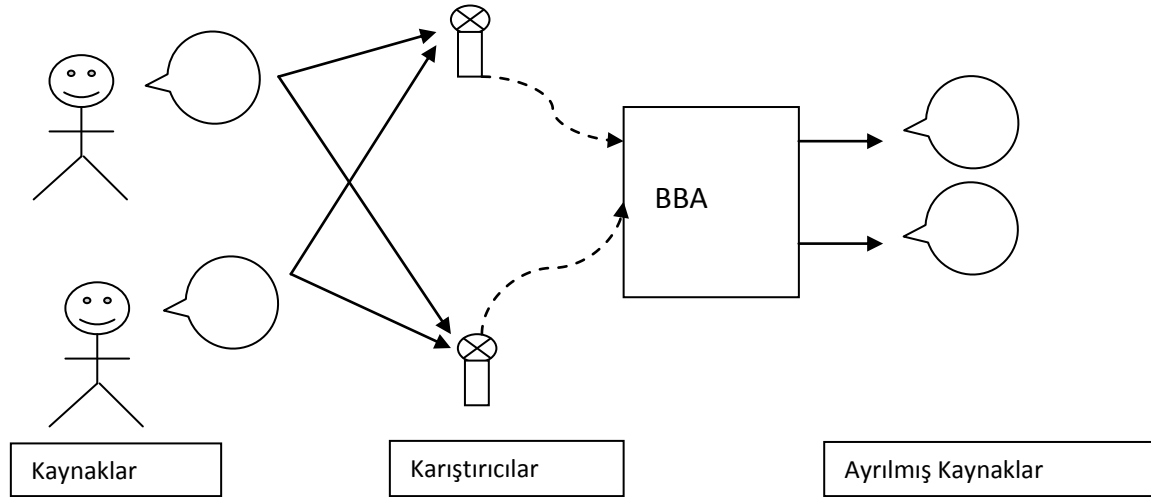
atılmıştır. Muller ve Ferreira [14], GYEAK yöntemi ile (MAF'a göre) uzaklığa bağlı daha az ilişki gösteren bileşenler ürettiklerini ifade etmektedirler.

Bu tez çalışmasında uzaklığa bağlı çapraz ilişki gösteren değişkenlerin dikleştirilmesine ilişkin iki yöntem önerilmiştir; bağımsız bileşenler analizi ve uzaklığa bağlı çapraz ilişkinin enküçüklenmesi. Bu yöntemler izleyen bölümlerde ayrıntılı bir şekilde açıklanmıştır.

2.2. Bağımsız Bileşenler Analizi

Bağımsız Bileşenler Analizi (BBA), çok değişkenli verileri, bağımsız bileşenlerin doğrusal birleşimi şeklinde ifade etmeye çalışan istatistiksel bir yöntemdir. BBA, kör kaynak ayırma problemiyle yakın bir şekilde ilişkilidir. Burada amaç, birden fazla kaynaktan karışmış olarak gelen sinyalleri karıştırma mekanizmasını bilmeksizin birbirinden ayırmaktır.

Bağımsız Bileşenler Analizi en iyi kokteyl parti problemi ile açıklanabilir. Kokteyl partisi probleminde aynı odada bulunan birden çok kişinin seslerinin ayırt edilmesi amaçlanmaktadır. Bunun için iki kişinin bir odada olduğunu ve iki adet mikrofonun bu kişilerin konuşma seslerini kaydettiğini düşünelim (Şekil 2.1).



Şekil 2.1. Kokteyl parti problemi

Problem, mikrofonların kayıt ettiği karışık konuşma seslerinden her kişinin konuşmasını bağımsız bir şekilde çıkarmaktır. İki adet orijinal ses ya da kaynak sinyali, BBA ile iki sinyal karışımından (mikrofon) elde edilebilir. BBA'nın temel varsayımı kaynak sinyallerin birbirinden bağımsız olduğudur. Kaynak sinyaller bağımsız olduğunda bunları karışımlardan ayırmak mümkündür.

Karışımlar, seslerden meydana gelebileceği gibi radyo dalgalarından, tıbbi görüntülerden yerbilimlerinde ise tenör gibi bölgesel değişkenlerden meydana gelebilir. Örneğin karışımlar tenör olduğunda kaynak sinyalleri de bu tenörlerin oluşumuna etki eden tektonik hareketler, malzeme getirimi ve kimyasal süreçler gibi birbirinden bağımsız faktörlerden oluştuğu düşünülebilir.

Bağımsız bileşenler analizi ilk olarak, kas büzülmesindeki hareketin basitleştirilmiş bir modelinin geliştirilmesi amacıyla yapılan bir çalışmada Herault vd. [16] tarafından ortaya atılmıştır. Bağımsız bileşenler adı ise ilk kez Comon [17] tarafından yazılan bir makalede kullanılmıştır [18]. Bağımsız bileşenler analizi günümüzde görüntü işleme, beyin tomografisi, iletişim, finans, sismoloji gibi değişik disiplinlerde geniş bir uygulama alanına sahiptir [19].

Bağımsız bileşenler analizinde çok değişkenli verilerin bir dizi bağımsız bileşenin (faktörün) doğrusal birleşiminden ibaret olduğu varsayılır (Bu çalışmada faktör ve bileşen terimleri birbiri yerine kullanılabilir). Faktör sayısı genellikle değişken sayısına eşit alınır. Her biri n adet noktada örneklenmiş p adet değişkenden oluşan veri kümesini Z matrisi ile gösterelim. Bu durumda BBA modelinde Z matrisi

$$Z = AY \quad \dots\dots\dots(2.1)$$

matris çarpımı ile ifade edilir. Eşitlik (2.1) de A : karışım matrisini, Y : bağımsız bileşenleri içeren kaynak matrisini göstermektedir. Burada hem karışım matrisi, hem de kaynak matrisi bilinmemektedir. Bağımsız bileşenler analizi altında her iki matris, yalnızca Z veri matrisi kullanılarak kestirilir. Önce A karışım matrisi kestirilir. Daha sonra A 'nın tersi ile Z veri matrisi çarpılarak bağımsız bileşenleri içeren Y matrisi elde edilir.

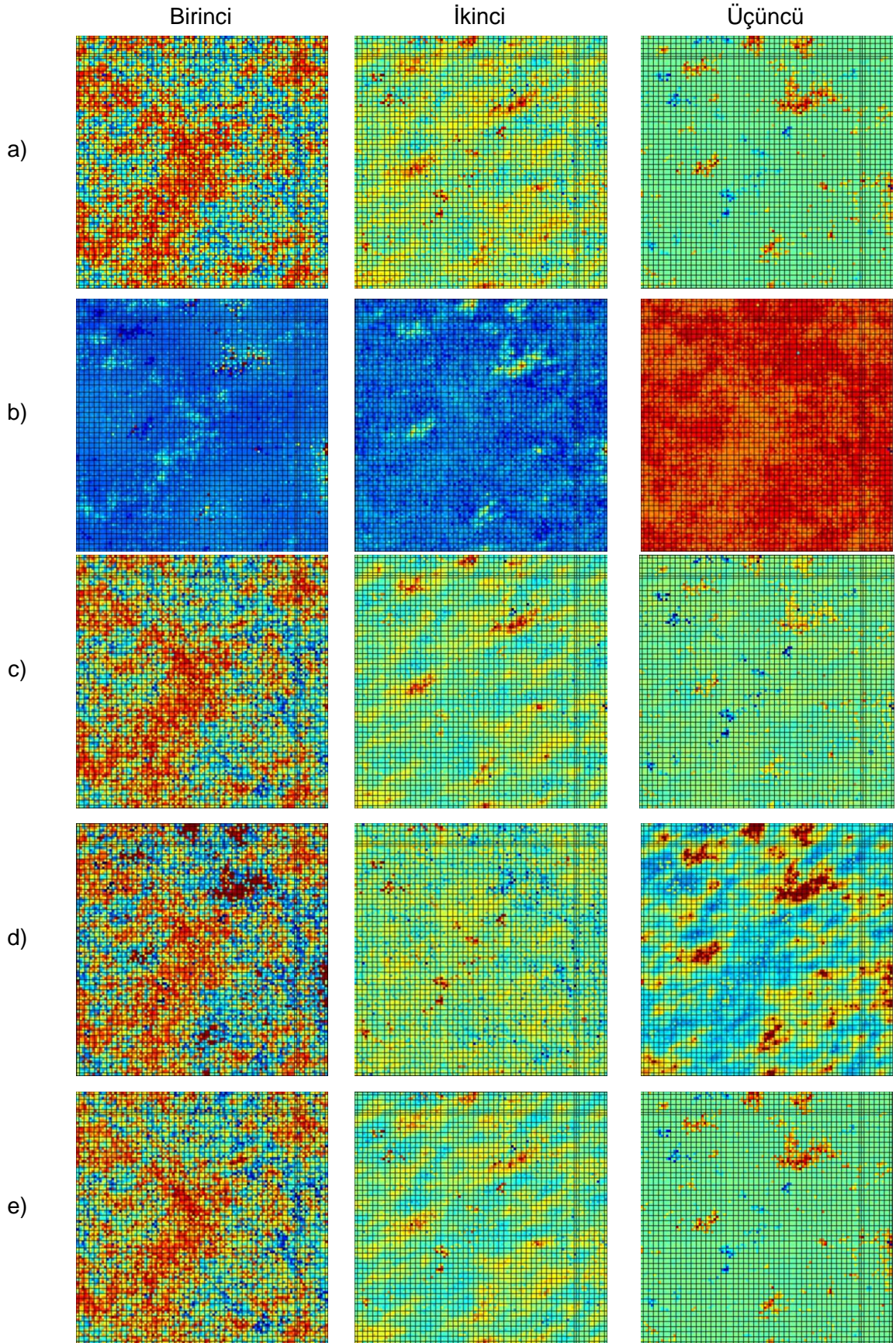
$$Y = A^{-1}Z \quad \dots\dots\dots(2.2)$$

Eşitlik 2.1 ile verilen BBA modelinin tanımlı olabilmesi için bağımsız bileşenlerin normalden farklı bir dağılım sergilemesi gerekir. Ayrıca karışım sayısının bağımsız bileşen sayısına eşit olduğu varsayılır. Ancak bu son varsayım gerekli olmayıp işlemleri basitleştirir.

BBA, temel bileşenler analizi (TBA), faktör analizi (FA) ve minimum/maksimum otokorelasyon faktörleri (MOF) analizi gibi çok değişkenli yöntemlerle yakın bir şekilde ilişkilidir. Çok değişkenli veriler her üç yöntemde faktörlerin doğrusal bir birleşimi şeklinde ifade edilmeye çalışılır. Bununla birlikte TBA, FA ve MOF ile ilişkisiz ve normal dağılım gösteren faktörler elde edilirken BBA bağımsız ve aynı zamanda normalden farklı dağılan faktörler üretir [20]. Bağımsızlık, ilişkisizlikten çok daha kuvvetli bir özelliktir. Bu nedenle ilişkisiz faktörlerin bulunmasında kovaryans, variogram gibi ikinci dereceden istatistikler kullanılırken BBA ile faktörlerin kestiriminde daha yüksek dereceden istatistiklere gereksinim duyulur. BBA ve diğer çok değişkenli yöntemlerin arasındaki diğer bir fark elde edilen faktörlerin yorumundan ortaya çıkar. BBA'da bileşenler için büyüklük sıralaması yapılmaz. Diğer bir ifade ile kötü ya da iyi bileşen yoktur. İkinci olarak üretilen bileşenler kaynağın işaretine göre değişmez. Örneğin görüntü işlemede siyah bir zemin üzerindeki beyaz bir harf, beyaz bir zemin üzerindeki siyah bir harf gibi aynıdır [18].

2.2.1. BBA, TBA Ve MOF Yöntemlerinin Benzetilmiş Veriler Üzerinde Karşılaştırılması

Bağımsız faktörleri ilişkisizlik ölçütünü kullanarak karışımlarından ayırmak olanaklı değildir. Bunu göstermek için jeoistatistiksel benzetimle üç değişken bağımsız bir şekilde benzetilmiş, daha sonra bu benzetimler pozitif tanımlı bir matris kullanılarak bağımlı değişkenlere dönüştürülmüştür. Şekil 2.2-a, bağımsız bileşenlerin Şekil 2.2-b ise bağımlı bileşenlerin imge haritasını göstermektedir. Daha sonra bağımlı değişkenlere TBA, MOF ve BBA yöntemleri uygulanarak bileşenler üretilmiştir. Temel bileşenlerin imge haritası Şekil 2.2-c'de, MOF bileşenleri Şekil 2.2-d'de ve BBA bileşenleri ise Şekil 2.2-e'de gösterilmiştir.



Şekil 2.2 BBA, TBA ve MOF yöntemlerinin karşılaştırılması. a) bağımsız bileşenler, b) bağımlı bileşenler, c) TBA faktörleri, d) MOF faktörleri, e) BBA faktörleri

Bağımlı değişkenlerin üç farklı tenör değişkenine (karışımlara) bağımsız değişkenlerinde bu tenörlerin oluşumunu etkileyen bağımsız faktörlere (kaynaklara) karşılık geldiği düşünülebilir. Şekil 2.2, BBA'nin bağımlı bileşenlerden bağımsız faktörleri diğer yöntemlere göre çok daha iyi ürettiğini göstermektedir.

2.2.2. İstatistiksel Bağımsızlık

Bağımsız bileşenler analizinin temelini istatistiksel bağımsızlık kavramı oluşturur. Bağımsızlık, rastlantı değişkenleri ile açıklanabilir. Bir rastlantı değişkeninin değeri diğer bir rastlantı değişkeninin değeri hakkında hiçbir bilgi vermiyorsa bu iki rastlantı değişkeninin bağımsız olduğu söylenir. Matematiksel olarak istatistiksel bağımsızlık,

$$P(Z_1, Z_2) = P(Z_1) \cdot P(Z_2) \dots\dots\dots(2.3)$$

ile ifade edilir. (2.3) eşitliğinde $P(Z_1)$; Z_1 rastlantı değişkeninin yoğunluk fonksiyonunu, $P(Z_2)$; Z_2 değişkeninin yoğunluk fonksiyonunu, $P(Z_1, Z_2)$ ise Z_1 ve Z_2 rastlantı değişkenlerinin birleşik yoğunluk fonksiyonlarını göstermektedir. İstatistiksel bağımsızlık altında birleşik yoğunluk fonksiyonu iki marjinal dağılımın çarpımı şeklinde ifade edilir. Bağımsızlık, ilişkisizlikten çok daha kuvvetli bir özelliktir.

İki rastlantı değişkeninin ilişkisiz olması bunların aynı zamanda bağımsız olduğu anlamına gelmez. İlişkisiz iki değişken bağımlı olabilir. Örneğin bir Z_1 değişkeninin sıfır ortalama ile normal dağıldığını varsayalım. Ayrıca $Z_2 = Z_1^2$ şeklinde diğer bir rastlantı değişkeni tanımlayalım. Z_1 ve Z_2 ilişkisiz ancak bağımlıdır.

2.2.3. Bağımsız Bileşenlerin Kestirimi

Bu bölüm tamamıyla Hyvarinen ve Oja [21]'e dayanmaktadır. BBA, bağımsız bileşenlerin normalden farklı bir dağılıma sahip olması gerekliliğine dayanır. Eğer bağımsız bileşenler normal dağılırsa A matrisini tanımlamak ve dolayısıyla bağımsız bileşenleri bağımlı bileşenlerden ayırmak olanaklı değildir. BBA modelini kestirmedeki anahtar kavram bağımsız bileşenlerin normalden farklı bir dağılım sergilemesidir. Bu kavram genellikle normal-dışılık (nongaussianity) olarak bilinir.

Bir veri vektörünün (bir değişkene ait verilerin) Eşitlik 2.1'de verilen BBA modeline göre dağıldığını yani bağımsız bileşenlerin bir karışımından ibaret olduğunu varsayalım. Ayrıca işlemleri kolaylaştırmak amacıyla (sadece bu bölümde) bütün

bağımsız bileşenlerin aynı dağılıma sahip olduğunu düşünelim. Bağımsız bileşenlerden birini kestirmek için Eşitlik 2.4 ile verilen doğrusal birleşimi gözönüne almak gerekir.

$$R = W^T Z \dots\dots\dots(2.4)$$

Eşitlik 2.4'te W , belirlenecek vektörü göstermektedir. Eğer W , A 'nın tersinin satırlarından biri ise bu doğrusal dönüşüm, bağımsız bileşenlerden birine eşittir. A matrisi bilinmediğinden W vektörünü tam olarak belirlemek mümkün değildir. Bununla birlikte iyi bir yaklaşım veren bir kestirici bulunabilir.

Bunun için $V = A^T W$ ile ifade edilen bir değişken dönüşümü tanımlanır. Bu durumda $R = W^T Z = W^T A Y = V^T Y$ yazılabilir ve bu şekilde elde edilen R , Y_i 'nin doğrusal bir birleşimidir. Merkezi limit teoremine göre iki bağımsız rastlantı değişkeninin toplamı orjinal değişkenlerden normal dağılıma daha çok yaklaşacağından $V^T Y$, Y_i 'nin herhangi birinden daha çok normal dağılıma uygun davranacaktır. Bu durumda V 'nin V_i elemanlarından yalnızca biri sıfırdan farklıdır. Dolayısıyla W , $W^T Z$ 'in normal-dışılığını maksimum yapan bir vektör olarak alınabilir. Böyle bir vektör, sıfırdan farklı bileşenli V 'ye karşılık gelir. Bu ise $W^T Z = V^T Y$ nin bağımsız bileşenlerden birine eşit olduğu anlamına gelir.

$W^T Z$ in normal-dışılığını maksimize ederek bağımsız bileşenlerden biri bulunabilir. Gerçekte W vektörlerinin n -boyutlu uzayında normal-dışılığın optimizasyonu $2n$ adet lokal maksimum verir. $2n$ ifadesindeki iki, Y_i ve $-Y_i$ ye karşılık gelen her bir bağımsız bileşen içindir (bağımsız bileşenler yalnızca çarpımsal işarete kadar kestirilebilir). Birden çok bağımsız bileşeni bulmak için bütün bu lokal maksimumları bulmamız gerekir. Bu zor bir iş değildir çünkü farklı bağımsız bileşenler ilişkisizdir. Araştırma uzayı öncekilerle ilişkisiz kestirimlerle sınırlandırılabilir. Bu, uygun bir şekilde dönüştürülmüş (örneğin beyazlatılmış (whitened)) bir uzaydaki dikleştirilmeye karşılık gelir.

2.2.4. Normal-dışılığın Ölçütleri

BBA kestiriminde normal-dışılığın kullanabilmek için rastlantı değişkeninin (R 'nin) normal-dışılığının bir ölçüsünü bulmamız gerekir. Yine işlemleri kolaylaştırmak için

R'nin sıfır ortalama ve bire eşit varyansa sahip olduğunu varsayalım. Bu basit dönüşüm, BBA algoritmalarındaki ön işlemlerden biridir.

2.2.4.1. Basıklık (Kurtosis)

Normal-dışılığın klasik bir ölçütü basıklık ya da dördüncü dereceden birikinti (cumulant) dir. r'nin basıklığı

$$\text{Kurt}(R)=E(R^4)-3[E(R^2)]^2 \dots\dots\dots (2.5)$$

ile ifade edilir. Bu eşitlikte E(.) beklenen değer işlemcisini göstermektedir. R birim varyanslı olduğundan Eşitlik 2.5'in sağ tarafı $E(R^4)-3$ 'e indirgenir. Eşitlik 2.5, basıklığın dördüncü moment $E(R^4)$ 'ün normalize edilmiş bir şekli olduğunu göstermektedir. Normal dağılmış bir R değişkeni için dördüncü moment $3[E(R^2)]^2$ ye eşittir. Bu nedenle basıklık, normal dağılım gösteren bir rastlantı değişkeni için sıfıra eşittir. Normalden farklı bir dağılım sergileyen pek çok değişken sıfırdan farklı bir basıklık değerine sahiptir.

Basıklık negatif ya da pozitif olabilir. Negatif basıklığa sahip bir rastlantı değişkeni sub-normal, pozitif basıklığa sahip olanlar süpernormal olarak adlandırılır. Süpernormal rastlantı değişkenleri ince kuyruklu dik bir olasılık yoğunluk fonksiyonuna (oyf) sahiptir. Tipik bir örnek Laplace dağılımıdır. Subnormal rastlantı değişkenleri düz bir oyf'ye sahiptir. Tekdüze dağılım, subnormal dağılımın tipik bir örneğini oluşturur. Normal-dışılık basıklığın mutlak değeri ile ölçülür. Basıklığın karesi ayrıca kullanılabilir. Bu istatistikler, normal dağılan bir değişken için sıfırdır. Basıklık, ya da onun mutlak değeri BB analizinde normal-dışılığın bir ölçüsü olarak yaygın bir şekilde kullanılmıştır. Bunun ana nedeni basıklığın hem kuramsal hem de hesaplama açısından basitliğidir. Basıklık verilerin dördüncü momentini kullanarak kolayca hesaplanabilir. Eşitlikler 2.6 ve 2.7 ile verilen doğrusal özelliklerden dolayı kuramsal analizi kolaydır.

$$\text{kurt} (Z_1 + Z_2) = \text{kurt} (Z_1) + \text{kurt} (Z_2) \dots\dots\dots (2.6)$$

$$\text{kurt} (aZ_1) = a^4\text{kurt} (Z_1) \dots\dots\dots (2.7)$$

Eşitlik 2.7'de a bir sabiti göstermektedir. Basıklığa ilişkin optimizasyon çözümlerinin neye benzediğini ve bağımsız bileşenlerin basıklığı minimize ya da maksimize ederek

nasıl bulunabileceğini göstermek amacıyla basit bir örnek tasarlanmıştır. Örnek 2 boyutlu bir $Z = AY$ modeline dayanmaktadır. Bağımsız bileşenlerin Y_i ve $-Y_i$ 'nin sırasıyla sıfırdan farklı $kurt(Y_1)$ ve $kurt(Y_2)$ değerlerine sahip olduğunu ve ayrıca bunların varyansının bire eşit olduğunu varsayalım. Problem, $R = W^T Z$ şeklinde ifade edilen bağımsız bileşenlerden birini kestirmektir. Daha önce olduğu gibi $V = A^T W$ dönüşümünü gözönüne alalım. Bu durumda $R = W^T Z = W^T A Y = V^T Y = V_1 Y_1 + V_2 Y_2$ dir. Basıklığın toplanabilirlik özelliğine dayanarak r 'nin basıklığı $kurt(R) = kurt(V_1 Y_1) + kurt(V_2 Y_2) = V_1^4 kurt(Y_1) + V_2^4 kurt(Y_2)$ şeklinde yazılabilir. Diğer yandan R 'nin varyansı 1'e eşit olduğundan $E(R^2) = V_1^2 + V_2^2 = 1$ dir. Geometrik olarak bu ifade, V vektörünün 2-boyutlu bir düzlemde birim bir çemberle sınırlandırılacağı anlamına gelir. Optimizasyon problemi bu durumda birim bir çember üzerinde $|kurt(R)| = |V_1^4 kurt(Y_1) + V_2^4 kurt(Y_2)|$ fonksiyonunun maksimumlarını bulmaya indirgenir. Kolaylık olması açısından basıklığın aynı işaretli olduğu yani mutlak değer işlemcisinin dikkate alınmayacağı düşünülebilir. Bu fonksiyonun grafiği problemin optimizasyon çözümlerini tanımlar.

Delfose ve Loubaton [22], bu fonksiyonun maksimumlarının Z vektörünün elemanlarından biri tam olarak sıfır, diğeri sıfırdan farklı olan noktalarda bulunduğunu göstermiştir. Ancak bu noktalar R 'nin bağımsız bileşenlerden birine $\pm Y_i$ 'ye eşit olduğu noktalardır.

Uygulama belirli bir W ağırlık vektöründen başlar, $R = W^T Z$ in kurtosisinin en hızlı büyüdüğü (basıklık pozitifse) ya da küçüldüğü (basıklık negatifse) yön hesaplanır. Basıklığın artma ya da azalması, karışım vektörü Z 'nin mevcut örnek değerlerine $z(1), \dots, z(n)$ bağlıdır. Daha sonra yeni bir W vektörü bulmak için gradyan yöntemi kullanılır. Bu örnek herhangi bir boyuta genelleştirilebilir. Dolayısıyla basıklık kuramsal olarak BBA problemini çözmeye bir optimizasyon kriteri olarak kullanılabilir. Bununla birlikte basıklığın bazı pratik sakıncaları vardır. Temel problem basıklığın anormal değerlere çok duyarlı olmasıdır. Basıklığın değeri dağılımın kuyruğundaki birkaç gözleme bağlı olabilir. Diğer bir ifadeyle basıklık, normal-dışılığın dirençli bir ölçütü değildir. Bundan dolayı normal-dışılığın diğer ölçütlerini araştırmak gerekir.

2.2.4.2. Negentropi

Normal-dışılığın ikinci önemli ölçütü negentropidir. Terim olarak negentropi, entropinin ters işaretlisi yani negatif entropidir. Entropi, bir sistemin düzensizliğini ölçerken negentropi düzenliliğini ölçer. Entropi, bilgi kuramının temel kavramıdır. Bir rastlantı değişkeninin entropisi, değişkenin bir ölçüm değerinin verdiği bilginin derecesi olarak yorumlanabilir. Değişken daha gelişigüzel, kestirilemez oldukça entropisi de artar. Entropi, rastlantı değişkeninin kodlama uzunluğu ile yakın bir şekilde ilişkilidir (bilgi kuramı konusunda daha ayrıntılı bilgi için Cover ve Thomas [23] ve Papoulis [24]'e bakınız).

Entropi H , kesikli bir Z rastlantı değişkeni için

$$H(Z) = - \sum_i P(Z = a_i) \log P(Z = a_i) \dots\dots\dots (2.8)$$

şeklinde tanımlanır. Bu çok iyi bilinen tanım sürekli rastlantı değişkenleri ve vektörler için genelleştirilebilir. Vektörel büyüklüklerle çalışıldığında entropi, diferansiyel entropi olarak adlandırılır. $f(Z)$ yoğunluk fonksiyonuna sahip bir Z rastlantı vektörünün H diferansiyel entropisi

$$H(Z) = - \int f(Z) \log f(Z) dZ \dots\dots\dots (2.9)$$

şeklinde ifade edilir. Normal dağılmış bir rastlantı değişkeni, eşit varyanslı tüm rastlantı değişkenleri arasında en yüksek entropiye sahip bir değişkendir. Bu ifade entropinin normal-dışılığın bir ölçüsü olarak kullanılabileceği anlamına gelir. Gerçekte bu, normal dağılımın bütün dağılımların en gelişigüzel ya da en az yapılanmış bir dağılım olduğunu gösterir. Entropi, belirli değerler üzerinde yoğunlaşmış dağılımlar için küçüktür. Buna bir örnek çok dik bir o_yf 'na sahip değişkendir. Negentropi J ,

$$J(Z) = H(Z_g) - H(Z) \dots\dots\dots (2.10)$$

eşitliği ile tanımlanır. Eşitlik 2.10'da Z_g , Z gibi aynı kovaryans matrisine sahip normal dağılmış bir değişkeni göstermektedir. Üstte anılan özelliklerden dolayı negentropi her zaman sıfıra eşit ya da sıfırdan büyüktür. Eğer Z , yalnızca ve yalnızca normal dağılıyorsa sıfıra eşittir. Negentropi, tersinir (invertible) doğrusal dönüşümler için değişmez [17].

Normal-dışılığın bir ölçütü olarak negentropiyi ya da eşdeğer bir şekilde diferansiyel entropiyi kullanmanın avantajı istatistik kuramında çok iyi biliniyor olmasıdır. Gerçekte negentropi, istatistiksel özelliklerle ilgili olduğu sürece normal-dışılığın optimal bir kestiricisidir. Bununla birlikte negentropinin bir problemi onun hesaplama zorluğudur. Tanım olarak negentropinin kestirimi oyf 'nin (nonparametrik) kestirimini gerektirir. Bu nedenle negentropiye daha basit yaklaşımlar kullanmak gerekir.

2.2.5. Negentropinin Yaklaşımları

Negentropinin kestirimi zordur. Uygulamada bazı yaklaşımlar kullanmak gerekir. Negentropiye yaklaşmanın klasik bir yöntemi Eşitlik 2.11'da gösterildiği gibi yüksek dereceden momentler kullanmaktır [25].

$$J(Z) \approx \frac{1}{12}E(Z^3)^2 + \frac{1}{48}kurt(Z)^2 \dots\dots\dots (2.11)$$

Z rastlantı değişkeninin sıfır ortalama ve bir varyansa sahip olduğu varsayılıyor. Bununla birlikte böyle yaklaşımların geçerliliği oldukça sınırlı olabilir. Özellikle bu yaklaşımlar basıklığa eşlik eden dirençli olmama probleminden muzdariptirler. Negentropinin önceki yaklaşımlarında ortaya çıkan problemlerle karşılaşmamak için Hyvarinen [26], yeni bir yaklaşım geliştirmiştir. Bu yaklaşım, maksimum entropi ilkesine dayanmaktadır:

$$J(Z) \approx \sum_{i=1}^p k_i [E(G_i(Z)) - E(G_i(Y))]^2 \dots\dots\dots (2.12)$$

Eşitlik 2.12'de k_i pozitif sabitleri, Y ; standart normal değişkeni göstermektedir. Z değişkeninin sıfır ortalama ve bir varyansa sahip olduğu varsayılmaktadır. G_i fonksiyonları, karesel (quadratic) olmayan fonksiyonlardır. Bu yaklaşım çok hassas olmadığı durumlarda bile Eşitlik 2.12, normal-dışılığın bir ölçütünü oluşturmak amacıyla kullanılabilir. Bunun nedeni Eşitlik 2.12'in hiçbir zaman eksi değer almaması ve Z normal bir dağılıma sahip olduğunda onun sıfıra eşit olmasıdır. Karesel olmayan bir G fonksiyonu kullandığımızda yaklaşım

$$J(Z) \propto [E(G(Z)) - E(G(Y))]^2 \dots\dots\dots (2.13)$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitlikte G , karesel olmayan herhangi bir fonksiyondur. Bu ifade, Z bakışlı (simetrik) ise Eşitlik 2.11 ile verilen moment temelli yaklaşımın bir genelleştirmesidir. Gerçekten $G(Z) = Z^4$ alındığında Eşitlik 2.11 elde edilir. Burada üzerinde durulması gereken diğer bir nokta G 'yi mantıklı bir şekilde seçerek (2.11) ile verileden çok daha iyi bir negentropi yaklaşımının elde edilmesidir. Özellikle G 'yi çok hızlı büyümeyecek bir şekilde seçerek çok dirençli bir kestirici elde edilmiş olur. G 'nin Eşitlik 2.14 ile verilen seçimleri oldukça yararlı olabilir.

$$G_1(u) = \frac{1}{a_1} \log \cosh a_1 u, \quad G_2(u) = -\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \dots \dots \dots (2.14)$$

Eşitlik 2.14'de a_1 , 1 ve 2 arasında değer alan bir sabittir.

BBA kestiriminde maksimum negentropi ölçütü dışında başka ölçütlerde kullanılmaktadır. Karşılıklı bilgi (mutual information)'nin minimize edilmesi [23;24], doğrusal olmayan çıktılarla bir sinir ağının bilgi akışının maksimize edilmesi [27;28] bunlar arasında sayılabilir.

2.2.6. BB Analizinden Önceki İşlemler

Bir BBA algoritmasını uygulamadan önce veriler üzerinde merkezletme ve beyazlatma gibi bazı ön işlemler yapmak gerekir. Merkezletme, verilerin ortalaması sıfır olacak şekilde dönüştürülmesi işlemidir. Bunun için verilerden ortalamayı çıkarmak gerekir. Bu durumda bağımsız bileşenlerin ortalaması da sıfır olacaktır. Bu ön işlem BBA algoritmasını kolaylaştırmak amacıyla yapılır. Merkezletilmiş verilerle A karışım matrisi kestirildikten sonra Z 'nin ortalama vektörünü Y 'nin merkezletilmiş kestirimleri ile toplayarak kestirim işlemi tamamlanır. Y 'nin ortalama vektörü $A^{-1}M$ ile verilir. Burada m , ön işlemden çıkarılan ortalamadır.

Beyazlatma, BB analizinde kullanılan diğer bir ön işlemdir. Beyazlatmanın amacı, Z gözlem verileri matrisini, ilişkisiz ve bire eşit varyanslı yeni bir \tilde{Z} matrisine dönüştürmektir. \tilde{Z} 'in kovaryans matrisi birim matrise eşittir. Beyazlatma dönüşümü her zaman olanaklıdır. Çok bilinen bir beyazlatma yöntemi, Z 'nin kovaryans matrisinin özdeğer ayrıştırmasıdır:

$$E(ZZ^T) = Q\Lambda Q^T \dots \dots \dots (2.15)$$

Eşitlik 2.15'de Q ; $E(ZZ^T)$ 'nin özvektörlerinden oluşan ortogonal bir matristir ve Λ , özdeğerlerin köşegen bir matrisidir [$\Lambda = köşe(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$]. Beyazlatma Eşitlik 2.16 yardımı ile gerçekleştirilir.

$$\tilde{Z} = Q\Lambda^{-1/2}Q^T Z \dots\dots\dots(2.16)$$

Beyazlatma işlemi karıştırma matrisini yeni bir \tilde{A} matrisine dönüştürür. Eşitlikler 2.1 ve 2.16'i kullanarak

$$\tilde{Z} = Q\Lambda^{-1/2}Q^T AY = \tilde{A}Y \dots\dots\dots (2.17)$$

elde edilir. Beyazlatma ile elde edilen kolaylık, yeni karıştırma matrisi \tilde{A} nin ortogonal olmasıdır. Bu Eşitlik 2.18 ile verilen ifadeden açıkça görülebilir.

$$E(\tilde{Z}\tilde{Z}^T) = \tilde{A}E(Y Y^T)\tilde{A}^T = \tilde{A}\tilde{A}^T = I \dots\dots\dots (2.18)$$

Beyazlatma, kestirilecek parametre sayısını azaltmaktadır. Orjinal A matrisinin n^2 adet elemanını kestirmek yerine yeni ortogonal matris kestirilecektir. Ortogonal bir matris $n \times (n - 1)/2$ serbestlik derecesi içerir. Örneğin iki boyutta ortogonal bir dönüşüm tek bir açı parametresi ile belirlenir. Daha büyük boyutlarda ortogonal bir matris, keyfi bir matrisin parametrelerinin yaklaşık yarısını içerir. Bu nedenle beyazlatma işleminin BBA probleminin yarısını çözdüğü söylenebilir. Tezin bundan sonraki bölümlerinde notasyonların kolay gösterilmesi açısından önışleme tabi tutulmuş veri matrisi yine Z ile, dönüştürülmüş karıştırma matrisi ise A ile gösterilecektir.

2.2.7. Hızlı BBA Algoritması

Daha önceki bölümlerde normal-dışılığın farklı ölçütleri yani BBA kestirimine ilişkin objektif fonksiyonlar tanıtılmıştı. Uygulamada objektif fonksiyonun (örneğin Eşitlik 2.12) maksimize edilmesi amacıyla bir algoritmaya gereksinim duyulur. Bu bölümde bu amaçla geliştirilmiş çok verimli bir maksimizasyon yöntemi tanıtılacaktır. Burada verilerin merkezletme ve beyazlatma gibi ön işlemlere tabi tutulduğu varsayılacaktır.

2.2.7.1. Tek Bir Bağımsız Bileşene İlişkin Hızlı BBA Algoritması

HızlıBBA algoritması altında, $W^T Z$ projeksiyonunun normal-dışılığını maksimum yapacak bir W birim vektörü belirlenir. Normal-dışılık burada Eşitlik 2.12 ile verilen

negentropinin $J(W^T \mathbf{Z})$ yaklaşımı ile ölçülür. $W^T \mathbf{Z}$ 'in varyansı 1'e eşittir. Bu durumda beyazlatılmış veriler için W 'nin normunun 1'e eşitlenmesi gerekir.

HızlıBBA, Eşitlik 2.2'de ölçüldüğü şekliyle $W^T \mathbf{Z}$ 'nin normal-dışılığıının maksimum noktasını bulan sabit nokta iterasyon yöntemine dayanır. G karesel olmayan fonksiyonun türevini g ile gösterildiğinde Eşitlik 2.14'deki fonksiyonların türevleri

$$g_1(u) = \tanh(a_1 u), \quad g_2(u) = u \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \quad \dots\dots\dots (2.19)$$

şeklinde yazılabilir. Eşitlik 2.19'de a_1 , 1 ve 2 arasında değer alır (a_1 çoğu zaman 1'e eşit alınır). HızlıBBA algoritmasının temel formu aşağıda verilmiştir.

1. Başlangıç (rastlantı sayılar olabilir) bir W ağırlık vektörü seç.
2. $W^+ = E[\mathbf{Z}g(W^T \mathbf{Z})] - E[g'(W^T \mathbf{Z})]W$ hesapla.
3. $W = W^+ / \|W^+\|$ hesapla.
4. Yakınsamadıysa 2'ye geri dön.

Yakınsama, aynı yöndeki w noktasının eski ve yeni değerleri, yani bunların nokta-çarpımı hemen hemen 1'e eşit olduğu anlamına gelir. Vektörün tek bir noktaya yakınsaması gerekmez nitekim W ve $-W$ aynı yönü tanımlar. Çünkü bağımsız bileşenler yalnızca çarpımsal bir işarete kadar tanımlanabilir. Burada verilerin beyazlatma önişlemine tabi tutulduğu varsayılıyor.

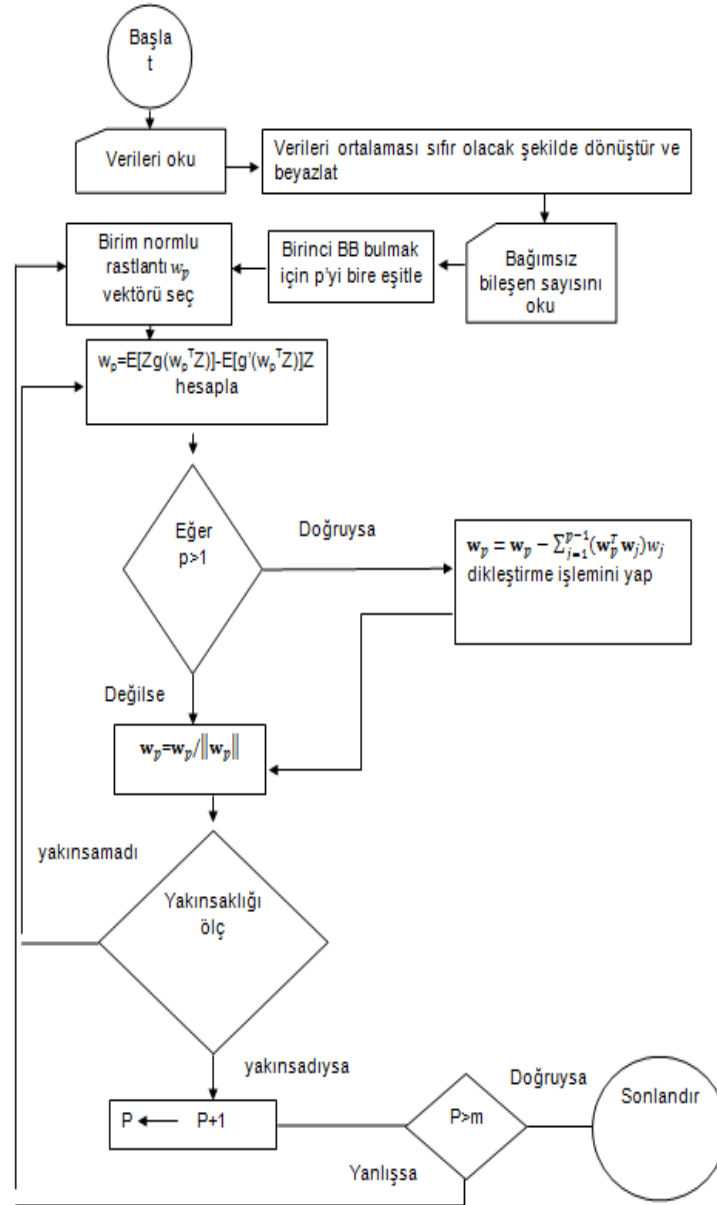
2.2.7.2. Birden Çok bağımsız Bileşenin Kestirimine İlişkin Hızlı BBA Algoritması

Birden çok bağımsız bileşeni kestirmek için W_1, \dots, W_n vektörleriyle daha önce verilen algoritmayı bir çok kez çalıştırmak ve her iterasyondan sonra W_1, \dots, W_n vektörlerini dikleştirmek gerekir. Vektörleri dikleştirmenin amacı farklı vektörlerin aynı maksimuma yakınsamasını engellemektir. Birden çok bağımsız bileşenin kestirimine ilişkin algoritma aşağıda verilmiştir.

1. Verileri, ortalaması sıfır olacak şekilde dönüştürünüz.
2. Verileri beyazlatınız.
3. Kestirilecek BB'lerin sayısını (m) belirleyip, p 'yi 1'e eşitleyiniz.
4. Rastlantı sayılar kullanarak W_p için birim normlu başlangıç vektörü seçiniz.
5. $W_p = E[\mathbf{Z}g(W_p^T \mathbf{Z})] - E[g'(W_p^T \mathbf{Z})]\mathbf{Z}$ hesaplayınız

6. $W_p = W_p - \sum_{j=1}^{p-1} (W_p^T W_j) W_j$ dikleştirme işlemini yapınız
7. $W_p = W_p / \|W_p\|$ normlama işlemini yapınız
8. W_p yakınsamadıysa 5 nolu adıma geri dönünüz
9. p yi $p+1$ 'e eşitleyiniz ve $p \leq m$ ise 4 nolu adıma geri gidiniz

Bu algoritmanın akış şeması Şekil 2.3'de verilmiş ve algoritma MATLAB'da kodlanmıştır. MATLAB kodu EK. 1'de verilmiştir.



Şekil 2.3 HızlıBBA algoritmasının akış şeması

2.3.Uzaklığa Bağlı Çapraz İlişkinin Enküçüklenmesi Yöntemi

Tez çalışmasında variogram matrislerini yaklaşık bir şekilde dikleştirmek amacıyla uzaklığa bağlı çapraz ilişkinin enküçüklenmesine (UBÇE) dayanan yeni bir yöntem geliştirilmiştir. Enküçükleme, dereceli azalma (gradient descent) algoritması kullanılarak yinelemeli (iteratif) bir şekilde gerçekleştirilmektedir. Bu yöntem $N \times N$ uzayındaki bir problemi $N \times (N - 1)/2$ iki boyutlu problemlere dönüştürüp ardından çok basit bir yöntemle alt uzaydaki her bir problemi çözmektedir. N boyutlu uzayda çalışan Kör Kaynak Ayırıştırıcı (KKA) yöntemler başlangıçta kullanılan rastlantı matrisine fazlasıyla duyarlıdır. Bu nedenle KKA algoritmasının aynı veri kümesi üzerinde bir kaç kez çalıştırılması ile aynı sonuçlar elde edilmez. Aynı sonuçları üretmek açısından UBÇE yöntemi daha avantajlı sayılabilir.

2.3.1. Enküçükleme Ölçütü

Uzaklığa bağlı çapraz ilişki göstermeyen bileşenler elde etmek amacı ile şimdiye kadar farklı yöntemler uygulanmıştır. Ayrıca bu yöntemlerin performans değerlendirmesi amacıyla birkaç ölçüt geliştirilmiştir. Örneğin Tercan (1999) aşağıdaki ölçütü önermiştir:

$$\tau(\mathbf{h}) = \frac{\varphi(\mathbf{h})}{\xi(\mathbf{h})} \quad |\mathbf{h}| > 0 \quad \dots \dots \dots (2.20)$$

Eşitlik 2.20'de $\varphi(\mathbf{h}) = \sum_{k=1}^N \sum_{j \neq k}^N |\gamma_Y(\mathbf{h}; k, j)|$ ve $\xi(\mathbf{h}) = \sum_{k=1}^N \gamma_Y(\mathbf{h}; k, k)$ dir. Bu ölçüt, farklı uzaklıklarda hesaplanan variogram matrislerinin, $\Gamma_Y(\mathbf{h})$, köşegen dışı elemanlarının toplamını köşegen elemanlarının toplamına bölerek elde edilmektedir. Eşitlik (2.20), Muller ve Ferreira [14] ve Rondon [11] tarafından farklı dikleştirme yöntemlerinin karşılaştırılmasında kullanılmıştır. Etkili algoritmalarda $\tau(\mathbf{h})$ oldukça farklı uzaklıklarda sifıra yakındır. Bu ölçüt, bir optimasyon kriteri olarak da kullanılabilir. Bu çalışmada yeni yöntemin geliştirilmesinde Eşitlik (2.20) dikkate alınmış ancak beyazlatılmış ($\tilde{\mathbf{Z}}$) ve UBÇE ile üretilen bileşenler (\mathbf{Y}) için $\xi(\mathbf{h})$ değerinin sabit olduğu varsayılmıştır. Bu yüzden farklı uzaklıklarda $\varphi(\mathbf{h})$ değerlerinin toplamı enküçüklenmeye çalışılmıştır.

2.3.2. φ 'Nin Dereceli Azaltma Algoritması İle Enküçüklenmesi

Farklı uzaklıklarda hesaplanan variogram matrislerinin köşegen dışı elemanlarının toplamı, Eşitlik (2.21) de ifade edilmiştir.

$$\varphi = \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N \sum_{j \neq k}^N |\gamma_{\bar{z}}(\mathbf{h}_i; k, j)|, \quad |\mathbf{h}| > 0 \quad \dots \dots \dots (2.21)$$

Eşitlik (2.21) de, l hesaplamalarda kullanılan uzaklık sayısını göstermektedir. Enküçükleme problemlerinde fonksiyonların türevleri geniş bir şekilde kullanılmaktadır. Fonksiyonların mutlak değerinin bazı noktalarında türevleri yoktur, bu yüzden Eşitlik (2.22) de $|\gamma_{\bar{z}}(\mathbf{h}_i; k, j)|$ değeri yerine $(\gamma_{\bar{z}}(\mathbf{h}_i; k, j))^2$ değeri kullanılmıştır.

$$\varphi = \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N \sum_{j \neq k}^N (\gamma_{\bar{z}}(\mathbf{h}_i; k, j))^2, \quad |\mathbf{h}| > 0 \quad \dots \dots \dots (2.22)$$

Pratik açıdan Eşitlik (2.22), φ değerini enküçüklemek amacıyla bir başlangıç W vektörü gerektirir. Ardından φ değerinin en çok değişen yönü belirlenip o yönde W vektörünü ilerletmek gerekir. Yöntemin daha iyi anlaşılması açısından uzaklığa bağlı çapraz ilişki gösteren iki değişkenin var olduğunu düşünelim. W vektörünün alacağı değerleri sınırlamak ve işlemleri basitleştirmek amacıyla veriler, ortalaması 0 ve varyansı 1 olacak şekilde temel bileşenler analizi ile beyaz bileşenlere dönüştürülmüş olsun. Şekil 2.4'de gösterildiği gibi optimizasyon problemi bir birim çembere indirgenip, φ değerini enküçükleyen $\tilde{Z}W$ doğrusal birleşimi elde edilir (bu birleşimde \tilde{Z} değerleri bilinmektedir ve sadece W matrisinin bulunması yeterlidir). Bu iki boyutlu uzayda birim çemberin üzerinde olan her bir nokta, θ açısının bir fonksiyonu olarak yazılabilir. Şekil 2.5'de φ 'nin θ açısı ile değişimi gösterilmiştir.

Şekil 2.5, φ nın her 1.57 radyanda en düşük değerini aldığını göstermektedir. Örneğin yaklaşık 0.002 olan en küçük değer, W vektörü yatay eksen ile 1.2 radyanlık açı yaptığı zaman gerçekleşmektedir. İkinci bileşenin yönü ise birinci bileşene diktir.

2.3.3. φ ' nin İki Değişken İçin Enküçüklenmesi

İki boyutlu uzayda, θ 'nin fonksiyonu olarak yazılan bir 2×2 W dönüşüm matrisi ile istenilen yönler bulunabilir. Bu matris aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$W = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2.23)$$

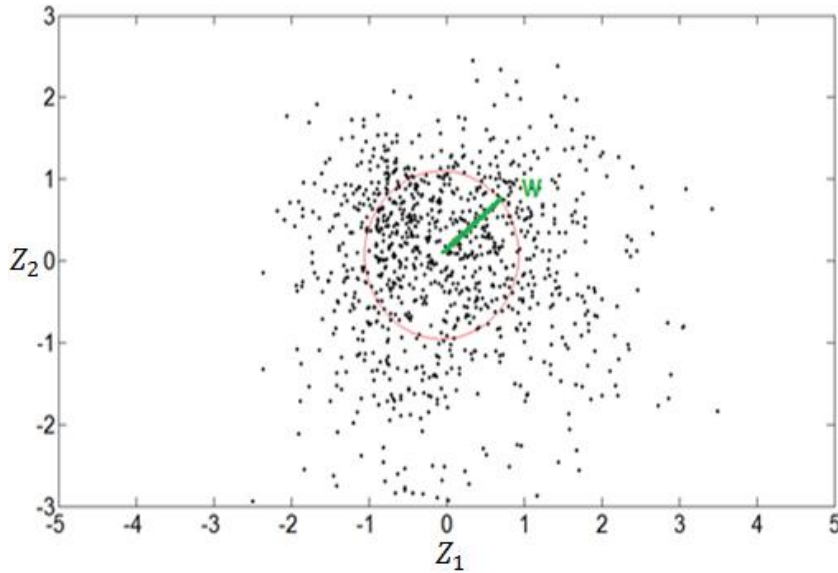
Böylece faktörler

$$Y = [Y_1, Y_2] = \tilde{Z}W \dots\dots\dots (2.24)$$

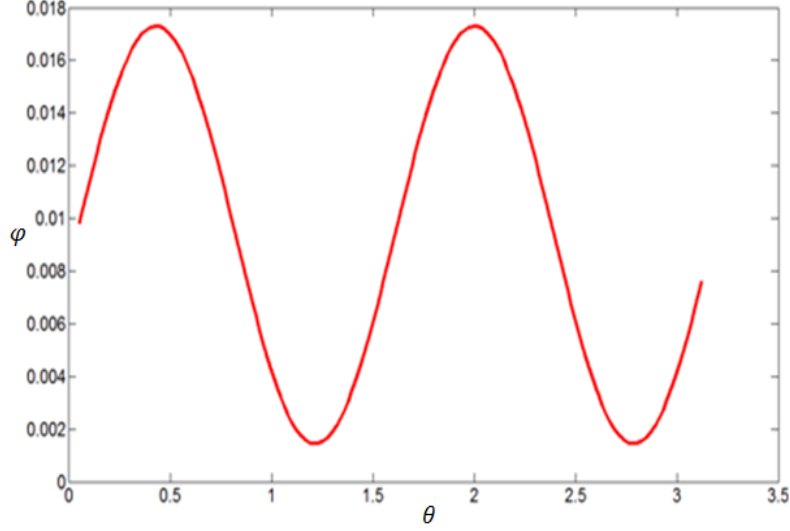
$$Y_1 = \tilde{Z}W_1 = \tilde{Z}_1 \cos\theta + \tilde{Z}_2 \sin\theta \text{ and } Y_2 = \tilde{Z}W_2 = -\tilde{Z}_1 \sin\theta + \tilde{Z}_2 \cos\theta \dots\dots\dots (2.25)$$

şeklinde yazılabilir. Amaç fonksiyonu bu durumda Y_1 ve Y_2 bileşenlerinin farklı uzaklıklardaki çapraz variogramlarının karelerinin toplamından ibaret olacaktır.

$$\varphi = \sum_{i=1}^l (\gamma_{Y_1 Y_2}(\mathbf{h}_i))^2 \dots\dots\dots (2.26)$$



Şekil 2.4. İki beyaz değişkenin birleşik dağılımı. W vektörü, bileşenlere $(\tilde{Z}W)$ ait φ değerini enküçüklemek amacı ile tüm θ açılarını tarıyor.

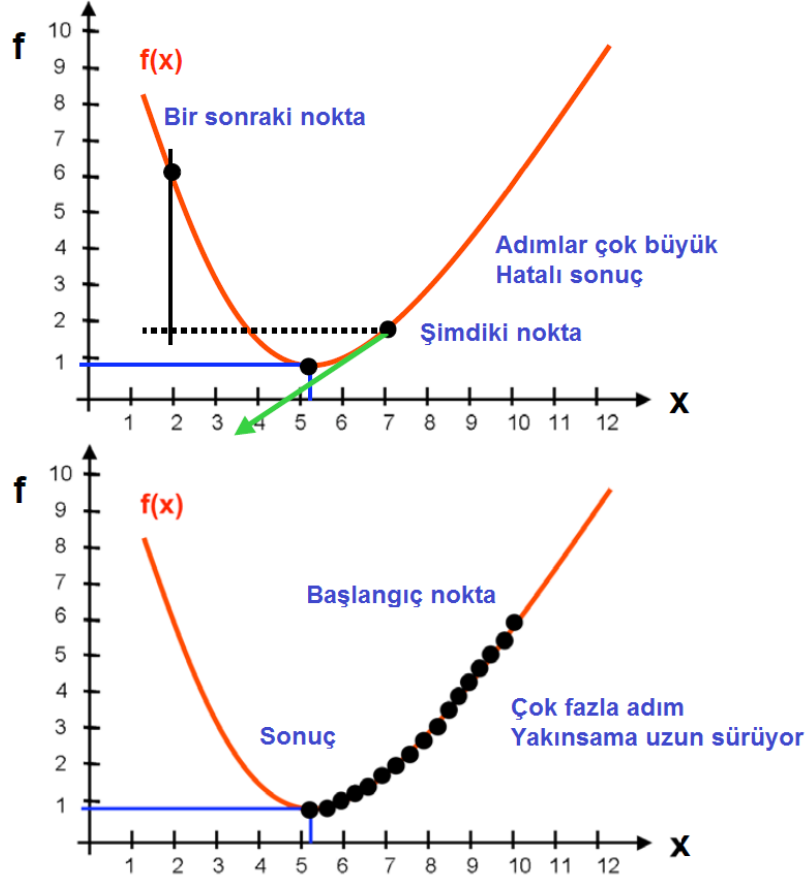


Şekil 2.5. φ nın θ açısı ile değişimi

Eşitlik (2.26) de $\gamma_{Y_1 Y_2}(\mathbf{h}_i) = E\{[Y_1(x) - Y_1(x + \mathbf{h}_i)] \cdot [Y_2(x) - Y_2(x + \mathbf{h}_i)]\}$ dir. Eşitlik (2.26), yalnızca θ parametresine bağlıdır ve dereceli azalma algoritması ya da ikinci dereceden öğrenme (second order learning) algoritmaları ile kolaylıkla minimize edilebilir [19;29]. Basit oluşundan dolayı bu çalışmada dereceli azaltma algoritması kullanılmıştır. φ nın enküçüklenmesi için başlangıç bir θ değeri seçilmeli ve φ fonksiyonunun türevi alınıp gradyantın negatif yönünde uygun bir adım büyüklüğü ile ilerlemelidir. Böylece θ değerine yeni bir değer atanır ve aynı işlem yeniden tekrarlanır. Bu işlem matematiksel olarak aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\theta_t = \theta_{t-1} - \alpha \left. \frac{\partial \varphi(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_{t-1}} \dots \dots \dots (2.27)$$

Bu iterasyonda θ_t ve θ_{t-1} sırasıyla en son ve bir önceki adımlarda bulunan θ değerini göstermektedir. α , negatif yönde adım büyüklüğünü göstermektedir ve türev büyüklüğünü göz önüne alarak uygun bir şekilde seçilmelidir. α değerinin küçük seçilmesi yakınsamayı fazlasıyla geciktirir ve bu değer büyük seçilmesi minimum noktanın atlanmasına ve yakınsamada hatalara neden olur (Şekil 2.6). $\varphi(\theta)$ 'nin θ 'ya göre türevi Eşitlik 2.28'de verilmiştir:



Şekil 2.6. Fonksiyonların enküçüklenmesinde adım büyüklüğün önemi

$$\begin{aligned}
 \alpha \times \frac{\partial \varphi(\theta)}{\partial \theta} &= 2\alpha \times \sum_{i=1}^n \frac{\partial \{\gamma_{Y_1 Y_2}(\mathbf{h}_i)\}}{\partial \theta} \times \gamma_{Y_1 Y_2}(\mathbf{h}_i) \\
 &= 2\alpha \times \sum_{i=1}^n \{ [(K^2 - 4L^2) \times \sin\theta \cos\theta \times (\cos^2\theta - \sin^2\theta)] + [KL \times (\cos^2\theta - \sin^2\theta)^2] \\
 &\quad - [4KL \sin^2\theta \cos^2\theta] \} \dots \dots \dots (2.28)
 \end{aligned}$$

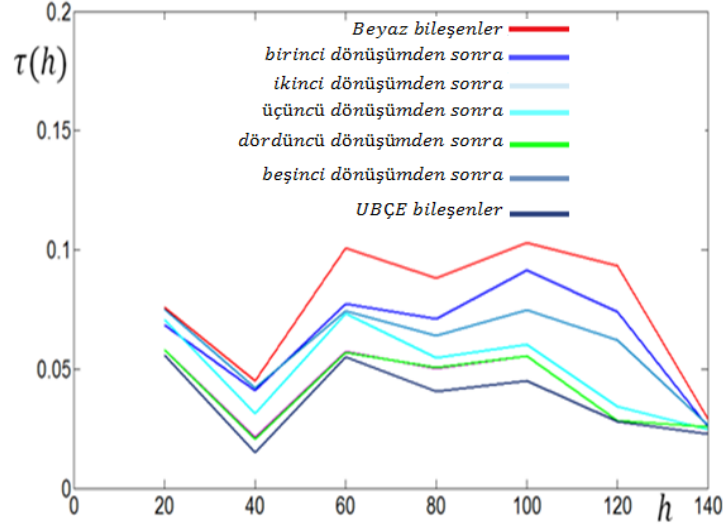
Burada $K = \Delta \tilde{Z}_2^2 - \Delta \tilde{Z}_1^2$, $L = \Delta \tilde{Z}_1 \Delta \tilde{Z}_2$, $\Delta \tilde{Z}_1 = \tilde{Z}_1(x) - \tilde{Z}_1(x + \mathbf{h}_i)$ ve $\Delta \tilde{Z}_2 = \tilde{Z}_2(x) - \tilde{Z}_2(x + \mathbf{h}_i)$ (EK 2).

Eşitlik (2.28), θ 'nın iki ardışık değeri arasındaki farkın, küçük bir kriter değerinin altına düşünceye kadar iterasyonun devam ettiğini ifade etmektedir. Yönteme ilişkin MATLAB kodu EK 3'de sunulmuştur.

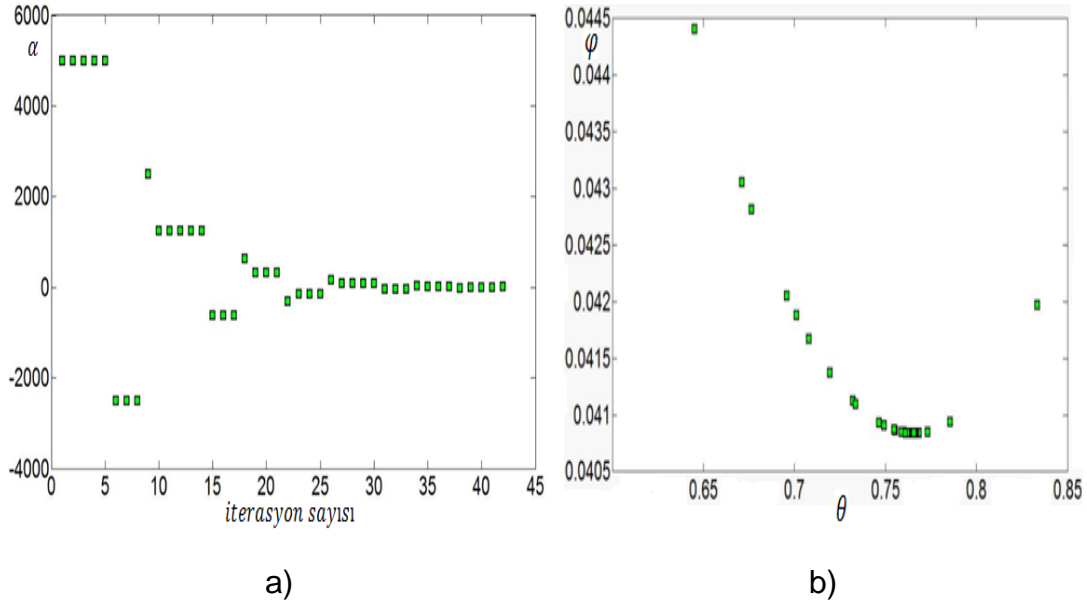
2.3.4.UBÇE Algoritmasının N-boyutlu Veri Kümesine Uygulanması

Kör kaynak ayrıştırıcı yöntemleri, örneğin bağımsız bileşenler analizi [30; 31], 2012), $N \times N$ matrisleri ve bunların birinci ve ikinci dereceden türevlerini kullanır. Ancak bu çalışmada, $N \times N$ boyut yerine daha kullanışlı bir algoritmayla problem, $N \times (N - 1)/2$ sayıda iki boyutlu problemlere dönüştürülmüştür. Ardından bir önceki kısımda anlatıldığı gibi algoritma iki boyutlu uzayda çalıştırılıp son dönüşüm matrisi, tüm θ değerlerini kullanarak elde edilmiştir.

Yöntem, dört değişken (Ni, As, Cr ve Fe) içeren lateritik bir nikel yatağına uygulanmıştır. Toplamda algoritma ikili değişkenler arasında mevcut olan altı adet 2-boyutlu uzayda çalıştırılmış ve her bir θ dönüşümün ardından $\tau(\mathbf{h})$ değeri uzaklığa karşı Şekil 2.7 de çizilmiştir. Şekil 2.7 den görüldüğü gibi $\tau(\mathbf{h})$ değeri her bir dönüşümün ardından farklı uzaklıklarda daha çok sifıra yaklaşmaktadır. Bu işlemde beş adet variogram matrisi 20m, 40m, 60m, 80m ve 100m uzaklıklarında hesaplanmıştır. İterasyondan elde edilen türev değeri fazlasıyla küçük olduğundan her bir iki boyutlu dönüşümde başlangıç α değeri 5000 olarak alınmıştır. Fakat sonuca yaklaşıncaya daha iyi bir yakınsama gerçekleştirme amacıyla bu değer bir kaç kez -2 ye bölünmüştür. Birinci ve ikinci değişkenlerden oluşan ilk 2-boyutlu uzayda algoritmanın aldığı α değerleri ve yakınsamanın nasıl sağlandığı Şekil 2.8 de gösterilmiştir.



Şekil 2.7. $\tau(h)$ 'nin 2-boyutlu dönüşümlerden sonra kademeli bir şekilde düşmesi



Şekil 2.8. a) İterasyon sayısı ile α nın değişimi b) ϕ nın θ ile değişimi

3. JEOİSTATİSTİKSEL KESTİRİM

Kestirim, örneklenmiş noktalardaki değerleri kullanarak örneklenmemiş lokasyonlardaki değerlerin, blok ortalamalarının ya da tüm sahanın ortalama değerinin hesaplamasını içerir. Kestirim, variogram ve krigleme teknikleri kullanarak yapıldığında jeostatistiksel kestirim adını alır. Jeostatistiksel kestirimde birden çok değişkenin bilgisi kullanıldığında kestirim, çok değişkenli jeostatistiksel kestirim sınıfı içine girer. Bu bölümde genel olarak tek ve çok değişkenli jeostatistiksel kestirimin teorisi verilmiş, klasik çok değişkenli jeostatistiksel kestirime basit bir alternatif olarak dikleştirilmiş bileşenli krigleme yöntemi tanıtılmıştır.

3.1. Krigleme

Bir M sahası üzerinde x_α , $\alpha=1, \dots, n$ adet noktada değişken değerlerinin ölçüldüğünü varsayalım. x_α , $\alpha=1, \dots, n$ verildiğinde örneklenmeyen x_β , $\beta=1, \dots, m$ noktadaki değişken değerlerinin hesaplanması bir kestirim problemidir. Bu problemin basit jeostatistiksel çözümü krigleme yöntemini kullanmayı gerektirir. Bunun için x_α , $\alpha=1, \dots, n$ noktadaki ölçüm değerlerini, durağan (stationary) bir rastlantı fonksiyonu $Z(x)$ 'in aldığı değerler olarak görmek yeterlidir. Rastlantı fonksiyonunun durağanlığı, ortalama ve varyans gibi istatistiklerin bir noktadan diğer bir noktaya değişmediği anlamını taşımaktadır. Durağanlık varsayımı altında $Z(x)$ 'in variogramı

$$2\gamma(\mathbf{h}) = E(Z(x) - Z(x + \mathbf{h}))^2 \quad \dots \dots \dots (3.1)$$

ya da yarıvariogramı

$$\gamma(\mathbf{h}) = 0.5 \times E(Z(x) - Z(x + \mathbf{h}))^2 \quad \dots \dots \dots (3.2)$$

hesaplanabilir. Eşitlik 3.1 ve Eşitlik 3.2'de E, beklenen değer operatörünü, \mathbf{h} ; x ve $x + \mathbf{h}$ noktaları arasındaki uzaklığı göstermektedir. Variogram ya da yarıvariogram, $Z(x)$ 'in \mathbf{h} uzaklığına bağlı değişkenliğini ölçer. $2\gamma(\mathbf{h})$ ya da $\gamma(\mathbf{h})$ verildiğinde x_β , $\beta=1, \dots, m$ noktalarındaki $Z^*(x_\beta)$, $\beta=1, \dots, m$ kestirim değerleri

$$Z^*(x_\beta) = \sum_{\alpha=1}^{n(x_\beta)} \lambda_\alpha Z(x_\alpha) \quad \dots \dots \dots (3.3)$$

ile hesaplanır. Eşitlik (3.3)'de, $Z(x_\alpha), x_\alpha$ noktasındaki ölçülen değeri, $n(x_\beta); x_\beta$ lokasyonunun kestiriminde kullanılacak veri sayısını, λ_α ise x_α noktasındaki ölçülen değere atanacak ağırlığı göstermektedir. λ_α ağırlıkları bilinmez ve (3.4) ile verilen krigleme sistemini çözerek elde edilir.

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^{n(x_\beta)} \lambda_\alpha \gamma(\mathbf{h}_{\alpha\omega}) + \mu &= \gamma(\mathbf{h}_{\alpha\beta}) \\ \sum_{\alpha=1}^{n(x_\beta)} \lambda_\alpha &= 1, \quad \omega = 1, \dots, n(x_\beta), \quad \dots \dots \dots (3.4) \\ \beta &= 1, \dots, m \end{aligned}$$

Eşitlik (3.4)'de, $\gamma(\mathbf{h}_{\alpha\omega});$ ölçümlenmiş x_α ve x_ω noktaları arasındaki $\mathbf{h}_{\alpha\omega} = x_\alpha - x_\omega$ uzaklığa karşılık gelen yarı-variogram değerini, $\gamma(\mathbf{h}_{\alpha\beta});$ ölçümlenmiş x_α ve kestirilecek x_β noktaları arasındaki $\mathbf{h}_{\alpha\beta} = x_\alpha - x_\beta$ uzaklığa karşılık gelen yarı-variogram değerini, $\mu;$ Lagrange sabitini göstermektedir.

3.2. Eşkrigleme

$x_\alpha, \alpha = 1, \dots, n$ noktalarında ölçümler, yalnız bir değişken için değil $Z_i(x_\alpha), i = 1, \dots, p$ adet değişken için yapılmış olabilir (Örneğin polimetalik bir maden yatağında çinko, kurşun ve bakır tenörleri gibi). Bir değişkenin örneklenmemiş $x_\beta, \beta = 1, \dots, m$ noktadaki değerlerinin kestiriminde değişkenin kendisi yanında diğer değişkenlerin bilgisi de kullanılabilir. Bu çok değişkenli bir kestirim problemi olup jeostatistikte eşkrigleme ile çözülür. Krigleme yönteminde olduğu gibi problemin jeostatistiksel bir çözümü için $Z_i(x_\alpha), i = 1, \dots, p$ değişkenlerinin durağan olduğu varsayılır. Bu varsayım altında her bir değişkenin variogramı

$$2\gamma_i(\mathbf{h}) = E(Z_i(x) - Z_i(x + \mathbf{h}))^2, i = 1, \dots, p \quad \dots \dots \dots (3.5)$$

ya da yarıvariogramı

$$\gamma_i(\mathbf{h}) = 0.5 \times E(Z_i(x) - Z_i(x + \mathbf{h}))^2, i = 1, \dots, p \quad \dots \dots \dots (3.6)$$

ve ayrıca değişkenler arasındaki çapraz variogramlar

$$2\gamma_{ij}(\mathbf{h}) = E\left(\left(Z_i(x) - Z_i(x + \mathbf{h})\right) \times \left(Z_j(x) - Z_j(x + \mathbf{h})\right)\right) \quad \dots \dots \dots (3.7)$$

ya da çapraz yarivariogramlar

$$\gamma_{ij}(\mathbf{h}) = 0.5 \times E \left((Z_i(x) - Z_i(x + \mathbf{h})) \times (Z_j(x) - Z_j(x + \mathbf{h})) \right) \dots \dots \dots (3.8)$$

hesaplanabilir. Çapraz variogram ya da çapraz yarivariogram, $Z_i(x_\alpha), i = 1, \dots, p$ değişkenleri arasındaki uzaklığa bağlı çapraz değişkenliği ölçer. Bu durumda $x_\alpha, \alpha = 1, \dots, n$ noktalarında $Z_i(x_\alpha), i = 1, \dots, p$ adet değişkenin ölçülmüş değerleri verildiğinde örneklenmemiş $x_\beta, \beta = 1, \dots, m$ noktalardaki belirli bir $Z_1(x)$ değişkenine ilişkin $Z_1^*(x_\beta), \beta = 1, \dots, m$ kestirim değerleri eşkrigleme ile Eşitlik (3.9) kullanılarak hesaplanabilir.

$$Z_1^*(x_\beta) = \sum_{i=1}^p \sum_{\alpha=1}^{n(x_\beta)} \lambda_i(x_\alpha) Z_i(x_\alpha) \dots \dots \dots (3.9)$$

Eşitlik (3.9)'deki eşkrigleme kestiricisindeki bilinmeyen $\lambda_i(x_\alpha)$ ağırlıkları, Eşitlik (3.10) ile verilen eşkrigleme sistemini çözerek elde edilir.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p \sum_{\alpha=1}^{n(\mathbf{u}_\beta)} \lambda_i(x_\alpha) \gamma_{1i}(\mathbf{h}_{\alpha\omega}) + \mu_i &= \gamma_{1i}(\mathbf{h}_{\alpha\beta}) \dots \dots \dots (3.10) \\ \sum_{\alpha=1}^{n(\mathbf{u}_\beta)} \lambda_i(x_\alpha) &= \delta_{1i}, \quad i = 1, \dots, p, \\ \omega &= 1, \dots, n(x_\beta), \quad \beta = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Eşitlik (3.10)'deki eşkrigleme sisteminde $\gamma_{1i}(\mathbf{h}_{\alpha\omega})$; kestirilecek değişken $Z_1(x)$ ile $Z_i(x)$ değişkeni arasındaki $\mathbf{h}_{\alpha\omega} = x_\alpha - x_\omega$ uzaklığa karşılık gelen çapraz yarivariogram değerini, $\gamma_{1i}(\mathbf{h}_{\alpha\beta})$; $\mathbf{h}_{\alpha\beta} = x_\alpha - x_\beta$ uzaklığa karşılık gelen çapraz yarivariogram değerini, μ_i ; Lagrange sabitini ve δ_{1i} ise Kronecker değerini ifade etmektedir. Kronecker değeri

$$\delta_{1i} = \begin{cases} 1, & i = 1 \\ 0, & i \neq 1 \end{cases}$$

ile tanımlanır. Bunun için p adet yarivariogram ve $p \times (p - 1)$ adet çapraz yarivariogramı hesaplayıp bunların hepsini aynı anda modellemek gerekir. Bunun nedeni Eşitlik (3.10)'deki sistemde pozitif tanımlılığı garanti etmektir. Bu işlem,

değişken sayısı 3 den fazla olduğunda pratik olmaktan çıkar. Ayrıca değişken sayısının artması herbir kestirim işleminde çözülecek eşkrigleme matrislerinin boyutlarının artmasına ve dolayısıyla matris duraysızlıklarına yol açar.

3.3. Dikleştirilmiş Bileşenli Krigleme

Çapraz variogram modelleme ve eşkrigleme yöntemine ilişkin problemleri gidermenin bir yolu değişkenleri dikleştirilmiş bileşenlere dönüştürüp kestirim işlemini bu bileşenler üzerinde yapmak, daha sonra kestirilen bileşen değerlerine geri dönüşüm uygulamaktır. Dikleştirmeden dolayı bileşenler, eşkrigleme yerine krigleme tekniği kullanılarak kestirilebilir. Dolayısıyla dikleştirilmiş bileşenler esas alındığında bir değişkenin bilinmeyen bir değerinin kestiriminde yalnızca p adet bileşeni krigleme ile kestirip bunları orijinal değerlere geri dönüştürmek yeterli olacaktır.

Bunun için n adet noktada örneklenmiş p değişkenden oluşan bir Z ($n \times p$ boyutunda) veri matrisini gözönüne alalım. Bu matris açık bir şekilde Eşitlik (3.11) ile tanımlanabilir.

$$Z = \begin{bmatrix} Z_1(x_1) & Z_2(x_1) & \dots & Z_p(x_1) \\ Z_1(x_2) & Z_2(x_2) & \dots & Z_p(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_1(x_n) & Z_2(x_n) & \dots & Z_p(x_n) \end{bmatrix} \dots \dots \dots (3.11)$$

$Z_i(x), i = 1, \dots, p$ adet değişkenin tümüne ilişkin uzaklığa bağlı değişkenlik, $\Gamma^Z(\mathbf{h})$ yarıvariogram matrisi ile karakterize edilir.

$$\Gamma^Z(\mathbf{h}) = \begin{bmatrix} \gamma_{11}^Z(\mathbf{h}) & \gamma_{12}^Z(\mathbf{h}) & \dots & \gamma_{1p}^Z(\mathbf{h}) \\ \gamma_{21}^Z(\mathbf{h}) & \gamma_{22}^Z(\mathbf{h}) & \dots & \gamma_{2p}^Z(\mathbf{h}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{p1}^Z(\mathbf{h}) & \gamma_{p2}^Z(\mathbf{h}) & \dots & \gamma_{pp}^Z(\mathbf{h}) \end{bmatrix} \dots \dots \dots (3.12)$$

Dikleştirilmiş bileşenler $Y_i(x), i = 1, \dots, p$, bağımsız bileşenler analizi ya da uzaklığa bağlı çapraz ilişkinin enküçüklenmesi esas alınarak elde edilen bir A ($p \times p$ boyutunda) matrisinin tersi ile Z matrisinin çarpımından elde edilir.

$$Y = A^{-1} \times Z \dots \dots \dots (3.13)$$

Dikleştirmeden dolayı dikleştirilmiş bileşenlerin yarıvariogram matrisi $\Gamma^Y(\mathbf{h})$, köşegen dışı elemanların yani çapraz variogramların 0 ya da 0'a yakın olduğu bir matristir.

$$\Gamma^Y(\mathbf{h}) = \begin{bmatrix} \gamma_{11}^Y(\mathbf{h}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_{22}^Y(\mathbf{h}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_{pp}^Y(\mathbf{h}) \end{bmatrix} \dots \dots \dots (3.14)$$

Dikleştirilmiş bileşenlerin çapraz variogramları 0 ya da yoksanabilir seviyede olduğundan bileşenlerin krigleme ile kestirimi eşkrigleme ile kestirime eşdeğerdir. Bu nedenle eşkrigleme yerine krigleme kullanılabilir. Bu durumda p adet bileşenin örneklenmemiş x_β , $\beta=1,\dots,m$ noktadaki kestirim değeri, Eşitlik (3.3) kestiricisine benzer şekilde

$$Y_i^*(x_\beta) = \sum_{\alpha=1}^{n(x_\beta)} \lambda_\alpha Y_i(x_\alpha), \quad i = 1, \dots, p \quad \dots \dots \dots (3.15)$$

ile hesaplanıp bileşenlere ilişkin kestirim değerleri matrisi Y^* elde edilir.

$$Y^* = \begin{bmatrix} Y_1^*(x_1) & Y_2^*(x_1) & \dots & Y_p^*(x_1) \\ Y_1^*(x_2) & Y_2^*(x_2) & \dots & Y_p^*(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_1^*(x_m) & Y_2^*(x_m) & \dots & Y_p^*(x_m) \end{bmatrix} \dots \dots \dots (3.16)$$

Kestirilmiş bileşenlerden orijinal değerlere geri dönüşüm Eşitlik (3.17)'deki matris çarpımı ile gerçekleştirilir.

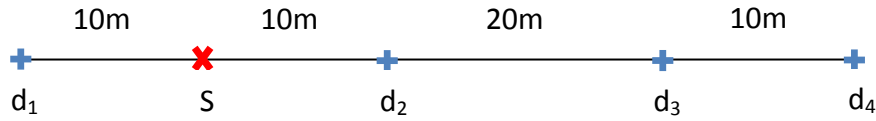
$$\mathbf{Z}^* = \mathbf{A} \times \mathbf{Y}^* \quad \dots \dots \dots (3.17)$$

4. BİR BOYUTTA ÖRNEK UYGULAMALAR

Bu bölümde BBK ve UBÇEK yöntemlerinin daha iyi anlaşılması için bir boyuttaki uygulamaları sunulmuştur.

4.1. Problemin Tanımı

Burada dikkate alınan problem, d_1 , d_2 , d_3 ve d_4 noktalarındaki verileri kullanarak örneklenmemiş s noktasındaki bilinmeyen değeri BBK ve UBÇEK yöntemleri ile kestirmektir (Şekil 4.1).



Şekil 4.1 Örneklem düzeni. d_1 , d_2 , d_3 ve d_4 ; örneklenmiş, s ise kestirilecek noktadır

Bu problemde kestirilecek değişken sayısı 3 alınmıştır. Değişkenler sırasıyla A, B ve C dir. Bu değişkenlerin d_1 , d_2 , d_3 ve d_4 noktalarındaki değerleri sırasıyla (46, 81, 165), (40, 84, 197), (41, 49, 101) ve (29, 64, 127) dir. Veriler, matris şeklinde aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$Z = \begin{bmatrix} 46 & 81 & 165 \\ 40 & 84 & 197 \\ 41 & 49 & 101 \\ 29 & 64 & 127 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (4.1)$$

Eşitlik (4.1)'de verilen matrisde sütunlar değişkenleri, satırlar ise örnekleri göstermektedir; örneğin $z_{23} = 197$, C değişkenin ikinci örnek noktasındaki değerini göstermektedir.

4.2. Bir Boyutta Bağımsız Bileşenlerle Krigleme

Bağımsız bileşenler analizinden önce verilerin beyazlatılması gerekir. Bu nedenle her bir değişken (ortalaması sıfır ve varyansı bire eşit olacak şekilde) standartlaştırılmıştır. Değişkenlere ilişkin ortalama ve standart sapmalar Çizelge 4.1'de gösterilmiştir.

Çizelge 4.1 Değişkenlere ilişkin ortalama ve standart sapmalar

	A	B	C
Ortalama	39	69.5	147.5
Standart Sapma	7.16	16.26	42.19

Merkezlenmiş M matrisi (Eşitlik 4.2), gerçek değerleri ortalamalarından çıkararak elde edilmiştir.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M} = \mathbf{Z} - \mathbf{O} &= \begin{bmatrix} 46 & 81 & 165 \\ 40 & 84 & 197 \\ 41 & 49 & 101 \\ 29 & 64 & 127 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 39 & 69.5 & 147.5 \\ 39 & 69.5 & 147.5 \\ 39 & 69.5 & 147.5 \\ 39 & 69.5 & 147.5 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 7 & 11.5 & 17.5 \\ 1 & 14.5 & 49.5 \\ 2 & -20.5 & -46.5 \\ -10 & -5.5 & -20.5 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (4.2)
 \end{aligned}$$

Standartlaştırma amacı ile her değişkenin standart sapması hesaplanmış ve bu standart değerlerden köşegen bir matris Eşitlik (4.3) oluşturulmuştur. Ardından köşegen matris Eşitlik (4.3), merkezlenmiş veri matrisi Eşitlik (4.2) ile çarpılmıştır.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{1}{SS(A)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{SS(B)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{SS(C)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7.16} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{16.26} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{42.19} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (4.3)$$

$$\mathbf{Z}_s = \mathbf{M} \times \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0.977008 & 0.70733 & 0.414829 \\ 0.139573 & 0.89185 & 1.173372 \\ 0.279145 & -1.26089 & -1.10226 \\ -1.39573 & -0.33829 & -0.48594 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (4.4)$$

Eşitlik (4.4) ile verilen standart veri matrisinden korelasyon matrisi hesaplanmıştır (Eşitlik 4.5).

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0.31191 & 0.313205 \\ 0.31191 & 1 & 0.964704 \\ 0.313205 & 0.964704 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (4.5)$$

Korelasyon matrisi, Eşitlik 4.6'da gösterildiği gibi üç matrisin çarpımı şeklinde parçalanmıştır. Bu matrislerden Q ; özvektörleri içeren matris olup Λ ise köşegeninde özdeğerlerin yer aldığı köşegen bir matristir. Q^T ise Q matrisinin tersini göstermektedir. Q ve Λ matrisleri sırasıyla Eşitlikler 4.7 ve 4.8'de verilmiştir.

$$K = Q\Lambda Q^T \dots\dots\dots (4.6)$$

$$Q = \begin{bmatrix} -0.36245 & -0.932 & 0.00106 \\ -0.65891 & 0.257054 & 0.706935 \\ -0.65914 & 0.255532 & -0.70728 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (4.7)$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 2.13 & 0 & 0 \\ 0 & 0.83 & 0 \\ 0 & 0 & 0.04 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (4.8)$$

Beyaz bileşenler (V), standart veri matrisi Z_s 'yi $Q \times \Lambda^{-\frac{1}{2}}$ ile çarparak elde edilmiştir (Eşitlik 4.9).

$$V = Z_s \times Q \times \Lambda^{-\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} -0.74818 & -0.68434 & 1.105402 \\ -0.96575 & 0.438469 & -1.06069 \\ 0.996215 & -0.95159 & -0.59333 \\ 0.717713 & 1.197458 & 0.548618 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (4.9)$$

Beyaz bileşenler ilişkisiz ancak bağımsız değildir. Bağımsızlığı sağlamak için aşağıda verilen adımlar izlenmiştir:

1. Değişken sayısı 3 olduğu için bağımsız bileşen sayısı da 3'e eşittir ($m=3$). İlk bağımsız bileşen için ($p = 1$) uzunluğu bire eşit olan bir rastlantı vektörü (w_1) üretilmiştir (Eşitlik 4.10).

$$W_p = \begin{bmatrix} 0.30 \\ 0.40 \\ 0.87 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (4.10)$$

2. Bu adımda $W_p \leftarrow E\{V^T g(V \times W_p)\} - E\{g'(V \times W_p)\}W_p$ hesaplanmıştır. Burada g , algoritmanın normalden çok büyük ya da küçük değerlerden etkilenmesini önlemek amacıyla kullanılan yumuşatıcı bir fonksiyondur. Bu hesaplama sonucunda başlangıç vektörü Eşitlik (4.10), uzunluğu yine 1'e eşit olan Eşitlik 4.11'de verilen vektöre dönüşmüştür.

$$W_p = \begin{bmatrix} 0.50 \\ 0.50 \\ 0.71 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (4.11)$$

3. Yeni w_p vektörü Eşitlik (4.11) ile eski vektör Eşitlik (4.10)'un değerleri aynı olana kadar yani değişim sıfıra eşit olana kadar 2. adım tekrar edilmiştir. Aynı vektörlerin iç çarpımından elde edilen değer bire eşittir. Bu nedenle iterasyona son vermek amacı ile 1'e çok yakın olan bir kriter değeri ($\epsilon=0.99$) seçilmiştir. Eski vektörün evriğinin (transpozu) yeni vektör ile çarpımından elde edilen değer, bu kriterden küçük olduğu zamana kadar 2. adım tekrar edilmiştir.

$$[0.30 \quad 0.40 \quad 0.87] \times \begin{bmatrix} 0.50 \\ 0.50 \\ 0.71 \end{bmatrix} = 0.96 < \epsilon=0.99$$

0.96 değeri 400. iterasyonda elde edilmiştir. Bu şekilde W 'nun ilk vektörü üretilmiştir.

4. İlk vektör bulunduktan sonra p sayacı p+1'e değiştirilmiş ve 2. adımın sonuna kadar olan işlemler tekrar edilmiştir. Ancak w_p vektörü için bir normlaştırma işlemi yapılmamıştır. Bu aşamada, bulunan w_p vektörü dikleştirme işlemine tabi tutulmuştur. Dikleştirme işleminin amacı p sayıdaki w_p vektörünün birbirine dik olmasını sağlamaktır. Bunun için aşağıda verilen işlemler dizisi dikkate alınmıştır.

$$W_p \leftarrow W_p - \sum_{j=1}^{p-1} (W_p^T \times W_j) W_j$$

W_p vektörü daha sonra normlaştırılmıştır. P sayacı son vektör bulunana kadar artırılmış ve böylece W matrisi oluşturulmuştur (Eşitlik 4.12).

$$W = \begin{bmatrix} 0.003733 & -0.98607 & 0.166291 \\ -0.29743 & -0.15986 & -0.94126 \\ -0.95474 & 0.045947 & 0.293885 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (4.12)$$

Beyaz bileşenler matrisi V ile W matrisi çarpılarak bağımsız bileşenlerden oluşan matris (Y) elde edilmiştir (Eşitlik 4.13).

$$Y = V \times W \dots \dots \dots (4.13)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{Y} &= \begin{bmatrix} -0.74818 & -0.68434 & 1.105402 \\ -0.96575 & 0.438469 & -1.06069 \\ 0.996215 & -0.95159 & -0.59333 \\ 0.717713 & 1.197458 & 0.548618 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.003733 & -0.98607 & 0.166291 \\ -0.29743 & -0.15986 & -0.94126 \\ -0.95474 & 0.045947 & 0.293885 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -0.85461 & 0.897942 & 0.844591 \\ 0.878661 & 0.833469 & -0.88503 \\ 0.853222 & -0.85748 & 0.886986 \\ -0.87727 & -0.87393 & -0.84654 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Y matrisinin her bir kolonu bir bağımsız bileşene karşılık gelir. Eğer uzaklığa bağlı bağımsızlıkta sözkonusu ise her bir bağımsız bileşen ayrı ayrı krigleme ile kestirilebilir. Uzaklığa bağlı bağımsızlık varsayımı altında bağımsız bileşenlerin s noktasındaki değeri krigleme ile kestirilmiştir. Bunun için külçe etkisi + küresel model toplamından ibaret bir variogram modeli kullanılmış ve bu modelin parametreleri Çizelge 4.2'de verilmiştir. Bu parametreler keyfi olarak seçilmiştir.

Çizelge 4.2. Bağımsız bileşenlere ilişkin yarı-variogram model parametreleri

Bağımsız bileşen	C_0	C_1	a
Y_1	0.4	0.6	140
Y_2	0.3	0.7	170
Y_3	0.35	0.65	190

Bu model parametreleri ve d_1, d_2, d_3 ve d_4 noktalarındaki bağımsız bileşen değerleri kullanılarak s noktasındaki bilinmeyen değer kestirilmiştir. Bunun için Eşitlik 4.14 ile verilen krigleme sistemi kullanılmıştır.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_4 \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(d_1, d_1) & \cdots & \gamma(d_1, d_4) & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \gamma(d_4, d_1) & \cdots & \gamma(d_4, d_4) & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \gamma(d_1, s) \\ \vdots \\ \gamma(d_4, s) \\ 1 \end{pmatrix} \dots \dots \dots (4.14)$$

Bu eşitlikte $\gamma(d_i, d_j)$; kestirimde kullanılan d_i ve d_j noktaları arasındaki variogramı, $\gamma(d_i, s)$ ise kestirilecek nokta ve d_i noktasındaki variogramı göstermektedir. λ her bir örneğe atanacak ağırlığı ve μ ; Lagrange çarpanını göstermektedir. Bağımsız bileşenlerin (Y_i) her biri için s noktasındaki kestirim değeri Eşitlik 4.15 bağıntısını kullanarak elde edilmiştir.

$$Y_i(s)^* = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_4 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} Y_i(d_1) \\ \vdots \\ Y_i(d_4) \end{pmatrix} \dots \dots \dots (4.15)$$

Birinci bağımsız bileşenin s noktasında kestirim değeri

$$\begin{pmatrix} \lambda_{Y_1 d_1} \\ \lambda_{Y_1 d_2} \\ \lambda_{Y_1 d_3} \\ \lambda_{Y_1 d_4} \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.53 & 0.65 & 0.71 & 1 \\ 0.53 & 0.4 & 0.53 & 0.59 & 1 \\ 0.65 & 0.53 & 0.4 & 0.44 & 1 \\ 0.71 & 0.59 & 0.44 & 0.4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0.44 \\ 0.44 \\ 0.59 \\ 0.65 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{Y_1 d_1} = 0.50, \quad \lambda_{Y_1 d_2} = 0.59, \quad \lambda_{Y_1 d_3} = -0.12, \quad \lambda_{Y_1 d_4} = 0.02$$

$$y_{11}^* = -(0.50 \times 0.85) + (0.59 \times 0.88) - (0.12 \times 0.85) + (0.02 \times 0.88) = 0.0098 \text{ dir.}$$

İkinci bağımsız bileşenin s noktasındaki kestirim değeri

$$\begin{pmatrix} \lambda_{Y_2 d_1} \\ \lambda_{Y_2 d_2} \\ \lambda_{Y_2 d_3} \\ \lambda_{Y_2 d_4} \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.42 & 0.54 & 0.60 & 1 \\ 0.42 & 0.3 & 0.42 & 0.48 & 1 \\ 0.54 & 0.42 & 0.3 & 0.36 & 1 \\ 0.60 & 0.48 & 0.36 & 0.3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0.36 \\ 0.36 \\ 0.48 \\ 0.54 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{Y_2 d_1} = 0.5, \quad \lambda_{Y_2 d_2} = 0.5, \quad \lambda_{Y_2 d_3} = 0.0, \quad \lambda_{Y_2 d_4} = 0.0$$

$$y_{12}^* = (0.5 \times 0.90) + (0.5 \times 0.83) = 0.87 \text{ dir.}$$

Üçüncü bağımsız bileşenin kestirim değeri

$$\begin{pmatrix} \lambda_{Y_3 d_1} \\ \lambda_{Y_3 d_2} \\ \lambda_{Y_3 d_3} \\ \lambda_{Y_3 d_4} \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.35 & 0.45 & 0.55 & 0.60 & 1 \\ 0.45 & 0.35 & 0.45 & 0.5 & 1 \\ 0.55 & 0.45 & 0.35 & 0.40 & 1 \\ 0.60 & 0.5 & 0.40 & 0.35 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0.40 \\ 0.40 \\ 0.50 \\ 0.55 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{Y_3 d_1} = 0.5, \quad \lambda_{Y_3 d_2} = 0.5, \quad \lambda_{Y_3 d_3} = 0.0, \quad \lambda_{Y_3 d_4} = 0.0$$

$$y_{13}^* = (0.5 \times 0.84) - (0.5 \times 0.89) = 0.03 \text{ dir.}$$

$$Y^* = [0.0098 \quad 0.87 \quad 0.03]$$

Bu kestirilmiş değerler, standart veri uzayına Eşitlik 4.16'da gösterilen matris ile geri dönüştürülmüştür.

$$A = W^{-1} \times A^{\frac{1}{2}} \times Q^{-1} \times D^{-1} = \begin{bmatrix} 1.79 & -3.25 & 2.29 \\ 4.73 & 14.98 & 38.36 \\ 5.08 & -5.57 & -17.69 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (4.16)$$

Standard veri uzayındaki kestirim değerleri

$$\mathbf{M}^* = \mathbf{Y}^* \times \mathbf{A} = [0.0098 \quad 0.87 \quad 0.03] \times \begin{bmatrix} 1.79 & -3.25 & 2.29 \\ 4.73 & 14.98 & 38.36 \\ 5.08 & -5.57 & -17.69 \end{bmatrix} =$$

$$[4.28 \quad 12.83 \quad 32.86]$$

olarak bulunmuş ve orijinal veri uzayındaki kestirim değerleri ise

$$\mathbf{Z}^* = \mathbf{M}^* + \mathbf{O} = [4.28 \quad 12.83 \quad 32.86] + [39 \quad 69.5 \quad 147.5] =$$

$$[43.28 \quad 82.33 \quad 180.36]$$

şeklinde elde edilmiştir.

4.3. Bir Boyutta UBÇE Bileşenleri İle Krigleme

Bağımsız bileşenlerle krigleme yönteminde olduğu gibi UBÇE bileşenlerinin kestirimi önceden beyazlatma işleminin yapılmasını gerektirir. Beyazlatılmış bileşenler Eşitlik 4.9 kullanarak üretilmiştir. Beyaz bileşenler uzaklığa bağlı ilişki göstermektedir. Bu nedenle uzaklığa bağlı en az çapraz ilişki gösteren bileşenleri bulmak amacı ile UBÇE yöntemi aşağıda verilen adımlarla uygulanmıştır:

1. UBÇE bileşenlerinin hesaplanması için uzaklık 10, uzaklık toleransı 5 ve uzaklığa bağlı ilişkiyi minimize etmek amacı ile göz önüne alınan uzaklık sayısı 5 alınmıştır.
2. Beyaz bileşenlerden oluşan 3-B uzay, üç adet 2-B uzaya indirgenmiştir.
3. İlk dönüşüm açısını bulmak için birinci ve ikinci beyaz bileşenden oluşan 2-B uzay dikkate alınmıştır.

4. $\theta_t = \theta_{t-1} - \alpha \frac{\partial \varphi(\theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_{t-1}}$ iterasyonu kullanılarak birinci dönüşüm açısı bulunmuştur. Bu iterasyonda başlangıç adım büyüklüğü değeri, α , 5000 olarak seçilmiştir. Rastlantı θ başlangıç değeri ise 2.15 radyan alınmıştır. Yukarıdaki iterasyon 50 kez tekrar edildikten sonra birinci dönüşüm açısı 1.48 radyan elde edilmiştir.

5. Böylece ilk dönüşüm matrisi, \mathbf{W}_1 , hesaplanmıştır.

$$\mathbf{W}_1 = \begin{bmatrix} 0.087 & -0.996 & 0 \\ 0.996 & 0.087 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6. Beyaz bileşenlerden oluşan matris, \mathbf{W}_1 dönüşüm matrisi ile çarpılarak yeni bileşenler elde edilmiştir. Ardından yukarıdaki adımlar yenilenmiş birinci ve üçüncü bileşenler kullanılarak tekrar edilmiştir. Bulunan yeni dönüşüm matrisi, \mathbf{W}_2 , bir önceki aşamada elde edilen bileşenler matrisi ile çarpılmıştır (Eşitlik 4.17).

$\theta = 0.1047$ radyan,

$$W_2 = \begin{bmatrix} 0.994 & 0 & -0.104 \\ 0.104 & 0 & 0.994 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (4.17)$$

Ardından üçüncü dönüşüm açısı ve dönüşüm matrisi, ikinci ve üçüncü bileşenler değeri baz alınarak üçüncü adımda gösterilen iterasyon ile hesaplanmıştır (Eşitlik 4.18).

$\theta = 3.0543$ radyan,

$$W_2 = \begin{bmatrix} 0.994 & 0 & -0.104 \\ 0.104 & 0 & 0.994 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (4.18)$$

Böylece beyaz bileşenleri UBÇE bileşenlere dönüştüren matris bulunmuştur (Eşitlik 4.19):

$$W = W_1 \times W_2 \times W_3 = \begin{bmatrix} 0.086678 & 0.99161 & 0.095900 \\ 0.990737 & -0.0959 & 0.096138 \\ 0.104528 & 0.086678 & -0.99074 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (4.19)$$

Beyaz bileşenler matrisi \tilde{Z} ile W nihai dönüşüm matrisi çarpılarak UBÇE bileşenlerden oluşan matris (Y) elde edilmiştir (Eşitlik 4.20).

$$Y = \tilde{Z} \times W \dots \dots \dots (4.20)$$

$$Y = \begin{bmatrix} -0.74818 & -0.68434 & 1.105402 \\ -0.96575 & 0.438469 & -1.06069 \\ 0.996215 & -0.95159 & -0.59333 \\ 0.717713 & 1.197458 & 0.548618 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.086678 & 0.99161 & 0.095900 \\ 0.990737 & -0.0959 & 0.096138 \\ 0.104528 & 0.086678 & -0.99074 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0.62731 & -0.66504 & -1.18921 \\ 0.239826 & -1.01919 & 1.074116 \\ -0.91845 & 1.06647 & 0.518757 \\ 1.305923 & 0.617756 & -0.40366 \end{bmatrix}$$

Y matrisinin her bir kolonu bir UBÇE bileşene karşılık gelir. Eğer uzaklığa bağlı ilişkisizlik söz konusu ise her bir UBÇE bileşeni ayrı ayrı krigleme ile kestirilebilir. Uzaklığa bağlı ilişkisizlik varsayımı altında UBÇE bileşenlerin s noktasındaki değeri krigleme ile kestirilmiştir. Bunun için külçe etkisi + küresel model toplamından ibaret bir variogram modeli kullanılmış ve bu modelin parametreleri Çizelge 4.3'de verilmiştir. Variogram parametreleri keyfi olarak seçilmiştir.

Çizelge 4.3 UBÇE bileşenlere ilişkin yarı-variogram model parametreleri

UBÇE bileşen	C_0	C_1	a
Y_1	0.4	0.6	120
Y_2	0.3	0.7	200
Y_3	0.35	0.65	110

Bu model parametreleri ve d_1, d_2, d_3 ve d_4 noktalarındaki UBÇE bileşen değerleri kullanılarak s noktasındaki bilinmeyen değer kestirilmiştir. Bunun için Eşitlik 4.14 ile verilen krigleme sistemi kullanılmıştır.

UBÇE bileşenlerin (Y_i) her biri için s noktasındaki kestirim değeri Eşitlik 4.15'de verilen bağıntı kullanarak elde edilmiştir. Birinci UBÇE bileşenin s noktasında kestirim değeri:

$$\begin{pmatrix} \lambda_{Y_1 d_1} \\ \lambda_{Y_1 d_2} \\ \lambda_{Y_1 d_3} \\ \lambda_{Y_1 d_4} \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.55 & 0.69 & 0.75 & 1 \\ 0.55 & 0.4 & 0.55 & 0.62 & 1 \\ 0.69 & 0.55 & 0.4 & 0.47 & 1 \\ 0.75 & 0.62 & 0.47 & 0.4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0.47 \\ 0.47 \\ 0.62 \\ 0.69 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{Y_1 d_1} = 0.51, \quad \lambda_{Y_1 d_2} = 0.51, \quad \lambda_{Y_1 d_3} = 0.02, \quad \lambda_{Y_1 d_4} = -0.04$$

$$y_{11}^* = -(0.51 \times 0.63) + (0.51 \times 0.24) - (0.02 \times 0.92) - (0.04 \times 1.31) = -0.27' \text{ dir.}$$

İkinci UBÇE bileşenin s noktasındaki kestirim değeri:

$$\begin{pmatrix} \lambda_{Y_2 d_1} \\ \lambda_{Y_2 d_2} \\ \lambda_{Y_2 d_3} \\ \lambda_{Y_2 d_4} \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.40 & 0.51 & 0.56 & 1 \\ 0.40 & 0.3 & 0.40 & 0.46 & 1 \\ 0.51 & 0.40 & 0.3 & 0.35 & 1 \\ 0.56 & 0.46 & 0.35 & 0.3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0.35 \\ 0.35 \\ 0.46 \\ 0.51 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{Y_2 d_1} = 0.5, \quad \lambda_{Y_2 d_2} = 0.53, \quad \lambda_{Y_2 d_3} = -0.08, \quad \lambda_{Y_2 d_4} = 0.05$$

$$y_{12}^* = -(0.5 \times 0.66504) - (0.53 \times 1.01919) - (0.08 \times 1.06647) + (0.05 \times 0.617756) = -0.9270$$

Üçüncü UBÇE bileşenin kestirim değeri:

$$\begin{pmatrix} \lambda_{Y_3 d_1} \\ \lambda_{Y_3 d_2} \\ \lambda_{Y_3 d_3} \\ \lambda_{Y_3 d_4} \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.35 & 0.53 & 0.69 & 0.76 & 1 \\ 0.53 & 0.35 & 0.53 & 0.61 & 1 \\ 0.69 & 0.53 & 0.35 & 0.44 & 1 \\ 0.76 & 0.61 & 0.44 & 0.35 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0.44 \\ 0.44 \\ 0.61 \\ 0.69 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{Y_3 d_1} = 0.5, \quad \lambda_{Y_3 d_2} = 0.5, \quad \lambda_{Y_3 d_3} = 0.03, \quad \lambda_{Y_3 d_4} = -0.03$$

$$y_{13}^* = -(0.5 \times 1.18921) + (0.5 \times 1.074116) + (0.03 \times 0.518757) + (0.03 \times 0.40366) = -0.03$$

$$Y^* = [-0.27 \quad -0.93 \quad -0.03]$$

Bu kestirilmiş değerler, standart veri uzayına Eşitlik 4.21'de gösterilen matris ile geri dönüştürülmüştür.

$$A = W^{-1} \times A^{\frac{1}{2}} \times Q^{-1} \times D^{-1} = \begin{bmatrix} -6.35 & 2.66 & 5.59 \\ -3.17 & -15.67 & -41.70 \\ -0.95 & -3.41 & 2.96 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (4.21)$$

Standard veri uzayındaki kestirim değerleri

$$\begin{aligned} M^* &= Y^* \times A = [-0.27 \quad -0.93 \quad -0.03] \times \begin{bmatrix} -6.35 & 2.66 & 5.59 \\ -3.17 & -15.67 & -41.70 \\ -0.95 & -3.41 & 2.96 \end{bmatrix} \\ &= [4.69 \quad 13.95 \quad 37.19] \end{aligned}$$

olarak bulunmuş ve orijinal veri uzayındaki kestirim değerleri ise

$$Z^* = M^* + O = [4.69 \quad 13.95 \quad 37.19] + [39 \quad 69.5 \quad 147.5] = [43.69 \quad 83.45 \quad 184.69]$$

şeklinde elde edilmiştir.

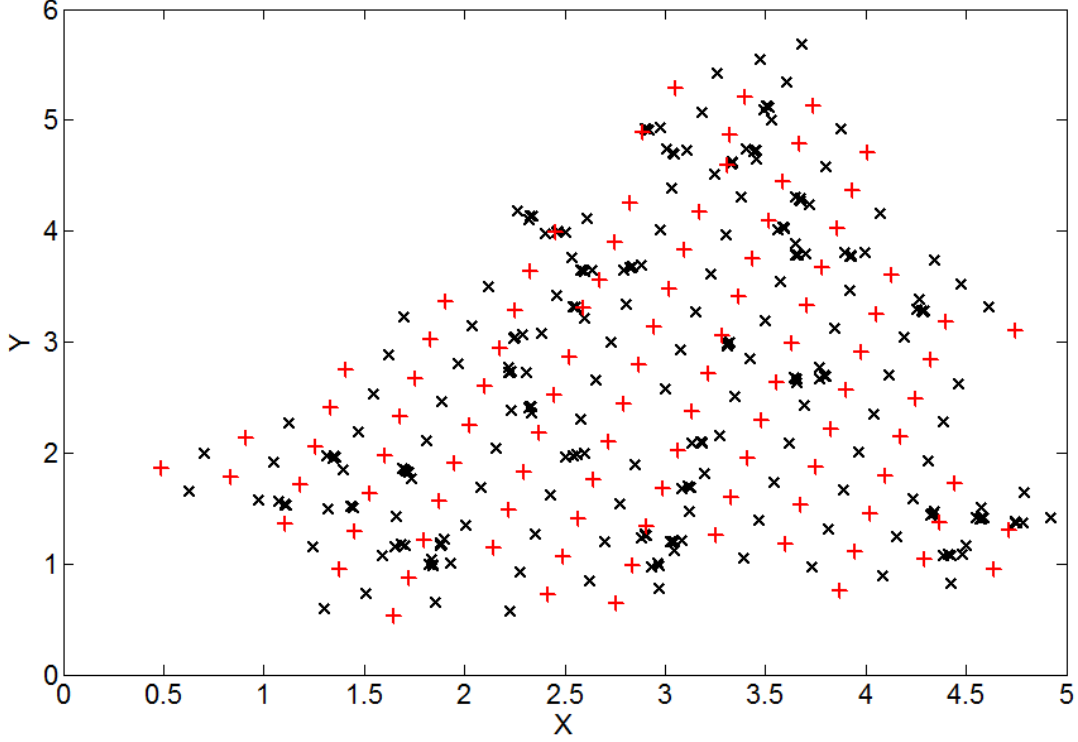
5. BBK, UBÇEK VE EŞKRİGLEME YÖNTEMLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI

Bu bölümde BBK, UBÇEK ve eşkrigleme yöntemleri kestirim kalitesi açısından karşılaştırılmıştır. Bunun için çok değişkenli Jura veri kümesi [32] kullanılmıştır. Bu veri kümesi, 359 lokasyondan alınan örneklerin çok sayıda ağır metal analizini içermektedir. Bu veri kümesi aynı zamanda Goovaerts [33] tarafından eşkrigleme amacıyla kullanılmıştır.

Karşılaştırma amacıyla veri kümesi iki ayrı gruba bölünerek Jackknife testi yapılmıştır. Birinci grup, kestirimde kullanılacak örnekleri içermekte olup ikinci grup, kestirilecek noktaları oluşturmaktadır. Yöntemlerin performansı üç farklı değişken için gerçek ve kestirilmiş değerlerin karşılaştırılması ile ölçülmüştür. Krigleme varyansı, kestirim kalitesinin ölçülmesi amacıyla sıklıkla kullanılan bir kriterdir. Ancak Journal [34] kestirim varyansı ve kestirim hatası arasında bir ilişki bulunmadığını ortaya koymuştur. Bu nedenle kestirim varyansı, yöntemlerin performans karşılaştırılmasında dikkate alınmamıştır. Ayrıca, BBK ve UBÇEK yöntemleri sadece kestirilmiş faktörlerin gerçek uzaya dönüştürülmesine izin verir ve geri dönüşümü krigleme varyanslarına uygulamak doğru değildir.

5.1. Jura Veri Kümesi

Jura veri kümesi, İsviçre Federal Teknoloji Enstitüsü tarafından derlenmiştir. Araştırmacılara açık bir veri kümesidir. Atteia vd. [32] örnekleme işlemlerini, arazi ve laboratuvar çalışmalarını ayrıntılı bir şekilde açıklamaktadırlar. Veriler 359 örnek noktasından alınmıştır (Şekil 5.1). Bu örnekler Cd, Cu, Pb, Ni ve Zn ağır metalleri için analiz edilmiştir. Bu veri kümesi madencilikte ve genel olarak yerbilimlerinde kullanılan veriler gibi uzaklığa bağlı düz ve çapraz ilişki göstermektedir. Örnek sayısının çokluğu verilerin doğrulama seti (100 test noktası) ve kestirimde kullanılan (259 nokta) verilere bölünmesine olanak sağlamaktadır. Doğrulama seti BBK, UBÇEK ve EK yöntemlerinin kestirim sonuçlarını karşılaştırmak amacıyla kullanılmıştır.



Şekil 5.1. Kestirimde (x) ve doğrulamada (+) kullanılan örneklerin konumu

5.2. Verilerin Özet İstatistiği

Her bir değişkenin özet istatistiği kestirim veri kümesi (259 adet veri) için hesaplanmış ve Çizelge 5.1'de sunulmuştur. Değişkenler arasındaki ilişki katsayıları ise Çizelge 5.2'de verilmiştir.

Çizelge 5.1. Değişkenlerin özet istatistikleri (birimler ppm)

	Cd	Cu	Pb	Ni	Zn
Ortalama	1.31	23.73	53.92	19.73	75.08
En düşük değer	0.14	3.96	18.96	4.20	25.20
En yüksek değer	5.13	166.40	229.56	53.20	219.32
Varyans	0.84	429.01	887.57	67.76	842.12
Çarpıklık	1.52	2.88	2.91	0.16	1.03

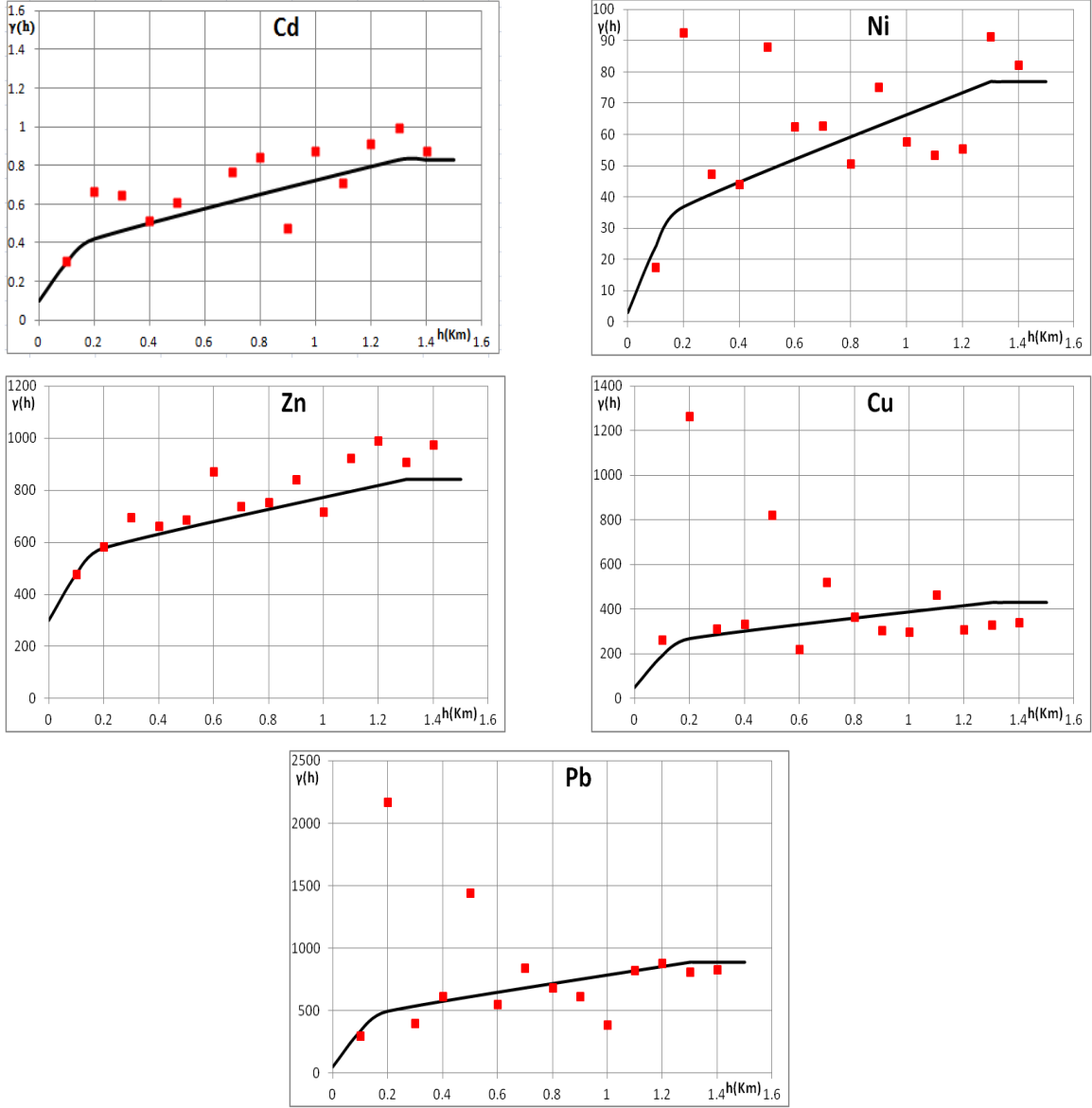
Çizelge 5.2. Değişkenler arasındaki ilişki katsayıları

	Cd	Cu	Pb	Ni	Zn
Cd	1	0.12	0.22	0.49	0.67
Cu	0.12	1	0.78	0.23	0.57
Pb	0.22	0.78	1	0.31	0.59
Ni	0.49	0.23	0.31	1	0.63
Zn	0.67	0.57	0.59	0.63	1

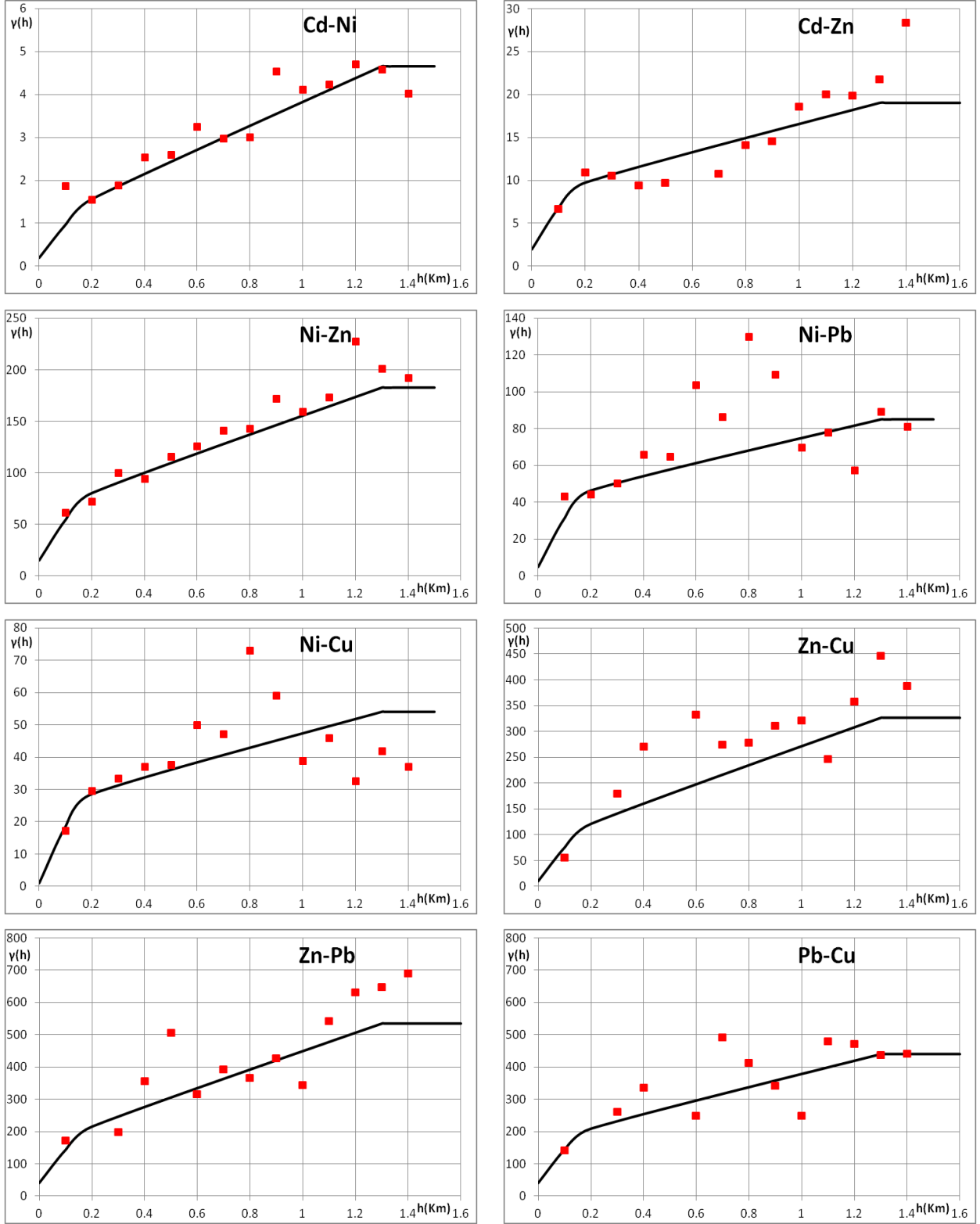
5.3. Variogram Analizi

Kestirim veri kümesinin tüm değişkenler için düz ve çapraz variogramları hesaplanmış ve modellenmiştir (Şekil 5.2 ve Şekil 5.3). Değişkenler, düşük külçe etkilerine sahiptirler. Bu değerlerin büyüklüğü her bir değişkenin varyansının yaklaşık %20 sine eşittir. Düz ve çapraz variogramlara bakıldığında iki küresel yapı belirgindir. Bu yapılar lokal (yaklaşık 200m) ve bölgesel (yaklaşık 1300m) ölçekteki yapılardır. Nikel için variogram modeli temel olarak bölgesel yapıdan oluşmaktadır. Diğer variogramlar için kısa-mesafe yapı daha çok önem taşımaktadır. Eşkrigleme algoritmasında negatif tanımlı matrisler ve dolayısıyla çözülemeyen denklem sistemleri ile karşılaşmamak için Cauchy-Schwarz eşitsizliğini [33] gözönüne alıp tüm düz ve çapraz variogramlar İki Yapılı Doğrusal Variogram Modeli [35] ile modellenmiştir. Yöne bağlı belirgin anizotropi görülmediği için eşkriglemede kullanılan variogram parametreleri ortalama variogramlardan elde edilmiştir (Çizelge 5.3). Goovaerts [33], Cd, Pb ve Cu değerlerini test noktalarında EK ile kestirmekte ve Cd nin kestiriminde Zn ve Ni, Pb ve Cu kestiriminde ise sırası ile (Cu, Ni, Zn) ve (Pb, Ni, Zn) gruplarını yardımcı değişkenler olarak kullanmaktadır. Bu çalışmada da benzer bir yol izlenmiş Cd, Pb ve Cu değişkenleri test lokasyonlarında BBK ve UBÇEK ile kestirilmiştir. Her bir değişkenin kestiriminde farklı bağımsız bileşenler ve farklı UBÇE bileşenleri elde edilmiştir. Cd'un kestiriminde kullanılan bağımsız bileşenlere ilişkin deneysel ve

model variogramlar Şekil 5.4'de, UBÇE bileşenleri ise Şekil 5.6'da gösterilmiştir. Model parametreleri ise BB için Çizelge 5.4'de UBÇE için Çizelge 5.5'de verilmiştir.



Şekil 5.2. Değişkenlerin düz variogramları: (■) deneysel, (—) model.



Şekil 5.3. Değişkenlerin çapraz variogramları, (■) deneysel, (—) model

Çizelge 5.3. Eşkriglemede kullanılan düz ve çapraz variogram model parametreleri

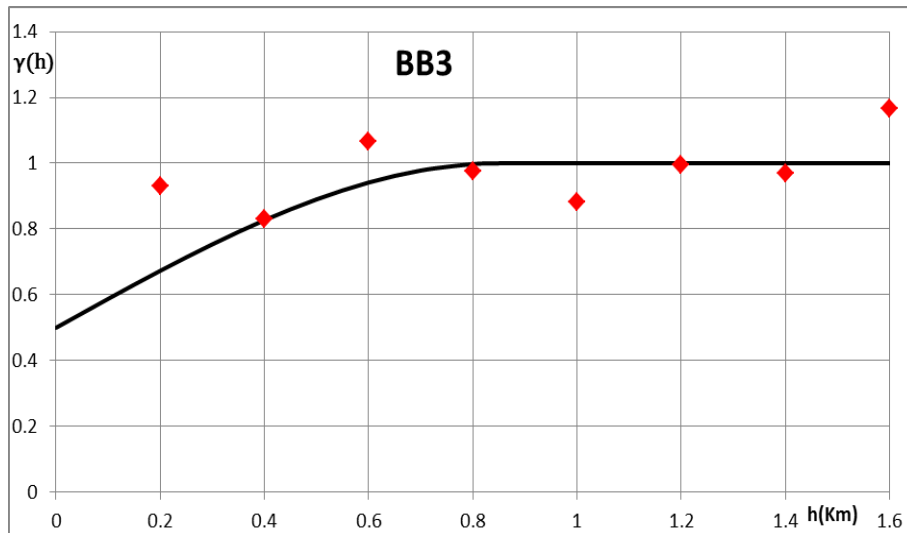
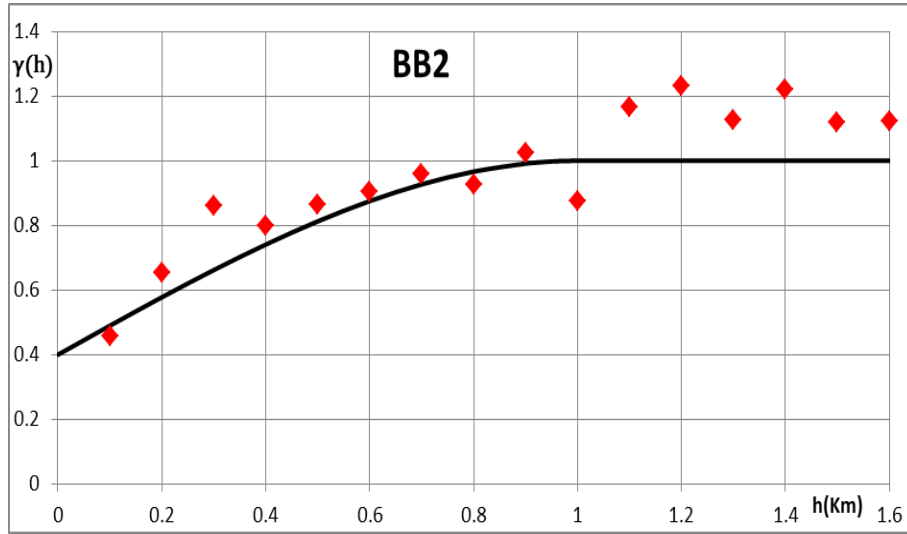
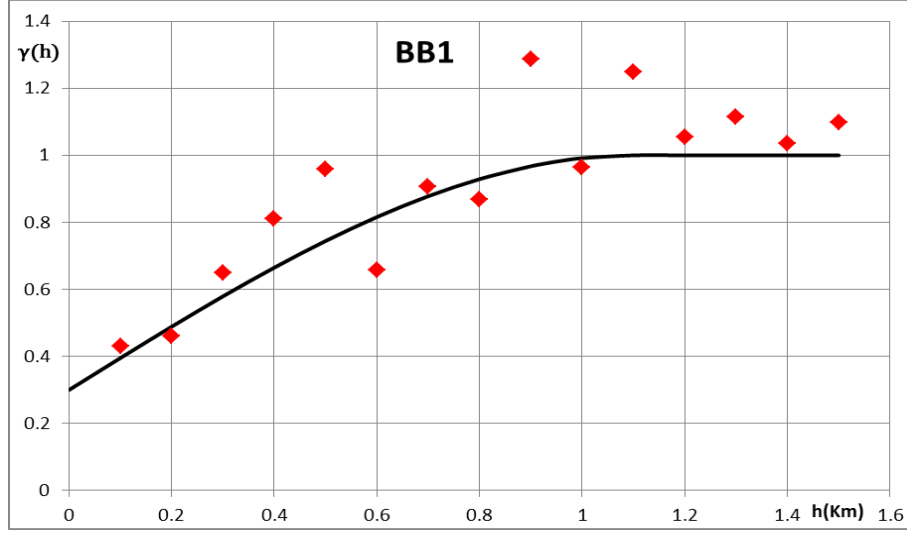
	γ_{cd}	γ_{cu}	γ_{Ni}	γ_{Zn}	γ_{Pb}
Külçe etkisi	0.1	50	3	300	50
Birinci yapı	0.2	170	22	200	329
İkinci yapı	0.53	209	52	342	509
	γ_{Ni-Zn}	γ_{Pb-Cu}	γ_{Pb-Zn}	γ_{Pb-Ni}	γ_{Cu-Ni}
Külçe etkisi	15	40	40	5	1
Birinci yapı	35	100	80	25	15
İkinci yapı	120	300	415	50	33
	γ_{cd-Ni}	γ_{cd-Zn}	γ_{cu-Zn}		
Külçe etkisi	0.2	2	10		
Birinci yapı	0.5	5	50		
İkinci yapı	3	12	267		

Çizelge 5.4. Cd kestiriminde kullanılan bağımsız bileşenlerin variogram parametreleri

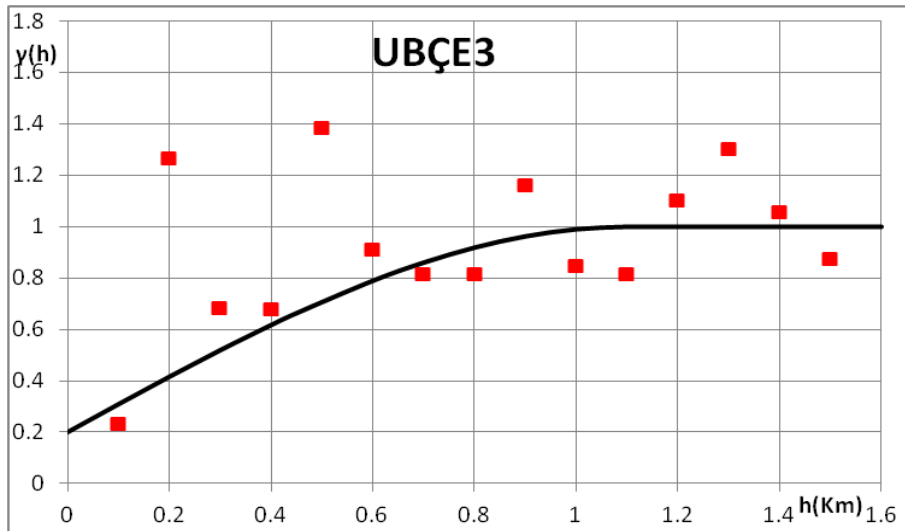
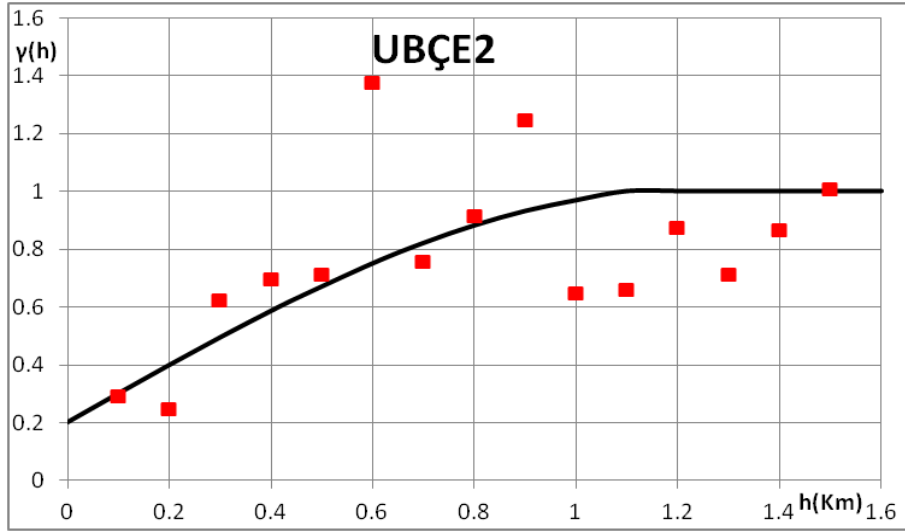
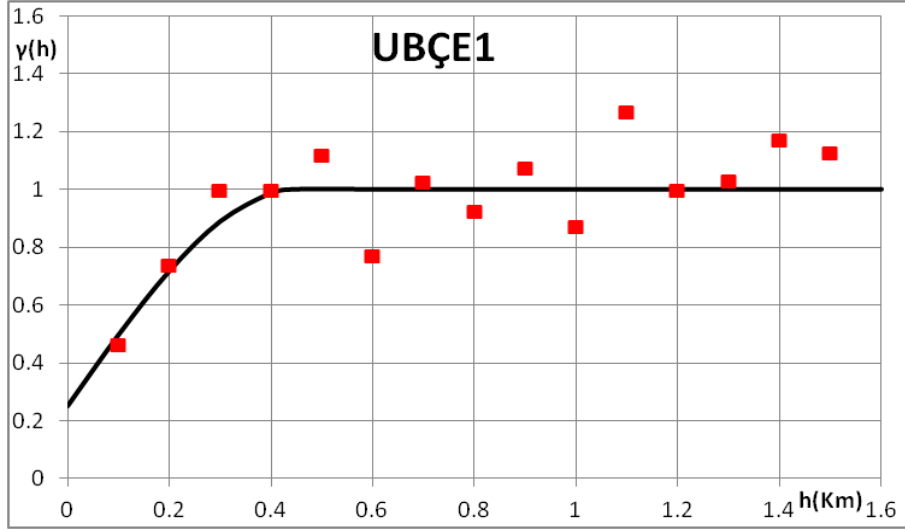
	Külçe etkisi	Eşik değer	Yapısal uzaklık	Variogram modeli
BB1	0.3	0.7	1.1	Küresel
BB2	0.4	0.6	1.0	Küresel
BB3	0.5	0.5	0.85	Küresel

Çizelge 5.5 Cd kestiriminde kullanılan UBÇE bileşenlerin variogram parametreleri

	Külçe etkisi	Eşik değer	Yapısal uzaklık	Variogram modeli
UBÇE1	0.25	0.75	0.45	Küresel
UBÇE2	0.2	0.8	1.2	Küresel
UBÇE3	0.2	0.8	1.2	Küresel



Şekil 5.4. Bağımsız bileşenlerin variogramları: (♦) deneysel, (—) model



Şekil 5.5. UBÇE bileşenlerin variogramları: (■) deneysel, (—) model

5.4. Kestirim Performansının Karşılaştırılması

Goovaerts (1997) de yapıldığı gibi Cd, Pb ve Cu değerleri test noktalarında BBK ve EK ile kestirilmiştir. Cd nin kestiriminde Zn ve Ni, Pb ve Cu kesiriminde ise sırası ile (Cu, Ni, Zn) ve (Pb, Ni, Zn) grupları yardımcı değişkenler olarak kullanılmıştır.

Test noktalarında her bir yöntemden elde edilen kestirim değerleri gerçek tenör değerleri ile karşılaştırılmıştır. Karşılaştırmada mutlak hata ortalaması, gerçek ve kestirilmiş değerler arasındaki ilişki katsayısı ve kestirilen değerlerin varyansının gerçek değerlerin varyansına oranı $\sigma_{Z^*}^2/\sigma_Z^2$ performans kriterleri olarak kullanılmıştır. Mükemmel bir kestirimde ortalama mutlak hata sıfıra, ilişki katsayısı ve varyanslar oranı ise bire yakındır. Yöntemlerin performansları Çizelge 5.6' da karşılaştırılmıştır.

BBK ve UBÇEK, eşkrigleme yöntemine göre Cu ve Pb değişkenlerin kestiriminde daha iyi performans göstermektedir. BBK ve UBÇEK ile elde edilen kestirim değerleri EK yönteminden elde edilen sonuçlara göre daha yüksek lokal değişkenliğe ($\sigma_{Z^*}^2/\sigma_Z^2$) sahiptir. Bu değişkenler için BBK ve UBÇEK'den elde edilen ilişki katsayısı ve mutlak hata ortalaması mükemmel değere daha yakındır, fakat aynı şey Cd değişkeni için söylenemez. Cd'nin kestiriminde kullanılan yardımcı değişkenlerin varyansları Cd'nin varyansına göre daha yüksektir. Çizelge 5.1'de verildiği gibi Cd varyansı 0.84 dür. Yardımcı değişkenlerin varyansı ise Zn için 842 ve Ni için 68 dir. Her iki yöntemde de temel bileşenler analizi verileri beyazlatma amacı ile kullanılmıştır. Bilindiği gibi temel bileşenler analizinden elde edilen faktörlerin varyansları arasında ciddi farklar görülmektedir. Temel bileşenlerden elde edilen birinci bileşenin, gerçek değişkenlerin toplam varyansının büyük kısmını temsil ettiği ifade edilebilir. Bu da, kestirilmiş faktörlerinin geri dönüşümünde daha büyük varyans değerine sahip olan gerçek değişkenin lehine bir durum oluşturabilir.

Çizelge 5.6. BBK, UBÇEK ve EK kestirim sonuçlarının karşılaştırılması

	<i>ortalama</i> $ Z^* - Z $	Z^* ile Z' 'nin ilişki katsayısı	$\sigma_{Z^*}^2 / \sigma_Z^2$
BBK_{Cu}	15.88	0.12	0.12
$UBÇEK_{Cu}$	5.87	0.11	0.15
EK_{Cu}	16.36	0.04	0.08
BBK_{Pb}	21.51	0.26	0.12
$UBÇEK_{Pb}$	11.88	0.24	0.13
EK_{Pb}	22.49	0.18	0.10
BBK_{Cd}	0.60	0.15	0.43
$UBÇEK_{Cd}$	0.63	0.16	0.51
EK_{Cd}	0.57	0.20	0.35

BBK ve UBÇEK'in EK'ya göre en önemli üstünlüğü modelleme ve kestirimle ilgilidir. BBK ve UBÇEK'de EK'da olduğu gibi çapraz variogramları hesaplama ve modelleme zorunluluğu yoktur. Bu eşkrigleme yönteminin en külfetli tarafıdır. Ayrıca gerçekçi olmayan doğrusal modelleme teknikleri kullanılması tutarlı olmayan sonuçlara yol açabilir. Doğrusal modeller kullanılmadığında ise çözümü olmayan eşkrigleme sistemleri ve negatif hata varyansları ile karşılaşmak her zaman olasıdır.

Çizelge 6.1. Değişkenlerin özet istatistikleri

Değişken	Veri sayısı	Minimum	Maksimum	Ortalama	Varyans
BA	108	2.17	2.72	2.62	0.0069
SK	108	0.16	0.8	0.41	0.0131
TEBD	108	25	131.25	79.15	588.41
LOS500	108	11.2	16.2	14.31	1.478
G	108	0.81	4.41	1.96	0.2540
DÇD	108	5.09	13.45	8.76	5.299

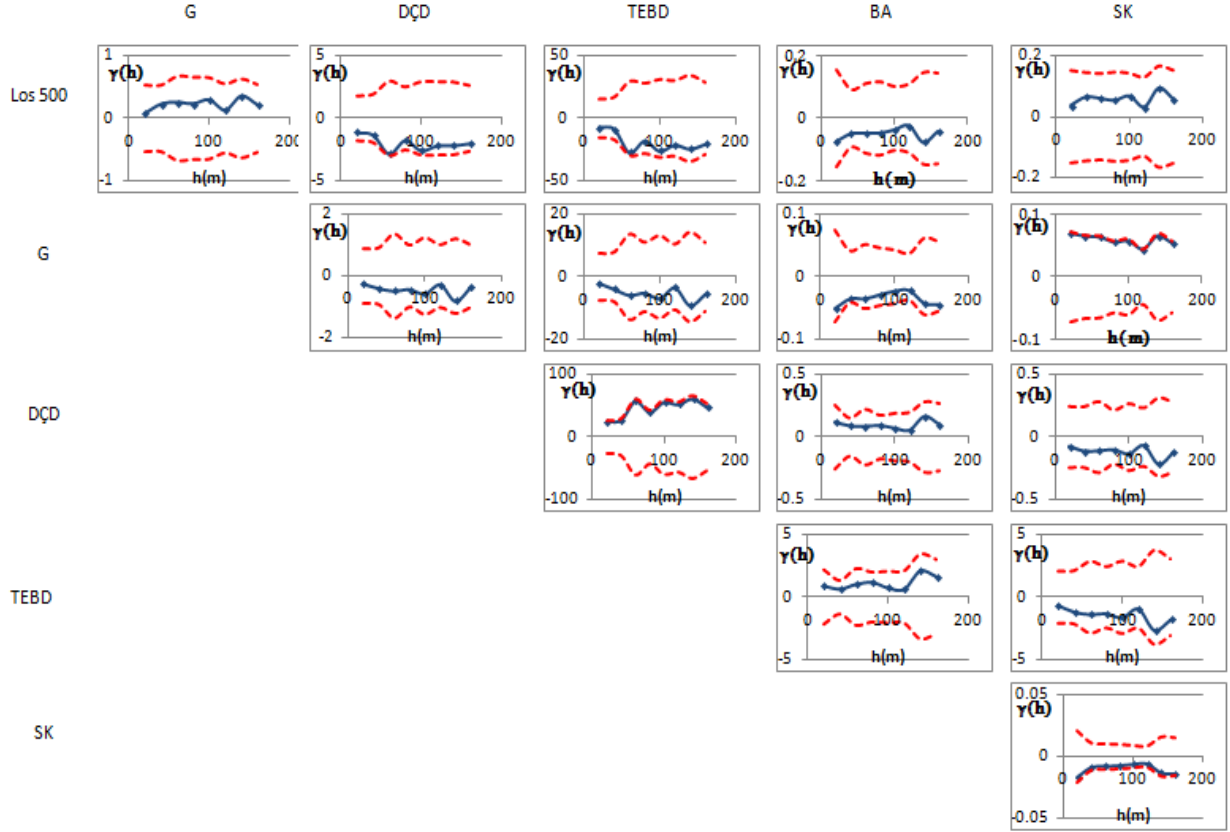
6.1. Değişkenler Arası Uzaklığa Bağlı Çapraz İlişkinin Değerlendirilmesi

Değişkenlerin çapraz variogramları hesaplanmış ve Şekil 6.2'de gösterilmiştir. Şekil 6.2'de kırmızı taralı çizgi uzaklığa bağlı çapraz ilişkinin mükemmel sınırlarını (perfect hull) göstermektedir. Değişkenler arasında uzaklığa bağlı çok yüksek çapraz bir ilişkinin varolduğu söylenebilir. Böyle durumlarda çapraz ilişkiyi giderecek şekilde bir dönüşüm uygulayıp ve kestirimleri dönüştürülmüş veriler üzerinde yapmalıyız.

6.2. Dikleştirilmiş Bileşenlerin Üretimi

Veriler, bağımsız ve UBÇE bileşenlerine dönüştürülmeden önce ortalaması 0, varyansı 1'e eşit olacak şekilde standartlaştırılmıştır. Daha sonra standart verilerden temel bileşenler elde edilmiştir. Temel bileşenler analizinde $|h| = 0$ uzaklığındaki ilişki matrisi kullanılmıştır. Bu matris aşağıda gösterilmiştir:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 Los500 \\
 G \\
 DÇD \\
 TEBD \\
 BA \\
 SK
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 Los500 \\
 G \\
 DÇD \\
 TEBD \\
 BA \\
 SK
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 1 & -0.67 & 0.44 & 0.44 & -0.40 & -0.75 \\
 -0.67 & 1 & -0.46 & -0.44 & 0.45 & 0.96 \\
 0.44 & -0.46 & 1 & 0.94 & -0.88 & -0.48 \\
 0.44 & -0.44 & 0.94 & 1 & -0.94 & -0.45 \\
 -0.40 & 0.45 & -0.88 & -0.94 & 1 & 0.45 \\
 -0.75 & 0.96 & -0.48 & -0.45 & 0.45 & 1
 \end{bmatrix}
 \end{array}$$



Şekil 6.2. Değişkenlerin ortalama deneysel çapraz variogramları (mavi çizgi) ve mükemmel uzaysal çapraz ilişki sınırı (kesikli kırmızı çizgi)

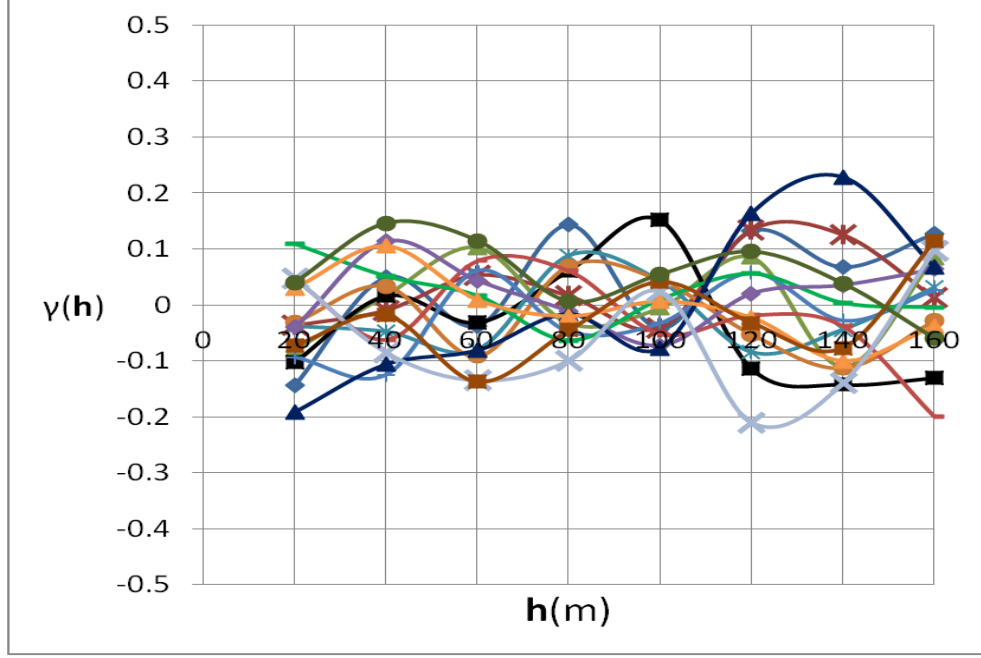
Daha sonra beyaz bileşenlere BBA ve UBÇE uygulanmış ve aşağıda verilen dönüşüm matrisleri üretilmiştir.

$$\begin{bmatrix} -0.024 & 0.005 & 0.025 & -0.002 & 0.075 & -0.008 \\ 0.201 & -0.258 & 0.100 & 0.129 & -0.332 & -0.098 \\ 7.955 & 16.89 & 10.29 & -5.955 & 9.836 & -1.282 \\ 0.554 & 1.895 & 0.883 & 0.093 & 0.766 & -0.167 \\ -0.501 & -0.889 & -0.199 & -0.186 & -0.585 & 0.0418 \\ 0.046 & -0.054 & -0.020 & -0.031 & -0.008 & 0.009 \end{bmatrix}$$

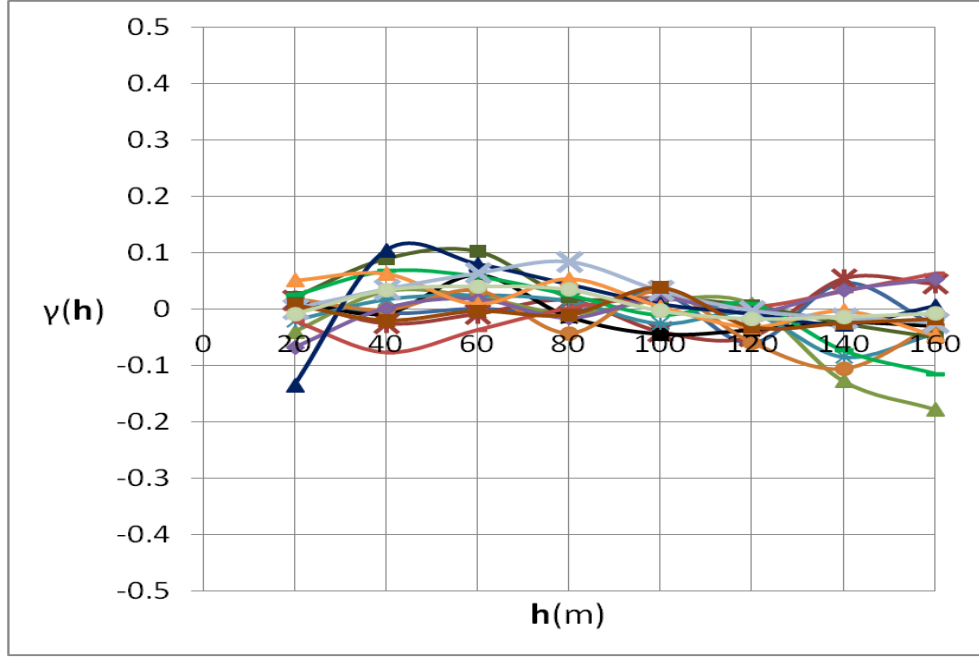
$$\begin{bmatrix} 2.562 & -8.158 & -1.710 & -11.206 & -4.969 & 11.724 \\ 0.249 & 7.187 & 0.850 & -0.811 & -1.404 & 0.501 \\ -0.118 & 0.000 & 0.048 & -0.011 & 0.015 & -0.005 \\ 1.724 & -0.234 & 0.614 & -0.101 & -0.023 & -0.151 \\ 1.099 & -0.470 & 2.035 & 0.106 & 0.482 & 0.391 \\ -1.836 & -35.842 & -2.242 & -1.496 & -5.317 & 0.403 \end{bmatrix}$$

Merkezeleştirilmiş veriler ile dönüşüm matrisinin çarpımından dikleştirilmiş bağımsız bileşenler ve UBÇE bileşenleri elde edilmiştir. Daha sonra dikleştirilmiş bileşenlerin

çapraz variogramları hesaplanmış ve BB için bunlar Şekil 6.3'de UBÇE için Şekil 6.4'de gösterilmiştir. Şekil 6.3 ve Şekil 6.4 bileşenler arasındaki çapraz ilişkinin hemen hemen her uzaklıkta yoksanabilir seviyede olduğunu göstermektedir.



Şekil 6.3 Bağımsız bileşenlerin çapraz variogramları



Şekil 6.4. UBÇE bileşenlerinin çapraz variogramları

6.3. Dikleştirilmiş Bileşenlerinin Variogram Analizi

Her bir bileşenin deneysel variogramı, modelleri ile birlikte BBA için Şekil 6.5’de UBÇE için Şekil 6.6’da gösterilmiştir. Modeller külçe etkisi ve küresel veya üstel fonksiyonların toplamından ibarettir. Bileşenlerin hiç biri belirgin bir anizotropi göstermedikleri için sadece ortalama variogramlar modellenmiş ve bu modeller kriglemede kullanılmıştır. Bu bileşenlere ilişkin variogram model parametreleri BBA için Çizelge 6.2’de UBÇE için Çizelge 6.3’de verilmiştir. Her bir bileşene ait uzaklığa bağlı ilişkinin yüksek olduğu görülmektedir. Buna karşılık uzaklığa bağlı çapraz ilişki gözardı edilecek kadar küçüktür (Şekil 6.3 ve Şekil 6.4). Genel olarak bağımsız bileşenlerin UBÇE bileşenlerine göre daha düşük külçe etkisi ve daha yüksek yapısal uzaklıklar içerdiği söylenebilir.

Çizelge 6.2. Bağımsız bileşenlerin model variogram parametreleri

Bağımsız Bileşen	Variogram model	Külçe etkisi	Eşik değeri	Yapısal uzaklık
BB ₁	Üstel	0.3	0.7	33
BB ₂	Üstel	0.4	0.6	70
BB ₃	Üstel	0.4	0.6	60
BB ₄	Üstel	0.3	0.7	75
BB ₅	Üstel	0.2	0.8	85
BB ₆	Üstel	0.4	0.4	80

Çizelge 6.3. UBÇE bileşenlerinin model variogram parametreleri

UBÇE Bileşeni	Variogram model	Külçe etkisi	Eşik değeri	Yapısal uzaklık
UBÇE ₁	Küresel	0.47	0.53	50
UBÇE ₂	Küresel	0.5	0.5	40
UBÇE ₃	Üstel	0.2	0.8	49
UBÇE ₄	Üstel	0.25	0.75	69
UBÇE ₅	Üstel	0.55	0.45	39
UBÇE ₆	Küresel	0.5	0.5	37

6.4. Kestirim Ve İşletilebilir Blokların Belirlenmesi

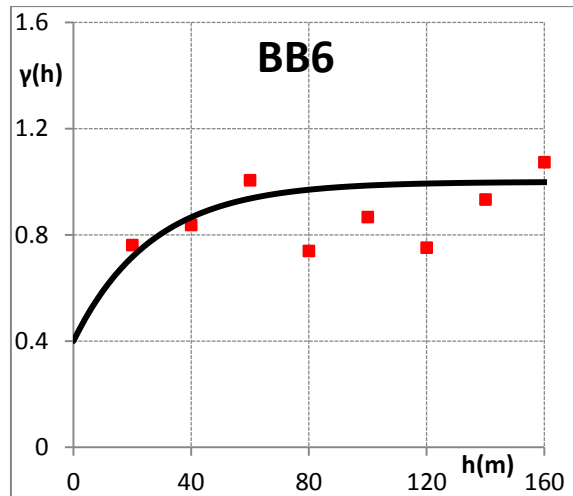
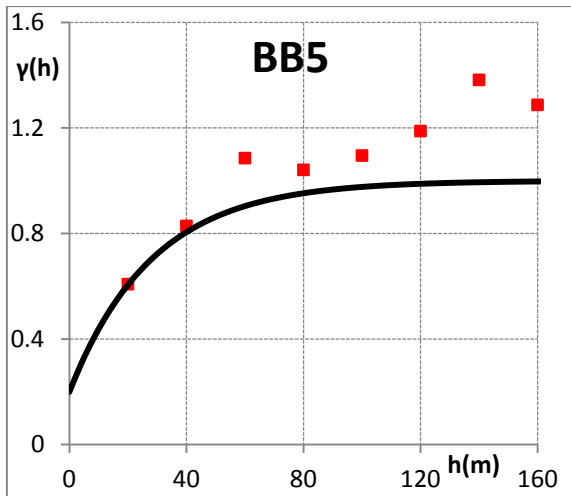
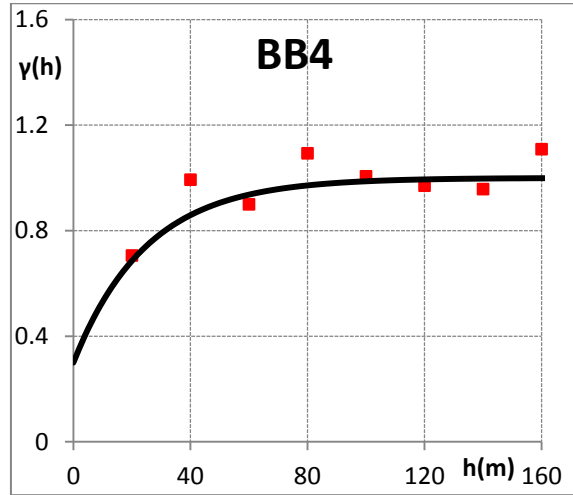
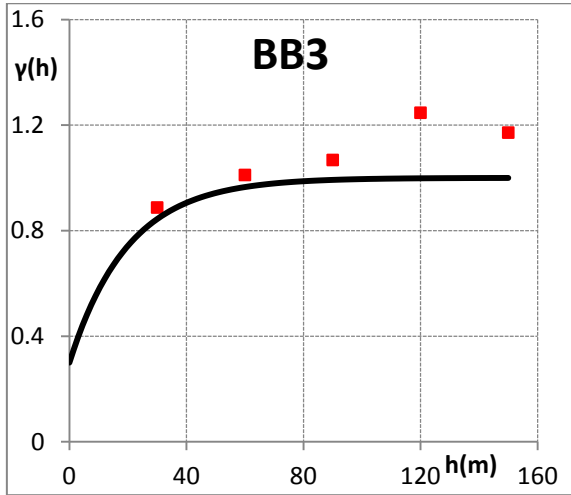
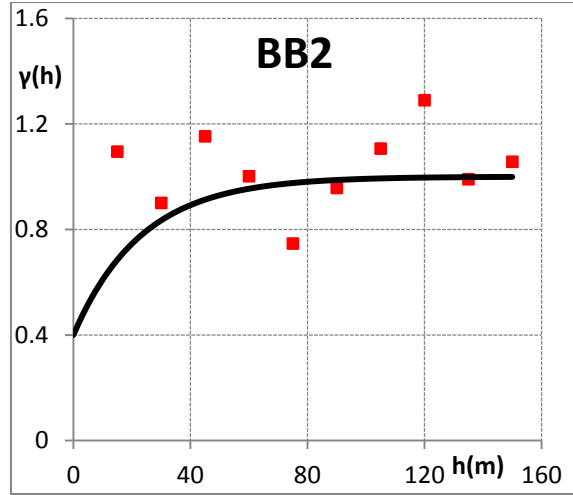
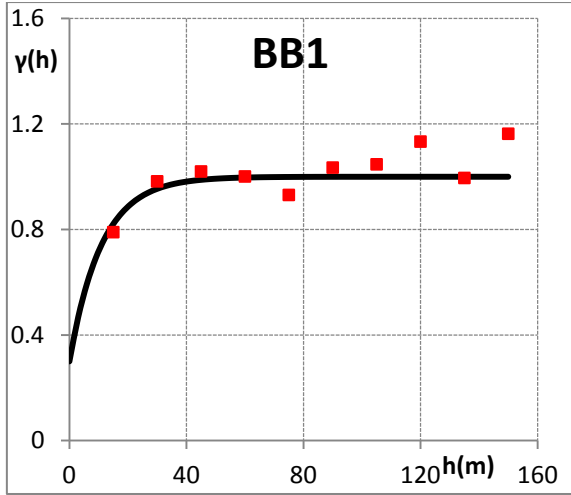
Andezit ocağında, bloklar 5m×5m×5m boyutunda elmas tel kesme yöntemi ile üretilmektedir. Bu nedenle kestirim blok büyüklüğü 5x5 m² olarak belirlenmiştir. Bu şekilde 1544 adet blok elde edilmiştir. Daha sonra BBA ve UBÇE bileşenleri ve her bileşene ait variogram model parametreleri kullanılarak bileşenlerin bilinmeyen değerleri blokların orta noktasında kestirilmiştir. Kestirilmiş bileşenler aşağıdaki geri dönüşüm matrisleri kullanarak verilerin gerçek uzayına taşınmıştır:

$$\begin{bmatrix} -0.024 & 0.201 & 7.955 & 0.554 & -0.501 & 0.0469 \\ 0.005 & -0.258 & 16.896 & 1.895 & -0.899 & -0.054 \\ 0.0247 & 0.107 & 10.29 & 0.883 & -0.199 & -0.020 \\ -0.002 & 0.129 & -5.95 & 0.093 & -0.186 & 0.031 \\ 0.0752 & -0.332 & 9.836 & 0.766 & -0.585 & -0.081 \\ -0.008 & -0.099 & -1.282 & -0.167 & 0.0418 & 0.009 \end{bmatrix}$$

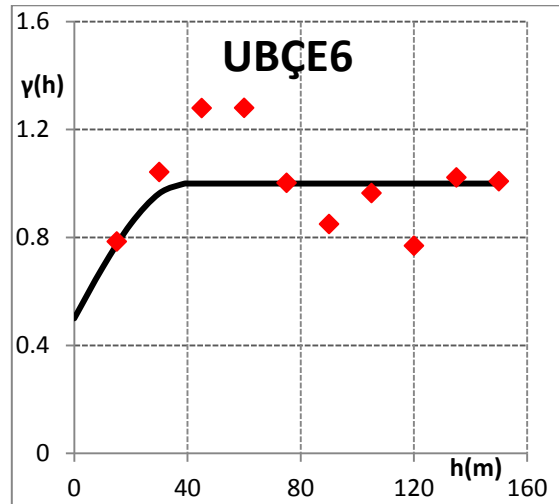
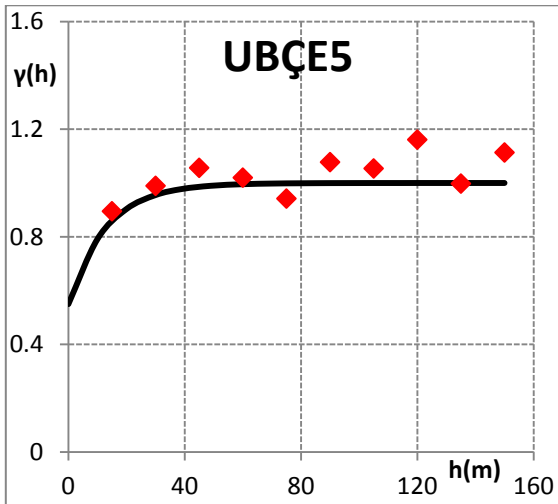
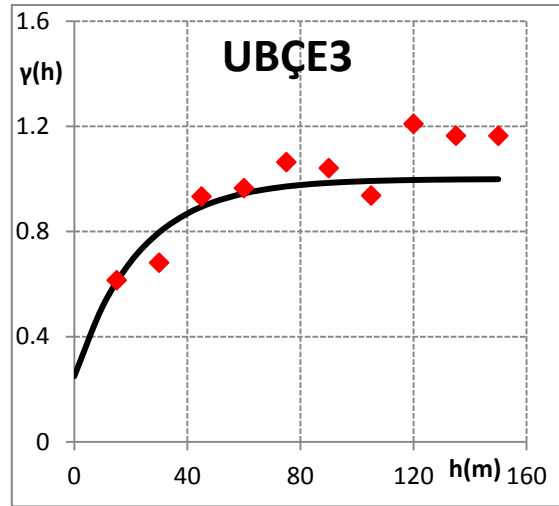
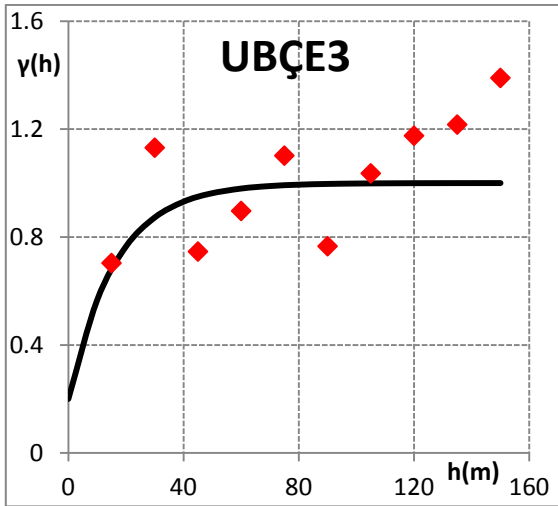
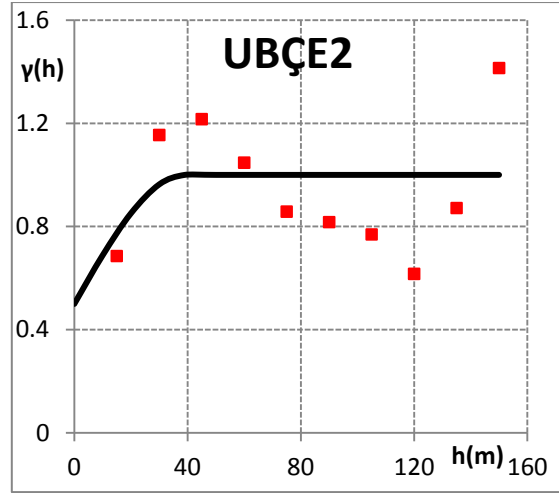
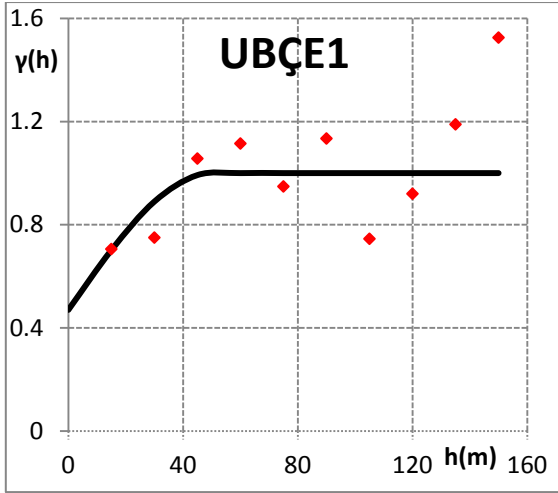
0.004	-0.028	-3.726	0.315	-0.002	-0.009
-0.001	0.054	-0.326	-0.029	-0.025	-0.016
-0.014	0.119	4.159	0.103	0.326	0.022
-0.067	0.171	-18.253	-1.668	0.856	0.049
0.035	-0.453	5.818	0.399	-0.147	-0.099
0.033	0.033	-13.787	-1.499	0.786	-0.001

Blokların ilgili değişkenler için kestirim haritaları BBK için Şekil 6.7'de UBÇEK için 6.8'de verilmiştir. Daha sonra bu değişkenler için TS 10835 standardına göre [37] işletilebilirlik kriterlerinin hepsinin birden sağlandığı bloklar, işletilebilir bloklar olarak seçilmiş ve bunlar BBK ve UBÇEK için Şekil 6.9'da gösterilmiştir. BBK ile işletilebilir blok sayısı 968 (toplam blokların %63) iken UBÇEK bu sayıyı 889 (toplam blokların %58) olarak kestirmiştir.

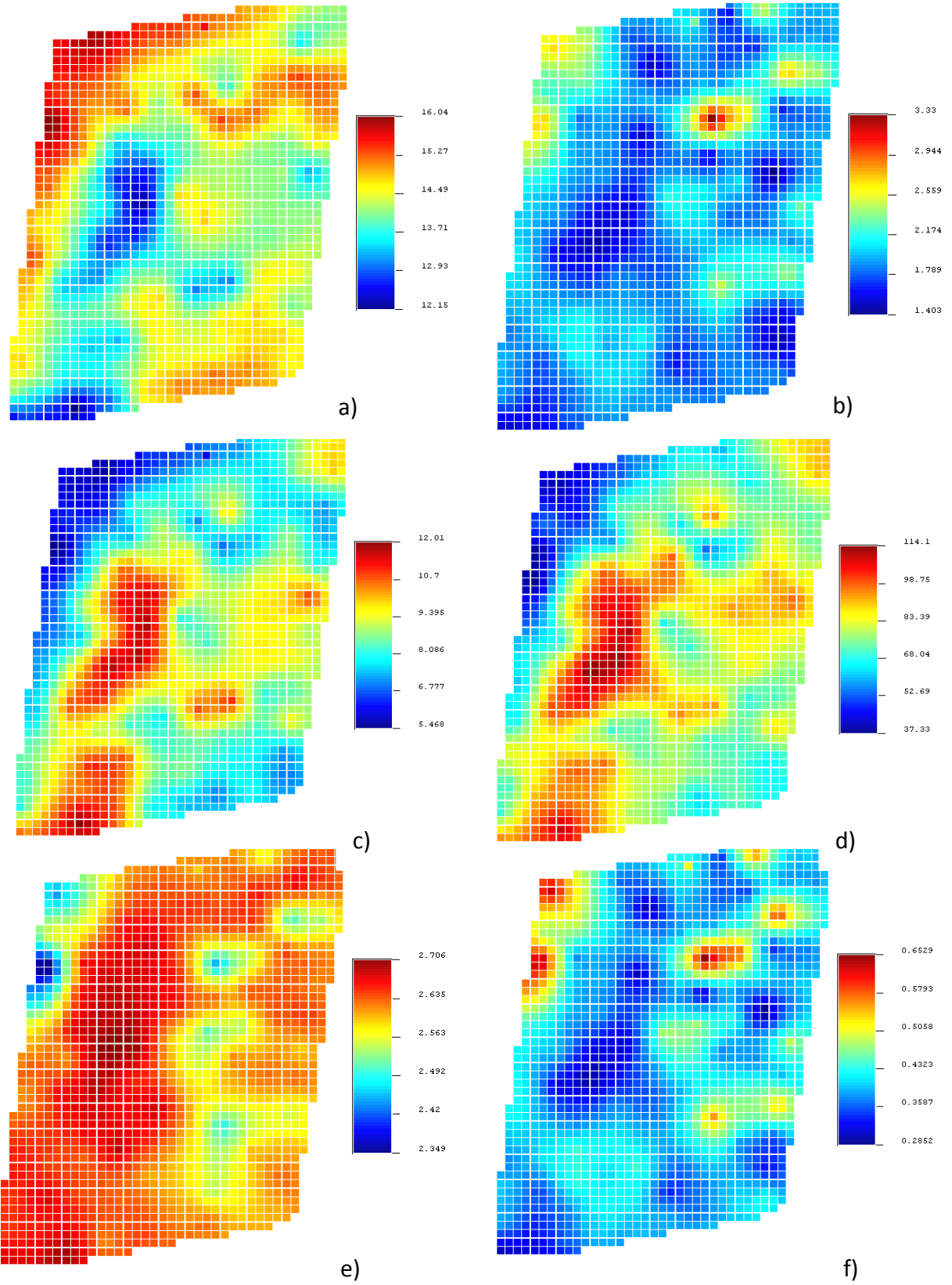
TS 10835 [37] standardına göre andezitin dekorasyon, süs, duvar kaplama ve benzeri amaçlarla kullanımı için tek eksenli basınç dayanımı 60 N. mm/mm³ 'den az olmamalı, dolaylı çekme dayanımı 7 MPa'dan büyük olmalı, birim hacim ağırlığı 2.55 g/cm³'den yüksek olmalı, kütlece su emme kapasitesi % 0.7'den az olmalı, 500 devirli Los Angeles aşınma değeri %15.10'den düşük olmalı ve gözeneklilik %2 nin altında olmalıdır.



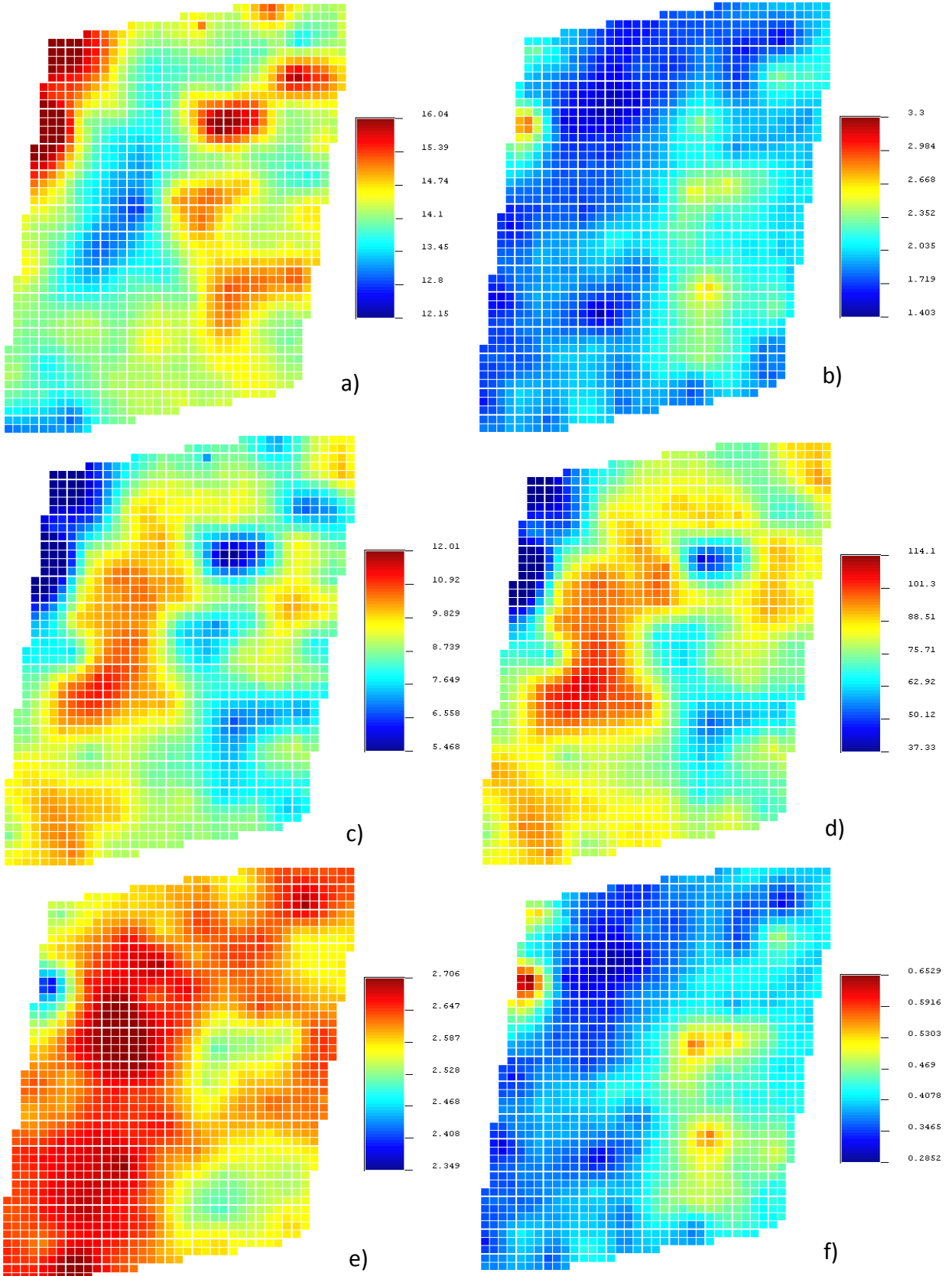
Şekil 6.5. Bağımsız bileşenlerin deneysel variogramı (■) ve uyarlanmış modeller (—)



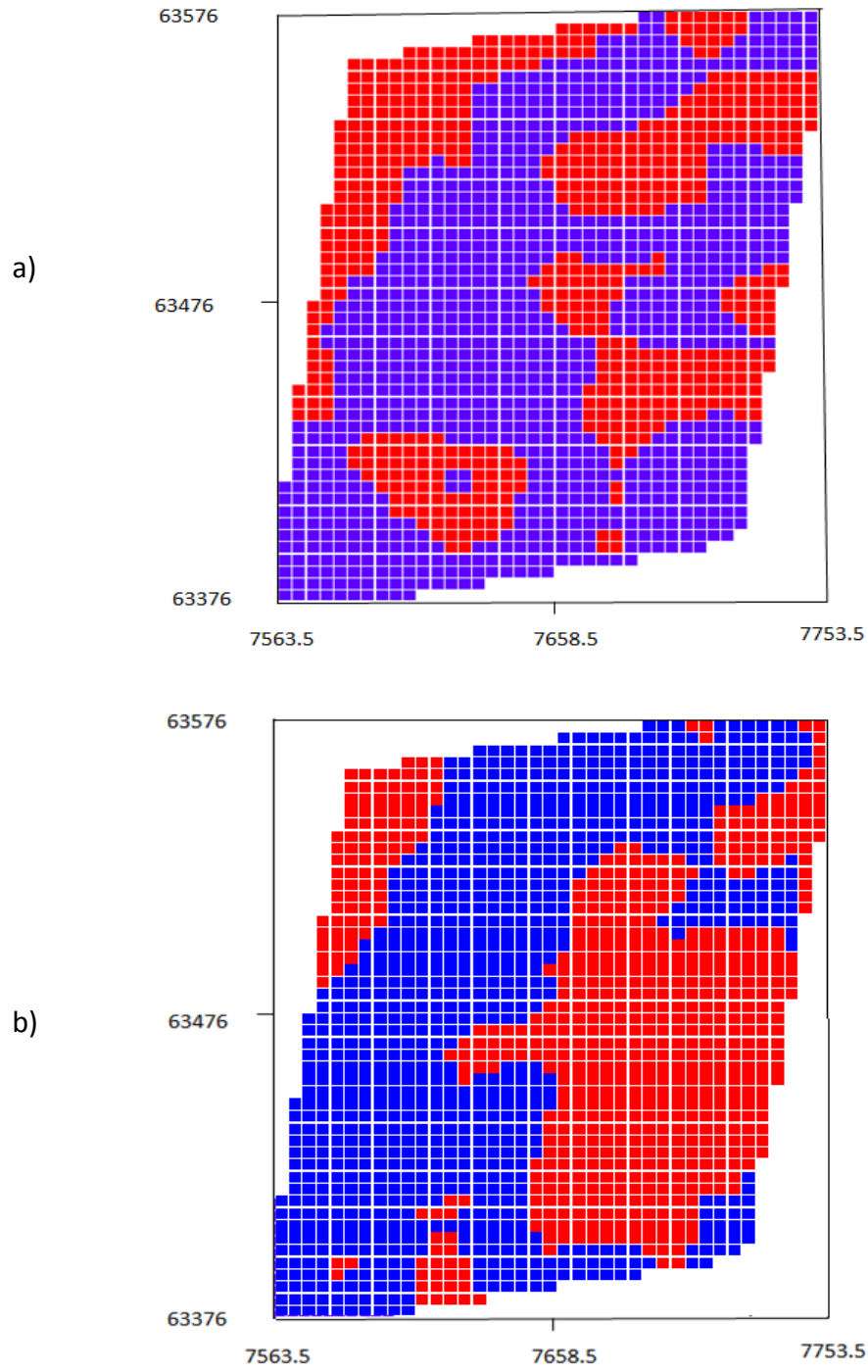
Şekil 6.6. UBÇE bileşenlerinin deneysel variogramı (♦) ve uyarlanmış modeller (—).



Şekil 6.7. Değişkenlerin BBK kestirim haritası. a) Los500, b) G, c) DÇD, d) TEBD, e) BA, f) SK



Şekil 6.8. Değişkenlerin UBÇEK kestirim haritası. a) Los500, b) G, c) DÇD, d) TEBD, e) BA, f) SK

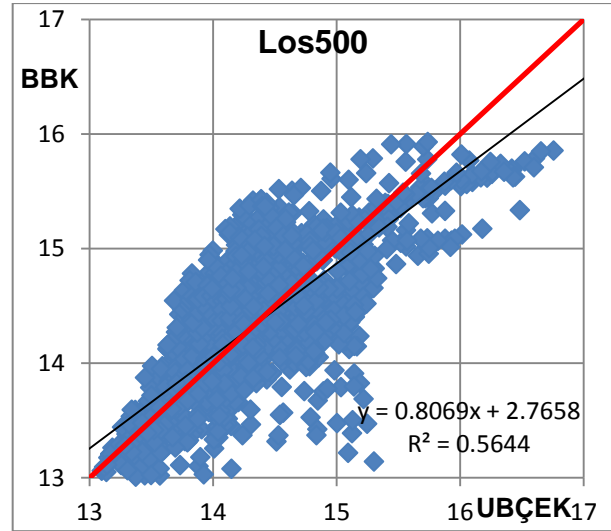
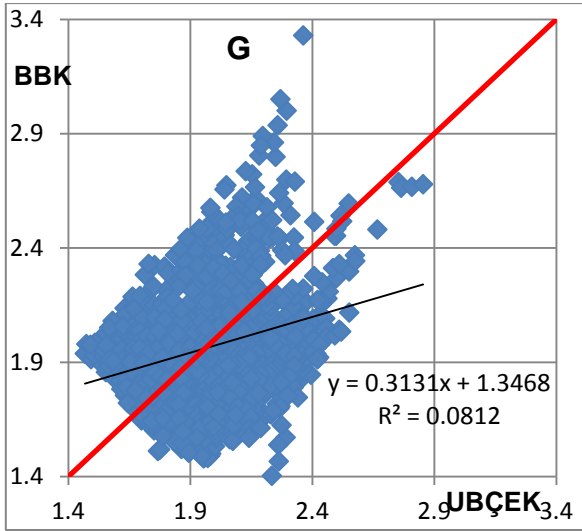
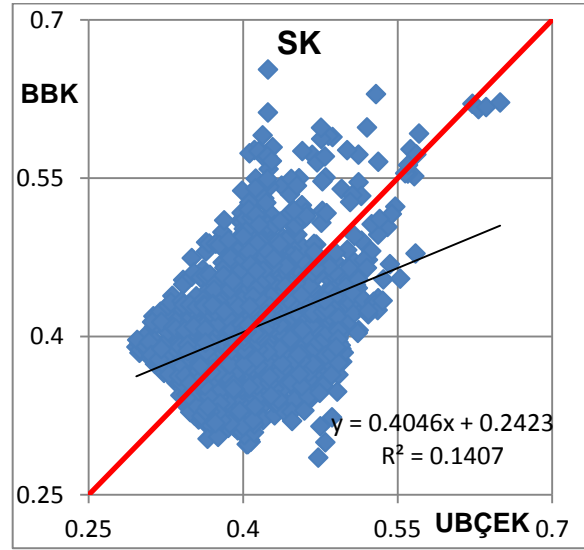
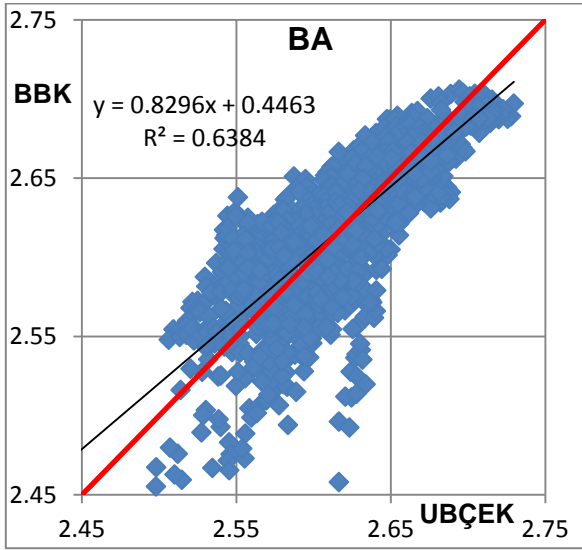
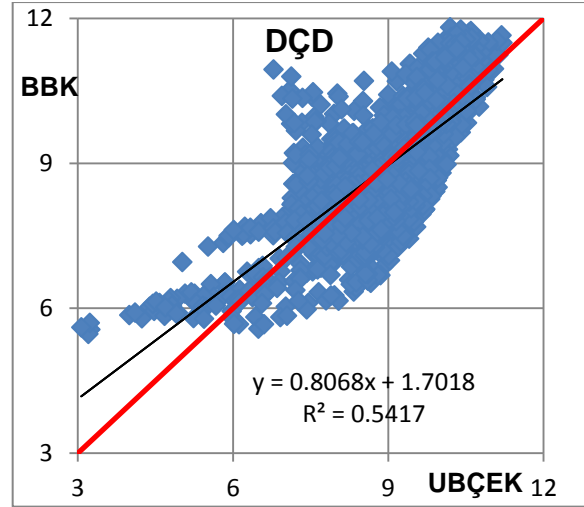
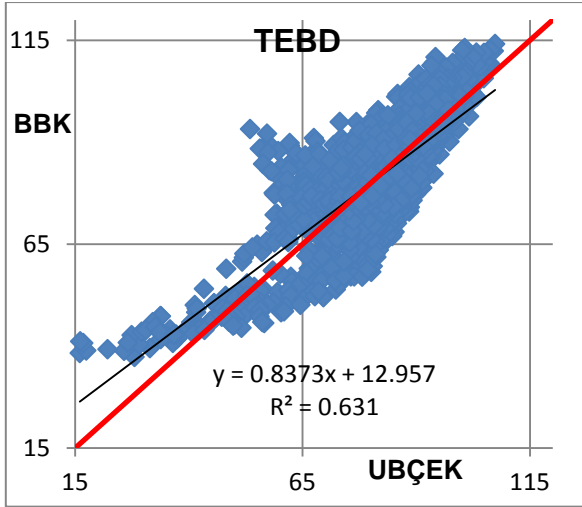


Şekil 6.9. Andezit taş ocağında işletilebilir (mavi) ve işletilemez (kırmızı bloklar) bloklar: a) BBK yöntemi, b) UBÇEK yöntemi.

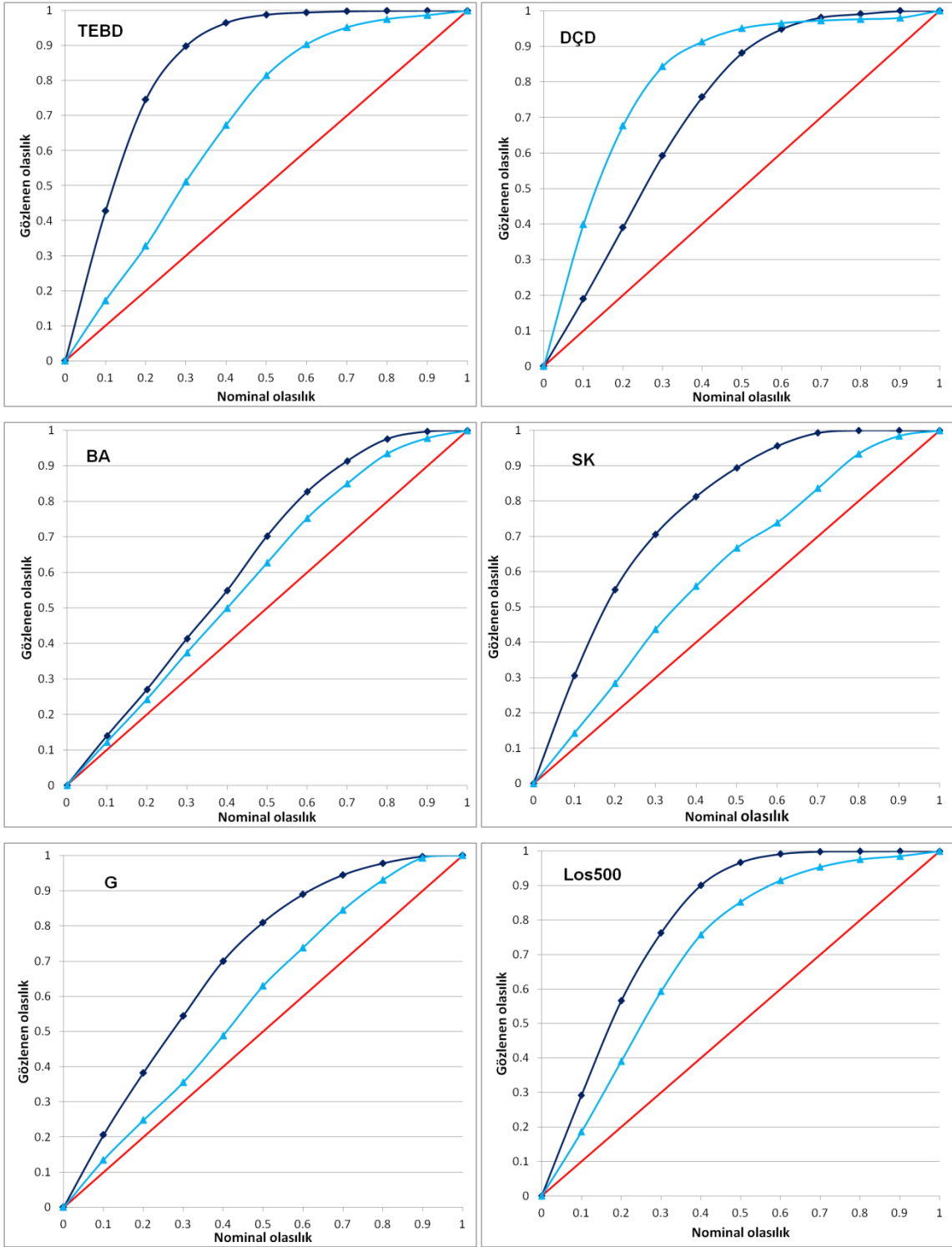
6.5.Kestirim Yöntemlerinin Karşılaştırılması

BBK ve UBÇEK yöntemlerinden kestirilmiş değerler arasında doğrusal ilişkinin olup olmadığı Şekil 6.10'da gösterilmiştir. Şekil 6.10'da görüldüğü gibi BBK ve UBÇEK yöntemlerin kestirilmiş değerlerinin birleşik dağılımlarında BA, TEBD, Los500 ve DÇD için sırasıyla 0.64, 0.63, 0.56 ve 0.54 doğrusal ilişki katsayısı bulunmaktadır. SK ve G kestirim değerleri için de doğrusal bir ilişki olmadığı gösterilmiştir.

Kestirim yöntemlerin değerlendirilmesi amacı ile 1544 kestirim noktasında ardışık normal benzetim yöntemi ile 100 adet benzetilmiş model yatak üretilmiştir. Benzetimler, orjinal verilerin ortalama değerlerini, varyanslarını ve uzaklığa bağlı ilişkilerini üretmişlerdir (Bunlar burada gösterilmemiştir). Model yataklar, gerçeğin bir kopyası olduğundan BBK ve UBÇEK yöntemlerinden elde edilen kestirim değerleri benzetim değerlerine karşı test edilebilir. Bu amaçla yansızlık (unbiasedness) karşılaştırma ölçütü olarak alınmıştır. Yanın büyüklüğünü belirlemek için her bir kestirim noktasında 100 adet simüle edilmiş değer küçükten büyüğe sıralanmış ve dokuz adet simetrik olasılık aralıkları (%90, %80,...,%10) elde edilmiştir. Örneğin %90 olasılık aralığının üst ve alt sınırları 100 adet simule edilmiş değerlerin 95 nci ve 5 nci değerlerinden türetilmiştir. Daha sonra kestirim değerinin bu aralık içine düşüp düşmediği kontrol edilmiştir. Düşüyorsa 1, düşmüyorsa 0 değeri atanmıştır. Bu indikatör değerler toplanmış ve toplam kestirim noktası sayısına bölünerek gözlenen olasılık değerleri elde edilmiştir. Bu işlem dokuz adet olasılık aralığı için tekrar edilmiş ve nominal olasılıklara karşılık hesaplanan olasılıklar Şekil 6.11'de gösterilmiştir. Nominal olasılık ve gözlenen olasılık arasındaki fark yan (bias) olarak bilinir. Yansızlık, iyi bir kestirim yönteminin özelliğidir ancak pozitif yan genellikle negatif yana tercih edilir [39]. Buna göre DÇD değişkeni dışında UBÇEK ile üretilen olasılıkların BBK ile üretilen olasılıklara göre daha yansız olduğu görülmektedir. DÇD değişkeni için %70 ve üstündeki olasılık aralıklarında UBÇEK'deki yan BBK'ya göre daha düşük çıkmaktadır. Genel olarak yan, yüksek ve düşük olasılık aralıklarına doğru azalış göstermektedir.



Şekil 6.10. Her bir değişken için UBÇEK ve BBK yöntemlerinin kestirilmiş değerlerinin birleşik dağılımı



Şekil 6.11. UBÇEK (◆) ve BBK (▲) yöntemlerinin yansızlık testi

7. SONUÇLAR

Çok değişkenli jeoistatistiksel kestirimde değişkenler arasındaki uzaklığa bağlı çapraz ilişkiyi dikkate almak gerekir. Eşkrigleme yöntemi bu amaçla kullanılan geleneksel bir yöntemdir. Ancak eşkrigleme sırasında çözülmeyen matrisler ile karşılaşmak mümkündür ve ayrıca eşkrigleme yöntemi düz ve çapraz variogramları modelleme gereksiniminden dolayı fazlasıyla zaman alıcıdır. Bu tez çalışmasında eşkrigleme yöntemine alternatif iki kestirim yöntemi geliştirilmiştir: (i) bağımsız bileşenlerle krigleme (BBK), (ii) uzaklığa bağlı çapraz ilişkinin enküçüklenmesi ile krigleme (UBÇEK). Bu çalışmadan elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir.

- Kaynak ayrıştırıcı yöntemlerin (TBA, MOF ve BBA) bağımlı değişkenlerden bağımsız faktörlerin üretildiği çalışmada BBA'nın daha etkili olduğu görülmüştür. Faktörlere ilişkin mutlak değer büyüklükleri gerçek değerlere oldukça yakındır. Test sonuçları, TBA'nın bağımsız bileşenleri üretmede MOF yönteminden daha etkili olduğunu da ortaya koymuştur.
- UBÇE yöntemi $\tau(\mathbf{h})$ değerini ardışık 2-boyutlu dönüşümler ile farklı lag uzaklıklarında yaklaşık olarak sıfırlamaya çalışan bir yaklaşımdır. UBÇE yönteminin temel kriterini oluşturan $\tau(\mathbf{h})$ 'nin değeri her bir 2-boyutlu dönüşüm ardından farklı lag uzaklıklarında biraz daha sıfıra yakınlaşmaktadır. UBÇE yönteminin bu açıdan uzaklığa bağlı ilişki göstermeyen bileşenlerin üretiminde daha etkili olduğu söylenebilir.
- BBK ve UBÇEK yöntemleri çapraz variogramların modellenmesine ilişkin ihtiyacı ortadan kaldırdığından eşkrigleme yöntemine göre daha az modelleme ve kestirim işlemi gerektirir.
- BBK ve UBÇEK, eşkrigleme yöntemine göre Cu ve Pb değişkenlerin kestiriminde daha iyi performans göstermektedir. BBK ve UBÇEK ile elde edilen kestirim değerleri EK yönteminden elde edilen sonuçlara göre daha yüksek lokal değişkenliğe ($\sigma_{Z^*}^2/\sigma_Z^2$) sahiptir. Bu değişkenler için BBK ve UBÇEK'den elde edilen ilişki katsayısı ve mutlak hata ortalaması arzu edilen değere daha yakındır, fakat aynı şey Cd değişkeni için söylenemez. Cd'nin kestiriminde kullanılan yardımcı değişkenlerin varyansları Cd'nin varyansına göre daha yüksektir. BBK ve UBÇEK

yöntemleri kestirilecek ve yardımcı değişkenlerin varyansından etkilenmektedir. Kestirilecek özniteliğin varyansının, tüm değişkenlerin varyanslarının toplamına oranı oldukça önemlidir. Bu oranın artmasıyla kestirim sonucu pozitif şekilde etkilenmektedir.

- Andezit ocağı örnek çalışmasında, gerçek verilerin çapraz variogramları uzaklığa bağlı güçlü çapraz ilişkilerin var olduğunu göstermiştir. Fakat, BBA ve UBÇE yöntemlerinden elde edilen bileşenlerin çapraz variogramları farklı h lag uzaklıklarında sıfıra oldukça yakın ve gözardı edilecek büyüklükte değerler göstermişlerdir. UBÇE yönteminden elde edilen bileşenlerin çapraz variogramları h lag uzaklıklarının tamamında yaklaşık aynı büyüklüktedir. Bu açıdan, UBÇE yönteminin BBA yöntemine göre biraz daha iyi sonuçlar gösterdiği söylenebilir. Her iki yöntemde üretilen bileşenlerin gerçek veriler gibi modellenebilecek düz variogramlar üretmişlerdir. Bu yüzden üretilmiş faktörlerin her birisi diğerlerinden bağımsız olarak krigleme yöntemi ile kolaylıkla kestirilebilmiştir. Genel olarak bağımsız bileşenlerin UBÇE bileşenlerine göre daha düşük külçe etkisi ve daha yüksek yapısal uzaklıklar içerdiği söylenebilir.

- Örnek andezit sahasında nominal olasılıklarla gözlenen olasılıkların karşılaştırıldığı çalışmada DÇD değişkeni dışında UBÇEK ile üretilen olasılıkların BBK ile üretilen olasılıklara göre daha yansız olduğu görülmektedir. Genel olarak yan, yüksek ve düşük olasılık aralıklarına doğru azalış göstermektedir. Andezit sahasında BBK ile türetilen işletilebilir blok sayısı UBÇEK yöntemine göre daha çoktur. Saha sınırlarında bazı bloklar UBÇEK ile işletilemez olarak kestirilmiştir. UBÇEK, daha yansız olasılık değerleri ürettiği için bu ocağın planlamasında UBÇEK'ten elde edilen sonuçları kullanmak gerekir

Tez çalışması, BBK ve UBÇEK'nin EK yöntemine iyi bir alternatif olduğunu göstermektedir. Karşılaştırma sonuçları ayrıca UBÇEK'nin BBK'ye göre daha performanslı olduğunu göstermiştir.

KAYNAKLAR

- [1] Suro-Perez V., Journel A.G., Indicator principal component kriging: *Mathematical Geology*, 23, 5, s. 759–788, **1991**
- [2] Xie, T., Myers, D. E., and Long, A.E., Fitting matrix-valued variogram models by simultaneous diagonalization, Part II: application: *Mathematical Geology*, 27, 7, s. 877–888, **1995**
- [3] Tercan E., Importance of orthogonalization algorithm in modeling conditional distributions by orthogonal transformed indicator methods. *Mathematical Geology* 31, 2, s. 155–173, **1999**
- [4] Switzer P., Green A., Min/max autocorrelation factors for multivariate spatial imaging. Technical report no 6, Department of Statistics, Stanford University, Stanford, California, **1984**
- [5] Desbarats A., Dimitrakopoulos R., Geostatistical simulation of regionalized pore-size distribution using min/max autocorrelation factors, *Mathematical Geology*, 32, 8,s. 919–942, **2000**
- [6] Desbarats A., Geostatistical modeling of regionalized grain-size distributions using min/max autocorrelation factors. In: Monestiez P, Allard D, Froidevaux R (eds) *GeoENV III—geostatistics for environmental applications*, Proceedings of the third European conference on geostatistics for environmental applications. Kluwer Academic, Dordrecht, s. 441–452, **2001**
- [7] Fonseca M., Dimitrakopoulos R., Assessing risk in grade tonnage curves in a complex copper deposit, northern Brazil, based on an efficient joint simulation of multiple correlated variables, In: *Application of computers and operations research in the mineral industries*. South African Institute of Mining and Metallurgy, 373–382, **2003**
- [8] Boucher A., Dimitrakopoulos R., Vargas-Guzmán J.A., Joint simulations, optimal drillhole spacing and the role of stockpile, In: *Quantitative geology and geostatistics*, geostatistics Banff, 14, 35–44, **2004**
- [9] Boucher A., Dimitrakopoulos R., Block-support simulation of multiple correlated variables. *Mathematical Geosciences* 41, 2, 215–237, **2009**
- [10] Rondon O., Tran T., Multivariate simulations using min/max autocorrelation factors: practical aspects and case studies in the mining industry. In: Ortiz J, Emery X (eds) *Geostats*, 1, 269–278, **2008**
- [11] Rondon O., Teaching Aid: Minimum/Maximum Autocorrelation Factors for Joint Simulation of Attributes. *Mathematical Geoscience*, DOI10.1007/s11004-011-9329-6, **2011**
- [12] Goovaerts P., Spatial orthogonality of the principal components computed from coregionalized variables, *Mathematical Geology*, 25, 3, 281-302, **1993**

- [13] Vargas-Guzmán J, Dimitrakopoulos R, Computational properties of min/max autocorrelation factors. *Comput Geosci* 29(6), 715–723, **2003**
- [14] Mueller U.A., Ferreira J., The U-WEDGE transformation method for multivariate geostatistical simulation. *Math Geosci* DOI 10.1007/s11004-012-9384-7, **2012**
- [15] Tichavsky P., Yeredor A., Fast approximate joint diagonalization incorporating weight Matrices. *IEEE Trans Signal Process* 57:878-891, **2009**
- [16] Herault J., Jutten C., Ans B., Detection de grandeurs primitives dans un message composite par une architecture de calcul neuromimétique en apprentissage non supervisé, Actes du Xème colloque, *GRETSI*, s. 1017-1022, **1985**
- [17] Comon P., Independent component analysis, a new concept?, *Signal Processing*, 36, s. 287-314, **1994**
- [18] Langlois D., Chartier S., Gosselin D., An introduction to independent component analysis: Infomax and FastICA algorithms, *Tutorials in Quantitative Methods for Psychology*, 6(1), 31-38, **2010**
- [19] Hyvarinen, A., Karhunen, J., ve Oja, E., *Independent Component Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 481 s, **2001**
- [20] Stone V.J., *Independent Component Analysis: A Tutorial Introduction*, A Bradford book, Cambridge, 193 s, **2004**
- [21] Hyvarinen A., Oja E., *Independent component analysis: algorithms and applications*, *Neural Networks*, 13 (4-5), 411-430, **2000**
- [22] Delfosse N., Loubaton P., Adaptive blind separation of independent sources: A deflation approach, *Signal Processing*, 45, 59-83, **1995**
- [23] Cover, T.M., ve Thomas, J.A., *Elements of Information Theory*, Wiley, **1991**
- [24] Papoulis A., *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, McGraw-Hill, 3rd edition, **1991**
- [25] Jones M., ve Sibson R., What is projection pursuit?, *Journal of the Royal Statistical Society, Series A*, 150, 1-36, **1987**
- [26] Hyvarinen A., New approximations of differential entropy for independent component analysis and projection pursuit, In *Advances in Neural Information Processing Systems*, MIT Press, 10, s. 273-279, **1988**
- [27] Bell A., Sejnowski T., The independent components of natural scenes are edge filters, *Vision Research*, 37, s. 3327-3338, **1997**
- [28] Nadal J.P., Parga N., Non-linear neurons in the low noise limit: a factorial code maximizes information transfer, *Network*, 5, 565-581, **1994**
- [29] Battiti R., First-and second-order methods for learning: between steepest descent and Newton's method, *Neural computation* MIT Press, **1992**

- [30] Sohrabian B., Ozcelik Y., Determination of exploitable blocks in an andesite quarry using independent component kriging. *Int J Rock Mech Mining Sci*, 55, s. 71-79, **2012**, <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijrmms.2012.06.009>,
- [31] Tercan A.E., Sohrabian B., Multivariate geostatistical simulation of coal quality data by independent components, *International Journal of Coal Geology*, **2013**, ISSN 0166-5162, 10.1016/j.coal.2012.10.007
- [32] Atteia O., Dubios J.P., Webster R., Geostatistical analysis of soil contamination in the Swiss Jura, *Environmental Pollution*, 86, 315-327, **1994**
- [33] *Geostatistics for Natural Resources Evaluation* By Pierre Goovaerts, Oxford University Press, Applied Geostatistics Series, **1997**
- [34] Journel A.G., *Geostatistics: models and tools for the earth sciences*, *Mathematical Geology*, 18, 1, 119-140, **1986**
- [35] Goovaerts P., On a controversial method for modelling a coregionalization, *Mathematical Geology*, 26, 2, 197-204, **1994**
- [36] TS 699, Tabi Yapı Taşları Muayene Deney Metotları, TSE, Ankara, **1987**
- [37] TS 10835, Andezit Yapı ve Kaplama Taşı olarak Kullanılan , TSE, Ankara, **1993**
- [38] Tercan E., Özçelik Y., Geostatistical evaluation of dimension-stone quarries. *Engineering Geology*, 58, 1, 25-33, **2000**
- [39] Tercan E., *Nonparametric Methods for Estimating Conditional Distributions and Local Confidence Intervals*, PhD thesis, Leads University, Dept. of Mining and Mineral Engineering, **1993**.

EK 1. Bağımsız Bileşenleri Üreten MATLAB Kodu

```
load z1.dat          % z1:beyaz bileşenler
siz=size(z1);
n=siz(1,1);         % n: örnek sayısı
m=siz(1,2);         % m: bağımsız bileşen sayısı
ε=10^-15;
for l=1:1:m
    for j=1:1:m
        w(j,l)=trnd(ones(1,1)); % rasgele bir başlangıç vektörü tanımlıyor
    end
    w(:,l)=w(:,l)/norm(w(:,l)); % raslantı başlangız vektörünün büyüklüğünü bire eşitliyor
    for j=1:1:m
        c(1,j)=0;
    end
    difference=10;
    while (difference)>ε          % işlemi bitirmek için girilen küçük bir değer ε
        b=0;
        for i=1:1:n
            e=0;
            for j=1:1:m
                e=w(j,l)*z1(i,j)+e;
            end
            a=tanh(1*e);
            b=1*(1-(a^2))+b;
            for j=1:1:m
                c(1,j)=a*z1(i,j)+c(1,j);
            end
        end
    end
    b=b/n;
    for j=1:1:m
        f(j,l)=(c(1,j)/n)-b*w(j,l);
```



```

end
if (i>1)                                % yeni vektörü daha önceden bulunmuş olan
    for i=1:1:l-1    %L                  %vektörlere dik hale getiriyor
        sum=0;
        for j=1:1:m    %m
            sum=f(j,l)*f(j,i)+sum;
        end
        for j=1:1:m
            f(j,l)=f(j,l)-sum*f(j,i);
        end
    end
end
end
f(:,l)=f(:,l)/norm(f(:,l)) ;
dis=w(:,l)'*f(:,l);                    %iterasyon içinde elde edilen vektörle bir önceki
difference=abs(1-abs(dis))              %vektörü karşılaştırıyor
    for j=1:1:m
        w(j,l)=f(j,l)                   % ayrıştırma matrisini bul
    end
end
end
bagimsizbilesen= z1*w;                  % bağımsız bileşenleri üret.

```

EK 2. UBÇE Yönteminde Kullanılan (2.28) Nolu Eşitliğin Türetimi

Değişken sayısının 2 olduğunu varsayalım. Bu varsayım N-boyutlu uzaya da genelleştirilebilir.

$$\xi_Z(\mathbf{h}_i) = \sum_{k=1}^2 \gamma_Z(\mathbf{h}_i; k, k) = \gamma_{11}(\mathbf{h}_i) + \gamma_{22}(\mathbf{h}_i), \in \mathbf{h}_i \text{ for the whitened data and also}$$

$$\begin{aligned} \xi_F(\mathbf{h}_i) &= \sum_{k=1}^2 \gamma_F(\mathbf{h}_i; k, k) \\ &= \cos^2\theta \gamma_{11}(\mathbf{h}_i) + \sin^2\theta \gamma_{22}(\mathbf{h}_i) + 2\cos\theta\sin\theta \gamma_{12}(\mathbf{h}_i) + \cos^2\theta \gamma_{22}(\mathbf{h}_i) \\ &\quad + \sin^2\theta \gamma_{11}(\mathbf{h}_i) - 2\cos\theta\sin\theta \gamma_{12}(\mathbf{h}_i) \\ &= (\cos^2\theta + \sin^2\theta) \gamma_{11}(\mathbf{h}_i) + (\cos^2\theta + \sin^2\theta) \gamma_{22}(\mathbf{h}_i) = \gamma_{11}(\mathbf{h}_i) + \gamma_{22}(\mathbf{h}_i) \end{aligned}$$

UBÇE bileşenleri için $\varphi(\theta)$ 'nin türevi θ 'ya göre aşağıdaki şekilde verilebilir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(\theta)}{\partial \theta} &= \frac{\partial \sum_{i=1}^l (\gamma_{F_1 F_2}(\mathbf{h}_i))^2}{\partial \theta} = \\ &= (\cos^3\theta \sin\theta - \sin^3\theta \cos\theta) (2 K_i^2 - 8 \gamma_{12}^2(\mathbf{h}_i)) \\ &\quad + 2 K_i (\cos^4\theta + \sin^4\theta - 6 K_i \cos^2\theta \sin^2\theta) \gamma_{12}(\mathbf{h}_i) \end{aligned}$$

$\gamma_{F_1 F_2}(\mathbf{h}_i)$ 'i θ 'ya göre açtığımızda

$$\gamma_{F_1 F_2}(\mathbf{h}_i) = K_i \cos\theta \sin\theta + (\cos^2\theta - \sin^2\theta) \gamma_{12}(\mathbf{h}_i)$$

with $K_i = \gamma_{22}(\mathbf{h}_i) - \gamma_{11}(\mathbf{h}_i)$.

$\gamma_{F_1 F_2}(\mathbf{h}_i)$ 'nin türevi θ 'ya göre aşağıdaki gibidir:

$$\frac{\partial \{\gamma_{F_1 F_2}(\mathbf{h}_i)\}}{\partial \theta} = K_i (\cos^2\theta - \sin^2\theta) - 4 \cos\theta \sin\theta \gamma_{12}(\mathbf{h}_i)$$

O zaman

$$\frac{\partial \varphi(\theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial \sum_{i=1}^l (\gamma_{F_1 F_2}(\mathbf{h}_i))^2}{\partial \theta}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \times \sum_{i=1}^l \frac{\partial \{\gamma_{F_1 F_2}(\mathbf{h}_i)\}}{\partial \theta} \times \gamma_{F_1 F_2}(\mathbf{h}_i) \\
&= 2 \sum_{i=1}^l [K_i(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - 4 \cos \theta \sin \theta \gamma_{12}(\mathbf{h}_i)] \cdot [K_i \cos \theta \sin \theta + (\cos^2 \theta \\
&\quad - \sin^2 \theta) \gamma_{12}(\mathbf{h}_i)] \\
&= \sum_{i=1}^l [2K_i^2(\cos^3 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta \cos \theta) + 2K_i(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)^2 \gamma_{12}(\mathbf{h}_i) \\
&\quad - 8K_i \cos^2 \theta \sin^2 \theta \gamma_{12}(\mathbf{h}_i) - 8(\cos^3 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta \cos \theta) \gamma_{12}^2(\mathbf{h}_i)] \\
&= \sum_{i=1}^l \left[(\cos^3 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta \cos \theta) (2K_i^2 - 8\gamma_{12}^2(\mathbf{h}_i)) \right. \\
&\quad \left. + 2K_i(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta - 6K_i \cos^2 \theta \sin^2 \theta) \gamma_{12}(\mathbf{h}_i) \right]
\end{aligned}$$

EK 3. UBÇE Bileşenleri Üreten MATLAB Kodu

```
degiskensay=4;
orneksay=259;
sayi3=0;
for j=1:1:degiskensay-1
for jj=j+1:1:degiskensay
veri(:,1)=data(:,j);
veri(:,2)=data(:,jj);
sayi3=sayi3+1;
sonteta=0;
son=0;
sayi1=0;
for k=1:1:orneksay-1
for l=k+1:1:orneksay
distance(k,l)=sqrt( (location(k,1)-location(l,1))^2+(location(k,2)-
location(l,2))^2+(location(k,3)-location(l,3))^2);
end
end
count1=0;
while count1<45
count1=0;
teta=trnd(ones(1,1))           % dönüşüm matrisi için başlangıç rastlantı teta değeri
atanıyor
sum=10;                        % sum küçük kriter değeri
alfa=2000;                     % alfa, adım büyüklüğü
for i=1:1:10                   % i, alfa değerinin ikiye bölünme sayısı
alfa=alfa/(2)
sayi=0;
kosul=1;
while abs(sum)>5^-10
count1=count1+1;
```

```

if kosul>0
matris(1,1)=cos(teta);
matris(2,2)=cos(teta);
matris(1,2)=-sin(teta);
matris(2,1)=sin(teta);
sonuc=veri*matris;
for lagnumber=1:1:numberoflags
pairnum(lagnumber)=0;
var1(lagnumber)=0;
var2(lagnumber)=0;
variogramdegeri3(lagnumber)=0;
variogramdeg(lagnumber)=0;
variogramdegeri1(lagnumber)=0;
variogramdegeri2(lagnumber)=0;
end

for k=1:1:orneksay-1
for l=k+1:1:orneksay
for lagnumber=1:1:numberoflags

if distance(k,l)> (lagnumber*lagdis-lagtol) && distance(k,l)<(lagnumber*lagdis+lagtol)
% numberoflags farklı lag uzaklıkta çapraz variogram
hesaplanacak
pairnum(lagnumber)=pairnum(lagnumber)+1;
var1(lagnumber)=(sonuc(k,1)-sonuc(l,1))*(sonuc(k,2)-sonuc(l,2))+var1(lagnumber);
var2(lagnumber)=4*(veri(k,2)-veri(l,2))*(veri(l,1)-
veri(k,1))*cos(teta)*sin(teta)+(veri(k,2)-veri(l,2))^2*(cos(teta))^2+(veri(l,1)-
veri(k,1))^2*(sin(teta))^2-(veri(l,1)-veri(k,1))^2*(cos(teta))^2-(veri(k,2)-
veri(l,2))^2*(sin(teta))^2;
end
end
end

```

```

end
end
sum=0;
for lagnumber=1:1:numberoflags
variogramdegeri1(lagnumber)=var1(lagnumber)/pairnum(lagnumber);
% her bir uzaklıkta çapraz
variogram değeri
variogramdegeri2(lagnumber)=var2(lagnumber)/pairnum(lagnumber);
variogramdegeri3(lagnumber)=alfa*2*variogramdegeri1(lagnumber)*variogramdegeri
2(lagnumber);
% her bir uzaklıkta çapraz variogramın
türev değeri
sum=variogramdegeri3(lagnumber)+sum; % tüm lagların toplam kriter
değeri
end
sum
sum1=0;
for lagnumber=1:1:numberoflags
variogramdeg(lagnumber)=(variogramdegeri1(lagnumber))^2; % variogramdeg, her
bir
%uzaklıkta çapraz
variogram karesi
sum1=variogramdeg(lagnumber)+sum1; % farklı uzaklıklarda çapraz
variogramların
%kare değeri toplamı
end
sayi=sayi+1;
teta1(sayi)=teta; % teta değerini teta1'e aktarıyor
sayi1=sayi+1; % sayi1 ve sayi algoritmanın kaç kere run edildiği sayısıdır
son(sayi1,1)=sayi1; % çizim için
son(sayi1,2)=alfa; % çizim için

```

```

plot(teta1(sayi),sum1,'--rs','LineWidth',2,...
'MarkerEdgeColor','k',...
'MarkerFaceColor','g',...
'MarkerSize',10)
hold all
a(sayi)=sum1;
if sayi>2
b= (a(sayi)-a(sayi-1))/(teta1(sayi)-teta1(sayi-1));
c=sum*b/abs(sum*b);
alfa=c*alfa;
sum=c*sum;
end
if sayi>3
kosul=(a(sayi)-a(sayi-1))*(a(sayi-1)-a(sayi-2));
end
sonteta(sayi,1)=sayi;
sonteta(sayi,2)=sum;
sum2=sum
teta=teta-sum2
end
if kosul<0,break,end
end
end
end
donusumteta(sayi3)=teta;
for kk=1:1:degiskensay           % değişkensay bağımsızlaştırılacak
                                %değişken sayısını göstermektedir
for ll=1:1:degiskensay
if kk==ll           % dönüşüm matrisinin köşegen elemanlarını bire eşitliyor
matris(kk,ll)=1;
end

```

```

kk~=ll          % matrisin köşegendişı elemanlarını sıfırlıyor
matris(kk,ll)=0; % matris her aşamada bulunacak dönüşüm matrisidir
end
end
end
matris(j,j)=cos(teta);
matris(jj,jj)=cos(teta);
matris(j,jj)=-sin(teta);
matris(jj,j)=sin(teta);
data=data*matris; %veri setini yeniliyor
figure
plot(sonteta(:,1),sonteta(:,2),'--rs','LineWidth',2,...
'MarkerEdgeColor','k',...
'MarkerFaceColor','g',...
'MarkerSize',10)
figure
plot(son(:,1),son(:,2),'--rs','LineWidth',2,...
'MarkerEdgeColor','k',...
'MarkerFaceColor','g',...
'MarkerSize',10)
end
end

```


ÖZGEÇMİŞ

Kimlik Bilgileri

Adı Soyadı : Babak Sohrabian

Doğum Yeri : Iran

Medeni Hali : Evli

E-posta : babak_sohrabian@hacettepe.edu.tr

Eğitim

Lise : Enghelab lisesi, Kermanshah, İran

Lisans : Iran Bilim ve Teknik Üniversitesi, İran

Yüksek Lisans : Sahand Teknik Üniversitesi, İran

Doktora : Hacettepe üniversitesi, Türkiye

Yabancı Dil ve Düzeyi

İngilizce- TOEFL (94/120)

Tezden Üretilmiş Projeler ve Bütçesi

Çok değişkenli Jeostatistiksel Kestirimde Dikleştirilmiş Bileşenli Yeni Yöntemlerin Geliştirilmesi, Proje No: 111M218, 68000 TL

Tezden Üretilmiş Yayınlar

- **Sohrabian, B.**, Ozcelik, Y., 2012a. Joint simulation of a building stone deposit using minimum/maximum autocorrelation factors. Construction and Building Materials 37: 257–268
- **Sohrabian, B.**, Ozcelik, Y., 2012b. Determination of exploitable blocks in an andesite quarry using independent component kriging. Int J Rock Mech Mining Sci 55: 71–79.
- Tercan, A.E., **Sohrabian, B.**, Multivariate geostatistical simulation of coal quality data by independent components, International Journal of Coal Geology (2012), <http://dx.doi.org/10.1016/j.coal.2012.10.007>