

**HASAR GELİŞİM ÜÇGENLERİNDE  
BAĞIMLILIĞIN MODELLENMESİ**

**DEPENDENCE MODELLING ON  
LOSS TRIANGLES**

**RÜMEYSA KARATAŞ**

**Dr. Öğr. Üyesi Uğur KARABEY**

**Tez Danışmanı**

Hacettepe Üniversitesi

Lisansüstü Eđitim-Öđretim ve Sınav Yönetmeliđinin

Aktüerya Bilimleri Anabilim Dalı için Öngördüđü

DOKTORA TEZİ olarak hazırlanmıŐtır.

2021

## ÖZET

# HASAR GELİŞİM ÜÇGENLERİNDE BAĞIMLILIĞIN MODELLENMESİ

**Rümeysa KARATAŞ**

**Doktora, Aktüerya Bilimleri Bölümü**

**Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Uğur KARABEY**

**Ağustos 2021, 132 sayfa**

Hasar rezervi hesaplamalarında hasar tutarlarının bağımsız olduğu varsayımına dayalı yöntemler kullanılmaktadır. Ancak iş kolları arasında oluşabilecek kaza yılı bağımlılığı, gelişim yılı bağımlılığı ve takvim yılı bağımlılığı gibi sebeplerle hasar tutarları arasında bir bağımlılık oluşmaktadır. Çalışmada bu bağımlılık yapıları dışında hasar tutarları arasında gözlenemeyen bir etkiden kaynaklı bağımlılık olduğu varsayılmıştır. Bu amaçla hasar gelişim üçgenlerindeki hasar tutarları kopula regresyon modeli ile modellenmiş, gözlenemeyen etkinin incelenmesi için klasik modele toplamsal ve çarpımsal yapıda dahil edilerek ve birçok dağılım varsayımı ile modellemeler yapılmıştır. Bu varsayımlarla önerilen modeller, iki bağımlı iş koluna ait olan gerçek veriye uygulanmıştır. Analizler sonucu önerilen modellerin literatürde kullanılan klasik modellere göre daha iyi performans sergilediği tespit edilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** stokastik hasar rezervi, hayat-dışı sigortalar, kopula regresyon, iş kolları, bağımlılık, hasar gelişim üçgeni.

## **ABSTRACT**

### **DEPENDENCE MODELLING ON LOSS TRIANGLES**

**Rümeysa KARATAŞ**

**Doctor of Philosophy, Department of Actuarial Science**

**Supervisor: Assist. Prof. Dr. Uğur KARABEY**

**August 2021, 132 pages**

The methods of calculation for claims reserving assume that claims are independent. However, dependencies that occur between lines of business, such as accident year dependence, development year dependence, and calendar year dependence create a dependency between claim amounts. In this study, we assume an unobserved random effect between and within lines of business. In order to model this effect, we propose a copula regression model with unobserved random effect in which we consider additive and multiplicative effect structure. We consider four different random effect distributions in order to model unobserved random effect. The theoretical results are illustrated on a real loss triangle data set for two dependent lines of business. Regarding to the results, we determine that suggested model performs better than classical models.

**Keywords:** stochastic claims reserving, non-life insurance, copula regression, multiple lines of business, dependence, loss triangles.

## TEŞEKKÜR

Tüm akademik çalıőmalarım sırasında desteğini esirgemeyen ve her konuda beni yönlendiren danıőman hocam Dr. Öğr. Üyesi Uğur KARABEY'e, tez izleme komitesinde bulunan ve katkılarıyla tezin bu noktaya gelmesini sağlayan Prof. Dr. Ayőe Sevtap KESTEL ve Doç. Dr. Könül BAYRAMOęLU KAVLAK hocalarıma, tez jürisinde bulunan Doç. Dr. Özge SEZGİN ALP ve Dr. Öğr. Üyesi Yasemin SAYKAN hocalarıma teőekkürlerimi sunarım.

İdolüm olan babam Prof. Dr. Mehmet KARATAş'a, hayatımdaki her güzel şeyin sebebi anneme, bilhassa kardeőim Ruően KARATAş'a hayatımın tüm zor dönemlerinde olduğu gibi zorlu tez sürecinde de yanımda olduğu için ve can dostum olduğu için en içten teőekkürlerimi sunarım.

# İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT .....	ii
TEŞEKKÜR .....	iii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ .....	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	x
1. GİRİŞ .....	1
2. REZERV TEORİSİ.....	7
2.1. Hasar Rezervi Süreci .....	8
2.2. Hasar Gelişim Üçgenlerinde Bağımlılık Türleri .....	10
2.3. Zincir Merdiven Yöntemi.....	11
3. BAĞIMLILIK MODELLEMESİ .....	13
3.1. Bağımlılık Ölçütleri.....	13
3.1.1.Doğrusal Korelasyon .....	13
3.1.2. Sıra Korelasyonu .....	14
3.1.2.1. Kendall’ın Tau Katsayısı .....	14
3.1.2.2. Spearman’ın Rho Katsayısı.....	15
3.1.3. Kuyruk Bağımlılığı .....	15
3.2. Kopula Teorisi .....	16
3.2.1.Sklar’s Teoremi.....	17
3.2.2. Değişmezlik Teoremi.....	17
3.2.3. Fréchet-Hoeffding Sınırları.....	18
3.3. Kopula Aileleri .....	19
3.3.1.Eliptik Kopulalar.....	19
3.3.1.1.Gaussian Kopula .....	19
3.3.1.2. t-kopula.....	19
3.3.2.Arşimed Kopulalar .....	20
3.3.2.1.İki Değişkenli Arşimed Kopulalar .....	20
3.3.2.2.Çok Değişkenli Arşimed Kopulalar .....	23
3.4. Genelleştirilmiş Doğrusal Modeller .....	23
3.4.1. Genelleştirilmiş Doğrusal Model Teorisi.....	23

3.4.2. Hasar Gelişim Üçgenleri ile GDM .....	26
3.4.3. Hasar Gelişim Üçgenleri ile GDM Normal Model .....	27
3.5. Kopula Regresyon Model .....	27
3.5.1. Kopula Tahmin Yöntemi: Marjinallere Göre Çıkarsama .....	29
3.5.2. Kopula için Uyum İyiliği Testleri .....	30
3.6. Parametre Hesaplama Yöntemleri ve Yaklaşımları .....	32
3.6.1. Newton-Raphson Algoritması .....	34
3.6.2. Davidon-Fletcher-Powell (DFP) Yöntemi .....	36
3.6.3. Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) Yöntemi .....	37
3.6.4. Monte Carlo İntegrasyonu .....	37
3.6.5. Gauss Hermite Kareleme Yöntemi .....	38
4. ÖNERİLEN MODELLER .....	40
4.1. Kopula Regresyon-Toplamsal Model .....	40
4.1.1. Normal Dağılımlı Model .....	41
4.1.2. Log-Normal Dağılımlı Model .....	50
4.1.3. Gamma Dağılımlı Model .....	53
4.1.4. Üstel Dağılımlı Model .....	57
4.2. Kopula Regresyon-Çarpımsal Model .....	60
4.2.1. Normal Dağılımlı Model .....	61
4.2.2. Log-Normal Dağılımlı Model .....	64
4.2.3. Gamma Dağılımlı Model .....	65
4.2.4. Üstel Dağılımlı Model .....	68
5. UYGULAMA .....	71
5.1. Veri Seti .....	71
5.2. Verinin Marjinal Dağılımı ve GDM Modellemesi .....	72
5.2.1. İş Kollarının Marjinal Dağılımların Belirlenmesi .....	73
5.2.2. GDM Model Uygulaması .....	74
5.3. Kopula Regresyon Modeli .....	75
5.3.1. Kopula Regresyon Modelleri için Kopula Seçimi .....	75
5.4. Rezerv Hesabı .....	77
5.5. Modellerin Karşılaştırılması .....	78
5.5.1. Hücre Hatası Hesabı .....	78
5.5.2. Geriye Dönük Test (Backtesting) .....	79
5.6. Önerilen Modellere ait Parametre ve Rezerv Tahminleri .....	79
5.6.1. Toplamsal Modellerin Sonuçları .....	80

5.6.1.1. Normal Dağılımlı Model .....	80
5.6.1.2. Log-Normal Dağılımlı Model .....	82
5.6.1.3. Gamma Dağılımlı Model .....	84
5.6.1.4. Üstel Dağılımlı Model.....	86
5.6.1.5. Toplamsal Modellerin Karşılaştırması .....	88
5.6.2. Çarpımsal Modellerin Sonuçları .....	90
5.6.2.1. Normal Dağılımlı Model.....	90
5.6.2.2. Log-Normal Dağılımlı Model .....	92
5.6.2.3. Gamma Dağılımlı Model .....	94
5.6.2.4. Üstel Dağılımlı Model.....	96
5.6.2.5. Çarpımsal Modellerin Karşılaştırması .....	98
5.6.3. Geriye Dönük Test Sonuçları.....	100
5.6.3.1. 2012-2014 Veri Seti için Hesaplamalar .....	100
5.6.3.2. 2012-2015 Veri Seti için Hesaplamalar .....	102
5.7. Klasik Modeller ile Önerilen Modellerin Karşılaştırmaları .....	105
6. SONUÇ .....	106
7. KAYNAKLAR.....	108
EK 1 – Toplamsal Üstel Dağılımlı Modele Ait Türevler .....	116
EK 2 – Çarpımsal Normal Dağılımlı Modele Ait Türevler.....	117
EK 3 – Çarpımsal Üstel Dağılımlı Modele Ait Türevler.....	119
EK 4 – İş kolu-1’e ait birikimli hasar gelişim üçgeni.....	120
EK 5 – İş kolu-2’ye ait birikimli hasar gelişim üçgeni.....	121
EK 6- Toplamsal Modeller için Algoritma ve Adım Aralığı Seçimi .....	122
EK 7 -Çarpımsal Modeller için Algoritma ve Adım Aralığı Seçimi.....	123
EK 8 - Toplamsal modellerde her iki iş kolu için parametre tahminleri .....	124
EK 9 - Toplamsal modellerde her iki iş kolu ve her kaza yılı için rezerv tahminleri.....	126
EK 10 - Çarpımsal modellerde her iki iş kolu için parametre tahminleri.....	127
EK 11 - Çarpımsal modellerde her iki iş kolu ve her kaza yılı için rezerv tahminleri .....	128
EK 12- Normal ve gamma dağılımlı modelde 2012-2014 olan veri seti her iki üçgen için parametreler .....	129
EK 13- Normal ve gamma dağılımlı modelde 2012-2015 olan veri seti her iki üçgen için parametreler .....	130

## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Hasar gelişim üçgeni.....	8
Şekil 5.1. İş kolu-1 için bağ fonksiyonlarıyla artık değerleri.....	74
Şekil 5.2. İş kolu-2 için bağ fonksiyonlarıyla artık değerleri.....	74
Şekil 5.3. İş kolu-1 ve iş kolu-2 iş kollarına ait verinin saçılım grafiği.....	75



## ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 3.1. Frank, Clayton ve Gumbel kopulaların parametreleri ve üretici fonksiyonları.....	23
Çizelge 3.2. Bazı önemli bağ fonksiyonları.....	25
Çizelge 3.3. Quasi Newton yöntemlerinin genel algoritması.....	33
Çizelge 3.4. NR algoritması.....	36
Çizelge 3.5. DFP algoritması.....	36
Çizelge 3.6. BFGS algoritması.....	37
Çizelge 5.1. İş kolu-1'e ait hasar gelişim üçgeni.....	71
Çizelge 5.2. İş kolu-2'ye ait hasar gelişim üçgeni.....	72
Çizelge 5.3. İş kolu-1 ve İş kolu-2 iş kollarına ait kazanılan prim tutarları.....	72
Çizelge 5.4. KS teste ait p değerleri.....	73
Çizelge 5.5. Her iki iş koluna ait marjinal dağılımlar için uyum iyiliği testi.....	73
Çizelge 5.6. Her iki iş kolu için tahmin edilen parametre değerleri.....	76
Çizelge 5.7. Kopula için uyum iyiliği blanket testi sonuçları.....	76
Çizelge 5.8. Rezerv hesabı.....	77
Çizelge 5.9. Her iki iş koluna ait kaza yılları için rezerv tahminleri.....	78
Çizelge 5.10. Her iki iş koluna ait kaza yılları için ZM ile hesaplanan rezerv tahminleri.....	78
Çizelge 5.11. Her iki iş koluna ait sabit, kaza yılı ve gelişim yılı parametreleri.....	81
Çizelge 5.12. Parametre tahminleri.....	81
Çizelge 5.13. Her iki iş koluna ait, her kaza yılı için rezerv tahminleri.....	82
Çizelge 5.14. Her iki iş koluna ait sabit, kaza yılı ve gelişim yılı parametreleri.....	83
Çizelge 5.15. Parametre tahminleri.....	83
Çizelge 5.16. Her iki iş koluna ait, her kaza yılı için rezerv tahminleri.....	84
Çizelge 5.17. Her iki iş koluna ait sabit, kaza yılı ve gelişim yılı parametreleri.....	85
Çizelge 5.18. Parametre tahminleri.....	85
Çizelge 5.19. Her iki iş koluna ait, her kaza yılı için rezerv tahminleri.....	86
Çizelge 5.20. Her iki iş koluna ait sabit, kaza yılı ve gelişim yılı parametreleri.....	87
Çizelge 5.21. Parametre tahminleri.....	87

Çizelge 5.22. Her iki iş koluna ait, her kaza yılı için rezerv tahminleri.....	88
Çizelge 5.23. Toplamsal modellerin log-olabilirlik değerleri.....	88
Çizelge 5.24. Her iki iş koluna ait hücre hatası değerleri.....	89
Çizelge 5.25. Her iki iş koluna ait sabit, kaza yılı ve gelişim yılı parametreleri.....	91
Çizelge 5.26. Parametre tahminleri.....	91
Çizelge 5.27. Her iki iş koluna ait, her kaza yılı için rezerv tahminleri.....	92
Çizelge 5.28. Her iki iş koluna ait sabit, kaza yılı ve gelişim yılı parametreleri.....	93
Çizelge 5.29. Parametre tahminleri.....	93
Çizelge 5.30. Her iki iş koluna ait, her kaza yılı için rezerv tahminleri.....	94
Çizelge 5.31. Her iki iş koluna ait sabit, kaza yılı ve gelişim yılı parametreleri.....	95
Çizelge 5.32. Parametre tahminleri.....	95
Çizelge 5.33. Her iki iş koluna ait, her kaza yılı için rezerv tahminleri.....	96
Çizelge 5.34. Her iki iş koluna ait sabit, kaza yılı ve gelişim yılı parametreleri.....	97
Çizelge 5.35. Parametre tahminleri.....	97
Çizelge 5.36. Her iki iş koluna ait, her kaza yılı için rezerv tahminleri.....	98
Çizelge 5.37. Çarpımsal modellerin log-olabilirlik değerlergerleri .....	98
Çizelge 5.38. Her iki iş koluna ait hücre hatası değerleri.....	99
Çizelge 5.39. İş kolu-1 için 2012-2014 olan üçgen ve kazanılan prim tutarları .....	101
Çizelge 5.40. İş kolu-2 için 2012-2014 olan üçgen ve kazanılan prim tutarları .....	101
Çizelge 5.41. Normal dağılımlı modelde kaza yılları için rezerv tahminleri .....	101
Çizelge 5.42. Gamma dağılımlı modelde kaza yılları için rezerv tahminleri .....	102
Çizelge 5.43. İş kolu-1 için 2012-2015 olan üçgen ve kazanılan prim tutarları .....	102
Çizelge 5.44. İş kolu-2 için 2012-2015 olan üçgen ve kazanılan prim tutarları.....	103
Çizelge 5.45. Normal dağılımlı modelde kaza yılları için rezerv tahminleri .....	104
Çizelge 5.46. Gamma dağılımlı modelde kaza yılları için rezerv tahminleri .....	104
Çizelge 5.47. Klasik modeller ile önerilen modellerin HKO karşılaştırması .....	105
Çizelge 5.48. Klasik modeller ile önerilen modellerin hücre hatası karşılaştırması.....	105

## SİMGELER VE KISALTMALAR

### Simgeler

$X_{i,j}$	i. kaza, j. gelişim yılı için hasar tutarı
$Y_{i,j}$	i. kaza, j. gelişim yılı için birikimli hasar tutarı
$R_i$	i. kaza yılı için ödenmemiş hasar tutarı
$\eta_{i,j}^{(n)}$	n. iş kolu için sistematik öge
$\gamma^{(n)}$	marjinal dağılımdan gelen parametre vektörü
$\beta^{(n)}$	n. iş kolu için kaza yılı ve gelişim yılı parametreleri
$\phi$	parametre vektörü
$\theta$	kopula parametresi

### Kısaltmalar

IBNR	Incurred But Not Reported
RBNS	Reported But Not Settled
ZM	Zincir Merdiven
GDM	Genelleştirilmiş Doğrusal Modeller
AIC	Akaike information criterion
BIC	Bayesian information criterion
DFP	Davidon-Fletcher-Powell
BFGS	Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno
NR	Newton-Raphson
MC	Monte Carlo
KS	Kolmogorov-Smirnov
HKO	Hata Kareler Ortalaması

# 1. GİRİŞ

Ödenmemiş hasarlar için uygun hasar rezervi tahmini yapmak sigorta şirketleri için büyük önem arz etmektedir. Burada en önemli husus oluşmuş ancak henüz raporlanmamış hasarlar için uygun miktarda rezervi en doğru şekilde belirleyebilmektir. Bu rezervleri hesaplayabilmek için birçok yöntem geliştirilmiştir: Zincir Merdiven yöntemi, Bornhuetter-Ferguson yöntemi, Cape Cod yöntemi, Munich Zinciri [1, 2] gibi.

Klasik rezerv hesaplama tekniklerinde hasar tutarlarının bağımsız olduğunu varsayılmaktadır. Bu varsayım sağlanmadığında klasik yöntemler doğru olmayan sonuçlar verebilmektedir. Ayrıca klasik yöntemlerin çoğu sadece tek bir iş kolu için çalışmaktadır. Sektöre bakıldığında, büyük sigorta şirketlerinin neredeyse tüm portföyleri birçok iş kolu içermektedir. Hatta bu iş kollarının alt portföyleri de bulunmaktadır. Ayrıca hasar gelişim üçgenlerinin kendi içinde ve diğer hasar gelişim üçgenleri arasında kaza yılı, gelişim yılı ve takvim yılı bağımlılığı gibi çeşitli bağımlılık yapıları bulunmaktadır. Klasik rezerv hesaplama yöntemleri bu bağımlılıkları göz ardı ettiği için tahmin edilen rezervler eksik veya hatalı olabilmektedir. Bu tür sorunlar Taylor [3] ile England ve Verraall [4] çalışmalarında stokastik rezerv yöntemlerinin geliştirilmesine olanak sağlamıştır.

Çok değişkenli stokastik rezerv yöntemlerinin büyük çoğunluğu dağılımdan bağımsız olan Mack [2] çalışmasındaki modelin genişletilmesi ile elde edilmiştir. Braun [5] çalışmasında çok değişkenli zincir merdiven yöntemi ile bağımlı hasar gelişim üçgenlerinin rezerv tahminlerindeki tahmin hatalarını hesaplamıştır. Benzer şekilde, Merz ve Wüthrich [6] çalışmasında Schmidt [1] çalışmasında sunulan çok değişkenli zincir merdiven yönteminin farklı bir versiyonunu literatüre kazandırmışlardır. Hess [7] ve Merz ile Wüthrich [8] çalışmalarında çok değişkenli toplamsal yöntem ile tahmin hatası hesaplamışlardır ve rezervler için optimal tahminler elde etmişlerdir. Bu çalışmalarda hasar gelişim üçgenlerinin aynı homojenlik varsayımını sağlamadığı gerçeği ile yola çıkılarak zincir merdiven yöntemi ile toplamsal hasar rezervi yöntemi birleştirilerek yeni bir yöntem elde edilmiştir. Ayrıca görünürde ilişkisiz regresyon modelini kullanarak hasar gelişim üçgenleri arasındaki bağımlılık için çok değişkenli genelleştirilmiş bir zincir merdiven yöntemi geliştirmişlerdir [9, 10]. Happ ve Wüthrich [11] çalışmalarında ödenmiş-gerçekleşmiş zincir yöntemi ile bağımlılık yapıları için bağ oranları hesaplamışlardır.

Bağımlılık probleminin dikkate alınması gerekliliği Solvency 2 standartları ile önem kazanmıştır. Solvency 2 standartlarına göre sigorta şirketinin toplam riski göz önüne alınmalıdır. Toplam riski inceleyebilmek için ise, portföy yapısındaki bağımlılıklar dikkate alınmalı ve modellenmelidir. Bu bağımlılık yapısı aynı kaza yıllarında, aynı gelişim yıllarında veya aynı takvim yıllarında ortaya çıkabilmektedir.

Son yıllarda literatürdeki çalışmalarda klasik rezerv yöntemlerinin farklı iş kollarındaki bağımlılığı dikkate alamaması eleştirilmiştir. Holmberg [12] ve Schmidt [1] çalışmalarında gelişim yılına ya da takvim yılına bağlı olarak bağımlılıklar görülebileceğini belirtmişlerdir.

Sektöre bakıldığında sigorta iş kollarından her biri bir şekilde bağımlı olmaktadır. Bir deprem, kasırga ya da tsunami olayı genel olarak sağlık, hayat ve mal sigortaları gibi birçok iş kolunda hasar oluşturmaktadır. Bir trafik kazası hem araçlara ilişkin hasarlar hem de sürücü ve yolculara ilişkin bedeni hasarlara yol açabilmektedir. Karlı ve yağmurlu havalar gibi iklimsel olaylar trafik kazası sayısını ve hasarların tutarlarını etkilemektedir. Bu örnekler tek bir olayın farklı iş kollarına ait hasarları etkilediğini göstermektedir.

Bir sigorta şirketi portföylerinde yer alan tüm iş kolları için yeterli bir rezerv hesaplayabilmek için iş kolları arasındaki bağımlılığı dikkate almak ve bu bağımlılığı modellerine eklemek zorundadır. İş kolları arasında oluşabilecek herhangi bir bağımlılığı modele dahil etmek ve bu model aracılığıyla hasar rezervi hesaplamak daha tutarlı rezervler hesaplanmasına olanak sağlamaktadır.

Aynı takvim yılına denk gelen hasar tutarlarının birbiriyle ilişkili olması durumu takvim yılı bağımlılığı olarak isimlendirilmektedir. Takvim yılı bağımlılığı hasar gelişim üçgeninin köşegenlerini etkilemektedir. Hasar gelişim üçgenlerinde yer alan diğer bağımlılık türleri kaza yılı ve gelişim yılı bağımlılığıdır. Bu bağımlılık türlerinde aynı kaza yılı ve aynı gelişim yılında ödenen hasar tutarlarının bağımlı olduğu varsayılmaktadır.

Holmberg [12] çalışması farklı iş kollarına ait hasar gelişim üçgenlerinde yer alan bağımlılık problemini keşfeden ve bu konuyu literatüre tanıtan ilk çalışmadır. Bu çalışmada kaza yılları arasında ve farklı iş kolları arasında yer alan birkaç bağımlılık dikkate alınmış ve rezerv tutarlarını bu bağımlılıklar modellenerek hesaplanmıştır. Hasar gelişim üçgenleri içindeki ve hasar gelişim üçgenleri arasındaki kaza yılı bağımlılığını modele dahil etmesinden dolayı bu alanda temel bir kaynak olarak kabul edilmektedir.

Hasar gelişim üçgenleri arasındaki bağımlılığı modellemede birçok çalışmada kopuladan yararlanılmıştır. Li [13] çalışmasında sekiz farklı iş kolu ile çalışarak kopula modellerinin bağımlılık yapısına etkisini incelemiştir. Çalışmasında sekiz farklı iş kolunu uzun kuyruklu ve kısa kuyruklu olmak üzere kategorilere ayırmıştır ve kopula modellerinin bağımlılık yapısına etkisini incelemiştir. Çalışma sonucunda iş kolları arasındaki bağımlılığın dikkate alınmasında yapılan kategorilendirmenin önemi açıklanmıştır. Lindinger [14] çalışmasında hasar gelişim üçgenleri içinde ve hasar gelişim üçgenleri arasında yer alan bağımlılıklarla ilgilenmiştir ve bu konuda geliştirdiği iki yöntemi beş farklı hasar gelişim üçgenine uygulamıştır. Bu çalışmaya göre aynı takvim yılındaki hasarlar birbirleri ile ilişkilidir ve farklı gelişim yıllarına ait hasarlar birbirinden bağımsızdır. Çalışmada Gaussian kopula, D-vine kopula, Gumbel kopula, Clayton kopulalar kullanılmış ve modeller arasında karşılaştırma yapılmıştır. Çalışmanın sonuçlarına göre Gaussian kopula ile heuristic yaklaşım takvim yılı bağımlılığını modellemede en iyi sonucu vermektedir. Regis [15] çalışmasında dört iş koluna ait hasar gelişim üçgeni arasındaki bağımlılığı modellemek için Bayesci yöntemler ve kopulayı birlikte kullanmış, standart kopula yaklaşımına ait sonuçlar ile karşılaştırmalar yapılmıştır. De Jong [16] çalışmasında hasar tutarları arasında takvim yılı bağımlılığı olduğunu varsaymıştır ve bu bağımlılığın modellenmesinde Gaussian kopula kullanmıştır. Bu çalışmada takvim yılı etkisi korelasyon matrisi ile ifade edilmiştir ve 1986-1995 yıllarına ait olan sekiz adet hasar gelişim üçgeni ile çalışılmıştır. Diers [17] çalışmasında altı adet hayat dışı iş kolu arasındaki bağımlılığı Bernstein kopula ile incelemiştir. Bernstein kopula, bağımlılık yapıları homojen olmayan ve bağımlılık düzeyi çok yüksek olmayan durumlarda hasar gelişim üçgenleri arasındaki bağımlılığı modellemede uygun olduğu tespit edilmiştir. Zhang ve Dukic [18] çalışmasında bağımlılık yapısını kopulalar yardımıyla modelleyen çok değişkenli Bayesci bir model kullanarak üç farklı iş kolu için rezerv tahminleri elde etmişlerdir. Çalışmada çok değişkenli hasar rezervi modelleri ile Bayesci kopulayı birlikte kullanarak model oluşturulmuştur. Belkacem [19] çalışmasında iki farklı iş kolunu kullanarak Arşimedyan kopulalar yardımıyla hasar gelişim üçgenleri arasında yer alan bağımlılığı modellemişler ve Tunus sigorta şirketi için hasar rezervi tahminlerini elde etmişlerdir. Shi [20] iki iş kolu için takvim yılı etkilerini eliptik kopulalar ile modellemiş rezervleri parametrik bootstrap yöntemi ile hesaplamıştır. Çalışma sonuçları takvim yılı bağımlılığının göz ardı edilmemesi gerektiğini ortaya koymaktadır. Abdallah [21] çalışmasında hasar gelişim üçgenleri içinde ve hasar gelişim üçgenleri arasında yer alan bağımlılığı hiyerarşik Arşimedyan kopulaları kullanarak modellemiştir. Çalışmada hasar gelişim üçgeninde yer alan her bir köşegen için ayrı bir bağımlılık yapısı ele alınmıştır. Bu şekilde bağımlılık modellemesinde ikinci bir düzey oluşturulmuştur.

Hasar gelişim üçgenlerindeki bağımlılık literatürde kopulalar dışında farklı modellerle de modellenmiştir. De Jong [22] çalışmasında Hertig [23] çalışmasındaki logaritmik bağ oran fonksiyonu modelini genelleyerek takvim yılı bağımlılıklarını ortaya çıkarmıştır. Çalışmada takvim yılı bağımlılığını modele kalman filtresi ile eklemiştir ve Hertig'in modeline bağlı dört adet yeni model elde etmiştir. Yeni elde edilen bu modeller; gelişim yılı korelasyon modeli, kaza yılı korelasyon modeli, takvim yılı korelasyon modeli ve durum uzay formu modelidir. Tek bir iş kolu içeren çalışmada takvim yılı etkisinin rasgele yürüyüşe uyduğu varsayılmıştır. Wüthrich [24] takvim yılı bağımlılığının modellenmesi için Bayesci zincir merdiven yöntemini kullanmıştır. Bu çalışmada çok değişkenli Bayesci zincir merdiven yöntemi ile sonsal dağılım için, hasar rezervleri için ve tahmin belirsizliği için kapalı formüller elde edilmiştir. Bayesci zincir merdiven yöntemi takvim yılı bağımlılık modelini modele çarpımsal bir etki olarak eklemiştir. Jessen [25] çalışmasında Bornhuetter Ferguson yöntemi ve zincir merdiven yöntemlerine köşegen etkilerini (takvim yılı etkilerini) dahil ederek hasar rezervlerini tek bir hasar gelişim üçgeni için hesaplamışlardır. Kuang [26] çalışmasında tek bir hasar gelişim üçgeni üzerinden klasik zincir merdiven yöntemini kaza yılı, gelişim yılı ve takvim yılı dahil ederek genişletmiştir. Bu çalışmada Kuang [27] ve Kuang [28] çalışmalarında yer alan yaş-periyot-kuşak modele ait parametrelendirme kullanılmıştır. Shi [29] çalışmasında bağımlılık modellenmesinde çok değişkenli lognormal dağılım kullanılarak Bayesci yaklaşım ile yöntem geliştirilmiştir. Çalışmada hasar gelişim üçgenleri içindeki ve hasar gelişim üçgenleri arasındaki takvim yılı bağımlılıkları iki farklı iş kolu için ele alınmıştır. Çalışmada takvim yılı bağımlılığı rassal etki olarak modele eklenmiştir, kaza yılı ve gelişim yılı etkileri ise sabit etki modeli ile modellenmiştir. Wüthrich ve Salzmann [30] hasar gelişim üçgenleri içinde yer alan bağımlılığın modellenmesi için çok değişkenli Bayesci zincir merdiven modeli kullanmışlardır. Takvim yılı bağımlılığını Bayesci yaklaşım ile Markov Zinciri Monte Carlo simülasyon yöntemi kullanarak modele dahil etmişlerdir. Çalışmada sonsal dağılım ve hasar rezervleri için kapalı formüller elde edilmiştir. Meyers [31] iş kolları arasındaki bağımlılığı modelleyebilmek için changing settlement rate (CSR) modeli düzenleyip yeni bir model geliştirmiştir. İki hasar gelişim üçgeni arasında bağımlılık olduğu varsayımıyla hesaplamalar yapmış ve modelin sonuçlarını iş kolları arasında bağımsızlık varsayan CSR modeli sonuçları ile karşılaştırmıştır. Shi [32] şirketler arası hasar verisindeki bağımlılığı modelleyebilmek için çok değişkenli bir hasar rezerv modeli geliştirmiştir. Çalışmanın literatürde yer alan diğer çalışmalardan farkı, birden çok sigorta şirketinin verilerinin dikkate alınmasıdır. Çalışmada şirketler arası hasar gelişim üçgenlerini modelleyebilmek için Bayesci hiyerarşik model kullanılmıştır. Uygulama

kısımında beş sigorta şirketinden alınan iki farklı iş koluna ait hasar gelişim üçgenleri kullanılmıştır.

Literatürde yer alan çalışmalar incelendiğinde, farklı iş kollarına ait hasar gelişim üçgenleri arasındaki bağımlılığın dikkate alınması gerekliliği ortaya çıkmaktadır. Bağımlılığı modelleyerek rezerv tahmini yapan çalışmalarda klasik rezerv yöntemlerine göre daha tutarlı sonuçlar elde ettiği görülmüştür.

Bu çalışmanın temel amacı hasar gelişim üçgenlerinde yer alan ve kaza yılı, gelişim yılı, takvim yılı bağımlılıklarından farklı olarak gözlenemediği varsayılan bir etkiyi, gözlenemeyen etki, literatürdeki modellere dahil ederek rezerv tahminlerinin daha etkin ve tutarlı yapılmasıdır. Bu amaç doğrultusunda literatürde yer alan ve hasar gelişim üçgenlerinde bağımlılığı modellemede kullanılan kopula regresyon modeline gözlenemeyen etki, toplamsal ve çarpımsal yapıda dahil edilerek yeni bir model geliştirilmiştir. Hasar gelişim üçgenleri arasında bağımlılık olması durumunda geliştirilen modelin klasik yöntemlere göre daha iyi performans sergilediği tespit edilmiştir.

Bu tez çalışmasının ilk bölümünde hasar rezervleri ve hasar gelişim üçgenlerindeki bağımlılık modellemesine ait genel açıklamalar yapılarak giriş yapılmış, hasar gelişim üçgenleri içinde ve arasında yer alan bağımlılığı modelleyen literatürdeki çalışmalara yer verilmiştir.

Tezin ikinci bölümünde rezerv teorisine ait bilgiler verilmiştir ve hasar gelişim süreci açıklanmıştır. Hasar gelişim üçgeninin yapısı ve kullanılan notasyonlar açıklanmıştır.

Üçüncü bölümde bağımlılık yapıları ele alınmıştır. Öncelikle bağımlılık çalışmalarında en çok kullanılan kopula teorisi verilmiştir. İkinci olarak açıklayıcı değişkenler ile bağımlı değişken arasındaki bağımlılığı doğrusal olmayan bağımlılık yapısı ile modellemeye olanak sağlayan genelleştirilmiş doğrusal modellere yer verilmiştir. Üçüncü olarak kopula regresyon yöntemlerine yer verilmiştir. Bu yöntemlerde çözümlenmelerin yapılabilmesi için gerekli olan integral yaklaşım yöntemleri de bu bölümde anlatılmıştır.

Dördüncü bölümde tez çalışmasının literatüre katkısını içeren gözlenemeyen etkinin dahil edildiği kopula regresyon modelleri tanıtılmış ve modele ilişkin olabilirlik fonksiyonları kapalı formları elde edilmek üzere çalışılmış, gerektiği yerlerde numerik yöntemler kullanılarak parametre tahminleri elde edilmiştir.



Tezin beşinci bölümünde Türkiye sigorta sektörüne ait gerçek bir veri seti üzerinden önerilen model ve klasik modeller kullanılarak uygulamalar yapılmış ve sonuçlar karşılaştırılmıştır. Sonuçlar ve gelecekte yapılması öngörülen çalışmalar altıncı bölümde verilmiştir.

## 2. REZERV TEORİSİ

Hasar rezervi sigorta sektörünün en önemli ve kritik konularından biridir. Hasar rezervleri tahminleri yapılırken sigorta şirketlerinin sahip olduğu geçmişe ait verilerden yararlanılmaktadır. Sigorta şirketleri risk analizini daha kolay yapabilmek, kar-zarar tablosunu dengeleyebilmek, Solvency 2 değerlendirmeleri için daha uygun tablolar düzenleyebilmek ve kendilerini bilinmeyen risklere karşı koruyabilmek için hasar rezervlerini en tutarlı ve gerçek değerlere yakın bir biçimde tahmin etmelidirler. Bu bölümde rezerv teorisinden bahsedilecek, rezerv süreci ve hasar rezervi hesaplamasında kullanılan yöntemler tanımlanacaktır.

Hayat dışı sigortalar hayat sigortası dışındaki tüm sigorta ürünlerini kapsayan bir sigorta türüdür. Hayat dışı sigorta türüne; araç sigortası, mal sigortası, mali sorumluluk sigortası, kaza sigortası, sağlık sigortası, deniz taşımacılığı sigortası gibi örnekler verilebilmektedir. Bu sigorta türlerinin her biri alt gruplara ayrılabilir. Örneğin; araç sigortaları zorunlu trafik sigortası ve kasko sigortası, sorumluluk sigortaları ise kara araçları sorumluluk, hava araçları sorumluluk, su araçları sorumluluk ve genel sorumluluk gibi dallara ayrılmaktadır.

Hayat dışı sigortalarda hasarların meydana gelişi ile sigortacıya bildirilişi arasındaki zaman farkı sebebiyle rezerv süreci özel bir yaklaşım gerektirmektedir. Hasarların meydana gelişi ve sigortacıya bildirilmesi arasındaki süre raporlama gecikme süresi olarak adlandırılmaktadır. Ayrıca ödemesi yapılmış ve kapanmış bir hasarın sonradan fark edilen bazı sebepler nedeniyle tekrar açılması mümkündür. Hasarların meydana gelişi ile bildirilmesi arasında geçen zaman sebebiyle, hasarlar kaza tarihinden hemen sonraki tarihlerde ödenememektedir. Bu sebeple şirketler hasar rezervleri ayırmak zorundadırlar. Şirketlerin ayırdığı hasar rezervlerinin gelecekte oluşabilecek hasarları karşılamada kullanılabilecek kadar yeterli miktarda olması gerekmektedir.

Hayat dışı sigorta branşlarındaki hasar karşılıklarından en önemlisi RBNS (Reported But Not Settled) ve IBNR (Incurred But Not Reported)'dır. RBNS ihbar edilmiş fakat henüz ödemesi tamamlanıp kapatılmamış olan hasarları, IBNR ise meydana gelmiş ancak ihbar edilmemiş hasarları ifade etmektedir [33].

IBNR türü rezervleri ayırma ve hesaplama durumlarında sigortacının meydana gelen hasar sayısı ve oluşan her bir hasarın tutarları hakkında bir bilgisi bulunmamaktadır. Bu sebepten

ötürü IBNR hesabı yapılırken geçmişteki verilere dayanan istatistiksel yöntemler kullanılmaktadır [34].

## 2.1. Hasar Rezervi Süreci

Bu bölümde, hasar rezervi hesabında kullanılan matematiksel formül ve gösterimler açıklanacaktır.

Bir sigorta poliçesindeki portföye ait modelleme yapılırken birikimli olmayan hasar ödemeleri  $X_{i,j}$  rastgele değişkeni ile gösterilmektedir. Bu gösterimde  $i \in \{0, \dots, I\}$  kaza yılını,  $j \in \{0, \dots, J\}$  değişkeni ise gelişim yılını ifade etmektedir. Bu açıklamalarla birlikte,  $X_{i,j}$  gösteriminin  $i$ . kaza yılı ve  $j$ . gelişim yılındaki hasar tutarı olduğu söylenebilir. Literatürde yer alan çalışmaların büyük çoğunluğunda kaza yılları sayısı ile gelişim yılları sayısının eşit olduğu ( $I=J$ ) kabul edilmektedir [35].

Hasar rezerv sürecinde veriyi açıklayabilmek için kullanılan ve uygulanacak yöntemlerde kolaylık sağlayan form Şekil 2.1’de verilmiştir. Kaza yılları, gelişim yılları ve hasar tutarlarını içeren bu şekil hasar gelişim üçgeni olarak isimlendirilmektedir.

Kaza yılı	Gelişim yılı									
	0	1	.	.	.	.	.	.	J-1	J
0	$X_{0,0}$	$X_{0,1}$	.	.	.	.	.	.	$X_{0,J-1}$	$X_{0,J}$
1	$X_{1,0}$	$X_{1,1}$	.	.	.	.	.	.	$X_{1,J-1}$	
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
I-1	$X_{I-1,0}$	$X_{I-1,1}$	.	.	.	.	.	.	.	.
I	$X_{I,0}$		.	.	.	.	.	.	.	.

Şekil 2.1. Hasar gelişim üçgeni

Hasar gelişim üçgeninde yer alan  $X_{i,j}$  ifadesi  $i$  kaza yılında meydana gelen hasarın ve  $j$  gelişim yılında, bir diğer ifadeyle  $i+j$  takvim yılında ödenen tutarıdır. Hasar gelişim üçgeninin  $i+j \leq I$  kısmında kalan hasarlar gözlenmiş hasarları ifade etmektedir. Bu kısım Şekil 2.1’in sol üst kısmına denk gelmektedir. Hasar gelişim üçgeninin sağ alt kısmında yer alan

hasarlar ise  $i+j>I$  eşitsizliğini sağlayan kısımda bulunan hasarlardır ve gelecekteki (henüz gözlenmemiş) hasarları ifade etmektedir.

Geçmiş yıllara ait gözlenen hasar tutarları kaza yılı ve gelişim yıllarına göre hasar gelişim üçgenindeki yerlerine yazılarak Şekil 2.1 oluşturulmaktadır. Oluşturulan bu çizelge gelecekteki ödenmemiş hasar miktarları tahmin edilirken kullanılmaktadır [36, 37].

Hasar gelişim üçgeni aktüeryal analiz ve hesaplamalarda kullanılan ve hasar verisini organize etmeye yarayan bir yöntemdir. Üçgen olarak ifade edilmesinin nedeni, gözlemlenen hasar verisi yıllara göre yerleştirildiğinde üçgen şeklinin ortaya çıkmasındandır. Hasar gelişim üçgeninde yer alan satırlar kaza yıllarını, sütunlar ise gelişim yıllarını göstermektedir. Üçgenin köşegenleri ise takvim yıllarıdır. Hasar gelişim üçgenine göre  $X_{i-1,1}$  hasar tutarı  $I-1$  kaza yılında oluşan ve 1. gelişim yılında ödenen hasar tutarını göstermektedir. Bu hasar tutarının bulunduğu hücreye denk gelen takvim yılı ise  $I$ . takvim yılıdır.

Üçgenin alt kısmındaki, kaza ve gelişim yılı toplamının toplam kaza yılı sayısından büyük olduğu durumlarda ( $i+j>I$ ), hasar tutarları  $X_{i,j}$ 'lerin gözlemlenemediği bilinmektedir. Hasar rezervi yöntemleri ile hasar gelişim üçgeninin gözlenemeyen alt kısmı tahmin edilmektedir.

Birden fazla iş kolunu içeren hasar gelişim üçgenleri ile çalışıldığında işlem kolaylığı açısından veriye standartlaştırma işlemi uygulanmaktadır [38]. Standartlaştırma işlemi, hasar gelişim üçgeninde yer alan hasar tutarlarının poliçe sayısı, hasar sayısı veya kazanılan prim tutarına bölünmesiyle elde edilmektedir.

Hasar tutarları aynı kaza yılı için belirli bir gelişim yılına kadar toplanarak birikimli hasar tutarları elde edilmektedir.

$$Y_{i,j} = \sum_{k=0}^j X_{i,k}$$

$Y_{i,j}$   $i$  kaza yılındaki tüm  $j$  gelişim yıllarına ait hasar tutarlarının toplamı olan birikimli hasar tutarıdır [36].  $Y_{i,j}$  kaza yılı ve gelişim yılı toplamının kaza yılı sayısından küçük olduğu ( $i+j \leq I$ ) durumlarda gözlenebilmektedir.

Hasar gelişim üçgenleri kullanılarak hasar rezervlerinin tahmin edildiği yöntemlerde temel amaç, aynı kaza yılına ait birikimli hasar tutarlarını hesaplayabilmektir.  $i$  kaza yılı için nihai hasar tutarı  $Y_{i,j}$  ile gösterilsin. Kaza yılı  $i$  için ödenmemiş hasar tutarları aşağıda verilen eşitlik yardımıyla elde edilmektedir.

$$R_i = Y_{i,J} - Y_{i,I-i} , \quad i = 1, \dots, I$$

Hasar gelişim üçgenlerinde negatif değerler yer alabilmektedir [39]. Hasar ödemelerinin pozitif tanımlı olmasıyla birlikte sovtaj giderleri, üçüncü şahıslardan alınan ödemeler, ödenmemiş hasarların tamamının veya bir kısmının iptali, sigortacıdan tarafından reddedilme gibi sebepler negatif değerlere yol açabilmektedir.

## **2.2. Hasar Gelişim Üçgenlerinde Bağımlılık Türleri**

Bir hasar gelişim üçgeninin kendi içinde birçok sebepten ötürü bağımlılık oluşabilmektedir. Bu kısımda ele alınacak üç bağımlılık çeşidi bulunmaktadır. Bunlar yatay bağımlılık (gelişim yılı bağımlılığı), dikey bağımlılık (kaza yılı bağımlılığı) ve köşegen bağımlılığı (takvim yılı bağımlılığı) olarak isimlendirilmektedir [40].

### **Yatay bağımlılık (Gelişim yılı bağımlılığı)**

Belirli kaza yılları arasındaki hasarların gelişim yılı sebebiyle oluşturduğu bağımlılık türüdür [40]. Hasar gelişim üçgenlerinde gelişim yılı yatay ekseninde yer aldığı için bu şekilde adlandırılmaktadır. Hasar ödemelerinin gelişim süreci sigorta poliçesinin sözleşme türüne ve iş koluna göre değişebilmektedir. Bu gelişim süreci hasar tutarları arasında bir bağımlılık oluşturmaktadır.

### **Dikey bağımlılık (Kaza yılı bağımlılığı)**

Hasar gelişim üçgenlerinde dikey düzlemde oluşan bağımlılık türüdür. Sigorta sektöründe yer alan döngüsel yapılar (cyclical pattern) kaza yılı bağımlılığına sebep olmaktadır. Sigorta şirketlerinin en önemli faaliyetlerinden biri olan sigorta kabul (underwriting) süreci dönemsel olarak bir bağımlılık oluşturduğu için kaza yılı bağımlılığı sebebidir [41]. Ayrıca iklim değişikliğine bağlı olaylar da hasar gelişim üçgenlerinde dikey bir bağımlılık oluşturmaktadır.

### **Köşegen bağımlılığı (Takvim yılı bağımlılığı)**

Takvim yılları hasar gelişim üçgenlerinin köşegenlerine denk gelmektedir. Bir hasar gelişim üçgeninde aynı köşegende yer alan hasar tutarlarının aynı takvim yılında meydana geldiği bilinmektedir [40, 41]. Aynı takvim yılında oluşan hasar tutarlarında, enflasyon ve mevzuat değişiklikleri gibi makroekonomik etkilerden ötürü bağımlılık görülebilmektedir. Bu bağımlılık takvim yılı bağımlılığı olarak isimlendirilmektedir.

Kaza yılı, gelişim yılı ve takvim yılı bağımlılıkları hasar gelişim üçgenlerinin kendi içinde yer alan bağımlılık türleridir. Bu üç bağımlılık türü karşılıklı bağımlılık (interdependence) türleri olarak bilinmektedir. Ayrıca, farklı hasar gelişim üçgenleri arasında da bağımlılık bulunabilmektedir. Bu bağımlılık türü ise çapraz bağımlılık (crossdependence) olarak adlandırılmaktadır [40]. Doğal afet gibi büyük olaylar birçok farklı hasara sebep olduğu için, birçok poliçe türünü aynı anda etkilemektedir. Bu tarz büyük hadiseler farklı iş kollarında bağımlılık oluşturmaktadır.

### 2.3. Zincir Merdiven Yöntemi

Bu bölümde rezerv hesabında en çok kullanılan yöntemlerden biri olan zincir merdiven yöntemi (ZM) verilecektir. Yöntemin temel varsayımı hasarların geçmişteki gelişim süreçlerinin gelecekte de aynı şekilde devam edeceğidir. Bu gelişim sürecine dayalı gelişim faktörlerini hesaplayabilmek için öncelikle birikimli hasar tutarlarından oluşan hasar gelişim üçgeni elde edilmelidir. Yöntemin kullanışlı olmasının en önemli sebepleri; uygulanmasının basit olması ve herhangi bir dağılımdan bağımsız olmasıdır [42].

Zincir merdiven yönteminin kullanılabilmesi için gerekli koşullar:

- Farklı kaza yıllarındaki birikimli hasar tutarları birbirinden bağımsız olmalıdır.
- Son kaza yılı ile son gelişim yılı sayısı eşit olmalıdır.
- Hasar gelişim üçgeni homojen bir portföye ait olmalıdır.
- Gelişim yılları boyunca enflasyon durağan olmalıdır.

Zincir merdiven yönteminde kullanılan gelişim faktörleri matematiksel olarak aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır:

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=1}^{I-j} C_{i,j}}{\sum_{i=1}^{I-j} C_{i,j-1}} \quad j \in \{1, \dots, J\} \quad (2.1)$$

Formülde yer alan  $\hat{f}_j$  gelişim faktörlerinin tahminidir.  $C_{i,j}$  değerleri ise  $i$  kaza yılı  $j$  gelişim yılı için birikimli hasar tutarlarını göstermektedir. Bu yöntemde birikimli hasar tutarlarının bağımsız olduğu kabul edilmektedir.

Formül ile hesaplanan gelişim faktörleri hasar gelişim üçgeninin sağ alt kısmında yer alan birikimli hasar tutarlarını tahmin etmek için kullanılmaktadır. Gelişim faktörleri kullanılarak hesaplanan tahminler aşağıdaki eşitlik kullanılarak hesaplanmaktadır:

$$\hat{C}_{i,j} = C_{i,I-i} \prod_{k=I+1-i}^j \hat{f}_k \quad i+j \geq J+2 \quad (2.2)$$

$\hat{C}_{i,j}$  tahmin edilen birikimli hasar tutarıdır.

Böylece i. kaza yılı için rezerv tahmini;  $\hat{R}_i = \hat{C}_i - C_{i,J-i+1}$  ile hesaplanmaktadır [4].

### 3. BAĞIMLILIK MODELLEMESİ

Literatürde yer alan temel modellerde hasar gelişim üçgenlerindeki hasar tutarları birbirinden bağımsız varsayılmaktadır. Pratikte hasar gelişim üçgenleri içinde ve arasında yer alan, kaza yılından, gelişim yılından ve takvim yılından kaynaklı bağımlılıklar bulunmaktadır. Bu bağımlılıklar hasar tutarları arasındaki bağımsızlık varsayımının gerçekçi olmadığını göstermektedir.

Hasar gelişim üçgenlerinde yer alan hasar tutarları arasındaki bağımlılıklar, literatürde yer alan çalışmalarda modellere dahil edilirken kopulalar, genelleştirilmiş doğrusal modeller (GDM) ve kopula regresyon modelleri kullanılmaktadır [13-21]. Bu bölümde bağımlılık modellemesine ilişkin olarak bu üç yöntem anlatılmıştır.

#### 3.1. Bağımlılık Ölçütleri

Kopula teorisine geçmeden rasgele değişkenler arasındaki bağımlılığın daha iyi anlaşılabilmesi için bağımlılık ölçütleri anlatılacaktır. X ve Y rasgele değişkenlerinden biri diğerinin bilgisini içeriyorsa bu değişkenler bağımlıdır denilmektedir.

Rasgele değişkenler arasında bulunan bağımlılığın ölçülmesinde birçok ölçüm yöntemi kullanılmaktadır. Bu yöntemlerden en çok kullanılanlardan olan doğrusal korelasyon, sıra korelasyon ve kuyruk bağımlılığı bu kısımda anlatılmaktadır.

##### 3.1.1. Doğrusal Korelasyon

Doğrusal korelasyon en çok kullanılan bağımlılık ölçütüdür. Literatürde Pearson bağımlılık ölçütü olarak da yer almaktadır [43]. Varyansı sıfırdan farklı olan X ve Y rasgele değişkenleri arasındaki doğrusal korelasyon katsayısı;

$$\rho_p(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{var}(X) \text{var}(Y)}} \quad (3.1)$$

eşitliği yardımıyla hesaplanmaktadır. Eşitliğin pay kısmında yer alan  $\text{cov}(X, Y)$  ifadesi X ve Y rasgele değişkenlerinin kovaryansını, payda kısmında yer alan  $\text{var}(X)$  ve  $\text{var}(Y)$  ifadeleri ise sırasıyla X ve Y rasgele değişkenlerine ait varyansları göstermektedir.

X ve Y rasgele değişkenlerinin kovaryansı;

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) \quad \text{eşitliği ile hesaplanmaktadır.}$$



Doğrusal korelasyon katsayısı olan  $\rho$  değeri X ve Y rasgele değişkenleri arasındaki doğrusal bağımlılığı göstermektedir. Bu katsayı -1 ile 1 aralığında yer almaktadır, X ve Y rasgele değişkenlerinin varyansları sonlu değilse hesaplanamamaktadır.

Kopula modellerinde, doğrusal korelasyon katsayısı kopulanın türüne ve marjinal dağılımların türüne bağlı olarak değişmektedir.

### 3.1.2. Sıra Korelasyonu

Sıra korelasyonu rasgele değişken çifti arasındaki uyumu ölçmek için kullanılmaktadır. Sıra korelasyonu doğrusal korelasyonun aksine, sadece kopulanın türüne bağlıdır.

X ve Y rasgele değişkenleri bir çift değişken olarak düşünüldüğünde; bir değişkenin büyük değerleri diğer değişkenin büyük değerleriyle, aynı şekilde bir değişkenin küçük değerleri diğer değişkenin küçük değerleriyle ilişkilendirilebiliyorsa bu değişken çifti “uyumludur” denilmektedir.

#### Tanım 3.1

$(x_i, y_i)$  ve  $(x_j, y_j)$  gözlemleri  $(X, Y)$  rasgele değişken çiftinden elde edilen gözlem değerleri olsun. Bu gözlem değerleri;

$(x_i - x_j)(y_i - y_j) > 0$  eşitsizliğini sağlıyorsa konkordant (uyumludur),

$(x_i - x_j)(y_i - y_j) < 0$  eşitsizliğini sağlıyorsa diskordant (uyumsuzdur),

olarak tanımlanmaktadır [44]. Sıra korelasyonu ölçüm yöntemlerinden en çok kullanılanlar Kendall’in tau katsayısı ve Spearman’ın rho katsayısıdır.

#### 3.1.2.1. Kendall’in Tau Katsayısı

$(X, Y)$  rasgele değişken vektöründe yer alan n adet gözlem çifti  $\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$  olarak ifade edilsin. Modelde (n) adet  $(x_i, y_i)$  ve  $(x_j, y_j)$  gözlem çifti vardır. Bu çiftlerden konkordant olanların sayısı c ile, diskordant olanların sayısı ise d ile gösterilsin. Bu durumda örneklem için Kendall’in tau katsayısı:

$$\tau_K(X, Y) = \frac{c - d}{c + d} = \frac{c - d}{\binom{n}{2}} \quad (3.2)$$

eşitliği ile hesaplanmaktadır [45]. Eşitlikten görüleceği üzere,  $\tau$  katsayısı  $x$  ve  $y$  gözlem çiftleri için uyumlu olanların olasılıklarından uyumsuz olanların olasılıklarının çıkarılmasıyla elde edilmektedir [46].

$(X_1, Y_1)$  ve  $(X_2, Y_2)$  vektörleri aynı dağılımlı ve bağımsız gözlemler içerdiği varsayımı altında, kitle için Kendall'ın tau katsayısı;

$$\tau_K(X, Y) = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0] \quad (3.3)$$

eşitliği ile hesaplanmaktadır. Bu eşitlikte sağ tarafta yer alan terim uyumun olasılığıdır. Sol tarafta yer alan terim ise uyumsuzluğun olasılığına eşittir [47, 48].

### 3.1.2.2. Spearman'ın Rho Katsayısı

Ortak dağılım fonksiyonları aynı olan  $(X_1, Y_1)$ ,  $(X_2, Y_2)$  ve  $(X_3, Y_3)$  bağımsız rasgele değişken vektörleri olduğunu düşünelim. Spearman'ın rho katsayısı kitle için;

$$\rho_S(X, Y) = 3 \left( P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0] \right) \quad (3.4)$$

eşitliği ile hesaplanmaktadır [44].  $\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$  sürekli rasgele değişkenlerinden oluşan  $n$  adet gözlem çifti içeren vektör olsun. Bu durumda örneklem için Spearman'ın rho katsayısı;

$$\rho_S(X, Y) = \frac{12}{n(n^2 - 1)} \sum_{i=1}^n \left( \text{rank}(X_i) - \frac{n+1}{2} \right) \left( \text{rank}(Y_i) - \frac{n+1}{2} \right) \quad (3.5)$$

eşitliği ile elde edilmektedir [49].

Kendall'ın tau katsayısı ve Spearman'ın rho katsayısı;

- Sürekli rasgele değişken çiftleri için tanımlanmaktadır.
- $[-1, 1]$  aralığında yer almaktadır.
- Simetrik katsayılardır.
- Rasgele değişken çiftleri bağımsızsa sıfıra eşit olmaktadır [45, 50].

### 3.1.3. Kuyruk Bağımlılığı

Kuyruk bağımlılığı iki değişkenli bir dağılımın kuyruklarındaki bağımlılığın ölçümüdür. Çok değişkenli rasgele değişken içeren vektörlerin kuyruk bağımlılıkları genel olarak iki değişkenli marjinal dağılımın fonksiyonlarına bağlıdır. Bu durumda kuyruk dağılımı bir

rasgele değişkeninin belirli bir değerin altında/üstünde olduğu bilindiğinde, diğer rasgele değişkenin de aynı değerin altında/üstünde olma olasılığını vermektedir [51].

X ve Y sürekli rasgele değişkenleri sırasıyla F ve G dağılım fonksiyonlarına sahip olsun. Kopula teorisi altında üst kuyruk bağımlılığı;

$$\lambda_u = \lim_{t \rightarrow 1^-} P[Y > G^{-1}(t) | X > F^{-1}(t)] \quad (3.6)$$

eşitliği ile, alt kuyruk bağımlılığı ise;

$$\lambda_l = \lim_{t \rightarrow 0^+} P[Y \leq G^{-1}(t) | X \leq F^{-1}(t)] \quad (3.7)$$

eşitliği yardımıyla hesaplanabilmektedir [51].

Kuyruk bağımlılığı ölçümleri olan üst ve alt kuyruk bağımlılığı parametreleri sadece kopula türüne bağlıdır [44].

### 3.2. Kopula Teorisi

Kopula kavramı ilk defa 1959 yılında Sklar'ın çalışmasıyla literatüre girmiştir [52]. Bağımlı olan rasgele değişkenlerin modellenmesinde kopulalar kullanılmaktadır. Kopula, tek değişkenli marjinal dağılımları ortak çok değişkenli bir dağılım fonksiyonu oluşturabilmek için bir araya getiren bir fonksiyondur. Kopulalar; çok boyutlu rasgele değişkenlerle kullanılabilmesi, matematiksel olarak kullanımının kolay olmasından dolayı bağımlılık modellemesinde sıkça tercih edilmektedir [53].

#### Tanım 3.2 (Kopula fonksiyonu)

C fonksiyonunun kopula fonksiyonu olarak tanımlanabilmesi için, aşağıda yer alan üç özellik sağlanmalıdır:

- i.  $C(u_1, \dots, u_n)$  fonksiyonu  $u_i$ 'nin her bir elemanı için artan bir fonksiyondur.
- ii. Tüm  $i \in \{1, \dots, n\}$  için  $C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i$ ,  $u_i \in [0, 1]$  eşitliği sağlanmalıdır.
- iii. Tüm  $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in [0, 1]^n$  değerleri için  $a \leq b$  olması durumunda

$$\sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_n=1}^2 (-1)^{i_1 + \dots + i_n} C(u_{1,i_1}, \dots, u_{n,i_n}) \geq 0$$

Tüm j ler için  $u_{j1} = a_j, u_{j2} = b_j$  olması koşuluyla eşitsizlik sağlanmalıdır [44].

### 3.2.1.Sklar's Teoremi

$F_1, \dots, F_n$  marjinallerine ait ortak dağılım fonksiyonu  $H$  ile gösterilsin.

$$H(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \quad (3.8)$$

eşitliğini sağlayan bir  $C$  kopulası vardır. Eğer  $F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)$  marjinal dağılımları sürekli ise,  $C$  tek bir fonksiyondur. Buna karşılık, eğer  $C$  kopula fonksiyonu olarak tanımlı ise ve  $F_1, \dots, F_n$  tek değişkenli dağılım fonksiyonları ise,  $H$  fonksiyonu marjinallerin ortak fonksiyonu olarak tanımlanmakta ve  $H(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$  eşitliğindeki gibi yazılabilmektedir.

Eşitlik 3.8'i sağlayan  $F$  fonksiyonunun yarı tersi  $F^{(-1)}$  fonksiyonudur ve bu fonksiyonun tanım kümesi  $(0,1)$ 'dir. Bu fonksiyon aşağıda verilen özellikleri sağlamaktadır:

1. Eğer  $t$  değeri  $F$ 'in tanım bölgesi olan  $[0,1]$  aralığında ise yarı ters fonksiyon  $F^{(-1)}(t)$   $R$ 'de bir  $x$  için  $F(x)=t$ 'ye eşit olmaktadır.
2. Eğer  $t$  değeri  $[0,1]$  aralığında değilse, yarı ters fonksiyon  $F^{(-1)}(t) = \inf\{x: F(x) \geq t\} = \sup\{x: F(x) \leq t\}$  eşitsizliklerini sağlamaktadır [54].

$F$  fonksiyonu kesin artan fonksiyon ise tek bir yarı terse sahiptir.

#### Teorem 3.1

$H, C, F_1, \dots, F_n$  fonksiyonları Eşitlik 3.8'teki gibi tanımlanmış olsun.

$u_1, \dots, u_n = F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)$  şeklinde tanımlansın.

$F_1^{(-1)}, \dots, F_n^{(-1)}$  fonksiyonları  $F_1, \dots, F_n$  fonksiyonlarının tersidir.

Bu durumda  $C(u_1, \dots, u_n) = H(F_1^{(-1)}(u_1), \dots, F_n^{(-1)}(u_n))$   $[0,1]^n$  aralığında yer alan herhangi bir  $u$  için eşitliği sağlanmaktadır.

### 3.2.2. Değişmezlik Teoremi

$X_1, X_2, \dots, X_n$  'ler  $C$  kopulasına sahipse,  $Y_1=h_1(X_1), Y_2=h_2(X_2), \dots, Y_n=h_n(X_n)$ 'ler aynı  $C$  kopulasına sahiptir. Burada  $Y_i$ 'lerin  $X_i$ 'nin artan fonksiyonu olması koşulu mevcuttur. Kopula  $C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) = C(h_1(F_1(x_1)), \dots, h_n(F_n(x_n)))$  eşitliğiyle yazılmaktadır. Değişmezlik teoremi, kopulaların rasgele değişkenlerin doğrusal olmayan dönüşümlerinden etkilenmediğini göstermektedir [45].

### 3.2.3. Fréchet-Hoeffding Sınırları

$[0,1] \times [0,1]$  tanım aralığında yer alan her  $(u,v)$  çifti için

$W(u,v) = \max(u+v-1,0) \leq C(u,v) \leq \min(u,v) = M(u,v)$  sınırlarına Fréchet-Hoeffding sınırları adı verilmektedir.

Marjinalleri sırasıyla  $F$  ve  $G$  olan  $X$  ve  $Y$  rasgele değişkenleri olsun. Bu rasgele değişkenlere ait ortak marjinal dağılım fonksiyonu ise  $H$  ile gösterilsin.  $R$ 'deki tüm  $x$  ve  $y$  değerleri için sınırlar eşitsizlikteki gibidir:

$$\max ( F(x)+G(y)-1,0) \leq H (x,y) \leq \min ( F(x)+G(y))$$

$u_1, u_2, \dots, u_n$  biçimindeki  $n$  boyutlu kopulalar için sınırlar;

$$\max ( u_1+ \dots +u_n -n+1, 0) \leq C(u_1, \dots, u_n) \leq \min (u_1, \dots, u_n) \text{ olarak yazılmaktadır [55].}$$

#### **Teorem 3.2**

$X$  ile  $Y$  sürekli rasgele değişkenler olsun ve  $X$  ile  $Y$ 'nin  $C_{XY}$  kopulasına sahip olduğu varsayalım.  $f$  ve  $g$  fonksiyonları sırasıyla  $X$  ve  $Y$  rasgele değişkenlerinin tanım bölgesinde kesin monoton fonksiyonlar olsun.

Bu durumda aşağıdaki eşitlikler sağlanmaktadır:

1. Eğer  $f$  ve  $g$  fonksiyonları kesin artan fonksiyonlar ise,  
 $C_{f(X),g(Y)}(u,v) = C_{XY}(u,v)$
2. Eğer  $f$  ve  $g$  fonksiyonları kesin artan fonksiyonlar ise,  
 $C_{f(X),g(Y)}(u,v) = u - C_{XY}(u, 1-v)$
3. Eğer  $f$  ve  $g$  fonksiyonları kesin artan fonksiyonlar ise,  
 $C_{f(X),g(Y)}(u,v) = v - C_{XY}(1-u, v)$
4. Eğer  $f$  ve  $g$  fonksiyonları kesin artan fonksiyonlar ise,  
 $C_{f(X),g(Y)}(u,v) = u+v-1 + C_{XY}(1-u, 1-v)$  [45, 56].

### 3.3. Kopula Aileleri

Kopulalar belirli özelliklerine göre birçok gruba ayrılabilir. En çok bilinen kopula aileleri eliptik ve Arşimed kopula aileleridir. Tezin bu kısmında bu iki kopula ailesine ait özellikler ve tanımlamalara yer verilecektir.

#### 3.3.1. Eliptik Kopulalar

Bu kopula ailesi çok değişkenli eliptik dağılımlardan türemiştir. Eliptik dağılımlar birçok çok değişkenli dağılım türlerini içermektedir. Eliptik kopulalar kolayca sentezlenebilmeleri sebebiyle benzetim içeren çalışmalarda tercih edilmektedirler [45]. En bilinen eliptik kopulalar Gaussian kopula ve t kopuladır.

##### 3.3.1.1. Gaussian Kopula

Gaussian kopula R korelasyon matrisine sahip, çok değişkenli normal dağılımdan türemiştir. Gaussian kopula

$$C_R^{Ga}(u) = \Phi_R^n(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n)) \quad (3.9)$$

formunda yazılmaktadır [45]. Eşitlikte yer alan  $\Phi^{-1}$  tek değişkenli standart normal dağılımın tersini göstermektedir.  $\Phi_R^n$  ise n değişkene sahip standart normal dağılımın ortak dağılım fonksiyonunu ifade etmektedir.

Gaussian kopula yoğunluk fonksiyonu ise Eşitlik 3.10'daki gibi yazılmaktadır:

$$c^{Ga}(u) = \frac{1}{|R|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} u^T (R^{-1} - I) u\right) \quad (3.10)$$

fonksiyonda yer alan  $u = (u_1, \dots, u_n)$  vektörüdür. I birim matristir ve paydada yer alan  $|R|$  işareti determinanı göstermektedir.

##### 3.3.1.2. t-kopula

t-kopula çok değişkenli student t dağılımından türemiştir.

t-kopula;

$$C_{v,P}^t(u) = \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(u_1)} \cdots \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(u_d)} \frac{\Gamma\left(\frac{v+d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\sqrt{(\pi v)^d |P|}} \left(1 + \frac{x' P^{-1} x}{v}\right)^{-\frac{v+d}{2}} dx \quad (3.11)$$

formunda yazılmaktadır [44]. Eşitlikte yer alan  $v$  serbestlik derecesidir.  $t$ -kopulaya ait olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$c_{v,P}^t(u) = \frac{f_{v,P}(t_v^{-1}(u_1), \dots, t_v^{-1}(u_d))}{\prod_{i=1}^d f_v(t_v^{-1}(u_i))} \quad (3.12)$$

eşitliğiyle yazılmaktadır.

Serbestlik derecesi  $v$  sonsuza gittikçe  $t$ -kopula gaussian kopulaya yakınsamaktadır.

### 3.3.2. Arşimed Kopulalar

Arşimed kopulalar birçok kopulayı bünyesinde barındıran bir kopula ailesidir. Arşimed kopulaların temel avantajı formüllerinin basit olması ve kolay uygulanabilir olmalarıdır.

#### 3.3.2.1. İki Değişkenli Arşimed Kopulalar

Arşimed kopulalar üretici fonksiyonlar ile üretilmektedir.  $\varphi$  üretici fonksiyon,  $\varphi^{-1}$  üretici fonksiyonun tersi olmak üzere iki değişkenli arşimed kopula;

$$C(u, v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v)) \quad (3.13)$$

olarak yazılmaktadır.

Üretici fonksiyon aşağıdaki özellikleri sağlamaktadır:

- $\varphi: [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$
- $\varphi(0) = \infty$
- $\varphi(1) = 0$

Üretici fonksiyonun  $\varphi(0) = \infty$  koşulunu sağlamaması durumunda, üretici fonksiyon yerine sözde tersi fonksiyonu kullanılır.

- $\varphi: [0,1] \rightarrow [0, \infty]$  sürekli ve kesin azalan bir fonksiyon,
- $\varphi(0) \leq 0$
- $\varphi(1) = 0$

olmak üzere  $\varphi^{[-1]}(t)$  üretici fonksiyonun sözde tersidir.

Üretici fonksiyonun sözde tersi aşağıdaki eşitlikteki gibi yazılmaktadır:

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t), & 0 \leq t \leq \varphi(0) \\ 0, & t \geq \varphi(0) \end{cases}$$

Sözde ters fonksiyon sürekli ve  $[0, \infty]$  aralığında artmayan bir fonksiyondur.  $[0,1]$  aralığında  $\varphi^{[-1]}(\varphi(u)) = u$  olur ve

$$\varphi(\varphi^{[-1]}(t)) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq \varphi(0) \\ \varphi(0), & \varphi(0) \leq t \leq \infty \end{cases} = \min(t, \varphi(0))$$

Eğer,  $\varphi(0) = \infty$  ise  $\varphi^{-1} = \varphi^{[-1]}$  olmaktadır [44].

Yukarıda eşitliklerde tanımlanan sözde tersi fonksiyon ile iki değişkenli Arşimed kopula,

$$C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)) \quad (3.14)$$

eşitliğiyle yazılmaktadır.

$\varphi(0) = \infty$  olması durumunda üretici fonksiyon tam üreticidir denilir.

$C, \varphi$  üretici fonksiyonu ile bir Arşimed kopula olsun. Bu durumda aşağıda verilen özellikler sağlanmaktadır:

1.  $[0,1]$  aralığında bulunan tüm  $u, v$ 'ler için  $C$  kopulası simetriktir,  $C(u, v) = C(v, u)$ 'dur.
2.  $[0,1]$  aralığında bulunan tüm  $u, v, w$ 'lar için  $C$  kopulası değiştirilebilirdir,  $C(C(u, v), 1) = C(u, C(v, w))$ 'dir.
3.  $c$  sıfırdan büyük olmak üzere ( $c > 0$ ), her  $c$  için üretici fonksiyonun  $c$  ile çarpımı da kopula için bir üreticidir.



Uygulamada en çok kullanılan Arşimed kopula türleri Frank, Clayton ve Gumbel kopulalardır. İki değişkenli Frank, Clayton ve Gumbel kopulaların fonksiyonları aşağıda verilmiştir [44].

- **Frank Kopula**

Arşimed kopula türlerinden Frank kopula, 1979 yılında Frank tarafından fonksiyonel bir eşitlik problemine çözüm olarak bulunmuştur [57].

$$C_{\theta}^{Fr}(u_1, u_2) = -\frac{1}{\theta} \ln \left( 1 + \frac{(e^{-\theta u_1} - 1)(e^{-\theta u_2} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right) \quad \theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (3.15)$$

- **Clayton Kopula**

Arşimed kopula türlerinden Clayton kopula, 1975 yılında Kimeldorf ve Sampson [58] tarafından bulunmuştur. Ancak daha sonra Clayton tarafından geliştirilmiş ve Clayton ismiyle literatürde yer almıştır [59].

$$C_{\theta}^{Cl}(u_1, u_2) = \left( \max \{u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1, 0\} \right)^{-\frac{1}{\theta}} \quad \theta \in [-1, \infty) \quad (3.16)$$

- **Gumbel Kopula**

Arşimed kopula türlerinden Gumbel kopula, Cauchy dağılımı marjinalleri kullanılarak 1956 yılında ilk kez Morgenstern [60] tarafından çalışılmıştır. Gumbel [61] ve Farlie [62] çalışmalarıyla ilerletilmiştir. Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM) adı ile de bilinmektedir.

$$C_{\theta}^{Gu}(u_1, u_2) = \exp \left[ - \left( (-\ln u_1)^{\theta} + (-\ln u_2)^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \right] \quad \theta \in [1, \infty) \quad (3.17)$$

Arşimed kopula ailesinden olan bu üç kopulanın parametrelerinin tanım aralığı ve üretici fonksiyonları Çizelge 3.1’de verilmiştir.

Çizelge 3.1. Frank, Clayton ve Gumbel kopularının parametreleri ve üretici fonksiyonları

Kopula türü	Parametre	$\varphi(t)$
Frank	$\theta \in (0, \infty)$	$-\log(1 - (1 - e^{-\theta}) \exp(-t))$
Clayton	$\theta \in (0, \infty)$	$(1+t)^{-1/\theta}$
Gumbel	$\theta \in [1, \infty)$	$\exp(-t^{1/\theta})$

### 3.3.2.2. Çok Değişkenli Arşimed Kopulalar

Üretici fonksiyon kullanılarak n boyutlu Arşimed kopularının genel formülü aşağıdaki eşitlikteki gibi yazılmaktadır:

$$C^n(u) = \varphi(\varphi^{-1}(u_1) + \dots + \varphi^{-1}(u_n)) = \varphi(t(u)) \quad (3.18)$$

Formülde yer alan  $t(u) = \sum_{j=1}^d \varphi^{-1}(u_j)$  eşitliğiyle hesaplanmaktadır.

$C^n(u)$  n boyutlu kopuladır, ancak ve ancak  $\varphi^{-1}$ ,  $[0, \infty)$  aralığında kesin monotondur. n boyutlu Clayton ve Frank kopula sırasıyla aşağıdaki gibi yazılmaktadır:

$$C_{\theta}^{CL}(u) = (u_1^{-\theta} + \dots + u_n^{-\theta} - n + 1), \quad \theta > 0$$

$$C_{\theta}^F(u) = -\frac{1}{\theta} \ln \left( 1 + \frac{(e^{-\theta u_1} - 1)(e^{-\theta u_2} - 1) \dots (e^{-\theta u_n} - 1)}{(e^{-\theta} - 1)^{n-1}} \right), \quad \theta > 0$$

## 3.4. Genelleştirilmiş Doğrusal Modeller

### 3.4.1. Genelleştirilmiş Doğrusal Model Teorisi

Genelleştirilmiş doğrusal modeller (GDM) klasik doğrusal modellerin genelleştirilmiş versiyonudur ve 1972 yılında Nelder ile Wedderburn'ün ortak çalışması [63] ile literatüre dahil edilmiştir. GDM yaklaşımı diğer doğrusal modellerle kıyaslandığında en büyük avantajı, bağımlı değişkenin dağılımının normal dağılımdan başka dağılımlara sahip olabilmesidir. GDM yaklaşımına göre bağımlı değişkenin dağılımının üstel dağılım

ailesinden bir dağılıma sahip olması gerekmektedir. Üstel dağılım ailesine ait olduğu varsayılan bir dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonunu aşağıdaki gibi yazılmaktadır:

$$f(y, \theta, \phi) = \exp\left\{\frac{y\theta - b(\theta)}{a(\phi)}\right\} + \kappa(y, \phi) \quad (3.19)$$

a,b,κ ifadeleri fonksiyonlar, θ kanonik parametresi, φ>0 ise yayılım parametresidir. Kanonik parametresi gözlem değerlerine bağlı iken, yayılım parametresi her gözlem için sabittir [64].

Üstel dağılım ailesi genel gösteriminde yer alan b fonksiyonunun iki kez türevlenebilir bir fonksiyon olduğu varsayılmaktadır. Bu varsayım, dağılımın beklenen değeri ve varyansı arasındaki ilişkiyi tanımlamayı mümkün kıldığı için GDM modellerde önemli bir rol oynamaktadır.

Literatürde kullanılan birçok dağılım (normal dağılım, gamma dağılımı, poisson dağılımı, binom dağılımı, negatif binom dağılımı) üstel dağılım ailesi üyesidir. Genel gösterimde yer alan a,b ve κ fonksiyonları kullanılan dağılıma göre değişmektedir. a,b ve κ fonksiyonları dağılıma göre belirlendikten sonra, üstel dağılım ailesinden bir dağılıma sahip olan rastgele değişken Y'nin beklenen değer ve varyansı aşağıdaki gibi yazılmaktadır:

$$E(Y) = \mu = b'(\theta)$$

$$Var(Y) = b''(\theta)a(\phi)$$

Y değişkeninin varyansına ait eşitlikte yer alan  $b''(\theta)$  ifadesi varyans fonksiyonu olarak adlandırılmaktadır [65].

GDM yaklaşımındaki bağımlı değişken y'nin y'leri içeren bir vektörden  $y = (y_1, \dots, y_n)^T$  olduğu varsayılmaktadır.

GDM yaklaşımında bağımlı değişkenin ortalamasını doğrudan doğrusal tahmin edici olan  $X\beta$ 'nin fonksiyonu olarak ifade etmek yerine  $g(\mu)$  fonksiyonu ile aşağıdaki şekilde modellenmektedir [65]:

$$g(\mu) = \eta = X\beta$$

Bu gösterimde X matrisi n satır sayısına ve p sütun sayısına sahip bir matristir. Bu matris tasarım matrisi (design matrix) denilmektedir. Gösterimde yer alan β ise tahmin edilmesi gereken parametreleri içeren p boyutlu bir vektördür. Modelde yer alan g fonksiyonu bağ fonksiyonu olarak adlandırılmaktadır. Bağ fonksiyonu monoton ve türevlenebilir olmalıdır.

Modele uygun bağ fonksiyonun seçimi modellenen veriye bağlıdır. En çok kullanılan bağ fonksiyonları; logit bağ fonksiyonu, karekök bağ fonksiyonu, logaritmik bağ fonksiyonu, birim bağ fonksiyonu olup ortalama fonksiyonlarıyla Çizelge 3.2’de verilmiştir.

Çizelge 3.2. Bazı önemli bağ fonksiyonları

Bağ fonksiyonu	Ortalama fonksiyonu
Birim bağ fonksiyonu	$\mu=X\beta$
Logit bağ fonksiyonu	$\mu=\exp(X\beta)/(1+\exp(X\beta))$
Probit bağ fonksiyonu	$\mu=\Phi(X\beta)$
Logaritmik bağ fonksiyonu	$\mu=\exp(X\beta)$
Ters bağ fonksiyonu	$\mu=(X\beta)^{-1}$

GDM modeller üç bileşenden oluşmaktadır. Bunlardan ilki rassal bileşen olan yanıt değişkeni, diğeri sistematik bileşen olan açıklayıcı değişkenlerin doğrusal kombinasyonu, sonuncu ise bağ fonksiyonudur [66].

Üstel dağılım ailesine sahip bir veri ile çalışılırken, bağ fonksiyonu belirlendikten sonra modele ait parametreler tahmin edilebilmektedir. GDM yaklaşımında bu parametreler genellikle en çok olabilirlik yöntemi kullanılarak tahmin edilmektedir. En çok olabilirlik yöntemi ile parametre tahmini yapılırken log-olabilirlik fonksiyonunun, parametre vektörü  $\beta$ 'nın elemanlarına göre türevi alınır ve sifıra eşitlenir.

Modelin en çok olabilirlik tahminleri elde edildikten sonra modelin değerlendirilmesi yapılmaktadır. Bu aşamada kullanılan birçok yöntem bulunmaktadır. Bunlardan biri Akaike bilgi kriteri ve modelin en çok olabilirlik değeridir. GDM yaklaşımında modelin uygunluğunu test etmede kullanılan bir diğere yöntem artıkların analizidir. Bu tezde bağ fonksiyonun modele uyumu araştırılırken Pearson artıkları dikkate alınmıştır.

Pearson artıkları aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır:

$$r_i^{(P)} = \frac{y_i - \hat{\mu}_i}{\sqrt{V(\hat{\mu}_i)}} \quad i=1, \dots, n \quad (3.20)$$

Formülde yer alan  $\hat{\mu}_i$  ortalama olan  $\mu_i$  değerinin tahminidir [66].

### 3.4.2. Hasar Gelişim Üçgenleri ile GDM

Hasar gelişim üçgenlerinde yer alan hasar tutarlarının parametrik dağılımdan geldiği varsayımı altında marjinal dağılımlar Eşitlik 3.21'deki gibi ifade edilmektedir:

$$F_{i,j}^{(n)} = P \{ X_{i,j}^{(n)} \leq x_{i,j}^{(n)} \} = F^{(n)}(\eta_{i,j}^{(n)}, \gamma^{(n)}) \quad , \quad n=1, \dots, N \quad (3.21)$$

Gösterimde yer alan;

- n hasar gelişim üçgeni sayısını,
- $F^{(n)}$  marjinal dağılıma ait dağılım fonksiyonunu,
- $\gamma^{(n)}$  vektörü marjinal dağılımdan gelen parametreleri (ölçek parametresi, şekil parametresi gibi),
- $\eta_{i,j}^{(n)}$  ise modelin sistematik ögesini göstermektedir [67]. Bu tezde sistematik ögeyi

modellemek için kullanılan regresyon modelinde açıklayıcı değişkenler kaza yılları ve gelişim yılları olacaktır.

$\alpha_i^{(n)}$ ,  $i \in \{0, \dots, I\}$  olmak üzere kaza yılına ait parametreler,  $\tau_j^{(n)}$ ,  $j \in \{0, \dots, J\}$  olmak üzere gelişim yılına ait parametreler olmak üzere sistematik öge aşağıdaki eşitlikteki gibi yazılmaktadır:

$$\eta_{i,j}^{(n)} = \zeta^{(n)} + \alpha_i^{(n)} + \tau_j^{(n)} = X \beta^{(n)} \quad (3.22)$$

Bu gösterimde i kaza yılı, j gelişim yılı, n ise hasar gelişim üçgeni sayısını göstermektedir.  $\eta_{i,j}^{(n)}$  ifadesi n. hasar gelişim üçgeni için i. kaza yılı ve j. gelişim yılında hesaplanan sistematik ögedir. Eşitlikte yer alan  $\zeta^{(n)}$  n. hasar gelişim üçgeni için sabit değerdir [21].

Sistematik öge yazılışında yer alan X matrisi n satır sayısına ve p sütun sayısına sahip bir matristir. Bu matrise tasarım matrisi (design matrix) denilmektedir. Gösterimde yer alan  $\beta$  ise tahmin edilmesi gereken parametreleri içeren p boyutlu bir vektördür. Hasar gelişim üçgenleri GDM model ile çalışılırken X matrisi, hasar gelişim üçgenindeki kaza yılları ve gelişim yıllarına göre doldurulmaktadır.

Bu varsayımlarla birlikte GDM model için tahmin edilecek parametreleri içeren beta vektörü aşağıdaki gibi yazılmaktadır:

$$\beta^{(n)} = \left( \zeta^{(n)}, \alpha_1^{(n)}, \dots, \alpha_I^{(n)}, \tau_1^{(n)}, \dots, \tau_J^{(n)} \right) \quad (3.23)$$

Sistemantik ögenin kaza yılı ve gelişim yılı parametreleriyle ifade edildiği GDM modelde tahmin edilmesi gereken parametreler; her bir hasar gelişim üçgeni için sabit değerler, her bir hasar gelişim üçgeni için kaza yılı parametreleri ve gelişim yılı parametrelerinden oluşmaktadır [67].

### 3.4.3. Hasar Gelişim Üçgenleri ile GDM Normal Model

$X_{i,j}^{(n)}$  hasar tutarlarının  $\mu_{i,j}^{(n)}$  ve  $(\sigma^{(n)})^2$  parametreleri ile normal dağılıma sahip olduğu varsayımı altında;

$$X_{i,j}^{(n)} \sim N\left(\mu_{i,j}^{(n)}, (\sigma^{(n)})^2\right) \quad \text{olarak gösterilmektedir.}$$

Bu durumda bağ fonksiyonu olarak birim bağ fonksiyonu ve logaritmik bağ fonksiyonları kullanıldığı varsayıldığında sistemantik öge eşitlikleri aşağıdaki gibi yazılmaktadır.

Bağ fonksiyonu logaritmik bağ fonksiyonu iken sistemantik öge;

$$\eta_{i,j}^{(n)} = \zeta^{(n)} + \alpha_i^{(n)} + \tau_j^{(n)} = \log\left(\mu_{i,j}^{(n)}\right) \quad (3.24)$$

$$E\left(X_{i,j}^{(n)}\right) = \mu_{i,j}^{(n)} = \exp\left(\eta_{i,j}^{(n)}\right) = \exp\left(\zeta^{(n)} + \alpha_i^{(n)} + \tau_j^{(n)}\right) \quad (3.25)$$

Bağ fonksiyonu birim bağ fonksiyonu iken sistemantik öge;

$$E\left(X_{i,j}^{(n)}\right) = \mu_{i,j}^{(n)} = \eta_{i,j}^{(n)} = \zeta^{(n)} + \alpha_i^{(n)} + \tau_j^{(n)} \quad (3.26)$$

eşitlikleriyle hesaplanmaktadır.

Her iki bağ fonksiyonu eşitliği için de parametre tahminleri GDM model ile yapılmaktadır.

### 3.5. Kopula Regresyon Model

Regresyon analizi en çok kullanılan istatistiksel yöntemlerden biridir. Ancak aktüeryal uygulamalarda bağımlılıklar genel olarak doğrusal olmadığı için ve bazı durumlarda bağımlı değişkenin dağılımı normal dağılım varsayımını sağlamadığı için regresyon analizi kullanışlı olmamaktadır. Bu durumlarda genellikle GDM modeller kullanılmaktadır. GDM modelde bağımlı değişkenin üstel dağılım ailesine ait olduğu varsayılmaktadır. Bu tür kısıtların sağlanamadığı modellerde regresyon analizi veya GDM model yerine kopula regresyon modelleri kullanılmaktadır.

Kopula regresyon yöntemine göre;

- bağımlılık yapıları doğrusal olmak zorunda değildir,
- tüm hasar gelişim üçgenleri aynı dağılım ile modellenmek zorunda değildir.

Çok değişkenli regresyon yöntemlerine kopulanın dahil edilmesi farklı iş kolları için farklı dağılım kullanabilme fırsatı vermektedir. Kopula regresyon modellerin en büyük avantajı marjinal dağılımlarla ilgili herhangi bir kısıtlaması olmamasıdır.

Kopula regresyon yönteminde hasarlar tutarlarının ortak dağılımı bir kopula fonksiyonu ile ifade edilmektedir. Sklar's teoremi kullanılarak standartlaştırılmış ve birikimli olmayan hasarlar kopula fonksiyonu yardımıyla aşağıdaki gibi ifade edilmektedir:

$$F_{i,j} \left( x_{i,j}^{(1)}, \dots, x_{i,j}^{(N)} \right) = P \left\{ X_{i,j}^{(1)} \leq x_{i,j}^{(1)}, \dots, X_{i,j}^{(N)} \leq x_{i,j}^{(N)} \right\} \quad (3.26)$$

$$F_{i,j} \left( x_{i,j}^{(1)}, \dots, x_{i,j}^{(N)} \right) = C \left( F_{i,j}^{(1)} \left( x_{i,j}^{(1)} \right), \dots, F_{i,j}^{(N)} \left( x_{i,j}^{(N)} \right); \theta \right) \quad (3.27)$$

Bu yazılıştta  $F_{i,j}^{(n)}$ 'ler Eşitlik 3.21'de tanımlandığı gibidir.

$C(\bullet; \theta)$  fonksiyonunda yer alan  $\theta$  parametresi, kopula parametresidir [44].

Kopula regresyon yöntemi kullanılarak modelleme yapılırken, her iş koluna ait hasar gelişim üçgeni için marjinal dağılımlar belirlenmeli ve veri yapısına uygun olan kopula seçilmelidir. Marjinal dağılımlar belirlenip uygun kopula seçimi yapıldıktan sonra parametre tahminleri yapılmaktadır. Modele kopulanın da eklenmesiyle birlikte Eşitlik 3.23'te yer alan ve tahmin edilecek parametreleri içeren beta vektörüne kopula parametresi de dahil olmaktadır. Bilinmeyen parametreleri içeren vektör kopula parametresi de dahil edilerek güncellendiğinde:

$$\phi = \left( \beta^{(1)}, \dots, \beta^{(N)}, \gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(N)}, \theta \right) \quad (3.28)$$

olarak yazılmaktadır. Bu durumda kopula regresyon modelde tahmin edilmesi gereken parametreler; her bir hasar gelişim üçgeni için sabit değerler, her bir hasar gelişim üçgeni için kaza yılı parametreleri ve gelişim yılı parametreleri ile kopula parametresinden oluşmaktadır [68, 69].

Bu modele dayalı parametre tahminleri literatürde en çok kullanılan en çok olabilirlik yöntemi ile yapılmıştır. Kopula regresyon modelinde ortak dağılım fonksiyonu yazılmak istenildiğinde:

$$f_{i,j} \left( x_{i,j}^{(1)}, \dots, x_{i,j}^{(N)} \right) = c \left( F_{i,j}^{(1)} \left( x_{i,j}^{(1)} \right), \dots, F_{i,j}^{(N)} \left( x_{i,j}^{(N)} \right); \theta \right) \prod_{n=1}^N f_{i,j}^{(n)} \quad (3.29)$$

eşitliği elde edilmektedir. Bu eşitlikte yer alan olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f_{i,j}^{(n)} = f^{(n)} \left( x_{i,j}^{(n)}; \eta_{i,j}^{(n)}; \gamma^{(n)} \right) \quad n=1, \dots, N \quad (3.30)$$

olarak yazılmaktadır. Birikimli dağılım fonksiyonu Eşitlik 3.21’de verilmiştir.

Ortak dağılım fonksiyonu yazıldıktan sonra olabilirlik ve log-olabilirlik fonksiyonları sırasıyla Eşitlik 3.31 ve 3.32’deki gibi elde edilmektedir:

$$L(\phi, x_{ij}^{(n)}) = \prod_{i=0}^I \prod_{j=0}^{I-i} c \left( F_{ij}^{(1)} \left( x_{ij}^{(1)} \right), \dots, F_{ij}^{(N)} \left( x_{ij}^{(N)} \right); \theta \right) \cdot \prod_{n=1}^N f_{ij}^{(n)} \quad (3.31)$$

$$\ell \left( \phi, x_{ij}^{(n)} \right) = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \ln c \left( F_{ij}^{(1)} \left( x_{ij}^{(1)} \right), \dots, F_{ij}^{(N)} \left( x_{ij}^{(N)} \right); \theta \right) + \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \sum_{n=1}^N \ln f_{ij}^{(n)} \quad (3.32)$$

Modelin en çok olabilirlik tahmini  $\Phi$  ile ifade edilirse, bu değer  $\hat{\phi} = \text{argsup } \ell \left( \phi, x_{ij}^{(n)} \right)$  çözümlenerek elde edilmektedir [70, 71].

Tahmin edilecek parametre sayısı veride bulunan iş kolu sayısına, kaza yılı sayısına ve gelişim yılları sayısına, ayrıca seçilen kopulaya göre değişmektedir. Parametre sayısı arttıkça tahmin problemi daha zor ve karmaşık olmaktadır.

Parametre sayısından ötürü tahmin etme sürecinin karışık ve zor olduğu durumlarda parametre tahmini için kullanılan yaklaşım marjinallere göre çıkarsama yöntemidir (inference for margins -IFM).

### 3.5.1. Kopula Tahmin Yöntemi: Marjinallere Göre Çıkarsama

Joe ve Xu [72] tarafından geliştirilen bir yöntemdir. Parametre sayısının fazla olduğu, çok boyutlu, karışık ve hesaplanması zor olan durumlarda IFM yöntemi kullanılmaktadır. IFM yönteminde tahminler, en çok olabilirlik yöntemine göre daha kolay hesaplanmaktadır [73-76]. IFM yöntemi iki adımdan oluşmaktadır. İlk adımda marjinal dağılımın parametreleri tahmin edilir. İlk adımda tahmin edilecek olan parametreler aşağıdaki vektör ile yazılıns:



$$\hat{\phi}_{IFM} = \left( \hat{\beta}^{(1)}, \dots, \hat{\beta}^{(N)}, \gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(N)} \right)^T$$

Bu parametrelerin tahmini için

$$\hat{\phi}_{IFM} = \arg \max \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \sum_{n=1}^N \log f_{i,j}^{(n)}$$

fonksiyonu maksimize edilmelidir. İkinci adımda ise ilk adımda tahmin edilen bu parametreler yerine yazılarak kopula parametresi tahmin edilmektedir.

$$\ell(\theta, x_{i,j}^{(n)}) = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \text{inc} \left( \tilde{F}_{ij}^{(1)}(x_{ij}^{(1)}), \dots, \tilde{F}_{ij}^{(N)}(x_{ij}^{(N)}); \theta \right) \text{ fonksiyonu maksimize edilerek}$$

$$\hat{\theta} = \arg \max \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \log c \left( \tilde{F}_{ij}^{(1)}(x_{ij}^{(1)}), \dots, \tilde{F}_{ij}^{(N)}(x_{ij}^{(N)}); \theta \right) \text{ olacak şekilde kopula parametresi } \theta$$

tahmin edilmektedir [77]. Bu iki adım tamamlanarak marjinallere göre çıkarsama yöntemiyle parametre tahminleri yapılmaktadır.

### 3.5.2. Kopula için Uyum İyiliği Testleri

Kopula regresyon modeli ile çalışılırken, hasar tutarlarının ortak dağılımı kopula ailelerinden seçilebilecek bir kopula ile ifade edilmektedir. Kopula regresyon modeli kullanılırken veriye en uygun olan kopulayı seçmek ve belirlemek gerekmektedir. Kopula ailelerinden en çok kullanılan kopulalar Bölüm 3.3'te verilmiştir. Kopula regresyon yöntemi kullanılarak log-olabilirlik fonksiyonu elde edilip, bu fonksiyonun maksimizasyonu yapıldığında, modelin değerlendirilme aşamasında log-olabilirlik değerleri kullanılmaktadır [78-81].

Son zamanlarda kopula içeren modeller için birçok uyum iyiliği testleri geliştirilmiştir. Bu testlerden biri de blanket testidir. Blanket testi tüm kopula yapılarında uygulanabilir olduğu için ve herhangi bir varsayım gerektirmediği için tercih edilmektedir [82-83].

Kopula parametresi tahmini marjinal dağılımın seçiminden etkilenmektedir. Kopula için uygulanan uyum iyiliği testlerinde temel amaç, kopulanın model için uygunluğunun tek başına değerlendirilmesidir. Sıraya (rank) dayalı uyum iyiliği testleri istatistiksel olarak sabit sonuçlar verdiği için bu tür testlerde kullanışlıdır. Blanket test sıraya dayalı yöntem ile uyum iyiliği testi yapma imkânı sunmaktadır.

Sözde gözlem değerlerinin hesaplanması için kullanılan eşitlikte yer alan  $R_{ij}$  değerleri  $X_{ij}$ 'lerin rankıdır. Hesaplanan  $U$  değerleri test edilen kopuladan gelen gözlem değeri olarak kabul edilmektedir.  $U$ 'ların hesaplandığı Eşitlik 3.33'te yer alan rank dönüşümünün bağımlılık oluşturması sebebiyle  $U$  değerleri artık bağımsız değildir [84]. Sözde gözlem değerleri arasındaki bu bağımlılık dikkate alınmadığı takdirde uyum iyiliği testi doğru sonuçlar vermemektedir.

Genest [81] çalışmasında kopula regresyon modelinin uyum iyiliğini test edebilmek için yedi farklı değer tanımlamıştır. Literatürde yer alan çalışmalar incelendiğinde simülasyon yapılan çalışmalarda yedi değer, ancak gerçek veri seti ile uygulama yapılan çalışmalarda üç değer kullanıldığı görülmüştür. Bu tez çalışmasında gerçek veriyle çalışılması sebebiyle tanımlanan yedi değerden yalnızca üçü kullanılmıştır. Bu üç değer:  $S_m$ ,  $S_m^{(B)}$ ,  $S_m^{(C)}$  olarak

yazılmaktadır. Gösterimlerde yer alan  $m$  değeri  $m = \frac{(I+1)(I+2)}{2}$  eşitliği ile bulunmaktadır

[85]. Kopula regresyon modelde hasarların  $i+j \leq I$  eşitsizliği için çiftler halinde  $(i,j)$  gözlemlenebildiği varsayılmaktadır.

Blanket test için bazı açıklamalar ve gösterimler maddeler halinde aşağıda verilmiştir:

- $X_{i,j} = (X_{i,j}^{(1)}, X_{i,j}^{(2)}, \dots, X_{i,j}^{(N)})$   $(i,j)$  kaza gelişim yılı ve hasar gelişim yılları için gözlemlenen hasar miktarları,
- $R_{i,j}^{(n)}$   $n$ . hasar gelişim üçgeni için  $X_{0,0}^{(n)}, \dots, X_{i,j}^{(n)}, \dots, X_{I,I-1}^{(n)}$  değişkenlerinin rankı,
- $U_{i,j} = (U_{i,j}^{(1)}, U_{i,j}^{(2)}, \dots, U_{i,j}^{(N)})$  değerleri  $i+j \leq I$  eşitsizliği için aşağıda yer alan eşitlikle hesaplanmaktadır:

$$U_{i,j}^{(n)} = \frac{R_{i,j}^{(n)}}{\frac{(I+1)(I+2)}{2}} = \frac{R_{i,j}^{(n)}}{m+1} \quad (3.33)$$

$U_{i,j}$  vektöründe yer alan değerler sözde gözlem değerleridir ve belirlenen kopuladan bir örneklem olarak oluşturulmuştur. Sözde gözlem değerlerine dayalı uyum iyiliği testi yapılırken bu değerlerin karşılıklı bağımlı olmadıkları ve bileşenlerinin yaklaşık olarak Uniform (0,1) dağılıma sahip olduğu varsayılmaktadır.  $U_1, \dots, U_n$  sözde gözlem değerleri arasındaki bağımlılık bir kopula yardımıyla aşağıdaki eşitlikteki gibi ifade edilmektedir:

$$C_m(u_1, \dots, u_N) = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \mathbf{1}\{U_{i,j}^{(1)} \leq u_1, \dots, U_{i,j}^{(N)} \leq u_N\}, \quad u_1, \dots, u_N \in [0,1] \quad (3.34)$$

Blanket testi uygulanırken amaç,  $H_0: C \in C_0$  hipotezini test etmektir. Bu test belirlenen  $C$  kopulası altında  $C_m$  ve tahmin edilen  $C_{\theta_m}$  arasındaki mesafeye dayanmaktadır [86].

Blanket testinde uyum iyiliği ölçütü;  $C_m = \sqrt{m}(C_m - C_{\theta_m})$  ile hesaplanmaktadır. Genest [81] çalışmasında bu ölçütü rank ile ilişkilendirmiş ve düzenlemiştir;

$$S_m = \int_{[0,1]^N} C_m(u)^2 dC_m(u)$$

$S_m^{(B)}$  ve  $S_m^{(C)}$  değerleri Genest [81] çalışmasında sunulmuş Rosenblatt dönüşümüne dayalı değerlerdir ve aşağıda verilen eşitlikler kullanılarak hesaplanmaktadır:

$$S_m^{(C)} = \int_{[0,1]^N} (D_m(u) - \Pi^N(u))^2 dD_m(u)$$

$$S_m^{(B)} = \int_{[0,1]^N} (D_m(u) - \Pi^N(u))^2 du$$

Eşitliklerde yer alan bazı gösterimler:

$$D_m(u) = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \mathbf{1}(E_{i,j} \leq u)$$

$$E_{i,j} = R_{\theta_m}(u_{i,j}), \quad i+j \leq I$$

### 3.6. Parametre Hesaplama Yöntemleri ve Yaklaşımları

Parametre tahminlerinin yapılabilmesi için elde edilen olabilirlik fonksiyonlarında yer alan integrallerin kapalı formda çözümleri olmaması sebebiyle integraller yaklaşım yöntemleri ile çözümlenmektedir. Bu yaklaşım yöntemleri; Gauss-Hermite yaklaşımı, uyarlanabilir Gauss-Hermite yaklaşımı, Laplace yaklaşımı, gradyan yöntemleri, quasi Newton ve Monte Carlo yöntemleri gibi yakınsama sağlayan yöntemlerdir.

Bu çalışmada parametre tahminleri en çok olabilirlik yöntemi ile elde edilmiştir. En çok olabilirlik yöntemi kullanılırken çıkarımı benzetilmiş log-olabilirlik fonksiyonu ile çalışılmıştır. Benzetilmiş en çok olabilirlik fonksiyonun birinci ve ikinci dereceden türevleri

hesaplanabildiği için Davidon-Fletcher-Powell yöntemi (DFP) ve Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno yöntem (BFGS) gibi quasi newton yöntemler kullanılmıştır. [87, 88].

Quasi newton yöntemler genel bir ifadeyle kısmi türevler kullanılarak çözüm elde edilen yöntemlerdir [89]. Bu yöntemler Newton Raphson yöntemi ile aynı kurallara dayanan yöntemler bütünüdür. Ancak quasi newton yöntemlerde Hessian matrisin tersi güncellenirken bir yaklaşımdan faydaniılmaktadır. Bu sebeple bu yöntemler matris tersi alınmasını veya birtakım eşitlik sistemlerinin çözümünü gerektirmez. Bu yöntemlerde uygulanılması gereken adımlar aşağıdaki gibidir:

---

Çizelge 3.3. Quasi Newton yöntemlerinin genel algoritması

---

**Adım 1.** Algoritma için bir başlangıç değeri ( $X^{(0)}$ ) ve hessian matrisin tersi ( $H_0$ ) için bir yaklaşık değer seçilir.

**Adım 2.** Algoritmanın yönü belirlenir.

$$d^{(k)} = -H_k * g^{(k)}$$

**Adım 3.** Algoritmanın yönü belirlenir.

$$\alpha_k = -\frac{d^{(k)T} g^{(k)}}{d^{(k)T} Q d^{(k)}}$$

**Adım 4.** Optimal nokta için bir sonraki tahmin elde edilir.

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + \alpha_k \cdot d^{(k)}$$

**Adım 5.** Hessian matrisin tersinin yaklaşık değeri eşitlikler yardımıyla hesaplanır.

$$\Delta X^{(k)} = X^{(k+1)} - X^{(k)}$$

$$\Delta g^{(k)} = g^{(k+1)} - g^{(k)}$$

**Adım 6.**  $k=k+1$  ile algoritmaya devam edilir ve adım 2'ye dönlür.

Durma kriteri sağlanana kadar adımlar tekrarlanır.

---

Burada  $H_{k+1}$  matrisinin elde edilişi kullanılan gradyan yönteme göre değişmektedir. Böylelikle gradyan yöntemleri birbirinden ayıran adımın beşinci adım olduğu görülmektedir. Hessian matrisin hesaplanamadığı durumlarda Hessian matris yerine birim matris kullanılmaktadır. Hessian matrisinin tersinin elde edilişi kullanılan yöntemin türüne göre değişiklik göstermektedir. Burada üç adet yönteme yer verilmiştir. Bunlar: bir rank düzeltme yöntemi, DFP ve BFGS yöntemleri.

Bu üç yöntemle göre Hessian matris için eşitlikler aşağıdaki gibidir:

- Bir rank düzeltme yöntemi için:

$$H_{k+1} = H_k + \frac{(\Delta x^{(k)} - H_k \Delta g^{(k)})(\Delta x^{(k)} - H_k \Delta g^{(k)})^T}{\Delta g^{(k)T} (\Delta x^{(k)} - H_k \Delta g^{(k)})} \quad (3.35)$$

- DFP yöntemi için:

$$H_{k+1} = H_k + \frac{\Delta x^{(k)} \Delta x^{(k)T}}{\Delta x^{(k)T} \Delta g^{(k)}} - \frac{(H_k \Delta g^{(k)})(H_k \Delta g^{(k)})^T}{\Delta g^{(k)T} H_k \Delta g^{(k)}} \quad (3.36)$$

- BFGS yöntemi için:

$$H_{k+1} = H_k + \left( 1 + \frac{\Delta g^{(k)T} H_k \Delta g^{(k)}}{\Delta g^{(k)T} \Delta x^{(k)}} \right) \cdot \frac{\Delta x^{(k)} \Delta x^{(k)T}}{\Delta x^{(k)T} \Delta g^{(k)}} - \frac{(H_k \Delta g^{(k)} \Delta x^{(k)T}) + (H_k \Delta g^{(k)} \Delta x^{(k)T})^T}{\Delta g^{(k)T} \Delta x^{(k)}} \quad (3.37)$$

Verilen quasi newton yöntemlerinin algoritmaları arasındaki fark Hessian matrisin tersine ait yakınsamaların bulunduğu eşitliklerden kaynaklanmaktadır [90]. Bir rank düzeltme yöntemi üç yöntem arasında Hessian matrisin güncellenme eşitliğinde en basit eşitliğe sahip olan yöntemdir.

### 3.6.1. Newton-Raphson Algoritması

Newton-Raphson (NR) algoritmasının kullanışlı olmasının en büyük sebebi hızlı yakınsamasıdır. Ancak parametrelerin sayısı çok fazla olduğunda Hessian matrisin tersini elde etmek zorlaşmaktadır [91]. NR yönteminin temeli Taylor serisi yakınsamasına dayanmaktadır.

Newton-Raphson yöntemini açıklayabilmek için en basit durumu ele alarak başlayalım. Tek değişkenli fonksiyon olan  $f(w)$  fonksiyonunun minimize edilmeye çalışıldığını düşünelim. Global minimum nokta olan  $w^*$  noktasını bulmaya çalışılmaktadır [91, 92].  $f$  fonksiyonun smooth olduğu,  $w^*$  noktasında türevin sıfır olduğu ve ikinci türevin pozitif olduğu varsayıldığında, Taylor açılımı aşağıdaki gibi yazılabilmektedir:

$$f(w) \approx f(w^*) + \frac{1}{2}(w - w^*)^2 \frac{d^2 f}{dw^2} \Big|_{w=w^*}$$

Başlangıç noktası  $w_0$  olduğunu varsayalım, eğer bu nokta minimum noktaya yakınsa, ikinci dereceden Taylor açılımını  $w_0$  etrafında aşağıdaki gibi yazılabilmektedir:

$$f(w) \approx f(w_0) + (w - w_0) \frac{df}{dw} \Big|_{w=w_0} + \frac{1}{2}(w - w_0)^2 \frac{d^2 f}{dw^2} \Big|_{w=w_0}$$

İkinci dereceden yazılan bu eşitliğin sağ tarafını minimize etmek kolaydır. Türevleri sadeleştirilerek şu şekilde yazalım:

$$\frac{df}{dw} \Big|_{w=w_0} = f'(w_0)$$

$$\frac{d^2 f}{dw^2} \Big|_{w=w_0} = f''(w_0)$$

$w$ 'ye bağlı türev alınıp, 0'a eşitlendiğinde

$$0 = f'(w_0) + \frac{1}{2} f''(w_0) 2(w_1 - w_0) \quad \longrightarrow \quad w_1 = w_0 - \frac{f'(w_0)}{f''(w_0)}$$

$w_1$  değeri başlangıç değeri olan  $w_0$  dan daha iyi bir tahmin olduğu kabul edilmektedir. İterasyon sürecinin genel şekli aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır [93]:

$$w_{n+1} = w_n - \frac{f'(w_n)}{f''(w_n)}$$

### **Birden çok boyut varken NR yöntemi**

$f(w_1, w_2, \dots, w_p)$  olacak şekilde  $f$ 'in çok değişkenli bir fonksiyon olduğunu varsayalım ve  $\vec{w}$  parametreler tek bir vektör olsun. Bu durumda NR iterasyonu Eşitlik 3.38'teki gibidir:

$$\vec{w}_{n+1} = \vec{w}_n - H^{-1}(w_n) \nabla f(\vec{w}_n) \quad (3.38)$$

$\nabla f$   $f$  fonksiyonunu gradyanıdır, ilk türevlerin vektörünü ifade etmektedir.  $H$  ise  $f$  fonksiyonun ikinci türevlerinden oluşan bir matristir ve  $H_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial w_i \partial w_j}$  eşitliğiyle yazılmaktadır [94].

Çizelge 3.4. NR algoritması

---

Newton Raphson algoritması ( $f, x_0, \text{tolerans değeri}$ )

---

1.  $i \leftarrow 0$
  2.  $|\nabla f(x_i)| > \text{tolerans değeri}$  ise
  3.  $i \leftarrow i+1$
  4.  $x_i = x_{i-1} - [D^2 f(x_{i-1})]^{-1} [\nabla f(x_{i-1})]$
  5. 3 ve 4. Adımdan devam et
  6.  $\hat{x} \leftarrow x_i$  ise
  7.  $\hat{x}$ 'e dön
- 

### 3.6.2. Davidon-Fletcher-Powell (DFP) Yöntemi

DFP yöntemi quasi newton yöntemleri arasında en etkili olan yöntemdir. Yöntem ilk olarak Davidon [95] tarafından literatüre eklenmiş ve daha sonra Fletcher ve Powell [96] tarafından geliştirilmiştir. Algoritmanın her adımında, Hessian matrisin tersi rankları 1'e eşit olan iki adet simetrik matrisin toplamı ile güncellenmektedir. Bu sebepten ötürü rank-2 düzeltme yöntemi olarak da adlandırılmaktadır [97].

Yöntemin algoritması aşağıdaki gibidir:

Çizelge 3.5. DFP algoritması

---

Adım 1. Set  $k:=0$ ,  $x^{(0)}$  seç, pozitif tanımlı bir  $H_0$  belirle

Adım 2.  $g^{(k)}=0$  ise dur, değilse  $d^{(k)} = -H_k g^{(k)}$

Adım 3.  $\alpha_k = \arg \min_{\alpha \geq 0} f(x^{(k)} + \alpha d^{(k)})$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k d^{(k)}$$

Adım 4.  $\Delta x^{(k)} = \alpha_k d^{(k)}$

$$\Delta g^{(k)} = g^{(k+1)} - g^{(k)}$$

$$H_{k+1} = H_k + \frac{\Delta x^{(k)} \Delta x^{(k)T}}{\Delta x^{(k)T} \Delta g^{(k)}} - \frac{\left[ H_k \Delta g^{(k)} \right] \left[ H_k \Delta g^{(k)} \right]^T}{\Delta g^{(k)T} H_k \Delta g^{(k)}}$$

Adım 5.  $k:=k+1$ ,  $k$ 'yi bu eşitliğe göre yenileyerek, 2. Adıma dön

---

### 3.6.3. Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) Yöntemi

BFGS yöntemi 1970'te Broyden, Fletcher, Goldfarb ve Shanno [98-101] tarafından geliştirilmiştir. Yöntem Hessian matrisin tersinin yakınsamasına dayalıdır. Rank-3 düzeltme yöntemi olarak da bilinmektedir.

Çizelge 3.6. BFGS algoritması

---

BFGS yöntemi algoritması

---

Tolerans değeri ( $\varepsilon > 0$ ) ve maksimum iterasyon sayısı ( $K$ ) belirlenir.

1:  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  başlangıç değeri ve hessian matrisi için ( $H_0 > 0$ ) belirlenir.

2:  $k=0$ 'dan  $K$ 'ya kadar

3:  $\|g_k\| < \varepsilon$  ise dur

4:  $\|g_k\| \geq \varepsilon$  ise

5:  $d_k = -H_k^{-1} \nabla f(x_k)$  hesapla

6:  $\rho_k$  optimal adım sayısını hesapla

7:  $x_{k+1} = x_k + \rho_k d_k$

8:  $s = \rho_k d_k$

9:  $y_k = g_{k+1} - g_k$

10:  $H_{k+1}$  hesapla

---

### 3.6.4. Monte Carlo İntegrasyonu

İntegrallerin her zaman kapalı formları bulunamayabilir. Açık form şeklinde yazılan ve çözümleri karmaşık olan integralleri hesaplayabilmek için literatürde geliştirilen yöntemlerden biri de Monte Carlo integrasyonudur. Örneğin;



$\int_0^t k * \exp(-kw) dw = 1 - \exp(-kt)$  eşitliği ile yazılabilen bir integralin kapalı formu vardır denilir. En çok olabilirlik yöntemi kullanılırken elde edilen bazı fonksiyonlar da açık formda kalabilir ve kapalı form çözümü olmayabilir. Bu durumda eğer integral Eşitlik 3.39'daki gibi yazılabiliyorsa Monte Carlo integrasyonu uygulanabilmektedir [102]:

$$h(y) = \int_w g(y|w) f(w) dw = E_w [g(y|w)] \quad (3.39)$$

Eşitlikte yer alan  $w$  bir rasgele değişkendir ve  $f(w)$  fonksiyonu  $w$  rasgele değişkenine ait olasılık yoğunluk fonksiyonudur. Eğer  $w_1, w_2, \dots, w_n$  değerleri  $w$  rasgele değişkenine ait rasgele gözlem değerleri ise ve  $g(w)$  fonksiyonu sınırlı bir ortalama ve varyans değerine sahip ise, büyük sayılar kanunu kullanılarak Eşitlik 3.40'taki gibi yazılabilmektedir:

$$p \lim \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(w_i) = E[g(w)] \quad (3.40)$$

Eşitlik 3.40 yardımıyla kapalı formda çözümü olmayan integraller beklenen değer cinsinden ifade edilerek yaklaşık olarak hesaplanabilmektedir.

### 3.6.5. Gauss Hermite Kareleme Yöntemi

Gauss Hermite kareleme yöntemi analitik olarak integralin hesaplanmasının zor olduğu durumlarda integralin yaklaşık değerini hesaplamak için kullanılan yöntemlerden birisidir. Bu yöntem ile integraller ağırlıklandırılmış bir toplam değerine eşitlenerek yaklaşık değerleri hesaplanabilmektedir [103, 104].

Gauss Hermite yöntemi kullanılarak  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-x^2) dx$  şeklinde yazılabilen integrallerin hesabı yapılabilmektedir. Bu integral ağırlıklandırılmış bir toplam ile yaklaşık olarak Eşitlik 3.41'deki gibi hesaplanmaktadır.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-x^2) dx = \sum_{k=1}^n w_k f(x_k) \quad (3.41)$$

Bu yaklaşımda,  $w_k$   $[-\infty, \infty]$  aralığında yer alan bir ağırlıktır ve aşağıdaki eşitlik ile hesaplanmaktadır:

$$w_k = \frac{2^{n-1} n! \sqrt{\pi}}{n^2 [H_{n-1}(x_k)]^2}$$

$H_n(x)$ , n. dereceden Hermite polinomudur.  $x_k$  noktaları ise n. dereceden Hermite polinomunun kökleridir. Yaklaşımında yer alan  $x_k$  ve  $w_k$  değerleri paket programlar yardımıyla hesaplanabilmektedir [105]. Hermite'nin ortogonal polinom eşitliği  $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{\partial^n e^{-x^2}}{\partial x^n}$  şeklindedir. İlk birkaç Hermite polinomu için;  $H_0(x)=1$ ,  $H_1(x)=2x$ ,  $H_2(x)=4x^2-2$ ,  $H_3(x)=8x^3-12x$ ,  $H_4(x)=16x^4-48x^2+12$ ,  $H_5(x)=32x^5-160x^3+120x$  eşitlikleri elde edilmektedir [106-108]

## 4. ÖNERİLEN MODELLER

Bu tez çalışmasında kaza yılı, gelişim yılı ve takvim yılı bağımlılıkları gibi hasar gelişim üçgenlerinin bağımlılığını etkileyen fakat gözlenemeyen bir etki olduğu varsayılmıştır. Bu etki trafik sigortaları için sürüş profilleri, tarım sigortaları, DASK ve konut sigortaları için iklim değişiklikleri, zorunlu trafik sigortaları için mevzuat değişiklikleri vb. durumlardan kaynaklanmaktadır. Gözlenemeyen etki kopula regresyon modellerine toplamsal ve çarpımsal olarak eklenerek elde edilen yeni modelin log-olabilirlik fonksiyonları çıkarılmış, kapalı formların elde edilemediği durumlarda numerik yöntemlerle çalışılmıştır. Bu kapsamda gözlenemeyen etkinin normal dağılım, log-normal dağılım, gamma dağılımı ve üstel dağılıma sahip olduğu varsayımlarıyla modeller incelenmiştir. Literatürde bu kapsamda bir çalışma olmadığı görülmüş, gözlenemeyen etkinin modellendiği bu çalışmanın literatüre yenilikçi bir katkıda bulunacağı düşünülmüştür.

Tezin Beşinci Bölüm'ünde önerilen modellerin uygulanmasında kullanılacak olan gerçek veri setinde iki farklı iş kolu bulunduğundan modellemeler iki iş kolu üzerinden düzenlenmiştir. Ayrıca kullanılan hasar verisinin uyum iyiliği testleri sonucu log-normal dağılıma uyduğu belirlenmiş bu sebeple modellerde marjinal dağılımlar Uyum iyiliğine ilişkin detaylı bilgi Bölüm 5'te yer almaktadır.

### 4.1.Kopula Regresyon-Toplamsal Model

Her iki iş kolu için dağılımlar log-normal dağılım olarak ve bağ fonksiyonu birim bağ fonksiyonu olarak belirlendiğinde sistematik öge  $\eta_{i,j}^{(n)} = \mu_{i,j}^{(n)} = \zeta^{(n)} + \alpha_i^{(n)} + \tau_j^{(n)} = X \beta^{(n)}$  olarak yazılmaktadır.

Gözlenemeyen etki modele toplamsal etki olarak dahil edildiğinde sistematik öge aşağıdaki eşitliklerde olduğu gibi elde edilmektedir:

$$\eta_{i,j}^{*(n)} = \zeta^{(n)} + \alpha_i^{(n)} + \tau_j^{(n)} + u_{i,j}^{(n)} = X \beta^{(n)} + u_{i,j}^{(n)} \quad \longrightarrow \quad \eta_{i,j}^{*(n)} = \eta_{i,j}^{(n)} + u_{i,j}^{(n)}$$

$$\mu_{i,j}^{*(n)} = \zeta^{(n)} + \alpha_i^{(n)} + \tau_j^{(n)} + u_{i,j}^{(n)} = X \beta^{(n)} + u_{i,j}^{(n)} \quad \longrightarrow \quad \mu_{i,j}^{*(n)} = \mu_{i,j}^{(n)} + u_{i,j}^{(n)}$$

Bu eşitliklerde u gözlenemeyen etkiyi ifade etmektedir. Bu etkinin literatürde kullanılan dört farklı dağılıma sahip olduğu varsayımı yapılmıştır. Toplamsal modelde sistematik ögenin yazılışı belirlendikten sonra gözlenemeyen etkinin dağılımına göre log-olabilirlik fonksiyonu yazılarak parametre tahminleri yapılmıştır.

#### 4.1.1. Normal Dağılımlı Model

Hasar tutarlarının dağılımı log-normal dağılım olarak belirlenmişti. Çözümleme sürecinin daha etkin olması açısından log dönüşümü yapılarak hasar tutarları normal dağılımlı olarak kullanılmıştır. Hasar tutarlarına ait olasılık yoğunluk fonksiyonu her bir iş kolu için Eşitlik 3.30'daki gibi yazılmaktadır. Gözlenemeyen etkinin dahil edildiği model için log-olabilirlik fonksiyonu genel ifadeyle:

$$\ell_{IFM} = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \sum_{n=1}^N \ln f_{i,j}^{(n)} \quad (4.1)$$

$$\ell_{IFM} = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} (\ln f_{i,j}^{(1)} + \ln f_{i,j}^{(2)}) = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \ln f_{i,j}^{(1)} + \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \ln f_{i,j}^{(2)} \quad (4.2)$$

eşitliklerindeki gibi yazılmaktadır. Hasar gelişim üçgenlerinin marjinal dağılımına ait olasılık yoğunluk fonksiyonu Eşitlik 4.2'de yerine yazıldığında koşulsuz log-olabilirlik fonksiyonları Eşitlik 4.3 yardımıyla bulunmaktadır:

$$f_{i,j}^{(n)} = \int_{u_{i,j}^{(n)}} f_{i,j}^{(n)}(x_{i,j}^{(n)} | u_{i,j}^{(n)}) g(u_{i,j}^{(n)}) du_{i,j}^{(n)}$$

$$\ell_{IFM} = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \ln \left( \int_{u_{i,j}^{(1)}} f_{i,j}^{(1)}(x_{i,j}^{(1)} | u_{i,j}^{(1)}) g(u_{i,j}^{(1)}) du_{i,j}^{(1)} \right) + \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \ln \left( \int_{u_{i,j}^{(2)}} f_{i,j}^{(2)}(x_{i,j}^{(2)} | u_{i,j}^{(2)}) g(u_{i,j}^{(2)}) du_{i,j}^{(2)} \right) \quad (4.3)$$

Hasar gelişim üçgenlerinin marjinal dağılımları yerine yazıldığında;

$$\ell_{IFM} = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \ln \left( \int_{u_{i,j}^{(1)}} \frac{1}{\sigma_m^{(1)} \sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{(\log x_{i,j}^{(1)} - \mu_{i,j}^{*(1)})^2}{2\sigma_m^{(1)2}} \right) g(u_{i,j}^{(1)}) du_{i,j}^{(1)} \right)$$

$$+ \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \ln \left( \int_{u_{i,j}^{(2)}} \frac{1}{\sigma_m^{(2)} \sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{(\log x_{i,j}^{(2)} - \mu_{i,j}^{*(2)})^2}{2\sigma_m^{(2)2}} \right) g(u_{i,j}^{(2)}) du_{i,j}^{(2)} \right) \quad (4.4)$$

Eşitlik 4.4'te yazılan log-olabilirlik fonksiyonu IFM yönteminde ilk adımda kullanılan log-olabilirlik fonksiyonudur. Log-olabilirlik fonksiyonlarında yer alan  $u$  gözlenemeyen etkidir. Gözlenemeyen etkinin 0 ortalama ve sabit ( $\sigma_u$ ) varyans ile normal dağılıma sahip olduğu varsayılmıştır. Bu durumda gözlenemeyen etkinin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılmaktadır:

$$g(u) = \frac{1}{\sigma_u} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{u}{\sigma_u}\right)^2\right)$$

$\phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{u^2}{2}\right)$  eşitliği kullanılarak normal dağılıma sahip gözlenemeyen etkinin

olasılık yoğunluk fonksiyonu tekrar yazıldığında;  $g(u) = \frac{1}{\sigma_u} \phi\left(\frac{u}{\sigma_u}\right)$  biçiminde elde

edilmektedir.

Bu olasılık yoğunluk fonksiyonu log-olabilirlik fonksiyonunda Eşitlik 4.3'te yerine yazıldığında aşağıda yer alan Eşitlik 4.5 elde edilmektedir.

$$\begin{aligned} \ell_{IFM} = & \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \ln \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma_m^{(1)} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\log x_{i,j}^{(1)} - \mu_{i,j}^{*(1)})^2}{2\sigma_m^{(1)2}}\right) \frac{1}{\sigma_u^{(1)}} \phi\left(\frac{u_{i,j}^{(1)}}{\sigma_u^{(1)}}\right) du_{i,j}^{(1)} \right) \\ & + \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \ln \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma_m^{(2)} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\log x_{i,j}^{(2)} - \mu_{i,j}^{*(2)})^2}{2\sigma_m^{(2)2}}\right) \frac{1}{\sigma_u^{(2)}} \phi\left(\frac{u_{i,j}^{(2)}}{\sigma_u^{(2)}}\right) du_{i,j}^{(2)} \right) \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\mu_{i,j}^{*(n)} = X \beta^{(n)} + u_{i,j}^{(n)}$$

Bu işlemler sonucunda log-olabilirlik fonksiyonu gözlenemeyen etkiden arındırılmıştır. Log-olabilirlik fonksiyonunu maksimizasyonunda optimizasyon yöntemleri kullanılmıştır. Bu yöntemleri kullanabilmek için fonksiyonun türevlerini ihtiyaç duyulmaktadır. Türev integral işlemlerinin daha kolay elde edilebilmesi için  $u_{i,j}^{(n)} = \sigma_u^{(n)} \cdot w_{i,j}^{(n)}$  şeklinde değişken dönüşümü yapılmıştır. Bu dönüşümde yer alan  $w$  sıfır ortalama, standart sapma değeri 1 olan normal dağılım sahip bir rasgele değişkendir. Dönüşümde yer alan  $w$  rasgele değişkeni tahmin sürecinde sözde rastgele sayı üretme yöntemiyle üretilmiştir.

Önerilen dönüşümüne göre  $du_{i,j}^{(n)} = \sigma_u^{(n)} \cdot dw_{i,j}^{(n)}$  olarak yazılmaktadır.

Değişken değiştirme ve gerekli dönüşümler uygulandığında log-olabilirlik fonksiyonu Eşitlik 4.6'ya dönüşmektedir:

$$\begin{aligned} \ell_{IFM} &= \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \ln \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma_m^{(1)} \sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{(\log x_{i,j}^{(1)} - \mu_{i,j}^{*(1)})^2}{2\sigma_m^{(1)2}} \right) \phi(w_{i,j}^{(1)}) dw_{i,j}^{(1)} \right) \\ &+ \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \ln \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma_m^{(2)} \sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{(\log x_{i,j}^{(2)} - \mu_{i,j}^{*(2)})^2}{2\sigma_m^{(2)2}} \right) \phi(w_{i,j}^{(2)}) dw_{i,j}^{(2)} \right) \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$, \mu_{i,j}^{*(n)} = X \beta^{(n)} + \sigma_u^{(n)} w_{i,j}^{(n)}$$

$\mu_{i,j}^{*(n)} = X \beta^{(n)} + \sigma_u^{(n)} w_{i,j}^{(n)}$  eşitliği log-olabilirlik fonksiyonunda yerine yazıldığında;

$$\begin{aligned} \ell_{IFM} &= \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \ln \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma_m^{(1)} \sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{\left( \log x_{i,j}^{(1)} - \left( X \beta^{(1)} + \sigma_u^{(1)} w_{i,j}^{(1)} \right) \right)^2}{2\sigma_m^{(1)2}} \right) \phi(w_{i,j}^{(1)}) dw_{i,j}^{(1)} \right) \\ &+ \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \ln \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma_m^{(2)} \sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{\left( \log x_{i,j}^{(2)} - \left( X \beta^{(2)} + \sigma_u^{(2)} w_{i,j}^{(2)} \right) \right)^2}{2\sigma_m^{(2)2}} \right) \phi(w_{i,j}^{(2)}) dw_{i,j}^{(2)} \right) \end{aligned} \quad (4.7)$$

biçiminde elde edilmiştir.

Elde edilen bu yeni log-olabilirlik fonksiyonu  $\hat{\phi} = \left( \beta^{(n)}, \sigma_m^{(n)}, \sigma_u^{(n)} \right)$  parametreleri üzerinden maksimize edilmiştir. Tahmin edilmesi gereken parametreler vektöründe yer alan parametrelerin açıklamaları aşağıdaki maddelerde yer almaktadır:

- $\beta^{(n)}$  : Hasar gelişim üçgenlerine ait kaza yılı ve gelişim yılı parametreleri
- $\sigma_m^{(n)}$  : Marjinal dağılımın varyansı
- $\sigma_u^{(n)}$  : Gözlenemeyen etkinin varyansı

Bu integralin hesaplanabilmesi için Monte Carlo integrasyon yöntemi kullanılmıştır. Monte Carlo integrasyon yöntemini uygulayabilmek için gerekli adımlar aşağıda verilmiştir:

Log-olabilirlik fonksiyonundaki integral beklenen değer cinsinden yazılmıştır.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sigma_m^{(n)} \sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{\left( \log x_{i,j}^{(n)} - \left( X \beta^{(n)} + \sigma_u^{(n)} w_{i,j}^{(n)} \right) \right)^2}{2\sigma_m^{(n)2}} \right) \phi(w_{i,j}^{(n)}) dw_{i,j}^{(n)} = E_w \left[ h \left( x_{i,j}^{(n)} \mid w_{i,j}^{(n)}, \beta^{(n)}, \sigma_u^{(n)}, \sigma_m^{(n)} \right) \right]$$

Bu adımda yer alan fonksiyon  $h$  ile gösterilmiştir:

$$\begin{aligned}
h\left(x_{i,j}^{(n)} \mid w_{i,j}^{(n)}, \beta^{(n)}, \sigma_u^{(n)}, \sigma_m^{(n)}\right) &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sigma_m^{(n)} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\left(\log x_{i,j}^{(n)} - \left(X\beta^{(n)} + \sigma_u^{(n)} w_{i,j}^{(n)}\right)\right)^2}{2\sigma_m^{(n)2}}\right) \\
p \lim \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sigma_m^{(n)} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\left(\log x_{i,j}^{(n)} - \left(X\beta^{(n)} + \sigma_u^{(n)} w_{i,j}^{(n)}\right)\right)^2}{2\sigma_m^{(n)2}}\right) & \quad (4.8) \\
= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{\sigma_m^{(n)} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\left(\log x_{i,j}^{(n)} - \left(X\beta^{(n)} + \sigma_u^{(n)} w_{i,j}^{(n)}\right)\right)^2}{2\sigma_m^{(n)2}}\right) \right] \phi(w_{i,j}^{(n)}) dw_{i,j}^{(n)} &
\end{aligned}$$

Monte Carlo yöntemi ile eşitlik bu versiyona dönüştürülmüştür. Burada  $w$  rasgele değişkeni standart normal dağılımdan üretilerek integral yaklaşık olarak hesaplanmaktadır. Değişken değişimi ve gerekli düzenlemeler sonucunda log-olabilirlik fonksiyonu yeniden yazılmıştır. Gerekli parametreleri ve gözlenemeyen etkiyi tahmin edebilmek için benzetim uygulanmış log-olabilirlik fonksiyonuna ihtiyaç duyulmaktadır.

Gözlenemeyen etkinin normal dağıldığı varsayımı altında modele ait olabilirlik ve log-olabilirlik fonksiyonları elde edilmiştir. Daha uygulanabilir bir parametre tahmin süreci izlemek için parametre tahminleri log-olabilirlik fonksiyonu yerine benzetim uygulanmış log-olabilirlik fonksiyonu kullanılarak yapılmıştır.

$$\ell_{IFM}(\phi, x_{ij}^{(n)}) = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \sum_{n=1}^N \ln \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma_m^{(n)} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\left(\log x_{i,j}^{(n)} - \left(X\beta^{(n)} + \sigma_u^{(n)} w_{i,j}^{(n)}\right)\right)^2}{2\sigma_m^{(n)2}}\right) \phi(w_{i,j}^{(n)}) dw_{i,j}^{(n)} \right] \quad (4.9)$$

$$\ell_{IFM}^s(\phi, x_{ij}^{(n)}) = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \sum_{n=1}^N \ln \left[ \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R \frac{1}{\sigma_m^{(n)} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\left(\log x_{i,j}^{(n)} - \left(X\beta^{(n)} + \sigma_u^{(n)} w_{i,j}^{(n)}\right)\right)^2}{2\sigma_m^{(n)2}}\right) \phi(w_{i,j}^{(n)}) dw_{i,j}^{(n)} \right] \quad (4.10)$$

Eşitlik 4.9 ve 4.10'da sırasıyla log-olabilirlik ve benzetim uygulanmış log-olabilirlik fonksiyonu yazılmıştır. Fonksiyonlar elde edildikten sonra parametre tahmini yapılmıştır. Eşitlik 4.10'da yer alan benzetim uygulanmış log-olabilirlik fonksiyonunun quasi newton yöntemleriyle maksimizasyonu yapılmıştır. Bu yöntemleri kullanabilmek için log-olabilirlik fonksiyonunun türevleri gereklidir.

Türevleri almadan önce bazı notasyonlara yer verilecektir:

$$\hat{\phi} = (\beta^{(n)}, \sigma_m^{(n)}, \sigma_u^{(n)})$$

$$P_{ijr}(\beta^{(n)}, \sigma_m^{(n)}, \sigma_u^{(n)}) = f(x_{i,j}^{(n)} | w_{i,j}^{(n)}, \beta^{(n)}, \sigma_m^{(n)}, \sigma_u^{(n)}) = P_{ijr}(\phi) = P_{ijr}$$

$$P_{ijr}(\phi) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sigma_m^{(n)} \sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{(\log x_{i,j}^{(n)} - (X\beta^{(n)} + \sigma_u^{(n)} w_{i,j}^{(n)}))^2}{2\sigma_m^{(n)2}} \right)$$

Benzetim uygulanmış log-olabilirlik fonksiyonu:

$$\ell_{IFM}^s = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \sum_{n=1}^N \ln \left\{ \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R P_{ijr}(\phi) \right\}$$

$$P_{ir} = P_{ir}(\phi) = \sum_{r=1}^R P_{ijr}(\phi)$$

$$\ell_{IFM}^s = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \sum_{n=1}^N \ln \left\{ \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R P_{ir}(\phi) \right\}$$

$$P_i = P_i(\phi) = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R P_{ir}$$

$$\ell_{IFM}^s = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \sum_{n=1}^N \ln P_i(\phi)$$

Algoritmayı güncelleyebilmek için kullanılan yöntemlerde fonksiyonun türevlerine ihtiyaç duyulmaktadır. Fonksiyonun türevlerini hesaplamak için önce bazı eşitlikler tanımlanacaktır:

$$\frac{\partial \ell_{IFM}^s}{\partial \phi} = \sum_{i=1}^n \frac{\left( \frac{1}{R} \right) \sum_{r=1}^R \frac{\partial (P_{ijr}(\phi))}{\partial \phi}}{\left( \frac{1}{R} \right) \sum_{r=1}^R P_{ijr}(\phi)}$$

$$\frac{\partial P_{ijr}(\phi)}{\partial \phi} = (P_{ijr}(\phi)) \frac{\partial (\ln(P_{ijr}(\phi)))}{\partial \phi}$$



$$\begin{aligned}
&= (P_{ijr}(\phi)) \sum_{r=1}^R \frac{\partial (\ln P_{ijr}(\phi))}{\partial \phi} \\
&= P_{ir}(\phi) \left( \sum_{r=1}^R \frac{\partial (\ln P_{ijr}(\phi))}{\partial \phi} \right) \\
&= P_{ir}(\phi) \sum_{r=1}^R g_{ijr}(\phi) \\
&= P_{ir}(\phi) g_{ir}(\phi)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \ln L_s(\phi)}{\partial \phi} = \sum_{i=1}^n \frac{\sum_{r=1}^R P_{ir}(\phi) g_{ir}(\phi)}{\sum_{r=1}^R P_{ir}(\phi)}$$

$$Q_{ir}(\phi) = \frac{P_{ir}(\phi)}{\sum_{r=1}^R P_{ir}(\phi)}$$

Eşitlikte yer alan ağırlık fonksiyonunun özellikleri aşağıdaki şekildedir:

- $0 < Q_{ir}(\phi) < 1$
- $\sum_{r=1}^R Q_{ir}(\phi) = 1$

Ağırlık fonksiyonu eşitlikte yerine yazıldığında:

$$\frac{\partial \ln L_s(\phi)}{\partial \phi} = \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^R Q_{ir}(\phi) g_{ir}(\phi) = \sum_{i=1}^n \bar{g}_i(\phi)$$

İkinci dereceden türevleri elde edebilmek için aşağıdaki gösterimler üzerinden:

$$H_{ijr}(\phi) = \partial^2 \ln P_{ijr}(\phi) / \partial \phi \partial \phi'$$

$$H_{ir}(\phi) = \sum_{r=1}^R H_{ijr}(\phi)$$

$$\bar{H}_i(\phi) = \sum_{r=1}^R Q_{ir}(\phi) H_{ir}(\phi)$$

İkinci dereceden türev aşağıdaki gibi elde edilmiş

$$\frac{\partial^2 \ell_{IFM}^s}{\partial \phi \partial \phi'} = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\sum_{r=1}^R P_{ir}(\phi) H_{ir}(\phi) + \sum_{r=1}^R P_{ir}(\phi) g_{ir}(\phi) g_{ir}(\phi)}{\sum_{r=1}^R P_{ir}(\phi) + \sum_{r=1}^R P_{ir}(\phi)} - \frac{\left[ \sum_{r=1}^R P_{ir}(\phi) g_{ir}(\phi) \right] \left[ \sum_{r=1}^R P_{ir}(\phi) g_{ir}(\phi) \right]}{\left[ \sum_{r=1}^R P_{ir}(\phi) \right]^2} \right]$$

Bu eşitlik kısaca aşağıdaki şekilde yazılabilmektedir:

$$\frac{\partial^2 \ln L_s(\phi)}{\partial \phi \partial \phi'} = \sum_{i=1}^n \left\{ \bar{H}_i(\phi) + \sum_{r=1}^R Q_{ir}(\phi) [g_{ir}(\phi) - \bar{g}_i(\phi)] [g_{ir}(\phi) - \bar{g}_i(\phi)] \right\}$$

Bu aşamaya kadar log-olabilirlik fonksiyonunu türevleri alınırken kullanılan eşitlikler ve kısaltmalar elde edilmiştir. Bu eşitlikler modele uyarlandığında tahmini yapılacak parametrelere bağlı  $P_{ijr}$  fonksiyonu, parametrelere göre ilk türev ve ikinci türevler aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$P_{ijr}(\phi) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sigma_m^{(n)} \sqrt{2\pi}} \exp \left( - \frac{\left( \log x_{i,j}^{(n)} - \left( X \beta^{(n)} + \sigma_u^{(n)} w_{i,j}^{(n)} \right) \right)^2}{2\sigma_m^{(n)2}} \right) \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} P_{ijr}(\phi) &= \frac{1}{\sigma_m^{(1)} \sqrt{2\pi}} \exp \left( - \frac{\left( \log x_{i,j}^{(1)} - \left( X \beta^{(1)} + \sigma_u^{(1)} w_{i,j}^{(1)} \right) \right)^2}{2\sigma_m^{(1)2}} \right) \\ &+ \frac{1}{\sigma_m^{(2)} \sqrt{2\pi}} \exp \left( - \frac{\left( \log x_{i,j}^{(2)} - \left( X \beta^{(2)} + \sigma_u^{(2)} w_{i,j}^{(2)} \right) \right)^2}{2\sigma_m^{(2)2}} \right) \\ \ln P_{ijr}(\phi) &= \ln \left( \frac{1}{\sigma_m^{(1)} \sqrt{2\pi}} \right) - \frac{\left( \log x_{i,j}^{(1)} - \left( X \beta^{(1)} + \sigma_u^{(1)} w_{i,j}^{(1)} \right) \right)^2}{2\sigma_m^{(1)2}} \\ &+ \ln \left( \frac{1}{\sigma_m^{(2)} \sqrt{2\pi}} \right) - \frac{\left( \log x_{i,j}^{(2)} - \left( X \beta^{(2)} + \sigma_u^{(2)} w_{i,j}^{(2)} \right) \right)^2}{2\sigma_m^{(2)2}} \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \ln P_{ijr}(\phi) = & - \left[ \ln(\sigma_m^{(1)}) + \ln(\sqrt{2\Pi}) \right] - \frac{(\log x_{i,j}^{(1)} - X\beta^{(1)} - \sigma_u^{(1)}w_{i,j}^{(1)})^2}{2\sigma_m^{(1)2}} \\ & - \left[ \ln(\sigma_m^{(2)}) + \ln(\sqrt{2\Pi}) \right] - \frac{(\log x_{i,j}^{(2)} - X\beta^{(2)} + \sigma_u^{(2)}w_{i,j}^{(2)})^2}{2\sigma_m^{(2)2}} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Birinci dereceden türevler eşitliklerde verilmiştir.

$$\frac{\partial \ln P_{ijr}(\phi)}{\partial \beta^{(n)}} = \frac{(\log x_{i,j}^{(n)} - X\beta^{(n)} - \sigma_u^{(n)}w_{i,j}^{(n)})X}{\sigma_m^{(n)2}}$$

$$\frac{\partial \ln P_{ijr}(\phi)}{\partial \sigma_u^{(n)}} = \frac{(\log x_{i,j}^{(n)} - X\beta^{(n)} + \sigma_u^{(n)}w_{i,j}^{(n)})w_{i,j}^{(n)}}{\sigma_m^{(n)2}}$$

$$\frac{\partial \ln P_{ijr}(\phi)}{\partial \sigma_m^{(n)}} = -\frac{1}{\sigma_m^{(n)}} + \frac{1}{\sigma_m^{(n)3}} (\log x_{i,j}^{(n)} - X\beta^{(n)} + \sigma_u^{(n)}w_{i,j}^{(n)})^2$$

İkinci dereceden türevler eşitliklerde verilmiştir.

$$\frac{\partial \ln P_{ijr}(\phi)}{\partial \beta^{(n)} \partial \beta^{(n)}} = -\frac{X^2 (\log x_{i,j}^{(n)} - X\beta^{(n)} + \sigma_u^{(n)}w_{i,j}^{(n)})}{\sigma_m^{(n)2}}$$

$$\frac{\partial \ln P_{ijr}(\phi)}{\partial \beta^{(n)} \partial \sigma_u^{(n)}} = -\frac{X (\log x_{i,j}^{(n)} - X\beta^{(n)} + \sigma_u^{(n)}w_{i,j}^{(n)})w_{i,j}^{(n)}}{\sigma_m^{(n)2}}$$

$$\frac{\partial \ln P_{ijr}(\phi)}{\partial \beta^{(n)} \partial \sigma_m^{(n)}} = -\frac{2}{\sigma_m^{(n)3}} (\log x_{i,j}^{(n)} - X\beta^{(n)} + \sigma_u^{(n)}w_{i,j}^{(n)})X$$

$$\frac{\partial \ln P_{ijr}(\phi)}{\partial \sigma_u^{(n)} \partial \beta^{(n)}} = -\frac{\beta^{(n)}w_{i,j}^{(n)} (\log x_{i,j}^{(n)} - X\beta^{(n)} + \sigma_u^{(n)}w_{i,j}^{(n)})}{\sigma_m^{(n)2}}$$

$$\frac{\partial \ln P_{ijr}(\phi)}{\partial \sigma_u^{(n)} \partial \sigma_m^{(n)}} = - \frac{\left(w_{i,j}^{(n)}\right)^2 \left(\log x_{i,j}^{(n)} - X \beta^{(n)} + \sigma_u^{(n)} w_{i,j}^{(n)}\right)}{\sigma_m^{(n)2}}$$

$$\frac{\partial \ln P_{ijr}(\phi)}{\partial \sigma_u^{(n)} \partial \sigma_m^{(n)}} = - \frac{2 \left(\log x_{i,j}^{(n)} - X \beta^{(n)} + \sigma_u^{(n)} w_{i,j}^{(n)}\right) w_{i,j}^{(n)}}{\sigma_m^{(n)3}}$$

$$\frac{\partial \ln P_{ijr}(\phi)}{\partial \sigma_m^{(n)} \partial \beta^{(n)}} = 2 \frac{1}{\sigma_m^{(n)3}} - X \left(\log x_{i,j}^{(n)} - X \beta^{(n)} + \sigma_u^{(n)} w_{i,j}^{(n)}\right)$$

$$\frac{\partial \ln P_{ijr}(\phi)}{\partial \sigma_m^{(n)} \partial \sigma_u^{(n)}} = 2 \frac{1}{\sigma_m^{(n)3}} - \left(w_{i,j}^{(n)}\right) \left(\log x_{i,j}^{(n)} - X \beta^{(n)} + \sigma_u^{(n)} w_{i,j}^{(n)}\right)$$

$$\frac{\partial \ln P_{ijr}(\phi)}{\partial \sigma_m^{(n)} \partial \sigma_m^{(n)}} = \frac{1}{\sigma_m^{(n)2}} - 3 \frac{1}{\sigma_m^{(n)4}} \left(\log x_{i,j}^{(n)} - X \beta^{(n)} + \sigma_u^{(n)} w_{i,j}^{(n)}\right)^2$$

Türevler yardımıyla elde edilen g ve H matrisleri aşağıdaki gibidir:

$$g_{ijr}(\phi) = \begin{bmatrix} \left( \frac{\log x_{i,j}^{(n)} - X \beta^{(n)} + \sigma_u^{(n)} w_{i,j}^{(n)}}{\sigma_m^{(n)2}} \right) \begin{pmatrix} X \\ w_{i,j}^{(n)} \end{pmatrix} \\ \frac{(\log x_{i,j}^{(n)} - X \beta^{(n)} + \sigma_u^{(n)} w_{i,j}^{(n)})^2}{\sigma_m^{(n)3}} - \frac{1}{\sigma_m^{(n)}} \end{bmatrix}$$

$$H_{ijr}(\phi) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sigma_m^{(n)2}} \begin{pmatrix} X \\ w_{i,j}^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ w_{i,j}^{(n)} \end{pmatrix} & - \left( \frac{2 \left(\log x_{i,j}^{(n)} - X \beta^{(n)} + \sigma_u^{(n)} w_{i,j}^{(n)}\right)}{\sigma_m^{(n)3}} \right) \begin{pmatrix} X \\ w_{i,j}^{(n)} \end{pmatrix} \\ - \left( \frac{2 \left(\log x_{i,j}^{(n)} - X \beta^{(n)} + \sigma_u^{(n)} w_{i,j}^{(n)}\right)}{\sigma_m^{(n)3}} \right) \begin{pmatrix} X w_{i,j}^{(n)} \end{pmatrix} & - \frac{3 \left(\log x_{i,j}^{(n)} - X \beta^{(n)} + \sigma_u^{(n)} w_{i,j}^{(n)}\right)}{\sigma_m^{(n)4}} + \frac{1}{\sigma_m^{(n)2}} \end{pmatrix}$$

Log-olabilirlik fonksiyonuna ait birinci ve ikinci dereceden türevler hesaplanarak eşitliklerde ifade edilmiştir. Bu türevler parametre tahmini yapılırken kullanılmıştır. Böylece Bölüm 3.4.1’de yer alan IFM tahmin yönteminin ilk adımı tamamlanmış bulunmaktadır. İkinci adımda ise; ilk adımda tahmin edilen parametre değerleri kullanılarak

$$\ell(\theta, x_{i,j}^{(n)}) = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \log c(\tilde{F}_{ij}^{(1)}(x_{ij}^{(1)}), \dots, \tilde{F}_{ij}^{(N)}(x_{ij}^{(N)}); \theta) \text{ fonksiyonu maksimize edilerek}$$

$$\hat{\theta} = \arg \max \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \log c(\tilde{F}_{ij}^{(1)}(x_{ij}^{(1)}), \dots, \tilde{F}_{ij}^{(N)}(x_{ij}^{(N)}); \theta) \text{ kopula parametresi tahmin}$$

edilmiştir.

#### 4.1.2. Log-Normal Dağılımlı Model

Bu bölümde, gözlenemeyen etki ortalaması 1 ve sabit varyanslı olacak şekilde log-normal dağılıma sahip olduğu varsayılmıştır.

Log-normal dağılıma ait parametreleri  $\mu$  ve  $\sigma^2$  olduğunu varsayalım. Bu parametrelerle log-normal dağılıma ait olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$g(u) = \frac{1}{u\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln u - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Beklenen değer ve varyansı ise eşitliklerdeki gibi olmaktadır:

$$E(u) = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

$$\text{Var}(u) = [\exp(\sigma^2) - 1] \cdot \exp(2\mu + \sigma^2)$$

Gözlenemeyen etkiye ait ortalama değeri 1’e eşit olduğundan beklenen değer aşağıdaki gibi yazılmaktadır:

$$E(u) = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) = 1 \quad \longrightarrow \quad \mu = -\frac{\sigma^2}{2}$$

Bu durumda varyans  $\text{Var}(u) = [\exp(\sigma^2) - 1]$  eşitliği ile yazılabilmektedir.

Düzenlemeler dikkate alınarak gözlenemeyen etkiye ait olasılık yoğunluk fonksiyonu tekrar yazıldığında:

$$g(u) = \frac{1}{u\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\left(\ln u + \frac{\sigma^2}{2}\right)^2}{2\sigma^2}\right)$$

biçiminde elde edilmektedir.

Bu koşullarda log-olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılmaktadır.

$$\begin{aligned} \ell_{IFM} = & \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \ln \left( \int_{u_{i,j}^{(1)}} \frac{1}{\sigma_m^{(1)}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\log x_{i,j}^{(1)} - \mu_{i,j}^{*(1)})^2}{2\sigma_m^{(1)2}}\right) \frac{1}{u_{i,j}^{(1)}\sigma_u^{(1)}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\left(\ln u_{i,j}^{(1)} + \frac{\sigma_u^{(1)2}}{2}\right)^2}{2\sigma_u^{(1)2}}\right) du_{i,j}^{(1)} \right) \\ & + \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \ln \left( \int_{u_{i,j}^{(2)}} \frac{1}{\sigma_m^{(2)}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\log x_{i,j}^{(2)} - \mu_{i,j}^{*(2)})^2}{2\sigma_m^{(2)2}}\right) \frac{1}{u_{i,j}^{(2)}\sigma_u^{(2)}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\left(\ln u_{i,j}^{(2)} + \frac{\sigma_u^{(2)2}}{2}\right)^2}{2\sigma_u^{(2)2}}\right) du_{i,j}^{(2)} \right) \end{aligned} \quad (4.14)$$

,  $\mu_{i,j}^{*(n)} = X\beta^{(n)} + u_{i,j}^{(n)}$

Log-olabilirlik değerinin hesaplanabilmesi ve integralin daha kolay hesaplanabilmesi için gerekli dönüşüm aşağıdaki gibi uygulanmaktadır.

$$w_{i,j}^{(n)} = \frac{\ln u_{i,j}^{(n)} + \frac{\sigma_u^{(n)2}}{2}}{\sigma_u^{(n)}\sqrt{2}} \quad \text{değişken dönüşümü uygulandığında; işlemler sırasıyla}$$

$$w_{i,j}^{(n)}\sigma_u^{(n)}\sqrt{2} = \ln u_{i,j}^{(n)} + \frac{\sigma_u^{(n)2}}{2}$$

$$w_{i,j}^{(n)}\sigma_u^{(n)}\sqrt{2} - \frac{\sigma_u^{(n)2}}{2} = \ln u_{i,j}^{(n)}$$

$$u_{i,j}^{(n)} = \exp\left(w_{i,j}^{(n)}\sigma_u^{(n)}\sqrt{2} - \frac{\sigma_u^{(n)2}}{2}\right)$$

$$w_{i,j}^{(n)}\sigma_u^{(n)}\sqrt{2} - \frac{\sigma_u^{(n)2}}{2} = \ln u_{i,j}^{(n)}$$

$$dw_{i,j}^{(n)} \sigma_u^{(n)} \sqrt{2} = \frac{1}{u_{i,j}^{(n)}} du_{i,j}^{(n)}$$

biçiminde elde edilmektedir. Yapılan dönüşümler ile sonucu log-olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki şekilde elde edilmektedir;

$$\begin{aligned} \ell_{IFM} &= \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \ln \left( \int_{u_{i,j}^{(1)}} \frac{1}{\sigma_m^{(1)} \sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{(\log x_{i,j}^{(1)} - \mu_{i,j}^{*(1)})^2}{2\sigma_m^{(1)2}} \right) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-w_{i,j}^{(n)2}) dw_{i,j}^{(n)} \right) \\ &+ \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \ln \left( \int_{u_{i,j}^{(2)}} \frac{1}{\sigma_m^{(2)} \sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{(\log x_{i,j}^{(2)} - \mu_{i,j}^{*(2)})^2}{2\sigma_m^{(2)2}} \right) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-w_{i,j}^{(n)2}) dw_{i,j}^{(n)} \right) \\ \mu_{i,j}^{*(n)} &= X \beta^{(n)} + \exp \left( w_{i,j}^{(n)} \sigma_u^{(n)} \sqrt{2} - \frac{\sigma_u^{(n)2}}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Parametre tahminleri Gauss-Hermite kareleme yöntemi kullanılarak integral hesabı ve parametre tahminleri yapılmıştır.

Log-olabilirlik fonksiyonu  $\hat{\phi} = (\beta^{(n)}, \sigma_m^{(n)}, \sigma_u^{(n)})$  parametreleri üzerinden maksimize edilmiştir. Tahmin edilmesi gereken parametreler vektöründe yer alan parametreler aşağıda verilmiştir:

- $\beta^{(n)}$  : Her iki üçgene ait kaza yılı ve gelişim yılı parametreleri
- $\sigma_u^{(n)}$  : Gözlenemeyen etkinin varyansı
- $\sigma_m^{(n)}$  : Marjinal dağılım varyansı

Böylece kısımda Bölüm 3.4.1'de yer alan IFM tahmin yönteminin ilk adımı tamamlandı.

İkinci adımda ise; ilk adımda tahmin edilen parametre değerleri kullanılarak

$$\ell(\theta, x_{i,j}^{(n)}) = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \log c \left( \tilde{F}_{ij}^{(1)}(x_{ij}^{(1)}), \dots, \tilde{F}_{ij}^{(N)}(x_{ij}^{(N)}); \theta \right) \text{ fonksiyonu maksimize edilerek}$$

$$\hat{\theta} = \arg \max \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \log c \left( \tilde{F}_{ij}^{(1)}(x_{ij}^{(1)}), \dots, \tilde{F}_{ij}^{(N)}(x_{ij}^{(N)}); \theta \right) \text{ kopula parametresi tahmin}$$

edilmiştir.

### 4.1.3. Gamma Dağılımlı Model

Bu bölümde gözlenemeyen etki ortalaması 1 olacak şekilde gamma dağılımı ile modellenmiştir.

Gamma dağılımının  $\alpha$  şekil ve  $\beta$  oran parametrelerine sahip olduğu varsayımı altında olasılık yoğunluk fonksiyonu, beklenen değeri ve varyansı aşağıdaki gibi yazılmaktadır:

$$g(u) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} u^{\alpha-1} e^{-\beta u}$$

$$E(u) = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$Var(u) = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

Ortalaması 1 olan bir dağılım ile çalıştığımız için  $\frac{\alpha}{\beta} = 1$  olmaktadır.

Dolayısıyla  $\alpha = \beta$  olur. Gözlenemeyen etki  $u \sim Gamma(\alpha, \alpha)$  biçiminde gamma dağılıma sahiptir.

Gamma dağılımına ait olasılık yoğunluk fonksiyonunda  $\beta$  yerine  $\alpha$  yazıldığında:

$$g(u) = \frac{\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)} u^{\alpha-1} e^{-\alpha u}$$

olmaktadır. Ek olarak, gamma dağılımlı gözlenemeyen etkinin varyansı  $Var(u) = \frac{1}{\alpha}$  olmaktadır.

Bu koşullarda log-olabilirlik fonksiyonu ise aşağıdaki eşitlikteki gibi yazılmaktadır:

$$\begin{aligned} \ell_{IFM} = & \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \ln \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma_m^{(1)} \sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{(\log x_{i,j}^{(1)} - \mu_{i,j}^{*(1)})^2}{2\sigma_m^{(1)2}} \right) \frac{\alpha^{(1)\alpha^{(1)}}}{\Gamma(\alpha^{(1)})} (u_{i,j}^{(1)})^{\alpha^{(1)}-1} e^{-\alpha^{(1)}u_{i,j}^{(1)}} du_{i,j}^{(1)} \right) \\ & + \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \ln \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma_m^{(2)} \sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{(\log x_{i,j}^{(2)} - \mu_{i,j}^{*(2)})^2}{2\sigma_m^{(2)2}} \right) \frac{\alpha^{(2)\alpha^{(2)}}}{\Gamma(\alpha^{(2)})} (u_{i,j}^{(2)})^{\alpha^{(2)}-1} e^{-\alpha^{(2)}u_{i,j}^{(2)}} du_{i,j}^{(2)} \right) \end{aligned}$$



$$, \quad \mu_{i,j}^{*(n)} = X \beta^{(n)} + u_{i,j}^{(n)} \quad (4.16)$$

Log-olabilirlik fonksiyonu içinde gözlenemeyen etkinin yer almaması için değişken dönüşümü yapılmıştır:

$$u_{i,j}^{(n)} = \frac{1}{\alpha^{(n)}} * w_{i,j}^{(n)} \quad \longrightarrow \quad du_{i,j}^{(n)} = \frac{1}{\alpha^{(n)}} dw_{i,j}^{(n)}$$

Değişken dönüşümünde sonra gerekli düzenlemeler yapıldığında olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılmaktadır:

$$f(u) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\alpha^{\alpha-1}} w^{\alpha-1} e^{-w}$$

Dönüşüm sonucu bulunanlar log-olabilirlik fonksiyonunda yerine yazıldığında:

$$\begin{aligned} \ell_{IFM} = & \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \ln \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma_m^{(1)} \sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{(\log x_{i,j}^{(1)} - \mu_{i,j}^{*(1)})^2}{2\sigma_m^{(1)2}} \right) \frac{1}{\Gamma(\alpha^{(1)})} \frac{1}{\alpha^{(1)\alpha^{(1)}-1}} (w_{i,j}^{(1)})^{\alpha^{(1)}-1} e^{-w_{i,j}^{(1)}} dw_{i,j}^{(1)} \right) \\ & + \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \ln \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma_m^{(2)} \sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{(\log x_{i,j}^{(2)} - \mu_{i,j}^{*(2)})^2}{2\sigma_m^{(2)2}} \right) \frac{1}{\Gamma(\alpha^{(2)})} \frac{1}{\alpha^{(2)\alpha^{(2)}-1}} (w_{i,j}^{(2)})^{\alpha^{(2)}-1} e^{-w_{i,j}^{(2)}} dw_{i,j}^{(2)} \right) \end{aligned}$$

$$, \quad \mu_{i,j}^{*(n)} = X \beta^{(n)} + \frac{1}{\alpha^{(n)}} w_{i,j}^{(n)} \quad (4.17)$$

Log-olabilirlik fonksiyonu içinde yer alan  $k(w) = w^{\alpha-1} e^{-w}$  şeklinde tanımlayıp, integral hesabını Monte Carlo yöntemi ile yapıldığında; Bölüm 4.1.1’de yer alan adımlar izlenmiştir.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sigma_m^{(n)} \sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{\left( \log x_{i,j}^{(n)} - \left( X \beta^{(n)} + \frac{1}{\alpha^{(n)}} w_{i,j}^{(n)} \right) \right)^2}{2\sigma_m^{(n)2}} \right) \right] k(w) dw = E_w \left[ h \left( x_{i,j}^{(n)} \mid w_{i,j}^{(n)}, \beta^{(n)}, \sigma_u^{(n)}, \sigma_m^{(n)} \right) \right]$$

$$h \left( x_{i,j}^{(n)} \mid w_{i,j}^{(n)}, \beta^{(n)}, \sigma_u^{(n)}, \sigma_m^{(n)} \right) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sigma_m^{(n)} \sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{\left( \log x_{i,j}^{(n)} - \left( X \beta^{(n)} + \frac{1}{\alpha^{(n)}} w_{i,j}^{(n)} \right) \right)^2}{2\sigma_m^{(n)2}} \right)$$

$$\begin{aligned}
& p \lim \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sigma_m^{(n)} \sqrt{2\pi}} \exp \left( - \frac{\left( \log x_{i,j}^{(n)} - \left( X \beta^{(n)} + \frac{1}{\alpha^{(n)}} w_{i,j}^{(n)} \right) \right)^2}{2\sigma_m^{(n)2}} \right) \\
& = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{\sigma_m^{(n)} \sqrt{2\pi}} \exp \left( - \frac{\left( \log x_{i,j}^{(n)} - \left( X \beta^{(n)} + \frac{1}{\alpha^{(n)}} w_{i,j}^{(n)} \right) \right)^2}{2\sigma_m^{(n)2}} \right) \right] k(w) dw \quad (4.18)
\end{aligned}$$

Elde edilen bu eşitlik ile log-olabilirlik değeri hesaplanmaktadır. Parametre tahminleri yapılabilmesi için log-olabilirlik fonksiyonun türevlerine ihtiyaç duyulmaktadır. Bu aşamada benzetim uygulanmış log-olabilirlik fonksiyonuna ihtiyaç duyulmaktadır.

$$\ell_{IFM} = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \sum_{n=1}^N \ln \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma_m^{(n)} \sqrt{2\pi}} \exp \left( - \frac{\left( \log x_{i,j}^{(n)} - \left( X \beta^{(n)} + \frac{1}{\alpha^{(n)}} w_{i,j}^{(n)} \right) \right)^2}{2\sigma_m^{(n)2}} \right) k(w) dw \right] \quad (4.19)$$

$$\ell_{IFM}^s = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \sum_{n=1}^N \ln \left[ \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R \frac{1}{\sigma_m^{(n)} \sqrt{2\pi}} \exp \left( - \frac{\left( \log x_{i,j}^{(n)} - \left( X \beta^{(n)} + \frac{1}{\alpha^{(n)}} w_{i,j}^{(n)} \right) \right)^2}{2\sigma_m^{(n)2}} \right) \right] \quad (4.20)$$

Benzetim uygulanmış edilmiş log-olabilirlik fonksiyonu kullanılarak parametrelere göre birinci ve ikinci dereceden türevler elde edilmiştir.

Log-olabilirlik fonksiyonu  $\hat{\phi} = \left( \beta^{(n)}, \sigma_m^{(n)}, \sigma_u^{(n)} \right)$  parametreleri üzerinden maksimize edilmiştir. Tahmin edilmesi gereken parametreler vektöründe yer alan parametreler aşağıda verilmiştir:

- $\beta^{(n)}$  : Her iki üçgene ait kaza yılı ve gelişim yılı parametreleri
- $\sigma_m^{(n)}$  : Marjinal dağılımın varyansı
- $\sigma_u^{(n)}$  : Gözlenemeyen etkinin varyansı

Gamma dağılımına sahip gözlenemeyen etkinin varyansı  $Var(u) = \sigma_u = \frac{1}{\alpha}$  olarak

yerine yazıldığında;

$$P_{ijr}(\phi) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sigma_m^{(n)} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\log x_{i,j}^{(n)} - X\beta^{(n)} - \sigma_u^{(n)} w_{i,j}^{(n)})^2}{2\sigma_m^{(n)2}}\right) \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} \ln P_{ijr}(\phi) = & -\left[\ln(\sigma_m^{(1)}) + \ln(\sqrt{2\pi})\right] - \frac{(\log x_{i,j}^{(1)} - X\beta^{(1)} - \sigma_u^{(1)} w_{i,j}^{(1)})^2}{2\sigma_m^{(1)2}} \\ & -\left[\ln(\sigma_m^{(2)}) + \ln(\sqrt{2\pi})\right] - \frac{(\log x_{i,j}^{(2)} - X\beta^{(2)} - \sigma_u^{(2)} w_{i,j}^{(2)})^2}{2\sigma_m^{(2)2}} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Birinci ve ikinci dereceden türevler Bölüm 4.1.1'deki gibidir. Bu kısımdaki farklılık gözlenemeyen etkiye ait varyansın  $\sigma_u = \frac{1}{\alpha}$  biçiminde yazılmasıdır.

Türevler yardımıyla elde edilen g ve H matrisleri aşağıdaki gibidir:

$$g_{ijr}(\phi) = \begin{bmatrix} \left( \frac{\log x_{i,j}^{(n)} - X\beta^{(n)} + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{(n)} w_{i,j}^{(n)}}{\sigma_m^2} \right) \begin{pmatrix} X \\ w_{i,j}^{(n)} \end{pmatrix} \\ \frac{(\log x_{i,j}^{(n)} - X\beta^{(n)} + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{(n)} w_{i,j}^{(n)})^2}{\sigma_m^3} - \frac{1}{\sigma_m} \end{bmatrix}$$

$$H_{ijr}(\phi) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sigma_m^2} \begin{pmatrix} X \\ w_{i,j}^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ w_{i,j}^{(n)} \end{pmatrix} & -\frac{2 \left( \log x_{i,j}^{(n)} - X\beta^{(n)} + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{(n)} w_{i,j}^{(n)} \right)}{\sigma_m^3} \begin{pmatrix} X \\ w_{i,j}^{(n)} \end{pmatrix} \\ -\frac{2 \left( \log x_{i,j}^{(n)} - X\beta^{(n)} + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{(n)} w_{i,j}^{(n)} \right)}{\sigma_m^3} \begin{pmatrix} X w_{i,j}^{(n)} \end{pmatrix} & -\frac{3 \left( \log x_{i,j}^{(n)} - X\beta^{(n)} + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{(n)} w_{i,j}^{(n)} \right)}{\sigma_m^4} + \frac{1}{\sigma_m^2} \end{pmatrix}$$

Log-olabilirlik fonksiyonuna ait birinci ve ikinci dereceden türevler hesaplanarak eşitliklerde ifade edilmiştir. Bu türevler parametre tahmini yapılırken kullanılmıştır.

Böylece kısımda Bölüm 3.4.1’de yer alan IFM tahmin yönteminin ilk adımı tamamlanmıştır.

İkinci adımda ise; ilk adımda tahmin edilen parametre değerleri kullanılarak

$$\ell(\theta, x_{i,j}^{(n)}) = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \log c(\tilde{F}_{ij}^{(1)}(x_{ij}^{(1)}), \dots, \tilde{F}_{ij}^{(N)}(x_{ij}^{(N)}); \theta) \text{ fonksiyonu maksimize edilerek}$$

$$\hat{\theta} = \arg \max \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \log c(\tilde{F}_{ij}^{(1)}(x_{ij}^{(1)}), \dots, \tilde{F}_{ij}^{(N)}(x_{ij}^{(N)}); \theta) \text{ kopula parametresi tahmin}$$

edilmiştir.

#### 4.1.4. Üstel Dağılımlı Model

Gözlenemeyen etki ortalaması 1 ve sabit varyanslı olacak şekilde üstel dağılımı ile modellenmiştir.

Üstel dağılımının parametresinin  $\lambda$  olduğunu varsayalım.  $\lambda$  parametresine sahip üstel dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu, beklenen değeri ve varyansı aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$g(u) = \lambda e^{-\lambda u} \quad \lambda > 0$$

$$E(u) = \frac{1}{\lambda}$$

$$Var(u) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Ortalaması 1 olan bir dağılım ile çalışıldığı için;

$$E(u) = \frac{1}{\lambda} = 1 \quad \longrightarrow \quad \lambda = 1 \text{ olmaktadır.}$$

Üstel dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonunda  $\lambda$  yerine 1 yazıldığında;

$$g(u) = e^{-u} \text{ olmaktadır.}$$

Log-olabilirlik fonksiyonu ise aşağıdaki eşitlikteki gibi yazılmaktadır:

$$\begin{aligned} \ell_{IFM} &= \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \ln \left( \int_{u_{i,j}^{(1)}} \frac{1}{\sigma_m^{(1)} \sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{(\log x_{i,j}^{(1)} - \mu_{i,j}^{*(1)})^2}{2\sigma_m^{(1)2}} \right) e^{-u_{i,j}^{(1)}} du_{i,j}^{(1)} \right) \\ &+ \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \ln \left( \int_{u_{i,j}^{(2)}} \frac{1}{\sigma_m^{(2)} \sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{(\log x_{i,j}^{(2)} - \mu_{i,j}^{*(2)})^2}{2\sigma_m^{(2)2}} \right) e^{-u_{i,j}^{(2)}} du_{i,j}^{(2)} \right) \\ , \mu_{i,j}^{*(n)} &= X \beta^{(n)} + u_{i,j}^{(n)} \end{aligned} \quad (4.23)$$

$u_{i,j}^{(n)} = w_{i,j}^{(n)}$  dönüşümü yapıldığında  $du_{i,j}^{(n)} = dw_{i,j}^{(n)}$ ; log-olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılmaktadır:

$$\begin{aligned} \ell_{IFM} &= \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \ln \left( \int_{u_{i,j}^{(1)}} \frac{1}{\sigma_m^{(1)} \sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{(\log x_{i,j}^{(1)} - \mu_{i,j}^{*(1)})^2}{2\sigma_m^{(1)2}} \right) e^{-w_{i,j}^{(1)}} dw_{i,j}^{(1)} \right) \\ &+ \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \ln \left( \int_{u_{i,j}^{(2)}} \frac{1}{\sigma_m^{(2)} \sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{(\log x_{i,j}^{(2)} - \mu_{i,j}^{*(2)})^2}{2\sigma_m^{(2)2}} \right) e^{-w_{i,j}^{(2)}} dw_{i,j}^{(2)} \right) \\ , \mu_{i,j}^{*(n)} &= X \beta^{(n)} + w_{i,j}^{(n)} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Gözlenemeyen etkinin varyansı 1 olarak bulunmuştur. Modele bu şekilde dahil edilmiştir. Log-olabilirlik fonksiyonu  $\hat{\phi} = (\beta^{(n)}, \sigma_m^{(n)})$  parametreleri üzerinden maksimize edilmiştir. Tahmin edilmesi gereken parametreler vektöründe yer alan parametreler aşağıda verilmiştir:

- $\beta^{(n)}$  : Her iki üçgene ait kaza yılı ve gelişim yılı parametreleri
- $\sigma_m^{(n)}$  : Marjinal dağılımın varyansı.

İntegralin hesabı için Monte Carlo integrasyonu uygulanacaktır. Bölüm 4.1.1'deki adımlar uygulandığında;

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sigma_m^{(n)} \sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{(\log x_{i,j}^{(n)} - (X \beta^{(n)} + w_{i,j}^{(n)}))^2}{2\sigma_m^{(n)2}} \right) \right] e^{-w_{i,j}^{(n)}} dw_{i,j}^{(n)} = E_w \left[ h(x_{i,j}^{(n)} | w_{i,j}^{(n)}, \beta^{(n)}, \sigma_m^{(n)}) \right]$$

$$h(x_{i,j}^{(n)} | w_{i,j}^{(n)}, \beta^{(n)}, \sigma_m^{(n)}) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sigma_m^{(n)} \sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{(\log x_{i,j}^{(n)} - (X \beta^{(n)} + w_{i,j}^{(n)}))^2}{2\sigma_m^{(n)2}} \right)$$

$$p \lim \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sigma_m^{(n)} \sqrt{2\pi}} \exp \left( - \frac{\left( \log x_{i,j}^{(n)} - \left( X \beta^{(n)} + w_{i,j}^{(n)} \right) \right)^2}{2\sigma_m^{(n)2}} \right) \quad (4.25)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{\sigma_m^{(n)} \sqrt{2\pi}} \exp \left( - \frac{\left( \log x_{i,j}^{(n)} - \left( X \beta^{(n)} + w_{i,j}^{(n)} \right) \right)^2}{2\sigma_m^{(n)2}} \right) \right] w dw$$

İntegral Monte Carlo integrasyonu ile hesaplanarak log-olabilirlik değeri elde edilmiştir. Parametre tahmini yapılırken kullanılan yöntemler için birinci ve ikinci dereceden türevlerin hesaplanması gerekmektedir.

$$P_{ijr} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sigma_m^{(n)} \sqrt{2\pi}} \exp \left( - \frac{\left( \log x_{i,j}^{(n)} - \left( X \beta^{(n)} + w_{i,j}^{(n)} \right) \right)^2}{2\sigma_m^{(n)2}} \right) \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} \ln P_{ijr}(\phi) = & - \left[ \ln(\sigma_m^{(1)}) + \ln(\sqrt{2\pi}) \right] - \frac{\left( \log x_{i,j}^{(1)} - \left( X \beta^{(1)} + w_{i,j}^{(1)} \right) \right)^2}{2\sigma_m^{(1)2}} \\ & - \left[ \ln(\sigma_m^{(2)}) + \ln(\sqrt{2\pi}) \right] - \frac{\left( \log x_{i,j}^{(2)} - \left( X \beta^{(2)} + w_{i,j}^{(2)} \right) \right)^2}{2\sigma_m^{(2)2}} \end{aligned} \quad (4.27)$$

Birinci ve ikinci dereceden türevler EK 1’de yer almaktadır.

Türevler yardımıyla elde edilen g ve H matrisleri aşağıdaki gibidir:

$$g_{ijr}(\phi) = \left( \begin{array}{c} \frac{\left( \log x_{i,j}^{(n)} - X \beta^{(n)} - w_{i,j}^{(n)} \right) X}{\sigma_m^2} \\ - \frac{1}{\sigma_m} + \frac{1}{\sigma_m^3} \left( \log x_{i,j}^{(n)} - X \beta^{(n)} - w_{i,j}^{(n)} \right)^2 \end{array} \right)$$

$$H_{ijr}(\phi) = \left( \begin{array}{cc} - \frac{1}{\sigma_m^2} X^2 \left( \log x_{i,j}^{(n)} - X \beta^{(n)} - w_{i,j}^{(n)} \right) & - \frac{2}{\sigma_m^3} X \left( \log x_{i,j}^{(n)} - X \beta^{(n)} - w_{i,j}^{(n)} \right) \\ - \frac{2}{\sigma_m^3} X \left( \log x_{i,j}^{(n)} - X \beta^{(n)} - w_{i,j}^{(n)} \right) & \frac{1}{\sigma_m^2} - \frac{3}{\sigma_m^4} X \left( \log x_{i,j}^{(n)} - X \beta^{(n)} - w_{i,j}^{(n)} \right)^2 \end{array} \right)$$

Log-olabilirlik fonksiyonuna ait birinci ve ikinci dereceden türevler hesaplanarak eşitliklerde ifade edilmiştir. Bu türevler parametre tahmini yapılırken kullanılmıştır.

Böylece kısımda Bölüm 3.4.1’de yer alan IFM tahmin yönteminin ilk adımı tamamlanmıştır.

İkinci adımda ise; ilk adımda tahmin edilen parametre değerleri kullanılarak;

$$\ell(\theta, x_{i,j}^{(n)}) = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \log c\left(\tilde{F}_{ij}^{(1)}(x_{ij}^{(1)}), \dots, \tilde{F}_{ij}^{(N)}(x_{ij}^{(N)}); \theta\right) \text{ fonksiyonu maksimize edilerek}$$

$$\hat{\theta} = \arg \max \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \log c\left(\tilde{F}_{ij}^{(1)}(x_{ij}^{(1)}), \dots, \tilde{F}_{ij}^{(N)}(x_{ij}^{(N)}); \theta\right) \text{ kopula parametresi tahmin}$$

edilmiştir.

## 4.2. Kopula Regresyon-Çarpımsal Model

Bu kısımda gözlenemeyen etkinin çarpımsal olarak modele etki ettiği varsayılmaktadır. Her iki iş kolu için dağılımlar log-normal dağılım olarak belirlenmiştir. Bu aşamada log dönüşümü yapılarak normal dağılıma geçilmiştir. Çarpımsal modellerde bağ fonksiyonu olarak logaritmik bağ fonksiyonu kullanılmıştır.

Bu durumda sistematik öge;

$$\eta_{i,j}^{(n)} = \log(\mu_{i,j}^{(n)}) = \zeta^{(n)} + \alpha_i^{(n)} + \tau_j^{(n)} = X \beta^{(n)} \text{ olarak yazılmaktadır.}$$

Literatürde yer alan çalışmalarda çarpımsal etki işlem kolaylığı sağlaması açısından toplamsal biçime dönüştürülmüştür.

$$\mu_{i,j}^{*(n)} = \exp(\eta_{i,j}^{(n)}) = \left(\exp(\zeta^{(n)}) + \exp(\alpha_i^{(n)}) + \exp(\tau_j^{(n)})\right) + \exp(u_{i,j}^{(n)})$$

$$\mu_{i,j}^{*(n)} = \exp(X \beta^{(n)}) + \exp(u_{i,j}^{(n)}) \quad (4.28)$$

olarak yazılmaktadır.

Bu eşitlikte yer alan ve u ile gösterilen gözlenemeyen etkinin dört farklı dağılıma sahip olduğu varsayımı yapılmıştır. Çarpımsal modelde, sistematik ögenin yazılışı belirlendikten sonra gözlenemeyen etkinin dağılımına göre log-olabilirlik fonksiyonu yazılarak parametre tahminleri yapılmıştır.

#### 4.2.1. Normal Dağılımlı Model

Bu kısımda gözlenemeyen etkinin dağılımının normal dağılım olduğu varsayımı altında çarpımsal modele ait çıkarımlar yapılmıştır. Gözlenemeyen etkinin dahil edildiği model için olabilirlik fonksiyonu ve log-olabilirlik fonksiyonu eşitliklerdeki gibi yazılmaktadır:

$$\begin{aligned} \ell_{IFM} = & \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \ln \left( \int_{u_{i,j}^{(1)}} \frac{1}{\sigma_m^{(1)} \sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{(\log x_{i,j}^{(1)} - \mu_{i,j}^{*(1)})^2}{2\sigma_m^{(1)2}} \right) g(u_{i,j}^{(1)}) du_{i,j}^{(1)} \right) \\ & + \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \ln \left( \int_{u_{i,j}^{(2)}} \frac{1}{\sigma_m^{(2)} \sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{(\log x_{i,j}^{(2)} - \mu_{i,j}^{*(2)})^2}{2\sigma_m^{(2)2}} \right) g(u_{i,j}^{(2)}) du_{i,j}^{(2)} \right) \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$, \mu_{i,j}^{*(n)} = \exp(X\beta^{(n)}) + \exp(u_{i,j}^{(n)})$$

Olabilirlik ve log-olabilirlik fonksiyonlarında yer alan  $u$  gözlenemeyen etkidir. Bu kısımda gözlenemeyen etkinin ortalaması 0 olan ve sabit ( $\sigma_u$ ) varyans ile normal dağılıma sahip olduğu varsayılmaktadır. Toplamsal modellerde Bölüm 4.1.1'deki dönüşümler uygulandığında, log-olabilirlik fonksiyonu dönüşmektedir:

$$\begin{aligned} \ell_{IFM} = & \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \ln \left( \int_{w_{i,j}^{(1)}} \frac{1}{\sigma_m^{(1)} \sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{(\log x_{i,j}^{(1)} - \mu_{i,j}^{*(1)})^2}{2\sigma_m^{(1)2}} \right) \phi(w_{i,j}^{(1)}) dw_{i,j}^{(1)} \right) \\ & + \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \ln \left( \int_{w_{i,j}^{(2)}} \frac{1}{\sigma_m^{(2)} \sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{(\log x_{i,j}^{(2)} - \mu_{i,j}^{*(2)})^2}{2\sigma_m^{(2)2}} \right) \phi(w_{i,j}^{(2)}) dw_{i,j}^{(2)} \right) \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$, \mu_{i,j}^{*(n)} = \exp(X\beta^{(n)}) + \exp(\sigma_u^{(n)} w_{i,j}^{(n)})$$

Düzenlemiş sistematik öge log-olabilirlik fonksiyonunda yerine yazıldığında;



$$\begin{aligned} \ell_{IFM} = & \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \ln \left( \int_{u_{i,j}^{(1)}} \frac{1}{\sigma_m^{(1)} \sqrt{2\pi}} \exp \left( - \frac{\left( \log x_{i,j}^{(1)} - \left( \exp(X\beta^{(1)}) + \exp(\sigma_u^{(1)} w_{i,j}^{(1)}) \right) \right)^2}{2\sigma_m^{(1)2}} \right) \phi(w_{i,j}^{(1)}) dw_{i,j}^{(1)} \right) \\ & + \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \ln \left( \int_{u_{i,j}^{(2)}} \frac{1}{\sigma_m^{(2)} \sqrt{2\pi}} \exp \left( - \frac{\left( \log x_{i,j}^{(2)} - \left( \exp(X\beta^{(2)}) + \exp(\sigma_u^{(2)} w_{i,j}^{(2)}) \right) \right)^2}{2\sigma_m^{(2)2}} \right) \phi(w_{i,j}^{(2)}) dw_{i,j}^{(2)} \right) \end{aligned} \quad (4.31)$$

biçiminde elde edilmektedir.

Yapılan dönüşümler ile log-olabilirlik fonksiyonu gözlenemeyen etkiden arındırılmıştır.

Düzenlenmiş log-olabilirlik fonksiyonunun değeri Monte Carlo simülasyon yöntemi ile elde edilmiştir. Elde edilen bu yeni benzetim uygulanmış edilmiş log-olabilirlik fonksiyonu maksimize edilmiştir.

Monte Carlo integrasyon yöntemini uygulayabilmek için gerekli adımlar izlendiğinde çıkarılan sonuçlar aşağıdaki eşitliklerde verilmiştir:

Gözlenemeyen etkinin normal dağıldığı varsayımı daha uygulanabilir bir parametre tahmin süreci izlemek için parametre tahminleri log-olabilirlik fonksiyonu yerine benzetim uygulanmış log-olabilirlik fonksiyonu kullanılarak yapılmıştır.

$$\ell_{IFM}(\phi, x_{ij}^{(n)}) = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \sum_{n=1}^N \ln \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma_m^{(n)} \sqrt{2\pi}} \exp \left( - \frac{\left( \log x_{i,j}^{(n)} - \left( \exp(X\beta^{(n)}) + \exp(\sigma_u^{(n)} w_{i,j}^{(n)}) \right) \right)^2}{2\sigma_m^{(n)2}} \right) \phi(w_{i,j}^{(n)}) dw_{i,j}^{(n)} \right] \quad (4.32)$$

$$\ell_{IFM}^s(\phi, x_{ij}^{(n)}) = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \sum_{n=1}^N \ln \left[ \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R \frac{1}{\sigma_m^{(n)} \sqrt{2\pi}} \exp \left( - \frac{\left( \log x_{i,j}^{(n)} - \left( \exp(X\beta^{(n)}) + \exp(\sigma_u^{(n)} w_{i,j}^{(n)}) \right) \right)^2}{2\sigma_m^{(n)2}} \right) \phi(w_{i,j}^{(n)}) dw_{i,j}^{(n)} \right] \quad (4.33)$$

Eşitlik 4.32 ve 4.33'te sırasıyla log-olabilirlik ve benzetim uygulanmış edilmiş log-olabilirlik fonksiyonu yazılmıştır. Eşitliklerden görüldüğü gibi çarpımsal modelde sistematik ögenin yazılışı değişmiştir.

Monte Carlo yöntemi ile eşitlik bu versiyona dönüştürülmüştür. Burada w rasgele değişkeni standart normal dağılımdan üretilerek integral hesabı yapılmaktadır.

Değişken değişimi ve gerekli düzenlemeler sonucunda log-olabilirlik fonksiyonu yeniden yazılmıştır. Gerekli parametreleri ve gözlenemeyen etkiyi tahmin edebilmek için benzetim uygulanmış log-olabilirlik fonksiyonuna ihtiyaç duyulmaktadır.

Fonksiyonlar elde edildikten sonra parametre tahminine geçilmiştir. Parametre tahmini yapılırken kullanılan yöntemler için türevler gerekmektedir.

Log-olabilirlik fonksiyonu  $\hat{\phi} = (\beta^{(n)}, \sigma_m^{(n)}, \sigma_u^{(n)})$  parametreleri üzerinden maksimize edilmiştir. Tahmin edilmesi gereken parametreler vektöründe yer alan parametreler aşağıda verilmiştir:

- $\beta^{(n)}$  : Her iki üçgene ait kaza yılı ve gelişim yılı parametreleri
- $\sigma_u^{(n)}$  : Gözlenemeyen etkinin parametresi
- $\sigma_m^{(n)}$  : Marjinal dağılım varyansı.

$$P_{ijr} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sigma_m^{(n)} \sqrt{2\pi}} \exp \left( - \frac{\left( \log x_{i,j}^{(n)} - \left( \exp(X \beta^{(n)}) + \exp(\sigma_u^{(n)} w_{i,j}^{(n)}) \right) \right)^2}{2\sigma_m^{(n)2}} \right) \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} \ln P_{ijr}(\phi) = & - \left[ \ln(\sigma_m^{(1)}) + \ln(\sqrt{2\pi}) \right] - \frac{\left( \log x_{i,j}^{(1)} - \left( \exp(X \beta^{(1)}) + \exp(\sigma_u^{(1)} w_{i,j}^{(1)}) \right) \right)^2}{2\sigma_m^{(1)2}} \\ & - \left[ \ln(\sigma_m^{(2)}) + \ln(\sqrt{2\pi}) \right] - \frac{\left( \log x_{i,j}^{(2)} - \left( \exp(X \beta^{(2)}) + \exp(\sigma_u^{(2)} w_{i,j}^{(2)}) \right) \right)^2}{2\sigma_m^{(2)2}} \end{aligned} \quad (4.35)$$

Fonksiyonun birinci ve ikinci dereceden türevleri EK 2’de yer almaktadır.

Türevler yardımıyla elde edilen g ve H matrisleri aşağıdaki gibidir:

$$g_{ijr}(\phi) = \left[ \begin{array}{c} \left( \frac{\log x_{i,j}^{(n)} - e^{X \beta^{(n)}} + e^{\sigma_u^{(n)} w_{i,j}^{(n)}}}{\sigma_m^2} \right) \begin{pmatrix} X \\ w_{i,j}^{(n)} \end{pmatrix} \\ \frac{(\log x_{i,j}^{(n)} - e^{X \beta^{(n)}} + e^{\sigma_u^{(n)} w_{i,j}^{(n)}})^2}{\sigma_m^3} - \frac{1}{\sigma_m} \end{array} \right]$$

$$H_{ijr}(\phi) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sigma_m^2} \begin{pmatrix} X \\ w_{i,j}^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ w_{i,j}^{(n)} \end{pmatrix} & -\begin{pmatrix} 2 \left( \log x_{i,j}^{(n)} - e^{X\beta^{(n)}} + e^{\sigma_u^{(n)} w_{i,j}^{(n)}} \right) \\ \sigma_m^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ w_{i,j}^{(n)} \end{pmatrix} \\ -\begin{pmatrix} 2 \left( \log x_{i,j}^{(n)} - e^{X\beta^{(n)}} + e^{\sigma_u^{(n)} w_{i,j}^{(n)}} \right) \\ \sigma_m^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X w_{i,j}^{(n)} \end{pmatrix} & -\begin{pmatrix} 3 \left( \log x_{i,j}^{(n)} - e^{X\beta^{(n)}} + e^{\sigma_u^{(n)} w_{i,j}^{(n)}} \right) \\ \sigma_m^4 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sigma_m^2} \end{pmatrix}$$

Log-olabilirlik fonksiyonuna ait birinci ve ikinci dereceden türevler hesaplanarak eşitliklerde ifade edilmiştir. Bu türevler parametre tahmini yapılırken kullanılmıştır.

Böylece kısımda Bölüm 3.4.1’de yer alan IFM tahmin yönteminin ilk adımı tamamlanmıştır.

İkinci adımda ise; ilk adımda tahmin edilen parametre değerleri kullanılarak

$$\ell(\theta, x_{i,j}^{(n)}) = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \log c(\tilde{F}_{ij}^{(1)}(x_{ij}^{(1)}), \dots, \tilde{F}_{ij}^{(N)}(x_{ij}^{(N)}); \theta) \text{ fonksiyonu maksimize edilerek}$$

$$\hat{\theta} = \arg \max \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \log c(\tilde{F}_{ij}^{(1)}(x_{ij}^{(1)}), \dots, \tilde{F}_{ij}^{(N)}(x_{ij}^{(N)}); \theta) \text{ kopula parametresi tahmin}$$

edilmiştir.

#### 4.2.2. Log-Normal Dağılımlı Model

Bu kısımda gözlenemeyen etkinin dağılımının log-normal dağılım olduğu varsayımı altında çarpımsal modele ait çıkarımlar yapılmıştır.

Gözlenemeyen etki ortalaması 1 olan ve sabit ( $\sigma_u$ ) varyans ile log-normal dağılıma sahip olduğu varsayılmıştır. Toplamsal modellerden 4.1.2. kısmındaki dönüşümler uygulandığında log-olabilirlik fonksiyonu dönüşmektedir:

$$\ell_{IFM} = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \ln \left( \int_{u_{i,j}^{(1)}} \frac{1}{\sigma_m^{(1)} \sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{(\log x_{i,j}^{(1)} - \mu_{i,j}^{*(1)})^2}{2\sigma_m^{(1)2}} \right) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-w_{i,j}^{(n)2}) dw_{i,j}^{(n)} \right) \\ + \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \ln \left( \int_{u_{i,j}^{(2)}} \frac{1}{\sigma_m^{(2)} \sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{(\log x_{i,j}^{(2)} - \mu_{i,j}^{*(2)})^2}{2\sigma_m^{(2)2}} \right) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-w_{i,j}^{(n)2}) dw_{i,j}^{(n)} \right),$$

$$\mu_{i,j}^{*(n)} = \exp\left(X\beta^{(n)}\right) + \exp\left(w\sigma_u\sqrt{2} - \frac{\sigma_u^2}{2}\right) \quad (4.36)$$

Gauss-Hermite kareleme yöntemi kullanılarak integral hesabı ve parametre tahminleri yapılmıştır.

Log-olabilirlik fonksiyonu  $\hat{\phi} = (\beta^{(n)}, \sigma_m^{(n)}, \sigma_u^{(n)})$  parametreleri üzerinden maksimize edilmiştir. Tahmin edilmesi gereken parametreler vektöründe yer alan parametreler aşağıda verilmiştir:

- $\beta^{(n)}$  : Her iki üçgene ait kaza yılı ve gelişim yılı parametreleri
- $\sigma_u^{(n)}$  : Gözlenemeyen etkinin parametresi
- $\sigma_m^{(n)}$  : Marjinal dağılım varyansı.

Böylece kısımda Bölüm 3.4.1’de yer alan IFM tahmin yönteminin ilk adımı tamamlanmıştır.

İkinci adımda ise; ilk adımda tahmin edilen parametre değerleri kullanılarak

$\ell(\theta, x_{i,j}^{(n)}) = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \log c\left(\tilde{F}_{ij}^{(1)}(x_{ij}^{(1)}), \dots, \tilde{F}_{ij}^{(N)}(x_{ij}^{(N)}); \theta\right)$  fonksiyonu maksimize edilerek

$\hat{\theta} = \arg \max \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \log c\left(\tilde{F}_{ij}^{(1)}(x_{ij}^{(1)}), \dots, \tilde{F}_{ij}^{(N)}(x_{ij}^{(N)}); \theta\right)$  kopula parametresi tahmin

edilmiştir.

### 4.2.3. Gamma Dağılımlı Model

Bu kısımda gözlenemeyen etkinin dağılımının gamma dağıldığı varsayımı altında çarpımsal modele ait çıkarımlar yapılmıştır. Gözlenemeyen etkinin ortalaması 1 olan ve sabit ( $\sigma_u$ ) varyans ile gamma dağılıma sahip olduğu varsayılmıştır. Toplamsal modeller kısmından Bölüm 4.1.3’te yer alan dönüşümler uygulandığında log-olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki eşitlikteki gibi yazılmaktadır:

$$\begin{aligned}
\ell_{IFM} &= \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \ln \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma_m^{(1)} \sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{(\log x_{i,j}^{(1)} - \mu_{i,j}^{*(1)})^2}{2\sigma_m^{(1)2}} \right) \frac{1}{\Gamma(\alpha^{(1)})} \frac{1}{\alpha^{(1)\alpha^{(1)}-1}} (w_{i,j}^{(1)})^{\alpha^{(1)}-1} e^{-w_{i,j}^{(1)}} dw_{i,j}^{(1)} \right) \\
&+ \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \ln \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma_m^{(2)} \sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{(\log x_{i,j}^{(2)} - \mu_{i,j}^{*(2)})^2}{2\sigma_m^{(2)2}} \right) \frac{1}{\Gamma(\alpha^{(2)})} \frac{1}{\alpha^{(2)\alpha^{(2)}-1}} (w_{i,j}^{(2)})^{\alpha^{(2)}-1} e^{-w_{i,j}^{(2)}} dw_{i,j}^{(2)} \right) \\
, \mu_{i,j}^{*(n)} &= \exp(X\beta^{(n)}) + \exp\left(\frac{1}{\alpha} * w_{i,j}^{(n)}\right) \tag{4.37}
\end{aligned}$$

Monte Carlo süreçleri diğer kısımlarla aynı adımlarla yürütülmüştür. Benzetim uygulanmış log-olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki eşitlikteki gibidir:

$$\ell_{IFM}^S = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \sum_{n=1}^N \ln \left[ \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R \frac{1}{\sigma_m^{(n)} \sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{\left( \log x_{i,j}^{(n)} - \left( \exp(X\beta^{(n)}) + \exp\left(\frac{1}{\alpha^{(n)}} w_{i,j}^{(n)}\right) \right) \right)^2}{2\sigma_m^{(n)2}} \right) \right] \tag{4.38}$$

Log-olabilirlik fonksiyonu  $\hat{\phi} = (\beta^{(n)}, \sigma_m^{(n)}, \sigma_u^{(n)})$  parametreleri üzerinden maksimize edilmiştir. Tahmin edilmesi gereken parametreler vektöründe yer alan parametreler aşağıda verilmiştir:

- $\beta^{(n)}$  : Her iki üçgene ait kaza yılı ve gelişim yılı parametreleri
- $\sigma_u^{(n)}$  : Gözlenemeyen etkinin parametresi
- $\sigma_m^{(n)}$  : Marjinal dağılım varyansı.

Gamma dağılımlı gözlenemeyen etkinin varyansı  $Var(u) = \sigma_u = \frac{1}{\alpha}$  olarak yerine yazıldığında;

$$P_{ijr}(\phi) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sigma_m^{(n)} \sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{\left( \log x_{i,j}^{(n)} - \exp(X\beta^{(n)}) - \exp(\sigma_u^{(n)} w_{i,j}^{(n)}) \right)^2}{2\sigma_m^{(n)2}} \right) \tag{4.39}$$

$$\ln P_{ijr}(\phi) = -\left[ \ln(\sigma_m^{(1)}) + \ln(\sqrt{2\Pi}) \right] - \frac{\left( \log x_{i,j}^{(1)} - \exp(X\beta^{(1)}) - \exp(\sigma_u^{(1)} w_{i,j}^{(1)}) \right)^2}{2\sigma_m^{(1)2}} \quad (4.40)$$

$$- \left[ \ln(\sigma_m^{(2)}) + \ln(\sqrt{2\Pi}) \right] - \frac{\left( \log x_{i,j}^{(2)} - \exp(X\beta^{(2)}) - \exp(\sigma_u^{(2)} w_{i,j}^{(2)}) \right)^2}{2\sigma_m^{(2)2}}$$

Birinci ve ikinci dereceden türevler Bölüm 4.2.1'deki gibidir. Bu kısımdaki farklılık gözlenemeyen etkiye ait varyansım  $\sigma_u = \frac{1}{\alpha}$  biçiminde yazılmasıdır.

Türevler yardımıyla elde edilen g ve H matrisleri aşağıdaki gibidir:

$$g_{ijr}(\phi) = \left[ \begin{array}{c} \left( \frac{\log x_{i,j}^{(n)} - e^{X\beta^{(n)}} + e^{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{(n)} w_{i,j}^{(n)}}}{\sigma_m^2} \right) \left( \begin{array}{c} X \\ w_{i,j}^{(n)} \end{array} \right) \\ \left( \frac{\log x_{i,j}^{(n)} - e^{X\beta^{(n)}} + e^{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{(n)} w_{i,j}^{(n)}}}{\sigma_m^3} \right)^2 - \frac{1}{\sigma_m} \end{array} \right]$$

$$H_{ijr}(\phi) = \left[ \begin{array}{c} -\frac{1}{\sigma_m^2} \left( \begin{array}{c} X \\ w_{i,j}^{(n)} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} X \\ w_{i,j}^{(n)} \end{array} \right)' \\ - \left( \frac{2 \left( \log x_{i,j}^{(n)} - e^{X\beta^{(n)}} + e^{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{(n)} w_{i,j}^{(n)}} \right)}{\sigma_m^3} \right) \left( \begin{array}{c} X \\ w_{i,j}^{(n)} \end{array} \right) \\ - \left( \frac{2 \left( \log x_{i,j}^{(n)} - e^{X\beta^{(n)}} + e^{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{(n)} w_{i,j}^{(n)}} \right)}{\sigma_m^3} \right) \left( Xw_{i,j}^{(n)} \right) \\ - \left( \frac{3 \left( \log x_{i,j}^{(n)} - e^{X\beta^{(n)}} + e^{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{(n)} w_{i,j}^{(n)}} \right)}{\sigma_m^4} \right) + \frac{1}{\sigma_m^2} \end{array} \right]$$

Log-olabilirlik fonksiyonuna ait birinci ve ikinci dereceden türevler hesaplanarak eşitliklerde ifade edilmiştir. Bu türevler parametre tahmini yapılırken kullanılmıştır.

Böylece kısımda Bölüm 3.4.1'de yer alan IFM tahmin yönteminin ilk adımı tamamlanmıştır.

İkinci adımda ise; ilk adımda tahmin edilen parametre değerleri kullanılarak

$\ell(\theta, x_{i,j}^{(n)}) = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \log c(\tilde{F}_{ij}^{(1)}(x_{ij}^{(1)}), \dots, \tilde{F}_{ij}^{(N)}(x_{ij}^{(N)}); \theta)$  fonksiyonu maksimize edilerek

$\hat{\theta} = \arg \max \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \log c(\tilde{F}_{ij}^{(1)}(x_{ij}^{(1)}), \dots, \tilde{F}_{ij}^{(N)}(x_{ij}^{(N)}); \theta)$  kopula parametresi tahmin

edilmiştir.

#### 4.2.4. Üstel Dağılımlı Model

Bu kısımda gözlenemeyen etkinin dağılımının üstel dağıldığı varsayımı altında çarpımsal modele ait çıkarımlar yapılmıştır. Gözlenemeyen etkinin ortalaması 1 olan ve sabit ( $\sigma_u$ ) varyans ile üstel dağılıma sahip olduğu varsayılmıştır. Toplamsal modellerden Bölüm 4.1.4'teki dönüşümler uygulandığında log-olabilirlik fonksiyonu dönüşmektedir:

$$\begin{aligned} \ell_{IFM} &= \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \ln \left( \int_{u_{i,j}^{(1)}} \frac{1}{\sigma_m^{(1)} \sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{(\log x_{i,j}^{(1)} - \mu_{i,j}^{*(1)})^2}{2\sigma_m^{(1)2}} \right) e^{-w_{i,j}^{(1)}} dw_{i,j}^{(1)} \right) \\ &+ \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \ln \left( \int_{u_{i,j}^{(2)}} \frac{1}{\sigma_m^{(2)} \sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{(\log x_{i,j}^{(2)} - \mu_{i,j}^{*(2)})^2}{2\sigma_m^{(2)2}} \right) e^{-w_{i,j}^{(2)}} dw_{i,j}^{(2)} \right) \\ , \quad \mu_{i,j}^{*(n)} &= e^{X\beta} + e^w \end{aligned} \quad (4.41)$$

Bölüm 4.1.4'te görüleceği üzere gözlenemeyen etkinin varyansı 1 olarak bulunmuştur. Modellemede bu şekilde modele dahil edilmiştir.

Monte Carlo süreçleri aynı adımlar izlenerek elde edilmiştir.

$$\begin{aligned} \ell_{IFM}^S &= \sum_{i=1}^n \ln \left[ \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R \prod_{i=1}^T \frac{1}{\sigma_m \sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{(\log x_{i,j}^{(n)} - (e^{X\beta} + e^w))^2}{2\sigma_m^2} \right) \right] \\ \mu_{i,j}^{*(n)} &= e^{X\beta} + e^w \end{aligned} \quad (4.42)$$

Log-olabilirlik fonksiyonu kullanılarak parametrelere göre birinci ve ikinci dereceden türevler elde edilmiştir. Elde edilen bu yeni log-olabilirlik fonksiyonu  $\hat{\phi} = (\beta^{(n)}, \sigma_m^{(n)})$

parametreleri üzerinden maksimize edilmiştir. Tahmin edilmesi gereken parametreler vektöründe yer alan parametreler aşağıda verilmiştir:

- $\beta^{(n)}$  : Her iki üçgene ait kaza yılı ve gelişim yılı parametreleri
- $\sigma_m^{(n)}$  : Gözlenemeyen etkinin varyansı.

Parametre tahmini yapabilmek için türevlere ihtiyaç duyulmaktadır:

$$P_{ijr} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sigma_m^{(n)} \sqrt{2\pi}} \exp \left( - \frac{\left( \log x_{i,j}^{(n)} - \left( \exp(X\beta^{(n)}) + \exp(w_{i,j}^{(n)}) \right) \right)^2}{2\sigma_m^{(n)2}} \right) \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} \ln P_{ijr}(\phi) = & - \left[ \ln(\sigma_m^{(1)}) + \ln(\sqrt{2\pi}) \right] - \frac{\left( \log x_{i,j}^{(1)} - \left( \exp(X\beta^{(1)}) + \exp(w_{i,j}^{(1)}) \right) \right)^2}{2\sigma_m^{(1)2}} \\ & - \left[ \ln(\sigma_m^{(2)}) + \ln(\sqrt{2\pi}) \right] - \frac{\left( \log x_{i,j}^{(2)} - \left( \exp(X\beta^{(2)}) + \exp(w_{i,j}^{(2)}) \right) \right)^2}{2\sigma_m^{(2)2}} \end{aligned} \quad (4.44)$$

Birinci ve ikinci dereceden türevler EK 3'te yer almaktadır.

Türevler yardımıyla elde edilen g ve H matrisleri aşağıdaki gibidir:

$$g_{ijr}(\phi) = \left( \begin{array}{c} \frac{\left( \log x_{i,j}^{(n)} - e^{X\beta^{(n)}} - e^{w_{i,j}^{(n)}} \right) X}{\sigma_m^2} \\ -\frac{1}{\sigma_m} + \frac{1}{\sigma_m^3} \left( \log x_{i,j}^{(n)} - e^{X\beta^{(n)}} - e^{w_{i,j}^{(n)}} \right)^2 \end{array} \right)$$

$$H_{ijr}(\phi) = \left( \begin{array}{cc} -\frac{1}{\sigma_m^2} X^2 \left( \log x_{i,j}^{(n)} - e^{X\beta^{(n)}} - e^{w_{i,j}^{(n)}} \right) & -\frac{2}{\sigma_m^3} X \left( \log x_{i,j}^{(n)} - e^{X\beta^{(n)}} - e^{w_{i,j}^{(n)}} \right) \\ -\frac{2}{\sigma_m^3} X \left( \log x_{i,j}^{(n)} - e^{X\beta^{(n)}} - e^{w_{i,j}^{(n)}} \right) & \frac{1}{\sigma_m^2} - \frac{3}{\sigma_m^4} X \left( \log x_{i,j}^{(n)} - e^{X\beta^{(n)}} - e^{w_{i,j}^{(n)}} \right)^2 \end{array} \right)$$



Log-olabilirlik fonksiyonuna ait birinci ve ikinci dereceden türevler hesaplanarak eşitliklerde ifade edilmiştir. Bu türevler parametre tahmini yapılırken kullanılmıştır.

Böylece kısımda Bölüm 3.4.1’de yer alan IFM tahmin yönteminin ilk adımı tamamlanmıştır.

İkinci adımda ise; ilk adımda tahmin edilen parametre değerleri kullanılarak

$\ell(\theta, x_{i,j}^{(n)}) = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \log c(\tilde{F}_{ij}^{(1)}(x_{ij}^{(1)}), \dots, \tilde{F}_{ij}^{(N)}(x_{ij}^{(N)}); \theta)$  fonksiyonu maksimize edilerek

$\hat{\theta} = \arg \max \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \log c(\tilde{F}_{ij}^{(1)}(x_{ij}^{(1)}), \dots, \tilde{F}_{ij}^{(N)}(x_{ij}^{(N)}); \theta)$  kopula parametresi tahmin

edilmiştir.

## 5. UYGULAMA

Bölüm 3 ve Bölüm 4’te, GDM model, kopula regresyon modeli ve bağımlılık modellemesine ilişkin önerilen kopula regresyon modeline dayalı toplamsal ve çarpımsal modeller tanıtılmıştır. Bu bölümde Türkiye sigortacılık sektörüne ait gerçek bir veri seti üzerinden uygulamalar yapılmış, analizler için R programı kullanılmıştır.

### 5.1. Veri Seti

Veri setinde Türkiye sigortacılık sektörüne ait 2012-2018 yıllarını kapsayan şekilde kasko sigortası ve zorunlu trafik sigortasına ait hasar gelişim üçgenleri bulunmaktadır. Orijinal yapısında çeyreklik dönemden oluşan veri hem parametre sayısının azaltılması hem de formülasyonun uygunluğu açısından yıllık yapıya çevrilmiştir. Hasar verilerine ek olarak her iki iş koluna ait yıllık kazanılan prim tutarları da bulunmaktadır. Zorunlu trafik sigortası iş kolu-1, kasko sigortası ise iş kolu-2 olarak gösterilmiştir. Kaza yılı ve gelişim yılı sayısı birbirine eşit olup yedi tanedir ( $I=J=7$ ). Düzenlenen veriye göre ilk kaza yılına denk gelen 2012 yılı 0, son kaza yılına denk gelen 2018 yılı ise 6 rakamı ile gösterilmiştir. Çizelge 5.1 ve 5.2’de yer alan değerler her iki iş kolu için birikimli olmayan hasar tutarlarını göstermektedir. Her iki iş kolu için birikimli hasar gelişim üçgenleri EK 4 ve EK 5’te yer almaktadır.

Çizelge 5.1. İş kolu-1’e ait birikimsiz hasar gelişim üçgeni

kaza yılı	gelişim yılı						
	0	1	2	3	4	5	6
0	1,424,364,088	649,735,059	333,598,109	287,375,856	247,755,483	199,739,808	165,174,205
1	1,434,858,362	800,288,593	389,854,304	336,168,173	251,972,614	212,017,952	
2	1,698,675,714	942,636,954	519,666,671	355,408,926	306,134,001		
3	2,089,138,513	1,329,416,170	624,532,019	434,568,907			
4	2,426,038,034	1,411,756,044	544,958,544				
5	2,932,168,421	1,626,005,239					
6	3,642,432,965						

Çizelge 5.2. İş kolu-2'ye ait birikimsiz hasar gelişim üçgeni

kaza yılı	gelişim yılı						
	0	1	2	3	4	5	6
0	3,798,510,399	689,457,966	22,017,007	13,344,848	7,958,773	5,792,866	5,046,479
1	3,548,310,107	686,979,407	19,864,786	11,636,137	7,288,137	4,817,001	
2	3,852,402,832	683,761,626	21,757,380	11,219,732	9,080,118		
3	4,519,665,385	889,022,757	25,346,624	14,304,180			
4	4,944,236,481	972,658,203	30,640,537				
5	6,045,121,008	1,334,620,144					
6	7,401,477,993						

Çizelge 5.3. İş kolu-1 ve İş kolu-2 iş kollarına ait kazanılan prim tutarları

kaza yılı	Prim (İş kolu-1)	Prim (İş kolu-2)
0	3,927,620,980	2,919,380,360
1	4,585,760,752	4,047,387,156
2	4,723,889,509	4,779,055,997
3	4,932,320,489	5,237,430,200
4	5,416,995,359	9,441,200,777
5	6,118,504,936	11,294,787,145
6	7,196,885,493	11,682,859,963

Çizelge 5.3'te her iki iş koluna ait kazanılan toplam prim tutarları verilmiştir. Kazanılan prim tutarları incelendiğinde iki iş kolunun portföy içinde eşit dağılmadığı görülmektedir. Başlangıçta kasko sigortası toplam portföyün %57'üne sahipken, gelişim yılları sonunda zorunlu trafik sigortasının payı artarak %61 olmuştur. Bu da kasko sigortasının payının %39'a düştüğünü göstermektedir.

Modellerin uygulanması aşamasında standartlaştırılmış veri kullanılmıştır. Her iki iş kolu için hasar gelişim üçgenlerinde yer alan değerler prim tutarına bölünerek veriye standartlaştırma yapılmıştır.

## 5.2. Verinin Marjinal Dağılımı ve GDM Modellemesi

GDM modelde ve kopula regresyon yaklaşımında marjinal dağılımlar kullanılacağından her iki iş kolundaki verilere ait marjinal dağılım bilgilerine ihtiyaç duyulmaktadır. Bu kısımda öncelikle verinin marjinal dağılımı belirlenmiş, sonrasında ise dağılımı belirlenen veriye GDM model farklı bağ fonksiyonları ile uygulanmıştır. Analiz yapılırken her iki iş kolu için

dikkate alınan marjinal dağılımlar: log-normal ve gamma dağılımı; bağ fonksiyonları: birim ve logaritmik bağ fonksiyonudur.

### 5.2.1. İş Kollarının Marjinal Dağılımların Belirlenmesi

Bu kısımda log-normal dağılım ve gamma dağılımı olmak üzere iki parametrik dağılımın veriye uygunluğu test edilmiştir. Bu dağılımlara ait parametre tahminleri en çok olabilirlik yöntemi kullanılarak yapılmıştır. Uygun dağılımın seçimi için Kolmogorov-Smirnov (KS) testi kullanılmıştır. Kolmogorov-Smirnov testine ait sonuçlar Çizelge 5.4'te verilmiştir. Gamma ve log-normal dağılıma ait hipotez testleri aşağıdaki gibidir:

$H_0^{(1)}$  : İş kollarına ait hasar verisi ile gamma dağılım arasında fark bulunmamaktadır.

$H_0^{(2)}$  : İş kollarına ait hasar verisi ile log-normal dağılım arasında fark bulunmamaktadır.

Çizelge 5.4. KS teste ait p değerleri

	İş kolu-1	İş kolu-2
Gamma	~0	~0
Log-normal	0.103	0.157

İstatistiksel önem seviyesi 0.05 olarak belirlendiğinde,  $H_0^{(2)}$  hipotezi kabul edilmiş ve her iki iş kolunun dağılımlarının log-normal dağılıma uyduğu belirlenmiştir.

Çizelge 5.5. Her iki iş koluna ait marjinal dağılımlar için uyum iyiliği testi

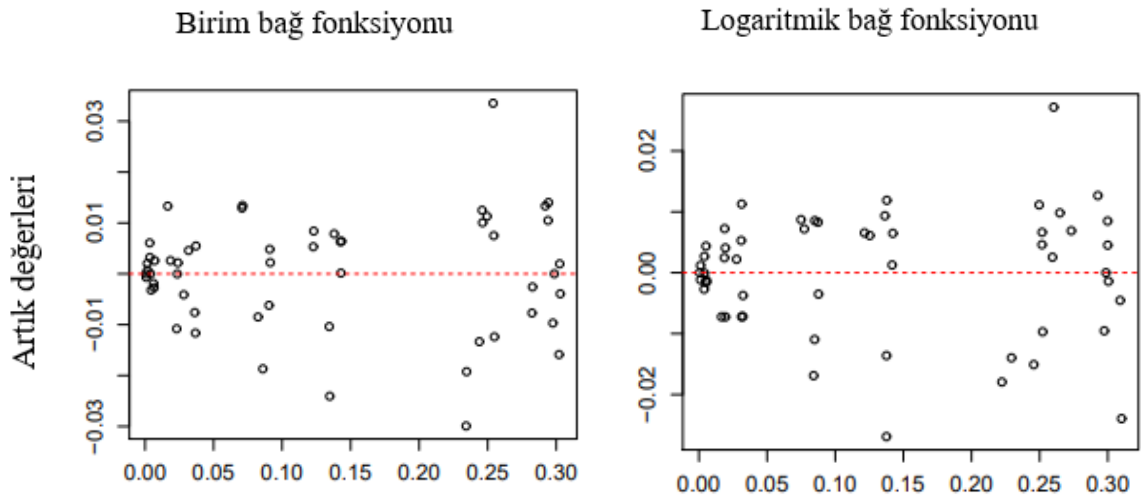
	İş kolu-1		İş kolu-2	
	Log-normal	Gamma	Log-normal	Gamma
AIC	<b>93.22</b>	138.42	<b>88.35</b>	149.23
BIC	<b>91.43</b>	115.35	<b>123.53</b>	169.64

Çizelge 5.5'te her iki iş koluna ait marjinal dağılımlar için AIC ve BIC test istatistikleri verilmiştir. AIC ve BIC kriterleri dikkate alındığında, log-normal dağılımın her iki iş kolu için de en uygun dağılım olduğu belirlenmiştir.

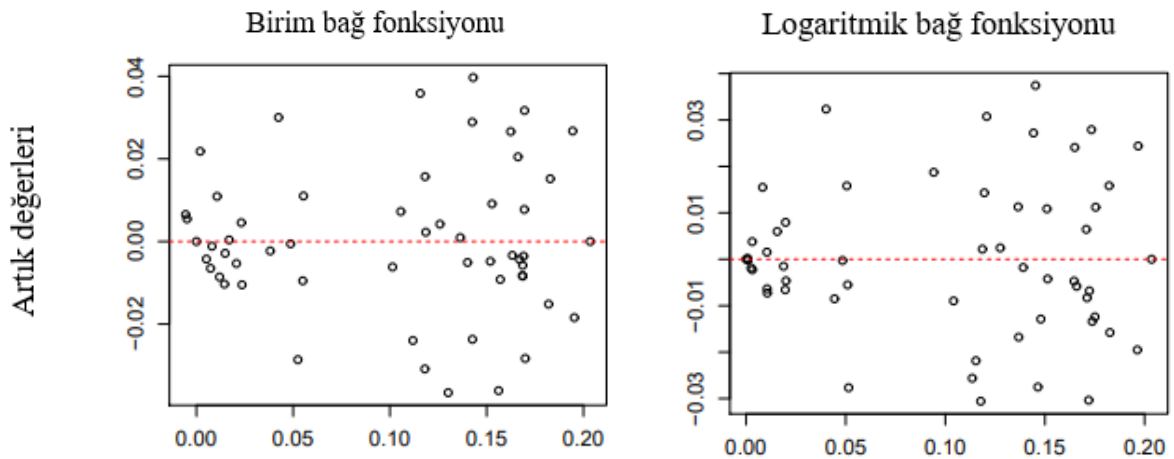
Yapılan analizler sonucunda her iki iş koluna ait hasar gelişim üçgenlerinde yer alan hasar tutarlarının dağılım log-normal dağılım olarak belirlenmiştir.

### 5.2.2.GDM Model Uygulaması

Her iki iş koluna ait standartlaştırılmış verinin dağılımı belirlendikten sonra GDM model uygulanmıştır. Literatürde yer alan çalışmalar incelendiğinde normal dağılım ile birim bağ fonksiyonu, log-normal dağılım ile logaritmik bağ fonksiyonu kullanıldığından ve aynı zamanda modelin çarpımsal olduğu durumlarda logaritmik bağ fonksiyonu tercih edildiği için bu kısımda dikkate alınan bağ fonksiyonları, birim bağ fonksiyonu ve logaritmik bağ fonksiyonudur.



Şekil 5.1. İş kolu-1 için bağ fonksiyonlarıyla artık değerleri

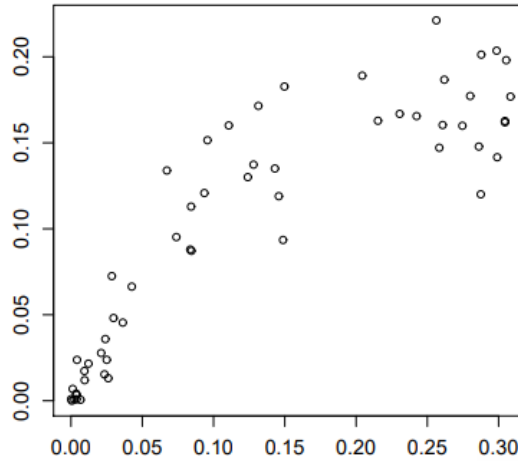


Şekil 5.2. İş kolu-2 için bağ fonksiyonlarıyla artık değerleri

Zorunlu trafik sigortası (iş kolu-1) için birim bağ fonksiyonu ve logaritmik bağ fonksiyonu kullanılarak modellendiği durumdaki artıklar hesaplanarak Şekil 5.1’de, kasko sigortası (iş kolu-2) için birim bağ fonksiyonu ve logaritmik bağ fonksiyonu kullanılarak modellendiği durumdaki artıklar hesaplanarak Şekil 5.2’de gösterilmiştir. Şekiller incelendiğinde her iki iş kolu için birim bağ fonksiyonu ile logaritmik bağ fonksiyonu kullanmak arasında bir fark gözükmemektedir. Bu sebeple toplamsal modellerde birim bağ fonksiyonu, çarpımsal modellerde ise logaritmik bağ fonksiyonu kullanılmıştır.

### 5.3.Kopula Regresyon Modeli

Standartlaştırılmış veriye ait saçılım grafiği Şekil 5.3’de verilmiştir. Bu grafiğe göre iki iş kolu arasında güçlü pozitif bir ilişki olduğu tespit edilmiş ve korelasyon değeri 0.948 olarak hesaplanmıştır.



Şekil 5.3. İş kolu-1 ve iş kolu-2 iş kollarına ait verinin saçılım grafiği

#### 5.3.1. Kopula Regresyon Modelleri için Kopula Seçimi

Bu kısımda kopula regresyonun uygulandığı modeller için uygun kopula seçimi yapılmıştır. Bu çalışmada dikkate alınan kopulalar: Gaussian kopula, Clayton kopula, Gumbel kopula ve Frank kopuladır. Kopulalar arasında seçim yapabilmek için uyum iyiliği testi yapılmıştır. Her iki iş koluna ait parametre tahmin değerleri ve kopula parametresi tahminleri Çizelge 5.6’da verilmiştir. Çizelgede yer alan  $k_y$  kaza yıllarını,  $g_y$  gelişim yıllarını ifade etmektedir.

Çizelge 5.6. Her iki iş kolu için tahmin edilen parametre değerleri

	İş kolu-1	İş kolu-2
Sabit	-0.03735	-0.79060
ky1	-1.63997	-0.59012
ky2	-5.14297	-1.32791
ky3	-5.71916	-1.55626
ky4	-6.11103	-1.72654
ky5	-6.52537	-1.91209
ky6	-6.61975	-2.08153
gy1	-0.25228	-0.22588
gy2	-0.20285	-0.21388
gy3	-0.06581	-0.06732
gy4	-0.02952	-0.60712
gy5	0.08997	-0.55774
gy6	0.06538	-0.37487

Her iki iş kolu için hasar gelişim üçgenlerinde kaza yılları ve gelişim yılları 0 rakamı ile başlamıştır. Son kaza ve son gelişim yılına denk gelen rakam ise 6'dır. 0'a denk gelen kaza ve gelişim yılları için herhangi bir rezerv tahmini yapılmaması sebebiyle parametre tahminleri 1. kaza ve 1. gelişim yılına ait parametre tahminleriyle başlamaktadır. Her iki iş kolu için hesaplanan ve Çizelge 5.6'da görülen kaza yılı ve gelişim yılı parametreleri sistematik ögelerin hesaplanmasında kullanılmıştır.

Çizelge 5.7. Kopula için blanket testi sonuçları

	Kopula Parametresi	$S_m$	$S_m^{(B)}$	$S_m^{\circ}$
Gaussian	0.531	0.002	0.028	0.023
Clayton	0.271	0.078	0.072	0.076
Gumbel	0.242	0.053	0.051	0.057
Frank	0.824	<b>0.056</b>	<b>0.492</b>	<b>0.242</b>

Kopulalar için parametre tahmin değerleri ve blanket testin p değerleri Çizelge 5.7'de verilmiştir. Çizelgede yer alan sonuçlara bakıldığında, önem seviyesi 0.05 alındığı durumda veri seti için en uygun kopula Frank kopuladır. Ayrıca kopula parametresi, korelasyon parametresine en yakın değer olarak tahmin eden kopula da Frank kopuladır. Bu özelliği sebebiyle de veri setine en uygun kopula Frank olarak seçilmektedir.

Buraya kadar yapılan analizler sonucu;

- Kopula regresyon modeli için en uygun kopula Frank kopula olarak seçilmiş,
- GDM model için yapılan bağ fonksiyonu analizlerinde hem birim bağ fonksiyonu ile hem de logaritmik bağ fonksiyonu uygun bulunmuştur.

Uygulamaya bu modeller ile devam edilmiştir.

#### 5.4. Rezerv Hesabı

Bölüm 5.1, 5.2 ve 5.3'te çalışmada kullanılan GDM model ve kopula regresyon modeline ait incelemeler yapılmıştır. Her iki iş koluna ait hasar gelişim üçgenlerinde yer alan hasar tutarlarının marjinal dağılımları belirlenmiş, GDM model için bağ fonksiyonları analizi yapılmış ve kopula regresyon model için veriye en uygun kopula seçilmiştir.

Modeller ve modeller için gerekli olan ögelerin seçimi tamamlandıktan sonra seçilen model kullanılarak kaza yıllarına ait rezerv tutarları aşağıdaki adımlar takip edilerek tahmin edilmiştir:

Çizelge 5.8. Rezerv hesabı

---

Rezerv hesabı

---

Adım 1. Kaza yılı  $i$  ve gelişim yılı  $j$  için  $i+j-1 > I$  eşitsizliğinin sağlandığı durumlar için seçilen kopula regresyon model yardımıyla  $(v_{i,j}^{(n)}, \dots, v_{i,j}^{(N)})$  vektörü üretilmiştir.

Adım 2. İlk adımda elde edilen vektörü  $x_{i,j}^{(n)} = F^{(n)(-1)}(v_{i,j}^{(n)}, \hat{\mu}_{i,j}^{*(n)}, \hat{\gamma}^{(n)})$  dönüşümü yardımıyla hasar gelişim üçgeninin alt kısmı için tahminlere dönüştürülmüştür.

Adım 3. İlk iki adımda üretilen değerlerden sonra, kaza yılı  $i$  için ödenmemiş hasar değerleri şu şekilde hesaplanmıştır:

$$\sum_{n=1}^N \sum_{k=I-i+1}^J x_{i,k}^{(n)} z_i^{(n)}$$

Adım 4. Tüm portföy için toplam rezerv tutarı ise aşağıdaki eşitlik yardımıyla hesaplanmıştır:

$$\sum_{i=1}^I \sum_{n=1}^N \sum_{k=I-i+1}^J x_{i,k}^{(n)} z_i^{(n)}$$


---

Eşitliklerde yer alan  $z$  değeri bu çalışma için kazanılan prim tutarlarıdır.

Çizelge 5.9. Her iki iş koluna ait kaza yılları için rezerv tahminleri

kaza yılı	İş kolu-1	İş kolu-2
-----------	-----------	-----------



1	194,452,311	5,230,234
2	481,435,234	13,535,132
3	1,032,535,931	28,512,632
4	1,775,535,745	45,234,625
5	2,923,352,435	84,131,563
6	7,242,646,232	2,243,525,246

Kaza yılları için ve toplam rezerv tahminleri Çizelge 5.9’da verilmiştir. Çizelge 5.6’da yer alan parametre tahminleri ile sistematik öge hesaplanmış ve rezerv hesabında belirtilen adımlar ile her kaza yılı için rezerv tahminleri hesaplanmıştır.

Bu tez çalışmasında önerilen kopula regresyon modeline dayalı toplamsal ve çarpımsal modeller ile her kaza yılına ait rezerv tutarları hesaplanmış ve gerekli karşılaştırmalar yapılmıştır.

Daha sonraki bölümlerde karşılaştırmalarda kullanılmak üzere her kaza yılı için ZM yöntemi ile hesaplanan toplam rezerv tahminleri Çizelge 5.10’da verilmiştir.

Çizelge 5.10. Her iki iş koluna ait kaza yılları için ZM ile hesaplanan rezerv tahminleri

kaza yılı	İş kolu-1	İş kolu-2
1	180,027,292	4,759,305
2	470,030,444	10,614,818
3	992,344,559	22,576,576
4	1,589,783,299	40,725,669
5	2,708,263,603	86,687,093
6	5,433,718,123	1,560,752,517

## 5.5.Modellerin Karşılaştırılması

Tüm modeller hücre hatası (cell error), geriye dönük test yöntemi ve log-olabilirlik değerleri dikkate alınarak karşılaştırılmıştır.

Bu kısımda hücre hatası ve geriye dönük test yöntemi tanıtılmıştır.

### 5.5.1.Hücre Hatası Hesabı

Aynı köşegenin hücre hatası hesabı aşağıda verilen formül yardımıyla yapılmıştır [109]:

$$\sqrt{\frac{\sum_{n_{ij}} \left[ \left( X_{ij}^n - \hat{X}_{ij}^n \right)^2 \right]}{\sum_{n_{ij}} \left[ \left( \hat{X}_{ij}^n \right)^2 \right]}} \quad (5.1)$$

Hücre hatası hesaplanırken izlenecek adımlar aşağıdaki gibidir:

Adım 1. Hasar gelişim üçgeninde yer alan son t köşegen çıkarılır.

Adım 2. Bu köşegenlerdeki değerler modeller kullanılarak tahmin edilir.

Adım 3. Gözlenen değerler ve tahmin edilen değerler ile hücre hatası Eşitlik 5.1 yardımıyla hesaplanır.

Adım 4. Hücre hatası daha küçük olan model tercih edilir.

Veriye uygulanan modellerin karşılaştırılması yapılırken hasar gelişim üçgeninden sırasıyla bir, iki ve üç köşegen çıkarılarak (bir, iki ve üç takvim yılı geri adım atılarak) hücre hataları hesaplanmıştır.

### 5.5.2. Geriye Dönük Test (Backtesting)

Tez çalışmasında önerilen modellerin performansını test edebilmek için geriye dönük test yöntemi kullanılarak modeller arasında gözlemlenen veriye dayalı karşılaştırmalar yapılmıştır. Geriye dönük test yönteminde; veri setinde görüldüğü üzere kaza yılları ve gelişim yılları 0'dan 6'ya (2012'den 2018'e) olan hasar gelişim üçgeni verisi, kaza yılları ve gelişim yılları 0'dan 2'ye (2012'den 2014'e) ve 0'dan 3'e (2012'den 2015'e) olarak iki yeni hasar gelişim üçgeni veri seti oluşturulacak şekilde düzenlenmiştir. Yeni oluşturulan bu iki hasar gelişim üçgeninde tüm satır ve sütunlar gözlemlenen değerler ile doludur. Yeni hasar gelişim üçgenleri oluşturulduktan sonra üçgenin sağ alt hücrelerinde yer alan bilinen değerler, önerilen modeller ile tahmin edilmiştir. Gözlemlenen değerlere ait tahmin değerleri hesaplandıktan sonra hata kareler ortalaması (HKO) karşılaştırılmıştır.

### 5.6. Önerilen Modellere ait Parametre ve Rezerv Tahminleri

Parametre tahminleri yapılırken Bölüm 3'te verilen quasi newton yöntemlerinden Newton-raphson, DFP ve BFGS yöntemleri dikkate alınmıştır. Önerilen tüm modeller her iki hasar

gelişim üçgeni için denenmiş, en iyi ve en hızlı sonucu DFP algoritmasının verdiği görülmüştür. DFP ve BFGS algoritmalarına ait karşılaştırmalı sonuçlar EK 6 ve EK 7’de verilmiştir.

## 5.6.1. Toplamsal Modellerin Sonuçları

### 5.6.1.1. Normal Dağılımlı Model

Toplamsal modelde gözlenemeyen etki normal dağılımlı iken tahmin edilmesi gereken parametre vektörü  $\hat{\phi} = (\beta^{(n)}, \sigma_m^{(n)}, \sigma_u^{(n)})$  olarak yazılmaktadır.

- $\beta^{(n)}$  : Her iki üçgene ait kaza yılı ve gelişim yılı parametreleri
- $\sigma_u^{(n)}$  : Gözlenemeyen etkinin varyansı
- $\sigma_m^{(n)}$  : marjinal dağılıma ait varyansı

DFP algoritmasında yer alan tolerans değeri ve maksimum iterasyon sayısı literatürde en çok kullanılan değerler olarak alınmıştır. Adım aralığı (step size) 1/32, 1/16, 1/8, 1/4, 1/2, 1, 2 ve 4 değerleri için algoritma çalıştırılmış ve tek bir iterasyon için geçen zaman, iterasyon sayısı ve yakınsama zamanı kriterleri dikkate alınarak adım aralığı 1/4 olarak belirlenmiştir. Bu analize ait sonuçlar EK 6’da yer almaktadır.

---

DFP algoritması başlangıç değerleri (Gözlenemeyen etki normal dağılımlı)

---

Kaza yılı ve gelişim yılı katsayıları için kopula regresyon yöntemi ile elde edilen parametreler Çizelge 5.6.’da yer alan parametreler kullanılmıştır.

Marjinal dağılımın varyansı için marjinal dağılım belirleme aşamasında elde edilen varyans değeri,

Gözlenemeyen etkiye ait varyans 0.01 olarak,

Hessian matrisi için Bölüm 4.1.1’de çıkarımı yapılan matris kullanılmıştır.

Tolerans değeri= $10^{-5}$ , Maksimum iterasyon sayısı=1000, Adım aralığı=1/4

---

Bu başlangıç değerleri ile DFP algoritması Bölüm 3.5’teki süreç takip edilerek uygulanmıştır. Toplamsal modelde gözlenemeyen etki normal dağılımlı iken DFP algoritması uygulandıktan sonra elde edilen parametre tahminleri Çizelge 5.11’de verilmiştir.

Çizelge 5.11. Her iki iş koluna ait sabit, kaza yılı ve gelişim yılı parametreleri

	<b>İş kolu-1</b>	<b>t değeri</b>	<b>İş kolu-2</b>	<b>t değeri</b>
Sabit	-0.02492	-0.71267	-0.79124	-18.53021
ky1	-1.63324	-28.34797	-0.63131	-36.34485
ky2	-5.29414	-161.07767	-1.34021	-29.60482
ky3	-5.71394	-221.55642	-1.57582	-27.38651
ky4	-6.11391	-237.34123	-1.73951	-30.18306
ky5	-6.49562	-264.15697	-1.91031	-76.76861
ky6	-6.24922	-142.70884	-2.08401	-85.97401
gy1	-0.23925	-4.16377	-0.22045	-8.93233
gy2	-0.22591	-4.87189	-0.26414	-7.61650
gy3	-0.06492	-3.03790	-0.05910	-1.36869
gy4	-0.03041	-1.25247	-0.75043	-54.52518
gy5	0.09921	2.26507	-0.67059	-15.34531
gy6	0.07824	1.26684	-0.40769	-16.79119

Çizelge 5.12. Parametre tahminleri

	<b>İş kolu-1</b>	<b>İş kolu-2</b>
$\sigma_u$	0.00535	0.00126
$\sigma_m$	0.15206	0.01316

Çizelge 5.12’de marjinal dağılıma ait varyans ve gözlenemeyen etkiye ait varyans değerlerinin tahmini bulunmaktadır. Toplamsal modelde gözlenemeyen etki normal dağılımlı varsayıldığında log-olabilirlik değeri 324.42 olarak bulunmuş ve kopula parametresi 0.819 olarak tahmin edilmiştir.

Çizelge 5.11’deki parametre tahminleri kullanılarak ile önce sistematik öge hesaplanmış, daha sonra sistematik ögeye gözlenemeyen etki eklenerek yeni sistematik öge değeri elde edilmiştir. Gözlenemeyen etkinin modele dahil edilmesinde yer alan  $w$  rasgele değişkeni standart normal dağılıma sahiptir. Parametre tahmin sürecinde  $w$  rasgele değişkeni sözde rastgele sayı üretme süreciyle üretilerek algoritmaya dahil edilmiştir. Parametre tahminleri yapıldıktan ve düzeltilmiş sistematik öge hesaplandıktan sonra, Bölüm 5.4’te yer alan süreç izlenerek her bir kaza yılı için rezerv tahminleri elde edilmiştir.

Çizelge 5.13. Her iki iş koluna ait rezerv tahminleri

Kaza yılı	İş kolu-1	İş kolu-2
1	182,481,291	5,381,482
2	484,193,391	14,131,492
3	1,491,391,491	29,144,491
4	1,838,491,391	46,492,392
5	3,291,133,194	84,402,391
6	4,984,315,145	2,391,491,391

Gözlenemeyen etki normal dağılım ile modellendiğinde elde edilen parametre tahminleri ve buna bağlı olarak her kaza yılına ait rezerv tahminleri Çizelge 5.13'te verilmiştir.

#### 5.6.1.2. Log-Normal Dağılımlı Model

Toplamsal modelde gözlenemeyen etki log-normal dağılımlı iken tahmin edilmesi gereken parametre vektörü Bölüm 5.6.1.1'deki gibidir.

Bu kısımda parametre tahminleri Gauss-Hermite kareleme yöntemi kullanılarak elde edilmiştir. Bu yöntemde integral içi aşağıdaki gibi yazılmıştır:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-x^2) dx = \sum_{k=1}^n w_k f(x_k)$$

Gauss-Hermite kareleme yönteminde kareleme (quadrature) nokta sayısını belirlemek için en çok kullanılan 10, 20, 30 ve 40 değerleri ile algoritma çalıştırılmış ve nokta sayısı 30 iken AIC değeri en küçük olan model elde edilmiştir. Parametre tahmininde nokta sayısı 30 olarak alınarak devam edilmiştir. Gauss-Hermite kareleme yöntemi uygulandıktan sonra elde edilen parametre tahminleri Çizelge 5.14'te verilmiştir.

Çizelge 5.14. Her iki iş koluna ait sabit, kaza yılı ve gelişim yılı parametreleri

	İş kolu-1	t değeri	İş kolu-2	t değeri
--	-----------	----------	-----------	----------

Sabit	-0.02745	-0.75350	-0.78382	-32.21083
ky1	-1.53127	-29.18929	-0.55121	-11.56304
ky2	-5.13257	-158.16857	-1.32832	-30.35466
ky3	-5.22946	-364.67643	-1.53262	-32.23854
ky4	-6.12152	-133.77448	-1.75442	-32.32762
ky5	-6.22473	-136.02994	-1.94024	-33.69642
ky6	-6.41234	-187.11234	-2.34720	-54.89242
gy1	-0.23924	-6.70704	-0.22429	-3.89799
gy2	-0.20135	-4.70664	-0.23914	-3.72087
gy3	-0.05395	-1.13174	-0.05926	-2.43168
gy4	-0.03495	-0.73317	-0.63924	-11.71413
gy5	0.09425	2.06056	-0.54924	-8.12846
gy6	0.05385	1.25862	-0.32402	-6.81660

Çizelge 5.15. Parametre tahminleri

	İş kolu-1	İş kolu-2
$\sigma_u$	0.13524	0.11305
$\sigma_m$	0.37532	0.22042

Çizelge 5.15'te marjinal dağılıma ait varyans ve gözlenemeyen etkiye ait varyans değerlerinin tahmini verilmiştir. Toplamsal modelde gözlenemeyen etki log-normal dağılım varsayıldığında log-olabilirlik değeri 73.87 olarak hesaplanmış bulunmuş ve kopula parametresi 0.802 olarak tahmin edilmiştir.

Parametre tahminleri kullanılarak önce sistematik öge hesaplanmış, daha sonra sistematik ögeye gözlenemeyen etki eklenerek yeni sistematik öge değeri elde edilmiştir. Parametre tahminleri yapıldıktan ve düzeltilmiş sistematik öge hesaplandıktan sonra, Bölüm 5.4'teki süreç izlenerek her bir kaza yılı için rezerv tahminleri elde edilmiştir.

Çizelge 5.16. Her iki iş koluna ait için rezerv tahminleri

Kaza yılı	İş kolu-1	İş kolu-2
1	190,491,582	7,295,232
2	492,295,153	15,520,142
3	1,305,239,301	31,593,003
4	1,932,349,302	54,241,449
5	4,123,402,110	95,295,293
6	5,492,591,392	3,833,345,425

Gözlenemeyen etki normal dağılım ile modellendiğinde elde edilen parametre tahminleri ve buna bağlı olarak her kaza yılına ait rezerv tahminleri verilmiştir.

### 5.6.1.3. Gamma Dağılımlı Model

Toplamsal modelde gözlenemeyen etki gamma dağılımlı iken tahmin edilmesi gereken parametre vektörü Bölüm 5.6.1.1'deki gibidir.

DFP algoritmasında yer alan tolerans değeri ve maksimum iterasyon sayısı literatürde en çok kullanılan değerler olarak alınmıştır. DFP algoritmasında adım aralığı belirleme sürecine ait sonuçlar EK 6'da yer almaktadır.

Parametre tahmin sürecini içeren DFP algoritması aşağıdaki gibidir:

---

DFP algoritması başlangıç değerleri (Gözlenemeyen etki gamma dağılımlı)

---

Kaza yılı ve gelişim yılı parametreleri, marjinal dağılımın varyansı, gözlenemeyen etkinin varyansı, tolerans değeri, maksimum iterasyon sayısı bölüm 5.6.1.1'deki algoritmayla aynıdır. Farklı olarak;

Hessian matrisi için bölüm 4.1.2'de çıkarımı yapılan matris kullanılmıştır,

Adım aralığı=1/16 olarak alınmıştır.

---

Bu başlangıç değerleri ile DFP algoritması Bölüm 3.5'te yer alan süreç takip edilerek uygulanmıştır.

Toplamsal modelde gözlenemeyen etki gamma dağılımlı iken DFP algoritması uygulandıktan sonra elde edilen parametre tahminleri Çizelge 5.17'de verilmiştir.

Çizelge 5.17. Her iki iş koluna ait sabit, kaza yılı ve gelişim yılı parametreleri

	<b>İş kolu-1</b>	<b>t değeri</b>	<b>İş kolu-2</b>	<b>t değeri</b>
Sabit	-0.14923	-3.19140	-0.83104	-18.30485
ky1	-1.53233	-63.19669	-0.59411	-10.89311
ky2	-5.64215	-131.98012	-1.39482	-56.83863
ky3	-5.40844	-220.12373	-1.57524	-64.11233
ky4	-6.59544	-102.33413	-1.37302	-55.88197
ky5	-6.34432	-258.52975	-2.29646	-42.33886
ky6	-6.73216	-275.05148	-2.26724	-65.44205
gy1	-0.64342	-1.38444	-0.36267	-14.77873
gy2	-0.62324	-25.39690	-0.43852	-10.16505
gy3	-0.39395	-7.26309	-0.24552	-5.78511
gy4	-0.92451	-37.66292	-0.54244	-8.02782
gy5	0.19174	5.53522	-0.73562	-15.84022
gy6	0.11054	3.19111	-0.59365	-12.83845

Çizelge 5.18. Parametre tahminleri

	<b>İş kolu-1</b>	<b>İş kolu-2</b>
$\sigma_u$	0.92535	0.88126
$\sigma_m$	0.73925	0.71316

Çizelge 5.18’de marjinal dağılıma ait varyans ve gözlenemeyen etkiye ait varyans değerlerinin tahmini bulunmaktadır. Toplamsal modelde gözlenemeyen etkinin gamma dağılım varsayıldığında log-olabilirlik değeri 320.14 olarak bulunmuş ve kopula parametresi 0.813 olarak tahmin edilmiştir.

Parametre tahminleri kullanılarak önce sistematik öge hesaplanacak, daha sonra sistematik ögeye gözlenemeyen etki eklenerek yeni sistematik öge değeri elde edilmiştir.

Parametre tahminleri yapıldıktan ve düzeltilmiş sistematik öge hesaplandıktan sonra, bölüm 5.4’teki süreç izlenerek her bir kaza yılı için rezerv tahminleri elde edilmiştir.

Çizelge 5.19. Her iki iş koluna ait rezerv tahminleri

<b>Kaza yılı</b>	<b>İş kolu-1</b>	<b>İş kolu-2</b>
------------------	------------------	------------------



1	183,402,301	5,392,392
2	485,432,492	16,293,353
3	1,474,145,147	32,492,305
4	1,924,029,302	46,204,202
5	3,334,402,301	85,391,302
6	5,204,302,294	2,422,924,204

Gözlenemeyen etki gamma dağılım ile modellendiğinde elde edilen parametre tahminleri ve buna bağlı olarak her kaza yılına ait rezerv tahminleri Çizelge 5.19’da verilmiştir.

#### 5.6.1.4. Üstel Dağılımlı Model

Toplamsal modelde gözlenemeyen etki normal dağılımlı iken tahmin edilmesi gereken parametre vektörü  $\hat{\phi} = (\beta^{(n)}, \sigma_m^{(n)})$  şeklindedir.

- $\beta^{(n)}$  : Her iki üçgene ait kaza yılı ve gelişim yılı parametreleri
- $\sigma_m^{(n)}$  : marjinal dağılıma ait varyansı

DFP algoritmasında adım aralığı belirleme sürecine ait sonuçlar EK 6’da yer almaktadır. Parametre tahmin sürecini içeren DFP algoritması model için aşağıdaki gibidir:

---

DFP algoritması başlangıç değerleri (Gözlenemeyen etki üstel dağılımlı iken)

---

Kaza yılı ve gelişim yılı parametreleri, marjinal dağılımın varyansı, gözlenemeyen etkinin varyansı, tolerans değeri, maksimum iterasyon sayısı bölüm 5.6.1.1’deki algoritmayla aynıdır. Farklı olarak;

Hessian matrisi için Bölüm 4.1.4’te çıkarımı yapılan matris kullanılmıştır,

Adım aralığı=2 olarak alınmıştır.

---

Bu başlangıç değerleri ile DFP algoritması Bölüm 3.5’teki süreç takip edilerek uygulanmıştır.

Toplamsal modelde gözlenemeyen etki üstel dağılımlı iken DFP algoritması uygulandıktan sonra elde edilen parametre tahminleri verilmiştir.

Çizelge 5.20. Her iki iş koluna ait sabit, kaza yılı ve gelişim yılı parametreleri

	<b>İş kolu-1</b>	<b>t değeri</b>	<b>İş kolu-2</b>	<b>t değeri</b>
Sabit	-0.04802	-0.88045	-0.72104	-11.22416
ky1	-1.62034	-35.65105	-0.63204	-11.65366
ky2	-5.34824	-125.07578	-1.20482	-22.21276
ky3	-5.52801	-130.22403	-1.52095	-28.04111
ky4	-6.48024	-118.35190	-1.73245	-27.73962
ky5	-6.35353	-117.32338	-1.84255	-33.83682
ky6	-6.53289	-267.15016	-2.12480	-39.75825
gy1	-0.59253	-24.14547	-0.24235	-5.57896
gy2	-0.42532	-10.07889	-0.24253	-5.75452
gy3	-0.39535	-9.10106	-0.07425	-1.36768
gy4	-0.42953	-7.91906	-0.60245	-11.10712
gy5	0.03532	0.65118	-0.53252	-11.54140
gy6	0.07324	1.13473	-0.34523	-5.37407

Çizelge 5.21. Parametre tahminleri

	<b>İş kolu-1</b>	<b>İş kolu-2</b>
$\sigma_m$	0.49245	0.34592

Çizelge 5.21’de her iki iş kolu için marjinal dağılımın varyansının tahmini verilmiştir. Gözlenemeyen etkinin üstel dağıldığı ve toplamsal olarak dahil olduğu modelde log-olabilirlik değeri 45.35 olarak bulunmuş ve kopula parametresi 0.775 olarak tahmin edilmiştir.

Parametre tahminleri kullanılarak önce sistematik öge hesaplanmış, daha sonra sistematik ögeye gözlenemeyen etki eklenerek yeni sistematik öge değeri elde edilmiştir.

Parametre tahminleri yapıldıktan ve düzeltilmiş sistematik öge hesaplandıktan sonra, bölüm 5.4’teki süreç izlenerek her bir kaza yılı için rezerv tahminleri elde edilmiştir.

Çizelge 5.22. Her iki iş koluna ait, her kaza yılı için rezerv tahminleri

Kaza yılı	İş kolu-1	İş kolu-2
1	200,124,231	16,242,349
2	512,421,439	23,533,535
3	2,026,353,123	33,423,252
4	2,767,022,353	50,325,325
5	4,462,253,312	88,359,420
6	6,356,333,154	2,991,245,433

Gözlenemeyen etki üstel dağılım ile modellendiğinde elde edilen parametre tahminleri ve buna bağlı olarak her kaza yılına ait rezerv tahminleri Çizelge 5.22’de verilmiştir.

#### 5.6.1.5. Toplamsal Modellerin Karşılaştırması

Gözlenemeyen etki normal, log-normal, gamma ve üstel dağılım ile modellenerek her iki iş kolunda her kaza yılına ait rezerv tutarları tahmin edilmiştir. Bu bölümde bu modellere ait hücre hatası ve log-olabilirlik değerleri dikkate alınarak karşılaştırılmıştır.

Çizelge 5.23. Toplamsal modellerin log-olabilirlik değerleri

	LnL
Normal	<b>325.42</b>
Log-Normal	73.87
Gamma	<b>320.14</b>
Üstel	45.35

Gözlenemeyen etkinin normal, log-normal, gamma ve üstel dağılım ile modellendiği toplamsal yöntemde en iyi log-olabilirlik değeri normal ve gamma dağılımlı modelde elde edilmiştir.

#### Hücre Hatası Hesabı

Toplamsal modellerin hücre hatası ile değerlendirilmesi kısmında; hasar gelişim üçgeninden sırasıyla bir, iki ve üç köşegen çıkarılarak (bir, iki ve üç takvim yılı geri adım atılarak) hesaplamalar Bölüm 5.5.1’de anlatıldığı gibi yapılmıştır.

Çizelge 5.24. Her iki iş koluna ait hücre hatası değerleri

Köşegen	Normal dağı.	Log-normal dağı.	Gamma dağı.	Üstel dağı.
1	<b>%23.10</b>	%30.24	%25.14	%54.41
2	<b>%21.41</b>	%25.45	%21.13	%43.24
3	<b>%10.32</b>	%17.32	%12.24	%34.33
1	<b>%2.42</b>	%8.22	%3.35	%21.24
2	<b>%3.12</b>	%7.63	%4.35	%13.53
3	<b>%5.11</b>	%11.32	%6.36	%12.46

Çizelgede renkli olan ilk üç satır İş kolu-2 için, diğer üç satır ise İş kolu-1 için hesaplanan değerleri göstermektedir. Bu yaklaşımda hücre hatası küçük olan model tercih edilmektedir. Toplamsal etki modelleri arasında en düşük hücre hatasına sahip olan model gözlenemeyen etkinin normal dağılıma sahip olduğu modeldir. Gözlenemeyen etkinin gamma dağılıma sahip olduğu model ikinci en iyi model olarak görülmüştür. Normal dağılım ve gamma dağılımı log-olabilirlik değerinde de benzer sonuçlar vermiştir. (Bakınız: Çizelge 5.23)

Hücre hatası değerleri ve log-olabilirlik değerleri göz önüne alındığında toplamsal modelde en uygun modellerin sırasıyla normal ve gamma dağılımlı model olduğu tespit edilmiştir.

Toplamsal modellerde her iki iş kolu için parametre tahminleri tüm dağılımlar için EK 8’de yer almaktadır. Ekte yer alan çizelge incelendiğinde kaza yılı ve gelişim yılı parametrelerinin birbirine yakın değerler olarak tahmin edildiği görülmektedir. Marjinal dağılımın varyansı iş kolu-1 için her zaman daha büyük tahmin edilmiştir. Marjinal dağılımlara ait dağılım belirleme testleri yapılırken iş kolu-1’e ait varyansların daha büyük çıktığı görülmüştür. EK 8’de yer alan sonuçlar gerçek değerlerle örtüşmektedir. Gözlenemeyen etkinin varyansı da

iş kolu-1 için her zaman daha büyüktür. Böylece iş kolu-1’de heterojenliğin derecesinin daha büyük olduğu söylenebilir.

Toplamsal modellerde her iki iş kolu ve her kaza yılı için rezerv tahminleri tüm dağılımlar için EK 9’da yer almaktadır. Ekte yer alan çizelge incelendiğinde normal dağılımlı modelin diğer modellere göre görece daha düşük rezerv tahminleri yaptığı, en düşük rezerv tahminlerinin yer aldığı ikinci modelin ise gamma dağılımlı model olduğu söylenebilmektedir.

## 5.6.2. Çarpımsal Modellerin Sonuçları

### 5.6.2.1. Normal Dağılımlı Model

Çarpımsal modelde gözlenemeyen etki normal dağılımlı iken tahmin edilmesi gereken parametre vektörü Bölüm 5.6.1.1’deki gibidir.

DFP algoritmasında yer alan tolerans değeri en çok kullanılan değer olarak alınmıştır. Çarpımsal modellerde işlemler toplamsal modellere göre daha uzun sürdüğü için maksimum iterasyon sayısı 10000 olarak alınmıştır.

DFP algoritmasında adım aralığı belirleme sürecine ait sonuçlar EK 7’de yer almaktadır. Parametre tahmin sürecini içeren DFP algoritması aşağıdaki gibidir:

---

DFP algoritması başlangıç değerleri (Gözlenemeyen etki normal dağılıyor iken)

---

Kaza yılı ve gelişim yılı katsayıları için GDM yöntemi ile elde edilen parametreler Çizelge 5.6’da yer alan kullanılmıştır.

Marjinal dağılımın varyansı için marjinal dağılım belirleme aşamasında elde edilen varyans değeri kullanılmıştır.

Gözlenemeyen etkiye ait varyans için 0.01 kullanılmıştır.

Hessian matrisi için bölüm 4.2.1’de çıkarımı yapılan matris kullanılmıştır.

Tolerans değeri= $10^{-5}$

Maksimum iterasyon sayısı=10000

Adım aralığı=1/16

---

Bu başlangıç değerleri ile DFP algoritması Bölüm 3.5’teki süreç takip edilerek uygulanmıştır.

Çarpımsal modelde gözlenemeyen etki normal dağılımlı iken DFP algoritması uygulandıktan sonra elde edilen parametre tahminleri Çizelge 5.25'te verilmiştir.

Çizelge 5.25. Her iki iş koluna ait sabit, kaza yılı ve gelişim yılı parametreleri

	<b>İş kolu-1</b>	<b>t değeri</b>	<b>İş kolu-2</b>	<b>t değeri</b>
Sabit	-0.02491	-0.45926	-0.82011	-19.69524
ky1	-1.64001	-30.23617	-0.60219	-11.70437
ky2	-5.14391	-94.95865	-1.49213	-27.50977
ky3	-5.72118	-135.67909	-1.55021	-24.09953
ky4	-6.29481	-149.37850	-1.74025	-27.02251
ky5	-6.39241	-121.89950	-1.91301	-29.82368
ky6	-6.63921	-103.35001	-2.10424	-85.39936
gy1	-0.24810	-10.06899	-0.24025	-9.78775
gy2	-0.21041	-3.28048	-0.22051	-3.58903
gy3	-0.06391	-1.04020	-0.07129	-1.65099
gy4	-0.03914	-0.63704	-0.84013	-15.51773
gy5	0.09913	2.14846	-0.56928	-12.23101
gy6	0.07391	1.20269	-0.38414	-5.98909

Çizelge 5.26. Parametre tahminleri

	<b>İş kolu-1</b>	<b>İş kolu-2</b>
$\sigma_u$	0.00852	0.00642
$\sigma_m$	0.25206	0.01314

Çizelge 5.26'da marjinal dağılıma ait varyans ve gözlenemeyen etkiye ait varyans değerlerinin tahmini bulunmaktadır. Çarpımsal modelde gözlenemeyen etki normal dağılımlı varsayıldığında log-olabilirlik değeri 401.33 olarak bulunmuş ve kopula parametresi 0.805 olarak tahmin edilmiştir.

Parametre tahminleri kullanılarak önce sistematik öge hesaplanmış, daha sonra sistematik ögeye gözlenemeyen etki eklenerek yeni sistematik öge değeri elde edilmiştir. Parametre

tahminleri yapıldıktan ve düzeltilmiş sistematik öge hesaplandıktan sonra, Bölüm 5.4'teki süreç izlenerek her bir kaza yılı için rezerv tahminleri elde edilmiştir.

Çizelge 5.27. Her iki iş koluna ait, her kaza yılı için rezerv tahminleri

<b>Kaza yılı</b>	<b>İş kolu-1</b>	<b>İş kolu-2</b>
<b>1</b>	195,293,301	9,392,331
<b>2</b>	493,120,302	16,935,294
<b>3</b>	2,345,394,302	35,548,233
<b>4</b>	2,224,294,455	48,221,625
<b>5</b>	4,555,403,224	92,392,523
<b>6</b>	5,904,302,634	4,131,304,444

Gözlenemeyen etki normal dağılım ile modellendiğinde elde edilen parametre tahminleri ve buna bağlı olarak her kaza yılına ait rezerv tahminleri Çizelge 5.27'de verilmiştir.

#### **5.6.2.2. Log-Normal Dağılımlı Model**

Çarpımsal modelde gözlenemeyen etki log-normal dağılımlı iken tahmin edilmesi gereken parametre vektörü Bölüm 5.6.1.1'deki gibidir.

Bu kısımda parametre tahminleri Gauss-Hermite kareleme yöntemi kullanılarak elde edilmiştir. Gauss-Hermite kareleme yönteminde kareleme nokta sayısını belirlemek için en çok kullanılan 10, 20, 30 ve 40 değerleri ile algoritma çalıştırılmış ve nokta sayısı 40 iken AIC değeri en küçük olan model elde edilmiştir. Parametre tahmininde nokta sayısı 40 olarak alınarak devam edilmiştir.

Gauss-Hermite quadrate yöntemi uygulandıktan sonra elde edilen parametre tahminleri Çizelge 5.28'de verilmiştir.

Çizelge 5.28. Her iki iş koluna ait sabit, kaza yılı ve gelişim yılı parametreleri

	İş kolu-1	t değeri	İş kolu-2	t değeri
Sabit	-0.14923	-3.45920	-0.83104	-15.85228
ky1	-1.53233	-28.09553	-0.59411	-26.45899
ky2	-5.64215	-132.90658	-1.39482	-26.59332
ky3	-5.40844	-99.39062	-1.57524	-30.04807
ky4	-6.59544	-155.40622	-1.37302	-30.21278
ky5	-6.34432	-120.98246	-2.29646	-50.51606
ky6	-6.73216	-128.41752	-2.26724	-43.22339
gy1	-0.64342	-11.86246	-0.36267	-6.91406
gy2	-0.62324	-11.88255	-0.43852	-7.02149
gy3	-0.39395	-7.66082	-0.24552	-4.46850
gy4	-0.92451	-15.04736	-0.54244	-10.34303
gy5	0.19174	3.65540	-0.73562	-13.76277
gy6	0.11054	2.10737	-0.59365	-11.32066

Çizelge 5.29. Parametre tahminleri

	İş kolu-1	İş kolu-2
$\sigma_u$	0.39251	0.33285
$\sigma_m$	0.58123	0.42105

Çizelge 5.29’da marjinal dağılıma ait varyans ve gözlenemeyen etkiye ait varyans değerlerinin tahmini bulunmaktadır. Çarpımsal modelde gözlenemeyen etki log-normal dağılımlı varsayıldığında log-olabilirlik değeri 98.87 olarak bulunmuş ve kopula parametresi 0.785 olarak tahmin edilmiştir.

Parametre tahminleri kullanılarak önce sistematik öge hesaplanmış, daha sonra sistematik ögeye gözlenemeyen etki eklenerek yeni sistematik öge değeri elde edilmiştir.



Parametre tahminleri yapıldıktan ve düzeltilmiş sistematik öge hesaplandıktan sonra, Bölüm 5.4'teki süreç izlenerek her bir kaza yılı için rezerv tahminleri elde edilmiştir.

Çizelge 5.30. Her iki iş koluna ait, her kaza yılı için rezerv tahminleri

Kaza yılı	İş kolu-1	İş kolu-2
1	449,402,301	25,392,392
2	1,304,432,492	39,293,353
3	3,424,145,147	45,492,305
4	3,924,029,302	59,204,202
5	5,334,402,301	102,391,302
6	11,204,302,294	6,392,924,204

Gözlenemeyen etki log-normal dağılım ile modellendiğinde elde edilen parametre tahminleri ve buna bağlı olarak her kaza yılına ait rezerv tahminleri Çizelge 5.30'da verilmiştir.

### 5.6.2.3. Gamma Dağılımlı Model

Çarpımsal modelde gözlenemeyen etki gamma dağılımlı iken tahmin edilmesi gereken parametre vektörü Bölüm 5.6.1.1'deki gibidir.

DFP algoritmasında adım aralığı belirleme sürecine ait sonuçlar EK 7'de yer almaktadır. Parametre tahmin sürecini içeren DFP algoritması model aşağıdaki gibidir:

---

DFP algoritması başlangıç değerleri (Gözlenemeyen etki gamma dağılımlı)

---

Kaza yılı ve gelişim yılı parametreleri, marjinal dağılımın varyansı, gözlenemeyen etkinin varyansı, tolerans değeri, maksimum iterasyon sayısı Bölüm 5.6.2.1'deki algoritmayla aynıdır. Farklı olarak;

Hessian matrisi için Bölüm 4.2.3'de çıkarımı yapılan matris kullanılmıştır,

Adım aralığı=1/32 olarak alınmıştır.

---

Bu başlangıç değerleri ile DFP algoritması Bölüm 3.5'teki süreç takip edilerek uygulanmıştır.

Toplamsal modelde gözlenemeyen etki gamma dağılıma sahip iken DFP algoritması uygulandıktan sonra elde edilen parametre tahminleri verilmiştir.

Çizelge 5.31. Her iki iş koluna ait sabit, kaza yılı ve gelişim yılı parametreleri

	İş kolu-1	t değeri	İş kolu-2	t değeri
Sabit	-0.14923	-6.08101	-0.83104	-15.85954
ky1	-1.53233	-33.11714	-0.59411	-9.51276
ky2	-5.64215	-107.57197	-1.39482	-32.86570
ky3	-5.40844	-220.39283	-1.57524	-34.43147
ky4	-6.59544	-120.92850	-1.37302	-25.68793
ky5	-6.34432	-101.59040	-2.29646	-43.77795
ky6	-6.73216	-121.40956	-2.26724	-92.01461
gy1	-0.64342	-11.40007	-0.36267	-5.80699
gy2	-0.62324	-11.65719	-0.43852	-8.36009
gy3	-0.39395	-7.50896	-0.24552	-3.80386
gy4	-0.92451	-16.95105	-0.54244	-10.38361
gy5	0.19174	2.98451	-0.73562	-14.02409
gy6	0.11054	2.10737	-0.59365	-11.31754

Çizelge 5.32. Parametre tahminleri

	İş kolu-1	İş kolu-2
$\sigma_u$	1.15721	1.1314
$\sigma_m$	0.93714	0.84294

Çizelge 5.32’de marjinal dağılıma ait varyans ve gözlenemeyen etkiye ait varyans değerlerinin tahmini bulunmaktadır. Çarpımsal modelde gözlenemeyen etki gamma dağılımlı varsayıldığında log-olabilirlik değeri 382.12 olarak bulunmuş ve kopula parametresi 0.800 olarak tahmin edilmiştir.

Parametre tahminleri yapıldıktan ve düzeltilmiş sistematik öge hesaplandıktan sonra, Bölüm 5.4’teki süreç izlenerek her bir kaza yılı için rezerv tahminleri elde edilmiştir.

Çizelge 5.33. Her iki iş koluna ait rezerv tahminleri

Kaza yılı	İş kolu-1	İş kolu-2
1	196,323,555	10,111,313
2	496,934,444	16,322,502
3	2,634,155,143	34,592,242
4	2,305,333,402	49,324,492
5	4,824,352,503	93,328,342
6	5,922,425,592	4,203,303,492

Gözlenemeyen etki gamma dağılım ile modellendiğinde elde edilen parametre tahminleri ve buna bağlı olarak her kaza yılına ait rezerv tahminleri verilmiştir.

#### 5.6.2.4. Üstel Dağılımlı Model

Toplamsal modelde gözlenemeyen etki üstel dağılımlı iken tahmin edilmesi gereken parametre vektörü Bölüm 6.6.1.4'teki gibidir.

DFP algoritmasında adım aralığı belirleme sürecine ait sonuçlar EK 7'de yer almaktadır. Parametre tahmin sürecini içeren DFP algoritması aşağıdaki gibidir:

---

DFP algoritması başlangıç değerleri (Gözlenemeyen etki üstel dağılımlı)

---

Kaza yılı ve gelişim yılı parametreleri, marjinal dağılımın varyansı, gözlenemeyen etkinin varyansı, tolerans değeri, maksimum iterasyon sayısı Bölüm 5.6.2.1'deki algoritmayla aynıdır. Farklı olarak;

Hessian matrisi için Bölüm 4.2.4'te çıkarımı yapılan matris kullanılmıştır,

Adım aralığı=1 olarak alınmıştır.

---

Bu başlangıç değerleri ile DFP algoritması Bölüm 3.5'teki süreç takip edilerek uygulanmıştır.

Toplamsal modelde gözlenemeyen etki üstel dağılımlı iken DFP algoritması uygulandıktan sonra elde edilen parametre tahminleri verilmiştir.

Çizelge 5.34. Her iki iş koluna ait sabit, kaza yılı ve gelişim yılı parametreleri

	<b>İş kolu-1</b>	<b>t değeri</b>	<b>İş kolu-2</b>	<b>t değeri</b>
Sabit	-0.15021	-2.40513	-0.83204	-15.86228
ky1	-1.72013	-32.30655	-0.64923	-11.92342
ky2	-5.49524	-244.73323	-1.30542	-24.42548
ky3	-5.68302	-108.36152	-1.67232	-38.67530
ky4	-6.59392	-100.74744	-1.83024	-34.89229
ky5	-6.67204	-127.20762	-1.93284	-35.37150
ky6	-6.73422	-128.39314	-2.34925	-50.80557
gy1	-0.68022	-10.89154	-0.39592	-7.20247
gy2	-0.59439	-12.84612	-0.35824	-5.64691
gy3	-0.59204	-9.47962	-0.19402	-4.17517
gy4	-0.59221	-11.29310	-0.83424	-13.14716
gy5	0.05032	0.95932	-0.74252	-15.97848
gy6	0.09240	1.76201	-0.59392	-11.32268

Çizelge 5.35. Parametre tahminleri

	<b>İş kolu-1</b>	<b>İş kolu-2</b>
$\sigma_m$	0.68215	0.57295

Çizelge 5.35'te marjinal dağılıma ait varyans ve gözlenemeyen etkiye ait varyans değerlerinin tahmini bulunmaktadır. Çarpımsal modelde gözlenemeyen etki üstel dağılımlı varsayıldığında log-olabilirlik değeri 76.35 olarak bulunmuş ve kopula parametresi 0.751 olarak tahmin edilmiştir.

Parametre tahminleri yapıldıktan ve düzeltilmiş sistematik öge hesaplandıktan sonra, Bölüm 5.4'teki süreç izlenerek her bir kaza yılı için rezerv tahminleri elde edilmiştir.

Çizelge 5.36. Her iki iş koluna ait rezerv tahminleri

Kaza yılı	İş kolu-1	İş kolu-2
1	286,239,442	26,334,424
2	687,392,242	35,395,402
3	3,932,331,492	45,245,492
4	4,402,492,933	68,294,294
5	5,839,395,392	104,492,294
6	7,844,492,294	3,235,932,331

Gözlenemeyen etki üstel dağılım ile modellendiğinde elde edilen parametre tahminleri ve buna bağlı olarak her kaza yılına ait rezerv tahminleri Çizelge 5.36'da verilmiştir.

#### 5.6.2.5. Çarpımsal Modellerin Karşılaştırması

Gözlenemeyen etkinin normal, log-normal, gamma ve üstel dağılım ile modellenerek her iki iş kolunda her kaza yılına ait rezerv tutarları tahmin edilmiştir.

Bu bölümde bu modellere ait hücre hatası ve log-olabilirlik değerleri dikkate alınarak karşılaştırılmıştır.

Çizelge 5.37. Çarpımsal modellerin log-olabilirlik değerleri

	LnL
Normal	<b>401.33</b>
Log-Normal	98.87
Gamma	<b>383.12</b>
Üstel	76.35

Gözlenemeyen etkinin normal, log-normal, gamma ve üstel dağılım ile modellendiği çarpımsal yöntemde en iyi log-olabilirlik değeri normal ve gamma dağılımlı modelde elde edilmiştir.

## Hücre Hatası Hesabı

Hücre hatası değerlendirme kısmında bir, iki ve üç köşegen çıkarılarak (bir, iki ve üç takvim yılı geri adım atılarak) hesaplamalar Bölüm 5.5.1’de anlatıldığı gibi yapılmıştır.

Çizelge 5.38. Her iki iş koluna ait hücre hatası değerleri

Köşegen	Normal	Log-Normal	Gamma	Üstel
1	<b>%48.22</b>	%108.41	%52.23	%78.11
2	<b>%32.42</b>	%87.32	%35.11	%53.55
3	<b>%16.55</b>	%66.02	%18.22	%42.64
1	<b>%9.13</b>	%51.55	%11.66	%41.22
2	<b>%6.24</b>	%33.48	%7.34	%23.51
3	<b>%7.13</b>	%34.49	%9.21	%18.56

Çizelgede renkli olan ilk üç satır İş kolu-2 için, diğer üç satır ise İş kolu-1 için hesaplanan değerleri göstermektedir. Çarpımsal etki modelleri arasında en düşük hücre hatasına sahip olan model gözlenemeyen etkinin normal dağılıma sahip olduğu modeldir. Gözlenemeyen etkinin gamma dağılıma sahip olduğu model ikinci en düşük hücre hatalarına sahip modeldir. Normal dağılım ve gamma dağılımı log-olabilirlik değerinde de benzer sonuçlar vermiştir.

Hücre hatası değerleri ve log-olabilirlik değerleri göz önüne alındığında çarpımsal modelde en uygun modellerin sırasıyla normal ve gamma dağılımlı model olduğu tespit edilmiştir.

Çarpımsal modellerde her iki iş kolu için parametre tahminleri tüm dağılımlar için EK 10’de yer almaktadır. Ekte yer alan çizelge incelendiğinde kaza yılı ve gelişim yılı parametrelerinin birbirine yakın değerler olarak tahmin edildiği görülmektedir. Marjinal dağılımın varyansı iş kolu-1 için her zaman daha büyük tahmin edilmiştir. Marjinal dağılımlara ait dağılım belirleme testleri yapılırken iş kolu-1’e ait varyansların daha büyük çıktığı görülmüştür. EK 10’da yer alan sonuçlar gerçek değerlerle örtüşmektedir. Gözlenemeyen etkinin varyansı da iş kolu-1 için her zaman daha büyüktür. Böylece iş kolu-1’de heterojenliğin derecesinin daha büyük olduğu söylenebilir.

Çarpımsal modellerde her iki iş kolu ve her kaza yılı için rezerv tahminleri tüm dağılımlar için EK 11’de yer almaktadır. Ekte yer alan çizelge incelendiğinde normal dağılımlı modelin diğer modellere göre görece daha düşük rezerv tahminleri yaptığı, en düşük rezerv tahminlerinin yer aldığı ikinci modelin ise gamma dağılımlı model olduğu söylenebilmektedir.

### 5.6.3. Geriye Dönük Test Sonuçları

Önceki analiz sonuçlarına bakıldığında gözlenemeyen etkinin normal ve gamma dağılımlı olduğu modeller en iyi modeller olarak tespit edilmiştir. Önerilen modeller arasında toplamsal model çarpımsal modele göre daha iyi sonuç verdiği için bu kısımda toplamsal modele ilişkin geriye dönük test uygulanmıştır. Geriye dönük teste ait bilgiler Bölüm 5.5.2’de verilmiştir.

Testi yapabilmek için önce yeni veri setleri düzenlenmiştir. Modelleri gözlemlenen veri ile test edebilmek için her iki iş kolunda Çizelge 5.1 ve Çizelge 5.2’de verilen orijinal hasar gelişim üçgenleri (kaza ve gelişim yılları 0’dan -2012’den- 6’ya -2018’e- olan veri), 0-2 (2012’den 2014’e) ve 0-3 (2012’den 2015’e) olarak iki farklı yeni veri seti oluşturulacak şekilde yeniden düzenlenmiştir. Gözlenen değerler çalışmada en iyi sonucu veren normal ve gamma modeller ile tahmin edilmiştir. Gözlemlenen değerlere ait tahmin değerleri hesaplandıktan sonra aşağıda tanımlanan hata kareler ortalaması (HKO) kullanılarak modeller karşılaştırılmıştır.

$$HKO = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^I \sum_{j=I-i+1}^J \left( x_{i,j}^{(n)} - \hat{x}_{i,j}^{(n)} \right)^2$$

Formülde yer alan m üçgenlerdeki tahmin edilmesi gereken (üçgenin sağ alt kısmında yer alan) hücre sayısını göstermektedir.

#### 5.6.3.1. 2012-2014 Veri Seti için Hesaplamalar

Orijinal veri setinden kaza ve gelişim yılları 2012-2014 yıllarını kapsar şekilde yeniden düzenlenen hasar gelişim üçgenleri her iki iş kolu için Çizelge 5.39 ve 5.40’te verilmiştir. Çizelgelerde renkli olan alt üçgendeki gözlemler tahmini yapılacak olan gerçek değerleri göstermektedir.

Çizelge 5.39. İş kolu-1 için 2012-2014 olan üçgen ve kazanılan prim tutarları

	0	1	2	Primler
0	1,424,364,088	649,735,059	333,598,109	3,927,620,980
1	1,434,858,362	800,288,593	389,854,304	4,585,760,752
2	1,698,675,714	942,636,954	519,666,671	4,723,889,509

İş kolu-1 için, kaza yılı 1 olduğu durumda tahmin edilecek tutarlar toplamı 389,854,304; kaza yılı 2 iken tahmin edilecek tutarların toplamı 1,462,303,625'tir.

Çizelge 5.40. İş kolu-2 için 2012-2014 olan üçgen ve kazanılan prim tutarları

	0	1	2	Primler
0	3,798,510,399	689,457,966	22,017,007	2,919,380,360
1	3,548,310,107	686,979,407	19,864,786	4,047,387,156
2	3,852,402,832	683,761,626	21,757,380	4,779,055,997

İş kolu-2 için, kaza yılı 1 olduğu durumda tahmin edilecek tutarlar toplamı 19,864,786; kaza yılı 2 iken tahmin edilecek tutarların toplamı 705,519,006'dır.

Öncelikle gözlenemeyen etki normal dağılımlı iken sonuçları elde edilmiştir. Bölüm 4.1.1.'de anlatıldığı gibi tüm süreç yeni hasar gelişim üçgenleri için çalışılmıştır. Her iki iş koluna ait yeni veri setleri için; log-olabilirlik fonksiyonları yazılmış, gerekli dönüşümler yapılmış ve kısmi türevler elde edilmiştir. DFP algoritması kullanılarak elde edilen parametre tahminleri EK 12'de verilmiştir. Normal dağılımlı modelde log-olabilirlik değeri 95.157 olarak bulunmuştur.

Çizelge 5.41. Normal dağılımlı modelde kaza yılları için rezerv tahminleri

	İş kolu-1			İş kolu-2		
	0	1	2	0	1	2
0	1,424,364,088	649,735,059	333,598,109	3,798,510,399	689,457,966	22,017,007
1	1,434,858,362	800,288,593	389,854,304 (402,591,651)	3,548,310,107	686,979,407	19,864,786 (20,014,935)
2	1,698,675,714	942,636,954 (985,252,933)	519,666,671 (558,313,994)	3,852,402,832	683,761,626 (712,593,145)	21,757,380 (23,593,794)

Gözlenemeyen etki normal dağılımlı iken 2012-2014 veri seti için rezerv tahminleri Çizelge 5.41'de verilmiştir. Gözlemlerdeki değerler gerçekleşen değerler, parantez içindeki değerler ise tahmin değerleridir.



İkinci olarak gözlenemeyen etki gamma dağılımlı iken analizler yapılmıştır. Bölüm 4.1.3'te anlatılan adımlar izlendiğinde; DFP algoritması kullanılarak elde edilen parametre tahminleri EK 12'de verilmiştir. Gamma dağılımlı modelde log-olabilirlik değeri 92.291 olarak bulunmuştur.

Çizelge 5.42. Gamma dağılımlı modelde kaza yılları için rezerv tahminleri

	İş kolu-1			İş kolu-2		
	0	1	2	0	1	2
0	1,424,364,088	649,735,059	333,598,109	3,798,510,399	689,457,966	22,017,007
1	1,434,858,362	800,288,593	389,854,304 (445,825,022)	3,548,310,107	686,979,407	19,864,786 (23,953,212)
2	1,698,675,714	942,636,954 (1,502,582,119)	519,666,671 (732,595,981)	3,852,402,832	683,761,626 (749,214,001)	21,757,380 (26,110,321)

Gözlenemeyen etki gamma dağılımlı iken 2012-2014 veri seti için rezerv tahminleri Çizelge 5.42'de verilmiştir. Gözelerdeki değerler gerçekleşen değerler, parantez içindeki değerler ise tahmin değerleridir.

### 5.6.3.2. 2012-2015 Veri Seti için Hesaplamalar

Orijinal veri setinden kaza ve gelişim yılları 2012-2015 yıllarını kapsar şekilde yeniden düzenlenen hasar gelişim üçgenleri her iki iş kolu için Çizelge 5.43 ve 5.44'te verilmiştir. Çizelgelerde renkli olan alt üçgendeki gözeler tahmini yapılacak olan gerçek değerleri göstermektedir.

Çizelge 5.43. İş kolu-1 için 2012-2015 veri seti ve kazanılan prim tutarları

	0	1	2	3	Primler
0	1,424,364,088	649,735,059	333,598,109	287,375,856	3,927,620,980
1	1,434,858,362	800,288,593	389,854,304	336,168,173	4,585,760,752
2	1,698,675,714	942,636,954	519,666,671	355,408,926	4,723,889,509
3	2,089,138,513	1,329,416,170	624,532,019	434,568,907	4,932,320,489

İş kolu-1 için, kaza yılı 1 olduğu durumda tahmin edilecek tutarlar toplamı 336,168,173; kaza yılı 2 iken tahmin edilecek tutarların toplamı 875,075,597; kaza yılı 3 iken tahmin edilecek tutarların toplamı 2,388,517,096'dır.

Çizelge 5.44. İş kolu-2 için 2012-2015 veri seti üçgen ve kazanılan prim tutarları

	0	1	2	3	Primler
0	3,798,510,399	689,457,966	22,017,007	13,344,848	2,919,380,360
1	3,548,310,107	686,979,407	19,864,786	11,636,137	4,047,387,156
2	3,852,402,832	683,761,626	21,757,380	11,219,732	4,779,055,997
3	4,519,665,385	889,022,757	25,346,624	14,304,180	5,237,430,200

İş kolu-2 için, kaza yılı 1 olduğu durumda tahmin edilecek tutarlar toplamı 11,636,137; kaza yılı 2 iken tahmin edilecek tutarların toplamı 32,977,112; kaza yılı 3 iken tahmin edilecek tutarların toplamı 928,673,561'dir.

Bölüm 5.6.3.1'de yer alan süreç takip edilerek önce gözlenemeyen etkinin normal dağıldığı, daha sonra gamma dağıldığı varsayımıyla rezerv tahminleri elde edilmiştir. 2012-2015 veri seti Normal ve gamma dağılıma ait parametre tahmin sonuçları EK 13'te verilmiştir.

Normal dağılımlı modelde log-olabilirlik değeri 75.204 olarak bulunmuştur.

Gözlenemeyen etki normal dağılımlı iken 2012-2014 veri seti için rezerv tahminleri Çizelge 5.45'te verilmiştir. Gözlelerdeki değerler gerçekleşen değerler, parantez içindeki değerler ise tahmin değerleridir.

Gözlenemeyen etkinin normal dağıldığı varsayımından sonra, aynı üçgen verisi ile gözlenemeyen etkinin gamma dağıldığı varsayımı ele alınmıştır.

Gamma dağılımlı modelde log-olabilirlik değeri 73.291 olarak bulunmuştur.

Gözlenemeyen etki gamma dağılımlı iken 2012-2015 veri seti için rezerv tahminleri Çizelge 5.46'de verilmiştir. Gözlelerdeki değerler gerçekleşen değerler, parantez içindeki değerler ise tahmin değerleridir.

Çizelge 5.45. Normal dağılımlı modelde kaza yılları için rezerv tahminleri

	İş kolu-1				İş kolu-2			
	0	1	2	3	0	1	2	3
0	1,424,364,088	649,735,059	333,598,109	287,375,856	3,798,510,399	689,457,966	22,017,007	13,344,848
1	1,434,858,362	800,288,593	389,854,304	336,168,173 (338,112,345)	3,548,310,107	686,979,407	19,864,786	11,636,137 (14,581,412)
2	1,698,675,714	942,636,954	519,666,671 (521,842,521)	355,408,926 (356,159,214)	3,852,402,832	783,761,626	21,757,380 (23,850,114)	11,219,732 (12,082,554)
3	2,089,138,513	1,329,416,170 (1,358,250,241)	624,532,019 (626,492,154)	434,568,907 (437,593,146)	4,519,665,385	889,022,757 (895,213,741)	25,346,624 (26,122,143)	14,304,180 (16,110,113)

Çizelge 5.46. Gamma dağılımlı modelde kaza yılları için rezerv tahminleri

	İş kolu-1				İş kolu-2			
	0	1	2	3	0	1	2	3
0	1,424,364,088	649,735,059	333,598,109	287,375,856	3,798,510,399	689,457,966	22,017,007	13,344,848
1	1,434,858,362	800,288,593	389,854,304	336,168,173 (346,864,421)	3,548,310,107	686,979,407	19,864,786	11,636,137 (15,883,312)
2	1,698,675,714	942,636,954	519,666,671 (526,951,511)	355,408,926 (363,990,765)	3,852,402,832	783,761,626	21,757,380 (25,168,227)	11,219,732 (14,349,501)
3	2,089,138,513	1,329,416,170 (1,354,954,222)	624,532,019 (628,853,339)	434,568,907 (438,873,131)	4,519,665,385	889,022,757 (898,411,293)	25,346,624 (27,583,222)	14,304,180 (18,331,001)

## 5.7. Klasik Modeller ile Önerilen Modellerin Karşılaştırmaları

Bu bölümde literatürde yer alan klasik ZM, kopula regresyon yöntemleri ile bu tez çalışmasında önerilen kopula regresyon gözlenemeyen etki modeli hem geriye dönük hem de hücre hatası test yöntemi ile Bölüm 5.6.3.2’de çalışılan 2012-2015 veri seti üzerinden karşılaştırılmıştır. Her bir model için hata kareler ortalaması ve hücre hatası hesaplanmış, karşılaştırmalı sonuçlar Çizelge 5.47 ve Çizelge 5.48’de verilmiştir.

Çizelge 5.47. Klasik modeller ile önerilen modellerin HKO karşılaştırması

Zincir merdiven		Kopula regresyon		Toplamsal Normal		Toplamsal Gamma	
İş kolu-1	İş kolu-2	İş kolu-1	İş kolu-2	İş kolu-1	İş kolu-2	İş kolu-1	İş kolu-2
0.00047554	0.00002021	0.0003542	0.00001786	<b>0.000015988</b>	<b>0.00000036</b>	<b>0.00001669</b>	<b>0.00000091</b>

Çizelge 5.48. Klasik modeller ile önerilen modellerin hücre hatası karşılaştırması

Zincir merdiven		Kopula regresyon		Toplamsal Normal		Toplamsal Gamma	
İş kolu-1	İş kolu-2	İş kolu-1	İş kolu-2	İş kolu-1	İş kolu-2	İş kolu-1	İş kolu-2
%19	%7	%17	%5	<b>%2.7897</b>	<b>%0.8613</b>	<b>%2.8450</b>	<b>%1.3569</b>

Yapılan karşılaştırmalar sonucu önerilen kopula regresyon modelinin literatürdeki zincir merdiven ve standart kopula regresyon modeline göre her iki test kapsamında da daha iyi performans gösterdiği tespit edilmiştir.

## 6. SONUÇ

Rezerv tahminleri klasik yöntemlerde farklı iş kolları arasında bağımsızlık varsayımı ile yapılmaktadır. Ancak uygulamalarda görüldüğü gibi farklı iş kolları arasında birçok sebeple ilişkiler bulunmaktadır. Bu ilişkilerin dikkate alınmadığı hesaplama yöntemleri etkin olmayan sonuçlar vermektedir. Solvency 2 gibi düzenlemeler de bağımlılık yapılarının dikkate alınması gerekliliğini vurgulamaktadır.

Bu tezin temel amacı farklı iş kollarına ait hasar gelişim üçgenlerinde kaza yılı, gelişim yılı ve takvim yılı gibi bağımlılık yaratan fakat gözlenemeyen etkilerin varlığını kabul ederek, literatürde yer alan ve sıklıkla tercih edilen kopula regresyon modellerine bu etkileri dahil ederek yeni bir yöntem geliştirmektir. Bu kapsamda gözlenemeyen etki kopula regresyon modeline toplamsal ve çarpımsal yapıda dahil edilmiş, normal, log-normal, gamma ve üstel dağılımlara sahip olduğu varsayımı altında analizler yapılmıştır. Çalışılan modellerin log-olabilirlik fonksiyonları elde edilmiş gerekli yerlerde nümerik yöntemlere başvurulmuştur.

Türkiye sigorta sektörüne ait gerçek kasko ve zorunlu trafik sigortası verileri kullanılarak önerilen modeller çalışılmış, modellere ait parametre tahminleri elde edildikten sonra her bir iş kolu için tüm bağımlılık yapılarını dikkate alarak rezerv tahminleri yapılmıştır. Model karşılaştırmasında log-olabilirlik değerleri, hücre hatası ve geriye dönük test yöntemleri kullanılmıştır. Karşılaştırmalar sonucu gözlenemeyen etkinin normal ve gamma dağılımlı olduğu modeller en iyi modeller olarak belirlenmiştir.

Literatürde en çok kullanılan zincir merdiven ve kopula regresyon modeli ile önerilen modeller karşılaştırılmış, önerilen modellerin hata paylarının görece olarak daha düşük olduğu tespit edilmiştir. Bu kapsamda önerilen modellerin literatürde alternatif bir yaklaşım olarak kabul edilebileceği düşünülmüştür.

Bu çalışmada

- her iki iş koluna ait marjinal dağılımlar aynı dağılım ile modellenmiş olup gelecekteki çalışmalarda farklı marjinal dağılımlarla çalışılabileceği,
- bağımlılık yapısı için üçgenlerdeki hasarların bağımlılığı üzerinden çalışılmış olup farklı bir bakış açısı olarak üçgenler içi ve üçgenler arası köşegenlerin bağımlılığı üzerinden de çalışılabileceği,

- kopula seçiminde uyum iyiliği testleri sonucu Frank kopula kullanılmış olup, farklı hasar gelişim üçgenleri ve bağımlılık yapılarıyla birlikte diğer kopulaların da değerlendirilebileceği, kopula regresyon modellerinde hiyerarşik kopula kullanımının bağımlılık modellemesinde alternatif bir yaklaşım sunabileceği,
- Kapalı formda yazılamayan integrallerin çözümleri ve parametre tahminleri için nümerik yöntemlerden faydalandığı ve bu kapsamda sonraki çalışmalarda alternatif yöntemlerin de kullanılabilirliği,

düşünülmüştür.

## 7. KAYNAKLAR

- [1] K.D. Schmidt, M. Zocher, The Bornhuetter-Ferguson Principle, Techn. Univ. Inst. für Mathematische Stochastik, **2007**.
- [2] T. Mack, Distribution-free calculation of the standard error of chain ladder reserve estimates, ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA, 23(2) (**1993**) 213-225.
- [3] G. Taylor, Loss reserving: an actuarial perspective (Vol. 21), Springer Science & Business Media., **2012**.
- [4] P.D. England, R.J. Verrall, Standard errors of prediction in claims reserving: a comparison of methods, Institute of Actuaries, London., (**1998**).
- [5] C. Braun, The Prediction Error of the Chain Ladder Method Applied to Correlated Run-Off Triangles, ASTIN Bulletin, 34(2) (**2004**) 399-423.
- [6] M.V. Wüthrich, M. Merz, Stochastic claims reserving methods in insurance, John Wiley & Sons, (**2008**) 435.
- [7] K. Hess, K. D. Schmidt, M. Zocher, Multivariate Loss Prediction in the Multivariate Additive Model, Insurance:Mathematics and Economics, 39 (**2006**) 185-191.
- [8] Merz, M., and Wüthrich, M., Prediction error of the multivariate additive loss reserving method for dependent lines of business, Variance, 3(1) (**2009**) 131-151.
- [9] M. Merz, M. Wüthrich, Combining chain-ladder and additive loss reserving methods for dependent lines of business, Variance, 3(2) (**2009a**) 270-291.
- [10] Y. Zhang, A general multivariate chain ladder model. Insurance: Mathematics and Economics, 46(3) (**2010**) 588-599.
- [11] S. Happ, M.V. Wüthrich, Paid-incurred chain reserving method with dependence modeling, ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA, 43(1) (**2013**) 1-20.

[12] R.D. Holmberg, Correlation and the Measurement of Loss Reserve Variability, *Casualty Actuarial Society Forum*, 1 (1994) 247-277.

[13] J. Li, Modelling dependency between different lines of business with copulas, Centre for Actuarial Studies, Department of Economics, The University of Melbourne, Research Paper 146 (2006).

[14] M. Lindinger, Modelling Dependence between Loss Triangles using Copula and DVine Constructions, (2010).

[15] L. Regis, A Bayesian copula model for stochastic claims reserving, University of Torino Discussion Paper, 227 (2011) 1-26.

[16] P. De Jong, Modeling dependence between loss triangles, *North American Actuarial Journal*, 16(1) (2012) 74-86.

[17] D. Diers, M. Eling, S.D. Marek, Dependence modeling in non-life insurance using the Bernstein copula, *Insurance: Mathematics and Economics*, 50(3) (2012) 430-436.

[18] Y. Zhang, V. Dukic, Predicting multivariate insurance loss payments under the Bayesian copula framework, *J. Risk Insurance*, 80 (4) (2013) 891–919.

[19] L. Belkacem, Solvency capital for insurance company: modeling dependence using copula, *Journal of Applied Economic Sciences*, 9 (4) (2014) 30.

[20] P. Shi, A Copula Regression For Modeling Multivariate Loss Triangles and Quantifying Reserving Variability, *ASTIN Bulletin*, 44(1) (2014) 85-102.

[21] A. Abdallah, J.P. Boucher, H. Cossette, Modeling dependence between loss triangles with hierarchical Archimedean copulas, *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 45(3) (2015) 577-599.

[22] P. De Jong, Forecasting Runoff Triangles, *North American Actuarial Journal*, 10(2) (2006) 28–38.

[23] J. Hertig, A statistical approach to IBNR-reserves in marine reinsurance, *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 15(2) (1985) 171-183.

[24] M.V. Wüthrich, Accounting year effects modeling in the stochastic chain ladder reserving method, *North American Actuarial Journal*, 14(2) (2010) 235-255.



- [25] A.h. Jessen, N. Rietdorf, Diagonal effects in claims reserving, *Scandinavian Actuarial Journal*, 1 (2011) 21–37.
- [26] D. Kuang, B. Nielsen, J.P. Nielsen, Forecasting in an extended chain-ladder-type model, *Journal Risk Insurance*, 78(2) (2011) 345-359.
- [27] D. Kuang, B. Nielsen, J. P. Nielsen, Identification of the Age-Period-Cohort Model and the Extended Chain-Ladder Model, *Biometrika*, 95 (2008a) 979-986.
- [28] D. Kuang, B. Nielsen, J. P. Nielsen, Forecasting With the Age-Period Cohort Model and the Extended Chain-Ladder Model, *Biometrika*, 95 (2008b) 987-991.
- [29] P. Shi, S. Basu, G.G. Meyers, A Bayesian log-normal model for multivariate loss reserving, *North American Actuarial Journal*, 16(1) (2012) 29-51.
- [30] M. Wüthrich, R. Salzmann, Modeling Accounting Year Dependence in Runoff Triangles, *European Actuarial Journal*, 2(2) (2012) 227–242.
- [31] G. Meyers, Dependencies in stochastic loss reserve models, *Variance*, Casualty Actuarial Society-Arlington, Virginia, 11(01) (2017) 74-94.
- [32] P. Shi, A Multivariate Analysis of Intercompany Loss Triangles, *Journal of Risk and Insurance*, 84 (2) (2017) 717-737.
- [33] R. Kaas, M. Goovaerts, J. Dhane, M. Denuit, *Modern Actuarial Risk Theory*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 2001.
- [34] G. Chamberlin, *Claim Reserving Manual*, Torquay, 1987.
- [35] G.C. Taylor, Testing Goodness-of-fit of an Estimated Run-off Triangle, *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 10(1) (1978) 78-86.
- [36] K.D. Schmidt, *Methods and Models of Loss Reserving Based on Run-Off Triangles: A Unifying Survey*, Casualty Actuarial Society E-Forum, 2006.
- [37] J. Friedland, Estimating unpaid claims using basic techniques, *Casualty Actuarial Society*, 201(2) (2010).
- [38] P. Gigante, L. Picech, L. Sigalotti, A mixture model for payments and payment numbers in claims reserving, *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 48(1) (2018) 25-53.
- [39] E. De Alba, Claims reserving when there are negative values in the runoff triangle, In 37th Actuarial Research Conference, The University of Waterloo, 2002.

- [40] T. Bjarnason, M. Sjögren, Insurance Loss Reserving, Doctoral thesis, Lund University, **2014**.
- [41] I. Bantounas, G. Pitselis, Actuarial models for estimating non life risks, Doctoral thesis, University of Praeus, **2019**.
- [42] T. Mack, The Standard Error of Chain-Ladder Reserve Estimates: Recursive Calculation and Inclusion of a Tail Factor, *ASTIN Bulletin*, 29 (**1999**) 361-366.
- [43] P. Embrechts, A. McNeil, D. Straumann, Correlation and dependence in risk management: properties and pitfalls, *Risk management: value at risk and beyond*, 1 (**2002**) 176-223.
- [44] R. B. Nelsen, *An Introduction to Copulas*, Springer, **2006**.
- [45] Y. Malevergne, D. Sornette, *Extreme Financial Risks: From Dependence to Risk Management*, Springer, **2006**.
- [46] W.H. Kruskal, Ordinal Measures of Association, *Journal of the American Statistical Association*, 53(284) (**1958**) 814-861.
- [47] M. Hollander, D.A. Wolfe, *Non-parametric statistical methods.*, 46(4) (**1973**) 488-489.
- [48] E.L. Lehmann, *Nonparametrics: Statistical Methods Based on Ranks*, Springer Verlag New York, **1975**.
- [49] D.K. Karadağ, *Portfolio Risk Calculation and Stochastic Portfolio Optimization by a Copula Based Approach*, Yüksek Lisans Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, **2003**.
- [50] S.A. Klugman, H.H. Panjer, G.E. Wilmot, *Loss Models: from data to decisions*, 3rd edition, Wiley, **2008**.
- [51] P. Cizek, W. Hardle, W. Weron, *Statistical Tools in Finance and Insurance*, Springer, **2005**.
- [52] A. Sklar, Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges, *Publications de l'Institut Statistique de l'Université de Paris*, 8 (**1959**) 229–231.
- [53] J.J. Quesada-Molina, J.A. Rodriguez-Lallena, M. Ubeda-Flores, What are copulas?, *Monografias del Semin. Matem. Garcia de Galdeano*, 27 (**2003**) 499–506.
- [54] H. Joe, *Dependence modeling with copulas*, Chapman and Hall/CRC, **2014**.
- [55] M. Hofert, *Elements of copula modeling with R*, Springer, **2018**.

- [56] R. Kaas, M. Goovaerts, M. Denuit, Actuarial Theory for Dependent Risks, John Wiley&Sons, **2005**.
- [57] M.J. Frank, On the simultaneous associativity of  $F(x, y)$  and  $x+y - F(x, y)$ , Aequationes mathematicae, 19(1) (**1979**) 194–226.
- [58] G. Kimeldorf, A. Sampson, Uniform representations of bivariate distributions, Communications in Statistics--Theory and Methods, 4(7) (**1975b**) 617-627.
- [59] D.G. Clayton, A model for association in bivariate life tables and its application in epidemiological studies of familial tendency in chronic disease incidence, Biometrika, 65(1) (**1978**) 141–151.
- [60] D. Morgenstern, Einfache Beispiele zweidimensionaler Verteilungen, Mitteilungsblatt für Mathematische Statistik, 8 (**1956**) 234-235.
- [61] E.J. Gumbel, Bivariate exponential distributions, Journal of American Statistical Association, 55 (**1960**) 698-707.
- [62] D.J.G. Farlie, The performance of some correlation coefficients for a general bivariate distribution, Biometrika, 47 (**1960**) 307- 323.
- [63] J.A. Nelder , R.W.M. Wedderburn, Generalized Linear Models, Journal of the Royal Statistical Society Series A, 135(3) (**1972**) 370-384.
- [64] P. De Jong, G.Z. Heller, Generalized Linear Models for Insurance Data, Cambridge University Press, London, **2008**.
- [65] J.K. Lindsey, Applying Generalized Linear Models, Springer Verlag Inc., New York, **1997**.
- [66] P. McCullagh, J.A. Nelder, Generalized Linear Models, Chapman and Hall, London, **1989**.
- [67] P. Shi, E. Frees, Dependent loss reserving using copulas, ASTIN Bulletin, 41 (**2011**) 449–486.
- [68] E. Frees, P. Wang, Credibility using copulas, North American Actuarial Journal, 9 (2) (**2005**) 31–48.
- [69] E. Frees, P. Wang, Copula credibility for aggregate loss models. Insurance: Mathematics and Economics, 38 (2) (**2006**) 360–373.

- [70] E. Frees, E. Valdez, Hierarchical insurance claims modeling. *Journal of the American Statistical Association*, 103 (484) (2008) 1457–1469.
- [71] E. Frees, P. Shi, E. Valdez, Actuarial applications of a hierarchical insurance claims model. *ASTIN Bulletin* 39 (1) (2009) 165–197.
- [72] H. Joe, J.J. Xu, The estimation method of inference functions for margins for multivariate models. Technical Report 166, Department of Statistics, University of British Columbia, 1996.
- [73] P. Embrechts, M. Hofert, Statistical inference for copulas in high dimensions: A simulation study, *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 43(2) (2013) 81-95.
- [74] H. Joe, Asymptotic efficiency of the two-stage estimation method for copula-based models, *Journal of multivariate Analysis*, 94(2) (2005) 401-419.
- [75] G. Kim, M.J. Silvapulle, P. Silvapulle, P., Comparison of semiparametric and parametric methods for estimating copulas, *Computational Statistics & Data Analysis*, 51(6) (2007) 2836-2850.
- [76] N.C. Giri, *Multivariate statistical inference*, Academic Press, 2014.
- [77] R.M. Lokoman, F. Yusof, Parametric Estimation for Bivariate Copula in Rainfall Application, *Jurnal Teknologi*, 81(1) (2019).
- [78] V. Panchenko, Goodness-of-fit test for copulas, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 355(1) (2005) 176-182.
- [79] D. Berg, Copula goodness-of-fit testing: an overview and power comparison, *The European Journal of Finance*, 15(7-8) (2009) 675-701.
- [80] J.D. Fermanian, Goodness-of-fit tests for copulas. *Journal of multivariate analysis*, 95(1) (2005) 119-152.
- [81] C. Genest, B. Rémillard, D. Beaudoin, Goodness-of-fit tests for copulas: A review and a power study, *Insurance: Mathematics and economics*, 44(2) (2009) 199-213.
- [82] E. Brechmann, C. Czado, Truncated and simplified regular vines and their applications, Doctoral thesis, Technische Universität München, 2010.
- [83] C. Genest, W. Huang, J.M. Dufour, JA regularized goodness-of-fit test for copula, *Journal de la Société française de statistique*, 154(1) (2013) 64-77.

[84] B. Biller, C.G. Corlu, Copula-based multivariate input modeling, *Surveys in Operations Research and Management Science*, 17(2) (2012) 69-84.

[85] U. Schepsmeier, Estimating standard errors and efficient goodness-of-fit tests for regular vine copula models, Doctoral dissertation, Technische Universität München, 2014.

[86] I. Kojadinovic, J. Yan, M. Holmes, Fast large-sample goodness-of-fit tests for copulas, *Statistica Sinica*, (2011) 841-871.

[87] J. Nocedal, S.J. Wright, *Numerical Optimization*. Springer New York, 2006.

[88] J.E. Dennis, R.B. Schnabel, R.B., *Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1996.

[89] H. Niederreiter, H., *Random number generation and quasi-Monte Carlo methods*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992.

[90] R. Schoenberg, *Optimization with the quasi-newton method*. Aptech Systems, Inc. Maple Valley, WA, 2001.

[91] B.S. Everitt, Optimization in regression problems, *Introduction to Optimization Methods and their Application in Statistics*, (1987) 42-58

[92] F. Cajori, Historical note on the Newton-Raphson method of approximation, *The American Mathematical Monthly*, 18(2) (1911) 29-32.

[93] T.J. Ypma, Historical development of the Newton–Raphson method, *SIAM review*, 37(4) (1995) 531-551.

[94] H.R. Bakari, T.M. Adegoke, A.M. Yahya, A.M., Application of Newton-Raphson method to non-linear models, *International Journal of Mathematics and Statistics Studies*, 4(4) (2016) 21-31.

[95] W.C. Davidon, Variable metric method for minimization, *SIAM Journal on Optimization*, 1(1) (1959) 1-17.

[96] R. Fletcher, M.J. Powell, A rapidly convergent descent method for minimization, *The computer journal*, 6(2) (1963) 163-168.

- [97] J. Arnerić, B. Škrabić, Z. Babić, Maximization of the likelihood function in financial time series models, In Proceedings of the International Scientific Conference on Contemporary Challenges of Economic Theory and Practice (2007) 1-12.
- [98] C.G. Broyden, The convergence of a class of double-rank minimization algorithms 1. general considerations, IMA Journal of Applied Mathematics, 6(1) (1970) 76-90.
- [99] R. Fletcher, A new approach to variable metric algorithms, The Computer Journal, 13(3) (1970) 317-322.
- [100] D. Goldfarb, A family of variable-metric methods derived by variational means, Mathematics of Computation, 24(109) (1970) 23-26.
- [101] D.F. Shanno, Conditioning of Quasi-Newton Methods for function minimization, Mathematics of Computation, 24(111) (1970) 647-656.
- [102] B. Walsh, Markov Chain Monte Carlo and Gibbs Sampling, Lecture Notes for EBB, [nitro.biosci.arizona.edu/courses/EEB596/handouts/Gibbs.pdf](http://nitro.biosci.arizona.edu/courses/EEB596/handouts/Gibbs.pdf) (Erişim tarihi: Ocak 2003).
- [103] Q. Liu, D.A. Pierce, A note on Gauss–Hermite quadrature, Biometrika, 81 (1994) 624–629.
- [104] A.H. Stroud, D. Secrest, Gaussian Quadrature Formulas, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ., 1966.
- [105] G.H. Golub, J.H. Welsch, J.H. Calculation of Gaussian quadrature rules, Mathematics of Computation, 23 (1969) 221-230.
- [106] S.W. Raudenbush, M.L. Yang, M. Yosef, Maximum likelihood for generalized linear models with nested random effects via high-order, multivariate Laplace approximation, Journal of computational and Graphical Statistics, 9(1), (2000) 141-157.
- [107] F. Tuerlinckx, F. Rijmen, G. Verbeke, P.D. Boeck, Statistical inference in generalized linear mixed models: A review, British Journal of Mathematical and Statistical Psychology, 59 (2006) 225-255.
- [108] C.E. McCulloch, S.R. Searle, Generalized, Linear, and Mixed Models, John Wiley & Sons, 325, USA, 2001.
- [109] K. Kerim., A. Katrien, Claims reserving using copulas, Master's thesis, University of Amsterdam, 2017.

## EKLER

### EK 1 – Toplamsal Üstel Dağılımlı Modele Ait Türevler

Birinci dereceden türevler:

$$\frac{\partial \ln P_{ijr}(\phi)}{\partial \beta^{(n)}} = \frac{(\log x_{i,j}^{(n)} - X \beta^{(n)} - w_{i,j}^{(n)}) X}{\sigma_m^{(n)2}}$$

$$\frac{\partial \ln P_{ijr}(\phi)}{\partial \sigma_m^{(n)}} = -\frac{1}{\sigma_m^{(n)}} + \frac{1}{\sigma_m^{(n)3}} (\log x_{i,j}^{(n)} - X \beta^{(n)} - w_{i,j}^{(n)})^2$$

İkinci dereceden türevler:

$$\frac{\partial \ln P_{ijr}(\phi)}{\partial \beta^{(n)} \partial \beta^{(n)'}} = -\frac{1}{\sigma_m^{(n)2}} X^2 (\log x_{i,j}^{(n)} - X \beta^{(n)} - w_{i,j}^{(n)})$$

$$\frac{\partial \ln P_{ijr}(\phi)}{\partial \beta^{(n)} \partial \sigma_m^{(n)}} = -\frac{2}{\sigma_m^{(n)3}} X (\log x_{i,j}^{(n)} - X \beta^{(n)} - w_{i,j}^{(n)})$$

$$\frac{\partial \ln P_{ijr}(\phi)}{\partial \sigma_m^{(n)} \partial \beta^{(n)'}} = -\frac{2}{\sigma_m^{(n)3}} X (\log x_{i,j}^{(n)} - X \beta^{(n)} - w_{i,j}^{(n)})$$

$$\frac{\partial \ln P_{ijr}(\phi)}{\partial \sigma_m^{(n)} \partial \sigma_m^{(n)'}} = \frac{1}{\sigma_m^{(n)2}} - \frac{3}{\sigma_m^{(n)4}} X (\log x_{i,j}^{(n)} - X \beta^{(n)} - w_{i,j}^{(n)})^2$$

## EK 2 – Çarpımsal Normal Dağılımlı Modele Ait Türevler

Birinci dereceden türevler:

$$\frac{\partial \ln P_{ijr}(\phi)}{\partial \beta^{(n)}} = \frac{e^{X\beta^{(n)}} \left( \log x_{i,j}^{(n)} - e^{X\beta^{(n)}} - e^{\sigma_u^{(n)} w_{i,j}^{(n)}} \right) X}{\sigma_m^{(n)2}}$$

$$\frac{\partial \ln P_{ijr}(\phi)}{\partial \sigma_u^{(n)}} = \frac{e^{\sigma_u^{(n)} w_{i,j}^{(n)}} (\log x_{i,j}^{(n)} - e^{X\beta^{(n)}} - e^{\sigma_u^{(n)} w_{i,j}^{(n)}}) w_{i,j}^{(n)}}{\sigma_m^{(n)2}}$$

$$\frac{\partial \ln P_{ijr}(\phi)}{\partial \sigma_m^{(n)}} = -\frac{1}{\sigma_m^{(n)}} + \frac{1}{\sigma_m^{(n)3}} (\log x_{i,j}^{(n)} - e^{X\beta^{(n)}} - e^{\sigma_m^{(n)} w_{i,j}^{(n)}})^2$$

İkinci dereceden türevler:

$$\frac{\partial \ln P_{ijr}(\phi)}{\partial \beta^{(n)} \partial \beta^{(n)'}} = -\frac{X^2 (\log x_{i,j}^{(n)} - e^{X\beta^{(n)}} - e^{\sigma_u^{(n)} w_{i,j}^{(n)}}) e^{X\beta^{(n)}}}{\sigma_m^{(n)2}}$$

$$\frac{\partial \ln P_{ijr}(\phi)}{\partial \beta^{(n)} \partial \sigma_u^{(n)'}} = -\frac{X (w_{i,j}^{(n)}) \left( e^{\sigma_u^{(n)} w_{i,j}^{(n)}} \right) (\log x_{i,j}^{(n)} - e^{X\beta^{(n)}} - e^{\sigma_u^{(n)} w_{i,j}^{(n)}}) e^{X\beta^{(n)}}}{\sigma_m^{(n)2}}$$

$$\frac{\partial \ln P_{ijr}(\phi)}{\partial \beta^{(n)} \partial \sigma_m^{(n)'}} = -\frac{2}{\sigma_m^{(n)3}} (\log x_{i,j}^{(n)} - e^{X\beta^{(n)}} - e^{\sigma_u^{(n)} w_{i,j}^{(n)}}) X \left( e^{X\beta^{(n)}} \right)$$

$$\frac{\partial \ln P_{ijr}(\phi)}{\partial \sigma_u^{(n)} \partial \beta^{(n)'}} = -\frac{w \left( e^{\sigma_u^{(n)} w} \right) (\log x_{i,j}^{(n)} - e^{X\beta^{(n)}} - e^{\sigma_u^{(n)} w}) X \left( e^{X\beta^{(n)}} \right)}{\sigma_m^{(n)2}}$$

$$\frac{\partial \ln P_{ijr}(\phi)}{\partial \sigma_u^{(n)} \partial \sigma_u^{(n)'}} = -\frac{w \left[ -w \left( e^{\sigma_u^{(n)} w} \right) (\log x_{i,j}^{(n)} - e^{X\beta^{(n)}} - e^{\sigma_u^{(n)} w}) + w \left( e^{\sigma_u^{(n)} w} \right) \right]}{\sigma_m^{(n)2}}$$

$$\frac{\partial \ln P_{ijr}(\phi)}{\partial \sigma_u^{(n)} \partial \sigma_m^{(n)'}} = -\frac{2}{\sigma_m^{(n)3}} (\log x_{i,j}^{(n)} - e^{X\beta^{(n)}} - e^{\sigma_u^{(n)} w}) w \left( e^{\sigma_u^{(n)} w} \right)$$

$$\frac{\partial \ln P_{ijr}(\phi)}{\partial \sigma_u^{(n)} \partial \beta^{(n)'}} = -\frac{2}{\sigma_m^{(n)3}} (\log x_{i,j}^{(n)} - e^{X\beta^{(n)}} - e^{\sigma_u^{(n)} w}) X \left( e^{X\beta^{(n)}} \right)$$



$$\frac{\partial \ln P_{ijr}(\phi)}{\partial \sigma_m^{(n)} \partial \sigma_u^{(n)}} = -\frac{2}{\sigma_m^{(n)3}} (\log x_{i,j}^{(n)} - e^{X\beta^{(n)}} - e^{\sigma_u^{(n)} w}) w (e^{\sigma_u^{(n)} w})$$

$$\frac{\partial \ln P_{ijr}(\phi)}{\partial \sigma_m^{(n)} \partial \sigma_m^{(n)}} = \frac{1}{\sigma_m^{(n)2}} - \frac{3}{\sigma_m^{(n)4}} (\log x_{i,j}^{(n)} - e^{X\beta^{(n)}} - e^{\sigma_u^{(n)} w})^2$$

### EK 3 – Çarpımsal Üstel Dağılımlı Modele Ait Türevler

Birinci dereceden türevler:

$$\frac{\partial \ln P_{ijr}(\phi)}{\partial \beta^{(n)}} = \frac{1}{\sigma_m^{(n)2}} \left( \log x_{i,j}^{(n)} - e^{X\beta^{(n)}} - e^w \right) X \left( e^{X\beta^{(n)}} \right)$$

$$\frac{\partial \ln P_{ijr}(\phi)}{\partial \sigma_m^{(n)}} = -\frac{1}{\sigma_m^{(n)}} + \frac{1}{\sigma_m^{(n)3}} \left( \log x_{i,j}^{(n)} - e^{X\beta^{(n)}} - e^w \right)^2$$

İkinci dereceden türevler:

$$\frac{\partial \ln P_{ijr}(\phi)}{\partial \beta \partial \beta'} = -\frac{1}{\sigma_m^{(n)2}} X^2 \left( \log x_{i,j}^{(n)} - e^{X\beta^{(n)}} - e^w \right) \left( e^{X\beta^{(n)}} \right)^2$$

$$\frac{\partial \ln P_{ijr}(\phi)}{\partial \beta^{(n)} \partial \sigma_m^{(n)}} = -\frac{2}{\sigma_m^{(n)3}} X \left( \log x_{i,j}^{(n)} - e^{X\beta^{(n)}} - e^w \right) \left( e^{X\beta^{(n)}} \right)$$

$$\frac{\partial \ln P_{ijr}(\phi)}{\partial \sigma_m^{(n)} \partial \beta^{(n)}} = -\frac{2}{\sigma_m^{(n)3}} X \left( \log x_{i,j}^{(n)} - e^{X\beta^{(n)}} - e^w \right) \left( e^{X\beta^{(n)}} \right)$$

$$\frac{\partial \ln P_{ijr}(\phi)}{\partial \sigma_m^{(n)} \partial \sigma_m^{(n)}} = \frac{1}{\sigma_m^{(n)2}} - \frac{3}{\sigma_m^{(n)4}} \left( \log x_{i,j}^{(n)} - e^{X\beta^{(n)}} - e^w \right)^2$$

**EK 4 – İş kolu-1'e ait birikimli hasar gelişim üçgeni**

<b>kaza yılı</b>	<b>gelişim yılı</b>						
	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>
<b>0</b>	1,424,364,088	2,074,099,147	2,407,697,256	2,695,073,112	2,942,828,595	3,142,568,403	3,307,742,608
<b>1</b>	1,434,858,362	2,235,146,955	2,625,001,259	2,961,169,432	3,213,142,046	3,425,159,998	
<b>2</b>	1,698,675,714	2,641,312,668	3,160,979,339	3,516,388,265	3,822,522,266		
<b>3</b>	2,089,138,513	3,418,554,683	4,043,086,702	4,477,655,609			
<b>4</b>	2,426,038,034	3,837,794,078	4,382,752,622				
<b>5</b>	2,932,168,421	4,558,173,660					
<b>6</b>	3,642,432,965						

**EK 5 – İş kolu-2'ye ait birikimli hasar gelişim üçgeni**

<b>kaza yılı</b>	<b>gelişim yılı</b>						
	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>
<b>0</b>	3,798,510,399	4,487,968,365	4,509,985,372	4,523,330,220	4,531,288,993	4,537,081,859	4,542,128,338
<b>1</b>	3,548,310,107	4,235,289,514	4,255,154,300	4,266,790,437	4,274,078,574	4,278,895,575	
<b>2</b>	3,852,402,832	4,536,164,458	4,557,921,838	4,569,141,570	4,578,221,688		
<b>3</b>	4,519,665,385	5,408,688,142	5,434,034,766	5,448,338,946			
<b>4</b>	4,944,236,481	5,916,894,684	5,947,535,221				
<b>5</b>	6,045,121,008	7,379,741,152					
<b>6</b>	7,401,477,993						

## EK 6- Toplamsal Modeller için Algoritma ve Adım Aralığı Seçimi

Toplamsal Normal Model		Adım sayısı							
Yöntem	Performans Ölçütleri	1/32	1/16	1/8	1/4	½	1	2	4
DFP	tek bir iterasyon için geçen zaman	00:02:23	00:01:46	00:01:52	<b>00:01:23</b>	00:01:54	00:02:01	00:01:35	00:01:48
	iterasyon sayısı	95	98	101	<b>90</b>	103	89	107	99
	yakınsama zamanı	01:48:03	02:05:17	01:45:43	<b>02:01:52</b>	02:16:46	02:19:53	02:43:11	02:14:02
BFGS	tek bir iterasyon için geçen zaman	00:02:52	00:02:15	00:01:58	00:02:12	00:01:59	00:02:19	00:01:58	00:02:48
	iterasyon sayısı	102	123	115	126	142	111	109	114
	yakınsama zamanı	02:54:01	02:51:12	02:34:44	02:14:05	02:42:56	02:56:24	02:52:32	02:23:31
Toplamsal Gamma Model		Adım sayısı							
Yöntem	Performans Ölçütleri	1/32	1/16	1/8	1/4	1/2	1	2	4
DFP	tek bir iterasyon için geçen zaman	00:03:14	<b>00:02:01</b>	00:03:46	00:03:41	00:03:01	00:02:58	00:02:48	00:03:19
	iterasyon sayısı	99	<b>91</b>	98	103	101	105	110	102
	yakınsama zamanı	02:45:01	<b>01:58:03</b>	02:02:52	02:02:55	02:34:51	02:35:19	02:47:14	02:22:52
BFGS	tek bir iterasyon için geçen zaman	00:03:59	00:03:42	00:32:53	00:03:45	00:03:23	00:03:51	00:03:31	00:03:46
	iterasyon sayısı	107	133	121	129	152	125	113	124
	yakınsama zamanı	03:01:01	02:55:31	02:41:12	03:02:13	03:05:53	03:32:42	03:05:01	03:42:03
Toplamsal Üstel Model		Adım sayısı							
Yöntem	Performans Ölçütleri	1/32	1/16	1/8	¼	1/2	1	2	4
DFP	tek bir iterasyon için geçen zaman	00:01:14	00:01:21	00:01:52	00:01:18	00:01:58	00:02:01	<b>00:00:57</b>	00:02:00
	iterasyon sayısı	82	85	88	81	84	87	<b>78</b>	83
	yakınsama zamanı	01:15:42	01:18:30	01:22:19	01:25:13	01:28:03	01:32:53	<b>01:03:01</b>	01:17:35
BFGS	tek bir iterasyon için geçen zaman	00:01:24	00:01:48	00:02:03	00:01:47	00:02:05	00:02:32	00:01:15	00:02:17
	iterasyon sayısı	88	91	93	104	99	109	89	90
	yakınsama zamanı	01:48:03	01:44:15	01:47:28	01:41:36	01:45:01	01:58:04	01:34:17	01:52:02

## EK 7 -Çarpımsal Modeller için Algoritma ve Adım Aralığı Seçimi

Çarpımsal Normal Model		Adım sayısı							
Yöntem	Performans Ölçütleri	1/32	1/16	1/8	1/4	1/2	1	2	4
DFP	tek bir iterasyon için geçen zaman	00:03:34	<b>00:02:19</b>	00:03:15	00:03:41	00:03:49	00:03:51	00:03:55	00:04:02
	iterasyon sayısı	77	<b>72</b>	78	79	81	82	83	88
	yakınsama zamanı	02:58:01	<b>02:12:34</b>	02:45:37	02:48:16	02:51:19	02:48:16	02:58:51	02:59:42
BFGS	tek bir iterasyon için geçen zaman	00:04:42	00:03:24	00:03:56	00:04:12	00:04:21	00:04:19	00:04:31	00:05:11
	iterasyon sayısı	81	78	85	88	89	91	88	92
	yakınsama zamanı	03:17:42	02:57:16	03:34:31	03:54:01	03:39:11	03:17:15	04:01:00	04:10:26

Çarpımsal Gamma Model		Adım sayısı							
Yöntem	Performans Ölçütleri	1/32	1/16	1/8	1/4	1/2	1	2	4
DFP	tek bir iterasyon için geçen zaman	<b>00:04:37</b>	00:04:58	00:05:02	00:05:12	00:05:23	00:05:18	00:05:21	00:05:34
	iterasyon sayısı	<b>82</b>	84	85	86	89	91	99	105
	yakınsama zamanı	<b>03:48:02</b>	03:59:07	04:12:11	03:42:41	04:23:31	04:27:11	04:25:22	04:31:10
BFGS	tek bir iterasyon için geçen zaman	00:05:19	00:05:02	00:05:58	00:05:43	00:06:02	00:06:31	00:07:01	00:07:19
	iterasyon sayısı	88	89	91	93	94	97	103	112
	yakınsama zamanı	05:01:12	04:48:29	05:19:52	05:32:37	04:58:51	05:19:32	06:08:14	06:15:31

Çarpımsal Üstel Model		Adım sayısı							
Yöntem	Performans Ölçütleri	1/32	1/16	1/8	1/4	1/2	1	2	4
DFP	tek bir iterasyon için geçen zaman	00:02:05	00:02:08	00:02:11	00:02:09	00:02:03	<b>00:02:00</b>	00:02:04	00:02:10
	iterasyon sayısı	63	65	67	66	72	<b>60</b>	71	69
	yakınsama zamanı	02:11:15	02:29:03	02:13:01	02:15:34	02:16:09	<b>02:08:17</b>	02:19:23	02:35:18
BFGS	tek bir iterasyon için geçen zaman	00:02:18	00:02:21	00:02:32	00:02:28	00:02:23	00:02:11	00:02:19	00:02:31
	iterasyon sayısı	66	71	73	72	76	69	73	74
	yakınsama zamanı	02:29:10	03:01:05	02:47:29	02:58:01	03:02:01	02:45:51	03:02:44	03:14:17

**EK 8 - Toplamsal modellerde her iki iş kolu için parametre tahminleri**

Parametre	Normal		LN		GM		Üstel	
	İş kolu-1	İş kolu-2	İş kolu-1	İş kolu-2	İş kolu-1	İş kolu-2	İş kolu-1	İş kolu-2
<b>Sabit</b>	-0.02492	-0.79124	-0.02745	-0.78382	-0.14923	-0.83104	-0.04802	-0.72104
<b>ky1</b>	-1.63324	-0.63131	-1.53127	-0.55121	-1.53233	-0.59411	-1.62034	-0.63204
<b>ky2</b>	-5.29414	-1.34021	-5.13257	-1.32832	-5.64215	-1.39482	-5.34824	-1.20482
<b>ky3</b>	-5.71394	-1.57582	-5.22946	-1.53262	-5.40844	-1.57524	-5.52801	-1.52095
<b>ky4</b>	-6.11391	-1.73951	-6.12152	-1.75442	-6.59544	-1.37302	-6.48024	-1.73245
<b>ky5</b>	-6.49562	-1.91031	-6.22473	-1.94024	-6.34432	-2.29646	-6.35353	-1.84255
<b>ky6</b>	-6.24922	-2.08401	-6.41234	-2.34720	-6.73216	-2.26724	-6.53289	-2.12480
<b>gy1</b>	-0.23925	-0.22045	-0.23924	-0.22429	-0.64342	-0.36267	-0.59253	-0.24235
<b>gy2</b>	-0.22591	-0.26414	0.20135	-0.23914	-0.62324	-0.43852	-0.42532	-0.24253
<b>gy3</b>	-0.06492	-0.05910	-0.05395	-0.05926	-0.39395	-0.24552	-0.39535	-0.07425
<b>gy4</b>	-0.03041	-0.75043	-0.03495	-0.63924	-0.92451	-0.54244	-0.42953	-0.60245
<b>gy5</b>	0.09921	-0.67059	0.09425	-0.54924	0.19174	-0.73562	0.03532	-0.53252
<b>gy6</b>	0.07824	-0.40769	0.05385	-0.32402	0.11054	-0.59365	0.07324	-0.34523
<b><math>\sigma_u</math></b>	0.00535	0.00126	0.13524	0.11305	0.92535	0.88126	-	-
<b><math>\sigma_m</math></b>	0.15206	0.01316	0.37532	0.22042	0.73925	0.71316	0.49245	0.34592





**EK 9 - Toplamsal modellerde her iki iş kolu ve her kaza yılı için rezerv tahminleri**

Kaza yılı	Normal		LN		GM		Üstel	
	İş kolu-1	İş kolu-2	İş kolu-1	İş kolu-2	İş kolu-1	İş kolu-2	İş kolu-1	İş kolu-2
<b>ky1</b>	182,481,291	5,381,482	190,491,582	7,295,232	183,402,301	5,392,392	200,124,231	16,242,349
<b>ky2</b>	484,193,391	14,131,492	492,295,153	15,520,142	485,432,492	16,293,353	512,421,439	23,533,535
<b>ky3</b>	1,491,391,491	29,144,491	1,305,239,301	31,593,003	1,474,145,147	32,492,305	2,026,353,123	33,423,252
<b>ky4</b>	1,838,491,391	46,492,392	1,932,349,302	54,241,449	1,924,029,302	46,204,202	2,767,022,353	50,325,325
<b>ky5</b>	3,291,133,194	84,402,391	4,123,402,110	95,295,293	3,334,402,301	85,391,302	4,462,253,312	88,359,420
<b>ky6</b>	4,984,315,145	2,391,491,391	5,492,591,392	3,833,345,425	5,204,302,294	2,422,924,204	6,356,333,154	2,991,245,433

**EK 10 - Çarpımsal modellerde her iki iş kolu için parametre tahminleri**

Parametre	Normal		LN		GM		Üstel	
	İş kolu-1	İş kolu-2	İş kolu-1	İş kolu-2	İş kolu-1	İş kolu-2	İş kolu-1	İş kolu-2
<b>Sabit</b>	-0.02491	-0.82011	-0.14923	-0.83104	-0.14923	-0.83104	-0.15021	-0.83204
<b>ky1</b>	-1.64001	-0.60219	-1.53233	-0.59411	-1.53233	-0.59411	-1.72013	-0.64923
<b>ky2</b>	-5.14391	-1.49213	-5.64215	-1.39482	-5.64215	-1.39482	-5.49524	-1.30542
<b>ky3</b>	-5.72118	-1.55021	-5.40844	-1.57524	-5.40844	-1.57524	-5.68302	-1.67232
<b>ky4</b>	-6.29481	-1.74025	-6.59544	-1.37302	-6.59544	-1.37302	-6.59392	-1.83024
<b>ky5</b>	-6.39241	-1.91301	-6.34432	-2.29646	-6.34432	-2.29646	-6.67204	-1.93284
<b>ky6</b>	-6.63921	-2.10424	-6.73216	-2.26724	-6.73216	-2.26724	-6.73422	-2.34925
<b>gy1</b>	-0.24810	-0.24025	-0.64342	-0.36267	-0.64342	-0.36267	-0.68022	-0.39592
<b>gy2</b>	-0.21041	-0.22051	-0.62324	-0.43852	-0.62324	-0.43852	-0.59439	-0.35824
<b>gy3</b>	-0.06391	-0.07129	-0.39395	-0.24552	-0.39395	-0.24552	-0.59204	-0.19402
<b>gy4</b>	-0.03914	-0.84013	-0.92451	-0.54244	-0.92451	-0.54244	-0.59221	-0.83424
<b>gy5</b>	0.09913	-0.56928	0.19174	-0.73562	0.19174	-0.73562	0.05032	-0.74252
<b>gy6</b>	0.07391	-0.38414	0.11054	-0.59365	0.11054	-0.59365	0.09240	-0.59392
<b><math>\sigma_u</math></b>	0.00852	0.00642	0.39241	0.33285	1.15721	1.1314	-	-
<b><math>\sigma_m</math></b>	0.25206	0.01314	0.58123	0.42105	0.93714	0.84294	0.68215	0.57295

**EK 11 - Çarpımsal modellerde her iki iş kolu ve her kaza yılı için rezerv tahminleri**

<b>Kaza yılı</b>	<b>Normal</b>		<b>LN</b>		<b>GM</b>		<b>Üstel</b>	
	<b>İş kolu-1</b>	<b>İş kolu-2</b>	<b>İş kolu-1</b>	<b>İş kolu-2</b>	<b>İş kolu-1</b>	<b>İş kolu-2</b>	<b>İş kolu-1</b>	<b>İş kolu-2</b>
ky1	195,293,301	9,392,331	449,402,301	25,392,392	196,323,555	10,111,313	286,239,442	26,334,424
ky2	493,120,302	16,935,294	1,304,432,492	39,293,353	496,934,444	16,322,502	687,392,242	35,395,402
ky3	2,345,394,302	35,548,233	3,424,145,147	45,492,305	2,634,155,143	34,592,242	3,932,331,492	45,245,492
ky4	2,224,294,455	48,221,625	3,924,029,302	59,204,202	2,305,333,402	49,324,492	4,402,492,933	68,294,294
ky5	4,555,403,224	92,392,523	5,334,402,301	102,391,302	4,824,352,503	93,328,342	5,839,395,392	104,492,294
ky6	5,904,302,634	4,131,304,444	11,204,302,294	6,392,924,204	5,922,425,592	4,203,303,492	7,844,492,294	3,235,932,331

**EK 12- Normal ve gamma dağılımlı modelde 2012-2014 olan veri seti her iki üçgen için parametreler**

Normal model	İş kolu-1	İş kolu-2
Sabit	-0.11846	-1.49252
ky1	-1.48253	-0.59275
ky2	-2.58295	-1.53901
gy1	-3.49582	-1.12420
gy2	-3.12301	-1.04234

Gamma model	İş kolu-1	İş kolu-2
Sabit	-0.12001	-1.50213
ky1	-1.44412	-0.60271
ky2	-2.72841	-1.54050
gy1	-3.49211	-1.12401
gy2	-3.39202	-1.06829

Normal model	İş kolu-1	İş kolu-2
$\sigma_u$	0.32472	0.28111
$\sigma_m$	0.74914	0.68201

Gamma model	İş kolu-1	İş kolu-2
$\sigma_u$	0.59251	0.49105
$\sigma_m$	0.91384	0.89134

**EK 13- Normal ve gamma dağılımlı modelde 2012-2015 olan veri seti her iki üçgen için parametreler**

Normal Model	İş kolu-1	İş kolu-2
Sabit	-0.14205	-1.44750
ky1	-1.42532	-1.48562
ky2	-0.12303	-1.39572
ky3	-1.38572	-2.48572
gy1	-1.49264	-3.00027
gy2	-2.08572	-2.04922
gy3	-2.57252	-3.57305

Gamma model	İş kolu-1	İş kolu-2
Sabit	-0.13581	-1.55913
ky1	-1.45913	-1.43913
ky2	-0.15913	-1.55719
ky3	-1.39771	-2.49002
gy1	-1.59131	-3.13052
gy2	-2.09133	-2.07414
gy3	-2.63713	-3.57292

Normal model	İş kolu-1	İş kolu-2
$\sigma_u$	0.21952	0.19471
$\sigma_m$	0.84921	0.82138

Gamma model	İş kolu-1	İş kolu-2
$\sigma_u$	0.45251	0.43056
$\sigma_m$	0.98461	0.96723