HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı

MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ TEMSİL VE İLİŞKİLENDİRME BECERİLERİNİN MATEMATİKSEL MODELLEME SÜRECİNDE İNCELENMESİ

Bilge TANJU

Yüksek Lisans Tezi

Ankara, 2020

Liderlik, araştırma, inovasyon, kaliteli eğitim ve değişim ile

Daha ileriye… En İyiye…

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı

MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ TEMSİL VE İLİŞKİLENDİRME BECERİLERİNİN MATEMATİKSEL MODELLEME SÜRECİNDE İNCELENMESİ

INVESTIGATION OF REPSETENTATION AND MAKING CONNECTIONS SKILLS OF PRE-SERVICE MATHEMATICS TEACHERS IN MATHEMATICAL MODELING PROCESS

Bilge TANJU

Yüksek Lisans Tezi

Ankara, 2020

Kabul ve Onay

Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne,

Bilge TANJU'nun hazırladığı "Matematik Öğretmen Adaylarının Temsil ve İlişkilendirme Becerilerinin Matematiksel Modelleme Sürecinde İncelenmesi" başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından **Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bilim Dalında Yüksek Lisans** olarak kabul edilmiştir.

Jüri Başkanı	Doç. Dr. Bilge İNAN	İmza
Jüri Üyesi (Danışman)	Prof. Dr. Şenol DOST	İmza
Jüri Üyesi	Dr. Öğr. Üyesi Yasemin SAĞLAM KAYA	İmza

Enstitü Yönetim Kurulunun
…./…/…. Tarihli ve ……
sayılı kararı.

Bu tez Hacettepe Üniversitesi Lisansüstü Eğitim, Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri uyarınca yukarıdaki jüri üyeleri tarafından 10 / 07 / 2020 tarihinde uygun görülmüş ve Enstitü Yönetim Kurulunca ..... / ..... / .... tarihi itibarıyla kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Selahattin GELBAL
Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Öz

Matematik eğitiminde son yıllarda üzerine yoğunlukla çalışılmış olan matematiksel modellemenin alt yeterliklerine bakıldığında matematiksel ilişkilendirme ve temsil becerilerinin süreçte önemli bir yeri olduğu görülmektedir. Bu araştırmanın amacı da matematik öğretmen adaylarının matematiksel modelleme sürecinde kullandıkları matematiksel ilişkilendirme ve temsil becerilerinin sürece etkisinin incelenmesidir. Bunu ortaya çıkarmak adına, öğretmen adaylarının matematiksel modelleme yeterlikleri, süreçte kullandıkları matematiksel ilişkilendirme türleri ve temsil çeşitleri incelenmiştir. Çalışma grubu Ankara'da bir üniversitede öğrenim gören 10 öğretmen adayından oluşmaktadır. Katılımcılar, araştırma amacına yönelik olarak araştırmacının hazırladığı modelleme etkinliği 'Beytepe Ulaşım Problemi' üzerinde çalışmışlardır. Çalışma nitel bir çalışmadır. Veri toplama araçları olarak, 'Beytepe Ulaşım Problemi' etkinliği, fonksiyon, türev, integral kavramlarına yönelik İlişkilendirme Beceri Testi, yarı-yapılandırılmış görüşme soruları ve bir veri toplama aracına dönüştürülmüş olan Maaß'ın (2006) Modelleme Yeterlikleri ve Göstergeleri kullanılmıştır. Veriler betimsel analiz yöntemi ile analiz edilmiştir. Elde edilen sonuçlara göre, süreçte en çok sözel temsili kullanan öğretmen adaylarının temsil türlerinden en çok cebirsel gösterimde başarılı oldukları gözlenmiştir. Matematik öğretmen adaylarının problemi anlama aşamasında grafik temsilini tercih ettikleri ancak temsil türleri arasında geçiş yapmakta çoğunlukla başarısız oldukları görülmüştür. Ayrıca, İlişkilendirme Beceri Testi'nde başarılı görülen öğretmen adaylarının model-oluşturma etkinliğinde başarısız oldukları görülmüştür. Bir diğer sonuç, öğretmen adaylarının Beytepe Monoray Problemi'ndeki matematiksel kavramlar hakkında ezbere bilgilere sahip olmalarıdır.

Anahtar sözcükler: Matematiksel modelleme, model-oluşturma etkinliği, çoklu temsiller, matematiksel ilişkilendirme, matematik öğretmen adayları

Abstract

Looking at the sub-competencies of mathematical modeling, which has been studied intensively in mathematics education in recent years, it has been seen that making making connections skills and representation skills have an important place in the process. The purpose of this study is to examine the effects of pre-service mathematics teachers making connections skills and representation skills used on the mathematical modeling process. In order to reveal this, the mathematical modeling competencies of pre-service teachers, the types of mathematical connections used in the process and the types of representation were examined. The study group consists of 10 pre-service teachers studying at a university in Ankara. Participants worked on the 'Beytepe Monoray Problem' modeling activity prepared for the purpose of the research. The study is a qualitative study. As the data collection tools, 'Beytepe Monoray Problem' effectiveness, Making Connections Skill Test for function, derivative and integral concepts, semi-structured interview questions and Modeling Competencies and Indicators by Maaß (2006), which have been converted into a data collection tool, were used. The data were analyzed by descriptive analysis method. Among the results, the pre-service teachers who use the most verbal representation in the modeling process are the most successful in the algebraic notation of the types of representation. It was observed that they preferred graphic representation at the stage of understanding the problem, but mostly failed to switch between representation types. In addition, it was observed that pre-service teachers who were successful in the Making Connections Skill Test were unsuccessful in the model-eliciting activity. Another result is that pre-service teachers knowledges are by rote of mathematical concepts in 'Beytepe Monoray Problem'.

Keywords: Mathematical modeling, model-eliciting activity, multiple representations, making connections in mathematics, pre-service mathematics teachers.

Teşekkür

Tez yazma sürecinin ötesinde, bütün lisansüstü öğrenim hayatımda hem akademik hem kişisel her türlü problemimde verdiği türlü destekler için çok sevgili hocam ve danışmanım Prof. Dr. Şenol Dost'a sonsuz teşekkürler. Kendisiyle tanışabilme ve birlikte çalışabilme şansına sahip olduğum için hep minnettar kalacağım.

Kıymetli katkılarından ötürü, hocalarım Doç. Dr. Bilge İnan'a ve Dr. Öğr. Üyesi Yasemin Sağlam Kaya'ya çokça teşekkürlerimi sunarım.

Daima olduğu gibi bu süreçte de desteklerini eksik etmeyen, beynimin öteki yarısı Hüma Gürkök'e, yoldaşlarım Sena Gültekin ve Arş. Gör. Hatice Büşra Yılmaz'a, can dostlarım Ayça Sipahioğlu ve Tuğçe Ekiz'e sonsuz teşekkürler. İyi ki varsınız.

Canlarım annem Süreyya Tanju ve babam Ferudun Tanju'ya, en kıymetlim ve ablam olan Arş. Gör. Özge Gürer'e, enişteden ziyade ağabeyim olan Gürsu Gürer'e ve yoldaki Özgür'e…

İçindekiler

Tablolar Dizini

Şekiller Dizini

Simgeler ve Kısaltmalar Dizini

MEB: Milli Eğitim Bakanlığı

MOE: Model Oluşturma Etkinliği

MMP: Model ve Modelleme Perspektifi

İBT: İlişkilendirme Beceri Testi

Bölüm 1
Giriş

Tezin bu bölümü; problem durumu, araştırmanın amacı ve önemi, problem cümlesi, sayıltılar, sınırlılıklar ve tanımlar alt başlıkları altında verilecektir.

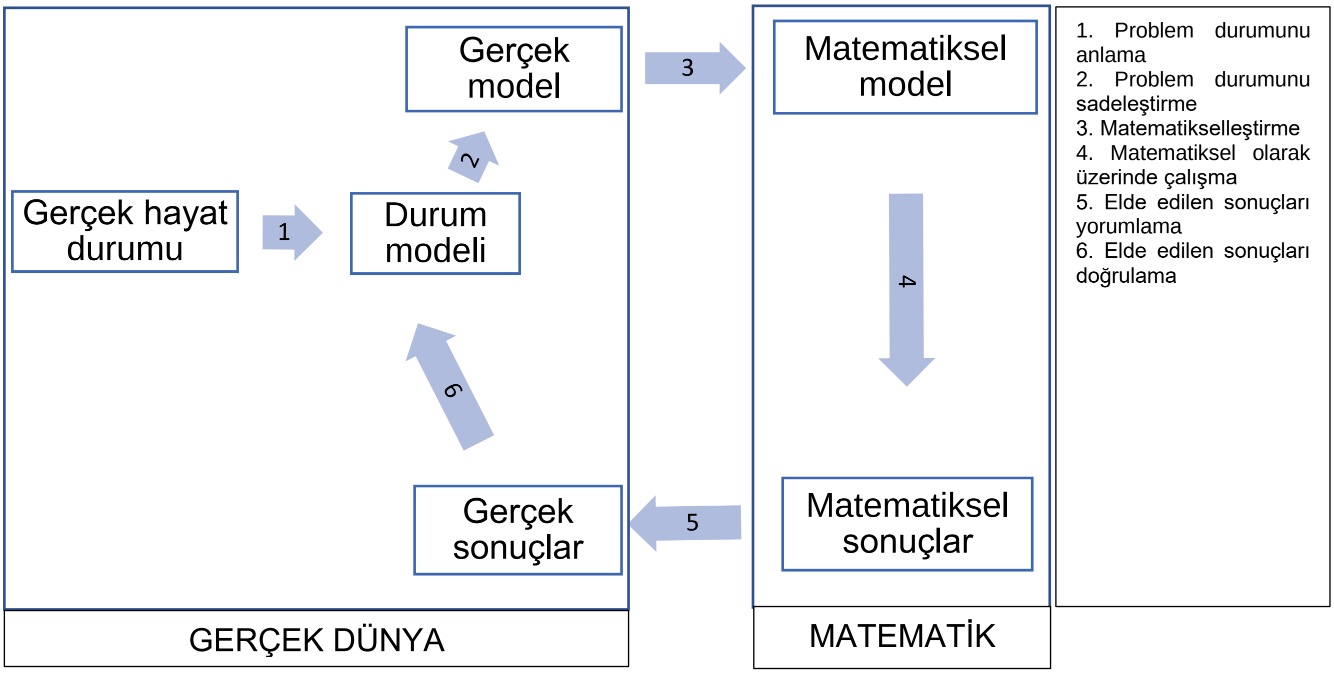
Problem Durumu

Matematik eğitiminin amacı, analitik düşünebilen, gerçek hayattaki problemlere çözümler üretebilen ve teknoloji çağının gerektirdiği donanımlara sahip bireyler yetiştirmektir. Bu doğrultuda, PISA ve TIMSS gibi uluslararası öğrenci değerlendirme programları ülkelere modelleme becerileri gelişmiş bireyler yetiştirme konusunda bir baskı oluşturmaktadır (Burkhardt, 2006). Türkiye Yeterlilikler Çerçevesinde belirlenmiş 8 anahtar yetkinlikten biri matematiksel yetkinliktir (MEB, 2018). Matematiksel yetkinlik, bireylerin günlük yaşamlarında karşılaştıkları bir problemi çözmek için matematiksel düşünme şekillerini geliştirme ve uygulamalarını kapsar. Matematiksel yetkinlik, düşünme ve sunumunun (formüller, modeller, kurgular, grafikler ve tablolar) matematiksel olarak farklı seviyelerde kullanma becerisini ve isteğini içermektedir (Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı, 2018). Bütün bunlar ortaya matematiksel modellemeyi çıkarmaktadır. Çözüm yollarının bilindiği ve cevaplarının tek olduğu rutin problemlerin aksine farklı durumlar ortaya koyan matematiksel modelleme, bireylerin mantık yürütmelerini, iletişim becerilerini, gerçek yaşamla bağlantı kurabilmesini destekleyen bir araçtır. Matematiksel modelleme, bireylerin matematiği farklı şekillerde öğrenebilmesini olanaklı kılar ve matematiği gerçek hayatlarında da kullanabilme seviyelerini geliştirir (Schwarz ve Kaiser, 2007). Bu sırada onlara öğrendikleri kavramlar üzerine düşünebilme şansı sunar (Zbiek ve Conner, 2006).

Matematiksel modelleme, matematik veya matematik dışındaki her türlü durumu ve bu durumlar arasındaki bağlantıları matematik içerisinde ifade etmeye çalışma ve bir takım matematiksel örüntüler meydana çıkarma sürecini ifade eder (Verschaffel, Greer ve De Corte, 2002) ve bu süreç, matematiksel analizlerin yapılmasıyla sonuçlara ulaşmayı ve gerektiğinde ortaya çıkan ürünün tekrar ele alınarak incelenmesini içermektedir (Swetz ve Hartzler, 1991; akt. Lingefjard, 2006).

Matematiksel modelleme bir süreçtir ancak katı bir süreç değildir. Uygulanması gereken birtakım adımlar vardır ve bu adımlar iç içe geçmiştir. Yani her birey için süreç farklı şekillerde gerçekleşir, tek bir yolun izlenmesi şart değildir. Fakat sıralanacak olursa matematiksel modelleme süreci;

- Problemi anlama ve sadeleştirme
- Matematiksel model oluşturma
- Model üzerinde matematiksel olarak çalışma
- Modeli yorumlama
- Modeli gerçek hayat bağlamında doğrulama aşamalarını içerir.



Şekil 1. Matematiksel Modelleme Süreci (Borromeo Ferri, 2006, s. 92)

Modelleme süreci boyunca birey, problemi anlar ve zihninde yapılandırmaya çalışır, kendi düşünme biçimine göre tekrar anlamlandırır. Bu sırada birey, bir takım bilişsel etkinliklerde bulunmalıdır. Örneğin, problem bağlamında verilen bilgilerden hangisini kullanıp kullanmayacağına karar vermelidir. Birey, zihninde oluşturduğu yapıları resim, çizim veya sözel ifade gibi temsiller kullanarak ifade etmelidir. Bazı aşamalarda matematiksel işlem yapılmadığı gibi süreç aynı zamanda bireyin, oluşan yapıları matematik diline aktarma, matematiksel araçlarla ifade etmesini de gerektirebilir. Süreç boyunca, bireyden beklenen bazı beceriler vardır. Bunlar; birtakım işlemler yaparak yeni ilişkiler ve sonuçlar elde etme, işlemleri sade hale getirme ve matematiksel problemi çözmektir. Aynı zamanda, bireylerin matematiksel sonuçları gerçek hayat durumu bağlamında yorumlaması beklenmektedir. Bireyler bulunan matematiksel sonuçlar ile gerçek hayat durumu arasındaki uyumu analiz etmelidir. Bu aşamaların sonucunda elde edilenlerin, problem bağlamında doğrulaması yapılmalıdır (Kertil, Çetinkaya, Erbaş ve Çakıroğlu, 2016). Görüldüğü üzere, matematiksel modelleme sürecinde bireyden beklenen birtakım beceriler ve yeterlikler vardır. Sürece bakıldığında, matematiksel ilişkilendirme ve buna bağlı olarak temsil çeşitlerinin bu yeterliklerin içinde olduğu söylenebilir.

Matematiği anlamak; görseller, ilişkiler, çıkarımlar, eşleşmeler, kurallar ve genellemeler ağını içeren bilgilerin uyumlu ağını geliştirmeyi gerektirdiğinden (O'Brien, 1989) ve matematiğin ardışık ve yığılmalı bir disiplin olduğundan, matematik öğrenmede kavramlar arasında yapılan ilişkilendirmeler önemlidir (Narlı, 2016, s.232). Ayrıca matematiği öğrenme, yeni bilginin mevcut zihinsel şemalarla ilişkilendirilmesi ve bunlarla uyumlu hale getirilmesi sürecinde zihinsel şemalarda var olan bilgiler arasında yeni ilişkiler oluşturulması süreci olarak tanımlanmaktadır (Eli, 2009). Bu ilişkileri kurmak, matematikteki kavramlar arasında bağlantı kurmada kullanılabilecek farklı fikirler ve süreçleri gerektirir (Coxford, 1995).

Matematik eğitimine yön veren bazı kurum ve kuruluşlar; temsil becerisinin öğrencilerde bulunması gereken önemli beceriler arasında olduğunu ifade ederek çoklu temsillerin öğretim programlarında yer almasının şart olduğunu belirtmişlerdir. Temsil becerisi, öğrencilerin kendi fikir ve kavrama dair anlamalarını ifade edebilmeleri açısından önemli görülmekle birlikte, öğrencide bulunması beklenen matematiksel iletişim becerisini ifade eder (NRC, 1989; akt. Schoenfeld, 1992). Öğrencilerin matematiğe dair bilgilerinin anlamlı ve tutarlı bir şekilde ortaya koyabilmelerini güçlü dil ve ifade becerisinin yanında temsil becerileri sağlamaktadır (Duval, 1999). Farklı temsillerin kullanımı, öğrencinin ilişkisel düşünmesinde, soyut kavramları algılamasında, genellemeler yapıp bunları ifade edebilmesinde faydalı olduğu bilinmektedir. Bu temsillerin etkili kullanımı sadece matematiksel sembolleri bilmeyi ve kullanabilmeyi değil, bu temsiller arasındaki ilişkinin farkında olarak gerektirdiği yerlerde uygun geçişler yapabilmeyi, ilgili durum ya da kavrama dair ilişkilerin uygun temsil ile ifade edilebilmesini, farklı problem durumlarında problemi anlama, çözme, çözümü yorumlama aşamalarında doğru temsili seçebilme yeterliliğini gerektirir (NRC, 1989). Buradan, matematiksel ilişkilendirme ile çoklu temsillerin birbirlerini içeren bir yapıda oldukları söylenebilir.

Matematik eğitiminde temsil kavramı, matematiksel yapıların zihinde anlamlı kılınması ve dış dünyaya aktarılabilmesi için kullanılan araçlar olarak tanımlanabilir. Bu durumda temsiller; matematiksel fikirlerin, kavramların ve matematiğe ait nesnelerin koordine edilmesi, ifade edilmesi, modellenmesi, çeşitli bağlamlar üzerinden ele alınmasını olanaklı kılan gösterim şekilleridir (NCTM, 2000). Matematik dünyası ile gerçek dünya arasında ilişki kurulurken, matematiksel soyut kavram ve sembollerin, gerçek hayatta somut olarak modellenmesini ve böylelikle nesne ve semboller arası ilişki kurulmasını temsil becerisi olanaklı kılmaktadır (Kaput, 1998).

Matematik doğası itibariyle kavramların birbiriyle ilişkili olduğu bir disiplindir. Bu ilişkinin öğrenci tarafından kurulması kavramı bir bütün olarak ele almasını, üzerine matematiksel bir dil ile konuşabilmesini, farklı temsillerle ifade edebilmesini gerektirmektedir. Matematiksel modelleme ise yapısı itibariyle temsil ve ilişkilendirme becerilerini gerektiren bir süreçtir. İlgili literatür incelendiğinde matematiksel modelleme ile birlikte matematiksel ilişkilendirme becerisini ele alan bir çalışmaya rastlanmamıştır. Bu sebeple matematiksel modelleme sürecinde öğrencilerin kullandığı matematiksel ilişkilendirme becerilerinin incelenmesinin literatüre katkısı olacağı düşünülmektedir.

Araştırmanın Amacı ve Önemi

Matematiksel modelleme, var olan kavram yapıların ve modellerin farklı bağlamlarda tekrar ele alınarak yeni modellerin ortaya çıkarıldığı, (Lesh ve Doerr, 2003a) var olan yapıları içermesi açısından statik ve yeni yapılar oluşturması açısından dinamik bir süreçtir. Bu süreç sonunda oluşan ürüne model; sürecin kendisine ise modelleme denmektedir (Sriraman, 2006). Matematiksel modelleme sürecinde, gerçek yaşam durumlarında hazır olarak bulunan modeller matematiksel olarak ifade edilir. Bununla birlikte, gerçek hayatta var olan durumların matematiksel ifade ve gösterimlerle ilişkilendirilerek yeni bir model ortaya çıkarılmasını da ifade etmektedir. Buradan hareketle, matematiksel modelleme sürecinde matematiksel ilişkilendirme kullanımının gerekliliği önemli görülmektedir (Gravemeijer, Stephan, 2002). Ancak literatürde matematiksel modelleme sürecinde bu ilişkiyi ortaya koyan, matematiksel ilişkilendirme ve çoklu temsilleri kullanmanın sürece katkısını, sürecin başarısına etkisini ele alan bir çalışma yoktur. Bu çalışmanın amacı, matematik öğretmen adaylarının matematiksel modelleme sürecinde kullandıkları matematiksel ilişkilendirme ve temsil becerilerinin sürece etkisinin açığa çıkarılmasıdır.

Araştırma Problemi

Araştırmanın ana problemi 'matematik öğretmen adaylarının matematiksel ilişkilendirme becerisi matematiksel modelleme sürecinde nasıl kullanılmaktadır?'

Alt problemler. 1. Matematik öğretmen adaylarının matematiksel modelleme yeterlikleri nasıldır?

2. Matematik öğretmen adaylarının fonksiyon, türev ve integral kavramlarına yönelik matematiksel ilişkilendirme becerileri nasıldır?

3. Matematik öğretmen adaylarının matematiksel modelleme sürecinde matematiksel ilişkilendirmenin bir türü olan farklı temsiller arası ilişkilendirme kullanımı nasıldır?

Sayıltılar

Çalışmaya katılan öğrencilerin tüm sorulara ve sürece içtenlikle ve yanlılıktan uzak katıldığı varsayılmaktadır.

Sınırlılıklar

Araştırma;

1. Uygulanan model oluşturma etkinliğiyle,

2. Ankara'daki bir devlet üniversitesinin matematik öğretmenliği bölümü öğrencileriyle,

3. Toplanan veriler öğretmen adaylarının matematiksel modelleme problemlerinin yazılı yanıt kağıtları, İlişkilendirme Beceri Testi'ne verdikleri yanıtlar ve görüşme sorularına verdikleri yanıtlarla, sınırlıdır.

Tanımlar

Matematiksel modelleme: Gerçek hayatta var olan bir durumun ya da sorunun matematiksel olarak analiz edilmesi, çözümlenmesi ve işlevsel bir model olarak ortaya koyulması sürecini ifade etmektedir.

Model-Oluşturma Etkinlikleri (MOE): Öğrenciler için matematikte anlamlı öğrenme oluşturmak adına gerçek yaşam durumları üzerinden tasarlanan, öğrencilerin çözmek için modeller oluşturdukları, bu modelleri oluştururken matematiksel düşünmelerini teşvik eden problem çözme etkinlikleridir.

Matematiksel İlişkilendirme: Öğrencilerin, matematiksel kavramların, farklı temsillerin, farklı öğrenme alanlarının arasında ve aynı zamanda farklı disiplinler ve gerçek hayatla matematik arasında ilişki kurma becerilerini ifade etmektedir.

Çoklu Temsil Becerisi: Öğrencilerin, matematiksel bir kavramın farklı gösterim biçimleri (cebirsel, grafik, tablo, sözel, nümerik vb.) arasında ilişki kurarak ilgili kavramı her yönüyle ortaya koyabilme becerisini ifade etmektedir.

Bölüm 2

Araştırmanın Kuramsal Temeli ve İlgili Araştırmalar

Bu tezin kavramsal çerçevesini matematiksel modelleme ve matematiksel ilişkilendirme oluşturmaktadır.

Matematiksel Modelleme

Bu kısımda matematiksel modelleme kavramı detaylı olarak verilmiştir. Buna yönelik olarak sırayla tarihsel gelişimi, kuramsal çerçevesi, modelleme süreci, modelleme yeterlikleri ve becerileri, yeterliklerin ölçme değerlendirilmesi ve son olarak model ve modelleme perspektifi ayrı başlıklar altında sunulmuştur.

Matematiksel modellemenin tarihçesi. Model-Oluşturma Etkinlikleri (MOE) nin, tasarım süreci matematik eğitimcileri ile lisansüstü öğrencilerin matematik öğretiminde kullanmalarına yönelik olarak, ABD ve Avustralya'da başlamıştır. (Chamberlin ve Moon 2008). Amacı öğrencilerin gerçek yaşamla okul matematiği arasındaki ilişkiyi kullanabilmeleri olmuştur. 1970'lerin sonlarında kullanılmaya başlanan MOE öğrencilerin gerçek yaşam durumlarında matematiksel düşünmelerini ve matematiksel kavramları bu durumlar karşısında anlamlandırmasına olanak sağlamıştır. (Dede ve Güzel, 2014). MOE 1980'lerde öğrencilerle birebir görüşülerek açığa çıkarılmaya çalışılan zihinsel süreçleri yazılı olarak gözlemlemek amacıyla 'düşünce açığa çıkarıcı etkinlikler' (thought revealing activities) olarak tasarlanmasının ardından, öğretim programında yer alan ancak standart testlerin ölçme konusunda faydasız olduğu kazanımları ölçmek için tekrar tasarlanmıştır. Ardından 1990'larda ise öğrencilere matematiksel düşünme becerisi kazandırma amacı güderek 'çocuklar için durum çalışması' (case studies for kids) adıyla tekrar ele alınmıştır (Lesh, Young ve Fennewald 2010). MOE bugün ise, öğrencilerin gerçek yaşam durumları karşısında modellemeden faydalanabilecekleri, model oluşturdukları, süreç boyunca kendilerini açıklayıp, kontrol edip, düzenleyebildikleri problem çözme etkinlikleri olarak kullanılmaktadır. (Eric, 2008).

Eğitimciler, zamanla kullanım amaçlarına göre tekrar tasarlanan MOE'nin geliştirilme süreçlerinde okul, öğretmen ve öğrencilere bağlı olarak bu değişikliklerin yapıldığını vurgulamaktadır (Lesh, Hoover, Hole, Kelly ve Post 2000). MOE öğrenme ve öğretme ortamına dahil olan yüzlerce katılımcı ile birlikte 'çok katlı öğretim deneyleri' (multi-tiered teaching experiments) olarak adlandırılan çalışmanın sonucunda ortaya çıkarılmışlardır (Lesh vd. 2000).

Çok katlı öğretim deneyleri, öğrencilerin matematiksel problem çözme üzerine, öğretmenlerin öğrencilerinin problem çözme süreçleri üzerinde ve araştırmacılar ile öğretmen eğitimcilerinin her iki grubu kapsayacak şekilde modeller geliştirdikleri öğretim deneyleridir (Clark ve Lesh 2003; Lesh 2002). Bu şekilde, çalışma boyunca test edilen söz konusu MOE sürekli gözden geçirilmiş ve öneriler doğrultusunda geliştirilmiştir.

Matematiksel modellemenin kuramsal çerçevesi. Farklı tanımların yapılmasına rağmen matematiksel modellemeyi kapsamlı bir şekilde açıklayan tek bir teoriden bahsetmek henüz mümkün olmamıştır (Kaiser, 2014; Kaiser, Blomhoj ve Sriraman, 2006; Kaiser ve Sriraman, 2006; Niss, Blum ve Galbraith, 2007). Öte yandan matematik ile gerçek dünya arasında ilişki kurmaya yönelik her türlü uygulamanın matematiksel modelleme literatürünün ilgi alanına girdiği söylenebilir.

Matematik öğretiminde matematik ile gerçek dünya arasında nasıl ilişki kurulduğu, matematiksel modellemeye farklı yaklaşımları belirlemede önemli bir unsur olarak ele alınabilir. Öğrencilere doğrudan verilen matematiksel kavram ve modellere dönük gerçek hayat durumlarını içeren uygulamaları ön plana çıkaran yaklaşımlarda matematikten gerçek hayat durumuna doğru bir yönelim vardır. Diğer yandan, gerçek hayat durumlarını kullanarak öğretilmek istenilen matematiksel kavramların öğrenciler tarafından oluşturulmasını ön plana çıkaran yaklaşımlarda ise gerçek hayattan matematiğe doğru bir yönelim söz konusudur. (Niss vd., 2007) Bu çerçevede, matematik öğretiminde kullanım amacına göre matematiksel modelleme yaklaşımlarını "matematik öğretimi sonucunda öğrencilerde geliştirilmesi gereken beceriler, yani amaç" ve "matematik öğretimi için bir araç" olmak üzere iki şekilde ele almak mümkündür (Erbaş vd., 2014; Stillman, 2012). Bu bağlamda ele alınan yaklaşımları şöyle ifade edebiliriz:

- Matematiksel modellemeyi öğrenme,
- Matematiksel modelleme ile öğrenme.

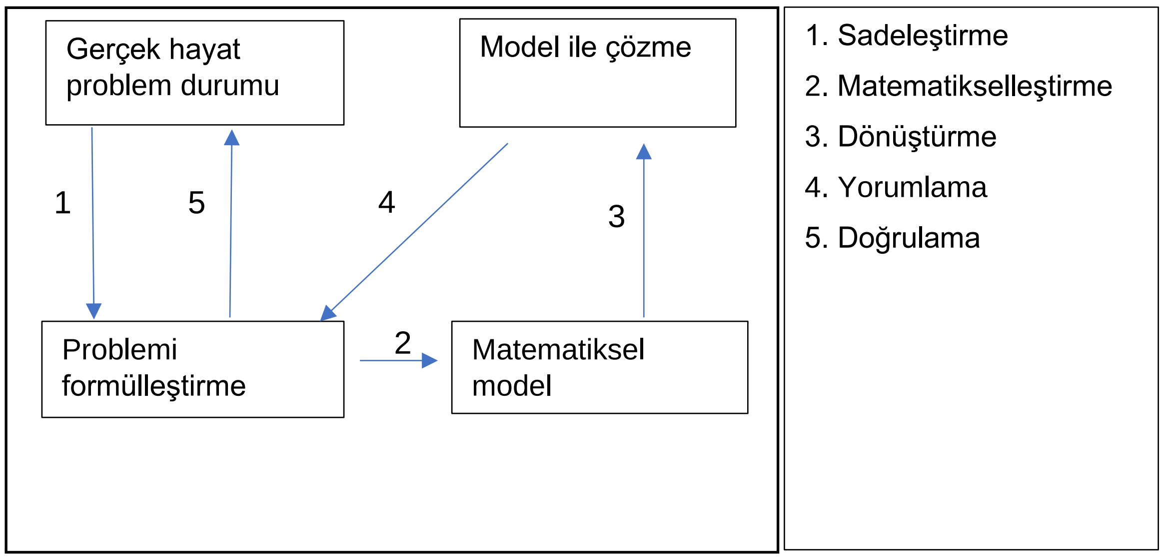
Matematiksel modellemenin öğrenimine odaklanan yaklaşımlar, modelleme sürecini ve matematiksel modelleme yeterliklerini açıklamaya ve ölçme değerlendirmeye odaklanmışlardır.

Matematiksel modellemenin öğrenimi, sadece matematik öğretimi bağlamında değil disiplinler arası düşünülmesi gereken bir konudur. Bu yüzden, diğer disiplinlerde de gereksinim duyulan matematiksel modelleme yeterlik ve becerilerin tanımlanması ve bu becerilerin geliştirmesi için çalışmalar yapılmalıdır. Matematiksel modelleme sürecini açıklamaya yönelik birçok tanım ve teori ortaya atılmıştır. Bunların ortak özelliği modelleme sürecinin döngüsel bir yapıya sahip olmasıdır (Kertil vd., 2016).

Matematiksel modelleme ile öğrenme ise, matematiksel modellemeyi öğrenme ve öğretmede bir araç olarak ele alır. Bunun yanında, öğrencilerin düşünme yapıları ile öğrenme ortamının nasıl olması gerektiği üzerine açıklamalar yapar. Bu yaklaşımı ele alan teorilerden biri Lesh ve Doerr'in (2003a; 2003b) sunduğu Model ve Modelleme Perspektifidir (MMP).

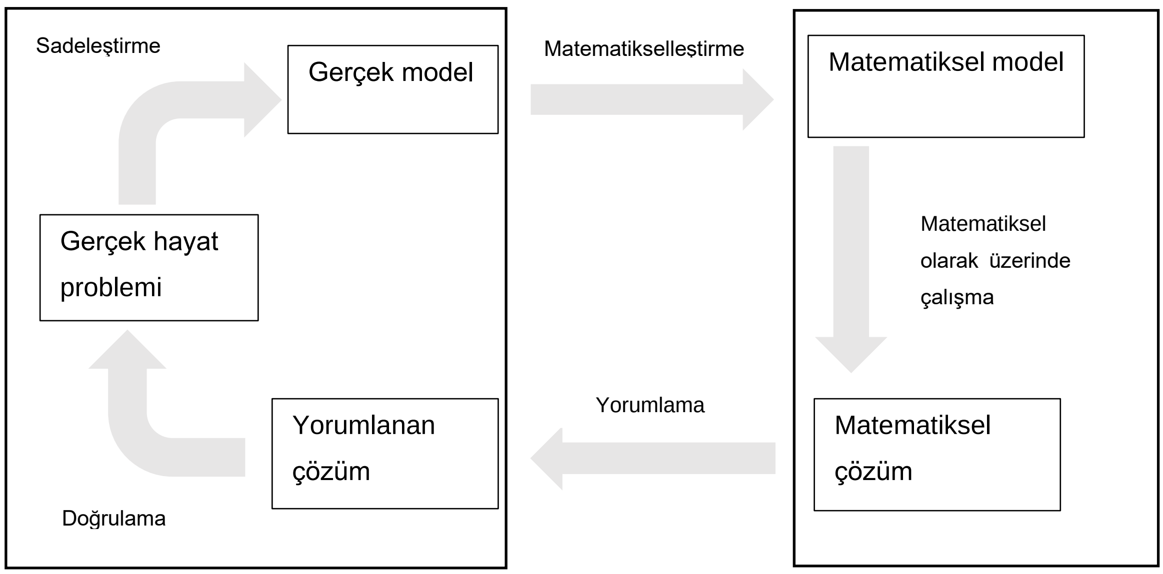
Matematiksel modelleme süreci. Matematiksel modelleme, problem durumunda verilenleri kullanarak sonuca ulaşma sürecinde katı bir prosedür uygulanmasını reddeder (Blum ve Niss, 1991; Crouch ve Haines, 2004; Lesh ve Doerr, 2003a). Gerçek yaşama ait olgunun matematiksel modelinin oluşturulması; matematiksel model ile modellenen gerçek durumun farklarını görebilmeyi, hata payının ve ikisi arasındaki uyumun değerlendirmesini ve daha başarılı bir modelin geliştirilme olasılığının ele alınmasını gerektirir. Bu bağlamda, problem durumunda verilenlerin kullanılmasıyla bir model kurma, modeli gerçek yaşam bağlamında değerlendirme ve gerekirse modeli geliştirme ya da farklı modeller arayışına gitmeyi gerektiren gibi çok basamaklı bir döngüdür (Haines ve Crouch, 2007). Literatürde matematiksel modelleme sürecine ait döngüyü farklı şekillerde ifade eden birçok araştırma mevcuttur (Blum ve Leiß , 2006, NCTM, 1989, s. 138, Blum ve Leiß, 2006).

Örneğin aşağıda NCTM tarafından sunulan matematiksel modelleme sürecine ilişkin şema verilmiştir.



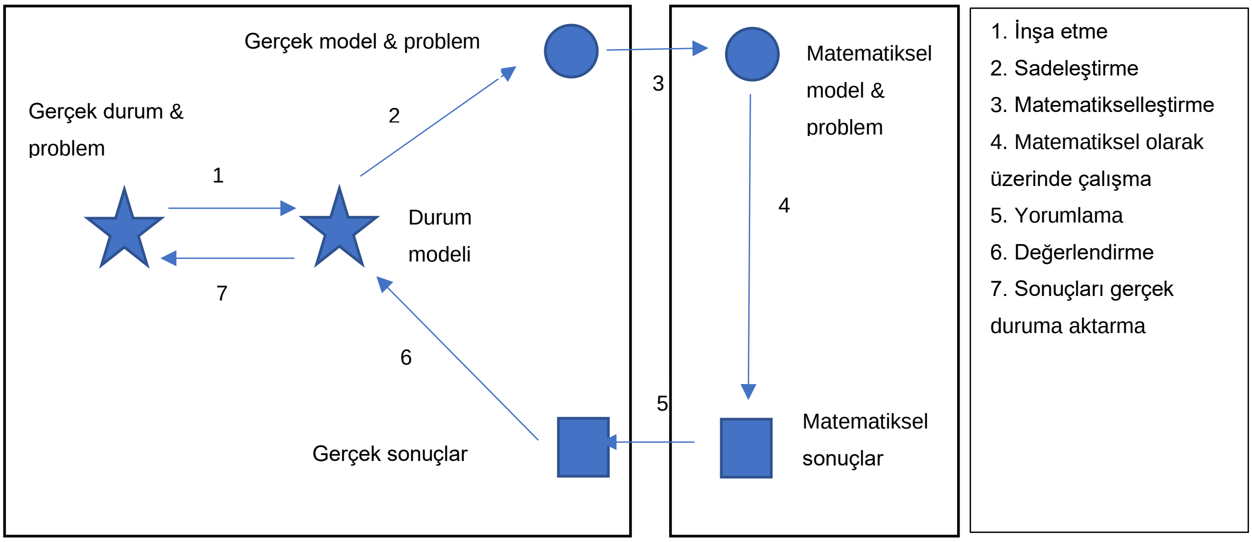
Şekil 2. Matematiksel Modelleme Süreci (NCTM, 1989, s. 138)

Aşağıdaki şemada ise Maaß (2006) tarafından sunulmuş olan matematiksel modelleme döngü olarak vurgulanmıştır.



Şekil 3. Matematiksel modelleme döngüsü, (Maaß, 2006, s.115)

Blum ve Leiß'in(2006) ortaya koyduğu şemada ise süreç daha ayrıntılı olarak ifade edilerek diğerlerinden ayrılmıştır.



Şekil 4. Matematiksel modelleme döngüsü, (Blum ve Leiß, 2006)

Modelleme süreci doğrusal olmayan, tekrarlı döngüler içeren ve aşamalarının birbirinden bağımsız olmadığı bir süreçtir (bkz. Şekil 2). Bu sürecin aşamaları ise şöyledir: (*i*) Gerçek hayat problemini tanımlama ve sadeleştirme; problem durumunun incelenip, verilen bilgilerin belirlenip anlaşılır hale getirilmesidir. (*ii*) Bir matematiksel model oluşturma; problemdeki durumun matematiksel temsillerle (grafik, denklem vs.) ifade edilmesidir. (*iii*) Modeli dönüştürme, geliştirme ve çözme; problem üzerinde matematiksel olarak çalışma ve analiz etmedir. (*iv*) Modeli yorumlama; elde edilen çözümün gerçek hayat bağlamında değerlendirilmesidir. (*v*) Modeli doğrulama ve kullanma; elde edilen modelin çalışıp çalışmadığını kontrol etme ve benzer bağlamlarda ne kadar işe yarayacağının değerlendirilmesidir. Bu süreç, elde edilen, matematiksel modelin problem durumu bağlamında değerlendirilerek bazı adımlara geri dönmeyi ve çözüm yaklaşımı için farklı fikirler ortaya koymayı da içerdiği için tekrarlı bir döngüdür (Erbaş, Kertil, Çetinkaya, Çakıroğlu, Alacacı, Baş, 2014).

Matematiksel modelleme yeterlikleri ve becerileri. Modelleme yeterlikleri ve becerilerini birbirinden ayırt eden nokta, yeterliklerin sürecin tamamını etkin bir şekilde yürütmek için gereken bilgi beceri ve kabiliyetlerin yanında süreci tamamlama isteğine sahip olmayı ve buna ilişkin üstbilişsel becerileri bulundurmayı içerir. Beceriler ise, sürecin tamamlanması için sahip olunması gereken, anlama, model kurma ve buna dair matematiksel işlemleri yapabilmeyi ifade eder. Bu açıdan bakıldığında becerilerin, yeterliklerin alt bir alt sınıfı olduğu söylenebilir (Maaß, 2006, Kaiser, 2007). Aşağıda modelleme yeterlikleri ve alt yeterlikleri sırasıyla verilmiştir (Maaß, 2006, ss. 116-117, 137 ve 139; akt. Erbaş, Kertil, Çetinkaya, Çakıroğlu, Alacacı, Baş, 2014).

"*Herhangi bir modelleme sürecini bütün aşamalarıyla başarılı bir şekilde tamamlamak için gerekli yeterlikler*

a. <u>*Verilen problem durumunu anlama ve duruma bağlı bir model oluşturma yeterlikleri*</u>

- *Problem durumunu sadeleştirme ve varsayımda bulunma*
- *Problem durumunu etkileyen nicelikleri belirleme ve onları isimlendirme*
- *Değişkenleri belirleme*
- *Problem durumundaki gereksiz bilgileri ayırt edip, kullanılabilir olanları belirleme*

b. <u>*Matematiksel bir model oluşturma yeterlikleri*</u>

- *İlgili nicelikler ve aralarındaki ilişkiyi matematik ile ifade etme*
- *Gerektiğinde ilgili nicelikleri ve bunlar arasındaki ilişkileri sadeleştirme*
- *Uygun matematiksel notasyonlar seçme ve durumu grafik ile ifade edebilme*

c. <u>*Matematiksel soruları kurulan matematiksel model içerisinde çözme yeterlikleri*</u>

- *Uygun problem çözme stratejilerini kullanma*
- *Problemi çözmek için gerekli matematiksel bilgiyi kullanma*

d. <u>*Elde edilen matematiksel sonuçları gerçek hayat durumu üzerinde yorumlama yeterlikleri*</u>

- *Matematiksel sonuçları matematik dışı bağlamlarda yorumlama*
- *Özel bir durum için geliştirilen çözümleri genelleme*

- *Elde edilen sonuçları uygun matematiksel bir dil kullanarak ifade edebilme*

e. *Elde edilen sonucu doğrulama yeterlikleri*

- *Elde edilen sonucu eleştirel bir bakışla kontrol etme*
- *Gerekli olduğu takdirde modelleme sürecini tekrar etme*
- *Farklı çözüm yollarını inceleme ve çözümün nasıl geliştirilebileceği üzerine düşünme*
- *Elde edilen modeli genel olarak sorgulama"*

Matematiksel modelleme yeterliklerinin ölçme ve değerlendirilmesi. Modelleme yeterliklerinin ölçme-değerlendirmesi için farklı uygulama yöntemleri vardır. Yazılı testlerin, rubrik kullanılarak değerlendirmesi, gözlem ve görüşme yapılması bunlardan bazılarıdır (Frejd, 2013). Bu yöntemler, bütüncül ve mikro-düzeyli olmak üzere iki temel açıdan ele alınabilir (Frejd, 2013; Houston, 2007).

Bütüncül yaklaşımda şu üç boyut dikkate alınarak değerlendirme yapılabilir:

Kapsama derecesi: Öğrencinin belirli bir yeterliğin ne kadarını taşıdığını ifade eder.

Hareket alanı: Öğrencinin var olan matematiksel modelleme yeterliğini gösterebileceği gerçek yaşam durumlarının bütününü ifade eder.

Teknik seviye: Öğrencinin var olan matematiksel bilgilerine, modelleme süreci sırasında gereken matematiksel çalışmayı gerçekleştirebilecek seviyede hâkim olmasını ifade eder.

Bir diğer yaklaşım ise, modelleme yeterliklerinin değerlendirilmesine yönelik çoktan seçmeli test uygulamaktır. Modelleme yeterliklerin toplamda 11 adet olarak ele alındığı bu teste paralel formda iki test olarak oluşturulmuş ve her bir beceriyi ölçmek için ikişer soru bulunmaktadır. Sorular çoktan seçmelidir ancak cevapları doğru ve doğruya yakınlar şeklinde hazırlanmıştır. Verilen cevaplara en yüksek 2 en düşük 0 olmak üzere puanlar verilip, toplamları genel puanı oluşturur (Haines ve Crouch, 2001).

Model ve modelleme perspektifi. Modellemeye yönelik çalışmalar içinde Lesh ve Doerr'in (2003a) ortaya attığı Model ve Modelleme Perspektifi (MMP) matematiksel modelleme üzerine kapsamlı teorik bir yaklaşım olup çalışmalarında “model-oluşturma etkinlikleri”ni (MOE) tanımlamışlardır. MMP, modelleme yoluyla matematik öğretimini temel aldığından, MOE, matematiksel kavramların tarihsel süreçlerini öğrenciye hissettirme ve kavramı sezgisel olarak kurdurmayı amaçlamaktadır (Lesh ve Doerr, 2003a). MOE amaçlarına ve uygulama gruplarına göre çeşitlilik gösterir, ancak genel çerçevesi modelleme tasarım prensiplerince belirlenmiştir (Doerr ve Lesh, 2011). Bu prensipler şöyle sıralanabilir;

- Model Oluşturma Prensibi,
- Gerçeklik Prensibi,
- Öz Değerlendirme Prensibi,
- Model Açığa Çıkarma (Yapı Belgelendirme) Prensibi,
- Model Genelleştirme Prensibi,
- Etkili Örnek Model (Prototip) Prensibi.

Model Oluşturma Prensibi: Özetle öğrenciye sunulan durumun model oluşturmaya uygun bir etkinlik olmasıdır. “Verilen durum öğrencinin model oluşturmasını gerektiriyor mu?” sorusuna karşılık gelir. Modellerin geliştirilmesi gereken durumlar, yeterli veri olmadığında karar verme amacıyla varsayımların yapılmasını, gerçek olaylara ilişkin tahminlerde bulunulmasını, sorunları açıklamayı, analiz etmeyi, çözüm üretmeyi ve yapılanların gerekçelendirilmesini olanaklı kılan durumlardır (Lesh vd. 2000).

Gerçeklik Prensibi: Öğrencilerin kendi gerçeklikleriyle ilişki kurarak, problem durumunu anlamlandırmaları anlamına gelmektedir. “Verilen durum öğrencinin kendi hayatında karşına çıkabilir mi?” sorusuna karşılık gelmektedir. Bu prensip öğrencinin ilgisini merakını cezbetmeye yöneliktir. Problem durumunun kurgusu öğrencide problemi çözme ihtiyacı oluşturmalıdır. Böyle bir durumda öğrenci kendi deneyimlerinden de yola çıkarak daha mantıklı karar verebilecektir (Lesh ve Caylor 2007).

Öz Değerlendirme Prensibi: Modelleme sürecinde, öğrenci bir döngünün içerisindedir. Sürekli olarak geri dönüşler yaparak adımlarını kontrol etmektedir. Böylelikle, kendi kendini değerlendirme imkânı kazanır. Aynı zamanda problem durumunda, bir müşteri veya danışan ihtiyacı sunulduğu için, öğrenci çözümünün bu ihtiyaca cevap verip vermediğini kendisi kontrol etmek durumunda kalır. “Öğrenci problem çözümünün tamamlanıp tamamlanmadığına kendisi karar verebilecek mi?” “Öğrenci yanıtı yeterli olmadığında geliştirilmesi gerektiğini fark edecek mi?” sorularına karşılık gelir.

Yapı Belgelendirme Prensibi: Öğrencinin yanıtlarının yazılı olarak talep edilmesidir. Böylelikle düşünme biçimlerinin net bir biçimde anlaşılmasına olanak sağlar. “Öğrencinin yazılı yanıtları durum hakkındaki düşüncelerini ortaya çıkarıyor mu?” sorusuna karşılık gelir. Öğrencinin düşünme süreçlerinin anlaşılması adına öğrencinin bütün düşüncelerini, yaptıklarının gerekçelerini açık bir şekilde belirtmesi beklenmektedir. Ve öğretmenlerin, öğrencilerinin matematiksel olarak neyi neden yaptıklarını anlamaları adına, öğrencileri, matematiksel işlemlerini yorumlamalarına, kendilerini açıklarken farklı gösterim ifadeleri kullanmalarına teşvik etmeleri gerekmektedir (Doerr ve English 2006).

Model Genelleştirme Prensibi: Bu prensip oluşturulan modelin benzer durumlara aktarılabilirliğini ifade etmektedir. “Geliştirilen model sadece oluşturan kişi ve tek bir duruma özgü müdür, yoksa farklı durumlarda farklı kişiler tarafından, değerlendirilip, gerekli olduğunda geliştirip, yeniden tasarlanabilir mi?” sorusuna karşılık gelmektedir (Lesh ve Caylor 2007, Lesh vd. 2000).

Etkili Prototip Prensibi: Geliştirilen modelin benzer durumlar için prototip (ilk örnek) olma özelliği olması anlamına gelir. Aynı zamanda modelin akılda kalıcılığını ifade etmektedir. Öğrenci aradan zaman geçmesine rağmen benzer bir durum karşısında ilk hazırladığı modeli hatırlayabilirse modelin prototip olma özelliği sağlanmış demektir.

MMP ayrıca, model, modelleme, matematiksel model ve matematiksel modelleme için tanımlamalar sunmuştur. Model, genel anlamıyla zihindeki kavram yapılarını kullanarak karmaşık sistemleri ifade eden, tanımlayan, açıklayan farklı gösterimlerin bütünüdür (Lesh ve Doerr, 2003a). Matematiksel model ise, matematiksel kavramlarla, bir olgu veya olayın yapısal özellikleri ve çalışma prensiplerini açıklamaya çalışır (Lehrer ve Schauble, 2003, 2007; Lesh ve Doerr, 2003a).

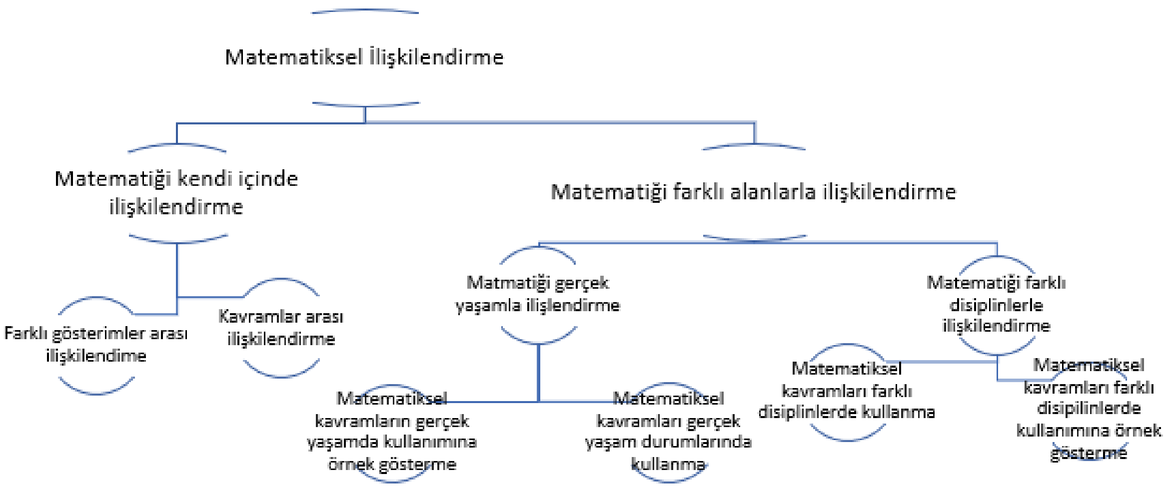
Modelleme ortaya bir model koyma sürecini ifade etmektedir. Bu süreç ele alınan olgu, olay ve bunlar arasındaki ilişkileri açığa çıkararak ifade etmeyi ve belirli bir amaç için dizayn etmeyi içerir (Lesh ve Doerr, 2003). Matematiksel modelleme ise, bahsi geçen sürecin matematiksel bir eksende gerçekleştiği süreçtir (Haines ve Crouch, 2007). Bu süreç, gerçek yaşamdan bir bağlam içinde sunulmuş durumların matematiksel notasyonlar kullanılarak ifade edildiği, analiz edilip bir çözüm ortaya konulduğu ardından kontrollerin yapıldığı döngüsel bir süreçtir (Lesh ve Doerr 2003a). Matematiksel modelleme var olan kavram ve modellerin, farklı bağlamlarda yeniden ele alınarak geliştirildiği ve yeni modellerin ortaya çıkarıldığı bir süreçtir. Bu tanıma göre matematiksel modelleme, var olan kavram ve modellerin kullanımından dolayı durağan, aynı zamanda yeni modeller ortaya koyması açısından ise dinamik bir süreç olarak görülür. Modelleme süreci ifade ederken, modeller ürünü ifade eder (Sriraman, 2006). Gravemeijer ve Stephan (2002), bu süreçte sadece var olan modellerin gerçek yaşamda tekrar kullanımının yanında, gerçek yaşama ait nesnelerin de birer modele dönüştürebileceğini ifade etmektedir.

Matematiksel İlişkilendirme

Matematik disiplini, nesneler arasındaki ilişkinin tanımı yapmak, bu ilişkilerden genellemeler ileri sürmek ve bu genellemeleri kanıtlamak üzerinde çalışır (Yıldırım, 1996). Yani, nesneler arasındaki ilişkiyi görmek bunun üzerinde çalışabilmek matematiğin temelinde olduğundan, zihinsel yapının ilişki kurabilmeyi öğrenmesi gerekmektedir. Piaget, anlamanın ilişki kurularak yapılabileceğini söylemiştir. Piaget için anlama, duyularla elde edilen deneyimlerin, zihinde hali hazırda var olan şemalarla bilişsel olarak etkileşime girmesiyle sağlanır. Yani burada, deneyimlerin var olan şemalarla ilişki kurması yoluyla anlama sağlanmış olur ve bu ilişkisel öğrenme yapıldığı anlamına gelir. Matematikte de yeni bir kavram öğrenilmesi gerektiğinde, bireyin zihninde var olan matematiksel kavramın yeni kavramla ilişkisi kurularak öğrenme sağlanır.

Heibert ve Carpenter (1992)'e göre insan beyni bir örümcek ağı gibidir, ağdaki düğümler bir konu ya da kavram tanımını ifade ederken, düğümler arasındaki iplikler, kavram ya da konular arasında kurulan ilişkileri ifade eder. İpliklerin sayısı ne kadar fazla ise birey kavramı ifade eden kavram üzerine o kadar düşünmüş ve dolayısıyla diğer kavramlarla o kadar ilişki kurmuş olur. Matematiksel bir kavram ele alındığında da kavramla ilişkili öteki kavramlar arasında bağlantı kurulmuşsa ağ bölgesi karmaşık, sıkı dokunmuş olur. Bazı bölgeler ise daha az karmaşık olabilir, bu kavramın yapısından ya da bireyin o kavram hakkındaki bilgisinden kaynaklı olabilir. Benzer olarak, Ma (1990), örümcek ağındaki iplikleri köprüler olarak ele almış, matematiksel kavram ve fikirleri düğümler olarak ifade etmiş, matematiksel ilişkilendirmeyi ise köprü kurmak olarak tanımlamıştır (Eli, 2009). Bu tanımlamalarda matematiksel ilişkilendirmenin bir süreç olarak alınmış olduğu söylenebilir. Ancak beceri ve ürün olarak ele alan yaklaşımlar da vardır (Özgen, 2013a).

Matematiksel ilişkilendirme, öğretim programında, matematiğin içinde ve dışında kullanılmalıdır. Bu bağlamda yapılan araştırmalarda, matematiksel ilişkilendirme becerileri ve sınıfları kurulmuştur. Matematiksel ilişkilendirme becerileri, işlem yapabilme, kategorilere ayırma, türetme ve yeni kavram öğrenme (Eli, Mohr-Schroeder & Lee, 2011) şeklinde ele alınmış, sınıflamasında ise ilişkilendirmenin ayrıntılı olup olmadığı, geleneksel olup olmadığı ve kullanıldığı problem türlerine (Lockwood, 2011) göre incelemeler yapılmıştır. Leikin ve Levav-Waynberg (2007) ise ilişkilendirme problemlerini, aynı kavramın temsilleri arasındaki ilişkilendirme, farklı kavramlar arasındaki ilişkilendirme ve matematiğin farklı dalları arasındaki ilişkilendirme olarak gruplamıştır. Alandaki araştırmalardan yola çıkılarak Bingölbali ve Coşkun (2016) da matematiksel ilişkilendirmenin sınıflandırmasına yönelik bir kuramsal çatı önermiştir. Bu sınıflandırma Şekil 5'te verilmiştir.



Şekil 5. Matematiksel İlişkilendirmenin sınıflandırılması (Bingölbali, Coşkun, 2016)

MEB tekrarlı olarak matematik eğitiminin amaçlarının, öğrencilerin öğrendikleri bilgileri günlük hayatlarında kullanmalarını sağlamayı içerdiğini belirtmiştir (MEB, 2009a; 2009b; 2013 ve 2018). Bunu sağlamak için, günlük yaşam bağlantılarının kurulması gerekir ki bu öğrencilerin problem çözme becerilerini de geliştirir (Cotti ve Schiro, 2004). Matematik ile dış dünya arasında ilişkilendirme (Mosvold, 2008) olarak tanımlanabilen günlük yaşamla ilişkilendirme, matematik eğitiminde, sözel problemler, veri analizleri, toplumu ilgilendiren konularda matematiğin ele alınması, matematiksel kavramların temsilleri ve gündelik konuların matematiksel modellemesi (Gainsburg, 2008) olarak ele alınabilir.

Öğrencilerin üniversite öncesinde gördükleri matematiği anlamlandırmaları için matematiğin gündelik hayatla ilişkilendirilmesi oldukça önemlidir (Bingölbali ve Coşkun, 2016). Bu sebeple öğretim müfredatlarında matematiksel ilişkilendirme yer almakta olup, bireyleri gerçek yaşamda karşılaştıkları problemlere (mesleki, sosyal vb.) karşı hazır hale getirmeyi amaçlamaktadır (Ji, 2012, Mosvold, 2008).

Matematik disiplininin birikimli bir yapıda olması nedeniyle, matematiği kendi içinde ilişkilendirme, matematiksel kavram yapıların öğrenimi için oldukça önemlidir (Pesen, 2003). Matematiği kendi içinde ilişkilendirme, kavramlar arasındaki ilişkilendirme olarak ele alınabilir. Kavramlar arasında ilişkiler kuran öğrenci, eski kavramlar yardımıyla yeni kavram yapıları oluşturabileceği gibi, yeni öğrendiği kavram sayesinde eski kavramlarında hatalı olduğu noktalarda düzenlemeler yapabilir (Umay, 2007). Böylece, kavramlar arası ilişkilendirme yapabilen öğrenci kavramsal yapılarını ileriye götürebilir, var olan matematiksel yapıların arasında daha önce fark etmediği bağlantıları görebilir ve kavramlar ile ilgili ileriye yönelik beklentilerini şekillendirebilir (Leikin & Levav-Waynberg, 2007:350). Farklı matematiksel notasyonların (grafik, nümerik, sembol vb.) kullanılması, kavramlar arası ilişkilendirmeyi güçlendirdiğinden (Vale, McAndrew ve Krishnan, 2011) genel olarak matematiğin öğretimi sürecinde oldukça önemlidir. Farklı temsiller arasında ilişkilendirme, matematiksel kavramların daha anlamlı hale gelmesini sağlayıp derinlemesine öğrenilmesini sağlamaktadır (Bingölbali ve Coşkun, 2016).

Tablo 1

Matematiksel İlişkilendirmenin Bileşenleri ve Göstergeleri

Ana bileşen	Alt bileşen	Göstergeler
Kavramlar arası ilişkilendirme	Kavram ve diğerleri arasında ilişkilendirme	Başka bir kavram / kavramı öğretmek için farklı bir kavram / matematiksel kavram kullanma
	Kavram ile alt kavramları arasında ve alt kavramlar arasında ilişkilendirme	Bir ana kavram ile öğretimde alt kavramların hiyerarşisini veya ilişkisini kullanma
		Ana kavramın alt kavramları arasında ilişkilendirme

Kavramın farklı gösterimleri arası ilişkilendirme		En az iki farklı gösterim arasında ilişkilendirme (Tablo-grafik, denklem-grafik, sözel anlatım-denklem, sembolik temsil-resim-model-somut nesne-sözlü anlatım vb.)
Gerçek hayat ile ilişkilendirme	Kavramın gerçek hayat bağlamında öğretilmesi	Gerçek yaşam bağlamlarını içeren problemleri veya örnekleri kullanma Somut modelleri ve simülasyonları kullanarak kavramların öğretilmesi
	Sözel örneklerle gerçek hayat ilişkilendirmesi	Kavram / ifade ile gerçek hayat arasındaki ilişkileri sözel olarak ifade etmek
Farklı disiplinlerle ilişkilendirme	Kavramı farklı bir disiplin bağlamında öğretmek	Farklı bir disipline ait bir bağlam / kavram / ifade kullanarak matematiksel bir kavram / ifade öğretmek
	Sözel örneklerle diğer disiplinlerle ilişkilendirme	Kavram ve farklı disiplinler arasındaki ilişkiyi sözel olarak ifade etmek Matematiğin farklı disiplinlerde kullanımını sadece sözel olarak ifade etmek.

Çoklu Temsiller

Matematiksel ilişkilendirmenin alt bileşenlerinden biri olan kavramın farklı gösterimleri arası ilişki çoklu temsiller kavramıyla karşılanabilir. Çoklu temsiller, aynı bilgiyi birden fazla biçimde ifade etmek için fikirlerin ve kavramların dışsal matematiksel düzenlemeleridir. Temsil genel anlamıyla, bir kavram veya nesnenin farklı şekillerde, birtakım araçlar yardımıyla ifade eden gösterim olarak düşünülebilir. Matematikte ise, temsiller soyut imgeleri somutlaştırarak modellemedir (Kaput, 1998). Matematikte kullanılan temsillerin bir diğer yönü problem çözümünde bir kavramın farklı temsilleri arasında geçiş kolaylığı sağlamasıdır (Monaghan, Sun & Tall, 1994). Problem çözümünde sağladığı kolaylığın yanında, temsiller kavramın anlaşılması için kullanılan bir araçtır. Çünkü kavramın farklı temsillerinin bilinmesi bunlar arasındaki ilişkiyi görebilme kavramsal anlamayı sağlamaktadır (Hiebert ve Carpenter, 1992).

Temsiller literatürde birçok araştırmacı tarafından ele alınmıştır (Keller ve Hirsch, 1998, Özgün-Koca, 2001, Duval, 1993, Goldin ve Kaput, 1996). Bu araştırmacılara göre, temsiller, kavramsal anlamaya fırsat sağlayan araçlar, aynı kavramın farklı dışsal görüntüsünü veren dışsal matematiksel sistemler, işaret ve simgelerden oluşan özel bir dil, somut nesnelerle başka bir şeyin sembolize edilmesini sağlayan karakteristik düzenlemedir.

Temsil etme sürecini açıklarken iç-dış temsiller ayrımının ortaya konulduğu gözlenmiştir. İç temsiller, bireyin zihninde var olan soyut yapıları ifade ederken; dış temsiller, bu soyut yapıların somut olarak ifade edilmesidir. Araştırma yapılırken de bireyin iç dünyası direkt olarak gözlemlenemeyeceği nedeniyle, bireyin temsil becerisi dış temsiller baz alarak ölçülür (Goldin, 1998). İç temsillerin bireyin zihninde oluşan bilgi ağlarını oluşturduğu ve bunlar arasında oluşan bağ sayılarının fazlalığı, kavramın bireyde kalıcılık düzeyini artırdığı söylenebilir (Hiebert ve Carpenter, 1992). Burada bahsedilen iç temsiller, bireyin tecrübe ettiği durumlarla zihninde oluşan model, imge, şema, matematiksel gösterim gibi soyut ifadelerdir (Dufour-Janvier vd., 1987; Goldin, 1998; Sevimli, 2009). Dış temsiller ise, iç temsillerin dışsal ifadeleri olarak, zihindeki yapıların sembol, simge, grafik, diyagram, tablo, cebirsel, nümerik ve sözel gösterimleri olarak ele alınabilir. Bunlar iç temsillerin aksine gözlemlenebilir ifadelerdir (Goldin ve Kaput, 1996).

Kavramsal anlamaya yardımcı olan temsiller ve aralarında kurulan ilişkiler aynı zamanda, problem çözümü sürecinde kullanılan araçlardır. Bu matematik öğretiminin önemli parçalarından biridir (NCTM, 2000, s.66). Öğrenciler matematik öğrenimleri boyunca, dış temsiller olarak bahsi geçen tabloları, grafikleri, cebirsel gösterimleri nasıl kullanacaklarını öğrenirler. Bu araçlar matematikte ve fen alanlarında ilgili kavramları nasıl geliştirecekleri ve bu kavramlara yönelik düşüncelerini nasıl ilerletecekleri konusunda önem arz etmektedir (Greeno ve Hall, 1997, s.2). Bu açıdan bakıldığında temsil becerisinin matematik öğretiminde önemi aşikardır.

Matematiksel Modelleme Bağlamında İlişkilendirme ve Temsil Becerileri

Kavramların zihindeki yapılarının açığa çıkarılması için tek bir temsil biçimi yeterli değildir. Birden fazla temsil ifadesi ile bunlar arasındaki ilişkiler ortaya ne kadar fazla konulursa ilgili kavram o kadar iyi ifade edilmiş olur. Aynı durum modelleme sürecinde de vardır. Modelleme sürecinde, gerçek hayata ait bir kavramın matematiksel olarak ifade edilmesi ve üzerinde çalışılması için farklı matematiksel temsiller ve bu temsillerin birlikte ele alınması gerekmektedir (Lehrer ve Schauble, 2003). Modelleme sürecinde elde edilen matematiksel modeller gerçek hayat durumunun bütün özelliklerini taşıyamaz. Aynı şekilde tek bir temsil ifadesi de model olma özelliğini taşıyamaz. Gerçek hayat durumunun özeliklerini modele yüklemek için farklı temsiller kullanılması ve matematiksel işlemler yapılması ve bütün bunlar arasında ilişkiler kurulması gerekmektedir. Bu doğrultuda öğrencilerin modelleme sürecinde matematiksel ilişkilendirme ve temsil becerileri önem kazanmış olur.

NCTM (2000), temsillerin modelleme sürecinde, gerçek hayat durumlarına matematiğin uygulanması adına öğretimdeki yerine ilgi gösterilmesi gerektiğini belirtmiştir. Öğretim sürecinde öğrencileri temsilleri matematiksel düşüncelerini ifade etme aracı olarak kullanırlar. Benzer şekilde, problem çözme sürecinde temsiller problemi analiz etme ve çözüm yolu aramada kullanılan bir araçtır. Temsil gücü fazla olan öğrencilerin, problem çözmede de başarılı oldukları söylenebilir (Brenner, 1997, s.666; Fennell ve Rowan, 2001, s.288). Problem çözme sürecinde temsiller belirli amaçlar için seçilir ardından çözümü başkalarına anlatma yolu da temsiller sayesinde gerçekleşir (Greeno ve Hall, 1997). Bu süreçte, öğrenci problemi anlamak için notlar alır, karalamalar yapar, birtakım cebirsel ifadelere veya tablolara başvurabilir. Bu temsiller, öğrencinin kendi düşüncelerini takip etmesine olanak sağlamasının yanında (Greeno ve Hall, 1997), öğretmen ya da araştırmacı için de bir değerlendirme biçimine dönüşebilir. Probleme dair temsiller kullanan öğrenciler ile temsilleri kullanmayan öğrencilerin problem çözümüne dair, temsil edenlerin lehine bir fark olsa da (NCTM, 2000) temsillerin probleme ilişkin seçilmesi, problemdeki kavramlarla ilgili olması, kavramın temsilleri arasında etkili olan ile etkisiz olanın ayırt edilmesi de oldukça önemlidir, aksi takdirde problemin çözümü olanaksız hale gelebilir (Davis, 1986).

Matematik öğrenirken ve problem çözerken kullanılan temsil türlerinin içinde gerçek hayat olayları-tecrübeye dayalı modeller ve değiştirilebilir, üzerinde oynama yapılabilir modeller vardır. Değiştirilebilir modeller kendi başlarına anlamlı değildir ancak uygulandıkları gerçek hayat durumlarında anlamlı hale gelirler (Lesh, Post, & Behr, 1987).

Matematiksel bir kavramın öğretiminde tek bir temsil yeterli değildir, kavramın farklı temsillerinin birbirleriyle ilişkisi kavramın kendisini oluşturur. Bu yüzden çoklu temsilleri öğretim sürecinde kullanmak öğrenmeyi anlamlı kılar. Öğrenciler açısından da kavramın ilgili temsillerinin bir arada ve özellikle ilişkilendirme yapılarak sunulması, verilen her temsilin konudan bağımsız olduğunu düşünmelerine engel olur (Adu-Gyamfi, 1993). Benzer şekilde, Amoah ve Laridon (2004) kavram öğretiminde farklı temsillerin ilişkilendirilerek sunulmasının öğrencinin anlayışını güçlendireceğini belirtmişlerdir.

Farklı temsiller arası ilişkilendirmenin yanında, matematiksel kavramların öğretimi sürecinde, kavramın gerçek yaşamla ilişkisi, diğer disiplinlerle ilişkilerinin sunulması öğrencinin kavramı anlamasına fayda sağlar. Matematiksel ilişkilendirme becerisi de bahsi geçen ilişki türlerini kapsar. Bu anlamda çoklu temsiller matematiksel ilişkilendirmenin bir parçasıdır. Matematiksel modelleme ise matematik dışındaki disiplinlerle, gerçek yaşamla ilgili problemleri sunan, çözme sürecinde ise, verilen durumun matematiksel temsillerle ifade edilmesini gerektiren ve probleme özgü bağlam içerisinde gerek diğer disiplinlerle gerek gündelik yaşam ilişkisinde yorumlanması beklenen döngüsel bir süreçtir (Haines ve Crouch, 2007).

Matematiksel ilişkilendirme, içerdiği zihinsel süreçler, farklı temsiller, farklı öğrenme alanları, gündelik hayat ve diğer disiplinlerle kurduğu ilişkiler göze alınarak, NCTM (2000) tarafından, çoklu temsillerle beraber matematik öğrenimin temel becerilerinden biri olarak belirlenmiştir. Diğer yandan, MEB (2013), ortaöğretim düzeyi için ilişkilendirme becerilerine dair göstergeleri matematik içerisinde, kavramsal ve işlemsel ilişkiler, öğrenme alanları (sayılar, cebir, geometri) arasında ilişkiler, matematiksel kavramların farklı temsilleri arasında ilişkiler kurma olarak belirtmiştir. Matematiği günlük hayat ve diğer disiplinlerle ilişkilendirmeyi de matematik dışı dünyayla ilişki kurma olarak ele almıştır.

Bu göstergeler incelendiğinde, matematiksel modelleme sürecinin gerektirdiği becerilerinin önemli bir kısmının matematiksel ilişkilendirme becerilerini de yansıttığı görülmektedir. Matematiksel ilişkilendirme, literatürde problem çözme süreçlerinin bir parçası olarak ele alınmıştır. Eli (2009), matematiksel ilişkilendirmenin problem çözümünde bir araç olduğunu bunun destekleyicisi olarak da problem çözmede başarılı olan bireylerin uygun ilişkilendirme yapabilen bireyler olduğunu belirtmektedir (Eli, 2009:24). Zorlayıcı problemler karşısında öğrencinin bu zorlukları aşma, bilgilerini yapılandırma ve kavramları yeniden yorumlama süreçlerinde matematiksel ilişkilendirmenin kullanımının etkili olduğu görülmüştür

(Lampert, 2001; Silver et al., 2005; Thompson, 1985, Akt., Guberman & Leikin, 2013:35).

Problem durumlarının keşfedilmesi sürecinde öğrenciler matematiksel düşüncelerinin ilişkilerini bir bağlam çerçevesinde değerlendirebilir (NCTM, 1989:76). Bu anlamda birçok araştırma problem çözmeyi, matematiksel ilişkilendirmeye yönelik bir bağlam olarak kabul etmiştir. Yapılan çalışmalarda problem çözme etkinliklerinde ilişkilendirme süreçleri incelenmiş, ortaya modelleme ve temsil etme gibi ilişkilendirme türleri çıkmıştır (Evitts, 2004). Bir başka çalışmada problemlere yönelik çoklu çözüm görevleri sunulmuş ve çeşitliliği sağlayan ilişkilendirme türü çoklu temsiller olmuştur (Leikin, 2011). Bunun sebebi, temsillerin kendi içerilerinde ve birbirleri ile geçiş imkânı sunarak problem çözme sürecinde esnek bir araç olarak kullanılabilmesidir (Monaghan, Sun & Tall, 1994). Bu anlamda temsiller de bir nevi modelleme işlevine sahiptir (Kaput, 1998).

Bütün bunlara genel açıdan bakıldığında, matematiksel modelleme, matematiksel ilişkilendirme ve çoklu temsiller birbirlerini içeren veya kapsayan süreçler olarak değerlendirilebilir. Matematiksel modellemenin yapısı gereği matematiksel ilişkilendirmeyi ve temsilleri içermesi gerektiği söylenebilir.

İlgili Araştırmalar

Bu kısımda, matematiksel modelleme ve matematiksel ilişkilendirme üzerine yapılan araştırmalar incelenerek sunulmuştur.

Matematiksel modelleme ile ilgili araştırmalar. Bu kısımda, literatürde matematiksel modelleme ile ilgili yapılmış bazı araştırmalara yer verilmiştir. Matematiksel modelleme geniş kapsamlı ve tek bakış açısına sahip olmayan bir eğitim teorisi olduğundan bu alandaki çalışmalar da oldukça çeşitlidir. Mesela modelleme yeterliklerini inceleyen (Güç, 2015, Çakmak Gürel, 2018), modellemenin kavramsal anlamayı desteklediğini ifade eden (Başkan, 2011), Swan, Turner ve Yoon, 2006), modelleme sürecinde öğrencilerin yaşadığı zorlukları dile getiren (Karacı, 2016, Kol, 2014 Deniz, 2014) çalışmaların yanında, modellemenin matematiği anlamlandırmaya olan katkısından ötürü mutlaka öğretim müfredatlarında bulunması gerektiğine değinen (Ottosen, 2001), Blum ve Ferri, 2009, Grootenboer, 2009, English ve Sriraman, 2009) gibi çalışmalar da yer almaktadır. Çalışmaların bazıları diğer bölümlerde yer almaktadır (Deniz (2014), Başkan (2011). Bunun sebebi matematiksel modelleme ile ilgili sonuçların yanında matematiksel ilişkilendirmeye dair sonuçlara da yer vermiş olmalarıdır.

Lingefjard (2007), üniversitelerde, matematik öğretmenliği bölümlerindeki öğrencilere, matematiksel modelleme derslerinin ne şekilde verilip, hangi sebeple verilmediğini araştırmak üzere bir çalışma yapmıştı. Araştırmanın sonucunda, 26 okuldan sadece 4'ünün matematiksel modelleme dersi verdiği belirlenmiştir. Sebep olarak ise öğrencilerin öncelikle cebir, analiz, geometri gibi temel dersleri almalarının daha önemli olduğu söylenmiştir. Araştırma sonuçlarında dikkat çeken bir diğer sonuç, ilgili fakültenin öğretim elemanlarınca matematiksel modelleme hakkındaki bilgi eksikliği olmuştur. Araştırmaya katılan öğretim elemanları, matematiksel modellemenin disiplinler arası bir konu olduğunu, gerçek matematik olmadığını ifade etmişlerdir.

Gross (1981) ise matematiksel modellemenin önemini öğretmen adayları açısından değil matematikçiler açısından ele almıştır. Bunun için 2586 şirketle irtibata geçilmiş, matematikçilerle ve matematikçi işverenlerle birçok mülakat gerçekleştirilmiş, 1099 matematikçiye de anketler uygulanmıştır. Araştırmanın ana sonuçlarından biri, matematikçilerin iş hayatında çoğunlukla matematiksel modellerle çalışmalarıdır. Dolayısıyla üniversite eğitimi, pür matematik eğitiminden ziyaden öğrencileri bir problem çözücü olarak hazırlamalıdır. Matematik eğitimi genelleştirilmesi, kapsam alanı değişmesi için matematiksel modelleme dersleri verilmesi gerektiği belirtilmiştir. Bir diğer öneri ise bilgisayar bilimlerinin matematikçilerin istihdam edildiği yerler için önemli olmasından ötürü, eğitimlerinin bunu da kapsaması gerektirdiğidir.

Çarman (2007) Kara Harp Okulunda türev, integral kavramlarının mesleğe yönelik olarak gerçek hayat modellemelerinin ele alındığı ders ortamının öğretime etkisini çalışmıştır. Çalışma sonucunda öğrencilerin konu hakkında kavram yanılgılarının olması, gerçek hayattan matematiksel modele geçişte zorlanmalarının sebebi olduğu belirlenmiştir.

Frejd (2012) çalışmasında 12 farklı ortaokulda görev yapan 18 öğretmenin matematiksel modelleme ile ilgili bilgi seviyelerini ve bu yöntemi uygulama tecrübelerini araştırmıştır. Bu çalışmada öğretmenlerin yarısı modelleme kavramını daha önce duymadıklarını ve matematiksel modellemenin fizik ve kimya gibi fen derslerinde kullanılması gerektiğini belirtmişlerdir. Bu anlamda öğretmenlerin matematiksel modelleme hakkındaki bilgilerinin oldukça kısıtlı ve buna bağlı olarak deneyimlerinin az olduğu anlaşılmıştır.

Kaiser ve Schwarz (2006) matematiksel modelleme ile ilgili seminerleri raporlayan çalışmalarında, öğrencilerin modelleme etkinliklerine yönelik problem çözme denemelerini açıklamışlardır. Bu çalışmada, 10 okuldan 180 öğrenci ve 32 öğretmen adayının katıldığı seminer süreci 2 yılı aşkın olmuş bu süreçte 3 kurs gerçekleştirmişlerdir. Çalışma sonucunda, karmaşık ve yüksek seviyedeki modelleme etkinliklerinin okullarda uygulanabilir olduğu bunun yanında bu etkinliklerin inanılanın aksine yüksek performans gösteren çocuklara özel olmadığı görülmüştür. Öğrenciler matematik derslerinde günlük yaşam problemleriyle ilgilenmek istediklerini, öğretmenler modelleme etkinliklerinin uygulanabilir olduğunu, öğretmen adayları ise matematiksel modelleme etkinliklerini sınıflarında nasıl uygulayabileceklerini çalışma öncesinde bilmediklerini, çalışma sayesinde öğrenmiş olduklarını belirtmişlerdir.

Ottesen (2001) “Temel Analiz, Modelleme ve Simülasyon” adı altında açtığı derslerde matematiksel modellemenin, matematik dersine yaptığı katkıları ortaya koymayı amaçlamıştır. Derslerde gerçek veriler içeren gerçek yaşam problemleri üzerinde çalışılmıştır. Derslerin sonucunda öğrenciler öğrendikleri matematiği matematik dışında nasıl kullanabileceklerini fark etmişlerdir. Matematiksel modelleme sayesinde karşılaştıkları zorlukların üstesinden gelebilmiş ve farklı bakış açıları kazanmışlardır. Çalışma sonucunda matematiksel modellemenin matematiği anlamak kestirme bir yol olmadığı, aksine daha derin anlayışı sağlamak için oldukça etkili bir yol olduğu vurgulanmıştır.

Blum ve Ferri (2009) matematiksel modelleme üzerine yapılan çalışmaların yoğunluğuna rağmen uygulamaların önemsenmediğini belirtmektedirler. Bunun sebebini ise öğretmenlerin ve öğrencilerin modellemeyi zor bulduklarından kaynaklandığını söylemektedirler. Araştırmacılar, bu çalışmada matematiksel modellemenin eğitim ve öğretim için gerekliliğini kanıtlamaya çalışmışlardır. Çalışma sonucunda ise matematiksel modelleme öğretimi için model-oluşturma etkinliklerinin nasıl olması gerektiğini raporlamışlardır.

Kadijevich (2009), çalışmasında, Microsoft Excel ile basit modeller geliştirmelerini istediği birinci sınıf işletme lisans öğrencileriyle çalışmıştır. Öğrencilerden, verilen problem durumlarında işin daha kârlı olması için tavsiyelerde bulunmaları istenmiştir. Sonuç olarak öğrencilerin gerçek yaşam problem ifadesinden matematiksel modele geçişle ilgili bazı zorluklar yaşadıkları tespit edilmiştir. Bu zorlukların değişkenlerin seçilmesi, değişkenlerin işleme koşulması ve değişkenlerin ilişkilendirilmesi ile ilgili olduğu belirtilmiştir.

Grootenboer (2009) “21. yüzyılda problem çözme” isimli çalışmasında Boaler'ın (1997; Boaler ve Staples 2008) yaptığı çalışmaya dikkat çekmiştir. Bu çalışmada öğrencilerle zengin matematiksel görevlerin kullanımının öğrencilerin üzerindeki etkilerini araştırmıştır. Bu görevler problem çözmeyi ve disiplinler arası ilişki kurma ve çoklu temsiller de dahil olmak üzere matematiksel modellemenin özelliklerini içermektedir. Çalışmanın bulgularına dayanarak, Boaler matematik eğitiminin şunları içermesi gerektiğini vurgulamıştır; çoklu yaklaşımlar ve çözüm yolları olan zengin görevler, grup çalışmaları, rehberlik eden öğretmen, çoklu temsil kullanımı. Buna yönelik olarak, matematiksel modellemeye daha fazla önem verilmesi ve uygun sınıf çalışmalarının duruma etkili olduğu belirtilmiştir. Müfredattaki matematiksel modellemeye vurgu yapılarak, öğrencilere daha otantik matematiksel deneyimler sunduğu ve daha derin düşünme ve problem çözmeyi desteklediği söylenmiştir.

English ve Sriraman (2009) araştırmalarında problem çözmeyi bireyin düşüncesine meydan okuyan ve geliştiren bir dizi etkinlik olarak ele almıştır. Bu çerçevede çalışmalarında problem çözme üzerine yapılan araştırmaların yetersiz kaldığından, problem çözmenin matematiksel modellemeye doğru değişmesi ve ilerletilmesinin gerekli olduğunu söylemişlerdir. Ayrıca sınıf içi uygulamalarının nasıl olacağı hakkında yeterli birikime sahip olunmadığına değinmişlerdir. 21. yüzyılda problem çözme becerilerini şöyle sıralamışlardır; karmaşık sistemleri yorumlamak, tanımlamak, açıklamak, tahmin etme, manipüle etme ve inşa etme. Bu açıdan bakıldığında birçok disiplinden faydalanan matematiksel modellemenin okul öncesinden başlayarak müfredata dahil edilmesinin, bu becerilerin gelişmesine fayda sağlayacağını söylemişlerdir.

Knott (2014) çalışmasında öğrencilerin matematiksel modelleme yeterliklerin geliştirilmesini araştırmıştır. Ortaokul öğrencileriyle yaptığı çalışmada sayı problemlerinin modellenmesi sürecinde öğrencilerin neler yaptığı ve bu süreçte matematiksel modelleme yeterliklerinin gelişimini incelemiştir. Öğrencilerin süreçte içselleştirme, yorumlama, yapılandırma, simgeleme, ayarlama, organize etme ve genelleme yaptıkları çalışmanın bulguları arasındadır. Sonuçlar, öğrencilerin matematik modellemeye katıldıklarında modelleme yeterliliklerinin geliştiğini ve heterojen bir öğrenci grubunun modelleme sürecinin öğrenilmesiyle matematik yeterliliklerini geliştirdiğini göstermiştir.

Şengil-Akar (2017) tarafından yapılan çalışmada, matematikte üstün yetenekli olarak tanımlanan öğrencilerin farklı model-oluşturma etkinlikleri sırasında sergiledikleri matematiksel yaratıcı düşünme becerilerinin betimlenmesi, öğrencilerin oluşturdukları modellerin ve farklı model-oluşturma etkinliklerinin özelliklerinin yaratıcılık açısından incelenmesi amaçlanmıştır. Çalışma grubunu bilim ve sanat merkezine gelen, farklı yaş gruplarından toplamda 28 öğrenci oluşturmuştur. Çalışmanın sonucunda öğrencilerin grup ve bireysel olarak farklı model-oluşturma etkinliklerinde farklı düzeylerde matematiksel yaratıcılık sergiledikleri görülmüştür. Grupların bazı model-oluşturma etkinliklerinde daha çok ilişkilendirme yaptıkları, daha aşamalı bir biçimde çözüme ulaştıkları ve böylelikle daha kaliteli ve orijinal modeller ortaya koydukları gözlenmiştir.

Güç (2015) modelleme yeterliklerini geliştirmeye yönelik hazırlanmış öğrenme ortamında öğretmen adaylarının modelleme becerilerini incelemiştir. Çalışma grubunu ilköğretim matematik öğretmenliği ikinci sınıf öğrencisi 40 kişi oluşturmuştur. Araştırma sonucuna göre, tasarlanan öğrenme ortamının, öğrencilerin modelleme becerilerini geliştirdiği, ancak bu gelişimin doğrusal olmadığını göstermiştir. Bazı alt-yeterliklerin modelleme deneyimine bağlı olmadığı hatta modelleme deneyiminden olumsuz etkilenen alt-yeterlikler olduğu araştırmanın sonuçları arasındadır.

Çakmak Gürel (2018) çalışmasında, araştırmacı tarafından tasarlanan matematiksel modellemeyi öğrenme ortamına katılma durumunun, matematik öğretmeni adaylarının matematiksel modelleme süreçlerinin gelişimini nasıl desteklediğini tespit etmeyi amaçlamıştır. Çalışma grubunu öğrenme ortamına katılan ve katılmayan toplamda 32 ilköğretim matematik öğretmeni adayı oluşturmaktadır. Araştırmanın sonucunda öğrenme ortamının, öğretmen adaylarının matematiksel modelleme döngülerine ve yeterliklerinin gelişimine katkı sağladığı ortaya konulmuştur.

Dede ve Bukova-Güzel (2014) çalışmalarında, matematik öğretimi için önemli bir araç olduğu düşünülen MOE'nin kuramsal yapısını, bir örneğini ve bu örneğin uygulama sürecini tanıtmışlardır. Bu çalışma ile ortaöğretim için bir model-oluşturma etkinliği olan Yakıt Problemi sunulmuş ve uygulama süreci hakkında bilgi verilmiştir.

Bal ve Doğanay (2014) tarafından yapılan çalışmada, sınıf öğretmeni adaylarının matematiksel modelleme sürecini anlamalarını sağlamak amaçlanmıştır. Araştırmanın sonucunda başlangıçta modelleme yapamayan öğretmen adaylarının modelleme problemlerine ilişkin model oluşturabilir hale geldikleri görülmüştür.

Özaltun, Hıdıroğlu, Kula, Bukova Güzel (2013), matematik öğretmen adaylarının matematiksel modelleme sürecinde kullandıkları gösterim şekillerini incelemiştir. Araştırma sonuçlarına göre, grupların modelleme sürecinde sözel, cebirsel, şekilsel, grafiksel, tablo ve dinamiksel temsil türlerinden yararlandıkları belirlenmiştir. Süreçte, en fazla sözel ve cebirsel gösterim kullanılmıştır. Problem durumunu anlama aşamasında sadece sözel temsil kullanılırken, sistematik yapıyı kurma aşamasında ise en fazla sözel ardından şekilsel temsil türü kullanılmıştır. Matematikselleştirme yaparken en çok kullanılan cebirsel ve sonra sözel temsil olurken yorumlama/değerlendirme ve modelin doğrulanması aşamalarında ise çoğunlukla olarak sözel ve sonra da cebirsel temsilleri kullandıkları görülmüştür.

Swan, Turner ve Yoon (2006) matematiksel modellemenin, öğrencilerin matematiksel dili ve araçları etkili olarak kullanımlarını nasıl geliştirdiğini göstermeyi hedefledikleri çalışmalarında, model-oluşturma etkinlikleriyle ilgilenen öğrencilerin çalışmalarını incelemişlerdir. Çalışmanın sonunda, öğrencilerin, modelleme etkinlikleriyle çalışırken, matematiksel yeterliklerinin geliştiği ve matematiğin içinde ve dışında çoklu ilişkilendirmeleri kullandıkları görülmüştür. Aynı zamanda matematiksel modellemenin öğrencilerde olması zorunlu bir beceri olmasının yanı sıra matematiksel modelleme deneyimi kazanmanın öğrencilere yeni matematiksel bilgileri kazandırdığı da belirtilmiştir.

Karacı (2016) çalışmasında, ilköğretim matematik öğretmen adaylarına yönelik hazırlanan öğrenme ortamının öğretmen adaylarının modelleme becerilerine etkisini araştırmıştır. Araştırma sonuçlarında, öğrencilerin ön-test son-test sonuçları arasında anlamlı bir fark çıkmıştır. Ayrıca çözüm sürecinde öğretmen adaylarının en çok zorlandığı yerlerin çözüm öncesinde problem durumunu anlama olduğu tespit edilmiştir.

Kol (2014), çalışmasında, öğretmen adaylarının matematiksel modelleme süreci içerisinde matematikselleştirme yapabilme durumlarını incelemiştir. Çalışma grubunu öğretmenler için matematiksel modelleme dersini alan öğrenciler oluşturmuştur. Araştırma sonucunda, öğretmen adaylarının matematikselleştirme sürecinde, problemi anlamada, istenilen fonksiyonun değişkenini belirlemede ve fonksiyonu yazmada zorluklara ve kavram yanılgılarına sahip oldukları belirlenmiştir.

Huang (2011) çalışmasında 58 mühendislik birinci sınıf öğrencisi ile çalışmıştır. Çalışmanın başlarında, durumu anlama, değişkenleri belirleme ve değişken ve parametrelerin grafik gösterimlerini yapabilme gibi modelleme yeterliklerinde zayıf olan öğrenciler, süreç boyunca alt yeterlikler anlamında gelişme göstermelerine rağmen model oluşturmada başarısız olmaya devam etmişlerdir.

Bukova-Güzel ve Uğurel (2010) çalışmalarında, matematik öğretmen adaylarının Analiz-1 dersi başarıları ile modelleme yaklaşımları arasındaki ilişkiyi araştırmışlardır. Çalışma grubunda, farklı akademik başarıya sahip 12 öğretmen adayı bulunmaktadır. Veriler öğrencilere uygulanan matematiksel modelleme etkinliklerinden elde edilmiştir. Çalışma sonucunda, akademik başarının modelleme başarısını bir ölçüde etkilediği görülmüştür.

Ural ve Ülper (2012) çalışmalarında, ilköğretim matematik öğretmen adaylarının okuduğunu anlama becerisi ile matematiksel modelleme becerisi gerektiren gerçek hayat problemini anlama becerisi arasındaki ilişkiyi incelemiştir. Veriler matematiksel modelleme etkinliği ile okuduğunu anlama becerisini ölçmeye yönelik çoktan seçmeli bir test ile elde edilmiştir. Çalışma sonucunda, okuduğunu anlama becerisiyle gerçek hayat problemini anlama becerisi arasındaki ilişkinin pozitif olduğu belirlenmiştir.

Çiltaş (2011) çalışmasında, dizi ve seriler konusunu matematiksel modelleme yöntemi ile ele alarak, ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel modelleme becerilerini ve bu yöntemin öğrenmeye etkisini incelemiştir. Çalışmanın hazırlık aşamasında dizi ve seriler konusunda öğrencilerin farklı öğrenme güçlüklerine sahip oldukları, konuya ilişkin zihinsel bir model oluşturamadıkları tespit edilmiştir. Araştırmanın ikinci aşamasında, ilk aşamanın sonuçlarına göre hazırlanan ders içerikleri ile öğretmen adaylarının matematiksel modelleme ile ilgili bilgi, beceri ve görüşlerinde olumlu bir değişim yaşanmıştır. Ayrıca ikinci aşamada uygulanan derslerin akademik başarıya ve ilk aşama sonucunda tespit edilmiş olan öğrenme güçlüklerini gidermeye yönelik etkisi olduğu görülmüştür.

Bazı araştırmalarda ise öğrencilerin türev konusundaki kavram yanılgılarını araştırılmıştır. Tespit edilen yanılgılar şöyledir, ‘bir noktadaki türevin fonksiyonunu verir’, ‘teğet denklemi türev fonksiyonudur’, ‘bir noktadaki türev denklemidir’ (Amit ve Vinner, 1990), ‘bir noktadaki türev teğet denkleminin o noktada aldığı değerdir’ (Ubuz, 2001).

Doğan vd. (2002) araştırmalarında, ülkemizde liseden mezun olup matematik öğretmenliği bölümüne kayıt yaptıran öğrencilerin, fonksiyonlarda limit ve türev konularında ne durumda olduklarını araştırmak için 189 öğrenci ile çalışmışlardır. Üniversite sınavında çıkan sorulardan karma bir test kullandıkları çalışmanın sonuçları şöyledir; öğrencilerin, fonksiyonlarda limit konusunda %19, fonksiyonlarda türev ve uygulamaları konusunda %6 oranında doğru cevap verebildikleri, doğru cevap sayılarının ortalamasının 2,2 olduğu, öğrencilerin %24,86 sının ise (47 öğrenci) hiçbir soruya doğru cevap veremediği, genelde sorular boş bırakıldığı tespit edilmiştir.

Matematiksel ilişkilendirme ile ilgili araştırmalar. Bu kısımda matematiksel ilişkilendirme ve onun alt boyutlarında kavramın farklı gösterimleri arası ilişkilendirmeye yönelik olarak temsil becerisi ile ilgili çalışmalar verilmiştir. Çalışmalarda yazarlar, doğal olarak ilgili becerileri incelemek için problem çözme süreciyle ilgilenmişlerdir.

Garii ve Silverman (2009), ilkokul matematik öğretmenleri ile yaptıkları çalışmada, öğretmenlerin başlangıçta okuldaki matematikle gerçek yaşam bağlantıları kurmakta zorlandıklarını söylemişlerdir. Çalışma sonunda ise öğretmenlerin bu bağlantıları güçlendirerek cesaret kazandıkları böylece öğrencilerine de matematiği daha anlamlı kılarak öğretebilmelerini mümkün kılacağını belirtmişlerdir.

Lee (2012) yaptığı çalışmada ortaokul matematik öğretmenlerinin matematiğe yönelik kişisel inanç ve tutumlarıyla matematikle gerçek hayat bağlantıları arasındaki ilişkiye odaklanmıştır. Bu bağlamda, öğretmenlerin problem çözme becerilerini ele almıştır. Çalışma sonucunda, öğretmenlerin öğrenimleri sırasında matematikle gerçek hayat bağlantılarının ele alınmasının önemli olduğu vurgulanmıştır.

Leikin ve Levav-Waynberg (2007), yaptıkları çalışmada ortaokul matematik öğretmenlerinin derslerinde verdikleri örnekler ve bunların çözümlerinin ne derecede çoklu yollara ve çoklu bağlantılara sahip olduğunu incelemişlerdir. Araştırma sonucunda, öğretmenlerin problemleri çoğunlukla tek yolla çözdükleri ve bu çözümleri sistematik müfredata dayandırdıkları görülmüştür. Bazı problemlerde öğretmen, öğrencilerin farklı yollar sunmasıyla diğer yolların farkına varabilmiştir. Bu durum öğretmenlerin matematiksel bilgilerinin kısıtlı ve çözümler arası bağlantı kurmada ve matematiksel ilişkilendirme becerilerinin yetersiz olmasından kaynaklanmıştır.

Businskas (2008), ortaöğretim matematik öğretmenleriyle yaptığı çalışmada matematiksel ilişkilendirme becerilerini içerik bilgisi ve pedagojik bilgileri bağlamında ele almıştır. Çalışma sonuçlarında öğretmenlerin matematiği kavramlar ağı olarak gördükleri ve matematiksel kavramlar arasındaki bir takım bağlantıları bildikleri ancak bilgilerinin örtük olduğu ortaya çıkmıştır. Öğretmenlerden bazıları öğretim sürecindeki ilişkilendirmeyi kullanmanın önemini ortaya koyarken bazıları teorik bilgi ile algoritma arasındaki ilişkinin her zaman açık olmadığını bu yüzden öğrenciye bu bağlantının anlatılmasının zorluğundan bahsetmişlerdir. Ayrıca öğretmenlerin matematiksel bağlantı kurdukları kavram ve örneklerin öğretim müfredatının dışına çıkamayarak dar bir kapsamda kaldığı belirtilmiştir.

Evitts (2004) ortaöğretim matematik öğretmenleriyle yaptığı çalışmada matematiksel ilişkilendirme kurmayı sağlayan yapıyı ortaya çıkarmayı hedeflemiştir. Bunun için öğretmenlerin iki karmaşık problemi çözme süreçlerini takip etmiştir. Çalışma sonucunda matematiksel ilişkilendirme türlerini; (a) modelleme, (b) yapısal

(c) temsil etme, (d) kavram-prosedür, (e) matematik ağları arasında olarak belirlemiştir.

Pepin ve Haggarty (2007) Fransız, İngiliz ve Alman müfredatlarının sunduğu ders kitaplarındaki etkinliklerin matematiksel ilişkilendirme kurmaya ne ölçüde olanak sağladığını araştırmışlardır. Bu çalışmaya göre bütün kitaplarda matematiksel ilişkilendirme kurmaya yardımcı etkinlikler bulunmaktadır. Ancak bunların çoğunun oldukça yetersiz olduğu görülmüştür. Bu ilişkilendirme kurmaya elverişsiz etkinliklerin öğrencilerin matematiği anlamlı öğrenmelerini engelleyeceği belirtilmiştir.

Benzer bir çalışma, İncikabı (2017) tarafından yapılmıştır. Bu çalışmada ülkemizdeki ortaokul matematik ders kitabı temsil türleri çerçevesinde incelenmiştir. Buna göre, kitaplarda en çok kullanılan temsil türünün cebirsel gösterimken, sözel ve model temsilin de sıklıkla kullanıldığı belirtilmiştir. Tablo, grafik ve gerçek yaşam temsillerine verilen yerin ise oldukça az olduğu tespit edilmiştir. Temsiller arası ilişkilendirme yapılırken de ağırlıklı olarak cebirsel, sözel ve model temsillerin kullanıldığı tespit edilmiştir.

Özgen (2013) çalışmasında, öğretmen adaylarının ilişkilendirme becerilerini belirlemeyi amaçlamıştır. Çalışmada, 28 öğretmen adayına üç rutin olmayan problem yöneltmiştir. Yazar, problem çözme sürecini yazılı dokümanları inceleyerek rubrik derecelendirme ölçeği ile değerlendirmiştir. Çalışma sonucunda, öğretmen adaylarının ilişkilendirme becerilerinin düşük düzeyde olduğu, ilişkilendirme türlerine göre matematiği kendi içinde ilişkilendirmenin istenen düzeyde olmadığı, diğer disiplinler ve günlük yaşamla ilişkilendirmenin çok düşük seviyede kaldığı gözlemlenmiştir.

Mumcu (2018), tarafından yapılan çalışmada öğretmen adaylarının ilişkilendirme becerileri türev kavramı bağlamında incelenmiştir. 51 öğretmen adayına kendisinin geliştirdiği İlişkilendirme Beceri Testi'ni uygulamıştır. Bu testin temel bileşenleri, gerçek yaşamla ilişkilendirme, kavramın farklı temsilleri arasında ilişkilendirme, kavramlar arası ilişkilendirme ve farklı disiplinlerle ilişkilendirmedir. Çalışma sonucunda, öğretmen adaylarının türev kavramına yönelik sahip olduğu bilgilerin, ders kitaplarında yer alan ezberlenmiş bilgilerden ibaret olduğu ve bu bilgiler arasında ilişkili kurmakta zorlandıkları gözlenmiştir.

Ergene'nin (2011), çalışması Teknolojik Pedagojik Alan Bilgisi çerçevesinde matematik öğretmen adaylarına başarılı bir teknoloji entegrasyonu için ihtiyaç duyacakları bilginin kazandırılmasını hedefleyen bir program geliştirme amacıyla yapılan TÜBİTAK projesinin bir parçası olmak suretiyle, öğretmen adaylarının türev konusuna ilişkin Teknolojik Pedagojik Alan Bilgilerinin çoklu temsiller açısından gelişimini incelemiştir. Araştırmanın verilerini, açık uçlu sorulardan oluşan Pedagojik Alan Bilgisi ve Teknolojik Pedagojik Alan Bilgisi anketleri, adayların türev konusunda hazırladıkları ders planları ve ders notlarının analizi oluşturmuştur. Araştırmanın sonucunda, öğretmen adaylarının çoklu temsilleri kullanma ve kullandıkları temsiller arasında ilişki kurma yönünde geliştiği ve teknoloji kullanımının bu gelişime katkı sağladığı gözlenmiştir.

Çoklu temsiller ile ilgili araştırmalar. Bu kısımda ise çoklu temsiller ile ilgili yapılmış çalışmalara yer verilmiştir.

Adu-Gyamfi (2007), çalışmasında öğrencilere doğrusal fonksiyon konusunu çoklu temsiller temel alınarak hazırlanmış bir öğretim ortamı sunmuştur. Çalışma sonucunda, öğrencilerin temsiller arası geçişlerinin kısıtlı kaldığını ifade etmiştir. Ayrıca doğrusal fonksiyonların farklı temsillerle ilişkilendirilerek anlatıldığı durumlarda, kavramsal anlamanın daha iyi düzeyde olacağını ifade etmiştir.

Ainsworth (2006), yaptığı çalışmada temsillerin öğretimde etkili kullanılması için birtakım parametreler tanımlamıştır. Bunlar tasarım, işlev ve bilişsel görevlerdir. Çalışmada, öğrenmeyi etkileyen temsil becerisi ile ilgili faktörlerden bazılarını şu şekilde ifade etmiştir. Öğrenci kullandığı temsil türünü bilmeli, duruma ilişkin uygun temsili seçebilmeli, temsil türünü hangi amaçla kullandığının farkında olmalıdır. Ainsworth çalışmasında, bu durumları bireysel farklılıklar, verilen görevler ve temsillerin işlevleri çerçevesinde değerlendirmiştir.

Dreher ve Kuntze (2015), öğretmenler ve öğretmen adaylarıyla yaptıkları çalışmada çoklu temsilleri anlayışları üzerine çalışmışlardır. Sonuçlar, her iki grubun da matematik öğrenme için çoklu temsillerin temel rolünü tam olarak anlamadıklarını göstermektedir. Ancak hizmette bulunan öğretmenlerin, öğretmen adaylarından daha çok tecrübeye ve pedagoji bilgisine sahip olduklarından, temsillerin bazı konular için kullanımının kavramsal anlamaya etkisi olduğunun farkında olmaları iki grubun arasında fark yaratan kısım olmuştur.

İpek ve Okumuş (2012), çalışmalarında ilköğretim matematik öğretmen adaylarının problem çözme sırasında hangi temsil türlerini kullandıkları ve kullandıkları temsillerle ilgili ne tür sorunlar yaşadıklarını incelemiştir. Çalışmanın verilerini problem çözmede çoklu temsilleri kullanma testi ve klinik mülakatlar oluşturmaktadır. Araştırma sonucunda, ilköğretim matematik öğretmen adaylarının problemlerin çözüm sürecinde ağırlıklı olarak sözel temsil türünü kullandıkları belirlenmiştir. Ayrıca problemi anlama aşamasında önemli olduğu düşünülen temsillerin kullanımında öğrencilerin probleme uygun temsili seçerken ve temsiller arasında geçiş yaparken zorlandıkları belirlenmiştir.

Gürbüz ve Şahin (2014) çalışmalarında, cebir alanına ait temsiller arası geçiş becerilerini ortaya koymayı amaçlamışlardır. Çalışmanın sonunda, öğrencilerin en fazla sözel, tablo ve denklem temsil türlerinden grafik temsiline geçişte zorlandıkları ancak sözel, denklem ve grafik temsil türlerinden tablo temsiline geçişte zorlanmadıklarını göstermektedir. Ayrıca öğrencilerin bu temsil türlerinden sözel temsile geçerken yaptıkları hataların yazma becerilerinin yetersiz olmasından kaynaklandığı belirlenmiştir.

Delice ve Sevimli (2010) tarafından yapılan çalışmada, öğrencilerin belirli integral konusundaki çoklu temsil becerileri ile problem çözme başarıları arasındaki ilişki araştırılmıştır. Çalışma sonucunda, öğretmen adaylarının belirli integral problemlerini çözerken çoklu temsil becerilerinin yeterli düzeyde olmadığı tespit edilmiştir. Tek bir temsil kullanarak çözüme ulaşmaya çalışan öğrencilerin temsiller arası geçiş becerilerinin zayıf buna bağlı olarak problem çözme başarılarının da düşük seviyede olduğu vurgulanmıştır.

Can (2014), çalışmasında çoklu temsiller aracılığıyla fonksiyon öğretiminin öğrenci başarısına etkisini ortaöğretim seviyesinde incelemiştir. Araştırma verileri, Fonksiyonlar Başarı Testi'nin nicel ve nitel olarak incelenmesi yoluyla elde edilmiştir. Deney ve kontrol grubunun bulunduğu çalışmada deney grubu lehine anlamlı fark olduğu bulunmuştur. Nitel verilerden elde edilen bulguların sonucunda ise deney grubundaki fonksiyon konusunda farklı temsilleri kullanma becerilerinin ve fonksiyonu kavrama becerilerinin kontrol grubuna göre daha başarılı olduğu tespit edilmiştir. Aynı zamanda deney grubu öğrencilerinin fonksiyon konusunda notasyon kullanımı ve grafik ilişkilendirmesi anlamında daha başarılı oldukları söylenmiştir.

Hacıömeroğlu, Hacıömeroğlu, Güzel ve Kula, (2014) matematik öğretmen adaylarının türevin geometrik anlamını yorumlamaya yönelik bilgilerini belirlemeye çalışmışlardır. Kullandıkları etkinlikte, yanal yüzey alanı sabit koninin farklı yükseklikleri için, hacim-yükseklik grafiğini çizip yorumlayarak en büyük hacmi belirlemeleri beklenmiştir. Çalışmanın sonuçları, türevin grafiksel temsilinin öğrenciler tarafından yorumlanamadığını aynı zamanda grafiksel ve sembolik temsiller arasındaki bağlantının kurulamadığını göstermiştir.

Matematiksel modelleme ve matematiksel ilişkilendirmeyi birlikte ele alan araştırmalar. Literatürde açık bir şekilde matematiksel modelleme ve matematiksel ilişkilendirme arasındaki ilişkiye yönelen çalışma yok denecek kadar azdır. Bu yüzden bu kısımda, matematiksel modelleme üzerine yapılmış çalışmalar içerisinde sonuçlarında matematiksel ilişkilendirmeye yönelik bulgulara yer vermiş çalışmalardan bazıları sunulmuştur.

Anhalt ve Cortez (2016) tarafından yapılan çalışmada hazırlanan bir modelleme modülü içerisinde öğretmenlerin modellemeye yönelik anlayışlarının değişiminin incelenmesi amaçlanmıştır. Çalışmada, daha önce matematiksel modelleme görmemiş 11 ortaöğretim öğretmeniyle çalışılmıştır. Modül; okumalar, özenle tasarlanmış modelleme faaliyetleri, bireysel ve grup çalışması, tartışma, sunumlar ve çalışmaların geri dönütlerini içermektedir. Çalışma öncesinde matematiksel modellemeye dair terimleri bilmeyen öğretmenlerin çalışma boyunca matematiksel modellemeyi anlama süreçleri izlenmiştir. Çalışmanın sonucunda öğretmenlerin, probleme dair doğru varsayım oluşturmayı öğrenmekle beraber, matematiksel modelleme ile günlük hayat ilişkilendirmesi yaptıkları görülmüştür.

Doruk (2010) araştırmasında matematiği günlük yaşamla ilişkilendirmede matematiksel modelleme etkinliklerinin etkisini araştırmıştır. Veri toplama aracı olarak Günlük Yaşam Matematik Testi, görüşme formları ve model-oluşturma etkinlikleri kullanılmıştır. Model-oluşturma etkinliklerinin kullandığı sınıflarda matematiği günlük yaşamla ilişkilendirmede, kullanılmayan sınıflara göre başarının daha yüksek olduğu belirlenmiştir. Ayrıca, model-oluşturma etkinliklerinin kullanımının öğrencilerin, gerçek hayat problemlerinde matematikten yararlanma, günlük yaşamda matematik dilini kullanma ve matematiği günlük yaşamla ilişkilendirme düzeylerini arttırdığı belirlenmiştir.

Deniz (2014), çalışmasında ortaöğretim matematik öğretmenlerinin matematiksel modelleme etkinliği oluşturma ve sınıfta uygulama süreçlerini incelemiştir. Araştırmada, öğretmenler tarafından tasarlanan modelleme etkinlikleri MOE prensipleri çerçevesinde incelenmiştir. Bu şekilde, öğretmenlerin hazırladıkları etkinliklerin gerçeklik ve model genelleştirme prensiplerine tamamen uygun, öz değerlendirme prensibine ise kısmen uygun olduğu görülmüştür. Katılımcılarla yapılan görüşmelerde hem öğretmenlerin hem de öğrencilerin geneli modelleme etkinliklerinin, muhakeme gücünü geliştirdiği, günlük hayat bağlantılarının anlaşılmasını sağladığını ifade etmişlerdir.

Korkmaz (2014), çalışmasında öğretmen adaylarının, matematiksel modellemeyi tanıtıp, uygulama yaptıktan sonra matematiksel modelleme hakkındaki düşüncelerinin, tutumlarının ve yeterliklerinin değişip değişmediğini araştırmıştır. Çalışma sonunda, uygulama öncesi ve sonrası modeller ve modelleme görüşlerinde ve matematik dersine karşı tutumlarının puanlarında anlamlı fark bulunmuştur. Öğretmen adayları, görüşmelerde, modelleme sürecinin zorlayıcı olmasının yanında keyifli olduğunu ve matematiğin günlük hayattaki yerinin anlaşılmasında önemli olduğunu anladıklarını belirtmişlerdir.

Sandalcı (2013), çalışmasında MOE’nin derslerde kullanımının öğrencilerin cebir konusunda akademik başarılarının arttırılmasını ve matematiği günlük yaşamla ilişkilendirme düzeylerinin geliştirilmesini amaçlamıştır. Araştırmanın sonucunda, öğrencilerin cebir konusundaki akademik başarılarının ve matematiği gerçek hayatla ilişkilendirme düzeylerini geliştirdiği ortaya konmuştur. Öğrencilerin başlangıçta model oluşturmakta zorlandıkları ancak aynı konuya yönelik model-oluşturma etkinlikleri uygulandıkça daha rahat model oluşturabildikleri gözlenmiştir. Model-oluşturma etkinlikleri ile ders gören öğrenciler, matematikle gerçek hayat arasındaki ilişkiyi daha iyi fark ettiklerini belirtmişlerdir.

Başkan (2011) fen bilgisi öğretmen adayları ile yaptığı çalışmada, doğrusal ve düzlemde hareket konularında matematiksel modelleme kullanılmasının öğrenme durumu üzerine etkilerini araştırmıştır. Sonuç olarak matematiksel modelleme ile ders gören öğretmen adaylarının hem işlemsel başarılarında hem de kavramsal anlamalarında anlamlı bir artış belirlenmiştir. Uygulamalar sonucunda öğretmen adaylarının temel matematik bilgilerine yönelik eksiklerinin olduğu sonucuna varılmıştır. Öğretmen adaylarının kavramlar arası ilişki kurma becerilerinde, kavramları anlama düzeylerinde ve sonuçları yorumlamaya yönelik başarılarında bir artış gözlenmiştir.

Hıdıroğlu (2015) tarafından yapılan araştırmanın amacı, teknoloji destekli ortamda matematiksel modelleme problemlerinin çözüm sürecinde ortaya çıkan bilişsel ve üst bilişsel yapıların açıklanmasıdır. Araştırma sonuçlarında dikkat çeken, problemlerle birlikte verilen animasyon, video ve fotoğraflar gibi görsel materyallerin çözüm sürecinde uygun bir çözüm stratejisinin önemli birer elemanları olmasıdır. Ayrıca, gerçek yaşam çözümlerinden kaynaklanan işlemlerin karmaşıklığı teknoloji sayesinde en aza indirilmiştir. Çözüm sürecinde kullanılan GeoGebra, cebirsel ve geometrik temsiller arasındaki ilişkiyi gösterme gücü itibariyle etkin rol oynamıştır.

Bölüm 3
Yöntem

Araştırmanın Yöntemi

Bu çalışma, matematik öğretmen adaylarının matematiksel modelleme sürecindeki başarıları ile matematiksel ilişkilendirme ve temsil becerileri ve bunlar arasındaki ilişkinin nasıl olduğunu anlamak için yapılmış nitel bir araştırmadır. Bu doğrultuda, süreç boyunca kullanılan matematiksel ilişkilendirme alt becerilerinin neler olduğu, matematik öğretmen adaylarının matematiksel modelleme sürecinde neler yaptığı irdelenmiştir. Nitel veri toplama yöntemlerinden olan gözlem, görüşme ve doküman analizinin kullanıldığı nitel araştırma, olay, olgu, durumları kendi doğal ortamlarında ele alınarak, gerçekçi ve bütüncül yaklaşıma sahip nitel bir sürecin izlendiği araştırma türüdür (Yıldırım ve Şimşek, 2016). Nitel araştırma toplanan verilerden yola çıkılarak önceden bilinmeyen birtakım sonuçları ortaya koyma amacı güder. Glaser ve Strauss'a (1967) göre geleneksel teoriler evrensel yanıtlar vermelerine rağmen özel durumları ayırt edemez. Sosyal olgular içerisinde evrensellik önemini yitirir, çünkü zamana bağlı olarak her şey değişkendir. Oysa nitel araştırmalar, bu değişkenliği bir anlığına yakalama gayreti içindedir.

Nitel araştırmalarda en sık kullanılan yöntem görüşmedir. Bu görüşmeler, araştırmacının sorularının hazır oluş durumuna bağlı olarak yapılandırılmış, yarı-yapılandırılmış ve yapılandırılmamış görüşmeler olarak üçe ayrılır. Görüşme sırasında sorulabilecek her soru önceden hazırlanmış ise görüşme yapılandırılmıştır. Görüşmenin soruları önceden hazırlanmamış ise yapılandırılmamış görüşme olur, ancak burada araştırmacı süreci nasıl yöneteceğini bilir. Bir diğer nitel araştırma yöntemi gözlemdir. Bu yöntem sosyal olguların gözlenerek anlaşılabileceği düşüncesine dayanır. Son olarak, yazılı doküman ve belgelerin incelenmesi tek olarak kullanılabilmesinin yanında gerek gözlem gerek görüşme yoluyla elde edilmiş verilerle desteklenebilir bir araştırma yöntemidir. Bu araştırmada da yöntem olarak yazılı dokümanlar ve yarı-yapılandırılmış görüşmeler kullanılmıştır.

Nitel araştırmalarda elde edilen verilerin yorumlanması bütüncül bir yaklaşımı gerektirir. Araştırmaya dair yorumların anlamlı olması için farklı yollarla elde edilmiş verilerin birbirini desteklemesi önemlidir. Veriler arasındaki ilişkilerin ortaya çıkarılması bütüncül yaklaşımla sağlanmış olur. Bu araştırmada, matematik öğretmen adaylarının, matematiksel modelleme sürecinde kullandıkları matematiksel ilişkilendirme ve temsil becerilerinin sürece etkisinin derinlemesine incelenmesi amaçlanmıştır. Matematiksel modelleme başarısı ile matematiksel ilişkilendirme ve temsil becerileri arasındaki ilişki ve matematiksel ilişkilendirmenin alt boyutlarından hangilerinde başarılı olduklarının araştırılması adına bütüncül bir yaklaşımla nitel araştırma yöntemlerinde durum çalışması üzerinde çalışılmıştır.

Yin (1984)'in yaptığı Yıldırım ve Şimşek (2016)'in aktardığı durum çalışması tanımı şu şekildedir: "*Durum çalışması, güncel bir olguyu kendi gerçek yaşam çerçevesi içinde çalışan, olgu ve içinde bulunduğu içerik arasındaki sınırların kesin hatlarıyla belirgin olmadığı ve birden fazla kanıt veya veri kaynağının mevcut olduğu durumlarda kullanılan, görgül bir araştırma yöntemidir.*". Bu çalışmada da veri kaynağı olarak matematik öğretmen adaylarının model oluşturma etkinliğine verdikleri yazılı yanıt kağıtları ile Beytepe Monoray Problemi'ne yönelik oluşturulmuş İlişkilendirme Beceri Testi'nin sonuçları ve yarı-yapılandırılmış görüşme sorularına verilmiş cevaplar kullanılmıştır.

Araştırmanın Evreni ve Örneklemi

Nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması olarak tasarlanan bu çalışmada amaç genelleme yapmak olmadığından, araştırmanın evreni ya da örneklemi söylemi yerine çalışma grubu kullanılmıştır. Bu araştırmada Ankara'da bir devlet üniversitesinin ortaöğretim matematik öğretmenliğinde öğrenim gören dokuzu 3. sınıf öğrencisi biri 4. sınıf olmak üzere 10 kişi çalışma grubu olarak alınmıştır. Çalışma grubu daha önce matematiksel modelleme dersi almamıştır. Çalışmaya katılmaları gönüllülük esasıyla gerçekleşmiş olup, bu öğrencilere çalışma teklifinde bulunulmasının sebebi kendilerini ifade edebilme konusunda iyi olduklarının düşünülmesidir. Özellikle modelleme etkinliği üzerinde çalışırken kendilerini açıkça ifade etmiş olmaları araştırma verileri için önemlidir.

Veri Toplama Araçları

Bu çalışmanın verileri aşağıdaki dört kaynaktan elde edilmiştir.

1) Katılımcıların matematiksel model oluşturma etkinliği Beytepe Monoray Problemi'ne (Bkz. EK-A) yönelik verdikleri cevapların yazılı kâğıt dokümanları,
2) Katılımcıların İlişkilendirme Beceri Testi'ne (Bkz. EK-B) verdikleri cevapların yazılı kâğıt dokümanları,
3) Katılımcılarla gerçekleştirilen yarı-yapılandırılmış görüşme sorularının ses kayıtları,
4) Matematiksel modelleme alt yeterlikleri ve göstergelerine dair katılımcıların Beytepe Monoray Problemi üzerine çalışmalarının puanlamaları,

çalışmanın veri toplama kaynaklarını oluşturmuştur.

Veri Toplama Araçlarının Hazırlanması

Bu kısımda her bir veri toplama aracı tanıtılmıştır. Veri toplama araçlarının hazırlanma süreci yaklaşık 4 ay sürmüştür. Araştırmacı özellikle çalışmada kullanılacak MOE üzerinde uzun süre çalışmıştır. Bunun için öncelikle yerli ve yabancı kaynaklarda yer alan etkinlik örnekleri incelenmiştir. Bu araştırmada kullanılabilecek nitelikte bir etkinlik bulunamadığı için araştırmacı kendisi bir etkinlik tasarlamaya karar vermiştir. Etkinliğin hazırlanış sürecinde, alanında aktif matematikçilerle tartışılmıştır. Ayrıca etkinliğin kurgusunun dili, anlaşılabilirliği hakkında görüş almak için alan dışı kişilerin de görüşleri alınmıştır. Ardından MOE konusunda uzman kişilerin fikirlerine başvurulmuştur. Son olarak pilot çalışması yapılarak etkinlik son haline kavuşturulmuştur.

Modelleme problemi oluşturulduktan sonra, modelleme probleminin çözüm sürecinde hedeflenen kavramlara yönelik olarak İBT oluşturulmuştur. Buna yönelik olarak literatürden örnek olabilecek testler incelenmiştir. Ancak bu testlerin ağırlıklı olarak işlemsel beceriyi ölçmeyi hedeflediği görülmüştür. Araştırmacı kavramsal bilgiyi ölçmek istediği için testi kendisi bu doğrultuda hazırlamıştır. Teste ilişkin uzman görüşü alındıktan sonra pilot çalışması yapılmış ve İBT son halini almıştır.

Bunların yanı sıra katılımcıların matematiksel modelleme becerilerini ölçmeye yönelik olarak Maaß'a (2006) ait "Matematiksel Modelleme Yeterlikleri ve Göstergeleri" revize edilerek bir veri toplama aracına dönüştürülmüştür.

Son olarak yarı-yapılandırılmış görüşme soruları hazırlanmıştır. Soruların amacı Beytepe Monoray Problemi sürecince öğrencinin kullandığı ilişkilendirme becerisi, kavramlar ve temsil türleri hakkında kendilerini teyit etmelerini sağlamaktır.

Model oluşturma etkinliği problemi. Beytepe Monoray Problemi araştırmacı tarafından hazırlanmıştır. Hazırlanma amacı öncelikle araştırma problemine yanıt aramak için kullanılması olmuştur. Bunun yanında bir model-oluşturma etkinliği olarak literatüre katkıda bulunulması amaçlanmıştır. Problemin tasarım sürecinde Lesh ve Doerr (2000)'in tanımladığı 6 tasarım prensibinden yararlanılmıştır. Bu prensipler çerçevesinde bulgular kısmında problem kurgusu tartışılmıştır. Problemin çözüm sürecinde ortaya çıkması hedeflenen matematiksel kavramlarla, matematiksel ilişkilendirme alt boyutlarıyla ilişkisinin gözlenebilir olması hedeflenmiştir. Problemde sunulan sayısal veriler gerçek hayatla örtüşmemektedir. Raylı sistemlerde eğimin yüksek olmaması gerektiğinden bu şekilde kurgusal veri kullanılmıştır.

Etkinlik içeriğinde öğrenciye sunulan soruların hedef alındığı kavramlar aşağıdaki tabloda sunulmuştur.

Tablo 2

Beytepe Monoray Problemi'nde Hedeflenen Matematiksel Kavramlar

Soru numarası	*Soru metni*	*Hedeflenen matematiksel kavram*
1.Soru	Yol üzerinde belirlenen noktalar baz alınarak noktalar ile yol arasında nasıl bir ilişki kurulabilir?	Fonksiyon
2.Soru	Bu yolun eğimi nasıl ifade edilebilir?	Türev
3.Soru	Ray hattı üzerindeki iki durak arasındaki gerçek uzaklıklar nasıl bulunabilir?	İntegral

Beytepe Monoray Problemi'nin model-oluşturma etkinliği tasarımının 6 prensibi çerçevesinde değerlendirilmesi. Beytepe Monoray Problemi'nin tasarlanma sürecinde ilk olarak problemin kullanım amacı belirlenmiştir. Bu da modelleme sürecinde ilişkilendirme ve temsil becerilerinin kapsamlı bir şekilde gözlemlenmesine olanak sağlayacak kavramların seçimiyle olmuştur. Bu kavramlar da sıralı olarak fonksiyon, türev ve integraldir. Problemde bunların nasıl kullanılabileceğine yönelik olarak bu kavramların gerçek hayat kullanımları araştırılmıştır. Aralarında iyi tanımlı bir bağıntı kurulabilecek iki küme, bir eğrinin belirli noktalarında eğim ve eğri uzunluğu bu anlamda seçilen kavramlar olmuştur.

Ancak bir model-oluşturma etkinliğinin tasarım aşamasında dikkat edilmesi gereken birtakım prensipler vardır. Lesh ve Doerr (2000)'e göre bunlar sırasıyla şöyledir:

- Model oluşturma prensibi
- Gerçeklik prensibi
- Öz değerlendirme prensibi
- Model açığa çıkarma (belgeleme) prensibi
- Model genelleştirme prensibi
- Etkili prototip prensibi

Model oluşturma prensibi, öğrenciye sunulan etkinliğin öğrencide problemi çözme ihtiyacı oluşturarak model kurulabilir bir yapıda olması gerektiğini ifade eder. Lesh ve diğerleri (2003) bu durumu "Öğrenciye verilen görev, bir modeli yapılandırma, değiştirme, tanımlama, tahmin etme, gözden geçirmeye imkân veriyor mu?" sorusuyla karşılamışlardır. Beytepe Monoray Problemi'nde ise yola ilişkin noktaların verilerek bu noktalar vasıtasıyla yolu ifade eden bir fonksiyon, bu fonksiyonun belli noktalarında türev ve fonksiyonun eğri uzunluğuna yönelik matematiksel bir yapı geliştirilmesi beklenmesi, *model oluşturma prensibi* ile ilgilidir.

Gerçeklik prensibi, problem kurgusunun gerçek hayattan bir bağlamın içinde olması gerektiğini ifade eder. Bu prensip en önemli prensiptir denilebilir. Çünkü kurgu ne kadar gerçekçi ise ve bireysel olarak öğrencinin kendi yaşamından bir sorunu ele alıyorsa öğrenciyi o derecede çözmeye motive edeceği anlamına gelir. Lesh ve diğerleri (2003) bu durumu "Bu gerçekten gerçek hayatta kullanılabilir mi? Öğrenciler kendi kişisel bilgi ve deneyimlerinin artmasına bağlı olan durumun farkına varmak için cesaretlendiriliyorlar mı?" sorularının karşılığı olarak ele almışlardır. Beytepe Monoray Problemi'nin, etkinliğin uygulandığı öğrencilerin direkt olarak kendi hayatlarında olan ulaşım problemine bir çözüm getirme gayesini barındırması *gerçeklik prensibi* ile ilgilidir.

Öz değerlendirme prensibi, öğrencilerin etkinlik sürecince kendi fikirlerinin doğruluğunu test etmelerini, gerektiğinde geri dönüşler yapmak gerektiğini fark ederek süreci kendilerinin yönetmeleri gerektiğini ifade etmektedir. Lesh ve diğerleri (2003) bu durumu “Alternatif yanıtların kullanışlılığını değerlendirmeye yönelik açık ölçütler var mı? Öğrenciler kendilerini değerlendirebilecekler mi? Hangi amaçlar için sonuçlara ihtiyaç var? Kim için? Ne zaman?” sorularının karşılığı olarak ele almışlardır. Beytepe Monoray Problemi için ise yolun eğrisel bir yol olduğunu kabul etmeleri gerektiğini fark etmeleri, aksi halde problemin gerçek yaşam bağlamından kopacağını anlamaları *öz değerlendirme prensibi* ile ilgilidir.

Model açığa çıkarma (belgeleme) prensibi, öğrencinin süreç boyunca problemle ilgili düşüncelerini ve çözüm yollarını yazılı olarak kâğıda aktarmaları ile ilgilidir. Lesh ve diğerleri (2003) bu durumu “Verilen cevaplar, verilenleri, hedefleri, olası çözüm yolları hakkında öğrencilerin nasıl düşündüklerini gösterecek nitelikte midir?” sorularının karşılığı olarak ele almışlardır. Beytepe Monoray Problemi için de öğrencilerden çözümlerine ilişkin her şeyi ve tüm düşüncelerini yazılı olarak belirtmelerinin istenmesi *model açığa çıkarma prensibi* ile ilgilidir.

Model genelleştirme prensibi, probleme özgü hazırlanan çözüm önerisinin benzer şartlara uyarlanabilmesi ile ilgilidir. Lesh ve diğerleri (2003) bu durumu “Yapılandırılan kavramsal araç sadece bir duruma mı uygulanır? Daha geniş alana uygulamak için kolayca değiştirilebilir veya genişletilebilir mi?” sorularıyla ele almışlardır. Beytepe Monoray Problemi’nde de oluşturulan modelin benzer durumlar söz konusu olduğunda nasıl kullanılabileceğinin açıklanmasının istenmesi *model genelleştirme prensibi* ile ilgilidir.

Etkili prototip prensibi, probleme özgü olarak oluşturulan modelin benzer durumlar için bir ilk örnek olması, öğrencinin ilerde benzer bir problemle karşılaştığında ilk örneği hatırlamasına olanak sağlayacak nitelikte olması ile ilgilidir. Lesh ve diğerleri (2003), bu durumu “Önemli bir model için durum mümkün olduğu kadar basit midir? Çözüm yapısal olarak benzer durumlar için kullanışlı bir prototip sağlayacak mıdır? Buradaki deneyim, bir hikâyeye veya yapısal olarak diğer benzer durumların farkına varmak için güç sağlayacak mıdır?” sorularıyla karşılamaktadır. Beytepe Monoray Problemi’nin içinde yer alan sorularda matematiksel işlemler yaparak bir sonuç elde etmeleri istenmemiştir aksine kavramsal olarak açıklama beklenmiştir. Burada amaçlanan ise etkili prototip prensibinin sağlanmasıdır. Ancak etkili prototip prensibinin sağlanmasından emin olmanın yolu öğrencinin benzer bir probleme nasıl tepki vereceğinin gözlemlenmesidir.

İlişkilendirme beceri testi. İlişkilendirme Beceri Testi araştırmacı tarafından hazırlanmıştır. Beytepe Monoray Probleminde hedeflenen kavramlar fonksiyon, türev ve integral olduğu için, İBT içeriği de bu kavramlara yönelik olarak hazırlanmıştır. İBT'de ilgili kavramın tanımı sorulduktan sonra her kavrama yönelik olarak matematiksel ilişkilendirme boyutları ele alınmıştır. Sorular Bingölbali ve Coşkun (2016)'un matematiksel ilişkilendirme çerçevesince hazırlanmıştır. Araştırmada kullanılan model-oluşturma etkinliği için farklı disiplinlerle ilişkilendirme boyutu problemle ilgisiz kabul edildiğinden bu boyut İBT'ye dahil edilmemiştir. Sorularda hesaplama becerisinden ziyade kavramsal anlama düzeyleri gözlenmek istendiğinden sorular buna yönelik olarak hazırlanmıştır. Aşağıdaki tabloda İBT sorularının matematiksel ilişkilendirme boyutlarından hangilerini hedeflediği verilmiştir.

Tablo 3

İBT Sorularının İlgili Kavramla Hedeflediği Matematiksel İlişkilendirme Boyutları

		Fonksiyon	Türev	İntegral
Matematiksel İlişkilendirme Boyutları	Kavram Tanımı	F1	T1	İ1
	Kavramlar Arası İlişkilendirme	F2	T2	İ2
	Kavramın Farklı Gösterimleri Arası İlişkilendirme	F3	T3	İ3
	Kavramı Gerçek Yaşamla İlişkilendirme	F4	T4	İ4

Yarı-yapılandırılmış görüşmeler. Yarı-yapılandırılmış görüşme soruları araştırmacı tarafından hazırlanmıştır. Burada, öğrencilerin Beytepe Monoray Problemi hakkındaki görüşleri ve süreç boyunca kullandıkları kavramlar, temsil türleri ve bunların sürece etkileri hakkındaki düşüncelerinin neler olduğunun ortaya çıkarılması amaçlanmıştır. Cevaplar diğer veri toplama araçlarından elde edilen verileri destekleyici olarak kullanılmıştır.

Matematiksel modelleme alt yeterlikleri ve göstergeleri. Öğrencilerin modelleme becerilerini ölçmeye yönelik olarak, Maaß (2006)'ın, 'Modelleme Yeterlikleri ve Göstergeleri' (akt. Erbaş, Kertil, Çetinkaya, Çakıroğlu, Alacacı, Baş, 2014) kullanılmıştır. Göstergeler, ilgili yeterliğin var olması durumunda 2 puan, kısmen var olması durumunda 1 puan, olmaması durumunda ise 0 puan verilerek ifade edilmiştir. Bu veri toplama aracı Beytepe Monoray Problemi çözüm kağıtlarının incelenmesiyle her bir öğrenciye verilen puanlamaların diğer verilerle karşılaştırılması için oluşturulmuştur.

Tablo 4

Matematiksel Modelleme Yeterlikleri ve Göstergeleri Puanlama Tablosu

Modelleme Yeterlilikleri ve Göstergeleri	YOK	KISMEN	VAR
A. *Gerçek problemi anlama ve gerçekliğe dayalı bir model kurma yeterliliği*			
A1. Problem için varsayımlarda bulunma ve durumu sadeleştirme			
A2. Durumu etkileyen nicelikleri ayırt etme, değişkenleri belirleme ve değişkenler arasında ilişkiler oluşturma			
A3. Problemi çözmek için ilgili olan/olmayan bilgileri ayırt etme			
B. Gerçek modelden matematiksel model oluşturma yeterliliği			
B1. Değişkenleri ve aralarındaki ilişkileri matematikselleştirme			
B2. Uygun matematiksel gösterimleri seçme ve durumları grafiksel olarak sunma			
C. Oluşturulan matematiksel modeli çözme yeterliliği			
C1. Problemi çözmek için farklı stratejileri araştırma			
C2. Problemi çözmek için matematiksel bilgiyi kullanma			
D. Matematiksel sonuçları, gerçek hayat durumunda yorumlama yeterliliği			
D1. Matematiksel sonuçları matematik dışı bağlamlarda yorumlama			
D2. Özel bir durum için geliştirilmiş olan çözümleri genelleme			
D3. Uygun bir matematiksel dil kullanarak probleme çözümler sunma			
E. Çözümü doğrulama yeterliliği			
E1. Bulunan çözümleri eleştirel olarak kontrol etme ve çözümler üzerine yansımalarda bulunma			
E2. Çözümler durumu sağlamıyorsa, modelin bazı kısımlarını gözden geçirme ya da modelleme sürecinden tekrar geçme			
E3. Problemi çözmek için diğer yolları düşünme			
E4. Genel olarak modeli sorgulama			

(Maaß, 2006, ss. 116-117, 137 ve 139; akt. Erbaş, Kertil, Çetinkaya, Çakıroğlu, Alacacı, Baş, 2014)

Pilot çalışma. Veri toplama araçlarının hazırlanması sürecinde araştırma grubunun dışında olan bir öğrenciyle pilot çalışmalar yapılmıştır. Beytepe Monoray Problemi, İBT ve görüşme soruları bu pilot çalışmaların sonucuna göre revize edilmiştir. Pilot çalışmaların amacı, Beytepe Monoray Problemi için, problemin öğrenci tarafından anlaşılmasını ve çözüm sürecinde hedeflenen kavramların ortaya çıkarmak için düzenlenmesidir.

Problemin ilk halinde hikâye kısmından sonra gelen modelleme süreci için gerekli bilgilerin tek bir paragraf olarak verildiği kısım şu şekilde sunulmuştur:

"*Belediyenin saha çalışanlarının yaptığı tespitler üzerinden yolun eğiminin ve oluşturulacak ray hattının uzunluğunun nasıl hesaplanacağına dair olabilecek en hassas yöntem geliştirilmesi gerekmektedir ki böylece süreç ekonomik açıdan planlansın. Ray hattının yerden yüksekliği güvenlik sebebiyle belirli ve sabit olmalıdır.*"

Ancak pilot çalışmanın sonuçları ve uzman görüşleri etkisiyle problemin anlaşılabilirliği ve hedeflenen matematiksel kavramların gözlenebilmesine katkısı olabileceği için bu kısım maddeler halinde sunulmuş bir derece yapılandırılmış hale getirilmiştir. Değişiklikler sürecinde hem uzman görüşüne başvurulmuş hem pilot çalışmanın yapıldığı Toygun isimli öğrencinin fikirleri tekrarlı olarak alınmıştır. Yapılan değişiklikler sonrasında Beytepe Monoray Problemi'nin son hali şu şekildedir:

"*Yapılması planlanan monoray hattı ile ilgili bilgiler şöyledir;*

- *Başlangıç noktası Beytepe Metro Durağı olup, ilk durak Beytepe Metro Durağıyla aynı hizada ve yerden belirli bir yükseklikte olacaktır.*
- *Toplam 5 durak olacaktır. Duraklarla aynı hizada yol üzerinde asansörler olup, yolcuların ray hattına çıkması bu şekilde sağlanacaktır.*
- *Belediye çalışanları yola dair inceleme yapmışlardır. Bu incelemede, yol üzerindeki bazı noktaların yolun başlangıç noktasına göre yatay uzaklığı ve yüksekliği tespit edilmiştir.*
- *Ray hattının yerden uzaklığı yola göre her noktada aynı olacaktır.*

Bu hattın planlamasına dair size ihtiyaç duyulan kısımda size sorulan sorular şöyledir;

1. *Yol üzerinde belirlenen noktalar baz alınarak noktalar ile yol arasında nasıl bir ilişki kurulabilir?*
2. *Bu yolun eğimi nasıl ifade edilebilir?*
3. *Ray hattı üzerindeki iki durak arasındaki gerçek uzaklıklar nasıl bulunabilir?*

Belediye yönetimi, bu sorular dahilinde sizden bir yöntem geliştirmenizi istemektedir. Yönteminizin mümkün oldukça hassas olması önemlidir. Unutmayın sizin yönteminiz projeye yön verip, proje maliyetini etkileyecektir."

Pilot çalışma neticesinde bir değişiklik de görüşme sorularında gerçekleşmiştir. Toygun'un görüşmelerde, probleme dair kullandığı kavramların temsillerinin sorulduğu kısımda numaralı sorulardan birini kendince seçip ona göre yanıt verdiği gözlenmiştir. Bunun ardından, uzman görüşüne de başvurularak, bu soruların problemde yer alan numaralı soruların her biri için ayrı ayrı sorulmasına karar verilmiştir.

Veri toplama araçlarının uygulanması. Veri toplama araçları sırasıyla, Beytepe Monoray Problemi, İBT ve yarı-yapılandırılmış görüşmeler şeklinde uygulanmıştır. İlk olarak Beytepe Monoray Problemi sınıf ortamında bütün öğrencilerin bireysel olarak çalıştığı bir ortamda uygulanmıştır. Uygulama sırasından zaman kısıtlaması yapılmamıştır. Ancak 90 dakikada itibariyle bütün öğrenciler çalışma kağıtlarını teslim etmişlerdir. Uygulama öncesinde çalışmanın bir araştırma için kullanılacağı isimlerinin anonim kalacakları tekrar belirtilerek problem sürecinde bütün düşüncelerini kâğıda aktarmalarının beklendiği ifade edilmiştir. Süreçte öğrencilerin problem ifadelerinde anlamadıkları kısımlarda birebir olarak araştırmacıya soru sormalarına müsaade edilmiştir. Araştırmacı anlaşılmayan kısımları açıklamak dışında herhangi bir yönlendirmede bulunmamıştır.

Ardından bir hafta sonra İBT uygulanmıştır. Yine sınıf ortamında, bütün öğrencilerle birlikte yapılmıştır. Uygulama süresi 40 dakika olmuştur. Ek zaman isteyen öğrenci olmamıştır. Araştırmacı sürece müdahale etmemiştir.

Öğrencilerin Beytepe Monoray Problemi çözüm kağıtları ve İBT'lerin incelenmesinin ardından yarı-yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Bütün öğrencilerle yapılan görüşmeler, kişi başı 10-12 dakika sürmüştür. Planlanan soruların ardından, öğrenciler hedeflenen kavramlara, araştırmacının çözüme dair bakış açısıyla yönlendirilmeye çalışılmıştır. Yönlendirme sırasında hedeflenen kavramları işaret eden sorular sorulmuştur. Bazı öğrenciler yönlendirme sonucunda problemin hedeflenen bakış açısına ulaşmışlardır.

Verilerin Analizi

Bu araştırmanın analizi betimsel analiz yöntemiyle yapılmıştır. Betimsel analizde amaç, elde edilen bulguların düzenlenmiş ve yorumlanmış bir şekilde sunulmasıdır. Burada araştırmacı önceden belirlenmiş olan temalara göre verileri inceler. Bu veriler önce sistematik ve açık şekilde betimlenir sonra açıklanır ve yorumlanır. Sonra neden- sonuç ilişkileri irdelenerek bir takım sonuçlara ulaşılmaya çalışılır.

Veri analizi için, öncelikle her bir veri toplama aracı için doğru, yanlış, eksik olarak kabul edilecek yanıtlara yönelik bir çerçeve oluşturulmuştur. Ardından her bir veri bu çerçevede incelenerek analiz edilmiştir.

Bu kısımda, her bir veri toplama aracının analiz çerçevesi anlatılacak, örneklerle desteklenecektir.

Beytepe Monoray Problemi'nin çözüm analizi. Araştırmanın asıl veri kaynağını oluşturan Beytepe Monoray Problemi çözüm kağıtlarının incelenmesi araştırmacının oluşturduğu temelde iki farklı çözüm yaklaşımıyla incelenmiştir. İnceleme yapılırken öğrencilerin, görüşlerinde tutarlı olup olmadıklarına ve yaklaşımları içerisinde mantık hatası yapıp yapmadıklarına dikkat edilmiştir. Çözümlerin incelenmesine yönelik olarak oluşturulan çözüm yaklaşımları aşağıdaki tablodaki gibidir.

Tablo 5

Beytepe Monoray Problemi Çözüm Analizi Çerçevesi

Sorular / Varsayım	Yol-nokta ilişkisi	Yolun eğimi	Duraklar arası uzaklık
Yol eğrisel	Fonksiyon belirtir. Eğri belirtir. Çizim yaparken eğrisel ifade kullanılır. Her iki durak arasında 3 noktası bilinen ikinci dereceden fonksiyon hesaplaması yapılır.	Fonksiyonun türevinin eğimi verir. Eğrisel yolun her noktada eğiminin farklı olacağı ifade edilir. Duraklar arasını ifade eden her fonksiyonun türevi ifade edilir.	Oluşturulan fonksiyonun verilen noktalar arasındaki eğri uzunlukları çizgi integrali ile hesaplanır.
Yol doğrusal	Doğru belirtir. Çizim yaparken her iki nokta arası doğrusal olarak ifade edilir. Her iki durak arasında 2 noktası bilinen doğru denklemi hesaplaması yapılır.	Her iki nokta arası için, yolun eğimi $\frac{y' ler\ farkı}{x' ler\ farkı}$ veya $tan\alpha$ ifadesi ile hesaplanır.	Her iki nokta arası uzaklık, iki nokta arası uzaklık formülü veya Pisagor Teoremi ile hesaplanır. Duraklar arasının hesabı için noktalar arası uzaklıklar toplanır.

Matematiksel modelleme yeterlikleri ve göstergelerinin incelenmesi. Bir veri kaynağı olarak kullanılan 'Matematiksel Modelleme Yeterlikleri ve Göstergeleri' öğrencilerin Beytepe Monoray Problemi çözüm kağıtları incelenerek oluşturulmuştur. Buradaki puanlamalar var- 2 puan, kısmen- 1 puan, yok- 0 puan şeklinde oluşturulmuştur. Öğrenci cevapları için ne tür cevapların hangi kategoriye girdiğine yönelik olarak örnekler verilmiştir. Aşağıdaki tabloda göstergelerden, "gerçek modelden matematiksel model oluşturma yeterliği" nin göstergelerine yönelik cevapların hangi kategoriye girdikleri örnek olarak verilmiştir.

B1: İlgili nicelikleri ve bunlar arasındaki ilişkiyi matematikselleştirme.

B2: Uygun matematiksel gösterimleri seçme ve durumları grafiksel olarak sunma.

Tablo 6

Matematiksel Modelleme Yeterlikleri ve Göstergelerine Yönelik Analiz Çerçevesinden Örnekler

Göstergeler	Var- 2 puan	Kısmen- 1 puan	Yok- 0 puan
B1	Doğrusal ifade edilen yol için, öğrenci şekilde yolun yerle yaptığı açıları isimlendirmiş ardından eğim için $tan\alpha$ hesaplaması yapmıştır.	Öğrenci eğim hesabı yaparken iki durak noktasını kullanarak yanlış hesaplama yapmıştır.	Öğrenci yolun eğimi hakkında tam olmayan sözel açıklamalarda bulunmuş matematiksel bir işlem yapmamıştır.
B2	Öğrencinin yolun doğrusal olması varsayımı ile bunu şekle aktarması uyumlu ve doğrudur.	Öğrenci çiziminde doğrusal bir ifade kullanmış ancak açıklamalarını her iki durumu da kapsar şekilde vermiştir.	Öğrencinin çizimi ile açıklamaları problemi anlamadığını göstermektedir. Çiziminde noktaların yerleri ve ray hattı ifadesi net değildir.

İlişkilendirme beceri testi analizi. Tablo 4'te verilen fonksiyon, türev ve integral kavramlarına ilişkin soruların cevaplarının incelenmesi için, araştırmacı tarafından cevap anahtarı oluşturulmuştur. Ancak bu cevaplar doğru, eksik, yanlış olarak sınıflandırılmıştır. İBT'de her bir kavram için:

A. Kavramın tanımı
B. Kavramın ilişkili olduğu kavramlar
C. Kavramın cebirsel, grafik, nümerik/tablo ve sözel gösterimi
D. Kavramın gerçek hayatta kullanım alanları

boyutlarına yönelik cevaplar belirlenmiş ve öğrenci cevaplarından doğru, yanlış ve eksik olarak kabul edilmiş cevapların neler olduğuna dair örnekler verilmiştir. Bu kavramların her biri ayrı başlıklar altında sunulmuştur.

İBT'de fonksiyon kavramı. Bu kısımda İBT sorularından fonksiyon kavramına ilişkin beklenen doğru cevaplar ile yanlış ve eksik olarak kabul edilecek cevapların neler olduğu tablo olarak sunulmuştur. Tablonun ardından ise öğrenci yanıtlarından örnekler verilecektir.

Tablo 7

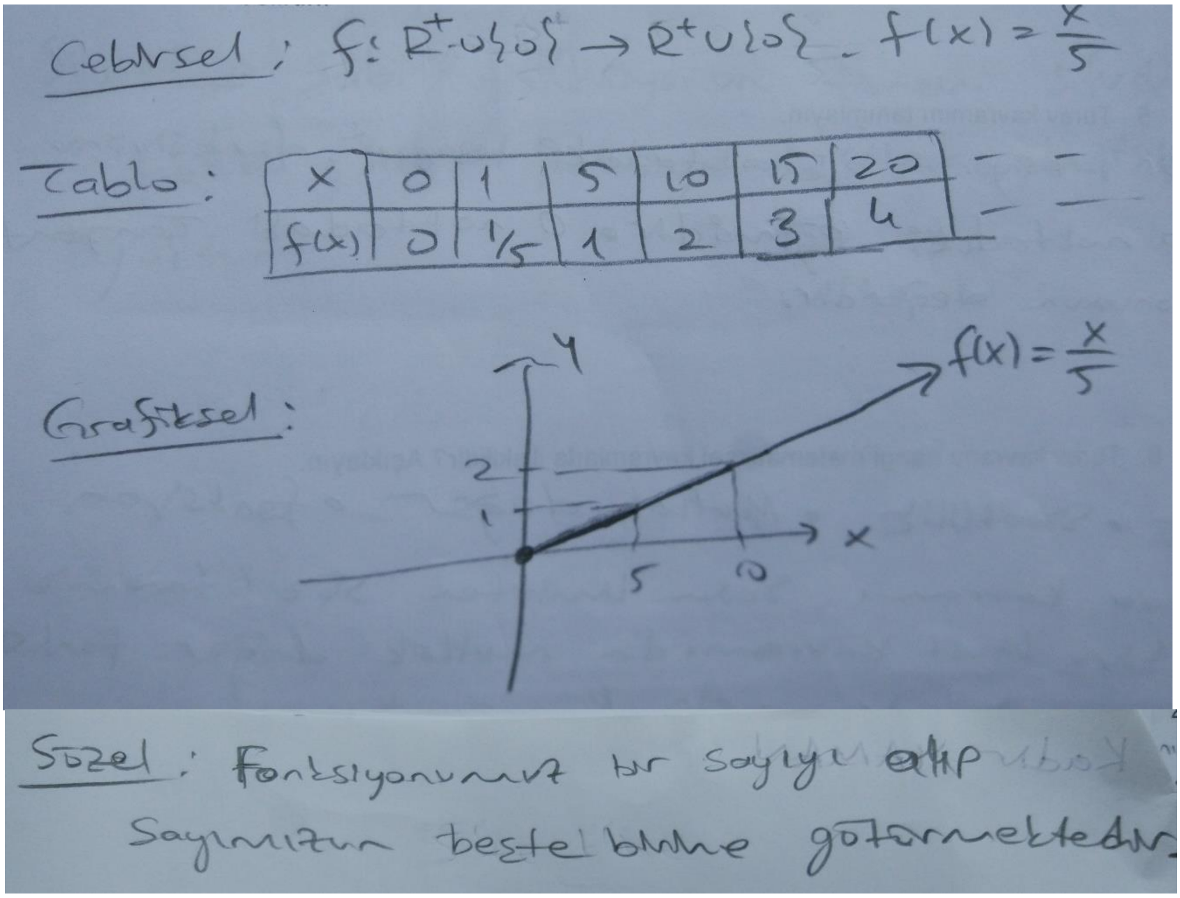
İBT'de Fonksiyon Kavramına İlişkin Cevap Kategorileri

	Doğru	Eksik	Yanlış
Fonksiyon tanımı	A ve B boş olmayan iki küme olmak üzere; A'nın her elemanını, B'nin yalnız bir elemanına eşleyen; A'dan B'ye bir f bağıntısına, A'dan B'ye fonksiyon denir. Veya $f: A \to B, x \to y = f(x)$. $x_1 = x_2$ ise $f(x_1) = f(x_2)$.	Özel bağıntı	Bunların dışında kalanlar
Fonksiyon kavramı ile ilişkili kavramlar	Küme Bağıntı Türev İntegral Trigonometri Analitik Düzlem Limit Süreklilik	Kavramın özelliğinden kaynaklı terimler (birebir, örten vb.)	Bunların dışında kalanlar
Fonksiyon cebirsel gösterimi	$f: A \to B$ $f(x) = y$ kuralının verilmesi	Fonksiyonun tanım aralığının verilmemesi	Bunların dışında kalanlar
Fonksiyon grafik gösterimi	Cebirsel olarak ifade edilen fonksiyonun grafikteki doğru ifadesi	Cebirsel ifade ile tam örtüşmeyen grafikler	Bunların dışında kalanlar
Fonksiyonun nümerik/tablo gösterimi	Cebirsel olarak ifade edilen fonksiyonun tanım aralığından seçilen noktaların değerlerinin tablo olarak sunulması	Cebirsel ifade ile tam örtüşmeyen tablo ifadeleri	Bunların dışında kalanlar
Fonksiyonun sözel temsili	Cebirsel olarak verilen fonksiyonun sözel olarak ifade edilmesi	Cebirsel ifade ile tam örtüşmeyen tablo ifadeleri	Bunların dışında kalanlar
Fonksiyonun gerçek hayatta kullanım alanları	İlgili olan her örnek		

İBT cevaplarında fonksiyon tanımı için, eksik olarak kabul edilmiş bir cevap Ö2 kodlu öğrencinin kağıdında şu şekildedir.

"Fonksiyon, özel bir bağıntıdır."

İBT cevaplarında fonksiyonun farklı gösterimleri için, doğru olarak kabul edilmiş cevap Ö9 kodlu öğrencinin kağıdında şu şekildedir.



Şekil 6. Ö9 kodlu öğrencinin çalışma kağıdında fonksiyon kavramının farklı gösterimleri arası ilişkilendirmeye yönelik sorunun yanıtı

İBT cevaplarında fonksiyonun sözel temsili için, yanlış olarak kabul edilmiş bir cevap Ö2 kodlu öğrencinin cevabıdır. Öğrenci tanımladığı fonksiyonun tersinir olma durumunu birebir ve örten olma durumunu inceleyerek açıklamıştır. Açıklamalar doğru olsa da tanımladığı fonksiyonun sözel temsili bu değildir.

İBT'de türev kavramı. Bu kısımda İBT sorularından türev kavramına ilişkin beklenen doğru cevaplar ile yanlış ve eksik olarak kabul edilecek cevapların neler olduğu tablo olarak sunulmuştur. Tablonun ardından ise öğrenci yanıtlarından örnekler verilecektir.

Tablo 8

İBT'de Türev Kavramına İlişkin Cevap Kategorileri

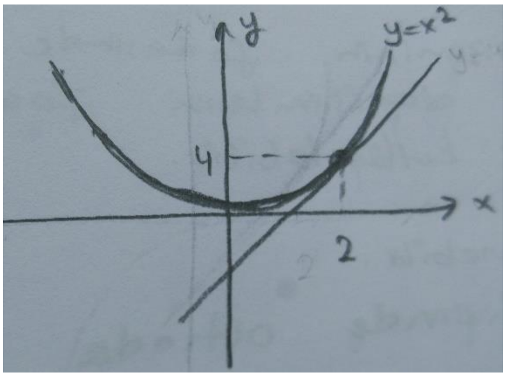
	Doğru	Eksik	Yanlış
Türev tanımı	Sürekli bir eğrinin grafiğinde belirli bir noktada teğet olan doğrunun eğimi. Farklı niceliklerin değişimlerinin oranı. $y = f(x)$ fonksiyonu, $x, x_0 \in (a, b)$ aralığındaki tüm değerler için sürekli olsun. f fonksiyonun x_0 noktasındaki türevi $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ olarak gösterilir.	Sözel ve formal tanımların eksik kalması.	Bunların dışındaki cevaplar
Türev kavramının ilişkili olduğu kavramlar	Fonksiyon Limit Süreklilik İntegral Diferansiyel Teğet doğrusu Eğim Tepe noktası	Kavramın özelliğinden kaynaklanan terimler (artan azalan aralıkları vb.)	Bunların dışında kalanlar
Türevin cebirsel gösterimi	$f: A \to B$ $f(x) = y$ tanımından sonra $f'(x)$ i cebirsel olarak göstermek	Fonksiyon kendisini vermeden türev ifadesi kullanmak	Bunların dışında kalanlar
Türevin grafik gösterimi	Cebirsel temsilde ifade edilen fonksiyon için türevin geometrik yorumunu ifade etmek	Geometrik yorumu tam olarak ifade etmemek	Bunların dışında kalanlar
Türevin nümerik/tablo gösterimi	Cebirsel ifade ile verilen fonksiyonun nümerik değerlerini hesaplamak ve tablo ile sunmak. Fonksiyonun artan azalan aralıklarını tablo üzerinde ifade etmek.	Tablo ifadesinin cebirsel ifade ile tam olarak örtüşmemesi	Bunların dışında kalanlar
Türevin sözel ifadesi	Geometrik yorumu sözel olarak doğru ifade etmek.	Geometrik yorumu tam olarak ifade etmemek.	Bunların dışında kalanlar
Türevin gerçek hayattaki kullanım alanları	İlgili olan her örnek		

İBT cevaplarında türev tanımı için, doğru olarak kabul edilmiş bir cevap Ö7 kodlu öğrencinin kağıdında şu şekildedir.

“Bir aralıkta sürekli olan $f(x)$ fonksiyonu için $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ değeri varsa bu değere f(x) fonksiyonun $x = x_0$ noktasındaki türevi denir.”

İBT cevaplarında türevin cebirsel temsili için, eksik olarak kabul edilmiş bir cevap Ö3 kodlu öğrenci fonksiyonun tanım kümesini belirtmemiştir. $f'(x)$ ifadesini ise türev denklemi olarak ifade etmiştir.

İBT cevaplarında türevin grafik temsili için, eksik olarak kabul edilmiş bir cevap Ö2 kodlu öğrencinin kağıdında, cevap doğru olmaya çok yakındır. Ancak grafikte teğet doğrusunun denklemi veya bu doğrunun ikinci bir noktası daha gösterilmesi beklendiğinden cevap eksik olarak kabul edilmiştir.



Şekil 7. Ö2 kodlu öğrencinin kağıdında türevin grafik gösterimi sorusunun yanıtı

İBT cevaplarında türevin nümerik/tablo temsili için, yanlış olarak kabul edilmiş bir cevap Ö8 kodlu öğrencinin cevabı fonksiyonun cebirsel ifadesi ile türev fonksiyonun cebirsel ifadesini tabloya yerleştirmek olmuştur.

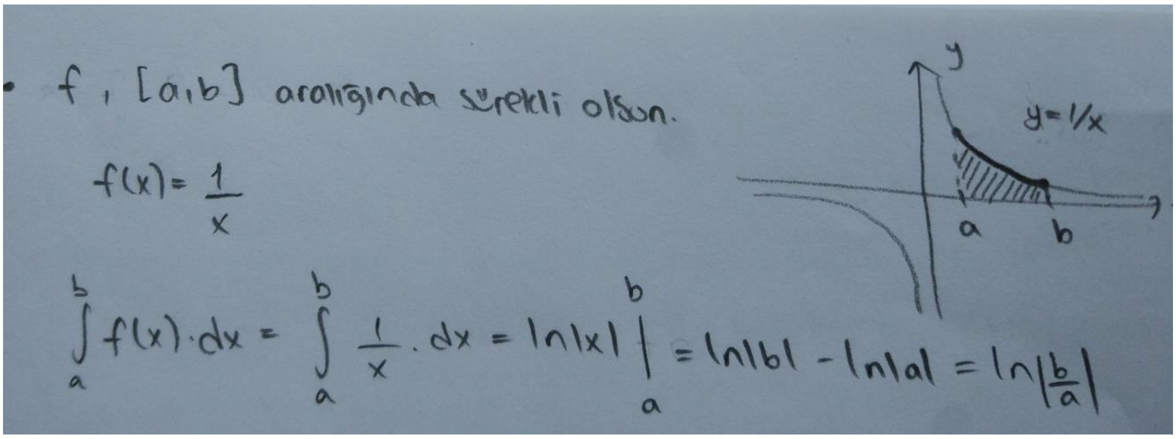
İBT’de integral kavramı. Bu kısımda İBT sorularından integral kavramına ilişkin beklenen doğru cevaplar ile yanlış ve eksik olarak kabul edilecek cevapların neler olduğu tablo olarak sunulmuştur. Tablonun ardından ise öğrenci yanıtlarından örnekler verilecektir.

Tablo 9

İBT'de İntegral Kavramına İlişkin Cevap Kategorileri

	Doğru	Eksik	Yanlış
İntegral tanımı	$f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve (a,b) aralığında türevli olsun. $F'(x) = f(x)$ ise $d(F(x)) = f'(x).dx$ tir. $c \in R$ için $(F(x) + c)' = F'(x)$ = f(x) ise, $F(x) + c$ ifadesine, $f(x)$ fonksiyonunun "İlkeli" veya "Belirsiz İntegral" denir. f $[a,b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon, $F(x)$, $f(x)$ fonksiyonunun bir ilkeli yani $F'(x) = f(x)$ ise $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ dir. Bu ifade de "Belirli İntegral" olarak alınır.	Doğru tanımları tam olarak ifade etmemek	Bunların dışından kalanlar
İntegral kavramı ile ilişkili kavramlar	Fonksiyon Türev Diferansiyel Sonsuz toplam Alan, hacim, uzunluk Seri	Kavramın özelliğinden kaynaklanan terimler (sınır, belirli, çift katlı vb.)	Bunların dışında kalanlar
İntegral cebirsel gösterimi	Fonksiyonu belirtip ilkelini bulmak. Belirli integral ise sonucu hesaplamak.	Hesaplama yapmamak	Bunların dışında kalanlar
İntegral grafik gösterimi	Cebirsel olarak ifade edilen ifadeyi grafiğe doğru aktarmak.	Cebirsel ifade ile grafiğin tam olarak örtüşmemesi	Bunların dışında kalanlar
İntegral nümerik/tablo gösterimi	Fonksiyonun nümerik değerlerini tablo ile ifade etmek	Cebirsel ifade ile tablonun tam olarak örtüşmemesi	Bunların dışında kalanlar
İntegral sözel ifadesi	Cebirsel ifadenin neyi ifade ettiğini sözel olarak açıklamak	Sözel ifadenin cebirsel ifade ile tam olarak örtüşmemesi	Bunların dışında kalanlar
İntegral kavramının gerçek hayatta kullanımı	İlgili olan tüm örnekler		

İBT cevaplarında integralin cebirsel ve grafik temsili için, doğru olarak kabul edilmiş bir cevap Ö1 kodlu öğrencinin kağıdında şu şekildedir.



Şekil 8. Ö1 kodlu öğrencinin kağıdından integralin cebirsel ve grafik gösterimi sorusunun yanıtı

İBT cevaplarında integralin sözel temsili için, doğru olarak kabul edilmiş bir cevap Ö4 kodlu öğrenciye aittir. Öğrenci fonksiyonu belirtip, fonksiyonun grafiğinde iki nokta arasındaki eğri parçasının altında kalan alanın cebirsel gösterimdeki ifadeye denk olduğunu ifade etmiştir.

İBT cevaplarında integralin nümerik/tablo temsili için, yanlış olarak kabul edilmiş bir cevap Ö6 kodlu öğrencinin yanıtıdır. Öğrenci tabloda cebirsel olarak ifade ettiği belirli integrali ile bunun hesaplanmış halini göstermiştir. Beklenen yanıt bu değildir.

Araştırmanın güvenirliği ve geçerliği. Güvenirlik nicel araştırmalarda, aynı verilerden aynı sonuçların birden çok kez çıkarılabilir olması anlamına gelmektedir. Ancak nitel araştırmalarda anket gibi nicel veriler olmadığından bunun sağlanması oldukça zordur. Bunun yerine nitel araştırmalarda güvenirliğin sağlanması amacıyla yapılabilecekler şu şekilde sıralanabilir:

- Ses kayıtları metne aktarılırken birden çok kez dinlenmesi
- Yazılı yanıt kağıtları ile birlikte farklı kişilerce de kodlanması,
- Veri analiz şeklinin ayrıntılı bir şekilde açıklanması,
- Elde edilen bulguların öğrenci yanıtlarından doğrudan alıntılar ile desteklenmesi.

Bu çalışmada ses kayıtları metne aktarılırken birden çok kez ve farklı kişilerce dinlenmiştir. Ayrıca araştırmacı dışında bir uzmanın da verilerden birtakım bulgulara ulaşması sağlanmış ve bu bulgular araştırmacının bulgularını destekler nitelikte olmuştur. Veri analizinin nasıl yapıldığı da ayrıntılı olarak anlatılmıştır.

İç geçerlik nitel araştırmalarda inandırıcılık olarak karşılık bulmaktadır. Araştırmanın inandırıcılığı için üçgenleme, uzman teyidi, uzun süreli çalışma önerilmektedir. Bu çalışmada da veriler üç farklı kaynaktan elde edilmiş olup üçgenleme şartını sağlamaktadır. Ayrıca araştırmacı hem katılımcı grubuyla birçok kez bir araya gelerek hem de veriler üzerinde uzun süre çalışarak uzun süreli çalışma şartını sağlamıştır. Araştırmacı dışındaki bir uzmanın bulguları teyit etmesi sağlanarak uzman teyidi şartı da sağlanmıştır. Dış geçerlik nitel araştırmalarda, çalışma yöntemini ayrıntılı betimlemek anlamına gelmektedir. Bu araştırmada da yöntem bölümü, veri toplama süreci, katılımcılar ve veri analizi aşamaları ayrıntılı olarak açıklanmıştır.

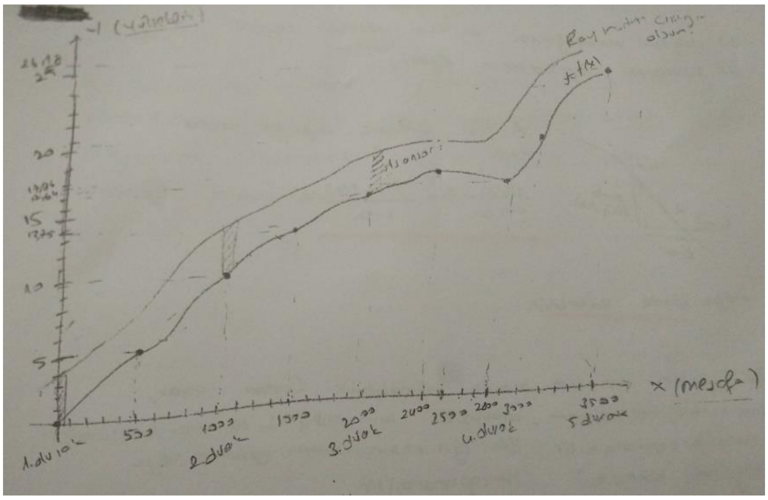
Bölüm 4

Bulgular ve Yorumlar

Bu bölümde kavramsal çerçeveden destek alınarak, matematik öğretmen adaylarının matematiksel modelleme sürecindeki başarıları ile matematiksel ilişkilendirme becerileri ve bu ikisi arasındaki ilişkiye yönelik yorumlar yapılmış ve kanıtlarıyla sunulmuştur. Buna yönelik olarak, matematik öğretmen adaylarının Beytepe Monoray Problemi'ne dair çözüm önerileri detaylı olarak incelenmiştir. Ayrıca süreci anlamaya yönelik kullanılan veri toplama araçlarından alınan veriler ilgili alt başlıklar altında incelenmiştir. Araştırmacının yorumlarının yanı sıra matematik öğretmen adaylarının çözüm kağıtlarından alınan alıntılar, görüşme sorularına verilen cevaplar, İBT'ye verilen yanıtlar ve Matematiksel Modelleme Yeterlikleri ve Göstergelerine ilişkin oluşturulmuş puanlamalar sunulmuştur.

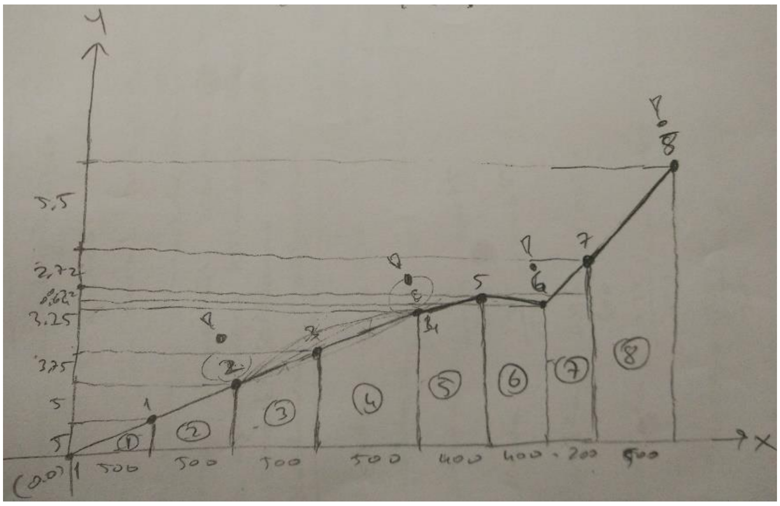
Matematik öğretmen adaylarının matematiksel modelleme yeterliklerine ilişkin bulgular. Bu bölümde, araştırmanın birinci alt problemine yönelik olarak modelleme yeterlikleri incelenmiştir. İncelemeler Beytepe Monoray Problemi'nin çözüm kağıtları yeterlikler çerçevesinde cümle cümle analiz edilerek yapılmıştır. Öğrencilerin çözümlerine ilişkin bulgular modelleme yeterlikleri göstergelerine dayandırılarak sunulmuştur. Bulgular aynı zamanda yarı-yapılandırılmış görüşme sorularına verilen cevaplarla da desteklenmiştir.

A. Gerçek problemi anlama ve gerçekliğe dayalı bir model kurma yeterliliği. A1. Problem için varsayımlarda bulunma ve durumu sadeleştirme adımına yönelik olarak çözüm sürecinde öne çıkması beklenen en önemli varsayım yolun durumudur. Yani ilk olarak beklenen, yolun doğrusal mı yoksa eğrisel mi olduğunun belirlenmesidir. Öğrencilerin çoğu problem çözümünde açıkça bir varsayımda bulunmamıştır. Ancak öğrenciler problemin ilk sorusu olan yol ile verilen noktalar ilişkisine cevap verirken her biri görsel bir temsil oluşturmuşlardır. Bu temsillerde öğrencilerin yolu doğru veya eğri olarak kabul ettikleri görülmektedir. Örneğin Ö8 kodlu öğrenci yolu eğrisel olarak temsil etmiştir. Aşağıda öğrencinin çizimi verilmiştir.



Şekil 9. Ö8 kodlu öğrencinin Beytepe Monoray Problemi çalışma kağıdındaki görsel temsil

Ö9 kodlu öğrencinin çiziminden ise yolu doğrusal kabul ettiği anlaşılmaktadır. Öğrencinin çizimi aşağıdaki gibidir.



Şekil 10. Ö9 kodlu öğrencinin Beytepe Monoray Problemi çalışma kağıdındaki görsel temsil

Problem durumunda varsayımın yolun durumuna bağlı olması ve diğer soruların buna bağlı olarak yanıtlanması aynı zamanda görüşme sorularında da ortaya çıkmıştır. Görüşme sorularında varsayımların sorulduğu soruda öğrencilerden varsayımda bulunmadığını söyleyenler olmuştur. Ancak araştırmacı görsel temsillerine göre varsayımlarını doğrusal ya da eğrisel olarak kabul etmiştir. Bunun yanında yolu doğrusal kabul ettiğini ve buna göre çözümü ilerlettiğini söyleyen öğrenciler olmuştur. Ö7 kodlu öğrenci ise yolu başta doğrusal kabul ettiğini ancak öyle olmadığını fark ederek düşünme biçimini değiştirmeye çalıştığından bahsetmiştir.

A2. Durumu etkileyen nicelikleri ayırt etme, ilgili değişkenleri belirleme, değişkenler arasında ilişkiler oluşturma adımına yönelik olarak problemde verilen noktaları birbiriyle nasıl ilişkilendirdiklerine bakılmıştır. Yolu doğrusal kabul eden öğrencilerin, problemin ikinci sorusu olan yolunun eğimi için çoğunlukla $\frac{y' ler\ farkı}{x' ler\ farkı}$'ndan yola çıktıkları veya her aralık için dik üçgenler belirleyip bu üçgenlerin yerle yaptıkları açıyı belirlemeleri ve eğimi $tan\alpha$ olarak belirttikleri görülmüştür. Problemin ilk sorusuna noktaların fonksiyon belirttiği cevabını veren öğrenciler ise istenilen noktanın fonksiyonun türevindeki aldığı değerlerin noktanın eğimini vereceğini ifade etmişlerdir. Örneğin Ö5 kodlu öğrencinin çözüm kağıdındaki ifadeleri şöyledir;

"1. ve 2. Durak arası yolun eğimi köşe açıya α dersek $tan\alpha = \frac{10}{1000} = \frac{1}{100}$ olur."

Yol-nokta ilişkisini fonksiyon olarak ifade eden Ö8 kodlu öğrencinin çözüm kağıdındaki ifadeler ise şöyledir;

"Yol doğrusal olmadığından eğimler sürekli değişir. Bu kümedeki her noktanın eğimi:

a yol üzerinde keyfi bir nokta olsun. $f'(a) = \lim_{c \to a} \frac{f(c)-f(a)}{c-a}$ olarak ifade edilebilir."

Kendi varsayımına bu şekilde uygun hareket eden öğrenciler bu yeterlik için 2 puan almıştır. Problemi etkileyen nicelikleri belirlemek ve değişkenler arası ilişkiler oluşturma yeterliğine dair bazı öğrenciler ise Tablo 10'da görüldüğü üzere 1 puan almışlardır. Bunun sebebi ise problemin birinci sorusu olan yol-nokta ilişkisini tamamen yanlış yorumlamalarından kaynaklanmıştır. Örneğin Ö4 kodlu öğrenci bu soruyu cevaplandırmadan önce görsel temsilinden yararlanarak eğimleri hesaplamıştır. Ardından noktalara bağlı eğim değiştikçe enerji, sürtünme gibi durumlara dair yorumlarda bulunarak yol- nokta ilişkisini açıklamıştır. Aynı öğrenci duraklar arası uzaklıklar sorusu için özel ölçüm cihazı önermiştir. Bazı öğrenciler ise yol-nokta ilişkisini, noktaların özellikle seçilmiş olduğunu düşünerek seçilme sebebini tahmin etmeye çalışmışlardır. Örneğin Ö5 kodlu öğrenci çözüm kağıdında bu soruya şöyle yanıt vermiştir.

“*Durakların ve ara noktaların olma sebeplerinden biri, raylı yolu ayakta tutması için gerekli olan kolonların dikilmesi için gereken aralığı belirlemektir*.”

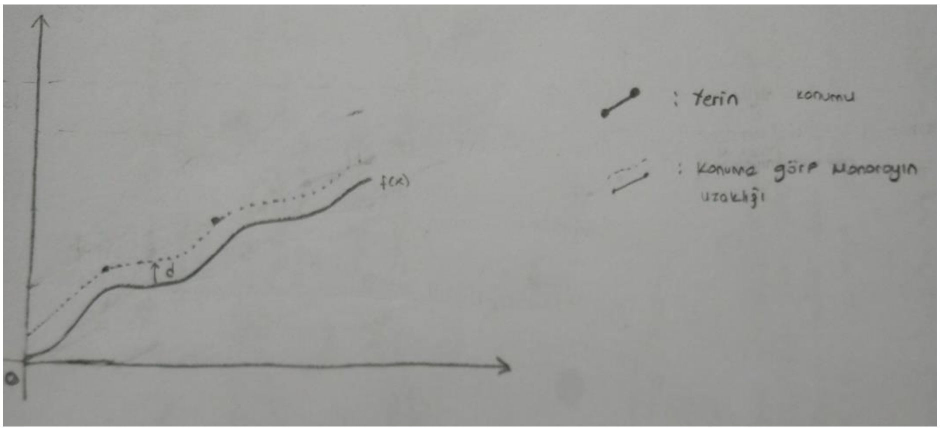
Yarı-yapılandırılmış görüşmelerde, yol-nokta ilişkisinin sorulduğu soruya dair seçilen kavramlar ve bunların neye dayandırıldığı sorulmuştur. Bu kısımda fonksiyon cevabını veren Ö8 kodlu öğrenci gerekçe olarak noktaların doğrusal olmadığını ifade etmiştir.

A3. Problemi çözmek için uygun bilgiyi bulma ve ilgili olan/olmayan bilgileri ayırt etme adımında beklenen problemde nelerin kullanılabilir olduğunun, hangi bilgilerin çözüm için yeterli veya gerekli olduğunun belirlenmesidir. Bu kısımda öğrencilerin çoğunluğu gereksiz bilgileri ayırt ederek onları göz ardı edebilmiştir. Problem ifadesinde öğrencide çözme isteği uyandırmak adına, kendi üniversitelerinde yaşanan ulaşım problemine dikkat çekilmiştir. Maliyetin önemli olduğu söylenerek bu sebeple hassas bir çözüm yolu sunulması beklenmiştir. Problemde verilen noktalar kurgusaldır. Ancak buna dikkat etmeyen öğrenciler olmuştur. Bu kısımda gerçekte problemde verilenden çok daha eğimli olan yolu düşünerek ray hattının enerji kaybı, sürtünme durumu, hava şartları gibi etkenlerin etkisine yoğunlaşarak yorumlarını bunlar üzerinde oluşturmuşlardır. Tablo 10’da görüldüğü üzere Ö2 ve Ö4 kodlu öğrenciler bu sebeple bu gösterge için 0 puan almışlardır. Örneğin yol-nokta ilişkisi sorusu için Ö2 kodlu öğrenci problemdeki “ray hattı yerden her noktada aynı yükseklikte olacaktır” bilgisinin verilen noktalar için olduğuna, ki verilere göre eğim oldukça azdır, dikkat etmemiştir. Gerçek yaşamındaki yolu düşünerek her noktada aynı yükseklikte olan ray hattının oldukça eğimli olacağını bu yüzden çıkışlarda enerji kaybı yaşanacağını ifade etmiş ve buna dair kendi önerilerini sunmuştur. Öğrenci ifadeleri şu şekildedir.

“*Başlangıç noktasından alınan yükseklik 4-5 katına çıkarılıp raylar yere paralel olmayacak şekilde ayarlanırsa hafif bir eğimle aracın duraklardan kalkışı daha rahat olacaktır.”*

Yarı-yapılandırılmış görüşmelerde, yol- nokta ilişkisi sorusunda eğim, enerji ve sürtünme kavramlarını kullandığını söyleyen Ö2 kodlu öğrenci, eğimin enerji kullanımına etkisi olacağını düşündüğünü söylemiştir. Öğrencinin problemdeki kullanılabilir bilgiyi ayırt edemediği burada da açıkça görülmüştür.

B. Gerçek modelden matematiksel model oluşturma yeterliliği. B1. Değişkenleri ve bunlar arasındaki ilişkileri matematikselleştirme adımına yönelik olarak öğrencilerin problemde verilen verileri nasıl matematikselleştirdiği incelenmiştir. Burada, çözümde yolun durumuna dair varsayıma ilişkin olarak problemdeki noktaları koordinat düzleminde ifade edip ardından yol eğer doğrusal kabul edildiyse doğru denklemi; eğrisel kabul edildiyse de buna uygun fonksiyon ifadesi yazmaları beklenmiştir. Ardından oluşturdukları matematiksel ifadelere uygun olarak problemin diğer sorularını cevaplandırmaları gerekmektedir. Ancak her iki varsayım durumunda da öğrencilerin bir doğru denklemi veya doğrusal olmayan bir fonksiyon ifadesi yazmadığı görülmüştür. Örneğin Ö10 kodlu öğrenci koordinat düzleminde verilen noktaların konumlarını belirtmeden yolu bir eğri ile ifade etmiştir ve bunu $f(x)$ olarak isimlendirmiştir. Ancak fonksiyonun kuralının ne olduğu ya da noktalarla bu fonksiyonun ilişkisinin ne olduğuna dair bir açıklamada bulunmamıştır.



Şekil 11. Ö10 kodlu öğrencinin Beytepe Monoray Problemi çalışma kağıdındaki görsel temsil

Yolu eğrisel olarak ifade eden bir diğer öğrenci Ö8 kodlu öğrencidir. Bu öğrenci ise “saha çalışanlarının belirlediği” noktalarla bir fonksiyon tanımı ifadesinde bulunmuş ve bu gösterge için 2 puan almıştır. Bütün öğrenciler yol- nokta ilişkisini matematiksel olarak tam ifade etmemiş olsalar da çözüme devam ederek bir sonraki soruyla ilgilenmişlerdir. Burada ise yolu doğrusal kabul eden öğrencilerin çoğunlukla buna uygun eğim ifadesinde bulundukları görülmüştür. Yolun eğrisel olduğunu kabul eden öğrenciler eğimi türevle açıklamış ancak işlemsel olarak ifade etmemişlerdir. Zaten problem işlemsel bir yanıt beklememektedir. Bu yüzden varsayımları ile uyumlu hareket eden öğrenciler tam puan almışlardır. Görsel temsiliyle uyumsuz davranan öğrenciler 1 puan; herhangi bir varsayımı tam olarak oluşturup üzerinde matematiksel olarak çalışmayan öğrenciler ise 0 puan almıştır.

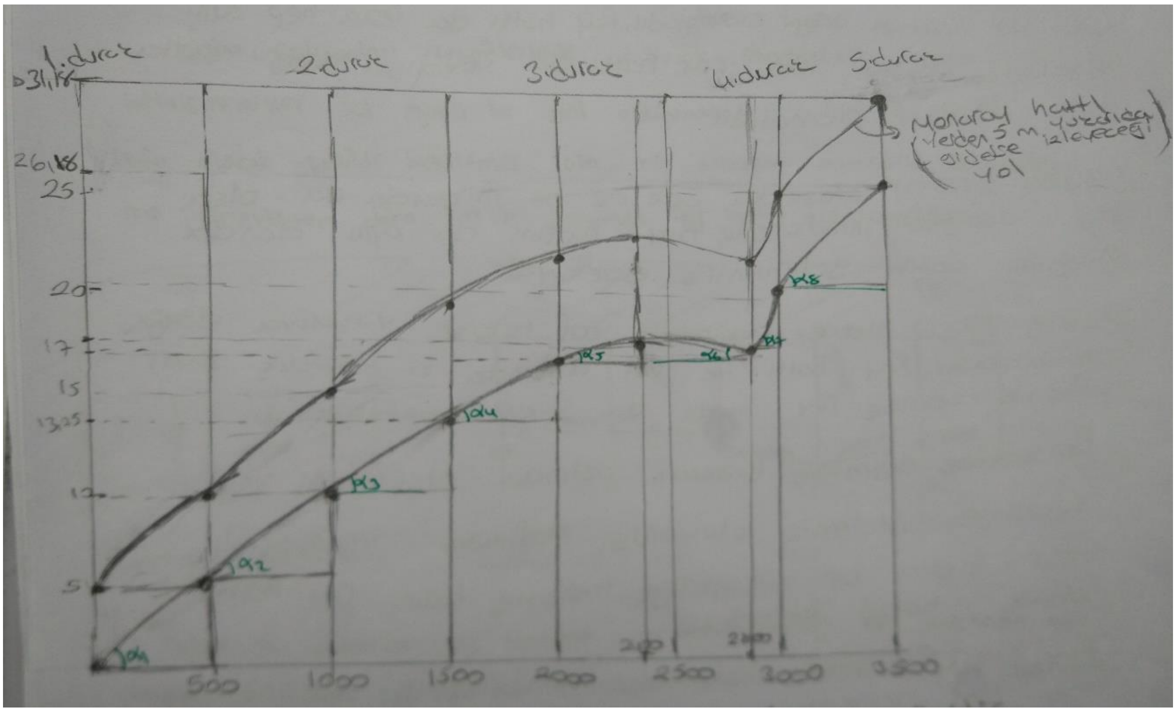
Örneğin Ö7 kodlu öğrenci, probleme ilişkin görsel temsil çizdikten sonra düşüncelerini tamamen sözel olarak belirtmiştir. Değişkenleri matematikselleştirme ve üzerinde çalışma gerçekleştirmemiştir. Ancak öğrencinin yorumlarında yolun eğrisel olmak zorunda olduğunu bildiği ancak elindeki verilerle sadece doğrusal ifade edebilme durumunda kaldığı anlaşılmaktadır.

Ö7 kodlu öğrencinin çalışma kağıdından alıntılar şu şekildedir.

"*Taslak şekli çizerken en mantıklı yaklaşımın doğru parçaları çizmek olduğunu düşündüm çünkü eğim ve mesafeye böyle ulaşabilirdim. Ancak yolun eğimli olduğu hep aklımdaydı. İlk soruda istenilen yol-nokta ilişkisini yorumlamakta zorlandım, uygun bir fonksiyonla da ifade edilebilir mi diye düşündüm fakat bunu yapamadım*."

Yarı-yapılandırılmış görüşmelere ilk soru için herhangi bir matematiksel kavram kullanmadığını söyleyen Ö5 kodlu öğrenci için araştırmacı öğrencinin kendi süreçlerinden habersiz olduğunu düşünmüştür. Çünkü öğrenci görsel temsilini oluştururken koordinat sistemini andıran bir şekil çizmiştir. Ancak öğrenci yorum olarak yolcu yoğunluğundan bahsetmiştir. Daha sonraki sorularda ise kendi çizimine ve varsayımına uygun matematiksel adımlarda bulunmuştur.

B2. Uygun matematiksel gösterimleri seçme ve durumları grafiksel olarak sunma adımında öğrencilerin hepsi noktaları ve yolu koordinat düzlemi veya bunu andıran bir şekilde görsel olarak ifade etmişlerdir. Bu kısımda öğrencilerden bazılarının çizimleriyle tutarlı olmayan bir yol izledikleri görülmüştür. Örneğin Ö3 kodlu öğrencinin çizimi aşağıdadır.



Şekil 12. Ö3 kodlu öğrencinin Beytepe Monoray Problemi çalışma kağıdındaki görsel temsil

Şekilde görüldüğü üzere öğrenci bariz bir biçimde eğri olarak çizdiği yol için her aralıkta yolun yerle yaptığı açıları belirlemiş ve yolun eğimi için $tan\alpha$ değerlerini bulmuştur. Benzer olarak aynı hatayı Ö1, Ö2, Ö4 kodlu öğrenciler de yapmışlardır. Tablo 10'da görüldüğü üzere Ö6 ve Ö7 kodlu öğrenciler ise 1 puan almışlardır. Öğrenciler görsel temsillerini doğrusal olarak çizdikten sonra, her iki varsayım durumu hakkında yorumlarda bulunmuşlardır.

Yarı-yapılandırılmış görüşmelerde, öğrencilerin temsil türlerini neden kullandıkları ve bunların problem çözümüne etkisi sorulmuştur. Grafik çizimi için, öğrencilerin çoğunluğu görselleştirme yapmak ve problemi anlama amacıyla çizim yaptıklarını belirtmişler ve bunun problem çözümünü kolaylaştırdığını ifade etmişlerdir. Ardından cebirsel ifadeleri görsel temsilden faydalanarak oluşturduklarını ifade etmişlerdir.

Sözel temsilin kullanıldığı durumların ise matematiksel işlem yapılamamasından ötürü, sadece açıklama yapabilmek için kullandıklarını ifade etmişlerdir. Kullanılan temsil türlerinin genel itibariyle çözümü olumlu etkilediğini, kolaylaştırdığını ifade etmişlerdir.

C. Oluşturulan matematiksel modeli çözme yeterliliği. C1. Problemi çözmek için farklı stratejileri araştırma ve kullanma adımında öğrencilerden beklenen öğrencilerin çözüm yaparken farklı durumları göz önünde bulundurmaları ve buna dair açıklamaları vererek çözüm yapmalarıdır. Ancak bu kısımda iki öğrenci hariç öğrencilerin tamamı yolun durumuna dair tek bir kabulde bulunmuş ve başka olasılıkları ele almamıştır. Farklı durumları birden ele alan Ö6 kodlu öğrencinin çözüm kağıdından alıntılar şu şekildedir.

"Eğer yol doğrusal bir yol ise hipotenüs uzunluğu ile eğer eğrisel bir yol ise de eğri fonksiyonu bilinmeden duraklar arasındaki gerçek uzaklık bulunamaz."

C2. Problemi çözmek için matematiksel bilgiyi kullanma adımında öğrencilerden bazılarının yolun durumu hakkındaki varsayımları doğrultusunda hesaplamalar yaptıkları görülmüştür. Bazı öğrenciler ise kavramsal olarak önerilerde bulunmuş ancak hesaplama yapmamışlardır. Zaten problem sorularında işlem yapmayı gerektiren bir ifade olmadığından, her iki grubunda çözümleri uygun görülmüştür. Ancak farklı çözüm stratejilerini araştıran iki öğrencinin görsel temsilden sonra verdiği cevaplarda modelleme sürecinin bu aşamasının eksik kaldığı söylenebilir. Ö6 ve Ö7 kodlu öğrencilerin problemdeki verileri yetersiz gördüklerinden veya yeterli olsa da matematikselleştirme yapamadıklarından ötürü öteki ihtimalleri düşündükleri anlaşılmaktadır. Ö6 kodlu öğrencinin çözüm kağıdından alıntılar şu şekildedir.

"*İki durak arasındaki gerçek uzaklığı elimizdeki şekille ve sayısal verilerle hesaplayamayız. Çünkü ray eğimli bir şekilde ilerleyecektir. Bunun için yay uzunluğu fonksiyonu ile duraklar arası mesafeler bulunabilir*."

D. Matematiksel sonuçları gerçek hayat durumunda yorumlama yeterliliği. D1. Matematiksel sonuçları matematik dışı bağlamlarda yorumlama adımında öğrencilerden beklenen yaptıkları matematiksel işlemlerin sonuçlarının problem durumunda ne anlama geldiğini açıklamaları olmuştur. Bu kısımda, yolu eğrisel kabul eden öğrenciler matematiksel olarak hesaplama yapmamış ve sonuçları yorumlamamışlardır. Eğrisel olma ihtimali üzerinde duran Ö7 kodlu öğrenci görsel temsilde doğrusal çizim yaptığını ancak gerçek hayatta bunun böyle olmayacağının farkında olduğunu belirtmiştir. Bu yüzden Ö7 kodlu öğrenci Tablo 10'da görüldüğü üzere tam puan almıştır. Onun aksine 0 puan alan Ö6 kodlu öğrenci ise verileri yetersiz bulduğunu ifade ederek yorumlarda bulunmuştur. 1 puan alan öğrencilerden Ö5 kodlu öğrenci yolcu yoğunluğunun durakların konumlarıyla ilişkili olabileceğini ifade etmiştir. Yolu doğrusal kabul eden öğrencilerden bazıları ise yol için parça parça eğim hesaplamaları yapmıştır. Ardından bu sonuçlar çerçevesinde ray hattı üzerinde monorayın hareketine dair yorumlarda bulunmuşlardır. Örneğin Ö9 kodlu öğrencinin çözüm kağıdındaki açıklamaları şu şekildedir.

"*Yolun eğimi ikinci durağa gelene kadar oldukça fazladır. Sonra son durağa gelinceye kadar sürekli eğim azalmaktadır. O halde tren ilk duraktan çıktığında itiş gücü fazla olmalıdır ki bu eğimi aşabilsin*."

Yarı-yapılandırılmış görüşmelerde öğrencilere matematiksel işlemlerini nasıl yorumladıkları sorulmuştur. Öğrencilerin çoğunluğu kullandıkları kavramların yorum yapmaya olanak sağladığını ifade etmişlerdir. Problem çözümünde Ö9 kodlu öğrenciye benzer yorumlarda bulunan Ö2 kodlu öğrenci ise görüşmede, yokuşun sürtünme etkisi, enerji tasarrufu ve hava şartları gibi dış etmenlere göre problemi yorumladığını ifade etmiştir.

D2. Uygun bir matematiksel dil kullanarak probleme çözümler sunma adımında öğrencilerin çözüm süreçlerini açıkça ifade edebilmeleri beklenmiştir. Burada tüm öğrenciler süreçlerini kâğıda aktarmışlardır ancak yanlış yorumlarda ve çıkarımlarda bulunan öğrenciler olmuştur. Örneğin Ö3 kodlu öğrenci duraklar arası mesafe sorusuna ötekilerden tamamen farklı ve yanlış bir cevap vermiştir. Öğrencinin çözüm kağıdından alınan ifadeleri şöyledir.

"*İki durak arasındaki uzaklık yol ile yüksekliğin yaptığı açının kosinüs değerine eşittir."*

Ö2 ve Ö4 kodlu öğrenciler ise duraklar arası uzaklıkların hesaplanması için özel ölçüm cihazı kullanılmasını önermişlerdir. Diğer sorulara verdikleri cevaplarda nispeten mantıklı önerilerde bulundukları için Tablo 10'da görüldüğü üzere bu gösterge için 1 puan almışlardır. Bu göstergeden tam puan alan Ö8 ve Ö10 kodlu öğrenciler ise yolu eğrisel kabul ederek, eğimi türevle açıklayıp ardından duraklar arası mesafe için çizgi integralini önermişlerdir.

E. Çözümü doğrulama yeterliliği. E1. Bulunan çözümleri eleştirel olarak kontrol etme ve çözümler üzerine yansımalarda bulunma adımında öğrencilerden beklenen probleme olan yaklaşımları üzerinde eleştirel bir bakış geliştirmeleri ve çözüm yaklaşımlarını gerekçelendirmeleridir. Bu kısımda öğrencilerden tam bir eleştirel yaklaşım ve yansımalarda bulunma davranışı gözlenmemiştir. Bazı öğrenciler yolun durumuna dair varsayımda bulunmaktansa her iki durumda da neler olabileceğine dair yorumlarda bulunmuşlardır. Ancak burada asıl beklenen varsayımlardan birini seçmek ve ona dair bir çözüm oluşturmaktır. Bunu yapmayan veya yapamayan öğrenciler iki duruma yönelik de yorumlarda bulunmuştur. Varsayımları üzerinde matematiksel olarak çalışan öğrencilerin ise çoğunlukla diğer varsayımı hiç düşünemedikleri veya düşünseler bile göz ardı ettiklerine dair bir ifadeleri olmadığı görülmektedir. Bu yüzden Tablo 10'da görüldüğü üzere Ö6 ve Ö7 kodlu öğrenciler dışındakiler bu gösterge için 0 puan almışlardır.

E2. Çözümler durumu sağlamıyorsa, modelin bazı kısımlarını gözden geçirme ya da modelleme sürecinden tekrar geçme adımında beklenen öğrencilerin çözümlerine eleştirel bakışta bulunduktan sonra durumu sağlayıp sağlamadığını tespit etmeleridir. Ardından süreci tekrar gözden geçirmeleri beklenmiştir. Bu kısımda, öğrencilerden yolu doğrusal kabul edenlerin de eğrisel kabul edenlerin de çözümlerine eleştirel bir yaklaşımları olmadığından süreci tekrar ele almaları da gözlenmemiştir. Yolun nasıl olacağını bilemeyeceğini söyleyen Ö7 kodlu öğrenci ise düşünme süreçlerini tekrar etse de matematiksel olarak bir çözüme ulaşamamıştır.

E3. Problemi çözmek için diğer yolları düşünme adımında öğrencilerden beklenen problemin en azından iki ana varsayımı sayılabilecek yolun durumu hakkında her iki olasılık üzerinde de yorumda bulunmalarıdır. Ancak öğrencilerin sekizi farklı varsayımları ele almadıkları için diğer yolları düşünmüş değillerdir. Verilerin yolun durumu hakkında yetersiz olduğunu düşünen Ö6 kodlu öğrenci ile Ö7 kodlu öğrenci ise her iki durum hakkında yorumda bulunmuşlardır.

E4. Genel olarak modeli sorgulama adımında öğrencilerden beklenen modellerinin problem ihtiyacına ne düzeyde cevap verdiğini belirlemeleridir. Problemde sıralı olarak verilen soruların sırasının ve biçiminin genel çözüm için bir anlamı vardır. Örneğin ikinci soru "yolun eğimi kaçtır/nedir?" şeklinde ifade edilmemiştir. "Yolun eğimi nasıl ifade edilebilir?" denmiştir. Ancak yolun doğrusal olduğunu varsayan öğrenciler, çizimlerinde eğimli olarak ifade etseler dahi, sayısal değer bulmakla ilgilenmiştir. Bunun yanında yolun eğrisel olduğunu kabul eden öğrenciler yol-nokta ilişkisini fonksiyon olarak ifade edip ardından eğimin bu fonksiyonun türeviyle ifade edilebileceğini belirtmişlerdir. Ancak onlar yola dair fonksiyon tanımı yapmakla ilgilenmemişlerdir.

Bu durum yarı-yapılandırılmış görüşme sorularının en sonunda öğrencilere sorulmuştur. Yolu doğrusal kabul eden öğrenciler eğrisel olursa eğimi ve duraklar arasındaki yolları nasıl hesaplayacaklarını bilemedikleri için yolu doğrusal kabul ettiklerini ifade etmişlerdir. Yolu eğrisel kabul edip fonksiyon tanımlamayan öğrencilerse yolu parçalara ayırarak fonksiyon yazmayı çözüm sürecinde düşünemediklerini belirtmişlerdir.

Öğrencilerin Beytepe Monoray Problemi çözüm kağıtlarının incelenmesi sonucunda Tablo 10'da verilen modelleme yeterlikleri göstergelerinin öğrencilerde bulunma dereceleri puanlanmıştır. Aşağıdaki tabloda ise buna ilişkin puanlamalar sunulmuştur.

Tablo 10

Öğrenci Kağıtlarında Gözlenen Matematiksel Modelleme Yeterlikleri Göstergelerinin Puanları

	A1	A2	A3	AT	B1	B2	BT	C1	C2	CT	D1	D2	DT	E1	E2	E3	E4	ET
Ö1	2	1	1	4	1	0	1	0	2	2	1	1	2	0	0	0	0	0
Ö2	2	1	0	3	1	0	1	0	2	2	2	1	3	0	0	0	0	0
Ö3	2	2	2	6	1	0	1	0	2	2	1	0	1	0	0	0	0	0
Ö4	2	1	0	3	1	0	1	0	2	2	2	1	3	0	0	0	0	0
Ö5	2	1	2	5	2	2	4	0	2	2	1	1	2	0	0	0	0	0
Ö6	2	1	1	4	0	1	1	2	1	3	0	1	1	1	0	2	1	4
Ö7	2	1	2	5	0	1	1	2	1	3	2	1	3	1	1	2	1	5
Ö8	2	2	2	6	2	2	4	0	2	2	0	2	2	0	0	0	1	1
Ö9	2	2	2	6	2	2	4	0	2	2	2	1	3	0	0	0	0	0
Ö10	2	2	2	6	2	2	4	0	2	2	0	2	2	0	0	0	1	1

İlişkilendirme beceri testine ilişkin bulgular. Bu kısımda öğrencilerin İBT'ye verdikleri yanıtlara ilişkin bulgular sunulmuştur. Beytepe Monoray Problemi'nde hedeflenen kavramlar fonksiyon, türev ve integral olduğu için İBT soruları da bu kavramlara yönelik oluşturulmuş olup, her bir kavrama ilişkin dört soru sorulmuştur. Bunların ilki kavramın tanımı (1), ikincisi kavramın ilişkili olduğu kavramlar (2), üçüncüsü kavramın farklı temsilleri arasındaki ilişkisi (3), sonuncusu ise kavramın gerçek hayatta kullanım alanlarıdır (4). 3. soru grafik temsili (G), cebirsel temsil (C), sözel temsil (S), nümerik/tablo temsili (N) olarak parçalara ayrılmıştır. Bu sorulara ilişkin bulgular her kavram için ayrı başlık altında sunulmuştur.

Fonksiyon kavramına ilişkin bulgular. Bu kısımda İBT'deki fonksiyon kavramı ile ilgili sorulara verilen cevaplara ilişkin bulgulara yer verilmiştir. Fonksiyon tanımına ilişkin cevaplar ağırlıklı olarak doğru ya da eksik cevap olarak kabul edilmiştir. Bu cevapların genellikle matematiksel tanımdan ziyade sözel açıklama şeklinde yapıldığı görülmüştür. İlişkili kavramlar sorusuna verilen cevaplar da çoğunlukla iki ya da üç kavram içermektedir.

Fonksiyon kavramının kendi belirledikleri örnek üzerinden temsillerinin beklendiği soruda, grafik temsilinde yanlış cevap olmamıştır. Eksik ifadeler grafikte cebirsel temsildeki fonksiyonun tanımlı olduğu aralığın düzgün ifade edilmemiş olmasından kaynaklanmıştır. Cebirsel temsil türünde beklenen, tanım kümesi ve fonksiyon kuralının ifade edilmesidir ki bütün cevaplar doğrudur. Buna rağmen, sözel temsilde fonksiyon kuralının sözel olarak ifade edilmesi asıl beklenen olmasına rağmen cevaplardan üçü dışında beklentiyi karşılayan olmamıştır. Nümerik/tablo temsilinde, yanlış kabul edilenler cevabın olmadığı durumlardır. Cevap vermeme sebebi, temsil türü bilinmediğinden ya da sorunun unutulmuş olmasından kaynaklanmış olabilir.

Aşağıdaki tabloda türev kavramına yönelik verilen puanlar yer almaktadır.

Tablo 11

Fonksiyon Kavramına İlişkin Öğrenci Puanları

	F1	F2	G	C	S	N	Toplam
Ö1	2	0	1	2	0	2	7
Ö2	1	2	2	2	0	0	7
Ö3	0	0	2	2	2	2	9
Ö4	2	1	2	2	0	2	9
Ö5	1	1	2	2	0	2	8
Ö6	2	1	2	2	2	2	11
Ö7	2	1	1	2	2	0	8
Ö8	1	1	2	2	0	2	8
Ö9	0	1	2	2	0	2	7
Ö10	2	2	2	2	0	2	10

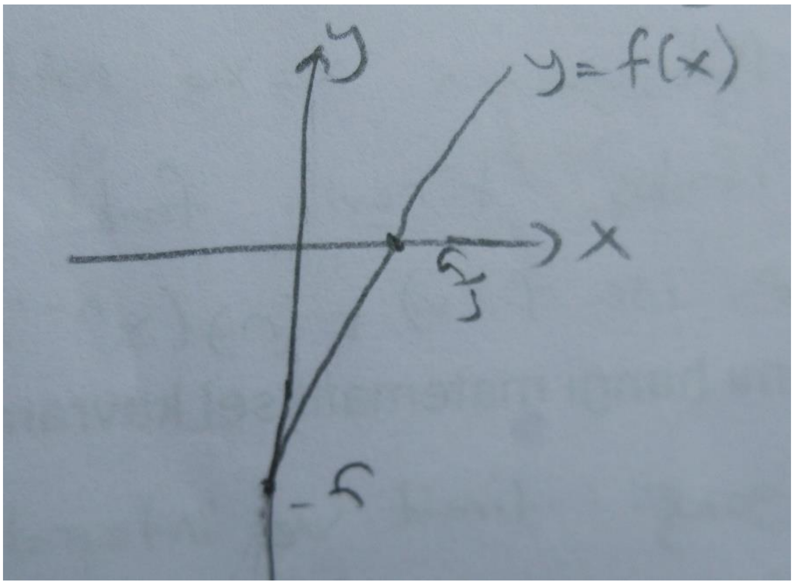
İBT cevaplarında fonksiyon tanımı için, Tablo11'de görüldüğü üzere doğru olarak kabul edilmiş bir cevap Ö6 kodlu öğrencinin kağıdında şu şekildedir.

"Tanım ve değer kümeleri olan ve tanım kümesindeki her değeri bir ve yalnız bir değere götüren özel bağıntılardır."

İBT cevaplarında fonksiyon tanımı için, Tablo11'de görüldüğü üzere yanlış olarak kabul edilmiş bir cevap Ö3 kodlu öğrencinin kağıdında şu şekildedir.

"*x'ler girdiler ve y'ler çıktılar olsun. $f(x) = y$ olmasını sağlayan f işlemine fonksiyon denir. Girdi ve çıktılar sayılardır.*"

İBT cevaplarında fonksiyonun grafik temsili için, Tablo11'de görüldüğü üzere eksik olarak kabul edilmiş bir cevap Ö7 kodlu öğrencinin kağıdında şu şekildedir. Öğrenci tanım kümesini $\mathbb{R}$ sayılar olarak belirlemişken grafikte tanım kümesi $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ olarak görülmektedir.



Şekil 13. Ö7 kodlu öğrencinin fonksiyon kavramına yönelik grafik temsili

Fonksiyon kavramının gerçek yaşamda uygulama alanları sorusuna verilen cevapların hepsi ilgili görülmüştür. Öğrenci cevapları aşağıdaki gibidir.

Tablo 12

Fonksiyon Kavramının Gerçek Yaşamda Kullanım Alanlarına İlişkin Öğrenci Yanıtları

Borsa, döviz grafikleri	İnşaat, mimari	Makine, elektronik alet	Fizik, hız-ivme	Girdi-çıktı durumları	Sağlık, biyoloji
Ö2	Ö4	Ö2	Ö10	Ö7	Ö10
Ö4	Ö10	Ö5	Ö4		Ö1
Ö6		Ö8	Ö3		
Ö9		Ö1			
Ö8		Ö3			

Burada ağırlıklı olarak borsa, döviz grafikleri ile elektronik aletler ve makine olmuştur. Makine örneği ortaöğretim seviyesinden itibaren verilen bir örnek olduğu için bu cevap bundan kaynaklanmış olabilir. Borsa, döviz grafikleri de benzer şekilde gerçek yaşamda sıkça duyulan bir konu olarak öğrencilerce verilmiş cevaplarda ağırlıklı olması mantıklı bulunmuştur.

Türev kavramına ilişkin bulgular. Bu kısımda İBT'deki türev kavramı ile ilgili sorulara verilen cevaplara ilişkin bulgulara yer verilmiştir. Öğrencilerden sadece üçünün tanımı doğrudur. Bu tanımlardan sadece biri türevin formal tanımını içermektedir. Dördünün tamamen yanlış ve geri kalan üçünün de eksik cevap verdiği görülmüştür. İlişkili kavramların sorulduğu soruda biri hariç öğrenciler iki ya da üç ilişkili kavramdan bahsetmiştir.

Türev kavramına ilişkin kendi seçtikleri örnek üzerinden farklı temsillerini ifade etmeleri gereken soruda öğrenciler grafik temsilinde genel olarak başarısız olmuştur. Burada beklenen tek bir koordinat düzleminde fonksiyonun grafiği ve örnek verilen noktada teğet çizilmesi ve bu teğetin denkleminin ifade edilmesidir. Ancak öğrenciler ya iki ayrı düzlemde fonksiyon ile türev fonksiyonun grafiklerini çizmişler ya da sadece türev fonksiyonunun grafiğini çizmişlerdir. Bu cevabın fonksiyon kavramının grafik temsiliyle aynı olduğunu fark etmemişlerdir. Bu durum belki sorunun onlarda çağrışımda bulunmamasından kaynaklanmış olabilir. Öğrencilere 'türevin geometrik yorumu' sorulsaydı belki doğru cevap alınabilirdi ancak türevin grafik temsiliyle türevin geometrik yorumunun aynı ifadeyi kastettiğinin anlaşılmamış olduğu görülmektedir. Cebirsel gösterim diğer gösterimlere nazaran en başarılı olan gösterim olmuştur. Eksik ifadeler türev fonksiyonunun ilkelinin veya tanım kümesinin yazılmamış olmasından kaynaklanmıştır. Sözel temsil türünde ise beklenen, verdikleri örneklerin neyi ifade ettiğini sözel olarak ifade etmeleridir. Ancak burada yapılan, örnek verilen türev fonksiyonunun özellikleri, artan azalan aralıkları gibi durumlardan bahsetmek olmuştur. Nümerik/tablo gösteriminde, yanlış kabul edilen cevaplar çoğunlukla öğrencilerin cevabı boş bırakmalarından kaynaklanmıştır.

Aşağıdaki tabloda türev kavramına yönelik verilen puanlar yer almaktadır.

Tablo 13

Türev Kavramına İlişkin Öğrenci Puanları

	T1	T2	G	C	S	N	Toplam
Ö1	1	1	1	2	0	2	7
Ö2	2	1	1	2	1	0	7
Ö3	0	1	0	1	0	2	4
Ö4	0	1	0	1	0	2	4
Ö5	0	2	1	2	1	0	8
Ö6	1	1	0	0	1	2	5
Ö7	2	1	0	2	0	0	5
Ö8	1	1	0	1	0	2	5
Ö9	0	1	0	2	0	2	5
Ö10	0	1	0	0	0	0	1

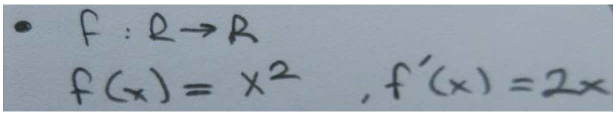
İBT cevaplarında türev tanımı için, Tablo13'te görüldüğü üzere eksik olarak kabul edilmiş bir cevap Ö6 kodlu öğrencinin kağıdında şu şekildedir.

"Türev herhangi bir zaman aralığındaki değişim miktarıdır."

İBT cevaplarında türev tanımı için, Tablo13'te görüldüğü üzere yanlış olarak kabul edilmiş bir cevap Ö5 kodlu öğrencinin kağıdında şu şekildedir.

"Türev, kavramların veya değişkenlerin birbirine dönüşümlerini kullanarak birbirini nasıl ve ne şekilde etkilediğini veya birbirleri ile ilişkilerini cebirsel veya mantıksal olarak bize göstermeyi sağlar."

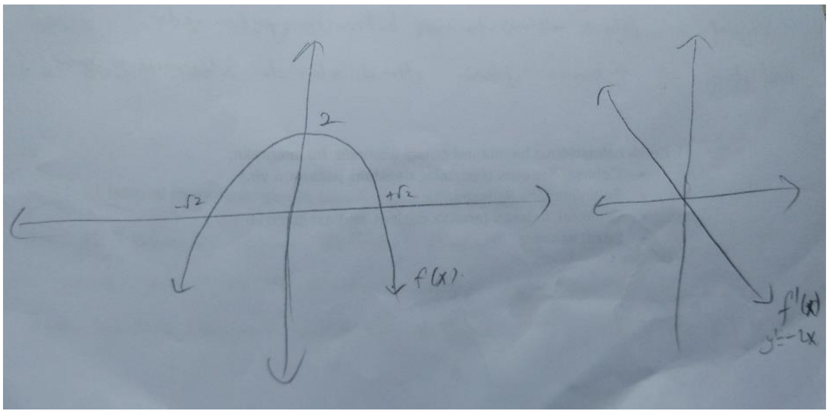
İBT cevaplarında türev cebirsel temsili için, Tablo13'te görüldüğü üzere doğru olarak kabul edilmiş bir cevap Ö5 kodlu öğrencinin kağıdında şu şekildedir.



Şekil 14. Ö5 kodlu öğrencinin türev kavramına ilişkin cebirsel temsili

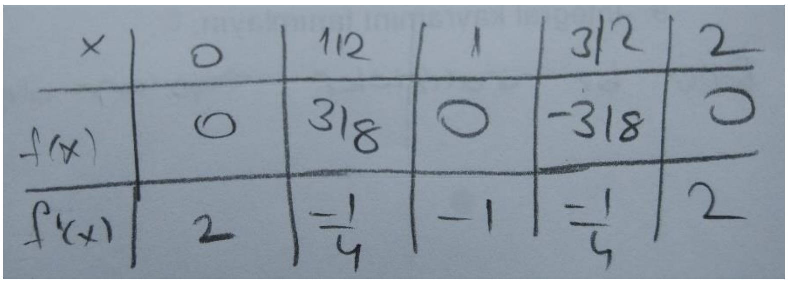
İBT cevaplarında türev cebirsel temsili için, Tablo13'te görüldüğü üzere yanlış olarak kabul edilmiş bir cevap Ö6 kodlu öğrenciye aittir. Öğrenci fonksiyonun türevini cebirsel olarak göstermeyip çizdiği grafikte türev fonksiyonunun cebirsel ifadesini belirtmiştir.

İBT cevaplarında türevin grafik temsili için, Tablo13'te görüldüğü üzere yanlış olarak kabul edilmiş bir cevap Ö6 kodlu öğrencinin kağıdında şu şekildedir.



Şekil 15. Ö6 kodlu öğrencinin türev kavramına ilişkin grafik temsili

İBT cevaplarında türevin nümerik/tablo temsili için, Tablo13'te görüldüğü üzere doğru olarak kabul edilmiş bir cevap Ö8 kodlu öğrencinin kağıdında şu şekildedir.



x	0	1/2	1	3/2	2
f(x)	0	3/8	0	-3/8	0
f'(x)	2	-1/4	-1	-1/4	2

Şekil 16. Ö8 kodlu öğrencinin türev kavramına ilişkin tablo/nümerik temsili

İBT cevaplarında türevin sözel temsili için, Tablo13'te görüldüğü üzere yanlış olarak kabul edilmiş bir cevap Ö2 kodlu öğrenciye aittir. Öğrenci sözel temsil için seçtiği örneğin özelliklerinden bahsetmiştir. Öğrenci kağıdından alınan alıntı aşağıdadır.

"Seçtiğim örnek ikinci dereceden bir denklem şeklinde. Ayrıca tam kare bir ifade. Grafiğine baktığımızda x=3 noktasından teğet geçiyor. Burada eğim 0. x>3 olduğu noktalarda eğim pozitifken, x<3 olduğu noktalarda negatiftir."

Türev kavramının gerçek yaşamda uygulama alanları sorusuna verilen cevapların hepsi ilgili olarak kabul edilmiştir. Öğrenci cevapları aşağıdaki gibidir.

Tablo 14

Türev Kavramının Gerçek Yaşamda Kullanım Alanlarına İlişkin Öğrenci Yanıtları

Meteoroloji	İnşaat, mimari	Makine, elektronik alet	Fizik, hız-ivme	Max-min problemleri	Tıp	Eğim	Değişim oranı	Borsa, döviz
Ö10 Ö8	Ö8 Ö6 Ö5	Ö7	Ö8 Ö4 Ö1 Ö5 Ö7	Ö1 Ö6	Ö7 Ö10	Ö9 Ö10	Ö1 Ö2 Ö10	Ö2

Burada ağırlıklı verilen cevap fizikte, hız-ivme geçişleri olmuştur. Bunun ortaöğretim düzeyinden itibaren sıklıkla verilen bir örnek olması buna sebep vermiş olabilir. Diğer cevaplardan biri olan değişimlerin oranı, birbirine bağlı değişim gösteren her kavram için geçerlik sağlaması adına verilmiş olabilir. Burada araştırmacının dikkatini meteoroloji örneği çekmiştir. Daha önceden araştırmacı tarafından bilinmediğinden araştırılıp gerçekten de türevle ilgili olduğu görülmüştür. İki öğrencinin bu cevabı vermesi, aldıkları ortak bir derste verilen bir örnek veya açıklamadan kaynaklanmış olabilir.

İntegral kavramına ilişkin bulgular. Bu kısımda İBT'deki integral kavramı ile ilgili sorulara verilen cevaplara ilişkin bulgulara yer verilmiştir. Öğrencilerin integral tanımına ilişkin cevapları üçü dışında eksiktir. Cevapların çoğunluğu formal tanımdan ziyade sözel açıklama olarak verilmiştir. İlişkili kavramlar kısmında genellikle iki ya da üç kavramdan bahsedilmiştir.

Kendi örnekleri üzerinden farklı temsilleri ifade etmelerinin beklendiği soruda öğrencilerin sadece yarısı belirli integralin eşit olduğu alanı doğru ifade edebilmiştir. Cebirsel temsil türünde çoğunlukla başarılı olunmuştur. Sözel temsil türünde ise çoğunluk yanlış ifadede bulunmuştur. Nümerik/tablo temsil türünde sadece iki öğrenci doğru yanıt vermiştir. Yanlış kabul edilen cevapların çoğu temsil türünü boş bırakmaktan kaynaklanmıştır. Aşağıdaki tabloda integral kavramına yönelik verilen puanlar yer almaktadır.

Tablo 15

İntegral Kavramına İlişkin Öğrenci Puanları

	İ1	İ2	G	C	S	N	Toplam
Ö1	1	2	2	2	0	0	7
Ö2	1	2	2	2	2	0	9
Ö3	1	1	0	2	2	2	8
Ö4	1	1	2	2	1	0	7
Ö5	1	2	0	2	0	0	5
Ö6	2	2	2	1	2	0	9
Ö7	2	1	0	2	0	0	5
Ö8	1	1	2	2	0	0	6
Ö9	1	2	0	2	0	2	7
Ö10	2	1	0	0	0	0	3

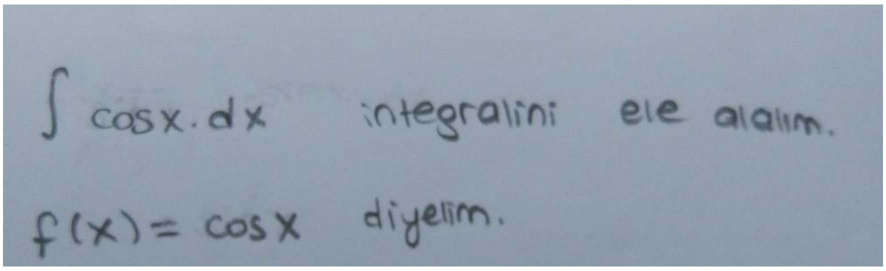
İBT cevaplarında integral tanımı için, Tablo15’te görüldüğü üzere doğru olarak kabul edilmiş bir cevap Ö8 kodlu öğrencinin kağıdında şu şekildedir.

“Belli bir aralıktaki toplam değişim miktarı.”

İBT cevaplarında integral tanımı için, Tablo15’te görüldüğü üzere eksik olarak kabul edilmiş bir cevap Ö2 kodlu öğrencinin kağıdında şu şekildedir.

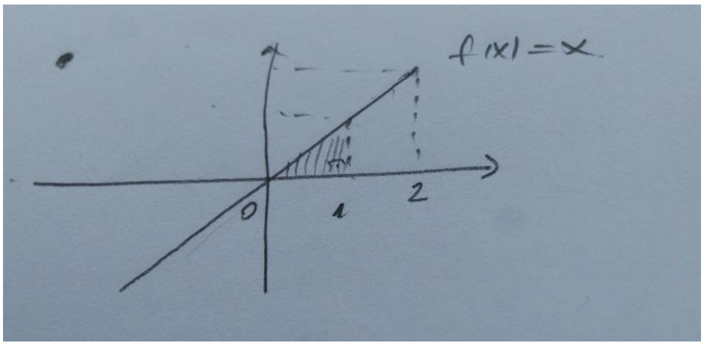
“Bir fonksiyonun ilkeli denilebilir.”

İBT cevaplarında integralin cebirsel temsili için, Tablo15’te görüldüğü üzere yanlış olarak kabul edilmiş bir cevap Ö10 kodlu öğrencinin kağıdında şu şekildedir. Öğrencinin integralin eşitini ifade etmesi beklenmiştir.



Şekil 17. Ö10 kodlu öğrencinin integral kavramına ilişkin cebirsel temsili

İBT cevaplarında integralin grafik temsili için, cebirsel hesaplamaları ile grafiği uyumlu olan, Tablo15’te görüldüğü üzere doğru olarak kabul edilmiş bir cevap Ö4 kodlu öğrencinin kağıdında şu şekildedir.

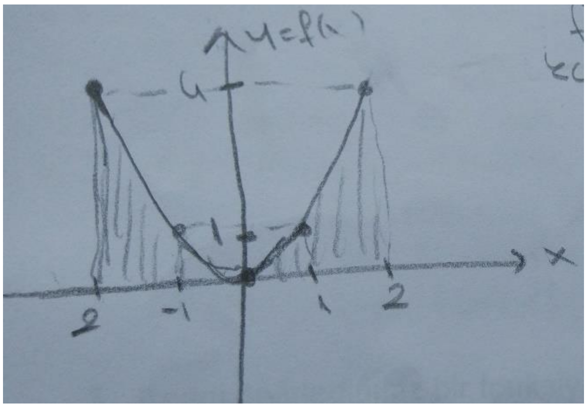


Şekil 18. Ö4 kodlu öğrencinin integral kavramına ilişkin grafik temsili

$$\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1^2}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

Şekil 19. Ö4 kodlu öğrencinin integral kavramına ilişkin cebirsel temsili

İBT cevaplarında integralin grafik temsili için, cebirsel hesaplamaları ile grafiği uyumlu olmayan, Tablo15’te görüldüğü üzere yanlış olarak kabul edilmiş bir cevap Ö1 kodlu öğrencinin kağıdında şu şekildedir.

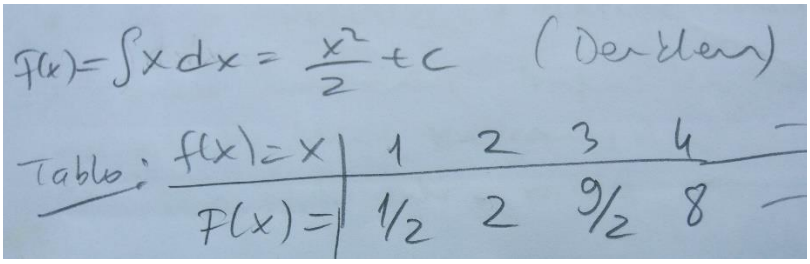


Şekil 20. Ö1 kodlu öğrencinin integral kavramına ilişkin grafik temsili

$$\int_{-2}^{2}(2x)dx = x^2\Big|_{-2}^{2} = 8$$

Şekil 21. Ö1 kodlu öğrencinin integral kavramına ilişkin cebirsel temsili

İBT cevaplarında integralin nümerik/tablo temsili için, Tablo15‘te görüldüğü üzere doğru olarak kabul edilmiş bir cevap Ö10 kodlu öğrencinin kağıdında şu şekildedir.



Şekil 22. Ö10 kodlu öğrencinin integral kavramına ilişkin cebirsel ve tablo/nümerik temsili

İBT cevaplarında integralin sözel temsili için, Tablo 15'te görüldüğü üzere yanlış olarak kabul edilmiş bir cevap Ö7 kodlu öğrencinin kağıdında şu şekildedir.

"Türevin tersi olarak ifade edilebilecek olan integral alma işlemini uyguladım. İşlem rahatlığı açısından integralin sahip olduğu özellikleri kullanarak gerekli parçalama işlemlerini uyguladım."

İntegral kavramının gerçek yaşamda uygulama alanları sorusuna verilen cevaplar ilgili olarak kabul edilmiştir. Öğrenci cevapları aşağıdaki gibidir.

Tablo 16

İntegral Kavramının Gerçek Yaşamda Kullanım Alanlarına Yönelik Öğrenci Yanıtları

Alan, hacim	İnşaat, mimari	Makine, elektronik alet	Fizik	Sağlık
Ö1	Ö2	Ö7	Ö7	Ö10
Ö2	Ö3			
Ö3	Ö4			
Ö4	Ö6			
Ö5	Ö5			
Ö6	Ö7			
Ö7				
Ö9				

Bu soruda ağırlıklı olarak integralin alan, hacim alanında kullanıldığı cevabı verilmiştir. Ö8 kodlu öğrenci hariç herkes soruyu cevaplamıştır. İki öğrenci alan cevabını gemilerin su ile temas ettikleri alanın hesaplanması olarak örneklemiştir. Bu derste gördükleri ortak bir örnekten kaynaklanmış olabilir. Bunun dışında açıklamalar mühendislerin düzgün olmayan alan veya hacimleri hesaplamalarına yardımcı olur şeklinde verilmiştir. Diğer cevap türlerinde açıklama yapılmadan sadece o alanda kullanıldığı söylenmiştir.

Matematik öğretmen adaylarının temsil becerilerine ilişkin bulgular. Bu kısımda öğretmen adaylarının Beytepe Monoray Problemi'ne yönelik çözümlerinden ve İBT'de yer alan ilgili kavramların farklı temsillerini ele alan sorulara verilen cevaplardan elde edilen bulgular birlikte sunulmuştur. Temsil türleri,

- Cebirsel temsil
- Sözel temsil
- Nümerik/tablo temsili
- Grafik temsili

olarak ele alınmıştır. İBT'de öğrencilerin kendi verdikleri örnek üzerinde aynı ifadenin farklı temsillerini ifade etmeleri istenmiştir. Bu kısımda da farklı temsil türlerine ilişkin bulgular ayrı başlıklar altında tekrar ele alınacaktır.

Cebirsel temsil türüne ilişkin bulgular. Öğrencilerin hepsi İBT'de örneklerini öncelikle cebirsel olarak kurmuşlardır. Cebirsel temsil türündeki hatalar kavramı net olarak ifade etmemekten kaynaklanmıştır. Fonksiyon kavramı için, fonksiyonun tanımlı olduğu kümeleri belirtmeleri ve fonksiyon kuralını ifade etmeleri beklenmektedir. Öğrencilerin hepsi fonksiyon kavramı için cebirsel temsili doğru oluşturmuşlardır. Türev kavramı için ise eksik ve yanlış cevaplar verilmiştir. Burada beklenen fonksiyonun kuralı ile türev fonksiyonunun yazılması ve tanımlı olduğu aralığın ifadesinin verilmesidir. Ancak tanımlı olduğu aralığı belirtmeyen öğrenciler olmuştur. Ayrıca türevin cebirsel temsilini sadece, $f'(x) = 2x$ olarak vermiş öğrenci de olmuştur. İntegral kavramı için beklenen, belirsiz integral ise fonksiyonun ilkelini bulmaları, belirli ise işlemlerin sonucunu yazmalarıdır. İntegralin cebirsel temsilleri bu açıdan çoğunlukla doğru olmuştur. Yanlış cevap, belirsiz integralde herhangi bir işlem yapmadan bırakmak olmuştur.

Öğrencilerin Beytepe Monoray Problemi için hazırladıkları çözüm kağıtlarında ise cebirsel temsilleri doğru kullandıkları görülmüştür. Ancak burada da tercih edilen kavramların ilgili durumu yani problemin istediğini ne ölçüde karşıladığı sorusu yer almaktadır. Örneğin, öğrencilerden bazıları özellikle problemin ikinci sorusu olan "Yolun eğimi nasıl ifade edilebilir?" sorusuna işlemsel sonuç bulmak gayesiyle cebirsel temsil türüyle iki nokta arasında eğim hesabı yapmayı tercih etmişlerdir. Bu çözüm yolunu tercih eden öğrencilerin bazıları ise yolu temsilen çizdikleri görsellerde (grafikler) yolu eğrisel olarak kabul etmişlerdir. Burada kavramın temsilleri arasında çelişki bulunmaktadır.

Beytepe Monoray Problemi’nin ilk sorusu olan “Yol üzerinde belirlenen noktalar baz alınarak noktalar ile yol arasında nasıl bir ilişki kurulabilir?” sorusuna beklenen yanıt fonksiyon kavramıdır. Ancak bu kısımda cebirsel olarak noktalar ile yol arasında fonksiyon tanımı yapan bir tek öğrenci olmuştur. İBT’deki başarı durumu bu kısmı etkilememiştir.

Beytepe Monoray Problemi’nin son sorusu olan “Ray hattı üzerindeki iki durak arasındaki gerçek uzaklıklar nasıl bulunabilir?” sorusuna karşılık beklenen kavram ise integraldir. Öğrencilerden sadece biri bunu cebirsel olarak belirtmiştir. Ancak diğer öğrenciler yolu doğrusal kabul ettiklerinden bu soruda iki nokta arası uzaklık veya dik üçgenler oluşturmak vasıtasıyla Pisagor Teoremi’ni kullanmış ve cebirsel olarak çoğunlukla doğru ifade etmişlerdir. Fakat burada da eğim sorusunda olduğu gibi grafik temsiliyle uyumsuz olan cevaplar olmuştur.

Sözel temsil türüne ilişkin bulgular. Burada, İBT’de cebirsel temsil türüyle ifade edilen örneklerin sözel olarak ne anlama geldiği beklenmişse de cevaplar çoğunlukla bunu karşılamamıştır. Öğrencilerin cevapları çoğunlukla eksik ya da yanlış olmuştur. Örneğin türev kavramının sözel temsilinde, öğrenciler örneklerine dair özellikleri sözel olarak ifade etmişlerdir. Fonksiyon kavramı için de benzer durum yaşanmıştır. İntegralde örneklerini belirli integral üzerinden veren öğrencilerden bazıları cebirsel olarak ifade ettikleri işlemin sonucunun grafikteki alana eşit olduğunu sözel temsil yoluyla ifade edebilmişlerdir. Ancak burada da durumu yanlış ya da eksik ifade edenler olmuştur. Sözel temsil için kavramlar arasında böyle bir farklılık bulunması kavramların dersteki işleniş sürecinden kaynaklanmış olabilir.

Beytepe Monoray Problemi için hazırladıkları çözüm kağıtlarında ise öğrencilerin ağırlıklı olarak sözel açıklamalar yaptıkları görülmektedir. Burada problemi anlamak ve sorulara yanıt vermek için sözel açıklamalar yaptıklarını yarı-yapılandırılmış görüşme sorularına verdikleri cevaplarda belirtmişlerdir. Ancak yapılan açıklamalar matematiksel kavramın sözel temsili sayılacak nitelikte değildirler. Örneğin problemin ilk sorusu için, ‘*duraklar arasında verilen noktaların yapım sürecinde dikilecek kolonlar’ için* olabileceğini düşündüklerini ifade eden öğrenciler vardır. Benzer şekilde, son soru için, ‘*özel ölçüm araçları kullanılabilir’* cevabı verilmiştir. Bu cevaplar matematiksel bir kavramın sözel temsili değildir. Bunun yanında, çözüm sürecinde cebirsel işlem yapmamış, yolun eğimli veya doğrusal olma durumu üzerinden her iki ihtimali düşünen iki öğrenci ise kullanılacak kavramları sözel olarak belirtmiştir. Ancak bu öğrencilerden biri, cebirsel işlem yapamadığından dolayı düşüncelerini sözel olarak ifade ettiğini yarı-yapılandırılmış görüşmeler sırasında belirtmiştir.

Grafik temsil türüne ilişkin bulgular. Burada, İBT'de her kavramın cebirsel temsile uygun olarak grafik temsili ile ifade edilmesi beklenmiştir. Fonksiyon için çoğunlukla grafik temsili doğru ifade edilebilmiştir. İntegral için de belirli integralle çalışanlar grafik temsilini uygun kullanabilmişlerdir. Ancak türevin grafik temsilini doğru kullanan yoktur. Burada çoğunlukla, türev alınarak elde edilen fonksiyon bağımsız olarak ele alınmış ve türevin grafik temsili fonksiyonun grafik temsili ile aynı şekilde ifade edilmiştir. Burada öğrenciler türevin grafik temsilini, geometrik yorumla eşleştirememişlerdir.

Öğrencilerin 'Beytepe Monoray Problemi' için hazırladıkları çözüm kağıtlarında ise öğrencilerin tamamı verilen noktaları analitik düzleme benzer çizimler yaparak görselleştirmişlerdir. Yarı-yapılandırılmış görüşme sorularında da bu çizimi görselleştirme, problemi anlama, görme maksadıyla yaptıklarını ifade etmişlerdir. Görselleştirme yapmanın çözüme başlamayı kolaylaştırdığı, grafik temsilinden yola çıkarak cebirsel ifadeler yazabildiklerini belirtmişlerdir. Ancak daha önce belirtildiği gibi bu grafik temsilleriyle örtüşmeyen cebirsel ifadeler kullananlar olmuştur. Örneğin grafikte bariz şekilde yolu eğimli çizen öğrencilerden eğim sorusu için, $tan\alpha$ belirleyerek yanıt verenler olmuştur.

Nümerik/tablo temsil türüne ilişkin bulgular. Burada, İBT'de her kavrama dair verilen örneğin nümerik/tablo temsilinin ifade edilmesi beklenmiştir. Fonksiyon, türev ve integral kavramları için en doğru yanıtlar fonksiyona yönelik olarak verilmiştir. Ancak her üç kavram için de en çok cevaplanmamış temsil türü budur. Bunun sebebinin bu kavramların derslerde işleniş sürecinde bu temsil türleriyle ifade edilmeden anlatılması olasıdır.

Beytepe Monoray Problemi'nde ise tablo olarak verilmiş yola ilişkin noktalar üzerinden çözüme başlamaları beklenmiştir. Burada her öğrenci verilen noktaları grafik temsilinde ifade ederek verileri görselleştirmişlerdir. İBT'de cebirsel temsil türüyle başlayıp grafik temsil türüne geçiş yapılırken Beytepe Monoray Problemi'nde nümerik/tablo temsilinden grafik türüne geçiş yapılmıştır. Öğrencilerin İBT'de nispeten daha başarılı olmaları temsil türleri arasında geçişte her temsil türü için aynı başarıyı gösterememelerinden kaynaklanmış olabilir.

Bölüm 5
Sonuç, Tartışma ve Öneriler

Bu kısımda, bulgular ve yorumlardan yola çıkılarak elde edilen sonuçlar ile sonuçların benzer çalışmalarla karşılaştırılarak tartışması sunulmuştur. Son olarak, bunlar doğrultusunda gelecek çalışmalar için önerilere yer verilmiştir.

Matematiksel modelleme doğrusal olmayan bir süreçtir ve döngüseldir. Döngüsel oluşu ihtiyaç duyulduğunda geri dönmeyi olanaklı kılar. Model oluşturma süreci, problem durumunu sunulan gerçek hayat bağlamında anlamlandırma ile başlar. Bu durum öğrencinin gerçek hayat ile matematiği ilişkilendirmesini gerektirir. Beytepe Monoray Probleminin çözüm sürecinde, bu ilişkilendirmeyi yaparak kendi döngüsel sürecini şekillendiren sadece Ö7 ve Ö6 kodlu öğrenciler olmuştur. Ancak bu ilişkilendirmenin yapılması modelleme sürecinde başarılı olmak için yetmemiştir. Ö7 ve Ö6 kodlu öğrencilerin her ikisi de Beytepe Monoray Probleminde yolun durumu hakkındaki düşüncelerini aktarmışlardır. Gerçek hayat bağlamına uygun olarak yolun eğrisel olması gerektiğini belirtmişlerdir. Ö7 kodlu öğrenci noktalar ve yol arasında fonksiyon yazılabileceğini ifade etmiş; Ö6 kodlu öğrenci verilenleri yetersiz görmüştür. Sonuç olarak her ikisi de belli bir varsayım üzerinden sürece devam edememişlerdir. Problemdeki sorulara yolun durumu üzerinden ihtimaller ortaya koymakla yetinmişlerdir. Gerçek hayatla ilişkisi üzerinde düşünmeleri matematikselleştirme yapmalarına engel teşkil etmiştir. Matematiksel ilişkileri anlamlandırmakta zorluk çekmeleri, her ikisinin de matematiksel olarak bilgilerini etkin bir şekilde kullanamamaları Mumcu (2018)'nun çalışmasıyla örtüşmektedir.

Bunun yanında, gerçek hayat durumunu da ele alarak doğru varsayımda bulunabilen iki öğrenci Ö8 ve Ö10 kodlu öğrencilerdir. Problemin ilk sorusunu fonksiyon kavramını kullanarak yanıtlayan her iki öğrenci de diğer sorulara doğru yaklaşımlarda bulunabilmişlerdir. Gerçek hayatla ilişkilendirme durumuna burada matematikselleştirme ve kavramlar arasında ilişkilendirme yapmak eklendiğinde süreç başarılı bir şekilde devam etmiştir. Ancak, Ö10 kodlu öğrenci sorulara doğru kavramlarla yaklaşmasına rağmen sözel açıklamalarında mantıklı bağlantılara yer verememiştir. Öğrencinin İBT sonuçları da bunu desteklemektedir. Öğrenci hem türev hem de integral kavramlarına ilişkin sorulara verdiği yanıtlarda her iki kavram türü için 12 sorudan 9'undan 0 puan almıştır. Bu durumun öğrencinin modelleme sürecinde, yolu eğrisel kabul ettikten sonra 'eğim-türev', 'eğri uzunluğu-integral' gibi kalıplaşmış ya da ezberlenmiş bilgilerinden yola çıkarak yanıt vermesinden kaynaklandığı düşünülmektedir. Bu durum yine Mumcu (2018)'in çalışmasında türev konusunda ilişkilendirilmelerin ezbere dayalı bilgilerle yapıldığı şeklinde belirtilmiştir. Öğrencinin çözüm kağıdında grafikte yol $f(x)$ olarak isimlendirilen bir eğriyle ifade edilmiştir. Ancak öğrenciyle yapılan yarı-yapılandırılmış görüşmelerde, öğrenci bu soru için matematiksel kavram kullanmadığını söylemiştir. Bu bağlamda Ö10 kodlu öğrencinin kendi düşünme süreçlerine çok hâkim olmadığı düşünülmektedir. Bunun aksine Ö8 kodlu öğrenci kullandığı kavramları problemin ihtiyacına cevap verecek düzeyde matematikselleştirmiştir. Çoğu öğrenci sorulara net bir yanıt arama endişesi güderek eğim için $tan\alpha$ hesaplamaları yapmıştır. Ancak Ö8 kodlu öğrenci burada türevi önermiş, cebirsel olarak ifade etmiş ve yol eğrisel olduğu için her noktada değişeceğini ifade etmiştir. Diğer öğrencilerin bu kavramı tercih etmeyişi ya da edemeyişi Beytepe Monoray Probleminin ilk sorusuna verdikleri yanıtlarla ilgili olmuştur. Ö8 kodlu öğrenci gerçek hayat ilişkilendirmesi kurduktan sonra kavramlar arası ilişkilendirmeye geçmiştir. Yani eğrisel kabul ettiği yolu fonksiyon olarak ifade ettikten fonksiyonda belirli noktalardaki eğimin türevle ifade edilebileceğini belirtmiştir. Benzer şekilde uzaklık sorusuna da eğri uzunluğunun integral ile hesaplanabileceğini belirtmiştir. Grafik temsilinde eğrisel olarak belirttiği yolun eğimi sorulduğunda bu ona doğal olarak türevi çağrıştırmış olabilir. Çünkü diğer öğrenciler çoğunlukla yolu parça parça doğrular halinde görselleştirmişlerdir. Gerçek durumun temsil biçimi ile ilgili matematiksel kavramlarla ilişki kurulması burada önem kazanmıştır.

Ek olarak Ö8 ve Ö10 kodlu öğrenciler her ne kadar Beytepe Monoray Probleminin ilk sorusunu beklenen kavram olan fonksiyon ile yanıtlamış olsa da bu fonksiyonun kuralını yazmaya yönelik bir çabada bulunmamışlardır. Yolu doğrusal kabul eden öğrencilerinde bir fonksiyon veya doğru denklemi oluşturmak gibi bir çabaları olmamıştır, zihnen düşünseler de (Ö7) bu çaba kâğıda aktarılmamıştır. Bu durum Kol (2014)'un çalışmasına benzer şekilde, öğrencilerin fonksiyon yazmada zorluk yaşadıklarını da ortaya koymaktadır. Öğrenciler, yarı-yapılandırılmış görüşmelerde bu durum sorulduğunda, parçalı fonksiyon tanımlayabileceklerini problemi çözerken düşünemediklerini ifade etmişlerdir.

Gerçek hayatla ilişkilendirme söz konusu olduğunda, bağlama uygun kavramları belirlemek ve bunları matematikselleştirmek önemlidir. Ancak gerçek hayat bağlamına fazlasıyla takılıp matematikselleştirmeye geçememe durumu da yaşanabilir. Bunun örneği Ö2 ve Ö4 kodlu öğrencilerce sunulmuştur. Her iki öğrenci de Beytepe Monoray Problemini kendi yaşantıları çerçevesinde değerlendirmişlerdir. Şöyle ki, problemde verilen veriler (noktalar) gerçeğe uygun değildir. Uydurma verilere göre, yol boyunca eğim oldukça düşüktür. Ancak gerçekte yolun eğimi çok daha fazladır. Öğrenciler burada verileri göz ardı ederek ya da gerçek verilerin bunlar olduğunu düşünerek her iki koşulda da kendi yaşantılarına uygun ancak problem durumuna uygun olmayan yorumlarda bulunmuşlardır. Örneğin; aşırı eğimin aracın kalkışlarda ve durma anlarında sürtünme etkisiyle enerji kaybına sebep olacağı gibi yorumlar yapmışlardır. Bu yorumlar modelleme süreçlerinin geneline yayılmış olsa da özellikle problemin ilk sorusu olan 'Yol üzerinde belirlenen noktalar baz alınarak noktalar ile yol arasında nasıl bir ilişki kurulabilir?' sorusuna verilen cevabı etkilemiştir. Doğrusal kabul ettikleri yol için eğim hesapları yaparak, farklı aralıklarda eğimin nasıl değiştiğini ifade etmişlerdir. Ancak buldukları sonuçlarda uydurma verilerle elde ettikleri eğimlerin düşük olduğunu yani probleme göre ray sisteminde büyük enerji kaybına sebep olmayacağını fark etmemişlerdir. Burada problemin gerçekliği ile kendi hayatlarının gerçekliğini ayırt edememişlerdir. Burada dikkat çeken bir diğer durum ise, her iki öğrencinin de probleme giriş yaparken oluşturdukları grafik temsilinde, yolu eğrisel olarak çizmeleridir. Bu eğrinin temsil ettiği fonksiyonu belirleyemedikleri, ki bunu çözümlerinde belirtmemişlerdir, için bu temsile rağmen eğim hesabını, verilen her iki nokta arasında bir doğru varmış gibi $tan\alpha$ ile yapmışlardır. Burada kullandıkları matematiksel kavramların arasında doğru bir ilişkilendirme yapamadıkları ortadır. Aynı hatayı Ö3 kodlu öğrenci de yapmıştır. Ancak Ö3 kodlu öğrenci yol-nokta ilişkisini çizdiği grafiğin ifade ettiğini belirtmiştir.

Ö2 ve Ö4 kodlu öğrencilerin İBT yanıtlarında ise fonksiyon kavramının temsil türlerinde başarılı oldukları görülmektedir. Türev kavramı için ise, Ö2 kodlu öğrenci grafik temsilinde doğru yanıta en fazla yaklaşmış öğrenci olmuştur. İntegral kavramı için de her iki öğrenci de temsil türlerinde başarılı görülmüştür. Ancak buna rağmen problemin son sorusu olan duraklar arası uzaklıklar sorusuna her ikisi de 'özel ölçüm' cihazı önermişlerdir. Halbuki eğimleri hesaplarken yolu doğrusal gibi ele aldıklarından burada da iki nokta arası uzaklık formülü ile hesaplamaları beklenirdi. Burada her iki öğrencinin modelleme süreçlerinde başarısız olmaları problemin ihtiyacının ne olduğunu fark etmemelerinden kaynaklanmış olabilir. Çünkü problemde ray hattının sınırlamaları net olarak belirlenmişken, Ö2 kodlu öğrenci ray hattının yerden yüksekliğinin sabit olmaması önerisinde bulunmuştur. Bunu gerekçelendirme için yine enerji kaybı açıklamaları yapmıştır. Bu durum Iversen ve Larson (2006)'nın çalışmasıyla örtüşmektedir. Çalışmada standart testlerde başarılı olan öğrencilerin modelleme etkinliklerinde başarısız olabileceklerine vurguda bulunulmuştur. Bu çalışmada da Ö2 ve Ö4 kodlu öğrenciler modelleme etkinliğine göre çok daha yapılandırılmış bir ölçme aracı olan İBT'de ilgili kavram üzerinde başarılıyken, bu kavramın gerçek hayat uygulamalarını gerektiren sorularda başarısız olmuşlardır.

Beytepe Monoray Probleminin çözüm önerisinde beklenen iki farklı yaklaşım vardır. Bu yaklaşımlar yolun doğrusal ya da eğrisel olarak kabul edilmesine dayanmaktadır. Yukarıda görüldüğü üzere, Ö7 ve Ö6 kodlu öğrenciler her iki varsayıma yönelik yorum yapmışlardır. Ö8 ve Ö10 kodlu öğrenciler eğrisel olarak kabul ederek devam etmişlerdir. Ö2, Ö3 ve Ö4 kodlu öğrenciler burada kendi varsayımlarına aykırı hareket ederek, çözüm önerilerinde tutarsızlık göstermişlerdir. Ö1, Ö5 ve Ö9 kodlu öğrenciler ise yolu doğrusal kabul edip buna göre işlemler yapmışlar ve farklı sorulara verdikleri cevaplarda tutarlı olmuşlardır. Ancak bu üç öğrencinin de problemin ilk sorusuna verdikleri yanıtlar farklıdır. Ö1 problemde verilenleri kendi cümleleriyle yeni baştan ifade etmiş ve birtakım yorumlarda bulunmuştur. Bu yorumlar öğrencinin problemi kendisi için anlamlandırması için yapılmış olabilir. Ö5 kodlu öğrenci ise ilk soruya, durak olmayan noktaların ray hattının inşaatında dikilecek olan kolonların konumları olabileceğine dair yorumlar yapmıştır. Ö9 kodlu öğrenci ise noktaları karşılaştırarak eğime vurguda bulunmuş, enerji kaybından bahsetmiştir. Öğrencilerin üçünün de grafik temsillerinde yolu doğrusal olarak çizdikleri görülmektedir. Hesaplamalarını da doğrusal kabullerine uygun olarak yapmışlardır. Üçü de her iki nokta arasında doğru oluşturup $tan\alpha$ hesabı yapmış. Duraklar arası mesafe için de yine noktalar arasında Pisagor Teoremi ya da iki nokta arası uzaklık formülünü önermiş veya kullanmışlardır. Ancak nokta-yol ilişkisini, doğru denklemi, birinci dereceden fonksiyon gibi kavramlarla açıklayamamışlardır. Ö8, Ö10 ve Ö7 kodlu öğrenciler dışında fonksiyon kavramını herhangi bir şekilde kullanan öğrenci olmaması sorunun biçiminden kaynaklanmış olabilir.

Dikkat çekici bulgulardan bir diğeri ise, öğrencilerin tamamının Beytepe Monoray Problemine sundukları çözüm önerilerinde sözel açıklamaları yoğun olarak kullanmış olmalarıdır. Bu durum öğrencilere yarı-yapılandırılmış görüşmelerde sorulduğunda, problemi kendisi için anlamlandırmak, araştırmacının anlaması için açıklamak gibi yanıtlar verilmiştir. Ayrıca bazı öğrenciler (örneğin Ö7 kodlu öğrenci) matematiksel işlem yapamadıkları için düşüncelerini bu yolla ifade etmeyi tercih ettiğini ifade etmiştir. Süreç boyunca en fazla kullanılan temsil türünün sözel temsil olması Özaltun vd. (2013) çalışmasında da belirtilmiştir. Benzer sonuçlar İpek-Okumuş (2012) çalışmasında da vardır. Ayrıca Özaltun vd. (2013) öğrencilerin probleme giriş yaparken görsel (grafik) temsil kullanmasını sistematik yapıyı anlamlandırma basamağında şekilsel gösterimin yoğun olarak kullanıldığı şeklinde ifade etmişlerdir. Bunu destekler şekilde, öğrencilerle yapılan yarı-yapılandırılmış görüşmelerde görsel temsillerin kullanım amacı ve sürece etkisi sorulduğunda, görselleştirmenin problemi anlamaya, anlamlandırmaya fayda sağladığını söylemişlerdir. Aynı zamanda cebirsel temsil türüne geçişte görsel temsili kullandıklarını belirtmişlerdir.

Sonuç olarak matematik öğretmen adaylarının matematiksel modelleme becerileri ile matematiksel ilişkilendirme becerileri arasında direkt bir ilişki olduğu söylenemez. Ancak modelleme sürecinde öğrencilerin süreci devam ettirebilmeleri için doğru ilişkilendirmeler yapmaları gerektiği anlaşılmaktadır. Aynı zamanda, bu çalışmaya katılan öğrencilerin daha önce modelleme tecrübeleri olmadığı da göz önünde bulundurulmalıdır. Öğrencilerin matematik öğretmen adayları olarak, öğrenim hayatlarında bu çalışma dışında modelleme tecrübesi edinmemiş olmaları tutarsız gözükmektedir. Özellikle de MEB, NCTM gibi kurumların modelleme etkinliklerinin sınıflarda kullanmaları tavsiye etmelerine rağmen bu konuda tecrübesiz öğretmenlerin sınıflarda öğrencileriyle bu etkinlikleri gerçekleştirmeleri düşük olasılıklıdır.

Bulgulardan yola çıkılarak yapılabilecek ilk öneri, matematik öğretmen adaylarının üniversite derslerinde matematiksel modelleme dersi almalarıdır. Modellemenin disiplinler arası ilişki kurmasına olanak sağlamasından ötürü bu durum fen bilimleri öğretmen adayları için de gerekli gözükmektedir. Hatta Gross (1981)'un çalışmasına dayanarak denilebilir ki, matematikçilerin de meslek hayatlarında kullanabilmeleri adına üniversitede uygulama dersi olarak matematiksel modelleme dersi almaları önerilmektedir.

Dikkat çeken bir diğer bulgu ise İBT'de yer alan kavramın tanımı sorusuna verilen cevaplardır. Fonksiyon, türev ve integralin tanımına ilişkin öğrenci cevapları genel itibariyle başarılı görülmemiştir. Doğru kabul edilen cevaplardan çok azında kavramların matematiksel/formal tanımları kullanılmıştır. Öğrencilerin çoğunluğu bu kavramların tanımlarını ya yanlış yapmışlardır ya da kavramı tam olarak karşılayamayan sözel açıklamalarda bulunmuşlardır. Bu açıklamalar ise tanımdan ziyade kavramın özellikleri şeklindedir. Buna rağmen, öğrenciler kavramların cebirsel temsillerini çoğunlukla doğru ifade etmişlerdir. Bunun sebebi, ilköğretimden itibaren rutin problemlerin ve ezbere dayalı bilgilerin kullanıldığı bir matematik eğitiminden kaynaklanıyor olabilir. Yine de, lisans düzeyinde olan öğrencilerin hâlâ bu eksikliğe sahip olması şaşırtıcıdır. Bu yüzden, bu durumun derinlemesine araştırılması sonraki çalışmalar için önerilmektedir.

Bulgulara bakıldığında matematik öğretmen adaylarının matematiksel kavramları etkisiz ya da tutarsız kullandıkları anlaşılmaktadır. Fonksiyon, türev, integral gibi matematikte çok önemli sayılabilecek kavramların gerçek yaşamda kullanım alanları hakkında yetersiz bilgiye sahip oldukları, farklı temsilleri ifade etmede genel olarak başarısız oldukları görülmektedir. Bütün bunlara bağlı olarak bir diğer öneri, matematik öğretmen adaylarının üniversitede gördükleri derslerin işlenişi hakkındadır. Öncelikle matematik öğretmenlerinin matematik bilgilerinin sağlam olması ve bunu aktarabilmeyi bilmeleri gerekir. Matematiksel ilişkilendirme ve çoklu temsil becerileri matematik yapabilmenin ve matematiği aktarabilmenin temel taşlarındandır. Bu yüzden matematik öğretmen adaylarının ders içerikleri matematiği öncelikle onlar için anlamlı kılmalı ardından hizmete başladığında kendi öğrencilerine nasıl aktarabileceğini öğretir nitelikte olmalıdır. Bu yüzden, etkili öğretmenler yetiştirmek, matematik öğretmen adaylarının da derslerinde sağlam bir matematik öğrenmeleri ve hizmete başladıklarında bunu aktarabilmeleri adına üniversite derslerinin işlenişinde matematiksel ilişkilendirme ve çoklu temsillerden sıkça faydalanılması önerilmektedir. Benzer şekilde, ilköğretim ve ortaöğretim matematik derslerinin işleniş sürecinde de matematiksel ilişkilendirme ve temsillerden faydalanılması önerilmektedir.

Matematiksel modelleme alanında literatürde çok fazla çalışma vardır. Bunların her biri de matematiksel modellemenin öğrenim hayatına hem öğrenci hem öğretmen açısından katılması gerektiğini ortaya koymaktadır. Ancak özellikle yerli literatürde öğretmenlerin yetiştirilmesi sürecinde kullanılabilecek ya da öğretmenlerin sınıflarında uygulayabilecekleri modelleme etkinliği çalışmaları az sayıdadır. Bu çalışmalardan biri “Lise Konuları için Günlük Hayattan Modelleme Soruları” (Erbaş ve diğerleri, 2016) kitabı, bir diğeri ise içeriğinde çok sayıda modelleme etkinliğine yer verilmiş olan “Matematik Eğitiminde Modelleme Etkinlikleri” (Dost, 2019) kitabıdır. Bu çalışmada da aynı amaca yönelik olarak özgün bir model-oluşturma etkinliği olarak ‘Beytepe Monoray Problemi’nin literatürdeki ihtiyaca cevap vermesi hedeflenmiştir. Ancak etkinliklerin kullanılmasının ne denli önemli olduğu düşünülürse ihtiyaç daima olacaktır. Bu yüzden model-oluşturma etkinliklerin çoğaltılması bundan sonraki çalışmalar için önerilmektedir.

Kaynaklar

Adu-Gyamfi, K. (1993). External multiple representations in mathematics teaching. *Unpublished Master Thesis, Graduate Faculty of North Carolina State University, USA.* https://repository.lib.ncsu.edu/handle/1840.16/366

Adu-Gyamfi, K. (2007). Connections among representations: The nature of students' coordinations on a linear function task. *Unpublished PhD Dissertation, North Carolina State University.*

Ainsworth, S., (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. Learning and Instruction, 16, 2006, 183-198. doi:10.1016/j.learninstruc.2006.03.001.

Anhalt, C. O. & Cortez, R. (2016). Developing understanding of mathematical modeling in secondary teacher preparation. Journal of Mathematics Teacher Education, 19, 523- 545. doi: 10.1007/s10857-015-9309-8

Başkan, Z., (2011). *Doğrusal ve düzlemde hareket ünitelerinin matematiksel modelleme kullanılarak öğretiminin öğretmen adaylarının öğrenmelerine etkileri* (Doktora tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon). Erişim adresi: Ulusal Tez Merkezi

Bingölbali. E., & Coşkun, M., (2016). A Proposed Conceptual Framework For Enhancing The Use Of Making Connections Skill In Mathematics Teaching. Türk Eğitim Derneği, Eğitim ve Bilim; Ankara, Vol.41, Iss. 183. DOI: 10.15390/EB.2016.4764

Borromeo Ferri, R. (2006). *Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process*. ZDM- The International Journal on Mathematics Education, 38(2), 86–95. DOI: 10.1007/BF02655883

Burkhardt, H. (2006). *Modelling in mathematics classrooms: Reflections on past developments and the future*. ZDM- The International Journal on Mathematics Education, 38(2), 178–195. DOI: 10.1007/BF02655888

Businskas, A.M., (2008). *Conversations About Connections: How Secondary Mathematics Teachers Conceptualize and Contend with Mathematical Connections.* Erişim adresi: https://core.ac.uk/download/pdf/56373465.pdf

Chan, E.C.M., (2008). *Using Model-Eliciting Activities For Primary Mathematics Classroom*. The Mathematics Educator, 2008, Vol. 11, No.1/2, 47-66

Coxford, A.F., (1995)*. The Case for Connections*. In P. A. House and A.F. Coxford (Eds.), Connecting Mathematics across the Curriculum, pp. 3-12. Reston, VI: National Council of Teachers of Mathematics.

Çarman, Ş. (2007). *Kara Harp Okulu'nda türev ve integral kavramlarının mesleğe yönelik modellemeleri ve bunlar hakkında öğretim elemanı ve Harbiyeli 236 görüşleri üzerine fenomenografik çalışma*. (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi). Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Davis, R. (1986). *Learning mathematics. The cognitive science approach to mathematics education.* New Jersey: Ablex Publishing Corporation. Erişim adresi: books.google.com.tr

Delice, A. ve Sevimli, E., (2010). *Matematik Öğretmeni Adaylarının Belirli İntegral Konusunda Kullanılan Temsiller İle İşlemsel ve Kavramsal Bilgi Düzeyleri*. Gaziantep Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi, 9(3), 581-605.

Doruk, B.K., (2010). *Matematiği Günlük Yaşama Transfer Etmede Matematiksel Modellemenin Etkisi.* (Doktora Tezi). Erişim adresi: Ulusal Tez Merkezi

Dost, Ş. (Ed.). (2019). *Matematik Eğitiminde Modelleme Etkinlikleri*. Ankara, Pegem Yayınları.

Dreher, A., Kuntze, S., (2015). *Teachers' professional knowledge and noticing: The case of multiple representations in the mathematics classroom*. Educ Stud Math (2015) 88:89–114. DOI 10.1007/s10649-014-9577-8.

Duval, R. (1993). *Registres de* représentation sémiotique fonctionnement cognitif de la pensée. Annales de Disactiques des Sciences Cognitives, 5, 37-65.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the Twenty First Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 3-26).* Columbus, OH: *ERIC* Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Eli, J.A., (2009). *An exploratory mixed methods study of prodpective middle grades Teachers' mathematical connections while completing investiagtive tasks in geometry*. (Yayınlanmamış doktora tezi). University of Kentucky, USA.

Eli, J.A., Mohr-Schroeder, M.J., and Lee, C.W., (2011). *Exploring Mathematical Connections of Prospective Middle-Grades Teachers through Card-Sorting Tasks*. Mathematics Education Research Journal, 23(3), 297-319.

English, L., Sriraman, B., (2009). Problem Solving for the 21st Century. (B. Sriraman, L. English (eds.), *Theories of Mathematics Education,* Advances in Mathematics Education, (pp. 263-290). DOI 10.1007/978-3-642-00742-2_27.

Erbaş, A., Kertil, M., Çetinkaya B., Çakıroğlu E., Alacacı C., Baş, S. (2014). *Matematik Eğitiminde Matematiksel Modelleme: Temel Kavramlar ve Farklı Yaklaşımlar.* DOI: 10.12738/estp.2014.4.2039

Erbaş, A., K., Çetinkaya B., Alacacı C., Çakıroğlu E., Aydoğan-Yenmez A., Şen-Zeytun A., Korkmaz H., Kertil, M., Göz, M. (2016). *Günlük Hayattan Modelleme Soruları.* Ankara, Tüba Yayınları.

Evitts, T.A., (2004). *Investigating the Mathematical Connections that Preservice Teachers Use and Develop while Solving Problems from Reform Curricula*. (Yayınlanmamış Doktora Tezi), Pennsylvania State University College of Education.

Frejd, P., (2012). *Teachers' conceptions of mathematical modelling at Swedish Upper Secondary School.* Journal of Mathematical Modelling and Application. 2012, Vol. 1, No.5, 17-40 ISSN: 2178-2423.

Frejd, P., (2013). Modes of modelling assessment. *Educational Studies in Mathematics* volume 84, pages413–438(2013). New York: Springer.

Garii, B. & Silverman, F. (2009). *Beyond the Classroom Walls: Helping Teachers Recognize Mathematics Outside of the School*. Relime, sayı:12, s.333-354.

Goldin, G.A., & Kaput, J.J. (1996). *A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics*. In L. P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin ve B. Greer (Eds.), Theories of mathematical learning (pp. 397-430). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Goldin, G.A., (1998). Representations, learning, and problem solving in mathematics. Journal of Mathematical Behavior, 17(2),137-165.

Glaser, B. & Strauss, A.L. (1967) Discovery of grounded theory: Strategies fo r qualitative research, Chicago: Aidine.

Grootenboer, P., (2009). Problem Solving for the 21st Century. B. Sriraman, L. English (eds.), *Theories of Mathematics Education,* Advances in Mathematics Education, (pp. 291-295). DOI 10.1007/978-3-642-00742-2_28

Gross, H. E., 1981. The Importance of mathematical modelling for university education in mathematics. *International Journal of Mathematical Education Science and Technology*, 12 (5), 549-555.

Gravemeijer, K., & Stephan, M. (2002). Emergent models as an instructional design heuristic. In K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. Oers, & L. Verschaffel (Eds.), *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education* (pp. 145-169). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Greeno, J. G ve Hall, R. P. (1997). Practicing representation. *Phi Delta Kappan .78* (5).

Gürbüz, Ş. & Şahin S., (2014). 8. Sınıf Öğrencilerinin Çoklu Temsiller Arasındaki Geçiş Becerileri. *K. Ü. Kastamonu Eğitim Dergisi*, 23 (4), 1869-1888.

Hacıömeroğlu E. S., Hacıömeroğlu G., Güzel, E. B. ve Kula, S. (2014). Türev ve integral problemlerinin çözümünde görsel, analitik ve harmonik çözüm tercihleri. *Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Dergisi*, 22, 108-119.

Haines, C., & Crouch, R. (2007). Mathematical modeling and applications: ability and competence frameworks. In W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 417–424). New York, NY: Springer.

Hıdıroğlu, Ç. N., (2015). *Teknoloji destekli ortamda matematiksel modelleme problemlerinin çözüm süreçlerinin analizi: bilişsel ve üstbilişsel yapılar üzerine bir açıklama*. (Doktora Tezi). Erişim adresi: Ulusal Tez Merkezi

Hiebert, J., and Carpenter, T., (1992). Learning and Teaching with Understanding. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 65–97). New York: Macmillan.

Houston, K. (2007). Assessing the “phases” of mathematical modelling. In W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study* (pp. 249–256). New York: Springer.

Huang, C. H. (2011). Assessing the modelling competencies of engineering students. *World Transactions on Engineering and Technology Education*, 9(3), 172-177.

Iversen, S., M., Larson C., J. 2006. Simple Thinking using Complex Math vs. Complex Thinking using *Simple Math – A study using Model Eliciting Activities to compare students' abilities in standardized tests to their modelling abilities.* ZDM, Vol. 38, (3).

İncikabı, S. (2017). Çoklu Temsiller Ve Matematik Öğretimi: Ders Kitapları Üzerine Bir İnceleme. *Cumhuriyet İnternational Journal Of Education*, 66-81.

Kadijevich, D. (2009). Simple Spreadsheet Modelıng By First-Year Business Undergraduate Students: Difficulties In The Transition From Real World Problem Statement To Mathematical Model. In*: Blomhrj, M. and Carreira, S., Eds., Mathematical Applications and Modeling in the Teaching and Learning of Mathematics: Proceedings the 11th International Congress on Mathematical Education*, Monterrey, Mexico, 241-248.

Kaiser, G. (2007). Modelling and modelling competencies in school. In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum ve S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling (ICTMA 12): Education, engineering and economics,* (pp. 110–119). Chichester, UK: Horwood Publishing.

Kaiser, G., Schwarz, B., (2006). *Mathematical modelling as bridge between school and university. ZDM* volume 38, pages196–208(2006). New York: Springer.

Kaput, J. J. (1998). Representations, inscripions, descriptions and learning: A kaleidoscope of windows. *Journal of Mathematical Behavior*, 17 (2), 265-281.

Keller, B. A., & Hirsch, C. R. (1998). Student preferences for representations of functions. *International Journal in Mathematics Education Science Technology*, 29 (1), 1-17.

Kertil, M., Çetinkaya, B., Erbaş, A. K., Çakıroğlu, E., (2016). Matematik Eğitiminde Matematiksel Modelleme. Bingölbali E, Arslan S., Zembat, İ.Ö., (Ed.) *Matematik Eğitiminde Teoriler* içinde (Bölüm: 33 s.539-563), Ankara, PEGEM Akademi.

Knott, A., (2014). *The Process Of Mathematisation In Mathematical Modelling Of Number Patterns In Secondary School Mathematics*. Semantic Scholar, Corpus ID: 62027533

Lee, J., E. (2012). Prospective elementary teachers' perceptions of real-life connections reflected in posing and evaluating story problems. *Journal of Mathematics Teacher Education*, sayı:6, s.429-452.

Lehrer, R., Schauble, L. (2003). Origins and Evolution of Model-Based Reasoning in Mathematics and Science. In R. Lesh, & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 59-70). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Leikin, R. and Levav-Waynberg, A., (2007). Exploring Mathematics Teacher Knowledge to -Explain the Gap between Theory-Based Recommendations and School Practice in the Use of Connecting Tasks. *Educational Studies in Mathematics*, 66(3), 349-371.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and Translations among Representations in Mathematics Learning and Problem Solving. C. Janvier içinde, *Problems of Representations in the Teaching and Learning of Mathematics* (s. 33-40). New Jersey: Lawrance Erlbaum Associates.

Lesh, R., & Doerr, H.M. (2000). Symbolizing, communicating, and mathematizing: Key components of models and modeling. In P. Cobb, E. Yackel, & K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instructional design* (pp. 361 –383). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh R., Hoover M., Hole B., Kelly A., ve Post T., (2000). Principles for Developing Thought-Revealing Activities for Students and Teachers. In A. Kelly ve R.

Lesh 385 (Eds.) *Handbook of Research in Mathematics and Science Education, Mahwah*, NJ: Lawrance Erlbaum Associates, 113-149.

Lesh, R., & Doerr, H. M. (2003a). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. In R. Lesh, & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 3–34). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lesh, R., & Doerr, H. M. (2003b). In what ways does a models and modeling perspective move beyond constructivism. In R. Lesh, & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching* (pp. 519–556). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lingefjärd, T. (2006). Faces of mathematical modeling. ZDM - *The International Journal on Mathematics Education*, 38(2), 96–112.

Lingefjärd, T. (2007). Mathematical modelling in teacher education-necessity or unnecessarily, W. Blum, P. L. Galbraith, H. W. Henn, & M. Niss (Edt), *Modelling and applications in mathematics education: 14 th ICMI Study* içinde (s. 333340), New York: Springer.

Lockwood, E., (2011). Students Connections among Counting Problems: An Exploration Using Actor-Oriented Transfer. *Educational Studies in Mathematics*, 78(3), 307-322.

Maaß, K. (2006). What are modelling competencies?. ZDM- *The International Journal on Mathematics Education*, 38(2), 113–142

MEB. (2013). Ortaöğretim matematik dersi (9, 10, 11 ve 12. sınıflar) öğretim programı. Ankara, Türkiye: T.C. Millî Eğitim Bakanlığı.

Monaghan, J. D., Sun, S., & Tall, D. O. (1994). Construction of the limit concept with a computer algebra system. *Proceedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (July 29- August 3), Vol. 3, 279- 286, Lisbon: Portugal.

Mumcu, H. Y. (2018). Matematiksel İlişkilendirme Becerisinin Kuramsal Boyutta İncelenmesi: Türev Kavramı Örneği. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education,* Vol.9 No.2 (2018), 211-248.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and Standarts for School Mathematics: An Overview. *National Council of Teachers of Mathematics*. Reston: Author.

O'Brien, T. (1989). Some thoughts on treasure keeping. *Kappan*, 70, 360-364.

Özgen, K. (2013). Problem Çözme Bağlamında Matematiksel İlişkilendirme Becerisi: Öğretmen Adayları Örneği. NWSA-Education Sciences, 1C0590, 8, (3), 323-345.

Özgen, K. (2013a). Problem çözme bağlamında matematiksel ilişkilendirme becerisi: Öğretmen adayları örneği. *E-Journal of New World Sciences Academy,* 8(3), 323-345.

Özgen, K. (2016). Matematiksel ilişkilendirme üzerine kuramsal bir çalışma. *International Conference on Research in Education & Science*, 19-22 May 2016, Bodrum, Proceeding Book, pp. 235-245.

Özgün-Koca, S.A. (2001). Computer-based representations in mathematics classrooms: *The effects of mutiple-linked and semi-linked representations on students' learning of linear relationship*. (Doktora tezi, Ohio: Ohio State University.)

Sandalcı, Y. (2013). *Matematiksel modelleme ile cebir öğretiminin öğrencilerin akademik başarılarına ve matematiği günlük yaşamla ilişkilendirmelerine etkisi.* (Yüksek lisans tezi). Erişim adresi: Ulusal Tez Merkezi

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics. D. A. Grouws (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (s. 334–370). Macmillan: New York.

Schwarz, B., & Kaiser, G. (2007). *Mathematıcal modelling in school – experiences from a project integrating school and university*. Erişim adresi: academia.edu

Sevimli, E. (2009). Matematik öğretmen adaylarının belirli integral konusundaki temsil tercihlerinin uzamsal yetenek ve akademik başarı bağlamında incelenmesi. (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Marmara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

Sriraman, B. (2006). Conceptualizing the model-eliciting perspective of mathematical problem solving. In M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME 4) (pp. 1686- 1695). Sant Feliu de Guíxols, Spain: FUNDEMI IQS, Universitat Ramon Llull.

Swan, M., Turner, R. ve Yoon, C. (2006). The Roles of Modelling in Learning Mathematics. W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn ve M. Niss (Ed.). *Modelling and Applications in Mathematics Education.* The 14. ICMI Study (275-284). New York: Springer.

Şengil-Akar, Ş. (2017). *Üstün yetenekli öğrencilerin matematiksel yaratıcılıklarının matematiksel modelleme etkinlikleri sürecinde incelenmesi*. (Doktora tezi). Erişim adresi: Ulusal Tez Merkezi.

Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı. (2018). Orta öğretim matematik dersi (9, 10, 11 ve 12. sınıflar) öğretim programı. Ankara, Türkiye: T.C. Milli Eğitim Bakanlığı.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2002). Everyday knowledge and mathematical modeling of school word problems. In K. P. Gravemeijer, R. Lehrer,H. J. van Oers, & L. Verschaffel (Eds.), *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education* (pp. 171-195). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers

Yıldırım, A., & Şimşek, H., (2016). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri*. Ankara: Seçkin Yayıncılık, 10. baskı. s. 41,122, 242, 289.

Yıldırım, C. (1996). *Matematiksel düşünme* (2. Basım). İstanbul: Remzi Kitapevi.

Yin, R. (1984). *Case study research: design and methods*. (3. Basım). California: Sage Publications.

Zbiek, R. M., & Conner, A. (2006). Beyond motivation: Exploring mathematical modeling as a context for deepening students' understandings of curricular mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 69, 89–112.

EK-A: Beytepe Monoray Problemi

Hacettepe Üniversitesinin Beytepe Kampüsü'nde öğrenim gören öğrencilerin geçmişten günümüze ortak tek bir problemleri olmuştur: ULAŞIM!

80'lerde 90'larda kampüste okuyan öğrencilerin kışın kar yağdığında yolda kalan körüklü otobüslerin hikayesini belki duymuş bile olabilirsiniz. Üniversite yönetiminin ya da şehir belediyesinin şikayetler arttığında aldıkları, dolmuş hattı oluşturmak, semt servisleri koymak, otostop noktaları belirlemek gibi kararlar dönemsel olmuştur. Bugünkü toplam lisans öğrencisi sayısı 30000 civarında olan üniversitenin, Sıhhiye Kampüsü sadece sağlık bilimleri bölümlerini barındırırken geri kalan fakülteler Beytepe Kampüsü'nde yer almaktadır. 2014 yılında açılan Kızılay-Çayyolu metrosu öğrencilerin şehir merkezinden okula gelmeleri için en ideal yol gözükmektedir. Ancak Beytepe metro durağına varmak Beytepeliler için okula varmak anlamına gelmemektedir. Metrodan okul içine ringlerle ulaşım sağlanmaktadır ancak yoğun dönemlerde ring ve otostop sıralarının metrelerce sürdüğü bilinen bir gerçektir.

Ankara Büyükşehir Belediyesi, Beytepe Kampüsüne ulaşımdaki bu yoğunluğu azaltmak adına Kızılay-Çayyolu hattından aktarma yoluyla yeni bir ray hattı yapmayı planlamaktadır. Başlangıçta yer altından gitmesi planlanan hattın ekonomik sebeplerle monoray olarak yani yerüstünde yapılması kararlaştırılmıştır.

Yapılması planlanan monoray hattı ile ilgili bilgiler şöyledir;

- Başlangıç noktası Beytepe Metro Durağı olup, ilk durak Beytepe Metro Durağı'yla aynı hizada ve yerden belirli bir yükseklikte olacaktır.
- Toplam 5 durak olacaktır. Duraklarla aynı hizada yol üzerinde asansörler olup, yolcuların ray hattına çıkması bu şekilde sağlanacaktır.
- Belediye çalışanları yola dair inceleme yapmışlardır. Bu incelemede, yol üzerindeki bazı noktaların yolun başlangıç noktasına göre yatay uzaklığı ve yüksekliği tespit edilmiştir.
- Ray hattının yerden uzaklığı yola göre her noktada aynı olacaktır.

Bu hattın planlamasına dair size ihtiyaç duyulan kısımda size sorulan sorular şöyledir;

1. Yol üzerinde belirlenen noktalar baz alınarak noktalar ile yol arasında nasıl bir ilişki kurulabilir?

2. Bu yolun eğimi nasıl ifade edilebilir?

3. Ray hattı üzerindeki iki durak arasındaki gerçek uzaklıklar nasıl bulunabilir?

Belediye yönetimi, bu sorular dahilinde sizden bir yöntem geliştirmenizi istemektedir. Yönteminizin mümkün oldukça hassas olması önemlidir. Unutmayın sizin yönteminiz projeye yön verip, proje maliyetini etkileyecektir.

Yönteme dair önerilerinizi ve bu süreçteki bütün adımlarınızı açıklamanız oldukça önemlidir. Aynı yöntemin benzer durumlarda nasıl kullanılacağını açıklamanız da istenmektedir.

Saha çalışanlarının tespitleri

Yol üzerinde bulunan bazı noktalar	*Metre* $(Mesafe, Yükseklik)$
1. Durak asansörü	$(0,0)$
	$(500, 5)$
2. Durak asansörü	$(1000, 10)$
	$(1500, 13.75)$
3. Durak asansörü	$(2000, 17)$
	$(2400, 17.96)$
4. Durak asansörü	$(2800, 17.64)$
	$(3000, 20.68)$
5. Durak asansörü	$(3500, 26.18)$

EK-B: İlişkilendirme Beceri Testi

1. Fonksiyon kavramını tanımlayın.
2. Fonksiyon kavramı hangi matematiksel kavramlarla ilişkilidir?
3. Kendi belirlediğiniz bir fonksiyon örneği üzerinde, bu fonksiyonun;
    - Cebirsel ifadesini (sembolik, denklem, notasyon vb.)
    - Tablo/nümerik ifadesini
    - Grafiksel ifadesini (analitik düzlem, serbest çizim vb.)
    - Sözel ifadesini belirtin.
4. Fonksiyon kavramının gerçek yaşamda uygulama alanlarına örnek verin.
5. Türev kavramını tanımlayın.
6. Türev kavramı hangi matematiksel kavramlarla ilişkilidir?
7. Kendi belirlediğiniz bir türev örneği üzerinde, bu türevin;
    - Cebirsel ifadesini (sembolik, denklem, notasyon vb.)
    - Tablo/nümerik ifadesini
    - Grafiksel ifadesini (analitik düzlem, serbest çizim vb.)
    - Sözel ifadesini belirtin.
8. Türev kavramının gerçek yaşamda uygulama alanlarına örnek verin.
9. İntegral kavramını tanımlayın.
10. İntegral kavramı hangi matematiksel kavramlarla ilişkilidir?
11. Kendi belirlediğiniz bir integral örneği üzerinde, bu integralin;
    - Cebirsel ifadesini (sembolik, denklem, notasyon vb.)
    - Tablo/nümerik ifadesini
    - Grafiksel ifadesini (analitik düzlem, serbest çizim vb.)

- Sözel ifadesini belirtin.

12. İntegral kavramının gerçek yaşamda uygulama alanlarına örnek verin.

EK:C Etik Komisyonu Onay Bildirimi

Tarih: 24/10/2019
Sayı: 35853172-300-E.00000826713

T.C.
HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
Rektörlük

Sayı : 35853172-300
Konu : Bilge TANJU (Etik Komisyon İzni)

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

Enstitünüz Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı yüksek lisans öğrencisi **Bilge TANJU**'nun **Prof. Dr. Şenol DOST** danışmanlığında yürüttüğü **"Matematik Öğretmen Adaylarının Temsil ve İlişkilendirme Becerilerinin Matematiksel Modelleme Sürecinde İncelenmesi"** başlıklı tez çalışması Üniversitemiz Senatosu Etik Komisyonunun **15 Ekim 2019** tarihinde yapmış olduğu toplantıda incelenmiş olup, etik açıdan uygun bulunmuştur.

Bilgilerinizi ve gereğini saygılarımla rica ederim.

e-imzalıdır
Prof. Dr. Rahime Meral NOHUTCU
Rektör Yardımcısı

Evrakın elektronik imzalı suretine https://belgedogrulama.hacettepe.edu.tr adresinden [illegible] kodu ile erişebilirsiniz.
Bu belge 5070 sayılı Elektronik İmza Kanunu'na uygun olarak Güvenli Elektronik İmza ile imzalanmıştır.

Hacettepe Üniversitesi Rektörlük 06100 Sıhhiye-Ankara
Telefon:0 (312) 305 3001-3002 Faks:0 (312) 311 9992 E-posta:yazimd@hacettepe.edu.tr İnternet Adresi: www.hacettepe.edu.tr

Sevda TOP**