KATKISI BELİRLİ EMEKLİLİK PLANLARINDA OPTİMAL STRATEJİLERİN BELİRLENMESİ

DETERMINIG OPTIMAL STRATEGIES IN DEFINED CONTRIBUTION PENSION PLANS

MURAT KIRKAĞAÇ

Dr. Öğr. Üyesi Yasemin SAYKAN
Tez Danışmanı

Hacettepe Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim – Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin
Aktüerya Bilimleri Anabilim Dalı İçin Öngördüğü
DOKTORA TEZİ
olarak hazırlanmıştır.

2022

ÖZET

KATKISI BELİRLİ EMEKLİLİK PLANLARINDA OPTİMAL STRATEJİLERİN BELİRLENMESİ

Murat KIRKAĞAÇ

Doktora, Aktüerya Bilimleri Bölümü
Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Yasemin SAYKAN
Şubat 2022, 66 sayfa

Dünyada olduğu gibi ülkemizde de son yıllarda faydası belirli emeklilik planlarından katkısı belirli emeklilik planlarına geçiş oldukça yaygınlaşmıştır. Katkısı belirli emeklilik planlarında yatırım riski katılımcı üzerinde olduğu için optimal yatırım stratejisinin belirlenmesi oldukça önemlidir. Katkısı belirli emeklilik planlarında katılımcı tarafından belirlenecek bir diğer önemli karar uygun katkı oranının belirlenmesidir. Ayrıca katılımcı yapacağı katkılar sonucu biriken fon tutarının en azından belirli bir tutara eşit olmasını isteyebilir. Bu amaçla uygun minimum fon garanti tutarı belirlenmesi gerekmektedir. Bununla birlikte, belirlenen optimal yatırım stratejisi, uygun katkı oranı ve uygun minimum fon garanti tutarı; son yıllarda tüm dünyada gözlemlenen ölüm olasılıklarındaki düşüşten kaynaklanan uzun ömürlülük riski de göz önünde bulundurularak belirlenmelidir. Katkısı belirli emeklilik planlarında optimal yatırım stratejisinin belirlendiği çalışmalarda genellikle, klasik bir yaklaşım olan beklenen faydanın maksimizasyonu kullanılmıştır. Fakat beklenen faydanın maksimizasyonu gerçek dünyayı, özellikle birey kayıptan kaçınan bir birey olduğunda iyi yansıtmamaktadır. Bununla birlikte, yatırımcıların çoğu da aslında kayıptan kaçınan bireylerdir. Bu nedenle bu tezde katılımcının kayıptan kaçınan bir birey olduğu varsayılmıştır. Katkısı belirli emeklilik planlarında zamanın kesikli olduğu varsayımı altında kayıptan kaçınan bireyler için optimal yatırım stratejisi uygun katkı oranı ve uygun minimum fon garanti tutarı ile birlikte, uzun ömürlülük riski göz önünde bulundurularak belirlenmiştir. Optimal yatırım stratejisi belirlenirken dinamik programlama yöntemi kullanılmıştır. Kayıptan kaçınan birey gerçekleşen fon büyüklüğünün hedeflenen fon büyüklüğüne yakın olması durumunda tutucu bir yatırım stratejisi izlerken, gerçekleşen fon büyüklüğü hedeflenen fon büyüklüğünden uzaklaşırken agresif bir yatırım stratejisi izlemektedir. Kayıptan kaçınan birey için optimal yatırım stratejisi birikim döneminin başında fonun tamamının riskli yatırım aracında değerlendirilmesi, birikim döneminin ilerleyen yaşlarında fonun riskli yatırım aracında değerlendirilen oranının azaltılarak, risksiz yatırım aracında değerlendirilen oranının artırılması, birikim döneminin sonunda ise fonun büyük bir kısmının risksiz yatırım aracında değerlendirilmesi biçimindedir. Kayıptan kaçınan birey için uygun katkı oranı ve uygun minimum fon garanti tutarının belirlenmesi optimal yatırım stratejisindeki riski azaltmaktadır. Bunun yanı sıra dağıtım dönemindeki uzun ömürlülük riski ile baş edebilmek için birikim döneminde daha agresif bir yatırım stratejisi izlenmelidir. Kayıptan kaçınan birey daha agresif bir yatırım stratejisini tercih etmeyeceğinden, uygun katkı oranı veya uygun minimum fon garanti tutarını belirleyerek uzun ömürlülük riski ile baş edebilir. Birikim döneminde yatırım stratejisindeki riski daha da azaltmak için ise hem uygun katkı oranı hem de uygun minimum fon garanti tutarı birlikte belirlenmelidir.

Anahtar Kelimeler: Katkısı belirli emeklilik planı, Kayıptan kaçınma, Optimal yatırım stratejisi, Uygun katkı oranı, Uygun minimum fon garanti tutarı, Uzun ömürlülük riski.

ABSTRACT

DETERMINING OPTIMAL STRATEGIES IN DEFINED CONTRIBUTION PENSION PLANS

Murat KIRKAĞAÇ

Doctor of Philosophy, Department of Actuarial Sciences
Supervisor: Asst. Prof. Dr. Yasemin SAYKAN
February 2022, 66 pages

In our country, as in the rest of the world, the transition from defined benefit pension plans to defined contribution pension plans has become quite common in recent years. Because the investment risk is on the participant, it is very important to determine the optimal investment strategy in defined contribution pension plans. Another important decision made by the participant in defined contribution pension plans is the determination of the appropriate contribution rate. In addition, the participant may demand the amount of funds accumulated as a result of their contributions be at least equal to a certain amount. For this purpose, it is necessary to determine the appropriate minimum fund guarantee. Besides, the optimal investment strategy determined, the appropriate contribution rate and the appropriate minimum fund guarantee should be determined by taking into account the longevity risk arising from the decrease in mortality probabilities observed all over the world in recent years. Studies that determine the optimal investment strategy in defined contribution pension plans generally use the classical approach of maximizing expected utility. However, maximizing expected utility does not reflect the real world well, especially when the individual is loss-averse. Besides, most investors are actually loss-averse. Therefore, in this thesis, it is assumed that the participant is a loss-averse individual. Under the assumption that time is discrete in defined contribution pension plans, the optimal investment strategy for loss-averse individuals is determined by considering the longevity risk, with the appropriate contribution rate and the appropriate minimum fund guarantee. Dynamic programming method is used while determining the optimal investment strategy. A loss-averse individual follows a conservative investment strategy if the actual fund size is close to the targeted fund size, and follows an aggressive investment strategy while the actual fund size moves away from the targeted fund size. The optimal investment strategy for the loss-averse individual is to use the entire fund in a risky investment asset at the beginning of the accumulation period, to decrease the ratio of the fund used in the risk-free investment asset in the later years of the accumulation period, to increase the ratio used in the risk-free investment asset, and to use a large part of the fund in the risk-free investment asset at the end of the accumulation period. Determining the appropriate contribution rate and the appropriate minimum fund guarantee for the loss-averse individual reduces the risk in the optimal investment strategy. The loss-averse individual should follow a more aggressive investment strategy in the accumulation period to cope with the longevity risk during the distribution period. However, since the loss-averse individual will not prefer a riskier investment strategy, he or she can alternatively cope with this risk by determining the appropriate contribution rate or the appropriate minimum fund guarantee. Both the appropriate contribution rate and the appropriate minimum fund guarantee should be determined together in order to decrease the risk of the optimal investment strategy in the accumulation period.

Keywords: Defined contribution pension plan, Loss aversion, Optimal investment strategy, Appropriate contribution rate, Appropriate minimum fund guarantee, Longevity risk.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın her aşamasında beni destekleyen, daima yanımda olduğunu hissettiren, beni daima çalışmaya teşvik eden, yapabileceğime inandıran, karşılaştığım zorlukların üstesinden gelmemi sağlayan, bu tezin bitmesinde büyük emeği olan danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Yasemin SAYKAN'a

Tez izleme komitemde yer alan çok değerli önerileriyle tezin bitmesinde büyük katkıları olan, her tez izleme dönemi sonrası bana verdiği moral ile daha çok yapabileceğime inandıran hocam Prof. Dr. Ayşe Sevtap KESTEL ve lisans eğitimimde danışmanlığımı yapan ve öğrenciliğim boyunca üzerimde büyük emeği olan hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Murat BÜYÜKYAZICI'ya,

Tez savunma jurisinde yer alan; çok değerli önerileri ve yapıcı eleştirileri ile tezime katkıda bulunan, üzerimde büyük emeği olan hocam Sayın Prof. Dr. Meral SUCU ve Sayın Prof. Dr. Canan HAMURKAROĞLU'na,

Kadromun bulunduğu üniversite olan Kütahya Dumlupınar Üniversitesi'ne, anlayışları ve destekleri için dekanım Sayın Prof. Dr. Aydın KAYABAŞI ve bölüm başkanım Sayın Doç. Dr. Nilüfer DALKILIÇ'a

Tez çalışmam boyunca destekleri ve yardımları ile yanımda olan; arkadaşlarım, meslektaşlarım Arş. Gör. İsmail GÜR ve Arş. Gör. Dr. Övgücan ERDEMİR'e,

Bugünlere gelmemde en büyük paya sahip olan, emeklerini asla ödeyemeyeceğim annem Tansu KIRKAĞAÇ, babam Adnan KIRKAĞAÇ, abim İsmail KIRKAĞAÇ, hayatımın neşesi olan yeğenim Umut'uma,

Hayattaki en büyük destekçim, en zor zamanlarımda yanımda olan, kolumdan tutup düşmeme izin vermeyen, bana benden daha çok inanan, bu tezi bitirebildiysem onun sayesinde bitirebildiğim sevgili eşim Şenay KIRKAĞAÇ'a,

Ve son olarak dünyama güneş gibi doğan, minik bedeniyle ve kocaman desteği ile sevgisini her zaman kalbimde hissettiğim canım kızım Duru'ma,

En içten teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÇİZELGELER DİZİNİ

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R_x}$	Yüksek riskli yatırım aracının yıllık getirisi
$\boldsymbol{r}$	Risksiz yatırım aracının yıllık getirisi
$\boldsymbol{\mu}$	Yüksek riskli yatırım aracının ortalama yıllık risk primi
$\boldsymbol{\sigma}$	Yüksek riskli yatırım aracının yıllık getirisine ilişkin standart sapma
$\boldsymbol{\eta}$	Ulusal kazancın ortalama yıllık büyüme oranı
$\boldsymbol{\theta}$	Fonun yüksek riskli yatırım aracında değerlendirilen oranı
$\boldsymbol{d}$	Ara dönem hedefleri belirlenirken kullanılan iskonto oranı
$\boldsymbol{\pi}$	Katkı oranı
$\boldsymbol{\lambda}$	Kayıptan kaçınma oranı
$\boldsymbol{v_1}$	Kazanç için eğim parametresi
$\boldsymbol{v_2}$	Kayıp için eğim parametresi
$\boldsymbol{n}$	Düğüm sayısı
$\boldsymbol{w}$	Ara dönemlerde hedeflenen fon büyüklükleri için ağırlık
$\boldsymbol{\beta}$	İskonto faktörü

Kısaltmalar

MG	Minimum Fon Garanti Tutarı
RF	Azaltım Faktörü
PMA92	1992 yılı Emekli Erkekler için Mortalite Tablosu

1. GİRİŞ

Emeklilik planı, katılımcıların aktif çalışma süreleri boyunca yaptıkları katkıları uzun vadeli yatırıma yönlendirerek, emeklilik dönemlerinde çalışma dönemindeki tüketim seviyesini devam ettirebilmelerini sağlayabilecekleri bir gelir elde etmelerini sağlamayı ve bu sayede emeklilik döneminde başkalarına muhtaç olmalarını engellemeyi amaçlayan, plan katılımcılarının sahip olduğu hakları ve sorumluluklarını düzenleyen sözleşmelerdir (Blake, 1999).

Emeklilik planlarının dünyada en yaygın olarak kullanılan iki türü, faydası belirli emeklilik planları ve katkısı belirli emeklilik planlarıdır.

Faydası belirli emeklilik planları, katılımcının emeklilik döneminde hak kazanacağı gelirinin tam değerinin önceden belirlenememesine rağmen, çeşitli yöntemlerle hesaplanabildiği planlardır. Çoğunlukla kamu sektöründe rastlanılan bu planlarda, katılımcının yapacağı katkı oranı önceden planlanmaktadır (Aitken, 1996).

Son yıllarda faydası belirli emeklilik planlarından katkısı belirli emeklilik planlarına geçiş oldukça yaygınlaşmış ve katkısı belirli emeklilik planları sosyal güvenlik sisteminde önemli bir rol oynamaya başlamıştır. Literatür incelendiğinde de katkısı belirli emeklilik planları üzerine çalışmaların son yıllarda oldukça arttığı görülmektedir.

Katkısı belirli emeklilik planları, katılımcı tarafından yapılacak katkı oranının daha önceden belirli olduğu emeklilik planlarıdır. Emeklilik döneminde katılımcı tarafından biriktirilen fon miktarı, birikim döneminde yapılan katkıların, katkı yapacağı sürenin yani emeklilik yaşının ve yatırım getirisinin bir fonksiyonudur (Aitken 1996). Katkısı belirli emeklilik planlarında, katkıların yapıldığı birikim dönemi ve yapılan katkılar sonucu oluşan fonun emeklilik geliri olarak alındığı dağıtım dönemi olmak üzere iki dönem vardır. Faydası belirli emeklilik planlarında yatırım riski plan sponsoru tarafından üzerine alınırken, katkısı belirli emeklilik planlarında ise bu risk katılımcının üzerindedir. Dolayısıyla optimal yatırım stratejisinin belirlenmesi katılımcı için oldukça önemlidir.

Literatürde katkısı belirli emeklilik planlarında optimal yatırım stratejisine ilişkin çalışmalar incelendiğinde, bu çalışmaların çok eski yıllara dayandığı görülmektedir. Bu konuda yapılan ilk çalışmalar Samuelson (1969) ve Merton (1969,1971)'e ait olup, katkısı belirli emeklilik planlarında optimal yatırım stratejisinin belirlenmesine ilişkin çalışmalar günümüzde hala yapılmaktadır.

Bodie, Merton ve Samuelson (1992) emeklilik tarihinin, çalışma durumu ve portföy hareketlerinden etkilendiğini, eğer emeklilik fonu bireyin emeklilikte hayat standardını sağlayamayacak kadar düşükse bunun ya bireyin birikim döneminde işsiz kalmasından ya da kötü yatırım performansından kaynaklandığını belirtmiş ve bir yatırım stratejisi geliştirmişlerdir.

Cairns (1996) zamanın sürekli olduğu, Owadally (1998) ise zamanın kesikli olduğu varsayımı altında, fonun biri yüksek riskli, diğeri düşük riskli olmak üzere iki varlıkta değerlendiğini varsaymış, dinamik programlama yöntemi ile faydası belirli emeklilik planlarında optimal katkı oranını ve optimal yatırım stratejisini belirlemişlerdir.

Katkısı belirli emeklilik planlarında optimal yatırım stratejisi üzerine yapılan çalışmaların 2000'li yılların başında oldukça arttığı görülmektedir.

Rabin ve Thailer (2001) Amerika'da kullanılan bir katkısı belirli emeklilik planı olan 401(k) planının yatırım sürecini analiz ederek, beklenen fayda kriterinin çoğu risk davranışı için uygun olmadığı sonucuna ulaşmışlardır.

Boulier, Huang ve Taillard (2001), üstel fayda fonksiyonunu kullanarak kişinin varlığı ile garanti edilen gelir arasındaki farkı maksimum yapan optimal yatırım stratejisini belirlemişlerdir.

Vigna ve Haberman (2001) katkısı belirli emeklilik planlarında dinamik programlama yöntemini kullanarak, hedef fon ile gerçekleşen fon büyüklüğü arasındaki fark minimum olacak şekilde, iki yatırım aracı olduğu varsayımı altında optimal yatırım stratejisini belirlemişler, belirledikleri stratejinin yaşam tarzı stratejisi ile uyumlu olduğu sonucuna ulaşmışlardır. Yaşam tarzı stratejisine göre; birikim döneminin başlarında fonun büyük bir kısmı hisse senedi gibi yüksek riskli ve yüksek getirili yatırım aracında değerlendirilmeli, vade ilerledikçe fonun yüksek riskli yatırım aracında değerlendirilen oranı azaltılarak devlet tahvili gibi düşük riskli ve düşük getirili yatırım aracında değerlendirilen oranı artırılmalı ve emekliliğe yaklaşıldığında ise fonun büyük bir kısmı düşük riskli yatırım aracında değerlendirilmelidir. Haberman ve Vigna (2002) bu çalışmayı fonun n farklı yatırım aracında değerlendiğini varsayarak geliştirmişlerdir.

Yaşam tarzı stratejisi halen birçok emeklilik planında kabul gören bir strateji olmakla birlikte başta Blake, Cairns ve Dowd (2001,2007) olmak üzere çeşitli yazarlar bu stratejiyi katılımcıların özelliklerini çok iyi temsil etmediği, varlık getirileri ve gelirin stokastik yapısının dikkate alınmadığı için eleştirmektedirler.

Blake, Cairns ve Dowd (2001) birikim döneminde varlık getiri modelleri ve yatırım stratejilerini incelemiş, riske maruz değeri tahmin ederek optimal yatırım stratejisi olarak eşik stratejisini önermişlerdir. Eşik stratejisi fondaki yatırım araçlarına ilişkin ağırlıkların daha önceden belirlenmiş bir eşik değere göre elde edildiği bir yatırım stratejisidir.

Thomson (2003) dinamik programlama yöntemi ile bireyin beklenen faydasını maksimize ederek optimal yatırım stratejisini belirlemiştir.

Deelstra, Grasselli ve Koehl (2003) ve Di Giacinto ve ark. (2014) faiz oranının stokastik olması ve minimum garanti sağlanması durumunda beklenen faydayı maksimize ederek optimal yatırım stratejisini elde etmişlerdir. Deelstra, Grasselli ve Koehl (2004) emeklilik fon değeri ile minimum garanti arasındaki farkı maksimize ederek optimal yatırım stratejisini belirlemiştir.

Blake, Cairns ve Dowd (2003) 2001'deki çalışmalarını dağıtım dönemine uygulayarak tamamlamışlar, katkısı belirli emeklilik planlarında fonu annüiteye çevirmek için optimal annüite yaşını elde etmişlerdir.

Gerrard, Haberman ve Vigna (2004) dağıtım döneminde fondan sabit miktarlar çekildiği varsayımı altında fayda fonksiyonundaki parametrelerin değiştirilmesi ile bireyin risk tutumunu da göz önünde bulundurarak, yatırım getirisinin stokastik olarak modellenmesi durumunda dağıtım dönemi için optimal yatırım stratejisi elde etmişlerdir.

Battochio ve Menancin (2004) katkısı belirli emeklilik planlarında optimal yatırım stratejisini; sürekli zamanda ve stokastik çerçevede, beklenen faydayı Hamilton-Jacobi-Bellman eşitlikleri yardımıyla maksimize ederek, maaş riskini ve enflasyon riskini göz önünde bulundurarak elde etmişlerdir.

Berkelaar, Kouwenberg ve Post (2004), Gomes (2005) kayıptan kaçınan bireyler için optimal yatırım stratejisinin portföy sigortası stratejisi olduğu sonucuna ulaşmışlardır.

Cairns, Blake ve Dowd (2006) katkısı belirli emeklilik planlarında optimal yatırım stratejisini belirlerken; maaş ile yatırım arasındaki korelasyonu dikkate alarak hem bireyin dönem sonu emeklilik fonu hem de dönem sonu gelirine bağlı olan bir fayda fonksiyonunu maksimize etmişlerdir.

Battocchio, Menoncin ve Scaillet (2007) hem birikim hem de dağıtım dönemi için tek bir yatırım stratejisi geliştirmişler, yatırım stratejisinin her iki dönem için ayrı ayrı belirlenmesinin optimal faydayı sağlamaya engel olacağını belirtmişlerdir.

Delong, Gerard ve Haberman (2008) ortalama-varyans kriterini kullanarak birikim dönemi boyunca yapılması gereken optimal katkı oranını ve yatırım stratejisini fon ile yükümlülük arasındaki farkı minimize ederek belirlemişlerdir.

Gao (2009) hisse senedi fiyat dinamiği için Geometrik Brown Hareketi'nin genişletilmiş hali olan sabit varyans esnekliği modelini kullanarak katkısı belirli emeklilik planlardaki dönem sonu birikimin beklenen faydasını maksimize eden optimal yatırım stratejisini elde etmiş, hareketli Merton stratejisi ile uyumlu, Devolder, Princep ve Fabian (2003) ile farklı sonuçlar elde etmiştir.

Yang ve Huang (2009) birikim döneminde, dağıtım dönemindeki uzun ömürlülük riskini azaltacak şekilde, emeklilik fonunun gerçekleşen değeri ile hedeflenen değeri arasındaki farkının ikinci merkezsel olmayan momentini minimize eden optimal yatırım stratejisi ve katkı oranını belirlemişlerdir. Uzun ömürlülük riski ile baş edebilmek için ya daha agresif bir yatırım stratejisinin ya da daha yüksek katkı yapılmasının uygun olduğu sonucuna ulaşmışlardır.

Hainaut ve Deelstra (2011) faydası belirli emeklilik planlarında; hem katkı ve standart maliyet arasındaki farkın karesi, hem de dönem sonu gelir ve rezerv arasındaki farkın karesini minimize edilerek optimal yatırım stratejisini ve birikim dönemi boyunca yapılması gereken optimal katkı oranını belirlemişlerdir.

Emms (2012) katkısı belirli emeklilik planlarında optimal yatırım stratejisini ve optimal tüketim oranını, birikim ve dağıtım dönemini birlikte ele alıp, katılımcının yaşam boyu beklenen harcamasını maksimize ederek belirlemiştir.

Han and Hung (2012) stokastik gelir ve enflasyon riski ile katkısı belirli emeklilik fonları için, sürekli zamanda üstel fayda fonksiyonunu maksimize eden optimal yatırım stratejisini dinamik programlama yöntemini kullanarak elde etmişlerdir.

Gerrard, Højgaard ve Vigna (2012) hem gerçekleşen ile hedeflenen tüketim arasındaki hem de birikimin anüiteye dönüştürüldüğü anda fon ile hedef fon arasındaki sapmayı dikkate alarak annüitenin satın alınacağı optimal zamanı belirlemişlerdir.

He ve Liang (2013a) katkısı belirli emeklilik planlarında, dağıtım dönemindeki gerçekleşen ve hedeflenen gelir arasındaki farkı minimize eden optimal yatırım stratejisini elde etmişlerdir. He ve Liang (2013b) optimal yatırım stratejisini ortalama-varyans kriterini kullanıp, birikim döneminde fon büyüklüğünün maksimizasyonunu ve volatilitenin minimizasyonu birlikte ele alarak elde etmişlerdir.

Owadally, Haberman ve Gomez (2013) dönem sonu fon hedefi ve ara hedefler belirleyerek hedeften sapmalar minimum olacak şekilde değişken katkı oranını belirlemişlerdir.

Blake, Wright ve Zhang (2013) kayıptan kaçınan bireyler için stokastik gelir ve birbirine bağımlı fon hedefleri ile katkısı belirli emeklilik planları için hedef fon ve gerçekleşen fon arasındaki farka dayalı bir fayda fonksiyonu olan beklenti teorisi fayda fonksiyonunu maksimize ederek optimal yatırım stratejisini elde etmişlerdir.

Yao, Yang ve Chen (2013) katkısı belirli emeklilik planlarında optimal yatırım stratejisi için birikim döneminde beklenen faydayı maksimize etmek yerine, ortalama-varyans kriteri kullanılmıştır.

Yao ve ark. (2014) gelir ve ölümlülüğün stokastik olduğu durumda katkısı belirli emeklilik planlarında çok dönemli ortalama-varyans kriterini kullanmaya olanak sağlayan yatırım stratejisini geliştirmişlerdir. Literatürdeki çoğu çalışmanın aksine bu çalışmada getirinin artırılması ve ortalama varyans kriterindeki riskin kontrol altına alınması için hem beklenen fayda maksimize edilmiş hem de risk minimize edilmiştir.

Vigna (2014) katkısı belirli planlar için ortalama-varyans kriterini kullanarak, beklenen faydayı maksimize eden optimal yatırım stratejisini belirlemiştir. Belirlenen stratejinin; hedef fon ile beklenen fon arasındaki fark olarak tanımlanan karesel hasar fonksiyonunun minimize edilmesiyle elde edilen hedef-bazlı optimizasyon ile aynı olduğu, katkısı belirli planlarda bu yaklaşımın kullanılması gerektiği sonucuna ulaşmıştır.

Guan ve Liang (2014) birikim döneminde faiz oranı, volatilite ve katkı oranını stokastik alarak, fon değeri ve minimum garanti arasındaki farkın beklenen değerini maksimize eden optimal yatırım stratejisini üstel fayda fonksiyonunu kullanarak elde etmişlerdir.

Blake, Wright ve Zhang (2014) rasyonel bir birey için Epstein–Zin fayda fonksiyonu kullanıldığında, optimal yatırım stratejisini ve optimal katkı oranını dinamik programlama optimizasyon yöntemi ile yaşa bağlı olarak belirlemişlerdir.

Konicz ve Mulvey (2015) katkısı belirli emeklilik planları için birikim ve dağıtım dönemini kapsayacak şekilde optimal yatırım stratejisini bulmuşlardır. Optimizasyon yöntemi olarak dinamik programlama yöntemi ile stokastik programlama yöntemini birleştirmişlerdir. Bireyin yatırım getirisindeki ve beklenen yaşamındaki belirsizlikleri içeren bir senaryo ağacı oluşturularak fayda fonksiyonu maksimize edilmiştir.

Guan ve Liang (2015) 2014'de yaptığı çalışmalarını hem dönem sonu beklenen değeri maksimize ederek hem de dönem sonu değerin varyansını minimize ederek geliştirmişlerdir.

Wu ve Zeng (2015) katkısı belirli planlar için çok dönemli denge yatırım stratejisi üzerine çalışılmışlardır.

Yao, Chen ve Li (2016) gelir ve ölümlülüğün stokastik olduğu durumda, dinamik programlama yöntemini kullanarak etkin yatırım stratejisini ve etkin sınırın kapalı formunu elde etmişlerdir.

Chang ve Chang (2017) üstel fayda fonksiyonları ve Hamilton–Jacobi–Bellman eşitliklerini kullanarak dönemler arası tüketimi ve dönem sonu gelirini maksimize eden optimal yatırım-tüketim miktarlarını elde etmişlerdir.

Li ve ark. (2017) bireyin birikim döneminde ölmesi durumunda bireye koruma sağlamak için prim iadesi klozu kullanarak, ortalama-varyans çerçevesinde katkısı belirli emeklilik planları için optimal yatırım stratejisini belirlemişlerdir.

Chen, Haberman ve Thomas (2017) dağıtım döneminde ertelenmiş annüitelerin kullanılmasını önermişlerdir.

Katkısı belirli emeklilik planlarında optimal yatırım stratejisinin belirlendiği çalışmalarda genellikle, klasik bir yaklaşım olan beklenen faydanın maksimizasyonu kullanılmıştır. Fakat Rabin ve Thailer (2001) beklenen fayda kriterinin çoğu risk davranışı için uygun olmadığını belirtmişlerdir. Beklenen faydanın maksimizasyonu gerçek dünyayı, özellikle birey kayıptan kaçınan bir birey olduğunda iyi yansıtmamaktadır. Bununla birlikte yatırımcıların çoğu aslında kayıptan kaçınan bireylerdir. Bu nedenle kayıptan kaçınan bireyler için optimal yatırım stratejisinin belirlenmesi oldukça önemlidir.

Kayıptan kaçınma toplam varlığın kesin değerindeki değişimden ziyade, önceden tanımlanmış bir referans noktası veya gelire göre varlıktaki kayıp veya kazanç ile tanımlanır. Kayıptan kaçınma kavramı ilk olarak Kahneman ve Tversky (1979) tarafından davranışsal finansın temel taşı olan "beklenti teorisinin" içinde tanımlanmıştır. Beklenti teorisi temel olarak bireyin davranışlarını belirleyen motivasyonun, bu davranış sonucundaki beklentiler olduğunu iddia eden teoridir. Bu teoriye göre kayıplar kazançlara göre yatırımcıları duygusal olarak daha fazla etkilemektedir, bir başka deyişle kayıp yatırımcıların gözünde kazanca göre daha önemlidir.

Katkısı belirli emeklilik planlarında kayıptan kaçınan bireyler için optimal yatırım stratejisinin belirlendiği başlıca çalışmalar, Berkelaar, Kouwenberg ve Post (2004), Gomes

(2005), Blake, Wright ve Zhang (2013)’e ait çalışmalardır. Berkelaar, Kouwenberg ve Post (2004) ve Gomes (2005) optimal yatırım stratejisini sürekli zamanda elde ederken, Blake, Wright ve Zhang (2013) kesikli zamanda elde etmiştir. Bu çalışmalarda beklenen faydanın maksimize edilmesi yerine kayıptan kaçınan bireyler için hedeflenen fon ile gerçekleşen fon büyüklüğü arasındaki farkın minimize edilmesine olanak sağlayan beklenti teorisi kullanılmıştır. Hedeflenen fon ile gerçekleşen fon büyüklüğü arasındaki farkın minimizasyonu aslında literatürde yeni bir fikir değildir. Vigna ve Haberman (2001) ve Haberman ve Vigna (2002) dönem sonu hedef fon büyüklüğü ve ara dönem fon hedeflerini belirleyerek, hedeflenen fon büyüklüğü ile gerçekleşen fon büyüklüğü arasındaki farkın karesi olarak tanımlanan maliyet fonksiyonlarının iskontolu toplamını minimize edecek şekilde optimal yatırım stratejisini belirlemişlerdir. Ancak bu çalışmada negatif sapmaların yanı sıra hedeften pozitif sapmalar da aynı oranda cezalandırılmaktadır. Hedeflenen fon büyüklüğünden pozitif sapma istenilen bir durum olduğu için bu tezde; Blake, Wright ve Zhang (2013)’de olduğu gibi sadece negatif sapmalar cezalandırılacak şekilde optimal strateji belirlenmiştir. Blake, Wright ve Zhang (2013) bireyin kayıptan kaçınan bir birey olduğu düşüncesiyle, yatırımın ve gelirin stokastik olduğu durumda sadece birikim dönemini dikkate alarak optimal yatırım stratejisini belirlemişlerdir. Optimal yatırım stratejisi belirlenirken zamanın kesikli olduğu varsayılmış, deterministik ve stokastik model kullanılmıştır.

Katkısı belirli emeklilik planlarında optimal yatırım stratejisinin yanı sıra, uygun katkı oranının belirlenmesi de önemlidir. Yapılan literatür taramasında katkısı belirli emeklilik planlarında kayıptan kaçınan bireyler için optimal yatırım stratejisinin, uygun katkı oranı ile birlikte belirlendiği bir çalışmaya rastlanmamıştır. Bu nedenle bu tezde kayıptan kaçınan bireyler için optimal yatırım stratejisi uygun katkı oranı ile elde edilmiştir.

Uygun katkı oranı belirlenirken gerçekleşen fon büyüklüğüne ilişkin bir kısıt belirlemek gerekmektedir. Bu amaçla literatürdeki katkısı belirli emeklilik planlarına ilişkin çalışmalar incelenmiş ve dönem sonu hedeflenen fon büyüklüğünün önceden belirlenmiş minimum bir tutara eşit veya bu tutardan büyük olması koşulu altında optimal yatırım stratejisinin belirlendiği bazı çalışmalara rastlanmıştır. Bu çalışmaların ilki Deelstra, Grasselli ve Koehl (2003) tarafından yapılan çalışmadır. Katkısı belirli emeklilik planlarında minimum garanti tutarına ilişkin pek çok çalışma olmasına rağmen, kayıptan kaçınan bireyler için yapılan optimizasyon çalışmalarında minimum garanti tutarının ele alındığı durumla karşılaşılmamıştır. Bu tezde kayıptan kaçınan bireyler uygun minimum fon garanti tutarı belirlenmiş, optimal yatırım stratejisi belirlenen bu uygun minimum fon garanti tutarı ile elde edilmiştir.

Kayıptan kaçınan bireyler için yapılan optimizasyon çalışmaları incelendiğinde, uzun ömürlülük riskinin de göz önünde bulundurulmadığı görülmektedir. Bu tezde, ölüm olasılıklarındaki düşüşün de etkisi inceleneceğinden, literatürdeki katkısı belirli emeklilik planlarındaki uzun ömürlülük riskini göz önüne alan çalışmalar incelenmiştir. Yang ve Huang (2009) birikim döneminde, dağıtım dönemindeki uzun ömürlülük riskini azaltacak şekilde emeklilik fonunun gerçekleşen değeri ile hedeflenen değeri arasındaki farkının ikinci merkezsel olmayan momentini minimize eden optimal yatırım stratejisi ve katkı oranını belirlemişlerdir. Uzun ömürlülük riski ile baş edebilmek için ya daha agresif bir yatırım stratejisinin ya da daha yüksek katkı yapılmasının uygun olduğu sonucuna ulaşmışlardır. Bu çalışmada sonuçlar baz ve projekte edilmiş ölüm olasılıkları ile elde edilmiştir. Bu tezde de, farklı mortalite modelleri kullanılarak optimizasyon çalışması yapılan Yang ve Huang (2009)'un çalışmasında olduğu gibi uzun ömürlülük riski de modele dahil edilmiştir. Kayıptan kaçınan birey için uzun ömürlülük riski altında optimal yatırım stratejisi elde edildikten sonra uygun katkı oranı ve uygun minimum fon garanti tutarının belirlenmesinin uzun ömürlülük riski altında elde edilen optimal yatırım stratejisine etkisi incelenmiştir.

Özetle, bu tez üç farklı yönüyle literatüre katkıda bulunmaktadır. Birincisi; katkısı belirli emeklilik planlarında zamanın kesikli olduğu varsayımı altında kayıptan kaçınan bireyler için optimal yatırım stratejisi uygun katkı oranı ile birlikte belirlenmiştir. İkincisi; katkısı belirli emeklilik planlarında kayıptan kaçınan bireyler için optimal yatırım stratejisi minimum fon garanti tutarı ile birlikte elde edilmiştir. Üçüncüsü ise; katkısı belirli emeklilik planlarında kayıptan kaçınan bireyler için optimal yatırım stratejisi uzun ömürlülük riski altında belirlenmiştir. Ardından optimal yatırım stratejisinin uygun katkı oranı ve uygun minimum fon garanti tutarı ile belirlenmesinin uzun ömürlülük riskine etkisi incelenmiştir.

Tezde yer alacak diğer bölümler şu şekilde oluşturulmuştur: İkinci bölümde optimizasyon probleminin çözümünde kullanılan Dinamik Programlama ve Sayısal İntegrasyon yöntemlerinden Gauss-Hermite Kareleştirme Yöntemi ile ilgili bilgiler verilmiştir. Üçüncü bölümde kullanılacak deterministik ve stokastik model tanıtılmış, model varsayımları ve kullanılan parametre değerleri verilmiştir. Dördüncü bölümde kurulan iki model için optimizasyon problemlerinin çözümü elde edilmiş, sonuçlar yorumlanmış ve optimal yatırım stratejisi uygun katkı oranı ile birlikte belirlenmiştir. Beşinci bölümde optimal yatırım stratejisi uygun minimum fon garanti tutarı ile elde edilmiştir. Altıncı bölümde uzun ömürlülük riski modele dahil edilmiş, uzun ömürlülük riskinin sonuçlara etkisi incelenmiştir. Ardından optimal yatırım stratejisinin uygun katkı oranı ve uygun minimum fon garanti tutarı ile belirlenmesinin uzun ömürlülük riskine etkisi incelenmiştir. Yedinci ve son bölümde ise elde edilen sonuçlar özetlendikten sonra tartışma ve öneriler ile tez sonlandırılmıştır.

2. KULLANILAN YÖNTEMLER

Bu bölümde, tezdeki optimizasyon probleminin çözümünde kullanılan Dinamik Programlama yöntemi ile optimize edilen modeldeki beklenen değerin elde edilmesinde kullanılan sayısal integrasyon yöntemlerinden olan Gauss-Hermite kareleştirme yöntemi kısaca özetlenmiştir.

2.1. Dinamik Programlama

1950'lerde Richard Ernest Bellman tarafından geliştirilen ve başlangıçta yalnızca bir ekonomik sistemin zaman içindeki durumunun incelenmesi amacıyla kullanılan Dinamik Programlama yöntemi, günümüzde mühendislikten ekonomiye kadar birçok alanda yaygın olarak kullanılan bir optimizasyon yöntemidir (Gülçür, 1966).

Optimizasyon, mevcut kısıtlayıcı koşullar altında eldeki problemin çözümü için en iyi kararı vermek olarak tanımlanabilir (Sezen, 2007).

Dinamik Programlama çok aşamalı bir karar sürecini; tekrarlanan, daha basit alt aşamalara bölerek, her bir alt problemi tek aşamada çözen, bu çözümü kullanarak daha karmaşık olan çok aşamalı problemin çözümünde kullanan bir optimizasyon yöntemidir (Cormen ve ark., 2009). Bir problemin Dinamik Programlama kullanılarak çözülebilmesi için, problemin birbirleriyle bağlantılı alt problemlere ayrılabilmesi gerekmektedir (Halaç, 1978).

2.1.1. Optimalite İlkesi

Richard Ernest Bellman tarafından geliştirilen optimalite ilkesi Dinamik Programlama yönteminin temelini oluşturmakta olup bu ilke Bellman Eşitliği olarak da adlandırılmaktadır.

Bellman eşitliğine göre: başlangıç koşulu ve başlangıç kararından bağımsız olarak daha sonra alınan kararlar ilk kararın sonucu göz önünde bulundurularak bir optimal politika oluşturmaktadır (Bellman,1957).

2.1.2. Dinamik Programlama Türleri

Dinamik Programlama, Deterministik ve Stokastik Dinamik Programlama olmak üzere ikiye ayrılmaktadır. Deterministik Dinamik Programlama'da geçiş fonksiyonları arasındaki sürecin herhangi bir aşamasında rassallık bulunmamakta olup sürece ilişkin bütün dışsal etmenler önceden bilinmektedir. Stokastik Dinamik Programlama'da ise geçiş fonksiyonları arasındaki süreç çeşitli olasılık dağılımları kullanılarak belirlenmekte olup süreçte rassallık söz konusudur (Önalan,2011).

2.1.3. Bir Problemin Dinamik Programlama ile Çözümü

Bir problemin Dinamik Programlama ile çözülebilmesi için öncelikle matematiksel bir modelin oluşturulması gerekmektedir. Oluşturulan modelin yapısına göre problemin Dinamik Programlama ile çözümü farklılaşmaktadır.

Bir problem Dinamik Programlama ile çözülürken, problemin çözümü için alınan kararlar tüm alt aşamalarda ayrı olarak verilir, karar bir bütün olarak verilmez. Dolayısıyla bir problemin Dinamik Programlama ile çözülebilmesi için, söz konusu problem alt problemlere ayrılmalı, daha sonra geçiş fonksiyonları oluşturulmalıdır.

Dinamik Programlama yönteminde söz konusu problemin alt problemlere ayrılmasının ardından yapılan hesaplamalarda yineleme yöntemi kullanılır. Yani bir alt problemin çözümünde önceki alt problemin optimal çözümü girdi olarak kullanılmaktadır. Problemler bu şekilde özyineli olarak son alt probleme kadar ilerler. Optimal çözüm son alt problemin çözümünün ardından elde edilir. Problem bir alt problemden bir sonrakine ilerleyerek çözülürken kısıtlayıcı koşulların sağlanıp sağlanmadığı kontrol edilmelidir (Sezen, 2007).

2.1.4. Dinamik Programlama Çözüm Yolları

Dinamik Programlama yönteminde ele alınan problem, tablosal ve analitik olmak üzere iki farklı yolla çözülebilir.

Tablosal çözüm yolunda optimizasyon probleminin çözümü her alt aşamada tablolar ile gösterilerek çözülür. Karar seçenekleri belirlenirken, problemin çözümü ile ilgili aşamalarda olası tüm durumlar dikkate alınmalıdır. Tüm aşamalarda dönüşüm fonksiyonları kullanılarak hesaplanan seçenekler arasından optimal olanı tabloya yerleştirilir. Bu aşamada, seçilen seçeneğin kısıtlayıcı koşulları sağlayıp sağlamadığı kontrol edilmelidir. Uygun olmayan, yani kısıtlayıcı koşulları sağlamayan çözümler hesaplamalarda dikkate alınmamaktadır.

Analitik çözüm yolunda ise, optimal değerler tüm aşamalarda dönüşüm denklemlerinin türevinin alınması ile elde edilir. Bir problemde değişkenlerin kesikli olması durumunda tablosal çözüm yolu kullanılırken, değişkenlerin sürekli olması durumunda ise analitik çözüm yolu kullanılmaktadır (Sezen, 2007).

2.1.5. Dinamik Programlamanın Yineleme İle Çözüm Yöntemleri

Bir problem Dinamik Programlama yöntemi kullanılarak çözülürken ileriye ve geriye doğru yineleme ile çözüm yapılabilmektedir. İleriye doğru yineleme ile çözüm yönteminde, çözüme birinci aşamadan başlanıp iterasyon yoluyla son aşamaya doğru ilerlenirken, geriye doğru yineleme ile çözüm yönteminde ise çözüme son aşamadan başlanarak özyineli olarak ilk aşamaya doğru gidilir. Geçiş fonksiyonları formüle edilirken hangi çözüm yönteminin kullanıldığı göz önünde bulundurulmalıdır (Sezen, 2007).

İleriye ve geriye doğru yineleme aynı sonucu vermekle birlikte, Dinamik Programlama yönteminde çok büyük bir çoğunlukla geriye doğru yineleme yöntemi kullanmaktadır. Bunun nedeni, geriye doğru yinelemenin hesaplama bakımından daha etkin ve kolay olmasıdır (Taha, 2010).

2.2. Sayısal İntegrasyon

Sayısal integrasyon bir fonksiyonun belirli bir aralıktaki integrali için sayısal bir değer üretme işlemidir. Bu amaçla Newton-Codes ve Gaussian formülleri kullanılmaktadır (Kincaid, Kincaid ve Cheney, 2009).

Carl Friedrich Gauss tarafından ortaya atılan tümleme formülleri Gauss tümlemesi olarak adlandırılmakta olup; Gauss-Chebyshev kareleştirme, Gauss-Legendre kareleştirme yöntemleri bu formüllerden başlıcalarıdır. Bu yöntemler sonlu aralıktaki integrallerin çözümünde kullanılmaktadır.

Sonsuz aralıktaki integrallerin çözümü için ise Gauss-Laguerre kareleştirme yöntemi pozitif aralıkta $(0, \infty)$ tanımlı integraller için kullanılırken, Gauss-Hermite kareleştirme yöntemi $(-\infty, \infty)$ aralığındaki integrallerin yaklaşık değerinin hesaplanması için kullanılmaktadır (Judd, 1998).

Bu çalışmada $(-\infty, \infty)$ aralığındaki bir integralin hesabı ile ilgilenildiği için Gauss-Hermite kareleştirme yöntemi kullanılmıştır.

2.2.1 Gauss-Hermite Kareleştirme Yöntemi

Bu yöntem normal dağılıma sahip raslantı değişkeni içeren ifadelerin integralinin yakınsadığı değerlerin elde edilmesi için kullanılmakta olup, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)dx$ türündeki integrallerin çözümünün yaklaşık değerini elde etmek için kullanılmaktadır. Bu yönteme göre:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) \tag{2.1}$$

biçimindedir. Buradaki *n* hesaplamanın kaç noktada yapılacağını göstermekte olup düğüm olarak adlandırılmaktadır. x_i değerleri Hermite polinomunun $(H_n(x); i = 1,2, \dots, n)$ fizik versiyonunun kökleridir. w_i ağırlıkları ise:

$$w_i = \frac{2^{n-1} n! \sqrt{\pi}}{n^2 [H_{n-1}(x_i)]^2} \tag{2.2}$$

biçiminde hesaplanmaktadır.

Matematikte, Hermite polinomları klasik bir ortogonal polinom dizisi olup olasılıksal ve fizik versiyonları olmak üzere iki tür Hermite polinomu vardır.
Hermite fonksiyonunun olasılıksal versiyonu;

$$He_n(x) = (-1)^n \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \frac{d^n}{dx^n} exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \tag{2.3}$$

biçiminde, fizik versiyonu ise;

$$H_n(x) = (-1)^n \exp(x^2) \frac{d^n}{dx^n} \exp(-x^2) \tag{2.4}$$

biçimindedir. Hermite polinomunun kökleri olan x_i değerleri ve w_i ağırlıklarının $n=9$'a kadar hesaplanabilmesi için Hermite fonksiyonunun fizik versiyonunun ilk 10 polinomuna ihtiyaç vardır. Bu 10 polinom:

$$H_0(x) = 1$$
$$H_1(x) = 2x$$
$$H_2(x) = 4x^2 - 2$$
$$H_3(x) = 8x^3 - 12x$$
$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$$
$$H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x$$
$$H_6(x) = 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120$$
$$H_7(x) = 128x^7 - 1344x^5 + 3360x^3 - 1680x$$
$$H_8(x) = 256x^8 - 3584x^6 + 13440x^4 - 13440x^2 + 1680$$
$$H_9(x) = 512x^9 - 9216x^7 + 48384x^5 - 80640x^3 + 30240x$$

biçimindedir. Farklı düğüm değerleri için bu polinomlardan elde edilen; polinomların kökleri olan x_i değerleri ve bu x_i değerleri kullanılarak Eş. 2.2'den hesaplanan w_i değerleri Çizelge 2.1'de gösterilmektedir (Judd, 1998).

Çizelge 2.1: Gauss-Hermite kareleştirme yöntemi için ağırlık ve katsayılar

n	x_i	w_i	n	x_i	w_i
2	±0,7071	0,8862	7	±2,6520	9,7178
3	±1,2247	0,2954		±1,6735	0,0545
	0	1,1816		±0,8162	0,4256
5	±2,0202	0,0199		0	0,8103
	±0,9586	0,3936	9	±3,1909	0,000039
	0	0,9453		±2,2665	0,0049
				±1,4685	0,0884
				±0,7235	0,4326
				0	0,7202

3. DETERMİNİSTİK ve STOKASTİK MODEL

Çalışmanın bu bölümünde tezde kullanılan deterministik ve stokastik modeller tanıtılacaktır. Kullanılan modeller belirlenirken Blake, Wright ve Zhang (2013) temel alınmıştır. Kullanılan modellerin varsayımları

- Fonun biri yüksek riskli diğeri risksiz olmak üzere 2 yatırım aracında değerlendirildiği,
- Değerlendirmenin yıllık bazda yapıldığı ve zamanın kesikli olduğu,
- Tüm bireylerin sisteme 20 yaşında girdiği ve 65 yaşında emekli olduğu,
- Dönem sonu hedeflenen fon büyüklüğünün "2/3 yerine koyma modeli" dikkate alınarak belirlendiği

biçimindedir. Bu bölümde finansal araçların getirileri ve gelire ilişkin eşitliklere değinildikten sonra hedef fon büyüklükleri ve amaç fonksiyonu belirlenecektir.

3.1. Finansal Araçlar

Yatırımın tahvil gibi biri risksiz, hisse senedi gibi biri yüksek riskli olmak üzere iki yatırım aracında değerlendirileceği varsayılsın.

r, risksiz yatırım aracının yıllık getirisini göstermek üzere, deterministik modelde yüksek riskli yatırım aracının yıllık getirisi *R*:

$$R = r + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \tag{3.1}$$

biçiminde, stokastik modelde x ile $x+1$ yaşları arasında yüksek riskli yatırım aracının yıllık getirisi R_x:

$$R_x = r + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) + \sigma Z_x \tag{3.2}$$

biçimindedir. Burada μ yüksek riskli yatırım aracının yıllık risk primini, σ standart sapmasını göstermekte olup $\{Z_x\}$ Standart Normal dağılıma sahip bağımsız raslantı değişkenleridir.

3.2. Gelir

Bu çalışmada gelir için Cairns, Blake ve Dowd (2006) tarafından oluşturulan model stokastik şok bileşenleri olmadan kullanılmıştır. l_x gelirdeki büyüme oranını göstermekte olup:

$$l_x = \eta + \frac{S_x - S_{x-1}}{S_{x-1}} \tag{3.3}$$

biçimindedir. Burada η ulusal kazancın ortalama yıllık büyüme oranını, S_x, x yaşındaki genel maaş profilini göstermekte olup:

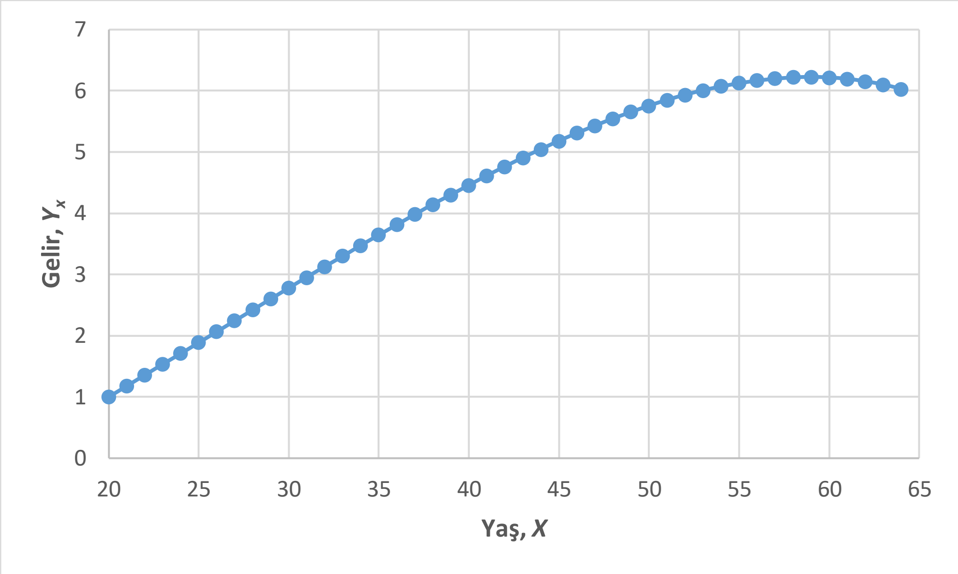
$$S_x = 1 + h_1\left[-1 + \frac{(x-20)}{45}\right] + h_2\left[-1 + \frac{4(x-20)}{45} - \left\{\frac{\sqrt{3}(x-20)}{45}\right\}^2\right];\, x = 20,21,\ldots,65 \tag{3.4}$$

biçimindedir. Bu eşitlikte h_1=-0,1865, h_2=0,7537 olarak alınmıştır. Bu parametre tahminleri Cairns, Blake ve Dowd (2006) tarafından, İngiltere'de erkeklere ilişkin 2005 yılına ait veriden, en küçük kareler yöntemi kullanılarak elde edilen değerlerdir.

Dolayısıyla, bireyin x yaşında beklenen geliri $Y_{20}=1$ değerinden başlayarak iterasyon yoluyla:

$$Y_x = Y_{x-1}exp(l_x)\,; \quad x = 21,22,\ldots,65 \tag{3.5}$$

biçiminde elde edilir. İşe başlama yaşı olan 20 yaştan, emeklilik yaşı olan 65 yaşa kadar beklenen gelirdeki değişim Şekil 3.1'de gösterilmektedir:



Şekil 3.1: Beklenen gelirin yaşa bağlı değişimi

Şekil 3.1'den beklenen gelirin birikim döneminin başı olan 20 yaştan itibaren doğrusal bir biçimde arttığı, emekliliğe yaklaştığında ise artış hızının azaldığı görülmekte olup, bu durum katılımcıların genel maaş profiline uygundur.

3.3. Emeklilik Fonunun Birikimi ve Hedefler

Bu bölümde birikim dönemindeki herhangi bir zamanda gerçekleşen ve hedeflenen fon büyüklüklerinin nasıl elde edildiği verilmiştir. θ_{x-1} *x-1* yaşında fonun yüksek riskli yatırım aracında değerlendirilen oranını göstermek üzere *x* yaşında fonun getirisi deterministik modelde:

$$Fon\ Getirisi = exp[\theta_{x-1}R_x + (1-\theta_{x-1})r]$$
$$= exp\left[\theta_{x-1}r + \theta_{x-1}\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) + r - \theta_{x-1}r\right]$$
$$= exp\left[r + \theta_{x-1}\left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)\right] \tag{3.6}$$

stokastik modelde:

$$Fon\ Getirisi = exp[\theta_{x-1}R_x + (1-\theta_{x-1})r]$$
$$= exp\left[\theta_{x-1}r + \theta_{x-1}\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) + \theta_{x-1}\sigma Z_x + r - \theta_{x-1}r\right]$$
$$= exp\left[r + \theta_{x-1}\left(\left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right) + \sigma Z_x\right)\right] \tag{3.7}$$

biçimindedir. Y_x, x-1 yaşındaki geliri, π sabit katkı oranını göstermek üzere, fonun x yaşında gerçekleşen değeri olan F_x, $F_{20}=0$ değerinden itibaren birikimli olarak deterministik modelde,

$$F_x = (F_{x-1} + \pi \quad Y_{x-1}) \exp\left[r + \theta_{x-1}\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\right]; x = 21,22,\dots,65 \qquad (3.8)$$

stokastik modelde,

$$F_x = (F_{x-1} + \pi_x Y_{x-1}) \exp\left[r + \theta_{x-1}\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) + \sigma Z_x\right)\right]; x = 21,22,\dots,65 \qquad (3.9)$$

biçiminde elde edilir. Gerçekleşen fon büyüklüğünün yanı sıra, hedeflenen fon büyüklüğünün de belirlenmesi gerekmektedir. Dönem sonu hedeflenen fon büyüklüğü “2/3 yerine koyma modeli” kullanıldığında,

$$f(65) = \frac{2}{3} * Y_{65} * \ddot{a}_{65} \qquad (3.10)$$

biçiminde elde edilir. Ara dönem hedeflenen fon büyüklükleri dönem sonu hedeflenen fon büyüklüğü *f(65)* değeri kullanılarak geriye doğru:

$$f(x) = \frac{f(x+1)}{\exp(r^*)} - \pi * Y_x;\ x = 64,63,\dots 20 \qquad (3.11)$$

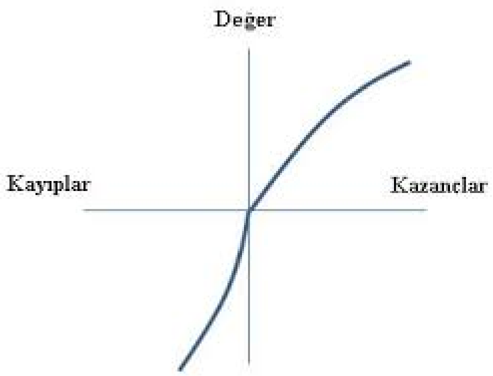
biçiminde elde edilir. Burada r^* ara dönem fon hedefleri belirlenirken kullanılan iskonto oranını göstermekte olup, risksiz yatırım aracının getirisine bağlı olarak $r^* = r + 0{,}011$ biçiminde alınmıştır (Blake, Wright ve Zhang, 2013).

3.4. Amaç Fonksiyonunun Belirlenmesi

Beklenti teorisi kullanıldığında işe giriş yaşından emekliliğe kadar her yaş için fayda fonksiyonu:

$$U_x(F_x) = \frac{(F_x - f(x))^{v_1}}{v_1}; F_x \geq f(x)$$
$$= -\lambda \frac{(f(x)-F_x)^{v_2}}{v_2}; F_x < f(x) \tag{3.12}$$

biçimindedir. Burada F_x gerçekleşen fon büyüklüğünü, $f(x)$ hedeflenen fon büyüklüğünü, v_1 kazanç için eğim parametresini, v_2 kayıp için eğim parametresini, λ kayıptan kaçınma oranını göstermektedir. λ kayıptan kaçınma oranı bireyin kayba karşı kazanca olduğundan kaç kat daha duyarlı olduğunu göstermekte olup $\lambda>1$ olarak alınır. v_1 ve v_2 eğim parametreleri ise (0,1) aralığında değerler almaktadır. v_1 ve v_2'nin bu aralıkta değer alması bireyin fonda kayıp olması durumunda risk arayışında olduğunu, fonda kazanç olması durumunda da riskten kaçındığını göstermektedir. Bu durum, standart fayda fonksiyonlarındaki içbükey şeklin aksine fayda fonksiyonunun kayıp durumunda içbükey, kazanç durumunda dışbükey olarak s şeklinde olmasına yol açmaktadır (Tversky ve Kahneman, 1992). $\lambda>1$, $0< v_1<1$ ve $0< v_2<1$ durumlarında beklenti teorisi fayda fonksiyonunu genel şekli Şekil 3.2'deki gibidir:



Şekil 3.2: Beklenti teorisi fayda fonksiyonu

Katılımcı açısından dönem sonu fon hedefine ulaşmak, ara dönem fon hedeflerine ulaşmaktan daha önemli olduğu için, ara dönem fon hedeflerine $w<1$ olacak şekilde daha düşük bir ağırlık verilir. Dolayısıyla x yaşından emekliliğe kadar iskonto edilmiş fayda fonksiyonu toplamı

$$V_x = [\sum_{s=0}^{65-x-1} \beta^s w U_{x+s}(F_{x+s})] + \beta^{65-x} U_{65}(F_{65}) = wU_x(F_x) + \beta V_{x+1} \tag{3.13}$$

biçiminde belirlenir. Burada β iskonto faktörüdür.

3.5. Optimizasyon

Fonun yüksek riskli yatırım aracında değerlendirilen optimal yatırım oranı θ_x deterministik modelde iskonto edilmiş fayda fonksiyonlarının toplamı, stokastik modelde ise bu toplamın beklenen değeri maksimize edilerek belirlenir. Optimizasyon problemi deterministik model için,

$$\max_{\theta_x}(V_x) = \max_{\theta_x}[\{\sum_{s=0}^{65-x-1} \beta^s w U_{x+s}(F_{x+s})\} + \beta^{65-x} U_{65}(F_{65})] \tag{3.14}$$

stokastik model için,

$$\max_{\theta_x} E_x(V_x) = \max_{\theta_x} E_x[\{\sum_{s=0}^{65-x-1} \beta^s w U_{x+s}(F_{x+s})\} + \beta^{65-x} U_{65}(F_{65})] \tag{3.15}$$

biçimindedir. Bu optimizasyon problemine ilişkin kısıtlayıcı koşullar:

Deterministik modelde:

- $F_x = (F_{x-1} + \pi \quad Y_{x-1}) \exp\left[r + \theta_{x-1}\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\right)\right] \geq 0; x = 21,22,\dots,65$
- $Y_x = Y_{x-1} exp(l_x)$
- $0 \leq \theta_x \leq 1$ (3.16)

Stokastik modelde:

- $F_x = (F_{x-1} + \pi \quad Y_{x-1}) \exp\left[r + \theta_{x-1}\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) + \sigma Z_x\right)\right] \geq 0; x = 21,22,\dots,65$
- $Y_x = Y_{x-1} exp(l_x)$
- $0 \leq \theta_x \leq 1$ (3.17)

biçimindedir.

4. DETERMİNİSTİK ve STOKASTİK MODELLER KULLANILARAK OPTİMAL YATIRIM STRATEJİSİNİN ELDE EDİLMESİ

Üçüncü bölümde verilen optimizasyon probleminin çözümü için Eş. 3.14'te verilen $E_x(V_x)$ beklenen değerini maksimize eden θ_x'lerin birikim döneminin başlangıcı olan 20 yaştan, birikim döneminin sonu olan 64 yaşa kadar her bir yaş için elde edilmesi gerekmektedir. Bu optimizasyon probleminin çözümünde, optimal yatırım stratejisinin her bir yaşta ayrı ayrı belirlenmesi ve problemin özyineli olarak birbirleriyle bağlantılı alt problemlere ayrışan yapısı nedeniyle dinamik programlama yöntemi kullanılmıştır.

Dinamik Programlama yönteminde problemler çözülürken ileriye ve geriye doğru yineleme yöntemleri kullanılabilir. Geriye doğru yineleme yöntemi ile öncelikle $E_{64}(V_{64})$ beklenen değerini maksimize eden θ_{64} değeri, sonra özyineli olarak 20 yaşa kadar θ_x değerleri elde edilmiştir. $x=64$ yaş için:

$$\max_{\theta_{64}} E_{64}(V_{64}) = \max_{\theta_{64}} E_{64}[\{\sum_{s=0}^{0} \beta^s w U_{64+s}(F_{64+s})\} + \beta U_{65}(F_{65})]$$

$$\max_{\theta_{64}} E_{64}(V_{64}) = \max_{\theta_{64}} E_{64}[wU_{64}(F_{64}) + \beta U_{65}(F_{65})] \tag{4.1}$$

biçiminde yazılır. Burada fayda fonksiyonları:

$$\begin{aligned} U_{64}(F_{64}) &= \frac{(F_{64} - f(64))^{v_1}}{v_1}; F_{64} \geq f(64) \\ &= -\lambda \frac{(f(64) - F_{64})^{v_2}}{v_2}; F_{64} < f(64) \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned} U_{65}(F_{65}) &= \frac{(F_{65} - f(65))^{v_1}}{v_1}; F_{65} \geq f(65) \\ &= -\lambda \frac{(f(65) - F_{65})^{v_2}}{v_2}; F_{65} < f(65) \end{aligned} \tag{4.3}$$

biçiminde olup, v_1, v_2 *ve* λ değerleri bilinen kayıptan kaçınma parametreleridir. Fayda fonksiyonunun ve diğer fonksiyonların değerleri elde edilirken kullanılan parametre değerleri Blake, Wright ve Zhang (2013)'de kullanılan değerler olup bu değerler ve Çizelge 4.1'de verilmektedir.

Çizelge 4.1: Parametre değerleri

Kayıptan Kaçınma Parametreleri		**Gelir Parametreleri**	
Kayıptan kaçınma oranı λ	4,50	r_1	0,02
Kazanç için eğim parametresi v_1	0,44	σ_1	0,05
Kayıp için eğim parametresi v_2	0,88	h_1	-0,1865
		h_2	0,7537
Varlık Getirileri		**Diğer Parametreler**	
Risksiz getiri oranı r	0,02	Katkı oranı π	0,15
Riskli yatırım aracının yıllık risk primi μ	0,04	Ara hedefler için ağırlık w	0,5
Riskli yatırım aracının volatilitesi σ	0,18	c	0,13
İskonto faktörü β	0,96	h	0,55
		k	0,29

Dönem sonu hedeflenen fon büyüklüğü değerleri olan *f(65)* değeri, PMA92 (1992 yılı Emekli Erkekler için Mortalite Tablosu) kullanılarak Eş. 3.10'dan *f(65)*=62,66, ara dönem hedeflenen fon büyüklüklerinden biri olan *f(64)* değeri ise Eş. 3.11'den *f(64)*=59,84 olarak elde edilir. Bilinmeyen değerler F_{64} *ve* F_{65} değerleridir. Bu değerler Çizelge 4.1'de verilen parametre değerlerinin Eş. 3.8'de yerine konulmasıyla deterministik modelde;

$$F_{65} = [F_{64} + (0,15 * 6,0254)]\, exp(0,02 + 0,0238\theta_{64})$$
$$F_{64} = [F_{63} + (0,15 * 6,0983)]\, exp(0,02 + 0,0238\theta_{63}) \qquad (4.4)$$

ve Eş 3.9'da yerine konulmasıyla stokastik modelde;

$$F_{65} = [F_{64} + (0,15 * 6,0254)]\, exp[0,02 + \theta_{64}(0,0238 + 0,18 * Z_x)]$$
$$F_{64} = [F_{63} + (0,15 * 6,0983)]\, exp[0,02 + \theta_{63}(0,0238 + 0,18 * Z_x)] \qquad (4.5)$$

olarak elde edilmiştir. Dolayısıyla fayda fonksiyonları da Eş. 3.12'den deterministik modelde

$$U_{64}(F_{64}) = \frac{(F_{64} - 59{,}84)^{0{,}44}}{0{,}44}; F_{64} \geq 59{,}84$$

$$= -4{,}5 * \frac{(59{,}84 - F_{64})^{0{,}88}}{0{,}88}; F_{64} < 59{,}84$$

$$U_{65}(F_{65}) = \frac{\{(F_{64} + 0{,}90)\exp[0{,}02 + 0{,}0238\theta_{64}] - 62{,}66\}^{0{,}44}}{0{,}44}; F_{65} \geq 62{,}66$$

$$= -4{,}5 * \frac{\{62{,}66 - (F_{64} + 0{,}90)\exp[0{,}02 + 0{,}0238\theta_{64}]^{0{,}88}}{0{,}88}; F_{65} < 62{,}66 \quad (4.6)$$

ve stokastik modelde

$$U_{64}(F_{64}) = \frac{(F_{64} - 59{,}84)^{0{,}44}}{0{,}44}; F_{64} \geq 59{,}84$$

$$= -4{,}5 * \frac{(59{,}84 - F_{64})^{0{,}88}}{0{,}88}; F_{64} < 59{,}84$$

$$U_{65}(F_{65}) = \frac{\{(F_{64} + 0{,}90)\exp[0{,}02 + \theta_{64}(0{,}0238 + 0{,}18 * Z_x)] - 62{,}66\}^{0{,}44}}{0{,}44}; F_{65} \geq 62{,}66$$

$$= -4{,}5 * \frac{\{62{,}66 - (F_{64} + 0{,}90)\exp[0{,}02 + \theta_{64}(0{,}0238 + 0{,}18 * Z_x)]^{0{,}88}}{0{,}88}; F_{65} < 62{,}66 \quad (4.7)$$

biçiminde elde edilmiştir. Deterministik modelde $E_{64}(V_{64})$ ifadesi F_{64} ve θ_{64}'e bağlı bir fonksiyondur. Bu problemin deterministik dinamik programlama yöntemi ile çözülebilmesi için beklenen değerin kesikli hale getirilmesi gerekmektedir Bu amaçla, beklenen değer fonksiyonunu maksimize eden θ_{64}'ü bulmak için gerçekleşen fon büyüklüğü F_{64}'ün olası değer aralığı [0,200] arasında 201 parçaya bölünerek her bir değer için sonuçlar elde edilir. F_{64} değeri için [0,200] aralığındaki değerler kullanıldığında $U_{64}(F_{64})$ değeri her bir aralık için sabit bir sayıya eşit olacaktır. $U_{65}(F_{65})$ değeri ise sadece θ_{64}'e bağlı olacaktır. Böylelikle amaç fonksiyonu sadece θ_{64}'e bağlı bir fonksiyon olacağından kolaylıkla optimize edilebilir. [0,200] aralığındaki her F_{64} değeri için amaç fonksiyonunu maksimize eden θ_{64} değerleri elde edilir. Elde edilen bu θ_{64} değerleri kullanılarak $E_{63}(V_{63})$ değerini maksimize eden θ_{63} değerleri bulunur. Bu işlem özyineli olarak 20 yaşa kadar devam ederek en son $E_{20}(V_{20})$ değerini maksimize eden θ_{20} değerleri elde edilir.

Stokastik modelde ise problemin stokastik dinamik programla ile çözülebilmesi için yine beklenen değer ifadesinin kesikli hale getirilmesi gerekmektedir. Bu amaçla 64 yaşında gerçekleşen fon büyüklüğü olan F_{64} değeri olası değer aralığı olan [0,200] arasında 201 parçaya bölünerek her bir değer için sonuçlar elde edilir. F_{64} değeri için [0,200] aralığındaki değerler kullanıldığında $U_{64}(F_{64})$ değeri her bir aralık için sabit bir sayıya eşit olacağından Eş. 4.1 ile verilen fonksiyonda beklenen değer dışına sabit olarak çıkacaktır. Bu durumda beklenen değeri alınması gereken tek ifade $U_{65}(F_{65})$ değeri olur. Yani Eş. 4.1'deki beklenen değer ifadesi sabit sayıların dışarı alınması ile

$$\max_{\theta_{64}} E_{64}[U_{65}(F_{65})]$$

biçiminde sadeleşir. Buradaki beklenen değer

$$E_{64}[U_{65}(F_{65})] = \int_{-\infty}^{\infty} U_{65}(F_{65}) f(z) dz$$

biçimindedir. Bu beklenen değer standart normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonunu içerdiği için açık çözümü yoktur. Bu amaçla integralin yaklaşık değerinin elde edilmesi için Sayısal İntegrasyon yöntemlerden olan, Bölüm 2.2.1'de anlatılan Gauss-Hermite Kareleştirme yöntemi kullanılmıştır.

$U_{65}(F_{65})$ fayda fonksiyonunun açık hali yazıldıktan sonra, işlem kolaylığı için $U_{65}(F_{65})$ fayda fonksiyonundaki sabitler beklenen değer dışına çıkarılır ve beklenen değer içindeki ifade $g(z)$ fonksiyonu olarak tanımlanırsa birinci aralık ($F_x \geq f(x)$) için

$$g_1(z) = [(F_{64} + 0{,}90)exp(0{,}02 + 0{,}0238\theta_{64} + 0{,}18\theta_{64}Z_x) - 62{,}66]^{0{,}44} \qquad (4.8)$$

ikinci aralık ($F_x < f(x)$) için ise

$$g_2(z) = [62{,}66 - (F_{64} + 0{,}90)exp(0{,}02 + 0{,}0238\theta_{64} + 0{,}18\theta_{64}Z_x)]^{0{,}88} \qquad (4.9)$$

biçiminde elde edilir.

Eş 4.8 ve Eş 4.9'un beklenen değeri

$$E_{64}\left[g_j(z)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} g_j(z) f(z) dz \ = \int_{-\infty}^{\infty} g_j(z) \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \ ; j = 1,2$$

biçimindedir. $\frac{z}{\sqrt{2}} = x$ dönüşümü yapılırsa

$$E_{64}\left[g_j(z)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\Pi}} \exp(-x^2) \, g_j\left(\sqrt{2}x\right) dx; j = 1,2$$

biçiminde yazılır. Gauss-Hermite yönteminde $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-x^2) \approx \sum_{i=1}^{n} w_i \, f(x_i)$ olduğundan

$$E_{64}\left[g_j(z)\right] \approx \frac{1}{\sqrt{\Pi}} \sum_{i=1}^{n} w_i \, g_j\left(\sqrt{2}x_i\right); i = 1,2, \dots, n, j = 1,2$$

olarak elde edilir. Burada düğüm sayısının *(n)* belirlenmesi gerekmektedir. Düğüm sayısı ne kadar büyük alınırsa sonuca daha fazla yaklaşılmakla birlikte işlem yükü de artmaktadır. Bu nedenle düğüm sayısı 2'den başlanarak 9'a kadar alınıp işlemler tekrarlanmıştır. Düğüm sayısı 7 ve 9 alındığında elde edilen sonuçların birbirine çok yakın olduğu görüldüğünden dolayı düğüm sayısı 7 olarak belirlenmiştir.

Düğüm sayısı $n=7$ için Çizelge 2.1'den

$x_{1,2} = \pm 2{,}6520$, $x_{3,4} = \pm 1{,}6735$, $x_{5,6} = \pm 0{,}8162$, $x_7 = 0$
$w_{1,2} = 9{,}7178$, $w_{3,4} = 0{,}0545$, $w_{5,6} = 0{,}4256$, $w_7 = 0{,}8103$

olduğundan beklenen değer ifadesi:

$$E_{64}\left[g_j(z)\right] \approx \frac{1}{\sqrt{\Pi}}\sum_{i=1}^{7} w_i\, g_j\left(\sqrt{2}x_i\right); i = 1,2,\dots,7; j = 1,2$$

$$E_{64}\left[g_j(z)\right] \approx \frac{1}{\sqrt{\Pi}}\Big[9{,}7178\left(g_j(3{,}75) + g_j(-3{,}75)\right) + 0{,}0545\left(g_j(2{,}37) + g_j(-2{,}37)\right) + 0{,}4256\left(g_j(1{,}15) + g_j(-1{,}15)\right) + 0{,}8103 g_j(0)\Big]; j = 1,2 \qquad (4.10)$$

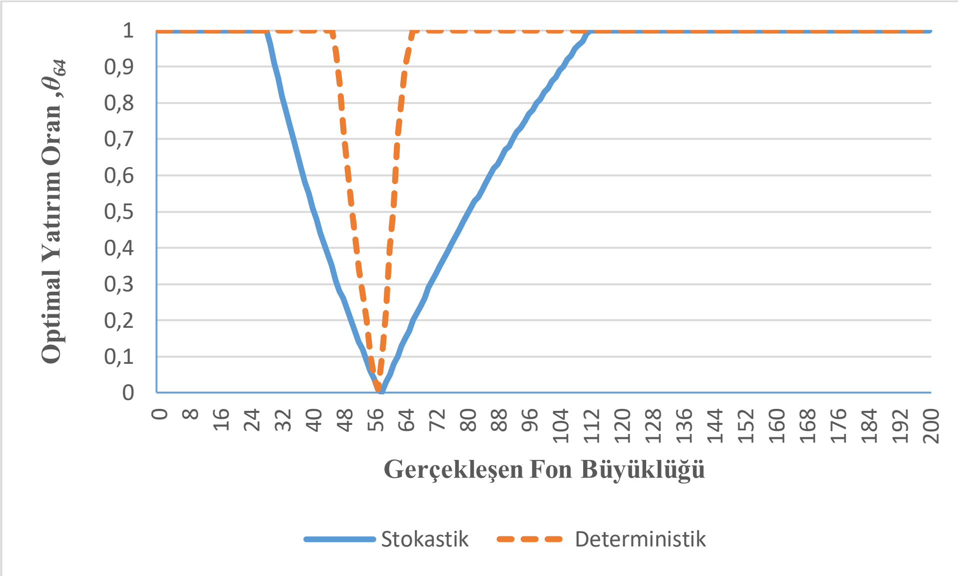
biçimindedir. $g_j(z); j=1,2$ fonksiyonunun değeri Eş 4.8 ve Eş 4.9'dan elde edildikten sonra Eş 4.10'da yerine konulduğunda $E_{64}\left[g_j(z)\right]; j = 1,2$ sadece F_{64} ve Q_{64}'e bağlı bir fonksiyona dönüşür.

Deterministik modelde olduğu gibi stokastik modelde de amaç Eş 4.10 ile verilen beklenen değeri maksimize eden θ_{64}'ü bulmak olduğu için gerçekleşen fon büyüklüğü F_{64}, olası değer aralığı olan [0,200] arasında 201 parçaya bölünerek her bir değer için sonuçlar elde edilir. F_{64} değeri için [0,200] aralığındaki değerler kullanıldığında $U_{64}(F_{64})$ değeri her bir aralık için sabit bir sayıya eşit olacak $U_{65}(F_{65})$ değeri ise sadece θ_{64}'e bağlı olacaktır. Böylelikle amaç fonksiyonu sadece θ_{64}'e bağlı bir fonksiyon olacağından kolaylıkla maksimize edilebilir.

[0,200] aralığındaki tüm F_{64} değerleri için amaç fonksiyonunu maksimize eden θ_{64} değerleri elde edildikten sonra bu θ_{64} değerleri kullanılarak $E_{63}(V_{63})$ değerini maksimize eden θ_{63} değerleri bulunur. Bu işlem özyineli olarak 20 yaşa kadar devam ederek en son $E_{20}(V_{20})$ değerini maksimize eden θ_{20} değerleri elde edilir.

4.1.Optimal Yatırım Oranının Gerçekleşen Fon Büyüklüğüne Bağlı Değişimi

Stokastik ve deterministik modeller kullanıldığında, 64 yaş için amaç fonksiyonunu maksimize eden yatırım oranının gerçekleşen fon büyüklüğüne bağlı değişimi Şekil 4.1'de gösterilmektedir.

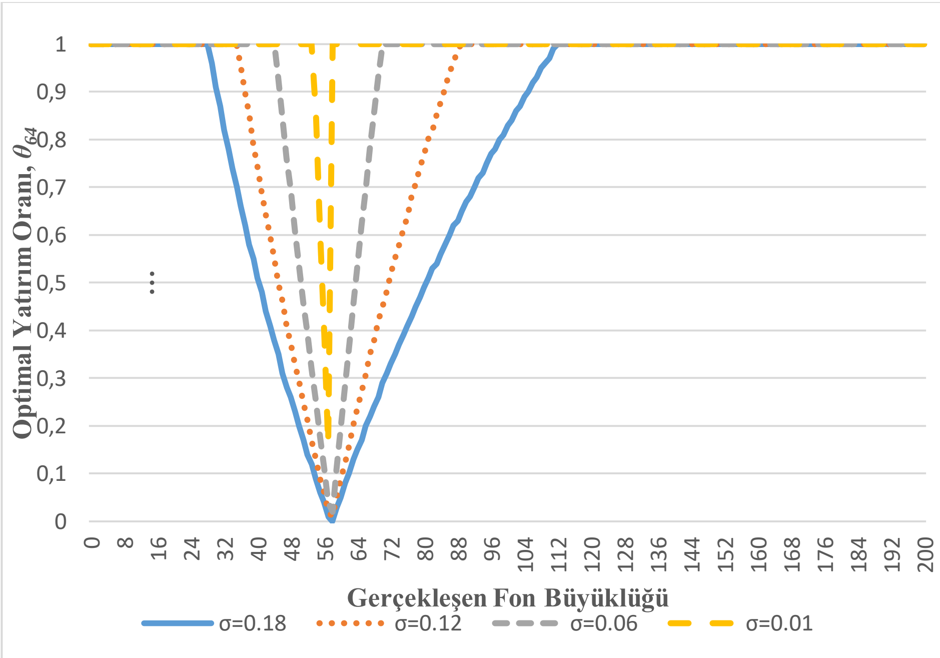


Şekil 4.1: 64 yaş için optimal yatırım oranının gerçekleşen fon büyüklüğüne bağlı değişimi

Şekil 4.1'den hem stokastik hem de deterministik model kullanıldığında 64 yaşında gerçekleşen fon büyüklüğünün, hedeflenen fon büyüklüğü olan *f(64)*=59,84 değerine yakın olması halinde fonun yüksek riskli yatırım aracında değerlendirilen oranının 0'a yakın olduğu; yani bireyin gerçekleşen fon büyüklüğü hedeflenen fon büyüklüğüne yakın iken risk almayarak daha tutucu bir yatırım stratejisi izlediği, fakat gerçekleşen fon büyüklüğü hedeflenen fon büyüklüğünden uzaklaştıkça (bu uzaklaşmanın hem pozitif hem de negatif yönlü olması durumunda) fonun yüksek riskli yatırım aracında değerlendirilen oranının artarak 1'e ulaştığı; yani gerçekleşen fon büyüklüğü hedeflenen fon büyüklüğünden uzaklaştıkça bireyin hedeflenen fon büyüklüğüne ulaşmak için fonun neredeyse tamamını yüksek riskli yatırım aracında değerlendirerek, daha agresif bir yatırım stratejisi izlediği görülmektedir.

Şekil 4.1'den ayrıca hedeflenen fon büyüklüğünden küçük olan gerçekleşen fon büyüklüğü değerlerinde optimal oranın 0'a yaklaşma hızının, hedeflenen fon büyüklüğünden büyük olan gerçekleşen fon büyüklüğü değerlerindeki optimal oranın 1'e yaklaşma hızından daha fazla olduğu görülmektedir. Bu durum kayıptan kaçınma teorisinin de savunduğu gibi kayıpların bireyi kazanca göre daha fazla etkilediği sonucunu doğrulamaktadır. Birey gerçekleşen fon büyüklüğünün hedeflenen fon büyüklüğünden düşük olması durumunda daha agresif bir yatırım stratejisi izlerken, yüksek olması durumunda daha tutucu bir yatırım stratejisi izlemektedir.

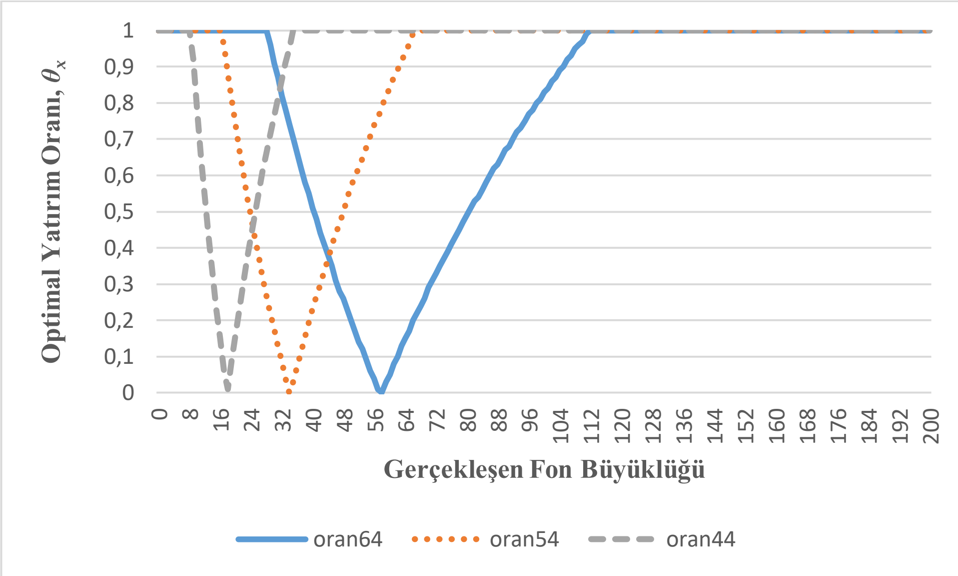
Şekil 4.1'den gözlemlenen bir diğer sonuç da stokastik ve deterministik modeller kullanıldığında elde edilen optimal yatırım oranlarının gerçekleşen fon büyüklüğü karşısındaki seyrinin birbirlerine benzer olmasına rağmen stokastik model kullanıldığında meydana gelen artış ve azalışın daha geniş bir aralıkta gözlemlendiğidir. Bu sonucun nedeni stokastik modelde kullanılan standart sapmadır. Stokastik modelde standart sapma miktarı σ=0,18 olarak alınmıştır. Standart sapma miktarı azaldıkça stokastik model ve deterministik modelde elde edilen sonuçlar birbirlerine yakınlaşacaktır. 64 yaş için standart sapmadaki azalmanın optimal yatırım oranına etkisi Şekil 4.2'de gösterilmektedir.



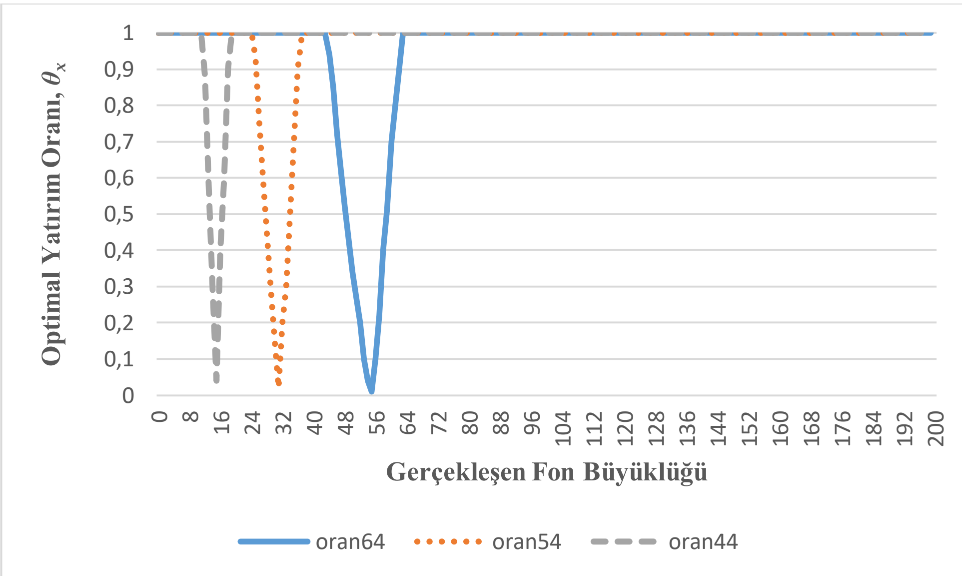
Şekil 4.2: Standart sapmadaki değişimin optimal yatırım oranına etkisi

Şekil 4.2'den standart sapma miktarı azaldıkça optimal yatırım oranında meydana gelen artış ve azalışın daha dar bir aralıkta gözlemlendiği, dolayısıyla standart sapma miktarı azaldıkça stokastik modelin deterministik modele yakınsadığı görülmektedir.

Şekil 4.3'te stokastik model için, Şekil 4.4'de ise deterministik model için optimal yatırım oranının 44, 54 ve 64 yaşlarındaki değişimi gösterilmektedir.



Şekil 4.3: Stokastik modelde 44,54 ve 64 yaşları için optimal yatırım oranının değişimi



Şekil 4.4: Deterministik modelde 44,54 ve 64 yaşları için optimal yatırım oranının değişimi

Şekil 4.3 ve Şekil 4.4'ten hem stokastik hem de deterministik modelde 44 ve 55 yaşlarında elde edilen optimal yatırım oranının 64 yaşa benzer bir değişim gösterdiği görülmektedir. Katılımcının tüm yaşlar için hedeflenen fon büyüklüğü gerçekleşen fon büyüklüğüne yaklaştıkça risksiz yatırım aracını tercih ettiği, hedeflenen fon büyüklüğü gerçekleşen fon büyüklüğünden uzaklaştıkça riskli yatırım aracını tercih ettiği, yaş arttıkça fonun düşük riskli yatırım aracında değerlendirilen oranının her iki yöne doğru arttığı aralığın da genişlediği görülmektedir. Şekil 4.3 ve Şekil 4.4'ten ayrıca yaş ne olursa olsun hedeflenen fon ile gerçekleşen fon büyüklükleri birbirinden uzaklaştıkça fonun tamamının yüksek riskli yatırım araçlarında değerlendirilmesi gerektiği görülmektedir.

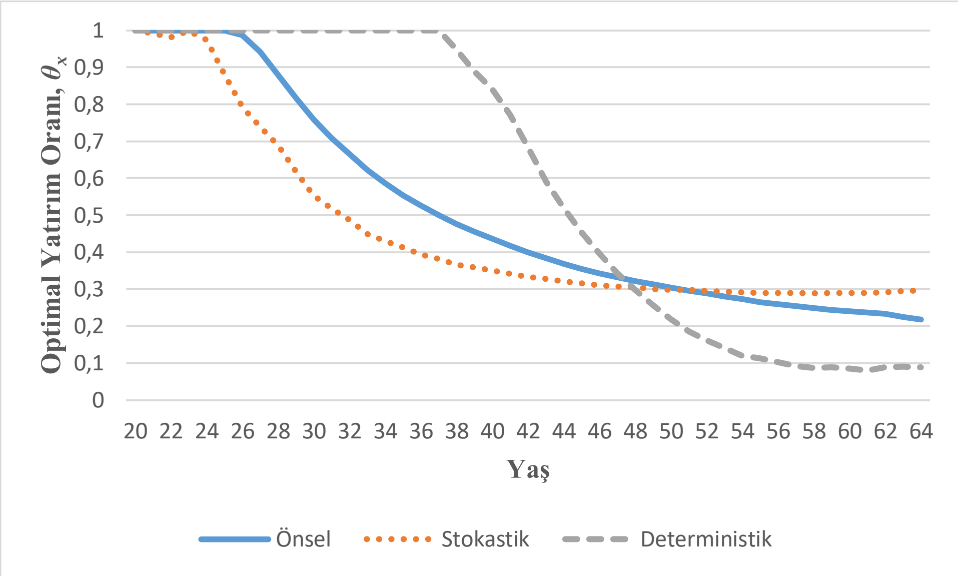
4.2.Optimal Yatırım Oranının Yaşa Bağlı Değişimi

Birikim döneminin başlangıcı olan 20 yaştan, birikim döneminin sonu olan 64 yaşa kadar tüm yaşlar için optimal yatırım oranları olan θ_x değerleri, gerçekleşen fon büyüklüğünün aralığı olarak alınan [0,200] aralığındaki her bir fon değerine karşılık gelen 201 değer için elde edilmiştir. Burada her yaş için tek bir optimal yatırım oranının elde edilebilmesi için ise tüm yaşlardaki gerçekleşen fon büyüklüklerinin bilinmesi gerekir. Gerçekleşen fon büyüklüğü belirlenirken riskli yatırım aracının getirisine, yani optimize edilmeye çalışılan θ_x değerlerine ihtiyaç vardır. θ_x değerlerine ilişkin önsel bir bilgi olarak Kırkağaç ve Gençtürk (2016)'da elde edilen θ_x değerleri kullanılarak gerçekleşen fon büyüklükleri belirlenmiştir.

Optimal yatırım oranları sadece [0,200] aralığındaki 201 noktada elde edildiği için, fon büyüklüğünün tam sayı olmayan değerleri için optimal oranlar interpolasyon yöntemiyle bulunmuştur.

Deterministik modelde bu oranlar ile gerçekleşen fon büyüklükleri belirlenmiş ve belirlenen gerçekleşen fon büyüklüğüne karşılık gelen yatırım oranları optimal değerler olarak alınmıştır.

Stokastik modelde ise $\{Z_x\}$ raslantı değişkenine bağlı olarak 100.000 benzetim yapılarak gerçekleşen fon büyüklüğüne ilişkin olası senaryolar üretilmiştir. Bu senaryolarda elde edilen her fon büyüklüğü için bir optimal yatırım oranı bulunmuş ve bu yatırım oranların ortalaması nihai optimal yatırım oranı olarak belirlenmiştir. Deterministik ve stokastik model kullanılarak belirlenen nihai optimal yatırım oranının birikim döneminin başı olan 20 yaştan, birikim döneminin sonu olan 64 yaşa kadar değişimi ile bu değerler elde edilirken kullanılan önsel oranlar Şekil 4.5'te gösterilmektedir.



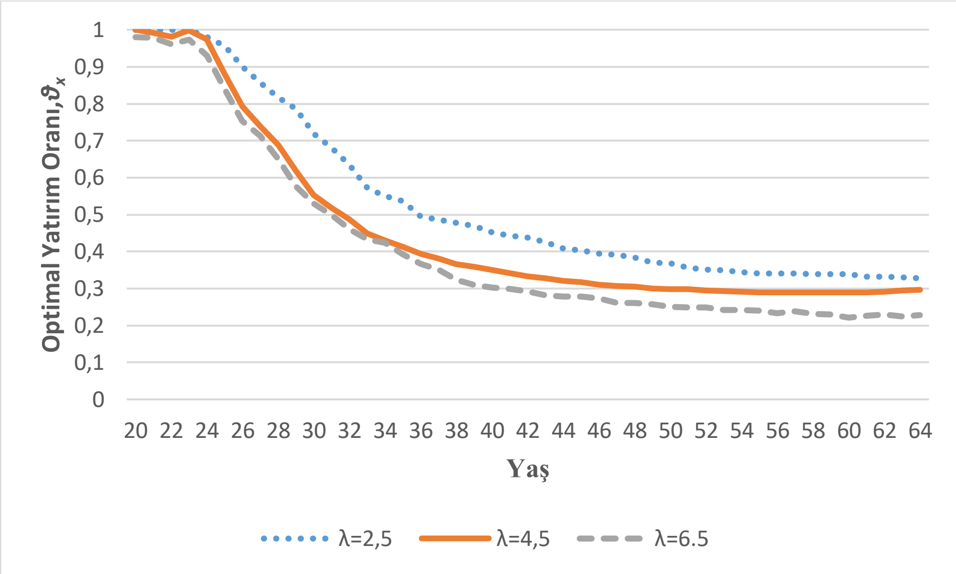
Şekil 4.5: Deterministik ve stokastik model kullanılarak belirlenen optimal yatırım stratejileri

Şekil 4.5'ten hem deterministik hem de stokastik model kullanıldığında elde edilen optimal yatırım stratejisinin genel şeklinin önsel oranlar ile uyumlu olduğu görülmektedir. Her iki modelde de fonun yüksek riskli yatırım aracında değerlendirilen oranının vadenin başında 1 değerini almakta ve vade sonuna doğru giderek azalmaktadır. Her iki modelde de elde edilen strateji aslında birçok emeklilik planında kabul görmüş ve yaygın olarak kullanılan "geleneksel yaşam tarzı stratejisine" benzemektedir. Elde edilen bu stratejiye göre birikim döneminin başında fonun yüksek riskli yatırım aracında değerlendirilen oranı 1 değerini almakta, yani fonun tamamı yüksek riskli yatırım aracında değerlenmektedir. Vade ilerledikçe fonun yüksek riskli yatırım aracında değerlendirilen oranı azalmakta, düşük riskli yatırım aracında değerlendirilen oranı artmaktadır. Birikim döneminin sonunda ise fonun büyük bir kısmı düşük riskli yatırım aracında değerlenmektedir. Şekil 4.5'ten ayrıca deterministik modelde birikim döneminin başlarında, stokastik modelde ise birikim döneminin sonuna doğru yatırım stratejisinin daha riskli olduğu görülmektedir.

4.3.Optimal Yatırım Oranının Kayıptan Kaçınma Parametrelerine Bağlı Değişimi

Optimal yatırım stratejisinin kayıptan kaçınma parametreleri λ, v_1 *ve* v_2'deki değişimden nasıl etkilendiği duyarlılık analizi ile incelenmiştir. λ bireyin kayba karşı kazanca olduğundan kaç kat duyarlı olduğunu gösteren kayıptan kaçınma oranı parametresidir. Birey kayba karşı kazanca olduğundan λ kat daha duyarlıdır. Baz senaryoda bireyin kayba karşı

4,5 kat daha duyarlı olduğu düşünüldüğünden λ=4,5 olarak alınmıştır. λ değiştikçe optimal yatırım stratejisinde meydana gelen değişim Şekil 4.6'da gösterilmektedir.



Şekil 4.6: Optimal yatırım stratejisinin kayıptan kaçınma oranı λ'ya bağlı değişimi

Şekil 4.6'dan kayıptan kaçınma oranı λ'daki değişimin optimal yatırım stratejisinin genel yapısını değiştirmediği görülmektedir. Bununla birlikte, optimal yatırım stratejisi kayıptan kaçınma oranı düştükçe daha agresif, kayıptan kaçınma oranı yükseldikçe daha tutucu olmaktadır. Buna göre bireyin kayıptan kaçınma oranı arttıkça daha çok kayıptan kaçınmak istediği için daha az riskli bir yatırım stratejisini tercih ettiği söylenebilir.

Optimal yatırım stratejisinin kayıp ve kazanç için eğim parametreleri olan v_1 ve v_2'ye bağlı değişimi de incelenmiş, v_1 ve v_2'deki değişimin optimal yatırım stratejisinde anlamlı bir değişim yaratmadığı görülmüştür.

4.4.Optimal Yatırım Stratejisinin Uygun Katkı Oranı ile Belirlenmesi

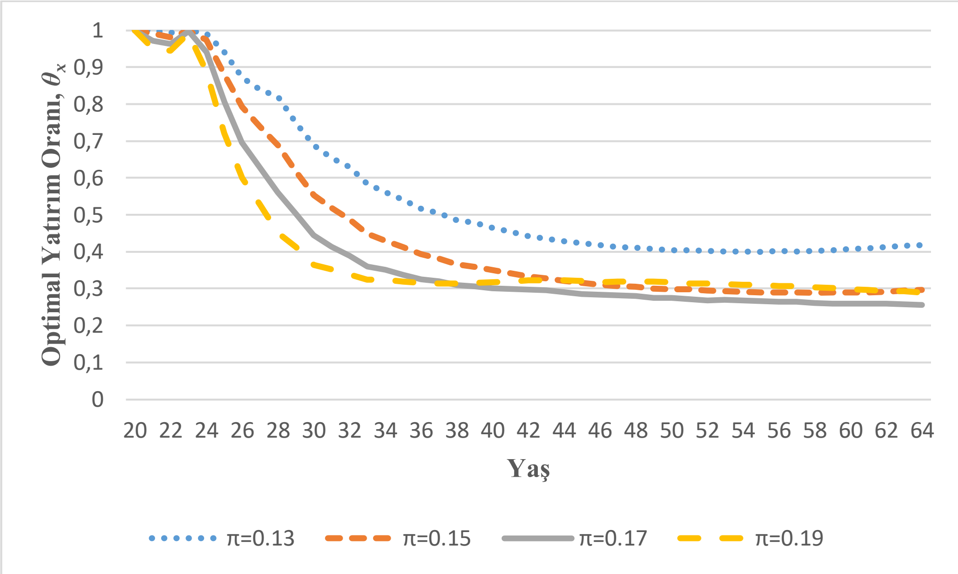
Katkısı belirli emeklilik planlarında optimal yatırım stratejisinin belirlenmesi katılımcı açısından son derece önemli olmakla birlikte, katılımcı için bir diğer önemli karar maaşının ne kadarını emeklilik planına yatıracağı, yani katkı oranıdır. Katılımcının emeklilik planına yapacağı katkı miktarı arttıkça plandan sağlayacağı fayda artmakla birlikte, kazancın daha yüksek bir oranının emeklilik planına aktarılması katılımcının yaşam standardında bir düşüşe yol açacaktır. Bu nedenle katkısı belirli emeklilik planlarında uygun katkı oranının belirlenmesi oldukça önemlidir.

Delong, Gerard ve Haberman (2008), Hainaut ve Deelstra (2011), Owadally, Haberman ve Hernandez (2013), Guan ve Liang (2014), Blake, Wright ve Zhang (2014) katkısı belirli emeklilik planlarında optimal yatırım stratejisinin yanı sıra optimal katkının da belirlendiği çalışmalardan bazılarıdır. Bu çalışmalarda optimal değerler bireyin beklenen faydasını maksimize edecek şekilde belirlenmiştir. Yapılan literatür taramasında kayıptan kaçınan bireyler için optimal yatırım stratejisi ve optimal katkının belirlendiği bir çalışmaya rastlanmamıştır. Bu tezde kayıptan kaçınan bireyler için optimal yatırım stratejisinin yanı sıra en uygun katkı oranı da belirlenmiştir.

Kayıptan kaçınan birey için uygun katkı oranı, en az risk ile beklenti teorisi fayda fonksiyonunun iskontolu toplamını maksimize eden stratejiyi veren katkı oranı olacağı düşünülerek belirlenmiştir. Uygun katkı oranını belirleyebilmek için, katkı oranında 0'dan 1'e doğru %1'lik artışlar yapılarak her bir oran için optimal yatırım stratejisi elde edilmiştir. Birikim döneminin başı olan 20 yaştan, birikim döneminin sonu olan 64 yaşa kadar farklı katkı oranları ile elde edilen optimal yatırım stratejileri Çizelge 4.2 ve Şekil 4.7'de özetlenmiştir.

Çizelge 4.2: Farklı katkı oranları ile optimal yatırım oranları

Yaş	**π=0.13**	**π=0.14**	**π=0.15**	**π=0.16**	**π=0.17**	**π=0.18**	**π=0.19**	**π=0.20**
20	1	1	1	1	**1**	1	1	1
25	0,9414	0,9810	0,8810	0,8450	**0,8059**	0,7645	0,7214	0,6776
30	0,6884	0,7842	0,5525	0,4958	**0,4449**	0,3996	0,3643	0,3387
35	0,5417	0,5646	0,4118	0,3686	**0,3372**	0,3239	0,3198	0,3284
40	0,4641	0,4563	0,3497	0,3182	**0,3014**	0,3031	0,3167	0,3417
45	0,4233	0,3938	0,3164	0,2928	**0,2853**	0,2963	0,3204	0,3518
50	0,4046	0,3610	0,2977	0,2780	**0,2746**	0,2897	0,3170	0,3546
55	0,3995	0,3463	0,2901	0,2673	**0,2662**	0,2804	0,3101	0,3496
60	0,4070	0,3423	0,2899	0,2659	**0,2592**	0,2715	0,2988	0,3362
64	0,4186	0,3478	0,2959	0,2652	**0,2560**	0,2645	0,2893	0,3255



Şekil 4.7: Farklı katkı oranları ile optimal yatırım stratejileri

Çizelge 4.2 ve Şekil 4.7'den katkı oranının artmasının bir noktaya kadar optimal yatırım stratejisini daha tutucu yaparken bir noktadan sonra daha agresif yaptığı görülmektedir. Bu değişimin meydana geldiği nokta katkı oranının π=0,17 olarak alındığı noktadır.

Katkıdaki değişim gerçekleşen fon büyüklüğünün değişmesine yol açmaktadır. Düşük katkı miktarlarında daha düşük fon birikimi sağlanırken, yüksek katkılarda daha yüksek fon birikimi sağlanmaktadır. Fakat bu çalışmada amaç fonun düşük veya yüksek olması değil, hedeflenen fon büyüklüğü ile gerçekleşen fon büyüklüğüne bağlı bir fonksiyon olan beklenti teorisi fayda fonksiyonlarının iskontolu toplamını maksimize eden yatırım stratejisini elde etmektir. Dönem sonu hedeflenen fon büyüklüğü Eş.3.10'dan hesaplanmakta olup katkı oranına bağlı değildir. Eş 3.11'den ara dönemler için hedeflenen fon büyüklükleri ise, katkı oranına bağlı olarak değişmemesi için π=0,15 olarak alınmıştır. Bu sayede tüm katkı oranları için dönem sonu ve hedeflenen fon büyüklüklerinin aynı olması sağlanmıştır. Bununla birlikte gerçekleşen fon büyüklükleri Eş 3.8'den hesaplanmakta olup katkı oranına bağlı olarak değişmektedir. Katılımcının kayıptan kaçınan bir birey olduğu da düşünüldüğünde aynı hedeflenen fon büyüklüğü ile en az risk aldığı yatırım stratejisinin katılımcı açısından uygun olduğu söylenebilir. Çünkü katılımcı aynı hedef fon büyüklüğü ile beklenen faydasını maksimize ederken daha fazla risk almak istemeyecektir.

Çizelge 4.2 ve Şekil 4.7 bu doğrultuda incelendiğinde bireyin en az risk aldığı yatırım stratejisinin katkı oranını π=0,17 olarak aldığı durumda meydana geldiği görülmektedir.

Çizelge 4.2 ve Şekil 4.7'den belirli bir yaşa kadar katkı oranı π=0,19 olarak alındığı durumda elde edilen yatırım stratejisi daha az riskli olduğu görülmekle birlikte, katkı oranı π=0,17 olarak alındığında daha az riskli olan yıl sayısının daha fazla olduğu görülmektedir. Dolayısıyla katılımcı için optimal yatırım stratejisinin, uygun katkı oranının π=0,17 olduğu duruma karşılık gelen strateji olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

5. MİNİMUM FON GARANTİ TUTARI İLE OPTİMAL YATIRIM STRATEJİSİ

Daha önceki bölümlerde katılımcının minimum fon garantisi istemediği varsayılmış, minimum fon garanti tutarı göz önünde bulundurulmamıştır. Fakat katkısı belirli emeklilik planlarında minimum fon garanti tutarı katılımcı tarafından talep edilebilir ve katılımcı kayıptan kaçınan bir birey ise minimum garanti kavramı daha çok önem kazanır. Bu nedenle bu tezde katkısı belirli emeklilik planlarında kayıptan kaçınan bireyin minimum bir fon garanti tutarı talep etmesi durumu ele alınmış, sonuçlar modele minimum fon garanti tutarının dahil edilmesi ile elde edilmiştir.

Katkısı belirli emeklilik planlarında garanti kavramı ilk olarak Deelstra, Grasselli ve Koehl (2003) tarafından ortaya konulmuş olup; dönem sonunda biriken emeklilik fonunun en azından önceden belirli bir tutara eşit olması anlamına gelir. Katılımcıya verilen bu teminat bir çeşit türev ürün koruması sağlamakta olup, riskten korunma bakımından oldukça önemlidir. Deelstra, Grasselli ve Koehl (2003, 2004) katkısı belirli emeklilik planlarında, sürekli zamanda minimum garanti durumunda optimal yatırım stratejisini elde etmişlerdir. Di Giacinto, Federico ve Gozzi (2011), Di Giacinto ve ark. (2014) ve Basimanebotlhe ve Xue (2015) emeklilik fonlarında minimum garanti tutarı üzerine yapılan diğer çalışmalardır.

Minimum fon garanti tutarı ile ilgili çalışmalar incelendiğinde, en basit garanti biçiminin sabit bir tutar olduğu görülmüştür. Emeklilik tazminatının bir annüite olarak alınmak istenmesi durumunda ise garanti tutarı bu annüitenin birikim dönemi sonundaki değerine göre belirlenmektedir. Bu durumda katılımcı emekli olduğunda önceden belirlenen asgari bir tutara hak kazanacağından bir dereceye kadar da olsa yatırım performansındaki düşüşe karşı koruma sağlayacaktır.

T emeklilik yaşını göstermek üzere garanti koruması $G(T)$ ile gösterilir. Dönem sonunda gerçekleşen fon F_T garanti edilen tutardan büyük ya da eşit olmalıdır:

$$F_T \geq G(T) \tag{5.1}$$

Minimum garanti tutarı altında optimizasyon probleminin genel yapısı

$$\max_{\theta_x} E[U(F_T - G(T))] \tag{5.2}$$

biçiminde ifade edilir. Bu durumda Eş. 3.12 ile verilen fayda fonksiyonu birikim döneminin son dönemi olan 65 yaş için;

$$U_{65}(F_{65}) = \frac{(F_{65} - f(65))^{v_1}}{v_1} - G(65); F_{65} \geq f(65)$$

$$= -\lambda \frac{(f(65) - F_{65})^{v_2}}{v_2} - G(65); F_{65} < f(65) \tag{5.3}$$

biçimine dönüşür. Fayda fonksiyonu Eş 5.3'teki gibi tanımlandıktan sonra x yaşından emekliliğe kadar iskonto edilmiş fayda fonksiyonu toplamı yine Eş. 3.13'deki gibi tanımlanır:

$$V_x = [\textstyle\sum_{s=0}^{65-x-1} \beta^s w U_{x+s}(F_{x+s})] + \beta^{65-x} U_{65}(F_{65}) = wU_x(F_x) + \beta V_{x+1} \tag{5.4}$$

Minimum garantinin de olduğu düşünüldüğünde optimizasyon problemine ilişkin kısıtlayıcı koşullara; $F_{65} \geq G(65)$ kısıtı eklenir. Bu durumda optimizasyon problemi

$$\max_{\theta_x} E_x(V_x) = \max_{\theta_x} E_x[\{ \textstyle\sum_{s=0}^{65-x-1} \beta^s w U_{x+s}(F_{x+s})\} + \beta^{65-x} U_{65}(F_{65})] \tag{5.5}$$

ve bu optimizasyon problemine ilişkin kısıtlayıcı koşullar:
Deterministik modelde:

- $F_x = (F_{x-1} + \pi \;\; Y_{x-1}) \exp\left[r + \theta_{x-1}\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\right)\right] \geq 0; x = 21,22,\ldots,65$
- $Y_x = Y_{x-1} exp(l_x)$
- $0 \leq \theta_x \leq 1$
- $F_{65} \geq G(65)$ (5.6)

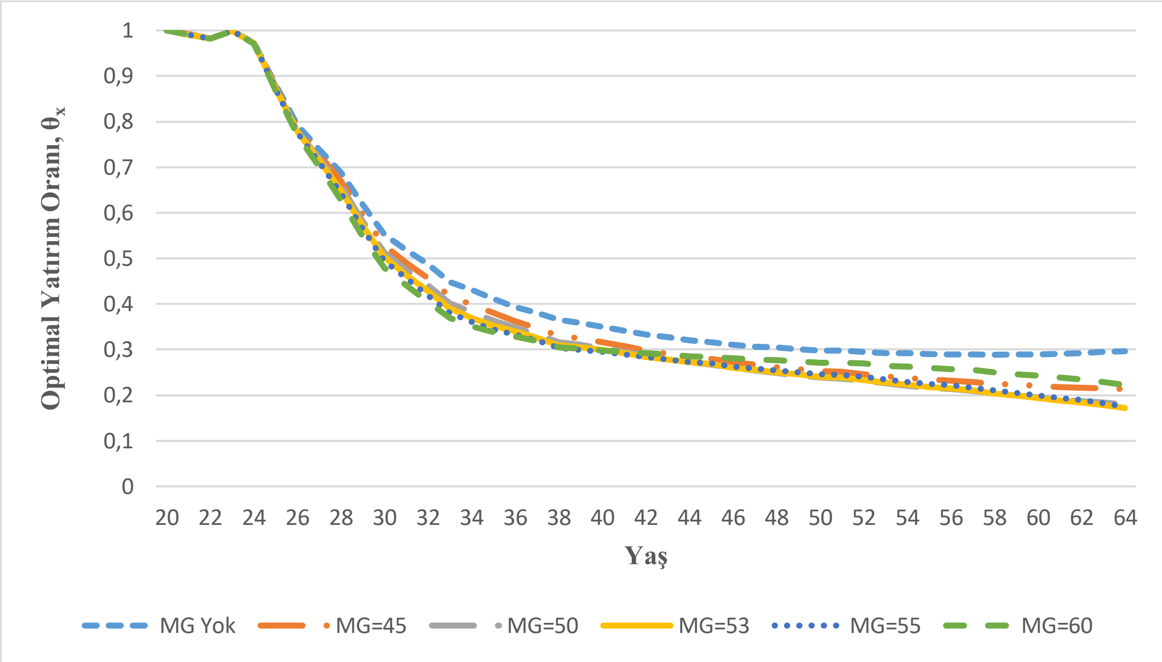
Stokastik modelde:

- $F_x = (F_{x-1} + \pi \;\; Y_{x-1}) \exp\left[r + \theta_{x-1}\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) + \sigma Z_x\right)\right] \geq 0; x = 21,22,\ldots,65$
- $Y_x = Y_{x-1} exp(l_x)$
- $0 \leq \theta_x \leq 1$
- $F_{65} \geq G(65)$ (5.7)

biçiminde belirlenir. Burada minimum garanti tutarı olan *G(T)*'nin belirlenmesi gerekmektedir. Yapılan literatür taraması sonucunda kesikli zamanda minimum garanti tutarının hesaplanmasına ilişkin bir çalışamaya rastlanmamıştır. Bu nedenle sürekli zamanda yapılan birçok çalışmada olduğu gibi garanti tutarı sabit bir tutar olarak alınmıştır. Bu sabit tutar belirlenirken hedeflenen fon büyüklüğüne de dikkat edilmeli, sabit tutar dönem sonu hedeflenen fon büyüklüğü de göz önünde bulundurularak belirlenmelidir. Bu amaçla minimum fon garanti tutarı 0'dan başlayarak dönem sonu hedeflenen fon büyüklüğü olan $f(65)$=62,66 değerine kadar birer birim artırılmış ve uygun minimum fon garanti tutarının ne olması gerektiği belirlenmiştir. Stokastik model kullanıldığında, katkı oranı π=0,15 değeri ile belirli minimum fon garanti tutarları altında elde edilen optimal yatırım stratejileri Çizelge 5.1 ve Şekil 5.1'de özetlenmektedir.

Çizelge 5.1: Minimum fon garanti tutarının olmadığı ve olduğu bazı durumlarda optimal yatırım oranları

Yaş	MG Yok	MG= 35	MG= 40	MG= 45	MG= 50	MG= 53	MG= 55	MG= 60	MG= 62,66
20	1	1	1	1	1	1	1	1	1
25	0,8811	0,8810	0,8793	0,8771	0,8740	0,8726	0,8710	0,8689	0,8658
30	0,5525	0,5509	0,5427	0,5276	0,5126	0,5024	0,4951	0,4790	0,4699
35	0,4119	0,4086	0,3975	0,3803	0,3645	0,3530	0,3449	0,3391	0,3366
40	0,3497	0,3452	0,3336	0,3161	0,3021	0,2986	0,2954	0,2986	0,3053
45	0,3164	0,3104	0,2970	0,2793	0,2672	0,2678	0,2697	0,2841	0,2985
50	0,2978	0,2903	0,2730	0,2524	0,2382	0,2402	0,2461	0,2717	0,2935
55	0,2901	0,2814	0,2600	0,2340	0,2166	0,2184	0,2253	0,2597	0,2885
60	0,2900	0,2795	0,2536	0,2200	0,1949	0,1942	0,2001	0,2425	0,2785
64	0,2960	0,2839	0,2538	0,2136	0,1799	0,1719	0,1749	0,2224	0,2708



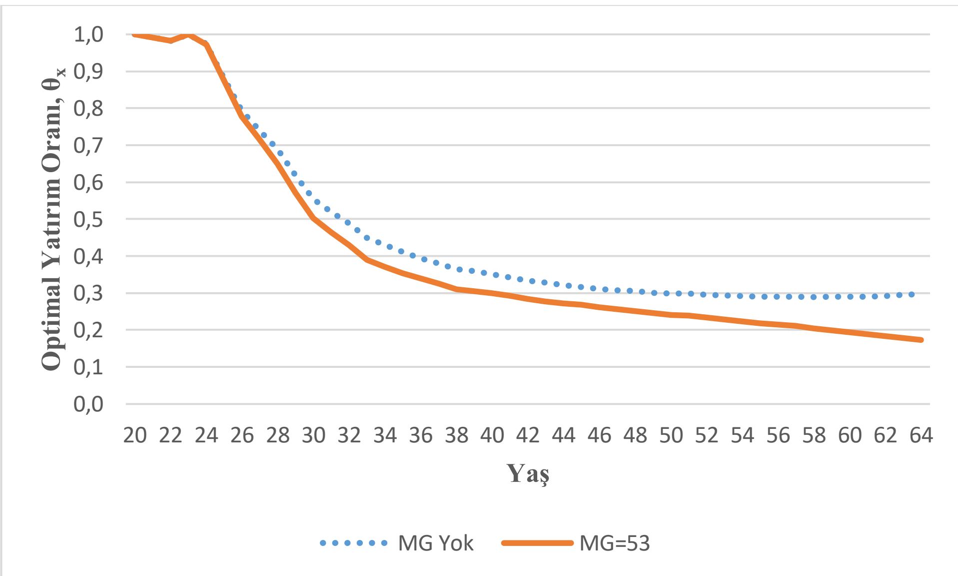
Şekil 5.1: Minimum fon garanti tutarının olmadığı ve olduğu bazı değerler için optimal yatırım stratejileri

Çizelge 5.1 ve Şekil 5.1'den optimal yatırım stratejisinin minimum fon garanti tutarının olmadığı ve olduğu durumlarda benzer olduğu görülmektedir. Tüm seçeneklerde optimal yatırım stratejisi birikim döneminin başında fonun yüksek riskli yatırım aracında değerlendirilen oranının yüksek olması, birikim dönemi ilerledikçe fonun yüksek riskli yatırım aracında değerlendirilen oranının azaltılıp, düşük riskli yatırım aracında değerlendirilen oranının artması, birikim döneminin sonunda ise fonun düşük riskli yatırım aracında değerlendirilen oranının yüksek olmasıdır.

Minimum fon garanti tutarının [1,35] aralığındaki değerleri için optimal yatırım stratejisinin minimum fon garanti tutarının olmadığı durumla oldukça benzer olduğu görülmüştür. Optimal yatırım stratejisi minimum fon garanti tutarının 35 olduğu noktadan itibaren değişmeye başlamış, bu değişim yatırım stratejisini daha tutucu yapacak şekilde gerçekleşmiştir. Bir başka deyişle, optimal yatırım stratejisi minimum fon garanti tutarının 35'den sonraki değerleri için daha az riskli olmaya başlamıştır. Optimal yatırım stratejisinin daha az riskli olacak şekilde değişimi, minimum fon garanti tutarının 53 olduğu noktaya kadar devam etmiştir. Bu aralıkta minimum fon garanti tutarı isteyen katılımcı, minimum fon garanti tutarı istemeyen katılımcıya göre daha az risk alma eğilimindedir. Minimum fon garanti tutarının 53'ten sonraki değerlerinde ise optimal yatırım stratejisi daha agresif, yani daha riskli olmaya başlamış, optimal yatırım stratejisinin daha riskli olacak şekilde değişimi minimum fon garanti tutarının 100 olarak alındığı son noktaya kadar devam ettiği görülmüştür.

Bu sonuçlar göz önünde bulundurulduğunda uygun minimum fon garanti tutarının 53 olduğu sonucuna varılmaktadır. Çünkü kayıptan kaçınan birey için en uygun yatırım stratejisi beklenen faydasını maksimize eden ve aynı zamanda en az risk aldığı stratejidir. Uygun minimum fon garanti tutarının 53 olmasının nedeni aslında dördüncü bölümde Şekil 4.1'de verilen grafik ile açıklanabilir. Bu grafiğe göre katılımcı hedeflenen fon büyüklüğü ile gerçekleşen fon büyüklüğünün birbirine yakın olduğu değerlerde az risk almakta, hedeflenen fon büyüklüğü ile gerçekleşen fon büyüklüğü arasındaki fark arttıkça da daha fazla risk almaktadır. Bu anlamda 53 değeri yatırımın yüksek riskli yatırım aracında değerlendirilen oranındaki azalmanın yoğun olduğu ve dönem sonu hedeflenen fon büyüklüğü olan 62,66 değerine yakın bir değerdir. Buna göre katkısı belirli emeklilik planlarında kayıptan kaçınan bireyler için minimum fon garanti tutarı ile optimal yatırım stratejisi belirlenirken, uygun minimum fon garanti tutarının dönem sonu hedeflenen fon büyüklüğünden daha küçük ve bu değere yakın aralıkta olması gerektiği sonucuna varılmaktadır.

Minimum fon garanti tutarının 53 olduğu durum ile minimum fon garanti tutarının olmadığı durum karşılaştırmalı olarak Şekil 5.2'de gösterilmektedir.



Şekil 5.2: Minimum fon garanti tutarının olmadığı ve uygun minimum fon garanti tutarı ile optimal yatırım stratejileri

Şekil 5.2'den uygun minimum fon garanti tutarı ile elde edilen optimal yatırım stratejisinin minimum fon garanti tutarı olmayan durum ile benzer olduğu, bununla birlikte uygun minimum fon garanti tutarı altında elde edilen optimal yatırım stratejinin daha tutucu, yani daha az riskli olduğu açıkça görülmektedir.

Minimum fon garanti tutarının dönem sonu hedeflenen fon büyüklüğü olan 62,66 olarak alınması durumunda optimal yatırım stratejisinin minimum fon garanti tutarının olmadığı durumdan daha tutucu, yani daha az riskli olduğu, fakat aradaki bu farkın çok yüksek olmadığı görülmektedir.

Minimum fon garanti tutarının dönem sonu hedeflenen fon büyüklüğünden daha yüksek olduğu durumlarda ise optimal yatırım stratejisi minimum fon garanti tutarının olmadığı duruma göre daha agresif hale gelmiş, minimum fon garanti tutarı arttıkça bu garantiyi sağlayabilmek adına özellikle birikim döneminin sonunda fonun yüksek riskli yatırım aracında değerlendirilen oranının oldukça arttığı, bu artışın genel stratejiyi de değiştirdiği görülmüştür. Minimum fon garanti tutarının hedeflenen fon büyüklüğünden yüksek olduğu durumlarda optimal yatırım stratejisi, birikim döneminin sonunda fonun düşük riskli yatırım aracında değerlendirilen oranının artmasının aksine azalması şeklinde değişmiştir. Bu durum göz önüne alındığında minimum fon garanti tutarının hedeflenen fon büyüklüğünden yüksek seçilmemesi gerektiği, bu seçimin optimal yatırım stratejisinin genel şeklini değiştirdiği ve çok daha agresif yatırım stratejilerine neden olduğu sonucuna ulaşılmaktadır.

6. UZUN ÖMÜRLÜLÜK RİSKİ ALTINDA OPTİMAL YATIRIM STRATEJİSİ

Çalışmanın önceki bölümlerinde ölümlülük deterministik olarak alınmış, uzun ömürlülük riski göz önünde bulundurulmamıştır. Fakat birey birikim dönemi sonundaki fon tutarını, bir çok katkısı belirli emeklilik planında olduğu gibi bir tam hayat annüitesi olarak almak isterse, optimal yatırım stratejisini uzun ömürlülük riskini de göz önüne alarak belirlemelidir. Bu tezde bu durum göz önüne alınmış ve optimal yatırım stratejisi dağıtım dönemindeki uzun ömürlülük riski ile baş edecek şekilde belirlenmiştir.

Yang ve Huang (2009), Donnely (2014), Yao ve ark.(2014), Yao, Chen ve Li (2016), Huang ve Milevsky (2016), Harlow ve Brown (2016), De Kort ve Vellekoop (2017) uzun ömürlülük riskinin ele alındığı bazı çalışmalardır. Yang ve Huang (2009) birikim dönemindeki optimal yatırım stratejisini ve optimal katkı oranını dağıtım dönemindeki uzun ömürlülük riski ile baş edebilecek şekilde, hedeflenen ve gerçekleşen fon büyüklükleri arasındaki farkın ikinci momentini minimize ederek belirlemişlerdir. Uzun ömürlülük riskinin optimal yatırım stratejisine etkisinin incelenmesi amacıyla, bu tezde de sonuçlar Yang ve Huang (2009)'da olduğu gibi, baz ölüm olasılıkları ve projekte edilmiş ölüm olasılıkları olmak üzere 2 farklı mortalite modeli kullanılarak, Yang ve Huang (2009)'dan farklı olarak sonuçlar kayıptan kaçınan bireyler için elde edilmiştir.

Ölümlülük oranlarındaki değişim Bölüm 3.3'te verilen tam hayat annüitesinin değerinin değişmesine neden olmaktadır. Tam hayat annüitesinin değerinin değişmesi Eş 3.10'da verilen dönem sonu hedeflenen fon büyüklüğünün ve buna bağlı olarak Eş 3.11'de verilen ara dönem hedeflenen fon büyüklüklerinin değişmesine neden olduğundan sonuçlara etki edecektir.

6.1. Baz Ölüm Olasılıkları

Bu çalışmada baz ölüm olasılıklarının PMA92 tablosuna göre gerçekleştiği varsayılmaktadır. Emeklilik yaşı 65 ve risksiz getiri oranı $r=0,02$ olarak alındığında tam hayat annüitesinin değeri:

$$\ddot{a}_{65} = \sum_{s=0}^{120-65} {}_{65}p_s \exp(-rs) = 15{,}8382$$

olarak hesaplanır.

6.2. Projekte Edilmiş Ölüm Olasılıkları

Birçok ülkede ölümlülük oranlarındaki düşüşün etkisi göz önünde bulundurulduğunda, gelecekte gerçekleşmesi beklenen ölüm olasılıklarının modellenmesi için azaltım faktörü kullanılır. Projekte edilmiş ölüm olasılıklarının hesaplanması için öncelikle baz ölüm olasılıklarının kullanılacağı mortalite tablosu belirlenir, bu olasılıklara azaltım faktörü uygulanır. q_x, baz tabloya göre gerçekleşen ölüm olasılığını, $RF_{x,t}$, t zamanında x yaşındaki birey için projekte edilmiş azaltım faktörünü göstermek üzere t zamanında x yaşındaki bireyin 1 yıl içerisinde ölüm olasılığı:

$$q_{x,t} = q_x * RF_{x,t} \tag{6.1}$$

biçiminde hesaplanır. İngiltere'de yayınlanan Sürekli Mortalite Araştırma Raporları (CMIR, 1999) tarafından 1991-1994 yılları gözlemlenen verilere göre belirlenen azaltım faktörü:

$$RF_{x,t} = \alpha(x) + [1-\alpha(x)] * [1-f(x)]^{t/20} \tag{6.2}$$

biçimindedir. Burada *α(x)* terimi

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= c;\ x \le 60 \\ &= 1 + (1-c)\frac{x-110}{50};60 \le x < 110 \\ &= 1;\ x \ge 110 \end{aligned} \tag{6.3}$$

f(x) terimi ise:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= h;\ x \leq 60 \\
&= \frac{(110-x)h + (x-60)k}{50};\ 60 \leq x < 110 \\
&= k;\ x \geq 110
\end{aligned} \tag{6.4}
$$

biçiminde elde edilir. Bu tezde, İngiltere'de yayımlanan Sürekli Mortalite Araştırma Raporları'nda olduğu gibi c=0,13, h=0,55 ve k=0,29 parametre değerleri kullanılmıştır. PMA92 tablosuna göre gerçekleşen baz ölüm olasılıkları ve belirlenen bu parametre değerleri kullanıldığında elde edilen projekte edilmiş ölüm olasılıkları Çizelge 6.1'de gösterilmektedir.

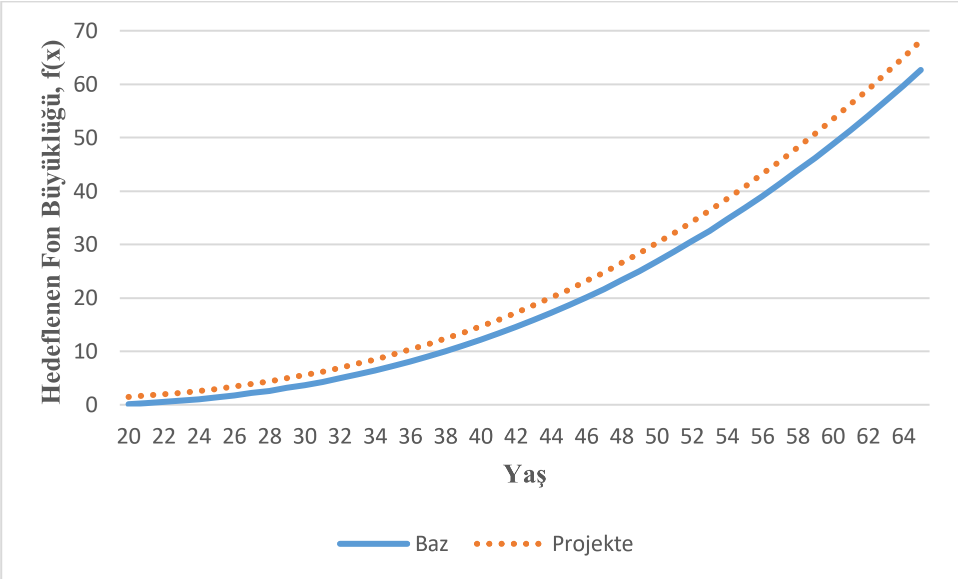
Çizelge 6.1: Baz ve projekte edilmiş ölüm olasılıkları

Yaş	Baz Ölüm Olasılıkları	Projekte Edilmiş Ölüm Olasılıkları
20	0,000188	0,000098042
30	0,000184	0,000095956
40	0,000245	0,000127768
50	0,000729	0,000380174
60	0,003277	0,001708956
70	0,016213	0,010593444
80	0,059223	0,045435175
90	0,156976	0,135452707
100	0,303666	0,285595444
110	0,444014	0,444014
120	1	1

Çizelge 6.1'de verilen projekte edilmiş ölüm olasılıkları ve risksiz getiri oranı r=0,02 ile emeklilik yaşı 65 yaş için hesaplanan tam hayat annüitesinin değeri

$$\ddot{a}_{65} = \sum_{s=0}^{120-65} {}_{65}p_s \exp(-rs) = 17,2194$$

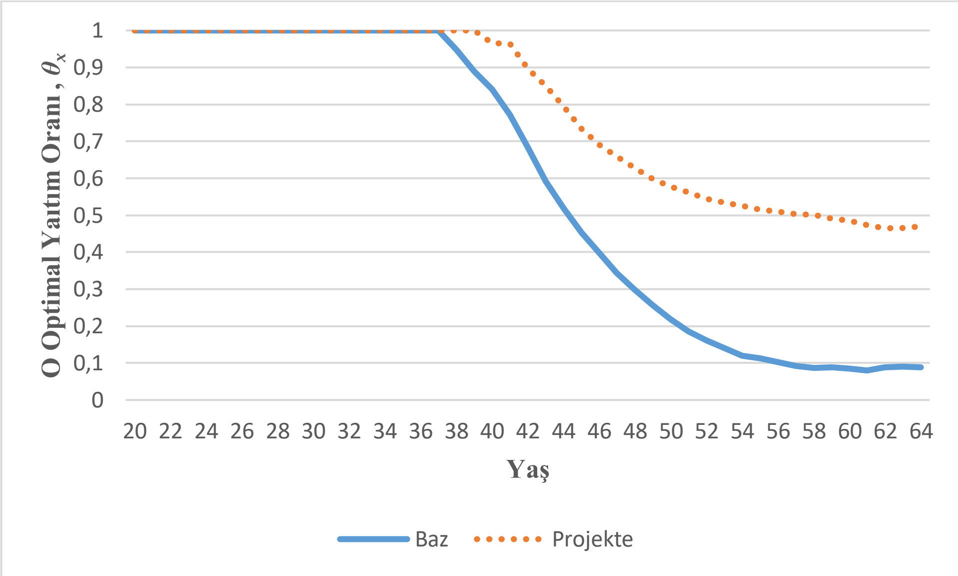
biçimindedir.Bu annüite değeri ile Eş. 3.10'dan hesaplanan dönem sonu hedeflenen fon büyüklüğü ve buna bağlı olarak Eş. 3.11'den hesaplanan ara dönem hedeflenen fon büyüklüklerinin grafiği Şekil 6.1'de verilmiştir.



Şekil 6.1: Baz ve projekte edilmiş ölüm olasılıkları ile hedeflenen fon büyüklüğü

Şekil 6.1'den baz ölüm olasılıkları yerine projekte edilmiş ölüm olasılıklarının kullanılmasının hedeflenen fon büyüklüğünü artırdığı görülmektedir.

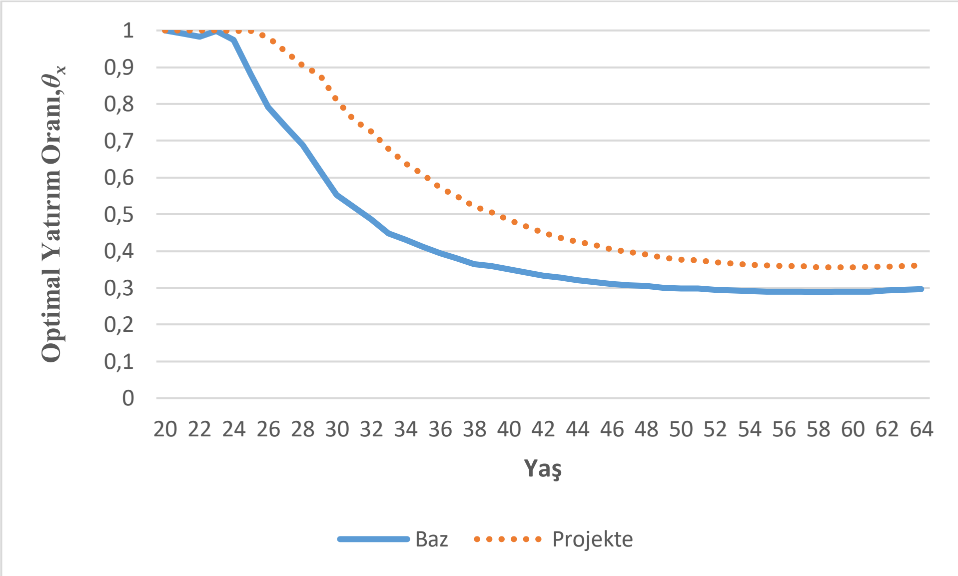
Deterministik model kullanıldığında ve katkı oranı π=0,15 olarak alındığında baz ölüm olasılıkları ve projekte edilmiş ölüm olasılıkları ile elde edilen optimal yatırım stratejilerinin grafiği Şekil 6.2'de gösterilmektedir.



Şekil 6.2: Deterministik model kullanıldığında baz ve projekte edilmiş ölüm olasıkları ile optimal yatırım stratejisi

Şekil 6.2'den uzun ömürlülük riskinin dahil edildiği projekte edilmiş ölüm olasıkları kullanıldığında elde edilen stratejinin baz ölüm olasılıkları kullanıldığında elde edilen strateji ile benzer olduğu, her iki stratejide de birikim döneminin başında fonun yüksek riskli yatırım aracında değerlendirilen oranının yüksek olduğu ve birikim döneminin sonuna doğru azaldığı görülmektedir. Fakat projekte edilmiş ölüm olasılıkları kullanıldığında beklenildiği gibi, fonun yüksek riskli yatırım aracında değerlendirilen oranın daha yüksek ve fonun yüksek riskli yatırım aracında değerlendirildiği yıl sayısının da daha çok olduğu görülmektedir. Buna göre dağıtım dönemindeki uzun ömürlülük riski ile baş edebilmek için birikim döneminde daha agresif bir yatırım stratejisinin izlenmesi gerektiği söylenebilir.

Stokastik model kullanıldığında ve katkı oranı π=0,15 olarak alındığında baz ölüm olasılıkları ve projekte edilmiş ölüm olasılıkları ile elde edilen optimal yatırım stratejilerinin grafiği Şekil 6.3'te gösterilmektedir:



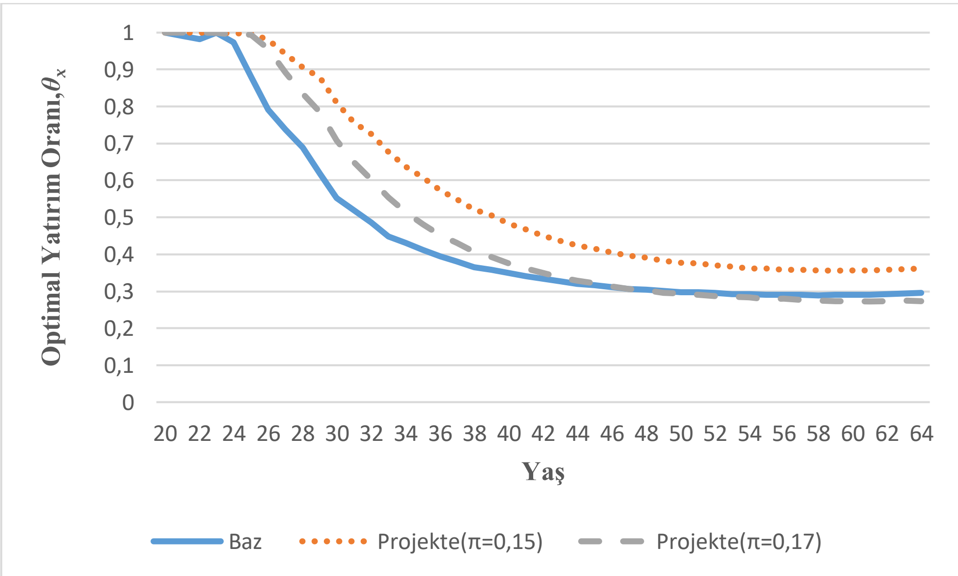
Şekil 6.3: Stokastik model kullanıldığında baz ve projekte edilmiş ölüm olasılıkları ile optimal yatırım stratejisi

Şekil 6.3'ten stokastik model kullandığında elde edilen sonuçların, deterministik model kullanıldığında elde edilen sonuçlar ile benzer olduğu; deterministik model ile elde edilen sonuçlarda olduğu gibi stokastik modelde de projekte edilmiş ölüm olasılıkları kullanıldığında fonun yüksek riskli yatırım aracında değerlendirilen oranın tüm yaşlar için daha yüksek olduğu görülmektedir. Buna göre dağıtım dönemindeki uzun ömürlülük riski ile baş edebilmek için birikim döneminde daha agresif bir yatırım stratejisinin izlenmesi gerektiği stokastik model için de söylenebilir.

Elde edilen bu agresif yatırım stratejisinin kayıptan kaçınan birey için istenmeyen bir durum olduğu daha önceki bölümlerde belirtilmişti. Kayıptan kaçınan birey olabildiğince az risk alarak beklenti teorisi fayda fonksiyonlarının iskontolu toplamının beklenen değerini maksimize eden yatırım stratejisini uygulamak istemektedir. Bu amaçla Bölüm 3.4'te verilen uygun katkı oranının belirlenmesinin optimal yatırım stratejisindeki riski azalttığı sonucu ile uygun katkı miktarı π=0,17 olarak alınmış, bu katkı oranı ile sonuçlar elde edilmiştir. Uygun katkı oranı π=0,17 ile elde edilen sonuçlar π=0,15 katkı oranı ile elde edilen sonuçlarla birlikte Çizelge 6.2'de ve Şekil 6.4'te gösterilmektedir.

Çizelge 6.2: Stokastik model ve uygun katkı oranı kullanıldığında baz ve projekte edilmiş ölüm olasılıkları ile optimal yatırım oranları

Yaş	Baz (π=0.15)	Projekte (π=0.15)	Projekte (π=0.17)
20	1	1	1
25	0,8810	0,9980	0,9935
30	0,5525	0,8106	0,7082
35	0,4118	0,6079	0,4818
40	0,3497	0,4837	0,3757
45	0,3164	0,4159	0,3217
50	0,2977	0,3772	0,2944
55	0,2901	0,3614	0,2791
60	0,2899	0,3557	0,2738
64	0,2959	0,3616	0,2739



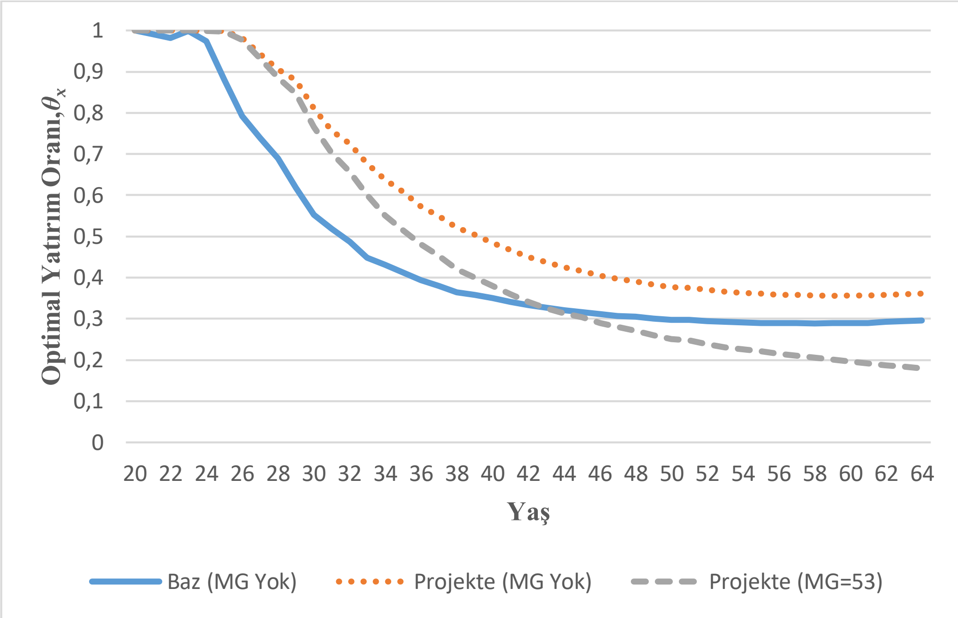
Şekil 6.4: Stokastik model ve uygun katkı oranı kullanıldığında baz ve projekte edilmiş ölüm olasılıkları ile optimal yatırım stratejisi

Çizelge 6.2 ve Şekil 6.4'ten uzun ömürlülük riskinin dahil edildiği projekte edilmiş ölümlülük oranları kullanıldığında elde edilen optimal yatırım stratejisinin uygun katkı oranı π=0,17 kullanıldığında daha tutucu olduğu, daha az risk alındığı görülmektedir. Uygun katkı oranı ile elde edilen optimal yatırım oranlarının baz ölümlülük oranları kullanıldığında elde edilen optimal yatırım oranlarıyla yakın değerler aldığı, bununla birlikte birikim döneminin sonlarına doğru fonun yüksek riskli yatırım aracında değerlendirilen oranının daha düşük olduğu yani daha az risk alındığı görülmektedir. Bu sonuçlar göz önüne alındığında dağıtım dönemindeki uzun ömürlülük riski ile baş edebilmek için birikim döneminde daha agresif bir yatırım stratejisi izlemek yerine uygun katkı oranının belirlenmesinin daha iyi bir alternatif olduğu söylenebilmektedir. Bir başka deyişle dağıtım dönemindeki uzun ömürlülük riski ile baş edebilmek için ya daha agresif bir yatırım stratejisi izlenmeli ya da uygun katkı oranı belirlenmelidir. Kayıptan kaçınan bir bireyin agresif bir yatırım stratejisini tercih etmeyeceği göz önünde bulundurulduğunda uygun katkı oranının belirlenmesi daha önemli hale gelmektedir. Katılımcı bu sayede birikim döneminde daha agresif bir yatırım stratejisi seçmek zorunda kalmayacak, uygun katkı oranı belirleyerek dağıtım dönemindeki uzun ömürlülük riski ile baş edebilecektir.

Bölüm 5’te uygun minimum fon garanti tutarının belirlenmesinin optimal yatırım stratejisindeki riski azalttığı sonucuna ulaşılmıştı. Kayıptan kaçınan birey için istenen durumun optimal yatırım stratejisinin daha az riskli olduğu ve uygun minimum fon garanti tutarının da optimal yatırım stratejisini daha az riski yaptığı sonucu göz önünde bulundurularak, optimal yatırım stratejisi uzun ömürlülük riski altında ve minimum fon garanti tutarı ile elde edilmiştir. Baz ölümlülük oranları ile elde edilen ve projekte edilmiş ölümlülük oranları ile minimum fon garanti tutarının olmadığı ve olduğu durumda elde edilen optimal yatırım oranları Çizelge 6.3 ve Şekil 6.5’te özetlenmiştir.

Çizelge 6.3: Stokastik model ve uygun minimum fon garanti tutarı kullanıldığında baz ve projekte edilmiş ölüm olasılıkları ile optimal yatırım oranları

Yaş	Baz (MG Yok)	Projekte (MG Yok)	Projekte (MG=53)
20	1	1	1
25	0,8810	0,9980	0,9975
30	0,5525	0,8106	0,7652
35	0,4118	0,6079	0,5156
40	0,3497	0,4837	0,3797
45	0,3164	0,4159	0,3030
50	0,2977	0,3772	0,2512
55	0,2901	0,3614	0,2205
60	0,2899	0,3557	0,1960
64	0,2959	0,3616	0,1796



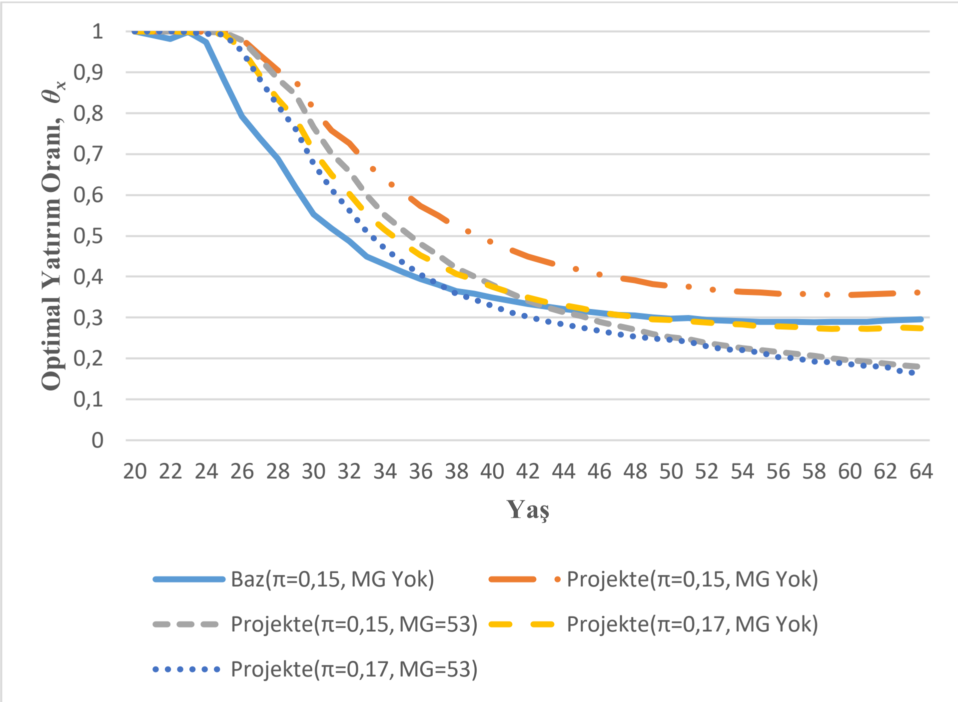
Şekil 6.5: Stokastik model ve uygun katkı oranı kullanıldığında baz ve projekte edilmiş ölüm olasılıkları ile optimal yatırım stratejisi

Çizelge 6.3 ve Şekil 6.5'ten uygun minimum fon garanti tutarı olan 53 değeri kullanılarak elde edilen optimal yatırım stratejisinin, uzun ömürlülük riskinin dahil edildiği projekte edilmiş ölümlülük oranları kullanıldığında elde edilen optimal yatırım stratejisinden daha tutucu olduğu, yani daha az risk alındığı görülmektedir. Minimum fon garanti tutarı ile elde edilen bu optimal yatırım stratejisi baz ölümlülük oranlarının kullanıldığı durumda elde edilen optimal yatırım stratejisinden de daha az risklidir. Bu sonuçlar göz önüne alındığında dağıtım dönemindeki uzun ömürlülük riski ile baş edebilmek için birikim döneminde daha agresif bir yatırım stratejisi izlemek yerine uygun minimum fon garanti tutarının belirlenmesinin daha iyi bir alternatif olduğu söylenebilmektedir. Birikim dönemindeki optimal yatırım stratejisinin uygun minimum fon garanti tutarı ile elde edilmesi durumunda katılımcı baz durumdan dahi daha az risk alarak dağıtım dönemindeki uzun ömürlülük riski ile baş edebilecektir. Katılımcının kayıptan kaçınan bir birey olduğu, dolayısıyla daha agresif bir yatırım stratejisi izlemek istemeyeceği gerçeği göz önüne alındığında, agresif yatırım stratejisi belirlemek yerine uygun minimum fon garanti tutarı belirlenebilir. Bu sayede katılımcının birikim döneminde izleyeceği yatırım stratejisi daha tutucu hale gelmektedir. Dolayısıyla katkısı belirli emeklilik planlarında kayıptan kaçınan birey için uygun minimum fon garanti tutarının belirlenmesi de daha önemli hale gelmektedir.

Buraya kadar uygun katkı oranı ve uygun minimum fon garanti tutarının belirlenmesinin, dağıtım dönemindeki uzun ömürlülük riski ile baş edebilmek için birikim döneminde daha agresif bir yatırım stratejisi izlenmesi gerektiğine birer alternatif olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Bu noktada her iki alternatif birlikte kullanılmış, uzun ömürlülük riski ile baş edebilmek için hem uygun katkı oranı π=0,17 hem de minimum fon garanti tutarı olan 53 değeri birlikte alınarak optimal yatırım stratejisi belirlenmiş, elde edilen sonuçlar Çizelge 6.4 ve Şekil 6.6'da özetlenmiştir.

Çizelge 6.4: Stokastik model ile uygun katkı ve minimum fon garanti tutarı kullanıldığında baz ve projekte edilmiş ölüm olasılıkları ile optimal yatırım oranları

Yaş	**Baz (π=0.15, MG Yok)**	**Projekte (π=0.15, MG Yok)**	**Projekte (π=0.15, MG=53)**	**Projekte (π=0.17, MG Yok)**	**Projekte (π=0.17, MG=53)**
20	1	1	1	1	1
25	0,8810	0,9980	0,9975	0,9935	0,9925
30	0,5525	0,8106	0,7652	0,7082	0,6766
35	0,4118	0,6079	0,5156	0,4818	0,4348
40	0,3497	0,4837	0,3797	0,3757	0,3285
45	0,3164	0,4159	0,3030	0,3217	0,2757
50	0,2977	0,3772	0,2512	0,2944	0,2452
55	0,2901	0,3614	0,2205	0,2791	0,2145
60	0,2899	0,3557	0,1960	0,2738	0,1867
64	0,2959	0,3616	0,1796	0,2739	0,1632



Şekil 6.6: Stokastik model ile uygun katkı ve minimum fon garanti tutarı kullanıldığında baz ve projekte edilmiş ölüm olasılıkları ile optimal yatırım stratejileri

Çizelge 6.4 ve Şekil 6.6'dan hem uygun katkı oranının hem de uygun minimum fon garanti tutarının belirlenmesinin birikim dönemindeki yatırım stratejisini daha tutucu yaptığı, yatırım stratejisindeki riski azalttığı görülmektedir. Uygun katkı oranı ve uygun minimum fon garanti tutarı ile elde edilen optimal yatırım stratejileri birbirleriyle karşılaştırıldığında ise sadece uygun minimum fon garanti tutarının belirlenmesinin sadece uygun katkı oranının belirlenmesine göre yatırım stratejisindeki agresifliği daha çok azalttığı görülmektedir. Buradan hareketle katılımcı için uygun minimum fon garanti tutarı ile elde edilen optimal yatırım stratejisinin, uygun katkı oranı ile elde edilen optimal yatırım stratejisinden daha az riskli olduğu, dolayısıyla kayıptan kaçınan bireyler için uygun minimum fon garanti tutarı belirlemenin daha iyi bir alternatif olduğu söylenebilir.

Çizelge 6.4 ve Şekil 6.6'dan ayrıca, uygun katkı tutarı ve uygun minimum fon garanti tutarının birlikte kullanılmasının optimal yatırım stratejisini beklenildiği gibi daha da az riskli hale getirdiği görülmektedir. Dolayısıyla kayıptan kaçınan bir katılımcının dağıtım dönemindeki uzun ömürlülük riski ile baş edebilmesi için birikim dönemindeki yatırım stratejisini daha riskli hale getirmek yerine, optimal yatırım stratejisini belirlenen uygun katkı oranı ve uygun minimum fon garanti tutarı ile birlikte belirleyebileceği, bu sayede yatırım stratejisindeki riskini daha da azaltacağı söylenebilir.

7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu bölümde tezde elde edilen sonuçlar özetlenmiş ve gelecek çalışmalar için önerilere yer verilmiştir.

7.1. Sonuçlar

Bu tezde katkısı belirli emeklilik planlarında kayıptan kaçınan bireyler için optimal yatırım stratejisi belirlenmiş optimal yatırım oranının gerçekleşen fon büyüklüğüne ve yaşa bağlı değişimi incelenmiş, kayıptan kaçınma parametrelerine bağlı değişimini incelemek için duyarlılık analizi yapılmış ve optimal yatırım stratejisi uygun katkı oranı ile belirlenmiştir. Ardından optimal yatırım stratejisi uygun minimum fon garanti tutarı ile ve uzun ömürlülük riski altında elde edilmiş. Birikim döneminde uygun katkı oranı ve uygun minimum fon garanti tutarının kullanılması sayesinde dağıtım dönemindeki uzun ömürlülük riski ile nasıl baş edilebildiği özetlenmiştir.

Kayıptan kaçınan birey gerçekleşen fon büyüklüğünün hedeflenen fon büyüklüğüne yakın olması durumunda tutucu bir yatırım stratejisi izlerken, gerçekleşen fon büyüklüğü hedeflenen fon büyüklüğünden hem pozitif hem de negatif yönlü uzaklaşırken agresif bir yatırım stratejisi izlemektedir. Gerçekleşen ve hedeflenen fon büyüklüğü arasındaki fark arttıkça optimal yatırım stratejisi daha agresif hale gelmektedir. Kayıptan kaçınan birey için optimal yatırım stratejisi bir çok emeklilik planında kabul gören geleneksel yaşam tarzı stratejisi ile benzer olarak elde edilmiştir. Elde edilen bu stratejiye göre birikim döneminin başında fonun tamamı riskli yatırım aracında değerlenmeli, birikim döneminin ilerleyen yaşlarında fonun riskli yatırım aracında değerlendirilen oranı azaltılarak, risksiz yatırım aracında değerlendirilen oranı artırılmalı, birikim döneminin sonunda ise fonun büyük bir kısmı risksiz yatırım aracında değerlendirilmelidir.

Kayıptan kaçınan birey için katkı oranının sabit alınması yerine uygun katkı oranının belirlenmesi ile elde edilen optimal yatırım stratejisinin daha az riskli bir strateji olduğu ve kayıptan kaçınan bireyin bu stratejiyi tercih edeceği sonucuna ulaşılmıştır.

Kayıptan kaçınan birey için optimal yatırım stratejisi; minimum fon garanti tutarı ile elde edilirken uygun minimum fon garanti tutarı dönem sonu hedeflenen fon büyüklüğüne yakın ve hedeflenen fon büyüklüğünden daha düşük olarak belirlenmelidir. Bu şekilde belirlenen uygun minimum fon garanti tutarı ile elde edilen optimal yatırım stratejisinin, minimum fon garanti tutarı olmadığı durumda elde edilen optimal yatırım stratejisine göre daha tutucu olduğu, daha az riskli olduğu görülmüştür. Dolayısıyla kayıptan kaçınan birey için optimal yatırım stratejisini minimum fon garanti ile belirlemek daha iyi bir alternatif olarak belirlenmiştir.

Kayıptan kaçınan birey için optimal yatırım stratejisi uzun ömürlülük riskinin de dahil edildiği projekte edilmiş ölümlülük oranları kullanıldığında daha agresif, daha riskli hale dönüşmektedir. Buna göre kayıptan kaçınan birey dağıtım dönemindeki uzun ömürlülük riski ile baş edebilmek için birikim döneminde daha agresif bir yatırım stratejisi izlemelidir.

Kayıptan kaçınan birey için hem uygun katkı oranının belirlenmesinin hem de uygun minimum fon garanti tutarının belirlenmesinin optimal yatırım stratejisindeki riski azalttığı görülmüştür. Kayıptan kaçınan birey dağıtım dönemindeki uzun ömürlülük riski ile baş edebilmek için dağıtım döneminde daha riskli bir yatırım stratejisi izlemelidir. Bununla birlikte kayıptan kaçınan birey dağıtım dönemindeki uzun ömürlülük riski ile baş edebilmek için, daha agresif bir yatırım stratejisi belirlemek yerine uygun katkı oranı veya uygun minimum fon garanti tutarını belirleyebilir. Bu sayede katılımcı daha az riskli bir yatırım stratejisi izleyebilecektir. Uygun katkı oranı ve uygun minimum fon garanti tutarı ile elde edilen optimal yatırım stratejileri karşılaştırıldığında uygun minimum fon garanti tutarının belirlenmesinin, uygun katkı oranı belirlenmesine göre yatırım stratejisindeki agresifliği daha çok azalttığı görülmüştür. Buna göre katılımcı açısından uygun minimum fon garanti tutarı ile optimal yatırım stratejisi belirlemek daha önemlidir. Kayıptan kaçınan birey dağıtım dönemindeki riski daha da azaltmak isterse, hem uygun katkı oranını hem de uygun minimum fon garanti tutarını birlikte belirlemelidir.

7.2. Öneriler

Bu tezde elde edilen sonuçlar birçok yönden geliştirilmeye açıktır. Bu bölümde sonuçların geliştirilmesi için gelecek dönemde yapılabilecek çalışmalar için önerilere yer verilmiştir.

Kullanılan modelde yıllık logaritmik getirilerin dağılımının Normal dağılıma uyduğu ve getirilerin birbirinde bağımsız olduğu varsayılmıştır. Fakat gerçekte yıllık getiriler bu varsayıma uymadığından, optimal yatırım stratejisi yatırım getirilerinin dağılımının Normal dağılıma uymaması durumunda belirlenebilir. Bu durumda optimize edilmeye çalışılan beklenen değer içindeki ifadenin çözümü sayısal yöntemlerle elde edilemeyebileceğinden dolayı aktüerya literatüründe çok yaygın kullanım alanı olmayan, büyük boyutlu optimizasyon problemleri için kabul edilebilir sürede optimuma yakın çözümler verebilen sezgisel optimizasyon algoritmaları kullanılabilir. Yatırım getirilerinin birbirine bağımlı olması durumu ise kopulalar kullanılarak analiz edilebilir.

Kullanılan modelde katkı oranı sabit olarak alınmıştır. Katkı oranı sabit miktar yerine; katılımcı tarafından fona yapılacak katkı miktarının gerçekleşen fon büyüklüğü ile hedeflenen fon büyüklüğü arasındaki fark göz önünde bulundurularak değişken miktarlarda belirlenebilir.

Kayıptan kaçınan bireyler için elde edilen sonuçlar farklı risk tutumuna sahip bireyler için de elde edilip, sonuçları kayıptan kaçınan bireyler için elde edilen sonuçlarla karşılaştırılabilir. Bu sayede farklı risk tutumlarının optimal yatırım stratejisini nasıl değiştirdiği incelenebilir.

Bu tezde kullanılan modelde zamanın kesikli olduğu varsayılmıştır. Bu varsayım değiştirilerek zamanın sürekli olduğu durum ele alınabilir, elde edilen sonuçlar kesikli zamanda elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılabilir.

KAYNAKLAR

Aitken, W. H., A Problem-Solving Approach to Pension Funding and Valuation, Actex Publications, **1996.**

Basimanebotlhe, O. and Xue, X., Stochastic Optimal Investment under Inflationary Market with Minimum Guarantee for DC Pension Plans, Journal of Mathematics Research, 7(3) (**2015)** 1.

Battocchio, P. and Menoncin, F., Optimal Pension Management in a Stochastic Framework, Insurance: Mathematics and Economics, 34(1) **(2004)** 79.

Battocchio, P., Menoncin, F. and Scaillet, O., Optimal Asset Allocation for Pension Funds Under Mortality Risk During The Accumulation and Decumulation Phases, Annals of Operations Research, 152(1) **(2007)** 141.

Bellman R., Dynamic Programming, Princeton University Press, **1957**.

Berkelaar, A. B., Kouwenberg, R. and Post, T., Optimal Portfolio Choice Under Loss Aversion. Review of Economics and Statistics, 86(4) **(2004)** 973.

Blake, D., Annuities in Pension Plans, In Commentary at World Bank Annuities Workshop, 7-8 June, United Kingdom, **1999**, p. 7.

Blake, D., Cairns, A. J. and Dowd, K., Pensionmetrics: Stochastic Pension Plan Design and Value-At-Risk During The Accumulation Phase, Insurance: Mathematics and Economics, 29(2) **(2001)** 187.

Blake, D., Cairns, A. J. and Dowd, K., Pensionmetrics 2: Stochastic Pension Plan Design During The Distribution Phase, Insurance: Mathematics and Economics, 33(1) **(2003)** 29.

Blake, D., Cairns, A. and Dowd, K., The Impact of Occupation and Gender on Pensions From Defined Contribution Plans, The Geneva Papers on Risk and Insurance Issues and Practice, 32(4) **(2007)** 458.

Blake, D., Wright, D. and Zhang, Y., Target-Driven Investing: Optimal Investment Strategies in Defined Contribution Pension Plans Under Loss Aversion, Journal of Economic Dynamics and Control, 37(1) **(2013)** 195.

Blake, D., Wright, D. and Zhang, Y., Age-Dependent Investing: Optimal Funding and Investment Strategies in Defined Contribution Pension Plans When Members Are Rational Life Cycle Financial Planners, Journal of Economic Dynamics and Control, 38 **(2014)** 105.

Bodie, Z., Merton, R. C. and Samuelson, W. F., Labor Supply Flexibility and Portfolio Choice in a Life Cycle Model, Journal of Economic Dynamics and Control, 16(3-4) **(1992)** 427.

Boulier, J. F., Huang, S. and Taillard, G., Optimal Management Under Stochastic Interest Rates: The Case of a Protected Defined Contribution Pension Fund, Insurance: Mathematics And Economics, 28(2) **(2001)** 173.

Cairns, A. J. G., An Introduction to Stochastic Pension Fund Management, Working Paper 9607, Pensions Institute, **1996.**

Cairns, A. J., Blake, D. and Dowd, K., Stochastic Lifestyling: Optimal Dynamic Asset Allocation for Defined Contribution Pension Plans, Journal of Economic Dynamics and Control, 30(5) **(2006)** 843.

Chang, H. and Chang, K., Optimal Consumption–Investment Strategy Under the Vasicek Model: HARA Utility and Legendre Transform, Insurance: Mathematics And Economics, 72 **(2017)** 215.

Chen, A., Haberman, S. and Thomas, S., Optimal Decumulation Strategies During Retirement with Deferred Annuities, Available at SSRN 2911959, **2017.**

CMIR, Graduation of the 1991–94 Mortality Experience – The ‘‘92’’ Series Standard Tables, Continuous Mortality Investigation Reports, Faculty of Actuaries and Institute of Actuaries, Edinburghand London (17): 1–229, **1999.**

Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., and Stein, C., Introduction to Algorithms, MIT Press, **2009.**

De Kort, J. and Vellekoop, M. H., Existence of Optimal Consumption Strategies in Markets with Longevity Risk, Insurance: Mathematics and Economics, 72 **(2017)** 107.

Deelstra, G., Grasselli, M. and Koehl, P. F., Optimal Investment Strategies in the Presence of a Minimum Guarantee, Insurance: Mathematics and Economics, 33(1) **(2003)** 189.

Deelstra, G., Grasselli, M. and Koehl, P. F., Optimal Design of the Guarantee for Defined Contribution Funds, Journal of Economic Dynamics and Control, 28(11) **(2004)** 2239.

Delong, Ł., Gerrard, R. and Haberman, S., Mean–Variance Optimization Problems for an Accumulation Phase in a Defined Benefit Plan, Insurance: Mathematics and Economics, 42(1) **(2008)** 107.

Devolder, P., Princep, M. B. and Fabian, I. D., Stochastic Optimal Control of Annuity Contracts, Insurance: Mathematics and Economics, 33(2) **(2003)** 227.

Di Giacinto, M., Federico, S. and Gozzi, F., Pension Funds with a Minimum Guarantee: A Stochastic Control Approach, Finance and Stochastics, 15(2) **(2011)** 297.

Di Giacinto, M., Federico, S., Gozzi, F. and Vigna, E., Income Drawdown Option with Minimum Guarantee, European Journal of Operational Research, 234(3) **(2014)** 610.

Donnelly, C., Quantifying Mortality Risk in Small Defined-Benefit Pension Schemes, Scandinavian Actuarial Journal, 2014(1) **(2014)** 41.

Emms, P., Lifetime Investment And Consumption Using A Defined-Contribution Pension Scheme, Journal of Economic Dynamics and Control, 36(9) **(2012)** 1303.

Judd, K., Numerical Methods in Economics, MIT Press, Cambridge MA and London, **1998.**

Gao, J., Optimal Portfolios for DC Pension Plans under a CEV Model, Insurance: Mathematics and Economics, 44(3) **(2009)** 479.

Gerrard, R., Haberman, S. and Vigna, E., Optimal Investment Choices Post-Retirement in a Defined Contribution Pension Scheme, Insurance: Mathematics and Economics, 35(2) **(2004)** 321.

Gerrard, R., Haberman, S. and Vigna, E., The Management of Decumulation Risks in a Defined Contribution Pension Plan, North American Actuarial Journal, 10(1) **(2006)** 84-110.

Gerrard, R., Højgaard, B. and Vigna, E., Choosing the Optimal Annuitization Time Post-Retirement, Quantitative Finance, 12(7) **(2012)** 1143.

Gomes, F. J., Portfolio Choice and Trading Volume with Loss-Averse Investors, The Journal of Business, 78(2) **(2005)** 675.

Guan, G. and Liang, Z, Optimal Management of DC Pension Plan in a Stochastic Interest Rate and Stochastic Volatility Framework, Insurance: Mathematics and Economics, 57 **(2014)** 58.

Guan, G. and Liang, Z., Mean–Variance Efficiency of DC Pension Plan under Stochastic Interest Rate and Mean-Reverting Returns, Insurance: Mathematics and Economics, 61 **(2015)** 99.

Gülçür, F., İşletmelerde Faaliyet Araştırmaları, Programlama Organizasyon ve Karar Metodları, Berksoy Matbaası, İstanbul, **1966.**

Haberman, S. and Vigna, E., Optimal Investment Strategies and Risk Measures in Defined Contribution Pension Schemes, Insurance: Mathematics and Economics, 31(1) **(2002)** 35.

Halaç, O., Kantitatif Karar Verme Teknikleri: Yöneylem Araştırması, Arpaz Matbaacılık, İstabul, **1978.**

Hainaut, D. and Deelstra, G., Optimal Funding of Defined Benefit Pension Plans, Journal of Pension Economics and Finance, 10(1) **(2011)** 31.

Han, N. W. and Hung, M. W., Optimal Asset Allocation for DC Pension Plans under Inflation, Insurance: Mathematics and Economics, 51(1) **(2012)** 172.

Harlow, W. V. and Brown, K. C., Market Risk, Mortality Risk, and Sustainable Retirement Asset Allocation: A Downside Risk Perspective, Journal of Investment Management, 14(2) **(2016)** 5.

He, L. and Liang, Z., Optimal Dynamic Asset Allocation Strategy for ELA Scheme of DC Pension Plan During the Distribution Phase, Insurance: Mathematics and Economics, 52(2), **(2013a)** 404.

He, L. and Liang, Z., Optimal Investment Strategy for the DC Plan with the Return of Premiums Clauses in a Mean–Variance Framework, Insurance: Mathematics and Economics, 53(3) **(2013b)** 643.

Huang, H. and Milevsky, M. A., Longevity Risk and Retirement Income Tax Efficiency: A Location Spending Rate Puzzle, Insurance: Mathematics and Economics, 71 **(2016)** 50.

Judd, K. L., Numerical methods in economics. MIT press, **1998.**

Kahneman, D. and Tversky, A., Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk, Econometrica, 47 **(1979)** 263.

Kırkağaç, M. ve Gençtürk, Y., Bireysel Emeklilik Planlarında Hedef Fon Büyüklüğüne Ulaşmak İçin Değişken Katkı ve Optimal Yatırım Stratejisi, İstatistikçiler Dergisi: İstatistik & Aktüerya, 9(2) **(2016)** 54.

Kincaid, D., Kincaid, D. R. and Cheney, E. W., Numerical Analysis: Mathematics Of Scientific Computing (Vol. 2), American Mathematical Soc.,**2009.**

Konicz, A. K. and Mulvey, J. M., Optimal Savings Management for Individuals with Defined Contribution Pension Plans, European Journal of Operational Research, 243(1) **(2015)** 233.

Kouwenberg, R., Scenario Generation and Stochastic Programming Models for Asset Liability Management, European Journal of Operational Research, 134(2) **(2001)** 279.

Li, D., Rong, X., Zhao, H. and Yi, B., Equilibrium Investment Strategy for DC Pension Plan with Default Risk and Return of Premiums Clauses under CEV Model, Insurance: Mathematics and Economics, 72 **(2017)** 6.

Merton, R. C., Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continuous-Time Case, The Review Of Economics And Statistics, **(1969)** 247.

Merton, R. C., Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model, Journal of Economic Theory, 3(4) **(1971)** 373.

Owadally, M. I., The Dynamics and Control of Pension Funding, Doctoral Dissertation, City University, London, **1998.**

Owadally, I., Haberman, S. and Gómez Hernández, D., A Savings Plan with Targeted Contributions, Journal of Risk and Insurance, 80(4) **(2013)** 975.

Önalan, Ö., Stokastik Süreçler, Avcıol Yayınları, İstanbul, **2011.**

Rabin, M. and Thaler, R. H., Anomalies: Risk Aversion, The Journal of Economic Perspectives, 15(1) **(2001)** 219.

Samuelson, P. A., Lifetime Portfolio Selection by Dynamic Stochastic Programming, The Review of Economics and Statistics, **(1969)** 239.

Sezen, H.K., Yöneylem Araştırması, 2. Baskı, Ekin Basım Yayın Dağıtım, Bursa, **2007.**

Silahtaroğlu, G., Veri madenciliği. 2. Basım, Papatya Yayınları, İstanbul, **2013.**

Taha, H.A., Yöneylem Araştırması, (çev: Baray, Ş.A.), Literatür Yayıncılık, İstanbul, **2010.**

Thomson, R. J., The Use Of Utility Functions for Investment Channel Choice in Defined Contribution Retirement Funds: I: Defence, British Actuarial Journal, **(2003)** 653.

Tversky, A. and Kahneman, D., Advances in Prospect Theory: Cumulative Representation of Uncertainty, Journal of Risk and uncertainty, 5(4) **(1992)** 297.

Vigna, E. and Haberman, S., Optimal Investment Strategy for Defined Contribution Pension Schemes, Insurance: Mathematics and Economics, 28(2) **(2001)** 233.

Vigna, E., On Efficiency of Mean–Variance Based Portfolio Selection in Defined Contribution Pension Schemes, Quantitative Finance, 14(2) **(2014)** 237.

Wu, H., and Zeng, Y., Equilibrium Investment Strategy for Defined-Contribution Pension Schemes with Generalized Mean–Variance Criterion and Mortality Risk, Insurance: Mathematics and Economics, 64 **(2015)** 396.

Yang, S. S. and Huang, H. C., The Impact of Longevity Risk on the Optimal Contribution Rate and Asset Allocation for Defined Contribution Pension Plans, The Geneva Papers on Risk and Insurance Issues and Practice, 34(4) **(2009)** 660.

Yao, H., Yang, Z. and Chen, P., Markowitz's Mean–Variance Defined Contribution Pension Fund Management under Inflation: A Continuous-Time Model, Insurance: Mathematics and Economics, 53(3) **(2013)** 851.

Yao, H., Lai, Y., Ma, Q. and Jian, M., Asset Allocation for a DC Pension Fund with Stochastic Income and Mortality Risk: A Multi-Period Mean–Variance Framework, Insurance: Mathematics and Economics, 54 **(2014)** 84.

Yao, H., Chen, P. and Li, X., Multi-Period Defined Contribution Pension Funds Investment Management with Regime-Switching And Mortality Risk, Insurance: Mathematics and Economics, 71 **(2016)** 103.

EKLER

EK 1– Tezden Türetilmiş Bildiriler

Kırkağaç, M., Gençtürk, Y., *Katkısı Belirli Emeklilik Planlarında Kayıptan Kaçınan Birey İçin Optimal Yatırım Stratejisi*, 4. Ulusal Sigorta ve Aktüerya Kongresi, 24-25 Haziran **2019**, Orta Doğu Teknik Üniversitesi (ODTÜ), Ankara, Türkiye.