ADJOİNT GRUBU NİLPOTENT OLAN ARTİNİAN HALKALAR

ARTINIAN RINGS WITH NILPOTENT ADJOINT GROUP

DUYGU GÜLŞAH BAŞARAN

PROF. DR. FERİDE KUZUCUOĞLU
Tez Danışmanı

Hacettepe Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin
Matematik Anabilim Dalı için Öngördüğü
YÜKSEK LİSANS TEZİ
olarak hazırlanmıştır.

Mayıs 2022

ÖZET

ADJOİNT GRUBU NİLPOTENT OLAN ARTİNİAN HALKALAR

Duygu Gülşah Başaran
Yüksek Lisans, Matematik Bölümü
Danışman: Prof. Dr. Feride KUZUCUOĞLU
Mayıs 2022, 96 sayfa

Bu çalışma dört ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm tez konusunun tarihsel gelişimi ve tezde yapılanlardan oluşmaktadır.

İkinci bölümde , bu tezin hedef aldığı konunun anlaşılması için gerekli olan modül teorisi ve halkalar teorisi ile ilgili bazı tanım ve teoremler verilmiştir. Bu tanım ve teoremler için Herstein'ın "Noncommutative Rings" [10] adlı kitabı ile Lam ' ın " A first course in commutative rings" [15] adlı kitaplarından geniş ölçüde faydalanılmıştır.

Üçüncü bölümde adjoint grubu değişmeli olan yarı-mükemmel halkaların bir karakterizasyonu verilmiştir.

Tezin dördüncü bölümünde R halkası Artin halka olduğunda R nin adjoint grubunun nilpotent olması durumu çalışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Halka, Modül, Artin Halka, Yarı-basit Halka, Jacobson Radikali, Yarı-Mükemmel Halka, Adjoint Grup, Nilpotent Grup

ABSTRACT

ARTINIAN RINGS WITH NILPOTENT ADJOINT GROUP

Duygu Gülşah BAŞARAN
Master of Science, Department of Mathematics
Supervisor: Prof. Dr. Feride KUZUCUOĞLU

May 2022, 96 pages

This study consists of four main parts. In the first section of the study , informations about historical development and content of the thesis are given.

In the second section, some definitions and theorems related to module theory and ring theory, which are necessary for the target and subject of this thesis to be to understood well are given. For these definitions and theorems, Herstein's book "Noncommutative Rings" [10] and Lam's "A first course in commutative rings" [15] have been widely used.

In the third section, the characterization of semi-perfect rings with commutative adjoint group is given.

In the fourth part of the thesis, the case of adjoint group of R being nilpotent when R ring is Artin ring is studied.

Keywords: Ring, Module, Artinian Ring, Semisimple Ring, Jacobson Radical, Semiperfect Ring, Adjoint Group , Nilpotent Group

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde, değerli bilgilerini benimle paylaşan, bana kıymetli zamanını ayırıp sabırla ve büyük bir ilgiyle bana faydalı olabilmek için elinden gelenden fazlasını sunan değerli hocam Prof. Dr. Feride KUZUCUOĞLU'na,

tezimi değerlendirmek üzere bana vakit ayıran jüri üyeleri Prof. Dr. Ali ERDOĞAN, Prof. Dr. Evrim AKALAN , Doç. Dr. Pınar AYDOĞDU ve Doç. Dr. Ebru SOLAK hocalarıma,

bilgi ve hoşgörüsüyle beni bu yola çıkmaya teşvik eden saygıdeğer Dr. Melis TEKİN AKÇİN hocama,

beni bu günlere sevgi ve saygı kelimelerinin anlamlarını bilecek şekilde yetiştirerek getiren ve benden hiçbir zaman desteğini esirgemeyen bu hayattaki en büyük şansım olan aileme,

çalışmamda bana yardımda bulunarak yol gösteren ve gelecekteki hayatında çok daha başarılı olacağına inandığım arkadaşım Arş. Gör. Necati Can AÇIKGÖZ'e,

ve son olarak tezin yazımı ve hazırlanmasında emeği geçen isimlerini sayamadığım herkese yardımları için, sonsuz teşekkürler.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

o	:	Adjoint Çarpım
$[,]$	:	Lie Çarpım
$A(M)$	:	M Modülünün Sıfırlayanı
R^o	:	R Halkasının Adjoint Grubu
$J(R)$	:	R Halkasının Jacobson Radikali
$Z(R)$	:	R Halkasının Merkezi
Çekf	:	f Homomorfizmasının Çekirdek Kümesi
$Gör f$	:	f Homomorfizmasının Görüntü Kümesi
$E(M)$	:	M R-modülünün endomorfizma halkası
$C(M)$	:	M R-modülünün değişmeli halkası
$Hom_R(M,N)$	:	M'den N'ye giden tüm R-homomorfizmaların kümesi
$\mathbb{R}$	:	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{Z}$	:	Tam Sayılar Kümesi
$\mathbb{N}$	:	Doğal Sayılar Kümesi
$Z_n(R)$	:	R Lie halkasının üst merkez serisi
$boy_\Delta V$	:	Δ üzerindeki V vektör uzayının boyutu

1. GİRİŞ

1940' ların ortalarında Nathan Jacobson halkalar, yarı gruplar ve gruplar arasındaki önemli bir bağlantıyı ortaya koydu (Bkz.[13]). R herhangi bir halka olmak üzere R üzerinde her $a, b \in R$ için

$$aob = a + b + ab$$

şeklinde yeni bir "o" işlemi tanımlansın. Her halka bu "o" işlemine göre bir yarı-gruptur. Her elemanının bu işleme göre tersinir olması gerekmez. Eğer R halkası bu işleme göre bir grup olursa (R, o) ikilisine R halkasının adjoint grubu denir ve R^o ile gösterilir. R halkası birimli olduğunda R'nin tersinir elemanlarından oluşan R^* grubu ile R^o grubu birbiriyle eş yapılıdır (Bkz.3.1). Eğer $R^o = R$ ise R halkasına Jacobson anlamında radikal halka denir. Radikal halkalar birimli olamaz. R halkasında alınan herhangi n tane elemanın çarpımı sıfır ise R'ye nilpotent halka, bu n lerin en küçüğüne de R halkasının nilpotentlik sınıfı denir. Bütün nilpotent halkaların radikal halka olduğu açıktır. Watters [21], R'nin halka teoritik özellikleri ile R'nin adjoint grubu R^o ın grup teorik özellikleri arasındaki bağlantıları ortaya koydu. Jennings [14] , R radikal halkası Lie nilpotent olduğunda R nin adjoint grubunun nilpotent olmasının gerek ve yeter koşul olduğunu gösterdi ve bu makalesinde nilpotentlik sınıflarının aynı olup olmadığı savını ortaya koydu. Yaklaşık 37 yıl sonra Du [4] bu savın doğruluğunu kanıtladı.

$J(R)$ kümesi R halkasının Jacobson radikalini göstermek üzere $R/J(R)$ yarı-basit halkasının eşkareleri R halkasına yükseltilebiliyorsa R'ye yarı-mükemmel bir halka denir. R halkası birimli ve tek maksimal sol ideale sahipse R ye lokal (sol) halka denir. Bu çalışmanın üçüncü bölümünde temel olarak aşağıdaki teorem ispatlanmıştır.

Teorem 3.1.12. R bir yarı-mükemmel halka ve R nin adjoint grubu R^o değişmeli olsun. Bu durumda, T sonlu sayıda değişmeli yerel halkaların dik toplamını ve A değişmeli radikal halkayı ($A = J(A)$) göstermek üzere, R halkası $T \oplus A \oplus \begin{bmatrix} S & X \\ Y & 0 \end{bmatrix}$ halkası ile eşyapılıdır. Burada S, çarpımsal grubu S^* değişmeli olmak üzere ayrıştırılamaz yarı-mükemmel bir halkayı, X ve Y de G-unital S-modülleri temsil etmektedir.

Yukarıdaki teoremin de yer aldığı Nicholson'ın [18] makalesinde ayrıca R'nin adjoint grubu R^o sonlu üretilmiş olduğunda R yerel halkasının sonlu ve değişmeli olmasının gerek ve yeter koşul olduğu gösterilmiştir. Biz üçüncü bölümde Nicholson'ın bu makalesini ayrıntılarıyla ele aldık.

Şimdi R sağ Artin bir halka ve $Z(R)$, R halkasının merkezi olsun. Bu tezin son bölümünde Evstaf'ev'in [5] makalesi çalışılmış ve temel olarak aşağıdaki teorem kanıtlanmıştır.

Teorem 4.1: R sağ Artin bir halka olsun. R'nin adjoint grubu R^o nilpotent ve $Z(R) + R^o$ kümesinin R'yi halka olarak üretmesi için gerek ve yeter koşul her biri nilpotent halka ya da çarpımsal grubu nilpotent olan yerel halkalar olmak üzere R nin sonlu sayıda idealin bir dik toplamı olmasıdır.

2. ÖN BİLGİLER VE TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, halka ve modül teorisinde yer alan ve daha sonraki bölümlerde gerekli olan temel tanımlara ve ilgili teoremlere yer verilmiştir. Tez boyunca R herhangi bir halkayı temsil edecek, birimli ve değişmeli olması durumunda bu belirtilecektir.

2.1 Modüller

Tanım 2.1.1. R bir halka ve $(M, +)$ değişmeli grup olsun.

$$\begin{aligned} \cdot : M \times R &\mapsto M \\ (m, r) &\mapsto m.r \end{aligned}$$

ile tanımlanan işlem $r_1, r_2, r \in R$ ve $m_1, m_2, m \in M$ için

(i) $(m_1 + m_2).r = m_1.r + m_2.r$

(ii) $m.(r_1 + r_2) = m.r_1 + m.r_2$

(iii) $m.(r_1.r_2) = (m.r_1).r_2$

koşullarını sağlıyorsa M'ye bir *sağ R-modül* denir. Yukarıdaki üç koşula ek olarak $1_R \in R$ ve $m.1_R = m$ koşulu sağlanıyorsa M *birimsel sağ R-modül* olarak adlandırılır.

Her toplamsal değişmeli grup bir $\mathbb{Z}$-modüldür. Ayrıca eğer değişmeli gruba etki eden halka bir cisim olursa bu durumda bu tanım vektör uzayı tanımı ile çakışır.

R herhangi bir halka ve ρ, R'nin bir sağ ideali olsun. R nin ρ üzerindeki etkisini R halkasında ki elemanların çarpımı olarak tanımlarsak, yani

$$\begin{aligned} \cdot : \ \rho \times R &\longrightarrow \rho \\ (a, r) &\longrightarrow a.r \end{aligned}$$

ise ρ sağ ideali bir sağ R-modül olur. Ek olarak, R halkasının ρ sağ idealini kullanarak tanımlanan

$$\begin{array}{rccc} \cdot: & R/\rho \times R & \longrightarrow & R/\rho \\ & ((x+\rho), r) & \longrightarrow & x.r+\rho \end{array}$$

işleme göre R/ρ bir sağ R-modül olur.

Tanım 2.1.2. M bir R-modül olsun. M modülünün *sıfırlayanı*

$$A(M) = \{x \in R \,|Mx = 0\,\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.3. M bir R-modül olsun. $Mr = 0$ olduğunda $r = 0$ ise M'ye *faithful R-modül* denir.

Teorem 2.1.4. *M bir R-modül olsun. M modülünün sıfırlayanı $A(M)$, R halkasının iki yönlü idealidir. Ek olarak M, faithful $R/A(M)-$modüldür.*

Kanıt. $a, b \in A(M)$ olsun. Bu durumda tanımdan $Ma = 0 = Mb$ dir. Buradan $Ma - Mb = M(a-b) = 0$ olduğundan $a - b \in A(M)$ dir. $r \in R$ ve $a \in A(M)$ olsun. Bu durumda $M.(a.r) = (M.a).r = 0.r = 0$ ve $M.(r.a) = (M.r).a \subset Ma = 0$ olur. Dolayısıyla $a.r$ ve $r.a \in A(M)$ dir. Sonuç olarak $A(M)$ kümesi , R halkasının iki yönlü bir idealidir.
$m \in M$ ve $r + A(M) \in R/A(M)$ olmak üzere

$$\begin{array}{rccc} \cdot: & M \times R/A(M) & \longrightarrow & M \\ & (m, r+A(M)) & \longrightarrow & m.r \end{array}$$

ile tanımlanan işleme göre M , $R/A(M)$-modüldür.
Şimdi her $m \in M$ için $m.(r + A(M)) = 0$ olsun. Bu durumda tanımdan $m.r = 0$ dır yani , $r \in A(M)$ dir. Sonuç olarak M, faithful $R/A(M)-$modüldür. $\square$

Ön Teorem 2.1.5. *R bir halka ve M bir sağ R-modül olmak üzere $R/A(M)$ halkası, M' nin endomorfizm halkası $E(M)$' nin bir alt halkasına izomorftur. Özel olarak eğer M faithful R-modül ise R halkası M'nin endomorfizm halkasının bir alt halkasıdır.*

Kanıt. M bir sağ R-modül olsun. Her $a \in R$ ve her $m \in M$ için $T_a: M \longrightarrow M$ dönüşümü $T_a(m) = m.a$ olarak tanımlansın. M bir R-modül olduğundan $m_1, m_2 \in M$ için $T_a(m_1 + m_2) = (m_1 + m_2).a = m_1.a + m_2.a = T_a(m_1) + T_a(m_2)$ olur yani T_a bir grup endomorfizmasıdır. $E(M)$ kümesi M toplamsal değişmeli grubunun tüm endomorfizmalarının kümesi olsun. $E(M)$ kümesi aşağıdaki işlemlerle bir halkadır :
$\Phi, \Psi \in E(M)$ ve $m \in M$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \Phi + \Psi &: (\Phi + \Psi)(m) = \Phi(m) + \Psi(m) \\ \Phi.\Psi &: (\Phi.\Psi)(m) = \Phi(\Psi(m)) \end{aligned}$$

Dolayısıyla $\Lambda: R \longrightarrow E(M)$, $\Lambda(a) = T_a$ bir halka homomorfizmasıdır. Şimdi $a \in A(M)$ olsun. Sıfırlayan tanımından $Ma = (0)$ dır. Dolayısıyla $0 = T_a = \Lambda(a)$ dır yani, $a \in$ Ç$ek(\Lambda)$ olur. Şimdi $a \in$ Ç$ek(\Lambda)$ olsun. Bu durumda $\Lambda(a) = T_a = 0$ dır. Her $m \in M$ için $T_a(m) = m.a = 0$ olduğundan $Ma = (0)$ dır. Böylece $a \in A(M)$ elde edilir. Sonuç olarak bu homomorfizmanın çekirdeği Ç$ek(\Lambda) = A(M)$ dir. Birinci izomorfizma teoreminden $Gör(\Lambda) \cong R/A(M)$ elde edilir. Sonuç olarak $R/A(M)$ halkası, M' nin endomorfizm halkası $E(M)$' nin bir alt halkasına izomorftur. $\square$

Tanım 2.1.6. M bir sağ R-modül olmak üzere $C(M) = \{\Psi \in E(M) \mid \forall a \in R \; için \; \Psi T_a = T_a \Psi\}$ kümesine R'nin M üzerindeki *değişmeli halkası* denir.

M'den M'ye birim endomorfizmayı düşünürsek $C(M) \neq \varnothing$ dır. Şimdi Ψ, Ψ_1, $\Psi_2 \in C(M)$ ve $m \in M$ olsun. Bu durumda her $a \in R$ için $T_a(\Psi_1 - \Psi_2) = T_a(\Psi_1) - T_a(\Psi_2)$ dir. Ayrıca $\Psi \in C(M)$ ise her $m \in M$ ve $a \in R$ için $mT_a = m.a$ şeklinde modül elemanı sola yazılarak gösterildiğinde

$$(m\Psi)a = (m\Psi)T_a = m(\Psi T_a) = m(T_a \Psi) = (mT_a)\Psi = (ma)\Psi$$

olduğundan Ψ yalnızca M toplamsal grubunun endomorfizması değil aynı zamanda M den M ye R-modül homomorfizması da olur. Dolayısıyla $C(M), E(M)$'nin bir alt halkasıdır.

Tanım 2.1.7. M bir sağ R-modül olsun. Eğer $MR \neq (0)$ ve M'nin alt modülleri sadece (0) ve M ise M'ye *indirgenemez (basit) R-modül* denir.

Teorem 2.1.8. *(Schur's Lemma) R bir halka olsun. Eğer M indirgenemez sağ R-modül ise $C(M)$ bir bölümlü halkadır.*

Kanıt. İlk olarak $C(M)$ halkasının sıfırdan farklı her elemanının tersinir olduğunu gösterelim. Bunun için $0 \neq \theta \in C(M)$ elemanının $E(M)$ de tersinir olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Şimdi $0 \neq \theta \in C(M)$ olsun. Eğer $W = M\theta$ ise her $r \in R$ için

$$Wr = WT_r = (M\theta)T_r = M(\theta T_r) = M(T_r\theta) = (MT_r)\theta \subset M\theta = W$$

dır. Her $r \in R$ için $Wr \subset W$ olduğundan $W = M\theta$ kümesi M'nin alt modülüdür. Ek olarak M bir indirgenemez R-modül ve $\theta \neq 0$ olduğundan W alt modülü M ye eşit olmalıdır yani $W = M\theta = M$ dir. Böylece θ endomorfizması örtendir. Ayrıca Ç$ek\theta$ da M'nin bir alt modülü olduğundan Ç$ek\theta = 0$ veya Ç$ek\theta = M$ dir. $\theta \neq 0$ olduğu için Ç$ek\theta \neq M$ olur. O halde Ç$ek\theta = 0$ dır. Sonuç olarak θ endomorfizması birebir ve örten olduğundan $\theta^{-1} \in C(M)$ dir. O halde $C(M)$ bir bölümlü halkadır. □

Ön Teorem 2.1.9. *M bir sağ R-modül olmak üzere eğer M indirgenemez R-modül ise R'nin bir ρ maksimal sağ ideali için M modülü R/ρ ya izomorftur. Tersine R 'nin her ρ maksimal sağ ideali için R/ρ indirgenemez R-modüldür. Ayrıca her $x \in R$ için $x - ax \in \rho$ olacak şekilde bir $a \in R$ vardır.*

Kanıt. M indirgenemez R-modül olduğu için tanımdan $MR \neq (0)$ dır. $S = \{u \in M \mid uR = (0)\}$, M'nin bir R-alt modülüdür ve M'ye eşit olmadığından $S = 0$ dır. Buna eşdeğer olarak eğer $m \neq 0$ ise $mR \neq 0$ dır. M indirgenemez R-modül olduğu için $mR = M$ dir. Şimdi $\Psi : R \longrightarrow M$, $\Psi(r) = m.r$ tanımlayalım. Ψ örten bir modül homomorfizmasıdır . Ç$ek\Psi = \{x \in R | \Psi(x) = m.x = 0\}$ kümesi R halkasının bir sağ idealidir. Bu sağ ideal ρ olsun. Birinci izomorfizma teoreminden $R/\rho \cong M$ dir. Ek olarak ρ, R'nin maksimal sağ idealidir. Son olarak $mR = M$ olduğundan bir $a \in R$ elemanı için $ma = m$ dir. Buradan her $x \in R$ için $max = mx$ olduğundan $m.(x - ax) = 0$ olur. Sonuç olarak $x - ax \in$ Ç$ek\Psi = \rho$

dir. Şimdi tersine ρ, R'nin maksimal sağ ideali olsun. Bu durumda maksimallikten $\rho \neq R$ dir. Dolayısıyla $(R/\rho)R \neq (0)$ dır. R/ρ nun bir alt modülü N/ρ olsun. Burada $\rho \leq N \leq R$ olduğundan ρ idealinin maksimalliğinden $N = R$ veya $N = \rho$ olur. Buradan $N/\rho = (0)$ veya $N/\rho = R/\rho$ dur. Sonuç olarak R/ρ indirgenemez R-modüldür. $\square$

2.2 Jacobson Radikali

Tanım 2.2.1. R bir halka olsun. R'nin bütün indirgenemez modülerini sıfırlayan elemanların oluşturduğu kümeye R halkasının *Jacobson radikali* denir ve $J(R)$ ile gösterilir.

M indirgenemez R-modül olmak üzere $J(R) = \cap A(M)$ şeklinde ifade edilir. $A(M)$ kümesi R halkasının iki yönlü ideali olduğu için $J(R)$ Jacobson radikali de iki yönlü idealdir. Eğer R halkasında indirgenemez modül yoksa $J(R) = R$ olur. Bu durumda R halkasına Jacobson anlamında *radikal halka* denir.

Bir önceki ön teoremde ρ, R'nin maksimal sağ ideali olmak üzere, indirgenemez her R-modülün R/ρ ya izomorf olduğu ve her $x \in R$ için $x - ax \in \rho$ olacak şekilde bir $a \in R$ elemanının varlığı gösterildi. Şimdi bu motivasyonla aşağıdaki tanımı vereceğiz.

Tanım 2.2.2. R bir halka ve ρ, R'nin sağ ideali olmak üzere her $x \in R$ için $x - ax \in \rho$ olacak şekilde bir $a \in R$ varsa ρ'ya *regüler ideal* denir.

Özel olarak eğer R halkası birimli ise , her $x \in R$ için $x - 1.x \in \rho$ olacak şekilde $1 \in R$ var olduğundan her ρ maksimal sağ ideali regülerdir.

Tanım 2.2.3. R bir halka ve ρ, R'nin sağ ideali olmak üzere $(\rho : R) = \{x \in R \mid Rx \subset \rho\}$ şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.2.4. *R bir halka olsun. ρ, R halkasının tüm maksimal regüler sağ ideallerini göstermek üzere $J(R) = \cap(\rho : R)$ dir. Ayrıca, $(\rho : R)$ kümesi ρ içinde yer alan en büyük iki yönlü idealdir.*

Kanıt. ρ, R'nin tüm maksimal regüler sağ ideallerini göstermek üzere $M = R/\rho$ olsun. Eğer $x \in A(M)$ ise $Mx = (0)$ dır. $M = R/\rho$ olduğundan her $r \in R$ için $(r + \rho).x = \rho$ dur. Buradan $r.x \in \rho$ yazılır. Dolayısıyla $Rx \subset \rho$ yani, $x \in (\rho : R)$ dır. Şimdi tersine $x \in (\rho : R)$ olsun. Tanımdan $Rx \subset \rho$ dır. Bu durumda her $r \in R$ için $r.x \in \rho$ dir. Buradan $r.x + \rho = \rho$ yani, $(r + \rho).x = \rho$ olur. Dolayısıyla $x \in A(R/\rho) = A(M)$ dır. İki yönlü kapsamadan $(\rho : R) = A(M)$ elde edilir.

Şimdi eğer $x \in (\rho : R)$ ise $Rx \subset \rho$ olduğundan $a \in R$ için $ax \in Rx \subset \rho$ dir. Buradan $x - ax \in \rho$ ve $ax \in \rho$ olduğu için $x \in \rho$ elde edilir. Sonuç olarak $(\rho : R) \subset \rho$ dir yani $A(M) = (\rho : R)$, ρ içinde yer alan R'nin en büyük iki yönlü idealidir. □

Ön Teorem 2.2.5. *R bir halka olsun. Eğer ρ, R'nin regüler sağ ideali ise bu durumda ρ R'nin bir maksimal regüler sağ idealine gömülebilir.*

Kanıt. ρ, R'nin regüler sağ ideali olduğundan her $x \in R$ için $x - ax \in \rho$ olacak şekilde bir $a \in R$ vardır. Eğer $a \in \rho$ olursa ideal tanımından $x \in R$ için $ax \in \rho$ olur. Buradan $x - ax \in \rho$ ve $ax \in \rho$ olduğu için $x \in \rho$ elde edilir. Her $x \in R$ için $x \in \rho$ olduğundan $R = \rho$ dir. Bu bir çelişkidir çünkü , önceki teoremde $(\rho : R)$ kümesinin, ρ içinde yer alan R nin en büyük iki yönlü ideali olduğu gösterildi. Eğer $R = \rho$ olursa $(\rho : R) = R$ olur. Fakat $(\rho : R)$ maksimal ideal olduğu için halkanın kendisinden farklı olmalıdır. Sonuç olarak ρ , R'nin regüler ideali iken $\rho \neq R$ dir. Bu yüzden $a \notin \rho$ dur. M, R' nin ρ 'yu içeren tüm sağ ideallerinin kümesi olsun. $\rho' \in M$ olduğunda $a \notin \rho'$ dür. Aksi takdirde $a \in \rho'$ olursa her $x \in R$ için ρ' nun regülerliğinden $x - ax \in \rho \subset \rho'$ yazarız. Buradan ise $x - ax \in \rho'$ dür. Fakat $a \in \rho'$ ve $x \in R$ için ρ' ideal olduğundan $ax \in \rho'$ olur ve yukarıdakine benzer olarak bu bir çelişkidir. Bu nedenle $a \notin \rho'$ dir. Zorn Lemma'dan M içinde bir ρ_o maksimal ideali vardır. $x - ax \in \rho \subset \rho_o$ olduğundan ρ_o regüler idealdir. Sonuç olarak ρ, R'nin bir maksimal regüler sağ idealine gömülebilir. □

Teorem 2.2.6. *R bir halka olsun. ρ , R'nin bütün maksimal regüler sağ ideallerini göstermek üzere $J(R) = \cap\rho$ dir.*

Kanıt. (2.2.4) de ρ, R halkasının tüm maksimal regüler sağ ideallerini göstermek üzere $J(R) = \cap(\rho : R)$ ve $(\rho : R) \subset \rho$ olduğu gösterildi. O halde $\cap(\rho : R) \subset \cap\rho$ dir. Buradan

$J(R) \subset \cap\rho$ elde edilir. Tersine $\Gamma = \cap\rho$ olsun ve $x \in \Gamma$ alalım. $\{\, xy{+}y \ \mid y \in R\,\}$ kümesi R ye eşittir. Aksi halde bir regüler sağ ideal olarak $(a = -x)$ bir önceki ön teoremden maksimal regüler ρ_o ideali tarafından içerilir. $x \in \Gamma$ olduğundan $xy{+}y \in \rho_o$ olur. Aynı zamanda $y \in R$ ve $x \in \cap\rho$ iken $xy \in \cap\rho \subset \rho_o$ olacağından $xy \in \rho_o$ ve dolayısıyla $y \in \rho_o$ elde edilir. Fakat ρ_o maksimal ideal olduğundan bu bir çelişkidir. Sonuç olarak $\{xy + y \mid y \in R\}$ kümesi R ye eşittir. Özel olarak bir $w \in R$ için , $-x = xw + w$ yani $x + w + xw = 0$ dir. $\Gamma \nsubseteq J(R)$ ise bir M indirgenemez R-modül için $M\Gamma \neq (0)$ dır. Dolayısıyla bir $m \in M$ için $m\Gamma \neq 0$ dır. M indirgenemez R-modül ve $m\Gamma \neq (0)$ alt modülü olduğundan $m\Gamma = M$ dir. Bir $t \in \Gamma$ için $mt = -m$ yazılır. Ayrıca $t \in \Gamma$ için $\{ty + y \mid y \in R\} = R$ olduğunu da kullanarak bir $s \in R$ için $ts + s \in R$ yazarız. $-t \in R$ için $ts + s = -t$ yani $t + s + ts = 0$ elde edilir. Buradan

$$0 = m.(t{+}s{+}ts) = m.(ts){+}m.s{+}m.t = (m.t)s{-}m{+}m.s = (-m).s{-}m{+}m.s = -m$$

yazılır. Fakat $\Gamma \nsubseteq J(R)$ olduğunda $M\Gamma \neq (0)$ dır. Dolayısıyla bu bir çelişkidir. Sonuç olarak $\Gamma = \cap\rho \subset J(R)$ yani , $J(R) = \cap\rho$ dir. $\square$

İspatın ikinci kısmında, her $x \in \cap\rho = J(R)$ için $x + y + xy = 0$ olacak şekilde bir $y \in R$ elemanının var olduğunu gördük. Şimdi aşağıdaki tanımı verebiliriz.

Tanım 2.2.7. R bir halka ve $a \in R$ olsun. Eğer $a + a' + aa' = 0$ olacak şekilde bir $a' \in R$ elemanı varsa a ya *sağ quasi regüler eleman* denir. Buradaki a' elemanına a'nın *sağ quasi tersi* denir. Sol quasi regülerlik de benzer şekilde tanımlanabilir.

Bir a elemanı R de hem sol hem de sağ quasi regüler olduğunda a nın sol ve sağ quasi tersleri eşittir. Özel olarak eğer R halkası birimli ise bir $a \in R$ elemanının sağ quasi regüler olması için gerek ve yeter koşul $1 + a$ elemanının R de sağ tersinir eleman olmasıdır. Örneğin $\mathbb{Z}$ tam sayılar halkasında 0 ve -2 elemanları quasi regülerdir.

Tanım 2.2.8. R bir halka ve ρ, R'nin bir sağ ideali olsun. ρ nun her elemanı sağ quasi regüler ise bu durumda ρ *sağ quasi regüler sağ ideal* olarak adlandırılır.

Yukarıda verilen tanım ele alındığında (2.2.6)'da R'nin Jacobson radikalinin sağ quasi regüler olduğunu ve ρ, R nin sağ quasi regüler sağ ideali olduğunda $\rho \subset J(R)$ olduğunu gördük. Şimdi aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 2.2.9. *R bir halka ve $J(R)$ kümesi R halkasının Jacobson radikali olsun. R'nin Jacobson radikali $J(R)$, R nin bütün sağ quasi regüler sağ ideallerini kapsayan bir sağ quasi regüler sağ idealdir. Üstelik $J(R)$, R nin tek maksimal sağ quasi regüler sağ idealidir.*

Şimdi $a \in J(R)$ olsun. $J(R), R$'nin sağ quasi regüler sağ ideali olduğundan $a+a'+aa' = 0$ olacak şekilde bir $a' \in R$ vardır. Buradan $a' = -a-aa'$ ve $a \in J(R)$ olduğundan $a' \in J(R)$ dir. $a' \in J(R)$ olduğundan yine $a' + a'' + a'a'' = 0$ olacak şekilde bir $a'' \in R$ vardır. Böylece a' elemanı sağ quasi ters a'' ne ve sol quasi ters a ya sahiptir. a' elemanının sol ve sağ quasi tersleri eşit olacağından $a = a''$ elde edilir. $a' + a'' + a'a'' = 0$ eşitliğinde $a = a''$ yazarak $a' + a + a'a = 0$ bulunur. Yani $a \in J(R)$ sol quasi regüler eleman olur. Dolayısıyla $a \in J(R)$ sağ quasi regüler eleman olduğunda aynı zamanda sol quasi regüler elemandır. Böylece $J(R), R$ nin sol quasi regüler ideali de olur. Bu durum radikaller için sol ve sağ gibi iki farklı notasyon kullanmamıza gerek olmadığını gösterir. R nin bir sağ quasi regüler ideali, sol quasi regüler ideal olarak bir sol radikalde içerilir. Benzer olarak bir sol radikal de bir sağ radikalde içerilir. Bunun bir sonucu olarak, bir halkanın maksimal regüler sağ ideallerinin kesişiminin, maksimal regüler sol ideallerinin kesişimine eşit olduğunu söyleriz.

Tanım 2.2.10. R bir halka olmak üzere ;

- Bir $a \in R$ elemanı için $a^n = 0$ olacak şekilde n tamsayısı varsa a ya *nilpotent eleman* denir.
- Bir ρ sağ (sol, iki yönlü) idealinin her elemanı nilpotentse bu durumda ρ *nil sağ ideal* olarak adlandırılır.
- Bir ρ sağ (sol, iki yönlü) idealinde eğer bir m tamsayısı için $a_1, a_2, ..., a_m \in \rho$ iken $a_1.\ a_2.\ ...\ .a_m = 0$ oluyorsa ρ ya *nilpotent sağ ideal* denir.

Her nilpotent sağ idealin nil ideal olduğu tanımdan açıktır. Şimdi nil ideal olan fakat nilpotent ideal olmayan bir örnek verelim ;

$(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{2^2} \times \mathbb{Z}_{2^3} \times ... \times 0 \times 0 \times 0 \times ...)$ sonsuz direkt çarpım halkasını ele alalım. Bu halkada $\overline{2}$ elemanı tarafından üretilen ideal $\{(\overline{0}, \overline{2}, \overline{2}, ..., 0, 0, ...)\ , (\overline{0}, \overline{0}, \overline{4}, \overline{4}, ..., 0, 0, ...), ...\}$ kümesidir. $< \overline{2} >$ idealinin her elemanı nilpotent olduğundan nil idealdir. Fakat $< \overline{2} >$ ideali nilpotent ideal değildir. Çünkü herhangi bir $k > 0$ sayısı için $\overline{2}$, $(k+1)$ inci eleman olmak üzere $(0, 0, ..., \overline{2}, 0, 0, ..)$ elemanını ele alalım. O zaman $\overline{2} \in \mathbb{Z}_{2^{k+1}}$ olur ve dolayısıyla $\overline{2}^{k+1} = 0$ dır. $(0, 0, ..., \overline{2}^k, 0, 0, ..) \in < \overline{2} >^k$ dır fakat $\overline{2}^k$, $\mathbb{Z}_{2^{k+1}}$ de sıfıra denk değildir. Sonuç olarak $\overline{2}$ elemanı tarafından üretilen ideal nilpotent ideal değildir.

Sonuç 2.2.11. *R bir halka ve ρ, R nin sağ nil ideali olsun. Bu durumda ρ sağ quasi regüler idealdir.*

Kanıt. ρ , R nin sağ nil ideali olsun. O halde ρ sağ idealinin her elemanı nilpotenttir. $a \in R$ elemanı için $a^m = 0$ olacak şekilde n tamsayısı vardır. Eğer $b = -a + a^2 - a^3 + ... + (-1)^{m-1}a^{m-1}$ ise buradan $a + b + ab = 0$ olur. Böylece ρ sağ quasi regüler idealdir. □

Ön Teorem 2.2.12. *R bir halka olmak üzere R' nin her nil sağ veya sol ideali $J(R)$ nin içindedir.*

Kanıt. R halkasının her nil sağ ideali sağ quasi regüler ideal olduğundan ve $J(R)$, R'nin sağ quasi regüler ideallerin hepsini kapsadığından R'nin her nil sağ veya sol ideali $J(R)$'nin içindedir. □

Teorem 2.2.13. *R bir halka olmak üzere $J(R/J(R)) = 0$ dır.*

Kanıt. $R/J(R) = \overline{R}$ ve ρ, R'nin maksimal regüler sağ ideali olsun. $J(R) \subset \rho \subset R$ olduğundan homomorfizma teoreminden $\rho\ /\ J(R)$, $R/J(R)$'nin maksimal sağ idealidir.
$\rho/\ J(R) = \overline{\rho}$ olsun. ρ, R'nin regüler sağ ideali olduğundan her $\overline{x} = x + J(R) \in R/J(R)$ ve $\overline{a} = a + J(R) \in R/J(R)$ için

$$\begin{aligned} \overline{x} - \overline{ax} &= (x + J(R)) - (a + J(R)).(x + J(R)) \\ &= (x - a.x) + J(R) \in \rho/J(R) \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla $\overline{\rho}$ de $\overline{R}$ nün regüler idealidir. Böylece ρ, R'nin bütün maksimal regüler sağ ideallerini göstermek üzere $J(R) = \cap\rho$ olduğundan $(0) = \cap\overline{\rho}$ olur. (2.2.6) dan

$$\begin{aligned} J(\overline{R}) &\subset \cap(\overline{R} \text{ nin bütün maksimal regüler sağ idealleri}) \\ &\subset \cap\overline{\rho} = (0) \end{aligned}$$

olduğundan $J(\overline{R}) = J(R/J(R)) = (0)$ elde edilir. □

Tanım 2.2.14. R bir halka olsun. Eğer $J(R) = (0)$ ise bu durumda R'ye *Jacobson anlamında yarı-basit halka* denir.

Bu bölümde yarı-basit halka olarak Jacobson anlamında yarı-basit halka alınacaktır.

Her R halkası için $J(R/J(R)) = (0)$ olduğundan $R/J(R)$ halkası Jacobson anlamında yarı-basittir.
Örneğin $\mathbb{Z}$ tam sayılar halkasının bütün maksimal idealleri p bir asal sayı olmak üzere $p\mathbb{Z}$ tipindedir. Bu durumda $J(\mathbb{Z}) = \cap p\mathbb{Z}$ =(0) dır.
Yarı-basit olmayan halka örneği olarak ise $\mathbb{Z}_{12}$ halkası verilebilir. $\overline{2}$ ve $\overline{3}$ elemanları tarafından üretilen kümeler $\mathbb{Z}_{12}$ halkasının maksimal idealleridir. $< \overline{2} > \cap < \overline{3} > = < \overline{6} > \neq (0)$ olduğundan $\mathbb{Z}_{12}$ halkası Jacobson anlamında yarı-basit halka değildir.

Teorem 2.2.15. *R bir halka ve A, R halkasının bir ideali olsun. Bu durumda*

$$J(A) = A \cap J(R)$$

dir.

Kanıt. $a \in A \cap J(R)$ olsun. Bu durumda $a \in J(R)$ olduğundan a sağ quasi regülerdir. Bir $a' \in R$ için $a + a' + aa' = 0$ yani $a' = -a - aa'$ olur. A , R halkasının bir ideali olduğundan $aa' \in A$ dır. Buradan da $a' = -a - aa' \in A$ olur. Yani $A \cap J(R)$, A'nın quasi regüler idealidir ve (2.2.9)' dan $J(A)$ nın içindedir. Tersine, ρ, R'nin maksimal regüler sağ ideali ve $\rho_A = A \cap \rho$ olsun. Eğer $A \nsubseteq \rho$ ise ρ nun maksimalliğinden $A + \rho = R$ olur. İkinci izomorfizma teoreminden

$$R/\rho = \frac{A+\rho}{\rho} \cong \frac{A}{A \cap \rho} = A/\rho_A$$

dir. Ek olarak ρ, R' nin maksimal regüler sağ ideali olduğundan R/ρ indirgenemez R-modüldür. İzomorfizmadan A/ρ_A da indirgenemez A-modüldür ve ρ_A, A' nın maksimal sağ idealidir. ρ regüler olduğundan her $x \in R$ için $x - bx \in \rho$ olacak şekilde bir $b \in R$ vardır. $A + \rho = R$ olduğundan $b = a + r$ olacak şekilde $a \in A$ ve $r \in R$ vardır. $x - bx = x - (a + r).x = x - ax - rx$ olduğundan $x - ax \in \rho$ dır. R' nin maksimal regüler sağ ideali olduğundan özel olarak ρ_A, A da regülerdir. Sonuç olarak R'nin A yı içermeyen her ρ maksimal regüler ideali için $J(A) \subset \rho_A$ dır. Böylece

$$J(A) \subset \cap\rho_A = (\cap\rho) \cap A = J(R) \cap A$$

dır. İki yönlü kapsamadan $J(A) = A \cap J(R)$ elde edilir. □

Yukarıdaki teoremden şu sonucu çıkarabiliriz: R yarı-basit bir halka ve A kümesi R'nin herhangi bir ideali ise $J(A) = A \cap J(R) = A \cap (0) = (0)$ olacağından R'nin her ideali de yarı-basittir. Fakat A tek yönlü bir ideal ise bu sonuç yanlıştır. Örneğin R halkası F cismi üzerinde bütün 2×2 matrislerin halkası olsun. R halkasının aşikar olmayan idealleri (yani (0) ve R dışında) yoktur. Bu yüzden $J(R) = (0)$ dır , R halkası yarı-basittir. R halkasının $\rho = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \alpha\ ,\ \beta \in F \right\}$ sağ idealini aldığımızda $\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in J(\rho) \neq (0)$ dır.

Teorem 2.2.16. *R bir halka ve R üzerinde ki bütün $m \times m$ matrislerin halkası R_m olmak üzere $J(R_m) = J(R)_m$ dir.*

Kanıt. M indirgenemez bir R-modül olsun. $M^m = \{(m_1, \therefore, m_m) \mid m_i \in M\}$ bir R_m - modüldür. M indirgenemez bir R-modül olduğundan M^m indirgenemez R_m - modüldür. $(a_{ij}) \in J(R_m)$ ise her $m_i \in M$ için $(m_1, ..., m_m)(a_{ij}) = (0, ..., 0)$ dır. Bu durumda her i, j için $M(a_{ij}) = (0)$ ve $(a_{ij}) \in J(R)$ olur. O halde $J(R_m) \subset J(R)_m$ dir. Şimdi tersine

$J(R)_m \subset J(R_m)$ olduğunu gösterelim. Bunun için $J(R)_m$ 'nin R_m'nin quasi regüler ideali olduğunu göstermemiz yeterlidir.

$$\rho_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1m} \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix} \mid a_{1j} \in J(R) \right\}, R_m \text{ nin bir sağ idealidir.}$$

$a_{11} + a'_{11} + a_{11}.a'_{11} = 0$ iken

$$X = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1m} \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix} \in \rho_1 \text{ ve } Y = \begin{bmatrix} a'_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix} \text{ olsun.}$$

$$\begin{aligned} W &= X + Y + XY \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1m} \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a'_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1m} \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a'_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} + a'_{11} + a_{11}.a'_{11} & a_{12} & ... & a_{1m} \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & ... & a_{1m} \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece W köşegen elemenları sıfır olan üst üçgen matris olur. O halde $W^m = 0$ dır. Sonuç olarak W sağ quasi regülerdir. Eğer $W + Z + WZ = 0$ ise $W = X + Y + XY$ olduğundan $X + (Y + Z + YZ) + X(Y + Z + YZ) = 0$ olduğu görülür. O halde $X \in \rho_1$ sağ quasi regülerdir. Bu durumda ρ_1 , R_m ' in sağ quasi regüler idealidir ve $J(R_m)$'nin içindedir. Benzer olarak $\rho_i = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{im} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \mid a_{ij} \in J(R) \right\}$ de $J(R_m)$ nin içindedir. $J(R_m)$ toplamaya göre kapalı olduğundan $\rho_1 + \ldots + \rho_m \subset J(R_m)$ ve $J(R)_m \subset J(R_m)$ elde edilir. İki yönlü kapsamadan $J(R_m) = J(R)_m$ dir. □

2.3 Artin Halkalar

Tanım 2.3.1. R bir halka olsun. R halkasının sağ ideallerinin boştan farklı herhangi bir kümesi bir minimal elemana sahipse R'ye *sağ Artin halka* denir.

Bu bölümde Artin halka sağ Artin halkayı temsil edecektir.

Şimdi bazı Artin halka örnekleri vereceğiz.

- R bir bölümlü halka olsun. R' nin aşikar olmayan sağ ideali olmadığından R halkası Artindir.
- R bölümlü halka üzerinde tanımlı $n \times n$ matris halkası R_n olmak üzere R halkası Artindir :

R_n'in ideallerinin zinciri $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots$ olsun. R_n bir R-modül olduğundan R üzerinde bir vektör uzaydır. Ayrıca I, R_n' in sağ ideali olduğundan $I \subset R_n$, $0 \in I$ ve I toplama altında kapalıdır. $a \in R$ ve $v \in I$ olsun. $e = I_{n \times n}$ birim matris olmak üzere $v.a = v.e.a = v.(ea) \in I$ olduğundan I kümesi R_n nin sağ alt vektör uzayıdır. Bu durumda ideallerin azalan dizisi $I_1 \supset I_2 \supset I_2 \supset \ldots$ aynı zamanda R_n' nin bir azalan alt vektör uzay dizisi olur. Her I_i alt uzayı β_i bazına sahiptir ve R_n'nin boyutu n^2 dir. Buradan $|\beta_1| > |\beta_2| > \ldots$ ve $|\beta_1| \leq n^2$ dir. $\{ |\beta_1|, |\beta_2|, \ldots \}$ negatif olmayan tamsayıların kümesidir ve bir $|\beta_m|$ minimal elemana sahiptir. Her $k \geq m$ için $|\beta_m| \leq |\beta_k|$ ve $|\beta_k| \leq |\beta_m|$ olduğundan $|\beta_m| = |\beta_k|$ olur. Her $k \geq m$ için $I_m \supset I_k$ ve I_k , I_m ye eşit boyutlu bir alt uzay olduğundan

$I_m = I_k$ dir. Sonuç olarak $I_1 \supset I_2 \supset I_3 ...$ azalan sağ idealer dizisi sonlu adım sonra durur. Yani R_n bir Artin halkadır.

- R bir Artin halka olmak üzere R 'nin homomorfik görüntüsü de Artindir :

R bir Artin halka ve $f : R \longrightarrow S$ bir halka homomorfizması olmak üzere $f(R)$' nin Artin olduğunu göstereceğiz. $J_1 \supset J_2 \supset ...$ dizisi $f(R)$' nin sağ ideallerinin azalan dizisi olsun. Her $i \in I$ için $f^{-1}(J_i)$, R'nin bir sağ idealidir ve $f^{-1}(J_i) \supset f^{-1}(J_{i+1})$ dir. Buradan $f^{-1}(J_1) \supset f^{-1}(J_2) \supset ...$ R'nin sağ ideallerinin azalan dizisidir. R halkası Artin olduğundan burada bir minimal I ideali vardır. Dolayısıyla her i için $I \subset f^{-1}(J_i)$ ve $f(I) \subset J_i$ dir. I kümesi R'nin bir alt halkası olduğundan $f(I)$, $f(R)$'nin bir alt halkasıdır. Ek olarak $f(r) \in f(R)$ ve $f(i) \in f(I)$ iken $f(i).f(r) = f(i.r) \in f(I)$ olduğundan $f(I)$, $f(R)$ nin bir sağ idealidir ve $J_1 \supset J_2 \supset ...$ dizisinin bir minimal idealidir.

- Artin halkaların sonlu direkt toplamı da Artindir.

Teorem 2.3.2. *R bir Artin halka olsun. R' nin Jacobson radikali $J(R)$ nilpotent idealdir.*

Kanıt. $J = J(R)$ olsun. R halkası Artin olduğundan R'nin sağ ideallerinin $J \supset J^2 \supset ... \supset J^n \supset ...$ azalan dizisi bir n tam sayısı için sabitlenir yani , $J^n = J^{n+1} = ... = J^{2n} = ...$ dir. Bu yüzden eğer $xJ^{2n} = (0)$ ise $xJ^n = (0)$ dır. J nin nilpotent ideal olması için $J^n = 0$ olduğunu göstermeliyiz. Aksini varsayalım. $J^n \neq (0)$ olsun. $W = \{x \in J \mid xJ^n = (0)\}$ kümesi R halkasının bir idealidir. Eğer $W \supset J^n$ ise bu durumda $J^n J^n = (0)$ yani $J^{2n} = J^n = 0$ elde edilir.
Eğer $W \not\supseteq J^n$ ise $\overline{R} = R/W$ halkasında $\overline{J^n} = J^n/W \neq (0)$ dır. Eğer $\overline{x}\overline{J^n} = (0)$ ise $\overline{x} = x + W$, $\overline{J^n} = J^n/W$ olmak üzere $(x+W).(J^n/W) = 0$ dır. Buradan her $j \in J^n$ için $(x+W).(j+W) = 0$ yani , $xj + W = (0)$ elde edilir. O halde $xJ^n \subset W$ dur. W kümesinin tanımından , $(0) = (xJ^n)J^n = xJ^{2n} = xJ^n$ yazılır. O halde $x \in W$ ve $\overline{x} = (0)$ dır. Sonuç olarak $\overline{x}\overline{J^n} = (0)$ ise $\overline{x} = (0)$ dır. R halkası Artin olduğundan homomorfik görüntüsü olan $\overline{R} = R/W$ halkası da Artindir. Artin halkanın sıfırdan farklı bir sağ ideali, halkanın minimal

sağ idealini içerir. Dolayısıyla $\overline{J^n} \neq (0)$ olduğundan $\overline{R}$ halkasının bir minimal sağ $\overline{\rho} \neq (0)$ idealini içerir. Aynı zamanda $\overline{\rho}$ minimal ideal olduğundan aşikar olmayan alt modülleri yoktur. Yani, $\overline{\rho}$ indirgenemez $\overline{R}-$modüldür ve $J(\overline{R})$ tarafından sıfırlanır. Ek olarak, eğer $a \in J^n$ ise $J \supset J^n$ olduğundan $a \in J = J(R)$ dir. O halde a , R halkasının quasi regüler elemanıdır ve $a+b+ab = 0$ olacak şekilde bir $b \in R$ quasi tersi vardır. Buradan $(a+W)+(b+W)+(a+W).(b+W) = (a+b+ab)+W = W$ olduğundan $\overline{J^n}$ halkasının her elemanı $\overline{R}$ halkasında sağ quasi regüler elemandır. Dolayısıyla $\overline{J^n}$, $\overline{R}$ nin sağ quasi regüler idealidir ve $J(\overline{R})$ 'nin içindedir. Böylece $\overline{J^n} \subset J(\overline{R})$ olduğundan $\overline{\rho}\overline{J^n} = (0)$ elde edilir. Yukarıda gösterildiği gibi $\overline{\rho}\overline{J^n} = (0)$ iken $\overline{\rho} = (0)$ dır. Fakat $\overline{\rho}$ minimal ideal olduğundan bu bir çelişkidir. Sonuç olarak $J^n = (0)$ dır. Yani $J(R)$ nilpotent idealdir. □

Ön Teorem 2.3.3. *R bir Artin halka ise R' nin her nil ideali nilpotenttir.*

Kanıt. ρ ideali R' nin bir sağ nil ideali olsun. R halkası Artin olduğundan $\rho \supset \rho^2 \supset ... \supset \rho^n \supset ...$ azalan dizisi bir n tam sayısı için durur yani $B = \rho^n = \rho^{n+1} = ...$ dir. Buradan $B^2 = B$ olur. Eğer $B \neq 0$ ise $B^2 \neq (0)$ dır. Dolayısıyla bir $b \in B$ elemanı için $bB \neq (0)$ dır. Bu durumu sağlayan en küçük eleman $b_o \in B$ olsun. $b_oB = b_oB^2 \neq (0)$ olduğundan bir $c \in B$ elemanı için $b_ocB \neq 0$ dır. b_oB minimal ideal ve $b_ocB \subset b_oB$ olduğundan $b_ocB = b_oB$ dir. Bu eşitlikten bir $x \in B$ elemanı için $b_ocx = b_ox$ dir. B nil ideal olduğundan yeterince büyük bir n ve $x \in B$ için $0 \neq b_oc = b_ocx = ... = b_ocx^n = 0$ elde edilir. Böylece $B = (0)$ olur. Dolayısıyla $\rho^n = (0)$ dır ve ρ nilpotent idealdir. □

Tanım 2.3.4. R bir halka olsun. Eğer $e \neq 0$ elemanı için $e^2 = e$ oluyorsa e ye *eşkare (idempotent) eleman* denir.

Ön Teorem 2.3.5. *R sıfırdan başka nilpotent ideal içermeyen bir halka ve $\rho \neq (0)$ ideali R'nin minimal sağ ideali olsun. Bu durumda R'nin bir e eşkare elemanı için $\rho = eR$ dir.*

Kanıt. R halkası sıfırdan başka nilpotent ideal içermeyen bir halka olduğundan $\rho \neq (0)$ ideali nilpotent olamaz. Dolayısıyla $\rho^2 \neq (0)$ dır. Bir $x \in \rho$ için $x\rho \neq (0)$ dır. Fakat $x\rho$ sağ ideali için $x\rho \subset \rho$ ve ρ minimal ideal olduğundan $x\rho = \rho$ olur. Bu durumda bir $e \in \rho$ elemanı için $xe = x$ dir. Buradan $xe^2 = xe$ yani $x(e^2 - e) = 0$ elde edilir. Şimdi R

halkasının $\rho_o = \{a \in \rho \mid xa = 0\}$ sağ idealini alalım. $\rho_o \subset \rho$ ve $x\rho \neq (0)$ olduğundan $\rho_o \neq \rho$ dur. ρ idealinin minimalliğinden $\rho_o = (0)$ elde edilir. Ayrıca $x(e^2 - e) = 0$ iken $e^2 - e \in \rho$ olduğundan $e^2 - e \in \rho_o$ dır. $\rho_o = 0$ olduğundan $e^2 = e$ elde edilir. Ek olarak $xe = x \neq 0$ olduğundan $e \neq 0$ dır. Böylece $e \in R$ eşkare elemandır. Şimdi eR sağ idealini düşünelim. $e \in \rho$ olduğundan $eR \subset \rho$ dur. ρ minimal ideal olduğundan $eR = \rho$ veya $eR = (0)$ olmalıdır. Fakat $e.e = e^2 = e = eR$ olur. $e \neq 0$ olduğundan $eR \neq (0)$ dır. Bu durumda $eR = \rho$ elde edilir. □

Ön Teorem 2.3.6. *R bir halka ve bazı $a \in R$ için $a^2 - a$ nilpotent eleman olsun. Bu durumda ya a nilpotenttir ya da bazı tam sayı katsayılı $q(x)$ polinomları için $e = aq(a)$ sıfırdan farklı eşkare bir elemandır.*

Kanıt. $a \in R$, $k \in \mathbb{N}$ için $(a^2 - a)^k = 0$ olsun. Buradan , $(a^2 - a)^k = a^{2k} + ... + (-a)^k = 0$ olur. Bu eşitlikten a^k yalnız bırakılırsa $a^k = a^{k+1}p(a)$ olacak şekilde $p(x)$ tam sayı katsayılı polinomu vardır.
$a^{k+1} = a^k.a^1$ olduğundan ;

$$\begin{aligned} a^k &= a^{k+1}.p(a) \\ &= a^k.a^1.p(a) \\ &= a^{k+1}.p(a).a^1.p(a) \\ &= a^{k+2}.p(a)^2 \\ &= ... \end{aligned}$$

şeklinde devam edilerek $a^k = a^{2k}.p(a)^k$ elde edilir. Şimdi $a^k \neq 0$ olsun. $e = a^k p(a)^k \neq 0$ dersek $e^2 = a^{2k}p(a)^{2k} = (a^{2k}p(a)^k).p(a)^k = a^k p(a)^k = e$ elde edilir. $q(a) = a^{k-1}p(a)^k$ sıfırdan farklı bir eşkare eleman olur. □

Teorem 2.3.7. *R bir Artin halka ve R'nin $\rho \neq (0)$ nilpotent olmayan bir sağ ideali olsun. Bu durumda ρ sıfırdan farklı bir eşkare eleman içerir.*

Kanıt. $\rho \neq (0)$ nilpotent olmayan bir sağ ideal olduğundan $J(R)$'de değildir. $R/J(R) = \overline{R}$ olsun. $\overline{R}$ halkası yarı-basit olduğundan sıfırdan farklı nilpotent ideali yoktur. ρ idealinin $\overline{R}$

halkasında ki görüntüsü $\overline{\rho}$ olsun. $\overline{\rho} \neq (0)$ olduğundan $\overline{R}$'nin bir minimal sağ $\overline{\rho}_0$ idealini içerir. (2.3.5)'den $\overline{\rho}_0$ bir $\overline{e}$ eşkare elemanına sahiptir. $\alpha \in \rho$, $\overline{e}$ üzerine bir dönüşüm olsun. $\alpha^2 - \alpha$ elemanı 0 üzerine bir dönüşüm olduğundan $J(R)$'nin içindedir. Dolayısıyla nilpotenttir. $\overline{\alpha}^k = \overline{e}^k = \overline{e} \neq 0$ olduğundan α nilpotent değildir. Önceki ön teoremden elde ettiğimiz tamsayı katsayılı bazı polinomlar için $e = \alpha q(\alpha)$ sıfırdan farklı eşkare elemandır. $\alpha \in \rho$ olduğundan e elemanı da ρ da olmak zorundadır. □

Şimdi e elamanı R halkasında eşkare eleman olmak üzere eRe halkasının yapısını araştıralım.

Özel olarak A herhangi bir birimli halka iken $R = A_n$ ve $e = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & 1 & & & & & \\ & & \cdots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \cdots & \\ 0 & & & & & & 0 \end{bmatrix}$

rankı r olan eşkare eleman olsun. Bu durumda $eRe = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a \in A_r \right\}$ yani $eRe \approx A_r$ daha küçük boyutta bir matris halkası olur.

Teorem 2.3.8. *R herhangi bir halka ve $e \in R$ eşkare eleman olsun. Bu durumda*

$$J(eRe) = eJ(R)e$$

dir.

Kanıt. M indirgenemez R-modül olsun. Bu durumda $Me = (0)$ ya da Me' nin indirgenemez eRe-modül olduğunu iddia ediyoruz. Öncelikle $Me \neq (0)$ olsun ve $0 \neq me \in Me$ alalım. $(me)(eRe) = meRe$ ve M indirgenemez $R-$modül iken $me \neq 0$, $meR = M$ olduğundan $meRe = Me$ dir. Böylece Me, indirgenemez eRe-modül olur. eRe halkasının birimi e olduğundan $eJ(eRe) = J(eRe)$ dir ve buradan $MeJ(eRe) = (0)$ dır . Başka bir deyişle eğer $Me \neq (0)$ ise $MJ(eRe) = (0)$ dır. Eğer $Me = (0)$ ise $MeJ(eRe) = MJ(eRe) = (0)$ olur. Sonuç olarak $J(eRe)$, indirgenemez her M R- modülünü sıfırlar. Yani $J(eRe) \subset J(R)$ dir. Buradan $J(eRe) = eJ(eRe)e \subset eJ(R)e$ elde edilir.

Diğer taraftan eğer $a \in eJ(R)e$ ise $J(R)$' nin bir elemanı olarak a' gibi bir sağ ve sol quasi terse sahiptir. Burada $a+a'+aa' = 0$ ve $eae = a$ eşitlikleri kullanılarak $a+ea'a+aea'e = 0$ elde edilir. a elemanının quasi tersi tek olacağından $a' = ea'e$ bulunur. Sonuçta $eJ(R)e$ 'nin her elemanının eRe'de quasi regüler olduğunu gösterdik. Ayrıca $eJ(R)e$, eRe'nin bir quasi regüler ideali olarak $J(eRe)$ de bulunur. Sonuç olarak $J(eRe) \subset eJ(R)e \subset J(eRe)$ kapsamasından istenilen $J(eRe) = eJ(R)e$ eşitliği elde edilir. □

Teorem 2.3.9. *R halkası sıfırdan farklı nilpotent ideali olmayan bir halka ve $e \neq 0$, R nin eşkare elemanı olsun. Bu durumda eR'nin R'nin minimal sağ ideali olması için gerek ve yeter koşul eRe'nin bölümlü halka olmasıdır.*

Kanıt. Öncelikle $\rho = eR$,R' nin minimal sağ ideali olsun. Eğer $eae \neq 0 \in eRe$ ise $0 \neq eaeR \subset eR$ olur. Buradan da $eaeR = eR$ elde ederiz. O halde bir $y \in R$ elemanı için $eaey = e$, $eaeye = e^2 = e$, $(eae)(eye) = e$ yazılır. Sonuç olarak eRe halkası e birim elemanı ile bir bölümlü halkadır.

Tersine eRe bölümlü halka olsun. $\rho = eR$'nin R' nin minimal sağ ideali olduğunu gösterelim. Eğer R halkasında $(0) \neq \rho_0 \subset \rho$ olacak şekilde bir ρ_0 sağ ideali varsa $\rho_0 e \neq (0)$ dır. Aksi halde sıfırdan başka nilpotent ideal içermeyen R halkası için $\rho_0^2 \subset \rho_0\rho = \rho_0 eR = (0)$ bir çelişkidir. eRe halkasında $a = eae \neq 0$ olsun. $a \in eR$ ve $ea = a$ olduğundan $0 \neq ae = eae \in \rho_0$ elde edilir. Böylece eRe bölümlü halkasında eae sıfırdan farklı bir eleman olduğundan $exe \in eRe$ için $eaeexe = e$ dir. Fakat $e = eaeexe \in \rho_0$ olduğundan $eR \subset \rho_0 \subset eR = \rho$ olur. Sonuç olarak $\rho_0 = \rho$ minimal idealdir. □

Sonuç 2.3.10. *R halkası sıfırdan başka nilpotent ideal içermeyen bir halka ve $e \in R$ eşkare eleman olsun. Bu durumda eR' nin, R' nin minimal sağ ideali olması için gerek ve yeter koşul Re' nin R'nin minimal sol ideali olmasıdır.*

Teorem 2.3.11. *R bir yarı-basit Artin halka ve R' nin $\rho \neq (0)$ sağ ideali olsun. R halkasının bir e eşkare elemanı için $\rho = eR$ dir.*

Kanıt. $\rho \neq (0)$ sağ ideal olduğundan nilpotent olamaz. (2.3.7) den sıfırdan farklı bir e eşkare elemanı içerir. $A(e) = \{x \in \rho \mid ex = 0\}$ kümesini tanımlayalım. $A(e)$, R nin bir sağ idealidir. R halkası Artin olduğundan $\{A(e)|e^2 = e \neq 0 \in \rho\}$ sağ ideallerinin boştan farklı kümesi bir minimal eleman $A(e_0)$' a sahiptir. Eğer $A(e_0) = (0)$ ise bu durumda her $x \in \rho$ için $e_0.(x - e_0x) = e_0.x - e_0^2x = 0$ dır. Böylece $x - e_0x \in A(e_0) = 0$ olur. O halde her $x \in \rho$ için $x = e_0x$ dir. Fakat $\rho = e_0\rho \subset e_0R \subset \rho$ olduğundan $\rho = e_0R$ elde edilir.

Şimdi $A(e_0) \neq 0$ olsun. $A(e_0)$, yarı-basit Artin halkanın sıfırdan farklı bir sağ ideali olduğundan e_1 eşkare elemanını içerir. $A(e_0)$'ın tanımından $e_1 \in \rho$ ve $e_0e_1 = 0$ dır. $e^* = e_0 + e_1 - e_0e_1$ de ρ nun bir eşkare elemanıdır. Ayrıca $e^*e_1 = (e_0 + e_1 - e_0e_1)e_1 = e_0e_1 + e_1^2 - e_0e_1^2 = e_1 \neq 0$ olduğundan $e_1 \notin A(e^*)$ dir. Eğer $e^*x = 0$ ise $e^*x = (e_0 + e_1 - e_0e_1)x = 0$ dır. Buradan $e_0(e_0 + e_1 - e_0e_1)x = 0$ yani $e_0x = 0$ elde edilir. Sonuç olarak $A(e^*) \subset A(e_0)$ dır. Fakat $e_1 \in A(e_0)$ ve $e_1 \notin A(e^*)$ olduğundan $A(e^*) \neq A(e_0)$ dır. $A(e_0)$ minimal eleman ve e^*'ın uygun seçimine göre $A(e^*) \subset A(e_0)$ olduğundan bu bir çelişkidir. Yani $A(e_0) \neq (0)$ olamaz. □

Bu teoremin iki ilginç sonucunu vereceğiz.

Sonuç 2.3.12. *R bir yarı-basit Artin halka ve A, R' nin bir ideali olsun. Bu durumda R nin merkezindeki bir e eşkare elemanı için $A = eR = Re$ dir.*

Kanıt. A, R' nin bir ideali olduğundan aynı zamanda sağ idealidir. Yukarıdaki teoremden R halkasının bir e eşkare elemanı için $A = eR$ dir. Buradan her $x \in A$ iken $ex = x$ ve $x = er$ olacak şekilde $r \in R$ vardır. $B = \{x - xe \mid x \in A\}$ olsun. Her $x \in A$ için $(x - xe)e = xe - xe^2 = 0$ olduğundan $Be = (0)$ dır. Böylece $BA = BeA = (0)$ elde edilir. Ancak A, R ' nin bir ideali olduğundan aynı zamanda sol idealidir. Dolayısıyla B de R' nin bir sol ideali olur. $B \subset A$ olduğundan $B^2 \subset BA = (0)$ yani , $B^2 = (0)$ dır. R halkasında sıfırdan başka nilpotent ideal olamayacağından $B = (0)$ elde edilir. O halde $x \in A$ için $x - xe = 0$ yani $x = xe$ dir. $A \subset Re$ ve $Re \subset A$ olduğundan $A = Re$ elde edilir. Ek olarak eğer $y \in R$ ise $ye \in A$ ve e elemanı A halkasının sol ve sağ birimi olduğundan $ye = eye = ey$ bulunur. Sonuç olarak e elemanı R halkasının merkezindedir.

□

Sonuç 2.3.13. *R bir yarı-basit Artin halka ise R nin iki yönlü birimi vardır.*

Kanıt. R halkasının kendisi aynı zamanda R'nin bir ideali olacağından (2.3.12)'den kanıt açıktır. □

Ön Teorem 2.3.14. *R bir yarı-basit Artin halka ve A, R nin bir ideali olsun. Bu durumda A yarı-basit Artin bir halkadır.*

Kanıt. (2.3.11)'n birinci sonucunda R halkasının sıfırdan farklı bir A idealinin, R nin merkezindeki bir e eşkare elemanı için $A = Re = eR$ şeklinde yazıldığı gösterildi. Aynı teoremin ikinci sonucunda ise yarı-basit Artin bir R halkasının her zaman birim elemana sahip olduğu gösterildi. Şimdi $x \in R$ verilsin. $x = xe + x(1-e)$ olduğundan $R = Re + R(1-e)$ yazılımına R halkasının e ye göre *Peirce ayrışımı* denir. Burada e eşkare elemanı R halkasının merkezinde olduğundan $1-e$ elemanı da halkanın merkezinde olan bir eşkare elemandır. Dolayısıyla $R(1-e)$ kümesi R halkasının bir idealidir. Ayıca $x \in Re \cap R(1-e)$ ise $x \in Re$ ve $x \in R(1-e)$ olacağından $Re \cap R(1-e) = (0)$ dır. Sonuç olarak R halkası $A = Re$ ve $R(1-e)$ nın direkt toplamıdır . $R = Re \oplus R(1-e)$ olduğundan özel olarak $A = Re$, $\dfrac{R}{R(1-e)}$ ye halka olarak izomorftur. Artin halkaların homomorfik görüntüsü de Artin olduğundan A halkası Artindir. Ayrıca yarı-basit hakaların idealleri de yarı-basit olduğundan A halkası yarı-basittir. □

Tanım 2.3.15. R bir halka olsun. Eğer $R^2 \neq (0)$ ve R halkasının sıfır ve kendisinden başka ideali yoksa bu durumda R'ye *basit halka* denir.

Sonuç 2.3.16. *R halkası basit Artin bir halka olsun. Bu durumda R yarı-basit bir halkadır.*

Kanıt. R halkası basit olduğundan $R^2 \neq (0)$ ve R halkasının sıfır ve kendisinden başka ideali yoktur. R nin Jacobson radikali $J(R)$, R'nin iki yönlü ideali olduğundan $J(R) = (0)$ veya $J(R) = R$ dır. Ek olarak $R^2 \neq (0)$, R halkasının bir ideali olduğundan $R^2 = R$ dir. Dolayısıyla R halkası nilpotent değildir. R Artin halkasının Jacobson radikali nilpotent olacağından $J(R) = R$ olamaz. O halde $J(R) = (0)$ dır . Yani R halkası yarı-basittir. □

Teorem 2.3.17. *R bir yarı-basit Artin halka olsun. Bu durumda R halkası basit Artin halkaların sonlu sayıda direkt toplamıdır.*

Kanıt. R bir yarı-basit Artin halka ve $A \neq (0)$, R'nin bir minimal ideali olsun. R yarı-basit bir halka ve $A \neq (0)$ olduğundan $A^2 \neq (0)$ dır. Eğer $B \neq (0), A$'nın bir ideali ise ABA kümesi R'nin bir idalidir. Ek olarak $ABA \subset B$ dir. R bir yarı-basit Artin halka ve A, R nin bir ideali olduğundan (2.3.14)'den A da yarı-basit Artin bir halkadır. (2.3.11) in ikinci sonucundan A nın birim elemanı vardır . Bu durumda $AB \neq (0)$ dır. R yarı-basit Artin halkasının sıfırdan farklı AB ideali nilpotent olamaz. Özel olarak $ABA \neq (0)$ dır. Böylece $B \supset ABA = A$ ve A idealinin minimalliğinden $B = A$ dır. Sonuç olarak $A^2 \neq (0)$ ve A nın $B \neq (0)$ ideali için $A = B$ olduğundan A basit Artin halkadır. (2.3.14) ün ispatında gösterilen Peirce ayrışmasından $R = A \oplus T_0$ olacak şekilde R halkasının bir T_0 ideali vardır. Böylece T_0 yarı-basit Artin halkadır. Artin halkada sıfırdan farklı bir ideal , halkanın bir minimal idealini içereceğinden R nin T_0 da minimal bir ideali A_1 vardır . Yukarıda yapılanlar gibi yine A_1 basit Artin halkadır ve Peirce ayrışmasından $T_0 = A_1 \oplus T_1$ olacak şekilde R halkasının bir T_1 ideali vardır. Bu şekilde devam edilerek R halkasının $A = A_0, A_1, ..., A_k, ...$ idealleri basit Artin halkalardır ve $i \neq j$ için $A_i \cap A_j$ ideali A_i ve A_j den daha küçük olacağından minimallikten $A_i \cap A_j = (0)$ dır. Dolayısıyla $A_0 + A_1 + ... + A_k$ direkt toplamdır. Şimdi bir k tamsayısı için $R = A_0 \oplus A_1 \oplus ... \oplus A_k$ olduğunu göstereceğiz. Eğer $R \neq A_0 \oplus A_1 \oplus ... \oplus A_k$ olsaydı

$$\begin{aligned} R_0 &= A_0 \oplus ... \oplus A_k \oplus ... \\ R_1 &= A_1 \oplus ... \oplus A_k \oplus ... \\ &\;\;... \\ R_m &= A_m \oplus ... \oplus A_k \oplus ... \end{aligned}$$

R halkasının ideallerinin azalan bir zinciri oluşur ve R Artin halkasında bu zincir bir noktada sabitlenmediği için bir çelişki elde edilir. Dolayısıyla bir k tamsayısı için

$$R = A_0 \oplus A_1 \oplus ... \oplus A_k$$

dir. $\square$

Ön Teorem 2.3.18. *R bir yarı-basit Artin halka ve $i = 1, ..., k$ için A_i'ler basit halkalar olmak üzere $R = A_1 \oplus ... \oplus A_k$ ise bu eşitlikteki A_i'ler R halkasının bütün minimal idealleridir.*

Kanıt. $B \neq (0)$, R nin bir minimal ideali olsun. R bir yarı-basit Artin halka olduğundan birimlidir. Böylece $RB \neq (0)$ dır. Fakat $R = A_1 \oplus ... \oplus A_k$ olduğundan $RB = A_1B \oplus ... \oplus A_kB$ ve her $i = 1, ..., k$ için $A_iB \neq (0)$ dır. Her $i = 1, ..., k$ için $A_iB \neq (0)$, R halkasının bir idealidir. $A_iB \subset A_i$ olduğundan A_i nin basitliğinden $A_iB = A_i$ elde edilir. Benzer olarak $A_iB \subset B$ ve B'nin minimalliğinden $A_iB = B$ elde edilir. Sonuç olarak $A_i = B$ dir. $\square$

Tanım 2.3.19. R bir halka olmak üzere eğer R halkasının sağ ideallerinin boştan farklı herhangi bir kümesi bir maksimal elemana sahipse bu durumda R'ye *sağ Noether halka* denir.

Benzer bir şekilde sol Noether halka da tanımlanabilir. Bu tanım R halkasının artan sol idealler zincirinin sonlu bir adımda durması ile eşdeğerdir.

Teorem 2.3.20. *R sağ Noether halka ve A, R nin tek yönlü nil ideali olsun. Bu durumda A nilpotent idealdir.*

Kanıt. R halkası sağ Noether olduğundan bir N maksimal nilpotent sağ ideale sahiptir. $A \subset N$ olduğunu göstereceğiz. Eğer böyle değilse $\overline{R} = R/N$ bölüm grubuna geçildiğinde $\overline{R}$, sıfırdan farklı nilpotent ideali olmayan bir sağ Noether halkadır ve $\overline{A}$, $\overline{R}$ nin tek yönlü nil idealidir. Fakat bunun mümkün olmadığını göstereceğiz. Genelliği bozmadan R' nin nilpotent idealinin olmadığını ama $A \neq (0)$ nın nil tek yönlü ideali olduğunu kabul edelim. $0 \neq a \in A$ ise $U = Ra$ kümesi R nin nil sol idealidir. Eğer A, R nin sol ideali ise $U \subset A$ olduğundan nil ideali olur. Eğer A, R nin sağ ideali ve $x \in R$ iken $u = xa \in U$ ise $ax \in A$ olduğundan $u^n = x(ax)^{n-1}a$ yeterince büyük n'ler için sıfıra eşit olur. $r(u) = \{x \in R \mid ux = 0\}$ kümesi R nin sıfırdan farklı bir sağ idealidir. R halkası Noether halka olduğundan bir $0 \neq u_0 \in U$ için $r(u_0)$ maksimal idealdir. Buradan her $x \in R$ için $r(u_0) \subset r(xu_0)$ olur. Ayrıca eğer $xu_0 \neq 0$ ise $r(xu_0) \neq R$ olacağından $r(u_0)$ ın maksimalliğinden $r(u_0) = r(xu_0)$ elde edilir. Şimdi $y \in R$ olsun. U nil ideal olduğundan bir k tamsayısı için $(yu_0)^k = 0$, $(yu_0)^{k-1} \neq 0$ dır. $(yu_0)^{k-1}$, xu_0 formunda olduğundan $r(u_0) = r(xu_0)$ eşitliği göz önüne alınarak $r(yu_0)^{k-1} = r(u_0)$ elde edilir. Buradan yu_0 , $r(yu_0)^{k-1}$ ın içinde olduğundan $r(u_0)$ 'ın da içinde olur. $r(u_0)$ 'ın tanımından her $y \in R$ için $u_0(yu_0) = 0$ dır. Dolayısıyla u_0R kümesi R'nin bir nilpotent sağ idealidir ve bu yüzden sıfırdır. Fakat u_0 da içerilen $\{t \in R \mid tR = (0)\}$ kümesi R nin sıfırdan farklı bir nilpotent sağ idealidir. Bu bir çelişkidir. Sonuç olarak $A \subset N$ ve A nilpotent idealdir. □

2.4 İlkel (Primitive) Halkalar

Tanım 2.4.1. R bir halka olsun. Eğer R halkası faithful indirgenemez R-modüle sahipse bu durumda R halkasına *ilkel (primitive) halka* denir.

Eğer bu tanım sağ modüller için yapılırsa sağ ilkel halka tanımı, sol modüller için yapılırsa sol ilkel halka tanımı elde edilir.

(2.1.4)'de M indirgenemez bir R-modül olmak üzere $A(M) = \{x \in R \mid Mx = 0\}$ kümesinin R halkasının iki yönlü ideali ve M nin faithful $R/A(M)$- modül olduğu gösterildi. Dolayısıyla $R/A(M)$ ilkel halkadır. Devamında ise özel olarak eğer ρ, R'nin maksimal regüler sağ ideali ve $M = R/\rho$ ise $A(M) = (\rho : R)$ olduğu gösterildi. Sonuçta $(\rho : R) = \{x \in R \mid Rx \subset \rho\}$ olmak üzere $R/(\rho : R)$ de bir ilkel halkadır.

Teorem 2.4.2. *R bir halka olsun. R'nin ilkel halka olması için gerek ve yeter koşul R'nin maksimal regüler ρ sağ ideali için $(\rho : R) = (0)$ olmasıdır. Bu durumda R yarı-basittir ve ek olarak R halkası değişmeli ise cisimdir.*

Kanıt. R ilkel halka olsun. Bu durumda R nin bir M faithful indirgenemez modülü vardır. Aynı zamanda $M = R/\rho$ olacak şekilde R'nin ρ maksimal regüler sağ ideali vardır. $A(M) = (\rho : R)$ ve M, faithful indirgenemez R-modül olduğundan $A(M) = (0)$

dır. Tersine, R'nin maksimal regüler ρ sağ ideali için $(\rho : R) = 0$ olsun. $M = R/\rho$ indirgenemez modüldür. $A(R/\rho) = (\rho : R) = (0)$ olduğundan R/ρ, faithful R-modül olur. Sonuç olarak R ilkel halkadır. Ek olarak R halkasının Jacobson radikali $J(R) = \cap(\rho : R) = 0$ olduğundan R halkası yarı-basittir. Şimdi R değişmeli ilkel halka olsun. Bu durumda $M = R/\rho$ olacak şekilde R'nin ρ maksimal regüler sağ ideali aynı zamanda sol idealidir. Dolayısıyla $\rho \subset (\rho : R) = A(M) = (0)$ olduğundan $\rho = (0)$ dır. Bu durumda ρ regüler ideal olur yani her $r \in R$ için $r - re \in (0)$ olacak şekilde $e \in R$ vardır. Böylece $r \in R$ için $r = re$ dir. R halkası değişmeli olduğundan e, R nin çarpımsal birimidir. R halkası birimli ve değişmeli olduğundan ve $\rho = (0)$ maksimal ideali olduğundan $R/\rho \cong R$ cisimdir. $\square$

R ilkel bir halka ve M, R'nin faithful indirgenemez modülü olsun. (2.1.8) de M'nin değişmeli halkası $C(M) = \Delta$ nin bölümlü halka olduğu gösterildi. O halde $m \in M$, $a \in \Delta$ olmak üzere M yi Δ üzerinde $m.a$ çarpımı ile bir bir sağ vektör uzay olarak düşünebiliriz.

Tanım 2.4.3. R bir halka olsun. Eğer M de ki her n için $v_1, ..., v_n$ elemanları Δ üzerinde doğrusal bağımsız ve keyfi $w_1, ..., w_n \in M$ için

$$w_i = v_i.r \qquad\qquad i = 1, 2, ..., n$$

olacak şekilde $r \in R$ elemanı varsa bu durumda R halkası M üzerinde *yoğun olarak etki ediyor* denir.

Eğer M , Δ üzerinde sonlu boyutlu ve R halkası M üzerinde hem yoğun olarak etki ediyor hem de faithful olarak etki ediyor ise Δ üzerinde ki bütün matris halkası için $n = boy_{\Delta}M$ olmak üzere R halkası $Hom_{\Delta}(M, M) = \Delta_n$ ye izomorftur. Bu nedenle yoğunluk bütün doğrusal dönüşümlerin bir genellemesidir.

Teorem 2.4.4. *R ilkel bir halka ve M indirgenemez faithful R-modül olsun. $\Delta = C(M)$ ise bu durumda R, Δ üzerinde tanımlı M üzerindeki doğrusal dönüşümlerin üzerine yoğun olarak etki eder.*

Kanıt. R ilkel bir halka ve M indirgenemez faithful R-modül olsun . M aynı zamanda Δ üzerinde bir vektör uzaydır. M'nin Δ üzerinde sonlu boyutlu bir alt uzayı V olsun. V'nin boyutu üzerinden tümevarımla kanıtı tamamlayacağız. $V \subset M$ sonlu boyutlu alt uzayı için eğer $m \in M$, $m \notin V$ ise bu durumda $Vr = 0$ fakat $mr \neq 0$ olacak şekilde bir $r \in R$ olduğunu göstereceğiz. İlk olarak $boy_{\Delta} V = 0$ olsun. Böylece $V = (0)$ ve $m \neq 0$ dır. O halde $Vr = (0)$ dır. M indirgenemez R-modül olduğundan $R(M) \neq (0)$ yani bir $r \in R$ için $rm \neq 0$ dır. $boy_{\Delta} V = 0$ iken bu doğrudur. Şimdi $w \notin V_0$ olmak üzere $V = V_0 + w\Delta$ ve $boyV_0 = boyV - 1$ olsun. Tümevarım hipotezinden eğer $A(V_0) = \{x \in R | V_0 x = (0)\}$ ise $y \in M$, $y \notin V_0$ için $yr \neq 0$ olacak şekilde bir $r \in A(V_0)$ vardır. Yani eğer $y \notin V_0$ ise $yA(V_0) \neq (0)$ dır ve $r \in A(V_0)$ olduğundan $yr \neq 0$ dır. Özel olarak $w \notin V_0$ olduğundan $wA(V_0) \neq (0)$ dır ve $A(V_0)$ kümesi R halkasının bir sağ ideali olduğundan $wA(V_0)$, M nin bir sağ alt modülüdür. M indirgenemez R-modül olduğundan $wA(V_0) \neq (0)$ ise $wA(V_0) = M$ dir.

Şimdi bir $m \in M$, $m \notin V$ ise bu durumda $Vr = 0$ fakat $mr \neq 0$ olacak şekilde bir $r \in R$ bulunamayacağını göstereceğiz. $wA(V_0) = M$ olduğundan her $a \in A(V_0)$ için

$$\begin{array}{rccc} \Gamma: & M & \longrightarrow & M \\ & wa & \longrightarrow & ma \end{array}$$

tanımlayalım. Eğer $a_1, a_2 \in A(V_0)$ için $wa_1 = wa_2$ ise $w.(a_1 - a_2) = 0$ dır. $V = V_0 + w\Delta$ olduğundan $v \in V$ ise $v = v_0 + wc$ olacak şekilde $v_0 \in V_0$ ve $c \in \Delta$ vardır.
$a_1 - a_2 \in A(V_0) \subset R$ ve $c \in \Delta = C(M)$ olduğundan

$$v.(a_1 - a_2) = v_0.(a_1 - a_2) + wc.(a_1 - a_2) = 0 + cw.(a_1 - a_2) = c.(w.(a_1 - a_2)) = 0$$

bulunur. Böylece $V(a_1 - a_2) = 0$ dır. Varsayımdan $m.(a_1 - a_2) = 0$ yani $ma_1 = ma_2$ elde edilir. Γ iyi tanımlıdır. Aynı zamanda $\Gamma \in E(M)$ dir. Ayrıca eğer $a \in A(V_0)$ ve $x \in M$ iken $x = wa$ ise $A(V_0)$ ideal olduğundan her $r \in R$ için $ar \in A(V_0)$ ve $xr = (wa)r = w(ar)$ olur. Böylece $\Gamma(xr) = \Gamma(w(ar)) = m(ar) = (ma)r = \Gamma(wa)r = \Gamma(x)r$ dir. O halde $a \in A(V_0)$ elemanı için $ma = \Gamma(wa) = \Gamma(w)a$ yani , $(m - \Gamma(w))a = (0)$

ve $(m - \Gamma(w))A(V_0) = (0)$ elde edilir. Ayrıca $y \notin V_0$ ise $yA(V_0) \neq (0)$ olduğundan $yA(V_0) = (0)$ ise $y \in V_0$ dır. Böylece $(m - \Gamma(w))A(V_0) = (0)$ eşitliğinden $m - \Gamma(w) \in V_0$ elde edilir. Dolayısıyla $(m - \Gamma(w)) + \Gamma(w) = m \in V_0 + w\Delta = V$ olup bu durum $m \notin V$ ile çelişir. Sonuç olarak eğer $m \in M$, $m \notin V$ ise bu durumda $Vr = 0$ fakat $mr \neq 0$ olacak şekilde bir $r \in R$ vardır. Şimdi her n için Δ üzerinde doğrusal bağımsız $v_1, ..., v_n \in M$ vektörleri ve keyfi $w_1, ..., w_n \in M$ vektörleri olsun. Her i için $V_i = \big\langle \{v_j \mid j \neq i\} \big\rangle$ ve $v_i \notin V_i$ olsun. Buradan her i için $v_i r_i \neq 0$, $V_i r_i = 0$ olacak şekilde $r_i \in R$ vardır. Ayrıca $v_i r_i \neq 0$ olduğundan $(r_i v_i)R$, sıfırdan farklı bir alt modül olarak M'ye eşittir. Özel olarak her i için $(v_i r_i)s_i = w_i$ olacak şekilde $w_i \in M$ ve $s_i \in R$ vardır. Burada $r_i s_i = t_i$ olsun. O halde her i için $v_i t_i = w_i$ ve $V.t_i = V.(\, r_i s_i) = (V r_i).s_i = 0$ bulunur. $t = t_1 + ... + t_n$ olsun. Buradan her i için

$$v_k t = v_k(t_1 + ... + t_n\,) = v_k t_k = w_k$$

olur. Sonuç olarak R halkası M üzerine yoğun olarak etki eder. □

Bu sonuç birden fazla teoremi beraberinde getirir. Öncelikle bu teoremin tersinin de doğru olduğunu not edelim. Aslında V, D bölümlü halkası üzerinde bir vektör uzay ve R doğrusal dönüşümlerin bir halkasıysa yani, $0 \neq v \in V$ ve $w \in W$ verildiğinde $w = vr$ olacak şekilde bir $r \in R$ varsa bu durumda R halkası ilkeldir. Çünkü R halkası V üzerinde doğrusal dönüşümlerin bir halkası olduğundan faithful modül olarak V ye sahiptir. R'nin V' üzerindeki hareketi V'nin indirgenemez R - modül olduğu anlamına gelir. R halkası indirgenemez faithful V modülüne sahip olduğu için ilkel halkadır. Fakat burada V üzerinde R'nin değişmeli halkasının D olması gerekmez. D'yi içeren daha büyük bir halka olabilir.

Teorem 2.4.5. *R halkası bir D bölümlü halkası üzerinde bir V vektör uzayında doğrusal dönüşümlerin çift geçişli (doubly transitive) halkası ise R, D üzerinde yoğundur ve R'nin V üzerindeki değişmeli halkası tam olarak D dir.*

Kanıt. R halkası D bölümlü halkası üzerinde bir V vektör uzayında doğrusal dönüşümlerin çift geçişli halkası olsun. Yani, D üzerinde doğrusal bağımsız $v_1, v_2 \in V$ vektörleri ve keyfi $w_1, w_2 \in V$ elemanları verildiğinde $v_1 r = w_1$ ve $v_2 r = w_2$ olacak şekilde $r \in R$ vardır. Yukarıda görüldüğü üzere V , faithful indirgenemez R-modül olduğundan R ilkel bir halkadır. V üzerinde R halkasının değişmeli halkası $D \subset \Delta$ olmak üzere Schur's Lemma [10 , Thm 1.1.1] 'dan bölümlü halkadır. $D \neq \Delta$ olsun. Eğer $\Gamma \in \Delta$, $\Gamma \notin D$ ve $0 \neq v \in V$ ise v ile $v\Gamma$, D üzerinde doğrusal bağımsızdır. Çünkü eğer doğrusal bağımsız olmasaydı bir $\alpha \in D$ için $v = v\Gamma\alpha$ olurdu. Buradan $v - v\Gamma\alpha = v(1 - \Gamma\alpha) = 0$ olup $1 - \Gamma\alpha = 0$ dır. Fakat $\Gamma \notin D$ olduğundan $\Gamma = \alpha^{-1} \in D$ bir çelişkidir. v ile $v\Gamma$, D üzerinde doğrusal bağımsız ve R nin V üzerinde ki etkisi çift geçişli olduğundan $vr = 0$ ve $(v\Gamma)r = v \neq 0$ dır. $\Gamma \in \Delta$ olduğundan $0 \neq v = (v\Gamma)r = (vr)\Gamma = 0$ dır. Dolayısıyla bu bir çelişkidir. Sonuçta $\Delta = D$ dir. □

Teorem 2.4.6. *R bir ilkel halka ve Δ bölümlü halka olsun. Bu durumda R halkası ya Δ üzerinde ki $n \times n$ matris halkası Δ_n ye izomorftur ya da herhangi bir m tam sayısı için R'nin Δ_m ye izomorf olan bir S_m alt grubu vardır.*

Kanıt. R halkası ilkel olduğundan R, Δ bölümlü halkası üzerinde tanımlı V vektör uzayı üzerindeki doğrusal dönüşümlere yoğun olarak etki eden bir halkadır. Eğer V , Δ üzerinde sonlu boyutlu ise R halkası V üzerine yoğun olarak etki ettiği için R halkası Δ_m ye izomorftur . Şimdi V vektör uzayı Δ üzerinde sonlu boyutlu olmasın ve V nin $v_1, ..., v_m$, ... sonsuz doğrusal bağımsız elemanları olsun. $V_m = v_1\Delta + ... + v_m\Delta$ ve $S_m = \{x \in R | V_m x \subset V_m\}$ olsun. (2.4.4)'den herhangi $\Delta-$doğrusal dönüşümü R'nin bir elemanı tarafından oluşturulabilir. $W_m = \{x \in S_m | V_m x = (0)\}$ olsun. Şimdi

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & S_m & \longrightarrow & \Delta_m \\ & x & \longrightarrow & \begin{bmatrix} x & ... & ... & 0 \\ ... & 0 & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & ... & 0 \end{bmatrix}_{m \times m} \end{array}$$

tanımlayalım. Ψ örten bir halka homomorfizmasıdır. $Çek\Psi = \{x \in S_m | \Psi(x) = 0_{m\times m} \}$ dir. $S_m = \{x \in R \mid V_m x \subset V_m\}$ olduğundan $\Psi(x) = 0_{m\times m}$ ise $V_m x = (0)$ bulunur. O halde $Çek\Psi = W_m = \{x \in S_m \mid V_m x = (0)\}$ olduğundan birinci izomorfizma teoreminden $S_m/W_m \cong \Delta_m$ dır. □

2.5 Wedderburn-Artin Teoremi

Teorem 2.5.1 (Wedderburn Artin)**.** *R bir basit Artin halka ve D bir bölümlü halka olsun. Bu durumda, R halkası D üzerinde tanımlı bütün $n \times n$ matrislerin oluşturduğu D_n matris halkasına izomorftur. Ayrıca, n izomorfizma farkıyla tektir. Tersine, D bölümlü halkası üzerindeki bütün $n \times n$ matris halkası D_n bir basit Artin halkadır.*

Kanıt. R basit Artin halka olsun. İlk olarak R halkasının ilkel olduğunu gösterelim. R halkası Artin olduğundan $J(R)$ nilpotenttir. Ayrıca R halkası basit halka olduğundan $R^2 \neq (0)$ bir idealdir. Basit halkada sıfırdan farklı bir ideal ya sıfıra ya da halkanın kendisine eşittir. $R^2 \neq (0)$ olduğundan $R^2 = R$ dır. Dolayısıyla R halkası nilpotent değildir. Fakat $J(R)$ nilpotent olduğundan $J(R) \neq R$ dir. $J(R)$ radikali R nin bir ideali ve $J(R) \neq R$ olduğundan $J(R) = (0)$ dır. O halde R halkası yarı-basittir. R halkasının maksimal regüler sağ ideali ρ için, $(\rho : R)$ kümesi R nin iki yönlü ideali olduğundan $(\rho : R) = R$ veya $(\rho : R) = (0)$ dır. Eğer $(\rho : R) = R$ ise $J(R) = \cap(\rho : R) = R$ olur fakat $J(R) \neq R$ olduğundan bu bir çelişkidir. O halde $(\rho : R) = 0$ dır, yani R halkası ilkeldir.

Şimdi M, R halkasının faithful indirgenemez modülü olsun. M modülü $D = C(M)$ üzerinde bir vektör uzaydır. $v_1, ..., v_m$, ... D üzerinde M'nin doğrusal bağımsız elemanları olmak üzere $\rho_m = \{x \in R | i = 1, 2, ..., m \;\; icin \;\; v_i x = 0\}$ kümesi her $i = 1, 2, ..., m$ için R halkasının sağ idealidir ve $\rho_1 \supset \rho_2 \supset ... \supset \rho_m$ zinciri R nin sağ ideallerinin azalan zinciridir. Fakat R halkası Artin olduğundan bu şekilde sonsuz bir dizi yoktur. Yani bir n tamsayısı için $\rho_n = (0)$ dır. Fakat bu durumda v_{n+1} , $v_1, ..., v_n$ üzerinde doğrusal bağımlı olur. Dolayısıyla M, D üzerinde sonlu boyutludur. Daha önce belirtildiği gibi sonlu durumda R halkası D_n ye izomorftur. Şimdi n'nin izomorfizma farkıyla tek olduğunu gösterelim. Yani $D_m \approx \Delta_n$ ise $m = n$ ve $D \approx \Delta$ olduğunu göstereceğiz.

$e = \begin{bmatrix} 1 & ... & ... & 0 \\ ... & 0 & ... & ... \\ ... & ... & 0 & ... \\ 0 & ... & ... & 0 \end{bmatrix} \in D_m$ olsun. $\Phi : D_m \longrightarrow \Delta_n$, $\Phi(e) = f$ izomorfizma olsun.

(2.3.5)'den e eşkare elemanı için eD_m , D_m halkasının sıfırdan farklı minimal sağ idealidir . eD_m kümesi D_m nin minimal sağ ideali olduğundan $f\Delta_n$, Δ_n nin minimal sağ ideali olur. Bir baz değişikliği yapılarak I_r , $r \times r$ lik birim matris olmak üzere $f = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ formuna getirilebilir. $f\Delta_n$, Δ_n nin minimal sağ ideali olduğundan $r = 1$ dir. Bu yüzden genelliği bozmadan $f = \begin{bmatrix} 1 & ... & ... & 0 \\ ... & 0 & ... & ... \\ ... & ... & 0 & ... \\ 0 & ... & ... & 0 \end{bmatrix}$ dir. Böylece

$$D \approx eD_me \approx f\Delta_nf \approx \Delta$$

izomorfizması elde edilir. Ayrıca eD_m , D_m üzerinde m boyutlu ve $f\Delta_n$, Δ_n üzerinde n boyutlu olduğundan izomorfizmadan $m = n$ elde edilir. Şimdi tersine D_n nin basit Artin halka olduğunu gösterelim. Bölümlü halka üzerindeki bütün $n \times n$ matris halkası Artin halkadır. Ayrıca bölümlü halka üzerindeki bütün $n \times n$ matris halkası basit halkadır. O halde D_n basit Artin halkadır. $\square$

Weddernburn-Artin teoremi, Artin halkaların bir çok özel durumunda çok önemli çıkarımlara sahiptir. İlk olarak (2.3.17) de yarı-basit Artin halkaların basit Artin halkaların sonlu direkt toplamı olduğu gösterildi. Bu sonuç (2.5.1) ile birleştirilerek aşağıda ki teorem elde edilir.

Teorem 2.5.2. *R bir yarı-basit Artin halka ve her $i = 1, 2, ..., k$ için $\Delta^{(i)}$ bölümlü halka olmak üzere $\Delta^{(i)}$ üzerinde ki bütün $n_i \times n_i$ matrislerin halkası $\Delta^{(i)}_{n_i}$ olsun. Bu durumda*

$$R \approx \Delta^{(1)}_{n_1} \oplus ... \oplus \Delta^{(k)}_{n_k}$$

dır.

2.6 Eşkareler(İdempotentler)

Tezin bu bölümünde R halkası birimli halkayı gösterecektir.

Eğer $e \in R$ elemanı R halkasının eşkare elemanı ise R nin aşağıdaki gibi üç ayrışmasını yazabiliriz.

$i)R = Re \oplus Rf$

$ii)R = eR \oplus fR$

$iii)R = eRe \oplus eRf \oplus fRe \oplus fRf$

Bu ayrışmalar R halkasının *Peirce ayrışmasıdır* ve $f = 1 - e$, e nin *tamamlayıcı eşkare elemanı* olarak adlandırılır. Birinci ayrışma R halkasının sol ideallerine ayrışması , ikinci ayrışma R halkasının sağ ideallerine ayrışması ve üçüncü ayrışma R halkasının toplamsal alt gruplarına ayrışmasıdır. Bu alt gruplar arasında eRe ve fRf , birimleri sırasıyla e ve f olan birer halkadır. Bu iki halka,

$$\begin{aligned} eRe &= \{r \in R \,|er = r = re\} \\ fRf &= \{r \in R \,|fr = r = rf\} \end{aligned}$$

şeklinde karakterize edilir.

Teorem 2.6.1. *R bir halka ve e elemanı R'nin bir eşkare elemanı olsun. Bu durumda e' nin merkezi eşkare eleman $($yani $e \in Z(R))$ olması için gerek ve yeter koşul $eRf = fRe = 0$ olmasıdır.*

Kanıt. $r \in R$ olsun. Varsayımdan $e.r.f = f.r.e = 0$ dır. Ayrıca R halkasının üçüncü Peirce ayrışmasından $R = eRe \oplus fRf$ dır. Bu durumda $r \in R$ elemanı için $r = r_1 \oplus r_2$ olacak şekilde $r_1 \in eRe$ ve $r_2 \in fRf$ vardır. eRe ve fRf halkalarının tanımı gereği $r_1 = er_1 = r_1e$ ve $r_2 = fr_2 = r_2f$ dir. Burada $f = 1 - e$, e'nin tamamlayıcı eşkare elemanı olduğu için gerekli işlemler yapılarak $e \in Z(R)$ elde edilir. □

Peirce ayrışımına bir örnek olarak, herhangi bir k halkası için k üzerinde ki $n \times n$ matris halkası $M_n(k) = R$ halkasını ele alalım. $1 < r < n$ olmak üzere e eşkare elemanı esas köşegenindeki r tane elemanı 1 geri kalan elemanları 0 olan matris yani $e = diag(1, ..., 1_r, 0..., 0)$ ve f eşkare elemanı ise esas köşegeninde $n - r$ tane elemanı 1 geri kalanları 0 olan matris yani $f = diag(0, ..., 0_r, 1..., 1)$ olsun. Bu durumda $*$ olarak gösterilen yerler sırasıyla

$r \times r$, $r \times (n - r)$, $(n - r) \times r$, $(n - r) \times (n - r)$ boyutlu blok matrisler olmak üzere ;

$$eRe = \left\{ \begin{bmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}, eRf = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}, fRe = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ * & 0 \end{bmatrix} \right\}, fRf = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix} \right\}$$

dir.

R halkasında e ve e' iki eşkare olmak üzere eR den $e'R$ ye R modül homomorfizmalarının grubu $Hom_R(eR, e'R)$ ile gösterilecektir.

Ön Teorem 2.6.2. *R bir halka ve $e, e' \in R$ eşkare elemanlar olsun. M bir sağ R-modül olmak üzere $\lambda : Hom_R(eR, M) \longrightarrow Me$ doğal toplamsal grup izomorfizması vardır. Özel olarak $Hom_R(eR, e'R) \cong e'Re$ dir.*

Kanıt. $\phi : eR \longrightarrow M$, $\phi(e) = m$ şeklinde tanımlı bir R-modül homomorfizması olsun. Buradan

$$me = \phi(e)e = \phi(e^2) = \phi(e) = m$$

olduğundan $m = me \in Me$ dir. O halde $\lambda(\phi) = \phi(e)$ olacak şekilde istenilen λ dönüşümü tanımlanır.

$$\lambda : Hom_R(eR, M) \longrightarrow Me$$

$\phi_1, \phi_2 \in Hom_R(eR, M)$ olsun. $\phi_1 = \phi_2$ ise $e \in R$ için $\phi_1(e) = \phi_2(e)$ dir. Yani $\lambda(\phi_1) = \lambda(\phi_2)$ olduğundan λ iyi tanımlıdır. $\lambda(\phi_1 + \phi_2) = (\phi_1 + \phi_2)(e) = \phi_1(e) +$

$\phi_2(e) = \lambda(\phi_1)+\lambda(\phi_2)$ olduğundan λ grup homomorfizmasıdır. Şimdi λ homomorfizmasının çekirdeğini bulalım. Ç$ek\lambda = \{ \phi \in Hom_R(eR, M) \mid \lambda(\phi) = \phi(e) = m = 0\}$ dır. Bu durumda $\phi : eR \longrightarrow M$ sıfır homomorfizması olur yani , Ç$ek\lambda = \{0_R\}$ dir. O halde λ homomorfizması birebirdir. Şimdi $m \in M$ ve $r \in R$ için

$$\begin{aligned} \phi : \quad & eR \longrightarrow M \\ & er \longrightarrow m \end{aligned}$$

tanımlayalım. Eğer $er = 0$ ise $\phi(eR) = mr \in Mer = 0$ olduğundan ϕ iyi tanımlı R-homomorfizmasıdır. Ayrıca $\lambda(\phi) = \phi(e) = m$ olduğundan λ örtendir. Sonuç olarak λ izomorfizmadır yani , $Hom_R(eR, M) \cong Me$ dir. Son olarak $M = e'R$ alındığında $Hom_R(eR, e'R) \cong e'Re$ elde edilir. □

Sonuç 2.6.3. *R bir halka ve $e \in R$ bir eşkare eleman olsun. O halde $End_R(eR) \cong eRe$ doğal halka izomorfizmasıdır.*

Kanıt. Bir önceki ön teoremde $e = e'$ alınarak $\lambda : End_R(eR) \longrightarrow eRe$ grup izomorfizması elde edilir. Şimdi λ nın halka homomorfizması olduğunu göstereceğiz. $\phi, \phi' \in End_R(eR)$ ve $m = \phi(e) \in eR$ olsun. Buradan

$$\lambda(\phi \circ \phi') = e(\phi \circ \phi') = \phi'(\phi(e)) = \phi'(m) = \phi'(me) = m.\phi'(e) = \phi(e).\phi'(e) = \lambda(\phi).\lambda(\phi')$$

elde edilir. Sonuç olarak λ halka homomorfizmasıdır yani, $End_R(eR) \cong eRe$ dir. □

Tanım 2.6.4. R bir halka ve $\alpha, \beta \in R$ iki eşkare eleman olsun. Eğer $\alpha\beta = \beta\alpha = 0$ ise α ve β *ortogonal eşkare* eleman olarak adlandırılır.

Ön Teorem 2.6.5. *R bir halka ve $0 \neq e \in R$ eşkare eleman olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir;*

1. eR bir sağ R-modül olarak ayrıştırılamazdır.

2. Re bir sol R-modül olarak ayrıştırılamazdır.

3. eRe halkasında aşikar olmayan eşkare eleman yoktur.

4. $\alpha, \beta \in R$ sıfırdan farklı ortogonal eşkare eleman olmak üzere e nin $\alpha + \beta$ ' ya ayrışması yoktur.

Kanıt. Sol-sağ simetrisinden dolayı 1,3 ve 4 ün eşdeğerliliğini göstermek yeterlidir. Bir önceki sonuçtan $End_R(eR) \cong eRe$ olduğundan eRe halkasında aşikar olmayan eşkare eleman yoksa $End_R(eR)$ halkasında da yoktur. Dolayısıyla 1 ile 3 ün denkliği elde edilir. Şimdi 3 ile 4 ün denkliğini göstermek için 3 ün tersini kabul edelim. Yani eRe halkasında sıfırdan farklı α eşkare elemanı var olsun. Bu durumda $\beta = e - \alpha$ tamamlayıcı eşkare olmak üzere $e = \alpha + \beta$ ortogonal ayrışması elde edilir ki bu da 4 ün tersidir. Şimdi diğer yönü görmek için 4 ün tersini kabul edelim. Yani , $\alpha, \beta \in R$ sıfırdan farklı ortogonal eşkare elemanlar olmak üzere $e = \alpha + \beta$ ayrışması var olsun. Buradan $e.\alpha = \alpha^2 + \beta.\alpha = \alpha$ ve $\alpha.e = \alpha^2 + \alpha.\beta = \alpha$ dır. $eRe = \{r \in R \mid er = r = re\}$ olduğundan $\alpha \in eRe$ dir. Böylece eRe halkasında aşikar olmayan eşkare eleman var olduğundan 3 ün tersi elde edilir. Sonuç olarak 3 ile 4 denktir. $\square$

Tanım 2.6.6. (2.6.5)'in koşullarından herhangi birini sağlayan $0 \neq e \in R$ ye *ilkel eşkare eleman* denir.

Tanım 2.6.7. R bir halka ve M sıfırdan farklı bir sağ R-modül olsun. Eğer $End(M_R)$ yerel halka ise M'ye *kuvvetli ayrıştırılamaz sağ R - modül* denir.

Ön Teorem 2.6.8. *R bir halka ve $e \in R$ eşkare eleman olsun. Aşağıda ki ifadeler denktir ;*

1. eR bir sağ R-modül olarak kuvvetli ayrıştırılamazdır.

2. Re bir sol R-modül olarak kuvvetli ayrıştırılamazdır.

3. eRe yerel halkadır.

Kanıt. 1 ile 2 nin denkliği sağ sol simetrisinden gelir. 1 ile 3 ün denkliği ise (2.6.3) dan elde edilir. $\square$

Tanım 2.6.9. (2.6.8) 'in koşullarından herhangi birini sağlayan $e \in R$ elemanına *yerel eşkare eleman* denir.

Teorem 2.6.10. *R bir halka, $e \in R$ bir eşkare eleman ve $radR, R$ halkasının Jacobson radikalini göstermek üzere $J = radR$ olsun. Bu durumda $rad(eRe) = J \cap (eRe) = eJe$ dir. Ayrıca $\overline{R} = R/J$'de e eşkare elemanının görüntüsü $\overline{e}$ olmak üzere $eRe/rad(eRe) \cong \overline{e}\overline{R}\overline{e}$ dir.*

Kanıt. $rad(eRe) = J \cap (eRe) = eJe$ olduğunu göstermek için sırasıyla aşağıda ki üç koşulu kanıtlayacağız.

$i)$ $r \in rad(eRe) \Longrightarrow r \in J$

$ii)$ $r \in J \cap (eRe) \Longrightarrow r \in eJe$

$iii)$ $r \in eJe \Longrightarrow r \in rad(eRe)$

İlk olarak $i)$ yi kanıtlayalım. $r \in rad(eRe)$ ve $y \in R$ elemanı için $1 - yr$'nin R de bir sol terse sahip olduğunu gösterirsek $r \in J$ olur. Varsayımdan, bir $b \in eRe$ elemanı için $b(e - eye.r) = e$ dir. Buradan $b(1 - yr) = e$ ve $yrb(1 - yr) = yre = yr$ olur. Sonuçta $(1 + yrb)(1 - yr) = 1$ elde edilir. Şimdi ikinci öncül için, $r \in J \cap (eRe)$ olsun. Buradan $r \in J$ ve $r \in eRe$ olduğundan $r \in eJe$ elde edilir. Son olarak üçüncü öncül için, $r \in eJe$ ve $y \in eJe$ elemanı için $e - yr$ elemanının eRe halkasında bir sol terse sahip olduğunu gösterirsek $r \in rad(eRe)$ olur. Varsayımdan bir $r \in eJe \subset J$ olduğundan bir $x \in R$ elemanı için $x(1 - yr) = 1$ dir. Buradan $e = ex(1 - yr)e = ex(e - yr) = exe(e - yr)$, yani $exe \in eRe$ elemanı $e - yr$ için bir sol terstir. Sonuçta $rad(eRe) = J \cap (eRe) = eJe$ elde edilir. Teoremin kanıtını tamamlamak için

$$\begin{aligned} \phi : \quad ere &\longrightarrow \overline{e}\overline{R}\overline{e} \\ ere &\longrightarrow \overline{e}\,\overline{r}\,\overline{e} \end{aligned}$$

doğal halka homomorfizmasını ele alalım. Bu homomorfizmanın çekirdeği eJe dir. Birinci izomorfizma teoreminden

$$eRe/eJe \cong \overline{e}\overline{R}\overline{e}$$

elde edilir. $\square$

Teorem 2.6.11. *R bir halka ve $e \in R$ eşkare eleman olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur:*

1. ρ ideali eRe halkasının bir sol ideali ise $(R\rho) \cap eRe = \rho$ dır. Özel olarak $\rho \longrightarrow R\rho$ dönüşümü eRe'nin sol ideallerinden R'ninkilere birebir bir dönüşümdür.

2. ρ ideali eRe halkasının bir ideali ise $e(R\rho R) = \rho$ dır. Özel olarak $\rho \longrightarrow R\rho R$ dönüşümü eRe'nin ideallerinden R'nin ideallerine birebir bir dönüşümdür. Bu dönüşüm ideallerin çarpımını korur ve eğer e tam eşkare eleman ise, yani $ReR = R$ ise, bu dönüşüm örtendir.

Kanıt. R bir halka ve $e \in R$ eşkare eleman olsun.

1. $\rho_0 = (R\rho) \cap eRe \supseteq \rho$ olsun. Burada $\rho_0 \subseteq eRe$ olduğundan $\rho_0 = e\rho_0 \subseteq eR\rho = eRe\rho \subseteq \rho$ olduğundan $\rho_0 = \rho$ elde edilir.

2. $\rho \subseteq eRe$ ise ideal tanımından $e(eRe)e = eR(e\rho e)Re = (eRe)\rho(eRe) = \rho$ dir. Eğer ρ' , R nin başka bir ideali ise buradan

   $$(R\rho R)(R\rho' R) = R\rho R\rho' R = R(\rho e)R(e\rho')R = R\rho(eRe)\rho' R = R(\rho\rho')R$$

   dır. Son olarak e tam eşkare eleman , yani $ReR = R$ olsun. Bu durumda R nin herhangi bir β ideali için $\rho = e\beta e$ ideali eRe halkasının bir idealidir. O halde

   $$R(e\beta e)R = Re(R\beta R)eR = (ReR)\beta(ReR) = R\beta R = \beta$$

   olur. Böylece 2 deki dönüşüm örtendir.

$\square$

Sonuç 2.6.12. *Bir R halkasında e eşkare elemanının tam olduğu durumda kanıttaki izomorfizmadan görüldüğü üzere $e(radR)e = rad(eRe)$ olduğundan R halkasındaki $radR$, eRe halkasında $rad(eRe)$ ye karşılık gelir.*

Sonuç 2.6.13. *R bir halka ve $0 \neq e \in R$ eşkare eleman olsun. Eğer R halkası yarı-basit, basit, sol Noether, sol Artin ise bu durumda eRe halkası da sırasıyla yarı-basit, basit, sol Noether, sol Artindir.*

Kanıt. R halkası ile eRe halkasının idealleri arasında birebir eşleme olduğundan bütün durumlar eRe halkasında da sağlanır. □

Tanım 2.6.14. R bir halka ve $0 \neq e \in R$ eşkare eleman olsun. Eğer eR (ya da Re), R'nin minimal sağ (ya da sol) ideali ise bu durumda $0 \neq e \in R$ eşkare elemanı *sağ (ya da sol) indirgenemez eşkare eleman* olarak adlandırılır.

İlkel eşkare eleman ve yerel eşkare eleman tanımlarının sağ ve sol simetrik olduğuna fakat indirgenemez eşkare eleman tanımda sağ sol ayrımının olduğuna dikkat çekelim.

Örnek 2.6.15. *k bir cisim ve R, k üzerindeki $\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right\}$ üçgen matrislerin k-cebiri olsun.*

Bu halkanın Jacobson radikali $J(R) = \left\{\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$ dır ve $J(R)^2 = (0)$ olduğundan R halkası yarı-basit değildir.

$e = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$ eşkare elemanı için $eR = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$ ve $Re = \left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$ dır.

$boy_R Re = 1$ olduğundan e sol indirgenemez eşkare elemandır. Fakat $eR \supsetneq radR \supsetneq (0)$ olduğundan e sağ indirgenemez eşkare değildir. Ek olarak $eRe = \left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$, k ya izomorftur. Dolayısıyla e yerel eşkare elemandır. Benzer olarak $f = 1 - e = \left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$

tamamlayıcı eşkare elemanı sağ indirgenemez eşkare elemandır fakat sol indirgenemez eşkare eleman değildir.

Tanım 2.6.16. R bir halka olsun. Eğer R'nin sıfırdan farklı nilpotent ideali yoksa R ye *yarı-asal halka* denir.

Ön Teorem 2.6.17. *R bir halka ve $0 \neq e \in R$ eşkare eleman olsun. Eğer e sağ indirgenemez eşkare eleman ise eRe bölümlü halkadır. Ek olarak eğer R yarı-asal bir halka ise tersi de doğrudur.*

Kanıt. $End_R(eR) \cong eRe$ olduğundan (2.3.9)'dan e sağ indirgenemez eşkare eleman ise eRe bölümlü halkadır.

Tersine eRe bölümlü halka ve R yarı-asal bir halka olsun. $r \in R$ olmak üzere $0 \neq er \in eR$ alalım. R yarı-asal olduğundan $erRer \neq 0$ dır . Dolayısıyla bir $s \in R$ için $erse \neq 0$ dır. Varsayımdan eRe bölümlü halka olduğundan $erse$ elemanının tersi vardır ve bu ters ete olsun. Böylece $(erse)(ete) = e$ dir. Sonuç olarak $erR = eR$ olduğundan eR indirgenemez R-modüldür. Yani e sağ indirgenemez eşkare elemandır. □

Sonuç 2.6.18.

- R bir halka ve $0 \neq e \in R$ sağ indirgenemez eşkare eleman olsun. Bu durumda e yerel eşkare elemandır.
- R yarı-asal bir halka ve $0 \neq e \in R$ eşkare eleman olsun. e ' nin sağ indirgenemez eşkare eleman olması için gerek ve yeter koşul sol indirgenemez eşkare eleman olmasıdır.
- R yarı-basit bir halka ve $0 \neq e \in R$ eşkare eleman olsun. e ' nin sağ indirgenemez eşkare eleman olması için gerek ve yeter koşul yerel eşkare eleman ve ilkel eşkare eleman olmasıdır.

Ön Teorem 2.6.19. *R bir halka ve $0 \neq e \in R$ eşkare eleman olsun. $J = radR$ ve $\overline{R} = R/J$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:*

1. e elemanı R nin yerel eşkare elemanıdır.

2. $\overline{e}$ elemanı $\overline{R}$'nin sağ indirgenemez eşkare elemanıdır.

3. $\overline{e}$ elemanı $\overline{R}$'nin sol indirgenemez eşkare elemanıdır.

4. eR/eJ bir indirgenemez sağ R-modüldür.

5. eJ modülü eR'nin tek maksimal alt modülüdür.

Kanıt. $J(\overline{R}) = (0)$ olduğundan $\overline{R}$ yarı-basittir. Böylece yarı-asaldır. Sağ sol simetrisinden 2 ve 3 denktir. Ayrıca (2.6.17) 'dan $\overline{e}$ sağ indirgenemez eşkare eleman ise $\overline{e}\overline{R}\overline{e}$ bölümlü halkadır. $eRe/eJe \cong \overline{e}\overline{R}\overline{e}$ olduğundan $\overline{e}\overline{R}\overline{e}$ nin bölümlü halka olması için gerek ve yeter koşul eRe nin yerel halka olmasıdır. Dolayısıyla 1 ile 2 denktir. Şimdi $\overline{R}$ nin $\lambda : eR/eJ \longrightarrow \overline{e}\overline{R}$ izomorfizmasını düşünürsek , $\overline{e}$ nin $\overline{R}$ de sağ indirgenemez eşkare eleman olması için gerek ve yeter koşul $\overline{e}\overline{R}$ nin $\overline{R}$ nin minimal sağ ideali olmasıdır. Böylece $\overline{e}\overline{R}$ indirgenemez sağ $\overline{R}-$ modüldür. Sonuç olarak λ izomorfizmasından eR/eJ indirgenemez sağ R-modüldür, yani 2 ile 4 denktir. Son olarak eR nin herhangi bir I sağ ideali için $I \nsubseteq eJ$ olsun. Yine $\overline{R}$ nin $\lambda : eR/eJ \longrightarrow \overline{e}\overline{R}$ $\overline{R}$ -modül izomorfizmasını düşünürsek $\overline{e}\overline{R}$ indirgenemez sağ $\overline{R}-$modül olduğundan $\lambda(I) = \overline{e}\overline{R}$ olur. Bu durumda $eR = I + eJ = I + eRJ$ yazılır. Nakayama's Lemma [15] dan $I = eR$ elde edilir. Sonuçta 4 ile 5 denktir. □

Ön Teorem 2.6.20. *R bir halka ve $e, f \in R$ eşkare elemanlar olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:*

1. $eR \cong fR$ sağ R-modül olarak izomorftur.

2. $Re \cong Rf$ sol R-modül olarak izomorftur.

3. $e = ab$ ve $f = ba$ olacak şekilde $a \in eRf$ ve $b \in fRe$ vardır.

4. $e = ab$ ve $f = ba$ olacak şekilde $a, b \in R$ vardır.

Kanıt. Sağ sol simetrisinden 1 ile 2 denktir. Şimdi bir $\Phi : eR \longrightarrow fR$ modül izomorfizmasını $\Phi(e) = b$ şeklinde tanımlayalım. Burada $b.e = \Phi(e).e = \Phi(e^2) = \Phi(e) = b$ olduğundan $b.e = b$ dir. Böylece $b = \Phi(e) \in fR$ iken $b = b.e \in fRe$ dir. $a = \Phi^{-1}(f)$ olsun. Burada $a.f = \Phi^{-1}(f)f = \Phi^{-1}(f^2) = \Phi^{-1}(f) = a$ olduğundan $a.f = a$ dır. Böylece $a = \Phi^{-1}(f) \in eR$ iken $a = a.f \in eRf$ dir. Ek olarak $(\Phi^{-1}\Phi)(e) = ab$ ve $(\Phi\Phi^{-1})(f) = ba$ dır. Sonuç olarak $e = ab$ ve $f = ba$ olacak şekilde $a \in eRf$ ve $b \in fRe$ vardır. Bu durumda $e = ab$ ve $f = ba$ olacak şekilde $a, b \in R$ olduğu aşikardır. Son olarak $e = ab$ ve $f = ba$ olacak şekilde $a, b \in R$ var olsun. Bu durumda $be = b(ab) \in fR$ ve $af = a(ba) \in eR$ dir. Buradan

$$\begin{aligned} \phi: \quad & eR \longrightarrow fR \\ & x \longrightarrow bx \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \phi': \quad & fR \longrightarrow eR \\ & y \longrightarrow ay \end{aligned}$$

dönüşümlerini tanımlayalım. O halde $(\phi\phi')(f) = f$ ve $(\phi'\phi)(e) = e$ elde edilir. Sonuç olarak $\phi\phi' = \phi'\phi = 1$ olduğundan sağ R-modül olarak $eR \cong fR$ dir. □

Tanım 2.6.21. Eğer e ve f yukarıdaki koşullardan birini sağlıyorsa e ve f'ye *izomorfik eşkare elemanlar* denir ve $e \cong f$ ile gösterilir.

Tanım 2.6.22. R bir halka, I kümesi R nin bir ideali, $\Psi : R \longrightarrow R/I$ doğal halka epimorfizması ve $\overline{e} \in R/I$ bir eşkare eleman olsun. Eğer $\Psi(e) = \overline{e}$ olacak şekilde R halkasında bir e eşkare elemanı varsa $\overline{e}$ ye *R-ye eşkare yükseltilebilir* denir.

Genel bir I ideali için her $\overline{e} \in R/I$ eşkare elemanının R - *ye eşkare yükseltilebilir* olmasını beklemiyoruz. Örneğin $R = \mathbb{Z}$ halkasında $I = \langle 6 \rangle = \{6.k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ideali olmak üzere $\overline{3} \in \mathbb{Z}/\langle 6 \rangle$ eşkare elemanını alalım.

$$\begin{aligned} \phi: \quad & \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/\langle 6 \rangle \\ & x \longrightarrow \overline{x} \end{aligned}$$

doğal dönüşümü altında görüntüsü $\overline{3}$ olan $\mathbb{Z}$ halkasının hiçbir eşkare eleman yoktur. Dolayısıyla $\overline{3} \in \mathbb{Z}/\langle 6 \rangle$ eşkare elemanı $\mathbb{Z}$-ye eşkare yükseltilebilir değildir.

Ön Teorem 2.6.23. *R bir halka, $e \in R$ eşkare eleman ve $I \subset radR$, R nin bir ideali olsun. Bu durumda $\overline{e}$, $\overline{R} := R/I$ da ilkel eşkare eleman ise e, R de ilkel eşkare elemandır. Eğer $\overline{R}$ nin eşkare elemanları R-ye yükseltilebilir olan eşkare elemanlar ise bunun terside doğrudur.*

Kanıt. Eğer $a \in radR$ tek eşkare eleman ise $a = 0$ dır. $\alpha, \beta \in R$ sıfırdan farklı ortogonal eşkare elemanlar olmak üzere e'nin $\alpha + \beta$ ' ya ayrışması var olsun. $a \neq 0$ ise $\overline{a} \neq 0$ ve $\beta \neq 0$ ise $\overline{\beta} \neq 0$ dır. Bu yüzden $\overline{\alpha}, \overline{\beta} \in \overline{R}$ sıfırdan farklı ortogonal eşkare elemanlar olmak üzere $\overline{e} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$ aşikar olmayan ayrışması vardır. Tersine $x, y \in \overline{R}$ sıfırdan farklı ortogonal eşkare elemanlar olmak üzere $\overline{e} = x + y$ aşikar olmayan ayrışması var olsun. Bu eşkare elemanların R-ye eşkare yükseltilebilir olduğunu varsayalım. O halde $\overline{\alpha} = x$ ve $\overline{\beta} = y$ olacak şekilde $\alpha, \beta \in R$ eşkare elemanları vardır. Buradan $\alpha\beta = \beta\alpha \equiv 0(\, mod \; I)$ elde edilir. Ayrıca burada $\beta' \equiv \beta(modI)$ olacak şekilde α ile ortogonal bir $\beta' \in R$ eşkare elemanı vardır. Şimdi R halkasının $e' = \alpha + \beta'$ ilkel olmayan eşkare elemanlarını alalım. $\overline{e}' = \overline{\alpha} + \overline{\beta}' = \overline{\alpha} + \overline{\beta} = x + y = \overline{e}$ dir. Dolayısıyla e ve f'ye izomorfik eşkare elemanlardır. e' elemanı R'de ilkel eşkare olmadığından e elemanı da R'de ilkel eşkare eleman değildir. □

Ön Teorem 2.6.24. *R bir halka ve $I \subset radR$ kümesi R'nin bir ideali olsun. Eğer $\overline{R} = R/I$ nın eşkare elemanları R-ye eşkare yükseltilebilirse bu durumda her i için $\overline{e_i} = x_i$ olacak şekilde $\overline{R}$'nin ikişerli ortogonal eşkare elemanlarının $\{x_1, x_2, ...\}$ sayılabilir sonlu bir kümesi ve R nin ikişerli ortogonal eşkare elemanlarının $\{e_1, e_2, ...\}$ sayılarbilir sonlu bir kümesi vardır.*

Kanıt. İspatı tümevarımla yapalım. $i = 1$ için varsayımdan ve eşkare yükseltilebilir tanımından doğrudur. Her $i = 1, 2, ..., n$ için $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ kümesinin bu koşulu sağladığını varsayalım. $\alpha = e_1 + e_2 + ... + e_n$ eşkare ve $\beta \in R$ eşkare elemanı x_{n+1} 'e karşılığı olan eşkare eleman yani $\overline{\beta} = x_{n+1}$ olsun. Buradan $\overline{\alpha}$ ve $\overline{\beta}$, $\overline{R}$ nin ortogonal eşkare elemanlardır. O halde α ve β elemanları R halkasında ortogonal değilken $\overline{R}$ halkasında ortogonalse bu durumda α ya R de ortogonal ve β ile $\overline{R}$'de denk bir eşkare eleman vardır. Yani, $\overline{e}_{n+1} = \overline{\beta} = x_{n+1}$

olacak şekilde α'ya ortogonal bir e_{n+1} eşkare eleman bulunur. $i \leq n$ için $e_i = \alpha e_i = e_i \alpha$ olduğundan e_{n+1} , $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ eşkare elemanlarına ortogonaldir. □

Teorem 2.6.25. *R bir halka ve I, R nin bir nil ideali olsun. $\overline{\alpha} \in \overline{R} = R/I$ eşkare eleman olacak şekilde bir $\alpha \in R$ eşkare olsun. O halde $\overline{e} = \overline{\alpha} \in \overline{R}$ olacak şekilde bir $e \in \alpha R$ eşkare elemanı vardır.*

Kanıt. $b = 1 - \alpha$ olmak üzere $\overline{\alpha} = \alpha + I$ eşkare eleman olduğundan $\overline{\alpha}.\overline{\alpha} = (\alpha + I)(\alpha + I) = \alpha^2 + I = \alpha + I$ dır. O halde $\alpha b = b\alpha = \alpha - \alpha^2 \in I$ olur. Ayrıca I , R nin bir nil ideali olduğundan $I \subset radR$ dir. Bu durumda bir $m \geq 1$ tamsayısı için $(\alpha b)^m = 0$ dır. Binom teoreminden her i için r_i ' ler tam sayılar olmak üzere

$$\begin{aligned} 1 &= (\alpha + b)^{2m} \\ &= \alpha^{2m} + r_1 \alpha^{2m-1} b + ... + r_m \alpha^m b^m + r_{m+1} \alpha^{m-1} b^{m+1} + ... + b^{2m} \end{aligned}$$

elde edilir. $e = \alpha^{2m} + r_1 \alpha^{2m-1} b + ... + r_m \alpha^m b^m \in aR$ ve $f = r_{m+1} \alpha^{m-1} b^{m+1} + ... + b^{2m}$ olsun. $\alpha^m b^m = b^m \alpha^m = 0$ olduğundan $ef = 0$ elde ederiz. Ayrıca seçimden $e + f = 1$ olduğundan $e = e.(e + f) = e^2 + e.f = e^2$ olur. Sonuçta $ab \in I$ ve $e = \alpha^{2m} \equiv \alpha(modI)$ elde edilir. □

Tanım 2.6.26. R bir halka olsun. Eğer $R/radR$ sağ Artin halka ise R ye *yarı-yerel halka* denir.

Sonuç 2.6.27. *R bir yarı-yerel halka ve $I = radR$ bir nil ideali olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur :*

1. *Eğer $R \neq 0$ ve R halkası aşikar olmayan eşkare elemanlara sahip değilse R yerel halkadır.*
2. *Bir $\rho \subset R$ sağ idealinin sıfırdan farklı bir eşkare eleman içermesi için gerek ve yeter koşul ρ nun nil ideal olmamasıdır.*

Kanıt. R bir yarı-yerel halka ve $I = radR$ bir nil ideali olsun.

1. R bir yarı-yerel halka olsun ve R halkası aşikar olmayan eşkare elemanlara sahip olmasın. Bu durumda $\overline{R} = R/I$ halkası da aşikar olmayan eşkare elemanlara sahip değildir. Wedderburn-Artin teoreminden $\overline{R} = R/I$ bölümlü halka olduğundan R yerel halkadır.

2. R halkasının ρ sağ ideali nil ideal olmasın. I nil ideal olduğundan ρ'nun $\overline{R} = R/I$ da ki görüntüsü sıfırdan farklıdır. Bu yüzden sıfırdan farklı bir eşkare eleman içerir. $0 \neq \overline{a} = \overline{a}^2 \in \overline{R}$ olacak şekilde $a \in \rho$ olsun. Bu durumda $\overline{e} \neq \overline{a} \neq 0$ olacak şekilde $e \in aR \subset \rho$ eşkare elemanı vardır. Tersine ρ sağ idealinde $0 \neq a \in \rho$ eşkare eleman olsun. $a^2 = a \neq 0$ olduğundan $a^3 = a \neq 0$ dır. Bu şekilde devam edildiğinde $a^n = 0$ olacak şekilde n tamsayısı yoktur. Bu yüzden $a \in \rho$ nilpotent değildir. Sonuç olarak ρ nil ideal olmaz.

□

2.7 Yarı-Mükemmel Halkalar

Bu bölümde R halkası birimli halkayı gösterecektir.

Tanım 2.7.1. R yarı-yerel bir halka olsun. Eğer $R/radR$'nin eşkare elemanları R-ye eşkare yükseltilebilir ise R'ye *yarı-mükemmel halka* denir.

R sağ Artin halka olsun. Bu durumda R yarı-yerel bir halkadır ve $radR$ nilpotenttir. Dolayısıyla $R/radR$'nin eşkare elemanları R-ye eşkare yükseltilebilirdir. Yani R yarı-mükemmel halkadır. R yerel halka olsun. Bu durumda $R/radR$ bölümlü halka olduğundan sadece aşikar eşkare elemanlara sahiptir. Dolayısıyla R yarı-mükemmel halkadır. Bu yüzden yarı-mükemmel halkalar yerel halkaların ve sağ (sol) Artin halkaların bir genellemesidir.

Örnek 2.7.2. *k bir yerel halka olmak üzere $R = M_n(k)$ matris halkası yarı-mükemmel bir halkadır. Çünkü, k yerel halka olduğu için $\overline{k} = k/radk$ bölümlü halkadır. Aynı zamanda $R/radR = M_n(k) \ / \ M_n(radk) \cong M_n(\overline{k})$ olduğundan $R/radR$ basit Artin* *halkadır. Böylece yarı-yerel halkadır. Şimdi $x \in M_n(\overline{k})$ eşkare elemanının $M_n(k)$-ya eşkare yükseltilebilir olduğunu gösterelim. $x \in M_n(\overline{k})$ eşkare elemanı $\overline{k}^n$ vektör uzayının bir alt uzaya izdüşümüne karşılık geldiği için , $yxy^{-1} = diag(1, ..., 1, 0..., 0)$ eşkare matris olacak şekilde $y \in M_n(\overline{k})$ tersinir matrisi vardır. $u \in M_n(k)$ elemanı y'nin karşılığı olsun. Böylece u elemanı R de tersinirdir ve $u^{-1}diag(1, ..., 1, 0..., 0)u \in R = M_n(k)$ eşkare elemanı x elemanına karşılık gelir. Sonuçta $R = M_n(k)$ yarı-mükemmel bir halkadır.*

Örnek 2.7.3. *$R_1, R_2, ..., R_n$ yarı-mükemmel halkalar olmak üzere $R_1 \times R_2 \times ... \times R_n$ da yarı-mükemmeldir. Çünkü ; $1 \leq i \leq n$ için $R_1, R_2, ..., R_n$ yarı-mükemmel halkalar olduğundan sırasıyla R_1, R_2,...,R_n yarı-yereldir. Yani $R_1/radR_1$, $R_2/radR_2$,..., $R_n/radR_n$ Artin halkalardır. Artin halkaların sonlu direkt çarpımı da Artin olduğundan $R_1/radR_1 \times R_2/radR_2 \times ... \times R_n/radR_n$ Artindir. Dolayısıyla $R_1 \times R_2 \times ... \times R_n$ yarı-yerel halkadır. Ayrıca $R_1, R_2, ..., R_n$ yarı-mükemmel halkalar olduğundan $R_1/radR_1, ..., R_n/radR_n$ halkalarının eşkare elemanlarının sırasıyla $R_1, R_2, ..., R_n$ halkalarına eşkare yükseltilebilir.*

Şimdi $x_1 \in R_1/radR_1, ..., x_n \in R_n/radR_n$ olmak üzere $R_1/radR_1 \times R_2/radR_2 \times ... \times R_n/radR_n$ halkası içinde aldığımız eşkare eleman $(x_1, x_2, ..., x_n)$ olsun. Varsayımdan bu eşkare elemanlara karşılığı olan $y_1 \in R_1$, ..., $y_n \in R_n$ eşkare elemanları vardır. Sonuç olarak $(y_1, y_2, ..., y_n) \in R_1 \times R_2 \times ... \times R_n$ eşkare elemanı $(x_1, x_2, ..., x_n) \in R_1/radR_1 \times R_2/radR_2 \times ... \times R_n/radR_n$ eşkare elemanına karşılık geldiğinden $R_1 \times R_2 \times ... \times R_n$ halkası yarı-mükemmeldir.

Teorem 2.7.4. *R bir halka olsun. R'nin yarı-mükemmel halka olması için gerek ve yeter koşul $1 \leq i \leq n$ için e_i ler ikişerli ortogonal yerel eşkare elemanlar olmak üzere 1 birim elemanının $e_1 + \cdots + e_n$ ye ayrışıyor olmasıdır.*

Kanıt. İlk olarak R yarı-mükemmel halka olsun. R yarı-mükemmel halka olduğundan yarı-yerel halkadır. O halde $\overline{R} = R/radR$ yarı-basittir ve böylece $\overline{R}$ minimal sol (sağ) ideallerinin direkt toplamına ayrışır. Ayrıca yarı-basit halkada ilkel eşkare ve indirgenemez eşkare tanımı denk olduğundan $1 \leq i \leq n$ için x_i'ler ilkel eşkare elemanları aynı zamanda indirgenemez eşkare elemandır. Bu durumda $\overline{R}x_1, \cdots, \overline{R}x_n$ minimal sol ideallerdir ve $\overline{R} = \overline{R}x_1 + \cdots + \overline{R}x_n$ minimal sol ideallerine ayrışması vardır. Bu durumda $\overline{R} = R/radR$ içinde

$1 \leq i \leq n$ için x_i'ler ikişerli ortogonal ilkel eşkare elemanlar olmak üzere $\overline{1} = x_1 + ... + x_n$ ayrışması vardır. $1 \leq i \leq n$ için $x_1, \cdots, x_n$ e karşılığı olan R'nin eşkare elemanları sırasıyla $e_1, \cdots, e_n$ olsun. Bir önceki önermeden $1 \leq i \leq n$ için e_i'ler yerel eşkare elemanlar ve $e := e_1 + \cdots + e_n$ eşkare elemanı $\overline{1} = x_1 + \cdots + x_n$ e karşılığı olan eşkaredir. Fakat $e = 1 - (1 - e) \in 1 + radR \subset U(R)$ olduğundan $e = 1$ elde edilir. Sonuç olarak $e = e_1 + \cdots + e_n = 1$ ayrışması elde edilir. Şimdi tersine $1 \leq i \leq n$ için e_i'ler karşılıklı ortogonal yerel eşkare elemanlar olmak üzere $e_1 + \cdots + e_n = 1$ ayrışması var olsun. $1 \leq i \leq n$ için e_i'ler yerel eşkare elemanlar olduğundan $\overline{e} = e + radR$, $\overline{R}$'nin sol indirgenemez eşkare elemandır. Dolayısıyla $1 \leq i \leq n$ için $\overline{R}\overline{e_1}, \cdots, \overline{R}\overline{e_n}$ minimal sol ideallerdir. Buradan $\overline{1} = \overline{e_1} + \cdots + \overline{e_n}$ elde edilir. Dolayısıyla $\overline{R} = \overline{R}\overline{e_1} + \cdots + \overline{R}\overline{e_n}$ dir ki bu da $\overline{R}$ nin yarı-basit halka olduğu anlamına gelir. $\overline{R}$ yarı-basit olduğundan R halkası yarı-yerel halkadır. Kanıtı tamamlamak için $x \in \overline{R}$ eşkare elemanının R nin bir eşkare elemanına karşılık geldiğini göstereceğiz. R halkasının yukarıda ki ayrışmasını $\overline{R} = \overline{R}x \oplus \overline{R}(1 - x)$ ile karşılaştırarak $\overline{R}$-modül olarak

$$\begin{aligned} \overline{R}x &\cong \overline{R}\overline{e_1} + ... + \overline{R}\overline{e_i} \\ \overline{R}(1 - x) &\cong \overline{R}\overline{e}_{i+1} + ... + \overline{R}\overline{e}_n \end{aligned}$$

şeklinde yeniden dizin oluşturulur. Buradan (2.7.2) de yaptıklarımızdan $yxy^{-1} = \overline{e_1} + ... + \overline{e_i}$ olacak şekilde tersinir $y \in \overline{R}$ vardır. $u \in R$ olmak üzere $y = \overline{u}$ olsun. O halde $u \in U(R)$ ve $u^{-1}(e_1 + ... + e_n)u \in R$ elemanı x'e eşkare yükseltilebilirdir. Sonuçta R yarı-mükemmel halkadır. □

Teorem 2.7.5. *k bir halka ve M, k üzerinde bir sağ modül olsun. $R := End(M_k)$ nın yarı-mükemmel halka olması için gerek ve yeter koşul M'nin kuvvetli ayrıştırılamaz k-modüllerin bir sonlu direkt toplamı olmasıdır.*

Kanıt. İlk olarak $1 \leq i \leq n$ için M_i'ler kuvvetli ayrıştırılamaz k-modüller olmak üzere $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ olsun. e_i'ler bu ayrışmayla ilişkili M'den M_i'ye izdüşümler olsun. Böylece $1 \leq i \leq n$ için e_i lerin toplamı 1 ile ortogonal eşkare elemandır. Ayrıca e_iRe_i

halkası

$$e_iRe_i = \{f \in R \mid f(M_i) \subset M_i \; ve \; \forall i \neq j \;\; için \; f(M_j) = 0\}$$

dır. Sonuç olarak $e_iRe_i \cong End(M_i)_k$ dır. $1 \leq i \leq n$ için M_i ler kuvvetli ayrıştırılamaz k-modüller olduğundan $1 \leq i \leq n$ için $End(M_i)$ yerel halkadır. O halde izomorfizmadan e_iRe_i yerel halka yani $1 \leq i \leq n$ için e_i ler yerel eşkare elemanlardır. O halde R yarı-mükemmel halkadır. Şimdi tersine R yarı-mükemmel halka olsun. Bu durumda $1 \leq i \leq n$ için e_i'ler ikişerli ortogonal yerel eşkare elemanlar olmak üzere $e_1 + \cdots + e_n = 1$ ayrışması vardır. $M_i = e_i(M)$ yazarak $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ bir direkt toplam ayrışması elde edilir. Ayrıca yukarıdaki gibi $1 \leq i \leq n$ için $e_iRe_i \cong End(M_i)_k$ dir. $1 \leq i \leq n$ için e_i ler yerel eşkare elemanlar olduğundan e_iRe_i yerel halkadır. Dolayısıyla $1 \leq i \leq n$ için M_i ler kuvvetli ayrıştırılamazdır. □

Sonuç 2.7.6. *Eğer k yarı-mükemmel bir halka ise $M_m(k)$ yarı-mükemmel halkadır.*

Kanıt. k halkasını kendisi üzerinde bir k-modül olarak düşündüğümüzde $k \cong End(k_k)$ olduğu için varsayımdan $End(k_k)$ yarı-mükemmel halka olur. Bu durumda k_k kuvvetli ayrıştırılamaz k-modüllerin sonlu direkt toplamıdır. Bu durum $(k^m)_k$ için de sağlanır. Yukarıda ki teorem $(k^m)_k$ ya uygulandığında $M_m(k)$ yarı-mükemmel halka olur. □

Teorem 2.7.7. *R bir halka olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:*

1. *R yarı-mükemmel halkadır ve $R/radR$ basit halkadır.*

2. *k yerel halka olmak üzere $R \cong M_n(k)$ dır.*

Ek olarak eğer 1 veya 2 den herhangi biri sağlanıyorsa n tek olarak belirlidir ve k halkası izomorfizma farkıyla tektir. Ayrıca, R halkası ayrıştırılamazdır.

Kanıt. İlk olarak ikinci öncülün sağlandığını kabul edelim. k yerel halka olduğunda $M_n(k)$ yarı-mükemmel halka olduğundan izomorfizmadan R yarı-mükemmel halkadır. Ayrıca $\overline{k} = k/radk$ olmak üzere $R/radR \cong M_n(k/radk)$ olduğundan $R/radR$ basit halkadır ve R halkası ayrıştırılamazdır. Şimdi birinci öncülün sağlandığını kabul edelim. R yarı-mükemmel halka olduğundan $1 \leq i \leq n$ için e_i ler ikişerli ortogonal yerel eşkare elemanlar olmak üzere $1 = e_1 + \cdots + e_n$ ayrışması vardır. $e_i \in R$ yerel eşkare elemanlar olduğundan $\overline{e}_i = e_i + radR$, $\overline{R}$ nin sağ indirgenemez eşkare elemandır. Kabulden $R/radR$ basit halka olduğundan yarı-basit halkadır. (2.6.18)'den yarı-basit halka da her sol indirgenemez eşkare eleman ilkel eşkare elemandır. Bu durumda $\overline{R} = R/radR$ içinde $1 \leq i \leq n$ için e_i lerin görüntüsü $\overline{e_i}$ ikişerli ortogonal ilkel eşkare elemanlardır. Böylece $1 \leq i \leq n$ için $\overline{e_1}\overline{R}, \cdots, \overline{e_n}\ \overline{R}$ minimal sağ ideallerdir. $\overline{R} = R/radR$ yarı-basit halka olduğundan minimal sağ ideallerine $\overline{R} = \overline{e_1}\overline{R} \oplus \cdots \oplus \overline{e_n}\ \overline{R}$ ayrışması vardır. Kabulden R yarı-mükemmel halka olduğundan R yarı-yerel halkadır. Yani $R/radR$ halkası Artindir. $R/radR$ basit Artin halka olduğundan $1 \leq i \leq n$ için $\overline{e_i}\overline{R}$ indirgenemez sağ $\overline{R}-$modüllerine izomorftur. Buradan $M = e_1R$ yazarsak buradan $k := End(M_R) \cong e_1Re_1$ yerel halka iken

$$R \cong End(R_R) \cong End(M_R^n) \cong M_n(k)$$

elde edilir. □

Teorem 2.7.8. *R değişmeli bir halka olsun. R'nin yarı-mükemmel olması için gerek ve yeter koşul R'nin yerel halkaların bir sonlu direkt çarpımı olmasıdır.*

Kanıt. Yerel halkalar aynı zamanda yarı-mükemmel halka olduğundan ve yarı-mükemmel halkaların sonlu direkt çarpımı da yarı-mükemmel halka olduğundan yerel halkaların sonlu direkt çarpımı da yarı-mükemmel olur. Tersine R halkası değişmeli yarı-mükemmel halka olsun. $1 \leq i \leq n$ için e_i ler ikişerli ortogonal yerel eşkare elemanlar olmak üzere $1 = e_1 + ... + e_n$ ayrışması vardır. Buradan

$$R = e_1R \oplus ... \oplus e_nR$$

dir. R halkası değişmeli ve $1 \leq i \leq n$ için e_i ler yerel eşkare elemanlar olduğundan $e_iR = e_iRe_i$ yerel halkadır. Sonuç olarak R halkası yerel halkaların bir sonlu direkt çarpımıdır. □

3. ADJOİNT GRUBU DEĞİŞMELİ OLAN YARI-MÜKEMMEL HALKALAR

Nathan Jacobson halkalar, yarı gruplar ve gruplar arasındaki önemli bağlantıları ortaya koydu [12,13]. Bu bağlantılar kullanılarak bazı halkaların karakterizasyonları yapıldı.

Örneğin herhangi bir R halkası üzerinde her $a, b \in R$ için $aob = a + b + ab$ şeklinde yeni bir işlem tanımlandığında bu işleme göre her R halkasının bir yarı grup olduğunu ve R'nin bu işleme göre grup olması için gerek ve yeter koşulun R'nin radikal halka olması gerektiğini göstermiştir. Burada (R, o) grubuna R halkasının *adjoint grubu* denir. Bundan sonra bu grup R^o ile gösterilecektir.

Tezin bu kısmında W. K. Nicholson'ın "Adjoint grubu değişmeli olan yarı-mükemmel halkalar" [18] adlı makalesi ayrıntılarıyla incelenecektir.

Bu bölüm boyunca R halkasının toplamsal grubu R^+ ile , R'nin birimli olması durumunda tersinir elemanların oluşturduğu çarpımsal grup R^* ile gösterilecektir.

3.1 Temel Tanımlar ve Ön Teoremler

Tanım 3.1.1. R bir halka olsun. R halkası üzerinde her $x, y \in R$ için

$$x \circ y = x + y + xy$$

şeklinde tanımlanan işlem *adjoint çarpım* olarak adlandırılır.

Her $a, b \in R$ için R bir halka olduğundan $a\ o\ b = a + b + ab \in R$ dir. Dolayısıyla R halkası adjoint işlemine göre kapalıdır.

$a, b, c \in R$ için

$(a\, o\, b)\; o\; c = (a + b + ab)\; o\; c = a + b + ab + c + (a + b + ab).c = a + b + ab + c + ac + bc + abc$

$a\; o\; (b\; o\; c) = \; a\; o\; (b + c + bc) = a + b + c + bc + a.(b + c + bc) = a + b + c + bc + ab + ac + abc$

olduğundan

$$(a\; o\; b)\; o\; c = a\; o\; (b\; o\; c)$$

eşitliği sağlanır. Yani R halkası adjoint çarpım işlemine göre birleşmelidir. Dolayısıyla R halkasının bütün elemanları adjoint çarpma işlemine göre birim elemanı 0 olan bir yarı grup oluşturur.

Örnek 3.1.2. *$\mathbb{Z}$ tam sayılar halkasının adjoint grubunu bulalım. $x \in \mathbb{Z}$ elemanı adjoint işlemine göre tersinir olsun. $(\mathbb{Z}, o)$ yarı grubunun adjoint işlemine göre etkisiz elemanı 0 dır. O halde $x\; o\; x' = x + x' + xx' = 0$ olacak şekilde $x' \in \mathbb{Z}$ elemanı vardır. Bu eşitlikten $x' = \dfrac{-x}{1+x}$ bulunur. $x' \in \mathbb{Z}$ olduğundan $\mathbb{Z}^o = \{0, -2\}$ elde edilir.*

Örnek 3.1.3. *$2\mathbb{Z}$ halkasının adjoint grubunu bulalım. $x \in 2\mathbb{Z}$ elemanı adjoint işlemine göre tersinir olsun. $(2\mathbb{Z}, o)$ yarı grubunun adjoint işlemine göre etkisiz elemanı 0 dır. O halde $x\; o\; x' = x + x' + xx' = 0$ olacak şekilde $x' \in 2\mathbb{Z}$ elemanı vardır. Bu eşitlikten $x' = \dfrac{-x}{1+x}$ bulunur. $x' \in 2\mathbb{Z}$ olduğundan $2\mathbb{Z}^o = \{0\; , -2\}$ elde edilir.*

Şimdi R'nin adjoint grubu R^o ile R halkası birimli olduğunda tersinir elemanlarından oluşan R^* çarpımsal grubunun izomorf olduğunu gösterelim. Bunun için bir

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & R^o & \longrightarrow & R^* \\ & r & \longrightarrow & 1 + r \end{array}$$

tanımlayalım.

$\Psi(r_1\ ) = 1 + r_1$ ve $\Psi(r_2\ ) = 1 + r_2$ olduğundan $\Psi(r_1\ o\ r_2\ ) = \Psi(r_1 + r_2 + r_1r_2) = 1+r_1+r_2+r_1r_2$ yazarız. Aynı zamanda $\Psi(r_1).\Psi(r_2) = (1+r_1).(1+r_2) = 1+r_1+r_2+r_1r_2$ dir. Böylece $\Psi(r_1 o r_2) = \Psi(r_1).\Psi(r_2)$ olur. Yani Ψ grup homomofizmasıdır.

Eğer $1 + r \in R^*$ ise $(1 + r).(1 + s) = 1$ olacak şekilde bir $1 + s \in R^*$ elemanı vardır. Buradan $r + s + rs = 0$ dir. Bu yüzden r sağ adjoint tersinirdir. Benzer bir şekilde r sol adjoint tersinir de olur. Böylece $r \in R^o$ bulunur. Her $1 + r \in R^*$ için $\Psi(r\ ) = 1 + r$ olacak şekilde $r \in R^o$ olduğundan Ψ örten bir homomorfizmadır.

Şimdi Φ homomorfizmasının çekirdeğini bulalım.
Ç$ek(\Phi) = \{r \in R^o \mid \Psi(r\ ) = 1 + r = 1\ \} = \{0\}$ bulunur. Böylece Ψ dönüşümü birebirdir.

Bu durumda R^o adjoint grubu ile R^* ($1 + R$'nin çarpımsal grubu) eş yapılı gruplardır.

Örnek 3.1.2 den $\mathbb{Z}^o = \{0, -2\}$ olduğunu biliyoruz. $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası birimli bir halka ve $\mathbb{Z}$ nin çarpımsal grubu $\mathbb{Z}^* = \{1, -1\}$ dir. $\mathbb{Z}^o \cong \mathbb{Z}^*$ olduğu açıktır.

Örnek 3.1.4. $R = \mathbb{Z}_8 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}\}$ *halkası verilsin.* R *nin adjoint grubu ve çarpımsal grubu sırasıyla* $R^o = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}\}$ *ve* $R^* = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{7}\}$ *dir.* R *birimli halka olduğundan* $R^o \cong R^*$ *dır.*

Tanım 3.1.5. R herhangi bir halka ve X bir sol $R-$modül olsun. Eğer $R^oX = 0$ eşitliği sağlanıyorsa X modülüne sol *G-unital*, eğer $XR^o = 0$ eşitliği sağlanıyorsa X modülüne sağ *G-unital* modül denir. Hem sağ hem sol *G-unital* modüle sadece *G-unital* modül denir.

Eğer R halkası birimliyse, her $u \in R^*$ için $u - 1 \in R^o$ olduğundan bir $x \in X$ için $(u - 1)x = 0$ dır. Dolayısıyla $ux = x$ ile *G-unital* tanımı eşdeğerdir.

Tanım 3.1.6. $R_1, R_2, ..., R_n$ halka ve $i \neq j$ iken X_{ij} , $R_i - R_j$ bimodül olsun. $[R_i, X_{ij}]$ *yarı direkt toplamı*, $i \neq j$ ve her i için $x_{ii} \in R_i$, $x_{ij} \in X_{ij}$ olmak üzere (x_{ij}) , $n \times n$ lik x_{ij} matris halkası olarak tanımlanır.

Burada toplama işlemi bilinen matris toplamı ve $(x_{ij})(y_{ij}) = (z_{ij})$ çarpma işlemi ise aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$z_{ii} = x_{ii}y_{ii} \qquad \text{her } i = 1, 2, ..., n \text{ için}$$

$$z_{ij} = x_{ii}y_{ij} + x_{ij}y_{jj} \qquad \text{her } i \neq j \text{ için}$$

Eğer X_{ij} modülleri sıfır olursa $[R_i, X_{ij}]$ yarı direkt toplamı alışılmış $R_1 \oplus R_2 \oplus ... \oplus R_n$ dik toplamıdır.

Şimdi bu tanımı herhangi iki halka ve 2×2 lik matrisler için yazalım.

S ve A herhangi iki halka olmak üzere X bir $S - A$ bimodül ve Y bir $A - S$ bimodül olsun. $\begin{bmatrix} S & X \\ Y & A \end{bmatrix}$ yarıdirekt toplamı ile gösterilen 2×2 lik matrislerin kümesi, bilinen toplama ve

$$\begin{bmatrix} s & x \\ y & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s' & x' \\ y' & a' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ss' & sx' + xa' \\ ys' + ay' & aa' \end{bmatrix}$$

çarpma işlemine göre bir halkadır. Aşağıdaki teoremde böyle bir matris halkasının adjoint grubu karakterize edilecektir.

Teorem 3.1.7. *S ve A herhangi iki halka , X bir $S - A$ bimodül ve Y bir $A - S$ bimodül olsun. Buradan*

$$\begin{bmatrix} S & X \\ Y & A \end{bmatrix}^o = \begin{bmatrix} S^o & X \\ Y & A^o \end{bmatrix}$$

dır. Ayrıca bu grubun değişmeli olması için gerek ve yeter koşul S^o ve A^o adjoint gruplarının değişmeli olması X ve Y modüllerinin G-unital olmasıdır. Ek olarak eğer bu durum sağlanırsa $\begin{bmatrix} S & X \\ Y & A \end{bmatrix}^o$ adjoint grubu, S^o ,A^o adjoint gruplarının ve X ve Y toplamsal gruplarının direkt çarpımına izomorftur.

Kanıt. $\begin{bmatrix} S & X \\ Y & A \end{bmatrix}$ halkasının adjoint grubunu bulmak için halkanın adjoint çarpma işlemine göre tersinir elemanlarını belirleyelim. $\begin{bmatrix} S & X \\ Y & A \end{bmatrix}$ halkasının adjoint işlemine göre birim elemanı $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dır. $s \in S$, $x \in X$, $y \in Y$, $a \in A$ olmak üzere $\begin{bmatrix} s & x \\ y & a \end{bmatrix}$ elemanı adjoint çarpma işlemine göre tersinir olsun. Bu durumda $\begin{bmatrix} s & x \\ y & a \end{bmatrix} o \begin{bmatrix} s' & x' \\ y' & a' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olacak şekilde $s' \in S$ $x' \in X$, $y' \in Y$, $a' \in A$ vardır. Adjoint çarpma işleminin tanımı kullanılarak

$$\begin{bmatrix} s + s' + ss' & x + x' + sx' + xa' \\ y + y' + ys' + ay' & a + a' + aa' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buradan matris eşitliğinden

$$\begin{aligned} s + s' + ss' &= 0 \\ a + a' + aa' &= 0 \\ x + x' + sx' + xa' &= 0 \\ y + y' + ys' + ay' &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. İlk iki eşitlikten görüldüğü üzere $s \in S^o$ ve $a \in A^o$ dır. O halde

$$\begin{bmatrix} S & X \\ Y & A \end{bmatrix}^o \subset \begin{bmatrix} S^o & X \\ Y & A^o \end{bmatrix}$$

kapsaması vardır.

Şimdi tersine $\begin{bmatrix} s & x \\ y & a \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} S^o & X \\ Y & A^o \end{bmatrix}$ alalım. Bu durumda $s \in S^o$, $a \in A^o, x \in X$ ve $y \in Y$ dir. $s \in S^o$ olduğundan , $s + s' + ss' = 0$ ve $a \in A^o$ olduğundan $a + a' + aa' = 0$ dır.

Gerekli işlemler yapıldığında $\begin{bmatrix} s & x \\ y & a \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} S & X \\ Y & A \end{bmatrix}^o$ elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{bmatrix} S^o & X \\ Y & A^o \end{bmatrix} \subset \begin{bmatrix} S & X \\ Y & A \end{bmatrix}^o$$

kapsaması vardır. İki yönlü kapsamadan eşitlik elde edlir. Teoremin ikinci kısmının ispatı için $\begin{bmatrix} S & X \\ Y & A \end{bmatrix}^o = \begin{bmatrix} S^o & X \\ Y & A^o \end{bmatrix}$ grubu değişmeli olsun. O halde her $s, s' \in S^o$, $x, x' \in X$, $y, y' \in Y$ ve $a, a' \in A^o$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} s & x \\ y & a \end{bmatrix} o \begin{bmatrix} s' & x' \\ y' & a' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s' & x' \\ y' & a' \end{bmatrix} o \begin{bmatrix} s & x \\ y & a \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu eşitlikte yine adjoint çarpma işleminin tanımı ve matris eşitliği kullanılarak aşağıdaki denklemler elde edilir ;

$$\begin{aligned} ss' &= s's \\ aa' &= a'a \\ x + x' + sx' + xa' &= x' + x + s'x + x'a \\ y + y' + ys' + ay' &= y' + y + y's + a'y \end{aligned}$$

İlk iki eşitlikten S^o ve A^o adjoint gruplarının değişmeli olduğunu söyleyebiliriz. Diğer eşitliklerde ise gerekli işlemler yapılarak X ve Y 'nin G-unital modül olduğu elde edilir. Şimdi tersine S^o ve A^o adjoint grupları değişmeli ve X ve Y 'nin G-unital modül olduklarını kabul edelim. $\begin{bmatrix} S & X \\ Y & A \end{bmatrix}^o = \begin{bmatrix} S^o & X \\ Y & A^o \end{bmatrix}$ grubunun değişmeli olduğunu gösterelim. $s, s' \in S^o$ $a, a' \in A^o$, $x, x' \in X$ ve $y, y' \in Y$ için $\begin{bmatrix} s & x \\ y & a \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} s' & x \\ y & a' \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} S^o & X \\ Y & A^o \end{bmatrix}$ alalım.

Bu durumda varsayımdan S^o ve A^o adjoint grupları değişmeli olduğundan $ss' = s's$, $aa' = a'a$ yazarız. Ek olarak yine varsayımdan X ve Y 'nin G-unital modül oldukları için $sx' = s'x = xa' = x'a = 0$ dır. Bütün bunlardan $ss' = s's$, $aa' = a'a$, $x + x' + sx' + xa' = x' + x + s'x + x'a$ ve $y + y' + ys' + ay' = y' + y + y's + a'y$ eşitliklerini elde ederiz yani ,

$$\begin{bmatrix} s & x \\ y & a \end{bmatrix} o \begin{bmatrix} s' & x \\ y & a' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s' & x \\ y & a' \end{bmatrix} o \begin{bmatrix} s & x \\ y & a \end{bmatrix}$$

dir. Dolayısıyla $\begin{bmatrix} S & X \\ Y & A \end{bmatrix}^o$ grubu değişmelidir. Son olarak $\begin{bmatrix} S & X \\ Y & A \end{bmatrix}^o$ adjoint grubunun , S^o ve A^o adjoint gruplarının, X ve Y toplamsal gruplarının direkt çarpımına izomorf olduğunu gösterelim. Bunun için öncelikle $S^o \times A^o \times X \times Y$ direkt çarpımı üzerinde bir $*$ ikili işlemini aşağıdaki gibi tanımlayalım ; $s, s' \in S^o$, $a, a' \in A^o$, $x, x' \in X$, $y, y' \in Y$ olmak üzere

$$\begin{array}{rccc} * : & (S^o \times A^o \times X \times Y) \times (S^o \times A^o \times X \times Y) & \longrightarrow & S^o \times A^o \times X \times Y \\ & ((s, a, x, y), (s', a', x', y')) & \longrightarrow & (s\, o\, s', a\, o\, a', x + x', y + y') \end{array}$$

Şimdi tanımladığımız bu ikili işlemi göz önüne alarak , $s \in S^o$, $a \in A^o$, $x \in X$, $y \in Y$ olmak üzere bir

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & \begin{bmatrix} S & X \\ Y & A \end{bmatrix}^o & \longrightarrow & S^o \times A^o \times X \times Y \\ & \begin{bmatrix} s & x \\ y & a \end{bmatrix} & \longrightarrow & (s, a, x, y) \end{array}$$

tanımlayalım. $\begin{bmatrix} s_1 & x_1 \\ y_1 & a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_2 & x_2 \\ y_2 & a_2 \end{bmatrix}$ olsun.
Bu durumda $(s_1, a_1, x_1, y_1) = (s_2, a_2, x_2, y_2)$ olduğundan Ψ dönüşümü iyi tanımlıdır.

$$\Psi\left(\begin{bmatrix} s_1 & x_1 \\ y_1 & a_1 \end{bmatrix} o \begin{bmatrix} s_2 & x_2 \\ y_2 & a_2 \end{bmatrix}\right) = \Psi\left(\begin{bmatrix} s_1 + s_2 + s_1 s_2 & x_1 + x_2 + s_1 x_2 + x_1 a_2 \\ y_1 + y_2 + y_1 s_2 + a_1 y_2 & a_1 + a_2 + a_1 a_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= (s_1 + s_2 + s_1 s_2, a_1 + a_2 + a_1 a_2, x_1 + x_2 + s_1 x_2 + x_1 a_2, y_1 + y_2 + y_1 s_2 + a_1 y_2)$$

dir. Ayrıca

$$\Psi\left(\begin{bmatrix} s_1 & x_1 \\ y_1 & a_1 \end{bmatrix}\right) * \Psi\left(\begin{bmatrix} s_2 & x_2 \\ y_2 & a_2 \end{bmatrix}\right) = (s_1, a_1, x_1, y_1) * (s_2, a_2, x_2, y_2) = (s_1 \, o \, s_2, a_1 \, o \, a_2, x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

dir. Dolayısıyla
$\Psi\left(\begin{bmatrix} s_1 & x_1 \\ y_1 & a_1 \end{bmatrix} o \begin{bmatrix} s_2 & x_2 \\ y_2 & a_2 \end{bmatrix}\right) = \Psi\left(\begin{bmatrix} s_1 & x_1 \\ y_1 & a_1 \end{bmatrix}\right) * \Psi\left(\begin{bmatrix} s_2 & x_2 \\ y_2 & a_2 \end{bmatrix}\right)$ elde edilir. Yani , Ψ grup homomorfizmasıdır. Tanımladığımız Ψ birebir ve örten de olduğundan

$$\begin{bmatrix} S & X \\ Y & A \end{bmatrix}^o \cong S^o \times A^o \times X \times Y$$

izomorfiması elde edilir. $\square$

Örnek 3.1.8. *$2\mathbb{Z}$ ve $3\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ modüller olmak üzere $R = \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} \\ 3\mathbb{Z} & \mathbb{Z} \end{bmatrix}$ halkasının adjoint grubu $\begin{bmatrix} \mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} \\ 3\mathbb{Z} & \mathbb{Z} \end{bmatrix}^o = \begin{bmatrix} \mathbb{Z}^o & 2\mathbb{Z} \\ 3\mathbb{Z} & \mathbb{Z}^o \end{bmatrix}$ dır. Ayrıca (3.1.2) den $\mathbb{Z}^o = \{0, -2\}$ olduğundan*

$$\begin{bmatrix} \mathbb{Z}^o & 2\mathbb{Z} \\ 3\mathbb{Z} & \mathbb{Z}^o \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 2\mathbb{Z} \\ 3\mathbb{Z} & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2\mathbb{Z} \\ 3\mathbb{Z} & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 2\mathbb{Z} \\ 3\mathbb{Z} & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 2\mathbb{Z} \\ 3\mathbb{Z} & -2 \end{bmatrix} \right\}$$

kümesidir.

Ön Teorem 3.1.9. *R bir yerel halka olsun.*

1. *Eğer R^* değişmeli bir grup ise R değişmeli bir halkadır.*

2. *Eğer R'nin sıfırdan farklı bir G-unital modülü varsa $R/J(R) \cong \mathbb{Z}_2$ olur.*

3. *Eğer $R/J(R) \cong \mathbb{Z}_2$ ise G-unital R-modüller elemanter değişmeli 2-gruplardır.*

Kanıt. R bir yerel halka olsun.

1. Eğer $a, b \in J(R)$ ise a ve b quasi regüler elemanlardır. Bu durumda $1 + a, 1 + b \in R^*$ olur. R^* grubu değişmeli olduğundan $(1+a)(1+b) = (1+b)(1+a)$ dır. Yani $ab = ba$ elde edilir. Bu durumda $J(R)$ değişmelidir. $a, b \in R$ fakat $a, b \notin J(R)$ olsun. Bu durumda R yerel halka olduğundan $a, b \in R^*$ olur ki buradan $ab = ba$ elde edilir. Son olarak eğer $a \in J(R)$ ve $b \in R \backslash J(R)$ olursa $(1 + a) \in R^*$ ve $b \in R^*$ olduğundan $(1 + a)b = b(1 + a)$ elde edilir. Yani $ab = ba$ olduğundan R değişmeli olur.

2. X sıfırdan farklı bir G-unital modül olsun. Eğer $x \in X$ ve $a \in J(R)$ ise $(1 + a)x = x$ dir. Dolayısıyla $ax = 0$ olur. Bu yüzden X , G-unital $R/J(R)$ modüldür. Bu durumda R yi bölümlü halka kabul edebiliriz. Fakat her $x \in X$ ve $0 \neq r \in R$ için $(1 - r)x = 0$ dır. X sıfırdan farklı olduğundan $r = 1$ elde edilir. Sonuç olarak $R/J(R) \cong \mathbb{Z}_2$ dır.

3. Eğer X elemanter değişmeli 2-grup ise yani, X grubunda birimden farklı her elemanın mertebesi 2 ise bu durumda X , $\mathbb{Z}_2$ üzerinde bir vektör uzaydır. $R/J(R) \cong \mathbb{Z}_2$ olduğundan R nin X üzerindeki etkisi ; $x \in X$ ve $r \in R$ için
   eğer $r \in R^*$ ise $rx = x$,
   eğer $r \in J(R)$ ise $rx = 0$ dir.

   Dolayısıyla X, G-unital bir modüldür. Tersine $-1 \in R^*$ ve etki tanımlandığı gibi olduğundan her G-unital modül elemanter değişmeli 2-gruptur.

□

Şimdi R, adjoint grubu değişmeli olan yarı-mükemmel bir halka olsun. Bu durumda e_i'ler dik yerel eşkare elemanlar olmak üzere $e = e_1 + e_2 + ... + e_n$ olacak şekilde bir e eşkare elemanı seçebiliriz (2.7.4). Burada $\overline{e} = e + J(R)$ elemanı $R/J(R)$ halkasının birimidir. Eğer R halkası birimliyse $e = 1$ dir.

Sıradaki ön teoremler için aşağıdaki notasyonları kullanacağız;

$$
\begin{aligned}
S &= eRe \\
X &= \{x \mid ex = x \,, xe = 0\} \\
Y &= \{y \mid ye = y \,, ey = 0\} \\
A &= \{a \mid ea = 0 \ = ae\}
\end{aligned}
$$

Bu gösterimlere göre S birimli bir halka ve A bir halkadır. X bir $S - A$ bimodül ve Y bir $A - S$ bimodüldür.

Ön Teorem 3.1.10. *R yarı-mükemmel bir halka ve R^o değişmeli olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:*

1. *S birimli bir yarı-mükemmel halkadır ve S^* değişmelidir.*

2. *A halkası $J(A) = A$ olan değişmeli bir halkadır.*

Kanıt. R yarı-mükemmel bir halka ve R^o değişmeli olsun.

1. $S = eRe$ olduğundan S halkasının birimi e'dir ve e eşkare elemanı $e_i \in S$ ortogonal yerel eşkare elemanlarının bir direkt toplamıdır. Bu yüzden [16 , Thm 1] gereğince S yarı-mükemmeldir. Ayrıca, $S^* \cong S^o \subset R^o$ olduğundan S^* değişmelidir.

2. Eğer $a \in A$ ise $R/J(R)$ bölüm halkasında $\overline{a} = \overline{ae} = \overline{ea} = \overline{0}$ olur ki bu da $a \in J(R)$ anlamına gelir. Dolayısıyla $A \subset J(R)$ dir. Varsayımdan, R^o değişmeli olduğu için A da değişmelidir. $a \in A$ iken $A \subset J(R)$ olduğundan $a \ o \ b = 0$ olacak şekilde $b \in R$ vardır. Buradan $b = -ab - a$ elde edilir. Eşitliği soldan e ile çarptığımızda $eb = -eab - ea$ yazarız. A halkasının tanımından $ea = 0$ dır. Dolayısıyla bu eşitlikten $eb = 0$ elde edilir. Benzer olarak $be = 0$ da bulunur. A halkasının tanımı göz önüne alındığında $b \in A$ olur. Buradan $A = J(A)$ eşitliğini elde ederiz.

□

Ön Teorem 3.1.11. *R, R^o adjoint grubu değişmeli olan bir halka olsun. Eğer e, R nin bir eşkare elemanı ise her $r, s \in R$ için*

$$\begin{aligned} erse &= eresesere \\ ser &= eser + sere - esere \end{aligned}$$

özdeşlikleri sağlanır.

Kanıt. $a = er - ere$ ve $b = se - ese$ olsun. Buradan $(er - ere)(ere - er) = 0$ olduğundan $a \in R^o$ dır. Benzer şekilde $b \in R^o$ bulunur. Ek olarak $e^2 = e$ olduğundan $(er - ere).(er - ere) = erer - erere - ereer + ereere = 0$ ve $(se - ese)(se - ese) = sese - seese - esese + eseese = 0$ yazarız. Dolayısıyla $a^2 = b^2 = 0$ dır. Varsayımdan R^o

adjoint grubu değişmeli olduğundan $aob = boa$ dır. Buradan $a + b + ab = b + a + ba$, yani $ab = ba$ elde edilir. Böylece $ab = (ea)b = eba = 0$ olur. $a = er - ere$ ve $b = se - ese$ için $ab = erse - erese$ ve $ba = ser - eser - sere + esere$ olduğundan $erse = erese$ ve $ser = eser + sere - esere$ özdeşlikleri elde edilmiş olur. □

Şimdi adjoint grubu değişmeli olan yarı-mükemmel halkaları karakterize eden bu bölümün temel teoremini kanıtlayacağız.

Teorem 3.1.12. *R bir yarı-mükemmel halka ve R^o değişmeli olsun. T değişmeli yerel halkaların bir sonlu direkt toplamı ve A değişmeli, radikal bir halka olsun. Eğer S, çarpımsal grubu S^* değişmeli olan ayrıştırılamaz yarı-mükemmel bir halka ve X ile Y G-unital S-modüller ise*

$$R \cong T \oplus A \oplus \begin{bmatrix} S & X \\ Y & 0 \end{bmatrix}$$

dır. Ayrıca,

- *S halkasının birimi , e_i'ler ortogonal yerel eşkare elemanlar olmak üzere*

$$1 = e_1 + e_2 + ... + e_n$$

şeklinde yazılır ve her i için

$$e_iSe_i/J(e_iSe_i) \cong \mathbb{Z}_2$$

dir.

X modülü, her i için X_i ler aşikar e_iSe_i−modüller, her $s \in S$ ve $(x_1, ..., x_n) \in X$ için

$$s(x_1, ..., x_n) = (e_1se_1x_1, ..., e_nse_nx_n)$$

ise X modülü

$$X = X_1 \oplus X_1 \oplus ... \oplus X_n$$

formundadır. Y modülü de benzer yapıya sahiptir.

- *R halkasının adjoint grubu, T^o, A^o ve S^o adjoint gruplarının ve X ile Y toplamsal gruplarının direkt çarpımına izomorftur.*

Kanıt. R, adjoint grubu R^o değişmeli olan yarı-mükemmel bir halka olsun. O zaman e_i'ler yerel eşkare elemanlar ve $\overline{e} = e + J(R)$, $R/J(R)$ halkasının birim elemanı olmak üzere $e = e_1 + e_2 ... + e_n$ olacak şekilde R de bir e eşkare elemanı seçebiliriz.
Şimdi bir

$$\begin{aligned} \Psi: \ R \ &\longrightarrow \qquad \begin{bmatrix} S & X \\ Y & A \end{bmatrix} \\ r \ &\longrightarrow \begin{bmatrix} ere & er - ere \\ re - ere & r - er - re + ere \end{bmatrix} \end{aligned}$$

tanımlayalım.

$r_1 = r_2$ ise $er_1e = er_2e$, $er_1 - er_1e = er_1 - er_1e$, $r_1e - er_1e = r_2e - er_2e$, $r_1 - er_1 - r_1e + er_1e = r_2 - er_2 - r_2e + er_2e$ olacağından $\Psi(r_1) = \Psi(r_2)$ dir. Yani Ψ iyi tanımlıdır.

$$\Psi(r_1 + r_2) = \begin{bmatrix} e(r_1 + r_2)e & e(r_1 + r_2) - e(r_1 + r_2)e \\ (r_1 + r_2)e - e(r_1 + r_2)e & (r_1 + r_2) - e(r_1 + r_2) - (r_1 + r_2)e + e(r_1 + r_2)e \end{bmatrix}$$

ve

$$\Psi(r_1) + \Psi(r_2) = \begin{bmatrix} er_1e & er_1 - er_1e \\ r_1e - er_1e & r_1 - er_1 - r_1e + er_1e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} er_2e & er_2 - er_2e \\ r_2e - er_2e & r_2 - er_2 - r_2e + er_2e \end{bmatrix}$$

olduğundan $\Psi(r_1 + r_2) = \Psi(r_1) + \Psi(r_2)$ elde edilir. Dolayısıyla Ψ bir grup homomorfizmasıdır.

$$\Psi(r_1.r_2) = \begin{bmatrix} e(r_1.r_2)e & e(r_1.r_2) - e(r_1.r_2)e \\ (r_1.r_2)e - e(r_1.r_2)e & (r_1.r_2) - e(r_1.r_2) - (r_1.r_2)e + e(r_1.r_2)e \end{bmatrix}$$

ve

$$\Psi(r_1).\Psi(r_2) = \begin{bmatrix} er_1e & er_1 - er_1e \\ r_1e - er_1e & r_1 - er_1 - r_1e + er_1e \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} er_2e & er_2 - er_2e \\ r_2e - er_2e & r_2 - er_2 - r_2e + er_2e \end{bmatrix}$$

olduğundan (3.1.11) de ki özdeşlikler düşünüldüğünde $\Psi(r_1.r_2) = \Psi(r_1).\Psi(r_2)$ elde edilir. Dolayısıyla Ψ bir halka homomorfizmasıdır. Ek olarak $r = s + x + y + a$ nın görüntüsü $\begin{bmatrix} s & x \\ y & a \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} S & X \\ Y & A \end{bmatrix}$ elemanıdır. Sonuç olarak R yarı-direkt toplam olarak temsil edilir. R^o değişmeli olduğu için $\begin{bmatrix} S & X \\ Y & A \end{bmatrix}^o$ da değişmelidir. O halde (3.1.7) den X ve Y, G unital modüllerdir. Ek olarak (3.1.10) dan $A^o = A$ dır. G-unital modül tanımından $XA^o = XA = 0$ ve $YA^o = YA = 0$ dir. Böylece yarı-direkt toplamdaki çarpma tanımı kullanıldığında

$$\begin{bmatrix} S & X \\ Y & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S & X \\ Y & 0 \end{bmatrix} \oplus A$$

elde edilir.

Şimdi $G-$unital S-modüller X ve Y'nin yapısını ele alacağız. (2.7.4) den S halkasının birim elemanı e_i ler ortogonal yerel eşkare elemanlar olmak üzere $1 = e_1 + e_2 + ... + e_n$ şeklinde yazılır. S birimli yarı-mükemmel bir halka ve $S^* \cong S^o$ değişmeli olduğundan e_iSe_i yerel halkalarıda değişmelidir. Her $i = 1, 2, ..., n$ için e_i' ler ortogonal eşkare elemanlar olduğundan $e_1X, ..., e_nX$ değişmeli grupların

$$X = e_1X \oplus ... \oplus e_nX$$

bir direkt toplamını elde ederiz. X bir G unital S-modül olduğundan $S^oX = 0$ dır. Buradan $S^o(e_iX\ ) = 0$ dır. Ek olarak $(e_iSe_i)^o \subset S^o$ kapsamasını kullanarak $(e_iSe_i)^oe_iX \subset S^oe_iX = 0$ yazarız ki bu da $(e_iSe_i)^oe_iX = 0$ yani , e_iX'in her i için G-unital e_iSe_i-modül olduğunu gösterir. Şimdi $e_i \neq e_j$ ortogonaller ve $s \in S$ olsun. Böylece $e_iSe_je_iSe_j = 0$ yani $(e_iSe_j)^2 = 0$ dır. Buradan $(e_iSe_j)o(-e_iSe_j) = e_iSe_j - e_iSe_j + (e_iSe_j)^2 = 0$ olduğundan $e_iSe_j \in S^o$ dır. X bir G unital S-modül olduğundan $e_iSe_jX = 0$ dır. Sonuç olarak , her $s \in S$ ve her $x \in X$ için $sx = (e_1Se_1)e_1x + ... + (e_nSe_n)e_nx$ sağlanır. Diğer taraftan , eğer her i için X_i bir G-unital e_iSe_i-modül ve $X = X_1 \oplus ... \oplus X_n$ ise $(e_1Se_1)^oX_1 = 0, ..., (e_nSe_n)^oX_n = 0$ dır. $e_1se_1 \in (e_1Se_1)^o$ iken $e_1se_1 \in S^o$ olduğundan $s(x_1, ..., x_n) = (e_1se_1x_1, ..., e_nse_nx_n)$ şeklinde tanımlarsak , $(x_1, ..., x_n) \in X$ için

$$\begin{aligned}(e_1se_1)X &= (e_1e_1se_1e_1x_1, ..., e_ne_nse_ne_nx_n)\\ &= (e_1se_1x_1, ..., e_nse_nx_n)\\ &= (0, ..., 0)\end{aligned}$$

elde ederiz. Sonuç olarak X bir G unital S-modül olur. Dolayısıyla G unital S-modüllerin yapısı G unital e_iSe_i-modüllerin yapısıyla tamamen belirlidir. e_1 eşkare elemanı, e_1Se_1 yerel halkası sıfırdan farklı G-unital modül içermeyecek şekilde seçildiğinde [17] de e_1 in S'de merkezi eşkare elemanı olduğu kanıtlandı. e merkezi eşkare olduğundan $eSf = fSe = 0$ dır. Herhangi bir R halkasının (2.6) da ki

$$R = ere \oplus eRf \oplus fRe \oplus fRf$$

ayrışması düşünülerek $S = e_1Se_1 \oplus S_1$ yazılır. Ek olarak X ve Y , G unital e_1Se_1-modül olduklarından e_1 in seçimi gereği $e_1X = 0$ ve $Ye_1 = 0$ dır. Önceki paragraftan

$$\begin{bmatrix} S & X \\ Y & 0 \end{bmatrix} = e_1Se_1 \oplus \begin{bmatrix} S_1 & X \\ Y & 0 \end{bmatrix}$$

yazılır. Burada e_iSe_i yerel halkaları sıfırdan farklı G-unital modüller içermediğinden $T = e_1Se_1 \oplus e_2Se_2 \oplus ... \oplus e_nSe_n$ olmak üzere $R \cong T \oplus A \oplus \begin{bmatrix} S & X \\ Y & 0 \end{bmatrix}$ dir. Sonuç olarak sıfırdan farklı G-unital modül içermeyen her e_iSe_i yerel halkası , R ' nin bir direkt toplamı olarak ayrılır. Bu yüzden S yi ayrıştırılamaz olarak alabiliriz.

Diğer yandan L halkası sıfırdan farklı bir G-unital modüle sahip ise (3.1.9) dan $L/J(L) \cong \mathbb{Z}_2$ dir. X elemanter değişmeli 2-grup ise $\mathbb{Z}_2$ üzerinde vektör uzayıdır. $L/J(L) \cong \mathbb{Z}_2$ olduğundan L , X üzerine aşağıdaki gibi etki eder ; $x \in X$ ve $l \in L$ iken

$$\begin{array}{lcll} l & \in & L^* & \text{ise} \quad lx = x \\ l & \in & J(L) & \text{ise} \quad lx = 0 \end{array}$$

olur. Buradan X'in G-unital olduğu açıktır. Dahası $-1 \in R^*$ iken etki tanımından $-1.x = x$ yani $x + x = 0$ olduğundan her G-unital modül elemanter 2-gruptur. G unital L-modüller tam olarak değişmeli $2-$ gruplardır. Sonuçta L yerel halka ve L^o adjoint grubu değişmeli olduğundan L de değişmeli olur. Bu kısmın ayrıntılı kanıtı [17] de bulunabilir.

Son olarak $R \cong T \oplus A \oplus \begin{bmatrix} S & X \\ Y & 0 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} S & X \\ Y & 0 \end{bmatrix}^o = \begin{bmatrix} S^o & X \\ Y & 0^o \end{bmatrix} \cong S^o \times 0^o \times X \times Y$ olduğundan

$$R^o \cong T^o \oplus A^o \oplus \begin{bmatrix} S & X \\ Y & 0 \end{bmatrix}^o$$

ve buradan da

$$R^o \cong T^o \times A^o \times S^o \times X \times Y$$

izomorfizması elde edilir. $\square$

S halkası e_iSe_i değişmeli yerel halkaları cinsinden [17 , Thm 1] deki gibi karakterize edildiğinde yukarıdaki teorem, adjoint grubu değişmeli olan bütün yarı-mükemmel halkaları değişmeli yerel halkaların ve $A = J(A)$ olan değişmeli A halkalarının yapısıyla tamamen karakterize eder.

Sonuç 3.1.13. *R adjoint grubu değişmeli olan yarı-mükemmel bir halka olsun. Eğer aşağıdaki koşullardan biri sağlanırsa R halkası değişmelidir:*

1. *R halkasında $2x = 0$ iken $x = 0$ dır.*
2. *R'nin adjoint grubu R^o'nın her bir elemanının mertebesi 3 olan bir direkt çarpanı yoktur.*

Kanıt. Yukarıdaki teorem kullanarak bu durum S ye uygulanırsa [17 , Corollary 1] den R değişmelidir. X ve Y toplamsal 2-grup olduklarından her iki koşulda $X = 0 = Y$ elde edilir. Yani her iki durumda da R değişmelidir. $\square$

Ön Teorem 3.1.14. *R birimli bir halka ve $J(R)$, R'nin Jacobson radikali olmak üzere*

$$(R/J(R))^* \cong R^*/1 + J(R)$$

dir.

Kanıt. R bir halka ve R^*, R'nin çarpımsal grubu olmak üzere bir

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & R^* & \longrightarrow & (R/J(R))^* \\ & r & \longrightarrow & r + J(R) \end{array}$$

tanımlayalım. İlk olarak Φ'nin iyi tanımlı olduğunu gösterelim. $r \in R^*$ ise $r.s = 1$ olacak şekilde $s \in R$ vardır. Bu durumda $(r + J(R)).(s + J(R)) = 1 + J(R)$ olduğundan $(r + J(R)) \in (R/J(R))^*$ dir. $r_1, r_2 \in R^*$ ve $r_1 = r_2$ olsun. Bu durumda $r_1 + J(R) =$

$r_2 + J(R)$ olacağından $\Phi(r_1) = \Phi(r_2)$ olur yani tanımladığımız dönüşüm iyi tanımlıdır. $\Phi(r_1.r_2) = r_1r_2 + J(R) = (r_1 + J(R)).(r_2 + J(R)) = \Phi(r_1).\Phi(r_2)$ olduğundan Φ grup homomorfizmasıdır. Ek olarak Ç$ek\Phi = 1 + J(R)$ kümesidir. Ayrıca her $r + J(R) \in (R/J(R))^*$ elemanı için tanımdan $r \in R^*$ vardır. O halde Φ örtendir. Birinci izomorfizma teoreminden $(R/J(R))^* \cong R^*/\ 1 + J(R)$ elde edilir. □

Ön Teorem 3.1.15. *R bir yerel halka olsun. R 'nin adjoint grubunun sonlu üretilmiş ve değişmeli olması için gerek ve yeter koşul R halkasının sonlu ve değişmeli olmasıdır.*

Kanıt. R yerel halkasının adjoint grubunun sonlu üretilmiş olduğunu varsayalım. R bir yerel halka olduğundan $R/J(R)$ bölümlü bir halkadır [15 , Thm 19.1]. R'nin birimi olduğundan $R^* \cong R^o$ dır. (3.1.9) dan R halkası değişmelidir. R'nin ideallerinin herhangi artan bir zinciri R'nin adjoint alt gruplarının artan bir zinciri olduğundan R bir Noether halkadır. Her bir n için $J(R)^n\ /\ J(R)^{n+1}$, $R/J(R)$ üzerinde sonlu boyutlu bir vektör uzayı olduğundan $J(R)^n$ $/\ J(R)^{n+1}$ sonlu bir halkadır. $J(R)^o$ sonlu üretilmiş değişmeli bir grup olduğundan [21]'den $J(R)$ halkası nilpotent olur. Yani R halkası sonludur.
Tersine, R halkası sonlu ve değişmeli bir halka ise R'nin adjoint grubunun sonlu üretilmiş ve değişmeli olduğu açıktır. □

Sonuç 3.1.16. *R yarı-mükemmel bir halka olsun. Eğer R^o sonlu üretilmiş ve değişmeli bir grup ise F sonlu bir halka ve A toplamsal grubu sonlu üretilmiş nilpotent bir halka olmak üzere $R \cong F \oplus A$ dır. Özel olarak R halkası birimli ve R^* grubu sonlu üretilmiş ve değişmeli ise R sonludur.*

Kanıt. [17 , Thm 1] de R^* ın değişmeli olması için gerek ve yeter koşulun $R \cong S \oplus T$ izomorfizmasının varlığı verilmiştir. R^o değişmeli iken R^* da değişmeli olduğundan bu notasyonu kullanabiliriz. Notasyondaki S halkası için $S \cong [L_i, X_{ij}]$ olduğundan S^o sonlu üretilmiştir. Dolayısıyla (3.1.15) den S sonludur . Ek olarak T sıfır veya değişmeli yerel halkaların bir direkt toplamı olduğundan (3.1.15) den sonludur. X ve Y , $\mathbb{Z}_2$ üzerinde sonlu üretilmiş vektör uzay olduklarından (3.1.15) den sonludur. [21 , Thm 3] den A nilpotent halkadır ve A^+ sonlu üretilmiştir. □

Sonuç 3.1.17. *R Artin halka olsun. Eğer R halkasının adjoint grubu sonlu üretilmiş ve değişmeli ise bu durumda R halkası sonludur.*

Kanıt. R Artin halka olduğundan yarı-mükemmel bir halkadır. R^o sonlu üretilmiş ve değişmeli olduğundan bir önceki sonuçta $R \cong F \oplus A$ ve F sonlu seçildiğinden A sonlu seçilirse R'de sonlu olur. A nilpotent halka ve A^+ sonlu üretilmiş olduğundan A'nın nilpotentlik derecesi üzerinden tümevarımla A^+ altgruplarında azalan zincir koşulunu sağladığı [20 , Thm 1] de gösterilmiştir. Dolayısıyla R sonludur. $\square$

3.2 Karakterizasyonun Tamamlanması

Bu bölümde adjoint grubu devirli olan yarı-mükemmel halkaların karakterizasyonu tamamlanacaktır. Bu karakterizasyon , Fischer ve Eldridge'in sonuçlarını geneller [6].

Ön Teorem 3.2.1. *A radikal bir halka ve A^o devirli olsun. Bu durumda ya A halkası sonludur ya da A^+ devirlidir ve $A^2 = 0$ dır.*

Kanıt. Watters teoreminden [21 , Thm 1], A değişmeli ve nilpotent bir halkadır. A halkasının nilpotentlik derecesi $n+1$ olsun, yani $A^n \neq 0$ ve $A^{n+1} = 0$. Şimdi A'nın adjoint grubunun sonsuz devirli grup olduğunu varsayalım. $n = 1$ olduğunu göstereceğiz. Bunun için

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & A^o & \longrightarrow & A^+/(A^2)^+ \\ & a & \longrightarrow & a + (A^2)^+ \end{array}$$

dönüşümünü tanımlayalım. Bu dönüşüm çekirdeği $(A^2)^o$ olan bir grup epimorfizmasıdır. Dolayısıyla birinici izomorfizma teoreminden $A^o/(A^2)^o \cong A^+/(A^2)^+$ bulunur. Özel olarak $(A^n)^+ \cong (A^n)^o$ olup A^o grubunu sonsuz devirli kabul ettiğimiz için A^+ grubu da sonsuz devirlidir. Şimdi $n > 1$ kabul edelim ve $0 \neq a_1 a_2 ... a_n \in A^n$ olsun.

$$\begin{array}{rccl} \Lambda : & A^o & \longrightarrow & A/(A^2) \\ & a & \longrightarrow & a + (A^2) \end{array}$$

dönüşümü çekirdeği $(A^2)^o$ olan bir grup epimorfizmasıdır. Dolayısıyla birinci izomorfizma teoreminden, $A^o/(A^2)^o \cong A/(A^2)$ olduğundan sonludur. Böylece $ka_1 \in A^n$ olacak şekilde bir $k > 0$ tamsayısı vardır. Buradan $k(a_1a_2...a_n) \in A^{n+1} = 0$ olur ki bu da $(A^n)^+$ ' nın sonsuz devirli olması ile çelişir. Böylece $n = 1$ dir yani , $A^2 = 0$ elde edilir. $\square$

Teorem 3.2.2. *R halkası adjoint grubu devirli olan yarı-mükemmel bir halka olsun. Bu durumda R ya sonludur ya da R üzerindeki çarpım sıfır ve $R = (\mathbb{Z}, +)$ dır. Eğer R halkası sonluysa , aşağıdaki tipte seçilen halkaların bir sonlu direkt toplamıdır öyle ki bu halkaların adjoint gruplarının mertebeleri aralarında asaldır.*

$N_1 \quad \{0, a, a^2, a + a^2 |\, a^3 = 0 = 2a\}$

$N_2 \quad \{0, a, 2a, ..., (p^t - 1)a \mid a^2 = p^i a\}\ ,\ \ p\ herhangi\ bir\ asal\ ve\ 1 \leq i \leq t$

$L_1 \quad GF(p^k) \quad , p\ herhangi\ bir\ asal\ \ , k \geq 1$

$L_2 \quad \mathbb{Z}_q\ , \quad q = p^k\ \ , p\ tek\ asal\ , k > 1$

$L_3 \quad \mathbb{Z}_4$

$L_4 \quad \mathbb{Z}_p[x]\ /\ (x^2) \quad , p\ herhangi\ bir\ asal\ ve\ x\ belirsiz$

$L_5 \quad \mathbb{Z}_2[x]\ /\ (x^3)$

$L_6 \quad \mathbb{Z}_4[x]\ /\ (2x, x^2 - 2)$

$M_1 \quad \begin{bmatrix} \mathbb{Z}_2 & \mathbb{Z}_2 \\ 0 & \mathbb{Z}_2 \end{bmatrix}$

$M_2 \quad \begin{bmatrix} \mathbb{Z}_2 & \mathbb{Z}_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$M_3 \quad \begin{bmatrix} \mathbb{Z}_2 & 0 \\ \mathbb{Z}_2 & 0 \end{bmatrix}$

Kanıt. İlk olarak [6] da Fischer ve Eldridge A^o adjoint grubu devirli olan her sonlu radikal A halkasının N_1 ve N_2 tipinde halkaların bir direkt toplamı olduğunu kanıtlamışlardır. Ek olarak [8] de Gilmer tersinirlerin grubu devirli olan her sonlu yerel halkanın bazı i'ler için L_i tipinde olduğunu göstermiştir. Şimdi R halkası R^o adjoint grubu devirli olan yarı-mükemmel bir halka olsun. R halkasının (3.1.12) de ki ayrışmasını göz önüne alarak (3.2.1) 'i A halkasına uygularız. Eğer A^+ sonsuz devirli ise $A^2 = 0$ olduğundan $R = A$ dır. Yani $R = (\mathbb{Z}, +)$ olur. Eğer A halkası sonlu ise (3.1.16)'den R de sonlu halkadır. Bu durumda A ve T halkaları N_i ve L_j tipindeki halkaların bir sonlu direkt toplamı olur. S ayrıştırılamaz yarı-mükemmel bir halka olmak üzere, S halkası ya $\mathbb{Z}_2$ dir ya da üçgensel matris halkası $\begin{bmatrix} \mathbb{Z}_2 & \mathbb{Z}_2 \\ 0 & \mathbb{Z}_2 \end{bmatrix}$ dır [17 , Thm 2]. Son durumda R^o devirli olduğundan X ve Y, G-unital S modüller olduğu için $X = 0 = Y$ dir. Buradan $S^oX = YS^o = 0$ dır. Önceki durumda X ve Y den biri sıfır olur, diğeri de ya $\mathbb{Z}_2^+$ ya izomorftur yada sıfırdır. Bu yüzden $\begin{bmatrix} S & X \\ Y & 0 \end{bmatrix}$ halkası $\mathbb{Z}_2$ halkasına veya M_k tipindeki halkalardan birine izomorftur. $\square$

4. ADJOİNT GRUBU NİLPOTENT OLAN ARTİN HALKALAR

R bir halka olsun. Üçüncü bölümde R halkası üzerinde bir ”o” işlemi tanımlandığında $(a\ o\ b = a + b + ab\ ;\ a, b \in R)$ R’nin bu işleme göre her zaman bir yarı-grup olduğunu görmüştük. R halkası bu işleme göre bir grup olduğunda bu gruba R nin adjoint grubu demiş ve R^o ile göstermiştik.

Bu bölümünde R. Yu. Evstaf’ev ’ in Adjoint grubu nilpotent olan Artin halkalar [5] adlı makalesini ayrıntılarıyla inceleyeceğiz ve temel olarak aşağıdaki teoremi ispatlayacağız.

Teorem 4.1. R sağ Artin bir halka olsun. R’nin adjoint grubu R^o nilpotent ve $Z(R) + R^o$ kümesinin R’yi halka olarak üretmesi için gerek ve yeter koşul her biri nilpotent halka ya da çarpımsal grubu nilpotent olan yerel halkalar olmak üzere R nin sonlu sayıda idealin bir dik toplamı olmasıdır.

4.1 Temel Tanımlar ve Ön Teoremler

Tanım 4.1.1. L, boş olmayan bir küme ve L üzerinde her $a, b \in L$ için toplama ”+” ve çarpma ”.” ikili işlemleri tanımlansın.

Eğer ;

(i) $(L, +)$ bir değişmeli grup

(ii) her $a, b, c \in R$ için

$a.(b + c) = a.b + a.c \quad (soldan\ dağılma\ özelliği)$

$(a + b).c = a.c + b.c \quad (sağdan\ dağılma\ özelliği)$

(iii) her $a \in R$ için $a^2 = 0$

(iv) her $a, b, c \in R$ için

$(ab)c + (bc)a + (ca)b = 0 \qquad (Jacobi\ identity)$

ise L'ye bir *Lie halka* denir .

Ön Teorem 4.1.2. *Herhangi bir R halkasında "." işlemi yerine $[x, y] = xy - yx$ komutatör işlemi alınırsa R halkası bir Lie halka olur.*

Kanıt.

(i) $(R, +)$ değişmeli bir grup

(ii) Her $a, b, c \in R$ için

$[x+y, z] = (x+y)z - z(x+y) = xz + yz - zx - zy = xz - zx + yz - zy = [x, z] + [y, z]$

ve

$[x, y+z] = x(y+z) - (y+z)x = xy + xz - yx - zx = xy - yx + xz - zx = [x, y] + [x, z]$

(iii) Her x$\in R$ için $[x, x] = x.x - x.x = 0$

$(iv)[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = (xy - yx)z - z(xy - yx) + (yz - zy)x - x(yz - zy) + (zx - xz)y - y(zx - xz) = 0$

koşulları sağlandığından $(R, +, [\ ,\ ])$ bir Lie halkadır. □

R bir halka ve V, W kümeleri R halkasının herhangi iki toplamsal alt grubu olsun. $[V, W]$ komutatörü ile $v \in V$ ve $w \in W$ olmak üzere $[v, w]$ ile üretilen alt halka gösterilecektir.

Bir Lie halkanın üst merkez serisi, her $n \in \mathbb{N}$ için

$Z_0(R) = 0$,

$Z_n(R) = \{z \mid z \in R, \forall\, r \in R \ \ için\ [z, r] \in Z_{n-1}(R)\ \}$

biçiminde tanımlanır. R'nin adjoint grubu R^o'ın üst merkez serisi Lie komutatörü yerine adjoint grup komutatörü alınarak benzer şekilde tanımlanır.

Tanım 4.1.3. R bir halka olsun. Eğer $Z_n(R) = R$ olacak şekilde ki en küçük sayı n ise R halkasına *nilpotentlik sınıfı n olan Lie-nilpotent halka* denir.

Bir Lie halkanın üst merkez serisi yerine bir grubun üst merkez serisini düşünürsek o zaman nilpotentlik sınıfı n olan grup tanımını elde ederiz.

[9] çalışmasında R halkası nilpotentlik sınıfı n olan Lie nilpotent bir halka olduğunda R'nin çarpım grubu R^* grubunun nilpotentlik sınıfı en fazla n olan nilpotent bir grup olduğu Gupta ve Levin tarafından gösterildi. Eğer $J(R) = R$ ise R halkasına radikal halka denir. [14] çalışmasında Jennings, R radikal halka olduğunda R'nin adjoint grubu R^o'ın nilpotent olması için gerek ve yeter koşulun R halkasının Lie-nilpotent olması gerektiğini gösterdi.

Şimdi Teorem 4.1'i ispatlamak için gerekli Ön Teoremleri ve tanımları vereceğiz.

Bu kısımda $S \subset R$ alt kümesi tarafından üretilen alt halkayı $< S >$ ile, R halkasının Jacobson radikalini $J(R)$ ile ve merkezini de $Z(R)$ ile göstereceğiz.

Ön Teorem 4.1.4. *R bir halka ve $J(R)$, R halkasının Jacobson radikali olsun. O zaman $J(R)^o$, R'nin adjoint grubu R^o'ın normal alt grubudur ve $(R/J(R))^o \cong R^o/J(R)^o$ dir.*

Kanıt. $r \in R^o$ ise $r + J(R) \in (R/J(R))^o$ olduğu açıktır. Şimdi $r + J(R) \in (R/J(R))^o$ olsun. Bu durumda $ros = a \in J(R)$ olacak şekilde bir $s \in R$ vardır. $J(R)$ ideali quasi-regüler ideal ve $a \in J(R)$ olduğundan $a\, o\, b = b\, o\, a = 0$ olacak şekilde $b \in J(R)$ vardır. $(ros)ob = ro(sob) = 0$ olduğundan r elemanının sağ adjoint tersi vardır. Benzer şekilde r nin sol adjoint tersinin olduğu gösterilir. Yani r elemanı R^o grubunun bir elemanıdır. $\Phi : R \longrightarrow R/J(R)$ doğal halka epimorfizmasından $\Phi^o : R^o \longrightarrow (R/J(R))^o$ epimorfizması elde edilir. $r, s \in R^o$ alalım. Bu durumda

$$\Phi^o(ros) = \Phi^o(r + s + rs) = r + s + rs + J(R)$$

$$\Phi^o(r)\, o\, \Phi^o(s) = (r + J(R))o(s + J(R)) = r + s + rs + J(R)$$

olduğundan

$$\Phi^o(ros) = \Phi^o(r)o\Phi^o(s)$$

dir. Şimdi Φ^o epimorfizmasının çekirdeğini bulalım.

$$Çek(\Phi^o) = \{r \in R^o | \Phi^o(r\ ) = J(R)\ \} = \{r \in R^o | r + J(R) = J(R)\ \}$$

$$= \{r \in R^o | r \in J(R)\ \}$$

$J(R) = J(R)^o$ ve $J(R)^o \cap R^o = J(R)^o$ olduğundan $Çek(\Phi^o) = J(R)^o$ elde edilir. Birinci izomomorfizma teoreminden $(R/J(R))^o \cong R^o/J(R)^o$ elde edilir. □

Ön Teorem 4.1.5. *R halkası $R = R_1 \oplus ... \oplus R_n$ şeklinde alt halkalarının direkt toplamına ayrışabilen bir halka olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler doğrudur:*

1. *R^o adjoint grubu , $i = 1, 2, ..., n$ olmak üzere R_i^o adjoint gruplarının direkt çarpımıdır.*
2. *R halkasının $Z(R) + R^o$ kümesi tarafından üretilmesi için gerek ve yeter koşul her R_i halkasının $Z(R_i) + R_i^o$ kümesi tarafından üretilmesidir.*
3. *R halkasının R^o adjoint grubu tarafından üretilmesi için gerek ve yeter koşul her R_i halkasının R_i^o adjoint grubu tarafından üretilmesidir.*

Kanıt.

R halkası $R = R_1 \oplus ... \oplus R_n$ şeklinde alt halkalarının direkt toplamına ayrışabilen bir halka olsun.

1. $R = R_1 \oplus ... \oplus R_n$ ve $r \in R^o$ olsun. O zaman $r \in R$ dir. $r_i \in R_i$ $(i = 1, ..., n)$ olmak üzere $r = (r_1, r_2, ..., r_n)$ yazabiliriz. $r \in R^o$ olduğundan $ros = 0$ olacak şekilde r nin adjoint tersi vardır. Buradan $s \in R^o \subseteq R$ ve $s_i \in R_i$ $(i = 1, ..., n)$ olmak üzere $s = (s_1, s_2, ..., s_n)$ yazılır. Bu durumda $r + s + rs = (r_1, r_2, ..., r_n) + (s_1, s_2, ..., s_n) + (r_1s_1, r_2s_2, ..., r_ns_n) = (r_1+s_1+r_1s_1, r_2+s_2+r_2s_2, ..., r_n+s_n+r_ns_n) = (0, 0, ..., 0)$ olduğundan $r_1os_1 = 0$, $r_2os_2 = 0$, ... , $r_nos_n = 0$ olur. Yani $r \in R_1^o \times R_2^o ... \times R_n^o$ elde edilir. Sonuç olarak $R^o \subset R_1^o \times R_2^o ... \times R_n^o$ bulunur. Benzer şekilde $R_1^o \times R_2^o ... \times R_n^o \subset R^o$ olduğu gösterilir. İki yönlü kapsamadan eşitlik elde edilir.

2. R halkasının $Z(R)+R^o$ kümesi tarafından üretildiğini varsayalım. $R = R_1 \oplus ... \oplus R_n$ olduğundan $Z(R) = Z(R_1) \oplus ... \oplus Z(R_n)$ dir. Buradan $Z(R)+R^o$ kümesi tarafından üretilen alt halkalar $Z(R_1)+R_1^o$, $Z(R_2)+R_2^o$, ... , $Z(R_n)+R_n^o$ kümeleri tarafından üretilen alt halkaları içerir ve bu yüzden bu halkaların direkt toplamı ile çakışır. Eğer bazı i'ler için $Z(R_i)+R_i^o$ kümesi , R_i' yi bir halka olarak üretmiyorsa o zaman R halkası $Z(R)+R^o$ kümesi tarafından üretilemez. Böylece gereklilik ispatlanmış olur. Şimdi tersine her R_i halkası , $Z(R_i)+R_i^o$ kümesi tarafından üretilsin. O halde $Z(R_i)+R_i^o$ kümesi tarafından üretilen alt halka , $R_1, ..., R_n$ alt halkalarının direkt toplamı ile çakışır. Yani R halkası $Z(R)+R^o$ kümesi tarafından üretilir.

3. R halkasının R^o adjoint grubu tarafından üretildiğini varsayalım. Birinci şıktan R^o adjoint grubu , R_i^o adjoint gruplarının direkt çarpımıdır yani $R = R_1 \oplus ... \oplus R_n$ iken $R^o = R_1^o \times ... \times R_n^o$ dir. $R =< R^o >$ varsayımını da kullanarak $R = R_1 \oplus ... \oplus R_n =< R_1^o \times ... \times R_n^o >$ elde ederiz. Eğer bazı i'ler için R_i^o kümesi R_i' yi bir halka olarak üretmiyorsa o zaman R halkasının tamamı R^o kümesi tarafından üretilemez. Dolayısıyla her R_i halkasının R_i^o adjoint grubu tarafından üretilmesi gereklidir. Tersine her R_i halkasının R_i^o adjoint grubu tarafından üretildiğini kabul edelim. Yani,

$$R_1 =< R_1^o > \ , \ R_2 =< R_2^o > \ , ..., \ R_n =< R_n^o >$$

Buradan $R = R_1 \oplus ... \oplus R_n =< R_1^o \times ... \times R_n^o >$ elde ederiz. Yani R halkası R^o adjoint grubu tarafından üretilir.

□

Eğer bir Artin halka adjoint grubu tarafından üretiliyorsa, mutlaka çarpımsal grubu tarafından da üretilir. Fakat tersi doğru değildir. Yani çarpımsal grubu tarafından üretilen Artin halkaların adjoint grubu tarafından üretilmeyebilir. Örneğin $\mathbb{Z}_{12}$ halkasını düşünelim. $\mathbb{Z}_{12}$ halkası sonlu olduğundan Artin halkadır. $\mathbb{Z}_{12}$ halkasının çarpımsal grubu $\{\overline{1}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{11}\}$ kümesidir ve $\mathbb{Z}_{12}$ halkasını üretir. Buna rağmen $\mathbb{Z}_{12}$ halkasının adjoint grubu $\{\overline{0}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{10}\}$ kümesidir ve $\mathbb{Z}_{12}$ halkasını üretmez.

Ön Teorem 4.1.6. *R bir Artin halka olsun. R^o adjoint grubunun R'yi bir halka olarak üretmesi için gerek ve yeter koşul $R/J(R)$ yarı-basit halkasının her basit bileşeninin $\mathbb{F}_2$'den farklı olmasıdır.*

Kanıt. İlk olarak R^o adjoint grubunun R'yi bir halka olarak üretmesi için gerek ve yeter koşulun $R/J(R)$ bölüm halkasının adjoint grubu tarafından üretilmesi olduğunu göstereceğiz. Eğer $R =< R^o >$ ise o zaman R halkasının her elemanı R^o adjoint grubundan gelen elemanların tamsayı katsayıları ile doğrusal bir kombinasyonu şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla bölüm halkası da adjoint grubu tarafından üretilir. Tersine , $(R/J(R))^o$ adjoint grubu $R/J(R)$'yi bir halka olarak üretsin. $(R/J(R))^o \cong R^o/J(R)^o$ ve $J(R)^o = J(R)$ olduğundan R'nin her elemanı R'nin adjoint grubu tarafından üretilir. Wedderburn-Artin teoreminden $i = 1, ..., k$ için S_i 'ler bölümlü halka üzerinde tam matris halkaları olmak üzere

$$R/J(R) \approxeq S_1 \oplus ... \oplus S_k$$

elde ederiz. Bölümlü bir halka üzerinde ki S matris halkasının S^o adjoint grubu , $S = \mathbb{F}_2$ iken $S^o = 0$ olduğundan $S = \mathbb{F}_2$ durumu dışında her zaman S'yi bir halka olarak üretir. Bu yüzden (4.1.5) den $R/J(R)$ bölüm halkasının adjoint grubu tarafından üretilmesi için gerek ve yeter koşul her basit S_i bileşeninin $\mathbb{F}_2$' den farklı olmasıdır. □

Tanım 4.1.7. R bir halka olsun. Eğer R halkası sıfırdan farklı iki idealinin direkt toplamına ayrışamıyorsa bu durumda R 'ye *doğrudan ayrıştırılamaz halka* denir.

Bir R halkası ideallerinin direkt toplamına ayrışabilirse bu durumda R halkasının yapısının araştırılması , her idealinin yapısını araştırılmasına indirgenir. Bu nedenle ideallerinin direkt toplamına ayrışmayan halkaları ele alacağız. Bir R halkasında 0 ve 1 'in aşikar eşkare eleman olarak adlandırıldığını biliyoruz.

Ön Teorem 4.1.8. *R doğrudan ayrıştırılamayan birimli bir halka olsun. Bu durumda R halkasının merkezi sadece aşikar eşkare elemanlar içerir.*

Kanıt. e , R halkasının merkezi eşkare elemanı olsun. $V = \{r - er \mid r \in R\}$ kümesini tanımlayalım. $0 \in V$ olduğundan $V \neq \varnothing$ dır. $v_1, v_2 \in V$ olsun. V kümesinin tanımından

$v_1 = r_1 - er_1$ ve $v_2 = r_2 - er_2$ olacak şekilde $r_1, r_2 \in R$ vardır. Buradan $v_1 - v_2 = (r_1 - er_1) - (r_2 - er_2) = (r_1 - r_2) - e(r_1 - r_2)$ elde ederiz. Böylece $r_1 - r_2 \in R$ olduğundan $r_1 - r_2 \in V$ olur. Şimdi $s \in R$ alalım. $s.v_1 = s.(r_1 - er_1)$ yazarız. Varsayımdan e merkezi eşkare eleman olduğu için $\forall r \in R$ ile değişmelidir , yani $er_1 = r_1 e$ dir. Bu yüzden $s.v_1 = s.r_1 - s.r_1 e = s.r_1 - e.s.r_1 \in V$ ve $v_1 s = (r_1 - er_1).s = r_1.s - er_1.s \in V$ olur. Yani V, R 'nin bir idealidir. R halkasında alınan herhangi bir e eşkare elemanı için eR kümesi R'nin bir idealidir. Böylece R halkası $R = eR \oplus V$ ideallerinin direkt toplamına ayrışır. Fakat varsayımdan R halkası doğrudan ayrıştırılamayan bir halka olduğu için $eR = 0$ veya $V = 0$ elde ederiz. Eğer $eR = 0$ ise R halkası birimli olduğundan $e = 0$ elde ederiz. Eğer $V = 0$ ise her $r \in R$ için $r = re = er$ elde ederiz. Böylece e R halkasının birim elemanıdır. Dolayısıyla merkezden aldığımız e eşkare elemanı 0 veya 1 olduğundan aşikar eşkare elemandır. $\square$

4.2 Teorem 4.1 in Kanıtı

Bir R halkasında $aR = Ra = 0$ olacak şekildeki bütün $a \in R$ elemanlarının oluşturduğu küme R halkasının *sıfırlayanı* olarak adlandırılır.

Ön Teorem 4.2.1. *R halkası,R^o adjoint grubu nilpotent olan yarı-basit Artin halka olsun. Bu durumda $R/J(R)$ kalan sınıf halkası cisimlerin direkt toplamına ayrışabilir.*

Kanıt. R halkası Artin olduğundan, $R/J(R)$ homomorfik görüntüsü de Artindir. Aynı zamanda $J(R/J(R)) = 0$ olduğundan $R/J(R)$ Jacobson anlamında yarı-basittir. Wedderburn-Artin teoreminden $i = 1, ..., k$ için S_i 'ler bölümlü halka üzerinde tam matris halkaları olmak üzere,

$$R/J(R) \cong S_1 \oplus ... \oplus S_k$$

dır. (4.1.5)'den $R/J(R)$ kalan sınıf halkasının adjoint grubu, S_i^o gruplarının direkt çarpımına izomorftur. R^o adjoint grubu nilpotent olduğundan (4.1.4) den her i için S_i^o nilpotent olur. Bölümlü bir D halkası üzerinde ki tam $n \times n$ matris halkasının adjoint grubunun nilpotent olması için gerek ve yeter koşul $n = 1$ olmasıdır. Ayrıca [11] den D bölümlü halkasının çarpımsal grubu yalnızca D' nin değişmeli olduğu durumda nilpotenttir. Bu yüzden $R/J(R)$ kalan sınıf halkası cisimlerin direkt toplamıdır. □

Ön Teorem 4.2.2. *R doğrudan ayrıştırılamayan Artin bir halka olsun. Eğer R^o adjoint grubu nilpotent ve $Z(R) + R^o$ kümesi R' yi bir halka olarak üretiyorsa bu durumda R halkası ya yerel halkadır ya da nilpotent halkadır.*

Kanıt. M, R halkasının minimal ideali olsun. Bu durumda $MJ(R)$ kümesi R halkasının bir idealidir ve $MJ(R) \subseteq M$ dır. M idealinin minimalliğinden $MJ(R) = M$ ya da $MJ(R) = 0$ dır. İlk olarak $MJ(R) = M$ olsun. R Artin halka olduğundan $J(R)$ nilpotenttir. Bu durumda bir k doğal sayısı için

$$M = MJ(R) = MJ(R)^2 = ... = MJ(R)^k = 0$$

elde ederiz. M minimal ideal olduğu için sıfırdan farklıdır. Yani bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $MJ(R) \neq M$ olmalıdır. O halde $MJ(R) = 0$ olur. Şimdi M idealinin R halkasının merkezinde olduğunu kanıtlayalım. $M \cap Z(R)$ kümesini K ile gösterelim. Önceki ön teoremden dolayı $R/J(R)$ bölüm halkası değişmelidir. Böylece her $r, s \in R$ olmak üzere $r + J(R)$, $s + J(R) \in R/J(R)$ elemanı için $(r + J(R))(s + J(R)) = (s + J(R))(r + J(R))$ yazarız. Buradan $rs + J(R) = sr + J(R)$ yani , $rs - sr \in J(R)$ olur. K kümesinin tanımından her $k \in K$ için $k \in M$ olur. $MJ(R) = 0$ olduğunu da göz önüne alırsak $k.(rs-sr) = 0$ yazarız. Buradan $k.(rs)-k.(sr) = 0$ eşitliğini elde ederiz. $k \in Z(R)$ olduğundan $(kr)s = s(kr)$ olur yani , $kr \in Z(R)$ 'dir. Benzer şekilde $rk \in Z(R)$ bulunur. Ek olarak $k \in M$ ve M, R halkasının ideali olduğundan $kr, rk \in M$ dir. Sonuçta K kümesinden aldığımız bir k elemanı için $kr, rk \in M \cap Z(R) = K$ buluruz. Yani K, R halkasının bir ideali olur. K ideali M minimal idealinin altında olduğundan $K = M$ veya $K = 0$ dır. Benzer şekilde $M \cap J(R)$ kümesi de R halkasının bir ideali olup M minimal idealinin içinde olduğundan $M \cap J(R) = M$ veya $M \cap J(R) = 0$ dır. İlk olarak $M \cap J(R) = M$ olduğunu kabul edelim, yani $M \subset J(R)$ olsun. M minimal ideali için $(R/M)^o \cong R^o/M^o$ doğal izomorfizmasını düşündüğümüzde bu izomorfizmanın çekirdeği

M^o olur. Dolayısıyla M^o, R^o da normal altgruptur. Varsayımdan R^o adjoint grubu nilpotent olduğu için $1 \trianglelefteq M^o \trianglelefteq R^o$ normal serisini ele alırsak $M^o \cap Z(R^o) \neq 0$ dır. Yani, R^o ın merkezi ile M^o ın kesişimi aşikar değildir. Ek olarak varsayımdan $Z(R) + R^o$ kümesi R yi bir halka olarak ürettiği için R^o adjoint grubunun merkezinden gelen her eleman $Z(R)$ ye aittir. Bu da $M \cap Z(R) \neq 0$ anlamına gelir. Bu yüzden $K = M$ ve $M \subset Z(R)$ dir.

Şimdi $M \cap J(R) = 0$ olsun. $[M, R] = MR - RM$ ve M, R halkasının ideali olduğundan $[M, R] \subset M$ olur. Ayrıca her $r, s \in R$ için $rs - sr \in J(R)$ olduğundan $[M, R] \subset J(R)$ olur. Dolayısıyla $[M, R] \subset M \cap J(R) = 0$ yani , $[M, R] = 0$ elde ederiz. Bu da $M \subset Z(R)$ anlamına gelir. Bilindiği gibi bir Artin halkanın her quasi devirli alt grubu sıfırlayanındadır [7 , Thm 4.4]. Bu yüzden R halkasının bütün quasi devirli alt gruplarının toplamı R'nin bir idealidir . Bu ideale N diyelim. Eğer R halkasının quasi devirli alt grubu yoksa $N = 0$ ' dır. $\overline{R} = R/N$ bölüm halkası kuasi devirli altgruplar içermez. Bu yüzden sağ idealleri için maksimallik durumu sağlanır [20 , Corollary 4]. Eğer $\overline{R} = 0$ ise $R = N$ dir. R halkası Artin olduğundan $J(R)$ Jacobson radikali nilpotenttir. $R = N \subset A(R) \subset J(R)$ olduğundan R nilpotent halkadır. Şimdi $\overline{R} \neq 0$ olduğunu kabul edelim. $\overline{R}$ halkası Noether olduğundan L_{n+1} , L_n' de maksimal ideal olmak üzere $n = 0, ..., k$ için R halkasının ideallerinin

$$R = L_0 \supsetneqq L_1 \supsetneqq ... \supsetneqq L_k \supsetneqq L_{k+1} = N$$

şeklinde zinciri vardır. Bu dizide L_{n+1} bölüm grubuna geçersek ; R/L_{n+1} bölüm halkasının $L_n/\ L_{n+1}$ minimal idealini ederiz. Yukarıda yaptıklarımızdan dolayı bu minimal ideal halkanın merkezindedir. e, R halkasının herhangi bir eşkare elemanı olsun. $L_n/\ L_{n+1} \in Z(R/L_{n+1})$ oluğundan $e + L_{n+1} \in R/L_{n+1}$ ve $x + L_{n+1} \in L_n/L_{n+1}$ elemanları için $(e + L_{n+1}).(x + L_{n+1}) = (x + L_{n+1}).(e + L_{n+1})$ yazarız. Buradan $ex + L_{n+1} = xe + L_{n+1}$ olur ki bu da $ex - xe \in L_{n+1}$ demektir. Böylece her n için $[e, L_n] \subset L_{n+1}$ olur. Şimdi eR'nin R' nin ideali olduğunu gösterelim. Her $r, s \in R$ için $ser = eser + [s, e]er$ eşitliğini elde ederiz. Bu yüzden her n için $L_n eR \subset eR + [e, L_n]eR \subset eR + L_{n+1}eR$ dir. Buradan ise $ReR \subset eR + L_1eR \subset eR + L_2eR \subset ... \subset eR + NeR = eR$

olur. Benzer olarak Re'de R'nin bir idealidir. $V = \{r - er \mid r \in R\}$ sol idealini ve $W = \{r - er \mid r \in R\}$ sağ idealini düşünelim. V'nin ideal olduğunu gösterelim. Her $r - er \in V$ ve her $s \in R$ için $sr - ser = sr - esr + eser - ser + [e,s]r - [e,s]er$ dir. Varsayımdan her n için, $L_nV \subset V + [e, L_n]V \subset V + L_{n+1}V$ dir. Ek olarak $RV \subset V + L_1V \subset V + L_2V \subset ... \subset V + NV = V$ dir. Benzer bir şekilde W nun da ideal olduğu görülür. Buradan R halkası $R = eR \oplus V$ şeklinde ideallerinin direkt toplamına ayrışır. Fakat R doğrudan ayrıştırılamayan bir halka olduğu için ya $eR = 0$ dır ya da $V = 0$ dır. Eğer $eR = 0$ ise ayrışmadan $e = 0$ dır. Eğer $V = 0$ ise her $r \in R$ için $r = re$ elde ederiz. Benzer şekilde $R = Re \oplus W$ ayrışmasını dikkate aldığımızda her $r \in R$ için $re = r$ elde ederiz. Bu durumda e, R halkasının birim elemanı olur. Dolayısıyla R sadece aşikar eşkareler içerir. Sonuç olarak R halkası ya yerel halkadır ya da nilpotent halkadır. $\square$

Bilindiği gibi, birimli ve değişmeli her Artin halka yerel halkaların direkt toplamına ayrışabilir [2 , Thm 8.7]. Teorem 4.1 bu sonucun, R^o adjoint grubu nilpotent olan ve $Z(R) + R^o$ kümesi tarafından üretilen Artin halkaların bir genellemesidir.

Şimdi Teorem 4.1'in kanıtını verebiliriz.

Teorem 4.1 in Kanıtı . Sağ R Artin halkasında R^o adjoint grubu nilpotent olsun ve $Z(R)+R^o$ kümesi R' yi bir halka olarak üretsin. R halkası doğrudan ayrıştırılamayan sonlu sayıda halkanın direkt toplamı, yani

$$R = R_1 \oplus ... \oplus R_n \qquad (*)$$

olsun. Şimdi $R_1, ..., R_n$ alt halkalarının nilpotent veya çarpımsal grubu nilpotent olan yerel halka olduğunu göstereceğiz. R^o adjoint grubu nilpotent olduğundan ve $R^o = R_1^o \times ... \times R_n^o$ eşitliğinden her $i = 1, ..., n$ için R_i^o adjoint grupları nilpotenttir. Eğer R_i halkası birimliyse R_i^o adjoint grubu ile R_i^* çarpımsal grubu izomorf olacağından R_i^* çarpımsal grubu da nilpotent olur. Ek olarak varsayımdan $Z(R) + R^o$ kümesi R' yi bir halka olarak ürettiği için (4.1.5)'den $R_i =< Z(R_i) + R_i^o >$ yazarız. Dolayısıyla (4.2.2)'den her R_i halkası ya nilpotent halkadır ya da yerel halkadır. Ayrıca nilpotent halkaların direkt toplamları da nilpotent olduğundan gereklilik ispatlanmış olur. Tersine R halkasının her biri ya nilpotent halka ya da çarpımsal grubu nilpotent olan yerel halka olan $(*)$ da ki gibi bir ayrışımı olsun. Bu durumda R^o adjoint grubu nilpotent grupların direkt çarpımıdır ve böylece nilpotenttir. Şimdi her nilpotent halkanın bir radikal halka olduğunu gösterelim. Her nilpotent halka nil halka olduğundan, nil halkanın radikal halka olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır. Şimdi T bir nil halka olsun. O zaman her elemanı nilpotent olacağından her $a \in T$ için $a^m = 0$ olacak şekilde bir m tamsayısı vardır. $b = -a + a^2 - a^3 ... + (-1)^{m-1} a^{m-1}$ elemanını aldığımızda $a + b + ab = 0$ olur yani T radikal halkadır. Sonuçta nilpotent halkaların adjoint grubu kendisine eşit olur. Ek olarak bir yerel halka kendi çarpımsal grubu tarafından üretildiği için her R_i halkası $Z(R_i) + R_i^o$ kümesi tarafından üretilmiş olur. (4.1.5)'den $Z(R) + R^o$ kümesi R' yi bir halka olarak üretir. □

Eğer R halkası birimli ise R^o adjoint grubu ile R^* çarpımsal grubu izomorf olduğundan çarpımsal grubu nilpotent olan sağ Artin halkalar için de yapılan teorem doğru olur.

Sonuç 4.2.3. *R halkası birimli bir Artin halka olsun. R halkası R^* çarpımsal grubu tarafından üretilsin. Bu durumda R^* çarpımsal grubunun nilpotent olması için gerek ve yeter koşul R'nin sonlu sayıda idealinin dik toplamı ve bu ideallerin her birinin ya nilpotent bir halka ya da çarpımsal grubu nilpotent olan bir yerel halka olmasıdır.*

Örnek 4.2.4. *R^o adjoint grubu nilpotent olan herhangi bir Artin halkanın yerel veya nilpotent olması gerekmez . Aşağıda ki 2×2 matris halkasını düşünelim.*

$R = \begin{bmatrix} \mathbb{Z}_2 & \mathbb{Z}_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *halkasının merkezi ve adjoint grubu sırasıyla aşağıdaki gibidir :*

$$Z(R) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in R \mid \forall \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in R \text{ için } \quad \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$
\begin{aligned}
R^o &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in R \mid \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} o \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \textit{ olacak şekilde } \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in R \textit{ adjoint tersi vardır} \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid x \in \mathbb{Z}_2 \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}
\end{aligned}
$$

$Z(R) + R^o$ kümesi R' yi bir halka olarak üretemez.

R halkasında birim eleman olmadığı için R bir yerel halka değildir. Aynı zamanda $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ sıfırdan farklı eşkare elemanını içerdiği için R nilpotent halka da değildir.

$R = \begin{bmatrix} \mathbb{Z}_2 & \mathbb{Z}_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ halkasının Jacobson radikali, maksimal regüler sağ ideallerin arakesiti olacağından $J(R) = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{Z}_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ şeklinde bulunur.

Şimdi

$$
\begin{aligned}
\theta : \begin{bmatrix} \mathbb{Z}_2 & \mathbb{Z}_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} &\longrightarrow \mathbb{Z}_2 \\
\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} &\longrightarrow a
\end{aligned}
$$

tanımlayalım. θ, çekirdeği $\begin{bmatrix} 0 & \mathbb{Z}_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olan örten bir halka homomorfizmasıdır. Birinci izomorfizma teoreminden $R/J(R) \cong \mathbb{Z}_2$ elde ederiz.

Bir Lie halkanın üst merkez serisi ; her $n \in \mathbb{N}$ için

$Z_0(R) = 0$,

$Z_n(R) = \{z \mid z \in R, \forall\, r \in R \ \ için\ [z,r] \in Z_{n-1}(R)\ \}$ şeklinde tanımlamıştık.

R birleşmeli ve birimli bir halka olsun. Gupta ve Levin [9] da eğer R nilpotentlik sınıfı n olan bir halkaysa R^* çarpımsal grubunun nilpotentlik sınıfı en fazla n olan bir grup olduğunu kanıtlamışlardır. Jennings [14] de R halkasının adjoint grubu R^o ın nilpotent grup olması için gerek ve yeter koşulun R halkasının Lie-nilpotent halka olduğunu kanıtlamıştır. Ek olarak birleşmeli bir R Lie halkasının ve R^o adjoint grubunun nilpotentlik sınıfının çakıştığı savını öne sürmüştür. Bu sav daha sonra Du [4] tarafından kanıtlanmıştır: yani

R radikal halkasının üst merkez serisinin her $Z_n(R)$ $(n \geq 0)$ terimi , R^o adjoint grubunun üst merkez sersine karşılığı olan $Z_n(R^o)$ $(n \geq 0)$ terimiyle çakışır.

R halkasının yerel olduğu durumda [3]' de aşağıda ki sonuç elde edilmiştir :

R^* grubunun üst merkez serisinin n inci terimi $Z_n(R^*)$ olmak üzere her $n > 0$ için $Z_n(R)^* = Z_n(R^*)$

Özel olarak, R yerel halkasının R^* çarpımsal grubunun nilpotent olması için gerek ve yeter koşul R' nin Lie-nilpotent halka olması ve bu durumda her iki yapı içinde nilpotentlik sınıfının çakışmasıdır.

R birleşmeli bir halka olsun (birimli olması gerekmez). Amberg ve Sysak [1] de R halkasının adjoint yarıgrubu R^{ad} ' nin nilpotentlik sınıfının n olması için gerek ve yeter koşulun R' nin nilpotentlik sınıfı n olan Lie-nilpotent halka olduğunu kanıtlamışlardır. Bu yüzden eğer R halkası nilpotentlik sınıfı n olan Lie-nilpotent halka ise bu durumda R^o adjoint grubunun nilpotentlik sınıfı en fazla n dir.

Sonuç 4.2.5. *R halkası $Z(R) + R^o$ kümesi tarafından üretilen bir Artin halka olsun. R^o adjoint grubunun nilpotent olması için gerek ve yeter koşul R halkasının Lie-nilpotent halka olmasıdır ve bu durumda her iki yapının nilpotentlik sınıfları çakışır.*

Teorem 4.2.6. *R bir Artin halka olsun. Eğer R^o adjoint grubu nilpotent ve $Z(R)+R^o$ kümesi R' yi bir halka olarak üretiyorsa o zaman aşağıdaki ifadeler doğrudur :*

1. *Her $n \geq 0$ için , $Z_n(R)^o = Z_n(R^o)$ eşitliği sağlanır.*
2. *R halkasının her eşkare elemanı R nin merkezindedir.*

Kanıt. R bir Artin halka olsun. R^o adjoint grubu nilpotent olsun ve $Z(R)+R^o$ kümesi R yi bir halka olarak üretsin.

1. Bu iddianın geçerliliği nilpotent ve yerel halkalar için sırasıyla [4] ve [3] de yapılmıştır. Sonuç olarak eğer R halkası $(*)$ da ki ayrışmaya sahip ise her $n \geq 0$ için $Z_n(R_i)^o = Z_n(R_i^o)$ olur. Bu durumda aynı özellik direkt toplamda da sağlanır. Yani , $Z_n(R)^o = Z_n(R^o)$ eşitliği elde edilir.
2. R Artin halkasında R^o adjoint grubu nilpotent ve $Z(R)+R^o$ kümesi R' yi bir halka olarak ürettiği için Teorem 4.1 den dolayı R halkası her biri ya nilpotent halka ya da yerel halka olan sonlu sayıda idealin direkt toplamıdır. Ayrıca yerel halkalar sadece aşikar eşkareler içerdiğinden ve aşikar eşkareler merkezi eşkareler olduğundan R halkasının bütün eşkare elemanları merkezinde olur.

□

5. SONUÇ

Bu tezde R'nin adjoint grubunun yapısı ile yarı-mükemmel ve Artin halkaların yapısını belirleme problemlerini ele alan Nicholson'ın [18] ve Evstaf'ev'in [5] makaleleri derlenerek geniş açıklamalar ile sunulmuştur.

Literatürde bu konuyla ilgili çok sayıda makale ve açık problem vardır. Bu açık problemler son yıllarda birçok matematikçi tarafından çalışılmış bazıları belli koşullar altında çözülmüş ise de bazıları için çalışmalar devam etmektedir. Bunlardan birisi: Adjoint grubu sonlu üretilmiş nilpotent olmayan bir radikal halka var mıdır? [19] [Sysak,Question 4.1] sorusudur.

KAYNAKÇA

[1] Amberg ,B. , Sysak, Y. P., Associative rings whose adjoint semigroup is locally nilpotent, Archiv der Mathematik, 76, 426–435 , **2001**.

[2] Atiyah, M. F., Macdonald, I. G., Introduction to Commutative Algebra, Addison-Wesley, **1969**

[3] Catino , F. , Miccoli, M. M. , Local rings whose multiplicative group is nilpotent, Archiv der Mathematik, 81, 121–125 , **2003**

[4] Du, X., The centers of a radical ring, Canadian Mathematical Bulletin, 35, 174–179 , **1992**.

[5] Evstaf'ev, R. Yu. "Artinian rings with nilpotent adjoint group." Ukrainian Mathematical Journal 58, 472-481 , **2006**

[6] Fischer, I., Eldridge, K. E., Artinian rings with a cyclic quasi-regular group. Duke Mathematical Journal, , 36 , 43-48 , **1969**

[7] Fuchs, L., Kahane, J. P., Robertson, A. P., Ulam, S. Abelian groups . Oxford: Pergamon Press , **1960**

[8] Gilmer, R. W. , Finite rings with a cyclic multiplicative group of units, American Journal of Mathematics, 85 , 447-452 , **1963**

[9] Gupta , X. , Levin, F., On the Lie ideals of a ring, Journal of Algebra , 81, 225–231 , **1983**.

[10] Herstein, I.N., Noncommutative Rings, The Mathematical Association of America, **1968**

[11] Huzurbazar, M. I. , Multiplicative group of a division ring, Doklady Akademii Nauk , 131, 1268–1271 , **1960**

[12] Jacobson N., Structure of Rings, American Math. Society, Coll. Pub., **1964**

[13] Jacobson N.,The radical and semi-simplicity for arbitrary rings, American Journal of Mathematics, 67, 300-320, **1945**

[14] Jennings S.A., Radical Rings with Nilpotent Associated Groups, Trans. of the Royal Society of Canada, 49(3), 31-38, **1955**

[15] Lam, T.Y., A first course in noncommutative rings , Springer Science & Business Media , **2013**

[16] Mueller, B. J. , On semiperfect rings, Illinois Journal of Mathematics, 14 , 464-467, **1970**

[17] Nicholson W. K. , Semiperfect rings with abelian group of units , Pacific Journal of Math. , 49,1, **1973**

[18] Nicholson W. K. , Semiperfect rings with abelian adjoint group , Pacific Journal of Math. , 54,1, **1974**

[19] Sysak , Ya.P., The adjoint group of radical rings and related questions. Ischia group theory, 344-365 , **2010**

[20] Szele, T. , Nilpotent Artinian rings, Publicationes Mathematicae Debrecen, 4 , 71-78 , **1955**

[21] Watters, J. F., On the adjoint group of a radical ring, Journal of the London Mathematical Society, 43 , 725-729 , **1968**