RIESZ UZAYLARI ÜZERİNDE TANIMLI SIRA KOMPAKT VE SINIRSIZ SIRA KOMPAKT OPERATÖRLER

ORDER COMPACT AND UNBOUNDED ORDER COMPACT OPERATORS ON RIESZ SPACES

ŞAZİYE ECE ÖZDEMİR

DOÇ. DR. NAZİFE ERKURŞUN ÖZCAN

Tez Danışmanı

Hacettepe Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin

Matematik Anabilim Dalı için Öngördüğü

YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırlanmıştır.

2020

ÖZET

RIESZ UZAYLARI ÜZERİNDE TANIMLI SIRA KOMPAKT VE SINIRSIZ SIRA KOMPAKT OPERATÖRLER

Şaziye Ece ÖZDEMİR

Yüksek Lisans, MATEMATİK Bölümü

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Nazife ERKURŞUN ÖZCAN

Ağustos 2020, 50 sayfa

Riesz uzaylarında sıra yakınsaklık topolojik bir kavram değildir. Bunun yanı sıra Fonksiyonel Analiz'de kompakt operatörler önemli bir yer tutmaktadır.

Bu tezde, Riesz uzaylarına etki eden sıra kompakt ve sınırsız sıra kompakt operatörleri araştırıyoruz.

Bir operatör eğer sıra sınırlı bir neti sıra yakınsak alt nete sahip olan bir nete resmediyor ise bu operatöre sıra kompakt operatör adı verilir. Aynı şekilde, bir operatör sıra sınırlı neti sınırsız sıra yakınsak alt nete sahip olan bir nete gönderiyor ise bu operatöre sınırsız sıra kompakt operatör adı verilir.

Bu tezde sıra kompakt, sınırsız sıra kompakt, semi-kompakt ve GAM kompakt operatöler arasındaki ilişkiler ortaya konmuştur. Sıra yakınsama ve sınırsız sıra yakınsama topolojik olmadığından, bu operatör sınıflarıyla ilgili yeni sonuçlar elde edilmiştir.

Elde edilen sonuçlar kaynakça kısmındaki [10] makalesinde yer almaktadır.

Anahtar Kelimeler: Riesz uzayı, kompakt operatör, sıra yakınsaklık, sıra kompakt, sınırsız sıra kompakt

ABSTRACT

ORDER COMPACT AND UNBOUNDED ORDER COMPACT OPERATORS ON RIESZ SPACES

Şaziye Ece ÖZDEMİR

Master of Science, Department of MATHEMATICS

Supervisor: Doç. Dr. Nazife ERKURŞUN ÖZCAN

August 2010, 50 pages

Order convergence and unbounded order convergence are not topological terms on Riesz space. On the other hand, compact operatör takes an important place in functional analysis.

In this thesis, we investigate order compact and unbounded order compact operators acting on Riesz spaces.

An operatör is said to be order compact if it maps an arbitrary order bounded net to a net with an order convergent subnet. In the same way, if an operator maps order bounded net to a net with unbounded order convergent subnet then it is called an unbounded order compact operatör.

We expose the relationships between order compact, unbounded order compact, semi-compact and GAM-compact operators. Since order convergence and unbounded order convergence are not topological, we derive new results related to these classes of operators. The results are included in the article [10] in the bibliography section.

Keywords: Riesz spaces, order convergence, order compact, unbounded order compact

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının yürütülmesinde desteğini ve bilgisini hiç esirgemeyen danışmanım Doç. Dr. Nazife Erkurşun Özcan'a, TÜBİTAK projesine dahil ederek akademik çalışmalarıma yoğunlaşma imkanı sağlayan Doç. Dr. Oğuz Yayla'ya, TÜBİTAK 1002 Hızlı Destek Programı kapsamında 118F204 nolu proje ile kısmi desteğinden dolayı TÜBİTAK'a, inandığım yolda ilerlemem için daima yüreklendiren anneme-babama, tüm aileme , yoğun çalışmalarım sırasında sabrı ve sağladığı sonsuz motivasyondan dolayı sevgili eşime çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

1 GİRİŞ

Riesz uzayları üzerine ilk çalışma, 1928 yılında Frigyes Riesz tarafından lineer fonksiyonların ayrışımı konusunda yazdığı makalesi kabul edilir. Riesz uzaylarının belli başlı özellikleri 1930'larda Kantorovich ve Heudental tarafından ayrı çalışmalar ile gösterilmiştir. Bu çalışmalardan sonra bu alana olan ilgi artmış ve Nakano, Ogasawara, Yosida, Vulikh gibi matematikçiler de alandaki gelişmelere katkı sağlamışlardır. 1980'lerden sonra pozitif operatörler tam anlamıyla anlaşılmaya başlanmış ve Riesz uzaylarının kullanım alanları oyun teorisi, denge teorisi, finans ve istatistik gibi alanlar ile genişlemiştir.

E bir Riesz uzayı ve $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \subset E$ bir net ve $x \in E$ olmak üzere eğer $|x_\alpha - x| \leq y_\alpha$ olacak şekilde $y_\alpha \downarrow 0$ neti var ise (x_α) neti x'e sıra yakınsaktır $(o - yakınsak)$ denir ve $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ şeklinde gösterilir. Yine E Riesz uzayı içerisindeki bir (x_α) neti ve $x \in E$ için her $u \in E^+$ olmak üzere $|x_\alpha - x| \wedge u \xrightarrow{o} 0$ ise bu nete sınırsız sıra yakınsaktır $(uo - yakınsak)$ denir ve $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ olarak yazılır. Sınırsız sıra yakınsaklık ilk defa 1948 yılında H. Nakano [17] tarafından "bireysel yakınsaklık" adı altında tanımlanmıştır. Daha sonra Nakano tarafından oldukça bilinen Birkhoff ergodik teoremi Banach latislerindeki KB-uzaylarına genişletilmiştir. Bu genişletme fikri $\mathbb{P}$ olasılık ölçüsü olmak üzere $L_1(\mathbb{P})$'deki dizilerin uo-yakınsaklığının hemen hemen yakınsaklığa denk oluşundan kaynaklanır. 1964 yılında ise R. De Marr [7] tarafından adı sıralı vektör uzaylarında sınırsız sıra yakınsaklık olarak değiştirilmiştir. De Marr'ın amacı, herhangi bir yerel konveks bir F uzayını , sıralı vektör uzayı olan E'nin içine gömerek F'deki topolojik yakınsaklığın E'deki sınırsız sıra yakınsaklığa denk olduğunu söyleyebilmektir. Banach latislerindeki zayıf yakınsaklık ve uo-yakınsaklık arasındaki bağlantı ise 1977 yılında A. Wickstead [21] tarafından gösterilmiştir. S. Kaplan [14] ise zayıf birime sahip Dedekind tam Riesz uzaylarında uo-yakınsaklığın iki tanımlamasını yapmıştır.

Son zamanlarda N. Gao ve F. Xanthos [13], Banach latislerinde sınırsız sıra yakınsaklık ve sınırsız sıra Cauchy çalışmıştır. KB-uzayları ve pozitif Schur özelliği ile Banach latislerinde bu kavramları karakterize etmişlerdir. Buna ek olarak; sınırsız sıra Cauchy dizilerini ölçüden bağımsız olacak şekilde kurulmuş Doob's alt-martingale yakınsalık teoremini genişletmek için kullanmışlardır. Çalışmalarının devamı olarak 2014 yılında N. Gao Banach latislerinin dualleri üzerinde sınırsız sıra yakınsaklık çalışmıştır [11]. 2017 yılında ise [12], N. Gao, V. Troitsky ve F. Xanthos sınırsız sıra yakınsaklığın özelliklerini incelemişlerdir. Özellikle sınırsız sıra yakınsaklığın regüler alt latisler arasındaki geçişlerde kararlı olduğunu kanıtlamışlardır. Tüm bunlardan sonra latis-normlu Riesz uzayları üzerinde kompakt operatörlerin incelenmesi A. Aydın, E. Emelyanov, N. Erkurşun-Özcan, M. Marabeh tarafından yapılmıştır, [3].

Banach latislerinde kompakt operatörlerin merkezi operatör teorisinde önemli bir yeri vardır. Buna ek olarak operatörlerin sınıflandırılmasına ilişkin somut örnekler, $C(K)$ veya $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ uzayları üzerinde fazlaca verilmektedir. Fiziksel bir sistem bu tip operatörlerin aynı topolojik veya dinamik özelliklerini taşıyan, uygun şekilde tanımlanmış bir operatör oluşturabilir. Dahası; bu operatör sınıflarının tamamının soyut ortamlara ve genellemelere daha fazla izin verdiği bilinmektedir. Topolojik vektör latislerinin genellemesi buna örnek olarak verilebilir.

Bu tezde topolojik olmayan yakınsamalar kullanılarak vektör latisleri arasında operatörlerin kompaktlık özellikleri çalışılmıştır. Bunlara ek olarak vektör latislerinin kurulumunda elde edilen sonuçlar normlu latis uzaylarda operatörlere ışık tutacaktır, [3], [5], [18]. Vektör latislerindeki çeşitli yakınsama türlerinin çeşitliliği daha genel durumlar için farklı sonuçların türetilmesini sağlar.

Tez dört bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde tez boyunca kullanacağımız ön bilgilerin ayrıntısı verilmiştir. Daha fazla bilgi için herhangi bir Banach latisleri kitabından yararlanılabilir. Üçüncü kısımda sıra kompakt operatörler incelenmiştir. Sıra kompaktlık, sıra sınırlılık, sıra süreklilik ve GAM-kompaktlık arasındaki bağlantılar ele alınmıştır. Dördüncü kısımda sınırsız sıra kompakt operatörler incelenmiştir. Bu bölümde kompakt, sıra kompakt ve sınırsız sıra kompakt operatörlerin arasındaki ilişkiler incelenmiş ve örnekler verilmiştir.

Bu çalışma boyunca tüm vektör latisler Arşimedyandır.

2 ÖN BİLGİLER

Bu bölümde tez boyunca kullanılacak olan temel tanım ve kavramlar verilecektir. Detaylı bilgi için herhangi bir klasik fonksiyonel analiz veya Banach latisleri kitabına bakılabilir. Örneğin; [1], [2], [15], [22] ve [20] kaynakları incelenebilir.

2.1 Riesz Uzaylarının Temel Özellikleri

Tanım 2.1.1. E boştan farklı herhangi bir küme ve bu küme üzerinde tanımlanan "$\leq$" işlemi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa E kümesine *kısmi sıralı küme* denir.
Her u,v,z $\in$ E için,

(i) $u \leq u$ (yansıma özelliği)

(ii) $u \leq v$ ve $v \leq u \Rightarrow u = v$ (ters simetrik özelliği)

(iii) $u \leq v$ ve $v \leq z \Rightarrow u \leq z$ (geçişkenlik özelliği)

Tanım 2.1.2. E kısmi sıralı kümesi $\mathbb{R}$ cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olsun. Bu durumda E kısmi sıralı vektör uzayına aşağıdaki koşulları sağlıyorsa *sıralı vektör uzayı* denir.

Her u,v,z $\in$ E ve $0 \leq \lambda \in \mathbb{R}$ için,

(i) $u \leq v \Rightarrow u + z \leq v + z$

(ii) $u \leq v \Rightarrow \lambda u \leq \lambda v$

Tanım 2.1.3. Sıralı vektör uzayı aynı zamanda bir latis ise (boştan farklı bir kümeden alınan iki elemanın supremum veya infimum değeri de kümeye aitse) bu uzaya vektör latis veya Riesz Uzayı denir.

Tanım 2.1.4. E vektör latisindeki $u \geq 0$ özelliğini sağlayan $u \in E$ elemanına pozitif eleman denir. $E^+ = \{u \in E : u \geq 0\}$ şeklinde tanımlanan kümeye E'nin pozitif konisi adı verilir ve pozitif koni aşağıdaki özellikleri sağlar.

(i) $E^+ + E^+ \subseteq E^+$

(ii) Her $0 \leq \lambda \in \mathbb{R}$ için $\lambda E^+ \subseteq E^+$

(iii) $E^+ \cap (-E^+) = \{0\}$

E vektör uzayının herhangi bir F alt uzayı yukarıdaki üç koşulu sağlıyor ise F, E'nin konisidir denir.

Tanım 2.1.5. E sıralı vektör uzayı ve A boştan farklı bir alt kümesi olsun. Eğer her $a \in A$ için $u \geq a$ olacak şekilde bir $u \in E$ bulunabiliyorsa A kümesine üstten sınırlıdır denir. A kümesinin üst sınırlarının en küçüğüne ise A'nın en küçük üst sınırı (supremumu) adı verilir. Benzer şekilde her $a \in A$ için $v \leq a$ olacak şekilde bir tane $v \in E$ bulunabiliyorsa A kümesine alttan sınırlıdır denir. A kümesinin alt sınırlarının en büyüğüne A'nın en büyük alt sınırı (infimumu) adı verilir.

Lemma 2.1.6. *E sıralı vektör uzayı bir Riesz uzayıdır ancak ve ancak her $u, v \in E$ ikilisi için $u \wedge v \in E$ sağlanır, dahası eğer u ve v Riesz uzayının elemanları ise*

$$u \vee v = -\left[(-u) \wedge (-v)\right]$$

ve

$$u \wedge v = -\left[(-u) \vee (-v)\right]$$

olur.

Kanıt. E sıralı vektör uzayının her ikilisinin infimum değeri var olsun. $u, v \in E$ olmak üzere $w = (-u) \wedge (-v)$ olarak alalım. Burada $u \vee v = -w$ olduğunu görmek istiyoruz. Öncelikle w'nun infimum olmasından dolayı $w \leq -u$ ve $w \leq -v$ ya da $u \leq -w$ ve $v \leq -w$ olduğunu biliyoruz. Buradan $-w$, $\{u, v\}$ kümesi için bir üst sınırdır. O halde $-w$'nin bu küme için üst sınırların en küçüğü olduğunu gösterelim. Varsayalım ki $u \leq t$ ve $v \leq t$ olacak şekilde bir t vektörü olsun. Bu durumda $-t \leq -u$ ve $-t \leq -v$ olur. O halde $-t \leq (-u) \wedge (-v) = w$ sağlanır ise $t \geq -w$ olur. Burada $u \vee v = -w$ sağlanır. Diğer yönü de benzer şekilde gösterilir.

□

Tanım 2.1.7. E Riesz uzayındaki herhangi bir u elemanının pozitif kısmı $u^+ = u \vee 0$, negatif kısmı $u^- = (-u) \vee 0$ ve mutlak değeri $|u| = u \vee (-u)$ şeklinde gösterilir.

Teorem 2.1.8. *(Latis Özellikleri) u, v ve w bir Riesz uzayının elemanları olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır.*

(1) $u + (v \vee w) = (u + v) \vee (u + w)$ *ve* $u + (v \wedge w) = (u + v) \wedge (u + w)$

(2) $u - (v \wedge w) = (u - v) \vee (u - w)$ *ve* $u - (v \vee w) = (u - v) \wedge (u - w)$

(3) $u \vee v = (u - v)^+ + v = (v - u)^+ + u$

(4) *Her* $\lambda \geq 0$ *için* $\lambda(u \vee v) = (\lambda u) \vee (\lambda v)$ *ve* $\lambda(u \wedge v) = (\lambda u) \wedge (\lambda v)$

(5) *Her* $\lambda \in \mathbb{R}$ *için* $|\lambda u| = |\lambda||u|$

(6) $u \vee v = \dfrac{1}{2}(u + v + |u - v|)$ *ve* $u \wedge v = \dfrac{1}{2}(u + v - |u - v|)$

(7) $u + v = u \vee v + u \wedge v$

(8) $u = u^+ - u^-$ *ve* $u^+ \wedge u^- = 0$

(9) $|u| = u^+ + u^-$ *(buradan* $|u| = 0 \Leftrightarrow u = 0$*)*

(10) $|u - v| = u \vee v - u \wedge v$

(11) $|u + v| \vee |u - v| = |u| + |v|$

(12) $|u| \vee |v| = \dfrac{1}{2}(|u + v| + |u - v|)$ *ve* $|u| \wedge |v| = \dfrac{1}{2}||u + v| - |u - v||$

Kanıt. (1) Sıralı vektör uzayındaki iki v ve w elemanının supremumu $v \vee w$ var ise her u elemanı için $\{u+v, u+w\}$ kümesinin de supremumu vardır ve $u+v \vee w = (u+v) \vee (u+w)$ olur. Öncelikle sabit bir u için $t = v \vee w$ olsun. $u+v \leq u+t$ ve $u+w \leq u+t$ olduğu açıkça görülür. Varsayalım ki $u+v \leq s$ ve $u+w \leq s$ olsun. O halde $v \leq s-u$ ve $w \leq s-u$ şeklinde yazılabilir ve böylece $t = v \vee w \leq s$ veya $u+t \leq s$ olur. Buradan da açıktır ki $u+t$, $\{u+v, u+w\}$ kümesinin supremumudur. İkinci kısım da benzer şekilde gösterilebilir.

(2) Lemma 2.1.6 yardımıyla bir önceki adımlar izlenir.

(3) $(u-v)^+ + v = (u-v) \vee 0 + v = [(u-v)+v] \vee (0+v) = u+v$ şeklinde gösterilir. İkinci kısım da benzer şekilde ifade edilir.

(4) $\lambda > 0$ alalım. $u \leq u \vee v$ ve $v \leq u \vee v$ olduğundan $\lambda u \leq \lambda(u \vee v)$ ve $\lambda v \leq \lambda(u \vee v)$ yazılabilir. $u \vee v = w$ şeklinde ifade edelim. Buradan $u \leq \frac{1}{\lambda} w$ ve $v \leq \frac{1}{\lambda} w$ ve $u \vee v \leq \frac{1}{\lambda} w$ olur. Sonuç olarak $\lambda(u \vee v) \leq w$ olup $(\lambda u) \vee (\lambda v) = \lambda(u \vee v)$ olduğu görülür. Diğer kısım da benzer şekilde gösterilir.

(5) Eğer $\lambda \geq 0$ ise $|\lambda u| = (\lambda u) \vee (-\lambda u) = \lambda\,[u \vee v(-u)] = |\lambda||u|$ olur. Eğer $\lambda < 0$ ise $|\lambda u| = (\lambda u) \vee (-\lambda u) = [(-\lambda)(-u)] \vee (-\lambda u) = (-\lambda)\,[(-u) \vee (u)] = |\lambda||u|$ olur.

(6) Birinci kısım için;

$$\frac{1}{2}(u+v+|u-v|) = \frac{1}{2}\,[u+v+(u-v) \vee (v-u)] = \frac{1}{2}\,[(2u) \vee (2v)] = u \vee v$$

olur.

(7)

$$u \wedge v \leq v \Rightarrow v - u \wedge v \geq 0$$
$$u + v - u \wedge v \geq u$$
$$u + v - u \wedge v \geq v$$
$$\Rightarrow u + v - u \wedge v \geq u \vee v$$
$$u \vee v + u \wedge v \leq u + v \tag{2.1.1}$$

Diğer yandan

$$u \leq u \vee v \Rightarrow u + v - u \vee v \leq v$$

$$v \leq u \vee v \Rightarrow u + v - u \vee v \leq u$$

$$\Rightarrow u + v - u \vee v \leq u \wedge v$$

$$u + v \leq u \wedge v + u \vee v \tag{2.1.2}$$

olup (2.1.1) ve (2.1.2)'den istenilen sonuç elde edilir.

(8) (7). adımda $v = 0$ olarak alınırsa

$$u = u \vee 0 + u \wedge 0 = u \vee 0 - (-u) \vee 0 = u^+ - u^-$$

olarak bulunur. İkinci kısmı için ise

$$\begin{aligned} u^+ \wedge u^- &= (u^+ - u^-) \wedge 0 + u^- \\ &= u \wedge 0 + u^- \\ &= -[(-u) \vee 0] + u^- \\ &= -u^- + u^- \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur.

(9)

$$|u| = u \vee (-u) = (2u) \vee 0 - u = 2u^+ - (u^+ - u^-) = u^+ + u^-$$

elde edilir.

(10) Mutlak değer tanımı, (1). ve (7). özellikler kullanılarak

$$|u-v| = (u-v) \vee (v-u) = (2u) \vee (2v) - (u+v) = 2(u+v) - (u \vee v + u \wedge v) = u \vee v - u \wedge v$$

sağlanır.

(11)

$$\begin{aligned} |u+v| \vee |u-v| &= [(u+v) \vee (-u-v)] \vee [(u-v) \vee (v-u)] \\ &= [(u+v) \vee (u-v)] \vee [(-u-v) \vee (v-u)] \\ &= [u + v \vee (-v)] \vee [-u + (-v) \vee v] \\ &= [u + |v|] \vee [-u + |v|] \\ &= [u \vee (-u)] + |v| \\ &= |u| + |v| \end{aligned}$$

(12)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[|u+v| + |u-v|] &= \frac{1}{2}[(u+v) \vee (-u-v) + |u-v|] \\ &= \frac{1}{2}[(u+v+|u-v|) \vee (-u-v+|u-v|)] \\ &= \frac{1}{2}([2(u \vee v)] \vee [2\{(-u) \vee (-v)\}]) \\ &= u \vee v \vee (-u) \vee (-v) \\ &= [u \vee (-u)] \vee [u \vee (-v)] \\ &= |u| \vee |v| \end{aligned}$$

$\square$

Lemma 2.1.9. *E Riesz uzayının boştan farklı her A alt kümesi supremuma (ya da infumuma) sahip ise her $u \in E$ için $u + A$ kümesi de supremum (ya da infimum) değerine sahiptir ve aşağıdaki latis özelliklerini sağlar.*

$$u + supA = sup(u + A) \ ve \ u + infA = inf(u + A)$$

Benzer şekilde

$$u - supA = inf(u - A) \ ve \ u - infA = sup(u - A)$$

$$\lambda supA = sup(\lambda A) \ ve \ \lambda infA = inf(\lambda A)$$

özelliklerine de sahiptir.

Tanım 2.1.10. E Riesz uzayında üstten sınırlı her kümenin supremum değeri var ise E uzayına Dedekind tamdır denir.

Riesz uzayı dağılma kuralını sağlayan latis olarak düşünülebilir. Aslında sonsuz dağılma kuralını sağlıyor diyebiliriz ve bir sonraki lemmada bu durumu göstereceğiz.

Lemma 2.1.11. *(Sonsuz Dağılım Kuralı) E Riesz uzayının boştan farklı alt kümesi A supremum değere (supA) sahip ise her $u \in E$ için $sup\{u \wedge a : a \in A\}$ vardır ve*

$$u \wedge supA = sup\{u \wedge a\}$$

sağlanır. Benzer şekilde E Riesz uzayının boştan farklı A alt kümesinin infimum değeri (infA) var ise her $u \in E$ için $inf\{u \vee a : a \in A\}$ vardır ve

$$u \vee infA = inf\{u \vee a : a \in A\}$$

olur. Özel olarak eğer $u, u_1, u_2, \ldots, u_n$ Riesz uzayının elemanları ise

$$u \wedge \left[\bigvee_{i=1}^{n} u_i\right] = \bigvee_{i=1}^{n} (u \wedge u_i)$$

ve

$$u \vee \left[\bigwedge_{i=1}^{n} u_i\right] = \bigwedge_{i=1}^{n} (u \vee u_i)$$

elde edilir.

Kanıt. İlk formülü kanıtlamak yeterli olacaktır. Sabit $u \in A$ için s=supA olsun. Her $a \in A$ için $u \wedge a \leq u \wedge s$ olduğu açıktır. Varsayalım ki her $a \in A$ için $\{u \wedge a : a \in A\}$ kümesinin $u \wedge a \leq t$ olacak şekilde $t \in E$ üst sınırı olsun. Latis özelliklerinden $x \vee y + x \wedge y = x + y$ kullanırsak her $a \in A$ için $u + a - u \vee a = u \wedge a \leq t$ sağlanır. Buradan her $a \in A$ için $a \leq t + u \vee a - u \leq t + u \vee s - u$ olur ve böylece $s \leq t + u \vee s - u$ sağlanır. Sonuç olarak $u \wedge s = u + s - u \vee s \leq t$ ve böylece $u \wedge s = sup\{u \wedge a : a \in A\}$ olur.

□

Dağılma kuralının bir sonucu olarak Riesz uzayının çok bilinen Birkoff Özelliği karşımıza çıkar.

Sonuç 2.1.12. *(Birkoff Özelliği) Eğer u, v ve w Riesz uzayında keyfi elemanlar ise*

$$|u \vee w - v \vee w| + |u \wedge w - v \wedge w| = |u - v|$$

Kanıt. Teorem 2.1.8'de bulunan (10). ve (7). latis özelliklerini dağılım kuralı ile birlikte kullanırsak;

$$\begin{aligned} &|u \vee w - v \vee w| + |u \wedge w - v \wedge w| \\ &\qquad = [(u \vee w) \vee (v \vee w) - (u \vee w) \wedge (v \vee w)] \\ &\qquad + \cdots + [(u \wedge w) \vee (v \wedge w) - (u \wedge w) \wedge (v \wedge w)] \\ &\qquad = [w \vee (u \vee v) - w \vee (u \wedge v)] + [w \wedge (u \vee v) - w \wedge (u \wedge v)] \\ &\qquad = [w \vee (u \vee v) + w \wedge (u \vee v)] - [w \vee (u \wedge v) + w \wedge (u \wedge v)] \\ &\qquad = [w + u \vee v] - [w + u \wedge v] = u \vee v - u \wedge v = |u - v| \end{aligned}$$

elde edilir. □

Şimdi Riesz uzayında önemli bazı latis eşitsizliklerini kanıtlayacağız.

Teorem 2.1.13. *(Latis Eşitsizlikleri) Aşağıda verilen latis eşitsizlikleri Riesz uzayında sağlanır.*

(1) u ve v Riesz uzayında iki eleman ve $u \leq v$ koşulunu sağlıyor ise $u^+ \leq v^+$, $u^- \leq v^-$ eşitsizlikleri elde edilir.

(2) (Üçgen Eşitsizliği) u ve v Riesz uzayında iki eleman olsun. Bu durumda

$$||u| - |v|| \leq |u + v| \leq |u| + |v|$$

sağlanır.

(3) (Birkoff Eşitsizliği) u,v ve w Riesz uzayında elemanlar olsun. Bu durumda

$$|u \vee w - v \vee w| \leq |u - v| \text{ ve } |u \wedge w - v \wedge w| \leq |u - v|$$

olur.

(4) Eğer $u, u_1, u_2, \ldots, u_n$ Riesz uzayında pozitif elemanlar ise

$$u \wedge (u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n) \leq u \wedge u_1 + u \wedge u_2 + u \wedge u_3 + \ldots + u \wedge u_n$$

olur. Eğer her $i \neq j$ için $u \wedge u_i \wedge u_j = 0$ ise eşitlik durumu elde edilir.

(5) Eğer $u, u_1, u_2, \ldots, u_n$ Riesz uzayında pozitif elemanlar ise

$$n(u_1^+ \wedge \ldots \wedge u_n^+) = n(u_1 \wedge \ldots \wedge u_n)^+ \leq (u_1 + \ldots + u_n)^+$$

sağlanır.

Kanıt. (1) $u \leq v$ olduğundan $u \leq v \leq v \vee 0 = v^+$ ve $0 \leq v^+$ olur. Buradan $u^+ = u \vee 0 \leq v^+$ yazılır. Diğer eşitsizlik için de $-v \leq -u$ olarak alınıp benzer adımlar uygulanabilir.

(2) $u + v \leq |u| + |v|$ ve $-(u + v) = -u - v \leq |u| + |v|$ olduğu açıktır. Bu da $|u + v| = (u + v) \vee [-(u + v)] \leq |u| + |v|$ olduğunu gösterir. Diğer eşitsizlik için $|u| = |(u + v) - v| \leq |u + v| + |v|$ olup ve böylece $|u| - |v| \leq |u + v|$ olur. Benzer şekilde

$$-(|u| - |v|) = |v| - |u| \leq |u + v|$$

yazılacağından sonuç olarak $||u| - |v|| = (|u| - |v|) \vee (|v| - |u|)| \leq |u + v|$ elde edilir.

(3) Sonuç 2.1.12'de bulunan Birkoff özelliği ispatındaki adımlar uygulanır.

(4) u, u_1 *ve* u_2 pozitif elemanlar olsun. Basitçe $v = u \wedge (u_1 + u_2)$ alalım. Buradan $v \leq u_1 + u_2$ ve $v - u_1 \leq u_2$ olur. Ayrıca $v - u_1 \leq v \leq u$ elimizde olduğundan, $v - u_1 \leq u \wedge u_2$ yazılır. Bu da belirtir ki $v - u \wedge u_2 \leq u_1$'dir ve böylece $v - u \wedge u_2 \leq v \leq$ olup $v - u \wedge u_2 \leq u \wedge u_1$ veya $v \leq u \wedge u_1 + u \wedge u_2$ elde edilir. Eğer $u \wedge u_1 \wedge u_2 = (u \wedge u_1) \wedge (u \wedge u_2) = 0$ ise

$$\begin{aligned} u \wedge (u_1 + u_2) &\leq u \wedge u_1 + u \wedge u_2 \\ &= (u \wedge u_1) \vee (u \wedge u_2) \\ &= u \wedge (u_1 \vee u_2) \\ &\leq u \wedge (u_1 + u_2) \end{aligned}$$

olup

$$u \wedge (u_1 + u_2) = u \wedge u_1 + u \wedge u_2$$

sağlanır.

(5) $n(u_1 \wedge \ldots \wedge u_n) \leq u_1 + \ldots + u_n$ eşitsizliğinden $n(u_1 \wedge \ldots \wedge u_n)^+ \leq (u_1 + \ldots + u_n)^+$ kolayca elde edilir. Buradan;

$$\begin{aligned} n(u_1^+ \wedge \ldots \wedge u_n^+) &= n\left[(u_1 \vee 0) \wedge (u_2 \vee 0) \wedge \ldots \wedge (u_n \vee 0)\right] \\ &= n[(u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_n) \vee 0 \\ &= n(u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_n)^+ \end{aligned}$$

□

Tanım 2.1.14. Riesz uzayındaki iki u ve v elemanı $|u| \wedge |v| = 0$ koşulunu sağlıyor ise ayrık ya da birbirine diktir denir ve $u \perp v$ şeklinde gösterilir.
Bir Riesz uzayının boştan farklı iki alt kümesi A ve B'nin ayrık veya birbirine dik olması için her $a \in A$ ve $b \in B$ için $a \perp b$ olmalıdır.
$u \perp D$ ifadesi her $v \in D$ için $u \perp v$ anlamına gelmektedir. Bir sonraki lemmada basit ayrıklık özelliklerinden bahsedeceğiz.

Lemma 2.1.15. *(Ayrıklık Özellikleri)*

(1) Eğer bir Riesz uzayında $u \perp v$ ve $u \perp w$ ise her $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ için $u \perp (\lambda v + \mu w)$ sağlanır.

(2) Bir Riesz uzayında keyfi iki u ve v vektörleri ayrıktır ancak ve ancak $|u + v| = |u - v|$'dir.

(3) Eğer bir Riesz uzayında $u \perp v$ ise

$$|u+v| = |u-v| = |u| + |v| = ||u| - |v|| = |u| \vee |v|$$

olur.

(4) Riesz uzayının ikili ayrık sıfırdan farklı elemanları içeren alt kümesi lineer bağımsızdır.

Kanıt. (1) Verilenlerden $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ için $u \perp v$ ve $u \perp w$ olduğunu biliyoruz. Buradan

$$\begin{aligned}
0 \leq |u| \wedge (|\lambda v + \mu w|) &\leq |u| \wedge (|\lambda v| + |\mu w|) \\
&= |u| \wedge (|\lambda||v| + |\mu||w|) \\
&\leq |u| \wedge (|\lambda||v|) + |u| \wedge (|\mu||w|) \\
&\leq (1+|\lambda|)|u| \wedge (1+|\lambda|)|v| + (1+|\mu|)|u| \wedge (1+|\mu|)|w| \\
&= (1+|\lambda|)\,[|u| \wedge |v|] + (1+|\mu|)\,[|u| \wedge |w|] \\
&= (1+|\lambda|)0 + (1+|\mu|)0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

ve böylece $|u| \wedge |\lambda v + \mu w| = 0$ olup $|u| \perp |\lambda v + \mu w|$ sağlanır.

(2) Teorem 2.1.8 (12). maddeden bir Riesz uzayındaki iki vektör için

$$|u| \wedge |v| = \frac{1}{2}||u+v| - |u-v||$$

olduğunu biliyoruz. Buradan $u \perp v$ ($|u| \wedge |v| = 0$) ancak ve ancak $|u+v| = |u-v|$ gerçekleşir.

(3) Varsayalım ki bir Riesz uzayında $u \perp v$ olsun. (2). maddeden biliyoruz ki $|u+v| = |u-v|$ olur. Benzer sonuç $|u|$ ve $|v|$ için de gerçekleşir ve

$$||u| - |v|| = ||u| + |v|| = |u| + |v| = |u| \vee |v|$$

elde edilir. Teorem 2.1.8'de (11)'i düşünürsek

$$|u+v| = |u-v| = |u+v| \vee |u-v| = |u| + |v|$$

sonucu sağlanmış olur.

(4) Varsayalım ki bir Riesz uzayında $u_1, \ldots, u_n$ sıfırdan farklı ikili ayrık elemanlar ve $\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n + \ldots + \alpha_n u_n = 0$ olsun. (1). ve (3). maddelerin sonucu olarak

$$0 = |\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n| = |\alpha_1 u_1| + \ldots + |\alpha_n u_n| = |\alpha_1||u_1| + \ldots + |\alpha_n||u_n|$$

ve buradan her i için $|\alpha_i||u_i| = 0$ olur. Her i için $|u_i| > 0$ olduğundan $|\alpha_i| = 0$ veya her i için $\alpha_i = 0$'dir. Sonuç olarak $u_1, \ldots, u_n$ lineer bağımsız vektörlerdir. □

Riesz Ayrışım Özelliği olarak aşağıda verilen özellik Riesz uzaylarında kritik bir rol oynar.

Teorem 2.1.16. ***(Riesz Ayrışım Özelliği)*** *E bir Riesz uzayı ve* $|u| \leq |v_1 + v_2 + \ldots + v_n|$ *eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda her* $i = 1, \ldots, n$ *için* $|u_i| \leq |v_i|$ *ve* $u = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ *olacak şekilde* $u_1, \ldots, u_n \in E$ *vardır. Ek olarak eğer u pozitif bir eleman ise* u_i*'ler de pozitif eleman olarak seçilebilir.*

Kanıt. $n = 2$ için bu sonucu ispatlamak tümavarımla diğer n'ler için göstermeye yeterli olacaktır. Varsayalım ki $|u| \leq |v_1 + v_2|$ ve $u_1 = [u \vee (-|v_1|)] \wedge |v_1|$ olsun. $-|v_1| \leq u \vee (-|v_1|)$ ve $-|v_1| \leq |v_1|$ olduğundan $-|v_1| \leq u_1$ ve $-u_1 \leq |v_1|$ elde edilir. Diğer yandan $u_1 \leq |v_1|$ olup $|u_1| = (-u_1) \vee u_1 \leq |v_1|$ (eğer u pozitif ise $0 \leq u_1 \leq u$ olduğu açıktır) sağlanır. Şimdi eğer $u_2 = u - u_1$ alınır ise

$$u_2 = u - [u \vee (-|v_1|)] \wedge |v_1| = [0 \wedge (u + |v_1|)] \vee (u - |v_1|).$$

Bununla birlikte $|u| \leq |v_1| + |v_2|$ olması $-|v_1| - |v_2| \leq u \leq |v_1| + |v_2|$ durumunu gerektirir ve buradan

$$-|v_2| = (-|v_2|) \wedge 0 \leq (u + |v_1|) \wedge 0 \leq u_2 \leq 0 \vee (u - |v_1|) \leq |v_2|$$

olup $|u_2| \leq |v_2|$ elde edilir.

2.2 Sıra Yakınsaklık ve Özellikleri

A kümesi boştan farklı bir küme olmak üzere üzerinde tanımlı "$\succeq$" bağıntısı verilmiş olsun. Eğer;

(i) Her $\alpha \in A$ için $\alpha \succeq \alpha$

(ii) Eğer $\alpha, \beta, \gamma \in A$ için $\alpha \succeq \beta$ ve $\beta \succeq \gamma$ ise $\alpha \succeq \gamma$

(iii) Herhangi $\alpha, \beta \in A$ ikilisi için bir tane $\gamma \in A$ var ve $\gamma \succeq \alpha$, $\gamma \succeq \beta$,

koşulları sağlanıyor ise A kümesi yönlendirilmiştir denir ve $(A, \succeq)$ kümesine yönlendirilmiş küme (indis kümesi) adı verilir.

E bir Riesz uzayı olmak üzere; eğer E içindeki bir (u_α) neti herhangi β ve α için $\beta \succeq \alpha$ iken $u_\beta \geq u_\alpha$ sağlıyor ise **artandır** denir ve $u_\alpha \uparrow$ şeklinde gösterilir. Benzer şekilde **azalan** ifadesi de tanımlanır ve $u_\alpha \downarrow$ şeklinde gösterilir. $u_\alpha \uparrow u$ gösterimi; u_α artan bir nettir, $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ kümesinin supremumum değeri vardır ve bu değer u'dur anlamına gelir. Benzer şekilde $u_\alpha \downarrow u$ ifadesi de tanımlanır. $u_\alpha \uparrow\leq u$ ifadesini her α için $u_\alpha \uparrow$ ve $u_\alpha \leq u$ ($u \leq u_\alpha : u_\alpha \downarrow$ *ve* $u_\alpha \geq u$) şeklinde yorumlarız. Ayrıca boştan farklı D alt kümesi için; eğer her $u, v \in D$ ikilisi için $w \geq u$ ve $w \geq v$ olacak şekilde bir tane $w \in D$ bulunuyorsa D kümesine yukarı yönlendirilmiş küme denir ve $D \uparrow$ şeklinde gösterilir. Eğer $D \uparrow u$ ise D yukarı yönlendirilmiştir ve $supD = u$ olarak yorumlanır. Benzer ifade aşağı yönlendirilme ve infimum için de söylenir.

Yukarı yönlendirilmiş küme ile artan net arasında doğal bir bağlantı vardır. Eğer $u_\alpha \uparrow$ ise $D = \{u_\alpha : \alpha \in A\}$ kümesi için direkt olarak yukarı yönlendirilmiş kümedir diyebiliriz dahası $u_\alpha \uparrow u$ sağlanır ancak ve ancak $D \uparrow u$ diyebiliriz. Diğer yandan eğer $D \uparrow$ yukarı yönlendirilmiş küme ise her $\alpha \in D$ için $u_\alpha = \alpha$'dır. Benzer şekilde azalan net ve aşağı yönlendirilmiş küme arasında da benzer bir ilişki vardır.

Şimdi Riesz uzayında sıra yakınsaklık ifadesini inceleyeceğiz.

Tanım 2.2.1. (Sıra Yakınsaklık) E bir Riesz uzayı, $(u_\alpha)_{\alpha\in A} \subseteq E$ bir net ve $u \in E$ olsun. Eğer her α için $|u_\alpha - u| \leq v_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde $(v_\alpha)_{\alpha\in A}$ neti bulunabiliyorsa $(u_\alpha)_{\alpha\in A}$ netine sıra yakınsaktır denir ve $u_\alpha \xrightarrow{o} u$ şeklinde gösterilir. u elemanına (u_α) netinin sıra limitidir denir.

Lemma 2.2.2. *Riesz uzayında bir netin sıra limiti varsa tektir.*

Kanıt. Varsayalım ki $u_\alpha \xrightarrow{o} u$ ve $u_\alpha \xrightarrow{o} w$ olacak şekilde iki farklı limit olsun. İki farklı (v_α) ve (w_α) netleri için $|u_\alpha - u| \leq v_\alpha \downarrow 0$ ve $|u_\alpha - w| \leq w_\alpha \downarrow 0$ sağlansın. Ancak her α için;

$$|u - w| \leq |u - u_\alpha| + |u_\alpha - w| \leq v_\alpha + w_\alpha$$

ve $v_\alpha + w_\alpha \downarrow 0$ olup $|u - w| = 0$ olur, buradan u=w olduğundan limit tektir denir. □

Teorem 2.2.3. *E bir Riesz uzayı, $(u_\alpha)_{\alpha\in A}$ ve $(v_\alpha)_{\alpha\in A}$ E içinde iki farklı sıra yakınsak ($u_\alpha \xrightarrow{o} u, v_\alpha \xrightarrow{o} v$) netler olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

(i) $|u_\alpha| \xrightarrow{o} |u|$, $u_\alpha^+ \xrightarrow{o} u^+$ *ve* $u_\alpha^- \xrightarrow{o} u^-$

(ii) Her $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *için* $\lambda u_\alpha + \mu v_\alpha \xrightarrow{o} \lambda u + \mu v$

(iii) $u_\alpha \vee v_\alpha \xrightarrow{o} u \vee v$ *ve* $u_\alpha \wedge v_\alpha \xrightarrow{o} u \wedge v$

(iv) Eğer $u_\alpha \uparrow u$ *veya* $u_\alpha \downarrow u$ *ise* $u_\alpha \xrightarrow{o} u$ *olur.*

(v) Eğer her $\alpha \succeq \alpha_1$ *için* $u_\alpha \leq w$ *ise* $u \leq w$ *olur.*

(vi) Eğer $u_\alpha \uparrow$ *ve* $u_\alpha \xrightarrow{o} u$ *ise* $u_\alpha \uparrow u$ *olur.*

Kanıt.

(i) Öncelikle $u_\alpha \xrightarrow{o} u$ ise $|u_\alpha - u| \leq t_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde bir (t_α) neti vardır. Buradan

$$|u_\alpha^+ - u^+| = |(u_\alpha \vee 0) - (u \vee 0)| \leq |(u_\alpha - u) \vee 0| \leq |u_\alpha - u| \leq t_\alpha \downarrow 0$$

olup $u_\alpha^+ \xrightarrow{o} u^+$ sağlanır.

$u_\alpha^- \xrightarrow{o} u^-$ için $|u_\alpha^- - u^-| = |(u_\alpha \wedge 0) - (u \wedge 0)| \leq |(u_\alpha - u) \wedge 0| \leq t_\alpha \downarrow 0$ olur.

Buradan $|u_\alpha| = u_\alpha^+ + u_\alpha^-$ olarak tanımlandığından

$$|(u_\alpha^+ + u_\alpha^-) - (u^+ - u^-)| = |(u_\alpha^+ + u_\alpha^-) + (u^+ - u^-)| \leq |(u_\alpha^+ + u_\alpha^-)| + |(u^+ - u^-)| \leq t_\alpha \downarrow 0$$

olup $|u_\alpha| \xrightarrow{o} |u|$ elde edilir.

(ii) Verilenlerden $u_\alpha \xrightarrow{o} u$ ise $|u_\alpha - u| \leq t_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde bir $(t_\alpha) \downarrow 0$ neti ve $v_\alpha \xrightarrow{o} v$ ise $|v_\alpha - v| \leq s_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde $(s_\alpha) \downarrow 0$ netleri vardır, dahası $|\lambda| t_\alpha \downarrow 0$ ve $|\mu| s_\alpha \downarrow 0$ olacağından

$$(|\lambda| t_\alpha + |\mu| s_\alpha) \downarrow 0 \tag{2.2.1}$$

olur. Diğer yandan

$$|\lambda u_\alpha + \mu v_\alpha - \lambda u + \mu v| \leq |\lambda||u_\alpha - u| + |\mu||v_\alpha - v| \leq (|\lambda| t_\alpha + |\mu| s_\alpha) \downarrow 0$$

elde edilir.

(iii)

$$\begin{aligned}
|u_\alpha \vee v_\alpha - u \vee v| &= |u_\alpha \vee v_\alpha - u \vee v_\alpha + u \vee v_\alpha - u \vee v| \\
&\leq |u_\alpha \vee v_\alpha - u \vee v_\alpha| + |u \vee v_\alpha - u \vee v| \\
&\leq |u_\alpha - u| + |v_\alpha - v| \\
&\leq (t_\alpha + s_\alpha) \downarrow 0 \Rightarrow u_\alpha \vee v_\alpha \xrightarrow{o} u \vee v \\
|u_\alpha \wedge v_\alpha - u \wedge v| &= |u_\alpha \wedge v_\alpha - u \wedge v_\alpha + u \wedge v_\alpha - u \wedge v| \\
&\leq |u_\alpha \wedge v_\alpha - u \wedge v_\alpha| + |u \wedge v_\alpha - u \wedge v| \\
&\leq |u_\alpha - u| + |v_\alpha - v| \\
&\leq (t_\alpha + s_\alpha) \downarrow 0 \Rightarrow u_\alpha \wedge v_\alpha \xrightarrow{o} u \wedge v
\end{aligned}$$

(iv) $u_\alpha \uparrow u$ olduğu durumu ele alalım. $u_\alpha \uparrow$ ise $-u_\alpha \downarrow$ olur. Şimdi $(u - u_\alpha) \downarrow$ olup olmadığını inceleyeceğiz. Her $y_{\alpha_1}, y_{\alpha_2} \in (u - u_\alpha)$ için $y_{\alpha_1} \in (u - u_\alpha) \Rightarrow y_{\alpha_1} = u - u_\alpha$ ve $y_{\alpha_2} \in (u - u_\alpha) \Rightarrow y_{\alpha_2} = u - u_\alpha$'dır.
$-(u_\alpha) \downarrow$ olduğundan her $-u_{\alpha_1}, -u_{\alpha_2} \in -(u_\alpha)$ için $-u_{\alpha_3} \leq -u_{\alpha_1}$ ve $-u_{\alpha_3} \leq -u_{\alpha_2}$ olacak şekilde en az bir tane $-u_{\alpha_3} \in (-u_\alpha)$ vardır.
$u - u_{\alpha_3} \leq u - u_{\alpha_1}$ ve $u - u_{\alpha_3} \leq u - u_{\alpha_2}$ olup $(u - u_\alpha) \downarrow$ elde dilir.
$sup(u_\alpha) = u = inf(-u_\alpha) = -u$
$inf(u - u_\alpha) = u + inf(-u_\alpha) = u + (-u) = 0$ olup
$|u - u_\alpha| = y_\alpha \downarrow 0$ olur.

(v) $u_\alpha \leq w$ ise $w - u_\alpha \geq 0$ olur. Ayrıca $u_\alpha \xrightarrow{o} u$ olup $-u_\alpha \xrightarrow{o} -u$ ve (ii)'den toplama-çıkarma korunacağından $w - u_\alpha \xrightarrow{o} w - u$'dur. Buradan $(w - u_\alpha)^+ = w - u_\alpha \xrightarrow{o} (w - u)^+ = (w - u)$ diye pozitiflikten yazılır ve $w - u \geq 0 \Rightarrow w \geq u$ bulunur.

(vi) $u_\alpha \uparrow$ ise $(-u_\alpha) \downarrow$ olup $(u - u_\alpha) \downarrow$'dır.
(Her $u \in E$ için $u^- \leq |u|$) olduğundan $(u - u_\beta)^- \leq |u - u_\alpha|$ sağlanır ve her keyfi β için;

$$\begin{aligned}
\beta \leq \alpha \Rightarrow\ & u_\beta \leq u_\alpha \\
&\Rightarrow -u_\beta \geq -u_\alpha \\
&\Rightarrow u - u_\alpha \leq u - u_\beta \\
&\Rightarrow -(u - u_\beta) \leq -(u - u_\alpha) \\
&\Rightarrow -(u - u_\beta) \vee 0 \leq -(u - u_\alpha) \vee 0 \\
&\Rightarrow (u - u_\beta)^- \leq (u - u_\alpha)^- \\
&\Rightarrow 0 \leq (u - u_\beta)^- \leq (u - u_\alpha)^- \leq |u - u_\alpha| \leq t_\alpha \downarrow 0 \\
&\Rightarrow 0 \leq (u - u_\beta)^- \leq inf t_\alpha = 0 \quad (\beta \leq \alpha) \\
&\Rightarrow -(u - u_\beta) \vee 0 = 0 \\
&\Rightarrow -(u - u_\beta) \leq 0 \\
&\Rightarrow u_\beta - u \leq 0 \\
&\Rightarrow u_\beta \leq u
\end{aligned}$$

olup u bir üst sınırdır. Her α için;

$$0 \leq (u - u_\alpha) = |u - u_\alpha| = t_\alpha \Rightarrow 0 \leq inf(u - u_\alpha) \leq inf t_\alpha = 0$$

$$inf(u - u_\alpha) = 0 \Rightarrow -sup(u_\alpha - u) = 0 \Rightarrow sup u_\alpha = u$$

olur. Buradan $u_\alpha \uparrow u$ olduğu söylenir.

□

Tanım 2.2.4. E bir Riesz uzayı ve $F \subseteq E$ olsun. Herhangi $(u_\alpha) \subseteq F$ neti için $u_\alpha \xrightarrow{o} u$ iken $u \in F$ oluyor ise F alt kümesine sıra kapalıdır denir, yani F sıra limitlerini içeriyorsa sıra kapalıdır. Aynı tanımda net yerine dizi alırsak F alt kümesine σ-sıra kapalıdır denir. Her sıra kapalı küme σ-sıra kapalıdır.

Tanım 2.2.5. E bir Riesz uzayı ve $F \subseteq E$ olsun. Her $y \in F$ için $|x| \leq |y|$ iken $x \in F$ oluyorsa F'e solid denir.

Lemma 2.2.6. *E Riesz uzayının solid alt kümesi F'nin sıra kapalı olması için gerek ve yeter koşul $(u_\alpha) \subseteq F$, $0 \leq u_\alpha \uparrow u$ neti için $u \in F$ olmasıdır.*

Kanıt. F bir solid küme , $(u_\alpha) \subseteq F$ bir net $u_\alpha \xrightarrow{o} u$ koşulunu sağlasın. Bir tane (v_α) neti vardır öyle ki $|u_\alpha - u| \leq v_\alpha \downarrow 0$ olur.
Buradan $0 \leq (|u| - v_\alpha)^+ \uparrow |u|$ ve $(|u| - v_\alpha)^+ \leq |u_\alpha|$ koşulları sağlanır. F solid olduğundan her α için $(|u| - v_\alpha)^+$ F'nin elemanıdır. Böylece F'nin $(|u| - v_\alpha)^+$ neti yukarı yönlüdür ve $(|u| - v_\alpha)^+ \xrightarrow{o} |u|$ olur. $u \in F$ olduğundan F sıra kapalıdır. Diğer yön için F'nin sıra kapalılığı tanımından koşul sağlanır. □

2.3 İdeal, Band ve Riesz Alt Uzayı

Bu bölümde Riesz uzayının özel vektör alt uzayları olan band ve ideallerin özelliklerinden bahsedilecektir.

Tanım 2.3.1. Bir Riesz uzayının solid vektör alt uzayına **ideal** denir. Sıra kapalı ideale ise **band** adı verilir.

Önerme 2.3.2. *Eğer A ve B ideal ise onların cebirsel toplamı da*

$$A + B = \{a + b : a \in A \text{ ve } b \in B\}$$

idealdir.

Kanıt. $A+B$'nin alt vektör uzayı olduğu aşikardır. $f \in A+B$ ve $|g| \leq |f|$ için $g \in A+B$ olduğunu göstermeliyiz.
$f = f^{'} + f^{''}$ şeklinde yazalım öyle ki $f^{'} \in A$ ve $f^{''} \in B$ olsun.

$$|g| \leq |f| = |f^{'} + f^{''}|$$

olmak üzere Riesz Ayrıştırma Teoremi'nden $g = g^{'} + g^{''}$, $0 \leq |g^{'}| \leq |f^{'}|$ ve $0 \leq |g^{''}| \leq |f''|$ olacak şekilde $g^{'}, g^{''}$ vardır. A ve B ideal olduğundan $g^{'} \in A$ ve $g^{''} \in B$ elde edilir. Böylece $g = g^{'} + g^{''} \in A + B$ olup A+B idealdir. □

Lemma 2.3.3. *Bir A idealinin band olması için gerek ve yeter şart $(u_\alpha) \subseteq A$ neti için $0 \leq u_\alpha \uparrow u$ iken $u \in A$ var olmasıdır.*

Kanıt. Kanıtı Lemma 2.2.6'dan direkt olarak gelmektedir. □

E Riesz uzayının her D alt kümesini içeren en küçük ideal I_D'dir ve D tarafından üretilen ideal adı verilir.

$$I_D = \{u \in E : \exists\, u_1, \ldots, u_n \in D \text{ ve } \lambda > 0 \text{ için } |u| \leq \lambda \sum_{i=1}^{n} |u_i|\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.3.4. E bir Riesz uzayı olmak üzere, tek eleman $\{u\}$ ile üretilen ideale **esas ideal** denir. Esas ideal [1]'de

$$I_u = \{v \in E : \exists\ \lambda > 0 \text{ için } |v| \leq \lambda |u|\}$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.3.5. E bir Riesz uzayı olmak üzere, tek eleman ile üretilen band **esas band**'dir. Esas band [1]'de

$$B_u = \{v \in\ E : |v| \wedge n|u| \uparrow |v|\}$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 2.3.6. E bir Riesz uzayı ve F vektör alt uzayı olsun. Her $u, v \in F$ ikilisinin E içindeki supremum değeri F'ye de ait ise , F'e **Riesz Alt uzayı** adı verilir.

Şunu hatırlatalım ki; F vektör alt uzayının Riesz alt uzayı olması için gerek ve yeter şart her $u \in F$ için $u \vee 0 = u^+ \in F$ olmasıdır.

Lemma 2.3.7. *Her ideal aynı zamanda Riesz alt uzaydır.*

Kanıt. F, E Riesz uzayının bir alt uzayı olsun. $0 \leq u^+ \leq |u|$ ve F'in ideal olmasından $u^+ \in F$ olup yukarıdaki hatırlatmadan F'in bir Riesz alt uzayı olduğu gösterilmiş olur. □

NOT: Verilen lemmanın tersi doğru değildir. Her Riesz alt uzayı ideal olmayabilir.

Örneğin; $V = \{(\lambda, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ vektör alt uzayı $\mathbb{R}^2$'de Riesz alt uzayıdır ancak ideal değildir.

E bir Riesz uzayı ve F Riesz alt uzayı olsun. Eğer F'in her alt kümesinin supremum veya infimum değeri F'in içinde yer alıyorsa F, E'nin içine gömülebilir denir.

Tanım 2.3.8. E bir Riesz uzayı; F, E'nin Riesz alt uzayı ve $K \subseteq F$ olsun.

- E içinde $inf_E K$ ve F içinde $inf_F K$ var olmak üzere eğer $inf K_F = inf K_E$ ise F'ye regüler uzay denir.
- Her $u \in E$ için $u \leq v$ olacak şekilde bir $v \in F$ bulunabiliyorsa F uzayına majorizing adı verilir.

Teorem 2.3.9. *E bir Riesz uzayı ve F, E'nin Riesz alt uzayı olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.*

(i) F, E'nin regüler alt uzayıdır.

(ii) Eğer $(u_\alpha) \subseteq F$ neti F içerisinde $u_\alpha \downarrow 0$ ise E içerisinde de $u_\alpha \downarrow 0$ olur.

(iii) Eğer $(u_\alpha) \subseteq F$ ve F içinde $u_\alpha \xrightarrow{o} u$ ise E içerisinde de $u_\alpha \xrightarrow{o} u$ olur.

Kanıt. *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)* F, E'nin Riesz alt uzayı olduğundan $u, v \in F$ ikilisinin supremum veya infimum değeri yine F'in elemanıdır ve regülerlikten bu supremum veya infimum değeri E içerisinde de aynıdır. $(u_\alpha) \subseteq F$ neti için $u_\alpha \downarrow 0$ ise $-u_\alpha \uparrow 0$ olur. Bu supremum değeri E içerisinde de korunacağından $-u_\alpha \uparrow 0 \in E$ ise $u_\alpha \downarrow 0 \in E$ elde edilir.

(ii) $\Rightarrow$ *(iii)* $(u_\alpha) \subset F$, $u_\alpha \downarrow$ olmak üzere $u_\alpha \xrightarrow{o} u$ olsun. O halde $u_\alpha - u \xrightarrow{o} 0$'dır. F içinde $u_\alpha - u \downarrow$ ve $u_\alpha - u \xrightarrow{o} 0$ olduğundan sıra yakınsaklık özelliklerinden $u_\alpha - u \downarrow 0$ olduğunu söyleriz. (ii) öncülünden E içinde de $u_\alpha - u \downarrow 0$'dır. Yine sıra yakınsaklık özelliklerinden E içinde $u_\alpha - u \xrightarrow{o} 0$ ifadesi elde edilir.

(iii) $\Rightarrow$ *(i)* $(u_\alpha) \subset F$ ve $u_\alpha \downarrow$ olmak üzere F içinde $u_\alpha \xrightarrow{o} u$ olsun. Böylece F içinde $u_\alpha - u \downarrow 0$ koşulu sağlanır. Kısaca $inf_F(u_\alpha - u) = 0$ olur. Kabulden E içinde de $u_\alpha - u \downarrow 0$ koşulu yani $inf_E(u_\alpha - u) = 0$ sağlandığından F regülerdir. □

Lemma 2.3.10. *Her I ideali, regüler Riesz alt uzayıdır.*

Kanıt. $(u_\alpha) \subseteq I$ ve $u_\alpha \downarrow 0 \in I$ olmak üzere $\inf_E(u_\alpha)$=e$\neq$0 var olsun. İnfimum özelliğinden her α için $0 < e \leq u_\alpha$ olup, I bir ideal olduğundan $e \in I$ olur. Böylece $inf_I(u_\alpha) = e$ elde edilir. Bu durum e'nin 0 olması ile çelişir. □

Tanım 2.3.11. E bir Riesz uzayı ve F Riesz alt uzayı olsun. E içerisindeki her $0 < u$ için $0 < v \leq u$ olacak şekilde en az bir tane $v \in F$ bulunabiliyorsa F, E içerisinde **sıra yoğundur** denir.

Teorem 2.3.12. *Her sıra yoğun Riesz alt uzayı, regüler Riesz alt uzayıdır.*

Kanıt. Varsayalım ki F regüler Riesz alt uzayı olmasın. O halde $(u_\alpha) \subseteq F$, $u_\alpha \downarrow 0$ neti olmak üzere Teorem 2.3.9 (ii)'den E içinde $u_\alpha \downarrow 0$ koşulu sağlanmaz. Böylece bir tane $0 < u \in E$ için $0 < u \leq u_\alpha$ olur. F, E içerisinde sıra yoğun olduğundan bir tane $v \in F$ vardır öyle ki $0 < v \leq u$ koşulu sağlanır. Böylece F içinde, tüm α indisleri için $0 < v \leq u_\alpha$ olur. Bu ise $u_\alpha \downarrow 0$ olması ile çelişir. O halde varsayım yanlıştır, F regüler alt uzaydır. □

Tanım 2.3.13. Bir E Riesz uzayının boştan farklı alt kümesi A'nın ayrık tümleyeni

$$A^d = \{u \in E : u \perp v \ , \forall \ v \in A\}$$

şeklinde tanımlanır. A^d, E içerisinde her zaman idealdir, dahası sonlu dağılım kuralları ile A^d'nin aynı zamanda E içerisinde band olduğu görülür. Ayrık tümleyende $(A^d)^d = A^{dd}$, $A \subseteq A^{dd}$ ve $A \subseteq B$ ise $B^d \subseteq A^d$ özellikleri de sağlanır.

Teorem 2.3.14. *A ideali A^{dd} içerisinde sıra yoğundur. Özellikle E içerisinde sıra yoğun bir A ideali var olması için gerek ve yeter şart $A^d = \{0\}$ olmasıdır.*

Kanıt. Öncelikle A ideali sıra yoğundur gerek ve yeter şart $A^d = \{0\}$ olduğunu gösterelim
($\Rightarrow$) A, E içerisinde sıra yoğun olsun. $x \in A^d$ $(x \neq 0)$ için $0 < y \leq |x|$ olacak şekilde bazı $y \in A$ vardır. Buradan $y \in A \cap A^d$ ve $A \cap A^d = \{0\}$ olacağından y=0 ve $A^d = \{0\}$ olur.
($\Leftarrow$) $A^d = \{0\}$ ve $0 < x \in E$ olsun. Her $y \in A^+$ için $y \wedge x = 0$ ise $x \in A^d = \{0\}$ olur. Bu nedenle $y \wedge x > 0$ olmalıdır. $y \wedge x \ \in A$ ve $0 < y \wedge x \leq x$ olduğundan A'nın , E içerisinde sıra yoğun olduğu söylenebilir.

Şimdi ilk ifade için varsayalım ki A, A^{dd} içerisinde sıra yoğun olmasın. O halde en az bir $0 < u \in A^{dd}$ ve $v \in A$ vardır öyle ki $0 < v \leq u$ olur. A ideal olduğundan her $v \in A$ için $|v| \wedge u = 0$'dır. $u \in A^d$ ve $u \in A \cap A^{dd} = \{0\}$ ise $u = 0$ olur ancak bu $0 < u$ olması ile çelişir.

□

2.4 Operatörler ve Özellikleri

Tanım 2.4.1. E ve F iki vektör uzayı olmak üzere $T : E \to F$ lineer dönüşümüne operatör adı verilir.

E ve F sıralı vektör uzayı olmak üzere $T : E \to F$ bir operatör olsun. Eğer E içindeki her $u \geq 0$ elemanı için F içinde $T(u) \geq 0$ oluyorsa T'ye **pozitif operatör** denir ve $T \geq 0$ şeklinde gösterilir.

E ve F Riesz uzayları arasında tanımlı operatörlerin kümesi $\mathcal{L}(E, F)$ üzerinde toplama ve skalerle çarpma alışıldığı gibi tanımlıdır ve $T \geq S \Leftrightarrow T - S \geq 0$ sıralaması göz önüne alındığında sıralı vektör uzayı olarak adlandırılır.

Teorem 2.4.2. *(Kantorovich) E ve F iki Riesz uzayı ve F Arşimedyan olmak üzere; eğer $T : E^+ \to F^+$ toplamsal (her $x, y \in E^+ : \; T(x + y) = T(x) + T(y)$) ise her $x \in E^+$ için $Sx = Tx$ olacak biçimde tek bir pozitif genişlemesi $S \in \mathcal{L}(E, F)$ vardır ve her $x \in E$ için $S(x) = S(x^+) - S(x^-)$ sağlanır.*

Kanıt. $T : E^+ \to F^+$ toplamsal olduğundan $Sx = T(x^+) - T(x^-)$ operatörünü alalım. Her $x \in E^+$ için $Sx = Tx$ olduğundan S operatörü T'nin pozitif genişlemesidir. Dahası her $x \in E^+$ için $x = x^+ - x^-$ olacağında S mümkün olan tek genişlemedir. S operatörü toplamsal ve homojen olduğundan [2] kaynağından S operatörü lineerdir deriz ve istenilen sonucu elde etmiş oluruz.

□

Tanım 2.4.3. E ve F iki Riesz uzayı ve $T : E \to F$ bir operatör olsun. Eğer $|T| = T \vee (-T)$ var ise bu operatöre T'nin modülü denir ve $|T|$, $\{-T, T\} \subseteq \mathcal{L}(E, F)$ kümesinin supremumudur.

$T : E \to F$ bir operatör ve modülü mevcut olsun. Bu durumda $\pm Tx \leq |T|x$ ve $|T|x \leq |T|(|x|)$ olduğundan her $x \in E$ için $|Tx| \leq |T|(|x|)$ elde edilir.

$|T|$ her zaman var olmak zorunda değildir. Şimdi vereceğimiz teorem modülün varlığını garanti etmektedir.

Teorem 2.4.4. *E ve F iki Riesz uzayı ve $T : E \to F$ bir operatör olsun. Her $x \in E^+$ için F içinde $sup\{|Ty| : |y| \leq x\}$ var ise $|T|$ vardır ve $x \in E^+$ için*

$$|T|(x) = sup\{|Ty| : |y| \leq x\}$$

sağlanır.

Şimdi bir sonraki bölümde detaylıca anlatılacak olan sıra sınırlılıktan bahsedelim. Riesz uzayının herhangi bir alt kümesi hem alttan hem üstten sınırlı ise bu kümeye sıra sınırlıdır denir. $x, y \in E$ olmak üzere $x \leq y$ olsun.

$$[x, y] := \{z \in E : x \leq z \leq y\}$$

şeklinde tanımlanan alt kümeye sıra aralık adı verilir. Böylece eğer bir A alt kümesi bir sıra aralığın içinde kalıyorsa A kümesi sıra sınırlı olur. T operatörü E'deki sıra sınırlı kümeleri F'de sıra sınırlı kümelere götürüyorsa sıra sınırlıdır denir ve E'den F'ye sıra sınırlı kümeler $\mathcal{L}_b(E,F)$ şeklinde gösterilir. Pozitif iki operatörün farkı şeklinde yazılabilen operatörlere regüler operatör denir ve regüler operatörlerden oluşan uzay $\mathcal{L}_r(E,F)$ olarak gösterilir. T operatörü regüler ise $T = T_1 - T_2$ olacak şekilde pozitif T_1 ve T_2 operatöleri vardır. O halde $T_1 \geq T$ elde edilir. Diğer yandan eğer $T \leq S$ olacak şekilde en az pozitif bir S operatörü varsa $T = S - (S - T)$ olacağından T regülerdir. O halde bir operatörün regüler olması için gerek ve yeter şart $T \leq S$ olacak şekilde en az bir $S \geq 0$ operatörünün var olması yeterlidir önermesi elde edilir. Her pozitif operatör sıra sınırlıdır, dahası her regüler operatör de sıra sınırlıdır. O halde buradan

$$\mathcal{L}_r(E,F) \subseteq \mathcal{L}_b(E,F) \subseteq \mathcal{L}(E,F)$$

olur. Ancak her sıra sınırlı operatör regüler olmak zorunda değildir. Bunun örneği [2][$Example1.16$][$Lotz$]'da mevcuttur.

Teorem 2.4.5. *(Riesz-Kantorovich) E bir Riesz uzayı ve F Dedekind tam Riesz uzayı olsun. Bu durumda $\mathcal{L}_b(E,F)$ sıralı vektör uzayı da Dedekind tam Riesz uzayıdır. Özellikle her $S, T \in \mathcal{L}_b(E,F)$ ikilisi ve her $u \in E^+$ için ;*

$$[S \vee T](u) = sup\{S(v) + T(w) : v, w \in E^+, v + w = u\}$$

$$[S \wedge T](u) = inf\{S(v) + T(w) : v, w \in E^+, v + w = u\}$$

eşitlikleri elde edilir.

Her $T \in \mathcal{L}_b(E,F)$ ve her $u \in E^+$ için ise aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

(i) $T^+(u) = sup\{T(v) : 0 \leq v \leq u\}$

(ii) $T^-(u) = sup\{-T(v) : 0 \leq v \leq u\}$

(iii) $|T|(u) = sup\{|T(v)| : |v| \leq u\}$

Dahası aşağıda verilen özellikleri de yazabiliriz.

(i) Her $T \in \mathcal{L}_b(E,F)$ ve $u \in E$ için $|T(u)| \leq |T|(|u|)$ olur.

(ii) $\mathcal{L}_b(E,F)$ içinde artan bir (T_α) netinin $\mathcal{L}_b(E,F)$ içinde $T_\alpha \uparrow T$ olması için gerek ve yeter şart her $u \in E^+$ için F içinde $T_\alpha(u) \uparrow T(u)$ olmasıdır.

(iii) $\mathcal{L}_b(E,F)$ içinde $T_\alpha \xrightarrow{o} T$ ise her $u \in E$ için F içinde de $T_\alpha(u) \xrightarrow{o} T(u)$ olur.

Teorem 2.4.6. *E Riesz uzayı ve F Dedekind tam Riesz uzayı; I, E'nin ideali ve $T : I \to F$ operatörünün genişlemesi E'den F'ye sıra sınırlı bir operatör olsun. $T_I : E^+ \to F^+$ dönüşümü*

$$T_I(u) = sup\{T(v) :\ v \in I,\ 0 \leq v \leq u\},\ u \in E^+$$

şeklinde ifade edilir ve aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(1) $T_I : E^+ \to F^+$ dönüşümü toplamsaldır ve eşsiz olarak E'den F'ye bir pozitif operatöre genişleyebilir.

(2) Eğer $u \in I^d$ ise $T_I(u) = 0$'dır.

(3) Eğer S, I ideali üzerinde T'yi baskılayan ve E'den Fye giden bir pozitif operatör ise her $u \in E$ için $T_I(u) \leq S_I(u)$ olur.

(4) Eğer $T : I \to F$ pozitif bir operatör ise T_I, T'nin pozitif lineer genişlemesidir ve T_I, T'nin en küçük lineer genişlemesidir. Eğer E'den F'e T'nin genişlemesi olan başka bir pozitif operatör var ise $T_I \leq S$ olur.

Sıradaki teoremimizde kullanmak üzere bir sonraki ünitede detayları verilecek olan sıra süreklilik hakkında kısa bir bilgi verelim. $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ iken $Tx_\alpha \xrightarrow{o} 0$ ise T operatörüne **sıra süreklidir**, net yerine dizi aldığımızda ise T operatörüne **σ-sıra sürekli**'dir denir. Her σ-sıra sürekli operatör sıra sürekli olmak zorunda değildir, örneği Örnek 3.1.4'de mevcuttur.

Teorem 2.4.7. *E bir Riesz uzayı, F Dedekind tam Riesz uzayı ve $T : E \to F$ sıra sınırlı bir operatör olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denkttir.*

(i) T sıra süreklidir.

(ii) Eğer E içinde $x_\alpha \downarrow 0$ ise F içinde $Tx_\alpha \xrightarrow{o} 0$'dır.

(iii) Eğer E içinde $x_\alpha \downarrow 0$ ise F içinde $inf\{|Tx_\alpha|\} = 0$'dır.

(iv) T^+ ve T^- ikisi de sıra süreklidir.

(v) $|T|$ sıra süreklidir.

Kanıt. $(i) \Rightarrow (ii)$ ve $(ii) \Rightarrow (iii)$ oldukça açıktır.
$(iii) \Rightarrow (iv)$ T^+'nın pozitif olduğunu göstermek yeterlidir. E içinde $x_\alpha \downarrow 0$ alalım. F içinde $z \geq 0$ için $T^+x_\alpha \downarrow$, o halde $z = 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. Bazı β indeksi için $x = x_\beta$ alalım. Her $0 \leq y \leq x$ ve her $\alpha \succcurlyeq \beta$ için;

$$0 \leq y - y \wedge x_\alpha = y \wedge x - y \wedge x_\alpha \leq x - x_\alpha$$

ve sonuç olarak

$$T(y) - T(y \wedge x_\alpha) = T(y - y \wedge x_\alpha) \leq T^+(x - x_\alpha) = T^+x - T^+x_\alpha$$

buradan şu sonuç çıkar ki; her $\alpha \succcurlyeq \beta$ ve $0 \leq y \leq x$ için

$$0 \leq z \leq T^+x_\alpha \leq T^+x + |T(y \wedge x_\alpha)| - Ty \tag{2.4.1}$$

elde edilir. Şimdi $0 \leq y \leq x$ için $y \wedge x_\alpha \downarrow_{\alpha \succcurlyeq \beta}$ vektörünü sabitleyelim. Hipotezimizden $inf_{\alpha \succcurlyeq \beta}\{|T(y \wedge x_\alpha)\} = 0$ ve 2.4.1'den $0 \leq z \leq T^+x - Ty$ sağlanır. $T^+x = sup\{Ty : 0 \leq y \leq x\}$ olduğundan dolayı $z = 0$ için eşitsizlik elde edilir.

$(iv) \Rightarrow (v)$ $|T| = T^+ + T^-$ eşitsizliğinden elde edilir.

$(v) \Rightarrow (i)$ $|Tx| \leq |T|(|x|)$ latis eşitsizliğinden sonuca direkt ulaşılır. □

Tanım 2.4.8. $\pi : E \to F$ iki Riesz uzayı arasında bir operatör olsun.

(1) E içerisinde $u \wedge v = 0$ iken F içinde $\pi(u) \wedge \pi(v) = 0$ oluyorsa bu operatöre **Riesz homomorfizm** ya da latis homomorfizm denir. Her $x^+ \in E$ için $\pi(x^+) = \pi(x \vee 0) = \pi(x) \vee \pi(0) = [\pi(x)]^+ \geq 0$ olduğundan her Riesz homomorfizmin pozitif operatör olduğunu söyleyebiliriz.

(2) Eğer π bir Riesz homomorfizm ve E içinde $u_n \xrightarrow{o} 0$ iken F içinde de $\pi(u_n) \xrightarrow{o} 0$ oluyor ise **Riesz σ-homomorfizm** denir.

(3) Eğer π bir Riesz homomorfizm ve E içinde $u_\alpha \xrightarrow{o} 0$ iken F içinde de $\pi(u_\alpha) \xrightarrow{o} 0$ oluyor ise **normal Riesz homomorfizm** denir.

(4) Eğer π birebir Riesz homomorfizm ise **Riesz izomorfizm** adı verilir.

Teorem 2.4.9. *E ve F iki Riesz uzayı ve $\pi : E \to F$ bir operatör olmak üzere aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.*

(i) *π Riesz homomorfizmdir.*

(ii) *Her $u, v \in E$ için $\pi(u \wedge v) = \pi(u) \wedge \pi(v)$*

(iii) *Her $u, v \in E$ için $\pi(u \vee v) = \pi(u) \vee \pi(v)$*

(iv) *E içinde $u \wedge v = 0$ iken $\pi(u \vee v) = \pi(u) \vee \pi(v)$*

(v) *Her $u \in E$ için $\pi(u^+) = [\pi(u)]^+$*

(vi) *Her $u \in E$ için $\pi(|u|) = |\pi(u)|$*

Tanım 2.4.10. E bir Riesz uzayı ve F Dedekind tam bir Riesz uzayı olsun. Eğer E , F'nin majorizing sıra yoğun bir Riesz alt uzayına Riesz izomorfik ise F uzayı , E'nin Dedekind tamamlanışıdır denir ve E^δ ile gösterilir.

Şimdi vereceğimiz teorem ile her Arşimedyan Riesz uzayının Dedekind tamlanışının var olduğunu söyleyebiliriz.

Teorem 2.4.11. *Her E Arşimedyan Riesz uzayının verilen özelliklere sahip ise E^δ Dedekind tam Riesz uzayı vardır.*

(i) *E , E^δ'nın en az bir F alt kümesi ile Riesz homomorfiktir.*

(ii) *E'den F'ye tanımlı izomorfizmde supremum ve infumum korunur.*

(iii) *Her $x \in E^\delta$ için $y_\alpha \leq x \leq z_\alpha$ koşulunu sağlayan $x = sup y_\alpha = inf z_\alpha$ olacak şekilde (y_α) ve (z_α) netleri vardır.*

2.5 Banach Latisleri

Tanım 2.5.1. $\|\cdot\|$, E Riesz uzayı üzerinde tanımlı bir norm olmak üzere; eğer $|x| \leq |y|$ iken $\|x\| \leq \|y\|$ oluyor ise $\|\cdot\|$ normuna latis normu denir ve latis normlu Riesz uzayına, normlu Riesz uzayı adı verilir. Dahası normlu Riesz uzayı verilen norma göre tam ise Banach latis olarak adlandırılır.

Her x için normlu bir Riesz uzayında $|x| = \||x|\|$ eşitliğinin , $\|x^+ - y^+\| \leq \|x - y\|$ ve $\||x| - |y|\| \leq \|x - y\|$ eşitsizliklerinin sağlandığını söyleyebiliriz.

Şimdi ifade edeceğimiz teorem ile Banach latislerinde tanımlı pozitif operatörlerin sürekli olduğunu söyleyebileceğiz.

Teorem 2.5.2. *E Banach latis ve F normlu Riesz uzayı ise her pozitif operatör sürek-lidir.*

Kanıt. E ve F normlu uzaylar olduğundan, tanımlanan T operatörünün sürekliliği, sınırlı olması ile denktir. O halde sınırlı olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Olmayana ergi kullanalım, varsayalım ki T sınırlı olmasın. O halde E içinde bir (x_n) dizisi vardır öyle ki $\|x_n\| = 1$ iken $Tx_n \geq n^3$ olur. T operatörünün pozitif ve monoton oluşundan $\|T|x_n|\| \geq \||Tx_n|\| = \|Tx_n\| \geq n^3$ elde edilir. Dahası $\|x\| = \||x_n|\|$ olduğundan E içerindeki her $n \in \mathbb{N}$ için $y_n = |x_n|$ olarak alırsak pozitif, normu 1'e eşit bir (y_n) dizisinden bahsedebiliriz. Şimdi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|y_n\|}{n^2} < \infty$ alalım. E Banach uzayı olduğundan $y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{n^2}$ serisi yakınsaktır ve her n için $\|T(\frac{y_n}{n^2})\| \leq \|Ty\| < +\infty$ olup T operatörü sınırlı dolayısıyla süreklidir. □

Verilen teorem aracılığıyla iki Banach latis arasında tanımlanan pozitif operatörlerin sürekli olduğunu söyleriz. Regüler operatörlerin iki pozitif operatörün farkı olarak yazılabildiğini hatırlayacak olursak $\mathcal{L}_r(E,F) \subset L(E,F)$ ifadesini elde ederiz.

Tanım 2.5.3. E Banach latis, F Dedekind tam Banach latis ve $T : E \to F$ regüler bir operatör olsun. T operatörünün regüler normu

$$\|T\|_r = \||T|\| = sup\{\||T|x\| : \|x\| \leq 1\}$$

şeklinde tanımlanan reel bir sayıdır ve kısaca r-norm olarak adlandırılır. Bir başka deyişle T operatörünün r-normu

$$\|T\|_r = inf\{\|S\| : \pm T \leq S\}$$

şeklinde de ifade edilebilir.

Lemma 2.5.4. *Regüler norm $\mathcal{L}_r(E,F)$ uzayında bir latis normudur ve her $T \in \mathcal{L}_r(E,F)$ için $\|T\| \leq \|T\|_r$ eşitsizliği sağlanır.*

Teorem 2.5.5. *E Banach latis, F Dedekind tam Banach latis olmak üzere $\mathcal{L}_b(E,F)$ uzayı r-normuna göre Dedekind tam Banach latistir.*

Kanıt. Riesz-Kantarovich teoreminden E Banach latis ve F Dedekind tam Banach latis olduğundan $\mathcal{L}_b(E,F)$ uzayı Dedekind tamdır deriz. O halde $\mathcal{L}_b(E,F)$'nin tam olduğunu gösterirsek ispatı tamamlamış oluruz. $\mathcal{L}_b(E,F)$ uzayında T_n Cauchy dizisi alalım. Köşegenleştirme metodundan $\|T_{n+1} - T_n\|_r = \|T_{n+1} - T_n\| < 2^{-n}$ biçiminde bir alt dizi elde edebiliriz. Lemma 2.5.4'den $\|T_{n+1} - T_n\|_r \leq \|T_{n+1} - T_n\|$ olduğundan dizimiz Cauchy'dir. Bu durumda $T_n \to T$ olacak şekilde bir $T \in L(E,F)$ bulunur. $|y| \leq x$ sağlayan her $x \in E^+$ ve $y \in E$ için $(T - T_n)y = \sum_{i=n}^{\infty}(T_{i+1} - T_i)y \leq \sum_{i=n}^{\infty}|T_{i+1} - T_i|x$ eşitsizliğini oluşturabiliriz. Bu durumda $(T - T_n)$ operatörünün modülü vardır ve tanımdan $|T - T_n|x = sup\{(T - T_n)y : |y| \leq x\} \leq \sum_{i=n}^{\infty}|T_{i+1} - T_i|x$ olur. T operatörü için $T = (T - T_1) + T_1$ yazılabileceğinden T regülerdir. Yukarıda elde ettiğimiz eşitsizlikten $\|T - T_n\|_r \leq \sum_{i=n}^{\infty}\|T_{i+1} - T_i\|_r \leq 2^{1-n}$ olup $lim\|T_{n+1} - T_n\|_r = 0$ ve böylece $\mathcal{L}_b(E,F)$ r-normuna göre Banach latistir. □

3 Sıra Kompaktlık

Bu ünite [10] makalesinin ikinci bölümünden oluşmaktadır.

3.1 Sıra Yakınsaklık ve Operatörler

Bu bölümde daha önceden verdiğimiz sıra yakınsaklık yardımı ile operatörler üzerinde gerekli tanımlar ve özellikleri [1], [2] kaynaklarından yararlanılarak verilecektir.

Tanım 3.1.1. E bir Riesz uzayı ve (x_α), E içinde bir net olsun. Her α için $|x_\alpha - x| \leq y_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde $(y_\alpha) \in E$ neti ve $x \in E$ varsa x_α, x'e sıra yakınsar denir ve $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ şeklinde gösterilir.

Örnek 3.1.2. *w bir dizi uzayı, λ, w'nun lineer alt uzayı ve $c_{00} \subseteq \lambda \subseteq w$ olsun. Pozitif koni ile üretilmiş bu dizi uzayında sıra sınırlı bir netin sıra yakınsaklığı noktasal yakınsaklığa denktir.*

Tanım 3.1.3. E ve F birer Riesz uzayı ve $T : E \to F$ bir operatör olmak üzere;

(i) $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ iken $Tx_\alpha \xrightarrow{o} 0$ ise T operatörüne **sıra süreklidir** denir. Tanımda net yerine dizi aldığımızda ise **σ-sıra sürekli** adı verilir.

(ii) E'deki her sıra sınırlı kümenin görüntüsü F'de sıra sınırlı ise T operatörüne **sıra sınırlı** denir.

σ-sıra sürekli operatör sıra sürekli olmak zorunda değildir. Şimdi bu iddiayı destekleyen bir örnek verelim.

Örnek 3.1.4. *E Riesz uzayı Lebesgue integrallenebilir, reel değerli, [0,1] üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun ($E = L_1[0,1]$). Noktasal sıralama altında en az bir noktada farklı değer alan iki fonksiyon ($\forall\ x \in [0,1]$ için $f \leq g \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)$) ve f_α noktasal artan ($f_\alpha \uparrow f \Rightarrow f_\alpha(x) \uparrow f(x)$) olarak alalım. Şimdi $T : E \to \mathbb{R}$*

$$f \to T(f) = \int_0^1 f(x)dx$$

şeklinde tanımlanan operatör Lebesgue yakınsaklık teoreminden σ-sıra süreklidir. Fakat sıra sürekli değildir. ϑ, [0,1]'in sonlu alt kümelerinin ailesi olsun. Bu durumda $\{\chi_\alpha : \alpha \in \vartheta\} \subseteq E$ karakteristik fonksiyonu için $\chi_\alpha \uparrow 1$ olduğu söylenir. Diğer yandan $T(\chi_\alpha) = 0 \nrightarrow T(1) = 1$ olup T sıra sürekli değildir.

Lemma 3.1.5. *E bir Riesz uzayı ve I, E'nin ideali olsun. $(x_\alpha) \subset I$ için $x_\alpha \xrightarrow[I]{o} 0$ ise $x_\alpha \xrightarrow[E]{o} 0$ olur. Bu ifadenin diğer yönden de doğru olması için $(x_\alpha) \subset I$ sıra sınırlı bir net olması gerekir.*

Kanıt. ($\Rightarrow$) Sıra yakınsaklık özelliklerinden I içinde $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ ise $x_\alpha \downarrow 0$ yazılır. Her ideal, regüler uzay olduğundan I içindeki infimum değeri E içerisinde de korunur. O halde E içinde de $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ yazılabilir.
($\Leftarrow$) Diğer yandan ise (x_α) neti I idealinde sıra sınırlı ve E içerisinde $x_\alpha \xrightarrow[E]{o} 0$ olsun. $0 = inf_\alpha sup_{\beta \geq \alpha}\ y_\beta = sup_\alpha \inf_{\beta \geq \alpha}\ y_\beta$ değeri ve (x_α) sıra sınırlı neti E içerisinde mevcuttur. I ideal olduğundan supremum ve infimum değerleri vardır ve E'deki değer ile aynıdır. Böylece $x_\alpha \xrightarrow[I]{o} 0$ sağlanır.

□

3.2 Sıra Kompakt Operatörler ve Özellikleri

Tanım 3.2.1. E ve F Riesz uzayları olmak üzere;

(i) $(x_\alpha) \subseteq E$ sıra sınırlı bir net olsun. Eğer $Tx_{\alpha_\beta} \xrightarrow{o} y$ olacak şekilde (x_α)'nın en az bir alt neti (x_{α_β}) ve $y \in F$ var ise $T : E \to F$ operatörü **sıra kompakttır** denir.

(ii) Eğer $(x_n) \subseteq E$ dizisi için $Tx_{n_k} \xrightarrow{o} y$ olacak şekilde en az bir alt dizi (x_{n_k}) ve $y \in F$ var ise $T : E \to F$ operatörüne **dizisel sıra kompakttır** denir.

Sıra sürekli bir operatör dizisel sıra kompakt değildir. Şimdi örnekte bunu görelim.

Örnek 3.2.2. *[5] $I : L_1[0,1] \to L_1[0,1]$ sıra sürekli ve sıra sınırlı birim operatörü olmak üzere r_n Radamacher fonksiyonunu*

$$r_n : C[0,1] \to \mathbb{R}$$

$$r_n(t) = sgn(sin(2^n \pi t)) \ t \in [0,1], \ |r_n| = 1$$

şeklinde tanımlayalım. Kabul edelim ki dizisel sıra kompakt olsun. O halde r_n sıra sınırlı dizisi için en az bir (r_{n_k}) alt dizisi vardır öyle ki $I(r_{n_k}) = (r_{n_k}) \xrightarrow{o} r$. Her $m > k$ için $\int_0^1 r_{n_k}.r_{n_m} d\mu = 0$ olur. Diğer yandan $r_{n_k}.r_{n_m} \xrightarrow{o} r_{n_k}.r$ ve $r^2 = 0$ olduğundan $\int_0^1 r_{n_k}.r d\mu \to \int_0^1 r^2 d\mu = 0$ olup $|r| = 1$ olmasıyla çelişir. O halde tanımlanan sıra sürekli operatör, dizisel sıra kompakt değildir.

Dizisel sıra kompakt operatörler sıra kompakt olmak zorunda değildir.

Örnek 3.2.3. *$I : c \to c$ birim operatörü ve f_n pozitif sıra sınırlı dizisini alalım. f_n sıra sınırlı olduğundan $0 \leq f_n \leq g$ olacak şekilde bir g vardır. $f_n(m)$, f_n'in m. koordinatı olsun. Verilen $\varepsilon > 0$ için $\{m : |f_n(m) - a_n| \geq \varepsilon\}$ kümesi sonludur. Bu durumda (a_n) dizisi sınırlıdır ve sınırlı dizinin yakınsak bir alt dizisi vardır. Her $l, k \in \mathbb{N}$ için $A_{l,n_k} = \{m : |f_{n_k}(m) - a_{n_k}| \geq \frac{1}{l}$ ve $A = \bigcup_{l=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{l,n_k}$ olup sonludur. $h = a\chi_{\mathbb{N}\backslash A}$ şeklinde tanımlansın. $f_{n_k} \xrightarrow{o} h$ şeklinde noktasal olarak yakınsar. O halde I dizisel olarak sıra kompakttır. Şimdi sıra kompakt olmadığını görelim. $\Lambda = \{\lambda \subseteq \mathcal{P}(N) : |\lambda| < +\infty\}$ kısmi sıralı kümesini alırsak $f_\alpha = \chi_{\mathbb{N}\backslash\alpha} \leq 1$ sınırlıdır fakat her f_{α_β} alt neti için $f_{\alpha_\beta}(m) \nrightarrow 1$. Noktasal olarak 1'e gitmiyorsa alt dizinin kendisi de $f_{\alpha_\beta} \nrightarrow 1$. Yani her $f_{\alpha\beta}$ alt neti 1'e sıra yakınsamaz. Bu durumda sıra kompakt olmadığı görülür.*

Lemma 3.2.4. *[5] E ve F iki Riesz uzayı, $T : E \to F$ bir operatör olsun. T sıra kompakt ise T sıra sınırlıdır.*

Teorem 3.2.5. *[2] E Riesz uzayı ve F Dedekind tam Riesz uzayı ise $\mathcal{L}_b(E,F)$ Dedekind tam Riesz uzayıdır. $(T_\alpha) \subseteq \mathcal{L}_b(E,F)$ olmak üzere $T_\alpha \downarrow 0$ olması için gerek ve yeter şart her $x \in E_+$ için F içinde $T_\alpha(x) \downarrow 0$ olmasıdır.*

Teorem 3.2.6. *[Ogasavara] E Riesz uzayı, F Dedekind tam Riesz uzayı olsun. Sıra sürekli operatörlerin oluşturduğu $\mathcal{L}_n(E,F)$ ve σ-sıra sürekli operatörlerin oluşturduğu $\mathcal{L}_c(E,F)$ uzayları $\mathcal{L}_b(E,F)$'nin bandleridir.*

Önerme 3.2.7. *E, F ve G Dedekind tam Riesz uzaylar; $T : E \to F, L : F \to G, R : G \to E$ operatörleri olsun.*

(i) T sıra kompakt ve L sıra sürekli ise $L \circ T$ sıra kompakttır.

(ii) T sıra kompakt ve R sıra sınırlı ise $T \circ R$ sıra kompakttır.

(iii) T pozitif, sıra sürekli ve sıra kompakt operatör ve $R_\alpha \downarrow 0$ azalan sıra sınırlı operatörlerin oluşturduğu net ise $T \circ R_\alpha \downarrow 0$ azalan sıra kompakt operatörlerin oluşturduğu nettir.

(iv) T pozitif, sıra sürekli ve sıra kompakt operatör ve L_α pozitif sıra sürekli operatörlerin oluşturduğu net olmak üzere $L_\alpha \uparrow L$ koşulu sağlanıyor ise $L_\alpha \circ T \uparrow L \circ T$ ve $L \circ T$ sıra kompakttır.

Kanıt. (i) (x_α) E içinde sıra sınırlı bir net olsun. T sıra kompakt olduğundanen az bir (x_{α_β}) alt neti ve $x \in F$ vardır öyle ki $Tx_{\alpha_\beta} \xrightarrow{o} x$ olur. L sıra sürekli olduğundan $LTx_{\alpha_\beta} \xrightarrow{o} Lx$ olup $L \circ T$ sıra kompakttır.

(ii) (x_α) G içinde sıra sınırlı bir net olsun. Sıra sınırlılıktan (Rx_α) sıra sınırlıdır. T sıra kompakt olduğundan $TRx_{\alpha_\beta} \xrightarrow{o} y$ olacak şekilde (Rx_{α_β}) alt neti vardır. O halde $T \circ R$ sıra kompakttır.

(iii) $T : E \to F$ sıra sürekli ve sıra kompakt ise (i) öncülden $T \circ R_\alpha$ sıra sınırlı ve sıra kompakttır. Buradan $x \in G_+$ için T sıra sürekli olduğundan $T(R_\alpha(x)) \xrightarrow{o} 0$ olur.T pozitif olduğundan ve Teorem 3.2.5 gereği $T \circ R_\alpha \downarrow 0$ olur.

(iv) T ve L_α sıra sürekli ise $T \circ L_\alpha$ sıra süreklidir. Buradan Teorem 3.2.5'den $L_\alpha \circ T \uparrow L \circ T$ olup Teorem 3.2.6'dan $L \circ T$ sıra sürekli ve sıra kompakttır.

□

Aşağıdaki önermede kullanılan temel araçlardan biri, Riesz uzaylarının standart temsil teoremidir. Ayrıntılar için [16, Önerme 2.4.6]'ya bakılabilir.

E Dedekind tam Riesz uzayı ve $x^* > 0$ kesin pozitif sıra sürekli fonksiyoneli olsun.

$$\|x\|_L = x^*(|x|), \quad \forall\, x \in E$$

şeklinde tanımlanan norm ile birlikte E Riesz uzayı, norm latis olur.

E'nin norm tamamlanışı olan $\tilde{E}$, $\|\cdot\|_L$ normu ile birlikte AL-uzayıdır. Hatırlatılması gerekir ise $x, y \in E^+$ için $x \wedge y = 0$ olsun. Eğer $1 \le p < +\infty$ olmak üzere

$$\|x + y\|^p = \|x\|^p + \|y\|^p$$

koşulu sağlanıyor ise E Banach latisine AL-uzayı adı verilir. [16, Önerme 2.4.16]'den E, $\tilde{E}$'nın bir idealidir. Ayrıca E, $\tilde{E}$ içinde norm yoğun böylece sıra yoğundur.

Önerme 3.2.8. *E Dedekind tam Riesz uzayı, $T : E \to E$ dizisel sıra kompakt operatör olmak üzere x^*, $T^*x^* = x^*$ koşulunu sağlayan kesin pozitif, sıra sürekli bir fonksiyonel olsun. Böylece F Banach latisi vardır öyle ki E'nin norm kapanışı F'dir ve E idealdir. Ayrıca $T : E \to F$ dizisel sıra kompakttır.*

Kanıt. $(x_n) \subset E$ sıra sınırlı dizisini alalım. T dizisel sıra kompakt olduğundan en az bir (x_{n_k}) alt dizisi ve $y \in E$ vardır öyle ki $Tx_{n_k} \xrightarrow{o} y$'dir. $T^*x^* = x^*$ koşulunu sağlayan x^* kesin pozitif, sıra sürekli fonksiyoneli tanımlayalım. x^* sıra sürekli olduğundan $x^*(|Tx_{n_k}|) \to x^*(|y|)$ olur. $\|x\|_F = x^*(|x|)$ latis normuna göre F, E'nin norm tamamlanışıdır. Böylece $Tx_{n_k} \xrightarrow{\|\cdot\|_F} y$ sağlanır. F Banach latis olduğundan bir tane alt dizisi $(x_{n_{k_m}})$ vardır öyle ki $Tx_{n_{k_m}} \xrightarrow{o} y \in F$ olur. Buradan $T : E \to F$ dizisel sıra kompakttır.

□

Önerme 3.2.9. *E Banach latis, F sıra sürekli norma sahip Banach latis olsun. $T : E \to F$ dizisel sıra kompakt ise T sınırlıdır.*

Kanıt. Varsayalım ki T sınırlı olmasın. O halde E içinde bir (x_n) dizisi vardır öyle ki $\|x_n\| \leq \frac{1}{2^n}$ iken $\|Tx_n\| \to \infty$ olur. (x_n) dizisinin sıra sınırlı olduğunu kabul edelim. T dizisel sıra kompakt olduğundan bir tane x_{n_k} alt dizisi vardır öyle ki $Tx_{n_k} \xrightarrow{o} y \in F$'dir. F sıra sürekli norma sahip Banach latis olduğundan $Tx_{n_k} \xrightarrow{\|\cdot\|} y \in F$ olur. Bu ise T'nin sıra sınırlı olmaması ile çelişir. O halde varsayımımız yanlıştır. □

Sonuç 3.2.10. *E ve F σ-sıra sürekli norma sahip Banach latis ve $T : E \to F$ bir operatör olsun. T dizisel sıra kompakt ise T dizisel sıra-norm süreklidir.*

Kanıt. E içinde (x_n) sıra yakınsak bir dizi olsun. E σ-sıra sürekli norma sahip olduğundan (x_n) dizisi aynı zamanda norm yakınsaktır. T dizisel sıra kompakt olduğundan Önerme 3.2.9'dan T sınırlıdır. Böylece Tx_n dizisi F içinde norm yakınsaktır. Buradan $T : E \to F$ operatörü dizisel norm-sürekli olur. □

3.3 GAM Kompakt Operatörler

Tanım 3.3.1. E Riesz uzayı, F Banach latis ve $T : E \to F$ bir operatör olsun. E içindeki her sıra sınırlı A kümesi için $T(A)$ F içinde relatively kompakt ($\overline{T(A)}$ norm kapanışı kompakt) ise T operatörü GAM-kompakttır.

Tanım 3.3.2. E Banach latis olsun. Her $x, y \in E$ için $x \wedge y = 0$ iken $\|x \vee y\| = max\{\|x\|, \|y\|\}$ oluyorsa E uzayına **AM-uzayı** denir.

L_∞ bir AM-uzayıdır.

Tanım 3.3.3. E bir Riesz uzayı ve $0 < e \in E$ olsun.

(i) Eğer $I_e = E$ ise e **güçlü birim**'dir denir ve

$$I_e = \{y \in E : \exists \, \lambda > 0 \text{ için } |y| \leq \lambda e\}$$

şeklinde gösterilir.

(ii) Eğer $B_e = E$ ise e'ye **zayıf birim**'dir denir.

Yukarıdaki tanımların ışığında, E güçlü birime sahip AM-uzayı ve F Banach latis ise her $T : E \to F$ GAM-kompakt operatörü kompakttır.

Teorem 3.3.4. *E bir Riesz uzayı, F Banach latis ve $T : E \to F$ bir operatör olsun. Eğer T GAM-kompakt ise T dizisel sıra kompakttır.*

Kanıt. (x_n), E içinde sıra sınırlı bir dizi olsun. T GAM-kompakt olduğundan en az bir (x_{n_k}) alt dizisi ve $y \in F$ vardır öyle ki $\|Tx_{n_k} - y\| \to 0$ olur. F Banach latis olduğundan bir alt dizi $(x_{n_{k_m}})$ vardır öyle ki F içinde $Tx_{n_{k_m}} \xrightarrow{o} y$'dir, [20]. Böylece T dizisel sıra kompakt olur. □

Teorem 3.3.4'in tersi doğru değildir. Şimdi bunu bir örnekle gösterelim.

Örnek 3.3.5. *$I : l_\infty \to l_\infty$ şeklinde tanımlanan birim operatörü dizisel sıra kompakttır. $\{e_n : n \geq 1\}$ standart tabanı sıra sınırlıdır ancak l_∞'da norm topolojiye göre relatively kompakt değildir. ($\|e_n\| = 1 \not< \epsilon$ olduğundan yakınsak değildir)*

Teorem 3.3.6. *E ve F Riesz uzayları ve K, F'nin regüler alt latisi olsun. $T : E \to K$ sıra kompakt ise $T : E \to F$ sıra kompakttır. Eğer K, F'nin sıra yoğun Riesz alt latisi ise teoremin ifadesi yine geçerli olur.*

Kanıt. (x_α) E içinde sıra sınırlı bir net olsun. $T : E \to K$ sıra kompakt olduğundan bir tane (x_{α_β}) alt neti ve $y \in K$ vardır öyle ki $Tx_{\alpha_\beta} \xrightarrow{o} y$'dır. K, F'nin regüler alt latisi olduğundan Teorem 2.3.9'dan F içinde $Tx_{\alpha_\beta} \xrightarrow{o} y \in F$ olur. O halde $T : E \to F$ sıra kompakttır. □

Lemma 3.3.7. *K, F'nin regüler Dedekind tam alt latisi olmak üzere; K içindeki bazı sıra sınırlı (y_α) netleri için F içinde $y_\alpha \xrightarrow{o} y \in F$ ise K içinde de $y_\alpha \xrightarrow{o} y \in K$ olur.*

Kanıt. Lemma'nın kanıtı [12, *Lemma* 2.11]'de bulunabilir. □

Teorem 3.3.8. *E ve F Riesz uzayları, $T : E \to F$ operatör olsun.T sıra kompakt ve K, F'nin majorizing, regüler ve Dedekind tam alt uzayı olmak üzere R(T), K'nın alt uzayı ise $T : E \to K$ sıra kompakttır.*

Kanıt. (x_α), E'de sıra sınırlı bir net olsun. $T : E \to F$ sıra kompakt olduğundan en az bir (x_{α_β}) alt neti ve $y \in F$ vardır öyle ki $Tx_{\alpha_\beta} \xrightarrow{o}$ olur. Lemma 3.2.4'den T sıra sınırlıdır. O halde E içindeki sıra sınırlı netin alt neti (x_{α_β}) da sıra sınırlı olup (Tx_{α_β}), F içinde sıra sınırlıdır. K majorizing ve R(T), K'nın alt uzayı olduğundan K içinde (Tx_{α_β}) alt neti sıra sınırlıdır. Böylece Lemma 3.3.7'den K içinde de $Tx_{\alpha_\beta} \xrightarrow{o} y$ olur. □

Önerme 3.3.9. *E ve F Riesz uzayları, $T : E \to F$ bir operatör olsun. T hem dizisel sıra kompakt hem sıra sürekli operatör ve K, F'nin majorizing, regüler σ-tam Riesz alt uzayı olmak üzere; R(T), K'nın alt uzayı ise $T : E \to K$ dizisel sıra kompakttır.*

Kanıt. (x_n), E içinde sıra sınırlı bir dizi olsun. $T : E \to F$ dizisel sıra kompakt olduğundan bir tane (x_{n_k}) alt dizisi ve $y \in F$ vardır öyle ki $Tx_{n_k} \xrightarrow{o} y$ olur. T sıra sürekli olduğundan sıra sınırlıdır. O halde (Tx_{n_k}), F içinde sıra sınırlıdır. K majorizing olduğundan (Tx_{n_k}), K içinde de sıra sınırlıdır. [4, *Lemma* 27]'den $(Tx_{n_k}) \xrightarrow{o} y \in K$ olur. □

Önerme 3.3.9'da K üzerindeki koşullardan herhangi biri kaldırılamaz. Bir örnekle bu iddiamızı açıklayalım.

Örnek 3.3.10. *l_∞'un regüler alt latisi c_0 alalım. c_0 Dedekind tam ve majorizing değildir. $T : C[0,1] \to c_0$ bir operatörünü her $f \in C[0,1]$ için;*

$$Tf = (f(1) - f(0), f(\frac{1}{2}) - f(0), f(\frac{1}{3}) - f(0), \dots)$$

şeklinde tanımlayalım. T operatörünün sıra sınırlı olmadığını çelişki ile görmek istiyoruz. Bunun için $\mathbf{1}$ sabit fonksiyon olmak üzere her $f \in [0,\mathbf{1}]$ için $|Tf| \leq u$ olacak şekilde $u = (u_1, u_2, \dots) \in c_0$ olduğunu kabul edelim. Her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n(0) = 0$ ve $f_n(\frac{1}{n}) = 1$ koşulunu sağlayan bir f_n dizisi alalım. Buradan $|Tf_n| = |f_n(\frac{1}{n}) - f_n(0)| = 1 \leq u_n$ olup $u \notin c_0$ çelişkisi elde edilir. T sıra sınırlı olmadığından sıra kompakt değildir. Fakat diğer taraftan aynı şekilde tanımlanan $T : C[0,1] \to l_\infty$ operatörü sıra kompakttır.

E ve F Riesz uzayları ve π Riesz homomorfizm olsun. Eğer E içinde $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ iken F içinde $\pi(x_\alpha) \xrightarrow{o} 0$ oluyorsa $\pi : E \to F$ normal Riesz homomorfizm olduğu tanımı ön bilgiler kısmında verilmişti.

Aşağıdaki sonuç normal Riesz homomorfizm ile sıra kompakt operatörlerin ideal özelliğini sağladığını gösterir.

Sonuç 3.3.11. *E , F, K Riesz uzayları, $\pi : K \to F$ normal Riesz homomorfizm, $T : E \to K$ sıra kompakt operatör olsun. $\pi \circ T : E \to F$ operatörü sıra kompakttır.*

Kanıt. $\pi : K \to F$ normal Riesz homomorfizm ise π sıra süreklidir. E içinde sıra sınırlı (x_α) netini alalım. $T : E \to K$ sıra kompakt olduğundan en az bir (x_{α_β}) alt neti ve $y \in K$ vardır öyle ki $Tx_{\alpha_\beta} \xrightarrow{o} y$ olur. π normal Riesz homomorfizm olduğundan $\pi T x_{\alpha_\beta} \xrightarrow{o} \pi y$. O halde $\pi \circ T$ sıra kompakttır. □

Önerme 3.3.12. *E, F ve G Riesz uzayları, B F'nin bandi, $T : E \to F$, $S : F/B \to G$ operatörleri ve $\pi : F \to F/B$ doğal bölüm operatörü olsun. Eğer T sıra kompakt ve S sıra sürekli ise $S\pi T$ sıra kompakttır. Ayrıca eğer T sıra sürekli ve S sıra kompakt ise $S\pi T$ yine sıra kompakttır.*

Kanıt. B, F'nin bandi olduğundan F/B bölüm vektör latisi Riesz uzayıdır ve $\pi : F \to F/B$ doğal bölüm operatörü normal Riesz homomorfizmdir, [15, $Teorem$ 18.13]. $T : E \to F$ sıra kompakt ve $S : F/B \to G$ sıra sürekli olduğundan πT sıra süreklidir ve Sonuç 3.3.11'den $S\pi T$ sıra kompakttır. □

4 Sınırsız Sıra Kompaktlık

Bu ünite [10] makalesinin üçüncü bölümünden oluşmaktadır.

4.1 Sınırsız Sıra Yakınsaklık (uo-yakınsaklık) ve Özellikleri

Bu bölümde sınırsız sıra yakınsaklık ile ilgili tanımlar, teoremler ve özellikleri verilecektir. Daha ayrıntılı bilgi için [7], [12], [13], [21] makalelerine bakılabilir.

Tanım 4.1.1. E Riesz uzayı, $x \in E$ ve $(x_\alpha) \subseteq E$ olsun. Her $u \in E^+$ için $|x_\alpha - x| \wedge u \xrightarrow{o} 0$ sağlanıyorsa (x_α), x'e **sınırsız sıra yakınsar (uo-yakınsar)** denir ve $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ şeklinde gösterilir.

uo-yakınsaklık L_p'de hemen hemen yakınsaklığa, l_p'de noktasal yakınsaklığa denktir.

Lemma 4.1.2. *Riesz uzayı üzerinde bir netin sınırsız sıra limiti tektir.*

Kanıt. Varsayalım ki $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ ve $x_\alpha \xrightarrow{uo} y$ olacak şekilde iki farklı limit olsun. Sınırsız sıra yakınsaklık tanımından $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ ise her $u \in E^+$ için $|x_\alpha - x| \wedge u \xrightarrow{o} 0$ ve $x_\alpha \xrightarrow{uo} y$ ise her $u \in E^+$ için $|x_\alpha - y| \wedge u \xrightarrow{o} 0$ olur. Herhangi $u, v \in E^+$ için;

$$\begin{aligned}
&|x-y| \wedge (u+v)\\
&\leq (|x-y| \wedge u) + (|x-y| \wedge v)\\
&\leq ((|x_\alpha - x| + |x_\alpha - y|) \wedge u) + ((|x_\alpha - x| + |x_\alpha - y) \wedge v)\\
&\leq |x_\alpha - x| \wedge u + |x_\alpha - y| \wedge v + |x_\alpha - x| \wedge u + |x_\alpha - y| \wedge v \xrightarrow{o} 0
\end{aligned}$$

Böylece x=y bulunur.

□

Lemma 4.1.3. *E bir Riesz uzayı ve $(x_\alpha), (y_\alpha) \subseteq E$ olmak üzere;*

(i) $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ *ve* $y_\alpha \xrightarrow{uo} y$ *ise her* $a, b \in \mathbb{R}$ *için* $ax_\alpha + by_\alpha \xrightarrow{uo} ax + by$ *olur.*

(ii) $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ *ancak ve ancak* $x_\alpha^+ \xrightarrow{uo} x^+$, $x_\alpha^- \xrightarrow{uo} x^-$*'dir. O halde* $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ *ise* $|x_\alpha| \xrightarrow{uo} |x|$ *olur.*

(iii) $0 \leq x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ *ve* $x_\alpha \leq y_\alpha \xrightarrow{uo} y$ *ise* $0 \leq x \leq y$*'dir.*

Kanıt. (i) $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ ise her α ve her $u \in E^+$ için $|x_\alpha - x| \wedge u \leq z_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde $(z_\alpha) \subseteq E$ neti vardır. Benzer şekilde $y_\alpha \xrightarrow{uo} y$ ise her α ve her $v \in E^+$ için $|y_\alpha - y| \wedge v \leq t_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde $(t_\alpha) \subseteq E$ neti bulunur.

$$\begin{aligned}
|(ax_\alpha + by_\alpha) - (ax + by)| \wedge |u+v| \leq &\quad (|ax_\alpha - ax| + |by_\alpha - by|) \wedge (u+v)\\
\leq &\quad (|a||x_\alpha - x| + |b||y_\alpha - y|) \wedge (u+v)\\
\leq &\quad (|a||x_\alpha - x| \wedge u) + (|b||y_\alpha - y|) \wedge v)\\
\leq &\quad (|a|z_\alpha) + (|b|t_\alpha) \downarrow 0
\end{aligned}$$

olur. Böylece $ax_\alpha + by_\alpha \xrightarrow{uo} ax + by$ olur.

(ii) $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ ise her $u \in E^+$ için $|x_\alpha - x| \wedge u \xrightarrow{o} 0$ olur.

$$|x_\alpha^+ - x^+| \wedge u = |(x_\alpha \vee 0) - (x \vee 0)| \wedge u \leq |x_\alpha - x| \wedge u \Rightarrow x_\alpha^+ \xrightarrow{uo} x^+$$

Benzer şekilde $x_\alpha^- \xrightarrow{uo} x^-$ olur. Tersine $x_\alpha^+ \xrightarrow{o} x^+$ ve $x_\alpha^- \xrightarrow{o} x^-$ ise (i)'den $x_\alpha^+ - x_\alpha^- \xrightarrow{o} x^+ - x^- = x$ olur. Ayrıca

$$||x_\alpha| - |x|| \wedge u \leq |x_\alpha - x| \wedge u$$

olduğundan

$$|x_\alpha| \xrightarrow{uo} |x|$$

sağlanır.

(iii) $0 \leq x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ ve (i)'den $|x_\alpha| = x_\alpha \xrightarrow{uo} |x|$ olup limitin tekliğinden $|x| = x \geq 0$ olur. $x_\alpha \leq y_\alpha$ ise $y_\alpha - x_\alpha \geq 0$'dır. O halde $0 \leq y_\alpha - x_\alpha \xrightarrow{uo} y - x$ ise $y - x \geq 0$ olacağından $y \geq x$ koşulu elde edilir.

□

Lemma 4.1.4. *E Dedekind tam Riesz uzayı ve I, E'nin ideali olsun.* $(x_\alpha) \subseteq I$ *olmak üzere* $x_\alpha \xrightarrow[I]{uo} 0$ *olması için gerek ve yeter şart* $x_\alpha \xrightarrow[E]{uo} 0$ *olmasıdır.*

Kanıt. ($\Leftarrow$) E içinde $x_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ ise her $y \in I^+$ için $|x_\alpha| \wedge y \xrightarrow{o} 0$ olur. Böylece $x_\alpha \xrightarrow[I]{uo} 0$ sağlanır.
($\Rightarrow$) $x_\alpha \xrightarrow[I]{uo} 0$ ise her $y \in \ I^+$ için $|x_\alpha| \wedge y \xrightarrow[I]{o} 0$ olur. Bu durumda Lemma 3.1.5'den $|x_\alpha| \wedge y \xrightarrow[E]{o} 0$ elde edilir.
Şimdi her $y \in \ I^+$ ve $0 \leq z \in \ I^d$ alalım. $|x_\alpha| \wedge (y+z) \leq (|x_\alpha| \wedge y) + (|x_\alpha| \wedge z) = |x_\alpha| \wedge y$ olur. Herhangi bir $w \in E^+$ ve $0 \leq u \in \ I + I^d$ alalım. $w \wedge u \leq u$ ve $u \in \ I + I^d$ ($I + I^d$ *ideal*) olacağından $w \wedge u \in \ I + I^d$'dır. Bu durumda $|x_\alpha| \wedge (u + w) \xrightarrow[E]{o} 0$ sonucu bulunur. □

Tanım 4.1.5. (i) $P : E \to E$ lineer dönüşümü için $P^2 = P$ ise P'ye projeksiyon denir.

(ii) E bir Riesz uzayı ve B, E'nin bandi olsun. $E = B \bigoplus B^d$ her $x \in E$ için $x = x_1 + x_2$ $x_1 \in B, \ x_2 \in B^d$ olsun.

$$P_B : E \to E$$

$$x \to P_B(x) = x_1$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm B'ye karşılık gelen band projeksiyon olarak tanımlanır.

(iii) E bir Riesz uzayı ve B, E'nin bandi olmak üzere; $E = B \bigoplus B^d$ oluyor ise B'ye projeksiyon band denir. [2] kaynağında

$$P_B(x) = sup\{y \in B : 0 \leq y \leq x, \ \forall \ x \in E^+\}$$

şeklinde ifade edilmiştir. Eğer E Dedekind tam Riesz uzayı ise her $B \subseteq E$ bandi için $E = B \bigoplus B^d$ koşulu sağlanır.

Lemma 4.1.6. *[13] B projeksiyon band ve P, B'ye karşılık gelen band projeksiyon olsun. Eğer E'de $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ ise hem E'de hem B'de $Px_\alpha \xrightarrow{uo} Px$ olur.*

Kanıt. $x \in E^+$ alalım. P band projeksiyon olduğundan $0 \leq P(x) = x_1 \leq x_1 + x_2 = I(x)$ olur. Herhangi iki $x, y \in E^+$ için $x \wedge y = 0$ olsun. $0 \leq P(x) \wedge P(y) \leq x \wedge y \leq 0$ koşulu sağlandığından P Riesz homomorfizm olur. $|Px_\alpha - Px| = P|x_\alpha - x| \leq |x_\alpha - x|$ olduğundan Px_α neti Px'e E içinde uo-yakınsaktır. Herhangi bir $y \in B_+$ elemanını alalım. E içinde $|Px_\alpha - Px| \wedge y \xrightarrow{o} 0$'dır. Böylece Lemma 4.1.4'den B içinde de $Px_\alpha \xrightarrow{uo} Px$ olur.

□

Teorem 4.1.7. *E bir Riesz uzayı olmak üzere $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ ise $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ 'dır.*

Kanıt. $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ ise her α için $|x_\alpha - x| \leq u_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde $(u_\alpha) \subseteq E$ neti vardır. Herhangi $u \in E^+$ için $|x_\alpha - x| \wedge u \leq |x_\alpha - x|$ olduğundan $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ sağlanmış olur. □

Diğer taraftan uo-yakınsaklığın sıra yakınsaklığı gerektirmesi için sıra sınırlılık şarttır.

Teorem 4.1.8. *[13] E Dedekind tam bir Riesz uzayı; e E'nin zayıf birimi, $(x_\alpha) \subseteq E$ bir net olsun. Bu durumda $x_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ olması için gerek ve yeter şart $|x_\alpha| \wedge e \xrightarrow{o} 0$ olmasıdır.*

Kanıt. $(\Rightarrow)$ $x_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ ise her $u \in E^+$ için $|x_\alpha| \wedge u \xrightarrow{o} 0$ olmalıdır. $u = e$ alınırsa $|x_\alpha| \wedge e \xrightarrow{o} 0$ sağlanır.
$(\Leftarrow)$ Herhangi bir $u \in E^+$ alalım. E Dedekind tam olduğundan

$$(inf_\alpha sup_{\beta \geq \alpha}(|x_\beta| \wedge u)) \wedge e = (inf_\alpha sup_{\beta \geq \alpha}|x_\beta| \wedge e) \wedge u = 0 \wedge u = 0$$

'dır. e zayıf birim olduğundan $inf_\alpha sup_{\beta \geq \alpha}(|x_\beta| \wedge u = 0$ ve $|x_\alpha| \wedge u \xrightarrow{o} 0$ sonucu elde edilir. Böylece $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ olur.

□

Lemma 4.1.9. *E sıra sürekli norma sahip Banach uzayı olsun. $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ ise $\|x\| \leq lim\ inf_\alpha \|x_\alpha\|$ olur.*

Kanıt. $||x_\alpha| \wedge |x| - |x| \wedge |x|| \leq ||x_\alpha| - |x|| \wedge |x| \leq |x_\alpha - x| \wedge |x| \xrightarrow{o} 0$ olur. E sıra sürekli Banach latis olduğundan $|x_\alpha - x| \wedge |x| \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$'dir. Buradan da açıkça $\|x\| \leq liminf_\alpha \||x_\alpha| \wedge |x|\| \leq liminf_\alpha \|x\|$ elde edilir. □

Tanım 4.1.10. A, $(E, \|.\|)$ norm latisinin bir alt kümesi olsun. Her $\epsilon > 0$ ve $x \in A$ için $\|(|x| - u_\epsilon)^+\| = \||x| - u_\epsilon \wedge |x|\| \leq \epsilon$ olacak şekilde $u \in E^+$ var ise **hemen hemen sıra sınırlı**'dır denir.

Önerme 4.1.11. *E sıra sürekli norma sahip bir Banach latis olmak üzere; eğer hemen hemen sıra sınırlı (x_α) neti x'e sınırsız sıra yakınsak ise (x_α) neti x'e norm yakınsaktır.*

Kanıt. $(|x_\alpha - x|)$ neti de hemen hemen sıra sınırlı olacağından sabit bir $\epsilon > 0$ ve bir tane $u > 0$ vardır öyle ki her α için;

$$\||x_\alpha - x| - |x_\alpha - x| \wedge u\| = \|(|x_\alpha - x| - u)^+\| \leq \epsilon \qquad (4.1.1)$$

E içinde $|x_\alpha - x| \wedge u \xrightarrow{o} 0$ olduğundan

$$\||x_\alpha - x| \wedge u\| \to 0. \qquad (4.1.2)$$

(4.1.1) ve (4.1.2) birleşiminden $x_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ elde edilir.

□

Önerme 4.1.12. *E bir Banach latis ve (x_n), 0'a norm yakınsak pozitif terimli bir dizi ise (x_n)'in bir alt dizisi 0'a sıra yakınsar.*

Kanıt. (x_n)'in $\|x_{n_k}\| \leq 2^{-k}$ koşulunu sağlayan (x_{n_k}) bir alt dizisini alalım. $y_k = \sum_{j=k}^{\infty} x_{n_j}$ şeklinde tanımlansın. $y_k \downarrow$ ve $\|y_k\| = \sum_k^{\infty} 2^{-j} \leq 2^{1-k}$ olduğundan $y_k \downarrow 0$ elde edilir. $|x_{n_k}| \leq y_k$ olup $x_{n_k} \xrightarrow{o} 0$ sağlanır. □

Lemma 4.1.13. *E Dedekind tam Banach latis ve F, E'nin kapalı bir alt latisi olsun. F sıra sürekli ise aşağıdaki ifadeler doğrudur.*

(i) F'nin her üstten sıra sınırlı alt kümesi için F içinde supremum değeri vardır ve bu değer E'deki supremum değerine eşittir.

(ii) F içindeki her sıra sınırlı (x_α) netini alalım. F içinde $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ olması için gerek ve yeter koşul E içinde de $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ olmasıdır.

(iii) F içindeki herhangi bir (x_α) netini alalım. F içinde $x_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ olması için gerek ve yeter şart E içinde de $x_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ olmasıdır.

Kanıt. (i) F içinde $A = (x_\alpha)$ bir net ve $(x_\alpha) \uparrow$ olsun. A'nın F içinde sahip olduğu supremum değere x diyelim. F sıra sürekli olduğundan $x_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ olur ve böylece E içinde de $x_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ sağlanır. Aynı zamanda (x_α) artan olduğundan, x E içinde de supremum değer olur.

(ii) F içinde sıra sınırlı bir (x_α) neti $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ olsun. F Dedekind tam olduğundan $y_\alpha = sup_{\beta \geq \alpha} \|x_\beta\|$ şeklinde tanımlanan (y_α) neti iyi tanımlıdır ve F içinde $y_\alpha \downarrow 0$ olur . (i). öncülden E içinde de $y_\alpha \downarrow 0$ olur. $|x_\alpha| \leq y_\alpha$ olduğundan E içinde $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ yazılır. Tersine E içinde $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ iken E Dedekind tam olduğundan $y_\alpha = sup_{\beta \geq \alpha} |x_\beta|$ iyi tanımlı ve E içinde $y_\alpha \downarrow 0$'dır. Yine (i). öncülden $y_\alpha \in F$'dir ve F içinde $y_\alpha \downarrow 0$ ise $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ sağlanır.

(iii) E içinde $x_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ olsun. O halde herhangi bir $0 < y \in F$ için E içinde $|x_\alpha| \wedge y \xrightarrow{o} 0$ yazılır. (ii). öncülden F içinde de $x_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ diyebiliriz. Tersine F içinde $x_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ olsun. I, F tarafından üretilen ideal ve $x \in I_+$ alalım. İdeal tanımından $y \in F_+$ için $x \leq y$ olur. F içinde $|x_\alpha| \wedge y \xrightarrow{o} 0$ olup (ii). öncülden $|x_\alpha| \wedge y \xrightarrow{o} 0$ olacaktır. Lemma 4.1.6 ve Lemma 4.1.4'den E içinde de $x_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ sağlanır.

□

Açıklama 4.1.14. *(i) (x_α) E içinde bir net olmak üzere $(x_\alpha - x_{\alpha'})_{(\alpha,\alpha')}$ neti 0'a uo-yakınsak ise (x_α) netine uo-Cauchy adı verilir.*

(ii) (x_α) uo-Cauchy netinin uo-limiti x olan bir alt neti neti var ise $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ olur.

(iii) Norm yakınsak uo-Cauchy bir net norm-limitine uo-yakınsaktır.

Önerme 4.1.15. *Sıra sürekli norma sahip Banach latis içinde her hemen hemen sıra sınırlı uo-Cauchy neti uo- yakınsaktır ve uo-limiti ile norm-limiti aynıdır.*

Kanıt. (x_α) hemen hemen sıra sınırlı ve uo-Cauchy bir net olsun. $(x_\alpha - x_{\alpha'})$ neti de hemen hemen sıra sınırlı ve 0'a uo-yakınsak olur. Önerme 4.1.11'dan 0'a norm yakınsak olup (x_α) norm-Cauchy ve böylece norm yakınsaktır. Açıklama 4.1.14'nin (ii). ifadesinden uo- limiti ve norm limiti aynıdır. $\square$

4.2 Sınırsız Sıra Kompakt Operatörler ve Özellikleri

Tanım 4.2.1. E ve F Riesz uzayları ve $T : E \to F$ bir operatör olsun. Herhangi bir $(x_\alpha) \subseteq E$ sıra sınırlı neti için $Tx_{\alpha_\beta} \xrightarrow{uo} y$ olacak şekilde (x_{α_β}) alt neti ve $y \in F$ varsa T operatörüne **sınırsız sıra kompakt (uo-kompakt)** denir.
Verilen tanımda (x_α) neti yerine (x_n) dizisi alırsak T operatörüne **dizisel sınırsız sıra kompakt** adı verilir.

Önerme 4.2.2. *E ve F Riesz uzayları ve $T : E \to F$ bir operatör olsun. T sıra kompakt ise uo-kompakttır.*

Kanıt. $(x_\alpha) \subseteq E$ sıra sınırlı net olsun. T sıra kompakt olduğundan bir tane (x_{α_β}) alt neti ve $y \in F$ vardır öyle ki $Tx_{\alpha_\beta} \xrightarrow{o} y$ olur. Her sıra yakınsak net uo-yakınsak olduğundan $Tx_{\alpha_\beta} \xrightarrow{uo} y$ elde edilir. O halde T uo-kompakttır.

□

Hatırlayacak olursak A bir $(E, \|\cdot\|)$ norm latisinin alt kümesi olsun. Her $\epsilon > 0$ ve $x \in A$ için $\|(|x| - u_\epsilon)^+\| = \||x| - u_\epsilon \wedge |x|\| \leq \epsilon$ olacak şekilde bir $u \in E^+$ var ise **hemen hemen sıra sınırlı**'dır denir.

Tanım 4.2.3. E bir Riesz uzayı, F norm latis ve $T : E \to F$ bir operatör olsun. T, E'nin sıra sınırlı kümelerini F'nin hemen hemen sıra sınırlı kümelerine götürüyor ise T operatörüne **semi-kompakt** operatör denir.

Tanım 4.2.4. E Arşimedyan Riesz uzayı $(x_n) \subseteq E$, $x \in E$ ve $u \in E^+$ olsun. Her $\epsilon > 0$ için $n > n_0$ iken $|x_n - x| \leq \epsilon u$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa (x_n) dizisi x'e **u-düzgün yakınsaktır** denir.

Tanım 4.2.5. E Arşimedyan Riesz uzayı $(x_n) \subseteq E$ olsun. (x_n) u-düzgün yakınsak olacak şekilde $u \in E^+$ varsa (x_n) x'e göreceli düzgün yakınsaktır denir.

Teorem 4.2.6. *[20] E Arşimedyan Riesz uzayı olsun. Eğer (x_n), x'e göreceli düzgün yakınsak ise $x_n \xrightarrow{o} x$'dir.*

Kanıt. $x_n \xrightarrow[duzgunyakınsak]{goreceli} x$ ise en az bir $u \in E^+$ için $x_n \xrightarrow[yakınsar]{u-duzgun} x$ olur. O halde her $\epsilon > 0$ için en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $n \geq n_0$ için $|x_n - x| \leq \epsilon u$ olur. $y_n = \dfrac{1}{n}u$ dizisi alınır ise $|x_n - x| \leq y_n$ ve E Arşimedyan Riesz uzayı olduğundan $|x_n - x| \leq y_n \downarrow 0$ bulunur.

□

Önerme 4.2.7. *E Banach latis, F sıra sürekli norma sahip Banach latis ve $T : E \to F$ operatör olsun. T semi- kompakt ve dizisel uo-kompakt ise T dizisel sıra kompakttır.*

Kanıt. $(x_n) \subseteq E$ sıra sınırlı bir dizi olsun. T dizisel uo-kompakt olduğundan $Tx_{n_k} \xrightarrow{uo} y$ olacak şekilde (x_{n_k}) alt dizisi ve $y \in F$ vardır. T semi-kompakt olduğundan Tx_{n_k}, F içinde hemen hemen sıra sınırlıdır. F sıra sürekli norma sahip Banach latis olduğundan Önerme 4.1.11'den $Tx_{n_k} \xrightarrow{\|\cdot\|} y$'tır. Ayrıca Önerme 4.1.12'den bir alt dizi $(x_{n_{k_m}})$ vardır öyle ki $Tx_{n_{k_m}} \xrightarrow{o} y$ olur. Böylece T dizisel sıra kompakttır.

□

Tanım 4.2.8. $(x_\alpha) \subseteq E$ ve E Banach latis olmak üzere her $u \in E^+$ için $\||x_\alpha - x| \wedge u\| \to 0$ oluyorsa x_α, x'e un-yakınsaktır denir ve $x_\alpha \xrightarrow{un} x$ şeklinde gösterilir.

Önerme 4.2.9. *Sıra sürekli norma sahip bir Banach latiste (x_α) uo-yakınsak ise un-yakınsaktır.*

Kanıt. $(x_\alpha) \xrightarrow{uo} x$ ise her $u \in E^+$ için $|x_\alpha - x| \wedge u \xrightarrow{o} 0$ olur. O halde her $u \in E^+$ için en az bir $(y_\alpha) \subseteq E$ vardır öyle ki $|x_\alpha - x| \wedge u \leq y_\alpha \downarrow 0$ olur. F sıra sürekli norma sahip Banach latis olduğundan dolayı sıra yakınsaklığı norm korur ve $\| |x_\alpha - x| \wedge u \| \leq \|y_\alpha\| \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ elde edilir. □

Lemma 4.2.10. $x_\alpha \xrightarrow{un} x$ *ve* (x_α) *hemen hemen sıra sınırlı ise* $x_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ *olur.*

Kanıt.

$$\begin{aligned}
\| |x_\alpha - x| \| - \| |x_\alpha - x| \wedge u \| &\leq \| |x_\alpha - x| - |x_\alpha - x| \wedge u \| \\
&= \| |x_\alpha - x| + (-|x_\alpha - x| \vee -u) \| \\
&= \| 0 \vee |x_\alpha - x| - u \| \\
&= \| (|x_\alpha - x| - u)^+ \| < \epsilon
\end{aligned}$$

olup $x_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ sağlanır. □

Hatırlayalım ki E Riesz uzayı, F Banach latis ve $T : E \to F$ bir operatör ve E içindeki her sıra sınırlı A kümesi için $T(A) \subset F$ içinde relatively kompakt ($\overline{T(A)}$ kapanışı norm kompakt) oluyorsa T GAM-kompakttır demiştik.

Önerme 4.2.11. *E Banach latis, F σ-sıra sürekli norm latis ve $T : E \to F$ bir operatör olsun. T dizisel uo-kompakt ve sıra sınırlı ise T GAM-kompakttır.*

Kanıt. $(x_n) \subset E$ sıra sınırlı bir dizi olsun. T dizisel uo-kompakt olduğundan (x_{n_k}) alt dizisi ve $y \in F$ vardır öyle ki $Tx_{n_k} \xrightarrow{uo} y$ olur. F σ-sıra sürekli norm latis olduğundan Önerme 4.2.9'den $Tx_{n_k} \xrightarrow{un} y$'dir. T sıra sınırlı ise (Tx_{n_k}), F'de sıra sınırlıdır ve aynı zamanda hemen hemen sıra sınırlı olur. Lemma 4.2.10'dan $Tx_{n_k} \xrightarrow{\|\cdot\|} y$ olacağından T GAM-kompakttır. □

Tanım 4.2.12. E ve F Riesz uzayı $T : E \to F$ bir operatör olsun. $x_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ iken $Tx_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ oluyorsa T operatörüne **uo-süreklidir** denir.

Önerme 4.2.13. *E, F ve G Riesz uzayları; $R : E \to F, T : F \to G, L : G \to F$ operatörler olsun.*

(i) R sıra sınırlı ve T uo-kompakt ise $T \circ R$ uo-kompakttır.

(ii) L uo-sürekli ve T uo-kompakt ise $L \circ T$ uo-kompakttır.

(iii) T pozitif, sıra sürekli ve uo-kompakt operatör ve $R_\alpha \downarrow 0$ sıra sınırlı operatörlerin oluşturduğu bir net ise $T \circ R_\alpha \downarrow 0$ uo-kompakt operatörlerin bir netidir.

Kanıt. (i) $(x_\alpha) \subseteq E$ sıra sınırlı bir net olsun. R sıra sınırlı olduğundan (Rx_α), F içinde sıra sınırlıdır ve T uo-kompakt ise $TRx_{\alpha_k} \xrightarrow{uo} y \in G$ olacak şekilde Rx_{α_k} alt neti vardır. Böylece $T \circ R$ uo-kompakttır.

(ii) $(x_\alpha) \subseteq F$ sıra sınırlı bir net olsun. T uo-kompakt olduğundan $Tx_{\alpha_\beta} \xrightarrow{uo} y \in G$ olacak şekilde (x_{α_β}) alt neti vardır. L uo-sürekli olduğundan $LTx_{\alpha_\beta} \xrightarrow{uo} Ly$ olur böylece $L \circ T$ uo-kompakttır.

(iii) $R_\alpha \downarrow 0$ sıra sınırlı operatörlerin azalan neti için Teorem 3.2.5'dan her $x \in E^+$ için F içinde $R_\alpha(x) \downarrow 0$ olur. $T : F \to G$ sıra sürekli,uo-kompakt ve R_α sıra sınırlı olduğundan her α için $T \circ R_\alpha$ (ii)'den uo- kompakttır. R_α sıra sınırlı ve $R_\alpha \downarrow 0$ olduğundan yine Teorem 3.2.5'dan her $x \in E^+$ için $R_\alpha(x) \downarrow 0$ böylece sıra yakınsaklık özelliğinden $R_\alpha(x) \xrightarrow{o} 0$'dır. T sıra sürekli ise $T \circ R_\alpha(x) \xrightarrow{o} 0$ ve T pozitif olduğundan T sıra sınırlıdır yani $T \circ R_\alpha(x) \downarrow 0$ diyebiliriz.

□

Teorem 4.2.14. *[20] E bir Banach latis olmak üzere ; $(x_n) \subseteq E$ ve $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ olması için gerek ve yeter şart (x_n)'in bir alt dizisi (x_{n_k})'nın da alt dizisi $(x_{n_{k_j}})$ için $x_{n_{k_j}} \xrightarrow{o} x$ olmasıdır.*

Teorem 4.2.15. *E güçlü norm birime sahip bir AM-uzayı ve F σ-sıra sürekli norma sahip Banach latis, $T : E \to F$ operatör olsun. T'nin dizisel sıra kompakt olması için gerek ve yeter koşul T operatörünün kompakt olmasıdır.*

Kanıt. ($\Rightarrow$) (x_n) E içinde norm sınırlı bir dizi olsun. E güçlü birime sahip bir AM-uzayı olduğundan (x_n) dizisi sıra sınırlıdır. $T : E \to F$ dizisel sıra kompakt operatör olduğundan bir tane (x_{n_k}) alt dizisi ve $y \in F$ vardır öyle ki $Tx_{n_k} \xrightarrow{o} y$'tır. F σ-sıra sürekli Banach latis olduğundan F içinde $Tx_{n_k} \xrightarrow{\|\cdot\|} y$ olur. Buradan $T : E \to F$ kompakttır.

($\Leftarrow$) (x_n) E içinde sıra sınırlı bir dizi olsun. Her sıra sınırlı küme norm sınırlı olduğundan (x_n) norm sınırlı olur. T kompakt olduğundan bir tane (x_{n_k}) alt dizisi ve $y \in F$ vardır öyle ki $Tx_{n_k} \xrightarrow{\|\cdot\|} y$ olur . Teorem 4.2.14'den $(x_{n_{k_m}})$ alt neti vardır öyle ki $Tx_{n_{k_j}} \xrightarrow{o} y$ olup T dizisel sıra kompakttır. □

Teorem 4.2.16. *[12] E bir Riesz uzayı ve E^δ Dedekind tamlanışı olmak üzere ; E , E^δ içinde regüler alt latistir ve (x_α) neti için $x_\alpha \xrightarrow[E]{o} 0$ olması için gerek ve yeter şart $x_\alpha \xrightarrow[E^\delta]{o} 0$ olmasıdır.*

Teorem 4.2.17. *F Riesz uzayı ve $K \subseteq F$ alt latisi olmak üzere aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.*

(i) K regülerdir.

(ii) $(y_\alpha) \subseteq K$ ve $y_\alpha \xrightarrow[K]{uo} 0 \Rightarrow y_\alpha \xrightarrow[F]{uo} 0$

(iii) $(y_\alpha) \subseteq K$, $y_\alpha \xrightarrow[K]{uo} 0 \Leftrightarrow y_\alpha \xrightarrow[F]{uo} 0$

Kanıt. $(iii) \Rightarrow (ii)$ Bu kısım oldukça açıktır.

$(ii) \Rightarrow (i)$ K içinde $y_\alpha \downarrow 0$ olsun. (y_α) netinin kuyruğu sıra sınırlı olduğundan bu nette sınırsız sıra yakınsaklık ile sıra yakınsaklık denktir. Böylece F içinde $y_\alpha \downarrow 0$ olur. Bu durumda F regüler uzaydır.

$(i) \Rightarrow (iii)$ K, F'in regüler alt latisi olmak üzere $(y_\alpha) \subseteq K$ için $y_\alpha \xrightarrow[K]{uo} 0$ olsun. $F \subseteq F^\delta$ regüler olduğundan K alt latisi de F^δ içinde regülerdir. K tarafından F^δ içinde üretilen I idealini alalım. I içinde $y_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ olduğunu iddia ediyoruz. $u \in I_+$ alalım. Bir tane $y \in K_+$ vardır öyle ki $0 \le u \le y$ olur. Kabulden K içinde $y_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ olduğundan $|y_\alpha| \wedge y \xrightarrow[K]{o} 0$ bulunur. K, F^δ içinde regüler olduğundan $|y_\alpha| \wedge y \xrightarrow[F^\delta]{o} 0$ elde edilir. Ayrıca

I, F^δ içinde de regüler olacağından Teorem 4.2.16'den $|y_\alpha| \wedge y \xrightarrow[I]{o} 0$ olur. $0 \leq u \leq y$ eşitsizliğinden $|y_\alpha| \wedge u \xrightarrow[I]{o} 0$ olacağından $y_\alpha \xrightarrow[I]{uo} 0$ sonucu bulunur. Lemma 4.1.4'den $y_\alpha \xrightarrow[F^\delta]{uo} 0$ olur. Son olarak $x \in F_+$ alınırsa $|y_\alpha| \wedge x \xrightarrow[F^\delta]{o} 0$ ve $|y_\alpha| \wedge x \xrightarrow[F]{o}$'dır. Buradan $y_\alpha \xrightarrow[F]{uo} 0$ sonucu elde edilir.

□

Tanım 4.2.18. E bir Riesz uzayı ve $A \subseteq E$ olsun. $x \in E$ için $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ iken $x \in A$ oluyor ise A kümesi uo-kapalıdır denir.

Teorem 4.2.19. *E ve F Riesz uzayları, $K \subseteq F$ regüler alt latis ve $T : E \to F$ bir operatör olsun.*

(i) $T : E \to K$ uo-kompakt ise $T : E \to F$ uo-kompakttır.

(ii) $T : E \to F$ uo kompakt ve R(T), F'nin regüler, uo-kapalı alt latisi K'nın bir alt uzayı ise $T : E \to K$ uo-kompakttır.

Kanıt. (i) (x_α) E içinde sıra sınırlı bir net olsun. T uo-kompakt olduğundan bir tane (x_{α_β}) alt neti ve $y \in K$ vardır öyle ki $Tx_{\alpha_\beta} \xrightarrow{uo} y$ olur. K regüler olduğundan Teorem 4.2.17'den $Tx_{\alpha_\beta} \xrightarrow{uo} y \in F$ olur. Buradan $T : E \to F$ uo-kompakttır.

(ii) (x_α) E içinde sıra sınırlı bir net olsun. $T : E \to F$ uo-kompakt olduğundan bir tane (x_{α_β}) alt neti ve $y \in F$ vardır öyle ki $Tx_{\alpha_\beta} \xrightarrow{uo} y$'tır . K, F'nin uo-kapalı alt latisi olduğundan $y \in K$ olur. Böylece F içinde $Tx_{\alpha_\beta} - y \xrightarrow{uo} 0$'dır. K regüler olduğundan Teorem 4.2.17'den K içinde de $Tx_{\alpha_\beta} \xrightarrow{uo} y$ olur. Buradan $T : E \to K$ uo-kompakt olduğunu söyleyebiliriz.

□

Sonuç 4.2.20. *E,F ve K Riesz uzayları $\pi : K \to F$ örten normal Riesz homomorfizmi olsun. Eğer $T : E \to K$ uo-kompakt ise $\pi \circ T : E \to F$ uo-kompakttır.*

Kanıt. $\pi : K \to F$ normal Riesz homomorfizm olduğundan tanım gereği π sıra süreklidir. (x_α) E içinde sıra sınırlı bir net alalım. T uo-kompakt olduğundan bir tane (x_{α_β}) alt neti ve $y \in K$ vardır öyle ki $Tx_{\alpha_\beta} \xrightarrow{uo} y$'tır. Herhangi bir $u \in F^+$ için örtenlikten $\pi(v) = u$ olacak şekilde $v \in K^+$ vardır. O halde uo-yakınsaklık tanımından $|Tx_{\alpha_\beta} - y| \wedge v \xrightarrow{o} 0$ olur. $\pi : K \to F$ normal Riesz homomorfizm ise $\pi(|Tx_{\alpha_\beta} - y|) = |\pi(Tx_{\alpha_\beta}) - \pi(y)| \wedge \pi(v) \xrightarrow{o} 0$ olacağından $\pi Tx_{\alpha_\beta} \xrightarrow[F]{uo} \pi(y)$ yazılır. Böylece $\pi \circ T$ uo-kompakttır. □

□

Kaynaklar

[1] C.D. Aliprantis, O. Burkinshaw , Locally solid Riesz spaces with applications to economics, second ed., Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 105, American Mathematical Society, Providence, RI, **2003**.

[2] C.D Aliprantis , O. Burkinshaw , Positive operators, Springer, Dordrecht, Reprint of the 1985 original, **2006**.

[3] A. Aydın , E. Yu Emelyanov , N. Erkurşun Özcan ,M. A. A. Marabeh, Indag. Math. (N.S.): Compact-like operators in lattice-normed spaces, , 29, 2, pp. 633–656, **2018**.

[4] Y. Azouzi , Math. Anal. Appl. : Completeness for vector lattices, , 472 , pp. 216-230, **2019**.

[5] Y. Azouzi , M. A.Ben Amor, Arxiv:1903.00370v1. : On Compact operators between lattice normed spaces, **2019**.

[6] Y. A. M. Dabboorasad , E. Yu Emel'yanov , M. A. A. Marabeh , Positivity : $u\tau$-convergence in locally solid vector lattices, 22, pp. 1065-1080, **2018**.

[7] R. De Marr , Illinois J. Math : Partially ordered linear spaces and locally convex linear topological spaces, 8,pp. 601-606, **1964**.

[8] Y.Deng , M.O 'Brien , V. G. Troitsky , Positivity : Unbounded norm convergence in Banach lattices, 21, pp.963-974, **2017**.

[9] N. Erkurşun-Özcan , N. A. Gezer, Positivity : Unbounded asymptotic equivalences of operator nets with applications, 23, **2019**.

[10] N. Erkurşun Özcan , N. A. Gezer , Ş.E. Özdemir , M. İ Urgancı ,(submitted) : Order compact and unbounded order compact operators, **2020**

[11] N. Gao , J. Math. Anal. Appl: Unbounded order convergence in dual spaces, , 419(1), pp. 347–354, **2014**.

[12] N. Gao , V. G. Troitsky , F. Xanthos, Israel Journal of Math. : Uo-convergence and its applications to Cesaro means in Banach lattices, , 220 , pp. 649-689, **2017**.

[13] N. Gao , F. Xanthos , J. Math Anal. Appl. : Unbounded order convergence and application to martingales without probability, 415, pp. 931-947, **2014**.

[14] S.Kaplan ,Real Anal. Exchange : On unbounded order convergence, 23(1), pp.175–184, **1997**.

[15] W. A. J. Luxemburg , A. C. Zaanen , Riesz spaces I, North-Holland Mathematical Library, London, **1971**.

[16] P. Meyer-Nieberg, Banach Lattices, Universitext. Springer-Verlag, Berlin, **1991**.

[17] H. Nakano , Ann. of Math.: Ergodic theorems in semi-ordered linear spaces, 49(2), pp. 538-556, **1948**.

[18] M. Pliev , Cent. Eur. J. Math. : Narrow operators on lattice-normed spaces, 9 (6), pp.1276-1287, **2001**.

[19] C. T. Tucker , Pacific Journal of Mathematics : Homomorphisms of Riesz spaces, 55 (1), **1974**.

[20] B. Z. Vulikh , Wolters-Noordhoff Scientific Publications, Ltd. : Introduction to the theory of partially ordered spaces, Groningen, **1967**.

[21] A. W Wickstead ., J. Austral. Math. Soc. Ser. A : Weak and unbounded order convergence in Banach lattices, 24(3), 312-319, **1977**.

[22] A. C. Zaanen , Riesz spaces II, vol. 30 of North-Holland Mathematical Library (North-Holland Publishing Co., Amsterdam), **1983**.