GENELLEŞTİRİLMİŞ SPLİNELAR TEORİSİ

THEORY OF GENERALIZED SPLINES

GÖKÇEN DİLAVER

Doç. Dr. Selma ALTINOK BHUPAL

Tez Danışmanı

Hacettepe Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim - Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin

Matematik Anabilim Dalı için Öngördüğü

YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırlanmıştır.

2020

ÖZET

GENELLEŞTİRİLMİŞ SPLİNELAR TEORİSİ

Gökçen DİLAVER

Yüksek Lisans, Matematik Bölümü

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Selma ALTINOK BHUPAL

Temmuz 2020, 57 sayfa

R birimli değişmeli bir halka olsun. Köşelerinin kümesi V ve kenarlarının kümesi E olan $G = (V, E)$ sonlu çizgesini alalım. G çizgesinin kenar elemanlarını R halkasının sıfırdan farklı ideallerine eşleştiren $\alpha : E \to \{R\text{'nin idealleri}\}$ fonksiyonuna kenar etiketleme fonksiyonu ve (G, α) sıralı ikilisine *kenar etiketli çizge* denir. Bir (G, α) kenar etiketli çizgesinin herhangi iki komşu köşesinin üzerindeki etiketlerin farkı bu köşeleri bağlayan kenar üzerindeki idealinin elemanı oluyorsa $F \in R^{|V|}$ köşe etiketlemesine *genelleştirilmiş spline* denir. (G, α) üzerinde tanımlı tüm genelleştirilmiş splineların kümesi $R_{(G,\alpha)}$ ile gösterilir. $R_{(G,\alpha)}$ kümesi halka ve R-modül yapılarına sahiptir. Biz bu tezde, genelleştirilmiş splineların modül yapısı üzerinde çalışacağız ve $[\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}]_{(K_n,\alpha)}$'nın bir akışkan minimum üreteç kümesini bulacağız.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, klasik spline teorisi ve genelleştirilmiş spline teorisinin literatür taramasını yapacağız.

İkinci bölümde, çalışmalarımız için gerekli olan halka teorisi, modül teorisi ve çizge teorisindeki bazı tanım ve teoremleri vereceğiz.

Üçüncü bölümde, genelleştirilmiş spline teorisinin temel tanımlarını ve özelliklerini vereceğiz. Burada özellikle tam çizgeler üzerinde genelleştirilmiş spline modülleri üzerinde duracağız. Ayrıca özel bir spline olan akışkan sınıflarını tanımlayacağız ve bazı özelliklerini

vereceğiz.

Dördüncü bölümde, $[\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}]_{(K_n,\alpha)}$'nın bir akışkan minimum üreteç kümesini bulmak için iki farklı yöntem üzerinde çalışacağız. İlk yöntem olarak, Philbin ve arkadaşlarının [14] çalışmalarından yararlanacağız. Öncelikle $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ halkası üzerinde geliştirdikleri algoritmayı kullanarak $[\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}]_{(K_n,\alpha)}$'nın bir akışkan minimum üreteç kümesini elde edileceğiz (Algoritma 4.5 bakınız). Daha sonra, aynı çalışmada $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ halkası üzerinde geliştirdikleri algoritmayı kullanarak $[\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}]_{(K_n,\alpha)}$'nın bir akışkan minimum üreteç kümesini bulmak için bazı örnekler inceleyeceğiz (Algoritma 4.10 bakınız). Burada $\mid V \mid$ veya m tamsayısının büyüklüğüne bağlı olarak $[\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}]_{(K_n,\alpha)}$'nın bir akışkan minimum üreteç kümesinin bulunmasının oldukça zor olduğunu göreceğiz. Bu yüzden, $[\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}]_{(K_n,\alpha)}$ 'nın bir akışkan minimum üreteç kümesini bulmak için farklı bir yöntem vereceğiz. Burada öncelikle Altınok ve Sarıoğlan [1] çalışmalarından bazı sonuçları kendi çalışmalarımızda kullanmak amacıyla $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$'e göre düzenleyeceğiz. Daha sonra $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ üzerinde tam çizgeler için bir akışkan minimum üreteç kümesi elde edeceğiz.

Anahtar Kelimeler: Genelleştirilmiş splinelar, çizge, minimum üreteç kümesi

ABSTRACT

THEORY OF GENERALIZED SPLINES

Gökçen DİLAVER

Master of Science, Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Selma ALTINOK BHUPAL

July 2020, 57 pages

Let R be a commutative ring with identity and $G = (V, E)$ be a finite graph, where V is a set of elements of vertices and E is a set of elements of edges. A map $\alpha : E \to \{\text{ideals in R}\}$ is called *an edge-labeling function*, which label edges of G by nonzero ideals of R. The pair (G, α) is called an *edge-labeled graph. A generalized spline* is a vertex labeling $F \in R^{|V|}$ on an edge-labeled graph (G, α) so that the difference between labels of any two adjacent vertices lies in the corresponding edge ideal. The collection of all generalized splines on (G, α) is denoted by $R_{(G,\alpha)}$. It has a ring and a R- module structure. In this thesis, we study over R-module structure on generalized splines and we find a flow-up minimum generating set for $[\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}]_{(K_n,\alpha)}$.

This thesis includes four chapters. In Chapter 1, we give a survey of the literature on classical spline theory and generalized spline theory.

In Chapter 2, we give the necessary background knowledge of some definitions and theorems of ring, module and graph theory.

In Chapter 3, we introduce generalized spline theory and give some properties. We especially focus on generalized spline modules on complete graphs. Furthermore, we define flow- up classes, which is a special type of generalized splines, and give some properties.

In Chapter 4, we study two different methods to find a flow-up minimum generating set for complete graphs over $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. For the first method, we use some previous works done by Philbin and others [14]. We first obtain a flow-up minimum generating set for $[\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}]_{(K_n,\alpha)}$ by using the algorithm they developed over $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ (see Algorithm 4.5). Then, we examine some examples in order to find a flow-up minimum generating set for $[\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}]_{(K_n,\alpha)}$ by using the algorithm they developed over $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ (see Algorithm 4.10). We observe that depending on the magnitude of $\mid V \mid$ or m, it is quite difficult to find a flow-up minimum generating set for $[\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}]_{(K_n,\alpha)}$. Therefore, we give another method to find a flow-up minimum generating set for complete graphs over $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. We first modify some results of Altınok and Sarıoğlan [1] over $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ in order to use them in our works. Then, we obtain a flow-up minimum generating set for complete graphs over $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Keywords: Generalized splines, graph, minimum generating set

TEŞEKKÜR

Lisansüstü eğitimim boyunca engin bilgi ve tecrübeleriyle bana her zaman destek olan, sadece bilimsel anlamda değil sahip olduğu eşsiz bilgisiyle hayatıma yön veren, her zaman yanımda olduğunu hissettiren değerli hocam Doç.Dr.Selma ALTINOK BHUPAL'a,

Değerli görüş ve önerileri için jüri üyeleri hocalarıma,

Çalışmalarımda bana yol gösteren Samet SARIOĞLAN'a,

Her koşulda yanımda olan, bana inanıp aldığım her kararda arkamda olan, bana hep destek veren aileme,

Tüm desteğini ve sevgisini hissettiğim nişanlıma,

Sonsuz Teşekkürler...

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

R	birimli değişmeli halka
$(a_1, \ldots, a_n)$	$a_1, \ldots, a_n$'nin en büyük ortak böleni
$[a_1, \ldots, a_n]$	$a_1, \ldots, a_n$'nin en küçük ortak katı
$G = (V, E)$	köşelerinin kümesi V ve kenarlarının kümesi E olan çizge
$\mid V \mid$	bir G çizgesinin köşelerinin eleman sayısı
$\mid E \mid$	bir G çizgesinin kenarlarının eleman sayısı
α	kenar etiketleme fonksiyonu
(G, α)	kenar etiketli çizge
$R_{(G,\alpha)}$	(G, α) üzerindeki genelleştirilmiş spline
$F^{(i)}$	i-nci akışkan sınıf
$\mathcal{F}_i$	tüm i-nci akışkan sınıflarının kümesi
$V^{(i,\beta)}$	kenar etiketleri $\mathbb{Z}/p^\beta\mathbb{Z}$ üzerinde ve en küçük köşe indeksi v_i olan sıfır bağlantılı bileşen
$p^{(i,j)}$	v_i'nin bir v_j-patikası
$p^{(i,0)}$	v_i'nin bir sıfır patikası
K_n	n köşeli tam çizgesi
S_n	$n+1$ köşeli yıldız çizgesi
P_n	n köşeli yol çizgesi
Δ	polihedral kompleks
$C^r(\Delta)$	C^r-türevlenebilir, Δ polihedral kompleksi üzerinde tanımlı tüm klasik splineların kümesi
$C^r_k(\Delta)$	derecesi en fazla k olan polinomlara sahip tüm klasik splineların kümesi

Kısaltmalar

TB	tamlık bölgesi
TİH	temel ideal halkası
TİB	temel ideal bölgesi

1 GİRİŞ

$\mathbb{R}^n$'de sonlu noktalar kümesini alalım. Bu kümenin en küçük konveks kümesine *politop* denir. Örneğin, $\mathbb{R}$'de bir doğru parçası bir politoptur. $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ politopların sonlu bir ailesi olmak üzere Δ'nın herhangi iki elemanının arakesiti ve her bir elemanının yüzeyi Δ'nın elemanı oluyorsa Δ'ya *polihedral kompleks* denir. $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ polihedral kompleksi üzerinde tanımlı C^r-türevlenebilir, parçalı polinom fonksiyonlarından oluşan kümeye *klasik spline* denir ve $C^r(\Delta)$ ile gösterilir. Bu küme $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ polinom halkası üzerinde bir modül yapısına sahiptir. Billera ve Rose [3] ve birçok kişi bu modül yapısının serbestliği üzerine çalışmışlardır. Ayrıca $k \in \mathbb{N}$ ve her $\delta \in \Delta$ için $f_{|\delta}$ kısıtlanmış fonksiyonun derecesi k veya k'dan küçük olan $f \in C^r(\Delta)$ fonksiyonlarına sahip tüm klasik splineların kümesi $C^r_k(\Delta)$ ile gösterilir ve bu küme reel sayılar üzerinde sonlu boyutlu bir vektör uzayıdır. Bu vektör uzayının boyutunu ve tabanını bulmak klasik spline teorisindeki başlıca problemdir. Bu konuyla ilgili yapılan çalışmalardan bazıları Schumaker [15, 16] ve Billera[4, 5]'dir. Genel olarak klasik splineların nümerik analizde, yaklaşım teorisinde ve kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerinde uygulamaları mevcuttur. Son zamanlarda özellikle bilgisayar tabanlı animasyonlar ve geometrik dizayn gibi birçok alanda klasik spline fonksiyonları kullanılmaktadır.

Biz bu çalışmada klasik splineların bir genişletilmesi olan genelleştirilmiş splinelar üzerinde çalışacağız. Genelleştirilmiş splinelar ilk olarak Gilbert, Polster ve Tymoczko [9] tarafından tanımlanmıştır. Köşelerinin kümesi V ve kenarlarının kümesi E olan $G = (V, E)$ sonlu bir çizge ve R birimli değişmeli bir halka olsun. (G, α) kenar etiketli çizgesini alalım. Eğer her bir kenar $e = uv \in E$ için komşu köşelerin etiketlerinin farkı kenar etiketlerinin içine düşüyorsa, yani $f_u - f_v \in \alpha(e)$ oluyorsa, $F \in R^{|V|}$ köşe etiketine (G, α) üzerindeki bir *genelleştirilmiş spline* denir ve $R_{(G,\alpha)}$ ile gösterilir. Bu küme halka ve R-modül yapılarına sahiptir.

Handschy, Melnick ve Reinders [11], splineların özel bir türü olan akışkan sınıflarını tanımlamışlardır. Akışkan sınıfları özellikle $R_{(G,\alpha)}$'nın bir modül tabanını bulmak için çok kullanışlıdır. Handschy ve arkadaşları [11], tam sayılar üzerinde kenar etiketli devir çizgelerin akışkan sınıflarının en küçük baş girdilerini formülleştirmişler ve bu girdilere sahip akışkan sınıflarından oluşan kümenin $\mathbb{Z}_{(C_n,\alpha)}$'nın bir tabanı olduğunu ispat etmişlerdir. Tamsayılar üzerinde kenar etiketli herhangi bir çizge için benzer sonucun sağlandığı Bowden, Hagen, King ve Reinders [6] tarafından ispatlanmıştır. Biz bu tezde Bowden ve arkadaşlarının [6], $\mathbb{Z}$ üzerindeki akışkan sınıflarının bir kümesinin taban olma koşulunu kendi çalışmalarımızda kullanmak amacıyla $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$'e göre düzenleyeceğiz.

Bowden ve Tymoczko [7], $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ halkası üzerinde çalışmışlardır. Burada bazı koşullar altındaki akışkan üreteçlerinin kümesinin aslında $[\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}]_{(G,\alpha)}$'nın bir akışkan minimum üreteç kümesi olduğunu ispatlamışlardır. Bu ispat bizim çalışmalarımız için oldukça önemlidir.

Philbin, Swift, Tammaro ve Williams [14], taban halkaları $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Z}$ olan bağlantılı çizgelerin akışkan minimum üreteç kümelerini bulmak için birer algoritma vermişlerdir. Biz bu çalışmada öncelikle Philbin ve arkadaşlarının [14], $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ halkası üzerinde geliştirdiği algoritmayı kullanacağız ve $[\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}]_{(K_n,\alpha)}$'nın bir akışkan minimum üreteç kümesini elde edeceğiz. Daha sonra $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ halkası üzerinde geliştirdikleri algoritmayı kullanacağız ve akışkan minimum üreteç kümesi elde etmek için bazı örnekler inceleyeceğiz. Bu örneklerde $| V |$ veya m tamsayısı arttıkça işlemlerin oldukça zorlaştığını, yani algoritma kullanarak $[\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}]_{(G,\alpha)}$'nın akışkan minimum üreteç kümesini bulmanın oldukça zor olduğunu göreceğiz.

Altınok ve Sarıoğlan [1], R bir TİB olmak üzere (G, α) için genelleştirilmiş spline modüllerinin akışkan tabanlarının varlığını ispat etmişlerdir. $\theta : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ bir örten dönüşüm olmak üzere her bir $f \in \mathbb{Z}_{(G,\theta^{-1}(\alpha))}$ spline ve her bir $v_i \in V$ köşesi için $(\theta_* f)_{v_i} = \theta(f_{v_i})$ kuralını sağlayan $\theta_* : \mathbb{Z}_{(G,\theta^{-1}(\alpha))} \to [\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}]_{(G,\alpha)}$ örten fonksiyonuna indirgensin. Biz bu tezde, Altınok ve Sarıoğlan [1]'un TİB üzerindeki çalışmalardan faydalanarak her bir $t = i, \ldots, n$ için $f_{v_t}^{(i)} \in \mathbb{Z}$ elemanı $\theta_*(f_{v_t}^{(i)}) = \bar{f}_{v_t}^{(i)} = f_{v_t}^{(i)} + m\mathbb{Z}$ kosetine karşılık gelen bir en küçük pozitif tamsayı olmak üzere $\bar{F}^{(i)} = (\bar{0}, \ldots, \bar{0}, \bar{f}_{v_i}^{(i)}, \ldots, \bar{f}_{v_n}^{(i)})$ akışkan sınıfını $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ halkası üzerinde inşa edeceğiz. Burada ilk olarak, $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ halkası üzerinde bir akışkan sınıfının varlığından her zaman bahsedebilir miyiz sorusu üzerinde duracağız. Daha sonra $[\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}]_{(K_n,\alpha)}$'nın bir akışkan minimum üreteç kümesinin genel formunu vereceğiz.

2 TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Genelleştirilmiş spline teorisine giriş yapmadan önce çalışmalarımızda önemli olacak bazı temel bilgilerden bahsetmeliyiz. Bu bölümde, halka teorisi, modül teorisi ve çizge teorisiyle ilgili bazı tanım ve teoremler verilecektir.

2.1 Halka ve Modül Teorisi

Tanım 2.1. $\emptyset \neq R$ bir küme ve $(R, +)$ bir değişmeli grup olsun.

$$\begin{aligned} \cdot : R \times R &\to R \\ (a, b) &\mapsto a \cdot b := ab \end{aligned}$$

fonksiyonu varsa ve her $a, b, c \in R$ için

- $a(bc) = (ab)c$
- $a(b + c) = ab + ac$
- $(b + c)a = ba + ca$

koşulları sağlanıyorsa $(R, +, .)$'ya bir *halka* denir. Toplamsal değişmeli grubun birim elemanına R halkasının *sıfırı* denir ve 0 ile gösterilir. Her $a, b \in R$ için $ab = ba$ oluyorsa R'ye *değişmeli halka* ve her $a \in R$ için $1a = a1 = a$ olacak şekilde bir $1 \in R$ elemanı bulunuyorsa R'ye *birimli halka* denir. Eğer $a \in R$ için $aa^{-1} = a^{-1}a = 1_R$ olacak şekilde $a^{-1} \in R$ varsa a^{-1}'e a'nın *tersi* denir.

Örnek 2.2.

- $(\mathbb{Z}, +, .)$, $(\mathbb{R}, +, .)$, $(\mathbb{Q}, +, .)$ ve $(\mathbb{C}, +, .)$ bilinen toplama ve çarpma işlemleriyle birer birimli değişmeli halkalardır.
- $n\mathbb{Z} = \{nx : x \in \mathbb{Z}\}$ değişmeli bir halkadır ancak birimli değildir.
- $M_2(\mathbb{Z})$ kümesi matrislerin bilinen toplama ve çarpma işlemleriyle birimli bir halkadır ancak değişmeli değildir.
- $M_2(2\mathbb{Z})$ kümesi matrislerin bilinen toplama ve çarpma işlemleriyle bir halkadır ancak birimli ve değişmeli değildir.

Tanım 2.3. R bir halka ve $\emptyset \neq M \subset R$ bir altküme olsun. Eğer M, R'deki işlemlerle bir halka oluyorsa M'ye R'nin bir *alt halkası* denir.

Tanım 2.4. A, R'nin bir alt halkası olsun. Her $a \in A$ ve $r \in R$ için $ar \in A$ ve $ra \in A$ oluyorsa A'ya R'nin bir *ideali* denir ve $A \leq R$ ile gösterilir.

Tanım 2.5. R bir halka ve $M \subset R$ bir altküme olsun. $< M >= \bigcap_{M \subseteq A_i \leq R} A_i$ idealine, R'nin M tarafından üretilen ideali denir. A, R'nin bir ideali ve $A =< a_1, \ldots, a_n >$ ise A idealine sonlu üreteçli ideal denir. $A =< a >$ olacak şekilde $a \in R$ varsa A'ya R'nin bir *temel ideali* denir.

Örnek 2.6. $\mathbb{Z}$ halkasının her ideali temel idealdir ve $a\mathbb{Z}$ şeklindedir. Ancak $\mathbb{Z}[x]$ halkasında $< 2, x >$ ideali temel ideal değildir.

Tanım 2.7. $A \leq R$ alalım. $\overline{r_1} + \overline{r_2} = \overline{r_1 + r_2}$ ve $\overline{r_1}.\overline{r_2} = \overline{r_1.r_2}$ işlemleriyle tanımlanan $R/A = \{r + A \mid r \in R\}$ halkasına R'nin A idealine bölüm halkası denir.

Tanım 2.8. R ve S iki halka ve $g : R \to S$ bir fonksiyon olsun. Her $r_1, r_2 \in R$ için $g(r_1 + r_2) = g(r_1) + g(r_2)$ ve $g(r_1 r_2) = g(r_1)g(r_2)$ ise g fonksiyonuna bir *halka homomorfizması* denir. Eğer $g : R \to S$ fonksiyonu birebir ve örten halka homomorfizması ise g'e *izomorfizma* denir ve R ile S ye *izomorf halkalardır* denir ve $R \cong S$ ile gösterilir.

Örnek 2.9. $\mathbb{Z}_n$ ile $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ izomorf halkalardır. Yani, $\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$'dir.

Tanım 2.10. R değişmeli bir halka olsun.

- Eğer $x, y \in R$ ve $xy = 0$ olduğunda $x = 0$ veya $y = 0$ oluyorsa R ye *tamlık bölgesi*(TB) denir.
- R'nin her ideali temel ideal ise R'ye *temel ideal halkası*(TİH) denir. Eğer R halkası ek olarak bir tamlık bölgesi olursa R'ye *temel ideal bölgesi*(TİB) denir.

Örnek 2.11. $\mathbb{Z}$ halkası bir TİB dir. $\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ halkası TİB değildir ama eğer p bir asal sayısı ise $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ halkası TİB olur.

Tanım 2.12. R bir değişmeli halka ve $a_1, a_2 \in R$ olsun. Eğer $a_2 = a_1 a_3$ olacak şekilde bir $a_3 \in R$ varsa a_1 *böler* a_2 denir ve $a_1 \mid a_2$ ile gösterilir. a_1 bölmez a_2 ise $a_1 \nmid a_2$ ile gösterilir.

Tanım 2.13. R bir değişmeli halka ve $a_1, a_2 \in R$ olsun. Eğer $0 \neq d \in R$ aşağıdaki koşulları sağlıyorsa d elemanına a_1 ve a_2'nin bir *en büyük ortak bölenidir* denir.

- $d \mid a_1$ ve $d \mid a_2$,
- eğer $d^{'} \mid a_1$ ve $d^{'} \mid a_2$ ise $d^{'} \mid d$'dir.

a_1 ve a_2'nin en büyük ortak böleni $ebob(a_1, a_2)$ veya (a_1, a_2) ile gösterilir.

Tanım 2.14. R bir değişmeli halka ve $a_1, a_2 \in R$ olsun. Eğer $0 \neq c \in R$ aşağıdaki koşulları sağlıyorsa c elemanına a_1 ve a_2'nin bir *en küçük ortak katıdır* denir.

- $a_1 \mid c$ ve $a_2 \mid c$,
- eğer $a_1 \mid c^{'}$ ve $a_2 \mid c^{'}$ ise $c \mid c^{'}$'dir.

a_1 ve a_2'nin en küçük ortak katı $ekok(a_1, a_2)$ veya $[a_1, a_2]$ ile gösterilir.

Tanım 2.15. R bir birimli halka ve M bir değişmeli grup olsun. Eğer aşağıdaki özellikleri sağlayan

$$\begin{aligned} R \times M &\to M \\ (r, m) &\mapsto r \cdot m := rm \end{aligned}$$

dönüşümü varsa M'ye *(sol) R-modül* denir. Her bir $r_1, r_2 \in R$, $m_1, m_2 \in M$ için

- $(r_1 + r_2)m_1 = r_1 m_1 + r_2 m_1$.
- $(r_1 r_2)m_1 = r_1(r_2 m_1)$.
- $r_1(m_1 + m_2) = r_1 m_1 + r_1 m_2$.
- $1_R m_1 = m_1$.

$$\begin{aligned} M \times R &\to M \\ (m, r) &\mapsto m \cdot r := mr \end{aligned}$$

dönüşümü yukarıdaki benzer özellikleri sağlıyorsa M'ye *(sağ) R-modül* denir. Bu çalışmada, aksi belirtilmedikçe biz sol R-modülünü R-modül olarak alacağız.

Örnek 2.16. $(G,+)$ değişmeli grup ise G, $\mathbb{Z}$-modüldür.

$$\mathbb{Z}\times G\to G$$
$$(n,g)\mapsto ng=\begin{cases} g+\cdots+g & \text{eğer} \quad n>0 \\ 0_G & \text{eğer} \quad n=0 \\ -g-\cdots-g & \text{eğer} \quad n<0 \end{cases}$$

$\mathbb{Z}$-modüller ve değişmeli gruplar aynıdır.

Tanım 2.17. M R-modül ve $A\subset M$ bir altküme olsun. A kümesi M'deki modül işlemi ile bir modül oluyorsa A'ye M'nin bir *alt modül* denir. Bir başka deyişle, A alt modülü, her bir $r\in R$ ve $a_1,a_2\in A$ için $a_1+ra_2\in A$ koşulunu sağlar.

Tanım 2.18. M R-modülü ve $X\subset M$ bir altküme olsun. Eğer herhangi farklı $x_1,\dots,x_n\in X$ ve $r_1,\dots,r_n\in R$ için $\sum_{i=1}^n r_ix_i=0$ olduğunda her bir $i=1,\dots,n$ için $r_i=0$ sağlanıyorsa X kümesine *doğrusal bağımsız küme* denir. Eğer her bir $m\in M$ için $m=\sum\limits_{i=1}^{k} r_ix_i$ olacak şekilde $x_1,\dots,x_k\in X$ varsa X'e M'nin bir R-modül *tabanı* denir. Tabanı var olan modüllere *serbest modül* denir.

Not. *M serbest R-modüldür ancak ve ancak en az bir $X\subset M$ altkümesi vardır ki her bir $m\in M$ elemanı $m=\sum\limits_{i=1}^{n} r_ix_i$, $r_i\in R$, $x_i\in X$ olacak şekilde tek türlü yazılır.*

Önerme 2.19. *M R-modül olsun. M serbest R-modüldür ancak ve ancak I bir indeks kümesi olmak üzere $M\cong R^{(I)}$'dır.*

İspat. $e_i=(0,\dots,0,\underbrace{1}_{i},0,\dots,0)\in R^{(I)}$ olmak üzere $\{e_i\}_{i\in I}$, $R^{(I)}$'nın bir tabanıdır. İlk olarak, $M\cong R^{(I)}$ olduğunu varsayalım. $R^{(I)}$ bir tabana sahip olduğundan bu tabanın izomorfizma altındaki görüntüsü M'nin bir tabanı olur. Tersine, M serbest R-modül ve tabanı X olsun.

$$f_x : R\to M$$
$$r\mapsto rx$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu durumda

$$R^{(I)}\to M$$
$$(rx)\mapsto \sum f_x(rx)=\sum_{x\in X} r_xx$$

bir izomorfizmadır. Burada X kümesini I indeks kümesi olarak seçersek isteneni elde ederiz.

□

Örnek 2.20. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ serbest $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-modül olduğu Önerme 2.19'dan açıktır. Ancak $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ serbest $\mathbb{Z}$-modül değildir. Çünkü herhangi bir $(\bar{a}, \bar{b}) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ elemanı $(\bar{0}, \bar{1})$ ve $(\bar{1}, \bar{0})$ elemanları cinsinden tek türlü yazılamaz. Yani

$$(\bar{a}, \bar{b}) = (a\bar{1}, b\bar{1}) = a(\bar{1}, \bar{0}) + b(\bar{0}, \bar{1})$$

ve $\bar{a} = 3\bar{a}$ olduğundan

$$(\bar{a}, \bar{b}) = (3\bar{a}, \bar{b}) = 3a(\bar{1}, \bar{0}) + b(\bar{0}, \bar{1})$$

olur.

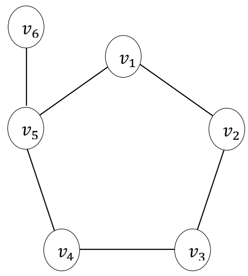
Not. *Bir serbest modülün bir alt modülü serbest modül olmayabilir. Örneğin,* $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ *halkasını alalım.* $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ *bir serbest* $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$*-modüldür. Ancak* $2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ *alt modülü serbest bir modül değildir. Çünkü* $2+4\mathbb{Z} \in 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ *olmak üzere* $2+4\mathbb{Z} = 2(1+4\mathbb{Z}) = 2(3+4\mathbb{Z})$*'dir yani elemanları tek türlü yazılamaz.*

Teorem 2.21. *R bir TİB, M bir serbest R-modül ve $A \leq M$ bir alt modül olsun. O zaman, A bir serbest R-modüldür.*

İspat. [12], 4. Bölüm, Teorem 6.1 bakınız. □

2.2 Çizge Teorisi

Tanım 2.22. Köşelerden ve kenarlardan oluşan bir diagramla temsil edilen şekillere *çizge* denir. Daha açık bir ifade ile noktaları eleman olarak kabul eden köşelerinin kümesi V ve bunları birleştiren çizgileri eleman olarak kabul eden kenarlarının kümesi E olan ve $G = (V, E)$ olarak ifade edilen kümelere *çizge* denir. V ve E kümeleri bir G çizgesi için sırasıyla $V(G)$ ve $E(G)$ olarak gösterilir. Genel anlamda, bir köşe kümesi $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ ve bir kenar kümesi $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ şeklinde ifade edilir. Şekil 1'de bir $G = (V, E)$ çizge örneği verilmiştir.



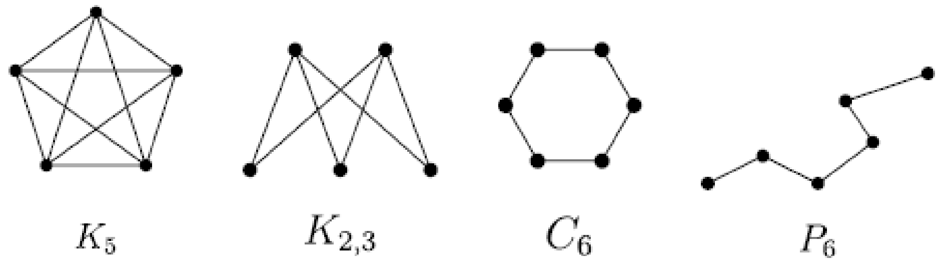
Şekil 1: $G = (V, E)$

- v_1 ve v_2 köşelerini birleştiren kenarı e_1 olarak adlandıralım. Bu durumda, $e_{12} = e_1 = v_1v_2$ olarak gösterilir ve v_1 ile v_2 köşelerine komşu köşeler denir.
- Eğer v_i ve v_j köşelerini birleştiren en az bir e_k kenarı varsa bu çizgeye *bağlantılı çizge* denir.
- Bir G çizgesinin köşelerinin sayısı $\mid V \mid$ ve kenarlarının sayısı $\mid E \mid$ ile gösterilir.
- Bir çizgedeki bir v_i köşesinin bağlı olduğu kenar sayısına v_i köşesinin *derecesi* denir.
- Bir G çizgesi üzerinde en az sayıda renk kullanılarak tüm köşelere komşularından farklı birer renk atama işlemine *çizge renklendirmesi* denir. Renklendirmede kullanılan toplam renk sayısına *kromatik sayı* denir.
- Bir G çizgesindeki bir e_k kenarının her iki ucu da aynı v_i köşesi ise bu kenara v_i köşesinde bir *döngü* denir.
- Bir G çizgesinin komşu iki köşesi v_i ve v_j birden fazla kenar ile birleştiriliyorsa bu kenarlara *çoklu kenarlar* denir.
- Çoklu kenar ve döngü içermeyen ayrıca yönlü olmayan sonlu çizgelere *basit çizge* denir.

Bu çalışmada aksi belirtilmedikçe basit, bağlantılı ve sonlu çizgeleri ele alacağız.

Tanım 2.23.

(i) *Sıfır Çizgeleri*: Sadece köşelerden oluşan yani kenar elemanları bulunmayan çizgeye sıfır çizgesi denir. n köşeden ve 0 kenardan oluşan bir sıfır çizgesi N_n ile gösterilir.



Şekil 2: Bazı özel çizgeler

(ii) *Yol Çizgeleri*: $V = \{v_1, \dots v_n\}$ olan bir çizge ardışık $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n$ kenarlarına sahipse bu çizgeye yol çizgesi denir. n köşeden ve $n-1$ kenardan oluşan bir yol çizgesi P_n ile gösterilir.

(iii) *Devir Çizgeleri*: $V = \{v_1, \dots v_n\}$ olan bir çizge ardışık $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_nv_1$ kenarlarına sahipse bu çizgeye devir çizgesi denir. n köşeden ve n kenardan oluşan bir devir çizgesi C_n ile gösterilir.

(iv) *Yıldız Çizgeleri*: Bir merkezi köşe olan ve her biri sadece bu köşeye birleştirilen çevrel(uç) köşelerden oluşan çizgeye yıldız çizgesi denir. $n+1$ köşeden ve n kenardan oluşan bir yıldız çizgesi S_n ile gösterilir.

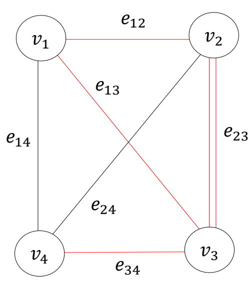
(v) *Tam Çizgeler*: Her bir köşenin diğer tüm köşelerle birleştirilmesiyle oluşturulan bir çizgeye tam çizge denir. Bir başka deyişle, n köşeli bir tam çizge, bu n köşeyi birleştiren tüm kenarların çizilmesiyle elde edilir ve K_n ile gösterilir. K_n çizgesinde $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ tane kenar bulunmaktadır.

(vi) *İki Parçalı Çizgeler*: Köşelerinin kümesi $V = \{V_1, V_2\}$ olmak üzere iki ayrık altkümeye ayrılan ve bu iki altkümenin elemanları varsa bir kenar ile birleştirilen çizgeye iki parçalı çizge denir. İki parçalı çizgelerde ayrık kümelerin karşılıklı tüm köşeleri bağlantılı olmak zorunda değildir. Eğer V_1 kümesinin her bir elemanı ile V_2 kümesinin her bir elemanı bir kenarla birleştiriliyorsa bu çizgeye iki parçalı tam çizge denir. $\mid V_1 \mid = r$ ve $\mid V_2 \mid = s$ ise iki parçalı tam çizge $K_{r,s}$ ile gösterilir. $K_{r,s}$ çizgesi $r+s$ tane köşeye ve $r \cdot s$ tane kenara sahiptir.

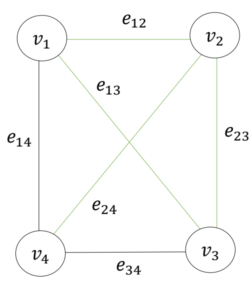
(vii) *n-Boyutlu Küp* : Köşelerinin kümesi $V = \mathbb{Z}_2^n = \{0,1\}^n$ ve kenarlarının kümesi $E = \{v_1v_2 : d(v_1, v_2) = 1\}$ olan çizgeye n-boyutlu küp çizge denir ve Q_n ile gösterilir. Bir başka deyişle, Q_n çizgesinin köşeleri n uzunluklu 2^n elemanlı ikili kodlar ile etiketlensin. O zaman, tam olarak bir durumda farklı etiketlenmiş iki köşe birbiriyle bağlantılıysa bu çizge bir n-boyutlu küp çizgedir.

(viii) *Tekerlek Çizgeleri*: Bir S_{n-1} yıldız çizgesinin ardışık uç köşelerinin birer kenar ile birleştirilmesiyle oluşturulan çizgeye tekerlek çizge denir ve W_n ile gösterilir.

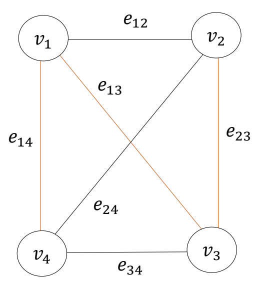
Tanım 2.24. Köşelerinin kümesi $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ olan bir $G = (V, E)$ çizgesini alalım. G çizgesinin köşelerinin ve kenarlarının oluşturduğu bir diziye *yürüyüş* denir. Örneğin, her bir v_i ve v_j komşu köşeleri için $e_{ij} = v_i v_j$ olmak üzere $v_1 e_{12} v_2 e_{23} v_3 \cdots v_{k-1} e_{k-1k} v_k$ bir yürüyüştür. Tekrar etmeyen köşelerden ve kenarlardan oluşan bir yürüyüşe *yol* denir. Bir çizgenin herhangi iki köşesini birleştiren bir parça yoldur. Başlangıç köşesi ile bitiş köşesi aynı olan ve bu köşe dışında tekrar etmeyen köşelerden ve tekrar etmeyen kenarlardan oluşan bir yürüyüşe *devir* denir. Yani, bir yolun iki köşesini bir kenar ile birleştirerek elde edilen bir parça devirdir. Tekrar etmeyen kenarlardan oluşan bir yürüyüşe *patika* denir. Bir patika'da köşeler tekrar edebilir.



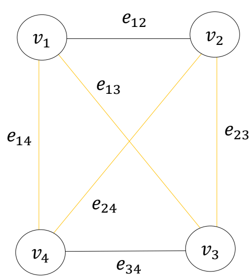
(a) yürüyüş



(b) patika



(c) yol



(d) devir

Şekil 3: $K_4 = (V, E)$

Örnek 2.25. Köşelerinin kümesi $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ve kenarlarının kümesi $E = \{e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{23}, e_{24}, e_{34}\}$ olan $K_4 = (V, E)$ tam çizgesini alalım. Aşağıda yürüyüş (Şekil 3a), patika (Şekil 3b), yol (Şekil 3c) ve devir (Şekil 3d) örnekleri verilmiştir.

Yürüyüş:	$v_2e_{23}v_3e_{13}v_1e_{12}v_2e_{23}v_3e_{34}v_4$
Patika:	$v_2e_{23}v_3e_{13}v_1e_{12}v_2e_{24}v_4$
Yol	$v_2e_{23}v_3e_{13}v_1e_{14}v_4$
Devir:	$v_2e_{23}v_3e_{13}v_1e_{14}v_4e_{24}v_2$

Not.

- *Yol çizge ile yol kavramları birbirlerinden farklıdır. Bir çizgenin içinde bir veya birden fazla yol olabilir. P_n yol çizgesi ise tamamı yol olan bir çizgedir.*

- *Devir çizge ile devir kavramları birbirinden farklıdır. Bir devir, tek başına bir çizge olabilir yada bir çizgenin bir parçasını da oluşturabilir. C_n devir çizgesi ise tamamı devir olan bir çizgedir.*

- *G çizgesi iki parçalı bir çizgedir ancak ve ancak G çizgesinin kromatik sayısı 2 dir.*

Tanım 2.26. G ve H çizgelerini alalım. $\alpha : V(G) \to V(H)$ bir fonksiyon olmak üzere eğer $xy \in E(G)$ olduğunda $\alpha(x)\alpha(y) \in E(H)$ koşulu sağlanıyorsa α'ya G'den H'a bir *homomorfizma* denir.

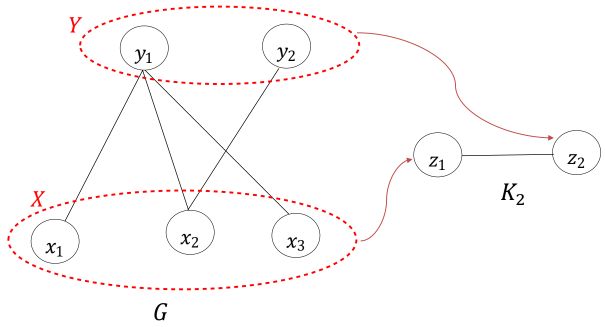
Not. *Eğer G ve H homomorfik iki çizge ise, o zaman*

- *α fonksiyonu kenarları kenarlara eşleme yapar.*

- *α fonksiyonu bir sıfır kenarını tek bir köşeye veya bir kenara veya bir sıfır kenarına eşleme yapabilir.*

Örnek 2.27. Şekil 4'de verilen $V(G) = X \cup Y$ olan bir $G = (V(G), E(G))$ iki parçalı çizgesini ve $V(K_2) = \{z_1, z_2\}$ olan bir $K_2 = (V(K_2), E(K_2))$ tam çizgesini alalım.
α fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$\alpha\colon V(G) \to V(K_2)$$
$$v \mapsto \alpha(v) = \begin{cases} z_1 & \text{eğer} \quad v \in X \\ z_2 & \text{eğer} \quad v \in Y \end{cases}$$



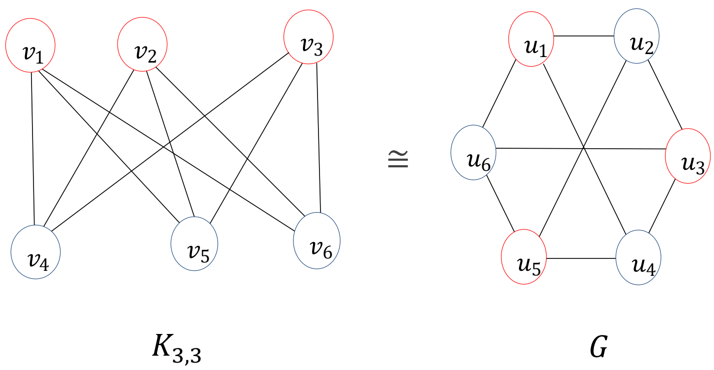
Şekil 4: Çizge homomorfizması

α fonksiyonunun G çizgesindeki kenarları K_2 çizgesindeki kenarlara eşleme yaptığı tanımdan açıktır. Yani, her bir $xy \in E(G)$ kenarı $x \in X$ ve $y \in Y$ köşelerine sahiptir dolayısıyla $\alpha(x)\alpha(y) = z_1z_2 \in E(K_2)$ vardır. Böylece, α fonksiyonu G'den K_2'ye bir homomorfizmadır.

Tanım 2.28. G ve H çizgelerini alalım. $\alpha : V(G) \to V(H)$ birebir örten bir fonksiyon olmak üzere G ve H çizgelerinin kenarları arasında "$xy \in E(G) \Leftrightarrow \alpha(x)\alpha(y) \in E(H)$" koşulu sağlanıyorsa G ve H çizgelerine *izomorfik çizgeler* denir ve $G \cong H$ ile gösterilir.

Not. *Eğer G ve H izomorfik iki çizge ise, o zaman*

- *α fonksiyonu kenarları kenarlara eşleme yapar.*
- *α fonksiyonu sıfır kenarları sıfır kenarlara eşleme yapar.*

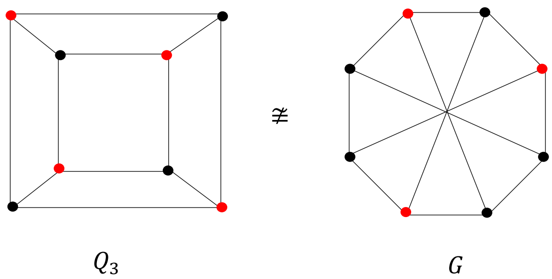


Şekil 5: Çizge izomorfizması

Örnek 2.29. Şekil 5'da verilen $V(K_{3,3}) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ olan iki parçalı tam çizgesini ve $V(G) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ olan çizgeyi alalım ve α fonksiyonunu

$$\alpha : \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \\ u_2 & u_3 & u_5 & u_2 & u_4 & u_6 \end{pmatrix}$$

olacak şekilde tanımlansın. α fonksiyonunun birebir örten bir fonksiyon olduğu tanımdan açıktır. Ayrıca α fonksiyonu kenarları kenarlara eşleme yapar. Bu nedenle, α fonksiyonu $K_{3,3}$'den G'ye bir izomorfizmadır.



Şekil 6: İzomorfik olmayan çizgeler

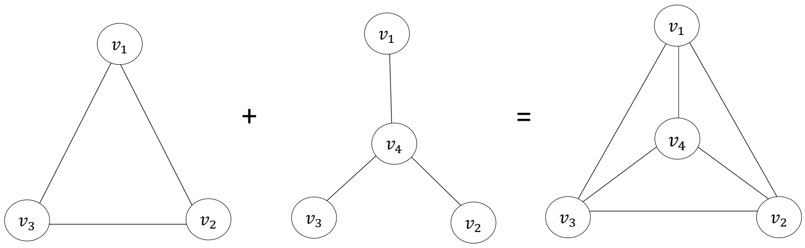
Örnek 2.30. Şekil 6'da verilen 3-boyutlu küp çizgesini ve G çizgesini alalım. Q_3 çizgesinin kromatik sayısı 2'dir. Dolayısıyla Q_3 çizgesi aslında iki parçalı bir çizgedir. Ancak G'nin kromatik sayısı 3'dür. Dolayısıyla G iki parçalı bir çizge değildir. Yani, Q_3 ve G çizgeleri arasında çizge özellikleri birebir eşlenemez. Öyleyse Q_3 ve G izomorfik olmayan iki çizgedir.

2.2.1 Tam Çizgelerin İnşası

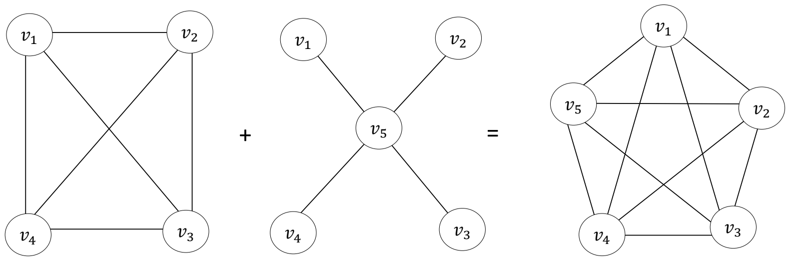
Tam çizgeler aşağıdaki gibi iki farklı yolla inşa edilebilir.

(i) İlk yöntem olarak, C_3 devir çizgesini alalım ve buna S_3 yıldız çizgesini ekleyelim. Bu durumda K_4 tam çizgesini elde ederiz. Yani, Şekil 7'de görüldüğü gibi $K_4 = C_3 + S_3$'dür. Eğer tümevarımla S_n'i $C_3 + \sum_{i=3}^{n-1} S_i$'ye eklemeye bu şekilde devam edersek, genel anlamda aşağıdaki denklemi elde edebiliriz:

$$K_{n+1} = C_3 + \sum_{i=3}^{n} S_i.$$



Şekil 7: $C_3 + S_3 = K_4$



Şekil 8: $K_4 + S_4 = K_5$

(ii) İkinci yöntem olarak, K_3 tam çizgesini alalım ve buna S_3 yıldız çizgesini ekleyelim. Bu durumda K_4 tam çizgesini elde ederiz. Elde ettiğimiz K_4 tam çizgesine S_4 yıldız çizgesini eklersek K_5 tam çizgesini elde ederiz. Yani, Şekil 8'de gösterildiği gibi $K_5 = K_4 + S_4$ olur. Genel olarak, K_{n+1} tam çizgesinin inşası aşağıdaki gibi verilebilir:

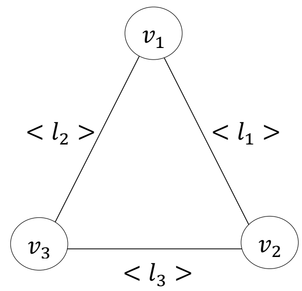
$$K_{n+1} = K_n + S_n.$$

Not. *(i) ve (ii)'de $i = 3$ alırsak aynı şekilde inşa oluşmaktadır. Bu durum $K_3 \cong C_3$ olmasından kaynaklanmaktadır. $i = 4, \ldots, n$ için aşamalar farklı olmaktadır.*

3 GENELLEŞTİRİLMİŞ SPLİNELAR

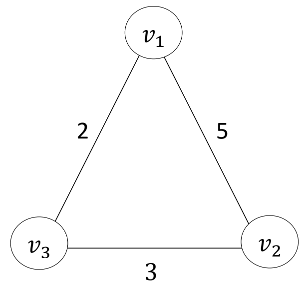
3.1 Genelleştirilmiş Spline ve Özellikleri

Tanım 3.1. $G = (V, E)$ sonlu bir çizge ve R birimli değişmeli bir halka olsun. G çizgesinin kenar elemanlarını R halkasının sıfırdan farklı ideallerine eşleştiren $\alpha : E \to \{R\text{'nin idealleri}\}$ fonksiyonuna *kenar etiketleme fonksiyonu* ve (G, α) sıralı ikilisine de *kenar etiketli çizge* denir. Şekil 9'da R halkası üzerinde kenar etiketli bir tam çizge örneği verilmiştir.



Şekil 9: R halkası üzerinde kenar etiketli çizge

Uyarı. Bu çalışmada aksi belirtilmedikçe R halkasını $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ alacağız. $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$'nin her ideali temel ideal olduğundan bir kenar etiketi $< \bar{f} >$ olan ideali $\bar{f} \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ üreteci ile temsil edeceğiz. Aslında, eğer $\bar{f} = f + m\mathbb{Z}$ kosetine karşılık gelen en küçük pozitif tamsayı f ise o zaman $f \in \mathbb{Z}$ elemanını temsilci olarak seçeceğiz. Örneğin, $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ halkası üzerinde kenar etiketli bir tam çizgesini Şekil 10'daki gibi alacağız.



Şekil 10: $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ halkası üzerinde kenar etiketli çizge

Tanım 3.2. (G, α) kenar etiketli çizgesini alalım. Eğer her bir kenar $e = uv \in E$ için komşu köşe etiketlerinin farkı kenar etiketlerinin içine düşüyorsa, yani $f_u - f_v \in \alpha(e)$ oluyorsa, $F \in R^{|V|}$ köşe etiketine (G, α) üzerindeki *genelleştirilmiş spline* denir. Burada f_u, u köşesindeki etiketi ifade etmektedir. (G, α) kenar etiketli çizgesinin üzerindeki genelleştirilmiş splineların kümesi $R_{(G,\alpha)}$ ile gösterilir.

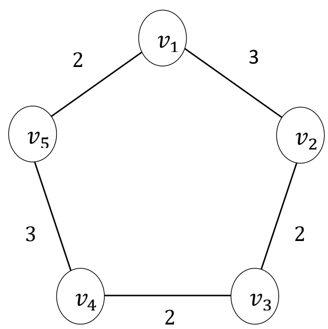
$$R_{(G,\alpha)} = \{F \in R^{|V|} : \text{her bir } e = uv \text{ için } f_u - f_v \in \alpha(e) \text{ 'dir.}\}.$$

$R_{(G,\alpha)}$'nın elemanlarını sütun matrisi ile aşağıdan yukarıya sıralı olmak üzere aşağıdaki gibi ifade ediyoruz:

$$F = \begin{pmatrix} f_{v_n} \\ \vdots \\ f_{v_1} \end{pmatrix} \in R_{(G,\alpha)}.$$

Ayrıca $F = (f_{v_1}, \ldots, f_{v_n})$ olacak şekilde vektörel gösterimle de ifade edebiliriz. "Genelleştirilmiş spline", "spline" olarak ifade edeceğiz.

Örnek 3.3. Şekil 11, $R = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ halkası üzerinde kenar etiketli devir çizgesi örneğidir. (C_5, α) üzerindeki bir spline $F = (0, 3, 3, 3, 0)$ olarak verilebilir.



Şekil 11: Genelleştirilmiş spline

Not. *R birimli değişmeli bir halka ve (G, α) kenar etiketli bir çizge olsun. $u, v \in V$ ve $e = uv \in E$ alalım.*

- *Eğer G çizgesinin tüm köşelerini bir $r \in R$ ile etiketlersek o zaman bir spline elde ederiz. Çünkü her bir köşe $e = uv$ için $r_u - r_v = r - r = 0 \in \alpha(e)$ sağlanır.*

- *Eğer $\alpha(e) =< 1_R >$ ise o zaman e üzerinde spline koşulu her bir $f_u, f_v \in R$ için sağlanır.*

- *Eğer $\alpha(e) = 0_R$ ise o zaman $f_u = f_v$ olur.*

Önerme 3.4. *R birimli değişmeli bir halka olsun. (G, α) kenar etiketli çizgesini alalım.*

(i) $R_{(G,\alpha)}$, birim elemanı her bir $v \in V$ için $1_v = 1$ olarak tanımlanan bileşensel toplama ve çarpma işlemi ile bir halkadır.

(ii) $R_{(G,\alpha)}$, R-modül yapısına sahiptir.

İspat. İlk olarak, (i)'nin ispatı için aşağıdaki cebirsel işlemleri tanımlayalım.

$$
\begin{aligned}
+\colon R_{(G,\alpha)} \times R_{(G,\alpha)} &\to R_{(G,\alpha)} \\
(p, q) &\mapsto p + q := (p_{v_1} + q_{v_1}, \ldots, p_{v_n} + q_{v_n})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\cdot\colon R_{(G,\alpha)} \times R_{(G,\alpha)} &\to R_{(G,\alpha)} \\
(p, q) &\mapsto p \cdot q := (p_{v_1} q_{v_1}, \ldots, p_{v_n} q_{v_n})
\end{aligned}
$$

Tanım gereği $R_{(G,\alpha)}$ kümesi $R^{|V|}$ çarpım halkasının bir altkümesidir. O halde, $R_{(G,\alpha)}$ kümesinin birim elemanını içerdiğini ve çarpma-çıkarma işlemleri altında kapalı olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır.

- Her bir $v \in V$ için $1_v = 1$ olarak tanımlanan birim eleman $R_{(G,\alpha)}$'nın içine düşer. Çünkü her bir $e = v_i v_j$ için $1_{v_i} - 1_{v_j} = 1 - 1 = 0 \in \alpha(e)$'dir.

- $p, q \in R_{(G,\alpha)}$ alalım. Her bir $e = v_i v_j$ için

  $$(p - q)_{v_i} - (p - q)_{v_j} = (p_{v_i} - q_{v_i}) - (p_{v_j} - q_{v_j}) = (p_{v_i} - p_{v_j}) + (q_{v_j} - q_{v_i}) \in \alpha(e)'\text{dir.}$$

  O halde, $R_{(G,\alpha)}$ çıkarma işlemi altında kapalıdır.

- $p, q \in R_{(G,\alpha)}$ alalım. Her bir $e = v_i v_j$ için

  $$
  \begin{aligned}
  (pq)_{v_i} - (pq)_{v_j} = (p_{v_i} q_{v_i}) - (p_{v_j} q_{v_j}) &= (p_{v_i} q_{v_i} - p_{v_j} q_{v_i}) + (p_{v_j} q_{v_i} - p_{v_j} q_{v_j}) \\
  &= (p_{v_i} - p_{v_j}) q_{v_i} + p_{v_j} (q_{v_i} - q_{v_j}) \in \alpha(e) \text{ 'dir.}
  \end{aligned}
  $$

  O halde, $R_{(G,\alpha)}$ çarpma işlemi altında kapalıdır.

Benzer şekilde, (ii)'nin ispatı için aşağıdaki cebirsel işlemi tanımlayalım.

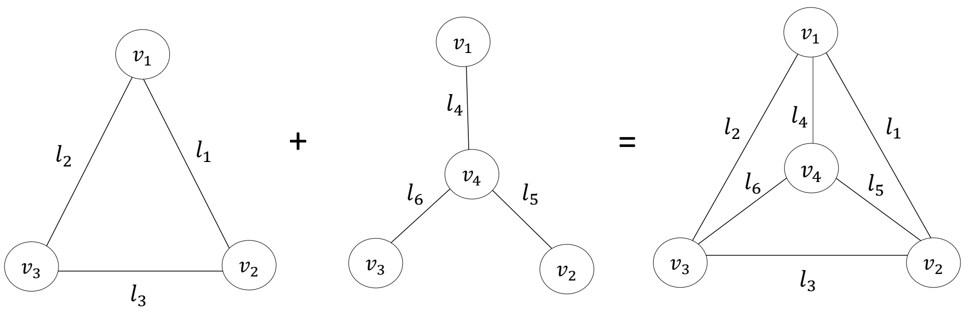
$$
\begin{aligned}
R \times R_{(G,\alpha)} &\to R_{(G,\alpha)} \\
(r, p) &\mapsto rp := (r p_{v_1}, \ldots, r p_{v_n})
\end{aligned}
$$

$R_{(G,\alpha)}$'nın bu işlem ile bir R-modül olduğu kolayca kontrol edilebilir. □

Önerme 3.5. *Eğer R bir TİB ise o zaman $R_{(G,\alpha)}$ serbest R-modüldür.*

İspat. Tanımdan, $R_{(G,\alpha)} \subset R^{|V|}$ alt modülüdür. $R^{|V|}$'nin serbest R-modül olduğu açıktır. Teorem 2.21'den $R_{(G,\alpha)}$ serbest R-modül olur. □

3.2 Tam Çizgeler Üzerinde Genelleştirilmiş Splinelar



Şekil 12: $K_3 + S_3 = K_4$

K_n tam çizgesini ve S_n yıldız çizgesini alalım. K_n çizgesinin ilk köşesini v_1 ve diğer köşelerini saat yönünde artacak şekilde $v_2, \ldots, v_n$ olarak etiketleyelim. Benzer şekilde, S_n çizgesindeki $v_1, \ldots, v_n$ köşelerini tam çizgesinde olduğu gibi etiketleyelim. Ek olarak, yıldız çizgesindeki ortadaki merkez köşeyi v_{n+1} ile etiketleyelim.

$$r_n := \frac{n(n-1)}{2}$$

olsun. Tanımlanan bu r_n sayısı, $n \geq 1$ için K_n çizgesinin kenarlarının eleman sayısına karşılık gelmektedir. Şimdi, tam çizgelerin kenarlarının etiketlerini Bölüm 2.2.1 (ii)'de tanımlanan inşayı kullanarak belirleyelim. $e_{ij} = v_i v_j$ kenarını e_k ile aşağıdaki gibi ifade edelim. İlk olarak, $K_4 = K_3 + S_3$ inşasını kullanalım. K_3'ün kenarlarını

$$e_1 := e_{12}, e_2 := e_{13}, e_3 := e_{23}$$

olarak sıralayalım ve bunları

$$l_1 \in \alpha(e_1), l_2 \in \alpha(e_2), l_3 \in \alpha(e_3)$$

üreteçleri ile etiketleyelim. S_3'ün kenarlarını

$$e_4 := e_{14}, e_5 := e_{24}, e_6 := e_{34}$$

olarak sıralayalım ve bunları

$$l_4 \in \alpha(e_4), l_5 \in \alpha(e_5), l_6 \in \alpha(e_6)$$

üreteçleri ile etiketleyelim. O zaman K_4'ün kenarlarının etiketleri Şekil 12'de görüldüğü gibi

$$l_1 \in \alpha(e_1), l_2 \in \alpha(e_2), l_3 \in \alpha(e_3),$$

$$l_4 \in \alpha(e_4), l_5 \in \alpha(e_5), l_6 \in \alpha(e_6)$$

olur. Şimdi, $K_5 = S_4 + K_4$ inşasını kullanalım. S_4'ün kenarlarını

$$e_7 := e_{15}, e_8 := e_{25}, e_9 := e_{35}, e_{10} := e_{45}$$

olarak sıralayalım ve bunları

$$l_7 \in \alpha(e_7), l_8 \in \alpha(e_8), l_9 \in \alpha(e_9), l_{10} \in \alpha(e_{10})$$

üreteçleri ile etiketleyelim. Buradan K_5'in kenarlarının etiketleri

$$l_1 \in \alpha(e_1), l_2 \in \alpha(e_2), l_3 \in \alpha(e_3), l_4 \in \alpha(e_4), l_5 \in \alpha(e_5), l_6 \in \alpha(e_6),$$

$$l_7 \in \alpha(e_7), l_8 \in \alpha(e_8), l_9 \in \alpha(e_9), l_{10} \in \alpha(e_{10})$$

olur. Eğer böyle devam edersek, $K_n = K_{n-1} + S_{n-1}$ inşasını kullanarak K_n'nin kenarlarının etiketleri

$$l_1 \in \alpha(e_1), l_2 \in \alpha(e_2), l_3 \in \alpha(e_3), \ldots, l_{r_{n-1}-1} \in \alpha(e_{r_{n-1}-1}), l_{r_{n-1}} \in \alpha(e_{r_{n-1}}),$$

$$l_{r_{n-1}+1} \in \alpha(e_{r_{n-1}+1}), l_{r_{n-1}+2} \in \alpha(e_{r_{n-1}+2}), \ldots, l_{r_n} \in \alpha(e_{r_n})$$

olacak şekilde belirlenir.

Bölüm 2.2.1'de tam çizgelerin iki farklı yolla inşa edilebileceğini ifade etmiştik. Handschy, Melnick ve Reinders [11], tam sayılar üzerinde çalışmışlar ve tam çizgeler üzerinde splineların inşasını 2.2.1 (i) kullanarak $\mathbb{Z}$ halkası için vermişlerdir. Ancak biz bu tezde, $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ halkası üzerinde çalışacağız. Bu yüzden, Bölüm 2.2.1 (ii) kullanılarak TİH üzerinde splineların nasıl bulunacağı aşağıdaki teoremde verilecektir.

Teorem 3.6. *R bir TİH olsun. (K_n, α) kenar etiketli tam çizgesini ve (S_n, α) kenar etiketli yıldız çizgesini alalım. O zaman her bir i için $3 \leq i \leq n$ olacak şekilde $(f_{v_1}, \ldots, f_{v_{i+1}}) \in R_{(K_{i+1},\alpha)}$'nin sağlaması için gerek ve yeter koşul $(f_{v_1}, \ldots, f_{v_i}) \in R_{(K_i,\alpha)}$ ve $(f_{v_1}, \ldots, f_{v_{i+1}}) \in R_{(S_i,\alpha)}$ olmasıdır.*

İspat. $(\Rightarrow)$: Tümevarımla ispatlayalım. İlk olarak, $i = 3$ durumunu inceleyelim. $(f_{v_1}, f_{v_2}, f_{v_3}) \in R_{(K_3,\alpha)}$ ve $(f_{v_1}, f_{v_2}, f_{v_3}, f_{v_4}) \in R_{(S_3,\alpha)}$ olduğunu varsayalım.
$K_4 = K_3 + S_3$ olduğundan

$$f_{v_1} - f_{v_2} \in < l_1 >, \quad f_{v_1} - f_{v_3} \in < l_2 >, \quad f_{v_2} - f_{v_3} \in < l_3 >,$$

$$f_{v_1} - f_{v_4} \in < l_4 >, \quad f_{v_2} - f_{v_4} \in < l_5 >, \quad f_{v_3} - f_{v_4} \in < l_6 >$$

buluruz. O halde,

$$(f_{v_1}, f_{v_2}, f_{v_3}, f_{v_4}) \in R_{(K_4,\alpha)}$$

olur. Tümevarım hipotezi olarak, $i = t$ olmak üzere $3 \leq t \leq n$ için $(f_{v_1}, ..., f_{v_t}) \in R_{(K_t,\alpha)}$ ve $(f_{v_1}, ..., f_{v_{t+1}}) \in R_{(S_t,\alpha)}$ olduğunu varsayalım. $i = n + 1$ için doğru olduğunu gösterelim. Tümevarım hipotezinden, $(f_{v_1}, ..., f_{v_n}) \in R_{(K_n,\alpha)}$ ve $(f_{v_1}, ..., f_{v_{n+1}}) \in R_{(S_n,\alpha)}$ olduğunu biliyoruz ve çizge teorisinden $K_{n+1} = K_n + S_n$ eşitliği sağlandığından

$$(f_{v_1}, ..., f_{v_{n+1}}) \in R_{(K_{n+1},\alpha)}$$

buluruz.

$(\Leftarrow)$: Açıktır.

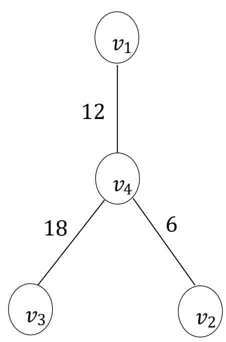
□

3.3 Akışkan Sınıfları

Akışkan sınıfları, splinelerın özel bir türüdür. Akışkan sınıfları ilk olarak Handschy, Melnick, ve Reinders [11] tarafından tanımlanmıştır ve aynı makalede akışkan sınıflarının varlığı tamsayılar üzerinde devir çizgeleri için ispat edilmiştir. Akışkan sınıfları özellikle $R_{(G,\alpha)}$'nın bir modül tabanını bulmak için çok kullanışlıdır. Bowden, Hagen, King ve Reinders [6], tamsayılar üzerinde splinelerın bir akışkan sınıf tabanı olmasının hangi durumda gerçekleneceğini ispat etmişlerdir. Bowden ve Tymoczko [7], $[\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}]_{(G,\alpha)}$'nın akışkan üreteçlerinin kümesinin bazı koşullar altında aslında bir akışkan minimum üreteç kümesi olduğunu ispatlamışlardır. Bu ispat bizim çalışmalarımız için oldukça önemlidir.

Tanım 3.7. Köşelerinin kümesi $\{v_1, \ldots, v_n\}$ olan (G, α) kenar etiketli çizgesini alalım. $1 \leq i \leq n$ olacak şekilde i'yi seçelim. $F^{(i)} \in R_{(G,\alpha)}$ splinenı alalım. Her $j < i$ için bileşenler $f_{v_i}^{(i)} \neq 0$ ve $f_{v_j}^{(i)} = 0$ koşullarını sağlıyorsa $F^{(i)}$'ye *i-nci akışkan sınıfı* denir ve tüm i-nci akışkan sınıflarının kümesi $\mathcal{F}_i$ olarak gösterilir.

Tanım 3.8. $F^{(i)} \in [\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}]_{(G,\alpha)}$ bir akışkan sınıf olsun. Eğer her bir köşe $v_j \in V$ için $f_{v_j}^{(i)} \in \{0, a_i\}$ olacak şekilde bir $a_i \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ elemanı varsa $F^{(i)}$ splinenına bir *sabit akışkan sınıf* denir.

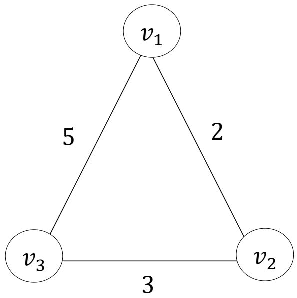


Şekil 13: $\mathbb{Z}/72\mathbb{Z}$ üzerinde kenar etiketli (S_3, α)

Örnek 3.9. Şekil 13'de verilen (S_3, α) kenar etiketli yıldız çizgesini $\mathbb{Z}/72\mathbb{Z}$ halkası üzerinde alalım. Bu çizgenin akışkan sınıfları aşağıdaki gibi verilebilir:

$$F^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, F^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, F^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, F^{(4)} = \begin{pmatrix} 36 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bu akışkan sınıfları aynı zamanda birer sabit akışkan sınıflarıdır.



Şekil 14: $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ üzerinde kenar etiketli (K_3, α)

Örnek 3.10. Şekil 14'de verilen $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ üzerinde kenar etiketli tam çizgesini alalım. Bu çizgenin akışkan sınıfları aşağıdaki gibi verilebilir:

$$F^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, F^{(2)} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, F^{(3)} = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Açıkça görüldüğü gibi $F^{(2)}$ akışkan sınıfı bir sabit akışkan sınıfı değildir.

Bowden ve arkadaşları [6], tamsayılar üzerinde splineların kümesinin bir akışkan sınıf tabanı olma kriterini vermişlerdir ([6], Teorem 3.1 bakınız). Biz ise burada, $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ halkası üzerinde akışkan sınıflarının kümesinin ne zaman bir üreteç kümesi olacağını inceleyeceğiz.

Teorem 3.11. *$\mid V \mid= n$ olan (G, α) kenar etiketli çizgesini $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ halkası üzerinde alalım. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.*

- *$\{\bar{F}^{(1)}, \ldots, \bar{F}^{(n)}\}$ kümesi $[\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}]_{(G,\alpha)}$'nın bir akışkan üreteç kümesidir.*
- *Her bir $\bar{A}^{(i)} = (\bar{0}, \ldots, \bar{0}, \bar{g}_{v_i}, \ldots, \bar{g}_{v_n})$ akışkan sınıfı için $\bar{g}_{v_i}$ girdisi $\bar{f}^{(i)}_{v_i}$ girdisinin bir katıdır.*

İspat. $\{\bar{F}^{(1)}, \ldots, \bar{F}^{(n)}\}$ kümesinin $[\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}]_{(G,\alpha)}$'nın bir akışkan üreteç kümesi olduğunu varsayalım. $\bar{A}^{(i)} = (\bar{0}, \ldots, \bar{0}, \bar{g}_{v_i}, \ldots, \bar{g}_{v_n}) \in [\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}]_{(G,\alpha)}$ bir spline olsun. Hipotezden, $\bar{A}^{(i)}$'yi $\bar{F}^{(1)}, \ldots, \bar{F}^{(n)}$ splinelarının bir doğrusal kombinasyonu olarak yazabiliriz. Çünkü bu splinelar bir akışkan üreteçleri formundadır. $\bar{A}^{(i)}$ baştan $i-1$ tane sıfıra sahip olduğundan $\bar{a}_i, \ldots, \bar{a}_n \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ için $\bar{A}^{(i)} = \bar{a}_i \bar{F}_{v_i}^{(i)} + \cdots + \bar{a}_n \bar{F}_{v_n}^{(n)}$ yazabiliriz. Bu denklemde i-nci girdiyi ele alırsak, $\bar{g}_{v_i} = \bar{a}_i \bar{f}_{v_i}^{(i)} + \bar{a}_{i+1}\bar{0} + \cdots + \bar{a}_n\bar{0}$ elde ederiz. Böylece $\bar{a}_i \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ için $\bar{g}_{v_i} = \bar{a}_i \bar{f}_{v_i}^{(i)}$ olur.

Şimdi tersini ispat edelim. $\bar{A} = (\bar{g}_{v_1}, \ldots, \bar{g}_{v_n}) \in [\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}]_{(G,\alpha)}$ bir spline olsun. Her bir $1 \leq j \leq n$ için

$$\bar{A} = \bar{A}_j' + \sum_{k=1}^{j} \bar{a}_k \bar{F}^{(k)}$$

eşitliğini tümevarımla ispat etmek istiyoruz. Burada $\bar{A}_j'$ baştan (en az) j tane sıfıra sahip bir splinedır. İlk olarak, $j = 1$ durumunu inceleyelim. Hipotezden, $\bar{g}_{v_1} = \bar{a}_1 \bar{f}_{v_1}^{(1)}$ olduğunu biliyoruz. O halde,

$$\begin{pmatrix} \bar{g}_{v_n} \\ \vdots \\ \bar{g}_{v_2} \\ \bar{g}_{v_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{g}_{v_n} - \bar{a}_1 \bar{f}_{v_n}^{(1)} \\ \vdots \\ \bar{g}_{v_2} - \bar{a}_1 \bar{f}_{v_2}^{(1)} \\ \bar{0} \end{pmatrix} + \bar{a}_1 \bar{F}^{(1)}$$

olur. $\bar{A}_1' = (\bar{0}, \bar{g}_{v_2} - \bar{a}_1 \bar{f}_{v_2}^{(1)}, \ldots, \bar{g}_{v_n} - \bar{a}_1 \bar{f}_{v_n}^{(1)})$ olduğunu kabul edersek $\bar{A} = \bar{A}_1' + \sum\limits_{k=1}^{1} \bar{a}_k \bar{F}^{(k)}$ eşitliğini elde ederiz. Tümevarım hipotezi olarak, $1 \leq j \leq n-1$ için $\bar{A} = \bar{A}_j' + \sum\limits_{k=1}^{j} \bar{a}_k \bar{F}^{(k)}$ eşitliğinin sağlandığını kabul edelim. Diğer bir deyişle,

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{g}_{v_n} \\ \vdots \\ \\ \vdots \\ \\ \bar{g}_{v_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{g}'_{v_n} \\ \vdots \\ \bar{g}'_{v_j} \\ \bar{0} \\ \vdots \\ \bar{0} \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{j-1} \bar{a}_k \bar{F}^{(k)}$$

olsun. Teoremin hipotezinden, $\bar{a}_j \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ için $\bar{g}'_{v_j} = \bar{a}_j \bar{f}_{v_j}^{(j)}$ elde ederiz. Bu durumda,

$$\begin{pmatrix} \bar{g}_{v_n} \\ \vdots \\ \\ \vdots \\ \\ \bar{g}_{v_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{g}'_{v_n} - \bar{a}_j \bar{f}_{v_n}^{(j)} \\ \vdots \\ \bar{g}'_{v_{j+1}} - \bar{a}_j \bar{f}_{v_{j+1}}^{(j)} \\ \bar{0} \\ \vdots \\ \bar{0} \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{j} \bar{a}_k \bar{F}^{(k)}$$

olur. Eğer $\bar{A}_j' = (\bar{0}, \ldots, \bar{0}, \bar{g}'_{v_{j+1}} - \bar{a}_j \bar{f}_{v_{j+1}}^{(j)}, \ldots, \bar{g}'_{v_n} - \bar{a}_j \bar{f}_{v_n}^{(j)})$ alırsak, $\bar{A} = \bar{A}_j' + \sum\limits_{k=1}^{j} \bar{a}_k \bar{F}^{(k)}$

buluruz. Özellikle $j = n$ için $\bar{A} = \bar{A}'_n + \sum_{k=1}^{n} \bar{a}_k \bar{F}^{(k)}$'dir. $\bar{A}'_n$ baştan n tane sıfıra sahip bir spline yani $\bar{A}'_n = (\bar{0}, \ldots, \bar{0})$ olduğundan $\bar{A} = \sum_{k=1}^{n} \bar{a}_k \bar{F}^{(k)}$ elde ederiz.

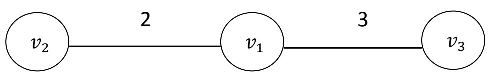
$\square$

Not. *Yukarıdaki teorem* $[\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}]_{(G,\alpha)}$*'nın akışkan sınıflarının oluşturduğu kümenin bir akışkan üreteç kümesi olup olmadığını belirlememizde akışkan sınıflarının sıfırdan farklı ilk girdisinin önemli bir role sahip olduğunu göstermektedir. Burada sözü geçen girdilere* en küçük baş girdiler *denir.*

Tanım 3.12. $B \subset [\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}]_{(G,\alpha)}$ bir üreteç kümesi olsun. B kümesinin elemanlarından oluşan ve eleman sayısı B'den daha az olacak şekilde bir $C \subset B$ üreteç altkümesi bulunamıyorsa B'ye *minimal üreteç kümesi* denir.

Tanım 3.13. Bir $\mathbb{Z}$-modül $[\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}]_{(G,\alpha)}$'nın mümkün olan en küçük sayıdaki eleman ile gerilen splineların kümesine *minimum üreteç kümesi* denir.

Tanım 3.14. Bir $\mathbb{Z}$-modül $[\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}]_{(G,\alpha)}$'nın bir minimum üreteç kümesinin boyutuna *mertebe* denir.



Şekil 15: $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ üzerinde kenar etiketli (P_3, α)

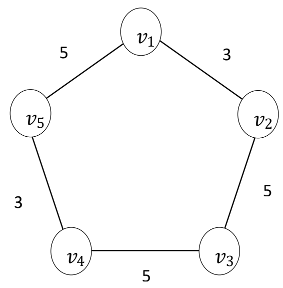
Örnek 3.15. Şekil 15'de verilen $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ üzerinde kenar etiketli patika çizgesini alalım. O halde $[\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}]_{(P_3,\alpha)}$'nın bir akışkan üreteç kümesi aşağıdaki gibi verilebilir.

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ancak elde edilen bu B kümesinin elemanları $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ halkası üzerinde doğrusal bağımsız olmadığından yani $3.(0, 2, 3) \equiv (0, 0, 3)$ olduğundan B bir minimal üreteç kümesi değildir. Dolayısıyla, minimum üreteç kümesi de değildir. $[\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}]_{(P_3,\alpha)}$'nın bir akışkan minimum üreteç kümesi aşağıdaki gibi verilebilir.

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Burada $[\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}]_{(P_3,\alpha)}$'nın mertebesi 2 dir.



Şekil 16: $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ üzerinde kenar etiketli (C_5, α)

Örnek 3.16. Şekil 16'da verilen $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ halkası üzerinde kenar etiketli devir çizgesini alalım. $[\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}]_{(C_5,\alpha)}$'nın bir akışkan üreteç kümesi aşağıdaki gibi verilebilir.

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

B kümesi minimal akışkan üreteç kümesidir ama minimum üreteç kümesi değildir. $[\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}]_{(C_5,\alpha)}$'nın bir akışkan minimum üreteç kümesi [14], Teorem 3.15 kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Bowden ve Tymoczko [7] tarafından verilen aşağıdaki sonuç bizim çalışmalarımız için oldukça önemlidir. Bu sonuç sayesinde, $[\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}]_{(G,\alpha)}$'nın akışkan üreteçlerinin kümesinin aslında bir akışkan minimum üreteç kümesi olduğunu söyleyebileceğiz.

Sonuç 3.17. [7] $\{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ *kümesi* $[\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}]_{(G,\alpha)}$*'nın akışkan üreteçlerinin bir kümesi olmak üzere aşağıdaki koşulları sağladığını varsayalım.*

- $b_1 = (1, \ldots, 1)$*'dir.*
- $\{b_i : i = 2, 3, \ldots, k\}$ *akışkan sınıfları her* $v \in V$ *ve her* i *için* $b_{i_v} \in \{o, c_i\}$ *koşulunu sağlayan birer sabit akışkan sınıftır.*
- $\{c_1 = 1, c_2, \ldots, c_k\}$ *kümesi* $c_{i_1} \mid c_{i_2} \mid \cdots \mid c_{i_k}$ *olacak şekilde tekrardan sıralanabilir.*

O zaman, $\{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ *kümesi* $[\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}]_{(G,\alpha)}$*'nın bir akışkan minimum üreteç kümesidir.*

İspat. [7], Sonuç 2.11 bakınız. □

3.4 Spline Dönüşümleri

Aşağıda spline dönüşümleri verilmiştir. İlk olarak, taban halkasını sabit tutup çizgeyi değiştireceğiz ve bu durumda spline üzerinde nasıl bir değişim olacağını inceleyeceğiz. Daha sonra, çizgeyi sabit tutup taban halkasını değiştireceğiz ve bu durum içinde spline üzerinde nasıl bir değişim olacağını inceleyeceğiz.

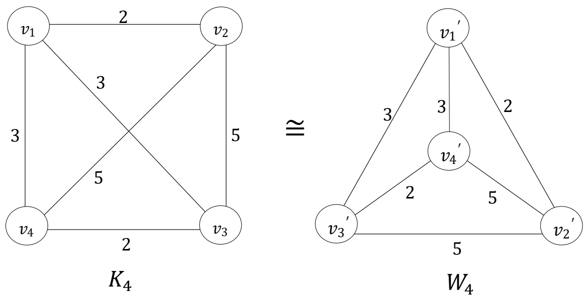
Tanım 3.18. G sonlu çizgesini ve $\alpha : E \to \{R\text{'nin idealleri}\}$, $\alpha^{'} : E^{'} \to \{R\text{'nin idealleri}\}$ fonksiyonlarını alalım. (G, α) ve $(G^{'}, \alpha^{'})$ kenar etiketli çizgeler olsun. Eğer $\theta_1 : G \to G^{'}$ bir çizge homomorfizması ve $\theta_2 : R \to R$ bir halka otomorfizması olmak üzere her bir $e \in E_G$ için $\theta_2(\alpha(e)) = \alpha^{'}(\theta_1(e))$ oluyorsa o zaman $\theta : (G, \alpha) \to (G^{'}, \alpha^{'})$ fonksiyonuna *kenar etiketli çizge homomorfizması* denir. Eğer $\theta_1 : G \to G^{'}$ bir çizge izomorfizması ise $\theta : (G, \alpha) \to (G^{'}, \alpha^{'})$ fonksiyonuna *kenar etiketli çizge izomorfizması* denir. Ayrıca θ fonksiyonunun halkaların genelleştirilmiş splinelarının bir fonksiyonu olan θ_*'a indirgendiğini varsayalım. Her bir $u \in V_G$ için

$$\begin{aligned} \theta_* \colon R_{(G,\alpha)} &\to R_{(G^{'},\alpha^{'})} \\ f &\mapsto \theta_*(f)_{\theta_1(u)} = \theta_2(f_u) \end{aligned}$$

sağlar ve $R_{(G,\alpha)} \cong R_{(G^{'},\alpha^{'})}$ olur.

$$\begin{tikzcd} E_G \arrow[r, "\theta_1"] \arrow[d, "\alpha"'] & E_{G'} \arrow[d, "\alpha^{'}"] \\ I \arrow[r, "\theta_2"'] & I \end{tikzcd}$$

Yukarıdaki şema iyi tanımlıdır. Çünkü θ_2 bir halka otomorfizmasıdır.



Şekil 17: Kenar etiketli çizge izomorfizması

Örnek 3.19. $\theta_1 : K_4 \to W_4$ bir çizge izomorfizması ve $\theta_2 : \mathbb{Z}/30\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ bir halka otomorfizması olsun. Şekil 17'de verilen $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ halkası üzerinde kenar etiketli (K_4, α) tam çizgesini ve $(W_4, \alpha^{'})$ tekerlek çizgesini alalım. $\theta : (K_4, \alpha) \to (W_4, \alpha^{'})$ fonksiyonu bir kenar etiketli çizge izomorfizmasıdır. $[\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}]_{(K_4,\alpha)}$'nın bir akışkan minimum üreteç kümesi aşağıdaki gibi verilebilir.

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 15 \\ 15 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

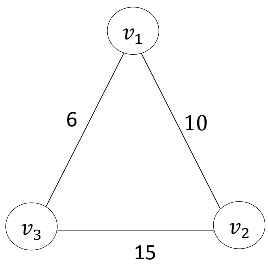
B'nin elemanlarının $\theta_* : [\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}]_{(K_4,\alpha)} \to [\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}]_{(W_4,\alpha')}$ fonksiyonu altındaki izomorfik görüntüsünden dolayı B kümesinin $[\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}]_{(W_4,\alpha')}$ için de bir akışkan minimum üreteç kümesi olduğunu söyleyebiliriz.

Tanım 3.20. R ve $R^{'}$ iki farklı halka olmak üzere $\theta : R^{'} \to R$ bir halka homomorfizmasını alalım. Ayrıca $\alpha : E \to \{R\text{'nin idealleri}\}$ fonksiyonu olmak üzere (G, α) kenar etiketli çizgesini alalım. $\theta^{-1}(\alpha(e))$'nın $R^{'}$ halkasının bir ideali olduğunu varsayalım. Her bir $f \in R^{'}_{(G,\theta^{-1}(\alpha))}$ spline ve her bir $v \in V$ için $(\theta_* f)_v = \theta(f_v)$ kuralını sağlayan

$$\theta_* : R^{'}_{(G,\theta^{-1}(\alpha))} \to R_{(G,\alpha)}$$

fonksiyonu çarpım fonksiyonunun halkaların genelleştirilmiş splinelarına bir kısıtlamasıdır. Bu fonksiyonun aşağıdaki özellikleri sağladığı açıktır.

- $\theta_* : R'_{(G,\theta^{-1}(\alpha))} \to R_{(G,\alpha)}$ fonksiyonu bir iyi tanımlı halka homomorfizmasıdır.
- Eğer $\theta : R' \to R$ birebir bir fonksiyon ise $\theta_* : R'_{(G,\theta^{-1}(\alpha))} \to R_{(G,\alpha)}$ fonksiyonu da birebirdir.
- Eğer $\theta : R' \to R$ örten bir fonksiyon ise $\theta_* : R'_{(G,\theta^{-1}(\alpha))} \to R_{(G,\alpha)}$ fonksiyonu da örtendir.



Şekil 18: $\mathbb{Z}$ üzerinde kenar etiketli (K_3, α)

Örnek 3.21. Şekil 18'de verilen tamsayılar halkası üzerinde kenar etiketli tam çizgesini alalım. Tamsayılar üzerinde splineların bir $\mathbb{Z}$-modül tabanı aşağıdaki gibi verilebilir.

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Tanımdan, $\theta : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ örten fonksiyonu $\theta_* : \mathbb{Z}_{(K_3,\theta^{-1}(\alpha))} \to [\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}]_{(K_3,\alpha)}$ örten fonksiyonuna indirgenir. Dolayısıyla $\{\theta_*(1,1,1), \theta_*(0,30,30), \theta_*(0,0,30)\}$ kümesi $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ halkası üzerinde splineların bir $\mathbb{Z}$-modül üreteç kümesidir. Bir başka deyişle,

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

kümesi $[\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}]_{(K_3,\alpha)}$'nın bir akışkan üreteç kümesidir.

Not. *Handschy ve arkadaşları [11], tamsayılar üzerinde etiketli devir çizgeleriyle çalışmışlar ve splineların bir $\mathbb{Z}$-modül tabanını akışkan sınıfların en küçük baş girdilerini formülleştirerek bulmuşlardır. Bizde bu formülleştirmeyi kullanarak Örnek 3.21'deki B kümesini kolayca bulabildik.*

4 MİNİMUM ÜRETEÇ KÜMESİ

Bu bölümde $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ halkaları üzerinde kenar etiketli tam çizgeler için ayrı ayrı akışkan minimum üreteç kümeleri bulunacaktır. Bunun için iki farklı yöntem kullanılacaktır. İlk yöntem olarak, Philbin ve arkadaşlarının [14] çalışmalarından yararlanılacaktır. Burada öncelikle $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ halkası üzerinde geliştirdikleri algoritma kullanılarak tam çizgeler için bir akışkan minimum üreteç kümesi elde edilecektir. Ardından, aynı çalışmada $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ halkası üzerinde geliştirdikleri algoritma kullanılacak ve akışkan minimum üreteç kümesi elde etmek için bazı örnekler incelenecektir. Bu örneklerde $\mid V \mid$ veya m tamsayısı arttıkça işlemlerin oldukça zorlaştığı görülecektir. Bu yüzden ikinci yöntem geliştirilecektir. Burada ilk olarak, $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ halkası üzerinde bir akışkan sınıfının varlığından her zaman bahsedebilir miyiz sorusu üzerinde durulacak ve bu soruya cevap verebilmek için Altınok ve Sarıoğlan [1] çalışmalarından faydalanacaktır. Daha sonra $[\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}]_{(K_n,\alpha)}$'nın bir akışkan minimum üreteç kümesi elde edilecektir.

Bu bölüm boyunca $p, p_1, \ldots, p_k$ ların birer asal sayı olduğu ve m'nin $m = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_k^{m_k}$ olacak şekilde asal çarpanlarına ayrıldığı kabul edilecektir. $0 \leq n_{ij} \leq m_j$, $i = 1, 2, \ldots, r_n$ ve $j = 1, 2, \ldots, k$ olmak üzere $a_i = p_1^{n_{i1}} p_2^{n_{i2}} \ldots p_k^{n_{ik}}$ sayısı $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ halkası üzerinde bir sıfır bölen olsun. K_n tam çizgesinin tüm kenarlarının Bölüm 3.2'deki gibi sıralandığını varsayalım. Ayrıca K_n çizgesinin

- $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ halkası üzerindeki kenar etiketlerinin

$$l_1 = p^{i_1}, l_2 = p^{i_2}, \ldots, l_{r_n} = p^{i_{r_n}}$$

- $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ halkası üzerindeki kenar etiketlerinin

$$\begin{aligned}
l_1 = a_1 = p_1^{n_{11}} p_2^{n_{12}} \ldots p_k^{n_{1k}}, &\quad 0 \leq n_{1j} \leq m_j, \quad j = 1, \ldots, k \\
l_2 = a_2 = p_1^{n_{21}} p_2^{n_{22}} \ldots p_k^{n_{2k}}, &\quad 0 \leq n_{2j} \leq m_j, \quad j = 1, \ldots, k \\
&\vdots \\
l_{r_n} = a_{r_n} = p_1^{n_{r_n 1}} p_2^{n_{r_n 2}} \ldots p_k^{n_{r_n k}}, &\quad 0 \leq n_{r_n j} \leq m_j, \quad j = 1, \ldots, k
\end{aligned}$$

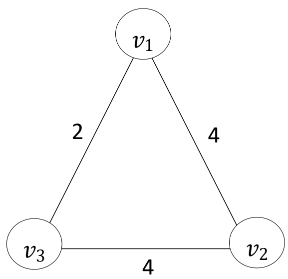
olduğunu varsayalım.

4.1 Algoritma ile Minimum Üreteç Kümesi

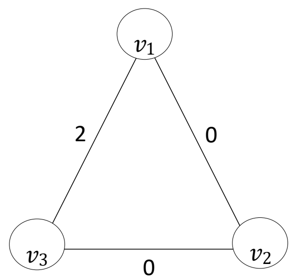
Burada ilk olarak Algoritma 4.5 [14] kullanılarak bazı koşullar altında kenar etiketli $[\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}]_{(K_n,\alpha)}$'nın bir akışkan minimum üreteç kümesi bulunacaktır. Daha sonra Algoritma 4.10 [14] kullanılarak bir tam çizgesi için bir akışkan minimum üreteç kümesi elde edilmesinin oldukça zor olduğu bazı örneklerle gösterilecektir. Ayrıca $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ halkası üzerinde tam çizgelerin kenar etiketlerini artan veya azalan sıraladığımızda da $[\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}]_{(K_n,\alpha)}$'nın akışkan minimum üreteç kümesinin genel formunun bu algoritmayla bulunmasının oldukça zor olduğu ifade edilecektir.

Tanım 4.1. (G,α) kenar etiketli çizgesini $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ halkası üzerinde alalım. G'nin köşeleri üzerinde $v_i \sim v_j$ ile gösterilen bir denklik bağıntısı tanımlıdır ancak ve ancak v_i ile v_j sıfır etiketli kenarların bir yolu ile bağlantılıdır. Bu yola *sıfır yol* ve bu bağlantı ile tanımlı bir denklik sınıfına *sıfır bağlantılı bileşen* denir. Kenar etiketleri $\mathbb{Z}/p^\beta\mathbb{Z}$ halkası üzerinde ve en küçük köşe indeksi v_i olan sıfır bağlantılı bileşen $V^{(i,\beta)}$ ile gösterilir.

Not. *Bir sıfır yolu ile bağlantılı her bir köşe bir splineda aynı etikete sahiptir. Bu yüzden bir sıfır bağlantılı bileşen içindeki tüm köşeler de bir splineda aynı etikete sahiptir.*



(a) $\mathbb{Z}/2^3\mathbb{Z}$



(b) $\mathbb{Z}/2^2\mathbb{Z}$

Şekil 19: $\mathbb{Z}/2^i\mathbb{Z}$ üzerinde kenar etiketli (K_3,α)

Örnek 4.2. Şekil 19a'da verilen $\mathbb{Z}/2^3\mathbb{Z}$ halkası üzerinde kenar etiketli tam çizgesini alalım. Bu çizgenin sıfır bağlantılı bileşenleri

$$V^{(1,3)} = \{v_1\}, V^{(2,3)} = \{v_2\}, V^{(3,3)} = \{v_3\}$$

'dir. Eğer çizgeyi sabit tutup Şekil 19b'de verilen $\mathbb{Z}/2^2\mathbb{Z}$ halkası üzerinde kenar etiketli tam çizgesini alırsak o zaman bu çizgenin sıfır bağlantılı bileşenleri

$$V^{(1,2)} = V^{(2,2)} = V^{(3,2)} = \{v_1, v_2, v_3\}$$

olur.

Önerme 4.3. [14] (G, α) *kenar etiketli çizgesini* $\mathbb{Z}/p^{\beta}\mathbb{Z}$ *halkası üzerinde alalım. Aşağıdaki gibi tanımlanan köşe etiketi,* $[\mathbb{Z}/p^{\beta}\mathbb{Z}]_{(G,\alpha)}$*'nın bir splinenıdır.*

$$b_v^{(i,\beta)} = \begin{cases} p^{\beta-1} & eğer \quad v \in V^{(i,\beta)} \\ 0 & eğer \quad v \notin V^{(i,\beta)} \end{cases}$$

İspat. [14], Önerme 3.6 bakınız. □

Teorem 4.4. [14] (G, α) *kenar etiketli çizgesini* $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ *halkası üzerinde alalım. O zaman, elemanları Önerme 4.3'deki gibi tanımlanan* $B_p = \{b^{(i,1)} : V^{(i,1)} \subset V\}$ *kümesi* $[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]_{(G,\alpha)}$*'nın bir akışkan minimum üreteç kümesidir.*

İspat. [14], Teorem 3.7 bakınız. □

Not. (G, α) *kenar etiketli çizgesini* $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ *halkası üzerinde tüm kenar etiketleri sıfırdan farklı olacak şekilde alalım. O halde,* (G, α) *üzerindeki her köşe etiketi bir splinedır.*

Algoritma 4.5. [14] $\alpha : E \to \{\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}\text{'nin idealleri}\}$ ve $\alpha_i : E \to \{\mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}\text{'nin idealleri}\}$ fonksiyonları olmak üzere (G, α) ve (G, α_i) kenar etiketli çizgelerini alalım. (G, α_i)'nin sıfır bağlantılı bileşenlerinin indeksleri I_i olsun. Her bir üreteci $I_{\beta-1}$ ile indekslenen biricik sıfır bağlantılı bileşen ile ilişkili $[\mathbb{Z}/p^{\beta-1}\mathbb{Z}]_{(G,\alpha_{\beta-1})}$ için bir akışkan minimum üreteç kümesinin $B_{p^{\beta-1}}$ olduğunu varsayalım. Ayrıca $[\mathbb{Z}/p^{\beta}\mathbb{Z}]_{(G,\alpha_{\beta})}$'nın splinelarının kümesini bulmak için kullanılan $[\mathbb{Z}/p^{\beta-1}\mathbb{Z}]_{(G,\alpha_{\beta-1})}$'nın splinelarının kümesini $\overline{B}_{p^{\beta-1}}$ ile gösterelim. Philbin ve arkadaşları splineların bir kümesini aşağıdaki gibi tanımlamışlardır.

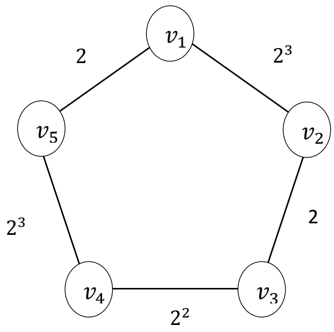
(i) Teorem 4.4'de tanımlanan $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ halkası üzerinde akışkan minimum üreteç kümesi B_p bulunur.

(ii) Aşağıdaki küme tanımlanır.

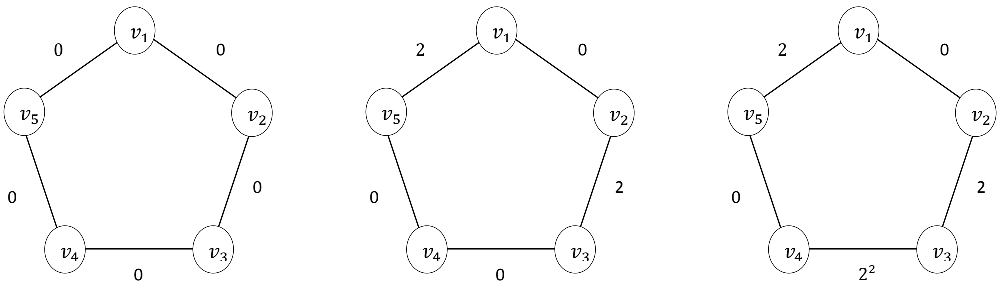
$$B_{p^{\beta}} = \overline{B}_{p^{\beta-1}} \cup \{b^{(i,\beta)} : i \notin I_{\beta-1} \text{ için } V^{(i,\beta)} \subseteq (G, \alpha_{\beta})\}.$$

Teorem 4.6. [14] *(G, α) kenar etiketli çizgesini $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ halkası üzerinde alalım. Algoritma 4.5'de tanımlanan B_{p^β} kümesi $[\mathbb{Z}/p^\beta\mathbb{Z}]_{(G,\alpha_\beta)}$'nın bir akışkan minimum üreteç kümesidir.*

İspat. [14], Teorem 3.11 bakınız. $\square$



Şekil 20: $\mathbb{Z}/2^4\mathbb{Z}$ üzerinde kenar etiketli (C_5, α)



(a) $\mathbb{Z}/2^1\mathbb{Z}$ (b) $\mathbb{Z}/2^2\mathbb{Z}$ (c) $\mathbb{Z}/2^3\mathbb{Z}$

Şekil 21: $\mathbb{Z}/2^i\mathbb{Z}$ üzerinde kenar etiketli (C_5, α)

Örnek 4.7. Şekil 20'de verilen $\mathbb{Z}/2^4\mathbb{Z}$ halkası üzerinde kenar etiketli devir çizgesini alalım. Bu çizge üzerinde bir akışkan minimum üreteç kümesi bulmak için Algoritma 4.5'i kullanalım. Burada, çizgeyi sabit tutup taban halkalarını değiştirerek üreteç kümesi elde edeceğiz. İlk olarak, Şekil 21a'da verilen $\mathbb{Z}/2^1\mathbb{Z}$ halkası üzerinde kenar etiketli çizgeyi alalım. Buradaki sıfır bağlantılı bileşen $V^{(1,1)} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$'dir ve indeks kümesi $I_1 = \{1\}$ olur. O halde, Teorem 4.4'den

$$B_{2^1} = \{(1, 1, 1, 1, 1)\}$$

kümesi bu çizge üzerindeki tüm splineları üretir. Benzer şekilde, Şekil 21b'de verilen $\mathbb{Z}/2^2\mathbb{Z}$ halkası üzerinde kenar etiketli çizgeyi alalım. Buradaki sıfır bağlantılı bileşenler

$V^{(1,2)} = \{v_1, v_2\}$ ve $V^{(3,2)} = \{v_3, v_4, v_5\}$'dir ve indeks kümesi $I_2 = \{1, 3\}$ olur. I_2 indeks kümesinde bulunup I_1'de bulunmayan bileşen $V^{(3,2)}$'dir ve Önerme 4.3'den bu bileşene karşılık $b^{(3,2)} = (0, 0, 2, 2, 2)$ splinenını elde ederiz. Algoritma 4.5'den

$$B_{2^2} = \overline{B}_{2^1} \cup \{b^{(3,2)}\} = \{(1, 1, 1, 1, 1), (0, 0, 2, 2, 2)\}$$

kümesi $[\mathbb{Z}/2^2\mathbb{Z}]_{(C_5,\alpha_{2^2})}$'nın bir akışkan minimum üreteç kümesi olur. Şimdi, Şekil 21c'de verilen $\mathbb{Z}/2^3\mathbb{Z}$ halkası üzerinde kenar etiketli çizgeyi alalım. Buradaki sıfır bağlantılı bileşenler $V^{(1,3)} = \{v_1, v_2\}, V^{(3,3)} = \{v_3\}$ ve $V^{(4,3)} = \{v_4, v_5\}$'dir ve böylece indeks kümesi $I_3 = \{1, 3, 4\}$ olur. I_3 indeks kümesinde bulunup I_2'de bulunmayan bileşen $V^{(4,3)}$'dir ve Önerme 4.3'den bu bileşene karşılık $b^{(4,3)} = (0, 0, 0, 2^2, 2^2)$ splinenını elde ederiz. Algoritma 4.5'den

$$B_{2^3} = \overline{B}_{2^2} \cup \{b^{(4,3)}\} = \{(1, 1, 1, 1, 1), (0, 0, 2, 2, 2), (0, 0, 0, 2^2, 2^2)\}$$

kümesi $[\mathbb{Z}/2^3\mathbb{Z}]_{(C_5,\alpha_{2^3})}$'nın bir akışkan minimum üreteç kümesi olur. Sonuç olarak, Şekil 20'da verilen $\mathbb{Z}/2^4\mathbb{Z}$ halkası üzerinde kenar etiketli çizgeyi alalım. Buradaki sıfır bağlantılı bileşenler $V^{(1,4)}, V^{(2,4)}, V^{(3,4)}, V^{(4,4)}$ ve $V^{(5,4)}$'dir buradan indeks kümesi $I_4 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ olur. I_4 indeks kümesinde bulunup I_3'de bulunmayan bileşenler $V^{(2,4)}$ ve $V^{(5,4)}$'dir ve Önerme 4.3'den bu bileşenlere karşılık sırasıyla $b^{(2,4)} = (0, 2^3, 0, 0, 0)$ ve $b^{(5,4)} = (0, 0, 0, 0, 2^3)$ splinelarını elde ederiz. Algoritma 4.5'den

$$\begin{aligned} B_{2^4} &= \overline{B}_{2^3} \cup \{b^{(2,4)}\} \cup \{b^{(5,4)}\} \\ &= \{(1, 1, 1, 1, 1), (0, 0, 2, 2, 2), (0, 0, 0, 2^2, 2^2), (0, 2^3, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 2^3)\} \end{aligned}$$

kümesi $[\mathbb{Z}/2^4\mathbb{Z}]_{(C_5,\alpha)}$'nın bir akışkan minimum üreteç kümesi olur. B_{2^4} kümesini aşağıdaki gibi de yazabiliriz.

$$B_{2^4} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2^3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2^2 \\ 2^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2^3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aşağıdaki teorem $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ halkası üzerinde artan veya azalan sıralı $p^{i_1}, p^{i_2}, \ldots, p^{i_{r_n}}$ kenar etiketlerine sahip tam çizgelerin splinelarının akışkan minimum üreteç kümelerini belirler.

Teorem 4.8. *(K_n, α) kenar etiketli çizgesini $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ halkası üzerinde alalım. Bu çizge sıralı $p^{i_1}, p^{i_2}, \ldots, p^{i_{r_n}}$ kenar etiketlerine sahip olsun.*

1. *Kenar etiketlerinin kümesi $\{p^{i_1}, p^{i_2}, \ldots, p^{i_{r_n}}\}$,*

$$p^{i_{r_n}} \mid p^{i_{r_n-1}} \mid \cdots \mid p^{i_2} \mid p^{i_1} \mid p^k, \quad i_{r_n} \geq 1, i_1 < k$$

olacak şekilde sıralansın. O zaman,

$$B_{p^k} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ p^{i_1} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ p^{i_2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ p^{i_4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ p^{i_{(r_{n-2}+1)}} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p^{i_{(r_{n-1}+1)}} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

kümesi $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ halkası üzerinde bir akışkan minimum üreteç kümesidir. O halde, $[\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}]_{(K_n,\alpha)}$'nın mertebesi n olur.

2. *Kenar etiketlerinin kümesi $\{p^{i_1}, p^{i_2}, \ldots, p^{i_{r_n}}\}$,*

$$p^{i_1} \mid p^{i_2} \mid \cdots \mid p^{i_{r_n-1}} \mid p^{i_{r_n}} \mid p^k, \quad i_1 \geq 1, i_{r_n} < k$$

olacak şekilde sıralansın. O zaman,

$$B_{p^k} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p^{i_{(r_n-(n-2))}} \\ \vdots \\ p^{i_{(r_n-(n-2))}} \\ p^{i_{(r_n-(n-2))}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p^{i_{(r_n-(n-3))}} \\ \vdots \\ p^{i_{(r_n-(n-3))}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} p^{i_{(r_n-1)}} \\ p^{i_{(r_n-1)}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p^{i_{r_n}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

kümesi $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ halkası üzerinde bir akışkan minimum üreteç kümesidir. O halde, $[\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}]_{(K_n,\alpha)}$'nın mertebesi n olur.

İspat. Teoremdeki (1) ve (2) durumları Algoritma 4.5 kullanılarak ispatlanacaktır. İlk olarak (1) durumunu ispatlayalım. K_n tam çizgesinin kenar etiketleri $1 \leq i_{r_n} \leq \cdots \leq i_2 \leq i_1 < k$ olmak üzere sıralı $p^{i_1}, p^{i_2}, \ldots, p^{i_{r_n}}$ olsun. İlk olarak, $\mathbb{Z}/p^1\mathbb{Z}$ halkası üzerinde kenar etiketli K_n çizgesini alalım. Buradaki sıfır bağlantılı bileşen $V^{(1,1)} =$

$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$'dir ve indeks kümesi $I_1 = \{1\}$ olur. O halde, Teorem 4.4'den $B_p = \{(1, \ldots, 1)\}$ kümesi bu çizge üzerindeki tüm splineları ürettiğini söyleyebiliriz. Eğer aynı çizgeyi $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}, \ldots, \mathbb{Z}/p^{i_{r_n}}\mathbb{Z}, \ldots, \mathbb{Z}/p^{i_{(r_{n-1}+1)}}\mathbb{Z}$ halkaları üzerinde kenar etiketli olarak ayrı ayrı ele alırsak sıfır bağlantılı bileşenleri sırasıyla

$$V^{(1,2)} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, \ldots, V^{(1,i_{r_n})} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, \ldots, V^{(1,i_{(r_{n-1}+1)})} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

'dir ve indeks kümeleri $I_2 = \cdots = I_{i_{(r_{n-1}+1)}} = \{1\}$ olur. Her bir $j = 2, \ldots, i_{(r_{n-1}+1)}$ için I_j indeks kümesiyle I_1 indeks kümesi aynı elemanlara sahip olduğundan

$$B_{p^j} = B_p = \{(1, \ldots, 1)\}$$

kümesi $[\mathbb{Z}/p^j\mathbb{Z}]_{(K_n,\alpha_j)}$'nın bir akışkan minimum üreteç kümesi olur. Şimdi, $\mathbb{Z}/p^{i_{(r_{n-1}+1)}+1}\mathbb{Z}$ halkası üzerinde kenar etiketli K_n çizgesini alalım. Buradaki sıfır bağlantılı bileşenler

$$V^{(1,i_{(r_{n-1}+1)}+1)} = \{v_1, \ldots, v_{n-1}\}, V^{(n,i_{(r_{n-1}+1)}+1)} = \{v_n\}$$

'dir ve indeks kümesi $I_{i_{(r_{n-1}+1)}+1} = \{1, n\}$ olur. $I_{i_{(r_{n-1}+1)}+1}$ indeks kümesinde bulunup $I_{i_{(r_{n-1}+1)}}$ de bulunmayan bileşen $V^{(n,i_{(r_{n-1}+1)}+1)}$'dir. Önerme 4.3'den bu bileşene karşılık $b^{(n,i_{(r_{n-1}+1)}+1)}$ splinenını elde ederiz. Algoritma 4.5'den

$$B_{p^{i_{(r_{n-1}+1)}+1}} = \overline{B}_{p^{i_{(r_{n-1}+1)}}} \cup \{b^{(n,i_{(r_{n-1}+1)}+1)}\} = \overline{B}_{p^{i_{(r_{n-1}+1)}}} \cup \{(0, \ldots, 0, p^{i_{(r_{n-1}+1)}})\}$$

kümesinin bu çizge üzerindeki tüm splineları ürettiğini söyleyebiliriz. Eğer aynı çizgeyi $\mathbb{Z}/p^{i_{(r_{n-1}+1)}+2}\mathbb{Z}, \ldots, \mathbb{Z}/p^{i_{r_{n-2}}}\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p^{i_{(r_{n-2}+1)}}\mathbb{Z}$ halkaları üzerinde kenar etiketli olarak ayrı ayrı ele alırsak sıfır bağlantılı bileşenleri sırasıyla

$$V^{(1,i_{(r_{n-1}+1)}+2)} = \{v_1, \ldots, v_{n-1}\}, V^{(n,i_{(r_{n-1}+1)}+2)} = \{v_n\}$$

$$\vdots$$

$$V^{(1,i_{r_{n-2}})} = \{v_1, \ldots, v_{n-1}\}, V^{(n,i_{r_{n-2}})} = \{v_n\},$$

$$V^{(1,i_{r_{n-2}+1})} = \{v_1, \ldots, v_{n-1}\}, V^{(n,i_{r_{n-2}+1})} = \{v_n\},$$

olarak bulunur ve indeks kümeleri $I_{i_{(r_{n-1}+1)}+2} = \cdots = I_{i_{r_{n-2}}} = I_{i_{(r_{n-2}+1)}} = \{1, n\}$ olur.

Her bir $j = i_{(r_{n-1}+1)} + 2, \ldots, i_{(r_{n-2}+1)}$ için I_j indeks kümesiyle $I_{i_{(r_{n-1}+1)}+1}$ indeks kümesi aynı elemanlara sahip olduğundan

$$B_{p^j} = B_{p^{i_{(r_{n-1}+1)}+1}} = \{(1, \ldots, 1), (0, \ldots, 0, p^{i_{(r_{n-1}+1)}})\}$$

kümesi $[\mathbb{Z}/p^j\mathbb{Z}]_{(K_n,\alpha_j)}$'nın bir akışkan minimum üreteç kümesi olur. Şimdi, $\mathbb{Z}/p^{i_{(r_{n-2}+1)}+1}\mathbb{Z}$ halkası üzerinde kenar etiketli K_n çizgesini alalım. Buradaki sıfır bağlantılı bileşenler

$$V^{(1,i_{(r_{n-2}+1)}+1)} = \{v_1, \ldots, v_{n-2}\}, V^{(n-1,i_{(r_{n-2}+1)}+1)} = \{v_{n-1}\}, V^{(n,i_{(r_{n-2}+1)}+1)} = \{v_n\}$$

'dir ve indeks kümesi $I_{i_{(r_{n-2}+1)}+1} = \{1, n-1, n\}$ olur. $I_{i_{(r_{n-2}+1)}+1}$ indeks kümesinde bulunup $I_{i_{(r_{n-2}+1)}}$'de bulunmayan bileşen $V^{(n-1,i_{(r_{n-2}+1)}+1)}$'dir. Önerme 4.3'den bu bileşene karşılık $b^{(n-1,i_{(r_{n-2}+1)}+1)}$ splinenını elde ederiz. Algoritma 4.5'den

$$B_{p^{i_{(r_{n-2}+1)}+1}} = \overline{B}_{p^{i_{(r_{n-2}+1)}}} \cup \{b^{(n-1,i_{(r_{n-2}+1)}+1)}\} = \overline{B}_{p^{i_{(r_{n-2}+1)}}} \cup \{(0, \ldots, 0, p^{i_{(r_{n-2}+1)}}, 0)\}$$

kümesinin bu çizge üzerindeki tüm splineları ürettiğini söyleyebiliriz. Eğer aynı çizgeyi

$$\mathbb{Z}/p^{i_{(r_{n-2}+1)}+2}\mathbb{Z}, \ldots, \mathbb{Z}/p^{i_{r_{n-3}}}\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p^{i_{(r_{n-3}+1)}}\mathbb{Z}$$

halkaları üzerinde kenar etiketli olarak ayrı ayrı ele alırsak sıfır bağlantılı bileşenleri sırasıyla

$$V^{(1,i_{(r_{n-2}+1)}+2)} = \{v_1, \ldots, v_{n-2}\}, V^{(n-1,i_{(r_{n-2}+1)}+2)} = \{v_{n-1}\}, V^{(n,i_{(r_{n-2}+1)}+2)} = \{v_n\},$$

$$\vdots$$

$$V^{(1,i_{r_{n-3}})} = \{v_1, \ldots, v_{n-2}\}, V^{(n-1,i_{r_{n-3}})} = \{v_{n-1}\}, V^{(n,i_{r_{n-3}})} = \{v_n\},$$

$$V^{(1,i_{r_{n-3}+1})} = \{v_1, \ldots, v_{n-2}\}, V^{(n-1,i_{r_{n-3}+1})} = \{v_{n-1}\}, V^{(n,i_{r_{n-3}+1})} = \{v_n\}$$

olarak bulunur ve indeks kümeleri $I_{i_{(r_{n-2}+1)}+2} = \cdots = I_{i_{(r_{n-3}+1)}} = \{1, n-1, n\}$ olur. Her bir $j = i_{(r_{n-2}+1)+2}, \ldots, i_{r_{n-3}}, i_{(r_{n-3}+1)}$ için I_j indeks kümesiyle $I_{i_{(r_{n-2}+1)}+1}$ indeks kümesi aynı elemanlara sahip olduğundan

$$B_{p^j} = B_{p^{i_{(r_{n-2}+1)}+1}} = \{(1, \ldots, 1), (0, \ldots, 0, p^{i_{(r_{n-2}+1)}}, 0), (0, \ldots, 0, p^{i_{(r_{n-1}+1)}})\}$$

kümesi $[\mathbb{Z}/p^j\mathbb{Z}]_{(K_n,\alpha_j)}$'nın bir akışkan minimum üreteç kümesi olur. Bu şekilde devam edersek ve $\mathbb{Z}/p^{i_2+1}\mathbb{Z}$ halkası üzerinde kenar etiketli K_n çizgesini alırsak buradaki sıfır bağlantılı bileşenler

$$V^{(1,i_2+1)} = \{v_1, v_2\}, V^{(3,i_2+1)} = \{v_3\}, \dots, V^{(n,i_2+1)} = \{v_n\}$$

'dir ve indeks kümesi $I_{i_2+1} = \{1, 3, \dots, n\}$ olur. I_{i_2+1} indeks kümesinde bulunup I_{i_2} de bulunmayan bileşen $V^{(3,i_2+1)}$'dir. Önerme 4.3'den bu bileşene karşılık $b^{(3,i_2+1)}$ splinenını elde ederiz. Algoritma 4.5'den

$$B_{p^{i_2+1}} = \overline{B}_{p^{i_2}} \cup \{b^{(3,i_2+1)}\} = \overline{B}_{p^{i_2}} \cup \{(0, 0, p^{i_2}, 0, \dots, 0)\}$$

kümesinin bu çizge üzerindeki tüm splineları ürettiğini söyleyebiliriz. Eğer aynı çizgeyi $\mathbb{Z}/p^{i_2+2}\mathbb{Z}, \cdots, \mathbb{Z}/p^{i_1}\mathbb{Z}$ halkaları üzerinde kenar etiketli olarak ayrı ayrı ele alırsak sıfır bağlantılı bileşenleri sırasıyla

$$V^{(1,i_2+2)} = \{v_1, v_2\}, V^{(3,i_2+2)} = \{v_3\}, \dots, V^{(n,i_2+2)} = \{v_n\}$$

$$\vdots$$

$$V^{(1,i_1)} = \{v_1, v_2\}, V^{(3,i_1)} = \{v_3\}, \dots, V^{(n,i_1)} = \{v_n\}$$

olarak bulunur ve indeks kümeleri $I_{i_2+2} = \cdots = I_{i_1} = \{1, 3, \dots, n\}$ olur. Her bir $j = i_2 + 2, \dots, i_1$ için I_j indeks kümesiyle I_{i_2+1} indeks kümesi aynı elemanlara sahip olduğundan

$$B_{p^j} = B_{p^{i_2+1}} = \{(1, \dots, 1), (0, 0, p^{i_2}, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, p^{i_{(r_{n-1}+1)}})\}$$

kümesi $[\mathbb{Z}/p^j\mathbb{Z}]_{(K_n,\alpha_j)}$'nın bir akışkan minimum üreteç kümesi olur. Şimdi, $\mathbb{Z}/p^{i_1+1}\mathbb{Z}$ halkası üzerinde kenar etiketli K_n çizgesini alalım. Buradaki sıfır bağlantılı bileşenler

$$V^{(1,i_1+1)} = \{v_1\}, V^{(2,i_1+1)} = \{v_2\}, \dots, V^{(n,i_1+1)} = \{v_n\}$$

'dir ve indeks kümesi $I_{i_1+1} = \{1, 2, \dots, n\}$ olur. I_{i_1+1} indeks kümesinde bulunup I_{i_1}'de bulunmayan bileşen $V^{(2,i_1+1)}$'dir. Önerme 4.3'den bu bileşene karşılık $b^{(2,i_1+1)}$ splinenını elde ederiz. Algoritma 4.5'den

$$B_{p^{i_1+1}} = \overline{B}_{p^{i_1}} \cup \{b^{(2,i_1+1)}\} = \overline{B}_{p^{i_1}} \cup \{(0, p^{i_1}, 0, \ldots, 0)\}$$

kümesinin bu çizge üzerindeki tüm splineları ürettiğini söyleyebiliriz. Eğer aynı çizgeyi $\mathbb{Z}/p^{i_1+2}\mathbb{Z}, \ldots, \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ halkaları üzerinde kenar etiketli olarak ayrı ayrı ele alırsak sıfır bağlantılı bileşenleri sırasıyla

$$V^{(1,i_1+2)} = \{v_1\}, V^{(2,i_1+2)} = \{v_2\}, \ldots, V^{(n,i_1+2)} = \{v_n\},$$

$$\vdots$$

$$V^{(1,k)} = \{v_1\}, V^{(2,k)} = \{v_2\}, \ldots, V^{(n,k)} = \{v_n\}$$

olarak bulunur ve indeks kümeleri $I_{i_1+2} = \cdots = I_k = \{1, 2, \ldots, n\}$ olur. Her bir $j = i_1 + 2, \ldots, k$ için I_j indeks kümesiyle I_{i_1} indeks kümesi aynı elemanlara sahip olduğundan

$$B_{p^j} = B_{p^{i_1+1}} = \{(1, \ldots, 1), (0, p^{i_1}, 0, \ldots, 0), (0, 0, p^{i_2}, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, p^{i_{(r_{n-1}+1)}})\}$$

kümesi $[\mathbb{Z}/p^j\mathbb{Z}]_{(K_n,\alpha_j)}$'nın bir akışkan minimum üreteç kümesi olur. Sonuç olarak,

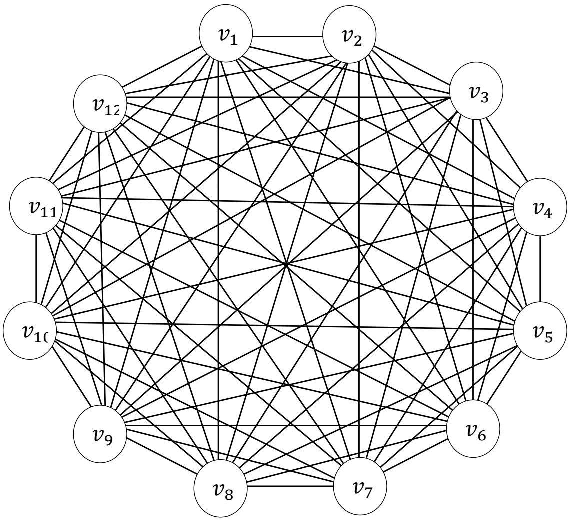
$$B_{p^k} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \\ 0 \\ p^{i_1} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ p^{i_2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ p^{i_4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ p^{i_{(r_{n-2}+1)}} \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p^{i_{(r_{n-1}+1)}} \\ 0 \\ \vdots \\ \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

kümesinde $\alpha_k = \alpha$ alırsak bu kümenin $[\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}]_{(K_n,\alpha_k)}$'nın bir akışkan minimum üreteç kümesi olduğu bulunur.

(2) durumu (1) durumuna benzer şekilde ispat edilebilir.

$\square$

Not. *Teorem 4.8, Teorem 3.6'dan yararlanılarak tümevarım ile de ispatlanabilir.*



Şekil 22: $\mathbb{Z}/(3^{70})\mathbb{Z}$ üzerinde kenar etiketli (K_{12}, α)

Örnek 4.9. Şekil 22'de verilen (K_{12}, α) kenar etiketli çizgesini $\mathbb{Z}/3^{70}\mathbb{Z}$ halkası üzerinde alalım. Burada $r_{12} = 66$ olduğundan bu çizgenin 66 tane kenar etiketi mevcuttur. Kenar etiketlemeleri birbirinden farklı ve 3'ün birer derece azalan kuvvetleri ile etiketlendiğini varsayalım. Yani, (K_{12}, α) azalan sıralı

$$l_1 = 3^{66}, l_2 = 3^{65}, \ldots, l_{65} = 3^2, l_{66} = 3^1$$

kenar etiketlerine sahip olsun. O halde, Teorem 4.8'den

$$B_{3^{70}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\3^{66}\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\3^{65}\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\3^{63}\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0\\3^{21}\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3^{11}\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix} \right\}$$

kümesi $\mathbb{Z}/3^{70}\mathbb{Z}$ halkası üzerinde bir akışkan minimum üreteç kümesi olur ve mertebesi 12'dir.

Algoritma 4.10. [14] (G, α) kenar etiketli çizgesini $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ halkası üzerinde alalım. Her bir $i = 1, 2, \ldots, k$ için $\alpha_{m_i} : E \to \{\mathbb{Z}/p_i^{m_i}\mathbb{Z}$'nin idealleri$\}$ fonksiyonu olmak üzere (G, α_{m_i}) kenar etiketli bir çizge olsun ve $\theta_{m_i} : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p_i^{m_i}\mathbb{Z}$ fonksiyonu $\alpha_{m_i}(uv) = \theta_{m_i}(\alpha(uv))$ kuralını sağlasın.

(i) Algoritma 4.5 kullanılarak her bir $i = 1, 2, \ldots, k$ için $[\mathbb{Z}/p_i^{m_i}\mathbb{Z}]_{(G,\alpha_{m_i})}$ için akışkan minimum üreteç kümesi $B_{p_i^{m_i}}$ bulunur.

(ii) Her bir $B_{p_i}^{m_i}$'den bir b splinenı seçilir ve her bir $i = 1, 2, \ldots, k$ için $b \in B_{p_i}^{m_i}$'ye örten izdüşümlü $[\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}]_{(G,\alpha)}$'nın biricik splinenı bulunur. Eğer $B_{p_i}^{m_i}$ içindeki diğer tüm splinelar daha önceden seçildiyse sıfır splinenı kullanılır.

(iii) Her bir $i = 1, 2, \ldots, k$ için her $b \in B_{p_i}^{m_i}$ yalnızca bir kez kullanılmak üzere (ii) adımı tekrarlanır ve eğer gerekliyse $0 \in B_{p_i}^{m_i}$ kullanılır.

Yukarıdaki adımlarla üretilen $[\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}]_{(G,\alpha)}$'nın splinelarının kümesi B_m ile gösterilsin.

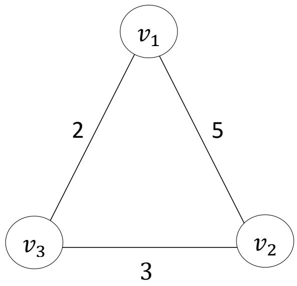
Teorem 4.11. [14] *(G, α) kenar etiketli çizgesini $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ halkası üzerinde alalım. Her bir $i = 1, 2, \ldots, k$ için $\alpha_{m_i} : E \to \{\mathbb{Z}/p_i^{m_i}\mathbb{Z}$'nin idealleri$\}$ fonksiyonu olmak üzere (G, α_{m_i}) kenar etiketli bir çizge olsun ve $\theta_{m_i} : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p_i^{m_i}\mathbb{Z}$ fonksiyonu $\alpha_{m_i}(uv) = \theta_{m_i}(\alpha(uv))$ kuralını sağlasın.*

(i) Algoritma 4.10 adım (ii)'de her bir $i = 1, 2, \ldots, k$ için seçilen keyfi $b \in B_{p_i}^{m_i}$ splineları kullanılarak tanımlanan B_m kümesi $[\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}]_{(G,\alpha)}$'nın bir minimum üreteç kümesidir.

(ii) Algoritma 4.10 adım (ii)'de her bir $i = 1, 2, \ldots, k$ için aşağıda belirtildiği gibi seçilen $b \in B_{p_i}^{m_i}$ splineları kullanılarak tanımlanan B_m kümesi $[\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}]_{(G,\alpha)}$'nın bir akışkan minimum üreteç kümesidir.

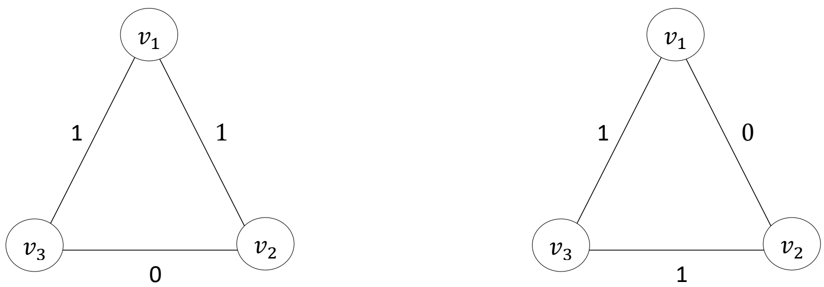
- *$B_{p_i}^{m_i}$'nin elemanları baş sıfır sayısına göre küçükten büyüğe doğru sıralanır. Her bir $B_{p_i}^{m_i}$ kümesinden b spline bu sıra ile seçilir. Eğer $B_{p_i}^{m_i}$ kümesinin eleman sayısı, $\mid V \mid$ sayısından küçükse $\mid V \mid$ sayısına tamamlanana kadar $(0, \ldots, 0)$ spline eklenir.*

İspat. [14], Teorem 3.15 bakınız. □



Şekil 23: $\mathbb{Z}/60\mathbb{Z}$ üzerinde kenar etiketli (K_3, α)

Örnek 4.12. Şekil 23'de verilen $\mathbb{Z}/60\mathbb{Z}$ halkası üzerinde kenar etiketli tam çizgesini alalım. Algoritma 4.10 ve Teorem 4.11 kullanarak $[\mathbb{Z}/60\mathbb{Z}]_{(K_3,\alpha)}$ için bir akışkan minimum üreteç kümesi bulalım. Burada, $60 = 2^2.3.5$ olduğundan $[\mathbb{Z}/2^2\mathbb{Z}]_{(K_3,\alpha)}$, $[\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}]_{(K_3,\alpha)}$ ve $[\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}]_{(K_3,\alpha)}$ için akışkan minimum üreteç kümelerini ayrı ayrı bulacağız.



(a) $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ (b) $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

Şekil 24: $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ üzerinde kenar etiketli (K_3, α)

- Şekil 24a'da verilen $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ halkası üzerindeki kenar etiketli çizgeyi alalım. Buradaki sıfır bağlantılı bileşenler $V^{(1,1)} = \{v_1\}$ ve $V^{(2,1)} = \{v_2, v_3\}$'dir ve böylece

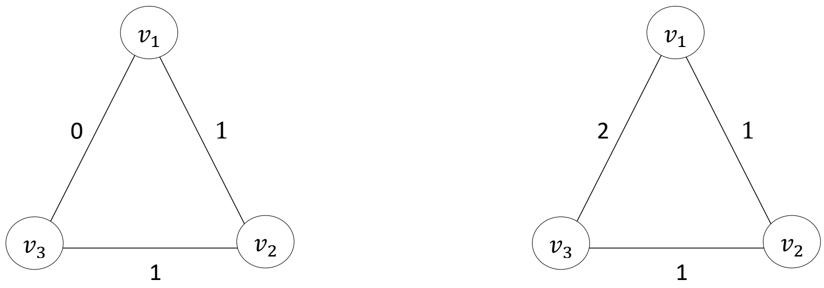
$$B_3 = \{(1,0,0),(0,1,1)\}$$

akışkan minimum üreteç kümesini elde ederiz.

- Şekil 24b'de verilen $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ halkası üzerindeki kenar etiketli çizgeyi alalım. Buradaki sıfır bağlantılı bileşenler $V^{(1,1)} = \{v_1, v_2\}$ ve $V^{(3,1)} = \{v_3\}$'dir ve böylece

$$B_5 = \{(1,1,0),(0,0,1)\}$$

akışkan minimum üreteç kümesini elde ederiz.



(a) $\mathbb{Z}/2^1\mathbb{Z}$ (b) $\mathbb{Z}/2^2\mathbb{Z}$

Şekil 25: $\mathbb{Z}/2^i\mathbb{Z}$ üzerinde kenar etiketli (K_3, α)

- $[\mathbb{Z}/2^2\mathbb{Z}]_{(K_3,\alpha)}$'nın bir akışkan minimum üreteç kümesini bulalım.
  - Şekil 25a'da verilen $\mathbb{Z}/2^1\mathbb{Z}$ halkası üzerindeki kenar etiketli çizgeyi alalım. Buradaki sıfır bağlantılı bileşenler $V^{(1,1)} = \{v_1, v_3\}$ ve $V^{(2,1)} = \{v_2\}$'dir ve indeks kümesi $I_1 = \{1, 2\}$ olur. O halde, Teorem 4.4'den

$$B_{2^1} = \{(1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$$

kümesi bu çizge üzerindeki tüm splineları üretir.
  - Şekil 25b'de verilen $\mathbb{Z}/2^2\mathbb{Z}$ halkası üzerindeki kenar etiketli çizgeyi alalım. Buradaki sıfır bağlantılı bileşenler $V^{(1,2)} = \{v_1\}$, $V^{(2,2)} = \{v_2\}$ ve $V^{(3,2)} = \{v_3\}$'dir ve indeks kümesi $I_2 = \{1, 2, 3\}$ olur. I_2 indeks kümesinde bulunup I_1'de bulunmayan bileşen $V^{(3,2)} = \{v_3\}$'dir ve Önerme 4.3'den bu bileşene karşılık $b^{(3,2)} = (2, 0, 0)$ splinenını elde ederiz. Algoritma 4.5'den

$$B_{2^2} = \overline{B}_{2^1} \cup \{b^{(3,2)}\} = \{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 2)\}$$

kümesi $[\mathbb{Z}/2^2\mathbb{Z}]_{(K_3,\alpha_{2^2})}$'nın bir akışkan minimum üreteç kümesi olur.

B_{60} kümesini elde edebilmek için B_3, B_5 ve B_{2^2} kümelerinin elemanlarını baş sıfır sayısına göre küçükten büyüğe doğru sıralayalım. Eğer i-nci akışkan spline bulunmuyorsa o zaman sıfır splinenını ekleyelim. Yani,

$$B_3 = \{(1,0,0),(0,1,1),(0,0,0)\},$$
$$B_{2^2} = \{(1,0,1),(0,1,0),(0,0,2)\},$$
$$B_5 = \{(1,1,0),(0,0,0),(0,0,1)\}$$

şeklinde yazalım. Yukarıdaki kümelerden birer b akışkan splinelarını seçelim. $b \in B_3$, $b \in B_5$ ve $b \in B_{2^2}$'ye örten izdüşümlü $[\mathbb{Z}/60\mathbb{Z}]_{(K_3,\alpha)}$'nın biricik splinenını bulalım. O halde,

- $(1,36,45)$ splinenı $(1,0,0) \mod 3$, $(1,0,1) \mod 4$ ve $(1,1,0) \mod 5$ örten izdüşümlü $[\mathbb{Z}/60\mathbb{Z}]_{(K_3,\alpha)}$'nın biricik splinenıdır.
- $(0,25,40)$ splinenı $(0,1,1) \mod 3$, $(0,1,0) \mod 4$ ve $(0,0,0) \mod 5$ örten izdüşümlü $[\mathbb{Z}/60\mathbb{Z}]_{(K_3,\alpha)}$'nın biricik splinenıdır.
- $(0,0,6)$ splinenı $(0,0,0) \mod 3$, $(0,0,2) \mod 4$ ve $(0,0,1) \mod 5$ örten izdüşümlü $[\mathbb{Z}/60\mathbb{Z}]_{(K_3,\alpha)}$'nın biricik splinenıdır.

Sonuç olarak,

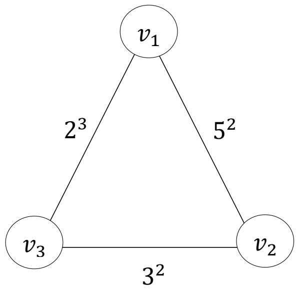
$$B_{60} = \left\{ \begin{pmatrix} 45 \\ 36 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 40 \\ 25 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

kümesi $[\mathbb{Z}/60\mathbb{Z}]_{(K_3,\alpha)}$'nın bir akışkan minimum üreteç kümesi olur.

Not. *Yukarıdaki örnekte Algoritma 4.10'un bir uygulaması verilmiştir. Bu örnekteki gibi eğer bir tam çizgesinin kenarları m tamsayısının asal çarpanlarının yeterince küçük kuvvetleri ile etiketlenirse algoritma kolayca uygulanabilmektedir. Ancak aşağıdaki durumlarda algoritmanın uygulanabilirliği zorlaşmaktadır.*

1. *$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ halkası üzerinde $2 \leq n_{ij} \leq m_j$, $i = 1,2,\ldots,r_n$ ve $j = 1,2,\ldots,k$ olmak üzere $a_i = p_1^{n_{i1}} p_2^{n_{i2}} \ldots p_k^{n_{ik}}$ sıfır bölenini alalım. Bir tam çizgesinin kenarlarını birbirlerinden farklı a_i ler ile etiketleyelim.*
2. *$\mid V \mid > 3$ olan bir tam çizgesini alalım.*

Örnek 4.13. Burada yukarıda verilen nottaki durumlar örneklendirilecektir. Örnek 4.12'de Algoritma 4.10 ve Teorem 4.11'in bir uygulaması verilmişti. Burada da aynı yöntemle aşağıda verilen halkalar üzerinde kenar etiketli tam çizgeler için birer akışkan minimum üreteç kümesi bulabiliriz.



Şekil 26: $\mathbb{Z}/(2^4.3^2.5^2)\mathbb{Z}$ üzerinde kenar etiketli (K_3, α)

1. Şekil 26'da verilen $\mathbb{Z}/(2^4.3^2.5^2)\mathbb{Z}$ halkası üzerinde kenar etiketli tam çizgesini alalım. İlk olarak, Algoritma 4.5 kullanarak $[\mathbb{Z}/2^4\mathbb{Z}]_{(K_3,\alpha)}$, $[\mathbb{Z}/3^2\mathbb{Z}]_{(K_3,\alpha)}$ ve $[\mathbb{Z}/5^2\mathbb{Z}]_{(K_3,\alpha)}$ için akışkan minimum üreteç kümelerini ayrı ayrı bulmalıyız. Algoritma 4.5'in bir uygulaması Örnek 4.7'de verilmişti. Burada da aynı aşamaları uygulayabiliriz ve sonuç olarak aşağıdaki kümeleri elde edebiliriz.

$$B_{2^4} = \{(1,0,1), (0,1,0), (0,0,8)\},$$
$$B_{5^2} = \{(1,1,0), (0,0,0), (0,0,1)\},$$
$$B_{3^2} = \{(1,0,0), (0,1,1), (0,0,0)\}.$$

Yukarıdaki kümelerden birer b akışkan splinelarını seçip $b \in B_{2^4}$, $b \in B_{5^2}$ ve $b \in B_{3^2}$'ye örten izdüşümlü $[\mathbb{Z}/(2^4.3^2.5^2)\mathbb{Z}]_{(K_3,\alpha)}$'nın biricik splinenını bulmalıyız.

- $(f_{v_1}^{(1)}, f_{v_2}^{(1)}, f_{v_3}^{(1)})$ splinenı $(1,0,1) \mod 2^4$, $(1,1,0) \mod 5^2$ ve $(1,0,0) \mod 3^2$ örten izdüşümlü $[\mathbb{Z}/(2^4.3^2.5^2)\mathbb{Z}]_{(K_3,\alpha)}$'nın biricik splinenıdır. Burada $i = 1,2,3$ için $k_i, t_i \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$f_{v_1}^{(1)} = 1,$$
$$f_{v_2}^{(1)} = 9k_1 = 25k_2 + 1 = 16k_3,$$
$$f_{v_3}^{(1)} = 9t_1 = 25t_2 = 16t_3 + 1.$$

- $(f_{v_1}^{(2)}, f_{v_2}^{(2)}, f_{v_3}^{(2)})$ splinenı $(0,1,0) \mod 2^4$, $(0,0,0) \mod 5^2$ ve $(0,1,1) \mod 3^2$ örten izdüşümlü $[\mathbb{Z}/(2^4.3^2.5^2)\mathbb{Z}]_{(K_3,\alpha)}$'nın biricik splinenıdır. Burada $i = 1,2,3$ için $k_i, t_i \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$f_{v_1}^{(2)} = 0,$$
$$f_{v_2}^{(2)} = 9k_1 + 1 = 25k_2 = 16k_3 + 1,$$
$$f_{v_3}^{(2)} = 9t_1 + 1 = 25t_2 = 16t_3.$$

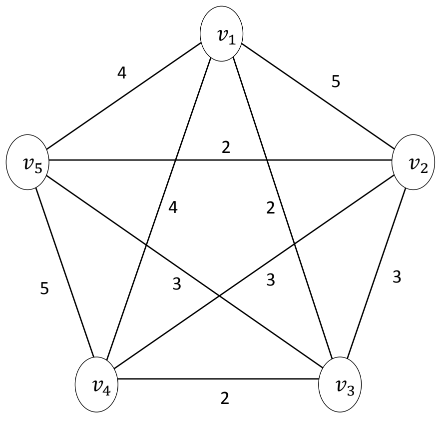
- $(f_{v_1}^{(3)}, f_{v_2}^{(3)}, f_{v_3}^{(3)})$ splinenı $(0,0,8) \mod 2^4$, $(0,0,1) \mod 5^2$ ve $(0,0,0) \mod 3^2$ örten izdüşümlü $[\mathbb{Z}/(2^4.3^2.5^2)\mathbb{Z}]_{(K_3,\alpha)}$'nın biricik splinenıdır. Burada $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f_{v_1}^{(3)} &= 0, \\ f_{v_2}^{(3)} &= 0, \\ f_{v_3}^{(3)} &= 25k_1 + 1 = 16k_2 + 8. \end{aligned}$$

Yukarıdaki denklemlerin çözümü ile elde edilen

$$B_{(2^4.3^2.5^2)} = \left\{ \begin{pmatrix} 3^2.5^2 \\ 2^6.3^2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2^4.5^2.7 \\ 5^2.11^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2^3.47 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

kümesi $[\mathbb{Z}/(2^4.3^2.5^2)\mathbb{Z}]_{(K_3,\alpha)}$'nın bir akışkan minimum üreteç kümesidir. Yukarıdaki denklemlerden de görüldüğü gibi $[\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}]_{(G,\alpha)}$'nın akışkan minimum üreteç kümesini algoritma kullanarak bulmak m tamsayısı ve buna bağlı olarak kenar etiketlemeleri büyüdükçe zorlaşmaktadır.



Şekil 27: $\mathbb{Z}/60\mathbb{Z}$ üzerinde kenar etiketli (K_5, α)

2. Şekil 27'de verilen $\mathbb{Z}/60\mathbb{Z}$ halkası üzerinde kenar etiketli tam çizgesini alalım. İlk olarak, $[\mathbb{Z}/2^2\mathbb{Z}]_{(K_5,\alpha)}$, $[\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}]_{(K_5,\alpha)}$ ve $[\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}]_{(K_5,\alpha)}$ için akışkan minimum üreteç kümelerini ayrı ayrı bulmalıyız. Örnek 4.12'de verilen aşamaları burada da uygularsak aşağıdaki kümeleri elde ederiz.

$$\begin{aligned} B_3 &= \{(1,0,0,0,0), (0,1,1,0,1)\}, \\ B_4 &= \{(1,1,1,1,1), (0,2,0,0,0), (0,0,2,0,0)\}, \\ B_5 &= \{(1,1,0,0,0), (0,0,1,0,0), (0,0,0,1,1)\}. \end{aligned}$$

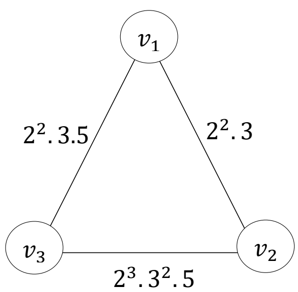
Yukarıdaki kümelerden birer b akışkan splinelarını seçip $b \in B_3$, $b \in B_5$ ve $b \in B_4$'ye örten izdüşümlü $[\mathbb{Z}/60\mathbb{Z}]_{(K_5,\alpha)}$'nın biricik splinenını bulmalıyız.

- $(1, 21, 45, 45, 45)$ splinenı $(1, 0, 0, 0, 0) \mod 3$, $(1, 1, 1, 1, 1) \mod 4$ ve $(1, 1, 0, 0, 0)$ mod 5 örten izdüşümlü $[\mathbb{Z}/60\mathbb{Z}]_{(K_5,\alpha)}$'nın biricik splinenıdır.
- $(0, 10, 40, 0, 40)$ splinenı $((0, 1, 1, 0, 0) \mod 3$, $(0, 2, 0, 0, 0) \mod 4$ ve $(0, 0, 0, 0, 0)$ mod 5 örten izdüşümlü $[\mathbb{Z}/60\mathbb{Z}]_{(K_5,\alpha)}$'nın biricik splinenıdır.
- $(0, 0, 6, 0, 0)$ splinenı $(0, 0, 0, 0, 0) \mod 3$, $(0, 0, 2, 0, 0) \mod 4$ ve $(0, 0, 1, 0, 0)$ mod 5 örten izdüşümlü $[\mathbb{Z}/60\mathbb{Z}]_{(K_5,\alpha)}$'nın biricik splinenıdır.
- $(0, 0, 0, 36, 36)$ splinenı $(0, 0, 0, 0, 0) \mod 3$, $(0, 0, 0, 0, 0) \mod 4$ ve $(0, 0, 0, 1, 1)$ mod 5 örten izdüşümlü $[\mathbb{Z}/60\mathbb{Z}]_{(K_5,\alpha)}$'nın biricik splinenıdır.

Yukarıdaki denklemlerin çözümü ile elde edilen

$$B_{60} = \left\{ \begin{pmatrix} 45 \\ 45 \\ 45 \\ 21 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 40 \\ 0 \\ 40 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 36 \\ 36 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

kümesi $\mathbb{Z}/60\mathbb{Z}$ halkası üzerinde bir akışkan minimum üreteç kümesi olur ve mertebesi 4'dür. Yukarıdaki denklemlerden de görüldüğü gibi $m = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_k^{m_k}$ için bir akışkan minimum üreteç kümesi elde edebilmek için $k \, . \mid V \mid$ tane denklemin çözümünü bulmalıyız.



Şekil 28: $\mathbb{Z}/(2^4.3^3.5)\mathbb{Z}$ üzerinde kenar etiketli (K_3, α)

Örnek 4.14. Şekil 28'de verilen $\mathbb{Z}/(2^4.3^3.5)\mathbb{Z}$ halkası üzerinde kenar etiketli tam çizgesini alalım. Eğer Örnek 4.13'de verilen işlemleri burada da yaparsak aşağıdaki kümeyi elde ederiz.

$$B_{(2^4.3^3.5)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1380 \\ 1380 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 360 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Elde edilen bu küme $[\mathbb{Z}/(2^4.3^3.5)\mathbb{Z}]_{(K_3,\alpha)}$'nın bir akışkan minimum üreteç kümesidir. Sonuç olarak, yukarıdaki işlemler uzun uzun yapıldığında da görüleceği gibi özel bir sıralama ile seçtiğimiz kenar etiketlerinde dahi algoritma kullanarak $[\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}]_{(K_n,\alpha)}$'nın akışkan minimum üreteç kümesini bulmak oldukça zordur.

4.2 Mod m de Minimum Üreteç Kümesi

Bu kısımda öncelikle Altınok ve Sarıoğlan [1]'un TİB üzerindeki çalışmalarını kendi çalışmalarımızda kullanmak amacıyla $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ halkası üzerinde düzenleyeceğiz. Daha sonra $[\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}]_{(K_n,\alpha)}$'nın bir akışkan minimum üreteç kümesinin genel formunu vereceğiz.

Tanım 4.15. (G, α) kenar etiketli bir çizge olsun. Başlangıç köşesi v_i olmak üzere v_i'den v_j köşesine giden patikaya v_i'nin bir v_j-patikası denir ve $p^{(i,j)}$ ile gösterilir. Başlangıç köşesi v_i olmak üzere v_i'den sıfır etiketli bir köşeye giden patikaya v_i'nin bir *sıfır patikası* denir ve $p^{(i,0)}$ ile gösterilir.

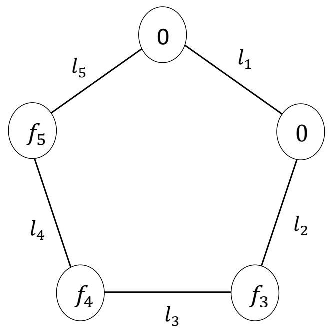
Not.

- *v_i'nin bir v_j-patikası $p^{(i,j)}$'yi alalım. Bu patikadaki kenar etiketlerinin en büyük ortak bölenini $(p^{(i,j)})$ ile göstereceğiz. Ayrıca bu elemanların kümesinin en küçük ortak katı için [ ] gösterimini kullanacağız.*

- *Bu çalışmada sonlu çizgeleri ele aldığımız için v_i'nin v_j-patikalarının kümesi sonlu elemanlı bir kümedir. $\{p_1^{(i,j)}, \ldots, p_k^{(i,j)}\}$ kümesi v_i'nin v_j-patikalarının bir kümesi olmak üzere*

$$\{(p^{(i,j)})\} = \{(p_1^{(i,j)}), \ldots, (p_k^{(i,j)})\}$$

gösterimini kullanacağız.



Şekil 29: R üzerinde kenar etiketli (C_5, α)

Örnek 4.16. Şekil 29'da verilen R halkası üzerinde kenar etiketli devir çizgesini alalım öyle ki köşe etiketleri şekilde de görüldüğü gibi $(0, 0, f_3, f_4, f_5) \in F^{(3)}$ olsun. Burada köşe etiketi f_3 olan v_3 köşesinden sıfır etiketli köşelere giden patikalar

$$v_3 e_{23} v_2$$
$$v_3 e_{23} v_2 e_{12} v_1$$
$$v_3 e_{34} v_4 e_{45} v_5 e_{15} v_1$$

'dir. Yukarıda verilen patikaların kenar ve köşe etiketlerine karşı gelen etiketleri kullanarak bu patikaları

$$p_1^{(3,0)} = f_3 l_2 0$$
$$p_2^{(3,0)} = f_3 l_2 0 l_1 0$$
$$p_3^{(3,0)} = f_3 l_3 f_4 l_4 f_5 l_5 0$$

olacak şekilde de yazabiliriz. O halde,

$$\{(p^{(3,0)})\} = \{l_2, (l_1, l_2), (l_3, l_4, l_5)\}$$

olur.

Önerme 4.17. [1] *R bir TİB olsun. Köşelerinin kümesi $\{v_1, \ldots, v_n\}$ olan (G, α) kenar etiketli çizgesini ve bu çizgenin $i \leq j$ olmak üzere bir v_j köşesini alalım. $i > 1$ için $F^{(i)} = (0, \ldots, 0, f_{v_i}^{(i)}, \ldots, f_{v_n}^{(i)}) \in \mathcal{F}_i$ bir i-nci akışkan sınıf ve $p_1^{(j,0)}, \ldots, p_t^{(j,0)}$ ler v_j'nin sıfır patikaları olsun. O halde, $[\{(p_k^{(j,0)}) : 1 \leq k \leq t\}]$ sayısı f_{v_j}'yi böler.*

İspat. [1], Sonuç 3.4 bakınız.

$\square$

Not. *Eğer* $f_{v_i}^{(i)} = [\{(p^{(i,0)})\}]$ *alırsak bu seçim ile* $F^{(i)} = (0, \ldots, 0, f_{v_i}^{(i)}, \ldots, f_{v_n}^{(i)}) \in \mathcal{F}_i$ *akışkan sınıfının sıfırdan farklı ilk girdisinin mümkün olan en küçük girdi olduğunu söyleyebiliriz. Genel olarak,* $f_{v_i}^{(i)} = [\{(p^{(i,0)})\}]$ *olacak şekilde bir akışkan sınıfı inşa edemeyebiliriz. Eğer bu şekilde oluşturulan bir akışkan sınıf varsa o zaman* $f_{v_i}^{(i)}$*'ye* $\mathcal{F}_i$*'nin elemanlarının en küçük başlıca girdisidir denir. Altınok ve Sarıoğlan [1],* R *bir TİB ve* $f_{v_i}^{(i)} = [\{(p^{(i,0)})\}]$ *olduğunda* $F^{(i)} = (0, \ldots, 0, f_{v_i}^{(i)}, \ldots, f_{v_n}^{(i)}) \in \mathcal{F}_i$ *akışkan sınıfının her zaman inşa edilebileceğini aşağıda verilen teoremde ispatlamışlardır.*

Teorem 4.18. [1] *R bir TİB olsun. Köşelerinin kümesi* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *olan* (G, α) *kenar etiketli çizgesini ve bu çizgenin* $i > 1$ *olmak üzere bir* v_i *köşesini alalım. Her bir* $j < i$ *için köşe etiketleri* $f_{v_j}^{(i)} = 0$ *olsun.* $f_{v_i}^{(i)} = [\{(p^{(i,0)})\}] \neq 0$ *olduğunu varsayalım. O zaman,* $F^{(i)} = (0, \ldots, 0, f_{v_i}^{(i)}, \ldots, f_{v_n}^{(i)}) \in \mathcal{F}_i$ *olacak şekilde bir akışkan sınıfı vardır.*

İspat. [1], Teorem 3.8 bakınız.

□

Bu kısımda Tanım 3.20'de verilen genelleştirilmiş spline dönüşümünden faydalanacaktır. $\theta : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ bir örten dönüşüm olmak üzere her bir $f \in [\mathbb{Z}]_{(G,\theta^{-1}(\alpha))}$ spline ve her bir $v_i \in V$ köşesi için $(\theta_* f)_{v_i} = \theta(f_{v_i})$ kuralını sağlayan

$$\theta_* : [\mathbb{Z}]_{(G,\theta^{-1}(\alpha))} \to [\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}]_{(G,\alpha)}$$

örten fonksiyonuna indirgensin. Biz bu tezde, yukarıda verilen TİB üzerindeki çalışmalardan faydalanarak her bir $t = i, \ldots, n$ için $f_{v_t}^{(i)} \in \mathbb{Z}$ elemanı $\bar{f}_{v_t}^{(i)} = f_{v_t}^{(i)} + m\mathbb{Z}$ kosetine karşılık gelen bir en küçük pozitif tamsayı olmak üzere $\bar{F}^{(i)} = (\bar{0}, \ldots, \bar{0}, \bar{f}_{v_i}^{(i)}, \ldots, \bar{f}_{v_n}^{(i)})$ akışkan sınıfını $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ halkası üzerinde inşa edeceğiz.

Teorem 4.19. *Köşelerinin kümesi* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *olan* $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ *halkası üzerinde kenar etiketli* (G, α) *çizgesini ve bu çizgenin* $i \leq j$ *olmak üzere bir* v_j *köşesini alalım.* $i > 1$ *için* $\bar{F}^{(i)} = (\bar{0}, \ldots, \bar{0}, \bar{f}_{v_i}^{(i)}, \ldots, \bar{f}_{v_n}^{(i)}) \in \mathcal{F}_i$ *bir i-nci akışkan sınıf ve* v_j*'nin* $\mathbb{Z}$ *üzerindeki sıfır patikaları* $p_1^{(j,0)}, \ldots, p_t^{(j,0)}$ *olsun. Eğer* $[\{(p^{(j,0)})\}] \not\equiv 0 \mod m\mathbb{Z}$ *ise o zaman* $\bar{f}_{v_j}^{(i)}$ *girdisi* $\overline{[\{(p^{(j,0)})\}]}$ *sayısının bir katıdır.*

İspat. $\bar{F}^{(i)} = (\bar{0}, \ldots, \bar{0}, \bar{f}_{v_i}^{(i)}, \ldots, \bar{f}_{v_n}^{(i)})$ akışkan sınıfını $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ halkası üzerinde alalım. Her bir $t = i, \ldots, n$ için $\bar{f}_{v_t}^{(i)} = f_{v_t}^{(i)} + m\mathbb{Z}$ kosetine karşılık gelen bir en küçük pozitif tamsayı olan elemanı $f_{v_t}^{(i)} \in \mathbb{Z}$ olarak seçelim. O halde, $F^{(i)} = (0, \ldots, 0, f_{v_i}^{(i)}, \ldots, f_{v_n}^{(i)})$ akışkan sınıfı $\mathbb{Z}$ üzerinde tanımlı olur. $p_1^{(j,0)}, \ldots, p_t^{(j,0)}$ ler v_j'nin $\mathbb{Z}$ üzerindeki sıfır patikaları olmak üzere Önerme 4.17'den, $[\{(p_k^{(j,0)}) : 1 \leq k \leq t\}] = [\{(p^{(j,0)})\}]$ sayısı $f_{v_j}^{(i)}$'yi böler. O zaman, $f_{v_j}^{(i)} = a[\{(p^{(j,0)})\}]$ olacak şekilde $\exists\, a \in \mathbb{Z}$ vardır. Tanımdan,

$$\theta_*(f_{v_j}^{(i)}) = \theta_*(a[\{(p^{(j,0)})\}])$$

$$\bar{f}_{v_j}^{(i)} = \overline{a[\{(p^{(j,0)})\}]}$$

$$\bar{f}_{v_j}^{(i)} = \bar{a}\overline{[\{(p^{(j,0)})\}]}$$

olur.

□

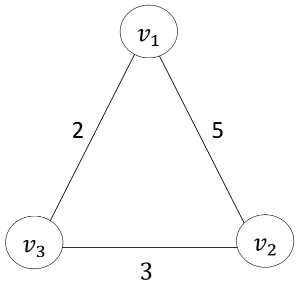
Teorem 4.20. *Köşelerinin kümesi $\{v_1, \ldots, v_n\}$ olan $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ halkası üzerinde kenar etiketli (G, α) çizgesini ve be çizgenin $i > 1$ olmak üzere bir v_i köşesini alalım. Her bir $j < i$ için köşe etiketleri $\bar{f}_{v_j} = f_{v_j} + m\mathbb{Z}$ olmak üzere $f_{v_j}^{(i)} = 0$ olsun. v_i'nin $\mathbb{Z}$ üzerindeki sıfır patikaları $p_1^{(j,0)}, \ldots, p_t^{(j,0)}$ olsun. $\bar{f}_{v_i}^{(i)} = f_{v_i}^{(i)} + m\mathbb{Z}$ olmak üzere $f_{v_i}^{(i)} = [\{(p^{(i,0)})\}] \not\equiv 0$* mod $m\mathbb{Z}$ *olduğunu varsayalım. O zaman,*

$$\bar{F}^{(i)} = (\bar{0}, \ldots, \bar{0}, \bar{f}_{v_i}^{(i)}, \ldots, \bar{f}_{v_n}^{(i)}) \in \mathcal{F}_i$$

olacak şekilde bir akışkan sınıfı vardır.

İspat. $\bar{f}_{v_i}^{(i)} = f_{v_i}^{(i)} + m\mathbb{Z}$ olmak üzere $f_{v_i}^{(i)} = [\{(p^{(i,0)})\}] \not\equiv 0 \mod m\mathbb{Z}$ alalım. $\bar{f}_{v_{i+1}}^{(i)}, \ldots, \bar{f}_{v_n}^{(i)}$ lerin varlığını göstermek istiyoruz. Köşe elemanlarının sayısı üzerinden tümevarım ile ispat yapacağız. İlk olarak, $\bar{f}_{v_{i+1}}^{(i)}$ nın varlığını göstermeliyiz. Teorem 4.18'den $f_{v_{i+1}}^{(i)}$ varlığını direk söyleyebiliyoruz. Ayrıca tanımdan, $f_{v_{i+1}}^{(i)} \in F^{(i)}$ için $(\theta_* f^{(i)})_{v_{i+1}} = \theta(f_{v_{i+1}}^{(i)})$ olduğundan $\bar{f}_{v_{i+1}}^{(i)} = f_{v_{i+1}}^{(i)} + m\mathbb{Z}$'de vardır. Tümevarım hipotezi olarak $\bar{f}_{v_{i+2}}^{(i)}, \ldots, \bar{f}_{v_{n-1}}^{(i)}$ lerin varlığını kabul edelim. Benzer şekilde, Theorem 4.18'den $f_{v_n}^{(i)}$ varlığını bildiğimiz ve $f_{v_n}^{(i)} \in F^{(i)}$ için $(\theta_* f^{(i)})_{v_n} = \theta(f_{v_n}^{(i)})$ olacak şekilde yazabildiğimiz için $\bar{f}_{v_n}^{(i)}$ varlığını göstermiş oluruz. □

Örnek 4.21. Şekil 30'da verilen $\mathbb{Z}/60\mathbb{Z}$ halkası üzerinde kenar etiketli tam çizgesini alalım. Burada $\bar{f} = f + 60\mathbb{Z}$ kosetine karşılık gelen en küçük pozitif tamsayı f olmak üzere $f \in \mathbb{Z}$ elemanı temsilci olarak seçilmiştir. Örnek 4.12'de Şekil 30'daki



Şekil 30: $\mathbb{Z}/60\mathbb{Z}$ üzerinde kenar etiketli (K_3, α)

çizgenin bir akışkan minimum üreteç kümesini algoritma kullanarak bulmuştuk. Şimdi ise ikinci bir yöntem olarak verdiğimiz Altınok ve Sarıoğlan [1] tarafından tanımlanan sıfır patikalarını kullanarak bir akışkan minimum üreteç kümesi bulalım. İlk olarak, bu çizgenin $\mathbb{Z}/60\mathbb{Z}$ üzerindeki $F^{(1)} = (f_{v_1}^{(1)}, f_{v_2}^{(1)}, f_{v_3}^{(1)})$, $F^{(2)} = (0, f_{v_2}^{(2)}, f_{v_3}^{(2)})$ ve $F^{(3)} = (0, 0, f_{v_3}^{(1)})$ akışkan sınıflarını bulalım. Teorem 4.19'dan,

- $f_{v_2}^{(2)}$ girdisi $[\{(p^{(2,0)})\}] = [\{5, (3,2)\}] = 5$ sayısının bir katı olur.
- $f_{v_3}^{(3)}$ girdisi $[\{(p^{(3,0)})\}] = [\{3, 2\}] = 6$ sayısının bir katı olur.

Ayrıca $F^{(1)} = (f_{v_1}^{(1)}, f_{v_2}^{(1)}, f_{v_3}^{(1)}) = (1, *, *)$ alabiliriz. O halde, akışkan sınıfları aşağıdaki gibi seçersek bunların tanımlı olduğunu söyleyebiliriz.

$$F^{(1)} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ 1 \end{pmatrix}, F^{(2)} = \begin{pmatrix} * \\ 5k_1 \\ 0 \end{pmatrix}, F^{(3)} = \begin{pmatrix} 6k_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Burada $*$ lar birer sayıyı belirtmektedir. Ayrıca $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ 'dir. $F^{(1)}$ seçimimizi $F^{(1)} = (1, 36, 45)$ olarak alabiliriz. O halde, Örnek 4.12'de bulduğumuz B_{60} akışkan minimum üreteç kümesini burada da elde edebiliriz.

$$B_{60} = \left\{ \begin{pmatrix} 45 \\ 36 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 40 \\ 25 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aşağıdaki teorem $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ halkası üzerinde artan veya azalan sıralı $a_i = p_1^{n_{i1}} p_2^{n_{i2}} \dots p_k^{n_{ik}}$ kenar etiketlerine sahip tam çizgelerin splinelarının akışkan minimum üreteç kümelerini belirler.

Teorem 4.22. *(K_n, α) kenar etiketli çizgesini $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ halkası üzerinde alalım. Her bir $j = 1, 2, \ldots, k$ ve $i = 1, 2, \ldots, r_n$ için $0 \leq n_{ij} \leq m_j$ olmak üzere $a_i = p_1^{n_{i1}} p_2^{n_{i2}} \ldots p_k^{n_{ik}}$ sayısı $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ halkası üzerinde bir sıfır bölen olsun. Bu çizge sıralı $a_1, a_2, \ldots, a_{r_n}$ kenar etiketlerine sahip olsun.*

1. *Kenar etiketlerinin kümesi $\{a_1, a_2, \ldots, a_{r_n}\}$,*

$$a_{r_n} \mid a_{r_n - 1} \mid \cdots \mid a_3 \mid a_2 \mid a_1 \mid m = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_k^{m_k}, \quad m \neq a_1$$

olacak şekilde sıralansın. O zaman,

$$B_m = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \\ 0 \\ a_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ a_{(r_{n-2}+1)} \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{(r_{n-1}+1)} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

kümesi $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ halkası üzerinde bir akışkan minimum üreteç kümesidir. O halde, $[\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}]_{(K_n,\alpha)}$'nın mertebesi n olur.

2. *Kenar etiketlerinin kümesi $\{a_1, a_2, \ldots, a_{r_n}\}$,*

$$a_1 \mid a_2 \mid a_3 \mid \cdots \mid a_{r_n - 1} \mid a_{r_n} \mid m = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_k^{m_k}, \quad m \neq a_{r_n}$$

olacak şekilde sıralansın. O zaman,

$$B_m = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{(r_n-(n-2))} \\ \vdots \\ a_{(r_n-(n-2))} \\ a_{(r_n-(n-2))} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{(r_n-(n-3))} \\ \vdots \\ a_{(r_n-(n-3))} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{(r_n-1)} \\ a_{(r_n-1)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{r_n} \\ 0 \\ \vdots \\ \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

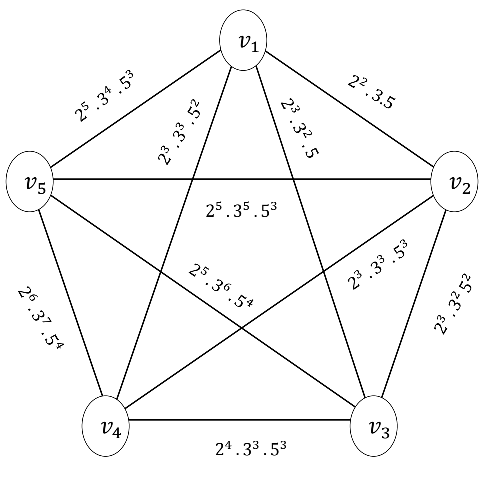
kümesi $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ halkası üzerinde bir akışkan minimum üreteç kümesidir. O halde, $[\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}]_{(K_n,\alpha)}$'nın mertebesi n olur.

İspat. İlk olarak (1) durumunu ispatlayalım. K_n tam çizgesinin kenar etiketleri $1 \leq a_{r_n} \leq \cdots \leq a_1 < m$ olmak üzere $a_1, \ldots, a_{r_n}$ olsun.

$$F^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, F^{(2)} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ \vdots \\ * \\ a_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, F^{(n-1)} = \begin{pmatrix} * \\ a_{(r_{n-2}+1)} \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, F^{(n)} = \begin{pmatrix} a_{(r_{n-1}+1)} \\ 0 \\ \vdots \\ \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

alalım. v_i'nin $\mathbb{Z}$ üzerindeki sıfır patikaları $p_1^{(i,0)}, \ldots, p_t^{(i,0)}$ olsun. $\bar{f}_{v_i}^{(i)} = f_{v_i}^{(i)} + m\mathbb{Z}$ olmak üzere her bir $i = 1, \ldots, r_{n-1}+1$ için $f_{v_i}^{(i)} = [\{(p^{(i,0)})\}] = a_i$ olduğundan Theorem 4.20'den $F^{(i)}$ lerin varlığını direk söyleyebiliriz. Burada $\bar{F}^{(i)} = (\bar{f}_{v_1}^{(i)}, \ldots, \bar{f}_{v_n}^{(i)})$ olmak üzere her bir $j = 1, \ldots, n$ için $\bar{f}_{v_j}^{(i)} = f_{v_j}^{(i)} + m\mathbb{Z}$ kosetine karşılık gelen en küçük pozitif tamsayı $f_{v_j}^{(i)}$ olmak üzere $f_{v_j}^{(i)} \in \mathbb{Z}$ elemanı temsilci olarak seçilmiştir.
$\bar{A}^{(i)} = (\bar{0}, \ldots, \bar{0}, \bar{g}_{v_i}, \ldots, \bar{g}_{v_n})$ bir akışkan sınıf olsun. Benzer şekilde, her bir $\bar{g}_{v_j} = g_{v_j} + m\mathbb{Z}$ kosetine karşılık gelen en küçük pozitif tamsayı g_{v_j} olmak üzere $g_{v_j} \in \mathbb{Z}$ elemanını temsilci olarak seçebiliriz. $B = \{F^{(1)}, F^{(2)}, \ldots, F^{(n-1)}, F^{(n)}\}$ alalım. Teorem 4.19'dan, g_{v_i} girdisinin a_i sayısının bir katı olduğunu ve dahası Teorem 3.11'den de B'nin $[\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}]_{(K_n,\alpha)}$'nın $\mathbb{Z}$-modül olarak bir akışkan üreteç kümesi olduğunu söyleyebiliriz. Genelliği bozmadan, $j = 2, \ldots, n$ için $F^{(j)}$ ler içindeki yıldızları "$*$" 0'a eşit olarak alabiliriz. O halde, B kümesi B_m'ye eşit olur ve Sonuç 3.17'den elde edilen bu üreteç kümesi bir akışkan minimum üreteç kümesi olur.
(2) durumu (1) durumuna benzer şekilde ispat edilebilir.

□



Şekil 31: $\mathbb{Z}/(2^8.3^{10}.5^7)\mathbb{Z}$ üzerinde kenar etiketli (K_5, α)

Örnek 4.23. Şekil 31'de verilen $\mathbb{Z}/(2^8.3^{10}.5^7)\mathbb{Z}$ halkası üzerinde kenar etiketli tam çizgesini alalım. Teorem 4.22'den aşağıda verilen küme bir akışkan minimum üreteç kümesidir deriz.

$$B_m = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2^5.3^4.5^3 \\ 2^5.3^4.5^3 \\ 2^5.3^4.5^3 \\ 2^5.3^4.5^3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2^5.3^5.5^3 \\ 2^5.3^5.5^3 \\ 2^5.3^5.5^3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2^5.3^6.5^4 \\ 2^5.3^6.5^4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2^6.3^7.5^4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

O halde, $[\mathbb{Z}/(2^8.3^{10}.5^7)\mathbb{Z}]_{(K_5,\alpha)}$'nın mertebesi 5 olur.

a sayısı $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ halkası üzerinde bir sıfır bölen olsun. Aşağıdaki sonuç, $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ halkası üzerinde artan veya azalan sıralı $l_1 = a^{i_1}, l_2 = a^{i_2}, \ldots, l_{r_n} = a^{i_{r_n}}$ kenar etiketlerine sahip tam çizgelerin splinelarının akışkan minimum üreteç kümelerini belirler.

Sonuç 4.24. (K_n, α) *kenar etiketli çizgesini* $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ *halkası üzerinde alalım. Bu çizge sıralı* $a^{i_1}, a^{i_2}, \ldots, a^{i_{r_n}}$ *kenar etiketlerine sahip olsun.*

1. *Kenar etiketlerinin kümesi* $\{a^{i_1}, a^{i_2}, \ldots, a^{i_{r_n}}\}$,

$$a^{i_{r_n}} \mid a^{i_{r_n-1}} \mid \cdots \mid a^{i_3} \mid a^{i_2} \mid a^{i_1} \mid a^k, \quad i_{r_n} \geq 1, i_1 < k$$

olacak şekilde sıralansın. O zaman,

$$B_{a^k} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ a^{i_1} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a^{i_2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a^{i_4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ a^{i_{(r_{n-2}+1)}} \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a^{i_{(r_{n-1}+1)}} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

kümesi $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ *halkası üzerinde bir akışkan minimum üreteç kümesidir. O halde,* $[\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}]_{(K_n,\alpha)}$*'nın mertebesi* n *olur.*

2. *Kenar etiketlerinin kümesi* $\{a^{i_1}, a^{i_2}, \dots, a^{i_{r_n}}\}$,

$$a^{i_1} \mid a^{i_2} \mid a^{i_3} \mid \cdots \mid a^{i_{r_n-1}} \mid a^{i_{r_n}} \mid a^k, \quad i_1 \geq 1, i_{r_n} < k$$

olacak şekilde sıralansın. O zaman,

$$B_{a^k} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a^{i_{(r_n-(n-2))}} \\ \vdots \\ a^{i_{(r_n-(n-2))}} \\ a^{i_{(r_n-(n-2))}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a^{i_{(r_n-(n-3))}} \\ \vdots \\ a^{i_{(r_n-(n-3))}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a^{i_{(r_n-1)}} \\ a^{i_{(r_n-1)}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a^{i_{r_n}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

kümesi $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ *halkası üzerinde bir akışkan minimum üreteç kümesidir. O halde,* $[\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}]_{(K_n,\alpha)}$*'nın mertebesi* n *olur.*

Aşağıdaki sonuç, $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ halkası üzerinde artan veya azalan sıralı $l_1 = p^{i_1}, l_2 = p^{i_2}, \dots, l_{r_n} = p^{i_{r_n}}$ kenar etiketlerine sahip tam çizgelerin splinelarının akışkan minimum üreteç kümelerini belirler.

Sonuç 4.25. (K_n, α) *kenar etiketli çizgesini* $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ *halkası üzerinde alalım. Bu çizge sıralı* $p^{i_1}, p^{i_2}, \dots, p^{i_{r_n}}$ *kenar etiketlerine sahip olsun.*

1. *Kenar etiketlerinin kümesi* $\{p^{i_1}, p^{i_2}, \dots, p^{i_{r_n}}\}$,

$$p^{i_{r_n}} \mid p^{i_{r_n-1}} \mid \cdots \mid p^{i_3} \mid p^{i_2} \mid p^{i_1} \mid p^k, \quad i_{r_n} \geq 1, i_1 < k$$

olacak şekilde sıralansın. O zaman,

$$B_{p^k} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ p^{i_1} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ p^{i_2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ p^{i_4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ p^{i_{(r_{n-2}+1)}} \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p^{i_{(r_{n-1}+1)}} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

kümesi $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ *halkası üzerinde bir akışkan minimum üreteç kümesidir. O halde,* $[\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}]_{(K_n,\alpha)}$*'nın mertebesi* n *olur.*

2. Kenar etiketlerinin kümesi $\{p^{i_1}, p^{i_2}, \ldots, p^{i_{r_n}}\}$,

$$p^{i_1} \mid p^{i_2} \mid p^{i_3} \mid \cdots \mid p^{i_{r_n-1}} \mid p^{i_{r_n}} \mid p^k, \quad i_1 \geq 1, i_{r_n} < k$$

olacak şekilde sıralansın. O zaman,

$$B_{p^k} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p^{i_{(r_n-(n-2))}} \\ \vdots \\ p^{i_{(r_n-(n-2))}} \\ p^{i_{(r_n-(n-2))}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p^{i_{(r_n-(n-3))}} \\ \vdots \\ p^{i_{(r_n-(n-3))}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} p^{i_{(r_n-1)}} \\ p^{i_{(r_n-1)}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p^{i_{r_n}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

kümesi $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ *halkası üzerinde bir akışkan minimum üreteç kümesidir. O halde,* $[\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}]_{(K_n,\alpha)}$*'nın mertebesi* n *olur.*

KAYNAKLAR

[1] S. Altınok, S. Sarıoğlan, *Flow-up bases for generalized spline modules on arbitrary graphs*, Journal of Algebra and its Applications, doi: 10.1142/S0219498821501802 **2019**.

[2] L.W. Beineke, R.J. Wilson, P.J. Cameron (Ed.). *Topics in Algebraic Graph Theory*, Cambridge University Press **2007**.

[3] L. Billera, L. Rose, *Modules of piecewise polynomials and their freeness*, Math. Zeit. 209, 485-497, **1992**.

[4] L. Billera, *Homology of smooth splines: generic triangulations and a conjecture of Strang*, Trans. Amer. Math. Soc. 310, no. 1, 325-340. MR 965757 (89k:41010), **1988**.

[5] L. Billera, L. Rose, *A dimension series for multivariate splines*, Discrete Comput. Geom. 6, no. 2, 107-128. MR 1083627 (92g:41010), **1991**.

[6] N. Bowden, S. Hagen, M. King, S. Reinders, *Bases and structure constants of generalized splines with integer coefficients on cycles*, arXiv:1502.00176v1, **2015**.

[7] N. Bowden and J. Tymoczko, *Splines mod m*, arxiv:1501.02027 **2015**.

[8] D. Cox, J. Little and D. O'Shea, *Using Algebraic Geometry*, Springer, New York **2005**.

[9] S. Gilbert, S. Polster and J. Tymoczko, *Generalized splines on arbitrary graphs*, arXiv:1306.0801 **2013**.

[10] E. Gjoni, *Basis criteria for n-cycle integer splines*, Senior Projects Spring 2015, **2015**.

[11] M. Handschy, J. Melnick, S. Reinders, *Integer generalized splines on cycles*, arXiv:1409.1481 **2014**.

[12] T. W. Hungerford, *Algebra*, Graduate Texts in Mathematics, Springer Book 73 **2012**.

[13] E. R. Mahdavi, *Integer generalized splines on the diamond graph*, Bard College Senior Projects Spring 2016, **2016**.

[14] M. Philbin, L. Swift, A. Tammaro and D. Williams, *Splines over integer quotient rings*, arXiv:1706.00105 **2017**.

[15] L.L. Schumaker, *Bounds on the dimension of spaces of multivariate piecewise polynomials*, RockyMountain J. Math. 14, no. 1, 251-264, Surfaces (Stanford, Calif., 1982). MR 736177 (85h:41091), **1984**.

[16] L.L. Schumaker, *On spaces of piecewise polynomials in two variables*, Approximation theory and spline functions (St. John's, Nfld., 1983), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., vol. 136, Reidel, Dordrecht, pp. 151-197. MR 786842 (86j:41009), **1984**.