

KOPULALARLA MADEN KAYNAK KESTİRİMİ

MINERAL RESOURCE ESTIMATION USING COPULAS

FIRAT ATALAY

Prof. Dr. A. ERHAN TERCAN

Tez Danışmanı

Hacettepe Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim - Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin

Maden Mühendisliği Anabilim Dalı İçin Öngördüğü

DOKTORA TEZİ

olarak hazırlanmıştır.

2015

FIRAT ATALAY'ın hazırladığı “**KOPULALARLA MADEN KAYNAK KESTİRİMİ**” adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **MADEN MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr., Nurkan KARAHANOĞLU

Başkan

Prof. Dr., A. Erhan TERCAN

Danışman

Prof. Dr., Bahtiyar ÜNVER

Üye

Prof. Dr., Neş'e ÇELEBİ

Üye

Yrd. Doç. Dr., Güneş ERTUNÇ

Üye

Bu tez Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından **DOKTORA TEZİ** olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. Fatma SEVİN DÜZ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

05 / 06 / 2015

FIRAT ATALAY

ÖZET

KOPULALARLA MADEN KAYNAK KESTİRİMİ

FIRAT ATALAY

Doktora, Maden Mühendisliği Bölümü

Tez Danışmanı: Prof. Dr. A. ERHAN TERCAN

Haziran 2015, 111 sayfa

Tez çalışması, temel olarak maden kaynak kestirimini içermektedir. Krigleme yöntemi bu amaçla endüstride sıklıkla kullanılan bir yöntemdir. Bununla birlikte krigleme, variogramın aykırı değerlerden çok etkilenmesi, değişkenliğin düşük olduğu kestirim sonuçları üretmesi ve kestirim değerlerinin belirsizliğini değerlendirmede gerçekçi olmayan varsayımlar içermesi gibi dezavantajlara sahiptir. Tez çalışmasında bu dezavantajların giderilmesi yönünde kopula fonksiyonunun kullanılması öngörülmüştür.

Kopula, marjinal dağılımları tek düze olan değişkenler arasındaki ilişkiyi ortaya koyan bir fonksiyondur. Tez çalışmasında uzaklığa bağlı kopula fonksiyonu geliştirilmiş, veri sayısı ve külçe etkisinin kestirim üzerine etkisi incelenmiştir. Ayrıca blokların ortalama değerlerinin kopula ile kestirimi araştırılmıştır. Normal ve log-normal dağılıma sahip veri kümeleri kullanılarak kopula ile kestirime ilişkin iki örnek çalışma yapılmıştır.

Kopula fonksiyonları, gerçek bir saha üzerinde kömür kaynak kestirimi ve benzetimi amacıyla uygulanmıştır. Alt Isıl Değer (AID) dikkate alınan değişkendir. Bu değişken, kopula ile kestirilmiş, sonuçlar krigleme yöntemi ile elde edilen kestirim sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Kopula ile kestirimi yapılan sahanın ortalama AID'i 2069 kCal/kg iken dağılımın en düşük değeri 1208 kCal/kg ve en yüksek değeri ise 2842 kCal/kg'dır. Kestirime ek olarak AID, kopula fonksiyonu kullanılarak benzetilmiştir.

Kopulalar, kestirim değerlerine ilişkin tüm dağılım fonksiyonunu üretebildiklerinden ek örneklem gereken noktaların belirlenmesinde kullanılmıştır.

Sonuçlar, kopulaların maden kaynak kestirim ve benzetiminde krigleme gibi diğer yöntemlere alternatif olarak kullanılabileceği göstermiştir.

Anahtar Kelimeler: Kopula, maden kaynak kestirimi, benzetim, ek örneklem gereken noktalar, korelogram, gauss kopulası

ABSTRACT

MINERAL RESOURCE ESTIMATION USING COPULAS

FIRAT ATALAY

Doctor of Philosophy, Department of Mining Engineering

Supervisor: Prof. Dr. A. ERHAN TERCAN

JUNE 2015, 111 pages

This thesis basically includes mineral resource estimation for this purpose, kriging is method widely used in mining industry. But kriging has some disadvantages such as non-resistance of variogram to outlier values, smoothing of kriged estimate, unrealistic assumptions in the assessing uncertainty of estimated values. In this thesis, copula is suggested to avoid these problematic issues.

Copulas are functions that exhibit relationship between for which marginal distributions are uniform. In this thesis, distance based copula functions are developed, effect of the number of neighboring data and nugget effect of the estimation is studied. The estimation of the mean value of the blocks by copulas is also investigated. Two case studies for estimation with copulas are presented for normally and log-normally distributed data set.

Copula function is used in estimation of the coal resource of a coal basin and simulations are also performed. Lower calorific value (LCV) is considered in estimation and simulation. Distribution of this variable is estimated using copula and results are compared with kriging estimation results. Average value of the LCV is 2069 and lowest value and highest values of the LCV are 1208 and 2842 respectively according to estimation made with copula. LCV is also simulated by using copulas.

Because copulas can produce the full distribution of the estimation using this property is used in determination of additional sampling locations.

The results indicate that copulas can be used alternatively to existing methods like kriging in mineral resource estimation and simulation.

Keywords: Copula, mineral resource estimation, simulation, additional sampling locations, correlogram, Gaussian Copula

TEŞEKKÜR

Bölüm olanaklarından yararlanmamı sağlayan Maden Mühendisliği Bölüm Başkanı **Prof. Dr. A. Hakan BENZER'e**,

Yüksek Lisans ve Doktora çalışanlarımda danışman hocam olan ve gerek doktora çalışmalarında ve gerekse sosyal hayatta daima beni destekleyen ve eşsiz bilgi birikimi ve tecrübesiyle akademik hayatımın yol göstericisi ve rehberi olan **Prof. Dr. A. Erhan TERCAN'a**,

Tezin gelişim aşamasında değerli katkılarından ötürü tez izleme komitesinde olan **Prof. Dr. Bahtiyar ÜNVER** ve **Prof. Dr. Neş'e ÇELEBİ'ye**

Katkılarından ötürü tez savunma sınavı jürisi başkanı **Prof. Dr. Nurkan KARAHANOĞLU** ve jüri üyesi **Yrd. Doç. Dr. Güneş ERTUNÇ'a**

Yol göstericiliği ve içtenliği ile varlığından kuvvet aldığım **Prof. Dr. Seyfi KULAKSIZ'a**,

Tezin yazım formatının düzenlenmesinde emeği geçen Queensland Üniversitesi öğretim üyesi **Doç. Dr. Mehmet KIZIL'a**,

Çalışmalarım sırasında göstermiş oldukları arkadaşlıkları ve yardımları için **Arş. Gör. Deniz ALTUN**, **Arş. Gör. Dr. Özgür ÖZCAN** ve **Arş. Gör. N. Alper TOPRAK'a**,

Burada adını sayamayacağım kadar çok olan tüm **dostlarıma** ve

Sahip olduğum her şeyi borçlu olduğum **AİLE'me**,

İçtenlikle teşekkür ederim.

Bu çalışma Hacettepe Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimince Desteklenmiştir. Proje Numarası: FDK-2015-6893.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR	vi
1. GİRİŞ	1
2. KOPULA	4
2.1. Kopula Tanım	5
2.2. Kopula Özellikleri	7
2.3. Kopula Aileleri	9
2.4. Gauss Kopulası	9
2.5. Deneysel Kopula	12
2.6. Uzaklığa Bağlı Kopula	14
2.7. Korelogram	15
2.7.1. Korelasyon	16
2.7.2. Korelogram Değeri	20
2.7.3. Deneysel Korelogramın Hesaplanması	22
2.7.4. Korelogram modelleri	25
2.7.5. Uzaklığa Bağlı Korelasyon Matrisi	29
2.8. Uzaklığa Bağlı Kopula Modelinin Uyarlanması	31
2.9. Anizotropi	31
2.10. Çapraz Doğrulama	33
3. KOPULA ile KAYNAK KESTİRİMİ	36
3.1. Uzaklığa Bağlı Gauss Kopulası	37
3.2. Kopula ile Kestirim	37

3.3. Kopula ile Kestirimde Örnek Uygulamalar	38
3.3.1. Örnek Çalışma 1	38
3.3.2. Örnek Çalışma 2	46
3.4. Parametrelerin kestirim üzerine etkisi.....	52
3.4.1. Kestirimde kullanılacak en düşük ve en yüksek veri sayıları	52
3.4.2. Külçe Etkisinin Kopula Dağılımına Etkisi	54
3.5. Blokların Kestirimi.....	63
3.6. Kopula ile Kestirimin Özellikleri	64
4. KOPULA ile BENZETİM	66
5. KOPULA ile KESTİRİM ve BENZETİME ÖRNEK BİR UYGULAMA	69
5.1. Sahanın Jeolojisi	69
5.2. Alt Isıl Değerin Kestirimi	77
5.2.1. Verilerin kopula uzayına dönüştürülmesi	78
5.2.2. Deneysel Korelogram Hesabı.....	78
5.2.3. Model uyarlama ve Çapraz Doğrulama	80
5.2.4. Kestirim	81
5.2.5. Blok Modelin Yöne Bağlı Doğruluk Testleri	85
5.2.6. AID – Tonaj Eğrisi	87
5.3. AID'nin Benzetimi	89
6. EK ÖRNEKLEM NOKTALARININ BELİRLENMESİ	93
7. SONUÇLAR VE TARTIŞMA.....	98
KAYNAKLAR.....	100
ÖZGEÇMİŞ	105

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

μ	Ortalama
σ	Standart sapma
σ^2	Varyans
R	Korelasyon
exp	Üstel değeri
λ	Anizotropi oranı
Σ	Korelogram matrisi
π	Pi sayısı

Kısaltmalar

AID	Alt Isıl Değer
MTA	Maden Tetkik ve Arama Genel Müdürlüğü

1. GİRİŞ

Maden kaynağı, yerkabuğunda nihai aşamada ekonomik olarak üretilebilecek şekil ve miktarda bulunan maden varlığıdır. Maden kaynağı kestirimi, maden varlığının geometrisi, sürekliliği, tonajı ve ortalama tenör gibi özelliklerini kestirimini içerir. Bu özellikler sondaj, yarma, kuyu, galerilerden elde edilen öznelik (attribute) bilgileri kullanılarak belirlenir. Kaynak kestirimleri, madenin ekonomikliği ve hangi üretim yönteminin uygulanacağı konusunda büyük bir önem taşır [1].

Maden kaynak kestiriminde en yakın komşu (EK), uzaklığın tersi ile ağırlıklandırma (UTA), krigleme gibi yöntemler kullanılır. EK yönteminde [2], [3]; kestirilecek noktaya istenen konuma en yakın veri belirlenir ve bu veri kestirim değeri olarak atanır. UTA [2] [3]; yönteminde kestirim değeri komşu verilerin kestirim noktasına olan uzaklığın tersiyle ağırlıklandırılmasıyla hesaplanır. Krigleme yönteminde ise [2], [3], [4], [5], [6]; kestirim değeri, variogram fonksiyonu kullanılarak verilerin yansız ve optimal bir şekilde ağırlıklandırılması ile hesaplanır. Bahsedilen tüm kestirim yöntemlerinin kullanımı oldukça basittir. Bu nedenle geniş bir kullanıma sahiptirler. Ancak bu yöntemlerin zayıf yanları da bulunmaktadır.

EK yönteminde kestirim için tek bir veri kullanılır ve bu nedenle lokal süreklilik gerçek dışıdır. [2], [3]. UTA yönteminde örnekler arası uzaklığın ve örnek tarama deseninin kestirim sonuçlarına etkisi büyüktür. Aykırı değerlerin kestirimde kullanılması kestirim sonuçlarını doğrudan etkiler [2], [3]. Ayrıca uzaklığa bağlı ilişkinin derecesini belirleyen üssü değeri keyfi bir şekilde belirlenir. Kriglemede ise; uzaklığa bağlı ilişkiyi ortaya koyan variogram fonksiyonu aykırı değerlerden çok etkilenir ve böyle durumlarda variogram modellenmesi oldukça zordur. Ayrıca kestirim sonucu olarak sadece bir değer elde edilir ve bu değere ilişkin güven aralığı veriye bağlı olmayan krigleme hata varyansından elde edilir. Bunun yanında hataların normal dağıldığı varsayılır. Bu varsayım oldukça kuvvetli bir varsayım olup, pratikte nadiren karşılaşılar. Ayrıca krigleme gibi kestirim teknikleri değişkenliğin oldukça düşük olduğu kestirim değerleri üretir. Kriglemede kestirim için kullanılan ağırlıklar verilerin sadece kestirim noktasına olan uzaklıklar ile ilişkilidir. Bu nedenle kestirimde kullanılacak değerlerin ağırlıkları belirlenmesinde herhangi bir etkisi yoktur. Ayrıca kriglemede bazı durumlarda ham verileri pozitif tanımlı olmasına rağmen negatif

kestirim değerleri üretebilir. Ayrıca krigeleme değişkenliği düşük olduğu kestirim sonuçları üretir.

Kopula, marjinal dağılımları tekdüze (uniform) olan çok değişkenli birikimli dağılım fonksiyonudur. Uzaklığa bağlı olmamakla birlikte matematiksel anlamda “Copula” kelimesi [7] Abe Sklar tarafından 1959 ‘da ortaya atılmıştır ve günümüze kadar finans, inşaat, eczacılık, meteoroloji gibi alanlarda kullanılmıştır [7], [8], [9], [10], [11]. Uzaklığa bağlı kopula ise ilk olarak Bardossy tarafından yeraltı su kalite parametrelerinin tahmininde kullanılmıştır [12].

Kopula ile kestirimde kestirimin tek bir değeri yerine tam dağılımına ulaşılır. Kestirimde hem uzaklık hem de kullanılan değerlerin marjinalleri dikkate alınır. Kestirimin değişkenliği kriglemeye göre daha yüksektir. Kestirim amacıyla kullanılan korelogram değerleri aykırı değerlere karşı sağlam (robust) olduğundan kestirim aykırı değerlerden çok etkilenmez. Ayrıca eğer kestirimde kullanılacak ham veriler pozitif tanımlı ise kopula fonksiyonunun $[0,1]$ aralığında tanımlı olmasından ötürü kestirim sonuçları daima pozitif çıkar. Bu nedenle kopula ile kestirim, pozitif tanımlı bir kestirimdir. Bu nedenlerle kopulalar ile kestirim diğer kestirim yöntemlerine üstünlük sağlamaktadır [12].

Tez çalışmasında, kopulanın maden kaynak kestirimde, benzetiminde ve aynı zamanda ek örnekleme konumlarının belirlenmesinde kullanılabileceği gösterilmiştir. Uzaklığa bağlı olan ve olmayan kopulanın özellikleri incelenmiştir. Yapay olarak hazırlanmış iki boyutlu basit bir veri kümesi üzerinde kopula ile kestirimin örnek bir uygulaması verilmiştir. Kopula parametrelerinin kestirim üzerindeki etkisi araştırılmıştır. Ayrıca gerçek bir saha üzerinde kopula kullanarak kestirim ve benzetim gerçekleştirilmiştir. Son olarak kopula kestirim sonuçlarından yararlanarak ek örnekleme gereken noktaların belirlenmesinde uzaklığa bağlı kopulanın kullanılması yeni bir yöntem olarak önerilmiştir.

Tez içeriğine göre ikinci bölümünde kopulanın teorisine değinilmiş ve uzaklığa bağlı kopula tanımlanmıştır. Üçüncü bölümde kopula ile kestirimin özellikleri incelenmiş, yapay bir şekilde oluşturulan basit bir veri kümesi üzerinde kopula ile kestirim ayrıntılı bir şekilde açıklanmıştır. Ek olarak, kullanılan veri sayısının kestirim üzerine etkisi incelenmiştir. Dört farklı yapay veri kümesi kullanılarak, külçe etkisinin kopula ile kestirim üzerindeki etkisi araştırılmıştır. Dördüncü bölümde, kopula ile benzetimin

teorik temeli ortaya koyulmuş, benzetimin nasıl yapıldığı ve özellikleri açıklanmıştır. Beşinci bölümde, bir maden sahasında kopula ile kestirim ve benzetimin örnek bir uygulaması sunulmuştur. Altıncı bölümde, aynı sahada kopula kestirim sonuçları kullanarak ek örnekleme gereken konular belirlenmiştir. Son bölümde ise sonuçlar verilmiştir.

2. KOPULA

Copula kelimesi (Kopula) İngilizceye, Latince'den geçmiş olup kelime anlamı “bağ”, “bağlantı”dır [13]. Kopulalar, çok değişkenli dağılımlar ile bu dağılımların marjinalleri arasında ilişki kurduklarından bu ilişki bir bağa benzetilmiş ve bu nedenle “Copula” ismini almıştır. Ayrıca Türk Dil Kurumu'na göre kopula kelimesinin Türkçe karşılığı “koşaç”tır [14]. Ancak bu tezde koşaç yerine “Kopula” kelimesi kullanılacaktır.

Kopulalar üzerine çalışmalar ve modern uygulama alanları nispeten yeni sayılabilecek alanlardır. İstatistik literatürü incelendiğinde kopula kelimesine son zamanlarda rastlanır. Örneğin İstatistik Bilimi Ansiklopedisi'nin dokuzuncu baskısında “Kopula” kelimesine rastlanılmazken ilk olarak 1997 yılında “İstatistik Bilimi Ansiklopedisi'nde “Kopula “ kelimesi yer bulabilmiştir. Kopula konusu günümüzde gelişmekte olan bir konu olmasına rağmen temelleri yaklaşık olarak 1950'lere dayanır [15].

İlk olarak “Kopula” kelimesi ile ifade edilmese de kopula kavramı Frechet tarafında ortaya atılmıştır. Frechet iki değişkenli bir dağılımın marjinal dağılımları ile nasıl ifade edileceği sorusunu ortaya atmış ancak sorunun yanıtını tam olarak vermemiştir. Soru hakkında en kabul gören çalışma 1959 yılında Abe Sklar tarafından gerçekleştirilmiştir. Abe Sklar, bu çalışmasında günümüzde kendi ismiyle anılmasına sebep olan Sklar teoremini ortaya atmış ve ilk olarak “Copula” kelimesini kullanmıştır. Sklar teoreminin kanıtı [15] 'de mevcuttur. 1959 tarihinden sonraki ilk dönem çalışmaları genellikle Abe Sklar'ın el yazmalarına dayanmaktadır. Ancak sonraki dönemlerde Sklar teoreminin dolaylı kanıtları Moore ve Spruill [16] ile Deheuvels [17] tarafından yapılmıştır.

Daha sonraki süreçte kopulalar sadece olasılıksal metrik uzay teorisi çerçevesinde incelenmiştir. 1970'li yılların ortalarında Bert Schweizer [18] tarafından yapılan çalışma ile İstatistik alanındaki çalışmalar hızlanmıştır.

Kopulalar ile ilgili ilk kongre 1990'da “Bilinen marjinaller ile olasılık dağılımı” ismi ile Roma'da düzenlenmiş böylece kopula ile ilgili yapılan ancak kitlelere ulaşmayan bilgilerin gün yüzüne çıkması sağlanmıştır. Bu tarihten sonra kopula ile ilgili kaynaklar artmış olmasına rağmen mevcut kaynaklar halen büyük ölçüde sadece istatistik bilimi altında toplanmıştır.

Kopulara ilginin artması, uygulamalı bilim alanlarında kullanılması ile başlamıştır. Özellikle Finans alanında kopuların kullanılması ile kopuların istatistik alanı dışında da kullanılabileceği görülmüştür ve kopuların farklı alanlarda çalışılmasına başlanmıştır [19].

Kopular uzaklığa bağlı kapsam içinde ilk defa Bardossy tarafından 2006 yılında yeraltı sularının kalitesinin modellenmesi amacı ile kullanılmıştır [12]. Kopularla maden kaynak kestirimi, benzetimi ile birlikte ek örneklem noktalarının belirlenmesine yönelik literatürde bir çalışma olmayıp ilk defa bu tez çalışmasında ele alınmıştır.

2.1. Kopula Tanımı

Kopula fonksiyonları çok değişkenli bir dağılımı marjinal değişkenleri ile ilişkilendirirler. Bu nedenle iki farklı şekilde olarak:

1-) Marjinal dağılımları $[0,1]$ aralığında olan tekdüze dağılımların çok değişkenli birikimli dağılım fonksiyonu,

2-) Çok değişkenli dağılımları, marjinal dağılımları ile ilişkilendiren fonksiyon.

Kopula fonksiyonu matematiksel olarak

$$C(z_1, \dots, z_n) = P[Z_1 \leq z_1, \dots, Z_n \leq z_n] \quad (2.1)$$

şeklinde gösterilir.

Eşitlik 2.1'de \mathbf{Z} , rastlantı değişkeni,

\mathbf{z} , rastlantı değişkeninin aldığı değer,

$C(z_1, \dots, z_n)$; n değişkenli kopula fonksiyonu,

$P[Z_1 \leq z_1, \dots, Z_n \leq z_n]$ ise n değişkenli birleşik (joint) birikimli dağılım fonksiyonunu göstermektedir.

Eşitlik 2.1'in kullanılabilmesi için birleşik (joint) dağılım fonksiyonunun bilinmesi gerekir. Bu nedenle kopuların Eşitlik 2.1'de gösterildiği gibi kullanılması pek de verimli değildir. Ancak Abe Sklar sürekli birleşik bir dağılımın kopula ve marjinal

dağılımlar cinsinden yazılabileceğini [7] ortaya koyarak kopulaların uygulama alanının genişlemesine yol açmıştır. Çünkü bu durumda varsayılan kopula fonksiyonu birleşik dağılımı temsil eder nitelikte ise değişkenlerin sadece marjinal dağılımın bilinmesi çok değişkenli birleşik dağılımın elde edilmesine olanak tanıyacaktır. Örneğin, iki değişkenli $F(Z_1, Z_2)$ birikimli dağılım fonksiyonunun (BDF) marjinal birikimli dağılım fonksiyonları sırası ile $F(Z_1) = P[Z_1 \leq z_1]$ ve $F(Z_2) = P[Z_2 \leq z_2]$ şeklinde tanımlanmış olsun. Bu durumda α, β iki değişkene ait birikimli dağılım fonksiyonu (BDF) ise $H(Z_1, Z_2) = P[Z_1 \leq z_1, Z_2 \leq z_2]$ şeklinde yazılır. Kopula fonksiyonunda ise hem çok değişkenli dağılım fonksiyonu $H(\alpha, \beta)$, hem de marjinal BDF'ler $F(\alpha), F(\beta)$ $[0,1]$ aralığındadır. Bu durumda $F(\alpha), F(\beta)$ marjinal dağılım fonksiyonlarından, $H(\alpha, \beta)$ dağılım fonksiyonuna geçmeyi sağlayan fonksiyon kopula fonksiyonu olarak tanımlanır. Bu durumda kopula fonksiyonu, marjinal dağılımlar ve birikimli dağılım fonksiyonu Eşitlik 2.2'de olduğu gibi yazılır;

$$H(Z_1, Z_2) = C(F(Z_1), F(Z_2)) \quad (2.2)$$

Eşitlik 2.2'de C fonksiyonu kopula fonksiyonudur ve fonksiyon marjinal dağılımların terslerinin alınması ile;

$$C(Z_1, Z_2) = H(F^{-1}(Z_1), F^{-1}(Z_2)) \quad (2.3)$$

şeklinde yazılabilir.

Eşitlik 2.3'de $F^{-1}(Z_1)$ ve $F^{-1}(Z_2)$ sırasıyla $F(Z_1), F(Z_2)$ fonksiyonlarının tersleridir.

Eşitlik 2.2 ve 2.3'de görüldüğü gibi hem marjinal değerlerden yola çıkarak birleşik dağılımın elde edilmesi hem de birleşik dağılım fonksiyonu biliniyorsa bu dağılım fonksiyonundan kopula fonksiyonunun üretilmesi mümkündür.

Kopula yoğunluk dağılım fonksiyonu, kopula dağılım fonksiyonunun marjinallere göre kısmi türevinin alınması ile elde edilir ve matematiksel olarak iki değişkenli bir kopula yoğunluk fonksiyonu Eşitlik 2.4'de gösterilmiştir.

$$c(z_1, z_2) = \frac{\delta^2 C(z_1, z_2)}{\delta z_1 \delta z_2} \quad (2.4)$$

Eşitlik 2.4'de $c(z_1, z_2)$; kopula yoğunluk fonksiyonu, $\frac{\delta^2 C(z_1, z_2)}{\delta z_1 \delta z_2}$ ikinci dereceden

kısmi türevi göstermektedir.

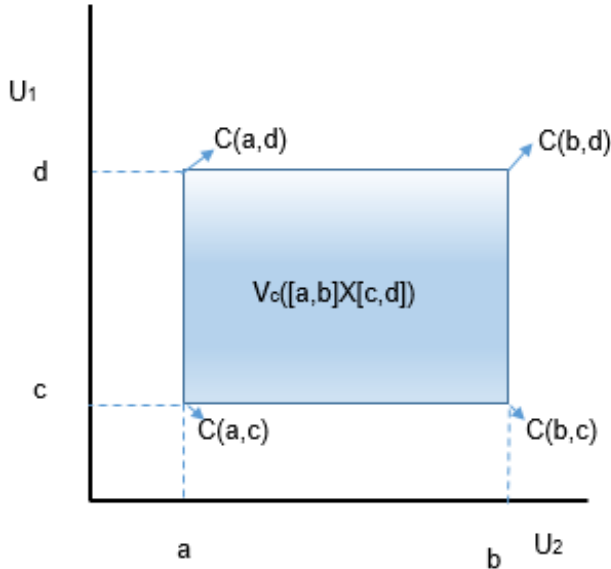
2.2. Kopula Özellikleri

Fonksiyonların “Kopula Fonksiyonu” olarak tanımlanabilmeleri için aşağıda verilen özelliklerin tümüne sahip olmaları gerekir.

- 1.) Tüm $j = \{1, \dots, n\}$ değerleri için, $C(u_j, \dots, u_n) = u_j$ olabilmesi için u_j terimi dışındaki tüm terimlerin 1 olması gerekir.
- 2.) $C(\dots)$ sıra koruyan (isotonic) bir fonksiyondur.
- 3.) $C(\dots)$ azalmayan bir fonksiyondur.
- 4.) $C(\dots)$ $c \leq d$ ve $a \leq b$ için Eşitlik 2.5'i sağlar.

$$V_c([a, b] \times [c, d]) = C(b, d) - C(a, d) - C(b, c) + C(a, c) \geq 0 \quad (2.5)$$

Eşitlik 2.5'de $V_c([a, b] \times [c, d])$ tanımlanan alandaki olasılığı temsil etmektedir. Grafikselle olarak $V_c([a, b] \times [c, d])$ oluşturduğu alan Şekil 2.1'de gösterilmiştir.



Şekil 2.1 $V_c([a, b] \times [c, d])$ oluşturduğu alan

Birçok kopula türü mevcut olup kopula fonksiyonunun bazı örnekleri aşağıda verilmiştir:

Bağımsız (Independent) kopula; tüm marjinaleri birbirinden bağımsız ve tekdüze olan kopula türüdür. Kopula değeri marjinalerin çarpımıdır. Örneğin $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ olmak koşulu ile Bağımsız kopulanın değeri;

$$\Pi_n(z) = z_1, z_2, \dots, z_n \quad (2.6)$$

şeklinde elde edilir. Eşitlik 2.6'da $\Pi_n(z)$ çarpım işlemcisidir.

Eşmonotonik (Comonotonic) kopula; marjinaleri bağımsız ve birbirlerine neredeyse eşit olan kopula türüdür. Eşmonotonik kopula değeri;

$$M_n(z) = \min(z_1, z_2, \dots, z_n) \quad (2.7)$$

şeklinde elde edilir. Eşitlik 2.7'de $M_n(z)$ eşmonotonik kopula değerini, $\min(z_1, z_2, \dots, z_n)$ ise en düşük değer işlemcisini ifade eder.

Karşımonotonik (Countermonotonic) kopula; marjinaleri olan Z_1 ve Z_2 in aralarındaki ilişki $1-Z_1=Z_2$ şeklindedir. Karşı monotonik kopula değeri Eşitlik 2.8'deki gibi hesaplanabilir.

$$M_{1,2} = \max(z_1 + z_2 - 1, 0) \quad (2.8)$$

Eşitlik 2.8'de $M_{1,2}$ iki değişkenli karşımonotonik değeri, $\max(\dots)$, ise en yüksek değer işlemcisini göstermektedir.

Kopulaların bahsedilen tüm özellikleri dikkate alındığında hangi kopula türü olursa olsun bunların alabileceği maksimum ve minimum değerler vardır. Bu sınıra ise Fréchet–Hoeffding sınırı denir. Tüm $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in [0,1]$ değerleri için;

$$W(u_1, u_2, \dots, u_n) \leq C(u_1, u_2, \dots, u_n) \leq M(u_1, u_2, \dots, u_n) \quad (2.9)$$

Eşitlik 2.9'un sağlanması zorunludur. W fonksiyonu, Fréchet-Hoeffding alt sınırıdır ve Eşitlik 2.10'daki gibi hesaplanır.

$$W(u_1, u_2, \dots, u_n) = \max \left\{ 1 - n + \sum_{i=1}^n u_i, 0 \right\} \quad (2.10)$$

M fonksiyonu ise Fréchet-Hoeffding üst sınırıdır Eşitlik 2.11'deki gibi hesaplanır.

$$M(u_1, u_2, \dots, u_n) = \min \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \quad (2.11)$$

2.3. Kopula Aileleri

Kopulalar çok değişkenli dağılım fonksiyonlarını oluşturmak amacıyla kullanıldıklarından birçok yapıya uygunluk göstermek zorundadır. Bu nedenle literatürde birçok kopula modeline rastlanır. Kopulalar sahip oldukları yapılara göre genel olarak Eliptik, Arşimet ve Eyraud–Farlie–Gumbel–Morgenstern aileleri olmak üzere üç kategori altında toplanırlar.

Kopula ile konumsal dağılımın tahmininde Eliptik ailesi üyesi olan Gauss Kopulası kullanılır. Buna ilişkin ayrıntılı açıklama bölüm 2.6'da verilmektedir. Bu nedenle bu bölümde sadece Gauss kopulası üzerinde durulmuştur.

2.4. Gauss Kopulası

Gauss kopulası, adından da anlaşıldığı gibi gauss dağılımından türetilen bir kopula türüdür. Çok değişkenli normal dağılımın n boyutlu gerçekte uza da olasılık integral dönüşümü altında türetilmiştir ve en sık kullanılan kopula türüdür. Birim hiperküpde $[0, 1]$ aralığında değerler alır. Büyük ölçüde korelasyon matrisi ile karakterize edilir.

R , N boyutlu uza da tanımlanmış bir korelasyon matrisi olsun. Bu durumda kopula fonksiyonu Eşitlik 2.12'deki gibi tanımlanır.

$$C_R(z) = \Phi_R \left[\Phi^{-1}(z_1), \Phi^{-1}(z_2), \dots, \Phi^{-1}(z_n) \right] \quad (2.12)$$

Eşitlik 2.12'de Φ_R , çok değişkenli standart normal dağılımı, Φ^{-1} standart normal dağılımın tersini, ifade etmektedir.

Gauss kopulasından Gauss kopula yoğunluk fonksiyonu, tüm değişkenlere göre kısmi türevinin alınmasıyla elde edilir.

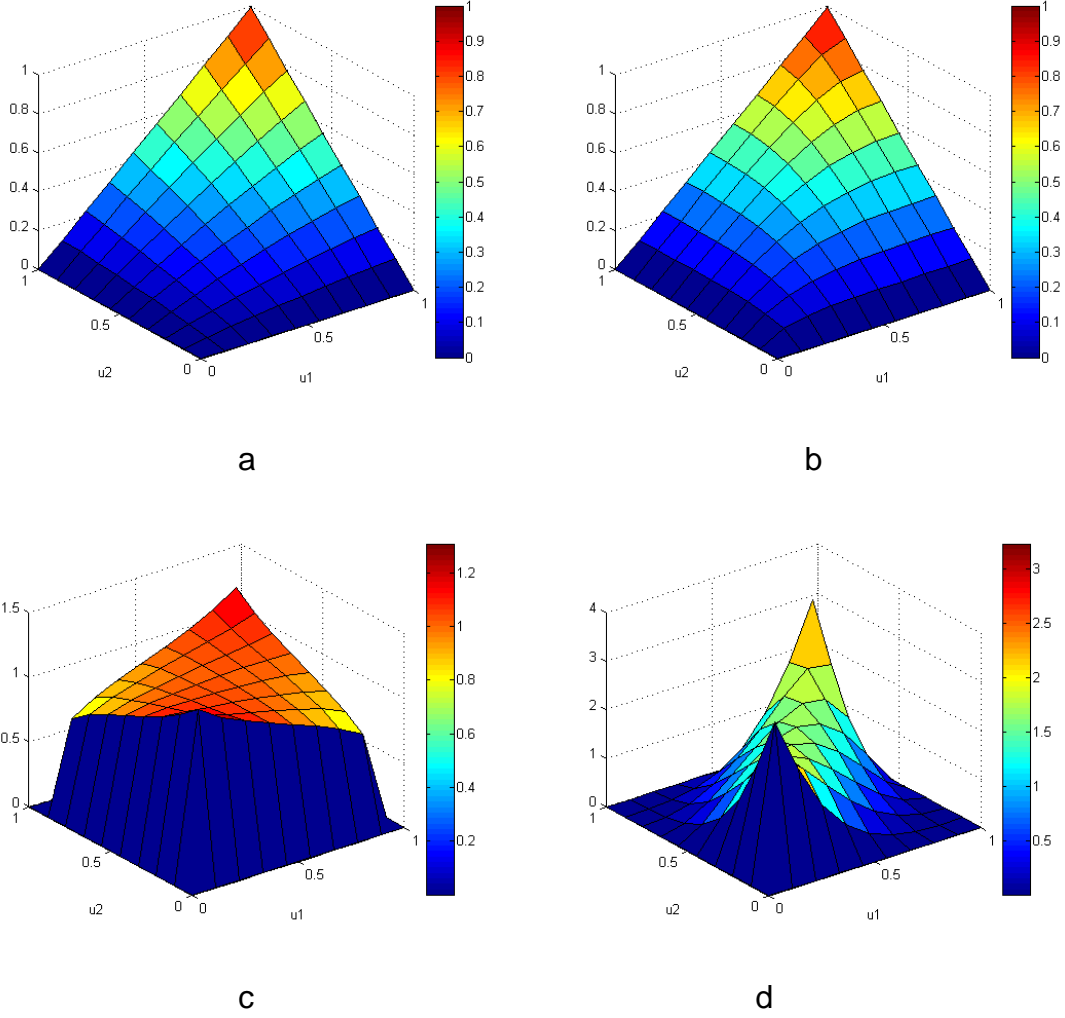
$$c_R(u) = \frac{\partial^n C(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial u_1 \partial u_2 \dots \partial u_n} \quad (2.13)$$

Eşitlik 2.13'da Gauss kopula yoğunluk fonksiyonunun kapalı hali gösterilmiştir. Açık hali ise Eşitlik 2.14'de verilmiştir.

$$c_R(u) = \frac{1}{\sqrt{|R|}} \exp \left(-\frac{1}{2} * \begin{pmatrix} \Phi^{-1}(u_1) \\ \Phi^{-1}(u_2) \\ \vdots \\ \Phi^{-1}(u_n) \end{pmatrix}^T * (R^{-1} - I) * \begin{pmatrix} \Phi^{-1}(u_1) \\ \Phi^{-1}(u_2) \\ \vdots \\ \Phi^{-1}(u_n) \end{pmatrix} \right) \quad (2.14)$$

Eşitlik 2.14'de $|R|$ korelasyon matrisinin determinanı, I ise boyutları korelasyon matrisi ile aynı olan birim matrisdir. T ise vektörün evriğini (transpozunu) göstermektedir.

Şekil 2.2'de iki değişkenli kopula fonksiyonları ile kopula yoğunluk fonksiyonları gösterilmiştir. Değişkenler arasındaki korelasyon değerleri sırasıyla 0,2 ve 0,8'dir. Şekil 2.2 a,b kopula fonksiyonu iken, Şekil 2.2 c,d ise bu fonksiyonlara ait kopula yoğunluk fonksiyonlarını göstermektedir.



Şekil 2.2 Korelasyonları 0,2 ve 0,8 olan gauss kopulaları ve yoğunluk fonksiyonları

Ayrıca koşullu kopula fonksiyonu Eşitlik 2.15'deki gibi hesaplanabilir.

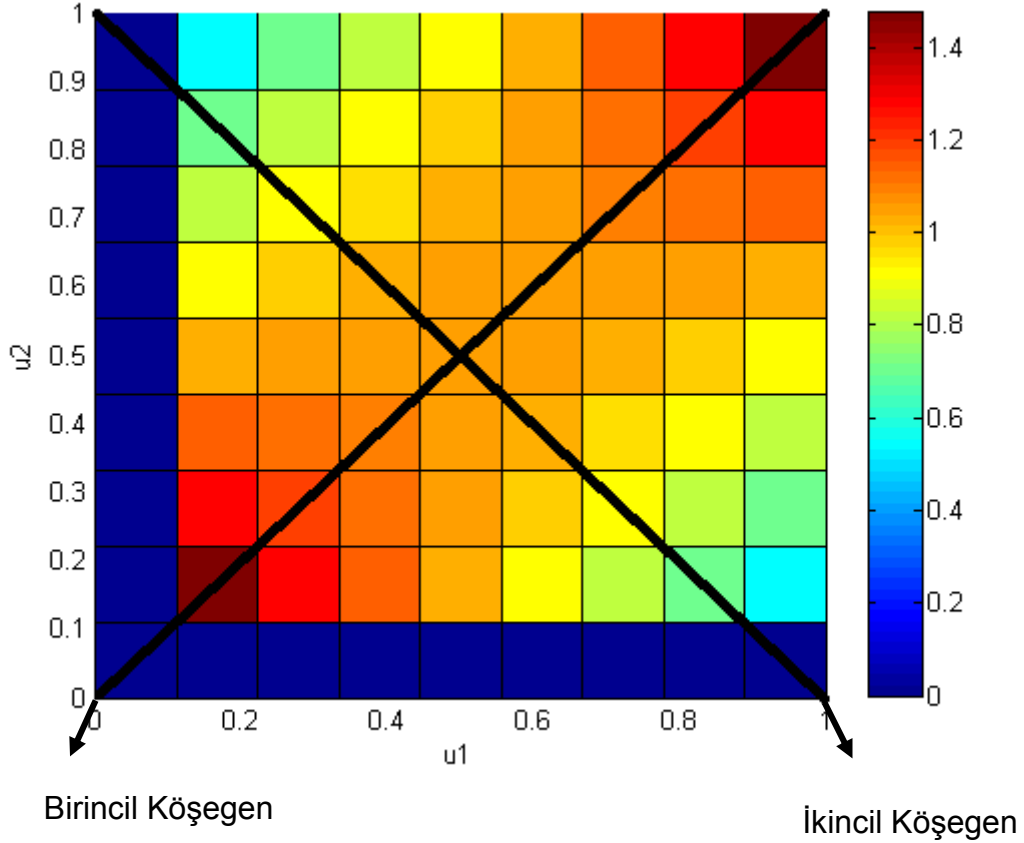
$$C(u|U_1 = u_1, U_2 = u_2, \dots, U_n = u_n) = \frac{\partial^n C(u, u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial u_1, u_2, \dots, u_n} * \frac{1}{c(u_1, u_2, \dots, u_n)} \quad (2.15)$$

Çift değişkenli bir kopula birincil köşegene göre simetrikse Eşitlik 2.16, ikincil köşegene göre simetrikse Eşitlik 2.17 sağlanır.

$$C(u, v) = C(1-u, 1-v) - 1 + u + v \quad (2.16)$$

$$C(u, v) = C(1 - u, 1 - v) \quad (2.17)$$

Bu durumda Gauss Kopula Eşitlik 2.16 ve Eşitlik 2.17'yi sağladığı için birincil ve ikincil köşegene göre simetriktir. Şekil 2.3'de örnek olarak bir Gauss kopulasının yoğunluk fonksiyonu gösterilmiştir.



Şekil 2.3 İki değişkenli bir kopulanın birincil ve ikincil köşegenleri

2.5. Deneysel Kopula

Çok değişkenli veriler arasındaki ilişkiyi ortaya koymada kopulanın kullanılabilmesi için deneysel kopulanın hesaplanması gerekir. (Z_1, Z_2, \dots, Z_n) için gerçek kopula fonksiyonu Eşitlik 2.18'deki gibi olması gerekir.

$$(U_1, U_2, \dots, U_n) = (F_1(Z_1), F_2(Z_2), \dots, F(Z_n)) \quad (2.18)$$

Ancak F marjinal dağılımları genelde bilinmez bu nedenle, Eşitlik 2.19'da gösterildiği gibi empirik (görgül) dağılım fonksiyonu F bulunarak deneysel kopula hesaplanabilir.

$$F(z) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1(Z \leq z_i) \quad (2.19)$$

İki değişkenli bir veri kümesinin deneysel kopulasının hesabına ilişkin bir örnek aşağıda verilmiştir.

X ve Y değişkenleri 10 adet veri içermektedir ve bu değerler Çizelge 2.1'de gösterilmiştir. Verilerin $C(0.6,0.3)$ değeri hesaplanmak istenmektedir.

Çizelge 2.1 X ve Y değişkenleri

X	26	18	35	36	70	8	12	17	2	30
Y	13	36	21	25	15	27	1	12	18	20

Öncelikle her iki değişkendeki verilerin sıra değerlerinin bulunması gerekir. Verilerin sıra değerleri Çizelge 2.2'de gösterilmiştir.

Çizelge 2.2 Verilerin sıra değerleri

X	6	5	8	9	10	2	3	4	1	7
Y	3	10	7	8	4	9	1	2	5	6

Elde edilen sıra değerleri veri sayısına bölünerek kopula uzayına dönüştürülür. Çizelge 2.3'de verilerin kopula uzayındaki değerleri gösterilmiştir.

Çizelge 2.3 Kopula uzayında değerler

X	0,6	0,5	0,8	0,9	1	0,2	0,3	0,4	0,1	0,7
Y	0,3	1,0	0,7	0,8	0,4	0,9	0,1	0,2	0,5	0,6

$C(0.6,0.3)$ hesaplanmak istendiğinden X ve Y değerlerinin sırasıyla 0,6 ve 0,3'e göre küçük ya da eşit olma durumuna göre 0 ve 1 olarak kodlanır. Veriler kopulası hesaplanmak istenen değere eşit ya da küçük ise 1 değerini alırken diğer durumda 0 değerini alır. Kodlama sonucu elde edilen ikili (indikatör) değerler Çizelge 2.4'de gösterilmiştir.

Çizelge 2.4 Kodlama sonucu elde edilen ikili değerler

X	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0
Y	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0

Daha sonra her iki veri kümesinde de 1 değerine sahip olan veriler sayılır. Bu örnek için toplamda 3 tane veri çiftine rastlanmıştır. Elde edilen bu değerlerin veri sayısına bölünmesi ile verinin kopula değeri olan 0,3 elde edilir. Bu durumu özetlemek gerekirse; iki değişkenli veri kümesinde ilk değişkenin 26 ya eşit ya da küçük olması ile ikinci değişkenin 13'e eşit ya da düşük olması ortak olasılığı 0,3'dür. Tüm değerler için yukarıdaki adımların tekrar edilmesi ile deneysel kopula değerleri hesaplanmış olur.

2.6. Uzaklığa Bağlı Kopula

Maden yataklarının değerlendirilmesinde alt ısı değer, tenör ve kalınlık gibi değişkenler temel olarak belirli bir bölgeye göre değer alırlar ve konumları en az bir değer ile ifade edilir. Bu özelliklere sahip değişkenler bölgesel değişken olarak tanımlanır. Bölgesel değişkenin aldığı değer yalnızca örneklem yapılan noktalarda

bellidir. Örneklem yapılmamış noktalarda ise bölgesel değişkenin aldığı değerin tahmin edilmesi gerekir. Bölgesel değişkenin aldığı değerin tahmin edilmesi işlemi “kestirim” olarak adlandırılır. Bölgesel değişkenlerin arasındaki değer ilişkisinin konumuna bağlı olmaksızın yalnızca aralarındaki uzaklığa bağlı olması durumu “durağanlık” olarak adlandırılır [20], [21] .

Kopulalar, konumsal kestirimde kullanılacak şekilde türetilmemişlerdir. Kopulalarının bu amaçla kullanılabilmesi için bazı varsayımlarda bulunmak gerekir. Geleneksel jeostatistikte olduğu gibi durağanlık varsayımı uzaklığa bağlı kopulada da geçerlidir. Jeostatistikte, durağanlık varsayımına göre veri çiftlerinin ortalamaları ve varyansları konumdan bağımsız olmak koşulu ile saha genelinde değişmemektedir.

Bir kopulanın konumsal kestirimde kullanılabilmesi için çok boyutlu kopula modelinin iki boyutlu kopula modelinden türetilbilir olması gerekir. Maden kaynak kestirimde kullanılacak olan kopulaların Eşitlik 2.17’de gösterildiği gibi ikincil köşegene göre simetrik olması gerekir. Bunun sebebi belirli bir uzaklıkta elde edilen veri çiftleri (z_1, z_2) sıralarının değişmesi (z_2, z_1) aynı olasılık uzayına denk gelmesidir. Kopula modelinin parametrelerinden herhangi birisi uzaklığa bağlı olarak elde edilebilir olmalıdır. Son olarak uzaklık arttıkça kopula değerinin düşmesi gerekir.

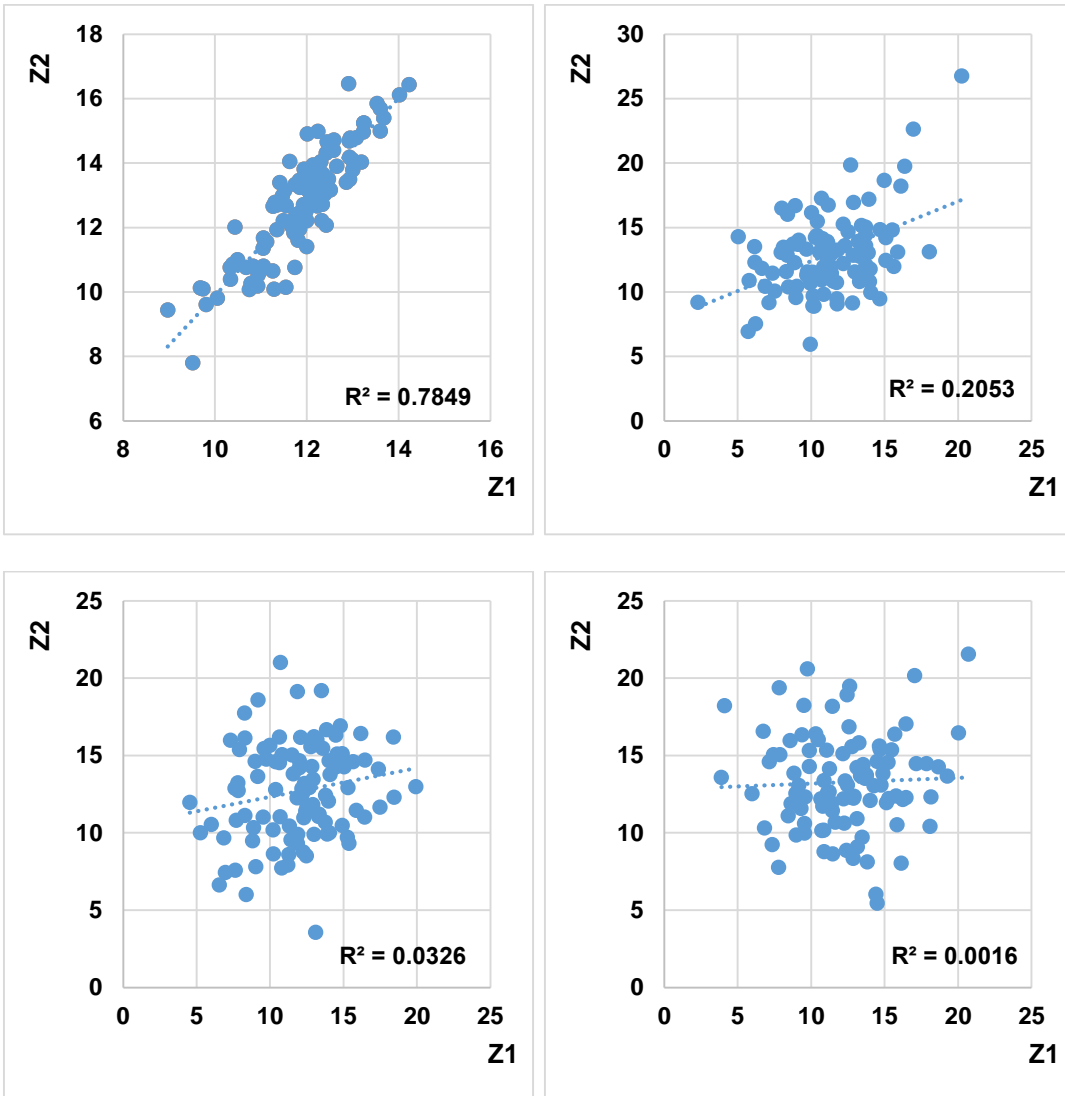
Bölüm 2.3’de belirtildiği gibi bir çok kopula ailesi mevcuttur ancak bu aileler yukarıda belirtilen özelliklere sahip olmadıklarından uzaklığa bağlı ilişkiyi ortaya koymada başarısızdır. Örneğin Eyraud–Farlie–Gumbel–Morgenstern ailesi veri sayısı arttıkça veriler arasındaki korelasyon sıfıra yaklaştığından uzaklığa bağlı ilişkiyi ortaya koyamazlar. Benzer şekilde Arşimet ailesinin birçok türü uzaklığa bağlı ilişkinin tanımlanmasını sağlayan parametre içermez [12].

2.7. Korelogram

Korelogram, variogram ve kovaryans gibi uzaklığa bağlı ilişkiyi ortaya koyan fonksiyonlardır. Kopula ile kestirim ve benzetimde korelogram fonksiyonundan faydalanılır. Korelogramlar belirli uzaklıklardaki korelasyon değerlerinden oluşur.

2.7.1. Korelasyon

Korelasyon, rastlantı değişkenleri arasındaki doğrusal ilişkiyi ortaya koymaya yarayan bir araçtır. Değişkenler arasındaki doğrusal ilişkinin değeri “korelasyon katsayısı” olarak ifade edilir. Korelasyon katsayısı +1 ile -1 arasında değerler alır. İki değişkenli bir veri kümesi için; korelasyon katsayısı +1 ise değişkenler aynı oranlarda artar ya da azalır. Korelasyon katsayısı -1 ise değişkenlerden birisi artarken diğeri, aynı oranda azalır. Korelasyon katsayısının “0” (sıfır) olması ise değişkenler arasında doğrusal bir ilişkinin olmadığı anlamına gelir. Ancak değişkenlerin ilişkisiz olması, bağımsız oldukları anlamına gelmez. Şekil 2.4’de iki değişkenli veri kümeleri ve aralarındaki korelasyon katsayıları gösterilmiştir.



Şekil 2.4 İki değişkenli veri kümeleri ve korelasyonları

Korelasyon katsayısının hesabı için birçok yöntem geliştirilmiştir. Bu yöntemlerden en sık kullanılanları “Pearson korelasyon katsayısı” ve “Spearman korelasyon katsayısı” yöntemleridir.

Pearson korelasyon katsayısı değişkenler arasındaki kovaryans değerinin, değişkenlerin standart sapma değerlerine bölünmesi ile elde edilir.

Pearson korelasyon katsayısı matematiksel olarak;

$$R_{x,y} = \frac{Kov(X,Y)}{\sigma_x * \sigma_y} = \frac{E((X - \mu_x) * (Y - \mu_y))}{\sigma_x * \sigma_y} \quad (2.20)$$

şeklinde hesaplanır.

Eşitlik 2.20’de;

$R_{x,y}$ **X** ve **Y** değişkenleri arasındaki korelasyon katsayısı,

$Kov(X, Y)$, **X** ve **Y** değişkenleri arasındaki kovaryansı,

μ_x, μ_y , sırasıyla **X** ve **Y** değerlerinin ortalamasını

σ_x ve σ_y sırası ile **X** ve **Y** değişkenlerinin standart sapması ve

$E(.)$ ise beklenen değer işlemcisini göstermektedir.

Pearson korelasyon katsayısı doğrusal olan ilişkileri ortaya koyar. Ancak doğrusal olmayan monotonik ilişkileri ortaya koymada yetersizdir. Bu nedenle Spearman korelasyonu gibi farklı bir korelasyon hesaplama yöntemi geliştirilmiştir.

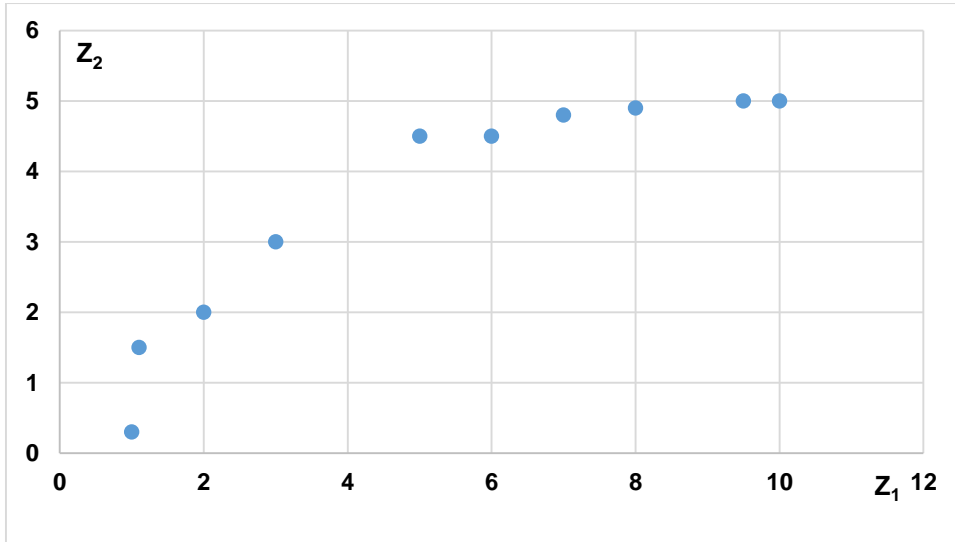
Spearman korelasyon katsayısı, değişkenler arasında herhangi bir varsayımda bulunmaz. Ancak veriler arasındaki ilişkinin monotonik bir şekilde ne kadar açıklanabileceğini ortaya koyar. Aslında Spearman korelasyon katsayısı, Pearson korelasyon katsayısı hesaplama yönteminin özel halidir. Spearman korelasyon katsayısını hesaplamak için öncelikle veriler küçükten büyüğe doğru sıralanır. Sıralanan verilerin sıra değerleri bulunur. Eğer tekrar eden veriler var ise bu veriler aynı sıra değerini alır. Daha sonra korelasyon katsayısı Pearson katsayısının

hesaplandığı gibi hesaplanır. İki değişkenli bir veri kümesi için Pearson ve Spearman katsayılarının hesabı aşağıda gösterilmiştir.

Her biri on tane veriden oluşan iki değişken Çizelge 2.5'de ve verilerin saçılım diyagramı ise Şekil 2.5'de gösterilmiştir.

Çizelge 2.5 İki değişkene ait veriler

Z ₁	1,0	3,0	7,0	9,5	1,1	6,0	2,0	10	8,0	5,0
Z ₂	0,3	3,0	4,8	5,0	1,5	4,5	2,0	5,0	4,9	4,5



Şekil 2.5 Z₁ ve Z₂ değerlerin saçılım diyagramı

Pearson katsayısı hesabı için öncelikle verilerin ortalamaları ve standart sapmaları hesaplanır. Z₁ ve Z₂ değişkenlerinin sırası ile ortalamaları 5,26 ve 3,55 standart sapmaları ise 3,38 ve 1,73 dür. Verilerin kovaryans değeri ise 5,36 olarak hesaplanır. Bu değerler Eşitlik 2.21'deki formülde yerine konduğunda

$$R_{x,y} = \frac{Kov(X,Y)}{\sigma_x * \sigma_y} = \frac{5,36}{3,38 * 1,73} = \frac{5,36}{5,85} = 0,92 \quad (2.21)$$

şeklinde elde edilir. Spearman korelasyon katsayısı için öncelikle veriler küçükten büyüğe doğru sıralanır. Sıralı veriler Çizelge 2.6'da gösterilmiştir.

Çizelge 2.6 Verilerin küçükten büyüğe doğru sıralanmış hali

Z₁	1,0	1,1	2,0	3,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,5	10,0
Z₂	0,3	1,5	2,0	3,0	4,5	4,5	4,8	4,9	5,0	5,0

Daha sonra verilerin sıralı değerleri bulunur. Çizelge 2.7’de verilerin sıra değerleri gösterilmiştir.

Çizelge 2.7 Sıralanmış verilerin sıra değerleri

Z₁	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Z₂	1	2	3	4	5,5	5,5	7	8	9,5	9,5

Sıra değerlerinde görüldüğü gibi aynı değerlere sahip veriler aynı sıraları paylaşmaktadır. Son olarak Çizelge 2.8’da ham veriler ve bu verilere karşılık gelen sıra değerleri birlikte verilmiştir.

Çizelge 2.8 Ham veriler ile ham verilerin sıralama değerlerinin birlikte hali

Ham Veriler	X	1,0	3,0	7,0	9,5	1,1	6,0	2,0	10	8,0	5,0
	Y	0,3	3,0	4,8	5,0	1,5	4,5	2,0	5,0	4,9	4,5
Ham Verilerin Sıralama değerleri	X	1	4	7	9	2	6	3	10	8	5
	Y	1	4	7	9,5	2	5,5	3	9,5	8	5,5

Spearman korelasyon katsayısı ham verilerin sıralama değerleri üzerinden hesaplanmaktadır. Bu durumda, X ve Y değerlerinin sıralama değerlerinin ortalaması her iki değişken için 5,5’dir ve yine sırası ile standart sapmalar ise 3,03 ve 3,00 dır. Sıralama değerleri arasındaki kovaryans değeri ise 9,06 dır. Bu durumda eşitlik ;

$$R_{x,y} = \frac{Kov(X,Y)}{\sigma_x * \sigma_y} = \frac{9,06}{3,03 * 3,00} = \frac{9,06}{9,09} = 0,99 \quad (2.22)$$

şeklinde hesaplanır.

Görüldüğü gibi aynı veri kümesi için Pearson korelasyon katsayısı 0,92 iken Spearman korelasyon katsayısı 0,99 olarak bulunmuştur. Her iki yöntem de veriler arasında güçlü bir pozitif korelasyonun olduğunu göstermektedir. Ancak aralarındaki farklılık Spearman korelasyon katsayısının monotoniklik özelliğinden gelmektedir. Dolayısı ile veriler arasındaki süreksizliklerden ve aykırı değerlerden Spearman korelasyon katsayısı, Pearson korelasyon katsayısına göre daha az etkilenmektedir. Bu durumda Spearman korelasyon katsayısının daha dirençli (robust) olduğu söylenebilir. Bu nedenle bu tezde korelasyon katsayı hesabında Spearman korelasyon katsayısı kullanılmıştır ve “korelasyon” Spearman korelasyon katsayısı ifade edilmektedir.

2.7.2. Korelogram Değeri

Korelogram değeri matematiksel olarak;

$$R(h) = \frac{Kov[Z(x_i), Z(x_i + h)]}{\sigma[Z(x_i)] * \sigma[Z(x_i + h)]} \quad (2.23)$$

olarak hesaplanır. Eşitlik 2.23’de

$R(h)$; h uzaklıktaki korelogram değerini,

$Z(x_i)$, x noktasında veri değerini,

$Z(x_{i+h})$, x_i+h verinin değerini,

$Kov(.)$, kovaryans işlemcisi,

$\sigma(.)$, standart sapma işlemcisini göstermektedir.

Eşitlik 2.24’de gösterildiği gibi korelogram simetrik bir fonksiyondur ve +1 ile -1 arasında değer alır.

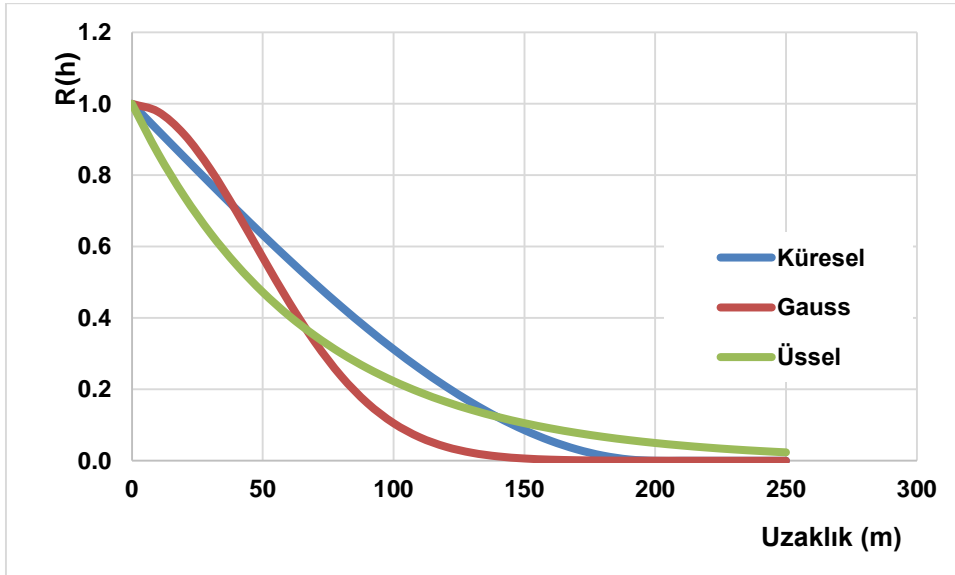
$$R(h) \in [+1, -1] \text{ olmak üzere } R(h) = R(-h) \quad (2.24)$$

Korelogramlar ayrıca artmayan fonksiyonlardır. Diğer bir ifade ile “korelogram değeri” uzun mesafedeki korelogram değerine göre ya eşittir ya da yüksektir. Bu durum Tobler’in “Coğrafyanın birinci kuralı”na uymaktadır. Tobler’e göre; “Her

nesne, diğer nesnelere ile ilişkilidir ancak yakın nesnelere birbirleri ile daha çok ilişkili” ‘dir [22]. Bu durumda birbirlerine yakın olan değerler arasında korelasyon yüksek iken, uzaklık arttıkça korelasyon değeri hiç değişmeyecek ya da düşecektir. Bu nedenle korelogram modelinin artmayan bir fonksiyon olması gerekir.

Ayrıca korelogram fonksiyonu, orijindeki süreksizlik dışında, sürekli bir fonksiyon olması gerekir.

Korelogramların kestirim ve benzetim amaçlı olarak kullanılabilmesi için tüm uzaklıklarda bilinmesi gerekir. Ancak madencilik uygulamalarında veri toplama işlemi uzun zaman alan ve masraflı bir işlem olduğu için tüm uzaklıklarda verilerin elde edilmesi imkânsızdır. Bu nedenle veri olmayan uzaklıklarda korelogram değerlerinin tahmin edilmesi gerekir. Bu amaçla mevcut veriler kullanılarak belirli aralıklarda deneysel korelogram değerleri hesaplanmalı ve bunlara korelogram modeli uyarlanmalıdır. Uyarlanan korelogram modeli gelişigüzel bir şekilde seçilemez. Uyarlanacak olan korelogram modeli yukarıda değinilen, simetrik, artmayan ve süreklilik özelliklerine sahip olmalıdır. Bu nedenle yukarıda değinilen özelliklere sahip olan korelogram modelleri türetilmiştir. Bu modellerden sıklıkla kullanılanları, Küresel, Gauss ve Üssel modeldir. Şekil 2.5’de yapısal uzaklıkları 200 m olan Küresel, Gauss ve Üssel modeller bir arada gösterilmiştir.



Şekil 2.5 Küresel, Gauss ve Üssel korelogram modelleri

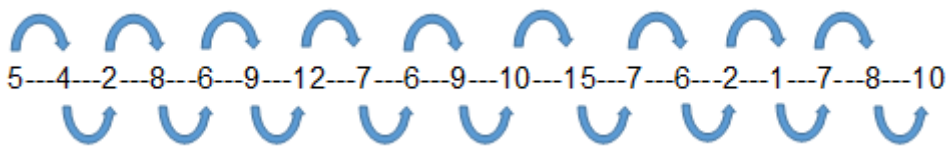
2.7.3. Deneysel Korelogramın Hesaplanması

Korelogram, aralarında belirli uzaklık bulunan veri kümelerinin korelasyon değerlerinin bulunması ile elde edilen değerleri gösteren bir araç olup uzaklığa bağlı ilişkiyi ortaya koymak amacıyla kullanılır. Korelogramın X ekseninde uzaklık değerleri bulunurken, Y ekseninde aralarında h kadar uzaklık bulunan veri kümelerinin korelasyon değerleri bulunur. Deneysel korelogramlar, kestirim ve benzetimde kullanılacak olan korelogram modelinin belirlenmesi için hesaplanır.

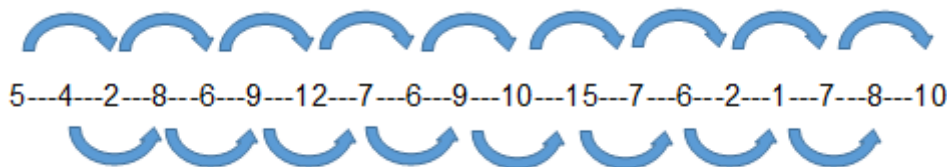
Deneysel korelogramın hesaplanması örneklerin alınma düzenine ve saçılışına göre farklılık gösterir. Eğer veriler çok düzenli bir şekilde toplanmış ise Eşitlik 2.23'de gösterilen formül kullanılabilir. Düzenli aralıklarda toplanmış bir boyutlu bir veri kümesinde hesaplanan deneysel korelogram değerine ilişkin bir örnek aşağıda sunulmuştur.

Bu örnekte aralarında 1'er metre(m) uzaklık bulunan veriler gösterilmiş ve verilerin sırasıyla 1, 2 ve 3 m'deki deneysel korelogram değerleri hesaplanmıştır. Bu amaçla öncelikle aralarında 1, 2 ve 3 m uzaklık bulunan veri çiftleri belirlenmiştir. Veri çiftlerinin belirlenmesinden sonra bu çiftlerin oluşturduğu yeni veri kümesinin korelasyon değeri hesaplanmıştır. Belirlenen tüm uzaklıklar için korelasyon değerleri hesaplanmış ve korelogram elde edilmiştir. Şekil 2.6'da aralarında 1, 2 ve 3 m bulunan veri kümesi gösterilmiştir.

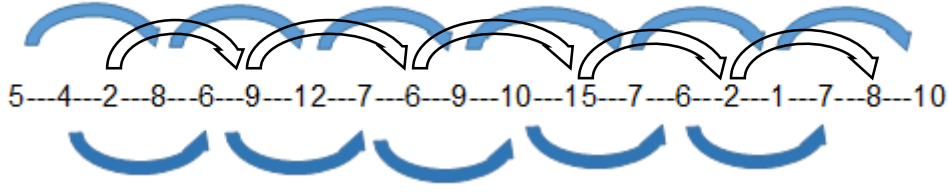
Aralarında 1 m olan veri çiftleri



Aralarında 2 m olan veri çiftleri



Aralarında 3 m olan veri çiftlerinin belirlenmesi



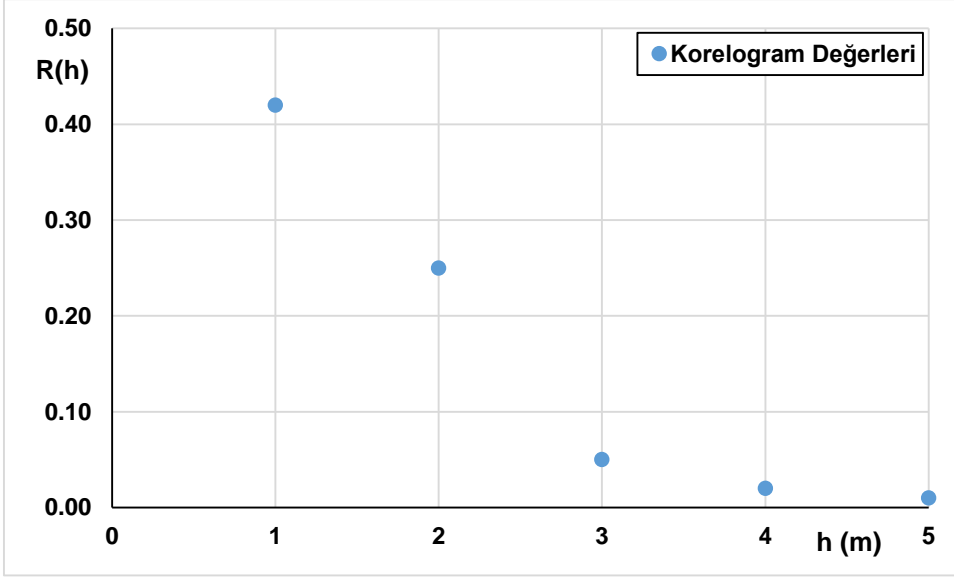
Şekil 2.6 Aralarından 1, 2 ve 3 m bulunan veri çiftlerinin belirlenmesi

Bu durumda 1, 2 ve 3 m için oluşan veri çiftleri Çizelge 2.9'da gösterilmiştir.

Çizelge 2.9 Aralarında 1, 2 ve 3 metre uzaklık bulunan veri çiftleri

1 m için veri çiftleri		2 m için veri çiftleri		3m için veri çiftleri	
5-4	9-10	5-2	4-8	5-8	15-2
4-2	10-15	2-6	8-9	8-12	2-8
2-8	15-7	6-12	9-7	12-9	4-6
8-6	7-6	12-6	7-9	9-7	6-7
6-9	6-2	6-10	9-15	7-1	7-10
9-12	2-1	10-7	15-6	1-10	10-6
12-7	1-7	7-2	6-1	2-9	6-7
7-6	7-8	2-7	1-8	9-6	
6-9	8-10	7-10		6-15	

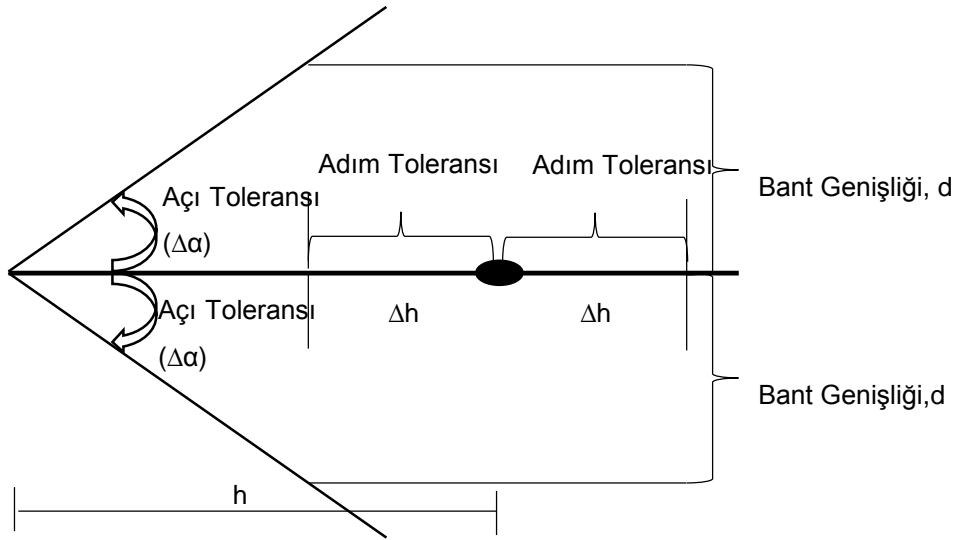
Dört ve 5 m uzaklıkları içinde korelogram değerleri hesaplandığında elde edilen korelogram grafiği Şekil 2.7'de gösterilmiştir.



Şekil 2.7 Deneysel korelogram

Şekil 2.7'de görüldüğü gibi 3 m'den sonra veriler arasındaki korelogram değeri sıfıra yaklaşmaktadır.

Yukarıdaki örnekte veriler düzenli olarak toplanmıştı ancak madencilikte veriler genellikle düzenli aralıklarda toplanmaz, bu nedenle deneysel korelogram hesaplanmasında özel yöntemlerin kullanılması gerekmektedir. Bunun için açılı toleransı, adım toleransı ve bant genişliği gibi yeni kavramlara ihtiyaç vardır. Bu kavramlar Şekil 2.8'de gösterilmiştir.



Şekil 2.8 Açı toleransı, adım toleransı ve bant genişliği

Açı toleransı; yönsel korelogram hesabında belirlenen bir α açısı için bu açığa atanan $\pm \Delta\alpha$ toleransıdır. Bu durumda oluşan yeni açı $\alpha \pm \Delta\alpha$ 'dir. Eğer belirlenen yeni açı $\alpha \pm \Delta\alpha$ içine düşen bir veri var ise bu veri korelogram hesabına katılır. Adım toleransı ise belirlenen h uzaklığına veri düşmediği takdirde, $\pm \Delta h$ kadar bir tolerans tanımlanır ve $h \pm \Delta h$ uzaklığına düşen bir veri varsa bu veri, korelogram hesabına katılır. Son olarak, açı toleransı çok büyük uzunluklarda hedeflenen verinin çok uzağındaki verileri de kapsayacak şekilde doğrusal bir şekilde genişlemektedir. Bu durum hedef noktaya çok uzak olan verilerinde korelogram hesabına katılmasına neden olup, gerçekçi olmayan korelogram sonuçlarının elde edilmesine yol açar. Bu durumda açı toleransının da kısıtlanması için bant genişliği kavramına ihtiyaç duyulmaktadır. Bant genişliği, korelogram hesap eksenine uzaklığı d kadar olan uzaklık olarak tanımlanır ve bu uzaklığın dışına çıkan veriler korelogram hesabına katılmaz. Bu durumda korelogram hesabına katılan veri sayısı makul bir şekilde artırılmış olup verinin düzensiz bir şekilde toplanmasından kaynaklanan güçlükler ortadan kaldırılmış olur.

2.7.4. Korelogram modelleri

3 boyutlu uzayda çok farklı yapısal ilişki ile karşılaşılabileceği için birçok korelogram modeli geliştirilmiştir. Bu modellerden bazıları, Küresel, Gauss ve Üssel'dir [23]. Bu

modellerin ortak yanı belirli bir uzaklıktan sonra veriler arasındaki korelasyonun ortadan kalkmasıdır. Korelasyonun ortadan kalktığı uzaklık yapısal uzaklık olarak adlandırılır.

Küresel Model: Uzaklığa bağlı ilişkiyi ortaya koymada en sık kullanılan korelogram modelidir. Matematiksel olarak Eşitlik 2.25'de gösterilmiştir.

$$R(h;a) = \begin{cases} 1 - \frac{3h}{2a} + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{a} \right)^3, & \text{eger } h \leq a \\ 0, & \text{eger } h > a \end{cases} \quad (2.25)$$

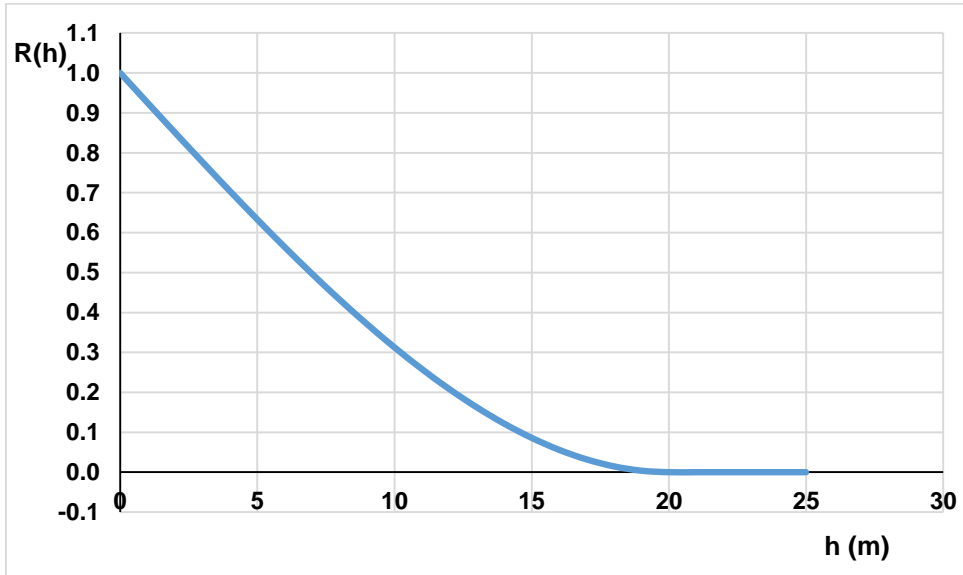
Eşitlik 2.25'de

a, yapısal uzaklığı

h, korelogram değerinin hesaplanacağı uzaklık

$R(h;a)$, **a** yapısal uzaklığa sahip olan küresel bir modelin **h** uzaklığındaki değerini ifade eder.

Yapısal uzaklığı 20 m olan bir küresel korelogram modeli Şekil 2.9'da gösterilmiştir.



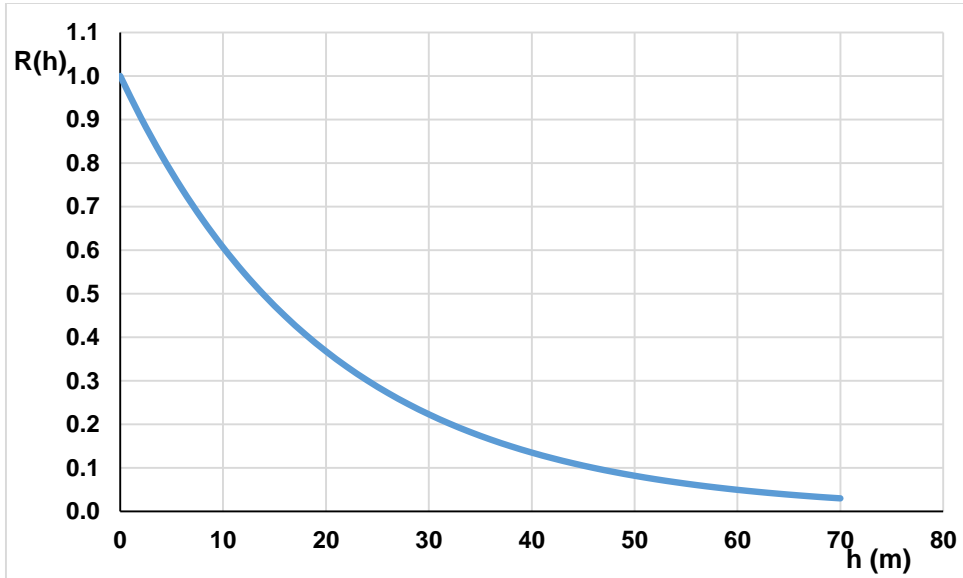
Şekil 2.9 Küresel korelogram modeli

Gauss Model: Korelogram fonksiyonu matematiksel olarak Eşitli 2.26'da gösterilmiştir.

$$R(h;a) = \exp\left(-\left(\frac{h}{l}\right)^2\right) \quad (2.26)$$

Bu modelde yapısal uzaklık yaklaşık olarak 3l kadardır.

Yapısal uzaklığı 20'm olan bir Gauss korelogram modeli Şekil 2.10'da gösterilmiştir.



Şekil 2.10 Gauss korelogram modeli

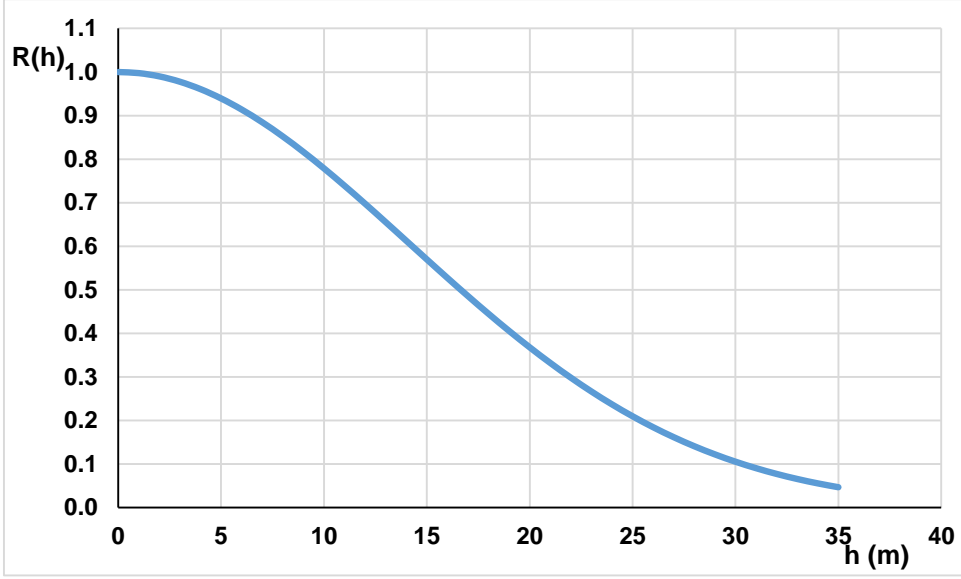
Üssel Model: Korelogram fonksiyonu matematiksel olarak Eşitlik 2.27'da gösterilmiştir.

$$R(h;a) = \exp\left(-\left(\frac{h}{l}\right)\right) \quad (2.27)$$

Eşitlik 2.27'de;

exp; üstel değeri ifade etmektedir. Yapısal uzaklık yaklaşık olarak 7l/3 kadardır.

Yapısal uzaklığı 20 m olan bir üssel korelogram modeli Şekil 2.11'da gösterilmiştir.



Şekil 2.11 Üssel korelogram modeli

Külçe Etki Modeli: Külçe etki modeli korelogramda tek başına rastlanmamaktadır. Ancak diğer modeller ile birlikte kullanıldığında gözlenmektedir. Külçe etki modeli, kendisini orijinde süreksizlik olarak gösterir. Yani külçe etki modeli bir yapıda sıfıra yakın uzaklıktaki korelogram değeridir.

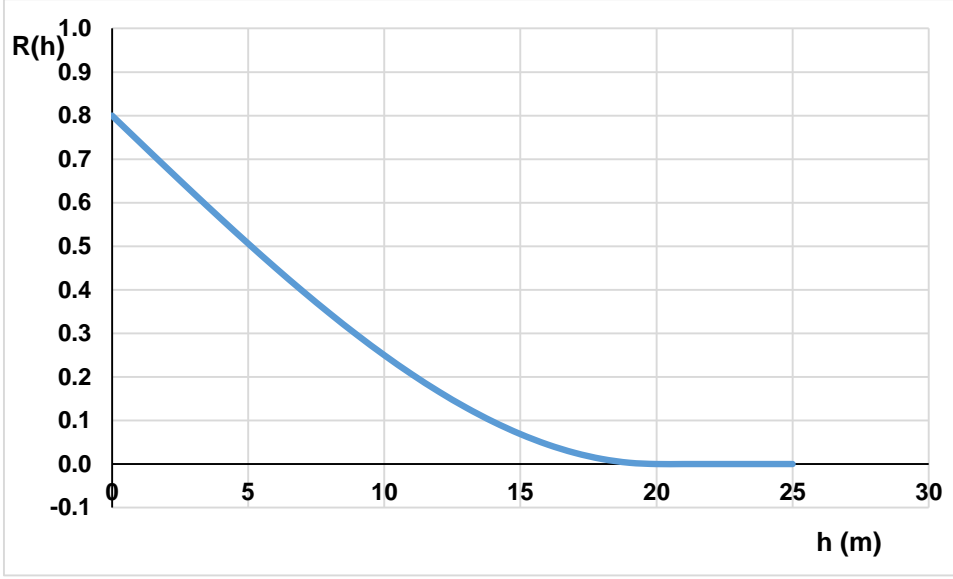
Yuvalı yapı: Yuvalı yapı külçe etkisi modeli ile yukarıda bahsedilen diğer modellerin bir araya gelmesi ile elde edilir. Bu nedenle korelogram değeri sıfır noktasında 1'in altında bir değer sahiptir.

Örneğin külçe etki ve Gauss modelinin toplamından ibaret yuvalı yapı modeli Eşitlik 2.28'de gösterilmiştir.

$$R(h;a) = \begin{cases} (1 - C_0) * \left(1 - \frac{3h}{2a} + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{a} \right)^3 \right), & \text{eger } h \leq a \\ 0, & \text{eger } h > a \end{cases} \quad (2.28)$$

Eşitlik 2.28'de C_0 külçe etki değerini ifade etmektedir.

Yapısal uzaklığı 20 m, külçe etkisi de 0,2 olan bir Gauss modeli Şekil 2.12'de gösterilmiştir.



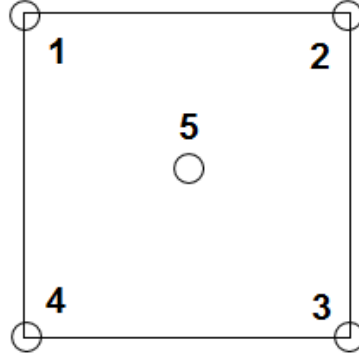
Şekil 2.12 Yuvalı yapıya sahip bir korelogram modeli

Deneysel korelogramdan uyarlanarak elde edilen korelogram modeli uzaklığa bağlı korelasyon matrisinin oluşturulmasında kullanılır.

2.7.5. Uzaklığa Bağlı Korelasyon Matrisi

Uzaklığa bağlı korelogram modelinin elde edilmesi ile, kopula modelinin uyarlanmasında kullanılacak olan korelasyon matrisi uzaklığın bir fonksiyonu olarak oluşturulabilir. Korelogram modeli uyarlanarak oluşturulan matris, kopula modeline uzaklığa bağlı fonksiyon olarak bütünleştirilebilir. Uzaklığa bağlı korelasyon matrisinin elde edilebilmesi için öncelikle veriler arasındaki tüm uzaklıkları içeren bir uzaklık matrisi elde edilmeli ve mevcut uzaklık değerleri, önceden uyarlanan korelogram modeli kullanılarak matris haline dönüştürülmelidir.

Örneğin Şekil 2.13'de gösterilen kenarları 10 m olan bir karenin dört köşesi ve orta noktalarından ibaret beş noktanın korelasyon matrisi hesaplanmak istensin. Ayrıca verilerin 20 m'lik yapısal uzaklık ile küresel korelograma sahip olduğunu varsayalım.



Şekil 2.13 Verilerin konumları

Öncelikle veriler arasındaki mümkün bütün uzaklıkları matris formunda ifade edilir.

$$\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} & h_{15} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} & h_{25} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} & h_{35} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} & h_{44} & h_{45} \\ h_{51} & h_{52} & h_{53} & h_{54} & h_{55} \end{pmatrix}$$

Burada h ve alt indisler belirlenen noktalar arasındaki uzaklıkları göstermektedir. Örneğin $h_{1,2}$; birinci ve ikinci nokta arasındaki uzaklığı göstermektedir. Bu durumda oluşan uzaklık matrisi aşağıda gösterilmiştir.

$$\begin{pmatrix} 0 & 10 & 10\sqrt{2} & 10 & 5\sqrt{2} \\ 10 & 0 & 10 & 10\sqrt{2} & 5\sqrt{2} \\ 10\sqrt{2} & 10 & 0 & 10 & 5\sqrt{2} \\ 10 & 10\sqrt{2} & 10 & 0 & 5\sqrt{2} \\ 5\sqrt{2} & 5\sqrt{2} & 5\sqrt{2} & 5\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Korelogram, 20 m'lik yapısal uzaklığa sahip bir küresel bir model olduğunda uzaklık matrisinin korelogram model değerleri aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.31 & 0.11 & 0.31 & 0.49 \\ 0.31 & 1 & 0.31 & 0.11 & 0.49 \\ 0.11 & 0.31 & 1 & 0.31 & 0.49 \\ 0.31 & 0.11 & 0.31 & 1 & 0.49 \\ 0.49 & 0.49 & 0.49 & 0.49 & 1 \end{pmatrix}$$

Korelogram matrisinde görüldüğü gibi kısa uzaklıklarda korelasyon yüksek iken uzaklık arttıkça veriler arasındaki korelasyon düşmektedir.

2.8. Uzaklığa Bağlı Kopula Modelinin Uyarlanması

Uzaklığa bağlı Gauss kopulası, marjinaleri (0,1) aralığında olan standart normal dağılımdan türetilmiş bir kopula türüdür. Bu nedenle Gauss kopulasının alabileceği en yüksek değer 1 iken, en düşük değer ise 0'dır. Dolayısı ile Gauss kopulası da marjinaleri gibi (0,1) aralığında değerler alır.

Tanımlı bir R korelasyon matrisi için Gauss kopulası Eşitlik 2.29'daki gibi yazılabilir.

$$C_R(\alpha) = \Phi_R[\Phi^{-1}(\alpha_1), \dots, \Phi^{-1}(\alpha_n)] \quad (2.29)$$

Eşitlik 2.29'da;

$C_R(\alpha)$, kopula fonksiyonu,

Φ_R , R korelasyon matrisine sahip çok değişkenli standart normal dağılımı,

$\Phi^{-1}(\alpha_1)$ ise α değerine sahip standart normal dağılımın ters fonksiyonudur.

R korelasyon matrisi ile tanımlanan C kopula fonksiyonunun "c" yoğunluk fonksiyonu ise Eşitlik 2.30'de gösterilmiştir.

$$c_R(u) = \frac{1}{\sqrt{|R|}} \exp \left(-\frac{1}{2} * \begin{pmatrix} \Phi^{-1}(u_1) \\ \Phi^{-1}(u_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \Phi^{-1}(u_n) \end{pmatrix}^T * (R^{-1} - I) * \begin{pmatrix} \Phi^{-1}(u_1) \\ \Phi^{-1}(u_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \Phi^{-1}(u_n) \end{pmatrix} \right) \quad (2.30)$$

Eşitlik 2.29 ve 2.30'daki ifadelerde R olarak gösterilen korelasyon matrisidir. Korelasyon matrisi ise korelogram modelinden elde edilir.

2.9. Anizotropi

Değişkenin sürekliliği yöne bağlı olarak değişmiyorsa bu durum izotropi olarak adlandırılır. Değişkenin sürekliliğinin her yönde aynı olması beklenmez. Ancak jeolojik sebeplerden ötürü maden kaynaklarındaki değer sürekliliği bazı durumlarda yöne bağlı olarak farklılık gösterebilir. Bu durum anizotropi olarak

adlandırılmaktadır. Örneğin Şekil 2.14’de isotropik ve anizotropik olmak üzere iki farklı durumda 0^0 ve 90^0 yönlerindeki yapısal uzaklıklar gösterilmiştir. Şekil 2.14’de soldaki izotropik şekilde, 0^0 ve 90^0 yönlerinde yapısal uzaklıklar aynı iken sağdaki anizotropik şekilde durumda yapısal uzaklıklar birbirlerinden farklıdır. Bu tür anizotropiler geometrik anizotropi olarak adlandırılır.



Şekil 2.14 İzotropik ve anizotropik yapısal uzaklıklar

Anizotropinin tespiti için farklı yönlerdeki korelogramların yapısal uzaklıkları incelenir. Eğer yapısal uzaklıklar farklı yönlerde farklı değerler alıyor ise geometrik anizotropinin olduğuna karar verilir. Anizotropiyi görmezden gelmek hatalı kestirim yapılmasına neden olmaktadır. Bu nedenle kaynak kestirimi yapılmadan önce mevcut anizotropinin giderilmesi gerekir. Geometrik anizotropik durum koordinat dönüşümü ile izotropik duruma dönüştürülebilir.

Bu durumda geometrik anizotropiyi gidermek için aşağıdaki adımlar uygulanır [4];

1-) Koordinat düzlemi yapısal sürekliliğin en yüksek olduğu yöne paralel olacak şekilde döndürülür. Bu durum matris formunda aşağıdaki gibi gösterilebilir. İki boyutlu bir veri için sağa yöndeki (Easting) koordinatı x ve yukarı yöndeki (Northing) koordinatı ise y olsun. Koordinat düzleminin yapısal sürekliliği en yüksek olduğu yöne paralel olacak şekilde döndürüldüğünde elde edilen yeni değerler x' ve y' olur. Eşitlik 2.31’de bu durum gösterilmiştir.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = [T]^* \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

$[T]$ matrisi Eşitlik 2.32’deki gibi hesaplanır.

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Eşitlik 2.32'de α döndürme açısıdır.

2-) Mevcut elips ile ifade edilen anizotropi, yarıçapı anizotropik ekseninin en uzun süreklilik değerine eşit olan bir çembere dönüştürülür. Bu dönüşüm koordinat değerlerinin en büyük yapısal uzaklık değerinin en küçük yapısal uzaklık değerine oranı olan anizotropi oranı ile çarpılması ile elde edilir. Bu matris formunda ;

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ y_1' \end{bmatrix} = [\lambda]^* \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Şeklinde ifade edilir. Eşitlik 2.33'de $[\lambda]$ anizotropi matrisi olup Eşitlik 2.34'deki gibi hesaplanır.

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

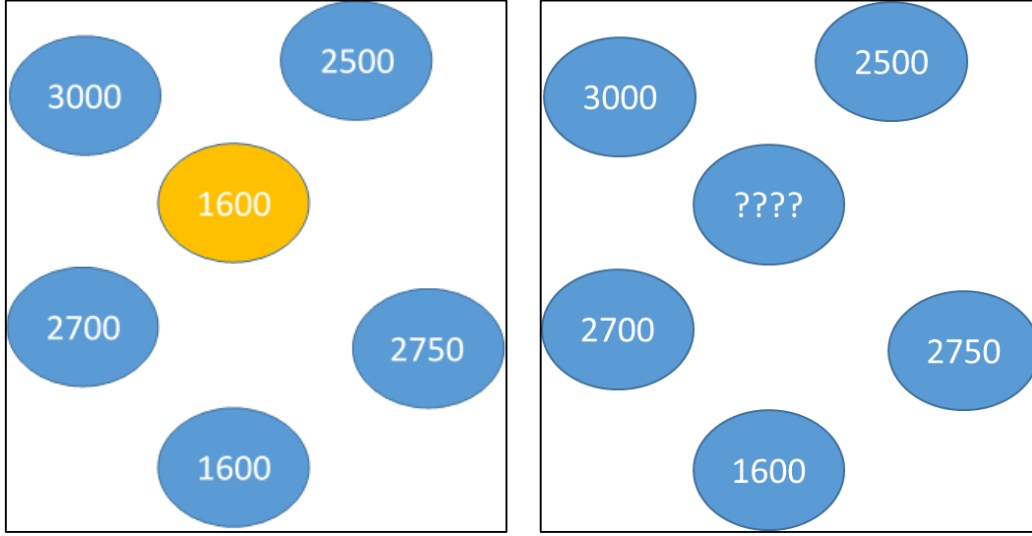
Sonuç olarak anizotropinin giderildiği yeni koordinatlar elde edilir. Dönüştürülmüş olan koordinatlar ile kestirim işlemi yapılır ve kestirilmiş olan değerlerin koordinatları ilk değerlerine döndürülür.

2.10. Çapraz Doğrulama

Kopula modeli ampirik bir şekilde uyarlanır. Model parametrelerinin objektif bir şekilde belirlenmesi için bir model doğrulama yöntemine ihtiyaç vardır. Bu amaçla; çapraz doğrulama, jackknife ve bootstrap gibi yöntemler kullanılır. Bu yöntemler arasında çapraz doğrulama yöntemi en sık kullanılan yöntemdir. Bu yöntemin temel yaklaşımı veri kümesinden bir verinin uzaklaştırılarak geri kalan veriler ile kestirilmesine daha sonra kestirim sonuçlarının gerçek veriler ile kıyaslanmasına dayanır.

Çapraz doğrulama yönteminde, eğer veri kümesi anizotropik ise anizotropiyi ortadan kaldırmak için gerekli dönüşüm uygulanır. Eğer veri anizotropik değilse herhangi bir işlem yapılmaz. Daha sonra ham veriler arasından bir veri çekilir ve bu verinin

bulunduğu konum mevcut kopula modeli kullanılarak kestirilir. Şekil 2.15'de örnek olarak bir veri kümesi ve veri kümesinden çekilen bir sayı gösterilmiştir.



Şekil 2.15 Ham veri kümesi ve veri kümesinden çekilen bir değer

Kestirim işleminden sonra çekilen veri ham veri kümesine yeniden eklenir. Bu durum tüm ham konular ziyaret edilene dek sürer. Sonuç olarak ham veri konularına ilişkin kestirilmiş değerler elde edilmiş olur. Örnek bir sonuç listesi Çizelge 2.10'da gösterilmiştir.

Çizelge 2.10 Örnek bir veri kümesi için kestirim hata değerleri

GERÇEK DEĞER	KESTİRİLMİŞ DEĞER	HATA
1450	1600	150
3000	3100	100
2500	2750	250
2750	2400	-350
1600	2000	200
2700	2500	-200

Ham veriler ile kestirilmiş veriler arasındaki farkın yani kestirim hatasının istatistiği incelenir. Kabul edilebilir bir modelde çapraz doğrulama sonuçlarının ortalaması sifıra yakın, yapılan hataların %95 ihtimalle iki standart sapma içinde olması beklenir. Bu durumda uyarlanan modelin kabul edilebilir bir model olduğu varsayılır ve kestirim işlemine geçilebilir.

3. KOPULA ile KAYNAK KESTİRİMİ

Literatürde birçok maden kaynak kestirimi yöntemi vardır. Bu yöntemlerden en sık kullanılanları, En Yakın Komşu (EK), Uzaklığın Tersine ile Ağırlıklandırma (UTA) ve Krigleme'dir [1], [2], [4], [5]. Bu yöntemleri bazı dezavantajlar içerir. Örneğin en yakın komşu yöntemi kısa mesafelerde ani geçişlere yola açan kestirim değerleri üretir. UTA yönteminde değişkenin etki mesafesi kestirilecek noktaya olan uzaklığın tersi ile orantılı olduğu varsayılır ancak orantının derecesinin belirlenmesi çoğu zaman keyfidir. Mevcut yöntemlerden en gelişmiş olan Kriglemede ise uzaklığa bağlı ilişkiyi ortaya koymada kullanılan variogram modeli aykırı değerlerden çok etkilenir [24]. Krigleme işleminde kullanılacak ağırlıklar uzaklığın bir fonksiyonu olup komşu verilerin değerlerinden bağımsızdır [25]. Ayrıca kestirimde kullanılacak veri aykırı değerler içeriyorsa bu değerlerin kestirim üzerine olumsuz ve yanlış sonuçlara neden olduğu bilinmektedir. Diğer taraftan krigleme yöntemi, hata varyansının en küçüklenmesine dayandığından sadece bir veri üretmektedir [26].

Kopula ile kestirim mevcut kestirim yöntemlerinin dezavantajlı yanlarını gidermektedir. Örneğin kopula ile kestirimde kestirilecek noktaya komşu olan verilerin konumları ile birlikte değerleri de dikkate alınmaktadır. Ayrıca kestirim amaçlı olarak veriler kopula uzayına dönüştürüldükleri için aykırı değerlerin kestirim üzerine etkisi düşüktür. Kopula ile kestirimde kestirilecek noktada tek bir değer üretilmesi yerine noktalar ilişkin tam dağılım elde edilir. Böylece kestirilecek noktada güven aralığı oluşturulabilir. Bu nedenlerden dolayı kopula ile maden kaynak kestirimi mevcut yöntemlere göre önemli avantajlar içermektedir.

Literatürde birçok kopula modeli mevcuttur ancak kopula modelinin kaynak kestirimde kullanılabilmesi için bazı özelliklere sahip olması gerekir. İlk olarak çok değişkenli kopula modelinin iki değişkenli kopula modelinden türetilabiliyor olması gerekir. İkinci özellik olarak Kopula modelinin yakın uzaklıklarda yüksek değer alması gerekir. Ayrıca mevcut kopula modelinin verilerin geometrik düzeni de dikkate alınması gerekir. Bu sebeplerden ötürü literatürdeki kopula modellerinin birçoğu uzaklığa bağlı kestirimde kullanılamaz. Örneğin, Archimedean ailesinden olan kopulalar yukarıda belirtilen özellikleri sağlamadıklarından kaynak kestirimde kullanılamazlar. Kaynak kestirimine en uygun olan kopula türü Gauss Kopulasıdır.

3.1. Uzaklığa Bağlı Gauss Kopulası

Kopula ile kestirimde uzaklığa bağlı gauss kopulası kullanılır. Gauss kopulası çok değişkenli Gauss dağılımından türetilmiştir. Çok değişkenli gauss dağılımı korelasyon matrisi ile karakterize edilir. N boyutlu Gauss kopulası matematiksel olarak Eşitlik 2.29'da gösterilmiştir. Ayrıca kopula yoğunluk fonksiyonu ise matematiksel olarak Eşitlik 2.30'da gösterilmiştir.

3.2. Kopula ile Kestirim

Kopula ile kestirim yapabilmek için mevcut verilerin kopula uzayında olması gerekir. Öncelikle ham veriler $z_i, i = 1, \dots, n$ kopula uzayına $u_i, i = 1, \dots, n$ olarak dönüştürülür. Verilerin kopula uzayına dönüştürülebilmesi için konumlarına bakılmaksızın küçükten büyüğe doğru sıralanması gerekir. Sıralanmış verilerin sıra değerleri bulunur. Eğer birden fazla aynı değere sahip veri varsa bunlar aynı sırayı paylaşırlar. Ancak sıralanmış verilerin sıra değerleri henüz kopula uzayında değildir. Bu nedenle verilerin sıra değerleri veri sayısının bir fazlasına bölünür. Bu şekilde veriler $z_i, i = 1, \dots, n$ kopula uzayında olan $u_i, i = 1, \dots, n$ değerlerine dönüştürülmüştür.

Kopula uzayına dönüştürülmüş veriler $u_i, i = 1, \dots, n$ kullanılarak belirli uzaklıklara denk gelen veri çiftlerinin deneysel korelogramları hesaplanır ve hesaplanan bu deneysel korelogram değerlerine bir model uyarlanır. Korelogram modeli tüm uzaklıklardaki korelogram değerlerinin hesaplanmasına olanak tanır.

Kopula ile kestirim adımları aşağıda verilmiştir.

- 1.) Komşu veriler kullanılarak $u_i, i = 1, \dots, n$ için $c(u_i)$ değeri hesaplanır.
- 2.) $v \in (0,1)$ olmak koşulu ile belirli sayıdaki v değerleri için $c(v, u_i)$ tam dağılımı elde edilir.
- 3.) $c(v|u_i)$ koşullu kopula dağılım fonksiyonu Eşitlik 3.1'deki gibi hesaplanır.

$$c(v|u_i) = \frac{c(v, u_i)}{c(u_i)} \quad (3.1)$$

- 4.) $c(v|u_i)$ koşullu kopula yoğunluk dağılımının sayısal integrasyonu ile $C(v|u_i)$ koşullu kopula dağılımı elde edilir.
- 5.) $C(v|u_i)$ koşullu kopula dağılımının medyan değerine denk gelen $C(0,5|u_i)$ değeri en iyi kestirici olarak seçilir.
- 6.) Elde edilen kestirim değeri ham veri uzayına döndürülür.
- 7.) 1'den 6 ya kadar olan tüm adımlar tüm bloklar için tekrarlanır.

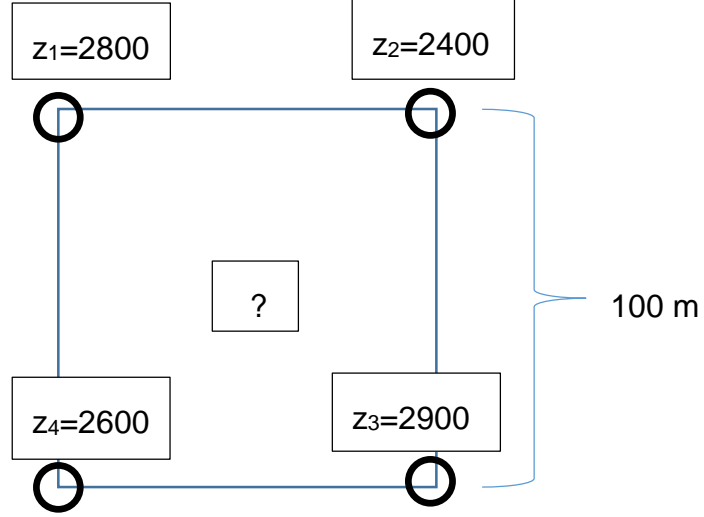
Görüldüğü gibi $C(v|u_i)$ koşullu kopulanın tam dağılımı elde edildiğinden kestirim için istenilen güven düzeyinde güven aralığı oluşturulabilir. Böylece hem kestirim işlemi gerçekleştirilmiş olup hem de kestirime ilişkin güven aralıkları oluşturulur.

3.3. Kopula ile Kestirimde Örnek Uygulamalar

Bu bölümde, Gauss kopulası kullanılarak normal ve log-normal dağılıma sahip örneklemeler için kestirim işlemi gerçekleştirilecektir. Her iki durumda da sayısal değerlerden arınmak için verilerin olasılık integral dönüşümleri verilmiştir. Yapılan kestirimler 0 ile 1 arasında değerler olduklarından ham veri uzayına geri dönüşüm işlemleri gerçekleştirilmiştir. Kestirim amacıyla birim karenin köşe noktalarına denk gelen veriler kullanılarak, karenin orta noktası kestirilmiştir.

3.3.1. Örnek Çalışma 1

Ham veri kümesinin ortalaması 2500 ve standart sapması 250 olan normal bir dağılımdan geldiği varsayılmıştır. Kenarları 100 m olan karenin dört köşesindeki veriden bu karenin tam orta noktasındaki değer kestirilecektir. Bu veriler ortalaması 2500 ve standart sapması 250 olan normal dağılımdan rastgele çekilmiştir. Bu değerler Şekil. 3.1'de gösterilmiştir.



Şekil 3.1 Rastgele çekilen veriler ve kestirilecek nokta

Ham verilerin olasılık integral dönüşümleri Eşitlik 3.2 kullanılarak yapılmıştır.

$$F(z|\mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp\left[-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dt = \frac{1}{2} \left[1 + \text{hataf} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) \right] \quad (3.2)$$

Eşitlik 3.4'de :

μ , ortalama değer,

σ , standart sapma,

$F(z|\mu, \sigma)$, Ortalaması μ ve standart sapması σ olan normal dağılımın z 'deki birikimli dağılım fonksiyonu değeri,

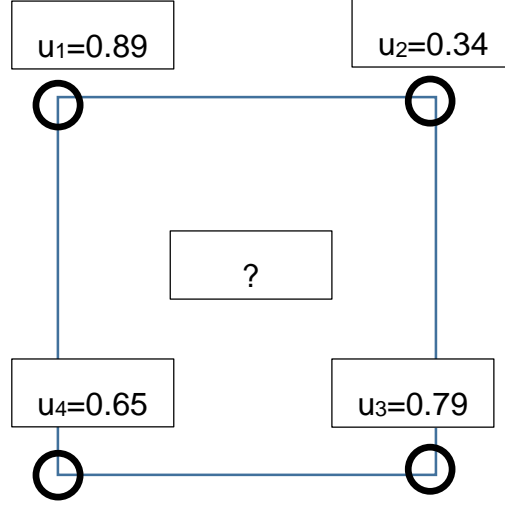
exp, üstel fonksiyon,

hataf, hata fonksiyonunu,

t ise hata fonksiyonunun integral değerini gösterir.

Normal dağılımın ya da hata fonksiyonun (hataf) açık halleri bulunmamaktadır. Bu nedenle sayısal yöntemlerle hesaplanmaları gerekir. Bu amaçla olasılık integral dönüşümünde MATLAB'ın "normcdf" fonksiyonu kullanılmıştır.

Örneğin 2800 değerinin olasılık integral dönüşümü sonrası aldığı değer 0,89'dur. Tüm değerler için dönüşüm yapıldığında oluşan yeni değer kümesi $u_i, i=1, \dots, 4$ Şekil 3.2'de gösterilmiştir.



Şekil 3.2'de Olasılık integral dönüşümü yapılmış veriler

Korelogram matrisinin hesaplanabilmesi verilerin uzaklık matrisinin hesaplanması gerekir. Bu durumda elde edilen uzaklık matrisi Eşitlik 3.3'de gösterilmiştir.

$$\begin{pmatrix} 0 & 100 & 141,4 & 100 \\ 100 & 0 & 100 & 141,4 \\ 141,4 & 100 & 0 & 100 \\ 100 & 141,4 & 100 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Uzaklık matrisinden korelogram matrisinin elde edilebilmesi için tüm uzaklıkların korelogram değerlerinin hesaplanması gerekir. Örneğin yapısal uzaklığı 200 m ve külçe etki değeri 0 olan bir küresel korelogram modelinin 100 m'de aldığı değer Eşitlik 3.4'deki gibi hesaplanır.

$$r(h) = (1 - C_0) * \left[1 - \frac{3h}{2a} + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{a} \right)^3 \right]$$

$$r(100) = (1 - 0,2) * \left[1 - \frac{3 \cdot 100}{2 \cdot 200} + \frac{1}{2} \left(\frac{100}{200} \right)^3 \right] = 0,31 \quad (3.4)$$

Tüm uzaklıklar için korelogram değerleri hesaplandığında Eşitlik 3.5'deki korelogram matrisi elde edilir.

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,31 & 0,11 & 0,31 \\ 0,31 & 1 & 0,31 & 0,11 \\ 0,11 & 0,31 & 1 & 0,31 \\ 0,31 & 0,11 & 0,31 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Görüldüğü gibi korelasyon matrisi simetrik, tekil olmayan ve pozitif tanımlı bir matristir.

Kestirimde kullanılacak olan kopula uzayındaki değerler standart normal dağılım değerlerine eşitlik 3.6'daki gibi dönüştürülür.

$$y_n = \Phi_{0,1}^{-1}(u_n) \quad (3.6)$$

Eşitlik 3.6'da:

u_n , kopula uzayındaki değer,

$\Phi_{0,1}^{-1}(\cdot)$, ortalaması 0, standart sapması 1 olan normal dağılım fonksiyonunun tersi işlemcisi,

y_n ise u_n değerlerinin standart normal dağılımdaki değeridir.

Eşitlik 3.4'e göre standart normal dağılıma dönüştürülmüş y değerleri üretilmiştir.

$$y_1 = \Phi_{0,1}^{-1}(0,89) = 1,227$$

$$y_2 = \Phi_{0,1}^{-1}(0,34) = -0,413$$

$$y_3 = \Phi_{0,1}^{-1}(0,79) = 0,806$$

$$y_4 = \Phi_{0,1}^{-1}(0,65) = 0,385$$

Tüm y_1, y_2, y_3, y_4 değerlerini içeren y vektörü $y = (1,227, -0,413, 0,806, 0,385)$ şeklindedir.

y vektörü kullanılarak $c(y)$ kopula yoğunluk değeri Eşitlik 2.30'daki gibi hesaplanır.

Eşitlik 2.30 kullanılarak kopula yoğunluk fonksiyonunu hesaplamak için korelogram matrisinin determinanı 0,671'dir ve tersi Eşitlik 3.7'de gösterilmiştir.

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1,22 & -0,37 & 0,10 & -0,37 \\ -0,37 & 1,22 & -0,37 & -0,10 \\ 0,10 & -0,37 & 1,22 & -0,37 \\ -0,37 & 0,10 & -0,37 & 1,22 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Eşitlik 2.30'da bilinenler yerine koyulduğunda $c(y)$ yani $c(u_1, u_2, u_3, u_4)$ değeri 1,6544 olarak bulunur.

Koşullu kopula dağılım fonksiyonu Eşitlik 3.8'deki gibi hesaplanır.

$$c(v|u_1, u_2, u_3, u_4) = \frac{c(v, u_1, u_2, u_3, u_4)}{c(u_1, u_2, u_3, u_4)} \quad (3.8)$$

Eşitlik 3.8'de:

v değeri 0 ile 1 arasındaki değer,

$c(v|u_1, u_2, u_3, u_4)$, v değerini içeren koşullu kopula değeri,

$c(v, u_1, u_2, u_3, u_4)$ ise v değeri ile birlikte $u_i, i = 1, \dots, 4$ değerleri kopula yoğunluğunu göstermektedir.

v 'ye 0 ile 1 arasında değerler verilmesi ile $c(v|u_1, u_2, u_3, u_4)$ koşullu dağılım fonksiyonunun tüm dağılım elde edilir.

Örneğin v 'ye 0.5 değerinin verilmesi ile $c(0.5, u_1, u_2, u_3, u_4)$ elde etmek isteyelim. Yukarıda anlatıldığı gibi kestirimde kullanılacak olan noktalarla birlikte bu sefer kestirim noktası da dikkate alınarak uzaklık matrisi yeniden hesaplanır. Uzaklık matrisi Eşitlik 3.9'da gösterilmiştir.

$$\begin{pmatrix} 0 & 70,71 & 70,71 & 70,71 & 70,71 \\ 70,71 & 0 & 100 & 141,42 & 100 \\ 70,71 & 100 & 0 & 100 & 141,42 \\ 70,71 & 141,42 & 100 & 0 & 100 \\ 70,71 & 100 & 141,42 & 100 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Korelogram modeli kullanılarak uzaklık matrisinden korelogram matrisi türetilir. Korelogram matrisi Eşitlik 3.10'da gösterilmiştir.

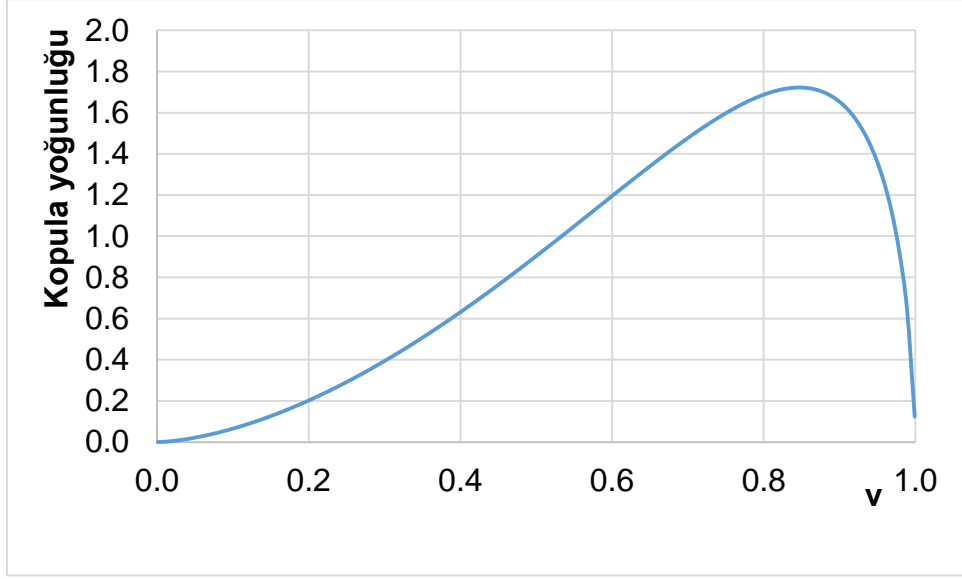
$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,49 & 0,49 & 0,49 & 0,49 \\ 0,49 & 1 & 0,31 & 0,12 & 0,31 \\ 0,49 & 0,31 & 1 & 0,31 & 0,12 \\ 0,49 & 0,12 & 0,31 & 1 & 0,31 \\ 0,49 & 0,31 & 0,12 & 0,31 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

$c(0.5, u_1, u_2, u_3, u_4)$ korelogram matrisinin determinanı 0,296, tersi Eşitlik 3.11'de gösterilmiştir.

$$\begin{pmatrix} 2,27 & -0,65 & -0,65 & -0,65 & -0,65 \\ -0,65 & 1,40 & 0,28 & -0,18 & -0,18 \\ -0,65 & 0,28 & 1,40 & -0,18 & -0,18 \\ -0,65 & -0,18 & -0,18 & 1,40 & 0,27 \\ -0,65 & -0,18 & -0,18 & 0,28 & 1,40 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Bilinen değerler Eşitlik 2.30'a koyulduğunda $c(0.5, u_1, u_2, u_3, u_4)$ 0,9035 olarak hesaplanır.

$v \in (0,1)$ olmak koşulu ile belirli v sayı değerleri kullanılarak $c(v, u_1, u_2, u_3, u_4)$ 'nin tam dağılımı edilir. Bu dağılım Şekil 3.3'de gösterilmiştir.

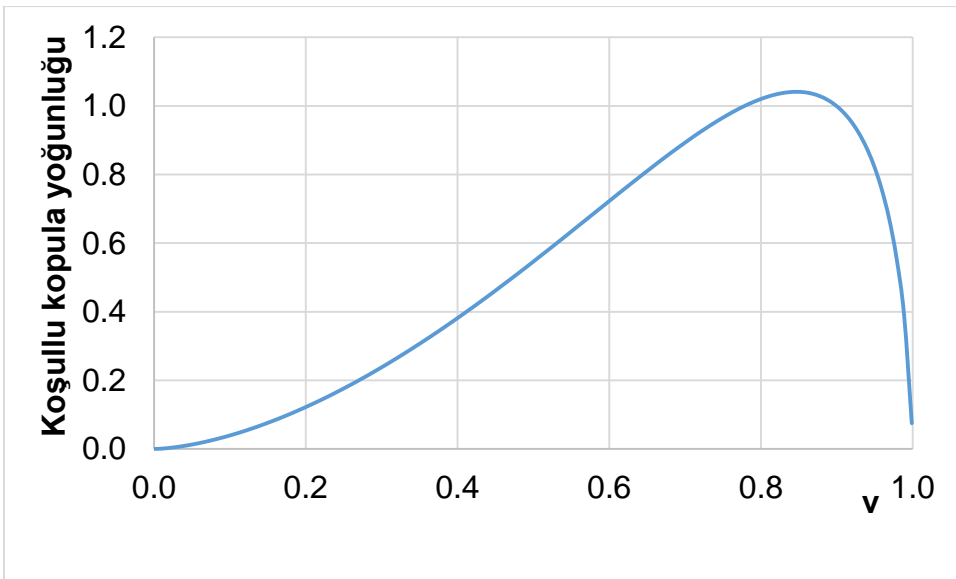


Şekil 3.3 Kopula tam dağılım yoğunluğu

Bir örnek olarak $c(0.5|u_1, u_2, u_3, u_4)$ koşullu kopulanın yoğunluk değeri hesabı Eşitlik 3.12'de gösterilmiştir.

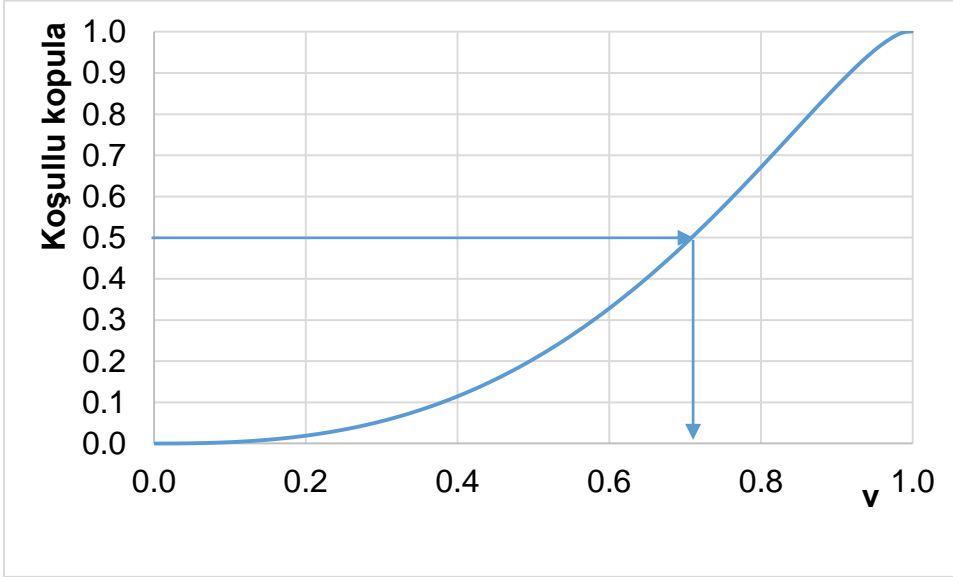
$$c(v|u_1, u_2, u_3, u_4) = \frac{c(v, u_1, u_2, u_3, u_4)}{c(u_1, u_2, u_3, u_4)} = \frac{0,9035}{1,6544} = 0,55 \quad (3.12)$$

Eşitlik 3.12' de gösterildiği gibi $c(v|u_1, u_2, u_3, u_4)$ koşullu kopula yoğunluk dağılımı tüm v değerleri için hesaplanır. Elde edilen koşullu kopula yoğunluğuna ilişkin tam dağılım fonksiyonu Şekil 3.4'de gösterilmiştir.



Şekil 3.4 Koşullu kopula yoğunluğu

En iyi kestirici olarak medyan değeri seçildiğinde ortanca değere(0,5) denk gelen v değeri 0,72 olarak belirlenir. (Şekil 3.5)



Şekil 3.5 Koşullu kopula fonksiyonu

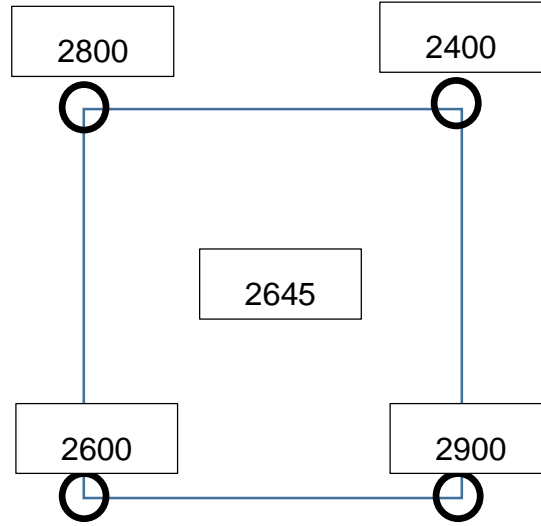
Elde edilen v değeri ham veri uzayına geri dönüştürülür. Ham veriler, ortalaması 2500 ve standart sapması 250 olan normal dağılımdan çekildiği varsayıldığı için geri dönüşüm Eşitlik 3.13'deki gibidir.

$$\Phi_{2500,250}^{-1}(0,72) = 2645 \quad (3.13)$$

Eşitlik 3.13'de

$\Phi_{2500,250}^{-1}(\cdot)$ ortalaması 2500 standart sapması 250 normal dağılımın tersini göstermektedir.

Dönüşüm uygulandıktan sonra kestirimde kullanılan değerleri ile kestirim sonucu elde edilen değer Şekil 3.6'da verilmiştir.



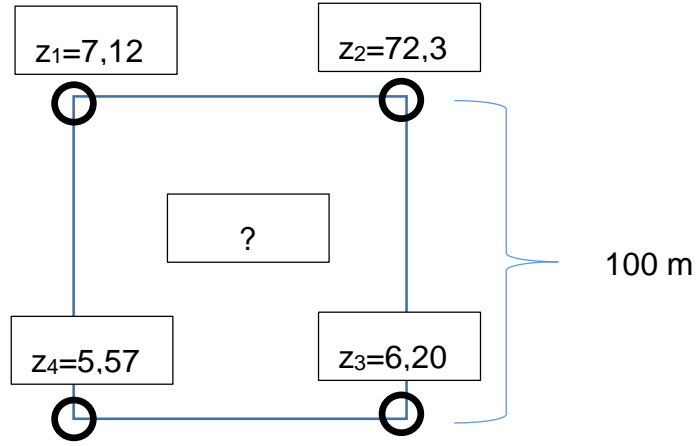
Şekil 3.6 Kestirim sonucu

Örnek çalışma-1'de kullanılan veri kümesi kullanılarak verilerin orta noktası detayları burada verilmemekle birlikte ayrıca krigleme yöntemi ile de kestirilmiştir. Krigleme yöntemine göre kestirim değeri 2675'dir.

Ayrıca bu örnek çalışma için kestirime güven aralığı uyarlanmıştır. Kopula ile güven aralığı uyarlamada kestirimin tüm dağılım fonksiyonu kullanılırken, krigleme ile kestirimde hata standart sapmasının normal dağıldığı varsayılarak güven aralığı uyarlanmıştır. Güven aralığının %95 olduğu varsayımı altında kopula ile kestirim değerinin en düşük değeri 2007 ve en yüksek değeri 3009 dur ve krigleme ile kestirimin en düşük değeri 2346 iken en yüksek değeri 3004 dür. Görüldüğü gibi kopula ile kestirim kriglemeye göre daha değişken olduğu için bu durum kestirim güven aralığı sonuçlarına da yansımıştır.

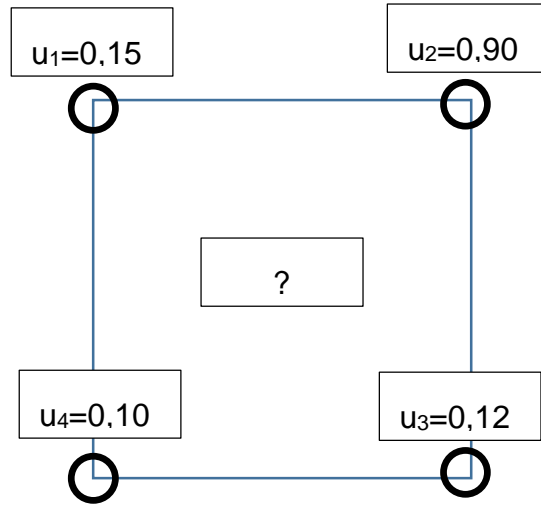
3.3.2. Örnek Çalışma 2

Ham veri kümesi ortalaması 3 ve standart sapması 1 olan log-normal bir dağılımdan gelmektedir. Örnek çalışma-1'de olduğu gibi kenarları 100 m olan karenin dört köşesindeki verilerden bu karenin tam orta noktasını kestirmek isteyelim. Kestirimde kullanılacak küresel modelin külçe etki değeri 0,2 olup yapısal uzaklık 200 m'dir. Kestirimde kullanılan veriler log-normal dağılımdan rastgele çekilmiş olup z_2 değeri aykırı değerdir. Şekil 3.7'de değerler gösterilmiştir.



Şekil 3.7 Ham veriler (log-normal dağılım)

Ham veriler örnek çalışma-1 'de anlatıldığı gibi olasılık integral dönüşümü yapılarak kopula uzayına dönüştürülmüştür. Kopula uzayındaki değer kümesi $u_i, i = 1, \dots, 4$ Şekil 3.8'de gösterilmiştir.



Şekil 3.8 Kopula uzayına dönüştürülmüş değerler

Verilerin uzaklık matrisinden korelogram matrisi hesaplanabilir. Verilere ilişkin uzaklık matrisi Eşitlik 3.14'de gösterilmiştir.

$$\begin{pmatrix} 0 & 100 & 141,4 & 100 \\ 100 & 0 & 100 & 141,4 \\ 141,4 & 100 & 0 & 100 \\ 100 & 141,4 & 100 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

Külçe etki değeri 0,2 ve yapısal uzaklığı 200 m olan küresel korelogram modeli kullanılarak uzaklık matrisinden türetilen korelogram matrisi Eşitlik 3.15'de gösterilmiştir.

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,25 & 0,09 & 0,25 \\ 0,25 & 1 & 0,25 & 0,09 \\ 0,09 & 0,25 & 1 & 0,25 \\ 0,25 & 0,09 & 0,25 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

Eşitlik 3.6'ya göre standart normal dağılıma dönüştürülmüş y değerleri üretilmiştir.

$$y_1 = \Phi_{0,1}^{-1}(0,15) = -1,036$$

$$y_2 = \Phi_{0,1}^{-1}(0,90) = 1,282$$

$$y_3 = \Phi_{0,1}^{-1}(0,12) = -1,175$$

$$y_4 = \Phi_{0,1}^{-1}(0,10) = -1,282$$

Tüm y_1, y_2, y_3, y_4 değerlerini içeren y vektörü $y = (-1.036, 1.282, -1.175, -1.282)$ şeklindedir.

y vektörü kullanılarak $c(y)$ kopula yoğunluk değeri Eşitlik 2.30'daki gibi hesaplanır.

Eşitlik 3.9 kullanılarak kopula yoğunluk fonksiyonunu hesaplamak için gerekli olan korelogram matrisinin determinant değeri 0,7768'dir ve tersi Eşitlik 3.16'da gösterilmiştir.

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1,13 & -0,27 & 0,03 & -0,27 \\ -0,27 & 1,13 & -0,27 & 0,03 \\ 0,03 & -0,27 & 1,13 & -0,27 \\ -0,27 & 0,03 & -0,27 & 1,13 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Eşitlik 2.30'da bilinenler yerine koyulduğunda $c(y)$ yani $c(u_1, u_2, u_3, u_4)$ değeri 1,4388 olarak bulunur.

Koşullu kopula dağılım fonksiyonu Eşitlik 3.8'deki gibi hesaplanır. Eşitlik 3.8'de v 'ye 0 ile 1 arasında değerler verilmesi ile $c(v|u_1, u_2, u_3, u_4)$ koşullu dağılım fonksiyonunun tam dağılımı elde edilir.

Örneğin v 'ye 0.5 değerinin verilmesi ile $c(0.5, u_1, u_2, u_3, u_4)$ hesaplanmak istensin. Yukarıda anlatıldığı gibi kestirimde kullanılacak olan noktalarla birlikte bu defa kestirim noktası da dikkate alınarak uzaklık matrisi yeniden hesaplanır. Uzaklık matrisi Eşitlik 3.17'de gösterilmiştir.

$$\begin{pmatrix} 0 & 70,7 & 70,7 & 70,7 & 70,7 \\ 70,7 & 0 & 100 & 141,4 & 100 \\ 70,7 & 100 & 0 & 100 & 141,4 \\ 70,7 & 141,4 & 100 & 0 & 100 \\ 70,7 & 100 & 141,4 & 100 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

Korelogram modeli kullanılarak uzaklık matrisinden korelogram matrisi türetilir. Korelogram matrisi Eşitlik 3.18'de gösterilmiştir.

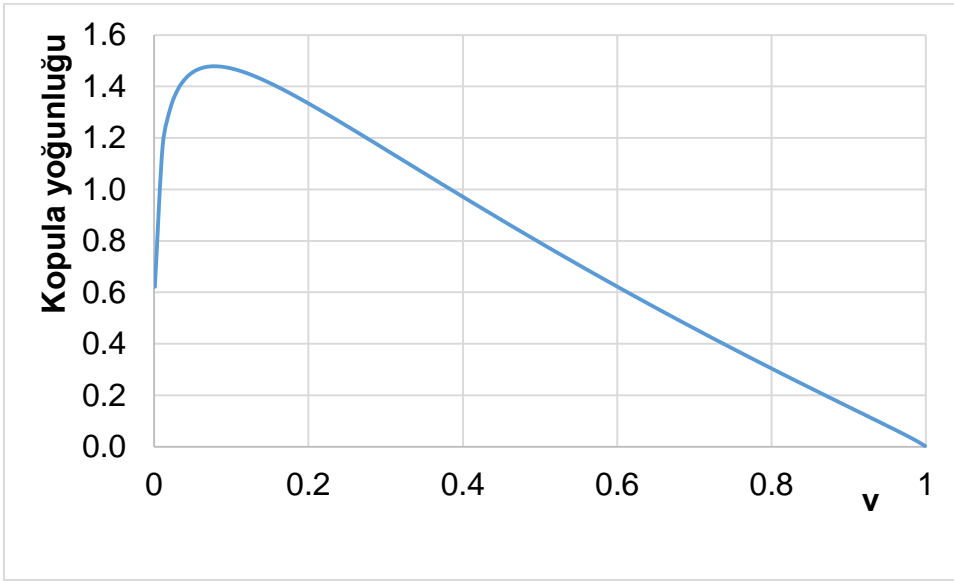
$$\begin{pmatrix} 1 & 0,39 & 0,39 & 0,39 & 0,39 \\ 0,39 & 1 & 0,25 & 0,09 & 0,25 \\ 0,39 & 0,25 & 1 & 0,25 & 0,09 \\ 0,39 & 0,09 & 0,25 & 1 & 0,25 \\ 0,39 & 0,25 & 0,09 & 0,25 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

$c(0.5, u_1, u_2, u_3, u_4)$ korelogram matrisinin determinanı 0,4796, tersi Eşitlik 3.19'da gösterilmiştir.

$$\begin{pmatrix} 1,62 & -0,40 & -0,40 & -0,40 & -0,40 \\ -0,40 & 1,23 & -0,17 & 0,13 & -0,17 \\ -0,40 & -0,17 & 1,23 & -0,17 & 0,13 \\ -0,40 & 0,13 & -0,17 & 1,23 & -0,17 \\ -0,40 & -0,17 & 0,13 & -0,17 & 1,23 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

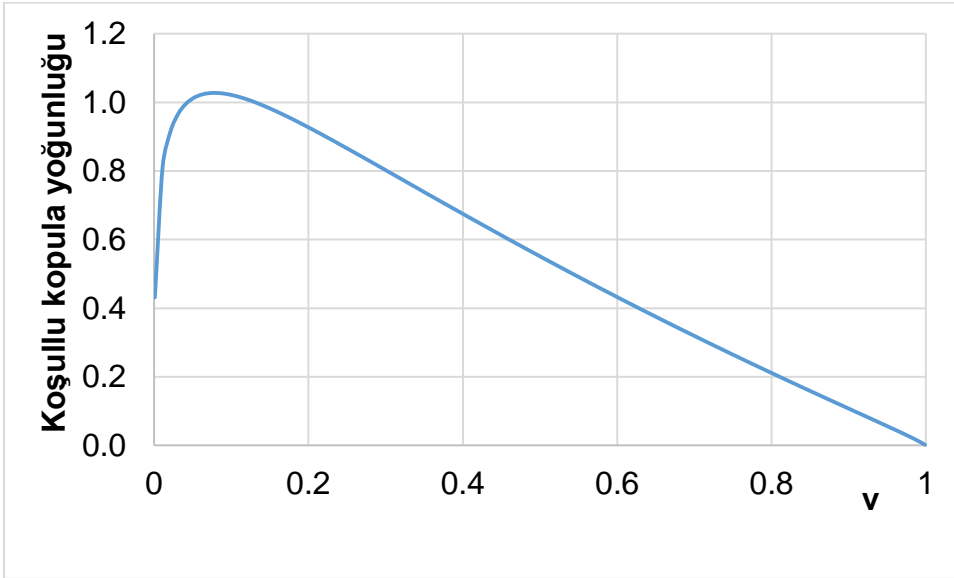
Bilinen değerler Eşitlik 3.9'a koyulduğunda $c(0.5, u_1, u_2, u_3, u_4)$ değeri 1,1346 olarak hesaplanır.

$v \in (0,1)$ olmak koşulu ile belirli sayıda v değerleri kullanılarak $c(v, u_1, u_2, u_3, u_4)$ tam dağılım değerleri elde edilir. Dağılım Şekil 3.9'da gösterilmiştir.



Şekil 3.9 Kopula yoğunluğu (log-normal dağılım)

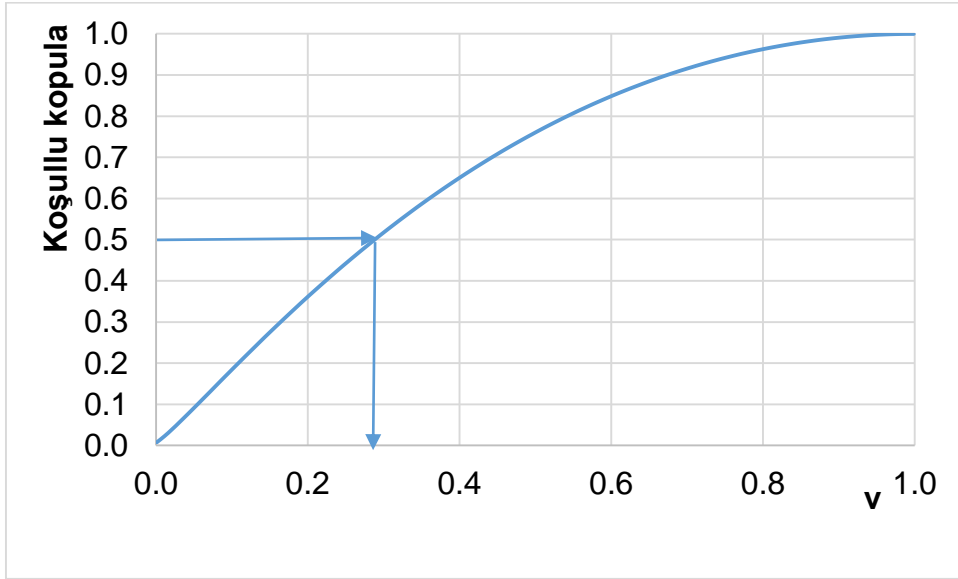
Eşitlik 3.11' de gösterildiği gibi $c(v|u_1, u_2, u_3, u_4)$ koşullu kopula yoğunluk dağılımı tüm v değerli için hesaplanır. Elde edilen koşullu kopula yoğunluk tam dağılımı Şekil 3.10'da gösterilmiştir.



Şekil 3.10 Koşullu kopula yoğunluğu (log-normal dağılım)

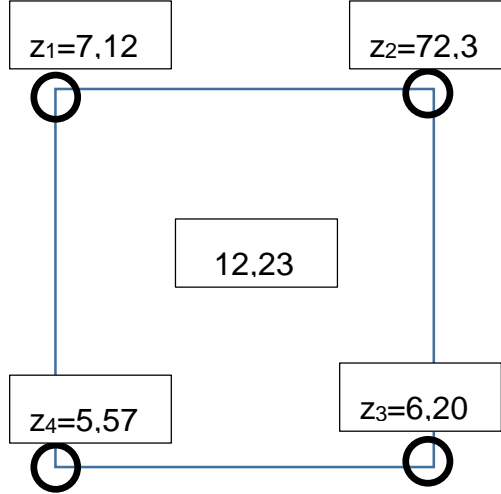
Koşullu kopula yoğunluk tam dağılımın sayısal integrasyon yöntemi ile koşullu $C(v|u_1, u_2, u_3, u_4)$ kopula değeri tam dağılım fonksiyonu elde edilir. En iyi kestirici

olarak medyan değeri seçildiğinde koşullu kopula dağılımdan medyan değerine karşılık gelen v değeri 0,31 olarak hesaplanır. (Şekil 3.11)



Şekil 3.11 En iyi kestirici olarak medyan değerine denk gelen v değeri

Dönüşüm uygulandıktan sonra kestirimde kullanılan değerler ile kestirim değeri Şekil 3.12’de verilmiştir.



Şekil 3.12 Kopula kestirim sonucu

Aynı kestirim işlemi krigleme ile de yapıldığında kestirim sonucu 22,81’dir.

Krigleme ile kopula ile kestirim yöntemi bu çalışmada deneysel olarak karşılaştırıldığında kopula ile kestirimin aykırı değerlerden daha az etkilendiği görülmektedir. Aykırı değer olan 72,23’ün kestirim üzerine etkisi fazla değildir.

Kopula ile kestirim yöntemi özellikle aykırı değerlere sahip veriler kullanılarak yapılan kestirimlerde tutarlı sonuçlar üretmektedir.

Örnek çalışma-1'de olduğu gibi kopula ve krigleme ile kestirime % 95 güven aralığı uyarlanmıştır. Bu durumda kopula ile kestirimin en düşük değeri 2,72 iken en yüksek değeri 155,62 ve krigleme ile kestirimin en düşük değeri -306 iken en yüksek değeri 351,81'dir. Görüldüğü gibi krigleme ile elde edilen güven aralığı negatif değer üretmiştir ancak kopula ile kestirim pozitif tanımlı olduğu için güven aralığı da pozitif tanımlıdır.

3.4. Parametrelerin kestirim üzerine etkisi

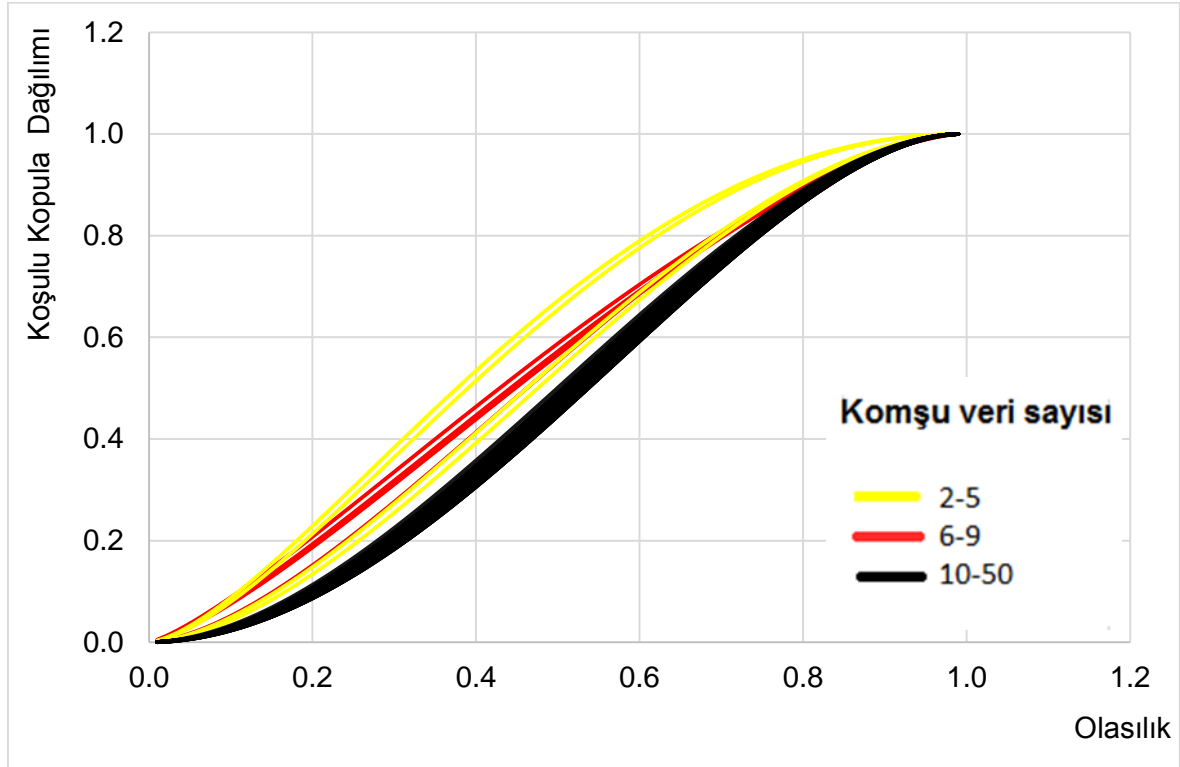
Kopula ile kestirimde kullanılacak olan veri sayısı ve veri tarama elipsinin etkisi önemlidir. Az veri, kestirim işleminin güvenilirliğini azaltırken çok veri modelleme işlemini arttıracaktır. Kestirimin güvenilir olması için kestirim noktasına komşu veri sayısının belli bir aralıkta olması gerekir. Örneğin kestirim noktasına komşu en yakın iki verinin kullanılması kestirim sonucunun güvenilirliğinin düşük olmasına neden olacaktır. Bunun tam tersi olarak gereğinden fazla veri kullanılması kestirim sonuçlarını etkilememekle birlikte işlem sayısının artmasına neden olacaktır. Yukarıda belirtilen sebeplerden ötürü kestirimde kullanılacak olan parametrelerin en uygun değerler olarak seçilmesi gerekir. Bölüm 3.4.1'de kestirimde kullanılacak en düşük ve en yüksek veri sayısı ile tarama elipsoidinin alması gereken maksimum uzunluğun kestirim üzerine etkileri gösterilmiştir. Ayrıca korelogram külçe değerinin kestirim üzerine etkisi incelenmiştir.

3.4.1. Kestirimde kullanılacak en düşük ve en yüksek veri sayıları

Kestirimde kullanılacak olan en düşük ve en yüksek veri sayısının belirlenmesi önemlidir. Bu amaçla koşullu kopula dağılım fonksiyonu kullanılabilir. Bunun için öncelikle iki veriden başlamak koşulu ile kestirimde kullanılacak olan veri sayısı birer birer artırılır ve karşılık gelen kestirimde elde edilen koşullu kopula fonksiyonları üretilir. Koşullu kopula fonksiyonlarının artan veri sayısı ile değişmediği veri sayısı en uygun veri sayısı olarak belirlenebilir.

Örnek olarak tarama elipsi içinde kalan 2 ile 50 arasında değişen sayıda veri belirlenmiştir. Her seferinde birer artırılmak suretiyle kestirim noktasına en yakın

veriler kullanılarak elde Koşullu kopula dağılım fonksiyonu edilmiştir. Sonuç olarak elde edilen koşullu kopula dağılım fonksiyonları Şekil 3.13'de gösterilmiştir.



Şekil 3.13 Farklı komşu sayısına sahip kestirimlerde kopula koşullu dağılımı

Şekil 3.13'de sarı ile gösterilen dağılım fonksiyonları 2 ile 5, kırmızı ile gösterilen dağılım fonksiyonları 6 ile 9 ve siyah ile gösterilen dağılım fonksiyonları ise 10 ile 50 arasındaki veri sayısını ifade etmektedir. Veri sayısının 4 ün üzerinde olduğu durumlarda kopula dağılımları birbirlerine benzemektedir. Ancak veri sayısı 10'un üzerinde olduğu durumda koşullu kopula dağılım fonksiyonu şekli değişmemektedir. Bu durumda kestirim için 4 ile 10 arasında verinin kullanılması uygun gözükmemektedir.

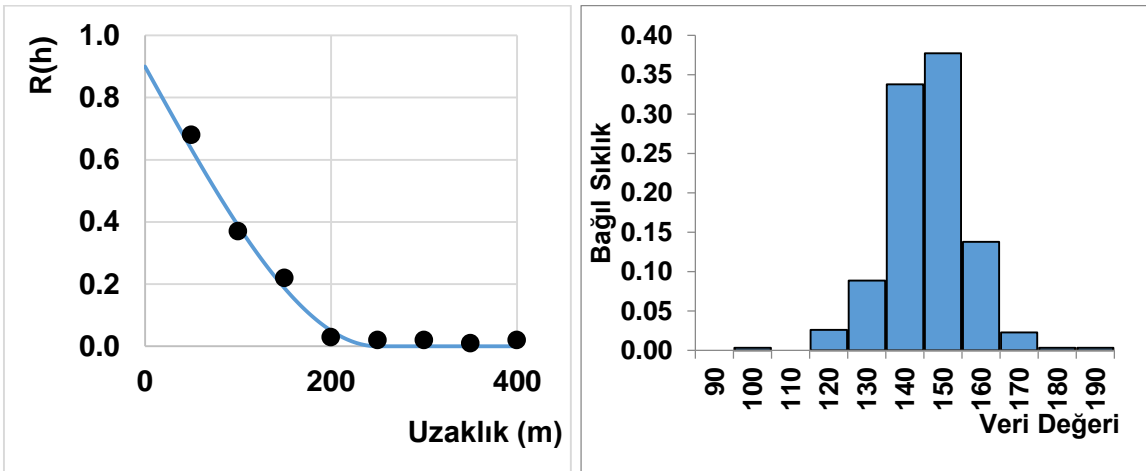
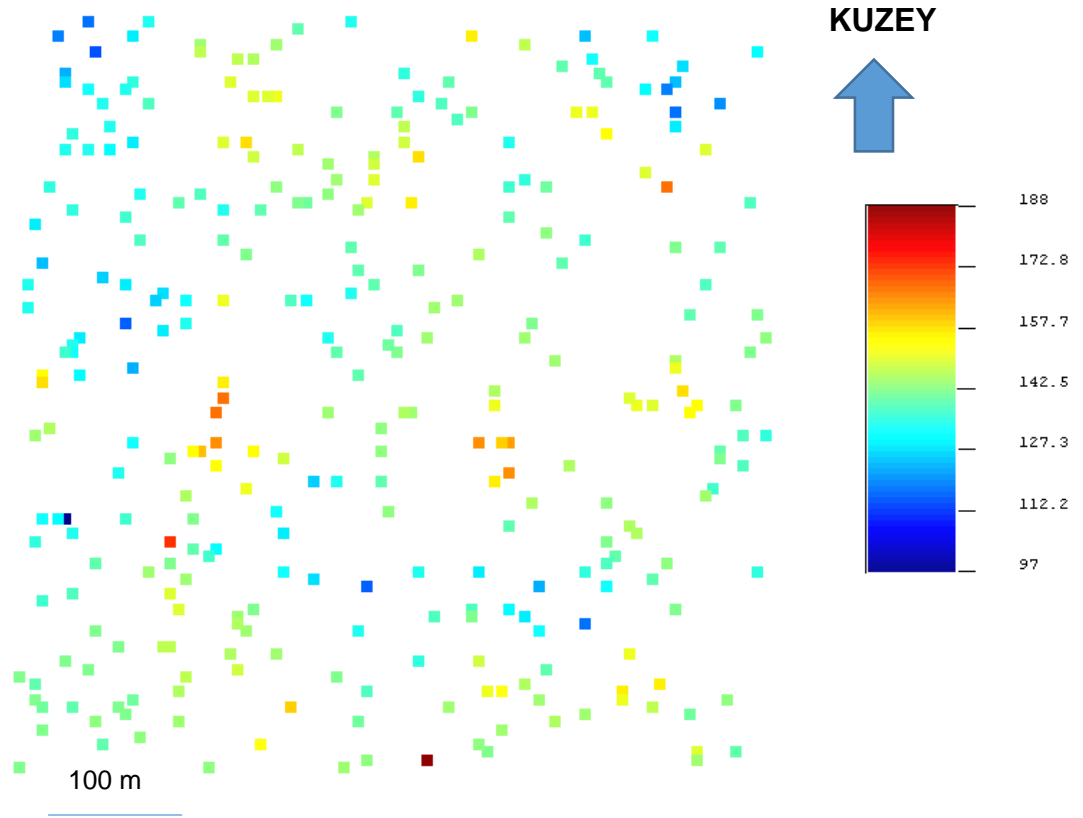
Tarama elipsinin en büyük ekseninin uzunluğu ise kestirimde kullanılacak olan verilerin belirlenmesinde kullanıldığı için kestirim sonucunu etkileyen bir diğer parametredir. Bölüm 3.1'de anlatıldığı gibi kopula ile kestirimde Eşitlik 3.1 kullanılır ve bu eşitlikteki korelasyon matrisi Eşitlik 2.25, 2.26, 2.27 ve 2.28 deki korelogram modellerinden herhangi biri seçilerek belirlenir. Modeller incelendiğinde korelogram değerlerinin belirli bir yapısal uzaklık değerinde sonra 0 değerini aldığı görülür. Bu durumda eğer bir veri, kestirim noktasına yapısal uzaklık değerinden daha uzak ise kestirim sonucuna herhangi bir etkisi yoktur. Bu durumda kestirim noktasına yapısal

uzaklıktan daha uzakta olan verinin kestirimde kullanılması anlamsızdır. Eğer yanlışlıkla kestirim noktasına yapısal uzaklıktan daha uzakta bir veri kullanılırsa sadece kestirim işlem yoğunluğu artacak kestirim daha uzun bir süre alacaktır.

3.4.2. Külçe Etkisinin Kopula Dağılımına Etkisi

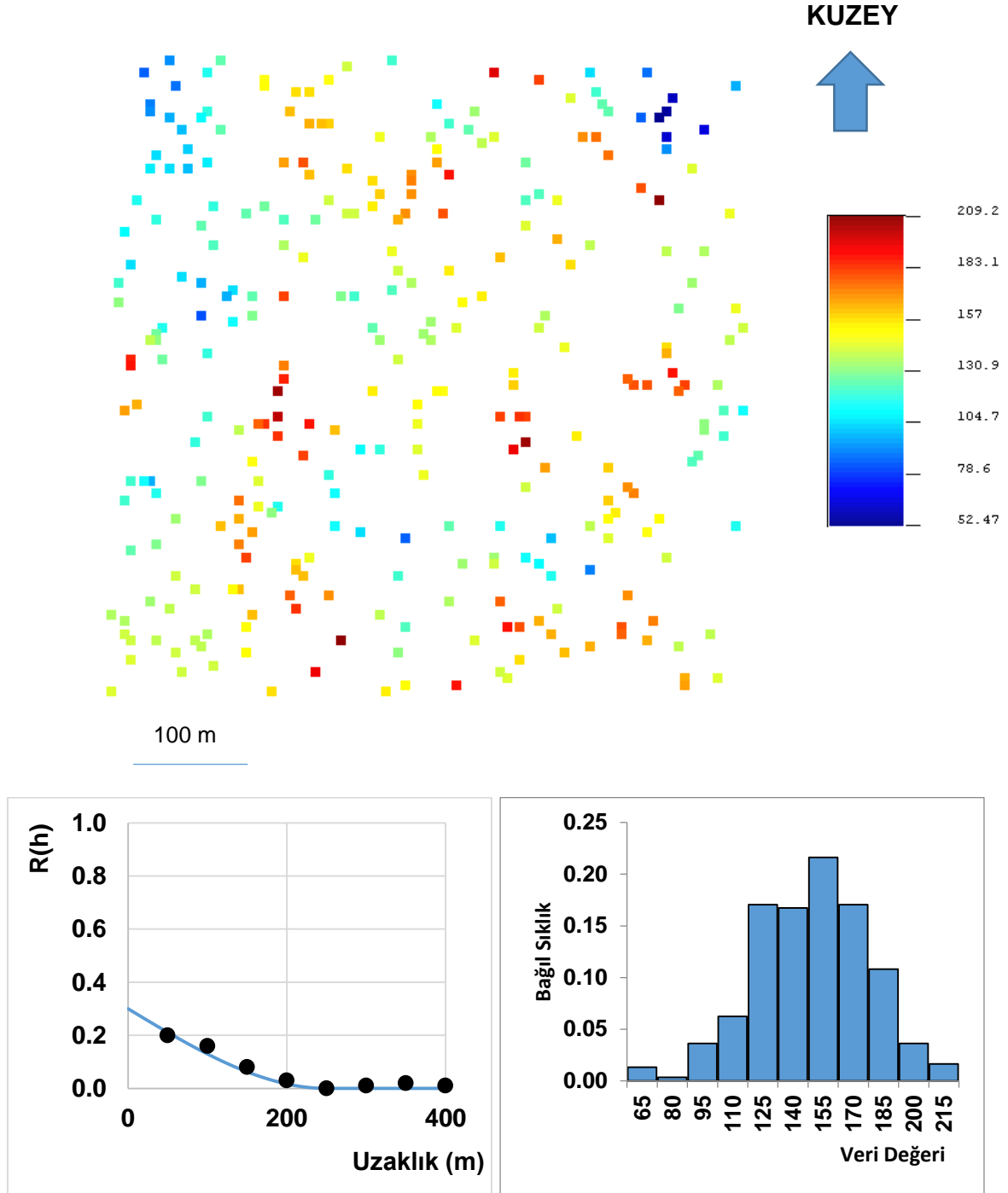
Kopula ile kestirimde, kestirim noktasına tek bir değer atamak yerine kestirim değerlerine ilişkin tüm dağılım elde edilmektedir. Ancak kestirim değerlerinin dağılımı uzaklığa bağlı ilişki ile bağlantılıdır. Kısa mesafedeki değişkenliğin bir ölçütü olan külçe etki değeri kestirim dağılımını etkilemektedir. Külçe etki değeri arttıkça uzaklığa bağlı ilişki azalır ve dağılım daha ilişkisiz (random) bir durum alır. Dağılımın rastlantısal bir hal almasından ötürü kopula dağılımları da bu rastlantısallıktan etkilenir. Külçe etkisinin düşük olduğu durumlarda kopula dağılımı, medyan değerine yakın değerler alırken, külçe etki değeri arttıkça kopula dağılımı doğrusal bir şekil alır.

Külçe etki değerinin deneysel olarak kopula dağılımı üzerindeki etkisinin incelenebilmesi için dört farklı veri kümesi kullanılmıştır. Kullanılan veri kümesinden ikisi normal dağılıma sahipken diğer ikisi log-normal dağılıma sahiptir ve külçe etki değerleri de her bir dağılım için biri düşük diğeri yüksek olarak seçilmiştir. Kullanılan veri kümelerine uyarlanan korelogram modellerinin sadece külçe etki değerleri farklı olmakla birlikte uyarlanan model küresel ve yapısal uzaklık da 250 m'dir. Her bir veri kümesinin tam orta noktaları kestirim noktasına en yakın 2 den 50 ye kadar olan veriler kullanılarak ayrı ayrı toplamda 49 kere kestirilmiş ve her bir veri kümesi için kopula dağılımları türetilmiştir. Tüm veri kümelerine küresel model uyarlanmıştır. Kullanılan birinci veri kümesi normal dağılım göstermekle birlikte uyarlanan korelogram modelinin külçe etki değeri 0.1'dir. Birinci veri kümesi lokasyonları, uyarlanan korelogram modeli ve histogramı Şekil 3.14'de gösterilmiştir.



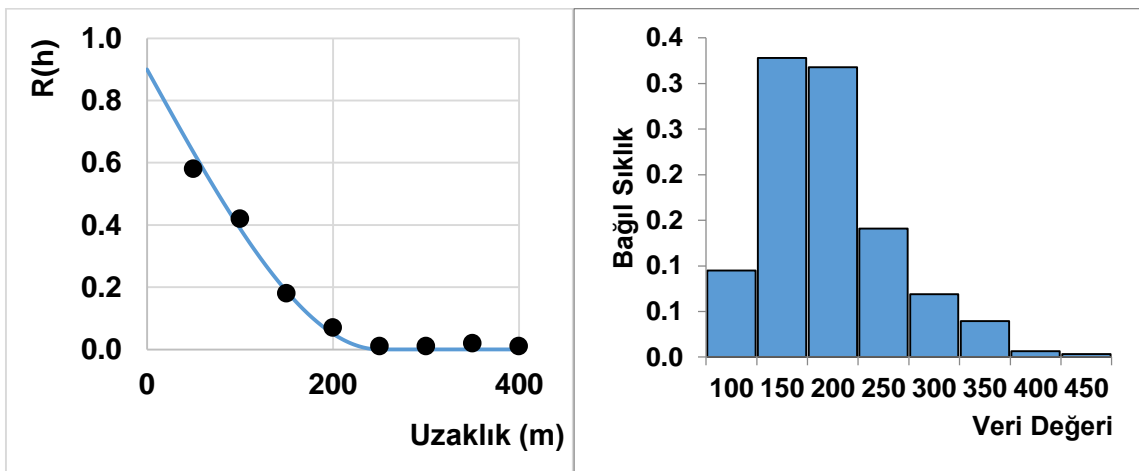
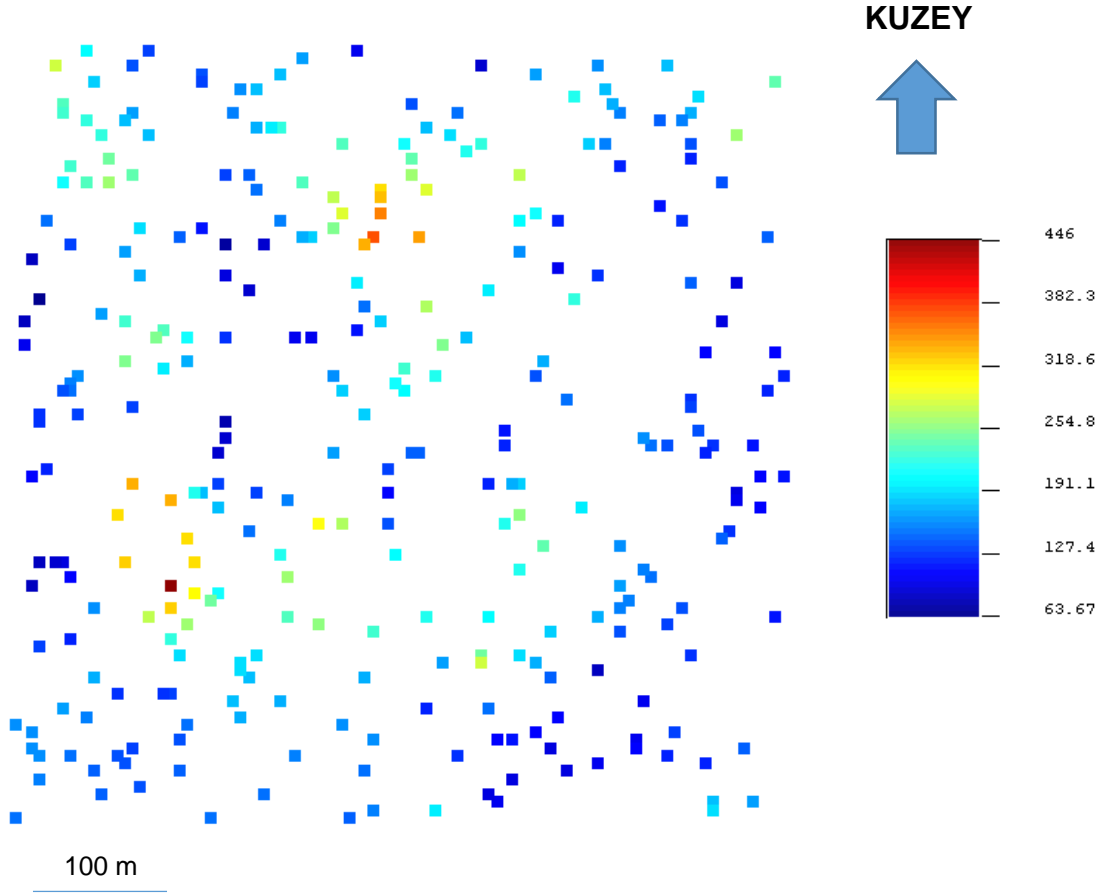
Şekil 3.14 Birinci veri kümesinin lokasyonları, korelogram ve histogramları

Kullanılan ikinci veri kümesi normal dağılım göstermekle birlikte uyarlanan korelogram modelinin külçe etki değeri 0,7'dir. İkinci veri kümesi, korelogram modeli ve histogramı Şekil 3.15'de gösterilmiştir.



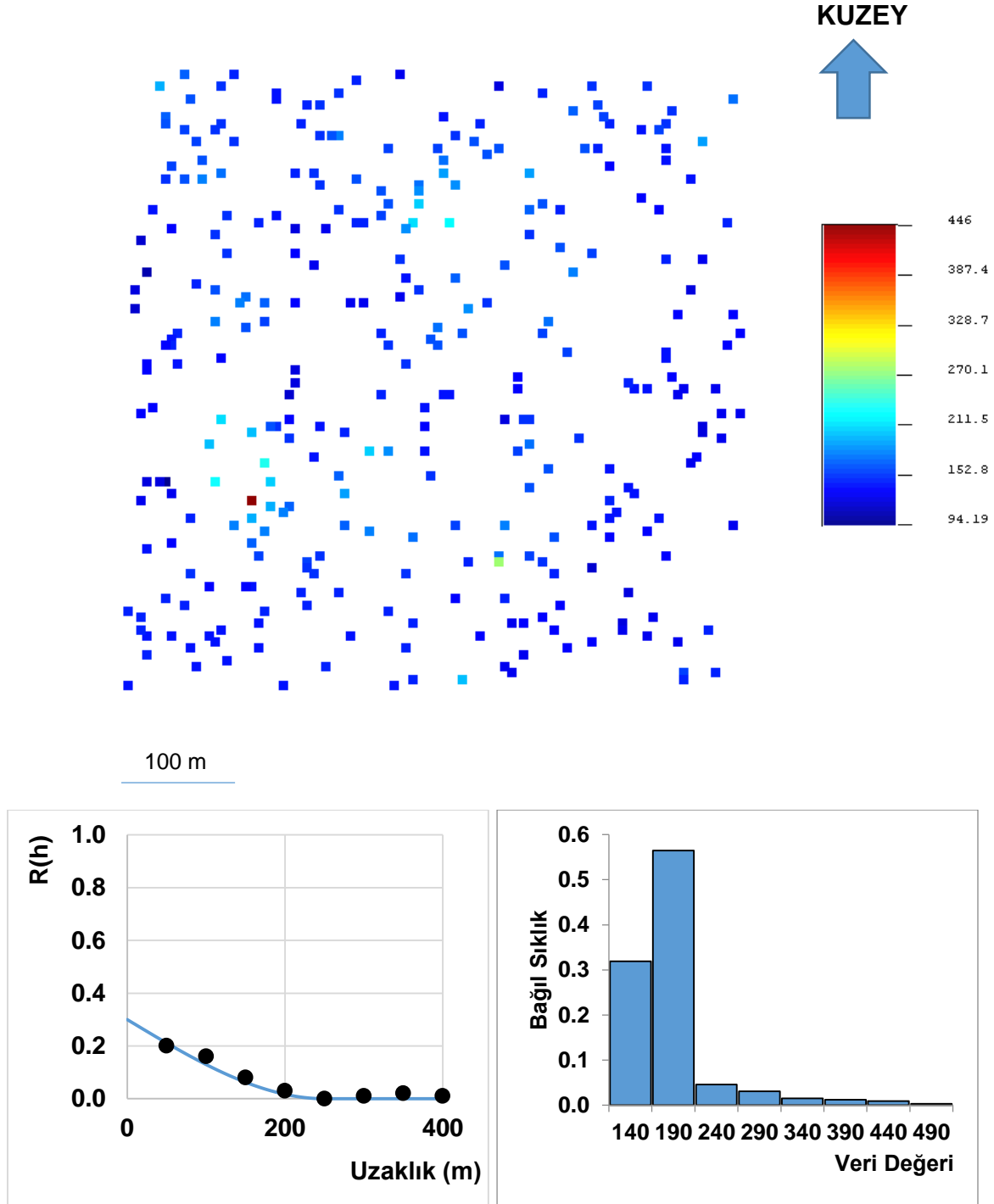
Şekil 3.15 İkinci veri kümesinin lokasyonları, korelogram ve histogramı

Kullanılan üçüncü veri kümesi log-normal dağılım göstermekle birlikte uyarlanan korelogram modelinin külçe etki değeri 0,1'dir. Üçüncü veri kümesi lokasyonu, korelogram modeli ve histogramı Şekil 3.16'de gösterilmiştir.

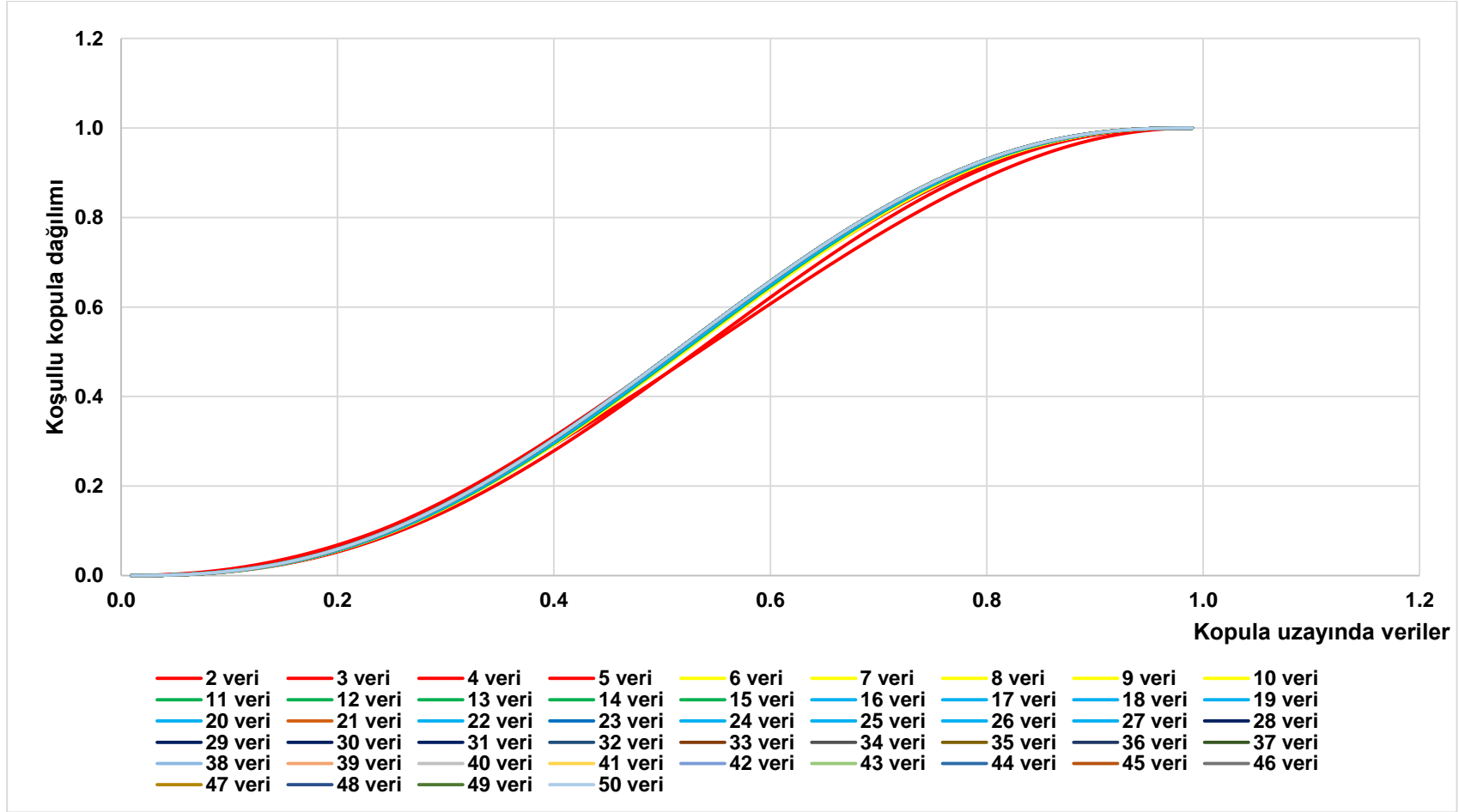


Şekil 3.16 Üçüncü veri kümesinin lokasyonları, korelogram ve histogramı

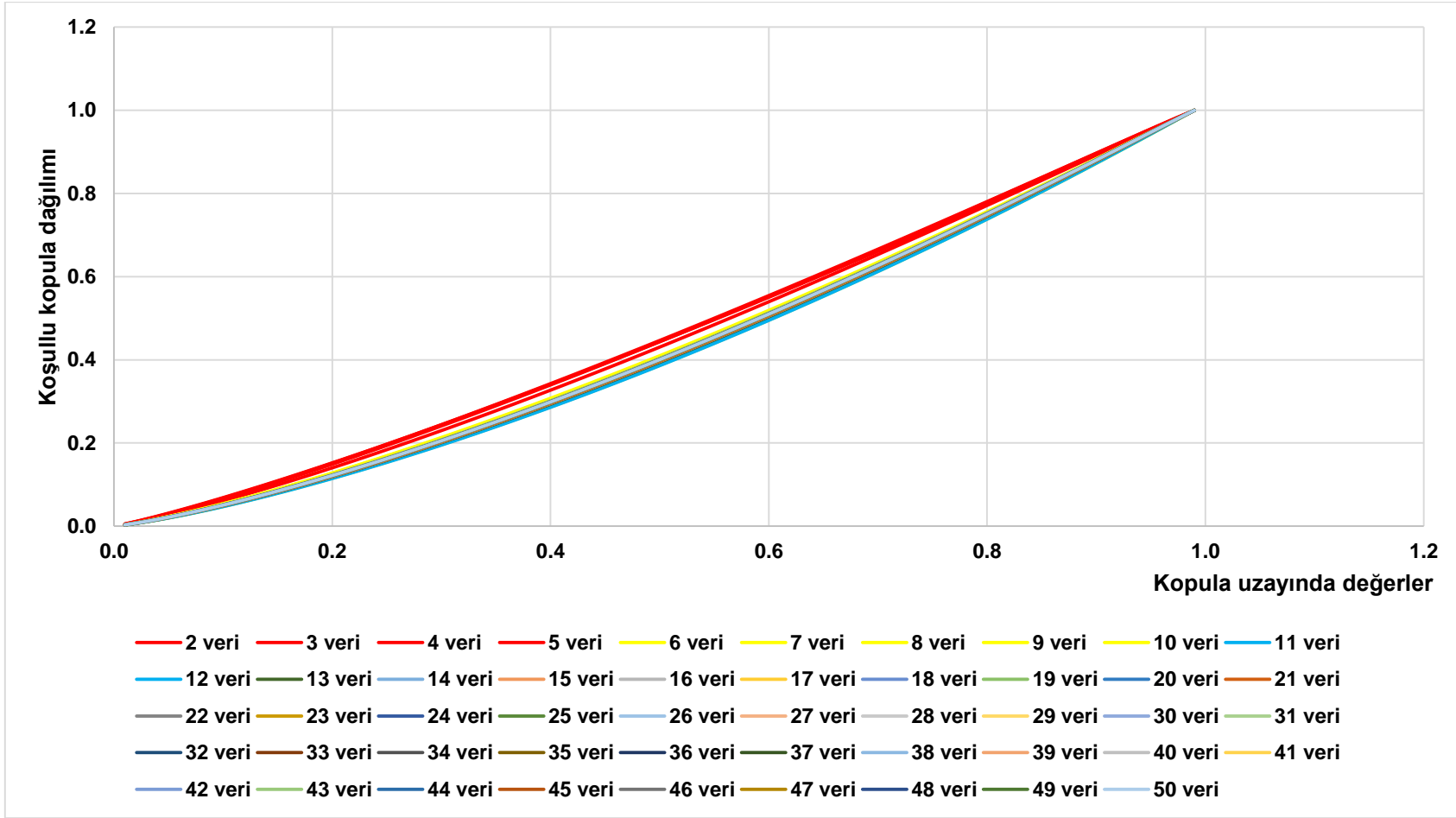
Kullanılan dördüncü veri kümesi log-normal dağılım göstermekle birlikte uyarlanan korelogram modelinin külçe etki değeri 0,7'dir. İkinci veri kümesi lokasyonu, korelogram modeli ve histogramı Şekil 3.17'de gösterilmiştir.



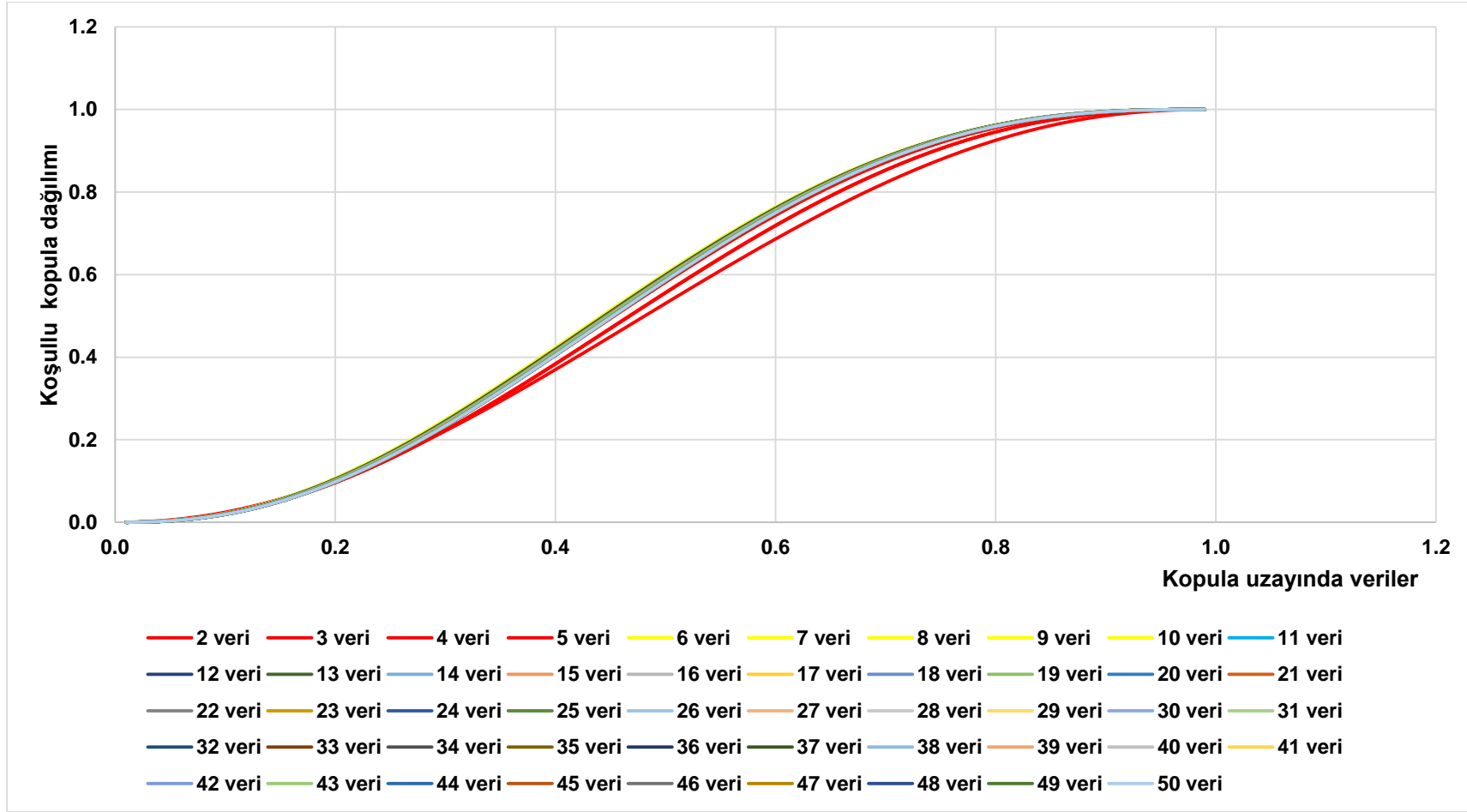
Şekil 3.17 Dördüncü veri kümesinin lokasyonları, korelogram ve histogramı



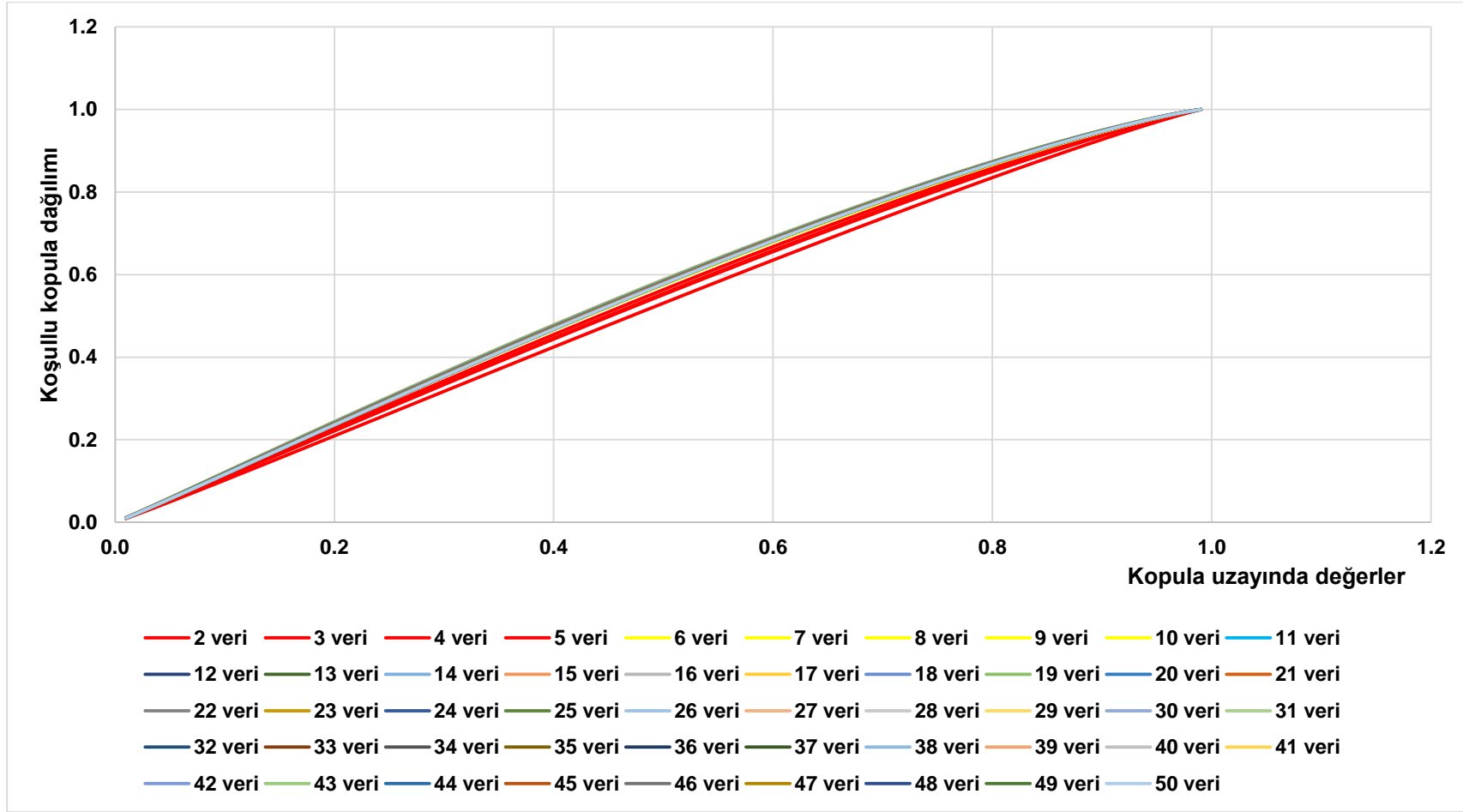
Şekil 3.18 Birinci veri kopula dağılımı ($C_0=0,1$ ve normal dağılım)



3.19 İkinci veri kopula dağılımı ($C_0=0,7$ ve normal dağılım)



Şekil 3.20 Üçüncü veri kopula dağılımı ($C_0=0,1$ ve Log-normal dağılım)

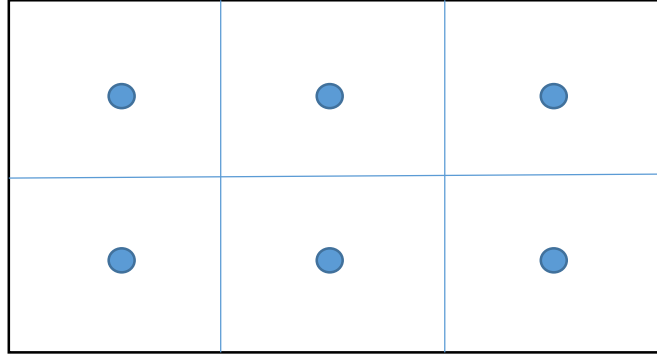


Şekil 3.21 Dördüncü veri kopula dağılımı ($C_0=0,7$ ve Log-normal dağılım)

Şekil 3.18, 3.19, 3.20 ve 3.21 de görüldüğü gibi külçe etki değeri arttıkça kopula dağılımları doğrusal bir hal almaktadır. Bu durumun veri sayısı ve dağılım tipinden bağımsız olduğu çıkarımı yapılabilir. Külçe etkisi arttıkça kopula dağılımları doğrusal bir hal aldığından medyan kopula değeri 0,5'e yaklaşmaktadır. Bu nedenle kestirimler ham verilerin ortalamasına yaklaşmaktadır.

3.5. Blokların Kestirimi

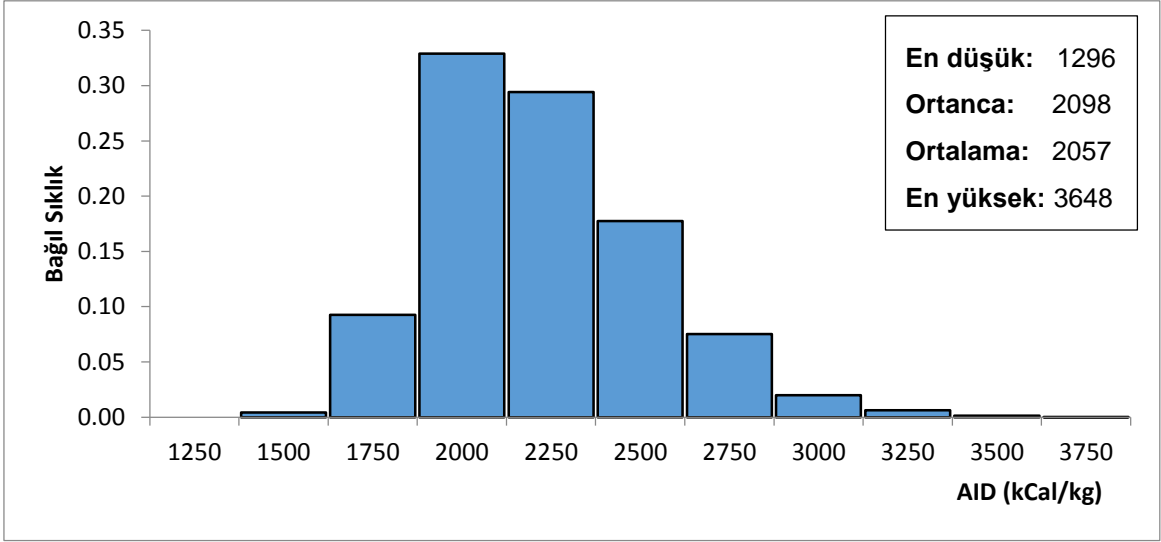
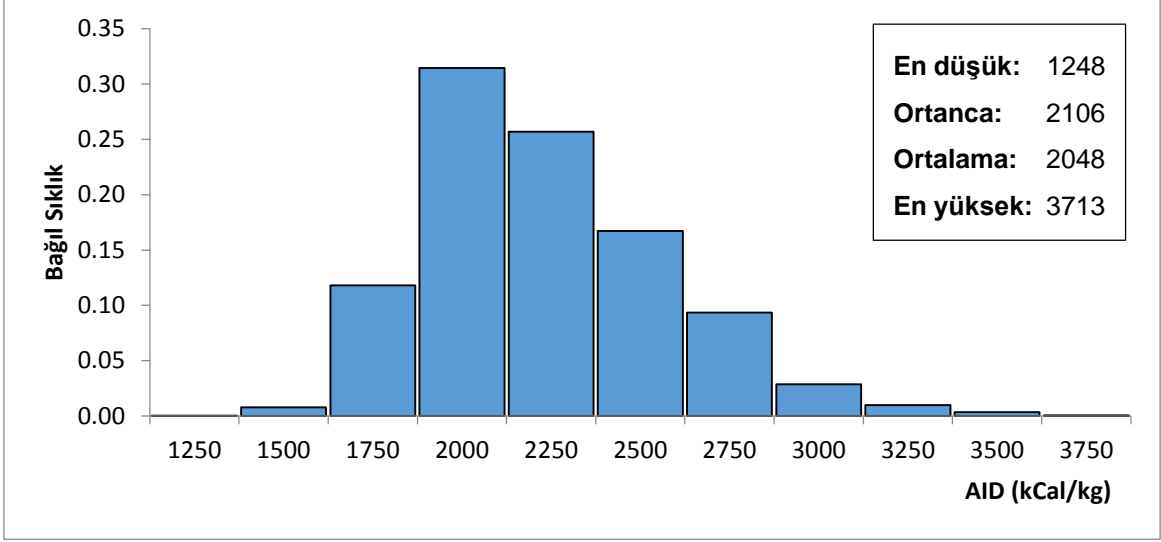
Klasik jeostatistiksel kestirimde bloklar eşit aralıklarda yerleştirilmiş noktalardan ibaret varsayılır. Bu noktalar kestirilir daha sonra bunların ortalaması alınır. Nokta kestirimlerinin ortalaması, blok ortalaması olarak alınır [27], [28], [29], [30], [31]. Örnek olarak altı alt bloğa ayrılmış bir blok Şekil 3.22'da gösterilmiştir.



Şekil 3.22 Alt bloklara ayrılmış bir blok

Blokların eşit uzaklıktaki noktalara ayrılması ile kestirim işlemi ortalama almaya dayandığından kestirim sonuçları, blok orta noktası kestirimine göre ortalama değere daha yakındır.

Örnek olarak bir maden yatağı bloklara ayrılmış ve öncelikle bloklar sadece orta noktaları kullanılarak ardından ise bloklar X, Y ve Z yönünde 3'er olmak koşulu ile 27 alt bloğa bölünmüştür. Bu durumda elde edilen kestirimin bağıl sıklık dağılımı Şekil 3.23 'de gösterilmiştir.



Şekil 3.23 Nokta ve blok kestirim histogramları (üsteki histogram nokta, alttaki histogram blok kestirimini göstermektedir)

Şekil 3.23'den görüldüğü gibi blok temelli kestirim noktalarının kestirimine göre ortalama değere daha yakın ve varyansı ise daha düşüktür.

3.6. Kopula ile Kestirimin Özellikleri

İyi bir kestirici, tam (exact) bir kestiricidir. Diğer bir ifade ile ölçüm noktasından kestirim değeri, bu noktadaki gerçek değere eşitse kestiricinin tam olduğu söylenir. Değeri bilinen bir noktanın kopula ile kestirimde verinin kendi ile korelasyonu 1'e eşittir. Bu nedenle kestirim doğrudan kestirim noktasına düşen değeri alır. Bu yanıyla kopula ile kestirim tam (exact) bir kestiricidir.

Kopula ile kestirimde kullanılan veriler ile kestirim noktası arasındaki uzaklığa bağlı korelasyon matrisine ihtiyaç duyulur. Korelasyon matrisi ise uzaklığın fonksiyonu olarak tanımlanan korelogram modeli kullanılarak üretildiğinden verilerin birbirleri ile olan uzaklıkları ve aynı zamanda kestirim noktasına uzaklıkları kestirim sonucunu etkiler. Bu nedenle kopula ile kestirimde verilerin geometrik düzeni de sonucu etkilemektedir. Ayrıca kestirim noktasına yakın verilerin uzak verilere göre kestirim üzerine etkisi daha fazladır. Bunun sebebi uzaklık artıkça korelogram değerinin düşmesidir.

Eşitlik 3.1’de gösterildiği gibi kopula ile kestirimde tek bir kestirim değeri yerine bu değerlerin koşullu dağılım fonksiyonu üretilmektedir. Bu nedenle kopula ile kestirimde kestirim değerine güven aralığı bağlamak başka herhangi bir işleme gerek kalmaksızın mümkündür.

Kopula ile kestirimde Eşitlik 2.30’da gösterildiği gibi hem uzaklık hem de kullanılan değerlerin marjinaleri dikkate alınır. Ayrıca kestirimde kullanılan değerlerin pozitif tanımlı olması durumunda kestirim sonuçları da pozitifdir. Bu nedenle kopula ile kestirim pozitif tanımlı bir kestirimdir.

4. KOPULA İLE BENZETİM

Kestirim, değişkenliğin düşük olduğu değerler üretir. Özellikle normalde yüksek olan değerler düşük, düşük olan değerler ise yüksek kestirilir. Bu bütün kestirim yöntemlerinin ortak bir özelliğidir [32], [33].

Kestirim örneklenmemiş bir noktada tek bir değer ürettiği için bu noktadaki belirsizliği değerlendirmek mümkün değildir [34]. Belirsizliğin değerlendirilmesi için bir noktada birden fazla değer üretmek gerekir. Ancak veriler gibi aynı değişkenliğe sahip birden fazla veri üretmek gerektiğinde benzetim yöntemlerine başvurmak gerekir.

Benzetim yöntemleri, koşullu ve koşulsuz olmak üzere iki ana başlık altında toplanır [35]. Koşulsuz benzetimde verilerin dağılımı ve uzaklığa bağlı değişkenliği üretilirken, koşullu benzetimde bunlara ek olarak ölçüm noktalarındaki gerçek değerler de üretilir. Maden kaynaklarının benzetiminde sıklıkla jeoistatistiksel benzetim yöntemi kullanılmaktadır. Benzetim yöntemlerinden en yaygın kullanılanları Ardışık Gauss benzetimi, Benzetilmiş Tavlama (Simulated Annealing), Dönen Bantlar (Turning Bands) benzetim yöntemleridir. Bu yöntemler temelde variogram fonksiyonunu kullanmaktadırlar [36]. Bu nedenle variogram fonksiyonunun hesaplanması ve modellenmesinden kaynaklanan hata ve belirsizlikler doğrudan benzetime transfer edilmektedir. Bu nedenle temelde variogramı kullanmayan benzetim yöntemlerine ihtiyaç vardır. Bu amaçla benzetim için yeni yöntemler geliştirilmektedir. Örneğin çok noktalı (multi-point) benzetim yöntemleri literatürde aktif çalışma alanıdır ve temelde variogram yerine benzetimi yapılmak istenen sahanın eğitim imgesi (training image) kullanılır [37]. Ancak bu tür imgelerin oluşturulması oldukça zordur.

Bölüm 3'te belirtildiği gibi kopula ile kestirimde, tek bir kestirim değeri yerine kestirime ilişkin tüm dağılım fonksiyonu üretilir. Bu fonksiyon ile noktadaki belirsizliği ortaya koymak mümkündür. Ancak bu fonksiyonlar arasında uzaklığa bağlı bir ilişki yoktur. Bu nedenle bu fonksiyonlardan üretilecek benzetimler, verilerin uzaklığa bağlı ilişkiyi sağlamaz. Bunun için kopula fonksiyonundan uzaklığa bağlı değişkenliği üretecek şekilde kullanılmaları gerekir. Klasik jeoistatistiksel benzetimde olduğu gibi kopula ile benzetimde de ardışık benzetim (Sequential simulation) yöntemi kullanılır.

Kopula ile benzetim yapabilmek için izlenmesi gereken adımlar kopula ile kestirime ilişkin adımlara çok benzemekte olup sadece birkaç ara adımın eklenmesi gerekir. Kopula ile benzetimdeki temel yaklaşım, kestirimde elde edilen dağılımdan bir veri çekip, çekilen verinin ham veri kümesine eklenmesi ve benzetimin rastgele bir sıra izleyerek yapılmasıdır.

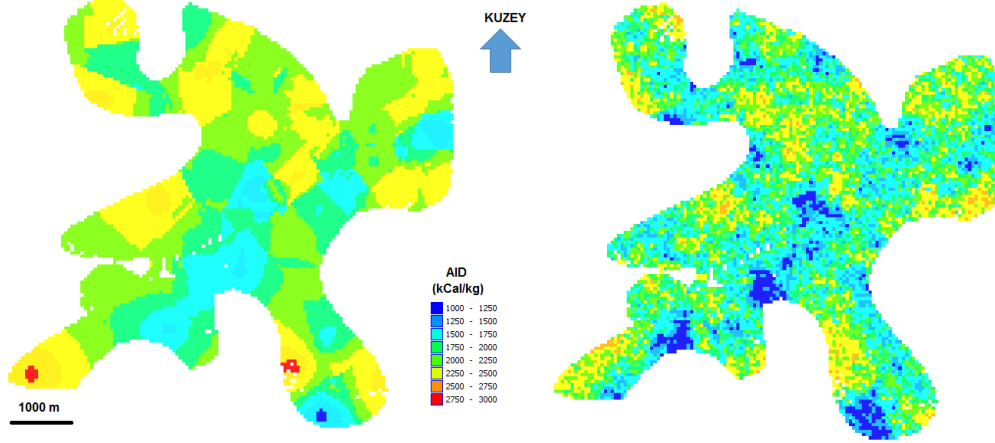
Kopula ile benzetimin adımları aşağıda verilmiştir.

- 1) Ham veriler kopula uzayına dönüştürülür.
- 2) Dönüştürülmüş olan verilerin deneysel korelogram değerleri hesaplanır.
- 3) Deneysel korelogram değerlerine model uyarlanır ve uyarlanan modelin uygunluğu test edilir.
- 4) Rastgele bir şekilde kestirim noktası belirlenir.
- 5) Bu noktaya komşu olan veriler belirlenir.
- 6) Eğer anizotropi varsa anizotropinin ortadan kaldırılması için gerekli koordinat dönüşümleri yapılır.
- 7) Kestirim noktasına komşu veriler kullanılarak bu noktadaki koşullu kopula dağılımı elde edilir.
- 8) Koşullu kopula dağılımdan rastgele bir şekilde veri çekilir ve benzetim değeri olarak alınır.
- 9) Kestirim noktasındaki benzetim değeri ham verikümesine eklenir.
- 10) 4. adımdan 9. adıma kadar olan adımlar tüm benzetim noktaları ziyaret edilene kadar devam eder.
- 11) Tüm benzetim noktaları ziyaret edilmesi ile kopula uzayındaki veriler sıralama koruyan bir yöntemle ham veriler uzayına dönüştürülür.

Bu yöntemle arzu edilen sayıda benzetim modeli üretilebilir.

Kopula ile benzetim büyük ölçüde koşullu kopula fonksiyonuna dayanmaktadır. Kopula ile kestirim ve benzetim arasındaki en önemli fark, kestirimde en iyi kestirici olarak koşullu kopula dağılımının ortanca değeri alınırken benzetimde bu değer, rastgele bir şekilde belirlenmesidir.

Benzetimler, kestirime göre daha değişken değerler üretir. Şekil 4.1'de bir sahaya ait alt ısı değer kestirim ve bir benzetim haritaları gösterilmiştir.



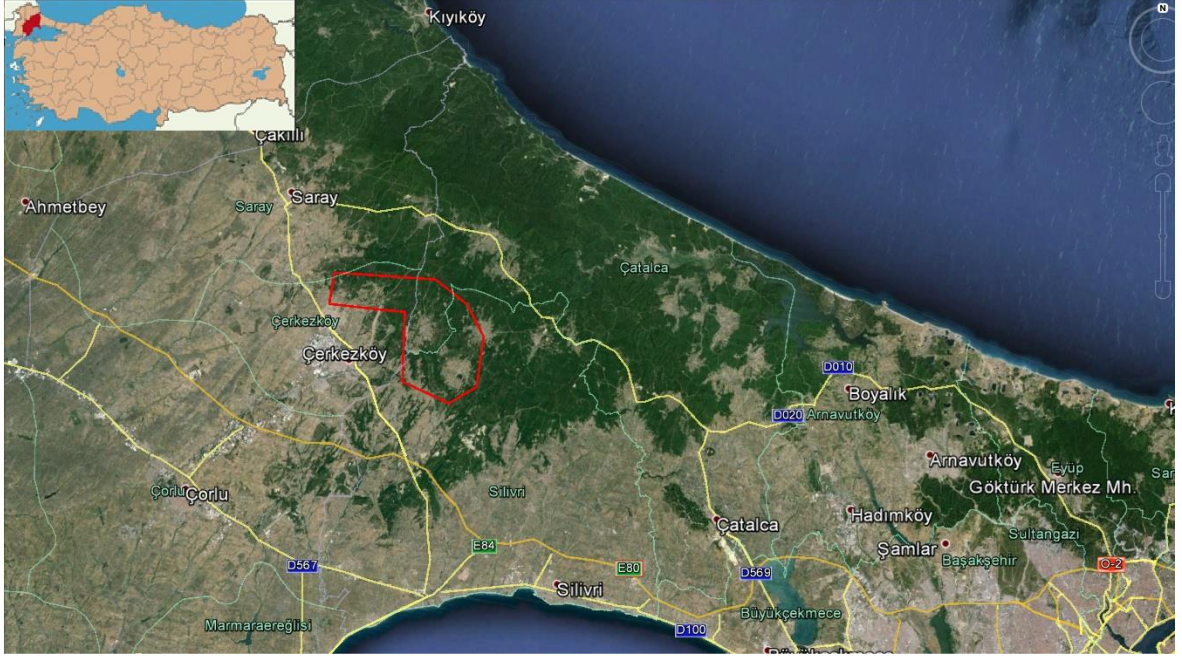
Şekil 4.1 Bir kömür sahasına ait kestirim(solda) ve benzetim (sağda) değerleri haritası

Şekil 4.1'den benzetim yönteminin kestirime göre lokal ölçekte daha değişken değerler ürettiği görülmektedir.

5. KOPULA ile KESTİRİM ve BENZETİME ÖRNEK BİR UYGULAMA

Kopula ile kestirim ve benzetime örnek bir uygulama olarak Trakya bölgesindeki bir kömür sahası seçilmiştir. Kömür kalite değişkenlerinden olan alt ısıl değer (AİD)'nin uzaklığa bağlı dağılımı kopula kullanılarak kestirilmiş ve benzetilmiştir.

Çalışma alanı Tekirdağ ili Çerkezköy ilçesinin doğusunda bulunmaktadır.(Şekil 5.1)



Şekil 5.1 Saha yer bulduru haritası

5.1. Sahanın Jeolojisi

Ülkemizin bilinen kömür yatakları içinde Trakya Bölgesi kömürleri önemli bir yer tutmaktadır. Trakya Tersiyer havzası kömürleri daha önceki araştırmacılar tarafından buldukları yer dikkate alınarak; Istranca Masifi eteklerinde yer alan kömürler ile Keşan, Malkara, Uzunköprü ve Meriç yöresinde yer alan kömürler şeklinde gruplandırılmıştır. Havzada kömür oluşumu Oligosen yaşlı Danişment formasyonu içinde, Istranca Masifi eteklerinde bir veya iki damar halinde, Güney Trakya'da (Keşan-Malkara) ise çok sayıda damarlar halinde bulunmaktadır [37] Kömürlerin kalite değerleri sahalara göre değiştiği gibi aynı sahalardaki farklı damarlarda da değişim göstermektedir.

Trakya Bölgesinde gnaysların oluşturduğu Istranca masifi, doğu-batı uzanımlı olarak yüzeyler ve temeli oluşturur. Üzerinde yer alan Mesozoyik birimleri; Triyas,

Jura ve Kretase yaşlı kayaç toplulukları ile temsil edilmektedir. Triyas'a ait şistler düşey ve yanal olarak mermerler ile geçişlidir. Yan metamorfik kireçtaşlarından oluşan Jura yaşlı birimler üzerinde ise konglomera, kireçtaşı, kalkerli kumtaşı, tuf ve kumtaşından oluşan Kretase yaşlı birimler yer alır. Senozoyik; tabandan tavana doğru Eosen, Oligosen ve Miyosen yaşlı kayaçlarla temsil olunmaktadır. Eosen çökelleri altta konglomera ile başlamakta ve istif yukarı doğru kumtaşı, killi kireçtaşı, kumlu kireçtaşı, kireçtaşı ve resifal kireçtaşlarıyla devam etmektedir. Eosen çökelleri üzerinde yer alan Oligosen yaşlı çökeller altta beyaz-gri renkli kumtaşı, çakıllı kumtaşı, çakıltaşı, oolitli-fosilli kireçtaşı ve killi kireçtaşı ile başlar. Bunun üzerine ise ince tabakalı, laminalı, beyaz-bej renkli kiltası, silttaşı araldanmalı sarı renkli kumtaşı ve yeşil renkli killer gelir.

Daha üstte Trakya Tersiyer Havzasında kömür içeren sarımsı gri, gri, kahverengimsi gri renklerde kiltası, miltası ve kumtaşı araldanmasından oluşan kömürlü birim yer alır. İlk kez Boer (1954) tarafından Danişment formasyonu olarak adlandırılan birim Tekirdağ, Silivri arası Keşan kuzeyinden Malkara kuzeyine kadar geniş bir alanda, Uzunköprü ve Meriç yöresinde, ayrıca Saray civarında yüzeylemektedir. Kömür içeren Danişment formasyonu üzerine kanal dolgusu özelliği gösteren çakıltaşı, kiltası ve silttaşı gelmektedir. Oligosen yaşlı birimlerin en üst düzeylerinde tuf, andezit ve aglomeralar yer almaktadır. Miyosen çökelleri tabanında beyaz, sarımsı beyaz, çapraz tabakalanmalı kil ve çakıltaşı mercekli gevşek tutturulmuş kumtaşları, üstte ise kırmızı, kahverengi, kötü boylanmalı, genellikle iyi tutturulmamış çakıltaşı ve kumtaşları gözlenmektedir [38]

Trakya Havzasında kömürlü birimi Parejas [39] ve Ternek [40] linyitli kumtaşı olarak adlandırmışlardır. Lebküchner [41] tarafından da linyitli kumtaşı olarak anılan birim havzadaki tüm diğer araştırmacılar tarafından Danişment formasyonu olarak benimsenmiştir. Formasyon açık kahverengi, gri, yeşilimsi gri renklerde kumtaşı ve kiltası ile kaba taneli kumtaşlarından oluşmuştur. Kumtaşları genellikle kötü boylanmalı olup taneler kuvarsit, granit, kristalin şist, kireçtaşı, serpantin ve çeşitli renklerde volkanik kayaç parçaları içermektedir [42]. Birimin alt seviyelerinde kiltası, üst seviyelerinde ise kumtaşları yaygın olup birbirleriyle geçişlidir. Formasyon içerisinde Lebküchner [41] tarafından 11 adet olduğu bildirilen kömür damarının günümüzde sürdürülen çalışmalarda 10 adet olduğu görülmektedir. Yaygın olarak gözlenebilen damar sayısı ise genellikle 7 adettir.

Transgresyon, havzanın güney batısında Üst Lütésiyen'de Büyük Çekmece, Küçük Çekmece, Çatalca - Yalıköy koridorunda, Orta Eosen'de Kıyıköy - Vize koridorunda ilerlemiş ve Üst Eosen'de Istranca Masifinin tüm güney kenarı boyunca etkili olmuştur. Trakya Tesiyer Havzası tektonik aktivitenin neden olduğu çökmeler ile Tersiyer' de dolmuştur [38].

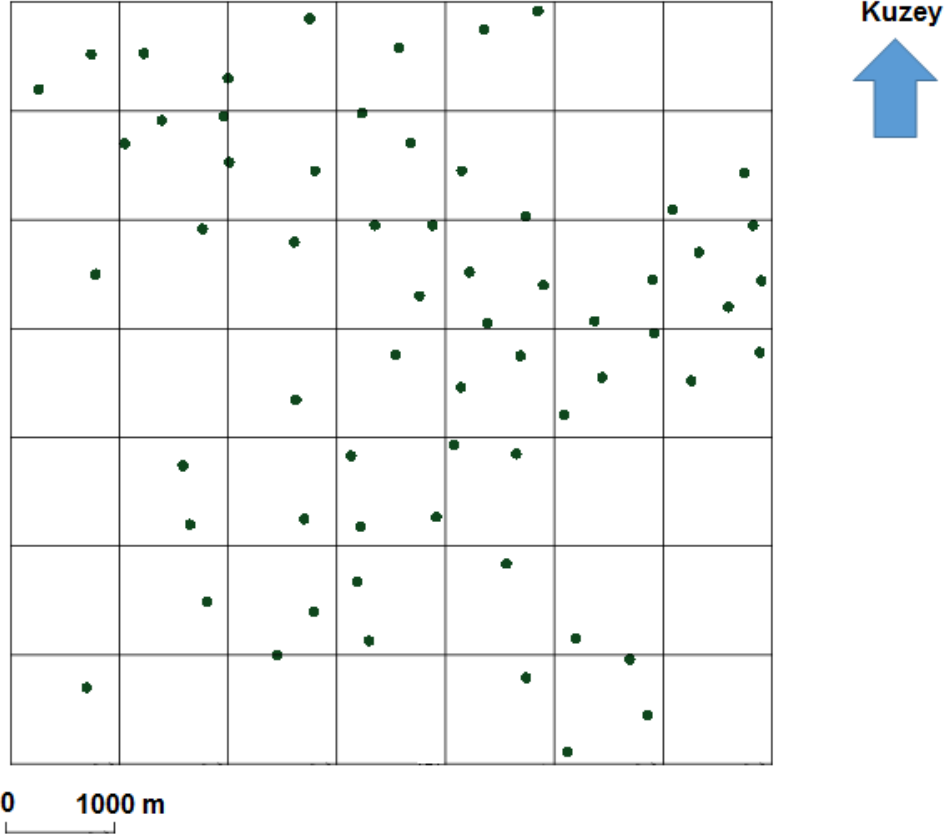
Trakya Havzasında Eosen ortamlar kadar karasal koşullar hakim olmuş ve bir aşınma dönemi geçirmiştir [43]. Orta Eosen'de başlayan transgresyon, Oligosen ortalarına kadar sürmüştür. Bu sırada kıyı kuşağında oluşan kırıntılılar, deltanın denize açıldığı bölgede gelişmiştir. Sığ ve sıcak deniz, resifleri oluşturan organizmaların yaşamasına ve gelişmesine uygun bir ortam hazırlamıştır. Oligosen ortalarında başlayan regresyon, hareketli bir kıyı çizgisi oluşturarak sığ ve çalkantılı bir ortamda çakıltaşları ile oolitle kireçtaşlarının çökmesine yol açmıştır. Havzanın kuzeyinde, regresyonun neden olduğu kıyı çizgisinin değişmesiyle yer yer lagünler ve göller gelişmiş, böylece kömür oluşumu için gerekli olan bataklıklar meydana gelmiştir. Güneydeki kömür oluşumları ise, Oligosen yaşlı delta düzlüğü bataklıklarında gelişme göstermiştir.

Kömürlü delta çökelleri üzerinde, Oligosen'in en üst seviyesini oluşturan akarsu çökelleri yer almaktadır. Örgülü akarsu sistemleri ve bunlarla yanal geçişli olan daha dar alanlarda izlenen gölsel kireçtaşları, bölgedeki Miyosen'in karakteristik özelliğidir. Üst Miyosen veya öncesi bir volkanik aktivite, sınırlı bir alanda gözlenen örtü bazaltlarını oluşturmuştur. Pliyosen ve Pleyistosen'de ise oksidasyonun en yüksek olduğu kırmızı renkli alüvyon yelpazeleriyle temsil olunan karasal çökeller yer almaktadır (Şekil 5.2).

YAŞ	KAYA BİRİMLERİ	KALINLIK (m)	L İ T O L O J İ		ÇÖKELME ORTAMI
KUVATERNER	ALÜVYON			Kum, kil, silt	Güncel
PLİYOSEN	TRAKYA FORMASYONU	50		Çakıltaşı, kumtaşı	Akarsu ve alüvyon yelpazesi
MİYOSEN	ERGENE FORMASYONU	100-500		Kumtaşı, kiltası ve silttaşı	Acı sulu göl ve akarsu
	ÇEKMECE FORMASYONU	100-200		Çamurtaşı, kumtaşı, marn ve kireçtaşı	Akarsu ve göl
	ÇANAKKALE FORMASYONU	40-100		Kiltası, kumtaşı ve silttaşı	Akarsu, göl, lagün, kıyı ve kıyı ötesi
	HİSARLIDAĞ VOLKANİTLERİ	?		Tüf ve aglomera	Kaletepe erüpsiyonu (?)
OLİGOSEN	DANIŞMEN FORMASYONU	200-600		Gri-yeşil renkli kiltası, kumtaşı, çakıltaşı, tüf ve linyit	Akarsu
	PINARHISAR	5-20		Fosilli (Congeria) kireçtaşı	Delta bataklığı
	OSMANCIK FORMASYONU	300-600		Kumtaşı, şeyl, yer yer çakıltaşı, kireçtaşı ve ince linyit bantları	Delta
	MEZARDERE FORMASYONU	500-1200		Yeşil-gri renkli şeyl, marn ve tüf	Lagün
EOSEN	CEYLAN FORMASYONU	400-1000		Tüf arakatlı gri renkli marn, şeyl, kumtaşı ve killi kireçtaşı	Delta, akarsu ve göl
	SOĞUCAK FORMASYONU	40-300		Gri-bej renkli mikritik yer yer resifal kireçtaşı	Delta ve sahil yakını
	KOYUNBABA	10-100		Çakıltaşı, kumtaşı, marn	Açık deniz ve türbiditik
	KEŞAN FORMASYONU	500-1500		Marn, şeyl ve kumtaşı	Şelf ve paleoyükselim
	GAZİKÖY FORMASYONU	600-1000		Koyu gri-siyah renkli şeyl ve kumtaşı	Akarsu-göl, delta ve türbiditik (litoral-neritik)
					Türbiditik ve derin deniz

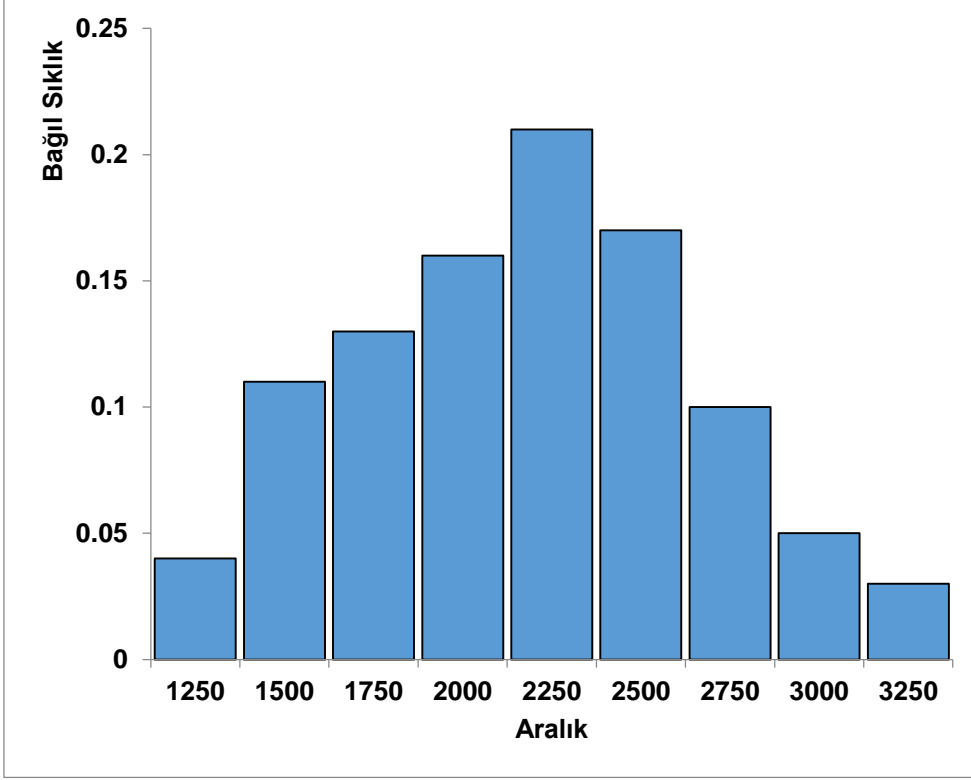
Şekil 5.2 Havzanın genelleştirilmiş stratigrafisi [44]

Sahada toplam 63 adet sondaj yapılmıştır. Sondajların tamamı dik olarak yapılmış olup toplam sondaj uzunluğu 31.265 m'dir. Bu sondajlardan 49 kadarı kömür kesmiştir. Veriler toplam 49 km² 'lik bir alana yayılmıştır. Sondajların X-Y düzleminden görüntüsü Şekil 5.3'da gösterilmiştir.



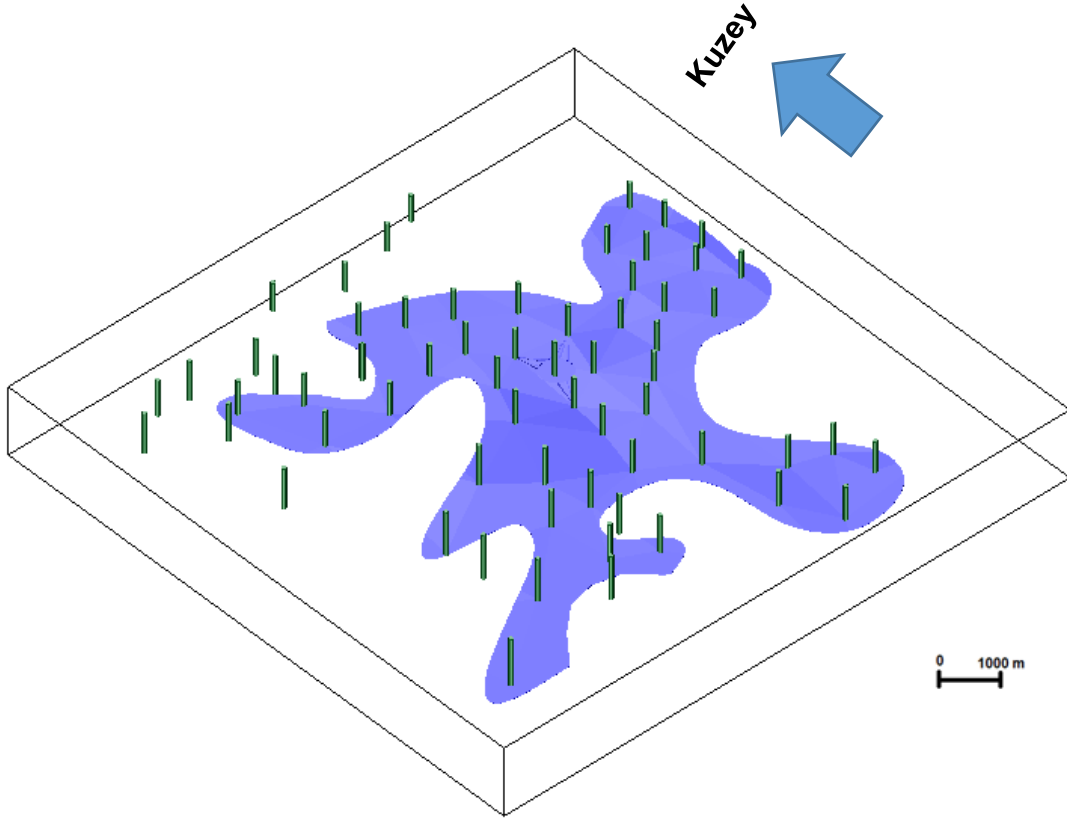
Şekil 5.3 sondajların X-Y düzleminde görüntüsü

AID'ye ilişkin ham verilerin ortalaması 2115 kCal/kg olup, histogramı Şekil 5.4'de gösterilmiştir. Şekil 5.4 de görüldüğü gibi veriler normal dağılıma yakın bir dağılım sergilemektedir.



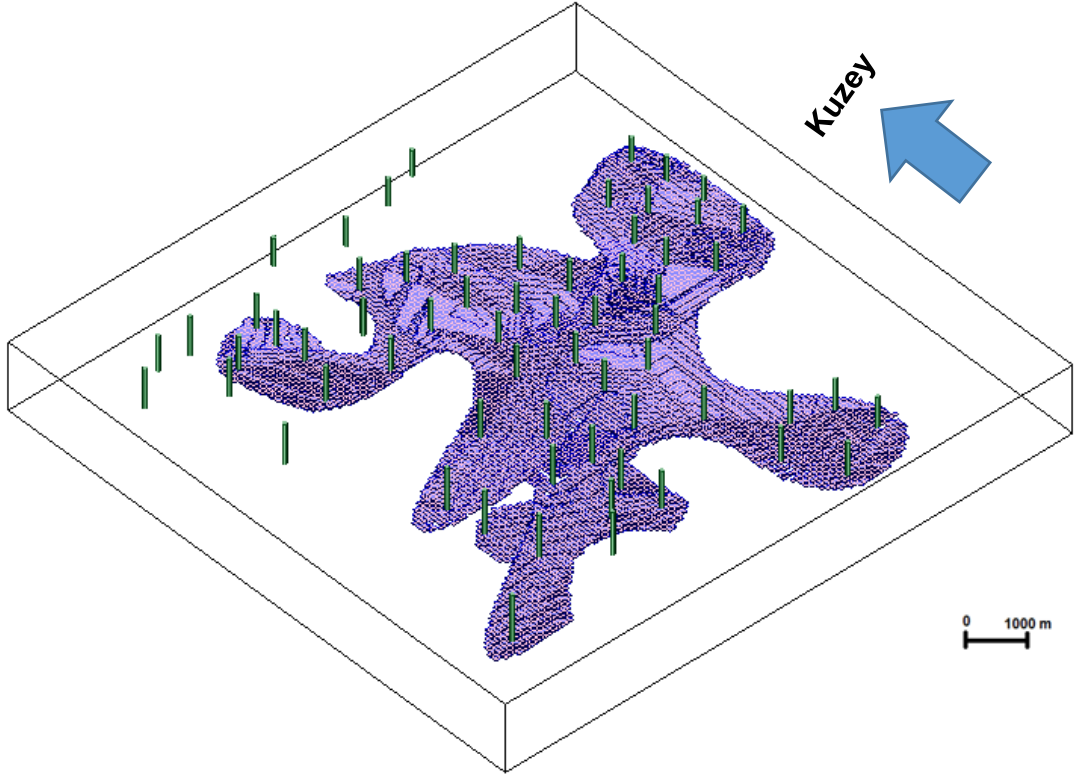
Şekil 5.4 Ham verilerin histogramı

Tüm veriler SURPAC programına aktarılmıştır. Sondaj verileri kullanılarak üretime en uygun en üst kömür tabakasının katı modeli oluşturulmuştur. Katı modelin perspektif bir görüntüsü Şekil 5.5'de gösterilmiştir. Katı modelin hacmi 68.200.000 m³'tür.



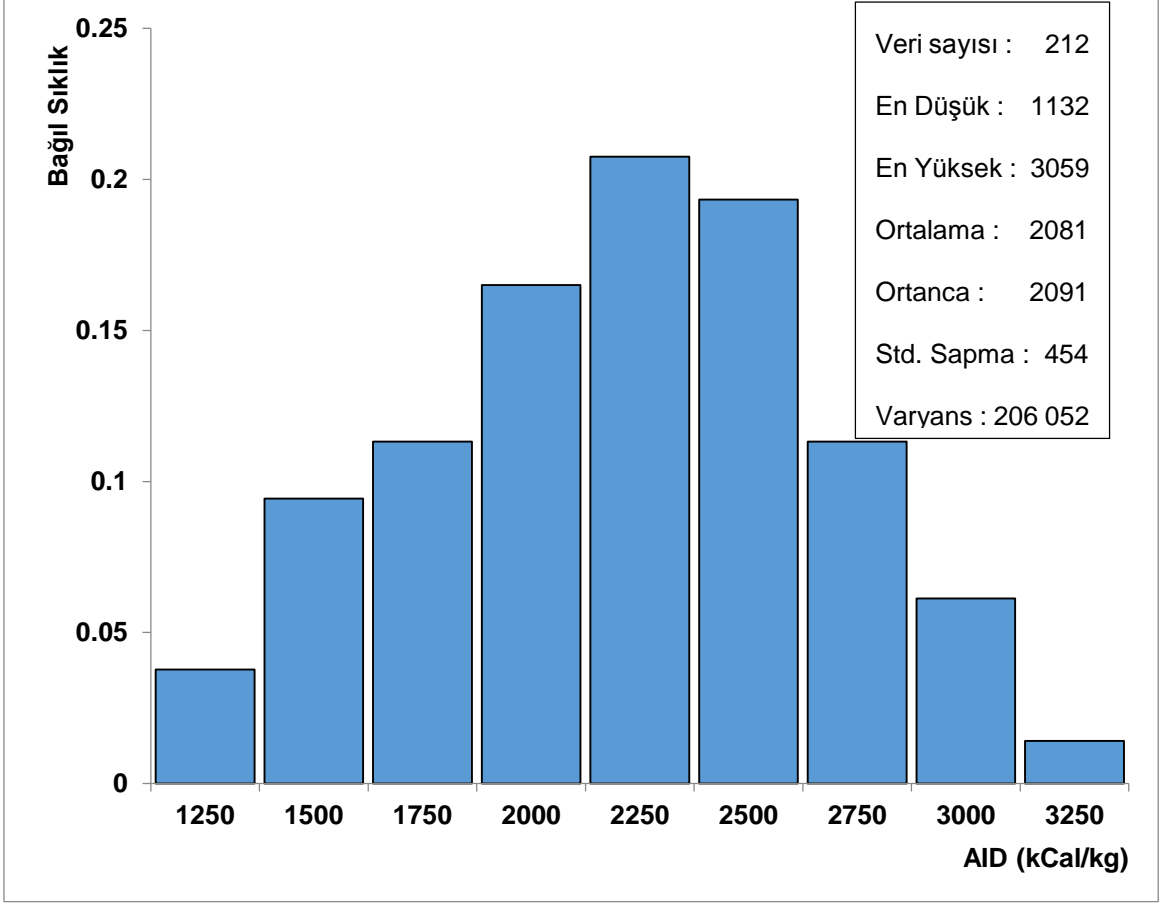
Şekil 5.5 Katı modelin perspektif bir görüntüsü

Oluşturulan katı model üretim şartları da dikkate alınarak boyutları X,Y ve Z yönünde sırası ile 50*50*2,5 m olan bloklara bölünmüştür. Toplam blok sayısı 10 900'dür. Elde edilen blok modelin perspektif görünümü Şekil 5.6'da gösterilmiştir.



Şekil 5.6 Blok modelin perspektif görünümü

Ham veriler düzensiz uzunluktaki örneklerden alındıklarından kestirim ve benzetim işlerinde doğrudan kullanılamazlar. Dolayısı ile ham verilerin uzunluk ağırlıklı olmak koşulu ile eşit uzunluktaki verilere dönüştürmeleri gerekmektedir. Düzenli aralıklara bölme işlemi “kompozitleme” olarak adlandırılır. Kompozit boyu genelde ham verilerin ortalama uzunluğu olarak seçilir. Bu kömür yatağında ham örneklerin ortalama uzunluğu 1 m olduğundan kompozit boyu 1 m olarak belirlenmiştir. Kompozit verilerin histogramı özet istatistikleri ile birlikte Şekil 5.7’de gösterilmiştir. Ham verilerde olduğu gibi kompozit veriler de normal dağılıma yakın bir dağılım sergilemektedirler.



Şekil 5.7 Kompozit verilerin histogramı ve özet istatistiği

Bundan sonra ham veriler yerine ham verileri temsil eden kompozitler kullanılmış, kestirim ve benzetim ise blok model üzerinden gerçekleştirilecektir. Kestirim ve benzetim için deneysel korelogramlar elde edilmiş ve bunlara korelogram modelleri uyarlanmıştır. Uyarlanan korelogram modeli kullanılarak kestirim ve benzetim işleri gerçekleştirilmiştir.

Kopula ile kestirim ve benzetim için henüz paket programlar geliştirilmediği için MATLAB® ortamında kestirim ve benzetim yapan programlar yazılmıştır. Bu çalışmada kompozitlerin ve blok modelin oluşturulması dışında yapılan tüm işler geliştirilen programlar ile yapılmıştır. Grafikselleştirilen sonuçlar için, elde edilen sonuçlar tekrar SURPAC programına yüklenmiştir.

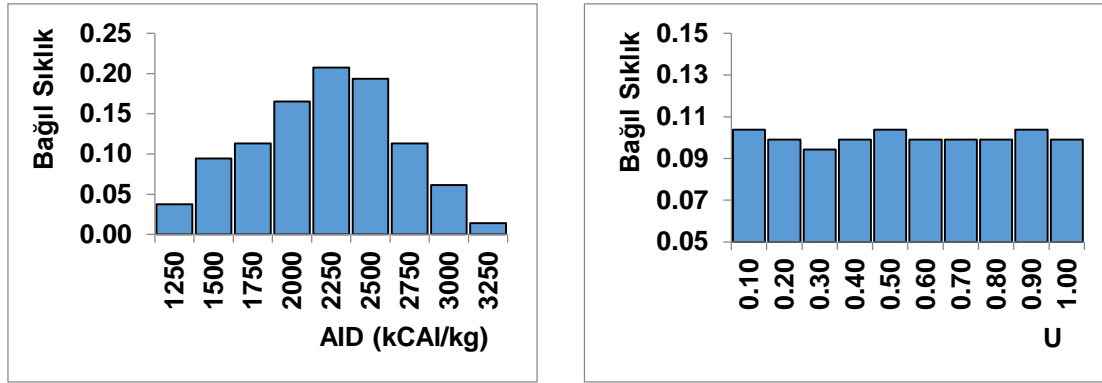
5.2. Alt Isıl Değerin Kestirimi

AID'nin kestiriminde kompozit veriler kullanılmıştır. Kompozit veriler kopula uzayına dönüştürülmüş, dönüştürülen veriler kullanılarak deneysel korelogram

hesaplanmıştır. Hesaplanan deneysel korelograma model uyarlanmış ve modelin kullanılabilirliği test edilmiştir. Uyarlanan korelogram modeli kullanılarak kopula ile kestirim gerçekleştirilmiştir.

5.2.1. Verilerin kopula uzayına dönüştürülmesi

Kopula uzayına dönüşüm tekdüze bir dönüşümdür. Yani sayı değerlerinin sıralaması değişmezken sayı değerleri değişebilir. Bu nedenle öncelikle veriler küçükten büyüğe doğru sıralanmış, bu verilerin sıra değerleri bulunmuş ve son olarak veriler kopula uzayına dönüştürülmüştür. Kompozit verileri ile kopula uzayına dönüştürülmüş verilerin histogramı Şekil 5.8’de gösterilmiştir.



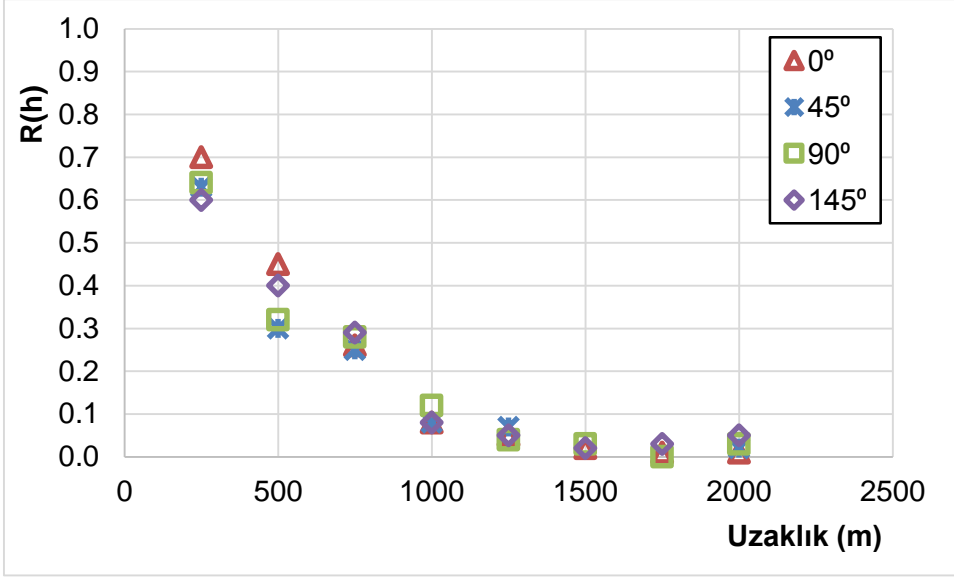
Şekil 5.8 Ham veriler (sol) ve kopula uzayına dönüştürülmüş veriler (sağ)

Şekil 5.8’den görüldüğü gibi kopula uzayına dönüştürülmüş veriler tek düze dağılıma sahiptirler. Bundan sonraki analizler kopula uzayına dönüştürülmüş kompozit veriler üzerinden yapılacaktır.

5.2.2. Deneysel Korelogram Hesabı

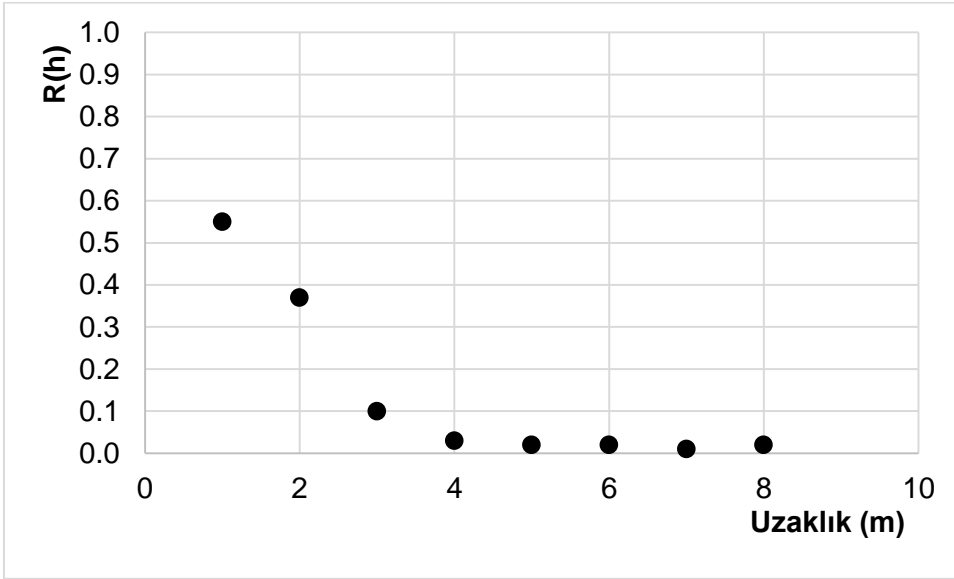
Kopula ile kestirim yapılabilmesi ve aynı zamanda uzaklığa bağlı dağılımı ortaya koyabilmek için deneysel korelogramları hesaplanmıştır.

Deneysel korelogram yatay olarak dört ana yön ve ayrıca düşey yönde hesaplanmıştır. Yatay yöndeki korelogram, yatay yönde veriler arasındaki ortalama mesafe 1450 m olduğundan 250 m’nin katları olarak 2000 metreye kadar ve 0° , 45° , 90° ve 135° olmak üzere dört ana yönde hesaplanmıştır. Hesaplanan deneysel korelogramlar Şekil 5.9’de gösterilmiştir.



Şekil 5.9 0°, 45°, 90° ve 135° deki deneysel korelogram değerleri

Düşey yönde ise korelogram, kompozit boyu uzunluğu olan 1 m ve katları için 8 m'ye kadar hesaplanmıştır. Düşey yönde hesaplanan deneysel korelogram değerleri Şekil 5.10'da gösterilmiştir.

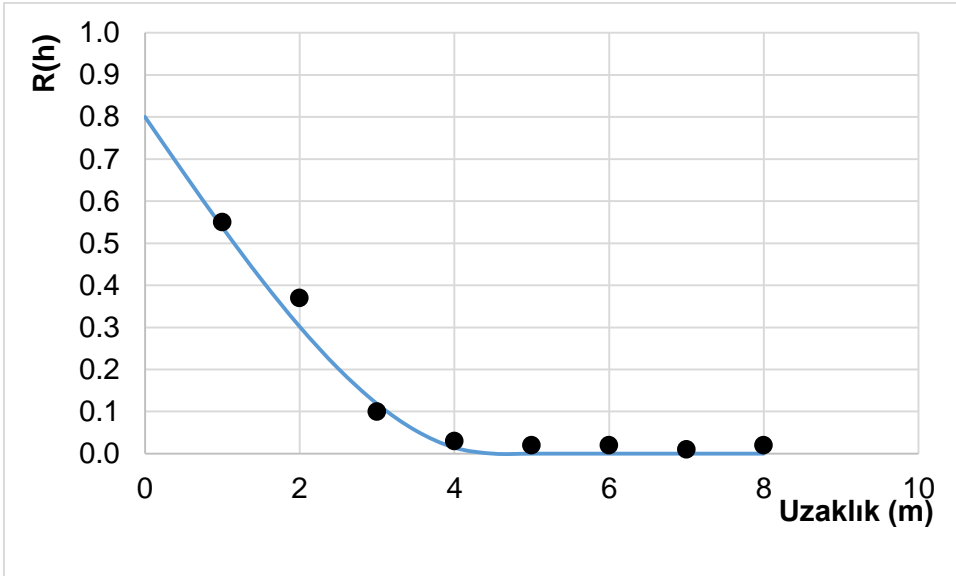
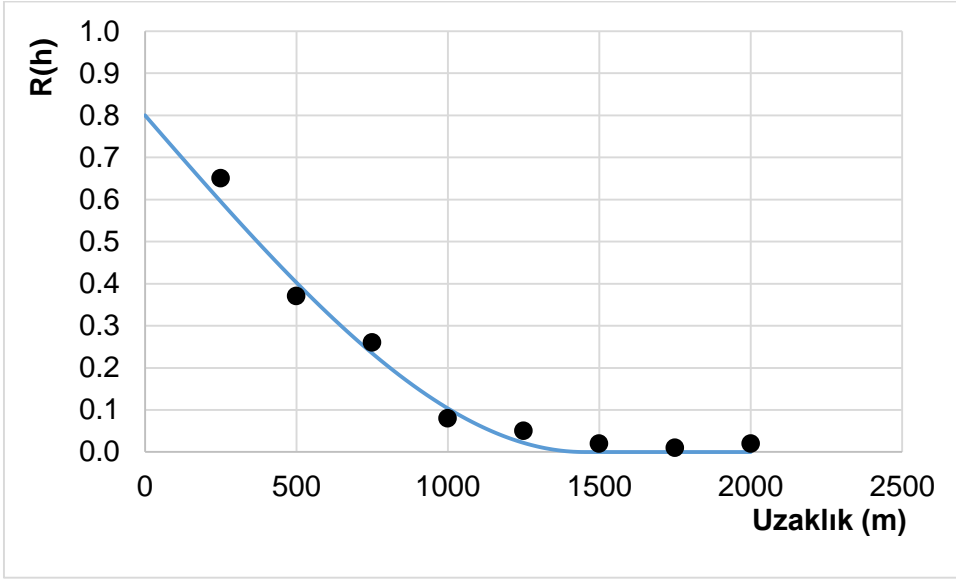


Şekil 5.10 Düşey yönde hesaplanan deneysel korelogram

Hesaplanan korelogram değerlerinin kopula ile kestirimde ve benzetimde kullanılabilmesi için modeller uyarlanmıştır.

5.2.3. Model uyarlama ve Çapraz Doğrulama

Uyarlanan korelogram modelleri ile deneysel korelogram değerleri Şekil 5.11’de gösterilmiştir.



Şekil 5.11 Yatay ve düşey yönde deneysel korelogram ile model korelogramlar

Deneysel korelogram değerlerine uyarlanan korelogram model parametreleri Çizelge 5.1’de gösterilmiştir.

Çizelge 5.1 Yatay ve düşey yönde uyarlanan korelogram modelleri

	Külçe Etkisi	Yapısal Uzaklık (m)
Yatay Yön	0.2	1450
Düşey Yön	0.2	4,5

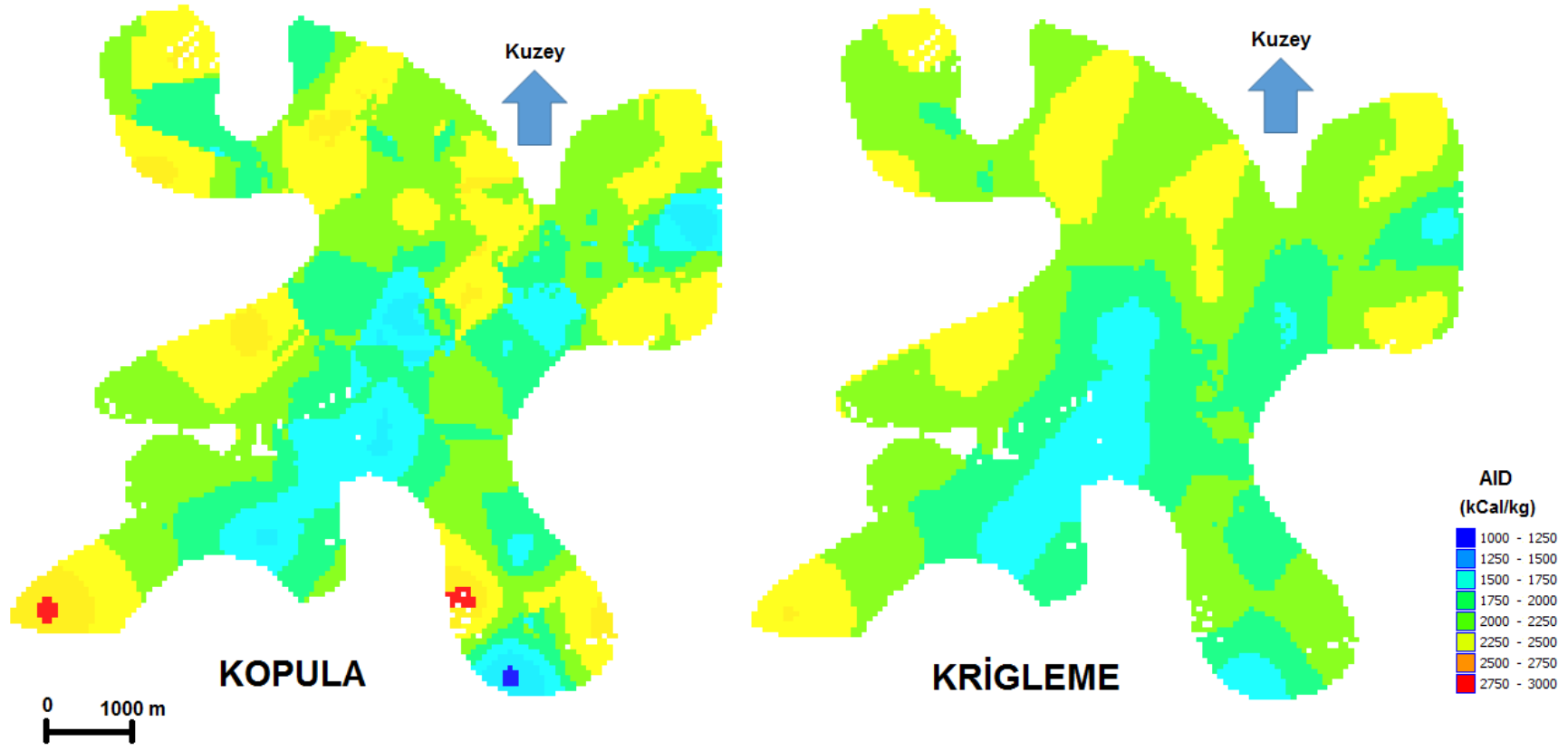
AID geometrik anizotropik bir davranış sergilemekte olup yatay yöndeki yapısal uzaklık 1450 m iken düşey yöndeki uzaklık 4.5 m dir

Uyarlanan model ve parametrelerin tutarlı olduğunu test etmek için çapraz doğrulama yöntemi kullanılmıştır. Yapılan hatanın ortalaması 80 ve yapılan hataların iki standart sapma içinde bulunma olasılığı % 94,8 dir. Bu durumda uyarlanan model kabul edilebilir bir modeldir.

5.2.4. Kestirim

Blokların ortalama AID'i kompozit veriler kullanılarak kestirilmiştir. Kestirilecek her bir blok için veri tarama elipsoidi oluşturulmuştur. Tarama elipsoidinin yatay yöndeki eksenini 1450 m, düşey yönde ise 4.5 m olarak seçilmiştir. Bir bloğun güvenilir bir şekilde kestirilebilmesi için tarama elipsoidi içerisinde en az dört veri kullanılmıştır. Kestirim işleminin uzun sürmemesi için en fazla on veri dikkate alınmıştır.

Ayrıntıları burada verilmemekle birlikte aynı sahada krigleme yöntemi ile kestirim yapılmıştır. Kopula ve krigleme ile yapılan kestirimlerin haritası Şekil 5.12'de gösterilmiştir.



Şekil 5.12 AID'nin kopula ve krigleme kestirim haritaları

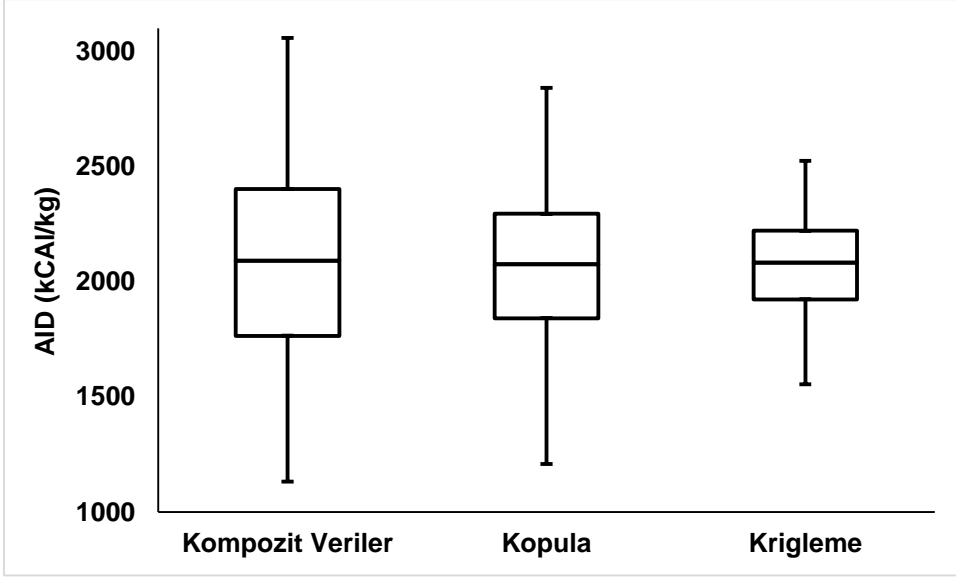
Kopula ve krigleme ile yapılan kestirimlerin özet istatistikleri, kompozitin özet istatistikleri ile birlikte Çizelge 5.2'de gösterilmiştir.

Çizelge 5.2 Kopula, krigleme ve kompozitlerin özet istatistikleri

İstatistikler	Kompozit veriler	Kopula	Krigleme
En düşük	1132	1208	1555
Ortalama	2081	2069	2062
En yüksek	3059	2842	2525
Varyans	206.052	76.994	38.373
Çarpıklık	-0,09	-0,34	-0,36

Pratik açıdan kopula ve krigleme ile yapılan kestirimlerin yansız olduğu görülmektedir.

Çizelge 5.2'de görüldüğü gibi kopula ile kestirimde elde edilen sonuçları en düşük değeri kriglemeye göre daha düşük, en yüksek değeri daha yüksek ve çarpıklık değeri hemen hemen aynıdır. Bu durumda kopula ile iki kat daha değişken kestirim değerleri elde edildiği söylenebilir. Kestirimden beklenen en önemli özellik, kestirim sonuçlarının ham değerlere yakın olmasıdır. En düşük ve en yüksek değerler dikkate alındığında kopula ile kestirimin kriglemeye göre ham verilere daha yakın değerler üretmekte olduğunu göstermektedir. Şekil 5.13'de sunulan kutu grafikleri bu durumu daha belirgin bir şekilde göstermektedir.

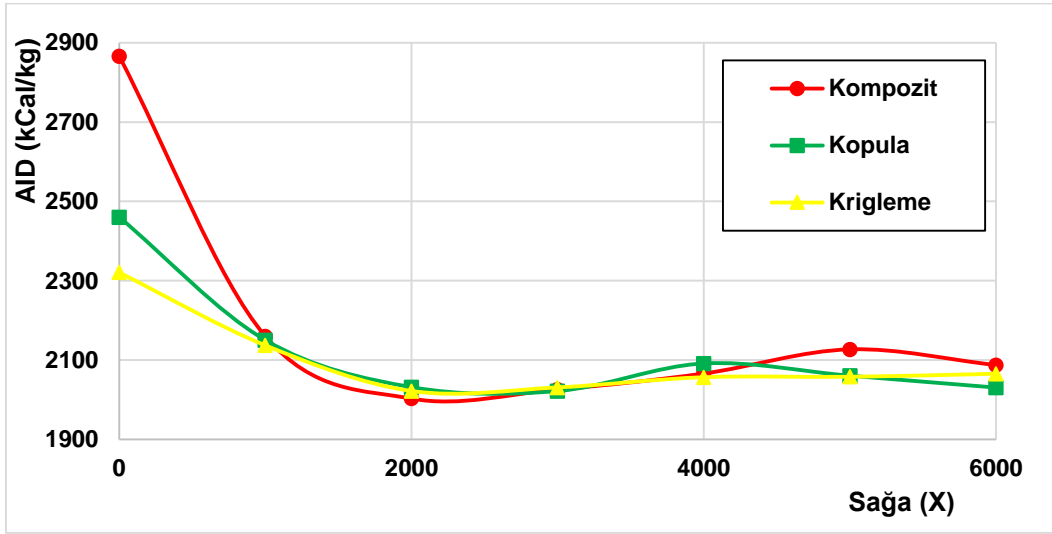


Şekil 5.13 Kompozit verilerin, kopula ve krigleme kestirim sonuçları kutu grafiği

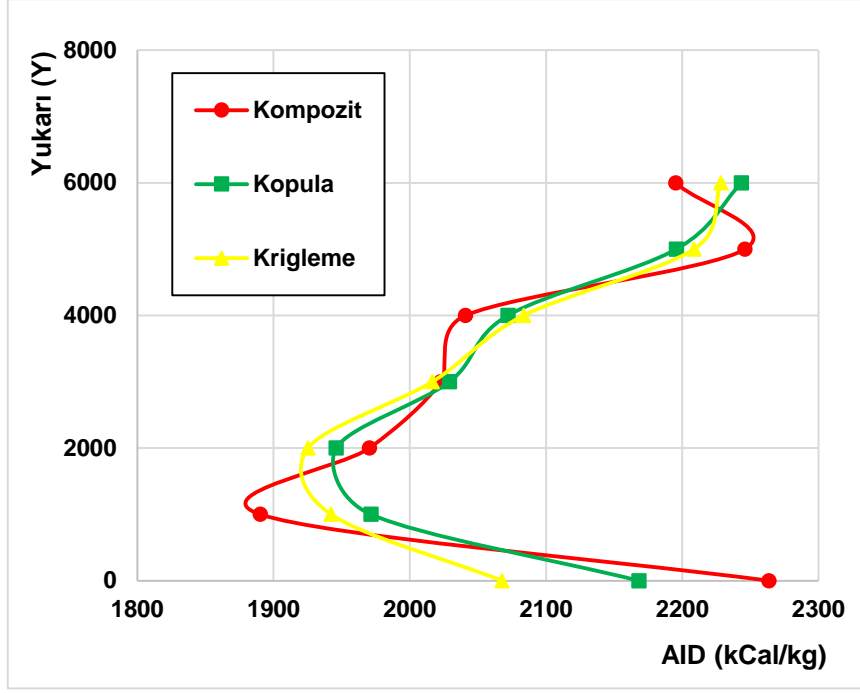
5.2.5. Blok Modelin Yöne Bağlı Doğruluk Testleri

Kopula ve krigleme ile kestirilmiş blok model blok model Sağa (X), Yukarı (Y) ve kot (Z) yönlerinde dilimlere ayrılmış ve bu dilimlere düşen değerlerin ortalaması hesaplanmıştır. Bu ortalamalar aynı dilimlere düşen kompozit değerlerin ortalaması ile karşılaştırılmıştır.

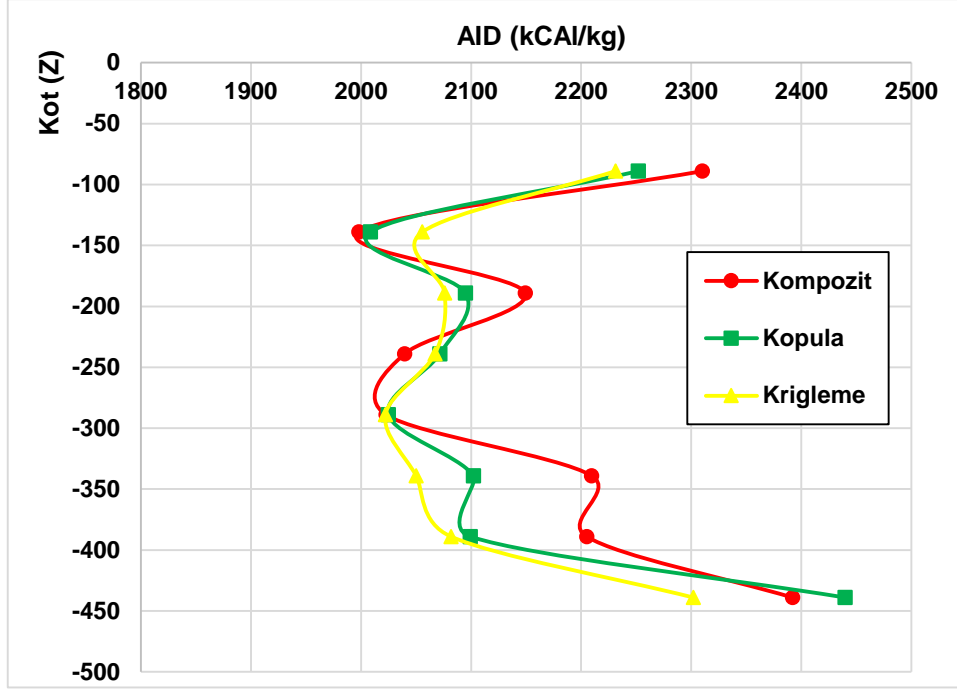
Şekil 5.14'da Sağa(X) yönünde blok model sonuçları ile kompozit değerler bir arada gösterilmiştir. Şekil 5.14, 5.415 ve 5.16 sırasıyla Sağa(X), Yukarı (Y) ve kot(Z) yönlerinde blok model ile kompozitler karşılaştırılmıştır.



Şekil 5.14 Sağa (X) yönünde dilimler içine düşen kompozit değerler ve blok model ortalamaları



Şekil 5.15 Yukarı (Y) yönünde dilimler içine düşen kompozit değerler ve blok model ortalamaları

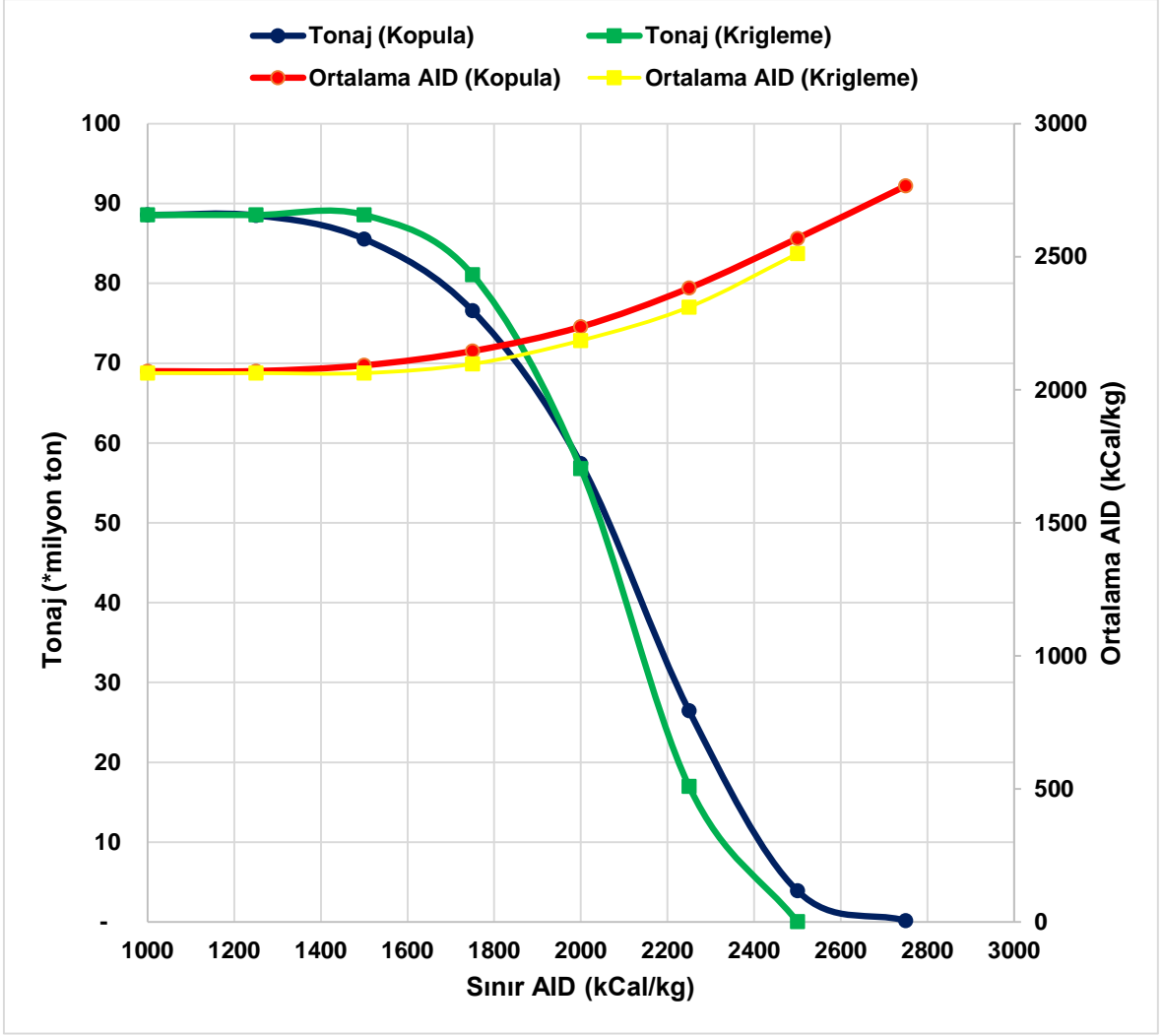


Şekil 5.16 Kot (Z) yönünde dilimler içine düşen kompozit değerler ve blok model ortalamaları

Şekil 5.14, 5.15 ve 5.16'dan da görüldüğü gibi çoğu dilimde kopula ile kestirim kriglemeye göre kompozit değerlere daha yakın çıkmıştır.

5.2.6. AID – Tonaj Eğrisi

AID - tonaj eğrisi, sınır AID değeri ve blok büyüklüğünün bir fonksiyonu olarak tonaj ve ortalama AID'yi gösteren eğrilerdir. Bu eğriler aynı zamanda kestirilen kaynağın grafiksel bir gösterim şekli olup bu gösterimde sınır kalite, kaynağın ekonomik boyutunu, blok büyüklüğü ise teknik boyutunu ifade eder. Hesaplanan AID- Tonaj eğrileri Şekil 5.17'de gösterilmiştir.

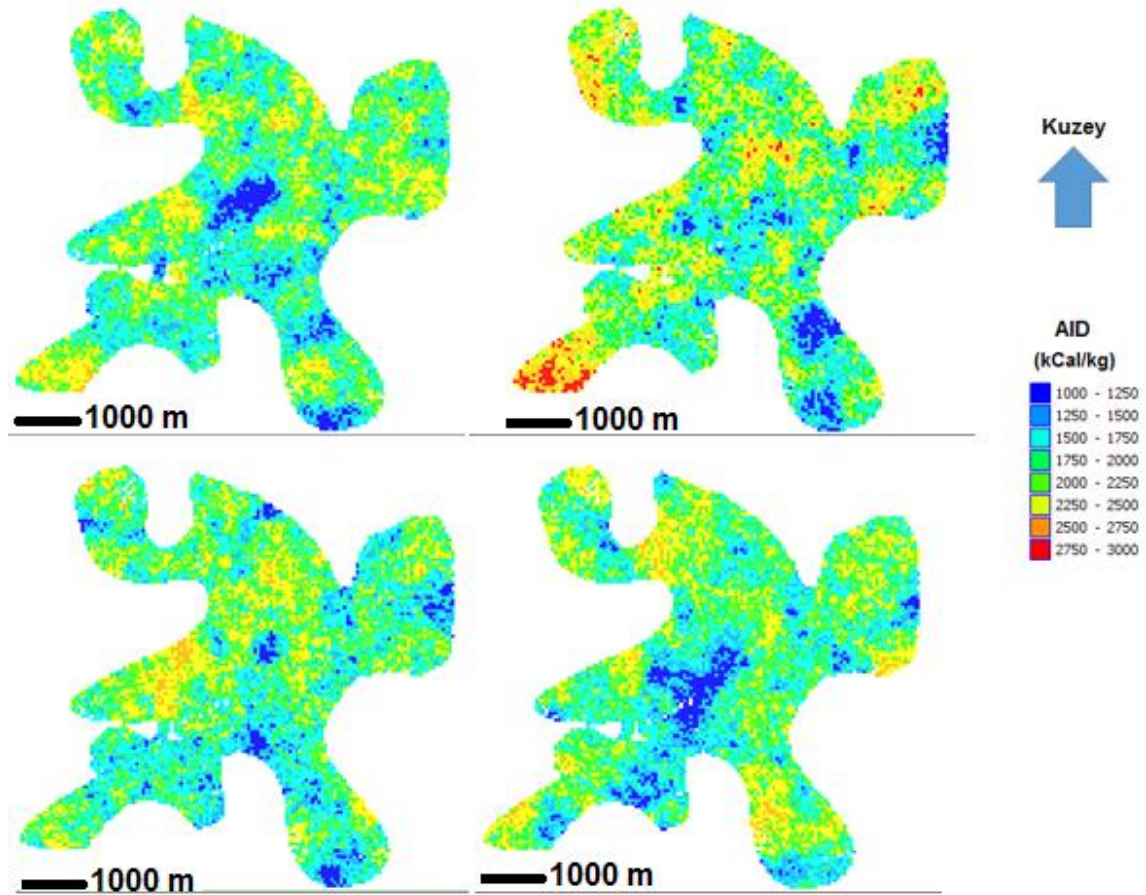


Şekil 5.17 AID- Tonaj eğrisi

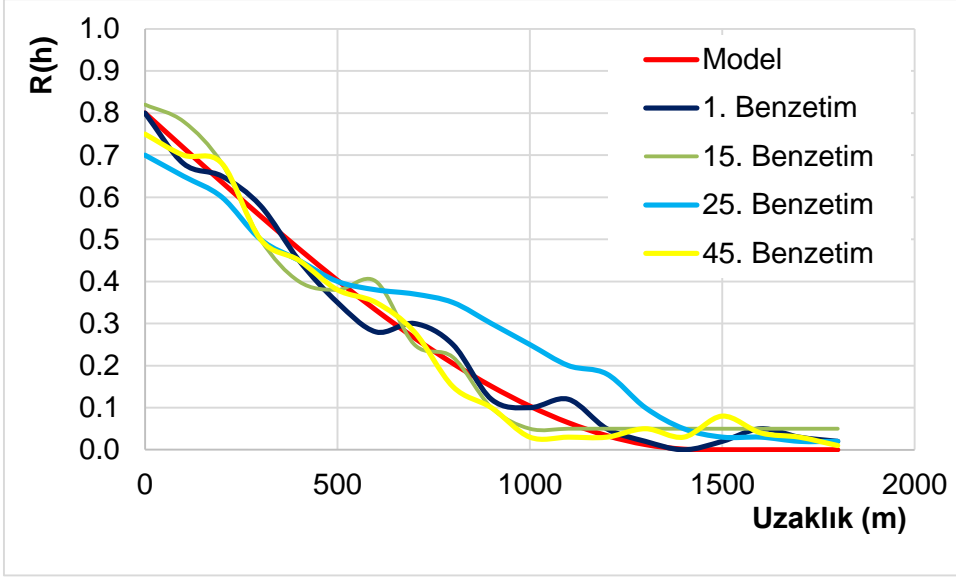
Kömür yoğunluğu ortalama $1,3 \text{ t/m}^3$ alındığında sahada yaklaşık toplam 88 milyon tonluk kömür olduğu hesaplanmıştır. Şekil 5.17'den görüldüğü gibi kopula ile kestirimde değer aralığı daha yüksek olduğu için AID - Tonaj eğrisinde de değer aralığı kriglemeye göre daha geniştir.

5.3. AID'nin Benzetimi

Kopula kullanılarak AID'nin benzetimi yapılmıştır. Bir noktanın benzetiminde en fazla 10 veri kullanılmıştır. AID'nin 50 adet benzetim modeli üretilmiştir. 1, 15, 25 ve 45. benzetim haritaları Şekil 5.18'de gösterilmiştir. Bu haritalar rastgele bir şekilde seçilmiştir. Şekil 5.19'da benzetimlerin deneysel korelogramları model korelogramlar ile karşılaştırılmış kopula ile benzetimin tatmin edici benzetim değerleri ürettiği sonucuna varılmaktadır.

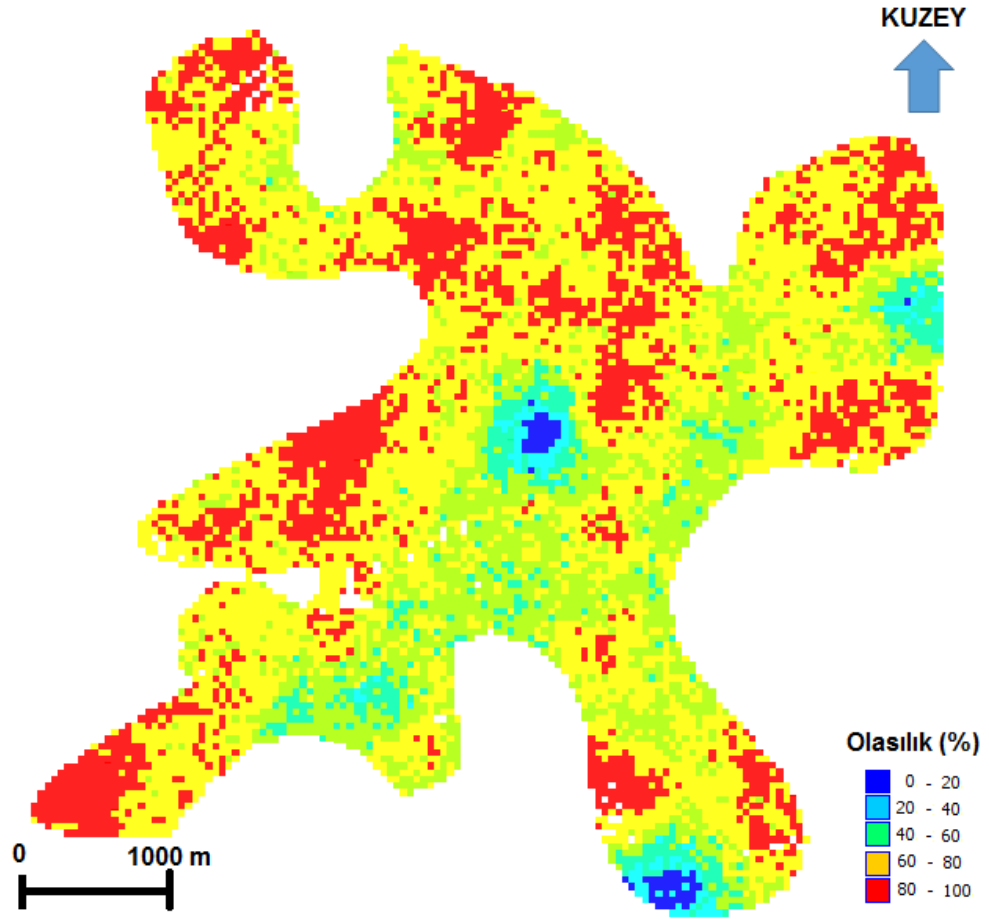


Şekil 5.18 1., 15., 25., 45. benzetim haritaları



Şekil 5.19 Model ile 1., 15., 25. ve 45. benzetimlerin korelogramı

Türkiye’de üretilen kömürler büyük ölçüde termik santrallerde kullanılmak üzere üretilmektedir. Termik santrallere beslenen kömürlerin çeşitli özellikleri sağlaması istenir. Bu özelliklerden en önemlisi alt ısıl değerdir. Benzetim modelleri kullanılarak AID’in 1600 kCal/kg’dan düşük olma olasılık haritası türetilmiştir. Sınır AID haritasının oluşturulabilmesi için birikimli dağılım fonksiyonu kullanılmıştır. Bunun için her bir blok için benzetim sonuçlarının deneysel birikimli dağılım fonksiyonları üretilmiştir. Elde edilen birikimli dağılım fonksiyonları kullanılarak blokların sınır AID 1600 kCal/kg’dan yüksek olma olasılıkları haritalanmıştır. Olasılık haritası Şekil 5.20’de gösterilmiştir.



Şekil 5.20 Kömür yatağında AID'nin 1600 kCal/kg'dan yüksek olma olasılık haritası. Ayrıca olasılık haritası olasılığın %50'den büyük olma durumuna göre yeniden kodlanmıştır. Olasılık değeri %50'nin üzerinde olan bloklar >%50, altında olan bloklar ise <%50 olarak kodlanmıştır. Bu kodlama yatak genelinde ne kadar bloğun % 50'den fazla olasılıkla sınır değerden yüksek olduğunu gösterir. Bu durumda elde edilen yeni harita Şekil 5.21'de gösterilmiştir.



Şekil 5.21 % 50 ihtimalle sınır değerden düşük ve yüksek olan konumlar

Şekil 5.16'de görüldüğü gibi yataktaki kömürler büyük ölçüde %50 ihtimalle sınır değerden (1600 kCal/kg) yüksektir.

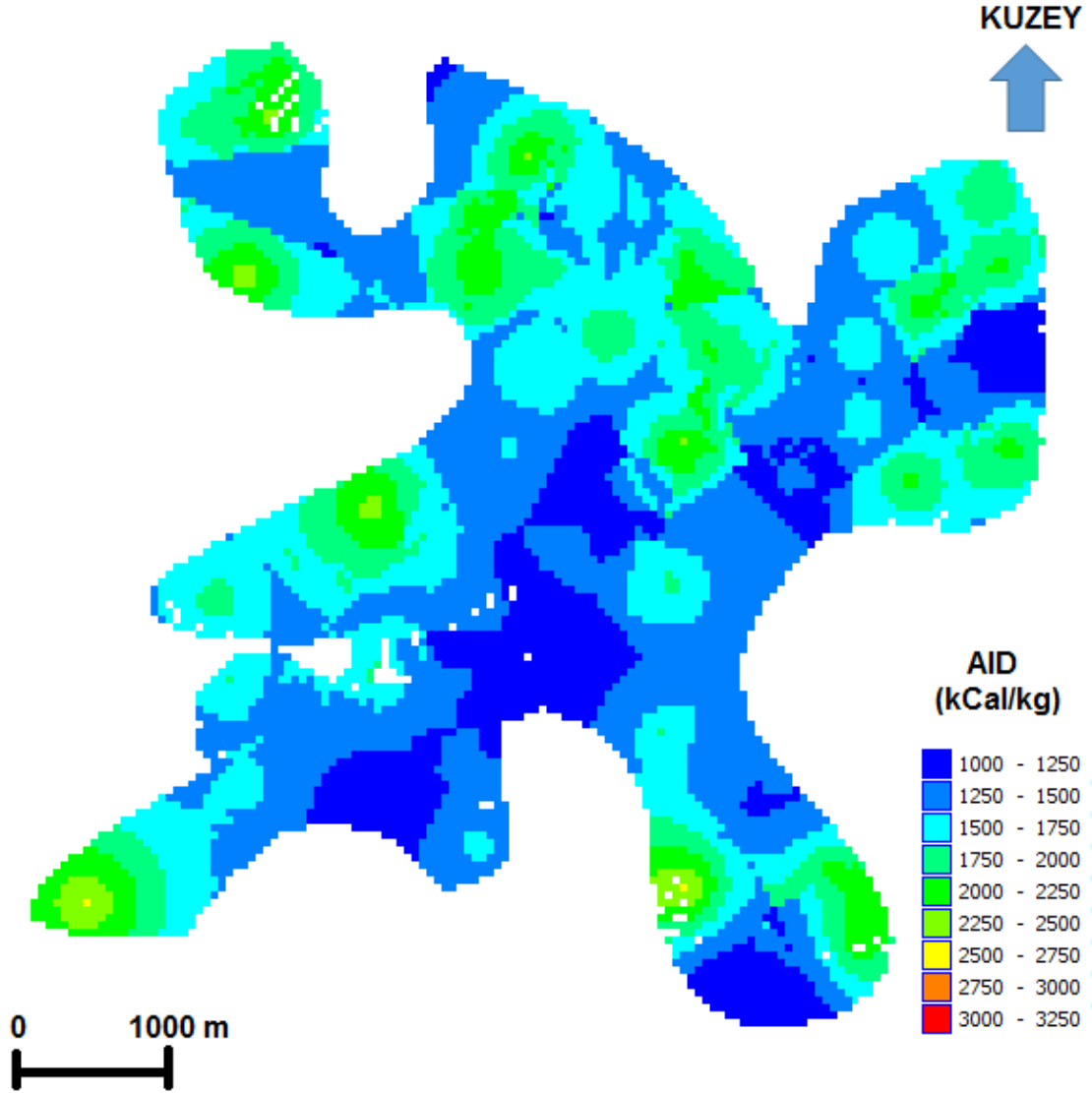
6. EK ÖRNEKLEM NOKTALARININ BELİRLENMESİ

Madencilikte veri toplama yüksek maliyetli olup, uzun zaman alır. Mevcut veriler kullanılarak elde edilen kestirim sonuçları her zaman istenilen güvenilirlikte olmayabilir. Kestirimlerin güvenilirliğinin artırılabilmesi için ek örneklerin toplanmasına ihtiyaç duyulur. Bu nedenle ek örnekleme gereken bölgelerin belirlenmesi gerekir.

Ek örneklem konumlarının belirlenmesinde kullanılan yöntemlerden birisi jeostatistiksel benzetim ve kestirimin bir arada kullanıldığı yöntemdir. Bu yöntemde, öncelikle kestirim haritası oluşturulur. Kestirim işleminden sonra maden kaynağının belirli sayıda benzetilmiş haritası çıkarılır. Daha sonra benzetim haritaları ile kestirim haritası karşılaştırılır. Benzetimde elde edilen en alt ve en üst değerler bulunur. Kestirim değerlerinin benzetim değerleri dışında kaldığı noktaların yüksek belirsizliğe sahip olduğu düşünülür ve bu noktalar ek örneklem noktaları olarak belirlenir [46], [47]. Bu yaklaşımda, hem kestirim hem de benzetime ihtiyaç duyulduğundan zahmetli bir iştir. Ayrıca ek örneklem konumlarının belirlenmesinde sadece yüksek belirsizlik alanları belirlenmiş olur ancak daha düşük belirsizliğine sahip olan alanlar bilinmez. Ek örneklem konumlarının belirlenmesinde kullanılan bir diğer yöntemde ise krigleme hata varyansının kullanılmasıdır. Bu yöntemde yüksek hata varyansına sahip konumlar ek örneklem yapılması gereken konumlar olarak alınır [3]. Bu yöntemin eksik yanı hata varyansının kestirimde kullanılan verilerin, değerleri yerine konumlarına bağlı olmasıdır.

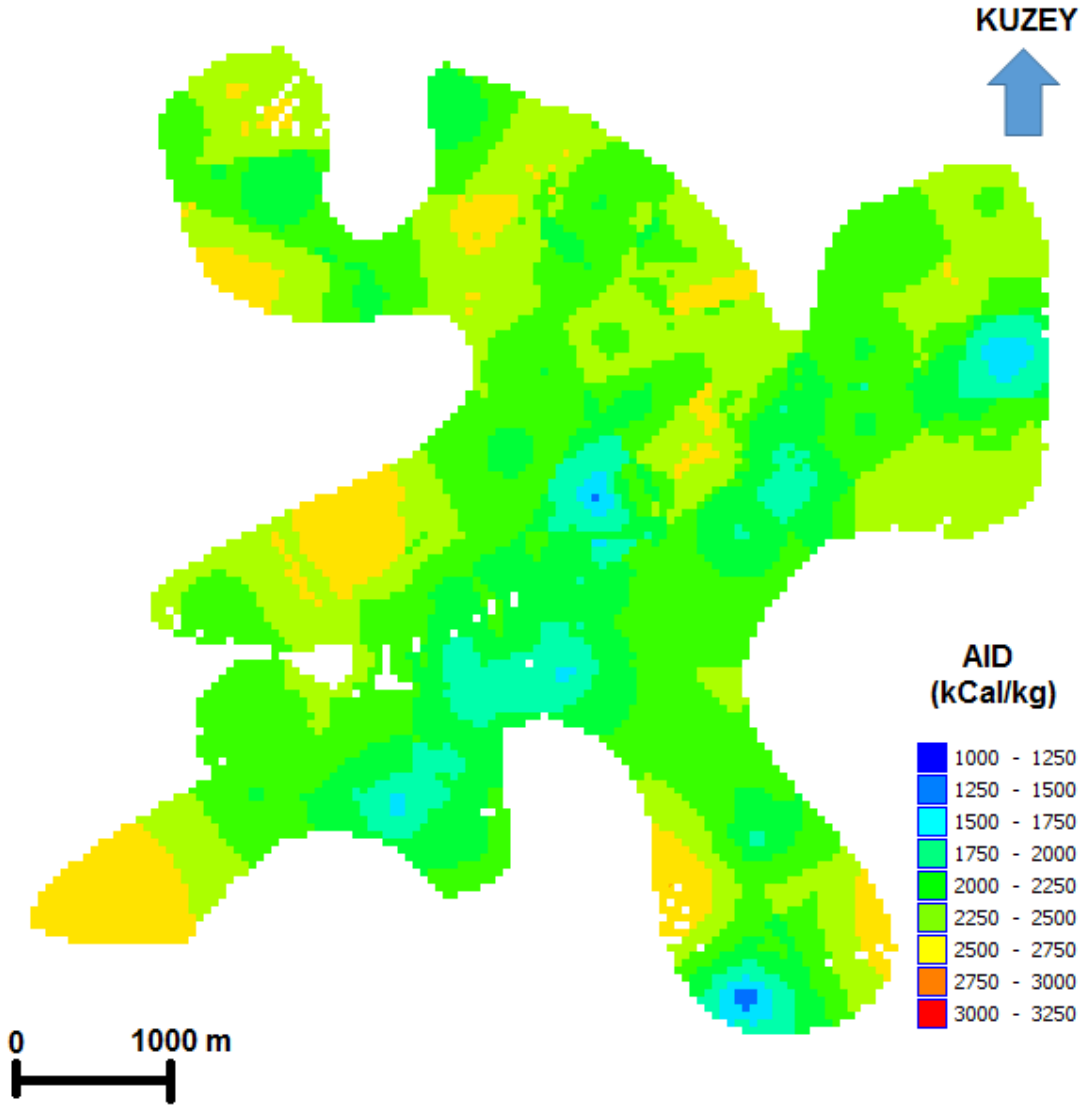
Kopula ile kestirimin bir, kestirilmek istenen noktanın tek bir değer yerine kestirimie ilişkin dağılım fonksiyonu tüm olarak elde edilebilmesidir. Bu durum mevcut kestirilen noktanın en düşük değerle birlikte en yüksek değerinin de bilinmesine olanak sağlar. Bu durumda en iyi kestirici olarak medyan değeri yerine kopula dağılımının minimum değeri kullanılırsa maden kaynağının en düşük değerler haritası elde edilmiş olur. Benzer şekilde eğer kestirici olarak kopula dağılımının en yüksek değeri seçilirse bu sefer en yüksek değer haritası oluşturulmuş olur. En yüksek değerler ile en düşük değerler haritası arasındaki fark ise aralık (range) haritasını verir. Bu harita noktalar, tanımlanmış bir belirsizliğin üstünde belirsizliğe sahip ek örneklem noktalarını gösterir. Böylece kopula ile kestirim sonuçları kullanılarak ek örneklem gereken noktaların belirlenebileceği gösterilmiştir.

Bu amaçla önceki bölümlerde kestirim sonuçları verilen kömür yatağında ek örneklem noktaları belirlenmiştir. Kestirimi yapılan sahanın en düşük değer haritasını üretmek için, kopula dağılımının en düşük değeri kullanılmıştır. En düşük değer haritası Şekil 6.1’de gösterilmiştir.



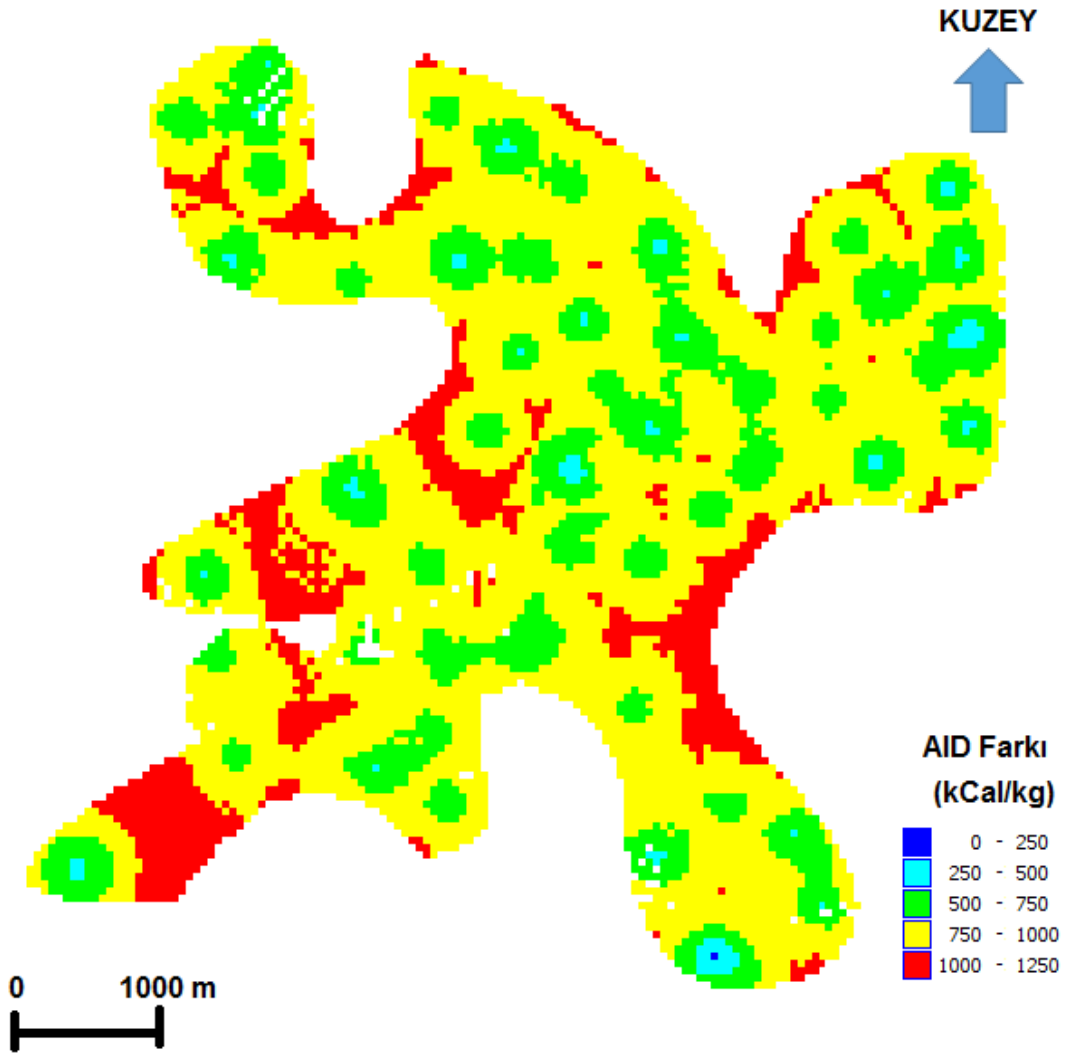
Şekil 6.1 Kopuladan türetilen en düşük değerler haritası

En düşük değer haritasına benzer şekilde en yüksek değer haritası üretilmiş ve Şekil 6.2’de gösterilmiştir.



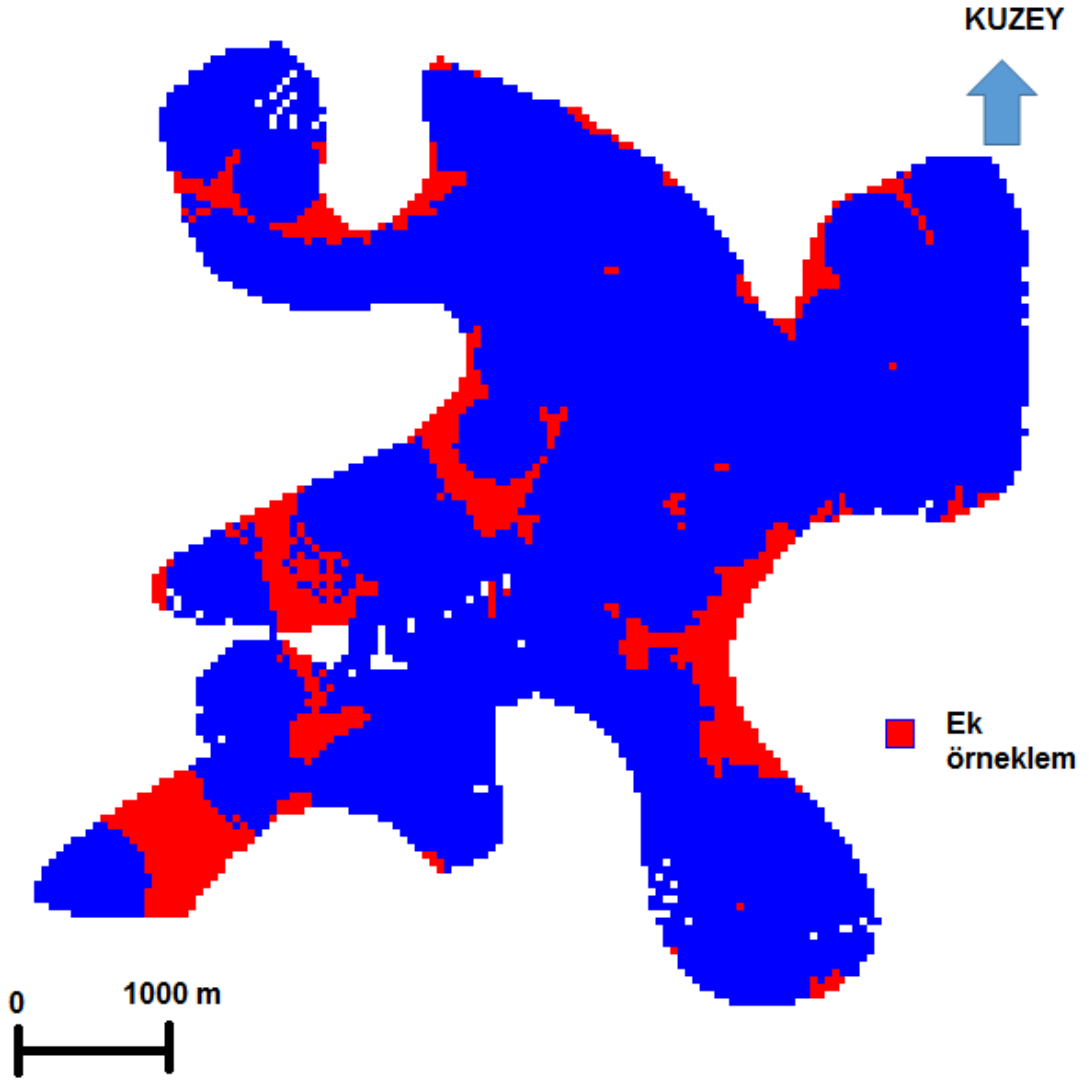
Şekil 6.2 Kopuladan türetilen en yüksek değerler haritası

En yüksek ve en düşük değerler arasındaki fark hesaplanmış ve farklar haritası Şekil 6.3'de gösterilmiştir.



Şekil 6.3 En yüksek ve en düşük değerler arasındaki farklar

Ek örnek konumlarının belirlenebilmesi için fark haritasında 1000 kCal/kg değerinden yüksek olan değerler belirlenmiş ve Şekil 6.4'de gösterilmiştir.



Şekil 6.4 Ek örneklem gereken konumlar

Şekil 6.4 incelendiğinde özellikle sondajların düşük yoğunlukta olduğu bölgeler ile yatak kenarlarında değişkenliğin yüksek olduğu görülmektedir. Bu nedenle bu bölgelerde ek örneklem yapılabilir.

7. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu tezde, kopulaların kestirim, benzetim ve ek örnekleme gereken konumların belirlenmesinde kullanılabileceği gösterilmiştir. Kopula ile kestiriminde kestirimin özellikleri belirlenmiş, kestirimde kullanılan parametrelerin kestirim üzerine olan etkisi incelenmiş ve kestirimde kullanılacak olan veri sayısının eniyileme değerleri belirlenmiştir. Kopula ile deneysel kestirim dört farklı veri kümesi üzerinde yapılmış ve külçe etki değerinin kopula dağılımını nasıl etkilediği deneysel olarak belirlenmiştir. Ayrıca kopula kullanılarak bir kömür sahasının kestirimi, benzetimi yapılmış ve ek örnekleme gereken konumlar belirlenmiştir.

Örnek kestirimde kopula dağılımı incelendiğinde, kestirimde kullanılacak olan veri sayısının 4 ile 10 arasında olması durumunda dağılımlar birbirine benzer olmaktadır. Ancak veri sayısı dördün altında düştüğünde kopula dağılımı düzensiz bir hal almaktadır. Ayrıca kestirimde kullanılacak olan veri sayısının 10'un üzerine olması da kestirim sonucunu değiştirmemektedir. Bu nedenle kopula ile kestirimde kullanılacak olan veri sayısının dört ile on arasında olması gerektiği sonucuna ulaşılmıştır.

İkisi Normal, diğer ikisi log-normal dağılıma sahip dört veri kümesi kullanılarak kopula ile kestirim yapılmıştır. Normal dağılıma sahip veri kümelerinden ilk verideki külçe etki değeri düşükken, ikinci veri kümesinin külçe etki değeri yüksektir. Aynı durum log-normal dağılıma sahip veri kümesi için de geçerlidir. Kopula ile kestirim yapıldığında kopula dağılımlarının külçe etki değeri arttıkça daha doğrusal bir şekil aldığı gözlenmiştir. Bu durumda kestirimler ortanca değere yaklaşmaktadır.

Kopula kullanılarak bir kömür sahasında kaynak kestirimi ve benzetimi yapılmıştır. Kopula kullanılarak saha genelinde AID dağılımı tahmin edilmiştir. Sahanın AID ortalaması 2069 kCal/kg, en yüksek değeri 2842 kCal/kg ve en düşük değeri ise 1208 kCal/kg'dir. AID krigleme ile kestirildiğinde ortalaması 2062, en yüksek değeri 2525 ve en düşük değeri ise 1555'dir. Bu durumda kopula ile kestirimin kriglemeye göre daha geniş aralıkta kestirim sonucu üretmektedir. Ayrıca yöne bağlı doğruluk analizleri yapıldığında kopula kullanılarak yapılan kestirimler kompozit verilere daha yakın sonuç ürettiği gözlenmiştir. Ayrıca sahada kopula kullanılarak benzetim de yapılmıştır. Benzetim sonuçlarına göre saha büyük ölçüde sınır değer olarak seçilen 1600 kCal/kg üstünde AID'e sahiptir.

Kopula fonksiyonları kestirim amaçlı olarak tek bir kestirimi yerine kestirimin tam dağılımını üretirler. Bu nedenle kestirimin en düşük ve en yüksek değerlerini elde etmek mümkündür. En yüksek ve en düşük değerleri arasındaki fark ise kestirimin ne kadar güvenilir olduğunun bir göstergesidir. AID farkının yüksek olduğu konular ise en örneklem yapılması gereken konular olarak belirlenebilir. Kestirim yapılan kömür sahasında AID fark haritası üretilmiş ve farkın yüksek olduğu konular ek örneklem konuları olarak belirlenmiştir.

Sonuç olarak, bu tezde kopulaların maden kaynak kestirimde, benzetiminde ve ek örneklem gereken konuların belirlenmesinde kullanılabileceği gösterilmiştir. Günümüzde maden kaynak kestiriminde genellikle krigleme kullanılmaktadır. Ancak kopula ile kestirimde kriglemeye göre elde edilen sonuçların özet istatistikleri kompozit verilere daha yakındır. Bu durumda kopula ile kestirim kriglemeye üstünlük sağlamaktadır. Bu nedenle maden kaynak kestiriminde kopula kriglemeye alternatif bir yöntem olarak kullanılabilir.

Maden kaynaklarının değerlendirilmesinde genellikle birden çok değişkene ilişkin analizler yapılır. Bu değişkenler arasında ilişki olabilir. Bu değişkenler arasındaki ilişkiyi kullanarak kestirim ve benzetim yapan birçok yöntem geliştirilmiştir. Bu nedenle kopulaların da maden kaynak kestirimde çok değişkenli ilişkiyi ortaya koyacak şekilde geliştirilmesi gelecekte çalışılması gereken bir konudur.

KAYNAKLAR

- [1] Tercan A. E., *Maden Kaynak Kestirimi Ders Notları*, Ankara, **2013**.
- [2] Rossi M. E., Deutsch C.V., *Mineral Resource Estimation*, New York: Springer, **2014**.
- [3] Sinclair, A.J., Blackwell G. H., *Applied Mineral Inventory Estimation*, Cambridge: Cambridge University Press, **2002**.
- [4] Journel, A.G., Huijbregts, C.J., *Mining Geostatistics*, New Jersey: The BlackBurn Press, **1991**.
- [5] Chiles, J.P., Delfiner P., *Geostatistics: Modeling Spatial Uncertainty*, United States of America: John Wiley & Sons, **2012**.
- [6] Guarascio M., David M., Huijbregts C., *Advanced Geostatistics in Mining Industry*, Rome: D. Reidel Publishing Company, **1975**.
- [7] Sklar. A., *Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges*, *Publ Inst Statist Univ Paris*, cilt 1, no. 8, pp. 229-231, **1959**.
- [8] Longin, F., Solnik, B., *Extreme Correlation of International Equity Markets*, *The Journal of Finance*, cilt 56, no. 2, pp. 649-676, **2001**.
- [9] Thompson, D., Kilgore, R., *Estimating Joint Flow Probabilities at Stream Confluences using Copulas*, *Transportation Research*, cilt 2262, no. Highway Design 2011, pp. 200-206, **2011**.
- [10] Eban, E., Rothschild, R., Mizrahi, A., Elidan, G., Carvalho, C.; Ravikumar, P., eds., *Dynamic Copula Networks for Modeling Real-valued Time Series*, *Journal of Machine Learning*, cilt I, no. 31, pp. 247-255, **2013**.

- [11] Schölzel, C., Friederichs, P., *Multivariate non-normally distributed random variables in climate research – introduction to the copula approach*, *Nonlinear Processes in Geophysics*, cilt I, no. 15, pp. 761-772, **2008**.
- [12] Bardossy A., *Copula-based geostatistical models for groundwater quality parameters*, *Water Resources*, cilt 42, no. 11, p. 12, **2006**.
- [13] Nelsen. R. B., *An Introduction To Copula*, United States of America: Springer, **2006**.
- [14] TDK, Türk Dil Kurumu, 23 05 2015. [Çevrimiçi]. Available: http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com_bts&arama=kelime&guid=TDK.GTS.5560c9f6f37ec8.07621901. [**Erişildi: 23 05 2015**].
- [15] Jaworski P., Durante F., Hardle W., Rychlik T., *Copula Theory and Its Applications, Proceeding of Workshop Held in Warsaw*, Warsaw, **2009**.
- [16] Moore, D.S., Spruill, M.C., *Unified large-sample theory of general chi-squared statistics for*, *Ann. Stat.*, cilt I, no. 3, pp. 599-616, **1975**.
- [17] Deheuvels, P., *Caractérisation complète des lois extrêmes multivariées et de la convergence*, *Publ. Inst. Stat. Univ*, Cilt III-IV, no. 23, pp. 1-36, **1978**.
- [18] Schweizer, B., *Introduction to copulas*, *J. Hydrol. Eng.*, no. 12(4), pp. 346-346, **2007**.
- [19] Genest, C., Gendron, M., Bourdeau-Brien, M., *The advent of copulas in finance*, *Eur. J. Finance*, no. 15, pp. 609-618, **2009**.
- [20] Tercan A. E., Kulaksız S., Şentürk A., *Tülovası Borat Yatağı Rezervinin Jeostatistiksel Kestirimi*, *Madencilik*, cilt XXXIII, no. 2, pp. 19-24, **1994**.
- [21] Saraç C., İrkeç K., Gençoğlu H., Tercan A. E., *Veledler Sırtı Kırşehir Sepiyolit Cevherleşmesinin Rezerv Tenör Eğrileri*, *Jeoloji Mühendisliği*, s. 23-34, **1996**.

- [22] Tobler W., *A computer movie simulating urban growth in the Detroit region*, *Economic Geography*, 234-240, **1970**.
- [23] Shekar S., Xiong H., *Encyclopedia of GIS*, New York: Springer Science + Business Media, LLC, **2008**.
- [24] Oliver A. M., Webster R., *Basic Steps in Geostatistics: The Variogram and Kriging*, London: Springer International Publishing, **2015**.
- [25] Stein M. L., *Interpolation of Spatial Data: Some Theory for Kriging*, London: Springer Science, **1999**.
- [26] Hengl T., *A Practical Guide to Geostatistical Mapping*, Amsterdam: University of Amsterdam, **2009**.
- [27] Hohn M. E., *Geostatistics and Petroleum Geology*, Dordrecht: Springer Science, **1999**.
- [28] Remy N., Boucher A., Wu J., *Applied Geostatistics with SGeMS*, Cambridge: Cambridge University Press, **2009**.
- [29] Journel A. G., *Fundamentals of Geostatistics in Five Lessons*, Washington: American Geophysical Union, **1989**.
- [30] MCKillup S., Dyar M. D., *Geostatistics Explained*, Cambridge: Cambridge University Press, **2010**.
- [31] Olea R. A., *Geostatistics for Engineers and Earth Scientists*, New York: Springer Science, **1999**.
- [32] Armstrong M., Dowd P. A., *Geostatistical Simulation*, Fontainebleau: Springer Science, **1993**.
- [33] Lantuejoul C., *Geostatistical Simulation: Models and Algorithms*. Springer, **2002**.

- [34] Caers J., *Modeling Uncertainty in the Earth Sciences*, West Sussex: John Wiley & Sons Ltd, **2011**.
- [35] Dimitrakopoulos R., *Geostatistics for The Next Century*, Montreal: Springer-Science, **1993**.
- [36] Deutsch C., Journel A. G., *GSLIB A Geostatistical Software Library and User Guide*, Oxford: Oxford University Press, **1998**.
- [37] Mariethoz G., Caers J., *Multiple-point Geostatistics: Stochastic Modeling with Training Images*, Chichester: John Wiley & Sons, Ltd, **2015**.
- [38] Kara H., Tuncalı, E., Narin, R., Gürsoy, B., Dümenci, S., *Trakya Tersiyer Kömür Havzası Raporu MTA Rapor No: 9974*, MTA, Ankara, **1996**.
- [39] Parejas, E., *Trakya linyitleri jeolojik etüdü. MTA Raporu No. 981*, MTA, Ankara, **1939**.
- [40] Ternek, Z., *Keşan bölgesi jeolojik etüdü. MTA Raporu No. 1011*, MTA, Ankara, **1940**.
- [41] Lebküchner, R.F., *Orta Trakya Oligosen'inin Jeolojisi Hakkında, Maden Tetkik ve Arama Enstitüsü Dergisi*, no. 83, pp. 1-29, **1974**.
- [42] Gök, L., *Tekirdağ-Malkara (Tekirdağ) ve Keşan-İpsala (Edirne) arasının jeolojisi MTA Raporu No. 9710*, MTA, Ankara, **1994**.
- [43] Umut, M., İmik, A., Kurt, Z., Özkan, İ., Ateş, M., Karabıyıkoglu, M. ve Saraç, G., *Edirne-Kırklareli-Lüleburgaz-Uzunköprü Civarının Jeolojisi*, MTA, Ankara, **1984**.
- [44] Şengüler, İ., *Trakya Havzası Kömür Aramaları Projesi Raporu MTA Rapor No: 11069*, MTA, Ankara, **2008**.
- [45] Atalay F., *Türkiye Tersiyer Kömürlerinin Jeostatistiksel Olarak İncelenmesi*, Ankara: Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, **2011**.

- [46] Atalay, F., Tercan, A. E., Ünver, B., Hindistan, M.A., Ertun., G., *A Geostatistical Study of Tertiary Coal Fields in Turkey*, *Mathematics of Planet Earth*, Spain, **2014**.
- [47] Atalay F., Tercan A. E., Ertunç G., *Geostatistics As a Tool to Estimate Undiscovered Deposits of Coal*, *Proceeding of 24th International Mining Congress*, Antalya, **2015**.

ÖZGEÇMİŞ

Kimlik Bilgileri

Adı Soyadı : FIRAT ATALAY

Doğum Yeri : Ankara

Medeni Hali : Bekar

E-posta : atalay@hacettepe.edu.tr

Adresi : Hacettepe Üniversitesi, Beytepe Kampüsü, Maden Mühendisliği Bölümü, Çankaya / ANKARA

Eğitim

Lisans : Hacettepe Üniversitesi (Maden Mühendisliği Bölümü)
(Bölüm 1.'liği)

Yan Dal : Hacettepe Üniversitesi (İşletme Bölümü)

Yüksek Lisans : Hacettepe Üniversitesi (Maden Mühendisliği Bölümü)

Doktora : Hacettepe Üniversitesi (Maden Mühendisliği Bölümü)

Yabancı Dil Düzeyi

İngilizce (İleri Seviye)

İş Deneyimi

Araştırma Görevlisi (Hacettepe Üniversitesi) (2009- ...)

Deneyim Alanları

Jeostatistik, Maden İşletmesi, Maden Planlaması, Maden Ekonomisi, Yönetim Ekonomisi, Finansal Yönetim

Tezden Üretilmiş Projeler ve Bütçesi

Hacettepe Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi

Proje Numarası: FDK-2015-6893. Bütçe: 579,24 TL.

Tezden Üretilmiş Yayınlar (Yok)

Tezden Üretilmiş Tebliğ ve/veya Poster Sunumu ile Katıldığı Toplantılar (Yok)