PI-EXTENDING MODÜLLERİN DİK TOPLANANLARI ÜZERİNE

ON DIRECT SUMMANDS OF *PI*-EXTENDING MODULES

RAMAZAN YAŞAR

Prof. Dr. ADNAN TERCAN
Tez Danışmanı

Hacettepe Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim – Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin

Matematik Anabilim Dalı için Öngördüğü

DOKTORA TEZİ

olarak hazırlanmıştır.

2015

RAMAZAN YAŞAR'ın hazırladığı "PI-**extending Modüllerin Dik Toplananları Üzerine**" adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **MATEMATİK ANABİLİM DALI**'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Başkan :...

Prof. Dr. Dursun TAŞCI

Danışman :...

Prof. Dr. Adnan TERCAN

Üye :...

Prof. Dr. Murat DİKER

Üye :...

Doç. Dr. Nurullah ANKARALIOĞLU

Üye :...

Doç. Dr. Murat ŞAHİN

Bu tez Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından **DOKTORA TEZİ** olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. Fatma SEVİN DÜZ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

17 / 02 / 2015

Ramazan YAŞAR

ÖZET

PI-EXTENDING MODÜLLERİN DİK TOPLANANLARI ÜZERİNE

RAMAZAN YAŞAR

Doktora, Matematik Bölümü

Tez Danışmanı: Prof. Dr. ADNAN TERCAN

Şubat 2015, 68 sayfa

Bu çalışma beş bölümden oluşmuştur. Birinci bölümde, modül ve halkalar teorisindeki kullanışlı özel alt modüllerden olan essential ve komplement altmodüller tanıtılıp genel anlamdaki özellikleri verilmiştir. İkinci bölümde, belirtilen özel altmodüllerden hareketle tanımlanan ve orijini John von Neumann'un çalışmalarına dayanan CS (extending), sürekli ve yarı sürekli modüller verilmiştir. Üçüncü bölüm, literatürde C_{11} ve C_{12} modüller olarak yer alan ve CS modüllerin sağlamadığı bazı modül özelliklerini sağlayan iki genelleştirilmiş formuna ilişkin temel sonuçları kapsamaktadır. Dördüncü bölümde, belirli endomorfizmalar altında değişmez kalan altmodüller ailesi için CS koşulunun bu aileye kısıtlanmasıyla elde edilen, projeksiyon değişmez extending modüller tanıtılmış, bu modül sınıfının temel özellikleri ve diğer modül sınıfları ile ilişkileri incelenmiştir. Özellikle, bu yeni modül sınıfının dik toplananlar için kapalı olmadığı ancak her sayıda dik toplama taşındığı görülmüştür. Bu bağlamda, dik toplananlarının yeni modül özelliğini sağlamadığı cebirsel topolojik ters örnekler ve ayrıştırılamaz altmodüllere ayrışım problemlerinin çözümleri, çalışmanın son bölümünde toplanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Essential altmodül, Komplement altmodül, CS-modül, C_{11}-modül, PI-extending modül.

ABSTRACT

ON DIRECT SUMMANDS OF PI-EXTENDING MODULES

RAMAZAN YAŞAR

Doctor of Philosophy, Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. ADNAN TERCAN

February 2015, 68 pages

This work consists of five chapters. In the first chapter, the basic properties of useful certain kind of submodules in module and ring theory which are named as essential and complement submodules are given. In the second chapter, CS (extending), continuous and quasi-continuous modules which are based on aforementioned special submodules and originated John von Neumann's work are provided. The third chapter contains two generalizations of CS-modules, called C_{11} and C_{12} in the literature, such that preserve some kind of module properties that are missing for CS-modules. In chapter four, we introduce projection invariant extending modules via restricting the CS condition on submodules which are invariant under certain kind of endomorphisms, we investigate fundamental properties and relationships of this class of modules with the other classes of modules. In particular, it is observed that this new class of modules is not closed under direct summands but it is inherited by any number of direct sums. To this end, algebraic topological counterexamples such that its direct summands do not enjoy with the former new module property and solutions of problems on decompositions into indecomposable submodules are collected as a final chapter to this work.

Keywords: Essential submodule, Complement submodule, CS-module, C_{11}-module, PI-extending module.

TEŞEKKÜR

Bu tezin oluşmasında değerli bilgilerinden ve deneyimlerinden yararlandığım, her zaman her konuda bana yol gösteren ve sabırla yardımcı olan değerli hocam Prof. Dr. Adnan TERCAN'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bu çalışmanın gerçekleşmesinde gerek tez izleme komitesi ve gerekse tez jürisi olarak destek ve önerilerinden dolayı görev almış tüm hocalarıma teşekkür ederim.

Son olarak bu süreç boyunca her türlü sıkıntıyı, zorluğu ve sevinci benimle yaşayan anneme, babama, canım ogullarıma ve desteğini esirgemeyen eşime sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbf{X \leq M}$	:	X, M nin altmodülü
$\mathbf{X \leq_e M}$	:	X, M nin essential altmodülü
SocM	:	M nin socle kümesi
$\mathbf{X \leq_c M}$	:	X, M nin komplementi
$\mathbf{X \leq_d M}$	:	X, M nin dik toplananı
$\mathbf{Z}(\mathbf{M})$	:	M nin singular(tekil) altmodülü
$\mathbf{r}(\mathbf{x})$	:	M nin sağ sıfırlayıcısı
ACC	:	Artan zincir kuralı
$\mathbf{End}(\mathbf{M_R})$	:	M_R modülünün endomorfizmalar halkası
$\mathbf{Hom}(\mathbf{N}, \mathbf{M})$	:	N den M ye olan homomorfizmlerin kümesi
$\mathbf{m^{-1}}N$	:	R nin $\{r \in R : mr \in N\}$ sağ ideali
$\mathbf{E}(\mathbf{M})$	:	M nin injektif hull'ı
$\mathbf{S_l}(\mathbf{R})$	:	R nin sol merkezil idempotentlerinin kümesi
$\mathbf{dim}(\mathbf{M})$	:	M nin Goldie (düzgün) buyutu

1 Temel Kavramlar ve Özellikler

1.1 Giriş

Bu çalışmada R değişmeli olması gerekmeyen ve birimli bir halka, M de sağ R-modül olarak alınacaktır. Çalışmaya başlangıç oluşturan CS-modül kavramının literatürdeki gelişimini kısaca vurgulayarak başlayalım.

CS (yada extending)-modül kavramının orjini 1930 lu yıllarda John von Neumann'nın çalışmalarına uzanır. Von Neumann'nın Kuantum Mekaniği'ndeki çalışmaları onu "Sürekli Geometri" yi tanımlamasına ve geliştirmesine yönlendirmiştir. Bu günümüzde üst ve alt sürekli tam modüler **Latis** olarak adlandırılır. (L,$\wedge$,$\vee$,0,1) bir tam modüler latis olsun. Eğer $a \in L$ ve $\{b_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, L nin tam sıralı bir alt kümesi iken,

$$a \wedge \bigvee_{\lambda\in\Lambda} b_\lambda = \bigvee_{\lambda\in\Lambda} (a \wedge b_\lambda)$$

oluyorsa, (L,$\wedge$,$\vee$,0,1) latisine **üst sürekli (upper continuous)** denir.

R bir halka ve M de bir sağ R-modül olsun. Bu durumda M nin altmodüllerinin oluşturduğu latis üst sürekli tam modüler bir latisdir (Genel olarak alt sürekli olması gerekmez).

Von Neumann [31, 32, 33] çalışmalarında sürekli geometrilerin teorisini geliştirdi ve özellikle bunları von Neumann (regüler) halkanın sol temel ideallerinin oluşturduğu latisde inceledi. Regüler halkalarda eğer temel sol ideallerin latisi üst ve alt sürekli ise bu halkaya süreklidir dedi. Bu çalışmalara Utumi [30] devam etti. Bu kavramları Jeremy [18] modüllere taşıdı. Chatters ve Hajarnavis "CS" kısaltmasını "**complements are summands**" için kullandılar [9]. Bir çok araştırmacı CS yerine extending veya C_1 gösterimlerini kullanarak bu modül sınıflarını yada genelleştirilmiş sınıflarını araştırmalara devam etmektedir.

Bu çalışmada CS-modüller ve mevcut genelleştirmeleri verilmiş bunun yanında yeni genelleştirmeler tanımlanıp araştırılmıştır.

1.2 Essential ve Komplement Altmodüller

Bu kesimde, çalışmamıza temel oluşturan bazı özel tipteki altmodüllerin tanım ve özelliklerini ayrıntılı olarak vereceğiz. Bu kesimdeki sonuçlar için [2], [11], [13] önerilir.

Tanım 1.2.1 *M bir R-modül ve $N \leq M$ olsun. Eğer her $0 \neq K \leq M$ için $N \cap K \neq 0$ oluyorsa veya buna denk olarak bir $L \leq M$ için $N \cap L = 0$ olduğunda $L = 0$'ı gerektiriyorsa N ye M nin* ***essential (large, geniş) altmodülü*** *(veya M ye N nin essential genişlemesi) denir ve $N \leq_e M$ ile gösterilir.*

Önerme 1.2.2 *M bir modül olsun. Bu durumda;*

1. *$N \leq M$ olsun. $N \leq_e M$ olması için gerek ve yeter koşul her $0 \neq m \in M$ için $N \cap mR \neq 0$ olmasıdır.*

2. *$K \leq N \leq M$ olmak üzere $K \leq_e M$ olması için gerek ve yeter koşul $K \leq_e N$ ve $N \leq_e M$ olmasıdır.*

3. *$N \leq_e M$ ve $K \leq M$ ise $N \cap K \leq_e K$ dır.*

4. *$1 \leq i \leq t$ olmak üzere her $t \geq 1$ için $N_i \leq_e K_i$ ise $(N_1 \cap N_2 \cap ... \cap N_t) \leq_e (K_1 \cap K_2 \cap ... \cap K_t)$ dır.*

5. *$K \leq N \leq M$ olmak üzere $N/K \leq_e M/K$ ise $N \leq_e M$ dir.*

6. *Bir $m \in M$ için $N \leq_e M$ ise $m^{-1}N \leq_e R_R$ dir.*

7. *Her sıfırdan farklı indis kümesi I için, $i \in I$ olmak üzere $N_i \leq_e M_i$ olması için gerek ve yeter koşul $\bigoplus_{i \in I} N_i \leq_e \bigoplus_{i \in I} M_i$ olmasıdır.*

8. *$A, B, C \leq M$ olmak üzere eğer $f : B \to C$ bir homomorfizm ve $A \leq_e C$ ise $f^{-1}(A) \leq_e B$ dir.*

Yukarıdaki (7) ve (4) özellikleri ile ilgili olarak, (7) de $A \leq_e B$ ve $A' \leq_e B'$ iken $A + A' \leq_e B + B'$ olmayabilir [13]. (4) de ise t sonlu değil ise $\bigcap_t N_i \leq_e \bigcap_t K_i$ doğru olmayabilir.

Önteorem 1.2.3 *M bir R-modül, $M = K \oplus K'$ ve $N \leq K$ olsun. Bu durumda $M/N = K/N \oplus (K' + N)/N$ olur.*

İspat. $K/N+(K'+N)/N \leq M/N$ dir. $(m+N) \in M/N$ alalım. Buradan $k \in K$ ve $k' \in K'$ olmak üzere $m+N = (k+k')+N = (k+N)+(k'+N) \in K/N+(K'+N)/N$ elde edilir. Yani $M/N \subseteq K/N + (K' + N)/N$ olduğundan $M/N = K/N + (K' + N)/N$ dir. Şimdi $K/N \cap (K'+N)/N = 0$ yani $K \cap (K'+N) = N$ olduğunu görelim. $x \in K \cap (K' + N)$ olsun. Bu durumda $x \in K$ ve $n \in N$, $k' \in K'$ olmak üzere $x = k' + n$ olur. O halde $x - n = k' \in K \cap K' = 0$ olduğundan $x = n$ dir. Böylece $x \in N$ elde edilir. Yani, $K \cap (K' + N) = N$ olup $K/N \cap (K' + N)/N = N/N = 0$ olur. Dolayısıyla $M/N = K/N \oplus (K' + N)/N$ dir. $\square$

Önteorem 1.2.4 *M bir sağ R-modül, $0 \neq a \in M$ ve $K \leq_e M$ olsun. Bu durumda, $aL \neq 0$ ve $aL \subseteq K$ olacak şekilde R nin bir essential sağ L ideali vardır.*

İspat. $L = \{r \in R : ar \in K\}$ olsun. Buradan, L, R nin bir sağ idealidir ve $aL \subseteq K$ dır. Böylece $aR \cap K \neq 0$ olur. Bazı $r \in R$ için ar, K nın sıfırdan farklı elemanıdır. Yani, $r \in L$ için $aL \neq 0$ dır. I, R nin sıfırdan farklı sağ ideali olsun. Şimdi $I \cap L \neq 0$ olduğunu görelim. Eğer $aI = 0$ ise $I \subseteq L$ olduğundan $I \cap L \neq 0$ olur. Farzedelim ki, $aI \neq 0$ olsun. Bu durumda $aI \cap K \neq 0$ dır. Böylece bazı $x \in I$ için ax, K nın sıfırdan farklı elemanıdır. Buradan $x \in L$ dır. Dolayısıyla $I \cap L \neq 0$ dır. Böylece $L \leq_e R$ olur. $\square$

Sonuç 1.2.5 *Herhangi bir M modülü için $Soc(M_R) = \bigcap\{N : N \leq_e M\}$ dir.*

Tanım 1.2.6 *M bir R-modül ve L, M nin bir altmodülü olsun. $K \cap L = 0$ özelliğine göre maksimal olan bir K altmodülüne L nin (M deki)* ***komplementi*** *denir.*

Tanım 1.2.6 daki K altmodülü tek olmak zorunda değildir. Şimdi vereceğimiz önermeden, bir M modülündeki her altmodülün bir komplement altmodülünün (M de) varlığı elde edilir ki, bu komplement altmodülleri oldukça kullanışlı yapmaktadır.

Önerme 1.2.7 *M bir modül ve $L, N \leq M$ altmodülleri için $N \cap L = 0$ olsun. Bu durumda L nin M de bir K komplementi vardır ki, $N \subseteq K$ dır.*

İspat. $S = \{X \leq M : N \leq X \text{ ve } X \cap L = 0\}$ kümesini tanımlayalım. $N \in S$ olduğundan $S \neq \emptyset$ dır. $\{X_i : i \in I\}$, S de bir zincir olsun. S tam sıralıdır. $U = \bigcup_{i \in I} X_i$ alalım. Herhangi iki $X_i, X_j \in S$ için $X_i \subseteq X_j$ yada $X_j \subseteq X_i$ olduğundan U bir altmodüldür. Her $i \in I$ için $N \leq X_i$ olduğundan $N \leq \bigcup_{i \in I} X_i$ dir. Her $i \in I$ için $X_i \cap L = 0$ olduğundan $\bigcup_{i \in I} X_i \cap L = 0$ olup $U \in S$ olur. Yani U, $\{X_i : i \in I\}$ zincirinin bir üst sınırıdır. Böylece Zorn's Lemma ile S nin bir maksimal elemanı vardır. Bu K ile gösterilirse, $K \cap L = 0$ olduğundan K, L nin M deki bir komplementidir. Ayrıca S nin tanımından $N \subseteq K$ dır. □

Şimdi ispatlayacağımız önerme, bir modülde essential altmodüller üretmek anlamında bir teknik sağlamaktadır.

Önerme 1.2.8 *M bir modül, $L \leq M$ ve K, L nin M içinde herhangi bir komplementi olsun. Bu durumda $K \oplus L \leq_e M$ dir.*

İspat. $N \leq M$ ve $(K \oplus L) \cap N = 0$ alalım. $K \subseteq K + N$ olduğu açıktır. Bu durumda K, L nin M içinde herhangi komplementi olduğundan $(K + N) \cap L \neq 0$ olur. Buradan $n \in N$ ve $0 \neq x \in L$ için $x = k + n$ olacak şekilde bir $k \in K$ vardır. Böylece $n = x - k \in (K \oplus L) \cap N = 0$ olduğundan $n = 0$ elde edilir. $x = k \in K \cap L = 0$ ise $x = 0$ olur. Bu ise bir çelişkidir. O halde $K = K + N$ dir. Böylece $N \leq K$ ise $N \leq K \oplus L$ olur. $(K \oplus L) \cap N = N = 0$ olduğundan $N = 0$ dır. Dolayısıyla $K \oplus L \leq_e M$ elde edilir. □

Teorem 1.2.9 *M bir modül, $A, B \leq M$ ve $A \cap B = 0$ olsun. Bu durumda B, A nın M de bir komplementi olabilmesi için gerek ve yeter koşul $(A+B)/B \leq_e M/B$ olmasıdır.*

İspat. B, A nın M içinde bir komplementi ve $A \cap B = 0$ olsun. $(A+B)/B \cap (U/B) = 0$ olacak şekilde $B \leq U \leq M$ alalım. $(A+B) \cap U = B$ olur. Modüler kuralından $(A \cap U) + B = B$ dır. Böylece $A \cap U \leq B$ olduğundan $A \cap U \leq A \cap B = 0$ olur. B maksimal olduğundan $B = U$ dur. Buradan $U/B = 0$ olup $(A+B)/B \leq_e M/B$ olduğu elde edilir.
Diğer taraftan $(A+B)/B \leq_e M/B$ olduğunu kabul edelim. $A \cap U = 0$, $B \leq U \leq M$ olacak şekilde keyfi bir U ve $x \in (A+B) \cap U$ alalım. Bu durumda $x \in (A+B)$ ve $x \in U$ dur. $a \in A$, $b \in B$ olmak üzere $x = a + b$ dir. $a = x - b \in A \cap U = 0$ olduğundan $a = 0$ olur ve böylece $x = b \in B$ elde edilir. Buradan $(A+B) \cap U = B$ olur. Yani $(A+B)/B \cap (U/B) = 0$ dır. Kabulümüzden $U/B = 0$ olur. Dolayısıyla $B = U$ olduğundan B maksimaldir. Böylece B, A nın M deki komplementidir. $\square$

Tanım 1.2.10 *M bir modül ve K, M nin bir altmodülü olsun. Eğer K, M de herhangi bir altmodülün komplementi ise K ya (M de) bir* ***komplement*** *denir ve $K \leq_c M$ ile gösterilir.*
Açıktır ki, bir M modülü için $0, M \leq_c M$ dir.

Daha genel olarak;

Sonuç 1.2.11 *Bir M modülünün her dik toplananı M de bir komplementtir.*

Sonuç 1.2.11 deki ifadenin tersi genel olarak doğru olmayabilir. Örneğin; F bir cisim ve V de 2 boyutlu bir vektör uzayı olmak üzere $R_R = \{\left[\begin{smallmatrix} f & v \\ 0 & f \end{smallmatrix}\right] : f \in F, v \in V = (v_1F \oplus v_2F)\}$ ve $I = \{\left[\begin{smallmatrix} 0 & v_1f \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] : f \in F\}$, $J = \{\left[\begin{smallmatrix} 0 & v_2f \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] : f \in F\}$ olarak alalım. Bu durumda I, J nin R deki (benzer olarak J, I nın) komplementidir. Yani I, R nin komplementidir. Ancak I, R nin bir dik toplananı değildir.

Önerme 1.2.12 *M bir modül ve $N \leq M$ olsun. Bu durumda $N \leq_e K$ olacak şekilde bir $K \leq_c M$ vardır.*

İspat. N', M de N nin komplementi olsun. Böylece $N' \cap N = 0$ dir ve N' nün bir K komplementi vardır ve Önerme 1.2.7 den $N \subseteq K$ dır.

$0 \neq L \leq K$ olsun. $N' \subseteq L + N'$ olduğundan $(L + N') \cap N \neq 0$ olur. Böylece $0 \neq n \in (L + N') \cap N$ ise $n \in (L + N')$ ve $n \in N$ olur. $x \in L$, $n' \in N'$ olmak üzere $n = x + n'$ dır. Buradan $n' = n - x \in N' \cap K = 0$ olduğundan $n' = 0$ dır. Böylece $n = x \in N \cap L$ olup $N \cap L \neq 0$ olur. Yani $N \leq_e K$ elde edilir. □

Önerme 1.2.12 de varlığı ispatlanan K altmodülüne N nin M deki ***kapanışı (closure)*** denir.

Önerme 1.2.13 *M bir modül ve K, M nin altmodülü olsun. Bu durumda $K \leq_c M$ olması için gerek ve yeter koşul $K \leq_e L \leq M$ ise $K = L$ olmasıdır.*

İspat. Farzedelim ki $K \leq_c M$ ve $K \leq_e L \leq M$ olsun. Bu durumda K bir X in M de komplementi olacak şekilde $X \leq M$ vardır. Böylece $K \cap X = 0$ olur. $0 = K \cap X \leq_e L \cap X$ olduğundan $L \cap X = 0$ dır. K, $K \cap X = 0$ koşulu altında maksimal olduğundan $K = L$ olur.
Tersine, $K \leq M$ olduğundan Önerme 1.2.12 den K nın M de bir L bir kapanışı vardır. Yani $K \leq_e L \leq_c M$ dır. $K = L$ olduğundan $K \leq_c M$ dır. □

Önerme 1.2.14 *M bir modül ve $K, N \leq M$ olsun. Eğer $K \leq_c N$ ve $N \leq_c M$ ise $K \leq_c M$ dir.*

İspat. $K \leq_c N$ ve $N \leq_c M$ olduğunu kabul edelim. Buradan bir $K' \leq N$ için K, K' nün N deki komplementi ve bir $N' \leq M$ için de N, N' nün M deki komplementi olur. $x \in K \cap (K' + N')$ alalım. $k' \in K'$, $n' \in N'$ için $x = k' + n'$ dür. $x - k' = n' \in N' \cap N = 0$ olur. Böylece $x = k' \in K' \cap K = 0$ olduğundan $K \cap (K' + N') = 0$ elde edilir. Farzedelim ki, $K \leq_e L \leq M$ olsun. O halde $0 = K \cap (K' + N') \leq_e L \cap (K' + N')$ olup $L \cap (K' + N') = 0$ dır. Buradan $[N \cap (L + N')] \cap K' = (N \cap K') \cap (L + N') = K' \cap (L + N') = 0$ olur. Fakat $K \subseteq N$ ve $K \subseteq L + N'$ olduğundan $K \subseteq N \cap (L + N')$ dır. K, K' nün N deki komplementi olduğundan $K \cap K' = 0$ koşulu altında K' maksimal altmodüldür. $K \subseteq N \cap (L + N')$ ve $[N \cap (L + N')] \cap K' = 0$ olduğundan $K = N \cap (L + N')$ olur. Böylece $(N + L) \cap N' = 0$ dır. N, N' nün M deki komplementi olduğundan

$N \cap N' = 0$ koşulu altında N' maksimal altmodüldür ve $N \subseteq N + L$ olduğundan $N = N + L$ dir. Buradan $L \leq N$ olur. $L = L \cap (L + N') \leq N \cap (L + N') = K$ olduğundan $K = L$ dir. Önerme 1.2.13 den $K \leq_c M$ elde edilir. □

Önerme 1.2.15 *M bir modül, $K \leq_c M$ ve $K \leq N \leq M$ olsun. Bu durumda $N \leq_e M$ olması için gerek ve yeter koşul $N/K \leq_e M/K$ olmasıdır.*

İspat. İlk olarak $N/K \leq_e M/K$ olduğunu kabul edelim. $N \leq_e M$ olduğu Önerme 1.2.2 (5) den açıktır.
Tersine $N \leq_e M$ olsun. $M' = M/K$, $N' = N/K$ ve $N' \cap L' = 0$ olacak şekilde $L' \leq M'$ alalım. Bu durumda bir $L \leq M$ için $K \subseteq L$ olmak üzere $L' = L/K$ ve $N \cap L = K$ dır. K, K' nün M deki komplementi olsun. Böylece $K \cap K' = 0$ olduğundan $N \cap L \cap K' = 0$ dır. $N \leq_e M$ olduğundan da $L \cap K' = 0$ olur. Buradan $K \subseteq L$ ve K, K' nün M deki komplementi olduğundan $K = L$ dir. $L' = 0$ olup $N' \leq_e M'$ olur. Yani $N/K \leq_e M/K$ dir. □

Önerme 1.2.16 *M bir modül, $K \leq_c M$ ve $L \leq_c M$ olsun. Bu durumda K, M de L nin komplementi olması için gerek ve yeter koşul L, M de K nın komplementi olmasıdır.*

İspat. İlk olarak K, M de L nin komplementi olsun. $L \subseteq L' \leq M$ ve $L' \cap K = 0$ alalım. Önerme 1.2.8 den $K \oplus L \leq_e M$ olur. Böylece Önerme 1.2.2 (1) den $k \in K$, $x \in L$ için $mr = k + x$ olacak şekilde bir $0 \neq m \in M$ vardır. $L' \leq M$ olduğundan $0 \neq y \in L'$ için $0 \neq yr = k + x$ dir. Buradan $k = (yr - x) \in K \cap L' = 0$ olur. Böylece $yr = x$ olduğundan $yr \in L$ elde edilir. Önerme 1.2.2 (1) den $L \leq_e L'$ olur. Fakat $L \leq_c M$ olduğundan Önerme 1.2.13 den $L = L'$ dür. O halde L, M de K nın komplementidir. Terside benzer şekilde gösterilir. □

Önerme 1.2.17 *M bir modül ve $N \leq K \leq M$ olsun. Bu durumda,*

1. *$K \leq_c M$ ise $K/N \leq_c M/N$ dir.*

2. $K/N \leq_c M/N$ ve $N \leq_c M$ ise $K \leq_c M$ dir.

İspat. (1) $L \leq M$ altmodülü $K \subseteq L$ ve $K/N \leq_e L/N$ koşullarını sağlasın. Bu durumda Önerme 1.2.15 den $K/N \leq_e L/N$ olduğundan $K \leq_e L$ olur. $K \leq_c M$ ve $K \leq_e L$ koşulları ile Önerme 1.2.13 den $K = L$ dir. Böylece $K/N = L/N$ olur. Dolayısıyla Önerme 1.2.13 den $K/N \leq_c M/N$ dir.
(2) $K/N \leq_c M/N$ ve $N \leq_c M$ olsun. Bu durumda kabulden $K', N' \leq M$ için $N \subseteq K'$ olmak üzere K/N, M/N de K'/N nin ve N, M de N' nün komplementidir. Böylece $K/N \cap K'/N = 0$ olacak şekilde $K/N \leq M/N$ maksimal altmodülü vardır. Buradan $K \cap K' = N$ dir. Benzer şekilde $N \cap N' = 0$ olur. O halde $(K \cap K') \cap N' = K \cap (K' \cap N') = 0$ dır. Farzedelim ki $K \leq L \leq M$ ve $L \cap (K' \cap N') = 0$ olsun. $N \subseteq K'$ ve $N \subseteq K \subseteq L$ olduğundan $N \subseteq L \cap K'$ olur. Ayrıca $(L \cap K') \cap N' = 0$ ifadesini kullanarak N, M de N' nün komplementi olduğundan $L \cap K' = N$ olur. Buradan $L/N \cap K'/N = 0$ dır. Bu koşul altında K/N maksimal altmodül olduğundan ve $K \subseteq L$ ise $K/N \subseteq L/N$ olacağından $K/N = L/N$ dir. Böylece $L = K$ olur. Bu durumda K, $K \cap (K' \cap N') = 0$ koşulu altında maksimal altmodül olduğundan K, M de $K' \cap N'$ nün komplementidir. Yani $K \leq_c M$ dir. □

Şimdi 2. bölümde incelenecek olan CS-modüller de sıkça kullanacağımız ve temel aldığı sonlu Goldie boyut ve İnjektif modül tanımları verilecektir.

Tanım 1.2.18 *M bir R-modül olsun. Eğer M sıfır olmayan altmodüllerin bir sonsuz dik toplamını kapsamıyorsa M ye* ***sonlu Goldie boyutlu (yada sonlu düzgün boyutlu)*** *modül denir.*
M sıfırdan farklı sonlu Goldie boyutlu bir R-modül olsun. Bu durumda M bir düzgün U altmodül (yani $U \neq 0$ ve her $0 \neq X, Y \leq U$ için $X \cap Y \neq 0$) kapsar. Üstelik, bir n pozitif tamsayısı ve $i \neq j$ olmak üzere $U_i \cap U_j = 0$ olacak biçimde U_i $(1 \leq i \leq n)$ düzgün altmodülleri vardır ki, $U_1 \oplus U_2 \oplus ... \oplus U_n \leq_e M$ dir. Bu durumda n sayısı M nin ***Goldie boyutu (yada düzgün boyutu)*** *olarak adlandırılır. Eğer $1 \leq i \leq k$ olmak üzere $0 \neq N_i \leq M$ ve $N_1 \oplus N_2 \oplus ... \oplus N_k$*

bir dik toplam ise $k \leq n$ dir. Goldie boyutu ile ilgili temel özellikler için [10], [2] önerilir.

Tanım 1.2.19 *R bir halka J, R-modül, $g : A \to B$ ve $f : A \to J$ homomorfizmler olmak üzere $0 \to A \to B$ kısa tam dizi olsun.*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[dl, dotted] \\ & J & \end{tikzcd}$$

*diagramı değişmeli yani $hog = f$ olacak şekilde $h : B \to J$, R-modül homomorfizmi varsa J ye **injektif modül** denir.*

Sonuç 1.2.20 *N bir R-modül olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar denktir.*

1. *N injektif modüldür.*

2. *$N \leq M_R$ ise N, M de dik toplanandır.*

İspat. (1) $\Rightarrow$ (2): $N \leq M$ ve N injektif bir modül olsun.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[dl, dotted] \\ & N & \end{tikzcd}$$

diagramında N injektif olduğundan $\theta : M \to N$ ye bir homomorfizm vardır. $m \in M$ alalım. $\theta(m) \in N$ olur. Buradan $\theta(m) = \theta(\theta(m))$ dir. O halde $\theta(m - \theta(m)) = 0$ olup $(m - \theta(m)) \in$ Çekθ dır. Yani $m \in$ Çek$\theta + \theta(m)$ dir. Böylece $M \subseteq$ Çek$\theta + N$ elde edilir. Ayrıca $\theta(m) \subset N \leq M$ ve Çek$\theta \leq M$ olduğundan Çek$\theta + N \subseteq M$ olur. Dolayısıyla $M =$ Çek$\theta + N$ dir. $x \in$ Çek$\theta \cap N$ alalım. O halde $\theta(x) = 0$ ve $x \in N$ olur. $x \in N$ olduğundan $\theta(x) = x$ dır. Böylece $x = 0$ olup Çek$\theta \cap N = 0$ olduğundan $M = N \oplus$ Çekθ dır. Yani N, M nin dik toplananıdır.
(2) $\Rightarrow$ (1): Tersine $N \leq M_R$ ise N, M de dik toplanan olsun. [25, Teorem 2.11] den her modülün bir injektif genişlemesi olduğundan I_R injektif modül olmak üzere $N \leq I_R$ dir. Kabulümüzden dolayı $I = N \oplus N'$ olacak şekilde $N' \leq I_R$ vardır. [21, Önerme 2.3] den I_R injektif olduğu için N de injektiftir. $\square$

Tanım 1.2.21 *R bir halka P, R-modül, $g : A \to B$ ve $f : P \to B$ homomorfizmler olmak üzere $A \to B \to 0$ kısa tam dizisi olsun.*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dotted] \arrow[d] & \\ A \arrow[r] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

diagramı değişmeli yani $goh = f$ olacak şekilde $h : P \to A$, R-modül homomorfizmi varsa P ye ***projektif modül*** *denir.*

Sonuç 1.2.22 *R bir halka ve P bir R-modül olsun. O halde, aşağıdakiler denktir.*

1. *P projektiftir.*

2. *Her*

   $$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

   kısa tam dizisi split dizidir.

3. *F bir serbest modül ve K, R-modül olmak üzere $F \cong K \oplus P$ dir.*

İspat. $(1) \Rightarrow (2)$:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "1_p"'] & \\ B \arrow[r] & P \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

diagramını göz önüne alalım. P projektif olduğundan $goh = 1_p$ olacak şekilde bir R-modül homomorfizmi vardır. Böylece kısa tam dizi

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, bend left, "g"] & P \arrow[l, bend left, "h"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

olduğundan split dizidir. Buradan, $B \cong A \oplus P$ dir.

$(2) \Rightarrow (3)$: R halkası üzerindeki her A modülü serbest F modülünün homomorfik görüntüsüdür. O halde, P de bir R-modül olduğundan $g : F \to P$ epimofizması vardır. Eğer $K = \text{Çek}g$ alırsak,

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\subset} F \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

dizisi tamdır. Hipotezden dizi split tam dizidir. Dolayısıyla $F \cong K \oplus P$ dir.

$(3) \Rightarrow (1)$: $\pi : F \cong K \oplus P \to P$ kanonik epimorfizma ve $i : P \to F \cong K \oplus P$ kanonik monomorfizma olsun. Alt satır tam olmak üzere

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[d, "f"'] & \\
A \arrow[r, "g"'] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

R-modül homomorfizm diagramı verilsin. Bu durumda,

$$\begin{tikzcd}
 & F \arrow[d, bend left, "\pi"] \arrow[ddl, dotted, "h_1"'] & \\
 & P \arrow[u, bend left, "i"] \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dotted, "h"] & \\
A \arrow[r] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

diagramını ele alalım. F serbest modül olduğundan projektif modüldür. Böylece $goh_1 = fo\pi$ olacak şekilde $h_1 : F \to A$ bir R-modül homomorfizmi vardır. $h = h_1oi : P \to A$, R-modül homomorfizm olsun. O halde, $gh = gh_1i = (fo\pi)oi = fo(\pi oi) = fo1_p = f$ olduğundan diagram değişmelidir ve P projektiftir. $\square$

2 CS-Modüller

2.1 CS-Modüllerin Temel Özellikleri

Önceki kesimde gerekli özel altmodüller ve özelliklerinin verilmiş olması, 1930 lu yıllarda von Neumann'ın sürekli geometrilerinde kullanması ile ilk olarak tanımlanan, daha sonra Utumi ve öğrencileri tarafından halka ve modüllere genişletilen ve günümüzde de bir çok araştırmacının odaklandığı "CS-modül" kavramını incelememizi mümkün yapar. Çalışmalarımızda esas olan kimi CS teori teorem ve sonuçlarının ispatları da bütünlük oluşturması anlamında yapılacaktır.

Tanım 2.1.1 *M bir R-modül olsun. Eğer M nin her K komplement altmodülü M de bir dik toplanan oluyor ise M ye CS-**modül** (extending modül) denir.*
*Bu tanıma denk koşullardan biri M nin her N altmodülünün M nin bir dik toplananın da essential olarak kapsanmasıdır. Yine bir R halkası için R_R CS-modül ise R ye **sağ** CS-**halka** denir. Yani, her $I \leq R_R$ sağ ideali için bir $e^2 = e \in R$ vardır ki, $I \leq_e eR$ dir. CS-modüllere yarıbasit modüller, düzgün modüller, injektif modüller ve sonlu ranklı serbest Abel gruplar örnek verilebilir. Diğer yandan $\bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z} = M_{\mathbb{Z}}$, CS olmayan bir modüldür. [11]*

CS bir modülün her alt modülü CS olmayabilir. Örneğin; M, CS olmayan bir R-modül ve $E(M)$ de M nin injektif hull'ı olsun. Bu durumda, $M \leq E(M)$ ve $E(M)$, CS-modüldür.

Önteorem 2.1.2 *M, CS-modül ve N, M nin bir dik toplanan altmodülü olsun. Bu durumda N, CS-modüldür.*

İspat. N, M de dik toplanan olduğundan $M = N \oplus K$ olacak şekilde $K \leq M$ vardır. $X \leq_c N$ alalım. N, M de dik toplanan olduğundan $X \leq_c N \leq_c M$ olur. Komplementlerde geçişme özelliğinden $X \leq_c M$ dir ve M, CS-modül olduğundan ise X, M de dik toplanandır. Buradan $M = X \oplus Y$ olacak şekilde $Y \leq M$ vardır.

$N = N \cap M = N \cap (X \oplus Y) = X \oplus (N \cap Y)$ olduğundan X, N nin bir dik toplananıdır. Böylece N, CS-modüldür. $\square$

Sonuç 2.1.3 *M, CS-modül ve $N \leq_c M$ ise N, CS-modüldür.*

İspat. Önteorem 2.1.2 den açıktır. $\square$

Önteorem 2.1.2 nin tersine CS-modüllerin bir dik toplamı CS-modül olmayabilir.

Örnek 2.1.4 *p bir pozitif asal tamsayı olmak üzere $M_{\mathbb{Z}} = (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p) \oplus (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^3)$ modülünü alalım. $M_{\mathbb{Z}}$ modülü CS-modül değildir.*

İspat. $M_1 = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}p \oplus 0$, $M_2 = 0 \oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^3$ olsun. Böylece M_1 ve M_2 düzgün modül olduklarından CS-modüllerdir. Şimdi M nin CS-modül olmadığını gösterelim. Önce $b \notin \mathbb{Z}p^3$ olmak üzere $K = \mathbb{Z}(1 + \mathbb{Z}p, b + \mathbb{Z}p^3)$ altmodülünün $M_{\mathbb{Z}}$ de komplement olduğunu gösterelim. K devirli ve $p^3K = 0$ olduğundan K nın mertebesi p^3 olur. Böylece $K \cong \mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^3$ olduğundan K düzgün modüldür. $K \leq_e L \leq M$ alalım. Buradan $dimK = dimL$ olduğundan L de düzgün modüldür. $M_{\mathbb{Z}}$ sonlu üretilmiş olduğundan L devirlidir. Böylece $c, d \in \mathbb{Z}$ için, $L = \mathbb{Z}(c + \mathbb{Z}p, d + \mathbb{Z}p^3)$ tür. Buradan bir $n \in \mathbb{Z}$ vardır ki, $(1 + \mathbb{Z}p, b + \mathbb{Z}p^3) = n(c + \mathbb{Z}p, d + \mathbb{Z}p^3)$ olur. Yani, $1 \equiv nc(modp)$ ve $b \equiv nd(modp^3)$ dir. Eğer $p|n$ ise $1 \equiv 0(modp)$ olur ki bu çelişkidir. O halde, $p \nmid n$ dir. Böylece $(p, n) = 1$ olup $1 = nc + sp$ olacak şekilde bir $s \in \mathbb{Z}$ vardır. Buradan $(1 - nc)^3 = s^3p^3$ dır. $(1 - 3nc + 3n^2c^2 - 3n^3c^3) = 1 - n(3c + 3nc^2 - 3n^2c^3) = 1 - nt = s^3p^3$ olur. $t(1 + \mathbb{Z}p, b + \mathbb{Z}p^3) = nt(c + \mathbb{Z}p, d + \mathbb{Z}p^3) = (1 - s^3p^3)(c + \mathbb{Z}p, d + \mathbb{Z}p^3) = (c + \mathbb{Z}p, d + \mathbb{Z}p^3)$ olup $L \leq K$ elde edilir. O halde $K = L$ dir. Böylece K, $M_{\mathbb{Z}}$ nin komplement altmodülüdür. N,M nin komplement altmodülü ve $N \neq 0, M_1, M_2, M$ olsun. Bu durumda N, M de maksimal düzgün altmodüldür. N düzgün modül olduğundan $N \neq 0$ ve $a \notin \mathbb{Z}p$, $b \notin \mathbb{Z}p^3$ olmak üzere $(a + \mathbb{Z}p, b + \mathbb{Z}p^3) \in N$ vardır. $a = 1$ alalım. Bu durumda $\mathbb{Z}(1 + \mathbb{Z}p, b + \mathbb{Z}p^3) \subseteq N$ olur ve $\mathbb{Z}(1 + \mathbb{Z}p, b + \mathbb{Z}p^3) \leq_e N$ olduğundan M nin bütün komplementleri $N = \mathbb{Z}(1 + \mathbb{Z}p, b + \mathbb{Z}p^3)$ şeklindedir. Şimdi $p^3 \nmid p$

olmak üzere $N = \mathbb{Z}(1+\mathbb{Z}p, p+\mathbb{Z}p^3)$ olsun. N, M nin komplementidir ve $|N| = p^2$ dir. Eğer N, M de dik toplanan olsaydı $M = N \oplus N'$ olacak şekilde $N' \leq M$ olurdu ve $|N'| = p^2$ elde edilirdi. Buradan, $p^2M = p^2(N \oplus N') = 0$ olurdu. Bu ise çelişkidir. Çünkü, $|M| = p^3$ dür. Böylece M nin komplement N altmodülü M de bir dik toplanan olamaz. Yani M, CS-modül değildir. □

Önceki Örnek 2.1.4 teki $M_{\mathbb{Z}}$ modülünün Goldie boyutu 2 dir. Bu örnekten hareketle, sonlu Goldie boyutlu CS-modüllerin aşağıda vereceğimiz kullanışlı bir özelliği elde edilir. Öncelikle, M bir modül ve U da M nin bir düzgün altmodülü olsun. O halde, Önerme 1.2.12 den $U \leq_e K \leq_c M$ olacak biçimde bir $K \leq M$ vardır. Açıkça, K da düzgündür. Yine, U, M nin bir altmodülü olsun. $U \leq_c M$ olması için gerek ve yeter koşul U, M nin bir maksimal düzgün altmodülüdür. (Yani, U, M nin düzgün altmodüller ailesinde maksimaldir.)

Önteorem 2.1.5 *M, her maksimal düzgün altmodülü bir dik toplanan olan bir modül olsun. Bu durumda $K \leq_c M$ ve K nın Goldie boyutu sonlu ise K, M nin bir dik toplananıdır.*

İspat. U, K nın bir maksimal düzgün altmodülü olsun. Önerme 1.2.14 den, U, M nin bir maksimal düzgün altmodülüdür. O halde, varsayımdan $M = U \oplus U'$ olacak biçimde bir $U' \leq M$ vardır. Böylece $K = U \oplus (K \cap U')$ dür. Yine Önerme 1.2.14 den, $K \cap U' \leq_c M$ dir. $K \cap U'$ nün Goldie boyutunun K nın Goldie boyutundan küçük olduğu açıktır. Tümevarımla $K \cap U'$ altmodülü M nin ve böylecede U' nün bir dik toplananıdır. Buradan K, M nin bir dik toplananıdır. □

Sonuç 2.1.6 *M sonlu Goldie boyutlu bir modül olsun. Bu durumda M nin CS-modül olması için gerekli ve yeterli koşul her maksimal düzgün altmodülün bir dik toplanan olmasıdır.*

İspat. Önerme 2.1.5 den elde edilir. □

Şimdi CS-modüllerin bir dik toplamının CS-modül olması için yeterli koşullar verelim. Bu amacımız için gerek duyacağımız tanımları hatırlatarak başlayalım.

R bir halka ve M, X de R-modüller olsun. Eğer her $N \leq M$ için,

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"] & M \text{ .....} tam \\ & X & \end{tikzcd}$$

şeklinde verilen R-modül ve R-homomorfizmlerin her diyagramında $\theta\alpha = \varphi$ olacak biçimde bir $\theta : M \to X$, R-homomorfizmi varsa, X modülüne M**-injektif 'tir** denir. $M = M_1 \oplus M_2 \oplus ... \oplus M_n$ olsun. Eğer $i \neq j$ için M_i modülü M_j-injektif ise M_i $(1 \leq i \leq n)$ modüllerine **göreceli injektif** (relatively injective) modüller denir. [11],[22].

Önteorem 2.1.7 *M_1 ile M_2, CS-modüller ve $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. Bu durumda M nin CS-modül olması için gerek ve yeter koşul M nin $K \cap M_1 = 0$ yada $K \cap M_2 = 0$ olacak biçimdeki her K komplementinin bir dik toplanan olmasıdır.*

İspat. Gereklilik açıktır. Tersine $K \cap M_1 = 0$ yada $K \cap M_2 = 0$ olan her K komplementi M de bir dik toplanan olsun. $L \leq_c M$ alalım. Bir $H \leq_c L$ vardır ki, $L \cap M_2 \leq_e H$ dir. Önerme 1.2.14 den, $H \leq_c M$ dir. $H \cap M_1 = 0$ olduğu açıktır. Varsayımdan $M = H \oplus H'$ olacak biçimde bir $H' \leq M$ vardır. Böylece $L = H \oplus (L \cap H')$ dür. Önerme 1.2.14 den, $L \cap H' \leq_c M$ dir. Diğer yandan $(L \cap H') \cap M_2 = 0$ olduğu açıktır. Varsayımdan $L \cap H'$, M nin bir dik toplananıdır. Buradan $L \cap H'$, H' nün de bir dik toplananı olur. O halde L, M nin bir dik toplananıdır. Yani M, CS-modüldür. $\square$

Teorem 2.1.8 *M_i $(1 \leq i \leq n)$ ler göreceli injektif modüller olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2 \oplus ... \oplus M_n$ olsun. Bu durumda M nin CS-modül olması için gerek ve yeter koşul her bir $1 \leq i \leq n$ için M_i modülünün CS-modül olmasıdır.*

İspat. Gereklilik Önteorem 2.1.2 den açıktır. Tersine her bir $1 \leq i \leq n$ için M_i bir CS-modül olsun. Tümevarımla ispatı tamamlayacağız. Bunun için $n = 2$

durumunda M nin CS-modül olduğunu ispatlamak yetecektir. $K \cap M_1 = 0$ olacak biçimde bir $K \leq_c M$ alalım. [11, Önteorem 7.5] den, $M = M_1 \oplus M'$ ve $K \subseteq M'$ olacak biçimde bir $M' \leq M$ vardır. Açıktır ki, $M' \cong M_2$ ve böylece de M' bir CS-modüldür. $K \leq_c M'$ olduğundan K, M' nün bir dik toplananıdır. Buradan K, M nin bir dik toplananıdır. Benzer olarak $X \cap M_2 = 0$ olacak biçimdeki herhangi bir $X \leq_c M$ de bir dik toplanandır. Böylece Önerme 2.1.7 den, M bir CS-modüldür. □

Herhangi bir p asal tamsayı için $\mathbb{Z}$-modül $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p \oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^3$ ün bir CS-modül olmadığını biliyoruz. $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^3$ modülü $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p$-injektiftir ancak $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p$ modülü $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^3$-injektif değildir. Diğer yandan, $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p$ modülü $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^2$-injektif olmadığı halde $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p \oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^2$ modülü CS-modüldür. (bakınız, [11])

Bir sonraki Teorem CS-modüllerin karekterizasyonundaki en temel sonuçlardan birisidir. Bu teoremde ve ilgili kimi sonuçlarda sıkça kullanacağımız tanımları vermemiz uygun olacaktır.

Tanım 2.1.9 *R bir halka ve M bir R-modül olsun. Bu durumda, $Z(M) = \{m \in M : \text{bir } E \leq_e R_R \text{ için } mE = 0\}$ kümesi M nin bir altmodülüdür ki, buna M nin **singular** (tekil) altmodülü denir. $Z(M) = 0$ ise M ye **nonsingular** (tekil olmayan), $Z(M) = M$ ise M ye **singular** (tekil) modül denildiğini hatırlayalım. Yine bir M modülü için $Z_2(M) = \{m \in M : \text{bir } E \leq_e R_R \text{ için } mE \subseteq Z(M)\}$ kümesi M nin bir altmodülüdür ki, buna M nin **ikinci (second) singular** (ikinci tekil) altmodülü denir. Açıktır ki, $Z(M) \leq Z_2(M)$ ve $Z_2(M) \leq_c M$ dir. $Z(M)$ ve $Z_2(M)$ ye ilişkin kapsamlı sonuç ve özellikler [13], [9] de verilmiştir.*

Teorem 2.1.10 *R bir halka olsun. Bu durumda bir R-modül M nin CS-modül olması için gerek ve yeter koşul M' ve $Z_2(M)$, CS-modüller ve $Z_2(M)$, M'-injektif olacak biçimde bir $M' \leq M$ vardır ki, $M = M' \oplus Z_2(M)$ dir.*

İspat. M, CS-modül olsun. $Z_2(M) \leq_c M$ olduğundan $M = Z_2(M) \oplus M'$ olacak biçimde bir $M' \leq M$ vardır ki, M' nonsingular 'dır. O halde Önteorem 2.1.2

den $Z_2(M)$ ve M' CS-modüllerdir. Şimdi $X \leq M'$ ve $\varphi : X \to Z_2(M)$ bir homomorfizm olsun. $X' = \{x - \varphi(x) : x \in X\}$ kümesini oluşturalım. $X' \leq M$ dir. Varsayımdan $X' \leq_e L$ olacak biçimde M nin bir L dik toplananı vardır. $Y \leq M$ için $M = L \oplus Y$ yazalım. $X' \cap Z_2(M) = 0$ ve $X' \leq_e L$ olduğundan L nonsingular 'dır ve $Z_2(M) = Z_2(Y)$ dir. Böylece $Z_2(M)$, Y nin bir dik toplananıdır. $Y = Y' \oplus Z_2(M)$ olarak yazalım. $\pi : L \oplus Y' \oplus Z_2(M) \to Z_2(M)$ kanonik projeksiyon olsun. $\pi|_X = \varphi$ olduğu açıktır. O halde $Z_2(M)$, M'-injektiftir.
Tersine $M = Z_2(M) \oplus M'$, $Z_2(M)$ ile M', CS-modüller ve $Z_2(M)$, M'-injektif olsun. $A \leq_c M$ olarak alalım. $Z_2(A) \leq_c A$ olduğundan $Z_2(A) \leq_c M$ dir. O halde $Z_2(A) \leq_c Z_2(M)$ dir. Böylece $Z_2(A)$, $Z_2(M)$ nin bir dik toplananıdır ki, buradan $Z_2(A)$, A nın bir dik toplananı olarak bulunur. $A = Z_2(A) \oplus B$ olarak yazalım. Burada B nonsingular 'dır. $B \cap Z_2(M) = 0$ ve $Z_2(M)$, M'-injektif olduğundan bir $\theta : M' \to Z_2(M)$ homomorfizmi vardır ki, $\pi_1 : M \to Z_2(M)$ ve $\pi_2 : M \to M'$ projeksiyon dönüşümler olmak üzere $\theta\pi_2|_B = \pi_1|_B$ dir. O halde $B \subseteq N' = \{n + \theta(n) : n \in M'\}$ dür. $N' \cong M'$ ve M', CS-modül olduğundan N' de CS-modüldür. Böylece B, N' nün bir dik toplananıdır. $M = Z_2(M) \oplus N'$ olduğu açıktır. Buradan A, M nin bir dik toplananıdır. $\square$

Tanım 2.1.11 *M bir sağ R-modül olsun. Herhangi bir $m \in M$ için $r(m) = \{r \in R : mr = 0\}$ ye M nin* ***sağ sıfırlayıcısı*** *denir. $r(m)$ nin R de sağ ideal olduğu açıktır.*

Şimdi ispatsız vereceğimiz Teoremin 3. bölümde bir genelleştirmesi verilmiştir.

Teorem 2.1.12 *R bir halka ve M_R de bir modül olsun. R, $r(m)$ lerde ACC yi sağlar ve M_R de CS-modül ise, M_R düzgün altmodüllerin bir dik toplamıdır.*

Tanım 2.1.13 *M bir sağ R-modül olsun. Eğer M nin her altmodülü sonlu üretilmiş ise M ye* ***yerel Noether*** *denir.*

Sonuç 2.1.14 *R bir halka, M_R de bir yerel Noether CS-modül olsun. Bu durumda M düzgün altmodüllerin bir dik toplamıdır.*

İspat. M_R bir yerel Noether CS-modül olsun. $m \in M$ alalım. $R/r(m) \cong mR$ dır. M yerel Noether olduğundan sonlu üretilmiş her altmodülü Noetherdir ve Noetherlik izomorfizma altında invariantdir. Bu durumda mR ve $R/r(m)$ Noether R-modüllerdir. Buradan $x \in M$ olmak üzere R, $r(x)$ üzerinde ACC yi sağlar. Teorem 2.1.12 den de M nin düzgün altmodüllerin bir dik toplamı olduğunu elde ederiz. □

2.2 Nonsingular CS-Modüller

Bu kesimde Teorem 2.1.10 dan dolayı nonsingular CS-modülleri ve matris halkalarını inceleyeceğiz. Nonsingular modüllerin en temel özelliğini veren aşağıdaki önteorem ile başlayalım.

Önteorem 2.2.1 *1. M_R bir nonsingular modül olsun. Bu durumda M nin her alt modülünün M deki kapanışı tektir.*

2. M_R modülünde her alt modülün kapanışı tek olsun. $K, K', L, L' \leq M$ ve $K \leq_e K'$, $L \leq_e L'$ ise $K + L \leq_e K' + L'$ dür.

İspat. (1): $N \leq M$ alalım. $c(N) = \{m \in M$: bir $E \leq_e R_R$ için $mE \leq N\}$ diyelim. O halde, $c(N) \leq M$ ve $N \leq c(N)$ dir. $N \leq_e K \leq_c M$ olacak biçimde $K \leq M$ vardır. $0 \neq x \in K$ alalım. $N \leq_e K$ olduğundan $xR \cap N \neq 0$ dır. Buradan $E = x^{-1}N = \{r \in R : xr \in N\} \leq_e R_R$ olur. Böylece $xE \leq N$ dır. $x \in c(N)$ dir. Yani $K \leq c(N)$ elde edilir. Şimdi $0 \neq a \in c(N)$ olsun. Buradan $aI \leq N$ olacak biçimde $I \leq_e R_R$ vardır. $Z(M) = 0$ olduğundan $aI \neq 0$ dır. $aI \leq N \cap aR \leq K \cap aR$ olduğundan $K \cap aR \neq 0$ dır. O halde, $K \leq_e c(N)$ dır. $K \leq_c M$ olduğundan $K = c(N)$ bulunur. Böylece $c(N)$, N nin M_R deki tek kapanışıdır.

(2): $K, L \leq M$ olduğundan $K + L \leq M$ dür. Buradan M_R de her altmodülün kapanışı tek olduğundan $K + L \leq_e H$ olacak şekilde bir $H \leq_c M$ vardır ve tektir. Yine $K \leq_e J \leq_c H$ olacak şekilde bir $J \leq H$ vardır. $H \leq_c M$ olduğundan

$J \leq_c M$ dir. $K \leq_e K'$ olduğundan ise $K' \leq J \leq H$ dir. Benzer olarak $L' \leq H$ dir. O halde, $K + L \leq_e K' + L'$ bulunur. □

Önteorem 2.2.1 (1) den örneğin nonsingular modüllerin sağladığı her altmodülün essential olarak kapsandığı komplementin tek olması özelliği yani her altmodülün kapanışının tek olduğu modüller sınıfının kendisi ilginçtir. Bu modüller ***UC-modül*** adı altında [26] de ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Önteorem 2.2.2 *M_R bir modül ve $K \leq M_R$ olsun. Bu durumda M/K nın nonsingular modül olması için gerek ve yeter koşul $m \in M$ ve $E \leq_e R_R$ için $mE \leq K$ ise $m \in K$ dır.*

İspat. M/K nonsingular modül ve $m \in M$ ve $E \leq_e R_R$ için $mE \leq K$ olsun. Buradan $(m + K)E = 0$ dır. Ayrıca N/K nonsingular olduğundan $(m + K) = 0$ dır. Böylece $m \in K$ elde edilir.
Tersine $mE \leq K$ ise $m \in K$ olsun. $x \in Z(M/K)$ alalım. O halde $y \in M$ olmak üzere $x = y + K$ dır ve bir $F \leq_e R_R$ için $(y + K)F = 0$ olur. Bu durumda $yF + K = 0$ ise $yF \leq K$ dır ve buradan $y \in K$ dır. Böylece $x \in K$ dır. Yani M/K da $x = 0$ dır. O halde M/K nonsingular modüldür. □

Önteorem 2.2.3 *M_R bir nonsingular modül ve $K \leq M_R$ olsun. Bu durumda K nın M de komplement olması için gerek ve yeter koşul M/K nın nonsingular modül olmasıdır.*

İspat. M/K nonsingular modül ve $K \leq_e N \leq M$ olsun. O halde $N/K = Z(N/K) \leq Z(M/K) = 0$ olur. Buradan $N/K = 0$ dır. Yani $N = K$ elde edilir. Böylece K, M de komplementtir.
Tersine K, M de komplement olsun. M/K nın nonsingular modül olmadığını kabul edelim. O halde bir $m \in M$ ve $m \notin K$ elemanı vardır ki, $mE \leq K$ ve $E \leq_e R_R$ dır. $r \in R$ ve $k \in K$ için $mr + k$ elemanını ele alalım. $F = \{s \in R : rs \in E\}$ kümesini düşünürsek, $F \leq_e R_R$ ve $(mr + k)F \leq K$ dır. Eğer $(mr + k) \neq 0$ alırsak, $(mr + k)F \neq 0$ olur ve buradan $K \cap (mr + k)F \neq 0$

olur. Bu durumda $K \leq_e mR+K$ olur. Bu ise K nın M de komplement olmasıyla çelişir. Dolayısıyla M/K nonsingular modüldür. □

Şimdi CS özelliğinin nonsingular koşulu ile birlikte olsa dahi dik toplamlara taşınmadığına ilişkin iki temel örnek verelim.

Örnek 2.2.4 $R_R = \left[\begin{smallmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 0 & \mathbb{Z} \end{smallmatrix}\right]$ *modülü CS-modül değildir.*

İspat. R_R nin nonsingular modül olduğu açıktır. $M_1 = \left[\begin{smallmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ ve $M_2 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{Z} \end{smallmatrix}\right]$ olarak alırsak $R_R = M_1 \oplus M_2$ olur. M_1 ve M_2 düzgün modüller olduğundan CS-modüllerdir. Fakat R_R, CS-modül değildir. Gerçekten, $u = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right] \in R$ alalım. $uR = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 0 & \mathbb{Z} \end{smallmatrix}\right] = \{\left[\begin{smallmatrix} 0 & x \\ 0 & 2x \end{smallmatrix}\right] : x \in \mathbb{Z}\}$ olup uR, R nin düzgün altmodülüdür ve böylece $dim(uR) = 1$ dir. $dimR = 2$ ve $dim(uR) = 1$ olduğundan $uR \nleq_e R$ dir. Diğer yandan, eğer R, CS-modül olsaydı $uR \leq_e eR$ olacak biçimde bir $e^2 = e \in R$ olurdu. Buradan $u \in R$ olduğundan $u \in eR$ dir. O halde, $r \in R$ için $u = er$ ise $eu = er = u$ olur. Yani $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right]$ dır ve $\left[\begin{smallmatrix} 0 & a+2b \\ 0 & 2c \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right]$ elde edilir. Buradan $c = 1$ ve $a + 2b = 1$ bulunur. Böylece $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ olur. $\left[\begin{smallmatrix} a^2 & (a+1)b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ olup, $a = 0, 1$ elde edilir. $a = 0$ ise $b = 1/2 \notin \mathbb{Z}$ dir. Eğer $a = 1$ ise $e = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ olur. Buradan $eR = R$ bulunur. Fakat $uR \nleq_e R$ olduğu için bu bir çelişkidir. O halde R_R, CS-modül değildir. □

Örnek 2.2.5 $M_R = (\mathbb{Z}[x] \oplus \mathbb{Z}[x])_{\mathbb{Z}[x]}$ *modülü CS-modül değildir.*

İspat. Öncelikle M_R ın nonsingular modül olduğunu not edelim. $\mathbb{Z}[x]_{\mathbb{Z}[x]}$ düzgün modül olduğundan CS-modüldür. Şimdi $C = \{(xr, 2r) : r \in R\} \leq M_R$ modülünü ele alalım. Bu durumda $Z(M/C) = 0$ dır. Gerçekten, $(f, g) + C \in Z(M/C)$ olsun. O halde $[(f, g) + C]E = C$ olacak şekilde bir $E \leq_e R_R$ vardır. Yani $(fE, gE) \in C$ dir. Böylece $fE = xr$ ve $gE = 2r$ dir. Buradan $2f = xg$ olur. $f = x(g/2) \in R$ ve $g/2 \in R$ dir. Bu durumda $(f, g) + C = (x(g/2), g) + C = (x(g/2), 2(g/2)) + C = C$ olur. Yani $(f, g) \in C$ dir. $(f, g) + C = \bar{0}$ elde edilir. Dolayısıyla $Z(M/C) = 0$ dır. Önteorem 2.2.3 den $C \leq_c M_R$ dır. Farzedelim ki, C, M de dik toplanan olsun. O halde $M = C \oplus D$ olacak şekilde $D \leq M_R$

vardır. $\pi : M \to C$ kanonik projeksiyon olsun. $a \in C$, $b \in D$ olmak üzere $\pi(a,b) = a$ olarak tanımlansın. $\pi(1,0) = (xr, 2r)$ ve $\pi(0,1) = (xs, 2s)$ olsun. Böylece $(x,2) \in C$ için $(x,2) = \pi(x,2) = \pi(x,0) + \pi(0,2) = x\pi(1,0) + 2\pi(0,1) = x(xr,2r) + 2(xs,2s) = (x^2r + 2xs, 2xr + 4s)$ olur. Buradan $1 = xr + 2s$ dır. yani $R = xR + 2R$ dir. Bu ise çelişkidir. Dolayısıyla M_R, CS-modül değildir. $\square$

Tanım 2.2.6 *R bir halka olsun. Eğer her $a \in R$ için $a = axa$ olacak biçimde bir $x \in R$ varsa R ye* ***(von Neumann) regular (düzenli)*** *halka denir.*

R düzenli bir halka ise R nin her sonlu üretilmiş sağ-ideali R nin bir dik toplananıdır. Yani idempotentle üretilmiştir [14]. Bu kullanışlı sonuçla birlikte aşağıdaki sonuç, regular halkaların en temel özelliklerindendir.

Sonuç 2.2.7 *R bir düzenli halka ise R_R modülü nonsingulardır.*

İspat. R düzenli halka olduğundan $a \in R$ için aR, R de dik toplanandır. $x \in Z(R)$ alalım. Bu durumda xR, R serbest modülünün dik toplananı olacağından xR projektif modüldür. Böylece;

$$0 \longrightarrow r(x) \longrightarrow R \xrightarrow{f} xR$$

tam dizisi xR projektif olduğunan Sonuç 1.2.20 den $R = r(x) \oplus xR$ olur. Buradan $r(x)$, R nin dik toplananıdır. Dolayısıyla $r(x)$, R nin komplement altmodülüdür. $x \in Z(R)$ olduğundan $r(x) \leq_e R$ dir. Önerme 1.2.13 den $r(x) = R$ olur. Buradan $xR = 0$ olup $x = 0$ dır. Yani $Z(R) = 0$ bulunur. Böylece R_R modülü nonsingulardır. $\square$

Yukarıda verilen Örnek 2.2.4 ve Örnek 2.2.5 in sonuçları olarak CS olma özelliğinin polinom halkalarına taşınıp taşınmayacağı ve CS özelliğinin Morita invariant bir özellik olup olmadığını araştırmak doğaldır ki, bundan sonraki sonuçlarımız bu doğrultuda olacaktır.

Tanım 2.2.8 *$(\mathcal{P})$ bir halka özelliği olsun. Eğer bir R halkası için aşağıdaki koşullar sağlanırsa $(\mathcal{P})$ özelliğine* ***Morita invariant*** *denir.*

1. *R halkasının $(\mathcal{P})$ yi sağlaması $M_n(R)$ $(n \geq 2)$ halkasının da $(\mathcal{P})$ yi sağlamasını gerektirir.*

2. *$R = ReR$ yi sağlayan her $e^2 = e \in R$ için R halkası $(\mathcal{P})$ yi sağlarsa eRe modülüde $(\mathcal{P})$ yi sağlar.*

Bu bölümün sonuna kadar vereceğimiz sonuçlarımızda, aksi belirtilmedikçe R bir birimli halka ve bir $e^2 = e \in R$ için $R = ReR$, $S = eRe$ de R nin althalkası olarak alınacaktır. Eğer M bir sağ R-modül ise Me de bir sağ R-modüldür.

Önteorem 2.2.9 *M bir R-modül $K, K' \leq M_R$ ve $N, N' \leq (Me)_S$ olsun. Bu durumda, aşağıdaki koşullar sağlanır.*

1. *$K = KeR$ ve $N = NRe$ dir.*

2. *$K \cap K' = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $Ke \cap K'e = 0$ olmasıdır.*

3. *$N \cap N' = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $NR \cap N'R = 0$ olmasıdır.*

İspat. (1): $K \leq M$ olduğundan $K = KR = KReR = KeR$ dir. Benzer şekilde $N \leq (Me)_S$ ve $Ne = N$ olduğundan $N = NS = NeRe = NRe$ elde edilir.
(2): İlk olarak $K \cap K' = 0$ olsun. Bu durumda $Ke \cap K'e \leq K \cap K' = 0$ olduğundan $Ke \cap K'e = 0$ olur.
Tersine $Ke \cap K'e = 0$ olsun. $x \in K \cap K'$ alalım. Böylece $x \in K$ ve $x \in K'$ olduğundan $xRe \leq Ke \cap K'e = 0$ olur. Yani $xRe = 0$ dır. Buradan $xReR = 0$ bulunur. O halde, $xR = 0$ olup R birimli olduğunda $x = 0$ elde edilir. Yani $K \cap K' = 0$ olur.
(3): Bu denkliğin ispatı (1) ve (2) den açıktır. □

Sonuç 2.2.10 *M_R bir modül ve $L \leq M_R$ olsun. Bu durumda $L \leq_e M_R$ olması için gerek ve yeter koşul $Le \leq_e (Me)_S$ olmasıdır.*

İspat. $L \leq_e M_R$ olsun. $0 \neq N \leq (Me)_S$ alalım. $NR \leq M$ olduğundan $L \cap NR \neq 0$ olur. Buradan $Le \cap NRe \neq 0$ olup $Le \cap N \neq 0$ elde edilir. Böylece $Le \leq_e (Me)_S$

dir.

Tersine $Le \leq_e (Me)_S$ olsun. $0 \neq K \leq M_R$ alalım. Önteorem 2.2.9 (1) den $K = KeR$ dir. Böylece $0 \neq Ke \leq (Me)_S$ dir. Kabulümüzden $Ke \cap Le \neq 0$ olur. $Ke \cap Le \leq K \cap L$ olduğundan $K \cap L \neq 0$ dır. Dolayısıyla $L \leq_e M_R$ bulunur. □

Önteorem 2.2.11 *M bir R-modül ve $L, N \leq (Me)_S$ olsun. Bu durumda L, N nin $(Me)_S$ de bir komplementi olması için gerek yeter koşul LR, NR nin M_R de bir komplementi olmasıdır.*

İspat. İlk olarak L, N nin $(Me)_S$ de bir komplementi olsun. Bu durumda $L \cap N = 0$ olur. Böylece $LR \cap NR = 0$ dır. Şimdi $LR \leq K \leq M_R$ ve $K \cap NR = 0$ olsun. Önteorem 2.2.9 (1) den $L = LRe \leq Ke \leq Me$ dır. $Ke \cap N \leq K \cap NR = 0$ olur. O halde $L = Ke$ ve $LR = KeR = K$ dır. Yani LR, NR nin M_R de bir komplementidir.

Tersine LR, NR nin M_R de bir komplementi olsun. Buradan $LR \cap NR = 0$ olur ve $L \cap N = 0$ dır. $L \leq H \leq (Me)_S$ ve $H \cap N = 0$ olsun. O halde $LR \leq HR \leq M_R$ ve $HR \cap NR = 0$ dır. Varsayımdan $LR = HR$ olur. Böylece $LRe = HRe$ olup $L = H$ elde edilir. Dolayısıyla L, N nin $(Me)_S$ de bir komplementidir. □

Sonuç 2.2.12 *M_R bir modül ve $L \leq M_R$ olsun. Bu durumda $L \leq_c M_R$ olması için gerek ve yeter koşul $Le \leq_c (Me)_S$ olmasıdır.*

İspat. Önteorem 2.2.11 deki gibi benzer şekilde yapılır. □

Önteorem 2.2.13 *M bir R-modül ve $K \leq M_R$ olsun. Bu durumda K nın M_R de dik toplanan olması için gerek ve yeter koşul Ke nin $(Me)_S$ de dik toplanan olmasıdır.*

İspat. Önteorem 2.2.9 kullanılarak elde edilir. □

Teorem 2.2.14 *M bir R-modül olsun. M_R nın bir CS-modül olması için gerek ve yeter koşul $(Me)_S$ nin bir CS-modül olmasıdır.*

İspat. İspat Sonuç 2.2.12 den ve Önteorem 2.2.13 açıktır. □

Sonuç 2.2.15 *R bir halka olsun. R nin sağ CS-halka olması için gerek ve yeter koşul Re nin sağ CS, eRe-modül olmasıdır.*

İspat. Teorem 2.2.14 de $M = R$ olarak alınarak ispatlanır. □

Sonuç 2.2.16 *T birimli bir halka ve $e = e_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}$ olmak üzere $R = M_n(T)$ olsun. Bu durumda R nin sağ CS-halka olması için gerek ve yeter koşul $T^n = \bigoplus_{i=1}^{n} T$ serbest modülünün sağ CS, T-modül olmasıdır.*

İspat. $R = Re_{11}R$ ve $e_{11}Re_{11} \cong T$ dir. Üstelik T modül olmak üzere $Re_{11} = Te_{11} + Te_{21} + ... + Te_{n1} \cong T^n$ olup Sonuç 2.2.15 den açıktır. □

R_R, CS-modül olsun. $Re = eRe \oplus (1 - e)Re$ şeklinde yazılabileceğinden Sonuç 2.2.15 den Re, CS-modüldür. Öte yandan eRe, Re nin dik toplananı olduğundan eRe de CS-modüldür. Böylece Tanım 2.2.8 nın (2). koşulu sağlanmış olur. Ancak $T = \mathbb{Z}[x]$ ve $R = M_2(T) = \begin{bmatrix} \mathbb{Z}[x] & \mathbb{Z}[x] \\ \mathbb{Z}[x] & \mathbb{Z}[x] \end{bmatrix}$ olarak alalım. Buradan $T^2_T = (\mathbb{Z}[x] \oplus \mathbb{Z}[x])_{\mathbb{Z}[x]}$ modülü CS değildir. Sonuç 2.2.16 dan $R = M_2(T)$, CS-halka değildir. Böylece CS özelliği Morita invariant değildir.

Diğer yandan, $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ modülü CS, $\mathbb{Z}$-modül olduğundan Sonuç 2.2.16 dan $M_2(\mathbb{Z})$ halkasıda CS tir. Ancak $M_2(\mathbb{Z})[x] \cong M_2(\mathbb{Z}[x])$ halkası CS değildir. Böylece R bir sağ CS halka iken $R[x]$ polinomlar halkası CS olmayabilir.

2.3 C_2 veya C_3 Koşullu Modüller

2. Bölümün son kesimi olarak bir modülün dik toplananları üzerinde verilen ve özellikle CS-modüler ile birlikte düşünüldüğünde modül teoride oldukça kullanılışlı sürekli ve yarı-sürekli modül sınıflarını tanımlayan koşulları vereceğiz. Bu bağlamda, bir M modülü için aşağıdaki koşulları ele alalım:

C_2: M nin bir dik toplananına izomorf olan her alt modül M nin bir dik toplananıdır.

C_3: M_1 ve M_2, $M_1 \cap M_2 = 0$ olacak biçimde dik toplananlar ise $M_1 \oplus M_2$ de M de dik toplanandır.

Tanım 2.3.1 *M bir CS-modül olsun. Eğer M, C_2 (C_3) koşulunu sağlıyorsa M ye* ***sürekli (yarı-sürekli)*** *modül denir.*

Yarıbasit modüller ve injektif modüller sürekli, düzgün modüller yarı-süreklidir. Aşağıdaki önermeden sürekli her modül yarı-süreklidir. Ancak tersi doğru olmayabilir.

Örnek 2.3.2 *$M_R = \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ olsun. M nin dik toplananları 0 ve M dir. O halde M, C_3 ü sağlar. M_R nin CS-modül olduğu açıktır. Şimdi $K = n\mathbb{Z}$ ($n \neq 0, 1$, $n \in \mathbb{Z}$) diyelim. $\varphi : K \to M$, $\varphi(nx) = x$ dönüşümü bir izomorfizmadır. Fakat K, M_R de dik toplanan değildir. Yani M, C_2 yi sağlamaz.*

Önerme 2.3.3 *M modülü C_2 koşulunu sağlarsa, bu durumda C_3 koşulunu da sağlar.*

İspat. K, L alt modülleri M nin dik toplananları ve $K \cap L = 0$ olsun. O halde bir $K' \leq M$ için $M = K \oplus K'$ dür. $\pi : M \to K'$ izdüşüm olsun. Yani $\pi(k + k') = k$ ($k \in K$, $k' \in K'$) olarak tanımlansın. $K \cap L = 0$ olduğundan $\pi(L) \cong L$ ve $\pi(L) \leq K'$ dır. C_2 koşulundan, $\pi(L)$, M nin bir dik toplananıdır. O halde $M = \pi(L) \oplus L'$ olacak biçimde bir $L' \leq M$ vardır. Böylece $K' = \pi(L) \oplus (K' \cap L')$ ve $M = K \oplus \pi(L) \oplus (K' \cap L')$ dür. Buradan $K \oplus \pi(L)$, M nin bir dik toplananıdır. Oysa $K \oplus L = K \oplus \pi(L)$ dir. O halde $K \oplus L$, M nin bir dik toplananıdır. Böylece M, C_3 koşulunu sağlar. □

Önerme 2.3.4 *[22, Önerme 2.10] $M_1 \oplus M_2$ modülü yarı-sürekli ise M_1 ve M_2 modülleri göreceli injektiftir.*

Önerme 2.3.4 ten hareketle C_2, C_3 ve CS özelliklerinin belirli alt modüllerden modüle olan dönüşümlerin, modülün kendisine genişletilmesi biçimindeki karekterizasyonları anlamlı olacaktır.

Önerme 2.3.5 *M modülü C_3 ü sağlar ancak ve ancak her K_1, K_2 dik toplananları için, her $\varphi : K_1 \oplus K_2 \to M$ homomorfizmi bir $\theta : M \to M$ homomorfizmine genişletilebilir.*

İspat. Gereklilik açıktır. Tersine her $K = K_1 \oplus K_2$ (K_1, K_2, M nin dik toplananları) alt modülü için, her $\varphi : K \to M$ homomorfizmi bir $\theta : M \to M$ homomorfizmine genişletilebilsin. N_1, N_2 alt modülleri M nin $N_1 \cap N_2 = 0$ olacak biçimde dik toplananları olsun. O halde $M = N_1 \oplus L_1 = N_2 \oplus L_2$ olacak biçimde L_1, $L_2 \leq M$ vadır. $\varphi : N_1 \oplus N_2 \to M$, $\varphi(x + y) = x$ ($x \in N_1$, $y \in N_2$) homomorfizmi olsun. Varsayımdan, $\theta(x + y) = x$ ($x \in N_1$, $y \in N_2$) olacak biçimde bir $\theta : M \to M$ homomorfizmi vardır. $\pi : M \to N_1$ izdüşüm fonksiyonu olsun. $\chi = \pi\theta : M \to N_1$ diyelim. O halde χ bir homomorfizmdir ve $x \in N_1$ için $\chi(x) = \pi\theta(x) = \pi(x) = x$ dir. $M = N_1 \oplus (\text{Ç}ek\chi)$ ve $N_2 \subseteq \text{Ç}ek\chi$ olduğu açıktır. Şimdi $\text{Ç}ek\chi = N_2 \oplus (\text{Ç}ek\chi \cap L_2)$ ve böylece $M = N_1 \oplus N_2 \oplus (\text{Ç}ek\chi \cap L_2)$ dir. Buradan M, C_3 ü sağlar. □

Önteorem 2.3.6 *K, M de bir komplement olsun. K, M nin bir dik toplananıdır ancak ve ancak K nın M debir L komplementi vardır ki $\varphi : K \oplus L \to M$ olan her homomorfizm bir $\theta : M \to M$ homomorfizmine genişletilebilir.*

İspat. Önteorem 2.3.5 deki gibi ispatlanır. □

Sonuç 2.3.7 *M modülü CS tir ancak ve ancak M deki her K komplementi için her $\varphi : K \oplus L \to M$ dönüşümü bir $\theta : M \to M$ homomorfizmine genişletilebilecek biçimde K nın M de bir L komplementi vardır.*

İspat. Önteorem 2.3.5 den elde edilir. □

Önteorem 2.3.8 *K, M nin bir dik toplananına izomorf olan alt modül olsun. Bu durumda K, M nin bir dik toplananıdır ancak ve ancak her $\varphi : K \to M$ homomorfizmi bir $\theta : M \to M$ homomorfizmine genişletilebilir.*

İspat. Önteorem 2.3.5 deki gibi ispatlanır. □

Sonuç 2.3.9 *M modülü C_2 yi sağlar ancak ve ancak M nin bir dik toplananına izomorf olan her K alt modülü için her $\varphi : K \to M$ homomorfizmi bir $\theta : M \to M$ homomorfizmine genişletilebilir.*

İspat. Önteorem 2.3.8 den elde edilir. □

3 CS-modüllerin Genelleştirmeleri

2.1 kesimde tanımı ve temel özellikleri verilmiş olan CS-modüllerin genelleştirmeleri araştırılmış ve halen bu yöndeki çalışmalar farklı araştırmacılar tarafından yürütülmektedir. Bu blümde, literatürde C_{11}ve C_{12}-modüller adıyla yer almış iki farklı genelleştirmeyi inceleyeceğiz.

3.1 C_{11}-modüller

Bu kesim C_{11}-modüllerin temel özelliklerini kapsayacak ve örnekler içerecektir. Bu yöndeki ayrıntılı sonuçlar için [28] önerilir.

Tanım 3.1.1 *M bir sağ R-modül olsun. Eğer M nin her N alt modülünün M de dik toplanan olan bir komplementi varsa M ye bir (sağ)* $\mathbf{C_{11}}$***-modül*** *denir. Yani $\forall N \leq M \Rightarrow \exists D \leq M \ni M = D \oplus S$, $N \cap D = 0$ ve D maksimaldir.*

CS-modüller için aşağıdaki gerek ve yeter koşulu ispatlayalım.

Önteorem 3.1.2 *M modülü CS tir ancak ve ancak her N, $L \leq M$ ve $N \cap L = 0$ için M nin bir dik toplanan alt modülü K vardır öyle ki $L \leq K$ ve $N \cap K = 0$ dır. Bu durumda $N \oplus K$ alt modülü M de essentialdır.*

İspat. Önce M nin CS-modül olduğunu kabul edelim. N, $L \leq M$ ve $N \cap L = 0$ olsun. $L \leq K$ olacak biçimde N nin M de bir komplementi vardır. (Önerme 1.2.7) Hipotezden K, M nin bir dik toplananıdır. Tersine M nin verilen koşulları sağladığını kabul edelim. $L \leq_c M$ alalım. O halde L nin komplementi olduğu bir $N \leq M$ vardır. Hipotezden, $L \leq K$ ve $K \cap N = 0$ olacak biçimde bir K dik toplananı vardır. Böylece $L = K$ dır. Buradan her komplement bir dik toplanandır. Yani M, CS-modüldür. Önermenin ikinci kısmı Önerme 1.2.8 den elde edilir. □

Önteorem 3.1.3 *$N \leq M$ ve K, M nin bir dik toplananı olsun. Bu durumda K, N nin M de bir komplementidir ancak ve ancak $K \cap N = 0$ ve $K \oplus N \leq_e M$ dir.*

İspat. ($\Rightarrow$) Önerme 1.2.8 den elde edilir.

($\Leftarrow$) K ve N belirtilen özellikleri sağlasın. O halde bir $K^{'} \leq M$ için $M = K \oplus K^{'}$ dür. $K \subseteq K_1$ ve $K_1 \cap N = 0$ olacak biçimde bir $K_1 \leq M$ olsun. Bu durumda $K_1 = K_1 \cap M = K_1 \cap (K \oplus K^{'}) = K \oplus (K_1 \cap K^{'})$ dür. $0 \neq y \in (K_1 \cap K^{'})$ alalım. Buradan $0 \neq yr = n + k$ olacak biçimde $n \in N$, $k \in K$, $r \in R$ vardır. Böylece $yr - k = n \in K_1 \cap N = 0$ olup $yr = k \in K \cap K^{'} = 0$ çelişkisi elde edilir. O halde $K_1 \cap K^{'} = 0$ ve $K = K_1$ dir. K, N nin M deki bir komplementidir. □

Şimdi ispatlayacağımız önerme, CS-modüller için verilen Önteorem 3.1.2 nin C_{11}-modüllerdeki karşılığınıda kapsamaktadır.

Önerme 3.1.4 *Bir M modülü için aşağıdaki koşullar denktir.*

(i) *M, C_{11}-modüldür.*

(ii) *$L \leq_c M$ için L nin M deki komplementi olan bir K dik toplananı vardır.*

(iii) *$N \leq M$ için $N \cap K = 0$ ve $N \oplus K \leq_e M$ olacak biçimde M nin bir K dik toplananı vardır.*

(iv) *$L \leq_c M$ için $L \cap K = 0$ ve $L \oplus K \leq_e M$ olacak biçimde M nin bir K dik toplananı vardır.*

İspat. $(i) \Rightarrow (ii)$, $(iii) \Rightarrow (iv)$ açıktır.

$(i) \Leftrightarrow (iii)$, $(ii) \Leftrightarrow (iv)$ Önteorem 3.1.3 ten açıktır.

$(iv) \Rightarrow (i)$ $A \leq M$ olsun. $A \leq_e B \leq_c M$ olacak biçimde bir $B \leq M$ vardır. Hipotezden, $B \cap K = 0$ ve $B \oplus K \leq_e M$ olacak biçimde bir K dik toplananı vardır. Böylece, Önteorem 3.1.3 ten, K, B nin M deki bir komplementidir. $K \cap A = 0$ dır. $K^{'} \leq M$ ve $K \subset K^{'}$ kabul edelim. O halde $K^{'} \cap B \neq 0$ ve böylece $K^{'} \cap B \cap A \neq 0$ dır. Buradan $K^{'} \cap A \neq 0$ dır. Bu K nın M içinde A nın bir komplementi olduğunu verir. □

Önerme 3.1.4 ten bir CS-modülün C_{11}olduğu açıktır. Özel olarak düzgün modüller, yarıbasit modüller ve injektif modüller C_{11}koşulunu sağlar. Diğer yandan,

Sonuç 3.1.5 *M ayrıştırılamaz bir modül olsun. M, C_{11}-modüldür ancak ve ancak M düzgündür.*

İspat. ($\Leftarrow$) Açıktır.

($\Rightarrow$) $0 \neq N \leq M$ olsun. C_{11}varsayımından, N nin M deki komplementi olacak biçimde bir K dik toplananı vardır. M ayrıştırılamaz olduğundan $K = 0$ ve böylece $N \leq_e M$ dir. O halde M düzgün modüldür. □

Teorem 3.1.6 *[28, Teorem 2.4] C_{11}modüllerin herhangi bir dik toplamıda C_{11}-modüldür.*

İspat. $\lambda \in \Lambda$ için M_λ, boştan farklı C_{11}-modüllerin bir ailesi olsun. $M = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ diyelim. N, M nin herhangi bir altmodülü olsun. Bu durumda, M_λ C_{11}-modül ve $N \cap M_\lambda$, M_λ nın bir altmodülüdür. Önerme 3.1.4 ten M_λ nın bir K_λ dik toplananı $(N \cap M_\lambda) \cap K_\lambda = 0$ ve $(N \cap M_\lambda) \oplus K_\lambda$, M_λ nın essential bir altmodülü olacak biçimde vardır. Buradan, $N \cap K_\lambda = 0$, $(N \oplus K_\lambda) \cap M_\lambda = (N \cap M_\lambda) \oplus K_\lambda$ ve $(N \oplus K_\lambda) \cap M_\lambda$, M_λ nın essential bir altmodülüdür. Λ', Λ nın boştan farklı λ yı içeren bir alt kümesi, $M' = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda'} M_\lambda$ nin bir K' dik toplananı $N \cap K' = 0$ ve $(N \oplus K') \cap M'$, M' de essential altmodül olacak şekilde var olsun. $\Lambda \neq \Lambda'$ varsayalım. $\mu \in \Lambda$, $\mu \notin \Lambda'$ alalım. Böylece, $L = (N \oplus K') \cap M_\mu$, M_μ nün bir altmodülüdür ve dolayısıyla M_μ nün bir K_μ dik toplananı $L \cap K_\mu = 0$ ve $L \oplus K_\mu$, M_μ nün essential bir altmodülü olacak şekilde vardır. $\Lambda'' = \Lambda' \cup \{\mu\}$ ve $M'' = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda''} M_\lambda = M' \oplus M_\mu$ diyelim. Buradan, $K' \cap K_\mu = 0$ dır. $K'' = K' \oplus K_\mu$ olsun. K'', M'' nün bir dik toplananıdır ve $N \cap K'' = 0$ olur.

$N \oplus K''$ altmodülünü ele alalım. $(N \oplus K'') \cap M'$, $(N \oplus K') \cap M'$ nü içerir ve dolayısıyla $(N \oplus K'') \cap M'$, M' nün essential bir altmodülü olur. Ayrıca, $(N \oplus K'') \cap M_\mu = (N \oplus K' \oplus K_\mu) \cap M_\mu = [(N \oplus K') \cap M_\mu] \oplus K_\mu = L \oplus K_\mu$ ve $(N \oplus K'') \cap M_\mu$, M_μ nün essential bir altmodülüdür. Buradan, $(N \oplus K'') \cap M''$, M'' nün essential bir altmodülüdür. Böyle devam ederek, M nin bir K dik toplananını $N \cap K = 0$ ve $N \oplus K$, M nin essential altmodülü olacak şekilde buluruz. Önerme 3.1.4 ten, M, C_{11}-modüldür. □

Teorem 3.1.6 dan özellikle $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p \oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^3$ grubu C_{11}-modüldür. Bu modülün CS-modül olmadığını biliyoruz. (Örnek 2.1.4)

Sonuç 3.1.7 *CS-modüllerin herhangi dik toplamı C_{11}-modüldür.*

İspat. Teorem 3.1.6 den elde edilir. □

Sonuç 3.1.8 *Uniform modüllerin herhangi dik toplamı C_{11}-modüldür.*

İspat. Sonuç 3.1.8 ten elde edilir. □

Teorem 3.1.9 *[28] $M_{\mathbb{Z}}$ düzgün modüllerin bir dik toplamı olsun. Bu durumda M nin her dik toplananıda düzgün alt modüllerin bir dik toplamıdır.*

Genel olarak C_{11}koşulunu sağlayan bir modülün dik toplananları C_{11}-modül olmak zorunda değildir [28]. Ancak Teorem 3.1.9 ve Teorem 3.1.6 dan M grubu düzgün alt modüllerin bir dik toplamı ise M nin her dik toplananı da C_{11}-modüldür.

3.2 C_{12}-modüller

Bu kesimde C_{11}-modüller sınıfını (ve böylece CS-modülleri) öz olarak kapsayan bir yeni modül sınıfı ile ilgileneceğiz. Bu türden modülün tanımı ile başlayalım.

Tanım 3.2.1 *M modülünün her N alt modülü için $\alpha : N \to K$, $\alpha(N) \leq_e K$ olacak biçimde M nin bir K dik toplananı ve α monomorfizması varsa M ye* ***$\mathbf{C_{12}}$-modül*** *denir.*

Tanım 3.2.1 in her alt modül yerine sadece komplement alt modüller olarak verilebileceğini göstereceğiz. Böylece, CS ve C_{12}modüllerin arasındaki gerektirme hemen belirlenmiş olacaktır.

Önteorem 3.2.2 *M modülü C_{12}koşulunu sağlar ancak ve ancak M nin her N komplement alt modülü için $\alpha(N) \leq_e K$ olacak biçimde bir K dik toplananı ve $\alpha : N \to K$ monomorfizması vardır.*

İspat. ($\Rightarrow$) Tanım 3.2.1 den açıktır.

($\Leftarrow$) M, komplementler için verilen özelliği sağlasın. $L \leq M$ olsun. O halde $L \leq_e N \leq_c M$ olacak biçimde $N \leq M$ vardır. Hipotezden, $\alpha(N) \leq_e K$ olacak biçimde bir K dik toplananı ve $\alpha : N \to K$ monomorfizması vardır. Ancak $\alpha(L) \leq_e \alpha(N)$ ve $\alpha(N) \leq_e K$ dan $\alpha(L) \leq_e K$ bulunur. Böylece M, C_{12}-modüldür. □

Önerme 3.2.3 *Bir M modülü C_{11}özelliğini sağlarsa, C_{12}özelliğini de sağlar.*

İspat. $N \leq M$ olsun. O halde $N \cap K' = 0$, $N \oplus K' \leq_e M$ ve $M = K \oplus K'$ olacak biçimde K, $K' \leq M$ vardır. $\pi : M \to K$ izdüşüm dönüşümü olsun. π nin N ye kısıtlanmışına α diyelim. Yani $\alpha = \pi|_N : N \to K$ dönüşümü olsun. O halde α bir monomorfizmadır. Şimdi $0 \neq k \in K$ alalım. Böylece $0 \neq kr = x + k'$ $(x \in N, k' \in K')$ olacak biçimde $r \in R$ vardır. Buradan, $kr = \pi(kr) = \pi(x+k') = \pi(x) = \alpha(x)$ dir. O halde her $0 \neq k \in K$ için $kR \cap \alpha(N) \neq 0$ dır. Bu $\alpha(N) \leq_e K$ olduğunu verir. Böylece M, C_{12}-modüldür. □

Önerme 3.2.3 ün tersi genel olarak doğru değildir. Yani, C_{12}-modülün, C_{11}-modül olması gerekmez. Örneğin $M'_{\mathbb{Z}} = \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}$ Specker grup olarak alınıp, $M_{\mathbb{Z}} = M' \oplus M''$, $M'' = E(M')$ denirse $M_{\mathbb{Z}}$, C_{12}-modül olup, C_{11}-modül değildir [28]. Burada hem $M'_{\mathbb{Z}}$ nin hem de $M_{\mathbb{Z}}$ nin sonlu olmayan gruplar olduğunu not edelim.

4 Extending Koşulları

Bu bölümde daha önce tanımladığımız CS-extending modüllerin, üzerinde çalışılmış ve bir sonraki bölümde kullanacağımız, bir çok genelleştirmelerinden bazıları üzerinde duracağız.

4.1 Tanım ve Gösterimler

Bu bölüm boyunca yine tüm halkalar birimli birleşmeli ve modüller birimli sağ modüller olarak alınacaktır.

Tanım 4.1.1 *[11] M bir modül olmak üzere, M nin herbir uniform altmodülü, M nin bir dik toplananında essential oluyorsa M ye* ***uniform extending*** *denir.*

Tanım 4.1.2 *[1] M bir modül olmak üzere, M nin herbir fully invariant altmodülü, M nin bir dik toplananında essential oluyorsa M ye* FI***-extending*** *denir.*

$\mathcal{S}(M)$ ile M modülünün tüm alt modüllerinin kümesini gösterelim.

Tanım 4.1.3 *[1] M bir modül ve* $\emptyset \neq \mathcal{C} \subseteq \mathcal{S}(M)$ *olsun. Bu durumda her bir* $X \in \mathcal{C}$ *için M nin bir D dik toplananı, X, D de essential olacak şekilde varsa M ye* $\mathcal{C}$***-extending*** *denir.*

Gerçekte, izomorfizmalar veya essential genişlemeler altında kapalı olmayan çok çeşitli $\mathcal{C}$ kümelerini düşünebiliriz. (Örneğin, $\mathcal{C} = \{\text{fully invariant altmodüller}\}$). O halde, $\mathcal{C} = \mathcal{S}(M)$ için M **extending**, $\mathcal{C} = \{X \in \mathcal{S}(M) \mid X, M \text{ de uniform}\}$ için M **uniform extending**, $\mathcal{C} = \{X \in \mathcal{S}(M) \mid X, M \text{ de fully invariant}\}$ için M FI**-extending** elde edilir.

Tanım 4.1.4 *[12] M bir modül olmak üzere, M nin bir X altmodülü, her bir* $e^2 = e \in End(M_R)$ *için* $eX \subseteq X$ *koşulunu sağlıyorsa* ***projeksiyon değişmez*** *olarak adlandırılır.*

Bu tanımdan, $\mathcal{H}X$, M modülünün $\{\alpha(x) \mid x \in X \text{ ve } \alpha \in \mathcal{H}\}$ kümesi tarafından üretilmiş altmodülü olmak üzere, $\mathcal{HI} = \{X \leq M \mid \mathcal{H}X \subseteq X, \emptyset \neq \mathcal{H} \subseteq \mathrm{End}(M_R)\}$ kümesini tanımlama gereksinimi duyulmuştur. Bu durumda $X \in \mathcal{PI}(M)$ (benzer şekilde, $X \in \mathcal{E}_M\mathcal{I}(M)$) demekle , $\mathcal{P} = \{e \mid e^2 = e \in \mathrm{End}(M_R)\}$ ve $\mathcal{E}_M = \mathrm{End}(M_R)$ olmak üzere, X, M nin projeksiyon değişmez (benzer şekilde, fully invariant) altmodülü olmasını söylemek denktir. Buradan eğer M, $\mathcal{C} = \mathcal{HI}(M)$ için $\mathcal{C}$-extending ise M, $\mathcal{HI}$-extending dir. Şunu da not edelim: $\mathcal{H} = \{1\}$ is M, extending; $\mathcal{H} = \mathcal{P}$ ise M, PI-extending ; $\mathcal{H} = \mathrm{End}(M_R)$ ise M, FI-extending dir.

R bir halka ve M bir sağ R-modül olsun. $\mathcal{A}_M$, M nin otomorfizmaları kümesi, $\mathcal{E}_M$, M nin endomorfizmaları halkası ve $\mathcal{P}_M$, M nin endomorfizmalar halkasının idempotent elemanlarının kümesi olsun.

Tanım 4.1.5 *[26] M bir modül olmak üzere, M nin her bir altmodülü için M de yalnız bir kapanış varsa, M ye UC**-modül** denir.*

Tanım 4.1.6 *R bir halka ve M bir sağ R-modül olsun. M nin bir X altmodülü, M nin $0 \neq a, b$ elemanlarına karşılık R nin bir r elemanı, $0 \neq ar$ ve $br \in X$ olacak şekilde vardır, koşulunu sağlıyorsa X e M de **yogundur** (yada **rasyoneldir**) denir.*

Tanım 4.1.7 *[35] M bir modül olmak üzere, M nin her bir essential altmodülü M de yoğun (rasyonel) ise M ye **polyform** denir.*

Tanım 4.1.8 *[34] Bir M modülünün herhangi iki dik toplananının kesişimi de bir dik toplanan oluyorsa, M ye **toplanan arakesit (SIP) özelliğine** sahiptir denir.*

R bir halka olmak üzere; R nin sol semicentral idempotentlerinin kümesi $S_l(R) = \{e^2 = e \in R \mid \text{ tüm } x \in R \text{ için}, xe = exe\}$ ve R nin sağ semicentral idempotentlerinin kümesi $S_r(R) = \{c^2 = c \in R \mid \text{ tüm } x \in R \text{ için}, cx = cxc\}$ olduklarını hatırlayalım. Ayrıca bir halkanın tüm idempotentleri central oluyorsa bu halkaya **Abel** deriz.

4.2 Özellikler

Bu kısımda, M nin $\mathcal{H}$-değişmez altmodülleri hakkında bir çok temel sonuçlar ve örnekler vereceğiz. Bu sonuçlar ve örnekler özellikle PI-extending özelliğini içeren elde edilmiş sonuçları destekler.

Önerme 4.2.1

1. *Eğer M ayrıştırılamaz ise $\mathcal{S}(M) = \mathcal{PI}(M)$ dir.*
2. *M dağılmalı modül ise $\mathcal{S}(M) = \mathcal{PI}(M)$ dir.*
3. *H, M nin ayrıştırılamaz bir altmodülü olsun. Bu durumda, $H \in \mathcal{PI}(M)$ dir ancak ve ancak $M = L \oplus N$ ise $H \subseteq L$ veya $H \subseteq N$ gerektirmesi sağlanır.*
4. *$M = R$ ve R Abel ise $\mathcal{S}(M) = \mathcal{PI}(M)$ dir.*

İspat.
1. $\{0, 1\} = \mathcal{P} \subseteq \mathcal{E}_M$ olduğundan $\mathcal{S}(M) = \mathcal{PI}(M)$ dir.
2. $X \leq M$ ve $e \in \mathcal{P}$ olsun. Buradan, $X = X \cap M = X \cap (eM \oplus (1-e)M) = (X \cap eM) \oplus (X \cap (1-e)M) = eX \oplus (1-e)X$ bulunur. Yani $eX \subseteq X$ dir. $\mathcal{S}(M) = \mathcal{PI}(M)$ elde edilir.
3. $H \in \mathcal{PI}(M)$ olduğundan, $H = (H \cap L) \oplus (H \cap N)$ dir. H ayrıştırılamaz olduğundan $H = H \cap L$ veya $H = H \cap N$ dir. Yani $H \subseteq L$ veya $H \subseteq N$ dir. $f^2 = f \in \mathcal{E}_M$ olsun. $M = fM \oplus (1-f)M$ yazarız. Hipotezden, $H \subseteq fM$ veya $H \subseteq (1-f)M$ bulunur. Eğer, $H \subseteq fM$ ise $fH \subseteq H$ olup ispat tamamlanır. O halde $H \subseteq (1-f)M$ kabul edelim, buradan $fH = \{0\} \subseteq H$, yani $H \in \mathcal{PI}(M)$ elde edilir.
4. Açıktır. □

Bir sonraki örneğimiz, *projektif değişmez altmodülleri fully invariant olmayan* modüllere ilişkindir.

Örnek 4.2.2
1. $M = R$ bölüm halkası olmayan bir basit bölge (simple domain: yani karakteristiği sıfır olan bir k cismi üzerinde $A_n(k)$, Weyl cebirleri [20, sf. 45]) olsun. Bu

durumda $\{\{0\}, R\} = \mathcal{E}_M\mathcal{I}(M) \subsetneq \mathcal{PI}(M) = \mathcal{S}(M)$ *dir.*

2. B*,* B_B *ayrıştırılamaz olan bir halka ve* B*, bir* $\emptyset \neq X \leq B$*,* B *de ideal olmayan* X *alt kümesini bulundursun. Yani* B *iki indeterminatelerde free halka veya bir bölüm halkası olmayan basit bölgedir.* I*,* B *nin* X *tarafından üretilen ideali olsun.* $M = R = \begin{bmatrix} B & B \\ B & B \end{bmatrix}$ *alalım. Bu durumda* $\mathcal{P} = \left\{0, \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid x, y \in B\right\}$ *olduğundan* $\begin{bmatrix} X & X \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *ve* $\begin{bmatrix} X & I \\ 0 & X \end{bmatrix} \in \mathcal{PI}(M)$ *olur. Fakat,* R *nin idealleri olmadıklarından ne* $\begin{bmatrix} X & X \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *ve ne de* $\begin{bmatrix} X & I \\ 0 & X \end{bmatrix}$ *fully invariant olmazlar.*

3. B *ve* X *ikinci şıktaki gibi olsunlar ve* $M = R = B \oplus B$ *alalım. Bu durumda* $X \oplus 0$*,* $0 \oplus X \in \mathcal{PI}(M)$ *dir. Ancak herikiside fully invariant değillerdir. Bu örnek Önerme 4.2.1(3) şıkkını gösterir.*

4. R *bir Abel halka olmak üzere* $M = R$ *alalım. Bu durumda herhangi bir* X *ideal olmayan sağ ideali için* $X \in \mathcal{PI}(M)$ *fakat* $X \notin \mathcal{E}_M\mathcal{I}(M)$ *(yani,* $X \ntrianglelefteq M$*) sağlanır.*

Önteorem 4.2.3 *[35, sf. 88] Bir* M *modülü polyform (yani,* $Z(M) = 0$*) ise bir* UC*-modül olur.*

Önerme 4.2.4 M *bir polyform modül ve* $\emptyset \neq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{E}_M$ *olsun. Eğer* $X \in \mathcal{HI}(M)$ *ve* K*,* X *in bir essential kapanışı ise* $K \in \mathcal{HI}(M)$ *olur.*

İspat. Önteorem 4.2.3 ten K, M de X in tek kapanışıdır. Şimdi tersine $K \notin \mathcal{HI}(M)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\alpha \in \mathcal{H}$ ve $k \in K$, $\alpha(k) \notin K$ olacak şekilde vardır. $L = k^{-1}X = \{r \in R \mid kr \in X\} \leq_e R$ olur. M polyform olduğundan X, K da yoğundur. O halde, $0 \neq \alpha(k)$ dan $0 \neq \alpha(k)L \subseteq \alpha(kL) \subseteq X$

elde edilir. Yani bir $r \in L$, $0 \neq \alpha(k)r = \alpha(kr) \in X$ olacak şekilde vardır. K, X in tek kapanışı olduğundan $\alpha(k) \in K$ dir ki bu çelişkidir. $\square$

4.3 Karaterizasyonlar

Bu bölümde herhangi bir modül için olduğu gibi polyform modüller içinde $\mathcal{C}$-extending koşulunun karakterizasyonlarını elde edeceğiz. Bu sonuçları PI-extending modüllerin karakterizasyonlarını elde etmede uygulayacağız. Son olarak, extending ve PI-extending özelliklerinin denkliğini garantileyen koşulları vereceğiz.

Teorem 4.3.1 *$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{S}(M)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar denktir;*

1. *M, $\mathcal{C}$-extending dir,*
2. *Her bir $X \in \mathcal{C}$ için $X \leq_e eE(M)$ ve $eM \leq M$ olacak biçimde $e^2 = e \in \mathcal{E}_{E(M)}$ vardır,*
3. *Her bir $X \in \mathcal{C}$ için $X \leq_e K$ ve her $f : K \oplus L \to M$ homomorfizmi bir $g : M \to M$ endomorfizmine yükseltgenebilecek şekilde M nin bir K kapalı altmodülü ve K nın bir L komplementi vardır.*

İspat.
(1) $\Rightarrow$ (2). M nin $\mathcal{C}$-extending ve $X \in \mathcal{C}$ olduğunu varsayalım. Buradan $X \leq_e D$ olacak biçimde M nin bir D dik toplananı ve $M = B \oplus D$ olacak biçimde D nin bir B komplementi vardır. Bu durumda $E(M) = E(B) \oplus E(D)$ dir. $e : E(M) \to E(D)$ bir projeksiyon olsun. Bir $m \in M$ için $b \in B$ ve $d \in D$ olmak üzere $m = b + d$ ise $e(m) = e(d) = d$ bulunur. O halde, $X \leq_e E(D) = eE(M)$ ve $eM \subseteq D \subseteq M$ olur.
(2) $\Rightarrow$ (1). $X \in \mathcal{C}$ olsun. Bu durumda bir $e^2 = e \in \mathcal{E}_{E(M)}$ için $X \leq_e eE(M)$ ve $eM \subseteq M$ olur. Böylece $X \leq_e M \cap eE(M) = eM$ dir. $(1-e)M \subseteq M$ olduğundan eM, M nin bir dik toplananıdır. Yani, M, $\mathcal{C}$-extending olur.
(1) $\Leftrightarrow$ (3). Bu denklik [27, Önteorem 2] den sağlanır. $\square$

Sonuç 4.3.2 *M bir modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir,*

1. *M, PI-extending (benzer şekilde, FI-extending) dir,*
2. *Her $X \in \mathcal{PI}(M)$ (benzer şekilde, $\mathcal{E}_M\mathcal{I}(M)$), M nin bir dik toplananı olan komplemente sahiptir,*
3. *Her bir $X \in \mathcal{PI}(M)$ (benzer şekilde, $\mathcal{E}_M\mathcal{I}(M)$) için $X \leq_e e(E(M))$ ve $e(M) \leq M$ olacak biçimde bir $e^2 = e \in \mathcal{E}_{E(M)}$ vardır,*
4. *Her bir $X \in \mathcal{PI}(M)$ (benzer şekilde, $\mathcal{E}_M\mathcal{I}(M)$) için $X \leq_e K$ ve her $f : L \oplus K \to M$ homomorfizmi bir $g : M \to M$ endomorfizmine yükseltgenecek şekilde M nin bir K kapalı altmodülü ve M de K nın bir L komplementi vardır.*

İspat. $\mathcal{C} = \mathcal{PI}(M)$ (benzer şekilde $\mathcal{C} = \mathcal{E}_M\mathcal{I}(M)$) alınarak,
(1) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4) denklikleri Teorem 4.3.1 den elde edilir.
(1) $\Leftrightarrow$ (2). Önce M nin PI-extending ve $X \in \mathcal{PI}(M)$ olduğunu kabul edelim. Buradan, $X \leq_e eM$ olacak şekilde bir $e^2 = e \in \mathcal{E}_M$ vardır ve $(1-e)M$ aranan komplementtir.
Tersine, $c^2 = c \in \mathcal{E}_M$ için cM, X in bir komplementi olsun. $x \in X$ alalım. Bu durumda $x = cx + (1-c)x$ yazarız. $X \in \mathcal{PI}(M)$ olduğundan $cx \in X \cap cM = 0$ dır. O halde, $X \subseteq (1-c)M$ ve dolayısıyla $X \leq_e (1-c)M$ bulunur. (FI-extending durumunda ispat aynen tekrarlanır.) □

Önerme 4.3.3 *$\mathcal{C}$ essential kapanışlar altında kapalı olmak üzere $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{S}(M)$ olsun. Bu durumda, M nin $\mathcal{C}$-extending olması için gerekli ve yeterli koşul M nin $\mathcal{C}$ içinde bulunan her bir kapalı altmodülünün M nin bir dik toplananı olmasıdır.*

İspat. Açıktır. □

Sonuç 4.3.4 *Bir M modülü extending dir (benzer şekilde uniform extending dir) ancak ve ancak her kapalı altmodülü (benzer şekilde uniform altmodülü) bir dik toplanandır.*

İspat. Önerme 4.3.3 te $\mathcal{C} = \mathcal{S}(M)$ (benzer şekilde $\mathcal{C} = \{X \in \mathcal{S}(M) \mid X$ uniformdur $\})$ alınırsa ispat tamamlanır. $\square$

Sonuç 4.3.5 *M bir polyform modül ve $\emptyset \neq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{E}_M$ olsun. Bu durumda, M, $\mathcal{HI}$-extending dir ancak ve ancak $\mathcal{HI}(M)$ içerisindeki M nin her kapalı altmodülü bir dik toplanandır. Özel olarak, M, PI-extending (benzer şekilde, FI-extending) dir ancak ve ancak M nin $\mathcal{PI}(M)$ (benzer şekilde, $\mathcal{E}_M\mathcal{I}(M)$) içerisinde kalan her bir kapalı altmodülü bir dik toplanandır.*

İspat. Önerme 4.2.4 ve 4.3.3 ten elde edilir. $\square$

Önerme 4.3.6 *M bir modül olmak üzere aşağıdaki gerektirme sağlanır,*
M, extending $\Rightarrow$ her bir $\emptyset \neq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{E}_M$ için M, $\mathcal{HI}$-extending $\Rightarrow$ M, FI-extending dir.

İspat. $\mathcal{H} = \{1\}$, $\mathcal{HI}(M = \mathcal{S}(M))$ ve $\mathcal{H} = \mathcal{E}_M$ iken $\mathcal{HI}(M) = \{X \trianglelefteq M\}$ olmasından ispat açıktır. $\square$

Önerme 4.3.7 *M bir modül olsun aşağıdaki ifadeleri alalım,*

1. *M, extending,*
2. *M, C_{11}-modül,*
3. *M, PI-extending ,*
4. *M, FI-extending .*

Bu durumda, (1)$\Rightarrow$(2)$\Rightarrow$(3)$\Rightarrow$(4) dir. Ancak (2)$\not\Rightarrow$(1) ve (4)$\not\Rightarrow$(3) tür.

İspat. (1) $\Rightarrow$ (2) ve (3) $\Rightarrow$ (4) açıktır. Sonuç 4.3.2 (2) $\Rightarrow$ (3) gerektirmesini verir. Şimdi sağlanmayan gerektirmelere bazı örnekler verelim.
(2) $\not\Rightarrow$ (1). Örneğin, $R = \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 0 & \mathbb{Z} \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$ olsun. R nin

extending modül olmadığını biliyoruz. Ancak [6, Sonuç 3.3] ten R_R bir C_{11}-modüldür.

(4) $\not\Rightarrow$ (3). Örneğin, R sağ Ore olmayan bir bölge olsun. R bir asal halka olduğundan R de her bir sıfırdan farklı ideal essential olur. Buradan, R_R, FI-extending dir. R_R uniform olmayıp ayrıştırılamaz olduğundan Önerme 4.3.8(1) den R_R nin PI-extending olmadığı sonucunu elde ederiz.

□

Not (Açık soru): Önerme 4.3.7 de (3) $\not\Rightarrow$ (2) gerektirmesinin sağlanmadığını varsayıyoruz ancak bunu destekleyecek herhangi bir örneğimiz henüz bulunmamaktadır.

Önerme 4.3.8

1. *M ayrıştırılamaz bir modül olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir,*

   (i) M, uniform dur,

   (ii) M, extending dir,

   (iii) M, PI-extending dir.

2. *M, $\mathcal{E}_M$ halkası Abel olan ve $X \leq M$ iken her bir $h_i \in \mathcal{E}_M$ için $X = \sum_{i \in I} h_i(M)$ koşulunu sağlayan bir modül olsun. Bu durumda, M extending dir ancak ve ancak M, PI-extending dir. Özel olarak, $M = R$ Abel ise R_R extending dir ancak ve ancak R_R, PI-extending dir.*

3. *M, dağılmalı modül olsun. Bu durumda M extending dir ancak ve ancak M, PI-extending dir.*

İspat. *1.* $(i) \Rightarrow (ii)$ ve $(ii) \Rightarrow (iii)$ olduğu açıktır. $(iii) \Rightarrow (i)$ gerektirmesi için $0 \neq X \leq M$ kabul edelim. Bu durumda, $\mathcal{E}_M$ yalnızca aşikar idempotentlerden oluştuğu için $X \in \mathcal{PI}(M)$ dir. Buradan, $X \leq_e M$ elde edilir ki, M uniform olur.

2. M extending iken PI-extending olduğu açıktır. Tersine $X \leq M$ ve $e^2 = e \in$

$\mathcal{E}_M$ olsun. Bu durumda, $eX = e\sum_{i\in I} h_iM = \sum_{i\in I} h_ieM \subseteq X$ dir. Yani, $X \in \mathcal{PI}(M)$ dir. O halde, M extending dir. $M = R$ kısıtlı durumunu görmek için $X = \sum_{x\in R} xR$ ve $h_x : R \to R$, her $r \in R$ için $h_x(r) = xr$ şeklinde tanımlı dönüşümün bir R-endomorfizm olduğunu düşünmek yetecektir.

3. Bu şık Önerme 4.2.1(2) nin bir sonucudur. □

Teorem 4.3.9 *π_j ler kanonik projeksiyonlar olmak üzere $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{S}(M)$ kümesi $X \in \mathcal{C}$ iken $\pi_j(X) \subseteq X$, $\pi_j(X) \in \mathcal{C}_j$ koşulunu sağlayan ve $\mathcal{C}_j \subseteq \mathcal{S}(M_j)$ kümeleri için $M = \bigoplus_{j\in J} M_j$ olarak tanımlayalım. Eğer her bir M_j, $\mathcal{C}_j$-extending oluyorsa M, $\mathcal{C}$-extending olur.*

İspat. $X \in \mathcal{C}$ olsun. Buradan her bir $j \in J$ için $\pi_j(X) \subseteq X$ ve $\pi_j(X) \in \mathcal{C}_j$ olmak üzere $X = \bigoplus_{j\in J} \pi_j(X)$ dir. Öyleyse, $e_j^2 = e_j \in \mathcal{E}_M$ elemanı $\pi_j(X) \leq_e e_jM_j$ olacak şekilde vardır. $X \leq_e \bigoplus_{j\in J} e_jM_j$ ve $\bigoplus_{j\in J} e_jM_j$, M nin bir dik toplananı olduğu için, M, $\mathcal{C}$-extending olur. □

Sonuç 4.3.10 *π_j ler kanonik projeksiyonlar olmak üzere her $j \in J$ için $\pi_j \in \mathcal{H}$ olacak biçimde $\emptyset \neq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{E}_M$ ve $\emptyset \neq \mathcal{H}_j \subseteq \mathcal{E}_{M_j}$ kümeleriyle, her bir $\alpha_j \in \mathcal{H}$ için $\bar{\alpha_j}|_{M_j} = \alpha_j$ olacak biçimdeki $\bar{\alpha_j} \in \mathcal{H}$ lar var olsun. $M = \bigoplus_{j\in J} M_j$ diyelim. Bu durumda, her bir $j \in J$ için M_j, $\mathcal{H}_j\mathcal{I}$-extending oluyorsa, M, $\mathcal{HI}$-extending dir.*

İspat. $X \in \mathcal{HI}(M)$ olsun. Her bir $j \in J$ için $\pi_j \in \mathcal{H}$ olduğundan $\pi_j(X) \subseteq X$ dir. $\alpha_j \in \mathcal{H}_j$ olsun. Bu durumda, $\bar{\alpha_j} \in \mathcal{H}$, $\alpha_j(\pi_j(X)) = \bar{\alpha_j}(\pi_j(X)) \subseteq X$ olacak şekilde vardır. Ancak, $\alpha_j(\pi_j(X)) = \pi_j(\alpha_j(\pi_j(X))) \subseteq \pi_j(X)$ olur. Buradan, $\pi_j(X) \in \mathcal{H}_j\mathcal{I}(M)$ dir. Teorem 4.3.9 dan, M, $\mathcal{HI}$-extending dir. □

Notasyon: Kısalık olması açısından bir sonraki önermede, $\mathcal{P}$, $\mathcal{E}_M$ nin idempotentleri kümesini; $\mathcal{P}_j$, $\mathcal{E}_{M_j}$ nin idempotentleri kümesini; $\mathcal{A}$, $\mathcal{E}_M$ nin otomorfizmleri kümesini; $\mathcal{A}_j$, $\mathcal{E}_{M_j}$ nin otomorfizmleri kümesini göstersin.

Sonuç 4.3.11 *$M = \bigoplus_{j\in J} M_j$ olsun.*

1. *Eğer her M_j, PI-extending (benzer şekilde, FI-extending) modül ise M de PI-extending (benzer şekilde, FI-extending) modüldür.*

2. *Her bir $j \in J$ için $\mathcal{H} = \mathcal{P} \cup \mathcal{A}$ ve $\mathcal{H}_j = \mathcal{P}_j \cup \mathcal{A}_j$ olsun. Eğer her M_j, $\mathcal{HI}$-extending ise M de $\mathcal{HI}$-extending olur.*

İspat. *1.* $\mathcal{H} = \mathcal{P}$ (benzer şekilde, $\mathcal{H} = \mathcal{E}_M$) ve $\mathcal{H}_j = \mathcal{P}_j$ (benzer şekilde, $\mathcal{H}_j = \mathcal{E}_{M_j}$) alınarak Sonuç 4.3.10 dan ispat elde edilir.
2. $e_j \in \mathcal{P}_j$ iken $e_j\pi_j \in \mathcal{P}$ olduğu açıktır. Her bir $a_j \in \mathcal{A}_j$ için $\bigoplus_{j\in J} a_j\pi_j \in \mathcal{A}$ dır. Bu durumda, Sonuç 4.3.10 dan ispat tamamlanır. □

Önerme 4.3.12 *M_R bir modül ve $f^2 = f \in \mathcal{E}_M$ olsun. Bu durumda, aşağıdaki koşullar denktir,*

1. *fM, M nin bir fully invariant alt modülüdür (yani, $fM \trianglelefteq M$),*

2. *fM, M nin $\mathcal{P}$-invariant altmodülüdür (yani, $fM \in \mathcal{PI}(M)$),*

3. *$f \in S_l(\mathcal{E}_M)$ dir.*

İspat. (1) $\Rightarrow$ (2), gerektirmesi açıktır.
(2) $\Rightarrow$ (3). $h \in \mathcal{E}_M$ olsun. Bu durumda, $(f + hf - fhf)^2 = f + hf - fhf$ dir. $m \in M$ alalım. fM, $\mathcal{P}$-değişmez olduğundan $[f + hf - fhf](fm) = [f + hf - fhf](m) \in fM$ dir. Buradan, $[f+hf-fhf](m) = f(f+hf-fhf[(m)]) = f(m)$ dir. Böylece, $hf(m) = fhf(m)$ bulunur. Yani, $hf = fhf$ dir ki $f \in S_l(\mathcal{E}_M)$ elde edilir.
(3) $\Rightarrow$ (1), gerektirmesi [4, Önteorem 1.9] dan elde edilir. □

Önteorem 4.3.13 *[8, Önteorem 4.13] $M_1 \in \mathcal{PI}(M)$ için $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. Eğer, $X \in \mathcal{PI}(M_2)$ (benzer şekilde, $X \trianglelefteq M_2$) ise $M_1 \oplus X \in \mathcal{PI}(M)$ (benzer şekilde, $M_1 \oplus X \trianglelefteq M$) dir.*

İspat. Önerme 4.3.12 den $f \in S_l(\mathcal{E}_M)$ için $M_1 = fM$ ve $M_2 = (1 - f)M$ dir. $X \in \mathcal{PI}(M_2)$ olsun. $e^2 = e \in \mathcal{E}_M$ ve $m+x \in M_1 \oplus X$ olsun. Buradan, $e(m+x) =$

$em + fex + (1-f)ex$ olur. $f \in S_l(\mathcal{E}_M)$ olduğundan $em = efm = fefm \in fM$ dir. Böylece, $em + fex \in fM$ olur. $(1-f) \in S_r(\mathcal{E}_M)$ olduğundan $(1-f)e = (1-f)e(1-f) = [(1-f)e]^2$ dir. Bundan dolayı, $(1-f)e = [(1-f)e]^2 \in \mathcal{E}_{M_2}$ elde edilir ki, $(1-f)ex \in X$ dir. Sonuç olarak, $M_1 \oplus X \in \mathcal{PI}(M)$ dir. Aynı şekilde, $X \trianglelefteq M_2$ nin $M_1 \oplus X \trianglelefteq M$ yi gerektirdiği gösterilir. □

Teorem 4.3.14 *$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{S}(M)$ essential kapanışlar altında kapalı olsun. Eğer M, $\mathcal{C}$-extending ve $D \leq_d M$ ise D, $\mathcal{C}_D$-extending dir.*

İspat. $X \leq D$, $X \in \mathcal{C}$ ve $K \leq D$, K, X in bir essential kapanışı olsun. Önerme 4.3.3 den $K \leq_d M$ dir. Yani, D $\mathcal{C}_D$-extending dir. □

Sonuç 4.3.15 *M poliform modül ve $\emptyset \neq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{E}_M$ (yani, $\mathcal{H} = \mathcal{P}$) olsun. Eğer, M, $\mathcal{HI}$-extending ve $D \leq_d M$ ise D, $\mathcal{HI}(M) \cap \mathcal{S}(D)$-extending olur.*

İspat. İspat Önerme 4.2.4 ve Teorem 4.3.14 in sonucudur. □

Bir sonraki örneğimiz, FI-extending ancak PI-extending olmayan bir D dik toplananına sahip PI-extending bir modülü verecektir. Dolayısıyla, bu örneğimiz vasıtasıyla PI-extending modüller sınıfının dik toplananlar altında kapalı olmayacağını söyleriz.

Örnek 4.3.16 *[8, Örnek 5.5] $n \geq 3$ bir tek tamsayı olsun. $\mathbb{R}$ reel sayı cismi ve S, $\mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ polinom halkası olsun. Bu durumda, $s = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2) - 1$ olmak üzere $R = S/sS$ değişmeli Noether bir bölgedir. $M_R = R^n$ bir modül olsun. Buradan, M_R, PI-extending olmayan ancak FI-extending olan bir dik toplananı bulunan PI-extending bir modüldür.*

Bunu görmek için M Sonuç 4.3.11(1) den PI-extending olduğunu gözlemlemek gerekir. $\varphi : M \to R$, her $a_1, a_2, \ldots, a_n \in S$ için $\varphi(a_1 + sS, a_2 + sS, \ldots, a_n + sS) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ biçiminde tanımlı homomorfizm olsun. φ nin epimorfizm ve dolayısıyla $Y \cong R$ iken $M = Çek\varphi \oplus Y$ olacağı açıktır. $D = Çek\varphi$ diyelim. D_R nin uniform boyutu $n-1 \geq 2$ olduğundan

D_R uniform değildir. Fakat D_R ayrıştırılamazdır. Önerme 4.3.8(1) den D_R, PI-extending değildir. Dolayısıyla, Sonuç 4.3.15 ten $\mathcal{PI}(M) \cap \mathcal{S}(M) \neq \mathcal{PI}(D)$ olur. $Z(M_R) = 0$ olduğundan [5, Önerme 1.5 ve Teorem 2.4] ten D_R, FI-extending dir. Aynı zamanda, D_R, D_R nin $n-1$ adet uniform altmodülünün dik toplananı olan bir K, PI-extending modülünün bir essential genişlemesidir. Dolayısıyla, PI-extending modüller sınıfı essential genişlemeler altında kapalı değildir.

5 Aşikar Olmayan Karmaşık Demetler ve Abel Endomorfizm Halkaları Yoluyla PI-extending Modüller

Bu bölümde PI-extending modüllerin dik toplananları ve ayrıştırılamaz ayrışımlarını ele alacağız. Bu amaçla, 5 veya daha büyük boyutlu karmaşık kürelerin teğet demetlerinin ve karmaşık sayılar üzerinde tanımlı projektif uzaylarda bazı hiper yüzeylerin bulunduğu bir çok ters örnek temin edeceğiz ve PI-extending özelliği dik toplananlara aktarıldığında sonuçlar elde edeceğiz. Ek olarak, Abel endomorfizm halkasına sahip PI-extending modüllerin bazı modül teorisi koşulları altında ayrıştırılamaz ayrışımlara sahip olduğunu göstereceğiz. Önceki sonuçlarımızı uyguladığımızda sonlu değişim özelliğinin tam değişim özelliğini gerektirdiğini elde ederiz.

5.1 Dik Toplananlar ve PI-extending Modüller

PI-extending modüllerin dik toplananlarının PI-extending olma özelliğini taşıyıp taşımadığı açık bir problemdir [7, sf.528]. Bu kesimde belirli koşullar altında söz konusu probleme çözüm verilecektir. Ayrıca cebirsel topoloji ile ilgili kavramlar kullanılarak ters örnekler elde edilecektir. Tersine bir PI-extending modülün dik toplananlarının da ne zaman PI-extending olacağı ispatlanacaktır. Öncelikle aşağıdaki tanımları hatırlatalım.

Tanım 5.1.1 *[22] M, N iki modül, $\{A_i\}_{i\in I}$ modüllerin herhangi bir ailesi ve $M\oplus N=\bigoplus_{i\in I} A_i$ olsun. Eğer,*

$$M\oplus N = M\oplus (\bigoplus_{i\in I} B_i)$$

olacak şekilde $B_i \leq A_i$, $\{B_i\}_{i\in I}$ altmodüller ailesi varsa, M ye ***değişim özelliğine*** *sahiptir denir. Eğer I indeks kümesi sonlu ise M ye* ***sonlu değişim özelliğine*** *sahiptir denir.*

Tanım 5.1.2 *[11] M bir modül ve $\{N_i\}_{i\in I}$ ailesi M modülünün ayrık altmodüllerinin bir ailesi olsun. Eğer her $J \subseteq I$ sonlu alt kümesi için $\bigoplus_{i\in I} N_i$, M nin bir dik toplananı oluyorsa $\{N_i\}_{i\in I}$ ailesine M modülünün bir* ***yerel (dik) toplananı*** *denir.*

Önteorem 5.1.3 *[8, Sonuç 3.2] Bir M modülü PI-extending dir ancak ve ancak M nin her bir N projektif değişmez alt modülü için M nin $N \cap K = 0$ ve $N \oplus K \leq_e M$ olacak şekilde bir K dik toplananı vardır.*

Önteorem 5.1.4 *[8, Sonuç 4.11] PI-extending modüllerin herhangi bir dik toplamı da bir PI-extending modüldür. Özel olarak, uniform modüllerin herhangi dik toplamı bir PI-extending modüldür.*

Önerme 5.1.5 *R_R modülü PI-extending modül olacak şekilde bir R halkasını gözönüne alalım. Bir PI-extending modülün her dik toplananı bir PI-extending modüldür. Bu durumda her ayrıştırılamaz projektif sağ R-modül uniformdur.*

İspat. P ayrıştırılamaz projektif bir R-modül olsun. Bu durumda F nin bir P' alt modülü için $F = P \oplus P'$ olacak şekilde bir F serbest R-modül vardır. Önteorem 5.1.4 den F, PI-extending modüldür ve hipotezden P de PI-extending olur. Yani, P uniformdur. □

Örnek 4.3.16 de Krull boyutu 2 olan bir değişmeli Noether bölge örneğini ele aldık. P uniform olmayan sonlu üretilmiş ayrıştırılamaz projektif sağ R-modüldür. Aslında P modülü aşikar olmayan koordinat halkası üzerinde tek boyutlu bir gerçek kürenin teğet demetine karşılık gelir. Aşikar olmayan karmaşık demetler vasıtasıyla bir çok ters örnek elde edilebilir. Bu maksatla aşağıdaki iki sonucu verebiliriz.

Teorem 5.1.6 *$\mathbb{C}$ karmaşık cisim ve S yi $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 2$ olmak üzere $\mathbb{C}[z_0, z_1, \ldots, z_n, w_0, w_1, \ldots, w_n]$ polinom halkası olarak alalım. R, $s = (\sum_j z_j w_j) - 1$*

olmak üzere S/Ss halkası olsun. Bu durumda $M = \bigoplus_{i=1}^{2n+2} R$ sağ R-modülü bir PI-extending modüldür ve M, PI-extending olmayan bir K dik toplananını bulundurur.

İspat. Önteorem 5.1.4 den M_R, PI-extending dir. [17, sf.125 5.4.9] dan $S^{2n+1} = \left\{ (z_0, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \sum_j z_j \bar{z}_j = 1 \right\}$ küresinin teğet demeti bir K aşikar olmayan vektör demetidir ve $K' \cong R$ iken $M_R \cong K \oplus K'$ olur. K_R uniform olmadığından K_R nin PI-extending olmayacağı kolayca görülür. □

Buna ek olarak, karmaşık sayılar cismi üzerinde, $\mathbb{P}^{n+1}_{\mathbb{C}}$ projektif uzayında bazı hiper yüzeyler üzerinde kurulu daha çok sayıda örnekler sağlayabiliriz.

Teorem 5.1.7 *X, $x_1^m + \cdots + x_{n+1}^m = 0$ eşitliğiyle tanımlı $\mathbb{P}^{n+1}_{\mathbb{C}}$ de bir hiper yüzey olsun. $R = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_{n+1}]/(\sum_{i=1}^{n+1} x_i^m + 1)$, $n \geq 2$ olacak şekildeki koordinat halkası olsun. Bu durumda, $m \geq n+2$ için PI-extending olmayan dik toplananlar içeren PI-extending R-modüller vardır.*

İspat. [23] den R üzerinde rankı n olan ayrıştırılamaz projektif R-modüllerin varlığını söyleriz. Buradan, F_R bir free modül ve K rankı n olan ayrıştırılamaz projektif R-modül olmak üzere $F_R = K \oplus W$ şeklinde yazılır. Önteorem 5.1.4 den, F_R, PI-extending dir. K_R uniform değildir. Böylece K_R, PI-extending değildir. □

Yukarıdaki ifadelere zıt olarak, bir sonraki sonucumuz ne zaman bir PI-extending modülün bir dik toplamının PI-extending modül olacağı hakkında olacaktır.

Önerme 5.1.8 *$M = M_1 \oplus M_2$ olsun. Bu durumda M_1 in PI-extending olması için gerekli ve yeterli koşul M_1 in her bir projeksiyon değişmez N altmodülü için M nin $M_2 \subseteq K$, $K \cap N = 0$ ve $K \oplus N$, M nin bir essential altmodülü olacak şekilde bir K dik toplananı vardır.*

İspat. M_1, PI-extending olsun. N, M_1 in herhangi bir projeksiyon değişmez altmodülü olsun. Önteorem 5.1.3 den M_1 in bir L dik toplananı $N \cap L = 0$ ve $N \oplus L$, M_1 de essential olacak biçimde vardır. Bu durumda M_1 in bir L' altmodülü için $M_1 = L \oplus L'$ dür. Yani $L \oplus M_2$, M nin bir dik toplananıdır. $M_2 \subseteq K \oplus M_2$, $(L \oplus M_2) \cap N = 0$ ve $(L \oplus M_2) \oplus N$ nin M de essential olacağı açıktır. Tersine, M_1 önermede belirtilen özelliği sağlasın. H, M_1 in bir projeksiyon değişmez altmodülü olsun. Hipotezden $M_2 \subseteq K$, $K \cap H = 0$ ve $K \oplus H$, M nin bir essential altmodülü olacak şekilde M nin bir K dik toplananı vardır. O halde $K = K \cap (M_1 \oplus M_2) = M_2 \oplus (K \cap M_1)$ dir, buradan $K \cap M_1$, M nin bir dik toplananı ve dolayısıyla $K \cap M_1$, M_1 inde bir dik toplananı olur. Ek olarak, $H \cap (K \cap M_1) = 0$ ve $H \oplus (K \cap M_1) = M_1 \cap (H \oplus K)$, M_1 in bir essential altmodülüdür. Önteorem 5.1.3 den M_1, PI-extending bulunur. □

Teorem 5.1.9 *$M = M_1 \oplus M_2$, M_2, M nin bir projeksiyon değişmez altmodülü ve M nin her $K \cap M_2 = 0$ koşulunu sağlayan K dik toplananı için $K \oplus M_2$, M nin bir dik toplananı olsun. Bu durumda M_1 PI-extending bir modüldür.*

İspat. N, M_1 in bir projeksiyon değişmez alt modülü olsun. Önteorem 4.3.13 ten $N \oplus M_2$, M nin bir projeksiyon değişmez altmodülüdür. Önteorem 5.1.3 den M nin bir K dik toplananı $(N \oplus M_2) \cap K = 0$ ve $N \oplus M_2 \oplus K$ M nin bir essential altmodülü olacak şekilde vardır. $K \cap M_2 \subseteq K \cap (N \oplus M_2) = 0$ olduğundan hipotezimiz gereği $K \oplus M_2$, M nin bir dik toplananı olur. Böylece sonuç Önerme 5.1.8 den söylenir. □

Sonuç 5.1.10 *$M = M_1 \oplus M_2$, C_3 koşulunu sağlayan bir PI-extending modül olsun. Eğer M_2, M nin projeksiyon değişmez bir altmodülü ise M_1, PI-extending bir modüldür.*

İspat. Teorem 5.1.9 nin açık bir sonucudur. □

Sonuç 5.1.11 *$M = M_1 \oplus M_2$, C_2 koşulunu sağlayan bir PI-extending modül olsun. Eğer M_2, M nin projeksiyon değişmez bir altmodülü ise M_1, PI-extending bir modüldür.*

İspat. C_2 , C_3 koşulunu gerektirdiğinden Sonuç 5.1.10 ispatı verir. □

5.2 Ayrıştırılamaz Altmodüllere Ayrışımlar

Bu kesim boyunca modüllerimizin Abel endomorfizm halkalı olduklarını varsayacağız. Herhangi bir M modülü için, S, $\mathrm{End}(M_R)$ halkasını gösterecektir. Ana odak noktamız projeksiyon değişmez dik toplananlar olduğundan, S Abel ise her bir dik toplananın projeksiyon değişmez olduğu gerçeğini vurgulamalıyız. Ancak, Örnek 4.2.2(3) den bu gerçeğin tersi doğru değildir. Dikkatimizi, C_3 (C_2) koşullu, Abel endomorfizm halkasına sahip bir PI-extending modülü ayrıştırılamaz (ve dolayısıyla uniform) altmodüllere ayrıştırmak üzerine toplayacağız. Özel olarak, sonlu değişim özelliğinin tam değişim özelliğini gerektirdiğini elde edeceğiz. C_3 koşulunun S nin Abel olmasını gerektirmediğini [19, Örnek 2.10] ile hatırlayalım. Bir sonraki kolay örneğimiz, S nin Abel olması ile C_3 koşulunun birbirinden bağımsız olduklarını gösterir.

Örnek 5.2.1 *$M = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}$ olsun. Bu durumda $End(M_{\mathbb{Z}}) \cong \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}$ Abeldir. Ancak, [27, Örnek 9] dan $M_{\mathbb{Z}}$, C_3 özelliğini sağlamaz.*

Burada [19, Teorem 2.12] de yakın zamanda elde edilmiş bir sonucu ispatsız olarak verelim. İlk olarak Δ, S nin $\{f \in S \mid \text{Çek} f \ M \text{ de essential}\}$ idealini göstersin.

Teorem 5.2.2 *M_R, C_2 koşullu bir PI-extending modül ve S Abel olsun. Bu durumda S/Δ bir (von Neumann) düzenli halkadır.*

PI-extending C_3 (C_2) koşullu modüllerin araştırmasına devam edelim. Teorem 5.2.2 nin tersinin doğru olmadığını gösteren aşağıdaki örneği ele alalım.

Örnek 5.2.3 *V bir D bölüm halkası üzerinde sonsuz boyutlu bir vektör uzayı ve $S = End_D(V)$ olsun. $\{x_1, x_2, \dots\}$, V nin bir tabanı olsun. V_D nin C_2 koşullu bir PI-extending modül olduğu açıktır. $\Delta = 0$ olduğundan, S bir von Neumann düzenli halkadır. Ancak, S bir Abel halka değildir. Bunu görmek için $i = 1, 2, \dots$ için $\sigma(x_i) = x_{i+1}$ şeklinde tanımlı $\sigma : V \to V$ dönüşümünü ve $i \neq j$ için $\pi(x_j) = 0$; $\pi(x_i) = x_i$ biçiminde tanımlı $\pi : V \to x_iD$ dönüşümünü alalım. Böylece $\sigma\pi(x_i) = \sigma(x_i) = x_{i+1}$, fakat $\pi\sigma(x_i) = \pi(x_{i+1}) = 0$ bulunur.*

Önerme 5.2.4 *M, C_3 koşullu bir PI-extending modül olsu. Eğer S Abel ise M nin her dik toplananı PI-extending olur.*

İspat. N, M nin bir dik toplananı olsun. Bu durumda M nin bir N' altmodülü için $M = N \oplus N'$ yazılır. $\pi : M \to N$ kanonik projeksiyon olsun. Buradan $N' =$ Çekπ dir. $f^2 = f \in S$ olsun. O halde $f(N') = f($Çek$\pi)$ dir. S, Abel olduğundan $F(N') = f($Çek$\pi) \subseteq$ Çek$\pi = N'$, yani N', M nin projeksiyon değişmez bir altmodülü olur. K, N nin herhangi bir projeksiyon değişmez altmodülü olsun. [8, Önteorem 4.13] den $K \oplus N'$, M nin bir projeksiyon değişmez altmodülüdür. Önteorem 5.1.3 den N nin bir L dik toplananı $(K \oplus N') \cap L = 0$ ve $K \oplus N' \oplus L$, M de essential olacak şekilde vardır. M, C_3 koşullu olduğundan $N' \oplus L$, M nin bir dik toplananıdır. Buradan $N' \oplus L = N' \oplus \pi(L)$ ve böylece $\pi(L)$, N nin bir dik toplananıdır. Ek olarak, $K \oplus N' \oplus L = K \oplus \pi(L) \oplus N'$, M de essentialdır ve $K \oplus \pi(L)$ nin N de essential olmasını verir. O halde N, PI-extending dir. $\square$

Bir sonraki önerme ve onun sonucu PI-extending bir modülün bir dik toplananının da PI-extending olduğunu veren relatif injektiflif kavramı üzerine kurulmuştur.

Önerme 5.2.5 *M, S halkası Abel olan bir PI-extending modül olsun. K, M nin M/K, K-injektif olacak şekildeki herhangi bir dik toplananı olsun. Bu durumda K, PI-extending dir.*

İspat. $M = K \oplus K'$ olacak şekilde M nin bir K' altmodülü vardır. Hipotezden, K', K-injektiftir. L, M nin $L \cap K' = 0$ olacak şekildeki bir dik toplananı olsun.

[11, Önteorem 7.5] ten M nin bir H altmodülü $H \cap K' = 0$, $M = H \oplus K'$ ve $L \subseteq H$ olacak biçimde vardır. S Abel olduğundan L, M nin projeksiyon değişmez bir altmodülüdür. Bu durumda bir $L' \leq M$ için $M = L \oplus L'$ olup $H = H \cap (L \oplus L') = L \oplus (H \cap L')$ bulunur ki bu da L nin H ın bir dik toplananı olduğunu verir. Böylece $L \oplus K'$, M nin bir dik toplananıdır. Teorem 5.1.9 den K, PI-extending dir. □

Bir sonraki örneğimiz Önerme 5.2.5 in tersinin doğru olmayacağını gösterir.

Örnek 5.2.6 *[19, Örnek 2.10] $R = \mathbb{Z}_{(p)}$, p asalında $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesinin lokalizasyonu olsun. $M_R = \mathbb{Z}_{(p)} \oplus \mathbb{Z}(p^\infty)$ diyelim. Bu durumda M_R bir PI-extending modül ve $\mathbb{Z}(p^\infty)$, M nin aynı zamanda PI-extending olan injektif bir dik toplananıdır. $h : \mathbb{Z}_{(p)} \to \mathbb{Z}(p^\infty)$, $h(1) = \frac{\bar{1}}{p}$ şeklinde tanımlı dönüşümü için $f = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ h & 1 \end{bmatrix}$ ve $g = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olsun. Buradan $f, g \in S$ ve $f^2 = f$ elde edilir. Ayrıca $fg \neq gf$ olduğu açıktır, böylece S halkasının Abel olmadığı elde edilmiş olur.*

Önerme 5.2.7 *$M = M_1 \oplus M_2$ şeklinde bir M_1 altmodülü ile bir M_2 injektif altmodülünün dik toplamı olsun. S Abel olsun. Bu durumda M, PI-extending dir ancak ve ancak M_1 PI-extending dir.*

İspat. M nin PI-extending olduğunu varsayalım. Önerme 5.2.5 ten M_1, PI-extending dir. Tersine, M_1, PI-extending modül ve M_2 injektif altmodül ise M, Önteorem 5.1.4 den PI-extending dir. □

Şimdi bir PI-extending modülün bir ayrıştırılamaz ayrışımını elde edeceğiz. Daha ötesi değişim özelliğini elde etmek için sonuçlarımızı kullanacağız.

Teorem 5.2.8 *R, bir halka ve M, $m \in M$ için $r(m)$ formundaki sağ annihilatorlar üzerinde R nin ACC koşulunu sağladığı bir R-modül olsun. Eğer M, C_3 koşullu bir PI-extending modül ve S Abel ise M bir ayrıştırılamaz ayrışıma sahiptir.*

İspat. $\{X_\lambda \mid \lambda \in I\}$, M nin altmodüllerinin bağımsız bie ailesi ve $X = \bigoplus_{\lambda \in I} X_\lambda$, M nin bir yerel toplananı olsun. $\pi_k : X \to \bigoplus_{k \in I, k \neq \lambda} X_k$ tanımlayalım. Buradan $f^2 = f \in S$ için $f(X) = f(\bigoplus_{\lambda \in I} X_\lambda) = \bigoplus_{\lambda \in I} f(X_\lambda) = \bigoplus_{\lambda \in I} f(\text{Çek}\pi_\lambda)$ yazılır. S, Abel olduğundan $f(\text{Çek}\pi_\lambda) \subseteq \pi_\lambda$ dır. Böylece, $f(X) = \bigoplus_{\lambda \in I} f(\text{Çek}\pi_\lambda) \subseteq \bigoplus_{\lambda \in I} \text{Çek}\pi_\lambda = X$ elde edilir. O halde X, M nin bir projeksiyon değişmez altmodülüdür. Önteorem 5.1.3 den M nin bir K dik toplananı, $X \cap K = 0$ ve $X \oplus K$, M de essential olacak şekilde vardır. Şimdi $X \oplus K$ yı gözönüne alalım. Herhangi $A \subseteq I$ sonlu altkümesi için $Y = \bigoplus_{\lambda \in A} X_\lambda$, M nin bir dik toplananıdır. Buradan $X \oplus K$, M nin bir yerel toplananı olur. [28, Önteorem 4.5] ten, $X \oplus K$, M de bir komplementtir. Ancak $X \oplus K$, M de bir essential altmodüldür ve dolayısıyla $M = X \oplus K$ dır. [22, Teorem 2.17] den M nin ayrıştırılamaz ayrışımının olduğunu söyleriz. □

Sonuç 5.2.9 *R bir halka ve M, $m \in M$ için $r(m)$ formundaki sağ annihilatorlar üzerinde R nin ACC koşulunu sağladığı bir R-modül olsun. Eğer M, C_3 koşullu bir PI-extending modül ve S Abel ise M uniform altmodüllerin bir dik toplamıdır.*

İspat. Bir ayrıştırılamaz PI-extending modül uniform olduğundan Teorem 5.2.8 ve Önerme 5.2.4 ten ispat elde edilir. □

Sonuç 5.2.10 *R bir sağ Noether halka, M, C_3 koşullu bir sağ R-modül ve S, Abel olsun. Bu durumda M, PI-extending dir ancak ve ancak M, uniform altmodüllerin bir dik toplamıdır.*

İspat. Sonuç 5.2.9 ve Önteorem 5.1.4 den ispat elde edilir. □

Önerme 5.2.11 *R bir halka ve M, $m \in M$ için $r(m)$ üzerinde R nin ACC koşulunu sağladığı bir R-modül olsun. Eğer M_R, C_3 koşulunu sağlayan PI-extending modül ve S, Abel ise sonlu değişim özelliği, tam değişim özelliğini gerektirir.*

İspat. İspat Teorem 5.2.8 ve [36, Sonuç 6] dan elde edilir. □

Örnek 5.2.12 *P asal sayıların bir kümesi olsun. $R = \prod_{p\in P} \mathbb{Z}/\mathbb{Z}p$ cisimlerin çarpımı olsun. Bu durumda R_R sonlu değişim özelliğini sağlar. Daha ötesi, R_R injektiftir ancak [24, Örnek 13] ten ayrıştırılamaz modüllerin bir dik toplamı değildir.*

Teorem 5.2.13 *Aşağıdaki koşullar C_3 koşullu bir M, PI-extending modülü ve S nin Abel olması durumunda denktirler:*

(i) M nin bir ayrıştırılamaz ayrışımı vardır,

(ii) M nin her bir sonlu üretilmiş altmodülü sonlu uniform boyutludur,

(iii) M nin her bir devirli altmodülü sonlu uniform boyutludur,

(iv) R, $m \in M$ için $r(m)$ üzerinde ACC koşulunu sağlar.

İspat. $(i) \Rightarrow (ii)$. Bir I indeks kümesi ve M nin $(i \in I)$ M_i ayrıştırılamaz altmodülleri vardır öyleki $M = \bigoplus_I M_i$ olacak şekilde yazılır. Önerme 5.2.4 ten M_i ler aynı zamanda PI-extending dir. Buradan M_i ler uniform dur. Eğer L, M nin sonlu üretilmiş bir altmodülü ise I nın sonlu bir J altkümesi için $L \subseteq \bigoplus_{i\in J} M_i$ ve dolayısıyla L sonlu uniform boyutludur.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Açıktır.

$(iii) \Rightarrow (iv)$. $m \in M$ olsun. $r(m)$, R nin bir A sağ idealinde essential olsun. $a \in A$ alalım. Bu durumda R_R nin bir essential E sağ ideali $aE \subseteq r(m)$ olacak şekilde vardır. Buradan $maE = 0$ ve dolayısıyla $ma = 0$, yani $a \in r(m)$ bulunur. Bu ise $r(m) = A$ demektir. Böylece her bir $m \in M$ için $r(m)$, R, R-modülünde bir komplementtir. Daha ötesi, $R/r(m) \cong mR$ olup, $R/r(m)$, R-modülü sonlu uniform boyutludur. (iv) [11, Teorem 5.10] dan elde edilir.

$(iv) \Rightarrow (i)$. Bu gerektirme Teorem 5.2.7 den elde edilir. □

Sonuç 5.2.14 *M, her bir $m \in M$ için mR nin sonlu uniform boyutlu olduğu bir nonsingular modül olsun. Eğer M, C_3 koşullu bir PI-extending modül ve S, Abel ise sonlu değişim özelliği tam değişim özelliğini gerektirir.*

İspat. Teorem 5.2.13 ve [36, Sonuç 6] dan elde edilir. □

Sonuç 5.2.15 *R sonlu uniform boyutlu bir halka, M, C_3 koşullu bir nonsingular PI-extending modül ve S, Abel olsun. Bu durumda sonlu değişim özelliği tam değişim özelliğini gerektirir.*

İspat. R ve M yi sonuçta ifade edildikleri gibi alalım. $m \in M$ olsun. Buradan $r(m)$, R sağ R-modülünde bir komplementtir. O halde $R/r(m)$, R-modülü sonlu uniform boyutludur. $mR \cong R/r(m)$ olduğunda, Sonuç 5.2.14 ten ispat elde edilir. □

KAYNAKLAR

[1] Akalan, E., Birkenmeier, G. F., Tercan, A. (2010). Goldie extending modules. *Comm. Algebra* 37:663-683. Corrigendum: 38:4747-4748. Corrigendum: 41:2005.

[2] Anderson, F. W., Fuller, K. R., 1992, Rings and Categories of Modules, Springer, New York.

[3] Bass, H., Algebraic K-theory, *Benjamin, New York* 1968.

[4] Birkenmeier, G. F., Müller, B. J., Rizvi, S. T. (2002). Modules in which every fully invariant submodule is essential in a direct summand. *Comm. Algebra*, 30(3):1395-1415.

[5] Birkenmeier, G. F., Müller, B. J., Rizvi, S. T. (2002). Modules with fully invariant submodules essential in fully invariant summands. *Comm. Algebra*, 30:1833-1852.

[6] Birkenmeier, G. F., Tercan, A.(2007). When some complement of a submodule is a summand. *Comm. Algebra*, 35(2):597-611.

[7] Birkenmeier, G. F., Tercan, A., and Yaşar, R., A Survey of some generalized extending conditions, *Palestine J. Math.*, 3(1), (2014), 518-530.

[8] Birkenmeier, G. F., Tercan, A., and Yücel, C. C., The extending condition relative to sets of submodules, *Comm. Algebra*, 42(2), (2014), 764-778.

[9] Chatters, A. W., Hajarnavis, C. R., 1977, Rings in which every complement right ideal is a direct summand, *Quart. J. Math. Oxford*, 28, 61-80.

[10] Chatters, A. W., Hajarnavis, C. R., 1980, Rings with chain conditions, Pitman Publishing Limited, London.

[11] Dung, N. V., Huynh, D. V., Smith, P. F., Wisbauer, R., 1994, Extending Modules, Longman Scientific and Technical, Harlow, Essex, England.

[12] Fuchs, L. (1970). *Infinite Abelian Groups I.* New York: Academic Press.

[13] Goodearl, K. R., 1976, Ring Theory: Nonsingular Rings and Modules, Marcel Dekker, New York.

[14] Goodearl, K. R., 1979, Von Neumann Regular Rings, Pitman, London.

[15] Hodges, T. J., and Osterburg J., A rank two indecomposable projective module over a Noetherian domain of Krull dimension one, *Bull. London Math. Soc.* 19(2), (1987),139–144.

[16] Hodges, T. J., and StatfordJ. T., Noetherian rings with big indecomposable projective modules *Bull. London Math. Soc.* , 21, 1989 , 249-254.

[17] Ischebeck, F., and Rao, R. A., Ideals and reality, *Springer-Verlag Berlin Heidelberg*, 2005.

[18] Jeremy, L., 1971, Sur les modules et anneaux quasi-continus, *C. R. Acad. Sci. Paris* 273, 80-83.

[19] Kara, Y., and Tercan, A., Modules whose certain submodules are essentially embedded in direct summands, *Rocky Mount. J. Math.*, to appear.

[20] Lam, T. Y. (1999). *Lectures on Modules and Rings.* New York: Springer.

[21] Levy, L. S., Projectives of large uniform-rank, in Krull dimension 1, *Bull. London Math. Soc.*, 21(1), 1989, 57-64.

[22] Mohamed, S. H., Müller, B. J., 1990, Continuous and Discrete Modules, London Math. Soc. Lecture Note Series, 147, Cambridge Univ. Press, Cambridge.

[23] Murthy, M. P., Zero cycles and projective modules, *Ann. Math.*, (1994), 405-434.

[24] Nielsen P.P., Square-free modules with the exchange property, *J. Algebra*, 323(7), (2010), 1993-2001.

[25] Sharpe, D. W., Vámos, P., 1972, Injective Modules, Cambridge University Press, London.

[26] Smith, P. F., Modules for which every submodule has a unique closure, Ring Theory (Granville, OH, 1992), 302-313. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1993.

[27] Smith, P. F., Tercan, A., 1992, Continuous and Quasi-Continuous Modules, *Houston J. Math.*, 18 (3), 339-348.

[28] Smith, P. F., Tercan, A., 1993, Generalizations of CS-modules, *Comm. Algebra*, 21 (6), 1809-1847.

[29] Smith, P. F., Tercan, A., 2004, Direct summands of modules which satisfy (C_{11}), *Algebra Colloq.*, 11, 231-237.

[30] Utumi, Y., 1965, On continuous rings and self-injective rings, *Trans. Amer. Math. Soc*, 118, 158-173.

[31] von Neumann, J., 1936, Continuous geometry, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 22, 92-100.

[32] von Neumann, J., 1936, Examples of continuous geometries, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 22, 101-108.

[33] von Neumann, J., 1936, On regular rings, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 22, 707-713.

[34] Wilson, G. V. (1986). Modules with summand intersection property. *Comm. Algebra* 14(1):21-38.

[35] Wisbauer, R. (1996). *Modules and Algebras: Bimodule Structure and Group Actions on Algebras.* Essex: Addison Wesley Longman.

[36] Zimmermann-Huisgen, B., and Zimmermann, W., Classes of modules with the exchange property, *J. Algebra* , 88(2), (1984), 416-434.

ÖZGEÇMİŞ

Kimlik Bilgileri

Adı Soyadı : Ramazan YAŞAR

Doğum Yeri : Ankara

Medeni Hali : Evli

E-posta : ryasar@hacettepe.edu.tr

Adresi : Hcettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Beytepe, Ankara.

Eğitim

Lise : Ankara Lisesi, 1994.

Lisans : Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 1998.

Yüksek Lisans : Hacettepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilimdalı, 2002.

Yabancı Dil ve Düzeyi

İngilizce : TOEFL, CBT 213

İş Deneyimi

1998 – 2006 : Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Araştırma Görevlisi.

2006 – 2014 : Hacettepe Üniversitesi, Hacettepe Meslek Yüksekokulu, Öğretim Görevlisi.

2014 – ... : Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Cebir ve Sayılar Teorisi Anabilimdalı, Öğretim Görevlisi.

Deneyim Alanları

–

Tezden Üretilmiş Projeler ve Bütçesi

–

Tezden Üretilmiş Yayınlar

–

Tezden Üretilmiş Tebliğ ve/veya Poster Sunumu ile Katıldığı Toplantılar

–