

**ELİPTİK KONTURLU DAĞILIMLARA DAYALI ÇOK
DEĞİŞKENLİ TEKRARLI ÖLÇÜMLÜ VARYANS ANALİZİ**

**ANALYSIS OF VARIANCE FOR MULTIVARIATE
REPEATED MEASURES BASED ON ELIPTICALLY
CONTOURED DISTRIBUTIONS**

MÜGE BORAZAN ÇELİKBIÇAK

PROF.DR. SERPİL AKTAŞ ALTUNAY
Tez Danışmanı

Hacettepe Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin

İSTATİSTİK Anabilim Dalı İçin Öngördüğü

DOKTORA Tezi Olarak Hazırlanmıştır.

2020

Sevgili Oğlum Tolga'ya...

ÖZET

ELİPTİK KONTURLU DAĞILIMLARA DAYALI ÇOK DEĞİŞKENLİ TEKRARLI ÖLÇÜMLÜ VARYANS ANALİZİ

Müge BORAZAN ÇELİKBIÇAK

Doktora, İstatistik Bölümü

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Serpil AKTAŞ ALTUNAY

Şubat 2019, 152 sayfa

Tekrarlı ölçümlü veriler aynı deneysel birimden farklı deneme koşullarında alınan birden fazla ölçümü tanımlamaktadır. Özellikle, sağlık ve davranış bilimleri, eğitim ve psikoloji gibi çeşitli alanlarda tekrarlı ölçümlü veriler ile yapılan araştırmalar uygulamalı istatistikte önemli bir yere sahiptir. Aynı deneysel birimden alınan farklı ölçümler arasındaki bağımlılık yapısı, tekrarlı ölçümlü verilerin analizinde daha dikkat gerektiren ve diğer analizlere oranla daha zorlaştıran bir husus olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu ölçümler ile planlanmış araştırma tasarımlarının sonuçlarını analiz etmek için kullanılan birçok yöntem vardır. Bu analiz yöntemleri arasındaki en büyük fark ise kullanılan modellerin dayandığı varsayımlardır. Bu yöntemler arasından modellerin dayandığı varsayımları sağlayarak bağımlılık yapısına sahip tekrarlı ölçümlü verileri modelleyebilecek uygun bir yöntemin belirlenmesi önem kazanmaktadır. Klasik yöntemlerin gerektirdiği en önemli varsayımlardan biri normallik varsayımdır. Birçok yöntem normallik varsayımı altında çalışmaktadır. Ancak uygulamalarda bu varsayımı sağlamak her zaman mümkün olmamaktadır. Bu sebeple, tekrarlı ölçümlü verilerin analizinde özellikle normallik varsayımının sağlanmadığı durumlar için, normal dağılımın ötesinde modelleme de esneklik sağlayabilecek daha farklı dağılımlara ihtiyaç duyulmaktadır.

Bu çalışmada, normallik varsayımının sağlanmadığı durumlarda, normal dağılıma alternatif bir dağılım ailesi olan Eliptik Konturlu dağılımlar altında çok

değişkenli tekrarlı ölçümlü verilerin analizi için sıklıkla kullanılan bir yöntem olan Çok Değişkenli Varyans Analizi (MANOVA) modeli incelenerek, *Çok Değişkenli Laplace* dağılımının kullanılması önerilmiştir. Bu dağılım varsayımı altında MANOVA modeline ilişkin parametre tahminleri en çok olabilirlik yöntemi ile gerçekleştirilip bu tahmin edicilere dayalı test istatistikleri önerilmiştir. En çok olabilirlik yöntemine dayalı parametre tahminleri için EM algoritması kullanılmıştır. Ayrıca, farklı deneme koşullarında iç içe oluşan tasarımlardan alınan tekrarlı ölçümlü verilerin analizi için *Matris Değişkenli Laplace* dağılımı kullanılması önerilmiş ve bu dağılıma dayalı modelin parametre tahminleri en çok olabilirlik tahmin yöntemi ile gerçekleştirilmiştir. Parametrelerin gerçek değerleri ile tahminler arasındaki Öklid uzaklıkları hesaplanmasının yanında ayrıca test istatistiklerinin güçleri de hesaplanmıştır.

Anahtar Kelimeler: MANOVA, Tekrarlı ölçümlü veri, Laplace dağılımı, EM algoritması, Tekrarlı Ölçümlü MANOVA

ABSTRACT

ANALYSIS OF VARIANCE FOR MULTIVARIATE REPEATED MEASURES BASED ON ELIPTICALLY CONTOURED DISTRIBUTIONS

Müge BORAZAN ÇELİKBIÇAK

Doctor of Philosophy, Department of Statistics

Supervisor: Prof. Dr. Serpil AKTAŞ ALTUNAY

February 2020, 152 pages

Repeated measures data describe multiple measurements taken from the same experimental unit under different treatment conditions. In particular, researches with repeated measures data in various fields such as health and behavioral sciences, education, and psychology has an important role in applied statistics. The structure of dependency between different measurements taken from the same experimental unit appears as an issue that requires more attention in the analysis of repeated measures data and makes it more difficult than other statistical analyzes. There are many methods used to analyze the results of research designs planned with these measurements. The most important difference between these methods is the assumptions on which the models are based. By satisfying the assumptions that the models are based on among these methods, it is important to determine an appropriate method that can model the repeated measures data with the dependency structure. One of the most important assumptions needed by classical methods is the normality assumption. Many methods are valid under the assumption of normality. However, it is not always possible to hold this assumption in applications. For this reason, in the analysis of repeated measures data, different distributions are necessary that can

provide flexibility beyond the normal distribution, especially in cases where the assumption of normality does not hold.

In this study, it is proposed to use the Multivariate Laplace distribution by examining the multivariate variance analysis model (MANOVA), which is a frequently used method for analysis of multivariate repeated measures data under Elliptically Contoured distributions, which is an alternative distribution family, in cases where normality assumption does not hold. Under this distribution assumption, the parameter estimates for the MANOVA model are carried out with the Maximum Likelihood method and, test statistics based on these estimators are proposed. The EM algorithm is used for parameter estimates based on the Maximum Likelihood method. In addition, the use of *Matrix Variate Laplace* distribution is proposed for the analysis of repeated measures data from nested designs under different treatment conditions, and model parameter estimates based on this distribution are made with the Maximum Likelihood estimation method. The Euclidean distances are calculated between the true parameter values and the estimates. Additionally, the power values are calculated for the test statistics.

Keywords: MANOVA, Repeated measurement data, Laplace distribution, EM algorithm, Repeated Measures MANOVA

TEŞEKKÜR

Bu tezin ortaya çıkış aşamalarında beni her daim motive ederek cesaretlendiren, bana olan inancını hiçbir zaman kaybetmeyen, değerli bilgisini esirgemeyerek büyük bir özveri ile sonuca ulaşmamı sağlayan çok değerli danışmanım Prof. Dr. Serpil AKTAŞ ALTUNAY'a,

Zorlu tez sürecimde, değerli bilgileri ve önerileri ile yoluma ışık tutan, desteğini esirgemeyen, kendisini tanımaktan onur duyduğum Prof. Dr. Olcay ARSLAN'a,

Değerli fikirleri ve sağladığı destek ile beni cesaretlendiren Doç.Dr. Arzu ALTIN YAVUZ'a,

Tez çalışmam süresince durakladığım noktalarda paylaştığı bilgiler ile yol almamı sağlayan, değerli katkılarından dolayı müteşekkir olduğum Dr.Öğr.Üyesi Y.Murat BULUT'a,

Hayatımın her zor aşamasında olduğu gibi, bu zorlu süreçte de daima yanımda olarak beni sonuna kadar destekleyen ve büyük sabır gösteren, sevgili eşim Doç. Dr. Ömür ÇELİKBIÇAK' a,

Tez çalışmam ile birlikte büyüyen, gözlerindeki pırıltıdan güç aldığım, hayat enerjim, canım oğlum Tolga'ya,

Bu hayattaki en büyük desteğim, yaşamım boyunca zorluklar karşısında her zaman güçlü ve dimdik kalabilmeyi öğrendiğim, canım babam ve anneme,

En zor anımda yanımda olan, pozitif enerjisi ile bana güç veren, canım kardeşim Fulya'ya,

Ve bu süreç içerisinde beni destekleyen, bana inanan, güzel enerjileri ile motivasyonumu yükselten tüm arkadaşlarıma,

içtenlikle teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR.....	v
İÇİNDEKİLER.....	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	viii
ÇİZELGELER DİZİNİ	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR	xi
1. GİRİŞ	1
2. ELİPTİK KONTURLU DAĞILIMLAR	4
2.1. Eliptik Konturlu Dağılımların Özellikleri	5
3. LAPLACE DAĞILIMI	8
3.1. Tek Değişkenli Laplace Dağılımı	8
3.2. İki Değişkenli Laplace Dağılımı.....	10
3.3. Çok Değişkenli Laplace Dağılımı	12
3.4. Matris Değişkenli Laplace Dağılımı	14
4. TEKRARLI ÖLÇÜMLÜ VERİ.....	16
4.1. Tekrarlı Ölçümlü Veri Düzeni.....	17
5. NORMAL DAĞILIM ALTINDA TEKRARLI ÖLÇÜMLÜ VARYANS ANALİZİ .21	
5.1. Tek Değişkenli Tekrarlı Ölçümlü ANOVA	23
5.1.1. Tek Yönlü Tekrarlı Ölçümlü ANOVA	24
5.1.2. İki Yönlü Tekrarlı Ölçümlü ANOVA.....	25
5.1.3. Parametre Tahminleri.....	27
5.1.4. Test İstatistikleri	29
5.2. Çok Değişkenli Tekrarlı Ölçümlü ANOVA.....	31

6. ÇOK DEĞİŞKENLİ LAPLACE DAĞILIMI ALTINDA ÇOK DEĞİŞKENLİ TEKRARLI ÖLÇÜMLÜ VARYANS ANALİZİ.....	35
6.1. Parametre Tahmini	35
6.1.1. β 'nın En Çok Olabilirlik Tahmin Edicisinin Bulunması	42
6.1.2. Σ 'nın En Çok Olabilirlik Tahmin Edicisinin Bulunması	43
6.1.3. EM Algoritmasının tanımlanması	45
6.2. Test İstatistiklerinin Tanımlanması	46
7. MATRİS DEĞİŞKENLİ LAPLACE DAĞILIMI ALTINDA TEKRARLI ÖLÇÜMLÜ VARYANS ANALİZİ	52
7.1. Parametre Tahmini	54
7.1.1. β 'nın En Çok Olabilirlik Tahmin Edicisinin Bulunması	59
7.1.2. Σ 'nın En Çok Olabilirlik Tahmin Edicisinin Bulunması	61
7.1.3. Ψ 'nın En Çok Olabilirlik Tahmin Edicisinin Bulunması	63
7.1.4. EM Algoritmasının tanımlanması	64
8. BENZETİM ÇALIŞMASI.....	66
8.1. Benzetim Çalışması I: Parametre Tahminlerinin Hesaplanması	66
8.2. Benzetim Çalışması II: Test İstatistiklerinin ve Testin Gücünün Hesaplanması.....	99
9. SAYISAL ÖRNEK	137
10.SONUÇ VE TARTIŞMA	140
11.KAYNAKLAR.....	142
EKLER	147
EK 1- Wilk's Lamda Dağılımı Kritik Değerler Tablosu.....	147
EK 2-Tezden Türetilmiş Bildiriler	150
EK 3-Tez Çalışması Orijinallik Raporu	151
ÖZGEÇMİŞ	152

ŞEKİLLER DİZİNİ

- Şekil 1.** Laplace ve Normal dağılıma ilişkin yoğunluk fonksiyonlarının grafikleri 9
- Şekil 2.** Laplace ve Normal dağılıma ilişkin iki değişkenli o.y.f. çizimi 11
- Şekil 3.** Laplace ve Normal dağılıma ilişkin iki değişkenli o.y.f. çizimi 11

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4.1. Tekrarlı Ölçümlü Veri Düzeni (Çok Etken Olması Durumu)	18
Çizelge 4.2. Tekrarlı Ölçümlü Veri Düzeni (Tek Etken Olması Durumu)	19
Çizelge 4.3. Çok Değişkenli Tekrarlı Ölçümlü Veri Düzeni	20
Çizelge 5.1. Tek Yönlü Tekrarlı Ölçümlü ANOVA Tablosu	25
Çizelge 5.2. İki Yönlü Tekrarlı Ölçümlü ANOVA Tablosu	26
Çizelge 5.3. Tekrarlı Ölçümlü MANOVA tablosu	32
Çizelge 6.1. β ve Σ tahminleri için EM Algoritması Adımları	45
Çizelge 6.2. Wilk's Λ değerlerinin F dağılımına dönüşüm tablosu	51
Çizelge 7.1. β, Σ ve Ψ parametre tahminleri için EM Algoritması Adımları	65
Çizelge 8.1. Benzetim Çalışmasında Kullanılan Sayısal Değerler	66
Çizelge 8.2. Çok değişkenli Laplace Dağılımından Tekrarlı Ölçümlü Veri Üretme Algoritması	67
Çizelge 8.3. $i=2, k=3$ için (a ve b) β , (c ve d) Σ parametre tahminlerine ve (e) Öklid Uzaklıklarına ilişkin sonuçlar	70
Çizelge 8.4. $i=2, k=4$ iken (a ve b) β , (c ve d) Σ parametre tahminlerine ve (e) Öklid uzaklıklarına ilişkin sonuçlar	74
Çizelge 8.5. $i=2, k=6$ iken (a ve b) β , (c ve d) Σ parametre tahminlerine ve (e) Öklid uzaklıklarına ilişkin sonuçlar	79
Çizelge 8.6. $i=3, k=3$ iken (a ve b) β , (c ve d) Σ parametre tahminlerine ve (e) Öklid uzaklıklarına ilişkin sonuçlar	85
Çizelge 8.7. $i=3, k=4$ iken (a ve b) β , (c ve d) Σ parametre tahminlerine ve (e) Öklid Uzaklıklarına ilişkin sonuçlar	89
Çizelge 8.8. $i=3, k=6$ iken (a ve b) β , (c ve d) Σ parametre tahminlerine ve (e) Öklid Uzaklıklarına ilişkin sonuçlar	95
Çizelge 8.9. ($i=2, k=3$) Etken Etkisi Hipotez Matrislerine İlişkin Sonuçlar	100
Çizelge 8.10. ($i=2, k=3$) Deneme Etkisi Hipotez Matrislerine İlişkin Sonuçlar	102
Çizelge 8.11. ($i=2, k=3$) Etkileşim Etkisi Hipotez Matrislerine İlişkin Sonuçlar	103
Çizelge 8.12. ($i=2, k=3$) Test İstatistiklerine İlişkin Sonuçlar	104
Çizelge 8.13. ($i=2, k=4$) Etken Etkisi Hipotez Matrislerine İlişkin Sonuçlar	105
Çizelge 8.14. ($i=2, k=4$) Deneme Etkisi Hipotez Matrislerine İlişkin Sonuçlar	106

Çizelge 8.15. (i=2, k=4) Etkileşim Etkisi Hipotez Matrislerine İlişkin Sonuçlar	108
Çizelge 8.16. (i=2, k=4) Test İstatistiklerine İlişkin Sonuçlar	108
Çizelge 8.17. (i=2, k=6) Etken Etkisi Hipotez Matrislerine İlişkin Sonuçlar	110
Çizelge 8.18. (i=2, k=6) Deneme Etkisi Hipotez Matrislerine İlişkin Sonuçlar	111
Çizelge 8.19. (i=2, k=6) Etkileşim Etkisi Hipotez Matrislerine İlişkin Sonuçlar	113
Çizelge 8.20. (i=2, k=6) Test İstatistiklerine ilişkin sonuçlar.....	113
Çizelge 8.21. (i=3, k=3) Etken Etkisi Hipotez Matrislerine İlişkin Sonuçlar	115
Çizelge 8.22. (i=3, k=3) Deneme Etkisi Hipotez Matrislerine İlişkin Sonuçlar	116
Çizelge 8.23. (i=3, k=3) Etkileşim Etkisi Hipotez Matrislerine İlişkin Sonuçlar	118
Çizelge 8.24. (i=3, k=3) Test İstatistiklerine İlişkin Sonuçlar	118
Çizelge 8.25. (i=3, k=4) Etken Etkisi Hipotez Matrislerine İlişkin Sonuçlar	120
Çizelge 8.26. (i=3, k=4) Deneme Etkisi Hipotez Matrislerine İlişkin Sonuçlar	122
Çizelge 8.27. (i=3, k=4) Etkileşim Etkisi Hipotez Matrislerine İlişkin Sonuçlar	124
Çizelge 8.28. (i=3, k=4) Test İstatistiklerine İlişkin Sonuçlar	125
Çizelge 8.29. (i=3, k=6) Etken Etkisi Hipotez Matrislerine İlişkin Sonuçlar	127
Çizelge 8.30. (i=3, k=6) Deneme Etkisi Hipotez Matrislerine İlişkin Sonuçlar	129
Çizelge 8.31. (i=3, k=6) Etkileşim Etkisi Hipotez Matrislerine İlişkin Sonuçlar	131
Çizelge 8.32. (i=3, k=6) Test İstatistiklerine İlişkin Sonuçlar	131
Çizelge 8.33. Testlerin Güç Hesaplamaları İçin Kullanılan Olasılıklar	132
Çizelge 8.34. Etken (Λ_01), Deneme (Λ_02) ve Etkileşim (Λ_03) için test istatistiklerinin gücü	134
Çizelge 8.35. Etken (Λ_01), Deneme (Λ_02) ve Etkileşim (Λ_03) için test istatistiklerinin gücü	135
Çizelge 9.1. Lökositlerin Oksijen Tüketim Verisi	137
Çizelge 9.2. Lökositlerin Oksijen Tüketim Verisi için ANOVA ve MANOVA Tablosu	138
Çizelge 9.3. Lökositlerin Oksijen Tüketim Verisi için MANOVA Tablosu	138
Çizelge 9.4. Lökositlerin Oksijen Tüketim Verisi için Parametre Tahminleri ..	139

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

N_n	n boyutlu Normal Dağılım
EK_n	n boyutlu Eliptik Konturlu Dağılım
$S_n ; S_k$	n veya k boyutlu Küresel Dağılım
ÇDL_p	p boyutlu Çok Değişkenli Laplace Dağılımı
$\text{MDL}_{p,t}$	p ve t boyutlu Matris Değişkenli Dağılım
$\Sigma \otimes \Psi$	Kronecker Çarpım

Kısaltmalar

ANOVA	Tek Değişkenli Varyans Çözümlemesi
ÇDL	Çok Değişkenli Laplace Dağılımı
EK	Eliptik Konturlu Dağılım
EKK	En Küçük Kareler Yöntemi
EM	Expectation-Maximization
EP	Experimental Power
GLMP	General Linear Model Power
HKT	Hata Kareler Toplamı
MDL	Matris Değişkenli Laplace Dağılımı
MANOVA	Çok Değişkenli Varyans Çözümlemesi
o.y.f.	Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu
TG	Ters Gamma Dağılımı

1. GİRİŞ

İstatistiksel bir modelleme yapabilmek için verilerin varsayılan dağılım koşullarını sağlaması istatistiksel çıkarsamalarda önemli bir yere sahiptir. Bu sebeple normal dağılım, istatistiksel veri analizinde önemli bir rol oynamaktadır. Çok değişkenli veriler için de çıkarsamalı istatistiksel yöntemlerin birçoğu, temel varsayım olan, çok değişkenli normal dağılım özelliğine sahip olan veriler için geliştirilmiştir. Bu varsayım altında varyans analizi modeli (ANOVA) modeli parametrelerinin tahmini için en sık kullanılan yöntemlerden biri olan En Küçük Kareler Yöntemi (EKK) ile yapılmaktadır [1]. Normallik varsayımı altında bu yöntemler ile elde edilen tahmin ediciler en etkin tahmin edicilerdir. Normallik varsayımı sağlanmadığı durumda, EKK tahmin edicileri etkinliğini yitirmektedir [1]. Dolayısıyla, EKK tahmin edicilerine dayanan F test istatistiği de gücünü kaybetmektedir. Ancak gerçek hayat uygulamalarında veri setlerinin çoğunluğu tam olarak normal dağılım göstermezler. Bu sebeple, benzeri sorunların üstesinden gelebilmek amacıyla, normallik varsayımının sağlanmadığı durumlar için alternatif dağılımlara dayalı yöntemlerin geliştirilmesinin ve kullanılması daha yararlı olacaktır.

Çok değişkenli ANOVA için ise Çok Değişkenli Normal Dağılım temel esas olarak kabul edilmektedir. Bu model altında istenen sonuçların elde edilmesi mümkündür. Bununla birlikte pratikte bu dağılımın varsayımları geçerli olmadığı durumlara çözüm üretebilmek için literatürde sayısız alternatif çok değişkenli dağılım kullanılmıştır. Bir çok çalışmada Eliptik Konturlu dağılımlar ile benzer dağılımları kullanılarak istatistiksel çıkarsamalar yapılmıştır [2], [3], [4]. Bu sınıftaki dağılımların daha esnek, daha uyarlanabilir ve özellikle de marjinal dağılımlarının daha uzun kuyruklara sahip olduğu gösterilmiştir. Eliptik konturlu dağılımların varlığında, gözlemlere ilişkin doğrusal ve karesel fonksiyonların normallik varsayımı altındaki yöntemlere göre daha dayanıklı olduğu gösterilmiştir.

Normal dağılımdan daha kalın kuyruğa sahip dağılımlar, normal dağılıma dayalı istatistiksel çıkarsamalara göre aykırı değerlere ve hatalara karşı daha duyarlıdır. Bu sebeple, normalden daha ağır kuyruklara sahip hataları içeren

veri kümelerini modelleyebilmek için normal dağılıma alternatif daha esnek dağılımlar oluşturmak gerçeği ortaya çıkmıştır. İlk olarak normal dağılıma alternatif olarak önerilen ağır kuyruklu dağılımlar t ve Slash dağılımlarıdır [5]. Her iki dağılım da negatif olmayan raslantı değişken ölçeği ile normal dağılıma sahip rasgele değişkeninin karması olarak elde edilebilir. Bu durumda her iki dağılımda normal dağılımın ölçek karmasından oluşan dağılımlar ailesine ait olurlar.

Normallik koşulları sağlanmadığında model oluşturmada çok yararlı olan bir başka dağılım ise 1975'te Kotz tarafından önerilen Kotz tipi dağılımdır [6]. Bu dağılım normal dağılımın genelleştirilmiş hali olarak düşünülebilir. Normal dağılımın ölçek karma dağılımları gibi, daha ağır kuyruklara sahip dağılım üretebilmek için Kotz tipi dağılımı da ölçek karma dağılım cinsinden yazmak mümkündür. Ölçek karma Kotz tipi dağılım, genelleştirilmiş çok değişkenli Slash dağılımın elde edilmesinde kullanılmıştır ve bu dağılım normal dağılım varsayımının sağlanmadığı durumlarda diğer alternatif yöntemlere göre daha iyi sonuç veren bir başka dağılım ailesi olarak önerilmiştir [7].

Tez çalışmasının amacı, normal dağılım varsayımlarının sağlanmadığı durumlarda normal dağılıma alternatif bir dağılım olan Eliptik Konturlu dağılımlar ailesinden Çok Değişkenli Laplace dağılımını kullanarak Çok Değişkenli Tekrarlı Ölçümlü ANOVA modeli için parametre tahminlerini elde etmek ve bu dağılım altında test istatistiği önermektir. Bu amaçla, tezin bölümleri aşağıda açıklandığı gibi düzenlenmiştir.

Bu tez çalışması on bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde, Eliptik Konturlu dağılımlar hakkında kısaca bilgi verilerek, özelliklerine değinilmiştir. Üçüncü bölümde, Laplace Dağılımına ayrıntılı olarak yer verilmiştir. Dördüncü bölümde tezinde ana çatısını oluşturan Tekrarlı Ölçümlü veriye ve özelliklerine değinilmiştir. Beşinci bölümde, Normal dağılım varsayımı altında tekrarlı ölçümlü verilerin analiz yöntemlerinden bahsedilmiştir. Altıncı ve yedinci bölümde ise, tezin orijinal kısmını oluşturan, Normal dağılım varsayımı sağlanmadığı durumda çok değişkenli tekrarlı ölçümlü verilerin analizi için önerilen dağılım varsayımı altında teorik çıkarımlar sonucunda parametre

tahminlerine ulaşılmıştır. Sekizinci bölümde, bir benzetim çalışması ile yedinci bölümde elde edilen parametre tahminlerinin etkinleri incelenmiş ve bu parametre tahminlerine dayalı test istatistikleri hesaplanmıştır. Dokuzuncu bölümde, kullanılması önerilen dağılım varsayımı altında gerçek veri örneği çözümlenerek Normal dağılıma dayalı sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. Onuncu bölüm sonuç ve tartışma bölümüdür. Bu bölümde, çalışmaya ilişkin genel bir değerlendirme yapılarak, sekizinci ve dokuzuncu bölümde elde edilen sonuçların değerlendirilmesi yapılmıştır.

2. ELİPTİK KONTURLU DAĞILIMLAR

Klasik çok değişkenli analizlerin çoğunlukla çok değişkenli normal dağılım varsayımına dayanması nedeniyle, bu analizlerde kullanılan olasılık modellerinin hepsi olmasa da birçoğu sürekli çok değişkenli veri kümesine uymaktadır. Bu modellere ilişkin çıkarsamalar için teoriler ve yöntemler literatürde mevcut olmakla birlikte hala geliştirilmeye devam etmektedir [8]. Normal dağılım doğası gereği geleneksel matris cebri açısından önemli analizlere imkân sağlamaktadır. Ayrıca, vektör ve matristen oluşan parametre kümesinin gözlem vektörünün ortalaması ile temsil edilebilmesi ve kovaryans matrisi ile yorumlayabilmek bakımından nispeten daha kolay çıkarsama yapılabilmesi analizi kolaylaştırır. Normal dağılımın sahip olduğu bu avantajın, uygulamada daha esnek kullanım sağlayamadığında dezavantaja dönüşmesi sebebi ile normal dağılım sınıfının ötesinde çok değişkenli olasılık dağılımlarına ihtiyaç duyulur. Bu nedenle, İstatistikçiler, standart dağılımlara uygun modelleri çok değişkenli normal dağılımın en önemli özelliklerini koruyan daha geniş bir dağılım sınıfına genelleştirmekle ilgilenmişlerdir. Bu noktada, büyük bir dağılım ailesi olan Eliptik Konturlu Dağılımlar, literatürde bu tarz analizlerin kapsamını artırıcı dağılımlar olarak önerilmişlerdir [2], [9], [10]. Eliptik Konturlu Dağılımlar sınıfının çok değişkenli normal dağılımın uygun bir uzantısı olarak kabul edilebileceği belirtilmiştir [2]. Normal olmayan dağılımlar ailesinden olan bu dağılımlar, modellemede daha fazla esneklik sağlar. Aynı zamanda normal dağılım ailesine uygun birçok yöntem Eliptik Konturlu dağılım ailesi içinde uygunluk gösterir. Eliptik Konturlu dağılımlarda basıklık, sıklıkla ihtiyaç duyulan normal yöntemlerden bir parça daha farklı olabilir. Gözlemlerin doğrusal ve karesel fonksiyonlarına dayalı bu yöntemler, normal yöntemlere göre çok daha dayanıklı olabilirler. Bu sebeple, çok değişkenli istatistikte, eliptik dağılımlar, normal dağılıma bir alternatif sağlamaktadır.

Literatürde, birçok araştırmacı, Eliptik Konturlu Dağılımlara ilişkin istatistiksel çıkarsama teorisini ve yöntemlerini geliştirmiştir [2], [9], [11], [12], [13], [14], [15], [16].

2.1. Eliptik Konturlu Dağılımların Özellikleri

Eliptik dağılımlar çok değişkenli normal dağılımın genişletilmiş halidir [11]. Çok değişkenli normal dağılım, standart normal dağılım aracılığı ile tanımlanabilmektedir. \mathbf{y} , n boyutlu rastgele vektör, $\mathbf{y} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ ile çok değişkenli normal dağılıma sahip, \mathbf{x} , n boyutlu rastgele vektör ise, $\mathbf{x} \sim N_n(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ ile standart normal dağılıma sahip iken ayrıca varyans-kovaryans matrisi $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{D}\mathbf{D}'$ biçiminde tanımlandığında,

$$\mathbf{y} \stackrel{d}{=} \boldsymbol{\mu} + \mathbf{D}'\mathbf{x} \quad (2.1)$$

eşitliği ile standart normal dağılıma paralel olarak çok değişkenli normal dağılımın birçok özelliği kolaylıkla bulunabilmektedir. $(n \times 1)$ boyutlu \mathbf{y} rasgele vektörü, $\boldsymbol{\mu}$ $(n \times 1)$ ve $\boldsymbol{\Sigma}$ $(n \times n)$ parametreleri ile

$$\mathbf{y} \stackrel{d}{=} \boldsymbol{\mu} + \mathbf{D}'\mathbf{x} \quad (2.2)$$

eşitliğini sağlıyorsa eliptik simetrik dağılıma (eliptik dağılıma) sahiptir denir [11]. Burada, \mathbf{x} rastgele vektör, $\mathbf{x} \sim S_k(\phi)$ gösterimi ile küresel dağılıma sahiptir. Ayrıca, $\mathbf{D}: k \times n$, $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{D}\mathbf{D}'$, $\text{rank}(\boldsymbol{\Sigma}) = k$ 'dır. Bu biçimde tanımlanan eliptik dağılıma sahip \mathbf{y} vektörü $\mathbf{y} \sim EK_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \phi)$ biçiminde gösterilebilir. Eğer, $\text{rank}(\boldsymbol{\Sigma}) = k$ ile $\mathbf{y} \sim EK_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \phi)$ dağılımına sahip ise;

➤ \mathbf{y} 'nin karakteristik fonksiyonu $\psi(\mathbf{t}) = E(e^{i\mathbf{t}'\mathbf{x}})$, herhangi bir ϕ sayısal fonksiyonu için (2.3) ile verilen eşitliğe eşit olur.

$$\psi(\mathbf{t}) = e^{i\mathbf{t}'\boldsymbol{\mu}} \phi(\mathbf{t}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{t}) \quad (2.3)$$

➤ $\mathbf{y}^{(k)}$ 'den bağımsız $r \geq 0$ ve $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{D}\mathbf{D}'$ için \mathbf{y} 'nin stokastik gösterimi;

$$\mathbf{y} \stackrel{d}{=} \boldsymbol{\mu} + r\mathbf{D}'\mathbf{u}^{(k)} \quad (2.4)$$

ifadesine eşittir. Bu gösterim, $\mathbf{y} \sim \text{EK}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \phi)$ rasgele vektörünün eliptik simetrik dağılıma sahip olabilmesi için gereklidir. Burada, $r \geq 0$ ve $\mathbf{u}^{(k)}$ birbirinden bağımsızdır. Ayrıca, $\mathbf{y} \sim \text{EK}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \phi)$ sahip olduğunda,

$$Q(\mathbf{y}) = (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}) \stackrel{d}{=} r^2 \quad (2.5)$$

olur. Burada $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$, $\boldsymbol{\Sigma}$ 'nin genelleştirilmiş tersidir.

Eliptik dağılımlı değişkenlerin herhangi bir doğrusal birleşimi de eliptik dağılıma sahiptir [10],[11]. \mathbf{y} değişkeni, $\mathbf{y} \sim \text{EK}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \phi)$ ve $\text{rank}(\boldsymbol{\Sigma}) = \mathbf{k}$ ile eliptik dağılıma sahipse,

$$\mathbf{v} + \mathbf{B}'\mathbf{y} \sim \text{EK}_m(\mathbf{v} + \mathbf{B}'\boldsymbol{\mu}, \mathbf{B}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B}, \phi) \quad (2.6)$$

olur. Burada, \mathbf{B} $n \times m$ boyutlu matris, ve \mathbf{v} , $m \times 1$ boyutlu vektördür. $\mathbf{y} \sim \text{EK}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \phi)$ dağılımına sahip iken \mathbf{y} ve $\boldsymbol{\mu}$ vektörü ile $\boldsymbol{\Sigma}$ matrisi,

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

eşitlikleri ile ifade edilmektedir. Bu durumda, marjinal dağılımları da $\mathbf{y}_1 \sim \text{EK}_m(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}_{11}, \phi)$ ve $\mathbf{y}_2 \sim \text{EK}_{n-m}(\boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma}_{22}, \phi)$ ile yine eliptik dağılıma sahiptirler. Burada, $\mathbf{y}_1: m \times 1$, $\boldsymbol{\mu}_1: m \times 1$ ve $\boldsymbol{\Sigma}_{11}: m \times m$ boyutludur.

Genel olarak, $\mathbf{y} \sim \text{EK}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \phi)$ dağılımına sahip olarak verilen bir değişkenin yoğunluk fonksiyonuna sahip olması gerekli değildir. $\mathbf{y} \sim \text{EK}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \phi)$ dağılımına sahip bir değişkenin yoğunluk fonksiyonuna sahip olması için gerekli koşul $\text{rank}(\boldsymbol{\Sigma}) = n$ 'e eşit olmasıdır. Bu durumda da stokastik gösterim ifade edilmektedir. Burada, yine \mathbf{D} tekil olmayan bir matris olmak üzere, $\mathbf{D}'\mathbf{D} = \boldsymbol{\Sigma}$ 'ya eşittir. Ayrıca, $\mathbf{x} \sim S_n(\phi)$ ile yine küresel dağılıma sahiptir.

Sonuç olarak, (2.1) eşitliği ile ifade edilen stokastik gösterime sahip \mathbf{y} değişkeninin yoğunluğu,

$$C_p |\Sigma|^{-1/2} g((\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})' \Sigma^{-1} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})) \quad (2.8)$$

ifadesi ile tanımlanmıştır. Bu durumda, $EK_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma, \phi)$ yerine $EK_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma, g)$ gösterimi de kullanılabilir [2].

Eliptik konturlu dağılımlar ailesi,

- Çok Değişkenli Normal Dağılım
- Çok Değişkenli t Dağılımı
- Çok Değişkenli Cauchy Dağılımı
- Çok Değişkenli Laplace Dağılımı
- Çok Değişkenli Uniform Dağılım
- Normal Dağılımın Karma Dağılımları
- Çok Değişkenli Kararlı (Stable) Dağılımlar

gibi dağılımları içermektedir [2], [9], [12].

Bu çalışmada Eliptik Konturlu dağılım ailesinden olan ve gerçek yaşam uygulamalarında daha sıklıkla kullanılan Çok Değişkenli Laplace Dağılımı ele alınmıştır.

3. LAPLACE DAĞILIMI

Bu bölümde, Tek Değişkenli, İki Değişkenli ve Çok Değişkenli olmak üzere Laplace Dağılımı kısaca tanıtılacaktır. Ayrıca Matris Değişkenli Laplace dağılımından da kısaca bahsedilecektir.

3.1. Tek Değişkenli Laplace Dağılımı

Klasik Laplace dağılımı, ilk olarak 1774 yılında normal dağılıma alternatif olarak Pierre Simon Laplace tarafından önerilmiştir. Klasik Laplace dağılımı,

$$f(x; \theta; s) = \frac{1}{2s} e^{-|x-\theta|/s}, \quad -\infty < x < \infty \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanmaktadır [17]. Burada, $\theta \in (-\infty, \infty)$ ve $s > 0$ sırasıyla, konum ve ölçek parametreleridir. Laplace dağılımının konum parametresi θ , dağılımın ortalama, medyan ve moduna karşılık gelirken, ölçek parametresi s ise dağılımın standart sapmasına karşılık gelmektedir.

Laplace dağılımı aynı zamanda iki üstel rasgele değişken arasındaki farkın kuralı olarak bilinir. Bu sebeple, bu dağılım, çift üstel dağılım (*double exponential distribution*), iki kuyruklu üstel dağılım (*two-tailed exponential distribution*) ve ikili üstel kanun (*bilateral exponential law*) olarakta bilinmektedir.

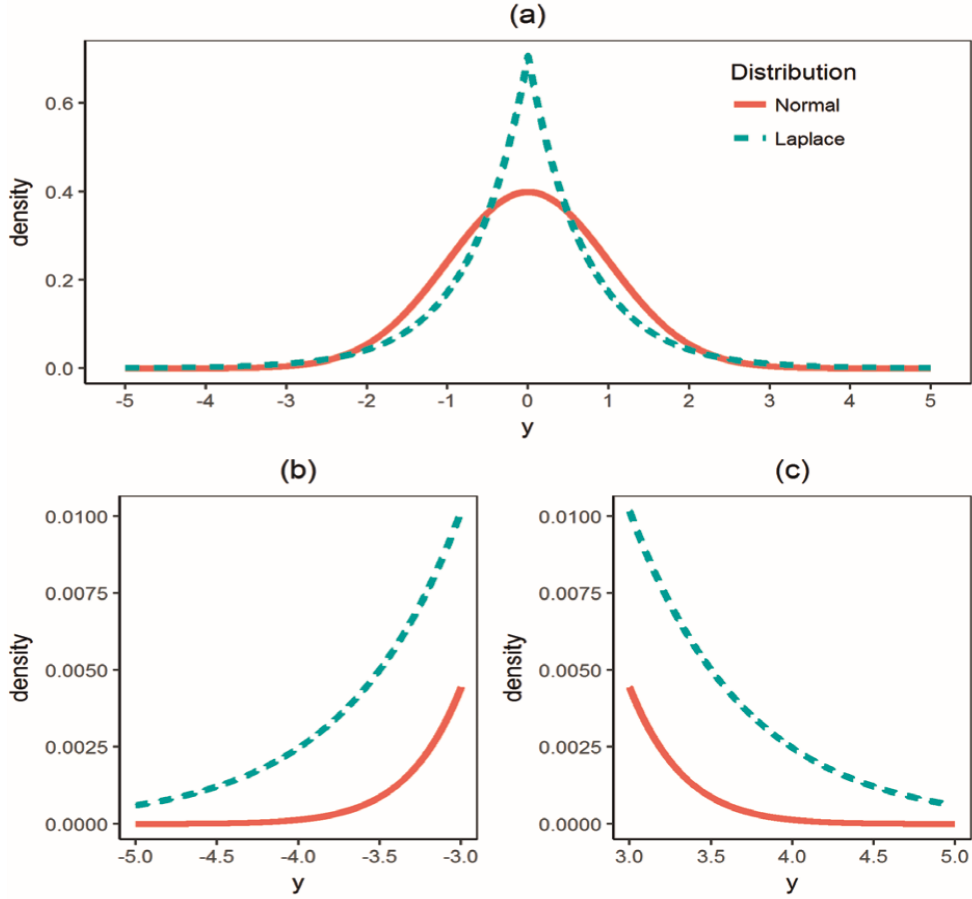
Klasik Laplace dağılımının karakteristik fonksiyonu, ortalaması ve varyansı sırasıyla,

$$\psi_X(t) = (1 + t^2)^{-1}, \quad -\infty < t < \infty \quad (3.2)$$

$$E(X) = \theta, \quad V(X) = 2s^2 \quad (3.3)$$

biçiminde tanımlanmaktadır [17]. Laplace dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu normal dağılıma benzemektedir. Ancak, normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu, ortalamadan farkların karesi terimleri ile ifade edilirken,

buna karşılık Laplace dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu, ortalamadan gelen mutlak fark ile ifade edilmektedir. Sonuç olarak, normal dağılım ile karşılaştırıldığında Laplace dağılımı daha kalın kuyruklara sahip olmaktadır.



Şekil 1.Laplace ve Normal dağılıma ilişkin yoğunluk fonksiyonlarının grafikleri [18].

Şekil 1 (a) sıfır ortalamalı Laplace ve normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonlarının karşılaştırmasını göstermektedir. Grafikten de görüldüğü gibi Laplace dağılımı ortalama etrafında daha belirgin bir zirveye sahiptir. Ayrıca, Şekil 1 (b) ve Şekil 1 (c)'de Laplace dağılımının normal dağılıma göre çok daha kalın kuyruklara sahip olduğu görülmektedir.

Laplace dağılımın en önemli özelliklerinden bir tanesi de diğer olasılık dağılımları ile karakterize edilebilmesidir [19]. Normal dağılımın ölçek karması olarak ifade edilebilmesi de Laplace dağılımın bir diğer özelliğidir [18].

3.2. İki Değişkenli Laplace Dağılımı

İki değişken olması durumunda simetrik Laplace dağılımına ilişkin karakteristik fonksiyon,

$$\psi(t_1, t_2) = \left(1 + \frac{\sigma_1^2 t_1^2}{2} + \rho \sigma_1 \sigma_2 t_1 t_2 + \frac{\sigma_2^2 t_2^2}{2}\right)^{-1} \quad (3.4)$$

şeklinde tanımlanmaktadır [19]. Burada yer alan üç parametre, $\sigma_1 \geq 0, \sigma_2 \geq 0, \rho \in [0,1]$ koşullarını sağlamaktadır. Simetrik kelimesi ile anlatılmak istenen, ilgilenilen dağılımın iki boyutta bir elipsoit boyunca yayılan tek boyutlu dağılımdan elde edilmesidir. Bunun anlamı, karakteristik fonksiyonunun $\mathbf{t} = (t_1, t_2)'$ ile $\mathbf{t}'\Sigma\mathbf{t}$ 'ye bağlı olması demektir. Burada negatif olmayan Σ matrisi,

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1 \sigma_2 \rho \\ \sigma_1 \sigma_2 \rho & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

olarak tanımlanır. Genel olarak, bu tipteki dağılımlar eliptik konturlu dağılımlar olarak isimlendirilirler bu durumda bu koşullar altında tanımlanan bu dağılım Eliptik Konturlu Laplace dağılımı olarak isimlendirilebilir. $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)'$ olduğunda, ortalama vektörü ve varyans-kovaryans matrisi aşağıdaki gibi tanımlanır,

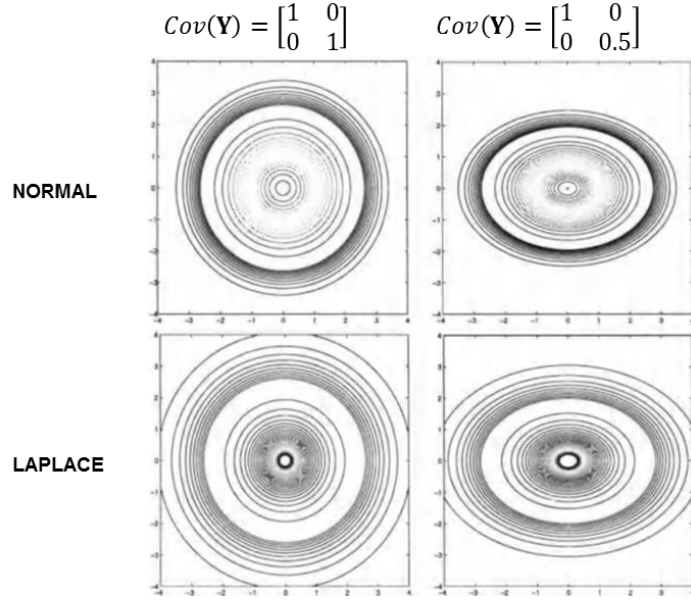
$$E(\mathbf{Y}) = \mathbf{0}, \text{Cov}(\mathbf{Y}) = E(\mathbf{Y}\mathbf{Y}') = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1 \sigma_2 \rho \\ \sigma_1 \sigma_2 \rho & \sigma_2^2 \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

İki değişkenli simetrik Laplace dağılımına ilişkin yoğunluk fonksiyonu,

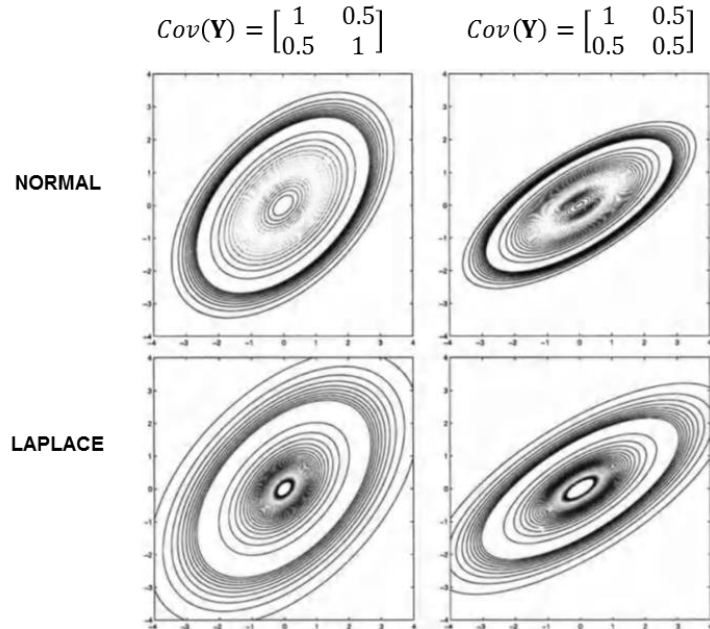
$$f(x, y) = \frac{1}{\pi \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2}} K_0 \left(\sqrt{\frac{2(x^2/\sigma_1^2 - 2\rho xy/(\sigma_1 \sigma_2) + y^2/\sigma_2^2)}{1 - \rho^2}} \right) \quad (3.7)$$

eşitliği ile tanımlanmaktadır. Burada K_0 Bessel fonksiyonu olarak isimlendirilmektedir.

İki değişkenli Laplace ve Normal dağılıma sahip değişkenlerin ilişkili ve ilişkisiz olduğu durumlara uygun olarak olasılık yoğunluk fonksiyonlarına (o.y.f) ilişkin gösterimler Şekil 1 ve Şekil 2’de verilmiştir.



Şekil 2. Laplace ve Normal dağılıma ilişkin iki değişkenli o.y.f. çizimi (İlişkisiz durum) [19].



Şekil 3.Laplace ve Normal dağılıma ilişkin iki değişkenli o.y.f. çizimi (İlişkili durum) [19].

3.3. Çok Değişkenli Laplace Dağılımı

Çok değişkenli Laplace dağılımı, özellikle finans ve biyolojik bilimlerin yanı sıra güncel hayata ilişkin verilerin modellenmesine ilişkin birçok uygulamada karşımıza çıkmaktadır. Ayrıca çarpık çok değişkenli verileri modellemede kullanılan dağılımlardandır. Laplace dağılımının avantajları, normalden daha kalın kuyruklara sahip olmasına rağmen momentlerinin varlığı, dağılım parametrelerinin ve momentlerinin arasındaki basit ilişkiler ve karakteristik fonksiyonunun basit biçimindeki gösterimi olarak sıralanabilir. Dağılım, iki tane çok değişkenli parametre ile tanımlanır. Bunlardan bir tanesi ölçek parametresi, diğeri ise dağılımın hem biçimini hem de konumunu eşanlı olarak kontrol eden konum parametresidir.

Çok değişkenli simetrik Laplace dağılımı, iki değişkenli Laplace dağılımının genelleştirilmiş olarak tanımlanmıştır [20]. Simetrik kelimesi burada *eliptik konturlu* ya da *eliptik simetrik* dağılımları ifade etmektedir. Ayrıca simetrik kelimesi, bu dağılımların değişkenlerine yalnızca karesel bir formla bağlı olan karakteristik fonksiyona sahip olduğu anlamına gelmektedir.

Σ , $p \times p$ boyutlu pozitif tanımlı simetrik matris olduğu durumda, p boyutlu Çok Değişkenli Laplace dağılımına ilişkin karakteristik fonksiyon,

$$\psi(\mathbf{t}) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}(\mathbf{t}'\Sigma\mathbf{t})} \quad (3.8)$$

biçiminde tanımlanmaktadır. Olasılık yoğunluk fonksiyonu ise,

$$f(\mathbf{y}) = \frac{2}{(2\pi)^{p/2}|\Sigma|^{1/2}} \left(\frac{\mathbf{y}'\Sigma^{-1}\mathbf{y}}{2}\right)^{v/2} K_v\left(\sqrt{2\mathbf{y}'\Sigma^{-1}\mathbf{y}}\right) \quad (3.9)$$

eşitliği ile tanımlanmıştır. Burada, $v = (2 - p)/2$ ve K_v uyarlanmış Bessel fonksiyonunu göstermektedir [19].

Simetrik Laplace dağılımının çok değişkenli duruma genişletilmesi literatürde farklı gösterimler ile yer bulmuştur. İlk olarak, Eliptik konturlu dağılımların özel bir durumu olarak iki değişkenli Laplace dağılımı elde edilmiştir [21]. Bu dağılım, daha sonra yoğunluk fonksiyonları yardımıyla elde edilmiştir [11]. Çok değişkenli Laplace dağılımlarına ait yoğunluk fonksiyonlarının Bessel fonksiyonlarını içermesi yüzünden sınırlı kullanıma sahip oldukları belirtilmiştir [22]. Daha sonra, aynı dağılım çok değişkenli Linnik yasaının özel bir durumu olarak elde edilmiştir [12]. Eliptik kontura dayalı bir başka çok değişkenli dağılımlar ailesi Genelleştirilmiş Laplace Dağılımları olarak isimlendirilmiştir [23]. Çok değişkenli asimetric Laplace dağılımı karakteristik fonksiyonu yardımıyla tanımlanarak, asimetric Laplace ailesinden rasgele değişkenlerin türetilmesi ile ilgili yöntemler üzerinde çalışılmıştır [24]. Çok değişkenli veriler için istatistiksel çıkarımlar yapmak üzere Kotz tipi dağılımlar çerçevesinde bu dağılım incelemiştir [4],[25]. Çok değişkenli Laplace dağılımı aynı zamanda Kotz tipi dağılımların özel bir durumudur. Çok değişkenli Laplace dağılımının parametre tahminleri ayrıntılı olarak irdelenmiştir [26]. Doğrusal olmayan tekrarlı ölçümlü verilerin varlığında Laplace dağılımı kullanılarak, literatürde geniş bir kullanım alanına sahip çok değişkenli normal büyüme eğrisi modeline (*growth curve model*) alternatif bir yaklaşım getirilmiştir [27]. Üç parametrelili çok değişkenli Laplace dağılımlar ailesi önerilmiş ve özelliklerine değinilmiştir [28]. Çok değişkenli üstel güç dağılımının (*multivariate exponential power distribution*) özel bir durumu olarak çok değişkenli simetrik Laplace dağılımı, çok değişkenli çarpık dağılıma genişletilmiştir [29]. Çok değişkenli genelleştirilmiş Laplace dağılımı ayrıca stokastik yönden de ele alınmıştır [30]. İlave olarak, uygulama alanında Doğrusal Karma Modeller için çok değişkenli Laplace dağılımı önerilmiştir [31].

Literatürde farklı biçimlerde ele alınan çok değişkenli Laplace dağılımı, bu tez çalışmasında, çok değişkenli çarpık Laplace dağılımına geçiş için önerilen biçimi ile ele alınmıştır. Önerilen çok değişkenli simetrik Laplace dağılımına ilişkin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{\text{CDL}}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \frac{|\boldsymbol{\Sigma}|^{-1/2}}{2^p \pi^{(p-1)/2} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)} e^{-\sqrt{(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})}} \quad (3.10)$$

eşitliği ile tanımlanmıştır [29]. Burada, $\mathbf{x} \in R^p$, $p \geq 1$, olmak üzere $\boldsymbol{\mu} \in R^p$ konum vektörü, $\boldsymbol{\Sigma}$ pozitif tanımlı yayılım matrisidir. Bu yoğunluk fonksiyonunda, $p = 1$ olduğunda dağılım tek değişkenli Laplace dağılımına dönüşmektedir. Buradan hareketle, eşitlik (3.10) ile ifade edilen olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip dağılımın, tek değişkenli Laplace dağılımının çok değişkenli uzantısı olarak tanımlanabileceği ifade edilmiştir [29]. Çok değişkenli Laplace dağılımı, normal dağılıma alternatif bir dağılım olmakla birlikte daha kalın kuyruklara sahip bir dağılımdır [29]. Bu dağılıma ilişkin ortalama ve varyans,

$$E(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\mu}, \quad V(\mathbf{x}) = (p + 1)\boldsymbol{\Sigma} \quad (3.11)$$

eşitlikleri ile ifade edilmektedir [29],[25]. Çarpıklık ve basıklık katsayıları ise sırasıyla,

$$\delta_{1p} = 0 \quad (3.12)$$

$$\delta_{2p} = \frac{p(p + 2)(p + 3)}{(p + 1)} \quad (3.13)$$

biçiminde tanımlanmaktadır [25].

3.4. Matris Değişkenli Laplace Dağılımı

Matris değişkenli dağılımlar istatistikçiler tarafından uzun süredir çalışılan dağılımlar arasında yer almaktadır. Rastgele matrisler, çok değişkenli tekrarlı ölçümleri tanımlamak içinde kullanılabilir. Bu durumda, istatistikte önemli bir koşul olan gözlemlerin bağımsızlığı varsayımı, genellikle sağlanmayabilir. Bu biçimdeki veri kümelerini analiz ederken, verideki bağımlılık yapısını tanımlayabilmek için matris değişkenli Eliptik Konturlu dağılımlar tercih edilebilmektedir. Bu sınıftaki dağılımlar, onları özellikle yararlı yapan ve birçoğu normal dağılıminkine benzer kesin özelliklere sahiptirler. Özellikle, çeşitli hipotezlerin testinde, normal dağılım için geliştirilen birçok test bu sınıftaki dağılımlar içinde kullanılabilir [32].

Matris değişkenli Eliptik Konturlu dağılımlar, eliptik dağılımların vektörden matrise genişletilmiş durumunu kapsamaktadır. Bu dağılımlardan biri de Matris

Değişkenli Laplace dağılımıdır. Çok değişkenli Laplace dağılımının, matris boyutuna genişletilmiş durumunu kapsamaktadır. Matris Değişkenli Laplace dağılımı, literatürde karma dağılım yöntemi ile Üstel dağılım ve Matris Değişkenli Normal dağılım kullanılarak elde edilmiştir [33]. Bu tez çalışmasında ise Ters Gama dağılımı ile Matris Değişkenli Normal dağılımın kullanılması durumu ele alınarak tekrarlı ölçümler olması durumunda çok değişkenli doğrusal modele ilişkin parametre tahminlerine yönelik çıkarsamalar yapılmıştır.

4. TEKRARLI ÖLÇÜMLÜ VERİ

“Tekrarlı Ölçümlü” terimi, çoklu durumlarda ya da çoklu koşullar altında, her bir deneysel birimden ya da denekten elde edilen tek değişkenli ya da çok değişkenli yanıtları içermektedir. “Uzun Süreli Veri (*Longitudinal Data*)” terimi de sık sık tekrarlı ölçümlü verileri tanımlamak için kullanılmaktadır. Özellikle, bazı araştırmacılar tarafından tekrarlı ölçüm faktörünün zaman olduğu durumlarda bu terim tercih edilmektedir. Böyle bir kullanım için, uzun süreli veriler, tekrarlı ölçümlü verilerin özel bir durumu gibi düşünülebilir. Bazı araştırmacılar ise, uzun süreli veri terimi için kesin bir ayırım yaparak, bu terimi, çok geniş bir zaman periyodunda sıklıkla kontrolsüz koşullar altında toplanan veriler için kullanmayı tercih etmişlerdir. Tekrarlı ölçümlü veri terimini ise, nispeten daha kısa zaman periyodunda ve çoğunlukla deneysel koşullar altında toplanan verileri tanımlamak için kullanmışlardır.

Tekrarlı ölçümlerin elde edildiği çalışma tasarımlarını içeren araştırmalar birçok uygulama alanında mevcuttur. Yanıt değişkenini, her bir denekten çoklu zaman noktasında alınan ölçümlerin oluşturduğu çalışmalar önemlidir ve genellikle araştırmalarda sıklıkla kullanılan uygulamalardır. Diğer uygulamalarda ise, her bir deneysel birimden alınan yanıtları, çoklu zaman noktalarından ziyade çoklu koşullar altındaki ölçümler oluşturmaktadır.

Her denekten tekrarlanan ölçümlerin elde edildiği çalışmaların temel gücü, bunun bireysel değişim modelleri hakkında bilgi edinmenin mümkün olduğu tek tasarım türü olmasıdır. Bu tür bir tasarım, deneklerin nasıl kullanılacağına karar verilen durumlar için de ekonomiktir. Örneğin, bir tedavinin zaman içindeki etkilerini incelerken, belirlenen her zaman noktasında farklı denekleri gözlemlemek yerine, aynı denekleri tekrar tekrar gözlemlemek genellikle arzu edilir. Diğer bir avantaj, deneklerin kendi kontrolleri olarak işlev görebilmeleri, sonuç değişkeninin her denek için hem kontrol hem de deney koşulları altında ölçülebilmesidir. Denekler arası değişkenlik kaynakları deneysel hatadan hariç tutulabileceğinden, tekrarlanan ölçüm tasarımları genellikle aynı sayıda ve modeldeki kesit tasarımlarına göre ilgili parametrelerin

daha verimli tahmin edicilerini sağlar. Ayrıca, aynı konuların kesitsel bir çalışmaya göre tekrar tekrar takip edildiği bir çalışmada verilerin daha güvenilir bir şekilde toplanabileceği düşünülmektedir. Tekrarlanan ölçüm çalışmalarından elde edilen verilerin analizinde iki ana zorluk vardır. İlk olarak, analiz aynı deney birimi üzerinde tekrarlanan gözlemler arasındaki bağımlılık nedeniyle karmaşıklaşır. İkincisi, araştırmacı genellikle ölçüm elde etme koşullarını kontrol edemez, böylece veriler dengesiz veya kısmen eksik olabilir.

Tekrarlı ölçümlü verilerinin analizine yönelik birçok yaklaşım incelenmiş olsa da çoğu yanıt değişkeninin normal dağıldığı ve verilerin dengeli ve eksiksiz olduğu durumlar ile sınırlıdır.

4.1. Tekrarlı Ölçümlü Veri Düzeni

Literatürde, tekrarlı ölçümlü verilerin analizi için yöntemleri tanımlamakta kullanılan gösterimler farklılar içermektedir. Genel olarak, bir tekrarlı ölçümlü veri düzeni gösterimi Çizelge 4.1.'de verilmiştir [34].

Çizelge 4.1., t tane zaman noktasında (ölçüm durumlarında), g tane grupta bulunan n_i tane denekten alınan tekrarlı ölçümlere ait bir veri düzenini göstermektedir. Burada, n tekrarlı ölçümlerin elde edildiği bağımsız deneysel birimlerin ya da deneklerin sayısını, n_i , her bir grupta bulunan denek ya da deneysel birim sayısını, t , ise tekrarlı ölçümlerin alındığı durumların sayısını göstermektedir. Ayrıca, y_{ijk} , i . gruptaki j . denekten (deneysel birimden) k . zaman noktasında alınan ölçüme ilişkin yanıt değişkenini göstermektedir.

$$i = 1, \dots, g ; j = 1, \dots, n_i ; k = 1, \dots, t ; n = \sum_{i=1}^g n_i$$

Çizelge 4.1. Tekrarlı Ölçümlü Veri Düzeni (Çok Etken Olması Durumu)

Grup	Denek	Deneysel Koşullar (Zaman Noktaları)				
		1	...	k	...	t
1	1	y_{111}	...	y_{11k}	...	y_{11t}
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	j	y_{1j1}	...	y_{1jk}	...	y_{1jt}
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	n_1	y_{1n_11}	...	y_{1n_1k}	...	y_{1n_1t}
2	1	y_{211}	...	y_{2jk}	...	y_{21t}
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	j	y_{2j1}	...	y_{2jk}	...	y_{2jt}
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	n_2	y_{2n_21}	...	y_{2n_2k}	...	y_{2n_2t}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
i	1	y_{i11}	...	y_{i1k}	...	y_{i1t}
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	j	y_{ij1}	...	y_{ijk}	...	y_{ijt}
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	n_i	y_{in_i1}	...	y_{in_ik}	...	y_{in_it}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
g	1	y_{g11}	...	y_{g1k}	...	y_{g1t}
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	j	y_{gj1}	...	y_{gjk}	...	y_{gjt}
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	n_g	y_{gn_g1}	...	y_{gn_gk}	...	y_{gn_gt}

Çizelge 4.1, birden fazla grup olması durumunda, her bir gruptaki deneysel birimler için alınan tekrarlı ölçümleri göstermektedir. Sadece tek bir örneklem olması durumunda oluşan veri düzeni ise Çizelge 4.2' de verilmiştir [34].

Çizelge 4.2. Tekrarlı Ölçümlü Veri Düzeni (Tek Etken Olması Durumu)

Denek	Deneysel Koşullar (Zaman Noktaları)				
	1	...	k	...	t
1	y_{11}	...	y_{1k}	...	y_{1t}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
j	y_{j1}	...	y_{jk}	...	y_{jt}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	y_{n1}	...	y_{nk}	...	y_{nt}

Çizelge 4.2' de, y_{jk} , j . denekten (deneysel birimden) k . zaman noktasında ya da deneysel koşulda alınan ölçüme ilişkin yanıt değişkenini göstermektedir.

Buraya kadar olan kısım, birçok zaman noktasında ya da deneysel koşullarda her bir deneysel birimden ya da denekten tek bir ölçüm alındığı durumları içeren tekrarlı ölçümlü veri düzenini içermektedir. Ancak birçok deneysel çalışmada, birden fazla deneysel koşul altında, birden fazla tekrarlı ölçüm alındığı durumlar ile karşılaşılabilir. Çoklu deneysel koşul altında birden fazla değişkenin olduğu bu duruma uyan tasarımlar çok değişkenli ya da çok yanıtlı tekrarlı ölçümlü tasarımlar olarak isimlendirilmektedirler. Ayrıca bu tasarımlar iç içe çok değişkenli tasarımlar (*doubly multivariate*) olarak adlandırılmaktadırlar [35]. Bu tasarıma uygun olan tekrarlı ölçümlü veri düzeni Çizelge 4.3 'de verilmiştir.

Çizelge 4.3. Çok Değişkenli Tekrarlı Ölçümlü Veri Düzeni

G r u p	D e n e k	Deneysel Koşullar										
		1					...	t				
		1	...	l	...	q	...	1	...	l	...	q
1	1	y_{1111}	...	y_{111l}	...	y_{111q}	...	y_{11t1}	...	y_{11tl}	...	y_{11tq}
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	j	y_{1j11}	...	y_{1j1l}	...	y_{1j1q}	...	y_{1jt1}	...	y_{1jtl}	...	y_{1jtq}
n ₁	1	y_{1n_111}	...	y_{1n_11l}	...	y_{1n_11q}	...	y_{1n_1t1}	...	y_{1n_1tl}	...	y_{1n_1tq}
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	j	y_{1j11}	...	y_{1jk}	...	y_{1jt}	...	y_{2j1t}	...	y_{2jtl}	...	y_{2jtg}
2	1	y_{1111}	...	y_{2j1l}	...	y_{21t}	...	y_{21t1}	...	y_{21tl}	...	y_{21tq}
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	j	y_{1j11}	...	y_{2jk}	...	y_{2jt}	...	y_{2j1t}	...	y_{2jtl}	...	y_{2jtg}
n ₂	1	y_{2n_211}	...	y_{2n_2k}	...	y_{2n_2t}	...	y_{2n_2t1}	...	y_{2n_2tl}	...	y_{2n_2tg}
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	j	y_{in_11}	...	y_{ijk}	...	y_{ijt}	...	y_{ij1t}	...	y_{ijtl}	...	y_{ijtg}
i	1	y_{i11}	...	y_{i1k}	...	y_{i1t}	...	y_{i1t1}	...	y_{i1tl}	...	y_{i1tg}
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	j	y_{ij1}	...	y_{ijk}	...	y_{ijt}	...	y_{ij1t}	...	y_{ijtl}	...	y_{ijtg}
n _i	1	y_{in_11}	...	y_{in_1k}	...	y_{in_1t}	...	y_{in_1t1}	...	y_{in_1tl}	...	y_{in_1tg}
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	j	y_{g11}	...	y_{g1k}	...	y_{g1t}	...	y_{g1t1}	...	y_{g1tl}	...	y_{g1tg}
g	1	y_{g11}	...	y_{g1k}	...	y_{g1t}	...	y_{g1t1}	...	y_{g1tl}	...	y_{g1tg}
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	j	y_{gj1}	...	y_{gjk}	...	y_{gjt}	...	y_{gj1t}	...	y_{gjtl}	...	y_{gjtg}
n _g	1	y_{gn_g1}	...	y_{gn_gk}	...	y_{gn_gt}	...	y_{ig1t}	...	y_{gn_g1t}	...	y_{gn_gtg}
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	j	y_{gn_g1}	...	y_{gn_gk}	...	y_{gn_gt}	...	y_{ig1t}	...	y_{gn_g1t}	...	y_{gn_gtg}

Çizelge 4.3' de, y_{ijkl} , i . gruptaki j . denekten (deneysel birimden) k . deneysel koşul altında ve l . zaman noktasında alınan ölçüme ilişkin yanıt değişkenini göstermektedir.

$$i = 1, \dots, g ; j = 1, \dots, n_i ; k = 1, \dots, t ; l = 1, \dots, q ; n = \sum_{i=1}^g n_i$$

5. NORMAL DAĞILIM ALTINDA TEKRARLI ÖLÇÜMLÜ VARYANS ANALİZİ

İstatistiksel modelleme açısından, tekrarlı ölçümlü veriyi temsil etmek için çok sayıda yaklaşım vardır. Bu yaklaşımlarla ilişkili olarak, tekrarlı ölçümlü veriler ile ilgili sorulara odaklanan uygun analiz yöntemleri bulunmaktadır. Bu modeller ve yöntemler arasında ayırım yapma yollarından biri, bir birimden gelen bir veri vektörünün kovaryans yapısı hakkında yaptığı varsayımdır. Bir diğeri ise, bir gözlemin ortalamasının şekli ve dolayısıyla bir veri vektörü için ortalama vektöre ilişkin yapılan varsayımdır.

Tekrarlı ölçümlü veri, aynı yanıtın aynı deneysel birim için farklı zaman noktalarında veya farklı koşullarda tekrar tekrar gözlemlenmesini içermektedir. Farklı deneysel koşullarda aynı deneysel birimden alınan tekrarlı ölçümler bağımlı iken, aynı deneysel koşulda farklı deneysel birimden alınan ölçümler bağımsızdır. Bu deneysel birimler tek bir kitleden gelen bir rastgele örneklem olabileceği gibi, farklı kitlelerden gelen örneklemelerden de oluşabilirler.

Tekrarlı ölçümlü verilere ilişkin model gösterimleri kullanılan veri yapısına göre düzenlenmektedir. Buna göre, tek örneklem (etken) olması durumunda, Çizelge 4.2.'deki veri düzenine ilişkin gösterimler,

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{Y}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_t \end{bmatrix} \quad \mathbf{Y}_j = \begin{bmatrix} y_{j1} \\ y_{j2} \\ y_{j3} \\ \vdots \\ y_{jt} \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

eşitlikleri ile ifade edilir. Tek değişkenli durum için en basit hali ile istatistiksel model;

$$\mathbf{Y}_j = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\epsilon}_j \quad (5.2)$$

eşitliği ile yazılabilir. Burada, $j = 1, \dots, n$ için $E(\mathbf{Y}_j) = \boldsymbol{\mu}$, $\text{Var}(\mathbf{Y}_j) = \boldsymbol{\Sigma}$ 'ya eşittir. Ayrıca sürekli yanıt değişkenleri, $\mathbf{Y}_j \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, $\boldsymbol{\epsilon}_j \sim N_n(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ çok değişkenli normal dağılıma sahiptirler. Bu modele ilişkin varsayımlar,

- $\text{Cov}(y_{jt}, y_{jk}) \neq 0 \quad t \neq k = 1, \dots, t$
- $\text{Cov}(y_{jk}, y_{lk}) = 0 \quad j = l = 1, \dots, n$
- $E(\mathbf{Y}_j) = \boldsymbol{\mu}$; $\text{Var}(\mathbf{Y}_j) = \boldsymbol{\Sigma}$

biçiminde gösterilir. Çok örneklem (etken) olması durumunda, Çizelge 4.1'deki veri düzenine ilişkin gösterimler,

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{Y}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_t \end{bmatrix} \quad \mathbf{Y}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{i1} \\ \mathbf{Y}_{i2} \\ \mathbf{Y}_{i3} \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_{it} \end{bmatrix} \quad \mathbf{Y}_{ij} = \begin{bmatrix} y_{ij1} \\ y_{ij2} \\ y_{ij3} \\ \vdots \\ y_{ijt} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

eşitlikleri ile ifade edilir.

Farklı kitlelerden gelerek deneysel birimleri oluşturan her bir grup farklı ortalamalara ve kovaryans matrislerine sahip olacaktır. Bu durumda i. gruptaki j. birim için oluşturulan istatistiksel model,

$$\mathbf{Y}_{ij} = \boldsymbol{\mu}_i + \boldsymbol{\epsilon}_{ij} \quad (5.4)$$

eşitliği ile ifade edilir. Bu modelde, $\mathbf{Y}_{ij} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\Sigma}_i)$, $\boldsymbol{\epsilon}_{ij} \sim N_n(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_i)$ ile çok değişkenli normal dağılıma sahiptir. Bu modele ilişkin varsayımlar,

- $\text{Cov}(y_{ijt}, y_{ijk}) \neq 0 \quad t \neq k = 1, \dots, t$
- $\text{Cov}(y_{ijk}, y_{ilk}) = 0 \quad j = l = 1, \dots, n_i, \quad i = 1, \dots, g$
- $E(\mathbf{Y}_{ij}) = \boldsymbol{\mu}_i$; $\text{Var}(\mathbf{Y}_{ij}) = \boldsymbol{\Sigma}_i$

biçiminde gösterilir.

Çoklu deneysel koşullar altında çok örneklem (etken) olması durumunda, Çizelge 4.3.'deki veri düzenine ilişkin gösterimler ise,

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{Y}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_t \end{bmatrix} \quad \mathbf{Y}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{i1} \\ \mathbf{Y}_{i2} \\ \mathbf{Y}_{i3} \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_{it} \end{bmatrix} \quad \mathbf{Y}_{ij} = \begin{bmatrix} y_{ij1} \\ y_{ij2} \\ y_{ij3} \\ \vdots \\ y_{ijt} \end{bmatrix} \quad \mathbf{y}_{ijt} = \begin{bmatrix} y_{ijt1} \\ y_{ijt2} \\ y_{ijt3} \\ \vdots \\ y_{ijqt} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

eşitlikleri ile ifade edilir. Bu durumda i. gruptaki j. birim için oluşturulan istatistiksel model,

$$\mathbf{Y}_{ij} = \boldsymbol{\mu}_{ij} + \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} \quad (5.6)$$

ifadesine eşit olur. Bu modelde artık veri vektörleri değil veri matrisleri söz konusudur. Bu veri gösterimine uyan tekrarlı ölçümlü tasarımlar çoklu çok değişkenli (*doubly multivariate*) tekrarlı ölçümlü veriler olarak isimlendirilmektedir [35],[36],[37]. Bu durumda sağlanması gereken varsayımlar veri tasarım modeline uygun olarak,

- $Cov(y_{ijt}, y_{ijk}) \neq 0 \quad t \neq k = 1, \dots, t$
- $Cov(y_{ijk}, y_{ilk}) = 0 \quad j = l = 1, \dots, n_i, \quad i = 1, \dots, g$
- $E(\mathbf{Y}_{ij}) = \boldsymbol{\mu}_{ij} \quad ; \quad Var(\mathbf{Y}_{ij}) = \boldsymbol{\Sigma}_{ij}$

eşitlikleri ifade edilir. Normal dağılım yaklaşımı altında Tekrarlı Ölçümlü verilerin analizine ilişkin en temel yaklaşımlardan bir tanesi Tekrarlı Ölçümlü ANOVA ve MANOVA'dır.

5.1. Tek Değişkenli Tekrarlı Ölçümlü ANOVA

Bu bölümde, sadece deneme etkisinin test edildiği Tek Yönlü ANOVA ile deneme, grup ve etkileşim etkisinin hepsinin araştırıldığı İki Yönlü ANOVA kısaca tanıtılacaktır.

5.1.1. Tek Yönlü Tekrarlı Ölçümlü ANOVA

Sadece deneme etkisinin yer aldığı, Tek Yönlü Tekrarlı Ölçümlü ANOVA için kullanılan model denklemi,

$$y_{jk} = \mu + \tau_k + \varepsilon_{jk} \quad (5.7)$$

eşitliği ile ifade edilmektedir ($j = 1, \dots, n$; $k = 1, \dots, t$). Tek Yönlü Tekrarlı Ölçümlü ANOVA model parametrelerini tanımlarken, deneysel koşullar için *deneme* tanımlaması kullanılacaktır. Bu modelde yer alan parametreler aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

- y_{jk} = k . denemedeki, j . gözlem birimi
- μ = genel ortalama (sabit etki)
- τ_k = k . deneme etkisi
- ε_{jk} = rastgele hata terimi.

Tek Yönlü Tekrarlı Ölçümlü ANOVA'nın yapılabilmesi için bazı varsayımlar mevcuttur. Bu varsayımlardan en önemlisi, hata terimlerinin normal dağılıma sahip olması ve tekrarlı ölçümlerin getirdiği bağımlılık yapısından kaynaklanan kovaryans terimlerinin homojen olması durumudur.

- $y_{jk} \sim N(\mu, \sigma^2)$
- $\varepsilon_{jk} \sim N(0, \sigma^2)$
- $\text{Cov}(y_j, y_i) = 0$

Eşitlik (5.7)'deki modelin sabit etkili model olduğu varsayım altında, denemelerin etkisinin sabit olduğu ve toplamlarının,

$$\sum_{k=1}^t \tau_k = 0 \quad (5.8)$$

ifadesi ile sifıra eşit olduğu varsayılmaktadır. Eşitlik (5.8) ile verilen bu varsayım ANOVA kısıtı olarak ta isimlendirilmektedir.

Model denkleminde ifade edilen tüm rasgele değişkenler bağımsızdır, ancak aynı denekten elde edilen tekrarlı gözlemler bağımlıdır. Ayrıca, kovaryans matrisinde verilen köşegen elemanları eşit olan ile köşegen elemanları eşit olmayan elemanlar arasında bileşik simetri (compound symmetry) olduğu söylenir. Bu kovaryans yapısı, gözlemler arasındaki boşluk ne olursa olsun, aynı zamanda elde edilen tekrarlı gözlem çiftleri arasındaki korelasyonu ima etmektedir [38]. Bu varsayım, özellikle, tekrarlı ölçümlü veri faktörü, zaman olduğu durumlar için oldukça kısıtlayıcı bir durum olarak karşımıza çıkmaktadır.

Tek örneklem (etken) olması durumunda elde edilen tekrarlı ölçümlü veriler için kareler toplamlarını, serbestlik derecelerini ve varyans bileşenleri sütununu içeren ANOVA tablosu Çizelge 5.1. 'de verilmiştir.

Çizelge 5.1. Tek Yönlü Tekrarlı Ölçümlü ANOVA Tablosu

Değişim Kaynağı	Serbestlik Derecesi	Kareler Toplamı	Kareler Ortalaması	F
Denemeler arası	t-1	KT_{Deneme}	$KO_{Deneme} = \frac{KT_{Deneme}}{t-1}$	$\frac{KO_{Deneme}}{KO_{Hata}}$
Denekler arası	n-1	KT_{Denek}	$KO_{Denek} = \frac{KT_{Denek}}{n-1}$	
Hata	(n-1)(t-1)	KT_{Hata}	$KO_{Hata} = \frac{KT_{Hata}}{(n-1)(t-1)}$	
Genel	N-1	KT_{Genel}		

5.1.2. İki Yönlü Tekrarlı Ölçümlü ANOVA

İki Yönlü Tekrarlı Ölçümlü ANOVA da ise, tek yönlü modelden farklı olarak modelde etken ve deneme etkisinin birlikte etkisini gösteren etkileşim terimi de yer almaktadır. Bu durumda İki Yönlü Tekrarlı Ölçümlü ANOVA için model denklemi,

$$Y_{ijk} = \mu + \gamma_i + \tau_k + (\gamma\tau)_{ik} + \varepsilon_{ijk} \quad (5.9)$$

eşitliği ile ifade edilmektedir ($i = 1, \dots, g ; j = 1, \dots, n_i ; k = 1, \dots, t$). İki Yönlü Tekrarlı Ölçümlü ANOVA parametrelerini tanımlarken, ölçümlerin alındığı

gruplar için *etken*, deneysel koşullar için *deneme* tanımlaması kullanılacaktır Bu modeldeki parametreler aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

- $y_{ijk} = k$. denemedeki, i . etkene ilişkin j . gözlem birimi
- $\mu =$ genel ortalama (sabit etki)
- $\gamma_i = i$.etken etkisi
- $\tau_k = k$. deneme etkisi
- $(\gamma\tau)_{ij} = i$. etken ile j . denemenin birlikte etkisi (etkileşim terimi)
- $\varepsilon_{ijk} =$ rastgele hata terimi

İki Yönlü ANOVA için de Tek Yönlü ANOVA da olduğu gibi aynı varsayımlar geçerlidir. Eşitlik (5.9) ile ifade edilen modelin sabit etkili model olduğu varsayımı altında her bir etkenin,

$$\sum_{k=1}^t \tau_k = 0 ; \sum_{i=1}^g \gamma_i = 0 ; \sum_{i=1}^g (\gamma\tau)_{ik} = 0 ; \sum_{k=1}^t (\gamma\tau)_{ik} = 0 \quad (5.10)$$

kısıtlarını sağlaması gerekmektedir. Birden fazla örnekten elde edilen tekrarlı ölçümlü veriler için kareler toplamlarını, serbestlik derecelerini ve varyans bileşenleri sütununu içeren İki Yönlü Tekrarlı Ölçümlü ANOVA tablosu Çizelge 5.2. de verilmiştir.

Çizelge 5.2. İki Yönlü Tekrarlı Ölçümlü ANOVA Tablosu

Değişim Kaynağı	Serbestlik Derecesi	Kareler Toplamı	Kareler Ortalaması	F
Denekler arası	$t(n-1)$	KT_{Denek}	$KO_{Denek} = \frac{KT_{Denek}}{t(n-1)}$	
Deneme	$k-1$	KT_{Deneme}	$KO_{Deneme} = \frac{KT_{Deneme}}{k-1}$	$\frac{KO_{Deneme}}{KO_{Hata}}$
Etken	$(t-1)$	KT_{Etken}	$KO_{Etken} = \frac{KT_{Etken}}{t-1}$	$\frac{KO_{Etken}}{KO_{Denek}}$
Etken*Deneme	$(t-1)(k-1)$	$KT_{Etken*Deneme}$	$KO_{Etken*Deneme} = \frac{KT_{Etken*Deneme}}{(t-1)(k-1)}$	$\frac{KO_{Etken*Deneme}}{KO_{Hata}}$
Hata	$k(n-1)(t-1)$	KT_{Hata}	$KO_{Hata} = \frac{KT_{Hata}}{k(n-1)(t-1)}$	
Genel	$N-1$	KT_{Genel}		

5.1.3. Parametre Tahminleri

Tek Yönlü ve İki Yönlü Tekrarlı Ölçümlü ANOVA modele ilişkin parametre tahminleri normal dağılım varsayımı altında EKK tahmin yöntemi ile yapılmaktadır. Bu yöntemde göre bir parametrenin EKK tahmin edicisi, modeldeki hata terimlerinin karelerinin toplamının ilgili parametreye göre minimum yapılması ile elde edilir.

Tek Yönlü Tekrarlı Ölçümlü ANOVA model denklemi için hata kareler toplamı,

$$HKT = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^t \varepsilon_{ij}^2 = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^t (y_{jk} - \mu - \tau_k)^2$$

biçiminde yazılır. Bu durumda model parametrelerine ilişkin en küçük kareler tahmin edicileri,

$$\frac{\partial HKT}{\partial \mu} = (-2) \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^t (y_{jk} - \mu - \tau_k) = 0$$

$$\frac{\partial HKT}{\partial \tau_k} = (-2) \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^t (y_{jk} - \mu - \tau_k) = 0$$

eşitlikleri ile ifade edilen normal denklem sisteminin çözülmesi ile elde edilmektedir. Buna göre, μ , τ_j ve γ_i parametrelerine ilişkin en küçük kareler tahmin edicileri,

$$\hat{\mu} = \bar{y}_{..} , \quad \hat{\tau}_k = \bar{y}_{.k} - \bar{y}_{..} \quad (5.11)$$

olarak bulunurlar. Burada,

$$\bar{y}_{..} = \frac{\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^t y_{ij}}{N} , \quad \bar{y}_{.k} = \frac{\sum_{j=1}^n y_{jk}}{n} \quad (5.12)$$

olur. Hata varyansının yansız tahmin edicisi,

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^t (y_{jk} - \bar{y}_{..})^2}{N - k} \quad (5.13)$$

olarak elde edilir.

İki Yönlü Tekrarlı Ölçümlü ANOVA model denklemini için hata kareler toplamı ise,

$$HKT = \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^t \varepsilon_{ijk}^2 = \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^t (y_{ijk} - \mu - \gamma_i - \tau_k - (\gamma\tau)_{ik})^2$$

biçiminde yazılır. Bu durumda model parametrelerine ilişkin en küçük kareler tahmin edicileri,

$$\frac{\partial HKT}{\partial \mu} = (-2) \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^t (y_{ijk} - \mu - \gamma_i - \tau_k - (\gamma\tau)_{ik}) = 0$$

$$\frac{\partial HKT}{\partial \gamma_i} = (-2) \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^t (y_{ijk} - \mu - \gamma_i - \tau_k - (\gamma\tau)_{ik}) = 0$$

$$\frac{\partial HKT}{\partial \tau_k} = (-2) \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^t (y_{ijk} - \mu - \gamma_i - \tau_k - (\gamma\tau)_{ik}) = 0$$

$$\frac{\partial HKT}{\partial (\gamma\tau)_{ik}} = (-2) \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^t (y_{ijk} - \mu - \gamma_i - \tau_j - (\gamma\tau)_{ik}) = 0$$

eşitlikleri ile ifade edilen normal denklem sisteminin çözülmesi ile elde edilmektedir. Buna göre, μ, γ_i, τ_k ve $(\gamma\tau)_{ik}$ parametrelerine ilişkin en küçük kareler tahmin edicileri,

$$\hat{\mu} = \bar{y}_{..} ; \hat{\gamma}_i = \bar{y}_{.i} - \bar{y}_{..} ; \hat{\tau}_k = \bar{y}_{.k} - \bar{y}_{..} ; (\hat{\gamma\tau})_{ik} = \bar{y}_{ik} - \bar{y}_{.k} - \bar{y}_{i.} + \bar{y}_{..} \quad (5.14)$$

olarak bulunurlar. Bu eşitliklerde yer alan ortalamalara ilişkin ifadeler aşağıda verilmiştir:

$$\bar{y}_{...} = \frac{\sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^t y_{ijk}}{N}, \quad \bar{y}_{..k} = \frac{\sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^n y_{ijk}}{ng} \quad (5.15)$$

$$\bar{y}_{i..} = \frac{\sum_{k=1}^t \sum_{j=1}^n y_{ijk}}{nt}, \quad \bar{y}_{i.k} = \frac{\sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^t y_{ijk}}{n_i} \quad (5.16)$$

Hata varyansının yansız tahmin edicisi,

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^t (y_{ijk} - \bar{y}_{...})^2}{N - gt} \quad (5.17)$$

eşitliği ile elde edilir.

5.1.4. Test İstatistikleri

Tek Yönlü Tekrarlı Ölçümlü ANOVA' da, (5.7) ile gösterilen model için temel amaç deneme grupları arasında farklılık olup olmadığının belirlenmesidir. Bu amaçla kurulacak olan hipotez,

- H_0 : Denemeler arasında fark yoktur.
- H_0 : $\sum_{k=1}^t \tau_k = 0$

biçimindedir. Hipotezi test etmek için kareler toplamlarının bulunması gereklidir. Genel kareler toplamı (GKT), deneme kareler toplamı (KT_{Deneme}), denek kareler toplamı (KT_{Denek}) ve hata kareler toplamı (KT_{Hata}) olarak bileşenlerine ayrılabilir. Bu durumda,

$$GKT = KT_{Deneme} + KT_{Denek} + KT_{Hata}$$

$$\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n (y_{ijk} - \bar{y}_{...})^2 = n \cdot \sum_{k=1}^t (\bar{y}_{..k} - \bar{y}_{...})^2 + k \sum_{j=1}^n (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2 + KT_{Hata}$$

eşitliğine ulaşılır. Normallik varsayımı altında kareler toplamlarının dağılımı,

$$\frac{(N-1)GKT}{\sigma^2} \sim \chi_{N-1}^2 ; \frac{(k-1)KT_{Deneme}}{\sigma^2} \sim \chi_{k-1}^2 ; \frac{(n-1)(k-1)KT_{Hata}}{\sigma^2} \sim \chi_{(n-1)(k-1)}^2$$

ifadeleri ile ki-kare dağılımına sahiptirler. Buradan hareketle, hipotezin testi için kullanılan test istatistiği,

$$F = \frac{KO_{Deneme}/(k-1)}{KO_{Hata}/(n-1)(k-1)}$$

eşitliği ile ifade edilir. Bu test istatistiği, $(k-1)$ ve $(n-1)(k-1)$ serbestlik dereceleri ile F dağılımına sahiptir.

İki Yönlü Tekrarlı Ölçümlü ANOVA' da, (5.9) ile gösterilen model için temel amaç etkenler arasında, denemeler arasında farklılık olup olmadığının yanı sıra etken ve denemenin birlikte etkisinin olup olmadığının da belirlenmesidir. Bu amaçla kurulacak olan hipotezler,

- H_0 : Denemeler arası fark yoktur. ($\sum \tau_k = 0$)
- H_0 : Etkenler arası fark yoktur. ($\sum \gamma_i = 0$)
- H_0 : Etken ve Denemenin birlikte etkisi yoktur. ($\sum \sum (\gamma\tau)_{ik} = 0$)

biçiminde ifade edilmektedir. Hipotezlerin testi için kullanılan F dağılımına sahip test istatistikleri,

$$F = \frac{KO_{Deneme}/(k-1)}{KO_{Hata}/k(n-1)(k-1)} ; \quad F = \frac{KO_{Etken}/(t-1)}{KO_{Hata}/k(n-1)(t-1)} ;$$

$$F = \frac{KO_{Etken*Deneme}/(t-1)(k-1)}{KO_{Hata}/k(n-1)(k-1)}$$

eşitlikleri ile elde edilmektedir.

Tekrarlı Ölçümlü verilerin analizinde gereken bir diğer varsayım da Küresellik varsayımıdır. Bu varsayım, tekrarlı ölçümlü ANOVA modelinin F testi için çok genel bir geçerlilik kriteri olarak karşımıza çıkmaktadır. Kısmi olarak

eğer varyanslar eşitse, kovaryanslar da eşit olacağı için küresellik koşulu sağlanacaktır [39]. Eğer küresellik koşulu sağlanmıyorsa, geleneksel çok değişkenli yöntemleri kullanmak bir başka alternatiftir. Bir başka alternatif ise, tekrarlı ölçümlü ANOVA yaklaşımını değiştirmektir. Küresellik koşulu sağlanmadığı zaman, yapılan ANOVA yaklaşımı ile F istatistiği ile yaklaşık dağılıma sahip olur.

5.2. Çok Değişkenli Tekrarlı Ölçümlü ANOVA

Çok değişkenli Varyans Analizini (MANOVA) ve çok değişkenli doğrusal modelleri inceleyen birçok kaynak ve araştırma literatürde yer almaktadır [40], [41],[34],[42],[43],[44].

MANOVA çok değişkenli normal dağılıma sahip verilere ilişkin birden fazla ortalamanın karşılaştırılması için kullanılır. Tekrarlı ölçümler için MANOVA kullanılmasının en önemli amacı bu yöntemde küresellik varsayımının sağlanması gerekmediğidir [45]. Bu yaklaşımda, her bir tekrarlı ölçüm bir değişken gibi kabul edilip çözümlenmektedir. Genel olarak MANOVA'ya ilişkin hipotezler,

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$$

$$H_1: \text{En az bir } \mu_k \text{ diğerlerinden farklıdır.}$$

eşitlikleri ile ifade edilmektedir. Normallik varsayımı altında, bu hipotezler genellikle kareler toplamları yardımı ile oluşturulan olabilirlik oranı, Wilk's Λ oranı ile test edilmektedir. Bu oran,

$$\Lambda = \frac{|W|}{|W + B|} \quad (5.18)$$

eşitliği ile ifade edilmektedir. W, grup içi kareler toplamını, B gruplar arası kareler toplamlarını göstermektedir. MANOVA'ya ilişkin tablo Çizelge 5.3' de verilmiştir.

Çizelge 5.3. Tekrarlı Ölçümlü MANOVA tablosu

Değişim Kaynağı	Serbestlik Derecesi	Çarpımlar Toplamı	Test İstatistiği
Gruplar arası	$g-1$	$B = \sum_{i=1}^g n_i (\mu_i - \mu) (\mu_i - \mu)'$	$\Lambda = \frac{ W }{ W + B }$
Grup İçi	$n-g$	$W = \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \mu_{ij})(y_{ij} - \mu_{ij})'$	
Genel	$n-1$	$B + W$	

MANOVA kapsamında çok değişkenli tekrarlı ölçümlerin analizi için genel doğrusal model kullanılarak, ANOVA'ya ilişkin temel hipotezleri daha ayrıntılı test edebilmek amacıyla doğrusal hipotezler kullanılmıştır. Genel olarak, çok değişkenli bir doğrusal model,

$$Y = X\beta + E \quad (5.19)$$

eşitliği ile tanımlanmaktadır. Modelde, Y ($n \times t$) boyutlu, yanıt değişkenleri matrisini, X ($n \times p$) boyutlu, parametre vektörüne göre oluşturulan ve sabit sayılardan oluşan tasarım matrisini, β ($p \times t$) boyutlu, parametre matrisini, E ($n \times t$) boyutlu, hata terimi matrisini göstermektedir.

Tek bir yanıt değişkenine ilişkin model,

$$y_{ijk} = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_k x_{ik} + \varepsilon_{ijk} \quad (5.20)$$

eşitliği ile ifade edilebildiği gibi, modeldeki değişkenleri vektör biçiminde eşitlik (5.21) ile de ifade etmekte mümkündür.

$$y_{ijk} = [1 \quad x_{i1} \quad x_{i2} \quad \dots \quad x_{ik}] \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} + \varepsilon_{ijk} \quad , i = 1, \dots, g \quad (5.21)$$

g tane gruptan oluşan örneklem için model, eşitlik (5.21) ile ifade edilen gösterim yerine eşitlik (5.22) 'deki matris gösterimi kullanılarak ta ifade edilebilmektedir. Bu matris denklemini yazmak için, kullanılacak modele uygun yanıt değişkeni vektörü, tasarım matrisi, parametre vektörü ve hata terimlerini içeren vektör gösterimleri eşitlik (5.22) ile verilmiştir.

$$\begin{bmatrix} y_{1jk} \\ y_{2jk} \\ y_{3jk} \\ \vdots \\ y_{gjk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2k} \\ 1 & x_{31} & x_{32} & \dots & x_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{g1} & x_{g2} & \dots & x_{gk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1jk} \\ \varepsilon_{2jk} \\ \varepsilon_{3jk} \\ \vdots \\ \varepsilon_{gjk} \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

Eşitlik (5.22)'deki gösterimine uygun biçimde doğrusal model denklemi,

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{e} \quad (5.23)$$

ifadesi ile eşitlik (5.19)' da tanımlanan model vektörel denklem gösterimi biçiminde de yazılabilmektedir. Bu modelde ise, \mathbf{y} , $(gx1)$ boyutlu yanıt değişkeni vektörünü, \mathbf{X} , $(gx(t+1))$ boyutlu tasarım matrisini, $\boldsymbol{\beta}$, $((t+1)x1)$ boyutlu parametre vektörünü, \mathbf{e} , $(gx1)$ boyutlu hata vektörünü göstermektedir. \mathbf{e} terimi, vektör rasgele değişken olduğu için doğrusal modelin varsayımları matris biçiminde yeniden ifade edilebilir. Buna göre varsayımlar,

- $\mathbf{y} \sim N_n(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma_\varepsilon^2 \mathbf{I}_n)$
- $\mathbf{e} \sim N_n(\mathbf{0}, \sigma_\varepsilon^2 \mathbf{I}_n)$

biçiminde ifade edilir. Eşitlik (5.23) ile gösterilen doğrusal modelde İki Yönlü Tekrarlı Ölçümlü ANOVA model denklemlerinin parametreleri β katsayıları içerisinde yer alacaktır. Bu durumda oluşan gösterim,

$$\mathbf{Y}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{11} \\ \mathbf{Y}_{12} \\ \mathbf{Y}_{13} \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_{gn_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{111} \\ y_{112} \\ \vdots \\ y_{1n_1t} \\ y_{121} \\ y_{122} \\ \vdots \\ y_{1n_1t} \\ y_{131} \\ y_{132} \\ \vdots \\ y_{1n_3t} \\ \vdots \\ y_{gn_11} \\ y_{gn_12} \\ \vdots \\ y_{gn_1t} \end{bmatrix} \quad \mathbf{X}_i = \begin{bmatrix} 1111 \\ 1111 \\ \vdots \\ 1111 \\ 1:1: \\ 1:0: \\ \vdots \\ :1:1 \\ 1101 \\ 1111 \\ 1:1: \\ :0:0 \\ 1010 \\ :0:0 \\ 1010 \\ 1:1: \\ 1010 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_t \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_g \\ (\tau\gamma)_{11} \\ (\tau\gamma)_{12} \\ \vdots \\ (\tau\gamma)_{tg} \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

eşitlikleri ile ifade edilmektedir. Bu gösterim Çizelge 4.2' deki tekrarlı ölçümlü veri düzeni içindir. Çizelge 4.3'deki tekrarlı ölçümlü veri düzeni için bu gösterim vektör değil matrislerden oluşmaktadır.

6. ÇOK DEĞİŞKENLİ LAPLACE DAĞILIMI ALTINDA ÇOK DEĞİŞKENLİ TEKRARLI ÖLÇÜMLÜ VARYANS ANALİZİ

Bu bölümde tez çalışmasının esasını teşkil eden çıkarsamalar yer almaktadır. Arslan [29] tarafından önerilen Çok Değişkenli Laplace dağılımı altında tekrarlı ölçümlü veri için çok değişkenli doğrusal model gösteriminden faydalanılarak MANOVA modeline ilişkin parametre tahminleri teorik olarak elde edilmiştir. Tekrarlı Ölçümlü MANOVA için Çok Değişkenli Laplace Dağılımına sahip parametre tahminlerine dayalı test istatistikleri tanımlanmıştır.

Çizelge 4.1' deki düzende verilen bir tekrarlı ölçümlü veri tek değişkenli tekrarlı ölçümlü ANOVA ile çözümlenebildiği gibi, her bir tekrarlı ölçüm tek bir değişken olarak kabul edilip bağımlı çok değişkenli veri yapısı ile MANOVA ile de çözümlenebilmektedir [45].

Bağımlılık yapısının getirdiği küresellik varsayımının sağlanamadığı durumlar için de tekrarlı ölçümlerin analizi için yapılan çok değişkenli yaklaşım tercih edilebilmektedir. Bu yaklaşım ile tekrarlı ölçümlü verilerin analizinde karşılaşılan sorunlardan biri olan küresellik varsayımlarından muaf olunacaktır [45].

Bu amaçla, Tekrarlı Ölçümlü MANOVA model denklemi için (5.19) eşitliğinde verilen çok değişkenli doğrusal model kullanılmıştır. Bu modelde, $E \sim \text{ÇDL}_p(\mu, \Sigma)$ ile Çok Değişkenli Laplace dağılımına sahip olması durumunda Çizelge 4.1. de verilen veri düzenine sahip tekrarlı ölçümler için MANOVA model denklemi parametre tahminleri yapılmıştır.

6.1. Parametre Tahmini

Parametre tahminlerinin elde edilebilmesi amacıyla normal dağılımın ölçek karması olarak $Z \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I}_p)$ standart normal dağılıma sahip, $V \sim \text{TG}(\frac{p+1}{2}, \frac{1}{2})$ Ters Gamma dağılımına sahip değişkenler kullanılarak eşitlik (6.1) ile tanımlanan,

$$Y = \mu + \sqrt{V^{-1}\Sigma^{1/2}}Z \quad (6.1)$$

yeni Y değişkeni Çok Değişkenli Laplace dağılımına sahip olur [29]. Y değişkeninin Normal dağılımın ölçek karması olarak eşitlik (6.1) deki biçimde tanımlanması parametrelerin en çok olabilirlik tahmin edicilerinin EM algoritması ile elde edilmesinde kolaylık sağlamaktadır [29]. Bu amaçla, öncelikle, Y değişkeni ile V karma değişkenin birleşik olasılık yoğunluk fonksiyonlarının elde edilmesi gerekmektedir. Buradan hareketle, Z standart normal dağılıma sahip değişken ile V ters gamma dağılımına sahip değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonları,

$$f(z) = (2\pi)^{-p/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}Z^T Z\right\} \quad (6.2)$$

$$f(v) = 2^{-\frac{p+1}{2}} \Gamma^{-1}\left(\frac{p+1}{2}\right) v^{-\frac{p+1}{2}-1} \exp\left(-\frac{1}{2v}\right) \quad (6.3)$$

eşitlikleri ile ifade edilmektedir. (6.2) ve (6.3)'de verilen olasılık yoğunluk fonksiyonları kullanılarak birleşik olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$\begin{aligned} f(z, v) &= (2\pi)^{-p/2} e\left\{-\frac{1}{2}Z^T Z\right\} 2^{-\frac{p+1}{2}} \Gamma^{-1}\left(\frac{p+1}{2}\right) v^{-\frac{p+1}{2}-1} \exp\left(-\frac{1}{2v}\right) \\ &= (2\pi)^{-p/2} 2^{-\frac{p+1}{2}} \Gamma^{-1}\left(\frac{p+1}{2}\right) v^{-\frac{p+1}{2}-1} e\left\{-\frac{1}{2}Z^T Z\right\} \exp\left(-\frac{1}{2v}\right) \end{aligned} \quad (6.4)$$

eşitliği ile elde edilmektedir.

Z ve V rastantı değişkenlerine ilişkin eşitlik (6.4)'te verilen birleşik olasılık yoğunluk fonksiyonundan, Y ile V rastlantı değişkenlerinin birleşik olasılık yoğunluk fonksiyonuna geçiş yapabilmek için değişken dönüşümü yapılarak, Jakobiyen değeri hesaplanmalıdır. Bu amaçla, eşitlik (6.1) kullanılarak, sırasıyla aşağıda verilen işlemlerin gerçekleştirilir:

$$Y = \mu + \sqrt{V^{-1}\Sigma}^{1/2}Z.$$

$$Y - \mu = \sqrt{V^{-1}\Sigma}^{1/2}Z$$

$$V^{-1/2}\Sigma^{1/2}Z = Y - \mu$$

$$Z = V^{1/2}\Sigma^{-1/2}(Y - \mu).$$

Bu dönüşüme ait Jakobiyen değeri yukarıdaki işlemlerden sonra,

$$J = |V^{-1}\Sigma|^{-p/2} = v^{p/2}|\Sigma|^{-1/2} \quad (6.5)$$

eşitliği ile edilmiş olunur.

Değişken dönüşümünden sonra iki değişkene ilişkin birleşik olasılık yoğunluk fonksiyonunun elde edilebilmesi için sırasıyla aşağıdaki işlemler yapılır:

$$\begin{aligned} f(Y, v) &= (2\pi)^{-\frac{p}{2}} 2^{-\frac{p+1}{2}} \Gamma^{-1} \left(\frac{p+1}{2} \right) v^{-\frac{p+1}{2}-1} v^{p/2} |\Sigma|^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2v}\right) x \\ &\quad \exp\left\{-\frac{1}{2} \left((v^{1/2}\Sigma^{-1/2}(Y - \mu))^T v^{1/2}\Sigma^{-1/2}(Y - \mu) \right)\right\} \\ &= (2\pi)^{-\frac{p}{2}} 2^{-\frac{p+1}{2}} \Gamma^{-1} \left(\frac{p+1}{2} \right) v^{-\frac{p+1}{2}-1-\frac{p}{2}} |\Sigma|^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2v}\right) x \\ &\quad \exp\left\{-\frac{1}{2} \left((Y - \mu)^T \Sigma^{-1/2} v^{1/2} v^{1/2} \Sigma^{-1/2} (Y - \mu) \right)\right\} \\ &= (2\pi)^{-\frac{p}{2}} 2^{-\frac{p+1}{2}} \Gamma^{-1} \left(\frac{p+1}{2} \right) |\Sigma|^{-1/2} v^{-3/2} x \exp\left(-\frac{1}{2v} - \frac{1}{2} v \{ (Y - \mu) \Sigma^{-1} (Y - \mu)^T \}\right) \\ &= \frac{|\Sigma|^{-p/2}}{(2\pi)^{-\frac{p}{2}} 2^{-\frac{p+1}{2}} \Gamma^{-1} \left(\frac{p+1}{2} \right)} v^{-3/2} x \exp\left(-\frac{1}{2} v^{-1} - \frac{1}{2} v \{ (Y - \mu) \Sigma^{-1} (Y - \mu) \}\right). \end{aligned}$$

Yukarıdaki işlemlerde yapılan düzenlemelerden sonra Y ile V rastlantı değişkenlerinin birleşik olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(Y, v) = \frac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} 2^{\frac{p+1}{2}} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)} v^{-3/2} e^{-\frac{1}{2}\{v^{-1} + v\{(Y-\mu)^T \Sigma^{-1}(Y-\mu)\}\}} \quad (6.6)$$

eşitliği ile elde edilmiş olunur.

Eşitlik (6.6) ile ifade edilen birleşik olasılık yoğunluk fonksiyonu, Çok Değişkenli Tekrarlı Ölçümlü ANOVA için (5.19) ile tanımlanan doğrusal model üzerinden tekrar yazıldığında,

$$f(Y, v) = \frac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} 2^{\frac{p+1}{2}} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)} v^{-3/2} e^{-\frac{1}{2}\{v^{-1} + v\{(Y-\mathbf{X}\beta)^T \Sigma^{-1}(Y-\mathbf{X}\beta)\}\}} \quad (6.7)$$

eşitliği elde edilir. En çok olabilirlik tahmin edicilerini elde edebilmek için (6.7) ile ifade edilen birleşik olasılık yoğunluk fonksiyonuna ilişkin olabilirlik fonksiyonu,

$$L = \frac{|\Sigma|^{-n/2}}{(2\pi)^{\frac{np}{2}} 2^{\frac{n(p+1)}{2}} \left[\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\right]^n} \prod_{i=1}^n v_i^{3/2} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \{v_i^{-1} + v_i\{(Y_i - \mathbf{X}_i\beta)^T \Sigma^{-1}(Y_i - \mathbf{X}_i\beta)\}\}} \quad (6.8)$$

biçiminde elde edilir. Parametre tahminlerini elde edebilmek amacıyla logaritmik olabilirlik fonksiyonunun maksimize etmek gerekir. Bu sebeple, (6.8) eşitliği ile ifade edilen olabilirlik fonksiyonunun logaritması alınarak, logaritmik olabilirlik fonksiyonunun elde edilebilmesi için aşağıdaki işlemler yapılır:

$$\begin{aligned} \ln L &= -\frac{n}{2} \ln |\Sigma| + \frac{3}{2} \sum_{i=1}^n \ln(v_i) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \{v_i^{-1} + v_i\{(Y_i - \mathbf{X}_i\beta)^T \Sigma^{-1}(Y_i - \mathbf{X}_i\beta)\}\} \\ &= -\frac{n}{2} \ln |\Sigma| - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n v_i\{(Y_i - \mathbf{X}_i\beta)^T \Sigma^{-1}(Y_i - \mathbf{X}_i\beta)\} + \frac{3}{2} \sum_{i=1}^n \ln(v_i) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n v_i^{-1}. \end{aligned}$$

Yapılan düzenlemelerden sonra logaritmik olabilirlik fonksiyonu,

$$\ln L = -\frac{n}{2} \ln |\Sigma| - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n v_i \{(\mathbf{Y}_i - \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{Y}_i - \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta})\} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (3 \ln(v_i) + v_i^{-1}) \quad (6.9)$$

eşitliği ile elde edilmiş olunur. Eşitlik (6.9) ile logaritmik olabilirlik fonksiyonu tam veri için elde edilmiş olur. Bilinmeyen parametrelere göre bu fonksiyonu maksimize etmek daha kolaydır [29],[33]. Ancak, fonksiyonda yer alan kayıp değişken sorununun giderilebilmesi için bu logaritmik olabilirlik fonksiyonunun koşullu beklenen değerinin alınması gereklidir. Eşitlik (6.9) 'daki logaritmik olabilirlik fonksiyonundaki son terim ihmal edildiğinde,

$$E(\ln L(\boldsymbol{\beta}, \Sigma) | \mathbf{Y}_i, \hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\Sigma}) = -\frac{n}{2} \ln |\Sigma| \quad (6.10)$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n E(V_i | \mathbf{Y}_i, \hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\Sigma}) \{(\mathbf{Y}_i - \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{Y}_i - \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta})\}$$

eşitliğine ulaşılır. Eşitlik (6.10)' da yer alan $E(V_i | \mathbf{Y}_i, \hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\Sigma})$ koşullu beklenen değerinin bulunabilmesi için $f(V|Y)$ koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonunun bulunması gerekir. Koşullu fonksiyon tanımından $f(V|Y)$ koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(V|Y) = \frac{f(Y, v)}{f(Y)} = \frac{\frac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} 2^{\frac{p+1}{2}} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)} v^{-3/2} e^{-\frac{1}{2}\{v^{-1} + v\{(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})\}}}}{\frac{|\Sigma|^{-1/2}}{2^p (\pi)^{\frac{p-1}{2}} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)} e^{-\sqrt{(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})}}}$$

eşitliği ile elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler yapıldıktan sonra koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(V|Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\sqrt{(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})}} v^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2}\{v^{-1} + v\{(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})\}}} \quad (6.11)$$

şeklinde elde edilir. Eşitlik (6.11) kullanılarak (6.10) da yer alan koşullu beklenen değerin elde edilebilmesi için aşağıdaki işlemler yapılır:

$$\begin{aligned}
E(V|Y, \hat{\beta}, \hat{\Sigma}) &= \int_0^{\infty} v f(V|Y) dv \\
&= \int_0^{\infty} v \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\sqrt{(Y-X\hat{\beta})^T \hat{\Sigma}^{-1} (Y-X\hat{\beta})}} v^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2}\{v^{-1}+v\{(Y-X\hat{\beta})^T \hat{\Sigma}^{-1} (Y-X\hat{\beta})\}\}} dv \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\sqrt{(Y-X\hat{\beta})^T \hat{\Sigma}^{-1} (Y-X\hat{\beta})}} \int_0^{\infty} v v^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2}\{v^{-1}+v\{(Y-X\hat{\beta})^T \hat{\Sigma}^{-1} (Y-X\hat{\beta})\}\}} dv.
\end{aligned}$$

İntegral çözümünde yapılan düzenlemelerden sonra koşullu beklenen değer,

$$E(V|Y, \hat{\beta}, \hat{\Sigma}) = \frac{1}{\sqrt{(Y-X\hat{\beta})^T \hat{\Sigma}^{-1} (Y-X\hat{\beta})}} \quad (6.12)$$

eşitliği ile elde edilmiş olunur. (6.12) ile elde edilen koşullu beklenen değer (6.10) eşitliğinde yerine konulduğunda,

$$E(\ln L(\beta, \Sigma) | Y_i, \hat{\beta}, \hat{\Sigma}) = -\frac{n}{2} \ln |\Sigma| \quad (6.13)$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{(Y_i - X_i \hat{\beta})^T \hat{\Sigma}^{-1} (Y_i - X_i \hat{\beta})}} \{(Y_i - X_i \hat{\beta})^T \hat{\Sigma}^{-1} (Y_i - X_i \hat{\beta})\}$$

ifadesine ulaşılır. $E(V|Y, \hat{\beta}, \hat{\Sigma}) = w_i$ olarak gösterildiğinde, maksimize edilecek olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilmiş olur:

$$E(\ln L(\beta, \Sigma) | Y_i, \hat{\beta}, \hat{\Sigma}) = -\frac{n}{2} \ln |\Sigma| - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n w_i \{(Y_i - X_i \hat{\beta})^T \Sigma^{-1} (Y_i - X_i \hat{\beta})\} \quad (6.14)$$

(6.14) eşitliği ile ifade edilen en çok olabilirlik fonksiyonu için yeni gösterim,

$$Q((\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Sigma}) | \mathbf{Y}_i, \hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}) = -\frac{n}{2} \ln|\boldsymbol{\Sigma}| - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n w_i \{(\mathbf{Y}_i - \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{Y}_i - \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta})\} \quad (6.15)$$

biçiminde yeniden yazılır. Ancak, Çizelge 4.1.'de verilen tekrarlı ölçümlü veri düzenine göre n tane örneklem birden fazla gruptan oluştuğu için elde edilen eşitliklerde buna ilişkin düzenlemenin yapılması gerekir. Buna göre Çizelge 4.1.'deki tekrarlı ölçümlü veri düzeni için grup sayısı $i=1, \dots, g$ ve denek sayısı $j=1, \dots, n_i$, $\sum_{i=1}^g n_i = n$, $k=1, \dots, t$ olmak üzere, eşitlik (5.9) ile ifade edilen İki Yönlü Tekrarlı Ölçümlü ANOVA denklemindeki parametreleri içerecek şekilde oluşturulan doğrusal model denklemi esas alınarak maksimize edilecek fonksiyon tekrar yazıldığında (6.14) ile ifade edilen koşullu beklenen değer için,

$$E(\ln L(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Sigma}) | \mathbf{Y}_{ij}, \hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}) = -\frac{n}{2} \ln|\boldsymbol{\Sigma}| - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} \{(\mathbf{Y}_{ij} - \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{Y}_{ij} - \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta})\} \quad (6.16)$$

eşitliğine ulaşılır. Eşitlikteki w_{ij} , ağırlığı ise yapılan düzenlemeden sonra,

$$w_{ij} = \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{Y}_{ij} - \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{Y}_{ij} - \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta})}} \quad (6.17)$$

ifadesine eşit olur. (6.15) eşitliğinde verilen ve parametre tahminleri için maksimize edilecek olabilirlik fonksiyonu yapılan düzenlemelerden sonra,

$$Q((\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Sigma}) | \mathbf{Y}_{ij}, \hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}) = -\frac{n}{2} \ln|\boldsymbol{\Sigma}| - \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} \{(\mathbf{Y}_{ij} - \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{Y}_{ij} - \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta})\} \quad (6.18)$$

ifadesine eşit olur. Elde edilen bu eşitlik ile parametre tahminlerine geçilir.

6.1.1. β 'nin En Çok Olabilirlik Tahmin Edicisinin Bulunması

Bilinmeyen β parametre vektörünün en çok olabilirlik tahmin edicisini bulabilmek için (6.18) 'deki olabilirlik fonksiyonun β parametre vektörüne göre türevi alınarak sırasıyla aşağıdaki işlemler yapılır:

$$\frac{\partial Q((\beta, \Sigma) | Y_{ij}, \hat{\beta}, \hat{\Sigma})}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} \{ (Y_{ij} - X_i \beta)^T \Sigma^{-1} (Y_{ij} - X_i \beta) \} \right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} \frac{\partial}{\partial \beta} ((Y_{ij}^T - \beta^T X_i^T) \Sigma^{-1} (Y_{ij} - X_i \beta)) = 0$$

$$\sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} \frac{\partial}{\partial \beta} (Y_{ij}^T \Sigma^{-1} Y_{ij} - \beta^T X_i^T \Sigma^{-1} Y_{ij} - Y_{ij}^T \Sigma^{-1} X_i \beta + \beta^T X_i^T \Sigma^{-1} X_i \beta) = 0$$

$$\sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} (-2 X_i^T \Sigma^{-1} Y_{ij} + 2 X_i^T \Sigma^{-1} X_i \beta) = 0$$

$$\sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} (X_i^T \Sigma^{-1} X_i)^{-1} X_i^T \Sigma^{-1} Y_{ij} = \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} (X_i^T \Sigma^{-1} X_i)^{-1} X_i^T \Sigma^{-1} X_i \beta$$

$$\sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} (X_i^T \Sigma^{-1} X_i)^{-1} X_i^T \Sigma^{-1} Y_{ij} = \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} \mathbf{I} \beta$$

Normal dağılımın ölçek karması olarak tanımlanan Çok değişkenli Laplace dağılımı altında (5.19) ile ifade edilen doğrusal modelde yer alan ve (5.9) eşitliğindeki İki Yönlü Tekrarlı Ölçümlü ANOVA modeli parametrelerini içeren β katsayısının en çok olabilirlik tahmin edicisi için,

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} (X_i^T \Sigma^{-1} X_i)^{-1} (X_i^T \Sigma^{-1} Y_{ij})}{\sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij}} \quad (6.19)$$

eşitliğine ulaşılır.

6.1.2. Σ 'nın En Çok Olabilirlik Tahmin Edicisinin Bulunması

Yayılm matrisi Σ 'nın en çok olabilirlik tahmin edicisini bulabilmek için bazı matris cebri özelliklerinden faydalanılarak eşitlik (6.18) ile verilen olabilirlik fonksiyonunda düzenlemeler yapılmalıdır. Olabilirlik fonksiyonunun türevinin alınmasında işlemsel kolaylık sağlanması amacıyla kullanılan özellikler aşağıda verilmiştir:

1. $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$; $|A| = \frac{1}{|A^{-1}|}$
2. $\sum_i x_i^T A x_i = \text{tr}(AB)$ $B = \sum_i x_i x_i^T$
3. $\frac{\partial \log|A|}{\partial A} = 2A^{-1} - \text{diag}(A^{-1})$
4. $\frac{\partial \text{tr}(AB)}{\partial A} = B + B^T - \text{diag}(B)$.

Bu özelliklerden yola çıkarak, $-\frac{n}{2} \ln|\Sigma| = \frac{n}{2} \ln|\Sigma^{-1}|$ alındığında eşitlik (6.18) ile ifade edilen olabilirlik fonksiyonu için,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} \text{tr} \left\{ (\mathbf{Y}_{ij} - \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{Y}_{ij} - \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta}) \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} \text{tr} \left(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{Y}_{ij} - \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta}) (\mathbf{Y}_{ij} - \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta})^T \right) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Yukarıdaki eşitlikte, $(\mathbf{Y}_{ij} - \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta}) (\mathbf{Y}_{ij} - \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta})^T = \mathbf{Y}_{ij}$ biçiminde tanımlandığında eşitlik,

$$-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} \text{tr} \left(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{Y}_{ij} - \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta}) (\mathbf{Y}_{ij} - \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta})^T \right) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} \text{tr} (\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{Y}_{ij})$$

gösterimi ile ifade edilebilir. Bu düzenlemelerden sonra maksimize edilecek amaç fonksiyonu,

$$Q(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Sigma} | \mathbf{Y}_i, \hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}) = \frac{n}{2} \ln |\boldsymbol{\Sigma}^{-1}| - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{Y}_{ij})$$

ifadesine dönüşür. $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ 'yı bulabilmek için amaç fonksiyonunun $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ ' e göre türevi alınarak, $\boldsymbol{\Sigma}$ 'nın en çok olabilirlik tahmin edicisi için aşağıdaki işlemler sırasıyla işlemler yapılır:

$$\frac{\partial Q((\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Sigma}) | \mathbf{Y}_{ij}, \hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}})}{\partial \boldsymbol{\Sigma}^{-1}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\Sigma}^{-1}} \left(\frac{n}{2} \ln |\boldsymbol{\Sigma}^{-1}| - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{Y}_{ij}) \right) = 0$$

$$\frac{n}{2} (2\boldsymbol{\Sigma} - \text{diag}(\boldsymbol{\Sigma})) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} (2\mathbf{Y}_{ij} - \text{diag}(\mathbf{Y}_{ij})) = 0$$

$$2\boldsymbol{\Sigma} - \text{diag}(\boldsymbol{\Sigma}) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} (2\mathbf{Y}_{ij} - \text{diag}(\mathbf{Y}_{ij})) = 0$$

$$2\boldsymbol{\Sigma} - \text{diag}(\boldsymbol{\Sigma}) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} 2\mathbf{Y}_{ij} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} \text{diag}(\mathbf{Y}_{ij}) = 0$$

$$2\boldsymbol{\Sigma} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} 2\mathbf{Y}_{ij} - \text{diag}(\boldsymbol{\Sigma}) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} \text{diag}(\mathbf{Y}_{ij}) = 0$$

$$2 \left[\boldsymbol{\Sigma} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} \mathbf{Y}_{ij} \right] - \text{diag} \left[\boldsymbol{\Sigma} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} \mathbf{Y}_{ij} \right] = 0$$

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} \mathbf{Y}_{ij}.$$

Normal dağılımın ölçek karması olarak tanımlanan Çok değişkenli Laplace dağılımı altında (5.19) ile ifade edilen doğrusal model ile temsil edilen tekrarlı ölçümlü veriler için $\boldsymbol{\Sigma}$ yayılım matrisine ilişkin en çok olabilirlik tahmin edicisi,

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} (\mathbf{Y}_{ij} - \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta})(\mathbf{Y}_{ij} - \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta})^T \quad (6.20)$$

eşitliği ile elde edilmiş olunur.

6.1.3. EM Algoritmasının tanımlanması

E-Adımı: \mathbf{Y}_{ij} gözlem değerleri ile şu anki parametre tahminleri verildiğinde logaritmik olabilirlik fonksiyonunun koşullu beklenen değeri w_{ij} hesaplanır.

M-Adımı: Tahminlerin yeni değerlerini elde etmek için $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\Sigma}$ parametrelerine göre logaritmik olabilirlik fonksiyonu maksimize edilerek E-adımında hesaplanan koşullu beklenen değeri, w_{ij} , kullanılarak parametrelerin değerleri güncellenerek yeniden hesaplanır. EM-Algoritmasının çalıştırılabilmesi gerekli adımlar Çizelge 6.1.'deki sıra ile uygulanır [29].

Çizelge 6.1. $\boldsymbol{\beta}$ ve $\boldsymbol{\Sigma}$ tahminleri için EM Algoritması Adımları

- 1 $k=1$ al ve parametre değerlerinin başlangıç değerleri seç.
- 2 $k=1,2,3,\dots$ için şu anki parametre değerleri $\boldsymbol{\beta}^{(k)}, \boldsymbol{\Sigma}^{(k)}$ 'yı kullanarak, $i=1,\dots,g$ $j=1,\dots,n_i$ için $w_{ij}^{(k)}$ ağırlıklarını ve $\sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij}$ değerini hesapla.
- 3 Yeni tahmin değerlerini $\boldsymbol{\beta}^{(k+1)}, \boldsymbol{\Sigma}^{(k+1)}$ 'yı hesaplamak için aşağıdaki eşitlikleri kullan.

$$\boldsymbol{\beta}^{(k+1)} = \frac{\sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij}^{(k)} (\mathbf{X}_i^T \boldsymbol{\Sigma}^{(k)-1} \mathbf{X}_i)^{-1} (\mathbf{X}_i^T \boldsymbol{\Sigma}^{(k)-1} \mathbf{Y}_{ij})}{\sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij}^{(k)}}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}^{(k+1)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij}^{(k)} (\mathbf{Y}_{ij} - \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta}^{(k+1)})(\mathbf{Y}_{ij} - \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta}^{(k+1)})^T$$

- 4 Yakınsaklık sağlanıncaya kadar adımları tekrar et.

6.2. Test İstatistiklerinin Tanımlanması

Çok değişkenli analizler için örneklem teorisi literatürde birçok araştırmacı tarafından uzun yıllar çalışılmıştır. Bu araştırmalardan birçoğu ise normalliğin sağlanmadığı örneklemelerin olduğu durumlar için de yapılmıştır. Normal dağılımdan farklı dağılımlar kullanıldığında en büyük sorun test edilecek hipotezin test istatistiğinin dağılımının ne olacağına ilişkindir. Normal dağılım söz konusu olduğunda, karesel formlara yönelik kullanılan Cochran teoreminin tek değişkenli durum ile çok değişkenli durum için benzer olduğu gösterilmiştir [46], [47]. Normal dağılım ailesinden olmayan Eliptik Konturlu dağılımlara ilişkin benzer çıkarımlar ayrıca yapılmıştır [48],[2]. Bu çalışmalar ile Cochran teoremi Eliptik Konturlu dağılımlar ailesi için genişletilerek normal dağılıma benzer sonuçlar elde edildiği gösterilmiştir.

Bu kapsamda, Eliptik Konturlu dağılımların varlığında çok değişkenli doğrusal model için kurulan doğrusal hipotezlerin test edilmesinde kullanılacak test istatistiği ni oluşturan olabilirlik oranlarının dağılımının, normal dağılıma benzer şekilde Wilk's Λ dağılımına uygun olduğu sonucuna ulaşılmıştır [48], [2].

Bu bilgidен hareketle, Çok Değişkenli Laplace dağılımı altında test edeceğimiz çok değişkenli doğrusal hipotezlere ilişkin test istatistiklerinin dağılımının Wilk's Λ dağılımı olduğu varsayımı altında hipotezlerin testini gerçekleştirdik. Bu yaklaşıma göre, çok değişkenli doğrusal model içerisinde tanımlanan eşitlik (5.9) 'de yer alan İki Yönlü Tekrarlı ölçümlü ANOVA modelinin parametrelerine ilişkin test istatistiklerinin hesaplanabilmesi için üç tane doğrusal hipotez kurulacaktır. Gruplar (etkenler) arasında herhangi bir fark olup olmadığına ilişkin ilk hipotez aşağıdaki ifadeler gibi kurulur:

➤ **H_{01} : Gruplar arasında fark yoktur.**

➤ $H_{01}: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_g$

➤ $H_{01}: \begin{bmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{12} \\ \vdots \\ \mu_{1t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{21} \\ \mu_{22} \\ \vdots \\ \mu_{2t} \end{bmatrix} = \dots = \begin{bmatrix} \mu_{k1} \\ \mu_{k2} \\ \vdots \\ \mu_{gt} \end{bmatrix}.$

Doğrusal bir model kullanıldığı için tekrarlı ölçümlü veriler için çok değişkenli hipotezlerin test edilmesinde,

$$H_{01}: \mathbf{C}\boldsymbol{\beta}\mathbf{A} = \boldsymbol{\Delta} \quad (6.21)$$

eşitliğindeki doğrusal hipotezlerden yararlanılacaktır [35],[34].

Bu doğrusal hipotezde C ve A karşılaştırma matrisleri olarak tanımlanırken B matrisi ise test edilecek katsayıları içeren matrisi temsil etmektedir. $\boldsymbol{\Delta}$ matrisi ise genellikle sıfır değerlerinden oluşan bir matrisi göstermektedir. Bu matrisler sırasıyla,

$$\mathbf{C}_{(g-1) \times g} = (\mathbf{I}_{g-1}; -\mathbf{1}) ; \quad \mathbf{A} = \mathbf{I}_p ; \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \dots & \mu_{1t} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \dots & \mu_{2t} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \mu_{g1} & \mu_{g2} & \dots & \mu_{gt} \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

eşitlikleri ile ifade edilmektedir. $\boldsymbol{\beta}$ parametre vektöründe yer alan ortalamaları,

$$\mu_{ik} = \mu + \tau_k + \gamma_i + (\tau\gamma)_{ki} ; \quad i = 1, \dots, g ; k = 1, \dots, t$$

eşitliği ile İki Yönlü Tekrarlı Ölçümlü ANOVA 'daki parametreler oluşturmaktadır.

Olabilirlik oranları ile hipotezlerin test edilebilmesi için kurulan doğrusal hipoteze ve hatalara ilişkin test istatistiğinde yer alacak kareler ve çarpımlar toplamları,

$$\mathbf{S}_h = (\mathbf{C}\hat{\boldsymbol{\beta}}\mathbf{A} - \boldsymbol{\Delta})^T (\mathbf{C}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}^T)^{-1} (\mathbf{C}\hat{\boldsymbol{\beta}}\mathbf{A} - \boldsymbol{\Delta}) \quad (6.23)$$

$$\mathbf{S}_e = \mathbf{A}^T\mathbf{Y}^T[\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T]\mathbf{Y}\mathbf{A} \quad (6.24)$$

eşitlikleri ile ifade edilmektedir [35],[34],[43]. Test istatistiklerini oluşturan ve (6.23) eşitliği ile (6.24) eşitliğinde yer alan $\hat{\beta}$ ortalama tahmini matrisi,

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\mu}_{11} & \hat{\mu}_{12} & \dots & \hat{\mu}_{1t} \\ \hat{\mu}_{21} & \hat{\mu}_{22} & \dots & \hat{\mu}_{2t} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \hat{\mu}_{g1} & \hat{\mu}_{g2} & \dots & \hat{\mu}_{gt} \end{bmatrix} \quad (6.25)$$

biçiminde ifade edilmektedir. Çok Değişkenli Laplace dağılımı altında elde edilen İki Yönlü Tekrarlı Ölçümlü ANOVA modeli parametre tahminlerini içeren ortalama tahminlerinin gösterimi,

$$\hat{\mu}_{ik} = \hat{\mu} + \hat{\tau}_k + \hat{\gamma}_i + (\hat{\tau\gamma})_{ki} ; \quad i = 1, \dots, g ; k = 1, \dots, t$$

eşitliği ile ifade edilir. Çok Değişkenli Laplace dağılımı altında (6.23) ile (6.24) kullanılarak birinci hipoteze ilişkin önerilen test istatistiği,

$$\Lambda_{01} = \left| \frac{|\mathbf{S}_e|}{|\mathbf{S}_h + \mathbf{S}_e|} \right| \quad (6.26)$$

eşitliği ile ifade edilmiştir. Bu test istatistiği $U^\alpha(sd_1, sd_h, sd_e)$ ile Wilk's Λ sahip olur.

$\Lambda_{01} < U^\alpha(sd_1, sd_h, sd_e)$ ise H_{01} hipotezi red edilerek ise gruplar arasında fark olduğu söylenir. sd_1, sd_h, sd_e değerleri,

$$sd_1 = \text{Rank}(A) = p ; \quad sd_h = \text{Rank}(C) = g - 1 ; \quad sd_e = N - I = N - \text{Rank}(X)$$

eşitlikleri ile hesaplanmaktadır [35]. İkinci hipotez ise denemeler arasında bir fark olup olmadığının belirlenmesidir. Bu duruma ilişkin hipotez ise aşağıdaki gibi kurulur:

➤ H_{02} : Denemeler arasında fark yoktur.

$$\text{➤ } H_{02}: \begin{bmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{21} \\ \vdots \\ \mu_{g1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{12} \\ \mu_{22} \\ \vdots \\ \mu_{g2} \end{bmatrix} = \dots = \begin{bmatrix} \mu_{1t} \\ \mu_{2t} \\ \vdots \\ \mu_{gt} \end{bmatrix}.$$

İkinci hipotez için kurulan doğrusal hipotez,

$$H_{02}: \mathbf{C}\boldsymbol{\beta}\mathbf{A} = \boldsymbol{\Delta} \quad (6.27)$$

eşitliği ile ifade edilir. Doğrusal hipotezdeki matrisler,

$$\mathbf{C} = \mathbf{I}_g ; \quad \mathbf{A}_{p \times (p-1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{p-1} \\ -\mathbf{1}^T \end{bmatrix} ; \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \dots & \mu_{1t} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \dots & \mu_{2t} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \mu_{g1} & \mu_{g2} & \dots & \mu_{gt} \end{bmatrix}$$

ile ifade edilir. Bu durumda Çok Değişkenli Laplace dağılımı altında önerilen test istatistiği,

$$\Lambda_{02} = \left| \frac{|\mathbf{S}_e|}{|\mathbf{S}_h + \mathbf{S}_e|} \right| \quad (6.28)$$

eşitliği ile ifade edilmiştir. Bu test istatistiği $U^\alpha(sd_1, sd_h, sd_e)$ ile Wilk's Λ sahip olur.

$\Lambda_{02} < U^\alpha(sd_1, sd_h, sd_e)$ ise H_{02} hipotezi reddedilerek denemeler arasında fark olduğu söylenir. sd_1, sd_h, sd_e değerleri,

$$sd_1 = \text{Rank}(\mathbf{A}) = p - 1 ; \quad sd_h = \text{Rank}(\mathbf{C}) = g ; \quad sd_e = N - \text{Rank}(\mathbf{X})$$

eşitlikler ile hesaplanmaktadır [35]. Üçüncü hipotez ise deneme ve etken etkisinin birlikte etkisinin olup olmadığına yönelik olan etkileşim etkisinin sorgulandığı hipotezdir. Bu hipotez ise aşağıdaki gibi kurulur:

➤ **H₀₃: Deneme ve gruplar arasında etkileşim yoktur.**

$$\text{➤ } H_{03}: \begin{bmatrix} \mu_{11}-\mu_{12} \\ \mu_{12}-\mu_{13} \\ \vdots \\ \mu_{1t-1}-\mu_{1t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{21}-\mu_{22} \\ \mu_{22}-\mu_{23} \\ \vdots \\ \mu_{2t-1}-\mu_{2t} \end{bmatrix} = \dots = \begin{bmatrix} \mu_{g1}-\mu_{K2} \\ \mu_{g2}-\mu_{K3} \\ \vdots \\ \mu_{gt-1}-\mu_{gt} \end{bmatrix}.$$

Üçüncü hipotez için kurulan doğrusal hipotez,

$$H_{02}: \mathbf{C}\boldsymbol{\beta}\mathbf{A} = \boldsymbol{\Delta} \quad (6.29)$$

eşitliği ile ifade edilir. Bu doğrusal hipotezdeki matrisler,

$$\mathbf{C}_{(g-1) \times g} = (\mathbf{I}_{g-1}; -1) ; \mathbf{A}_{p \times (p-1)} = \mathbf{D}_{p-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} ; \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \dots & \mu_{1t} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \dots & \mu_{2t} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \mu_{g1} & \mu_{g2} & \dots & \mu_{gt} \end{bmatrix}$$

ile ifade edilir. Bu durumda Çok Değişkenli Laplace dağılımı altında önerilen test istatistiği,

$$\Lambda_{03} = \left| \frac{|\mathbf{S}_e|}{|\mathbf{S}_h + \mathbf{S}_e|} \right| \quad (6.30)$$

eşitliği ile ifade edilmiştir. Bu test istatistiği $U^\alpha(sd_1, sd_h, sd_e)$ ile Wilk's Λ sahip olur. $\Lambda_{02} < U^\alpha(sd_1, sd_h, sd_e)$ ise H_{03} hipotezi red edilerek etkileşim etkisinin olmadığı söylenir. Bu hipotezin testi için, sd_1, sd_h, sd_e değerleri

$$sd_1 = \text{Rank}(\mathbf{A}) = p - 1 ; sd_h = \text{Rank}(\mathbf{C}) = g - 1 ; sd_e = N - \text{Rank}(\mathbf{X})$$

eşitlikleri ile hesaplanmaktadır [35]. Test istatistiklerindeki terim mutlak değer alınarak tanımlanmıştır.

Uygulanan test istatistiklerinin F dağılımına dönüşümü için Çizelge 6.2.' de verilen eşitlikler kullanılmıştır [8].

Çizelge 6.2. Wilk's Λ değerlerinin F dağılımına dönüşüm tablosu

Değişken sayısı	Grup sayısı	Dönüşüm
$p=1$	$g \geq 2$	$\left(\frac{\sum n_i - g}{g - 1}\right) \left(\frac{1 - \Lambda^*}{\Lambda^*}\right) \sim F_{g-1, \sum n_i - g}$
$p=2$	$g \geq 2$	$\left(\frac{\sum n_i - g - 1}{g - 1}\right) \left(\frac{1 - \sqrt{\Lambda^*}}{\sqrt{\Lambda^*}}\right) \sim F_{2(g-1), 2(\sum n_i - g - 1)}$
$p \geq 1$	$g=2$	$\left(\frac{\sum n_i - p - 1}{p}\right) \left(\frac{1 - \Lambda^*}{\Lambda^*}\right) \sim F_{p, \sum n_i - p - 1}$
$p \geq 1$	$g=3$	$\left(\frac{\sum n_i - p - 2}{p}\right) \left(\frac{1 - \sqrt{\Lambda^*}}{\sqrt{\Lambda^*}}\right) \sim F_{2p, 2(\sum n_i - p - 2)}$

Uyarlanan test istatistikleri için Wilk's Λ dağılımının Çizelge 6.2.' de verilen F dağılımı ile olan dağılım ilişkisinden hareketle her üç Λ test istatistiği F dağılımı cinsinden, $F\Lambda$, olarak isimlendirilerek, tekrarlı ölçümlü veri düzenindeki değişken ve grup sayısına göre,

$$\triangleright F\Lambda = \left(\frac{\sum n_i - p - 1}{p}\right) \left(\frac{1 - \Lambda^*}{\Lambda^*}\right) \sim F_{p, \sum n_i - p - 1} \quad (6.31)$$

$$\triangleright F\Lambda = \left(\frac{\sum n_i - p - 2}{p}\right) \left(\frac{1 - \sqrt{\Lambda^*}}{\sqrt{\Lambda^*}}\right) \sim F_{2p, 2(\sum n_i - p - 2)} \quad (6.32)$$

eşitlikleri ile ifade edilerek dönüşüm yapılmıştır.

Özetle, normal dağılıma alternatif bir dağılım olarak Eliptik Konturlu dağılımlar ailesinden gelen Çok Değişkenli Laplace dağılımının varlığında İki Yönlü Tekrarlı Ölçümlü MANOVA modelindeki parametrelerin test edilmesi için yararlanılan test istatistiklerinin dağılımının U_{sd_1, sd_h, sd_e} ile Wilk's Λ dağılımı olduğu gösterilmiştir.

7. MATRİS DEĞİŞKENLİ LAPLACE DAĞILIMI ALTINDA TEKRARLI ÖLÇÜMLÜ VARYANS ANALİZİ

Bir önceki bölümde, her bir gözlem biriminin farklı deneme koşullarında gözlemlenerek tek bir ölçüm alındığı tasarıma ilişkin çıkarsamalar yapıldı. Fakat birçok deneysel durumda, farklı deneme koşullarında tekrarlı olarak birden fazla gözlemin yapıldığı tasarımlar da mevcuttur. Çok değişkenli gözlemlere sahip bu biçimdeki tasarımlar çok değişkenli ya da çoklu cevaplı tekrarlı ölçümlü tasarımlar olarak isimlendirilmektedir. Bu tasarımı gösteren tekrarlı ölçümlü veri düzeni Çizelge 4.3'de verilmiştir.

Bu tasarıma sahip verilerde amacımız çok değişkenli normallik koşullarının sağlanmadığı durumlarda alternatif çok değişkenli dağılımdan yararlanarak çok değişkenli tekrarlı ölçümlü tasarıma ilişkin ANOVA yapabilmektir. Ancak bu noktada Çizelge 4.3'deki veriler matrisler ile ifade edileceği için, bu tez çalışmasında çok değişkenli tekrarlı ölçümlü verilerin analizi için matris değişkenli dağılım kullanılması durumunu ele alınmıştır. Bu amaçla yine parametrelerin en çok olabilirlik tahminlerinin daha kolay elde edilebilmesi maksadıyla normal dağılımın ölçek karması olarak tanımlanan *Matris Değişkenli Laplace* dağılımı kullanılmıştır.

Öncelikle çok değişkenli tekrarlı ölçümlü veri düzeni için kullanılan olan (5.19) eşitliği ile ifade edilen çok değişkenli genel doğrusal modelinin elemanları, her bir deneme koşulunda birden fazla ölçüm alınması (Çizelge 4.3.) nedeniyle matrislerden oluşmaktadır. $i = 1, \dots, g$, $j = 1, \dots, n_i$, $k = 1, \dots, t$ olmak üzere verilere ilişkin matrisler aşağıdaki gibi ifade edilir. Çizelge 4.3'deki verilere göre sadece bir gruba ilişkin tüm denemelerdeki tekrarlı gözlem vektörleri aşağıda yazılmıştır.

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{111} &= \begin{bmatrix} y_{1111} \\ y_{1112} \\ \vdots \\ y_{111q} \end{bmatrix}; \mathbf{y}_{112} = \begin{bmatrix} y_{1121} \\ y_{1122} \\ \vdots \\ y_{112q} \end{bmatrix}; \mathbf{y}_{113} = \begin{bmatrix} y_{1131} \\ y_{1132} \\ \vdots \\ y_{113q} \end{bmatrix}; \dots; \mathbf{y}_{11t} = \begin{bmatrix} y_{11t1} \\ y_{11t2} \\ \vdots \\ y_{11tq} \end{bmatrix} \\
\mathbf{y}_{121} &= \begin{bmatrix} y_{1211} \\ y_{1212} \\ \vdots \\ y_{121q} \end{bmatrix}; \mathbf{y}_{122} = \begin{bmatrix} y_{1221} \\ y_{1222} \\ \vdots \\ y_{122q} \end{bmatrix}; \mathbf{y}_{123} = \begin{bmatrix} y_{1231} \\ y_{1232} \\ \vdots \\ y_{123q} \end{bmatrix}; \dots; \mathbf{y}_{12t} = \begin{bmatrix} y_{12t1} \\ y_{12t2} \\ \vdots \\ y_{12tq} \end{bmatrix} \\
&\vdots \\
&\vdots \\
&\vdots \\
&\vdots \\
\mathbf{y}_{1n_11} &= \begin{bmatrix} y_{1n_111} \\ y_{1n_112} \\ \vdots \\ y_{1n_11q} \end{bmatrix}; \mathbf{y}_{1n_12} = \begin{bmatrix} y_{1n_121} \\ y_{1n_122} \\ \vdots \\ y_{1n_12q} \end{bmatrix}; \mathbf{y}_{1n_13} = \begin{bmatrix} y_{1n_131} \\ y_{1n_132} \\ \vdots \\ y_{1n_13q} \end{bmatrix}; \dots; \mathbf{y}_{1n_1t} = \begin{bmatrix} y_{1n_1t1} \\ y_{1n_1t2} \\ \vdots \\ y_{1n_1tq} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Bu tekrarlı gözlem vektörlerinin oluşturduğu gözlem matrisleri ise yine bir grubun tüm denemeleri için aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned}
\mathbf{Y}_{11} &= [\mathbf{y}_{111} \quad \mathbf{y}_{112} \quad \dots \quad \mathbf{y}_{11t}] \\
\mathbf{Y}_{12} &= [\mathbf{y}_{121} \quad \mathbf{y}_{122} \quad \dots \quad \mathbf{y}_{12t}] \\
&\vdots \\
\mathbf{Y}_{1n_1} &= [\mathbf{y}_{1n_11} \quad \mathbf{y}_{1n_12} \quad \dots \quad \mathbf{y}_{1n_1t}]
\end{aligned}$$

Gözlem matrislerine dayalı olarak birinci grubun birinci deneğine ilişkin tekrarlı ölçümlü model ise eşitlik (7.1) ile verilmiştir.

$$\mathbf{Y}_{11} = \mathbf{X}_1 \boldsymbol{\beta} + \mathbf{E}_{11} \quad (7.1)$$

$$\begin{bmatrix} y_{1111} & y_{1121} & \dots & y_{11t1} \\ y_{1112} & y_{1122} & \dots & y_{11t2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{111q} & y_{112q} & \dots & y_{11tq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{01} & \beta_{02} & \dots & \beta_{0t} \\ \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_{121} & \beta_{122} & \dots & \beta_{12t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{1111} & e_{1121} & \dots & e_{11t1} \\ e_{1112} & e_{1122} & \dots & e_{11t2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{111q} & e_{112q} & \dots & e_{11tq} \end{bmatrix}$$

Çok değişkenli tekrarlı ölçümlü veri tasarımındaki tüm gruplar için model yukarıdaki gibi ifade edilebilmektedir. Yazılan eşitliklerden de görüldüğü gibi, birden fazla grup olması durumunda verilerin içi içe matrisler ile ifade edilmesi durumu ile karşılaşılacaktır. Genel olarak tüm veriler üzerinden aşağıdaki çok değişkenli tekrarlı ölçümlü doğrusal model yer alan elemanlara ilişkin veri matrisleri,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{11} \\ \mathbf{Y}_{12} \\ \mathbf{Y}_{13} \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_{gn_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_g \end{bmatrix} [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \dots \quad \beta_t] + \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{11} \\ \mathbf{E}_{12} \\ \mathbf{E}_{13} \\ \vdots \\ \mathbf{E}_{gn_1} \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

gösterimi ile ifade edilebilmektedir. Bu gösterimde yer alan her bir eleman modele ilişkin veriyi içeren bir matrisi ifade etmektedir.

7.1. Parametre Tahmini

Bu alt bölümde, Matris Değişkenli Tekrarlı Ölçümlü ANOVA için parametre tahminlerinin Matris Değişkenli Laplace dağılımı altında teorik olarak nasıl elde edildikleri anlatılmıştır.

Bu bölümde ele alınan Matris Değişkenli Laplace dağılımının literatürde önerilen [33] Matris Değişkenli Laplace dağılımdan farklı olarak Ters Gama dağılıma sahip bir karma değişken seçilerek elde edilmiştir. Literatürde çok değişkenli normal dağılım ve ters gama dağılımının karması olarak önerilmiş olan Çok Değişkenli Laplace dağılımı [29], Matris Değişkenliye genişletilmeye çalışılmıştır.

Bu amaçla, $Z \sim N_{p,t}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_p, \mathbf{I}_t)$ matris değişkenli standart normal dağılıma sahip, $V \sim TG\left(\frac{pt+1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ dağılımına sahip değişkenler yardımıyla normal dağılımın ölçek karması olarak tanımlanan yeni Y değişkeni,

$$\mathbf{Y} = \mathbf{M} + \sqrt{V^{-1}}\boldsymbol{\Sigma}^{1/2}\mathbf{Z}\boldsymbol{\Psi}^{1/2} \quad (7.3)$$

eşitliği ile ifade edilir. Burada, $\mathbf{Y} \sim \text{MDL}_{p,t}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\Sigma} \otimes \boldsymbol{\Psi})$ ile Matris Değişkenli Laplace Dağılımına sahip olur. Parametrelerin en çok olabilirlik tahmin edicilerini EM algoritması ile elde edebilmek için olabilirlik fonksiyonlarını elde etmek gerekir. Bu sebeple, normal dağılımın ölçek karması olarak tanımlanan Y değişkeni ile V kayıp değişkenine ilişkin olasılık yoğunluk fonksiyonları,

$$f(\mathbf{Z}) = (2\pi)^{-pt/2} \text{etr} \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{Z}\mathbf{Z}^T \right\} \quad (7.4)$$

$$f(v) = 2^{-\frac{pt+1}{2}} \Gamma^{-1} \left(\frac{pt+1}{2} \right) v^{-\frac{pt+1}{2}-1} \exp \left(-\frac{1}{2v} \right) \quad (7.5)$$

eşitlikleri ile tanımlandıklarında, her iki değişkene ilişkin birleşik olasılık yoğunluk fonksiyonu ise,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{Z}, v) &= (2\pi)^{-pt/2} \text{etr} \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{Z}\mathbf{Z}^T \right\} 2^{-\frac{pt+1}{2}} \Gamma^{-1} \left(\frac{pt+1}{2} \right) v^{-\frac{pt+1}{2}-1} \exp \left(-\frac{1}{2v} \right) \\ &= (2\pi)^{-\frac{pt}{2}} 2^{-\frac{pt+1}{2}} \Gamma^{-1} \left(\frac{pt+1}{2} \right) \text{exptr} \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{Z}\mathbf{Z}^T \right\} v^{-\frac{pt+1}{2}-1} \exp \left(-\frac{1}{2v} \right) \end{aligned} \quad (7.6)$$

biçiminde elde edilir.

Buradan $f(Y, v)$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna geçiş yapabilmek için değişken dönüşümü yapılır. Değişken dönüşümü için normal dağılımın ölçek karması olarak tanımlanan Y değişkenine ilişkin eşitlikten yararlanılarak aşağıdaki işlemler yapılır:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{M} + \sqrt{V^{-1}}\boldsymbol{\Sigma}^{1/2}\mathbf{Z}\boldsymbol{\Psi}^{1/2}$$

$$\mathbf{Y} - \mathbf{M} = \sqrt{V^{-1}}\boldsymbol{\Sigma}^{1/2}\mathbf{Z}\boldsymbol{\Psi}^{1/2} \Rightarrow \sqrt{V^{-1}}\boldsymbol{\Sigma}^{1/2}\mathbf{Z}\boldsymbol{\Psi}^{1/2} = \mathbf{Y} - \mathbf{M}$$

$$\mathbf{Z} = V^{1/2}\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}(\mathbf{Y} - \mathbf{M})\boldsymbol{\Psi}^{-1/2}.$$

Bu dönüşüme ait Jakobiyen değeri yukarıdaki işlemlerden sonra,

$$J = |V^{-1}\Sigma|^{-p/2}|\Psi|^{-t/2} = v^{pt/2}|\Sigma|^{-p/2}|\Psi|^{-t/2} \quad (7.7)$$

eşitliği ile ifade edilir. Bulunan bu değerler yardımıyla, Y ile V değişkenlerine ilişkin birleşik olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulabilmek için aşağıdaki işlemler sırasıyla yapılır:

$$\begin{aligned} f(Y, v) &= (2\pi)^{-\frac{pt}{2}} 2^{-\frac{pt+1}{2}} \Gamma^{-1}\left(\frac{pt+1}{2}\right) v^{-\frac{pt+1}{2}-1} v^{\frac{pt}{2}} |\Sigma|^{-p/2} |\Psi|^{-t/2} \exp\left(-\frac{1}{2v}\right) x \\ &\quad \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(u^{1/2}\Sigma^{-1/2}(Y-M)\Psi^{-1/2}\Psi^{-1/2}(Y-M)^T\Sigma^{-1/2}u^{1/2}\right)\right\} \\ &= (2\pi)^{-\frac{pt}{2}} 2^{-\frac{pt+1}{2}} \Gamma^{-1}\left(\frac{pt+1}{2}\right) v^{-\frac{pt+1}{2}-1+\frac{pt}{2}} |\Sigma|^{-p/2} |\Psi|^{-t/2} \exp\left(-\frac{1}{2v}\right) x \\ &\quad \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(u^{1/2}\Sigma^{-1/2}(Y-M)\Psi^{-1/2}\Psi^{-1/2}(Y-M)^T\Sigma^{-1/2}u^{1/2}\right)\right\} \\ &= (2\pi)^{-\frac{pt}{2}} 2^{-\frac{pt+1}{2}} \Gamma^{-1}\left(\frac{pt+1}{2}\right) |\Sigma|^{-p/2} |\Psi|^{-t/2} v^{-\frac{3}{2}} x \\ &\quad \exp\left\{-\frac{1}{2v} - \frac{1}{2} \text{utr}(\Sigma^{-1}(Y-M)\Psi^{-1}(Y-M)^T)\right\} \\ &= \frac{|\Sigma|^{-\frac{p}{2}} |\Psi|^{-\frac{t}{2}}}{2^{\frac{pt+1}{2}} (2\pi)^{\frac{pt}{2}} \Gamma\left(\frac{pt+1}{2}\right)} v^{-\frac{3}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}v^{-1} - \frac{1}{2} \text{utr}(\Sigma^{-1}(Y-M)\Psi^{-1}(Y-M)^T)\right\}. \end{aligned}$$

Yukarıdaki işlemler sonucunda, Y ile V değişkenlerine ilişkin birleşik olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(Y, v) = \frac{|\Sigma|^{-\frac{p}{2}} |\Psi|^{-\frac{t}{2}}}{2^{\frac{pt+1}{2}} (2\pi)^{\frac{pt}{2}} \Gamma\left(\frac{pt+1}{2}\right)} v^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2}\{v^{-1} + \text{utr}(\Sigma^{-1}(Y-M)\Psi^{-1}(Y-M)^T)\}} \quad (7.8)$$

eşitliği ile elde edilmiş olunur. Eşitlik (7.8) ile elde edilen birleşik olasılık yoğunluk fonksiyonuna ilişkin olabilirlik fonksiyonu,

$$L = \frac{|\mathbf{\Sigma}|^{-\frac{np}{2}} |\mathbf{\Psi}|^{-\frac{nt}{2}}}{2^{\frac{n(pt+1)}{2}} (2\pi)^{\frac{npt}{2}} \left[\Gamma\left(\frac{pt+1}{2}\right) \right]^n} \prod_{i=1}^n v_i^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \{v_i^{-1} + v_i \text{tr}(\mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{Y}_i - \mathbf{M})\mathbf{\Psi}^{-1}(\mathbf{Y}_i - \mathbf{M})^T)\}} \quad (7.9)$$

eşitliği ile elde edilir. Eşitlik (7.9) ile verilen olabilirlik fonksiyonundan logaritmik olabilirlik fonksiyonuna geçiş için gerekli işlemler sırasıyla aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} \ln L &= -\frac{np}{2} \ln |\mathbf{\Sigma}| - \frac{nt}{2} \ln |\mathbf{\Psi}| \\ &\quad + \frac{3}{2} \sum_{i=1}^n \ln(v_i) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \{v_i^{-1} + v_i \text{tr}(\mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{Y}_i - \mathbf{M})\mathbf{\Psi}^{-1}(\mathbf{Y}_i - \mathbf{M})^T)\} \\ &= -\frac{np}{2} \ln |\mathbf{\Sigma}| - \frac{nt}{2} \ln |\mathbf{\Psi}| \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n v_i \text{tr}(\mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{Y}_i - \mathbf{M})\mathbf{\Psi}^{-1}(\mathbf{Y}_i - \mathbf{M})^T) + \frac{3}{2} \sum_{i=1}^n \ln(v_i) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n v_i^{-1} \\ &= -\frac{np}{2} \ln |\mathbf{\Sigma}| - \frac{nt}{2} \ln |\mathbf{\Psi}| \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n v_i \text{tr}(\mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{Y}_i - \mathbf{M})\mathbf{\Psi}^{-1}(\mathbf{Y}_i - \mathbf{M})^T) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (3 \ln(v_i) + v_i^{-1}). \quad (7.10) \end{aligned}$$

Eşitlik (7.10) ile elde edilen logaritmik olabilirlik fonksiyonunda yer alan V kayıp değişken sorununun giderilebilmesi için bu fonksiyonun koşullu beklenen değeri alınır. Bu koşullu beklenen değer alınırken son terim ihmal edilir:

$$\begin{aligned} E(\ln L(\mathbf{M}, \mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Psi}) | \mathbf{Y}_i, \hat{\mathbf{M}}, \hat{\mathbf{\Sigma}}, \hat{\mathbf{\Psi}}) &= -\frac{np}{2} \ln |\mathbf{\Sigma}| - \frac{nt}{2} \ln |\mathbf{\Psi}| \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n E(V_i | \mathbf{Y}_i, \hat{\mathbf{M}}, \hat{\mathbf{\Sigma}}, \hat{\mathbf{\Psi}}) \text{tr}(\mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{Y}_i - \mathbf{M})\mathbf{\Psi}^{-1}(\mathbf{Y}_i - \mathbf{M})^T) \end{aligned} \quad (7.11)$$

$E(V_i | \mathbf{Y}_i, \hat{\mathbf{M}}, \hat{\mathbf{\Sigma}}, \hat{\mathbf{\Psi}})$ koşullu beklenen değerinin bulunabilmesi için, $f(V|Y)$ koşullu dağılımına ihtiyaç vardır bu sebeple aşağıdaki işlemler yapılır:

$$\begin{aligned}
f(V|Y) &= \frac{f(Y, v)}{f(Y)} \\
&= \frac{\frac{|\Sigma|^{-\frac{p}{2}} |\Psi|^{-\frac{t}{2}}}{2^{\frac{pt+1}{2}} (2\pi)^{\frac{pt}{2}} \Gamma\left(\frac{pt+1}{2}\right)} v^{-\frac{3}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} v^{-1} - \frac{1}{2} v \text{tr}(\Sigma^{-1}(Y-M)\Psi^{-1}(Y-M)^T)\right\}}{\frac{|\Sigma|^{-\frac{p}{2}} |\Psi|^{-\frac{t}{2}}}{2^{pt} (\pi)^{\frac{pt-1}{2}} \Gamma\left(\frac{pt+1}{2}\right)} e^{-\text{tr}(\Sigma^{-1}(Y-M)\Psi^{-1}(Y-M)^T)}} \\
&= \frac{2^{pt} (\pi)^{\frac{pt-1}{2}}}{2^{\frac{pt+1}{2}} (2\pi)^{\frac{pt}{2}}} v^{-\frac{3}{2}} e^{\text{tr}(\Sigma^{-1}(Y-M)\Psi^{-1}(Y-M)^T) - \frac{1}{2}\{v^{-1} + v \text{tr}(\Sigma^{-1}(Y-M)\Psi^{-1}(Y-M)^T)\}}
\end{aligned}$$

Koşullu birleşik olasılık yoğunluk fonksiyonu, gerekli sadeleştirmeler yapıldıktan sonra aşağıdaki eşitlikteki gibi ifade edilir.

$$f(V|Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} v^{-\frac{3}{2}} e^{\text{tr}(\Sigma^{-1}(Y-M)\Psi^{-1}(Y-M)^T) - \frac{1}{2}\{v^{-1} + v \text{tr}(\Sigma^{-1}(Y-M)\Psi^{-1}(Y-M)^T)\}} \quad (7.12)$$

Eşitlik (7.12) ile elde edilen koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu yardımıyla koşullu beklenen değer için aşağıdaki işlemler yapılır:

$$\begin{aligned}
E(V|Y, \hat{\mathbf{M}}, \hat{\Sigma}, \hat{\Psi}) &= \int_0^{\infty} v f(V|Y) dv \\
&= \int_0^{\infty} v \frac{1}{\sqrt{2\pi}} v^{-\frac{3}{2}} e^{\text{tr}(\Sigma^{-1}(Y-M)\Psi^{-1}(Y-M)^T) - \frac{1}{2}\{v^{-1} + v \text{tr}(\Sigma^{-1}(Y-M)\Psi^{-1}(Y-M)^T)\}} dv \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\text{tr}(\Sigma^{-1}(Y-M)\Psi^{-1}(Y-M)^T)} \int_0^{\infty} v v^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2}\{v^{-1} + v \text{tr}(\Sigma^{-1}(Y-M)\Psi^{-1}(Y-M)^T)\}} dv.
\end{aligned}$$

Gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra koşullu beklenen değer,

$$E(V|Y, \hat{\mathbf{M}}, \hat{\Sigma}, \hat{\Psi}) = \frac{1}{\text{tr}(\Sigma^{-1}(Y-M)\Psi^{-1}(Y-M)^T)} = \mathbf{w}_i \quad (7.13)$$

eşitliği ile elde edilmiş olunur. $E(V|Y, \widehat{M}, \widehat{\Sigma}, \widehat{\Psi})$ koşullu beklenen değeri eşitlik (7.11)'de yerine yazılarak maksimize edilecek olabilirlik fonksiyonuna ait eşitlik,

$$Q((\beta, \Sigma, \Psi) | Y, \widehat{\beta}, \widehat{\Sigma}, \widehat{\Psi}) = -\frac{np}{2} \ln|\Sigma| - \frac{nt}{2} \ln|\Psi| - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_i \text{tr}\{\Sigma^{-1}(Y - M)\Psi^{-1}(Y - M)^T\} \quad (7.14)$$

biçiminde elde edilmiş olunur.

Bir önceki bölümde Çok Değişkenli Tekrarlı Ölçümlü ANOVA yaklaşımında olduğu gibi, tekrarlı ölçümlü veriye ilişkin grup ve denek sayıları göz önünde bulundurulduğunda Eşitlik (7.11) ile ifade edilen olabilirlik fonksiyonu yeniden yazıldığında,

$$Q((\beta, \Sigma, \Psi) | Y_{ij}, \widehat{\beta}, \widehat{\Sigma}, \widehat{\Psi}) = -\frac{np}{2} \ln|\Sigma| - \frac{nt}{2} \ln|\Psi| - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} \mathbf{w}_{ij} \text{tr}\{\Sigma^{-1}(Y_{ij} - X_i\beta)\Psi^{-1}(Y_{ij} - X_i\beta)^T\} \quad (7.15)$$

eşitliğine ulaşılır. Bu fonksiyonda, $M = X_i\beta$ parametre matrisi, Y_{ij} yanıt değişkeni matrisi olarak yanıt değişkeni vektörlerinin yerini almıştır. Eşitlik (7.15)'te yer alan ve \mathbf{w}_{ij} ile ifade edilen koşullu beklenen değer ise,

$$E(V|Y_{ij}, \widehat{\beta}, \widehat{\Sigma}, \widehat{\Psi}) = \frac{1}{\text{tr}(\Sigma^{-1}(Y_{ij} - X_i\beta)\Psi^{-1}(Y_{ij} - X_i\beta)^T)} = \mathbf{w}_{ij} \quad (7.16)$$

şeklinde elde edilmiş olunur. Bundan sonraki adımda, eşitlik (7.15) ile ifade edilen olabilirlik fonksiyonunu maksimize ederek istenilen parametre tahminlerine ulaşabiliriz.

7.1.1. β 'nin En Çok Olabilirlik Tahmin Edicisinin Bulunması

Matris Değişkenli Laplace Dağılımına dayalı β parametre matrisinin tahmin eşitliği için eşitlik (7.15) ile ifade edilen olabilirlik fonksiyonunun β ' ya

göre türevi alınır. Buradan hareketle, yapılan işlemler sırasıyla aşağıda verilmiştir:

$$\frac{\partial Q((\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\Psi}) | \mathbf{Y}_{ij}, \hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}, \hat{\boldsymbol{\Psi}})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}} \left\{ -\frac{np}{2} \ln |\boldsymbol{\Sigma}| - \frac{nt}{2} \ln |\boldsymbol{\Psi}| - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} \text{tr} \left\{ \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{Y}_{ij} - \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta}) \boldsymbol{\Psi}^{-1} (\mathbf{Y}_{ij} - \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta})^T \right\} \right\} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}} \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} \text{tr} \left\{ \begin{aligned} &\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{Y}_{ij} \boldsymbol{\Psi}^{-1} \mathbf{Y}_{ij}^T - \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{Y}_{ij} \boldsymbol{\Psi}^{-1} \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{X}_i^T - \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\Psi}^{-1} \mathbf{Y}_{ij}^T \\ &+ \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\Psi}^{-1} \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{X}_i^T \end{aligned} \right\} \right\} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}} \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} \text{tr} \left\{ \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{Y}_{ij} \boldsymbol{\Psi}^{-1} \mathbf{Y}_{ij}^T - 2 \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\Psi}^{-1} \mathbf{Y}_{ij}^T + \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\Psi}^{-1} \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{X}_i^T \right\} \right\} = 0$$

$$\sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} \left\{ -2 \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\Psi}^{-1} \mathbf{Y}_{ij}^T + 2 \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\Psi}^{-1} \mathbf{X}_i^T \right\} = 0$$

$$\sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} (-2 \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\Psi}^{-1} \mathbf{Y}_{ij}^T) + \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} (2 \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\Psi}^{-1} \mathbf{X}_i^T) = 0$$

$$\sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} (\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\Psi}^{-1} \mathbf{Y}_{ij}^T) = \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} (\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\Psi}^{-1} \mathbf{X}_i^T)$$

$$\sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} (\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\Psi}^{-1} \mathbf{X}_i^T) = \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} (\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\Psi}^{-1} \mathbf{Y}_{ij}^T)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} \mathbf{w}_{ij} \left((\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{X}_i)^{-1} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\Psi}^{-1} \mathbf{X}_i^T (\boldsymbol{\Psi}^{-1} \mathbf{X}_i^T)^{-1} \right) \\
& \quad = \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} \mathbf{w}_{ij} \left((\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{X}_i)^{-1} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{X}_i \boldsymbol{\Psi}^{-1} \mathbf{Y}_{ij}^T (\boldsymbol{\Psi}^{-1} \mathbf{X}_i^T)^{-1} \right) \\
& \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} \mathbf{w}_{ij} \boldsymbol{\beta} = \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} \mathbf{w}_{ij} \boldsymbol{\Psi}^{-1} \mathbf{Y}_{ij}^T (\boldsymbol{\Psi}^{-1} \mathbf{X}_i^T)^{-1}.
\end{aligned}$$

Yukarıdaki eşitlikte yapılan düzenlemeler ile Normal dağılımın ölçek karması olarak tanımlanan Matris Değişkenli Laplace dağılımı altında (5.19) ile ifade edilen doğrusal modelde yer alan ve (5.9) eşitliğindeki Çok Değişkenli İki Yönlü Tekrarlı Ölçümlü ANOVA modeli parametrelerini içeren $\boldsymbol{\beta}$ katsayısının en çok olabilirlik tahmin edicisi için,

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \frac{\sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} \mathbf{w}_{ij} \boldsymbol{\Psi}^{-1} \mathbf{Y}_{ij}^T (\boldsymbol{\Psi}^{-1} \mathbf{X}_i^T)^{-1}}{\sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} \mathbf{w}_{ij}} \quad (7.17)$$

eşitliği edilmiş olunur.

7.1.2. $\boldsymbol{\Sigma}$ 'nin En Çok Olabilirlik Tahmin Edicisinin Bulunması

Yayılm matrisi $\boldsymbol{\Sigma}$ 'nin en çok olabilirlik tahmin edicisini bulabilmek için eşitlik (7.15) ile ifade edilen olabilirlik fonksiyonunun $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ 'e göre türevi alınır. Bölüm 6.1.2. de verilen matris cebirine ilişkin özellikler dikkate alınarak aşağıdaki işlemler sonucunda $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ tahmin edicisine ulaşılır:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial Q((\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\Psi}) | \mathbf{Y}_{ij}, \hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}, \hat{\boldsymbol{\Psi}})}{\partial \boldsymbol{\Sigma}^{-1}} = 0 \\
& \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\Sigma}^{-1}} \left\{ -\frac{np}{2} \ln |\boldsymbol{\Sigma}^{-1}| - \frac{nt}{2} \ln |\boldsymbol{\Psi}^{-1}| - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} \mathbf{w}_{ij} \text{tr} \left\{ \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{Y}_{ij} - \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta}) \boldsymbol{\Psi}^{-1} (\mathbf{Y}_{ij} - \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta})^T \right\} \right\} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{np}{2}\{2\boldsymbol{\Sigma} - \text{diag}(\boldsymbol{\Sigma})\} \\
& -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^g\sum_{j=1}^{n_i}w_{ij}\{2(\mathbf{Y}_{ij} - \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\Psi}^{-1}(\mathbf{Y}_{ij} - \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta})^T \\
& - \text{diag}(\mathbf{Y}_{ij} - \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\Psi}^{-1}(\mathbf{Y}_{ij} - \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta})^T\} = 0
\end{aligned}$$

Yukarıdaki eşitliği sadeleştirebilmek için $(\mathbf{Y}_{ij} - \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\Psi}^{-1}(\mathbf{Y}_{ij} - \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta})^T = \mathbf{Y}_{ij}$ düzenlemesi yapıldığında,

$$\begin{aligned}
2\boldsymbol{\Sigma} - \text{diag}(\boldsymbol{\Sigma}) - \frac{1}{np}\sum_{i=1}^g\sum_{j=1}^{n_i}w_{ij}(2\mathbf{Y}_{ij} - \text{diag}(\mathbf{Y}_{ij})) &= 0 \\
2\boldsymbol{\Sigma} - \frac{1}{np}\sum_{i=1}^g\sum_{j=1}^{n_i}w_{ij}2\mathbf{Y}_{ij} - \text{diag}(\boldsymbol{\Sigma}) - \frac{1}{np}\sum_{i=1}^g\sum_{j=1}^{n_i}w_{ij}\text{diag}(\mathbf{Y}_{ij}) &= 0 \\
2\left[\boldsymbol{\Sigma} - \frac{1}{np}\sum_{i=1}^g\sum_{j=1}^{n_i}w_{ij}\mathbf{Y}_{ij}\right] - \text{diag}\left[\boldsymbol{\Sigma} - \frac{1}{np}\sum_{i=1}^g\sum_{j=1}^{n_i}w_{ij}\mathbf{Y}_{ij}\right] &= 0 \\
\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{1}{np}\sum_{i=1}^g\sum_{j=1}^{n_i}w_{ij}\mathbf{Y}_{ij} &
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Normal dağılımın ölçek karması olarak tanımlanan Matris Değişkenli Laplace dağılımı altında (5.19) ile ifade edilen doğrusal modelde yer alan ve (5.9) eşitliğindeki Çok değişkenli İki Yönlü Tekrarlı Ölçümlü ANOVA modeli için yayılım matrisi $\boldsymbol{\Sigma}$ 'nın en çok olabilirlik tahmin edicisi,

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{1}{np}\sum_{i=1}^g\sum_{j=1}^{n_i}w_{ij}(\mathbf{Y}_{ij} - \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\Psi}^{-1}(\mathbf{Y}_{ij} - \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta})^T \quad (7.18)$$

eşitliği ile elde edilmiş olunur.

7.1.3. Ψ 'nin En Çok Olabilirlik Tahmin Edicisinin Bulunması

Ψ korelasyon matrisinin en çok olabilirlik tahmin edicisini bulabilmek için eşitlik (7.15) ile ifade edilen olabilirlik fonksiyonunun Ψ^{-1} 'e göre türevi alınır. Bölüm 6.1.2 'de verilen özellikler dikkate alınarak sırasıyla aşağıdaki işlemler sonucunda $\hat{\Psi}$ tahmin edicisine ulaşılır:

$$\frac{\partial Q((\beta, \Sigma, \Psi) | Y_{ij}, \hat{\beta}, \hat{\Sigma}, \hat{\Psi})}{\partial \Psi^{-1}} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \Psi^{-1}} \left\{ \frac{np}{2} \ln |\Sigma^{-1}| - \frac{nt}{2} \ln |\Psi^{-1}| - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} \text{tr} \left\{ \Sigma^{-1} (\mathbf{Y}_{ij} - \mathbf{X}_i \beta) \Psi^{-1} (\mathbf{Y}_{ij} - \mathbf{X}_i \beta)^T \right\} \right\} = 0$$

$$-\frac{nt}{2} \{2\Psi - \text{diag}(\Psi)\} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} \left\{ 2(\mathbf{Y}_{ij} - \mathbf{X}_i \beta)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{Y}_{ij} - \mathbf{X}_i \beta) - \text{diag}(\mathbf{Y}_{ij} - \mathbf{X}_i \beta)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{Y}_{ij} - \mathbf{X}_i \beta) \right\} = 0$$

Bir önceki bölümde olduğu gibi yukarıdaki eşitliği sadeleştirebilmek için $(\mathbf{Y}_{ij} - \mathbf{X}_i \beta)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{Y}_{ij} - \mathbf{X}_i \beta) = \mathbf{Y}_{ij}$ düzenlemesi yapıldığında,

$$2\Psi - \text{diag}(\Psi) - \frac{1}{nt} \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} (2\mathbf{Y}_{ij} - \text{diag}(\mathbf{Y}_{ij})) = 0$$

$$2\Psi - \frac{1}{nt} \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} 2\mathbf{Y}_{ij} - \text{diag}(\Psi) - \frac{1}{nt} \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} \text{diag}(\mathbf{Y}_{ij}) = 0$$

$$2\left[\Psi - \frac{1}{nt} \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} \mathbf{Y}_{ij} \right] - \text{diag} \left[\Psi - \frac{1}{nt} \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} \mathbf{Y}_{ij} \right] = 0$$

$$\hat{\Psi} = \frac{1}{nt} \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} \mathbf{Y}_{ij}$$

eşitliği elde edilmiş olunur.

Normal dağılımın ölçek karması olarak tanımlanan Matris Değişkenli Laplace dağılımı altında (5.19) ile ifade edilen doğrusal modelde yer alan ve (5.9) eşitliğindeki Çok değişkenli İki Yönlü Tekrarlı Ölçümlü ANOVA modeli için tekrarlı ölçümler arasındaki ilişkiyi modelleyen matrisi Ψ 'nin en çok olabilirlik tahmin edicisi yapılan düzenlemelerden sonra,

$$\hat{\Psi} = \frac{1}{nt} \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} (\mathbf{Y}_{ij} - \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{Y}_{ij} - \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta}) \quad (7.19)$$

eşitliği ile elde edilmiş olunur.

7.1.4. EM Algoritmasının tanımlanması

Matris Değişkenli Laplace Dağılımına dayalı Çok Değişkenli Tekrarlı Ölçümlü ANOVA modeline ilişkin parametre tahminlerinin sayısal değerlerinin elde edilebilmesi amacı ile EM algoritması adımları verilmiştir.

E-Adımı: Y_{ij} gözlem değerleri ile şu anki parametre tahminleri verildiğinde logaritmik olabilirlik fonksiyonunun koşullu beklenen değeri w_{ij} hesaplanır.

M-Adımı: Tahminlerin yeni değerlerini elde etmek için $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Sigma}, \Psi$ parametrelerine göre logaritmik olabilirlik fonksiyonu maksimize edilerek E-adımında hesaplanan koşullu beklenen değeri kullanılarak parametrelerin değerleri güncellenerek yeniden hesaplanır. EM-Algoritmasının çalıştırılabilmesi için Çizelge 7.1'deki adımlar sırası ile uygulanır [33].

Bu bölümde, iç içe tasarımlara ifade edilen Çok Değişkenli Tekrarlı Ölçümlü Verileri (*doubly multivariate repeated measure data*) modelleyebilmek için matris değişkenli normal dağılım ile ters gama dağılımının birleşimi ile Normal dağılımın ölçek karması olarak tanımlanan Matris Değişkenli Laplace Dağılımı kullanılması önerilmiştir. Bu dağılımın kullanılmasında sağlanacak en büyük fayda varyans kovaryans yapısının Kroncker çarpım ile ifade edilerek tekrarlı ölçümler arasındaki bağımlılık yapısının ayrı olarak modelleyebilmesine imkân sağlaması olarak düşünülmektedir. Parametre tahmin adımları EM

Algoritması ile tanımlanan bu tahmin süreci benzetim çalışmasına dahil edilmemiştir.

Çizelge 7.1. β , Σ ve ψ parametre tahminleri için EM Algoritması Adımları

- 1 $k=1$ al ve parametre değerlerinin başlangıç değerleri seç.
- 2 $k=1,2,3,\dots$ şu anki parametre değerleri $\beta^{(k)}, \Sigma^{(k)}, \psi^{(k)}$ 'yi kullanarak, $i=1,\dots,g$ $j=1,\dots,n_i$ için $w_{ij}^{(k)}$ ağırlıklarını ve $\sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij}$ değerini hesapla.
- 3 Yeni tahmin değerlerini $\beta^{(k+1)}, \Sigma^{(k+1)}, \psi^{(k+1)}$ 'yi hesaplamak için aşağıdaki eşitlikleri kullan.

$$\beta^{(k+1)} = \frac{\sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} \psi^{(k)-1} Y_{ij}^T (\psi^{(k)-1} X_i^T)^{-1}}{\sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij}^{(k)}}$$

$$\Sigma^{(k+1)} = \frac{1}{np} \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij}^{(k)} (Y_{ij} - X_i \beta^{(k+1)}) \psi^{(k)-1} (Y_{ij} - X_i \beta^{(k+1)})^T$$

$$\psi^{(k+1)} = \frac{1}{np} \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij}^{(k)} (Y_{ij} - X_i \beta^{(k+1)})^T \Sigma^{(k)-1} (Y_{ij} - X_i \beta^{(k+1)})$$

- 4 Yakınsaklık sağlanıncaya adımları tekrar et.

8. BENZETİM ÇALIŞMASI

Uygulamalı İstatistikte sıklıkla kullanılan ANOVA ve MANOVA gibi yöntemler bilindiği gibi Normal dağılım varsayımına dayanır. Ancak, uygulamada bu varsayımın sağlanmasının zor olduğu durumlar için alternatif yöntemler geliştirilmiştir. Bu tez çalışmasında da temel amaç Çok Değişkenli Laplace dağılımı altında Çok Değişkenli Tekrarlı Ölçümlü ANOVA modeline ilişkin model parametrelerini tahmin etmek ve bu parametrelerden yararlanarak normal dağılım varsayımına alternatif bir test istatistiği önermek olmuştur. Tezde R programında iki aşamalı benzetim çalışması yapılmıştır. Birinci aşamada parametre tahminleri elde edilmiş olup ikinci aşamada ise önerilen test istatistiği için güç değerleri hesaplanmıştır.

8.1. Benzetim Çalışması I: Parametre Tahminlerinin Hesaplanması

Bu aşamada, Çok Değişkenli Laplace varsayımı altında Çok Değişkenli ANOVA modeline ilişkin parametrelerin tahmini yapılmıştır. Benzetim çalışmasında kullanılan tekrarlı ölçümlü veri düzenine ilişkin sayısal değerler Çizelge 8.1' de verilmiştir. İlk aşamada örneklem büyüklüğü, etken sayısı, deneme sayısı ve her bir gruba düşen denek sayısı farklı değerler almıştır. Her bir etken grubunda denek sayısı eşit alınarak dengeli düzen oluşturulmuştur.

Çizelge 8.1. Benzetim Çalışmasında Kullanılan Sayısal Değerler

Örneklem Büyüklüğü ($n = \sum_{i=1}^g n_i$)	20,40 60,80,100,120,140,160,180,200
Etken (Grup) Sayısı ($i=1, \dots, g$)	2,3
Deneme Sayısı ($k=1, \dots, t$)	3, 4, 6
Her bir Gruptaki Denek Sayıları ($j = 1, \dots, n_i$)	10,20,30, 40,50, 60,70,80,90,100
Benzetim Tekrar Sayısı	1000

Benzetim çalışmasında oluşturulacak her bir senaryoya ilişkin Çok Değişkenli Laplace dağılımından veri üretmek için yazılan programa yönelik oluşturulan algorithmada izlenen adımlar Çizelge 8.2.' de verilmiştir.

Çizelge 8.2. Çok değişkenli Laplace Dağılımından Tekrarlı Ölçümlü Veri Üretme Algoritması

-
1. $n \leftarrow 20,40,60,80,100,120,140,160,180,200$ örneklem büyüklüklerini ata.
 2. $\mu ; \Sigma ; \beta \leftarrow$ başlangıç değerlerini ata.
 3. $\mathbf{Z} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I}_p)$ çok değişkenli normal dağılımdan veri üret.
 4. $\mathbf{V} \leftarrow TG\left(\frac{p+1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ters gama dağılımından veri üret.
 5. $i=1, \dots, g ; j=1, \dots, n_i$ için $\varepsilon_{ij} \leftarrow \mu + \sqrt{\mathbf{V}^{-1}\Sigma}^{1/2}\mathbf{Z}$ ile $\varepsilon_{ij} \sim \text{ÇDL}_p(\mathbf{0}, \Sigma)$ çok değişkenli Laplace dağılımından hataları üret.
 6. $\mathbf{Y}_{ij} = \mathbf{X}_i\beta + \varepsilon_{ij} \leftarrow$ Çok değişkenli doğrusal model ile yanıt değişkenlerini üret.
-

Benzetim çalışmasında öncelikle verilerin üretilebilmesi için başlangıç değerleri, β parametre vektörü için (5.10)'daki eşitliklerde verilen Çok Değişkenli Tekrarlı Ölçümlü ANOVA modeli kısıtlarını sağlayacak biçimde seçilmiştir. Σ matrisi için başlangıç değeri ise değişkenlerin varyansları homojen olması koşulunu sağlayacak biçimde, denemeler arasında bağımlılık yapısı göz önünde bulundurularak seçilmiştir. Parametrelerin en çok olabilirlik tahminlerinin hesaplanması için EM algoritması kullanılmış ve algoritma başlangıç değerleri için parametrelerin (EKK) tahmin edicileri alınmıştır.

Parametre tahminlerinin etkinliklerini göstermek amacı ile gerçek değerleri ile tahmin değerleri arasındaki Öklid uzaklıkları hesaplanmıştır. İterasyon yakınsama kriteri olarak 10^{-6} değeri seçilmiştir. Öklid uzaklıklarının hesaplanmasında kullanılan eşitlikler aşağıda verilmiştir [33].

$$\|\hat{\beta}^{k+1} - \beta^k\| \leq \Delta = 10^{-6}$$

$$\|\hat{\Sigma}^{k+1} - \Sigma^k\| \leq \Delta = 10^{-6}$$

İterasyon yakınsaklığının sağlanmasında literatürde kullanılan bir diğer karşılaştırma kriteri olan en çok olabilirlik fonksiyonlarının da Öklid uzaklıkları hesaplanarak değerlendirilmeye eklenmiştir [49], [50].

$$\left\| \frac{\widehat{Q}^{k+1}}{Q^k} - 1 \right\| \leq \Delta = 10^{-6}$$

Parametre sonuçlarına ilişkin tablolarda verilen Öklid uzaklıklarına ait değerler tekrar sayısı üzerinden alınan ortalama Öklid uzaklıklarını göstermektedir.

Parametre tahmin aşamasında ele alınan altı farklı senaryo aşağıdaki adımlarda tanımlanmıştır.

1.Senaryo: Tekrarlı ölçümlü veri analizi için hataların Çok Değişkenli Laplace dağılımına sahip, örneğin $i=2$ grup, $k=3$ deneme olan veri düzeni için iki yönlü ANOVA model yapısı,

$$y_{ijk} = \mu + \gamma_i + \tau_k + (\gamma\tau)_{ik} + \varepsilon_{ijk} \quad i = 1,2 ; k = 1,2,3$$

$$j = 1, \dots, 20 ; j = 1, \dots, 40 ; j = 1, \dots, 60 ; j = 1, \dots, 80 ; j = 1, \dots, 100$$

$$j = 1, \dots, 120 ; j = 1, \dots, 140 ; j = 1, \dots, 180 ; j = 1, \dots, 200$$

eşitliği ile ifade edilmektedir. Bu modelde yer alan parametreler, çok değişkenli yapı için oluşturulan ve,

$$Y_{ij} = X_i \beta + \varepsilon_{ij} \quad \varepsilon_{ij} \sim \text{ÇDL}_p(\mathbf{0}, \Sigma_p)$$

eşitliği ile ifade edilen doğrusal model ki β parametre vektörü içinde yer alacaktır. Bu modelin matris gösterimi ise,

$$\begin{bmatrix} Y_{11} \\ Y_{12} \\ Y_{13} \\ \vdots \\ Y_{1n_1} \\ Y_{21} \\ Y_{22} \\ Y_{23} \\ \vdots \\ Y_{2n_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ (\gamma\tau)_{11} \\ (\gamma\tau)_{12} \\ (\gamma\tau)_{13} \\ (\gamma\tau)_{21} \\ (\gamma\tau)_{22} \\ (\gamma\tau)_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{13} \\ \vdots \\ \epsilon_{1n_1} \\ \epsilon_{21} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{23} \\ \vdots \\ \epsilon_{2n_2} \end{bmatrix}$$

eşitliği ile ifade edilir. Bu senaryo için parametrelerin başlangıç değeri aşağıdaki gibi alınmıştır:

$$\beta^T = [1 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad -1 \quad 0 \quad -1 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0]$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.8 & 0.7 \\ 0.8 & 1.0 & 0.6 \\ 0.7 & 0.6 & 1.0 \end{bmatrix}.$$

Çok değişkenli Laplace dağılımı altında Çok Değişkenli Doğrusal Model kullanılarak İki Yönlü Tekrarlı Ölçümlü MANOVA modeli için benzetim sonucunda elde edilen 1. senaryoya ilişkin parametre tahminleri Çizelge 8.3'de verilmiştir.

Çizelge 8.3. $i=2, k=3$ için (a ve b) $\hat{\beta}$, (c ve d) $\hat{\Sigma}$ parametre tahminlerine ve (e) Öklid Uzaklıklarına ilişkin sonuçlar

(a) $\hat{\beta}$ parametre tahminlerine ilişkin sonuçlar

$\hat{\beta}$	n=20	n=40	n=60	n=80	n=100
$\hat{\mu}$	0.9343357	0.9583207	0.9420114	0.9428974	0.9384118
\hat{Y}_1	0.4242187	0.4359213	0.4328049	0.4317002	0.4312557
\hat{Y}_2	-0.4242187	-0.4359213	-0.4328049	-0.4317002	-0.4312557
$\hat{\tau}_1$	-0.9377539	-0.9419107	-0.9412424	-0.9299563	-0.9420785
$\hat{\tau}_2$	-0.9471964	-0.9379245	-0.9401964	-0.9350825	-0.9447112
$\hat{\tau}_3$	1.8849502	1.8798352	1.8814388	1.8650389	1.8867897
$(\hat{\gamma\tau})_{11}$	-0.4205610	-0.4305423	-0.4322294	-0.4273207	-0.4324817
$(\hat{\gamma\tau})_{12}$	-0.4289108	-0.4293315	-0.4317248	-0.4290144	-0.4332632
$(\hat{\gamma\tau})_{13}$	0.8549618	0.8598738	0.8639542	0.8563351	0.8657449
$(\hat{\gamma\tau})_{21}$	0.4260510	0.4305423	0.4322294	0.4273207	0.4324817
$(\hat{\gamma\tau})_{22}$	0.4289108	0.4293315	0.4317248	0.4290144	0.4332632
$(\hat{\gamma\tau})_{23}$	-0.8549618	-0.8598738	-0.8639542	-0.8563351	-0.8639542

(b) $\hat{\beta}$ parametre tahminlerine ilişkin sonuçlar

$\hat{\beta}$	n=120	n=140	n=160	n=180	n=200
$\hat{\mu}$	0.9473596	0.9454468	0.9526958	0.9428577	0.9450611
\hat{Y}_1	0.4330096	0.4317002	0.4370941	0.4330460	0.4343434
\hat{Y}_2	-0.4330096	-0.4317002	-0.4370941	-0.4330460	-0.4343434
$\hat{\tau}_1$	-0.9532335	-0.9299563	-0.9423470	-0.9436238	-0.9522405
$\hat{\tau}_2$	-0.9555020	-0.9350825	-0.9445002	-0.9404605	-0.9473973
$\hat{\tau}_3$	1.9087356	1.8650389	1.8868471	1.8840843	1.8996378
$(\hat{\gamma\tau})_{11}$	-0.4351287	-0.4243207	-0.4335688	-0.4334185	-0.4364057
$(\hat{\gamma\tau})_{12}$	-0.4359156	-0.4290144	-0.4342916	-0.4323283	-0.4350103
$(\hat{\gamma\tau})_{13}$	0.8710443	0.8563351	0.8678604	0.8657467	0.8717160
$(\hat{\gamma\tau})_{21}$	0.4351287	0.4273207	0.4335688	0.4334185	0.4367057
$(\hat{\gamma\tau})_{22}$	0.4359156	0.4290144	0.4342916	0.4323283	0.4350103
$(\hat{\gamma\tau})_{23}$	-0.8710443	-0.8563351	-0.8678604	-0.8657467	-0.8717160

(c) $\hat{\Sigma}$ parametre tahminlerine ilişkin sonuçlar

n	$\hat{\Sigma}$
20	$\begin{bmatrix} 1.0044318 & 0.7984512 & 0.7035253 \\ 0.7984512 & 0.9958418 & 0.5990959 \\ 0.7035253 & 0.5990959 & 1.0645054 \end{bmatrix}$
40	$\begin{bmatrix} 0.9995919 & 0.7978526 & 0.7086788 \\ 0.7978526 & 0.9973721 & 0.6048851 \\ 0.7086788 & 0.6048851 & 1.0745977 \end{bmatrix}$
60	$\begin{bmatrix} 0.9860640 & 0.7949169 & 0.6923261 \\ 0.7949169 & 0.9993185 & 0.5979830 \\ 0.6923261 & 0.5979830 & 1.0579719 \end{bmatrix}$
80	$\begin{bmatrix} 0.9867425 & 0.7932354 & 0.6914486 \\ 0.7932354 & 0.9987737 & 0.5930146 \\ 0.6914486 & 0.5930146 & 1.0609198 \end{bmatrix}$
100	$\begin{bmatrix} 1.0021265 & 0.7993710 & 0.6923261 \\ 0.7993710 & 0.9954492 & 0.6000148 \\ 0.7031587 & 0.6000148 & 1.0670697 \end{bmatrix}$

(d) $\hat{\Sigma}$ parametre tahminlerine ilişkin sonuçlar

n	$\hat{\Sigma}$
120	$\begin{bmatrix} 0.9972820 & 0.7931757 & 0.6987729 \\ 0.7931757 & 0.9881925 & 0.5942682 \\ 0.6987729 & 0.5942682 & 1.0578778 \end{bmatrix}$
140	$\begin{bmatrix} 0.9972212 & 0.7970500 & 0.6989386 \\ 0.7970500 & 0.9964804 & 0.6009773 \\ 0.6989386 & 0.6009773 & 1.0646139 \end{bmatrix}$
160	$\begin{bmatrix} 1.0023961 & 0.8039029 & 0.7016847 \\ 0.8039029 & 1.0023793 & 0.6037318 \\ 0.7016857 & 0.6037318 & 1.0611172 \end{bmatrix}$
180	$\begin{bmatrix} 0.9921660 & 0.7964481 & 0.6948669 \\ 0.7964841 & 0.9970535 & 0.5961737 \\ 0.6948669 & 0.5961737 & 1.0571530 \end{bmatrix}$
200	$\begin{bmatrix} 1.0004959 & 0.8052401 & 0.6995259 \\ 0.8052401 & 1.0035122 & 0.5999236 \\ 0.6995259 & 0.5999236 & 1.0566948 \end{bmatrix}$

(e) Öklid uzaklıklarına ilişkin sonuçlar

n	$\ \hat{\beta} - \beta\ $	$\ \hat{\Sigma} - \Sigma\ $	$\ \hat{Q} - Q\ $	Ortalama iterasyon sayısı	Standart hata
20	0.0035187	0.0012888	0.0010789	21.464	± 0.201577
40	0.0026483	0.0011671	0.0003109	19.764	± 0.091971
60	0.0046643	0.0017062	0.0000962	19.267	± 0.049418
80	0.0047090	0.0018630	0.0001289	19.167	± 0.046960
100	0.0056775	0.0019205	0.0001710	18.996	± 0.044112
120	0.0048186	0.0025184	0.0001673	18.992	± 0.045472
140	0.0051068	0.0017600	0.0001263	18.989	± 0.080891
160	0.0045339	0.0019089	0.0001135	18.906	± 0.039531
180	0.0044336	0.0016380	0.0000973	18.900	± 0.043403
200	0.0062360	0.0017531	0.0001795	18.900	± 0.046391

Öklid uzaklıklarına bakıldığında örneklem büyüklükleri azaldıkça kısmi de olsa bir azalma olduğu görülmektedir. Aynı yorum ortalama iterasyon sayılarının azalışı içinde yapılabilir. Üç farklı Öklid uzaklığı bir arada değerlendirildiğinde diğer örneklem büyüklüklerine göre daha düşük değere sahip örneklem büyüklükleri n= 20 ve 40'dır.

2.Senaryo: Tekrarlı ölçümlü veri analizi için hataların çok değişkenli laplace dağılımına sahip i=2 grup, k=4 deneme olan veri düzeni için İki Yönlü ANOVA model yapısı,

$$y_{ijk} = \mu + \gamma_i + \tau_k + (\gamma\tau)_{ik} + \varepsilon_{ijk} \quad i = 1,2 ; k = 1,2,3,4$$

$$j = 1, \dots, 20 ; j = 1, \dots, 40 ; j = 1, \dots, 60 ; j = 1, \dots, 80 ; j = 1, \dots, 100$$

$$j = 1, \dots, 120 ; j = 1, \dots, 140 ; j = 1, \dots, 180 ; j = 1, \dots, 200$$

eşitliği ile ifade edilmektedir. Bu modelde yer alan parametreler, çok değişkenli yapı için oluşturulan ve,

$$Y_{ij} = X_i\beta + \varepsilon_{ij} \quad E \sim \text{ÇDL}_p(\mathbf{0}, \Sigma_p)$$

eşitliği ile ifade edilen doğrusal modelde ki β parametre vektörü içinde yer alacaktır. Bu senaryoya ilişkin modele ait matris gösterim ise,

$$\begin{bmatrix} Y_{11} \\ Y_{12} \\ Y_{13} \\ \vdots \\ Y_{1n_1} \\ Y_{21} \\ Y_{22} \\ Y_{23} \\ \vdots \\ Y_{2n_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \\ (\gamma\tau)_{11} \\ (\gamma\tau)_{12} \\ (\gamma\tau)_{13} \\ (\gamma\tau)_{14} \\ (\gamma\tau)_{21} \\ (\gamma\tau)_{22} \\ (\gamma\tau)_{23} \\ (\gamma\tau)_{24} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{13} \\ \vdots \\ \epsilon_{1n_1} \\ \epsilon_{21} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{23} \\ \vdots \\ \epsilon_{2n_2} \end{bmatrix}$$

eşitliği ile ifade edilir. Bu senaryo için parametrelerin başlangıç değeri aşağıdaki gibi alınmıştır:

$$\beta^T = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad 0]$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.8 & 0.7 & 0.8 \\ 0.8 & 1.0 & 0.6 & 0.7 \\ 0.7 & 0.6 & 1.0 & 0.8 \\ 0.8 & 0.7 & 0.8 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Çok değişkenli Laplace dağılımı altında çok değişkenli doğrusal model kullanılarak İki Yönlü Tekrarlı Ölçümlü MANOVA için benzetim sonucunda elde edilen 2. senaryoya ilişkin parametre tahminleri Çizelge 8.4 'de verilmiştir.

Çizelge 8.4. $i=2, k=4$ iken (a ve b) $\hat{\beta}$, (c ve d) $\hat{\Sigma}$ parametre tahminlerine ve (e) Öklid uzaklıklarına ilişkin sonuçlar

(a) $\hat{\beta}$ parametre tahminlerine ilişkin sonuçlar

$\hat{\beta}$	n=20	n=40	n=60	n=80	n=100
$\hat{\mu}$	0.9707059	0.9729720	0.9735877	0.9679063	0.9716171
\hat{Y}_1	0.4368120	0.4406095	0.4422818	0.4390984	0.4420926
\hat{Y}_2	-0.4368120	-0.4406095	-0.4422818	-0.4390984	-0.4420926
\hat{t}_1	0.9561633	0.9706068	0.9606236	0.9682317	0.9681081
\hat{t}_2	0.9624877	0.9648753	0.9617752	0.9662357	0.9639575
\hat{t}_3	0.9667250	0.9636175	0.9670008	0.9704144	0.9683273
\hat{t}_4	-2.8853759	-2.8909970	-2.8893996	-2.9048818	-2.9003928
$(\hat{\gamma\tau})_{11}$	0.4320409	0.4396372	0.4383533	0.4396601	0.4409155
$(\hat{\gamma\tau})_{12}$	0.4337964	0.4380429	0.4389637	0.4391462	0.4395266
$(\hat{\gamma\tau})_{13}$	0.4354553	0.4379268	0.4405213	0.4405965	0.4407570
$(\hat{\gamma\tau})_{14}$	-1.3012926	-1.3156069	-1.3178383	-1.3194028	-1.3211991
$(\hat{\gamma\tau})_{21}$	-0.4320409	-0.4396372	-0.4383533	-0.4396601	-0.4409155
$(\hat{\gamma\tau})_{22}$	-0.4337964	-0.4380429	-0.4389637	-0.4391462	-0.4395266
$(\hat{\gamma\tau})_{23}$	-0.4354553	-0.4379268	-0.4405213	-0.4405965	-0.4407570
$(\hat{\gamma\tau})_{24}$	1.3012926	1.3156069	1.3178383	1.3194028	1.3211991

(b) $\hat{\beta}$ parametre tahminlerine ilişkin sonuçlar

$\hat{\beta}$	n=120	n=140	n=160	n=180	n=200
$\hat{\mu}$	0.9796780	0.9681067	0.9716171	0.9679275	0.9710014
\hat{Y}_1	0.4435249	0.4413748	0.4420926	0.4413206	0.4429089
\hat{Y}_2	-0.4435249	-0.4413748	-0.4420926	-0.4413206	-0.4429089
\hat{t}_1	0.9687287	0.9682239	0.9681081	0.9717053	0.9655546
\hat{t}_2	0.9654950	0.9667943	0.9639575	0.9685386	0.9660954
\hat{t}_3	0.9669551	0.9710899	0.9683273	0.9789544	0.9664175
\hat{t}_4	-2.9011787	-2.9061081	-2.9003928	-2.9191983	-2.8980675
$(\hat{\gamma\tau})_{11}$	0.4406779	0.4411847	0.4409155	0.4429575	0.4410929
$(\hat{\gamma\tau})_{12}$	0.4396768	0.4407256	0.4395266	0.4419626	0.4413370
$(\hat{\gamma\tau})_{13}$	0.4397567	0.4419401	0.4407570	0.4452218	0.4414813
$(\hat{\gamma\tau})_{14}$	-1.3201114	-1.3238504	-1.3211991	-1.3301419	-1.3239111
$(\hat{\gamma\tau})_{21}$	-0.4406779	-0.4411847	-0.4409155	-0.4429575	-0.4410929
$(\hat{\gamma\tau})_{22}$	-0.4396768	-0.4407256	-0.4395266	-0.4419626	-0.4413370
$(\hat{\gamma\tau})_{23}$	-0.4397567	-0.4419401	-0.4407570	-0.4452218	-0.4414813
$(\hat{\gamma\tau})_{24}$	1.3201114	1.3238504	1.3211991	1.3301419	1.3239111

(c) $\hat{\Sigma}$ parametre tahminlerine ilişkin sonuçlar

n	$\hat{\Sigma}$
20	$\begin{bmatrix} 1.1677737 & 0.9630649 & 0.8586527 & 0.8680248 \\ 0.9630649 & 1.1436615 & 0.7591513 & 0.7645889 \\ 0.8556527 & 0.7591513 & 1.1319717 & 0.8517166 \\ 0.8680248 & 0.7645899 & 0.8517166 & 1.0020004 \end{bmatrix}$
40	$\begin{bmatrix} 1.1569236 & 0.9605886 & 0.8665676 & 0.8816796 \\ 0.9605886 & 1.1642654 & 0.7704505 & 0.7842926 \\ 0.8665676 & 0.7704505 & 1.1685605 & 0.8845626 \\ 0.8816796 & 0.7842926 & 0.8845626 & 1.0420835 \end{bmatrix}$
60	$\begin{bmatrix} 1.1720349 & 0.9702708 & 0.8729168 & 0.8848259 \\ 0.9702708 & 1.1759135 & 0.7732687 & 0.7882063 \\ 0.8729168 & 0.7732687 & 1.1685301 & 0.8866222 \\ 0.8848259 & 0.7882063 & 0.8866222 & 1.0399930 \end{bmatrix}$
80	$\begin{bmatrix} 1.1699381 & 0.9706837 & 0.8733800 & 0.8894249 \\ 0.9706837 & 1.1644405 & 0.7723888 & 0.7871623 \\ 0.8733800 & 0.7723888 & 1.1791079 & 0.8928532 \\ 0.8894249 & 0.7871623 & 0.8928532 & 1.0519308 \end{bmatrix}$
100	$\begin{bmatrix} 1.1822758 & 0.9818122 & 0.8768365 & 0.8932789 \\ 0.9818122 & 1.1753388 & 0.7807061 & 0.7944599 \\ 0.8768365 & 0.7807061 & 1.1702555 & 0.8878969 \\ 0.8932789 & 0.7944559 & 0.8878969 & 1.0468401 \end{bmatrix}$

(d) $\hat{\Sigma}$ parametre tahminlerine ilişkin sonuçlar

n	$\hat{\Sigma}$
120	$\begin{bmatrix} 1.1640490 & 0.9606843 & 0.8663228 & 0.8822261 \\ 0.9606843 & 1.1566769 & 0.7652324 & 0.7806877 \\ 0.8663228 & 0.7652324 & 1.1625886 & 0.8797199 \\ 0.8822261 & 0.7806877 & 0.8797199 & 1.0399623 \end{bmatrix}$
140	$\begin{bmatrix} 1.1674447 & 0.9697132 & 0.8714421 & 0.8886002 \\ 0.9697132 & 1.1723161 & 0.7703625 & 0.7881923 \\ 0.8714421 & 0.7703625 & 1.1731791 & 0.8874958 \\ 0.8886002 & 0.7881923 & 0.8874958 & 1.0475080 \end{bmatrix}$
160	$\begin{bmatrix} 1.1646461 & 0.9664613 & 0.8677248 & 0.8804610 \\ 0.9664613 & 1.1659624 & 0.7699489 & 0.7810688 \\ 0.8677248 & 0.7699489 & 1.1710164 & 0.8842515 \\ 0.8804610 & 0.7810688 & 0.8842515 & 1.0382343 \end{bmatrix}$
180	$\begin{bmatrix} 1.1707636 & 0.9717847 & 0.8680023 & 0.8848505 \\ 0.9717847 & 1.1709024 & 0.7716900 & 0.7868785 \\ 0.8680023 & 0.7716900 & 1.1655403 & 0.8821015 \\ 0.8848505 & 0.7868785 & 0.8821015 & 1.0445544 \end{bmatrix}$
200	$\begin{bmatrix} 1.1727502 & 0.9707860 & 0.8732497 & 0.8858043 \\ 0.9707860 & 1.1664734 & 0.7724591 & 0.7845369 \\ 0.8732497 & 0.7724591 & 1.1716540 & 0.8850204 \\ 0.8858043 & 0.7845369 & 0.8850204 & 1.0403314 \end{bmatrix}$

(e) Öklid uzaklıklarına ilişkin sonuçlar

n	$\ \hat{\beta} - \beta\ $	$\ \hat{\Sigma} - \Sigma\ $	$\ \hat{Q} - Q\ $	Ortalama iterasyon sayısı	Standart hata
20	0.0078829	0.0030974	0.0004803	20.825	± 0.058854
40	0.0071684	0.0027987	0.0003263	20.335	± 0.059769
60	0.0100889	0.0024378	0.0003827	20.274	± 0.035639
80	0.0112872	0.0034959	0.0002224	20.235	± 0.035114
100	0.0105645	0.0034435	0.0002063	20.120	± 0.037215
120	0.0088562	0.0035649	0.0002678	20.233	± 0.032307
140	0.0104771	0.0049707	0.0002650	20.211	± 0.032220
160	0.0109303	0.0034542	0.0001903	20.248	± 0.028693
180	0.0114196	0.0027876	0.0002223	20.252	± 0.029485
200	0.0107655	0.0031854	0.0002447	20.248	± 0.031296

Bu durum için Öklid uzaklıkları incelendiğinde örneklem büyüklüğü arttıkça genel olarak Öklid uzaklıkları azalmıştır. Aynı şekilde ortalama iterasyon sayıları da azalmıştır. n=20,40 ve 120 için sistematik bir azalış söz konusudur.

3.Senaryo: Tekrarlı ölçümlü ANOVA için hataların Çok Değişkenli Laplace dağılımına sahip i=2 grup, k=6 deneme olan veri düzeni için İki Yönlü ANOVA model yapısı,

$$y_{ijk} = \mu + \gamma_i + \tau_k + (\gamma\tau)_{ik} + \varepsilon_{ijk} \quad i = 1,2 ; k = 1,2,3,4,5,6$$

$$j = 1, \dots, 20 ; j = 1, \dots, 40 ; j = 1, \dots, 60 ; j = 1, \dots, 80 ; j = 1, \dots, 100$$

$$j = 1, \dots, 120 ; j = 1, \dots, 140 ; j = 1, \dots, 180 ; j = 1, \dots, 200$$

eşitliği ile ifade edilmektedir. Bu modelde yer alan parametreler, çok değişkenli yapı için oluşturulan ve,

$$Y_{ij} = X_i\beta + \varepsilon_{ij} \quad E \sim \text{ÇDL}_p(\mathbf{0}, \Sigma_p)$$

eşitliği ile ifade edilen doğrusal modelde ki β parametre vektörü içinde yer alacaktır. Bu senaryoya ilişkin modele ait matris gösterim ise,

$$\begin{bmatrix} Y_{11} \\ Y_{12} \\ Y_{13} \\ \vdots \\ Y_{1n_1} \\ Y_{21} \\ Y_{22} \\ Y_{23} \\ \vdots \\ Y_{2n_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \\ (\gamma\tau)_{11} \\ (\gamma\tau)_{12} \\ (\gamma\tau)_{13} \\ (\gamma\tau)_{14} \\ (\gamma\tau)_{15} \\ (\gamma\tau)_{16} \\ (\gamma\tau)_{21} \\ (\gamma\tau)_{22} \\ (\gamma\tau)_{23} \\ (\gamma\tau)_{24} \\ (\gamma\tau)_{25} \\ (\gamma\tau)_{26} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \vdots \\ \varepsilon_{1n_1} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{23} \\ \vdots \\ \varepsilon_{2n_2} \end{bmatrix}$$

eşitliği ile ifade edilmektedir. Bu senaryo için parametrelerin başlangıç değeri aşağıdaki gibi alınmıştır:

$$\beta^T = [1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ 0]$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.8 & 0.7 & 0.8 & 0.7 & 0.8 \\ 0.8 & 1.0 & 0.6 & 0.7 & 0.6 & 0.7 \\ 0.7 & 0.6 & 1.0 & 0.8 & 0.7 & 0.6 \\ 0.8 & 0.7 & 0.8 & 1.0 & 0.6 & 0.7 \\ 0.7 & 0.6 & 0.7 & 0.6 & 1.0 & 0.7 \\ 0.8 & 0.7 & 0.6 & 0.7 & 0.7 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Çok Değişkenli Laplace dağılımı altında çok değişkenli doğrusal model kullanılarak İki Yönlü Tekrarlı Ölçümlü MANOVA modeli için benzetim sonucunda elde edilen 3. Senaryoya ilişkin parametre tahminleri Çizelge 8.5'de verilmiştir.

Çizelge 8.5. $i=2, k=6$ iken (a ve b) $\hat{\beta}$, (c ve d) $\hat{\Sigma}$ parametre tahminlerine ve (e) Öklid uzaklıklarına ilişkin sonuçlar

(a) $\hat{\beta}$ parametre tahminlerine ilişkin sonuçlar

$\hat{\beta}$	n=20	n=40	n=60	n=80	n=100
$\hat{\mu}$					
\hat{Y}_1	0.9836214	0.9675001	0.9824309	0.9879555	0.9768839
\hat{Y}_2	0.4672239	0.4651112	0.4707801	0.4731927	0.4691291
$\hat{\tau}_1$	-0.4672239	-0.4651112	-0.4707801	-0.4731927	-0.4691291
$\hat{\tau}_2$	0.9755540	0.9878288	0.9784105	0.9686451	0.9785333
$\hat{\tau}_3$	0.9601416	0.9816850	0.9829910	0.9643098	0.9822740
$\hat{\tau}_4$	0.9561368	0.9794136	0.9569465	0.9750069	0.9893693
$\hat{\tau}_5$	0.9516076	0.9885814	0.9621299	0.9661580	0.9788247
$\hat{\tau}_6$	0.9903658	0.9633501	0.9682543	0.9800387	0.9915044
$(\hat{\gamma\tau})_{11}$	-4.8338057	-4.9008588	-4.8487322	-4.8541585	-4.9205058
$(\hat{\gamma\tau})_{12}$	0.4656464	0.4718541	0.4693311	0.4665448	0.4693910
$(\hat{\gamma\tau})_{13}$	0.4605553	0.4698463	0.4709121	0.4649265	0.4706100
$(\hat{\gamma\tau})_{14}$	0.4560595	0.4688283	0.4620782	0.4685676	0.4730702
$(\hat{\gamma\tau})_{15}$	0.4576254	0.4721078	0.4637188	0.4655712	0.4695142
$(\hat{\gamma\tau})_{16}$	0.4701088	0.4635119	0.4659045	0.4703409	0.4737822
$(\hat{\gamma\tau})_{21}$	-2.3129956	-2.3461485	-2.3319447	-2.3360511	-2.3563676
$(\hat{\gamma\tau})_{22}$	-0.4656464	-0.4718541	-0.4693311	-0.4665448	-0.4693910
$(\hat{\gamma\tau})_{23}$	-0.4605553	-0.4698463	-0.4709121	-0.4649265	-0.4706100
$(\hat{\gamma\tau})_{24}$	-0.4590595	-0.4688283	-0.4620782	-0.4685676	-0.4730702
$(\hat{\gamma\tau})_{25}$	-0.4576254	-0.4721078	-0.4637188	-0.4656712	-0.4695142
$(\hat{\gamma\tau})_{26}$	-0.4701088	-0.4635119	-0.4659045	-0.4703409	-0.4737822
$(\hat{\gamma\tau})_{26}$	2.3129956	2.3461485	2.3319447	2.3360511	2.3563676

(b) $\hat{\beta}$ parametre tahminlerine ilişkin sonuçlar

$\hat{\beta}$	n=120	n=140	n=160	n=180	n=200
$\hat{\mu}$	0.9788977	0.9739180	0.9729461	0.9726927	0.9807626
$\hat{\gamma}_1$	0.4697373	0.4684743	0.4683467	0.4682529	0.4708221
$\hat{\gamma}_2$	-0.4697373	-0.4684743	-0.4683467	-0.4682529	-0.4708221
$\hat{\tau}_1$	0.9871244	0.9739044	0.9831968	0.9799574	0.9783852
$\hat{\tau}_2$	0.9760967	0.9766738	0.9724593	0.9735484	0.9746975
$\hat{\tau}_3$	0.9784222	0.9810981	0.9891323	0.9818617	0.9803757
$\hat{\tau}_4$	0.9807161	0.9779680	0.9846992	0.9802741	0.9788336
$\hat{\tau}_5$	0.9738591	0.9735276	0.9798464	0.9756416	0.9867033
$\hat{\tau}_6$	-4.8962185	-4.8831719	-4.9093341	-4.8912832	-4.8986952
$(\hat{\gamma\tau})_{11}$	0.4724626	0.4684673	0.4716457	0.4707386	0.4698891
$(\hat{\gamma\tau})_{12}$	0.4688000	0.4693490	0.4681228	0.4686002	0.4686269
$(\hat{\gamma\tau})_{13}$	0.4694943	0.4708738	0.4737284	0.4713748	0.4705867
$(\hat{\gamma\tau})_{14}$	0.4703270	0.4699015	0.4721649	0.4708676	0.4699092
$(\hat{\gamma\tau})_{15}$	0.4680943	0.4683366	0.4705734	0.4693487	0.4726697
$(\hat{\gamma\tau})_{16}$	-2.3491782	-2.3469282	-2.3562466	-2.3509299	-2.3516816
$(\hat{\gamma\tau})_{21}$	-0.4724626	-0.4684673	-0.4716571	-0.4707386	-0.4698891
$(\hat{\gamma\tau})_{22}$	-0.4688000	-0.4693490	-0.4681228	-0.4686002	-0.4686269
$(\hat{\gamma\tau})_{23}$	-0.4694943	-0.4708738	-0.4737284	-0.4713748	-0.4705867
$(\hat{\gamma\tau})_{24}$	-0.4703270	-0.4699015	-0.4721679	-0.4708676	-0.4699092
$(\hat{\gamma\tau})_{25}$	-0.4680943	-0.4683366	-0.4726697	-0.4693487	-0.4726697
$(\hat{\gamma\tau})_{26}$	2.3491782	2.3469282	2.3516816	2.3509299	2.3516816

(c) $\hat{\Sigma}$ parametre tahminlerine ilişkin sonuçlar

n	$\hat{\Sigma}$					
20	1.0755235	0.8836730	0.7874955	0.8907883	0.7881128	0.8416675
	0.8836730	1.0784877	0.6997431	0.7992564	0.6976827	0.7473167
	0.7874955	0.6997431	1.0757915	0.8903538	0.7866739	0.6571116
	0.8907883	0.7992564	0.8903538	1.0989230	0.6971047	0.7560317
	0.7881128	0.6976827	0.7866739	0.6971047	1.0726606	0.7505855
	0.8416675	0.7473167	0.6571116	0.7560317	0.7505855	1.0199291
40	1.0841988	0.8920258	0.7864204	0.8827721	0.7853213	0.8309794
	0.8920258	1.0904537	0.6925245	0.7912992	0.6842668	0.7361435
	0.7864204	0.6925245	1.0760441	0.8805915	0.7800192	0.6417744
	0.8827721	0.7912992	0.8805915	1.0759994	0.6807673	0.7357323
	0.7853213	0.6842668	0.7800192	0.6807673	1.0753097	0.7313984
	0.8309794	0.7361435	0.6417744	0.7357323	0.7313984	0.9975525
60	1.0923928	0.8902089	0.7901686	0.8878455	0.7928542	0.8393031
	0.8902089	1.0845872	0.6891677	0.7862598	0.6874106	0.7354355
	0.7901686	0.6891677	1.0820087	0.8842451	0.7882960	0.6405009
	0.8878455	0.7862598	0.8842451	1.0781985	0.6878597	0.7351337
	0.7928542	0.6874106	0.7882960	0.6878597	1.0933798	0.7415198
	0.8393031	0.7354355	0.6405009	0.7351337	0.7415198	1.0111390
80	1.1041560	0.9052543	0.8068977	0.9076055	0.8054252	0.8547984
	0.9052543	1.0982415	0.7088182	0.8069199	0.7006254	0.7525235
	0.8068977	0.7088182	1.1104083	0.9086936	0.8102571	0.6589736
	0.9076055	0.8069199	0.9086936	1.1062715	0.7095593	0.7603238
	0.8054252	0.7006254	0.8102571	0.7095593	1.1019043	0.7543648
	0.8547984	0.7525235	0.6589736	0.7603238	0.7543678	1.0291956
100	1.0981987	0.9010671	0.7991361	0.9006872	0.8018276	0.8519262
	0.9010671	1.1050489	0.6985855	0.8007166	0.7048192	0.7556434
	0.7991361	0.6985855	1.0937092	0.8996331	0.7989834	0.6536867
	0.9006872	0.8007166	0.8996331	1.0992524	0.7048266	0.7542599
	0.8018276	0.7048192	0.7989834	0.7048266	1.1003228	0.7553096
	0.8519262	0.7556434	0.6536867	0.7542599	0.7553096	1.0262999

(d) $\hat{\Sigma}$ parametre tahminlerine ilişkin sonuçlar

n	$\hat{\Sigma}$					
120	1.0988110	0.9043126	0.8037933	0.9030130	0.7978092	0.8485993
	0.9043126	1.1044634	0.7084819	0.8075017	0.7030294	0.7539342
	0.8037933	0.7084819	1.1006292	0.9040983	0.7995945	0.6508123
	0.9030130	0.8075017	0.9040983	1.1026827	0.7021211	0.7521387
	0.7978092	0.7030294	0.7995945	0.7021211	1.0917227	0.7449427
	0.8485993	0.7539342	0.6508123	0.7521387	0.7449427	1.0202562
140	1.0929229	0.8962434	0.7967582	0.8988371	0.7954586	0.8465573
	0.8962434	1.0919103	0.6956042	0.7984310	0.6948726	0.7449659
	0.7967582	0.6956042	1.0922195	0.8958949	0.7959612	0.6483871
	0.8988371	0.7984310	0.8958949	1.0962205	0.6995046	0.7494408
	0.7954586	0.6948726	0.7959612	0.6995046	1.0938862	0.7469972
	0.8465573	0.7449659	0.6483871	0.7494408	0.7469972	1.0217855
160	1.0947249	0.8946132	0.8001038	0.9014575	0.8019377	0.8522877
	0.8946132	1.0927400	0.7021088	0.8026561	0.7030575	0.7550096
	0.7937518	0.6944690	1.0981524	0.9009969	0.8004817	0.6523721
	0.8933666	0.7934123	0.9009969	1.1044682	0.7009996	0.7538706
	0.7947393	0.6970128	0.8004817	0.7009996	1.1004649	0.7520755
	0.8452087	0.7424196	0.6523121	0.7538706	0.750755	1.0267292
180	1.0947984	0.8968889	0.7978325	0.8947885	0.7981766	0.8471711
	0.8968889	1.0975999	0.6985158	0.7949978	0.6986920	0.7489748
	0.7978325	0.6985158	1.0979269	0.8958992	0.8013219	0.6508717
	0.8947885	0.7949978	0.8958992	1.0915233	0.6979733	0.7462083
	0.7981766	0.6986920	0.8013219	0.6979733	1.1027434	0.7518233
	0.8471711	0.7489748	0.6508717	0.7462083	0.7518233	1.0203333
200	1.0999886	0.9030294	0.8001038	0.9014575	0.8019377	0.8522977
	0.9030294	1.1028539	0.7021088	0.8026561	0.7030575	0.7550096
	0.8001038	0.7021088	1.0981524	0.9009969	0.8004817	0.6523121
	0.9014575	0.8026561	0.9009969	1.1044682	0.7009996	0.7538706
	0.8019377	0.7030575	0.8004817	0.7009996	1.1004649	0.7520755
	0.8522977	0.7550096	0.6523121	0.7538706	0.7520755	1.0267292

(e) Öklid uzaklıklarına ilişkin sonuçlar

n	$\ \hat{\beta} - \beta\ $	$\ \hat{\Sigma} - \Sigma\ $	$\ \hat{Q} - Q\ $	Ortalama iterasyon sayısı	Standart hata
20	0.0103165	0.0037699	0.0002837	21.299	± 0.030141
40	0.0175894	0.0039191	0.0002086	20.876	± 0.036714
60	0.0171243	0.0045007	0.0002157	20.858	± 0.032877
80	0.0194352	0.0042138	0.0002291	20.803	± 0.030217
100	0.0179484	0.0050036	0.0001985	20.852	± 0.024138
120	0.0206466	0.0043103	0.0002327	20.890	± 0.021871
140	0.0144353	0.0054911	0.0002194	20.875	± 0.021536
160	0.0214375	0.0057407	0.0002171	20.874	± 0.020653
200	0.0184408	0.0054787	0.0002254	20.883	± 0.015670

Bu durumda, özellikle β parametre tahmini için her üç Öklid uzaklığına ilişkin sonuçlar diğer ilk iki senaryoya göre ($i=2$ $k=3$ ve $k=4$ olması durumları) daha düşük değerlere sahiptir. $i=2$ grup $k=6$ deneme olan bir tekrarlı ölçümlü veri düzeni için parametre tahminleri açısından daha tutarlı sonuçlar elde edildiği söylenebilir.

4.Senaryo: Tekrarlı ölçümlü veri analizi için hataların Çok Değişkenli Laplace dağılımına sahip $i=3$ grup, $k=3$ deneme olan veri düzeni için İki Yönlü ANOVA model yapısı,

$$y_{ijk} = \mu + \gamma_i + \tau_k + (\gamma\tau)_{ik} + \varepsilon_{ijk} \quad i = 1,2,3 ; k = 1,2,3$$

$$j = 1, \dots, 20 ; j = 1, \dots, 40 ; j = 1, \dots, 60 ; j = 1, \dots, 80 ; j = 1, \dots, 100$$

$$j = 1, \dots, 120 ; j = 1, \dots, 140 ; j = 1, \dots, 180 ; j = 1, \dots, 200$$

eşitliği ile ifade edilmektedir. Bu modelde yer alan parametreler, çok değişkenli yapı için oluşturulan ve

$$Y_{ij} = X_i\beta + \varepsilon_{ij} \quad E \sim \text{ÇDL}_p(\mathbf{0}, \Sigma_p)$$

eşitliği ile ifade edilen doğrusal modelde ki β parametre vektörü içinde yer alacaktır. Bu senaryoya ilişkin modele ait matris gösterim ise,

$$\begin{bmatrix} Y_{11} \\ Y_{12} \\ Y_{13} \\ \vdots \\ Y_{1n_1} \\ Y_{21} \\ Y_{22} \\ Y_{23} \\ \vdots \\ Y_{2n_2} \\ Y_{31} \\ Y_{32} \\ Y_{33} \\ \vdots \\ Y_{3n_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ (\gamma\tau)_{11} \\ (\gamma\tau)_{12} \\ (\gamma\tau)_{13} \\ (\gamma\tau)_{21} \\ (\gamma\tau)_{22} \\ (\gamma\tau)_{23} \\ (\gamma\tau)_{31} \\ (\gamma\tau)_{32} \\ (\gamma\tau)_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{13} \\ \vdots \\ \epsilon_{1n_1} \\ \epsilon_{21} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{23} \\ \vdots \\ \epsilon_{2n_2} \\ \epsilon_{31} \\ \epsilon_{32} \\ \epsilon_{33} \\ \vdots \\ \epsilon_{3n_3} \end{bmatrix}$$

eşitliği ile ifade edilir. Bu senaryo için parametrelerin başlangıç değeri aşağıdaki gibi alınmıştır:

$$\beta^T = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.8 & 0.7 \\ 0.8 & 1.0 & 0.6 \\ 0.7 & 0.6 & 1.0 \end{bmatrix}.$$

Çok Değişkenli Laplace dağılımı altında çok değişkenli doğrusal model kullanılarak İki Yönlü Tekrarlı Ölçümlü MANOVA modeli için benzetim sonucunda elde edilen 4. senaryoya ilişkin parametre tahminleri Çizelge 8.6 'da verilmiştir.

Çizelge 8.6. $i=3, k=3$ iken (a ve b) $\hat{\beta}$, (c ve d) $\hat{\Sigma}$ parametre tahminlerine ve (e) Öklid uzaklıklarına ilişkin sonuçlar

(a) $\hat{\beta}$ parametre tahminlerine ilişkin sonuçlar

$\hat{\beta}$	n= 20	n= 40	n= 60	n= 80	n= 100
$\hat{\mu}$	0.9366305	0.9429136	0.9346919	0.9329772	0.9491782
\hat{Y}_1	0.2766231	0.2803139	0.2784529	0.2777897	0.2823623
\hat{Y}_2	0.2763619	0.2803139	0.2786254	0.2777897	0.2823541
\hat{Y}_3	-0.5529850	-0.5606277	-0.5570783	-0.5555795	-0.5647163
\hat{t}_1	0.9408612	0.9322257	0.9425108	0.9361708	0.9302790
\hat{t}_2	0.9404960	0.9334102	0.9470248	0.9305103	0.9336892
\hat{t}_3	-1.8813572	-1.8656359	-1.8895356	-1.8666811	-1.8639682
$(\hat{\gamma\tau})_{11}$	0.2790280	0.2780438	0.2801211	0.2787153	0.2780030
$(\hat{\gamma\tau})_{12}$	0.2794410	0.2781904	0.2809977	0.2773411	0.2788274
$(\hat{\gamma\tau})_{13}$	-0.5584689	-0.5562342	-0.5611188	-0.5560563	-0.5568305
$(\hat{\gamma\tau})_{21}$	0.2786562	0.2780438	0.2802327	0.2787153	0.2779960
$(\hat{\gamma\tau})_{22}$	0.2791086	0.2781904	0.2811094	0.2773411	0.2788190
$(\hat{\gamma\tau})_{23}$	-0.5577648	-0.5562342	-0.5613421	-0.5560563	-0.5568151
$(\hat{\gamma\tau})_{31}$	-0.5576841	-0.5560876	0.5603538	-0.5574305	-0.5559991
$(\hat{\gamma\tau})_{32}$	-0.5585496	-0.5563807	-0.5621071	-0.5546822	-0.5576465
$(\hat{\gamma\tau})_{33}$	1.1162337	1.1124683	1.1224609	1.1121127	1.1136455

(b) $\hat{\beta}$ parametre tahminlerine ilişkin sonuçlar

$\hat{\beta}$	n=120	n=140	n=160	n=180	n=200
$\hat{\mu}$	0.9389180	0.9368637	0.9371310	0.9404586	0.9327677
\hat{Y}_1	0.2798181	0.2797428	0.2797672	0.2803592	0.2786060
\hat{Y}_2	0.2797924	0.2797428	0.2797672	0.2803374	0.2786060
\hat{Y}_3	-0.5596105	-0.5594855	-0.5595345	-0.5606966	-0.5572120
\hat{t}_1	0.9440919	0.9342348	0.9396783	0.9366677	0.9387667
\hat{t}_2	0.9395440	0.9283549	0.9362148	0.9355239	0.9370950
\hat{t}_3	-1.8836359	-1.8625897	-1.8758931	-1.8721916	-1.8758617
$(\hat{\gamma\tau})_{11}$	0.2808487	0.2789619	0.2803666	0.2795662	0.2801989
$(\hat{\gamma\tau})_{12}$	0.2797519	0.2775991	0.2795442	0.2792889	0.2798438
$(\hat{\gamma\tau})_{13}$	-0.5606006	-0.5565610	-0.5591109	-0.5588551	-0.5600427
$(\hat{\gamma\tau})_{21}$	0.2808272	0.2789619	0.2803666	0.2795463	0.2801989
$(\hat{\gamma\tau})_{22}$	0.2797423	0.2775991	0.2795442	0.2792703	0.2798438
$(\hat{\gamma\tau})_{23}$	-0.5605696	-0.5565610	-0.5599109	-0.5588166	-0.5600427
$(\hat{\gamma\tau})_{31}$	-0.5616759	-0.5579239	-0.5607333	-0.5591125	-0.5603979
$(\hat{\gamma\tau})_{32}$	-0.5594943	-0.5551981	-0.5590885	-0.5585592	-0.5596876
$(\hat{\gamma\tau})_{33}$	1.1211702	1.1131220	1.1198218	1.1176717	1.1200855

(c) $\hat{\Sigma}$ parametre tahminlerine ilişkin sonuçlar

n	$\hat{\Sigma}$
20	$\begin{bmatrix} 1.502018 & 1.303201 & 0.948636 \\ 1.303201 & 1.498953 & 0.841603 \\ 0.948636 & 0.841603 & 1.108061 \end{bmatrix}$
40	$\begin{bmatrix} 1.5505105 & 1.346606 & 0.9847599 \\ 1.34966058 & 1.540564 & 0.8792680 \\ 0.9847599 & 0.879268 & 1.1346201 \end{bmatrix}$
60	$\begin{bmatrix} 1.5302728 & 1.3315924 & 0.9697795 \\ 1.3315924 & 1.5326334 & 0.8732823 \\ 0.9697795 & 0.8732823 & 1.1565401 \end{bmatrix}$
80	$\begin{bmatrix} 1.5296939 & 1.3331180 & 0.9681561 \\ 1.3331180 & 1.5341953 & 0.8692693 \\ 0.9681561 & 0.8692693 & 1.1447393 \end{bmatrix}$
100	$\begin{bmatrix} 1.5338223 & 1.3330751 & 0.9629672 \\ 1.3330751 & 1.5324607 & 0.8621925 \\ 0.9629672 & 0.8621925 & 1.1324817 \end{bmatrix}$

(d) $\hat{\Sigma}$ parametre tahminlerine ilişkin sonuçlar

n	$\hat{\Sigma}$
120	$\begin{bmatrix} 1.554092 & 1.3554860 & 0.9821730 \\ 1.355486 & 1.5596181 & 0.8819507 \\ 0.982173 & 0.8819507 & 1.1469483 \end{bmatrix}$
140	$\begin{bmatrix} 1.5513922 & 1.3483842 & 0.9748599 \\ 1.3483842 & 1.5467587 & 0.8724194 \\ 0.9748599 & 0.8724194 & 1.1356878 \end{bmatrix}$
160	$\begin{bmatrix} 1.5460941 & 1.3456880 & 0.9714823 \\ 1.346880 & 1.5454318 & 0.8717438 \\ 0.9714823 & 0.8717438 & 1.1349727 \end{bmatrix}$
180	$\begin{bmatrix} 1.543278 & 1.3410964 & 0.9740590 \\ 1.341096 & 1.5382372 & 0.8717924 \\ 0.974059 & 0.8717924 & 1.1400511 \end{bmatrix}$
200	$\begin{bmatrix} 1.5410728 & 1.3400609 & 0.9716799 \\ 1.3400609 & 1.5388626 & 0.8731546 \\ 0.9716799 & 0.8731546 & 1.1337651 \end{bmatrix}$

(e) Öklid uzaklıklarına ilişkin sonuçlar

n	$\ \hat{\beta} - \beta\ $	$\ \hat{\Sigma} - \Sigma\ $	$\ \hat{Q} - Q\ $	Ortalama iterasyon sayısı	Standart hata
20	0.0108583	0.0021096	0.0002691	21.090	± 0.15965
40	0.0067969	0.0036791	0.0003681	20.568	± 0.07230
60	0.0092014	0.0021501	0.0002542	20.385	± 0.11147
80	0.0084312	0.0027780	0.0002728	20.322	± 0.04960
100	0.0085405	0.0037565	0.0002331	20.441	± 0.12204
120	0.0072023	0.0033931	0.0002933	20.390	± 0.12014
140	0.0084677	0.0042293	0.0002760	20.247	± 0.03511
160	0.0090991	0.0038955	0.0002206	20.450	± 0.09808
180	0.0075026	0.0028243	0.0002292	20.386	± 0.08594
200	0.0077615	0.0027882	0.0002747	20.385	± 0.03658

Bu durum için örneklem büyüklüğü arttıkça (n=160 ve 140 hariç) Öklid uzaklıklarında ve ortalama iterasyon sayısında dengeli bir azalma vardır. i=3 grup ve k= 3 deneme olması durumunda parametre değerlerinin tutarlı sonuç verdiği söylenebilir.

5.Senaryo: Tekrarlı ölçümlü veri analizi için hataların Çok Değişkenli Laplace dağılımına sahip i=3 grup, k=4 deneme olan veri düzeni için İki Yönlü Tekrarlı Ölçümlü ANOVA model yapısı,

$$Y_{ijk} = \mu + \gamma_i + \tau_k + (\gamma\tau)_{ik} + \varepsilon_{ijk} \quad i = 1,2,3 ; k = 1,2,3,4$$

$$j = 1, \dots, 20 ; j = 1, \dots, 40 ; j = 1, \dots, 60 ; j = 1, \dots, 80 ; j = 1, \dots, 100$$

$$j = 1, \dots, 120 ; j = 1, \dots, 140 ; j = 1, \dots, 180 ; j = 1, \dots, 200$$

eşitliği ile ifade edilmektedir. Bu modelde yer alan parametreler, çok değişkenli yapı için oluşturulan ve

$$Y_{ij} = X_i\beta + \varepsilon_{ij} \quad E \sim \text{ÇDL}_p(\mathbf{0}, \Sigma_p)$$

eşitliği ile ifade edilen doğrusal modelde ki β parametre vektörü içinde yer alacaktır. Bu senaryoya ilişkin modele ait matris gösterim ise,

$$X_i = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} Y_{11} \\ Y_{12} \\ Y_{13} \\ \vdots \\ Y_{1n_1} \\ Y_{21} \\ Y_{22} \\ Y_{23} \\ \vdots \\ Y_{2n_2} \\ Y_{31} \\ Y_{32} \\ Y_{33} \\ \vdots \\ Y_{3n_3} \end{bmatrix} = X_i \begin{bmatrix} \mu \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \\ (\gamma\tau)_{11} \\ (\gamma\tau)_{12} \\ (\gamma\tau)_{13} \\ (\gamma\tau)_{14} \\ (\gamma\tau)_{21} \\ (\gamma\tau)_{22} \\ (\gamma\tau)_{23} \\ (\gamma\tau)_{24} \\ (\gamma\tau)_{31} \\ (\gamma\tau)_{32} \\ (\gamma\tau)_{33} \\ (\gamma\tau)_{34} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{13} \\ \vdots \\ \epsilon_{1n_1} \\ \epsilon_{21} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{23} \\ \vdots \\ \epsilon_{2n_2} \\ \epsilon_{31} \\ \epsilon_{32} \\ \epsilon_{33} \\ \vdots \\ \epsilon_{3n_3} \end{bmatrix}$$

eşitliği ile ifade edilir. Bu senaryo için parametrelerin başlangıç değeri aşağıdaki gibi alınmıştır:

$$\beta^T = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.8 & 0.7 & 0.8 \\ 0.8 & 1.0 & 0.6 & 0.7 \\ 0.7 & 0.6 & 1.0 & 0.8 \\ 0.8 & 0.7 & 0.8 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Çok Değişkenli Laplace dağılımı altında çok değişkenli doğrusal model kullanılarak İki Yönlü Tekrarlı Ölçümlü MANOVA modeli için benzetim sonucunda elde edilen 5. senaryoya ilişkin parametre tahminleri Çizelge 8.7 'de verilmiştir.

Çizelge 8.7. $i=3, k=4$ iken (a ve b) $\hat{\beta}$, (c ve d) $\hat{\Sigma}$ parametre tahminlerine ve (e) Öklid Uzaklıklarına ilişkin sonuçlar

(a) $\hat{\beta}$ parametre tahminlerine ilişkin sonuçlar

$\hat{\beta}$	n= 20	n=40	n=60	n=80	n=100
$\hat{\mu}$					
\hat{Y}_1	0.9528148	0.9583000	0.9620412	0.9589830	0.9529497
\hat{Y}_2	0.2935655	0.2956617	0.2961229	0.2952733	0.2943405
\hat{Y}_3	0.2935655	0.2956620	0.2961229	0.2952733	0.2943405
\hat{t}_1	-0.5871310	-0.5913237	-0.5922458	-0.5905467	-0.5886810
\hat{t}_2	0.9637361	0.9532139	0.9660156	0.9634640	0.9616464
\hat{t}_3	0.9666743	0.9488688	0.9717128	0.9623121	0.9638355
\hat{t}_4	0.9737147	0.9567893	0.9666702	0.9598601	0.9591257
$(\hat{\nu\tau})_{11}$	-2.9041251	-2.8588720	-2.9043985	-2.8856362	-2.8846076
$(\hat{\nu\tau})_{12}$	0.2961482	0.2946504	0.2968781	0.2963021	0.2964162
$(\hat{\nu\tau})_{13}$	0.2969059	0.2938715	0.2982533	0.2960728	0.2969045
$(\hat{\nu\tau})_{14}$	0.2987021	0.2952526	0.2971790	0.2954783	0.2959116
$(\hat{\nu\tau})_{21}$	-0.8917563	-0.8837746	-0.8923104	-0.8878532	-0.8892323
$(\hat{\nu\tau})_{22}$	0.2961482	0.2946506	0.2968781	0.2963021	0.2964162
$(\hat{\nu\tau})_{23}$	0.2969059	0.2938718	0.2982533	0.2960728	0.2969045
$(\hat{\nu\tau})_{24}$	0.2987021	0.2952529	0.2971790	0.2954783	0.2959116
$(\hat{\nu\tau})_{31}$	-0.8917563	-0.8837754	-0.8923104	-0.8878532	-0.8892323
$(\hat{\nu\tau})_{32}$	-0.5922964	-0.5893010	-0.5937561	-0.5926042	-0.5928235
$(\hat{\nu\tau})_{33}$	-0.5937118	-0.5877434	-0.5965067	-0.5921456	-0.5938090
$(\hat{\nu\tau})_{34}$	1.1861083	1.1710444	1.1902628	1.1847498	1.1866414
$(\hat{\nu\tau})_{34}$	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000

(b) $\hat{\beta}$ parametre tahminlerine ilişkin sonuçlar

$\hat{\beta}$	n= 120	n= 140	n= 160	n= 180	n= 200
$\hat{\mu}$					
$\hat{\gamma}_1$	0.9592522	0.9607353	0.9603497	0.9602540	0.9613022
$\hat{\gamma}_2$	0.2957800	0.2961980	0.2959110	0.2957499	0.2959758
$\hat{\gamma}_3$	0.2957800	0.2961980	0.2959110	0.2957499	0.2959758
$\hat{\tau}_1$	-0.5915601	-0.5923960	-0.5918220	-0.5914998	-0.5919516
$\hat{\tau}_2$	0.9614470	0.9549278	0.9587470	0.9609653	0.9594038
$\hat{\tau}_3$	0.9579880	0.9524180	0.9610638	0.9591740	0.9612327
$\hat{\tau}_4$	0.9518102	0.9584799	0.9593127	0.9580554	0.9521500
$(\hat{\gamma}\hat{\tau})_{11}$	-2.8712452	-2.8658256	-2.8791235	-2.8781947	-2.8727866
$(\hat{\gamma}\hat{\tau})_{12}$	0.2965580	0.2949281	0.2956476	0.2959033	0.2954355
$(\hat{\gamma}\hat{\tau})_{13}$	0.2958457	0.2942792	0.2962192	0.2955193	0.2959572
$(\hat{\gamma}\hat{\tau})_{14}$	0.2941790	0.2957819	0.2956980	0.2952110	0.2937109
$(\hat{\gamma}\hat{\tau})_{21}$	-0.8865828	-0.8849893	-0.8875648	-0.8866336	-0.8851036
$(\hat{\gamma}\hat{\tau})_{22}$	0.2965580	0.2949281	0.2956476	0.2959033	0.2954355
$(\hat{\gamma}\hat{\tau})_{23}$	0.2958457	0.2942792	0.2962192	0.2955193	0.2959572
$(\hat{\gamma}\hat{\tau})_{24}$	0.2941790	0.2957819	0.2956980	0.2952110	0.2937109
$(\hat{\gamma}\hat{\tau})_{31}$	-0.8865828	-0.8849893	-0.8875648	-0.8866336	-0.8851036
$(\hat{\gamma}\hat{\tau})_{32}$	-0.5931161	-0.5898563	-0.5912952	-0.5918066	-0.5908710
$(\hat{\gamma}\hat{\tau})_{33}$	-0.5916915	-0.5885585	-0.5924384	-0.5910386	-0.5919143
$(\hat{\gamma}\hat{\tau})_{34}$	1.1848076	1.1784148	1.1837336	1.1828453	1.1827853
$(\hat{\gamma}\hat{\tau})_{34}$	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000

(c) $\hat{\Sigma}$ parametre tahminlerine ilişkin sonuçlar

n	$\hat{\Sigma}$			
20	1.3503705	1.1488777	1.0451444	0.9687985
	1.1488777	1.3460327	0.9454135	0.8613623
	1.0451444	0.9454135	1.3410667	0.9639137
	0.9687985	0.8613623	0.9639137	1.0777680
40	1.3654231	1.1668799	1.0643309	0.9765447
	1.1668799	1.3750170	0.9654179	0.8756600
	1.0643309	0.9654179	1.3596995	0.9732008
	0.9765447	0.8756600	0.9732008	1.0741574
60	1.3678623	1.1686993	1.0753641	0.9852679
	1.1686993	1.3703575	0.9774173	0.8873079
	1.0753641	0.9774173	1.3742175	0.9877017
	0.9852679	0.8873079	0.9877017	1.0895817
80	1.3627383	1.1632192	1.06891536	0.9741205
	1.1632192	1.3615791	0.9685410	0.8775604
	1.0689153	0.9685410	1.3790015	0.9841721
	0.9741205	0.8775604	0.9841721	1.0783736
100	1.3575224	1.1567269	1.0610195	0.9747268
	1.1567269	1.3576645	0.9621696	0.8774332
	1.0610195	0.9621696	1.3617421	0.9786567
	0.9747268	0.8774332	0.9786567	1.0837014

(d) $\hat{\Sigma}$ parametre tahminlerine ilişkin sonuçlar

n	$\hat{\Sigma}$			
120	1.3721790	1.1751536	1.0754789	0.9894056
	1.1751536	1.3748087	0.9754655	0.8888010
	1.0754789	0.9754655	1.3732915	0.9889944
	0.9894056	0.8888010	0.9889944	1.0967173
140	1.360908	1.1657800	1.0666762	0.98129902
	1.165780	1.3666817	0.9687807	0.8816579
	1.066676	0.9687807	1.3690868	0.9857011
	0.981299	0.8816579	0.9857011	1.0901947
160	1.3703401	1.1718074	1.0708016	0.9860974
	1.1718074	1.3676219	0.9739522	0.8886204
	1.0708016	0.9739522	1.3693614	0.9872268
	0.9860974	0.8886204	0.9872268	1.0953448
180	1.3788486	1.1783236	1.0788946	0.9981389
	1.1783236	1.3749278	0.9783433	0.8963809
	1.0788946	0.9783433	1.3740324	0.9946104
	0.9981389	0.8963809	0.9946104	1.1091564
200	1.3770038	1.1791500	1.0760128	0.9969181
	1.1791500	1.3805686	0.9788248	0.8974431
	1.0760128	0.9788248	1.3720216	0.9909526
	0.9969181	0.8974431	0.9909526	1.1044924

(e) Öklid uzaklıklarına ilişkin sonuçlar

n	$\ \hat{\beta} - \beta\ $	$\ \hat{\Sigma} - \Sigma\ $	$\ \hat{Q} - Q\ $	Ortalama iterasyon sayısı	Standart hata
20	0.0120570	0.0035496	0.0004953	20.759	± 0.040725
40	0.0096736	0.0040636	0.0003120	20.663	± 0.089226
60	0.0115271	0.0035303	0.0002265	20.447	± 0.038867
80	0.0123313	0.0045310	0.0001895	20.419	± 0.034937
100	0.0114756	0.0051898	0.0002516	20.500	± 0.030967
120	0.0128025	0.0029982	0.0003547	20.417	± 0.034062
140	0.0114183	0.0033263	0.0002137	20.493	± 0.030180
160	0.0114495	0.0036018	0.0001816	20.526	± 0.027460
180	0.0135047	0.0035392	0.0002482	20.522	± 0.030862
200	0.0122180	0.0036209	0.0002228	20.509	± 0.025230

Bu senaryo için Öklid uzaklıklarında genel olarak bir azalış görünse de özellikle n=100 örneklem büyüklüğü için yayılım matrisi tahmin değerlerine ilişkin Öklid uzaklık değerinde bir artış söz konusudur. Bu durum yayılım matrisi elemanlarının gerçek değerlerinin biraz üzerinde çıkması ile de örtüşmektedir.

6.Senaryo: Tekrarlı ölçümlü veri analizi için hataların Çok Değişkenli Laplace dağılımına sahip i=3 grup, k=6 deneme olan veri düzeni için İki Yönlü Tekrarlı Ölçümlü ANOVA model yapısı,

$$Y_{ijk} = \mu + \gamma_i + \tau_k + (\gamma\tau)_{ik} + \varepsilon_{ijk} \quad i = 1,2,3 ; k = 1,2,3,4,5,6$$

$$j = 1, \dots, 20 ; j = 1, \dots, 40 ; j = 1, \dots, 60 ; j = 1, \dots, 80 ; j = 1, \dots, 100$$

$$j = 1, \dots, 120 ; j = 1, \dots, 140 ; j = 1, \dots, 180 ; j = 1, \dots, 200$$

eşitliği ile ifade edilmektedir. Bu modelde yer alan parametreler, çok değişkenli yapı için oluşturulan ve

$$Y_{ij} = X_i \beta + \varepsilon_{ij} \quad E \sim \text{CDL}_p(\mathbf{0}, \Sigma_p)$$

eşitliği ile ifade edilen doğrusal modelde ki β parametre vektörü içinde yer alacaktır. Bu senaryoya ilişkin modele ait matris gösterim ise,

$$X_i = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} Y_{11} \\ Y_{12} \\ Y_{13} \\ \vdots \\ Y_{1n_1} \\ Y_{21} \\ Y_{22} \\ Y_{23} \\ \vdots \\ Y_{2n_2} \\ Y_{31} \\ Y_{32} \\ Y_{33} \\ \vdots \\ Y_{3n_3} \end{bmatrix} = X_i \begin{bmatrix} \mu \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \\ (\gamma\tau)_{11} \\ (\gamma\tau)_{12} \\ (\gamma\tau)_{13} \\ (\gamma\tau)_{14} \\ (\gamma\tau)_{15} \\ (\gamma\tau)_{16} \\ (\gamma\tau)_{21} \\ (\gamma\tau)_{22} \\ (\gamma\tau)_{23} \\ (\gamma\tau)_{24} \\ (\gamma\tau)_{25} \\ (\gamma\tau)_{26} \\ (\gamma\tau)_{31} \\ (\gamma\tau)_{32} \\ (\gamma\tau)_{33} \\ (\gamma\tau)_{34} \\ (\gamma\tau)_{35} \\ (\gamma\tau)_{36} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{13} \\ \vdots \\ \epsilon_{1n_1} \\ \epsilon_{21} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{23} \\ \vdots \\ \epsilon_{2n_2} \\ \epsilon_{31} \\ \epsilon_{32} \\ \epsilon_{33} \\ \vdots \\ \epsilon_{3n_3} \end{bmatrix}$$

eşitliği ile ifade edilir. Bu senaryo için parametrelerin başlangıç değeri aşağıdaki gibi alınmıştır:

$$\beta^T = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.8 & 0.7 & 0.6 & 0.8 & 0.8 \\ 0.8 & 1.0 & 0.6 & 0.8 & 0.7 & 0.8 \\ 0.7 & 0.6 & 1.0 & 0.6 & 0.8 & 0.7 \\ 0.6 & 0.8 & 0.6 & 1.0 & 0.6 & 0.7 \\ 0.8 & 0.7 & 0.8 & 0.6 & 1.0 & 0.8 \\ 0.8 & 0.8 & 0.7 & 0.7 & 0.8 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Çok Değişkenli Laplace dağılımı altında çok değişkenli doğrusal model kullanılarak İki Yönlü Tekrarlı Ölçümlü MANOVA modeli için benzetim sonucunda elde edilen 5. senaryoya ilişkin parametre tahminleri Çizelge 8.8 'de verilmiştir.

Çizelge 8.8. $i=3, k=6$ iken (a ve b) $\hat{\beta}$, (c ve d) $\hat{\Sigma}$ parametre tahminlerine ve (e) Öklid Uzaklıklarına ilişkin sonuçlar

(a) $\hat{\beta}$ parametre tahminlerine ilişkin sonuçlar

$\hat{\beta}$	n=20	n=40	n=60	n=80	n=100
$\hat{\mu}$					
\hat{Y}_1	1.0028522	0.9741496	0.9909523	0.9806874	0.9606188
\hat{Y}_2	0.3198137	0.3125574	0.3166943	0.3137453	0.3087021
\hat{Y}_3	0.3198137	0.3125574	0.3166943	0.3137453	0.3087021
\hat{t}_1	-0.6396273	-0.6251149	-0.6333887	-0.6274906	-0.6174042
\hat{t}_2	0.9674864	0.9735578	0.9562702	0.9713597	0.9752554
\hat{t}_3	0.9801503	0.9669324	0.9638313	0.9711258	0.9751886
\hat{t}_4	0.9582406	0.9703125	0.9548903	0.9695356	0.9690924
\hat{t}_5	0.9731756	0.9625048	0.9585004	0.9666690	0.9742503
\hat{t}_6	0.9625207	0.9805233	0.9617886	0.9687492	0.9732970
$(\hat{\gamma\tau})_{11}$	-4.8415736	-4.8538309	-4.7952808	-4.8474394	-4.8670837
$(\hat{\gamma\tau})_{12}$	0.3108945	0.3121743	0.3080250	0.3116038	0.3125616
$(\hat{\gamma\tau})_{13}$	0.3140003	0.3103947	0.3099579	0.3114870	0.3125231
$(\hat{\gamma\tau})_{14}$	0.3089081	0.3112945	0.3077432	0.3111650	0.3110277
$(\hat{\gamma\tau})_{15}$	0.3123360	0.3093555	0.3086346	0.3103630	0.3123081
$(\hat{\gamma\tau})_{16}$	0.3100063	0.3138586	0.3094667	0.3109833	0.3120308
$(\hat{\gamma\tau})_{21}$	-1.5561452	-1.5570776	-1.5438273	-1.5556021	-1.5604514
$(\hat{\gamma\tau})_{22}$	0.3108945	0.3121743	0.3080250	0.3116038	0.3125616
$(\hat{\gamma\tau})_{23}$	0.3140003	0.3103947	0.3099579	0.3114870	0.3125231
$(\hat{\gamma\tau})_{24}$	0.3089081	0.3112945	0.3077432	0.3111650	0.3110277
$(\hat{\gamma\tau})_{25}$	0.3123360	0.3093555	0.3086346	0.3103630	0.3123081
$(\hat{\gamma\tau})_{26}$	0.3100063	0.3138586	0.3094667	0.3109833	0.3120308
$(\hat{\gamma\tau})_{31}$	-1.5561452	-1.5570776	-1.5438273	-1.5556021	-1.5604514
$(\hat{\gamma\tau})_{32}$	-0.6217891	-0.6243486	-0.6160499	-0.6232076	-0.6251233
$(\hat{\gamma\tau})_{33}$	-0.6280005	-0.6207894	-0.6199158	-0.6229739	-0.6250462
$(\hat{\gamma\tau})_{34}$	-0.6178163	-0.6225891	-0.6154863	-0.6223299	-0.6220553
$(\hat{\gamma\tau})_{35}$	-0.6246720	-0.6187110	-0.6172692	-0.6207260	-0.6246162
$(\hat{\gamma\tau})_{36}$	-0.6200126	-0.6277172	-0.6189334	-0.6219666	-0.6240617
	3.1122905	3.1141552	3.0876547	3.1112041	3.1209027

(b) $\hat{\beta}$ parametre tahminlerine ilişkin sonuçlar

$\hat{\beta}$	n=120	n=140	n=160	n=180	n=200
$\hat{\mu}$					
\hat{Y}_1	0.9626421	0.9787644	0.9709141	0.9707380	0.9722220
\hat{Y}_2	0.3093784	0.3134651	0.3114251	0.3115589	0.3117178
\hat{Y}_3	0.3093784	0.3134651	0.3114251	0.3115589	0.3117178
$\hat{\tau}_1$	-0.6186968	-0.6269302	-0.6228503	-0.6231178	-0.6234356
$\hat{\tau}_2$	0.9717492	0.9630041	0.9674363	0.9736198	0.9719804
$\hat{\tau}_3$	0.9751492	0.9676519	0.9715938	0.9711229	0.9744905
$\hat{\tau}_4$	0.9739020	0.9599203	0.9679955	0.9685012	0.9679900
$\hat{\tau}_5$	0.9713901	0.9690610	0.9701164	0.9732956	0.9736910
$\hat{\tau}_6$	0.9783808	0.9627918	0.9664527	0.9671245	0.9737203
$(\hat{\gamma\tau})_{11}$	-4.8706713	-4.8224291	-4.8435947	-4.8536640	-4.8618723
$(\hat{\gamma\tau})_{12}$	0.3116339	0.3094894	0.3106450	0.3121963	0.3116720
$(\hat{\gamma\tau})_{13}$	0.3124370	0.3106156	0.3117074	0.3115792	0.3123014
$(\hat{\gamma\tau})_{14}$	0.3121569	0.3086798	0.3108201	0.3108777	0.3106648
$(\hat{\gamma\tau})_{15}$	0.3115140	0.3109668	0.3113597	0.3120913	0.3121374
$(\hat{\gamma\tau})_{16}$	0.3132066	0.3093383	0.3104344	0.3105620	0.3121092
$(\hat{\gamma\tau})_{21}$	-1.5609484	-1.5490898	-1.5549655	-1.5573064	-1.5588849
$(\hat{\gamma\tau})_{22}$	0.3116339	0.3094894	0.3106450	0.3121963	0.3116720
$(\hat{\gamma\tau})_{23}$	0.3124370	0.3106156	0.3117074	0.3115792	0.3123014
$(\hat{\gamma\tau})_{24}$	0.3121569	0.3086798	0.3108201	0.3108777	0.3106648
$(\hat{\gamma\tau})_{25}$	0.3115140	0.3109668	0.3113597	0.3120913	0.3121374
$(\hat{\gamma\tau})_{26}$	0.3132066	0.3093383	0.3104344	0.3105620	0.3121092
$(\hat{\gamma\tau})_{31}$	-1.5609484	-1.5490898	-1.5549665	-1.5573064	-1.5588849
$(\hat{\gamma\tau})_{32}$	-0.6232678	-0.6189788	-0.6212899	-0.6243926	-0.6233440
$(\hat{\gamma\tau})_{33}$	-0.6248740	-0.6212312	-0.6234148	-0.6231583	-0.6246028
$(\hat{\gamma\tau})_{34}$	-0.6243137	-0.6173596	-0.6216401	-0.6217554	-0.6213297
$(\hat{\gamma\tau})_{35}$	-0.6230280	-0.6219335	-0.6227194	-0.6241826	-0.6242748
$(\hat{\gamma\tau})_{36}$	-0.6264132	-0.6186766	-0.6208687	-0.6211239	-0.6242185
$(\hat{\gamma\tau})_{36}$	3.1218967	3.0981797	3.1099330	3.1146129	3.1177699

(c) $\hat{\Sigma}$ parametre tahminlerine ilişkin sonuçlar

n	$\hat{\Sigma}$					
20	1.1947156	0.9942241	0.9067181	0.7968934	1.0002224	0.8866544
	0.9942241	1.1977960	0.8009921	1.0029247	0.9017692	0.8872403
	0.9067181	0.8009921	1.2199331	0.8130626	1.0097682	0.7947690
	0.7968934	1.0029247	0.8130626	1.2068645	0.8044220	0.7927160
	1.0002224	0.9017692	1.0097682	0.8044220	1.2040008	0.8910289
	0.8866544	0.8872403	0.79447690	0.7927160	0.8910289	1.0299167
40	1.2207266	1.0228205	0.9238715	0.8194668	1.0217911	0.9120377
	1.0228205	1.2196075	0.8249606	1.0136043	0.9191659	0.9115858
	0.9238715	0.8249606	1.2048016	0.8156051	1.0156806	0.8101521
	0.8194668	1.0136043	0.8156051	1.2048644	0.8181013	0.8019595
	1.0217911	0.9191659	1.0156806	0.8181013	1.2169473	0.9082138
	0.9120377	0.9115858	0.8101521	0.8019595	0.9082138	1.0546103
60	1.2340127	1.0344643	0.9324424	0.8341462	1.0340553	0.9171051
	1.0344643	1.2335107	0.8338232	1.0331279	0.9352019	0.9168444
	0.9324424	0.8338232	1.2297561	0.8344293	1.0312778	0.8175206
	0.8341462	1.0331279	0.8344293	1.2300829	0.8363837	0.8158956
	1.0340553	0.9352019	1.0312778	0.8363837	1.2345447	0.9159340
	0.9171051	0.9168444	0.8175206	0.8158956	0.9159340	1.0546494
80	1.2245299	1.0260896	0.9295436	0.8298211	1.0273453	0.9091580
	1.0260896	1.2239902	0.8283054	1.0279957	0.9272013	0.9057277
	0.9295436	0.8283054	1.2291735	0.8302232	1.0316145	0.8120370
	0.8298211	1.0279957	0.8302232	1.2271434	0.8311369	0.8107308
	1.0273453	0.9272013	1.0316145	0.8311369	1.2279853	0.9106258
	0.9091580	0.9057277	0.8120370	0.8107308	0.9106258	1.0443855
100	1.2266789	1.0245507	0.9276357	0.8229728	1.0237623	0.9078702
	1.0245507	1.2200658	0.8280308	1.0218404	0.9266147	0.9053670
	0.9276357	0.8280308	1.2295837	0.8286881	1.0297146	0.8154763
	0.8229728	1.0218404	0.8286881	1.2260541	0.8268354	0.8068379
	1.0237623	0.9266147	1.0297146	0.8268354	1.2260066	0.9109103
	0.9078702	0.9053670	0.8157563	0.8068379	0.9109103	1.0491001

(d) $\hat{\Sigma}$ parametre tahminlerine ilişkin sonuçlar

n	$\hat{\Sigma}$					
120	1.2361749	1.0382600	0.9341815	0.8364443	1.0354067	0.9227545
	1.0382600	1.2370923	0.8327436	1.0366216	0.9376381	0.9238766
	0.9341815	0.8327436	1.2361483	0.8324183	1.0333161	0.8230048
	0.8364443	1.0366216	0.8324183	1.2368008	0.8373256	0.8230048
	1.0354067	0.9376381	1.0333161	0.8373256	1.2348432	0.9241998
	0.9227545	0.9238766	0.8230048	0.8244102	0.9241998	1.0652675
140	1.2339762	1.0343395	0.9357592	0.8339657	1.0333046	0.9165417
	1.0343395	1.2328777	0.8326196	1.0324785	0.9320895	0.9156819
	0.9357592	0.8326196	1.2328772	0.8316858	1.0302833	0.8172105
	0.8339657	1.0324785	0.8316858	1.2306429	0.8289535	0.8134696
	1.0333046	0.9320895	1.0302833	0.8289535	1.2276224	0.9140859
	0.9165417	0.9156819	0.8172105	0.8314696	0.9140859	1.0557772
160	1.2294320	1.0299749	0.9311829	0.8317169	1.0340730	0.9176931
	1.0299749	1.2301193	0.8318966	1.0328273	0.9353430	0.9176657
	0.9311829	0.8318966	1.2256156	0.8298925	1.0307741	0.8172770
	0.8317169	1.0328273	0.8298925	1.2309018	0.8350065	0.8187968
	1.0340730	0.9353430	1.0307741	0.8350065	1.2333896	0.9185104
	0.9176931	0.9176657	0.8172770	0.8187968	0.9185104	1.0593207
180	1.2211093	1.0269353	0.9252241	0.8298770	1.0242220	0.9087397
	1.0269353	1.2288244	0.8294246	1.0304348	0.9279608	0.9122915
	0.9252241	0.8294246	1.2256748	0.8316574	1.0256558	0.8092488
	0.8298770	1.0304348	0.8316574	1.2295270	0.8297632	0.8149190
	1.0242220	0.9279608	1.0256558	0.8297632	1.2237037	0.9075630
	0.9087397	0.9122915	0.8092488	0.8149190	0.9075630	1.0508827
200	1.2274106	1.0265792	0.9297690	0.8247520	1.0303623	0.9146959
	1.0265792	1.2236369	0.8305477	1.0229057	0.9295806	0.9121590
	0.9297690	0.8305477	1.2256355	0.8262686	1.0291379	0.8156664
	0.8247520	1.0229057	0.8262686	1.2218103	0.8276893	0.8095742
	1.0303623	0.9295806	1.0291379	0.8276893	1.2323557	0.9174461
	0.9146959	0.9121590	0.8156664	0.8095742	0.9174461	1.0587071

(e) Öklid uzaklıklarına ilişkin sonuçlar

n	$\ \hat{\beta} - \beta\ $	$\ \hat{\Sigma} - \Sigma\ $	$\ \hat{Q} - Q\ $	Ortalama iterasyon sayısı	Standart hata
20	0.0217306	0.0066691	0.0001968	21.385	± 0.034145
40	0.0238805	0.0048200	0.0002023	21.222	± 0.035552
60	0.0245766	0.0050620	0.0003343	21.188	± 0.034026
80	0.0188326	0.0066095	0.0002289	21.262	± 0.027388
100	0.0199006	0.0064145	0.0002507	21.228	± 0.026995
120	0.0235364	0.0059040	0.0001775	21.212	± 0.024282
140	0.0226615	0.0052874	0.0002118	21.235	± 0.024132
160	0.0217837	0.0055272	0.0002193	21.275	± 0.022087
180	0.0178635	0.0064822	0.0002365	21.288	± 0.020036
200	0.0187253	0.0065136	0.0002401	21.284	± 0.018321

Bu senaryo için Öklid uzaklıklarına ve ortalama iterasyon sayısına bakıldığında yine dengeli bir azalma söz konusudur. Özellikle β için $n=180$, Σ içinde $n=40$ için en küçük değere ulaşılmıştır.

8.2. Benzetim Çalışması II: Test İstatistiklerinin ve Testin Gücünün Hesaplanması

Benzetim çalışmasının bu aşamasında, Çok Değişkenli Laplace dağılımı varsayımı altında birinci aşamada elde edilen parametre tahminleri kullanılarak Çok Değişkenli ANOVA' da test edilecek hipotezlere ilişkin test istatistikleri üzerinden hesaplamalar yapılmıştır. Çok değişkenli ANOVA ya da bir diğer deyişle MANOVA'da etken, deneme ve etkileşim etkilerine ait üç adet hipotez test edilir. Bu hipotezlere ilişkin altıncı bölümde erilen test istatistikleri ve bu test istatistiklerinin gücü hesaplanmıştır. MANOVA problemlerinde yararlanılan test istatistiklerinden biri olan Wilk's Λ istatistiği, Tekrarlı Ölçümlü ANOVA modelinde yer alan hipotezlere uyarlanmıştır. Ayrıca, hipotezler, doğrusal model eşitlikleri ifade edilerek test edilmiştir. Uyarlaması yapılan Wilk's Λ istatistiğinin dağılımının yine Wilk's Λ dağılımına uygun olduğu gösterilmiş ve bu değerler için uygun F dönüşümü yapılmıştır.

1. Senaryo: i=2, k=3 için hipotez testleri

i=2 grup ve k=3 deneme olması durumunda İki Yönlü Tekrarlı Ölçümlü MANOVA etken etkisini test eden ilk hipotez aşağıdaki gibi kurulmuştur.

- H_{01} : Etkenler (gruplar) arasında fark yoktur.
- H_{01} : $\mu_1 = \mu_2$.
- H_{01} : $\begin{bmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{12} \\ \mu_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{21} \\ \mu_{22} \\ \mu_{23} \end{bmatrix}$

Etken etkisi için çok değişkenli doğrusal hipotez ise aşağıdaki biçimde ifade edilmiştir.

- H_{01} : $C\beta A = 0$
- $C = [1 \quad -1]$; $\beta = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \end{bmatrix}$; $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $\hat{\mu}_{ik} = \hat{\mu} + \hat{\tau}_k + \hat{\gamma}_i + (\hat{\tau\gamma})_{ki}$; $i = 1,2$; $k = 1,2,3$
- H_{01} : $C\hat{\beta}A = [\hat{\mu}_{11} - \hat{\mu}_{21} \quad \hat{\mu}_{12} - \hat{\mu}_{22} \quad \hat{\mu}_{13} - \hat{\mu}_{23}]$

Benzetim sonucunda etken etkisi hipotezine ait hipotez matrislerine ilişkin sonuçlar Çizelge 8.9' da verilmiştir.

Çizelge 8.9. (i=2, k=3) Etken Etkisi Hipotez Matrislerine İlişkin Sonuçlar

n	$H_{01} = C\hat{\beta}A$
20	[-0.003664503 -0.009384081 2.558361]
40	[0.001075806 0.01317972 2.59159]
60	[0.001150906 0.002160211 2.593518]
80	[0.00875901 0.005371712 2.576071]
100	[-0.002451976 -0.004015078 2.594001]
120	[-0.004238264 -0.005811878 2.608108]
140	[0.001920103 0.001404094 2.6041]
160	[0.0070506506 0.005604841 2.609909]
180	[-0.0007449535 0.001435382 2.597585]
200	[-0.004724611 -0.001333914 2.612119]

$i=2$ grup ve $k=3$ deneme olması durumunda İki Yönlü Tekrarlı Ölçümlü MANOVA deneme etkisini test eden ikinci hipotez aşağıdaki gibi kurulmuştur.

- H_{02} : Denemeler arasında fark yoktur.
- H_{02} : $\mu_{.1} = \mu_{.2} = \mu_{.3}$
- H_{02} : $\begin{bmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{12} \\ \mu_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{13} \\ \mu_{23} \end{bmatrix}$

Deneme etkisi için çok değişkenli doğrusal hipotez ise aşağıdaki biçimde ifade edilmiştir.

- H_{02} : $C\beta A = 0$

- $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $\beta = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \end{bmatrix}$; $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

- $\hat{\mu}_{ik} = \hat{\mu} + \hat{\tau}_k + \hat{\gamma}_i + (\hat{\tau\gamma})_{ki}$; $i = 1,2$; $k = 1,2,3$

- H_{02} : $C\hat{\beta}A = \begin{bmatrix} \hat{\mu}_{11} - \hat{\mu}_{13} & \hat{\mu}_{12} - \hat{\mu}_{13} \\ \hat{\mu}_{21} - \hat{\mu}_{23} & \hat{\mu}_{22} - \hat{\mu}_{23} \end{bmatrix}$

Deneme etkisinin testi için benzetim sonucunda elde edilen hipotez matrislerine ilişkin sonuçlar Çizelge 8.10 'da verilmiştir.

Çizelge 8.10. (i=2, k=3) Deneme Etkisi Hipotez Matrislerine İlişkin Sonuçlar

n	$H_{02} = C\hat{\beta}A$
20	$\begin{bmatrix} -4.103717 & -4.116019 \\ -1.541691 & -1.548274 \end{bmatrix}$
40	$\begin{bmatrix} -4.112162 & -4.106965 \\ -1.531330 & -1.528554 \end{bmatrix}$
60	$\begin{bmatrix} -4.118865 & -4.117314 \\ -1.526498 & -1.525956 \end{bmatrix}$
80	$\begin{bmatrix} -4.078651 & -4.085471 \\ -1.511339 & -1.514772 \end{bmatrix}$
100	$\begin{bmatrix} -4.160300 & -4.153762 \\ -1.543457 & -1.540309 \end{bmatrix}$
120	$\begin{bmatrix} -4.168142 & -4.171197 \\ -1.555793 & -1.557278 \end{bmatrix}$
140	$\begin{bmatrix} -4.128047 & -4.128862 \\ -1.52867 & -1.526166 \end{bmatrix}$
160	$\begin{bmatrix} -4.130623 & -4.133499 \\ -1.527765 & -1.529195 \end{bmatrix}$
180	$\begin{bmatrix} -4.126873 & -4.12262 \\ -1.528543 & -1.52647 \end{bmatrix}$
200	$\begin{bmatrix} -4.160300 & -4.153762 \\ -1.543457 & -1.540309 \end{bmatrix}$

i=2 grup ve k=3 deneme olması durumunda İki Yönlü Tekrarlı Ölçümlü MANOVA etkileşim etkisini test eden üçüncü hipotez ise aşağıdaki gibi kurulmuştur.

➤ H_{03} : Denemeler ve etkenler arasında bir etkileşim yoktur. (Deneme ve etkenin birlikte etkisi yoktur.)

➤ H_{03} : $\begin{bmatrix} \mu_{11} - \mu_{12} \\ \mu_{12} - \mu_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{21} - \mu_{22} \\ \mu_{22} - \mu_{23} \end{bmatrix}$

Etkileşim etkisi için çok değişkenli doğrusal hipotez ise aşağıdaki biçimde ifade edilmiştir.

➤ H_{03} : $C\hat{\beta}A = 0$

➤ $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$; $\beta = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \end{bmatrix}$; $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$\triangleright \hat{\mu}_{ik} = \hat{\mu} + \hat{\tau}_k + \hat{\gamma}_i + (\widehat{\tau\gamma})_{ki} ; i = 1,2 ; k = 1,2,3$$

$$\triangleright \mathbf{H}_{03}: \mathbf{C}\hat{\beta}\mathbf{A} = [(\hat{\mu}_{11}-\hat{\mu}_{12}) - (\hat{\mu}_{21}-\hat{\mu}_{22}) \quad (\hat{\mu}_{12} - \hat{\mu}_{13}) - (\hat{\mu}_{22}-\hat{\mu}_{23})]$$

Etkileşim etkisinin testi için benzetim sonucunda elde edilen hipotez matrislerine ilişkin sonuçlar Çizelge 8.11' de verilmiştir.

Çizelge 8.11. (i=2, k=3) Etkileşim Etkisi Hipotez Matrislerine İlişkin Sonuçlar

n	$\mathbf{H}_{03} = \mathbf{C}\hat{\beta}\mathbf{A}$
20	[0.005719578 -2.567745]
40	[0.002421657 -2.578411]
60	[-0.001009305 -2.591358]
80	[0.003387339 -2.570699]
100	[0.001563102 -2.598016]
120	[0.001573614 -2.61392]
140	[0.0005160084 -2.602696]
160	[0.001445665 -2.604304]
180	[-0.002180335 -2.59615]
200	[-0.003390697 -2.613453]

Benzetim sonucunda, test istatistikleri altıncı bölümde verilen eşitlikler kullanılarak hesaplanmıştır. Deneme, etken ve etkileşim hipotezlerinin test istatistiklerine ilişkin sonuçlar Çizelge 8.12' de verilmiştir.

Çizelge 8.12. (i=2, k=3) Test İstatistiklerine İlişkin Sonuçlar

n	Λ_{01} (Etken)	Λ_{02} (Deneme)	Λ_{03} (Etkileşim)
20	0.4240326	0.1813448	0.4955599
40	0.4842095	0.1854912	0.5318932
60	0.5031152	0.1867522	0.5455120
80	0.5205470	0.1937392	0.5611900
100	0.5199601	0.1869219	0.5627047
120	0.5178831	0.1841695	0.5555676
140	0.5254406	0.1890738	0.5619796
160	0.5255719	0.1885195	0.5623581
180	0.5295424	0.1893825	0.5655993
200	0.5266062	0.1869219	0.5627047

Elde edilen test istatistikleri, altıncı bölümde verilen değerlere uygun olarak elde edilen Wilk's Λ değeri EK 1'deki tablo değeri karşılaştırıldığında tüm hipotezlerin 0.05 anlamlılık düzeyinde beklendiği şekilde reddedildiği görülmektedir.

2. Senaryo: i=2, k=4 için hipotez testleri

i=2 grup ve k=4 deneme olması durumunda İki Yönlü Tekrarlı Ölçümlü MANOVA etken etkisini test eden ilk hipotez aşağıdaki gibi kurulmuştur.

➤ H_{01} : Etkenler (gruplar) arasında fark yoktur.

➤ H_{01} : $\mu_1 = \mu_2$.

$$\text{➤ } H_{01}: \begin{bmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{12} \\ \mu_{13} \\ \mu_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{21} \\ \mu_{22} \\ \mu_{23} \\ \mu_{24} \end{bmatrix}$$

Etken etkisi için çok değişkenli doğrusal hipotez ise aşağıdaki biçimde ifade edilmiştir.

➤ $H_{01}: C\beta A = 0$

➤ $C = [1 \quad -1] ; \beta = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} & \mu_{14} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} & \mu_{24} \end{bmatrix} ; A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

➤ $\hat{\mu}_{ik} = \hat{\mu} + \hat{\tau}_k + \hat{\gamma}_i + (\hat{\tau\gamma})_{ki} ; i = 1,2 ; k = 1,2,3,4$

➤ $H_{01}: C\hat{\beta}A = [\hat{\mu}_{11}-\hat{\mu}_{21} \quad \hat{\mu}_{12} - \hat{\mu}_{22} \quad \hat{\mu}_{13} - \hat{\mu}_{23} \quad \hat{\mu}_{14} - \hat{\mu}_{24}]$

Benzetim sonucunda etken etkisi hipotezine ait hipotez matrislerine ilişkin sonuçlar Çizelge 8.13' de verilmiştir.

Çizelge 8.13. (i=2, k=4) Etken Etkisi Hipotez Matrislerine İlişkin Sonuçlar

n	$H_{01} = C\hat{\beta}A$
20	[1.73777 1.741217 1.744535 3.85988]
40	[1.760493 1.757305 1.7577073 3.866256]
60	[1.76127 1.762491 1.765606 3.863647]
80	[1.757517 1.756589 1.75939 3.874687]
100	[1.76601 1.763238 1.765699 3.872463]
120	[1.768406 1.766403 1.766563 3.874829]
140	[1.765119 1.764201 1.76663 3.878037]
160	[1.770749 1.772565 1.77017 3.870248]
180	[1.768556 1.766566 1.7736085 3.895874]
200	[1.768003 1.768492 1.76878 3.867873]

i=2 grup ve k=4 deneme olması durumunda İki Yönlü Tekrarlı Ölçümlü MANOVA deneme etkisini test eden ikinci hipotez aşağıdaki gibi kurulmuştur

➤ $H_{02}: \text{Denemeler arasında fark yoktur.}$

➤ $H_{02}: \mu_{.1} = \mu_{.2} = \mu_{.3} = \mu_{.4}$

➤ $H_{02}: \begin{bmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{12} \\ \mu_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{13} \\ \mu_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{14} \\ \mu_{24} \end{bmatrix}$

k=4 için, deneme etkisi için çok değişkenli doğrusal hipotez ise aşağıdaki biçimde ifade edilmiştir.

➤ $H_{02}: C\beta A = 0$

➤ $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $\beta = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} & \mu_{14} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} & \mu_{24} \end{bmatrix}$; $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

➤ $\hat{\mu}_{ik} = \hat{\mu} + \hat{\tau}_k + \hat{\gamma}_i + (\widehat{\tau\gamma})_{ki}$; $i = 1,2$; $k = 1,2,3,4$

➤ $H_{02}: C\hat{\beta}A = \begin{bmatrix} \hat{\mu}_{11} - \hat{\mu}_{14} & \hat{\mu}_{12} - \hat{\mu}_{14} & \hat{\mu}_{13} - \hat{\mu}_{14} \\ \hat{\mu}_{21} - \hat{\mu}_{24} & \hat{\mu}_{22} - \hat{\mu}_{24} & \hat{\mu}_{23} - \hat{\mu}_{24} \end{bmatrix}$

Deneme etkisinin testi için benzetim sonucunda elde edilen hipotez matrislerine ilişkin sonuçlar Çizelge 8.14' de verilmiştir.

Çizelge 8.14. (i=2, k=4) Deneme Etkisi Hipotez Matrislerine İlişkin Sonuçlar

n	$H_{02} = C\hat{\beta}A$
20	$\begin{bmatrix} -0.01397622 & -0.0058963 & 0.000000 \\ 2.10820569 & 2.1127746 & 2.115353 \end{bmatrix}$
40	$\begin{bmatrix} 0.00869970 & 0.001373873 & 0.000000 \\ 2.11446244 & 2.110325273 & 2.109184 \end{bmatrix}$
60	$\begin{bmatrix} -0.008545219 & -0.0067832 & 0.000000 \\ 2.093831610 & 2.0943728 & 2.098041 \end{bmatrix}$
80	$\begin{bmatrix} -0.003119049 & -0.0056289 & 0.000000 \\ 2.114050554 & 2.1125684 & 2.115297 \end{bmatrix}$
100	$\begin{bmatrix} -0.000060716 & -0.0056001 & 0.000000 \\ 2.10638600 & 2.1036245 & 2.106764 \end{bmatrix}$
120	$\begin{bmatrix} 0.00269484 & -0.001539 & 0.000000 \\ 2.109117994 & 2.1068854 & 2.108266 \end{bmatrix}$
140	$\begin{bmatrix} -0.0036213 & -0.005510 & 0.000000 \\ 2.1099695 & 2.108326 & 2.111408 \end{bmatrix}$
160	$\begin{bmatrix} 0.0013922 & 0.0053339 & 0.000000 \\ 2.1008907 & 2.1030172 & 2.1000078 \end{bmatrix}$
180	$\begin{bmatrix} -0.009513514 & -0.01367513 & 0.000000 \\ 2.117804171 & 2.11563238 & 2.122789 \end{bmatrix}$
200	$\begin{bmatrix} -0.001251396 & -0.00046650 & 0.000000 \\ 2.098618095 & 2.09891477 & 2.099093 \end{bmatrix}$

$i=2$ grup ve $k=4$ deneme olması durumunda İki Yönlü Tekrarlı Ölçümlü MANOVA etkileşim etkisini test eden üçüncü hipotez ise aşağıdaki gibi kurulmuştur.

- H_{03} : Denemeler ve etkenler arasında bir etkileşim yoktur. (Deneme ve etkenin birlikte etkisi yoktur.)

- $H_{03}: \begin{bmatrix} \mu_{11} - \mu_{12} \\ \mu_{12} - \mu_{13} \\ \mu_{13} - \mu_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{21} - \mu_{22} \\ \mu_{22} - \mu_{23} \\ \mu_{23} - \mu_{24} \end{bmatrix}$

Etkileşim etkisi için çok değişkenli doğrusal hipotez ise aşağıdaki biçimde ifade edilmiştir.

- $H_{03}: C\beta A = 0$

- $C = [1 \quad -1] \quad ; \quad \beta = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} & \mu_{14} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} & \mu_{24} \end{bmatrix} ; \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

- $\hat{\mu}_{ik} = \hat{\mu} + \hat{\tau}_k + \hat{\gamma}_i + (\hat{\tau\gamma})_{ki} ; \quad i = 1,2 ; k = 1,2,3,4$

- $H_{03}: C\hat{\beta}A =$

$$[(\hat{\mu}_{11} - \hat{\mu}_{12}) - (\hat{\mu}_{21} - \hat{\mu}_{22}) \quad (\hat{\mu}_{12} - \hat{\mu}_{13}) - (\hat{\mu}_{22} - \hat{\mu}_{23}) \quad (\hat{\mu}_{13} - \hat{\mu}_{14}) - (\hat{\mu}_{23} - \hat{\mu}_{24})]$$

Etkileşim etkisinin testi için benzetim sonucunda elde edilen hipotez matrislerine ilişkin sonuçlar Çizelge 8.15' de verilmiştir.

Çizelge 8.15. (i=2, k=4) Etkileşim Etkisi Hipotez Matrislerine İlişkin Sonuçlar

n	$H_{03} = C\hat{\beta}A$		
20	[-0.003511004	-0.00331792	-2.115353]
40	[0.003188655	0.0002321644	-2.109184]
60	[-0.001220682	-0.003115356	-2.098041]
80	[0.001027775	-0.002900564	-2.115297]
100	[0.0027777679	-0.00246066	-2.106764]
120	[0.002002281	-0.0001597938	-2.108266]
140	[0.0009181143	-0.002428868	-2.111408]
160	[-0.001815281	0.0023944556	-2.100078]
180	[0.001989833	-0.006518519	-2.122789]
200	[-0.000488209	-0.00028877575	-2.099093]

Benzetim sonucunda, test istatistikleri altıncı bölümde verilen eşitlikler kullanılarak hesaplanmıştır. Deneme, etken ve etkileşim hipotezlerinin istatistiklerine ilişkin sonuçlar Çizelge 8.16' da verilmiştir.

Çizelge 8.16. (i=2, k=4) Test İstatistiklerine İlişkin Sonuçlar

n	Λ_{01} (Etken)	Λ_{02} (Deneme)	Λ_{03} (Etkileşim)
20	0.300569	0.2481331	0.4117085
40	0.3878367	0.3022687	0.4682254
60	0.4092451	0.3192063	0.4852474
80	0.4254508	0.3275719	0.4949845
100	0.4308307	0.3335761	0.5011551
120	0.4365504	0.3371708	0.5057459
140	0.4379475	0.3376362	0.5046642
160	0.4416409	0.341927	0.5104016
180	0.4422155	0.3418895	0.5087013
200	0.4456386	0.3451916	0.5134273

Elde edilen test istatistikleri altıncı bölümde değerlere uygun olarak elde edilen Wilk's Λ değeri EK 1'deki tablo değeri karşılaştırıldığında tüm hipotezlerin 0.05 anlamlılık beklendiği şekilde reddildiği görülmektedir.

3. Senaryo: $i=2, k=6$ için hipotez testleri

$i=2$ grup ve $k=6$ deneme olması durumunda İki Yönlü Tekrarlı Ölçümlü MANOVA etken etkisini test eden ilk hipotez aşağıdaki gibi kurulmuştur.

➤ H_{01} : Etkenler (gruplar) arasında fark yoktur.

➤ H_{01} : $\mu_{1.} = \mu_{2.}$

$$\text{➤ } H_{01}: \begin{bmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{12} \\ \mu_{13} \\ \mu_{14} \\ \mu_{15} \\ \mu_{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{21} \\ \mu_{22} \\ \mu_{23} \\ \mu_{24} \\ \mu_{25} \\ \mu_{26} \end{bmatrix}$$

Etken etkisi için çok değişkenli doğrusal hipotez ise aşağıdaki biçimde ifade edilmiştir.

➤ H_{01} : $C\beta A = 0$

$$\text{➤ } C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} ; \beta = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} & \mu_{14} & \mu_{15} & \mu_{16} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} & \mu_{24} & \mu_{25} & \mu_{26} \end{bmatrix}$$

$$\text{➤ } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{➤ } \hat{\mu}_{ik} = \hat{\mu} + \hat{\tau}_k + \hat{\gamma}_i + (\widehat{\tau\gamma})_{ki} ; i = 1,2 ; k = 1,2,3,4,5,6$$

➤ $H_{01}: C\hat{\beta}A =$

$$[\hat{\mu}_{11}-\hat{\mu}_{21} \quad \hat{\mu}_{12}-\hat{\mu}_{22} \quad \hat{\mu}_{13}-\hat{\mu}_{23} \quad \hat{\mu}_{14}-\hat{\mu}_{24} \quad \hat{\mu}_{15}-\hat{\mu}_{25} \quad \hat{\mu}_{16}-\hat{\mu}_{26}]$$

Benzetim sonucunda etken etkisi hipotezine ait hipotez matrislerine ilişkin sonuçlar Çizelge 8.17' de verilmiştir.

Çizelge 8.17. (i=2, k=6) Etken Etkisi Hipotez Matrislerine İlişkin Sonuçlar

n	$H_{01} = C\hat{\beta}A$					
20	[1.860782	1.861996	1.848409	1.8513	1.8454871	-3.684327]
40	[1.873931	1.869915	1.867879	1.874438	1.857246	-3.762074]
60	[1.883381	1.882548	1.867423	1.869247	1.881265	-3.723296]
80	[1.879475	1.876238	1.883521	1.878828	1.887067	-3.725717]
100	[1.879674	1.881959	1.876766	1.878885	1.879554	-3.748677]
120	[1.8844	1.877075	1.878463	1.880129	1.875663	-3.758882]
140	[1.873883	1.875647	1.878696	1.876752	1.873622	-3.756908]
160	[1.875641	1.876705	1.873742	1.874729	1.878846	-3.76458]
180	[1.877983	1.873706	1.879255	1.878241	1.875203	-3.765354]
200	[1.879512	1.880507	1.879072	1.880711	1.879909	-3.78352]

i=2 grup ve k=6 deneme olması durumunda İki Yönlü Tekrarlı Ölçümlü MANOVA deneme etkisini test eden ikinci hipotez aşağıdaki gibi kurulmuştur.

➤ H_{02} : Denemeler arasında fark yoktur.

➤ $H_{02}: \mu_{.1} = \mu_{.2} = \mu_{.3} = \mu_{.4} = \mu_{.5} = \mu_{.6}$

➤ $H_{02}: \begin{bmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{12} \\ \mu_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{13} \\ \mu_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{14} \\ \mu_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{15} \\ \mu_{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{16} \\ \mu_{26} \end{bmatrix}$

i=2 grup ve k=6 için, deneme etkisi için çok değişkenli doğrusal hipotez ise aşağıdaki biçimde ifade edilmiştir.

➤ $H_{02}: C\beta A = 0$

$$\triangleright \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} & \mu_{14} & \mu_{15} & \mu_{16} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} & \mu_{24} & \mu_{25} & \mu_{26} \end{bmatrix}$$

$$\triangleright \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\triangleright \hat{\mu}_{ik} = \hat{\mu} + \hat{\tau}_k + \hat{\gamma}_i + (\widehat{\tau\gamma})_{ki} ; i = 1,2 ; k = 1,2,3,4,5,6$$

$$\triangleright \mathbf{H}_{02}: \mathbf{C}\hat{\boldsymbol{\beta}}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \hat{\mu}_{11} - \hat{\mu}_{16} & \hat{\mu}_{12} - \hat{\mu}_{16} & \hat{\mu}_{13} - \hat{\mu}_{16} & \hat{\mu}_{14} - \hat{\mu}_{16} & \hat{\mu}_{15} - \hat{\mu}_{16} \\ \hat{\mu}_{21} - \hat{\mu}_{26} & \hat{\mu}_{22} - \hat{\mu}_{26} & \hat{\mu}_{23} - \hat{\mu}_{26} & \hat{\mu}_{24} - \hat{\mu}_{26} & \hat{\mu}_{25} - \hat{\mu}_{26} \end{bmatrix}$$

Deneme etkisinin testi için benzetim sonucunda elde edilen hipotez matrislerine ilişkin sonuçlar Çizelge.8.18.' de verilmiştir.

Çizelge 8.18. (i=2, k=6) Deneme Etkisi Hipotez Matrislerine İlişkin Sonuçlar

n	$\mathbf{H}_{02} = \mathbf{C}\hat{\boldsymbol{\beta}}\mathbf{A}$				
20	[8.573259	8.577313	8.549314	8.55486	8.560534]
	[3.028150	3.030990	3.016579	3.019229	3.021336]
40	[8.706690	8.698539	8.695249	8.707696	8.673869]
	[3.070685	3.066549	3.065296	3.071184	3.054548]
60	[8.637940	8.636485	8.605964	8.609902	8.633848]
	[3.031263	3.030640	3.015245	3.017358	3.029287]
80	[8.625399	8.619446	8.633784	8.622039	8.640589]
	[3.020208	3.017491	3.024547	3.018594	3.027805]
100	[8.676056	8.680412	8.670692	8.674380	8.676011]
	[3.047705	3.049776	3.045249	3.046819	3.047780]
120	[8.704984	8.690293	8.693313	8.696440	8.687350]
	[3.061702	3.054337	3.055968	3.057429	3.052805]
140	[8.672472	8.676123	8.682072	8.67797	8.671964]
	[3.041681	3.043569	3.046468	3.04431	3.041435]
160	[8.690979	8.692923	8.687551	8.689447	8.697458]
	[3.050759	3.051638	3.0449229	3.050138	3.050403]
180	[8.692909	8.684362	8.69545	8.693355	8.687203]
	[3.049572	3.045301	3.05084	3.049760	3.046646]
200	[8.739807	8.741646	8.738693	8.742001	8.740783]
	[3.076774	3.0776190	3.076101	3.077770	3.077354]

$i=2$ grup ve $k=6$ deneme olması durumunda İki Yönlü Tekrarlı Ölçümlü MANOVA etkileşim etkisini test eden üçüncü hipotez ise aşağıdaki gibi kurulmuştur.

- H_{03} : Denemeler ve etkenler arasında bir etkileşim yoktur. (Deneme ve etkenin birlikte etkisi yoktur.)

$$\text{➤ } H_{03}: \begin{bmatrix} \mu_{11} - \mu_{12} \\ \mu_{12} - \mu_{13} \\ \mu_{13} - \mu_{14} \\ \mu_{14} - \mu_{15} \\ \mu_{15} - \mu_{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{21} - \mu_{22} \\ \mu_{22} - \mu_{23} \\ \mu_{23} - \mu_{24} \\ \mu_{24} - \mu_{25} \\ \mu_{25} - \mu_{26} \end{bmatrix}$$

Etkileşim etkisi için çok değişkenli doğrusal hipotez aşağıdaki biçimde ifade edilmiştir.

- $H_{03}: C\beta A = 0$

$$\text{➤ } C = [1 \quad -1] \quad ; \quad \beta = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} & \mu_{14} & \mu_{15} & \mu_{16} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} & \mu_{24} & \mu_{25} & \mu_{26} \end{bmatrix}$$

$$\text{➤ } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{➤ } \hat{\mu}_{ik} = \hat{\mu} + \hat{\tau}_k + \hat{\gamma}_i + (\widehat{\tau\gamma})_{ki} \quad ; \quad i = 1,2 \quad ; \quad k = 1,2,3,4,5,6$$

$$\text{➤ } H_{03}: C\hat{\beta}A = [(\hat{\mu}_{11} - \hat{\mu}_{12}) - (\hat{\mu}_{21} - \hat{\mu}_{22}) \quad (\hat{\mu}_{12} - \hat{\mu}_{13}) - (\hat{\mu}_{22} - \hat{\mu}_{23}) \\ (\hat{\mu}_{13} - \hat{\mu}_{14}) - (\hat{\mu}_{23} - \hat{\mu}_{24}) \quad (\hat{\mu}_{14} - \hat{\mu}_{15}) - (\hat{\mu}_{24} - \hat{\mu}_{25}) \quad (\hat{\mu}_{15} - \hat{\mu}_{16}) - (\hat{\mu}_{25} - \hat{\mu}_{26})]$$

Etkileşim etkisinin testi için benzetim sonucunda elde edilen hipotez matrislerine ilişkin sonuçlar Çizelge 8.19' da verilmiştir.

Çizelge 8.19. (i=2, k=6) Etkileşim Etkisi Hipotez Matrislerine İlişkin Sonuçlar

n	$H_{03} = C\hat{\beta}A$				
20	[-0.0012142	0.0135874	-0.0028911	-0.0035713	5.53919]
40	[0.0040155	0.0020360	-0.00065589	0.017191	5.619321]
60	[0.0008331	0.015125	-0.001824	-0.012017	5.60456]
80	[0.003236	-0.0072821	0.0057928	-0.009339	5.612784]
100	[-0.002288	0.005193	-0.002118	-0.0006693	5.6282]
120	[0.0073252	-0.001388	-0.0016655	0.004465	5.63454]
140	[-0.0017633	-0.0030496	0.0019445	0.003129	5.63053]
160	[-0.0010639	0.002963	-0.0009874	-0.0041165	5.64346]
180	[0.0042767	-0.00554991	0.0010143	0.0030379	5.64055]
200	[-0.0009946	0.0014350	-0.0016391	0.0008025	5.66342]

Benzetim sonucunda, test istatistikleri altıncı bölümde verilen eşitlikler kullanılarak hesaplanmıştır. Deneme, etken ve etkileşim hipotezlerinin istatistiklerine ilişkin sonuçlar Çizelge 8.20' de verilmiştir.

Çizelge 8.20. (i=2, k=6) Test İstatistiklerine ilişkin sonuçlar

n	Λ_{01} (Etken)	Λ_{02} (Deneme)	Λ_{03} (Etkileşim)
20	0.1004486	0.03519875	0.1270028
40	0.1530430	0.03959282	0.1649950
60	0.1747774	0.04352445	0.1836079
80	0.1858159	0.04521474	0.1925669
100	0.1911429	0.04582618	0.1967857
120	0.1915413	0.04521365	0.1966374
140	0.1952481	0.04600088	0.1994460
160	0.1988279	0.04659606	0.2024117
180	0.1971419	0.04603284	0.2007466
200	0.2005447	0.04660916	0.2039208

Elde edilen test istatistikleri, altıncı bölümde değerlere uygun olarak elde edilen Wilk's Λ değeri Ek 1'deki tablo değeri karşılaştırıldığında tüm hipotezlerin 0.05 anlamlılık beklendiği şekilde reddildiği görülmektedir.

4. Senaryo: $i=3, k=3$ için hipotez testleri

$i=3$ grup ve $k=3$ deneme olması durumunda İki Yönlü Tekrarlı Ölçümlü MANOVA etken etkisini test eden ilk hipotez aşağıdaki gibi kurulmuştur.

➤ H_{01} : Etkenler (gruplar) arasında fark yoktur.

➤ H_{01} : $\mu_1. = \mu_2. = \mu_3.$

➤ H_{01} : $\begin{bmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{12} \\ \mu_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{21} \\ \mu_{22} \\ \mu_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{31} \\ \mu_{32} \\ \mu_{33} \end{bmatrix}$

Etken etkisi için çok değişkenli doğrusal hipotez ise aşağıdaki biçimde ifade edilmiştir.

➤ H_{01} : $C\beta A = 0$

➤ $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$; $\beta = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{bmatrix}$; $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

➤ $\hat{\mu}_{ik} = \hat{\mu} + \hat{\tau}_k + \hat{\gamma}_i + (\widehat{\tau\gamma})_{ki}$; $i = 1,2,3$; $k = 1,2,3$

➤ H_{01} : $C\hat{\beta}A = \begin{bmatrix} \hat{\mu}_{11} - \hat{\mu}_{21} & \hat{\mu}_{12} - \hat{\mu}_{22} & \hat{\mu}_{13} - \hat{\mu}_{23} \\ \hat{\mu}_{21} - \hat{\mu}_{31} & \hat{\mu}_{22} - \hat{\mu}_{32} & \hat{\mu}_{23} - \hat{\mu}_{33} \end{bmatrix}$

Benzetim sonucunda etken etkisi hipotezine ait hipotez matrislerine ilişkin sonuçlar Çizelge 8.21' de verilmiştir.

Çizelge 8.21. (i=3, k=3) Etken Etkisi Hipotez Matrislerine İlişkin Sonuçlar

n	$H_{01} = C\hat{\beta}A$		
20	[1.666320 1.666587	1.667599 1.667005	-0.8450945 -0.8446515]
40	[1.675073 1.675073	1.675513 1.675513	-0.8277609 -0.8277609]
60	[1.676006 1.676290	1.678636 1.678920	-0.8480485 -0.8480993]
80	[1.669515 1.669515	1.665392 1.6655392	-0.8347999 -0.8347999]
100	[1.681081 1.681065	1.683553 1.683536	-0.8233974 -0.8233902]
120	[1.681953 1.676114	1.678675 1.672025	-0.8423442 -0.8304547]
140	[1.676114 1.676114	1.672025 1.672025	-0.8304547 -0.8304547]
160	[1.680402 1.680402	1.677934 1.677934	-0.840431 -0.840431]
180	[1.679735 1.679693	1.678904 1.678864	-0.8354710 -0.8354543]
200	[1.676415 1.676415	1.675349 1.675349	-0.8443102 -0.8443102]

i=3 grup ve k=3 deneme olması durumunda İki Yönlü Tekrarlı Ölçümlü MANOVA deneme etkisini test eden ikinci hipotez aşağıdaki gibi kurulmuştur.

➤ H_{02} : Denemeler arasında fark yoktur.

➤ H_{02} : $\mu_{.1} = \mu_{.2} = \mu_{.3}$

➤ H_{02} : $\begin{bmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{21} \\ \mu_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{12} \\ \mu_{22} \\ \mu_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{13} \\ \mu_{23} \\ \mu_{33} \end{bmatrix}$

Deneme etkisi için çok değişkenli doğrusal hipotez ise aşağıdaki biçimde ifade edilmiştir.

➤ H_{02} : $C\beta A = 0$

$$\triangleright \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \end{bmatrix} ; \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\triangleright \hat{\mu}_{ik} = \hat{\mu} + \hat{\tau}_k + \hat{\gamma}_i + (\hat{\tau\gamma})_{ki} ; i = 1,2,3 ; k = 1,2,3$$

$$\triangleright \mathbf{H}_{02}: \mathbf{C}\hat{\boldsymbol{\beta}}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \hat{\mu}_{11} - \hat{\mu}_{13} & \hat{\mu}_{12} - \hat{\mu}_{13} \\ \hat{\mu}_{21} - \hat{\mu}_{23} & \hat{\mu}_{22} - \hat{\mu}_{23} \\ \hat{\mu}_{31} - \hat{\mu}_{33} & \hat{\mu}_{32} - \hat{\mu}_{33} \end{bmatrix}$$

Deneme etkisinin testi için benzetim sonucunda elde edilen hipotez matrislerine ilişkin sonuçlar Çizelge 8.22' de verilmiştir.

Çizelge 8.22. (i=3, k=3) Deneme Etkisi Hipotez Matrislerine İlişkin Sonuçlar

n	$\mathbf{H}_{02} = \mathbf{C}\hat{\boldsymbol{\beta}}\mathbf{A}$
20	$\begin{bmatrix} 3.659715 & 3.659763 \\ 3.658639 & 3.658727 \\ 1.148301 & 1.147070 \end{bmatrix}$
40	$\begin{bmatrix} 3.632139 & 3.633471 \\ 3.632139 & 3.633471 \\ 1.129306 & 1.130197 \end{bmatrix}$
60	$\begin{bmatrix} 3.673286 & 3.678677 \\ 3.673621 & 3.679012 \\ 1.149232 & 1.151992 \end{bmatrix}$
80	$\begin{bmatrix} 3.637624 & 3.630589 \\ 3.637624 & 3.630589 \\ 1.133309 & 1.130397 \end{bmatrix}$
100	$\begin{bmatrix} 3.629081 & 3.63315 \\ 3.629058 & 3.633291 \\ 1.124603 & 1.126365 \end{bmatrix}$
120	$\begin{bmatrix} 3.669177 & 3.663532 \\ 3.632347 & 3.625105 \\ 1.125779 & 1.122624 \end{bmatrix}$
140	$\begin{bmatrix} 3.632347 & 3.625105 \\ 3.632347 & 3.625105 \\ 1.125779 & 1.122624 \end{bmatrix}$
160	$\begin{bmatrix} 3.655849 & 3.651563 \\ 3.655849 & 3.654563 \\ 1.135016 & 1.33198 \end{bmatrix}$
180	$\begin{bmatrix} 3.647281 & 3.645860 \\ 3.647222 & 3.645802 \\ 1.132075 & 1.131485 \end{bmatrix}$
200	$\begin{bmatrix} 3.654870 & 3.652843 \\ 3.654870 & 3.652843 \\ 1.134145 & 1.133184 \end{bmatrix}$

$i=3$ grup ve $k=3$ deneme olması durumunda İki Yönlü Tekrarlı Ölçümlü MANOVA etkileşim etkisini test eden üçüncü hipotez ise aşağıdaki gibi kurulmuştur.

➤ H_{03} : Denemeler ve etkenler arasında bir etkileşim yoktur. (Deneme ve etkenin birlikte etkisi yoktur.)

➤ H_{03} :
$$\begin{bmatrix} \mu_{11} - \mu_{12} \\ \mu_{12} - \mu_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{21} - \mu_{22} \\ \mu_{22} - \mu_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{31} - \mu_{32} \\ \mu_{32} - \mu_{33} \end{bmatrix}$$

Etkileşim etkisi için çok değişkenli doğrusal hipotez ise aşağıdaki biçimde ifade edilmiştir.

➤ $H_{03}: C\beta A = 0$

➤ $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$; $\beta = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \end{bmatrix}$; $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

➤ $\hat{\mu}_{ik} = \hat{\mu} + \hat{\tau}_k + \hat{\gamma}_i + (\hat{\tau\gamma})_{ki}$; $i = 1,2,3$; $k = 1,2,3$

➤ $H_{03}: C\hat{\beta}A = \begin{bmatrix} (\hat{\mu}_{11}-\hat{\mu}_{12}) - (\hat{\mu}_{21}-\hat{\mu}_{22}) & (\hat{\mu}_{12} - \hat{\mu}_{13}) - (\hat{\mu}_{22}-\hat{\mu}_{23}) \\ (\hat{\mu}_{21}-\hat{\mu}_{22}) - (\hat{\mu}_{31}-\hat{\mu}_{32}) & (\hat{\mu}_{22} - \hat{\mu}_{23}) - (\hat{\mu}_{32}-\hat{\mu}_{33}) \end{bmatrix}$

Etkileşim etkisinin testi için benzetim sonucunda elde edilen hipotez matrislerine ilişkin sonuçlar Çizelge 8.23 de verilmiştir.

Çizelge 8.23. (i=3, k=3) Etkileşim Etkisi Hipotez Matrislerine İlişkin Sonuçlar

n	$H_{03} = C\hat{\beta}A$
20	$\begin{bmatrix} -0.001278 & 2.51269 \\ -0.001317 & 2.51165 \end{bmatrix}$
40	$\begin{bmatrix} -0.000439 & 2.50327 \\ -0.000439 & 2.50327 \end{bmatrix}$
60	$\begin{bmatrix} -0.0026298 & 2.52668 \\ -0.0026299 & 2.52701 \end{bmatrix}$
80	$\begin{bmatrix} 0.0041225 & 2.50019 \\ 0.0041225 & 2.50019 \end{bmatrix}$
100	$\begin{bmatrix} -0.0024717 & 2.50695 \\ -0.0024703 & 2.50692 \end{bmatrix}$
120	$\begin{bmatrix} 0.0032783 & 2.52101 \\ 0.0032665 & 2.52097 \end{bmatrix}$
140	$\begin{bmatrix} 0.0040886 & 2.50248 \\ 0.0040886 & 2.50248 \end{bmatrix}$
160	$\begin{bmatrix} 0.0024671 & 2.518365 \\ 0.0024671 & 2.518365 \end{bmatrix}$
180	$\begin{bmatrix} 0.0008306 & 2.51437 \\ 0.0082927 & 2.51431 \end{bmatrix}$
200	$\begin{bmatrix} 0.0010653 & 2.51966 \\ 0.0010653 & 2.51966 \end{bmatrix}$

Deneme, etken ve etkileşim hipotezlerinin istatistiklerine ilişkin sonuçlar Çizelge 8.24'de verilmiştir.

Çizelge 8.24. (i=3, k=3) Test İstatistiklerine İlişkin Sonuçlar

n	Λ_{01} (Etken)	Λ_{02} (Deneme)	Λ_{03} (Etkileşim)
20	0.4685974	0.1777873	0.5223933
40	0.5390703	0.1868906	0.5678634
60	0.5662544	0.1917364	0.5914206
80	0.5805870	0.1953485	0.6002285
100	0.5876561	0.1975033	0.6052997
120	0.5879830	0.1932585	0.6034008
140	0.5947994	0.1974705	0.6088879
160	0.5941932	0.1944993	0.6077153
180	0.5956618	0.1956216	0.6092885
200	0.5953824	0.1944413	0.6083546

Elde edilen test istatistikleri, altıncı bölümde verilen değerlere uygun olarak elde edilen Wilk's Λ değeri EK 1'deki tablo değeri karşılaştırıldığında tüm hipotezlerin 0.05 anlamlılık beklendiği şekilde reddildiği görülmektedir.

5. Senaryo: $i=3, k=4$ için hipotez testleri

$i=3$ grup ve $k=4$ deneme olması durumunda İki Yönlü Tekrarlı Ölçümlü MANOVA etken etkisini test eden ilk hipotez aşağıdaki gibi kurulmuştur.

➤ H_{01} : Etkenler (gruplar) arasında fark yoktur.

➤ H_{01} : $\mu_1 = \mu_2$.

➤ H_{01} :
$$\begin{bmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{12} \\ \mu_{13} \\ \mu_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{21} \\ \mu_{22} \\ \mu_{23} \\ \mu_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{31} \\ \mu_{32} \\ \mu_{33} \\ \mu_{34} \end{bmatrix}$$

Etken etkisi için çok değişkenli doğrusal hipotez ise aşağıdaki biçimde ifade edilmiştir.

➤ H_{01} : $C\beta A = 0$

➤ $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$; $\beta = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} & \mu_{14} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} & \mu_{24} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} & \mu_{34} \end{bmatrix}$; $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

➤ $\hat{\mu}_{ik} = \hat{\mu} + \hat{\tau}_k + \hat{\gamma}_i + (\hat{\tau\gamma})_{ki}$; $i = 1,2,3$; $k = 1,2,3,4$

➤ $H_{01} = C\hat{\beta}A = \begin{bmatrix} \hat{\mu}_{11} - \hat{\mu}_{21} & \hat{\mu}_{12} - \hat{\mu}_{22} & \hat{\mu}_{13} - \hat{\mu}_{23} & \hat{\mu}_{14} - \hat{\mu}_{24} \\ \hat{\mu}_{21} - \hat{\mu}_{31} & \hat{\mu}_{22} - \hat{\mu}_{32} & \hat{\mu}_{23} - \hat{\mu}_{33} & \hat{\mu}_{24} - \hat{\mu}_{34} \end{bmatrix}$

Benzetim sonucunda etken etkisi hipotezine ait hipotez matrislerine ilişkin sonuçlar Çizelge 8.25' de verilmiştir.

Çizelge 8.25. (i=3, k=4) Etken Etkisi Hipotez Matrislerine İlişkin Sonuçlar

n	$H_{01} = C\hat{\beta}A$
20	$\begin{bmatrix} 1.769141 & 1.771414 & -0.006709 & -0.011059 \\ 1.76914 & 1.771414 & -0.006709 & -0.011059 \end{bmatrix}$
40	$\begin{bmatrix} 1.770937 & 1.768600 & 0.0051937 & 0.003210 \\ 1.770937 & 1.768601 & 0.0051942 & 0.003210 \end{bmatrix}$
60	$\begin{bmatrix} 1.77900 & 1.783129 & -0.0047150 & -0.003941 \\ 1.77900 & 1.783129 & -0.0047150 & -0.003941 \end{bmatrix}$
80	$\begin{bmatrix} 1.77472 & 1.774038 & -0.0034514 & -0.002033 \\ 1.77472 & 1.774038 & -0.0034514 & -0.002033 \end{bmatrix}$
100	$\begin{bmatrix} 1.77227 & 1.7733735 & -0.0077083 & -0.006210 \\ 1.77227 & 1.7733735 & -0.0077083 & -0.006210 \end{bmatrix}$
120	$\begin{bmatrix} 1.77701 & 1.774877 & -0.0032884 & 0.0007573 \\ 1.77701 & 1.774877 & -0.0032884 & 0.0007573 \end{bmatrix}$
140	$\begin{bmatrix} 1.77337 & 1.771432 & 0.0059612 & 0.0036047 \\ 1.77337 & 1.771432 & 0.0059612 & 0.0036047 \end{bmatrix}$
160	$\begin{bmatrix} 1.77467 & 1.776391 & -0.00030265 & 0.000168 \\ 1.77467 & 1.776391 & -0.00030265 & 0.000168 \end{bmatrix}$
180	$\begin{bmatrix} 1.77496 & 1.773808 & -0.00038460 & 0.000615 \\ 1.77496 & 1.773808 & -0.00038460 & 0.000615 \end{bmatrix}$
200	$\begin{bmatrix} 1.77423 & 1.775799 & -0.0011470 & 0.002823 \\ 1.77423 & 1.775799 & -0.0011470 & 0.002823 \end{bmatrix}$

i=3 grup ve k=4 deneme olması durumunda İki Yönlü Tekrarlı Ölçümlü MANOVA deneme etkisini test eden ikinci hipotez aşağıdaki gibi kurulmuştur.

➤ H_{02} : Denemeler arasında fark yoktur.

➤ H_{02} : $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$

➤ H_{02} : $\begin{bmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{21} \\ \mu_{31} \\ \mu_{41} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{12} \\ \mu_{22} \\ \mu_{32} \\ \mu_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{13} \\ \mu_{23} \\ \mu_{33} \\ \mu_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{14} \\ \mu_{24} \\ \mu_{34} \\ \mu_{44} \end{bmatrix}$

$i=3$ grup ve $k=4$ için, deneme etkisi için çok değişkenli doğrusal hipotez ise aşağıdaki biçimde ifade edilmiştir.

➤ $\mathbf{H}_{02}: \mathbf{C}\boldsymbol{\beta}\mathbf{A} = \mathbf{0}$

➤ $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} & \mu_{14} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} & \mu_{24} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} & \mu_{34} \end{bmatrix}$; $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

➤ $\hat{\mu}_{ik} = \hat{\mu} + \hat{\tau}_k + \hat{\gamma}_i + (\widehat{\tau\gamma})_{ki}$; $i = 1,2,3$; $k = 1,2,3,4$

➤ $\mathbf{H}_{02} = \mathbf{C}\widehat{\boldsymbol{\beta}}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \hat{\mu}_{11} - \hat{\mu}_{14} & \hat{\mu}_{12} - \hat{\mu}_{14} & \hat{\mu}_{13} - \hat{\mu}_{14} \\ \hat{\mu}_{21} - \hat{\mu}_{24} & \hat{\mu}_{22} - \hat{\mu}_{24} & \hat{\mu}_{23} - \hat{\mu}_{24} \\ \hat{\mu}_{31} - \hat{\mu}_{34} & \hat{\mu}_{32} - \hat{\mu}_{34} & \hat{\mu}_{33} - \hat{\mu}_{34} \end{bmatrix}$

Deneme etkisinin testi için benzetim sonucunda elde edilen hipotez matrislerine ilişkin sonuçlar Çizelge 8.26' de verilmiştir.

Çizelge 8.26. (i=3, k=4) Deneme Etkisi Hipotez Matrislerine İlişkin Sonuçlar

n	$H_{02} = C\hat{\beta}A$		
20	5.055766	5.059462	5.068298
	5.055766	5.059462	5.068298
	3.275565	3.276988	5.063948
40	4.990511	4.985387	4.994689
	4.990512	4.985388	4.994690
	3.222785	3.219997	4.992706
60	5.059603	5.056675	5.060558
	5.059603	5.056675	5.060558
	3.276658	3.279605	5.061331
80	5.033255	5.031874	5.028828
	5.033255	5.031874	5.028828
	3.256496	3.255803	5.030246
100	5.031903	5.034580	5.028877
	5.031903	5.034580	5.028877
	3.253422	3.254634	5.030375
120	5.015833	5.011662	5.003817
	5.015833	5.011662	5.003817
	3.239576	3.237542	5.007863
140	5.000671	4.997512	5.005077
	5.000671	5.011662	5.003817
	3.230897	3.229685	5.002720
160	5.021083	5.023971	5.021699
	5.021083	5.023971	5.021699
	3.246575	3.247749	5.022170
180	5.021697	5.019522	5.018095
	5.021697	5.019522	5.018095
	3.247353	3.246330	5.019095
200	5.012729	5.015080	5.003751
	5.012729	5.015080	5.003751
	3.241393	3.242105	5.007722

i=3 grup ve k=4 deneme olması durumunda İki Yönlü Tekrarlı Ölçümlü MANOVA etkileşim etkisini test eden üçüncü hipotez ise aşağıdaki gibi kurulmuştur.

- H_{03} : Denemeler ve etkenler arasında bir etkileşim yoktur. (Deneme ve etkenin birlikte etkisi yoktur.)

$$\triangleright \mathbf{H}_{03}: \begin{bmatrix} \mu_{11} - \mu_{12} \\ \mu_{12} - \mu_{13} \\ \mu_{13} - \mu_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{21} - \mu_{22} \\ \mu_{22} - \mu_{23} \\ \mu_{23} - \mu_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{31} - \mu_{32} \\ \mu_{32} - \mu_{33} \\ \mu_{33} - \mu_{34} \end{bmatrix}$$

Etkileşim etkisi için çok değişkenli doğrusal hipotez ise aşağıdaki biçimde ifade edilmiştir.

$$\triangleright \mathbf{H}_{03}: \mathbf{C}\boldsymbol{\beta}\mathbf{A} = \mathbf{0}$$

$$\triangleright \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} ; \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} & \mu_{14} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} & \mu_{24} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} & \mu_{34} \end{bmatrix} ; \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\triangleright \hat{\mu}_{ik} = \hat{\mu} + \hat{\tau}_k + \hat{\gamma}_i + (\hat{\tau\gamma})_{ki} ; i = 1,2,3 ; k = 1,2,3,4$$

$$\triangleright \mathbf{H}_{03}: \mathbf{C}\hat{\boldsymbol{\beta}}\mathbf{A} =$$

$$\begin{bmatrix} (\hat{\mu}_{11} - \hat{\mu}_{12}) - (\hat{\mu}_{21} - \hat{\mu}_{22}) & (\hat{\mu}_{12} - \hat{\mu}_{13}) - (\hat{\mu}_{22} - \hat{\mu}_{23}) & (\hat{\mu}_{13} - \hat{\mu}_{14}) - (\hat{\mu}_{23} - \hat{\mu}_{24}) \\ (\hat{\mu}_{21} - \hat{\mu}_{22}) - (\hat{\mu}_{31} - \hat{\mu}_{32}) & (\hat{\mu}_{22} - \hat{\mu}_{23}) - (\hat{\mu}_{32} - \hat{\mu}_{33}) & (\hat{\mu}_{23} - \hat{\mu}_{24}) - (\hat{\mu}_{33} - \hat{\mu}_{34}) \end{bmatrix}$$

Etkileşim etkisinin testi için benzetim sonucunda elde edilen hipotez matrislerine ilişkin sonuçlar Çizelge 8.27' de verilmiştir.

Çizelge 8.27. (i=3, k=4) Etkileşim Etkisi Hipotez Matrislerine İlişkin Sonuçlar

n	$H_{03} = C\hat{\beta}A$
20	$\begin{bmatrix} -0.002273093 & 1.778124 & 0.004250113 \\ -0.002273093 & 1.778124 & 0.004250113 \end{bmatrix}$
40	$\begin{bmatrix} 0.002336457 & 1.763407 & 0.001982823 \\ 0.002336455 & 1.763407 & 0.001983890 \end{bmatrix}$
60	$\begin{bmatrix} -0.004125813 & 1.787844 & -0.00077334 \\ -0.004125813 & 1.787844 & -0.00077334 \end{bmatrix}$
80	$\begin{bmatrix} 0.0006878365 & 1.77749 & -0.001419332 \\ 0.0006878365 & 1.77749 & -0.001418332 \end{bmatrix}$
100	$\begin{bmatrix} 0.001464706 & 1.781443 & -0.01497504 \\ 0.001464706 & 1.781443 & -0.01497504 \end{bmatrix}$
120	$\begin{bmatrix} 0.002136895 & 1.778166 & -0.004045827 \\ 0.002136895 & 1.778166 & -0.004045827 \end{bmatrix}$
140	$\begin{bmatrix} 0.001946666 & 1.765471 & 0.002356504 \\ 0.001946666 & 1.765471 & 0.002356504 \end{bmatrix}$
160	$\begin{bmatrix} -0.001714798 & 1.776693 & -0.00047085 \\ -0.001714798 & 1.776693 & -0.00047085 \end{bmatrix}$
180	$\begin{bmatrix} 0.001152036 & 1.774192 & -0.001000598 \\ 0.001152036 & 1.774192 & -0.001000598 \end{bmatrix}$
200	$\begin{bmatrix} -0.001565064 & 1.776946 & -0.003970769 \\ -0.001565064 & 1.776946 & -0.003970769 \end{bmatrix}$

Deneme, etken ve etkileşim hipotezlerinin istatistiklerine ilişkin sonuçlar Çizelge 8.28'de verilmiştir.

Çizelge 8.28. (i=3, k=4) Test İstatistiklerine İlişkin Sonuçlar

n	Λ_{01} (Etken)	Λ_{02} (Deneme)	Λ_{03} (Etkileşim)
20	0.5010248	0.02958890	0.5766643
40	0.6084138	0.03918374	0.6516528
60	0.6308528	0.03529130	0.6664087
80	0.6489518	0.03669593	0.6819359
100	0.6574393	0.03736740	0.6880589
120	0.6633866	0.03839305	0.6914711
140	0.6699587	0.03842503	0.6977088
160	0.6715568	0.03874070	0.6985132
180	0.6738977	0.03918370	0.6992680
200	0.6743349	0.03929881	0.7002918

Elde edilen test istatistikleri, altıncı bölümde verilen değerlere uygun olarak elde edilen Wilk's Λ değeri EK 1'deki tablo değeri karşılaştırıldığında tüm hipotezlerin 0.05 anlamlılık beklendiği şekilde reddedildiği görülmektedir.

6. Senaryo: i=3, k=6 için hipotez testleri

i=3 grup ve k=6 deneme olması durumunda iki Yönlü Tekrarlı Ölçümlü MANOVA etken etkisini test eden ilk hipotez aşağıdaki gibi kurulmuştur.

➤ H_{01} : Etkenler (gruplar) arasında fark yoktur.

➤ H_{01} : $\mu_1 = \mu_2$.

$$\text{➤ } H_{01}: \begin{bmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{12} \\ \mu_{13} \\ \mu_{14} \\ \mu_{15} \\ \mu_{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{21} \\ \mu_{22} \\ \mu_{23} \\ \mu_{24} \\ \mu_{25} \\ \mu_{26} \end{bmatrix}$$

Etken etkisi için çok değişkenli doğrusal hipotez ise aşağıdaki biçimde ifade edilmiştir.

➤ $H_{01}: C\beta A = 0$

➤ $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$; $\beta = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} & \mu_{14} & \mu_{15} & \mu_{16} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} & \mu_{24} & \mu_{25} & \mu_{26} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} & \mu_{34} & \mu_{35} & \mu_{36} \end{bmatrix}$

➤ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

➤ $\hat{\mu}_{ik} = \hat{\mu} + \hat{\tau}_k + \hat{\gamma}_i + (\widehat{\tau\gamma})_{ki}$; $i = 1,2,3$; $k = 1,2,3,4,5,6$

➤ $H_{01}: C\hat{\beta}A =$

$$\begin{bmatrix} \hat{\mu}_{11} - \hat{\mu}_{31} & \hat{\mu}_{12} - \hat{\mu}_{32} & \hat{\mu}_{13} - \hat{\mu}_{33} & \hat{\mu}_{14} - \hat{\mu}_{34} & \hat{\mu}_{15} - \hat{\mu}_{35} & \hat{\mu}_{16} - \hat{\mu}_{36} \\ \hat{\mu}_{21} - \hat{\mu}_{31} & \hat{\mu}_{22} - \hat{\mu}_{32} & \hat{\mu}_{23} - \hat{\mu}_{33} & \hat{\mu}_{24} - \hat{\mu}_{34} & \hat{\mu}_{25} - \hat{\mu}_{35} & \hat{\mu}_{26} - \hat{\mu}_{36} \end{bmatrix}$$

Benzetim sonucunda etken etkisi hipotezine ait hipotez matrislerine ilişkin sonuçlar Çizelge 8.29' da verilmiştir.

Çizelge 8.29. (i=3, k=6) Etken Etkisi Hipotez Matrislerine İlişkin Sonuçlar

n	$H_{01} = C\hat{\beta}A$					
20	[1.892125	1.901442	1.8866165	1.896446	1.88946	-3.708995]
	[1.892125	1.901442	1.8866165	1.896446	1.88946	-3.708995]
40	[1.874195	1.868856	1.871556	1.865739	1.879248	-3.733561]
	[1.874195	1.868856	1.871556	1.865739	1.879248	-3.733561]
60	[1.874158	1.879957	1.873312	1.875987	1.878483	-3.681399]
	[1.874158	1.879957	1.873312	1.875987	1.878483	-3.681399]
80	[1.876047	1.875697	1.874731	1.872325	1.874186	-3.72557]
	[1.876047	1.875697	1.874731	1.872325	1.874186	-3.72557]
100	[1.863791	1.863676	1.859189	1.863031	1.862199	-3.755248]
	[1.863791	1.863676	1.859189	1.863031	1.862199	-3.755248]
120	[1.862947	1.865356	1.864516	1.862587	1.867665	-3.7548]
	[1.862947	1.865356	1.864516	1.862587	1.867665	-3.7548]
140	[1.868688	1.872242	1.866435	1.873296	1.86841	-3.706874]
	[1.868688	1.872242	1.866435	1.873296	1.86841	-3.706874]
160	[1.892125	1.901442	1.8866165	1.896446	1.88946	-3.708995]
	[1.892125	1.901442	1.8866165	1.896446	1.88946	-3.708995]
180	[1.871266	1.869414	1.86731	1.870951	1.866363	-3.737243]
	[1.871266	1.869414	1.86731	1.870951	1.866363	-3.737243]
200	[1.870169	1.872058	1.867148	1.871566	1.871481	-3.741501]
	[1.870169	1.872058	1.867148	1.871566	1.871481	-3.741501]

i=3 grup ve k=6 deneme olması durumunda İki Yönlü Tekrarlı Ölçümlü MANOVA etken etkisini test eden ikinci hipotez aşağıdaki gibi kurulmuştur.

➤ H_{02} : Denemeler arasında fark yoktur.

➤ H_{02} : $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = \mu_6$

➤ H_{02} : $\begin{bmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{21} \\ \mu_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{12} \\ \mu_{22} \\ \mu_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{13} \\ \mu_{23} \\ \mu_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{14} \\ \mu_{24} \\ \mu_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{15} \\ \mu_{25} \\ \mu_{35} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{16} \\ \mu_{26} \\ \mu_{36} \end{bmatrix}$

$i=3$ grup ve $k=6$ için, deneme etkisi için çok değişkenli doğrusal hipotez ise aşağıdaki biçimde ifade edilmiştir.

➤ $H_{02}: C\beta A = 0$

➤ $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \beta = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} & \mu_{14} & \mu_{15} & \mu_{16} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} & \mu_{24} & \mu_{25} & \mu_{26} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} & \mu_{34} & \mu_{35} & \mu_{36} \end{bmatrix}$

➤ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

➤ $\hat{\mu}_{ik} = \hat{\mu} + \hat{\tau}_k + \hat{\gamma}_i + (\hat{\tau\gamma})_{ki} ; i = 1,2,3 ; k = 1,2,3,4,5,6$

➤ $H_{02}: C\hat{\beta}A = \begin{bmatrix} \hat{\mu}_{11} - \hat{\mu}_{16} & \hat{\mu}_{12} - \hat{\mu}_{16} & \hat{\mu}_{13} - \hat{\mu}_{16} & \hat{\mu}_{14} - \hat{\mu}_{16} & \hat{\mu}_{15} - \hat{\mu}_{16} \\ \hat{\mu}_{21} - \hat{\mu}_{26} & \hat{\mu}_{22} - \hat{\mu}_{26} & \hat{\mu}_{23} - \hat{\mu}_{26} & \hat{\mu}_{24} - \hat{\mu}_{26} & \hat{\mu}_{25} - \hat{\mu}_{26} \\ \hat{\mu}_{31} - \hat{\mu}_{36} & \hat{\mu}_{32} - \hat{\mu}_{36} & \hat{\mu}_{33} - \hat{\mu}_{36} & \hat{\mu}_{34} - \hat{\mu}_{36} & \hat{\mu}_{35} - \hat{\mu}_{36} \end{bmatrix}$

Deneme etkisinin testi için benzetim sonucunda elde edilen hipotez matrislerine ilişkin sonuçlar Çizelge 8.30' da verilmiştir.

Çizelge 8.30. (i=3, k=6) Deneme Etkisi Hipotez Matrislerine İlişkin Sonuçlar

n	$H_{02} = C\hat{\beta}A$				
20	7.67610	7.691869	7.664868	7.683230	7.670246
	7.67610	7.691869	7.664868	7.683230	7.670246
	2.07498	2.081433	2.069708	2.077787	2.071791
40	7.696641	7.688236	7.692516	7.682769	7.705290
	7.696641	7.688236	7.692516	7.682769	7.705290
	2.088885	2.085819	2.087399	2.083469	2.092482
60	7.603403	7.612897	7.601742	7.606243	7.610363
	7.603403	7.612897	7.601742	7.606243	7.610363
	2.047846	2.051542	2.047030	2.048857	2.050481
80	7.686005	7.685654	7.683742	7.680074	7.682774
	7.686005	7.685654	7.683742	7.680074	7.682774
	2.084387	2.084387	2.083441	2.082178	2.083018
100	7.715352	7.715247	7.707655	7.714093	7.712863
	7.715352	7.715247	7.707655	7.714093	7.712863
	2.096313	2.096323	2.093218	2.095815	2.095416
120	7.715103	7.719206	7.717679	7.714524	7.723207
	7.715103	7.719206	7.717679	7.714524	7.723207
	2.097356	2.099050	2.098363	2.097137	2.100742
140	7.644012	7.649786	7.640119	7.661547	7.643649
	7.644012	7.649786	7.640119	7.661547	7.643649
	2.06827	2.070670	2.066810	2.071377	2.068365
160	7.676642	7.681862	7.677377	7.680037	7.675448
	7.676642	7.681862	7.677377	7.680037	7.675448
	2.079808	2.081841	2.080017	2.081059	2.079246
180	7.696787	7.693672	7.690349	7.696357	7.688657
	7.696787	7.693672	7.690349	7.696357	7.688657
	2.088278	2.087016	2.085797	2.088164	2.05052
200	7.704410	7.707549	7.699412	7.706586	7.706587
	7.704410	7.707549	7.699412	7.706586	7.706587
	2.092739	2.093990	2.090763	2.093519	2.093604

i=3 grup ve k=6 deneme olması durumunda İki Yönlü Tekrarlı Ölçümlü MANOVA etkileşim etkisini test eden üçüncü hipotez ise aşağıdaki gibi kurulmuştur.

- H_{03} : Denemeler ve etkenler arasında bir etkileşim yoktur. (Deneme ve etkenin birlikte etkisi yoktur.)

$$\triangleright \mathbf{H}_{03}: \begin{bmatrix} \mu_{11} - \mu_{12} \\ \mu_{12} - \mu_{13} \\ \mu_{13} - \mu_{14} \\ \mu_{14} - \mu_{15} \\ \mu_{15} - \mu_{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{21} - \mu_{22} \\ \mu_{22} - \mu_{23} \\ \mu_{23} - \mu_{24} \\ \mu_{24} - \mu_{25} \\ \mu_{25} - \mu_{26} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{31} - \mu_{32} \\ \mu_{32} - \mu_{33} \\ \mu_{33} - \mu_{34} \\ \mu_{34} - \mu_{35} \\ \mu_{35} - \mu_{36} \end{bmatrix}$$

Etkileşim etkisi için çok değişkenli doğrusal hipotez ise aşağıdaki biçimde ifade edilmiştir.

$$\triangleright \mathbf{H}_{03}: \mathbf{C}\boldsymbol{\beta}\mathbf{A} = \mathbf{0}$$

$$\triangleright \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}; \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} & \mu_{14} & \mu_{15} & \mu_{16} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} & \mu_{24} & \mu_{25} & \mu_{26} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} & \mu_{34} & \mu_{35} & \mu_{36} \end{bmatrix}$$

$$\triangleright \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\triangleright \hat{\mu}_{ik} = \hat{\mu} + \hat{\tau}_k + \hat{\gamma}_i + (\widehat{\tau\gamma})_{ki}; \quad i = 1,2,3; k = 1,2,3,4,5,6$$

$$\triangleright \mathbf{H}_{03}: \mathbf{C}\hat{\boldsymbol{\beta}}\mathbf{A} =$$

$$\begin{bmatrix} (\hat{\mu}_{11} - \hat{\mu}_{12}) - (\hat{\mu}_{21} - \hat{\mu}_{22}) & (\hat{\mu}_{12} - \hat{\mu}_{13}) - (\hat{\mu}_{22} - \hat{\mu}_{23}) & (\hat{\mu}_{13} - \hat{\mu}_{14}) - (\hat{\mu}_{23} - \hat{\mu}_{24}) \\ (\hat{\mu}_{21} - \hat{\mu}_{22}) - (\hat{\mu}_{31} - \hat{\mu}_{32}) & (\hat{\mu}_{22} - \hat{\mu}_{23}) - (\hat{\mu}_{32} - \hat{\mu}_{33}) & (\hat{\mu}_{23} - \hat{\mu}_{24}) - (\hat{\mu}_{33} - \hat{\mu}_{34}) \\ (\hat{\mu}_{14} - \hat{\mu}_{15}) - (\hat{\mu}_{24} - \hat{\mu}_{25}) & (\hat{\mu}_{15} - \hat{\mu}_{16}) - (\hat{\mu}_{25} - \hat{\mu}_{26}) \\ (\hat{\mu}_{24} - \hat{\mu}_{25}) - (\hat{\mu}_{34} - \hat{\mu}_{35}) & (\hat{\mu}_{25} - \hat{\mu}_{26}) - (\hat{\mu}_{35} - \hat{\mu}_{36}) \end{bmatrix}$$

Etkileşim etkisinin testi için benzetim sonucunda elde edilen hipotez matrislerine ilişkin sonuçlar Çizelge 8.31' de verilmiştir.

Çizelge 8.31. (i=3, k=6) Etkileşim Etkisi Hipotez Matrislerine İlişkin Sonuçlar

n	$H_{03} = C\hat{\beta}A$
20	$\begin{bmatrix} -0.0093 & 0.01527 & -0.01028 & 0.0069891 & 5.5984 \\ -0.0093 & 0.01527 & -0.01028 & 0.0069891 & 5.5984 \end{bmatrix}$
40	$\begin{bmatrix} 0.005338 & -0.002699 & 0.005817 & -0.013509 & 5.6128 \\ 0.005338 & -0.002699 & 0.005817 & -0.013509 & 5.6128 \end{bmatrix}$
60	$\begin{bmatrix} -0.00579 & 0.06644 & -0.00267 & 0.002496 & 5.5598 \\ -0.00579 & 0.06644 & -0.00267 & 0.002496 & 5.5598 \end{bmatrix}$
80	$\begin{bmatrix} 0.0003505 & 0.000966 & 0.002405 & -0.001860 & 5.5999 \\ 0.0003505 & 0.000966 & 0.002405 & -0.001860 & 5.5999 \end{bmatrix}$
100	$\begin{bmatrix} 0.000115 & 0.004486 & -0.003841 & 0.0008318 & 5.6174 \\ 0.000115 & 0.004486 & -0.003841 & 0.0008318 & 5.6174 \end{bmatrix}$
120	$\begin{bmatrix} -0.002409 & 0.0008404 & 0.0019285 & -0.0050777 & 5.6224 \\ -0.002409 & 0.0008404 & 0.0019285 & -0.0050777 & 5.6224 \end{bmatrix}$
140	$\begin{bmatrix} -0.003378 & 0.0058073 & -0.0068608 & 0.0048854 & 5.5762 \\ -0.003378 & 0.0058073 & -0.006860 & 0.0048854 & 5.5762 \end{bmatrix}$
160	$\begin{bmatrix} -0.003187 & 0.002661 & -0.0016188 & 0.0027759 & 5.5962 \\ -0.003187 & 0.002661 & -0.0016188 & 0.0027759 & 5.5962 \end{bmatrix}$
180	$\begin{bmatrix} 0.001851 & 0.002104 & -0.0036407 & 0.0045879 & 5.6036 \\ 0.001851 & 0.002104 & -0.0036407 & 0.0045879 & 5.6036 \end{bmatrix}$
200	$\begin{bmatrix} -0.001888 & 0.004909 & -0.004417 & 0.00008453 & 5.6129 \\ -0.001888 & 0.004909 & -0.004417 & 0.00008453 & 5.6129 \end{bmatrix}$

Deneme, etken ve etkileşim hipotezlerinin test istatistiklerine ilişkin sonuçlar Çizelge 8.32' de verilmiştir.

Çizelge 8.32. (i=3, k=6) Test İstatistiklerine İlişkin Sonuçlar

n	Λ_{01} (Etken)	Λ_{02} (Deneme)	Λ_{03} (Etkileşim)
20	0.0771539	0.0213332	0.0993370
40	0.1299215	0.0295043	0.1428779
60	0.1515042	0.0336175	0.1614869
80	0.1564887	0.0335559	0.1644656
100	0.1618384	0.0343752	0.1690532
120	0.1629791	0.0343727	0.1698731
140	0.1696258	0.0358685	0.1760551
160	0.1688438	0.0355184	0.1751319
180	0.1713022	0.0359407	0.1771813
200	0.1720696	0.0360596	0.1779752

Elde edilen test istatistikleri, altıncı bölümde değerlere uygun olarak elde edilen Wilk's Λ tablo değeri karşılaştırıldığında tüm hipotezlerin 0.05 anlamlılık beklendiği şekilde reddedildiği görülmektedir.

Benzetim çalışmasının bu aşamasında, farklı örneklem büyüklükleri, farklı sayılardaki grup ve denemelerden oluşan tekrarlı ölçümlü verilerin analizi için Çok Değişkenli Laplace dağılımı varsayımı altında önerilen test istatistiklerine ilişkin güç hesaplamaları yapılmıştır.

Test istatistiklerinin gücünü hesaplamada iki farklı yaklaşım kullanılmıştır. Birinci yaklaşımda, (6.25) ve (6.26) 'da verilen eşitlikler kullanılarak, Wilk's Lamda dağılımına sahip test istatistikleri F dağılımına dönüştürülmüştür. F dağılımına dönüşmüş test istatistikleri değerleri ve F dağılımına sahip tablo değerleri kullanılmıştır. F dağılımına sahip $F\Lambda_{01}$, $F\Lambda_{02}$, $F\Lambda_{03}$ test istatistikleri için güçleri hesaplarken Çizelge 8.33' de verilen olasılıklar kullanılmıştır.

Çizelge 8.33. Testlerin Güç Hesaplamaları İçin Kullanılan Olasılıklar

$i = 2, p \geq 1$	$i = 3, p \geq 1$
$P\{F\Lambda_{01} \geq F(p, \sum_{i=1}^g n_i - p - 1) H_{11}\}$	$P\{F\Lambda_{01} \geq F(2p, \sum_{i=1}^g n_i - p - 2) H_{11}\}$
$P\{F\Lambda_{02} \geq F(p, \sum_{i=1}^g n_i - p - 1) H_{12}\}$	$P\{F\Lambda_{02} \geq F(2p, \sum_{i=1}^g n_i - p - 2) H_{12}\}$
$P\{F\Lambda_{03} \geq F(p, \sum_{i=1}^g n_i - p - 1) H_{13}\}$	$P\{F\Lambda_{03} \geq F(2p, \sum_{i=1}^g n_i - p - 2) H_{13}\}$

Benzetim çalışmasında Çizelge 8.33'de verilen olasılıklara dayalı olarak hesaplanan güç yaklaşımının deneysel güç yaklaşımı olması nedeniyle sonuç çizelgelerinde EP (experimental power) kısaltması kullanılmıştır [36]. Bu değerler R programında yazılan bir fonksiyon yardımı ile Çizelge 8.33'deki olasılıklar hesaplandıktan sonra tekrar sayısına bölünerek sonuca ulaşılmıştır.

İkinci yaklaşımda ise alternatif hipoteze ilişkin dağılım teorisi altında genel doğrusal modeller için literatürde önerilen güç yaklaşımı kullanılmıştır [51]. Bu yaklaşıma ilişkin güç hesaplaması için kullanılan adımlar sırasıyla aşağıda verilmiştir:

- $\alpha, \Sigma, X, \beta, C, A, H_0$ belirlenir.
- Ters F dağılımına ilişkin yaklaşık bir kritik değer hesaplanır.

$$F_{\text{kritik}} \approx \text{FINV}[1 - \alpha, ab, df_2]$$

$$df_2 = g[(N - r) - (b - a + 1)/2] - (ab - 2)/2$$

$$g = [(a^2b^2 - 4)/a^2 + b^2 - 5]^{1/2}$$

- Merkezsel olmayış parametresi hesaplanır.

$$w = \frac{1 - \Lambda_A^{1/g}}{\Lambda_A^{1/g} / df_2}$$

- Merkezi olmayan F dağılımı ile güç yaklaşık olarak hesaplanır.

$$\text{GLM Power} \approx 1 - \text{FPROB} [F_{\text{kritik}}, ab, df_2, w]$$

Bu yaklaşım için ise sonuç çizelgelerinde GLMP (GLM-Power) kısaltması kullanılmıştır. Bu yaklaşımlar kullanılarak, test istatistiklerine ilişkin elde edilen güç değerleri Çizelge 8.34 ve Çizelge 8.35' de verilmiştir.

Çizelge 8.34. Etken (Λ_{01}), Deneme (Λ_{02}) ve Etkileşim (Λ_{03}) için test istatistiklerinin gücü

(i=2, k=3,4,6 , $\alpha = 0.05$)

k	n	Λ_{01}		Λ_{02}		Λ_{03}	
		EP	GLMP	EP	GLMP	EP	GLMP
3	20	0.9980	0.8525	0.9930	0.9710	0.9890	0.8373
	40	0.9990	0.9757	1.0000	0.9988	0.9990	0.9736
	60	1.0000	0.9976	1.0000	0.9999	1.0000	0.9972
	80	1.0000	0.9993	1.0000	0.9999	1.0000	0.9990
	100	1.0000	0.9998	1.0000	0.9999	1.0000	0.9998
	120	1.0000	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
	140	1.0000	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
	160	1.0000	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
	180	1.0000	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
	200	1.0000	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
4	20	0.9990	0.9178	0.997	0.9239	0.9800	0.8471
	40	1.0000	0.9906	1.0000	0.9914	0.9990	0.9712
	60	1.0000	0.9996	1.0000	0.9995	1.0000	0.9973
	80	1.0000	0.9999	1.0000	0.9999	1.0000	0.9997
	100	1.0000	0.9999	1.0000	0.9999	1.0000	0.9999
	120	1.0000	0.9999	1.0000	0.9999	1.0000	0.9999
	140	1.0000	0.9999	1.0000	0.9999	1.0000	0.9999
	160	1.0000	0.9999	1.0000	0.9999	1.0000	0.9999
	180	1.0000	0.9999	1.0000	0.9999	1.0000	0.9999
	200	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
6	20	1.0000	0.9886	1.0000	0.9955	0.9990	0.9871
	40	1.0000	0.9999	1.0000	0.9999	1.0000	0.9999
	60	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	80	1.0000	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
	100	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	120	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	140	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	160	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	180	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	200	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Çizelge 8.35. Etken (Λ_{01}), Deneme (Λ_{02}) ve Etkileşim (Λ_{03}) için test istatistiklerinin gücü

($i=3, k=3,4,6, \alpha = 0.05$)

k	n	Λ_{01}		Λ_{02}		Λ_{03}	
		EP	GLMP	EP	GLMP	EP	GLMP
3	20	0.9580	0.7049	0.9950	0.9693	0.9310	0.7201
	40	1.0000	0.9137	1.0000	0.9995	0.9998	0.9230
	60	1.0000	0.9832	1.0000	0.9999	1.0000	0.9844
	80	1.0000	0.9964	1.0000	0.9999	1.0000	0.9966
	100	1.0000	0.9995	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995
	120	1.0000	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
	140	1.0000	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
	160	1.0000	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
	180	1.0000	0.9999	1.0000	0.9999	1.0000	0.9999
	200	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4	20	0.8450	0.5460	1.0000	0.9993	0.7100	0.5767
	40	1.0000	0.8094	0.9995	0.9999	0.9777	0.8095
	60	1.0000	0.9416	1.0000	1.0000	1.0000	0.6665
	80	1.0000	0.9818	1.0000	1.0000	1.0000	0.9782
	100	1.0000	0.9954	1.0000	1.0000	1.0000	0.9938
	120	1.0000	0.9988	1.0000	1.0000	1.0000	0.9984
	140	1.0000	0.9997	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995
	160	1.0000	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998
	180	1.0000	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
	200	1.0000	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
6	20	1.0000	0.9769	1.0000	0.9992	1.0000	0.9845
	40	1.0000	0.9999	1.0000	0.9999	1.0000	0.9999
	60	1.0000	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
	80	1.0000	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
	100	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	120	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	140	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	160	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	180	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	200	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Güç değerlerine bakıldığında EP'den elde edilen güçlerin GLMP'den her durumda daha büyük değerler verdiği görülmektedir. Deneysel güç hesaplanırken, doğru olmayan H_0 hipotezi varsayımı altında reddedilen hipotezlerin sayısı tekrar sayısına bölünerek elde edilmiştir. GLMP'de ise H_0 hipotezinin doğru olmadığı varsayımı ile her bir hipotez için F dağılımına ait merkezsiz olmayış parametresi hesaplanmış ve testin gücü hesaplanmıştır. Merkezi olmayan dağılımlar H_0 hipotezinin doğru olmadığı durumda alternatif hipoteze ilişkin test istatistiğinin dağılımını tanımladığı için EP'ler daha yüksek çıkmıştır.

9. SAYISAL ÖRNEK

Bu veri kümesinde lökositlerin oksijen tüketiminin ölçümlerini inaktive stafilokok varlığında olmadığı ortamlarda ardı ardına gelen üç farklı zaman noktasında Verum ve Pleasebo gruplarına ayrılarak ölçülmüştür[52]. Bu örnek üzerinde gruplar arası (etken) fark, zaman noktalarına (deneme) göre değişim ve etkileşim terimi test edilerek oksijen tüketimi üzerindeki etkileri araştırılacaktır.

Çizelge 9.1. Lökositlerin Oksijen Tüketim Verisi

Grup	Denek	Zaman6	Zaman12	Zaman18	Grup	Zaman6	Zaman12	Zaman18
P	1	1,48	2,81	3,56	V	1,78	2,96	4,00
P	2	1,04	2,07	2,81	V	1,48	2,81	3,85
P	3	1,48	2,52	3,41	V	1,33	2,52	3,84
P	4	1,04	1,93	2,89	V	1,03	2,07	2,96
P	5	1,80	2,15	3,20	V	1,65	3,00	3,98
P	6	1,50	2,70	3,75	V	1,50	2,85	3,75
P	7	1,65	2,85	3,75	V	1,50	2,85	3,90
P	8	1,35	2,40	3,30	V	1,50	2,55	3,60
P	9	1,49	2,54	3,58	V	1,49	2,99	3,88
P	10	1,19	2,24	3,84	V	1,34	2,54	3,44
P	11	1,49	2,61	3,88	V	1,64	2,69	3,73
P	12	1,49	2,54	3,58	V	1,19	2,39	3,29
P	13	1,94	2,29	3,49	V	1,94	3,44	4,41
P	14	1,50	2,69	3,89	V	1,50	2,84	4,04
P	15	1,64	2,14	3,18	V	1,79	2,99	4,19
P	16	1,35	2,39	3,29	V	1,64	2,69	3,89
P	17	1,50	2,00	3,90	V	1,95	2,30	4,50
P	18	1,35	2,70	3,45	V	1,80	2,30	4,20
P	19	1,65	2,30	3,35	V	1,80	2,30	4,20
P	20	1,20	2,55	3,60	V	1,35	2,40	3,60
P	21	1,50	2,85	3,12	V	1,65	3,00	4,05
P	22	1,65	2,70	3,40	V	1,20	2,70	3,90
P	23	1,80	2,15	3,90	V	1,35	2,55	3,67
P	24	1,20	2,25	3,30	V	1,20	2,70	3,60

Bu hipotezler Normal dağılım varsayımı altında Tekrarlı Ölçümlü ANOVA'ya ve MANOVA'ya göre çözüldüğündeki sonuçlar Çizelge 9.2'de verilmiştir. Klasik MANOVA yöntemi Grup etkisini test etmediği için bu terime ait Wilk's Λ değeri hesaplanamamaktadır. MANOVA sonuçları Wilk's Λ , ANOVA sonuçları F testi ile verilmiştir. Her iki yöntemde de tüm hipotezler %1 anlamlılık düzeyinde reddedilmiştir.

Çizelge 9.2. Lökositlerin Oksijen Tüketim Verisi için ANOVA ve MANOVA Tablosu

Hipotezler	Wilk's Λ	F	P-değeri
Deneme	0.013	1169.244	0.000*
Grup	-	6.568	0.001*
Etkileşim	0.702	12.123	0.002*

*P<0,001

Aynı zamanda veriler bu tez çalışmasında verilen yöntemle göre çözüldüğünde sonuçlar Çizelge 9.10'da verilmiştir.

Çizelge 9.3. Lökositlerin Oksijen Tüketim Verisi için MANOVA Tablosu

Hipotezler	Wilk's Λ	P-değeri
Deneme	0.01645*	0.000
Grup	0.00398*	0.000
Etkileşim	0.01912*	0.000

Çok Değişkenli Laplace dağılımı altında Çizelge 9.1' deki oksijen tüketim verilerinin Çok Değişkenli İki Yönlü Tekrarlı Ölçümlü ANOVA ile çözümlenmesi sonucunda sınanan üç hipotez de EK-1'deki tablo değerleri ile karşılaştırıldığında %5 anlamlılık düzeyinde red edilmiştir. Bu sonucun normal dağılıma dayalı yöntemler ile alınan sonuca uyumlu olması nedeniyle önerilen yöntemin gerçek verilere de uygulanabileceği sonucuna varılmıştır.

Ayrıca, $i=2$, $k=3$ durumunda tanımlanan 1. Senaryoda, verilerin Çizelge 9.1 ile verilen gerçek veri kümesinden gelmesi durumunda İki Yönlü Tekrarlı Ölçümlü MANOVA denkleminde ilişkin parametre tahminleri de elde edilmiştir. Tahmin sonuçları Çizelge 9.4' te verilmiştir.

β parametre vektörünün başlangıç değeri için EKK tahmin edicisi, Σ yayılım matrisi için ise 1. Senaryoda verilen başlangıç değeri kullanılmıştır:

$$\hat{\beta}_{\text{EKK}} = \begin{bmatrix} 2.57 \\ 0.12 \\ -0.12 \\ -1.42 \\ -0.70 \\ 2.10 \\ -0.80 \\ -0.40 \\ 1.06 \\ 0.71 \\ 0.35 \\ -1.07 \end{bmatrix} ; \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0.7 \\ 0.8 & 1 & 0.6 \\ 0.7 & 0.6 & 1 \end{bmatrix}$$

Çizelge 9.4. Lökositlerin Oksijen Tüketim Verisi için Parametre Tahminleri

n=48	
$\hat{\beta}$	$\begin{bmatrix} 2.3668735 \\ 1.2195407 \\ -1.2195407 \\ -1.4167780 \\ -0.6843779 \\ 2.1011559 \\ -0.7186707 \\ -0.3502304 \\ 1.0689011 \\ 0.7186707 \\ 0.3502304 \\ -1.0689011 \end{bmatrix}$
$\hat{\Sigma}$	$\begin{bmatrix} 0.2558516 & 0.3980161 & 0.5725207 \\ 0.3980161 & 0.7801784 & 1.304231 \\ 0.5725207 & 1.0304231 & 1.4995878 \end{bmatrix}$
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	0.01134304
$\ \hat{\Sigma} - \Sigma\ $	0.00188000
$\ \hat{Q} - Q\ $	0.00280359
Ortalama iterasyon sayısı	22

10. SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu çalışmada MANOVA ve Çok Değişkenli Tekrarlı Ölçümlü ANOVA yaklaşımlarının birlikte düşünüldüğü karma bir yöntem olan ve literatürde daha önce kullanılmamış farklı bir Çok Değişkenli Tekrarlı Ölçümlü ANOVA yaklaşımı kullanılmıştır. Tekrarlı ölçümlü ANOVA ya da MANOVA problemlerinde hataların normal dağılıma sahip olma varsayımları altında çözümlenmeler yapılır. Son yıllarda, normal dağılıma alternatif bir dağılım olması nedeni ile araştırmacılar tarafından sıklıkla ele alınan bir dağılım olan Laplace Dağılımı temel alınarak, bu dağılıma dayalı çıkarsamalar yapılmıştır. Çok değişkenli kısımda, normal dağılımın ölçek karması olarak tanımlanan Çok Değişkenli Laplace dağılımından yararlanılarak parametre tahminlerine ilişkin teorik çıkarsamalar yapılmıştır. Matris değişkenli kısım için ise literatürden farklı olarak Normal dağılım ve Ters Gama dağılımından bir karma dağılım olarak elde edilen Matris Değişkenli Laplace dağılımına dayalı parametre tahmini çıkarsamaları yapılmıştır. Bu çıkarsamalarda, ANOVA modeli esas alınarak tanımlanan çok değişkenli doğrusal model için EM algoritması yardımı ile parametre tahminleri elde edilmiştir. Tekrarlı Ölçümlü ANOVA'da etken, deneme ve etkileşim etkileri için kurulan hipotezler F istatistiği ile MANOVA'da ise hipotezler, Wilk's Lamda, gibi istatistikler kullanılarak test edilmektedir. Bu çalışmada Eliptik Konturlu dağılımlar ailesinden olan Çok Değişkenli Laplace dağılımına dayalı parametre tahminleri kullanılarak Wilk's Lamda istatistiği hesaplanmıştır. Bu istatistiğe ilişkin hesaplanan güç değerlerine göre, önerilen test istatistiklerinin yüksek güç değerleri verdiği görülmüştür.

Yapılan teorik çıkarsamalar sonucunda elde edilen parametre tahminlerini ve test istatistiklerini hesaplayabilmek amacıyla bir benzetim çalışması yapılmıştır. Benzetim çalışmasında, İki Yönlü Çok Değişkenli Tekrarlı Ölçümlü ANOVA modeline ilişkin parametre tahminlerinin etkinliklerini görebilmek amacıyla hesaplanan Öklid uzaklıklarına göre genel olarak tutarlı sonuçlar verdiği görülmüştür. Tekrarlı ölçümlü verilerin yer aldığı farklı grup, deneme ve denek sayılarına göre oluşturulan tekrarlı veri düzeni senaryoları için benzetim sonuçları değerlendirilmiştir. Bu sonuçlar dikkate alındığında, iki etken (grup) olması durumunda ilk üç senaryo için (k=3,4,6) parametre

tahminleri, $k=3$ ve $k=6$ deneme olması durumunda, $k=4$ 'deki daha tutarlı sonuç verirken, $k=4$ deneme olması durumunda yayılım matrisi değerleri biraz büyümüştür. Üç etken olması durumunda ise parametre tahminleri genel olarak tutarlı olmakla birlikte, ($k=3,4,6$) deneme grupları için yayılım matrisi tahmin değerlerin de biraz büyüme olmuştur. Özellikle bu artış $i=3$ grup olması ve $k=3$ deneme olması durumu için en fazladır. Bu sonuç, alınan grup sayısı ile tekrarlı ölçüm alınacak deneme sayılarının birbirine eşit olmasına bağlanabilir. Bu sonuca göre, grup sayısı arttıkça deneme sayısının da grup sayısına bağlı olarak belli bir oranda artması gerektiği ayrıca veri düzenine ilişkin planlamaların bu durum göz önünde bulundurularak yapılmasının faydalı olacağı değerlendirilmektedir. İlave olarak, değişken sayılarındaki artışın da yayılım matrisi terimlerinin değerlerinin artmasında bir etken olacağı düşünülmelidir. Bu kapsamda, değişken sayısı arttıkça özellikle yayılım matrisi parametre tahminlerinin daha tutarlı sonuçlar verebilmesi için hesaplamalarda bu durumu giderebilecek bir düzeltme teriminin eklenmesinin faydalı olacağı değerlendirilmektedir. Çok Değişkenli Laplace dağılımına sahip parametre tahminlerine dayalı test istatistiklerine ilişkin hesaplamalarda güç değerleri oldukça iyi çıkmıştır. İki farklı güç değerlendirmesine göre çıkan sonuçlar birbiri ile uyumludur. Çok Değişkenli Laplace dağılımı varsayımı altında üç farklı hipotezi test etmek için önerilen test istatistiklerinin doğru çalıştığını söyleyebiliriz. Ayrıca MANOVA'da çok değişkenli doğrusal modele dayalı hipotezler ile İki Yönlü ANOVA modeline ilişkin tüm hipotezlerin (etken, deneme ve etken*deneme) test edilmesi sağlanmıştır.

Bu tez çalışması ile Çok Değişkenli Laplace Dağılımının Çok Değişkenli Tekrarlı Ölçümlü verilerin analizinde kullanılmasının normal dağılıma alternatif bir yaklaşım getirerek fayda sağlayacağı düşünülmektedir.

Ayrıca, içe içe tasarımlar ile oluşan çok değişkenli tekrarlı ölçümlü veriler için Matris Değişkenli Laplace dağılımını önermek ile amacımız bundan sonraki çalışmalarımız için bir alt yapı oluşturabilmektir. Bu kapsamda, özellikle, normallik varsayımlarının sağlanmadığı denek, boyut ve tekrarlı gözlem sayısının fazla olduğu tekrarlı ölçümlü tasarımların analizi için Matris Değişkenli Laplace dağılımının yeni bir yaklaşım getireceği değerlendirilmektedir.

11. KAYNAKLAR

- [1] N. Çelik, Anova Modellerinde Çarpık Dağılımlar Kullanılarak Dayanıkl İstatistiksel Sonuç Çıkarım ve Uygulamaları, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, **(2012)**.
- [2] T.W. Anderson, K.T. Fang, Theory and Applications of Elliptically Contoured and Related Distributions, Stanford, CA, **(1990)**.
- [3] J.K. Lindsey, Multivariate Elliptically Contoured Distributions for Repeated Measurements, Biometrics. 3 **(1999)** 1277–1280.
- [4] K. Plungpongpun, D.N. Naik, Multivariate Analysis of Variance Using a Kotz Type Distribution, Lect. Notes Eng. Comput. Sci. 2171 **(2008)** 1076–1081.
- [5] O. Arslan, Maximum likelihood parameter estimation for the multivariate skew-slash distribution, Stat. Probab. Lett. 79 **(2009)** 2158–2165.
- [6] S. Nadarajah, The kotz-type distribution with applications, Statistics (Ber). 37 **(2003)** 341–358.
- [7] O. Arslan, A.I. Genç, A generalization of the multivariate slash distribution, J. Stat. Plan. Inference. 139 **(2009)** 1164–1170.
- [8] R.A. Johnson, D.W. Wichern, Applied Multivariate Statistical Analysis, **(2002)**.
- [9] T.W. Anderson, K.T. Fang, On The Theory of Multivariate Elliptically Contoured Distributions and Their Applications, Stanford, CA, 1982.
- [10] R. Shanmugam, K.-T. Fang, T.W. Anderson, Statistical Inference in Elliptically Contoured and Related Distributions., J. Am. Stat. Assoc. 87 **(1992)** 253.
- [11] K.T. Fang, S. Kotz, K. Wangng, Symmetric multivariate and related distributions, **(2018)**.

- [12] T.W. Anderson, K.T. Fang, On The Theory of Multivariate Elliptically Contoured Distributions and Their Applications, Standford, CA, **(1992)**.
- [13] D. Kelker, Distribution theory of special distributions and location-scale parameter, Sankhya. 32 **(1970)** 319–430.
- [14] J.A. Díaz-García, V. Leiva-Sánchez, A new family of life distributions based on the elliptically contoured distributions, J. Stat. Plan. Inference. 128 **(2005)** 445–457.
- [15] T.W. Anderson, K.-T. Fang, Maximum Likelihood Estimators and Likelihood Ratio Criteria for Multivariate Elliptically Contoured Distributions, Standford, CA, **(1982)**.
- [16] A.K. Gupta, T. Varga, T. Bodnar, Elliptically contoured models in statistics and portfolio theory, **(2013)**.
- [17] S. Kotz, T.J. Kozubowski, K. Podgórski, The Laplace Distribution and Generalizations, **(2001)**.
- [18] M. Geraci, M.C. Borja, Notebook: The Laplace distribution, Significance. 15 **(2018)** 10–11.
- [19] S. Kotz, T.J. Kozubowski, K. Podgórski, The Laplace Distribution and Generalizations, (2001).
- [20] S. Kotz, T.J. Kozubowski, K. Podgórski, S. Kotz, T.J. Kozubowski, K. Podgórski, Symmetric Multivariate Laplace Distribution, Laplace Distrib. Gen. **(2001)** 231–238.
- [21] D.K. Mcgraw, F. Wagner, Symmetric Distributions, IEEE Trnsactions Inf. Theory. IT-14 No.1 **(1968)** 110–120.
- [22] M.E. Johnson, Multivariate Statsitcal Simulation, John Wiley&Sons, Inc., **(1987)**.
- [23] M.D. Ernst, A multivariate Generalised Laplace Distribution, Comput. Stat. 13 **(1998)** 227–232.

- [24] K. Kozubowski, Tomasz J., Podgorski, A Multivariate and Asymmetric Generalization of Laplace Distribution, **(2000)** 15:531-540.
- [25] K. Plungpongpun, Analysis of Multivariate Data Using Kotz Type Distribution, Doktora Tezi, **(2003)**.
- [26] T. Kollo, M.S. Srivastava, Estimation and testing of parameters in multivariate Laplace distribution, Commun. Stat. - Theory Methods. 33 **(2004)** 2363–2387.
- [27] J.K. Lindsey, P.J. Lindsey, Multivariate distributions with correlation matrices for nonlinear repeated measurements, Comput. Stat. Data Anal. 50 **(2006)** 720–732.
- [28] H. Visk, On the parameter estimation of the asymmetric multivariate laplace distribution, Commun. Stat. - Theory Methods. 38 **(2009)** 461–470.
- [29] O. Arslan, An alternative multivariate skew Laplace distribution: Properties and estimation, Stat. Pap. 51 **(2010)** 865–887.
- [30] T.J. Kozubowski, K. Podgórski, I. Rychlik, Multivariate generalized Laplace distribution and related random fields, J. Multivar. Anal. 113 **(2013)** 59–72..
- [31] F.G. Yavuz, O. Arslan, Linear mixed model with Laplace distribution (LLMM), Stat. Pap. 59 **(2018)**.
- [32] A.K. Gupta, T. Varga, Elliptically Contoured Models in Statistics, Springer Science+Business Media Dordrecht,**(1993)**.
- [33] Y.M. Bulut, Matris değişkenli Laplace dağılımı: Özellikleri ve parametre tahmini, İstatistikçiler Dergisiİstatistik ve Aktüerya. 11 **(2018)** 32–41.
- [34] C.S. Davis, Statistical Methods for the Analysis of Repeated Measurements, **(2003)**.
- [35] N.H. Timm, Multivariate analysis of Variance of Repeated Measurements, Handb. Stat. 1 **(1980)** 41–87.

- [36] K. Hirunkasi, S. Chongcharoen, Doubly multivariate model analysis for high dimensional multivariate repeated measures, **(2015)**.
- [37] D.N. Naik, S.S. Rao, Analysis of multivariate repeated measures data with a Kronecker product structured covariance matrix, *J. Appl. Stat.* 28 **(2001)** 91–105.
- [38] M. Davidian, 6 Multivariate repeated measures analysis of variance, **(2005)** 172–200.
- [39] H. Huynh, L.S. Feldt, Conditions under which mean square ratios in repeated measurements designs have exact F-distributions, *J. Am. Stat. Assoc.* 65 **(1970)** 1582–1589.
- [40] D.J. Hand, C.C. Taylor, *Multivariate Analysis of Variance and Repeated Measures a Practical Approach for Behavioural Scientists*, Chapman&Hall, London, **(1987)**.
- [41] D.F. Morrison, *Multivariate Analysis of Variance*, *Encycl. Biostat.* **(2005)**.
- [42] V. Kumar, P. Mehta, G. Shukla, *Multivariate Analysis of Repeated Measures Data*, 6 **(2013)** 133–148.
- [43] J. Fox, M. Friendly, S. Weisberg, Hypothesis tests for multivariate linear models using the car package, *R J.* 5 **(2013)** 39–52.
- [44] M. Krzysko, T. Smiałowski, W. Wołyński, Analysis of multivariate repeated measures data using a MANOVA model and principal components, *Biometrical Lett.* 51 **(2014)** 103–114.
- [45] R.G. O'Brien, M.K. Kaiser, *MANOVA Method for Analyzing Repeated Measures Designs. An Extensive Primer*, *Psychol. Bull.* 97 **(1985)** 316–333.
- [46] T.W. Anderson, *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*, John Wiley and Sons, New York, **(1958)**.
- [47] C.R. Rao, *Linear Statistical Inference and Its Applications*, John Wiley and Sons, New York, **(1973)**.

- [48] T.W. Anderson, K.T. Fang, Distributions of Quadratic Forms and Cochran's Theorem For Elliptically Contoured Distributions and Their Applications, Standford, CA, **(1982)**.
- [49] F.Z. Doğru, O. Arslan, Parameter estimation for mixtures of skew Laplace normal distributions and application in mixture regression modeling, Commun. Stat. - Theory Methods. 46 **(2017)** 10879–10896.
- [50] J.G. Dias, M. Wedel, An empirical comparison of EM, SEM and MCMC performance for problematic Gaussian mixture likelihoods, Stat. Comput. 14 **(2004)** 323–332.
- [51] K.E. Muller, L.M. LaVange, S.L. Ramey, C.T. Ramey, Power calculations for general linear multivariate models including repeated measures applications, J. Am. Stat. Assoc. 87 **(1992)** 1209–1226.
- [52] S. Friedrich, F. Konietzschke, M. Pauly, Analysis of Multivariate Data and Repeated Measures Designs with the R Package MANOVA.RM, **(2018)**.

EKLER

EK 1- Wilk's Lamda Dağılımı Kritik Değerler Tablosu

$$U^{\alpha}(sd_1, sd_H, sd_e)$$

$\alpha = 0.05$

$p=1$, bir bağımlı değişken

		Hipotez Serbestlik Derecesi (sd_H)									
Hata Serbestlik Derecesi (sd_E)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	6.156*	2.500*	1.5436*	1.112*	.868*	.712*	.603*	.523*	.462*	.413*	
2	.098	.050	.034	.025	.020	.017	.015	.013	.011	.010	
3	.229	.136	.097	.076	.062	.053	.046	.041	.036	.033	
4	.342	.224	.168	.135	.113	.098	.086	.076	.069	.063	
5	.431	.302	.236	.194	.165	.144	.128	.115	.104	.096	
6	.501	.368	.296	.249	.215	.189	.169	.153	.140	.129	
7	.556	.425	.349	.298	.261	.232	.209	.190	.175	.161	
8	.601	.473	.396	.343	.303	.271	.246	.225	.208	.193	
9	.638	.514	.437	.382	.341	.308	.281	.258	.239	.223	
10	.668	.549	.473	.418	.376	.341	.313	.289	.269	.251	
11	.694	.580	.505	.450	.407	.372	.343	.318	.297	.278	
12	.717	.607	.534	.479	.436	.400	.370	.345	.323	.304	
13	.736	.631	.560	.506	.462	.426	.396	.370	.347	.327	
14	.753	.652	.583	.529	.486	.450	.420	.393	.370	.350	
15	.768	.671	.603	.551	.508	.473	.442	.415	.392	.371	
16	.781	.688	.622	.571	.529	.493	.462	.436	.412	.391	
17	.792	.703	.639	.589	.548	.512	.482	.455	.431	.410	
18	.803	.717	.655	.606	.565	.530	.499	.473	.449	.427	
19	.813	.730	.669	.621	.581	.546	.516	.490	.466	.444	
20	.821	.741	.683	.636	.596	.562	.532	.505	.482	.460	
30	.878	.819	.774	.736	.703	.674	.647	.623	.601	.581	
40	.907	.861	.824	.793	.766	.741	.718	.696	.677	.658	
60	.937	.905	.879	.856	.835	.816	.798	.781	.766	.751	
80	.953	.928	.907	.889	.873	.858	.843	.829	.816	.804	
100	.962	.942	.925	.910	.897	.884	.872	.860	.849	.838	
120	.968	.951	.937	.925	.913	.902	.891	.882	.872	.863	
140	.973	.958	.946	.935	.925	.915	.906	.897	.889	.881	
160	.976	.963	.952	.943	.934	.925	.917	.909	.902	.894	
180	.979	.967	.958	.949	.941	.933	.926	.919	.912	.905	
200	.981	.970	.962	.954	.947	.940	.933	.926	.920	.914	
250	.985	.976	.969	.963	.957	.951	.946	.941	.935	.930	
300	.987	.980	.974	.969	.964	.959	.955	.950	.946	.942	
350	.989	.983	.978	.973	.969	.965	.961	.957	.953	.950	
400	.990	.985	.981	.977	.973	.969	.966	.962	.959	.956	
600	.994	.990	.987	.984	.982	.979	.977	.975	.972	.970	
800	.995	.993	.990	.988	.986	.984	.983	.981	.979	.977	
1000	.996	.994	.992	.991	.989	.988	.986	.985	.983	.982	

* İşaretli tüm değerler 1000'e bölünmelidir.

EK 1- Devamı: Wilk's Lamda Dağılımı Kritik Değerler Tablosu

$$U^{\alpha}(sd_L, sd_H, sd_e)$$

$\alpha = 0.05$

$p=2$, İki bağımlı değişken

Hata Serbestlik Derecesi (sd_E)	Hipotez Serbestlik Derecesi (sd_H)									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
2	2.500*	.641*	.287*	.162*	.104*	.072*	.053*	.041*	.032*	.026*
3	.050	.018	9.528*	5.843*	3.950*	2.849*	2.152*	1.683*	1.352*	1.11*
4	.136	.062	.036	.023	.017	.012	9554*	7615*	6213*	5165*
5	.224	.117	.074	.051	.037	.028	.023	.018	.015	.013
6	.302	.175	.116	.084	.063	.049	.040	.033	.027	.023
7	.368	.230	.160	.119	.092	.074	.060	.050	.042	.036
8	.425	.280	.203	.155	.122	.099	.082	.069	.059	.051
9	.473	.326	.243	.190	.153	.126	.106	.090	.078	.068
10	.514	.367	.281	.223	.183	.152	.129	.111	.097	.085
11	.549	.404	.316	.255	.212	.179	.153	.133	.116	.102
12	.580	.437	.348	.286	.239	.204	.176	.154	.136	.120
13	.607	.467	.378	.314	.266	.229	.199	.175	.155	.138
14	.631	.495	.405	.340	.291	.252	.221	.195	.174	.156
15	.652	.519	.431	.365	.315	.275	.242	.215	.193	.174
16	.671	.542	.454	.389	.337	.296	.263	.235	.211	.191
17	.688	.562	.476	.410	.359	.317	.282	.254	.229	.208
18	.703	.581	.496	.431	.379	.337	.301	.272	.246	.225
19	.717	.598	.515	.450	.398	.355	.320	.289	.263	.241
20	.730	.614	.532	.468	.416	.373	.337	.306	.279	.256
30	.813	.725	.657	.601	.553	.512	.475	.443	.414	.388
40	.858	.786	.730	.682	.639	.602	.568	.537	.509	.484
60	.903	.853	.811	.774	.741	.710	.682	.656	.632	.609
80	.927	.887	.854	.825	.798	.772	.749	.727	.706	.686
100	.941	.909	.882	.857	.834	.813	.793	.774	.755	.738
120	.951	.924	.900	.879	.860	.841	.823	.807	.791	.775
140	.958	.934	.914	.895	.878	.862	.846	.831	.817	.803
160	.963	.942	.924	.908	.893	.878	.864	.851	.838	.825
180	.967	.949	.932	.918	.904	.891	.878	.866	.854	.843
200	.970	.954	.939	.926	.913	.901	.889	.878	.867	.857
250	.976	.963	.951	.940	.930	.920	.910	.901	.892	.883
300	.980	.969	.959	.950	.941	.933	.925	.917	.909	.902
350	.983	.973	.965	.957	.949	.942	.935	.928	.921	.915
400	.985	.977	.969	.962	.955	.949	.943	.937	.931	.925
600	.990	.984	.979	.975	.970	.966	.961	.957	.953	.949
800	.993	.988	.984	.981	.977	.974	.971	.968	.965	.962
1000	.994	.991	.987	.985	.982	.979	.977	.974	.972	.969

*İşaretli tüm değerler 1000'e bölünmelidir.

EK 1- Devamı: Wilk's Lamda Dağılımı Kritik Değerler Tablosu

$U^{\alpha}(sd_1, sd_h, sd_e)$										
$\alpha = 0.05$	p=3		p=4		p=5		p=6		p=7	
Hipotez Serbestlik Derecesi(sd_h)										
Hata Serbestlik Derecesi (sd_e)	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
1	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
2	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
3	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
4	.034	.010	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
5	.097	.036	.025	.006	.001	.000	.000	.000	.000	.000
6	.168	.074	.076	.023	.020	.004	.001	.000	.000	.000
7	.236	.116	.135	.051	.062	.017	.017	.003	.001	.000
8	.296	.160	.194	.084	.113	.037	.053	.012	.015	.002
9	.349	.203	.249	.119	.165	.063	.098	.028	.046	.010
10	.396	.243	.298	.155	.215	.092	.144	.049	.086	.023
11	.437	.281	.343	.190	.261	.122	.189	.074	.128	.040
12	.473	.316	.382	.223	.303	.153	.232	.099	.169	.060
13	.505	.348	.418	.255	.341	.183	.271	.126	.209	.082
14	.534	.378	.450	.286	.376	.212	.308	.152	.246	.106
15	.560	.405	.479	.314	.407	.239	.341	.179	.281	.129
16	.583	.431	.506	.340	.436	.266	.372	.204	.313	.153
17	.603	.454	.529	.365	.462	.291	.400	.229	.343	.176
18	.622	.476	.551	.389	.486	.315	.426	.252	.370	.199
19	.639	.496	.571	.410	.508	.337	.450	.275	.396	.221
20	.655	.515	.589	.431	.529	.359	.473	.296	.420	.242
30	.760	.648	.712	.580	.668	.519	.626	.464	.586	.413
40	.816	.724	.779	.668	.744	.617	.711	.570	.679	.526
60	.875	.808	.849	.767	.825	.729	.802	.693	.779	.660
80	.905	.853	.885	.821	.867	.791	.849	.762	.832	.735
100	.924	.881	.908	.854	.893	.830	.878	.806	.864	.783
120	.936	.900	.923	.877	.910	.856	.898	.836	.886	.817
140	.945	.913	.934	.894	.923	.876	.912	.858	.902	.841
160	.952	.924	.942	.907	.932	.891	.923	.875	.914	.860
180	.957	.932	.948	.917	.940	.902	.931	.888	.923	.875
200	.961	.939	.953	.925	.945	.912	.938	.899	.931	.887
250	.969	.951	.962	.940	.956	.929	.950	.919	.945	.909
300	.974	.959	.969	.949	.963	.940	.958	.932	.954	.923
350	.978	.965	.973	.956	.969	.949	.964	.941	.960	.934
400	.981	.969	.976	.962	.973	.955	.969	.948	.965	.942
600	.987	.979	.984	.974	.982	.970	.979	.965	.977	.961
800	.990	.984	.988	.981	.986	.977	.984	.974	.982	.971
1000	.992	.987	.991	.985	.989	.982	.987	.979	.986	.977

Not: Bağımlı değişkenlerin sayısı, lamda'nın iki sütununun her kümesi için p ile gösterilir.

Kaynak: Brown, B.L., Hendrix, S.B., Hedges, D.W., Smith, T.B. *Multivariate Analysis for the Biobehavioral and Social Sciences*, John Wiley&Sons, Inc.(2012)

EK 2-Tezden Türetilmiş Bildiriler

Borazan Çelikbıçak, M., Aktaş Altunay, S. Parameter Estimation in MANOVA with Repeated Non-Normal Measures. *International Conference on Statistical Distributions and Applications*, 10-12 October 2019, Eberhard Conference Center, Grand Rapids, MI, USA.