ENDOMORFİZMA HALKASI DÜZENLİ OLAN MODÜLLER ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

A STUDY ON MODULES WHOSE ENDOMORPHISM RINGS ARE REGULAR

HÜMEYRA ARSLAN

DOÇ. DR. PINAR AYDOĞDU
Tez Danışmanı

Hacettepe Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin
Matematik Anabilim Dalı için Öngördüğü
YÜKSEK LİSANS TEZİ
olarak hazırlanmıştır.

ÖZET

ENDOMORFİZMA HALKASI DÜZENLİ OLAN MODÜLLER ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Hümeyra Arslan
Yüksek Lisans, Matematik
Danışman: Doç. Dr. Pınar Aydoğdu
Mayıs 2022, 118 sayfa

Tezimizin birinci bölümünde, düzenli halkalar üzerine yapılan çalışmalarla ilgili kısa bir bilgi verilmiştir. İkinci bölümde, düzenli ve birimsel düzenli halkaların genel özelliklerine ve tezin genelinde kullanacağımız bazı temel kavramlara yer verilmiştir.

Tezin üçüncü bölümünde, endodüzenli olarak adlandırılan endomorfizma halkası düzenli olan modüller detaylı olarak incelenmiştir. Bu modüller, Zelmanowitz düzenli modüllerle kıyaslanmıştır. Bazı özel halka sınıfları için endodüzenli modüller yardımıyla karakterizasyonlar ele alınmıştır. Endodüzenli olma özelliğinin dik toplama taşınmadığı durumlar örneklerle irdelenmiş ve endodüzenli modüllerin dik toplamının ne zaman endodüzenli olduğu araştırılmıştır. Ayrıca, endomorfizma halkası, diğer bazı düzenlilik koşullarını sağlayan modüller de çalışılmıştır.

Dördüncü bölümde ise birimsel endodüzenli olarak adlandırılan, endomorfizma halkası birimsel düzenli olan modüller ele alınmıştır. Bu modüller için verilen karakterizasyonlar incelenmiştir. Endodüzenli modüllere paralel olarak birimsel endodüzenli modüllerin dik toplamının ne zaman birimsel endodüzenli olduğu irdelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Düzenli halkalar, Birimsel düzenli halkalar, Düzenli modüller, Endodüzenli modüller, Birimsel endodüzenli modüller.

ABSTRACT

A STUDY ON MODULES WHOSE ENDOMORPHISM RINGS ARE REGULAR

Hümeyra Arslan
Master of Science, Mathematics
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Pınar Aydoğdu
May 2022, 118 pages

In the first part of our thesis, a brief information about the studies on regular rings is given. In the second chapter, the general properties of regular and unit regular rings, and some basic concepts that we will use throughout the thesis are given.

In the third part of the thesis, modules with regular endomorphism rings, called endoregular, are examined in details. These modules are compared with Zelmanowitz regular modules. For some special ring classes, characterizations are handled in terms of endoregular modules. It is examined with examples that the feature of being endoregular need not carry over to the direct sum, and it is investigated when the direct sum of endoregular modules is endoregular. In addition, the endomorphism rings which satisfy some other regularity conditions are also studied.

In the fourth chapter, modules whose endomorphism ring is unit regular, namely unit endoregular modules are discussed. The characterizations given for these modules are examined. In parallel with the endoregular modules, it is investigated when the direct sum of the unit endoregular modules is unit endoregular.

Keywords: Regular rings, Unit regular rings, Regular modules, Endoregular modules, Unit endoregular modules.

TEŞEKKÜR

Çalışma sürecinde her türlü yol gösterici olan, olumlu tavırlarıyla beni cesaretlendiren, bilgi ve birikimiyle çalışmama farklı açılardan bakmamı sağlayan, beraber çalışmaktan ve her zaman öğrencisi olmaktan gurur duyduğum değerli danışman hocam Doç. Dr. Pınar Aydoğdu'ya sonsuz teşekkür ederim.

Tüm hayatım boyunca benim yanımda olan, aldığım kararları her zaman destekleyen annem Zarife ARSLAN'A, babam Hüseyin ARSLAN' a, kardeşlerim Yusuf ARSLAN'a ve Seda Nur ARSLAN'a, ablam Semra GÜLER'e ve kuzenim Kübra ARSLAN'a sonsuz şükranlarımı sunar ve teşekkür ederim.

Ankara, 2022

Hümeyra ARSLAN

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISATLMALAR DİZİNİ

R	:	Birimli ve birleşmeli halka
M_R	:	Birimsel sağ R-modül
$J(R)$	:	R halkasının Jacobson Radikali
$Ker(\alpha)$	:	α homomorfizmasının çekirdeği
$Im(\alpha)$	:	α homomorfizmasının görüntüsü
$\bigoplus M_i$	:	M_i modüllerinin dik toplamı
$\prod M_i$	:	M_i modüllerinin dik çarpımı
$r_R(M)$	:	M modülünün sağ sıfırlayanı
$l_R(M)$	:	M modülünün sol sıfırlayanı
$N \leq M$	:	N M'nin altmodülü
$N \leq_{ess} M$	:	N M'nin büyük altmodülü; M N'nin büyük genişlemesi
$N \trianglelefteq M$	:	N M'nin tam değişmez altmodülü
$N \leq^{\oplus} M$	:	N M'nin dik toplananı
$End_R(M)$	:	M modülünün R-endomorfizmalarının halkası
$Hom_R(M,N)$	:	M'den N'ye R-homomorfizmaların kümesi
$E(M)$	:	M modülünün injektif zarfı
$Soc(M)$	:	M modülünün basit altmodüllerinin toplamı
$\mathbb{Z}$	:	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	:	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	:	Gerçel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}_n$	:	$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ devirli grubu
$\hat{\mathbb{Z}}_p$	:	p-adic tamsayıların halkası
$\mathbb{Z}_{p^\infty}$	:	Prüfer p-grubu
$Mat_n(R)$	:	R halkası üzerindeki $n \times n$ tipindeki matrislerin halkası

1. GİRİŞ

Von Neumann düzenli halkalar, 1930'ların ortasında von Neumann tarafından operatör cebirlerin projeksiyon latislerini çalışmak için cebirsel bir çerçeve oluşturmak amacıyla tanımlanmıştır. Bu cebirsel çerçeve, projektif geometride kullanılmıştır. Tanımlandığından bu yana von Neumann düzenli halkalar, halka teorisinin aktif bir konusu olmuştur.

Her $r \in R$ için $r = rxr$ olacak biçimde bir $x \in R$ varsa R halkasına (von Neumann) düzenli denir. Bu düzenlilik koşulunu sağlayan x elemanı tersinir olacak şekilde bulunabiliyorsa, R halkasına birimsel düzenli denir. Düzenli ve abelyan (yani, eşkareleri merkezil olan) bir halkaya kuvvetli düzenli halka denir. Bu koşul, halkadaki her x elemanının $x = x^2y$ olacak şekilde $y \in R$ elemanının var olması ile denktir. Endomorfizma halkası düzenli (sırasıyla, birimsel düzenli, güçlü düzenli) olan bir modüle endodüzenli (sırasıyla, birimsel endüzenli, güçlü endodüzenli) denir. Bu özellik, bir modülün ayrışımı ile ilgili bilgi verdiği için oldukça önemlidir. Bir M modülünün endodüzenli olması için gerekli ve yeterli koşulun M'nin her f endomorfizması için $Im(f)$'nin ve $Ker(f)$'nin M'de dik toplanan olduğu çok iyi bilinen bir sonuçtur.

Son altmış yıldır endodüzenli modüller üzerinde önemli çalışmalar yapılmıştır. Fuchs [1] kitabında, hangi abel grupların endodüzenli olduğu sorusunu yöneltmiştir. Glaz-Wickless [2] ve Rangaswamy [3] bu soruya geniş bir abel grup sınıfı için cevap verdiyse de Fuchs'un yönelttiği soru hâlen açıktır. Herhangi bir halka üzerinde endodüzenli modülleri inceleyen öncü araştırmacı Ware olmuştur. Ware [4] çalışmasında, projektif modüllerin endomorfizma halkaları üzerinde çalışmıştır. Lee, Rizvi ve Roman'ın [5] çalışması endodüzenli modüller üzerindeki çalışmaları daha genel bir boyuta taşımıştır. Ehrlich, [6] ve [7] çalışmalarında, birimsel düzenli halkalar ve birimsel endodüzenli modüller ile ilgili incelemeler yapmıştır. Lee ve Zhang, [8] makalesinde, bu modülleri daha detaylı incelemişlerdir. Aynı çalışmada, güçlü endodüzenli modüllere de yer verilmiştir.

Anderson-Juett [9] çalışmasında ise değişmeli halkalar üzerinde endodüzenli modüller ele alınmıştır. Bu makalede, endodüzenli abel gruplar için bilinen bazı sonuçlar, Noether spektruma sahip tek boyutlu değişmeli halkalara taşınmıştır. Ayrıca, değişmeli halkalar üzerinde endodüzenli modüllerin bir genellemesi de verilmiştir. Bunun yanı sıra, Medina ve Sim, [10] makalesinde, abelyan endodüzenli (yani, güçlü endodüzenli) bir M modülünü M-üretilmiş altmodülleri ele alarak incelemiştir.

Bu tezde, [5], [8] ve [11] makaleleri temel alınarak endodüzenli, birimsel endodüzenli ve güçlü endodüzenli modüller detaylı olarak incelenmiştir.

2. ÖN BİLGİLER VE TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tez boyunca yararlanılacak bazı kavramlara ve sonuçlara yer verildi. Bu tezde, aksi belirtilmediği sürece R değişmeli olması gerekmeyen, birleşmeli ve birimli halkayı temsil edecek, R-modüller ise birimsel sağ R-modüller olacaktır.

2.1 Dedekind Sonlu Modüller; Yerine Koyma, Sadeleşme, İç Sadeleşme ve Sabit Sıra Özellikleri

Bu altbölümde, modüllerle ilgili bazı sadeleştirme özellikleri tanıtılacaktır.

Tanım 2.1.1. [12] Bir M modülü için $M \oplus K \cong M \oplus L$ iken $K \cong L$ oluyorsa, M modülü *sadeleşme özelliğine sahiptir (cancellation property)* ya da *sadeleştirilebilir (cancellable)* denir.

Önerme 2.1.2. [12, Proposition 3.3] *Bir $A \oplus D$ modülü sadeleştirilebilirdir ancak ve ancak A ve D sadeleştirilebilirdir.*

Kanıt. İlk olarak A ve D modüllerinin sadeleştirilebilir olduğu varsayılsın. $(A \oplus D) \oplus B \cong (A \oplus D) \oplus C$ olsun. Önce A'yı, sonra da D'yi sadeleştirirsek $B \cong C$ elde edilir. Tersine, $A \oplus D$ sadeleştirilebilir olsun. $D \oplus B \cong D \oplus C$ alınsın ve her iki tarafa A eklensin. $A \oplus D$ sadeleşme özelliğine sahip olduğundan $B \cong C$ elde edilir. Böylece, D sadeleştirilebilirdir. Benzer şekilde, aynı işlemler A için de uygulanırsa, A sadeleştirilebilir elde edilir. □

Tanım 2.1.3. [12] Bir M modülü için $N_1 \cong N_2$ olmak üzere, $M = N_1 \oplus K_1 = N_2 \oplus K_2$ iken $K_1 \cong K_2$ oluyorsa, M modülü *iç sadeleşme özelliğine sahiptir (internal cancellation property)* denir.

Önerme 2.1.4. [12, Proposition 3.4] *Eğer A sadeleştirilebilir ise A iç sadeleşme özelliğine sahiptir.*

Kanıt. $N \cong N'$ için $A = N \oplus K = N' \oplus K'$ olsun. N, A'nın dik toplananı olduğu için Önerme 2.1.2 gereğince, N de sadeleştirilebilirdir. Böylece, $N \oplus K = N' \oplus K' \cong N \oplus K'$ izomorfizmasından $K \cong K'$ elde edilir. □

Tanım 2.1.5. [12] Bir M modülü için, $M_1 \cong M \cong M_2$ olmak üzere, $A = M_1 \oplus K = M_2 \oplus L$ iken A'nın uygun bir N altmodülü için, $A = M_1 \oplus N = M_2 \oplus N$ oluyorsa M modülü *yerine koyma özelliğine sahiptir (substitution property)* denir.

Yukarıdaki tanıma denk olarak, bir A modülünde dik toplanan olan B ve C modüllerinden her biri, M'ye izomorf bir tümleyene (complement) sahipken, ortak bir $A_0 \cong M$ tümleyenine sahiptir ancak ve ancak M modülü yerine koyma özelliğini sağlar (bkz. [12]).

Önerme 2.1.6. [12, Proposition 4.3] *A ve D modülleri yerine koyma özelliğine sahiptir ancak ve ancak $A \oplus D$ yerine koyma özelliğine sahiptir.*

Kanıt. $A \oplus D$ modülünün yerine koyma özelliğine sahip olduğu varsayılsın. A'nın yerine koyma özelliğine sahip olduğunu görmek için $A \cong A'$ olmak üzere $M = A \oplus B = A' \oplus C$ ele alınsın. B ve C, $D \oplus M$ modülünde $A \oplus D$'ye izomorf olan tümleyenlere sahip olsun. O zaman, B ve C, X ortak tümleyenine sahipse, $X \cap M$ modülü M'de B ve C için ortak tümleyen olur. Tersine, A ve D'nin ikisinin de yerine koyma özelliğine sahip olduğu varsayılsın. $A \oplus D$'nin yerine koyma özelliğine sahip olduğunu görmek için, $A' \cong A$ ve $D' \cong D$ olmak üzere $N = (A \oplus D) \oplus B = (A' \oplus D') \oplus C$ modülü ele alınsın. O zaman, $D \oplus B$ ve $D' \oplus C$, N'de bir A_0 ortak tümleyenine sahiptir. Fakat bu durumda, $A_0 \oplus B$ ve $A_0 \oplus C$, N'de bir D_0 ortak tümleyenine sahip olur. Buradan, $A_0 \oplus D_0$, B ve C modülleri için N'de ortak tümleyendir. □

Tanım 2.1.7. [13, Definition 1.24] Bir M modülü, bir öz dik toplananına izomorf değilse M modülüne *doğrudan ya da Dedekind sonlu (directly finite)* denir. Aksi durumda, M'ye *doğrudan sonsuz (directly infinite)* denir.

Önteorem 2.1.8. [13, Proposition 1.25] *Bir M modülü Dedekind sonludur ancak ve ancak her $\varphi, \psi \in End_R(M)$ için $\varphi\psi = 1$ iken $\psi\varphi = 1$'dir.*

Kanıt. $N \cong M$ ve $L \neq 0$ koşulları sağlanmak üzere $M = N \oplus L$ olsun. $\psi : M \to N$ izomorfizmasını ele alınsın. Buradan, $\varphi L = 0$ ve $\varphi N = \psi^{-1}N$ koşullarını sağlayan bir $\varphi \in End_R(M)$ tanımlanabilir. O zaman, $\varphi\psi = 1$ ve $\psi\varphi \neq 1$ elde edilir. Tersine, $\varphi\psi = 1$ ve $\psi\varphi \neq 1$ olmak üzere $\varphi, \psi \in End_R(M)$ seçilsin. $\psi\varphi$ eşkare ve $\psi\varphi\psi = \psi$ olduğu için $M = \psi M \oplus (1 - \psi\varphi)M$ yazılabilir. Buradan, $\psi M \cong M$ ve $(1 - \psi\varphi)M \neq 0$ elde edilir. Sonuç olarak, M modülü doğrudan sonsuzdur. □

Şimdiye kadar ele aldığımız özellikler arasında aşağıdaki hiyerarşi mevcuttur:

Yerine koyma ⇒ Sadeleşme ⇒ İç Sadeleşme ⇒ Dedekind sonlu

Tanım 2.1.9. [12] R bir halka olsun. $aR + bR = R$ olan her $a, b \in R$ için $a + by \in R$ sağ tersinir olacak şekilde $y \in R$ varsa R halkasına 1-*sabit sıra (stable range* 1*) özelliğine sahiptir* denir.

Önerme 2.1.10. [14, Teorem 4] *Halkalar üzerindeki* 1-*sabit sıra özelliği sağ-sol simetriktir.*

Kanıt. $Rb+Rd = R$ olsun. O zaman, $ab+c = 1$ olacak şekilde $c \in Rd$ vardır. $aR+bR = R$ ise öyle bir $x \in R$ vardır ki $u := a + cx$ sağ tersinirdir. $uv = 1$ olsun. $w := a + x(1 - ba)$ için $w(1 - bx) = (1 - xb)u$ olur. Buradan, $y := (1 - bx)v$ için $wy = 1$ elde edilir. Böylece, $w(b + yc) = 1$ bulunur. Dolayısıyla, $yc \in yRd \subseteq Rd$ ve $R(b + yc) = R$ elde edilir. □

Önteorem 2.1.11. [15, Theorem 2.6] 1-*sabit sıra özelliğini sağlayan bir* R *halkasında tek yönlü tersinir elemanlar tersinirdir.*

Kanıt. $ax = 1$ olsun. $b = 1 - xa$ tanımlansın. O zaman, $Ra + Rb = R$ olur. Buradan, $u = a + tb$ sol tersinir olacak şekilde bir $t \in R$ vardır. $bx = x - xax = x - x = 0$ olduğundan, $1 = ux$ elde edilir. Dolayısıyla, u sağ tersinir, yani tersinir bulunur. Böylece, x ve a elemanları da tersinirdir. □

Önerme 2.1.12. [16, Proposition 1.1] R *halkası* 1-*sabit sıra özelliğine sahiptir ancak ve ancak* $ax + b = 1$ *olan her* $a, x, b \in R$ *için öyle bir* $y \in R$ *vardır ki* $a + by \in R$ *tersinirdir.*

Kanıt. R halkası 1-sabit sıra özelliğine sahip olsun. $a, x, b \in R$ için $ax + b = 1$ olduğu varsayılsın. O zaman, $aR + bR = R$ olur. Tanımdan, öyle bir $y \in R$ vardır ki $a + by$ sağ tersinirdir. Önteorem 2.1.11 gereğince, $a + by$ tersinirdir. Tersine, $aR + bR = R$ olsun. O zaman $ax + by = 1$ olacak şekilde $x, y \in R$ vardır. Hipotezden, $a + b(yt)$ tersinir olacak şekilde $t \in R$ vardır. Dolayısıyla, $a + b(yt)$ sağ tersinirdir. □

Önteorem 2.1.13. [12, Lemma 1.7] *Bir R halkası 1-sabit sıra özelliğine sahip olsun. O zaman, R halkası Dedekind sonludur.*

Kanıt. Önerme 2.1.10 gereğince, 1-sabit sıra olma özelliği sağ-sol simetriktir. Şimdi $ac = 1$ olsun. O zaman, $Ra + R(1 - ca) = R$'dir. O halde, bir $s \in R$ için $u := a + s(1 - ca)$ sol tersinirdir. Bu eşitlik sağdan c ile çarpılırsa $uc = ac + s(c - cac) = 1$ elde edilir. Böylece, u tersinirdir ve dolayısıyla c tersinirdir. □

Teorem 2.1.14. [12, Theorem 4.4] *Bir A modülü yerine koyma özelliğine sahiptir ancak ve ancak $S = End(A_R)$ halkası 1-sabit sıra özelliğine sahiptir.*

Kanıt. S halkasının 1-sabit sıra özelliğine sahip olduğu varsayılsın. $M = A \oplus B = A' \oplus C$ ve $A \cong A'$ olsun. $\pi : M = A \oplus B \to A \cong A'$ izdüşüm fonksiyonu için $Ker(\pi) = C$'dir. Burada, $f : A \to A$ ve $g : B \to A$ olmak üzere $\pi = (f, g)$ biçiminde ele alınacaktır. Bu durumda, (f, g) dönüşümü, $0 \to C \to A \oplus B \xrightarrow{(f,g)} A \to 0$ dizisini parçalar. Başka bir deyişle, öyle bir $\begin{pmatrix} f' \\ g' \end{pmatrix} : A \to A \oplus B$ dönüşümü vardır ki $(f, g) \begin{pmatrix} f' \\ g' \end{pmatrix} = 1_A$ olur. O zaman, $ff' + gg' = 1_A$ elde edilir. Varsayımdan, $f + (gg')h = u$ tersinir olacak şekilde bir $h \in S$ vardır. Böylece, $u = (f, g) \begin{pmatrix} 1 \\ g'h \end{pmatrix}$ elde edilir. Burada,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ g'h \end{pmatrix} : A \longrightarrow A \oplus B$$

$$a \longmapsto a + g'h(a)$$

olur. $A_0 := Im \begin{pmatrix} 1 \\ g'h \end{pmatrix} \subseteq M$ tanımlansın. Şimdi $M = A_0 \oplus C$ olduğu gösterilecektir. Bir $a \in A$ için $a + g'h(a) \in A_0 \cap C$ alınsın. $a + g'h(a) \in C = Ker(\pi)$'dir. Böylece, $\pi(a + g'h(a)) = (f, g) \begin{pmatrix} 1 \\ g'h \end{pmatrix} (a) = 0$ olur. Buradan, $u(a) = 0$ ve u bir izomorfizma olduğu için $a = 0$'dır. Böylelikle, $a + g'h(a) = 0 \in A_0 \cap C$ elde edilir. $(f, g) \begin{pmatrix} 1 \\ g'h \end{pmatrix} = u$ bir izomorfizma olduğundan $(f, g) \begin{pmatrix} 1 \\ g'h \end{pmatrix} u^{-1} = 1_A$ elde edilir. Buradan,

$M = Ker(f, g) \oplus Im \begin{pmatrix} 1 \\ g'h \end{pmatrix} u^{-1}$ olur. u^{-1} bir izomorfizma olduğundan, $M = A_0 \oplus C$ elde edilir. Şimdi de benzer şekilde, $M = A_0 \oplus B$ olduğu ispatlanacaktır. Bunun için ilk olarak $A_0 \cap B = 0$ eşitliği gösterilecektir. $\begin{pmatrix} 1 \\ g'h \end{pmatrix} (a) \in A_0 \cap B$ alınsın. $\begin{pmatrix} 1 \\ g'h \end{pmatrix} (a) \in B$, yani $a + (g'h)(a) \in B$'dir. Buradan, $a \in B \cap A = 0$ elde edilir. Böylece, $a = 0$'dır. Sonuç olarak, $a + (g'h)(a) = 0$'dır. Şimdi $m \in M$ verilsin. $M = A \oplus B$ olduğundan bir $a \in A$ ve bir $b \in B$ için $m = a + b$ şeklinde yazılabilir. $m = a + b + (g'h)(a) - (g'h)(a)$ yazılırsa $m \in A_0 \oplus B$ elde edilir. Yani, $M = A_0 \oplus B$'dir. O halde, A_0 modülü, B ve C için ortak tümleyendir.

Tersine, A yerine koyma özelliğine sahip olsun ve $ff' + gg' = 1_A$ eşitliği düşünülsün. A' ve B modülleri, A'nın kopyaları olsun. $\pi = (f, g) : M = A \oplus B \to A'$ dönüşümü $\begin{pmatrix} f' \\ g' \end{pmatrix}$ dönüşümü tarafından parçalanır. Buradan, $(f, g) \begin{pmatrix} f' \\ g' \end{pmatrix} = 1_A$ olduğu için $M =$ $Ker(f, g) \oplus Im \begin{pmatrix} f' \\ g' \end{pmatrix}$ yazılabilir. $\begin{pmatrix} f' \\ g' \end{pmatrix} : A' \to A \oplus B$ olduğundan ve Birinci İzomorfizma Teoremi'nden $A'/Ker \begin{pmatrix} f' \\ g' \end{pmatrix} \cong Im \begin{pmatrix} f' \\ g' \end{pmatrix}$ elde edilir. $\begin{pmatrix} f' \\ g' \end{pmatrix}$ bir monomorfizma olduğu için $A' \cong Im \begin{pmatrix} f' \\ g' \end{pmatrix} \cong A$ izomorfizması vardır. $M = Ker(f, g) \oplus Im \begin{pmatrix} f' \\ g' \end{pmatrix} \cong Ker(\pi) \oplus A \cong$

$A \oplus B$ olur. Yerine koyma özelliğine sahip her modül sadeleşme özelliğine sahip olduğu için $Ker(\pi) \cong B \cong A$ elde edilir. $C = Ker(\pi)$ olsun. Bu durumda, B ve C, A'ya izomorf olan tümleyene sahiptir. M'deki bu tümleyene A_0 diyelim. Böylece, $\varphi\colon A' \to A_0$ izomorfizması göz önüne alınırsa her $a' \in A'$ için $\varphi(a') = a + b$ olacak şekilde tek türlü belirli $a \in A$ ve $b \in B$ vardır. Buradan, $f_1\colon A' \to A, a' \mapsto a$ ve $g_1\colon A' \to B, a' \mapsto b$ olacak biçimde bir $\begin{pmatrix} f_1 \\ g_1 \end{pmatrix} : A_0 \longrightarrow M = A \oplus B$ bir dönüşüm tanımlanabilir . $a' \in Ker(f_1)$ alalım. $f_1(a') = a = 0$ ve $\varphi(a') = a + b = b \in A_0 \cap B = 0$ olduğundan $b = 0$ elde edilir. O halde, $\varphi(a') = 0$ ve φ izomorfizma olduğundan $a' = 0$'dır, yani f_1 birebirdir. $a \in A$ için $a_0 \in A_0$ ve $b \in B$ olmak üzere $a = a_0 + b$'dir. Buradan, $-a_0 = a - b$'dir. $\varphi : A' \to A_0$ bir izomorfizma olduğu için öyle bir $a' \in A$ vardır ki $\varphi(a') = -a_0 = a - b$'dir. Böylece, $f_1(a') = a$ dir. Yani, f_1 dönüşümü örtendir. O halde, f_1 tersinirdir. Ayrıca,

$$A' \xrightarrow{\varphi} A_0 \xrightarrow{\iota} A \oplus B \xrightarrow{\pi} A'$$

için $u = \pi\varphi$ dönüşümü örtendir. $a \in Ker(\pi\varphi)$ alınsın. $\pi\varphi(a) = 0$'dır. Buradan, $\varphi(a') \in Ker(\pi) = C \cap A_0 = 0$ ve φ dönüşümü bir izomorfizma olduğundan $a' = 0$ elde edilir. Yani, $\pi\varphi$ dönüşümü birebirdir. Böylece, $\pi\varphi$ tersinirdir. O halde, $u = \pi\varphi = (f, g)\begin{pmatrix} f' \\ g' \end{pmatrix} = ff_1 + gg_1$ tersinir bulunur. f_1 dönüşümü de tersinir olduğu için $uf_1^{-1} = f + g(gf_1^{-1})$ tersinirdir. Böylece, Önerme 2.1.12 gereğince, $S = End(A_R)$ halkası 1-sabit sıra özelliğine sahiptir.

□

Örnek 2.1.15. *$\mathbb{Z}$ bir Dedekind bölgesi olduğundan sadeleşme özelliğini sağlar. Ancak, $End(\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}) \cong \mathbb{Z}$ halkası 1-sabit sıra özelliğini sağlamadığından, Teorem 2.1.14 gereğince, yerine koyma özelliğine sahip değildir.*

2.2 Biçimsel Modüller

Bu altbölümde, Nicholson ve Sanchez Campos tarafından [17] çalışmasında tanıtılan biçimsel modüllere, bu teze yardımcı olacak sonuçlar ele alınarak kısaca değinilecektir.

Tanım 2.2.1. [17] M bir R-modül ve $\alpha \in End_R(M)$ olsun. Eğer $M/\alpha M \cong Ker\alpha$ ise M modülüne *biçimsel (morphic) modül* denir.

Önteorem 2.2.2. [17, Lemma 1] *Bir M modülünün bir α endomorfizması için aşağıdaki ifadeler denktir:*
(1) *α biçimseldir, yani, $M/\alpha M \cong Ker\alpha$'dir.*
(2) *Öyle bir $\beta \in End_R(M)$ vardır ki $\beta M = Ker\alpha$ ve $Ker\beta = \alpha M$'dir.*
(3) *Öyle bir $\beta \in End_R(M)$ vardır ki $\beta M \cong Ker\alpha$ ve $Ker\beta \cong \alpha M$'dir.*

Kanıt. (1) $\Rightarrow$ (2) $\sigma : M/\alpha M \rightarrow Ker\alpha$ izomorfizması alınsın. $\beta\colon M \rightarrow M, m \mapsto \sigma(m + \alpha M)$ homomorfizması tanımlansın. O zaman, $\beta M = \sigma(M/\alpha M) = Ker\alpha$ ve $Ker\beta = \{m \in M | \sigma(m + \alpha M) = 0\}$ olur. Böylece istenen elde edilir.
(2) $\Rightarrow$ (3) açıktır.
(3) $\Rightarrow$ (1) $M/\alpha M \cong M/Ker\beta \cong \beta M \cong Ker\alpha$ elde edilir. Yani, $\alpha \in End_R(M)$ biçimseldir. $\square$

Sonuç 2.2.3. [17, Corollary 47] *Her biçimsel modül iç sadeleşme özelliğine sahiptir.*

2.3 Düzenli Halkalar

Tezimizin ana konusunu oluşturan von Neumann düzenli halkalarla ilgili genel bilgiler Goodearl'ün [18] kitabından alıntılanmıştır.

Tanım 2.3.1. [18, Definition] R bir halka olsun. Her $x \in R$ için $xyx = x$ olacak şekilde en az bir $y \in R$ bulunabiliyorsa R halkasına *(von Neumann) düzenli (regular) halka* denir.

Örnek 2.3.2. [18] *Bölümlü halkaların dik çarpımı düzenlidir.*

Örnek 2.3.3. [18] *Düzenli halkaların sınıfı homomorfik görüntüler ve dik çarpımlar altında kapalıdır.*

Kanıt. $f : R \rightarrow S$ bir halka epimorfizması ve R bir düzenli halka olsun. S halkasının düzenli olduğu gösterilecektir. Bunun için $x \in S$ verilsin. O halde, $f(r) = x$ olacak şekilde en az bir $r \in R$ vardır. R düzenli halka olduğundan öyle bir $p \in R$ vardır ki ki $rpr = r$'dir. Buradan $x = f(r) = f(rpr) = f(r)f(p)f(r) = xf(p)x$ elde edilir. Böylece, S halkası düzenlidir.

Her $i \in I$ için R_i düzenli halka olsun. $\prod_{i\in I} R_i$ 'nin düzenli halka olduğu ispatlanacaktır. Her $i \in I$ için $x_i \in R_i$ olmak üzere $(x_1, x_2, ..., x_n, ...) \in \prod_{i\in I} R_i$ verilsin. Her $i \in I$ için R_i düzenli halka olduğundan, öyle bir $y_i \in R_i$ vardır ki $x_i = x_i y_i x_i$ dir. Böylece, $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)(y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (x_1y_1x_1, x_2y_2x_2, \ldots, x_ny_nx_n, \ldots) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ elde edilir. O halde, $\prod_{i\in I} R_i$ düzenlidir. $\square$

Teorem 2.3.4. [18, Theorem 1.1] *Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir:*

(i) *R halkası düzenlidir.*

(ii) *R halkasının her temel sağ (sol) ideali bir eşkare tarafından üretilir.*

(iii) *R halkasının her sonlu üretilmiş sağ (sol) ideali bir eşkare tarafından üretilir.*

Kanıt. $(i \Rightarrow ii)$ $x \in R$ için R halkasının xR temel sağ ideali ele alınsın. R düzenli halka olduğu için öyle bir $y \in R$ vardır ki $xyx = x$'dir. Buradan $(xy)^2 = xy$ olduğu kolaylıkla görülebilir, yani $xy \in R$ bir eşkare elemandır. $xR = xyR$ olduğunu görmek yeterlidir. Bunun için $x \in xR$ verilsin. $x = xyx = (xy)x \in xyR$ olduğundan $xR \subseteq xyR$ elde edilir. O halde, $xy \in R$ eşkare bir eleman olmak üzere $xR = xyR$'dir.

$(ii \Rightarrow iii)$ Keyfi $x, y \in R$ elemanları için $xR + yR$ idealinin temel ideal olduğunu görmek yeterlidir. (ii)'den bir $e^2 = e \in R$ için $xR = eR$'dir. $e \in xR$ olduğundan, bir $r \in R$ için $e = xr$'dir. Buradan, $(1 - e)y = y - ey = y - xry \in xR + yR$ elde edilir. $xR + yR = eR + (y - ey)R$ olduğu gösterilecektir. $r_1, r_2 \in R$ olmak üzere $xr_1 + yr_2 \in xR + yR$ verilsin. $x \in xR = eR$ olduğu için en az bir $r \in R$ için $x = er$'dir. Bu eşitlik soldan e ile çarpılırsa $ex = e^2r = er = x$ bulunur. $xr_1 + yr_2 = exr_1 + yr_2 - yr_2 + eyr_2 = exr_1 + eyr_2 + yr_2 - eyr_2 = e(xr_1 + yr_2) + (y - ey)r_2 \in eR + (y - ey)R$ elde edilir. Buradan, $xR + yR \subseteq eR + (y - ey)R$ olur. Ters kapsama için, $r_1, r_2 \in R$ olmak üzere $er_1 + (y - ey)r_2 \in eR + (y - ey)R$ alınsın. $er_1 + (y - ey)r_2 = er_1 + yr_2 - eyr_2 \in eR + yR = xR + yR$ elde edilir. Sonuç olarak, $xR + yR = eR + (y - ey)R$ eşitliği sağlanır. (ii)'den, bir $f^2 = f \in R$ için $(y - ey)R = fR$ olur. Şimdi $ef = 0$ olduğu gösterilecektir. $f \in (y - ey)R$ olduğundan, bir $r \in R$ için $f =$

$(y-ey)r = (1-e)yr$'dir. $ef = e(1-e)yr = 0$ elde edilir. $g = f-fe$ elemanının e'ye dik bir eşkare olduğu ispatlanacaktır. $g^2 = (f-fe)(f-fe) = f^2-f^2e-fef-fefe = f-ef = g$, $ge = (f-fe)e = fe-fe^2 = fe-fe = 0$ ve $eg = e(f-fe) = ef-efe = 0$ elde edilir. $fg = f(f-fe) = f^2-f^2e = f-fe = g$ ve $gf = (f-fe)f = f^2-fef = f$ bulunur. O halde, $gR = fR = (y-ey)R$'dir ve böylece $xR+yR = eR+(y-ey)R = eR+gR$ olur. $eR+gR = (e+g)R$ olduğunu ispatlamak için $r_1, r_2 \in R$ için $er_1+gr_2 \in eR+gR$ alınsın. $er_1+gr_2 = er_1+ger_1+gr_2+egr_2 = eer_1+ger_1+ggr_2+egr_2 = (e+g)er_1+(e+g)gr_2 = (e+g)(er_1+gr_2) \in (e+g)R$ bulunur. Buradan, $eR+gR \subseteq (e+g)R$ elde edilir. Ters kapsama açık olduğundan, $eR+gR = (e+g)R$ elde edilir. Böylece,

$$xR+yR = eR+(y-ey)R = eR+gR = (e+g)R$$

olur. Ayrıca,

$$(e+g)^2 = (e+g)(e+g) = e^2+eg+ge+g^2 = e+g$$

elde edilir. Böylece, $e+g \in R$ eşkare olmak üzere $xR+yR = (e+g)R$ bulunur.
$(iii \Rightarrow i)$ $x \in R$ verilsin. Öyle bir $e \in R$ eşkare elemanı vardır ki $xR = eR$'dir. O halde, en az bir $y \in R$ için $e = xy$ olur. Ayrıca, $r \in R$ olmak üzere $x = er$ yazılabileceğinden $ex = er = x$ elde edilir. Böylece, $x = ex = xyx$ bulunur. O halde, R halkası düzenlidir. □

Sonuç 2.3.5. [18, Corollary 1.2] *R bir düzenli halka olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır:*
$a)$ R halkasının bütün tek yönlü idealleri eşkare idealdir.
$b)$ R halkasının bütün iki yönlü idealleri yarıasal (semiprime) idealdir.
$c)$ R halkasının Jacobson radikali sıfırdır.
$d)$ R halkası sağ ve sol yarıkalıtsaldır (semihereditary).
$e)$ R halkası sağ ve sol tekilsizdir (nonsingular).

Kanıt. $a)$ J, R halkasının bir sağ ideali olsun. $x \in J$ verilsin. R halkası düzenli halka olduğudan, bir $y \in R$ için $x = xyx$'dir. O zaman, $x, xy \in J$ ve $x = (xy)x$ olduğundan, $J^2 = J$ elde edilir.

$b)$ J, R halkasının iki yönlü ideali ve $J^2 = 0$ olsun. (a)'dan $J^2 = J$ olduğundan $J = 0$ elde edilir.

$c)$ R halkası düzenli olduğundan, her devirli sağ ideali bir eşkare eleman tarafından üretilir. Bu nedenle, $J(R) = 0$ olduğunu ispatlamak için $J(R)$'nin sıfırdan farklı eşkare eleman kapsamadığını göstermek yeterlidir. $x^2 = x \in J(R)$ olsun. Buradan, $x - 1$ tersinir eleman olduğundan, $x^2 - x = x(x-1) = 0$ ve dolayısıyla $x = 0$ elde edilir. O halde, $J(R) = 0$ olmak zorundadır.

$d)$ R halkasının sonlu üretilmiş her sağ ideali, R'nin bir dik toplananı olduğundan her sağ ideal projektiftir. Böylece, R halkası sağ yarıkalıtsaldır. Benzer şekilde, R sol yarıkalıtsaldır.

$e)$ $xJ = 0$ olacak şekilde $x \in R$ ve $J \leq_{ess} R_R$ verilsin. O zaman, $Re = Rx$ olacak şekilde bir e eşkare elemanı vardır. $ReJ = RxJ = 0$ olduğundan, $J \leq (1-e)R$ elde edilir. Buradan, $J \cap eR = 0$ ve böylece, $eR = 0$ bulunur. O halde, $x = 0$'dır. Dolayısıyla, R sağ tekilsizdir. Benzer şekilde, R sol tekilsiz de olur. $\square$

Tanım 2.3.6. [18] J, bir R halkasının iki yönlü ideali olsun. Her $x \in J$ için, $xyx = x$ olacak şekilde bir $y \in J$ varsa J'ye *düzenli ideal* denir.

Önteorem 2.3.8 ve Önteorem 2.3.11'de kullanmak için basit bir gözlem yapılacaktır.

Gözlem 2.3.7. [18] R bir halka olmak üzere, $x, y \in R$ ve $x' = x - xyx$ alınsın. Bir $a \in R$ için $x' = x'ax'$ ise, o zaman öyle bir $b \in R$ vardır ki $x = xbx$'dir.

Kanıt. $x, y \in R$ ve $x' = x - xyx$ alınırsa $x = x' + xyx = x'ax' + xyx = x(a - axy - yxa + yxay + y)x = x(a - axy - yxa + yxay + y)x$ elde edilir. Bu durumda aranan eleman $b = a - axy - yxa + yxay + y \in R$ olur. $\square$

Önteorem 2.3.8. [18, Lemma 1.3] $J \subseteq K$*, bir* R *halkasının iki yönlü idealleri olsun.* K *ideali düzenlidir ancak ve ancak* J *ve* K/J *idealleri düzenlidir.*

Kanıt. K ideali düzenli olsun. $x \in K$ için $\bar{x} = x + J \in K/J$ alınsın. K düzenli ve $x \in K$ olduğundan, öyle bir $y \in K$ vardır ki $xyx = x$'dir. Bu durumda, en az bir $\bar{y} \in K/J$ için $\bar{x} = \bar{x}\bar{y}\bar{x}$ olur. Buradan, K/J ideali düzenlidir. Şimdi $x \in J$ verilsin. K ideali düzenli olduğundan, bir $y \in K$ için $xyx = x$ elde edilir. $z = yxy \in J$ alınırsa $xzx = x(yxy)x = (xyx)yx = xyx = x$ elde edilir. Böylece, J ideali düzenlidir.

Tersine, J ve K/J idealleri düzenli olsun. $x \in K$ verilsin. $\bar{x} = x + J \in K/J$ ve K/J düzenli olduğu için öyle bir $\bar{y} \in K/J$ vardır ki $\bar{x}\bar{y}\bar{x} = \bar{x}$ elde edilir. $\bar{x}\bar{y}\bar{x} = \bar{x}$ eşitliğinden en az bir $y \in K$ için $x' = x - xyx \in J$ olur. J ideali düzenli olduğu için öyle bir $a' \in J$ vardır ki $x'a'x' = x'$ bulunur. Gözlem 2.3.7 gereğince, $xwx = x$ olacak şekilde bir $w \in K$ vardır. Böylece, K ideali düzenlidir. □

Sonuç 2.3.9. [18] (i) *Düzenli bir halkanın iki yönlü her ideali düzenlidir.*

(ii) *J, bir R halkasının iki yönlü bir ideali olmak üzere, J ve R/J düzenli ise R düzenli halkadır.*

Önerme 2.3.10. [18, Proposition 1.5] *R bir halka olsun. $M = \{x \in R | RxR$ düzenli ideal$\}$ kümesi verilsin.*

(a) *M, R halkasının iki yönlü düzenli bir idealidir.*

(b) *M, R halkasının bütün iki yönlü düzenli ideallerini içerir.*

(c) *R/M sıfırdan farklı iki yönlü düzenli bir ideale sahip değildir.*

Kanıt. (a) $x, y \in M$ verilsin. O zaman, RyR ve $\frac{RxR+RyR}{RyR} \cong \frac{RxR}{RyR \cap RxR}$ düzenlidir. O halde, Önteorem 2.3.8'den $RxR + RyR$ düzenlidir. $R(x+y)R \subseteq RxR + RyR$ olduğundan, yine Önteorem 2.3.8'den, $R(x+y)R$ düzenlidir. Buradan, $x + y \in M$'dir. O halde, M iki yönlü idealdir. $x \in M$ alınırsa, RxR bir düzenli ideal ve $x \in RxR$ olduğundan, öyle bir $y \in RxR$ vardır ki $x = xyx$'dir. Böylece, M düzenlidir.

(b) I düzenli bir ideal olsun. $x \in I$ için RxR düzenli ideal olduğundan $x \in M$'dir. Böylece, $I \subseteq M$ elde edilir.

(c) R/M halkası sıfırdan farklı düzenli bir I/M iki yönlü idealine sahip olsun. I/M ve M düzenli olduğundan, Önteorem 2.3.8'den, I ideali düzenlidir. (b)'den $I \subseteq M$ elde edilir. Buradan, $I/M = 0$ çelişkisi elde edilir. Sonuç olarak, R/M sıfırdan farklı iki yönlü düzenli bir ideale sahip değildir. □

Aşağıdaki önteoremden, düzenli bir halka üzerindeki $n \times n$ boyutundaki matris halkalarının da düzenli olduğu sonucuna varılır.

Önteorem 2.3.11. [18, Lemma 1.6] *$e_1 + \cdots + e_n = 1$ olmak üzere, bir R halkasında $e_1, \ldots, e_n$ dik eşkareleri verilsin. R halkası düzenlidir ancak ve ancak her $x \in e_iRe_j$ için öyle bir $y \in e_jRe_i$ vardır ki $xyx = x$'dir.*

Kanıt. ($\Rightarrow$) R halkasının düzenli olduğu varsayılsın. $x \in e_iRe_j$ alınsın. O halde, $x = e_ire_j$ olacak şekilde bir $r \in R$ vardır. Ayrıca, R halkası düzenli olduğu için $x = xyx$ olacak şekilde bir $y \in R$ vardır. O zaman, $x = xyx = (e_ire_j)y(e_ire_j) = (e_ir)e_jye_i(re_j) = x(e_jye_i)x$ elde edilir.

($\Leftarrow$) Keyfi bir $x \in e_iRe_j$ için $x = xyx$ olacak şekilde bir $y \in e_jRe_i$ var olsun. İspat n üzerine tümevarım uygulanarak tamamlanacaktır. $n = 1$ için sonuç aşikârdır. $n = 2$ olsun. $e_1e_2 = e_2e_1 = 0$ ve $e_1 + e_2 = 1$ olacak şekilde e_1 ve e_2 eşkare elemanları verilsin. Bir $x \in R$ için $e_1xe_2 = 0$ olsun. Kabulden, öyle $y \in e_1Re_1$ ve $z \in e_2Re_1$ elemanları vardır ki $(e_1xe_1)y(e_1xe_1) = e_1xe_1$ ve $(e_2xe_2)z(e_2xe_2) = e_2xe_2$ elde edilir. $y \in e_1Re_1$ olduğu için $(e_1x)y(xe_1) = e_1xe_1$ ve $z \in e_2Re_2$ olduğu için $(e_2x)z(xe_2) = e_2xe_2$ eşitliği vardır. Ayrıca, $e_1+e_2 = 1$ olduğundan $x = x(e_1+e_2) = xe_1+xe_2$ ve $x = (e_1+e_2)x = e_1x+e_2x$ elde edilir. O zaman, $x(y+z)x = (e_1xe_1+e_2xe_1+e_2xe_2)(y+z)(e_1xe_1+e_2xe_1+e_2xe_2 = e_1xe_1ye_1xe_1+ e_2xe_1ye_2xe_1+e_2xe_2ze_2xe_1+e_2xe_2ze_2xe_2 = e_1xe_1+e_2xe_1ye_2xe_1+e_2xe_2ze_2xe_1+e_2xe_2 = e_1xe_1+e_2xye_2xe_1+e_2xzxe_1+e_2xe_2 = e_1xe_1+e_2xe_2+e_2x(y+z)xe_1$ elde edilir. Şimdi $x' = x-x(y+z)x \in e_2Re_1$ olduğu gösterilecektir. $x-x(y+z)x = x-e_1xe_1-e_2xe_2-e_2x(y+z)xe_1 = x(e_1+e_2)-e_1xe_1-e_2xe_2-e_2x(y+z)xe_1 = xe_1+xe_2-e_1xe_1-e_2xe_2-e_2x(y+z)xe_1 = e_1x(1-e_1)+e_2x-e_2xe_2-e_2x(y+z)xe_1 = e_1xe_2+e_2x-e_2xe_2-e_2x(y+z)xe_1 = e_2x-e_2xe_2-e_2x(y+z)xe_1 = e_2x(1-e_2)-e_2x(y+z)xe_1 = e_2xe_1-e_2x(y+z)xe_1 \in e_2Re_1$ elde edilir. Böylece, $x' = x-x(y+z)x \in e_2Re_1$ elde edilir. Kabulden, bir $\omega \in e_1Re_2$ için $x'\omega x' = x'$ olur. Yukarıdaki gözlemden, $x \in R$ elemanı düzenlidir. Böylece, bir $v \in R$ için $xvx = x$'dir. Şimdi bir $x \in R$ verilsin. $(e_1xe_2)y(e_1xe_2) = e_1xe_2$ olmak üzere bir $y \in e_2Re_1$ elemanı seçilsin. $y \in e_2Re_1$ olduğu için öyle bir $r \in R$ vardır ki $y = e_2re_1$'dir. Buradan, $e_1xyxe_2 = e_1x(e_2re_1)xe_2 = (e_1xe_2)(e_2re_1)(e_1xe_2 = (e_1xe_2)y(e_1xe_2) = e_1xe_2$ elde edilir. Böylece, $e_1xyxe_2 = e_1xe_2$ bulunur. O halde, $e_1(x-xyx)e_2 = 0$ olur. Buradan, yukarıdaki gibi, bir $z \in R$ için $(x-xyx)z(x-xyx) = x-xyx$ olur. O halde, $x-xyx \in R$ düzenli bir elemandır. Böylece, $x \in R$ elemanı da düzenlidir. O zaman, her $x \in R$ için $x\omega x = x$ olacak şekilde bir $\omega \in R$ vardır. Sonuç olarak, R halkası düzenlidir.

Son olarak $n > 2$ olsun ve $n-1$ tane dik eşkare eleman için sonucun doğru olduğu kabul edilsin. $f = e_2 + \cdots + e_n$ ve $g = e_1 + e_3 + e_4 + \cdots + e_n$ olsun. Tümevarım hipotezinden, fRf ve gRg halkalarının düzenlidir. $x \in e_1Rf$ elemanı alınsın. O zaman, $(xe_2)y(xe_2) = xe_2$ olacak şekilde bir $y \in e_2Re_1$ vardır. Buradan, $x - xyx \in gRg$ elde edilir. Böylece, bir $z \in gRg$ için $(x-xyx)z(x-xyx) = x - xyx$ olur. Dolayısıyla, $x \in e_1Rf$ olmak üzere, bir $w \in R$ için $xwx = x$'dir. O halde, $fwe_1 \in fRe_1$ için $x(fwe_1)x = xwx = x$ elde edilir. Aynı şekilde, her $x \in fRe_1$ için $xtx = x$ olacak şekilde bir $t \in e_1Rt$ vardır. $n = 2$ durumu, e ve f dik eşkare elemanlarına uygulanırsa, R halkasının düzenli olduğu sonucuna varılır. □

Sonuç 2.3.12. [18] *R düzenli bir halka, $n \in \mathbb{N}$ ve $e^2 = e \in M_n(R)$ olmak üzere $eM_n(R)e$ halkası da düzenlidir.*

Kanıt. $e^2 = e \in M_n(R)$ alınsın. O zaman, $eM_n(R)e \cong End_R(eR^n) = Hom(eR^n, eR^n) \cong eR^ne$ olur. R halkası düzenli ise R^n halkası da düzenlidir. O halde, Önteorem 2.3.11 gereğince, eR^ne halkası düzenlidir. Sonuç olarak, $eM_n(R)e$ halkası düzenli olur. □

Teorem 2.3.13. [18, Theorem 1.7] *A modülü, düzenli bir R halkası üzerinde sonlu üretilmiş bir projektif modül ise $End_R(A)$ düzenli halkadır.*

Kanıt. $n \in \mathbb{N}$ ve $\pi^2 = \pi \in End_R(R^n) \cong M_n(R)$ olmak üzere, $R^n \xrightarrow{\pi} A \xrightarrow{\beta} 0$ tam dizisi oluşturulsun. R halkası düzenli ise, $\pi M_n(R)\pi$ halkası da düzenlidir. $\pi M_n(R)\pi \cong \pi End_R(R^n)\pi \cong End_R(\pi R^n) \cong End_R(A)$ olduğundan $End_R(A)$ bir düzenli halkadır. □

Örnek 2.3.14. [18, Example 1.8] *Endomorfizma halkası $End_R(J_R)$ düzenli olmayan iki yönlü bir J idealine sahip bir düzenli R halkası vardır.*

Kanıt. F bir cisim ve $n = 1, 2, \ldots$ için $F_n = F$ olsun. S ile 1 ve $K = \bigoplus F_n$ tarafından üretilen, düzenli $\prod F_n$ halkasının F-altcebiri temsil edilsin. O halde,

$$S = \{(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, a, a, \ldots) | a_i, a \in F; n \in \mathbb{N}\}$$

olur. K, $\prod F_n$ düzenli halkasının bir ideali olduğu için düzenlidir. $S/K \cong F$ olduğundan, Önteorem 2.3.8'den, S de düzenlidir. $R = \begin{pmatrix} S & K \\ K & S \end{pmatrix} \subseteq M_2(S)$ matrisi verilsin. S ve K düzenli idealler olduğundan, Önteorem 2.3.8'den R halkası düzenlidir. $J = \begin{pmatrix} K & K \\ K & S \end{pmatrix}$ matrisi R'nin iki yönlü idealidir. Aşağıdaki gibi tanımlanan $f \in End_R(J)$ dönüşümü alınsın:

$$\begin{pmatrix} k & k \\ k & s \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & k \\ k & s \end{pmatrix}$$

$fJ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ K & K \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ K & S \end{pmatrix} \leq R_R$ sağ idealinin öz büyük altmodülüdür. fJ, H'nin dik toplananı değildir. Böylece, fJ, J'nin de dik toplananı değildir. Sonuç olarak, $hJ = fJ$ ve $fgf = f$ koşullarını sağlayan $h \in End_R(J_R)$ eşkaresi ve $g \in End_R(J_R)$ elemanı yoktur. Böylece, $End_R(J_R)$ halkası düzenli değildir. □

Önerme 2.3.15. [18, Proposition 2.13] *A, bir düzenli R halkası üzerinde projektif sağ modül ve $A_1, A_2, \ldots$ altmodülleri A'nın sonlu üretilmiş altmodülleri olsun.*
(a) Eğer $A_1 \leq A_2 \leq \ldots$ ise, öyle $e_1, e_2, \ldots \in End_R(A)$ dik eşkare elemanları vardır ki her n için $e_1A \oplus e_2A \oplus \cdots \oplus e_nA = A_n$'dir.
(b) Eğer $A_1 \leq A_2 \leq \ldots$ veya $A_1 \geq A_2 \geq \ldots$ ise, öyle $f_1, f_2, \ldots \in End_R(A)$ elemanları vardır ki her n için $f_nA = A_n$'dir.

Kanıt. $E = End_R(A)$ olsun.
(a) Bir $e_1 \in E$ eşkare elemanı verilsin. $e_1A = A_1$ olsun. $e_1A = A_1 \leq A_2$ olduğundan, $A_2 = e_1A \oplus (1 - e_1)A_2$ elde edilir. Ek olarak, bir B için $A = A_2 \oplus B$'dir. Buradan, öyle bir $e_2 \in E$ eşkare elemanı vardır ki $e_2A = (1 - e_1)A$ ve $(1 - e_2) = e_1A \oplus B$'dir. Böylece, $e_1e_2 = e_2e_1 = 0$ ve $e_1A \oplus e_2A = A_2$ olur. $(e_1 + e_2)A = A_2$ olduğundan, benzer şekilde, öyle bir $e_3 \in E$ eşkare elemanı vardır ki e_3, $e_1 + e_2$ eşkaresine diktir ve $(e_1 + e_2)A \oplus e_3A = A_3$

olur. Böylece, e_1, e_2, e_3 dik eşkarelerdir ve $e_1A \oplus e_2A \oplus e_3A = A_3$ elde edilir. Bu şekilde devam edilirse, istenen sonuca varılır.
(b) Eğer $A_1 \leq A_2 \leq \ldots$ ise, o zaman (a)'daki gibi bir $e_n \in E$ vardır. Bu durumda, her n için $f_n = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$ alınırsa $f_nA = A$ elde edilir. $A_1 \geq A_2 \geq \ldots$ olsun. $f_1A = A_1$ olacak şekilde $f_1 \in E$ eşkare elemanı seçilsin. Bir B için $A_1 = A_2 \oplus B$ olduğundan, öyle bir $f_2 \in E$ vardır ki $f_2A = A_2$ ve $(1 - f_2)A = B \oplus (1 - f_1)A$ elde edilir. Böylece, $f_2(1 - f_1) = 0$ olur. Buradan, $f_2f_1 = f_2 = f_1f_2$ elde edilir. Bu şekilde devam edilirse, istenen sonuca varılır. □

Önerme 2.3.16. [18, Proposition 2.14] *A, düzenli bir R halkası üzerinde projektif sağ modül ve B, A'nın sayılabilir üretilmiş bir altmodülü olsun. O zaman, öyle $e_1, e_2, \ldots \in End_R(A)$ elemanları vardır ki $\bigoplus e_nA = B$ olur ve her bir e_nA devirlidir.*

Kanıt. Her bir $n = 1, 2, \ldots$ için B_n/B_{n-1} devirli olacak şekilde $B_0 = 0 \leq B_1 \leq B_2 \leq \ldots$ altmodüllerinin birleşimi olan B altmodülü ele alınsın. Önerme 2.3.15 gereğince, öyle $e_1, e_2, \ldots \in End_R(A)$ dik eşkare elemanları vardır ki her $n = 1, 2, ...$ için $e_1A \oplus e_2A \oplus \cdots \oplus e_nA = B_n$ yazılır. Buradan açıktır ki $\bigoplus e_nA = \cup B_n$'dir ve her e_nA devirlidir. □

Sonuç 2.3.17. [18, Proposition 2.15] *A, bir düzenli halka üzerinde bir projektif modül ise, A'nın sayılabilir üretilmiş her altmodülü projektiftir.*

Sonuç 2.3.18. [18, Corollary 2.16] *Düzenli bir R halkası yarıbasittir ancak ve ancak R halkası, sıfırdan farklı dik eşkare elemanların sonsuz dizisini içermez.*

Kanıt. Gereklilik açıktır. Tersine, R halkası yarıbasit olmasın. O zaman, R halkasının en az bir sağ ideali R_R modülünün dik toplananı değildir. Bu sağ ideal sonlu üretilmiş değildir, çünkü aksi takdirde, R düzenli olduğundan bir dik toplanan olur. Böylece, R halkası sağ noether olamaz. Sonuç olarak, R halkası sonlu üretilmiş sağ idealler üzerinde artan zincir koşuluna sahip değildir. Dolayısıyla, R halkası, sonlu üretilmiş olmayan sayılabilir üretilmiş bir J sağ idealine sahiptir. Önerme 2.3.16 gereğince, öyle $e_1, e_2, \ldots \in R$ dik eşkare elemanları vardır ki $\bigoplus e_nR = J$'dir. J sağ ideali sonlu üretilmiş olmadığından, sonsuz sayıda $e_n \neq 0$ vardır. Bu da sıfırdan farklı dik eşkare elemanların sonsuz dizisini verir. □

2.4 Zelmanowitz Düzenli Modüller

Bu altbölümde, Zelmanowitz [19] çalışmasında tanımlananan düzenli modüller tanıtılacak ve ilgili sonuçlar irdelenecektir.

R bir halka, M bir sağ R-modül ve N bir sol R-modül olsun. $\lambda : M \times N \to R$ fonksiyonu, her $r \in R$; $m, m_1, m_2 \in M$ ve n, n_1, n_2 için

$$\lambda(mr, n) = \lambda(m, rn);$$

$$\lambda(m_1 + m_2, n) = \lambda(m_1, n) + \lambda(m_2, n);$$

$$\lambda(m, n_1 + n_2) = \lambda(m, n_1) + \lambda(m, n_2)$$

koşullarını sağlıyorsa, λ'ya *R-bilineer dönüşüm* denir.

$M^\star = Hom_R(M, R)$ ve $End_R(M) = Hom_R(M, M)$ olmak üzere $m, n \in M$ ve $f \in M^\star$ için,

$$\begin{aligned} (,)\colon M^\star \times M &\longrightarrow R \\ (f, m) &\longmapsto f(m) \end{aligned}$$

ve $m, n \in M$ için $[m, f](n) := nf(m)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} [,]\colon M \times M^\star &\longrightarrow End_R(M) \\ (m, f) &\longmapsto [m, f] : M \to M \end{aligned}$$

dönüşümleri R-bilineer fonksiyonlardır. $T(M)$ ile $[,]$ fonksiyonunun görüntüsü tarafından üretilen $End_R(M)$'nin iki yönlü ideali temsil edilsin.

Tanım 2.4.1. [19] M bir sağ R-modül olsun. Her $m \in M$ için $mf(m) = m$ olacak şekilde bir $f \in Hom_R(M, R)$ varsa M modülüne *Zelmanowitz düzenli* denir.

Önerme 2.4.2. [19, Lemma 1.1] *M bir R-modül ve I, $End_R(M)$ halkasının bir ideali olsun. $\mu M \cap \nu M = 0$ ve $\mu\nu = 0$ şartlarını sağlayan $\mu = \mu^2 \in I$ ve $\nu = \nu^2 \in I$ elemanları için $\mu M \oplus \nu M = \lambda M$ olacak şekilde bir $\lambda = \lambda^2 \in I$ vardır. Böylece, $\mu M \oplus \nu M$ modülü M'nin bir dik toplananıdır.*

Kanıt. $\eta = \nu(1-\mu)$ olsun. O zaman $\eta \in I$ olur. Bu eşitlik sağdan ν ile çarpılırsa, $\eta\nu = \nu(1-\mu)\nu = \nu^2 = \nu$ elde edilir. Aynı eşitlik soldan η ile çarpılırsa, $\eta^2 = \eta\nu(1-\mu) = \nu(1-\mu) = \eta$ elde edilir. $\mu\eta = 0 = \eta\mu$ eşitlikleri de kolaylıkla gösterilebilir. Böylece, $\mu \in I$ ve $\eta \in I$ elemanlarının dik eşkare elemanlardır. $\eta M = \nu(1-\mu)M \subseteq \nu M$ ve $\nu M = \eta\nu M \subseteq \eta M$ olduğundan $\eta M = \nu M$ elde edilir. $\mu \in I$ ve $\eta \in I$ dik eşkare elemanlar olduğundan, $(\mu+\eta)M \subseteq \mu M + \eta M = (\mu+\eta)(\mu M + \eta M) \subseteq (\mu+\eta)M$ bulunur. Buradan, $(\mu+\eta)M = \mu M + \nu M$ elde edilir. O halde, $\mu + \eta = (\mu+\eta)^2 \in I$ için, $\mu M + \nu M = \mu M + \eta M = (\mu+\eta)M$ olur. Sonuç olarak, $\lambda = \mu + \eta \in I$ eşkare elemanı için $\mu M \oplus \nu M = \lambda M$ elde edilir. □

Önerme 2.4.3. [19, Proposition 1.2] *M bir sağ R-modül olsun. M'nin her devirli altmodülü M'de bir dik toplanan olsun. M modülünün bir N dik toplananı ve bir $m \in M$ için $N + mR = N \oplus m'R$ olacak şekilde bir $m' \in M$ vardır ve $N + mR$ altmodülü de M'nin bir dik toplananı olur.*

Kanıt. M, N ve m ifadedeki gibi olsun. N, M modülünün bir dik toplananı olduğundan bir $\mu^2 = \mu : M \to N$ epimorfizması vardır. O zaman, $mR = \mu(m)R + (1-\mu)(m)R \subseteq N + (1-\mu)(m)R$ olur. $N \cap (1-\mu)M = 0$ olduğundan sondaki toplam diktir. Bu yüzden, $N + mR \subseteq N + (1-\mu)(m)R$ ve $(1-\mu)(m)R \subseteq mR + \mu(m)R \subseteq mR + N$ elde edilir. Böylece, $N + mR = \mu M \oplus (1-\mu)(m)R$ bulunur. $(1-\mu)(m)R$ devirli olduğu için, kabulden bir $\nu^2 = \nu : M \to (1-\mu)(m)R$ epimorfizması vardır. O halde, $N + mR = \mu M \oplus \nu M$ elde edilir. Önerme 2.4.2'den, $N + mR$, M modülünün dik toplananıdır. □

Sonuç 2.4.4. [19, Corollary 1.3] *M, her devirli altmodülü dik toplanan olan bir sağ R-modül olsun. O zaman, M'nin sayılabilir (veya sonlu) üretilmiş her altmodülü devirli modüllerin bir dik toplamıdır ve M modülünün her sonlu üretilmiş altmodülü M'nin bir dik toplananıdır.*

Tanımdan, düzenli halkalar sağ R-modül olarak Zelmanowitz düzenlidir.

Önteorem 2.4.5. [19, (1.4)] *Bir Zelmanowitz düzenli modülün altmodülü de Zelmanowitz düzenlidir.*

Önerme 2.4.6. [19, (1.5)] *Bir devirli, Zelmanowitz düzenli R-modül projektiftir.*

Kanıt. $M = mR$ devirli modülü Zelmanowitz düzenli olsun. O zaman, $[m, f]m = m$ olacak şekilde bir $f \in M^\star$ vardır. Buradan, $[m, f]$ endomorfizması M üzerinde birim homomorfizmadır. Böylece, $T(M) = End_R(M)$'dir ve M modülü projektiftir. □

Teorem 2.4.7. [19, Theorem 1.6] *M modülü Zelmanowitz düzenli bir sağ R-modül olsun. O zaman, M'nin sonlu üretilmiş her altmodülü M'nin bir dik toplananıdır. M'nin sayılabilir (veya sonlu) üretilmiş her altmodülü devirli, Zelmanowitz düzenli modüllerin dik toplamıdır.*

Kanıt. M bir Zelmanowitz düzenli modül olsun. Sonuç 2.4.4 gereğince, M'nin devirli altmodüllerinin dik toplanan olduğunu göstermek yeterlidir. M'nin bir mR devirli altmodülü verilsin. M modülü Zelmanowitz düzenli olduğundan, bir $f \in M^\star$ için $[m, f]m = m$'dir. Buradan, $M = mR \oplus Ker[m, f]$ elde edilir. □

Sonuç 2.4.8. [19, Corollary 1.7] *Sayılabilir (veya sonlu) üretilmiş Zelmanowitz düzenli modüller projektiftir.*

Teorem 2.4.9. [19, Theorem 2.8] *M_α'lar sağ R-modüller olmak üzere, $\oplus_{\alpha \in A} M_\alpha$ Zelmanowitz düzenlidir ancak ve ancak her bir M_α Zelmanowitz düzenlidir.*

2.5 Birimsel Düzenli Halkalar

Bu altbölümde, düzenli halkalardan daha güçlü bir halka sınıfı olan birimsel düzenli halkalar incelenmiştir.

Tanım 2.5.1. [18] R bir halka olsun. Her bir $x \in R$ için $xux = x$ olacak şekilde bir $u \in R$ tersinir elemanı varsa, R halkasına *birimsel düzenli (unit regular)* denir.

Önerme 2.5.2. [16, Proposition 1.2] *Bir R halkası birimsel düzenlidir ancak ve ancak R'nin her elemanı bir eşkare ile bir tersinir elemanın çarpımıdır.*

Teorem 2.5.3. [16, Theorem 2.1] *Düzenli bir R halkası 1-sabit sıra özelliğine sahiptir ancak ve ancak R halkası birimsel düzenlidir.*

Kanıt. R halkası 1-sabit sıra özelliğine sahip olsun. $a \in R$ verilsin. R düzenli olduğu için öyle bir $x \in R$ vardır ki $axa = a$'dır. $ax + (1 - ax) = 1$ olduğu açıktır. Varsayımdan ve Önerme 2.1.12'den, öyle bir $y \in R$ vardır ki $u = a + (1 - ax)y \in R$ elemanı tersinirdir. O halde, $axu = ax[a + (1 - ax)y] = axa = a$ elde edilir. Buradan, $ax = au^{-1}$ ve dolayısıyla $au^{-1}a = axa = a$ bulunur. Böylelikle, R halkası birimsel düzenlidir.

Tersine, R halkası birimsel düzenli olsun. $ax + b = 1$ koşulunu sağlayan $a, x, b \in R$ elemanları verilsin. Önerme 2.5.2'den, $e, g \in R$ eşkare elemanlar ve $u, \nu \in R$ tersinir elemanlar olmak üzere, $a = eu$ ve $b = g\nu$ yazılabilir. Buradan, $e(ux + b) + (1 - e)g\nu = eux + eb + (1 - e)b = ax + b = 1$ elde edilir. R halkası düzenli olduğundan, öyle bir $c \in R$ vardır ki $(1 - e)g = (1 - e)gc(1 - e)g$ olur. $f = (1 - e)gc(1 - e)$ olsun. Böylece, $e(ux + b) + fb = e(ux + b) + (1 - e)gc(1 - e)g\nu = e(ux + b) + (1 - e)g\nu = eux + eg\nu + (1-e)g\nu = ax + eg\nu + (1-e)g\nu = 1 - b + eg\nu + (1-e)g\nu = 1 - (1-e)g\nu + (1-g)\nu = 1$ elde edilir. Dikkat edilirse, $0 = feux = fax = f(1 - b)$'dir. Buradan, $f = fb$ elde edilir. $e = e.1 = e(ax + b) = e(eux + b) = eux + eb = e(ux + b)$'dir. Böylece, $e + f = e(ux + b) + fb = 1$ olur. Buradan, $1 + eb\nu c(1 - e)$ elemanı, tersi $1 - eb\nu^{-1}c(1 - e)$ olan tersinir bir elemandır. $e + f = 1$ olduğu için $e + (1 - e)gc(1 - e) = 1$ eşitliği elde edilir. Buradan, $e + (1-e)g\nu\nu^{-1}c(1-e) = 1$ bulunur. $b = g\nu$ olduğundan $e + (1-e)b\nu^{-1}c(1-e) = 1$ ve böylece, $e + b\nu^{-1}c(1 - e) = 1 + eb\nu^{-1}c(1 - e)$ elde edilir. $(1 - e)e = 0$ olduğundan, $e + b\nu^{-1}c(1-e)[1 + eb\nu^{-1}c(1-e)] = e + b\nu^{-1}c(1-e) = 1 + eb\nu^{-1}c(1-e)$ bulunur. Bu eşitlik sağdan u ile çarpılırsa ve $eu = a$ eşitliği kullanılırsa, $a + b\nu^{-1}c(1-e)[1 + eb\nu^{-1}c(1-e)]u = [1 + eb\nu^{-1}c(1 - e)]u$ tersinir elemanı elde edilir. Önerme 2.1.12 gereğince, R halkası 1-sabit sıra özelliğine sahiptir. □

Teorem 2.5.4. [17, Theorem 46] *Bir M modülü iç sadeleşme özelliğine sahiptir ancak ve ancak $End_R(M)$ halkasındaki her düzenli eleman biçimseldir.*

Kanıt. M modülü iç sadeleşme özelliğine sahip olsun. $M = \alpha M \oplus K = Ker\alpha \oplus N$ koşulunu sağlayan $\alpha \in End_R(M)$ düzenli elemanı verilsin. O zaman, $\alpha M \cong M/Ker\alpha \cong N$ olur. M modülü iç sadeleşme özelliğine sahip olduğundan, $Ker\alpha \cong K$ elde edilir. Buradan, $M/\alpha M \cong K \cong Ker\alpha$ bulunur.

Tersine, $M = N \oplus K = N_1 \oplus K_1$ ve $N \cong N_1$ olsun. $K_1 \cong K$ olduğu gösterilecektir. Bir $\gamma : N \longrightarrow N_1$ izomorfizması vardır. $n \in N$ ve $k \in K$ olmak üzere,

$$\alpha\colon M \longrightarrow M$$
$$n + k \longmapsto \gamma(n)$$

tanımlansın. O zaman, $\alpha M = \gamma N = N_1$ ve $Ker\alpha = K$ altmodülleri M'nin dik toplananlarıdır. Böylece, $\alpha \in End_R(M)$ düzenli bir elemandır. Hipotezden, $M/\alpha M \cong Ker\alpha$ olur. $K_1 \cong M/N_1 = M/\alpha M \cong Ker\alpha = K$ olduğundan, $K_1 \cong K$ elde edilir. □

Örnek 2.5.5. [17, Example 3] *$\alpha \in End_R(M)$ biçimsel bir eleman olsun. Eğer, $\sigma : M \to M$ bir otomorfizma ise $\sigma\alpha$ ve $\alpha\sigma$ biçimseldir. Özel olarak, her birimsel düzenli endomorfizma biçimseldir.*

Kanıt. Önteorem 2.2.2 gereğince, öyle bir $\beta \in End_R(M)$ vardır ki $\beta M = Ker\alpha$ ve $Ker\beta = \alpha M$ sağlanır. O zaman, $\alpha\sigma M = \alpha M = Ker\beta = Ker\sigma^{-1}\beta$ ve $Ker\alpha\sigma = \sigma^{-1}(Ker\alpha) = (\sigma^{-1}\beta)M$ elde edilir. O halde, $\alpha\sigma$ biçimseldir. Benzer şekilde, $\sigma\alpha M = \sigma(Ker\beta) = Ker\beta\sigma^{-1}$ ve $Ker\sigma\alpha = Ker\alpha = \beta M = \beta\sigma^{-1}M$ olur. Böylece, $\sigma\alpha$ biçimseldir. □

Önteorem 2.5.6. [17, Lemma 27.(2)] *$\alpha \in End_R(M)$ olsun. α birimsel düzenlidir ancak ve ancak α hem düzenli hem de biçimseldir.*

Kanıt. Örnek 2.5.5'ten α birimsel düzenli ise biçimseldir. Tersine, $M = \alpha M \oplus K = N \oplus Ker\alpha$ ise $K \cong M/\alpha M \cong Ker\alpha$ olur, çünkü α biçimseldir. $\alpha M = \alpha N$ olduğundan, $M = \alpha N \oplus K$ elde edilir. $\gamma : K \to Ker\alpha$ izomorfizması ele alınsın. $n \in N$ ve $k \in K$ için,

$$\sigma\colon M \longrightarrow M$$
$$\alpha(n) + k \longmapsto n + \gamma(k)$$

tanımlansın. σ iyi tanımlıdır. $\sigma M = N + \gamma K = N + Ker\alpha = M$'dir, ve $Ker\sigma = 0$'dır. çünkü γ moniktir. Böylece, $\sigma \in End_R(M)$ birimseldir. $Ker\alpha$ ve N üzerinde $\alpha\sigma\alpha = \alpha$ eşitliği sağlandığından $\alpha \in End_R(M)$ birimsel düzenlidir. □

Sonuç 2.5.7. [17, Corollary 48] *$End_R(M)$ bir birimsel düzenli halkadır ancak ve ancak M modülü iç sadeleşme özelliğine sahiptir ve $End_R(M)$ bir düzenli halkadır.*

Kanıt. $End_R(M)$ birimsel düzenliyse, Teorem 2.5.4 gereğince, M modülü iç sadeleşme özelliğine sahiptir. Tersine, M modülü iç sadeleşme özelliğine sahip ve $End_R(M)$ düzenli ise, Teorem 2.5.4'ten $End_R(M)$ halkası biçimseldir. Önteorem 2.5.6'dan $End_R(M)$ halkası birimsel düzenlidir. □

Teorem 2.5.8. [18, Teorem 4.1] *A bir modül ve $T = End_R(A)$ düzenli halka olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:*
(a) T halkası birimsel düzenlidir.
(b) A iç sadeleşme özelliğine sahiptir.
(c) A modülü biçimseldir.
(d) $eT \cong fT$ koşulunu sağlayan $e, f \in T$ eşkare elemanları için $(1-e)T \cong (1-f)T$ olur.

Kanıt. $(a) \Leftrightarrow (b)$ Sonuç 2.5.7 gereğince açıktır. $(a) \Leftrightarrow (c)$ Önteorem 2.5.6 gereğince açıktır. $(a) \Leftrightarrow (d)$ $A = T_T$ durumuna uygulanan $(a) \Leftrightarrow (b)$'nin denkliğidir. □

Tanım 2.5.9. [5] Bir R halkasının her eşkare elemanı merkezil ise R halkasına *abelyan halka* denir.

Teorem 2.5.10. [12, Theorem 2.7] *Abelyan düzenli bir halka birimsel düzenlidir.*

Kanıt. R bir abelyan düzenli halka olsun. $N \cong N'$ olmak üzere K, K', N, N' sağ idealleri için $R = K \oplus N = K' \oplus N'$ verilsin. O zaman, uygun $e, e' \in R$ eşkare elemanları için $N = eR$, $K = (1 - e)R$, $N' = e'R$ ve $K' = (1 - e')R$ olur. Varsayımdan, $e, e' \in R$ merkezildir. $N \cong N'$ modüllerinin sıfırlayanları alınırsa, $(1 - e)R = (1 - e')R$, yani $K = K'$ elde edilir. Sonuç 2.5.7'den, R halkası birimsel düzenlidir. □

2.6 Göreceli İnjektiflik ve Süreklilik

Bu altbölümde, [13] kitabından yararlanılarak, göreceli injektiflik ve injektifliğin bir genellemesi olan süreklilik kavramları tanıtılacak ve ilgili sonuçlara değinilecektir.

Tanım 2.6.1. [13, Definition 1.1] A ve N, R-modüller olsun. Her $X \leq A$ ve her $\varphi : X \to N$ homomorfizması için $\phi|_X = \varphi$ olacak şekilde bir $\phi : A \to N$ homomorfizması varsa N'ye A-*injektif modül* denir.

Önteorem 2.6.2. [13, Lemma 1.2] *Bir N modülü A-injektif ise, $f : N \to A$ monomorfizması parçalanır. Buna ek olarak, A ayrıştırılamaz ise f bir izomorfizmadır.*

Önerme 2.6.3. [13, Proposition 1.3.] *N bir A-injektif modül olsun. $B \leq A$ için N modülü B-injektif ve A/B-injektiftir.*

Önerme 2.6.4. [13, Proposition 1.5] *Bir N modülü $(\oplus_{i \in I} A_i)$-injektiftir ancak ve ancak her $i \in I$ için N, A_i-injektiftir.*

Önerme 2.6.5. [13, Proposition 1.6] $\prod_{i \in I} M_i$ *modülü A-injektiftir ancak ve ancak her $i \in I$ için M_i modülü A-injektiftir.*

Tanım 2.6.6. [13] Bir M modülü M-injektifse M'ye *yarı-injektif modül* denir. Bütün modüllere göre injektif olan bir modüle *injektif* denir.

Tanım 2.6.7. [13] M bir modül ve $X \leq M$ olsun. Eğer bir $Y \leq M$ için $X \cap Y = 0$ özelliğine göre X altmodülü maksimalse X'e *Y'nin M içindeki tümleyeni (complement)* denir.
$0 \neq X \leq M$ olsun. Bir $K \leq M$ için $X \cap K = 0$ iken $K = 0$ oluyorsa X'e M'nin *büyük (essential) altmodülü* veya M'ye X'in *büyük genişlemesi (essential extension)* denir. Bu durum, $X \leq_{ess} M$ olarak gösterilir.

Tanım 2.6.8. [13] M modülünün bir altmodülü M içinde bir büyük genişlemeye sahip değilse bu altmodüle *kapalı (closed)* denir.

Uyarı 2.6.9. [13] Her modül bir injektif modül içine gömülebilir ve dahası bir minimal injektif genişlemeye sahiptir. Bu aynı zamanda bir maksimal büyük genişleme olur. Böyle bir genişleme izomorfizma farkıyla tektir. Bir M modülünün maksimal büyük genişlemesine *M'nin injektif zarfı* denir ve $E(M)$ ile gösterilir.

Önteorem 2.6.10. [13, Lemma 1.13] *Bir N modülü A-injektiftir ancak ve ancak her $\psi \in Hom(E(A), E(N))$ için $\psi A \leq N$ olur.*

Kanıt. ($\Leftarrow$) $X \leq A$ ve $\varphi : X \to N$ bir homomorfizma olsun. $E(N)$ injektif olduğu için φ homomorfizması, bir $\psi : A \to E(N)$ homomorfizmasına genişler. Varsayımdan, $\psi A \leq N$'dir. Dolayısıyla, $\psi : A \to N$ homomorfizması φ homomorfizmasını genişletir. Böylece, N modülü A-injektiftir.
($\Rightarrow$) $X = \{a \in A | \psi(a) \in N\}$ olsun. N, A-injektif olduğu için $\psi|_X$ dönüşümü, bir $\varphi : A \to N$ dönüşümüne genişler. $N \cap (\varphi - \psi)A = 0$ olduğu gösterilecektir. $n = (\varphi - \psi)(a)$ olacak şekilde $n \in N$ ve $a \in A$ verilsin. O zaman, $\psi(a) = \varphi(a) - n \in N$ olur. O halde, $a \in X$ elde edilir. Buradan, $n = \varphi(a) - \psi(a) = \psi(a) - \psi(a) = 0$ bulunur. Böylece, $N \cap (\varphi - \psi)A = 0$'dır. $N \leq_{ess} E(N)$ olduğundan, $(\varphi - \psi)A = 0$ elde edilir. Böylece, $\psi(A) = \varphi(A) \leq N$ olur. □

Sonuç 2.6.11. [13, Corollary 1.14] *Bir M modülü yarı-injektiftir ancak ve ancak her $f \in End_R(M)$ için $f(M) \leq M$'dir, yani M modülü $E(M)$'nin bir tamamen değişmez altmodülüdür.*

Tanım 2.6.12. [13] A modülü B-injektif ve B modülü A-injektif ise A ve B *göreceli (relatively) injektiftir* denir.

Sonuç 2.6.13. [13, Corollary 1.16] *A ve B göreceli injektif olsun. O zaman, $E(A) \cong E(B)$ ise $A \cong B$'dir. Aslında, bir $E(A) \to E(B)$ izomorfizması, bir $A \to B$ izomorfizmasına kısıtlanır. Ek olarak, A ve B yarı-injektiftir.*

Kanıt. $g : E(A) \to E(B)$ bir izomorfizma olsun. B modülü A-injektif olduğundan, Önteorem 2.6.10 gereğince, $gA \leq B$'dir. Benzer şekilde, $g^{-1}B \leq A$ olur. Böylece, $B = (gg^{-1})B = g(g^{-1}B) \leq gA \leq B$ elde edilir. Sonuç olarak, $gA = B$ dir. Bu nedenle, $g|_A : A \to B$ bir izomorfizmadır. O halde, A modülü B-injektif ve $A \cong B$ olduğundan, A yarı-injektiftir. □

Önteorem 2.6.14. [13, Proposition 2.1] *Bir M yarı-injektif modülü için aşağıdaki ifadeler sağlanır:*

(C_1) *M modülünün her altmodülü M'nin bir dik toplananında büyüktür.*

(C_2) *M modülünün bir A altmodülü M'nin bir dik toplananına izomorf ise A da M'nin bir dik toplananıdır.*

Kanıt. M modülü yarı-injektif ve $N \leq M$ olsun. $E_1 = E(N)$ için $E(M) = E_1 \oplus E_2$ olacak şekilde bir $E_2 \leq E(M)$ vardır. M modülü yarı-injektif olduğundan, $M = (E_1 \cap M) \oplus (E_2 \cap M)$ elde edilir. $N \leq E_1 \cap M$ ve $N \leq_{ess} E_1(N)$ olduğundan, $N = N \cap M \leq_{ess} E_1 \cap M$ elde edilir. Böylece, M modülü C_1 özelliğini sağlar. M', M'nin bir dik toplananı olmak üzere, $f : M' \to M$ bir monomorfizma olsun. M modülü M-injektif olduğu M' de M-injektiftir. Önteorem 2.6.2 gereğince, f dönüşümü parçalanır. Böylece, C_2 koşulu sağlanır. □

Önerme 2.6.15. [13, Proposition 2.2] *M modülü C_2 özelliğine sahipse aşağıdaki ifade de sağlanır:*

(C_3) *M_1 ve M_2, M modülünün dik toplananları ve $M_1 \cap M_2 = 0$ ise $M_1 \oplus M_2$ altmodülü de M'nin bir dik toplananıdır.*

Kanıt. $M = M_1 \oplus M_1^*$ ve $\pi : M_1 \oplus M_1^* \to M_1^*$ izdüşüm dönüşümü olsun. O zaman, $M_1 \oplus M_2 = M_1 \oplus \pi M_2$ olur. $\pi|_{M_2}$ bir monomorfizma olduğundan, C_2 koşulundan, $\pi M_2 \leq^{\oplus} M$ elde edilir. $\pi M_2 \leq M_1^*$ olduğundan $M_1 \oplus \pi M_2 \leq^{\oplus} M$ bulunur. □

Tanım 2.6.16. [13, Definition 2.3] Bir M modülü C_1 ve C_2 özelliklerini sağlıyorsa, M'ye *sürekli (continious)*; C_1 ve C_3 özelliklerini sağlıyorsa, *yarı-sürekli (quasi-continious)* denir.

Tanımlardan ve yukarıdaki sonuçlardan, aşağıdaki gerektirmeler elde edilir:

$$\text{injektif} \Rightarrow \text{yarı-injektif} \Rightarrow \text{sürekli} \Rightarrow \text{yarı-sürekli} \Rightarrow C_1$$

Önteorem 2.6.17. [13, Proposition 2.4] *Bir M modülü C_1 özelliğini sağlar ancak ve ancak M modülünün her kapalı altmodülü bir dik toplanandır.*

Teorem 2.6.18. [13, Theorem 2.8] *Bir M modülü için aşağıdaki ifadeler denktir:*
1) *M modülü yarı-süreklidir.*
2) *Birbirinin tümleyeni olan X ve Y altmodülleri için $M = X \oplus Y$'dir.*
3) *Her $f^2 = f \in End(E(M))$ için $fM \leq M$'dir.*
4) *$E(M) = \oplus_{i \in I} E_i$ ise $M = \oplus_{i \in I}(M \cap E_i)$ olur.*

Kanıt. (1) $\Rightarrow$ (2) Önteorem 2.6.17 gereğince, birbirlerinin tümleyeni olan X ve Y altmodülleri M modülünün dik toplananıdır. M modülü C_3 özelliğini sağladığından, $X \oplus Y$ de M'nin bir dik toplananıdır. Ayrıca, $X \oplus Y \leq_{ess} M$ olduğundan, $M = X \oplus Y$ elde edilir.
(2) $\Rightarrow$ (3) $A_1 = M \cap fE(M)$ ve $A_2 = M \cap (1-f)E(M)$ olsun. B_1, A_1'i içeren A_2'nin tümleyeni ve B_2, A_2'yi içeren B_1'in tümleyeni olsun. Bu durumda, B_1 ve B_2 birbirlerinin tümleyeni olacağından, (2)'den $M = B_1 \oplus B_2$ elde edilir. $\phi : B_1 \oplus B_2 \to B_1$ izdüşüm dönüşümü göz önüne alınsın. $M \cap (f-\phi)M = 0$ olduğu gösterilecektir. $(f-\phi)(x) = y$ olacak şekilde $x, y \in M$ verilsin. O zaman, $f(x) = y + \phi(x) \in M$ elde edilir. Böylece, $f(x) \in A_1$ olur. $(1-f)(x) \in M$ ve dolayısıyla, $(1-f)(x) \in A_1$ bulunur. O halde, $f(x) = \phi(x)$ ve buradan $y = 0$ elde edilir. $M \leq_{ess} E(M)$ ve $(f-\phi)(x) = 0$ olduğundan, $f(M) = \phi(M) \leq M$ bulunur.
(3) $\Rightarrow$ (4) $\oplus_{i \in I} M \cap E_i \leq M$ olduğu açıktır. $M \leq \oplus_{i \in I} M \cap E_i$ olduğunu göstermek için $m \in M$ verilsin. O zaman, bir $F \subseteq I$ sonlu altkümesi için $m \in \bigoplus_{i \in F} E_i$'dir. $E(M) = \bigoplus_{i \in F} E_i \oplus E^*$ olacak şekilde bir $E^* \leq E(M)$ vardır. Buradan, $i \in F$ olmak üzere, öyle $f_i \in End(E(M))$ dik eşkareleri vardır ki $E_i = f_i E(M)$'dir. Varsayımdan, $f_i M \leq M$ olduğundan $m = (\sum_{i \in F} f_i)(m) = \sum_{i \in F} f_i(m) \in \oplus_{i \in I} M \cap E_i$ elde edilir. Böylece, $M \leq \oplus_{i \in I} M \cap E_i$ bulunur. O halde, $M = \oplus_{i \in I} M \cap E_i$ elde edilir.
(4) $\Rightarrow$ (1) $A \leq M$ olsun. $E(M) = E(A) \oplus E^*$ olacak şekilde bir $E^* \leq E(M)$ vardır. O

zaman, $A \leq_{ess} M \cap E(A)$ olmak üzere $M = [M \cap E(A)] \oplus [M \cap E^*]$ elde edilir. Böylece, M modülü C_1 özelliğini sağlar. M_1, M_2 altmodülleri M'nin dik toplananları ve $M_1 \cap M_2 = 0$ olsun. $i = 1, 2$ olmak üzere, $E_i = E(M_i)$ için $E(M) = E_1 \oplus E_2 \oplus E'$ eşitliğini sağlayan bir $E' \leq E(M)$ vardır. Varsayımdan, $M = [M \cap E_1] \oplus [M \cap E_2] \oplus [M \cap E']$ olur. $i = 1, 2$ için $M_i \leq^{\oplus} M$ ve $M_i \leq_{ess} M \cap E_i$ olduğundan $M_i = M \cap E_i$ elde edilir. Böylece, M modülü C_3 özelliğini de sağlar. □

Önteorem 2.6.19. [13, Proposition 2.10] *$M_1 \oplus M_2$ yarı-sürekli ise M_1 ve M_2 göreceli injektiftir.*

Kanıt. M_2 modülünün M_1-injektif olduğu gösterilecektir. $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. $X \leq M_1$, $\varphi : X \to M_2$ bir homomorfizma ve $B = \{x - \varphi(x) | x \in X\}$ olsun. $a \in B \cap M_2$ verilsin. O zaman, öyle bir $x \in X$ vardır ki $a = x - \varphi(x) \in M_2$ olur. Buradan, $x = a - \varphi(x) \in M_1 \cap M_2 = 0$, elde edilir. O halde, $B \cap M_2 = 0$'dır. M_1^*, B'yi içeren M_2'nin tümleyeneni olsun. Teorem 2.6.18 gereğince, $M = M_1^* \oplus M_2$ olur. $\pi : M_1^* \oplus M_2 \to M_2$ izdüşüm dönüşümü olsun. Her $x \in X$ için $0 = \pi(x - \varphi(x)) = \pi(x) - \pi(\varphi(x)) = \pi(x) - \varphi(x)$ tir. Böylece, $\pi|_{M_1}$ homomorfizması, φ homomorfizmasını genişletir. □

Tanım 2.6.20. [13, Definition 1.32] $P \cong P \oplus P$ koşulunu sağlayan bir P modülüne *salt sonsuz (purely infinite)* denir.

Önteorem 2.6.21. [13, Lemma 2.28] *M modülü yarı-sürekli olsun. $E(M)$, M'nin injektif zarfı olmak üzere, aşağıdaki ifadeler doğrudur:*

(1) *M modülü salt sonsuz modüldür ancak ve ancak $E(M)$ salt sonsuzdur.*

(2) *M modülü doğrudan sonludur ancak ve ancak $E(M)$ doğrudan sonludur.*

Kanıt. (1) M modülü salt sonsuz olsun. O zaman, $M \cong M \oplus M$'dir. Buradan, $E(M) \cong E(M) \oplus E(M)$ olur. Dolayısıyla, $E(M)$ de salt sonsuzdur. Tersine, $E(M)$ salt sonsuz olsun. O zaman, $E(M) \cong E_1 \cong E_2$ olmak üzere $E(M) = E_1 \oplus E_2$'dir. M modülü yarı-sürekli olduğundan, Teorem 2.6.18 gereğince, $M_1 = M \cap E_1$ ve $M_2 = M \cap E_2$ için $M = M_1 \oplus M_2$ bulunur. Önteorem 2.6.19 gereğince, M_1 ve M_2 göreceli injektiftir, ve $E(M_1) \cong E(M_2)$'dir. Sonuç 2.6.13 gereğince, $M_1 \cong M_2$ elde edilir. Böylece, M_1 yarı-injektiftir. O zaman, Önerme 2.6.4 ve Önerme 2.6.5 gereğince, M ve M_1 göreceli injektiftir. Yine Sonuç 2.6.13 gereğince, $M_1 \cong M$ olur. Böylece, $M \cong M_1 \oplus M_1 \cong M \oplus M$ elde edilir. O halde, M salt sonsuzdur.

(2) M modülü doğrudan sonlu olmasın. O zaman, $X \neq 0$ olmak üzere $M \cong M \oplus X$'dir. Böylece, $E(X) \neq 0$ ve $E(M) \cong E(M) \oplus E(X)$ olur. Dolayısıyla, $E(M)$ doğrudan sonlu değildir. Tersine, $E(M)$ doğrudan sonlu olmasın. $E(M)$ injektif olduğundan, $E(M) = D \oplus P$ olacak şekilde D doğrudan sonlu ve P salt sonsuz altmodülleri vardır. M modülü yarı-sürekli olduğundan, $N_1 = M \cap D$ ve $N_2 = N \cap P \neq 0$ için $M = N_1 \oplus N_2$ elde edilir. N_2, injektif zarfı salt sonsuz olan bir yarı-sürekli modül olduğundan, (1)'den, N_2 salt sonsuzdur. O zaman, $N_2 \neq 0$ olmak üzere, $M = N_1 \oplus N_2 \cong N_1 \oplus N_2 \oplus N_2 = M \oplus N_2$'dir. Böylece, M modülü doğrudan sonlu değildir. $\square$

Teorem 2.6.22. [13, Theorem 1.29] *M bir injektif modül olsun. M sadeleşme özelliğine sahiptir ancak ve ancak M doğrudan sonludur.*

Teorem 2.6.23. [13, Theorem 2.31] *M yarı-sürekli bir modül, M_1 ve M_2 altmodülleri M'nin dik toplananları olsun. $E(M_1) \cong E(M_2)$ ise $M_1 \cong M_2$ olur.*

Teorem 2.6.24. [13, Theorem 2.33] *Yarı-sürekli bir M modülünde, izomorf doğrudan sonlu altmodüller izomorf tümleyenlere sahiptir. Özel olarak, M modülü iç sadeleşme özelliğine sahiptir ancak ve ancak M doğrudan sonludur.*

Kanıt. A_1 ve A_2, M modülünün doğrudan sonlu izomorf altmodülleri olsun. $i = 1, 2$ için B_i, A_i'nin tümleyeni ve C_i, A_i'yi içeren B_i'nin tümleyeni olsun. Teorem 2.6.18 gereğince, $M = C_1 \oplus B_1 = C_2 \oplus B_2$'dir. $E(C_i) = E(A_i)$ olduğundan, Önteorem 2.6.21 gereğince, $E(C_i)$ doğrudan sonludur. $E(C_1) \oplus E(B_1) = E(M) = E(C_1) \oplus E(B_2)$ ve injektif doğrudan sonlu modüller sadeleşme özelliğine sahip olduğundan, $E(B_1) \cong E(B_2)$ elde edilir. M yarı-sürekli olduğundan, $B_1 \cong B_2$'dir. Son kısım açıktır. $\square$

Sonuç 2.6.25. [13, Corollary 3.25] *Doğrudan sonlu sürekli modüller sadeleşme özelliğine sahiptir.*

S, bir M modülünün endomorfizma halkası olsun. J ile S halkasının Jacobson radikali temsil edilsin. $\Delta = \{\alpha \in S : Ker\alpha \leq_{ess} M\}$ ve $\bar{S} = S/\Delta$ tanımlansın.

Teorem 2.6.26. [13, Theorem 3.11] *M modülü sürekli ise $\bar{S}$ sağ sürekli ve düzenli bir halkadır.*

2.7 Değişim Halkaları

Bu altbölümde, yarı-injektif modülerin sağladığı bir parçalanma özelliği ve bu özelliği sağlayan modüllerin endomorfizma halkaları irdelenecektir.

Tanım 2.7.1. [13, Definition 1.20] M bir sağ R-modül olsun. Bir I (sonlu) indeks kümesi, N ve A_i modülleri için $M \oplus N = \oplus_{i \in I} A_i$ iken $M \oplus N = M \oplus (\oplus_{i \in I} B_i)$ olacak şekilde $B_i \leq A_i$ altmodülleri varsa, M *(sonlu) değişim özelliğine sahiptir ((finite) exchange property)* denir.

Değişim özelliği dik toplananlara ve sonlu dik toplamlara taşınan bir özelliktir.

Teorem 2.7.2. [13, Theorem 1.21] *Her yarı-injektif M modülü değişim özelliğine sahiptir.*

Kanıt. $A = M \oplus N = \oplus_{i \in I} A_i$, $X_i = A_i \cap N$ ve $X = \oplus_{i \in I} X_i$ olsun. Zorn Lemma'dan

(i) $X_i \leq B_i \leq A_i$ olmak üzere $B = \oplus_{i \in I} B_i$ ve

(ii) $M \cap B = 0$

özelliklerine göre maksimal bir $B \leq A$ bulunabilir. $A = M \oplus B$ eşitliği gösterilecektir. Eğer $\overline{M} \leq_{ess} \overline{A}$ ve $\overline{M} \leq^{\oplus} \overline{A}$ olduğu gösterilirse istenen sağlanır (burada, $A \to A/B$ doğal epimorfizması altında Y'nin görüntüsü $\overline{Y}$ ile temsil edilmektedir). Her $j \in I$ için $\overline{M} \cap \overline{A_j} \leq^{e} \overline{A_j}$ olduğu ispatlanacaktır. $B_j < D$ koşulunu sağlayan A_j'nin keyfi bir D altmodülü alınsın. O zaman, $B < D + B = D \oplus (\oplus_{i \neq j} B_i)$ olur. B'nin maksimalliğinden, $M \cap (D + B) \neq 0$'dır. $M \cap B = 0$ olduğu için $M \cap (D + B) \nleq B$ elde edilir. Böylece, $(\overline{M} \cap \overline{A_j}) \cap \overline{D} = \overline{M} \cap \overline{D} \neq 0$ olur. Buradan, her $j \in I$ için $\overline{M} \cap \overline{A_j} \leq_{ess} \overline{A_j}$ elde edilir. O halde, $\oplus_{j \in J}(\overline{M} \cap \overline{A_j}) \leq_{ess} \oplus_{j \in J} \bar{A}_j = \bar{A}$ olur. Böylece, $\overline{M} \leq_{ess} \overline{A}$ elde edilir. Eğer M injektifse, $\overline{M} = (M \oplus B)/B \cong M$ olduğundan, $\overline{M}$ de injektiftir. Bu durumda, $\overline{M} \leq^{\oplus} \overline{A}$ olur.

M yarı-injektif bir modül ve $\pi : M \oplus N \to M$ izdüşüm dönüşümü olsun. $X_i := Ker\pi|_{A_i}$ olmak üzere, A_i/X_i bölüm modülü M'nin bir altmodülüne izomorftur. M yarı-injektif olduğundan, Önerme 2.6.3 gereğince, M modülü A_i/X_i-injektiftir. $A/X \cong \oplus A_i/X_i$ olduğundan, Önerme 2.6.4 gereğince, M modülü A/X-injektiftir. Yine Önerme 2.6.3 gereğince, M modülü $A/B-$injektiftir. $\overline{M} \cong M$ olduğundan, $\overline{M}$ bölüm modülü $\overline{A}$-injektiftir ve böylece Önteorem 2.6.2'den $\overline{M} \leq^{\oplus} \overline{A}$ elde edilir. $\square$

Önerme 2.7.3. [13, Proposition 1.23] *Bir M modülü sonlu değişim özelliğine sahip olsun. M sadeleşme özelliğini sağlar ancak ve ancak M iç sadeleşme özelliğini sağlar.*

Önerme 2.7.4. [20, Proposition 1.1] *R bir halka olsun. $x \in R$ için aşağıdaki ifadeler denktir.*
(1) $e - x \in R(x - x^2)$ *olacak şekilde* $e^2 = e$ *vardır.*
(2) $(1 - e) - c(1 - x) \in J(R)$ *olacak şekilde* $e^2 = e \in Rx$ *ve* $c \in R$ *vardır.*
(3) $R = Re + R(1 - x)$ *olacak şekilde* $e^2 = e \in Rx$ *vardır.*
(4) $1 - e \in R(1 - x)$ *olacak şekilde* $e^2 = e \in Rx$ *vardır.*

Tanım 2.7.5. [20] Her elemanı Önerme 2.7.4'teki koşullardan birini sağlayan bir halkaya *(sol) değişim halkası (exchange ring)* denir.

Teorem 2.7.6'dan sağ ve sol değişim halkalarının aynı olduğu sonucu çıkar.

Teorem 2.7.6. [20, Theorem 2.1] *R bir halka ve M bir sol R-modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:*
(1) $End_R(M)$ *halkası sağ değişim halkasıdır.*
(2) M *modülü sonlu değişim özelliğine sahiptir.*
(3) $End_R(M)$ *halkası sol değişim halkasıdır.*

Kanıt. (1) $\Rightarrow$ (2) $X = M \oplus Y = N_1 \oplus N_2$ ve $E = End_R(X)$ olsun. ve $M = X\pi$ olmak üzere $\pi^2 = \pi \in E$ seçilsin. $\tau_1 + \tau_2 = 1$, $N_i = X\tau_i$, $N_1 = Ker\tau_2$ ve $N_2 = Ker\tau_1$ koşullarını sağlayan $\tau_1, \tau_2 \in E$ dik eşkare elemanları verilsin. O zaman, $\pi = \pi\tau_1\pi + \pi\tau_2\pi$ olur. $\pi E\pi \cong End_R(M)$ sağ değişim halkası olduğundan, öyle $\nu_i \in \pi\tau_i\pi E\pi$ dik eşkare elemanları vardır ki $\nu_1 + \nu_2 = \pi$ sağlanır. $\alpha_i \in \pi E \pi$ olmak üzere, $\nu_i = \pi\tau_i\alpha_i$ ve $\alpha_i\nu_i = \alpha_i$ olduğu varsayılsın. $\eta_i = \tau_i\alpha_i\tau_i$ tanımlansın. Bunlar dik eşkarelerdir ve $i = 1, 2$ için $X\eta_i \subseteq N_i$'dir. Buradan, $N_i' = N_i \subseteq Ker\eta_i$ olmak üzere, $N_i = X\eta \oplus N_i'$ ve böylece $X = (X\eta_1 \oplus X\eta_2) \oplus (N_1' \oplus N_2')$ elde edilir.

Şimdi, $X = M \oplus N_1' \oplus N_2'$ olduğu gösterilecektir. $\pi\eta_i = \nu_i\tau_i$'dir ve böylece $\pi\eta_i\alpha_i = \nu_i\tau_i\alpha_i = \nu_i^2 = \nu_i$ olur. $x \in M \cap (N_1' \oplus N_2')$ verilsin. O zaman, $x\eta_1 = 0 = x\eta_2$ ve buradan $x = x\pi = \sum x\nu_i = \sum x\pi\eta_i\alpha_i = \sum x\eta_i\alpha_i = 0$'dır. $x \in X$ seçilsin. $x_i \in X\eta_i$ ve $w \in N_1' \oplus N_2'$ olmak üzere, $x = x_1 + x_2 + w$ yazılsın. $\eta_i\alpha_i\eta_j = (\eta_i\tau_i)(\alpha_i\pi)\eta_j = (\eta_i\tau_i)(\alpha_i\nu_i)(\nu_j\tau_j) = \delta_{ij}\eta_i$ elde edilir. Burada $i = j$ için $\delta ij = 0$ ve $i \neq j$ için $\delta_{ij} = 1$ dir. Buradan, her i için $x_i - x_i\alpha_i \in N_i'$ ve böylece $x - x_1\alpha_1 - x_2\alpha_2 = (x_1 - x_1\alpha_1) + (x_2 - x_2\alpha_2) + w \in N_1' \oplus N_2'$ elde edilir. Her i için $x_i\alpha_i \in M$ olduğundan, $X = M \oplus N_1' \oplus N_2'$ bulunur.

(2) $\Rightarrow$ (3) $X_R = M \oplus M$, $N_1 = \{(x, 0) : x \in M\}$, $N_2 = \{(0, x) : x \in M\}$ ve $D = \{(x, x) : x \in M\}$ olsun. $\alpha + \beta = 1$ olacak şekilde $\alpha, \beta \in End_R(M)$ olduğu varsayılsın. $M' = \{(x\alpha, -x\beta) : x \in M\}$ ise $M' \cong M$ dir ve $X = M' \oplus D = N_1 \oplus N_2$ dir. Varsayımdan, $X = M' \oplus N_1' \oplus N_2'$ olacak şekilde $N_i' \subseteq N_i$ altmodülleri vardır. $x \in M$ ise, bu aşağıdaki tek türlü belirli olan ayrışımı verir. $(x_1, 0) \in N_1'$ ve $(0, x_2) \in N_2'$ olmak üzere, $(x, x) = (y\alpha, -y\beta) + (x_1, 0) + (0, x_2)$'dir. $x\alpha' = x_2$ ve $x\beta' = x_1$ ile α', $\beta' \in End_R(M)$ tanımlansın. O zaman, $(x\alpha'\alpha, x\alpha'\alpha) = (x\alpha'\alpha, -x\alpha'\beta) + (0, 0) + (0, x\alpha'), ve(x\beta'\beta, x\beta'\beta) = (-x\beta'\alpha, x\beta'\beta) + (x\beta', 0) + (0, 0)$ ayrışımları $\alpha'\alpha\alpha' = \alpha'$ ve $\beta'\beta\beta' = \beta'$ olduğunu gösterir. Böylece, $\alpha'\alpha$ ve $\beta'\beta$ eşkarelerdir. Dahası, yukarıdaki eşitlikten, $y = x(\alpha' - \beta')$ ve buradan, $x = y\alpha + x\beta' = x(\alpha'\alpha + \beta'\beta)$ elde edilir. Dolayısıyla, $\alpha'\alpha + \beta'\beta = 1_M$ olur. Böylece, $End_R(M)$ sol değişim halkasıdır.

(3) $\Rightarrow$ (1) (1) $\Rightarrow$ (3)'ün ispatı $_RR$'ye uygulanırsa sağ değişimliğin sol değişimliği gerektirdiği görülür. Tersi de herhangi bir halka için benzerdir. Özel olarak, $End_R(M)$ için de geçerlidir. $\square$

Bir R halkası için, $R \cong End_R(R)$ olduğundan, R_R modülünün (sonlu) değişim özelliğini sağlaması ile R'nin değişim halkası olması denktir.

Tanım 2.7.7. [20] R bir halka olsun. $a \in R$ elemanı bir eşkare ve bir tersinir elemanın toplamı olarak yazılabiliyorsa a'ya *temiz (clean)* denir. Her elemanı temiz olan halkaya *temiz halka (clean ring)* denir.

Önerme 2.7.8. [20] *Bir R halkası temiz ise değişim halkasıdır.*

Kanıt. $e^2 = e$ ve u tersinir elemanlar ve $x = e + u$ olsun. O zaman, $u[x - u^{-1}(1-e)u] = ue + u^2 - u + eu = x^2 - x$ olur. $f = u^{-1}(1-e)u$ olsun. $f^2 = f$'dir. $u(x - f) = x^2 - x$ olduğundan, $x - f = u^{-1}(x^2 - x) \in R(x^2 - x)$ elde edilir. □

Önerme 2.7.9. [21] *Birimsel düzenli bir halka temizdir.*

Birimsel düzenli bir halka temiz olduğundan, Önerme 2.7.8 gereğince, birimsel düzenli halkalar değişim halkalarıdır.

3. ENDODÜZENLİ MODÜLLER

Bu bölümde, Lee, Rizvi ve Roman'ın 2013'te yayımlanan [5] çalışması temel alınarak endomorfizma halkası düzenli (regüler) olan modüllerin bir literatür incelemesi yapılmıştır. Bu tip modüllere *endodüzenli* adı verilmiştir. Söz konusu çalışmadan yola çıkılarak endodüzenli modüllerin karakterizasyonları ve özellikleri ele alınmıştır. Bazı halka sınıflarının, endodüzenli modülleri cinsinden karakterizasyonları irdelenmiştir. [5] makalesinde, endodüzenli bir modülün dik toplananı da endodüzenli iken endodüzenli modüllerin dik toplamlarının endodüzenli olması gerekmediği gösterilmiştir. Ancak, tezimizin bu bölümünde de bahsedileceği gibi, aynı çalışmada sonlu dik toplam durumunda bu koşulun sağlanması için gerek ve yeter koşullar verilmiştir. Ayrıca, endomorfizma halkası yarıbasit Artin olan modüller gibi bazı özel durumlarla ilgili sonuçlar üzerinde de çalışılmıştır.

3.1 Endodüzenli Modüllerle Zelmanowitz Düzenli Modüllerin Kıyaslanması

Bu altbölümde, endodüzenli modüller ele alınmış ve bu modüllerin, Altbölüm 2.4'de tanıtılan Zelmanowitz düzenli modüllerle olan ilişkisi incelenmiştir.

Tanım 3.1.1. [5, Definition 2.1] M bir sağ R-modül olsun. Eğer $End_R(M)$ düzenli halkaysa M modülüne *endodüzenli modül* denir.

Açıktır ki, R_R (sırasıyla, $_RR$) modülü endodüzenlidir ancak ve ancak R halkası von Neumann düzenlidir. Oldukça iyi bilinmektedir ki bir R halkasının von Neumann düzenli olması için gerek ve yeter koşul her $a \in R$ ve her $\phi_a : R \to R$ soldan a ile çarpım homomorfizması için, $Im\phi_a = aR$'nin R_R'de bir dik toplanan olmasıdır. Fuchs, 1958'de endomorfizma halkası düzenli olan abel grupları karakterize etme problemini ortaya atmıştır ([1, Problem 50]). 1967 yılında Rangaswamy bu soruyu abel gruplar için cevaplamıştır ([3, Theorem 4]). Bunlardan bağımsız olarak, 1948'de Azumaya modüller için geçerli aşağıdaki genel sonucu vermiştir:

Teorem 3.1.2. [22, Theorem 16] *M bir sağ R-modül ve $S = End_R(M)$ olsun. $\varphi \in S$ düzenlidir ancak ve ancak $Ker\varphi$ ve $Im\varphi$, M'nin dik toplananlarıdır. Sonuç olarak, S halkasının von Neumann düzenli olması için gerek ve yeter koşul her $\phi \in S$ için $Ker\varphi$ ve $Im\varphi$ altmodüllerinin M'de dik toplanan olmasıdır.*

Kanıt. $\varphi \in S$ düzenli olsun. O halde, $\varphi\alpha\varphi = \varphi$ olacak şekilde en az bir tane $\alpha \in S$ vardır. Her $m \in M$ için $\varphi((\alpha\varphi)m - m) = 0$ yazılabilir. Buradan $(\alpha\varphi)(m) - m \in Ker\varphi$ olur. $m = m - (\alpha\varphi)(m) + (\alpha\varphi)(m)$ yazılırsa $m \in Ker\varphi + Im(\alpha\varphi)$ elde edilir. Böylelikle, $M \subseteq Ker\varphi + Im(\alpha\varphi)$ olur. $Ker\varphi + Im(\alpha\varphi) \subseteq M$ kapsaması açık olduğundan $M = Ker\varphi + Im(\alpha\varphi)$ elde edilir. Ayrıca, $Ker\varphi \subseteq Ker(\alpha\varphi)$ ve $Ker(\alpha\varphi) \cap Im(\alpha\varphi) = 0$ olduğundan $Ker\varphi \cap Im(\alpha\varphi) = 0$'dır. O halde, $M = Ker\varphi \oplus Im(\alpha\varphi)$ elde edilir.

Şimdi $Im\varphi$'nin M modülünün bir dik toplananı olduğu gösterilecektir. S düzenli olduğu için $(\varphi\alpha)^2 = \varphi\alpha \in S$ eşkare elemandır. O halde, $M = Im(\varphi\alpha) \oplus Ker(\varphi\alpha)$ olur. Ayrıca, $Im(\varphi\alpha) \subseteq Im\varphi$ ve $Im\varphi \cap Ker(\varphi\alpha) = 0$ olduğundan $M = Im(\varphi) \oplus Ker(\varphi\alpha)$ elde edilir.

Tersine, $Ker\varphi$ ve $Im\varphi$, M modülünün dik toplananları olsun. O zaman bir $N \leq M$ vardır öyle ki $M = Ker\varphi \oplus N$ olur. $Ker\varphi \cap N = 0$ olduğu için $\varphi|_N$ dönüşümü birebirdir. Ayrıca, $\varphi|_N : N \to Im\varphi$ dönüşümü örtendir. Böylece $N \cong Im\varphi$ elde edilir. β, $\varphi|_N$ dönüşümünün tersi olsun. O halde, $\beta : Im\varphi \to N$'dir. $\pi : M \to Im\varphi$ izdüşüm fonksiyonu ve $\iota : N \to M$ içerim fonksiyonu olmak üzere, $\alpha := \iota\beta\pi$ tanımlansın. $\varphi\alpha\varphi = \varphi$ eşitliğini sağlayan bir $\alpha \in S$ olduğu gösterilecektir. Keyfi bir $m \in M$ için $(\varphi\alpha\varphi)(m) = (\varphi\iota\beta\pi\varphi)(m) = (\varphi\iota\beta)\pi(\varphi(m)) = (\varphi\iota\beta)(\varphi(m))$ elde edilir. $\beta(\varphi(m)) = n'$ olacak şekilde $n' \in N$ vardır. O halde, $(\varphi\alpha\varphi)(m) = (\varphi\iota)(n') = \varphi(m)$ olur. Böylece, $S = End_R(M)$ halkası düzenlidir. $\square$

Örnek 3.1.3. *Teorem 3.1.2 gereğince, her yarıbasit modül endodüzenlidir. Özel olarak, bir D bölümlü halkası üzerindeki V_D vektör uzayı da endodüzenlidir.*

Örnek 3.1.4. *Teorem 2.3.13'te gösterildiği üzere, düzenli bir halka üzerindeki sonlu üretilmiş projektif modüller endodüzenlidir ([18, Theorem 1.7]). Özel olarak, düzenli bir halkanın her sonlu üretilmiş sağ ideali endodüzenlidir.*

Zelmanowitz düzenli modüllerle endodüzenli modüllerin arasındaki ilişki, Ware'in [4] çalışmasında, aşağıdaki sonuçlarla verilmiştir.

Teorem 3.1.5. [4, Theorem 3.6] *Her sonlu üretilmiş Zelmanowitz düzenli modül endodüzenlidir.*

Kanıt. R bir halka, P bir sonlu üretilmiş Zelmanowitz düzenli R-modül ve $S = End_R(P)$ olsun. $f \in S$ alalım. Birinci İzomorfizma Teoremi'nden $P/Kerf \cong Imf$ sonlu üretilmiştir. Teorem 2.4.7 gereğince, $Imf \leq^{\oplus} P$ elde edilir. Ayrıca, Önteorem 2.4.5 ve Sonuç 2.4.8 gereğince, $P/Kerf$ projektiftir. Böylece, $Kerf \leq^{\oplus} P$ olur. Sonuç olarak, S halkası düzenlidir. $\square$

Teorem 3.1.6. [4, Theorem 3.9] *Değişmeli bir halka üzerinde her projektif endodüzenli modül Zelmanowitz düzenlidir.*

Kanıt. R değişmeli bir halka ve bir P projektif R-modülü için $End_R(P)$ düzenli halka olsun. P modülünün devirli olduğu varsayılsın. O zaman, bir $e^2 = e \in R$ için $P \cong eR$'dir. $eRe \cong End_R(P)$ düzenlidir. R halkası değişmeli olduğundan $eRe = e^2R = eR \cong P$ elde edilir. Böylece, P modülü Zelmanowitz düzenlidir. Şimdi P'nin herhangi bir modül olduğunu varsayılsın. P projektif modülünün $\{x_i\}_{i\in I}$ ve $\{f_i\}_{i\in i} \subseteq Hom_R(P, R)$ dual tabanı ele alınsın. O zaman her $x \in P$ için sonlu sayıda i dışında $f_i(x) = 0$ ve $x = \sum x_i f_i(x)$ olur. Her $i \in I$ için $g_i \colon P \to x_iR, x \mapsto x_i f_i(x)$ tanımlansın. O zaman g_i, P'nin bir endomorfizmasıdır. Böylece, $g_i(P)$ sonlu üretilmiş olduğundan P'nin bir dik toplananıdır, ve dolayısıyla x_iR'nin bir dik toplananıdır. Buradan, $g_i(P)$ devirlidir. Dahası endodüzenli modüllerin dik toplananları da endodüzenli olduğundan $g_i(P)$'nin endomorfizma halkası düzenlidir. $g_i(P)$ devirli olduğundan, yukarıdaki ispattan, aynı zamanda Zelmanowitz düzenli bir modüldür. Öyleyse, $\bigoplus_{i\in I} g_i(P)$ dış dik toplamı Zelmanowitz düzenli modüldür. $P = \sum_{i\in I} g_i(P)$ olduğu bilinmektedir. $\bigoplus_i g_i(P) \to \sum g_i(P) \to 0$ doğal epimorfizmasını göz önüne alınırsa, P projektif modülü Zelmanowitz düzenli bir modülün homomorfik görüntüsü olur. Sonuçta, P modülü Zelmanowitz düzenlidir. $\square$

Sonuç 3.1.7. *R değişmeli bir halka ve P sonlu üretilmiş projektif bir R-modül olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler denktir:*

(1) *P modülü Zelmanowitz düzenlidir.*

(2) *P modülü endodüzenlidir.*

Aşağıdaki örnekler, Zelmanowitz düzenli modüllerle endodüzenli modüllerin arasında doğrudan bir ilgi olmadığını göstermektedir.

Örnek 3.1.8. [5, Example 1.2] $R = \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ *ve* $M = R^{(R)}$ *olsun. Teorem 2.4.9 gereğince, M Zelmanowitz düzenli bir R-modüldür. Ancak, M endodüzenli değildir.*

Örnekler 3.1.9. [5, Example 1.4] (i) *p bir asal sayı olmak üzere, $\mathbb{Z}_p$ basit $\mathbb{Z}$-modül olduğu için endodüzenli modüldür. Ancak, $\mathbb{Z}_p$ Zelmanowitz düzenli bir $\mathbb{Z}$-modül değildir, çünkü $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}) = 0$'dır.*

(ii) *$\mathbb{F}$ bir cisim, R=$\begin{pmatrix} \mathbb{F} & \mathbb{F} \\ 0 & \mathbb{F} \end{pmatrix}$ bir halka ve e=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ bir eşkare eleman olsun. R bir von Neuman düzenli halka değildir, çünkü $r = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ için $rsr = r$ olacak şekilde bir $s \in R$ yoktur. $M = eR = \begin{pmatrix} \mathbb{F} & \mathbb{F} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olsun. $End_R(M) \cong eRe$ bir cisimdir. Dolayısıyla, M bir endodüzenli modüldür. Ancak, $\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{F} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, M modülünün bir devirli altmodülü olmasına rağmen M'nin dik toplananı olmadığı için, Teorem 2.4.7 gereğince, M modülü Zelmanowitz düzenli değildir.*

3.2 Endodüzenli Modüllerin Rickart ve Dual Rickart Modüllerle İlişkisi

Lee, Rizvi ve Roman, [23] ve [24] makalelerinde, "Her $\varphi \in End_R(M)$ için $Ker\varphi$, M'nin bir dik toplananıdır" ve "Her $\varphi \in End_R(M)$ için $Im\varphi$, M'nin bir dik toplananıdır" koşullarını ayrı olarak incelemiştir. Teorem 3.1.2'nin ışığında bu çalışmaların endodüzenlilikle bağlantılı olduğu görülür. Bu altbölümde, söz konusu makalelerde, endodüzenliliğin yukarıda bahsi geçen koşullara bağlı olarak elde edilen karakterizasyonlarına değinilecektir. Öncelikle, bu sonuçları ifade edebilmek için bazı temel tanımlar ve sonuçlar verilecektir.

M bir R-modül olmak üzere, boş kümeden farklı bir $I \subseteq S = End_R(M)$ altkümesi için $r_S(I) = \{\varphi \in S | I\varphi = 0\}$, $r_M(I) = \{m \in M | Im = 0\}$ ve $N \leq M$ için $r_R(N) = \{r \in R | Nr = 0\}$, $l_S(N) = \{\varphi \in S | \varphi N = 0\}$ kümeleri tanımlansın.

Tanım 3.2.1. [23] M bir R-modül olsun. Eğer her $\varphi \in End_R(M)$ için $r_M(\varphi) =$ ***Ker***φ altmodülü M modülünün bir dik toplananı ise M modülüne ***Rickart modül*** denir. R bir halka olmak üzere, her $a \in R$ için $r_R(a) = eR$ olacak şekilde bir $e^2 = e \in R$ varsa, R halkasına ***sağ Rickart halka*** denir.

Tanım 3.2.2. [24] M bir R-modül olsun. Eğer her $\varphi \in End_R(M)$ için ***Im***φ altmodülü M modülünün bir dik toplananı ise M modülüne ***d-Rickart (dual Rickart) modül*** denir.

Uyarı 3.2.3. [24, Remark 2.2] Bir R halkası için R_R modülünün d-Rickart olması için gerek ve yeter koşul R'nin von Neumann düzenli bir halka olmasıdır.

Tanım 3.2.4. [23] Bir $\varphi \in End_R(M)$ ve bir sıfırdan farklı $m \in r_M(\varphi) =$ ***Ker***$\varphi \subseteq M$ için, $m \in \psi_m(M) \subseteq r_M(\varphi)$ koşulunu sağlayan bir $\psi_m : M \to r_M(\varphi)$ homomorfizması varsa M modülüne ***k-yerel-çekici modül*** denir.

Tanım 3.2.5. [13] L, bir M modülünün bir altmodülü olsun. $K \leq M$ için $M = K + L$ iken $M = K$ oluyorsa L'ye ***küçük (small) altmodül*** denir.

Tanım 2.6.16'nın duali olarak aşağıdaki tanımlar verilmektedir:

Tanım 3.2.6. [13] (a) Bir M modülünün her L altmodülü için $M_1 \leq L$ ve $L \cap M_2$, M_2'de küçük olacak şekilde $M = M_1 \oplus M_2$ ayrışımı varsa M'ye D_1 ***koşuluna sahiptir*** denir.
(b) $L \leq M$ için M/L, M modülünün bir dik toplananına izomorf iken L de M'nin bir dik toplananı oluyorsa M modülüne D_2 ***koşuluna sahiptir*** denir.

(c) $M_1 + M_2 = M$ olacak şekilde M'nin M_1 ve M_2 dik toplananları varken $M_1 \cap M_2$ de M'nin bir dik toplananı ise M modülüne D_3 *koşuluna sahiptir* denir.

Bir M modülü, D_1 ve D_2 koşullarına sahipse *ayrık (discrete) modül*, D_1 ve D_3 koşullarına sahipse *yarı-ayrık (quasi-discrete) modül* adını alır.

Endodüzenli modüllerin yukarıda tanımlanan modüller cinsinden karakterizasyonlarını vermeden önce, Rickart ve d-Rickart modüllerin bazı özellikleri ve endomorfizma halkaları ele alınacaktır.

Önerme 3.2.7. [23, Proposition 2.11] *M bir modül ve $S = End_R(M)$ olmak üzere aşağıdaki koşullar denktir:*
(i) M bir Rickart modüldür.
(ii) M modülü D_2 koşulunu sağlar ve her $\varphi \in S$ için $Im\varphi$, M modülünün bir dik toplananına izomorftur.

Kanıt. $(i \Rightarrow ii)$ M modülü Rickart olsun. M', M modülünün bir dik toplananı olmak üzere, $M/N \cong M'$ koşulunu sağlayan bir $N \leq M$ alınsın. Öyle bir $\psi \in S$ vardır ki $Ker\psi = N$'dir. O halde, M modülü Rickart olduğu için N altmodülü M modülünün bir dik toplananı olur. Sonuç olarak, M modülü D_2 koşulunu sağlar. M modülü Rickart olduğundan her $\varphi \in S$ için $Ker\varphi$, M modülünün bir dik toplananıdır. O halde, bir $N \leq M$ için $M = Ker\varphi \oplus N$ elde edilir. Buradan, $N \cong M/Ker\varphi \cong Im\varphi$ olur. Böylece, $Im\varphi$, M modülünün bir dik toplananına izomorftur.

$(ii \Rightarrow i)$ $\varphi \in S$ verilsin. Hipotezden, $N \cong Im\varphi$ olacak şekilde M'nin bir N dik toplananı vardır. O zaman, $M/Ker\varphi \cong Im\varphi \cong N$ elde edilir. M modülü D_2 koşulunu sağladığı için $Ker\varphi$, M'nin bir dik toplananı olur. Böylece, M bir Rickart modüldür. □

Önerme 3.2.8. [23, Proposition 3.2] *M modülü Rickart ise $S = End_R(M)$ halkası sağ Rickart halkadır.*

Kanıt. $0 \neq \varphi \in S$ verilsin. M modülü Rickart olduğundan, öyle bir $e^2 = e \in S$ vardır ki $r_M(\varphi) = eM$'dir. Buradan, $\varphi eM = 0$ olduğu için $\varphi e = 0$'dır. O zaman, $e \in r_S(\varphi)$ olur.

$\psi \in r_S(\varphi)$ alınsın. O zaman, $\varphi\psi = 0$ olur. Böylece, $\psi M \subseteq r_M(\varphi) = eM$'dir. Buradan, $\psi = e\psi \in eS$'dir. Böylece, $r_S(\varphi) = eS$'dir. Öyleyse, S bir sağ Rickart halkadır. $\square$

Önerme 3.2.9. [23, Proposition 3.7] *Her Rickart modül k-yerel-çekicidir.*

Kanıt. M modülü Rickart olsun. O zaman, keyfi bir $\varphi \in End_R(M)$ için öyle bir $e^2 = e \in End_R(M)$ vardır ki $r_M(\varphi) = eM$'dir. Bir $m \in r_M(\varphi)$ için $\psi_m = e$ alınsın. Buradan, $m = em \in \psi_m M \subseteq r_M(\varphi)$ olur. Böylece, M modülü k-yerel-çekicidir. $\square$

Teorem 3.2.10. [23, Theorem 3.9] *Aşağıdaki ifadeler denktir:*
(a) *M bir Rickart modüldür.*
(b) *$End_R(M)$ bir sağ Rickart halkadır ve M modülü k-yerel-çekicidir.*

Kanıt. $(a) \Rightarrow (b)$ Önerme 3.2.8'den ve Önerme 3.2.9'dan açıktır.
$(b) \Rightarrow (a)$ $0 \neq \varphi \in S = End_R(M)$ verilsin. $End_R(M)$ bir sağ Rickart halka olduğundan, bir $e^2 = e \in S$ için $r_S(\varphi) = eS$'dir. Öyleyse, $eM \subseteq r_M(\varphi)$'dir. Ters kapsama için, $0 \neq m \in r_M(\varphi)$ alınsın. M modülü k-yerel-çekici olduğu için öyle bir ψ_m vardır ki $m \in \psi_m(M) \subseteq r_M(\varphi)$'dir. Buradan, $\varphi\psi_m(M) = 0$'dır. Böylece, $\varphi\psi_m = 0$ elde edilir. Buradan, $\psi_m \in r_S(\varphi) = eS$ olur. O halde, $\psi_m = e\psi_m$ elde edilir. Buna ek olarak, $m \in \psi_m(M)$ olduğundan, bir $x \in M$ için $m = \psi_m(x) = e\psi_m(x) \in eM$ bulunur. Böylece, $r_M(\varphi) = eM$'dir. Sonuç olarak, M modülü Rickart olur. $\square$

Rickart modüllerin aşağıda verilen karakterizayonu, Önerme 3.2.7'nin ve Teorem 3.2.10'un direkt bir sonucudur.

Teorem 3.2.11. [23] *M bir modül ve $S = End_R(M)$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir:*
(i) *M bir Rickart modüldür.*
(ii) *M modülü D_2 koşulunu sağlar ve her $\varphi \in S$ için $Im\varphi$, M modülünün bir dik toplananına izomorftur.*
(iii) *S bir sağ Rickart halkadır ve M modülü k-yerel-çekicidir.*

Şimdi, Rickart modüllerin duali olarak tanımlanan d-Rickart modüllerle ilgili bazı sonuçlara değinilecektir.

Önerme 3.2.12. [24, Proposition 2.21] *M bir modül ve $S = End_R(M)$ olmak üzere aşağıdaki koşullar denktir:*
(i) M bir d-Rickart modüldür.
$ii)$ M modülü C_2 koşulunu sağlar ve her $\varphi \in S$ için $Im\varphi$, M'nin bir dik toplananına izomorftur.

Kanıt. $(i \Rightarrow ii)$ M bir d-Rickart modül olsun. Bir $e^2 = e \in S$ için $N \cong eM$ koşulunu sağlayan $N \leq M$ altmodülü ele alınsın. O zaman, bir $\psi : eM \to N$ izomorfizması vardır. $\varphi := \psi e \in S$ olsun. Buradan, $Im\varphi = \psi eM = N$ olur. M modülü d-Rickart olduğu için N altmodülü, M'nin bir dik toplananıdır. Böylece, M modülü C_2 koşuluna sahiptir.

$(ii \Rightarrow i)$ $\varphi \in S$ verilsin. Hipotezden, $N \cong Im\varphi$ olacak şekilde M'nin bir N dik toplananı vardır. M modülü C_2 koşuluna sahip olduğu için $Im\varphi$, M'nin bir dik toplananı olur. Böylece, M bir d-Rickart modüldür. □

Önerme 3.2.13. [24, Proposition 3.1] *M bir d-Rickart modül ise $End_R(M)$ bir sol Rickart halkadır.*

Kanıt. $\varphi \in S = End_R(M)$ verilsin. M modülü d-Rickart olduğundan, öyle bir $e^2 = e \in S$ vardır ki $\varphi M = eM$'dir. Böylece, $l_S(\varphi) = S(1-e) \leq^{\oplus} M$ elde edilir. Yani, $End_R(M)$ bir sol Rickart halkadır. □

Teorem 3.2.14. [24, Teorem 3.5] *Bir M modülü için aşağıdaki ifadeler denktir:*
(a) M bir d-Rickart modüldür.
(b) $S = End_R(M)$ bir sol Rickart halkadır ve her $\varphi \in S$ için $\varphi M = r_M(l_S(\varphi M))$'dir.

Kanıt. $(a) \Rightarrow (b)$ M bir d-Rickart modül olduğundan, Önerme 3.2.13'ten, $S = End_R(M)$ bir sol Rickart halkadır. Şimdi her bir $\varphi \in S$ için $\varphi M = r_M(l_S(\varphi M))$ olduğu gösterilecektir. M modülü d-Rickart olduğundan, bir $\varphi \in S$ için öyle bir $e^2 = e \in S$ vardır ki $\varphi M = eM$'dir. Böylece, $r_M(l_S(\varphi M)) = r_M(l_S(eM)) = eM = \varphi M$ elde edilir.

$(b) \Rightarrow (a)$ bir $\varphi \in S$ verilsin. S halkası sol Rickart olduğundan öyle bir $e^2 = e \in S$ vardır ki $l_S(\varphi) = Se$'dir. Kabulden, $\varphi M = r_M(l_S(\varphi M)) = r_M(Se) = (1-e)M$ olur. Böylece, $\varphi M = (1-e)M \leq^{\oplus} M$ elde edilir. Yani, M bir d-Rickart modüldür. □

Aşağıda, dual Rickart modüller için verilen karakterizasyon Önerme 3.2.12'nin ve Teorem 3.2.14'ün doğrudan bir sonucudur.

Teorem 3.2.15. [24] *M bir modül ve $S = End_R(M)$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir:*
(i) M bir d-Rickart modüldür.
(ii) M modülü C_2 koşulunu sağlar ve her $\varphi \in S$ için $Im\varphi$, M modülünün bir dik toplananına izomorftur.
(iii) S bir sol Rickart halkadır ve her $\varphi \in S$ için $\varphi M = r_M(l_S(\varphi M))$'dir.

Şimdi, bazı özellikleri verilen Rickart ve dual Rickart modüllerin, endodüzenli modüllerle olan ilişkisi incelenecektir.

Teorem 3.2.16. [23, Teorem 3.17] *M bir modül ve $S = End_R(M)$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir:*
(a) M, C_2 özelliğine sahip bir Rickart modüldür.
(b) M endodüzenlidir.
(c) Her $\varphi \in S$ için $Ker\varphi$ ve $Im\varphi$, M modülünün dik toplananıdır.

Kanıt. $(a) \Rightarrow (b)$ Bir Rickart M modülünün C_2 koşuluna sahip olduğu varsayılsın. $0 \neq \varphi \in S$ verilsin. M bir Rickart modül olduğundan, öyle bir $N \leq M$ vardır ki $M = Ker\varphi \oplus N$'dir. $\varphi|_N$ bir monomorfizma olduğu için C_2 koşulundan $\varphi N \leq^{\oplus} M$ bulunur. Ayrıca, öyle bir $0 \neq \psi \in S$ vardır ki $\psi\varphi|_N = 1_N$'dir. O zaman, $(\varphi - \varphi\psi\varphi)(M) = (\varphi - \varphi\psi\varphi)(Ker\varphi \oplus N) = (\varphi - \varphi\psi\varphi)(N) = 0$ elde edilir. Bu ise, $\varphi - \varphi\psi\varphi = 0$ olmasını gerektirir. Böylece, S bir von Neumann düzenli halkadır.
$(b) \Rightarrow (c)$ Teorem 3.1.2'den açıktır.
$(c) \Rightarrow (a)$ Hipotezden, M modülünün C_2 koşuluna sahip olduğunu göstermek yeterlidir. $N \leq M$ verilsin. Bir $e^2 = e \in End_R(M)$ için $N \cong eM$ olsun. O zaman, bir $\psi : eM \to N$

izomorfizması vardır. $\varphi = \psi e \in S$ olsun. O halde, $Im\varphi = \psi eM = N \leq^{\oplus} M$ elde edilir. Böylece, M modülü C_2 özelliğine sahiptir. □

Teorem 3.2.17. [24, Teorem 3.8] *Bir M modülü için aşağıdaki ifadeler denktir:*

(a) *M, D_2 özelliğine sahip bir d-Rickart modüldür.*

(b) *M modülü C_2 ve D_2 özelliklerine sahiptir ve her $\varphi \in End_R(M)$ için $Im\varphi$, M'nin bir dik toplananına izomorftur.*

(c) *M endodüzenlidir.*

Kanıt. $(a) \Leftrightarrow (b)$ Teorem 3.2.7 ve Teorem 3.2.12'den açıktır.

$(a) \Rightarrow (c)$ $\varphi \in End_R(M)$ verilsin. M modülü d-Rickart olduğundan, $M/Ker\varphi \cong Im\varphi \leq^{\oplus} M$'dir. M, D_2 özelliğine sahip olduğu için $Ker\varphi \leq^{\oplus} M$'dir. Böylece, Teorem 3.1.2 gereğince, $End_R(M)$ halkası von Neumann düzenlidir.

$(c) \Rightarrow (a)$ M endodüzenli olsun. O zaman, yine Teorem 3.1.2'den, M modülü hem Rickart hem de d-Rickart olur. Ayrıca, Teorem 3.2.7'den her Rickart modül D_2 özelliğine sahiptir. □

Yukarıdaki sonuçlar birleştirildiğinde, endodüzenli modüllerin aşağıdaki karakterizasyonu elde edilir.

Önerme 3.2.18. ([23], [24]) *Bir M modülü için aşağıdaki ifadeler denktir:*

(a) *M bir endodüzenli modüldür.*

(b) *M bir Rickart ve d-Rickart modüldür.*

c) M modülü C_2 ve D_2 koşullarını sağlar ve her $\varphi \in End_R(M)$ için Imφ *, M modülünün bir dik toplananına izomorftur.*

Önerme 3.2.19. [5, Proposition 2.26] *M'nin bir projektif Rickart modül olması için gerek ve yeter koşul her $\varphi \in End_R(M)$ için $Im\varphi$'nin projektif olmasıdır.*

Kanıt. M bir projektif Rickart modül olsun. Bir $\varphi \in End_R(M)$ verilsin. $Ker\varphi \leq^{\oplus} M$ olduğu için M'nin öyle bir N altmodülü vardır ki $M = Ker\varphi \oplus N$'dir. Buradan, $N \cong M/Ker\varphi \cong Im\varphi$ elde edilir. Böylece, $Im\varphi$ projektiftir. Tersine, her $\varphi \in End_R(M)$ için

$Im\varphi$ projektif olsun. O halde, her $\varphi \in End_R(M)$ için $Ker\varphi \leq^{\oplus} M$ elde edilir. Yani, M bir Rickart modüldür. $\varphi = 1_M$ seçilirse $Im\varphi = M$ projektif elde edilir. $\square$

Sonuç 3.2.20. [5, Remark 2.27] *Her projektif d-Rickart modül projektif endodüzenlidir.*

Kanıt. Teorem 3.1.2 ve Önerme 3.2.19 gereğince ispat açıktır. $\square$

Uyarı 3.2.21. [5, Remark 2.27] Bir projektif Rickart modülün d-Rickart olması gerekmez. Dolayısıyla, bir projektif Rickart modül endodüzenli olmayabilir. Örneğin, her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathbb{Z}$-modül $\mathbb{Z}^{(n)}$ projektif Rickart olmasına rağmen d-Rickart değildir.

Önerme 3.2.22. [24, Proposition 4.4] *Bir M modülü ve $S = End_R(M)$ aşağıdaki ifadeler denktir:*
(a) *M bir ayrıştırılamaz d-Rickart modüldür.*
(b) *S tamlık bölgesi ve her $\varphi \in S$ için $\varphi M = r_M(l_S(\varphi M))$'dir.*
(c) *Sıfırdan farklı her $\varphi \in S$ bir epimorfizmadır.*

Kanıt. $(a) \Rightarrow (b)$ Teorem 3.2.14'ten S halkasının tamlık bölgesi olduğunu göstermek yeterlidir. ψ,$\varphi \in S$ için $\psi\varphi = 0$ olsun. Eğer $\varphi = 0$ ise ispat biter. Aksi durumda, $\varphi M \neq 0$ ve $\varphi M \leq^{\oplus} M$ olur. Fakat M modülü ayrıştırılamaz olduğundan $\varphi M = M$'dir. Böylece, $0 = \psi\varphi M$ olur. Buradan, $\psi = 0$ elde edilir. Sonuç olarak S halkası tamlık bögesidir.
$(b) \Rightarrow (a)$ S bir sol Rickart halka ve her $\varphi \in S$ için $\varphi M = r_M(l_S(\varphi M))$ olduğundan, Teorem 3.2.14'ten M bir d-Rickart modüldür. S tamlık bölgesi olduğu için M modülü de ayrıştırılamazdır.
$(a) \Leftrightarrow (c)$ kolaylıkla görülebilir. $\square$

Tanım 3.2.23. [25] M bir R-modül olmak üzere, her $0 \neq N \leq M$ için $\varphi M \subseteq N$ (ya da buna denk olarak, $Hom_R(M, N) \neq 0$) koşulunu sağlayan bir $0 \neq \varphi \in End_R(M)$ varsa M'ye *çekici (retractable)* modül denir.

Serbest ve yarıbasit modüller, çekici modüllere örnektir.

Sonuç 3.2.24. [24, Corollary 4.9] *Her ayrıştırılamaz çekici d-Rickart modül basittir.*

Kanıt. M bir ayrıştırılamaz çekici d-Rickart modül olsun. $0 \neq N \leq M$ verilsin. M çekici olduğundan, öyle bir $0 \neq \varphi \in End_R(M)$ vardır ki $\varphi M \subseteq M$'dir. Önerme 3.2.22'den, φ bir epimorfizma olduğu için $N = M$'dir. Böylece, M bir basit modüldür. □

Sonuç 3.2.25. [23, Corollary 4.11] *M bir ayrıştırılamaz, artin, Rickart modül olsun. O zaman, $S = End_R(M)$ bir bölümlü halkadır.*

Önerme 3.2.26. [23, Proposition 4.13] *M bir artin ve Rickart modül olsun. O zaman, her i için M_i ayrıştırılamaz, artin, Rickart bir modül ve $End_R(M_i)$ bölümlü halka olmak üzere, $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n$ ayrışımı vardır. Dahası, n tek türlü belirlidir ve $M_1, M_2, \ldots, M_n$ dizisinin, bir permütasyona bağlı olarak, sıralanışı izomorfizma farkıyla tektir.*

Sonuç 3.2.27. [26, Corollary] *R bir halka ve M bir R-modül olsun. $P = ann_R(M) = \{r \in R | Mr = 0\}$ sıfırlayan ideali verilsin. Bu durumda, $S = End_R(M)$ bir bölümlü halkadır ancak ve ancak aşağıdaki durumlardan biri sağlanır:*
(1) P bir maksimal ideal ve M bir basit R-modül (ve R-modül olarak $M \cong R/P$, halka olarak $S \cong R/P$) olur ya da
(2) P bir maksimal olmayan asal ideal ve M, R/P'nin kesirler cismi K'ya izomorf (ve halka olarak $S \cong K$) olur.

Önerme 3.2.28. [23, Proposition 4.14] *Değişmeli bir halka üzerinde, M bir artin modül olsun. O zaman, aşağıdaki ifadeler denktir:*
(a) M bir Rickart modüldür.
(b) M bir yarıbasit modüldür.

Kanıt. $(a) \Rightarrow (b)$ $n \in \mathbb{N}$ tek türlü belirli ve $1 \leq i \leq n$ olmak üzere, her i için $End_R(M_i)$ bölümlü halka koşulunu sağlayan ayrıştırılamaz, artin, Rickart M_i modülleri verilsin. Önerme 3.2.26 gereğince, $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n$'dir. Şimdi, değişmeli bir R halkası üzerindeki her ayrıştırılamaz, artin, Rickart modülün basit olduğu ispatlanacaktır. N bir ayrıştırılamaz, artin, Rickart R-modül olsun. P, R halkasında N modülünün sıfırlayan ideali yani, $P = r_R(N)$ olsun. Sonuç 3.2.25 gereğince, $End_R(N)$ bir bölümlü halkadır. Sonuç 3.2.27 uygulanırsa, ya P bir maksimal ideal ve N basit R-modül olur ya da P bir

maksimal olmayan asal idealdir ve N, R/P'nin K kesirler cismine izomorftur. Eğer P, R halkasının maksimal ideali ise ispat biter. R/P cisim olmasın ve N modülü R/P'nin kesirler cismi K'ya izomorf olsun. Böylece, öyle bir $0 \neq \bar{q} \in R/P$ vardır ki $\bar{q}^{-1} \notin R/P$ olur. $\bar{q}R \supseteq \bar{q}^2R \supseteq \ldots \supseteq \bar{q}^kR \supseteq \bar{q}^{k+1}R \supseteq \ldots$ azalan zinciri ele alınsın. N artin olduğundan, R/P'nin kesirler cismi K bir artin modüldür. Çünkü N, K'ya izomortur. Buradan, öyle bir $k \in \mathbb{N}$ vardır ki $\bar{q}^kR = \bar{q}^{k+1}R$ olur. O zaman, bir $r \in R$ için $\bar{q}^k = \bar{q}^{k+1}r$'dir. R/P tamlık bölgesi ve $\bar{q} \neq 0$ olduğundan, $\bar{r} \in R/P$, $\bar{q}$ elemanının tersidir. Bu bir çelişkidir. Böylece, P, R halkasının bir maksimal idealidir ve N bir basit modüldür. O halde, M modülünün her ayrıştırılamaz dik toplananı basit olduğundan, M bir yarıbasit modüldür.
$(b) \Rightarrow (a)$ M yarıbasit ise endodüzenlidir. Böylece, M bir Rickart modüldür. □

Önerme 3.2.29. [24, Proposition 4.12] *M bir noether ve d-Rickart modül olsun. O zaman, her i için M_i ayrıştırılamaz, noether, d-Rickart bir modül ve $End_R(M_i)$ bölümlü halka olmak üzere, $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n$ ayrışımı vardır. Dahası, n tek türlü belirlidir ve $M_1, M_2, \ldots, M_n$ dizisinin, bir permütasyona bağlı olarak, sıralanışı izomorfizma farkıyla tektir.*

Önerme 3.2.30. [24, Proposition 4.13] *Değişmeli bir halka üzerinde, M bir noether modül olsun. O zaman, aşağıdaki ifadeler denktir:*
(a) M bir d-Rickart modüldür.
(b) M bir yarıbasit modüldür.

Kanıt. $(a) \Rightarrow (b)$ $n \in \mathbb{N}$ tek türlü belirli ve $1 \leq i \leq n$ olmak üzere, her i için $End_R(M_i)$ bölümlü halka koşulunu sağlayan ayrıştırılamaz, noether, d-Rickart M_i modülleri verilsin. Önerme 3.2.29 gereğince, $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_n$ olur. Değişmeli bir R halkası üzerindeki her ayrıştırılamaz, noether, d-Rickart modülün basit olduğu ispatlanacaktır. N bir ayrıştırılamaz, noether, d-Rickart modül olsun. P, R halkasında N modülünün sıfırlayan ideali, yani $P = r_R(N)$ olsun. Önerme 3.2.29'dan $End_R(N)$ bir bölümlü halka olduğundan, Sonuç 3.2.27 uygulanacaktır. Bu durumda, ya P bir maksimal ideal ve N bir basit $R-$modül olur ya da P bir maksimal olmayan asal idealdir ve N, R/P'nin K kesirler cismine izomorftur. Eğer P, R halkasının bir maksimal ideali ise ispat biter. R/P cisim olmasın

ve N modülü R/P'nin K kesirler cismine izomorf olsun. Böylece, öyle bir $0 \neq \bar{q} \in R/P$ vardır ki $\bar{q}^{-1} \notin R/P$'dir. $\bar{q}^{-1}R \subseteq \bar{q}^{-2}R \subseteq \ldots \subseteq \bar{q}^{-k}R \subseteq \bar{q}^{-(k+1)}R \subseteq \ldots$ artan zinciri ele alınsın. N noether olduğundan, R/P'nin kesirler cismi K da noether R-modüldür. Çünkü N, K'ya izomortur. Buradan, öyle bir $k \in \mathbb{N}$ vardır ki $\bar{q}^{-k}R = \bar{q}^{-(k+1)}R$ olur. O zaman, bir $r \in R$ için $\bar{q}^{-}kr = \bar{q}^{-(k+1)}$'dir. $\bar{r} \in R/P$ elemanı $\bar{q}$ elemanının tersidir. Bu ise bir çelişkidir. Böylece, P, R halkasının bir maksimal idealidir ve N bir basit modüldür. M modülünün her ayrıştırılamaz dik toplananı basit olduğu için M bir yarıbasit modüldür.
$(b) \Rightarrow (a)$ M modülü yarıbasit modülse endodüzenlidir ve dolayısıyla bir d-Rickart modüldür. □

3.3 Endodüzenli Modüllerin Özellikleri

Bu altbölümde, endodüzenli modüllerin bazı özelliklerine yer verilmiştir. Endodüzenli modüllerin, dik toplanan arakesit ile dik toplanan toplam özellikleri cinsinden elde edilen karakterizasyonları incelenmiştir. Endodüzenli olma özelliğinin dik toplanana geçtiği de gösterilmiştir. Ancak, bu özelliğin dik toplam altında kapalı olmadığı bir örnekle ele alınmıştır.

Aşağıda verilen dik toplanan arakesit ile dik toplanan toplam özellikleri, literatürde oldukça iyi bilinen kavramlardır (örneğin, bkz. [27]).

Tanım 3.3.1. Bir M modülünün herhangi iki dik toplananının arakesiti, M modülünün bir dik toplananı oluyorsa M'ye *dik toplanan arakesit özelliğine (summand intersection property, SIP) sahiptir* denir.

Tanım 3.3.2. Bir M modülünün herhangi iki dik toplananının toplamı M modülünün bir dik toplananı oluyorsa M'ye *dik toplanan toplam özelliğine (summand sum property, SSP) sahiptir* denir.

Genel olarak, bu iki özelliğin birbiriyle bağlantısı yoktur (bkz. [27, Example 3; Example 4]). Bu altbölümdeki ispatlarda kullanılacak olan aşağıdaki iki sonuç, bu özelliklerin hangi koşullarda birbirini gerektirdiğini ifade etmektedir.

Önteorem 3.3.3. [27, Lemma 19] *M, C_3 koşuluna sahip olan bir modül olsun. M modülü, dik toplanan arakesit özelliğine sahipse dik toplanan toplam özelliğine sahiptir.*

Kanıt. M, C_3 koşulunu sağlayan bir modül olsun. M modülünün dik toplanan arakesit özelliğine sahip olduğu varsayılsın. N ve T, M modülünün dik toplananları olsun. $N+T$'nin, M modülünün bir dik toplananı olduğu gösterilecektir. M dik toplanan arakesit özelliğine sahip olduğu için öyle bir $L \leq M$ vardır ki $(N \cap T) \oplus L = M$ yazılabilir. Modüler kuralından, $N = (N \cap T) \oplus (L \cap N)$ ve $T = (N \cap T) \oplus (L \cap T)$ olur. O halde, $N+T = (N \cap T) + [(L \cap N) \oplus (L \cap T)]$ elde edilir. Şimdi dik toplanabilirlik için, $(N \cap T) \cap [(L \cap N) \oplus (L \cap T)] = 0$ olduğu ispatlanacaktır. Bunun için $x \in (N \cap T) \cap [(L \cap N) \oplus (L \cap T)]$ alınsın. O zaman, $x = n_1 + n_2$ olacak şekilde $n_1 \in L \cap N$ ve $n_2 \in L \cap T$ vardır. Buradan, $n_2 = x - n_1 \in [(N \cap T) + (L \cap N)] \cap (L \cap T) \leq N \cap (L \cap T) = 0$ elde edilir. O zaman, $n_2 = 0$ ve $x = n_1$ olur. Ayrıca, $x = n_1 \in (N \cap T) \cap (L \cap N) = N \cap T \cap L = 0$ olduğu görülür. Böylece, $N + T = (N \cap T) \oplus [(L \cap N) \oplus (L \cap T) = T \oplus (L \cap N)$ elde edilir.

M modülü dik toplanan arakesit özelliğine sahip ve L ile N, M modülünün dik toplananları olduğundan $L \cap N$ de M modülünün bir dik toplananıdır. M, C_3 koşuluna sahip olduğu için $N+T = T \oplus (L \cap N)$ altmodülü de M modülünün bir dik toplananıdır. Böylece, M modülü dik toplanan toplam özelliğine sahiptir. $\square$

Önteorem 3.3.4. [27, Lemma 19] *M, D_3 koşuluna sahip olan bir modül olsun. M modülü, dik toplanan toplam özelliğine sahipse dik toplanan arakesit özelliğine sahiptir.*

Kanıt. M, D_3 koşuluna sahip bir modül olsun. M modülünün dik toplanan toplam özelliğini sağlasın. X ve Y, M modülünün dik toplananları olsun. $X \cap Y$'nin M modülünün bir dik toplananı olduğu gösterilecektir. M modülü dik toplanan toplam özelliğine sahip olduğu için $X + Y$, M modülünün bir dik toplananıdır. O zaman, öyle bir $Z \leq M$ vardır ki $M = (X + Y) \oplus Z$ olur. M modülü dik toplanan toplam özelliğine sahip olduğu için $X+Z$ ve $Y+Z$, M modülünün dik toplananlarıdır. M modülü D_3 koşuluna sahip ve $M = (X+Y)+(Y+Z)$ olduğundan $(X+Z) \cap (Y+Z)$ altmodülü M'nin dik toplananıdır. Buradan, öyle bir $U \leq M$ vardır ki $M = [(X+Z) \cap (Y+Z)] \oplus U$ olur. $(X+Z) \cap (Y+Z) = [X \cap (Y+Z)] + Z$

ve $X \cap (Y + Z) \leq X \cap Y$ bulunur. Ayrıca, $M = [(X + Z) \cap (Y + Z)] \oplus U$ olduğu için $M = (X \cap Y) \oplus Z \oplus U$ elde edilir. Böylece, M modülü dik toplanan arakesit özelliğine sahiptir. $\square$

Önerme 3.3.5. (i) [28, Proposition 1] *Bir M modülü dik toplanan arakesit özelliğine sahiptir ancak ve ancak M modülünün her L ve N dik toplananları için $p : M \to N$ kanonik izdüşümünün L'ye kısıtlanışının çekirdeği N'nin bir dik toplananıdır.*
(ii) [29, Proposition 1.3] *Bir M modülü dik toplanan toplam özelliğine sahiptir ancak ve ancak M modülünün her L ve N dik toplananları için $p : M \to N$ kanonik izdüşümünün L'ye kısıtlanışının görüntüsü N'nin bir dik toplananıdır.*

Önteorem 3.3.6. [29, Lemma 2.1] *M bir modül ve $S = End_R(M)$ olsun. M modülü dik toplanan arakesit (sırasıyla, dik toplanan toplam) özelliğine sahiptir ancak ve ancak her $e, f \in End_R(M)$ eşkare çifti için $Ker(ef) \leq^{\oplus} M$ (sırasıyla, $Im(ef) \leq^{\oplus} M$) olur.*

Kanıt. $M = L \oplus L' = N \oplus N'$ olsun. e ve f, sırasıyla, M'nin L ve N üzerine izdüşümleri olsun. O zaman, Önerme 3.3.5(ii) gereğince, $Im(ef) = Im(e|_N)$ altmodülü bir dik toplanan olur. Böylece, M modülü dik toplanan toplam özelliğine sahiptir ancak ve ancak her $e, f \in S$ eşkare çifti için $Im(ef)$, M'de bir dik toplanandır. Önerme 3.3.5(i) gereğince de M'nin dik toplanan arekesit özelliğini sağlaması için gerek ve yeter koşul her $e, f \in S$ eşkare çift için $Ker(ef)$'nin M'de dik toplanan olmasıdır. $\square$

Aşağıdaki teoremde, endodüzenli modüllerin dik toplanan arakesit ile dik toplanan toplam özellikleri cinsinden karakterizasyonu verilmektedir.

Teorem 3.3.7. [5, Theorem 2.4] *M bir modül ve $S = End_R(M)$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir:*
(a) *M modülü endodüzenlidir.*
(b) *$Mat_2(S)$ halkası dik toplanan toplam özelliğine sahiptir.*
(c) *$M^{(2)}$ modülü dik toplanan arakesit ve dik toplanan toplam özelliklerine sahiptir.*

Kanıt. $(a \Rightarrow b)$ S halkası von Neumann düzenli olduğundan, Önteorem 2.3.11 gereğince, $Mat_2(S)$ matris halkası da von Neumann düzenlidir. Teorem 2.3.4'ten düzenli halkalar dik toplanan toplam özelliğini sağladığından, $Mat_2(S)$ halkası da bu özelliğe sahiptir.

$(b \Rightarrow c)$ $H := Mat_2(S) \cong End_R(M^{(2)})$ olsun. H'nin dik toplanan toplam özelliğine sahip olduğu varsayılsın. Önteorem 3.3.6 gereğince, her bir $e, f \in H$ eşkare çifti için öyle $g, h \in H$ eşkareleri vardır ki $efH = gH$ ve $Hef = Hf$ olur. $efM^{(2)} = efHM^{(2)} = gHM^{(2)} = gM^{(2)}$ olduğundan, Önteorem 3.3.6'dan $M^{(2)}$ modülü dik toplanan toplam özelliğine sahiptir. Ayrıca, ***Ker(ef)*** $= r_{M^{(2)}}(Hef) = r_{M^{(2)}}(Hh) = (1-h)M^{(2)}$ olduğundan, Önteorem 3.3.6 gereğince, $M^{(2)}$ modülü dik toplanan arakesit özelliğine sahiptir.

$(c \Rightarrow a)$ $\varphi \in End_R(M)$ verilsin. $N = \{(m, \varphi(m)) | m \in M\}$ kümesi tanımlansın. N, $M^{(2)}$ modülünün bir dik toplananıdır. $M^{(2)}$ dik toplanan arakesit özelliğine sahip olduğundan, $Ker\varphi \oplus 0 = (M \oplus 0) \cap N$ de $M^{(2)}$'nin bir dik toplananı olur. Yani, $Ker\varphi$ altmodülü M modülünün bir dik toplananıdır. Böylece, M bir Rickart modüldür. Ayrıca, $M^{(2)}$ dik toplanan toplam özelliğine sahip olduğundan, $(M \oplus 0) + N = M \oplus \varphi(M)$, $M^{(2)}$ modülünün bir dik toplananıdır. Yani, $\varphi(M)$, M modülünün bir dik toplananı olur. Böylece, M bir d-Rickart modüldür. Sonuç olarak, M bir endodüzenli modüldür. □

Uyarı 3.3.8. (i) Bir halka D_3 özelliğini her zaman sağladığından, Önteorem 3.3.4'ten dik toplanan toplam özelliğine sahip her halka dik toplanan arakesit özelliğine de sahiptir. Buradan, Teorem 3.3.7 gereğince, $Mat_2(S)$ halkası da dik toplanan arakesit özelliğine sahiptir.

(ii) [30, Lemma 3.16] M bir endodüzenli modüldür ancak ve ancak $M^{(2)}$ modülü C_3 koşulunu ve dik toplanan arakesit özelliğini sağlar ancak ve ancak $M^{(2)}$ modülü D_3 koşulunu ve dik toplanan toplam özelliğini sağlar.

Sonuç 2.3.9'dan von Neumann düzenli bir halkanın iki yönlü ideallerinin de düzenli olduğu biliniyor. Bu ifadeden yola çıkarak, her endodüzenli modülün tamamen değişmez (fully invariant) altmodülünün endodüzenli olduğu düşünülebilir. Ancak, aşağıda ele alınacak örnek, bu durumun her zaman doğru olmadığını gösterir.

Örnek 3.3.9. [18, Example 1.8] *$A = \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ halkası verilsin.*

$$T = \{(a_n)_{n=1}^{\infty} \in A| \text{ hemen hemen her yerde } a_n \text{ sabit } \} \text{ ve}$$
$$I = \{(a_n)_{n=1}^{\infty} \in A| \text{ hemen hemen her yerde } a_n = 0\} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$$

olsun. Örnek 2.3.14'te $F = \mathbb{Z}_2$ alınırsa, T bir von Neumann düzenli halka ve I, T halkasının bir düzenli ideali olur.

Şimdi $R = \begin{pmatrix} T & I \\ I & T \end{pmatrix}$ von Neumann düzenli halkası göz önüne alınsın. $N = \begin{pmatrix} I & I \\ I & K \end{pmatrix}$, $M = R_R$ endodüzenli modülünün tamamen değişmez altmodülü olmak üzere, N, endodüzenli değildir. Çünkü, $\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (1,1,...) & 0 \end{pmatrix} \in End_R(N)$ için $\varphi N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I & I \end{pmatrix} <_{ess} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I & T \end{pmatrix} \leq^{\oplus} N$ olur. Buradan, φN, N altmodülünün dik toplananı değildir. Böylece, N tamamen değişmez altmodülü endodüzenli değildir.

Önerme 3.3.10. [5, Proposition 2.7] *Endodüzenli modüllerin her dik toplananı endodüzenlidir.*

Kanıt. M modülü endodüzenli ve $e^2 = e \in End_R(M)$ için $N = eM$ olsun. Bir $\psi \in End_R(M)$ verilsin. $Ker\psi e = Ker\psi \oplus (1-e)M$ ve $Ker\psi e$ altmodülü M modülünün bir dik toplananı olduğudan, $Ker\psi$ de M modülünün bir dik toplananı olur. Böylece, $Ker\psi$ altmodülü N'nin de bir dik toplananıdır. Buna ek olarak, $\psi e \in End_R(M)$ ve M bir d-Rickart modül olduğundan, $\psi N = \psi eM$ altmodülü M modülünün bir dik toplananıdır. Böylece, ψN, N'nin bir dik toplananı olur. Sonuç olarak, M modülünün N dik toplananı endodüzenlidir. □

Uyarı 3.3.11. M modülü endodüzenli ise, her $\varphi \in End_R(M)$ için $Ker\varphi$ ve $Im\varphi$ altmodülleri M modülünün dik toplananları oldukları için, Önerme 3.3.10'dan, her $\varphi \in End_R(M)$ için $Ker\varphi$ ve $Im\varphi$ endodüzenlidir.

Sonuç 3.3.12. [5, Corollary 2.9] *R bir von Neumann düzenli halka ise her $e^2 = e \in R$ için eR bir endodüzenli R-modüldür.*

Yukarıdaki sonuçtan, R bir düzenli halka ve $e^2 = e \in R$ ise eRe de düzenli bir halka olur, çünkü $End_R(eR) \cong eRe$'dir.

Aşağıdaki örnek, endodüzenli modüllerin dik toplamlarının her zaman endodüzenli olması gerekmediğini gösterir.

Örnek 3.3.13. [5, Example 2.10] *$R = \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ halkası ve $L = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ R-modülü verilsin. $N = R_R$ olsun. $L \oplus N$ endodüzenli değildir: $\varphi \in End_R(L \oplus N)$ verilsin. $l \in L$ ve $n \in N$ için $\varphi : L \oplus N \to L \oplus N$, $\varphi(l+n) = (0, l)$ dönüşümü tanımlansın. $\varphi(L \oplus N) = 0 \oplus N$, $L \oplus N$ modülünde dik toplanan değildir. Çünkü dik toplanan olsa, $0 \oplus L \leq^{\oplus} 0 \oplus N \leq L \oplus N$ bulunur. Ancak, $0 \oplus L \leq_{ess} 0 \oplus N$ olduğundan çelişki elde edilir. Böylece, $L \oplus N$ endodüzenli modül değildir. Ancak, $R \cong End_R(R)$ ve L yarıbasit R-modül olduğundan, N ve L endodüzenli modüllerdir.*

3.4 Bazı Halka Sınıflarının, Endodüzenli Modüller Açısından Karakterizasyonları

Bu altbölümde, bazı halka sınıflarının karakterizasyonları endodüzenli modüller ele alınarak irdelenecektir.

Aşağıdaki sonuç, Teorem 2.3.13'ün genişletilmiş bir halidir.

Önerme 3.4.1. [5, Proposition 2.11] *Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir:*
(a) Her sonlu üretilmiş serbest (projektif) R-modül endodüzenlidir.
(b) $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere serbest $R^{(n)}$ modülü endodüzenlidir.
(c) R halkası von Neumann düzenlidir.

Kanıt. R halkasının düzenli olması için gerek ve yeter koşul $Mat_n(R)$ matris halkasının düzenli olmasıdır (bkz. Önteorem 2.3.11). Bu sonuçtan dolayı ispat açıktır. □

Örnek 3.4.2. [18, Example 1.9] *R bir değişmeli halka olmak üzere, endodüzenli olmayan sonlu üretilmiş bir R-modül vardır.*

Kanıt. F bir cisim ve $n \in \mathbb{N}$ için $F_n = F$ olsun. $\prod F_n$'nin, 1 ve $\oplus F_n$ tarafından üretilen F-altcebiri R düzenli bir halkadır (bkz. Örnek 2.3.14). $x \in (\prod F_n) - R$ seçilsin. $B = R + xR$ ve $A = R \oplus B$ olsun. $f(r, b) = (0, r)$ kuralı ile tanımlanmış $f \in End_R(A)$ alınsın. $fA = 0 \oplus R$, $0 \oplus B$'nin öz büyük altmodülü olduğundan, Örnek 2.3.14 gereğince, $fgf = f$ koşulunu sağlayan bir $g \in End_R(A)$ yoktur sonucuna varılır. □

Sonuç 3.4.3. [5, Corollary 2.12] *M, bir von Neumann düzenli halka üzerinde projektif bir modül olsun. O zaman, M modülünün her sonlu üretilmiş altmodülü endodüzenlidir.*

Kanıt. N, M modülünün sonlu üretilmiş bir altmodülü olsun. Sonuç 2.3.17 gereğince, bir von Neumann düzenli halka üzerindeki bir projektif modülün sonlu üretilmiş her altmodülü, sonlu üretilmiş serbest bir modülün dik toplananına izomorftur. Dolayısıyla, $N \cong K \leq R^{(n)}$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. Endodüzenli modülün dik toplananı da endodüzenli olduğundan, N bir endodüzenli modüldür. □

Uyarı 3.4.4. Bir von Neumann düzenli halka üzerindeki projektif modül endodüzenli olmayabilir (bkz. Önerme 3.7.10).

Şimdi, her basit ya da yarıbasit modülü injektif olan halkalar incelenecektir.

Tanım 3.4.5. R bir halka olsun. Eğer her basit sağ R-modül injektif ise R halkasına *sağ V-halka (right V-ring)* denir.

Tanım 3.4.6. R bir halka olsun. Eğer her yarıbasit sağ R-modül injektif ise R halkasına *sağ SSI-halka* denir.

Tanım 3.4.7. M bir modül olsun. M modülünün altmodüllerinin her $\mathcal{A}$ kümesi için $\bigcap \mathcal{A} = 0$ iken bir sonlu $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ için $\bigcap \mathcal{F} = 0$ oluyorsa, M modülüne *sonlu eşüretilmiş (finitely cogenerated)* denir.

Tanım 3.4.8. M modülünün sıfırdan farklı altmodüllerinin arakesiti sıfırdan farklı ise M modülüne *altdirekt indirgenemez (subdirectly irreducible)* denir.

Tanımdan, her altdirekt indirgenemez modül sonlu eşüretilmiştir.

Önerme 3.4.9. [5, Proposition 2.14] *Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir:*
(a) *Her sonlu eşüretilmiş sağ R-modül endodüzenlidir.*
(b) *R bir sağ V-halkadır.*

Kanıt. $(a) \Rightarrow (b)$ N basit bir sağ R-modül olsun. $N \leq_{ess} E(N)$'dir. O halde, $0 \neq T \leq E(N)$ için $N \cap T \neq 0$ ve $N \cap T \leq N$ olur. N modülü basit modül olduğu için $N \cap T = N$'dir. Yani, $N \subseteq T$ elde edilir. Böylece, $E(N)$'nin sıfırdan farklı her altmodülü N modülünü içerdiği için $E(N)$'nin sıfırdan farklı altmodüllerinin arakesiti sıfırdan farklıdır. O halde, $E(N)$ altdirekt indirgenemezdir.

Şimdi $E(N) \neq N$ olsun. O zaman, $n \in E(N)$ ve $n \notin N$ olacak şekilde bir n elemanı vardır. $\mathcal{S} = \{K | N \leq K \leq E(N), n \notin K\}$ ailesi tanımlansın. $N \leq K$ olan her K için $E(N)$ injektif olduğundan $E(N) \leq^{\oplus} E(K)$'dır. Ayrıca, $K \leq E(N)$ olduğundan $0 \neq E(N) \leq_{ess} E(K)$ elde edilir. Böylece, $E(N) = E(K)$ olur. Zorn Lemma'dan $\mathcal{S}$ ailesinin maksimal bir L elemanı vardır. $0 \neq X/L \leq E(N)/L$ altmodülü ele alınsın. $L \subset X \subset E(N)$ ve L, n elemanını bulundurmama özelliğine göre maksimal olduğundan $n \in X$ elde edilir. Dolayısıyla, $0 \neq n + L \in X/L$ olur. Yani, $n + L \in \bigcap X/L \neq 0$ elde edilir. Buradan, $E(N)/L$ altdirekt indirgenemezdir.

Şimdi $T \oplus (X/L) \leq E(N) \oplus (E(N))/L$ olsun. Bir $T \leq E(N)$ için $a \in N \subseteq T$ ve $x + L \in X/L$ alınırsa, $0 \neq a + x + L \in T \oplus (X/L)$ olur. Böylece, $\bigcap [T \oplus (X/L)] \neq 0$ elde edilir. O halde, $E(N) \oplus (E(N)/L)$ altdirekt indirgenemezdir. Böylece, $E(N) \oplus (E(N)/L)$ sonlu eşüretilmiştir. Kabulden, $E(N) \oplus (E(N)/L)$ bir endodüzenli modüldür.

$x, y \in E(L)$ için ,

$$\varphi \colon E(N) \oplus (E(N))/L \longrightarrow E(N) \oplus (E(N))/L$$
$$(x, y + L) \longmapsto (0, x + L)$$

endomorfizması tanımlansın. Bu durumda, $Ker\varphi = L \oplus (E(L)/L)$ elde edilir. $Ker\varphi = L \oplus (E(L)/L) \leq^{\oplus} E(L) \oplus (E(L)/L)$ ve $L \leq^{\oplus}_{ess} E(L)$ olduğundan $L = E(L) = E(N)$ bulunur. $n \in E(N)$ olduğundan $n \in L$ çelişkisi elde edilir. Böylece, $N = E(N)$'dir. Yani,

N injektif modüldür ve dolayısıyla, R halkası bir sağ V-halkadır.
$(b) \Rightarrow (a)$ R halkası bir sağ V-halka olsun. O zaman, $Rad(M)$, M modülünün bütün maksimal altmodüllerinin arakesiti olarak tanımlandığından, $Rad(M) = 0$'dır. Dolayısıyla, sonlu eşüretilmiş bir M modülünün sonlu sayıda maksimal altmodülünün arakesiti de 0 olur. Böylece, Çin Kalan Teoremi'nden M modülü yarıbasittir. Sonuç olarak, M modülü endodüzenlidir. $\square$

Byrd, [31] makalesinde, bir R halkasının SSI olması için gerek ve yeter koşulun R'nin sağ noether, sağ V-halka olması gerektiğini göstermiştir. Bu sonuçtan ve Önerme 3.4.9'dan yola çıkılarak, aşağıdaki karakterizasyon elde edilir.

Sonuç 3.4.10. [5, Corollary 2.15] *R bir SSI halkadır ancak ve ancak R bir sağ noether halkadır ve her sonlu eşüretilmiş sağ R-modül endodüzenlidir.*

Endodüzenli modüllerle yarıbasit halkaları ilişkilendirmek için aşağıdaki sonuçlara ihtiyaç vardır.

Önerme 3.4.11. [24, Proposition 2.8] *Bir d-Rickart M modülünün her dik toplananı da d-Rickart olur.*

Kanıt. Bir $e^2 = e \in End_R(M)$ için $N = eM$ olsun. $\psi \in End_R(M)$ verilsin. M modülü d-Rickart ve $\psi e \in End_R(M)$ olduğu için $\psi N = \psi eM \leq^{\oplus} M$ bulunur. Buradan, $\psi N \leq^{\oplus} N$ elde edilir. $\square$

Önteorem 3.4.12. [32, Lemma 28.2] *Bir R halkasında $a_1, a_2, \ldots$ bir dizi olsun. F, tabanı $x_1, x_2, \ldots$ olan serbest bir R-modül olsun. G ise F'nin, $n \in \mathbb{N}$ için $y_n = x_n - a_n x_{n+1}$ olmak üzere, $y_1, y_2, \ldots$ tarafından üretilen bir altmodülü olsun. G, F'nin bir dik toplananı ise temel sol ideallerin $Ra_1 \geq Ra_1a_2 \geq \cdots$ zinciri durur.*

I, bir R halkasının bir altkümesi olsun. I'daki her $a_1, a_2, \ldots$ dizisi için $a_n \ldots a_1 = 0$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ varsa I'ya *sağ T-üstelsıfır* denir. $J(R)$, R halkasının Jacobson radikali olmak üzere, $R/J(R)$ yarıbasit halka ve $J(R)$ ideali sağ T-üstelsıfır ise R'ye sağ tam (right perfect) halka denir (bkz. [32]).

Teorem 3.4.13. [32, Theorem 28.4] ***(Bass Teoremi)*** *Bir R halkası sağ tamdır ancak ve ancak temel sol idealler üzerinde azalan zincir koşulu sağlanır.*

Önteorem 3.4.14. [5, Lemma 2.16] *R bir halka olsun. Sayılabilir sonsuz üretilmiş serbest bir modülün d-Rickart olması için gerek ve yeter koşul R halkasının yarıbasit artin olmasıdır.*

Kanıt. Temel sol ideallerin $Ra_1 \supseteq Ra_1a_2 \supseteq Ra_1a_2a_3 \supseteq \cdots$ azalan dizisi verilsin. F_R, tabanı $x_1, x_2, \ldots$ olan sayılabilir sonsuz üretilmiş serbest d-Rickart modül olsun. G, $y_i = x_i - x_{i+1}a_i$ tarafından üretilen F modülünün bir altmodülü olsun. O zaman, $\varphi : x_i \to y_i$ ele alınırsa $F \cong G$ elde edilir. Ayrıca, F modülü d-Rickart olduğu için $\varphi F = G \leq^{\oplus} F$'dir. Böylece, Önteorem 3.4.12 gereğince, bu dizi belli bir adımdan sonra durur. Bass Teoremi'nden dolayı, R bir sağ tam halkadır. Buradan, $R/J(R)$ yarıbasit bir halkadır. Ayrıca, R_R, bir d-Rickart modülün dik toplananı olduğu için, Önerme 3.4.11 gereğince, bir d-Rickart modüldür. Buradan, R halkası von Neumann düzenlidir, çünkü bir $a \in R$ için $R \to R, r \mapsto ar$ homomorfizmasının görüntüsü aR bir dik toplanan olur. Böylece, R düzenli olduğundan, $J(R) = 0$ elde edilir. O halde, R halkası yarıbasit artindir. □

Önerme 3.4.15. [5, Proposition 2.17] *Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir:*
(a) *Her R-modül endodüzenlidir.*
(b) *$R^{(R)}$ serbest modülü endodüzenlidir.*
(c) *Sayılabilir sonsuz üretilmiş serbest R-modül endodüzenlidir.*
(d) *R halkası yarıbasit artindir.*

Kanıt. $(b) \Rightarrow (d)$ K, R halkasının bir sağ ideali olsun. O zaman, Λ bir indeks kümesi olmak üzere, $\varphi F_R = K$ koşulunu sağlayan bir $F_R = R^{(\Lambda)}$ serbest modülü ve bir φ epimorfizması vardır. F_R, $R^{(R)}$'nin bir dik toplananı olduğu için endodüzenlidir. Dolayısıyla, $\varphi F_R = K \leq^{\oplus} F_R$ elde edilir. Buradan, $K \leq^{\oplus} R_R$ olur. Böylece, R halkası yarıbasit artindir. $(d) \Rightarrow (a) \Rightarrow (b)$ ispatları açıktır. $(c) \Rightarrow (d)$ Önteorem 3.4.14'ten açıktır. □

Uyarı 3.4.16. [23, Theorem 2.25] makalesinde bir R halkasının yarıbasit olması için gerek ve yeter koşulun her injektif (ya da CS) modülün Rickart olduğu gösterilmiştir. Dolayısıyla, endodüzenli modüller Rickart olduğundan, bir R halkası yarıbasittir ancak ve ancak her injektif (ya da CS) modül endodüzenlidir.

3.5 Endomorfizma Halkası π-düzenli Modüller

Bu altbölümde, düzenliliğin bir genellemesi olan π-düzenlilik koşulunu sağlayan endomorfizma halkaları incelenecektir.

Tanım 3.5.1. R bir halka olmak üzere, bir $r \in R$ için $r^n s r^n = r^n$ olacak şekilde $s \in R$ ve $n \in \mathbb{N}$ varsa R'ye *π-düzenli halka* denir.

Önerme 3.5.2. [5, Proposition 2.19] *Bir M modülü ve $S = End_R(M)$ için aşağıdaki ifadeler denktir:*
(a) *Her $\varphi \in S$ için $Ker\varphi^n \leq^{\oplus} M$ ve $Im\varphi^n \leq^{\oplus} M$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ vardır.*
(b) *S halkası π-düzenlidir.*

Kanıt. $(a) \Rightarrow (b)$ $\varphi \in S$ verilsin. Kabulden, öyle bir $n \in \mathbb{N}$ vardır ki $Ker\varphi^n \leq^{\oplus} M$ ve $Im\varphi^n \leq^{\oplus} M$ olur. Teorem 3.1.2 gereğince, φ^n düzenlidir. Böylece, S bir π-düzenli halkadır.
$(b) \Rightarrow (a)$ $\varphi \in S$ verilsin. O zaman, $\varphi^n \psi \varphi^n = \varphi^n$ olacak şekilde $\psi \in S$ ve $n \in \mathbb{N}$ vardır. Teorem 3.1.2'den, $Ker\varphi^n$ ve $Im\varphi^n$ altmodülleri M modülünün dik toplananları olur. □

Sonuç 3.5.3. [5, Corollary 2.20] *Bir M modülü C_2 koşuluna sahip ve her $\varphi \in End_R(M)$ için $Ker\varphi^n \leq^{\oplus} M$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ var ise $End_R(M)$ halkası π-düzenlidir.*

Kanıt. $\varphi \in End_R(M)$ verilsin. Bir $N \leq M$ için $M = Ker\varphi^n \oplus N$ olsun. M modülü C_2 koşulunu sağladığından ve $\varphi^n|_N$ bir monomorfizma olduğundan, $\varphi^n(M) = \varphi^n(N) \leq^{\oplus} M$ elde edilir. O halde, Önerme 3.5.2 gereğince, $End_R(M)$ bir π-düzenli halka olur. □

Benzer şekilde, aşağıdaki dual sonuç da elde edilir.

Sonuç 3.5.4. [5] *Bir M modülü D_2 koşuluna sahip ve her $\varphi \in End_R(M)$ için $Im\varphi^n \leq^{\oplus} M$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ var ise $End_R(M)$ halkası π-düzenlidir.*

Tanım 3.5.5. [33] R bir halka olsun. Her $a \in R$ için $a^n = a^{2n}b$ olacak şekilde bir $b \in R$ ve $n \in \mathbb{N}$ varsa R'ye *güçlü (strongly) π-düzenli* denir.

1950'de Kaplansky tarafından tanımlanan güçlü π-düzenli halkaların π-düzenli olduğu Azumaya tarafından 1954 yılında [34] çalışmasında gösterilmiştir. Dischinger ise 1976'da, [35] makalesinde, güçlü π-düzenliliğin sağ-sol simetrik olduğunu ispatlamıştır.

Teorem 3.5.6. [36, Proposition 2.3] *R bir halka ve M bir R-modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:*
(a) Her $f \in End_R(M)$ için $M = Ker(f^n) \oplus Im(f^n)$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. (Başka bir deyişle, M Fitting Lemma'yı sağlar.)
(b) $End_R(M)$ bir güçlü π-düzenli halkadır.

Kanıt. $(b) \Rightarrow (a)$ $S = End_R(M)$ bir güçlü π-düzenli halka olsun. $f \in S$ verilsin. O zaman, $f^n = f^{2n}g = hf^{2n}$ olacak şekilde $f, g \in S$ ve $n \in \mathbb{N}$ vardır. $f^n = hf^{2n}$ eşitliğinden $M = Ker(f^n) + Im(f^n)$ elde edilir. $f^n = f^{2n}g$ eşitliği ise, bu toplamın dik olduğunu gösterir.
$(a) \Rightarrow (b)$ $M = Kerf \oplus Imf$ iken $f = f^2g$ olacak şekilde bir $g \in S$ olduğunu göstermek yeterlidir. $M = Kerf \oplus Imf$ olduğundan $Kerf = Ker(f^2)$ ve $Imf = Im(f^2)$ elde edilir. Buradan, $f|_{Imf}$ kısıtlaması tersinirdir. O halde, $fg_1 = 1_{Imf}$ olacak şekilde bir $g_1 \in End_R(Imf)$ vardır. Imf, M'nin bir dik toplananı olduğundan $fg = 1_M$ olacak şekilde bir $g \in S$ bulunabilir. Böylece, $f = f^2g$ olacak şekilde bir $g \in S$ vardır. □

3.6 Abelyan Endodüzenli Modüller

Eşkareleri merkezil olan bir halka abelyan olarak isimlendirilir. Abelyan olan düzenli halkalar, elemanlar üzerinde tanımlanan güçlü düzenlilik denilen bir özellikle de karakterize edilir. Bu nedenle, bazı kaynaklarda, abelyan düzenli halkalar güçlü düzenli olarak da adlandırılır (bkz. [18, Theorem 3.5]). Dolayısıyla, güçlü düzenli halkalar von Neumann düzenlidir. Değişmeli düzenli halkaların, bölümlü halkaların keyfi dik çarpımının abelyan olduğu açıktır.

Bir bölümlü halka üzerindeki bir vektör uzay V yarıbasit bir modül olduğundan endodüzenlidir. V'nin endomorfizma halkasının abelyan olması ise V'nin boyutunun 1 olması ile mümkündür.

Bu altbölümde, endomorfizma halkası abelyan düzenli olan modüller üzerinde çalışılacaktır.

Tanım 3.6.1. [18] R bir halka olmak üzere, her bir $r \in R$ için $r = r^2x$ olacak şekilde $x \in R$ varsa R'ye *güçlü düzenli (strongly regular) halka* denir. Buna denk olarak, eşkare elemanları merkezil olan bir von Neumann düzenli halkaya güçlü düzenli denir.

Tanım 3.6.2. Bir halkanın bütün eşkare elemanları merkezil ise bu halkaya *abelyan* denir. M bir modül olmak üzere, $End_R(M)$ halkası abelyan ise M modülüne *abelyan modül* denir.

Önerme 3.6.3. *[5, Proposition 2.22] Bir M modülü için aşağıdaki ifadeler denktir:*
(a) *M bir abelyan endodüzenli modüldür (veya $End_R(M)$ bir güçlü düzenli halkadır).*
(b) *Her $\varphi \in End_R(M)$ için $M = Ker\varphi \oplus Im\varphi$ olur.*

Kanıt. $(a) \Rightarrow (b)$ $\varphi \in S = End_R(M)$ verilsin. M endodüzenli modül olduğu için öyle bir $\psi \in S$ vardır ki $\varphi = \varphi\psi\varphi$'dir. $m = m - \psi\varphi m + \psi\varphi\psi\varphi m$ ve $\varphi\psi$ bir eşkare eleman olduğundan, $m = (m - \psi\varphi m) + \varphi\psi\psi\varphi m \in Ker\varphi + Im\varphi$ elde edilir. Şimdi $x \in Ker\varphi \cap Im\varphi$ alınsın. O zaman, $\varphi(x) = 0$'dır ve $\varphi(a) = x$ olacak şekilde bir $a \in M$ vardır. Bu durumda, $\psi\varphi(x) = \psi\varphi\varphi(a) = 0$ elde edilir. S halkasında eşkareler merkezil olduğundan $\varphi(a) = x = 0$ bulunur. Böylece, $M = Ker\varphi \oplus Im\varphi$ elde edilir.
$(b) \Rightarrow (a)$ Teorem 3.1.2 gereğince, M modülü endodüzenlidir. Bir $e \in S$ eşkare elemanı ve bir $\varphi \in S$ verilsin. $\alpha = e\varphi(1-e)$ elemanı düşünülsün. Hipotezden, $M = Ker\alpha \oplus Im\alpha$ ayrışımı vardır. Buna ek olarak, $\alpha^2 = 0$ olduğundan $\alpha(M) = 0$ ve böylece $\alpha = e\varphi(1-e) = 0$ elde edilir. Buradan, $e\varphi e = e\varphi$ elde edilir. Benzer şekilde, $(1-e)\varphi e = 0$ ve buradan $\varphi e = e\varphi e$ eşitliği bulunur. Sonuçta, $e^2 = e \in S$ eşkare elemanı merkezildir. Yani, $S = End_R(M)$ bir abelyan halkadır. □

Uyarı 3.6.4. (i) [5, Remark 2.23] M bir R-modül olsun. Her $\varphi \in End_R(M)$ için $Ker\varphi \cong Coker\varphi = M/Im\varphi$ oluyorsa M'ye *biçimsel (morphic) modül* denir (bkz. [17]). Önerme 3.6.3 gereğince, her abelyan endodüzenli modül biçimseldir.

(ii) [36, Corollary 2.4] Bir M modülünün her epimofizması bir izomorfizmaysa M'ye *hopfian modül*, her monomorfizması bir izomorfizmaysa *co-hopfian modül* denir. Önerme 3.6.3 gereğince, her abelyan endodüzenli modül hopfian ve co-hopfian modüldür.

Uyarı 3.6.5. [5, Remark 2.23] Bir güçlü düzenli (yani abelyan düzenli) halka üzerindeki devirli modül co-hopfian modüldür.

Kanıt. R bir güçlü düzenli halka ve M bir devirli R-modül olsun. O zaman, R halkasının bir I sağ ideali için $M \cong R/I$ olur. Bir $\varphi \in End_R(R/I)$ monomorfizması alınsın. $\varphi(1+I) = x+I$ olsun. Güçlü düzenliliğin tanımından, bir $y \in R$ için $x = x^2y$ olur. O zaman, $\varphi(1+I) = x+I = x^2y+I$ elde edilir. Buradan, $\varphi^2(y+I) = \varphi(\varphi(y+I)) = \varphi(xy+I) = x^2y+I$ olduğundan $\varphi(1+I) = \varphi^2(y+I)$ bulunur. Dolayısıyla, $\varphi(R/I) \subseteq \varphi^2(R/I)$ olur. Böylece, $\varphi(R/I) = \varphi^2(R/I)$ elde edilir. φ dönüşümü monomorfizma olduğu için $\varphi(R/I) = R/I$ bulunur. Sonuç olarak, φ dönüşümü bir izomorfizmadır. $\square$

Sonuç 3.6.6. *Bir M modülü ve $e^2 = e \in End_R(M)$ için aşağıdaki ifadeler denktir:*
(a) eM bir abelyan endodüzenli modüldür.
(b) Her $\varphi \in End_R(M)$ için $M = Ker(e\varphi e) \oplus Im(e\varphi e)$ olur.

Kanıt. $(a) \Rightarrow (b)$ $\varphi \in End_R(M)$ olmak üzere $e\varphi e : M \to eM$ dönüşümü ele alınsın. O zaman, $e^2 = e$ olduğu için $e\varphi e(M) = e\varphi e(eM)$ elde edilir. $e\varphi e|_{eM} \in End_R(eM)$ için Önerme 3.6.3 gereğince, $eM = Ker(e\varphi e|_{eM}) \oplus Im(e\varphi e)$ ayrışımı vardır. Ayrıca, $Ker(e\varphi e|_{eM}) = Ker(e\varphi e) \cap eM$ olur. Diğer taraftan, $eM = eM \oplus (1-e)M = eM + Ker(e\varphi e)$ olur, çünkü $(1-e)M \subseteq Ker(e\varphi e)$ kapsaması vardır. Buradan, $M = eM + Ker(e\varphi e) = (Ker(e\varphi e) \cap eM) + Im(e\varphi e) + Ker(e\varphi e)$ elde edilir. Fakat, $Ker(e\varphi e) \cap eM \subseteq Ker(e\varphi e)$ olduğundan $M = Ker(e\varphi e) + Im(e\varphi e)$ bulunur. Şimdi $x \in Ker(e\varphi e) \cap Im(e\varphi e)$ alınsın. O zaman, öyle bir $m \in M$ vardır ki $e\varphi e(m) = x$ ve $e\varphi e(x) = 0$ olur. $x = e\varphi e(m)$ ise $e(x) = e\varphi e(m) = x$ elde edilir. O zaman, $x = e(x) \in eM \cap Ker(e\varphi e) \cap Im(e\varphi e) = 0$'dır. Yani, $x = 0$ olur. O halde, $M = Ker(e\varphi e) \oplus Im(e\varphi e)$ elde edilir.
$(b) \Rightarrow (a)$ $\alpha \in End_R(eM)$ verilsin. $eM = Ker\alpha \oplus Im\alpha = Ker\alpha \oplus \alpha(eM)$ olduğu

gösterilecektir.

$$\varphi\colon M = eM \oplus (1-e)M \longrightarrow M = eM \oplus (1-e)M$$
$$e(m) + (1-e)(m) \longmapsto \alpha(e(m)) + (1-e)(m)$$

dönüşümü tanımlansın. Kabulden, $M = Ker(e\varphi e) \oplus Im(e\varphi e)$ olur. Diğer taraftan, $e\varphi e(m) = e\varphi(e(m)) = e\alpha e(m)$ elde edilir. Böylece, $M = Ker(e\alpha e) \oplus Im(e\alpha e)$ olur. $\alpha \in End_R(eM)$ olduğundan $e\alpha = \alpha$ elde edilir. O halde, $e(m) \in eM$ için $e(m) = x + y$ olacak şekilde $x \in Ker(e\alpha e)$ ve $y \in Im(e\alpha e)$ vardır. Buradan, bir $t \in M$ için $e(m) = x + e\alpha e(t)$ olur. $e\alpha e(t) = \alpha(e(t)) \in Im(\alpha) = \alpha(eM)$ bulunur. $x \in Ker(e\alpha e) = Ker(\alpha e)$ olmak üzere $\alpha e(x) = 0$ elde edilir. Böylece, $e(x) \in Ker\alpha$ bulunur. Fakat, $x \in eM$'dir. Buradan, $x = e(m')$ olacak şekilde bir $m' \in M$ vardır. Bu durumda, $e(x) = e(m') = x$ elde edilir. Buradan, $e(x) = x \in Ker\alpha$ olur. Böylece, $eM = Ker\alpha + Im\alpha$ elde edilir. Şimdi, $t \in Ker\alpha \cap\ Im\alpha$ verilsin. O zaman, $t \in eM$ olduğu için $t \in Ker(e\varphi e) \cap Im(e\varphi e) = 0$ bulunur. O halde, $t = 0$'dır. Sonuç olarak, $Ker\alpha \cap Im\alpha = 0$ elde edilir. Böylece, $eM = Ker\alpha \oplus Im(\alpha)$ olur. Önerme 3.6.3 gereğince, eM bir abelyan endodüzenli modüldür. □

Aşağıdaki örnek, Önteorem 3.6.3'teki abelyanlık koşulunun gereksiz olmadığını gösterir.

Örnek 3.6.7. *$\mathbb{R}$ cismi üzerindeki $V = \mathbb{R}^2$ vektör uzayı ele alınsın. $\varphi = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \in End_{\mathbb{R}}(V) = Mat_2(\mathbb{R})$ olsun. O zaman, $Ker\varphi = (2,1)\mathbb{R} = Im\varphi \neq V$ olur. Aslında, $End_{\mathbb{R}}(V)$ abelyan değildir.*

3.7 Endodüzenlilik ve Tekilsizlik İlişkisi

Her von Neumann düzenli halka tekilsiz olduğu için bir endodüzenli modülün de bir tür tekilsizlik özelliği sağlaması beklenir. Rizvi ve Roman, [37] çalışmasında K-tekilsizlik kavramını tanımladı. Aynı çalışmada, her Baer modülün K-tekilsiz olduğu gösterildi (bkz. [37, Lemma 2.15]). M bir modül olmak üzere, $0 \neq \varphi \in End_R(M)$ için $Ker\varphi$, M

modülünde büyük değilse M'ye *K-tekilsiz modül* denir. Örneğin, endodüzenli $\mathbb{Z}$-modül $\mathbb{Z}_p$ K-tekilsizdir fakat tekilsiz değildir.

Endodüzenli modüller, T-eştekilsizlik olarak isimlendirilen, K-tekilsizliğin dual özeliğini de sağlar. $0 \neq \varphi \in End_R(M)$ için $Im\varphi$, M modülünde küçük değilse M'ye *T-eştekilsiz modül* denir (bkz. [38]).

Önerme 3.7.1. [23, Proposition 2.12] *Her Rickart modül K-tekilsizdir.*

Kanıt. M bir Rickart modül ve bir $0 \neq \varphi \in End_R(M)$ için $Ker\varphi \leq_{ess} M$ olsun. M modülü Rickart olduğundan $Ker\varphi \leq^{\oplus} M$ olur. Böylece, $Ker\varphi = M$ ve dolayısıyla $\varphi = 0$ elde edilir. □

Önerme 3.7.2. [23, Proposition 2.16] *Her Rickart modül dik toplanan arakesit özelliğine sahiptir.*

Kanıt. M bir Rickart modül olsun. Sıfırdan farklı bir $e, f \in End_R(M)$ eşkare çifti için $L = eM$ ve $N = fM$ olsun. O zaman, $Ker(1-f)e = [eM \cap Ker(1-f)] \oplus (1-e)M$ elde edilir. Keyfi bir $y \in Ker(1-f)e$ için $(1-f)(ey) = 0$ ve buradan, $ey \in eM \cap Ker(1-f)$ olur. O zaman, $y = ey + (1-e)y \in [eM \cap Ker(1-f)] \oplus (1-e)M$ bulunur. Böylece, $Ker(1-f)e \subseteq [eM \cap Ker(1-f)] \oplus (1-e)M$ elde edilir. Diğer kapsama açıktır. M modülü Rickart olduğu için $Ker(1-e)f \leq^{\oplus} M$ olur. O halde, $L \cap N = eM \cap Ker(1-f)$, M modülünün bir dik toplananıdır. □

Önerme 3.7.3. [24, Proposition 2.11] *Her d-Rickart modül dik toplanan toplam özelliğine sahiptir.*

Kanıt. M bir d-Rickart modül olsun. Sıfırdan farklı $e, f \in End_R(M)$ eşkare çifti verilsin. O zaman, $eM + fM = eM \oplus (1-e)fM$ olur. $(1-e)f \in End_R(M)$ olduğundan, bir $g^2 = g \in End_R(M)$ için $(1-e)fM = gM$'dir. $eg = 0$ olduğu için $eM + fM = eM \oplus gM \leq^{\oplus} M$ elde edilir. □

Önerme 3.7.4. [5, Proposition 2.28] *Aşağıdaki ifadeler doğrudur:*

(i) *Her endodüzenli modül K-tekilsiz ve T-eştekilsizdir.*

(ii) *Her endodüzenli modül dik toplanan arakesit ve dik toplanan toplam özelliklerine sahiptir.*

Kanıt. Her endodüzenli modül Rickart ve d-Rickart modül olduğundan, ispat Önerme 3.7.1, Önerme 3.7.2 ve Önerme 3.7.3 sonuçlarından elde edilir. □

Uyarı 3.7.5. [5, Remark 2.19] Önerme 3.7.4(ii) gereğince, $End_R(M)$'nin her sonlu $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ altkümesi için $\cap_{i=1}^{n} Ker\varphi_i$ ve $\sum_{i=1}^{n} Im\varphi_i$, M modülünün dik toplananıdır ancak ve ancak M modülü endodüzenlidir.

Önerme 3.7.6. [5, Proposition 2.30] *Aşağıdaki ifadeler doğrudur:*

(i) *Her K-tekilsiz sürekli modül endodüzenlidir.*

(ii) *Her T-eştekilsiz ayrık modül endodüzenlidir.*

Kanıt. (i) M bir K-tekilsiz sürekli modül olsun. Teorem 2.6.26 gereğince, $J = Rad(End_R(M))$, $End_R(M)$ halkasının Jacobson radikali olmak üzere $End_R(M)/J$ bir von Neumann düzenli halkadır. M modülü K-tekilsiz olduğu için $J = 0$'dır. Böylece, $End_R(M)$ bir von Neumann düzenli halkadır.

(ii) M modülü D_1 koşulunu sağladığından bir d-Rickart modüldür (bkz. [38, Theorem 2.1, Theorem 2.14]). Teorem 3.1.2 gereğince, M endodüzenlidir. □

Tanım 3.7.7. M bir modül olmak üzere, boştan farklı her $I \subseteq End_R(M)$ için $r_M(I) \leq^{\oplus} M$ oluyorsa M'ye *Baer modül* denir (bkz. [23]). Her $I \subseteq End_R(M)$ için $\sum_{\varphi \in I} Im\varphi \leq^{\oplus} M$ ise M'ye *dual Baer modül* denir (bkz.[38]).

Örnek 3.7.8. [5, Example 2.31] $M = \mathbb{Q}^{(\mathbb{N})}$ *veya* $M = \mathbb{Q}^{(\mathbb{R})}$ $\mathbb{Z}$*-modüllerinden biri olsun. M tekilsiz injektif olduğu için M bir endodüzenli Baer modüldür. Ayrıca, M bir dual Baer modüldür.*

Uyarı 3.7.9. [5, Remark 2.32] Önteorem 4.3.1 gereğince, her K-tekilsiz CS modül Baer'dir. Ayrıca, her T-eştekilsiz D_1 modül dual Baer'dir.

Önerme 3.7.6'dan her tekilsiz injektif R-modül endodüzenli Baer modüldür. Buna ek olarak, R halkası sağ kalıtsal sağ noether ise her tekilsiz injektif R-modül dual Baer de olur ([24, Corollary 2.30]).

Bir R halkası için R_R modülü Baer olma özelliğini sağlıyorsa, R'ye *Baer halka* denir. Baer olma özelliği sağ-sol simetriktir (bkz. [37]).

Önerme 3.7.10. [5, Proposition 2.33] *R halkası Baer olmayan bir düzenli halka olsun. O zaman, her sonlu üretilmiş serbest modül (ne Baer ne dual Baer olan) endodüzenli bir modüldür. Buna rağmen, sonsuz üretilmiş serbest modül endodüzenli değildir.*

Kanıt. Önerme 3.4.1 gereğince, bir von Neumann düzenli R halkası üzerinde, her sonlu üretilmiş serbest modül endodüzenlidir. Ayrıca, bir sonlu üretilmiş serbest modül Baer olamaz, çünkü R_R Baer olmayan bir dik toplanandır. Dahası, R yarıbasit artin olmadığından, R_R dual Baer de olamaz (bkz. [38, Corollary 2.10]). Önerme 3.4.15 gereğince, sonsuz üretilmiş bir serbest modül endodüzenli değildir. □

Örnek 3.7.11. [5, Example 2.34] *$A = \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ olsun. $T = \{(a_n)_{n=1}^{\infty} \in A |$ hemen hemen her yerde a_n sabit$\}$ göz önüne alınsın. T, Baer olmayan bir düzenli halkadır. Dolayısıyla, bu halka, her sonlu üretilmiş serbest modülü Baer de dual Baer de olmayan, ancak endodüzenli olan bir halkaya örnektir.*

Örnek 3.7.12. [5, Example 2.35] *$A = \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ olsun. A yarıbasit artin olmayan injektif bir düzenli halkadır. O zaman, Önerme 3.7.6 gereğince, her sonlu üretilmiş serbest A-modül endodüzenli Baer'dir, ancak dual Baer değildir (bkz. [24, Example 2.28]). Önerme 3.4.15 gereğince, bir sonsuz üretilmiş serbest A-modül endodüzenli değildir.*

3.8 Endodüzenli Modüllerin Dik Toplamları

Bir cebirsel özelliğin dik toplananlarda ve dik toplamlarda korunup korunmadığı ilgi çekici bir araştırma konusudur. Önerme 3.3.10'da endodüzenliliğin dik toplananlarda korunduğu gösterilmiştir. Örnek 3.3.13'te ve Örnek 3.8.1'de görüldüğü üzere endodüzenli modüllerin dik toplamının endodüzenli olması gerekmez. Bu altbölümde, endodüzenli modüllerin sonlu dik toplamının ne zaman endodüzenli olduğu irdelenecektir. Öncelikle, iki modül arasında göreli endodüzenlilik kavramı tanıtılacaktır. Daha sonra, bu kavram kullanılarak endodüzenli modüllerin sonlu dik toplamınının ne zaman endodüzenli olduğu karakterize edilecektir. Bazı ek koşullarla, endodüzenli modüllerin keyfi dik toplamının ne zaman endodüzenli olduğu da incelenecektir.

Örnek 3.8.1. [5, Example 3.1] $\mathbb{F}$ *bir cisim,* $R = \begin{pmatrix} \mathbb{F} & \mathbb{F} \\ 0 & \mathbb{F} \end{pmatrix}$ *bir halka ve* $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *eşkare bir eleman olsun.* $L = eR = \begin{pmatrix} \mathbb{F} & \mathbb{F} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *ve* $N = (1-e)R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{F} \end{pmatrix}$ *verilsin.* L *ve* N *modülleri endodüzenlidir. Ancak,* $L \oplus N = \begin{pmatrix} \mathbb{F} & \mathbb{F} \\ 0 & \mathbb{F} \end{pmatrix} = R_R$ *endodüzenli modül değildir.*

Aşağıdaki sonuç, genel bir örneğin nasıl inşa edilebileceğini göstermektedir.

Önerme 3.8.2. [5, Proposition 3.2] M *bir ayrıştırılamaz modül ve* $N := Soc(M) \neq M$ *olsun.* M *ve* N *endodüzenli modül iken* $M \oplus N$ *endodüzenli modül değildir.*

Kanıt. $m \in M$ ve $n \in N$ olmak üzere $\varphi(m,n) = (n,0)$ biçiminde tanımlı $\varphi \in End_R(M)$ verilsin. $Im\varphi = N \oplus 0$ altmodülü, $M \oplus N$ modülünün dik toplananı olmadığı için $M \oplus N$ endodüzenli modül değildir. □

Endodüzenli modüllerin dik toplamını incelemek için, iki modül arasında göreli endodüzenlilik aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 3.8.3. [5, Definition 3.3] M ve N R-modüller olsunlar. $\varphi \in Hom_R(M,N)$ için $\varphi\psi\varphi = \varphi$ olacak şekilde $\psi \in Hom_R(N,M)$ varsa φ elemanına *düzenli eleman* denir (bkz. [39]). $H \subseteq Hom_R(M,N)$ altkümesinin bütün elemanları düzenli ise H'ye *düzenli* denir. $Hom_R(M,N)$ düzenli ise M modülüne N*-endodüzenli (*N*'ye göre endodüzenli)* denir.

Yukarıdaki tanımdan, bir M modülü endodüzenlidir ancak ve ancak M M-endodüzenlidir.

Önerme 3.8.4. [39, Theorem 2.1] *M ve N R-modüller olsun. O zaman, M modülü N-endodüzenlidir ancak ve ancak her $\varphi \in Hom_R(M,N)$ için* Ker$\varphi \leq^{\oplus} M$ *ve* Im$\varphi \leq^{\oplus} N$ *olur.*

Kanıt. $(\Rightarrow)$ M modülü N-endodüzenli olsun. O zaman, $\varphi \in Hom_R(M,N)$ için $\varphi\psi\varphi = \varphi$ olacak şekilde $\psi \in Hom_R(N,M)$ vardır. $M = \boldsymbol{Im\psi\varphi \oplus Ker\varphi}$ olduğu gösterilecektir. $m \in M$ verilsin. $m = m - \psi\varphi(m) + \psi\varphi(m)$ olur. $m - \psi\varphi(m) \in Ker\varphi$ ve $\psi\varphi(m) \in Im\psi\varphi$ elde edilir. Bu durumda, $m \in Im\psi\varphi + Ker\varphi$ olur. $x \in Im\psi\varphi \cap Ker\varphi$ verilsin. Buradan, $\varphi(x) = 0$ ve bir $a \in M$ için $\psi\varphi(a) = x$ olur. Bu eşitliklerden, $\varphi(x) = \varphi\psi\varphi(a) = \varphi(a) = 0$ elde edilir. $\psi\varphi(a) = x$ olduğundan $x = 0$'dır. Böylece, $m \in Im\psi\varphi \oplus Ker\varphi$ bulunur. Yani, $M = Im\psi\varphi \oplus Ker\varphi$ olur. Böylece, $Ker\varphi \leq^{\oplus} M$ elde edilir.

Şimdi de $N = Ker\varphi\psi \oplus Im\varphi$ olduğu gösterilecektir. $n \in N$ verilsin. $n = n - \varphi\psi(n) + \varphi\psi(n)$ biçiminde yazılabilir. Bu durumda, $n - \varphi\psi(n) \in Im\psi\varphi$ ve $\varphi\psi(n) \in Im\varphi$ olduğu açıktır. Bu durumda, $n \in Ker\varphi\psi + Im\varphi$ elde edilir. $x \in Im\varphi \cap Ker\varphi\psi$ alınsın. Buradan, bir $a \in M$ için $\varphi(a) = x$ ve $\varphi\psi(x) = 0$ yazılabilir. Bu eşitliklerden, $\varphi\psi(x) = \varphi\psi\varphi(a) = \varphi(a) = 0$ ve $\varphi(a) = x$ olduğundan $x = 0$ elde edilir. O halde, $N = Ker\varphi\psi \oplus Im\varphi$ olur. Böylece, $Im\varphi \leq^{\oplus} N$ elde edilir.

$(\Leftarrow)$ $X \leq M$ ve $Y \leq N$ olmak üzere, bir $\varphi \in Hom_R(M,N)$ için $M = Ker\varphi \oplus X$ ve $N = Im\varphi \oplus Y$ biçiminde yazılsın. $a \in Im\varphi$ ve $b \in Y$ verilsin. Bu durumda, $\varphi(x) = a$ olacak şekilde $x \in M$ vardır öyle ki $p \in Ker\varphi$ ve $q \in X$ için $x = p + q$ yazılır. Böylece, $\varphi(x) = \varphi(p+q) = \varphi(p) + \varphi(q) = \varphi(q) = a$ olur. $\psi\colon N \to M, a + b \mapsto q$ şeklinde tanımlı bir $\psi \in Hom_R(N,M)$ alınsın. $\varphi\psi\varphi(x) = \varphi(q) = \varphi(x)$ elde edilir. Böylece, M modülü N-endodüzenlidir. □

M ve N birer R-modül olmak üzere, her $\varphi \in Hom_R(M,N)$ için $Ker\varphi \leq^{\oplus} M$ oluyorsa M'ye *N-Rickart modül* denir ([23]). Her $\varphi \in Hom_R(M,N)$ için $Im\varphi \leq^{\oplus} N$ oluyorsa M'ye *N-d-Rickart modül* denir ([24]). Böylece, M modülü N-endodüzenlidir ancak ve ancak M modülü N-Rickart ve N-d-Rickart modüldür.

Önerme 3.8.5. [5, Proposition 3.5] *M ve N ayrıştırılamaz modüller olsunlar. Eğer M N-endodüzenli modül ise $Hom_R(M,N) = 0$ ya da $M \cong N$ olur.*

Kanıt. $Hom_R(M,N) \neq 0$ olsun. $0 \neq \varphi \in Hom_R(M,N)$ verilsin. M modülü N-endodüzenli olduğundan, $Ker\varphi \leq^{\oplus} M$ ve $Im\varphi \leq^{\oplus} N$ bulunur. M ve N modülleri ayrıştırılamaz modüller oldukları için, bunların 0 ve kendinden başka dik toplananları yoktur. Bu durumda, $Ker\varphi = 0$ ve $Im\varphi = N$ elde edilir. Böylece, $\varphi \in Hom_R(M,N)$ homomorfizması birebir ve örtendir, yani φ bir izomorfizmadır. Sonuçta, $M \cong N$ elde edilir. □

Teorem 3.8.6. [5, Theorem 3.6] *M ve N R-modüller olsun. M modülü N-endodüzenlidir ancak ve ancak bir $M' \leq^{\oplus} M$ ve bir $N' \leq N$ için M' modülü N'-endodüzenlidir.*

Kanıt. $(\Leftarrow)$ $M \leq^{\oplus} M$ ve $N \leq N$ alırsak M modülü N-endodüzenli olur.
$(\Rightarrow)$ $M' \leq^{\oplus} M$ verilsin. O zaman, bir $e^2 = e \in End_R(M)$ için $M' = eM$ olur. $N' \leq N$ ve $\psi \in Hom_R(M',N')$ olsun. Bu durumda, $\psi eM = \psi M' \subseteq N$ olur. M modülü N-endodüzenli olduğu için $Ker\psi e \leq^{\oplus} M$ ve $Im\psi e \leq^{\oplus} N$ elde edilir. Böylece, $\psi M' \leq^{\oplus} N'$ olur. Yani, M' modülü N'-d-Rickart'tır. Ayrıca, $Ker\psi e = (1-e)M \oplus Ker\psi$ olduğundan $Ker\psi \leq^{\oplus} M$ elde edilir. Ayrıca, $\psi \leq M' \leq^{\oplus} M$ olduğundan $Ker\psi \leq^{\oplus} M'$ bulunur. Böylece, M' modülü N'-Rickart'tır. □

Uyarı 3.8.7. [5, Remark 3.7] $L \leq M$ olsun. Eğer M modülü N-endodüzenliyse M/L de N-endodüzenlidir. Böylece, M modülü N-endodüzenliyse ve bir $\varphi \in End_R(M)$ epimorfizması varsa, o zaman N bir endodüzenli modüldür.

Sonuç 3.8.8. [5, Corollary 3.8] *Bir M modülü için aşağıdaki ifadeler denktir:*
(a) *M endodüzenlidir.*
(b) *M modülünün her N altmodülü için M modülünün her L dik toplananı N-endodüzenlidir.*
(c) *M modülünün her L, N dik toplanan çifti ve her bir $\varphi \in Hom_R(M,N)$ için $\varphi|_L$ kısıtlanışının çekirdeği ve görüntüsü, sırasıyla, L ve N'nin dik toplananlarıdır.*

Kanıt. $(a) \Rightarrow (b)$ Teorem 3.8.6'dan açıktır.
$(b) \Rightarrow (c)$ *Ker*$\varphi|_L \leq^{\oplus} M$ ve *Ker*$\varphi|_L \leq L \leq^{\oplus} M$ olduğundan *Ker*$\varphi|_L \leq^{\oplus} L$ elde edilir. Benzer şekilde, $Im\varphi|_N \leq^{\oplus} M$ ve $Im\varphi|_N \leq N \leq^{\oplus} M$ olduğundan $Im\varphi|_N \leq^{\oplus} N$ elde edilir.
$(c) \Rightarrow (a)$ Teorem 3.8.6'dan açıktır. □

Önteorem 3.8.9. [39, Lemma 4.2] *M ve N R-modüller olsun. $\varphi \in Hom_R(M, N)$ ve $\psi \in Hom_R(N, M)$ olmak üzere, $\varphi - \varphi\psi\varphi$ düzenli ise φ düzenlidir.*

Kanıt. $\varphi - \varphi\psi\varphi$ düzenli olsun. Bu durumda, öyle bir $\alpha \in Hom_R(N, M)$ vardır ki $(\varphi - \varphi\psi\varphi)\alpha(\varphi - \varphi\psi\varphi) = \varphi - \varphi\psi\varphi$ elde edilir. O zaman, $m \in M$ için $(\varphi - \varphi\psi\varphi)\alpha(\varphi - \varphi\psi\varphi)(m) = (\varphi - \varphi\psi\varphi)\alpha(\varphi(m) - \varphi\psi\varphi(m)) = (\varphi - \varphi\psi\varphi)(\alpha\varphi(m) - \alpha\varphi\psi\varphi(m)) = \varphi\alpha\varphi(m) - \varphi\alpha\varphi\psi\varphi(m) - \varphi\psi\varphi\alpha\varphi(m) + \varphi\psi\varphi\alpha\varphi\psi\varphi(m) = \varphi(\alpha - \alpha\varphi\psi - \psi\varphi\alpha + \psi\varphi\alpha\varphi\psi)\varphi(m) = \varphi(m) - \varphi\psi\varphi(m)$ olur. Buradan, $\varphi(\alpha - \alpha\varphi\psi - \psi\varphi\alpha + \psi\varphi\alpha\varphi\psi + \psi)\varphi(m) = \varphi(m)$ elde edilir. Böylece, $k = \alpha - \alpha\varphi\psi - \psi\varphi\alpha + \psi\varphi\alpha\varphi\psi + \psi$ alınırsa $\varphi = \varphi k\varphi$, yani φ düzenli bulunur. □

Teorem 3.8.10. [5, Theorem 3.10] *$i \in \mathcal{F} = \{1, 2, \ldots, n\}$ için M_i ve N R-modüller olsun. $\bigoplus_{i\in\mathcal{F}} M_i$ modülü N-endodüzenlidir ancak ve ancak her $i \in \mathcal{F}$ için M_i modülü N-endodüzenlidir.*

Kanıt. $M = \bigoplus_{i\in\mathcal{F}} M_i$, $H = Hom_R(M, N), T = Hom_R(N, M)$, $e_i^2 = e_i \in End_R(M)$ için $M_i = e_iM$, $He_i = Hom_R(e_iM, N)$ ve $e_iT = Hom_R(N, e_iM)$ olsun.
$(\Rightarrow)$ $M = \bigoplus_{i\in\mathcal{F}} M_i$ endodüzenli modül olsun. $M_i \leq^{\oplus} M = \bigoplus_{i\in\mathcal{F}} M_i$ olduğundan, Teorem 3.8.6 gereğince, M_i modülü N-endodüzenlidir.
$(\Leftarrow)$ Her $i \in \mathcal{F}$ için M_i modülü N-endodüzenli olsun. $\varphi \in H$ alınsın. n üzerine tümevarım uygulanacaktır. $n = 1$ için açıktır. Eğer $n = 2$ ise, $M = M_1 \oplus M_2$ olur. $i = 1, 2$ için M_i modülü N-endodüzenli olsun. φe_1, He_1'de düzenli olduğundan, öyle bir $\psi \in e_1T$ vardır ki $\varphi e_1\psi\varphi e_1 = \varphi e_1$ olur. Böylece, $\varphi e_1\psi\varphi e_1 - \varphi e_1 = 0$ bulunur. $\psi \in e_1T$ olduğundan, $a \in T$ için $\psi = e_1a$ elde edilir. Buradan, $e_1\psi = e_1^2a = e_1a = \psi$ olur. Böylece, $\varphi e_1\psi\varphi e_1 - \varphi e_1 = \varphi\psi\varphi e_1 - \varphi e_1 = (\varphi\psi\varphi - \varphi)e_1 = 0$ elde edilir. $x = \varphi\psi\varphi - \varphi \in H$ alınsın.

xe_2, He_2'de düzenli olduğundan, öyle bir $y \in e_2T$ vardır ki $xe_2yxe_2 = xe_2$'dir. Böylece, $(xyx - x)e_2 = 0$ elde edilir. $xe_1 = 0$ olduğundan $(xyx - x)e_1 = (xy - 1)xe_1 = 0$'dır. Buradan, $xyx - x = (xyx - x)(e_1 + e_2) = xyxe_1 + xyxe_2 - xe_1 - xe_2 = 0$ olur. O halde, $xyx = x$ bulunur. Buradan, $x = \varphi\psi\varphi - \varphi$ elemanı H'de düzenlidir. Böylelikle, Önteorem 3.8.9 gereğince, $\varphi \in H$ düzenlidir. O halde, $M_1 \oplus M_2$ modülü endodüzenlidir. Şimdi, $n > 2$ olsun. $n-1$ için hipotezin doğru olduğu kabul edilsin. $(1-e_n)M = \bigoplus_{i=1}^{n-1} M_i$ verilsin. $(1-e_n)M$ ve e_nM, N-endodüzenli olsun. Böylece, $(1-e_n)M \oplus e_nM = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$, N-endodüzenli modül olur. □

Teorem 3.8.11. [5, Theorem 3.10] *$i \in \mathcal{F} = \{1, 2, \ldots, n\}$ için M_i ve N R-modüller olsun. N modülü $\bigoplus_{i\in\mathcal{F}} M_i$-endodüzenlidir ancak ve ancak her $i \in \mathcal{F}$ için N modülü M_i-endodüzenlidir.*

Kanıt. $M = \bigoplus_{i\in\mathcal{F}} M_i$, $H = Hom_R(M, N)$, $T = Hom_R(N, M)$, $e_i^2 = e_i \in End_R(M)$ için $M_i = e_iM$, $He_i = Hom_R(e_iM, N)$ ve $e_iT = Hom_R(N, e_iM)$ olsun.
$(\Rightarrow)$ Teorem 3.8.6 gereğince, N modülü $\bigoplus_{i\in\mathcal{F}} M_i$ endodüzenliyse, $M_i \leq \bigoplus_{i\in\mathcal{F}} M_i$ olduğundan, N de M_i-endodüzenlidir.
$(\Leftarrow)$ Her $i \in \mathcal{F}$ için N modülü M_i-endodüzenli olsun. $\varphi \in T$ verilsin. n üzerine tümevarım uygulanacaktır. $n = 1$ için açıktır. Eğer $n = 2$ ise $M = M_1 \oplus M_2$'dir. $i = 1, 2$ için N modülü M_i-endodüzenli olsun. $e_1\varphi$ elemanı e_1T'de düzenli olduğundan, öyle bir $\psi \in He_1$ vardır ki $e_1\varphi\psi e_1\varphi = e_1\varphi$'dir. Böylece, $e_1(\varphi\psi\varphi - \varphi) = 0$ elde edilir. $x = \varphi\psi\varphi - \varphi$ olsun. e_2x, e_2T'de düzenli olduğundan, öyle bir $y \in He_2$ vardır ki $e_2xye_2x = e_2x$ yazılır. Böylece, $e_2(xyx-x) = 0$'dır. $e_1x = 0$ ve $e_2(xyx-x) = 0$ olduğundan, $e_1(xyx-x) = e_1x(yx-1) = 0$ elde edilir. O zaman, $xyx-x = (e_1+e_2)(xyx-x) = e_1xyx+e_2xyx-xe_1-xe_2 = 0$ bulunur. O halde, x, T'de düzenlidir. Böylece, Önteorem 3.8.9 gereğince, φ elemanı T'de düzenlidir. Şimdi, $n > 2$ kabul edilsin. Hipotezimiz $n - 1$ için doğru olsun. O zaman, N modülü $(1 - e_n)M$-endodüzenli ve e_nM-endodüzenlidir. $n = 2$ için, N iki modülün dik toplamına göre endodüzenli olur. Böylece, N modülü $(1 - e_n)M \oplus e_nM = M$-endodüzenlidir. □

Sonuç 3.8.12. [5, Corollary 3.11] $m, n \in \mathbb{N}$ *olmak üzere* $\{M_i\}_{1\leq i\leq m}$ *ve* $\{N_j\}_{1\leq j\leq n}$ R*-modüllerin sınıfları verilsin. O zaman,* $\bigoplus_{i=1}^{m} M_i$ *modülü* $\bigoplus_{j=1}^{n} N_j$*-endodüzenlidir ancak ve ancak* $1 \leq i \leq m$ *ve* $1 \leq j \leq n$ *olmak üzere, her* i, j *için* M_i *modülü* N_j*-endodüzenlidir.*

Kanıt. $(\Rightarrow)$ Teorem 3.8.6 gereğince, $\bigoplus_{i=1}^{m} M_i$ modülü $\bigoplus_{j=1}^{n} N_j$-endodüzenliyse, her bir $N_j \leq \bigoplus_{j=1}^{n} N_j$ için M_i modülü N_j-endodüzenlidir.
$(\Leftarrow)$ $1 \leq i \leq m$ ve $1 \leq j \leq n$ olmak üzere, her i, j için M_i modülü N_j-endodüzenli olsun. Teorem 3.8.10'dan $\bigoplus_{i=1}^{m} M_i$ modülü N_j-endodüzenlidir. Teorem 3.8.11'den, $\bigoplus_{i=1}^{m} M_i$ modülü N_j-endodüzenlidir. Böylece, $\bigoplus_{i=1}^{m} M_i$ modülü $\bigoplus_{j=1}^{n} N_j$-endodüzenlidir. □

Sonuç 3.8.13. [5, Remark 3.12] $Hom_R(\bigoplus_{i=1}^{m} M_i, \bigoplus_{j=1}^{n} N_j)$ *düzenlidir ancak ve ancak* $1 \leq i \leq m$ *ve* $1 \leq j \leq n$ *olmak üzere, her* i, j *için* $Hom_R(M_i, N_j)$ *düzenlidir.*

Aşağıdaki sonuç, Önteorem 2.3.11'i geneller.

Sonuç 3.8.14. [5, Corollary 3.13] M *ve* N R*-modüller olsun.* $m, n \in \mathbb{N}$ *için* $e_1, e_2, \ldots, e_m, f_1, f_2, \ldots, f_n$ *elemanları,* $End_R(M)$*'de,* $e_1 + e_2 + \cdots + e_m = 1$ *ve* $f_1 + f_2 + \cdots + f_n = 1$ *koşullarını sağlayan dik eşkare elemanlar olsun. 0 zaman,* M *modülü* N*-endodüzenlidir ancak ve ancak* $1 \leq i \leq m$ *ve* $1 \leq j \leq n$ *olmak üzere, her* i, j *için* e_iM *modülü* f_jN*-endodüzenlidir.*

Teorem 3.8.15. [5, Theorem 3.14] $n \in \mathbb{N}$ *olmak üzere* $\{M_i\}_{1\leq i\leq n}$ R*-modüllerin bir sınıfı olsun. O zaman,* $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ *endodüzenlidir ancak ve ancak* $1 \leq i, j \leq n$ *olmak üzere, her* i, j *için* M_i *modülü* N_j*-endodüzenlidir.*

Kanıt. Sonuç 3.8.12'den açıktır. □

Sonuç 3.8.16. [5, Corollary 3.15] *Bir endodüzenli modülün sonlu her dik toplamı endodüzenlidir.*

Sonuç 3.8.17. [18, Theorem 1.7] *Bir* R *halkası von Neumann düzenlidir ancak ve ancak her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $Mat_n(R)$ *halkası von Neumann düzenlidir.*

Önerme 3.8.18. *M, Baer olmayan bir endodüzenli modül olsun. O zaman, M'nin kopyalarının her sonlu dik toplamı Baer olmayan bir endodüzenli modüldür.*

Kanıt. [37, Theorem 2.17] sonucundan, Baer modülün dik toplananı da Baer'dir. Dolayısıyla, ispat Sonuç 3.8.16'dan açıktır. □

Örnek 3.8.19. [5, Example 3.18] *T ve I, Örnek 3.3.9'daki gibi olsun. $R = \begin{pmatrix} T & T/I \\ 0 & T/I \end{pmatrix}$ halkası ve $e = \begin{pmatrix} (1,1,...) & 0+I \\ 0 & 0+I \end{pmatrix}$ eşkare elemanı verilsin. O zaman $M = eR = \begin{pmatrix} T & T/I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olur. $S = End_R(M) \cong \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ halkası von Neumann düzenlidir. Böylece, M modülü endodüzenlidir. Diğer taraftan, M bir dual Baer modül değildir. Çünkü $U = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \leq S_S$ için $\sum_{\varphi \in U} Im\varphi = \begin{pmatrix} I & \bar{0} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olur. $U \leq_{ess} S_S$ olduğu için $\sum_{\varphi \in U} Im\varphi = eM$ koşulunu sağlayan bir $e \in S$ eşkare elemanı yoktur ([24, Example 4.1]). Ayrıca, M bir Baer modül değildir ([23, Example 2.18]). Buna ek olarak, $\begin{pmatrix} 0 & T/I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ devirli altmodülü M'nin bir dik toplananı olmadığından, M Zelmanowitz düzenli değildir. Böylece, M'nin kopyalarının sonlu dik toplamı, Baer olmayan bir endodüzenli modüldür. Dahası, $n \in \mathbb{N}$ için $M^{(n)}$ ne Zelmanowitz düzenli ne de dual Baer'dir.*

Aşağıdaki örnek, bir endodüzenli modülün kopyalarının keyfi dik toplamının endodüzenli olması gerekmediğini gösterir.

Örnek 3.8.20. [5, Example 3.19] *$R = \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ ve $M = R_R$ olsun. R yarıbasit, artin olmayan, injektif bir düzenli halkadır. Dolayısıyla, M endodüzenlidir. Ancak, Önerme 3.4.15 gereğince, $M^{(R)}$ endodüzenli R-modül değildir.*

Aşağıdaki önerme, endodüzenli modüllerin keyfi dik toplamının ne zaman endodüzenli olabileceğine dair bir karakterizasyon vermektedir.

Önerme 3.8.21. [5, Proposition 3.20] *Bir indeks kümesi $\mathcal{F}$ verilsin. Her $i \in \mathcal{F}$ için M_i modülleri $\bigoplus_{i\in\mathcal{F}} M_i$ modülünün tamamen değişmez altmodülleri olsun. O zaman, $\bigoplus_{i\in\mathcal{F}} M_i$ endodüzenlidir ancak ve ancak her $i \in \mathcal{F}$ için M_i endodüzenlidir.*

Kanıt. Gereklilik yönü Teorem 3.8.6'dan elde edilir. Tersine, $M = \bigoplus_{i\in\mathcal{F}} M_i$, $S = End_R(M)$ ve $\varphi_{ij} \in Hom_R(M_j, M_i)$ olmak üzere $\varphi = (\varphi_{ij}) \in S$ verilsin. Her $i \in \mathcal{F}$ için M_i endodüzenli olduğundan $\varphi_{ii} \in End_R(M_i)$ için $Ker\varphi_{ii} \leq^{\oplus} M_i$ ve $Im\varphi_{ii} \leq^{\oplus} M_i$ elde edilir. M_i'ler tamamen değişmez altmodüller olduğundan, $Ker\varphi = \bigoplus Ker\varphi_{ii} \leq^{\oplus} \bigoplus_{i\in\mathcal{F}} M_i$ ve $Im\varphi = \bigoplus Im\varphi_{ii} \leq^{\oplus} \bigoplus_{i\in\mathcal{F}} M_i$ bulunur. Böylece, $\bigoplus_{i\in\mathcal{F}} M_i$ bir endodüzenli modüldür. □

3.9 Ayrıştırılamaz Endodüzenli Modüller

Bu altbölümde, ayrıştırılamaz endodüzenli bir modülün endomorfizma halkasının bölümlü halka olduğu gösterilmiştir. Endomorfizma halkası yarıbasit artin olan modüllerin, her biri ayrıştırılamaz endodüzenli altmodüllerin kopyalarının bir dik toplamı olan tamamen değişmez altmodüllerin dik toplamları şeklinde ifade edilen modüller olduğu görülmüştür. Ayrıca, değişmeli halkalar üzerinde endodüzenli modüller incelenmiştir.

Önerme 3.9.1. [5, Proposition 4.1] *Bir M modülü ve $S = End_R(M)$ için aşağıdaki ifadeler denktir:*

(a) S halkası sol ve sağ Rickart halkadır, M modülü k-yerel-çekicidir ve her $\varphi \in S$ için $\varphi M = r_M(l_S(\varphi M))$'dir.

(b) M endodüzenlidir.

Kanıt. Teorem 3.2.10 ve Teorem 3.2.14 gereğince ispat açıktır. □

Önerme 3.9.2. [5, Proposition 4.2] *Bir M modülü ve $S = End_R(M)$ için aşağıdaki ifadeler denktir:*

(a) M bir endodüzenli ve biçimsel modüldür.

(b) S halkası sol ve sağ Rickart halkadır, M modülü biçimsel ve k-yerel-çekicidir ve her $\varphi \in S$ için $\varphi M = r_M(l_S(\varphi M))$'dir.

(c) S halkası birimsel düzenlidir.

Kanıt. Teorem 2.5.8 ve Önerme 3.9.1 gereğince ispat açıktır. □

Önerme 3.9.3. [5, Proposition 4.3] *Bir M modülü ve $S = End_R(M)$ için aşağıdaki ifadeler denktir:*

(a) *M bir abelyan endodüzenli modüldür.*

(b) *S halkası abelyan Rickart halkadır, M modülü biçimsel ve k-yerel-çekicidir ve her $\varphi \in S$ için $\varphi M = r_M(l_S(\varphi M))$'dir.*

(c) *S bir güçlü düzenli halkadır.*

Kanıt. Önerme 3.6.3 ve Önerme 3.9.1 gereğince ispat açıktır. □

Önerme 3.9.4. [5, Proposition 4.4] *Bir M modülü ve $S = End_R(M)$ için aşağıdaki ifadeler denktir:*

(a) *M bir ayrıştırılamaz endodüzenli modüldür.*

(b) *S halkası bir tamlık bölgesidir, M modülü k-yerel-çekicidir ve her $\varphi \in S$ için $\varphi M = r_M(l_S(\varphi M))$'dir.*

(c) *S bir bölümlü halkadır.*

Kanıt. M bir ayrıştırılamaz endodüzenli modül olsun. $\varphi\psi = 0$ koşulunu sağlayan $\varphi, \psi \in S$ verilsin. M endodüzenli olduğundan, $Ker\varphi \leq^{\oplus} M$ ve $Im\varphi \leq^{\oplus} M$ bulunur. M ayrıştırılamaz olduğundan, $Ker\varphi = 0$ ve $Im\varphi = M$ elde edilir. Böylece, $\varphi \in S$ dönüşümü bir izomorfizmadır. Buradan, $\psi = 0$ elde edilir. Yani, S halkası bir tamlık bölgesidir. İspatın geri kalanı Önerme 3.9.1'den açıktır. □

Bir M modülünü her epimorfizması bir izomorfizmaysa M'ye ***Hopfian***, M'nin her monomorfizması bir izomorfizmaysa M'ye *co-Hopfian* denir. Her ayrıştırılamaz Hopfian d-Rickart (ya da co-Hopfian Rickart) modül ayrıştırılamaz endodüzenli bir modüldür.

Önerme 3.9.5. [5, Proposition 4.5] *Bir M modülü ve $S = End_R(M)$ için aşağıdaki ifadeler denktir:*

(a) *M endodüzenlidir ve S halkası sıfırdan farklı dik eşkarelerin sonsuz kümesini bulundurmaz.*

(b) *S bir yarıbasit artin halkadır.*

Kanıt. Sonuç 2.3.18'den açıktır. □

Endomorfizma halkası yarıbasit artin olan modüller, tamamen değişmez endodüzenli altmodülleri cinsinden de karakterize edilebilir. Bunun için aşağıdaki sonuçlara ihtiyaç vardır.

Önerme 3.9.6. [40, Proposition 21.20] *R bir halka ve $e,f \in R$ olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:*

(1) *Sağ R-modül olarak $eR \cong fR$'dir.*

(1′) *Sol R-modül olarak $Re \cong Rf$'dir.*

(2) *Öyle $a \in eRf$ ve $b \in fRe$ elemanları vardır ki $e = ab$ ve $f = ba$'dır.*

(3) *Öyle $a,b \in R$ elemanları vardır ki $e = ab$ ve $f = ba$'dır.*

Teorem 3.9.7. [41, Theorem 17.5] *R bir halka ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:*

(1) *Bir S halkası için $R \cong Mat_n(S)$'dir.*

(2) *Sağ R-modül olarak birbirine izomorf olan U_i sağ idealleri için $R = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$'dir.*

Önteorem 3.9.8. [41, Theorem 17.9] *M bir R-modül ve $S = End_R(M)$ olsun. O zaman, bir T halkası için $S \cong Mat_n(T)$ olur ancak ve ancak bir R-modül N için $M \cong N^{(n)}$'dir. Dahası, eğer S bir basit artin halka ise, o zaman $End_R(N)$ bir bölümlü halkadır.*

Kanıt. ($\Leftarrow$) $M \cong N^{(n)}$ olsun. O halde, $T = End_R(N)$ olmak üzere, $S = End_R(M) \cong End_R(N^{(n)}) \cong Mat_n(T)$ elde edilir.

($\Rightarrow$) Bir T halkası için $S \cong Mat_n(T)$ olduğu varsayılsın. O zaman, Teorem 3.9.7 gereğince, U_i'ler birbirine izomorf sağ idealler olmak üzere $S_S = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$ elde edilir. e_i'ler toplamı 1 olan ikişerli dik izomorf eşkareler olmak üzere, Önerme 3.9.6'daki eşkareler arasındaki izomorfizmaların gösteriminden yararlanılarak, $U_i = e_i S$ yazılır. Her i ve bir M modülü için $M_i = U_i M = e_i M$ olsun. M_i'ler bir eşkare tarafından üretildiğinden $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ olur. Şimdi M_i'lerin izomorf olduğu gösterilecektir. Bunun için, S halkasındaki keyfi e,f eşkare elemanları için $eM \cong fM$ olduğu ispatlanacaktır. Teorem 3.9.6'dan e ve f izomorf eşkareler olduğundan, $a,b \in S$ için $e = ab$ ve $f = ba$ biçiminde yazılır. $m,m' \in M$ olmak üzere, $\varphi\colon eM \to fM, em \mapsto fbm$ ve $\psi\colon fM \to eM, fm' \mapsto eam'$ dönüşümleri iyi tanımlı

R-homomorfizmalarıdır. O halde, $\psi\varphi(ep) = \psi(fbp) = eabp = ep$ ve $\varphi\psi(fp') = \varphi(eap') = fbap' = fp'$ elde edilir. φ ve ψ dönüşümleri birbirlerinin tersidir. Böylece, $eM \cong fM$ elde edilir. $\square$

Teorem 3.9.9. [5, Theorem 4.7] *Bir M modülü ve $S = End_R(M)$ için aşağıdaki ifadeler denktir:*

(a) *$n_i \in \mathbb{N}$ için $M_i^{(n_i)}$ tamamen değişmez ve her $1 \leq i \leq k$ için M_i ayrıştırılamaz endodüzenli modül olmak üzere, M modülü $M \cong \bigoplus_{i=1}^{k} M_i^{(n_i)}$ dik toplam ayrışımına sahiptir.*

(b) *S bir yarıbasit artin halkadır.*

Kanıt. $(a) \Rightarrow (b)$ Her $1 \leq i \leq k$ için $N_i = M_i^{(n_i)}$ olsun. O zaman, $End_R(N_i) = End_R(M_i^{(n_i)}) \cong Mat_{n_i}(End_R(M_i))$ elde edilir. Önerme 3.9.4'ten, $End_R(M_i)$ bir bölümlü halka olduğu için, $End_R(N_i)$ bir basit artin halkadır. Her $1 \leq i \leq k$ için N_i, M modülünün tamamen değişmez altmodülü olduğu için, S halkası, $1 \leq i \leq k$ için her (i,i)-pozisyonunda $End_R(N_i)$'nin elemanları ve her $1 \leq i \neq j \leq k$ için $Hom_R(N_i, N_j) = 0$ olacak şekilde diğer yerlerde 0 olan $k \times k$ boyutunda bir matris halkasıdır. Böylece, S bir yarıbasit artin halkadır.

$(b) \Rightarrow (a)$ Wedderburn Artin Teoremi ve Önteorem 3.9.8 gereğince, $n_i \in \mathbb{N}$ için $M_i^{(n_i)}$ tamamen değişmez ve her $1 \leq i \leq k$ için $End_R(M_i)$ bölümlü halka olmak üzere, M modülü $M \cong \bigoplus_{i=1}^{k} M_i^{(n_i)}$ sonlu dik toplam ayrışımına sahiptir. Böylece Önerme 3.9.4'ten, M_i bir ayrıştırılamaz endodüzenli modüldür. $\square$

Önerme 3.9.10. [5, Proposition 4.8] *M'nin bir CS endodüzenli modül olması için gerek ve yeter koşul M'nin bir K-tekilsiz ve sürekli modül olmasıdır.*

Kanıt. Bir endodüzenli modül, Önerme 3.2.18'den C_2 özelliğine sahip ve Önerme 3.7.4'ten K-tekilsiz olduğu için, CS endodüzenli modüller K-tekilsiz süreklidir. Tersi ise Önerme 3.7.6 gereğince açıktır. $\square$

Önerme 3.9.11. [5, Proposition 4.9] *M bir CS endodüzenli modül ve $S = End_R(M)$ olsun. O zaman, S bir sağ sürekli von Neumann düzenli halkadır. Buna ek olarak, S_1 bir sağ* *injektif von Neumann düzenli halka ve S_2 bir sağ sürekli güçlü düzenli halka olmak üzere $S \cong S_1 \times S_2$'dir.*

Kanıt. Önerme 3.9.10 gereğince, M bir K-tekilsiz sürekli modüldür. M sürekli olduğundan, $J(S) = \{f | Ker \leq_{ess} M\}$ ve $S/J(S)$ bir von Neumann düzenli halkadır (bkz. [13]). Ancak, M K-tekilsiz olduğundan, $J(S) = 0$ elde edilir. [18, Theorem 13.17] gereğince, bir düzenli halkanın sürekli olması için gerek ve yeter koşulun R_1 güçlü düzenli, sürekli bir halka ve R_2 düzenli, injektif bir halka olmak üzere, $R \cong R_1 \times R_2$ olduğu bilinmektedir. Böylece, son ifadenin ispatı da bu sonuçtan elde edilir. □

Bir sonraki örnek, Önerme 3.9.11'in tersinin genelde doğru olmadığını gösterir.

Örnek 3.9.12. [5, Example 4.10] $R = \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \mathbb{C} \\ 0 & \mathbb{R} \end{pmatrix}$ *halkası ve* $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *eşkare elemanı verilsin. O zaman,* $M = eR = \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \mathbb{C} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *ve* $End_R(M) \cong \begin{pmatrix} \mathbb{R} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *olur. O halde,* $End_R(M)$ *bölümlü halkadır. Dolayısıyla,* $End_R(M)$ *bir sağ sürekli, düzenli halkadır. Ancak,* M *modülü* CS *değildir:* $N = \begin{pmatrix} \mathbb{R} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \leq M$ *verilsin.* $0 \neq \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \alpha \in N$ *olacak şekilde* $\alpha \in R$ *yoktur. Ayrıca,* M *bir ayrıştırılamaz endodüzenli modüldür.*

Önerme 3.9.13. [5, Proposition 4.12] *Bir M modülü basittir ancak ve ancak M modülü çekicidir ve $End_R(M)$ bir bölümlü halkadır (yani, M bir ayrıştırılamaz endodüzenli modüldür).*

Kanıt. ($\Rightarrow$) M bir basit modül olduğu için $End_R(M)$ bölümlü halkadır. $\varphi = 1 \in End_R(M)$ alınırsa $1(M) \subseteq M$ elde edilir. Böylece, M modülü çekicidir.
($\Leftarrow$) N, M modülünün sıfırdan farklı öz altmodülü olsun. M modülü çekici olduğundan, öyle bir $0 \neq \varphi \in End_R(M)$ vardır ki $\varphi(M) \subseteq N$'dir. Bu durum, $End_R(M)$ halkasının bölümlü halka olması ile çelişir. Bu nedenle, M modülü basittir. □

Aşağıdaki örnek, R halkası değişmeli olmasına rağmen, çekici endodüzenli modüllerin yarıbasit olmayabileceğini göstermektedir.

Örnek 3.9.14. [5, Example 4.13] *$R = \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ olmak üzere, bir $n \in \mathbb{N}$ için $M = R^{(n)}$ modülü ele alınsın. Sonuç 3.8.16 gereğince, bir endodüzenli modülün kopyalarının sonlu dik toplamı endodüzenli olduğundan, M bir çekici endodüzenli modüldür, fakat yarıbasit değildir.*

Bu bölümde son olarak, değişmeli bir halka üzerinde endodüzenli modüller üzerine bazı sonuçlar verilecektir.

Önteorem 3.9.15. [5, Lemma 4.14] *R bir değişmeli halka ise her sonlu üretilmiş ayrıştırılamaz endodüzenli R-modül basittir.*

Kanıt. R halkası değişmeli ve M sonlu üretilmiş ayrıştırılamaz endodüzenli bir R-modül olsun. Önerme 3.9.4'ten, $End_R(M)$ bir bölümlü halkadır. [42, Proposition 5] sonucuna göre, değişmeli bir halka üzerindeki sonlu üretilmiş bir modülün basit olması için gerek ve yeter koşul endomorfizma halkasının bölümlü halka olmasıdır. Böylece, M modülü de basit olur. □

Aşağıdaki sonuç, değişmeli bir von Neumann düzenli halka üzerindeki her ayrıştırılamaz modülün basit olduğunu gösterir.

Teorem 3.9.16. [43, Theorem 2.13] *R bir değişmeli halka olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:*
(1) *R halkası von Neumann düzenlidir.*
(2) *Her ayrıştırılamaz R-modül basit modüldür.*

Kanıt. (1) $\Rightarrow$ (2) M ayrıştırılamaz bir R-modül ve $M \neq \{0\}$ olsun. O zaman, $M_P = \{m/s | m \in M, s \in R - P\} \neq 0$ olacak şekilde bir P maksimal ideali vardır. $a \in P$ alınsın. R halkası düzenli olduğundan, öyle bir $e \in R$ eşkare elemanı vardır ki $Ra = Re$'dir. $M_P \neq 0$ ve $(1-e) \notin P$ olduğundan $(1-e)M \neq 0$'dır. Buradan, M ayrıştırılamaz bir modül olduğundan $eM = \{0\}$ elde edilir. Sonuç olarak, M bir R/P-modüldür. R/P bir cisim olduğundan M R-modülü de basittir.

$(2) \Rightarrow (1)$ $E(M)$, M modülünün injektif zarfı olmak üzere, her basit R-modül M için $E(M) \cong M$'dir, çünkü $E(M)$ ayrıştırılamaz bir modüldür. Böylece, her basit modül injektif olduğundan, R halkası von Neumann düzenlidir. □

Uyarı 3.9.17. [5, Remark 4.15] Önerme 3.9.13 gereğince, her ayrıştırılamaz endodüzenli modül basittir. Aslında, Sonuç 3.2.24'den, her ayrıştırılamaz çekici d-Rickart modül basittir.

Önerme 3.9.18. [5, Proposition 4.16] *M, değişmeli bir halka üzerinde, sonlu üretilmiş bir modül olsun. M modülünün sayılabilir sonsuz kopyalarının dik toplamı endodüzenli ise, M bir yarıbasit modüldür.*

Kanıt. M modülü sonlu üretilmiş olduğu için, $S = End_R(M)$ ve $\mathcal{F}$ sayılabilir sonsuz bir indeks kümesi olmak üzere, $End_R(M^{(\mathcal{F})}) \cong End_S(S^{(\mathcal{F})})$'dir. Önerme 3.4.15'ten S halkası yarıbasit artin olur. Böylece, Teorem 3.9.9'dan, M modülü, ayrıştırılamaz endodüzenli M_i modüllerinin sonlu dik toplamıdır. Her bir M_i de sonlu üretilmiş olduğundan, Önteorem 3.9.15 gereğince, M_i basit modüldür. Böylece, M modülü yarıbasittir. □

Değişmeli bir halka üzerinde sonlu üretilmiş bir M modülü endoregüler fakat yarıbasit değilse, Önerme 3.9.18'dan, M'nin kopyalarının herhangi bir sonsuz dik toplamı endoregüler değildir.

Örnek 3.9.19. [5, Example 4.17] *M modülü, Örnek 3.9.14'teki gibi olsun. O zaman, M modülü değişmeli halka üzerinde sonlu üretilmiş endodüzenli bir modüldür fakat yarıbasit değildir. Böylece, Sonuç 3.8.16'dan, M modülünün kopyalarının her sonlu dik toplamı endodüzenli bir modülken, Önerme 3.9.18 gereğince, sonsuz kopyalarının dik toplamı endodüzenli değildir.*

Bir sonraki sonuç, Önerme 3.2.28'den ve Önerme 3.2.30'dan elde edilir.

Önerme 3.9.20. [5, Proposition 4.18] *M modülü, değişmeli bir halka üzerinde artin veya noether olsun. O zaman, M bir endodüzenli modüldür ancak ve ancak M yarıbasittir.*

Uyarı 3.9.21. [5, Remark 4.19] Değişmeli noether bir R halkası üzerinde sonlu üretilmiş her endodüzenli M modülü yarıbasit modüldür: [24, Proposition 4.13] sonucunda, değişmeli bir halka üzerinde noether ve d-Rickart bir modülün yarıbasit olduğu gösterilmiştir. Noether halka üzerinde sonlu üretilmiş modüller de noether olduğundan, değişmeli bir halkada sonlu üretilmiş endodüzenli modüller yarıbasit olur. Eğer bu modül, bir $n \in \mathbb{N}$ için, n-üretilmiş ise, $1 \leq i \leq n$ için m_i'ler R'nin maksimal idealleri olmak üzere, $M \cong R/m_1 \oplus R/m_2 \oplus \cdots \oplus R/m_n$ elde edilir.

Aşağıdaki örnek, Önerme 3.9.18'deki sonlu üretilmişlik ve Önerme 3.9.20'deki artinlik ve noetherlik koşullarının gereksiz olmadığını gösterir.

Örnek 3.9.22. [5, Example 4.20] $M = \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ *olsun.* M *modülü değişmeli* $\mathbb{Z}$ *halkası üzerinde artin ve noether olmayan ayrıştırılamaz bir endodüzenli modüldür. Aynı zamanda,* $\mathbb{Q}$*,* $\mathbb{Z}$*-modül olarak sonlu üretilmiş değildir. Örnek 3.7.8'den,* M *modülünün kopyalarının sonsuz dik toplamı endodüzenli modülken,* $End_{\mathbb{Z}}(M) \cong \mathbb{Q}$ *bir bölümlü halka olmasına rağmen,* M *modülü sonlu üretilmiş değildir ve dolayısıyla, Önerme 3.9.18'den yarıbasit modül değildir.*

Önteorem 3.9.23. [26, Theorem] M *modülü değişmeli bir* R *tamlık bölgesi üzerinde burulmasız modül olsun. O zaman,* M *modülü endodüzenlidir ancak ve ancak* M *modülü* R*'nin kesirler cisminin kopyalarının dik toplamına* R*-izomorftur.*

Önteorem 3.9.24. [5, Lemma 4.22] M *modülü değişmeli bir* R *halkası üzerinde ayrıştırılamaz endodüzenli bir modül olsun. O zaman* $P = r_R(M)$ *ideali* R *halkasının asal idealidir ve* M *modülü* R/P *değişmeli tamlık bölgesi üzerinde ayrıştırılamaz burulmasız endodüzenli bir modüldür.*

Kanıt. $ab \in P$ ve $a \notin P$ olsun. $\varphi_a \in End_R(M)$ verilsin. Bir $m \in M$ için $\varphi_a(m) = ma$ tanımlansın. O zaman, $0 \neq Im\varphi_a = Ma \leq^{\oplus} M$ olur ve böylece M modülü d-Rickart olduğu için $Ma = M$'dir. Buradan, $0 = Mab = Mb$ elde edilir. Böylelikle, $b \in r_R(M) = P$ olur, yani P ideali asaldır. $End_R(M) \cong End_{R/P}(M)$ olduğundan, M modülü R/P değişmeli tamlık bölgesi üzerinde ayrıştırılamaz vefalı bir endodüzenli modüldür. M

modülünün burulmasız olmasın. O zaman, öyle bir $0 \neq \bar{r} \in R/P$ vardır ki M modülü Rickart olduğundan, $0 \neq Ker\varphi_{\bar{r}} \leq^{\oplus} M$ elde edilir. M modülü ayrıştırılamaz olduğu için $Ker\varphi_{\bar{r}} = M$'dir. Buradan $\varphi_{\bar{r}} = 0$'dır. Bu durum, M modülünün R/P değişmeli tamlık bölgesi üzerinde vefalı olması ile çelişir. Böylece, M modülü burulmasızdır. □

Önteorem 3.9.25. [5, Lemma 4.23] *R bir değişmeli tamlık bölgesi ve Q, R'nin kesirler cismi olsun. O zaman, Q_R çekicidir ancak ve ancak $R = Q$ olur.*

Teorem 3.9.26. [5, Theorem 4.24] *R değişmeli bir halka ve M bir modül olsun. O zaman, M modülü ayrıştırılamaz endodüzenlidir ancak ve ancak ya M modülü basittir (böylece çekicidir) ya da M modülü çekici değildir ve $P = r_R(M)$ olmak üzere, R/P'nin kesirler cismine R-izomorftur.*

Kanıt. M modülü ayrıştırılamaz ve endodüzenli olsun. $End_{R/P}(M) \cong End_R(M)$ olduğundan, Teorem 3.9.24'ten, M modülü R/P değişmeli tamlık bölgesi üzerinde ayrıştırılamaz burulmasız bir endodüzenli modüldür. Önteorem 3.9.23'ten M modülü R/P'nin Q kesirler cismine R-izomorftur. Eğer M çekici ise Önteorem 3.9.25 gereğince, $Q = R/P$ olur. Buradan, M modülü basittir. Tersi açıktır. □

Uyarı 3.9.27. (i) Teorem 3.9.26'dan, M modülü bir değişmeli R halkası üzerinde ayrıştırılamaz endodüzenli bir modül ise ya M modülü çekicidir ancak ve ancak $r_R(M)$, R'nin maksimal idealidir ya da M modülü bir çekici modül değildir ancak ve ancak $r_R(M)$, R'nin maksimal olmayan asal idealidir. Örnek 3.9.22'den, $\mathbb{Q}$ bir çekici $\mathbb{Z}$-modül değildir. $r_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}) = 0$ ise $\mathbb{Z}$'nin maksimal olmayan asal idealidir.
(ii) Teorem 3.9.9'da R bir değişmeli halka ise $End_R(M)$ yarıbasit artin halkadır ancak ve ancak Teorem 3.9.26'nin ispatından, $1 \leq i \leq k$ için $P_i = r_R(M_i)$ ve M_i modülü R/P_i'nin Q_i kesirler cismine R-izomorfik olmak üzere, $M \cong \bigoplus_{i=1}^{k} M_i^{(n_i)}$'dir.

4. BİRİMSEL ENDODÜZENLİ MODÜLLER

Bu bölüm [8] ve [11] makaleleri temel alınarak oluşturulmuştur. Birimsel düzenli halka kavramının bir genellemesi olan birimsel endodüzenli modüller incelenmiştir. Birimsel düzenli halkalarla ilgili bilinen sonuçların birimsel endodüzenli modüllere genelleştirilmesi araştırılmıştır. Bu modül sınıfının bazı özellikleri ele alınarak endodüzenli modüllerin bazı karakterizasyonları irdelenmiştir. Endodüzenli modüllerin dik toplamının ne zaman endodüzenli olduğu da incelenmiştir.

4.1 Birimsel Endodüzenli Modüllerin Özellikleri

Bu altbölümde, [8] makalesinde tanıtılan birimsel endodüzenli modüllerin bazı örneklerine ve özelliklerine yer verilmiştir.

Tanım 4.1.1. [8, Definition 1] M bir R-modül olsun. Eğer $End_R(M)$ halkası birimsel düzenli halka ise M modülüne *birimsel endodüzenli (unit endoregular)* denir.

Bir R halkası birimsel düzenlidir ancak ve ancak R_R (sırasıyla, ${}_RR$) modülü birimsel endodüzenlidir. Her birimsel endodüzenli modülün endodüzenli olduğu açıktır.

Örnek 4.1.2. [8, Example 2] (i) *Her sonlu üretilmiş yarıbasit modül birimsel endodüzenlidir.*
(ii) *Abelyan endodüzenli bir modül birimsel endodüzenlidir.*
(iii) *Bir birimsel düzenli halka üzerinde, her sonlu üretilmiş projektif modül endodüzenlidir.*

Aşağıdaki örnek birimsel endodüzenli olma özelliğinin altmodüllere geçmediğini göstermektedir.

Örnek 4.1.3. [8, Example 3] $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ *modülü birimsel endodüzenlidir, çünkü* $End_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}_{\mathbb{Q}}$ *olur. Ancak,* $\mathbb{Q}$*'nun* $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ *büyük altmodülü birimsel endodüzenli değildir.*

Aşağıdaki örnekte de görüldüğü gibi, iki tane birimsel endodüzenli modülün dik toplamının birimsel endodüzenli olması gerekmez.

Örnek 4.1.4. [8, Example 3] $R = \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ *halkası ve* $M = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ *R-modülü verilsin.* $(R \oplus M)_R$ *modülü birimsel endodüzenli değildir. Ancak,* R_R *ve* M_R *birimsel endodüzenli modüllerdir, çünkü* $End_R(M) \cong R$*'dir.*

Tanım 4.1.5. [44, Example 2.8] M bir yarıbasit modül olsun. $\{V_i | i \in I\}$ kümesi, M modülünün birbirine izomorf olmayan basit altmodüllerinin kümesi olsun. M_i, V_i'ye izomorf olan M modülünün bütün altmodüllerinin toplamı olsun. M_i altmodüllerine $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ modülünün *izotip bileşenleri* denir.

Örnek 4.1.6. [44, Example 4.14D] *R bir halka ve M bir yarıbasit sağ R-modül olsun.* $S = End_R(M)$ *halkası birimsel düzenlidir ancak ve ancak M modülünün* M_i *izotip bileşenlerinin hepsi sonlu üretilmiştir.*

Kanıt. $(\Rightarrow)$ $S = End_R(M)$ halkası birimsel düzenli olsun. M modülünün izotip bileşenlerinin biri sonlu üretilmiş olmasın. Genelliği bozmadan, M_1'in sonlu üretilmiş olmadığı varsayılsın. O zaman, M_1 modülü basit bir R-modülün sonsuz dik toplamıdır. Her i için $T_i \cong S$ basit modül olacak şekilde $M_1 = \bigoplus T_i$ yazılabilir. $f_1 : M_1 \to M_1$ birebir olmayan bir epimorfizma vardır.

$$\begin{aligned} f\colon M = \bigoplus M_i &\longrightarrow M \\ (m_1, m_2, ...) &\longmapsto (f_1(m_1), m_2, ...) \end{aligned}$$

dönüşümü örten ancak birebir değildir. Bu durumda, $0 \longrightarrow Kerf \longrightarrow M \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0$ kısa tam dizisi parçalanır. O halde, $M = Kerf \oplus M$ elde edilir. Diğer yandan, $M = M \oplus 0 = Kerf \oplus M$ olur. M birimsel endodüzenli modül olduğundan, Teorem 2.5.8'den $Kerf = 0$ çelişkisi elde edilir. O halde, her i için M_i izotip bileşeni sonlu üretilmiştir.
$(\Rightarrow)$ M_i sonlu üretilmiş yarıbasit altmodül olmak üzere $M = \bigoplus M_i$ olarak yazılsın. Wedderburn Artin Teoremi'nden $S_i = End_R(M_i)$ birimsel düzenli bir halkadır. $S = End_R(M) = End_R(\bigoplus M_i) \cong \prod S_i$ olur. S_i'ler birimsel düzenli olduğundan $\prod S_i$ halkası da birimsel düzenlidir. Böylece, S halkası birimsel düzenlidir. $\square$

Örnek 4.1.7. [8, Example 3] *Sonsuz boyutlu bir vektör uzay endodüzenli bir modül olmasına rağmen, Örnek 4.1.6 gereğince, birimsel endodüzenli değildir. Ancak, yine Örnek 4.1.6'dan, sonlu boyutlu altuzayları birimsel endodüzenlidir.*

Birimsel endodüzenlilik, dik toplanana geçen bir özelliktir.

Önerme 4.1.8. [8, Proposition 4] *Birimsel endodüzenli bir modülün her dik toplananı birimsel endodüzenlidir. Özel olarak, R birimsel düzenli bir halka olduğundan, her $e^2 = e \in R$ eşkare elemanı için, eR birimsel endodüzenli bir R-modüldür.*

Kanıt. M bir birimsel endodüzenli modül, $S = End_R(M)$ ve $N \leq^{\oplus} M$ olsun. Bir $e^2 = e \in S$ için $N = eM$'dir. O zaman, $End_R(N) \cong eSe$ olur. S birimsel düzenli bir halka ise, eSe halkası da birimsel düzenlidir. Böylece, N birimsel endodüzenlidir. □

4.2 Birimsel Endodüzenli Modüllerin Karakterizasyonları

Bu altbölümde, bazı halka sınıflarının birimsel endodüzenli modüller cinsinden karakterizasyonları ile bir modülün birimsel endodüzenli olması için bazı gerek ve yeter koşullar irdelenecektir.

Önerme 4.2.1. [8, Proposition 5] *Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir:*
(a) *Her sonlu üretilmiş serbest (projektif) sağ R-modül birimsel endodüzenlidir.*
(b) *Bir n pozitif tamsayısı için $R^{(n)}$ serbest modülü bir birimsel endodüzenli R-modüldür.*
(c) *R bir birimsel endodüzenli halkadır.*

Kanıt. R birimsel düzenlidir ancak ve ancak $Mat_n(R)$ birimsel düzenlidir. Bu sonuçtan ve Önerme 4.1.8'den ispat açıktır. □

Teorem 4.2.2. [8, Theorem 6] *Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir:*
(a) *Her sonlu eşüretilmiş sağ R-modül birimsel endodüzenlidir.*
(b) *Her sonlu eşüretilmiş sağ R-modül sonlu üretilmiş yarıbasit modüldür.*
(c) *R bir sağ V-halkadır.*

Kanıt. $(a) \Rightarrow (c)$ Önerme 3.4.9'dan açıktır.

$(c) \Rightarrow (b)$ M, bir sağ V-halka üzerinde eşüretilmiş bir modül olsun. Bir sağ V-halka üzerindeki sonlu eşüretilmiş bir modül yarıbasit olduğundan, M sonlu üretilmiştir.

$(b) \Rightarrow (a)$ Her sonlu üretilmiş yarıbasit modül birimsel düzenli modüldür. □

Önteorem 4.2.3. [8, Proposition 7] *M bir biçimsel modül olsun. M modülü Rickart'tır ancak ve ancak M modülü d-Rickart'tır.*

Kanıt. M bir Rickart modül olsun. M modülü biçimsel olduğundan, her $\varphi \in End_R(M)$ için $M/Im\varphi \cong Ker\varphi \leq^{\oplus} M$ elde edilir. Teorem 3.2.7'den, M modülü Rickart olduğu için D_2 koşuluna sahiptir. Böylece, $Im\varphi \leq^{\oplus} M$ olur. O halde, M modülü d-Rickart'tır.

Tersine, M modülünün d-Rickart olsun. O zaman, bir $\varphi \in End_R(M)$ için $M/Im\varphi$ modülü M'nin bir dik toplanına izomorftur. M biçimsel olduğundan, $Ker\varphi \cong M/Im\varphi$ elde edilir. Teorem 3.2.12'den, M modülü d-Rickart olduğu için C_2 özelliğine sahiptir. Buradan, $Ker\varphi \leq^{\oplus} M$ olur. Böylece, M bir Rickart modüldür. □

Teorem 4.2.4. [17, Theorem 37] *Bir M modülü için aşağıdaki ifadeler denktir:*

(1) *M modülü birimsel endodüzenlidir.*

(2) *M modülü biçimsel ve Rickart'tır.*

(3) *M modülü biçimsel ve d-Rickart'tır.*

Kanıt. (1) $\Rightarrow$ (2) $End_R(M)$ bir birimsel düzenli halka olsun. O zaman, Önteorem 2.5.6'dan M modülü biçimseldir. Teorem 3.1.2'den, bir $\alpha \in End_R(M)$ için $Ker\alpha$, M modülünün bir dik toplananıdır. O halde, M bir Rickart modüldür.

(2) $\Rightarrow$ (3) Önteorem 2.2.2'den, her $\alpha \in End_R(M)$ için, öyle bir $\beta \in End_R(M)$ vardır ki $\alpha M = Ker\beta$'dır. M modülü Rickart olduğundan, $\alpha M \leq^{\oplus} M$'dir. O halde, M bir d-Rickart modüldür.

(3) $\Rightarrow$ (1) $\alpha \in End_R(M)$ verilsin. Kabulden, $Im\alpha$ altmodülü M'nin bir dik toplananıdır. Önteorem 2.2.2'den, her $\alpha \in End_R(M)$ için, öyle bir $\beta \in End_R(M)$ vardır ki $Ker\alpha = Im\beta$ olur. Böylece, $Ker\alpha \leq^{\oplus} M$ elde edilir. Teorem 3.1.2'den, M modülü endodüzenlidir. Önteorem 2.5.6 gereğince, M bir birimsel endodüzenli modüldür. □

Teorem 4.2.5. [8, Theorem 9] *M bir modül ve $S = End_R(M)$ için aşağıdaki koşullar denktir:*

(a) *M bir birimsel endodüzenli modüldür.*

(b) *Bir $\varphi \in S$ için, öyle bir $\mu \in S$ izomorfizması vardır ki $M = Im\varphi \oplus \mu Ker\varphi$ olur.*

(c) *M bir biçimsel endodüzenli modüldür.*

(d) *M bir biçimsel Rickart modüldür.*

(e) *M bir biçimsel d-Rickart modüldür.*

(f) *M modülü D_2 koşulunu sağlayan bir biçimsel modüldür ve her $\varphi \in S$ için $Im\varphi$ altmodülü M'nin bir dik toplananına izomorftur.*

(g) *M modülü C_2 koşulunu sağlayan bir biçimsel modüldür ve her $\varphi \in S$ için $Ker\varphi$ altmodülü M'nin bir dik toplananına izomorftur.*

Kanıt. $(a) \Rightarrow (b)$ $\varphi \in S$ birimsel düzenli eleman olsun. O zaman, $\varphi x \varphi = \varphi$ koşulunu sağlayan bir $x \in R$ tersinir elemanı vardır. $\mu = x^{-1}$ olsun. O zaman, $f = \varphi x$ eşkare elemanı için $R\varphi = Rf$'dir. Böylece, $Ker\varphi = (1-f)M$ olur. $M = \mu M = \mu(fM \oplus (1-f)M) = \mu fM \oplus \mu(1-f)M = Im\varphi \oplus \mu Ker\varphi$ elde edilir.

$(b) \Rightarrow (c)$ Her $\varphi \in End_R(M)$ için $Im\varphi \leq^{\oplus} M$ olduğundan, M bir d-Rickart modüldür. O zaman, M modülü C_2 koşulunu sağlar. Sonuç olarak, $Ker\varphi \cong \mu Ker\varphi \leq^{\oplus} M$ olduğundan, $Ker\varphi \leq^{\oplus} M$ elde edilir. Böylece, Teorem 3.1.2'den, M modülü endodüzenlidir. Dahası, her $\varphi \in End_R(M)$ için $M/Im\varphi \cong \mu Ker\varphi \cong Ker\varphi$ olduğundan, M modülü biçimseldir.

$(c) \Rightarrow (d)$ Önerme 3.2.18'den her endodüzenli modül Rickart'tır.

$(d) \iff (e) \iff (a)$ Teorem 4.2.4'ten elde edilir.

$(d) \iff (f)$ Teorem 3.2.7'den elde edilir.

$(e) \iff (g)$ Teorem 3.2.12'den elde edilir. □

Önerme 4.2.6. [8, Lemma 10] *M bir biçimsel modül olsun. M modülü C_2 özelliğine sahiptir ancak ve ancak M modülü D_2 özelliğine sahiptir.*

Kanıt. $(\Rightarrow)$ M modülü C_2 özelliğine sahip ve $N \leq M$ olsun. Bir $e^2 = e \in End_R(M)$ için $M/N \cong eM$ kabul edilsin. $M \xrightarrow{\pi} M/N$ doğal izdüşüm ve $M/N \xrightarrow{\varphi} eM$ izomorfizma olsun. $Ker(\varphi\pi) = N$, $Im(\varphi\pi) = eM$ ve M modülü biçimsel olduğundan, $(1-e)M \cong M/eM =$

$M/Im(\varphi\pi) \cong Ker(\varphi\pi) = N$ elde edilir. M modülü C_2 özelliğine sahip ve $(1-e)M \cong N$ olduğundan, $N \leq^{\oplus} M$ bulunur. Böylece, M modülü D_2 özelliğine sahiptir.
$(\Leftarrow)$ M modülü D_2 özelliğine sahip ve $N \leq M$ olsun. Bir $e^2 = e \in End_R(M)$ için $N \cong eM$ kabul edilsin. $\varphi : eM \longrightarrow N$ izomorfizma olsun. $Ker(\varphi e) = (1-e)M$ ve $Im(\varphi e) = N$'dir. M modülü biçimsel olduğundan, $M/N = M/Im(\varphi e) \cong Ker(\varphi e) = (1-e)M$'dir. Buradan, $M/N \cong (1-e)M$ olur ve M modülü D_2 özelliğine sahip olduğu için $N \leq^{\oplus} M$ elde edilir. Böylece, M modülü C_2 özelliğine sahiptir. □

Sonuç 4.2.7. [8, Corollary 11] *Bir M modülü için aşağıdaki ifadeler denktir:*
(a) *M bir birimsel endodüzenli modüldür.*
(b) *M modülü C_2 (veya D_2) özelliğine sahip bir biçimsel modüldür ve bir $\varphi \in End_R(M)$ için $Im\varphi$ (veya $Ker\varphi$) altmodülü M modülünün bir dik toplananına izomorftur.*

Kanıt. Teorem 4.2.5 ve Önteorem 4.2.6 gereğince istenen sağlanır. □

Önteorem 4.2.8. [8, Lemma 13] *Bir M modülü için aşağıdaki ifadeler denktir:*
(a) *M bir birimsel endodüzenli modüldür.*
(b) *M, yerine koyma özelliğine sahip bir endodüzenli modüldür.*
(c) *M, sadeleşme özelliğine sahip bir endodüzenli modüldür.*
(d) *M, iç sadeleşme özelliğine sahip bir endodüzenli modüldür.*

Kanıt. $(a) \Rightarrow (b)$ $End_R(M)$ birimsel düzenli bir halka olduğu için M modülü endodüzenlidir. Ayrıca, Teorem 2.5.3'ten, $End_R(M)$ halkası 1-sabit sıra özelliğine sahiptir. Böylece, Teorem 2.1.14'ten M modülü yerine koyma özelliğine sahiptir.
$(b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d)$ açıktır.
$(d) \Rightarrow (a)$ Sonuç 2.5.7'den, $End_R(M)$ birimsel düzenlidir. □

Tanım 4.2.9. [8] K ve N, bir M modülünün dik toplananları olsun. $M = L \oplus K = N \oplus K$ olacak şekilde bir $K \leq M$ varsa, L altmodülüne N'ye *perspektif* denir.

Teorem 4.2.10. [8, Theorem 14] *M bir endodüzenli modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.*
(a) *M birimsel endodüzenlidir.*

(b) *Herhangi iki dik toplanan birbiriyle perspektiftir.*

(c) $L \cong N \leq^{\oplus} M$ *koşulunu sağlayan herhangi iki altmodül için,* $M = L \oplus K = N \oplus K$ *olacak şekilde bir* $K \leq M$ *vardır.*

Kanıt. $(a) \Rightarrow (c)$ M birimsel endodüzenli bir modül ve $L \cong N \leq^{\oplus} M$ olsun. M modülü C_2'yi sağladığından, $L \leq^{\oplus} M$'dir. M endodüzenli olduğundan, dik toplanan toplam ve dik toplanan arakesit özelliklerini sağlar. Böylece, $L+N \leq^{\oplus} M$ ve $L \cap N \leq^{\oplus} M$ olur. O zaman, öyle L_1, N_1, M_1 altmodülleri vardır ki $L = (L \cap N) \oplus L_1$, $N = (L \cap N) \oplus N_1$ ve $M = (L+N) \oplus M_1$ olur. Buradan, $M = L_1 \oplus N \oplus M_1 = N_1 \oplus L \oplus M_1$ elde edilir. $N \oplus M_1 \cong L \oplus M_1$ olduğundan, Önteorem 4.2.8 gereğince, $L_1 \cong N_1$ bulunur. $\varphi : L_1 \to N_1$ izomorfizma olsun. $P = \{l + \varphi(l) | l \in L_1\}$ kümesi oluşturulsun. O zaman, $L_1 \oplus N_1 = L_1 \oplus P = N_1 \oplus P$ olur. Böylece, $M = L_1 \oplus N_1 \oplus (L \cap N) \oplus M_1 = L \oplus (P \oplus M_1) = N \oplus (P \oplus M_1)$ elde edilir.
$(c) \Rightarrow (a)$ M modülünün iç sadeleşme özelliğine sahip olduğunu göstermek yeterlidir. $L_1 \cong N_1$ olmak üzere, $M = L_1 \oplus L_2 = N_1 \oplus N_2$ kabul edilsin. Hipotezden, öyle bir $K \leq M$ vardır ki $M = L_1 \oplus K = N_1 \oplus K$ olur. Böylece, $L_2 \cong K \cong N_2$ elde edilir. Bu durumda, M modülü iç sadeleşme özelliğine sahiptir. Önteorem 4.2.8'den, M modülü birimsel endodüzenlidir.
$(b) \Leftrightarrow (c)$ C_2 koşulundan açıktır. □

Sonuç 4.2.11. [8, Corollary 15] *M bir birimsel endodüzenli modül ve $L, N \leq^{\oplus} M$ olsun. L ve N birbirinin perspektifidir ancak ve ancak $L \cong N$ olur.*

Teorem 4.2.12. [8, Theorem 16] *M bir endodüzenli modül ve $S = End_R(M)$ olsun. O zaman, aşağıdaki ifadeler denktir:*

(a) *M birimsel endodüzenlidir.*

(b) *Herhangi bir $\varphi \in S$ için $(\varphi - \varphi^2)M$ sadeleşme özelliğine sahiptir.*

(b) *Herhangi bir $\varphi \in S$ için $Im\varphi \cap Ker\varphi \cong M/(Im\varphi + Ker\varphi)$ olur.*

Kanıt. $\varphi \in S$ olsun. M modülü endodüzenli olduğundan, $Im\varphi$, $Ker\varphi$, $Im\varphi \cap Ker\varphi$ ve $Im\varphi + Ker\varphi$ altmodülleri M modülünün dik toplananlarıdır. Buradan, $(Im\varphi \cap Ker\varphi) \oplus X = Ker\varphi$, $Im\varphi \oplus X = Im\varphi + Ker\varphi$ ve $(Im\varphi + Ker\varphi) \oplus Y = M$ olacak şekilde $X \leq^{\oplus} M$ ve $Y \leq^{\oplus} M$ vardır. Ayrıca, bir $N \leq M$ için $M = Ker\varphi \oplus Ker(1 - \varphi) \oplus N$ olur. O halde,

$\varphi Ker(1-\varphi) = Ker(1-\varphi)$, $N \cong \varphi(1-\varphi)N = \varphi(1-\varphi)M$ ve $N \cong \varphi N$ elde edilir. Sonuç olarak, $(Im\varphi \cap Ker\varphi) \oplus X \oplus Ker(1-\varphi) \oplus N = Ker\varphi \oplus Ker(1-\varphi) \oplus N = M = Im\varphi \oplus X \oplus Y = \varphi Ker(1-\varphi) \oplus \varphi N \oplus X \oplus Y = Ker(1-\varphi) \oplus \varphi N \oplus X \oplus Y$ bulunur. Buradan, $(Im\varphi \cap Ker\varphi) \oplus N \cong \varphi N \oplus Y \cong N \oplus M/(Im\varphi + Ker\varphi)$ elde edilir.

$(a) \Rightarrow (b)$ M birimsel endodüzenli olduğundan, $(\varphi - \varphi^2)M \leq^{\oplus} M$ elde edilir. Önerme 4.1.8'den, $(\varphi - \varphi^2)M$ birimsel endodüzenlidir. Böylece, Önteorem 4.2.8(c)'den $(\varphi - \varphi^2)M$ sadeleşme özelliğine sahiptir.

$(b) \Rightarrow (c)$ $(Im\varphi \cap Ker\varphi) \oplus N \cong N \oplus M/(Im\varphi + Ker\varphi)$ ve $N \cong (\varphi - \varphi^2)M$ sadeleşme özelliğine sahip olduğundan, $Im\varphi \cap Ker\varphi \cong M/(Im\varphi + Ker\varphi)$ elde edilir.

$(c) \Rightarrow (a)$ Herhangi bir $\varphi \in S$ için, $M/Im\varphi \cong X \oplus Y \cong X \oplus M/(Im\varphi + Ker\varphi) \cong X \oplus (Im\varphi \cap Ker\varphi) = Ker\varphi$ olur Böylece, M modülü biçimseldir. Ayrıca, $M = Im\varphi \oplus X \oplus Y$ olduğundan, M modülü d-Rickart'tır. Teorem 4.2.5 gereğince, M birimsel endodüzenlidir. □

Önerme 4.2.13. [8, Proposition 17] *Her birimsel endodüzenli modül doğrudan sonludur.*

Kanıt. M bir modül, $N \leq^{\oplus} M$ ve $N \cong M$ olsun. Öyle bir $N' \leq M$ vardır ki $M = N \oplus N' = M \oplus 0$ olur. Birimsel endodüzenli modüller iç sadeleşme özelliğine sahip ve $N \cong M$ olduğu için $N' = 0$ elde edilir. Böylece, $M = N$'dir. □

Tanım 4.2.14. [8] M ve N birer modül olmak üzere, M modülü, N'nin bir altmodülüne izomorf ise M'ye N modülüne *altizomorfik (subisomorphic)* denir ve $M \lesssim N$ şeklinde gösterilir.

Genelde, karşılıklı olarak altizomorfik olan modüller izomorf olmayabilir. Örneğin, $\mathcal{F}$ herhangi bir sonsuz indeks kümesi olmak üzere, $M = \bigoplus_{i \in \mathcal{F}} \mathbb{Q}$ ve $N = \mathbb{Z} \oplus M$ verilsin. M ve N modülleri $\mathbb{Z}$-modül olarak birbirlerine altizomorfiktir, fakat izomorf değildirler. Ancak, bazı koşullar altında karşılıklı altizomorfik olan modüller izomorfturlar. Bumby [45] çalışmasında, karşılıklı altizomorfik olan injektif iki modülün izomorf olduğunu ispatlamıştır. Müller ve Rizvi, bu sonucu iki modülün sürekli olması koşulu ile genelledi (bkz. [46, Proposition 10]).

Önerme 4.2.15. [8, Proposition 18] *M modülü C_2 koşuluna sahip olan doğrudan sonlu bir modül (veya M birimsel endodüzenli bir modül) ve N herhangi bir modül olsun. Eğer $M \lesssim N$ ve $N \lesssim M$ ise $M \cong N$'dir.*

Kanıt. Genelliği bozmadan, $N \leq M$ kabul edilsin. $\varphi : M \to N$ bir monomorfizma olsun. $Ker\varphi = 0$ ve $M/Ker\varphi \cong Im\varphi$ olduğundan, $Im\varphi \cong M \leq^{\oplus} M$ elde edilir. M modülü C_2'yi sağladığından, $Im\varphi \leq^{\oplus} M$ elde edilir. Buradan, bir $K \leq M$ için $M = Im\varphi \oplus K$ ve $\varphi M \subseteq N$ olur. $M \cong \varphi M$ ve M doğrudan sonlu olduğu için $K = 0$'dır. Böylece, $M = N$ elde edilir. □

Sonuç 4.2.16. [8, Corollary 19] *Bir M modülü ve $E(M)$ birbirleriyle altizomorfik olsunlar. Aşağıdaki durumlardan birinin sağlandığı varsayılsın:*
(1) M modülü C_2 özelliğine sahip doğrudan sonlu bir modüldür;
(2) $E(M)$ doğrudan sonludur.
O zaman, M doğrudan sonlu ve injektiftir.

Kanıt. (1) M modülü C_2 özelliğine sahip doğrudan sonlu bir modül olsun. Önerme 4.2.15 gereğince, $M \cong E(M)$'dir. Böylece, M modülü doğrudan sonlu ve injektiftir.
(2) $E(M)$ doğrudan sonlu modül olsun. Önerme 4.2.15 gereğince, $E(M) \cong M$'dir. Böylece, M modülü doğrudan sonlu ve injektiftir. □

Aşağıdaki örnek, Sonuç 4.2.16'daki $E(M)$ için doğrudan sonlu olma koşulunun gereksiz olmadığını gösterir.

Örnek 4.2.17. [8, Example 20] *$\mathcal{F}$ herhangi bir sonsuz indeks kümesi olmak üzere, $M_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \oplus (\oplus_{i\in\mathcal{F}}\mathbb{Q})$ verilsin. O zaman, $E(M) = E(\mathbb{Z}) \oplus E(\oplus_{i\in\mathcal{F}}\mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \oplus (\oplus_{i\in\mathcal{F}}\mathbb{Q})$ doğrudan sonlu değildir. M ve $E(M)$ birbirlerine altizomorfiktir, ancak izomorf değildir.*

Önerme 4.2.18. [8, Proposition 21] *Bir birimsel endodüzenli modül Hopfian ve co-Hopfian olur.*

Kanıt. M bir birimsel endodüzenli modül olsun. Önerme 4.2.13'ten, M doğrudan sonludur ve Teorem 4.2.5'ten C_2 özelliğini sağlar. φ, M modülünün bir monomorfizması olsun. Birinci İzomorfizma Teoremi'nden $M/Ker\varphi \cong Im\varphi$ ve φ bir monomorfizma olduğu için $Ker\varphi = 0$'dır. Buradan, $Im\varphi \leq^{\oplus} M$ olur. O zaman, $M = Im\varphi$ elde edilir. Böylece, φ monomorfizması örtendir, yani bir izomorfizmadır.
M modülü, Teorem 4.2.5'ten, D_2 özelliğine sahiptir. φ, M modülünün bir epimorfizması olsun. Birinci İzomorfizma Teoremi'nden $M/Ker\varphi \cong Im\varphi = M$'dir. M modülü D_2 özelliğini sağladığından, $Ker\varphi \leq^{\oplus} M$ olur. Buradan, $Ker\varphi = 0$'dır. Böylece, φ epimorfizması bir izomorfizmadır. □

4.3 Birimsel Endodüzenlilik ve Tekilsizlik İlişkisi

Önerme 4.2.13'te, endodüzenli bir modülün doğrudan sonlu olduğu gösterilmiştir. Bu altbölümde, bu sonucun tersinin ne zaman doğru olduğu tekilsizlik ve K-tekilsizlik kavramlarından yararlanılarak araştırılacaktır. Öncelikle, aşağıdaki sonuca ihtiyaç vardır.

Önteorem 4.3.1. [37, Lemma 2.14] *Her K-tekilsiz CS modül Baer'dir.*

Kanıt. M modülü K-tekilsiz ve CS olsun. $S = End_R(M)$ ve $N \leq M$ verilsin. O zaman, $N \leq_{ess} eM$ olacak şekilde bir $e^2 = e \in S$ vardır. Böylece, $S(1-e) = l_S(eM) \subseteq l_S(N)$ olur. $\varphi \in l_S(N)/S(1-e)$ alınsın. $S = Se \oplus S(1-e)$ yazılımından, $\varphi = s_1e + s_2(1-e)$ olacak şekilde $s_1, s_2 \in S$ elemanları vardır. $\varphi \notin l_S(eM) = S(1-e)$ olduğu için $s_1 \neq 0$'dır. $\varphi - s_2(1-e) = s_1e \in l_S(N)$ olur. Bu eşitlik sağdan e ile çarpılırsa, $\varphi e = s_1e$ elde edilir. $\beta = \varphi - s_2(1-e) = s_1e \in Se$ olsun. O zaman, $\beta(N) = 0$ ve $\beta((1-e)M) = 0$ elde edilir. Buradan, $\beta(N \oplus (1-e)M)$'dir. O halde, $N \oplus (1-e)M \leq_{ess} M$ olur. $N \oplus (1-e)M \leq Ker(\beta) \leq M$ olduğundan, $Ker(\beta) \leq_{ess} M$ elde edilir. M modülü K-tekilsiz olduğu için $\beta = 0$'dır. O halde, $\beta = \varphi - s_2(1-e) = s_1e = 0$ olur. Buradan, $\varphi = s_2(1-e) \in S(1-e)$ çelişkisi elde edilir. Böylece, $l_S(N) = S(1-e)$ bulunur. O halde, M modülü Baer'dir. □

Teorem 4.3.2. [8, Theorem 22] *Bir doğrudan sonlu, K-tekilsiz, sürekli modül birimsel endodüzenli (Baer) olur. Özel olarak, bir doğrudan sonlu, sağ tekilsiz, sağ sürekli halka birimsel düzenli (Baer) olur.*

Kanıt. M bir doğrudan sonlu, K-tekilsiz, sürekli modül olsun. Önerme 3.9.10'dan, M modülü CS ve endodüzenlidir. Dolayısıyla, Önteorem 4.3.1 gereğince, M modülü Baer'dir. Sonuç 2.6.25'ten, doğrudan sonlu her sürekli modül sadeleşme özelliğine sahip olduğundan, Önteorem 4.2.8 gereğince, M birimsel endodüzenlidir. $\square$

Aşağıdaki ilk örnek, Teorem 4.3.2'nin tersinin genelde doğru olmadığını gösterirken, ikinci örnek Teorem 4.3.2'deki sürekli olma koşulunun gereksiz olmadığını ifade eder.

Örnekler 4.3.3. [8, Example 23] (i) *$R = \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \mathbb{C} \\ 0 & \mathbb{R} \end{pmatrix}$ halkası ve $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ eşkare elemanı verilsin. O zaman, $M = eR = \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \mathbb{C} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ bir abelyan endodüzenli Baer modüldür. Dolayısıyla, doğrudan sonlu, K-tekilsiz bir modüldür. Ancak, M sürekli bir modül değildir, çünkü $0 \neq \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} r \in \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{C} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olacak şekilde $r \in R$ yoktur.*

(ii) *Birimsel düzenli olmayan bir düzenli R halkası verilsin. Her $n \in \mathbb{N}$ için $Mat_n(R)$ doğrudan sonlu olsun ([18], Example 5.10). Her sonlu üretilmiş serbest sağ R-modül doğrudan sonlu, endodüzenli bir modüldür, fakat birimsel endodüzenli değildir.*

Sonuç 4.3.4. [8, Corollary 24] (i) *Her doğrudan sonlu, tekilsiz, sürekli M modülü birimsel endodüzenli (Baer) bir modüldür. Buna ek olarak, $E(M)$ tekilsiz ve birimsel endodüzenli bir modüldür.*

(ii) *Her doğrudan sonlu, K-tekilsiz, sürekli modülün endomorfizma halkası sağ sürekli ve birimsel düzenlidir.*

Kanıt. (i) Her doğrudan sonlu, tekilsiz, sürekli M modülü, Teorem 4.3.2'den bir birimsel endodüzenli (Baer) modüldür. M doğrudan sonlu ve C_2 özelliğine sahip olduğundan, Önerme 4.2.15'ten $E \cong E(M)$ elde edilir. Böylece, $E(M)$ doğrudan sonlu ve tekilsizdir. Teorem 4.3.2'den birimsel endodüzenlidir.

(ii) M modülü doğrudan sonlu, K-tekilsiz ve sürekli bir modül olsun. Teorem 2.6.26 gereğince, $S = End_R(M)$'nin Jacobson radikali $\Delta = \{\varphi \in S | Ker\varphi \leq_{ess} M\} = 0$

olduğundan, $\overline{S} = S/\Delta = S$ halkası sağ tekilsiz ve sağ süreklidir. M doğrudan sonlu olduğundan, Teorem 4.3.2'den, S sağ sürekli ve birimsel düzenlidir. $\square$

Teorem 4.3.2'nin tersine, aşağıdaki örnek, Sonuç 4.3.4(i)'deki $E(M)$'nin birimsel endodüzenli olması için M modülü üzerindeki tekilsizlik koşulunun gereksiz olmadığını gösterir.

Örnek 4.3.5. [8, Example 25] *p bir asal olmak üzere, $\mathbb{Z}$-modül $\mathbb{Z}_p$ ele alınsın. $\mathbb{Z}_p$ modülü tekilsiz olmayan, abelyan endodüzenli, $\mathbb{Z}_p$-injektif bir modüldür. Ancak, $E(\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_{p^\infty}$ modülü K-tekilsiz olmayan, doğrudan sonlu, injektif bir modüldür ve dolayısıyla, endodüzenli değildir.*

4.4 Sonluluk Koşulları

Bu altbölümde, birimsel endodüzenli modüllerle bazı sonluluk koşulları arasındaki ilişkiler incelenecektir.

Önerme 4.4.1. [8, Proposition 26] *Her birimsel endodüzenli modül sonlu değişim özelliğine sahiptir.*

Kanıt. M bir birimsel endodüzenli modül olsun. O zaman, $End_R(M)$ birimsel düzenli olduğu için $End_R(M)$ bir değişim halkasıdır. Dolayısıyla, M sonlu değişim özelliğine sahiptir. $\square$

Önerme 3.9.4'ten, her ayrıştırılamaz endodüzenli modülün endomorfizma halkası bir bölümlü halkadır. Dolayısıyla, her ayrıştırılamaz endodüzenli modül birimsel endodüzenlidir.

Tanım 4.4.2. [47, Definition 1.2.12] Bir R halkası, sonsuz çoklukta dik eşkarelerin bir kümesini bulundurmuyorsa, R'ye *dik olarak sonlu (orthogonally finite)* denir. M bir modül olmak üzere, M'nin endomorfizma halkası dik olarak sonlu ise M'ye *dik olarak sonlu* denir.

Teorem 4.4.3. [8, Theorem 27] *Bir M modülü dik olarak sonlu olsun. O zaman, M birimsel endodüzenlidir ancak ve ancak M endodüzenlidir.*

Kanıt. Dik olarak sonlu endodüzenli bir modül, Önerme 3.9.5 gereğince, bir yarıbasit artin S endomorfizma halkasına sahiptir. S sonlu üretilmiş ve yarıbasit olduğundan, birimsel düzenli bir halkadır. □

Teorem 4.4.3'ten, noether (artin) bir M modülü endodüzenlidir ancak ve ancak M birimsel endodüzenlidir.

Sonuç 4.4.4. [8, Corolary 28] *Her noether (artin) endodüzenli modül, birimsel endodüzenli ve Baer'dir. Ayrıca, ayrıştırılamaz endodüzenli modüllerin bir sonlu dik toplamıdır.*

Örnek 4.4.5(i), Teorem 4.4.3'teki dik olarak sonlu olma şartının gereksiz olmadığını gösterir. Örnek 4.4.5(ii) ise, genel olarak, ayrıştırılamaz (birimsel) endodüzenli bir modülün basit olmadığını gösterir.

Örnek 4.4.5. [8, Example 29] (i) $H = RFM_{\mathbb{N}}(\mathbb{F})$ *ile* $\mathbb{F}$ *cismi üzerinde,* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *boyutlu satır sonlu matris halkası temsil edilsin.* $R = Mat_2(H)$ *olsun.* $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *eşkare elemanı verilsin. O zaman,* $M = eR = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H & H \\ H & H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H & H \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *modülü endodüzenlidir, fakat birimsel endodüzenli değildir. Çünkü,* $End_R(M) = End_R(eR) \cong eEnd_R(R)e \cong eRe = \begin{pmatrix} H & H \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cong H$ *olur ve* H *dik olarak sonlu değildir.* $H = RFM_{\mathbb{N}}(\mathbb{F}) \cong End(\mathbb{F}^{\mathbb{N}})$ *ve* $\mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ *yarıbasit olduğundan düzenli halkadır, ancak birimsel düzenli değildir. Ayrıca,* H *halkası sonsuz çoklukta dik eşkare içerir.*

(ii) $\mathbb{F}$ *bir cisim olmak üzere,* $R = \begin{pmatrix} \mathbb{F} & \mathbb{F} \\ 0 & \mathbb{F} \end{pmatrix}$ *halkası ve* $M = \begin{pmatrix} \mathbb{F} & \mathbb{F} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *sağ* R*-modülü verilsin.* M *modülü ayrıştırılamaz ve birimsel endodüzenlidir, fakat yarıbasit değildir.*

Önerme 4.4.6. [8, Proposition 30] *M_R modülü, değişmeli bir halka üzerinde ayrıştırılamaz ve (birimsel) endodüzenli olsun. O zaman, P ideali R'de asal ve $Q(R/P)$, R/P'nin kesirler cismi olmak üzere, $M_R \cong Q(R/P)$'dir.*

Sonuç 4.4.7. [8, Corollary 31] *M_R modülü, değişmeli bir halka üzerinde dik olarak sonlu olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler denktir:*
(a) M (birimsel) endodüzenlidir.
(b) P_i'ler R'nin asal idealleri ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $M \cong \oplus_{1\leq i\leq n} Q(R/P_i)$'dir.

Sonuç 4.4.8. [8, Corollary 32] *M_R modülü, değişmeli bir halka üzerinde noether veya artin olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler denktir:*
(a) M (birimsel) endodüzenlidir.
(b) P_i'ler R'nin maksimal idealleri ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $M \cong \oplus_{1\leq i\leq n} Q(R/P_i)$'dir.

4.5 Birimsel Endodüzenli Modüllerin Elementer Karakterizasyonları

Bu altbölümde, birimsel endozenli modüllerin endomorfizmalarının sağladığı özellikler göz önüne alınarak bazı temel karakterizasyonlar verilecektir.

Teorem 4.5.1. [11, Theorem 2.1] *M bir endodüzenli modül ve $S = End_R(M)$ olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler denktir:*
(a) M birimsel endodüzenlidir.
(b) Herhangi φ, $\psi \in S$ için $\varphi M + \psi M = M$ iken $\varphi + \psi\pi$ bir izomorfizma olacak şekilde bir $\pi \in S$ vardır.
(c) Herhangi $\varphi, \psi \in S$ için $\varphi M = \psi M$ iken $\varphi = \psi\mu$ olacak şekilde bir $\mu \in S$ izomorfizması vardır.

Kanıt. $(a) \Rightarrow (b)$ φ,$\psi \in S$ ve $\varphi M + \psi M$ olsun. M endodüzenli olduğundan, Teorem 3.1.2'den, $Ker\varphi \leq^{\oplus} M$, $\varphi M \leq^{\oplus} M$ ve $\psi M \leq^{\oplus} M$ elde edilir. Ayrıca, Önerme 3.7.4(ii)'den, M modülü dik toplanan arakesit özelliğine sahiptir. Böylece, $(\varphi M \cap \psi M) \leq^{\oplus} M$ olur. Buradan, öyle $L, N \leq^{\oplus} M$ vardır ki $M = L \oplus Ker\varphi$, $\psi M = (\varphi M \cap \psi M) \oplus N$ ve $M = \varphi M \oplus N$ elde edilir. Böylece, $\varphi M \cong M/Ker\varphi \cong L$ olduğundan ve Önteorem 4.2.8 gereğince, M iç sadeleşme özelliğini sağladığından, $Ker\varphi \cong N$ bulunur. $K = Ker\varphi$ ve $\eta : K \to N$ bir izomorfizma olsun. $\zeta : M = K \oplus L \to M$, $k \in K$ ve $l \in L$ için $\zeta(k + l) = \eta(k)$ tanımlansın. Bu durumda $\zeta \in S$ ve $\zeta M = N$ elde edilir. $0 \longrightarrow Ker\varphi \longrightarrow M \longrightarrow \psi M \longrightarrow 0$ kısa tam dizisi parçalandığından, öyle bir $\pi \in S$ vardır ki $\zeta = \psi\pi$ olur. Dolayısıyla, $\varphi + \psi\pi = \varphi + \zeta : M \to \varphi M \oplus N$ bir izomorfizmadır.

$(b) \Rightarrow (c)$ $0 \longrightarrow Ker\varphi \longrightarrow M \longrightarrow \psi M \longrightarrow 0$ kısa tam dizisi parçalandığından ve $\varphi M = \psi M$ olduğundan, bir $s \in S$ için $\varphi = \psi s$ bulunur. Benzer şekilde, bir $t \in S$ için $\psi = \varphi t$ olur. M endodüzenli olduğundan, öyle bir $\gamma \in S$ vardır ki $\psi = \psi\gamma\psi$'dir. O zaman, $(1-\gamma\psi)(1-st) = 1-st$ olur ve her $m \in M$ için $m = st(m)+(1-st)(m) \in sM+(1-\gamma\psi)M$ elde edilir. Böylece, $sM + (1 - \gamma\psi)M = M$'dir. Kabulden, bir $\pi \in S$ için $s + (1 - \gamma\psi)\pi$ bir izomorfizmadır. Ayrıca, $\varphi = \psi[s + (1 - \gamma\psi)\pi]$ olur.

$(c) \Rightarrow (a)$ M endodüzenli olduğundan, keyfi bir $\varphi \in S$ için, öyle bir $\psi \in S$ vardır ki $\varphi = \varphi\psi\varphi$'dir. Buradan, $\varphi\psi M = \varphi M$ dir. Hipotezden, $\varphi\psi = \varphi\mu$ olacak şekilde bir $\mu \in S$ izomorfizması vardır. Sonuç olarak, $\varphi = \varphi\psi\varphi = \varphi\mu\varphi$ elde edilir. □

Uyarı 4.5.2. [11, Remark 2.2] (i) Teorem 4.4.6(b), herhangi bir kabul olmadan, $End_R(M)$ halkasının 1-sabit sıra özelliğini sağladığını gösterir. Ancak, tersinin her zaman doğru olması gerekmediği, Örnek 4.5.3(i)'de gösterilecektir.

(ii) [48] çalışmasında, Canfell tarafından elde edilen bir sonuca göre, Teorem 4.4.6'daki (b) koşulu, M'nin M-projektif olması durumunda, $End_R(M)$ halkasının 1-sabit sıra özelliğini sağlaması ile denktir. Örnek 4.5.3(ii)'de görüldüğü üzere yarı-projektif ve endodüzenli olmak birbirinden bağımsızdır.

Örnek 4.5.3. [11, Example 2.3] (i) *p bir asal olmak üzere, $\mathbb{Z}$-modül $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ ele alınsın. O zaman, $S = End_R(\mathbb{Z}_{p^\infty}) \cong \hat{\mathbb{Z}}_p$ olur. $\hat{\mathbb{Z}}_p$'nin Jacobson radikali $p\hat{\mathbb{Z}}_p$'dir. $\hat{\mathbb{Z}}_p/p\hat{\mathbb{Z}}_p \cong \mathbb{Z}_p$ bir cisimdir. Dolayısıyla, S halkası 1-sabit sıra özelliğini sağlar. $\varphi = \psi = p$ olsun. O zaman, $\varphi\mathbb{Z}_{p^\infty} + \psi\mathbb{Z}_{p^\infty} = \mathbb{Z}_{p^\infty}$ elde edilir. Ancak, $\varphi + \psi\nu$ bir izomorfizma olacak şekilde bir $\nu \in S$ yoktur. Ayrıca, $\varphi S + \psi S \neq S$'dir.*

(ii) *$\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{Z}_4$ abel grupları verilsin. İki $\mathbb{Z}$-modül de, Teorem 4.5.1'deki özelliklere sahiptir ve her iki modülün de endomorfizma halkası 1-sabit sıra özelliğine sahiptir. $\mathbb{Q}$ abel grup olarak* *endodüzenlidir, fakat yarı-projektif değildir. $\mathbb{Z}_4$ ise $\mathbb{Z}$-modül olarak yarı-projektiftir, ancak endodüzenli değildir.*

Teorem 4.5.4. [11, Example 2.4] *M bir endodüzenli modül ve $S = End_R(M)$ olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler denktir:*
(a) M birimsel endodüzenlidir.
(b) Herhangi $\varphi,\psi \in S$ için, $\varphi M + \psi M = M$ iken $\varphi + \psi e$ bir izomorfizma ve $S\varphi \cap Se = 0$ olacak şekilde bir $e \in S$ eşkare elemanı vardır.
(c) Herhangi bir $\varphi \in S$ için, $\varphi = \mu + e$ ve $S\varphi \cap Se = 0$ olacak şekilde bir $e \in S$ eşkare elemanı ve bir $\mu \in S$ izomorfizması vardır.

Kanıt. $(a) \Rightarrow (b)$ $\varphi,\psi \in S$ ve $\varphi M + \psi M = M$ olsun. O zaman, $l_S(\varphi) \cap l_S(\psi) = 0$'dır. S halkası birimsel düzenli olduğundan, $T \cong l_S(\varphi)$ sağlanmak üzere, $S = S\varphi \oplus T$'dir. $T' = l_S(\varphi)\psi$ olsun. O zaman, $l_s(\varphi) \cap l_S(\psi) = 0$ olduğundan, $T \cong T' \leq^{\oplus} S$ elde edilir. Bir $T'' \leq S$ için, $S = T \oplus T' = T' \oplus T''$ olur. $e : T \oplus T'' \to T$ doğal izdüşüm olsun. O zaman, sol S-modül olarak $T = Se$'dir. Böylece, $S\varphi \cap Se = 0$'dır ve $e|_{T'} : T' \to T$ bir izomorfizmadır. Bir $s \in S$ için, $s(\varphi + \psi e) = 0$ ise $s\varphi = -s\psi e \in S\varphi \cap T = 0$ elde edilir. $s\psi \in T'$ olduğundan, $s \in l_S(\varphi) \cap l_S(\psi) = 0$'dır. Buradan, $\cdot(\varphi + \psi e) : S \to S$ bir monomorfizmadır. Böylece, $\varphi + \psi e \in S$ bir izomorfizmadır.
$(b) \Rightarrow (c)$ $\varphi \in S$ olsun. $\varphi M - 1_M M = M$ olduğundan, kabulden öyle bir $e^2 = e \in S$ vardır ki $\varphi - e$ bir izomorfizmadır ve $S\varphi \cap Se = 0$'dır. $\mu := \varphi - e$ alınırsa $\varphi = \mu + e$ ve $\S\varphi \cap Se = 0$ olur.
$(c) \Rightarrow (a)$ $\varphi \in S$ olsun. Kabulden, öyle bir $e^2 = e \in S$ ve bir $\mu \in S$ izomorfizması vardır ki $\varphi = \mu + e$ ve $S\varphi \cap Se = 0$ olur. $e\mu^{-1}\varphi = e\mu^{-1}(\mu + e) = e + e\mu^{-1}e$ olduğundan, $Se\mu^{-1}\varphi \subseteq S\varphi \cap Se = 0$ elde edilir. Buradan, $e\mu^{-1}\varphi = 0$'dır. $e = \varphi - \mu$ olduğundan, $\varphi = \varphi\mu^{-1}\varphi$ bulunur. □

Teorem 4.5.4(c)'den her birimsel endodüzenli modül temizdir. Örnek 4.5.5(i), temiz ve endodüzenli bir modülün birimsel endodüzenli olması gerekmediğini gösterir. Dahası, Örnek 4.5.5(ii), M modülünün temiz ve biçimsel olmasına rağmen, birimsel endodüzenli olmayabileceğini gösterir.

Örnek 4.5.5. [11, Example 2.5] (i) *Bir $\mathbb{F}$ cismi üzerindeki, sayılabilir sonsuz boyutlu bir $V_{\mathbb{F}}$ vektör uzayı endodüzenli ve temizdir. Ancak, birimsel endodüzenli değildir.*
(ii) $\mathbb{Z}_4$ *abel grubu verilsin.* $\mathbb{Z}_4$ *biçimsel ve yarı-injektiftir. Her yarı-injektif modül temiz olduğundan* $\mathbb{Z}_4$ *temizdir. Fakat* $\mathbb{Z}_4$ *birimsel endodüzenli bir modül değildir.*

4.6 Birimsel Endodüzenli Modüllerin Dik Toplamları

Bu altbölümde, iki veya daha fazla birimsel endodüzenli modülün dik toplamının ne zaman birimsel endodüzenli olabileceği üzerinde durulacaktır. Ayrıca, bir birimsel endodüzenli modülün, ayrıştırılamaz modüllerin dik toplamı olarak ifade edilebileceği durumlar incelenecektir.

Aşağıdaki örnekte, birimsel endodüzenli modülllerin dik toplamının birimsel endodüzenli olması gerekmediği gözlemlenmiştir.

Örnek 4.6.1. [11, Example 3.1] $A = \{(a_n) \in \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2|$ *hemen hemen her yerde* a_n *sabit*$\}$ *olsun.* $R = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$ *halkası ve* $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$ *elemanı verilsin.* $M = eR$ *ve* $N = (1-e)R$ *olsun.* M *ve* N *birimsel endodüzenli* R*-modüllerdir. Ancak,* $R_R = M \oplus N$ *birimsel endodüzenli bir* R*-modül değildir.*

Şimdi, birimsel endodüzenli modüllerin, bir sonlu dik toplamının birimsel endodüzenli olması için bir karakterizasyon verilecektir.

Teorem 4.6.2. [11, Theorem 3.3] $\{M_i\}_{1\leq i\leq n}$ *R-modüllerin sonlu bir kümesi olsun. O zaman,* $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ *birimsel endodüzenlidir ancak ve ancak her* i *için* M_i *birimsel endodüzenlidir ve* $1 \leq i, j \leq n$ *olmak üzere, her* i, j *için* M_i*,* M_j*-endodüzenlidir.*

Kanıt. $(\Rightarrow)$ Önerme 4.1.8'den ve Teorem 3.8.15'ten elde edilir.
$(\Leftarrow)$ Teorem 3.8.15'ten, $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ endodüzenli modüldür. Ayrıca, her bir M_i, Önteorem 4.2.8 gereğince, iç sadeleşme özelliğini sağlar. O zaman, $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ iç sadeleşme özeliğine sahiptir. Böylece, yine Önterem 4.2.8'den, $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ birimsel endodüzenlidir. □

Sonuç 4.6.3. (i) [11, Corollary 3.4] *M sıfırdan farklı bir modül ve $\mathcal{I}$ bir indeks kümesi olsun. O zaman, $M^{(\mathcal{I})}$ birimsel endodüzenli bir modüldür ancak ve ancak M birimsel endodüzenlidir ve $\mathcal{I}$ sonludur.*
(ii) [49, Corollary 3] R halkası birimsel düzenli ise, $e^2 = e \in R$ için eRe ve $n \in \mathbb{N}$ için $M_n(R)$ halkaları da birimsel düzenlidir.

Kanıt. (i) $M^{(\mathcal{I})}$ birimsel endodüzenli olsun. Önerme 4.1.8'den, M birimsel endodüzenlidir ve Önerme 4.2.13'ten doğrudan sonludur. Böylece, $\mathcal{I}$ sonludur. Tersi, Teorem 4.6.2'den açıktır.
(ii) R halkası birimsel düzenli olsun. Her $e^2 = e \in R$ için $eRe \cong End(eR)$ birimsel düzenli bir halkadır. R halkası birimsel düzenli olduğundan, $End(R)$ birimsel düzenli bir halkadır. $End(R^{(n)}) \cong Mat_n(R)$ olduğundan, $Mat_n(R)$ matris halkası da birimsel düzenlidir. □

Teorem 4.6.4. [11, Theorem 3.6] *$\mathcal{I}$ herhangi bir indeks kümesi, M_i ayrıştırılamaz bir modül ve $M = \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} M_i$ olsun. M modülü birimsel endodüzenli ise, $\mathcal{J}_k$ altkümelerinin bir ayrık birleşimi, $I = \biguplus_{k\in\Lambda} \mathcal{J}_k$'nın parçalanışı vardır ve aşağıdaki koşullar sağlanır:*
1) *Her bir $\mathcal{J}_k$ sonludur;*
2) *Her bir $\mathcal{J}_k$ ve $i, j \in \mathcal{J}_k$ için $M_i \cong M_j$ dir;*
3) *Her bir $k \in \Lambda$ için, $\bigoplus_{j\in J_k} M_j$ altmodülü M'de tamamen değişmezdir.*

Kanıt. 1) $\mathcal{J}_i = \{j \in \mathcal{J} | M_i \cong M_j\}$ kümesi verilsin. O zaman, Sonuç 4.6.3(i)'den $\mathcal{J}_i$ sonludur.
2) M birimsel endodüzenli olduğundan, Teorem 3.8.6'dan, her $i, j \in \mathcal{I}$ için M_i, M_j-endodüzenlidir. Eğer $Hom_R(M_i, M_j) \neq 0$ ise (örneğin, $\pi : M \to M_j$ doğal izdüşüm, $\iota_i : M_i \to M$ içerim dönüşümü ve $\varphi \in End_R(M)$ için $\pi_j \varphi \iota_i \neq 0$ ise), Önteorem 3.8.5'ten $M_i \cong M_j$ elde edilir.
3) $M_k \ncong M_l$ ancak ve ancak $\mathcal{J}_k \cap \mathcal{J}_L = \emptyset$ olduğundan, $\mathcal{I} = \biguplus_{k\in\Lambda} \mathcal{J}_k$ elde edilir. Eğer $k \neq l$ için $\bigoplus_{i\in\mathcal{J}_k} M_i$ modülünden $\bigoplus_{j\in\mathcal{J}_l} M_j$ modülüne sıfırdan farklı bir dönüşüm varsa, bir $k' \in \mathcal{J}_k$ ve $l' \in \mathcal{J}_l$ için M'_k'den M'_l'ye sıfırdan farklı bir dönüşüm elde edilir. Önteorem 3.8.5'ten $M_{k'} \cong M_{l'}$ çelişkisi elde edilir. Böylece, her bir $k \in \Lambda$ için, $\bigoplus_{i\in\mathcal{J}_k} M_i$ altmodülü M'de tamamen değişmezdir. □

Önerme 4.6.5. [11, Proposition 3.8] *$\mathcal{I}$ herhangi bir indeks kümesi olmak üzere, $\{M_j | j \in J\}$ sağ R-modüllerin bir sınıfı verilsin. Her bir $i \in \mathcal{I}$ için, $M_i \trianglelefteq \bigoplus_{j\in\mathcal{I}} M_j$ olsun. O zaman, $\bigoplus_{j\in\mathcal{I}} M_j$ birimsel endodüzenlidir ancak ve ancak her bir $j \in \mathcal{I}$ için M_j birimsel endodüzenlidir.*

Kanıt. Her bir $i \in \mathcal{I}$ için, M_i altmodülü $\bigoplus_{j\in\mathcal{I}} M_j$ modülünde tamamen değişmez olduğundan, $End_R(\bigoplus_{j\in\mathcal{I}} M_j) \cong \prod_{j\in\mathcal{I}} End_R(M_j)$ elde edilir. Buradan, $\prod_{j\in\mathcal{I}} End_R(M_j)$ birimsel düzenli halka olduğu için, $End_R(\bigoplus_{j\in\mathcal{I}} M_j)$ de birimsel düzenli bir halkadır. Böylece, $\bigoplus_{j\in\mathcal{I}} M_j$ bir birimsel endodüzenli modüldür. $\square$

Aşağıdaki örnek, sayılabilir sonsuz boyutlu her vektör uzayı birimsel endodüzenli olmamasına rağmen, sayılabilir sonsuz üretilmiş yarıbasit bir modülün, Önerme 4.6.5 gereğince, birimsel endodüzenli olabileceğini göstermektedir.

Örnek 4.6.6. [11, Example 3.9] *$R = \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ halkası ve $M = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ sağ R-modülü verilsin. i. bileşeni 1 ve diğerleri 0 olan $e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ...) \in End_R(M) \cong R$ eşkare elemanı alınsın. O zaman, her bir e_iR altmodülü $\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} e_iR$ modülünde tamamen değişmez olmak üzere, $M \cong \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} e_iR$ elde edilir. Buradan, M sayılabilir sonsuz üretilmiş bir birimsel endodüzenli R-modüldür. Ancak, M modülü $\mathbb{Z}$-modül ve $\mathbb{Z}_2$-modül olarak birimsel endodüzenli değildir.*

5. SONUÇ

Bu tezde, endomorfizma halkası düzenli ve birimsel düzenli olan modüller, Gangyong Lee, S. Tariq Rizvi, Cosmin Roman ve Xiaoxiang Zhang tarafından yazılan [5], [8] ve [11] makaleleri temel alınarak detaylı olarak incelenmiştir.

Endomorfizma halkaları ile ilgili çalışmaların önemi, halkaların abel grupların endomorfizma halkası yardımıyla temsil edilebilmesinden ve örnek inşa ederken bazı modüllerin endomorfizma halkalarından yararlanılabilmesinden kaynaklanmaktadır. Buna bağlı olarak, endomorfizma halkası bazı düzenlilik koşullarını sağlayan halkalar üzerinde yapılan çalışmalar da son yıllarda oldukça ilgi görmektedir. Özellikle, değişmeli halkalar üzerinde bu tip modül sınıfları daha detaylı incelenmeye başlanmıştır. Buna rağmen, literatürde açık olan sorular bulunmaktadır. Örneğin, herhangi bir modülün endomorfizma halkasının birimsel düzenli Baer olmasının iki yönlü CS düzenli halka olması ile denkliği bilinmemektedir. Bu denkilk, sadece abel gruplar üzerinde ispatlanmıştır ([11]).

KAYNAKLAR

[1] L. Fuchs. *Abelian Groups*. Budapest: Publishing House of the Hungarian Academiy of Sciences, **1958**.

[2] S. Glaz and W. Wickless. Regular and principal projective endomorphism rings of mixed abelian groups. *Commun. Algebra*, 22:1161–1176, **1994**.

[3] K. M. Rangaswamy. Abelian groups with endomorphic images of special types. *J. Algebra*, 6:271–280, **1967**.

[4] R. Ware. Endomorphisms rings of projective modules. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 155:233–256, **1971**.

[5] G. Lee, S. T. Rizvi, and C. Roman. Modules whose endomorphism rings are von neumann regular. *Comm. Algebra*, 41:4066–4088, **2013**.

[6] G. Ehrlich. Unit-regular rings. *Port. Math.*, 27:209–212, **1968**.

[7] G. Ehrlich. Units and one-sided units in regular rings. *Trans. Am. Math. Soc.*, 216:81–90, **1976**.

[8] X. Zhang and G. Lee. Modules whose endomorphism rings are unit-regular. *Comm. Algebra*, 44(2):697–709, **2015**.

[9] D. D. Anderson and J. R. Juett. Endoregular modules. *J. Pure and Appl. Algebra*, 225:106475, **2021**.

[10] M. Medina-Barcenas and H. Sim. Abelian endoregular modules. *J. Algebra Appl.*, page https://doi.org/10.1142/S0219498820502023, **2020**.

[11] X. Zhang and G. Lee. Characterizations and direct sums of unit-endoregular modules. *Proc. Edinburg Math. Soc.*, doi:10.1017/S0013091518000135:1–10, **2018**.

[12] T.Y. Lam. A crash course on stable range, cancellation, substution, and exchange. *J. Algebra Appl.*, 03(03):301–343, **2004**.

[13] S. H. Mohamed and B. J. Müller. *Continuous and Discrete Modules*. London Mathematical Society Lecture Note Series, 147. Cambridge University Press, Cambridge, **1990**.

[14] L. N. Vaserstein. Stable rank of rings on dimensionality of topological spaces. In *Functional Analysis And Its Applications*, 5, pages 102–107. **1971**.

[15] L.N. Vaserstein. Bass's first stable range condition. *J. Pure Appl. Algebra*, 34:319–330, **1984**.

[16] H.V. Chen and A.Y.M. Chin. A note on regular rings with stable range one. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 31(7):449–450, **2001**.

[17] W.K. Nicholson and E. Sanchez Campos. Morphic modules. *Comm. Algebra*, 33(8):2629–2647, **2005**.

[18] K. R. Goodearl. *Von Neumann Regular Rings*. Monographs and Studies in Mathematics; 4. Pitman Publishing Limited, **1979**.

[19] J. Zelmanowitz. Regular modules. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 163(0):341–355, **1972**.

[20] W.K. Nicholson. Lifting idempotents and exchange rings. *Trans. Amer. Math. Soc.*, (229):269–278, **1977**.

[21] V. Camillo and D. Khurana. A characterization of regular rings. *Comm. Algebra*, 29(5):2293–2295, **2001**.

[22] G. Azumaya. On generalized semi-primary rings and krull-remak-schmidt's theorem. *Japan J. Math.*, 19:525–547, **1948**.

[23] G. Lee, S. T. Rizvi, and C. Roman. Rickart modules. *Comm. Algebra*, 38:4005–4027, **2010**.

[24] G. Lee, S. T. Rizvi, and C. Roman. Dual rickart modules. *Comm. Algebra*, 39:4036–4058, **2011**.

[25] S. M. Khuri. Endomorphism rings and lattice isomorphisms. *J. Algebra*, 56(2):401–408, **1979**.

[26] R. Ware and J. Zelmanowitz. Simple endomorphism rings. *Amer. Math. Monthly*, 77:987–989, **1970**.

[27] M. Alkan and A. Harmancı. On summand sum and summand intersection property of modules. *Turk J. Math*, 26:131–147, **2002**.

[28] G.V. Wilson. Modules with the summand intersection property. *Comm. Algebra*, 14(1):21–38, **1986**.

[29] J.L. Garcia. Properties of direct summands of modules. *Comm. Algebra*, 37:73–92, **1989**.

[30] G. Lee, S.T. Rizvi, and C.S. Roman. Direct sum of rickart modules. *J. Algebra*, 37:62–78, **2012**.

[31] K.A. Byrd. Rings whose quasi-injective modules are injective. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 33(2):235–240, **1972**.

[32] F. W. Anderson and K. R. Fuller. *Rings and Categories of Modules*. Graduate Texts in Mathematics, 13. Springer-Verlag, **1992**.

[33] I. Kaplansky. Topological representation of algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 68:62–75, **1950**.

[34] G. Azumaya. Strongly π-regular rings. *J. Fac. Sci. Hokkaido Univ.*, 13:34–39, **1954**.

[35] F. Dischinger. Sur les anneaux fortement π-reguliers. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A*, 283:571–573, **1976**.

[36] E. P. Armendariz, J. W. Fischer, and R. L. Snider. On injective and surjective endomorphisms of finitely generated modules. *Comm. Algebra*, 6(7):659–672, **1978**.

[37] S.T. Rizvi and C.S. Roman. Baer ve quasi-baer modules. *Comm. Algebra*, 32:103–123, **2004**.

[38] D.K. Tütüncü and Tribak R. On dual baer modules. *Glasg. Math. J.*, 52:261–269, **2010**.

[39] F. Kasch and A Mader. Regularity and substructures of hom. *Comm. Algebra*, 34(4):1459–1478, **2006**.

[40] T.Y. Lam. *A First Course in Noncommutative Rings*. Vol.131. Springer Verlag,Berlin-Heidelberg-New York, **1991**.

[41] T.Y. Lam. *Lectures on Modules and Rings*. GTM 189. Berlin-Heidelberg -New York:Springer Verlag, **1999**.

[42] Y. Hirona and J. Park. Rings for which the converse of schur's lemma holds. *Math. J. Okayama Univ.*, 33:121–131, **1991**.

[43] F. Couchot. Modules with rd-composition series over a commutative ring. *Comm. Algebra*, 31(7):3171–3194, **2003**.

[44] T.Y. Lam. *Exercises in Classical Ring Theory*. Second Edition. Springer, **1942**.

[45] R.T. Bumby. Modules which are isomorphic to submodules of each other. *Arch. Math.*, 16(0):184–185, **1965**.

[46] B.J. Müller and S.T. Rizvi. On injective and quasicontinious modules. *J.Pure Appl. Algebra*, 28(2):197–210, **1983**.

[47] G.F. Birkenmeier, J.K. Park, and S.T Rizvi. *Extensions of Rings and Modules*. New York-Heidelberg-Dordrecht-London:Birkhausrt/Springer, **2013**.

[48] M.J. Canfell. Completion of saving diagrams by automorphisms and bass' first stable condition. *J. Algebra*, (176(2)):480–503, **1995**.

[49] D. Handelman. Perspectivity and cancellation in regular rings. *J. Algebra*, (48(1)):1–16, **1977**.