

**DEĞİŞKEN KOZMOLOJİK SABİTE SAHİP EVREN
MODELLERİNDE PARÇACIK VE OLAY UFKUNUN
İNCELENMESİ**

**INVESTIGATION OF PARTICLE AND EVENT HORIZON
IN UNIVERSE MODELS WITH VARIABLE
COSMOLOGICAL CONSTANT**

İBRAHİM ONUR TÜFEKÇİ

DOÇ. DR. AHMET MECİT ÖZTAŞ

Tez Danışmanı

Hacettepe Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin
Fizik Mühendisliği Anabilim Dalı için Öngördüğü
Yüksek Lisans TEZİ olarak hazırlanmıştır.

ÖZET

DEĞİŞKEN KOZMOLOJİK SABİTE SAHİP EVREN MODELLERİNDE PARÇACIK VE OLAY UFKUNUN İNCELENMESİ

İbrahim Onur Tüfekci

Yüksek Lisans, Fizik Mühendisliği Bölümü

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Ahmet Mecit Öztaş

Haziran 2020

Sunulan tez kapsamındaki modern evren modelleri çalışmalarında önemli bir role sahip karanlık enerji ve karanlık madde kavramları kozmoloji araştırmalarında öncelik verilmesi gereken ve büyük önem arz eden konulardır. Gözlemlerle uyuşan doğru modellerin oluşturulmasında karanlık enerjinin hesaba katılması bugün artık yadsınamaz bir gerçek ve zorunluluktur. Karanlık Enerji ile ilişkilendirilebilen kozmolojik sabitin büyüklüğü, homojen ve izotropik evren modellerinde zamansal davranışı tüm bu gerçeklerin ışığında aydınlatılması gereken bir konudur. Önerilen tez çalışmasında evrenin yaşının belirlenmesinde önemli ipuçları verebilen parçacık ve olay ufkunun değişken kozmolojik sabite sahip evren modellerinde incelenmesi öngörülmektedir. Karanlık enerjiyle ilişkilendirilen kozmolojik sabitin zamana bağlı olarak ele alınmasıyla ortaya çıkan yeni çalışmalarda geleneksel biçimdeki evren modellerinden farklı denklemlerle temsil edilen evren modellerindeki parçacık ve olay ufkunun hesabının farklı sonuçlar vereceği düşünülmektedir. Bu sonuçların karşılaştırılmasının da kozmoloji araştırmalarında önemli yer tutan karanlık enerjinin uzaysal ve zamansal açıdan

davranışına ışık tutacağı açıktır. Ayrıca elde edilecek sonuçların kozmolojide önemli yer tutan kozmolojik sabit probleminin anlaşılmasına katkıda bulunacağı düşünülmektedir.

Anahtar Kelimeler :Evren Modelleri, Kozmolojik Parametreler, Friedmann Robertson - Walker denklemleri, Einstein-Hilbert Eylemi, Parçacık Ufku.

ABSTRACT

INVESTIGATION OF PARTICLE AND EVENT HORIZON IN UNIVERSE MODELS WITH VARIABLE COSMOLOGICAL CONSTANT

İbrahim Onur Tüfekci

Master of Science, Physics Engineering Department

Supervisor : Doç. Dr. Ahmet Mecit Öztaş

June, 2020

The concepts of dark energy and dark matter, which have an important role in the work of the modern universe models within the scope of the presented thesis, are important issues that should be given priority in cosmology research. It is an undeniable fact and necessity to take into account the dark energy in the creation of the right models that match the observations. The magnitude of the cosmological constant that can be associated with Dark Energy, and its temporal behavior in homogeneous and isotropic universe models is an issue that needs to be illuminated in the light of all these facts. In the proposed thesis study, it is envisaged to examine the particle and event horizon, which can give important clues in determining the age of the universe, in the models of the universe with variable cosmological constant. It is thought that the calculation of the particle and event horizon in the universe models represented by different equations than the conventional form of the universe models in the new studies that emerged with the handling of the cosmological constant associated with dark energy depending on the time. It is clear that the comparison of these results will shed light on the spatial and temporal behavior of dark energy, which plays an important role in cosmology research. It is also

thought that the results to be obtained will contribute to the understanding of the cosmological constant problem, which has an important place in cosmology.

Keywords : Universe Models, Cosmological Parameters, Friedmann Robertson - Walker equations, Einstein-Hilbert Action, Particle Horizon.

TEŞEKKÜR

Tez alıőmamın her adımında bilgisiyle yolumu aydınlatan Doç. Dr. Ahmet Mecit Öztaş'a sonsuz teőekkürlerimi ve saygılarımı sunarım. Ayrıca, bu süreçte desteğini asla esirgemeyen Doç. Dr. Emre Dil'e de çok teşekkür ederim. Her zaman yanımda olan aileme de sonsuz teőekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR.....	v
İÇİNDEKİLER	vi
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	viii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	x
1.GİRİŞ.....	1
2. EVRENİN GEOMETRİSİ.....	3
2.1. Uzay – Zamanın Geometrisi	3
2.2. Evrenin Yapısı ve Geometrisi	4
2.2.1 Düz Geometri	5
2.2.2 Küresel Geometri.....	6
2.2.3. Hiperbolik Geometri	8
3. EVRENİN İÇERİĞİ.....	11
3.1. Friedmann Denklemleri	11
3.2. Yoğunluk Parametreleri.....	14
3.2.1 Baryonik ve Baryonik Olmayan Madde	14
3.2.2. Karanlık Madde	14
3.2.3. Kozmolojik Sabit ve Karanlık Enerji.....	15
4. DEĞİŞKEN KOZMOLOJİK SABİTE SAHİP EVREN MODELLERİNDE PARÇACIK VE OLAY UFKU	18
4.1. Parçacık Ufku	18
4.1.1 $\Lambda(t) \propto 1/a(t)^2$ Durumu	19

4.1.2 $\Lambda(t) \propto H^2$ Durumu	21
4.1.3 $\Lambda(t) \propto \rho(t)$ Durumu	23
4.2. Parçacık Ufkunun Evrilmesi	25
4.2.1 $\Lambda(t) \propto 1a(t)^2$ Durumu İçin Ufkun Evirilmesi.....	26
4.2.2 $\Lambda(t) \propto H^2$ Durumu İçin Ufkun Evirilmesi.....	27
4.2.3 $\Lambda(t) \propto \rho(t)$ Durumu için ufkun evirilmesi	28
4.3. Olay Ufku.....	28
4.3.1 $\Lambda(t) \propto 1a(t)^2$ Durumu	29
4.3.2 $\Lambda(t) \propto H^2$ Durumu	30
4.3.3 $\Lambda(t) \propto \rho(t)$ Durumu	30
4.4. Olay Ufkunun Evrilmesi	31
4.4.1 $\Lambda(t) \propto 1a(t)^2$ Durumu İçin Ufkun Evirilmesi.....	31
4.4.2 $\Lambda(t) \propto H^2$ Durumu İçin Ufkun Evirilmesi.....	32
4.4.3 $\Lambda(t) \propto \rho(t)$ Durumu İçin Ufkun Evirilmesi.....	32
5. SONUÇLAR VE TARTIŞMA	39
6. KAYNAKLAR.....	42
EKLER.....	44
Tez Çalışması Orjinallik Raporu.....	44
ÖZGEÇMİŞ.....	45

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 1. Olası geometri türlerinin özeti.....	10
Çizelge 2. Farklı geometri türlerine göre yoğunluk ve evrenin tipi.....	17

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Pisagor teoreminin uygulanması	3
Şekil 2.2. İki Boyutlu yüzey	6
Şekil 2.3. Pozitif k 'yı temsil eden küresel bir yüzeyin çizimi.....	7
Şekil 2.4. Negatif k değerine sahip evren modeli	9
Şekil 4.1 Durum 1 için parçacık ufkunun davranışı.....	33
Şekil 4.2. Durum 1 için parçacık ufkunun hızının davranışı	34
Şekil 4.3 Durum 2 için parçacık ufkunun davranışı.....	34
Şekil 4.4. Durum 2 için parçacık ufkunun hızının davranışı	35
Şekil 4.5. Durum 3 için parçacık ufkunun davranışı.....	35
Şekil 4.6. Durum 3 için parçacık ufkunun hızının davranışı	36
Şekil 4.7. Durum 2 için olay ufkunun davranışı	36
Şekil 4.8. Durum 2 için olay ufkunun hızının davranışı.....	37
Şekil 4.9. Durum 3 için olay ufkunun davranışı	37
Şekil 4.10. Durum 3 için olay ufkunun hızının davranışı.....	38

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

Λ	Kozmolojik Sabit
R_{ik}	Ricci Eğrilik Tensörü
g_{ik}	Metrik Tensör
G	Çekim Sabiti
c	Işık Hızı
T_{ik}	Enerji Momentum Tensörü
k	Eğrilik Parametresi
H	Hubble Parametresi
p	Basınç
ρ	Yoğunluk
Ω	Yoğunluk Parametresi

Kısaltmalar

Mpc	Megaparsek
FRW	Friedmann Robertson Walker Denklemleri

1. GİRİŞ

Evrenin matematiksel modellerinin araştırılması ve formüle edilmesi modern kozmolojinin en büyük ilgi alanlarından biridir. Bunlar gözlenebilir nicelikler arasındaki genel bağlantıları gösteren denklemler formunda oluşurlar. Model kullanılmadan önce gözlem ile belirlenmesi gereken bazı parametreler vardır, örneğin Hubble sabiti gibi.

Modern kozmoloji Einstein'ın 1917'de genel görelilik teorisinin kozmolojik olgular başlıklı makalesiyle başlamıştır. Makalenin teması tasarlanan herhangi bir evren modelinde uzay ve zamanın önemli bir yere sahip olduğudur.

Görelilik teorisinin ortaya çıkışından önce birçok fizikçi uzay ve zamanın madde ve ışınım (radyasyon) için basit bir taşıyıcı görevi gördüğü görüşündeydiler. Bu anlayışa göre, her madde veya ışınım parçacığı zamanın her hangi bir anında uzaydaki bir noktada bulunmaktadır[1]. Madde ve ışınımın buldukları uzay ve zamanın özelliklerinden bağımsız olduğu düşünülmekteydi. Bu düşünce Einstein tarafından köklü şekilde değiştirildi. Einstein tarafından yayımlanan özel görelilik teorisi uzayın üç boyut ve zamanın tek boyut olarak genellikle uzay-zaman olarak adlandırılan birleştirilmiş dört boyutlu bir yapı oluşturduğunu ifade etmektedir. Daha sonra uzay zamanın geometrik özelliklerinin ortamda bulunan madde ve ışınım tarafından etkilendiğini göstermiştir. Bu sayede kozmolojik açıdan kilit bir yol oynayan kütle çekim kavramını açıklamıştır. 1668 senesinde Newton tarafından yayımlanan çekim teorisine göre, Dünya ve Güneş arasındaki etkileşim gibi kütle çekim kavramı her iki cisim arasında meydana gelmektedir. Bu teoriye göre, cisimler arasında bulunan uzay boyunca anında hareket eden bir kuvvet tarafından meydana gelmekteydi. Newton bu kuvveti cisimlerin kütleleri ve aralarındaki mesafeye orantılı olacak şekilde matematiksel denklem haline getirmiştir. Fakat Newton kütleçekim kuvvetinin kökenini izah edememiştir. Einstein, Newton'dan sonra geçen uzun yıllar sonunda kütle çekim kuvveti diye bir kuvvetin olmadığını ifade etmiştir. Einstein tarafından ortaya atılan düşünceye göre, herhangi bir uzay zamanda bulunan büyük kütleli bir cisim içinde bulunduğu ortama etki ederek geometrik bir farklılaşmaya neden olmaktadır. Bu düşünce uzay-zaman eğriliğinin kütle çekimini meydana getirdiğini ifade etmektedir. Bu düşünce geometrik bir kavram olarak ifade edilir. Genel görelilik genel anlamda Einstein tarafından ortaya atılan geometrik kütle

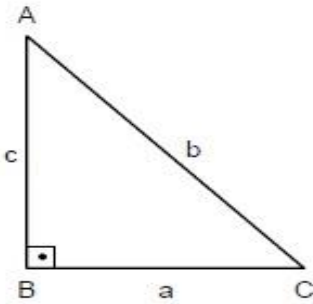
çekim teorisidir. Genel göreliliğe göre herhangi bir bölgedeki uzay-zaman eğriliğini belirleyen şey basit olarak o bölgede bulunan büyük kütleli cisimlerin varlığı değil, bölge boyunca olan enerji ve momentum dağılımıdır[1]. Madde ve ışınım parçacıkları bir enerjiye sahip oldukları için, madde ve ışınım dağılımı bir enerji dağılımıyla ifade edilebilmektedir. Momentum ve enerji arasındaki geçiş için basit bir bağıntı bulunmaktadır. Bir parçacığın kütlesi ve hızı biliniyorsa momentumu ve enerjisi vardır ve bulunabilir. Bu nedenle madde veya ışınımın herhangi bir parçacığı ile ilişki kurulabilir. Evren boyunca madde ve ışınım yayılmaktadır. Bunun sonucunda büyük ölçekli, madde ve ışınım ile bağlantılı enerji ve momentum dağılımının var olması da beklenmektedir. Enerji ve momentum dağılımı genel görelilik denklemleriyle beraber uzay zamanın eğriliğinin bir matematiksel ifadesini gösterir[2]. Bu düşünce rölativistik kozmolojinin temel ana hatlarını oluşturur. Kozmologlar açısından uzay bir geometri konusudur. Geometri tanım olarak uzaydaki yüzeylerin, hacimlerin ve çizgilerin karakteristikleri ve birbirleriyle olan ilişkilerini ifade eden bir matematik dalıdır. Aslında bu çalışmayla uzayın bizatihi kendisi hakkında bilgiler elde edilir.

2. EVRENİN GEOMETRİSİ

2.1. Uzay – Zamanın Geometrisi

Geniş bir konu olan geometriyi Gauss ve Riemann 19. yüzyılda basit matematiksel eşitliklerle özetlemenin yollarını bulmuşlardır[3]. Özellikle Pisagor teoreminin istisnasının Gauss tarafından fark edilerek dik açılı üçgenler hakkında (Şekil 2.1) gelişmeyi başlatmıştır. Pisagor teoremi bir dik üçgenin kenarlarını basit bir şekilde ilişkilendirir. Böylece herhangi bir iki tarafın uzunluğu biliniyorsa üçüncü tarafın uzunluğu bulunabilir.

$$b^2 = a^2 + c^2$$



Şekil 2.1 Pisagor teoreminin uygulanması

Gauss tarafından ortaya artılan düşünceye göre bu sonuç en küçük dik açılı üçgenlere uygulanabilir. İki boyutlu bir düzlemin geometrisi hakkında matematiksel kanıtları için başlangıç noktası olarak kullanılabileceğini fark etmiştir[3]. Sonuç olarak, eğer şekildeki gibi bir dik üçgenin sonsuz küçük bir prototipi tahayyül edilirse ve kenarları ds , dx ve dy birimleri olmak üzere, iki boyutlu bir düzlemin geometrisi basitçe ifade edilebilir.

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

İki boyutlu bir düzlemin geometrisi bu denklem yardımıyla basitçe ifade edilir. Bir sonraki adım olarak bu denklem üç boyutlu uzaya da genelleştirilebilir. Üç boyutlu bir koordinat sisteminde x , y ve z dikey eksenleri göstermek üzere kullanılan bir uzayda herhangi bir nokta tanımlanırsa, son derece küçük bir yüzeyde Pisagor teoremi tanımlanabilir. Burada dx , dy ve dz sonsuz küçük koordinat farklarını ifade etmekteir. Bu

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

denklemlerle ifade edilir. Üç boyutlu geometri açısından bu denklem çok önemli bir yere sahiptir. Fakat, bu eşitlik ile sadece düz bir yüzeyin geometrisi ifade edilebilmektedir. Diğer bir ifadeyle, eğri iki boyutlu yüzeyler için çizilen şekillerin geometrisini tanımlamaz.

Kavranması açısından üç boyutlu eğri bir uzayın anlaşılması zordur. Prensip olarak üç boyutlu düz ve ayrıca eğri bir uzaydan elde edilen sonuçlar birbirinden farklı olacaktır. Örneğin, geometrinin temel prensiplerinden olan düz bir uzayda herhangi bir üçgenin iç açıları toplamı 180° iken, eğri bir uzayda bu sonuç doğru olmayacaktır. Diğer bir örnek olarak, düz bir uzayda başlangıç noktasından itibaren paralel olan iki doğru, eğri bir uzayda paralel olarak devam etmeyecektir.

Üç boyutlu uzayın ardından dört boyutlu uzay-zamanın geometrisine geçilebilir. Düz bir uzay-zaman tanımı yapıldığına göre, burada yapılması gereken davranış son eşitliği değiştirmektir. Bu değişikliğe göre uzayda birbirinden oldukça küçük bir mesafede bulunan noktaları dikkate almak yerine, uzayda iki komşu olayı dikkate alarak genelleştirmektir. Bu iki olay dx , dy ve dz sonsuz küçük miktarlarda konum bakımından hala farklılık gösterir. Ancak, bu olayların meydana geldikleri zamanlar, dt sonsuz küçük miktarda farklılık gösterecek şekilde de seçilebilir. Düz bir uzay-zaman için oluşturulan Einstein'ın özel görelilik teorisine göre, son eşitlik en uygun şekilde

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 (dt)^2$$

biçiminde yazılabilir. Burada c boşluktaki ışık hızı olup, bu eşitlik düz dört boyutlu bir uzay-zamanın geometrisini tanımlamaktadır ve görelilik teorisine birlikte keşfedilmiştir[4].

2.2. Evrenin Yapısı ve Geometrisi

Kopernik ilkesine göre evreni ayrıcalıklı bir konumdan gözlemekteyiz. Daha net bir ifadeyle evren her yönde aynı görünmektedir ve büyük ölçeklerde evren her yerde aynı olmalıdır. Kozmologlar, kozmolojide önemli bir varsayım olan bu prensibe kozmoloji ilkesi adını vermişlerdir. Yeterince büyük ölçeklerde evren homojen (her yerde aynı) ve izotropiktir (her yönde aynı)[4]. İzotropik ve homojen ifadeleri bu noktaya kadar

kullanılan tekdüzelik olgusunu ortaya koymaktadır. Bir dağılımın izotropik olmadan homojen olması mümkün olmadığı için her iki terime de ihtiyaç vardır. Örnek olarak, homojen bir manyetik alanın varlığı her yerde aynı yönde olsa bile evrende izotropiklik sağlamaz.

Kozmoloji ilkesiyle uyumlu olan en basit kozmoloji modellerinde, evren'in tamamen tekdüze bir gaz veya akışkan ile dolu olduğu düşünülmektedir[4]. Sadece ilgilenilen bir t zamanın yoğunluğunu ve basıncını belirlenmesiyle evrenin içeriği basitleştirilmiş bir biçimde ifade edilebilir. Gazın sahip olduğu iki özelliği sayesinde sıcaklık gibi diğer tüm parametreleri belirler. Yoğunluk ve basınç genellikle ρ ve p ile gösterilmektedir. Ancak genişleyen bir evrende zamanla değişen bir yoğunluk ve basınç ifadesi akla yatkındır. Dolayısıyla bu zamana olan bağımlılığı ifade etmek için yoğunluk ve basıncı herhangi bir t zamanında $\rho(t)$ ve $p(t)$ şeklinde yazmayı gerekmektedir. Kozmolojide genel olarak basıncın önemsiz olduğu varsayılarak basitleştirilmeye gidilmektedir. Bu varsayımlardan yola çıkarak, basitce evrendeki enerjinin ve momentumun matematiksel dağılımı ifade edilebilir. Bu matematiksel dağılım sayesinde genel görelilik denklemleri uzay-zamanının geniş ölçekli geometrisi belirlemek için kullanılabilir ve böylelikle kozmolojik bir model oluşturulabilir.

Bu modele göre evrenlerin hem homojen hem de izotropik olması gerektiğini ifade eden kozmolojik prensibe uyulması gerekmektedir[4]. Bu özelliğe sahip olabilecek en basit geometri türü, Öklid geometrisinin normal kurallarının uygulandığı düz geometriye sahiptir. Buna karşın, izotropi varsayımının bunu tek seçenek olarak talep etmek için yeterli olmadığı ortaya çıkmıştır. Bunun yerine, evren için iki geometri daha vardır.

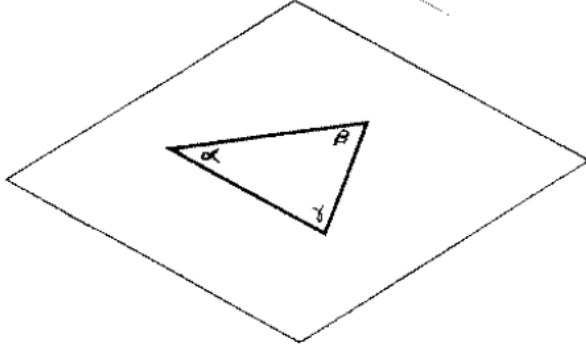
2.2.1 Düz Geometri

Öklid geometrisi iki nokta arasındaki en kısa yolun düz bir çizgi olduğu, paralel iki doğru arasındaki mesafenin her zaman sabit kaldığı aksiyomlar üzerine kurulu bilinen temel düz geometridir. Bunlar geometrinin standart yasalarıdır ve aşağıdaki bazı durumlara yol açar.

- İki nokta arasındaki en kısa yol bir doğrudur.
- Bir üçgenin iç açıları toplam 180 derecedir.
- R yarıçaplı bir dairenin çevresi $2\pi R$ 'dir.

Bu şekilde bir geometri kendi evrenimize temel olarak uyabilir. Eğer bu doğruysa, o zaman evren büyük ölçüde sonsuz olmalıdır çünkü belirli bir kenara gelirse, o zaman

evrenin her noktadan aynı görünmesi gerektiği ilkesini açıkça ihlal edecektir. Bu geometriye sahip bir evren genellikle düz bir evren olarak adlandırılır.



Şekil 1.2 İki boyutlu yüzey

Bu düzlemde (Şekil 2.2) yer alan bir üçgenin iç açıları toplamı 180 derecedir. Bir düzlemde, Kartezyen koordinat sistemi kurulabilir ve her noktaya bir koordinat (x, y) atanabilir. Düzlemde Pisagor teoremi kullanırsak, (x, y) ve $(x + dx, y + dy)$ arasındaki uzaklık

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

eşitliği ile verilir. Bu denklemin iki boyutlu bir uzayın her yerinde gerçek olduğunu belirtmek, uzayın bir düzlem olduğunu söylemeye eşdeğerdir. Kartezyen koordinatların yerine başka koordinat sistemleri de kullanılabilir. Örneğin, bir kutupsal koordinat sisteminde, noktalar (r, θ) ve $(r + dr, \theta + d\theta)$ arasındaki mesafe aşağıdaki eşitlik ile verilir:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$$

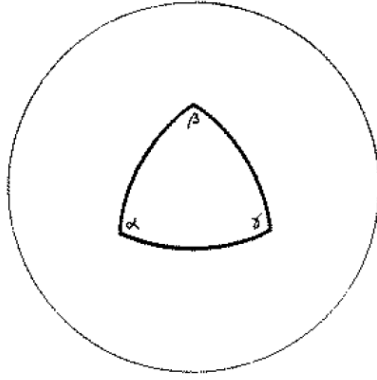
2.2.2 Küresel Geometri

Başlangıç olarak Şekil 2.3'e göre bir kürenin yüzeyi temel alınabilir. Bir kürenin yüzeyinde, bir jeodezik büyük bir dairenin (yani merkezi kürenin merkezine karşılık gelen bir dairenin) bir kısmıdır. Üç nokta jeodezi ile birleştirilerek kürenin yüzeyine bir üçgen oluşturulursa, köşelerindeki açılar (α, β, γ) aşağıdaki bağıntıya uyar:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{A}{R^2}$$

Burada A üçgenin alanı, R ise kürenin yarıçapıdır. Aşağıdaki şarta uyan bütün durumlar pozitif eğriliğe sahiptir:

$$\alpha + \beta + \gamma > \pi$$



Şekil 2.3 Pozitif k 'yı temsil eden küresel bir yüzeyin çizimi

Bir kürenin yüzeyinde, kuzey kutbu ve güney kutbu olmak üzere bir çift tam ters nokta seçerek ve kuzeyden güney kutbuna doğru birincil meridyen olmak üzere bir jeodezik seçerek bir kutupsal koordinat sistemi kurulabilir. Küre üzerinde gezinmek için kullanılan geometri küresel geometridir. Üç boyutlu evren hakkında düşünmeden önce Şekil 3'de gösterilen, kürenin iki boyutlu yüzeyinin özelliklerini incelenmelidir. Mükemmel bir küre yüzeyi yüzeyindeki tüm noktalardan aynı gözüktür, bu sebeple izotropi sağlanır. Örnek olarak bilardo topu düşünülürse, yukarısının, en tepe noktasının neresi olduğu bilinemez. Düz geometrinin aksine, küresel yüzey mükemmel ölçüde sonludur, alanı $4\pi R^2$ ile verilir. Küre yüzeyinin bir sınırı, bir kenarı yoktur. Kürenin yüzeyine paralel çizgiler çizilerek, Öklid'in son aksiyomu çiğnenir. Düz bir çizginin tanımlanması, iki nokta arasındaki en kısa mesafedir; küresel bir geometrideki düz çizgilerin, ekvator veya boylam çizgileri gibi büyük dairelerin daire kesmesi olduğu anlamına gelir. Boylam çizgileri küresel simetri de Öklid aksiyomunun başarısızlığına mükemmel bir örnektir. Ekvator'dan geçtiklerinde her ikisi birbirine paraleldir, ancak birbirleri arasındaki uzaklık sabit kalacağına her ikisi kutup noktalarında üst üste gelir. Bir kürenin üzerine bir üçgen

çizersek, açıların 180 dereceyi aştığı görülür. Küresel geometride bir dairenin çevresi de normal yasalara aykırıdır.

Üçgen veya daire için küresel geometride, sırasıyla, her zaman bir üçgenin açıları toplamı 180 dereceden fazladır ve bir dairenin çevresi $2\pi r$ 'den azdır. Üçgenler veya daireler kürenin boyutundan küçük yapılırsa, Öklid yasaları iyi bir yaklaşım olmaya başlar. Böylece, bir küreye çizilen küçük bir üçgenin açılarının toplamı 180 dereceden büyük olacaktır. Bu özellik evrenin geometrisini ölçmeyi oldukça zorlaştırmaktadır, çünkü doğru bir şekilde ölçebildiğimiz komşu bölge evrenin büyüklüğünün sadece küçük bir kısmıdır ve dolayısıyla genel geometri ne olursa olsun, neredeyse Öklid yasalarına uyacaktır.

Kavramamız gereken en önemli kavramsal noktalardan biri üç boyutlu evrenin kürenin iki boyutlu yüzeyi gibi özelliklere sahip olabileceğidir. Bir kürenin yüzeyinin kavisli olduğu düşünüldüğünde, küreyi doğal olarak üç boyutlu evren gibi bir nesne olarak hayal edebilir ve onu bu anlamda eğri uzay olarak düşünebiliriz. Önemli olan nokta eğriliğin kürenin kendisinin iki boyutlu yüzeyinin bir özelliğinin olmasıdır. Bunun klasik bir uygulaması antik Yunanlıların bu yasaları Dünya'nın küresel olduğunu saptamak için kullanması ve hatta çapı hakkında bir tahminde bulunmak için kullanılmasıydı. Tüm bunlar dört boyutlu evrenimiz ile olabileceklere bir benzetmedir. Dünya'nın yüzeyi gibi küresel bir geometriye sahip bir evren sonlu boyuta sahiptir, ancak sınır yoktur. Tüm noktalar eşdeğerdir. Küresel bir geometride yaşıyor ve düz bir çizgide ilerliyorsak, sonsuza dek gidilemez, aksine tam olarak Dünya'daki Kuzey Kutbu'ndan dışa doğru seyahat eden kişi sonunda ters yönden geri döneceği şekilde başlangıç noktasına geri dönerdi. Böyle bir evren Friedmann denkleminde görünen k niceliği için pozitif bir değer seçilmesine karşılık gelir[4]. Küresel geometrinin özellikleri eğriliği nedeniyle olduğundan, k genellikle bu yüzden eğrilik terimi olarak adlandırılır. $k > 0$ olan bir evren normal olarak sınırlı büyüklüğü nedeniyle kapalı bir evren olarak adlandırılır.

2.2.3. Hiperbolik Geometri

Son geometri türü ise k değerinin negatif olmasıdır. Karşılık gelen geometri hiperbolik olarak adlandırılır ve küresel geometriye göre daha az bilinir. Şekil 2.4' deki gibi bir eyer benzeri yüzey ile temsil edilir. Bunun izotropi ile tutarlı olduğunu görmek oldukça zordur. Hiperbolik bir geometride, paralel çizgiler asla bir araya gelmez - aslında Öklid'in aksiyomuna göre birbirinden uzaklaşarak bozulur. Hiperbolik geometrinin davranışı daha

öncekilerden tahmin edilebileceği gibi, küresel geometrinin tersidir. Kolaylıkla bir üçgenin açıları toplamının 180 dereceden küçük olduğu ve bir dairenin çevresinin $2\pi r$ 'den büyük olduğu görülür.

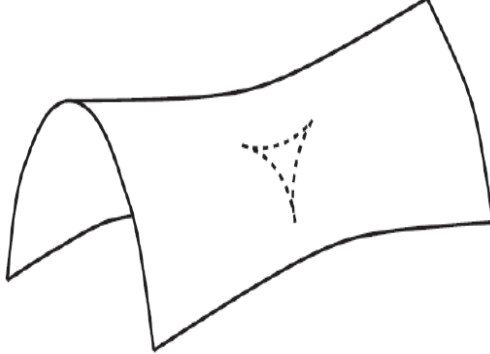
Paralel çizgiler asla bir araya gelmediğinden, böyle bir evrenin en azından düz evrende olduğu gibi sonsuz olması gerekir[5]. $k < 0$ durumu açık bir evren olarak bilinir. Bağlılar aşağıdaki gibidir. Üçgenin iç açıları toplamı;

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi - \frac{A}{R^2}$$

ile verilir. İki nokta (r, θ) ve $(r + dr, \theta + d\theta)$ arasındaki mesafe ise

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sinh^2 \left(\frac{r}{R} \right) d\theta^2$$

denklemler ile verilir.



Şekil 2.4 Negatif k değerine sahip evren modeli

Eğrilik değerine göre evrenin sahip olabileceği geometri ve bunlara bağlı olarak ifade edilen bazı parametreler Çizelge 1'de özet şeklinde gösterilmektedir.

Eğrilik	Geometri	Üçgenin İç Açı Toplamı	Dairenin Çevresi	Evren Türü
$k > 0$	Küresel	$>180^\circ$	$c < 2\pi r$	Kapalı
$k = 0$	Düz	$= 180^\circ$	$c = 2\pi r$	Düz
$k < 0$	Hiperbolik	$<180^\circ$	$c > 2\pi r$	Açık

Çizelge 1. Olası geometri türlerinin özeti

3. EVRENİN İÇERİĞİ

3.1. Friedmann Denklemleri

Evrendeki toplam enerji yoğunluğunun belirlenmesi, özellikle evrenin geometrisinin belirlenmesi hakkında oldukça önemli bir role sahiptir çünkü genel görelilikten bildiğimiz üzere "Madde uzay-zamana nasıl büküleceğini; uzay-zaman da maddeye nasıl hareket edeceğini söyler." (J. A. Wheeler). Einstein alan denklemleri

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik}R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ik} \quad (1)$$

ile gösterilmektedir. Burada R_{ik} Ricci eğrilik tensörü, R eğrilik skaleri, g_{ik} metrik tensör ve T_{ik} enerji momentum tensörüdür. Denklemin sol tarafı geometriyi, sağ tarafı ise maddeyi anlatır. Böylelikle uzayın maddeyi ne şekilde etkilediği bu denklemler yardımıyla ifade edilir. Denklemden $i, k = 0, 1, 2, 3$ değerlerini alır, bunlardan ilki zaman koordinatını, diğer üçü ise uzaysal koordinatları ifade eder. Bu koordinatlar kullanılarak 16 denklem elde edilir. Fakat simetri sebebiyle toplamda 10 ayrı denklem bulunur. Böylelikle genel göreliliğe göre, eğri uzay-zamanda hareket eden bir parçacığın jeodezikler boyunca hareket edeceği sonucu çıkar. Evrenin yapısını tanımlayan metrik Robertson-Walker metriği olarak alınır

$$ds^2 = -(cdt)^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad (2)$$

ile ifade edilir[6]. Burada r, θ, ϕ küresel koordinatları ifade eder. k eğrilik parametresidir. $a(t)$ ise evrenin genişlemesini ifade eden, boyutunu zamana bağlı olarak kaç katladığını ifade eden ölçek faktörüdür[7]. Böyle bir metrik için Einstein alan denklemleri çözüldüğünde, aslında 10 ayrı denklem olan denklemlerden, yalnızca iki denklem kaldığı görülür. Zaman bileşeni için

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi}{3} G(\rho + 3\frac{p}{c^2})a \quad (3)$$

elde edilir. Denklem 3'e ivme denklemi denirken, uzay bileşenleri için de

$$a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2kc^2 = 4\pi G(\rho - \frac{p}{c^2})a^2 \quad (4)$$

elde edilir. (3) ve (4) denklemleri kullanılarak, \ddot{a} yok edilirse

$$\dot{a}^2 + kc^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho a^2 \quad (5)$$

elde edilir. Denklem (3) ve (5) Friedmann denklemleridir ve birbirlerinden bağımsız değildir[8]. Denklem 5 eğer evrenin adyabatik genişlemesi hesaba katılırsa Denklem (3)'den çıkarılabilir ve

$$d(\rho c^2 a^3) = -p da^3 \quad (6)$$

elde edilir. Denklem (6) ayrıca aşağıdaki gibi ifade edilebilir ve akışkan denklemi olarak anılır:

$$\dot{p} + 3\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)\frac{\dot{a}}{a} = 0 \quad (7)$$

Denklem (5) düzenlenirse, aşağıdaki formda Denklem (8) elde edilir ($c=1$ alınmıştır).

$$H^2 = \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \quad (8)$$

Friedmann denklemlerinden yola çıkarak, evrenin düz bir geometriye sahip olması ($k=0$) durumunda, gerekli kritik yoğunluk değerine ulaşılabilir. Bu durumda ρ_c kritik yoğunluğu göstermek üzere, aşağıdaki şekilde elde edilmiştir:

$$\rho_c(t) = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (9)$$

Hubble parametresi H zamanla değiştiği için, kritik yoğunluk da zamanla değişecektir. Hubble parametresinin günümüzdeki değerini H_0 ve çekim sabiti G 'yi yerine koyarak, günümüzdeki kritik yoğunluk değerini

$$\rho_c(t_0) = 1.88h^2 \times 10^{-26} \text{ kg m}^{-3} . \quad (10)$$

elde ederiz ve burada $H=100h$ alınmıştır. Evrenin yoğunluğu kilogram ve metre cinsinden bakıldığında oldukça küçük görünmektedir[9]. Fakat bunu kozmolojik ölçeklere taşırsak, daha anlamlı bir hal alır. Eğer Güneş kütlesi M ve gökadar arasındaki mesafeyi ifade ettiğimiz kiloparsek cinsinden ele alacak olursak,

$$\rho_c(t_0) = 2.78h^{-1} \times 10^{11} M / (h^{-1} \text{Mpc})^3 \quad (11)$$

bulunur. Bu şekilde yorumlamak daha akla yatkındır. Çünkü $10^{11} M$ yaklaşık olarak bir gökada kütlesidir ve megaparsek de gökadar arasındaki mesafeyi ifade etmek için kullanılır. Kozmolojik ölçeklerdeki bu sayı beklentilerimizle oldukça tutarlıdır [10].

Kritik yoğunluk değeri, evrenin düz bir geometriye sahip olması için gereken yoğunluk değeri olduğu için iyi bir kıstastır[11]. Bu yüzden doğrudan evrenin yoğunluk değerini kullanmak yerine, kritik yoğunluğa olan oranını ele alarak, birimsiz yoğunluk parametresi değerini tanımlarız:

$$\Omega(t) = \frac{\rho}{\rho_c} \quad (12)$$

Kritik yoğunluk ve mevcut yoğunluk zamana bağlı olduklarından, günümüzdeki yoğunluk parametresi Denklem 12 ile verilir. Evrenin evrimi yalnızca toplam yoğunluğa bağlı değil, aynı zamanda onu oluşturan bileşenlerine de bağlıdır. Bu bileşenlerin günümüzdeki yoğunluk parametresine olan katkısını ayrı ayrı incelemek istediğimizde i . bileşen için $\Omega_{0i} = \rho_{0i} / \rho_{0c}$ olarak gösterilir.

Friedmann denkleminin yeniden düzenlenmesiyle

$$\Omega - 1 = \frac{k}{a^2 H^2} = -\Omega_k \quad (13)$$

ifadesi elde edilir. Düz bir evren için ($k=0$) olması durumunda, tüm zamanlar için $\Omega = 1$ olması gerektiği görülür. Bu durum oldukça özeldir, çünkü a ve H zamana bağlıdır, fakat

tüm zamanlar için, yoğunluğun sabit olmasını gerektiren bir ayara ihtiyaç duyar. Bu durum, evreni oluşturan maddenin neden oluştuğundan bağımsız olarak geçerlidir ve böyle bir evrene kritik yoğunluk evreni denir[11].

3.2. Yoğunluk Parametreleri

Evrenin evrimi yalnızca toplam yoğunluğuna bağlı değil, aynı zamanda onu oluşturan bileşenlere de bağlı olduğundan, yoğunluk parametreleri ayrı ayrı değerlendirilir. Toplam yoğunluk

$$\Omega_{top} = \Omega_b + \Omega_{km} + \Omega_\Lambda \quad (14)$$

olarak ifade edilir. Burada Ω_b baryonik madde yoğunluğu, Ω_{km} karanlık madde yoğunluğu, Ω_Λ ise kozmolojik sabit olarak görev gören, karanlık enerji yoğunluğudur[12].

$\Omega_{top} \cong \rho_{c,0}$ 'dir, yani (şu anki) toplam yoğunluk kritik yoğunluğa yaklaşık olarak eşittir ($\Omega_{top} \cong 1$). Bu da evrenin düz bir geometriye sahip olduğunu ima eder.

3.2.1 Baryonik ve Baryonik Olmayan Madde

Baryonlar temel parçacık olan üç kuarkın birleşmesiyle oluşur. Nötron ve proton bunlardan ikisidir. Kuarkları birbirine güçlü etkileşimler bağlar. Nötron iki adet aşağı (down), bir adet yukarı (up) kuarktan oluşurken, proton iki yukarı bir aşağı kuarktan oluşur. Baryonik olmayan maddeye ise; bir lepton çeşidi olan elektronlar, nötrinolar veya standart modelin tamamen dışındaki karanlık madde örnek verilebilir.

3.2.2. Karanlık Madde

Karanlık madde, elektromanyetik radyasyonla bir etkileşime girmeyen, dolayısıyla doğrudan gözlemleyemediğimiz, fakat gözlemleri yapılan kütle çekimsel etkiler sebebiyle orada var olması gerektiği düşünülen maddedir.

Günümüzde karanlık maddenin varlığı büyük bir çoğunluk tarafından kabul edilmektedir ve kozmolojik parametrelerin belirlenmesinde, özellikle yoğunluk parametresinde önemli bir katkısı bulunmaktadır. Yoğunluğa olan katkının yalnızca %5'lik bir bölümü baryonik maddeden gelirken, bunun yanında %26'lık katkı soğuk karanlık maddeden ve %69'luk katkı da karanlık enerjiden gelir [13,14].

3.2.3. Kozmolojik Sabit ve Karanlık Enerji

Einstein genel göreliliği keşfettiği sırada evrenin statik olduğuna inanıyordu. Fakat elde ettiği denklemler, statik bir evren olmasına müsaade etmiyor görünüyordu. Kendisi bu durumu değiştirmek için denkleme bir sabit eklemeye karar verdi, daha sonraları bu kararını "en büyük hatam" olarak anmıştır. Bu sabit, kozmolojik sabit olarak bilinir ve Λ (lambda) ile gösterilir. Friedmann denklemlerine ek bir terim olarak gelerek, aşağıdaki formda kendini gösterir:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad (15)$$

H , s^{-1} biriminde olduğundan, Λ s^{-2} birimindedir. Statik bir evren için $H(t) = 0$ olması gereklidir. Denkleme böyle bir sabit eklemek; geometri, Λ ve ρ arasında bir denge elde etmeye izin verir. Fakat böylesi bir denge, küçücük dalgalanmalara karşı kararsızlık gösterdiği için yanlış yönlendirilmiş bir fikirdi, dolayısıyla pratikte mümkün değildi. Günümüzde kozmolojik sabit, düz, öklidyen bir geometriye ($k=0$) sahip evren bağlamında değerlendirilir[14].

Kozmolojik sabit pozitif ya da negatif bir değer alabilir. Pozitif olması durumunda, H 'a katkısı pozitif olacağından, evrenin ivmelenerek genişlemesine sebep olacaktır. Süpernovalar üzerinden yapılan son kanıtlar göstermektedir ki, evrenimiz ivmeli bir şekilde genişlemektedir[14]. Bir başka deyişle ölçek parametresi için durum $\ddot{a} > 0$ 'dır. Bu çalışma, 2011 yılında Adam Riess, Brian Schmidt ve Saul Perlmutter'e Nobel Fizik ödülünü getirmiştir. Nielsen, Guffanti ve Sarkar, 2016 yılında, daha fazla sayıda süpernova üzerinde, düzeltmeler ve çeşitli istatistiksel yöntemler kullanarak, verilerin sabit bir genişleme gösteren evrenle uyumlu olduklarını göstererek yeni bir tartışmaya sebep oldular[15]. Fakat hala kabul gören görüş, evrenin ivmelenerek genişlemekte olduğudur. Λ 'nın ivmelenmeye katkısı aşağıdaki Denklem (16)'dan daha iyi bir şekilde anlaşılır:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{\Lambda}{3} \quad (16)$$

Denklemden görüldüğü gibi pozitif Λ değerleri \ddot{a} 'ya pozitif katkı sağlamaktadır, yani bir nevi evrenin genişlemesine sebep olan itici bir kuvvet gibi davranmaktadır. İlk terimden gelen, çekimsel etkileşim kaynaklı negatif etkiden büyük olması durumunda, evrenin ivmelenerek genişlemesine sebep olacaktır. Böylelikle evrenin ivmelenerek genişliyor olması durumunu izah eder [16].

Eğer kozmolojik sabit olmazsa statik evren durumu için, denklem aşağıdaki formda yazılabilir:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) a \quad (17)$$

Görülmektedir ki statik bir evren durumu yalnızca

$$\rho = -\frac{3p}{c^2} \quad (18)$$

durumunda geçerlidir. Bir başka deyişle ya enerji yoğunluğu negatif olmalıdır ya da basınç negatif olmalıdır. Böylesine fiziksel bir akışkan mantıklı görünmediğinden, Einstein 1917 yılında denklemine kozmolojik sabit terimini eklemiştir. Böylelikle geometri ile madde arasındaki ilişkiyi veren denklem aşağıdaki forma gelmiştir.

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R + g_{ij} \Lambda = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij} \quad (19)$$

Aynı zamanda yoğunluk parametresinde olduğu gibi, kozmolojik sabit için yoğunluk parametresi de

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2} \quad (20)$$

ile ifade edilir. Kozmolojik sabit Λ bir sabit olduğundan, H ise zamanla değiştiğinden, Ω_Λ zaman içerisinde sabit değildir. Denklem (8) ile verilen durumu uygulayacak olursak,

$$\Omega + \Omega_\Lambda - 1 = \frac{k}{a^2 H^2} \quad (21)$$

olur. Ardından, düz evren durumunda $k=0$ için

$$\Omega + \Omega_{\Lambda} = 1 \quad (22)$$

sonucuna ulaşılır. Burada Ω madde yoğunluğudur. Dolayısıyla farklı geometriler için elde edilen sonuçlar Çizelge 2’de verilmiştir.

Eğrilik	Geometri	Evrenin Tipi	Yoğunluk
$k > 0$	Küresel	Kapalı	$\Omega + \Omega_{\Lambda} > 1$
$k = 0$	Düz	Düz	$\Omega + \Omega_{\Lambda} = 1$
$k < 0$	Hiperbolik	Açık	$0 < \Omega + \Omega_{\Lambda} < 1$

Çizelge 2. Farklı geometri türlerine göre yoğunluk ve evrenin tipi

4. DEĞİŞKEN KOZMOLOJİK SABİTE SAHİP EVREN MODELLERİNDE PARÇACIK VE OLAY UFKU

Buraya kadarki bahsedilen mevcut kozmolojik modellerde kozmolojik sabit belli bir sabit değer için ele alınmıştır. Ancak daha iyi bir H_0 ve ρ_0 değeri veren ve tüm gözlemsel verilerle daha iyi örtüşen kozmolojik modeller zaman içinde evrilen bir kozmolojik sabiti Friedmann denklemlerinde kullanmayı önermişlerdir[17][18][19][20]. Bu tez çalışmasında da evrenin başlangıcından bugüne kadar zaman içinde evrilen değişken bir kozmolojik sabit $\Lambda(t)$ dikkate alınıp parçacık ve olay ufku incelenecektir.

4.1. Parçacık Ufku

Parçacık ufku evrenin başlangıcından günümüze kadar ışık tarafından kat edilen mesafe olarak tanımlanır. Denklem (15) ve (16)'daki Friedmann denklemleri değişken kozmolojik sabiti içerecek şekilde

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda(t)}{3} \quad (23)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{\Lambda(t)}{3} \quad (24)$$

biçiminde verilir. Tez çalışmasının temelinin oluşturacak olan parçacık ufku ise

$$R_H = \int_0^t \frac{cdt}{a} \quad (26)$$

ile verilir ve daha genel amaçla integralde aşağıdaki değişken dönüşümü yapılır:

$$R_H = c \int_0^t \frac{1}{a} \frac{dt}{da} da = c \int_0^a \frac{1}{a} \frac{da}{\dot{a}} = c \int_0^a \frac{1}{a} \frac{da}{aH} \quad (27)$$

Burada $\dot{a}/a = H$ kullanılmıştır. Buradaki H değerini değişken kozmolojik sabit içeren (23) ve (24) eşitliklerinden elde etmek için, Denklem 23'den ρ çekilir

$$\frac{4\pi G}{3}\rho = \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{k}{a^2} + \frac{1}{2}\frac{\Lambda(t)}{3} \quad (28)$$

ve (24)'te yerine konur:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{k}{a^2} + \frac{1}{2}\Lambda(t) \quad (29)$$

Burada evrenin günümüz madde baskın fazı dikkate alınarak $p = 0$ alınmıştır. Denklem (29)'da değişken kozmolojik sabit için üç farklı bağımlılık kullanılarak H değerleri bulunur.

4.1.1 $\Lambda(t) \propto \frac{1}{a(t)^2}$ Durumu

Bu model kozmolojik sabitin evrenin genişlemesinin karesinin tersiyle orantılı olarak azaldığını söyler[21]. A bir orantı sabiti olmak üzere

$$\Lambda(t) = A\frac{\Lambda_0}{a(t)^2} \quad (30)$$

şeklinde yazılabilir. Bunu Denklem (29)'da yerine yazarak

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{k}{a^2} + \frac{A}{2}\frac{\Lambda_0}{a(t)^2} \quad (31)$$

elde edilir, daha sonra da Denklem (13) ve (20)'den yoğunluk parametrelerinin günümüz değerlerinin Denklem (31)'e yazılmasıyla

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\Omega_{k,0}H_0^2}{a^2} + \frac{A}{2}\frac{3\Omega_{\Lambda,0}H_0^2}{a^2} \quad (32)$$

bulunur. Burada $\dot{a}/a = H$ kullanılarak

$$\frac{da}{dt} = aH$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2 a}{dt^2} &= \frac{d}{dt}(aH) = \frac{da}{dt} \frac{d}{da}(aH) = aH \left(H + a \frac{dH}{da} \right) \\ &= aH^2 + a^2 H \frac{dH}{da}\end{aligned}\quad (33)$$

elde edilir. Şimdi Denklem (32)'deki \ddot{a} yerine (33) kullanılırsa

$$H^2 + aH \frac{dH}{da} = -\frac{1}{2}H^2 + \frac{1}{2} \frac{\Omega_{k,0} H_0^2}{a^2} + \frac{3}{2} A \frac{\Omega_{\Lambda,0} H_0^2}{a(t)^2} \quad (34)$$

olur ve düzenlenirse

$$aH \frac{dH}{da} + \frac{3}{2} H^2 = \frac{1}{2} \frac{3A\Omega_{\Lambda,0} H_0^2 + \Omega_{k,0} H_0^2}{a^2} \quad (35)$$

bulunur. Soldaki ilk terimi karenin türevi cinsinden yazarak

$$\frac{d}{da}(H^2) + \frac{3}{a} H^2 = \frac{3A\Omega_{\Lambda,0} H_0^2 + \Omega_{k,0} H_0^2}{a^3} \quad (36)$$

elde ederiz. H^2 için bu diferansiyel denklemin çözümü

$$H^2 = \frac{3A\Omega_{\Lambda,0} H_0^2 + \Omega_{k,0} H_0^2}{a^2} + \frac{C}{a^3} \quad (37)$$

olarak bulunur. C sabitini bulmak için sınır şartları olarak günümüz $a(t_0) = 1$ için H_0 kullanılarak

$$\begin{aligned}H_0^2 &= 3A\Omega_{\Lambda,0} H_0^2 + \Omega_{k,0} H_0^2 + C \\ C &= H_0^2 (1 - 3A\Omega_{\Lambda,0} - \Omega_{k,0})\end{aligned}\quad (38)$$

bulunur. C sabiti Denklem (37)'de yerine yazılarak

$$H^2 = \frac{3A\Omega_{\Lambda,0} H_0^2 + \Omega_{k,0} H_0^2}{a^2} + \frac{H_0^2 (1 - 3A\Omega_{\Lambda,0} - \Omega_{k,0})}{a^3} \quad (39)$$

elde edilir. $A = 1$ için

$$H = H_0 \sqrt{\frac{3\Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{k,0}}{a^2} + \frac{1 - 3\Omega_{\Lambda,0} - \Omega_{k,0}}{a^3}} \quad (40)$$

elde edilir. Bu ifade Denklem (27)'deki parçacık eşitliğinden yerine konursa parçacık ufku

$$\begin{aligned} R_H &= c \int_0^a \frac{1}{a} \frac{da}{a H_0 \sqrt{\frac{3\Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{k,0}}{a^2} + \frac{1 - 3\Omega_{\Lambda,0} - \Omega_{k,0}}{a^3}}} \\ &= D_H \int_0^a \frac{1}{a} \frac{da}{\sqrt{3\Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{k,0} + \frac{1 - 3\Omega_{\Lambda,0} - \Omega_{k,0}}{a}}} \end{aligned} \quad (41)$$

olarak bulunur. İntegral alındığında

$$R_H = D_H \frac{2}{\sqrt{|3\Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{k,0}|}} \operatorname{arcsinh} \left(\sqrt{\left| \frac{3\Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{k,0}}{1 - 3\Omega_{\Lambda,0} - \Omega_{k,0}} \right|} a \right) \quad (42)$$

elde edilir. Bu da düz bir evren için $\Omega_{k,0} \rightarrow 0$ limitinde

$$R_H = D_H \frac{2}{\sqrt{|3\Omega_{\Lambda,0}|}} \operatorname{arcsinh} \left(\sqrt{\left| \frac{3\Omega_{\Lambda,0}}{1 - 3\Omega_{\Lambda,0}} \right|} a \right) \quad (43)$$

halini alır.

4.1.2 $\Lambda(t) \propto H^2$ Durumu

Kozmolojik sabitin evrenin ilk anından itibaren var olduğunu ve evrenin genişlemesi sebebiyle zamanla azaldığını var sayan bu model

$$\Lambda(t) = 3A\Omega_{\Lambda,0}H^2 \quad (44)$$

ile verilir. Denklem (29)'da yerine yazılarak

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\Omega_{k,0}H_0^2}{a^2} + \frac{3}{2}A\Omega_{\Lambda,0}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \quad (45)$$

elde edilir. Yine Denklem (33)'deki ifade kullanılarak Denklem (45)

$$H^2 + aH\frac{dH}{da} = -\frac{1}{2}H^2 + \frac{1}{2}\frac{\Omega_{k,0}H_0^2}{a^2} + \frac{3}{2}A\Omega_{\Lambda,0}H^2 \quad (46)$$

ve

$$\frac{d}{da}(H^2) + \frac{3(1-A\Omega_{\Lambda,0})}{a}H^2 = \frac{\Omega_{k,0}H_0^2}{a^3} \quad (47)$$

halini alır. Bu diferansiyel denklemin çözümü

$$H^2 = \frac{\Omega_{k,0}H_0^2}{1-3A\Omega_{\Lambda,0}}\frac{1}{a^2} + \frac{C}{a^{3(1-A\Omega_{\Lambda,0})}} \quad (48)$$

olarak bulunur. Yine günümüz değerleri kullanılarak integral sabiti C

$$C = H_0^2 \frac{1-3A\Omega_{\Lambda,0}-\Omega_{k,0}}{1-3A\Omega_{\Lambda,0}} \quad (49)$$

şeklinde elde edilir. Tekrar H^2 ' de yerine yazılmasıyla

$$H^2 = \frac{H_0^2}{1-3A\Omega_{\Lambda,0}} \left(\frac{\Omega_{k,0}}{a^2} + \frac{1-3A\Omega_{\Lambda,0}-\Omega_{k,0}}{a^{3(1-A\Omega_{\Lambda,0})}} \right) \quad (50)$$

bulunur. $A = 1$ alınırsa

$$H = H_0 \sqrt{\frac{\Omega_{k,0}}{(1-3\Omega_{\Lambda,0})a^2} + \frac{1-3\Omega_{\Lambda,0}-\Omega_{k,0}}{(1-3\Omega_{\Lambda,0})a^{3(1-\Omega_{\Lambda,0})}}} \quad (51)$$

elde edilir ve parçacık ufku Denklem (27)'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
R_H &= c \int_0^a \frac{1}{a} \frac{da}{aH} = c \int_0^a \frac{1}{a} \frac{da}{aH_0 \sqrt{\frac{\Omega_{k,0}}{(1-3\Omega_{\Lambda,0})a^2} + \frac{1-3\Omega_{\Lambda,0}-\Omega_{k,0}}{(1-3\Omega_{\Lambda,0})a^3(1-\Omega_{\Lambda,0})}}} \\
&= D_H \int_0^a \frac{1}{a} \frac{da}{\sqrt{\frac{\Omega_{k,0}}{(1-3\Omega_{\Lambda,0})} + \frac{1-3\Omega_{\Lambda,0}-\Omega_{k,0}}{(1-3\Omega_{\Lambda,0})} (a^{3\Omega_{\Lambda,0}-1})}} \quad (52)
\end{aligned}$$

bulunur. İntegral alındığında ise ufuk ifadesi

$$R_H = D_H \frac{2}{\sqrt{|\Omega_{k,0}(1-3\Omega_{\Lambda,0})|}} \operatorname{arcsinh} \left(\sqrt{\left| \frac{\Omega_{k,0}}{1-3\Omega_{\Lambda,0}-\Omega_{k,0}} \right| \frac{1}{a^{3\Omega_{\Lambda,0}-1}}} \right) \quad (53)$$

şeklinde bulunur. Yine düz evren için $\Omega_{k,0} \rightarrow 0$ limitinde parçacık ufku

$$R_H = D_H \frac{2}{\sqrt{|1-3\Omega_{\Lambda,0}|}} \sqrt{a^{3\Omega_{\Lambda,0}-1}} \quad (54)$$

halini alır.

4.1.3 $\Lambda(t) \propto \rho(t)$ Durumu

Burada kozmolojik sabitin azalan madde miktarıyla azaldığını varsayan durum için parçacık ufku hesaplanacaktır;

$$\Lambda(t) = A 8\pi G \frac{\Omega_{\Lambda,0}}{\Omega_{m,0}} \rho(t) \quad (55)$$

Bu durum için kozmolojik sabit Denklem (23) ve (24)'de FRW denklemlerinde yerine yazılırsa

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2} + \frac{8\pi G}{3} A \frac{\Omega_{\Lambda,0}}{\Omega_{m,0}} \rho(t) \quad (56)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho + \frac{8\pi G}{3}A\frac{\Omega_{\Lambda,0}}{\Omega_{m,0}}\rho(t) \quad (57)$$

elde edilir. ρ 'lar düzenlenirse

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho\left(1 + A\frac{\Omega_{\Lambda,0}}{\Omega_{m,0}}\right) + \frac{\Omega_{k,0}H_0^2}{a^2} \quad (58)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho\left(1 - 2A\frac{\Omega_{\Lambda,0}}{\Omega_{m,0}}\right) \quad (59)$$

Denklem (58)'den ρ çekilip (59)'a yazılırsa

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{K_3}{2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{K_3}{2}\frac{\Omega_{k,0}H_0^2}{a^2} \quad (60)$$

elde edilir ve burada

$$K_3 = \frac{2A\Omega_{\Lambda,0} - \Omega_{m,0}}{A\Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{m,0}} \quad (61)$$

şeklindedir. Denklem (33) kullanılarak Denklem (61)

$$H^2 + aH\frac{dH}{da} = \frac{K_3}{2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{K_3}{2}\frac{\Omega_{k,0}H_0^2}{a^2} \quad (62)$$

olur ve düzenlenirse

$$\frac{d}{da}(H^2) + \frac{2-K_3}{a}H^2 = -K_3\frac{\Omega_{k,0}H_0^2}{a^3} \quad (63)$$

halini alır ve diferansiyel denklemin çözümü

$$H^2 = \frac{\Omega_{k,0}H_0^2}{a^2} + Ca^{K_3-2} \quad (64)$$

olarak bulunur. Bu günkü değerler kullanılarak integral sabiti C

$$C = H_0^2(1 - \Omega_{k,0}) \quad (65)$$

olur ve H^2 , de yerine yazılarak

$$H = H_0 \sqrt{\frac{\Omega_{k,0}}{a^2} + (1 - \Omega_{k,0})a^{K_3-2}} \quad (66)$$

bulunur. Karekök alınarak ufuk ifadesinde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} R_H &= c \int_0^a \frac{1}{a} \frac{da}{a H_0 \sqrt{\frac{\Omega_{k,0}}{a^2} + (1 - \Omega_{k,0})a^{K_3-2}}} \\ &= D_H \int_0^a \frac{1}{a} \frac{da}{\sqrt{\Omega_{k,0} + (1 - \Omega_{k,0})a^{K_3}}} \end{aligned} \quad (67)$$

elde edilir. İntegralin sonucu ise

$$R_H = D_H \frac{2}{K_3 \sqrt{|\Omega_{k,0}|}} \operatorname{arcsinh} \left(\sqrt{\left| \frac{\Omega_{k,0}}{1 - \Omega_{k,0}} \right| \frac{1}{a^{K_3}}} \right) \quad (68)$$

biçiminde bulunur. Düz evren için $\Omega_{k,0} \rightarrow 0$ limitinde de

$$R_H = D_H \frac{2a^{K_3/2}}{K_3} \quad (69)$$

halini alır.

4.2. Parçacık Ufkunun Evrilmesi

Parçacık ufkunun zaman içindeki evrilmesini incelemek için belli bir t anındaki parçacık ufku değeri ve onun zamana göre türevine ihtiyaç duyarız. Bunun için belli bir t anındaki gerçek parçacık ufku ifadesi

$$R_H(z) = \frac{1}{1+z} c \int_z^\infty \frac{dz}{H} \quad (70)$$

olarak verilir[22]. Bu belli bir zamandaki ufuk ifadesini $1+z = 1/a$ dönüşümünü ve Denklem (27)'deki eş-hareketli (co-moving) parçacık ufuk ifadesini kullanarak kıvılcık kayma z cinsinden ölçek parametresi a cinsine çevirdiğimizde

$$R_H(a) = ac \int_0^a \frac{1}{a^2} \frac{da}{H} = aR_H \quad (71)$$

olur ve buradaki R_H Denklem (27)'deki parçacık ufkudur. Bu ifadenin zamana göre türevi zincir kuralı kullanılarak

$$\begin{aligned} \frac{dR_H(a)}{dt} &= \frac{dR_H(a)}{da} \frac{da}{dt} = \frac{d(aR_H)}{da} \frac{da}{dt} \\ &= \left(R_H + a \frac{dR_H}{da} \right) aH \end{aligned} \quad (72)$$

Burada Denklem (33)'ün ilk satırından $da/dt = aH$ kullanıldı. Ayrıca Denklem (27)'den $dR_H/da = c/a^2H$ olduğu görülür ve Denklem (72)'de kullanılmasıyla

$$\frac{dR_H(a)}{dt} = aR_H H + c \quad (73)$$

elde edilir. Ayrıca burada $aR_H H$ ifadesi de parçacık ufkunun genişlemeden kaynaklı çekilme hızıdır. Çünkü bu genişleme etkisi ile ışığın bugünkü gözlemciye geliş uzaklığının toplamı zaten parçacık ufkunun tanımı olarak verilir. Buna göre Bölüm 4.1'de Λ 'nın üç durumu için elde edilen parçacık ufuklarının zamana göre türevleri Denklem (73) yardımıyla aşağıdaki gibi incelenebilir.

4.2.1 $\Lambda(t) \propto \frac{1}{a(t)^2}$ Durumu İçin Ufkun Evrilmesi

Bu durum için Hubble parametresi ve ufuk ifadeleri

$$H = H_0 \sqrt{\frac{3\Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{k,0}}{a^2} + \frac{1 - 3\Omega_{\Lambda,0} - \Omega_{k,0}}{a^3}} \quad (40)$$

$$R_H = D_H \frac{2}{\sqrt{|3\Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{k,0}|}} \operatorname{arcsinh} \left(\sqrt{\left| \frac{3\Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{k,0}}{1 - 3\Omega_{\Lambda,0} - \Omega_{k,0}} \right|} a \right) \quad (42)$$

şeklindeydi. Bu iki ifadenin Denklem (73)'de kullanılmasıyla parçacık ufkunun evirilmesi

$$\frac{dR_H(a)}{dt} = 2c \sqrt{1 + \frac{1 - 3\Omega_{\Lambda,0} - \Omega_{k,0}}{(3\Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{k,0})a}} \operatorname{arcsinh} \left(\sqrt{\left| \frac{3\Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{k,0}}{1 - 3\Omega_{\Lambda,0} - \Omega_{k,0}} \right|} a \right) + c . \quad (74)$$

olarak bulunur.

4.2.2 $\Lambda(t) \propto H^2$ Durumu İçin Ufkun Evirilmesi

Bu durum için Hubble parametresi ve ufuk ifadeleri

$$H = H_0 \sqrt{\frac{\Omega_{k,0}}{(1 - 3\Omega_{\Lambda,0})a^2} + \frac{1 - 3\Omega_{\Lambda,0} - \Omega_{k,0}}{(1 - 3\Omega_{\Lambda,0})a^{3(1 - \Omega_{\Lambda,0})}}} \quad (51)$$

$$R_H = D_H \frac{2}{\sqrt{|\Omega_{k,0}(1 - 3\Omega_{\Lambda,0})|}} \operatorname{arcsinh} \left(\sqrt{\left| \frac{\Omega_{k,0}}{1 - 3\Omega_{\Lambda,0} - \Omega_{k,0}} \right|} \frac{1}{a^{3\Omega_{\Lambda,0} - 1}} \right) \quad (53)$$

şeklindeydi. Bu iki ifadenin Denk. (73)'de kullanılmasıyla parçacık ufkunun evirilmesi

$$\frac{dR_H(a)}{dt} = \frac{2c}{1 - 3\Omega_{\Lambda,0}} \sqrt{1 + \frac{1 - 3\Omega_{\Lambda,0} - \Omega_{k,0}}{\Omega_{k,0}} a^{3\Omega_{\Lambda,0} - 1}} \operatorname{arcsinh} \left(\sqrt{\left| \frac{\Omega_{k,0}}{1 - 3\Omega_{\Lambda,0} - \Omega_{k,0}} \right|} \frac{1}{a^{3\Omega_{\Lambda,0} - 1}} \right) + c \quad (75)$$

olarak bulunur.

4.2.3 $\Lambda(t) \propto \rho(t)$ Durumu İçin Ufkun Evrilmesi

Bu durum için Hubble parametresi ve ufuk ifadeleri

$$K_3 = \frac{2A\Omega_{\Lambda,0} - \Omega_{m,0}}{A\Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{m,0}} \quad (61)$$

$$H = H_0 \sqrt{\frac{\Omega_{k,0}}{a^2} + (1 - \Omega_{k,0})a^{K_3-2}} \quad (66)$$

$$R_H = D_H \frac{2}{K_3 \sqrt{|\Omega_{k,0}|}} \operatorname{arcsinh} \left(\sqrt{\left| \frac{\Omega_{k,0}}{1 - \Omega_{k,0}} \right| \frac{1}{a^{K_3}}} \right) \quad (68)$$

şeklindeydi. Sondaki iki ifadenin Denklem (73)'de kullanılmasıyla parçacık ufkunun evrilmesi

$$\frac{dR_H(a)}{dt} = \frac{2c}{K_3} \sqrt{1 + \frac{1 - \Omega_{k,0}}{\Omega_{k,0}} a^{K_3}} \operatorname{arcsinh} \left(\sqrt{\left| \frac{\Omega_{k,0}}{1 - \Omega_{k,0}} \right| \frac{1}{a^{K_3}}} \right) + c . \quad (76)$$

olarak bulunur.

Şimdi $R_H(a)$ ve $\frac{dR_H(a)}{dt}$ ifadelerinin $a \rightarrow 0$ ve $a \rightarrow \infty$ evrenin ilk anı ve uzak gelecekteki ufuk ve ufuk gerileme hız davranışlarını yorumlayacağız. Sonra da $R_H(a)$ ve $\frac{dR_H(a)}{dt}$ 'nin a 'ya göre grafiklerini $a = [0,1]$ ve $a = [1, \infty]$ için çizeceğiz.

4.3. Olay Ufku

Olay ufku ışığın bugünkü mevcut zamandan mümkün olan maksimum gelecek zamana kadar evren içinde hareket ettiği mesafedir[23]. Normalde olay ufku için Denklem (26)'da ki integral limitleri $a = 1$ 'den $a = \infty$ ' a kadardır. Ancak herhangi bir zamandaki olay ufku aynı integralin

$$E_H = c \int_t^\infty \frac{dt}{a} = c \int_a^\infty \frac{1}{a} \frac{da}{\dot{a}} = c \int_a^\infty \frac{1}{a} \frac{da}{aH} \quad (77)$$

limitleri için yazılır. Bu kendisini a ile çarparak herhangi bir zamandaki gerçek olay ufku $E_H(a)$ ' yı elde edeceğimiz eş-hareketli olay ufkudur:

$$E_H(a) = ac \int_a^\infty \frac{1}{a^2 H} da = aE_H \quad (78)$$

Şimdi daha önce değişken kozmolojik sabitin üç durumu için bulduğumuz H değerlerini kullanarak üç durumun olay ufkunu bulalım.

4.3.1 $\Lambda(t) \propto \frac{1}{a(t)^2}$ Durumu

Bu model için bulunan Hubble parametresi (40) eş-hareketli olay ufku denklemi (77)'de yerine yazılarak

Bu ifade Denklem (27)'deki ufuk eşitliğinden yerine konursa parçacık ufku

$$E_H = D_H \int_a^\infty \frac{1}{a} \frac{da}{\sqrt{3\Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{k,0} + \frac{1-3\Omega_{\Lambda,0} - \Omega_{k,0}}{a}}} \quad (79)$$

şeklinde yazılır ve integral alındığında

$$E_H = D_H \frac{2}{\sqrt{|3\Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{k,0}|}} \operatorname{arcsinh} \left(\sqrt{\left| \frac{3\Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{k,0}}{1-3\Omega_{\Lambda,0} - \Omega_{k,0}} \right|} a \right)_a^\infty \quad (80)$$

olarak bulunur. İntegral limitleri kullanıldığında bu durum için olay ufkunun ıraksadığı görülür ve

$$E_H = \infty \quad (81)$$

elde edilir. Dolayısıyla Denklem (78)'deki gerçek olay ufku $E_H(a) = aE_H$ ' da ıraksar.

4.3.2 $\Lambda(t) \propto H^2$ Durumu

Bu modelin Hubble parametresi (51) yine Denklem (77)'deki eş-hareketli olay ufku ifadesinde kullanılarak

$$E_H = D_H \int_a^\infty \frac{1}{a} \frac{da}{\sqrt{\frac{\Omega_{k,0}}{(1-3\Omega_{\Lambda,0})} + \frac{1-3\Omega_{\Lambda,0}-\Omega_{k,0}}{(1-3\Omega_{\Lambda,0})} (a^{3\Omega_{\Lambda,0}-1})}} \quad (82)$$

bulunur. İntegral alındığında ise ufuk ifadesi

$$E_H = D_H \frac{2}{\sqrt{|\Omega_{k,0}(1-3\Omega_{\Lambda,0})|}} \operatorname{arcsinh} \left(\sqrt{\left| \frac{\Omega_{k,0}}{1-3\Omega_{\Lambda,0}-\Omega_{k,0}} \right| \frac{1}{a^{3\Omega_{\Lambda,0}-1}}} \right)_a^\infty \quad (83)$$

şeklinde bulunur. İntegral limitleri kullanıldığında

$$E_H = \frac{-2D_H}{\sqrt{|\Omega_{k,0}(1-3\Omega_{\Lambda,0})|}} \operatorname{arcsinh} \left(\sqrt{\left| \frac{\Omega_{k,0}}{1-3\Omega_{\Lambda,0}-\Omega_{k,0}} \right| \frac{1}{a^{3\Omega_{\Lambda,0}-1}}} \right) \quad (84)$$

halini alır. Eş-hareketli olay ufku ifadesi a ile çarpılarak gerçek olay ufku ifadesi $E_H(a) = aE_H$ elde edilir.

4.3.3 $\Lambda(t) \propto \rho(t)$ Durumu

Bu durum için de Hubble parametresi Denklem (66)'da elde edilmişti. Bunun eş-hareketli olay ufku (77) ifadesinde kullanılmasıyla

$$E_H = D_H \int_a^\infty \frac{1}{a} \frac{da}{\sqrt{\Omega_{k,0} + (1-\Omega_{k,0})a^{K_3}}} \quad (85)$$

bulunur. İntegral alındığında

$$E_H = D_H \frac{2}{K_3 \sqrt{|\Omega_{k,0}|}} \operatorname{arcsinh} \left(\sqrt{\left| \frac{\Omega_{k,0}}{1-\Omega_{k,0}} \right| \frac{1}{a^{K_3}}} \right)_a^\infty \quad (86)$$

elde edilir. İntegral limitleri kullanıldığında

$$E_H = \frac{-2D_H}{K_3 \sqrt{|\Omega_{k,0}|}} \operatorname{arcsinh} \left(\sqrt{\left| \frac{\Omega_{k,0}}{1-\Omega_{k,0}} \right| \frac{1}{a^{K_3}}} \right) \quad (87)$$

biçiminde bulunur. Yine bulunan bu eş-hareketli olay ufku a ile çarpılarak gerçek olay ufku $E_H(a) = aE_H$ bulunur.

4.4. Olay Ufkunun Evrilmesi

Olay ufkunun zaman içindeki evrilmesini incelemek için Denklem (78)'deki gerçek olay ufku ifadesinin zamana göre türevi alınır ve

$$\begin{aligned} \frac{dE_H(a)}{dt} &= \frac{dE_H(a)}{da} \frac{da}{dt} = \frac{d(aE_H)}{da} \frac{da}{dt} \\ &= \left(E_H + a \frac{dE_H}{da} \right) aH \end{aligned} \quad (88)$$

elde edilir. Denklem (77)'deki integralden $dE_H/da = -c/a^2 H$ olduğu görülür ve burada kullanılırsa

$$\frac{dE_H(a)}{dt} = aE_H H - c \quad (89)$$

elde edilir. Ayrıca burada $aR_H H$ ifadesi de olay ufkunun genişlemeden kaynaklı çekilme hızıdır. Şimdi Λ 'nın üç durumu için elde edilen olay ufuklarının zamana göre türevleri Denklem (89) yardımıyla aşağıdaki gibi incelenebilir.

4.4.1 $\Lambda(t) \propto \frac{1}{a(t)^2}$ Durumu İçin Ufkun Evrilmesi

Bu durum için $E_H(a) = aE_H = \infty$ olmasından dolayı zamana göre türevi de ıraksar

$$\frac{dE_H(a)}{dt} = \infty \quad (90)$$

4.4.2 $\Lambda(t) \propto H^2$ Durumu İçin Ufkun Evirilmesi

Bu durum için Hubble parametresi ve eş-hareketli ufuk ifadeleri

$$H = H_0 \sqrt{\frac{\Omega_{k,0}}{(1-3\Omega_{\Lambda,0})a^2} + \frac{1-3\Omega_{\Lambda,0}-\Omega_{k,0}}{(1-3\Omega_{\Lambda,0})a^{3(1-\Omega_{\Lambda,0})}}} \quad (51)$$

$$E_H = \frac{-2D_H}{\sqrt{|\Omega_{k,0}(1-3\Omega_{\Lambda,0})|}} \operatorname{arcsinh} \left(\sqrt{\left| \frac{\Omega_{k,0}}{1-3\Omega_{\Lambda,0}-\Omega_{k,0}} \right| \frac{1}{a^{3\Omega_{\Lambda,0}-1}}} \right) \quad (84)$$

şeklindeydi. Bu iki ifadenin Denklem (89)'da kullanılmasıyla olay ufkunun evirilmesi

$$\frac{dE_H(a)}{dt} = \frac{-2c}{|1-3\Omega_{\Lambda,0}|} \sqrt{1 + \frac{1-3\Omega_{\Lambda,0}-\Omega_{k,0}}{\Omega_{k,0}} a^{3\Omega_{\Lambda,0}-1}} \times \operatorname{arcsinh} \left(\sqrt{\left| \frac{\Omega_{k,0}}{1-3\Omega_{\Lambda,0}-\Omega_{k,0}} \right| \frac{1}{a^{3\Omega_{\Lambda,0}-1}}} \right) - c \quad (91)$$

olarak bulunur. Denklemin sağ tarafındaki ilk ifade olay ufkunun geri çekilme hızıdır.

4.4.3 $\Lambda(t) \propto \rho(t)$ Durumu İçin Ufkun Evirilmesi

Bu durum için Hubble parametresi ve ufuk ifadeleri

$$K_3 = \frac{2A\Omega_{\Lambda,0}-\Omega_{m,0}}{A\Omega_{\Lambda,0}+\Omega_{m,0}} \quad (61)$$

$$H = H_0 \sqrt{\frac{\Omega_{k,0}}{a^2} + (1-\Omega_{k,0})a^{K_3-2}} \quad (66)$$

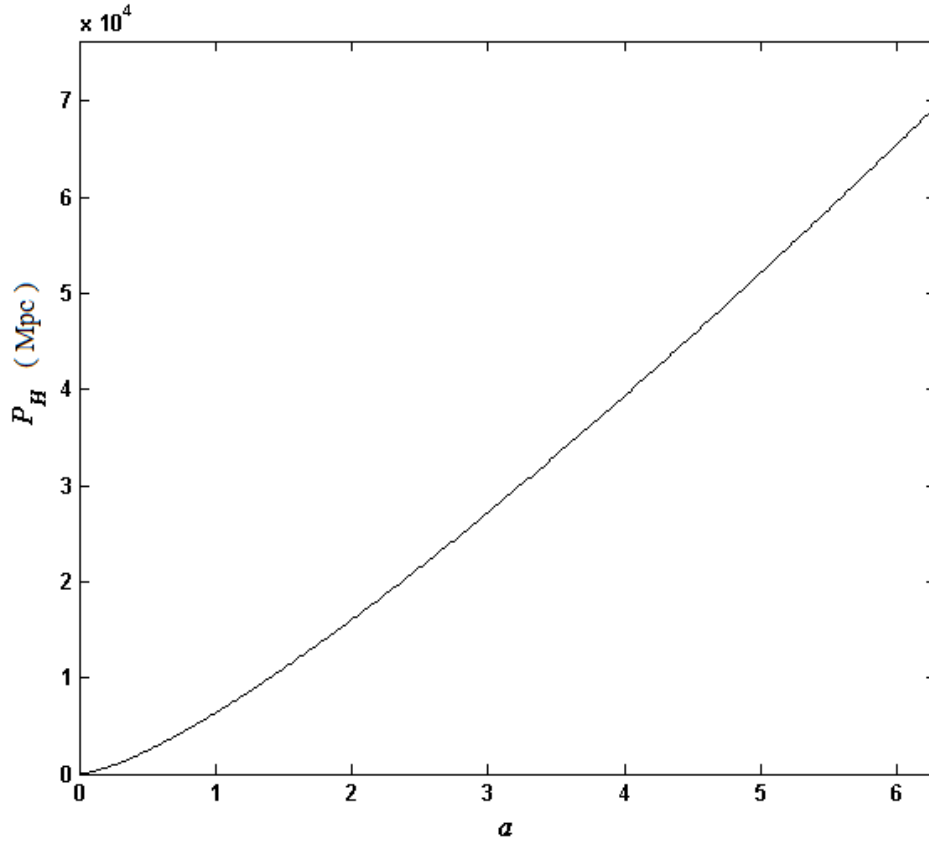
$$E_H = \frac{-2D_H}{K_3 \sqrt{|\Omega_{k,0}|}} \operatorname{arcsinh} \left(\sqrt{\left| \frac{\Omega_{k,0}}{1-\Omega_{k,0}} \right| \frac{1}{a^{K_3}}} \right) \quad (87)$$

şeklindeydi. Sondaki iki ifadenin Denklem (89)'da kullanılmasıyla olay ufğunun evirilmesi

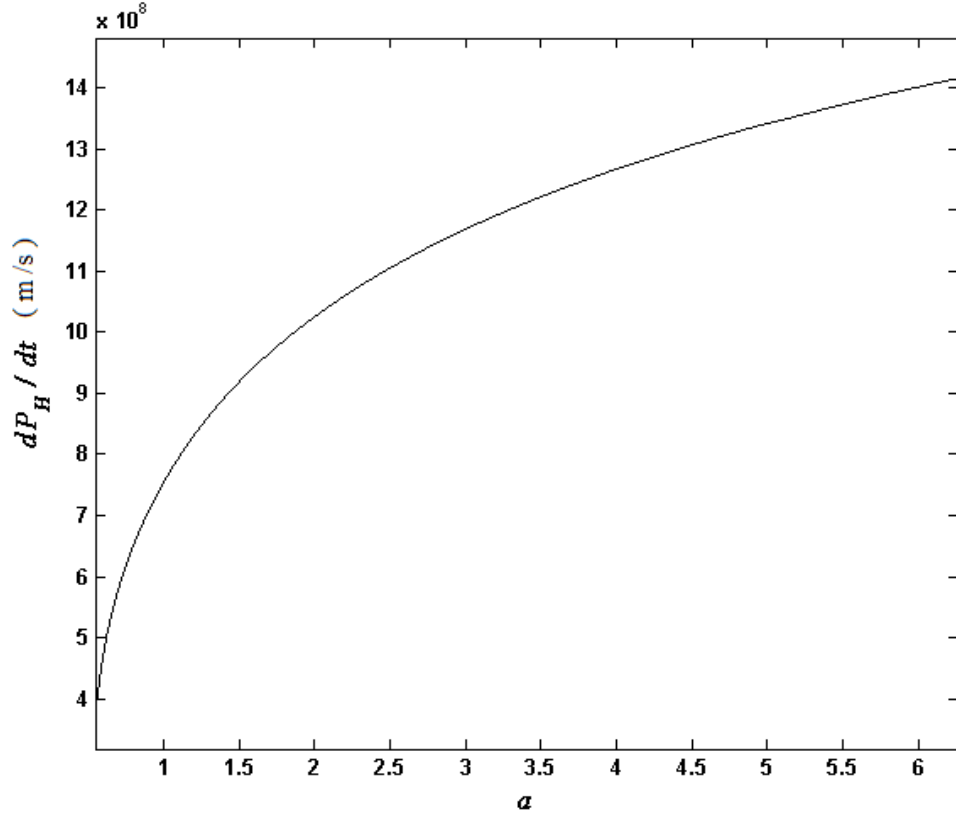
$$\frac{dE_H(a)}{dt} = \frac{-2c}{K_3} \sqrt{1 + \frac{1-\Omega_{k,0}}{\Omega_{k,0}} a^{K_3}} \operatorname{arcsinh} \left(\sqrt{\left| \frac{\Omega_{k,0}}{1-\Omega_{k,0}} \right| \frac{1}{a^{K_3}}} \right) - c \quad (92)$$

olarak bulunur. Denklem sağ tarafındaki ilk ifade olay ufğunun geri çekilme hızıdır.

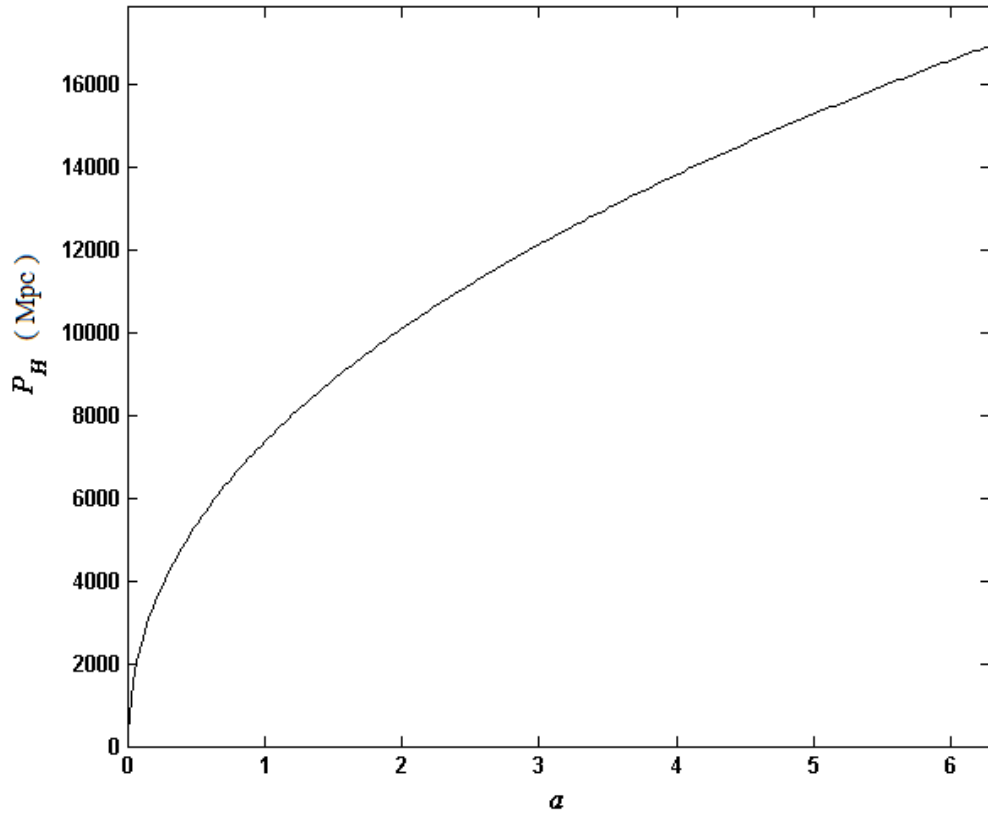
Yukarıda sırasıyla Altbölüm 4.1, 4.2, 4.3 ve 4.4'te elde edilen gerçek parçacık ufku, gerçek parçacık ufğunun evirilmesi, gerçek olay ufku ve gerçek olay ufğunun evirilmesi ifadelerinin evrenin ölçek parametresine göre zaman içindeki değişimlerini incelemek amacıyla grafikleri Şekil 4.1-4.10'da verilmiştir. Burada ufuk ve türev ifadelerindeki yoğunluk parametreleri için $\Omega_{\Lambda,0} = 0.70$, $\Omega_{m,0} = 0.25$ ve $\Omega_{k,0} = 0.05$ günümüz değerleri alınmıştır[24].



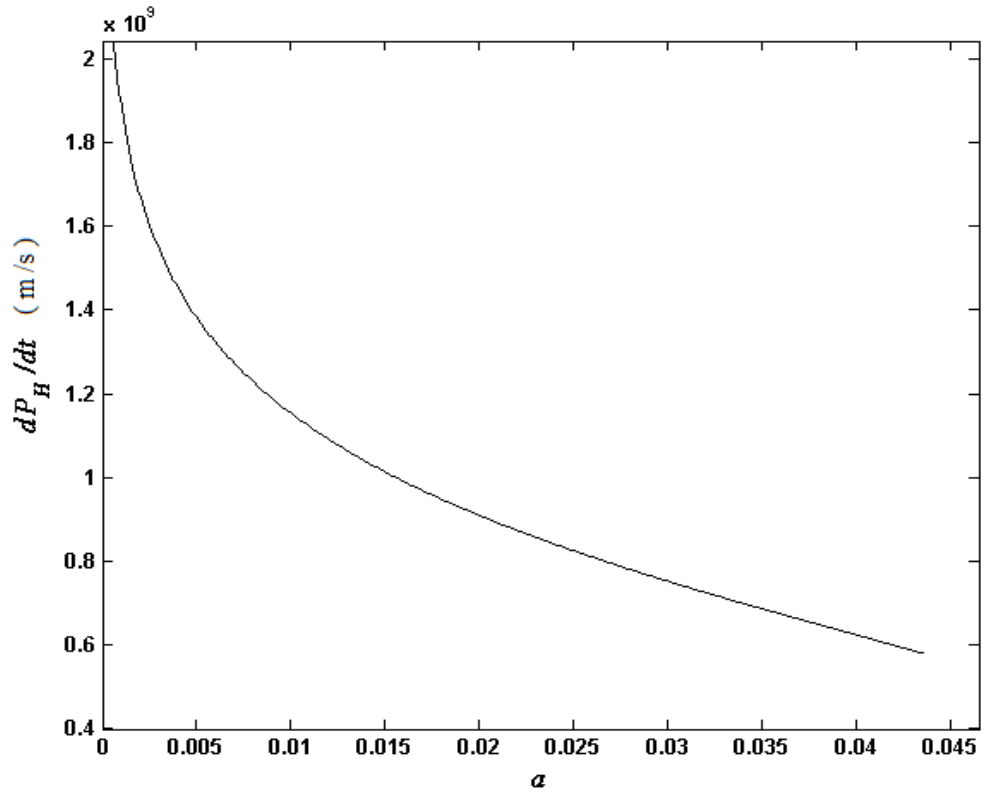
Şekil 4.1 Durum 1 için parçacık ufğunun davranışı



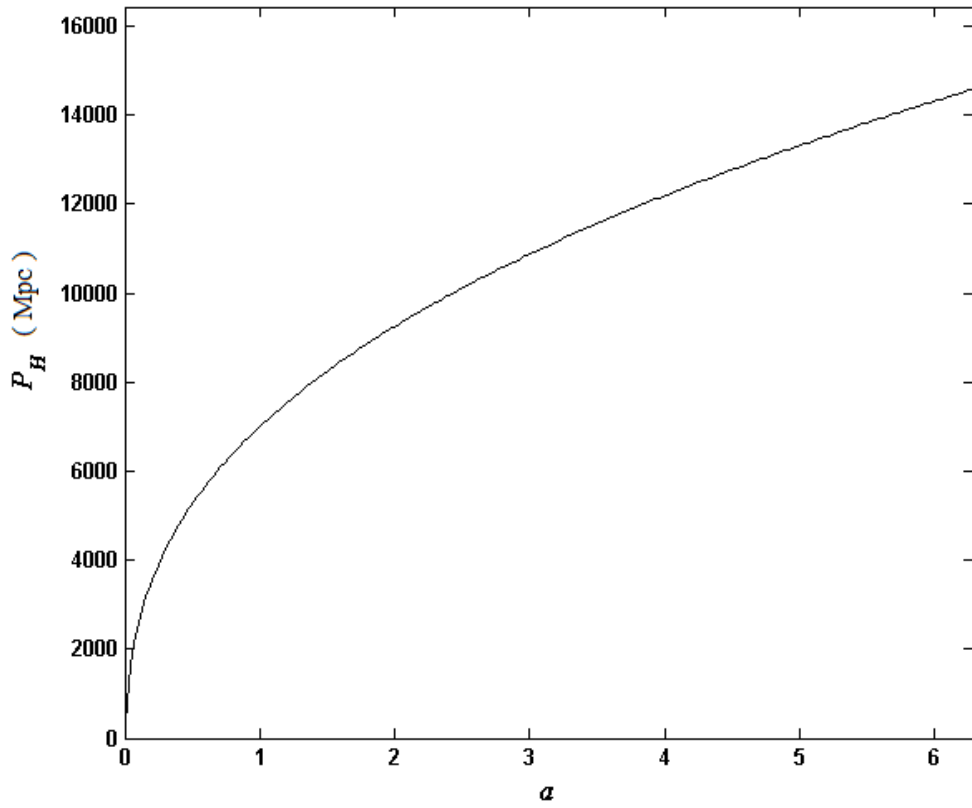
Şekil 4.2 Durum 1 için parçacık ufkunun hızının davranışı



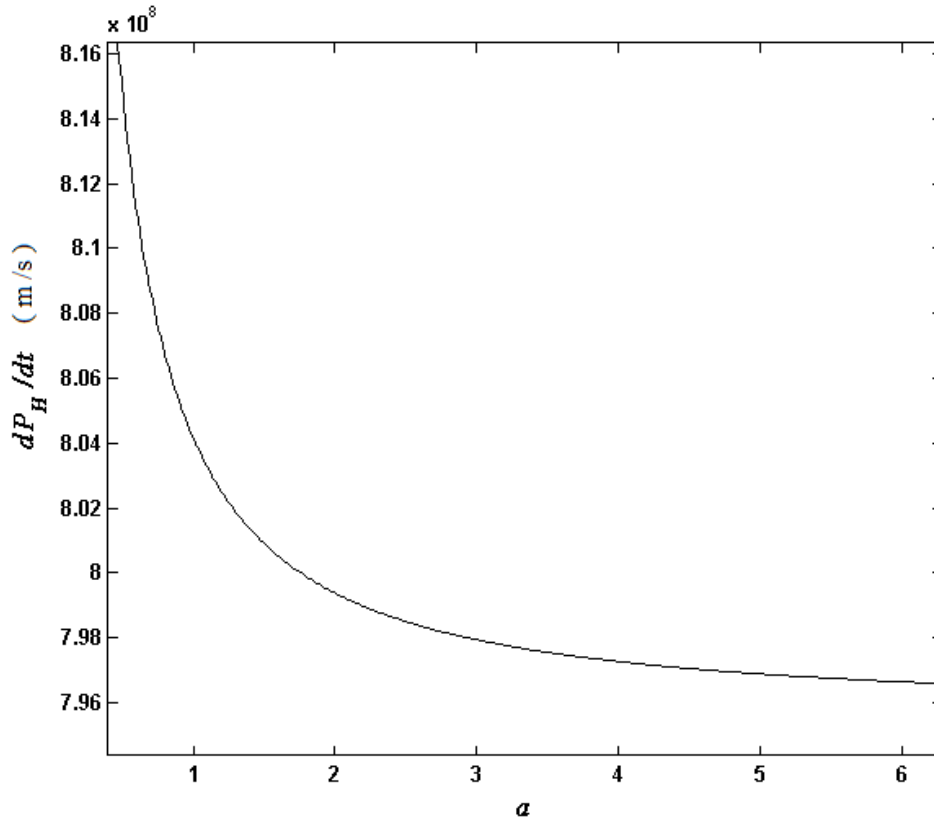
Şekil 4.3 Durum 2 için parçacık ufkunun davranışı



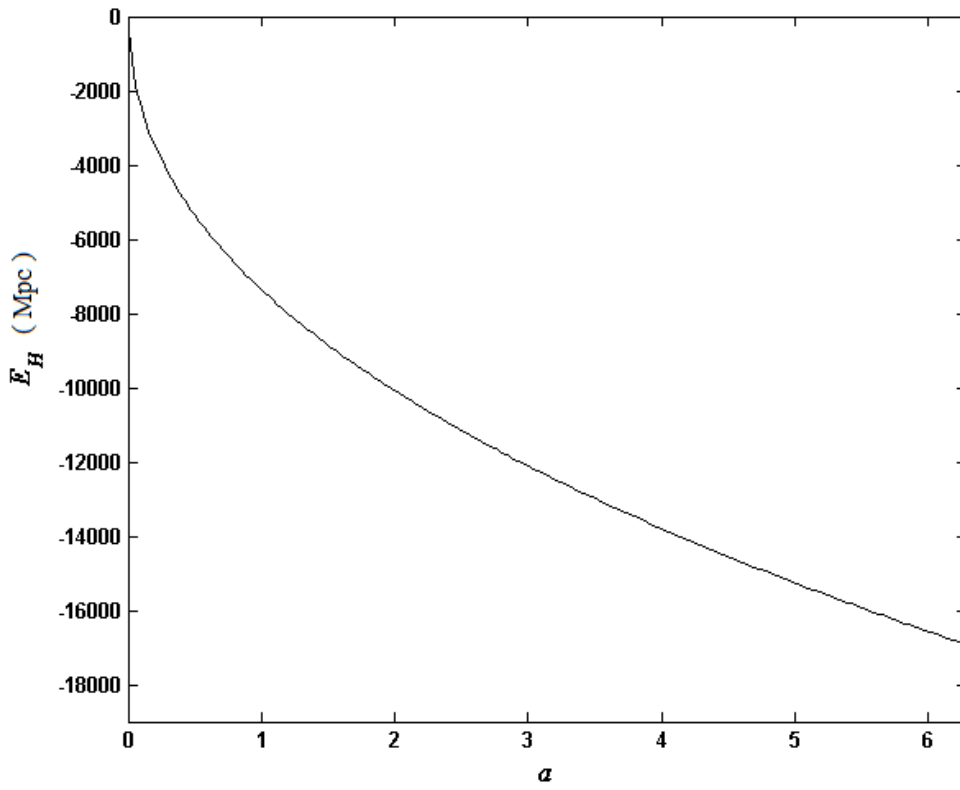
Şekil 4.4 Durum 2 için parçacık ufkunun hızının davranışı



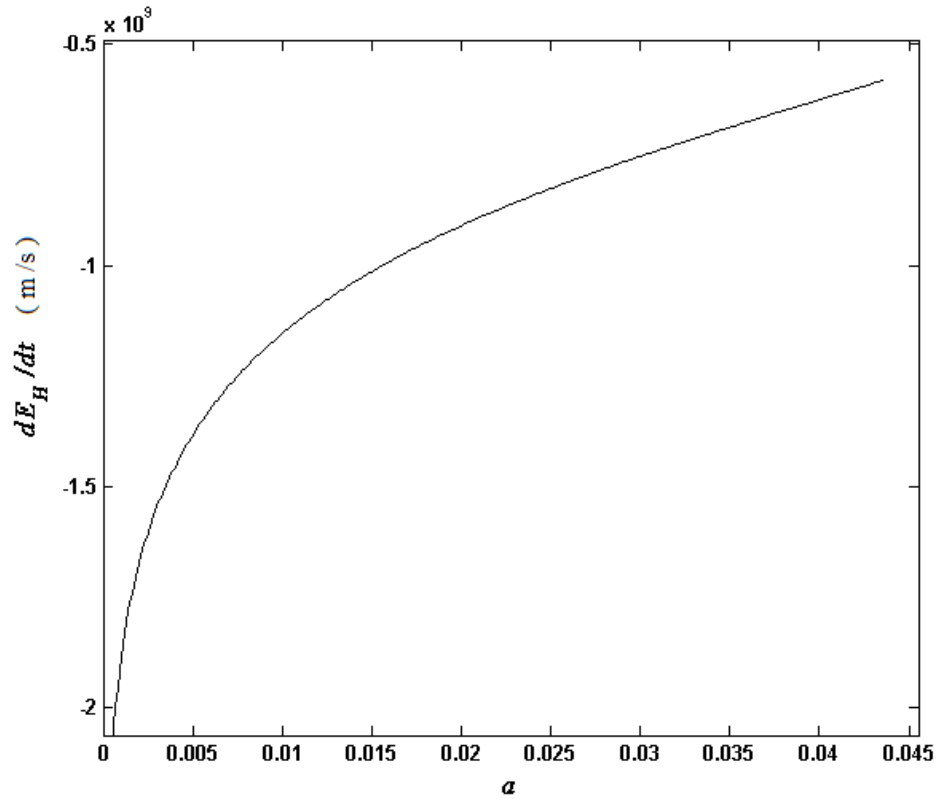
Şekil 4.5 Durum 3 için parçacık ufkunun davranışı



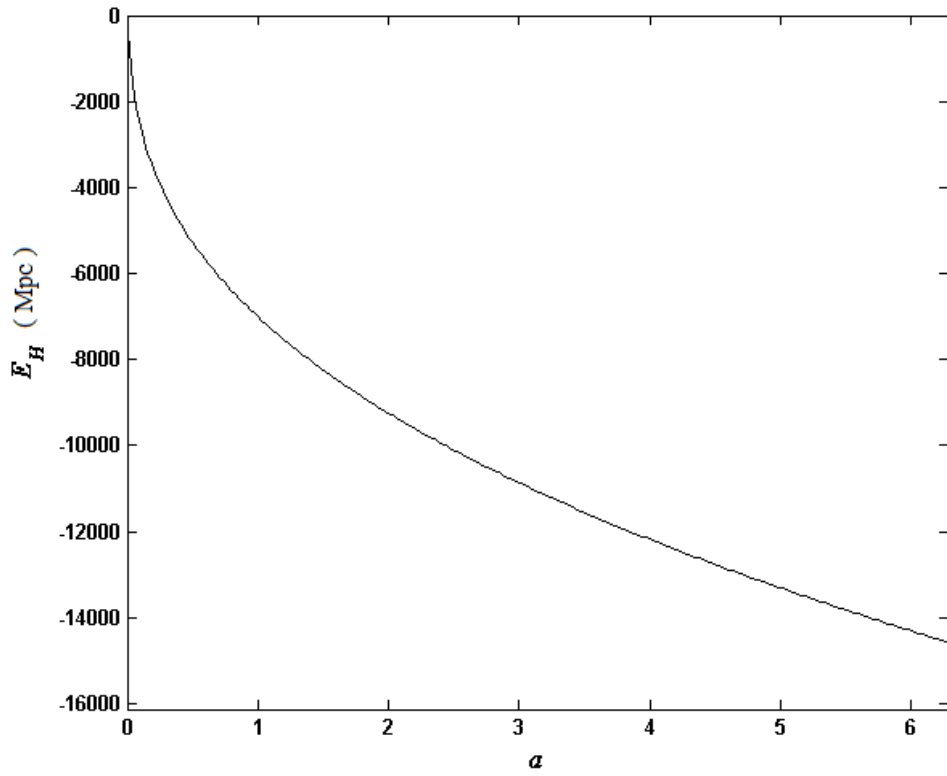
Şekil 4.6 Durum 3 için parçacık ufkunun hızının davranışı



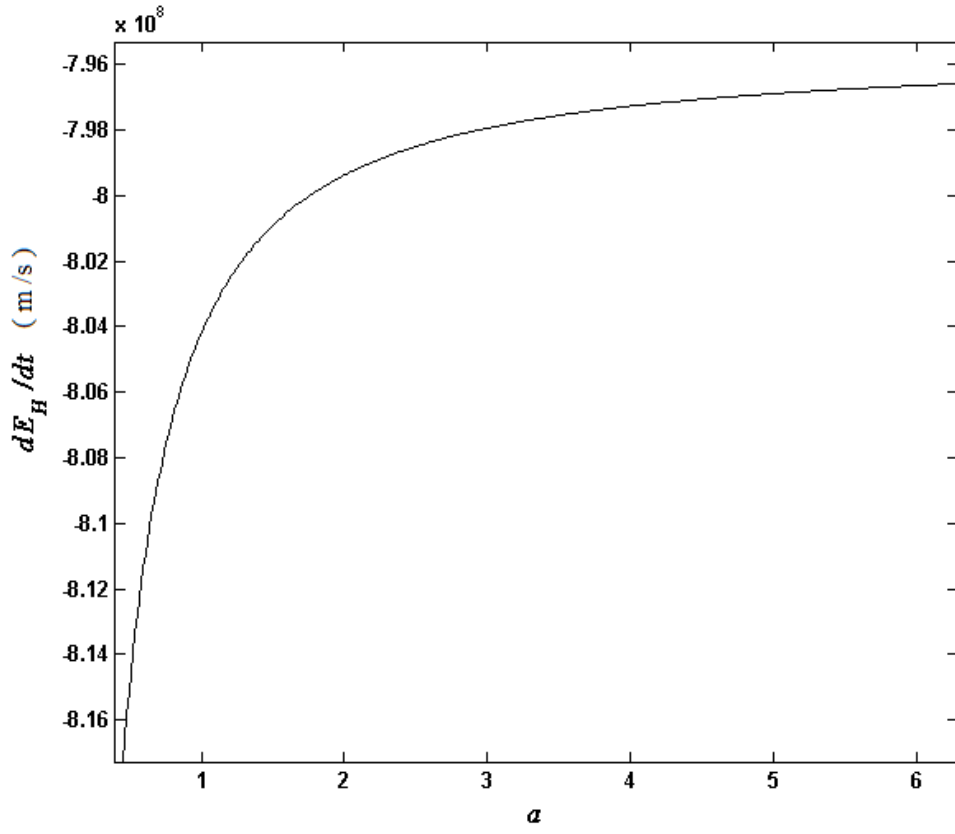
Şekil 4.7 Durum 2 için olay ufkunun davranışı



Şekil 4.8 Durum 2 için olay ufku hızının davranışı



Şekil 4.9 Durum 3 için olay ufku hızının davranışı



Şekil 4.10 Durum 3 için olay ufkunun hızının davranışı

5. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu tez çalışmasında ise üç farklı tipte değişken bir kozmolojik sabite sahip olan evren modelleri ele alınmış ve her bir model için parçacık ufku, olay ufku ve bu ufukların zaman içindeki evrilmesi (zamana göre türevleri) incelenmiştir. Değişken kozmolojik sabit için ele alınan üç durum şu şekildedir: Değişken kozmolojik sabitin $\Lambda \propto 1/a^2$ olarak ölçek parametresinin karesiyle ters orantılı olarak azaldığı Durum 1, $\Lambda \propto H^2$ olarak Hubble parametresinin karesiyle azaldığı Durum 2 ve $\Lambda \propto \rho(t)$ olarak madde yoğunluğu ile azaldığı Durum 3.

Bu üç durum için öncelikle değişken kozmolojik sabit içeren Friedmann denklemleri (23) ve (24) kullanılarak her üç durum için de Hubble parametresi evreni oluşturan içeriklerin yoğunluk parametreleri ve ölçek parametresinin farklı fonksiyonları cinsinden elde edilmiştir. Denklem (40), (51) ve (66)'da bulunan bu Hubble parametreleri Denklem (27)'de yerine konularak üç durum için evrenin parçacık ufku elde edilmiştir. Benzer şekilde Hubble parametrelerinin Denklem (77)'de yerine konulmasıyla da üç durum için olay ufku elde edilmiştir.

Ardından sırasıyla Denklem (42), (53) ve (68)'de üç durum için bulunan eş-hareketli parçacık ufukları ölçek parametresi a ile çarpılarak herhangi bir zamandaki gerçek parçacık ufku elde edilmiş ve buradan da Denklem (73)'de bunların yerine yazılmasıyla bu üç duruma karşılık gelen parçacık ufuklarının zaman içindeki evrilmesi Denklem (74), (75) ve (76)'daki gibi bulunmuştur. Parçacık ufkunun zamana göre türevi olan bu evirilme ifadesi parçacık ufkunun geri çekilme hızını da vermektedir. Benzer şekilde, sırasıyla Denklem (81), (84) ve (87)'de üç durum için elde edilen eş-hareketli olay ufuklarının ölçek parametresi a ile çarpılmasıyla da herhangi bir zamandaki gerçek olay ufukları elde edilmiş ve bunların da Denklem (89)'da yerine yazılmasıyla olay ufkunun zamana göre türevleri Denklem (90), (91) ve (92)'deki gibi bulunmuştur.

Parçacık ufku evrenin başlangıcından günümüze kadar ışık tarafından kat edilen mesafe olarak tanımlandığından, Denklem (42), (53) ve (68)'deki pozitif parçacık ufku ifadelerimiz üç model için de sıfır hacimden belli bir değere doğru genişleyen bir evren modelini ima eder. Buna rağmen, olay ufkunun da ışığın bugünümden gelecekteki

mümkün olan maksimum noktaya kadar gittiğinde aldığı mesafe olarak tanımlandığından, Denklem (84) ve (87)'de negatif parçacık ufku ifadelerimiz Durum 2 ve 3 için belli bir hacimden sıfır hacme doğru geri çöken bir evren modelini ima eder.

Değişken kozmolojik sabitin üç durumu için elde edilen gerçek parçacık ufku, olay ufku ve bu ufukların zamana göre türevlerinin evrenin başlangıcından günümüze ve mümkün olan maksimum değere kadarki davranışları ölçek parametresi a 'ya göre grafik çizilerek incelenmiştir. Burada $a \rightarrow 0$ evrenin başlangıcına denk gelirken, $a \rightarrow \infty$ evrenin nihai geleceğini temsil eder. Şekil 4.1-4.10'deki grafiklere göre, parçacık ufukları üç durum için de 0'dan başlar ∞ 'da biter. Parçacık ufuklarının hızları ise Durum 1 haricinde ∞ 'dan başlayıp sabit bir değerde sonlanır. Durum 1'de ise bunların tam tersi bir durum söz konusudur. Parçacık ufkunun hızı belli bir değerden başlayıp sonsuzda ıraksar. Durum 2 ve 3 evrenin başlangıçta sıfır hacimden belli bir hacme, sonsuz bir hızla şişmeye başlayarak belli bir hızda sabit değere ulaşır, buradan da yavaşça genişlemesi şeklindeki gözlemsel sonuçlarla uyum içerisindedir.

Diğer yandan olay ufku ise yine Durum 2 ve 3 için 0'dan başlayarak $-\infty$ 'da bittiği görülür. Burada 0'dan başlama mevcut evren için mümkün olmayıp, bugünkü ulaşabildiği son pozitif değerden başlayarak negatif yönde maksimum mesafeyi alması olarak yorumlanmalıdır. Yani evren genişlediği son noktaya kadar geldikten sonra geriye doğru çökerek genişlerken aldığı tüm mesafeyi geri çökerek sıfır hacme çökmesi olarak düşünülür. Ayrıca, Durum 2 ve 3 için olay ufkunun hızı ise $-\infty$ 'dan başlayarak belli bir değerde sabitlenir. Bunu da evren çöküşe geçtiğinde çok yüksek bir hızla çökmeye başlayarak sıfır hacme ulaştığında sabit bir çökme hızına ulaştığı düşünülür.

Durum 1 haricinde, Durum 2 ve 3'teki tüm sonuçlarımız mevcut gözlemlerle ve evrenin geleceği için önerilen muhtemel senaryolardan büyük çöküş senaryosu ile uyum içindedir. Evrenin geleceğini betimleyen olay ufkunun varlığı ve büyük çöküşü işaret eden davranışları Durum 2'de $3\Omega_{\Lambda,0} - 1 > 0$ şartına bağlıyken, Durum 3'te de $K_3 > 0$ şartına bağlıdır. Daha açık olarak, Durum 2 $\Omega_{\Lambda,0} > 1/3$ şartı için, Durum 3 Denklem (61)'den $\Omega_{\Lambda,0} > \Omega_{m,0}/2$ şartı için geçerlidir. Öyle ki bu şartlar zaten mevcut günümüz kozmolojik sabit değeri $\Omega_{\Lambda,0} = 0.70$ değeri için fazlasıyla sağlanmaktadır ve Durum 2 ve 3'teki modellerimizin büyük çöküş senaryosunu desteklediği görülmektedir.

Parçacık ufku ve olay ufkunun, ve hızlarının evrenin limit durumları haricindeki genel durumlarına yine Şekil 4.1-4.10 'den bakılabilir. Buna göre, parçacık ufukları üç durum için de 0'dan başlayıp ∞ 'da biterken limit durumlar arasındaki davranış birbirinden farklıdır. Durum 1'de parçacık ufku lineer bir şekilde artarken, Durum 2 ve 3'te günümüz değeri $a = 1$ ' e kadar üstel olarak artarken, ondan sonra lineer olarak artmaktadır. Buna rağmen, parçacık ufkunun hızı Durum 1 için Durum 2 ve 3'tekinin tamamen tersidir. Durum 1'de parçacık ufku hızı sonsuza doğru artarken, Durum 2 ve 3'te sonsuzdan belli bir değere üstel olarak azalmaktadır. Bunun yanında, olay ufku ve hızının davranışları Durum 1 için iraksak olduklarından şekillerde gösterilmemiştir, fakat Durum 2 ve 3 Şekil 4.7-4.10'te incelenmiştir. Buna göre olay ufkunun genel davranışının Durum 2 ve 3 için birbirine çok benzer olduğu gözlemlenmiştir ve yaklaşık olarak günümüz $a = 1$ değerinden sonra lineer olarak negatif yönde maksimum değere doğru artmaktadır. Negatif yönde artması evrenin başladığı noktaya doğru çökmesi olarak yorumlanmaktadır. Olay ufkunun çökme hızı ise Durum 2 ve 3'te benzer davranışla negatif yönde çok yüksek bir değerden sabit değere doğru azaldığını göstermektedir.

Sonuç olarak değişken kozmolojik sabit modellerimizden Durum 2 $\Lambda \propto H^2$ ve Durum 3 $\Lambda \propto \rho(t)$ evrenin büyük patlama ile sıfır hacimden başlayarak belli bir hacme ulaşması ve daha sonra buradan başlangıç durumuna geri çökmesini öngören Büyük Sekme (Big Bounce) kozmolojisini desteklediği görülmektedir. Ayrıca, genişleme evresine sonsuz bir hızla başlayıp belli bir değerde sabitlendiği ve bu değerden sonra da çok yüksek bir hızla negatif yönde geri çökmeye başlayarak sabit negatif bir hızla sıfır hacme geldiği görülür.

6. KAYNAKLAR

- [1] Anonim, https://acikders.ankara.edu.tr/pluginfile.php/80143/mod_resource/content/0/10-%20Kozmoloji.pdf (Erişim tarihi: 21 Mayıs 2020).
- [2] Verlinde E., On the origin of gravity and the laws of Newton, **2011**.
- [3] Bass S. D., Hadron physics and QCD:Just the Basic Facts, J. Phys. G, 38 (2011) 043201.
- [4] Andrew Liddle, An Introduction To Modern Cosmology, Second Edition, Wiley England, Chapter 4, **2003**.
- [5] Oztas A. M., Smith M. L., MNRAS, Space–time curvature and the cosmic horizon: derivations using the Newtonian world and the Friedmann–Robertson–Walker metric, 449(2) (2015) 1270.
- [6] Guth A. H., Phys. Rev. D, Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems, 23(2) (1982) 347.
- [7] Riess A. G., Filippenko A. V., Challis P., Dierks A., Astron.J., Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant, 116 (1998) 1009.
- [8] Komatsu N., Kimura S., Phys. Rev. D, Entropic cosmology for a generalized blackhole entropy, 88 (2013) 083534.
- [9] Ryden B., Introduction to Cosmology, Reading, MA, **2002**.
- [10] Peter Coles & Francesco Lucchin, Cosmology The Origin and Evolution of Cosmic Structure, Second Edition, John Wiley & Sons, England, Chapter 1, **2002**.
- [11] Melia F., MNRAS, The cosmic horizon, 382 (2007) 1917.
- [12] Sola J., Gomez-Valent A., de Cruz Perez J., Int. J. Mod. Phys. A, Vacuum dynamics in the Universe versus a rigid $\Lambda=\text{const}$, 32 (2017) 19.
- [13] Ogetay Kayalı & Tuğba Can, Evrenin Gözlemsel Özellikleri: Kozmolojik Parametreler ve Belirlenme Yöntemleri, **2017**.
- [14] Easson D. A., Frampton P. H., Smoot G. F., Physics Letters B, Entropic Accelerating Universe, 696 (2011) 273.
- [15] Miao L., Xiao-Dong L., Shuang W., Commun. Dark Energy, **2011**.

- [16] Rindler W., Visual Horizons in World Models, MNRAS, 6 (1956) 662.
- [17] Vishwakarma R. G., Class. Quantum Grav., Consequences on variable Λ -models from distant type Ia supernovae and compact radio sources, Class. Quantum Grav., 18 (2001) 1159.
- [18] Margalef-Bentabol B., Margalef-Bentabol J., Cepa J., Journal of Cosmology and Astroparticle Physics , Evolution of the cosmological horizons in a universe with countably infinitely many state equations, 02 (2013) 015.
- [19] Oztas A. M., Dil E., Smith M. L., MNRAS ,The varying cosmological constant: a new approximation to the Friedmann equations and universe model, 476 (2018) 451.
- [20] Oztas A. M., The effects of a varying cosmological constant on the particle horizon, MNRAS, 418 (2018) 2228.
- [21] Dil E., Oztas A. M., Dil E, Astronomy and Computing, The varying cosmological constant models tested with Supernovae Type Ia and HII Galaxy Data, 28 (2019) 100295.
- [22] Margalef-Bentabol B., Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, Evolution of the cosmological horizons in a concordance universe, 12, (2012) 035.
- [23] Harisson E, ApJ, Hubble Spheres and particle Horizons, 383 (1991) 60.
- [24] Sola J., Journal of Physics: Conference Series, Cosmological constant and vacuum energy: old and new ideas, 453 (2015) 012015.