

**FARKLI SIRALI KÜME ÖRNEKLEME YÖNTEMLERİNE
DAYALI GÜVENİLİRLİK TAHMİNİ**

**ESTIMATION OF RELIABILITY BASED ON DIFFERENT
RANKED SET SAMPLING METHODS**

GÜLSABAH EDA İPEK

TEZ DANIŞMANI

PROF. DR. NURSEL KOYUNCU

Hacettepe Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin

İstatistik Anabilim Dalı için Öngördüğü

YÜKSEK LISANS TEZİ olarak hazırlanmıştır.

ÖZET

FARKLI SIRALI KÜME ÖRNEKLEME YÖNTEMLERINE DAYALI GÜVENİLİRLİK TAHMİNİ

Gülsabah Eda İPEK

Yüksek Lisans, İSTATİSTİK Bölümü

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Nursel KOYUNCU

Mayıs 2022, 96 sayfa

Literatürde genellikle, X güç ve Y stres olmak üzere sistem güvenilirliği $R = P(Y < X)$ tahmini basit rastgele örnekleme (BRÖ) yöntemine dayalı olarak ele alınmaktadır. Fakat son yapılan çalışmalar, sıralı küme örneklemesine (SKÖ) dayalı R tahmininin standart tahmin edicilere göre daha etkin sonuçlar verdiğini kanıtlamıştır. Tez kapsamında ilk olarak, SKÖ'ne dayalı maksimum olabilirlik (MO) tahmin edicileri elde edilmiştir. Ancak, bu yöntem kullanıldığında tahmin edicilerin analitik olarak çözümü bulunmamaktadır. Tahmin edicilerin açık çözümü için iteratif olmayan yöntem olarak önerilen modifiye edilmiş maksimum olabilirlik (MMO) yöntemi kullanılmıştır. Bu tezde, farklı SKÖ yöntemlerine dayalı olarak R 'ın MO ve MMO tahmin edicileri incelenmiştir. Ele alınan yöntemler, hareketli uç sıralı küme örnekleme (HUSKÖ), L sıralı küme örnekleme (LSKÖ) ve medyan sıralı küme örnekleme (MSKÖ). Son olarak, önerilen MO ve MMO tahmin edicilerinin performans karşılaştırılması Monte-

Carlo benzetim çalışması ile yapılmıştır. Ayrıca, literatürde yaygın olarak kullanılan gerçek jüt lifi veri seti ile önerilen tahmin edicilerin standart tahmin edicilere göre daha etkin olduğu görölmüştür.

Anahtar Kelimeler: Sıralı Küme Örneklemesi, Stres-güç modeli, hareketli uç değer sıralı küme örneklemesi, L sıralı küme örneklemesi, medyan sıralı küme örneklemesi, maksimum olabilirlik, modifiye edilmiş maksimum olabilirlik, etkinlik, Üstel dağılım.

ABSTRACT

ESTIMATION OF RELIABILITY BASED ON DIFFERENT RANKED SET SAMPLING METHODS

Gülsabah Eda İPEK

M.Sc. Thesis, Department of STATISTICS

Supervisor: Prof. Dr. Nursel KOYUNCU

May 2022, 96 pages

In the literature, the system reliability $R = P(Y < X)$ estimation, with X power and Y stress, is generally considered based on the simple random sampling (SRS) method. However, recent studies have proven that R estimation based on ranked set sampling (RSS) gives more effective results than standard estimators. In the context of the thesis, first of all, maximum likelihood (MO) estimators based on RSS were obtained. However, when this method is used, the estimators have no analytical solution. For the explicit solution of the estimators, the proposed modified maximum likelihood (MMO) method was used as a non-iterative method. In this thesis, the MO and MMO estimators of R are examined based on the different of the RSS. The modifications considered are moving extreme ranked set sampling (MERSS), L ranked set sampling (LRSS), and median ranked set sampling (MRSS). Finally, the performance comparison of the proposed MO and MMO estimators was done by Monte-Carlo simulation study. In

addition, it has been seen that the proposed estimators with the real jute fiber dataset, which is widely used in the literature, are more effective than the standard estimators.

Keywords: Ranked set sampling, Stress-power model, moving extreme ranked set sampling, L ranked set sampling, median ranked set sampling, maximum likelihood, modified maximum likelihood, efficiency, Exponential distribution

TEŞEKKÜR

Hacettepe üniversitesinde aldığım yüksek lisans eğitimim boyunca gerek akademik gerekse de kişisel tüm sorunlarımda her zaman yanımda olan ve desteğini tam anlamıyla hissettiren, bana çalışmayı ve okuduğum üniversiteyi daha çok sevdiren güler yüzlü, anlayışlı ve insancıl kişiliğiyle her daim bana güç veren değerli danışman hocam Prof. Dr. Nursel KOYUNCU'ya,

Tez savunma jürimde yer alarak yapıcı eleştiri, değerli görüş ve yönlendirmelerini esirgmeden gelişmemde katkı sağlayan saygıdeğer hocalarım Prof. Dr. Meral EBEGİL ve Prof. Dr. Nihal Ata TUTKUN'a,

Lise hayatımın ilk gününden itibaren her zaman yanımda olan zaman içerisinde can dostlarım ve manevi kardeşlerim olan Müge DEVELİER ve Seda ALÇAY'a,

Küçüklüğümden beri beni şefkatle ve bütün sevgisiyle koruyup kollayan, gelişim sürecimdeki bütün adımlarımda yanımda olan, beni dinleyen ve her zaman desteğini hissettiren canım annem Rukiye İPEK ve her zaman bir idol olarak benimsediğim, bu yolda beni en çok yüreklendiren canım babam Prof. Dr. İsmail İPEK' e, kilometrelerce uzakta da olsa aramızdaki kardeşlik bağı sayesinde beni her zaman düşünüp önemseyen ve bu yolda beni yalnız bırakmayan canım ağabeyim Acar İPEK' e,

Sonsuz Teşekkürler...

Gülsabah Eda İPEK

Ankara, Mayıs 2022

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR.....	v
İÇİNDEKİLER	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR	xi
1. GİRİŞ.....	1
2. GENEL BİLGİLER	14
2.1. BRÖ Yöntemi	14
2.1.1. BRÖ ile Kitle Ortalaması ve Varyans Tahmini.....	15
2.2. SKÖ Yöntemi	16
2.2.1. SKÖ Temel Kavramları.....	16
2.2.2. SKÖ ile Örnekleme Belirleme Adımları	17
2.2.3. SKÖ ile Kitle Ortalaması ve Varyans Tahmini.....	19
2.2.4. Modifiye Edilmiş SKÖ Yöntemler.....	23
2.2.4.1. HUSKÖ Tip 1 ve Tip 2 Yöntemi	23
2.2.4.2. LSKÖ Yöntemi.....	25
2.2.4.3. MSKÖ Yöntemi	28
2.3. Stres-Güç Modeli (SGM).....	30
2.3.1. SGM Tanımı.....	30
2.3.2. SGM'nin Matematiksel Tanımı.....	31
2.4. Kitle Parametre Tahmini.....	31
2.4.1. Maksimum Olabilirlik Yöntemi (MO)	32
2.4.2. Modifiye Edilmiş Maksimum Olabilirlik Yöntemi (MMO)	33
3. SİSTEM GÜVENİLİRLİĞİ R TAHMİNİ: ÜSTEL DAĞILIM.....	34

3.1. Üstel Dağılım.....	34
3.1.1. Çift Parametrelili Üstel Dağılım.....	35
3.1.2. Tek Parametrelili Üstel Dağılım.....	35
3.2. BRÖ'ye Dayalı Sistem Güvenilirliği R Tahmini	37
3.2.1. Sistem Güvenilirliği R 'nin MO Tahmin Edicisi.....	38
3.3. SKÖ Yöntemine Dayalı Sistem Güvenilirliği R Tahmini.....	39
3.3.1. Sistem Güvenilirliği R 'nin MO Tahmin Edicisi.....	40
3.3.2. Sistem Güvenilirliği R 'nin MMO Tahmin Edicisi	44
4. MODİFİYE EDİLMİŞ SKÖ YÖNTEMLERİNE DAYALI R TAHMİNİ	48
4.1. HUSKÖ'ye Dayalı Sistem Güvenilirliği R Tahmini	48
4.1.1. Sistem Güvenilirliği R'nin MO Tahmin Edicisi.....	49
4.1.1.1. HUSKÖ Tip 1 Yöntemine Dayalı R'nin MO Tahmin Edicisi	49
4.1.1.2. HUSKÖ Tip 2 Yöntemine Dayalı R'nin MO Tahmin Edicisi	53
4.1.2. Sistem Güvenilirliği R 'nin MMO Tahmin Edicisi	57
4.1.2.1. HUSKÖ Tip 1 Yöntemine Dayalı R'nin MMO Tahmin Edicisi.....	57
4.2. LSKÖ'ne Dayalı Sistem Güvenilirliği R Tahmini.....	63
4.2.1. Sistem Güvenilirliği R'nin MO Tahmin Edicisi.....	64
4.2.2 Sistem Güvenilirliği R'nin MMO Tahmin Edicisi	67
4.2.3. R'nin MO Tahmin edicisine ilişkin Asimptotik Dağılımı.....	69
5. MONTE-CARLO BENZETİM ÇALIŞMASI.....	75
6. UYGULAMA	83
7. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	93
8. KAYNAKLAR	95
EKLER.....	109
EK 1 - Tez Çalışması Orjinallik Raporu.....	109
ÖZGEÇMİŞ	110

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3. 1. Üstel dağılımın farklı ölçek parametreleri için odf grafikleri.....	36
Şekil 6. 1. 1. Veri seti 1 için Q-Q grafiği.....	84
Şekil 6. 1. 2. Veri seti 2 için Q-Q grafiği.....	85
Şekil 6. 1. 3. BRÖ ile elde edilen veri seti 1 için Q-Q Grafiği	87
Şekil 6. 1. 4. BRÖ ile elde edilen veri seti 2 için Q-Q Grafiği	88
Şekil 6. 1. 5. SKÖ ile elde edilen veri seti 1 için Q-Q Grafiği	88
Şekil 6. 1. 6. SKÖ ile elde edilen veri seti 2 için Q-Q Grafiği	89

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 2. 1. SKÖ yöntemi ile örneklem birimlerin seçilmesi	18
Çizelge 2. 2. SKÖ ile örneklem seçimi $m=4$ $r=1$	19
Çizelge 2. 3. HUSKÖ tip 1 ile örneklem seçimi $m=4$ $r=1$	24
Çizelge 2. 4. HUSKÖ tip 2 ile örneklem seçimi $m=4$, $r=1$	25
Çizelge 2. 5. LSKÖ yöntemi ile örneklem seçimi $m=4$, $r=1$, $z=1$	27
Çizelge 2. 6. LSKÖ yöntemi ile örneklem seçimi $m=5$, $r=1$, $z=2$	27
Çizelge 2. 7. MSKÖ yöntemi ile örneklem seçimi $m=4$, $r=1$	29
Çizelge 5. 1. Tahmin edicilerin SKÖ ve modifiyelerine dayali yan değerleri.....	77
Çizelge 5. 2. Tahmin edicilerin SKÖ ve modifiyelerine dayali yan değerleri (devam) .	78
Çizelge 5. 3. Tahmin edicilerin SKÖ ve modifiyelerine dayali yan değerleri (devam) .	78
Çizelge 5. 4. Tahmin edicilerin SKÖ ve modifiyelerine dayali GE değerleri	79
Çizelge 5. 5. Tahmin edicilerin SKÖ ve modifiyelerine dayali GE değerleri (devam)..	79
Çizelge 6. 1. Veri seti 1.....	84
Çizelge 6. 2. Veri seti 2.....	84
Çizelge 6. 3. Veri setinden BRÖ yöntemi ile seçilen veri seti.....	86
Çizelge 6. 4. Veri setinden SKÖ yöntemi ile seçilen veri seti	86
Çizelge 6. 5. Veri seti 1 ve veri seti 2' nin BRÖ'ye dayali ölçek parametresinin MO tahmini	86
Çizelge 6. 6. Veri seti 1 ve veri seti 2' nin SKÖ'ye dayali ölçek parametresinin MO tahmini	87
Çizelge 6. 7. Veri setinden HUSKÖ tip 1 yöntemi ile seçilen veri seti	89

Çizelge 6. 8. Veri setinden HUSKÖ tip 2 yöntemi ile seçilen veri seti.....	90
Çizelge 6. 9. Veri setinden LSKÖ yöntemi ile seçilen veri seti	90
Çizelge 6. 10. Veri setinden LSKÖ yöntemi ile seçilen veri seti	90
Çizelge 6. 11. BRÖ, SKÖ ve modifikasyonlarına dayalı MO ve MMO tahmin edicilerinin yan ve HKO değerleri	91

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

N	Kitle boyutu
n	Örneklem boyutu
m	Küme boyutu
r	Döngü sayısı
σ^2	Kitlede birim başına düşen varyans
$\hat{\sigma}^2$	Kitlede birim başına düşen varyans tahmini
μ	Kitle ortalaması
$\hat{\mu}$	Kitlede birim başına düşen ortalama tahmini

Kısaltmalar

R	Sistem güvenilirliği
BRÖ	Basit rastgele örnekleme
SKÖ	Sıralı küme örnekleme
HUSKÖ	Hareketli uç sıralı küme örnekleme
LSKÖ	L sıralı küme örnekleme
MSKÖ	Medyan sıralı küme örnekleme
SGM	Stres-Güç modeli
MO	Maksimum olabilirlik
MMO	Modifiye edilmiş maksimum olabilirlik
Yan	Yansızlık
HKO	Hata kareler ortalaması

GE	Görelî etkinlik
Oyf	Olasılık yoğunluk fonksiyonu
Df	Dağılım fonksiyonu
Üstel(μ)	μ parametrelî Üstel dağılım

1. GİRİŞ

Bu çalışma kapsamında, sistemin güvenilirliği R olarak tanımlanan stres-güç modelinin (SGM), basit rastgele örnekleme (BRÖ) yöntemi yerine son yıllarda önerilen sıralı küme örnekleme (SKÖ) yöntemi ve modifiye edilmiş SKÖ yöntemleri ile tahmini incelenmiştir. Bu amaç doğrultusunda, ikinci bölümde ilk olarak BRÖ yöntemi ile ilgili genel bilgiler verilmiştir. Daha sonra, SKÖ yöntemine ilişkin genel kavramlardan ve bu yöntem ile örneklem oluşturma adımlarından bahsedildikten sonra SKÖ ile kitle ortalaması ve varyans tahmini çıkarsaması yapılmış ve BRÖ'ye göre etkinliği araştırılmıştır. Buna ek olarak, tez çalışması içerisinde farklı SKÖ yöntemleri ele alınmış ve uygulama adımları üzerinde durulmuştur. İkinci bölümün devamında ise SGM ve bu modelin matematiksel formülü ile ilgili bilgiler yer almaktadır. Bu modelin sistem güvenilirliği R tahmini için kullanılan maksimum olabilirlik (MO) ve modifiye edilmiş maksimum olabilirlik (MMO) yöntemleri hakkında detaylı bilgi verilmiştir.

Tez çalışmasının üçüncü bölümünde, birbirinden bağımsız X gücü ve Y stresi olarak tanımlanan rastgele değişkenleri, tek ölçek parametresine sahip Üstel dağılımdan geldiği varsayımı altında sistem güvenilirliği R 'nin MO ve MMO tahmin edicileri BRÖ ve SKÖ yöntemlerine dayalı olarak elde edilmiş ve bu yöntemlere ilişkin asimptotik dağılımı üzerinde durulmuştur.

Dördüncü bölümde, SKÖ yönteminin geliştirilmesiyle elde edilen literatürde bulunan HUSKÖ tip 1, HUSKÖ tip 2, LSKÖ ve MSKÖ yöntemlerine dayalı olarak R tahmini gerçekleştirilmiştir.

Beşinci bölümde, çalışma kapsamında ele alınan BRÖ, SKÖ, hareketli uç sıralı küme örnekleme (HUSKÖ) tip 1, HUSKÖ tip 2, L sıralı küme örnekleme (LSKÖ) ve medyan sıralı küme örnekleme (MSKÖ) yöntemlerine dayalı sistem güvenilirliği R tahmini için Monte-Carlo benzetim çalışmasının sonuçları elde edilmiştir. Bu sonuçlarda, ilgilenilen SKÖ ve modifiye edilmiş SKÖ yöntemlerinin performansları

yansızlık (*yan*), hata kareler ortalaması (*HKO*) ve göreceli etkinlik (*GE*) değerleri baz alınarak karşılaştırılması yapılmıştır.

Çalışmanın altıncı bölümünde, gerçek bir veri seti ile *R*'nin MO ve MMO tahmin edicileri elde edilmiştir. Gerçek veri uygulaması için literatürdeki çalışmalarda yaygın olarak kullanılan jüt lifi veri seti seçilmiştir. Bu verinin dağılıma uyumluluğu gösterildikten sonra ilgilenilen yöntemler ile uygulama çıktı sonuçları elde edilmiştir.

Çalışmanın yedinci ve son bölümünde, sistem güvenilirliği *R*'nin MO ve MMO tahmin edicileri için en iyi örnekleme yöntemi belirlenmiş ve yorumlanmıştır.

Son yıllarda oldukça ilgi çeken SKÖ yöntemi ile alakalı bir çok çalışma literatürde yer almaktadır. İlk defa McIntyre [1] dağılımının bilinmediği Avustralya'daki tarım verilerini kullanarak, ortalama mera verimi tahmini için SKÖ yöntemini BRÖ yöntemine göre daha etkili bulmuştur.

Takahasi ve Wakimoto [2] ise sıralamada hata olmadığı varsayımı altında SKÖ yöntemi ile elde edilen örneklem birimlerini kullanarak kitle ortalamasının tahmin edicileri üzerine teorik bir çalışma yapmışlardır. Çalışmalarında SKÖ ile elde edilen örneklem ortalamasının, μ kitle ortalaması için yansız bir tahmin edici olduğunu ve SKÖ ile elde edilen kitle ortalaması varyansının $Var(\bar{x}_{SKÖ})$ 'nın BRÖ ile elde edilen varyans $Var(\bar{x}_{BRÖ})$ 'dan daha küçük olduğunu kanıtlamışlardır.

Dell ve Clutter [3] kusurlu sıralama varsayımı altında SKÖ yönteminin matematiksel olarak ifadesini ortaya koymuş ve bu yöntemle dayalı ortalama tahmin edicisinin kitle ortalamasının yansız bir tahmin edicisi olduğunu göstermiştir.

Stokes [4] SKÖ yöntemini genişleterek, sıralama hatalarının olmadığı varsayımı altında asimptotik olarak yansız olan bir varyans tahmin edicisi geliştirmiştir. Tahmin edicilerin

sıralamada hata olması durumunda bile rastgele olarak çekilen birimlerden daha etkin olduğunu göstermiştir.

Stokes ve Sager [5] SKÖ yönteminin karakterizasyonu üzerinde çalışmışlar ve aynı zamanda SKÖ ile oluşturulan ampirik dağılım fonksiyonunun $F(x)$ 'in yansız bir tahmin edicisi olduğunu göstermişler ve BRÖ ile kıyaslamışlardır.

Stokes [6] yaptığı çalışmada SKÖ yönteminin hangi dağılım ailesine uyum gösterdiğini ve daha verimli bir tahmin sağlamak için SKÖ yöntemine ait adımlarını değiştirme yöntemlerini incelemişlerdir.

Chen vd. [7] yaptıkları çalışmada, ilgilenilen ikili bir değişkenin sıralanmasına yardımcı olmak için lojistik regresyonun kullanılmasını önermişlerdir.

Özdemir [8] SKÖ yönteminde doğrusal regresyon parameter tahmini çalışmıştır.

SKÖ ile örneklem oluştururken, ilgili değişkene göre yapılan sıralamalarda yanlışlık yapılıp yapılmaması doğrudan verimliliğini etkilemektedir. Literatürde bulunan çoğu çalışma, SKÖ yönteminden modifiye edilmiş yöntemler ile ilgilidir. Bu yöntemler sıralama hatalarını azaltmak için dolayısıyla verimliliği artırmak için tasarlanmıştır. İlk olarak Samawi vd. [9] uç sıralı küme örneklemesini (USKÖ), kitleye ilişkin dağılımın simetrik olması durumunda kitle ortalaması tahmininin BRÖ yöntemine yerine bu yöntemeye dayalı olarak yapılmasını önermiştir. Muttlak [10] kitle ortalamasını tahmin etmek için medyan sıralı küme örnekleme yönteminin (MSKÖ) kullanılmasını önermiş ve standart SKÖ yöntemine göre daha etkin bulmuştur. Al-Saleh ve Al-Kadiri [11] küme boyutunu büyütmeden etkinliği artırmak için çift sıralı küme örnekleme yöntemini (ÇSKÖ) önermiş ve örneklemin ortalamasını SKÖ yöntemi ile oluşturulan örneklem ortalamasından daha etkin bulmuştur. Al-Saleh ve Al-Omari [12] çift sıralı küme örneklemesini çok aşamalı sıralı küme örneklemesine (ÇASKÖ) uyarlamak için kullanmışlardır. Al-Saleh ve Al-Odat [12] farklı küme boyutuna sahip başka bir yeni yöntem olarak hareketli uç sıralı küme örneklemesini (HUSKÖ) tanıtmışlardır. Samawi

[13] çift uç sıralı küme örneklemesini (ÇUSKÖ) ve Tawalbeh [14] ile birlikte yaptıkları çalışmada da çift medyan sıralı küme örneklemesini (ÇMSKÖ) önermişlerdir. Muttlak [15] kitlenin sahip olduğu dağılım çarpık ise kitle ortalamasının tahmin edilmesi için modifiye edilmiş SKÖ örnekleme yöntemlerinden biri olan yüzdelik sıralı küme örneklemesini (YSKÖ) önermiştir. Muttlak ve Abu-Dayyeh [16] SKÖ yöntemine alternatif olarak geliştirilen üç tane yeni yöntemi literature kazandırmıştır. Bu yeni yöntemler sırasıyla, ağırlandırılmış medyan sıralı küme örnekleme (AMSKÖ), ağırlıklandırılmış uç sıralı küme örnekleme (AUSKÖ) ve ağırlıklandırılmış yüzdelik sıralı küme örnekleme (AYSKÖ) yöntemleridir. Al-Omari, Jemain ve Ibrahim [17] kitle ortalaması tahmini için ve belirli bir örneklem boyutunun tahmin edicisinin etkinliğini artırmak için SKÖ prosedürünü değiştirip çok aşamalı sıralı küme örneklemesini (ÇASKÖ) önermişlerdir. Al-Nasser [18] L sıralı küme örnekleme (LSKÖ) yöntemini SKÖ'ye alternatif olarak önermiştir. Jaber ve Al-Omari [19] yüzdelik çift sıralı küme örnekleme (YÇSKÖ) yöntemini örneklem oluşturma adımında kullanılmasını önermiştir. Al-Nasser ve Mustafa [20] dayanıklı uç sıralı küme örnekleme (DUSKÖ) tanıtmışlar ve kitle ortalaması tahmini için BRÖ, SKÖ, USKÖ yöntemleri ile karşılaştırmışlardır. Al-Omari [21] çift dayanıklı uç sıralı küme örnekleme (ÇDUSKÖ) kitle medyanı tahmini için önermiştir. Haq, Brown, Moltchanova ve Al-Omari [22] çevresel araştırmalarda maliyetin önemli bir unsur olduğunu belirtmişler ve kitle ortalaması, meydanı ve varyans tahmini için kısmi SKÖ yöntemini (KSKÖ) önermişlerdir. Salehi ve Ahmadi [23] rekor kıran veriler üretmek için yeni bir örnekleme yöntemi olan rekor dereceli küme örnekleme (RDSKÖ) yöntemini tanıtmışlardır. Al-Nasser ve Al-Omari [24] HUSKÖ yönteminin bir modifikasyonu olarak önermişlerdir. Khan vd. [25] son yıllarda çıkan SKÖ yönteminin modifiye edilmiş hali olan kitle ortalaması ve medyanının tahmini için karışık sıralı küme örnekleme (KSKÖ) yöntemini önermiştir. Dağılımın simetrik olduğu durumda, bu yöntem kitle ortalamasının yansız bir tahmin edicisi olduğunu ve kitle varyansının yansız olduğunu göstermişlerdir.

Maliyeti azaltmasının veya zamandan kazanım için sıklıkla kullanılan SKÖ yöntemi, çevre, sağlık ve güvenilirlik gibi alanlar da bu çalışmalar sürdürülmüştür.

Çevre alanında, Barnett [26] SKÖ yöntemi ile sıralanan örneklerin ya da rastgele olarak seçilen birimlerin etkilerini, verimliliğin optimizasyonunu ve en iyi etki için örnekleme yönteminin nasıl yapılması gerektiğini araştırmıştır. Kvam [27] kategorik verilerde SKÖ yönteminin uygulanmasının zor olduğunu üstünü çizerek fakat sıralanabilen verilerde BRÖ yöntemine göre üstün performans gösterdiğini araştırmıştır. Halls ve Dell [28] ise Texas'da yer alan bitkilerin ortalama ağırlık tahmini için araştırmasında SKÖ yöntemini kullanmaya başlamıştır. Patil [29] SKÖ yöntemi ile veri toplama adımlarının üstünde durarak nasıl daha dayanıklı bir tahmin elde edileceğini bir tarım verisi kullanarak araştırmıştır. Bilgin vd. [30] sonlu bir koyun kitesinden SKÖ ile örneklem oluşturarak kitle varyansına ait tahminde bulunmuş ve BRÖ yöntemine göre daha etkin olduğunu göstermiştir.

Sağlık alanında, Chen vd. [31] çalışmasında tıp verilerini kullanarak SKÖ yöntemi ile sıralama işleminde lojistik regresyon ile kitle oranının tahminindeki kesinliğin geliştirildiğini ve bu kesinliği elde etmek için gereken örneklem boyutunun daha küçük boyutlarda göstermişlerdir. Bouza vd. [32] tarafından yapılan çalışmada ise AIDS'in bulaşıcılığına dair toplanan hassas (öznel) verilerde SKÖ yöntemi ile varyans tahminini ele almışlardır. Mahdizadeh ve Zamanzade [33] vücut yağ endeksi verisi kullanarak kitle ortalaması tahmini için çok aşamalı çift SKÖ yöntemine dayalı yansız bir tahmin edici önermiş ve hatasız sıralama varsayımı altında BRÖ'ye ilişkin tahmin edicisine göre daha etkin bulmuştur.

Güvenilirlik alanında ise; Kvam ve Samaniego [34] ve El-Neweihi ve Sinha [35] güvenilirliğe dayalı bir öneri ortaya koymuşlardır. Kotz vd. [36] aynı dağılımdan gelen bağımsız rasgele değişkenler ile güvenilirlik tahmini yapmışlardır.

SKÖ yöntemine ve modifiye edilmiş SKÖ yöntemlerine dayalı olarak birçok dağılımın bilinmeyen kitle parametrelerinin tahmini literatürde oldukça yaygındır.

Kitlenin Weibull dağılımından geldiği varsayımı altında, Helu vd. [37] BRÖ, SKÖ ve modifiye edilmiş SKÖ yöntemlerine dayalı olarak MO, Moment yöntemi ve Bayes tahmin edicilerini araştırmışlardır.

Samawi ve Al-Sagheer [38] dağılım fonksiyonunun tahminini, UDSKÖ ve MSKÖ'ye dayalı olarak gerçekleştirmiştir.

Zheng ve Al-Saleh [39] BRÖ ve SKÖ yöntemine dayalı MMO tahmin edicilerini elde etmiş ve etkinliklerini karşılaştırmıştır.

Üstel dağılım varsayımı altında, kitle ortalaması tahmini için ilk Lam vd.[40] BRÖ ve SKÖ yöntemlerine dayalı olarak performans karşılaştırması yapmışlardır ardından Al-Saleh ve Al-Hadhrami [41] parametrik olarak HUSKÖ yöntemine dayalı olarak Üstel dağılımın ortalamasının MO ve MMO tahmin edicisini elde etmiştir. Abu-Dayyeh ve Sawi [42] HUSKÖ'ye dayalı olarak Üstel dağılımın ortalamasının MMO tahmin edicilerini elde etmişlerdir. Chen vd. [43] kitlenin tek parametrelili Üstel dağılıma sahip olduğu varsayımı ile SKÖ yönteminin farklı koşulları altında MO tahmin edicilerinin karakteristik özelliklerini incelemişlerdir. Biradar ve Santosha [44] hatasız sıralama ve hatalı sıralama varsayımları altında eşit olmayan maksimum SKÖ (HUSKÖ tip 1) ile kitle ortalamasının parametre tahminini MO ve MMO yöntemleri ile yapmış ve BRÖ, SKÖ ve önerilen yöntemlere ilişkin göreceli etkinliklerini karşılaştırmışlardır..

Shaibu ve Muttlak [45] ise normal, gamma ve üstel dağılım parametrelerinin tahminini SKÖ, MSKÖ ve USKÖ yöntemleri ile elde etmişlerdir.

Pareto dağılımının parametre tahmini için Chacko ve Yageen [46] yardımcı değişken yardımıyla sıralanan SKÖ yöntemi ile , Omar ve Ibrahim [47] bu dağılıma ilişkin şekil ve ölçek parametrelerini BRÖ, SKÖ, MSKÖ ve USKÖ ile elde etmişlerdir. Qian vd. [48] bu dağılımın şekil ve ölçek parametrelerinin farklı koşullar altında tahmini için BRÖ, SKÖ, USKÖ ve MSKÖ yöntemlerini kullanarak performans değerlendirmesi yapmışlardır. Chen vd. [49] HUSKÖ yöntemine dayalı olarak çalışmalar yapmışlardır.

HUSKÖ yöntemine dayalı ayrıntılı bilgi için Yao vd. [50], Al-Saleh ve Al-Hadrami [51] çalışmalarına bakılabilir.

Weibull dağılımının parametreleri için, Helu vd. [37] BRÖ, SKÖ ve modifiye edilmiş SKÖ yöntemleri ile başta MO, Moment yöntemi ve Bayes tahmin edicilerini elde etmişlerdir.

Chen vd. [52] HUSKÖ ile parametrik olarak çeşitli ölçek dağılımlarının ölçek parametrelerinin tahmini için bir çalışma yapmışlardır.

Modifiye edilmiş Weibull dağılımının parametrelerini, Hadhrami [53] MSKÖ ile Al-Omari ve Al-Hadhrami [54] ise USKÖ yöntemlerine dayalı olarak tahmin etmişlerdir.

Samuh ve Qtait [55] Üstelleştirilmiş Üstel dağılımın parametre tahmini için MSKÖ'yöntemini kullanmışlardır.

Log-Lojistik dağılımının parametreleri için Elbatal [56] BRÖ ve SKÖ yöntemlerine dayalı MO tahmin edicilerini, He vd. [57] farklı koşullar altında BRÖ ve SKÖ yöntemlerinin MO tahmin edicilerini ve He vd. [58] HUSKÖ yöntemine dayalı yansız MO, en iyi yansız tahmin edicisini ve modifiye edilmiş en iyi yansız tahmin edicilerini elde etmişlerdir.

Rayleigh dağılımı parametreleri için, Dey vd. [59] BRÖ, SKÖ, Modifiye edilmiş SKÖ ve MSKÖ ile Bayes ve çeşitli tahmin edicilerini ve Kotb ve Raqab [60] ise sıralanmış SKÖ ile Bayes tahmin edicilerini konu alan bir çalışma gerçekleştirmişlerdir.

Üstel-Poisson dağılımının parametreleri için aralık ve nokta tahmini, Joukar vd. [61] tarafından BRÖ, SKÖ, Maksimum SKÖ ve eşit olmayan SKÖ yöntemleri ile MO ve Bayes tahmin edicilerini elde edilmiştir.

Burr Type XII dağılımı için, Abdallah ve Nagwan [62] BRÖ ve SKÖ yöntemlerine dayalı olarak MO tahmin edicilerini elde etmiş ve performanslarını yansızlık, HKO ve etkinlik değerleri ile kıyaslamışlardır.

Zubair Lomax dağılımı için, Bantan vd. [63] ilk olarak bu dağılımı tanıtmış ve bu dağılımının üç parametresi için BRÖ ve SKÖ yöntemleri ile MO tahmin edicilerini benzetim çalışması ile karşılaştırmışlardır.

Üstelleştirilmiş Weibull dağılımı parametreleri için, Sevinç vd. [64] BRÖ ve SKÖ yöntemleri ile elde edilen MO tahmin edicilerini elde etmişlerdir.

Log-Genelleştirilmiş Üstel-Geometrik dağılımı için, Yang vd. [65] BRÖ, SKÖ, MSKÖ ve USKÖ yöntemlerine dayalı olarak Fisher bilgi matrixini elde etmiş ve bu yöntemlerin etkinliklerini karşılaştırmıştır. Yang vd. [66] ise bu dağılıma ilişkin SKÖ ve HUSKÖ ile parametre tahminini gerçekleştirmişlerdir.

Samuh vd. [67] ise USKÖ ve MSKÖ yöntemleri ile yeni Weibull-Pareto dağılımının parametrelerinin tahmini üzerinde bir çalışma gerçekleştirmişlerdir.

Sabri vd. [68] ise tek ve çok aşamalı SKÖ yöntemi ile Güç genelleştirilmiş Weibull dağılımı için parametre tahmini yapmıştır.

Literatürde, Stres-Güç modeli (SGM) kullanılarak sistem güvenilirliğini tahmin etmek için oldukça fazla araştırma mevcuttur. Literatürde SGM ilk kez, Mann-Whitney test istatistiği uygulaması için Birnbaum [69] tarafından ortaya çıkmıştır. Bu çalışmada, R 'nin aralık ve nokta tahminini elde etmiştir. Daha sonraki yıllarda Birnbaum ve McCarty[70] ise bu fikri geliştirmiştir. Çalışmasında, belli bir dağılım varsayımı olmadan X ve Y bağımsız rastgele değişkenlerine ait sıralı istatistikler ile bir örneklem elde etmiş ve sistem güvenilirliği tahmini için bir üst sınır oluşturmuştur. İlk kez Stres

güç Modeli (SGM), Church and Harris [71] tarafından bu ifade ile kullanılmaya başlanmıştır[72].

Literatürde farklı dağılımlar varsayımı altında, SGM'ne ilişkin R tahmini için oldukça fazla çalışma yer almaktadır. Birbirinden bağımsız X ve Y rastgele değişkenlerinin farklı dağılımlardan geldiği varsayımı altında yapılan çalışmalardan bazıları şu şekildedir.

Üstel dağılım; Enis ve Geisser [73] R tahmini için Bayes tahmin edicisini elde etmişlerdir. Tong [74] X ve Y birbirinden bağımsız rastgele değişkenlerini, tek parametrelili üstel dağılımından geldiği durumu ele alarak uniform yansız minimum varyans (UYMV) ve MO tahmin edicisini, Kelley vd. [75] ise çift parametreye sahip üstel dağılım parametrelerinden birinin bilindiği durumu ele alarak R 'nin Uniform yansız minimum tahmin edicisinin varyansını elde etmiştir. Beg [76] güvenilirlik tahmini için, Blackwell-Rao ve Lehmann-Scheffé teoremlerini kullanarak Bayes ve yansız minimum varyans (YMV) tahmin edicilerini elde etmek için bir çalışma yapmıştır. El-Neweihi ve Sinha [77] güvenilirlik için yansız tahmin ediciler elde etmişler ve bu yansız tahmin edicilerin varyanslarını karşılaştırmışlardır. Sathe ve Shah [78] parametrelerinin bilinmesi ve bilinmemesi durumlarına göre R tahmini için MO ve YMV tahmin edicilerini elde etmişlerdir. Kurkjian vd. [79] YMV ve MO tahmin edicilerini, Sinha ve Zielinski [80] YMV ve MO tahmin edicilerini elde etmişlerdir. Baklizi ve Abu-Dayyeh [81] R tahmini için dayanıklı bir tahmin edici geliştirmiş ve MO yöntemi ile karşılaştırmışlardır. Krishnamoorthy vd. [82] sistem güvenilirliği için hipotez testi ve güven aralığı tahminini konu edinmiştir. Baklizi [83] rekorlara dayalı Bayes güven aralığını araştırmıştır. Singh vd. [84] SGM modeli ile belirli koşullar altında Bayes ve MO tahmin edicilerini ve Kundu vd. [85] MO, YMV ve Bayes tahmin edicilerini elde etmişlerdir. Mahdizadeh ve Zamanzade [86] çalışmalarında, bilinen ölçek parametreleri ve bilinmeyen konum parametreleri ile iki parametrelili üstel dağılım kullanılarak güvenilirlik tahmini yapmışlardır. Jana vd. [87] UMYV ve Bayes tahmin edicilerini elde etmişlerdir. Daha fazla bilgi için çalışmalarına bakılabilir. Pal vd. [88], Abouammoh ve Alshingiti [89].

Weibull dağılımında güvenilirlik tahmini için Pandey ve Upadhyay [90] Bayes tahmin edicisini geliştirmişlerdir. Kungu ve Gupta [91] güvenilirlik tahminini bu dağılıma ait bağımsız parametreleri kullanarak gerçekleştirmiştir.

Burr tipi XII dağılımında Kumar vd. [92] UMYV ve MO tahmin edicisini araştırmışlardır.

Lindley dağılımında Al-Mutairi vd. [93] UMYV ve MO ve Bayes tahmin edicilerini elde etmiş ve güven aralığı hesaplamışlardır.

Inverse Weibull dağılımında Li ve Hao [94] MO ve Bayes tahmin edicisi elde etmiş ve güven aralığı hesaplamışlardır.

Üstel Güç dağılımında Akdam vd. [95] sistem güvenilirliğinin MO ve yaklaşık Bayes tahmin edicilerini elde etmişlerdir.

Ters Gamma dağılımında Iranmanesh vd.[96] R 'nin MO, MMO ve Bayes tahmin edicilerini elde etmişlerdir.

Log-Lindley dağılımında Biswas vd.[97] MO ve Bayes tahmin edicilerini araştırmışlardır.

Genelleştirilmiş Ters Üstel dağılım; Almarashi vd. [98] eşit şekil parametresine sahip MO, en küçük kareler, ağırlıklandırılmış en küçük kareler, yüzdeler tahmin edicileri başta olmak üzere birçok yöntemeye dayalı tahmin edicilerin performanslarını karşılaştırmışlardır.

Literatürdeki birçok çalışma, SKÖ ve modifiye SKÖ yöntemlerine dayalı olarak SGM'nin sistem güvenilirliği R tahmini üzerinedir. Sengupta ve Mukhuti [99] SKÖ ile

sistem güvenilirliğinin yansız bir tahmin edicisini elde etmiş ve nasıl kullanılabileceğini açıklamışlardır. Zardasht ve Asadi [100] yaşam sürelerini karşılaştırmak için zamana bağlı olarak bir öneride bulunmuşlardır. Mahdizadeh ve Zamanzade [101] SKÖ'ye dayalı olarak sistem güvenilirliği tahmini için parametrik olmayan kernel tabanlı bir tahmin edici geliştirmişlerdir. Araştırmalarının devamı olarak Mahzideh ve Zamanzade [102] kernel tabanlı tahmin edici ile ilgili asimptotik özelliklerini çalışmışlardır. Aminzadeh [103] X ve Y 'nin yardımcı değişkenleri kullanılarak R tahmini için güven aralığı hesaplamıştır. Mahdizadeh ve Zamanzade [104] SKÖ'ye dayalı zamana bağlı güvenilirlik ölçüsü geliştirmiştir. Mahdizadeh ve Zamanzade [105] R tahmininde çok aşamalı küme örnekleme ile güvenilirliğin parametrik olmayan tahmin edicisini, Zamanzade, Mahdizadeh ve Samavi [105] HUSKÖ yöntemine dayalı kümülatif dağılım fonksiyonu ve güvenilirlik parametresini üzerine bir çalışma yapmışlardır. Al-Omari, Almanjahie, Hassan ve Nagy [106] MSKÖ ve SKÖ yöntemlerine dayalı R 'nin MO tahmin edicisini çalışmışlardır.

Son zamanlarda ortaya konan çalışmalarda $R = (Y < X)$ 'nin tahmini için farklı dağılımlardan gelen bağımsız rastgele değişkenler ile SKÖ ve modifikasyonlarına dayalı etkinliklerinin karşılaştırmaları araştırılmıştır.

Üstel dağılım altında, Salehi ve Ahmadi [107] rekor SKÖ ile MO ve uniform yansız minimum varyans (UMVY) tahmin edicilerini önermişlerdir. Baklizi [108] rekor SKÖ ile R 'nin aralık tahminini araştırmıştır. Sengupta [109] iki parametreye sahip Üstel rastgele değişkenleri ile parametrelerinin farklı koşulları için sistem güvenilirliği R 'nin yansız tahmin edicilerini elde etmiştir. Literatürde, SGM'nin birbirinden bağımsız rastgele değişkenlerinin tek parametrelili Üstel dağılımdan geldiği durumda R tahminini araştıran birçok çalışma yer almaktadır. Bu çalışmalar; Sengupta ve Mukhuti [110] parametrik olmayan R 'in yansız tahmin edicisiyle ilgilenmiştir. Muttlak vd. [111] SKÖ yöntemine dayalı sistem güvenilirliği R 'nin MO, en iyi doğrusal yansız (BLUE), MMO ve UYMV (UMVUE) tahmin edicilerini elde etmiştir. Dong vd. [112] eşit örneklem boyutuna sahip olmayan SKÖ yöntemine dayalı R 'nin en iyi doğrusal yansız, MO ve MMO tahmin edicilerini elde etmiş ve BRÖ ve SKÖ'ye göre daha etkin tahmin ediciler olduğunu göstermiştir. Safariyan vd. [113] R 'nin, SKÖ'ye dayalı olarak aralık nokta ve

tahminini elde etmiştir. Dong ve Zhang [114] LSKÖ yöntemine dayalı olarak R 'nin MO ve MMO tahmin edicileri elde etmişlerdir. Çalışmasında, teorik olarak önerdiği MO tahmin edicisinin BRÖ'nin tahmin edicisine göre her zaman daha etkin olduğunu göstermiş ve uygulama ile bu teoriyi kanıtlamıştır. Mohamed vd. [115] HUSKÖ tip 1-tip 2 ve Minimax SKÖ yöntemlerine dayalı R 'nin MO ve MMO tahmin edicilerini araştırmışlar ve klasik BRÖ'ye dayalı MO tahmin edicisine göre performans karşılaştırması yapmışlardır.

Genelleştirilmiş Üstel dağılım altında, Hussian[116], aynı ölçek parametrelere sahip R 'nin BRÖ ve SKÖ'ye dayalı MO tahmin edicisini elde etmiştir. Esemien vd. [117] ise bu dağılımın rastgele değişkenlerini kullanarak R 'nin MO ve Bayes tahmin edicilerini BRÖ ve SKÖ yöntemlerine dayalı olarak elde etmişlerdir. Sadeghpour vd. [118] düşük rekor SKÖ yöntemi ile rekor SKÖ R 'nin tahmin edicilerini karşılaştırmıştır. Hassan vd. [106] BRÖ, SKÖ ve MSKÖ yöntemleri ile R tahmin edicileri elde etmiştir. Sadeghpour vd. [119] düşük kayıtlı SKÖ ile sistem güvenilirliği tahminini için MO, Bayes ve tekdüze yansız minimum varyans (UMUV) tahmin edicilerini araştırmıştır.

Lindley dağılımı altında, Akgül vd. [120] Lindley dağılımı altında, BRÖ ve SKÖ ile R 'nin MO tahmin edicisi elde etmiş ve güven aralığı hesaplamışlardır.

Genelleştirilmiş Ters Lindley dağılımı altında, Akgül vd. [121] R 'nin BRÖ, SKÖ ve YSKÖ yöntemlerine dayalı MO tahmin edicilerinin performans karşılaştırmasını yapmışlardır.

Weibull dağılımı altında, Akgül ve Şenoğlu [122] çalışmasında, BRÖ ve SKÖ ile elde ettiği R 'nin MO ve MMO tahmin edicilerini BRÖ'ye dayalı tahmin edicilerden daha tercih edilebilir olduğunu kanıtlamıştır. Akgül ve Şenoğlu [123] ise SKÖ yöntemi ve modifiye edilmiş SKÖ yöntemleri MSKÖ, YSKÖ, USKÖ ile R 'nin MO ve MMO tahmin edicilerinin etkinlikleri üzerine bir çalışma yapmışlardır. Bu çalışmaların devamı olarak Akgül vd. [124] R 'nin asimptotik ve dayanıklı güven aralığını BRÖ yerine SKÖ yöntemini kullanarak gerçekleştirmiştir.

BURR Tip X dağılımı altında, Akgül ve Şenoglu [125] SKÖ yöntemi ile elde edilen R 'nin MO ve MMO tahmin edicilerini hem nokta hem aralık tahminleri ile klasik BRÖ tahmin edicilerine göre daha etkin olduğunu hem benzetim hem gerçek veri uygulaması ile göstermiştir.

Sistem güvenilirliği $R = (Y < X)$ 'nin tahmini için farklı dağılımlara sahip bağımsız rastgele değişkenler ile SKÖ ve modifikasyonlarına dayalı diğer çalışmalar için Chacko ve Mathew [18], Hassan [126], Al-Omari vd.[127], Hassan, Assar ve Yahia [128] çalışmalarına bakılabilir.

2. GENEL BİLGİLER

Çalışmanın bu bölümünde, tez kapsamında ele alınan SGM'nin sistem güvenilirliği R tahminine ilişkin kullanılacak BRÖ, SKÖ ve modifiye edilmiş SKÖ yöntemleri hakkında genel bilgiler verilmiş ve bu yöntemlerin örneklem seçme adımları üzerinde durulmuştur.

Daha sonra, sistem güvenilirliği R olarak tanımlanan stress-güç modeli hakkında genel bilgiler verilmiş ve bu modele ilişkin matematiksel ifadesi ortaya konulmuştur. Sistem güvenilirliği R tahmini, MO yöntemi ve MO denklemlerinin açık çözümü elde edilemediği durumda MMO yöntemi ile X ve Y rastgele değişkenlerinin Üstel dağılımdan geldiği varsayımı altında gerçekleşmiştir. Bu amaçla, ilk olarak MO ve MMO yöntemleri açıklanmıştır. Son olarak, Üstel dağılıma ilişkin genel bilgiler verilmiş ve bu dağılımın literatürdeki kullanım alanlarından bahsedilmiştir.

2.1. BRÖ Yöntemi

BRÖ, kitle tahminini konu alan çalışmalar da sıklıkla kullanılan en temel örnekleme yöntemlerinden biridir. Çünkü, diğer örneklem yöntemlerine kıyasla açıklanması daha kolay bir şekilde gerçekleşir. Bu yöntem ile seçim, kitle boyutu N olmak üzere, bu sonlu kitleden seçilecek örneklem birimlerinin her birine $\frac{1}{N}$ olasılıkla seçilme şansı vererek örneklem boyutu n olan birbirinden bağımsız birimlerin oluşturulması temeline dayanmaktadır. Bundan dolayı, her bir kitledeki birimler için örnekleme seçilme şansı eşit olduğundan bir düzgün dağılım göstermektedir[129]. Bu seçilen n birimler, yerine geri konularak ya da koyulmadan örnekleme alınmaktadır.

BRÖ, ilgilenilen kitlenin çok büyük boyutta olmadığı ve homojen olduğu durumlarda etkili bir şekilde kullanılsa da, sonsuz boyutlu kitlelerde ise örneklem seçim işlemini zorlaştırmaktadır. Bunun yanı sıra zaman, emek ve maliyet açısından elverişsiz bir

örnekleme yöntemi olmaktadır. Bu durumda, BRÖ temeline dayanan daha etkin ve güvenilir sonuçlar veren örnekleme yöntemlerinin kullanılması gerekmektedir. Ayrıca, BRÖ yönteminden farklı olarak, sistematik örnekleme (SÖ), tabakalı örnekleme (TÖ) ve küme örnekleme (KÖ) yöntemleri sıklıkla tercih edilen örnekleme yöntemlerindedir.

2.1.1. BRÖ ile Kitle Ortalaması ve Varyans Tahmini

Olasılık yoğunluk fonksiyonu (oyf) ve dağılım fonksiyonu (df) sırasıyla f ve F olan ve n birim içeren bir kümenin kitle ortalaması μ ve varyansı σ^2 olsun. Bu kitleden BRÖ yöntemi ile seçilen örneklem birimleri X_1, X_2, \dots, X_n olarak elde edilir.

Buna göre, BRÖ ile kitle ortalaması tahmin edicisi

$$\hat{\mu}_{BRÖ} = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (2.1)$$

olarak hesaplanmaktadır. $\hat{\mu}_{BRÖ}$ 'nin sırasıyla beklenen değer ve varyansı

$$E(\hat{\mu}_{BRÖ}) = E(\bar{x}) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = E(X) = \mu \quad (2.2)$$

ve

$$Var(\hat{\mu}_{BRÖ}) = Var(\bar{x}) = Var\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} Var(X) = \frac{\sigma^2}{n} \quad (2.3)$$

olarak hesaplanmaktadır. Buradaki (2.1)'den de açıkça, $\hat{\mu}_{BRÖ}$ 'nin μ kitle ortalamasının yansız bir tahmin edicisi olduğu görülmektedir.

2.2. SKÖ Yöntemi

Yapılan çalışmalarda ulaşılan sonucun doğruluğu ve güvenilirliği bilimsel yöntemlerin etkili bir şekilde kullanılması ile doğru orantılıdır. İstatistiksel yöntemler ise bu araştırmaların yapılmasında kilit nokta görevi göstermektedir. Bu nedenle, istatistik bilimi farklı alanlarda yoğun bir şekilde kullanılmaktadır. En sık kullanılan bilim dalları başta biyoloji olmak üzere tıp, çevre bilimi, ekonomi, mühendislik, ormancılık, ekoloji gibi alanlarda da sıklıkla tercih edilmektedir. İlgilenilen kitle hakkında bilgi sahibi olmak ve çözümleyebilmek için uygun bir veri ile bir çıkarımda bulunmak gerekmektedir. İlgilenilen kitle özelliklerini en iyi şekilde temsil edecek bir örneklemin seçilmesi bu noktada ilk adım olmalıdır. Elde edilen örneklem kullanılarak hesaplanan ortalama ve varyans gibi istatistiklerden kitleye ilişkin parametre tahminleri yapılmaktadır.

Bölüm (2.1.)’ de BRÖ’nün sonlu bir kitleye ilişkin parametre tahminin de en çok kullanılan örneklem yöntemi olduğundan fakat çok büyük boyuttaki kitleler için elverişsiz olduğundan bahsetmiştik. BRÖ yönteminin getirdiği dezavantajlardan dolayı alternatifi olarak geliştirilen ve örneklem birimlerinin incelenen değişkene göre pahalı ölçüm gerektirmeyen bazı yöntemlerin kullanılması ile maliyet, emek ve zaman kazanımı gibi etkenler açısından sıklıkla tercih edilen SKÖ yöntemidir. SKÖ ile kitleden seçilen örneklem birimlerinin gerçek ölçüm yapılmaksızın sıralanması, genellikle ilgilenilen değişkenden ziyade bu değişken ile ilişkili bulunan yardımcı değişken üzerinden yapılır. Bunun yanında görsel karşılaştırma ve uzman görüşü ile de sıralama işlemi gerçekleştirilebilir.

2.2.1. SKÖ Temel Kavramları

SKÖ yöntemi ile örneklem birimlerinin seçilme adımları anlatılmadan önce kısaca bu yöntemle ilişkin temel kavramlar açıklanmıştır.

Küme: İlgilenilen kitleden rastgele olarak seçilen m birim küme olarak tanımlanmaktadır.

Küme Boyutu: SKÖ yöntemi ile örneklem oluşturulurken BRÖ'den farklı olarak tüm birimleri ölçme işlemi yapılmadan daha az birimle ölçme işlemi yapılmaktadır. Bu yüzden, kümenin boyutu diğer etkenler kadar önem arz etmektedir. Küme boyutunun çok büyük ya da küçük olması sıralama hatalarına, maliyet artışı ya da azalması gibi faktörlere neden olabilir. Bu nedenle maksimum fayda sağlayacak şekilde seçilmesi önem göstermektedir.

Döngü: SKÖ ile elde edilen örneklem birimlerinin ölçüm yapılmış sıra istatistiklerini elde etmek için yapılan tekrar sayısına denir.

Dengeli SKÖ: Döngü sayılarının birbirine eşit olduğu durumda, SKÖ yöntemi ile belirlenen kümelerdeki birim sayılarının her bir döngü içinde eşit olmasına denir. Bu durumda örneklem boyutu $n = mr$ olacaktır.

Dengeli Olmayan SKÖ: SKÖ yöntemi ile belirlenen kümelerdeki birimlerin eşit sayıda olmaması dengeli olmayan SKÖ olarak tanımlanmaktadır.

2.2.2. SKÖ ile Örneklem Belirleme Adımları

Küme sayısının eşit olduğu dengeli SKÖ yöntemi ile örneklem birimlerinin seçiminde aşağıdaki adımlar izlenir. Bu adımlar şu şekildedir:

Adım 1: İlgilenilen kitleden BRÖ yöntemi ile m^2 boyutunda bir örneklem seçilir.

Adım 2: Seçilen m^2 birim mümkün olduğunca her biri m boyutlu m küme olacak şekilde ayrılır. Burada seçilen küme sayısı araştırmacı tarafından seçilmektedir.

Küme 1'deki birimler: $X_1 X_2 X_3 \dots X_m$ olarak gösterilebilir.

Adım 3: Daha sonra ilgilenilen değişkene ait gerçek ölçüm yapılmaksızın, uzman görüşünden, görsel karşılaştırmadan veya ilgilenilen değişken ile arasında yüksek korelasyona sahip bir değişkenden (yardımcı değişkenden) yararlanarak her kümedeki

m birim kendi içinde küçükten büyüğe doğru sıralanır. Küme 1'deki sıralanan birimler: $X_{(1)1}$ $X_{(2)1}$ $X_{(3)1}$... $X_{(m)1}$ olarak gösterilir.

Adım 4: Ölçüm yapılması için, birinci kümeden SKÖ örnekleme seçilen ilk birim en küçük sıra istatistiği olarak adlandırılır ve $X_{(1)1}$ yerine $X_{[1]}$ ile gösterilir. Daha sonra, ikinci kümeden ikinci en küçük sıra istatistiği $X_{[2]}$ seçildikten sonra m 'inci kümeden m 'inci sıradaki birim (en büyük sıra istatistiği) $X_{[m]}$ seçilme işlemi yapılanaya kadar bu işlem bütün kümeler için tekrar edilmiş olur. Bu durumda, m^2 boyutundaki bir örneklemden gerçek ölçüm için sadece m adet birim kullanılmış olur. Genellikle görsel sıralamanın kolay yapılması için küme sayısı $m=3, 4, 5$ ya da 6 olarak seçilmesi önerilir.

Adım 5: Belirlenen örnekleme boyutuna ulaşmak için ilk dört adım $n = mr$ olana kadar r kez tekrarlanır. Böylece, sonsuz bir kitleden m^2r birim seçilir fakat gerçek ölçüm için mr birim kullanılır. Sıralamada hata olmadığı varsayımı altında, SKÖ ile seçilen birimler $X_{[i]k}$ ($i=1, \dots, m$ ve $k=1, \dots, r$) olarak gösterilebilir. Bu $X_{[i]k}$ ifadesi; k . döngüdeki i 'nci sıra istatistiğini temsil etmektedir.

Yukarıda açıklanan adımlar, döngü sayısı $r = 1$ alınarak Çizelge 2.1.'de gösterilmiştir.

Çizelge 2. 1. SKÖ Yöntemi ile Örneklem Birimlerin Seçilmesi

Küme	Kitleden seçilen birimler	Sıralanan birimler	SKÖ ile Örneklem Birimleri
1	$X_1 X_2 \dots \dots X_m$	$X_{(1)1} X_{(2)1} \dots \dots X_{(m)1}$	$X_{[1]} \dots \dots \dots$
2	$X_1 X_2 \dots \dots X_m$	$X_{(1)2} X_{(2)2} \dots \dots X_{(m)2}$	$\dots X_{[2]} \dots \dots \dots$
⋮

m	$X_1 X_2 \dots \dots X_m$	$X_{(1)m} X_{(2)m} \dots \dots X_{(m)m}$	$\dots \dots \dots X_{[m]}$

Örnek teşkil etmesi açısından küme boyutu $m = 4$ ve döngü sayısı $r = 1$ alınarak SKÖ ile örneklem birimlerinin seçilmesi Çizelge 2.2'de gösterilmiştir.

Çizelge 2. 2. SKÖ ile Örneklem seçimi $m=4$ $r=1$

1.küme	$X_{(1)1}$	$X_{(2)1}$	$X_{(3)1}$	$X_{(4)1}$
2. küme	$X_{(1)2}$	$X_{(2)2}$	$X_{(3)2}$	$X_{(4)2}$
3.küme	$X_{(1)3}$	$X_{(2)3}$	$X_{(3)3}$	$X_{(4)3}$
4.küme	$X_{(1)4}$	$X_{(2)4}$	$X_{(3)4}$	$X_{(4)4}$

2.2.3. SKÖ ile Kitle Ortalaması ve Varyans Tahmini

Bölüm (2.1.1)'de BRÖ yöntemi ile kitle ortalamasına ilişkin tahmin ediciler üzerinde durulmuştur. Bölüm (1)'de bahsedildiği üzere, ilk kez Takahashi ve Wakimoto [2] sıralamada hata yapılmadığı varsayımı altında SKÖ yöntemi ile elde edilen örneklem ortalamasının varyansını, BRÖ ile elde edilen örneklem ortalamasının varyansından daha etkin olduğunu göstermişlerdir.

Bu bölümde ise SKÖ yöntemi ile kitle ortalamasının tahmin edicisinin üzerinde durulacak ve BRÖ yöntemi ile elde edilen kitle ortalamasının tahmin edicisine göre etkinlik karşılaştırılması yapılacaktır.

Olasılık yoğunluk fonksiyonu (oyf) ve dağılım fonksiyonu (df) sırasıyla f ve F olan ve n birim içeren bir kümenin kitle ortalaması μ ve varyansı σ^2 olsun. Bu kitleden SKÖ yöntemi ile küme boyutu m , döngü sayısı $k = 1, 2, \dots, r$ olmak üzere örneklem boyutu $n = mr$ olarak belirlenir. SKÖ yöntemi ile seçilen örneklem birimleri

$$X_{[1]1}, X_{[2]1}, \dots, X_{[m]1}; X_{[1]2}, X_{[2]2}, \dots, X_{[m]2}; \dots; X_{[1]m}, X_{[2]m}, \dots, X_{[m]k}$$

olarak elde edilir. Buna göre, SKÖ ile kitle ortalaması tahmin edicisi

$$\hat{\mu}_{SKÖ} = \bar{x}_{SKÖ} = \frac{1}{mr} \sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^m X_{[i]k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^m X_{[i]k} \quad (2.4)$$

olarak hesaplanmaktadır. $\hat{\mu}_{SKÖ}$ 'nin sırasıyla beklenen değeri ve varyansı

$$E(\hat{\mu}_{SKÖ}) = E(\bar{x}_{SKÖ}) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^m X_{[i]k}\right) \quad (2.5)$$

ve

$$\begin{aligned} Var(\hat{\mu}_{SKÖ}) &= Var(\bar{x}_{SKÖ}) = \frac{1}{m^2 r^2} Var(X_{[i]k}) = \frac{1}{n^2} Var(X_{[i]k}) \\ &= \frac{\sigma^2}{n} - \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (\mu_i - \mu)^2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

formülleri ile hesaplanmaktadır. Yukarı verilen (2.5)'deki ifadenin gösteriminin daha kolay olması açısından döngü sayısı $r = 1$ olarak alındığında sırasıyla örneklem boyutu n ve küme boyutu m olmak üzere $n = m$ olacaktır. Sıralamada hata olmadığı varsayımı altında SKÖ ile seçilen örneklem birimleri $X_{[1]}, X_{[2]}, \dots, X_{[n]}$ $i = 1, 2, \dots, n$ olarak gösterilsin. Burada, $X_{[i]}$ sıralı istatistikleri, i . sıralı istatistiğin dağılımına sahip ve birbirinden bağımsızdır. (2.5)'de verilen denklem aşağıda verildiği gibi yazılabilir. $X_{[i]}$ sıralı istatistiklerini kullanarak kitle ortalaması tahmin edicisinin beklenen değeri

$$E(\hat{\mu}_{SKÖ}) = E(\bar{x}_{SKÖ}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_{[i]}) \quad (2.7)$$

olarak elde edilir. Burada

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \quad (2.8)$$

olduğundan dolayı

$$E(X_{[i]}) = \int_{-\infty}^{\infty} x_i \frac{n!}{(n-i)!(i-1)!} f(x_i) [1 - F(x_i)]^{n-i} [F(x_i)]^{i-1} dx \quad (2.9)$$

olarak yazılabilir. Yukarıda verilen (2.7) ve (2.9) denklemleri ile

$$E(\bar{x}_{SKÖ}) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) [\sum_{i=1}^n \binom{n-1}{i-1} [1 - F(x)]^{n-i} [F(x)]^{i-1}] dx \quad (2.10)$$

olarak yazılabilir. (2.10)'daki denklemdeki toplamın her $x \in \mathbb{R}$ için Binom açılımı ile elde edilen denklem

$$\sum_{i=1}^n \binom{n-1}{i-1} [1 - F(x)]^{n-i} [F(x)]^{i-1} dx = 1 \quad (2.11)$$

olduğu görülmektedir. Böylece elde edilen denklemde

$$E(\hat{\mu}_{SKÖ}) = E(\bar{x}_{SKÖ}) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \mu \quad (2.12)$$

olduğu açıkça görülmektedir. Dolayısıyla μ kitle ortalaması için $\hat{\mu}_{SKÖ}$ 'nin yansız bir tahmin edici olduğu söylenebilir. Denklem (2.6)'ya benzer şekilde, $X_{[i]}$ sıralı istatistiklerini kullanarak $E(X_{[i]}) = \mu_{[i]}$ ve $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere kitle ortalaması tahmin edicisinin varyansı

$$Var(\bar{x}_{SKÖ}) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n Var(X_{[i]}) \quad (2.13)$$

olarak yazılabilir.

$$\begin{aligned}
E[(X_{[i]} - \mu)^2] &= E[(X_{[i]} - \mu_{[i]} + \mu_{[i]} - \mu)^2] \\
&= E(X_{[i]} - \mu_{[i]})^2 + 2.E(X_{[i]} - \mu_{[i]})(\mu_{[i]} - \mu) + (\mu_{[i]} - \mu)^2 \\
&= E(X_{[i]} - \mu_{[i]})^2 + (\mu_{[i]} - \mu)^2 \\
E[(X_{[i]} - \mu)^2] &= Var(X_{[i]}) + (\mu_{[i]} - \mu)^2 \tag{2.14}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. (2.10)'daki benzer işlemler kullanılarak $\sum_{i=1}^n E[(X_{[i]} - \mu)^2]$ ifadesi elde edilir. Bu ifade

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n E[(X_{[i]} - \mu)^2] &= n \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) \\
&[\sum_{i=1}^n \binom{n-1}{i-1} [1 - F(x)]^{n-i} [F(x)]^{i-1}] dx \tag{2.15}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. (2.15)'de bulunan integral toplamı 1'dir. (2.12)'deki denklemdeki gibi yerine koyulduğunda

$$\sum_{i=1}^n E[(X_{[i]} - \mu)^2] = n \sigma^2 \tag{2.16}$$

olmaktadır. (2.13) ve (2.16) denklemlerinin birleştirilmesi ile

$$Var(\bar{x}_{SKÖ}) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n E[(X_{[i]} - \mu)^2] - \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (\mu_{[i]} - \mu)^2 \tag{2.17}$$

SKÖ ile elde edilen kitle ortalamasının varyansı (2.6)'daki gibi elde edilir. Açıkça görülmektedir ki bölüm (2.1.1)'de anlatılan BRÖ ile elde edilen kitle ortalamasının varyansı, SKÖ ile elde edilen kitle ortalamasının varyansından büyüktür.

2.2.4. Modifiye Edilmiş SKÖ Yöntemler

Bu bölümde, SKÖ yöntemine alternatif olarak geliştirilen çeşitli modifiye edilmiş SKÖ'leri hakkında genel bilgiler verilmiştir. Tez kapsamında, bu yöntemler ile oluşturulan örneklemeler kullanılarak sistem güvenilirliği R tahmini elde edilmiştir. Bu çalışma içerisinde ele alınacak yöntemler, Hareketli uç sıralı küme örnekleme (HUSKÖ), L sıralı küme örnekleme (LSKÖ), Medyan sıralı küme örnekleme (MSKÖ) yöntemleridir. Sırasıyla bu yöntemlere ilişkin örneklem oluşturma adımları üzerinde durulmuştur.

2.2.4.1. HUSKÖ Tip 1 ve Tip 2 Yöntemi

HUSKÖ yöntemi, ilk kez Al-Saleh ve Al-Omari [12] tarafından önerilmiştir. Örneklem belirleme aşamasında, farklı boyutlu kümelerdeki en küçük sıralı istatistik (minimum değer) ve en büyük sıralı istatistik (maksimum değer) olan birimlerin seçilmesi esasına dayanmaktadır. SKÖ ile kıyaslandığında uygulanmasının daha kolay olmasına ve çok fazla sıralama hatasına sebep olmadan küme boyutunun artmasına olanak tanımaktadır. Tez kapsamında, Abdallah vd. [115] tarafından yapılan çalışma baz alınarak HUSKÖ tip 1 ve HUSKÖ tip 2 yöntemi ile örneklem birimleri seçilmiştir.

HUSKÖ tip 1 ile örneklem seçme işleminde aşağıdaki adımlar izlenmektedir.

Adım 1: İlgilenilen kitleden rastgele olarak sırası ile $1, 2, \dots, m$ boyutlu m birim seçilir. Örneklem boyutu, ilk kümede 1, ikinci kümede 2 ve m . kümede m boyutludur.

Adım 2: Gerçek ölçüm yapılmaksızın her bir kümedeki en büyük sıralı istatistik (maksimum değer), ilgili değişkene bağlı olarak gözlem ya da pahalı olmayan bir

yöntem ile belirlenir. Her bir kümedeki seçilen en büyük sıralı istatistik $X_{(i)i}$ olarak gösterilir.

Adım 3: Belirlenen en büyük sıralı istatistik doğru bir şekilde ölçülür.

Adım 4: Bu prosedür yeterli örneklem hacmi elde edilebilmesi için $n = mr$ olana kadar r kez tekrar edilir.

Örnek olarak, küme boyutu $m = 3$ olan sıralı istatistiklerin seçilme işlemi $\text{maks}(X_1, X_2, X_3) = \text{maks}(\text{maks}(\text{maks}(X_1, X_2)X_3)$ olarak ifade edilebilir.

Döngü sayısı $r = 1$ olarak alınan ve küme boyutu $m=4$ olan sırasıyla HUSKÖ tip 1 yöntemi ile elde edilen örneklem birimleri çizelge 2.3.'deki gibi elde edilir.

Çizelge 2. 3. HUSKÖ tip 1 ile Örneklem seçimi $m=4$ $r=1$

1.küme	$X_{(1)1}$			
2. küme	$X_{(1)2}$	$X_{(2)2}$		
3.küme	$X_{(1)3}$	$X_{(2)3}$	$X_{(3)3}$	
4.küme	$X_{(1)4}$	$X_{(2)4}$	$X_{(3)4}$	$X_{(4)4}$

HUSKÖ tip 2 ile örneklem seçme işleminde ise aşağıdaki adımlar izlenmektedir.

Adım 1: İlgilenilen kitleden rastgele olarak sırası ile $1, 2, \dots, m$ boyutlu m birim seçilir.

Adım 2: Yukarıda açıklanan adım 2'deki işlemler, bu kez en küçük (birinci) sıralı istatistiği $X_{(1)i}$ seçmek için tekrarlanır.

Adım 3: Bu prosedür yeterli örneklem hacmi elde edilebilmesi için için $n = mr$ olana kadar r kez tekrar edilir.

Örnek olarak, küme boyutu $m = 3$ minimum sıralı istatistiklerin seçilme işlemi

$$\min(X_1, X_2, X_3) = \min(\min(\min((X_1, X_2)X_3))$$

şeklinde yapılmaktadır.

Döngü sayısı $r = 1$ olarak alınan ve küme boyutu $m=4$ olan sırasıyla HUSKÖ tip 2 yöntemi ile elde edilen örneklem birimleri çizelge 2.4.'deki gibi elde edilir.

Çizelge 2. 4. HUSKÖ tip 2 ile Örneklem Seçimi $m=4, r=1$

1.küme	$X_{(1)1}$			
2. küme	$X_{(1)2}$	$X_{(2)2}$		
3.küme	$X_{(1)3}$	$X_{(2)3}$	$X_{(3)3}$	
4.küme	$X_{(1)4}$	$X_{(2)4}$	$X_{(3)4}$	$X_{(4)4}$

2.2.4.2. LSKÖ Yöntemi

LSKÖ yöntemi, L istatistiği fikrine dayalı SKÖ yöntemine alternatif olarak geliştirilmiştir. İlk kez Al-Nasser [130] BRÖ ve SKÖ yöntemine göre simetrik dağılım altında, minimum varyanslı kitle ortalaması tahmini için yansız bir tahmin edici elde edildiğini göstermiştir. Bu yöntem ile örneklem oluşturma, gözlenen birimlerin uç değerlerini bir sonraki en uç birim ile yer değiştirerek gerçekleşir. LSKÖ belirli durumlar altında SKÖ, MSKÖ ve yüzdelik sıralı küme örnekleme (YSKÖ) yöntemlerinin harmanlanmış halidir [114].

LSKÖ ile örneklem seçme işleminde aşağıdaki adımlar izlenmektedir.

Adım 1: İlgilenilen kitleden rastgele olarak her biri m boyutlarında m birim seçilir.

Adım 2: Daha sonra ilgili değişkene ait gerçek ölçüm yapılmaksızın, uzman görüşünden, görsel karşılaştırmadan veya ilgili değişken ile arasında yüksek korelasyonu olan bir değişkenden (yardımcı değişkenden) yararlanarak her kümedeki m birim kendi içinde küçükten büyüğe doğru sıralanır.

Adım 3: $0 < \alpha < 0.5$ aralığında olmak üzere ve bir z katsayı değeri $z=[m\alpha]$ formülü ile belirlenir. Buradaki $[x]$ değeri x' e eşit veya x' 'dan küçük en büyük tam sayı değeri olması gerekmektedir.

Adım 4: Gerçek ölçüm için, $i = 1, 2, \dots, m$ olmak üzere her bir i . sıralı kümeden aşağıda gösterilen şekilde h_i . sıralı birim seçilir.

$$h_i = \left\{ \begin{array}{ll} z+1, & i \leq i \leq z+1 \\ i, & z+2 \leq i \leq m-z-1 \\ m-z & m-z \leq i \leq m \end{array} \right\}$$

Adım 5: Bu prosedür yeterli örneklem hacmi elde edilebilmesi için için $n = mr$ olana kadar r kez tekrar edilir.

NOT: Katsayı değeri olarak tanımlanan z değeri, $z = 0$ için LSKÖ ile SKÖ yöntemleri ve $z = [(m-1)/2]$ olduğu durumda LSKÖ ile MSKÖ yöntemleri birbirine eşittir. Ayrıca, YSKÖ yöntemi de z katsayısının farklı bir durumu için LSKÖ ile eşit olmaktadır.

Küme boyutu $m = 4$, döngü sayısı $r = 1$ ve LSKÖ katsayı değeri $z = 1$ olduğu durumda LSKÖ yöntemi ile örneklem birimlerinin seçilme işlemi çizelge 2.5.'deki gibi olmaktadır.

Çizelge 2. 5. LSKÖ yöntemi ile Örneklem Seçimi $m=4, r=1, z=1$

1.küme	$X_{(1)1}$	$X_{(2)1}$	$X_{(3)1}$	$X_{(4)1}$
2. küme	$X_{(1)2}$	$X_{(2)2}$	$X_{(3)2}$	$X_{(4)2}$
3.küme	$X_{(1)3}$	$X_{(2)3}$	$X_{(3)3}$	$X_{(4)3}$
4.küme	$X_{(1)4}$	$X_{(2)4}$	$X_{(3)4}$	$X_{(4)4}$

Örnek teşkil etmesi açısından küme boyutu $m = 5$, döngü sayısı $r = 1$ ve LSKÖ katsayı değeri $z = 2$ olduğu durumda LSKÖ yöntemi ile örneklem birimlerinin seçilme işlemi çizelge 2.6.'daki gibi olmaktadır.

Çizelge 2. 6. LSKÖ yöntemi ile Örneklem Seçimi $m=5, r=1, z=2$

1.küme	$X_{(1)1}$	$X_{(2)1}$	$X_{(3)1}$	$X_{(4)1}$	$X_{(5)1}$
2. küme	$X_{(1)2}$	$X_{(2)2}$	$X_{(3)2}$	$X_{(4)2}$	$X_{(5)2}$
3.küme	$X_{(1)3}$	$X_{(2)3}$	$X_{(3)3}$	$X_{(4)3}$	$X_{(5)3}$
4.küme	$X_{(1)4}$	$X_{(2)4}$	$X_{(3)4}$	$X_{(4)4}$	$X_{(5)4}$
5.küme	$X_{(1)5}$	$X_{(2)5}$	$X_{(3)5}$	$X_{(4)5}$	$X_{(5)5}$

Döngü 1 kez tekrar ettiği durumda, LSKÖ yöntemi ile seçilen örneklem birimlerinin kitle ortalaması

$$\bar{x}_{LSK\ddot{O}} = \frac{1}{m} (\sum_{i=1}^z X_{(z+1)i} + \sum_{i=z+1}^{m-z} X_{(i)i} + \sum_{i=m-z}^m X_{(m-z)i}) \quad (2.19)$$

olarak elde edilir [130].

2.2.4.3. MSKÖ Yöntemi

İlk olarak Muttlak [10] yaptığı çalışmada, normal dağılım gibi tek tepeli simetrik dağılımlarda kitle ortalama tahmin edicisini bulmak için MSKÖ yöntemini önermiştir. Bu yöntemde seçim işlemi, her bir küme içerisindeki medyan değerlerinin örnekleme alınması ile gerçekleşir. Bu sayede SKÖ'ye kıyasla hata yapma olasılığı indirgenmiş olmaktadır.

Bölüm (2.2.5.2)' de anlatılan LSKÖ yöntemi ile örneklem seçimi, örneğin küme boyutu $m = 5$ ya da $m = 6$ ve LSKÖ katsayı değeri $z = 2$ olduğu durumda MSKÖ ile örneklem seçimi aynı olmaktadır. Tez kapsamında, LSKÖ katsayı değeri $z = [(m - 1)/2]$ ifadesi ile MSKÖ yöntemine yönelik işlemler ele alınmıştır.

Bu bölümde, örnek teşkil etmesi bakımından literatürde bulunan MSKÖ yöntemi ile örneklem seçme adımlarından bahsedilmiştir. Örnekleme seçilecek birimler, küme boyutunun tek ve çift olmasına göre farklılık göstermektedir.

MSKÖ yöntemi ile örneklem seçme işleminde aşağıdaki adımlar izlenmektedir.

Adım 1: İlgilenilen kitleden rastgele olarak m boyutunda m küme seçilir.

Adım 2: Seçilen birimleri ilgili değişkene bağlı olarak küçükten büyüğe doğru sıralanır.

Adım 3: Bu aşamada m in çift ya da tek sayı olmasına göre seçilme işlemi değişik prosedüre göre devam eder.

1. $m = \text{çift}$ ise; ilk $m/2$ kümenin hepsinden $m/2$. en küçük sıralı birimleri ve geri kalan $m/2$ kümelerin hepsinden de $(m + 2)/2$. en küçük sıralı birimleri örnekleme seçildikten sonra bu birimlerin gerçek ölçüm değerleri elde edilir.
2. $m = \text{tek}$ ise m kümenin hepsinden ölçüm için $(m + 1)/2$. (örneğin medyanı) en küçük sıralı birimler örnekleme seçilir.

Adım 4: Bu prosedür yeterli örneklem hacmi elde edilebilmesi için $n = mr$ olana kadar r kez tekrar edilir.

Küme boyutu çift $m = 4$ ve döngü sayısı $r = 1$ olduğu durumda MSKÖ yöntemi ile örneklem birimlerinin seçilme işlemi çizelge 2.7.'deki gibi olmaktadır. Görüldüğü üzere bölüm (2.2.5.2)'de anlatılan LSKÖ yöntemi ile örneklem seçimini gösteren çizelge 2.6. ile aynıdır.

Çizelge 2. 7. MSKÖ Yöntemi ile Örneklem Seçimi $m=4, r=1$

1.küme	$X_{(1)1}$	$\boxed{X_{(2)1}}$	$X_{(3)1}$	$X_{(4)1}$
2. küme	$X_{(1)2}$	$\boxed{X_{(2)2}}$	$X_{(3)2}$	$X_{(4)2}$
3.küme	$X_{(1)3}$	$X_{(2)3}$	$\boxed{X_{(3)3}}$	$X_{(4)3}$
4.küme	$X_{(1)4}$	$X_{(2)4}$	$\boxed{X_{(3)4}}$	$X_{(4)4}$

Döngü 1 kez tekrar ettiği durumda, MSKÖ yöntemi ile seçilen örneklem birimlerinin kitle ortalaması

$$\bar{x}_{MSKÖ} = \begin{cases} \frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}} X_{(\frac{m}{2})i} + \sum_{i=\frac{m}{2}+1}^m X_{(i)i} + \sum_{i=\frac{m}{2}+1}^m X_{(\frac{m}{2}+1)i} \right), & m \text{ çift sayı ise} \\ \frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^m X_{(\frac{m}{2}+1)i} \right), & m \text{ tek ise} \end{cases} \quad (2.20)$$

olarak elde edilir.

2.3. Stres-Güç Modeli (SGM)

Stres-güç modeli (SGM), güvenilirlik araştırmalarında oldukça sık kullanıma sahip bir model olmakla birlikte R sistem güvenilirliği olarak tanımlanmaktadır. Çalışmanın bu bölümünde, ilk olarak bu modele ait genel bilgilere yer verilmiştir. SGM ile yapılan literatür çalışmalarına yer verildikten sonra bu modele ait matematiksel tanımından bahsedilmiştir.

2.3.1. SGM Tanımı

Literatürde SGM ilk kez, Mann-Whitney test istatistiği uygulaması için Birnbaum [69] tarafından ortaya çıkmıştır. Bir sistemin veya bileşenin, belirli koşullar altında ve belirli bir zaman aralığında gerekli işlevini sürdürebilme yeteneğine güvenilirlik denilmektedir. [131] Dolayısıyla bir sistem çalışmaya veya gerekli işlevini doğru bir şekilde devam ettirdiğinde güvenilirlik, bir sistemin başarı miktarını ölçmek için kullanılabilir. Güvenilirlik araştırmalarında oldukça sık tercih edilen SGM,

$$R = P(Y < X) \quad (2.18)$$

olarak ifade edilmektedir. Sistem güvenilirliği olarak tanımlanan bu modelde yer alan rastgele değişkenler X ve Y birbirinden bağımsızdır. Burada, Y bir sistemin bozulmasına ya da durmasına sebebiyet verebilecek olan stress, X ise bu sisteme uygulanan stres düzeyine karşılık gerekli olan işlevini yerine getirebilmesi için sahip olduğu gücü ifade etmektedir. Dolayısıyla, uygulanan Y stresinin X gücünden büyük olması durumunda sistemin aksaması, bozulması ya da durması söz konusudur. Aksi durumda ise sistem işlevini yerine getirmeye devam edecektir. Sistem güvenilirliği R , matematiksel ifadesinde yer alan $P(Y < X)$ olasılığının 1'e yaklaşması durumunda

yüksek, sıfıra yaklaşması durumunda ise düşük olduğu anlamına gelmektedir. Daha fazla bilgi için bkz. Kotz vd.[36]

2.3.2. SGM'nin Matematiksel Tanımı

Bir sistem içerisinde yer alan X ve Y rastgele değişkenleri 2.3.1'de bahsedildiği üzere bağımsızlık varsayımı altındadır. X , bir sisteme uygulanan Y stresine karşı gelebilmesi için sahip olduğu gücü göstermek üzere SG'nin matematiksel ifadesi şöyle gösterilmektedir:

$$\begin{aligned} R &= P(Y < X) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^x f(x, y) d_y d_x = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^x f(y) f(x) d_y d_x \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \int_{-\infty}^x f(y) d_y d_x \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) F_Y(x) d_x \\ R &= \int_{-\infty}^{\infty} F_Y(x) dF_X(x) \end{aligned}$$

ifadesi ile gösterilebilir. Sistem güvenilirliği ifadesi, $x = u$ olmak üzere sistem güvenilirliği aşağıdaki gibidir.

$$R = P(Y < X) = \int_{-\infty}^{\infty} F_Y(u) dF_X(u) \quad (2.19)$$

2.4. Kitle Parametre Tahmini

Tez çalışmasının bu bölümünde, belirli bir dağılımdan gelen X ve Y bağımsız rastgele değişkenlerine ilişkin bilinmeyen kitle parametrelerini tahmin etmek için uygulanan

yöntemlerden bahsedilmiştir. Tez kapsamında kullanılacak bu yöntemler, maksimum olabilirlik (MO) ve modifiye edilmiş maksimum olabilirlik (MMO) yöntemleridir.

2.4.1. Maksimum Olabilirlik Yöntemi (MO)

İlk kez Fisher tarafından ortaya konulmuştur. İlgilenilen dağılıma ait bilinmeyen parametrelerin tahmin edilmesinde en çok tercih edilen yöntemlerden biri MO yöntemidir. Bu yöntem ile ilişkili istatistiksel ilke, hesaplanmak istenen parametrelere göre log-olabilirlik fonksiyonunun maksimum yapılması esasına dayanmaktadır. Böylece MO tahmin edicisi, kitle hakkında çıkarımda bulunurken örneklem birimlerine en iyi olasılık düzeyinde temsil edecek parametre değerini kullanır. Özellikle normal dağılış göstermeyen veriler ile doğrusallık özelliği göstermeyen modeller için kullanışlı ve vazgeçilmez bir yöntemdir.

MO yöntemi, küçük örneklem boyutlu örneklemelerden ziyade çok büyük boyuta sahip olanlarda birçok avantaja sahiptir:

- MO tahmin edicisi, bulunan ilgili olasılık dağılımının parametreleri hakkında açıklayıcı ve tam bir bilgi sağladığı için yeterlilik özelliği göstermektedir.
- Yeterli boyuttaki örneklem birimleri, asimptotik olarak gerçek parametre değerine olasılık ile yakınsadığı için tutarlıdır.
- Normallik koşulları sağlandığında, asimptotik olarak elde edilen parametre tahmin edicileri en az varyansa sahip olması (Cramer-Rao sınırı) verimli bir tahmin edici olduğunu göstermektedir.
- MO tahmin edicilerinin değişmezlik kuralı, bir μ parametresinin MO tahmin edicisi $\hat{\mu}$ ise μ parametresinin başka bir fonksiyonu $f(\mu)$ için de MO tahmin edicisi $f(\hat{\mu})$ 'dir[132]. Daha fazla bilgi için bkz,[133].

2.4.2. Modifiye Edilmiş Maksimum Olabilirlik Yöntemi (MMO)

MO yöntemi ile tahmin gerçekleşirken ilgilenilen parametrelere göre elde edilen olabilirlik fonksiyonları bazı durumlarda doğrusal ve kapalı formda mevcut değildir. Modifiye edilmiş maksimum olabilirlik yöntemi (MMO), MO yöntemine alternatif olarak geliştirilen ve olabilirlik fonksiyonlarında açıklayıcı bir çözüm elde etmek için kullanılmaktadır. İlk olarak Maharota ve Nanda tarafından geliştirilen bu yöntem, açık çözümü bulunamayan ifadelerin yerine bu ifadeler karşılık gelen beklenen değerlerinin konulması fikrine dayanmaktadır. Böylece, yansız ve daha yüksek verimliliğe sahip MMO tahmin edicileri elde etmişlerdir [134].

Örnekleme boyutu $n \rightarrow \infty$ değerleri için düzgünlük koşulları altında MMO tahmin edicileri MO tahmin edicilerine asimptotik olarak yakınsar. MO tahmin edicilerine göre MMO tahmin edicilerinin hesaplanması daha kolay bir şekilde gerçekleşir. Bu tahmin ediciler, asimptotik olarak tam etkinlik gösterirler, bkz.[39].

Tez kapsamında, sistem güvenilirliği R 'nin ilk MO tahmin edicileri elde edilmiş ve analitik olarak çözümü bulunamadığı durumda MMO yöntemi ile R 'nin tahmin edicileri hesaplanmıştır.

3. SİSTEM GÜVENİLİRLİĞİ R TAHMİNİ: ÜSTEL DAĞILIM

Bu bölümde, R tahmini için birbirinden bağımsız X gücü ve Y stresi olarak tanımlanan rastgele değişkenlerinin tek ölçek parametrelili Üstel dağılımdan geldiği durumda R 'nin MO ve MMO tahmin edicileri BRÖ yöntemi ile tahmin edilecektir. Benzer şekilde SKÖ yöntemi ile R 'nin MO ve MMO tahmin edicileri elde edilmiştir.

3.1. Üstel Dağılım

Üstel dağılım, ilgilenilen bir olayın ortaya çıkmasına kadar süre gelen zamanı modellemek için kullanılmaktadır. Olasılık teoreminde, sabit bir orana sahip olayların sürekli ve bağımsız olarak gerçekleştiği homojen olan Poisson süreçlerinde kendiliğinden ortaya çıkmaktadır.

İstatistik bilimi içerisinde kullanım alanı oldukça geniş olmakla birlikte en fazla yaşam testi alanında kullanılmaktadır[135], bkz. Epstein ve Sobel[136]. Bunun yanı sıra, güvenilirlik çalışmalarında tek, çift parametrelili ve genelleştirilmiş üstel dağılım gibi çeşitleri oldukça yaygın olarak kullanılmaktadır, bkz. Baklizi[137], Abouammoh ve Alshingiti[138], Pal, Masoom ve Woo[139], Krishnamoorthy, Mukherjee ve Guo[140], Wang, Geng ve Zhou[141].

Parametre tahmini için oldukça elverişli olan bu dağılım birçok çalışmada ele alınmıştır. Örneğin, Heuts[142] tarafından yapılan çalışma da tek ve çift parametrelili Üstel dağılım için yansız tahmin edicilerini ve güven aralığı hesaplamış Kuiper uyum iyiliği testi ile sonuç çıkarımında bulunmuştur. Rahman ve Pearson [143], çift parametrelili Üstel dağılım için MO yöntemi, Ürün aralıkları yöntemi (Method of products spacings), yüzdeler dilim yöntemi (Method of quantile estimates) ve yansız tahmin yöntemlerini karşılaştırmışlardır. Daha fazlası bilgi için bkz. Johnson vd [144].

3.1.1. Çift Parametrelili Üstel Dağılım

Çift parametrelili üstel dağılıma sahip olan X rastgele değişkeni olsun. α konum parametresi ve θ ölçek parametresi olmak üzere X için olasılık yoğunluk fonksiyonu (oyf),

$$f(x; \alpha, \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{(x-\alpha)}{\theta}}, \quad x \geq \alpha; \theta > 0 \quad (3.1)$$

ve dağılım fonksiyonu (df)

$$F(x; \alpha, \theta) = 1 - e^{-\frac{(x-\alpha)}{\theta}}, \quad x \geq \alpha; \theta > 0 \quad (3.2)$$

ifadesiyle gösterilir.

3.1.2. Tek Parametrelili Üstel Dağılım

Tek parametreye sahip Üstel dağılım, iki parametrelili Üstel dağılımındaki konum parametresi $\alpha = 0$ değeri verilerek elde edilmektedir. Tez kapsamında, sistem güvenilirliği R tahmini için kullanılacak olan X gücü ve Y stresi birbirinden bağımsız olan rastgele değişkenlerinin tek ölçek parametresine sahip Üstel dağılımdan geldiği varsayımı ele alınmıştır. Buna göre, $X \sim \text{Üstel}(\theta)$ ve $Y \sim \text{Üstel}(\mu)$ olmak üzere, olasılık yoğunluk fonksiyonları (oyf) sırasıyla

$$f(x; \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, \quad x > 0; \theta > 0 \quad (3.3)$$

$$f(y; \mu) = \frac{1}{\mu} e^{-\frac{y}{\mu}}, \quad y > 0; \mu > 0 \quad (3.4)$$

ve dağılım fonksiyonları (df) sırasıyla,

$$F(x; \theta) = 1 - e^{-\frac{x}{\theta}}, \quad x > 0 ; \theta > 0 \quad (3.5)$$

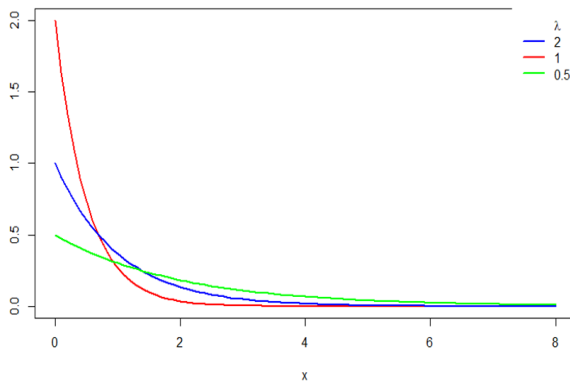
$$F(y; \mu) = 1 - e^{-\frac{y}{\mu}}, \quad y > 0 ; \mu > 0 \quad (3.6)$$

biçiminde ifade edilmektedir.

Ek olarak, Üstel dağılımın çeşitli dağılımlarla ilişkisi mevcuttur. Bunlardan bazıları, iki parametrelili sürekli bir dağılım olan Gamma dağılımı için şekil parametresi $k = 1$ olduğunda ve Weibull dağılımı için şekil parametresi $p = 1$ olarak alındığında ise Üstel dağılıma dönüşmektedir. Bununla birlikte, farklı parametre değerleri için üstel ailesinde yer alan Rayleigh, Laplace ve Gumbel gibi dağılımlar Üstel dağılımla ilişkilendirilebilmektedir. Ek olarak, Pareto ve Güç-fonksiyon dağılımı da Üstel dağılımın bir yansıması olarak bilinmektedir. Çünkü bu dağılımlar, karşılık logaritmik dönüşümler ile Üstel dağılım ile ilişkilidir, daha fazla bilgi için bkz. Rinne [145].

Üstel dağılımının farklı ölçek parametreleri için *oyf* grafikleri şekil 3.1.'de gösterilmiştir.

Şekil 3. 1. Üstel dağılımın farklı ölçek parametreleri için *oyf* grafikleri



Literatürde sistem güvenilirliği R tahmini, BRÖ yöntemine dayalı olarak büyük bir ilgi görmüştür. Daha fazla bilgi için bkz. Kotz vd [36].

Güç, $X \sim \text{Üstel}(\theta)$ ve stres $Y \sim \text{Üstel}(\mu)$ olmak üzere R sistem güvenilirliği,

$$\begin{aligned}
 R &= P(Y < X) = \int_{y=0}^{\infty} \int_{x=y}^{\infty} f(x, y) d_x d_y \\
 &= \int_0^{\infty} \int_y^{\infty} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} \frac{1}{\mu} e^{-\frac{y}{\mu}} d_x d_y \\
 &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\mu} e^{-\frac{y}{\mu}} \int_y^{\infty} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} d_x d_y \quad u = \frac{x}{\theta} \\
 &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\mu} e^{-\frac{y}{\mu}} \int_{y/\theta}^{\infty} e^{-u} d_u d_y \\
 &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\mu} e^{-y(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\theta})} d_y \\
 R &= \frac{\theta}{\theta + \mu} \tag{3.7}
 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. R sistem güvenilirliğini tahmin etmek için öncelik olarak θ ve μ parametrelerinin tahmin edilmesi gereklidir.

3.2. BRÖ'ye Dayalı Sistem Güvenilirliği R Tahmini

Bu bölümde, R olarak tanımlanan sistem güvenilirliğinin, stress-güç modeline ilişkin seçilecek örneklemelerin BRÖ'ye dayalı olarak tahmini üzerinde durulmuştur. Öncelik olarak, $X \sim \text{Üstel}(\theta)$ gücü ve $Y \sim \text{Üstel}(\mu)$ stresi olmak üzere olmak üzere, θ ve μ parametrelerinin tahmin edilmesi gerekmektedir. Bu amaç doğrultusunda, MO ve MMO yöntemleri kullanılarak BRÖ yöntemine dayalı R tahmini üzerinde durulmuştur.

3.2.1. Sistem Güvenilirliği R 'nin MO Tahmin Edicisi

Sırasıyla, birbirinden bağımsız rastgele değişkenler $X_1, X_2, \dots, X_n \sim \text{Üstel}(\theta)$ ve $Y_1, Y_2, \dots, Y_n \sim \text{Üstel}(\mu)$ olmak üzere, bölüm 2.4.1'de anlatılan MO tahmin edicilerinin özelliklerini kullanarak

$$\hat{R} = \frac{\hat{\theta}_{MO, BR\ddot{O}}}{\hat{\theta}_{MO, BR\ddot{O}} + \hat{\mu}_{MO, BR\ddot{O}}} \quad (3.8)$$

olarak ifade edilir. Bu ifade de yer alan $\hat{\theta}_{MO, BR\ddot{O}}$ ve $\hat{\mu}_{MO, BR\ddot{O}}$ tahmin edicileri sırası ile θ ve μ 'nün BRÖ'ye dayalı MO tahmin edicileridir. Sistem güvenilirliği R tahmini için ilk olarak bu tahmin edicilerin bulunması gerekmektedir. Bu amaç ile θ ve μ 'ya ait olabilirlik fonksiyonu,

$$L(\theta, \mu) = \frac{1}{\theta^{n_x} \mu^{n_y}} \prod_{i=1}^{n_x} e^{-\frac{x_i}{\theta}} - \prod_{j=1}^{n_y} e^{-\frac{y_j}{\mu}} \quad (3.3)$$

olarak bulunur. Denklem (3.3)'nin logaritmasının alınması ile oluşturulan log-olabilirlik fonksiyonu ise

$$\ln L(\theta, \mu) = n_x \ln \theta + n_y \ln \mu - \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{n_x} x_i - \frac{1}{\mu} \sum_{j=1}^{n_y} y_j \quad (3.4)$$

şekindedir. (3.4)'teki log-olabilirlik fonksiyonunun θ ve μ 'ye göre kısmi türevleri alınarak oluşturulan denklemler ise

$$\frac{\partial \ln L(\theta, \mu)}{\partial \theta} = -\frac{n_x}{\theta} - \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^{n_x} x_i = 0 \quad (3.5)$$

ve

$$\frac{\partial \ln L(\theta, \mu)}{\partial \mu} = -\frac{n_y}{\mu} - \frac{1}{\mu^2} \sum_{j=1}^{n_y} y_j = 0 \quad (3.6)$$

olarak elde edilir. Yukarıda gösterilen (3.5) ve (3.6) denklemlerinin BRÖ'ye dayalı MO yöntemi yardımıyla çözülmesi ile θ ve μ 'nün tahmin edicileri $\hat{\theta}_{MO, BRÖ}$ ve $\hat{\mu}_{MO, BRÖ}$ sırası ile

$$\hat{\theta}_{MO, BRÖ} = \frac{1}{n_x} \sum_{i=1}^{n_x} x_i = \bar{x} \quad (3.7)$$

ve

$$\hat{\mu}_{MO, BRÖ} = \frac{1}{n_y} \sum_{j=1}^{n_y} y_j = \bar{y} \quad (3.8)$$

olarak elde edilir. Bu tahmin edicilerin, bağımsız rastgele değişkenler olan X gücü ve Y stresinin örneklem ortalamasına eşit olduğu görülmektedir. Kısaca sistem güvenilirliği,

$$\hat{R}_{MO, BRÖ} = \frac{\bar{x}}{\bar{x} + \bar{y}} \quad (3.9)$$

ifadesi ile gösterilebilir. BRÖ ile elde edilen örneklemeler kullanılarak MO yöntemi ile R tahmini açık olarak çözülebildiğinden dolayı MMO yönteminin kullanılmasına gerek yoktur.

3.3. SKÖ Yöntemine Dayalı Sistem Güvenilirliği R Tahmini

Sistem güvenilirliği R tahminini ele alan bir çok çalışmada, X gücü ve Y stresinden çekilen bağımsız rastgele örneklemeler X_1, X_2, \dots, X_{n_x} ve Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_y} olmak üzere BRÖ yöntemi ile oluşturulmaktadır. Literatürde yer alan yeni çalışmalar da ise R tahmini için

SKÖ yöntemine dayalı olarak çekilen örneklemeler kullanılmaktadır bkz. [125][146][48][147]. Yapılan çalışmalarda SKÖ yöntemi kullanılarak yapılan sistem güvenilirliği R tahmininin BRÖ yöntemine göre daha etkin olduğu kanıtlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda bu bölümde, SKÖ ile elde edilen örneklemeler ile R tahmini üzerinde durulmuştur. İlk olarak, parametre tahmin yöntemlerinden MO yöntemi ile tahmini elde edilmiştir. MO denklemlerinin açık çözümü elde edilemediği durumda ise MMO yöntemi ile tahmini elde edilmiştir.

Bölüm 2’de kullanılan $[X_{(i)k}]$ ve $[Y_{(j)l}]$ notasyonları ile $X_{(i)ik}$ ve $Y_{(j)jl}$ notasyonları birbirine denktir. Ancak literatür ile uyumlu olması ve kolaylık açısından tezin bu ve bundan sonraki kısmında $X_{(i)ik}$ ifadesi yerine $X_{(i)k}$ ve $Y_{(j)jl}$ ifadesi yerine $Y_{(j)l}$ notasyonları kullanılmıştır.

3.3.1. Sistem Güvenilirliği R ’nin MO Tahmin Edicisi

Birbirinden bağımsız rastgele değişkenler $X \sim \text{Üstel}(\theta)$ ve $Y \sim \text{Üstel}(\mu)$ olmak üzere, SKÖ yöntemi ile elde edilen örneklemeler,

$X_{(i)ik}, i = 1, 2, \dots, m_x; k = 1, 2, \dots, r_x$, k.döngüdeki i . kümeden i . sıralı istatistiği,

$Y_{(j)jl}, j = 1, 2, \dots, m_y; l = 1, 2, \dots, r_y$, l . Döngüdeki j . kümeden j . sıralı istatistiği,

şeklinde gösterilmektedir. Sırasıyla X gücü ve Y stresi için küme boyutu m_x ve m_y ve döngü sayısı r_x ve r_y olarak gösterilir. Örneklem boyutu, X için $n_x = m_x r_x$ ve Y için $n_y = m_y r_y$ olmak üzere hesaplanır. SKÖ ile elde edilen birbirinden bağımsız örneklemelere ilişkin olasılık yoğunluk fonksiyonları,

$$f_{(i)}(x_{(i)k}) = \frac{m_x!}{(i-1)!(m_x-i)!} f(x_{(i)k}) [F(x_{(i)k})]^{i-1} [1 - F(x_{(i)k})]^{m_x-i},$$

$$g_{(j)}(y_{(j)l}) = \frac{m_y!}{(j-1)!(m_y-j)!} g(y_{(j)l}) [G(y_{(j)l})]^{j-1} [1 - G(y_{(j)l})]^{m_y-j} \quad (3.10)$$

olarak tanımlanır. Sistem güvenilirliğinin MO yöntemi ile tahmini için öncelik olarak θ ve μ parametrelerinin tahmin edicilerini bulmak gerekmektedir. Bu doğrultuda olabirlik fonksiyonu,

$$\begin{aligned} L(\theta, \mu) &= \prod_{k=1}^{r_x} \prod_{i=1}^{m_x} f_{(i)}(x_{(i)k}) \prod_{l=1}^{r_y} \prod_{j=1}^{m_y} g_{(j)}(y_{(j)l}) \\ &= \frac{C}{\theta^{n_x} \mu^{n_y}} \prod_{k=1}^{r_x} \prod_{i=1}^{m_x} \left(1 - e^{-\frac{x_{(i)k}}{\theta}}\right)^{i-1} e^{-\frac{(m_x-i+1)x_{(i)k}}{\theta}} \\ &\quad \prod_{l=1}^{r_y} \prod_{j=1}^{m_y} \left(1 - e^{-\frac{y_{(j)l}}{\mu}}\right)^{j-1} e^{-\frac{(m_y-j+1)y_{(j)l}}{\mu}} \end{aligned} \quad (3.11)$$

olarak elde edilir. Buradaki $C = \prod_{k=1}^{r_x} \prod_{i=1}^{m_x} \frac{m_x!}{(i-1)!(m_x-i)!} \prod_{l=1}^{r_y} \prod_{j=1}^{m_y} \frac{m_y!}{(j-1)!(m_y-j)!}$ olmak üzere bir sabittir. Denklem (3.11)'nin logaritmasının alınması ile oluşturulan log-olabirlik fonksiyonu ise

$$\begin{aligned} \ln L(\theta, \mu) &= \ln C - n_x \ln \theta - n_y \ln \mu \\ &+ \sum_{k=1}^{r_x} \sum_{i=1}^{m_x} (i-1) \ln \left(1 - e^{-\frac{x_{(i)k}}{\theta}}\right) - \sum_{l=1}^{r_y} \sum_{j=1}^{m_y} \frac{(m_x-i+1)x_{(i)k}}{\theta} \\ &+ \sum_{l=1}^{r_y} \sum_{j=1}^{m_y} (j-1) \ln \left(1 - e^{-\frac{y_{(j)l}}{\mu}}\right) - \sum_{l=1}^{r_y} \sum_{j=1}^{m_y} \frac{(m_y-j+1)y_{(j)l}}{\mu} \end{aligned} \quad (3.12)$$

biçiminde gösterilir. (3.12)'deki Log-olabirlik denkleminin θ parametresine göre 1. ve 2. Dereceden kısmi türevleri sırasıyla aşağıda gösterildiği gibidir.

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \frac{1}{\theta^2} \sum_{k=1}^{r_x} \sum_{i=1}^{m_x} (m_x - i + 1) x_{(i)k} - \frac{1}{\theta^2} \sum_{k=1}^{r_x} \sum_{i=1}^{m_x} \frac{(i-1)x_{(i)k}}{e^{-\frac{x_{(i)k}}{\theta}} - 1} - \frac{n_x}{\theta} = 0 \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2} = -\frac{2}{\theta^3} + \frac{1}{\theta^4} \sum_{k=1}^{r_x} \sum_{i=1}^{m_x} \frac{(i-1)x_{(i)k} \left(2\theta \left(e^{\frac{x_{(i)k}}{\theta}} - 1 \right) - x_{(i)k} e^{\frac{x_{(i)k}}{\theta}} \right)}{e^{\frac{x_{(i)k}}{\theta}} - 1} + \frac{n_x}{\theta^2} \quad (3.14)$$

Aynı şekilde (3.12) denkleminin μ parametresine göre 1. ve 2. Dereceden kısmi türevi aşağıda gösterildiği gibidir.

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \frac{1}{\mu^2} \sum_{l=1}^{r_y} \sum_{j=1}^{m_y} (m_y - j + 1) y_{(j)l} - \frac{1}{\mu^2} \sum_{l=1}^{r_y} \sum_{j=1}^{m_y} \frac{(j-1)y_{(j)l}}{e^{\frac{y_{(j)l}}{\mu}} - 1} - \frac{n_y}{\mu} = 0 \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \mu^2} = -\frac{2}{\mu^3} + \frac{1}{\mu^4} \sum_{l=1}^{r_y} \sum_{j=1}^{m_y} \frac{(j-1)y_{(j)l} \left(2\mu \left(e^{\frac{y_{(j)l}}{\mu}} - 1 \right) - y_{(j)l} e^{\frac{y_{(j)l}}{\mu}} \right)}{e^{\frac{y_{(j)l}}{\mu}} - 1} - \frac{n_y}{\mu^2} = 0 \quad (3.16)$$

Denklem (3.13) ve (3.14)'ün çözülmesi ile SKÖ yöntemine bağlı olarak θ ve μ parametrelerinin MO tahmin edicileri elde edilir. Bu $\hat{\theta}_{MO,SKÖ}$ ve $\hat{\mu}_{MO,SKÖ}$ tahmin ediciler kullanılarak oluşturulan sistem güvenilirliği R 'nin MO tahmin edicisi ise,

$$\hat{R}_{MO,SKÖ} = \frac{\hat{\theta}_{MO,SKÖ}}{\hat{\theta}_{MO,SKÖ} + \hat{\mu}_{MO,SKÖ}} \quad (3.17)$$

olarak elde edilir.

Teorem 1. SKÖ yöntemi ile verilen her düzende, sistem güvenilirliği R 'nin tahmin edicisi olan $\hat{R}_{MO,SKÖ}$ tektir ve hesaplanabilmektedir.

Tanıt 1. SKÖ yöntemine dayalı θ parametresinin MO tahmin edicisi $\hat{\theta}_{MO,SKÖ}$ için, (3.13) eşitliğini sıfıra eşitlediğimizde,

$$w(\theta) = \sum_{k=1}^{r_x} \sum_{i=1}^{m_x} (m_x - i + 1) x_{(i)k} - \sum_{k=1}^{r_x} \sum_{i=1}^{m_x} \frac{(i-1)x_{(i)k}}{e^{\frac{x_{(i)k}}{\theta}} - 1} - n_x \theta = 0 \quad (3.18)$$

denklemini elde edilmektedir. (3.18) denkleminin türevinin alınması ile aşağıdaki denklem elde edilir.

$$w'(\theta) = \frac{1}{\theta^2} \left[- \sum_{k=1}^{r_x} \sum_{i=1}^{m_x} \frac{(i-1)x_{(i)k}^2 e^{\frac{x_{(i)k}}{\theta}}}{\left(e^{\frac{x_{(i)k}}{\theta}} - 1 \right)^2} - n_x \theta \right] < 0 \quad (3.19)$$

Ek olarak,

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} w(\theta) > 0$$

ve

$$\lim_{\theta \rightarrow +\infty} w(\theta) < 0$$

olarak gösterilebilir. (3.13) denklemin çözümü tek bir kök içerir ve bu kök θ parametresinin MO tahmin edicisi olan $\hat{\theta}_{MO,SKÖ}$ 'yı vermektedir. Teorem 1'in kanıtlanmasından dolayı $\hat{\theta}_{MO,SKÖ}$ vardır ve hesaplanabilmektedir. Aynı şekilde, SKÖ yöntemine dayalı μ parametresinin MO tahmin edicisi $\hat{\mu}_{MO,SKÖ}$ için, (3.15) denklemi $\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = 0$ olarak eşitlediğimizde,

$$h(\mu) = \sum_{l=1}^{r_y} \sum_{j=1}^{m_y} (m_y - j + 1) y_{(j)l} - \sum_{l=1}^{r_y} \sum_{j=1}^{m_y} \frac{(j-1)y_{(j)l}}{e^{\frac{y_{(j)l}}{\mu}} - 1} - n_y \mu = 0 \quad (3.20)$$

denklemini elde edilmektedir. θ parametresinin MO tahmin edicisini bulmak için uygulanan benzer işlemler tekrarlandığında, SKÖ yöntemine dayalı olarak μ için MO tahmin edicisi $\hat{\mu}_{MO,SKÖ}$ bulunmaktadır.

Yukarıda anlatıldığı üzere, θ ve μ parametrelerinin MO tahmin edicileri, denklem (3.13) ve (3.15)'in çözülmesi ile elde edilir. Fakat bu denklemlerde doğrusallık içermeyen ifadeler yer alması nedeniyle açık çözümü bulunmamaktadır. Bundan dolayı, ikinci bir alternatif yöntem olan MMO yöntemine başvurmak mecburidir. Nanda ve Maharota [134] tarafından önerilen MMO yöntemi ile doğrusal olmayan

$$t_1(x) = \sum_{k=1}^{r_x} \sum_{i=1}^{m_x} \frac{(i-1)x_{(i)k}}{e^{\frac{x_{(i)k}}{\theta}} - 1}$$

ve

$$t_2(y) = \sum_{l=1}^{r_y} \sum_{j=1}^{m_y} \frac{(j-1)y_{(j)l}}{e^{\frac{y_{(j)l}}{\mu}} - 1}$$

fonksiyonlarının yerine beklenen değerleri hesaplanarak konulacaktır. SKÖ yöntemi kullanılarak θ ve μ parametrelerinin MO tahmin edicileri sırası ile $\hat{\theta}_{MO,SKÖ}$ ve $\hat{\mu}_{MO,SKÖ}$ olmak üzere, sistem güvenilirliği R 'nin MO tahmini aşağıdaki gibidir.

$$\hat{R}_{MO,SKÖ} = \frac{\hat{\theta}_{MO,SKÖ}}{\hat{\theta}_{MO,SKÖ} + \hat{\mu}_{MO,SKÖ}} \quad (3.21)$$

3.3.2. Sistem Güvenilirliği R 'nin MMO Tahmin Edicisi

(3.13) ve (3.15) denklemlerinin tek kökü, θ ve μ parametrelerinin MO tahmin edicileridir. Fakat bu denklemlerde

$$t_1(x) = \sum_{k=1}^{r_x} \sum_{i=1}^{m_x} \frac{(i-1)x_{(i)k}}{e^{\frac{x_{(i)k}}{\theta}} - 1}$$

ve

$$t_2(y) = \sum_{l=1}^{r_y} \sum_{j=1}^{m_y} \frac{(j-1)y(j)l}{e^{\frac{y(j)l}{\mu}} - 1}$$

olmak üzere doğrusal olmayan fonksiyonlar yer almaktadır. Dolayısıyla analitik olarak bir sonuç elde edilememektedir. Maharota ve Nanda[148] tarafından önerilen MMO yöntemi ile $t_1(x)$ ve $t_2(y)$ fonksiyonlarının beklenen değerleri yerine konularak θ ve μ parametrelerinin MMO tahmin edicileri $\hat{\theta}_{MMO,SKÖ}$ ve $\hat{\mu}_{MMO,SKÖ}$ kapalı formda elde edilecektir. Bu durumda, (3.13) denkleminde doğrusal olmayan ifadenin beklenen değeri,

$$\begin{aligned} E\left(\frac{x_{(i)k}}{e^{\frac{x_{(i)k}}{\theta}} - 1}\right) &= \int_0^{\infty} \frac{x_{(i)k}}{e^{\frac{x_{(i)k}}{\theta}} - 1} f_i(x_{(i)k}) dx_{(i)k} \\ &= \frac{m_x!}{\theta(i-1)!(m_x-i)!} \int_0^{\infty} x_{(i)k} (1 - e^{-\frac{x_{(i)k}}{\theta}})^{i-2} e^{-(m_x-i+2)\frac{x_{(i)k}}{\theta}} dx_{(i)k} \\ &= \frac{m_x!}{\theta(i-1)!(m_x-i)!} \sum_{s=0}^{i-2} \binom{i-2}{s} (-1)^{i-2-s} \int_0^{\infty} x_{(i)k} e^{-\frac{(m_x-s)x_{(i)k}}{\theta}} dx_{(i)k} \\ &= C_{m_x,i} * \sum_{s=0}^{i-2} C_{i,s} \end{aligned} \quad (3.22)$$

biçimindedir. Burada $C_{m_x,i} = \frac{m_x!}{(i-1)!(m_x-i)!}$ ve $C_{i,s} = \frac{\binom{i-2}{s} (-1)^{i-2-s}}{(m_x-s)^2}$ olarak gösterilir. (3.3).

denkleminde yer alan $\frac{x_{(i)k}}{e^{\frac{x_{(i)k}}{\theta}} - 1}$ ifadesi yerine bu ifadenin beklenen değeri koyulduğunda θ

için MMO tahmin edicisi $\hat{\theta}_{MMO,SKÖ}$ aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\hat{\theta}_{MMO,SKÖ} = \frac{\sum_{k=1}^{r_x} \sum_{i=1}^{m_x} (m_x-i+1)x_{(i)k}}{n_x+r_x \sum_{i=2}^{m_x} \sum_{s=0}^{i-2} (i-1)C_{m_x,i}C_{i,s}} \quad (3.23)$$

Mutlak vd. [111] $\sum_{i=2}^{m_x} \sum_{s=0}^{i-2} (i-1) C_{m_x, i} C_{i, s} = \frac{1}{4} m_x (m_x - 1)$ ifadelerinin eşit olduğunu göstermiştir. Bu eşitliği denklemde yerine yazdığımızda $\hat{\theta}_{MMO,SKÖ}$ kısaca şu şekilde gösterilir.

$$\hat{\theta}_{MMO,SKÖ} = \frac{\sum_{k=1}^{r_x} \sum_{i=1}^{m_x} (m_x - i + 1) x_{(i)k}}{\frac{1}{4} n_x (m_x + 3)} \quad (3.24)$$

Benzer işlemler kullanılarak $\hat{\mu}_{MMO,SKÖ}$ ise aşağıdaki gibi bulunur.

$$\hat{\mu}_{MMO,SKÖ} = \frac{\sum_{l=1}^{r_y} \sum_{j=1}^{m_y} (m_y - j + 1) y_{(j)l}}{\frac{1}{4} n_y (m_y + 3)} \quad (3.25)$$

Teorem 2. $\hat{\theta}_{MMO,SKÖ}$, θ parametresi için yansız bir tahmin edicidir.

Tanıt 2. X_j , θ parametresi ile Üstel dağılımdan gelen m_x örneklem boyutlu BRÖ ile çekilen j . sıralı istatistiği olsun. $E(X_i) = \sum_{j=1}^i \frac{E(X_j)}{m_x - j + 1}$ olmak üzere bkz, [144].

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{k=1}^{r_x} \sum_{i=1}^{m_x} (m_x - i + 1) X_{(i)k}\right] &= r_x \sum_{i=1}^{m_x} (m_x - i + 1) E(X_i) \\ &= r_x \theta \sum_{i=1}^{m_x} \sum_{j=1}^i \frac{(m_x - i + 1)}{m_x - j + 1} \end{aligned} \quad (3.26)$$

olarak gösterilir. Bundan dolayı,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m_x} \sum_{j=1}^i \frac{(m_x - i + 1)}{m_x - j + 1} &= \\ &= 1 + \left(\frac{m_x - 1}{m_x} + 1\right) + \left(\frac{m_x - 2}{m_x} + \frac{m_x - 2}{m_x - 1} + 1\right) + \left(\frac{m_x - 3}{m_x} + \frac{m_x - 3}{m_x - 1} + \frac{m_x - 3}{m_x - 2} + 1\right) + \dots + \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\left(\frac{1}{m_x} + \frac{1}{m_x-1} + \frac{1}{m_x-2} + 1\right) = \frac{1}{4}m_x(m_x + 3)$$

olduğu net bir şekilde gözükmektedir. Denklem (3.26) ve (3.27)'yi yerine yazdığımızda,

$$E\left[\sum_{k=1}^{r_x} \sum_{i=1}^{m_x} (m_x - i + 1)X_{(i)k}\right] = \frac{1}{4}\theta m_x(m_x + 3) \quad (3.28)$$

eşitliği elde edilir. Yani, $E(\hat{\theta}_{MMO,SKÖ}) = \theta$ olduğu için $\hat{\theta}_{MMO,SKÖ}$, θ için yansız bir tahmin edicidir. Benzer işlemler uygulandığında, $\hat{\mu}_{MMO,SKÖ}$ 'nın da μ için yansız bir tahmin edicisi olduğunu söylemek mümkündür, bkz [111].

Böylece $\hat{\theta}_{MMO,SKÖ}$ ve $\hat{\mu}_{MMO,SKÖ}$ kullanılarak oluşturulan sistem güvenilirliği R 'nin SKÖ'ne dayalı MMO tahmin edicisi aşağıdaki gibidir.

$$\hat{R}_{MMO,SKÖ} = \frac{\hat{\theta}_{MMO,SKÖ}}{\hat{\theta}_{MMO,SKÖ} + \hat{\mu}_{MMO,SKÖ}} \quad (3.29)$$

4. MODİFİYE EDİLMİŞ SKÖ YÖNTEMLERİNE DAYALI R TAHMİNİ

4.1. HUSKÖ'ye Dayalı Sistem Güvenilirliği R Tahmini

HUSKÖ yöntemi, ilk kez Al-Odat ve Al-Saleh [12] tarafından önerilmiştir. Özellikle büyük küme boyutuna sahip örneklem oluşturulurken sıralamada hata yapılması daha kolay hale gelmektedir. HUSKÖ yönteminin ana fikri, maksimum ve minimum sıralı istatistiklerinin belirlenmesinin ara sıralı istatistiklerin belirlenmesinden çok daha kolay olmasıdır [115]. Bu sebeplerden dolayı, HUSKÖ yöntemi SKÖ yöntemine alternatif olarak geliştirilmiştir.

Literatürde, HUSKÖ yöntemi ile örneklem seçme adımları farklılık göstermektedir. Al-Saleh ve Al-Hadhrami [41] yaptığı çalışmada, HUSKÖ ile örneklem seçerken $X_{(i)ik}$ maksimum sıralı istatistikleri ve $X_{(1)ik}$ minimum sıralı istatistikleri kullanılarak, küme boyutu m ve döngü sayısı r olmak üzere, örneklem boyutu $n = 2mr$ olacak şekilde parametrik olarak üstel dağılım varsayımı altında MO ve MMO tahmin edicilerini araştırmıştır. Benzer şekilde HUSKÖ yöntemi ile örneklem seçerken aynı adımları izleyen çalışmalar için bkz. [58][42][149].

Tez kapsamında, Abdallah vd. [115] tarafından yapılan çalışma baz alınarak HUSKÖ tip 1 ve HUSKÖ tip 2 yöntemi ile örneklem birimleri seçilmiştir. Bu yöntem ile örneklem seçme aşamaları Bölüm 2.2.5.3'de anlatılmıştır.

Bu bölümde, ilk olarak HUSKÖ tip 1 yöntemine ve HUSKÖ tip 2 yöntemine dayalı olarak sistem güvenilirliğinin tahmin edicisi \hat{R} 'nin MO elde edilmiştir. Daha sonra, HUSKÖ tip 1 yöntemine dayalı olarak R 'nin MMO tahmin edicisi elde edilmiştir.

4.1.1. Sistem Güvenilirliği R 'nin MO Tahmin Edicisi

Literatürde genellikle, n örneklem boyutuna sahip $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ birimleri olmak üzere HUSKÖ yöntemi ile elde edilen sıralı istatistikler $X_{(1:n)}, X_{(2:n)}, \dots, X_{(n:n)}$ notasyonları ile gösterilmektedir. Tez kapsamında, döngü sayısı r ve küme boyutu m olmak üzere bu notasyonlar karışıklık yaratmaktadır. Bu çalışma içerisinde notasyon birliği sağlanması açısından HUSKÖ tip 1 yöntemine dayalı örneklemeler $X_{(1)1k}, X_{(2)2k}, \dots, X_{(m)mk}$ ve HUSKÖ tip 2 yöntemine dayalı örneklemeler $X_{(1)1k}, X_{(1)2k}, \dots, X_{(1)mk}$ olarak gösterilecektir.

4.1.1.1. HUSKÖ Tip 1 Yöntemine Dayalı R 'nin MO Tahmin Edicisi

Birbirinden bağımsız rastgele değişkenler $X \sim \text{Üstel}(\theta)$ ve $Y \sim \text{Üstel}(\mu)$ olmak üzere, sırasıyla HUSKÖ tip 1 yöntemi ile elde edilen örneklemeler,

$X_{(i)ik}, i = 1, 2, \dots, m_x; k = 1, 2, \dots, r_x$, k . döngüdeki i . kümeden i . sıralı istatistiği (maksimum),

$Y_{(j)jl}, j = 1, 2, \dots, m_y; l = 1, 2, \dots, r_y$, l . döngüdeki j . kümeden j . sıralı istatistiği (maksimum),

şeklinde gösterilmektedir. X için küme boyutu m_x olmak üzere, istenilen örneklem boyutu $n_x = m_x r_x$ olana kadar döngü sayısı r_x kadar tekrar edilebilir. Aynı şekilde Y için küme boyutu m_y olmak üzere, tercih edilen örneklem boyutuna ulaşmak için $n_y = m_y r_y$ olana kadar r_y kez tekrar edilebilir. HUSKÖ tip 1 ile elde edilen birbirinden bağımsız örneklemelere ilişkin olasılık yoğunluk fonksiyonları,

X gücü için,

$$f_{(i)}(x_{(i)ik}) = if(x_{(i)ik})[F(x_{(i)ik})]^{i-1},$$

Y stresi için,

$$g_{(j)}(y_{(j)jl}) = jg(y_{(j)jl})[G(y_{(j)jl})]^{j-1}, \quad (4.1)$$

olarak elde edilir. İlk olarak, θ ve μ 'nün MO tahmin edicilerini elde edilmesi gereklidir. Bu amaç doğrultusunda olabilirlik fonksiyonu aşağıda gösterildiği gibidir.

$$L(\theta, \mu) = \prod_{k=1}^{r_x} \prod_{i=1}^{m_x} i f(x_{(i)ik}) [F(x_{(i)ik})]^{i-1} \\ \prod_{l=1}^{r_y} \prod_{j=1}^{m_y} j g(y_{(j)jl}) [G(y_{(j)jl})]^{j-1} \quad (4.2)$$

olmak üzere oyf. ve df. yerine konulması ile

$$L(\theta, \mu) = \prod_{k=1}^{r_x} \prod_{i=1}^{m_x} i \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x_{(i)ik}}{\theta}} \left[1 - e^{-\frac{x_{(i)ik}}{\theta}} \right]^{i-1} \\ \prod_{l=1}^{r_y} \prod_{j=1}^{m_y} j \frac{1}{\mu} e^{-\frac{y_{(j)jl}}{\mu}} \left[1 - e^{-\frac{y_{(j)jl}}{\mu}} \right]^{j-1} \quad (4.3)$$

olabilirlik denklemi elde edilir. Denklem (4.3)'nin logaritmasının alınması ile oluşturulan log-olabilirlik denklemi ise

$$\ln L(\theta, \mu) = \ln C - n_x \ln \theta - n_y \ln \mu \\ - \sum_{l=1}^{r_y} \sum_{j=1}^{m_y} \frac{y_{(j)jl}}{\mu} + \sum_{k=1}^{r_x} \sum_{i=1}^{m_x} (i-1) \ln \left(1 - e^{-\frac{x_{(i)ik}}{\theta}} \right) \\ - \sum_{l=1}^{r_y} \sum_{j=1}^{m_y} \frac{y_{(j)jl}}{\mu} + \sum_{l=1}^{r_y} \sum_{j=1}^{m_y} (j-1) \ln \left(1 - e^{-\frac{y_{(j)jl}}{\mu}} \right) \quad (4.4)$$

Denklem (4.4)'deki log-olabilirlik denkleminin sırasıyla θ ve μ parametrelerine göre kısmi türevleri aşağıdaki gibidir.

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \frac{1}{\theta^2} \sum_{k=1}^{r_x} \sum_{i=1}^{m_x} x_{(i)ik} - \frac{1}{\theta^2} \sum_{k=1}^{r_x} \sum_{i=1}^{m_x} \frac{(i-1)x_{(i)ik}}{e^{\frac{x_{(i)ik}}{\theta}} - 1} - \frac{n_x}{\theta} \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \frac{1}{\mu^2} \sum_{l=1}^{r_y} \sum_{j=1}^{m_y} y_{(j)jl} - \frac{1}{\mu^2} \sum_{l=1}^{r_y} \sum_{j=1}^{m_y} \frac{(j-1)y_{(j)jl}}{e^{\frac{y_{(j)jl}}{\mu}} - 1} - \frac{n_y}{\mu} \quad (4.6)$$

(4.5) ve (4.6)'deki denklemlerin çözülmesi ile θ ve μ parametrelerinin MO tahmin edicileri elde edilir. Bu $\hat{\theta}_{MO,HUSK\ddot{O}tip1}$ ve $\hat{\mu}_{MO,HUSK\ddot{O}tip1}$ tahmin edicileri kullanılarak oluşturulan sistem güvenilirliği R 'nin MO tahmin edicisi ise,

$$\hat{R}_{MO,HUSK\ddot{O}tip1} = \frac{\hat{\theta}_{MO,HUSK\ddot{O}tip1}}{\hat{\theta}_{MO,HUSK\ddot{O}tip1} + \hat{\mu}_{MO,HUSK\ddot{O}tip1}}$$

olarak elde edilir.

Teorem 3. HUSKÖ tip 1 yöntemi ile sistem güvenilirliği R 'nin tahmin edicisi olan $\hat{R}_{MO,HUSK\ddot{O}tip1}$ tektir ve hesaplanabilmektedir.

Tanıt 3. HUSKÖ tip 1 yöntemine dayalı θ parametresinin MO tahmin edicisi $\hat{\theta}_{MO,HUSK\ddot{O}tip1}$ için, (4.5) 'deki denklemden,

$$\frac{1}{\theta^2} \left[\sum_{k=1}^{r_x} \sum_{i=1}^{m_x} x_{(i)ik} - \sum_{k=1}^{r_x} \sum_{i=1}^{m_x} \frac{(i-1)x_{(i)ik}}{e^{\frac{x_{(i)ik}}{\theta}} - 1} - n_x \theta \right] = 0 \quad (4.7)$$

olarak tanımladığımızda,

$$w1(\theta) = \left[\sum_{k=1}^{r_x} \sum_{i=1}^{m_x} x_{(i)ik} - \sum_{k=1}^{r_x} \sum_{i=1}^{m_x} \frac{(i-1)x_{(h_i)k}}{e^{\frac{x_{(h_i)k}}{\theta}} - 1} - n_x \theta \right] = 0 \quad (4.8)$$

elde edilir. (4.8)'in θ 'ya göre türevi alınarak oluşturulan denklem aşağıdaki gibidir.

$$w1'(\theta) = - \sum_{k=1}^{r_x} \sum_{i=1}^{m_x} \frac{(i-1)x_{(i)ik}^2 e^{-\frac{x_{(i)ik}}{\theta}}}{\theta^2 \left(e^{\frac{x_{(i)ik}}{\theta}} - 1 \right)^2} - n_x < 0 \quad (4.9)$$

Ek olarak,

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} w1(\theta) > 0$$

ve

$$\lim_{\theta \rightarrow +\infty} w1(\theta) < 0$$

olarak gösterilebilir. (4.8)'den elde edilen tek bir kök vardır ve θ 'nın MO tahmin edicisi olan $\hat{\theta}_{MO,HUSK\ddot{o}tip1}$ 'yi vermektedir. $\hat{\theta}_{MO,HUSK\ddot{o}tip1}$ tektir ve hesaplanabilmektedir.

Aynı şekilde, HUSKÖ tip 1 yöntemine dayalı μ parametresinin MO tahmin edicisi $\hat{\mu}_{MO,HUSK\ddot{o}tip1}$ için, (4.6) denkleminde elde edilen $\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = 0$ olarak eşitlediğimizde,

$$h1(\mu) = \sum_{l=1}^{r_y} \sum_{j=1}^{m_y} y_{(j)jl} - \sum_{l=1}^{r_y} \sum_{j=1}^{m_y} \frac{(j-1)y_{(j)jl}}{e^{\frac{y_{(j)jl}}{\mu}} - 1} - n_y \mu = 0 \quad (4.10)$$

elde edilmektedir. μ 'nün MO tahmin edicisi için benzer işlemler tekrarlandığında, $\hat{\mu}_{MO,HUSK\ddot{o}tip1}$ bulunmaktadır.

Yukarıda anlatıldığı üzere, θ ve μ parametrelerinin MO tahmin edicileri, (4.8) ve (4.10) denklemlerinden elde edilir. Fakat bu denklemlerin analitik olarak çözümü mevcut değildir. HUSKÖ tip 1 yöntemine dayalı olarak θ ve μ 'nün MO tahmin edicileri sırası ile $\hat{\theta}_{MO,HUSKÖtip1}$ ve $\hat{\mu}_{MO,HUSKÖtip1}$ olmak üzere, sistem güvenilirliği R 'nin MO tahmini aşağıdaki gibidir.

$$\hat{R}_{MO,HUSKÖtip1} = \frac{\hat{\theta}_{MO,HUSKÖtip1}}{\hat{\theta}_{MO,HUSKÖtip1} + \hat{\mu}_{MO,HUSKÖtip1}} \quad (4.11)$$

4.1.1.2. HUSKÖ Tip 2 Yöntemine Dayalı R 'nin MO Tahmin Edicisi

Birbirinden bağımsız rastgele değişkenler $X \sim \text{Üstel}(\theta)$ ve $Y \sim \text{Üstel}(\mu)$ olmak üzere, sırasıyla HUSKÖ tip 2 yöntemi ile elde edilen örneklemeler,

$X_{(1)ik}, i = 1, 2, \dots, m_x \quad k = 1, 2, \dots, r_x$, k . döngüdeki i .kümeden 1.sıralı istatistiği (minimum).

$Y_{(1)jl}, j = 1, 2, \dots, m_y; l = 1, 2, \dots, r_y$, l . döngüdeki j .kümeden 1.sıralı istatistiği (minimum).

şeklinde gösterilmektedir. X için küme boyutu m_x olmak üzere, istenilen örneklem boyutu $n_x = m_x r_x$ olana kadar döngü sayısı r_x kadar tekrar edilebilir. Aynı şekilde Y için küme boyutu m_y olmak üzere, tercih edilen örneklem boyutuna ulaşmak için $n_y = m_y r_y$ olana kadar r_y kez tekrar edilebilir. HUSKÖ tip 2 ile elde edilen birbirinden bağımsız örneklemelere ilişkin olasılık yoğunluk fonksiyonları,

$$f_{(1)}(x_{(1)ik}) = if(x_{(1)ik})[1 - F(x_{(1)ik})]^{i-1}$$

$$g_{(1)}(y_{(1)jl}) = jg(y_{(1)jl})[1 - G(y_{(1)jl})]^{j-1}. \quad (4.12)$$

olarak elde edilir. İlk olarak, θ ve μ 'nün MO tahmin edicilerini elde edilmesi gereklidir. Bu amaç doğrultusunda olabirlik fonksiyonu aşağıda gösterildiği gibidir.

$$L(\theta, \mu) = \prod_{k=1}^{r_x} \prod_{i=1}^{m_x} i f(x_{(1)ik}) [1 - F(x_{(1)ik})]^{i-1} \prod_{l=1}^{r_y} \prod_{j=1}^{m_y} j f(y_{(1)jl}) [1 - F(y_{(1)jl})]^{j-1} \quad (4.13)$$

olmak üzere oyf. ve df. yerine konulması ile

$$L(\theta, \mu) = L(\theta, \mu) = \prod_{k=1}^{r_x} \prod_{i=1}^{m_x} i \frac{1}{\theta} e^{-\frac{ix_{(1)ik}}{\theta}} \prod_{l=1}^{r_y} \prod_{j=1}^{m_y} j \frac{1}{\mu} e^{-\frac{jy_{(1)jl}}{\mu}} \quad (4.14)$$

olabirlik denklemi elde edilir. Denklem (4.13)'ün logaritmasının alınması ile oluşturulan log-olabirlik denklemi ise

$$\ln L(\theta, \mu) = \ln L(\theta, \mu) = \ln C - n_x \ln \theta - n_y \ln \mu - \sum_{k=1}^{r_x} \sum_{i=1}^{m_x} \frac{ix_{(1)ik}}{\theta} - \sum_{l=1}^{r_y} \sum_{j=1}^{m_y} \frac{jy_{(1)jl}}{\mu} \quad (4.15)$$

(4.14)'ün logaritmasının alınması ile oluşturulan log-olabirlik fonksiyonunun sırasıyla θ ve μ parametrelerine göre kısmi türevleri aşağıdaki gibidir.

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \frac{1}{\theta^2} \sum_{k=1}^{r_x} \sum_{i=1}^{m_x} ix_{(1)ik} - \frac{n_x}{\theta} \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \frac{1}{\mu^2} \sum_{l=1}^{r_y} \sum_{j=1}^{m_y} jy_{(1)jl} - \frac{n_y}{\mu} \quad (4.17)$$

(4.16) ve (4.17)'deki denklemlerin çözülmesi ile θ ve μ parametrelerinin MO tahmin edicileri elde edilir. Bu tahmin ediciler kapalı formda elde edilebilmektedir. Sırasıyla θ ve μ parametrelerinin MO tahmin edicileri

$$\hat{\theta}_{MO,HUSK\ddot{ot}ip2} = \frac{1}{n_x} \sum_{k=1}^{r_x} \sum_{i=1}^{m_x} i x_{(1)ik} \quad (4.18)$$

ve

$$\hat{\mu}_{MO,HUSK\ddot{ot}ip2} = \frac{1}{n_y} \sum_{l=1}^{r_y} \sum_{j=1}^{m_y} j y_{(j)jl} \quad (4.19)$$

olarak elde edilir. Bu $\hat{\theta}_{MO,HUSK\ddot{ot}ip2}$ ve $\hat{\mu}_{MO,HUSK\ddot{ot}ip2}$ tahmin edicileri kullanılarak oluşturulan sistem güvenilirliği R 'nin MO tahmin edicisi ise,

$$\hat{R}_{MO,HUSK\ddot{ot}ip2} = \frac{\hat{\theta}_{MO,HUSK\ddot{ot}ip2}}{\hat{\theta}_{MO,HUSK\ddot{ot}ip2} + \hat{\mu}_{MO,HUSK\ddot{ot}ip2}} \quad (4.20)$$

olarak elde edilir.

Teorem 4: Üstel dağılım altında sıralı istatistiklerin dağılımı

$$X_{(i)ck} \stackrel{d}{=} \theta \sum_{t=1}^c \frac{Z_t}{i-t+1}, \quad c = 1, \dots, i \quad (4.21)$$

olarak gösterilmektedir. Yukarıda (4.21)'deki ifadede $Z_t, t = 1, \dots, i$ olmak üzere $X_{(i)ck}$, $\theta = 1$ parametresine sahip yani birebir aynı standart Üstel dağılan rastgele değişkenlerini ve $\stackrel{d}{=}$ ifadesi ise dağılımdaki eşitliği ifade etmektedir bknz [115]. Bu teori ilk kez Rényi [150] tarafından önerilmiştir. Daha fazlası için bknz. Arnold vd. [151].

Teorem 5: HUSKÖ tip 2'ye dayalı $\hat{\theta}_{MO,HUSKÖtip2}$ ve $\hat{\mu}_{MO,HUSKÖtip2}$ tahmin edicileri sırasıyla θ ve μ için yansız tahmin edicilerdir.

Tanıt 5: Arnold vd. [151] önerdiği Teorem 4 kullanılarak, $X_{(i)ck}$ rastgele değişkenlerinin beklenen değeri ve varyansı sırasıyla,

$$E(X_{(i)ck}) = \sum_{t=1}^c \frac{\theta}{i-t+1} \quad (4.22)$$

$$Var(X_{(i)ck}) = \sum_{t=1}^c \frac{\theta^2}{i-t+1}, t \leq i \quad (4.23)$$

elde edilir. Buradan $\hat{\theta}_{MO,HUSKÖtip2}$ tahmin edicisinin beklenen değeri,

$$E(\hat{\theta}_{MO,HUSKÖtip2}) = \frac{1}{n_x} \sum_{k=1}^{r_x} \sum_{i=1}^{m_x} i E(X_{(1)ik}) = \frac{1}{n_x} \sum_{k=1}^{r_x} \sum_{i=1}^{m_x} \theta = \theta \quad (4.24)$$

olarak elde edilir. Burada açıkça görülmektedir ki, $\hat{\theta}_{MO,HUSKÖtip2}$ tahmin edicisi θ 'nın yansız bir tahmin edicisidir. Aynı işlemler μ için tekrarlandığında, $\hat{\mu}_{MO,HUSKÖtip2}$ 'nin μ için yansız bir tahmin edicisi olduğu kanıtlanmış olur.

Teorem 6: HUSKÖ tip 2'ye dayalı $\hat{\theta}_{MO,HUSKÖtip2}$ ve $\hat{\mu}_{MO,HUSKÖtip2}$ tahmin edicileri sırasıyla θ ve μ için tutarlı tahmin edicilerdir.

Tanıt 6: $X_{(1)ik}$ sıralı istatistiği bağımsız olduğu için $\hat{\theta}_{MO,HUSKÖtip2}$ tahmin edicisinin varyansı,

$$Var(\hat{\theta}_{MO,HUSK\ddot{O}tip2}) = \frac{1}{n_x^2} \sum_{k=1}^{r_x} \sum_{i=1}^{m_x} i^2 Var(X_{(1)ik}) = \frac{1}{n_x^2} \sum_{k=1}^{r_x} \sum_{i=1}^{m_x} \theta^2 = \frac{\theta^2}{n_x^2} \quad (4.25)$$

olarak elde edilmektedir. Ek olarak,

$$\lim_{r_x, m_x \rightarrow \infty} Var(\hat{\theta}_{MO,HUSK\ddot{O}tip2}) \rightarrow 0$$

olur. Yukarıda uygulanan işlemler ile Teorem 5 ve Teorem 6 kanıtlanmıştır. Denklem (4.24) ve (4.25)'den açıkça $\hat{\theta}_{MO,HUSK\ddot{O}tip2}$ 'nin θ için yansız ve tutarlı bir tahmin edicisi olduğunu söylenir. Aynı işlemler $\hat{\mu}_{MO,HUSK\ddot{O}tip2}$ için tekrarlandığında Teorem 5 ve Teorem 6 kanıtlanmış olacaktır. Bu doğrultuda $\hat{\theta}_{MO,HUSK\ddot{O}tip2}$ ve $\hat{\mu}_{MO,HUSK\ddot{O}tip2}$ tahmin edicileri kullanılarak oluşturulan sistem güvenilirliği R 'nin MO tahmin edicisi aşağıdaki gibidir.

$$\hat{R}_{MO,HUSK\ddot{O}tip2} = \frac{\hat{\theta}_{MO,HUSK\ddot{O}tip2}}{\hat{\theta}_{MO,HUSK\ddot{O}tip2} + \hat{\mu}_{MO,HUSK\ddot{O}tip2}} \quad (4.26)$$

4.1.2. Sistem Güvenilirliği R 'nin MMO Tahmin Edicisi

Bu bölümde, sadece HUSKÖ tip 1 yöntemine dayalı R 'nin MMO tahmin edicileri elde edilmiştir. Bölüm 4.1.1.2.'de anlatılan HUSKÖ tip 2 yöntemine dayalı sistem güvenilirliği R 'nin MO tahmin edicisi analitik olarak hesaplanabildiği için MMO yöntemine başvurulmaya gerek yoktur.

4.1.2.1. HUSKÖ Tip 1 Yöntemine Dayalı R 'nin MMO Tahmin Edicisi

HUSKÖ tip 1 yöntemine dayalı R 'nin MMO tahmin edicileri (4.5) ve (4.6) denklemlerindeki doğrusal olmayan fonksiyonların beklenen değerleri bulunacak ve denklemde yerine yazılacaktır. Bu fonksiyonlar,

$$t_3(x) = \sum_{k=1}^{r_x} \sum_{i=1}^{m_x} \frac{(i-1)x_{(i)ik}}{e^{\frac{x_{(i)ik}}{\theta}} - 1} \quad (4.27)$$

ve

$$t_4(y) = \sum_{l=1}^{r_y} \sum_{j=1}^{m_y} \frac{(j-1)y_{(j)jl}}{e^{\frac{y_{(j)jl}}{\mu}} - 1} \quad (4.28)$$

olmak üzere beklenen değerleri aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır.

$$\begin{aligned} E \left(\sum_{k=1}^{r_x} \sum_{i=1}^{m_x} \frac{(i-1)x_{(i)ik}}{e^{\frac{x_{(i)ik}}{\theta}} - 1} \right) &= r_x \sum_{i=1}^{m_x} (i-1) E \left(\frac{x_{(i)ik}}{e^{\frac{x_{(i)ik}}{\theta}} - 1} \right) \\ &= \frac{r_x}{\theta} \sum_{i=1}^{m_x} i(i-1) \int_0^{\infty} x_{(i)ik} (1 - e^{-\frac{x_{(i)ik}}{\theta}})^{i-2} e^{-\frac{2x_{(i)ik}}{\theta}} dx_{(i)ik} \\ &= r_x \sum_{i=2}^{m_x} i(i-1) \left[\sum_{s=0}^{i-2} \binom{i-2}{s} (-1)^s \int_0^{\infty} \frac{x_{(i)ik}}{\theta} e^{-\frac{(2+s)x_{(i)ik}}{\theta}} dx_{(i)ik} \right] \\ &= r_x \sum_{i=2}^{m_x} \sum_{s=0}^{i-2} \theta i(i-1) (-1)^s (2+s)^{-2} \binom{i-2}{s} \\ &= r_x \sum_{i=2}^{m_x} \sum_{s=0}^{i-2} \theta i(i-1) C_{i,s} \end{aligned} \quad (4.29)$$

Burada $C_{i,s} = \frac{\binom{i-2}{s} (-1)^s}{(2+s)^2}$ olmak üzere (4.5)'de yer alan $\sum_{k=1}^{r_x} \sum_{i=1}^{m_x} \frac{(i-1)x_{(i)ik}}{e^{\frac{x_{(i)ik}}{\theta}} - 1}$ ifadesi

yerine $E \left(\sum_{k=1}^{r_x} \sum_{i=1}^{m_x} \frac{(i-1)x_{(i)ik}}{e^{\frac{x_{(i)ik}}{\theta}} - 1} \right)$ koyulduğunda θ 'nın HUSKÖ tip 1 yöntemine ilişkin

MMO tahmin edicisi $\hat{\theta}_{MMO,HUSKÖtip1}$ aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\hat{\theta}_{MMO,HUSKÖtip1} = \frac{\sum_{k=1}^{r_x} \sum_{i=1}^{m_x} x_{(i)ik}}{n_x + r_x \sum_{i=2}^{m_x} \sum_{s=0}^{i-2} i(i-1)C_{i,s}} \quad (4.30)$$

olarak elde edilir. Burada $C_{j,s} = \frac{\binom{j-2}{s}(-1)^s}{(2+s)^2}$ olmak üzere, benzer işlemler ile μ parametresi için HUSKÖ tip 1 yöntemine dayalı MMO tahmin edicisi $\hat{\mu}_{MMO,HUSKÖtip1}$ ise aşağıdaki gibi bulunur.

$$\hat{\mu}_{MMO,HUSKÖtip1} = \frac{\sum_{l=1}^{r_y} \sum_{j=1}^{m_y} y_{(j)jl}}{n_y + r_y \sum_{j=1}^{m_y} \sum_{s=0}^{j-2} j(j-1)C_{j,s}} \quad (4.31)$$

Denklem (4.29)'dan Teorem 4 kullanılarak,

$$\sum_{i=2}^{m_x} \sum_{s=0}^{i-2} i(i-1)C_{i,s} = \sum_{i=2}^{m_x} E(X_{(i)(i-1)k}) = \sum_{i=2}^{m_x} \sum_{t=1}^{i-1} \frac{1}{i-t+1} \quad (4.32)$$

olmaktadır. Böylece θ 'nın HUSKÖ tip 1 yöntemine ilişkin MMO tahmin edicisi $\hat{\theta}_{MMO,HUSKÖtip1}$,

$$\hat{\theta}_{MMO,HUSKÖtip1} = \frac{\sum_{k=1}^{r_x} \sum_{i=1}^{m_x} x_{(i)ik}}{n_x + r_x \sum_{i=2}^{m_x} \sum_{t=1}^{i-1} \frac{1}{i-t+1}} \quad (4.33)$$

olarak elde edilir. Teorem 4 kullanılarak, (4.32)'deki benzer işlemler μ için tekrarlandığında μ parametresi için HUSKÖ tip 1 yöntemine dayalı MMO tahmin edicisi $\hat{\mu}_{MMO,HUSKÖtip1}$,

$$\hat{\mu}_{MMO,HUSKÖtip1} = \frac{\sum_{l=1}^{r_y} \sum_{j=1}^{m_y} y_{(j)jl}}{n_y + r_y \sum_{j=1}^{m_y} \sum_{s=0}^{j-1} \frac{1}{j-t+1}} \quad (4.34)$$

olarak elde edilir. Böylece HUSKÖ tip 1 yöntemine dayalı $\hat{\theta}_{MMO,HUSKÖtip1}$ ve $\hat{\mu}_{MMO,HUSKÖtip1}$ tahmin edicileri kullanılarak elde edilen sistem güvenilirliği R 'nin MMO tahmin edicisi aşağıda gösterildiği gibidir.

$$\hat{R}_{MMO,HUSKÖtip1} = \frac{\hat{\theta}_{MMO,HUSKÖtip1}}{\hat{\theta}_{MMO,HUSKÖtip1} + \hat{\mu}_{MMO,HUSKÖtip1}} \quad (4.35)$$

Teorem 7: HUSKÖ tip 1'e dayalı $\hat{\theta}_{MMO,HUSKÖtip1}$ ve $\hat{\mu}_{MMO,HUSKÖtip1}$ tahmin edicileri sırasıyla θ ve μ için yansız tahmin edicilerdir.

Tanıt 7: Arnold vd. [151] önerdiği Teorem 4 kullanılarak, $X_{(i)ck}$ rastgele değişkenlerinin beklenen değeri ve varyansı sırasıyla,

$$E(X_{(i)ck}) = \sum_{t=1}^c \frac{\theta}{i-t+1} \quad (4.36)$$

ve

$$Var(X_{(i)ck}) = \sum_{t=1}^c \frac{\theta^2}{i-t+1}, t \leq i \quad (4.37)$$

elde edilir. Buradan $\hat{\theta}_{MMO,HUSKÖtip1}$ tahmin edicisinin beklenen değeri,

$$E(\hat{\theta}_{MMO,HUSKÖtip1}) = \theta \frac{r_x \sum_{i=1}^{m_x} \sum_{t=1}^i \frac{1}{i-t+1}}{n_x + r_x \sum_{i=2}^{m_x} \sum_{s=0}^{i-2} i(i-1) \binom{i-2}{s} (-1)^s \frac{1}{(2+s)^2}} \quad (4.38)$$

olmaktadır. Böylece,

$$\begin{aligned}
E\left(\sum_{k=1}^{r_x} \sum_{i=1}^{m_x} \frac{(i-1)x_{(i)ik}}{e^{\frac{x_{(i)ik}}{\theta}} - 1}\right) &= r_x \sum_{i=2}^{m_x} \sum_{s=0}^{i-2} \theta i(i-1) \binom{i-2}{s} (-1)^s (2+s)^{-2} \\
&= \frac{r_x}{\theta} \sum_{i=2}^{m_x} i(i-1) \int_0^{\infty} x_{(i)ik} (1 - e^{-\frac{x_{(i)ik}}{\theta}})^{i-2} e^{-\frac{2x_{(i)ik}}{\theta}} dx_{(i)ik}
\end{aligned} \tag{4.39}$$

olur. (4.39)'daki denklem (4.38)'de yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
E(\hat{\theta}_{MMO,HUSK\ddot{O}tip1}) &= \theta \frac{r_x \sum_{i=1}^{m_x} \sum_{t=1}^i \frac{1}{i-t+1}}{n_x + \frac{r_x}{\theta} \sum_{i=2}^{m_x} i(i-1) \int_0^{\infty} x_{(i)ik} (1 - e^{-\frac{x_{(i)ik}}{\theta}})^{i-2} e^{-\frac{2x_{(i)ik}}{\theta}} dx_{(i)ik}} \\
&= \theta \frac{r_x \sum_{i=1}^{m_x} \sum_{t=1}^i \frac{1}{i-t+1}}{n_x + \frac{r_x}{\theta} \sum_{i=2}^{m_x} E(X_{(i)(i-1)k})}
\end{aligned} \tag{4.40}$$

olur. (4.36) kullanılarak,

$$\sum_{i=1}^{m_x} \sum_{t=1}^i \frac{1}{i-t+1} = r_x + \sum_{i=2}^{m_x} \sum_{t=1}^{i-1} \frac{1}{i-t+1} \tag{4.41}$$

kolaylıkla elde edilir. Böylece,

$$E(\hat{\theta}_{MMO,HUSK\ddot{O}tip1}) = \theta \frac{r_x \sum_{i=1}^{m_x} \sum_{t=1}^i \frac{1}{i-t+1}}{n_x + r_x \sum_{i=2}^{m_x} \sum_{t=1}^{i-1} \frac{1}{i-t+1}} \tag{4.42}$$

olarak elde edilmiş olur. Benzer işlemler $\hat{\mu}_{MMO,HUSK\ddot{O}tip1}$ için tekrar edildiğinde bu tahmin edicinin beklenen değeri

$$E(\hat{\mu}_{MMO,HUSK\ddot{ot}ip1}) = \frac{r_y \sum_{j=1}^{m_y} \sum_{t=1}^j \frac{1}{j-t+1}}{n_y + r_y \sum_{j=2}^{m_y} \sum_{t=1}^{j-1} \frac{1}{j-t+1}} \quad (4.43)$$

olarak elde edilir. Böylece $\hat{\theta}_{MMO,HUSK\ddot{ot}ip1}$ ve $\hat{\mu}_{MMO,HUSK\ddot{ot}ip1}$ tahmin edicilerinin sırasıyla θ ve μ için yansız tahmin ediciler olduğu kanıtlanmış olur.

NOT: $X_{(i)ik}$ sıralı istatistiği bağımsız olduğu için $\hat{\theta}_{MMO,HUSK\ddot{ot}ip1}$ tahmin edicisinin varyansı,

$$Var(\hat{\theta}_{MMO,HUSK\ddot{ot}ip1}) = \frac{1}{r_x^2 C_{m_x}^2} \sum_{k=1}^{r_x} \sum_{i=1}^{m_x} Var(X_{(i)ik}) \quad (4.44)$$

olarak yazılabilir. Burada $C_{m_x}^2 = m_x + \sum_{i=2}^{m_y} \sum_{s=0}^{i-2} i(i-1) \binom{i-2}{s} (-1)^s (2+s)^{-2}$ olmak üzere (4.32) kullanılarak $\hat{\theta}_{MMO,HUSK\ddot{ot}ip1}$ tahmin edicisinin varyansı,

$$Var(\hat{\theta}_{MMO,HUSK\ddot{ot}ip1}) = \frac{1}{r_x C_{m_x}^2} \sum_{i=1}^{m_x} \frac{\theta^2}{(i-t+1)^2} \quad (4.45)$$

olarak elde edilir. Ek olarak,

$$\lim_{r_x, m_x \rightarrow \infty} Var(\hat{\theta}_{MMO,HUSK\ddot{ot}ip1}) = 0 \quad (4.46)$$

olur. Aynı işlemler $\hat{\mu}_{MMO,HUSK\ddot{ot}ip1}$ için tekrarlandığında,

$$\lim_{r_y, m_y \rightarrow \infty} Var(\hat{\mu}_{MMO,HUSK\ddot{ot}ip1}) = 0 \quad (4.47)$$

olmaktadır. Bu doğrultuda $\hat{\theta}_{MMO,HUSK\ddot{O}tip1}$ ve $\hat{\mu}_{MMO,HUSK\ddot{O}tip1}$ tahmin edicileri kullanılarak oluşturulan sistem güvenilirliği R 'nin MMO tahmin edicisi ise aşağıda gösterildiği gibidir.

$$\hat{R}_{MMO,HUSK\ddot{O}tip1} = \frac{\hat{\theta}_{MMO,HUSK\ddot{O}tip1}}{\hat{\theta}_{MMO,HUSK\ddot{O}tip1} + \hat{\mu}_{MMO,HUSK\ddot{O}tip1}} \quad (4.48)$$

4.2. LSKÖ'ne Dayalı Sistem Güvenilirliği R Tahmini

LSKÖ yöntemi Al-Nasser[130] tarafından kitle ortalamasının tahmini için ilk kez tanıtılmıştır. Bu yöntem, kitle ortalamasını tahmin etmek için literatürde tanıtılan çeşitli örnekleme yöntemlerinden SKÖ, MSKÖ ve YSKÖ yöntemlerinin genellenmiş hali olarak yer almaktadır.

Bölüm 2.2.4.2' de LSKÖ ile örneklem seçme işlemlerinden bahsedilmiştir. Bu bölümde, LSKÖ ile elde edilen örneklem ile sistem güvenilirliği R tahmini üzerinde durulmuştur. \hat{R} için diğer örnekleme yöntemlerinde olduğu gibi ilk olarak MO yöntemi ile tahmini gerçekleştirilmiştir. Bu yöntem ile açık çözüm bulunamadığı durumda ise MMO yöntemi kullanılmıştır.

Ek olarak Bölüm 2.2.4.3.'de MSKÖ yöntemi ile örneklem seçme işlemlerinden bahsedilmiştir. Dong vd. [114] yaptığı çalışmada, örneklem birimleri seçilirken $z = \lceil (m-1)/2 \rceil$ olduğu durumda MSKÖ yöntemi ile LSKÖ yöntemi ile örneklem birimlerinin aynı olduğunu kanıtlamıştır. Bundan dolayı, kısalık olması bakımından MSKÖ yöntemine dayalı sistem güvenilirliği R 'nin MO ve MMO tahmin edicileri elde edilirken LSKÖ yöntemine benzer adımlar izlendiği için bu bölüm içerisinde anlatılmıştır.

4.2.1. Sistem Güvenilirliği R'nin MO Tahmin Edicisi

Bu bölümde, sistem güvenilirliği olarak tanımlanan R 'nin LSKÖ yöntemine dayalı olarak MO tahmin edicileri hesaplanmıştır.

$X \sim \text{Üstel}(\theta)$ gücü ve $Y \sim \text{Üstel}(\mu)$ stresine ilişkin LSKÖ yöntemi ile elde edilen örneklemeler,

$X_{(h_i)ik}, i = 1, 2, \dots, m_x; k = 1, 2, \dots, r_x$, k . döngüdeki i . kümeden h_i . sıralı istatistiği,

$Y_{(h_j)jl}, j = 1, 2, \dots, m_y; l = 1, 2, \dots, r_y$, l . döngüdeki j . kümeden h_j . sıralı istatistiği

olarak gösterilmektedir. Literatür ile uyumlu olması açısından bu bölümde $X_{(h_i)ik}$ ifadesi yerine $X_{(h_i)k}$ ve $Y_{(h_j)jl}$ yerine $Y_{(h_j)l}$ ifadeleri kullanılmıştır. Sırasıyla X gücü ve Y stresi için küme boyutu m_x ve m_y olarak ve döngü sayıları r_x ve r_y ile gösterilir. Burada $X_{(h_i)k}$, $k = 1, 2, \dots, r_x$ olmak üzere her döngüde bağımsız olarak dağılmıştır. Buyüzden $X_{(h_i)k}$ 'nin dağılımı, h_i 'ye bağlıdır fakat k 'ya bağlı değildir. Aynı şekilde $Y_{(h_j)l}$ 'nin dağılımı h_j 'ye bağlı fakat l 'ye bağlı değildir. Örneklem boyutu, X için $n_x = m_x r_x$ ve Y için $n_y = m_y r_y$ olmak üzere hesaplanır. LSKÖ ile elde edilen bağımsız örneklemelere ilişkin olasılık yoğunluk fonksiyonları,

$$f_{(h_i)}(x_{(h_i)k}) = m_x \binom{m_x-1}{h_i-1} f(x_{(h_i)k}) [F(x_{(h_i)k})]^{h_i-1} [1 - F(x_{(h_i)k})]^{m_x-h_i},$$

$$g_{(h_j)}(y_{(h_j)l}) = m_y \binom{m_y-1}{h_j-1} g(y_{(h_j)l}) [G(y_{(h_j)l})]^{h_j-1} [1 - G(y_{(h_j)l})]^{m_y-h_j} \quad (4.49)$$

olarak tanımlanır. İlk olarak, θ ve μ 'nün MO tahmin edicilerini elde edilmesi gereklidir. Bu doğrultuda olabirlik fonksiyonu,

$$L(\theta, \mu) = \prod_{k=1}^{r_x} \prod_{i=1}^{m_x} f_{(h_i)}(x_{(h_i)k}) \prod_{l=1}^{r_y} \prod_{j=1}^{m_y} g_{(h_j)}(y_{(h_j)l})$$

$$L(\theta, \mu) = \frac{C}{\theta^{n_x} \mu^{n_y}} \prod_{k=1}^{r_x} \prod_{i=1}^{m_x} \left(1 - e^{-\frac{x_{(h_i)k}}{\theta}}\right)^{h_i-1} e^{-\frac{(m_x-h_i+1)x_{(h_i)k}}{\theta}} \prod_{l=1}^{r_y} \prod_{j=1}^{m_y} \left(1 - e^{-\frac{y_{(h_j)l}}{\mu}}\right)^{h_j-1} e^{-\frac{(m_y-h_j+1)y_{(h_j)l}}{\mu}} \quad (4.50)$$

olarak elde edilir. Buradaki $C = m_x^{n_x} m_y^{n_y} \left[\prod_{i=1}^{m_x} \binom{m_x-1}{h_i-1} \right]^{r_x} \left[\prod_{j=1}^{m_y} \binom{m_y-1}{h_j-1} \right]^{r_y}$ olmak üzere bir sabittir. Denklem (4.50)'nin logaritmasının alınması ile oluşturulan log-olabilirlik fonksiyonunun θ ve μ parametrelerine göre kısmi türevleri aşağıdaki gibidir.

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \frac{1}{\theta^2} \sum_{k=1}^{r_x} \sum_{i=1}^{m_x} (m_x - h_i + 1) x_{(h_i)k} - \frac{1}{\theta^2} \sum_{k=1}^{r_x} \sum_{i=1}^{m_x} \frac{(h_i-1)x_{(h_i)k}}{e^{-\frac{x_{(h_i)k}}{\theta}} - 1} - \frac{n_x}{\theta} \quad (4.51)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \frac{1}{\mu^2} \sum_{l=1}^{r_y} \sum_{j=1}^{m_y} (m_y - h_j + 1) y_{(h_j)l} - \frac{1}{\mu^2} \sum_{l=1}^{r_y} \sum_{j=1}^{m_y} \frac{(h_j-1)y_{(h_j)l}}{e^{-\frac{y_{(h_j)l}}{\mu}} - 1} - \frac{n_y}{\mu} \quad (4.52)$$

(4.51) ve (4.52)'deki denklemlerin çözülmesi ile θ ve μ parametrelerinin MO tahmin edicileri elde edilir. Bu $\hat{\theta}_{MO,LSKÖ}$ ve $\hat{\mu}_{MO,LSKÖ}$ tahmin ediciler kullanılarak oluşturulan sistem güvenilirliği R 'nin MO tahmin edicisi ise,

$$\hat{R}_{MO,LSKÖ} = \frac{\hat{\theta}_{MO,LSKÖ}}{\hat{\theta}_{MO,LSKÖ} + \hat{\mu}_{MO,LSKÖ}} \quad (4.53)$$

olarak elde edilir.

Teorem 9: LSKÖ yöntemi ile sistem güvenilirliği R 'nin tahmin edicisi olan $\hat{R}_{MO,LSKÖ}$ tektir ve hesaplanabilmektedir.

Tanıt 9: LSKÖ yöntemine dayalı θ parametresinin MO tahmin edicisi $\hat{\theta}_{MO,LSKÖ}$ için, (4.51) 'deki denklemden,

$$\frac{1}{\theta^2} \left[\sum_{k=1}^{r_x} \sum_{i=1}^{m_x} (m_x - h_i + 1) x_{(h_i)k} - \frac{1}{\theta^2} \sum_{k=1}^{r_x} \sum_{i=1}^{m_x} \frac{(h_i-1)x_{(h_i)k}}{e^{\frac{x_{(h_i)k}}{\theta}} - 1} - n_x \right] = 0 \quad (4.54)$$

olarak ayarladığımızda,

$$w3(\theta) = \left[\sum_{k=1}^{r_x} \sum_{i=1}^{m_x} (m_x - h_i + 1) x_{(h_i)k} - \sum_{k=1}^{r_x} \sum_{i=1}^{m_x} \frac{(h_i-1)x_{(h_i)k}}{e^{\frac{x_{(h_i)k}}{\theta}} - 1} - n_x \theta \right] = 0 \quad (4.55)$$

elde edilir. (4.55)'in θ 'ya göre türevi alınarak oluşturulan denklem aşağıdaki gibidir.

$$w3'(\theta) = \frac{1}{\theta^2} \left[- \sum_{k=1}^{r_x} \sum_{i=1}^{m_x} \frac{(h_i-1)x_{(h_i)k}^2 e^{\frac{x_{(h_i)k}}{\theta}}}{\left(e^{\frac{x_{(h_i)k}}{\theta}} - 1 \right)^2} - n_x \theta \right] < 0 \quad (4.56)$$

Ek olarak,

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} w3(\theta) > 0$$

ve

$$\lim_{\theta \rightarrow +\infty} w3(\theta) < 0$$

olarak gösterilebilir. (4.55)'den elde edilen tek bir kök vardır ve θ 'nın MO tahmin edicisi olan $\hat{\theta}_{MO,LSKÖ}$ 'yi vermektedir. Teorem 9'un kanıtlanmasından dolayı $\hat{\theta}_{MO,LSKÖ}$ 'nin

tektir ve hesaplanabilmektedir. Aynı şekilde, LSKÖ yöntemine dayalı μ parametresinin MO tahmin edicisi $\hat{\mu}_{MO,LSKÖ}$ için, (4.52) denkleminde elde edilen $\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = 0$ olarak eşitlediğimizde,

$$h3(\mu) = \sum_{l=1}^{r_y} \sum_{j=1}^{m_y} (m_y - h_j + 1) y_{(h_j)l} - \sum_{l=1}^{r_y} \sum_{j=1}^{m_y} \frac{(h_j-1)y_{(h_j)l}}{e^{\frac{y_{(h_j)l}}{\mu}} - 1} - n_y \mu = 0 \quad (4.57)$$

elde edilmektedir. μ 'nün MO tahmin edicisi için benzer işlemler tekrarlandığında, $\hat{\mu}_{MO,LSKÖ}$ bulunmaktadır.

Yukarıda anlatıldığı üzere, θ ve μ parametrelerinin MO tahmin edicileri, (4.51) ve (4.52)'den elde edilir. Fakat bu denklemlerin analitik olarak çözümü mevcut değildir. LSKÖ yöntemine dayalı olarak θ ve μ 'nün MO tahmin edicileri sırası ile $\hat{\theta}_{MO,LSKÖ}$ ve $\hat{\mu}_{MO,LSKÖ}$ olmak üzere, sistem güvenilirliği R 'nin MO tahmini aşağıdaki gibidir.

$$\hat{R}_{MO,LSKÖ} = \frac{\hat{\theta}_{MO,LSKÖ}}{\hat{\theta}_{MO,LSKÖ} + \hat{\mu}_{MO,LSKÖ}} \quad (4.58)$$

4.2.2 Sistem Güvenilirliği R 'nin MMO Tahmin Edicisi

Bu bölümde, sistemin güvenilirliğin R tahmini için LSKÖ yöntemi ile elde edilen örneklemeler kullanılarak MMO tahmin edicileri üzerinde durulmuştur. (4.51) ve (4.52) denklemlerindeki doğrusal olmayan fonksiyonların beklenen değerleri bulunacak ve denklemlerde yerine yazılacaktır. Bu fonksiyonlar,

$$t_5(x) = \sum_{k=1}^{r_x} \sum_{i=1}^{m_x} \frac{(h_i-1)x_{(h_i)k}}{e^{\frac{x_{(h_i)k}}{\theta}} - 1} \quad (4.59)$$

ve

$$t_6(y) = \sum_{l=1}^{r_y} \sum_{j=1}^{m_y} \frac{(h_j-1)y(h_j)^l}{e^{\frac{y(h_j)^l}{\theta}} - 1} \quad (4.60)$$

olmak üzere (4.59)'un beklenen değeri aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır.

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{k=1}^{r_x} \sum_{i=1}^{m_x} \frac{(h_i-1)x(h_i)^k}{e^{\frac{x(h_i)^k}{\theta}} - 1}\right) &= r_x \sum_{i=1}^{m_x} (h_i - 1) E\left(\frac{(h_i-1)x(h_i)^k}{e^{\frac{x(h_i)^k}{\theta}} - 1}\right) \\ &= \theta r_x \sum_{i=1}^{m_x} (h_i - 1) E\left(\frac{(h_i-1)x(h_i)^k}{e^{\frac{x(h_i)^k}{\theta}} - 1}\right) \\ &= \theta n_x \sum_{i=1}^{m_x} (h_i - 1) \binom{m_x-1}{h_i-1} \int_0^\infty x(h_i)^k (1 - e^{-\frac{x(h_i)^k}{\theta}})^{h_i-2} e^{-(mx-h_i+2)\frac{x(h_i)^k}{\theta}} dx(h_i)^k \\ &= \theta n_x \sum_{i=1}^{m_x} (h_i - 1) \binom{m_x-1}{h_i-1} \sum_{s=0}^{h_i-2} \binom{h_i-2}{s} (-1)^{h_i-s} \int_0^\infty x(h_i)^k e^{-\frac{(mx-s)x(h_i)^k}{\theta}} dx(h_i)^k \\ &= \theta n_x \sum_{i=1}^{m_x} \sum_{s=0}^{h_i-2} (-1)^{h_i-s} (h_i - 1) (mx - s)^{-2} \binom{m_x-1}{h_i-1} \binom{h_i-2}{s} \\ &= \theta n_x \sum_{i=1}^{m_x} \sum_{s=0}^{h_i-2} (h_i - 1) \binom{m_x-1}{h_i-1} C_{h_i,s} \\ &= \theta n_x \sum_{i=1}^{m_x} \sum_{s=0}^{h_i-2} (h_i - 1) \binom{m_x-1}{h_i-1} C_{h_i,s} \end{aligned} \quad (4.61)$$

Burada $C_{h_i,s} = \frac{\binom{h_i-2}{s} (-1)^{h_i-s}}{(mx-s)^2}$ olmak üzere (4.51)'de yer alan $\sum_{k=1}^{r_x} \sum_{i=1}^{m_x} \frac{(h_i-1)x(h_i)^k}{e^{\frac{x(h_i)^k}{\theta}} - 1}$

ifadesi yerine $E\left(\sum_{k=1}^{r_x} \sum_{i=1}^{m_x} \frac{(h_i-1)x(h_i)^k}{e^{\frac{x(h_i)^k}{\theta}} - 1}\right)$ koyulduğunda θ 'nın LSKÖ yöntemine ilişkin

MMO tahmin edicisi $\hat{\theta}_{MMO,LSKÖ}$ aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\hat{\theta}_{MMO,LSKÖ} = \frac{\sum_{k=1}^{r_x} \sum_{i=1}^{m_x} (m_x - h_i + 1) x_{(h_i)k}}{n_x + n_x \sum_{i=1}^{m_x} \sum_{s=0}^{h_i-2} (h_i - 1) \binom{m_x - 1}{h_i - 1} C_{h_i, s}} \quad (4.62)$$

Burada $C_{h_j, s} = \frac{\binom{h_j - 2}{s} (-1)^{h_j - s}}{(m_x - s)^2}$ olmak üzere, benzer işlemler tekrarlanarak μ parametresi için LSKÖ'ne dayalı MMO tahmin edicisi $\hat{\mu}_{MMO,LSKÖ}$ ise aşağıdaki gibi bulunur.

$$\hat{\mu}_{MMO,LSKÖ} = \frac{\sum_{l=1}^{r_y} \sum_{j=1}^{m_y} (m_y - h_j + 1) y_{(h_j)l}}{n_y + n_y \sum_{j=1}^{m_y} \sum_{s=0}^{h_j-2} (h_j - 1) \binom{m_y - 1}{h_j - 1} C_{h_j, s}} \quad (4.63)$$

Böylece LSKÖ yöntemi ile oluşturulan örneklemeler kullanılarak elde edilen sistem güvenilirliği R 'nin MMO tahmin edicisi

$$\hat{R}_{MMO,LSKÖ} = \frac{\hat{\theta}_{MMO,LSKÖ}}{\hat{\theta}_{MMO,LSKÖ} + \hat{\mu}_{MMO,LSKÖ}} \quad (4.64)$$

olarak hesaplanır.

4.2.3. R 'nin MO Tahmin edicisine ilişkin Asimptotik Dağılımı

Tez çalışmasının bu bölümünde, ilk olarak bölüm 4.3.1.'de anlatılan $(\hat{\theta}_{MO,LSKÖ}, \hat{\mu}_{MO,LSKÖ})$ 'nin asimptotik dağılımı belirlenecektir. İkinci aşama olarak ise bu tahmin edicilere ilişkin asimptotik dağılım kullanılarak \hat{R} için asimptotik dağılım bulunacaktır. Daha sonra ise sistem güvenilirliğinin LSKÖ'ye dayalı MO tahmin edicisinin BRÖ'ye dayalı MO tahmin edicisine göre asimptotik etkinliği karşılaştırılacaktır.

LSKÖ yöntemine dayalı Fisher bilgi matrisi $I(\theta, \mu)$ olsun. Chen vd. [152] üstel dağılıma sahip sıra istatistiklerinin oyf'larının Fisher bilgilerinin olağan düzenlilik

koşullarını karşıladığını göstermiştir. Bu nedenle, $I(\theta, \mu)$ vardır ve aşağıdaki gibi gösterilir.

$$I(\theta, \mu) = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{bmatrix}$$

Burada,

$$I_{11} = -E \left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2} \right) = \frac{r_x}{\theta^2}$$

$$E \left(2 \sum_{i=1}^{m_x} (m_x - h_i + 1) x^{**}_{(h_i)1} - \sum_{k=1}^{r_x} \sum_{i=1}^{m_x} \frac{(h_i - 1) (2e^{x^{**}_{(h_i)1}} + e^{x^{**}_{(h_i)1}} e^{x^{**}_{(h_i)1} - 2})}{(e^{x^{**}_{(h_i)1}} - 1)^2} - m_x \right) \quad (4.65)$$

$$I_{12} = -E \left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta \partial \mu} \right) = 0$$

$$I_{21} = -E \left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \mu \partial \theta} \right) = 0$$

$$I_{22} = -E \left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \mu^2} \right) = \frac{r_y}{\mu^2}$$

$$E \left(2 \sum_{j=1}^{m_y} (m_y - h_j + 1) y^{**}_{(h_j)1} - \sum_{l=1}^{r_y} \sum_{j=1}^{m_y} \frac{(h_j - 1) (2e^{y^{**}_{(h_j)1}} + e^{y^{**}_{(h_j)1}} e^{y^{**}_{(h_j)1} - 2})}{(e^{y^{**}_{(h_j)1}} - 1)^2} - m_y \right) \quad (4.66)$$

Burada $x^{**}_{(h_i)1} = \frac{x_{(h_i)1}}{\theta}$ olmak üzere $\theta = 1$ parametrelili standart Üstel dağılımdan gelen m_x küme boyutlu ve döngü sayısı 1 olan sıralı istatistiğini ifade etmektedir. $y^{**}_{(h_j)1} = \frac{y_{(h_j)1}}{\mu}$ olmak üzere $\mu = 1$ parametrelili standart Üstel dağılımdan gelen m_y küme boyutlu ve döngü sayısı 1 olan sıralı istatistiğini ifade etmektedir.

Teorem 10: Küme boyutlarını $m_x = m_y$ olarak eşitlendiğinde ve $n_x \rightarrow \infty$ ve $n_y \rightarrow \infty$ olduğunda, $p = \frac{n_x}{n_y}$ olmak üzere LSKÖ'ye dayalı MO tahmin edicilerinin dağılımı,

$$\sqrt{n_x}(\hat{\theta}_{MO,LSKÖ} - \theta), \sqrt{n_y}(\hat{\mu}_{MO,LSKÖ} - \mu) \stackrel{d}{=} N(0, A^{-1}(\theta, \mu)) \quad (4.67)$$

olmaktadır. Buradaki $A^{-1}(\theta, \mu)$ ifadesi,

$$A(\theta, \mu) = \begin{bmatrix} a_{11}\theta^{-2} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}p^{-1}\mu^{-2} \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

ve a_{11} ve a_{22} ifadeleri ise

$$a_{11} = \frac{1}{m_x} \sum_{i=1}^{m_x} E(2 \sum_{i=1}^{m_x} (m_x - h_i + 1) x^{**}(h_i)_1 - \sum_{k=1}^{r_x} \sum_{i=1}^{m_x} \frac{(h_i-1) \left(2e^{x^{**}(h_i)_1} + e^{x^{**}(h_i)_1} e^{x^{**}(h_i)_1-2} \right) x^{**}(h_i)_1}{\left(e^{x^{**}(h_i)_1-1} \right)^2} - 1) \quad (4.69)$$

$$a_{22} = \frac{1}{m_y} \sum_{j=1}^{m_y} E(2 \sum_{j=1}^{m_y} (m_y - h_j + 1) y^{**}(h_j)_1 - \sum_{l=1}^{r_y} \sum_{j=1}^{m_y} \frac{(h_j-1) \left(2e^{y^{**}(h_j)_1} + e^{y^{**}(h_j)_1} e^{y^{**}(h_j)_1-2} \right) y^{**}(h_j)_1}{\left(e^{y^{**}(h_j)_1-1} \right)^2} - 1) \quad (4.70)$$

olarak elde edilir.

Tanıt 10: Taylor serisi ve merkezi limit teoremi kullanılarak log-olabilirlik denklemlerinin kısmi türevlerinin alınmasıyla asimptotik olarak normal dağılıma yakınsadığını kanıtlamaktadır. Böylece Fisher matrisi kullanılarak,

$$A(\theta, \mu) = \begin{bmatrix} \lim_{n_x, n_y \rightarrow \infty} \frac{I_{11}}{n_x} & 0 \\ 0 & \lim_{n_x, n_y \rightarrow \infty} \frac{I_{22}}{n_x} \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

olarak elde edilir. (4.65), (4.66) ve (4.71) denklemlerinden

$$\lim_{n_x, n_y \rightarrow \infty} \frac{I_{11}}{n_x} = \frac{a_{11}}{\theta^2}$$

ve

$$\lim_{n_x, n_y \rightarrow \infty} \frac{I_{22}}{n_x} = \frac{a_{22}}{p\mu^2}$$

olduğu görülmektedir. Böylece Teorem 10 kanıtlanmış olur.

Teorem 11: Küme boyutlarını $m_x = m_y$ olarak eşitlendiğinde ve $n_x \rightarrow \infty$ ve $n_y \rightarrow \infty$ olduğunda, $p = \frac{n_x}{n_y}$ olmak üzere LSKÖ'ye dayalı MO tahmin edicilerinin dağılımı,

$$\sqrt{n_x}(\hat{R}_{MO,LSKÖ} - R) \stackrel{d}{=} N(0, \theta^2_{LSKÖ}) \quad (4.72)$$

olmaktadır. (4.72)'deki $\theta^2_{LSKÖ}$ (4.66)-(4.67) denklemlerini kullanarak

$$\theta^2_{LSK\ddot{O}} = R^2(1 - R)^2 \left(\frac{1}{a_{11}} + \frac{p}{a_{22}} \right)$$

olarak belirlenir.

Tanıt 11: Burada, $\beta = \left(\frac{\partial R}{\partial \theta}, \frac{\partial R}{\partial \mu} \right)^T = \left(\frac{\mu}{(\theta + \mu)^2} + \frac{-\theta}{(\theta + \mu)^2} \right)^T$ olmak üzere Teorem 10 ve Delta yöntemi kullanılarak,

$$\sqrt{n_x}(\hat{R}_{MO,LSK\ddot{O}} - R) \stackrel{d}{=} N(0, \beta^T A^{-1}(\theta, \mu) \beta) \quad (4.73)$$

olmaktadır. Böylece teorem 11 kanıtlanmış olur.

Dong ve Zhang [114] çalışmasında, sistem güvenilirliği R 'nin LSKÖ yöntemine dayalı MO tahmin edicisinin teorik olarak BRÖ ile kıyaslamış ve bu yöntemle göre her zaman daha etkin bir yöntem olduğunu açıklamıştır. Tez kapsamında, sistem güvenilirliği R 'nin BRÖ, SKÖ ve modifiyelerinin MO tahmin edicilerine dayalı asimptotik dağılım ve asimptotik göreliliklerine ilişkin uygulama yapılmadığı için bu bilgilere yer verilmemiştir. Tez kapsamında ele alınan yöntemlere dayalı R 'nin tahmin edicilerinin performans karşılaştırılması *yan* ve *HKO* kriterleri ile yapılmıştır. Benzetim uygulaması ile literatürdeki bu çalışma paralellik göstermektedir. Örnek teşkil etmesi bakımından Bölüm (4.2.3)'deki işlemlerden, R 'in LSKÖ'ya dayalı MO tahmin edicisininin asimptotik görelilik etkinliği bulunmasında kullanılacağı için bahsedilmiştir.

BRÖ ile oluşturulan rastgele değişkenler X_1, X_2, \dots, X_{n_x} ve Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_y} olmak üzere $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n_x} x_i / n_x$ ve $\bar{y} = \sum_{j=1}^{n_y} y_j / n_y$ 'dir. Fisher bilgi matrisi,

$$I_{BR\ddot{O}}(\theta, \mu) = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{n_x}{\theta^2} & 0 \\ 0 & \frac{n_y}{\mu^2} \end{bmatrix}$$

olmak üzere yukarıda anlatılan benzer işlemler uygulandığında ve Teorem 11'dekine benzer olarak ve $n_x \rightarrow \infty$ ve $n_y \rightarrow \infty$ ve $p = \frac{n_x}{n_y}$ olmak üzere BRÖ'ye dayalı MO tahmin edicilerinin asimptotik dağılımı,

$$\sqrt{n_x}(\hat{R}_{MO, BR\ddot{O}} - R) \underset{d}{=} N(0, \theta^2_{BR\ddot{O}}) \quad (4.74)$$

olarak gösterilir. Burada

$$\theta^2_{BR\ddot{O}} = R^2(1 - R)^2(1 + p) \quad (4.75)$$

olmaktadır. Bölüm (4.3.3)'de anlatılan benzer teoremler kullanılarak elde edilmiştir. Bu doğrultuda $\hat{R}_{MO, LSK\ddot{O}}$ 'nin $\hat{R}_{MO, BR\ddot{O}}$ 'ye göre asimptotik görelî etkinliği

$$ARE(\hat{R}_{MO, LSK\ddot{O}}, \hat{R}_{MO, BR\ddot{O}}) = \frac{\theta^2_{BR\ddot{O}}}{\theta^2_{LSK\ddot{O}}} = \frac{a_{11}a_{22}(1+p)}{a_{22}+pa_{11}} \quad (4.74)$$

olarak hesaplanmaktadır.

5. MONTE-CARLO BENZETİM ÇALIŞMASI

Bu bölümde, SKÖ ve modifiye edilmiş SKÖ yöntemlerine dayalı sistem güvenilirliği R 'nin MO ve MMO tahmin edicilerinin performansları, BRÖ yöntemine dayalı MO ve MMO tahmin edicileri ile kıyaslanmıştır.

Bu amaç doğrultusunda, R olarak tanımlanan sistem güvenilirliği BRÖ, SKÖ, HUSKÖ tip 1, HUSKÖ tip 2, LSKÖ ve MSKÖ ile elde edilen örneklemeler kullanılarak MO ve MMO tahmin edicileri hesaplanmıştır. Performans karşılaştırması, yansızlık (yan) ve hata kareler ortalaması (HKO) kriterlerini kullanarak Monte-Carlo benzetim çalışması ile test edilmiştir. Hesaplanan R 'nin MO ve MMO tahmin edicileri yan ve HKO ortalaması aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır.

$$yan(\hat{R}) = E(\hat{R} - R) \quad (5.1)$$

$$HKO(\hat{R}) = E(\hat{R} - R)^2 \quad (5.2)$$

Ek olarak, sistem güvenilirliği R 'nin tahmin edicilerinin etkinlikleri, HKO 'sına dayalı olarak elde edilen göreceli etkinlik (GE) değerlerine göre karşılaştırılmıştır. Bu GE değerleri aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$GE1 = \frac{HKO(\hat{R}_{BRÖ,MO})}{HKO(\hat{R}_{SKÖ,MO})}, \quad GE2 = \frac{HKO(\hat{R}_{BRÖ,MO})}{HKO(\hat{R}_{HUSKÖtip1,MO})}, \quad GE3 = \frac{HKO(\hat{R}_{BRÖ,MO})}{HKO(\hat{R}_{HUSKÖtip2,MO})},$$

$$GE4 = \frac{HKO(\hat{R}_{BRÖ,MO})}{HKO(\hat{R}_{LSKÖ,MO})}, \quad GE5 = \frac{HKO(\hat{R}_{BRÖ,MO})}{HKO(\hat{R}_{MSKÖ,MO})}, \quad GE6 = \frac{HKO(\hat{R}_{BRÖ,MO})}{HKO(\hat{R}_{SKÖ,MMO})},$$

$$GE7 = \frac{HKO(\hat{R}_{BRÖ,MO})}{HKO(\hat{R}_{HUSKÖtip1,MMO})}, \quad GE8 = \frac{HKO(\hat{R}_{BRÖ,MO})}{HKO(\hat{R}_{LSKÖ,MMO})}, \quad GE9 = \frac{HKO(\hat{R}_{BRÖ,MO})}{HKO(\hat{R}_{MSKÖ,MMO})},$$

$$GE10 = \frac{HKO(\hat{R}_{SKÖ,MMO})}{HKO(\hat{R}_{SKÖ,MO})}, \quad GE11 = \frac{HKO(\hat{R}_{HUSKÖtip1,MMO})}{HKO(\hat{R}_{HUSKÖtip1,MO})}, \quad GE12 = \frac{HKO(\hat{R}_{LSKÖ,MMO})}{HKO(\hat{R}_{LSKÖ,MO})},$$

$$GE13 = \frac{HKO(\hat{R}_{MSKÖ,MMO})}{HKO(\hat{R}_{MSKÖ,MO})}$$

GE'nin değer olarak 1'den büyük olması durumunda, paydada bulunan tahmin edicinin payda bulunan tahmin ediciye göre etkinliğinin daha yüksek olduğunu ya da daha etkin olduğunu söyleyebiliriz. Buradaki, $GE1, GE2, GE3, GE4$ ve $GE5$ ifadeleri, R 'nin SKÖ, HUSKÖ tip 1, HUSKÖ tip 2, LSKÖ ve MSKÖ yöntemlerine ilişkin MO tahmin edicilerinin HKO 'larının BRÖ yöntemine ilişkin MO tahmin edicisinin HKO 'sının oranını göstermektedir. Diğer yandan, $GE6, GE7, GE8$ ve $GE9$ ifadeleri, R 'nin SKÖ, HUSKÖ tip1, LSKÖ ve MSKÖ yöntemlerine ilişkin MMO tahmin edicilerinin HKO 'larının BRÖ yöntemine ilişkin MO tahmin edicisinin HKO 'sının oranını göstermektedir. $GE10, GE11, GE12$ ve $GE13$ ifadelerinde ise SKÖ ve modifikasyonlarına ilişkin MO tahmin edicilerinin aynı yöntemlere ilişkin MMO tahmin edicilerine HKO kriteri kullanılarak karşılaştırılmasını ifade etmektedir.

Monte-Carlo benzetim çalışmaları, MATLAB R2020b programı ile gerçekleştirilmiştir. Tez kapsamında geçen bütün örnekleme yöntemleri için döngü sayıları (r_x, r_y) olmak üzere aynı ve $r_x = r_y = 1$ olmak üzere gerçekleştirilmiştir. Benzer şekilde, küme boyutları (m_x, m_y) olmak üzere aynı ve $m_x = m_y = 4$, $m_x = m_y = 6$ ve $m_x = m_y = 9$ alınarak benzetim çalışmaları gerçekleştirilmiştir.

Burada açıklamak gerekirse BRÖ ile elde edilen örneklemler, SKÖ ve modifikasyonlarına dayalı olarak elde edilen örneklemlerden farklıdır. Benzetim çalışmalarında, Dong ve Zhang tarafından yapılan çalışmaya benzer olarak tek parametrelili Üstel dağılıma ilişkin ölçek parametre değerleri $(\theta, \mu) = (0.5, 1), (1, 1), (2, 1)$ olduğu durumlar ele alınmıştır [114]. Benzer şekilde, LSKÖ

yöntemine dayalı örneklem seçimlerinde LSKÖ katsayı değeri $z = 0,1,2$ olduğu durumlar araştırılmıştır.

Benzetim tekrar sayısı $\lceil 10.000 / \min(n_x, n_y) \rceil$ olarak hesaplanmıştır. Bu . ifadesi, olabilecek en büyük tamsayıyı temsil etmektedir.

BRÖ, SKÖ, HUSKÖ tip1, HUSKÖ tip2, LSKÖ ve MSKÖ yöntemlerine dayalı MO ve SKÖ, HUSKÖ tip1, LSKÖ ve MSKÖ yöntemlerine dayalı MMO tahmin edicilerinin *yan* değerleri çizelge 5.1-5.3'de verilmiştir. *GE* değerleri ise çizelge 5.4-5.5'de verilmiştir.

Çizelge 5. 1. Tahmin edicilerin SKÖ ve modifiyelerine dayalı *yan* değerleri

$\theta = 0,5, \quad \mu = 1$										
$(mx, my) = (4,4)$										
	R'nin MO tahmin edicileri					R'nin MMO tahmin edicileri				
z	BRÖ	SKÖ	HUSKÖ1	HUSKÖ2	LSKÖ	MSKÖ	SKÖ	HUSKÖ1	LSKÖ	MSKÖ
0	0.3186	0.3252	0.3254	0.3244	0.3252	0.3256	0.3249	0.3248	0.3249	0.3255
1					0.3256				0.3255	
2					0.3268				0.3266	
$(mx, my) = (6,6)$										
z	BRÖ	SKÖ	HUSKÖ1	HUSKÖ2	LSKÖ	MSKÖ	SKÖ	HUSKÖ1	LSKÖ	MSKÖ
0	0.3219	0.3290	0.3302	0.3295	0.3290	0.3290	0.3290	0.3298	0.3288	0.3291
1					0.3295				0.3294	
2					0.3290				0.3291	
$(mx, my) = (9,9)$										
z	BRÖ	SKÖ	HUSKÖ1	HUSKÖ2	LSKÖ	MSKÖ	SKÖ	HUSKÖ1	LSKÖ	MSKÖ
0	0.3256	0.3310	0.3313	0.3316	0.3310	0.3308	0.3309	0.3310	0.3309	0.3308
1					0.3309				0.3309	
2					0.3313				0.3313	

Çizelge 5. 2. Tahmin edicilerin SKÖ ve modifiyelerine dayalı yan değerleri (devam)

$\theta = 1, \quad \mu = 1$										
$(mx, my) = (4,4)$										
R'nin MO tahmin edicileri						R'nin MMO tahmin edicileri				
z	BRÖ	SKÖ	HUSKÖ1	HUSKÖ2	LSKÖ	MSKÖ	SKÖ	HUSKÖ1	LSKÖ	MSKÖ
0					-0.00049				-0.00051	
1	0.00016	-0.00049	-0.00011	-0.00067	-0.00043	-0.00043	-0.00051	-0.00020	-0.00043	-0.00043
2					0.00013				0.00009	
$(mx, my) = (6,6)$										
z	BRÖ	SKÖ	HUSKÖ1	HUSKÖ2	LSKÖ	MSKÖ	SKÖ	HUSKÖ1	LSKÖ	MSKÖ
0					-0.00035				-0.0004	
1	-0.00022	-0.00035	0.00095	0.00078	-0.00016	-0.00074	-0.0004	0.0011	-0.0001	-0.0007
2					-0.00074				-0.0007	
$(mx, my) = (9,9)$										
z	BRÖ	SKÖ	HUSKÖ1	HUSKÖ2	LSKÖ	MSKÖ	SKÖ	HUSKÖ1	LSKÖ	MSKÖ
0					-0.00054				-0.0005	
1	0.00010	-0.00054	-0.00008	-0.00041	-0.00067	-0.00099	-0.0005	0.00005	-0.0006	-0.0009
2					-0.00032				-0.0002	

Çizelge 5. 3. Tahmin edicilerin SKÖ ve modifiyelerine dayalı yan değerleri (devam)

$\theta = 2, \quad \mu = 1$										
$(mx, my) = (4,4)$										
R'nin MO tahmin edicileri						R'nin MMO tahmin edicileri				
z	BRÖ	SKÖ	HUSKÖ1	HUSKÖ2	LSKÖ	MSKÖ	SKÖ	HUSKÖ1	LSKÖ	MSKÖ
0					-0.3259				-0.3258	
1	-0.3161	-0.3259	-0.5884	-0.3230	-0.3263	-0.3263	-0.3258	-0.3252	-0.3263	-0.3263
2					-0.3264				-0.3264	
$(mx, my) = (6,6)$										
z	BRÖ	SKÖ	HUSKÖ1	HUSKÖ2	LSKÖ	MSKÖ	SKÖ	HUSKÖ1	LSKÖ	MSKÖ
0					-0.3297				-0.3296	
1	-0.3217	-0.3297	-0.3284	-0.3282	-0.3298	-0.3304	-0.3296	-0.3279	-0.3297	-0.3303
2					-0.3304				-0.3303	
$(mx, my) = (9,9)$										

z	BRÖ	SKÖ	HUSKÖ1	HUSKÖ2	LSKÖ	MSKÖ	SKÖ	HUSKÖ1	LSKÖ	MSKÖ
0					-0.3320				-0.3319	
1	-0.3253	-0.3320	-0.3314	-0.3309	-0.3321	-0.3325	-0.3319	0.3309	-0.3321	-0.3325
2					-0.3319				-0.3318	

Çizelge 5. 4. Tahmin edicilerin SKÖ ve modifiyelerine dayalı GE değerleri

$\theta = 0.5, \quad \mu = 1$ $(mx, my) = (4,4)$ $r = 1$													
z	GE1	GE2	GE3	GE4	GE5	GE6	GE7	GE8	GE9	GE10	GE11	GE12	GE13
0				1.0912				1.0919				0.9994	
1	1.0912	1.0853	1.0649	1.0941	1.0941	1.0919	1.0875	1.0951	1.0951	0.9994	0.9980	0.9991	0.9991
2				1.0947				1.0963				0.9986	
$(mx, my) = (6,6)$													
0				1.0584				1.0579				1.0004	
1	1.0584	1.0512	1.0485	1.0590	1.0628	1.0579	1.0474	1.0588	1.0626	1.0004	1.0036	1.0002	1.0002
2				1.0628				1.0626				1.0002	
$(mx, my) = (9,9)$													
0				1.0453				1.0449				1.0004	
1	1.0453	1.0420	1.0388	1.0464	1.0489	1.0449	1.0388	1.0459	1.0488	1.0004	1.0031	1.0004	1.0001
2				1.0449				1.0444				1.0004	

Çizelge 5. 5. Tahmin edicilerin SKÖ ve modifiyelerine dayalı GE değerleri (devam)

$\theta = 1, \quad \mu = 1$ $(mx, my) = (4,4)$ $r = 1$													
z	GE1	GE2	GE3	GE4	GE5	GE6	GE7	GE8	GE9	GE10	GE11	GE12	GE13
0				2.1506				2.1086				1.0199	
1	2.1506	2.0871	1.6807	2.2123	2.2123	2.1086	2.0233	2.2608	2.2608	1.0199	1.0315	0.9786	0.9786
2				2.4238				2.4515				0.9887	
$(mx, my) = (6,6)$													

0				2.9159				2.8311				1.0299	
1	2.9159	2.8871	2.5458	3.1242	3.2027	2.8311	2.5897	3.0735	3.1933	1.0299	1.1149	1.0165	1.0029
2				3.2027				3.1933				1.0029	
$(mx, my) = (9,9)$													
0				4.2566				4.0631				1.0476	
1	4.2566	3.9605	3.8108	4.3897	4.7048	4.0631	3.3133	4.2317	4.7038	1.0476	1.1953	1.0373	1.0002
2				4.5564				4.4664				1.0201	
$\theta = 2, \quad \mu = 1$													
$(mx, my) = (4,4)$													
$r = 1$													
<i>z</i>	GE1	GE2	GE3	GE4	GE5	GE6	GE7	GE8	GE9	GE10	GE11	GE12	GE13
0				1.0603				1.0587				1.0016	
1	1.0603	0.2013	1.6807	2.2123	2.2123	2.1086	2.0233	2.2608	2.2608	1.0199	1.0315	0.9786	0.9786
2				1.0703				1.0696				1.0006	
$(mx, my) = (6,6)$													
0				1.0508				1.0497				1.0011	
1	1.0508	1.0087	1.0517	1.0535	1.0511	1.0497	1.0551	1.0531	1.0512	1.0011	0.9560	1.0004	0.9999
2				1.0511				1.0512				0.9999	
$(mx, my) = (9,9)$													
0				1.0359				1.0352				1.0007	
1	1.0359	1.0374	1.0396	1.0356	1.0346	1.0352	1.0356	1.0351	1.0347	1.0007	1.0017	1.0004	0.9999
2				1.0378				1.0379				1.0000	

Benzetim çalışmalarında, çizelge 5.2’de görüldüğü üzere BRÖ, SKÖ ve modifikasyonlarına dayalı MO ve MMO tahmin edicileri $\theta = \mu = 1$ olduğu durumda oldukça küçük bir *yana* sahiptir ve ihmal edilebilir.

Açıkça görülmektedir ki, $z = 0$ olduğu durumda SKÖ ile LSKÖ yöntemleri ile seçilen örneklemeler aynı olduğu için *yan ve HKO* kriterleri bakımından birbirine eşittir. Benzer şekilde küme boyutu $m = 4$ ve $z = 1$ ve $m = 6$ ve $z = 2$ durumları için MSKÖ ve LSKÖ’ye dayalı MO ve MMO tahmin edicilerinin aynı *yana ve HKO*’sına sahip olduğu görülmektedir [130].

R' nin SKÖ, HUSKÖ tip1, HUSKÖ tip2, LSKÖ ve MSKÖ yöntemlerine dayalı MO tahmin edicileri θ ve μ 'nün bütün durumları için BRÖ'ye dayalı MO tahmin edicilerinden daha etkin olduğunu GE1, GE3, GE4 ve GE5 kriterlerine bakarak söyleyebiliriz. Benzer bir durum olarak GE6, GE7, GE8 ve GE9 kriterlerine göre SKÖ ve SKÖ modifikasyonlarına dayalı sistem güvenilirliği R' nin MMO tahmin edicileri θ ve μ 'nün bütün değerleri için R' nin BRÖ'ye dayalı MO tahmin edicisinden daha etkindir. Özellikle $(\theta, \mu) = (1,1)$ durumu için diğer parametre değerlerine göre daha fazla etkinlik gösterdiğini söylemek mümkündür.

Sistem güvenilirliği R' nin X gücü ve Y stresine ilişkin ölçek parametreleri sırasıyla ve θ ve μ 'nün bütün değerleri ve $m = 4,6,9$ durumları için HUSKÖ tip 2 yöntemine dayalı MO tahmin edicisi her zaman BRÖ yöntemine dayalı MO tahmin edicisinden daha etkin olduğu GE3 değerlerinden görülmekte ve Abdallah vd. tarafından yapılan çalışma ile örtüşmektedir [115]. Ek olarak, $(\theta, \mu) = (1,1)$ durumunda küme boyutu arttıkça etkinliği büyük ölçüde artmaktadır. GE2 kriterini baz alarak, $m = 4$ ve $(\theta, \mu) = (2,1)$ olduğu durumda BRÖ'ye dayalı MO tahmin edicisinin HUSKÖ tip 1'e dayalı MO tahmin edicisinden oldukça fazla etkin olduğunu ancak, küme boyutu arttıkça $\hat{R}_{BRÖ,MO}$ tahmin edicisinden daha etkin olduğunu söyleyebiliriz.

Sırasıyla GE10, GE12 ve GE13 değerlerine bakıldığında, SKÖ, LSKÖ ve MSKÖ yöntemlerine dayalı R' nin MMO tahmin edicileri ile kendi MO tahmin edicilerinin çok büyük bir fark olmadığını ama genellikle HKO kriterlerine göre daha etkin olduğunu söylemek mümkündür.

SKÖ'ye dayalı R' nin MO tahmin edicisi $\hat{R}_{SKÖ,MO}$ ve MMO tahmin edicisi $\hat{R}_{SKÖ,MMO}$ her koşulda BRÖ'nin tahmin edicilerine göre daha etkindir. GE5 ve GE9 değerlerini baz alarak, $m = 4,6,9$ ve $(\theta, \mu) = (0.5,1), (1,1)$ koşulları altında $\hat{R}_{MSKÖ,MO}$ ve $\hat{R}_{MSKÖ,MMO}$ tahmin edicileri, $\hat{R}_{SKÖ,MO}$ ve $\hat{R}_{SKÖ,MMO}$ 'dan üstün performans göstermiştir. Benzer şekilde $(\theta, \mu) = (2,1)$ ve $m = 4,6$ durumlarda da aynı etkiye sahiptir.

Bölüm 4.3.1’de anlatıldığı üzere Dong ve Zhang [114] yaptıkları çalışmada, önerilen $\hat{R}_{LSK\ddot{O},MO}$ tahmin edicisinin her durumda $\hat{R}_{BR\ddot{O},MO}$ ’dan asimptotik olarak daha etkin olduğunu teorik olarak kanıtlamıştır. Benzetim sonuçları da GE4 değerlerine bakıldığında bu teoriyi destekler niteliktedir.

6. UYGULAMA

Tez çalışmasının bu bölümünde, BRÖ, SKÖ ve SKÖ modifikasyonları olan HUSKÖ tip 1, HUSKÖ tip2, LSKÖ ve MSKÖ yöntemlerine dayalı olarak sistem güvenilirliği R tahminine ilişkin uygulama yapılmıştır. Bu çalışmada, sistem güvenilirliği R 'nin tahmini için literatürde yaygın olarak tercih edilen jüt liflerinin dayanıklılık veri seti kullanılmıştır. Xia vd. [153] tarafından modifiye edilmiş Weibull dağılımı varsayımı altında Jüt liflerinin 10mm ve 20mm uzunluğundaki dayanıklılığını araştırılmıştır. Bu veri seti kullanılarak sistem güvenilirliği tahminini ele alan birçok çalışma mevcuttur. Örnek olarak, Asgharzadeh ve Kazemi [154] Üstel dağılım altında Tip-I ve Tip-II hibrit sansürlü örneklemeler kullanarak R 'nin MO ve Bayes tahmin edicilerini araştırmıştır. Mirjalili vd. [155] Üstel dağılım varsayımı altında Tip-I Aşamalı hibrit sansürlü örneklemelere dayalı sistem güvenilirliğini araştırmıştır. Nadeb vd. [156] farklı parametrelere sahip üstelleştirilmiş Fréchet dağılımı varsayımı altında iki bağımsız Tip-II sansürlü örneklemelere dayalı olarak R tahmini üzerinde durmuşlardır. Azm vd.[157] jüt lifleri ve karbon lifleri verilerini kullanarak Üstelleştirilmiş Ters Weibull Dağılımı varsayımı altında R tahminini gerçekleştirmişlerdir.

Bu çalışmada kısıklık olması açısından, 10mm ve 20mm uzunluğundaki jüt liflerinin kopma dayanıklılığı veri seti çalışmanın bu ve bundan sonraki bölümlerinde veri seti 1 ve veri seti 2 olarak isimlendirilmiştir. Örneklem boyutları n eşit ve 30 olan veri seti 1 ve veri seti 2 çizelge 6.1. ve çizelge 6.2.'de verilmiştir.

Uygulama yapılmadan önce bu veri setlerinin Üstel dağılıma uyum gösterip göstermediği araştırılmıştır. İlk olarak bu veri setlerine çift yönlü Kolmogrov-Smirnov testi uygulanmıştır. Veri seti 1 ve veri seti 2 için test sonucu değerleri sırasıyla $D=0.17495$ ve $D=0.13277$ olarak elde edilmiştir. Veri seti 1 için $p=0.2831$ ve veri seti 2 için $p=0.6183$ değerleri $p>0.05$ olduğu için veri seti 1 ve veri seti 2 Üstel dağılıma uygunluk göstermektedir. Şekil 6.1.1. ve Şekil 6.1.2.'de, sırasıyla çizelge 6.1.'de verilen veri seti 1 ve çizelge 6.2.'de verilen veri seti 2 için Q-Q grafikleri verilmiştir.

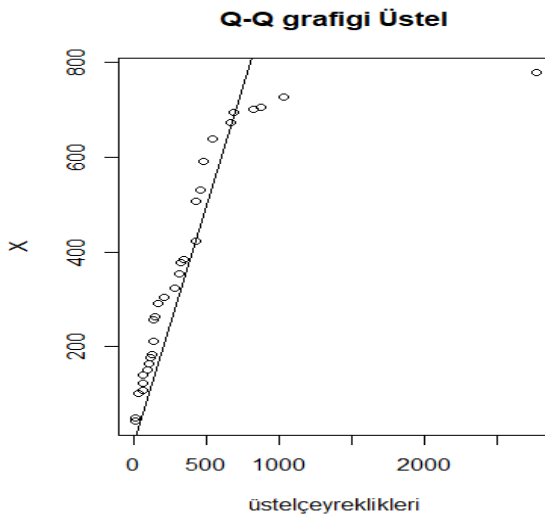
Çizelge 6.1. Veri Seti 1

43.93	50.16	101.15	108.94	123.06	141.38	151.48	163.4	177.25	183.16
212.13	257.44	262.9	291.27	303.9	323.83	353.24	376.42	383.43	422.11
506.6	530.55	590.48	637.66	671.49	693.73	700.74	704.66	727.23	778.17

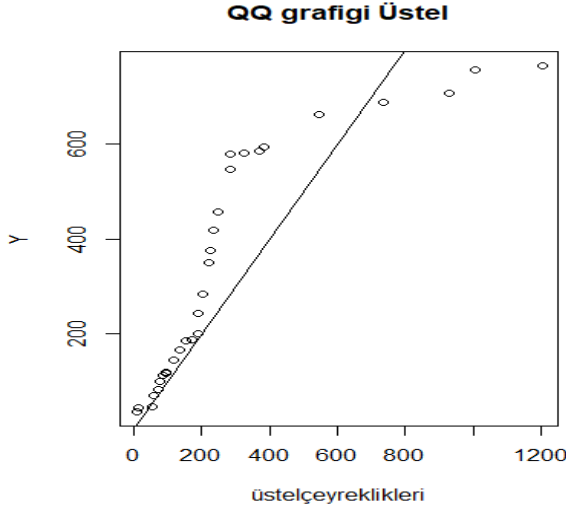
Çizelge 6.2. Veri Seti 2

36.75	45.58	48.01	71.46	83.55	99.72	113.85	116.99	119.86	145.96
166.49	187.13	187.85	200.16	244.53	284.64	350.7	375.81	419.02	456.6
547.44	578.62	581.6	585.57	594.29	662.66	688.16	707.36	756.7	765.14

Şekil 6.1.1. Veri Seti 1 için Q-Q grafiği



Şekil 6.1.2. Veri Seti 2 için Q-Q grafiği



Bu çalışmada kullanılan veri seti 1 ve veri seti 2 ilgilenilen kitle olarak düşünülmüştür. Bu kitleden, BRÖ, SKÖ, HUSKÖ tip1, HUSKÖ tip 2, LSKÖ ve MSKÖ yöntemlerine dayalı olarak örneklem seçilmiş ve sistem güvenilirliği R 'nin MO ve MMO tahmin edicileri bu yöntemlere dayalı olarak elde edilmiştir. SKÖ, LSKÖ ve MSKÖ yöntemlerine dayalı olarak, döngü sayısı $r_x = r_y = 2$ ve küme boyutu $m_x = m_y = 3$ olarak belirlenmiştir. Böylelikle örneklem seçilirken $m_x^2 r_x = m_y^2 r_y = 3^2 \cdot 2 = 18$ veri kullanılmış ancak örneklem boyutu $m_x r_x = m_y r_y$ olduğundan dolayı örneklem boyutu $n_x = n_y = 6$ olarak belirlenmiştir. Böylece 18 veriden sadece 6 verinin gerçek ölçümüyle ilgilenilmiştir. HUSKÖ tip 1 ve tip 2 yöntemleri ile örneklem seçilirken, döngü sayısı $r_x = r_y = 2$ ve küme boyutu $m_x = m_y = 3$ olarak belirlenmiştir. HUSKÖ tip 1 ve HUSKÖ tip 2 yöntemine ilişkin örneklem boyutu $m_x r_x = m_y r_y = 6$ olacak şekilde belirlenmiştir. Bu örnekleme yöntemi ile örneklem seçilirken minimum ve maksimum sıralı istatistik değerlerinin hesaplanması için BRÖ örnekleme yöntemi ile $\frac{m_x(m_x+1)}{2} r_x = \frac{m_y(m_y+1)}{2} r_y = 12$ tane veri kullanılmış ancak sadece $m_x r_x = m_y r_y = 6$ verinin gerçek ölçümüyle ilgilenilmiştir. Benzer şekilde, BRÖ yöntemine dayalı olarak örneklem boyutu $n_x = n_y = 6$ olacak şekilde seçilmiştir. Bahsedilen örnekleme yöntemlerine dayalı olarak seçilen veri setleri, çizelge 6.3.'de BRÖ yöntemi ile, çizelge 6.4.'de SKÖ yöntemi ile, çizelge 6.7.'de HUSKÖ tip 1 ile, çizelge 6.8.'de HUSKÖ tip 2 ile, çizelge 6.9. ve çizelge 6.10.'de farklı $z = 1$ ve $z = 2$ durumları için LSKÖ ile gösterilmiştir.

Çizelge 6.3. Veri setinden BRÖ yöntemi ile seçilen veri seti,

Veri Seti 1	Veri Seti 2
376.42	765.14
637.66	113.85
506.6	36.75
778.17	585.57
671.49	578.62
590.48	119.86

Çizelge 6.4. Veri Setinden SKÖ yöntemi ile seçilen veri seti

Veri Seti 1				Veri Seti 2			
Döngü	1.küme	2.küme	3.küme	Döngü	1.küme	2.küme	3.küme
1	50.16	262.9	353.24	1	45.58	547.44	200.16
2	123.06	257.44	530.55	2	187.85	594.29	244.53

Sistem güvenilirliği R 'nin tahmini yapılmadan önce çizelge 6.3. ve çizelge 6.4.'deki sırasıyla BRÖ ve SKÖ yöntemleri ile seçilen örneklem birimlerinin Üstel dağılımına uygunluğu incelenmiştir. Bu amaçla, ilk olarak bu örneklemelerden elde edilen MO tahminleri çizelge 6.5. ve çizelge 6.6.'da verilmiştir.

Çizelge 6.5. veri seti 1 ve veri seti 2' nin BRÖ'ye dayalı ölçek parametresinin MO tahmini

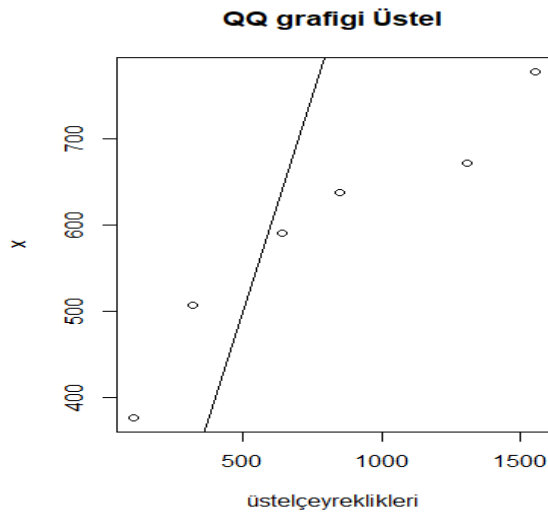
Veri Seti	Ölçek parametresi
1	595.238
2	366.300

Çizelge 6.6. veri seti 1 ve veri seti 2' nin SKÖ'ye dayalı ölçek parametresinin MO tahmini

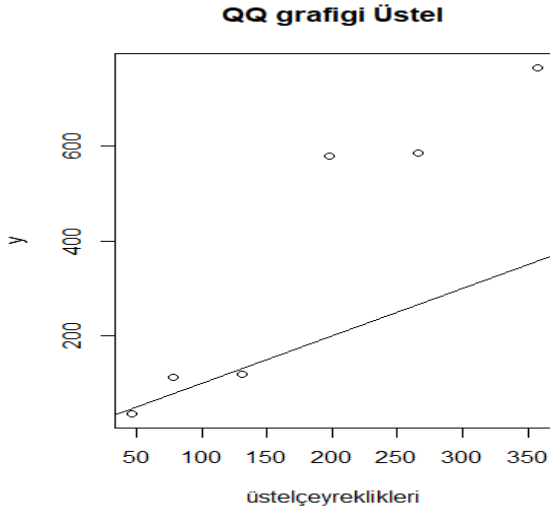
Veri Seti	Ölçek parametresi
1	276.187
2	354.168

Şekil 6.1.3. ve Şekil 6.1.4.'de, sırasıyla çizelge 6.3.'de verilen BRÖ ile elde edilen veri seti 1 ve veri seti 2' nin Q-Q grafikleri gösterilmiştir.

Şekil 6.1.3. BRÖ ile elde edilen veri seti 1 için Q-Q grafiği

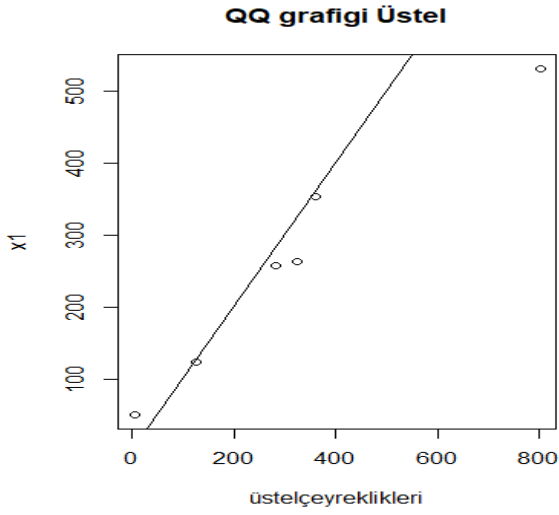


Şekil 6.1.4. BRÖ ile elde edilen veri seti 2 için Q-Q grafiği

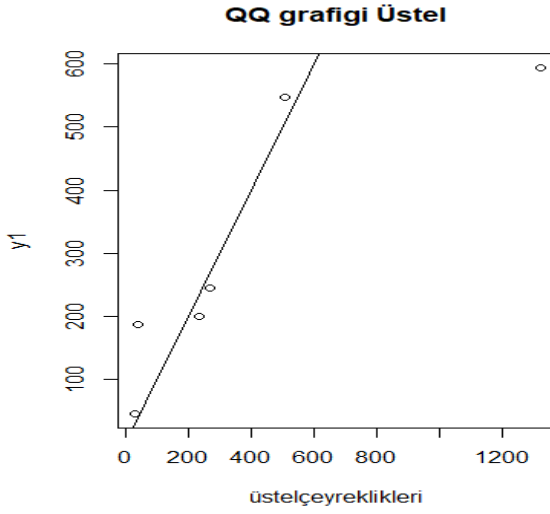


Şekil 6.1.5. ve Şekil 6.1.6.'da, sırasıyla çizelge 6.4'de verilen SKÖ ile elde edilen veri seti 1 ve veri seti 2' nin Q-Q grafikleri gösterilmiştir.

Şekil 6.1.5. SKÖ ile elde edilen veri seti 1 için Q-Q grafiği



Şekil 6.1.6. SKÖ ile elde edilen veri seti 2 için Q-Q grafiği



Ek olarak, çift yönlü Kolmogrov-Smirnov testi uygulandığında, çizelge 6.3’de verilen BRÖ ile elde edilen veri seti 1 ve veri seti 2’ nin sırasıyla $D=0.46968$ ve $D=0.29365$ değerleri elde edilmiştir. Veri seti 1 için $p=0.09787$ ve veri seti 2 için $p=0.5823$ değerleri $p>0.05$ olduğu için BRÖ yöntemi ile elde edilen veri seti 1 ve veri seti 2 Üstel dağılıma uygunluk göstermektedir. Benzer şekilde çizelge 6.4’de verilen SKÖ ile elde edilen veri seti 1 ve veri seti 2’ nin sırasıyla $D=0.29108$ ve $D=0.29503$ değerleri elde edilmiştir. Veri seti 1 için $p=0.5934$ ve veri seti 2 için $p=0.5763$ değerleri $p>0.05$ olduğu için SKÖ yöntemi ile elde edilen veri seti 1 ve veri seti 2 Üstel dağılıma uygunluk göstermektedir. Modifiye edilmiş SKÖ yöntemleri HUSKÖ tip 1, HUSKÖ tip 2, LSKÖ ve MSKÖ yöntemlerine dayalı veri seti 1 ve veri seti 2 kullanılarak elde edilen veri setleri sırasıyla çizelge 6.7-6.10.’da verilmiştir.

Çizelge 6.7. Veri Setinden HUSKÖ tip 1 yöntemi ile seçilen veri seti

Veri Seti 1				Veri Seti 2			
Döngü	1.küme	2.küme	3.küme	Döngü	1.küme	2.küme	3.küme
1	506.6	303.9	727.23	1	36.75	200.16	688.16
2	704.66	383.43	671.49	2	419.02	456.6	707.36

Çizelge 6. 8. Veri Setinden HUSKÖ tip 2 yöntemi ile seçilen veri seti

Veri Seti 1				Veri Seti 2			
Döngü	1.küme	2.küme	3.küme	Döngü	1.küme	2.küme	3.küme
1	177.25	43.93	50.16	1	83.55	581.6	45.58
2	323.83	101.15	212.13	2	284.64	113.85	48.01

Tez veri setlerinden LSKÖ yöntemi ile seçilen veri seti, $m_x r_x = m_y r_y = 6$ örneklem boyutuna sahip olmak üzere, $z = 0$ olduğu durumda Çizelge 6.4’da gösterilen SKÖ yöntemi ile seçilen veri seti ile aynıdır. Kısıklık olması açısından LSKÖ yöntemi ile seçilen veri seti $z = 1$ ve $z = 2$ durumları için Çizelge 6.9 ve Çizelge 6.10’da verilmiştir.

Çizelge 6. 9. Veri Setinden LSKÖ yöntemi ile seçilen veri seti

Veri Seti 1				Veri Seti 2			
Döngü	1.küme	2.küme	3.küme	Döngü	1.küme	2.küme	3.küme
1	108.94	262.9	303.9	1	662.66	547.44	116.99
2	383.43	257.44	212.13	2	419.02	594.29	145.96

Çizelge 6. 10. Veri Setinden LSKÖ yöntemi ile seçilen veri seti

Veri Seti 1				Veri Seti 2			
Döngü	1.küme	2.küme	3.küme	Döngü	1.küme	2.küme	3.küme
1	376.42	700.74	353.24	1	765.14	688.16	200.16
2	704.66	291.27	530.55	2	456.6	707.36	244.53

Çizelge 6. 9’da gösterilen veri seti, $m_x = m_y = 3$ olduğu durumda MSKÖ yöntemi ile seçilen veri seti ile aynıdır.

Sistem güvenilirliği R 'nin BRÖ, SKÖ, HUSKÖ tip 1, HUSKÖ tip 2, LSKÖ ve MSKÖ'ne dayalı olarak MO ve MMO tahminleri elde edilmiştir. LSKÖ yöntemine dayalı olarak $z = 0$, $z = 1$ ve $z = 2$ olduğu durumlarda göz önüne alınarak BRÖ, SKÖ, HUSKÖ tip 1, HUSKÖ tip 2, LSKÖ ve MSKÖ yöntemlerinin MO ve MMO tahminleri çizelge 6.11.'de verilmiştir.

Çizelge 6. 11. BRÖ, SKÖ ve modifikasyonlarına dayalı MO ve MMO tahmin edicilerinin yan ve HKO değerleri

	$\hat{R}_{BRÖ,MO}$	$\hat{R}_{SKÖ,MO}$	$\hat{R}_{HUSKÖ1,MO}$	$\hat{R}_{HUSKÖ2,MO}$	$\hat{R}_{LSKÖ,MO}$			$\hat{R}_{MSKÖ,MO}$
					$z = 0$	$z = 1$	$z = 2$	
Yan	0.1358	-0.0442	0.0724	-0.0462	-0.0442	-0.1006	0.0123	-0.1006
HKO	0.0184	0.0020	0.0052	0.0021	0.0020	0.0101	0.0015	0.0101
		$\hat{R}_{SKÖ,MMO}$	$\hat{R}_{HUSKÖ1,MMO}$		$\hat{R}_{LSKÖ,MMO}$			$\hat{R}_{MSKÖ,MMO}$
					$z = 0$	$z = 1$	$z = 2$	
Yan		-0.0662	0.0856		-0.0662	-0.1016	0.0089	-0.1016
HKO		0.0044	0.0073		0.0044	0.0103	0.0007	0.0103

Çizelge 6.11.'den R 'nin BRÖ yöntemine dayalı HKO değerleri SKÖ ve modifiye edilmiş SKÖ yöntemlerine dayalı HKO değerlerinden daha büyük olduğu görülmektedir.

SKÖ ve modifiye edilmiş SKÖ yöntemleri arasındaki ilişkiye bakıldığında, LSKÖ katsayı değeri $z = 2$ olduğu durumda LSKÖ yöntemine dayalı sistem güvenilirliği R 'nin MO tahmin edicisinin HKO'sının en küçük olduğu görülmektedir. Katsayı değeri $z = 0$ olduğu durumda ise $\hat{R}_{SKÖ,MO}$ ile $\hat{R}_{LSKÖ,MO}$ tahmin edicilerinin, $z = 1$ durumunda ise $\hat{R}_{LSKÖ,MO}$ ve $\hat{R}_{MSKÖ,MO}$ tahmin edicilerinin HKO'ları birbirine eşittir.

MO yöntemine dayalı olarak HKO değerleri kıyaslandığında HUSKÖ tip 1 ve HUSKÖ tip 2 yöntemlerinin HKO'larının BRÖ yönteminden daha küçük olduğu görülmekte ve

literatürdeki çalışmaları desteklemektedir. MMO yöntemlerine dayalı *HKO* değerleri kıyaslandığında en etkin yöntemin $z = 2$ durumunda LSKÖ yöntemi olduğu görülmektedir.

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Literatürde, yaygın olarak kullanılan stress-güç modelinin R tahminini konu alan birçok çalışma yer almaktadır. Bölüm 1’de SGM modelinin farklı dağılımlar varsayımı altında incelendiği sistem güvenilirliği tahminini konu alan çalışmalardan bahsedilmiştir. Bu çalışmaların çoğu BRÖ yöntemine dayalı olarak stress ve güce ilişkin örneklemelerin kullanılması ile ilgilidir.

BRÖ yönteminin bir alternatifi olan SKÖ örnekleme yöntemi ilk kez McIntre [1] tarafından önerilmiştir. Bu örnekleme yöntemi, örnekleme birimlerinin ölçülmesinin maliyetli ve oldukça zor olduğu durumlarda BRÖ’ye göre daha avantajlı duruma gelmektedir. Bunun nedeni ise SKÖ yönteminin, uzman görüşü, ilgilenilen değişken ile korelasyonu yüksek yardımcı değişken veya görsel olarak sıralamanın kolay bir şekilde yapılabilineceği durumlarda kullanılmasıdır. Ek olarak, çevre, güvenilirlik, kalite kontrol vb. gibi birçok alanda SKÖ yöntemi ile örnekleme seçimi tercih edilmektedir.

Tez kapsamında X gücü ve Y stresinin tek ölçek parametrelili Üstel dağılımdan geldiği varsayımı altında BRÖ, SKÖ ve modifiye edilmiş SKÖ yöntemleri olan HUSKÖ tip 1, HUSKÖ tip 2, LSKÖ ve MSKÖ’ne dayalı sistem güvenilirliği R tahmini üzerinde durulmuştur. Bu amaç doğrultusunda ilk olarak bölüm 3’de R ’nin BRÖ ve SKÖ yöntemlerine dayalı olarak MO ve MMO tahmin edicileri hesaplanmıştır. Daha sonra bölüm 4’te modifiye edilmiş SKÖ yöntemlerini baz alarak R ’nin MO ve MMO tahmin edicileri elde edilmiştir. Bölüm 5’de bu yöntemlere dayalı elde edilen tahmin edicilerin performans karşılaştırılması Monte-Carlo benzetim çalışması ile gerçekleşmiştir. Benzetim sonuçları, yansızlık kriterlerine göre Çizelge 5.1.-5.3.’de ve GE kriterlerine göre Çizelge 5.4.-5.5’de verilmiştir. GE kriterlerine bakıldığında açık olarak görülmektedir ki, küme boyutu ya da ölçek parametre değerlerinin her durumu için SKÖ yöntemi BRÖ yöntemine göre daha etkindir. Ek olarak X gücü ve Y stresine ilişkin parametre değerleri sırasıyla θ ve μ ’nün eşit ve bir olduğu durumda etkinliği daha çok artmaktadır. SKÖ yöntemine dayalı R ’nin tahmin edicileri incelendiğinde

$(\theta, \mu) = (0.5, 1)$ ve küme boyutu $m = 4$ olduğu durum hariç MMO tahmin edicileri MO tahmin edicilerinden yakın olmasına rağmen daha etkin durumdadır.

SKÖ yönteminin alternatifi olarak geliştirilen HUSKÖ tip 1, HUSKÖ tip 2, LSKÖ ve MSKÖ yöntemleri sıralamada hata payının azalmasına yardımcı olduğu için etkinliği artırmaktadır. Bundandır ki, modifiye edilmiş SKÖ yöntemleri büyük ölçüde fayda sağladığı için araştırmalarda yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Bu yöntemler, BRÖ'ye göre kıyaslandığında bazı koşullar altında HUSKÖ tip 1 yöntemine dayalı MO ve MMO tahmin edicileri hariç diğer önerilen tahmin edicilerin BRÖ yöntemine dayalı tahmin edicilerinden daha etkin olduğu görülmektedir. Bazı koşullar altında LSKÖ ve MSKÖ yöntemlerine dayalı MO ve MMO tahmin edicilerinin SKÖ'ye dayalı tahmin edicilerine göre daha etkin olduğu göze çarpmaktadır.

Bölüm 6'da literatürde yaygın olarak kullanılan gerçek bir veri seti ile önerilen yöntemlerin etkinliği araştırılmıştır. Uygulama sonuçları ile benzetim sonuçları arasında paralellik mevcuttur. Eğer istenilen kriter etkinliğin yüksek olması ise bu veri seti kullanılarak sistem güvenilirliği R tahmini BRÖ yöntemi yerine LSKÖ yöntemine dayalı olarak yapılması önerilmektedir.

8. KAYNAKLAR

- [1] G.A. Mc Intyre, A Method For Unbiased Selective Sampling, Using Ranked Sets, *Aust. J. Agric. Res.* 3 (1952) 385–390.
- [2] K. Takahasi, K. Wakimoto, On Unbiased Estimates Of The Population Mean Based On The Sample Stratified By Means Of Ordering, *Ann. Inst. Stat. Math.* 20 (1968) 1–31.
- [3] T.R. Dell, J.L. Clutter, Ranked Set Sampling Theory With Order Statistics Background, *Biometrics.* 28 (1972) 545–555.
- [4] S.L. Stokes, Estimation Of Variance Using Judgment Ordered Ranked Set Samples, *Int. Biometric Soc.* 36 (1980) 35–42.
- [5] S.L. Stokes, T.W. Sager, Characterization Of A Ranked-Set Sample With Application To Estimating Distribution Functions, *J. Am. Stat. Assoc.* 83 (1988) 374–381.
- [6] S. Stokes, Parametric Ranked Set Sampling, *Ann. Inst. Stat. Math.* 47 (1995) 465–482.
- [7] H. Chen, E.A. Stasny, D.A. Wolfe, Ranked Set Sampling For Efficient Estimation Of A Population Proportion, *Stat. Med.* 24 (2005) 3319–3329.
- [8] Y.A. Özdemir, Sıralı Küme Örneklemesiyle Doğrusal Regresyon Modelinde Parametre Tahminlerinin İncelenmesi, Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi, 2005.
- [9] H.M. Samawi, M.S. Ahmed, W. Abu-Dayyeh, Estimating The Population Mean Using Extreme Ranked Set Sampling, *Biometrical J.* 38 (1996) 577–586.
- [10] H.A. Muttlak, Median Ranked Set Sampling., *J. Appl. Stat. Sci.* 6 (1997) 245–255.
- [11] M.F. Al-Saleh, M.A. Al-Kadiri, Double-Ranked Set Sampling, *Stat. Probab. Lett.* 48 (2000) 205–212.
- [12] M.T. Al-Odat, M.F. Al-Saleh, Variation Of Ranked Set Sampling., *J. Appl. Stat. Sci.* 10 (2001) 137–146.

- [13] H.M. Samawi, On Double Extreme Rank Set Sample With Application To Regression Estimator, *Metron- Int. J. Stat.* 1 (2002) 53–66.
- [14] H.M. Samawi, E.M. Tawalbeh, Double Median Ranked Set Sample: Comparing To Other Double Ranked Samples For Mean And Ratio Estimators, *J. Mod. Appl. Stat. Methods.* 1 (2002) 428–442.
- [15] H.A. Muttlak, Modified Ranked Set Sampling Methods., *Pak. J. Stat.* 19 (2003) 315–323.
- [16] H.A. Muttlak, W. Abu-Dayyeh, Weighted Modified Ranked Set Sampling Methods, *Appl. Math. Comput.* 151 (2004) 645–657.
- [17] A.A.-O.K.I. Aa Jemain, Multistage Extreme Ranked Set Samples For Estimating The Population Mean, *J. Stat. Theory Appl.* 6 (2007) 456–471.
- [18] A.D. Al-Nasser, L Ranked Set Sampling: A Generalization Procedure For Robust Visual Sampling, *Commun. Stat. Comput. ®.* 36 (2007) 33–43.
- [19] A.I. Al-Omari, K.H. Jaber, Percentile Double Ranked Set Sampling, *J. Math. Stat.* 4 (2008) 60–64.
- [20] A.D. Al-Nasser, A.B. Mustafa, Robust Extreme Ranked Set Sampling, *J. Stat. Comput. Simul.* 79 (2009) 859–867.
- [21] A.I. Al-Omari, Estimation Of The Population Median Of Symmetric And Asymmetric Distributions Using Double Robust Extreme Ranked Set Sampling., *Rev. Investig. Operacional.* 31 (2010) 199–207.
- [22] A. Haq, J. Brown, E. Moltchanova, A.I. Al-Omari, Partial Ranked Set Sampling Design, *Environmetrics.* 24 (2013) 201–207.
- [23] M. Salehi, J. Ahmadi, Record Ranked Set Sampling Scheme, *Metron.* 72 (2014) 351–365.
- [24] A.D. Al-Nasser, A.I. Al-Omari, Minimax Ranked Set Sampling, *Rev. Invest. Operac.* 39 (2018) 560–570.
- [25] Z. Khan, M. Ismail, H. Samawi, Mixture Ranked Set Sampling For Estimation Of Population Mean And Median, *J. Stat. Comput. Simul.* 90 (2020) 573–585.
- [26] V. Barnett, Ranked Set Sample Design For Environmental Investigations, *Environ. Ecol. Stat.* 6 (1999) 59–74.

- [27] P. Kvam, P.H." Kvam, P.H. Kvam, Ranked Set Sampling Based On Binary Water Quality Data With Covariates, *J. Agric. Biol. Environ. Stat.* 8 (2003) 271–79.
- [28] L. Halls, T. Dell, Trial Of Ranked-Set Sampling For Forage Yields, *For. Sci.* 12 (1966) 22–26.
- [29] G.P. Patil, Editorial: Ranked Set Sampling, *Environ. Ecol. Stat.* 2 (1995) 271–285.
- [30] O.C. Bilgin, O. Ozturk, D.A. Wolfe, Estimation Of Population Variance : A Ranked Set Sampling Approach In A Finite Population Setting, *Atatürk Üniv. Ziraat Fak. Derg.* 35 (2004) 51–57.
- [31] H. Chen, E.A. Stasny, D.A. Wolfe, Improved Procedures For Estimation Of Disease Prevalence Using Ranked Set Sampling, *Biometrical J.* 49 (2007) 530–538.
- [32] C.N. Bouza, J.F. García, G.K. Vishwakarma, S.M. Zeeshan, Variance Estimation Of Persons Infected With Aids Under Ranked Set Sampling, *Clin. Epidemiol. Glob. Heal.* 7 (2019) 17-21.
- [33] M. Mahdizadeh, E. Zamanzade, Efficient Body Fat Estimation Using Multistage Pair Ranked Set Sampling, *Stat. Methods Med. Res.* 28 (2019) 223–234.
- [34] P.H. Kvam, F.J. Samaniego, Nonparametric Maximum Likelihood Estimation Based On Ranked Set Samples, *J. Am. Stat. Assoc.* 89 (1994) 526–537.
- [35] B.K.S. E. El-Newehi, Reliability Estimation Based On Ranked Set Sampling, *Comm. Stat. Theory Method.* 29 (2000) 1583–1595.
- [36] S. Kotz, Y. Lumelskii, M. Pensky, *The Stress–Strength Model And Its Generalizations*, World Scientific Press, Singapore, 2003.
- [37] A. Helu, M. Abu-Salih, O. Alkam, Bayes Estimation Of Weibull Distribution Parameters Using Ranked Set Sampling, *Commun. Stat. - Theory Methods.* 39 (2010) 2533–2551.
- [38] H.M. Samawi, O.A.M. Al-Sagheer, On The Estimation Of The Distribution Function Using Extreme And Median Ranked Set Sampling, *Biometrical J.* 43 (2001) 357–373.

- [39] G. Zheng, M.F. Al-Saleh, Modified Maximum Likelihood Estimators Based On Ranked Set Samples, *Ann. Inst. Stat. Math.* 2002 543. 54 (2002) 641–658.
- [40] K. Lam, B.K. Sinha, Z. Wu, Estimation Of Parameters In Two-Parameter Exponential Distribution Using Ranked Set Sampling, *Ann. Inst. Stat. Math.* 46 (1994) 723–736.
- [41] M.F. Al-Saleh, S.A. Al-Hadhrami, Estimation Of The Mean Of The Exponential Distribution Using Moving Extremes Ranked Set Sampling, *Stat. Pap.* 44 (2003) 367–382.
- [42] W. Abu-Dayyeh, E. Al Sawi, Modified Inference About The Mean Of The Exponential Distribution Using Moving Extreme Ranked Set Sampling, *Stat. Pap.* 50 (2009) 249–259.
- [43] W. Chen, Y. Tian, M. Xie, Maximum Likelihood Estimator Of The Parameter For A Continuous One-Parameter Exponential Family Under The Optimal Ranked Set Sampling *, *J Syst Sci Complex.* 30 (2017) 1350–1363.
- [44] B.S. Biradar, C.D. Santosha, Estimation Of The Mean Of The Exponential Distribution Using Maximum Ranked Set Sampling With Unequal Samples, *Int. J. Agric. Stat. Sci.* 13 (2017) 393–401.
- [45] A.B. Shaibu, H.A. Muttlak, Estimating The Parameters Of Normal, Exponential And Gamma Distributions Using Median And Extreme Ranked Set Samples, *Statistica.* Lxiv (2004) 75–98.
- [46] M. Chacko, P. Yageen Thomas, Estimation Of A Parameter Of Bivariate Pareto Distribution By Ranked Set Sampling, *J. Appl. Stat.* 34 (2007) 703–714.
- [47] A. Omar, K. Ibrahim, Estimation Of The Shape And Scale Parameters Of The Pareto Distribution Using Extreme Ranked Set Sampling, *Pakistan J. Stat.* 29 (2013) 33–47.
- [48] W. Qian, W. Chen, X. He, Parameter Estimation For The Pareto Distribution Based On Ranked Set Sampling, *Stat. Pap.* 62 (2021) 395–417.
- [49] W. Chen, R. Yang, D. Yao, C. Long, Pareto Parameters Estimation Using Moving Extremes Ranked Set Sampling, *Stat. Pap.* 62 (2021) 1195–1211.
- [50] D. Yao, W. Chen, R. Yang, C. Long, Fisher Information In Moving Extreme

- Ranked Set Sampling With Application To Parameter Estimation, *J. Syst. Sci. Complex.* 2021. (2021) 1–12.
- [51] M.F. Al-Saleh, S.A. Al-Hadrami, Parametric Estimation For The Location Parameter For Symmetric Distributions Using Moving Extremes Ranked Set Sampling With Application To Trees Data, *Environmetrics.* 14 (2003) 651–664.
- [52] W. Chen, M. Xie, M. Wu, Parametric Estimation For The Scale Parameter For Scale Distributions Using Moving Extremes Ranked Set Sampling, *Stat. Probab. Lett.* 83 (2013) 2060–2066.
- [53] S. Hadhrami, Maximum Likelihood Estimators For The Parameters Of Modified Weibull Distribution Using Median Ranked Set Sampling, *Far East J. Math. Sci.* 42 (2010).
- [54] A. Al-Omari, S. Al-Hadhrami, On Maximum Likelihood Estimators Of The Parameters Of A Modified Weibull Distribution Using Extreme Ranked Set Sampling, *J. Mod. Appl. Stat. Methods.* 10 (2011) 18.
- [55] M.H. Samuh, A. Qtait, Estimation For The Parameters Of The Exponentiated Exponential Distribution Using A Median Ranked Set Sampling, *J. Mod. Appl. Stat. Methods.* 14 (2015) 215–237.
- [56] I. Elbatal, Parameters Estimation Of The Log-Logistic Distribution Using Ranked Set Sampling, *Res. Appl. Stat. Sci.* 19 (2014) 129–139.
- [57] X. He, W. Chen, W. Qian, Maximum Likelihood Estimators Of The Parameters Of The Log-Logistic Distribution, *Stat. Pap.* 61 (2020) 1875–1892.
- [58] X. Fang He, W. Xue Chen, R. Yang, Log-Logistic Parameters Estimation Using Moving Extremes Ranked Set Sampling Design, *Appl. Math. J. Chinese Univ.* 36 (2021) 99–113.
- [59] S. Dey, M. Salehi, J. Ahmadi, Rayleigh Distribution Revisited Via Ranked Set Sampling, *Metron.* 75 (2017) 69–85.
- [60] M.S. Kotb, M.Z. Raqab, Bayesian Inference And Prediction Of The Rayleigh Distribution Based On Ordered Ranked Set Sampling, *Commun. Stat. - Simul. And Computation.* 47 (2018) 905–923.
- [61] A. Joukar, M. Ramezani, S.M.T.K. Mirmostafae, Parameter Estimation For The

- Exponential-Poisson Distribution Based On Ranked Set Samples, *Commun. Stat. - Theory Methods*. 50 (2021) 560–581.
- [62] Abdallah A., Nagwan R. E., An Estimation Of Parameters For Exponentiated Burr Type Xii Distribution Based On Ranked Set Sampling, *J. Adv. Math.* 19 (2020) 1921–2347.
- [63] R. Bantan, A.S. Hassan, M. Elsehetry, Zubair Lomax Distribution: Properties And Estimation Based On Ranked Set Sampling, *Comput. Mater. Contin.* 65 (2020) 2169–2187.
- [64] B. Sevinc, S. Gurler, M. Esemen, Exponentiated Weibull Distribution For Modeling The Vehicle Headway Data Based On Ranked Set Sampling, *Gazi Univ. J. Sci.* 33 (2020) 892–902.
- [65] R. Yang, W. Chen, D. Yao, C. Long, Y. Dong, B. Shen, The Efficiency Of Ranked Set Sampling Design For Parameter Estimation For The Log-Extended Exponential–Geometric Distribution, *Iran. J. Sci. Technol. Trans. A Sci.* 44 (2020) 497–507.
- [66] R. Yang, W. Chen, Y. Dong, Log-Extended Exponential-Geometric Parameters Estimation Using Simple Random Sampling And Moving Extremes Ranked Set Sampling, *Commun. Stat. - Simul. Comput.* (2020) 1–15.
- [67] M.H. Samuh, A.I. Al-Omari, N. Koyuncu, Estimation Of The Parameters Of The New Weibull-Pareto Distribution Using Ranked Set Sampling, *Statistica*. 80 (2020).
- [68] M.A. Sabry, H.Z. Muhammed, A. Nabih, M. Shaaban, Parameter Estimation For The Power Generalized Weibull Distribution Based On One-And Two-Stage Ranked Set Sampling Designs, *J. Stat. Appl. Probab. An Int. J.* 8 (2019) 113–128.
- [69] Z.W. Birnbaum, On A Use Of Mann-Whitney Statistics., *Proc. Third Berkeley Symp. In Math. Probab.* 1 (1956) 13–17.
- [70] Z.W. Birnbaum, R.C. Mccarty, A Distribution-Free Upper Confidence Bound For $\Pr\{Y < X\}$, Based On Independent Samples Of X And Y, *Ann. Math. Statist.* 29 (1958) 558–562.
- [71] J.D. Church, B. Harris, The Estimation Of Reliability From Stress-Strength

- Relationships, *Technometrics*. 12 (1970) 49–54.
- [72] D.K. Al-Mutairi, M.E. Ghitany, D. Kundu, Inferences On Stress-Strength Reliability From Lindley Distributions, *Commun. Stat. - Theory Methods*. 42 (2013) 1443–1463.
- [73] P. Enis, S. Geisser, Estimation Of The Probability That $Y < X$, *J. Am. Stat. Assoc.* 66 (1971) 162–168.
- [74] H. Tong, Note On The Estimation Of $P(Y < X)$ In The Exponential Case, *Technometrics*. 16 (1974).
- [75] G.D. Kelley, J.A. Kelley, W.R. Schucany, Efficient Estimation Of $P(Y < X)$ In The Exponential Case, *Technometrics*. 18 (1976) 359–360.
- [76] B.M. Beg, On The Estimation Of $Pr (Y < X)$ For The Two-Parameter Exponential Distribution, *Metrika*. 27 (1980) 29–34.
- [77] E. El-Newehi, B.K. Sinha, Reliability Estimation Based On Ranked Set Sampling, *Commun. Stat. - Theory Methods*. 29 (2000) 1583–1595.
- [78] Y.S. Sathe, S.P. Shah, On Estimating $P(X > Y)$ For The Exponential Distribution, *Commun. Stat. - Theory Methods*. 10 (1981) 39–47.
- [79] B.M. Kurkjian, G.Q. Strong, M.J. Karson, Reliability Estimation For The Exponential Distribution, *Commun. Stat. - Simul. Comput.* 16 (1987) 835–853.
- [80] B.K. Sinha, R. Zieliński, Estimating $P\{X > Y\}$ In Exponential Model Revisited, *Statistics (Ber)*. 29 (1997) 299–316.
- [81] A. Baklizi, W. Abu Dayyeh, Shrinkage Estimation Of $P (Y > X)$ In The Exponential Case, *Commun. Stat. - Simul. Comput.* 32 (2003) 31–42.
- [82] K. Krishnamoorthy, S. Mukherjee, H. Guo, Inference On Reliability In Two-Parameter Exponential Stress-Strength Model, *Metrika*. 65 (2007) 261–272.
- [83] A. Baklizi, Interval Estimation Of The Stress-Strength Reliability In The Two-Parameter Exponential Distribution Based On Records, *J. Stat. Comput. Simul.* 84 (2014) 2670–2679.
- [84] S.K. Singh, U. Singh, A. Yadav, P.K. Viswkarma, On The Estimation Of Stress Strength Reliability Parameter Of Inverted Exponential Distribution, *Int. J. Sci. World*. 3 (2015) 98.

- [85] P. Kundu, N. Jana, S. Kumar, K. Chatterjee, Stress-Strength Reliability Estimation For Exponentially Distributed System With Common Minimum Guarantee Time, *Commun. Stat. - Theory Methods*. 49 (2020) 3375–3396.
- [86] M. Mahdizadeh, E. Zamanzade, Efficient Reliability Estimation In Two-Parameter Exponential Distributions, *Filomat*. 32 (2018) 1455–1463.
- [87] N. Jana, S. Kumar, K. Chatterjee, Inference On Stress–Strength Reliability For Exponential Distributions With A Common Scale Parameter, *J. Appl. Stat.* 46 (2019) 3008–3031.
- [88] M. Pal, M. Masoom Ali, J. Woo, Estimation And Testing Of $P(Y > X)$ In Two-Parameter Exponential Distributions, *Statistics (Ber)*. 39 (2005) 415–428.
- [89] A.M. Abouammoh, A.M. Alshingiti, Reliability Estimation Of Generalized Inverted Exponential Distribution, *J. Stat. Comput. Simul.* 79 (2009) 1301–1315.
- [90] M. Pandey, S.K. Upadhyay, Bayes Estimation Of Reliability In Stress-Strength Model Of Weibull Distribution With Equal Scale Parameters, *Microelectron. Reliab.* 26 (1986).
- [91] D. Kundu, R.D. Gupta, Estimation Of $P(Y < X)$ For Weibull Distribution, *Ieee Trans. Reliab.* 55 (2006) 270–280.
- [92] S. Kumar, N. Chandra, M.J.S. Khan, On The Reliability Estimation Of Burr Type Xii Distribution, *Saf. Reliab.* 33 (2013) 29–40.
- [93] D.K. Al-Mutairi, M.E. Ghitany, D. Kundu, Inferences On Stress-Strength Reliability From Lindley Distributions, *Commun. Stat. - Theory Methods*. 42 (2013) 1443–1463.
- [94] C. Li, H. Hao, Reliability Of A Stress-Strength Model With Inverse Weibull Distribution, *Jaeng Int. J. Appl. Math.* 47 (2017) 302–306.
- [95] N. Akdam, I. Kinaci, B. Saracoglu, Statistical Inference Of Stress-Strength Reliability For The Exponential Power (E_p) Distribution Based On Progressive Type-Ii Censored Samples, *Hacettepe J. Math. Stat.* 46 (2017) 239–253.
- [96] A. Iranmanesh, K. Fathi Vajargah, M. Hasanzadeh, On The Estimation Of Stress Strength Reliability Parameter Of Inverted Gamma Distribution, *Math. Sci.* 12 (2018) 71–77.

- [97] A. Biswas, S. Chakraborty, M. Mukherjee, On Estimation Of Stress–Strength Reliability With Log-Lindley Distribution, *J. Stat. Comput. Simul.* 91 (2021) 128–150.
- [98] A.M. Almarashi, A. Algarni, M. Nassar, On Estimation Procedures Of Stress–Strength Reliability For Weibull Distribution With Application, *Plos One.* 15 (2020).
- [99] S. Sengupta, S. Mukhuti, Unbiased Estimation Of $P(X > Y)$ For Exponential Populations Using Order Statistics With Application In Ranked Set Sampling, *Commun. Stat. - Theory Methods.* 37 (2008) 898–916.
- [100] V. Zardasht, M. Asadi, Evaluation Of $P(X_t > Y_t)$ When Both X_t And Y_t Are Residual Lifetimes Of Two Systems, *Stat. Neerl.* 64 (2010) 460–481.
- [101] M. Mahdizadeh, E. Zamanzade, Kernel-Based Estimation Of $P(X > Y)$ In Ranked Set Sampling, *Sort.* 40 (2016) 243–266.
- [102] M. Mahdizadeh, E. Zamanzade, Smooth Estimation Of A Reliability Function In Ranked Set Sampling, *Statistics (Ber).* 52 (2018) 750–768.
- [103] M.S. Aminzadeh, Estimation Of Reliability For Exponential Stress-Strength Models With Explanatory Variables, *Appl. Math. Comput.* 84 (1997) 269–274.
- [104] M. Mahdizadeh, E. Zamanzade, Dynamic Reliability Estimation In A Rank-Based Design, *Probab. Math. Stat.* 39 (2019) 1–18.
- [105] E. Zamanzade, M. Mahdizadeh, H.M. Samawi, Efficient Estimation Of Cumulative Distribution Function Using Moving Extreme Ranked Set Sampling With Application To Reliability, *Asta Adv. Stat. Anal.* 104 (2020) 485–502.
- [106] A.S. Hassan, A. Al-Omari, H.F. Nagy, Stress–Strength Reliability For The Generalized Inverted Exponential Distribution Using Mrss, *Iran. J. Sci. Technol. Trans. A Sci.* (2021).
- [107] M. Salehi, J. Ahmadi, Estimation Of Stress-Strength Reliability Using Record Ranked Set Sampling Scheme From The Exponential Distribution, *Filomat.* 29 (2015) 1149–1162.
- [108] A. Baklizi, Interval Estimation Of The Stress-Strength Reliability In The Two-Parameter Exponential Distribution Based On Records, *J. Stat. Comput. Simul.*

84 (2014) 2670–2679.

- [109] S. Sengupta, Unbiased Estimation Of $P(X > Y)$ For Two-Parameter Exponential Populations Using Order Statistics, *Stat. A Journal of Theoretical and Applied Statistics*. 45 (2010) 179–188.
- [110] S. Sengupta, S. Mukhuti, Unbiased Estimation Of $P(X > Y)$ Using Ranked Set Sample Data, *Statistics (Ber)*. 42 (2008) 223–230.
- [111] H.A. Muttlak, W.A. Abu-Dayyeh, M.F. Saleh, E. Al-Sawi, Estimating $P(Y < X)$ Using Ranked Set Sampling In Case Of The Exponential Distribution, *Commun. Stat. - Theory Methods*. 39 (2010) 1855–1868.
- [112] X. Dong, L. Zhang, F. Li, Estimation Of Reliability For Exponential Distributions Using Ranked Set Sampling With Unequal Samples, *Qual. Technol. Quant. Manag.* 10 (2013) 319–328.
- [113] A. Safariyan, M. Arashi, R. Arabi Belaghi, Improved Point And Interval Estimation Of The Stress–Strength Reliability Based On Ranked Set Sampling, *Statistics (Ber)*. 53 (2019) 101–125.
- [114] X. Dong, L. Zhang, Estimation Of System Reliability For Exponential Distributions Based On L Ranked Set Sampling, *Commun. Stat. - Theory Methods*. 49 (2020) 3650–3662.
- [115] M.S. Abdallah, K. Jangphanish, A. Volodin, Estimation Of System Reliability Based On Moving Extreme And Minimax Ranked Set Sampling For Exponential Distributions, *Lobachevskii J. Math.* 2021 4213. 42 (2022) 3061–3076.
- [116] M.A. Hussian, Estimation Of Stress-Strength Model For Generalized Inverted Exponential Distribution Using Ranked Set Sampling, *Int. J. Adv. Eng. Technol.* 6 (2014) 2354–2362.
- [117] M. Esemem, S. Gurler, B. Sevinc, Estimation Of Stress-Strength Reliability Based On Ranked Set Sampling For Generalized Exponential Distribution, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* 107 (2020) 2411-2502.
- [118] A. Sadeghpour, A. Nezakati, M. Salehi, Comparison Of Two Sampling Schemes In Estimating The Stress-Strength Reliability Under The Proportional Reversed Hazard Rate Model, *Stat. Optim. Inf. Comput.* 9 (2021) 82–98.

- [119] A. Sadeghpour, M. Salehi, A. Nezakati, Estimation Of The Stress–Strength Reliability Using Lower Record Ranked Set Sampling Scheme Under The Generalized Exponential Distribution, *J. Stat. Comput. Simul.* 90 (2020) 51–74.
- [120] F.G. Akgül, Ş. Acıtaş, B. Şenoğlu, Inferences On Stress–Strength Reliability Based On Ranked Set Sampling Data In Case Of Lindley Distribution, *J. Stat. Comput. Simul.* 88 (2018) 3018–3032.
- [121] F.G. Akgul, K. Yu, B. Senoglu, Estimation Of The System Reliability For Generalized Inverse Lindley Distribution Based On Different Sampling Designs, *Commun. Stat. - Theory Methods.* (2019).
- [122] F.G. Akgül, B. Şenoğlu, Estimation Of $P(X < Y)$ Using Ranked Set Sampling For The Weibull Distribution, *Qual. Technol. Quant. Manag.* 14 (2017) 296–309.
- [123] F.G. Akgül, B. Şenoğlu, Estimation Of $P(X < Y)$ Using Some Modifications Of Ranked Set Sampling For Weibull Distribution, *Pakistan J. Stat. Oper. Res.* 13 (2017) 931–958.
- [124] F.G. Akgul, B. Senoglu, S. Acitas, Interval Estimation Of The System Reliability For Weibull Distribution Based On Ranked Set Sampling Data, *Hacettepe J. Math. Stat.* 47 (2018) 1404–1416.
- [125] F.G. Akgül, B. Şenoğlu, Inferences For Stress–Strength Reliability Of Burr Type X Distributions Based On Ranked Set Sampling, *Commun. Stat. Simul. Comput.* (2020).
- [126] M.K.H. Hassan, A New Application Of Generalized Linear Failure Rate Distribution In Agriculture Using Ranked Set Sampling, *J. Test. Eval.* 49 (2019).
- [127] A.I. Al-Omari, I.M. Almanjahie, A.S. Hassan, H.F. Nagy, Estimation Of The Stress-Strength Reliability For Exponentiated Pareto Distribution Using Median And Ranked Set Sampling Methods, *Comput. Mater. Contin.* 64 (2020) 835–857.
- [128] A. Hassan, S. Assar, M. Yahia, Estimation Of $R=P[Y < X]$ For Burr Type Xii Distribution Based On Ranked Set Sampling, *Int. J. Basic Appl. Sci.* 3 (2014) 274–280.
- [129] A. Kaya, Uyarlanabilir Küme Örneklemesinde Tahmin Modelleri, *Adıyaman Üniversitesi Fen Bilim. Derg.* 5 (2015) 105–119.

- [130] A.D. Al-Nasser, L Ranked Set Sampling: A Generalization Procedure For Robust Visual Sampling, *Commun. Stat. Simul. Comput.* 36 (2007) 33–43.
- [131] D. Kececioglu, *Reliability Engineering Handbook*, 1 2002.
- [132] I.J. Myung, Tutorial On Maximum Likelihood Estimation, *J. Math. Psychol.* 47 (2003) 90–100.
- [133] R.L. Smith, Maximum Likelihood Estimation In A Class Of Nonregular Cases, *Biometrika.* 72 (1985) 67.
- [134] K.G. Mehrotra, P. Nanda, Unbiased Estimation Of Parameters By Order Statistics In The Case Of Censored Samples, *Biometrika.* 61 (1974) 601–606.
- [135] S. Nadarajah, Reliability For Lifetime Distributions, *Math. Comput. Model.* 37 (2003) 683–688.
- [136] B. Epstein, M. Sobel, Some Theorems Relevant To Life Testing From An Exponential Distribution, *Ann. Math. Statist.* 25 (1954) 373–381.
- [137] A. Baklizi, Estimation Of $\Pr(X \leq Y)$ Using Record Values In The One And Two Parameter Exponential Distributions, *Commun. Stat. - Theory Methods.* 37 (2008) 692–698.
- [138] A.M. Abouammoh, A.M. Alshingiti, Reliability Estimation Of Generalized Inverted Exponential Distribution, *J. Stat. Comput. Simul.* 79 (2009) 1301–1315.
- [139] M. Pal, M. Masoom Ali, J. Woo, Estimation And Testing Of $P (Y > X)$ In Two-Parameter Exponential Distributions, *Statistics (Ber).* 39 (2005) 415–428.
- [140] K. Krishnamoorthy, S. Mukherjee, H. Guo, Inference On Reliability In Two-Parameter Exponential Stress-Strength Model, *Metrika.* 65 (2007) 261–273.
- [141] B.X. Wang, Y. Geng, J.X. Zhou, Inference For The Generalized Exponential Stress-Strength Model, *Appl. Math. Model.* 53 (2018) 267–275.
- [142] R.M.J. Heuts, Parameter Estimation In The Exponential Distribution, Confidence Intervals And A Monte Carlo Study For A Goodness Of Fit Test, *Stat. Hefte* 13 (1972) 225–246.
- [143] M. Rahman, L.M. Pearson, Estimation In Two-Parameter Exponential Distributions, *J. Stat. Comput. Simul.* 70 (2001) 371–386.
- [144] N.L. Johnson, S. Kotz, N. Balakrishnan, *Continuous Univariate Distributions-*

Volume1, 2nd Ed., New York, 1994.

- [145] H. Rinne, Location-Scale Distributions Linear Estimation And Probability Plotting Using Matlab, N.D.
- [146] W. Xue Chen, C. Xian Long, R. Yang, D. Sen Yao, Maximum Likelihood Estimator Of The Location Parameter Under Moving Extremes Ranked Set Sampling Design, *Acta Math. Appl. Sin.* 37 (2021) 101–108.
- [147] F.G. Akgul, K. Yu, B. Senoglu, Estimation Of The System Reliability For Generalized Inverse Lindley Distribution Based On Different Sampling Designs, *Commun. Stat. - Theory Methods.* (2019).
- [148] K.G. Mehrotra, P. Nanda, Unbiased Estimation Of Parameters By Order Statistics In The Case Of Censored Samples, *Biometrika.* 61 (1974) 601–606.
- [149] W. Chen, M. Xie, M. Wu, Modified Maximum Likelihood Estimator Of Scale Parameter Using Moving Extremes Ranked Set Sampling, *Commun. Stat. Simul. Comput.* 45 (2016) 2232–2240.
- [150] A. Rényi, On The Theory Of Order Statistics, *Acta Math. Acad. Sci. Hungarica* 1953 43. 4 (1953) 191–231.
- [151] A. Arnold, C. Barry, N. Balakrishnan, H.N. Nagaraja, *A First Course In Order Statistics*, Society For Industrial And Applied Mathematics, Siam, Philadelphia, 2008.
- [152] Z. Chen, Z. Bai, B.K. Sinha, *Ranked Set Sampling: Theory And Application*. New York: Springer, New York, NY, USA, 2004.
- [153] Z.P. Xia, J.Y. Yu, L.D. Cheng, L.F. Liu, W.M. Wang, Study On The Breaking Strength Of Jute Fibres Using Modified Weibull Distribution, *Compos. Part A Appl. Sci. Manuf.* 40 (2009) 54–59.
- [154] A. Asgharzadeh, M. Kazemi, Stress-Strength Reliability Of Exponential Distribution Based On Hybrid Censored Samples, In: *Proceeding 12th Iran. Stat. Conf.*, Razi University, Iran, 2014.
- [155] M. Mirjalili, H. Torabi, H. Nadeb, S. Bafekri. F., Stress-Strength Reliability Of Exponential Distribution Based On Type-I Progressively Hybrid Censored Samples, *J. Stat. Res. Iran.* 13 (2016) 89–105.

- [156] H. Nadeb, H. Torabi, Y. Zhao, Stress-Strength Reliability Of Exponentiated Fréchet Distributions Based On Type-Ii Censored Data, *J. Stat. Comput. Simul.* 89 (2019) 1863–1876.
- [157] W.S. Abu El Azm, E.M. Almetwally, A.S. Alghamdi, H.M. Aljohani, A.H. Muse, O.E. Abo-Kasem, Stress-Strength Reliability For Exponentiated Inverted Weibull Distribution With Application On Breaking Of Jute Fiber And Carbon Fibers, *Comput. Intell. Neurosci.* 2021 (2021) 21.