

HİGGS KÜTLESİ VE DOĞALLIK SORUNU

HİGGS MASS AND THE NATURALNESS PROBLEM

ÖZGÜN MUSTAFA ÖZŞİMŞEK

PROF. DR. MÜGE BOZ EVİNAY

Tez Danışmanı

Hacettepe Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin

Fizik Mühendisliği Anabilim Dalı için Öngördüğü

YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırlanmıştır.

2015

ÖZGÜN MUSTAFA ÖZŞİMŞEK' in hazırladığı "Higgs Kütleli ve Doğallık Sorunu" adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **FİZİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**' nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Ali Ulvi YILMAZER

Başkan

Prof. Dr. Müge BOZ EVİNAY

Danışman

Prof. Dr. Yiğit GÜNDÜÇ

Üye

Doç. Dr. İsmail TURAN

Üye

Doç. Dr. Seçkin KÜRKCÜOĞLU

Üye

Bu tez Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. Fatma SEVİN DÜZ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada,

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversitede veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

15.06.2015



ÖZGÜN MUSTAFA ÖZŞİMŞEK

ÖZET

HIGGS KÜTLESİ VE DOĞALLIK SORUNU

Özgün Mustafa ÖZŞİMŞEK

Yüksek Lisans, Fizik Mühendisliği Bölümü

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Müge BOZ EVİNAY

Haziran 2015, 63 sayfa

Standart Model'in olağanüstü başarılarına ve Higgs'in keşfinden sonra bir teori statüsüne yükselmesine karşın, halen çözüm bekleyen pek çok sorun mevcuttur. Sorunların çözümü için Standart Model'in ötesine geçebilmek gerekmektedir. Bu eşiğe ulaşabilmek için hiç kuşkusuz Model'in cevaplayamadığı soruların, çıkış noktalarının iyice kavranması gerekir. Aslında, tez kapsamında hedeflenen de budur. Şöyle ki, bu çalışmada esas olarak Standart Model'in öğrenilmesi ve Higgs'in keşfinden sonra çözüm bekleyen en temel sorunlardan biri olan doğallık probleminin anlaşılmasına odaklanılmıştır. Bu doğrultuda, Standart Model'in temelini teşkil eden simetritler, korunum yasaları ve ayar kuramları incelenerek, Standart Model'de çok önemli bir yere sahip olan Higgs mekanizması ayrıntılı bir şekilde çalışılmıştır. Ardından, doğallık sorununun üzerinde yoğunlaşarak, bu problem için önemli bir hazırlık basamağı oluşturan Higgs'in kütlelerine fermiyonik halka diagramlarından gelen kuantum düzeltmeleri, boyut regülarizasyonu çerçevesinde ayrıntı ile incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Global iç simetritler. Simetritler ve korunum yasaları. Abelyen ve Abelyen olmayan ayar kuramları. Simetritlerin Wigner-Weyl modu. Simetritlerin Nambu-Goldstone realizasyonu. Higgs Mekanizması. Standart Model. Yukawa etkileşimi. Doğallık sorunu. Feynman parametrizasyonu. Boyutsal düzenleme. Passarino-Veltman yöntemi.

ABSTRACT

HIGGS MASS AND THE NATURALNESS PROBLEM

Özgün Mustafa ÖZŞİMŞEK

Master of Science, Department of Physics Engineering

Supervisor: Prof. Dr. Müge BOZ EVİNAY

June 2015, 63 pages

Despite the great success of Standard Model, there are still many problems awaiting for solutions. It seems that to solve these problems one needs to go beyond the Standard Model. To achieve this ultimate goal, the first step is to understand the Standard Model and its fundamentals. The next step is to acquire a thorough understanding of the challenging open problems in the framework of the Standard Model. This is essentially what is done in this thesis. Namely, the primary aim in this study is first to gain expertise on the Standard Model, focusing particularly on the naturalness problem, which is the most fundamental problem awaiting for a solution after the discovery of the Higgs boson. In line with these objectives, symmetries and conservation laws, essentials of gauge theories, spontaneous symmetry breaking and the Higgs Mechanism, which occupies an important place in the Standard Model are studied in great detail. Then, by concentrating on naturalness problem, the reasons why the Standard Model can be considered as an effective field theory are discussed. The fermionic loop corrections to the Higgs mass, which constitute a crucial input to the naturalness problem, and the techniques of dimensional regularization scheme are studied in detail.

Keywords: Internal global symmetries. Symmetries and conservation laws. Abelian and non-abelian gauge theories. Wigner-Weyl realisation of symmetries. Nambu-Goldstone realisation of symmetries. Higgs mechanism. Standard model. Yukawa coupling. The naturalness problem. Feynman parametrisation. Dimensional regularisation. Passaino-Veltman method.

TEŞEKKÜR

Bu derlemenin oluşturulmasında büyük emek sarf eden ve lisans eğitimimden başlayarak, tüm akademik eğitim sürecimde yanımda olan, beni en doğru şekilde yönlendiren ve yoluma ışık tutmak için hiç bir gayret ve çabayı esirgemeyen, kendisini hocadan öte gördüğüm danışmanım Sayın Prof. Dr. Müge Boz Evinay'a bütün samimiyetim ve içtenliğimle teşekkür ederim. Hassasiyetle vurgulamam gerekirse, yaptığı katkılarla bu çalışmayı birçok kademe ileri taşıyan ve çalışma hayatı boyunca edindiği engin bilgisini hiç tereddüt etmeden benimle ve çalışma arkadaşlarımla paylaşarak, fizik kültürümüzü kayda değer ölçüde artıran, kendisini çağdaş bir bilim insanı modeli olarak benimsediğim, benim ve çalışma arkadaşlarımla ufkunu sonuna kadar açmak ve global düzeyde bilim yapabilme amacı ve doğrultusunda her türlü olanağı hazırlayıp önümüze sunarak, sonsuz özveri göstermiş olan hocamız Sayın Prof. Dr. Namık Kemal Pak'a teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca boyutsal regülarizasyon konusunda yapmış olduğu yararlı tavsiyelerden ötürü, Sayın Doç. Dr. İsmail Turan'a teşekkür ederim. Son olarak bu çalışma boyunca manevi desteklerini hiç esirgemeyen ve beni yılmadan çalışmaya teşvik eden sevgili ailem ve arkadaşlarıma da şükranlarımı sunarım.

Bu tezin son evrelerinde, 014 A602 006 no'lu "CERN-LHC-CMS Projesi Çerçevesinde Hacettepe - CERN Bilimsel İşbirliğine İlk Adım" isimli alt yapı projesi desteği ile CERN-CMS üyeliği gerçekleştirilmiştir. Yapılan teorik çalışmaların uygulamalarına yönelik ileri eğitim evresinin anılan BAB Projesi çerçevesinde 2015 yazında CERN'e yapılacak ziyaret sırasında gerçekleştirilmesi planlanmaktadır. Projenin sağladığı motivasyon ve potansiyel olanaklar için Üniversitemiz yetkililerine içtenlikle teşekkür ederiz.

GÖSTERİMLER VE KISALTMALAR

Gösterimler

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Minkowski metriği

$$c = 1 = \hbar$$

Doğal Birim sistemi

Kısaltmalar

QED

Kuantum Elektrodinamiği (*Quantum Electrodynamics*)

SM

Standart Model (*Standard Model*)

PaVe

Passarino-Veltman (*Passarino-Veltman*)

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
GÖSTERİMLER VE KISALTMALAR	iv
İÇİNDEKİLER	v
ŞEKİLLER	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. SİMETRİLER VE KORUNUM YASALARI.....	3
2.1. Giriş	3
2.2. Global Simetrier ve Korunum Yasaları (Noether Teoremi).....	4
2.3. Yerel Simetrier Korunum Yasaları ve Ayar Kuramları	10
3. STANDART MODEL VE HİGGS MEKANİZMASI.....	16
3.1. Giriş	16
3.2. Simetrierin Nambu-Goldstone Modu	17
3.3. Kendiliğinden Simetri Kırılması ve Higgs Mekanizması	24
3.4. Standart Modelde Higgs Mekanizması	28
4. DOĞALLIK SORUNU	39
4.1. Giriş: Doğallık Sorunu	39
4.2. Kuantum Düzeltmelerin Kütle Üzerine Etkisi	41
4.3. Feynman Parametrizasyonu ve Schwinger Yöntemi Kullanılarak Türetilmesi	42
4.4. Boyutsal Regülarizasyon, Wick Dönmesi ve μ Parametresi.....	46
4.5. Higgs Kütlelerine Üst Kuarktan İleri Gelen Işınımsal Düzeltmelerin Hesaplanması	48
4.6. Passarino-Veltman Yöntemi ile Işınımsal Katkıların Sonsuzluk İçeren Kısımlarının Elde Edilmesi	54
5. SONUÇ.....	57
A.PASARINO-VELTMAN YÖNTEMİ.....	58
KAYNAKLAR	61
ÖZGEÇMİŞ.....	63

ŞEKİLLER

	<u>Sayfa</u>
Şekil 3.1. Wigner-Weyl Modu Durumunda Potansiyelin Şekli[19].....	22
Şekil 3.2. Nambu-Goldstone Modu Durumunda Potansiyel.....	23
Şekil 4.1. Birinci Mertebe Halka Düzeltmeleri.....	42
Şekil 4.2. Wick Dönmesi[22].....	47
Şekil 4.3. Üst Kuark Halkası.....	48

1.GİRİŞ

Makroskopik bir sistemin gözlemlenebilir tüm fiziksel özelliklerinin, sistemi oluşturan mikroskopik düzeydeki fiziksel tabiatın bir sonucu olduğu ilkesi, araştırmacıları her zaman, en temel seviyedeki fiziksel süreçleri keşfetmeye ve bu süreçlerin ardında yatan nedenleri anlamaya yöneltmiştir. Milattan yaklaşık 400 yıl önce Demokritus'un "atom" kavramıyla felsefi boyutta kendini gösteren en küçüğü anlama dürtüsü, 17. yüzyılda Newton, Leibniz, Galilei gibi bilimsel öncülerin katkılarıyla, deneysel doğrulama ve matematiksel soyutlamaya dayalı bilimsel yöntemlere dönüşmüştür. Bu girişimlerin ilk ürünü ve temel parçacıklar dünyasına atılmış ilk adım olarak Thomson'ın elektronu keşfetmesi sayılabilir (1897). Daha sonraları bilindik maddenin diğer yapı taşları olan proton ve nötron keşfedildiyse de, 1930 sonrası keşfedilen mezonlar, anti parçacıklar, nötron ve protona nazaran daha ağır baryonlar, temel parçacıklar serüveninin devam edeceğinin birer göstergesi olmuşlardır. Günümüze gelindiğinde en küçüğü keşfetmek için çıkılan bu yolculuk, yüksek teknoloji ürünü parçacık hızlandırıcılarında sürdürülmektedir[1].

Deneysel olarak yaşanan bu gelişmelerin arkasında, müon hariç hemen bütün parçacıkların keşfedilmeden önce postüle edilebildikleri düşünüldüğünde, kuramsal olarak gerçekleştirilmiş olan ilerlemelerin büyük bir etkisi olduğu görülür. Buna rağmen o dönem itibarıyla birbirinden farklı türdeki etkileşimleri ve karakterdeki parçacıkların doğasını aynı resimde bir araya getirecek bir çerçeve ortaya konulamamıştı. Bu çerçevenin çizilebilmesi, denklemlerin içerebildikleri matematiksel simetrilerin, doğada kendini korunum yasaları olarak gösteriyor olması olgusunun idrak edilmesiyle mümkün olmuştur. Bu yeni algı biçimi ayar ilkesinin doğması ve bu ilkedен hareketle ayar kuramlarının inşa edilmeye başlamasıyla, elektromanyetik ve zayıf etkileşimlerin aynı matematiksel çatı altında bir araya getirilerek Elektro-Zayıf Model'in oluşturulmasıyla sonuçlanmıştır. Ardından güçlü etkileşimlerin bu modele yine ayar kuramları vasıtasıyla eklenerek modelin simetrisinin artırılması ve Elektro-Zayıf simetrisinin kırılmasıyla gözlemsel olarak doğrulanan fiziği tarif eden Standart Model oluşturulmuştur. Standart Model'in, yapısında Higgs mekanizması önemli bir yer tutar. Bundan ötürü Standart Model'in kavranması için ilk adım olarak Higgs mekanizmasının anlaşılması son derece önemlidir[1, 2, 3, 4, 5, 6].

Higgs mekanizması çözdüğü "kütle sorunu" kadar, yol açtığı "doğallık" sorunu ile de gündemdeki yerini korumaktadır. Görelî kuantum mekaniği ve QED'den başlayarak, fizikçileri meşgul eden doğallık konusu, ilk olarak "sorun" başlığı altında değerlendirilse de, daha sonradan anlaşıldığı üzere yeni modellerin inşa sürecinde temel motivasyon kaynaklarından birini teşkil etmiştir. Şöyle ki, bu sorunun aşılması için önerilen pek çok modelin sonuçta fiziksel bilgiyi artırdığı görülmüştür. Benzer biçimde Standart Model'in sınırlarının ötesinin araştırılması için, Higgs'den kaynaklanan doğallık sorununun kullanılabileceği düşünülebi-

lir. Bu problemin olası çözüm senaryolarından birinin, herhangi bir öngörüsünün deneysel olarak doğrulanması sonuç olarak yine fiziksel bilgiyi artıracaktır. Bu bakımdan doğallık sorununun kavranması oldukça önemlidir[7].

Bu tezin temel amaçları, Standart Model'in temel yapı taşı olan simetriler üzerinde yoğunlaşarak, ayar simetrisi, simetrilerin modları (realizasyonları) ve Higgs mekanizmasının kavranılması yoluyla Standart Model'e hakim olunması, Standart Model Ötesi bir model için gereken alt yapının oluşturulması ve model inşası sürecinin öğrenilmesi, doğallık sorunu gibi Standart Model Ötesi kuram arayışlarında belirleyici rol oynayan bir olgunun irdelenmesi ve bu sorunun çözümü için önerilen modellerin anlaşılmasıyla sonraki aşamalarda yapılabilecek çalışmalar için gerekli donanımın kazanılmasıdır.

Bu amaçlar doğrultusunda, tezin ikinci bölümünde, çağdaş modellerin temelini teşkil eden simetriler, korunum yasaları ve ayar ilkesi detaylı olarak incelenmiştir. Üçüncü bölümde, simetrilerin modları ve ayrıca Standart Model'e hazırlık olarak Higgs mekanizması incelenmiş ve skaler alan modeli üzerinde örneklenmiştir. Dördüncü bölümde Higgs mekanizması ve Standart Model detaylı olarak incelenmiştir. Beşinci bölümde doğallık sorunu ortaya konulmuş, bu sorunun nasıl ve neden ortaya çıktığına değinilerek, Higgs kütlelerine fermiyonların halka katkılarının hesaplanmasında kullanılan yöntemler ve bu süreçlerde gerekli olan regülarizasyon yöntemi tanıtılmıştır. Passarino-Veltman yöntemi ise ayrıca ek olarak sunulmuştur.

2.SİMETRİLER VE KORUNUM YASALARI

2.1.Giriş

Simetri sözcük anlamı olarak bir işlemde sonra ilk durumla son durum arasındaki "ayrıt edilemezliği" ifade eder. Fizikte kastedilen simetriteler, fiziksel süreci belirleyen hareket denklemlerinin belli matematiksel dönüşümlerden sonra aynı kalması yani ilk haline kıyasla "ayrıt edilemez" olmasıdır. Düünden bugüne fiziksel süreçleri ifade ederken kullanılan matematiksel simetriteler, doğanın işleyişinin keşfedilmesinde ve kavranmasında güçlü ve kullanışlı bir araç olarak öne çıkmışlar ve fiziksel süreçlerin kuramsal yapısının oluşturulmasında omurga görevi görmüşlerdir.

Klasik mekanikten başlayarak korunum yasalarının fiziksel problemlerin çözümünde kayda değer ölçüde kolaylaştırıcı rol oynadığı görülmüştür. Klasik mekaniğin Lagrange formülasyonunda, Lagranjiyede belirleyen koordinata karşılık gelen konjuge momentumun korunuyor olması bunun en tipik örneğidir. Simetritelerin varlığının en önemli sonucu hiç kuşkusuz bu simetriye karşı gelen bir korunum yasasının bulunmasıdır. Emmy Noether'in 1918'de ortaya koymuş olduğu teoremler aracılığıyla Lagranjiyenin sahip olduğu simetritelerin korunum yasalarıyla birebir ilişkili olduğu anlaşılmıştır [8]. Bu simetritelerin Lagranjiyede kolaylıkla ve açıklıkla seçilebiliyor olması, Lagrange formülasyonunu geliştirilen çağdaş kuramlarda temel yapıtaşısı olarak tercih edilmesine sebebiyet vermiştir. Bu çerçevede bahsi geçen simetri ilkesi aynı zamanda yeni bir modelin inşasında kullanılacak Lagranjiyenin seçilmesinde de bir rehber görevi görmektedir.

Fiziksel süreçlerde bazı niceliklerin, deneysel olarak doğrulanmış şekilde, korunuyor olması olgusundan yola çıkılarak denilebilir ki, mevcut korunum yasaları Lagranjiyenin belli başlı bazı simetritelere sahip olmasını zorunlu kılar. Denklemlerin fiziksel süreçlerde beliren korunum yasalarını matematiksel olarak barındırabilmesinin yolu budur.

Bu simetriteleri dört ana grupta toplamak mümkündür:

1. Sürekli uzay-zaman simetriteleri: Uzayda ve zamanda öteleme, uzay-zamanda dönmeler.
2. Kesikli uzay-zaman simetriteleri: Parite, zaman tersinmesi.
3. Permütasyon simetrisi: Bozonlar ve Fermiyonlar arasındaki simetri.
4. İç simetriteler: $U(1)$ ve $SU(N)$ simetriteleri: Elektriksel yükün korunumu, izospin, renk yükü korunumu, lepton, baryon sayıları korunumu[9].

Sayılan bu simetritelerin bazıları doğada tam olarak bulunurken, bazılarının kırılmış olabileceği düşünülmektedir. Bunların dışında simetriteler iki sınıfa ayrılabilir: Global ve yerel simetriteler.

Global simetriler, fiziksel bir teoremin evrenin her noktasında aynı anda daima sahip olduğu simetridir. Bu simetriler söz konusuysen, aynı dönüşüm her yerde aynı anda uygulandığında, bazı fizik kanunları değişmez kalır. Yerel simetriler ise, evrenin her noktasında ve zamanın her anında birbirinden bağımsız olarak yapılan dönüşümler altında sahip olunan simetridir. İlk bakışta yerel simetrilerin global simetriden daha "dar" olduğu düşünülebilir. Ancak, tam tersi söz konusudur. Kuramlar inşa edilirken, yerel simetriler global simetrelere göre çok daha belirleyici-kısıtlayıcı koşullar getirirler [10, 11].

2.2. Global Simetriler ve Korunum Yasaları (Noether Teoremi)

Noether Teoremi'ne geçmeden önce, bu teoremin kullanıldığı ve hedef aldığı alan denklemlerine kısaca bakmakta fayda vardır: Klasik mekanikten bilinen Euler-Lagrange denklemleri, görelî bir alan teorisi için, uzay ve zaman koordinatlarının aynı statüde olduğu göz önünde bulundurularak ve eylemin "değişimine" (varyasyon) bakılarak

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right),$$

şeklinde yazılabilir. Burada, Lagranjiyen $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_i(x), \partial\phi_i(x))$, olarak verilir.

Noether Teoremi'ne göre, Lagranjiyendeki her sürekli simetriye karşılık, sistemde korunan bir büyüklük vardır. Bir alan kuramı inşa edilirken, fiziksel korunum yasalarının kuram tarafından barındırılabilmesinin yolunun Lagranjiyenin sahip olacağı simetriden ileri geleceği ifade edilmişti. Bu simetriler uzay-zaman ötelenme simetridiyse, kuramın enerji-momentum korunumu yasalarını içerdiği gösterilebilir. Bu yasaların, daha klasik fizikten başlayarak önemleri iyice kavranmış ve oluşturulacak herhangi bir kuramda olması istenen en temel özellik olagelmışlerdir.

Enerji-momentum korunum yasalarının herhangi bir kuramda muhakkak olması istendiğinden, ortaya atılacak modellerin Lagranjiyenlerinin uzay-zaman ötelenmesine ve Lorentz simetrisine sahip olması gerektiği görülür.

Bu olgular ışığı altında, Noether teoreminin incelenmesine uzay-zaman simetriderinin yol açtığı korunum yasalarıyla başlanabilir. Teoremin ispatını kısaca gözden geçirmek için en genel anlamda hem Lagranjiyen, hem de alanlardaki değişimlerin her ikisini de birlikte içeren genel durum ele alınmalıdır: Bu aşamada,

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x' = x + \delta x, \\ \phi &\rightarrow \phi' = \phi + \delta\phi, \end{aligned} \tag{2.1}$$

"infinitesimal"¹ dönüşümleri altında eylemin değişmez kalmasının

¹Yeni bir sözcük arayışına girmek için, bu tezde, infinitesimal sözcüğü Newton ve Leibniz'in kullandığı teknik bağlamda kullanılmıştır.

$$\int d^4x' \mathcal{L}(\phi'_i(x'), \partial\phi'_i(x')) = \int d^4x \mathcal{L}(\phi_i(x), \partial\phi_i(x)) ,$$

ne tür bir korunum yasasına yol açacağına bakılabilir. (2.1)'den hareketle, eylemdeki integral elemanı

$$d^4x' = d^4x \left(1 + \frac{\partial\delta x^\mu}{\partial x^\mu}\right) ,$$

şeklinde dönüşecektir. Lagranjiyen alanlara, alanlar da koordinatlara bağlı olduğundan, eylemdeki toplam değişim

$$\delta S = \int d^4x \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i} \delta\phi_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi_i)} \delta \left(\frac{\partial\phi_i}{\partial x^\mu} \right) + \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\mathcal{L}\delta x^\mu) \right) = 0 ,$$

olarak elde edilir. Burada, alan varyasyonu ile türevin yer değiştirebildiği göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i} \delta\phi_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi_i)} \frac{\partial_i}{\partial x^\mu} (\delta\phi_i) + \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\mathcal{L}\delta x^\mu) \right\} , \\ &= \int d^4x \left\{ \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi_i)} \right) \right] \delta\phi_i + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi_i)} \delta\phi_i + \mathcal{L}\delta x^\mu \right] \right\} \end{aligned}$$

bulunur. Alanların Euler-Lagrange denklemlerini sağladığı durumlarda

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} \delta\phi_i + \mathcal{L}\delta x^\mu \right) = 0 , \quad (2.2)$$

sonucu elde edilir. Parantez içindeki terim Noether akımı olarak bilinir.² Eğer bu akımın tüm uzay üzerinden integrali alınır ve Gauss teoremi uygulanırsa;

$$\int d^3x \partial_0 J^0 = - \oint d\vec{s} \cdot \vec{J} = 0 ,$$

bulunur ve

$$\frac{d}{dt} \int d^3x J^0 = 0 ,$$

ifadesine ulaşılır. $Q = \int d^3x J^0$, tanımı yapılırsa, Q 'nun sistemde zamanla değişmeyen bir nicelik olduğu açıkça görülür. Bu nicelik, Noether Teoremi'nin öngördüğü Lagranjiyenin infinitesimal değişimler altında sahip olduğu değişmezliğin bir sonucu olarak sistemde var olan korunumlu fiziksel büyüklüğe karşılık gelir. Noether Teoremi'nin tersi hem klasik hem kuantum teorisinde geçerlidir. Bu yükler her iki durumda da simetri grubunun jeneratörleridir.

² (2.2) ifadesi uzay-zaman ötelemelerinden kaynaklı $\mathcal{L}\delta x^\mu$ terimini içermektedir. Salt iç simetrilere odaklanıldığında, yalnızca ilk terim kalır ve bu da Noether teoreminin alışlagelmiş ifadesidir.

Uzay zaman simetrilerinin yanı sıra, yalnızca iç uzayda yapılan dönüşümlerin de öneminin vurgulamak için, en basit anlamda klasik ve görelî olmayan bir alan kuramından, örneğin serbest Schrödinger Lagranjyeni ile başlanabilir³:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2m}(\vec{\nabla}\psi^*).(\vec{\nabla}\psi) + \frac{i}{2}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\partial\psi^*}{\partial t}\psi\right). \quad (2.3)$$

(2.3) ile verilen Lagranjiyeye karşı gelen Euler-Lagrange eşitliklerinin, hareket denklemlerini (Schrödinger denklemini ve kompleks eşleniğini) verdiği gösterilebilir. Gerçekten de ψ alanı için, hareket denklemlerine ulaşılmak istendiğinde

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \partial_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\psi)} - \vec{\nabla}\cdot\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla}\psi)} = 0,$$

hesaplanarak

$$-i\frac{\partial\psi^*}{\partial t} + \frac{1}{2m}\vec{\nabla}^2\psi^* = 0,$$

sonucu bulunur ki, bu kuantum mekaniğinden çok iyi bilinen Schrödinger denklemdir. Yine aynı şekilde ψ^* için yazılan Euler-Lagrange denkleminde

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^*} - \partial_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\psi^*)} - \vec{\nabla}\cdot\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla}\psi^*)} = 0,$$

eşitliği elde edilerek, gerekli hesaplamalar yapıldığında

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{1}{2m}\vec{\nabla}^2\psi = 0,$$

ifadesine ulaşılır. Şimdi bu Lagranjiyenin sahip olduğu simetri ve yol açtığı korunum yasalarına bakılabilir:

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \psi' = e^{-i\theta}\psi, \\ \psi^* &\rightarrow \psi^{*'} = e^{i\theta}\psi^*. \end{aligned} \quad (2.4)$$

dönüşümleri altında Lagranjiyenin değişmez kaldığı aşikardır. (2.2) kullanılan Noether akımı inşa edilebilir:

$$\Delta j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\Delta\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi^*)}\Delta\psi^*$$

(2.4) ifadesinden alanların infinitesimal değişimlerinin

$$\Delta\psi = -i\Delta\theta\psi,$$

³Bu tezde $\hbar = 1 = c$ doğal birim sistemi kullanıldığından, bulunan ifadeleri iyi bilinen formlara çevirmek için \hbar gibi sabitlerin uygun yerlere yerleştirilmesi gerekir.

$$\Delta\psi^* = i\Delta\theta\psi^* ,$$

olduğu görülebilir. Bu değişimler kullanılarak

$$\Delta j^\mu = -i\Delta\theta \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\psi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi^*)}\psi^* \right] ,$$

bulunur. $\Delta j^\mu = \Delta\theta j^\mu$, tanımından faydalanarak

$$j^\mu = -i \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\psi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi^*)}\psi^* \right] ,$$

elde edilir. Korunum yasaları bileşenler cinsinden

$$\partial_\mu j^\mu = \partial_0 J^0 + \partial_i J^i = \partial_0 \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\psi)}\psi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\psi^*)}\psi^* \right] + \partial_i \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i\psi)}\psi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i\psi^*)}\psi^* \right] = 0 , \quad (2.5)$$

şeklinde ifade edilebilir ve Lagranjiyenden

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\psi)} &= \frac{i}{2}\psi^* , \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla}\psi)} &= -\frac{1}{2m}\vec{\nabla}\psi^* , \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\psi^*)} &= -\frac{i}{2}\psi , \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla}\psi^*)} &= -\frac{1}{2m}\vec{\nabla}\psi , \end{aligned} \quad (2.6)$$

kısmi türevleri hesaplanarak, bu korunum yasası

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi^*\psi) + \frac{1}{2mi}\vec{\nabla} \cdot (\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*) = 0 ,$$

olarak elde edilir. Bu ifade, süreklilik denklemi olarak bilinen denklemdir. Noether akımının zaman bileşeni için

$$j^0 = \psi^*\psi , \quad (2.7)$$

ifadesinden, bu kuramdaki korunan büyüklük

$$Q = \int d^3x J^0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*\psi d^3x , \quad (2.8)$$

şeklinde bulunur. (2.8)'in kuantum mekaniğindeki olasılığın korunumundan başka bir şey olmadığı açıklıkla görülmektedir. Yani, kuantum mekaniksel parçacıkların durumunu ifade

eden dalga fonksiyonu ψ 'nin tek olarak kesin bir şekilde belirlenememesinden doğan faz serbestliği, olasılığın korunması gerektiği sonucunu doğurmaktadır.

Buraya kadar olan tartışmalar görelî bir alan kuramına uygulanmak istenirse, daha sonraki tartışmalar açısından önemli olan Klein-Gordon denklemi ele alınabilir: Klein-Gordon denklemi, pozitif bir olasılık yorumu yapılamayacağından, kuantum mekaniksel perspektiften uygun bir denklem değildir. Ancak bu denklem, alan teorisi çerçevesinde kendine kullanım alanı bulmuştur. Örneğin π^\pm mezonlarının betimlenmesi için başlangıçta önemli bir rol oynamıştır.

Simetri-korunum yasaları perspektifinden, bu teoremin taşıdığı özellikleri yakından görmek için, karmaşık Klein-Gordon alanı için Lagranjiyen ele alınırsa,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^* \phi , \quad (2.9)$$

bu ifadenin

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow \phi' = e^{-i\theta} \phi , \\ \phi^* &\rightarrow \phi^{*'} = e^{i\theta} \phi^* , \end{aligned} \quad (2.10)$$

dönüşümleri altında değişmez olduğu kolaylıkla görülebilir. Korunan yükün bulunması için öncelikle alanlardaki infinitesimal faz değişimleri

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= -i\Delta\theta\phi , \\ \Delta\phi^* &= i\Delta\theta\phi^* , \end{aligned} \quad (2.11)$$

olarak hesaplanabilir. Bu durumda Noether akımı

$$\Delta j^\mu = \frac{i\Delta\theta}{2} \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)} \phi^* - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \phi \right] ,$$

formunda bulunarak,

$$j^\mu = \frac{i}{2} [(\partial^\mu\phi)\phi^* - (\partial^\mu\phi^*)\phi] ,$$

tanımıyla

$$j^0 = \frac{i}{2} [(\partial^0\phi)\phi^* - (\partial^0\phi^*)\phi] ,$$

ve korunan yük

$$Q = \frac{i}{2} \int d^3x ((\partial_0\phi)\phi^* - (\partial_0\phi^*)\phi) , \quad (2.12)$$

olarak elde edilir.

Son olarak kuantum Noether Teoremi çerçevesinde, (2.12) ifadesinin (2.10) ile verilen glo-

bal dönüşümün üretici olduğu gösterilebilir: Kuantum uzayında bu dönüşümü gerçekleştiren işlemci

$$U = e^{-i\theta Q} ,$$

şeklinde tanımlandığında, infinitesimal dönüşümler

$$U^{-1}\phi U \approx \phi + i\Delta\theta[Q, \phi] ,$$

$$U^{-1}\phi^* U \approx \phi^* - i\Delta\theta[Q, \phi^*] ,$$

formunda ifade edilebilir. Bu ifadenin (2.11)'de verilen ifadelere eşdeğer olduğunun gösterilmesi gerekir ki, bunun için Q işlemcisi cinsinden aşağıdaki komütasyon bağıntılarının sağlanması gerekir:

$$\begin{aligned} [Q, \phi] &= -\phi , \\ [Q, \phi^*] &= \phi^* . \end{aligned} \quad (2.13)$$

Bu bağlamda, öncelikle, Lagranjiyenden Π , Π^* alan momentum işlemcileri elde edilmelidir:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)} = \frac{\partial_0\phi^*}{2} , \\ \Pi^* &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi^*)} = \frac{\partial_0\phi}{2} . \end{aligned} \quad (2.14)$$

(2.14)'deki işlemciler cinsinden (2.12) yükü

$$Q = i \int d^3\mathbf{x} (\Pi^*\phi^* - \Pi\phi) , \quad (2.15)$$

olarak ifade edilir.

Alan işlemcileri arasındaki kuantum komütasyon bağıntıları

$$[\Pi(\vec{y}, t), \phi(\vec{x}, t)] = -i\delta^3(\vec{y} - \vec{x}) ,$$

$$[\Pi^*(\vec{y}, t), \phi(\vec{x}, t)] = 0 ,$$

$$[\Pi(\vec{y}, t), \phi^*(\vec{x}, t)] = 0 ,$$

kullanılarak, (2.13) komutasyonlarının gerçekten sağlandığı ve böylece korunumlu yükün gerçekten dönüşümün üretici olduğu görülür[12].

2.3. Yerel Simetriler Korunum Yasaları ve Ayar Kuramları

Kuantum fiziğinin başlangıcından mevcut anlayış düzeyine ulaşılması yaklaşık yüz yıllık bir süreçte gerçekleşmiştir.

1900'de Max Planck'ın ilk kuantum makalesi ile başlayan serüven, 1930 ve 1940'larda parçacık hızlandırıcılarının geliştirilmesiyle ivme kazanmıştır. Zira kazanılan bu teknolojik yetkinlikle maddenin derinliklerine ulaşılması ve içyapısının daha derinden anlaşılması mümkün olmuştur. Bu serüven, ulaşılan bu gözlemsel bilgilerin bir düzene sokulması için, teorilerin aranması ve geliştirilmesi ve böylece oluşturulan teorilerin öngörülerinin yeni inşa edilen daha yüksek enerjili hızlandırıcılarda deneysel olarak sınanmasıyla günümüze kadar devam etmiştir.

Bugün gelinen noktada fizikçilerin amacı, bilinen kuvvetlerin tümünü içeren tek bir kuram oluşturulabilmesidir. Bu doğrultudaki ilk adım, zayıf etkileşmelerle elektromanyetizmanın tek bir model çerçevesinde birleştirilmesi olmuştur. Bu birleşme, sistemlerin enerjileri arttıkça simetrilerinin de artmasından kaynaklanmaktadır. Bu teoriler, yerel simetrilerin ayar teorileri olarak bilinmektedirler ve ortak özellikleri, kuvvet taşıyıcıların bu yerel simetrilerin gereği olarak sisteme doğal bir biçimde dahil edilmeleridir [10, 11].

Bugün doğayı açıklayan bütün kuramlar ayar simetrisine sahip kuramlardır. Ayar kuramları, global dönüşüm parametresinin uzay-zamana bağlı olduğu durumlarda, kuramların sahip olması istenilen simetrilerdir.

Tartışmayı derinleştirerek yerel simetrilerin önemini ortaya koymak için, geçen bölümde global simetriler incelenirken de üzerinde durulan karmaşık Klein-Gordon denklemi ele alınarak işe başlanabilir: Klein-Gordon denkleminin

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^* \phi, \quad (2.16)$$

ile temsil edilen Lagranjiyene

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{-i\theta(x)} \phi,$$

$$\phi^* \rightarrow \phi^{*'} = e^{i\theta(x)} \phi^*,$$

dönüşümleri yapılırsa, (2.16)'ın

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{1}{2} (\partial_\mu \theta) (\partial^\mu \theta) \phi \phi^* + \frac{i}{2} (\partial_\mu \theta) \phi^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi,$$

şeklinde dönüştüğü, yani bu dönüşümler altında değişmez kalmadığı görülür. Yerel ayar dönüşümleri sonrasında Lagranjiyeni değişmez kılmak için, türevin kovaryant türevle değiştirilmesi ve $D\psi$ 'nin ψ gibi dönüşmesi istenir. Kovaryant türev:

$$D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu , \quad (2.17)$$

şeklinde tanımlanır ve (2.16) ifadesi

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(D_\mu\phi^*)(D^\mu\phi) - \frac{m^2}{2}\phi^*\phi , \quad (2.18)$$

şekline dönüşür. Kovaryant türevin

$$D\phi \rightarrow (D_\mu\phi)' = UD_\mu\phi ,$$

şeklinde dönüşmesi gerektiğinden,

$$(\partial_\mu + igA'_\mu)e^{-i\theta(x)}\phi = e^{-i\theta(x)}(\partial_\mu + igA_\mu)\phi ,$$

eşitliğinden, A_μ alanının dönüşmüş hali

$$A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{g}(\partial_\mu\theta(x)) ,$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla (2.18) ile verilen Lagranjiyen

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{-i\theta(x)}\phi ,$$

$$\phi^* \rightarrow \phi^{*'} = e^{i\theta(x)}\phi^* ,$$

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{g}(\partial_\mu\theta(x)) ,$$

yerel ayar dönüşümleri altında değişmez kalır [13]. (2.18) eşitliğine A_μ alanının kinetik terimi eklenerek Lagranjiyen

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(D_\mu\phi^*)(D^\mu\phi) - \frac{m^2}{2}\phi^*\phi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} , \quad (2.19)$$

biçiminde elde edilir. (2.19)'da, $F_{\mu\nu}$ alan şiddet tensörüdür ve $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ olarak verilir. Bu tensörün yukarıda belirtilen ayar dönüşümleri altında değişmez kaldığı kolaylıkla gösterilebilir.

Sonuç olarak, Klein-Gordon Lagranjiyeninin yerel ayar dönüşümleri altında değişmez kılınmasıyla bu yüklü skaler alanların aralarındaki etkileşme sağlanmış olur. Bunu sağlayan, kuvvet taşıyıcı alan A_μ 'dür. Yerel ayar simetrisinin kurama kazandırılmasında yatan şıklık, global simetrisinin yerelleştirilmesi, yani her uzay-zaman noktasında fazları birbirinden

bağımsız ayarlayabilme serbestisinin sisteme yerleştirilerek, sistemi oluşturan parçacıkların birbirleriyle etkileşiminin sağlanmasıdır.

Bu yöntem Dirac alanı için de uygulanabilir. Dirac denklemini veren

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\not{\partial}\psi - m\bar{\psi}\psi , \quad (2.20)$$

Lagranjiyenden başlanarak, yerel faz dönüşümleri

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \psi' = e^{-i\theta(x)}\psi , \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi}e^{i\theta(x)} , \end{aligned}$$

altındaki değişim

$$\delta\mathcal{L} = (\partial_\mu\theta(x))\bar{\psi}\gamma^\mu\psi ,$$

olarak bulunur. (2.17)'a benzer şekilde Lagranjiyenin değişmezliğini sağlamak için, kovaryant türev

$$D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu ,$$

olarak tanımlanarak

$$(D_\mu\psi)' = UD_\mu\psi ,$$

dönüşüm kuralını sağlaması istenirse, A_μ alanının bir öncekine benzer şekilde

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{g}(\partial_\mu\theta(x)) ,$$

olarak dönüştüğü görülebilir. Böylece,

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \psi' = e^{-i\theta(x)}\psi , \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi}e^{i\theta(x)} , \\ A_\mu &\rightarrow A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{g}(\partial_\mu\theta(x)) , \end{aligned}$$

dönüşümleri altında (2.20) Lagranjiyeninin değişmez kaldığı gösterilmiş olur. Bu ifadeye, A_μ alanının kinetik terimi eklenerek, düzeltilmiş olarak,

$$\mathcal{L}_{QED} = i\bar{\psi}\not{D}\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} ,$$

biçiminde yazıldığında, yüklü Dirac fermiyonlarının Maxwell alanları aracılığıyla etkileşimini veren Lagranjiyen elde edilmiş olur.

Yapılan işlemler, ψ alanının daha genel bir simetri grubuna ait olması durumuna da genelleştirilebilir. Bu genel durumda Dirac Lagranjiyeni

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}_i \not{\partial} \psi_i - m\bar{\psi}_i \psi_i ,$$

olarak ifade edilebilir. Eğer kuramın yine yerel ayar simetrilerine sahip olması istenirse daha önceden de yapıldığı gibi türev işlemcileri kovaryant türevlerle değiştirilmelidir. $\theta^a(x)$ gerçel bir fonksiyon, T^a ise, üniter grubun Hermityen üreteçleri olmak üzere⁴, dönüşümlerin simetri grup elemanları

$$U = \exp[-i\theta^a(x)T^a] ,$$

olarak parametrize edilebilir. Anılan dönüşümler,

$$\psi \rightarrow \psi' = U\psi ,$$

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi}U^{-1} , \quad (2.21)$$

şeklinde tanımlanabilir. $A_\mu = T^a A_\mu^a$ ve $D_\mu = I\partial_\mu + igA_\mu$, tanımlamalarıyla, matris gösterimine geçilirse,

$$(D_\mu\psi)' = UD_\mu\psi ,$$

şartının sağlanması istendiğinden, (2.21) ifadelerinden

$$(\partial_\mu + igA'_\mu)U\psi = (\partial_\mu U)\psi + U\partial_\mu\psi + igA'_\mu U\psi = U\partial_\mu\psi + igUA_\mu\psi ,$$

eşitliğine ulaşılabilir. A'_μ 'nun dönüşmüş hali, böylece

$$A'_\mu = UA_\mu U^{-1} + \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1} ,$$

olarak elde edilir. Özetlenirse,

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}_i \not{D} \psi_i - m\bar{\psi}_i \psi_i ,$$

⁴Hermityen üreteçler, grubun

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c ,$$

cebrini ve

$$\text{Tr}[T^a T^b] = \frac{1}{2}\delta^{ab} ,$$

normalizasyonunu sağlar.

Lagranjyeni

$$\psi \rightarrow \psi' = U\psi ,$$

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi}U^{-1} ,$$

$$A'_\mu = UA_\mu U^{-1} + \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1} , \quad (2.22)$$

dönüşümleri altında ayar simetrisine sahip olarak inşa edilmiş olur. Bu aşamada, kurama ayar alanının dinamiğini verecek olan kinetik teriminin de eklenmesi gerekir.

Alanın dönüşüm bağıntısının, (2.22), Maxwell teorisinden çok farklı olduğu göz önüne alınarak, bu işin biraz daha zor olduğu görülebilir. İlk adım olarak, Maxwell "şiddet tensörü" seçilerek, işe başlanabilir:

Dönüşüm

$$f_{\mu\nu} \rightarrow f'_{\mu\nu} = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu ,$$

formunda yazılıp, A_μ 'nin (2.22)'de verilen dönüşümleri bu ifadede yerine yerleştirilirse

$$f'_{\mu\nu} = \partial_\mu [UA_\nu U^{-1} - \frac{1}{ig}(\partial_\nu U)U^{-1}] - \partial_\nu [UA_\mu U^{-1} - \frac{1}{ig}(\partial_\mu U)U^{-1}] ,$$

bulunur. Bu ifade yeniden düzenlenerek

$$f'_{\mu\nu} = Uf_{\mu\nu}U^{-1} + U[A_\mu, U^{-1}\partial_\nu U]U^{-1} - U[A_\nu, U^{-1}\partial_\mu U]U^{-1} + \frac{i}{g}U[U^{-1}\partial_\mu U, U^{-1}\partial_\nu U]U^{-1} , \quad (2.23)$$

biçiminde yazılabilir. Bulunan bu sonuç alan şiddet tensörünün, Maxwell tensöründeki $f_{\mu\nu}$ tensöründen çok farklı olması gerektiğini göstermektedir. Zira bu ifadedeki değişim sadece ek terimlerden dolayı değil, dönüşüm davranışı bakımından da farklılık olduğunu ortaya koyar. İlk adım olarak (2.23)'ten alanların matris tabiatı göz önünde tutularak, dönüşümün

$$F^{\mu\nu} \rightarrow F'^{\mu\nu} = UF^{\mu\nu}U^{-1} , \quad (2.24)$$

şeklinde olması beklenebilir. İkinci adım, (2.23)'teki ilk terim dışındaki ek terimlerin $f_{\mu\nu}$ 'ye $ig[A_\mu, A_\nu]$ gibi bir terim eklenerek yok edilebileceğidir. Gerçekten de, bu yeni terimin dönü-

şümüne bakılırsa

$$ig[A_\mu, A_\nu] = igU[A_\mu, A_\nu]U^{-1} + \frac{i}{g}U[U^{-1}\partial_\nu U^{-1}, U^{-1}\partial_\mu U]U^{-1} + U[A_\nu, U^{-1}\partial_\mu U]U^{-1} - U[A_\mu, U^{-1}\partial_\nu U]U^{-1}, \quad (2.25)$$

bulunur. (2.23) ve (2.25) ifadelerinde ek terimler, beklenildiği gibi birbirini götürür. Bu sayede, Yang-Mills alan-şiddet tensörü

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu + ig[A^\mu, A^\nu],$$

şeklinde tanımlanarak ayar dönüşümleri altında (2.24) gibi dönüşen bir ifade elde edilmiş olur. Lagranjiyene eklenecek olan kinetik terimi belirlemek için, (2.24) dönüşüm bağıntısı dikkate alınarak, $\text{Tr}[F^2]$ 'nin değişmez kaldığı göstermek yeterlidir:

$$\text{Tr}[F'^{\mu\nu} F'_{\mu\nu}] = \text{Tr}[UF'^{\mu\nu}U^{-1}UF'_{\mu\nu}U^{-1}] = \text{Tr}[F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}].$$

Buradan hareketle,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\text{Tr}(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}),$$

bulunur. Matris gösteriminde $F_{\mu\nu} \equiv T^a F_{\mu\nu}^a$, şeklindedir. Toplam Lagranjiyen böylece

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\text{Tr}(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) + i\bar{\psi}_i \not{D}\psi_i - m\bar{\psi}_i\psi_i,$$

olarak elde edilir. Yang-Mills kuramının sahip olduğu bu estetik ve geometrik özellikler, onu parçacıkların Standart Model'inin omurgası haline getirmiştir [12, 14, 15, 16].

3.STANDART MODEL VE HİGGS MEKANİZMASI

3.1.Giriş

Parçacık fiziğinin Standart Modeli (SM), mevcut gözlemsel veri ile uyumlu, gözlemlenmiş tüm temel parçacıkları ve onların güçlü, elektromanyetik ve zayıf etkileşmelerini tarif eden kuramsal bir yapıdır. Standart Model matematiksel olarak

$$SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$$

ayar alanı kuramı ile ifade edilir. Burada $SU(3)_C$ proton ve nötronun çekirdek içinde dağılmadan bir arada kalmasını sağlayan güçlü etkileşimleri ifade eder. $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ yapısı ise atom çekirdeğinin beta bozunmasından sorumlu zayıf etkileşimleri ve kuvvetli elektromanyetik etkileşimleri aynı çatıda birleştirebilme amacından kaynaklanmıştır. Burada elektromanyetizmanın kırılmamış bir simetriye karşı gelen sonsuz menzilin garanti edilmesi kendiliğinden simetri kırılma mekanizması ile sağlanır[17].

Bir önceki bölümde, global simetrilerin korunum yasalarıyla bire bir ilgili olduğu, yerel ayar simetrilerinin ise maddenin birbiriyle olan etkileşimini betimleyen eylemin inşa edilmesinde adeta bir rehber gibi yol gösterici rol oynadıkları anlaşılmıştı. Bu incelemelerden yapılacak çıkarımların ilki doğada korunum yasası olarak karşılaşılan niceliklerin kuramlara global simetriler yoluyla aktarıldığıdır. Buna göre Standart Modelin hiç kuşkusuz belli başlı global simetrileri içermesi gerektiği ortadadır.

Yerel simetrilere sahip ayar kuramlarının önemli bir özelliği, yerel ayar simetrilerinin Lagranjiyene doğrudan kütle terimi eklenmesine izin vermemeleridir. Standart Model de bir ayar kuramı olduğundan, modelde var olan kuvvet taşıyıcı alanların kütesiz olacağı aşikardır. Kütesiz bozonların sonsuz menzilli olduğu bilindiğinden, sadece atom çekirdeğinin içine etki eden zayıf kuvvetlerin doğasının neden bu şekilde olduğu sorusu cevapsız kalır. Halbuki yalnızca çekirdek içi gibi oldukça kısa bir menzilde etkin olan kuvvetlerin oldukça kütleli olması gerektiği aşikardır. Karşılaşılan bu güçlüklerin Higgs mekanizmasıyla aşılabildiği gösterilmiştir.

Bu yöntem, Lagranjiyene doğrudan kütle terimi eklenmesine gerek kalmadan, zayıf etkileşimlerin taşıyıcı vektör bozonlarına kütle kazandırılmasına olanak sağlar. Bu mekanizmanın sonucu olarak ortaya çıkan ve Higgs bozonu olarak bilinen parçacık LHC’de gözlenmiş, kendiliğinden kırılan simetri mekanizması böylelikle deneysel olarak doğrulanmıştır. Bu simetri kırılması mekanizmasıyla kuramın baştan içerdiği simetri $SU(2)_L \otimes U(1)_Y \rightarrow U(1)_{EM}$ şeklinde kırılarak, nihai olarak elde elektromanyetik kuramın sahip olduğu simetrinin kalması sağlanmıştır. Kendiliğinden simetri kırılmasının Standart Model’deki önemi nedeniyle bu mekanizmayı yakından incelemekte fayda vardır.

3.2. Simetrilerin Nambu-Goldstone Modu

Nambu-Goldstone modu, esas olarak, Higgs mekanizmasının global simetriler söz konusu-ken geçerli hali olduğundan, Higgs mekanizmasına geçmeden önce bu kilometre taşı özelli-ğindeki teoremi anlayıp, sonuçlarını değerlendirmekte fayda vardır:

Nambu-Goldstone modunun da bir öncülü olarak Wigner-Weyl modunun kavranması önem-lidir. Wigner-Weyl teoremi; eylemin sahip olduğu simetrilerin, vakum tarafından taşınması durumunda, dejenere kütle multiplerlerinin varlığını öngörür.

Bu durumda dönüşümün üreteçleriyle (G_i), Hamiltonyen ve $|0\rangle$ ile temsil edilen vakum du-rumu arasında

$$[G_i, H] = 0 \quad ; \quad U |0\rangle = |0\rangle ,$$

şeklinde bir bağıntı vardır. Teoremi ispatlamak için,

$$U^{-1} \phi_a U = R_{ab} \phi_b ,$$

dönüşüm bağıntısı ile başlanırsa; ve ϕ_a alanının \vec{p} momentumlu tek parçacık kuantum durumu $|\vec{p}; a\rangle$ ile temsil edilmek üzere,

$$U^{-1} |\vec{p}; a\rangle = R_{ab} |\vec{p}; b\rangle , \quad (3.1)$$

şeklinde dönüştüğü gösterilebilir[18]. Durgun haldeki tek-parçacık kuantum durumu

$$H |\vec{p}; a\rangle_{rest} = m_a |\vec{p}; a\rangle_{rest} , \quad (3.2)$$

bağıntısını sağlayacaktır. Şimdi Hamiltonyenin

$$[H, U^{-1}] = 0 ,$$

ile gösterilecek değişmezlik bağıntısı, bu $|\vec{p}; a\rangle_{rest}$ durumuna uygulanırsa,

$$[H, U^{-1}] |\vec{p}; a\rangle_{rest} = 0 ,$$

bulunur. İfade açık olarak yazıldığında,

$$HU^{-1} |\vec{p}; a\rangle_{rest} - U^{-1}H |\vec{p}; a\rangle_{rest} = 0 , \quad (3.3)$$

ve (3.1), (3.2) bağıntıları kullanıldığında,(3.3) ifadesi

$$H R_{ab} |\vec{p}; b\rangle_{rest} - U^{-1}m_a |\vec{p}; a\rangle_{rest} = 0 ,$$

olarak elde edilir. İfade düzenlenirse,

$$R_{ab}H |\vec{p}; b\rangle_{rest} - U^{-1}m_a |\vec{p}; a\rangle_{rest} = 0 ,$$

ve

$$R_{ab}(m_b - m_a) |\vec{p}; b\rangle_{rest} = 0 ,$$

sonucuna ulaşılır. R_{ab} keyfi olduğundan $m_a = m_b$, olarak bulunur. Görüldüğü gibi vakum ve Hamilton işlemcisinin aynı simetriye sahip olması çakışık (dejenere) kütleli durumların olduğunu söylemektedir.

Bu aşamadan sonra böyle global bir simetri dönüşümünün vakum ve Hamiltonyen işlemcisi tarafından tam olarak paylaşılmadığı simetri durumlarında ne olacağı ele alınacaktır. Bu durum, global simetrier için kendiliğinden kırılma mekanizmasına yol açan Nambu-Goldstone Teoremi olarak bilinir.

Nambu-Goldstone Teoremi $[H, U] = 0$ ve bazı i değerleri için $G_i |0\rangle \neq 0$, olması durumunda sıfır kütleli uyarılmış durumların olduğunu söyler. İlk olarak

$$U^{-1}\phi_a U = R_{ab}\phi_b ,$$

simetri dönüşümünün infinitesimal haline bakılırsa,

$$[G_i, \phi_a(x)] = -(g_i)_{ab}\phi_b(x) ,$$

bulunur. Burada g_i 'ler

$$R_{ab} = (e^{-i\theta_i g_i})_{ab} ,$$

parametrizasyonu ile tanımlanmıştır. Ardından bu ifadenin vakum beklenen değeri incelense,

$$\langle 0 | [G_i, \phi_a(x)] | 0 \rangle = -(g_i)_{ab} \langle 0 | \phi_b(x) | 0 \rangle , \quad (3.4)$$

olduğu görülür.

Eldeki durumda, bazı "i" değerlerinde, $G_i |0\rangle \neq 0$, olduğu için,

$$G_i |0\rangle = |0\rangle_i ,$$

kullanılarak, $|0\rangle$ ile dejenere (yani aynı enerji özdeğerine sahip) başka vakum durumlarının olduğu görülebilir.

Teoremi ispatlamadan önce, sıfırdan farklı vakum beklenen değerine ancak skaler (spinsiz) alanların sahip olabileceğini göstermek uygundur.

Bu durumun açık bir şekilde görülebilmesi için, örneğin vektör ve spinör alanlarının vakum beklenen değerinin sıfırdan başka değer alamayacağı gösterilebilir. Vektör bir alan Lorentz dönüşümleri altında,

$$V^\mu \rightarrow \Lambda^\mu_\nu V^\nu ,$$

gibi dönüşür. Bu Lorentz dönüşümlerinin kuantum Hilbert uzayındaki karşılığı ise

$$U_{(\lambda)}^{-1} V^\mu U_{(\lambda)} = \Lambda^\mu_\nu V^\nu , \quad (3.5)$$

şeklindedir. (3.5) ifadesinin infinitesimal dönüşümler altındaki hali ise

$$[\vec{n} \cdot \vec{J}, V^i] = -i \lambda^i_j V^j ,$$

biçiminde bulunur. Burada J_i 'ler Lorentz grubunun kuantum üreteçleridir¹. Bu ifadenin vakum beklenen değeri

$$\langle 0 | [\vec{n} \cdot \vec{J}, V^i] | 0 \rangle = -i \lambda^i_j \langle 0 | V^j | 0 \rangle ,$$

olarak yazılır. Vakum Lorentz dönüşümleri altında değişmez olduğundan, $J_i | 0 \rangle = 0$ bağıntısını sağlar. Dolayısıyla vektör alanı için

$$\langle 0 | V^k | 0 \rangle = 0 ,$$

koşulu elde edilir.

Eğer aynı inceleme spinör alanlar için yapılırsa, $\psi'(x') = S(x)\psi(x)$, dönüşüm özelliğinden yararlanılarak, spinör alanları için de vakum beklenen değerinin sıfır olması gerektiği görülebilir.

Skaler alanların Lorentz dönüşümleri altında

$$U^{-1} \phi(x) U = \phi'(x') = \phi(x) ,$$

şeklinde dönüşmesinden kaynaklı olarak, J_i 'ler Lorentz dönüşümünün üreteçleri olmak üzere, $[J_i, \phi] = 0$, koşulunun sağlanması gerektiğinden, bu yolla ϕ alanlarının vakumun beklenen değeri üzerine herhangi bir bağ koşulu gelmez.

Teoremi ispatlamak için, (3.4) ifadesiyle işe başlanabilir. Vakumun uzay zaman ötelenmeleri altında değişmez olması özelliğinden, (3.4) eşitliğinin sağ tarafının da uzay-zamandan bağımsız olması gerektiği görülebilir.

¹ λ Lorentz cebirinin, ve $\Lambda = e^{w\lambda}$ ifadesiyle tanımlanan Λ Lorentz grubunun elemanlarıdır.

Simetri üreteçleri, Noether teoremi uyarınca

$$G_i(t) = \int d^3y J_i^0(t, \vec{y}) , \quad (3.6)$$

olarak ifade edilir ve zamandan bağımsızdır. Dolayısıyla $G_i(t)$ herhangi bir anda tanımlanabilir. Bu spesifik t , $t = 0$, ya da $t = x_0$, olarak seçilebileceği gibi, tamamen keyfi de bırakılabilir. Burada tartışma $t = y_0$, keyfi seçimi ile sürdürülecektir. (3.6) kullanılarak, (3.4) yeniden yazılırsa,

$$\int d^3y \langle 0 | [J_i(\vec{y}, y_0), \phi_a(\vec{x}, x_0)] | 0 \rangle = -(g_i)_{ab} \langle 0 | \phi_b(0) | 0 \rangle \neq 0 , \quad (3.7)$$

denkleme ulaşılır. Enerji öz durumlarının tamlık ifadesi

$$\sum_n |n\rangle \langle n| = I ,$$

(3.7) eşitliğinin sol tarafına yerleştirilirse,

$$\begin{aligned} & \int d^3y \langle 0 | [J_i(\vec{y}, y_0), \phi_a(\vec{x}, x_0)] | 0 \rangle = \\ & \sum_n \int d^3y \langle 0 | J_i(\vec{y}, y_0) | n \rangle \langle n | \phi_a(\vec{x}, x_0) | 0 \rangle - \sum_n \int d^3y \langle 0 | \phi_a(\vec{x}, x_0) | n \rangle \langle n | J_i(\vec{y}, y_0) | 0 \rangle , \end{aligned}$$

bulunur. Vakumun Poincare değişmezi olma özelliği

$$e^{ip \cdot x} |0\rangle = |0\rangle ,$$

ve ötelenme ifadeleri

$$J_i^0(x) = e^{ip \cdot x} J_i^0(0) e^{-ip \cdot x} ,$$

$$\phi_a(x) = e^{ip \cdot x} \phi_a(0) e^{-ip \cdot x} ,$$

birlikte kullanılarak, (3.7) eşitliğinin sol tarafından

$$\begin{aligned} & \int d^3y \langle 0 | [J_i(\vec{y}, y_0), \phi_a(\vec{x}, x_0)] | 0 \rangle = \\ & \sum_n \int d^3y [e^{i(p \cdot x - p \cdot y)} \langle 0 | J_i(0) | n \rangle \langle n | \phi_a(0) | 0 \rangle - e^{i(p \cdot y - p \cdot x)} \langle 0 | \phi_a(0) | n \rangle \langle n | J_i(0) | 0 \rangle] , \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi \vec{y} integrali alınırsa,

$$\int d^3y e^{\pm i\vec{p} \cdot \vec{y}} = (2\pi)^3 \delta(\vec{p}) ,$$

bağıntısı kullanılarak

$$\int d^3y \langle 0 | [J_i(\vec{y}, y_0), \phi_a(\vec{x}, x_0)] | 0 \rangle = \sum_n (2\pi)^3 \delta(\vec{p}) \left[e^{ip_n^0(x_0 - y_0)} \langle 0 | J_i(0) | n \rangle \langle n | \phi_a(0) | 0 \rangle - e^{ip_n^0(y_0 - x_0)} \langle 0 | \phi_a(0) | n \rangle \langle n | J_i(0) | 0 \rangle \right],$$

ifadesine ulaşılır. (3.7) ifadesinin sağ tarafının sıfırdan farklı ve zamandan bağımsız olduğu hatırlanırsa, bu durum, eşitliğin sol tarafının en az bir n değeri için,

$$\langle 0 | J_i(0) | n \rangle \langle n | \phi_a(0) | 0 \rangle \neq 0,$$

şartını sağlamasını ve zamandan bağımsızlık şartı gereğince de $P_n^0 = 0$, olmasını gerekli kılar. Demek ki, bu n durum için

$$m_n^2 = (p_n^0)^2 - (\vec{p})^2 = 0,$$

olması gerekir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur. Sıfır kütleli uyarılmış alan durumlarına Nambu-Goldstone bozonları adı verilir[18].

Simetrielerin realizasyonuna ilişkin bu iki farklı mod, basit bir model üzerinden örneklenmek istenirse, $U(1)$ faz simetrisine sahip, bir kompleks skaler alan modeli göz önüne alınabilir ve bu durumda sistemi betimleyen

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^* (\partial^\mu \phi) - V(\phi) \quad ; \quad V(\phi) = \lambda (\phi^* \phi - f)^2 \quad , \quad \lambda > 0,$$

Lagranjiyenin, gerçekten de $\phi \rightarrow \phi' = e^{-i\lambda} \phi$, global dönüşümü altında değişmez olduğu görülebilir[18].

Eylem ve vakumun aynı simetriyi paylaşması ya da paylaşmaması, simetrinin iki farklı biçimde temsil edilmesi anlamına geldiği için, öncelikle potansiyel terimine yoğunlaşıp vakumun beklenen değerinin bulunması gerekir. Bu amaçla

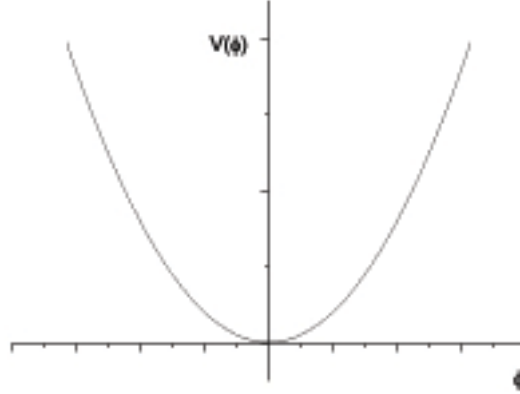
$$V(\phi) = \lambda (|\phi|^2 - f)^2,$$

potansiyelinin minimumlarının bulunması gerekir:

$$\frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} = 4\lambda \phi^* (|\phi|^2 - f) = 0,$$

$$\frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi^*} = 4\lambda \phi (|\phi|^2 - f) = 0.$$

Bu ifadelerden görüleceği gibi alanların ekstremumları $\phi = \phi^* = 0$ ve $\phi^* \phi = f$, durumlarında oluşmaktadır.



Şekil 3.1: Wigner-Weyl Modu Durumunda Potansiyelin Şekli[19]

Burada f 'nin işaretinin çok belirleyici bir rol oynadığı açıktır. Şöyle ki, $f < 0$, için ikinci türevin işaretine bakılırsa, Şekil (3.1)'de gösterildiği gibi kuram için vakumun (potansiyelin minimumu), alanların var olmadığı durumda ($\phi = 0$) olduğu görülebilir. Dolayısıyla yapılacak $\phi \rightarrow \phi' = e^{-i\lambda}\phi$, global dönüşümü vakumu etkilemeyecektir; hem eylem hem de vakum bu global dönüşümün simetrisini birlikte paylaşmaktadırlar. Parçacık spektrumunu görmek için, alan $\phi = \phi_1 + i\phi_2$ şeklinde iki gerçel alan cinsinden bileşenlerine ayrılarak potansiyel ifadesine bakılacak olursa,

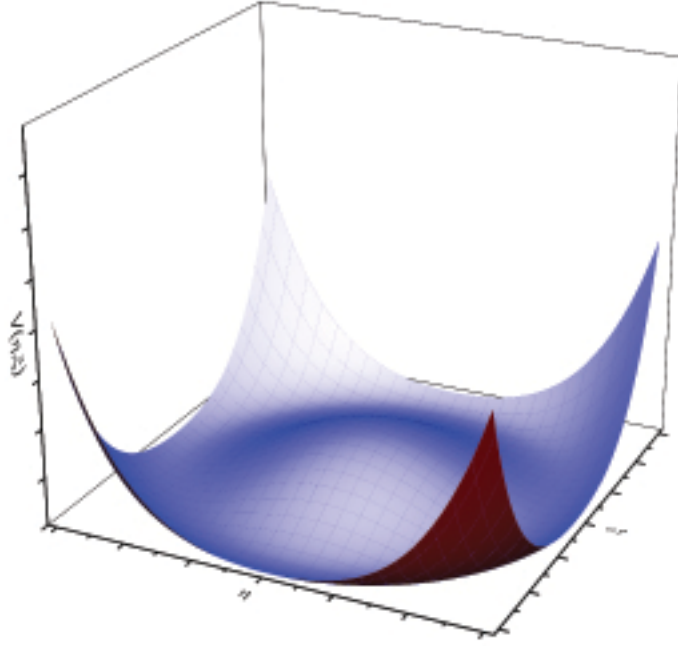
$$V(\phi) = \lambda(\phi^*\phi + |f|)^2 = \lambda(\phi_1^2 + \phi_2^2 + |f|)^2 ,$$

olduğu görülür. Bu durumda, kinetik terimle birlikte, Lagranjiyen

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_2)^2 - \lambda|f|\phi_1^2 - \lambda|f|\phi_2^2 + (\phi_1\phi_2 \text{ etkileşim terimleri}) ,$$

biçiminde elde edilir. Bu Lagranjiyen için parçacık spektrumuna bakıldığında, iki tane $\sqrt{2\lambda|f|}$ kütleli parçacık bulunduğu göze çarpar. Önceden incelendiği gibi vakumun ve eylemin aynı simetriyi paylaştığı durumlarda Wigner-Weyl modu koşulu sağlanarak iki eş kütleli parçacık ortaya çıkmaktadır[19].

Aynı modelde $f > 0$ durumunda, Nambu-Goldstone modunun elde edilebileceği gösterilebilir. Lagranjiyen hala $\phi \rightarrow \phi' = e^{-i\lambda}\phi$, dönüşümü altında değişmezdir. Ancak alanın değerinin minimum olduğu değer bir önceki gibi sıfır değildir. Potansiyelin ikinci türevinin işaretine bakılarak $\phi^*\phi = f$ denklemini sağlayan sonsuz sayıda minimum olduğu görülebilir.



Şekil 3.2: Nambu-Goldstone Modu Durumunda Potansiyel

Kompleks alan, iki farklı şekilde parametrize edilebilir:

$$\phi = \phi_1 + i\phi_2 = \rho e^{i\frac{\xi}{\sqrt{f}}} . \quad (3.8)$$

Polar alanlar cinsinden, Lagranjiyen

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \rho)^2 + \frac{\rho^2}{2f}(\partial_\mu \xi)^2 - V(\rho) \quad , \quad V(\rho) = \lambda(\rho^2 - f)^2 ,$$

şeklindedir. Potansiyelin ekstremum değerlerini bulmak için, türevler alınarak

$$V'(\rho) = 2\lambda\rho(\rho^2 - f) = 0 ,$$

elde edilir. Minimum değer için, ikinci türevin işareti incelenirse

$$V''(\rho) = 6\lambda\rho^2 - 2\lambda f \begin{cases} < 0 & \rho = 0 \\ > 0 & \rho = \sqrt{f} \end{cases} ,$$

ve bu ifadeden

$$\rho_{min}^2 = f = v^2 ,$$

olduğu görülür. Vakumun etrafındaki kuantum dalgalanmalarına bakmak için ρ alanı

$$\rho = h + v ,$$

şeklinde tanımlanabilir. Yapılan yeni tanımla, Lagranjiyen

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} (\partial_\mu (h + v))^2 + \frac{(h + v)^2}{2f} (\partial_\mu \xi)^2 - V(\rho) \quad , \quad V(\rho) = \lambda ((h + v)^2 - f)^2 \quad , \quad (3.9) \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu h)^2 - 4\lambda v^2 h^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \xi)^2 - 4\lambda v h^3 - \lambda h^4 + (\xi h \text{ etkileşim terimleri}) \quad , \end{aligned}$$

biçiminde bulunur. (3.9) ifadesinde parçacık spektrumu incelendiğinde, Nambu-Goldstone teoreminin öngördüğü şekilde $m_h = \sqrt{8\lambda v^2}$ ve $m_\xi = 0$, olmak üzere biri kütleli biri kütsüz iki parçacık olduğu görülür[12, 14, 18].

3.3. Kendiliğinden Simetri Kırılması ve Higgs Mekanizması

Şu ana kadar global simetri üzerinden yapılan hesaplamalar yerel ayar simetrisi durumuna taşınırsa, Higgs mekanizması ile karşılaşılır. Aslında Higgs mekanizması yerel ayar simetrisi ile kendiliğinden kırılan simetri olayının birleşimidir. Bu mekanizmanın sunduğu yenilik ise, kendiliğinden kırılan simetri sonucu ortaya çıkan kütsüz parçacığın, etkileşimi sağlayan alan tarafından yutulmuş olarak, Lagranjiyenden ayıklanabilmesidir. Bu sayede, başlangıçta kütsüz olan vektör alanı, ayar simetrisini bozmadan kütle kazandırabilmenin yolu açılmış olur. Bu mekanizma yine ayar simetrisine sahip kompleks skaler alan örneği üzerinde incelenebilir: Öncelikle, yerel ayar simetrisine sahip skaler Higgs alanı göz önüne alınırsa Lagranjiyen

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (D^\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) - \frac{1}{4} f^{\mu\nu} f_{\mu\nu} - V(\phi) \quad , \quad (3.10)$$

şeklinde yazılabilir. Burada, $V(\phi) = \lambda(\phi^* \phi - f)^2$, formundadır. Lagranjiyen yerel alan simetrisine ve $f > 0$, için potansiyel sonsuz sayıda minimuma sahiptir. Minimumların herhangi bir tanesinin vakum olarak seçilmesi durumunda simetri kendiliğinden kırılır.

Vakumu belirlemeden önce, ayar dönüşümü altında vektör alanının ve skaler alanının nasıl dönüşeceğini anlamak önemlidir. Öncelikle

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{-ig\lambda} \phi \quad ,$$

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \lambda \quad , \quad (3.11)$$

ayar dönüşümlerinin, $\frac{\xi}{\sqrt{f}} = \theta$ tanımı yapılarak, bu dönüşümlerin ρ ve θ üzerine etkisine bakıldığında,

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{-ig\lambda} \rho e^{i\theta} = \rho e^{i(\theta - g\lambda)} \quad , \quad (3.12)$$

$$\rho \rightarrow \rho' = \rho , \quad (3.13)$$

$$\theta \rightarrow \theta' = \theta - g\lambda , \quad (3.14)$$

bulunur. Dönüşümlerin ϕ_1 ve ϕ_2 alanlarındaki karşılıkları ise

$$\phi_1 \rightarrow \phi'_1 = \rho \cos \theta' = \rho \cos(\theta - g\lambda) ,$$

$$\phi_2 \rightarrow \phi'_2 = \rho \sin \theta' = \rho \sin(\theta - g\lambda) ,$$

şeklindedir. (3.14)'den görüleceği gibi,

$$\lambda = \frac{1}{g}\theta ,$$

seçimi ile (3.11) , (3.13) ve (3.14) ifadeleri

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu\theta ,$$

$$\rho \rightarrow \rho' = \rho ,$$

$$\theta \rightarrow \theta' = 0 ,$$

formunda elde edilirler. Yani, bu ayar seçimi ile θ alanı yok edilmiştir. Yine bu seçimin ϕ_1 ve ϕ_2 alanları üzerine etkisi

$$\phi_1 \rightarrow \phi'_1 = \rho \cos \theta' = \rho ,$$

$$\phi_2 \rightarrow \phi'_2 = \rho \sin \theta' = 0 ,$$

şeklinde olduğundan, bu parametrizasyonda ϕ_2 alanının ayıklanması söz konusudur. Bu aşamada vakum seçimine dönülecek olunursa, potansiyel

$$V(\rho) = \lambda(\rho^2 - f)^2 ,$$

formundadır ve potansiyelin minimum olduğu değer,

$$V'(\rho) = 2\lambda\rho(\rho^2 - f) = 0 ,$$

ifadesinden

$$\rho_m^2 = f = v^2 ,$$

şeklinde bulunur. Dolayısıyla, bu minimum değerlerden birisi vakum durumu olarak seçilerek ve vakum değeri civarında kuantum dalgalanmaları h ile gösterilmek üzere, polar parametrizasyonda

$$\phi' = \rho = h + v ,$$

yazılabilir. Bu aşamadan sonra, dönüşmüş alanlar için Lagranjiyen

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu h)^2 - 4\lambda v^2 h^2 + \frac{1}{2}g^2 v^2 A'_\mu A'^\mu - \frac{1}{4}f'^{\mu\nu} f'_{\mu\nu} + g^2 v A'^2_\mu h + \frac{1}{2}g^2 A'^2_\mu h^2 - 4\lambda v h^3 - \lambda h^4, \quad (3.15)$$

formunda bulunur².

Sonuç olarak, (3.15) ifadesindeki parçacık spektrumuna bakılırsa, $\sqrt{8\lambda v^2}$ kütleli skaler bir parçacığın yanı sıra, daha önceden kütesiz olan vektör alanın da kütle kazandığı görülür. Böylece kendiliğinden kırılan simetri mekanizması ile vektör alanlara kütle kazandırılmış olur.

(3.15) ifadesinden görüleceği üzere, A_μ alanı kütle kazanarak yeni bir serbestlik derecesine kavuşmuştur. Bu serbestlik derecesinin nereden geldiği kuramın üniter kalması ve renormalize edilebilmesi açısından önem taşır. Nambu-Goldstone teoremince öngörülen kütesiz parçacık, ayar dönüşümü tanımlanarak Lagranjiyenden ayıklanmıştı. Dolayısıyla A_μ alanının kazandığı yeni serbestlik derecesinin, yok olan ξ alanının A_μ 'nun yapısına “boylamsal” (longitudinal) bileşen olarak katılmasından geldiği görülebilir:

$$A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{gv} \partial_\mu \xi.$$

Yapılan tartışma daha yüksek simetri içeren herhangi bir Yang-Mills alanına da genişletilebilir. Ancak Standart Model'in temelini oluşturan Elektro-Zayıf Model çerçevesinde karşılaştırılması nedeniyle, $SU(2)$ simetri grubu için yapılacak inceleme önemlidir. Kovaryant türev, matris temsilinde

$$D_\mu = I\partial_\mu + igA_\mu^a \frac{\tau^a}{2},$$

ve Higgs alanı polar gösterimde

$$\Phi = e^{i\vec{\tau}\cdot\vec{\phi}/\sqrt{f}} \begin{pmatrix} 0 \\ H \end{pmatrix} = V\Phi_0, \quad (3.16)$$

olarak ifade edilebilir. Burada

$$V = e^{i\vec{\tau}\cdot\vec{\phi}/\sqrt{f}} \quad \text{ve} \quad \Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ H \end{pmatrix},$$

² Buradaki alanlar, dönüşmüş olmaları nedeniyle üslü olarak gösterilmektedirler. Ancak üniter ayar dönüşümü sonrası, dönüşmüş alanların fiziksel alanlar oldukları kabul edilerek, artık üs kullanılmadan gösterilebilirler.

formundadır. Ayar dönüşümleri altında alanlar

$$\begin{aligned}
\psi' &= U\psi , \\
(D_\mu\psi)' &= U(D_\mu\psi) , \\
\Phi' &= U\Phi , \\
(D_\mu\Phi)' &= U(D_\mu\Phi) , \\
A'_\mu &= UA_\mu U^{-1} + \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1} ,
\end{aligned} \tag{3.17}$$

şeklinde dönüşür. Ayar dönüşümü

$$U = V^{-1} , \tag{3.18}$$

seçimi yapılarak gerçekleştirilirse, Higgs alanında önemli ölçüde yalınlaşma meydana gelir ve daha sonra yapılacak hesaplarda da büyük kolaylık sağlanmış olur. Bu dönüşüm altında Higgs alanının değişimi

$$\Phi \rightarrow \Phi' = UV\Phi_0 = \Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ H \end{pmatrix} , \tag{3.19}$$

şeklindedir. Bu durumda kovaryant türev incelenirse,

$$(D_\mu\Phi)' = D'_\mu\Phi_0 ,$$

olması gerektiği görülür. Böylece, Higgs alanının hem kinetik hem potansiyel terimlerinde, sadece Φ_0 alanı kalır ve bu ifadeler önemli ölçüde yalınlaşır. (3.17) dönüşümleriyle (3.10) Lagranjiyenindeki kinetik enerji terimi

$$(D'_\mu\Phi_0)(D'^\mu\Phi_0) = g^2 H^2 [A_\mu^1 A^{\mu 1} + A_\mu^2 A^{\mu 2} + A_\mu^3 A^{\mu 3} (\partial^\mu\phi)(\partial_\mu\phi)] ,$$

formuna indirgenirken, potansiyel terimi (3.18) ve (3.19) ifadelerinden

$$V(H) = \lambda(H^2 - f)^2 ,$$

şeklinde oldukça sade bir biçimde yazılabilir. Yapılacak vakum seçimi için potansiyelin minimum olduğu değer daha önce yapılan hesaplara benzer olarak, H alanına göre türev alınarak bulunabilir:

$$H_m^2 \equiv v^2 = f .$$

Bu değerlerden $H_m = v$, seçilerek, teorinin bu vakum etrafında kuantize edilebilmesi için, h

kuantum dalgalanma alanının hesaba katılması gerekir:

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ h + v \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Higgs alanının işe katılmasıyla kütesiz vektör alanların nasıl kütle kazandığının gösterilmesi için, vektör alanlara kütle kazandıracak terime odaklanılırsa,

$$D_\mu \Phi_0|_{h=0} = \left(I\partial_\mu + ig\vec{\tau} \cdot \vec{A} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = igv \begin{pmatrix} A_1 - iA_2 \\ -A_3 \end{pmatrix},$$

ve dolayısıyla

$$\frac{1}{2}(D_\mu \Phi_0)^\dagger (D^\mu \Phi_0) \Big|_{h=0} = \frac{g^2 v^2}{2} (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2),$$

bulunur. Bu ifadeden Higgs mekanizması sayesinde vektör alanın gv şeklinde bir kütle edindiği görülmektedir. Sonuç olarak, (3.10) Lagranjiyeninden başlanarak ve teorideki ayar serbestisinden yararlanılarak alanların Higgs alanının vektör kısmının yok edilecek şekilde yeniden tanımlanmasıyla ulaşılan

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu a}F_{\mu\nu}^a + \frac{g^2 v^2}{2}(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2) + \frac{1}{2}(\partial_\mu h)(\partial^\mu h) - 4\lambda v^2 h^2 - 4\lambda v h^3 - \lambda h^4 + \text{etkileşim terimleri},$$

Lagranjiyeninden parçacık spektrumunu açıkça görmek mümkündür. Vektör alanlar gv kütesini, Higgs parçacığı ise $\sqrt{8\lambda v^2}$ kütesini kazanmıştır[12].

3.4. Standart Modelde Higgs Mekanizması

Standart Model elektromanyetizma ve zayıf etkileşimleri bünyesinde toplamış; ayrıca deneylerle de defalarca doğrulanarak büyük birleşik alan kuramı oluşturma yolunda önemli bir kilometre taşı olarak bilim tarihinde hak ettiği yeri almıştır. Sonradan güçlü etkileşimlerin de modele dahil edilmesiyle doğanın üç temel etkileşiminin başarılı bir şekilde tek bir kuram çatısı altında toplanması mümkün olmuştur.

Standart Model'in bu büyük ihtişamının güvencelerinden biri hiç tartışmasız bir şekilde kuramın renormalize edilebilen ayar alanları üzerine inşa edilmiş olmasıdır. Kütleli ayar alanlarının renormalize olmadığı, kütesiz ayar alanlarının renormalize olduğu 't Hooft ve Veltman tarafından gösterilmiştir[20]. Bu katkı sayesinde kuram matematiksel olarak tutarlı, ya da bir başka deyişle herhangi bir kuramda var olması beklenen fiziksel öngörü yeteneğine sahiptir. Ancak ayar simetrisinin Lagranjiyende kütleli hiç bir terime izin vermemesi durumu göz önüne alındığında, kuramın bir gerçeklik sorunuyla karşı karşıya olduğu söylenebilir[10, 11].

Zayıf etkileşimlerin sadece çekirdek içi gibi kısa mesafelerde kendini göstermesi durumu, bu

etkileşimlerin taşıyıcı parçacıklarının kütleyle sahip olmaları gerektiği gerçeğini açığa vurur. Bununla beraber, leptonların da kütsüz olarak Lagranjiyede bulunması zorunluluğu göz önüne alındığında, gerçeklik sorununun bu iki temelde (yani, kuvvet taşıyıcılar, lepton ve kuarklara kütle kazandırma gereksinimi) yükseldiği açık ve nettir. Newton'dan başlayarak fiziksel formülasyona giren kütlelenin, doğadaki üç temel kuvveti bir araya getirme iddiası olan bir modelde içermemesi, hiç kuşkusuz kulağa "gerçekçi" gelmemektedir.

Bu önemli sorunun aşılmasında ve kütlelenin doğasının anlaşılmasında Higgs fiziği büyük öneme sahiptir. Kuramda mevcut olan kütsüz alanlar ve parçacıklar sorununun giderilmesi için, matematiksel tutarlılıktan vazgeçilmesi beklenemeyeceğine göre, ayar simetrilerinin korunarak, modelde var olan kütle sorununa çözüm getirilmesi daha yerinde bir seçenektir. Bunu gerçekleştirmenin şık bir yolu, kuramın baştan içerdiği simetrilerin, Higgs mekanizmasıyla kırılıp vektör alanlara kütle kazandırılmasıdır. Fermiyon alanlara (lepton ve kuarklar) bakıldığında $m\bar{\psi}\psi$ şeklindeki terimlerin Lagranjiyede bulunması halinde ayar simetrisinin kırılması söz konusudur. Dolayısıyla, bu tip kütle terimlerinden vazgeçilerek, fermiyon kütlelerinin modele başka şekilde dahil edilmesi gerekir. Bunun da yolu Higgs alanıyla fermiyon alanları arasındaki Yukawa etkileşiminden geçmektedir[19].

Standart Model'in matematiksel olarak formülasyonundan önce, zayıf etkileşimler üzerine yapılan pek çok çalışma fazlasıyla yol gösterici nitelik taşır. Zayıf etkileşime giren lepton ve hadronların izospin simetrisi gösterdiği ve zayıf etkileşimlerde paritenin korunmadığı gerçeği, modelin $SU(2)_L$, grubuyla temsil edilebileceği fikrini verir. Bu zayıf izospin kuantum sayısının yanı sıra, etkileşimlerin temsili için zayıf hiperyük kuantum sayısı da (dolayısıyla simetrisi) yapıya dahil edilebilir. Böylece zayıf etkileşimler için grup yapısı olarak $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, önerilebilir. Ancak zayıf etkileşimlerde bu iki kuantum sayısı da korunmayıp sadece elektriksel yük korunduğundan zayıf etkileşimlerin başta sahip olduğu simetrisinin kırılması gerekir. Elektrik yükü korunduğu için, sistemde kalan tek simetri $U(1)_{EM}$, olmalıdır[15].

Yol haritası oluşturulduktan sonra, dikkat edilecek tek husus yüklerin ve alanların doğru bir şekilde seçilmesidir. Kolaylık açısından sadece birinci nesil parçacıklarla ilgilenilirken, kuarklar bir kenara bırakılarak, öncelikle leptonlar üzerine yoğunlaşılabilir. Yapılacak olan tartışma daha sonradan kuarklar için içine dahil edilerek genişletilebilir. Buna göre kuantum sayıları

Alanlar	İzospin Kuantum Sayısı: I	Hiperyük: Y	Elektrik Yükü: $Q=I_3 + Y/2$
ν_e	$\frac{1}{2}$	-1	0
e_L	$-\frac{1}{2}$	-1	-1
e_R	0	-2	-1
Φ^+	$\frac{1}{2}$	1	1
Φ^0	$-\frac{1}{2}$	1	0

Tablo 3.1: Standart Model Alanları ve Alanların Kuantum Sayıları[15]

şeklinde seçilirse, ortaya çıkan fiziksel sonuçlar deneysel olarak da tutarlı olur. Burada ν_e, e_L alanları elektron alanının sol eli, e_R ise sağ eli bileşeni olup

$$L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L, \quad R = e_R,$$

şeklinde temsil edilirlerken, Higgs alanı, $\vec{\Phi}$ ve ρ gerçel alanlar olmak üzere,

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi^+ \\ \Phi^0 \end{pmatrix} = e^{i\vec{\tau} \cdot \vec{\Phi}} \begin{pmatrix} 0 \\ \rho \end{pmatrix},$$

şeklinde temsil edilir. Daha önceki tartışmalardan yararlanılarak, bahsedilen bileşenlerin tümünü içerecek Lagranjiyen

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{Ayar} + \mathcal{L}_{Fermiyon} + \mathcal{L}_{Higgs} + \mathcal{L}_{Yukawa} - V(\Phi, \Phi^\dagger), \quad (3.21)$$

formunda verilir. Sırayla açık olarak ifade edildiğinde, her bir terim

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Ayar} &= -\frac{1}{4}F^{\mu\nu a}F_{\mu\nu}^a - \frac{1}{4}f^{\mu\nu}f_{\mu\nu}, \\ \mathcal{L}_{Fermiyon} &= i\bar{L}\gamma^\mu(\partial_\mu + ig\frac{\tau^a}{2}W_\mu^a + \frac{ig'}{2}YB_\mu)L + i\bar{R}\gamma^\mu(\partial_\mu + ig'YB_\mu), \\ \mathcal{L}_{Higgs} &= \frac{1}{2}[(\partial_\mu + ig\frac{\tau^a}{2}W_\mu - \frac{ig'}{2}YB_\mu)\Phi]^\dagger[\partial^\mu + ig\frac{\tau^a}{2}W^{\mu a} - \frac{ig'}{2}YB^\mu]\Phi - \lambda(\Phi^\dagger\Phi - f)^2, \\ \mathcal{L}_{Yukawa} &= -y_d(\bar{R}\phi^\dagger L + \bar{L}\phi R), \end{aligned} \quad (3.22)$$

şeklinde [15].

Dikkatler Higgs potansiyeline çevrildiği takdirde, vakumu belirlemek için daha önceden de yapıldığı gibi potansiyelin minimumlarının bulunması gerekir:

$$\frac{\partial V}{\partial \Phi} = 2\lambda\Phi^\dagger[\Phi^\dagger\Phi - f] = 0,$$

$$\frac{\partial V}{\partial \Phi^\dagger} = 2\lambda[\Phi^\dagger\Phi - f]\Phi = 0,$$

ifadeleri kullanılarak ve potansiyelin ikinci türevinin işareti de göz önünde bulundurularak, potansiyelin minimumlarının

$$\langle \Phi^\dagger\Phi \rangle = f = v^2,$$

denkleminde belirlenebildiği görülebilir. Dolayısıyla, üniter ayar seçimiyle, vakum durumu

olarak

$$\Phi_{0,m} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad (3.23)$$

bulunur. Bu seçimle simetrilerin ne şekilde kırıldığıının görülebilmesi için $SU(2)_L$ ve $U(1)_Y$ üreteçlerinin, bu Φ_0 üstüne ne şekilde etki ettiği incelendiğinde,

$$\tau_1 \Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0,$$

$$\tau_2 \Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0,$$

$$\tau_3 \Phi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \neq 0,$$

$$Y \Phi_0 = I \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \neq 0,$$

sonuçları elde edilir. Beklenildiği gibi, seçilen vakum (3.23)'teki Hamiltonyende varolan simetrilere sahip değildir. Korunan simetri

$$\frac{1}{2}(\tau_3 + Y)\Phi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = 0,$$

ifadesine bakılarak anlaşılabilir[19]. Bu sonuç değerlendirilirken, vakumun yüksüz olacak şekilde seçildiği ve dolayısıyla elektromanyetik etkileşimleri hissetmeyeceğini tekrar vurgulamakta yarar vardır. Şimdi, vektör bozonlarına kütle kazandırma sürecine bakılabilir. Bunun için de, Lagranjiyenin Higgs alanlarını içeren kısmına odaklanmak gerekir:

$$\mathcal{L}_\Phi = \frac{1}{2}(D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) - V(\Phi^\dagger \Phi), \quad (3.24)$$

Kovaryant türev incelenirse, bunun h 'dan bağımsız kısmının (kuşkusuz, üniter ayarda),

$$\begin{aligned} D_\mu \Phi_0|_{h=0} &= [\partial_\mu + ig \frac{\tau^a}{2} W^a - ig' \frac{Y}{2} B_\mu] \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \\ &= \frac{iv}{2} \begin{pmatrix} g(W_1 - iW_2) \\ -gW_3 - g'Y_{\phi_0} B_\mu \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

biçiminde olduğu görülebilir³.

³Ayar dönüşümü yapıldıktan sonra, ayar alanları daha önceden belirtilmiş olduğu gibi üs kullanılmadan ifade edileceklerdir.

(3.24)'teki kinetik ifadesinin yine h' 'den bağımsız kısmına odaklanılarak

$$\frac{1}{2}(D^\mu\Phi_0)^\dagger(D_\mu\Phi_0) = \frac{1}{8}v^2[g^2(W_1^2 + W_2^2) + (gW_3 + g'Y_{\phi_0}B_\mu)^2],$$

elde edilir. Ayar alanlarından fiziksel alanlara geçilmek istenirse,

$$W^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_1 \mp iW_2),$$

tanımı yapılarak, Lagranjiyendeki $g^2(W_1^2 + W_2^2)$ ifadesi fiziksel bozonlar cinsinden

$$2g^2W^+W^-,$$

şeklinde yazılabilir. Foton ve Z bozonu da benzer şekilde, B ve W^3 alanı kullanılarak

$$(gW_3 + g'Y_{\phi_0}B)^2 = \begin{pmatrix} W^3 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^2 & gg'Y_{\phi_0} \\ gg'Y_{\phi_0} & g'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^3 \\ B \end{pmatrix}, \quad (3.25)$$

formunda bulunur. Burada göze çarpan ilk husus, foton ve Z alanının B ve W^3 alanlarının kombinasyonu ile oluşabilmesinin koşulunun ancak $Y_{\phi_0} \neq 0$, durumunda ortaya çıkmasıdır. Vakumun hiperyükü $+1$ olduğundan, bu seçimle matris için özdeğer ve özvektörler

$$\lambda = 0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \begin{pmatrix} -g' \\ g \end{pmatrix},$$

$$\lambda = g^2 + g'^2 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \begin{pmatrix} g' \\ g \end{pmatrix},$$

olarak hesaplanabilir. Fiziksel alanlar

$$A_\mu = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}}(g'W_3 + g'B_\mu),$$

$$Z_\mu = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}}(g'W_3 - g'B_\mu),$$

olarak tanımlandığında, (3.25) ifadesi

$$(gW_3 + g'Y_{\phi_0}B_\mu)^2 = (g^2 + g'^2)Z_\mu^2 + 0.A_\mu^2,$$

formuna dönüştürülebilir. Varılan sonucun açık bir biçimde ortaya konabilmesi açısından, Higgs'in kinetik teriminin vakum sektöründeki değeri

$$\frac{1}{2}(D^\mu\Phi_0)^\dagger(D_\mu\Phi_0) = \frac{1}{8}v^2[g^2(W^{+2} + W^{-2}) + (g^2 + g'^2)Z_\mu^2 + 0.A_\mu^2],$$

göz önünde bulundurulduğunda, parçacık spektrumunda kendiliğinden simetri kırılması sonucu üç kütleli (W_μ^+, W_μ^-, Z_μ) ve bir de kütesiz alanla (A_μ) karşılaşılır.

Higgs mekanizması vasıtasıyla zayıf etkileşimin taşıyıcılarının kütle kazanmış olmasının yanı sıra, foton alanı istenildiği gibi hala kütesizdir ve bu haliyle, sistemde kırılmamış $U(1)_{EM}$ simetrisinin olduğunu gösterir. Taşıyıcı bozonların kütleleri ise,

$$M_{W^\pm} = \frac{1}{2}vg, \quad M_Z = \frac{1}{2}v\sqrt{g^2 + g'^2},$$

olarak elde edilir. Eğer kütleler arasındaki ilişki incelenirse, fotonun yükü etkileştiği bilindiğinden

$$e = g \sin \theta_W = g' \cos \theta_W,$$

yazılabilir; bu ifadeden Weinberg açısı olarak adlandırılan θ_W , B ve W^3 alanlarının karışım ölçüsüdür. W ve Z bozonlarının kütlelerinin oranı θ_W cinsinden

$$\frac{M_W}{M_Z} = \frac{\frac{1}{2}vg}{\frac{1}{2}\sqrt{g^2 + g'^2}} = \cos \theta_W,$$

olarak bulunabilir. Zayıf etkileşmelerin şiddetlerinin karakteristik bir ölçütü olan Fermi sabiti $G_F \simeq 10^{-5} \text{GeV}^{-2}$ ve $\sin \theta_W = 0.23$, deneysel olarak saptanabildiğinden, vakumun beklenen değeri

$$\frac{g^2}{8M_W^2} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \rightarrow v = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}G_F}} = 246 \text{ GeV},$$

bulunabilir. Dolayısıyla W^\pm ve Z bozonlarının kütleleri

$$M_W \simeq 80 \text{ GeV}, \quad M_Z = \frac{M_W}{\cos \theta_W} \simeq 90 \text{ GeV},$$

olarak elde edilir. M_W 'nin bilinen kütleleriyle uyumunun yanı sıra, Standart Model çerçevesinde Z bozonu ve kütleli oldukça iyi bir duyarlılıkla öngörülebilmiştir. Higgs kütleleri ise

$$M_H = \sqrt{8\lambda v^2},$$

şeklinde bulunduğundan ve λ keyfi bir sabit olduğundan, Standart Model Higgs bozonunun kütleleriyle ilgili herhangi bir öngörülebilir bulunamaz[12, 19].

Higgs mekanizmasının vektör bozonlara nasıl kütle kazandırdığı anlaşıldıktan sonra, fermiyonların nasıl kütle kazandığının anlaşılması için Higgs alanıyla fermiyon alanlarının yaptığı Yukawa etkileşimine bakılması gerekir:

Zayıf etkileşmelerde sadece sol eli parçacıklar yer aldığından, fermiyonların sol eli bileşenleri zayıf-yük taşıırken sağ eli bileşenleri sadece hiper yük taşırlar. Bu nedenle $SU(2)_L \times$

$U(1)_Y$ dönüşümü altında farklı dönüşürler:

$$\begin{aligned}\psi_L &\rightarrow \psi'_L = e^{iW^a T^a + i\alpha Y} \psi_L, \\ \psi_R &\rightarrow \psi'_R = \psi_R e^{i\alpha Y}.\end{aligned}\tag{3.26}$$

$m\bar{\psi}\psi$ kütle teriminde her iki kiral alanın mevcudiyeti ve (3.26)'de görüldüğü gibi bu iki alanın dönüşümlerinin çok farklı olması, $SU(2)_L$ ayar simetrisinin kırılmasına yol açar. Higgs alanında seçilen vakum değeri civarındaki kuantum dalgalanmalarını Yukawa etkileşmesine taşıyarak, bu sorunu aşmanın mümkün olduğu görülebilir:

Higgs alanı ile fermiyon alanları arasındaki Yukawa etkileşimi göz önüne alındığında, Higgs alanının vakum beklenen değerinin sıfırdan farklı olması nedeniyle, fermiyonların kütle kazanacağı görülebilir. Bu durumu göstermek için (3.22) ile sunulan Standart Model'in Lagranjyenindeki Yukawa tipi etkileşim incelenerek, tartışma diğer aileler ve fermiyonlara genişletilebilir. Yukawa etkileşmesini veren

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = -y_d(\bar{R}\Phi^\dagger L + \bar{L}\Phi R),\tag{3.27}$$

ifadesinden başlanarak, gerekli düzeltmeler yapıldığında

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = -y_d \left[\begin{pmatrix} \bar{\nu} & \bar{e} \end{pmatrix}_L \begin{pmatrix} 0 \\ v+h \end{pmatrix} e_R + \bar{e}_R \begin{pmatrix} 0 & v+h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L \right],$$

elde edilir ve $e = e_L + e_R$, gösterimi kullanıldığında kütle ve alanların etkileşim ifadesi

$$-y(v+h)\bar{e}e,$$

olarak bulunur. Bu eşitlik kullanılarak, elektronun kütlesinin $m_e = yv$ olduğu görülür. Buradan da, Yukawa sabiti elektronun kütlesi cinsinden $y = \frac{m_e}{v}$ olarak ifade edilebilir. Buna göre herhangi bir fermiyonun Higgs alanıyla olan etkileşiminin fermiyonun kütlesiyle orantılı olduğu görülebilir. Dolayısıyla bilinen en ağır fermiyon olan üst kuarkın Higgs alanıyla en çok etkileşen fermiyon olması beklenir. Ayrıca Yukawa etkileşim kat sayısı keyfi bir sabit olduğundan, Standart Model temel olarak elektronun kütlesinin ne olacağını öngöremez.

Lagranjyene eklenen Yukawa tipi bir etkileşim sayesinde, nötrino kütsüz bırakılırken elektronun kütle kazandığı görülebilir. Bu tartışma, tüm leptonlara kolaylıkla genellenebilir.

Ancak aynı genelleme fermiyon ailesinin öteki üyeleri olan kuarklara yapılmak istendiğinde, yeni bir zorlukla karşılaşılır: (3.27) şeklindeki bir Yukawa etkileşimi, sadece alt tip kuarklara kütle kazandıracığından, burada bir eksiklik olduğu aşikardır. Üst tip kuarklara da bir şekilde kütle kazandırılması için Lagranjyene yeni bir Yukawa etkileşim terimi eklenmesi gerekir:

Bu terim

$$\mathcal{L}_u = -y_u(\bar{\psi}_L \tilde{\Phi}^c \psi_R + \bar{\psi}_R \tilde{\Phi}^{c\dagger} \psi_L) ,$$

formundadır. Burada Φ^c , daha önce tanımlanan Higgs alanının elektrik yükü eşleniğidir:

$$\tilde{\Phi}^c = -i\tau_2 \Phi^* .$$

Yine Higgs alanının vakum beklenen değerinin sıfırdan farklı olması kütlelerin kaynağını oluşturacağından, Yukawa Lagranjyenlerinin sadece bu kısımlarına bakılırsa

$$\begin{aligned} y_d \left[\begin{pmatrix} \bar{u}_L & \bar{d}_L \end{pmatrix} \Phi_0 d_R + \bar{d}_R \Phi_0^\dagger \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \right] &= y_d \left[\begin{pmatrix} \bar{u}_L & \bar{d}_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} d_R + \bar{d}_R \begin{pmatrix} 0 & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \right] , \\ y_u \left[\begin{pmatrix} \bar{u}_L & \bar{d}_L \end{pmatrix} \tilde{\Phi}_0^c u_R + \bar{u}_R \tilde{\Phi}_0^{c\dagger} \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \right] &= y_u \left[\begin{pmatrix} \bar{u}_L & \bar{d}_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} u_R + \bar{u}_R \begin{pmatrix} v & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \right] , \end{aligned}$$

bağıntıları elde edilir. Burada u ve d kuarkların üst ve alt bileşenlerini simgelerken, L ve R indisleri sağ ve sol eli bileşenleri temsil etmektedir. Yapılan hesaplamalar sonucunda

$$\begin{aligned} y_d \left[\begin{pmatrix} \bar{u}_L & \bar{d}_L \end{pmatrix} \Phi_0 d_R + \bar{d}_R \Phi_0^\dagger \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \right] &= y_d v [\bar{d}_L d_R + \bar{d}_R d_L] = y_d v \bar{u} u = m_u \bar{u} u , \\ y_u \left[\begin{pmatrix} \bar{u}_L & \bar{d}_L \end{pmatrix} \tilde{\Phi}_0^c u_R + \bar{u}_R \tilde{\Phi}_0^{c\dagger} \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \right] &= y_u v [\bar{u}_L u_R + \bar{u}_R u_L] = y_u v \bar{d} d = m_d \bar{d} d , \end{aligned}$$

ifadelerinden görüleceği üzere tanımlanan Higgs alanında seçilen vakum değeri civarındaki kuantum dalgalanmalarının Yukawa etkileşimine taşınmasıyla üst ve alt tipteki kuarklara istenilen kütleler kazandırılabilir. Yukawa etkileşimi tüm fermiyonlarla Higgs alanı arasında olduğundan, tartışmanın daha anlaşılır biçimde yürütülmesi amacıyla, öncelikle bu alanların, tablo olarak verilmesi uygun olacaktır:

Spinor Alanı	$\Psi^I(\text{renk, izo-spin, hiperyük})$
Sol eli kuarklar	$Q_{Li}^I(3, 2, \frac{1}{3})$
Sağ eli üst kuarklar	$u_{Ri}^I(3, 1, \frac{2}{3})$
Sağ eli alt kuarklar	$d_{Ri}^I(3, 1, \frac{1}{3})$
Sol eli fermiyonlar	$L_{Li}^I(1, 2, -1)$
Sağ eli fermiyonlar	$l_{Ri}^I(1, 1, -2)$

Tablo 3.2: Fermiyon alanlarının etkileşim durumundaki temsilleri[18]

Tablo (3.2)'de alanlara üst indis olarak verilen I , alanların etkileşim durumunda temsil edildiğini, alt indis i ise parçacıkların hangi aileye mensup olduklarını göstermektedir. Q_{Li}^I açıkça yazılırsa

$$Q_{Li}^I(3, 2, \frac{1}{3}) = \begin{pmatrix} u_g^I, u_r^I, u_b^I \\ d_g^I, d_r^I, d_b^I \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} u_g^I, u_r^I, u_b^I \\ d_g^I, d_r^I, d_b^I \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_g^I, c_r^I, c_b^I \\ s_g^I, s_r^I, s_b^I \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t_g^I, t_r^I, t_b^I \\ b_g^I, b_r^I, b_b^I \end{pmatrix},$$

formunda olduğu görülebilir. Bu durumda, Yukawa sabiti yine keyfi bir parametre olmak üzere en genel halde etkileşim ifadesi

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = -Y_{ij} (\bar{\psi}_{Li} \Phi \psi_{Rj} + \bar{\psi}_{Rj} \Phi^\dagger \psi_{Li}),$$

ve

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = - \left[Y_{ij}^d (\bar{Q}_{Li}^I \Phi d_{Rj}^I + \bar{d}_{Rj}^I \Phi^\dagger Q_{Li}^I) + Y_{ij}^u (\bar{Q}_{Li}^I \tilde{\Phi}^c u_{Rj}^I + \bar{u}_{Rj}^I \Phi^\dagger Q_{Li}^I) \right. \\ \left. + Y_{ij}^l (\bar{L}_{Li}^I \Phi l_{Rj}^I + \bar{l}_{Rj}^I \Phi^\dagger L_{Li}^I) \right],$$

olarak elde edilir. İfadenin son terimi, esas olarak leptonların Higgs alanıyla etkileşimini gösteren terimdir. Diğer iki terim yakından incelendiğinde ve ifade açık olarak yazıldığında, kütle olarak yorumlanabilecek terimlerin yanı sıra, alanların karışmasından ötürü ortaya çıkan ve kolayca yorumlanamayan durumların da olduğu görülür. İlke olarak Higgs alanıyla fermiyon alanlarının olası bütün etkileşimleri düşünüldüğünde, oluşturulabilecek tüm etkileşim terimlerinin öz durumlarının kütle öz durumlarına bire bir denk gelmemesi bu alan karışımını doğurmuştur. Esasen fiziksel olarak ölçülen kuark kütleleri bu durumların küçük bir kısmını oluşturur. Bunu göstermek için, örneğin $Y_{ij}^d \bar{Q}_{Li}^I \phi d_{Rj}^I$ terimi yakından incelendiğinde

$$Y_{ij}^d \bar{Q}_{Li}^I \phi d_{Rj}^I = \begin{pmatrix} Y_{11} (\bar{u} \ \bar{d})_L^I \begin{pmatrix} \Phi^+ \\ \Phi^0 \end{pmatrix} & Y_{12} (\bar{u} \ \bar{d})_L^I \begin{pmatrix} \Phi^+ \\ \Phi^0 \end{pmatrix} & Y_{13} (\bar{u} \ \bar{d})_L^I \begin{pmatrix} \Phi^+ \\ \Phi^0 \end{pmatrix} \\ Y_{21} (\bar{c} \ \bar{s})_L^I \begin{pmatrix} \Phi^+ \\ \Phi^0 \end{pmatrix} & Y_{22} (\bar{c} \ \bar{s})_L^I \begin{pmatrix} \Phi^+ \\ \Phi^0 \end{pmatrix} & Y_{23} (\bar{c} \ \bar{s})_L^I \begin{pmatrix} \Phi^+ \\ \Phi^0 \end{pmatrix} \\ Y_{31} (\bar{t} \ \bar{b})_L^I \begin{pmatrix} \Phi^+ \\ \Phi^0 \end{pmatrix} & Y_{32} (\bar{t} \ \bar{b})_L^I \begin{pmatrix} \Phi^+ \\ \Phi^0 \end{pmatrix} & Y_{33} (\bar{t} \ \bar{b})_L^I \begin{pmatrix} \Phi^+ \\ \Phi^0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_R^I \\ s_R^I \\ b_R^I \end{pmatrix},$$

ve sadece Higgs'in vakum değerini içeren terimlere odaklanıldığında,

$$\mathcal{L}_{Yukawa}^{kuark} = \bar{d}_{Li}^I M_{ij}^d d_{Rj}^I + \bar{d}_{Rj}^I M_{ji}^{\dagger d} d_{Li}^I + (\bar{u}_{Li}^I) M_{ij}^u u_{Rj}^I + (\bar{u}_{Rj}^I) M_{ij}^{\dagger u} u_{Li}^I, \quad (3.28)$$

bulunur. Kuark alanlarının birbirleriyle karıştığı etkileşim durumlarından fiziksel kütle durumlarına geçmek için $M_{ij}^{u,d}$ matrislerinin, üniter matrisler aracılığı ile diagonalize edilebileceğinden yola çıkılarak,

$$\begin{aligned} M_{diagonal}^d &= V_L^d M^d V_R^{\dagger d} , \\ M_{diagonal}^u &= V_L^u M^u V_R^{\dagger u} , \end{aligned}$$

ve $V_L^{u,d}, V_R^{u,d}$, nin üniterlik özellikleri kullanılarak, (3.28) ifadesi

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Yukawa}^{kuark} &= \bar{d}_{Li}^I V_L^{\dagger d} V_L^d M_{ij}^d V_R^{\dagger d} V_R^d d_{Rj}^I + \bar{d}_{Rj}^I V_R^{\dagger d} V_R^d M_{ij}^d V_L^{\dagger d} V_L^d d_{Li}^I \\ &+ (\bar{u}_{Li}^I) V_L^{\dagger u} V_L^u M_{ij}^u V_R^{\dagger u} V_R^u u_{Rj}^I + (\bar{u}_{Rj}^I) V_R^{\dagger u} V_R^u M_{ij}^u V_L^{\dagger u} V_L^u u_{Li}^I , \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Bu ifadede fiziksel u ve d alanları

$$\begin{aligned} d_{Li} &= V_{Lij}^d d_{Lj}^I & d_{Ri} &= V_{Rij}^d d_{Rj}^I , \\ u_{Li} &= V_{Lij}^u u_{Lj}^I & u_{Ri} &= V_{Rij}^u u_{Rj}^I , \end{aligned} \quad (3.29)$$

formunda tanımlanabilir. Yine Q_{Li}^I terimi zayıf etkileşimler çerçevesinde ele alınırsa, kuarklar için yüklü zayıf etkileşimler durumunda Lagranjiyendeki kinetik terim, zayıf etkileşim öz durumları için yazılarak,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= i \bar{Q}_{Li}^I \gamma_\mu (\partial^\mu + i \frac{g}{2} W_a^\mu \tau_a) Q_{Li}^I , \\ \mathcal{L} &= i \begin{pmatrix} \bar{u} & \bar{d} \end{pmatrix}^I \gamma_\mu (\partial^\mu + i \frac{g}{2} W_a^\mu \tau_a) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}^I , \end{aligned}$$

gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\mathcal{L} = \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{u}_{iL}^I \gamma_\mu W^{-\mu} d_{iL}^I + \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{d}_{iL}^I \gamma_\mu W^{+\mu} u_{iL}^I + \dots ,$$

bulunur. Lagranjiyen zayıf etkileşim öz durumları yerine kütle öz durumları cinsinden yazılırsa, (3.29)'te yapılan tanımlamalar kullanılarak,

$$\mathcal{L} = \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{u}_{iL} (V_L^u V_L^{d\dagger})_{ij} \gamma_\mu W^{-\mu} d_{iL} + \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{d}_{iL} (V_L^d V_L^{u\dagger})_{ij} \gamma_\mu W^{+\mu} u_{iL} + \dots ,$$

sonucu elde edilir. Tanım olarak

$$u_i^I = u_i ,$$

$$d_i^I = V_{ij}^{CKM} d_j,$$

yukarı kuarklar için kütle ve etkileşim öz durumunun aynı, ancak aşağı kuarkların döndürülmüş olduğu kabul edilerek, $(V_L^d V_L^{u\dagger})_{ij} = V_{CKM}$, matrislerinin kombinasyonları 3×3 matris gösterimiyle

$$\begin{pmatrix} d^I \\ s^I \\ b^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix},$$

olarak verilir. Cabibbo-Kobayashi-Maskawa matrisi (V_{CKM}) olarak adlandırılan bu matriste V_{ud} aşağı tipteki bir kuarkın yukarı kuarka geçiş olasılığını verirken, V_{ud}^* ise tam tersini ifade eder. Görüldüğü gibi, etkileşim öz durumlarından kütle öz durumlarına geçiş kuark aileleri arasında bir karışıma neden olmuştur. Dolayısıyla yukarı ve aşağı kuarkların birbirlerine dönüşümünün yanı sıra aileler arası geçişler de fiziksel bir süreç olarak ortaya çıkar. V_{CKM} 'nin varlığı, Standart Model'de CP simetrisinin kırılmasından da sorumludur[19].

4.DOĞALLIK SORUNU

4.1.Giriş: Doğallık Sorunu

Önceki bölümde ayrıntılarıyla tartışıldığı üzere Higgs Mekanizması sayesinde, zayıf etkileşimin taşıyıcı vektör bozonlarına hem kütle kazandırılarak menzilleri çekirdek içine çekilmiştir; hem de fermiyon alanları ve Higgs alanı arasındaki Yukawa etkileşimi sayesinde fermiyon alanlarının da kütle sahibi olması sağlanmıştır. Higgs parçacığının gözlemlenmesi Standart Model'i artık bir teori statüsüne kavuşturmuştur ve bu bakımdan son derece önemli bir gelişmedir. Ancak bu yolun sonuna gelindiği anlamını taşımamaktadır. Kimileri doğrudan Higgs ile ilgili, kimileri Higgs'den bağımsız pek çok sorun hala çözüm beklemektedir.

Standart Model'in yanıtı bıraktığı ve Standart Model Ötesi bir kuramın cevaplaması beklenen açık noktalar şöyle sıralanabilir:

- Doğallık Sorunu: Çok büyük kütlelerle çok küçük kütlelerin neden ve nasıl bir arada bulunabildiği?
- Nesil Sorunu: Yalnızca üç nesil olması ve kütle hariç ikinci ve üçüncü nesiller birinci nesle bu kadar benzediği halde, kendini tekrarlamamanın neden üçüncü nesilde durduğu ve ötesine geçmediği? Neredeyse kütesiz nötrinodan, altın atomundan daha ağır üst kuarka uzanan bir kütle spektrumunun anlaşılmasını sağlayacak temel prensibin ne olduğu?
- Hiyerarşi Sorunu: Farklı tür kuvvetlerin neden farklı enerji bölgelerinde etkin olduğu? Bunlar daha temel düzeydeki tek bir fenomenin farklı enerji bölgelerindeki farklı tezahürleri ise, bu birleştirmenin nasıl yapılabileceği?
- Doğanın bilinen diğer kuvveti olan kütle çekim kuvvetinin bu yapılanma içine nasıl yerleştirilebileceği?
- Karanlık madde ve karanlık enerjinin doğasının ne olduğu ayrıca kozmolojik sabitin kaynağının nasıl açıklanacağı?
- Madde ve anti-madde asimetrisi ve CP ihlalinin altında yatan ilkenin ne olduğu[10, 11]?

Tezin ana temalarından olan, doğallık ve hiyerarşi konuları bağlamında, Georgi, Quinn ve Weinberg 1974 yılında yayımladıkları makalelerinde "hiyerarşi" ya da "ince ayar" kavramını öne sürmüşlerdir. Bunu, bir etkin alan teorisi çerçevesinde, bir skaler alanın, farklı enerji ölçeklerindeki hiyerarşiden ötürü kütlelerinde yapılması gereken ince ayarlamalarla, hesaplanan

kütlesi ile gerçekte sahip olduğu fiziksel kütesinin arasındaki uçurum sayılabilecek farkın giderilmesi olarak tarif etmişlerdir[7].

Etkin teoriden kasıt ise, daha yüksek enerji ölçeğinde geçerli genel bir kuramın, düşük enerji ölçeğinde geçerli durumudur. Standart Model Elektro-Zayıf enerji ölçeğinde ($\sim 246 \text{ GeV}$) büyük doğrulukla çalıştığından, bu enerji ölçeğinin etkin kuramı olarak düşünülmelidir. Eğer enerji ölçeği yükseltirse Higgs parçacığının kütesine gelen kuantum düzeltmeleri öylesine baskın olur ki, Higgs parçacığının şu anda gözlenmiş olan kütesinde bulunabilmesinin anlaşılmasının tek yolunun modeldeki sabitlere, en azından 10^{34} mertebesinde, bir ince ayar yapılması olduğu anlaşılır [7, 17].

Hiyerarşi sorununun çözümü için yeni kuramlar ortaya atılmış ve bu konu, parçacık fiziğinde model inşasının ana odağı haline gelmiştir. Hiyerarşi sorununa paralel ve çok yakından ilgili bir başka sorun olan doğallık konusuna da kısaca değinmekte fayda vardır:

Örneğin, Dirac'ın "doğallık" tanımı, bir fiziksel parametrenin doğal birim sisteminde birim büyüklükte olmasıdır. Bu tanıma göre kütleler göz önüne alındığında, $\frac{m_u}{m_d}$ doğaldır. Ancak $\frac{m_e}{m_\tau}$ değildir. Aynı şekilde Higgs kütesi ve ona gelecek kuantum düzeltmelerin mertebesi de birim büyüklükte olmadığından doğal değildir[7].

Dirac'ın doğallık tanımının ardından daha ince ve genel bir tanım 't Hooft tarafından ortaya atılmıştır: Bu yeni tanım, μ herhangi bir enerji ölçeği olmak üzere, $\alpha(\mu)$ fiziksel parametre olarak çok küçükse ve bu parametrenin sıfıra götürülmesi durumunda eylemin simetrisi artıyorsa, anılan parametrenin doğal bir parametre olduğunu söyler[7, 21]. Bu durumda $\frac{m_e}{m_\tau}$ doğaldır ve şayet kütleler sıfıra götürülecek olursa sistemde kiral simetri ortaya çıkar. Ancak Higgs parçacığının çıplak kütesi ve ona eklenecek kuantum düzeltmeler bu kıstasa uymamakta ve doğal görünmemektedir. Yani kütleler sıfıra götürüldüğünde, bu sefer sistemde daha büyük bir simetri de ortaya çıkmamaktadır[7].

Bu durumda akla doğallık-hiyerarşi-ince ayar sorunlarının gerçekten fiziksel sorunlar olup olmadığının gelmesi "doğaldır". Daha önceki kuramlardan elde edilen deneyimler, simetrileri genişleterek ya da serbestlik derecelerini artırarak doğallık sorununun giderilmesinin, fiziksel bilgiyi artırdığını ortaya koymuştur. Ancak doğallık konusunun, doğrudan fiziksel ilkeleri tahmin etmeye olanak sağlamaması da başka bir gerçek olarak ortaya çıkmaktadır. Yani, doğallık sorununun çözümü için girilen çabalar kuramların parçacık sayılarını ve içerdikleri simetrileri bu amaçla genişletirken, buna koşut olarak, üstesinden gelinmesi gereken birçok yeni parametrenin de devreye girmesiyle, oldukça ağır bir bedele neden olmaktadır.

Örnek olarak, görelilik kuantum mekaniğinde Dirac denkleminin eksi enerjili çözümlerinden kaçınıldığı zaman, serbest elektronun ışıktan hızlı ancak zik-zaklı bir davranış göstermesi gerektiği görülür. Bu durumun kuantum alan kuramı çerçevesindeki karşılığı, fotonun self enerji düzeltmeleri hesaplanırken karşılaşılan sonsuzluğun elektronun negatif enerjili kuantum partnerinin devreye sokulmasıyla ortadan kaldırılmasıdır. Özetle, hem görelilik kuantum

mekaniğinde, hem de kuantum alan kuramında yeni bir serbestlik derecesi eklenerek (yeni parçacık) çözülmüştür.

Son olarak, Higgs alanının kozmolojik sabit üzerindeki etkisine değinilirse, şu anda evrenin başlangıcıyla ilgili eldeki senaryo, Büyük Patlama anında kuvvetler tek bir çatı altında toplanmış durumdayken, tüm parçacıkların kütesiz olduğunu, Higgs alanının evreni doldurduğunu ve Wigner-Weyl modu durumunda olan evrenin genişlediğini ön görür. Büyük patlamadan $10^{-11}s$ sonra, Nambu-Goldstone mekanizmasıyla, evrenin başlangıçta sahip olduğu simetrik yapı kırılarak, şu anki mevcut duruma geçildiği ve Higgs alanıyla etkileşen parçacıkların kütle kazandığı söylenebilir[7, 22].

4.2. Kuantum Düzeltmelerin Kütle Üzerine Etkisi

Kuantum alan kuramlarında fiziksel kütle, Lagranjiyendeki çıplak kütle ve ona eklenen kuantum düzeltmeleriyle verilir. Higgs bozonunun fiziksel kütesinin bulunması ve bununla ilintili olarak doğallık sorununu oluşturan etkilerin anlaşılması için, Higgs bozonunun fermiyonlar ve ayar bozonlarıyla olan halka etkileşimlerinden kütesine gelecek katkılara bakılmalıdır. Bu bağlamda Higgs bozonunun fermiyonlarla etkileşimlerinden kütesine gelen düzeltmelere bakılırsa, bunların “limit” (cut-off) enerji ölçeği Λ 'ya $\delta m_h \sim \Lambda^2$ şeklinde bağlı olduğu ve yüksek enerji ölçeklerinde kütlelerin kararlı olmadığı ve doğallık sorununun buradan kaynaklandığı görülür. Aynı şekilde Higgs bozonunun kütesine ayar bozonlarıyla yaptığı etkileşimlerden gelecek katkıların $\delta m_h \sim \log \Lambda$ şeklinde olduğu ve yüksek enerji ölçeklerinde kütlelerin halen kararlı kalabildiği gözlenir.

Bu hesaplama fermiyonlar ve ayar bozonları için yapıldığında, bu parçacıkların kütlelerine gelecek düzeltmeler iyileştirilemez sonsuzluk içermediğinden ($\log \Lambda$), kütlelerinin kuantum düzeltmeler altında kararlı kaldığı görülür[10, 11].

Ancak daha önce değinildiği gibi, skaler Higgs alanı söz konusu olduğunda kuantum düzeltmelerinden gelen katkı sonsuz büyüklüktedir ve bu durumda iki seçenekten biriyle yola devam edilmesi gerekir:

- Higgs parçacığının çıplak kütle fiziksel kütesiyile aynı seçilerek pertürbasyon kuramı bir kenara bırakılabilir.
- Pertürbasyon kuramından vazgeçmeden yüksek enerji ölçeklerinde 10^{34} mertebesinde ince ayar yapılabilir.

Birinci seçenek kuramın matematiksel alt yapısının yok edilmesi anlamına geldiğinden, ikinci seçeneğe yönelmek ilk bakışta daha doğru bir yaklaşım olsa da, bunun da teknik anlamda doğal olmadığı açıktır[7].

$$\text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} = \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \dots$$

Şekil 4.1: Birinci Mertebe Halka Düzeltmeleri

Higgs bozonunun çıplak kütesine fermiyonlardan gelecek olan katkı hesaplanmak istenirse, düzeltme terimine katkı verecek olan bütün halka diagramları yazılarak işe başlanabilir. $\Pi(k^2)$, m_H^2 'ye halka diagramlarından gelen katkı olmak üzere

$$\frac{1}{k^2 - m_H^2} = \frac{1}{A} \quad , \quad B = \Pi(k^2) \quad ,$$

tanımları yapıldığında ve

$$\frac{1}{A - B} = A^{-1} + A^{-1}BA^{-1} + A^{-1}BA^{-1}BA^{-1} \dots \quad ,$$

açılımı kullanılarak

$$\frac{1}{A - B} = \frac{1}{k^2 - [m_H^2 + \Pi(k^2)]} \quad ,$$

ifadesine ulaşılır. Görüldüğü gibi, $\sqrt{m_H^2 + \Pi(k^2)}$, Higgs bozonunun giydirilmiş fiziksel kütesidir [12]. Fermiyon halkasının Higgs kütesine yapacağı katkı, fermiyonların kütesiyle orantılı olduğundan; kuantum düzeltmeleri altında fermiyonik kısımdan gelecek en büyük katkıyı üst kuark verir. m_f üst kuark dışındaki diğer fermiyonlardan birinin kütesini temsil etmek üzere,

$$\frac{m_t^2(\Pi(k^2))}{m_f^2(\Pi(k^2))} \sim O \frac{m_t^2}{m_f^2} \quad ,$$

bulunur. Esasen bulunan sonuçlar sonsuzluk içerdiğinden fiziksel olarak kabul edilebilir değildirler. Ancak bütün fermiyonların sonlu katkıları ele alındığında üst kuarktan gelen katkının en başat katkı olduğu görülür. Gerçekten de anılan katkı, kütesi üst kuarka en yakın fermiyon olan alt kuarktan gelen katkıyla kıyaslandığında bu durum açıkça görülür:

$$\frac{m_b}{m_t} = 0,024 \quad .$$

Oranın çok küçük olduğu ve diğer fermiyonların kütlelerinin üst kuarkın kütesiyle aynı mertebede olmadığı göz önünde bulundurularak, fermiyonik kısımdan, sadece üst kuarkın katkısının alınması yeterlidir[7].

4.3. Feynman Parametrizasyonu ve Schwinger Yöntemi Kullanılarak Türetilmesi

Schwinger parametrizasyonu yöntemi, Feynman halka diagramları hesaplanırken integrallerin paydalarının yeniden düzenlenip integralin daha kolay alınabilir hale getirilmesinde kul-

lanılan genel bir yöntemdir.

Yöntem incelenecek olunursa, Feynman halka diagramlarından ileri gelen integralin paydasının

$$\frac{1}{(q^2 - m^2 + i\epsilon)((q - k)^2 - m^2 + i\epsilon)\dots}$$

şeklinde olduğu görülür. Schwinger algoritması geliştirilirken, çıkış noktası

$$\frac{1}{A + i\epsilon} = -i \int_0^\infty dt \exp[it(A + i\epsilon)],$$

integralidir. Paydada var olan $i\epsilon$ terimi, integral alınırken $A = 0$ yapan q değerlerinden meydana gelecek olan sonsuzluğun etrafından dolaşılmak istendiği için eklenmiştir. Bu işlem integrali güvenli bir biçimde alma olanağı sunduğu için son derece yararlıdır. İşlemler tamamlandıktan sonra $\epsilon \rightarrow 0$, limiti alınarak ifadenin ilk şekline dönülür.

Bu yöntemin bir benzeri Feynman parametrizasyonu yöntemidir. Schwinger parametrizasyonu yöntemi ile aynı işlevi gerçekleştirmesine karşın, kullanışlı olduğu yerler bakımından aralarında fark vardır. Feynman parametrizasyonu yöntemi ile simetrik sınırlara sahip integralerin içinde (tek fonksiyon)×(çift fonksiyon) şeklinde ifadeler de elde edebildiğinden, bu yöntem integralin yalınlaşması bağlamında daha faydalıdır.

Bu yöntemdeki omurga, paydadaki q 'ya göre kuadratik dereceli çarpanların daha yüksek dereceden bir polinoma dönüştürülmesidir. Feynman parametrizasyonunun genel formu olan

$$\frac{1}{a_1 a_2 a_3 \dots a_n} = \Gamma(n) \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^1 dx_n \frac{\delta(1 - \sum_{i=1}^n x_i)}{[a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots a_n x_n]^n}, \quad (4.1)$$

ifadesini ispat edebilmek için, öncelikle bu payda Schwinger yöntemiyle parametrize edilerek hesaba başlanabilir. Bu durumda integralin paydası

$$\prod_{i=1}^N \frac{1}{a_i + i\epsilon} = (-i)^N \int_0^\infty dt_1 \int_0^\infty dt_2 \dots \int_0^\infty dt_N \exp[i \sum_{i=1}^N t_i (a_i + i\epsilon)], \quad (4.2)$$

şeklinde parametrize edilir ve bu eşitliğin sağ tarafı C herhangi bir pozitif sayı olmak üzere,

$$\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} \delta(1 - \frac{C}{\lambda}) = 1, \quad (4.3)$$

özdeşliğiyle betimlenen birim ifade çarpılır; $C = \sum_{i=1}^N t_i$, olarak seçildiğinde, (4.3) eşitliği

$$\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} \delta(1 - \frac{\sum_{i=1}^N t_i}{\lambda}) = 1,$$

formuna dönüşür. (4.2) ifadesindeki t değişkenlerinden

$$t_i : t_i \rightarrow x_i = \frac{t_i}{\lambda}, \quad dx_i = \frac{dt_i}{\lambda},$$

dönüşümleri ile x değişkenlerine geçilirse

$$\prod_1^N \int dt_i = \left[\prod_1^N \int dx_i \right] \lambda^N,$$

bulunur. (4.2) ifadesi bu dönüşümler altında

$$= (-i)^N \left[\prod_1^N \int_0^\infty dx_i \right] \int_0^\infty \left[\lambda^{N-1} \delta\left(1 - \sum_1^N x_i\right) \exp\left[-\lambda\left[-i \sum_i x_i (a_i + i\epsilon)\right]\right] \right] d\lambda,$$

şeklinde yazılabilir. Gamma fonksiyonunun tanımlandığı

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt = (z-1)!,$$

ifadesinde

$$\begin{aligned} X &= -i \sum_i x_i a_i \rightarrow N, \\ z &\rightarrow N, \end{aligned} \quad (4.4)$$

değişken değişikliği

$$\lambda X \rightarrow t,$$

ve

$$d\lambda = \frac{dt}{X},$$

dönüşümleri yapılırsa, (4.2) denklemindeki

$$\int \lambda^{N-1} e^{-\lambda[-i \sum_i x_i A_i]} d\lambda,$$

integrali

$$\frac{1}{X} \int dt \left(\frac{t}{X}\right)^{N-1} e^{-t} = X^{-N} \Gamma(N),$$

formuna dönüşür. Bulunan ifade, (4.1) eşitliğinde yerine konulursa, parametrize edilmek istenen ifade

$$\frac{1}{a_1 a_2 a_3 \dots a_n} = (-i)^N \left[\prod_1^N \int_0^\infty dx_i \right] \delta\left(1 - \sum_i x_i\right) X^{-N} \Gamma(N),$$

biçiminde elde edilir ve (4.4) tanımından

$$\frac{1}{a_1 a_2 a_3 \dots a_n} = \Gamma(N) \left[\prod_{i=1}^N \int_0^\infty dx_i \right] \frac{\delta(1 - \sum_{i=1}^N x_i)}{(\sum_{i=1}^N a_i x_i)^N}, \quad (4.5)$$

bulunur. Dikkat edilirse, bu ifade, integrasyon sınırları hariç, (4.1)'de verilen Feynman parametrisasyonuna eşdeğerdir. Yapılması gereken son basamak, integral sınırlarının $[0, 1]$ aralığına çekilmesidir. (4.5)'deki delta dağılımının mevcudiyeti

$$\sum_{i=1}^N x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_N = 1, \quad (4.6)$$

koşulunu gerekli kılar. Tanım gereği, tüm x_i 'ler pozitif olduğundan, (4.6) koşulu, tüm x_i 'lerin

$$0 < x_i < 1,$$

aralığında olmasını gerekli kılar ve (4.5), ispatlanmak istenen (4.1) ifadesine indirgenmiş olur.

Son olarak, integrallerin hesaplanması evresinde dikkat edilmesi gereken bir husus, (4.5) ifadesindeki delta integrali alındıktan sonra integrasyonun sınırlarının değişimine ilişkin bir incelikler: Bunun vurgulanması için, basit bir örnek olarak, integralin paydasında dört terim olduğu durum incelenirse,

$$\frac{1}{a_1 a_2 a_3 a_4} = \Gamma(4) \left[\int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \int_0^1 dx_3 \int_0^1 dx_4 \right] \frac{\delta(1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4)}{(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4)^4},$$

ifadesindeki delta dağılımı, x_4 integralinin otomatik olarak alınmasını sağlar. Kalan üç integrelden sonuncusu, yani x_3 bir incelik içerir. Şöyle ki, delta dağılımı gereği

$$x_4 = 1 - (x_1 + x_2 + x_3),$$

olduğundan ve bunun da

$$0 < x_4 < 1,$$

koşulunu sağlaması gerektiğinden

$$0 < x_3 < 1 - (x_1 + x_2),$$

koşuluna ulaşılır. Demek ki, kalan üç integrelden ilk ikisi $[0, 1]$ aralığında alınırken, sondan bir önceki olan x_3 , $[0, 1 - (x_1 + x_2)]$ aralığında alınmalıdır. Bu basit örnek üstünde gösterilen bu özellik, (4.1) genel ifadesindeki tüm N hali için geçerlidir [12].

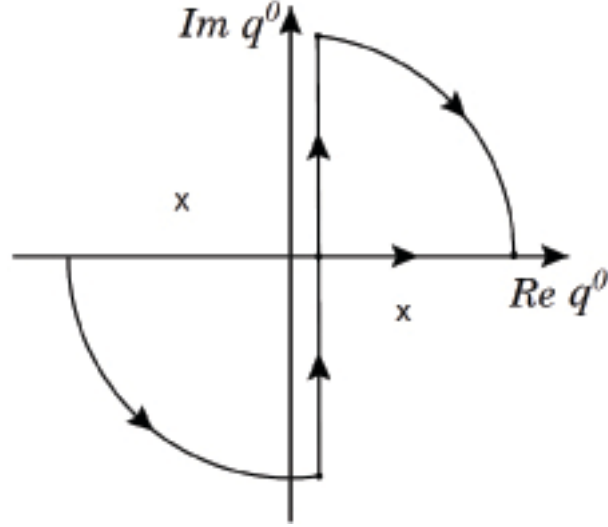
4.4. Boyutsal Regülarizasyon, Wick Dönmesi ve μ Parametresi

Feynman diagramlarının halka kısımlarının hesabı, sonsuzluklar söz konusu olduğunda, regülarizasyon denilen yöntem gerektirir. Bu yöntemdeki mantık, öncelikle integrali iraksamatacak bir limitte yazıp sonra limit alınarak sonuca ulaşmaktır. Ancak bu sefer ulaşılan sonuç sonlu ve sonsuz kısım olarak ikiye ayrılmış şekilde ifade edilebilir. İntegralin sonlu kısmı fiziksel anlamın atfedildiği kısımdır.

Regülarizasyon için bir çok yöntem bulunmasına karşın; boyutsal regülarizasyon hariç diğer bütün yöntemler ötelenme, Lorentz veya ayar dönüşümleri altında kuramların sahip olduğu değişmezlik özelliklerinin kaybolmasına; yani, simetrilerinin yok olmasına yol açarlar. Noether Teoremi'nden çok iyi bilindiği üzere doğadaki bilinen bütün korunum yasaları simetriklerle ilişkilidir. Bu bağlamda bahsi geçen diğer regülarizasyon yöntemlerinin kuramların gerçekte olan bağlarını çarpıcı bir şekilde ortadan kaldırdığı söylenebilir. Bu dönüşümler altında kuramların değişmezlik özelliklerinin aynı kalmasını sağlayan boyutsal regülarizasyon yöntemi, bu yanıyla diğer yöntemlere göre öne çıkmakta ve yenilerde pek çok ciddi çalışmada bu yönüyle tercih edilmektedir.

Yöntemden kısaca bahsedilecek olursa: öncelikle integralin sonsuz çıkma nedeni, q üzerinden integral alınırken integrandın payında bulunan q 'nun derecesinin, $d = 4$, boyutta paydadakinden büyük olması olarak açıklanabilir. Ancak integralin $d = 4$, boyutta değil de $d = 4 - 2\epsilon < 2$, boyutta alındığı düşünülürse, bu durum ortadan kalkarak integral prensip olarak alınabilir hale gelir. Sonuç ifadesinde $\epsilon \rightarrow 0$, limiti alınarak ilk durum elde edilir.

Karşılaşılan sonsuzluk sorunları çerçevesinde integralin paydası yeniden incelendiğinde, paydanın $i\epsilon$ terimi olmadan reel eksen üzerinde kutup noktaları içerdiği görülecektir. Bu tekil noktalar yeniden sonsuzluk üreteceğinden, integralin prensip olarak hesaplanması için karmaşık düzleme taşınması regülarizasyonun bir parçasını teşkil eder. $\epsilon \rightarrow 0$ limiti için $i\epsilon$ terimi paydadaki ifadeye eklenerek kutup noktaları reel eksen üzerinden yaklaştırılabilir ve limit alındığında, özgün durum tekrar elde edilir. Feynman parametrizasyonunda $i\epsilon$ teriminin eklenmesinin esas faydası Wick döndürmesi yapıldığında daha açık olarak ortaya çıkar[12].



Şekil 4.2: Wick Dönmesi[22]

Wick döndürmesi Minkowski uzayından Euclid uzayına olan bir dönüşümdür. Bu yöntemle integralin paydasında pozitif bir sayı elde edilmiş olur ki bu da paydadın gelen tekillik sorununu sona erdirir. Wick döndürmesi, $k_0 \rightarrow ik_0$, dönüşümüyle yapılır. Bu sayede uzayın metriği dört boyutta $(+, -, -, -)$ 'den $(-, -, -, -)$ 'ye dönüşür. Wick dönüşümüyle beraber reel eksen üzerinden alınan integral, Cauchy kompleks integral teoremleri yardımıyla kutup noktalarını içermeyecek şekilde sanal eksen üzerine aktarılır. Düşük boyutlarda integralin alındığı kontürde sonsuza uzanan çember dilimleri sonuca katkı vermezler ve integral bu sayede alınabilir hale gelmiş olur. Yakından incelendiğinde kuantum elektrodinamiği için etkileşim terimini içermeyen eylemin

$$S = \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + i\bar{\psi} \not{\partial} \psi - m\bar{\psi} \psi \right],$$

ile verildiği hatırlanarak, doğal birim sisteminde yine eylemin boyutsuz olması istendiğinden ve

$$[m] = L^{-1},$$

boyutunda olduğundan, kütle boyutu cinsinden ψ ve A_μ 'nin boyutları

$$[\psi] = [\bar{\psi}] = \frac{3}{2}, [A_\mu] = 1,$$

olarak elde edilir. Yine çokça incelenen ϕ^4 kuramı için

$$S = \int d^4x \left[(\partial_\mu \phi)^* (\partial^\mu \phi) + \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4} \phi^4 \right],$$

olarak yazılan eylemden, kütle ve skaler alanın boyutunun

$$[m] = 1 \rightarrow [\phi] = 1,$$

olduğu görülür. Tartışma d boyuta genellendiğinde, eylemin

$$S = \int d^d x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + i\bar{\psi} \not{\partial} \psi \right],$$

ifadesinden A_μ 'un ve ψ 'nin boyutları, $d = 4 - 2\epsilon$, tanımıyla

$$[A_\mu] = 1 - \epsilon, [\psi] = [\bar{\psi}] = \frac{3}{2} - \epsilon,$$

olarak bulunur ve etkileşim teriminde, bu boyutlar yerlerine konulursa

$$S = \int d^d x e i \bar{\psi} \gamma_\mu \psi A^\mu \Rightarrow [I] = -d + [e] + 2[\psi] + [A] = [e] - \epsilon,$$

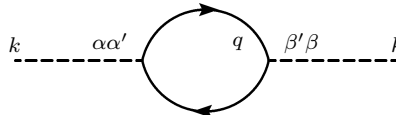
ifadesinden $[e] = \epsilon$, bulunur [15, 23].

4.5. Higgs Kütlesine Üst Kuarktan İleri Gelen Işımsal Düzeltmelerin Hesaplanması

Standart Model çerçevesinde Higgs bozonunun kütlesine halka diagramlarından gelen kuantum katkısının incelemesi son derece önemli bir konudur. Bu hesaplamalar Standart Model Ötesi bir kuramın varlığı konusunda duyulan gereksinmelerin de çıkış noktalarını teşkil eder.

Şöyle ki, Higgs bozonunun 4/7/2012 de bulunmasıyla kuram statüsüne terfi eden Standart Model çerçevesinde cevaplanması gereken yeni soru, Higgs bozonunun fiziksel kütlesinin neden 125 GeV olduğudur. Bu da yenilerde sıkça zikredilen ince ayar ve hiyerarşi sorununun temelini teşkil eder. Uzunca bir süredir sorunun çözümünün Standart Model Ötesi bir kuramla mümkün olduğu düşünülmekteydi. Yenilerde, düşük enerjilerde süpersimetri-nin gözlenmemiş olması, bu modelin konumuz bağlamındaki önemine büyük ölçüde gölge düşürmüştür.

Karşılaşılan bu güçlüğü kaynağına inilirse, sorunun temelinde Higgs bozonunun kütlesine fermiyon halkalarından gelen kuantum katkılarının yattığı görülmektedir. Her fermiyon Higgs bozonunun kütlesine kendi kütlesiyle orantılı olan bir katkı verir. Bu bağlamda, diğer fermiyonlara göre çok yüksek bir kütleyle sahip üst kuarkın etkisi çok baskındır. Dolayısıyla varolan sonsuz kütle sorunsalında en büyük katkının Higgs bozonunun kütlesine üst kuarktan gelen halka kuantum düzeltmelerine ait olduğu söylenebilir.



Şekil 4.3: Üst Kuark Halkası

Şekil (4.3)'te verilen diagramdan ileri gelen integral hesaplanmadan önce, bu integral alınırken kullanılacak olan Feynman parametrizasyonu yöntemine değinilecek olunursa, daha

önceden de belirtildiği gibi bu yöntem Feynman diagramları hesaplanırken integrallerin paydalarının yeniden düzenlenip integralin daha kolay alınabilir hale getirilmesinde kullanılan bir integrasyon değişkeni değişimidir. Bu yöntemle ayrıca simetrik sınırlara sahip momentum integrallerinin içinde (tek fonksiyon)×(çift fonksiyon) şeklinde ifadeler de elde edildiğinden integralin yalınlaşması da söz konusu olur.

Diagramdaki halkanın katkısı, integral ifadesi olarak

$$i\Pi(k^2) = \int \frac{d^4q}{2\pi^4} \left(\frac{-igm_t}{2m_w} \right)_{\alpha\alpha'} \left(\frac{i[(\not{q} - \not{k}) + m_t]}{(q-k)^2 - m_t^2 + i\epsilon} \right)_{\alpha'\beta'} \times \left(\frac{-igm_t}{2m_w} \right)_{\beta'\beta} \left(\frac{i[\not{q} + m_t]}{q^2 - m_t^2 + i\epsilon} \right)_{\beta\alpha} \times (-1), \quad (4.7)$$

yazılır. Burada $g = \frac{e}{\sin\theta_w}$, zayıf etkileşime sabitidir¹.

Hesaplanan bu ifade, daha önce belirtildiği gibi, Higgs kütesine olan kuantum düzeltmelerle ilişkilidir:

$$\frac{1}{k^2 - m_H^2 - \Pi(k^2)}.$$

Casimir yöntemi kullanılarak ifade yeniden düzenlenirse, (4.7) ifadesi

$$i\Pi(k^2) = -\frac{e^2 m_t^2}{4 \sin^2 \theta_w m_w^2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr} [[(\not{q} - \not{k}) + m_t][\not{q} + m_t]]}{(q^2 - m_t^2 + i\epsilon)[(q-k)^2 - m_t^2 + i\epsilon]},$$

haline dönüşür. İfadenin pay ve paydasında yer alan q 'nun derecesine bakıldığında, integralin payının q 'ya göre altıncı, paydasının ise dördüncü dereceden olduğu görülür. Sınırların sonsuza uzandığı göz önünde tutulduğunda integralin ıraksayacağı aşikardır. Bu güçlüğü rağmen integral hesaplanmak istenirse, regülarizasyon yapılarak integral alınabilir.

Bu çerçevede işlemlere devam edilerek, ilk olarak ifade d boyutta yeniden yazılırsa

$$i\Pi(k^2) = -\frac{e^2 m_t^2}{4 \sin^2 \theta_w m_w^2} \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{\text{Tr} [[(\not{q} - \not{k}) + m_t][\not{q} + m_t]]}{[q^2 - m_t^2 + i\epsilon][(q-k)^2 - m_t^2 + i\epsilon]}, \quad (4.8)$$

biçimini alır. Burada $d = 4 - 2\epsilon$, olup $\mu^{2\epsilon}$ etkileşim sabitinin boyutsuz olması için eklenmiştir. Burada eklenen μ^2 kütle teriminin Pauli-Villars yöntemindeki terimden farklı olduğu belirtilmelidir. Pauli-Villars yönteminde sonuca yansıyan kütle teriminin aksine boyutsal regülarizasyon için sonuçta böyle bir terimin belirmesi başlangıçtaki beklentiler arasında yer almaz ve bu kütleyle fiziksel anlam atfedilmez. Yine, $\epsilon \rightarrow 0$ durumunda $\mu \rightarrow 1$ olduğundan, integral eski haline dönmüş olur.

¹ Bu ifade, notasyon basitliği açısından tek renk için hesaplanacak; sonuç evresinde $N_c = 3$ faktörü göz önünde bulundurulacaktır.

(4.8) ifadesinin paydasını Feynman parametrizasyonu ile yeniden düzenlemek için

$$q^2 - m_t^2 = a, \quad (q - k)^2 - m_t^2 = b,$$

tanımları yapılarak işe başlanabilir. Bu aşamadan sonra Feynman parametrizasyonu kullanılarak

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{\delta(x + y - 1)}{[ax + by]^2} = \int_0^1 dx \frac{1}{[ax + (1-x)b]^2}, \quad (4.9)$$

yazılıp, a ve b için yapılan tanımlar (4.9) ifadesinin paydasında kullanılarak

$$ax + (1-x)b = [(q-k)^2 - m_t^2]x + (1-x)(q^2 - m_t^2) = k^2x(1-x) - m_t^2 + (q-kx)^2, \quad (4.10)$$

formunda elde edilir. Bu sonuçlar yerlerine yerleştirildiklerinde Feynman parametrizasyonu tamamlanmış olur. Bu durumda (4.8) integralinin son hali

$$i\Pi(k^2) = -\frac{e^2 m_t^2}{4 \sin^2 \theta_w m_w^2} \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^d q}{2\pi^d} \times \\ \text{Tr} \left[[(\not{q} - \not{k}) + m_t][\not{q} + m_t] \right] \int_0^1 \frac{dx}{[k^2x(1-x) - m_t^2 + (q-kx)^2 + i\epsilon]^2},$$

şeklindedir. q 'un sınırları $\pm\infty$ olduğundan, $q \rightarrow q + kx$, dönüşümü altında integralin sonucu değişmez. Bu dönüşüm altında integral

$$i\Pi(k^2) = -\frac{e^2 m_t^2}{4 \sin^2 \theta_w m_w^2} \mu^{2\epsilon} \int_0^1 dx \int \frac{d^d q}{2\pi^d} \times \\ \text{Tr} \left[[\not{q} + (x-1)\not{k} + m_t][\not{q} + \not{k}x + m_t] \right] \frac{1}{[k^2x(1-x) - m_t^2 + q^2 + i\epsilon]^2}, \quad (4.11)$$

formuna gelir ki, paydada q 'ya göre çift dereceden bir kuvvet elde edilmiş olur. Payda için

$$B = -k^2x(1-x) + m_t^2, \quad (4.12)$$

kısaltması yapılırsa (4.11)

$$i\Pi(k^2) = -\frac{e^2 m_t^2}{4 \sin^2 \theta_w m_w^2} \mu^{2\epsilon} \int_0^1 dx \int \frac{d^d q}{2\pi^d} \times \\ \text{Tr} \left[[\not{q} + (x-1)\not{k} + m_t][\not{q} + \not{k}x + m_t] \right] \frac{1}{[q^2 - B + i\epsilon]^2},$$

olarak yazılabilir.

$$\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] = dg^{\mu\nu}, \quad \text{Tr}[I] = d,$$

bağıntıları kullanılarak, payın “izi” (trace)

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\not{q} + (x-1)\not{k} + m_t][\not{q} + x\not{k} + m_t] &= \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu][q_\mu + k_\mu(x-1)][q_\nu + k_\nu x] + \text{Tr}[I]m_t^2 \\ &= d \left[g^{\mu\nu} [q_\mu q_\nu + q_\mu k_\nu x + k_\mu q_\nu (x-1) + k_\mu k_\nu (x-1)x] + m_t^2 \right], \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. İntegral simetrik aralıkta ve payda q 'ya göre çift dereceden bir ifade olduğundan, pay'da bulunan q 'ya göre tek dereceli terimler sonuca katkı vermezler. Yine pay'da bulunan $q_\mu q_\nu$ terimi ise yalnızca $\mu = \nu$, durumu için katkı verir. Bu durumda (4.11) integralinin son hali

$$i\Pi(k^2) = -d \frac{e^2 m_t^2}{4 \sin^2 \theta_w m_w^2} \mu^{2\epsilon} \int_0^1 dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q^2 + k^2(x-1)x + m_t^2}{(q^2 - B + i\epsilon)^2},$$

olarak elde edilir. İntegrali basitleştirmek için sıkça kullanılan bir yöntem olan Wick döndürmesi ifadeye uygulanabilir. Wick döndürmesi Minkowski uzayını yapılan integrasyon dönüşümüyle Euclid uzayına çevirir. Böylece uzay-zaman üzerinden alınan integral sadece uzay üzerinden alınır hale getirilebilir. Wick döndürmesi için gerekli olan $q^0 \rightarrow iq_E^0$, $\vec{q}_i \rightarrow \vec{q}_E$ ve $dq^0 \rightarrow idq_E^0$, $d\vec{q}_i \rightarrow d\vec{q}_E$, dönüşümleri altında ifade

$$i\Pi(k^2) = -id \frac{e^2 m_t^2}{4 \sin^2 \theta_w m_w^2} \mu^{2\epsilon} \int_0^1 dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^d q_E}{(2\pi)^d} \frac{[(-q_E^0)^2 - |\vec{q}_E|^2] + k^2(x-1)x + m_t^2}{[-q_E^0{}^2 - |\vec{q}_E|^2 - B + i\epsilon]^2},$$

haline gelir ve gerekli düzenlemelerden sonra

$$i\Pi(k^2) = -id \frac{e^2 m_t^2}{4 \sin^2 \theta_w m_w^2} \mu^{2\epsilon} \int_0^1 dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^d q_E}{(2\pi)^d} \frac{-q_E^2 + k^2(x-1)x + m_t^2}{(q_E^2 + B)^2},$$

formuna ulaşılır. d boyutlu momentum uzayında küresel koordinatlar kullanılarak bu ifade

$$i\Pi(k^2) = -id \frac{e^2 m_t^2}{4 \sin^2 \theta_w m_w^2} \mu^{2\epsilon} \int_0^1 dx \times \int_0^{\infty} \frac{dq_E q_E^{d-1}}{(2\pi)^d} \left[\frac{-q_E^2 + k^2(x-1)x + m_t^2}{(q_E^2 + B)^2} \right] \int_d d\Omega, \quad (4.13)$$

şeklinde yazılabilir. Burada açılar üzerinden alınan integral hesaplamak için, ilk olarak bir boyutta

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \pi^{\frac{1}{2}},$$

bağıntısı hatırlanarak, d boyuta geçildiğinde bu integralin

$$I^d = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_1^2} e^{-x_2^2} \dots e^{-x_d^2} dx_1 dx_2 \dots dx_d = \pi^{d/2}, \quad (4.14)$$

formunda olduğu görülebilir. d boyutta küresel koordinatlara geçilmesi integralin açısal kısmının hesaplanmasına olanak sağlar. Bu durumda integral

$$I^d = \int_d d\Omega_d \int_0^\infty r^{d-1} e^{-r^2} dr ,$$

halini alır ve $r^2 = u$, $du = 2rdr \rightarrow dr = \frac{u^{-1/2}}{2} du$, dönüşümleri ile

$$I^d = \frac{1}{2} \int_d d\Omega_d \int_0^\infty u^{\frac{d}{2}-1} e^{-u} du , \quad (4.15)$$

elde edilir. Bu durumda, (4.14) eşitliği ve Gamma Fonksiyonu'nun tanımından

$$\int_d d\Omega_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} ,$$

bulunur. Bu sonuç (4.13)'de yerine konulursa

$$i\Pi(k^2) = -\frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} id \frac{e^2 m_t^2}{4 \sin^2 \theta_w m_w^2} \mu^{2\epsilon} \int_0^1 dx \times \int_0^\infty \frac{dq_E q_E^{d-1}}{(2\pi)^d} \left[\frac{-q_E^2 + k^2(x-1)x + m_t^2}{(q_E^2 + B)^2} \right] , \quad (4.16)$$

elde edilir. (4.16) ifadesinde q 'ya göre olan integrallerin,

$$t = \frac{q_E^2}{B} , \quad \frac{B^{\frac{1}{2}}}{2} t^{-\frac{1}{2}} dt = dq_E ,$$

dönüşümleri ile Beta fonksiyonları formunda ifade edilebilmesi mümkündür. Beta fonksiyonlarının

$$\int_0^\infty dx \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}} = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} , \quad \text{Re}(m), \text{Re}(n) > 0 ,$$

tanımından faydalanarak, q üzerinden integral alındığında

$$i\Pi(k^2) = -id \frac{\pi^{d/2}}{(2\pi)^d} \frac{e^2 m_t^2 \mu^{2\epsilon}}{2 \sin^2 \theta_w m_w^2} \times \int_0^1 dx \left[-\frac{B^{\frac{d-2}{2}} \Gamma(\frac{d+2}{2}) \Gamma(\frac{2-d}{2})}{\Gamma(d/2) \Gamma(2)} + k^2(x-1)x \frac{B^{\frac{d-4}{2}} \Gamma(\frac{d}{2}) \Gamma(2 - \frac{d}{2})}{\Gamma(d/2) \Gamma(2)} + m_t^2 \frac{B^{\frac{d-4}{2}} \Gamma(\frac{d}{2}) \Gamma(2 - \frac{d}{2})}{\Gamma(d/2) \Gamma(2)} \right] ,$$

sonucuna ulaşılır. Artık q üzerinden integral olmadığından, $d = 4 - 2\epsilon$, $\epsilon \rightarrow 0$, dönüşümü yapılarak, integral yeniden dört boyuta aktarıldığında ve gerekli düzenlemelerle diagramdaki

halkanın katkısı

$$i\Pi(k^2) = -i(2 - \epsilon) \frac{(4\pi)^\epsilon}{2^5 \pi^2} \frac{e^2 m_t^2}{\sin^2 \theta_w m_w^2} \mu^{2\epsilon} \int_0^1 dx \left[-B^{1-\epsilon} \frac{\Gamma(3-\epsilon)}{\Gamma(2-\epsilon)} \Gamma(\epsilon-1) + [k^2 x(x-1) + m_t^2] B^{-\epsilon} \frac{\Gamma(2-\epsilon)}{\Gamma(2-\epsilon)} \Gamma(\epsilon) \right],$$

ifadesine indirgenebilir. (4.12) kullanılarak

$$i\Pi(k^2) = -i \frac{(4\pi)^\epsilon}{2^5 \pi^2} \frac{e^2 m_t^2}{\sin^2 \theta_w m_w^2} \mu^{2\epsilon} \int_0^1 dx (2-\epsilon) B^{1-\epsilon} \left[-\frac{\Gamma(3-\epsilon)}{\Gamma(2-\epsilon)} \Gamma(\epsilon-1) + \frac{\Gamma(2-\epsilon)}{\Gamma(2-\epsilon)} \Gamma(\epsilon) \right],$$

bulunur. Gamma fonksiyonlarının $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$, özdeşliği kullanılarak,

$$i\Pi(k^2) = -i \frac{(4\pi)^\epsilon}{2^5 \pi^2} \frac{e^2 m_t^2}{\sin^2 \theta_w m_w^2} \mu^{2\epsilon} \int_0^1 dx (2-\epsilon) B^{1-\epsilon} \left[\frac{2-\epsilon}{1-\epsilon} + 1 \right] \Gamma(\epsilon),$$

ile ϵ içeren ve ϵ 'un kuvveti olan terimler düzenlenirse

$$i\Pi(k^2) = -\frac{i}{2^5 \pi^2} \frac{e^2 m_t^2}{\sin^2 \theta_w m_w^2} \int_0^1 dx (2-\epsilon) B \left(\frac{4\pi\mu^2}{B} \right)^\epsilon \left[\frac{2-\epsilon}{1-\epsilon} + 1 \right] \Gamma(\epsilon),$$

elde edilir. ϵ 'un kuvvetini içeren terimler uygun biçimde açılarak;

$$i\Pi(k^2) = -\frac{i}{2^5 \pi^2} \frac{e^2 m_t^2}{\sin^2 \theta_w m_w^2} \int_0^1 dx B \times \left(1 + \epsilon \ln \frac{4\pi\mu^2}{B} + \frac{\epsilon^2}{2} \ln^2 \frac{4\pi\mu^2}{B} + \dots \right) (1 + \epsilon + \epsilon^2 + \dots) \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma + O(\epsilon) \right) (2-\epsilon) (3-2\epsilon),$$

ve $\Delta\epsilon = \frac{1}{\epsilon} - \gamma + \ln 4\pi$ ve $\epsilon \cdot \Delta\epsilon = 1$, olarak tanımlandığında bu ifade

$$i\Pi(k^2) = \frac{i\alpha m_t^2}{8\pi \sin^2 \theta_w m_w^2} \left[6 \int_0^1 dx B \Delta\epsilon + 6 \int_0^1 dx B \ln \frac{\mu^2}{B} - \int_0^1 B dx \right], \quad (4.17)$$

haline indirgenebilir. Bu ifadede $\Delta\epsilon$ teriminin içinde bulunan $\frac{1}{\epsilon}$ ifadesi, integralin sonsuzluk içeren kısmını, diğer terimler ise integralin fiziksel anlam atfedilen sonlu kısmını oluştururlar. Üst kuarkın katkısının kütlesi ile orantılı olduğu (4.17)'de açık olarak görünmektedir. Başlangıç evresinde bahsedildiği üzere, Standart Model'in en ağır kütleli parçacığı olması nedeniyle kuantum düzeltmelere en büyük katkı bu halka ifadesinden gelecektir. Öte yandan ifade sonsuzluk içerdiğinden, böyle bir sonucun bir bütün olarak nasıl fiziksel zemine oturtulacağı doğallık sorunu bağlamında tartışılabilir.

4.6. Passarino-Veltman Yöntemi ile Işımsal Katkıların Sonsuzluk İçeren Kısımlarının Elde Edilmesi

Bir önceki bölümde Feynman parametrizasyonu yöntemiyle Higgs bozonunun self enerji diagramından ileri gelen integral hesaplanmıştı. Bulunan sonuç incelendiğinde, sonucun ıraksak ve ıraksak olmayan iki kısımdan oluştuğu görülür. Passarino-Veltman yöntemi, bu iki kısımdan oluşan integralin ıraksak kısmının daha kolay ve hızlı bir şekilde hesaplanmasına olanak tanıyan bir yöntemdir [24]. Bu yöntemin altında yatan temel mantık, hesaplanması daha zor ve karmaşık olan tensörel integrallerin, sonuçları iyi bilinen skaler integrallere indirgenerek, sonucun bu skaler integraller cinsinden ifade edilmesidir. Skaler integrallerin ıraksak kısımlarının katsayıları bilindiğinden, hesaplanan halka integrallerin ıraksak kısımları, Feynman parametrizasyonu yöntemine göre daha kolay bir biçimde elde edilmiş olur. Önceki bölümde hesaplanan halka integral, boyutsal regülarizasyon yapılarak diagramdaki haliyle yazılırsa, (4.8) ifadesi

$$\text{Div} [i\Pi(k^2)] = (-1) \frac{m_t^2 g^2}{m_w^2 4} \text{Div} \left[\frac{\mu^{2\epsilon}}{(2\pi)^{4-2\epsilon}} \int d^d q \frac{\text{Tr}[(\not{q} - \not{k} + m_t)(\not{q} + m_t)]}{[(q-k)^2 - m_t^2][q^2 - m_t^2]} \right], \quad (4.18)$$

formunda elde edilir. Passarino-Veltman tanımına ulaşmak için; $iR_\Gamma \pi^{2-\epsilon}$ ile çarpılıp bölündüğünde, $k \rightarrow -k$, dönüşümü ve $g = \frac{e^2}{\sin \theta_w}$, tanımıyla (4.18) integrali

$$\text{Div} [i\Pi(k^2)] = -\frac{i m_t^2 e^2}{4 m_w^2 \sin^2 \theta_w} \text{Div} \left[\frac{\mu^{2\epsilon}}{(2\pi)^{4-2\epsilon}} \frac{R_\Gamma \pi^{2-\epsilon}}{iR_\Gamma \pi^{2-\epsilon}} \times \int d^d q \frac{\text{Tr}[(\not{q} + \not{k} + m_t)(\not{q} + m_t)]}{[(q+k)^2 - m_t^2][q^2 - m_t^2]} \right], \quad (4.19)$$

formuna gelir. Katsayılar yeniden düzenlendiğinde,

$$\text{Div} [i\Pi(k^2)] = -\frac{i m_t^2 e^2}{4 m_w^2 \sin^2 \theta_w} \text{Div} \left[\frac{R_\Gamma \pi^{2-\epsilon}}{(2\pi)^{4-2\epsilon}} \frac{\mu^{2\epsilon}}{iR_\Gamma \pi^{2-\epsilon}} \times \int d^d q \frac{\text{Tr}[(\not{q} + \not{k} + m_t)(\not{q} + m_t)]}{[(q+k)^2 - m_t^2][q^2 - m_t^2]} \right], \quad (4.20)$$

bulunur. d boyutta iz alınır (4.20)

$$\text{Div} [i\Pi(k^2)] = -\frac{i m_t^2 e^2 d}{4 m_w^2 \sin^2 \theta_w} \times \text{Div} \left[\frac{R_\Gamma \pi^{2-\epsilon}}{(2\pi)^{4-2\epsilon}} \left[\frac{\mu^{2\epsilon}}{iR_\Gamma \pi^{2-\epsilon}} \int d^d q \frac{q^2 + kq + m_t^2}{[(q+k)^2 - m_t^2][q^2 - m_t^2]} \right] \right],$$

haline dönüşür. Büyük köşeli parantez içerisindeki ifade PaVe integrali formunda olup, iş-

lemlerin daha yalın yürütülebilmesi için, $(q + k)^2 - m_t^2 = A$ ve $q - m_t^2 = C$ kısaltmaları yapıldıktan sonra paydaki terimler de bu A ve C cinsinden ifade edilerek

$$q^2 = C + m_t^2 ,$$

$$kq = \frac{A - C - k^2}{2} ,$$

bulunur. Böylece integral için

$$\text{Div} [i\Pi(k^2)] = -\frac{i m_t^2 e^2 d}{4 m_w^2 \sin^2 \theta_w} \times$$

$$\text{Div} \left[\frac{R_\Gamma \pi^{2-\epsilon}}{(2\pi)^{4-2\epsilon}} \left[\frac{\mu^{2\epsilon}}{i R_\Gamma \pi^{2-\epsilon}} \int d^d q \left[\frac{1}{B} + 2m_t^2 \frac{1}{AC} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A} - \frac{k^2}{AC} \right) \right] \right] \right] ,$$

formu elde edilir. PaVe integrallerinin tanımından

$$\frac{\mu^{2\epsilon}}{i R_\Gamma \pi^{2-\epsilon}} \int d^d q \frac{1}{AC} = B_0 = 1/\epsilon ,$$

$$\frac{\mu^{2\epsilon}}{i R_\Gamma \pi^{2-\epsilon}} \int d^d q \frac{1}{A} = A_0 = \frac{m_f^2}{\epsilon}$$

ve

$$\frac{\mu^{2\epsilon}}{i R_\Gamma \pi^{2-\epsilon}} \int d^d q \frac{1}{C} = A_0 = \frac{m_f^2}{\epsilon} ,$$

olduğu hatırlanarak, integraller hesaplanırsa (integraller $\pm\infty$ aralığında hesaplandığı için $q \rightarrow q - k$, sonucu değiştirmez),

$$\text{Div} [i\Pi(k^2)] = -\frac{d m_t^2 e^2}{4 m_w^2 \sin^2 \theta_w} \text{Div} \left[\frac{i R_\Gamma \pi^{2-\epsilon}}{(2\pi)^{4-2\epsilon}} \left[A_0 + 2m_t^2 B_0 + \frac{A_0}{2} - \frac{A_0}{2} - \frac{k^2}{2} B_0 \right] \right] , \quad (4.21)$$

ifadesine ulaşılır. A_0 ve B_0 değerleri (4.21)'da yerlerine yazılırsa

$$\text{Div} [i\Pi(k^2)] = -\frac{d m_t^2 e^2}{4 m_w^2 \sin^2 \theta_w} \frac{i R_\Gamma \pi^{2-\epsilon}}{(2\pi)^{4-2\epsilon}} \left[3m_t^2 - \frac{k^2}{2} \right] \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} ,$$

sonucuna ulaşılır. Son olarak $\epsilon \rightarrow 0$, için $R_\Gamma = 1$, $d = 4$ ve $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$, tanımı yapılırsa

$$\text{Div} [i\Pi(k^2)] = -\frac{i m_t^2 e^2}{4 m_w^2 \sin^2 \theta_w} \frac{\alpha}{\pi} \left[3m_t^2 - \frac{k^2}{2} \right] \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} , \quad (4.22)$$

bulunur. Burada $\frac{1}{\epsilon}$ katsayısını verdiği için elde edilen sonuç aslında sonsuzdur. Yani, Passarino-Veltman yöntemi ile integralin sonsuzluk içeren teriminin katsayısı bulunmuştur. İfadede sonlu hiç bir terim olmadığından, fiziksel bir hesaba gidilemese de, Passarino-Veltman yöntemi ilke olarak Standart Model'deki pek çok diagramın sonsuzluk etkisinin olup olmadığına

bakmak için oldukça elverişli bir yöntemdir. Bu yöntemle üst kuarkın Higgs kütesine getireceği katkının yine çok büyük olduğu görülebilir. Ayrıca önceki bölümde elde edilmiş (4.17) ifadesinde yer alan $\Delta\epsilon$ terimi integre edilerek, (4.22) ifadesine ulaşılabilir.

5.SONUÇ

Standart Model Ötesi bir kuram için sürdürülen yoğun çalışmaları iki kategoride incelemek mümkündür: Bunlardan biri, ilk etapta Standart Model'in sorunlarını çözme yoluna giden ya da karanlık maddeyi açıklamaya çalışan kuramlar; öteki ise kütle çekim kuvveti ile diğer kuvvetleri bir bütün haline getirmeyi amaçlayan sicim kuramı gibi kuramlardır.

İlk gruptaki kuramların çıkış noktası özellikle doğallık sorunu ve karanlık maddedir. Doğallık sorunun çözümü, Elektro-Zayıf ölçekteki simetri kırılmasının doğasına ilişkin de çok önemli ipuçları verecektir. Zira Standart Model, Higgs mekanizmasıyla, Elektro-Zayıf simetri kırılması olayını parçacık spektrumu açısından en ekonomik açıdan çözüme kavuşturur.

Doğallık sorununun çözümü için önerilen yeni modeller genel olarak Standart Model'in parçacık spektrumu genişletilerek, Higgs kütesine gelen kuantum düzeltmelerin, öngörülen yeni parçacıklardan gelecek katkılarla sadeleşmesini ummaktadırlar. Ancak hızlandırıcılardaki yeni gözlemler, Elektro-Zayıf simetri kırılmasının gerçek tabiatını ve postüle edilen parçacıkların bu süreçteki gerçek rollerinin ne olduğunu ortaya çıkaracaklardır.

Bu tez kapsam olarak; Standart Model'in öğrenilmesini, inşa sürecini belirleyen yapıların anlaşılmasını, ayrıca doğallık sorununun kavranmasıyla birlikte doğallık sorunundan yola çıkarak Standart Model Ötesi modellere aşinalık sağlanması ve ileriye dönük orijinal çalışmalara yönelik temel kazanımları sağlayan bir derleme amacındadır.

Bunun için ikinci bölümde simetriler tartışılmış ve global simetrilerin korunum yasalarıyla bire bir ilintili olduğu gösterilirken, bir yandan da ayar simetrilerinin model oluştururken etkileşim terimlerini kendiliğinden ortaya koymasıyla sunduğu derinlik kavranmaya çalışılmıştır.

Üçüncü bölümde simetrilerin doğada ne şekilde gerçekleştikleri irdelenmiştir. Higgs mekanizması ve vektör alanlara nasıl kütle kazandırılacağına değinilmiştir. Şöyle ki, Nambu-Goldstone modunda gerçekleşen bu global simetri, ayar mekanizması ile yerel bir simetriye dönüştürüldüğünde, Nambu-Goldstone bozonlarından ne şekilde kurtulduğu, bu şekilde eylemdeki ayar simetrisi kırılmadan ayar bozonlarına ne şekilde kütle kazandırıldığı gözlemlenmiştir. Böylece, Goldstone vetosu aşılabilmektedir.

Dördüncü bölümde Doğallık Sorununun ne olduğu ve nasıl ortaya çıktığı detaylı bir biçimde tartışılmıştır. Ayrıca bu sorunun ortaya konulabilmesi için her türlü matematiksel araç tek tek verilerek Feynman diagramlarının nasıl regülerize edilebileceği ve hesaplanabileceği tam olarak gösterilmiştir. Passarino-Veltman Yöntemi'yle integrallerin sonsuzluk içeren kısımlarının kolay bir biçimde eldesi sağlanmıştır.

EK A.PASARINO-VELTMAN YÖNTEMİ

Feynman parametrizasyonu yöntemi oldukça kullanışlı bir metot olsa da çok sayıda diagram göz önüne alındığında, self enerji dışındaki halka etkileşimleri hariç Feynman parametreleri üzerinden integral almak oldukça zordur. Passarino ve Veltman bu güçlüğün üstesinden gelmek için, diagramların sonsuzluk içeren kısımlarının hesabında yeni bir yöntem ortaya koymuşlardır. Yöntem incelenirse, tek bir halka integrali için genel tensörel ifade

$$T_n^{\mu_1 \dots \mu_p} \equiv \frac{(2\pi\mu)^{4-d}}{i\pi^2} \int d^d q \frac{q^{\mu_1} \dots q^{\mu_p}}{D_0 D_1 D_2 \dots D_{n-1}},$$

olarak yazılabilir. Burada $D_i = (q + p_i)^2 - m_i^2 + i\epsilon$, olarak tanımlanır. Ayrıca bütün momentumların halkadan içeri doğru olduğu varsayılmıştır. Amaç tensörel integrallerin skaler intetgraller cinsinden yazılması olduğundan bu yöntemde skaler integraller önemli bir yer tutar. Momentumların tümünün halkaya gelen momentum olarak tanımlanmasından ötürü

$$p_j = \sum_{i=1}^j p_i, \quad j = 1, \dots, n-1,$$

$$p_0 = \sum_{i=1}^n p_i = 0,$$

şeklinde ifade edilebilir. $p_{ij}^2 = (p_i - p_j)^2$, $\forall i, j = (0, n-1)$, olduğu hatırlanarak, en fazla dört tane lineer bağımsız skaler integral

$$A_0(m_0^2) = \frac{(2\pi\mu)^\epsilon}{i\pi^2} \int d^d q \frac{1}{q^2 - m_0^2},$$

$$B_0(p_{10}^2, m_0^2, m_1^2) = \frac{(2\pi\mu)^\epsilon}{i\pi^2} \int d^d q \prod_{i=0}^1 \frac{1}{[(q + p_i)^2 - m_i^2]},$$

$$C_0(p_{10}^2, p_{12}^2, p_{20}^2, m_0^2, m_1^2, m_2^2) = \frac{(2\pi\mu)^\epsilon}{i\pi^2} \int d^d q \prod_{i=0}^2 \frac{1}{[(q + p_i)^2 - m_i^2]},$$

$$D_0(p_{10}^2, p_{12}^2, p_{23}^2, p_{30}^2, p_{20}^2, p_{13}^2, m_0^2, \dots, m_3^2) = \frac{(2\pi\mu)^\epsilon}{i\pi^2} \int d^d q \prod_{i=0}^3 \frac{1}{[(q + p_i)^2 - m_i^2]},$$

olarak verilir. Bu integrallere lineer bağımlı olarak yazılan tensörel integrallerse,

$$B^\mu = \frac{(2\pi\mu)^{4-d}}{i\pi^2} \int d^d q q^\mu \prod_{i=0}^1 \frac{1}{[(q + p_i)^2 - m_i^2]},$$

$$\begin{aligned}
B^{\mu\nu} &= \int d^d q q^\mu q^\nu \prod_{i=0}^1 \frac{1}{[(q+p_i)^2 - m_i^2]} , \\
C^\mu &= \frac{(2\pi\mu)^\epsilon}{i\pi^2} \int d^d q q^\mu \prod_{i=0}^2 \frac{1}{[(q+p_i)^2 - m_i^2]} , \\
C^{\mu\nu} &= \int d^d q q^\mu q^\nu \prod_{i=0}^2 \frac{1}{[(q+p_i)^2 - m_i^2]} , \\
C^{\mu\nu\rho} &= \int d^d q q^\mu q^\nu q^\rho \prod_{i=0}^2 \frac{1}{[(q+p_i)^2 - m_i^2]} , \\
D^\mu &= \int d^d q q^\mu \prod_{i=0}^3 \frac{1}{[(q+p_i)^2 - m_i^2]} , \\
D^{\mu\nu} &= \int d^d q q^\mu q^\nu \prod_{i=0}^3 \frac{1}{[(q+p_i)^2 - m_i^2]} , \\
D^{\mu\nu\rho} &= \int d^d q q^\mu q^\nu q^\rho \prod_{i=0}^3 \frac{1}{[(q+p_i)^2 - m_i^2]} , \\
D^{\mu\nu\rho\sigma} &= \int d^d q q^\mu q^\nu q^\rho q^\sigma \prod_{i=0}^3 \frac{1}{[(q+p_i)^2 - m_i^2]} ,
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Tensörel integraller

$$\begin{aligned}
B^\mu &= p_1^\mu B_1 , \\
B^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} B_{00} + p_1^\mu p_2^\nu B_{11} , \\
C^\mu &= p_1^\mu C_1 + p_2^\mu C_2 , \\
C^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} C_{00} + \sum_{i=1}^2 p_i^\mu p_j^\nu C_{ij} , \\
C^{\mu\nu\rho} &= \sum_{i=1}^2 (g^{\mu\nu} p_i^\rho + g^{\nu\rho} p_i^\mu + g^{\rho\mu} p_i^\nu) C_{00i} + \sum_{i,j,k=1}^2 p_i^\mu p_j^\nu p_k^\rho C_{ijk} , \\
D^\mu &= \sum_i^3 p_i^\mu D_i , \\
D^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} D_{00} + \sum_{i=1}^3 p_i^\mu p_j^\nu D_{ij} , \\
D^{\mu\nu\rho} &= \sum_{i=1}^3 (g^{\mu\nu} p_i^\rho + g^{\nu\rho} p_j^\mu + g^{\rho\mu} p_k^\nu) D_{00i} + \sum_{i,j,k=1}^2 p_i^\mu p_j^\nu p_k^\rho D_{ijk} ,
\end{aligned}$$

$$D^{\mu\nu\rho\sigma} = (g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} + g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\rho\nu})D_{0000} + \sum_{i,j,k,l=1}^3 p_i^\mu p_j^\nu p_k^\rho p_l^\sigma C_{ijkl}$$

$$+ \sum_{i,j=1}^3 (g^{\mu\nu} p_i^\rho p_j^\sigma + g^{\nu\rho} p_i^\mu p_j^\sigma + g^{\rho\sigma} p_i^\mu p_j^\nu + g^{\mu\rho} p_i^\nu p_j^\sigma + g^{\mu\sigma} p_i^\nu p_j^\rho + g^{\nu\sigma} p_i^\mu p_j^\rho),$$

bağıntıları kullanılarak skaler integrallere indirgenebilirler[23].

KAYNAKLAR

- [1] Griffiths, D., *Introduction To Elementary Particles*, 2. Revised Edition, WILEY-VCH, **2008**.
- [2] Weinberg, S., A Model Of Leptons, *Physical Review Letters*, Vol. 19, Issue 21, 1264–1266, November 20, **1967**.
- [3] Glashow, S. L., Partial-symmetries Of Weak Interactions, *Nuclear Physics*, 22(4), 579 – 588, **1961**.
- [4] Higgs, P. W., Broken Symmetries and The Masses Of Gauge Bosons, *Phys. Rev. Lett.*, 13, 508–509, Oct, **1964**.
- [5] Englert, F. , Brout R. , Broken Symmetry and The Mass Of Gauge Vector Mesons, *Phys. Rev. Lett.*, 13, 321–323, Aug, **1964**.
- [6] Guralnik, G. S., Hagen C. R., Kibble T. W. B., Global Conservation Laws and Massless Particles, *Phys. Rev. Lett.*, 13, 585–587, Nov, **1964**.
- [7] Lukkezen, J., *Little Higgs Phenomenology*, Master’s Thesis, Leiden University, **2008**.
- [8] Noether, E., Invariant Variation Problems, *Göttingen Nachrichten 1918*, 235-257, **1918**; (English translation by Tavel, M.A. *Transport Theory and Statistical Physics*, 1, 186-207, **1971**).
- [9] Daiz-Cruz , J. L., Rosado A., *Fundamentals Of Physics*, Volume 1, Symmetry Principles And Conservation Laws(Mayıs **2015**).
- [10] Pak, N. K., Mikroevrenin Standart Modeli ve Süpersimetri, *Bilim ve Ütopya*, 167, 22–31, Mayıs, **2008**.
- [11] Pak, N. K., Higgs Bulundu, *Bilim ve Ütopya*, 218, 60–67, Mayıs, **2012**.
- [12] Pak, N. K., *Quantum Field Theory Lecture Notes*, **2014-2015**.
- [13] Özşimşek, Ö. M., *Elektromanyetik Alanda Hareket Eden Yüklü Parçacığın Görelî Dinamiği*, Bitirme Projesi, Hacettepe Üniversitesi Mühendislik Fakültesi, Ankara, **2011**.
- [14] Pak, N. K., *Yoğunlaştırılmış Kuantum Ayar Alan Teorisi Atölye Çalışması Notları*, Hacettepe Üniversitesi, Fizik Mühendisliği Bölümü, Mart-Haziran, **2014**
- [15] Das, A., *Lectures on Quantum Field Theory*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, **2008**.

- [16] Yang, C. N. , Mills, R. L. Conservation Of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance. *Phys. Rev.*, 96, 191–195, Oct **1954**.
- [17] Rentala, V., *Spin Determination and Physics Beyond The Standard Model At The LHC and ILC*, PhD Thesis, U.C. Berkeley, **2010**.
- [18] Pak, N. K., *Scalar Fields Quantization and Spontaneous Symmetry Breaking*, Part I, K1bris, May, **2013**.
- [19] Vulpen, I. V., The Standard Model Higgs Boson, <http://www.nikhef.nl/ivov/HiggsLectureNote.pdf>., May1s, **2015**.
- [20] 't Hooft, G., Renormalization of massless Yang-Mills Fields, *Nuclear Physics*, B33, 173-199, **1971**.
- [21] 't Hooft, G., Naturalness, Chiral Symmetry, and Spontaneous Chiral Symmetry Breaking, *NATO Adv. Study Inst. Ser. B Phys.*, 59(PRINT-80-0083 (UTRECHT)):135, **1979**.
- [22] The Royal Academy Of Sciences, http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/2013/popular-physicsprize2013.pdf., May1s, **2013**.
- [23] Romao, J. C., Modern Techniques For One-loop Calculations, <http://porthos.ist.utl.pt/Public/textos/one-loop.pdf> , Page 81, September, **2004**.
- [24] Passarino G., Veltman, M ., One-Loop Corrections For $e^+ e^-$ Annihilation Into $\mu^+ \mu^-$ In The Weinberg Model, *Nuclear Physics B*, 160(1), 151–207, **1979**.

ÖZGEÇMİŞ

Kimlik Bilgileri

Adı Soyadı: Özgün Mustafa Özşimşek

Doğum Tarihi: 26.03.1988, Keçiören

Doğum Yeri: Keçiören/ANKARA

E-posta: ozgunozsimsek@hacettepe.edu.tr

Adresi: Hacettepe Üniversitesi Beytepe Kampüsü Fizik Mühendisliği Bölümü 06800 Çankaya/ANKARA

Eğitim

Lise: Mehmet Emin Resulzade Anadolu Lisesi, Çankaya/ANKARA (2002 - 2006)

Lisans: Hacettepe Üniversitesi, Fizik Mühendisliği Bölümü (2006 - 2012)

Yüksek Lisans: Hacettepe Üniversitesi, Fizik Mühendisliği Bölümü (2012 -)

Yabancı Dil ve Düzeyi:

İngilizce (İyi)

İş Deneyimi:

Araştırma Görevlisi, Hacettepe Üniversitesi, Fizik Mühendisliği Bölümü (2013 -)

Deneyim Alanları:

Tezden Üretilmiş Projeler ve Bütçesi:

Tezden Üretilmiş Yayınlar:

Tezden Üretilmiş Tebliğ ve/veya Poster Sunumu ile Katıldığı Toplantılar: